

1101  
621.81  
P116c  
TES/UFU

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**COMPORTAMENTO TRANSIENTE DE  
MÁQUINAS ROTATIVAS**

Dissertação apresentada por RICARDO PEREIRA PACHECO, à Universidade Federal de Uberlândia, para a obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.

DIRBI/UFU

621.81 P116c /TES/UFU  
00413/96



1000022827

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Valder Steffen Jr. - UFU - (Orientador)

Prof. Dr. Marcus Antônio V. Duarte - UFU

Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos - UNICAMP

Uberlândia, 11 de março de 1996

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA	
DIR. DIRETORIA DE BIBLIOTECAS	
Procedência: _____	
Autor: <i>Deacosta</i>	
Edição: <i>96</i>	
C.D. _____	
N.º de exemplares: _____ de _____	
Req. <b>00413/96</b>	Data: <i>26.10.96</i>
Vol. _____	Ex. <i>1</i>

FU-00005792-8

Aos meus pais

Manoel Antônio e Alice

## AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares, pelo apoio e incentivo dados durante toda a minha formação profissional.

Ao professor Dr. Valder Steffen Jr., orientador desta dissertação, pelas instruções e colaboração na execução deste trabalho.

Aos amigos de trabalho, principalmente do grupo de Dinâmica, pelas valiosas informações e sugestões.

Ao CNPQ, pelo suporte financeiro e à FAPEMIG (projeto TEC 544/91).

À Deus, por ter me concedido a capacidade e a oportunidade de realizar este trabalho.

# COMPORTAMENTO TRANSIENTE DE MÁQUINAS ROTATIVAS

## SUMÁRIO

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xi
1 - INTRODUÇÃO	15
2 - MODELO MATEMÁTICO	20
2.1 - Método das matrizes de transferência	20
2.1.1 - Modelo matemático do disco	23
2.1.2 - Modelo matemático do eixo	30
2.1.3 - Modelo matemático do mancal	38
2.1.4 - Matriz de transferência global	40
2.1.5 - Equação geral de movimento do rotor	43
2.2 - Variação da velocidade de rotação	48
2.2.1 - Função exponencial	49
2.2.2 - Função linear	50
2.3 - Método de Newmark	50
2.4 - Variação da rigidez	53
2.4.1 - O mancal eletromagnético	54
2.5 - Variação de massa	58

3 - ALGUNS ASPECTOS SOBRE A INFLUÊNCIA DE FORÇAS DE CONTROLE NO COMPORTAMENTO TRANSITÓRIO DO SISTEMA	59
3.1 - Otimização	60
3.2 - O programa OTIM	62
3.3 - Otimização em regime permanente	63
3.4 - A função objetivo	65
4 - MODELO COMPUTACIONAL	66
4.1 - Programa principal TRD	66
4.2 - Sub-rotina RIGID	68
4.3 - Sub-rotina REDUZ	69
4.4 - Sub-rotina CINI	70
4.5 - Sub-rotina NEWM	71
5 - SIMULAÇÃO NUMÉRICA	74
5.1 - Aplicação I	75
5.2 - Aplicação II	81
5.3 - Aplicação III	86
5.4 - Aplicação IV	91
6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	97
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101
ANEXO 1: Estrutura do arquivo de dados	104
ANEXO 2: Arquivo de dados: rotor I	109
ANEXO 3: Arquivo de dados: rotor III	113
ANEXO 4: Arquivo de saída: rotor III (regime permanente)	117
ANEXO 5: Arquivo de dados: rotor IV	119

PACHECO, Ricardo P.; "Comportamento Transiente de Máquinas Rotativas",  
Uberlândia, 1995.

## RESUMO

Este trabalho trata do estudo da dinâmica de rotores no regime transiente. A velocidade do rotor é considerada variável desde o repouso até a velocidade de operação e a resposta do sistema, no domínio do tempo, é calculada durante este intervalo. Consideram-se funções lineares e exponenciais para a velocidade de rotação. O rotor é modelado pelo método das matrizes de transferência e a equação de movimento do sistema é integrada numericamente pelo método de Newmark. Com o objetivo de minimizar o nível de vibração do rotor na passagem por críticas, estudam-se os seguintes procedimentos: aumento da aceleração do rotor; variação da rigidez dos mancais; utilização de forças harmônicas de controle obtidas através de técnicas de otimização. Analisam-se, também, os efeitos da variação súbita da massa rotativa.

---

Palavras-chave:

REGIME TRANSIENTE, MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA, MÉTODO DE  
NEWMARK, MINIMIZAÇÃO DO NÍVEL DE VIBRAÇÃO, DINÂMICA DE  
ROTORES

## ABSTRACT

This work deals with rotordynamic study in transient motion. The speed of the rotor is considered variable from the rest until the operation speed and the system response, in time domain, is calculated during this interval. Linear and exponential functions are considered for the speed of rotation. The rotor is modeled using the transfer matrix method and the equation of motion of the system is numerically integrated using the Newmark method. In order to minimize the vibration level of the rotor in the crossing of critical speeds, the following procedures are studied: increase of the rotor acceleration; variation of the bearings stiffness; use of harmonic forces of control obtained through optimization techniques. The effects of a sudden variation of the rotating mass are also analysed.

---

Key-words:

TRANSIENT MOTION, TRANSFER MATRIX, NEWMARK METHOD,  
MINIMIZATION OF THE VIBRATION LEVEL, ROTORDYNAMICS

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PÁGINA
2.1 - Modelo genérico de um rotor flexível	21
2.2 - Representação de uma estação	22
2.3 - Modelo físico do disco	23
2.4 - Elemento de disco: esforços nos planos xy e zy	27
2.5 - Modelo físico do elemento de eixo	31
2.6 - Modelo físico do mancal	38
2.7 - Modelo físico do desbalanceamento	46
2.8 - Variação da rigidez do mancal	54
2.9 - Modelo do mancal eletromagnético	55
3.1 - Fluxograma simplificado do programa OTIM	63
4.1 - Fluxograma do programa principal TRD	68
4.2 - Fluxograma da sub-rotina RIGID	69
4.3 - Fluxograma da sub-rotina REDUZ	70
4.4 - Fluxograma da sub-rotina CINI	71
4.5 - Fluxograma da sub-rotina NEWM	72
5.1 - Modelo físico: rotor I	75
5.2 - Modelo discretizado: rotor I	75
5.3 - Diagrama de Campbell: rotor I	77
5.4 - Resposta transiente: função de velocidade linear	78
5.5 - Resposta transiente: função de velocidade exponencial	78
5.6 - Resposta transiente: menor aceleração	79
5.7 - Resposta transiente: maior aceleração	80
5.8 - Resposta transiente: variação da equação de velocidade	81



5.9 - Modelo físico: rotor II	82
5.10 - Modelo discretizado: rotor II	82
5.11 - Resposta transiente: mancais com rigidez maior	83
5.12 - Variação da rigidez dos mancais	84
5.13 - Resposta transiente: variação da rigidez dos mancais	84
5.14 - Deslocamento do rotor ao longo do eixo X	85
5.15 - Variação da corrente elétrica no pólo 2 do mancal 1	86
5.16 - Modelo físico: rotor III	87
5.17 - Modelo discretizado: rotor III	87
5.18 - Diagrama de Campbell: rotor III	88
5.19 - Deslocamento do rotor nas direções X e Z	90
5.20 - Resposta transiente sem forças de controle	90
5.21 - Resposta transiente com forças de controle	91
5.22 - Modelo físico: rotor IV	92
5.23 - Modelo discretizado: rotor IV	92
5.24 - Diagrama de Campbell: rotor IV	94
5.25 - Resposta transiente: rotor IV	94
5.26 - Resposta transiente: desbalanceamento súbito	95
5.27 - Resposta transiente: perda de massa	96

## LISTA DE TABELAS

TABELA	PÁGINA
5.1 - Características físicas: rotor I	76
5.2 - Características físicas: rotor III	88
5.3 - Características físicas: rotor IV	93

## LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLO	DESCRIÇÃO	UNIDADE
$A$	Área da seção transversal do eixo	$m^2$
$A_c$	Amplitude da força de controle	N
$B$	Densidade de fluxo magnético	T
$C_{ij}$	Constante de amortecimento dos mancais entre as direções $i$ e $j$	N.s/m
$E$	Módulo de elasticidade	$N/m^2$
$E_c$	Energia cinética	N.m
$F$	Vetor dos esforços generalizados	-
$F_c$	Força de controle	N
$F(X)$	Função objetivo	-
$G$	Matriz giroscópica	-
$G$	Módulo de cisalhamento	$N/m^2$
$I$	Corrente elétrica no pólo do mancal	A
$I_d$	Tensor de inércia do disco	-
$I_p$	Momento de inércia de massa polar	$Kg \cdot m^2$
$I_t$	Momento de inércia de massa transversal	$Kg \cdot m^2$
$I_x, I_y, I_z$	Momentos principais de inércia	$Kg \cdot m^2$
$J$	Momento de inércia de área	$m^4$
$K$	Matriz de rigidez	-
$K_{ij}$	Constante de rigidez dos mancais entre as direções $i$ e $j$	N/m
$K_1$	Matriz de rigidez do conjunto eixo-mancais	-

<b>K<sub>2</sub></b>	Matriz de rigidez resultante do movimento transiente	-
<b>M</b>	Matriz de massa	-
<b>MTE</b>	Matriz de transferência elementar	-
<b>M<sub>d</sub></b>	Massa do disco	Kg
<b>M<sub>i</sub></b>	Massa das estações do rotor	Kg
<b>M<sub>m</sub></b>	Massa do mancal	Kg
<b>M<sub>u</sub></b>	Massa de desbalanceamento	Kg
<b>M<sub>x</sub></b>	Momento fletor no plano xy	N.m
<b>M<sub>z</sub></b>	Momento fletor no plano zy	N.m
<b>N</b>	Número de espiras do enrolamento	-
<b>Q</b>	Vetor de estado	-
<b>S</b>	Área magnética útil	m <sup>2</sup>
<b>T<sub>d</sub></b>	Energia cinética do disco	N.m
<b>TD</b>	Matriz de transferência do elemento de disco	-
<b>TE</b>	Matriz de transferência do elemento de eixo	-
<b>TG</b>	Matriz de transferência global	-
<b>TM</b>	Matriz de transferência do elemento de mancal	-
<b>T<sub>r</sub></b>	Período de oscilação do modo de maior ordem retido	s
<b>V<sub>d</sub></b>	Velocidade de translação do disco	m/s
<b>V<sub>x</sub></b>	Força cortante na direção x	N
<b>V<sub>z</sub></b>	Força cortante na direção z	N
<b>(X, Y, Z)</b>	Referencial inercial	-
<b>X</b>	Vetor das variáveis de decisão	-
<b>Z<sub>d</sub></b>	Impedância mecânica para o disco rígido	N.m
<b>Z<sub>e</sub></b>	Impedância mecânica equivalente para a união disco-eixo	N.m
<b>Z<sub>k</sub></b>	Impedância da mola de ligação disco-eixo	N.m

$d$	Entreferro	m
$l_i$	Comprimento das estações do rotor	m
$p$	Vetor das coordenadas modais	-
$q$	Vetor das coordenadas generalizadas	-
$s$	Auto-valor complexo	-
$t$	Tempo	s
$x$	Deslocamento linear ao longo do eixo x	m
$(x,y,z)$	Referencial móvel	-
$z$	Deslocamento linear ao longo do eixo z	m
$\Delta t$	Passo de integração no domínio do tempo	s
$\Phi$	Base modal do sistema simétrico não-giroscópico	-
$\Omega$	Velocidade de operação do rotor	rpm
$\alpha$	Fator de forma para a seção transversal do eixo	-
$\varphi_0$	Ângulo de incidência da força de controle	rad
$\varphi$	Deslocamento angular em torno do eixo y	rad
$\lambda$	Auto-valores do sistema simétrico não-giroscópico	-
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do meio	V.s/A.m
$\theta$	Deslocamento angular em torno do eixo x	rad
$\rho$	Massa específica	Kg/m <sup>3</sup>
$\omega_c$	Frequência da força de controle	rad/s
$\omega_d$	Velocidade angular do disco	rad/s
$\omega_n$	Frequência natural	rad/s
$\psi$	Deslocamento angular em torno do eixo z	rad
$\zeta$	Fator de amortecimento	-

Superescritos e subescritos:

L Lado esquerdo da estação

R Lado direito da estação

d Elemento de disco

t Transposto

Notação:

$$\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt}$$

$$\ddot{\phantom{x}} = \frac{d^2}{dt^2}$$

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

Observa-se, modernamente, uma tendência de se utilizar rotores cada vez mais leves, flexíveis e operando em altas velocidades. Isto implica que, durante a aceleração do rotor até atingir sua velocidade de operação, várias velocidades críticas sejam ultrapassadas. Ao passar pelas críticas ocorrem vibrações especialmente importantes, provocando o desgaste prematuro dos componentes da máquina, principalmente dos mancais. Além disso, podem acontecer várias situações nas quais ocorra brusca alteração das propriedades de inércia e de rigidez do sistema, caracterizando, também, fenômenos transientes. Conseqüentemente, é necessário preocupar-se também com o regime transitório durante a fase de projeto da máquina, a fim de se evitar problemas que comprometam o funcionamento da mesma.

Dentre os métodos mais utilizados para a discretização e análise do movimento de rotores estão o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Matrizes de Transferência (MMT). Muitos estudos têm sido feitos nesta área, considerando, porém, o sistema operando a uma velocidade de rotação constante. Já quando se considera a variação da velocidade ou outros fenômenos transientes, o número de trabalhos encontrados na bibliografia é limitado.

Lalanne e Ferraris [1] utilizam o MEF para a discretização do sistema e, introduzindo funções de variação da velocidade, estudam o comportamento do rotor na passagem por críticas. O método pseudo-modal é utilizado para reduzir a ordem do sistema e integra-se a equação de movimento através do esquema de Newmark.

Ratan e Rodrigues [2] [3] utilizam o MEF para discretizar o rotor e propõem uma técnica de condensação matricial a fim de reduzir o esforço computacional no cálculo da resposta do sistema, que pode ser, inclusive, não-linear e não conservativo. O algoritmo de condensação proposto permite que se reduza o tamanho das matrizes envolvidas para dimensões da ordem do número de graus de liberdade do sistema. Os autores utilizam o esquema numérico Wilson- $\theta$  para a integração da equação de movimento e calculam a resposta de diversos tipos de rotores (lineares, não-lineares, conservativos e não-conservativos) operando a uma rotação constante, considerando condições iniciais nulas e não-nulas.

Subbiah, Kumar e Sankar [4] estudam a análise do comportamento dinâmico de rotores no domínio do tempo, combinando as metodologias do MEF e do MMT. O MEF é utilizado para discretizar o rotor, que opera a uma rotação constante, e, a seguir, os deslocamentos e forças nodais das extremidades do sistema são relacionados utilizando-se matrizes de transferência. Utiliza-se o algoritmo de Houbolt para a integração numérica da equação de movimento.

Sakata/Aiba/Ohnabe [5] e Kujath/Wanping [6] pesquisam os efeitos de variações na massa do rotor sobre o comportamento dinâmico do sistema. No primeiro trabalho o Método de Galerkin é usado para resolver a equação básica que governa um



disco flexível rotativo e a equação de movimento do rotor é integrada numericamente através do Método Runge-Kutta-Gill. Os pesquisadores estudam, analiticamente, os efeitos de um deslocamento súbito de massa em um determinado ponto do rotor e comparam com resultados experimentais. O segundo trabalho estuda os efeitos da perda de massa localizada (como a perda de uma hélice, por exemplo) durante a operação normal do rotor. O objetivo deste estudo é explorar os significados práticos da identificação da mudança de parâmetros do rotor, utilizando a resposta medida por equipamentos de monitoramento.

Yee e Tsuei [7] introduzem um método para determinar a resposta transiente de sistemas. O método proposto é uma extensão da técnica da síntese de componente modal, no qual a resposta do sistema é calculada com base nos parâmetros modais de sub-estrutura, na compatibilidade geométrica e nas equações de equilíbrio de forças entre as sub-estruturas. Os vetores das forças externas são aproximados por vetores de funções degrau em cada passo de tempo.

Em máquinas rotativas, o desbalanceamento é a principal fonte de vibração, sendo resultante de imperfeições nos materiais, erros na fabricação, desgaste, etc.

Várias técnicas têm sido utilizadas para o controle destas vibrações, destacando-se técnicas de balanceamento (método dos coeficientes de influência [8], método modal [9], etc) e a aplicação de forças externas (através de atuadores hidrodinâmicos [10] e magnéticos [11] [12]).

Este trabalho trata da análise dinâmica do comportamento transiente de rotores e, também, do estudo de técnicas que permitam reduzir o nível de vibração do sistema

na passagem por velocidades críticas. Utilizam-se funções lineares e exponenciais para a velocidade de rotação. Foi desenvolvido um programa computacional para a análise dos seguintes efeitos sobre a resposta transiente do sistema: aumento da aceleração do rotor na passagem por críticas, variação da rigidez dos mancais, utilização de forças harmônicas de controle e variação súbita na massa rotativa.

O capítulo II apresenta o modelo físico e matemático do rotor, que foi discretizado pelo Método das Matrizes de Transferência. As matrizes de transferência dos elementos de disco, eixo e mancal são calculadas e obtém-se a matriz de transferência global. São apresentados a equação geral de movimento do rotor, o modelo da força de desbalanceamento para o regime transiente e as equações utilizadas para a velocidade de rotação. Utiliza-se o Método de Newmark para a integração numérica da equação de movimento. O modelo simplificado de um mancal eletromagnético é apresentado e algumas considerações são feitas a respeito de modificações na massa rotativa do sistema.

O capítulo III trata da utilização de forças externas no controle da vibração de rotores. Tais forças são obtidas em regime permanente utilizando-se métodos de otimização. Descreve-se o programa de otimização, a função objetivo e as variáveis de projeto utilizados. Procura-se observar a influência destas forças sobre o regime transiente do rotor.

O capítulo IV descreve a estratégia computacional implementada. Para a discretização do rotor pelo MMT e para o cálculo dos auto-valores e auto-vetores do sistema, utilizou-se um programa chamado MTROTOR, o qual foi desenvolvido em

uma tese de mestrado [12]. Tal programa foi devidamente modificado a fim de atender as necessidades deste trabalho. Apresenta-se, ainda neste capítulo, os fluxogramas do programa principal e das sub-rotinas de forma simplificada.

No capítulo V, os resultados das simulações computacionais são apresentados. Calculou-se a resposta, no domínio do tempo, de quatro modelos de rotor flexível, analisando-se os seus comportamentos para os seguintes casos de movimento transiente:

- resposta do rotor utilizando-se funções lineares e exponenciais para a velocidade de rotação;
- aumento da aceleração do rotor na passagem por críticas;
- variação da rigidez dos mancais na passagem por críticas;
- utilização de forças harmônicas de controle para a redução do nível de vibração;
- modificações na massa rotativa do sistema: desbalanceamento súbito e perda de massa.

O capítulo VI apresenta as conclusões deste trabalho e as sugestões para futuras pesquisas.

## CAPÍTULO II

### MODELO MATEMÁTICO

#### 2.1 - Método das Matrizes de Transferência

Existem duas maneiras básicas de se analisar a dinâmica de um rotor flexível: considerando-o como um sistema contínuo ou como um sistema discreto. Esta última opção é a mais utilizada por ser de maior simplicidade e praticidade, sem, contudo, que ocorra perda na precisão dos resultados. Dentre os esquemas utilizados para a discretização de rotores, atualmente dois métodos são os mais importantes: o Método dos Elementos Finitos e o Método das Matrizes de Transferência.

No Método dos Elementos Finitos as propriedades de inércia, amortecimento e rigidez do rotor são determinadas para alguns pontos do domínio denominados "nós". Deslocamentos e forças nos "nós" são tomados como variáveis discretas e os deslocamentos e as forças em qualquer outro ponto do domínio são expressos em termos das variáveis nodais, através de funções de forma [13][14].

No Método das Matrizes de Transferência, o rotor é subdividido em partes denominadas estações. Cada estação pode ser um elemento de disco, ou de mancal, ou

de eixo. Um modelo genérico de rotor flexível discretizado por este método é mostrado na figura 2.1.

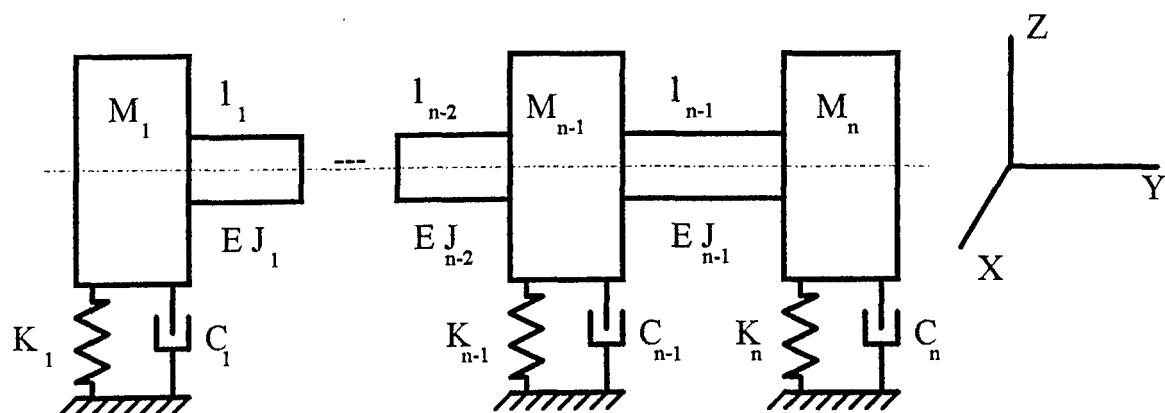


Figura 2.1 - Modelo genérico de um rotor flexível

Os discos são considerados rígidos e incorporam ao sistema propriedades de inércia e efeitos giroscópicos. Os mancais, além de inércia, possuem em suas suspensões elementos com propriedades de rigidez e amortecimento, cujos coeficientes são considerados lineares. Os elementos de eixo possuem características de rigidez e de inércia e podem ser considerados como uma viga de Euler ou de Timoshenko, dependendo das dimensões de sua seção transversal.

O Método das Matrizes de Transferência foi desenvolvido quase simultaneamente por Prohl (1945, para turbinas) e Myklestad (1944, para asas de avião) e, posteriormente, sofreu significativos avanços principalmente através de Lund (1965 e 1974). Neste método, as estações são contadas, geralmente, da esquerda para a

direita e são constituídas de um elemento de inércia seguido de um elemento de eixo, como mostra a figura 2.2.

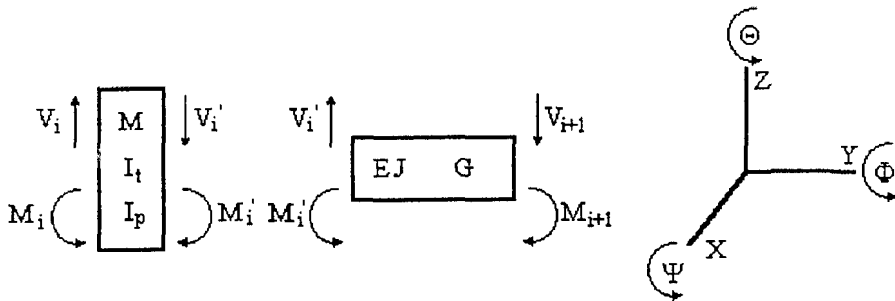


Figura 2.2 - Representação de uma estação

Considera-se que um ponto genérico do sistema possui quatro graus de liberdade: translações ao longo de \$X\$ e \$Z\$ e rotações em torno de \$X\$ e \$Z\$. Define-se, então, o vetor de estado \$\mathbf{Q}\$ como um vetor coluna composto de quatro deslocamentos e quatro esforços generalizados relacionados aos graus de liberdade em questão.

$$\mathbf{Q} = \{X, Z, \Theta, \Psi, V_X, V_Z, M_X, M_Z\}^t \quad (2.1)$$

A matriz que relaciona o vetor de estado de um ponto imediatamente à esquerda de um elemento de inércia, ao vetor de estado de um ponto imediatamente à sua direita é denominada **matriz ponto**. A mesma matriz relacionada a um elemento de eixo denomina-se **matriz campo**.

Assume-se que os materiais que compõem o rotor possuem propriedades mecânicas e geométricas isotrópicas.

### 2.1.1 - Modelo Matemático do Disco

O disco é considerado um corpo rígido de massa  $M_d$  e momentos principais de inércia  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ .

A sua equação do movimento é obtida através das equações de Lagrange, definindo-se um sistema de coordenadas inerciais  $R_0(X,Y,Z)$  e um sistema de coordenadas móveis  $R(x,y,z)$  fixo ao disco, conforme a figura 2.3.

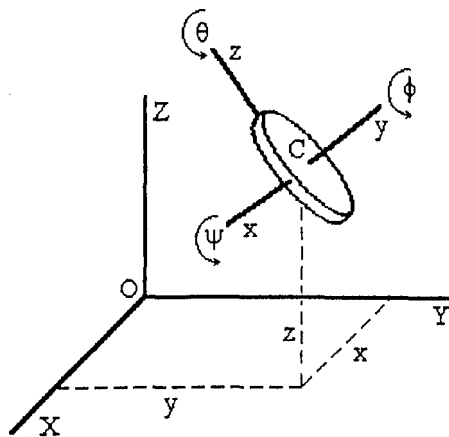


Figura 2.3 - Modelo físico do disco

Para se obter o sistema  $R(x,y,z)$  a partir do sistema  $R_0(X,Y,Z)$ , tem-se:

. uma rotação  $\theta$  em torno do eixo  $Z$ , resultando no referencial  $R_1(x_1,y_1,z_1)$

- . uma rotação  $\psi$  em torno do eixo  $x_1$ , resultando no referencial  $R_2(x_2, y_2, z_2)$
- . uma rotação  $\phi$  em torno do eixo  $y_2$ , resultando no referencial  $R(x, y, z)$

A velocidade angular do disco, escrita em relação ao sistema de coordenadas móveis, é:

$$\omega_d^R = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \cos \psi \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \\ \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \cos \psi \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

O tensor de inércia do disco, o qual é simétrico e homogêneo, em relação ao seu centro, levando-se em conta que  $(x, y, z)$  são os eixos principais de inércia, é dado por:

$$\mathbf{I}_d = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

A velocidade do centro de massa do disco, considerando que não há deslocamento ao longo do eixo  $y$ , é:

$$\mathbf{V}_d = \{\dot{x}, 0, \dot{z}\}^t \quad (2.4)$$



A energia cinética total do disco resulta da soma das parcelas devido à translação e à rotação:

$$T_d = \frac{1}{2} \mathbf{V}_d^t \cdot \mathbf{M}_d \cdot \mathbf{V}_d + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_d^t \cdot \mathbf{I}_d \cdot \boldsymbol{\omega}_d \quad (2.5)$$

Substituindo-se as equações (2.2), (2.3) e (2.4) na equação (2.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} T_d = & \frac{1}{2} M_d (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} I_x (\dot{\psi}^2 \cos^2 \phi - 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \phi \sin \phi \cos \psi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \psi) + \\ & + \frac{1}{2} I_y (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi) + \\ & + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi}^2 \sin^2 \phi + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \phi \sin \phi \cos \psi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi \cos^2 \psi) \end{aligned}$$

Como o rotor é de seção circular ( $I_x = I_z$ ), tem-se:

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} I_x (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi) + \frac{1}{2} I_y (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi)$$

Considerando-se pequenos deslocamentos e desprezando-se os termos de segunda ordem, pode-se linearizar a equação acima resultando:

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_y (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \psi) \quad (2.6)$$

Onde o termo  $I_y \dot{\phi} \dot{\psi}$  representa o efeito giroscópico (Coriolis).

As equações do movimento do disco são obtidas aplicando-se a equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_d}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial q_i} = F_i \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{q} = \{x, z, \theta, \psi\}^t$  representa o vetor das coordenadas generalizadas e  $\mathbf{F}$  o vetor das forças generalizadas que atuam sobre o disco.

A derivada temporal  $\dot{\phi}$ , que corresponde à velocidade de rotação do rotor, é considerada variável na análise em regime transiente.

Utilizando-se as equações (2.6) e (2.7) obtém-se a equação do movimento do disco:

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\phi} \mathbf{G}_d \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\phi} \mathbf{K}_d \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (2.8)$$

onde:

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x \end{bmatrix} \text{ é a matriz massa}$$

$$\mathbf{G}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_y \\ 0 & 0 & I_y & 0 \end{bmatrix} \text{ é a matriz giroscópica}$$

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 \end{bmatrix} \text{ é a matriz de rigidez transiente}$$

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_z \\ \sum M_x \\ \sum M_z \end{Bmatrix} \text{ é o vetor das forças e momentos externos}$$

Vale à pena salientar que o aparecimento da matriz  $\mathbf{K}_d$  se deve ao fato de  $\dot{\phi} = \dot{\phi}(t)$ . Isto significa que, para  $\dot{\phi} = \Omega = \text{cte}$  (caso do regime permanente),  $\mathbf{K}_d = 0$ .

A figura 2.4 mostra o elemento de disco e os esforços que sobre ele atuam nos planos xy e zy.

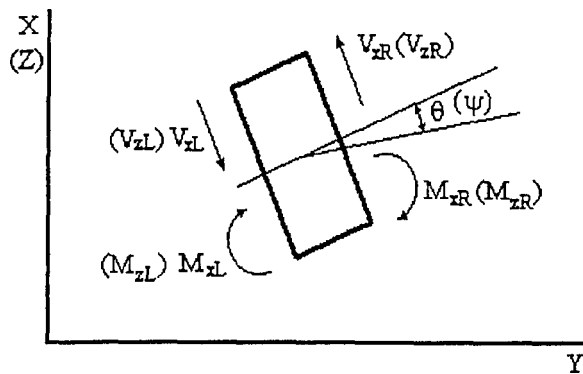


Figura 2.4 - Elemento de disco: esforços nos planos xy e zy.

Das equações de equilíbrio e compatibilidade, obtém-se as relações de transferência (2.9) do vetor de estado do lado esquerdo (L) para o lado direito (R) do disco.

$$\begin{aligned}
 x_R &= x_L \\
 z_R &= z_L \\
 \theta_R &= \theta_L \\
 \psi_R &= \psi_L \\
 V_{xR} &= V_{xL} + M_d \ddot{x} \\
 V_{zR} &= V_{zL} + M_d \ddot{z} \\
 M_{xR} &= M_{xL} + I_t \ddot{\theta} - I_p \dot{\phi} \dot{\psi} \\
 M_{zR} &= M_{zL} + I_t \ddot{\psi} + I_p \dot{\phi} \dot{\theta}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde:  $I_p = I_y$

$$I_t = I_x = I_z$$

Admitindo-se que as equações (2.9) possuem soluções do tipo:

$$\{x, z, \theta, \psi\}^t = \{X, Z, \Theta, \Psi\}^t e^{st} \tag{2.10}$$

onde  $s = -\zeta \omega_n \pm i \omega_d$  representa um auto-valor complexo, sendo  $\zeta$  o fator de amortecimento,  $\omega_n$  a frequência natural e  $\omega_d$  a frequência natural amortecida, pode-se escrever a relação (2.11), onde **TD** é a matriz de transferência do disco:

$$\{X, Z, \Theta, \Psi, V_x, V_z, M_x, M_z\}_R^t = \mathbf{TD} \cdot \{X, Z, \Theta, \Psi, V_x, V_z, M_x, M_z\}_L^t \quad (2.11)$$

A literatura mostra que a suposição de uma ligação rígida entre o disco e o eixo nem sempre é válida [15] [16]. Considera-se, então, a existência de uma mola de torção na ligação disco-eixo. Da teoria da elasticidade [17], pode-se obter valores para a impedância  $Z_k$  da mola de torção.

Da equação (2.9), tem-se:

$$M_{xR} = M_{xL} + I_t \ddot{\theta} - I_p \dot{\phi} \dot{\psi}$$

A solução (2.10) pode, igualmente, ser aplicada para a equação acima:

$$M_{xR} = M_{xL} + I_t s^2 \theta - I_p \dot{\phi} s \psi$$

Define-se a impedância mecânica do disco para uma união rígida com o eixo como:

$$Z_d = I_t s^2$$

Para se introduzir o efeito da mola de torção na união disco-eixo, considera-se que a impedância mecânica do disco  $Z_d$  esteja associada em série com a impedância da mola  $Z_k$ :

$$Z_e = \frac{1}{\frac{1}{Z_k} + \frac{1}{Z_d}}$$

A matriz de transferência do elemento de disco fica, então, da seguinte forma:

$$\mathbf{TD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 M_d & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 M_d & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_e & -s\dot{\phi} I_p & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s\dot{\phi} I_p & Z_e & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

### 2.1.2 - Modelo Matemático do Eixo

O elemento de eixo é considerado homogêneo, com seção transversal  $A$  e momentos de inércia de área  $J_x$  e  $J_z$  constantes ao longo do seu comprimento, e com forças cortantes e momentos fletores aplicados em suas extremidades, como mostrado na figura 2.5.

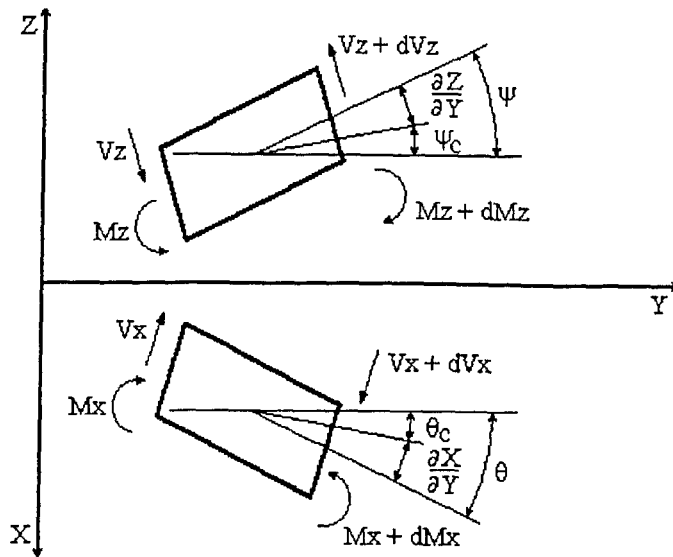


Figura 2.5 - Modelo físico do elemento de eixo

Para as relações entre as deflexões, inclinações, forças cortantes e momentos fletores, utiliza-se o modelo de viga de Timoshenko, de acordo com as equações (2.13), (2.14) e (2.15).

$$\theta = \frac{V_x}{\alpha AG} + \frac{\partial X}{\partial Y} = \theta_c + \frac{\partial X}{\partial Y} \quad ; \quad \psi = \frac{V_z}{\alpha AG} - \frac{\partial Z}{\partial Y} = \psi_c - \frac{\partial Z}{\partial Y} \quad (2.13)$$

onde:

$\alpha$  é um fator associado à forma da seção transversal

$A$  é a área da seção transversal

$G$  é o coeficiente de cisalhamento do material

$$M_x = EJ_x \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad ; \quad M_z = EJ_z \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad (2.14)$$

onde:

$E$  é o módulo de elasticidade do material

$J_x$  e  $J_z$  são os momentos de inércia de área

$$V_x = \alpha AG \left( -\frac{\partial X}{\partial Y} + \theta \right) \quad ; \quad V_z = \alpha AG \left( \frac{\partial Z}{\partial Y} + \psi \right) \quad (2.15)$$

Considerando que o elemento de eixo é simétrico em relação ao eixo  $Y$  e não possui desbalanceamento, pode-se escrever as equações de equilíbrio dinâmico para a translação e rotação, como mostram as equações (2.16) e (2.17), respectivamente.

$$\rho A \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{\partial V_x}{\partial Y} \quad ; \quad \rho A \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = -\frac{\partial V_z}{\partial Y} \quad (2.16)$$

$$I_t \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \dot{\phi} I_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial M_x}{\partial Y} - V_x \quad ; \quad I_t \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \dot{\phi} I_p \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial M_z}{\partial Y} - V_z \quad (2.17)$$

onde:

$\rho$  é a massa específica

$I_t$  é o momento de inércia transversal

$I_p$  é o momento de inércia polar



Os primeiros termos das equações (2.17) representam os efeitos da inércia de rotação, introduzidos por Rayleigh, e os primeiros termos do segundo membro das equações (2.13) representam os efeitos das deformações cisalhantes, introduzidos por Timoshenko.

Derivando-se as equações (2.15) em relação a  $y$  e substituindo-as em (2.16) e (2.14), obtém-se:

$$M_x = \frac{\rho E J_x}{\alpha G} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + E J_x \frac{\partial^2 X}{\partial Y^2} \quad ; \quad M_z = \frac{\rho E J_z}{\alpha G} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + E J_z \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \quad (2.18)$$

Derivando-se as equações (2.17) em relação a  $y$  e combinando-as com as equações (2.16), resulta:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial Y^2} = \frac{I_t}{E J_x} \frac{\partial^2 M_x}{\partial t^2} + \frac{\dot{\phi} I_p}{E J_x} \frac{\partial M_x}{\partial t} - \rho A \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 M_z}{\partial Y^2} = \frac{I_t}{E J_z} \frac{\partial^2 M_z}{\partial t^2} - \frac{\dot{\phi} I_p}{E J_z} \frac{\partial M_z}{\partial t} - \rho A \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}$$

Utilizando-se as equações (2.18) e combinando-as com as equações (2.19), pode-se obter:

$$EJ_x \frac{\partial^4 X}{\partial Y^4} + \rho J_x \dot{\phi}^2 \left( \frac{E}{\alpha G} - \frac{I_t}{\rho J_x} \right) \frac{\partial^2 X}{\partial Y^2} - \rho A \dot{\phi}^2 \left( 1 - \frac{\dot{\phi}^2 I_t}{\alpha G A} \right) X - i \dot{\phi}^2 I_p \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - i \frac{\rho \dot{\phi}^4 I_p}{\alpha G} Z = 0 \quad (2.20)$$

$$EJ_z \frac{\partial^4 Z}{\partial Y^4} - \rho J_z \dot{\phi}^2 \left( \frac{E}{\alpha G} + \frac{I_t}{\rho J_z} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} + \rho A \dot{\phi}^2 \left( 1 - \frac{\dot{\phi}^2 I_t}{\alpha G A} \right) Z + i \dot{\phi}^2 I_p \frac{\partial^2 X}{\partial Y^2} - i \frac{\rho \dot{\phi}^4 I_p}{\alpha G} X = 0$$

Pode-se, a fim de simplificar a solução destas equações, desprezar os efeitos de inércia rotacional e giroscópica do elemento de eixo e incorporá-los aos elementos de inércia das estações adjacentes. Assim, as equações (2.20) tornam-se idênticas e, para a direção  $X$ , tem-se:

$$\frac{\partial^4 X}{\partial Y^4} + 2\delta^2 \frac{\partial^2 X}{\partial Y^2} - \beta^4 X = 0 \quad (2.21)$$

$$\text{onde: } \delta^2 = \frac{EJ_x}{2\alpha GA} \quad \text{e} \quad \beta^4 = \frac{\dot{\phi}^2 \rho A}{EJ_x}$$

As raízes da equação característica proveniente da equação (2.21), considerando uma solução do tipo  $X = X e^{sY}$ , são:

$$s_1 = \pm \beta \sqrt{-(\delta\beta)^2 - \sqrt{1 + (\delta\beta)^4}} \quad ; \quad s_2 = \pm \beta \sqrt{-(\delta\beta)^2 + \sqrt{1 + (\delta\beta)^4}} \quad (2.22)$$

A solução geral da equação (2.21) é:

$$X = A. \cosh(S_1 Y) + B. \sinh(S_1 Y) + C. \cos(S_2 Y) + D. \sin(S_2 Y) \quad (2.23)$$

Das equações (2.22) tem-se que:

$$s_1^2 + s_2^2 = -2\delta^2\beta^4 = -\frac{\dot{\phi}^2 \rho}{\alpha G} \quad (2.24)$$

Derivando-se as equações (2.13) e usando-se as equações (2.16) e (2.23), obtém-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = (s_1^2 + s_2^2) \left( \frac{1}{\dot{\phi}^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2 X}{\partial Y^2} \quad (2.25)$$

Para a solução harmônica adotada tem-se:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -X \dot{\phi}^2 \quad (2.26)$$

Usando-se (2.14) e substituindo-se (2.26) em (2.25), resulta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = -(s_1^2 + s_2^2) X + \frac{\partial^2 X}{\partial Y^2} = \frac{M_x}{EJ} \quad (2.27)$$

De (2.13), (2.14) e do valor de  $\beta^4$ , obtém-se:

$$\theta = -\frac{s_1^2 + s_2^2}{\beta^4} \frac{V_x}{EJ} + \frac{\partial X}{\partial Y} \quad ; \quad V_x = \frac{\partial M_x}{\partial Y} \quad (2.28)$$

As condições de contorno para o elemento de eixo são:

$$\text{. para } Y = 0 \Rightarrow X = X_L ; \theta = \theta_L ; M_x = M_{xL} ; V_x = V_{xL}$$

$$\text{. para } Y = l \Rightarrow X = X_R ; \theta = \theta_R ; M_x = M_{xR} ; V_x = V_{xR}$$

Através das equações (2.23), (2.27), (2.28) e (2.29), pode-se obter as relações de transferência entre as extremidades direita e esquerda do elemento de eixo:

$$\begin{aligned} X_R &= a_1 X_L + l \theta_L + b_2 a_4 M_{xL} + b_3 a_7 V_{xL} \\ \theta_R &= \frac{1}{3} \mu a_5 b_2 X_L + a_2 \theta_L + b_1 a_6 M_{xL} + b_2 a_4 V_{xL} \\ V_{xR} &= \mu a_3 X_L + \frac{1}{2} \mu l a_4 \theta_L + \frac{1}{3} \mu b_2 a_5 M_{xL} + a_1 V_{xL} \\ M_{xR} &= \frac{1}{2} \mu l a_4 X_L + \frac{1}{6} \mu l^2 a_5 \theta_L + a_2 M_{xL} + l a_3 V_{xL} \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde:

$$a_1 = \frac{s_1^2 \cdot \cosh \delta_1 + s_2^2 \cdot \cos \delta_2}{s_1^2 + s_2^2} \quad ; \quad a_2 = \frac{s_1^2 \cdot \cos \delta_2 + s_2^2 \cdot \cosh \delta_1}{s_1^2 + s_2^2}$$

$$a_3 = \frac{s_1 \cdot \sinh \delta_1 + s_2 \cdot \sin \delta_2}{(s_1^2 + s_2^2) l} \quad ; \quad a_4 = \frac{2(\cosh \delta_1 - \cos \delta_2)}{(s_1^2 + s_2^2) l^2}$$

$$a_5 = \frac{6(s_2 \cdot \sinh \delta_1 - s_1 \cdot \sin \delta_2)}{(s_1^2 + s_2^2)l^3 \beta^2} \quad ; \quad a_6 = \frac{s_2^3 \cdot \sinh \delta_1 + s_1^3 \cdot \sin \delta_2}{(s_1^2 + s_2^2)l \beta^2}$$

$$a_7 = \frac{6(s_1^3 \cdot \sinh \delta_1 - s_2^3 \cdot \sin \delta_2)}{(s_1^2 + s_2^2)l^3 \beta^4}$$

$$\delta_1 = s_1 l \quad ; \quad \delta_2 = s_2 l \quad ; \quad \mu = \dot{\phi}^2 \rho A l$$

$$b_1 = \frac{1}{EJ} \quad ; \quad b_2 = \frac{l^2}{2EJ} \quad ; \quad b_3 = \frac{l^3}{6EJ}$$

Para aplicações em baixas velocidades angulares, o efeito giroscópico pode ser desprezado ( $\beta = 0$ ) e a massa pode ser transferida para as estações adjacentes ( $\mu = 0$ ).

A matriz de transferência do elemento de eixo fica, então, da seguinte forma:

$$\{X, Z, \Theta, \Psi, V_x, V_z, M_x, M_z\}_R^t = \mathbf{TE} \cdot \{X, Z, \Theta, \Psi, V_x, V_z, M_x, M_z\}_L^t \quad (2.31)$$

onde:

$$\mathbf{TE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & b_3 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & b_3 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_2 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_2 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.1.3 - Modelo Matemático do Mancal

O mancal é modelado como sendo o elemento que sustenta o rotor através de forças de mola e de amortecimento aplicadas ao longo de quatro direções, conforme mostra a figura 2.6. Estas forças são consideradas lineares em torno da posição de funcionamento. Considera-se, ainda, a massa equivalente ( $M_m$ ) e as propriedades de inércia transversal ( $I_{tm}$ ) e polar ( $I_{pm}$ ) da sua carcaça.

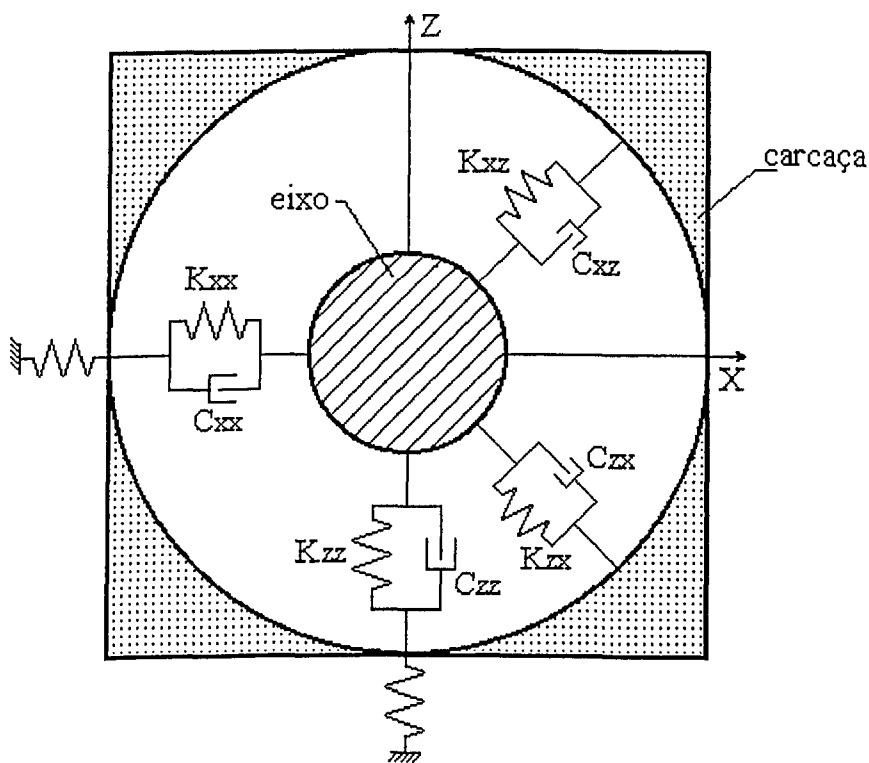


Figura 2.6 - Modelo físico do mancal

Nos coeficientes de rigidez e de amortecimento, o primeiro subscrito representa a direção da força e o segundo representa a direção do movimento

produzido. Os esforços atuantes no mancal são escritos conforme mostra a equação (2.32).

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_z \\ M_x \\ M_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xz} & K_{x\theta} & K_{x\psi} \\ K_{zx} & K_{zz} & K_{z\theta} & K_{z\psi} \\ K_{\theta x} & K_{\theta z} & K_{\theta\theta} & K_{\theta\psi} \\ K_{\psi x} & K_{\psi z} & K_{\psi\theta} & K_{\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Z \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} & C_{x\theta} & C_{x\psi} \\ C_{zx} & C_{zz} & C_{z\theta} & C_{z\psi} \\ C_{\theta x} & C_{\theta z} & C_{\theta\theta} & C_{\theta\psi} \\ C_{\psi x} & C_{\psi z} & C_{\psi\theta} & C_{\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Usando-se a equação (2.32), aplicando-se as condições de equilíbrio dinâmico e supondo-se, novamente, uma solução do tipo:

$$\{X, Z, \theta, \psi\}^t = \{X, Z, \Theta, \Psi\}^t e^{st},$$

obtém-se as relações de transferência para o elemento de mancal:

$$\{X, Z, \Theta, \Psi, V_x, V_z, M_x, M_z\}_R^t = \mathbf{TM} \cdot \{X, Z, \Theta, \Psi, V_x, V_z, M_x, M_z\}_L^t \quad (2.33)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{TM}_{ii} &= 1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, 8 \\ \mathbf{TM}_{51} &= -s^2 M_m - s C_{xx} - K_{xx} \\ \mathbf{TM}_{52} &= -s C_{xz} - K_{xz} \\ \mathbf{TM}_{53} &= -s C_{x\theta} - K_{x\theta} \\ \mathbf{TM}_{54} &= -s C_{x\psi} - K_{x\psi} \\ \mathbf{TM}_{61} &= -s C_{zx} - K_{zx} \\ \mathbf{TM}_{62} &= -s^2 M_m - s C_{zz} - K_{zz} \\ \mathbf{TM}_{63} &= -s C_{z\theta} - K_{z\theta} \\ \mathbf{TM}_{64} &= -s C_{z\psi} - K_{z\psi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{TM}_{71} &= sC_{\theta x} + K_{\theta x} \\
\mathbf{TM}_{72} &= sC_{\theta z} + K_{\theta z} \\
\mathbf{TM}_{73} &= s^2 I_{tm} + sC_{\theta\theta} + K_{\theta\theta} \\
\mathbf{TM}_{74} &= sI_{pm} \dot{\phi} + sC_{\theta\psi} + K_{\theta\psi} \\
\mathbf{TM}_{81} &= sC_{\psi x} + K_{\psi x} \\
\mathbf{TM}_{82} &= sC_{\psi z} + K_{\psi z} \\
\mathbf{TM}_{83} &= -sI_{pm} \dot{\phi} + sC_{\psi\theta} + K_{\psi\theta} \\
\mathbf{TM}_{84} &= s^2 I_{tm} + sC_{\psi\psi} + K_{\psi\psi} \\
\mathbf{TM}_{ij} &= 0, \text{ para os demais } ij
\end{aligned}$$

#### 2.1.4 - Matriz de Transferência Global

Dispondo-se das matrizes de transferência do disco, eixo e mancal, pode-se relacionar os vetores de estado de duas estações adjacentes através da matriz de transferência elementar MTE:

$$\mathbf{Q}_{i+1} = (\mathbf{TD}_i \text{ ou } \mathbf{TM}_i) \cdot \mathbf{TE}_i \cdot \mathbf{Q}_i = \mathbf{MTE}_i \cdot \mathbf{Q}_i \quad (2.34)$$

Multiplicando-se as matrizes de transferência elementares de todas as estações do rotor, obtém-se a matriz de transferência global TG, na qual estão contidas todas as informações da dinâmica do sistema.

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{TG} \cdot \mathbf{Q}_1 \quad (2.35)$$



onde:

$$\mathbf{TG} = \mathbf{MTE}_n \cdot \mathbf{MTE}_{n-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{MTE}_1$$

$n$  é o número total de estações

Os auto-valores do sistema podem ser obtidos a partir da equação (2.35), considerando-se condições de contorno livre-livre, ou seja, forças cortantes e momentos fletores nulos nas extremidades do rotor. Neste caso a equação (2.35) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Z \\ \Theta \\ \Psi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \text{TG}_{11} & \text{TG}_{12} & \text{TG}_{13} & \text{TG}_{14} & \text{TG}_{15} & \text{TG}_{16} & \text{TG}_{17} & \text{TG}_{18} \\ \text{TG}_{21} & \text{TG}_{22} & \text{TG}_{23} & \text{TG}_{24} & \text{TG}_{25} & \text{TG}_{26} & \text{TG}_{27} & \text{TG}_{28} \\ \text{TG}_{31} & \text{TG}_{32} & \text{TG}_{33} & \text{TG}_{34} & \text{TG}_{35} & \text{TG}_{36} & \text{TG}_{37} & \text{TG}_{38} \\ \text{TG}_{41} & \text{TG}_{42} & \text{TG}_{43} & \text{TG}_{44} & \text{TG}_{45} & \text{TG}_{46} & \text{TG}_{47} & \text{TG}_{48} \\ \text{TG}_{51} & \text{TG}_{52} & \text{TG}_{53} & \text{TG}_{54} & \text{TG}_{55} & \text{TG}_{56} & \text{TG}_{57} & \text{TG}_{58} \\ \text{TG}_{61} & \text{TG}_{62} & \text{TG}_{63} & \text{TG}_{64} & \text{TG}_{65} & \text{TG}_{66} & \text{TG}_{67} & \text{TG}_{68} \\ \text{TG}_{71} & \text{TG}_{72} & \text{TG}_{73} & \text{TG}_{74} & \text{TG}_{75} & \text{TG}_{76} & \text{TG}_{77} & \text{TG}_{78} \\ \text{TG}_{81} & \text{TG}_{82} & \text{TG}_{83} & \text{TG}_{84} & \text{TG}_{85} & \text{TG}_{86} & \text{TG}_{87} & \text{TG}_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Z \\ \Theta \\ \Psi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_1 \quad (2.36)$$

Da equação acima, pode-se obter a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \text{TG}_{51} & \text{TG}_{52} & \text{TG}_{53} & \text{TG}_{54} \\ \text{TG}_{61} & \text{TG}_{62} & \text{TG}_{63} & \text{TG}_{64} \\ \text{TG}_{71} & \text{TG}_{72} & \text{TG}_{73} & \text{TG}_{74} \\ \text{TG}_{81} & \text{TG}_{82} & \text{TG}_{83} & \text{TG}_{84} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Z \\ \Theta \\ \Psi \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Para a solução do sistema de equações (2.37), como não há interesse em soluções triviais, impõe-se que:

$$\begin{vmatrix} TG_{51} & TG_{52} & TG_{53} & TG_{54} \\ TG_{61} & TG_{62} & TG_{63} & TG_{64} \\ TG_{71} & TG_{72} & TG_{73} & TG_{74} \\ TG_{81} & TG_{82} & TG_{83} & TG_{84} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.38)$$

Da equação anterior obtém-se o polinômio característico do sistema. As raízes complexas deste polinômio são os auto-valores do mesmo. Para o cálculo dessas raízes utilizou-se o método polinomial [12] [18].

O cálculo dos auto-vetores é feito substituindo-se os auto-valores na equação (2.37), considerando-se que  $\Psi_1 = (1,0)$ . Deste modo determinam-se os deslocamentos relativos à primeira estação. A partir das matrizes de transferência elementares e utilizando-se a equação (2.34), obtém-se os deslocamentos das demais estações do rotor [12], ficando assim determinado o modo de vibrar correspondente ao auto-valor considerado.

### 2.1.5 - Equação Geral de Movimento do Rotor

A equação geral de movimento do rotor é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem [1], escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \dot{\phi}\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_1 + \ddot{\phi}\mathbf{K}_2)\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (2.39)$$

onde:

$\mathbf{q}$  é o vetor das coordenadas generalizadas

$$\mathbf{q} = \{x_1, z_1, \theta_1, \psi_1, \dots, x_n, z_n, \theta_n, \psi_n\}^t$$

$n$  é o número total de estações

$\phi$  é o deslocamento angular do rotor em torno do eixo  $y$

$\mathbf{M}$  é a matriz de massa

$\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento

$\mathbf{G}$  é a matriz giroscópica

$\mathbf{K}_1$  é a matriz de rigidez clássica do conjunto eixo-mancais

$\mathbf{K}_2$  é a matriz de rigidez resultante do movimento transiente

$\mathbf{F}$  é o vetor das forças de excitação

Para cada estação, tem-se:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} & C_{x\theta} & C_{x\psi} \\ C_{zx} & C_{zz} & C_{z\theta} & C_{z\psi} \\ C_{\theta x} & C_{\theta z} & C_{\theta\theta} & C_{\theta\psi} \\ C_{\psi x} & C_{\psi z} & C_{\psi\theta} & C_{\psi\psi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_y \\ 0 & 0 & I_y & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 \end{bmatrix}$$

onde:

$m$  é a massa da estação

$I_x$  é a inércia da estação em relação ao eixo  $x$

$I_y$  é a inércia da estação em relação ao eixo  $y$

$I_z$  é a inércia da estação em relação ao eixo  $z$

$C_{ij}$  é o coeficiente de amortecimento entre as coordenadas  $i$  e  $j$

Cabe lembrar que a matriz  $\mathbf{K}_2$  é obtida de forma análoga àquela do item 2.1.1.

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}_1$  é obtida de forma indireta através da seguinte relação:

$$\lambda = \omega^2 = \frac{\Phi^t \mathbf{K}_1 \Phi}{\Phi^t \mathbf{M} \Phi}$$

onde:

$\Phi$  é a base modal do sistema simétrico ( $K_{xz} = K_{zx} = 0$ ), não giroscópico ( $\dot{\phi} = 0$ ),

onde  $r$  modos próprios são retidos

Quanto maior o número de estações no qual o rotor é subdividido, maior é a ordem das matrizes da equação (2.39). Com o objetivo de reduzir o tempo computacional e a quantidade de memória necessária para a resolução desta equação, sem prejudicar de modo significativo a precisão dos resultados, utilizou-se o método pseudo-modal [19], fazendo-se a seguinte transformação de coordenadas:

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{p} \quad (2.40)$$

onde:

$\mathbf{p}$  é o vetor das coordenadas modais

Substituindo-se a equação (2.40) em (2.39), premultiplicando-a por  $\Phi^t$ , tem-se o novo sistema de ordem  $r \times r$ :

$$\overline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{p}} + (\overline{\mathbf{C}} + \dot{\Phi} \overline{\mathbf{G}}) \dot{\mathbf{p}} + (\overline{\mathbf{K}}_1 + \ddot{\Phi} \overline{\mathbf{K}}_2) \mathbf{p} = \overline{\mathbf{F}} \quad (2.41)$$

onde:

$$\overline{\mathbf{M}} = \Phi^t \mathbf{M} \Phi$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \Phi^t \mathbf{C} \Phi$$

$$\overline{\mathbf{G}} = \Phi^t \mathbf{G} \Phi$$

$$\overline{\mathbf{K}}_1 = \Phi^t \mathbf{K}_1 \Phi$$

$$\overline{\mathbf{K}}_2 = \Phi^t \mathbf{K}_2 \Phi$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \Phi^t \mathbf{F}$$

Neste trabalho, considera-se como excitação apenas forças de desbalanceamento, embora seja possível calcular a resposta do rotor a qualquer tipo de excitação, inclusive não-linear.

O desbalanceamento é modelado fisicamente de acordo com a figura 2.7, onde "C" representa o centro geométrico da seção,  $\phi_0$  é o deslocamento angular inicial,  $\phi$  é o deslocamento angular e  $d$  é a distância entre a massa de desbalanceamento e o centro geométrico "C" [20].

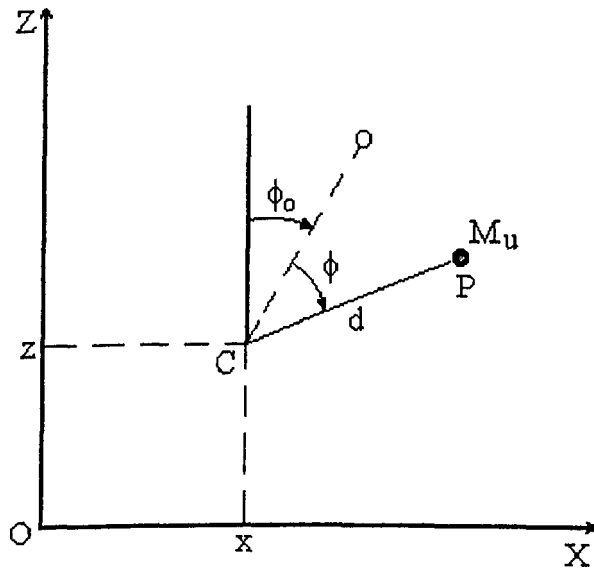


Figura 2.7 - Modelo físico do desbalanceamento

O vetor posição da massa de desbalanceamento  $M_u$ , é dado por:

$$\overline{OP} = \{x + d.\text{sen}(\phi + \phi_0) ; 0 ; z + d.\text{cos}(\phi + \phi_0)\} \quad (2.42)$$

A velocidade de  $M_u$  é obtida derivando-se a equação acima em relação ao tempo:

$$\mathbf{v} = \frac{d\overline{OP}}{dt} = \left\{ \dot{x} + d\dot{\phi} \cos(\phi + \phi_0) ; 0 ; \dot{z} - d\dot{\phi} \sin(\phi + \phi_0) \right\} \quad (2.43)$$

Considerando-se que a massa  $M_u$  é muito menor do que a massa do rotor e desprezando-se os termos que não contribuem na aplicação da equação de Lagrange, a energia cinética da massa de desbalanceamento pode ser calculada através da seguinte relação:

$$E_C = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \mathbf{M}_u \mathbf{v} \cong M_u (\dot{x} d\dot{\phi} \cos(\phi + \phi_0) - \dot{z} d\dot{\phi} \sin(\phi + \phi_0)) \quad (2.44)$$

Utilizando-se a equação de Lagrange (2.7) para o movimento, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} = -M_u d\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \phi_0) + M_u d\ddot{\phi} \cos(\phi + \phi_0)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial z} = -M_u d\dot{\phi}^2 \cos(\phi + \phi_0) - M_u d\ddot{\phi} \sin(\phi + \phi_0)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \psi} = 0$$

O vetor força de desbalanceamento fica, então, da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_d = \begin{Bmatrix} -M_u d \dot{\phi}^2 \sin(\phi + \phi_0) + M_u d \ddot{\phi} \cos(\phi + \phi_0) \\ -M_u d \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \phi_0) - M_u d \ddot{\phi} \sin(\phi + \phi_0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

Utilizando-se estes valores, calculam-se as reações nos apoios e os diagramas de forças cortantes e momentos fletores. Os valores de força cortante e momento fletor de cada estação, serão os elementos de  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \{V_{x1}, V_{z1}, M_{x1}, M_{z1}, \dots, V_{xn}, V_{zn}, M_{xn}, M_{zn}\}^t \quad (2.46)$$

## 2.2 - Variação da Velocidade de Rotação

Para se proceder a integração da equação geral de movimento do rotor (2.41), faz-se necessário, primeiramente, definir como a velocidade de rotação  $\dot{\phi}$  varia em função do tempo. A bibliografia apresenta, frequentemente, duas leis de variação: a exponencial e a linear [1], que também serão utilizadas neste trabalho. Não são considerados movimentos de vibração torcional.

A função exponencial é a que mais se aproxima da curva de funcionamento de rotores de um modo geral, por isso é utilizada em aplicações industriais. Neste caso, a velocidade de rotação varia rapidamente na partida do rotor e apresenta baixa aceleração angular ao aproximar-se da velocidade de operação.

A função linear é de interesse mais teórico, sendo caracterizada por uma aceleração angular constante desde a partida até a velocidade de operação.



### 2.2.1 - Função Exponencial

A expressão para a variação exponencial da velocidade de rotação, é dada pela equação (2.47):

$$\dot{\phi}(t) = A + B e^{-\gamma t} \quad (2.47)$$

onde A, B e  $\gamma$  são constantes.

A expressão para a aceleração é obtida, derivando-se (2.47) em relação ao tempo:

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{d \dot{\phi}(t)}{dt} = -\gamma B e^{-\gamma t} \quad (2.48)$$

Integrando-se a equação (2.47), obtém-se o deslocamento angular:

$$\phi(t) = \int \dot{\phi}(t) dt = A t - \frac{B}{\gamma} e^{-\gamma t} + C$$

onde C é uma constante de integração.

Considerando-se que para  $t = t_0 \Rightarrow \phi(t_0) = \phi_0$ , obtém-se a equação final:

$$\phi(t) = A t - \frac{B}{\gamma} e^{-\gamma t} + \phi_0 - A t_0 + \frac{B}{\gamma} e^{-\gamma t_0} \quad (2.49)$$

### 2.2.2 - Função Linear

A função linear de variação da velocidade de rotação é definida por:

$$\dot{\phi}(t) = A + B t \quad (2.50)$$

onde A e B são constantes.

De forma semelhante aos cálculos feitos para a função exponencial, pode-se obter as expressões para aceleração e deslocamento angulares, de acordo com as equações (2.51) e (2.52), respectivamente:

$$\ddot{\phi}(t) = B = \text{cte} \quad (2.51)$$

$$\phi(t) = A t + \frac{B}{2} t^2 + \phi_0 - A t_0 - \frac{B}{2} t_0^2 \quad (2.52)$$

### 2.3 - Método de Newmark

Para a resolução da equação (2.41), utiliza-se, geralmente, um método numérico de integração passo-a-passo.

Neste trabalho, utilizou-se o método de Newmark [21], assumindo-se que:

$$\dot{\mathbf{p}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{p}}_t + [(1-\sigma)\ddot{\mathbf{p}}_t + \sigma\ddot{\mathbf{p}}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (2.53)$$

$$\mathbf{p}_{t+\Delta t} = \mathbf{p}_t + \dot{\mathbf{p}}_t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \ddot{\mathbf{p}}_t + \nu \ddot{\mathbf{p}}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (2.54)$$

onde  $\sigma$  e  $\nu$  são parâmetros que podem ser arbitrados para se conseguir melhor precisão e estabilidade do método. Newmark propôs um esquema incondicionalmente estável, fazendo-se  $\sigma = 1/2$  e  $\nu = 1/4$ , denominado método da aceleração média constante. Este procedimento foi o escolhido neste trabalho.

Para o cálculo dos deslocamentos, velocidades e acelerações, no instante  $t+\Delta t$ , considera-se a equação de equilíbrio:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}_{t+\Delta t} + (\mathbf{C} + \dot{\phi}_{t+\Delta t} \mathbf{G})\dot{\mathbf{p}}_{t+\Delta t} + (\mathbf{K}_1 + \ddot{\phi}_{t+\Delta t} \mathbf{K}_2)\mathbf{p}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} \quad (2.55)$$

Da equação (2.54), tem-se que:

$$\ddot{\mathbf{p}}_{t+\Delta t} = \frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{p}_{t+\Delta t} - \mathbf{p}_t - \dot{\mathbf{p}}_t \Delta t) - \ddot{\mathbf{p}}_t \quad (2.56)$$

Substituindo-se a equação (2.56) na equação (2.53), resulta:

$$\dot{\mathbf{p}}_{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t}\mathbf{p}_{t+\Delta t} - \frac{2}{\Delta t}\mathbf{p}_t - \dot{\mathbf{p}}_t \quad (2.57)$$

Substituindo-se as equações (2.56) e (2.57) na equação (2.55), obtém-se:

$$\left[ \frac{4\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{C} + \dot{\phi}_{t+\Delta t} \mathbf{G}) + (\mathbf{K}_1 + \ddot{\phi}_{t+\Delta t} \mathbf{K}_2) \right] \mathbf{p}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \\ + \mathbf{M} \left( \frac{4\mathbf{p}_t}{\Delta t^2} + \frac{4\dot{\mathbf{p}}_t}{\Delta t} + \ddot{\mathbf{p}}_t \right) + (\mathbf{C} + \dot{\phi}_{t+\Delta t} \mathbf{G}) \left( \frac{2\mathbf{p}_t}{\Delta t} + \dot{\mathbf{p}}_t \right) \quad (2.58)$$

Esta é a equação de recorrência na qual todos os valores são conhecidos, exceto o deslocamento no instante  $t+\Delta t$ .

Para se começar o processo de resolução, precisa-se saber quais são os deslocamentos, as velocidades e as acelerações para  $t = 0$  s. Para tanto, arbitra-se valores iniciais para  $p_t$  e  $\dot{p}_t$  e, utilizando-se a equação (2.41), calcula-se  $\ddot{p}_t$ . A seguir, calcula-se  $p_{t+\Delta t}$  através da equação (2.58). Substituindo-se este valor nas equações (2.56) e (2.57), obtém-se  $\ddot{p}_{t+\Delta t}$  e  $\dot{p}_{t+\Delta t}$ . Assim, o processo segue passo-a-passo durante todo o intervalo de interesse, até o instante final.

Neste ponto, deve-se salientar a importância da escolha do passo de integração  $\Delta t$ . A referência [21] analisa mais profundamente este fato e prescreve algumas orientações para a escolha do valor de  $\Delta t$ , visando obter melhor estabilidade e precisão dos resultados.

Como dito anteriormente, o método de Newmark, utilizando-se  $\sigma = 1/2$  e  $\upsilon = 1/4$ , é incondicionalmente estável, mas uma pior ou melhor precisão nos resultados dependerá do valor de  $\Delta t$  escolhido. Recomenda-se que o valor do passo de integração seja:

$$\Delta t \leq \frac{T_r}{10} \quad (2.59)$$

onde  $T_r$  é o período de oscilação do modo de maior ordem retido no sistema.

## 2.4 - Variação da Rigidez

Uma maneira atrativa que se vislumbra para reduzir o nível de vibração de um rotor na passagem por velocidades críticas, seria promover variações nos valores das constantes de rigidez dos mancais, de forma a provocar mudança nos valores das velocidades críticas do sistema.

Variando-se a rigidez dos mancais, tem-se variação nas frequências naturais do sistema e, tal efeito, pode ser utilizado para que se minimize os efeitos da passagem pelas ressonâncias.

A figura 2.8 procura apresentar a idéia acima descrita.

Suponha-se que este rotor atinja sua rotação de operação no instante  $t = t_3$  e que, ao acelerar, deva passar por uma velocidade crítica no instante  $t = t_c$ , para um valor de rigidez do mancal igual a  $K_1$ . Pode-se, no instante  $t = t_1$ , aumentar a rigidez do mancal para  $K_2$ , fazendo com que a frequência natural aumente, alterando, portanto, a velocidade crítica, deslocando-a para a direita no Diagrama de Campbell. No instante  $t = t_2$ , reduz-se o valor da rigidez novamente para  $K_1$ , o que deve ocorrer sem maiores dificuldades, visto que a velocidade crítica original já foi ultrapassada.

Tudo indica que este processo de variação da rigidez pode ser realizado utilizando-se mancais eletromagnéticos ativos.

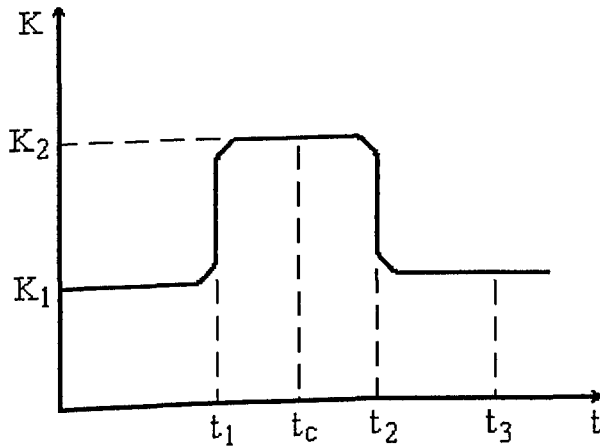
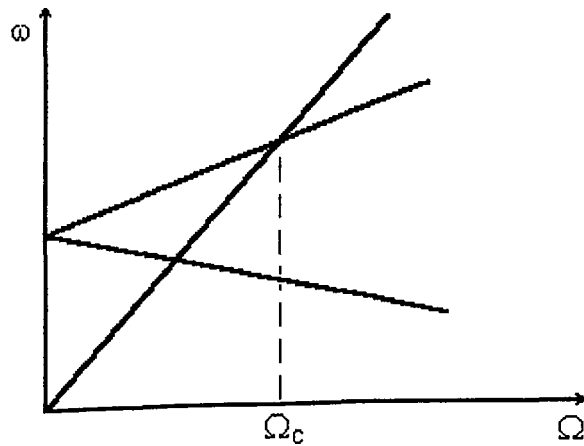


Figura 2.8 - Variação da rigidez do mancal

### 2.4.1 - O Mancal Eletromagnético

A utilização de mancais eletromagnéticos tem aumentado muito desde sua criação ocorrida em meados dos anos setenta, sendo, hoje, empregado numa ampla faixa de aplicações. Dentre as vantagens do seu uso em relação aos mancais de rolamento e hidrodinâmicos, pode-se citar:

- inexistência de contato entre o mancal e o eixo, não havendo fricção nem desgaste
- possibilidade de maiores velocidades de rotação
- eliminação de um complexo sistema de lubrificação do mancal
- possibilidade de controlar as vibrações do rotor (em relação ao mancal de rolamento)

Um modelo simplificado para o mancal eletromagnético ativo, composto de quatro eletromagnetos dispostos em dois eixos ortogonais de controle [22] [23], é mostrado na figura 2.9.

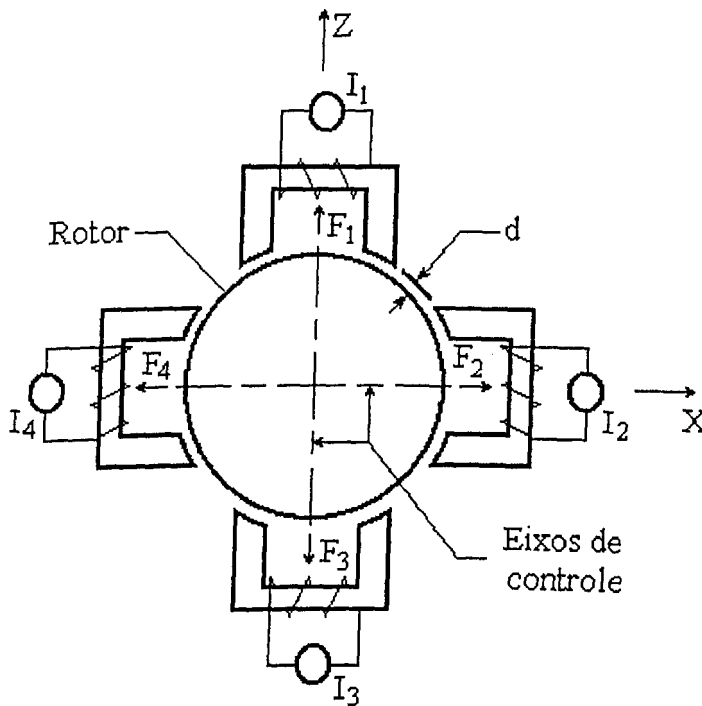


Figura 2.9 - Modelo do mancal eletromagnético

A força gerada em um eletromagneto é expressa por:

$$F \text{ [N]} = \frac{B^2 S}{2\mu_0} \quad (2.60)$$

onde:

B é a densidade de fluxo magnético em [T]

S é a área magnética projetada ou útil em [m<sup>2</sup>]

$\mu_0$  é a permeabilidade magnética do meio [V.s/A.m]

A densidade de fluxo magnético B, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$B \text{ [T]} = \frac{\mu_0 N I}{2 d} \quad (2.61)$$

onde:

N é o número de espiras do enrolamento

I é a corrente elétrica em [A]

d é o entreferro em [m]

Combinando-se as equações (2.60) e (2.61), obtém-se uma equação geral para a força gerada por um eletromagneto:



$$F = \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{8d^2} \quad (2.62)$$

De acordo com a figura 2.9, analisando-se o mancal ao longo do eixo X, tem-se:

$$F_2 = \frac{\mu_0 N^2 I_2^2 S}{8d_2^2} \quad ; \quad F_4 = \frac{\mu_0 N^2 I_4^2 S}{8d_4^2}$$

onde:

$$d_2 = d_0 - x$$

$$d_4 = d_0 + x$$

$d_0$  é o entreferro estático

A força resultante  $F_R$  ao longo do eixo X é:

$$F_R = F_2 - F_4 = \frac{\mu_0 N^2 S}{8} \left( \frac{I_2^2}{(d_0 - x)^2} - \frac{I_4^2}{(d_0 + x)^2} \right) = K_{xx} \cdot x \quad (2.63)$$

Sabendo-se o valor de rigidez que se deseja para o mancal, medindo-se a cada instante o deslocamento  $x$  do rotor e fixando-se um valor para a corrente  $I_4$ , pode-se, através da equação (2.63), determinar como a corrente  $I_2$  deve variar ao longo do tempo, a fim de que a constante de rigidez permaneça no valor desejado.

## 2.5 - Variação de Massa

Durante o período de aceleração do rotor, ou, até mesmo em regime permanente, podem haver variações na massa do rotor causadas por fraturas, desgaste, perdas de lâminas, deslocamentos de peças, etc. Tais fenômenos caracterizam movimentos transientes e podem ser entendidos como perda de massa e desbalanceamento súbito [5][6]. Estes processos de variação na massa do rotor são considerados instantâneos.

No processo de perda de massa, considera-se que, além da diminuição da massa, ocorre também desbalanceamento, que é o caso mais geral. Neste caso, em relação ao rotor modelado pelo método das matrizes de transferência, ocorrem variações na massa, inércias transversal e polar e na posição do centro de massa, provocando mudanças nas matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{K}_2$  da estação na qual ocorreu a perda de massa e no vetor das forças de excitação  $\mathbf{F}$ .

No caso do desbalanceamento súbito não ocorre perda de massa. Há apenas um deslocamento localizado de massa no rotor, provocando, portanto, variação na posição do centro de massa. Considera-se, neste caso, mudança apenas no vetor das forças de excitação  $\mathbf{F}$ .

## CAPÍTULO III

### ALGUNS ASPECTOS SOBRE A INFLUÊNCIA DE FORÇAS DE CONTROLE NO COMPORTAMENTO TRANSITÓRIO DO SISTEMA

Outra maneira de se tentar reduzir o nível de vibração de um rotor, além da apresentada no item 2.4, é através da introdução de forças de controle ao longo do mesmo. Tais forças são consideradas harmônicas fixas no espaço, definidas por uma amplitude  $A_c$ , pela frequência de oscilação  $\omega_c$ , pelo ângulo de incidência  $\varphi_c$  e representadas matematicamente pela equação (3.1).

$$F_{cx} = A_c e^{i\omega_c t} \text{sen } \varphi_c \quad ; \quad F_{cz} = A_c e^{i\omega_c t} \text{cos } \varphi_c \quad (3.1)$$

Propõe-se buscar os valores dos parâmetros  $A_c$ ,  $\omega_c$  e  $\varphi_c$  que correspondam ao menor nível de vibração possível do rotor. Este problema pode ser resolvido utilizando-se técnicas de otimização.

A referência [11] apresenta a utilização destas técnicas, considerando o rotor em regime permanente, ou seja,  $\Omega = \Omega_{op} = \text{cte}$ .

Neste trabalho, procurou-se analisar qual o efeito da ação das forças ótimas de controle, obtidas em regime permanente, no movimento transiente do rotor. Para isto, utilizou-se um programa computacional desenvolvido no Laboratório de Dinâmica da Universidade Federal de Uberlândia, denominado "OTIM" [24].

### 3.1 - Otimização

O processo de otimização consiste em se definir uma função objetivo  $F(\mathbf{X})$  e variáveis de projeto  $(X_i ; i = 1, n)$ , as quais sofrerão variações dentro de intervalos pré-estabelecidos a fim de minimizar  $F(\mathbf{X})$ , utilizando-se, ou não, funções de restrição.

Matematicamente, pode-se dizer que otimização consiste em minimizar:

$$F(\mathbf{X}) \tag{3.2}$$

sendo o vetor das variáveis de projeto ou de decisão dado por:

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^t \tag{3.3}$$

atendendo-se a:

restrições de desigualdade:

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, l \tag{3.4}$$

restrições de igualdade:

$$h_k(\mathbf{X}) = 0 \quad k = 1, \dots, m \tag{3.5}$$

restrições laterais:

$$a_i \leq X_i \leq b_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

Os métodos de otimização podem ser divididos em dois grandes grupos: restritos ou irrestritos, dependendo da existência de funções de restrição.

Algumas técnicas de otimização sequencial restrita manipulam diretamente as funções de restrição, entre elas: Método das Direções Viáveis, Método da Aproximação Linear Sequencial, Método do Gradiente Reduzido Generalizado, Método da Projeção do Gradiente e Método das Assíntotas Móveis. Outras técnicas, incorporam as restrições à função objetivo originando uma nova função, denominada pseudo-objetivo, que pode ser minimizada através de um método de otimização irrestrita. Dentre elas, tem-se: Método da Penalidade Exterior, Método da Penalidade Interior e o Método do Multiplicador de Lagrange Aumentado.

Entre as técnicas utilizadas na resolução de problemas de minimização irrestrita, pode-se citar: Método de Fletcher-Reeves, Método de Davidon-Fletcher-Powell (MDFP) e Método de Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS).

Uma vez determinada a direção de busca do mínimo  $S$ , através de algum dos métodos acima citados, deve-se encontrar o ponto de mínimo nesta direção segundo a equação:

$$X^{i+1} = X^i + \alpha^* S^{i+1} \quad (3.7)$$

Nesta busca uni-dimensional, não se sabe, a priori, a localização do ponto de mínimo  $\alpha^*$ . Tem-se, portanto, um intervalo de incerteza.

Algumas técnicas são utilizadas na redução deste intervalo de incerteza, como os métodos da Busca Uniforme, de Fibonacci e da Seção Áurea. Outras, tem por objetivo fazer uma aproximação do ponto de mínimo, como os métodos da Aproximação Polinomial, de Newton-Raphson e da Bisseção.

Informações detalhadas sobre as técnicas e procedimentos de otimização acima mencionados, podem ser encontradas na referência [25].

### **3.2 - O Programa OTIM**

O programa OTIM foi desenvolvido em linguagem FORTRAN com o objetivo de resolver problemas de otimização não-linear, tais como os encontrados em dinâmica de sistemas mecânicos. As técnicas utilizadas enquadram-se dentro do que se chama de minimização sequencial irrestrita. Usa-se o Método do Multiplicador de Lagrange Aumentado (MMLA), onde as minimizações sequenciais irrestritas são feitas pelo Método de Davidon-Fletcher-Powell (MDFP). Na busca unidimensional é usado o Método da Seção Áurea (MSA) acoplado ao da Aproximação Polinomial Cúbica (MAP) [24].

A figura 3.1 mostra o fluxograma simplificado do programa.

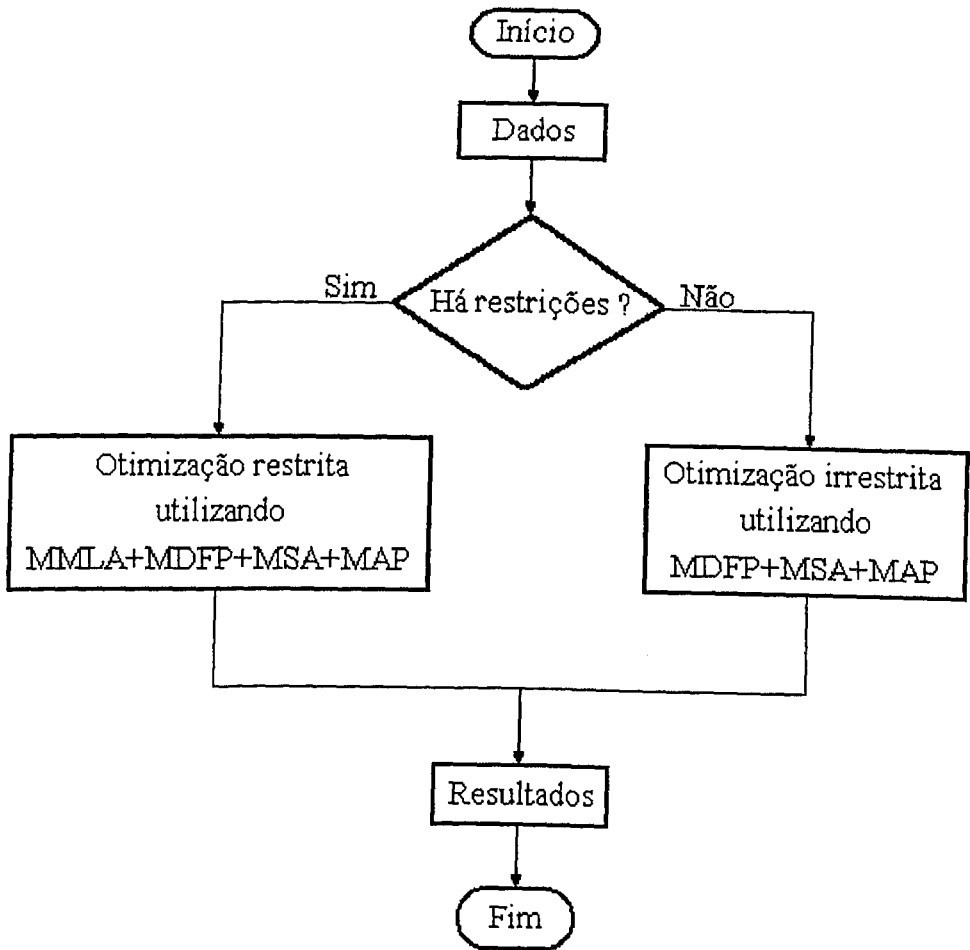


Figura 3.1 - Fluxograma simplificado do programa OTIM.

### 3.3 - Otimização em Regime Permanente

No processo de otimização, consideraram-se duas forças de excitação: a força de desbalanceamento e a força harmônica de controle dada pela equação (3.1).

A força de desbalanceamento, para o caso do regime permanente, pode ser escrita de acordo com a equação (3.8).

$$F_{dx} = M_d d \Omega^2 e^{i\Omega t} \sin \varphi_d \quad ; \quad F_{dz} = M_d d \Omega^2 e^{i\Omega t} \cos \varphi_d \quad (3.8)$$

onde:

$\Omega$  é a velocidade de rotação do sistema

$\varphi_d$  é o ângulo de incidência da força de desbalanceamento sobre o rotor

A equação de movimento a ser resolvida é semelhante à equação (2.41), porém sem os termos relacionados à aceleração angular, já que  $\ddot{\phi} = 0$ , como pode-se ver pela equação (3.9).

$$\overline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{p}} + (\overline{\mathbf{C}} + \Omega \overline{\mathbf{G}}) \dot{\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{K}}_1 \mathbf{p} = \overline{\mathbf{F}} \quad (3.9)$$

A equação diferencial acima admite solução da forma:

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} e^{i\omega t} \quad (3.10)$$

onde:

$\mathbf{P}$  é o vetor das amplitudes de vibração

$\omega$  é a frequência da força de excitação

Substituindo-se a equação (3.10) na equação (3.9), resulta:

$$\left( -\omega^2 \overline{\mathbf{M}} + i \omega (\overline{\mathbf{C}} + \Omega \overline{\mathbf{G}}) + \overline{\mathbf{K}}_1 \right) \mathbf{P} = \overline{\mathbf{F}} \quad (3.11)$$

A resposta final pode ser obtida, somando-se as respostas particulares em relação às forças de desbalanceamento e de controle, utilizando-se o princípio da superposição:



$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_d + \mathbf{P}_c \quad (3.12)$$

Através da equação (2.40), retorna-se ao sistema de coordenadas generalizadas.

### 3.4 - A Função Objetivo

A função objetivo a ser minimizada, no processo de otimização, foi a energia de deformação total do sistema rotor-mancais, definida pela equação (3.13).

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{K}_1 \mathbf{q} \quad (3.13)$$

Substituindo-se a equação (2.40) na equação (3.13), vem:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{p}^t \Phi^t \mathbf{K}_1 \Phi \mathbf{p} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^t \overline{\mathbf{K}}_1 \mathbf{p} \quad (3.14)$$

Esta é a função objetivo utilizada no processo de otimização, considerando-se que a menor energia de deformação do sistema, corresponda ao menor nível de vibração do rotor.

## CAPÍTULO IV

### MODELO COMPUTACIONAL

O programa computacional, desenvolvido para executar os cálculos referidos nos capítulos anteriores, foi escrito em linguagem FORTRAN e executado em um computador IBM 3090, utilizando-se o compilador FORTVS2.

Todos os programas são variações de um programa denominado TRD, que calcula a resposta transiente de um rotor durante sua partida (desde o repouso até a velocidade de operação).

Para o cálculo dos auto-valores e da base modal, utilizou-se um programa chamado MTROTOR desenvolvido numa dissertação de mestrado na UFU [12], o qual foi modificado para atender as necessidades dos problemas a serem resolvidos.

#### **4.1 - Programa Principal: TRD**

Ao ser inicializado, o programa TRD chama o programa MTROTOR, onde os dados de entrada, que estão em arquivo, são lidos e onde são calculados e gravados os

auto-valores, auto-vetores, a matriz de massa, a matriz giroscópica, a matriz de amortecimento e a matriz de rigidez  $K_2$ .

Na sequência, entra-se na sub-rotina RIGID, onde reduz-se a ordem da matriz de massa e calcula-se a matriz de rigidez  $K_1$ . Na sub-rotina REDUZ, a ordem das matrizes giroscópica, de amortecimento e de rigidez  $K_2$  é reduzida.

A seguir, na sub-rotina CINI, entra-se com as condições iniciais de deslocamento e de velocidade de cada estação do rotor.

Finalmente, na sub-rotina NEWM, integra-se numericamente a equação geral de movimento do rotor através do Método de Newmark.

A figura 4.1 mostra, simplificadamente, o fluxograma do programa principal TRD e, no anexo 1, apresenta-se a estrutura do arquivo de dados.

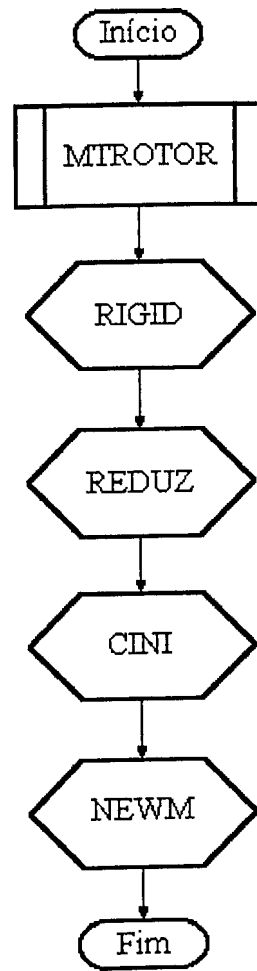


Figura 4.1 - Fluxograma do programa principal

## 4.2 - Sub-rotina RIGID

Na sub-rotina RIGID, após a leitura dos auto-valores e da base modal, a ordem da matriz de massa é reduzida e a matriz de rigidez  $\mathbf{K}_1$  é calculada. A figura 4.2 apresenta o fluxograma desta sub-rotina.

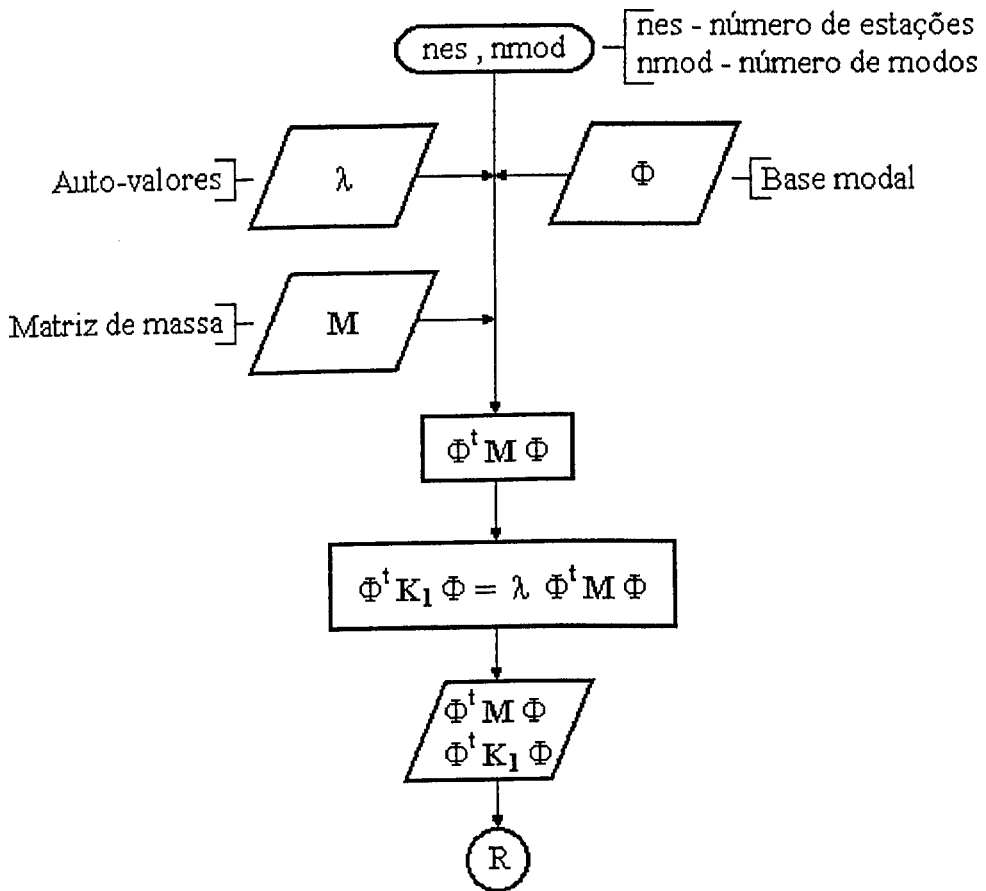


Figura 4.2 - Fluxograma da sub-rotina RIGID

### 4.3 - Sub-rotina REDUZ

Nesta sub-rotina, as matrizes giroscópica  $G$ , de amortecimento  $C$  e de rigidez  $K_2$  têm sua ordem reduzidas conforme mostra a figura 4.3.

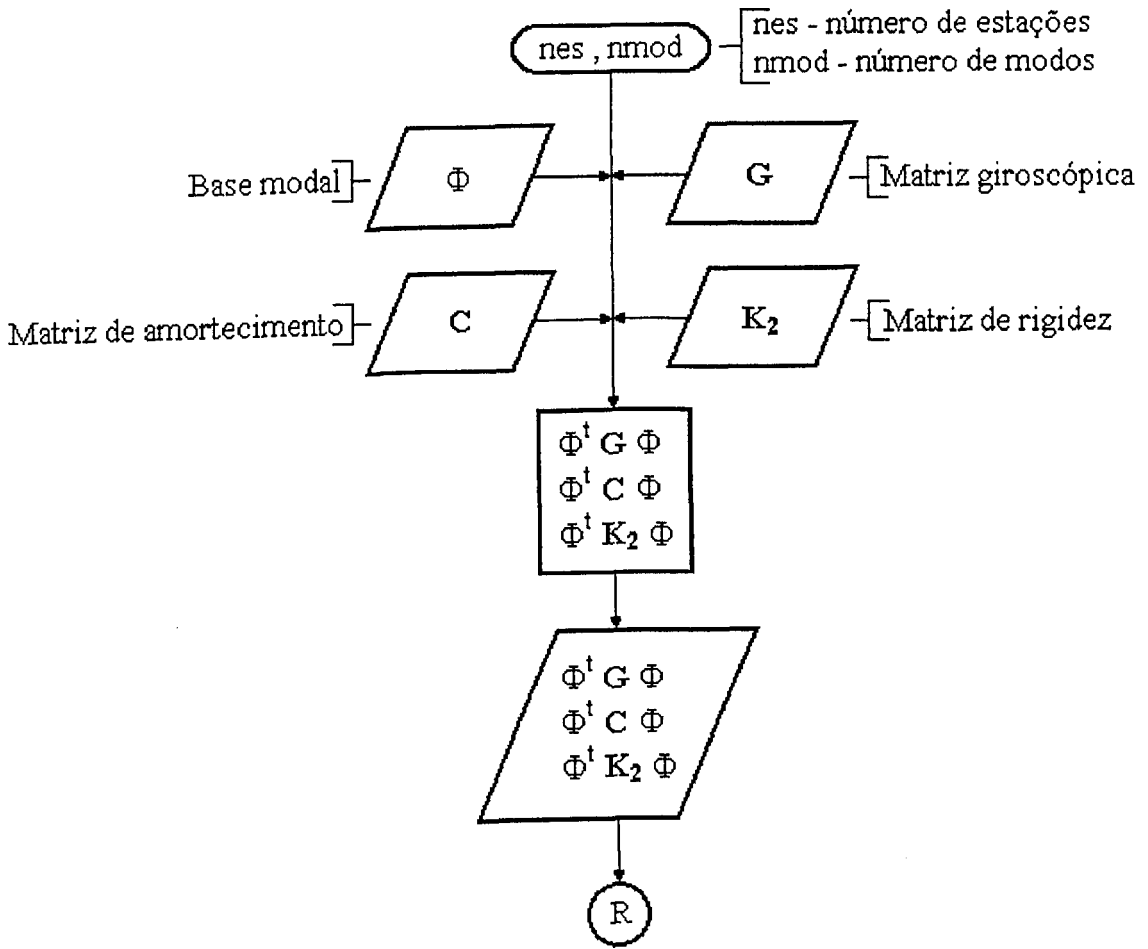


Figura 4.3 - Fluxograma da sub-rotina REDUZ

#### 4.4 - Sub-rotina CINI

A figura 4.4 apresenta a estrutura da sub-rotina CINI, onde as condições iniciais de deslocamento e de velocidade, de cada estação do rotor, são lidas, transferidas para o sistema de coordenadas modais e gravadas.

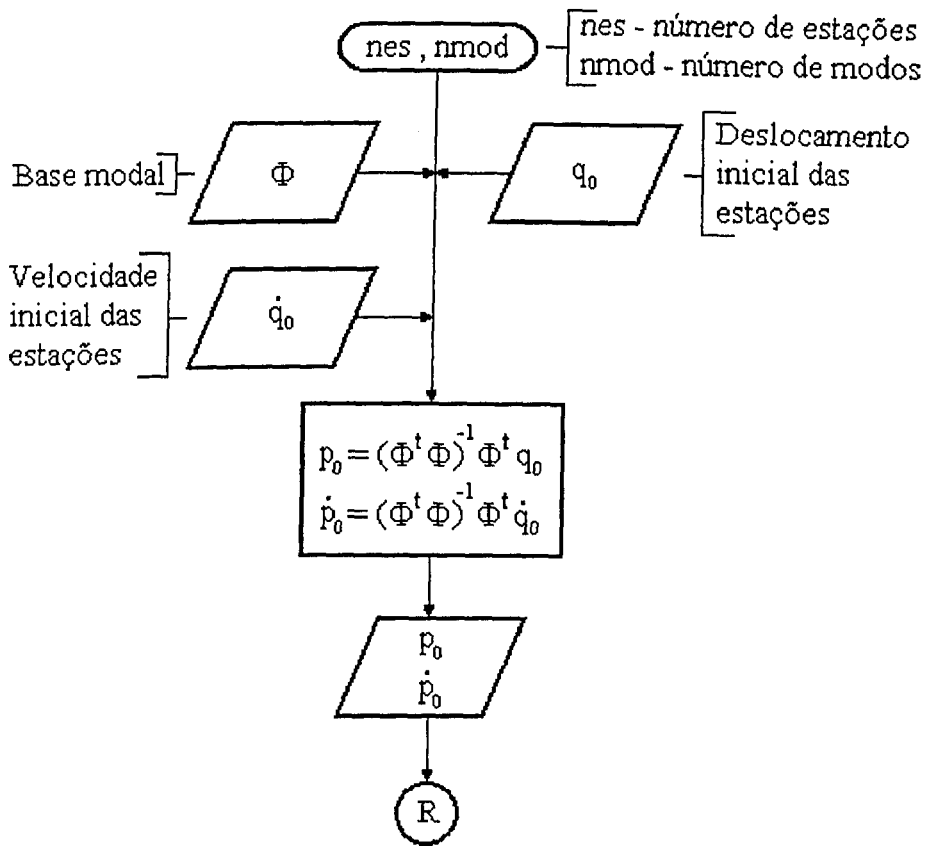
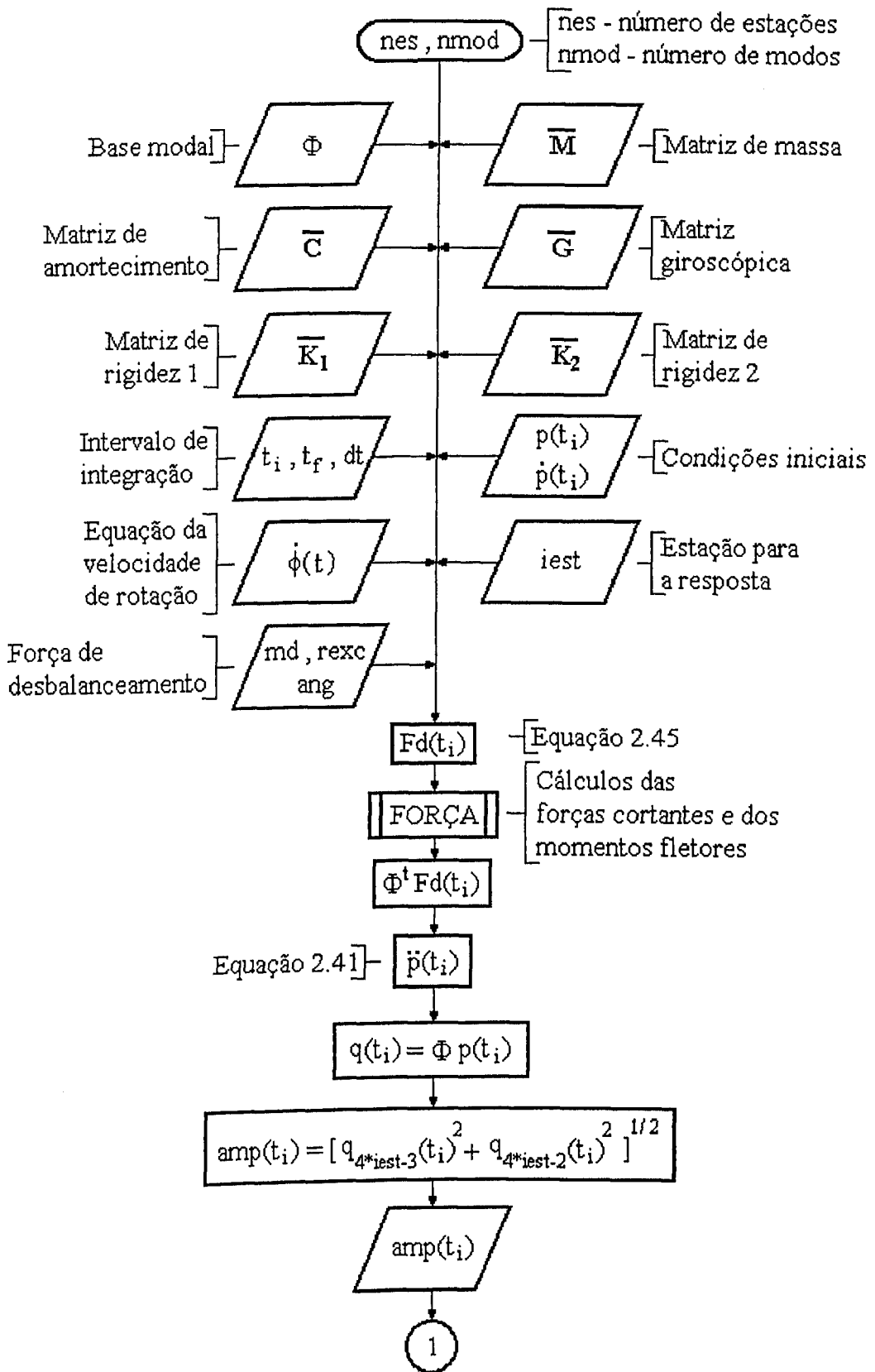


Figura 4.4 - Fluxograma da sub-rotina CINI

#### 4.5 - Sub-rotina NEWM

Na sub-rotina NEWM, a equação geral de movimento do rotor é integrada, pelo Método de Newmark e a amplitude de vibração do movimento transiente é calculada no domínio do tempo, estando o sistema sujeito à forças de desbalanceamento.

A figura 4.5 apresenta o fluxograma correspondente de forma simplificada.





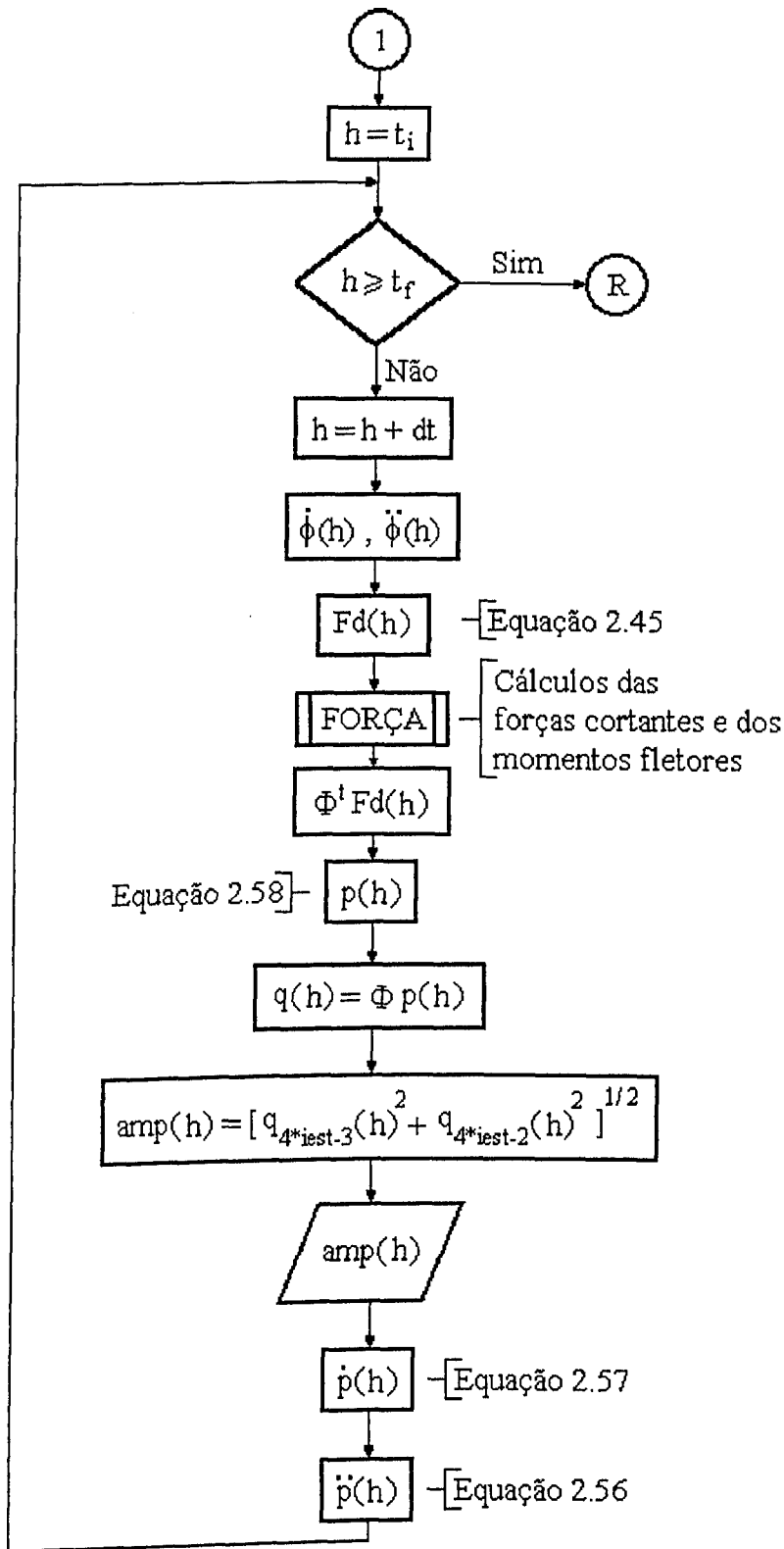


Figura 4.5 - Fluxograma da sub-rotina NEWM

## CAPÍTULO V

### SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Os seguintes casos de movimento transiente foram estudados durante a partida do rotor:

- resposta do rotor utilizando-se diferentes valores de aceleração e diferentes funções para a velocidade de rotação;
- aceleração do rotor na passagem por velocidades críticas, com o objetivo de reduzir o nível de vibração;
- variação da rigidez dos mancais na passagem por velocidades críticas;
- resposta do rotor utilizando-se forças harmônicas de controle, obtidas através de processos de otimização;
- variação na massa do rotor, caracterizando processos de perda de massa e desbalanceamento súbito.

Os resultados, apresentados a seguir, são constituídos de gráficos que mostram a variação da amplitude de vibração de uma determinada estação do rotor, no domínio do tempo e, foram obtidos, utilizando-se quatro modelos diferentes de rotores flexíveis.

## 5.1 - Aplicação I

O primeiro rotor simulado é um rotor em aço, com um disco e dois mancais, conforme mostra a figura 5.1. O modelo discretizado em dezenove estações é apresentado na figura 5.2.

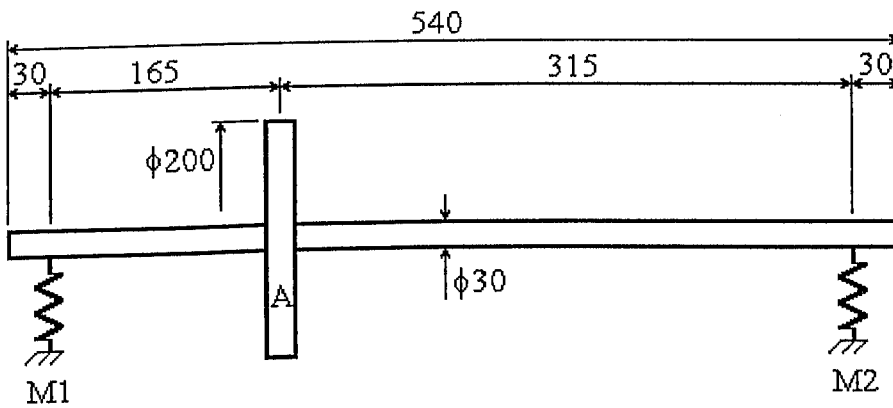


Figura 5.1 - Modelo físico: rotor I

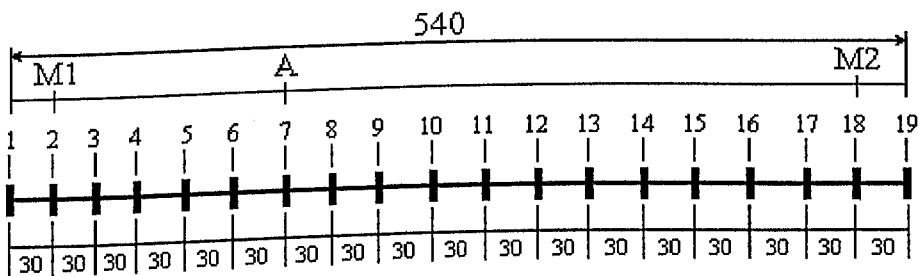


Figura 5.2 - Modelo discretizado: rotor I

Na tabela 5.1 tem-se as características físicas do disco, do desbalanceamento e dos mancais e, na figura 5.3, o Diagrama de Campbell.

Tabela 5.1 - Características físicas: rotor I

Disco	Densidade [Kg/m <sup>3</sup> ]	Diâmetro [m]	Espessura [m]	Massa de desbalanc.* [Kg]	Excentricid. [m]
A	7800	0.2	0.03	0.0001	0.1
Mancal	K <sub>xx</sub> [N/m]	K <sub>zz</sub> [N/m]	K <sub>xz</sub> / K <sub>zx</sub> [N/m]	C <sub>xx</sub> [N.s/m]	C <sub>zz</sub> [N.s/m]
M1	2x10 <sup>5</sup>	2x10 <sup>5</sup>	0	20	20
M2	2x10 <sup>5</sup>	2x10 <sup>5</sup>	0	20	20

\* grau 0,4 de qualidade de balanceamento (ISO-1940)

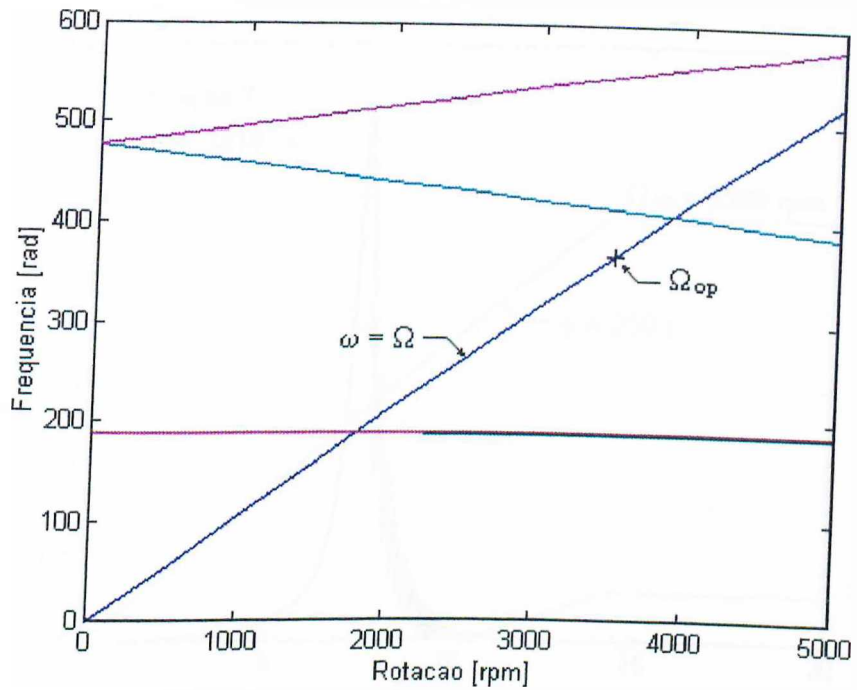


Figura 5.3 - Diagrama de Campbell: rotor I

Calculou-se a resposta transiente da partida do rotor, desde o repouso até a rotação de operação, utilizando-se função linear (figura 5.4) e exponencial (figura 5.5) para a velocidade de rotação.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPESINA  
BIBLIOTECA

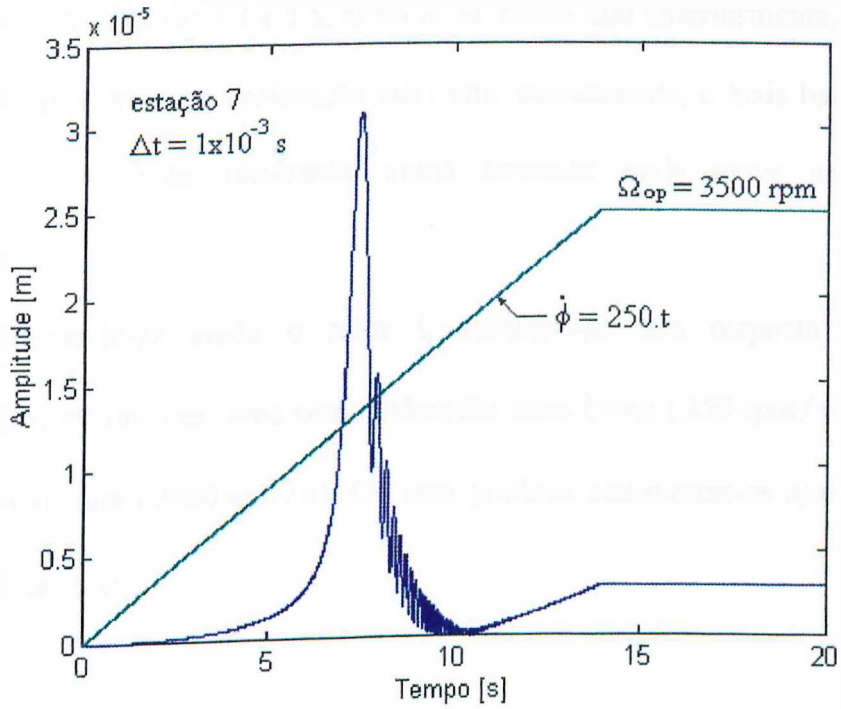


Figura 5.4 - Resposta transiente: função de velocidade linear

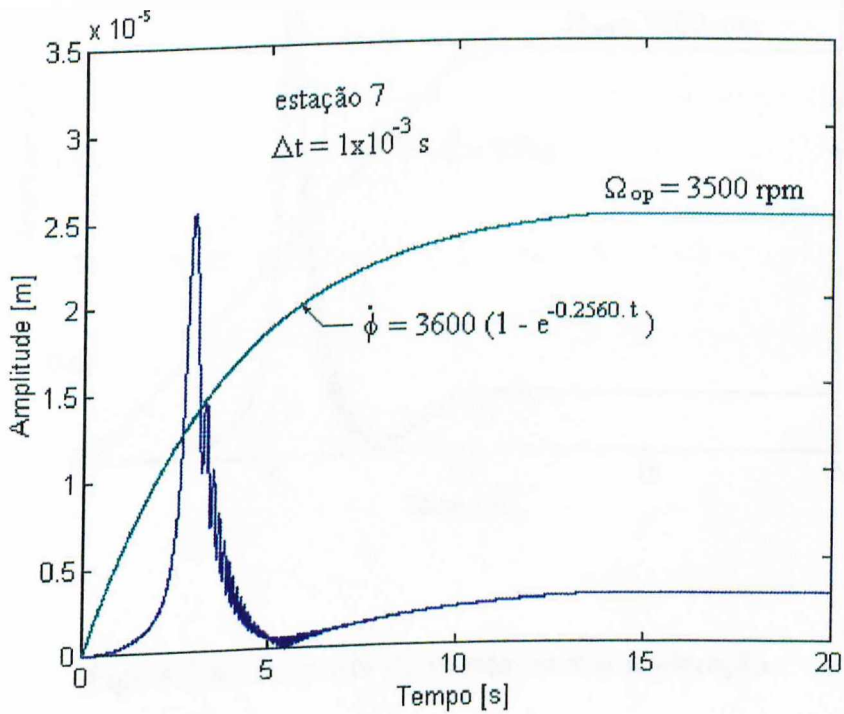


Figura 5.5 - Resposta transiente: função de velocidade exponencial

Através das figuras 5.4 e 5.5, observa-se, como dito anteriormente, que a função exponencial apresenta uma aceleração mais alta, inicialmente, e mais baixa próximo à velocidade de operação, resultando numa transição mais suave para o regime permanente.

Considerando-se ainda o rotor I, calculou-se sua resposta utilizando-se diferentes funções lineares: uma com aceleração mais baixa (350 rpm/s) e outra com aceleração mais alta (2000 rpm/s). Os seus gráficos encontram-se nas figuras 5.6 e 5.7, respectivamente.

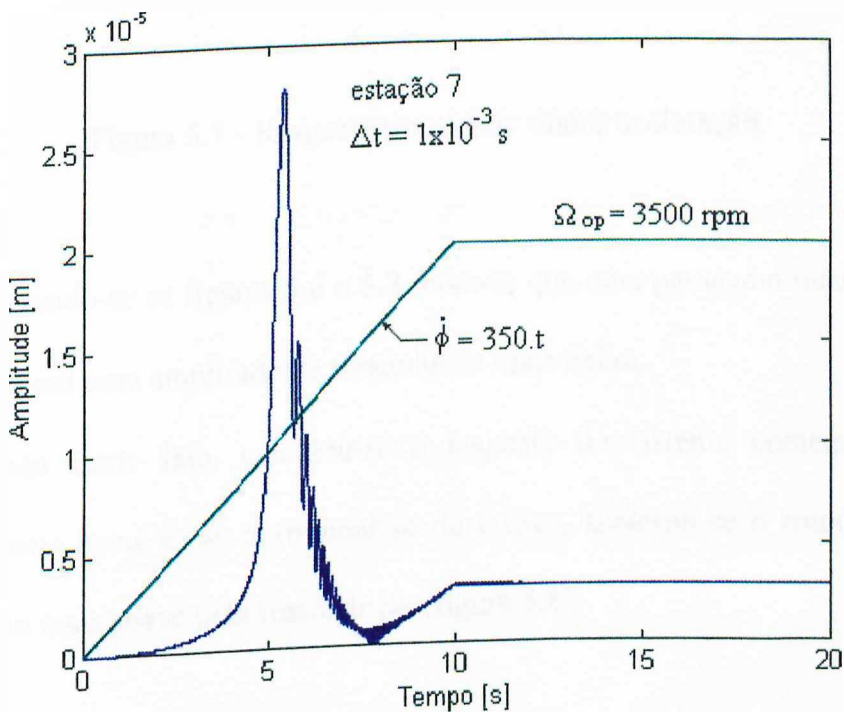


Figura 5.6 - Resposta transitiente: menor aceleração.

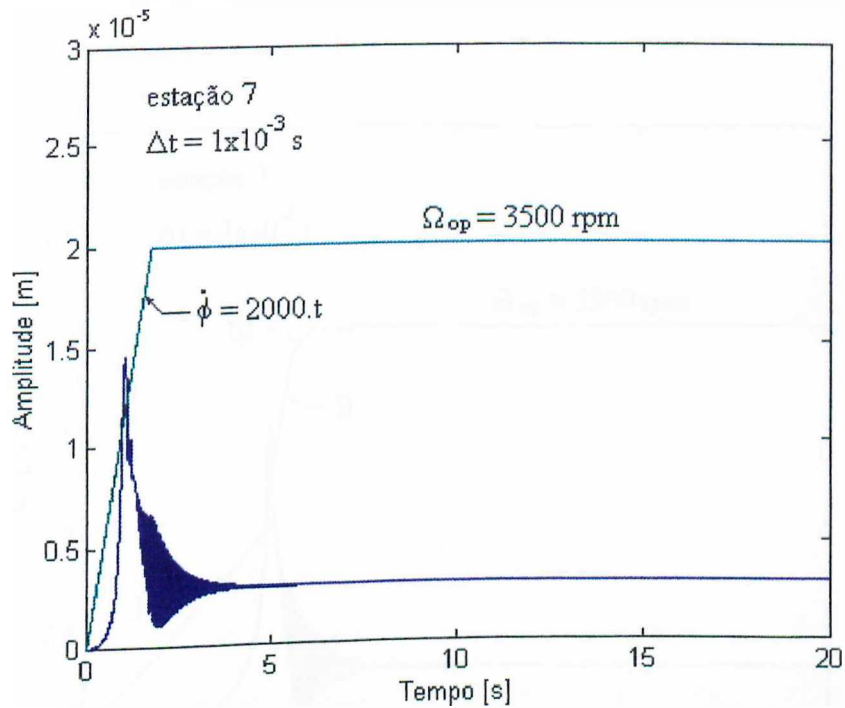


Figura 5.7 - Resposta transiente: maior aceleração.

Observando-se as figuras 5.6 e 5.7, nota-se que uma passagem mais rápida pela crítica resulta em uma amplitude de ressonância mais baixa.

A partir deste fato, calculou-se a resposta do sistema começando com a aceleração mais baixa e, ao aproximar-se da crítica, acelerou-se o rotor, obtendo-se uma transição mais suave pela ressonância (figura 5.8).

Equação I:  $\dot{\phi} = 350 t$  para  $0 < t < 4.8 \text{ s}$

Equação II:  $\dot{\phi} = -7920 + 2000 t$  para  $4.8 < t < 5.6 \text{ s}$

Equação III:  $\dot{\phi} = 1320 + 350 t$  para  $5.6 < t < 20 \text{ s}$



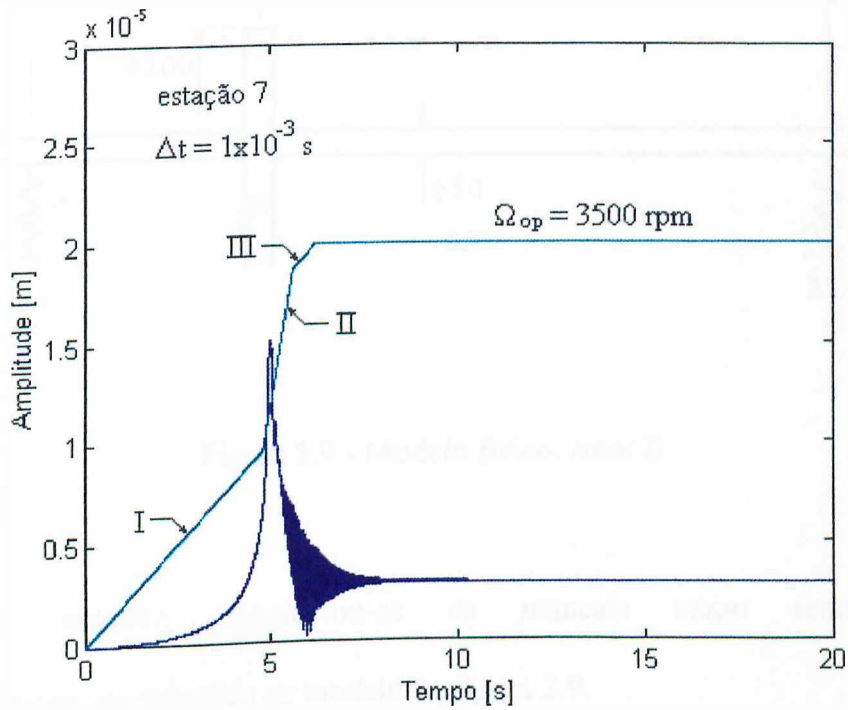


Figura 5.8 - Resposta transiente: variação da equação de velocidade

## 5.2 - Aplicação II

O rotor utilizado nesta simulação é semelhante ao rotor I, possuindo as mesmas características (ver tabela 5.1), exceto com relação aos mancais cuja rigidez pode ser alterada, conforme sugere seu modelo na figura 5.9.

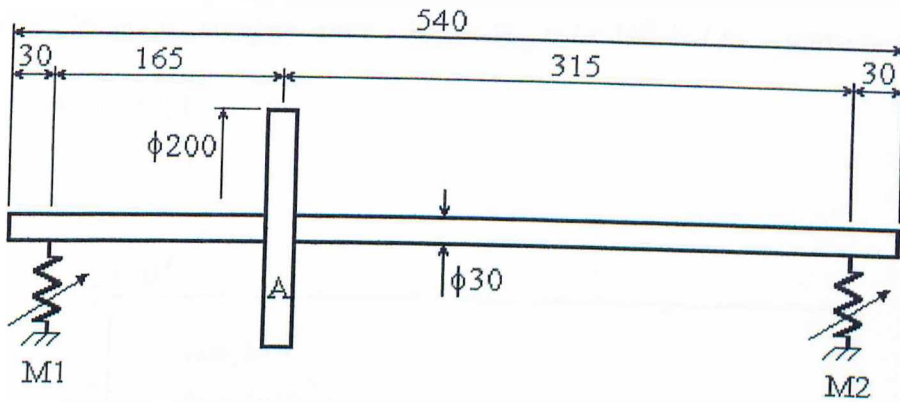


Figura 5.9 - Modelo físico: rotor II

Neste trabalho, considerou-se os mancais como sendo mancais eletromagnéticos, semelhantes ao modelo da figura 2.9.

A figura 5.10 apresenta o modelo do rotor II discretizado em estações.

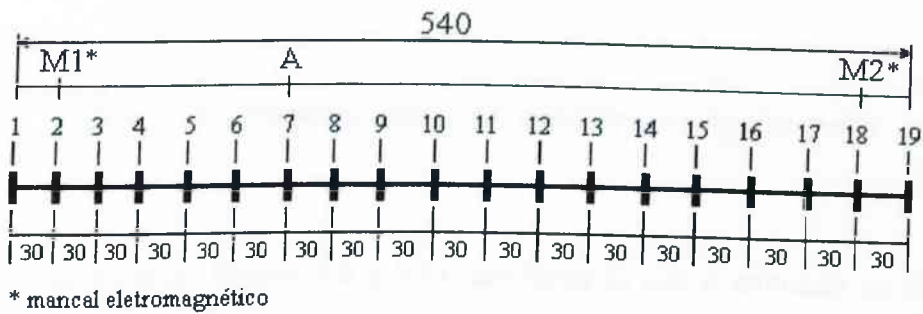


Figura 5.10 - Modelo discretizado: rotor II

Considerando-se a rigidez dos mancais igual a  $K_{xx} = K_{zz} = 2 \times 10^5 \text{ N/m}$ , obtém-se a resposta que se encontra no gráfico da figura 5.6.

Elevando-se a rigidez para  $K_{xx} = K_{zz} = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$ , tem-se a resposta mostrada na figura 5.11.

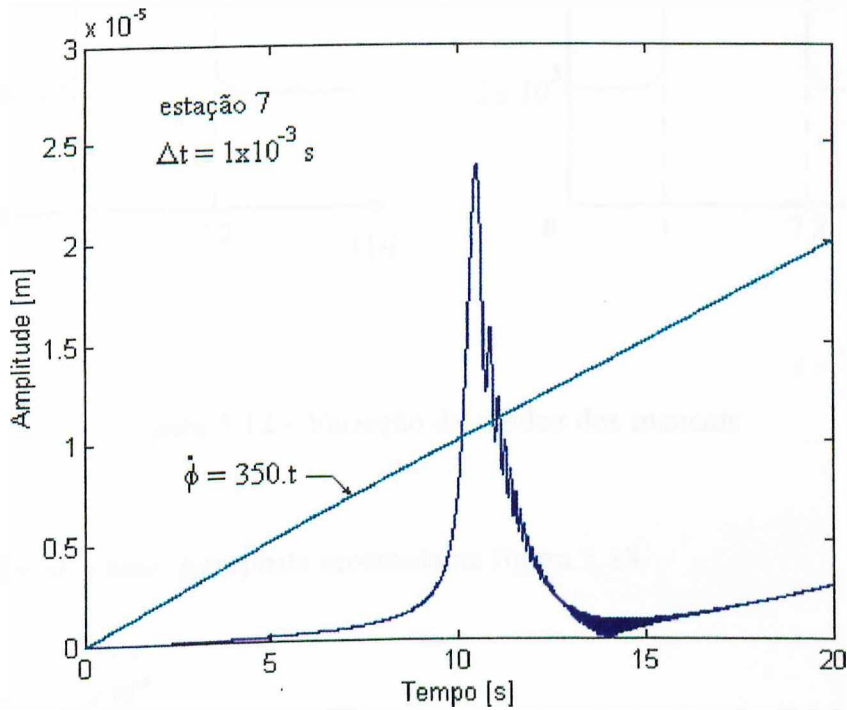


Figura 5.11 - Resposta transiente: mancais com rigidez maior

Analisando-se as figuras 5.6 e 5.11, confirma-se que o aumento na rigidez dos mancais provoca elevação no valor da velocidade crítica (de, aproximadamente, 1900 rpm para 3700 rpm), devido ao aumento ocorrido nas frequências naturais do sistema.

Utilizando-se o procedimento descrito no item 2.4, variou-se a rigidez dos mancais segundo os gráficos da figura 5.12.

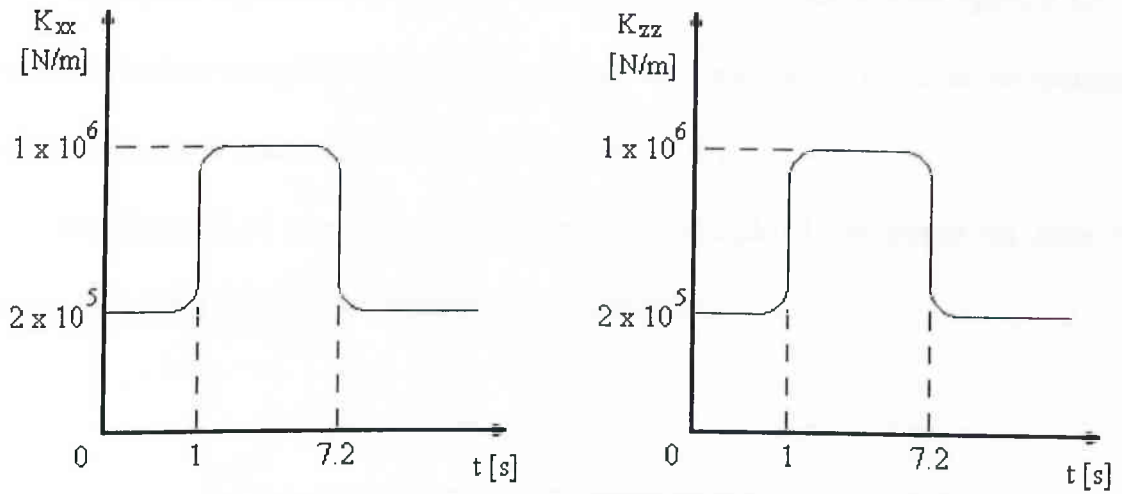


Figura 5.12 - Variação da rigidez dos mancais

Obteve-se, então, a resposta mostrada na figura 5.13.

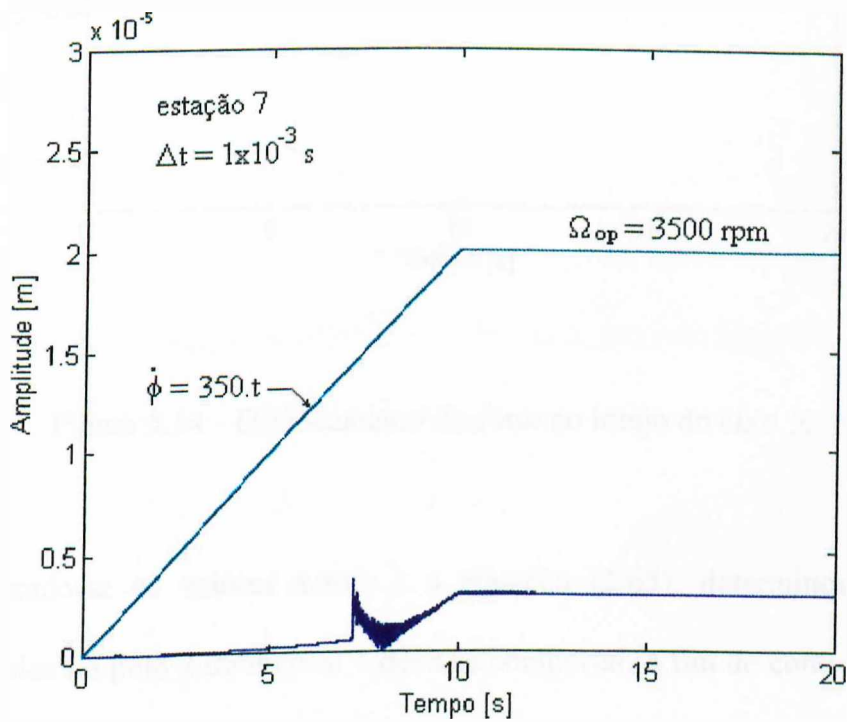


Figura 5.13 - Resposta transiente: variação da rigidez dos mancais

Para que a rigidez dos mancais se comporte da forma indicada na figura 5.12, as correntes elétricas nos pólos dos mancais devem ser controladas. Tal controle depende dos deslocamentos instantâneos ao longo dos eixos X e Z.

Na figura 5.14 tem-se o deslocamento da estação 2, ao longo do eixo X, considerando-se a atuação dos mancais eletromagnéticos.

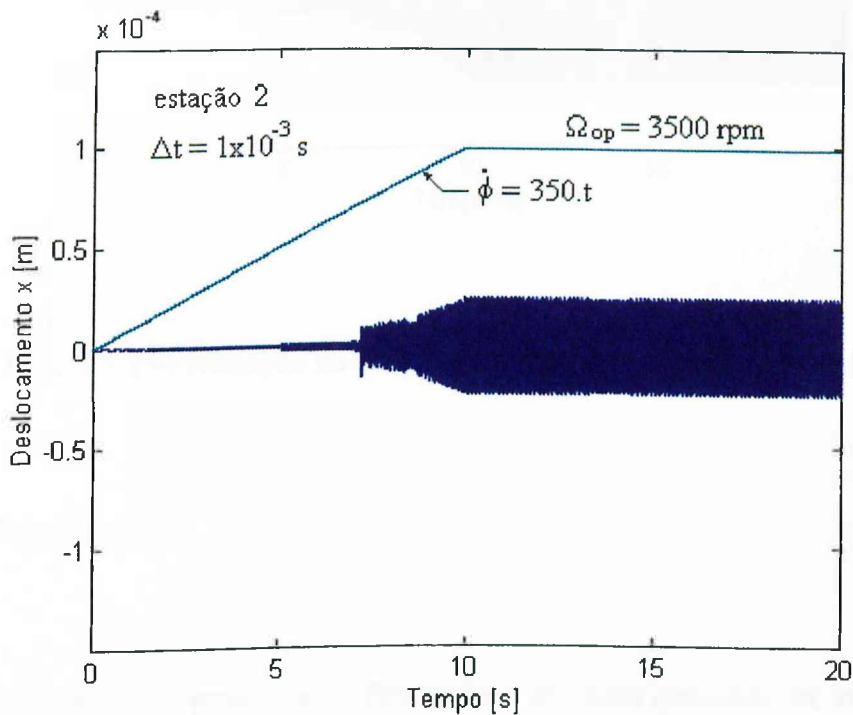


Figura 5.14 - Deslocamento do rotor ao longo do eixo X

Utilizando-se os valores acima e a equação (2.63), determinou-se como a corrente elétrica no pólo 2 do mancal 1 deve se comportar, a fim de controlar a rigidez do referido mancal. O gráfico da corrente elétrica no domínio do tempo encontra-se na figura 5.15.

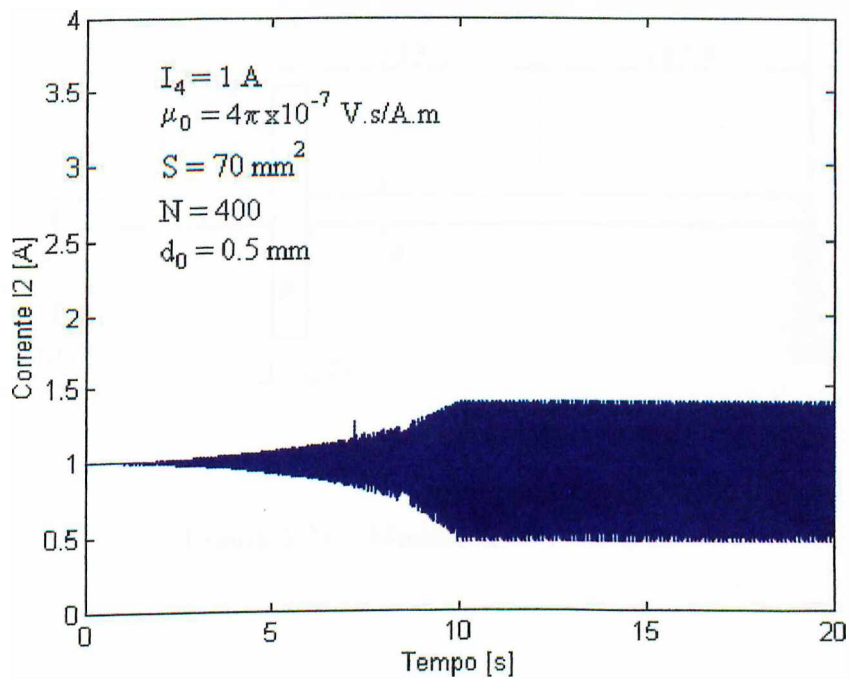


Figura 5.15 - Variação da corrente elétrica no pólo 2 do mancal 1

### 5.3 - Aplicação III

Nesta aplicação, procurou-se determinar as consequências da introdução de forças de controle, ao longo do rotor, no comportamento transiente do sistema. Tais forças foram calculadas através de métodos de otimização, para o rotor em regime permanente ( $\Omega = \text{cte}$ ).

O modelo físico do rotor simulado é apresentado na figura 5.16 e seu modelo discretizado encontra-se na figura 5.17.

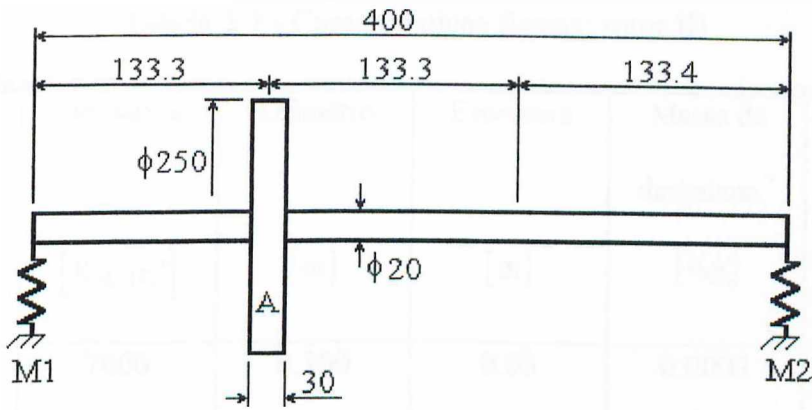


Figura 5.16 - Modelo físico: rotor III

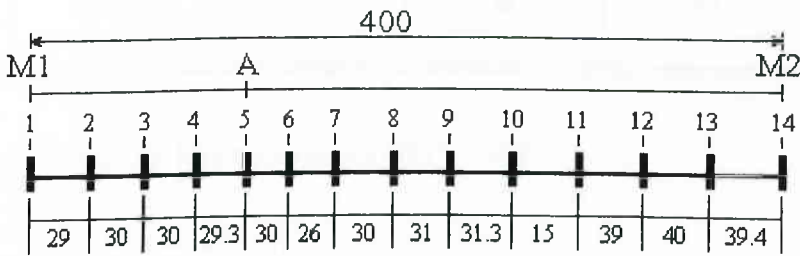


Figura 5.17 - Modelo discretizado: rotor III

Na tabela 5.2 tem-se as características físicas do rotor III.

O diagrama de Campbell do rotor III encontra-se na figura 5.18.

Tabela 5.2 - Características físicas: rotor III

Disco	Densidade [Kg/m <sup>3</sup> ]	Diâmetro [m]	Espessura [m]	Massa de desbalanc.* [Kg]	Excentric. [m]
A	7800	0.250	0.03	0.0001	0.1
Mancal	K <sub>xx</sub> [N/m]	K <sub>zz</sub> [N/m]	K <sub>xz</sub> / K <sub>zx</sub> [N/m]	C <sub>xx</sub> [N.s/m]	C <sub>zz</sub> [N.s/m]
M1	1x10 <sup>5</sup>	1x10 <sup>5</sup>	0	20	20
M2	1x10 <sup>5</sup>	1x10 <sup>5</sup>	0	20	20

\* grau 0,4 de qualidade de balanceamento (ISO-1940)

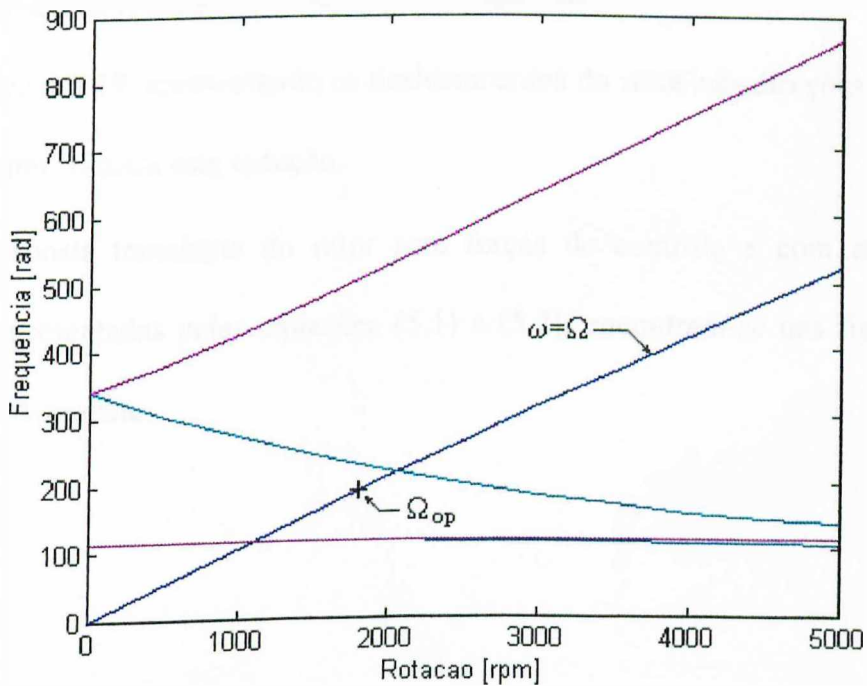


Figura 5.18 - Diagrama de Campbell: rotor III



Através do programa OTIM e utilizando-se duas estações de controle (estações 3 e 10), calcularam-se as forças ótimas de controle para uma velocidade de rotação de 1800 rpm, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \text{estação 3: } F_{c_x} &= -6.91 \operatorname{sen}(565.t) \operatorname{sen}(-1.19) \\ F_{c_z} &= -6.91 \operatorname{sen}(565.t) \operatorname{cos}(-1.19) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \text{estação 10: } F_{c_x} &= 3.13 \operatorname{sen}(565.t) \operatorname{sen}(-0.84) \\ F_{c_z} &= 3.13 \operatorname{sen}(565.t) \operatorname{cos}(-0.84) \end{aligned} \quad (5.2)$$

A energia de deformação global do sistema sem forças de controle era de  $0.8531 \times 10^{-5}$  J e, com as forças de controle, passou para  $0.2515 \times 10^{-6}$  J, o que corresponde a uma redução de 97%, aproximadamente.

A figura 5.19, apresentando os deslocamentos do rotor nas direções X e Z, para  $\Omega = 1800$  rpm, mostra esta redução.

A resposta transiente do rotor sem forças de controle e com as forças de controle, representadas pelas equações (5.1) e (5.2), encontram-se nas figuras 5.20 e 5.21, respectivamente.

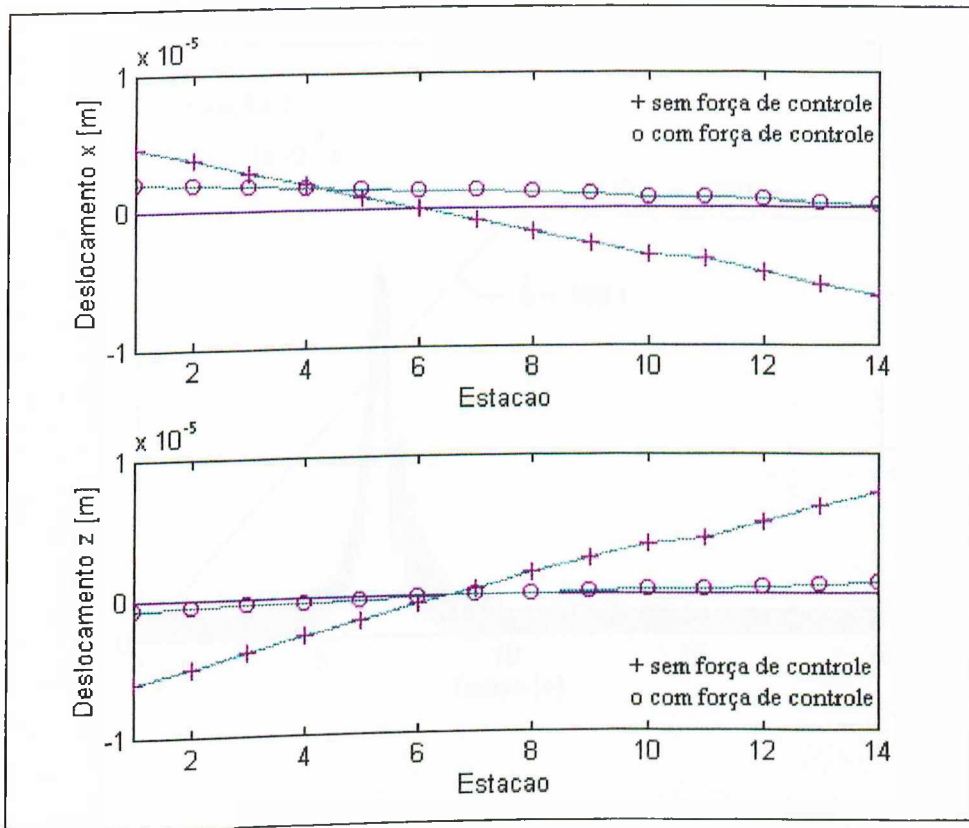


Figura 5.19 - Deslocamento do rotor nas direções X e Z

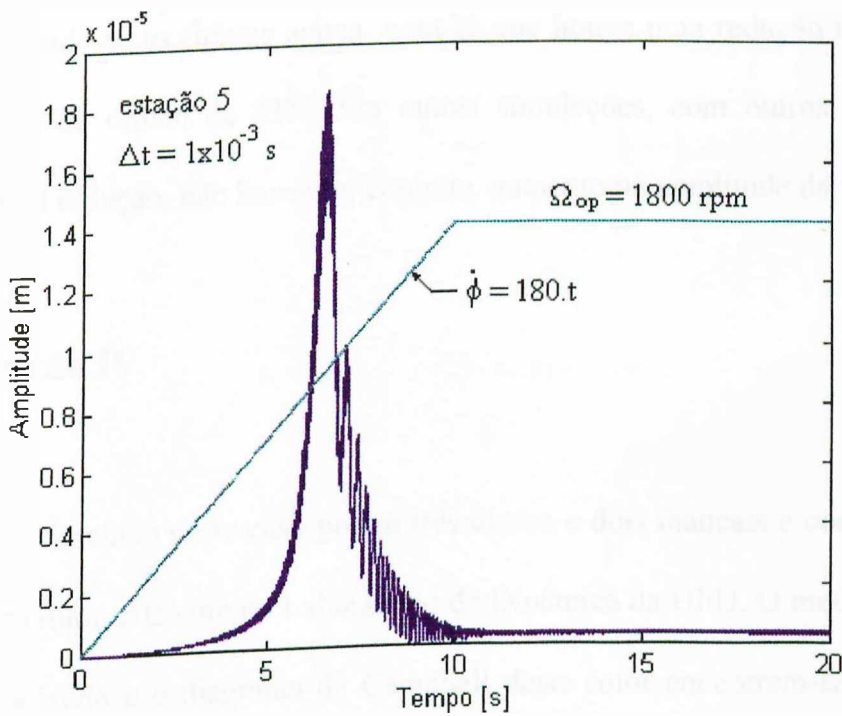


Figura 5.20 - Resposta transiente sem forças de controle

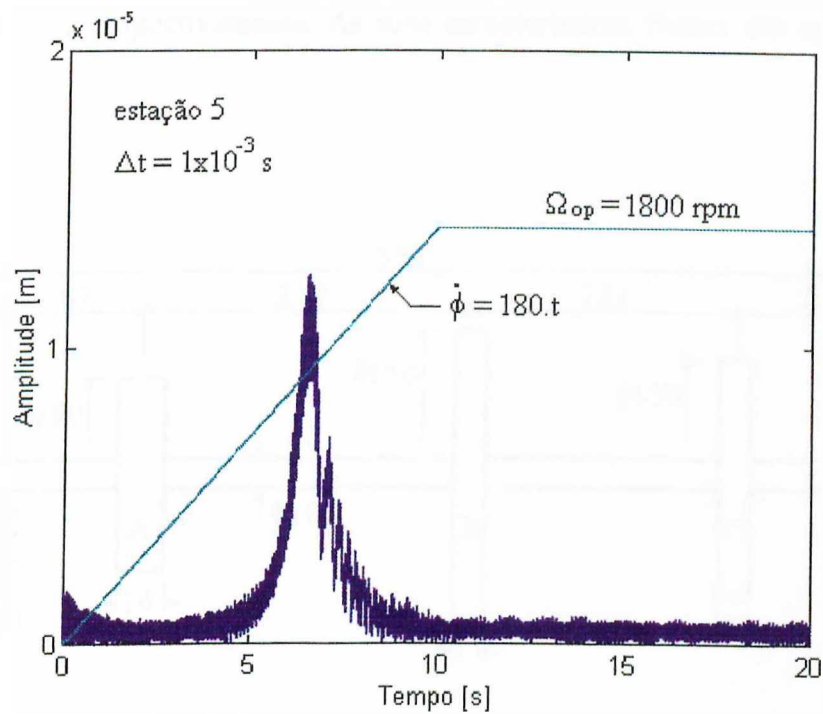


Figura 5.21 - Resposta transiente com forças de controle

Observando-se as figuras acima, nota-se que houve uma redução na amplitude de ressonância da ordem de 33%. Em outras simulações, com outros rotores, não constatou-se tal redução, não havendo, contudo, aumento na amplitude de vibração.

#### 5.4 - Aplicação IV

O rotor simulado neste caso possui três discos e dois mancais e corresponde ao modelo de um rotor existente no Laboratório de Dinâmica da UFU. O modelo físico, o modelo discretizado e o diagrama de Campbell deste rotor encontram-se nas figuras

5.22, 5.23 e 5.24, respectivamente. As suas características físicas são apresentadas na tabela 5.3.

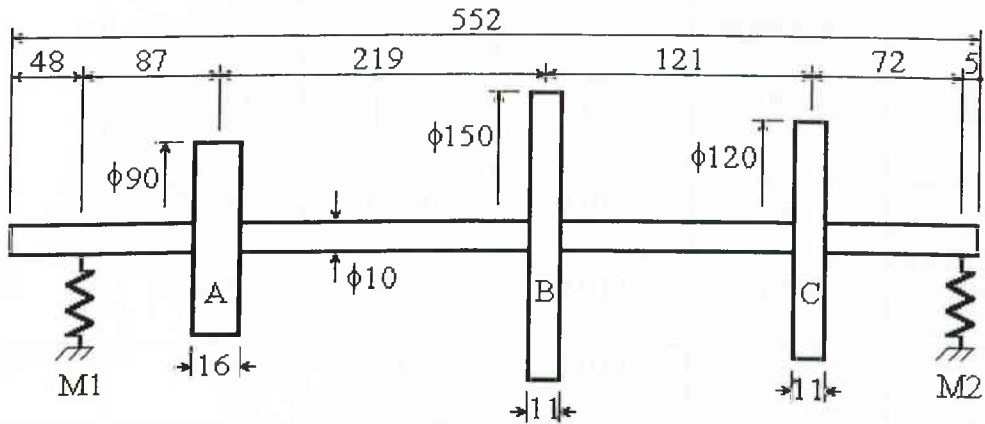


Figura 5.22 - Modelo físico: rotor IV

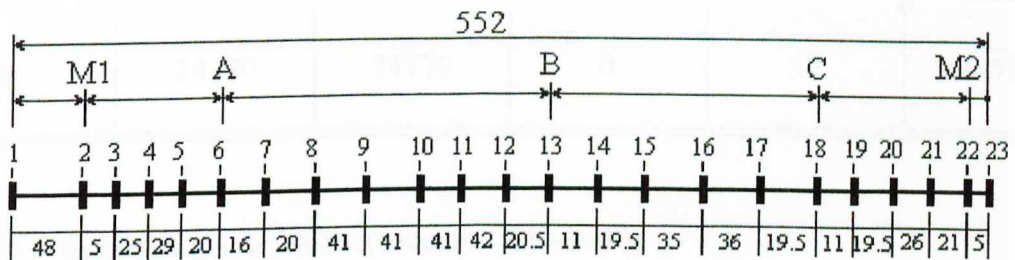


Figura 5.23 - Modelo discretizado: rotor IV

Tabela 5.3 - Características físicas: rotor IV

Disco	Densidade [Kg/m <sup>3</sup> ]	Diâmetro [m]	Espessura [m]	Massa de desbalanc.* [Kg]	Excentric. [m]
A	7800	0.09	0.016	-	-
B	7800	0.15	0.011	0.001	0.075
C	7800	0.12	0.011	-	-
Mancal	K <sub>xx</sub> [N/m]	K <sub>zz</sub> [N/m]	K <sub>xz</sub> / K <sub>zx</sub> [N/m]	C <sub>xx</sub> / C <sub>zz</sub> [N.s/m]	Massa adicional [Kg]
M1	18750	18750	0	30	0.818
M2	24770	24770	0	30	0.735

\* grau 6,3 de qualidade de balanceamento (ISO-1940)

O objetivo desta simulação é provocar variações na massa do rotor e determinar suas consequências sobre o comportamento dinâmico do mesmo.

A resposta da partida do rotor, sujeito a excitação por desbalanceamento, é mostrada na figura 5.25.

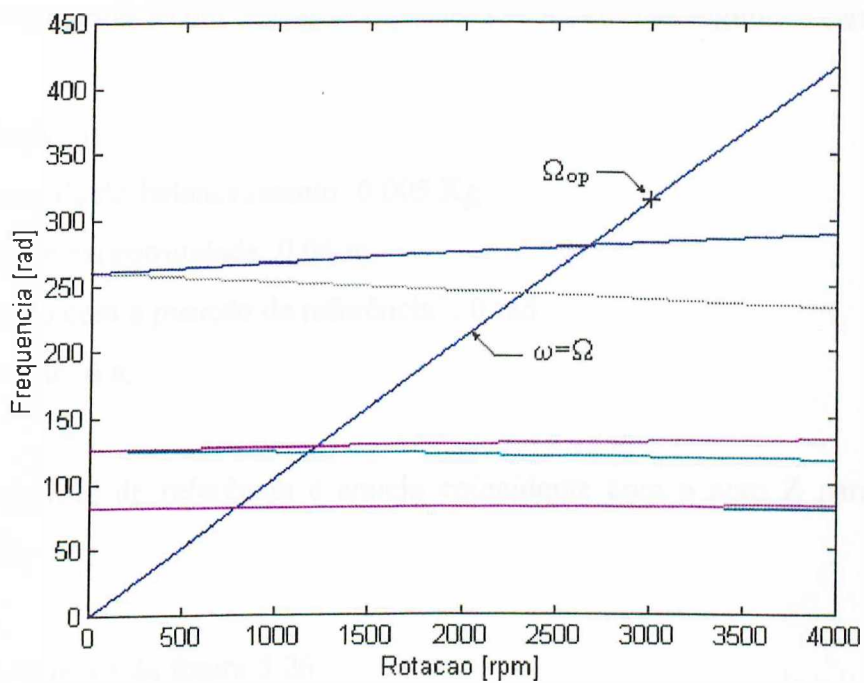


Figura 5.24 - Diagrama de Campbell: rotor IV

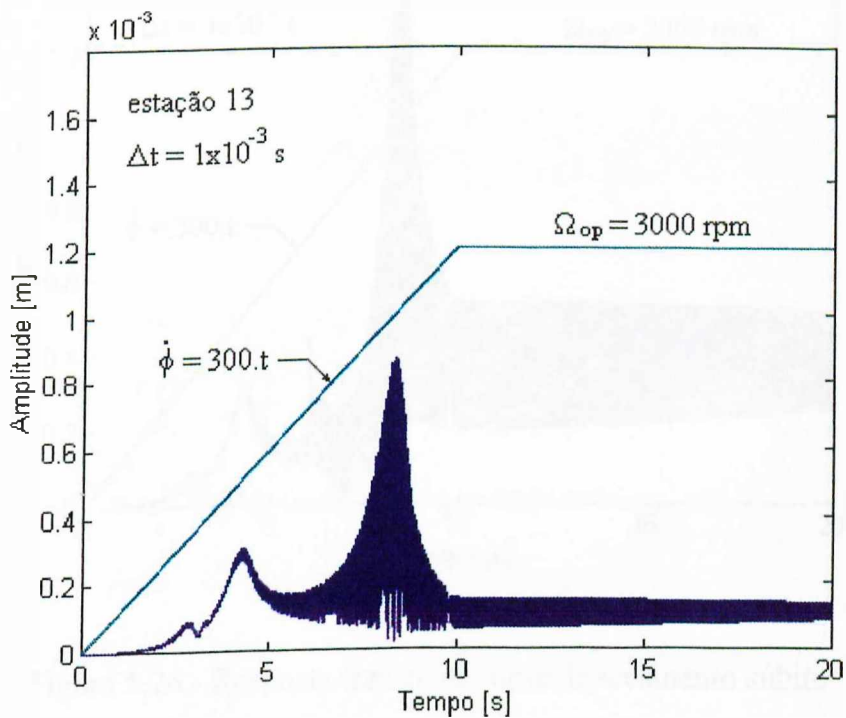


Figura 5.25 - Resposta transiente: rotor IV

Considerando-se um desbalanceamento súbito, com as seguintes características:

- . estação: 6
- . massa de desbalanceamento: 0.005 Kg
- . raio de excentricidade: 0.04 m
- . ângulo com a posição de referência\*: 0 rad
- . instante: 6 s,

\* a posição de referência é aquela coincidente com o eixo Z para o instante  $t = 0$  s

obteve-se a resposta da figura 5.26.

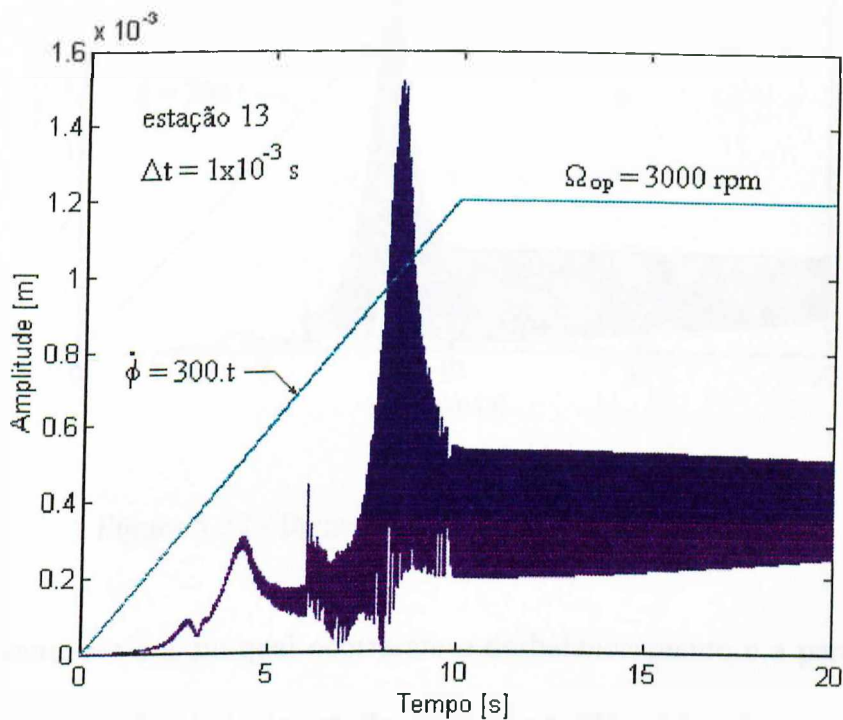


Figura 5.26 - Resposta transiente: desbalanceamento súbito

Para o caso da perda de massa, considerou-se condições semelhantes:

- . estação: 6
- . massa perdida: 0.01 Kg
- . raio de excentricidade: 0.03
- . ângulo com a posição de referência: 0 rad
- . instante: 6 s,

tendo como resultado a resposta apresentada na figura 5.27.

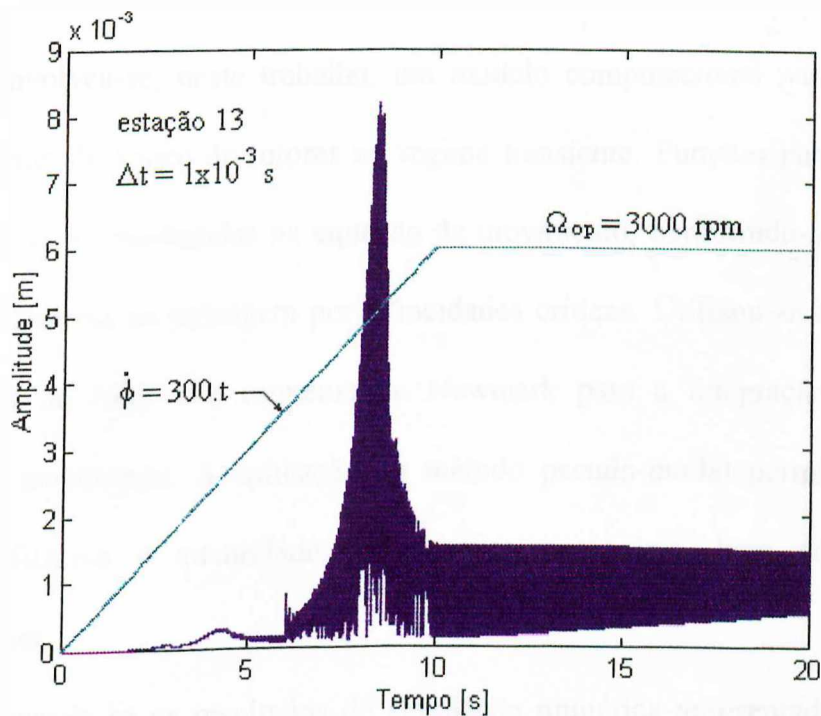


Figura 5.27 - Resposta transiente: perda de massa

O instante  $t = 6 \text{ s}$ , no qual ocorreram o desbalanceamento e a perda de massa, corresponde à uma velocidade de rotação entre a segunda e a terceira crítica. Observa-se nos gráficos das figuras 5.26 e 5.27, o aumento provocado na amplitude de vibração a partir desse instante, em decorrência do aumento da força de desbalanceamento.



## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Desenvolveu-se, neste trabalho, um modelo computacional para a análise do comportamento dinâmico de rotores no regime transiente. Funções para a velocidade de rotação foram introduzidas na equação de movimento, permitindo-se determinar a resposta do sistema na passagem por velocidades críticas. Utilizou-se o MMT para a discretização do rotor e o esquema de Newmark para a integração numérica da equação de movimento. A aplicação do método pseudo-modal permitiu reduzir de modo significativo a quantidade de memória necessária, bem como o tempo computacional.

Observando-se os resultados de simulação numérica apresentados no capítulo V, pode-se concluir que a introdução de funções para a velocidade de rotação do rotor, no modelo matemático, permite o estudo do comportamento dinâmico transiente do sistema, principalmente na passagem por velocidades críticas, constituindo-se, assim, em uma valiosa ferramenta para o projeto e otimização de máquinas rotativas.

A técnica do aumento da aceleração do rotor durante a passagem por velocidades críticas, permite a redução da amplitude de ressonância. De modo semelhante, a utilização de mancais que possibilitem a variação de sua rigidez pode ser

uma estratégia interessante, possibilitando, também, redução da vibração na passagem por críticas. Esta última técnica mostrou-se eficiente proporcionando redução na amplitude de ressonância da ordem de 87%, utilizando-se mancais do tipo magnético.

Tudo indica que a utilização de forças harmônicas de controle, obtidas em regime permanente através de técnicas de otimização, não prejudica o comportamento do rotor durante sua aceleração. Em alguns casos (como o apresentado no capítulo V), houve até uma pequena redução no nível de vibração, na passagem pela crítica. Maiores estudos são, entretanto, necessários.

A variação na massa rotativa provoca, em geral, aumento considerável no nível de vibração do rotor, prejudicando, portanto, o seu funcionamento e aumentando o desgaste da máquina. A única exceção seria quando tal variação ocorre no sentido de eliminar o desbalanceamento inicial existente.

O Método de Newmark, utilizado para a integração numérica da equação de movimento, apresentou boa performance, principalmente com relação à estabilidade, mostrando ser uma ferramenta eficaz dentre os métodos numéricos de integração. A precisão dos resultados depende basicamente do passo de tempo utilizado. Este, por sua vez, é escolhido em função da frequência associada ao modo de maior ordem retido para a redução do sistema. Sugere-se que o passo de integração seja no mínimo dez vezes menor que o período relacionado a esta frequência.

O programa de otimização OTIM apresentou bons resultados apesar da complexidade da função objetivo, que possui vários mínimos locais [3.1]. Isto obriga o usuário a fazer uma discretização do seu domínio e, após executar o programa várias

vezes partindo de diferentes condições iniciais, escolher a configuração que leve ao menor valor para a função objetivo.

A maior contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta para a análise de movimentos transientes em sistemas rotativos, durante o seu acionamento, desde o repouso até a velocidade de operação.

Para a sequência de pesquisas nesta área, pode-se sugerir as seguintes linhas de trabalho:

- desenvolvimento de um sistema de acionamento de rotores em uma bancada experimental, que possibilite a comprovação dos resultados de simulação obtidos;
- estudo de processos de otimização em regime transiente, nos quais a variável tempo seja considerada como variável de projeto;
- aprimoramento das técnicas apresentadas e estudo de novas técnicas para o controle das vibrações na passagem por velocidades críticas;
- análise de outros tipos de movimento transiente (contato rotor-estator, por exemplo).

A realização desta dissertação permitiu a publicação dos seguintes trabalhos:

- 1) PACHECO, R. P.; STEFFEN Jr, V.; "On the Transient Behavior of Rotors", Proceedings of the 15th Canadian Congress of Applied Mechanics - CANCAM 95, vol I, Victoria, 1995, pp. 352-353.
  
- 2) PACHECO, R. P.; STEFFEN Jr, V.; "Comportamento Dinâmico de Rotores no Regime Transiente", Anais do XIII Congresso Brasileiro e II Congresso Íbero Americano de Engenharia Mecânica - COBEM-CIDIM/95, Belo Horizonte, 1995.
  
- 3) PACHECO, R. P.; STEFFEN Jr, V.; "Comportamento Transiente de Máquinas Rotativas", Anais do VII SEMEC, Uberlândia, 1994, pp. 9-10.

## Referências Bibliográficas

- [1] LALLANE, M.; FERRARIS, G.; "Rotordynamics Prediction in Engineering", John Wiley & Sons, Chichester, 1983.
- [2] RATAN, S. and RODRIGUEZ, J.; "Transient Dynamic Analysis of Rotors Using SMAC Techniques: Part 1, Formulation", ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 114, N<sup>o</sup> 2, pp. 477-481.
- [3] RATAN, S. and RODRIGUEZ, J.; "Transient Dynamic Analysis of Rotors Using SMAC Techniques: Part 2, Numerical Study", ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 114, N<sup>o</sup> 2, pp. 482-488.
- [4] SUBBIAH, R.; KUMAR, A. S. and SANKAR, T. S.; "Transient Dynamic Analysis of Rotors Using the Combined Methodologies of Finite Elements and Transfer Matrix", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, N<sup>o</sup> 2, June, 1988, pp. 448-452.
- [5] SAKATA, M.; AIBA, T. and OHNABE, H.; "Transient Vibration of High-Speed Lightweight Rotors Due to Sudden Imbalance", ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 105, pp. 480-486.
- [6] KUJATH, M. R. and WANPING, Z.; "Rotor Transient Response Induced by Losses in the Rotating Mass", ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 114, April, 1992, pp. 161-170.
- [7] YEE, E. K. L. and TSUEI, Y. G.; "Transient Response by Component Modal Synthesis Method", ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 112, 1990, pp. 21-25.

- [8] LACERDA, H. B.; "Racionalização do Método dos Coeficientes de Influência Aplicado ao Balanceamento de Rotores Flexíveis", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 1991.
- [9] HUNDAL, M. S. and HARKER, R. J.; "Balancing of Flexible Rotors Having Arbitrary Mass and Stiffness Distribution", Journal of Engineering for Industry, May, 1966, pp. 217-223.
- [10] ROBERTS, J. B.; "Vibration Control of Flexible Transmission Shaft by Means of a Squeeze-Film Damper: An Experimental Investigation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 113, N<sup>o</sup> 2, 1987, pp. 329-345.
- [11] OLIVEIRA, A. G.; "Controle das Vibrações de Rotores Flexíveis pela Introdução de Forças Externas, Através de Técnicas de Otimização", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Fevereiro 1994, 117 p..
- [12] ARAÚJO, C. A.; "Controle da Vibração de Rotores Flexíveis Usando Forças Magnéticas Externas", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 1993, 150 p..
- [13] ZIENKIEWICZ, O. C.; "The Finite Element Method", McGraw-Hill, 3<sup>a</sup> ed., Maidenhead, 1977.
- [14] MEIROVITCH, L.; "Elements of Vibration Analysis", McGraw-Hill, 2<sup>a</sup> ed., Nova York, 1986, 560 p..
- [15] DOPKIN, J. A.; SHOUP, T. E.; "Rotor Resonant Speed Reduction Caused by Flexibility of Disks", Journal of Engineering for Industry, Vol. 96, Novembro 1974, pp. 1328-1333.
- [16] VANCE, J. M.; "Rotordynamics of Turbomachinery", John Wiley & Sons, Nova York, 1988, 388 p..

- [17] ROARK, R. J.; "Fórmulas for Stress and Strain", McGraw-Hill, Nova Yorque, 1965.
- [18] MURPHY, B. T.; VANCE, J. M.; "An Improved Method for Calculating Critical Speeds and Rotordynamic Stability of Turbomachinery", ASME Journal of Engineering for Power, July 1983, 5 p..
- [19] LALLANE, M. et alli; "Mechanical Vibration for Engineers", John Wiley & Sons, Chichester, 1983.
- [20] MINH, T. D.; "Etude du Comportement Dynamique des Rotors Flexibles", Dissertação de Doutorado, Lyon, 1981.
- [21] BATHE, K. J.; WILSON, E. L.; "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, 1976.
- [22] BORNSTEIN, K. R.; "Dynamic Load Capabilities of Active Electromagnetic Bearings, Journal of Tribology, Vol. 113, Julho 1991, pp. 598-603.
- [23] HABERMANN, H.; "Paliers Magnétiques", Fonction Guidage en Rotation, 1986, 20 p..
- [24] FARIA, M. L. M.; "Uma Contribuição aos Procedimentos de Otimização Aplicados a Sistemas Mecânicos", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Setembro 1991, 97 p..
- [25] VANDERPLAATS, G.; "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design", McGraw-Hill, 1984.

## ANEXO 1

### Estrutura do Arquivo de Dados

Os arquivos de dados dos rotores a serem simulados possuem a seguinte estrutura:

**{numero-de-discos}**

ned

**{lista-das-estacoes-com-discos}**

led

**{rotacao}**

wrot - [rpm] (velocidade de operação do rotor)

**{campbell}**

wroti,wrotf,wrotp - [rpm],[rpm],[rpm] (rotação inicial, rotação final, passo de incremento da rotação)

**{numero-de-estacoes}**

nes

**{numero-de-modos}**

nmod - (número de modos considerados na aplicação do método modal)

**{numero-de-frequencias}**

nfn

**{numero-de-mancais}**

nem



**{lista-das-estacoes-com-mancais}**

lem

**{numero-maximo-de-iteracoes}**

itmx

**{fator-de-forma}**

ffor

**{fator-de-ajuste-do-polinomio}**

fatr

**{lista-dos-comprimentos-das-estacoes}**

co(i) - i=1,nes [m]

**{lista-dos-diametros-das-estacoes}**

di(i) - i=1,nes [m]

**{variacao-de-rigidez}**

rzz(i),rxx(i) - i=1,nem [N/m]

**{listas-das-rigidezes-nos-mancais}**

rzz(i),rzx(i),rxz(i),rxx(i),rzt(i),rtz(i),rzt(i),rfz(i),rxt(i),rtx(i),rxf(i),rfx(i),rtt(i),rtf(i),rft(i),rff(i) -  
i=1,nem [N/m]

**{listas-dos-amortecimentos-nos-mancais}**

czz(i),czx(i),cxz(i),cxx(i),czt(i),ctz(i),czf(i),cfz(i),cxt(i),ctx(i),cxf(i),cfx(i),ctt(i),ctf(i),  
cft(i),cff(i) - i=1,nem [N s/m]

**{listas-das-massas-adic.-dos-mancais}**

pm(i) - i=1,nem [Kg]

**{listas-das-inerc.-transv.-dos-mancais}**

wt(i) -  $i=1, \text{nem}$  [ Kg m<sup>2</sup> ]

**{listas-das-inerc.-polares-dos-mancais}**

wp(i) -  $i=1, \text{nem}$  [ Kg m<sup>2</sup> ]

**{considera-efeito-de-cisalhamento}**

iefc - 0=não, 1=sim

**{considera-material-homogeneo}**

iprm - 0=não, 1=sim

**{lista-das-densidades}**

ro(i) -  $i=1, \text{nes}$  [ Kg/m<sup>3</sup> ]

Obs.: se o material for homogêneo, basta um único valor.

**{lista-das-elasticidades}**

el(i) -  $i=1, \text{nes}$  [ N/m<sup>2</sup> ] (coeficientes de elasticidade)

Obs.: se o material for homogêneo, basta um único valor.

**{lista-dos-cisalhamentos}**

gc(i) -  $i=1, \text{nes}$  [ N/m<sup>2</sup> ] (coeficientes de cisalhamento)

Obs.: se o material for homogêneo, basta um único valor.

**{desbalanceamento}**

nemd - (número de estações com massas desbalanceadas)

lemd(i) -  $i=1, \text{ned}$  (lista das estações com massas desbalanceadas)

rmd(i), rexc(i), ralf(i) -  $i=1, \text{ned}$  [Kg], [m], [rad] (massa de desbalanceamento, excentricidade, posição angular inicial da massa de desbalanceamento em relação ao eixo Z)

**{variacao-da-aceleracao}**

axn,bxn,tiv,tfv,axu - [rpm],[rpm/s],[s],[s],[rpm]

Considera-se que o rotor parta segundo a equação  $\dot{\phi} = ax + bx t$  para a velocidade de rotação. No instante  $t=tiv$  a equação  $\dot{\phi} = axn + bxn t$  passa a ser utilizada. A partir do instante  $t=tfv$ , utiliza-se a equação  $\dot{\phi} = axu + bx t$ .

**{variacao-da-velocidade}**

ivv - (1-função exponencial para a velocidade de rotação, 2-função linear)

**{exponencial}**

ax,bx,rlam - [rpm], [rpm], [1/s] (função exponencial para a velocidade de rotação)

A equação é do tipo  $\dot{\phi} = ax + bx e^{-rlam t}$ .

**{linear}**

ax,bx - [rpm], [rpm/s] (função linear para a velocidade de rotação)

A equação é do tipo  $\dot{\phi} = ax + bx t$ .

**{tempo}**

ti,tf,dt - [s], [s], [s] (intervalo de integração numérica: tempo inicial, tempo final, passo de integração)

**{condicoes-iniciais}**

desi(i,1) -  $i=1,4.nes$  [m] ou [rad] (deslocamento inicial do rotor para cada g.d.l.)

vel(i,1) -  $i=1,4.nes$  [m/s] ou [rad/s] (velocidade inicial do rotor para cada g.d.l.)

**{estacao}**

iest - (estação para a qual se deseja calcular a resposta)

**{controle}**

nec - (número de estações com forças de controle)

lec(i) -  $i=1, nec$  (lista das estações com forças de controle)

afc(i),ffc(i),aifc(i) -  $i=1, nec$  [N], [rad/s], [rad] (características da força de controle: amplitude, frequência, ângulo de incidência em relação ao eixo Z)

**{desbalanceamento-subito}**

neds - número da estação na qual ocorreu o desbalanceamento

qmd,raio,ang - [Kg], [m], [rad] (massa desbalanceada, excentricidade, posição angular do desbalanceamento em relação à posição de referência)

tds - [s] (instante no qual ocorreu o desbalanceamento)

**{variacao-de-massa}**

nepm - (número da estação na qual ocorreu perda de massa)

qmp,dpm,apm - [Kg], [m], [rad] (massa perdida, posição radial da perda de massa, posição angular da massa perdida em relação à posição de referência)

rmp - [m] (raio da massa perdida)

ti,tf,dt - [s], [s], [s] (intervalo de integração: instante em que ocorreu a perda de massa, tempo final, passo de integração)

**ANEXO 2****Arquivo de Dados: Rotor I**

{numero-de-discos}

1

{lista-das-estacoes-com-discos}

7

{rotacao}

3500.

{campbell}

0.,5500.,500.

{numero-de-estacoes}

19

{numero-de-modos}

4

{numero-de-frequencias}

6

{numero-de-mancais}

2

{lista-das-estacoes-com-mancais}

2,18

{numero-maximo-de-iteracoes}

1000

{fator-de-forma}

1.33

{fator-de-ajuste-do-polinomio}

1500.

{lista-dos-comprimentos-das-estacoes}

.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,  
.03,.01

{lista-dos-diametros-das-estacoes}

.03,.03,.03,.03,.03,.03,.2,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03,.03

{variacao-de-rigidez}

1.E6,1.E6

1.E6,1.E6

{listas-das-rigidezes-nos-mancais}

2.E5,0.,0.,2.E5,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

2.E5,0.,0.,2.E5,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

{listas-dos-amortecimentos-nos-mancais}

20.,0.,0.,20.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

20.,0.,0.,20.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

{listas-das-massas-adic.-dos-mancais}

0.,0.

{listas-das-inerc.-transv.-dos-mancais}  
0.,0.

{listas-das-inerc.-polares-dos-mancais}  
0.,0.

{considera-efeito-de-cisalhamento}  
0

{considera-material-homogeneo}  
1

{lista-das-densidades}  
7800.

{lista-das-elasticidades}  
2.0e+11

{lista-dos-cisalhamentos}  
8.27e+10

{desbalanceamento}  
1  
7  
1.e-4, 1,0.

{variacao-da-aceleracao}  
-7920.,2000.,4.8,5.6,1320.

{variacao-da-velocidade}  
1





**ANEXO 3****Arquivo de Dados: Rotor III**

{numero-de-discos}

1

{lista-das-estacoes-com-discos}

5

{rotacao}

1800.

{campbell}

0.,5500.,500.

{numero-de-estacoes}

14

{numero-de-modos}

3

{numero-de-frequencias}

5

{numero-de-mancais}

2

{lista-das-estacoes-com-mancais}

1,14

{numero-maximo-de-iteracoes}

1000

{fator-de-forma}

1.33

{fator-de-ajuste-do-polinomio}

1500.

{lista-dos-comprimentos-das-estacoes}

.029,.03,.03,.0293,.03,.026,.03,.031,.0313,.015,.039,.04,.0394,.01

{lista-dos-diametros-das-estacoes}

.02,.02,.02,.02,.25,.02,.02,.02,.02,.02,.02,.02,.02,.02

{variacao-de-rigidez}

1.E8,1.E8

1.E8,1.E8

{listas-das-rigidezes-nos-mancais}

1.E5,0.,0.,1.E5,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

1.E5,0.,0.,1.E5,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

{listas-dos-amortecimentos-nos-mancais}

20.,0.,0.,20.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

20.,0.,0.,20.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

{listas-das-massas-adic.-dos-mancais}

0.,0.

{listas-das-inerc.-transv.-dos-mancais}

0.,0.

{listas-das-inerc.-polares-dos-mancais}

0.,0.

{considera-efeito-de-cisalhamento}

0

{considera-material-homogeneo}

1

{lista-das-densidades}

7800.

{lista-das-elasticidades}

2.0e+11

{lista-dos-cisalhamentos}

8.27e+10

{desbalanceamento}

1

5

1.E-4,1,0.

{variacao-da-aceleracao}

-13000.,2500.,6.5,7.5,2000.

{variacao-da-velocidade}

2

{exponencial}

5100.,-5100.,3.832

{linear}

0.,180.0

{tempo}

0.,20.,1.0E-3

{condicoes-iniciais}

0.,

0.,

0.,

0.,

{estacao}

5

{controle}

2

3,10

-6.91,565.,-1.19

3.13,565.,-0.84

## ANEXO 4

## Arquivo de Saída: Rotor III (regime permanente)

Sem força de controle				
estacao	x(m)	z(m)	teta(rad)	psi(rad)
1	0.4566944E-05	-0.6043621E-05	0.3571574E-04	0.3021708E-04
2	0.3689638E-05	-0.5006352E-05	0.3587233E-04	0.3033498E-04
3	0.2774883E-05	-0.3923745E-05	0.3635420E-04	0.3069699E-04
4	0.1845784E-05	-0.2822013E-05	0.3714511E-04	0.3128952E-04
5	0.9180335E-06	0.1718814E-05	0.3820536E-04	0.3208208E-04
6	-0.4428942E-07	-0.5726539E-06	0.3820533E-04	0.3208206E-04
7	-0.8535963E-06	0.3934820E-06	0.3614194E-04	0.3020807E-04
8	-0.1729760E-05	0.1444728E-05	0.3398095E-04	0.2824781E-04
9	-0.2576945E-05	0.2466816E-05	0.3200494E-04	0.2645806E-04
10	-0.3380013E-05	0.3440980E-05	0.3029060E-04	0.2490798E-04
11	-0.3748650E-05	0.3889878E-05	0.2957443E-04	0.2426134E-04
12	-0.4666605E-05	0.5012116E-05	0.2806221E-04	0.2289798E-04
13	-0.5562882E-05	0.6112912E-05	0.2707908E-04	0.2201374E-04
14	-0.6422210E-05	0.7171036E-05	0.2674455E-04	0.2171343E-04

ENERGIA DE DEFORMACAO = 0.853131466075049934E-05

## Com força de controle

estacao	x(m)	z(m)	teta(rad)	psi(rad)
1	0.1953515E-05	-0.7694091E-06	0.3584827E-05	0.3721827E-05
2	0.1845095E-05	-0.6652553E-06	0.3604895E-05	0.3773518E-05
3	0.1729758E-05	-0.5562811E-06	0.3666891E-05	0.3934563E-05
4	0.1607975E-05	-0.4448398E-06	0.3769134E-05	0.4202843E-05
5	0.1479758E-05	-0.3324787E-06	0.3906719E-05	0.4566747E-05
6	0.1342769E-05	-0.2152773E-06	0.3906718E-05	0.4566758E-05
7	0.1222766E-05	-0.1159272E-06	0.3737889E-05	0.4663013E-05
8	0.1081419E-05	-0.6500491E-08	0.3560370E-05	0.4758100E-05
9	0.9326374E-06	0.1012873E-06	0.3397236E-05	0.4838478E-05
10	0.7801678E-06	0.2053322E-06	0.3254913E-05	0.4901788E-05
11	0.7064594E-06	0.2537007E-06	0.3195185E-05	0.4926036E-05
12	0.5133776E-06	0.3757041E-06	0.3068461E-05	0.4972322E-05
13	0.3139278E-06	0.4966127E-06	0.2985446E-05	0.4997363E-05
14	0.1168526E-06	0.6134925E-06	0.2957037E-05	0.5004661E-05

ENERGIA DE DEFORMACAO = 0.251479834886326759E-06

**ANEXO 5****Arquivo de Dados: Rotor IV**

{numero-de-discos}

3

{lista-das-estacoes-com-discos}

6,13,18

{rotacao}

3000.

{campbell}

0.,4400.,400.

{numero-de-estacoes}

23

{numero-de-modos}

5

{numero-de-frequencias}

7

{numero-de-mancais}

2

{lista-das-estacoes-com-mancais}

2,22

{numero-maximo-de-iteracoes}

1000

{fator-de-forma}

1.33

{fator-de-ajuste-do-polinomio}

1500.

{lista-dos-comprimentos-das-estacoes}

.048,.005,.025,.029,.020,.016,.020,.041,.041,.041,.042,.0205,.011,  
.0195,.035,.036,.0195,.011,.0195,.026,.021,.005,.005

{lista-dos-diametros-das-estacoes}

.01,.01,.01,.01,.01,.09,.01,.01,.01,.01,.01,.01,.15,.01,.01,.01,.01,  
.12,.01,.01,.01,.01,.01

{variacao-de-rigidez}

100000.,100000.

150000.,150000.

{desbalanceamento-subito}

6

.005,.04,0.

6.

{variacao-de-massa}

6

.01,.03,0.

5.E-3

6.0,20.,10.0E-4



{listas-das-rigidezes-nos-mancais}

18750.,0.,0.,18750.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

24770.,0.,0.,24770.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

{listas-dos-amortecimentos-nos-mancais}

30.,0.,0.,30.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

30.,0.,0.,30.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.

{listas-das-massas-adic.-dos-mancais}

.818,.735

{listas-das-inerc.-transv.-dos-mancais}

3.24e-4,2.7e-4

{listas-das-inerc.-polares-dos-mancais}

0.,0.

{considera-efeito-de-cisalhamento}

0

{considera-material-homogeneo}

1

{lista-das-densidades}

7800.

{lista-das-elasticidades}

2.07e+11

{lista-dos-cisalhamentos}

8.27e+10

{desbalanceamento}

1

13

.001,.075,0.

{variacao-da-velocidade}

2

{exponencial}

2200.,-2200.,3.832

{linear}

0.,300.

{tempo}

0.,6.,10.0E-4

{condicoes-iniciais}

0.,  
0.,  
0.,  
0.,  
0.,  
0.,

{estacao}

13