



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**CARACTERIZAÇÃO NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DA EVOLUÇÃO  
DO DANO EM MATERIAIS**

Ilvan Porto Pereira Junior

SISBI/UFU



1000221386

Uberlândia, 12 de Novembro de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

1011  
621:534  
0436 C  
TEC/MEM

**CARACTERIZAÇÃO NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DA EVOLUÇÃO  
DO DANO EM MATERIAIS**

Dissertação apresentada

à Universidade Federal de Uberlândia por:

**ILVAN PORTO PEREIRA JUNIOR**

como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre  
em Engenharia Mecânica

Aprovada por:

Prof. Dr<sup>a</sup>. Raquel Santini Leandro Rade (UFU) – Orientadora  
Prof. Dr. Domingos Alves Rade (UFU) – Co-orientador  
Prof. Dr. Alberto Raslam (UFU)  
Prof. Dr. Flamínio Levy Neto (UnB)

Uberlândia, 12 de novembro de 2004.

## FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborado pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação

P436c Pereira Junior, Ilvan Porto, 1978-  
Caracterização numérica e experimental da evolução do dano em materiais / Ilvan Porto Pereira Junior. - Uberlândia, 2005.  
164f. : il.  
Orientador: Raquel Santini Leandro Rade.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.  
1. Vibração - Teses. 2. Materiais - Fadiga - Teses. 3. Materiais compostos - Teses. I. Rade, Raquel Santini Leandro. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

621:534 (043.3)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
Av. João Naves de Ávila, 2121 - 38400-902 Fone: 0XX(34)32394149 Ramal 42  
FAX: 0XX(34)32394282 - Campus Santa Mônica - Uberlândia MG



**ESTUDANTE: Ilvan Porto Pereira Junior**

**NÚMERO DE MATRÍCULA: 5022613-1**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações**

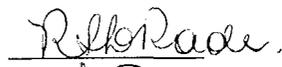
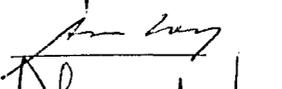
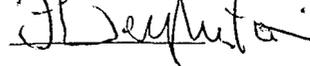
**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:**

*“Caracterização Numérica e Experimental da Evolução do Dano em Materiais”*

**ORIENTADORA: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Raquel Santini Leandro Rade**

A Dissertação foi **APROVADA**, em reunião pública realizada na sala 218 do bloco 1M, Campus Santa Mônica, em 12 de novembro de 2004, às 10h30min, com a seguinte Banca Examinadora:

<b>NOME</b>	<b>ASSINATURA</b>
Raquel Santini Leandro Rade, Prof <sup>a</sup> . Dr <sup>a</sup> .	- FAFIS / UFU 
Domingos Alves Rade, Prof. Dr.	- FEMEC / UFU 
Alberto Arnaldo Raslan, Prof. Dr.	- FEMEC / UFU 
Flaminio Levy Neto, Prof. Dr.	- UnB 

Uberlândia, 12 de novembro de 2004.

Aos meus pais e irmãos  
E a quem eu muito amo e que me  
impulsiona a cada alvorecer o desejo  
de ser alguém melhor, minha noiva,  
Maria Cláudia.

"Adianta querer saber muita coisa? O senhor sabia, lá para cima me disseram. Mas, de repente chegou neste sertão, viu tudo diverso diferente, o que nunca tinha visto. Sabença aprendida não adiantou para nada... Serviu algum?"

*ROSA, J. Guimarães. Grande sertão: veredas.*

"No tempo que eu era menino  
Brincava chiqueirando carneiro  
Fim de tarde na rede sonhava  
Belo dia seria um vaqueiro  
Montaria de pelos castanhos  
Enfeitados de prata os arreios  
Minha vida hoje é pé no mundo  
Sem temer a escuridão  
Jogo laço quebro tudo  
Meu amigo é meu irmão  
Sou a sede de boa palavra  
Sou a vida raios de sol  
Tenho tudo não tenho nada  
Tenho fé no coração  
Só que isso tudo  
Era no tempo que nós era menino"

G. Azevedo - C.Fernando. O menino e os carneiros

## AGRADECIMENTOS

Devoto a primazia dos meus agradecimentos a Deus por me conceder o bem mais precioso, a Vida.

Agradeço a Professora Raquel Santini e ao Professor Domingos Rade pela amizade e pela orientação despendida ao longo deste trabalho tornando-o assim possível.

Aos malungos: Peter e Ciro, que compartilham das mesmas estradas em parceria a várias quadras.

Aos que também dividem a mesma sina estradeira, que romperam dos Sertões aos Cerrados na busca do bem inalienável: Temico, Duda, Alexandre, Alessandra, Flávio e Venceslau.

Aos malungos e parceiros de causos, pescarias, cantorias, mandurebas e professores da vida: Valtair, Gilmar e Seu Antônio.

A Inez, pela amizade e principalmente pelo exemplo de vida.

A Sueli e toda sua família pela amizade, carinho e alento dado nestes tempos afastado de casa. Assim como Helinho e Dulce.

Às novas amigadas que ainda não de romper muitas quadras: Poof, Nani e Érica.

Ao amigo Zé Reis "Cabelo" que teve participação imprescindível neste trabalho.

Aos malungos: Marco Túlio, Araxá, P.O., Seu Creisson, Hexaner, Juan e os que na gaiola das aves labutaram.

Aos amigos do LMEST: Jhojan, Toninho, Danuza, Emerson, Romes, Luciano e todos que por lá passaram nesta minha estada.

A Luci, Baltinha, Lazineho, Toninho e todos os demais secretários e funcionários da FEMEC.

Ao CNPq pelo apoio dado na forma de concessão de uma bolsa de mestrado.

E, como diziam os Guimarães: Toda saudade é uma espécie de velhice.

Pereira Jr., I. P., 2004, "Caracterização Numérica e Experimental da Evolução do Dano em Materiais", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo acerca da Mecânica do Dano aplicada ao caso dos materiais dúcteis e dos materiais compósitos. Para os materiais dúcteis é feito o acoplamento entre um modelo numérico e um método de monitoramento da integridade estrutural baseado na observação da variação da impedância eletromecânica da estrutura. A falha de um componente estrutural ocorre quando este não mais funciona como foi projetado. Para as estruturas mecânicas isso significa, geralmente, que um componente não suporta o carregamento aplicado. Desta forma, o conhecimento das possíveis falhas que podem ocorrer é fundamental para o não comprometimento do projeto.

São implementados em ambiente MATLAB® modelos numéricos capazes de predizerem o comportamento mecânico destes materiais quando submetidos a um carregamento e, a influência da presença do mecanismo de danificação na sua resposta. A validação dos modelos é baseada em resultados experimentais e referências bibliográficas.

A partir dos resultados que quantificam o estado de danificação do material obtidos pelo uso do modelo numérico, busca-se uma relação entre estes resultados e os de cunho experimental, inicialmente de caráter qualitativo, obtidos via método de impedância.

As variações no comportamento dinâmico são provocadas pela danificação do material, tornando-se perceptíveis a partir da observação de alterações sofridas pelo sinal de impedância. Assim, correlaciona-se a evolução do dano com a resposta dinâmica da estrutura através de um parâmetro inerente ao sinal de impedância, neste caso, o deslocamento do pico de máxima amplitude dentro de uma banda de frequências.

Por fim, são obtidos polinômios que correlacionam o estado de danificação com o parâmetro inerente ao sinal de impedância, particularizados a uma liga de Al/Cu, atribuindo assim um caráter quantitativo à técnica baseada na observação do sinal de impedância eletromecânica da estrutura.

---

*Palavras-chave: Mecânica do Dano, Método de Impedância.*

Pereira Jr., I. P., 2004, "Numerical and Experimental Characterization of Damage Evolution in Materials", M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

## ABSTRACT

This work presents a study concern Damage Mechanics apply to ductile materials and composite materials. Towards the ductile materials is done an assembly between a numerical model and a structural integrity monitoring method based on observation of the structural electromechanical impedance variation. The failure of a structural component occurs when this one does not work more how it was designed. For the mechanical structures it means, generally, that one component can not to stand more an applied load. Hence, the knowledge of the failure reasons that can happen has a great importance to do not commit the design.

Numerical models that predict the mechanical behavior of those materials when they are loaded and the influence of damage stage in their mechanical response were structured using MATLAB® ambient. The validation of those numerical models is based on results from experimental tests and bibliography references.

From the results that quantify the material damage state obtained by the numerical model it is figured out a relation between this results and the others from the experimental tests obtained by impedance method, this second one has qualitative features.

The variations on the structure dynamic behavior are provided by the material damage state, it becomes perceptive from the observation of the impedance sign variations. Thus, it correlates the damage evolution and the structure dynamic response by an impedance sign feature, at this case, the maximum amplitude peak displacement in a frequency band.

So, polynomial functions that correlates the damage state and the impedance sign features are obtained, particularized to an Al/Cu alloy, imputing a quantitative feature to the technique based on the structural electromechanical impedance sign observation.

---

*Keywords: Damage Mechanics, Impedance Method.*

## SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS.....	4
3.1  Arábicos.....	4
3.2  Gregos.....	5
LISTA DE FIGURAS.....	7
LISTA DE TABELAS.....	12
CAPÍTULO I.....	13
Introdução .....	13
CAPÍTULO II.....	20
Caracterização numérica do material quanto ao estado de danificação .....	20
2.1  Fundamentos da Termodinâmica.....	20
2.1.1  Primeira Lei da Termodinâmica .....	20
2.1.2  Segunda Lei da Termodinâmica .....	22
2.1.3  Método do Estado Local .....	24
2.1.4  Potencial Termodinâmico e Leis de Estado .....	26
2.1.5  Dissipação e Leis Complementares .....	28
2.2  Definição dos conceitos de tensão efetiva e deformação efetiva a partir da variável dano	30
2.2.1  Definição de Tensão Efetiva .....	31
2.2.2  Definição de Deformação Efetiva .....	32
2.2.3  Princípios Gerais de Equivalência de Respostas Constitutivas .....	34
2.2.4  Relação Constitutiva envolvendo Equivalência de Energia .....	34
2.2.5  Relação Constitutiva envolvendo Equivalência de Deformação.....	35
2.2.6  Relação Constitutiva envolvendo Equivalência de Tensão.....	36
2.2.7  Forma Generalizada das Relações Constitutivas para Casos Multiaxiais.....	37
2.3  Fundamentos da Teoria da Plasticidade.....	39
2.3.1  Encruamento.....	40
2.3.2  Limite Elástico .....	42
2.3.3  Escoamento Plástico.....	42
2.3.4  Formulação Geral das Leis Constitutivas.....	43

2.3.5	Superfície de Carga e Potencial de Dissipação.....	45
2.3.6	Condição de Consistência para o Multiplicador Plástico .....	47
2.4	Modelo Evolutivo de Dano Elasto-Plástico.....	49
2.5	Experimento Numérico usando o Modelo de Dano Elasto-Plástico .....	53
<b>CAPÍTULO III.....</b>		<b>56</b>
<b>Materiais Compósitos.....</b>		<b>56</b>
3.3	Determinação da Relação Tensão Deformação.....	56
3.4	Teoria de Laminados .....	59
3.5	Modos de Falha em Materiais Compósitos.....	61
3.6	Evolução do Dano num Compósito Cruzado (0/90).....	69
3.7	CrITÉrios de Resistência aplicados a Materiais Compósitos.....	69
<b>CAPÍTULO IV .....</b>		<b>73</b>
<b>Modelo de dano anisotrópico acoplado a resposta inelástica, aplicado a materiais compósitos.....</b>		<b>73</b>
4.1	Introdução .....	73
4.2	Formulação Teórica.....	74
4.2.1	Potencial Plástico e Critério de Escoamento .....	81
4.2.2	Potencial e Critério de Dano .....	82
4.3	Relação entre o Estado Danificado e o Estado Não Danificado.....	86
4.4	Equações Constitutivas.....	90
4.5	Aspectos Computacionais do Modelo Proposto .....	92
<b>CAPÍTULO V .....</b>		<b>93</b>
<b>Simulações Numéricas.....</b>		<b>93</b>
5.1	Resultados Experimentais e Teóricos utilizando a Formulação Proposta aplicada ao caso dos compósitos.....	93
5.2	Comparação dos Resultados Numéricos aplicados ao caso dos compósitos.....	97
5.3	Resultados Numéricos utilizando a Formulação Proposta aplicada ao caso dos Materiais	
Dúteis 108		

<b>CAPÍTULO VI .....</b>	<b>110</b>
<b>Método de monitoramento estrutural baseado na observação da impedância mecânica.....</b>	<b>110</b>
6.1 <b>Método de Impedância .....</b>	<b>110</b>
6.1.1 <b>Conceitos de Impedância Mecânica e Elétrica .....</b>	<b>111</b>
6.1.2 <b>Método de Monitoramento Estrutural baseado na Impedância.....</b>	<b>113</b>
6.2 <b>Comparação com outras Técnicas Não Destrutivas. ....</b>	<b>117</b>
6.3 <b>Estudo de Caso: Monitoramento de Alteração Estrutural em Vigas.....</b>	<b>120</b>
<b>CAPÍTULO VII .....</b>	<b>124</b>
<b>Caracterização do estado de danificação em materiais via acoplamento de um modelo numérico com o método de impedância .....</b>	<b>124</b>
7.1 <b>Modelo Numérico de Evolução do Dano Aplicado a Materiais Dúcteis .....</b>	<b>124</b>
7.2 <b>Aparato Experimental.....</b>	<b>125</b>
7.3 <b>Procedimento Experimental .....</b>	<b>127</b>
7.4 <b>Avaliação do Modelo de Evolução do Dano.....</b>	<b>127</b>
7.5 <b>Análise da Variação do Sinal de Impedância com o Estado de Tensão .....</b>	<b>131</b>
7.6 <b>Análise da Variação do Sinal de Impedância com o Estado de Danificação do Material.....</b>	<b>139</b>
7.7 <b>Discussão dos resultados.....</b>	<b>141</b>
<b>CAPÍTULO VIII .....</b>	<b>143</b>
<b>Conclusões gerais e propostas de continuidade .....</b>	<b>143</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>145</b>
<b>ANEXO A.....</b>	<b>149</b>
<b>ANEXO B.....</b>	<b>154</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### 3.1 Arábicos

	Significado
$A_k$	: Variável associada às variáveis internas
$C_{ijkl}$	: Matriz de rigidez
$d_{3x}$	: Constante de acoplamento piezoelétrico
$D_n$	: Variável dano associada a uma direção $n$
$e$	: Energia interna específica
$E$	: Energia interna
$E$	: Módulo de elasticidade
$\tilde{E}$	: Módulo de elasticidade do meio danificado
$\mathbf{E}(\varphi)$	: Tensor elástico de rigidez do meio danificado
$f$	: Superfície de carga
$F$	: Potencial de superfície
$g$	: Função do potencial de dano
$G$	: Função que descreve o critério de dano
$h_k$	: Espessura de uma $k$ -ésima camada do compósito
$H$	: Função de <i>Heaviside</i>
$\bar{H}_{ijkl}$	: Tensor de encruamento de quarta ordem
$K$	: Energia cinética
$K_y$	: Coeficiente linear da curva plástica linearizada, ou, coeficiente de plasticidade
$M_y$	: Coeficiente angular da curva linearizada, ou, coeficiente de encruamento
$M_{ijkl}$	: Tensor efetivo de dano
$P_{(x)}$	: Trabalho das forças externas
$p$	: Deformação plástica acumulada
$\dot{p}$	: Derivada da deformação plástica acumulada no tempo
$Q$	: Razão de calor recebida pelo domínio

$\bar{Q}_{ij}$	: Matriz de rigidez reduzida ao estado plano de tensão
$R$	: Força termodinâmica associada a $p$
$S$	: Entropia do sistema
$s$	: Entropia específica por unidade de massa
$S$	: Seção considerada no sólido
$\tilde{S}$	: Parte íntegra da seção considerada
$S_O$	: Área dos defeitos medidos
$S_{ijkl}$	: Matriz de flexibilidade
$T$	: Temperatura
$\dot{T}$	: Derivada da temperatura no tempo
$V$	: Volume do sistema
$V_k$	: Conjunto das variáveis internas
$\dot{V}_k$	: Derivada do conjunto das variáveis internas no tempo
$X$	: Força termodinâmica de natureza termodinâmica associada a $\varepsilon_p$
$Z_a(\omega)$	: Impedância do atuador
$Z(\omega)$	: Impedância da estrutura
$W_p$	: Trabalho plástico acumulado
$Y$	: Energia elástica de deformação
$Y(\omega)$	: Admitância do atuador

### 3.2 Gregos

#### Significado

$\Gamma$	: Variável associada a $Y$
$\delta_{ij}$	: Delta de <i>Kronecker</i>
$\partial D$	: Contorno do domínio
$\varepsilon$	: Tensor de deformação total
$\dot{\varepsilon}$	: Derivada no tempo do tensor de deformação total

$\varepsilon_e$	: Tensor de deformação elástica
$\dot{\varepsilon}_e$	: Derivada do tensor de deformação elástica no tempo
$\varepsilon_p$	: Tensor de deformação plástica
$\dot{\varepsilon}_p$	: Derivada do tensor de deformação plástica no tempo
$\tilde{\varepsilon}$	: Deformação efetiva
$\frac{-T}{\varepsilon_{33}}$	: Constante dielétrica do PZT
$\kappa$	: Variável escalar que caracteriza o encruamento no dano
$K$	: Variável associada a $\kappa$
$\lambda$	: Multiplicador plástico
$\nu$	: Coeficiente de Poisson
$\rho$	: Massa específica
$\Pi$	: Potencial das variáveis de fluxo de caráter puramente dissipativo
$\sigma$	: Tensor tensão de Cauchy
$\dot{\sigma}$	: Derivada no tempo do tensor tensão de Cauchy
$\sigma_s$	: Valor da tensão para a deformação plástica correspondente
$\sigma_y$	: Tensão de escoamento
$\sigma_{II}$	: Tensor das tensões hidrostáticas
$\sigma_{eq}$	: Tensor das tensões equivalentes
$\sigma'$	: Tensor das tensões desviatórias
$\tilde{\sigma}$	: Tensão efetiva
$\phi_{ij}$	: Tensor dano de segunda ordem
$\hat{\phi}_k$	: Tensor dano de segunda ordem nas direções principais
$\Phi$	: Desigualdade de Clausius-Duhem com caráter dissipativo
$\varphi$	: Potencial dissipativo
$\phi_c$	: Trabalho reversível
$\psi$	: Potencial termodinâmico
$\dot{\psi}$	: Derivada do potencial termodinâmico no tempo
$Y$	: Variável tensorial que caracteriza o encruamento no dano

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1-	Processo de transição entre o Dano e a Fratura.....	04
Figura 2.1-	Elemento de Volume.....	18
Figura 2.2-	Acréscimo de comprimento devido à abertura dos defeitos.....	21
Figura 2.3-	Variação da rigidez secante do meio contínuo equivalente.....	23
Figura 2.4-	Hipótese de deformação equivalente.....	24
Figura 2.5-	Encruamento Isotrópico.....	29
Figura 2.6-	Encruamento Cinemático.....	29
Figura 2.7-	Fase elástica para a liga Cu/Al.....	42
Figura 2.8-	Fase plástica da liga Cu/Al para ambos os modelos, com dano e sem dano...	42
Figura 3.1-	Estrutura do material ortotrópico.....	46
Figura 3.2-	Representação dos esforços num dado laminado.....	47
Figura 3.3-	Empilhamento das camadas ao longo de z.....	48
Figura 3.4-	Principais modos de falha de um laminado.....	49
Figura 3.5-	Comportamento das deformações da fibra e da matriz na ruptura.....	51
Figura 3.6-	Superfície de ruptura do material compósito onde as fibras apresentam boa aderência.....	52

Figura 3.7-	Superfície de ruptura do material compósito onde as fibras apresentam má aderência.....	53
Figura 3.8-	Fissura transversal se desenvolvendo na interface fibra matriz.....	54
Figura 3.9-	Dois planos de fratura formados pelo alinhamento de fibras flambadas.....	55
Figura 3.10-	Fibras flambadas gerando dois planos de fratura no material.....	55
Figura 3.11-	Seção transversal circular da fibra com parte comprimida e tracionada.....	56
Figura 3.12-	Etapas da evolução do dano num compósito cruzado (0/90).....	57
Figura 5.1-	Comparação do modelo elasto-plástico com os resultados experimentais [0] <sub>8s</sub> .....	82
Figura 5.2-	Sistema de referência do laminado com a aplicação do carregamento.....	83
Figura 5.3-	Comparação do modelo elasto-plástico com os resultados experimentais para os laminados [90] <sub>8s</sub> e [45/-45] <sub>2s</sub> .....	84
Figura 5.4-	Comparação do modelo elasto-plástico com os resultados experimentais [0/90] <sub>4s</sub> .....	84
Figura 5.5-	Resposta elástica do laminado [0/90] <sub>6s</sub> comparada à obtida pelo modelo de Voyiadjis e Deliktas.....	87
Figura 5.6-	Resposta inelástica do laminado [0/90] <sub>6s</sub> com as tensões efetiva e nominal	

	comparada à obtida pelo modelo de Voyiadjis e Deliktas.....	87
Figura 5.7-	Resposta inelástica do laminado $[0/90]_{6s}$ com a tensão efetiva e o respectivo valor do dano longitudinal.....	88
Figura 5.8-	Comparação entre a evolução do dano longitudinal e transversal do laminado $[0/90]_{6s}$ .....	89
Figura 5.9-	Resposta elástica do laminado $[45/0/-45]_{2s}$ .....	90
Figura 5.10-	Resposta inelástica do laminado $[45/0/-45]_{4s}$ com as tensões efetiva e nominal.....	90
Figura 5.11-	Resposta inelástica do laminado $[45/0/-45]_{4s}$ com a tensão efetiva e o respectivo valor do dano longitudinal.....	91
Figura 5.12-	Comparação entre a evolução do dano longitudinal e transversal do laminado $[45/0/-45]_{2s}$ .....	92
Figura 5.13-	Resposta elástica do laminado $[0/90]_{6s}$ epóxi/vidro.....	94
Figura 5.14-	Resposta inelástica do laminado $[0/90]_{6s}$ epóxi/vidro com as tensões efetiva e nominal.....	95
Figura 5.15-	Resposta inelástica do laminado $[0/90]_{6s}$ epóxi/vidro com a tensão efetiva e o respectivo valor do dano longitudinal.....	95
Figura 5.16-	Comparação entre a evolução do dano longitudinal e transversal do	

	10
laminado $[0/90]_{6s}$ epóxi/vidro.....	96
Figura 5.17- Resposta da tensão efetiva, nominal e evolução do dano numa liga Al/Cu.....	97
Figura 6.1- Direções das tensões no PZT.....	102
Figura 6.2- Modelo unidimensional do acoplamento eletromecânico utilizado pelo método baseado em impedância.....	103
Figura 6.3 - Propriedades geométricas da viga em balanço e do PZT.....	108
Figura 6.4 - Montagem experimental.....	109
Figura 6.5- Viga em balanço e detalhe do PZT (ACX) colado.....	110
Figura 6.6- Ilustração das posições das falhas na viga de alumínio.....	111
Figura 6.7- Variância média dos sinais de impedância de cada experimento.....	111
Figura 7.1- Aparato experimental.....	114
Figura 7.2- Dimensões dos corpos de prova ensaiados.....	114
Figura 7.3- Sistema de fixação e PZT.....	115
Figura 7.4- Diagramas tensão-deformação obtidos experimentalmente.....	116
Figura 7.5- Comparação entre o resultado obtido via simulação numérica e os resultados experimentais para a liga Al/Cu.....	117
Figura 7.6- Comparação entre o resultado numérico e a média dos experimentais.....	118

Figura 7.7-	Comparação entre os estados de tensão efetiva e nominal.....	119
Figura 7.8-	Sinal de Impedância para os carregamentos 7,8 e 9.....	120
Figura 7.9-	Evolução do sinal de impedância no primeiro corpo de prova.....	121
Figura 7.10-	Evolução do sinal de impedância no segundo corpo de prova.....	122
Figura 7.11-	Sinal de impedância e estado de tensão para o primeiro corpo de prova.....	122
Figura 7.12-	Sinal de impedância e estado de tensão para o segundo corpo de prova.....	123
Figura 7.13-	Relação entre o sinal de impedância e o estado de tensão para o primeiro corpo de prova.....	124
Figura 7.14-	Relação entre o sinal de impedância e o estado de tensão para o segundo corpo de prova.....	124
Figura 7.15-	Meta-modelo de regressão com a primeira faixa do primeiro corpo de prova..	125
Figura 7.16-	Meta-modelo de regressão com a segunda faixa do primeiro corpo de prova.	126
Figura 7.17-	Meta-modelo de regressão com a primeira faixa do segundo corpo de prova.	126
Figura 7.18-	Meta-modelo de regressão com a segunda faixa do segundo corpo de prova	127
Figura 7.19-	Relação entre a evolução do dano e o sinal de impedância do primeiro corpo de prova.....	128
Figura 7.20-	Relação entre a evolução do dano e o sinal de impedância do segundo corpo de prova.....	129

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1- Variáveis termodinâmicas.....	16
Tabela 4.1- Variáveis termodinâmicas do modelo aplicado a materiais compósitos.....	65
Tabela 5.1- Propriedades Mecânicas do Compósito SiC/TiAl.....	82
Tabela 5.2- Parâmetros relacionados à plasticidade e ao dano do Compósito SiC/TiAl.....	83
Tabela 5.3- Propriedades Mecânicas do Compósito epóxi /carbono.....	85
Tabela 5.4- Parâmetros relacionados à plasticidade e ao dano do Compósito epóxi/carbono..	85
Tabela 5.5- Propriedades Mecânicas do Compósito S-Glass / Epóxi.....	93
Tabela 5.6- Parâmetros relacionados à plasticidade e ao dano para o caso do S-Glass / Epóxi.....	93
Tabela 5.7- Parâmetros da liga Al/Cu.....	96
Tabela 6.1- Planejamento fatorial completo para os ensaios de identificação de falhas na viga de alumínio.....	110
Tabela 7.1- Parâmetros da liga Al/Cu relacionados à fase elástica, plástica e ao dano.....	117

# CAPÍTULO I

## Introdução

É notória a tendência de se quebrar a visão pragmática que regia os conceitos de projeto mecânico. A nova ótica pela qual tem se enxergado é a que molda o projeto de estruturas ou componentes cada vez mais esbeltos e que possam ter a sua integridade monitorada. Um dos pontos de forte influência nesta nova vertente é o fato de se obter uma redução de custos com a obtenção de estruturas não mais de grande robustez, mas, que ainda assim, garantam as condições de uso e segurança que emolduram a concepção do projeto.

Para determinar se as estruturas se encontram em condições de suportar os carregamentos aos quais são ou serão submetidas, é necessário avaliá-las através da realização de ensaios ou de simulações computacionais que utilizam modelos já validados, cujos resultados reproduzam com precisão o comportamento real da estrutura.

Existe atualmente uma boa variedade de ensaios por meio dos quais é possível avaliar a integridade estrutural. Estes ensaios, em geral, podem se dividir em duas categorias: os destrutivos e os não destrutivos. Os ensaios destrutivos consistem em destruir parcelas ou partes da estrutura para inspeção e/ou posterior recuperação. Estes procedimentos muitas vezes inutilizam a estrutura e são mais adequados para aplicação em ambiente de laboratório, havendo dificuldade para sua aplicação em campo (Andreucci, 2002).

Existem vários tipos de ensaios não destrutivos. Entre eles, podem ser citados os ensaios de carga e deslocamento controlados, de simples inspeção, de raios X, de ultra-som e os dinâmicos (Andreucci, 2002).

Os ensaios dinâmicos possuem algumas vantagens em relação aos demais, como a obtenção de parâmetros globais da estrutura e terem um menor custo quando aplicados a estruturas de grande porte. A idéia principal, quando aplicados a uma estrutura supostamente danificada, baseia-se na hipótese de que o dano afeta as propriedades físicas e/ou geométricas da estrutura, alterando assim as suas características dinâmicas. Desse modo,

uma vez conhecida a variação das suas características dinâmicas, é possível, em um procedimento inverso, determinar a condição de dano em que ela se encontra (Genovese, 2000).

A identificação do dano numa forma ainda incipiente garante uma maior segurança à estrutura, uma vez que o colapso da estrutura pode ocorrer de forma abrupta sem o menor sinal prévio da falha que estava iminente. Para o caso dos materiais frágeis, este tipo de cuidado torna-se ainda mais imprescindível, visto que o mesmo apresenta baixa tenacidade, sofrendo ruptura sem o surgimento prévio de deformações plásticas. Ou seja, um material que não apresenta sinais prévios ao colapso estrutural.

O monitoramento *on-line*, ou seja, em tempo real, garante um controle do processo evolutivo do dano. Para isso, podem ser utilizados com vantagens, materiais piezoelétricos, notadamente cerâmicas PZT (zirconato titanato de chumbo) colados na superfície ou inseridos no volume da estrutura. Tais materiais funcionam como atuadores e/ou sensores de deformação (Raju, 1997).

Uma técnica que permite o monitoramento em tempo real e também é capaz de detectar o dano num estágio ainda incipiente é a técnica que monitora a estrutura com base na observação da impedância eletromecânica do sistema. A identificação do dano numa fase inicial é garantida uma vez que a técnica baseada na impedância atua numa faixa de altas frequências e, por conseqüência, com pequenos comprimentos de onda (Kabeya, 1998). Esta hipótese possibilita a detecção da perda de integridade contextualizada ainda à luz da Mecânica do Dano. Esta análise é feita utilizando um equipamento especial denominado impedancímetro.

A impedância elétrica é conceituada como uma função de transferência que correlaciona a corrente com a voltagem imposta. Já a impedância mecânica correlaciona a força imposta ao sistema com a velocidade resultante.

O entendimento de dano aqui abordado é o que o conceitua como um processo evolutivo que conduz a alterações sofridas pelo material, geralmente, nas suas propriedades mecânicas, sem que ocorram fissuras macroscópicas no elemento de volume estudado.

A resposta não-linear dos sólidos, observada macroscopicamente, é uma manifestação de processos irreversíveis que ocorrem em sua microestrutura, tais como: escorregamentos

relativos entre cristais, perdas de coesão em planos de clivagem ou contornos de grãos, mudanças de porosidade, mudanças de fase, difusão de elementos químicos e outros (Lemaitre *et al.*, 1994).

Alguns desses processos têm origem em microdefeitos constituídos por inclusões ou mesmo vazios, os quais, pelas suas características, favorecem a concentração de microtensões. Esses microdefeitos constituem o que se entende por *dano* inicial do material (Lemaitre *et al.*, 1994).

Dependendo das condições ambientais e devido à existência de solicitações mecânicas, mesmo que a resposta local do material se mantenha dentro dos limites do regime elástico, o dano inicial pode vir a acontecer em conseqüência do rompimento das ligações entre os átomos ou por rupturas na interface entre componentes distintos. Macroscopicamente, esse processo de evolução do dano inicial, ou *danificação*, acaba tendo uma influência direta sobre as propriedades elásticas, conforme evidenciam as reduções de resistência e de rigidez, além das propriedades plásticas do material. Já num estágio mais avançado de solicitação, a danificação leva à formação e ao crescimento de microfissuras, que se traduzem em parcelas adicionais de deformações permanentes (Lemaitre *et al.*, 1994).

Nos processos de plastificação dos metais, o dano não tem influência direta sobre o mecanismo em si, no sentido de que cada um dos fenômenos pode ser analisado de forma desacoplada. Entretanto, há uma dependência indireta entre eles, uma vez que a redução da área resistente devida à danificação pode alterar a velocidade de movimentação das discordâncias. Assim, associando-se a cada um dos fenômenos uma variável representativa, a relação de dependência entre plasticidade e dano pode se estabelecer nas relações que exprimem a evolução daquelas variáveis (o dano, por exemplo, pode ser inserido na lei de evolução da variável de plasticidade), numa forma de acoplamento dita *cinética* (Kachanov, 1986).

A mecânica do dano em meios contínuos leva em conta os efeitos da degradação em modo difuso e progressivo de sólidos submetidos a ações de natureza mecânica ou não-mecânica, por meio de redução das propriedades de resistência e rigidez do material.

É importante notar desde logo a diferença em relação à Mecânica da Fratura. Enquanto a mecânica da fratura lida com as condições de propagação de uma fissura macroscópica imersa num meio contínuo íntegro, a mecânica do dano se ocupa do efeito, sobre a resposta

do material, de um processo de microfissuração distribuída que se desenvolve numa etapa preliminar à formação da fissura discreta. A teoria permite descrever localmente, observando-se um 'volume representativo' do material em torno do ponto considerado, a evolução dos fenômenos que se desenvolvem entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, caracterizado pela formação de uma fissura macroscópica que equivale à ruptura do elemento de volume (Kachanov, 1986).

Em síntese, a diferença entre Mecânica do Dano e Mecânica da Fratura pode ser colocada, segundo Hult (1988), da seguinte forma: na Mecânica do Dano a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um campo de defeitos (microfissuras ou poros) considerado continuamente distribuído; na Mecânica da Fratura a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um único defeito, como uma fissura pontiaguda pré-definida, num meio mecanicamente intacto. A Figura 1.1 ilustra bem a diferença entre as duas abordagens.

A quantificação do dano em materiais inicialmente isotrópicos pode ser feita através de uma grandeza de natureza escalar ou tensorial. A natureza tensorial pode surgir com a evolução do dano no material promovendo o surgimento de um certo grau de anisotropia que segue de acordo com as direções preferenciais do dano gerado. Para o caso de materiais anisotrópicos, esta grandeza assume uma natureza tensorial, sendo representada por um tensor de segunda ou de quarta ordem. Isso ocorre pelo fato do valor da variável dano não ser igual para todos os planos de simetria do material, comportando-se de modo particular em relação às diferentes propriedades mecânicas do material (Lemaitre *et al.*, 1994).

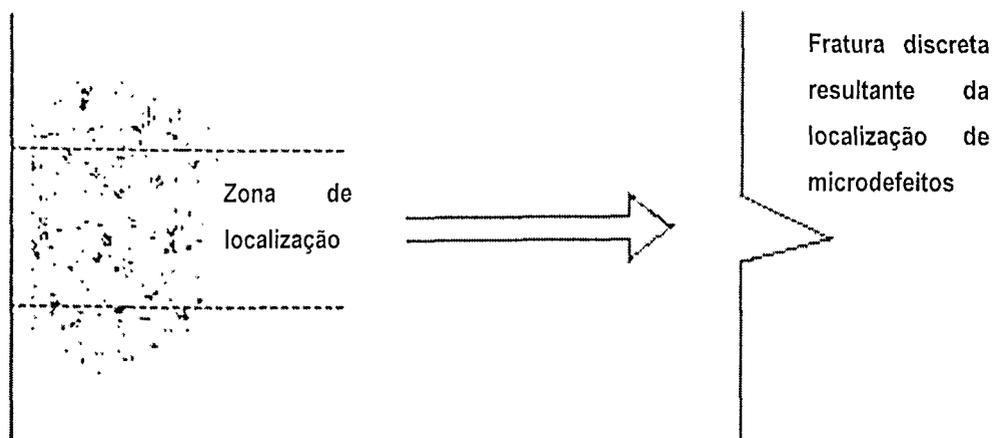


Figura 1.1- Processo de transição entre o dano e a fratura

A preocupação dos engenheiros no que tange os assuntos correlatos à integridade dos materiais já é percebida há um tempo considerável. Como exemplo, pode-se citar que em plena Renascença, Leonardo da Vinci já se preocupava com a identificação de variáveis mecânicas para a caracterização do fenômeno de fratura em sólidos.

O trabalho pioneiro que introduziu o conceito de dano foi elaborado por Kachanov (1958). Nesse trabalho procura-se justificar a ruptura, precocemente observada em relação ao esperado em metais em regime de deformação lenta, como uma consequência da existência de defeitos no material. Para a consideração dos defeitos numa abordagem de meio contínuo, este autor define uma variável escalar  $y$ , denominada continuidade, que apresenta localmente um valor unitário para um material completamente livre de defeitos, enquanto que  $y = 0$  caracteriza um material sem qualquer capacidade de carga. A quantidade complementar  $D = 1 - y$  é, por conseguinte, uma medida do estado local de deterioração ou dano. Para um material completamente livre de defeitos tem-se  $D = 0$ , enquanto  $D = 1$  corresponde a um estado de completa perda de integridade da estrutura interna do material.

Enquanto Kachanov (1958) assumiu  $D$  como uma variável de natureza escalar, estudos posteriores levaram à proposição de quantidades tensoriais para descrever o dano. Um outro trabalho importante é o de Rabotnov (1969), que propôs a utilização da variável de dano como um redutor da rigidez inicial do material. Mais recentemente, a chamada Mecânica do Dano em Meios Contínuos ("Continuum Damage Mechanics") foi formalizada por Lemaitre e Chaboche (1985) com base numa metodologia fundamentada na termodinâmica dos processos irreversíveis.

O estudo a ser desenvolvido no âmbito desta dissertação de mestrado enfoca, de modo particular, aspectos da danificação aplicados a materiais compósitos e uma extensão, buscando-se associar modelos formulados pela Mecânica do Dano com resultados experimentais, obtidos via técnica de monitoramento, com base na observação da impedância eletromecânica, utilizando corpos de prova fabricados a partir de duralumínio, uma liga de alumínio cobre.

O interesse por materiais compósitos é motivado pela crescente aplicabilidade em diversos tipos de sistemas estruturais, isso devido à característica de sua alta rigidez comparada ao seu baixo peso específico, proporcionando estruturas mais leves e rígidas, as quais se encaixam perfeitamente na nova vertente de projeto, já comentada.

A realização do estudo proposto justifica-se pelo crescente interesse, tanto no âmbito acadêmico quanto no industrial, de se desenvolver técnicas eficientes para avaliação da integridade estrutural, notadamente no contexto da chamada manutenção preditiva.

Uma contribuição específica, proporcionada mediante o desenvolvimento do trabalho de pesquisa aqui reportado, é uma avaliação da aplicabilidade da técnica baseada na impedância eletromecânica à luz da Mecânica do Dano. Trata-se de uma técnica relativamente nova, que embora tenha sido utilizada em estudos anteriores, tem ainda numerosos aspectos a serem investigados, visando avaliar sua aplicabilidade em situações práticas.

Por se tratar de uma técnica que fornece essencialmente resultados qualitativos, objetiva-se também neste trabalho buscar uma correlação entre os resultados obtidos via variação de impedância na estrutura com os resultados que caracterizam de forma quantitativa o estado de danificação da mesma, sendo estes obtidos através de um modelo numérico.

Pretende-se de forma sistemática relacionar a evolução do dano em materiais com a respectiva variação da impedância mecânica, via um polinômio que correlaciona as duas variações apresentadas pelo material.

A presente dissertação de mestrado é estruturada em oito capítulos, sendo que, no segundo capítulo é feita uma explanação dos aspectos teóricos que alicerçam o desenvolvimento de todo o trabalho de modelagem numérica vinculada à Mecânica do Dano e à Teoria da Plasticidade. Esta teoria, a priori, consiste em princípios fundamentais da Termodinâmica Aplicada à Mecânica dos Sólidos. No capítulo seguinte é abordada a teoria relacionada aos materiais compósitos. São abordadas, neste capítulo, peculiaridades relacionadas aos principais tipos de falha, além da teoria de laminados, particularizada a esse tipo de aplicação.

No quarto capítulo é mostrada a formulação do modelo aqui utilizado, que se refere à evolução do dano com a respectiva evolução da tensão existente no sólido. Com base neste capítulo que se formula o modelo computacional aplicado ao caso dos compósitos utilizados no presente trabalho.

No quinto capítulo são analisados os resultados das simulações numéricas obtidos via implementação computacional da formulação teórica apresentada nos capítulos anteriores.

No sexto capítulo é abordada a parte experimental do trabalho, sendo apresentada a técnica de monitoramento baseada na impedância eletromecânica da estrutura, além de um estudo de caso ilustrando a sua aplicação.

Os resultados deste acoplamento numérico-experimental são mostrados no sétimo capítulo da presente dissertação.

Por fim, no oitavo capítulo são apresentadas as conclusões e mostradas as perspectivas de trabalhos futuros.

## CAPÍTULO II

### Caracterização numérica do material quanto ao estado de danificação

A Mecânica do Dano Contínuo é uma ferramenta promissora para a análise de falha em componentes de máquinas e de estruturas. Todavia, não é uma tarefa simples a de se obter uma descrição física realista, associada a uma descrição matemática correta do acoplamento entre a deformação e o amolecimento e/ou endurecimento causado pela degradação da estrutura. Esta degradação é observada na curva tensão x deformação de engenharia. Logo, torna-se importante a modelagem do acoplamento entre elasticidade e/ou plasticidade com o fenômeno de danificação sofrido pelos materiais, a fim de se determinar com boa precisão o comportamento do material e a expectativa da vida útil da estrutura (Kachanov, 1986).

Dedica-se a este capítulo a importância da descrição dos assuntos pertinentes à caracterização do material quanto ao seu estado de danificação.

#### 2.1 Fundamentos da Termodinâmica.

A Termodinâmica é a Ciência que estuda os conceitos de energia e entropia dos processos ocorrentes na natureza (Lemaitre *et al.*, 1994).

##### 2.1.1 Primeira Lei da Termodinâmica.

A Primeira lei da Termodinâmica consiste na lei da conservação da energia e da massa. Será considerado um domínio  $D$  com um contorno  $\partial D$ , sendo  $E$  a energia interna e  $e$  a energia interna específica, de tal forma que (Lemaitre *et al.*, 1994):

$$E = \int_D \rho e dV \quad (2.1)$$

onde:

$\rho$  : massa específica;

$dV$  : diferencial de volume.

Esta energia se divide em três parcelas:

1) A energia cinética, representada por  $K$ , definida por:

$$K = \frac{1}{2} \int_D \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV \quad (2.2)$$

onde  $\vec{v}$  é o vetor velocidade.

2) A razão  $Q$  na qual o calor é recebido ou cedido pelo domínio  $D$ . Esta razão é constituída por duas parcelas: o calor gerado dentro do domínio, e o calor recebido ou cedido através do contorno  $\partial D$ :

$$Q = \int_D \rho r dV - \int_{\partial D} \rho \vec{q} \cdot \vec{n} dS \quad (2.3)$$

onde:

$r$  : densidade volumétrica da produção interna de calor;

$\vec{q}$  : vetor do fluxo de calor;

$\vec{n}$  : vetor unitário normal à superfície  $\partial D$ .

3) O trabalho das forças externas  $P_{(v)}$ , definido por:

$$P_{(v)} = \int_D \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial D} \rho \vec{T} \cdot \vec{v} dS \quad (2.4)$$

Assim, com base nas expressões apresentadas anteriormente, a Primeira Lei da Termodinâmica pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}(E + K) = P_{(x)} + Q \quad (2.5)$$

ou:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left( e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) dV = \int_{\Omega} \rho (\vec{f} \cdot \vec{v} + r) dV + \int_{\partial \Omega} \rho (\vec{T} \cdot \vec{v} - \vec{q} \cdot \vec{n}) dS \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Segunda Lei da Termodinâmica.

Em adição à energia interna e à razão de calor são necessárias duas novas variáveis para que se contextualize a Segunda Lei da Termodinâmica, sendo estas a temperatura e a entropia (Lemaitre *et al.*, 1994). Assume-se assim que é possível representar a temperatura por um campo escalar de valores positivos definidos a cada instante  $t$  para todos os pontos do domínio  $D$ . A entropia  $S$  expressa a variação da energia associada com a variação de temperatura, sendo a mesma definida para o domínio  $D$  através da entropia específica por unidade de massa  $s$ .

$$S = \int_{\Omega} \rho s dV \quad (2.7)$$

A Segunda Lei da Termodinâmica postula que a razão da produção de entropia pelo tempo é sempre maior ou igual à razão de calor dividida pela temperatura  $T$ :

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T} dV - \int_{\partial \Omega} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} dS \quad (2.8)$$

sendo  $d/dt$  a derivada. Aplicando o Teorema da Divergência, obtém-se a seguinte equação:

$$\int_{\Omega} \left( \rho \frac{dS}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \right) dV \geq 0 \quad (2.9)$$

A Equação 2.9 é válida para qualquer região do domínio  $D$  do corpo e conduz à idéia de irreversibilidade, atribuída à geração de entropia em um sistema.

$$\rho \frac{dS}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0 \quad (2.10)$$

A desigualdade de Clausius-Duhem é obtida pela introdução de uma nova variável, a energia livre específica  $\psi$ , definida por:

$$\psi = e - TS \quad (2.11)$$

Diferenciando a Equação 2.11 chega-se a:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{de}{dt} - T \frac{dS}{dt} - S \frac{dT}{dt}, \quad (2.12)$$

ou:

$$T \frac{dS}{dt} - \frac{de}{dt} = - \left( S \frac{dT}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \right) \quad (2.13)$$

Fazendo as substituições adequadas na Equação 2.10, a partir da Equação 2.13 chega-se a (Lemaitre *et al.*, 1994):

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \rho \left( s \frac{dT}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \right) - \vec{q} \cdot \frac{\text{grad} \vec{T}}{T} \geq 0 \quad (2.14)$$

onde  $\sigma$  é o tensor tensão de Cauchy e  $\dot{\varepsilon}$  é a derivada da deformação no tempo.

Já sob o enfoque dentro da luz da Mecânica dos Sólidos, a Equação 2.14 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \rho (\dot{\psi} + s\dot{T}) - \vec{q} \cdot \frac{\text{grad} \vec{T}}{T} \geq 0 \quad (2.15)$$

Ou em notação indicial:

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \bar{q}_i \cdot \frac{T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (2.16)$$

### 2.1.3 Método do Estado Local

#### ➤ Variáveis de estado

O método do estado local postula que o estado termodinâmico de um ponto pertencente a um dado material em um certo instante é completamente definido pelos valores de um certo número de variáveis para aquele instante, denominadas variáveis de estado, as quais dependem apenas do ponto considerado (Haiakawa *et al.*, 1998). O método é válido desde que seja considerado um processo quase-estático, ou seja, que a evolução do processo seja considerada como uma sucessão de estados de equilíbrio. Para os fenômenos onde esta consideração não é válida o método do estado local não pode ser aplicado, como é o caso, por exemplo, de fenômenos envolvendo vibrações atômicas.

A maioria dos fenômenos físicos podem ser descritos com precisão pelo método do Estado Local dependendo apenas da escolha das variáveis de estado.

Os processos definidos por este método são termodinamicamente admissíveis se, em qualquer instante da evolução, a desigualdade de Clausius-Duhem (Equação 2.14) for satisfeita. Para este tipo de análise existem duas classes de variáveis pertinentes aos processos termodinâmicos, que são as variáveis observáveis e as variáveis internas (Haiakawa *et al.*, 1998).

#### ➤ Variáveis Observáveis

De acordo com o formalismo da Mecânica do Contínuo e da Termodinâmica, ambos requerem a existência de um certo número de variáveis de estado. As variáveis denominadas observáveis são:

- a temperatura  $T$ ;
- a deformação total  $\mathcal{E}$  (para pequenas deformações).

Seguindo os propósitos da presente dissertação, limitar-se-ão as variáveis observáveis apenas àquelas de interesse no estudo da Teoria da Elasticidade, Plasticidade e da Mecânica do Dano.

Para o caso onde são observados fenômenos reversíveis, como a fase elástica dos sólidos, em qualquer instante de tempo, a caracterização do estado depende unicamente destas variáveis. Por exemplo, o trabalho reversível  $\phi_e$  é definido com o auxílio da tensão associada  $\sigma$ :

$$\phi_e = \sigma : \dot{\varepsilon} \quad (2.17)$$

### ➤ Variáveis Internas

Para o caso de fenômenos de natureza dissipativa, ou que apresentam um certo grau de irreversibilidade, o presente estado do sólido é determinado pela história do material, o que para o método do estado local é caracterizado em cada instante por outras variáveis que não são as observáveis, mas sim, as variáveis denominadas internas (Haiakawa *et al.*, 1998).

A análise da deformação em sólidos consiste de duas partes, uma reversível e uma irreversível, sendo a parte reversível atribuída à fase elástica do material e a segunda à fase plástica. Assim, a deformação total em um sólido pode ser descrita através da seguinte expressão:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_p \quad (2.18)$$

Ambas as parcelas que compreendem a deformação total são caracterizadas como variáveis internas.

Outros fenômenos como o encruamento, o dano e a fratura requerem a compreensão de variáveis internas menos óbvias, algo que será abordado com o avançar do estudo.

As variáveis internas não podem ser obtidas por medidas diretas, o que dificulta um pouco o entendimento de boa parte dos fenômenos descritos por elas. Estas variáveis também não aparecem explicitamente nas leis de conservação e nem na Segunda Lei da Termodinâmica.

Não existe uma forma objetiva para se escolher as variáveis internas para o estudo da evolução de um dado fenômeno. A escolha é ditada por experiência, sensibilidade física e pelo

tipo de aplicação. Para os diferentes casos elas serão aqui definidas como  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , as quais podem assumir uma natureza escalar ou tensorial.

#### 2.1.4 Potencial Termodinâmico e Leis de Estado

Uma vez definidas as variáveis de estado, pode-se então definir um potencial termodinâmico, do qual serão derivadas as leis de estado.

Sem entrar em muitos detalhes, será especificada uma função com um valor escalar, côncava com respeito à temperatura e convexa em relação às outras variáveis, permitindo assim satisfazer as condições de estabilidade termodinâmica impostas pelas condições necessárias a Segunda Lei da Termodinâmica. Esta é a hipótese que possibilita a manipulação de potenciais diferentes por caminhos equivalentes. Será escolhida aqui a energia livre  $\psi$  como potencial termodinâmico, a qual depende das variáveis observáveis e internas, ambas variáveis de estado:

$$\psi = \psi(\varepsilon, T, \varepsilon_c, \varepsilon_p, V_k) \quad (2.19)$$

Para o caso elastoplástico, as deformações podem ser reescritas de acordo com a Equação 2.18. Assim, o potencial assume a seguinte forma:

$$\psi = \psi((\varepsilon - \varepsilon_p), T, V_k) = \psi(\varepsilon_c, T, V_k) \quad (2.20)$$

De acordo com a Equação 2.18, pode-se chegar ainda à seguinte relação:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_p} \quad (2.21)$$

Calculando então a derivada do potencial termodinâmico em relação ao tempo, obtém-se:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_c} : \dot{\varepsilon}_c + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \quad (2.22)$$

Assim, aplicando-se a desigualdade de Clausius-Duhem chega-se a uma formulação termodinamicamente consistente para os fenômenos descritos pelas variáveis de estado já detalhadas:

$$\left( \sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_c} \right) : \dot{\varepsilon}_c + \sigma : \dot{\varepsilon}_p - \rho \left( s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{\bar{q}}{T} \cdot \text{grad} \vec{T} \geq 0 \quad (2.23)$$

Algumas hipóteses clássicas podem ser adotadas permitindo a simplificação da Equação 2.23. Uma delas é admitir que o campo de temperatura é constante e uniforme. Isso levará à anulação do gradiente térmico e do fluxo de temperatura, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{grad} \vec{T} &= 0; \\ \dot{T} &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

A outra hipótese é a admissão de que não ocorram processos de caráter dissipativo, ou seja, que apenas a igualdade da inequação (2.14) seja considerada. Assim, as parcelas inerentes à deformação plástica e às variáveis internas serão anuladas, de forma que após essas considerações chega-se à primeira lei de estado:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_c} \quad (2.25)$$

Outra consideração a ser feita é com relação à deformação térmica, onde se admite a presença de uma temperatura  $T$  de valor constante e uniforme, ou seja, continuam válidas as hipóteses assumidas no processo de obtenção da primeira lei de estado. Assim, obtém-se a segunda equação de estado:

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.26)$$

As duas Equações 2.25 e 2.26 definem as leis de estado da termoelasticidade.

Um novo conceito admitido é o de variável associada, ao qual se associam as variáveis observáveis. Para as duas leis de estado têm-se respectivamente as duas variáveis

associadas: para a primeira, que descreve as deformações, têm-se a tensão, lembrando que ambas neste caso são de natureza tensorial representadas por um tensores de segunda ordem. De maneira análoga, tem-se como variável associada à temperatura, a entropia, sendo ambas de natureza escalar.

No que diz respeito às variáveis internas, tem-se também uma variável associada  $A_k$ , definida por:

$$A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \quad (2.27)$$

A Tabela 2.1 mostra a relação entre estas variáveis.

Tabela 2.1 - Variáveis termodinâmicas

Variáveis de Estado		
Observáveis	Internas	Associadas
$\varepsilon$	--	$\sigma$
$T$	--	$S$
--	$\varepsilon_v$	$\sigma$
--	$\varepsilon_p$	$-\sigma$
--	$V_k$	$A_k$

### 2.1.5 Dissipação e Leis Complementares

Como já foi mostrado, o potencial termodinâmico permite que sejam escritas leis que relacionam as variáveis observáveis às suas respectivas variáveis associadas. Entretanto, para as variáveis internas, as quais descrevem geralmente a evolução de processos dissipativos, a relação, até então, apenas ficou explicitada, sendo que até o momento nenhuma lei foi descrita para esse tipo de abordagem.

#### ➤ Dissipação Intrínseca e Dissipação Térmica

Reescrevendo a desigualdade de Clausius-Duhem, doravante considerando apenas as variáveis que descrevem processos dissipativos, a Equação 2.23 assume a seguinte forma:

$$\Phi = \sigma : \dot{\varepsilon}_p - A_k \dot{V}_k - \bar{g}rad. \frac{\bar{q}}{T} \geq 0 \quad (2.28)$$

A Equação 2.28 pode ser dividida em dois termos distintos, um correspondendo a uma dissipação de caráter puramente mecânico,  $\Phi_1$ , e outra caracterizada por efeitos de dissipação térmica,  $\Phi_2$ . Assim, escreve-se:

$$\Phi_1 = \sigma : \dot{\varepsilon}_p - A_k \dot{V}_k \quad (2.29 \text{ a})$$

$$\Phi_2 = -\bar{g}rad. \frac{\bar{q}}{T} \quad (2.29 \text{ b})$$

### ➤ Potencial de Dissipação

Para que sejam escritas as leis de estado restantes é preciso definir um potencial que envolva as variáveis de natureza dissipativa, em especial, as variáveis internas. Este potencial é também chamado pseudopotencial ou potencial dissipativo,  $\varphi$ , sendo definido como uma função escalar contínua e convexa também escrita em função de variáveis de fluxo (Haiakawa *et al.*, 1998). Deste modo, o potencial de dissipação assume a estrutura da equação abaixo:

$$\varphi = \varphi \left( \dot{\varepsilon}_p, \dot{V}_k, \frac{\bar{q}}{T} \right) \quad (2.30)$$

A Equação 2.30 é definida como uma função que tem a sua origem no espaço onde as variáveis que o definem se anulam, assim, através da regra da normalidade são definidas as leis de estado complementares de caráter dissipativo:

$$\sigma = - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}_p} \quad (2.31)$$

$$A_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k} \quad (2.32)$$

$$\bar{g} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \left( \frac{\bar{q}}{T} \right)} \quad (2.33)$$

onde  $\bar{g}$  é a variável associada ao potencial dissipativo referente a temperatura.

## 2.2 Definição dos conceitos de tensão efetiva e deformação efetiva a partir da variável dano

Partindo da premissa de um sólido com defeitos em sua microestrutura, define-se como elemento de volume representativo o elemento que possui dimensões suficientemente grandes para que se possa admitir homogeneidade para a distribuição dos defeitos nele contidos, e, ao mesmo tempo, suficientemente pequenas para que se evitem gradientes elevados de grandezas locais de interesse, como a deformação (Krajcinovic, 1989). Assim, é a partir desta consideração que se faz uma abordagem admitindo como contínuas as funções representativas dos fenômenos que ocorrem no elemento.

As propriedades mecânicas nele medidas são valores médios que podem ser associados a um ponto do material. Na Figura 2.1 ilustra-se um elemento representativo orientado por um versor de direção normal  $n$ .

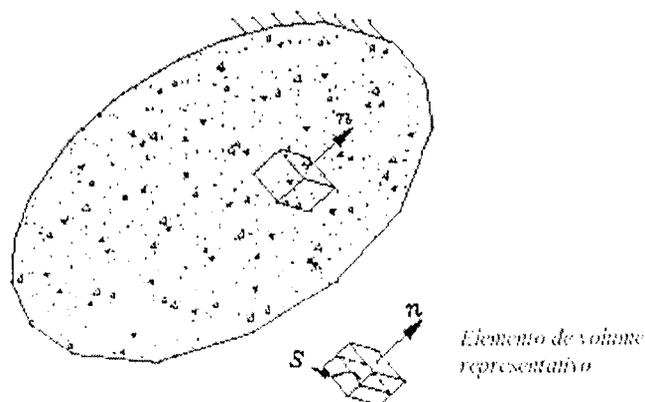


Figura 2.1- Elemento de volume (Lemaitre, 1984).

### 2.2.1 Definição de Tensão Efetiva

Seja  $S$  a área total de uma seção genérica de normal  $n$  no interior do elemento definido pela Figura 2.1. Nessas condições,  $\sigma = F/S$  é a tensão normal nominal em qualquer ponto da seção genérica, onde  $F$  representa uma força perpendicular a  $S$ .

Admitindo-se que a área afetada pelos defeitos seja totalmente incapaz de transferir tensões, define-se uma tensão efetiva levando-se em conta somente a parte íntegra da seção.

Nesse sentido, seja  $\tilde{S}$  a parcela íntegra da área total  $S$  da seção considerada. A área dos defeitos,  $S_0$ , é definida por:

$$S_0 = S - \tilde{S} \quad (2.34)$$

Por definição, a variável dano  $D_n$ , no caso associado a um plano de normal  $n$ , fica definido pela relação (Chaboche *et al.*, 1985):

$$D_n = \frac{S_0}{S} \quad (2.35)$$

Nota-se que a variável dano assume valores contidos no intervalo  $0 \leq D_n \leq 1$ , sendo que  $D_n = 0$  corresponde à situação em que o material encontra-se perfeitamente íntegro e  $D_n = 1$  indica um estado de total deterioração.

Assim sendo, a parcela de seção efetivamente resistente pode ser expressa em função da variável dano como:

$$\tilde{S} = S - S_0 = S(1 - D_n) \quad (2.36)$$

Com base nas Equações 2.35 e 2.36, as tensões nominal,  $\sigma$ , e efetiva,  $\tilde{\sigma}$ , são definidas respectivamente por:

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ e } \tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \quad (2.37)$$

Levando-se em conta a Equação 2.36 segue-se que:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D_n)} \quad (2.38)$$

Como a área íntegra é menor do que a nominal, para uma mesma força aplicada a tensão efetiva num meio danificado resulta comparativamente maior do que a tensão nominal, ou seja:

- $\tilde{\sigma} = \sigma$  : material localmente íntegro;
- $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$  : material totalmente danificado localmente.

Nota-se que em um mesmo ponto a variável  $D_n$  pode assumir valores diferentes de acordo com a orientação da normal  $n$ . Essa característica indica uma natureza tensorial para a variável que representa o dano no elemento de volume.

O chamado dano escalar aplica-se às situações em que os microdefeitos apresentam no elemento de volume uma distribuição mais ou menos uniforme, de modo que segundo qualquer plano a medida de dano resulta o mesmo, independentemente da orientação da normal  $n$  (Kachanov, 1986). Nestes casos, um único valor da variável de dano é suficiente para caracterizar completamente o estado local de deterioração.

$$D = D_n \quad \forall n \quad (2.39)$$

## 2.2.2 Definição de Deformação Efetiva

Um conceito dual ao da tensão efetiva é o da deformação efetiva que também decorre da análise de uma situação de deformação uniaxial imposta ao elemento de volume orientado segundo uma certa direção definida pelo versor  $n$ .

Seja  $\Delta l$  a variação do comprimento inicial  $l_0$  por efeito da elongação imposta. A medida de deformação linear nominal é definida pela relação:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.40)$$

Entretanto, se o elemento de volume possui inicialmente defeitos ou descontinuidades internas, elas se abrem de uma certa quantidade, que, em conjunto, pode ser representada por

$\Delta d$ . Assim sendo, no processo de deformação, ilustrado pela Figura 2.2, somente a parcela  $\Delta l - \Delta d$  é que efetivamente deve ser considerada numa medida da deformação.

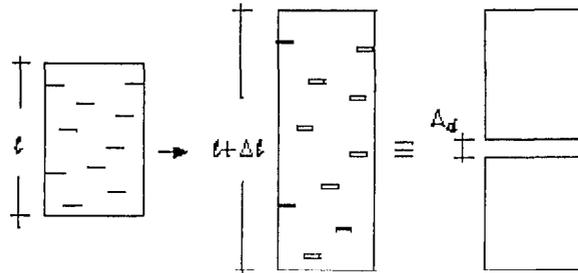


Figura 2.2 – Acréscimo de comprimento devido à abertura dos defeitos.

Segue-se daí que a medida efetiva da deformação linear  $\tilde{\epsilon}$  pode ser definida como:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\Delta l - \Delta d}{l_0} \quad (2.41)$$

Uma segunda definição para uma variável de dano associada a uma certa direção pode ser então proposta:

$$D_n^* = \frac{\Delta d}{\Delta l} \quad (2.42)$$

Levando-se em conta a nova variável dano, as medidas nominal e efetiva da deformação linear se relacionam por:

$$\tilde{\epsilon} = (1 - D_n^*)\epsilon \quad (2.43)$$

As duas variáveis escalares de dano introduzidas pelas Equações 2.35 e 2.42 podem ser unificadas se for considerado que o volume correspondente à parte danificada é o mesmo nos dois casos. Esta consideração é bastante lógica, pois se trata de uma situação de solitação uniaxial sobre um mesmo volume, onde ora se analisa o equilíbrio das tensões, ora a compatibilidade das deformações. Assim sendo, o volume danificado pode ser representado de duas formas:

$$V_d = S_0 \Delta l = S \Delta d \quad (2.44)$$

Levando-se em conta as relações definidas pelas Equações 2.35 e 2.42, encontra-se que  $D_{,} = D_{,}^*$ .

### 2.2.3 Princípios Gerais de Equivalência de Respostas Constitutivas

No âmbito da Mecânica dos Meios Contínuos, um axioma constitutivo fundamental é o da ação local, isto é, a resposta constitutiva num ponto independe da ação nos elementos vizinhos. Estendendo-se esse axioma ao meio com dano, resulta que a relação constitutiva para um ponto na parte íntegra não é afetada pelo dano. Porém, é importante lembrar que nessa parte devem ser consideradas a tensão efetiva e a deformação efetiva. Assim sendo, pode-se estabelecer um princípio geral de equivalência da resposta constitutiva: “A lei constitutiva do meio danificado é obtida da lei constitutiva do meio íntegro onde o tensor de tensões é substituído pelo tensor de tensões efetivas e o tensor linear de deformações pelo tensor de deformações efetivas” (Chaboche et al., 1994).

Restringindo-se a análise ainda ao caso uniaxial, e sendo o meio íntegro suposto elástico linear, o princípio enunciado leva à seguinte relação:

$$\tilde{\sigma} = E \tilde{\varepsilon} \quad (2.45)$$

### 2.2.4 Relação Constitutiva envolvendo Equivalência de Energia

Substituindo na Equação 2.45 as relações que definem  $\tilde{\varepsilon}$  e  $\tilde{\sigma}$  pelas Equações 2.43 e 2.37, respectivamente, obtém-se:

$$\sigma = (1 - D)^2 E \varepsilon, \quad (2.46)$$

relação esta que vale para o meio contínuo equivalente envolvendo quantidades nominais. Por outro lado, como  $\tilde{\sigma} \tilde{\varepsilon} = \sigma \varepsilon$ , pode-se afirmar que o meio contínuo equivalente reproduz a mesma quantidade de energia do meio danificado.

A partir da Equação 2.46, pode-se definir o módulo secante da rigidez elástica  $\tilde{E}$  do meio danificado como sendo :

$$\tilde{E} = (1 - D)^2 E \quad (2.47)$$

Colocando em evidência a degradação do módulo de rigidez elástico inicial do material causada pela danificação e isolando a variável de dano, obtém-se:

$$D = 1 - \left( \frac{\tilde{E}}{E} \right)^2 \quad (2.48)$$

Essa relação indica que é possível identificar os valores de dano com base em medidas experimentais do módulo secante de rigidez elástica em ensaios uniaxiais com deformação controlada, como ilustra a Figura 2.3.

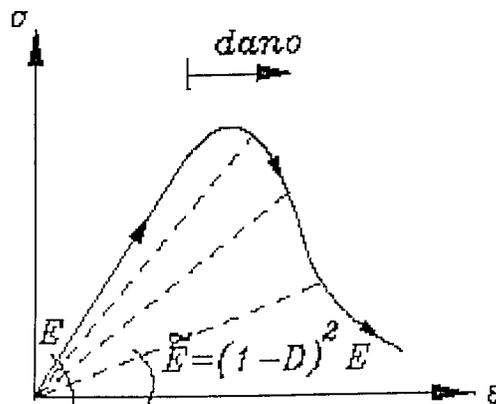


Figura 2.3 – Variação da rigidez secante do meio contínuo equivalente.

### 2.2.5 Relação Constitutiva envolvendo Equivalência de Deformação

O princípio da equivalência de deformação diz que a deformação do meio íntegro em que atua a tensão efetiva é a mesma do meio danificado, ou seja :  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$  . De modo mais formal, o enunciado do princípio é: “O estado de deformação de um material com dano é obtido da lei de comportamento do material íntegro onde o tensor de tensão é substituído pelo tensor de tensão efetiva” (Chaboche et al., 1994).

A Figura 2.4 propicia uma melhor interpretação deste princípio.

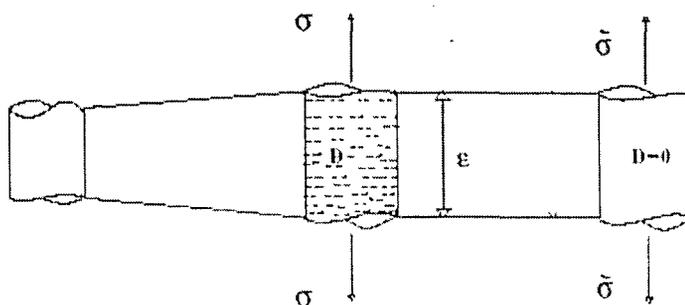


Figura 2.4 – Hipótese de deformação equivalente.

Esse princípio decorre da idéia de assimilar o meio, para fins da resposta unidimensional, como um arranjo de infinitas fibras em paralelo com resistências ligeiramente diferentes entre si, às quais se impõe uma mesma deformação. Em função das diferentes resistências, as fibras vão progressivamente se rompendo, representando o processo de danificação.

Partindo deste princípio, a Equação 2.45 assume a seguinte forma:

$$\frac{\sigma}{(1-D)} = E\varepsilon \text{ ou } \sigma = (1-D)E\varepsilon, \quad (2.49)$$

donde o módulo secante de rigidez elástica  $\tilde{E}$  para um meio contínuo de resposta equivalente ao meio deteriorado resulta:

$$\tilde{E} = (1-D)E \quad (2.50)$$

A partir da Equação 2.50, a variável dano pode ser definida pela seguinte relação:

$$D = 1 - \left( \frac{\tilde{E}}{E} \right) \quad (2.51)$$

## 2.2.6 Relação Constitutiva envolvendo Equivalência de Tensão

A forma dual da equivalência em deformação consiste em admitir que a tensão do meio íntegro em que atua a deformação efetiva é a mesma do meio danificado, ou seja,  $\tilde{\sigma} = \sigma$ . Uma justificativa para essa hipótese é a idealização do meio como um arranjo de estratos superpostos em série na direção do carregamento (sempre tendo-se em vista o caso unidimensional).

Com a nova hipótese de equivalência, a Equação 2.45 assume a forma:

$$\sigma = E\tilde{\varepsilon} \quad (2.52 \text{ a})$$

ou

$$\sigma = (1-D)E\varepsilon \quad (2.52 \text{ b})$$

onde a variável de dano pode ser identificada por meio de uma relação idêntica à Equação 2.51.

### 2.2.7 Forma Generalizada das Relações Constitutivas para Casos Multiaxiais

A forma generalizada estabelece uma relação entre os tensores de segunda ordem de tensão e de deformação por meio de um tensor constitutivo de rigidez secante elástica com dano.

Um primeiro passo na direção da generalização em questão é a extensão ao caso multiaxial dos conceitos de tensão e deformação efetivas apresentados para o caso uniaxial.

De uma maneira geral é razoável imaginar que se um certo material inicialmente isotrópico é submetido a um carregamento com uma certa direção definida, a microfissuração induzida também apresentará uma certa orientação. Assim sendo, pode-se esperar que a danificação gere anisotropia. A danificação, com preservação da isotropia pode ser admitida como um caso particular, justificável se a microfissuração se apresentar com orientação difusa. Conclui-se, portanto, que uma formulação geral deve contemplar a anisotropia e, nesse sentido, a variável escalar de dano do caso unidimensional passa a assumir a natureza de um operador tensorial de quarta ordem.

Chama-se a atenção para a notação a ser adotada no que segue, onde, os tensores de segunda ordem estarão representados por letras maiúsculas e os de quarta ordem por letras maiúsculas em negrito. Em particular, o tensor de deformações passará a ser representado também pela letra  $E$ .

Introduzindo-se o tensor identidade de quarta ordem  $\mathbf{II}$ , as formas generalizadas das Equações 2.38 e 2.43, referentes aos tensores de tensão e de deformação efetivas, podem ser escritos por:

$$\tilde{T} = (\mathbf{II}-\mathbf{D})^{-1} T \quad (2.53)$$

$$\tilde{E} = (\mathbf{II}-\mathbf{D})^t E \quad (2.54)$$

Observa-se que a transposição indicada no operador de deformação efetiva é proposital e facilita os desenvolvimentos algébricos que seguirão.

A relação geral entre os tensores efetivos é então dada por:

$$\tilde{T} = \mathbf{E}\tilde{E} \quad (2.55)$$

onde  $\mathbf{E}$  é o tensor de rigidez secante elástica, de quarta ordem, simétrico e positivo definido. Combinando-se as Equações 2.54 e 2.55, obtém-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{II}-\mathbf{D})^{-1} T &= \mathbf{E}(\mathbf{II}-\mathbf{D})^t E \\ T &= (\mathbf{II}-\mathbf{D})\mathbf{E}(\mathbf{II}-\mathbf{D})^t E \end{aligned} \quad (2.56)$$

A expressão anterior pode ainda ser escrita na forma:

$$T = \tilde{\mathbf{E}}E \quad (2.57)$$

O tensor de rigidez secante elástica do meio danificado pode ser definido por:

$$\tilde{\mathbf{E}} = (\mathbf{II}-\mathbf{D})\mathbf{E}(\mathbf{II}-\mathbf{D})^t \quad (2.58)$$

Uma outra observação importante decorre do desenvolvimento da operação de produto interno entre os tensores efetivos das Equações 2.53 e 2.54, conforme se evidencia no desenvolvimento a seguir:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}.\tilde{E} &= (\mathbf{II}-\mathbf{D})^{-1}T.(\mathbf{II}-\mathbf{D})^T E \\
&= T.(\mathbf{II}-\mathbf{D})^{-T}(\mathbf{II}-\mathbf{D})^T E \\
&= T.E
\end{aligned}
\tag{2.59}$$

Portanto, a equivalência em energia é verificada com as formas propostas para os tensores efetivos.

Dois outros tensores constitutivos de dano podem ser deduzidos considerando-se as equivalências em deformação e em tensão. Na primeira delas tem-se como condição que  $E = \tilde{E}$ . Combinando-se as Equações 2.53 e 2.54 segue-se então que:

$$T = (\mathbf{II}-\mathbf{D})EE \tag{2.60}$$

Nesse caso, o tensor de rigidez secante elástica do meio danificado fica expresso na forma:

$$\tilde{E} = (\mathbf{II}-\mathbf{D})E \tag{2.61}$$

Na equivalência em tensão tem-se como condição que  $T = \tilde{T}$ . Combinando as Equações 2.53 e 2.54 resulta, nesse caso:

$$T = E(\mathbf{II}-\mathbf{D})^T E \tag{2.62}$$

O tensor de rigidez secante elástica do meio danificado passa a ser expresso na forma:

$$\tilde{E} = E(\mathbf{II}-\mathbf{D})^T \tag{2.63}$$

### 2.3 Fundamentos da Teoria da Plasticidade

A teoria da plasticidade consiste numa teoria matemática que aborda as deformações irreversíveis num âmbito onde o tempo é visto como uma variável independente (Lemaitre *et al.*, 1994).

O fenômeno de plastificação dos metais e ligas envolve principalmente o movimento de discordâncias sem levar em conta a influência da viscosidade inerente ao material ou a

presença de dano. É ainda válido salientar que existem duas limitações para a aplicação desta teoria:

- Ela é aplicável em uma faixa de temperaturas relativamente baixas. Uma convenção adotada, ainda que grosseira, é que a temperatura não deve exceder a um quarto da temperatura de fusão, em Kelvin;
- Aplica-se a situações em que as deformações não devem ultrapassar mais da metade do valor da deformação onde a ruptura é observada.

Por fim, as funções atribuídas à teoria da plasticidade são:

- a) cálculo de deformações permanentes nas estruturas ou componentes estruturais;
- b) previsão do colapso devido às deformações plásticas no material;
- c) investigação de problemas de instabilidade;
- d) calcular forças necessárias ao material em processos de conformação mecânica, etc.

Uma outra abordagem com relação à Teoria da Plasticidade diz respeito ao efeito da plastificação dos materiais acoplado ao fenômeno de danificação dos mesmos.

No âmbito da Teoria da Plasticidade, alguns termos e conceitos não podem deixar de ser aqui citados e bem definidos. A seguir tais termos estarão resumidamente descritos.

### 2.3.1 Encruamento

É aqui definido como o fenômeno que se caracteriza por um aumento, internamente no sólido, da densidade de discordâncias e da resistência do material. O encruamento se dá pelo aumento de barreiras na microestrutura do material, de forma que as deformações não podem aumentar sem que o carregamento aumente. Assim, o que sucede é um aumento na resistência do material à propagação das deformações devido à presença das discordâncias.

Outra forma de se promover o encruamento é o aparecimento de micro tensões resultantes das barreiras formadas pelas discordâncias que dificultam a propagação das deformações de grão para grão do material, ou o aparecimento de tensões residuais na interface fibra resina para o caso de materiais compósitos (Hild *et al.*, 1997).

Uma das conseqüências acarretadas pelo fenômeno é o aumento do limite elástico do material, ou seja, da tensão de escoamento. É evidente que para materiais dúcteis, esta

implicação torna-se mais notória, uma que vez que ambas as zonas, elástica e plástica, ocorrem em proporções bem definidas.

O encruamento pode ocorrer sob duas formas (Lemaitre *et al.*, 1994):

- ✓ **Encruamento Isotrópico:** caracterizado pelo fato da superfície de contorno, definida no espaço  $(\sigma_{11}, \sqrt{\sigma_{12}})$ , que limita o domínio elástico ser alterada apenas por um parâmetro escalar, ou seja, o centro da curva que representa o limite elástico não é transladado com a expansão do domínio elástico. A Figura 2.5 ilustra este tipo de encruamento.
- ✓ **Encruamento Cinemático:** caracterizado por manter um domínio constante, ou seja, a área definida no espaço  $(\sigma_{11}, \sqrt{\sigma_{12}})$ . Entretanto, o seu centro translada neste espaço. Este tipo de encruamento é ilustrado pela Figura 2.6.

A ocorrência do tipo de encruamento depende do material em questão e do tipo de carregamento aplicado.

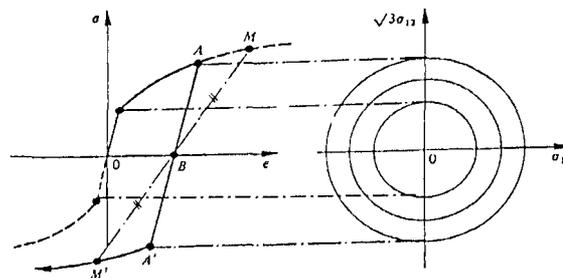


Figura 2.5 – Encruamento Isotrópico.

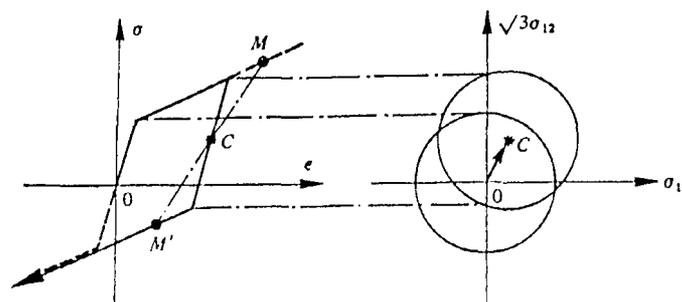


Figura 2.6 – Encruamento Cinemático.

### 2.3.2 Limite Elástico

É o ponto no diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  que divide as zonas elástica e plástica. Para estados de tensões acima deste marco, as deformações passam a ser consideradas como permanentes, caracterizando a plasticidade como um fenômeno irreversível.

Convencionalmente, algumas considerações são adotadas para se estabelecer o limite elástico:

- ✓ Para um controle qualitativo do material, um valor de 0,2% de deformação é adotado como o ponto limítrofe entre ambas as zonas, elástica e plástica (Lemaitre *et al.*, 1994).
- ✓ Caso o valor anterior seja muito alto para as deformações permanentes, um valor de 0,02% é então adotado. Vale enfatizar que estes valores podem se afastar um pouco destas referências dependendo do material (Lemaitre *et al.*, 1994).

### 2.3.3 Escoamento Plástico

O ponto de escoamento plástico é aquele onde ocorre um incremento na deformação do material sem que ocorra nenhum incremento no carregamento aplicado à estrutura. Este fenômeno é evidenciado quando o estado de tensão do corpo se iguala ou ultrapassa o valor da tensão de escoamento. Acoplado a este fenômeno pode ser observado também o encruamento do material.

As curvas que descrevem a zona elástica e plástica fazem parte do mesmo diagrama de tensão deformação. Entretanto, pode-se admitir uma divisão na curva que descreve o comportamento mecânico do material para que o estudo da plasticidade possa ser introduzido sem as considerações anteriores da zona elástica que, é geralmente adotada como linear.

Num contexto macroscópico das deformações, a equação de *Ramberg-Osgood*, que relaciona a deformação plástica com a tensão, para o caso uniaxial é dada por:

$$\sigma_s = \sigma_y + K_y \varepsilon_p^{1/M_y} \quad (2.64)$$

onde:

$\sigma_s$  - tensão para a deformação plástica correspondente;

$\sigma_y$  - tensão limite de escoamento;

$K_y$  - coeficiente linear da curva de plasticidade linearizada, ou coeficiente de plasticidade;

$M_y$  - coeficiente angular da curva linearizada, ou coeficiente de encruamento;

$\varepsilon_p$  - deformação plástica.

Expressando a deformação em função do estado de tensão do material, a partir de (2.64) tem-se:

$$\varepsilon_p = g(\sigma_s) = \left\langle \frac{\sigma_s - \sigma_y}{K_y} \right\rangle^{M_y} \quad (2.65)$$

### 2.3.4 Formulação Geral das Leis Constitutivas

Na formulação das leis constitutivas que regem o domínio plástico de um determinado material é feita a consideração de que as deformações plásticas e elásticas podem ser abordadas separadamente.

A primeira etapa na formulação de tais leis é a definição das variáveis observáveis que aqui são definidas como sendo a temperatura e a deformação total. Já as variáveis internas, serão o encruamento e a deformação plástica. A natureza e o processo de formulação das variáveis associadas, anteriormente descritos, permitem a obtenção das relações entre as variáveis observáveis e as associadas, sendo estas definidas por:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} \quad (2.66)$$

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.67)$$

A energia específica livre  $\psi$  fica então definida pelas variáveis internas e observáveis:

$$\psi = \psi(\varepsilon_e, T, V_k) \quad (2.68)$$

Aplicando a desigualdade de Clausius-Duhem e considerando apenas a dissipação intrínseca, ou seja, desprezando o efeito da variação de temperatura, escreve-se:

$$\sigma : \dot{\varepsilon}_p - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \right) \dot{V}_k \geq 0 \quad (2.69)$$

A variável interna, podendo ser de natureza escalar ou tensorial, representa o presente estado do material (para este caso, o encruamento). A deformação plástica  $p$  acumulada é expressa por:

$$p = \int_0^t \left[ \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_p(\tau) : \dot{\varepsilon}_p(\tau) \right]^{1/2} d\tau, \quad (2.70)$$

onde  $\tau$  é o tempo corrente da integral de convolução. Designando por  $W_p$ , o trabalho plástico dissipado, este será definido por:

$$W_p = \int_0^t \sigma(\tau) : \dot{\varepsilon}_p(\tau) d\tau \quad (2.71)$$

Geralmente, as variáveis de natureza escalar são associadas à densidade de vazios para um corrente estado do material e as de natureza tensorial são associadas à incompatibilidade de deformações plásticas contidas no policristal, ou seja, estão mais relacionadas com o estado de deformação do sólido.

De acordo com a hipótese da partição adotada para a divisão da deformação total em duas parcelas, elástica e plástica e, adotando  $\alpha = \varepsilon_p$ , a energia livre pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\psi = \psi_e(\varepsilon_e, T) + \psi_p(p, \alpha, T) \quad (2.72)$$

A força termodinâmica associada à deformação plástica acumulada  $p$  é definida pela variável de encruamento isotrópico de natureza escalar  $R$ . Já a variável associada a  $\alpha$  é definida por  $X$ , de natureza tensorial. Ambas as variáveis são dadas por:

$$R = \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \quad (2.73)$$

$$X = \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) \quad (2.74)$$

Essas duas variáveis são ligadas ao crescimento do domínio elástico devido ao encruamento, sendo que, representam respectivamente o tamanho do domínio e o posicionamento geométrico do centro no espaço de tensões.

Rescrevendo então a desigualdade de Clausius-Duhem, e considerando apenas a dissipação intrínseca, chega-se à seguinte forma geral para a lei constitutiva:

$$\sigma : \dot{\varepsilon}_p - R\dot{p} - X : \dot{\alpha} \geq 0 \quad (2.75)$$

### 2.3.5 Superfície de Carga e Potencial de Dissipação

Levando em consideração que, dentro do espaço de tensões existe uma família de superfícies equipotenciais e considerando o encruamento como uma variável com centro  $X$  e tamanho de domínio  $R$  fixos, a superfície que representa o contorno deste domínio fica definida por  $\Omega = 0$ . Esta superfície também pode ser definida por uma variável  $f$ , que quando se anula, é também chamada de superfície de carga ou de escoamento. A expansão deste domínio é função do encruamento.

Para que ocorra o escoamento, duas condições precisam ser satisfeitas. A primeira condição impõe que o ponto  $\sigma^*$ , o qual define o estado corrente de tensões, esteja sobre a superfície de carga. Já a segunda requer que o corpo esteja sob um estado de carga e não de descarga, como seria a situação oposta, onde a derivada da Equação 2.77 seria definida negativa. Estas condições são expressas por:

$$1) \quad f(\sigma^*, V_k) = 0 \quad (2.76)$$

$$2) \quad df(\sigma^*) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma^* + \frac{\partial f}{\partial V_k} dV_k = 0 \quad (2.77)$$

Estas proposições permitem afirmar que o escoamento não pode ocorrer para o processo de descarregamento e que, na retirada da carga o material se comporta como se estivesse dentro do regime elástico.

Para materiais com o encruamento definido como positivo, as superfícies de carga são expressas através das componentes do tensor tensão e do estado da variável interna que neste caso é representada pelo encruamento. Geralmente, estas variáveis são definidas a partir das forças termodinâmicas  $X$ ,  $R$  e da temperatura  $T$ , de modo que:

$$f = f(\sigma, R, X, T) = 0 \quad (2.78)$$

A existência de um potencial termodinâmico de dissipação é postulada para definir as leis de evolução das variáveis de natureza dissipativa, como a deformação plástica e as variáveis internas.

Este modelo de plasticidade baseado num potencial de dissipação é chamado de plasticidade não associada e requer o uso de três potenciais complementares: a energia livre  $\psi$ , a superfície de carga  $f$  e um potencial de superfície  $F$  definido por uma constante, a qual define a direção do escoamento plástico no espaço generalizado das forças termodinâmicas.

$$F = F(\sigma, R, X, T) \quad (2.79)$$

A hipótese da normalidade é então aplicada ao fenômeno assumido como dissipativo e instantâneo, resultando nas seguintes equações:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) \quad (2.80)$$

$$-\dot{p} = \dot{\lambda} \left( \frac{\partial F}{\partial R} \right) \quad (2.81)$$

$$-\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right) \quad (2.82)$$

onde a variável  $\dot{\lambda}$  é definida como sendo o multiplicador plástico independente do tempo. A condição que define a não existência do escoamento é dada por  $\dot{\lambda} = 0$ .

Para que o fenômeno da plasticidade não associada seja considerado como termodinamicamente consistente, a desigualdade de Clausius-Duhem deve ser satisfeita. Deste modo, o potencial dissipativo  $\Phi$  assume a seguinte forma:

$$\Phi = \left[ \sigma : \frac{\partial F}{\partial \sigma} + R \frac{\partial F}{\partial R} + X : \frac{\partial F}{\partial X} \right] \dot{\lambda} = 0 \quad (2.83)$$

Uma das características do potencial dissipativo é que ele seja uma função convexa, positiva e que contenha o escoamento plástico incluindo a origem dos demais potenciais na sua formulação. Assim, tem-se a condição:

$$\Phi \geq F \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.84)$$

### 2.3.6 Condição de Consistência para o Multiplicador Plástico

Para a condição de carga e descarga, admi-se que  $f = 0$  e  $\dot{f} = 0$  durante o escoamento plástico. Esta última condição, considerando apenas a dissipação intrínseca, implica a seguinte condição:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial F}{\partial X} : \dot{X} = 0 \quad (2.85)$$

Usando as relações entre as variáveis internas e as forças termodinâmicas associadas, tem-se:

$$\dot{R} = L_{pp} \dot{p} + L_{ap} : \dot{\alpha} \quad (2.86 a)$$

$$\dot{X} = L_{ap} \dot{p} + L_{aa} : \dot{\alpha} \quad (2.86 b)$$

Sendo  $L$  o operador obtido pela derivada da energia livre  $\psi$ .

$$L_{pp} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} \quad (2.87 \text{ a})$$

$$L_{\alpha p} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial p} \quad (2.87 \text{ b})$$

$$L_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \quad (2.87 \text{ c})$$

Aplicando a regra da normalidade e substituindo o conjunto de relações definidas pelas Equações 2.87 e 2.86, chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} - \lambda \left[ \frac{\partial f}{\partial X} : L_{\alpha\alpha} : \frac{\partial F}{\partial X} + \left( \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial F}{\partial R} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial F}{\partial X} \right) : L_{\alpha p} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial F}{\partial R} : L_{pp} \right] = 0 \quad (2.88)$$

onde o multiplicador plástico pode ser definido como uma função de potenciais diferentes.

É importante ressaltar que apenas a materiais com o encruamento positivo pode-se aplicar este formalismo aqui apresentado. Para o caso de encruamento negativo, uma teoria baseada na deformação deve ser utilizada. Uma forma de definir o encruamento positivo é considerar que o valor da parcela  $h$  que forma o produto com o multiplicador plástico da Equação 2.89 seja positivo:

$$h = \frac{\partial f}{\partial X} : L_{\alpha\alpha} : \frac{\partial F}{\partial X} + \left( \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial F}{\partial R} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial F}{\partial X} \right) : L_{\alpha p} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial F}{\partial R} : L_{pp} \geq 0 \quad (2.89)$$

Assim, a expressão para o multiplicador plástico assume a seguinte forma:

$$\lambda = \frac{H(f)}{h} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} \right\rangle \quad (2.90)$$

onde  $H$  representa a função de *Heaviside* e o  $\langle \rangle$ , o colchete de *MacClaud*, ambos são respectivamente definidos por:

$$\begin{aligned} H(f) &= 0 \text{ se } f < 0 \\ H(f) &= 1 \text{ se } f \geq 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= 0 \text{ se } u < 0 \\ \langle u \rangle &= 1 \text{ se } u \geq 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

A definição apresentada para estes dois símbolos nos leva à dedução de que a condição em que  $\dot{\lambda} = 0$  só ocorrerá quando  $f < 0$  ou quando o sólido estiver num processo de descarregamento ( $\dot{f} < 0$ ).

## 2.4 Modelo Evolutivo de Dano Elasto-Plástico

A formulação do modelo aqui proposta passa pelo mesmo formalismo apresentado para as relações constitutivas da teoria da plasticidade. Sendo assim, a base do desenvolvimento de tal modelo é também obtida por uma via termodinamicamente consistente.

O processo de desenvolvimento do modelo também requer a utilização de um potencial termodinâmico que relaciona as variáveis envolvidas no fenômeno, sendo estas de natureza observável ou interna, e a posterior formulação de um potencial dissipativo, o qual assume a função de descrever a parcela irreversível inerente ao fenômeno.

O potencial termodinâmico aqui utilizado é também a energia livre de Helmholtz, definido como função das seguintes variáveis:

$$\psi = \psi(\varepsilon, T, \varepsilon_e, \varepsilon_p, \alpha, p, D) \quad (2.93)$$

Para este modelo será utilizado o conceito de tensão efetiva definido pela Equação 2.38 e de deformação elástica efetiva, dada pela Equação 2.43.

A partir das variáveis associadas ao fenômeno, chega-se ao seguinte potencial termodinâmico:

$$\psi = \frac{1}{2\rho} \mathbf{a} : \varepsilon_e : \varepsilon_e (1 - D) + \psi_p(\alpha, p), \quad (2.94)$$

onde  $\mathbf{a}$  representa um tensor de quarta ordem contendo os coeficientes elásticos do material em função da temperatura e da densidade do material  $\rho$ .

O acoplamento entre o dano e a fase elástica fica definido por:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_c} = a : \varepsilon_c (1 - D) \quad (2.95)$$

Definindo agora de forma similar à relação entre o potencial termodinâmico e a deformação elástica, tem-se a seguinte variável associada ao dano, definida por:

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{1}{2} a : \varepsilon_c : \varepsilon_c \quad (2.96)$$

A variável  $Y$  pode ser entendida como uma forma de energia elástica de deformação. Caso seja admitida a hipótese de um fenômeno caracterizado como elástico e isotrópico, a Equação 2.96 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-Y = \frac{\sigma_{eq}}{2E(1-D)^2} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right], \quad (2.97)$$

onde:

$\nu$  - coeficiente de Poisson;

$\sigma_H$  - tensão hidrostática,  $\sigma_H = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma)$ ;

$\sigma_{eq}$  - tensão equivalente de Von Mises,  $\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \sigma' : \sigma' \right)^{1/2}$ ;

$\sigma'$  - tensão desviatória,  $\sigma' = \sigma - \sigma_H$ ;

A etapa seguinte da formulação consiste na determinação de um potencial de dissipação, o qual é obtido a partir da desigualdade de Clausius-Duhem, e definido em função das variáveis de natureza dissipativa. Assim, a desigualdade é escrita da seguinte forma:

$$\sigma : \dot{\varepsilon}_p - X : \dot{\alpha} - R\dot{p} - Y\dot{D} \geq 0 \quad (2.98)$$

O potencial de dissipação é então definido a partir das variáveis de estado envolvidas no fenômeno e das suas respectivas forças termodinâmicas associadas, logo:

$$\phi^* = \phi^*(\sigma, X, R, Y; \varepsilon, \varepsilon_c, \varepsilon_p, \alpha, p, D) \quad (2.99)$$

Este potencial de dissipação ainda pode ser dividido em duas partes, uma relacionada à plasticidade,  $\phi_p^*$ , e outra relacionada ao dano,  $\phi_D^*$ .

Aplicando a regra da normalidade e associando o dano à plasticidade através do multiplicador plástico, obtém-se as variáveis de fluxo do potencial de dissipação:

$$\dot{\varepsilon}_p = \lambda \frac{\partial \phi^*}{\partial \sigma} \quad (2.100)$$

$$\dot{\alpha} = -\lambda \frac{\partial \phi^*}{\partial X} \quad (2.101)$$

$$\dot{p} = -\lambda \frac{\partial \phi^*}{\partial R} \quad (2.102)$$

$$\dot{D} = -\lambda \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \quad (2.103)$$

Para este tipo de acoplamento entre dano e plasticidade adota-se o seguinte potencial de dissipação em função da variável dano:

$$\phi_D^* = \frac{S}{s+1} \left( \frac{Y}{S} \right)^{s+1} (1-D)^{-1} \quad (2.104)$$

onde  $S$  e  $s$  são constantes do material

Substituindo a Equação 2.104 em 2.103 obtém-se a lei de evolução da variável dano:

$$\dot{D} = \left( \frac{-Y}{S} \right)^s \frac{\dot{\lambda}}{(1-D)} \quad (2.105)$$

Definindo a função de plasticidade a partir do critério de *Von Mises*, o acoplamento entre plasticidade e dano será dado pela função de superfície  $f$ :

$$f = \frac{\sigma_{vy} - R}{1 - D} - \sigma_y = 0 \quad (2.106)$$

A partir das Equações 2.80 e 2.81, são obtidas as seguintes expressões para a taxa de deformação plástica acumulada:

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{3}{2} \left( \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} \right) \frac{\sigma'}{\sigma_{vy}} \quad (2.107)$$

$$\dot{p} = \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p \right)^{1/2} \quad (2.108)$$

A partir da condição de consistência do multiplicador plástico, ( $\dot{\lambda} = 0$  se  $f < 0$  ou  $\dot{f} < 0$ ) e da formulação da função de superfície em função das variáveis de estado, tem-se o seguinte desenvolvimento para a obtenção do multiplicador plástico:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial R} : \dot{R} + \frac{\partial f}{\partial D} : \dot{D} \quad (2.109)$$

Substituindo as Equações 2.105 e 2.106 na Equação 2.109, obtém-se:

$$\dot{f} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'}{\sigma_{vy}} : \frac{\dot{\sigma}}{1 - D} - \frac{R}{1 - D} \dot{p} + \frac{\sigma_{vy} - R}{(1 - D)^2} \dot{D} = 0 \quad (2.110)$$

Tomando como base a Equação 2.90, que define o multiplicador plástico, chega-se à seguinte expressão para o mesmo:

$$\dot{\lambda} = H(f) \frac{\langle \dot{\sigma}_{vy} \rangle (1 - D)}{R - \sigma_y (-Y/S)^s} \quad (2.111)$$

A variável responsável por caracterizar o encruamento para o caso da deformação não-linear, é definida definido por:

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial p} = K p^{MM}, \quad (2.112)$$

onde  $K$  e  $M$  são as constantes plásticas do material já definidas para a equação de *Ramberg-Osgood*, dada por (2.64).

## 2.5 Experimento Numérico usando o Modelo de Dano Elasto-Plástico

Para a realização do experimento numérico foi considerada uma liga de cobre-alumínio, também conhecida como bronze de alumínio, à temperatura de 20°C com as seguintes propriedades (Chaboche *et al.*, 1994):

$$E = 117 \text{ GPa};$$

$$\sigma_y = 496 \text{ MPa};$$

$$S = 445 \text{ MPa};$$

$$s = 0,70;$$

$$M = 1,2;$$

$$K = 1658;$$

$$\sigma_n = 330 \text{ MPa} \text{ (tensão a partir da qual o dano passa a evoluir no material);}$$

$D_c = 0,45$ , (Esacalar que representa o estado de danificação na qual microfissuras aparecem no material).

Os resultados apresentados a seguir foram divididos em duas partes, uma correspondente à fase elástica do material e outra correspondendo à fase plástica. O formalismo da tensão equivalente entre o estado não danificado e danificado foi adotado para o experimento numérico em questão. As Figuras 2.7 e 2.8 ilustram os resultados das simulações obtidas utilizando o modelo implementado computacionalmente em ambiente MATLAB® 6.0.

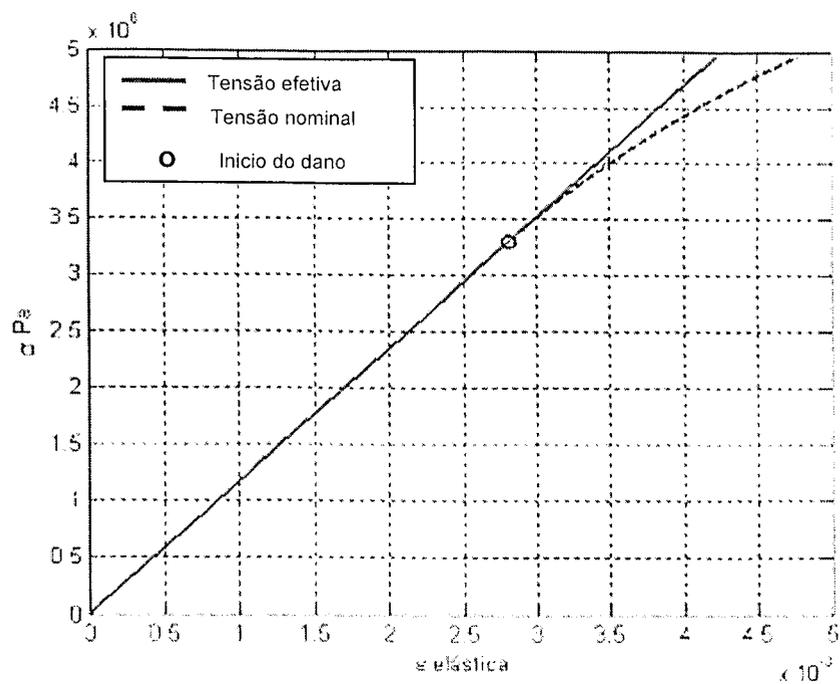


Figura 2.7 – Fase elástica para a liga Cu/Al.

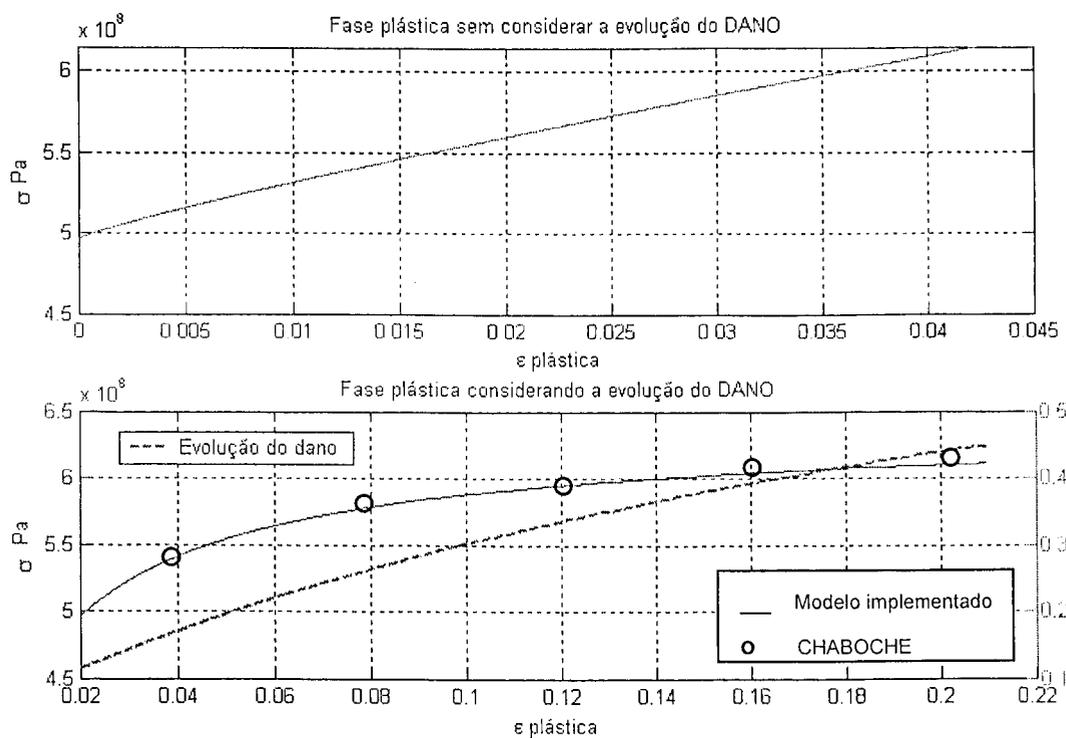


Figura 2.8 – Fase plástica da liga Cu/Al para ambos os modelos, com dano e sem dano.

Os resultados da simulação numérica se aproximaram dos obtidos via referência, Chaboche *et al.*, 1994. Entretanto, a comparação se restringiu apenas à fase plástica, pois na referência, de onde foram retirados os parâmetros usados na simulação, encontrava-se apenas a curva de tensão efetiva na fase plástica.

## CAPÍTULO III

### Materiais Compósitos

A proposta deste trabalho traz uma abordagem sobre os conceitos e aplicações pertinentes à Mecânica do Dano tendo como finalidade a sua utilização num estudo teórico, composto por um modelo numérico computacional aplicado ao caso dos materiais compósitos. O presente capítulo aborda portanto, os principais tópicos elucidativos no que tange este tipo de material dando um enfoque particular aos seus principais processos de danificação.

Materiais compósitos podem ser definidos como materiais formados por dois ou mais macro constituintes com distintas composições, estruturas e propriedades e que estão separados por uma interface (Hull *et. al.*, 1996). O objetivo principal é de combinar diferentes materiais para produzir um compósito com propriedades superiores às dos componentes individuais. Vários tipos de classificação são disponíveis para os compósitos. Os definidos em termos da morfologia de seus agentes de reforço são classificados em: compósitos particulados, com fibras e laminados (Hull *et. al.*, 1996). Por suas propriedades notáveis, estes materiais se encontram presentes em muitos setores industriais.

#### 3.3 Determinação da Relação Tensão Deformação

As propriedades mecânicas de um material compósito são expressas usando o conceito de homogeneização. Tais propriedades são determinadas a partir de um elemento de volume representativo expresso por  $V$  e de dimensão  $\delta$ .

As condições de tensão e deformação são impostas na fronteira do elemento de volume, de forma que a tensão e a deformação médias ficam definidas por (Hyre, 1997):

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(X_k) dV \quad (3.1)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(X_k) dV \quad (3.2)$$

onde  $X_k$  e  $dV$  são, respectivamente, o ponto e o elemento de volume em questão.

As relações entre tensão e deformação podem ser representadas respectivamente pelas matrizes de rigidez  $C_{ijkl}$  e flexibilidade  $S_{ijkl}$ .

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (3.3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (3.4)$$

No presente estudo, onde é abordada a formulação para um material ortotrópico, a lei de Hooke generalizada aplicada a este caso fica definida por (Hyre, 1997):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

onde a relação tensão x deformação é definida por nove coeficientes independentes. Como as matrizes de rigidez e flexibilidade são inversas uma da outra, as relações entre seus elementos são as seguintes (Hild *et. al.*, 1997):

$$C_{11} = \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{\Delta S}; C_{22} = \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{\Delta S}; C_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S}$$

$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}}; C_{55} = \frac{1}{S_{55}}; C_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

$$C_{12} = \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{\Delta S}; C_{13} = \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{\Delta S}; C_{23} = \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{\Delta S}$$
(3.7)

onde:

$$\Delta S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}$$

Os valores das propriedades mecânicas tanto para as fibras como para a matriz são determinados a partir de ensaios mecânicos realizados nas direções principais de referência (1, 2 e 3), ilustradas pela Figura 3.1. As relações entre as propriedades mecânicas nas respectivas direções e os coeficientes da matriz de flexibilidade ficam definidas pelas seguintes expressões (Hyre, 1997):

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}; S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}; S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}; S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}; S_{33} = \frac{1}{E_3}$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}}; S_{55} = -\frac{1}{G_{13}}; S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$
(3.8)

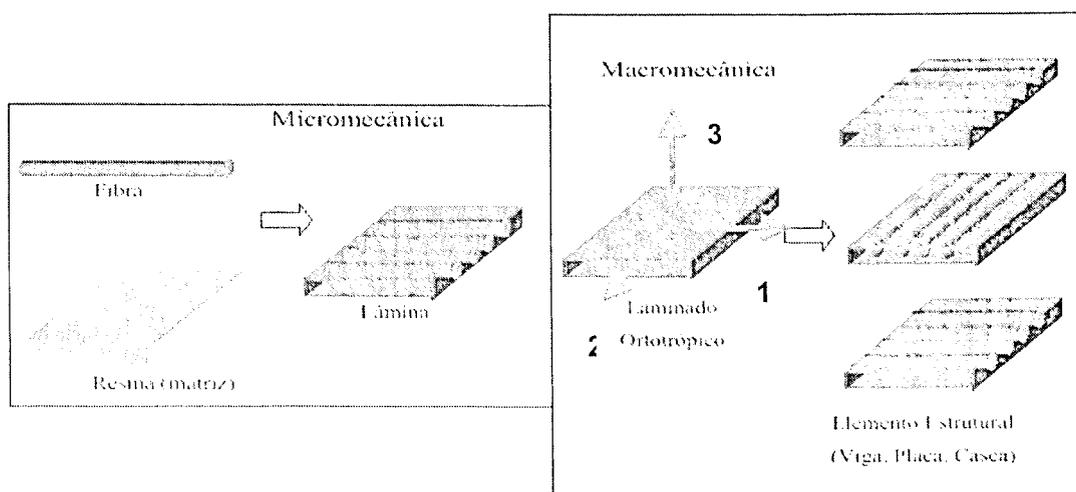


Figura 3.1- Estrutura do material ortotrópico (Hild *et al.*, 1997).

### 3.4 Teoria de Laminados

A teoria de laminados é baseada em placas obtidas pelo processo no qual as mesmas resultam de um empilhamento de camadas sucessivas. Entende-se como placa laminada o sólido limitado por dois planos paralelos, constituídos a partir de uma seqüência de empilhamento de camadas, onde a dimensão transversal é pequena se comparada às demais dimensões (Hyre, 1997).

As relações segundo a teoria clássica, entre os esforços por unidade de comprimento (i.e. forças/largura, N, e momentos/largura, M) e as tensões na placa, para o caso particular de um sistema de coordenadas (x,y,z) adotado no plano médio são dadas por:

Resultantes de Tensão :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz$$

Resultantes de Momento :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz$$

(3.9)

A Figura 3.2 ilustra a distribuição destes esforços ao longo de um laminado.

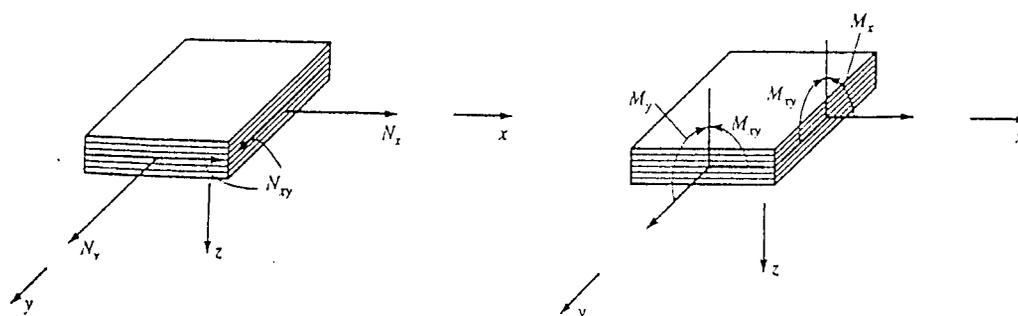


Figura 3.2- Representação dos esforços num laminado (Hild *et. al.*, 1997).

As deformações são assumidas como tendo uma variação linear através da espessura, ao longo do eixo de referência z, ilustrado na Figura 3.3. Estas podem ser formuladas numa

relação entre as deformações no plano médio do laminado e as suas respectivas curvaturas multiplicadas pela variação da cota  $z$ , conforme:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^0 + z k_i \quad (3.10)$$

onde:

$\varepsilon_i^0$  representa a deformação do plano médio do eixo  $z$ ;

$k_i$  representa a curvatura.

A formulação da Equação 3.10 é possível, pois pode-se desconsiderar o cisalhamento transversal, uma vez que a espessura da placa é de uma grandeza muito menor que as demais dimensões.

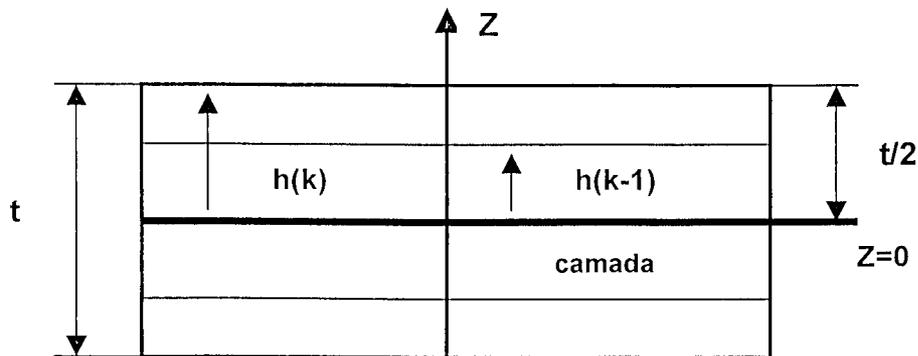


Figura 3.3- Empilhamento das camadas ao longo de  $z$ .

Escrevendo então de forma matricial as integrações apresentadas pelas Equações 3.9, chega-se a (Hyre, 1997):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_z^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

onde os as sub-matrizes  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  e  $D_{ij}$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k (h_k - h_{k-1}) \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde:

$\bar{Q}_{ij}$  representa a matriz de rigidez de cada camada reduzida ao estado plano de tensão;

$h_k$  representa a espessura da k-ésima camada;

$l$  representa a espessura total.

A matriz formada pelas sub-matrizes  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  e  $D_{ij}$  é denominada de matriz constitutiva. Uma vez obtido o campo de deformações, substituem-se os seus valores na Equação 3.5, reduzida ao estado plano de tensão, e assim obtêm-se os respectivos valores das componentes de tensões.

### 3.5 Modos de Falha em Materiais Compósitos

A existência de um estado de tensão arbitrário numa lâmina unidirecional pode conduzir à falha do material de diferentes formas. Os três processos de falha mais importantes são ilustrados na Figura 3.4.

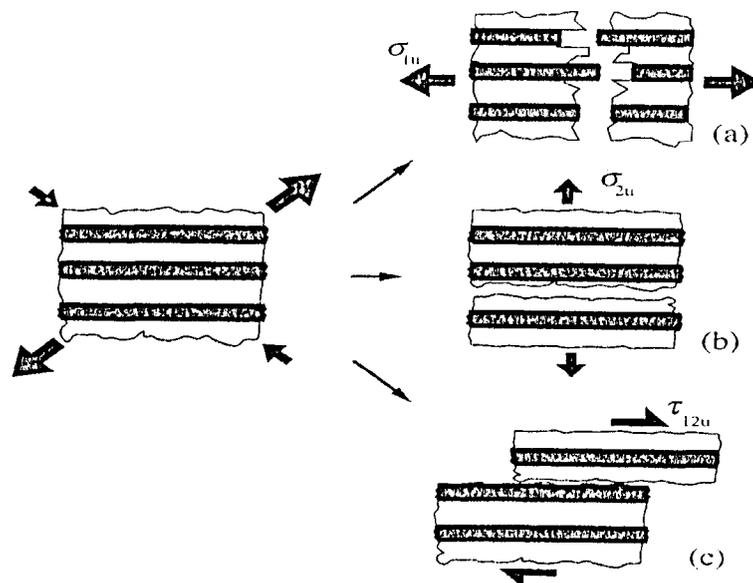


Figura 3.4- Principais modos de falha de uma lamina (Hild *et al.*, 1997).

O processo indicado na parte (a) da Figura 3.4 ilustra um processo de falha que ocorre quando a tensão  $\sigma_1$  atinge um determinado valor  $\sigma_{1f}$  que promove a ruptura da matriz e da fibra. Para este caso, o caminho percorrido pela fissura é normal à direção das fibras.

O outro tipo característico de falha é representado pela parte (b) da Figura 3.4. Este processo ocorre quando a tensão  $\sigma_2$  atinge um valor crítico  $\sigma_{2f}$ . Geralmente ocorre a ruptura da matriz, isso pelo fato da sua resistência ser menor nesta direção, se comparada à da fibra.

O terceiro modo característico é devido ao cisalhamento  $\tau_{12}$  que, ao atingir o valor crítico de falha  $\tau_{12f}$ , faz com que haja uma propagação de uma fissura na interface fibra matriz, caracterizando assim esse tipo de falha representado pela parte (c) da Figura 3.4.

Uma outra forma de se analisar a falha em compósitos é segundo uma abordagem tomando como parâmetros as deformações das fibras e da matriz no momento da ruptura. Existem alguns casos onde a deformação última da fibra é maior que a da matriz. Sendo assim, a matriz falha primeiro e posteriormente ocorre a falha da fibra e do material como um todo. A situação contrária também, pode ocorrer, dependendo da relação entre as resistências da fibra e da matriz, e, de suas respectivas deformações de ruptura (Hull *et al.*, 1996).

Para a análise baseada nas deformações últimas do material é preciso que seja definida a forma como o carregamento está sendo aplicado. Para o caso particular, em que é considerado apenas um carregamento no sentido axial, ou seja, paralelo à direção das fibras, a tensão  $\sigma_1$ , definida pela regra da mistura, é dada por (Hull *et al.*, 1996):

$$\sigma_1 = f\sigma_f + (1-f)\sigma_m \quad (3.13)$$

onde:

$f$  representa o percentual em volume de fibras;

$\sigma_f$  representa a tensão nas fibras;

$\sigma_m$  representa a tensão na matriz.

A Figura 3.5 ilustra o comportamento para duas situações distintas:

A primeira onde se observa a hipótese de um material compósito cujas fibras apresentam uma deformação maior no momento da falha que a matriz;

A segunda na qual a matriz apresenta uma deformação maior no momento da falha que as fibras.

Observa-se ainda na mesma Figura que no momento em que a fibra ou a matriz falham, para ambas as situações ocorre uma mudança na curva que define o comportamento da tensão  $\sigma_c$ , onde aparece uma alteração na forma de um “joelho” na curva indicando assim a falha de um dos constituintes do material compósito.

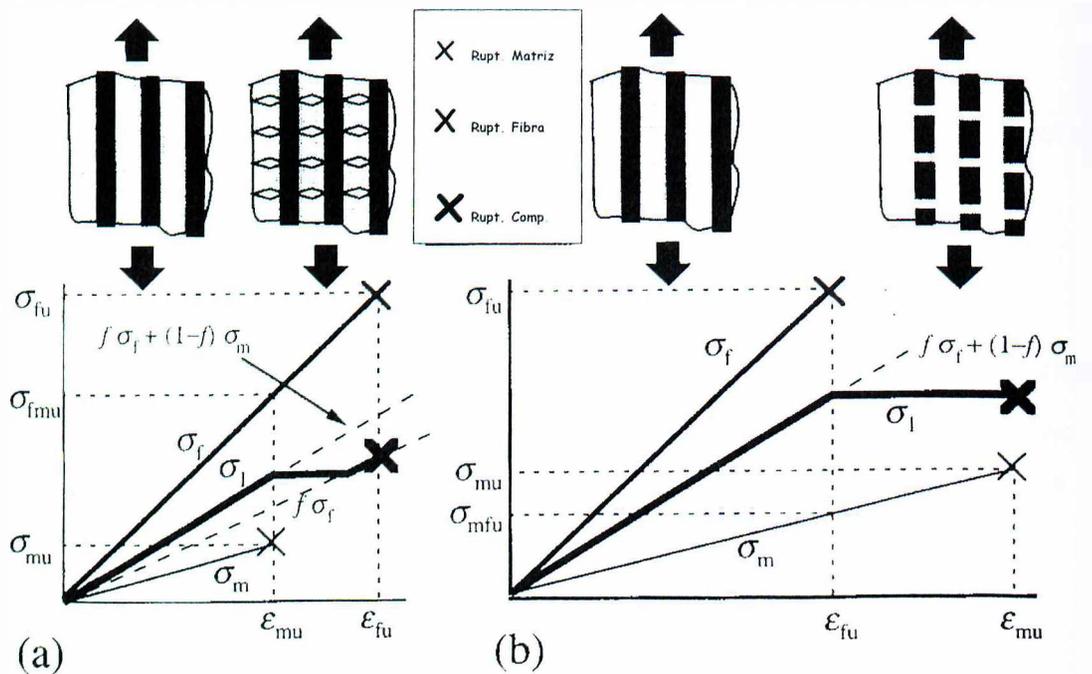


Figura 3.5- Comportamento das deformações da fibra e da matriz na ruptura (Hull *et al.*, 1996).

Outro ponto importante a ser destacado na análise de falha de materiais compósitos é a determinação das tensões últimas nas direções axial, transversal e cisalhante descritas abaixo.

#### ✓ Falha na Direção Axial

Caso a ruptura do material ocorra quando a deformação total no mesmo se iguale à deformação última da fibra, uma boa aproximação a ser adotada para a determinação da tensão de ruptura no material é obtida multiplicando-se o percentual em volume de fibras  $f$  pela tensão última de ruptura da fibra  $\sigma_{fu}$ , resultando assim na expressão abaixo:

$$\sigma_{WV} = f\sigma_{fu} \quad (3.14)$$

Caso ocorra, no momento da falha do material, uma situação em que a matriz falhe posteriormente às fibras, a expressão que define a tensão de ruptura do material na direção axial é dada por:

$$\bar{\sigma}_{ij} = f\bar{\sigma}_{mf} + (1-f)\bar{\sigma}_{mt} \quad (3.14)$$

onde:

$\bar{\sigma}_{mf}$  representa a tensão na fibra no momento que a matriz falha;

$\bar{\sigma}_{mt}$  representa a tensão na matriz no momento da falha.

As Figuras 3.6 e 3.7 são exemplos que ilustram o aspecto da ruptura do material na falha que ocorre quando o carregamento axial atinge seu valor crítico de ruptura nesta direção. Na primeira figura tem-se um exemplo onde as fibras se encontram com uma boa aderência junto à matriz. Já para a segunda figura, observa-se justamente uma situação na qual as fibras mostram uma má aderência junto à matriz.

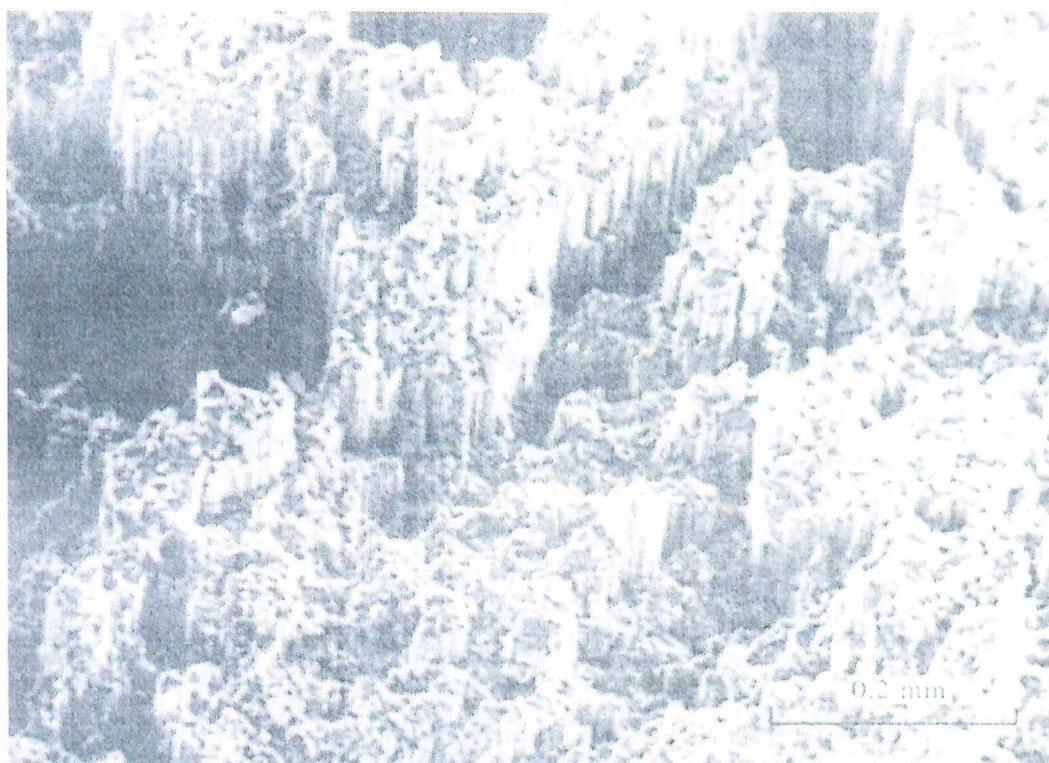


Figura 3.6- Superfície de ruptura do material compósito onde as fibras apresentam boa aderência (Hull *et. al.*, 1996).



Figura 3.7- Superfície de ruptura do material compósito onde as fibras apresentam má aderência (Hull *et. al.*, 1996).

#### ✓ Falha na Direção Transversal

A estimativa do valor da tensão de ruptura na direção transversal é um pouco mais complicada que na direção axial, pois a resistência nesta direção é influenciada por diversos fatores, como a natureza da aderência interfacial entre fibra e matriz, o tipo de distribuição das fibras e, principalmente, a presença de vazios. Na maioria dos casos a resistência nesta direção é menor que na direção axial, de forma que fica evidenciada uma evolução do dano maior na direção transversal, através do aumento das micro-fissuras e dos vazios.

Uma boa estimativa da tensão de ruptura  $\sigma_{2t}$  do material compósito na direção transversal de seção circular é dada por (Hull *et. al.*, 1997):

$$\sigma_{2t} = \sigma_{mt} \left[ 1 - 2 \left( \frac{f}{\pi} \right)^{1/2} \right] \quad (3.15)$$

O caminho percorrido pela fissura, já no domínio macroscópico, seguirá a trajetória que oferecer menor resistência à sua propagação. Para o caso em que a interface fibra matriz oferecer boa resistência, o caminho será traçado através da matriz e não na interface dos constituintes; já para o caso onde existir uma baixa resistência na interface dos constituintes, esse fator será decisivo no caminho percorrido durante a evolução da fissura. A Figura 3.8 ilustra um exemplo em que a interface apresenta baixa resistência.

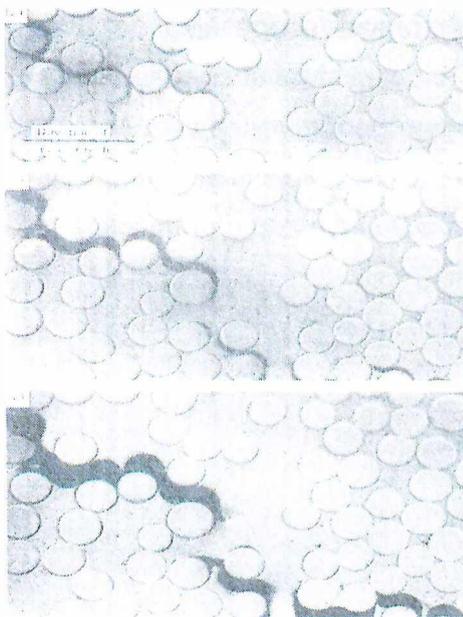


Figura 3.8- Fissura transversal se desenvolvendo na interface fibra matriz (Hull *et. al.*, 1996).

#### ✓ Falha por cisalhamento

As falhas decorrentes do efeito das tensões cisalhantes geralmente tendem a ocorrer em planos determinados pela direção das fibras. Esse tipo de falha ocorre preferencialmente na interface dos constituintes. A Figura 3.4 (c) é bastante elucidativa no que tange o aspecto visual deste tipo de falha.

Não existe uma simples expressão analítica que descreve a tensão cisalhante de ruptura  $\tau_{12U}$ . Uma das formas para tal determinação foi demonstrada por Adams *et al.* (1967), que determinaram a tensão cisalhante última associando o percentual volumétrico de fibras via método numérico utilizando diferenças finitas.

### 3.1 Outros Tipos de Falhas

#### ✓ Falha do Compósito sob Compressão

A falha ocasionada quando o material encontra-se sob compressão é dependente da forma como o carregamento é aplicado e, em particular, do grau das restrições laterais. Quando é aplicado um carregamento de compressão na direção axial, a tendência das fibras é de que ocorra uma falha por flambagem, exceto quando existe um baixo volume percentual de fibras.

A falha mais comum ocorre quando a flambagem local chega a um ponto de instabilidade gerando o colapso geral do material. O que ocorre com as fibras é uma forma de orientação de flambagem gerando uma seqüência de fibras susceptíveis à flambagem, o que leva ao aparecimento de uma fissura guiada por dois planos de fratura oriundos deste alinhamento. A Figura 3.9 serve como uma ilustração ao entendimento de tal fenômeno. Este efeito pode ser nitidamente observado no próprio material como mostra a Figura 3.10.

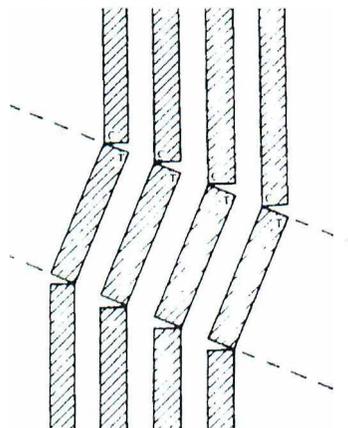


Figura 3.9- Dois planos de fratura formados pelo alinhamento de fibras flambadas.

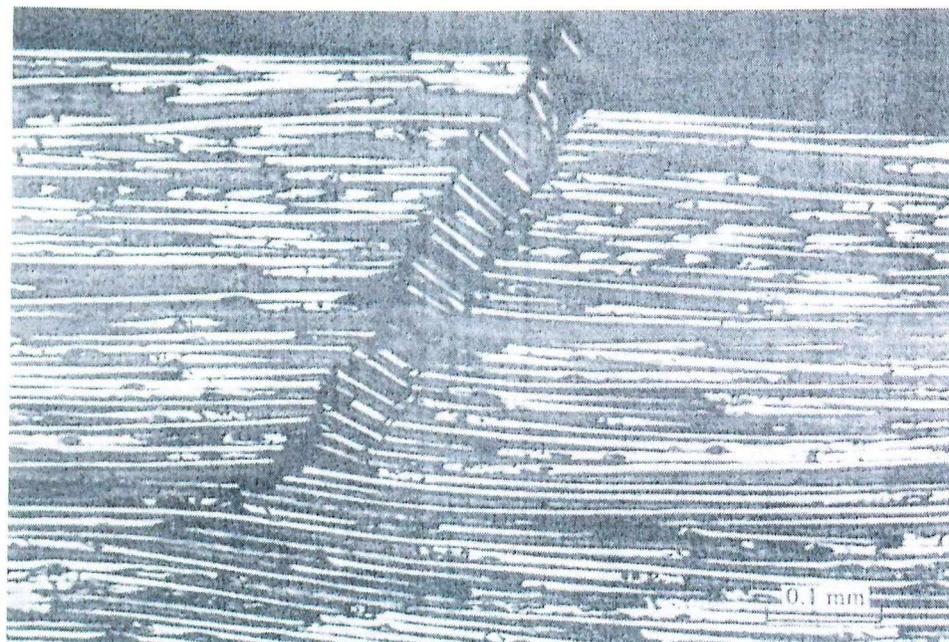


Figura 3.10- Fibras flambadas gerando dois planos de fratura no material (Hull *et. al.*, 1996).

Outro ponto a ser observado que evidencia a falha devido à flambagem das fibras do material compósito é a presença de duas zonas distintas na seção transversal circular da fibra. Essas duas zonas correspondem à dicotomia gerada pela compressão e tração presentes devido à forma do carregamento que gera a flambagem (Figura 3.11).

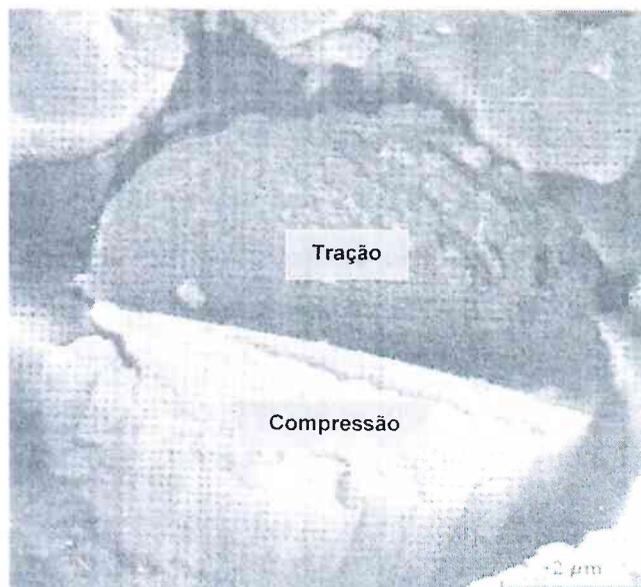


Figura 3.11- Seção transversal circular da fibra com parte comprimida e tracionada (Hull *et al.*, 1996).

#### ✓ Falha por Delaminação

A denominação do dano na interface, desta vez não mais dos constituintes do compósito, mas sim das lâminas que compõem o laminado é denominada aqui por delaminação (Daudeville *et al.*, 1993).

O estado de tensão resultante no laminado, nas regiões afastadas das bordas livres, é um estado plano de tensão. E ao passo que, o estado gerado nestas bordas livres é um estado tri-axial de tensões. Assim, as partes das lâminas que ficam próximas ou nas bordas livres, são susceptíveis ao descolamento entre as camadas. Este fenômeno é possível uma vez que é gerada uma componente de tensão normal ao plano das camadas. Uma das causas que pode levar ao colapso por delaminação em compósitos é o dano gerado por impacto (Daudeville *et al.*, 1993).

### 3.6 Evolução do Dano num Compósito Cruzado (0/90)

Para a análise que se apresenta nos capítulos seguintes admite-se um compósito cruzado com a orientação (0/90) constituído por fibras de carbono e resina epóxi, sendo que a percentual volumétrica de fibras é de 50%. Admite-se também que o mesmo seja solicitado por um carregamento na direção axial.

Outra consideração a ser feita é sobre as deformações últimas no momento de ruptura. Para este caso supõe-se a deformação última na direção axial  $\varepsilon_{11}$  de 0,5% e na direção transversal  $\varepsilon_{21}$  de 0,3%. Com base nos valores das deformações últimas conclui-se que o material falha primeiro na direção transversal e, em seguida, na direção axial, sendo que por fim ocorre uma falha generalizada de todo o material.

A Figura 3.12 mostra a evolução do dano exemplificado neste item. Nota-se que o dano evolui até um estágio onde o material perde consideravelmente a sua integridade, aparecendo então, uma fissura de dimensões macroscópicas caracterizando assim a falha generalizada do material.

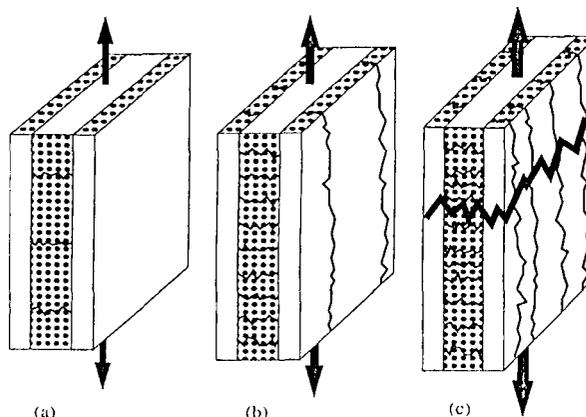


Figura 3.12- Etapas da evolução do Dano num compósito cruzado (0/90) (Hull *et al.*, 1996).

### 3.7 Critérios de Resistência aplicados a Materiais Compósitos

A falha de uma lâmina unidirecional sujeita a um dado estado de tensão pode ser compreendida a partir de um dos três mecanismos de falha ilustrados pela Figura 3.4, associados às suas respectivas tensões de ruptura:  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{21}$  e  $\tau_{121}$ . Entretanto, é necessária a formalização de critérios que forneçam faixas confiáveis de utilização do material dentro da finalidade para o qual foi especificado.

### ✓ Critério da Máxima Tensão Normal

Este é um critério relativamente simples, pois assume que a falha de uma lâmina com reforço unidirecional, na direção 1, ocorre quando uma das tensões principais atinge o seu respectivo valor de falha. Isso ocorre quando uma das condições abaixo é satisfeita (Hild *et. al.*, 1997):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\geq \sigma_{1U} \\ \sigma_2 &\geq \sigma_{2U} \\ \tau_{12} &\geq \tau_{12U}\end{aligned}\tag{3.16}$$

Para um sistema genérico de coordenadas (x,y,z) a análise das tensões pode ser feita a partir da expressão dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}\tag{3.17}$$

onde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{12}$  são as tensões nas direções principais do compósito, e,  $[T]$  é a matriz mudança de base é definida por:

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}\tag{3.18}$$

onde  $c$  e  $s$  são respectivamente o cosseno e o seno referentes à orientação das fibras.

### ✓ Critérios de Tresca e Von Mises

Nestes critérios utilizados para materiais isotrópicos é feita uma aproximação do formalismo utilizado para metais, onde é considerado como critério de falha um dado estado de tensões no qual ocorre o escoamento do material.

O critério de Tresca é definido a partir das tensões principais e das tensões de escoamento do material nas suas respectivas direções. Este critério toma como parâmetro a máxima tensão cisalhante. O critério é então expresso por (Hild *et. al.*, 1997):

$$\left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_y^2 \right] \left[ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_y^2 \right] \left[ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_y^2 \right] = 0 \quad (3.19)$$

Caso seja considerado o estado plano de tensões,  $\sigma_3 = 0$ , o critério fica resumido a:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_y \quad (3.20)$$

O critério de Von Mises é baseado na energia de distorção do material, sendo expresso por:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2 \quad (3.21)$$

Considerando o estado plano de tensões o critério resume-se a:

$$\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_y} \right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_y^2} + \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_y} \right)^2 = 1 \quad (3.22)$$

#### ✓ Critério de Tsai-Hill

A adaptação dos critérios acima para o caso dos materiais, de natureza anisotrópica, se dá de forma mais completa a partir da incorporação dos diferentes mecanismos de falha inerentes às direções do material.

Quem abordou com profundidade esse assunto foi Hill (1950), que modificou o critério de Von Mises, particularizando-o para um caso com simetria ortotrópica. Considerando que o sólido se encontra no estado plano de tensões, o critério é descrito por (Hild *et. al.*, 1997):

$$\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{1y}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_{2y}} \right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{1y}^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{2y}^2} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{3y}^2} + \left( \frac{\tau_{12}}{\tau_{12y}} \right)^2 = 1 \quad (3.23)$$

onde:

$\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\tau_{12}$  são as tensões referentes ao plano ortogonal do material compósito;

$\sigma_{1'}$ ,  $\sigma_{2'}$ ,  $\sigma_{3'}$  e  $\tau_{12'}$  são as tensões de escoamento medidas no mesmo plano ortogonal de referência.

Comumente o que ocorre na aplicação deste critério é adaptá-lo como critério de falha de um compósito unidirecional. Para isso é necessária apenas a mudança das tensões de escoamento para as respectivas tensões de falha. Como as propriedades mecânicas nas direções transversais do compósito neste caso particular são iguais, o critério fica resumido a:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1'}}$$

#### ✓ Critério de Tsai-Wu

Os critérios apresentados acima consideram as tensões numa forma quadrática e linear, ou seja, os efeitos distintos entre o comportamento do material sobre compressão e tração são assim desconsiderados. A ocorrência do efeito *Bauschinger*, onde o material exibe essa diferença no comportamento, restringe a aplicação deste tipo de formulação.

O critério de Tsai-Wu leva em consideração esta dicotomia sendo, o mesmo expresso por (Hild *et. al.*, 1997):

$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_3\sigma_3 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{33}\sigma_3^2 + f_{12}\sigma_1\sigma_2 + f_{13}\sigma_1\sigma_3 + f_{23}\sigma_2\sigma_3 = 1, \quad (3.25)$$

ou, em notação indicial:

$$f_i\sigma_i + f_{ij}\sigma_i\sigma_j = 1 \quad (3.26)$$

onde:  $i, j = 1, 2, 3$  e  $f_i, f_{ij}$  são os coeficientes de resistência.

A falha do material ocorre quando o lado esquerdo da Equação 3.26 atinge um valor igual ou maior que a unidade. Os coeficientes de resistência são determinados para cada material a partir de ensaios mecânicos.

## CAPÍTULO IV

### **Modelo de dano anisotrópico acoplado a resposta inelástica, aplicado a materiais compósitos.**

O desenvolvimento do modelo em questão, no qual são acoplados os efeitos da variável dano e das deformações inelásticas sofridas pelo material compósito, é baseado no formalismo termodinâmico já apresentado no Capítulo I do presente trabalho.

O estado de danificação de um material qualquer pode evoluir sob duas formas, como um valor de natureza escalar ou de natureza tensorial. Quando o valor do dano passa a variar de acordo com a direção em questão, o dano apresenta uma natureza tensorial, ou seja, um estado de danificação de natureza anisotrópica. Assim, o dano é representado por um tensor que pode ser de segunda ou de quarta ordem.

Particularizando o estudo da Mecânica do Dano aos materiais compósitos, aqui a um material ortotrópico, ou seja, um material anisotrópico que apresenta três planos de simetria, o dano passa a ter um comportamento associado a cada um desses planos justificando assim a sua natureza tensorial.

#### **4.1 Introdução**

O acoplamento do dano às deformações inelásticas sofridas por materiais foi recentemente estudado por Voyiadjis e Deliktas (2000), de forma particular, focando seus estudos em compósitos laminados simétricos. O efeito do dano neste trabalho é considerado sobre a forma de tensão efetiva presente ainda na fase elástica do material, baseado num modelo de plasticidade onde se considera o encruamento como sendo cinemático, e onde se adota o critério de falha de Hill.

O modelo de dano aqui apresentado se baseia no formalismo termodinâmico descrito por variáveis de estado internas e observáveis para a descrição dos fenômenos. O tensor de segunda ordem aqui apresentado define o estado de danificação de uma célula unitária do material descrito por variáveis internas. A interpretação física do dano é baseada, para este

tipo de material, em microfissuras e porosidade que podem estagnar ou evoluir de acordo com a aplicação de carregamentos ou solicitações de diversas formas.

#### 4.2 Formulação Teórica

Para a formulação da variável dano necessita-se escolher variáveis que descrevam os fenômenos de natureza dissipativa e as deformações inelásticas, donde se opta por um tensor de dano simétrico de segunda ordem. A natureza tensorial caracteriza a anisotropia inerente ao dano quando particularizado ao tipo de material em questão. O tensor dano é definido por:

$$\phi_{ij} = \sum_{k=1}^3 \hat{\phi}_k n_i^k n_j^k \quad (4.1)$$

onde:

$\phi_{ij}$  define o tensor de segunda ordem;

$\hat{\phi}_k$  valor do dano nas direções principais;

$n_i$  direções principais.

Realizando a operação indicada pelo somatório, o tensor dano passa a ser representado por:

$$\phi_{ij} = \hat{\phi}_1 n_i^1 n_j^1 + \hat{\phi}_2 n_i^2 n_j^2 + \hat{\phi}_3 n_i^3 n_j^3 \quad (4.2)$$

Ou, em notação indicial:

$$\phi_{ij} = b_{ir} b_{js} \hat{\phi}_{rs} \quad (4.3)$$

onde:

$$\hat{\phi}_{rs} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\phi}_3 \end{bmatrix};$$

e  $b_{ij}$  representa o tensor de transformação de segunda ordem dado por:

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{bmatrix}.$$

Segundo a propriedade de ortogonalidade entre as direções, o tensor de transformação requer que:

$$b_{ij}b_{kj} = \delta_{ik} \quad (4.4)$$

onde  $\delta_{ij}$  representa o delta de *Kronecker* definido por:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \\ 0, & \text{se } i \neq k \end{cases}$$

Considerando a resposta elasto-plástica do material danificado, os efeitos devidos ao encruamento e ao dano serão aqui sintetizados num potencial termodinâmico único que engloba os efeitos de natureza reversível e irreversível definindo o estado do material. Assim, baseado no Capítulo II, define-se como potencial termodinâmico a energia livre de Helmutz,  $\psi$ . O potencial termodinâmico é dado como função das seguintes variáveis de estado:

$$\psi = \psi(\varepsilon_c, T, \phi, p, \alpha, k, \Upsilon) \quad (4.5)$$

onde:

$p$  e  $\alpha$  caracterizam, respectivamente, o encruamento isotrópico e cinemático;

$k$  e  $\Upsilon$  caracterizam, respectivamente, o encruamento isotrópico e cinemático no dano.

Para a obtenção da lei evolutiva que rege a resposta elasto-plástica do material danificado, procede-se a derivação parcial do potencial em função das suas respectivas variáveis de estado:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_c} : \dot{\varepsilon}_c + \frac{\partial \psi}{\partial \phi} : \dot{\phi} + \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial k} \dot{k} + \frac{\partial \psi}{\partial \Upsilon} : \dot{\Upsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} \quad (4.6)$$

A variável isotrópica de encruamento  $p$  é definida como a deformação plástica acumulada, expressa pela Equação 2.70.

A variável isotrópica que caracteriza o encruamento isotrópico no dano é definida por:

$$\dot{k} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\phi} : \dot{\phi} \quad (4.7)$$

Uma alternativa sugerida por Voyiadjis e Deliktas (2000) para esta variável é:

$$\dot{k} = -\Upsilon : \dot{\phi} \quad (4.8)$$

A variável  $\Upsilon$  será definida mais adiante neste capítulo.

Aplicando ao potencial a desigualdade de Clausius-Duhem, e considerando apenas os efeitos de caráter puramente mecânicos, a desigualdade resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_c} \right) : \dot{\varepsilon}_c + \sigma : \dot{\varepsilon}_p - \rho \left( s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \phi} : \dot{\phi} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} \\ & - \rho \frac{\partial \psi}{\partial k} \dot{k} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \Upsilon} : \dot{\Upsilon} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

A partir da Equação 4.9 chega-se então às leis de estado definidas por:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_c} \quad (4.10)$$

$$A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \quad (4.11)$$

A Equação 4.11 descreve as variáveis de estado internas ( $V_k = \varepsilon_p, \phi, p, \alpha, k, \Upsilon$ ) e suas respectivas forças termodinâmicas conjugadas associadas ( $A_k = \sigma, \Upsilon, R, X, K, \Gamma$ ). A Tabela 4.1 sumariza as respectivas variáveis.

Tabela 4.1 - Variáveis termodinâmicas do modelo aplicado a materiais compósitos.

Variáveis de Estado		
Observáveis	Internas	Associadas
$\varepsilon$	—	$\sigma$
$T$	—	$S$
—	$\varepsilon_p$	$-\sigma$
—	$p$	$R$
—	$\alpha$	$X$
—	$\phi$	$Y$
—	$k$	$K$
—	$\Upsilon$	$\Gamma$

O potencial termodinâmico é aqui definido segundo Voyiadjis e Deliktas (2000) por:

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_p) : E(\phi) : (\varepsilon - \varepsilon_p) + \frac{1}{2}k_1\alpha : \alpha + \frac{1}{2}k_2p^2 + k_3\frac{1}{2}\Upsilon : \Upsilon + \frac{1}{2}k_4k^2 \quad (4.12)$$

onde:

$E(\phi)$  define o tensor elástico de rigidez danificado;

$k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  definem constantes dependentes do material.

As leis de estado do potencial termodinâmico fornecidas pela Equação 4.12 são definidas por:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} = E(\phi) : \varepsilon_e \quad (4.13)$$

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (4.14)$$

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial p} = k_2 p \quad (4.15)$$

$$X = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = k_1 \alpha \quad (4.16)$$

$$K = \rho \frac{\partial \psi}{\partial k} = k_4 k \quad (4.17)$$

$$\Gamma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \Upsilon} = k_3 \Upsilon \quad (4.18)$$

A partir das forças conjugadas e das suas respectivas variáveis de fluxo postula-se um potencial com características puramente dissipativas, definido por:

$$\Pi = \sigma : \dot{\epsilon}_p - Y : \dot{\phi} - R\dot{p} - K\dot{k} - X : \dot{\alpha} - \Gamma : \dot{\Upsilon} \geq 0 \quad (4.19)$$

Baseado na mesma hipótese de desacoplamento entre os fenômenos de natureza puramente mecânica e térmica, o potencial dissipativo é desacoplado resultando em duas novas parcelas, uma inerente ao fenômeno de plasticidade e outro representando o fenômeno de danificação do material. Assim, a nova estrutura do potencial dissipativo é definida por:

$$\Pi = \Pi'' + \Pi' \quad (4.20)$$

onde:

$$\Pi'' = \sigma : \dot{\epsilon}_p - R\dot{p} - X : \dot{\alpha} \geq 0 \quad (4.21a)$$

$$\Pi' = -Y : \dot{\phi} - K\dot{k} - \Gamma : \dot{\Upsilon} \geq 0 \quad (4.21b)$$

Mesmo separando os efeitos dissipativos entre os fenômenos de plasticidade e danificação do material, existe uma interdependência entre os mesmos. A dependência de um efeito com o outro se dá via tensão efetiva e força conjugada do dano. O acoplamento ocorre no potencial de dissipação plástico definido pela Equação 4.21a entre plasticidade e dano

através das deformações plásticas que são expressas em função do estado de plastificação e danificação do material.

Devido à relação entre os fenômenos se postula um potencial de dissipação representado por uma função contínua e convexa avaliada como função das variáveis de fluxo, definida por:

$$\Theta = \Theta(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\phi}, \dot{p}, \dot{k}, \dot{\alpha}, \dot{\Upsilon}) \quad (4.22)$$

Usando a transformada de *Legendre-Fenchel* (Chaboche *et al.*, 2004) no potencial de dissipação  $\Theta$ , são obtidas as leis complementares em função das forças conjugadas das variáveis de fluxo:

$$\Theta^* = \Theta^*(\sigma, Y, R, K, X, \Gamma) \quad (4.23)$$

Da forma análoga àquela empregada à Equação 4.19 pode ser admitida novamente a hipótese de desacoplamento entre as funções que definem o potencial dissipativo, ressaltando apenas que ainda assim existe a interdependência entre ambos os fenômenos, plasticidade e danificação. A Equação 4.23 é reescrita da seguinte forma:

$$\Theta^* = F(\sigma, R, X) + G(Y, K, \Gamma) \quad (4.24)$$

As leis de evolução da variável dano, assim como da deformação plástica, são obtidas utilizando cálculo de funções de várias variáveis através do uso dos multiplicadores de Lagrange  $\dot{\lambda}_p$  e  $\dot{\lambda}_d$ . A função que relaciona os multiplicadores de Lagrange, as funções  $F$  e  $G$ , e os potenciais dissipativos é dada por:

$$\Omega = \Pi_p + \Pi_d - \dot{\lambda}_p F + \dot{\lambda}_d G \quad (4.25)$$

Para que sejam obtidos os extremos da função  $\Omega$ , são necessárias as seguintes condições:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0 \quad (4.26)$$

e

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Y} = 0 \quad (4.27)$$

As Equações 4.26 e 4.27 correspondem respectivamente às leis de evolução da deformação plástica e do dano. Desenvolvendo as equações citadas chega-se a condição de acoplamento entre dano e plasticidade, que é explicitada através das funções  $G$  e  $F$ , quando  $G \geq 0$  e  $F \geq 0$ . As leis de evolução para ambas as variáveis são definidas por:

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \dot{\lambda}_d \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (4.28)$$

e

$$\dot{\phi} = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F}{\partial Y} + \dot{\lambda}_d \frac{\partial G}{\partial Y} \quad (4.29)$$

De acordo com a regra da normalidade descrita no Capítulo II, definem-se as relações entre a função potencial de dano  $G$  e a função de escoamento do material  $F$  com as suas respectivas variáveis de estado e forças termodinâmicas conjugadas, dadas por:

$$\dot{\rho} = -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F}{\partial R} \quad (4.30)$$

$$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F}{\partial X} \quad (4.31)$$

$$\dot{k} = -\dot{\lambda}_d \frac{\partial G}{\partial K} \quad (4.32)$$

$$\dot{\Upsilon} = -\dot{\lambda}_d \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \quad (4.33)$$

O próximo passo na formulação do modelo é a escolha das funções que representam o comportamento do dano e do escoamento no material. Tais aspectos são abordados nas seções seguintes.

#### 4.2.1 Potencial Plástico e Critério de Escoamento

Neste trabalho utiliza-se um modelo de pseudoencruamento cinemático não-linear e adota-se o critério de escoamento de Von Mises. Faz-se aqui a aproximação entre o potencial plástico  $F$  e a função de escoamento  $f$ , de forma que  $F = f$ . Assim, a função de escoamento é definida por:

$$f = \left( \frac{3}{2} (\sigma - X) : (\sigma - X) \right)^{1/2} - R(p) - \sigma_y \leq 0 \quad (4.34)$$

A força conjugada termodinâmica  $X$  que se relaciona com a variável de estado interna  $\alpha$  é definida pelo modelo de Armstrong e Frederic (1998), sendo representada por:

$$\dot{X} = \frac{2}{3} C_p \dot{\varepsilon}_p - \Gamma_p X \dot{p} \quad (4.35)$$

onde  $C_p$  e  $\Gamma_p$  são constantes do material inerentes ao encruamento cinemático. Para resolver o problema do multiplicador plástico se aplicada a condição de consistência ao potencial plástico,  $\dot{f} = 0$ . Assim tem-se a expressão da derivada do potencial definida por:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \phi} : \dot{\phi} + \frac{\partial f}{\partial X} : \dot{X} + \frac{\partial f}{\partial R} : \dot{R} = 0 \quad (4.36)$$

onde se define  $\dot{R}$  por:

$$\dot{R} = \frac{\partial R}{\partial p} \dot{p} \quad (4.37)$$

Para o critério de Von Mises impõe-se a seguinte condição:

$$\dot{p} = \dot{\lambda}_p \quad (4.38)$$

Fazendo uso da Equação 4.29 e 4.36 obtém-se a seguinte expressão para a derivada do potencial plástico:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \left( \left( \frac{2}{3} C_p \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \Gamma_p X \right) + \frac{\partial f}{\partial \phi} : \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial R}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial R} \right) \dot{\lambda}_p + \frac{\partial f}{\partial \phi} : \frac{\partial G}{\partial Y} \dot{\lambda}_d \quad (4.39)$$

Definindo as seguintes relações:

$$b_1 = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} \quad (4.40)$$

$$a_{11} = \left( \frac{2}{3} C_p \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \Gamma_p X \right) + \frac{\partial f}{\partial \phi} : \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial R}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial R} \quad (4.41)$$

$$a_{12} = \frac{\partial f}{\partial \phi} : \frac{\partial G}{\partial Y} \quad (4.42)$$

a Equação 4.39 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$a_{11} \dot{\lambda}_p + a_{12} \dot{\lambda}_d = -b_1 \quad (4.43)$$

A solução da Equação 4.43 para os multiplicadores plásticos é obtida a partir do critério de dano e da respectiva condição de consistência para a função que define o potencial de dano.

#### 4.2.2 Potencial e Critério de Dano

O critério anisotrópico de dano proposto por Voyiadjis e Park (1995) para materiais compósitos é utilizado aqui na formulação do presente modelo. Devido as não linearidades adotadas no encruamento, o potencial e o critério de dano são distintos  $G \neq g$ , diferindo assim da formulação adotada no caso da plasticidade.

Com base nos efeitos do encruamento cinemático não-linear, o critério de dano pode ser escrito em função das suas variáveis de encruamento tensoriais  $h$  e  $\Gamma$ , onde a primeira representa o tensor de encruamento.

Satisfazendo a condição de que  $g$  seja uma função isotrópica dependente das variáveis  $Y$ ,  $h$  e  $\Gamma$ , de forma a não depender do sistema de coordenadas empregadas, o critério fica definido por:

$$g = (Y_{ij} - \Gamma_{ij}) P_{ijkl} (Y_{kl} - \Gamma_{kl}) - 1 = 0 \quad (4.44)$$

onde o tensor de quarta ordem  $P$  descreve a natureza anisotrópica do dano, sendo o mesmo definido a partir do tensor de encruamento  $h$ , dado por:

$$h_{ij} = \lambda \eta \left( \frac{k}{\lambda} \right)^\xi \delta_{ik} \phi_{kj} + \delta_{ij} \lambda \nu^2 \quad (4.45)$$

Logo:

$$P_{ijkl} = h_{ij}^{-1} h_{kl}^{-1} \quad (4.46)$$

A primeira parcela da Equação 4.45 denota o grau de anisotropia introduzida pelo tensor de dano de segunda ordem. Os parâmetros  $\lambda$  e  $\nu$  são as constantes de Lamé e  $\xi$  representa um expoente que pode variar de zero a um, dependendo da natureza do material.

Para que seja considerada a associação entre o encruamento cinemático não linear ao dano é necessário definir um outro potencial de dano  $G$  distinto do critério adotado (Voyiadjis *et al.*, 2003). Assim, o potencial a ser utilizado no presente trabalho é definido por:

$$G = g + \frac{k_3}{2k_3} \Gamma : \Gamma \quad (4.47)$$

onde  $k_3$  e  $k_3$  são constantes do material.

De acordo com a regra da normalidade, e a partir das Equações 4.44 e 4.47, são obtidas as seguintes expressões:

$$\frac{\partial g}{\partial \Gamma} = - \frac{\partial g}{\partial Y} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \Gamma} = - \frac{\partial g}{\partial \Gamma} + \frac{k_3}{k_3} \Gamma \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial G}{\partial Y} = - \frac{\partial g}{\partial Y} \quad (4.50)$$

A partir da condição de consistência do critério de dano ( $\dot{g} = 0$ ), chega-se à relação linear, definida por:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial g}{\partial \phi} : \dot{\phi} + \frac{\partial g}{\partial k} \dot{k} + \frac{\partial g}{\partial \Gamma} : \dot{\Gamma} = 0 \quad (4.51)$$

A expressão que define  $\dot{\Gamma}$  é obtida a partir da Equação 4.18, sendo a mesma definida por:

$$\dot{\Gamma} = k_3 \dot{\Upsilon} \quad (4.52)$$

Substituindo a Equação, 4.33 obtida via regra da normalidade, na Equação 4.52, chega-se à seguinte expressão:

$$\dot{\Gamma} = -k_3 \lambda_{ij} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \quad (4.53)$$

Fazendo a substituição da Equação 4.49 na 4.53, chega-se então à expressão final que define  $\dot{\Gamma}$ :

$$\dot{\Gamma} = \lambda_{ij} \left( k_3 \frac{\partial G}{\partial Y} - k_3 \Gamma \right) \quad (4.54)$$

Os coeficientes  $k_3$  e  $k_5$  são definidos como  $k_3 = \frac{2}{3} C_{ij}$  e  $k_5 = \Gamma_{ij}$  ( Voyiadjis *et al.*, 2003).

Substituindo as Equações 4.54, 4.29 na Equação 4.51 e sendo  $\dot{k}$  definido pela Equação 4.8, obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \dot{g} = & \frac{\partial g}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \lambda_{ij} \left( \frac{\partial g}{\partial \phi} : \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial g}{\partial k} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial g}{\partial Y} : \frac{\partial g}{\partial Y} \right) \\ & + \lambda_{ij} \left( \frac{\partial g}{\partial \phi} : \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial g}{\partial k} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial g}{\partial Y} : \frac{\partial g}{\partial Y} - k_3 \frac{\partial g}{\partial Y} : \frac{\partial g}{\partial Y} + k_3 \frac{\partial g}{\partial Y} : \Gamma \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Definindo as seguintes relações:

$$b_2 = \frac{\partial g}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} \quad (4.52)$$

$$a_{21} = \frac{\partial g}{\partial \phi} : \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial g}{\partial k} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\partial g}{\partial Y} : \frac{\partial g}{\partial Y}} \quad (4.53)$$

$$a_{22} = \frac{\partial g}{\partial \phi} : \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial g}{\partial k} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\partial g}{\partial Y} : \frac{\partial g}{\partial Y}} - k_3 \frac{\partial g}{\partial Y} : \frac{\partial g}{\partial Y} + k_3 \frac{\partial g}{\partial Y} : \Gamma \quad (4.54)$$

A Equação 4.51 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$a_{21} \dot{\lambda}_p + a_{22} \dot{\lambda}_d = -b_2 \quad (4.55)$$

A partir das Equações 4.43 e 4.55, os valores do multiplicador plástico e de dano ficam definidos a partir do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_p \\ \dot{\lambda}_d \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

onde:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (4.57)$$

Substituindo estes multiplicadores na Equação 4.28, a equação que define a evolução da deformação plástica resulta:

$$\dot{\epsilon}_p = \chi_p : \dot{\sigma} \quad (4.58)$$

onde  $\chi_p$  é o tensor de quarta ordem definido como a soma de outros dois tensores de quarta ordem  $K$  e  $L$ , respectivamente definidos por:

$$K = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \otimes \left( a_{12} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - a_{22} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \quad (4.59)$$

$$L = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \otimes \left( a_{21} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - a_{11} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \quad (4.60)$$

Similarmente, substituindo os multiplicadores na Equação 4.29, chega-se à equação que define a evolução do dano no material:

$$\dot{\phi} = \chi_d : \dot{\sigma} \quad (4.61)$$

onde  $\chi_d$  é um tensor de quarta ordem definido como a soma de outros dois tensores de quarta ordem,  $P$  e  $Q$ , respectivamente definidos por:

$$P = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial Y} \otimes \left( a_{12} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - a_{22} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \quad (4.62)$$

$$Q = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial g}{\partial Y} \otimes \left( a_{21} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - a_{11} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \quad (4.63)$$

### 4.3 Relação entre o Estado Danificado e o Estado Não Danificado

A relação entre os dois estados do material, danificado e não danificado, é dada por uma transformação linear envolvendo o tensor tensão de Cauchy  $\sigma$  e um operador linear de quarta ordem  $\mathbf{M}$  denominado de tensor efetivo de dano. A relação entre o estado danificado representado por um tensor de tensões  $\bar{\sigma}$ , e o não danificado, fica então definida por:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{M} : \sigma \quad (4.64)$$

Analisando a Equação 4.64 nota-se que a simetria do tensor de tensões efetivas  $\bar{\sigma}$  depende da natureza do tensor efetivo de dano. Caso este seja não simétrico resultará em um tensor de tensões efetivas também não simétrico. Entretanto, uma forma de contornar esta implicação é a utilização de um mecanismo de simetrização do tensor de tensões efetivas proposto por Cordebois e Sidoroff (1979) expresso por:

$$\bar{\sigma}_{ij} = (\delta_{ik} - \phi_{ik})^{-1,2} \sigma_{kl} (\delta_{jl} - \phi_{jl})^{-1,2} \quad (4.65)$$

Assim, por analogia à Equação 4.64, e tomando como base a Equação 4.65, o tensor efetivo de dano de quarta ordem fica definido por:

$$M_{ijkl} = (\delta_{ik} - \phi_{ik})^{-1/2} (\delta_{jl} - \phi_{jl})^{-1/2} \quad (4.66)$$

Logo, o tensor de dano de quarta ordem fica definido a partir de um tensor de dano de segunda ordem  $\phi$ , determinado a partir das direções principais, obtido através do tensor mudança de base  $b$ . Assim, define-se o tensor efetivo de dano  $\hat{M}$ , particularizado a essas direções principais por:

$$M_{ijkl} = b_{mi} b_{nj} b_{pk} b_{ql} \hat{M}_{mnpq} \quad (4.67)$$

Logo:

$$\hat{M}_{mnpq} = \hat{a}_{mp} \hat{a}_{nq} \quad (4.68)$$

O tensor  $\hat{a}$  relacionado às direções principais é definido por:

$$\hat{a}_{mp} = [\delta_{ik} - \hat{\phi}_{ik}]^{-1/2} \quad (4.69a)$$

$$\hat{a}_{mp} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\phi_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\phi_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\phi_3}} \end{bmatrix} \quad (4.69b)$$

Substituindo a Equação 4.68 na Equação 4.67 chega-se à seguinte relação:

$$M_{ijkl} = b_{mi} b_{nj} b_{pk} b_{ql} \hat{a}_{mp} \hat{a}_{nq} = a_{ik} a_{jl} \quad (4.70)$$

A partir da Equação 4.70 define-se um tensor  $a$  expresso por:

$$a_{ik} = b_{mi} b_{pk} \hat{a}_{mp} \quad (4.71)$$

Expressando de forma matricial a Equação 4.71, escreve-se:

$$[a] = [b]^T [\hat{a}][b] \quad (4.72a)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{b_{11}b_{11}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_1}} + \frac{b_{21}b_{21}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_2}} + \frac{b_{31}b_{31}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_3}} & \frac{b_{11}b_{12}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_1}} + \frac{b_{21}b_{22}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_2}} + \frac{b_{31}b_{32}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_3}} & \frac{b_{11}b_{13}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_1}} + \frac{b_{21}b_{23}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_2}} + \frac{b_{31}b_{33}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_3}} \\ \frac{b_{12}b_{11}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_1}} + \frac{b_{22}b_{21}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_2}} + \frac{b_{32}b_{31}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_3}} & \frac{b_{12}b_{12}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_1}} + \frac{b_{22}b_{22}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_2}} + \frac{b_{32}b_{32}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_3}} & \frac{b_{12}b_{13}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_1}} + \frac{b_{22}b_{23}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_2}} + \frac{b_{32}b_{33}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_3}} \\ \frac{b_{13}b_{11}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_1}} + \frac{b_{23}b_{21}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_2}} + \frac{b_{33}b_{31}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_3}} & \frac{b_{13}b_{12}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_1}} + \frac{b_{23}b_{22}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_2}} + \frac{b_{33}b_{32}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_3}} & \frac{b_{13}b_{13}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_1}} + \frac{b_{23}b_{23}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_2}} + \frac{b_{33}b_{33}}{\sqrt{1-\hat{\phi}_3}} \end{bmatrix} \quad (4.72b)$$

Para que seja relacionado ao incremento do tensor tensão de Cauchy  $\sigma$ , o tensor efetivo de dano de quarta ordem  $\mathbf{M}$  deve possuir uma natureza incremental compatível com a da plasticidade e do dano do material. Derivando a Equação 4.64, obtém-se uma relação com natureza evolutiva expressa por:

$$\dot{\bar{\sigma}} = \dot{\mathbf{M}} : \sigma + \mathbf{M} : \dot{\sigma} \quad (4.73)$$

onde:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \phi} : \dot{\phi} \quad (4.74)$$

Substituindo a Equação 4.61 na Equação 4.74 obtém-se a seguinte expressão:

$$\dot{\bar{\sigma}} = \left( \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \phi} : \chi_d : \sigma \right) : \dot{\sigma} \quad (4.75)$$

Reescrevendo a expressão acima de forma resumida:

$$\dot{\bar{\sigma}} = m : \dot{\sigma} \quad (4.76)$$

Usando o princípio da equivalência de energia entre o estado danificado e não danificado apresentado no Capítulo II, a relação entre ambos os estados pode ser definida por:

$$\frac{1}{2} \dot{\sigma} : \dot{\varepsilon}_e = \frac{1}{2} \dot{\sigma} : \dot{\varepsilon}_e \quad (4.77)$$

Usando a mesma premissa de equivalência entre ambos os estados correlacionados pelo tensor dano, a expressão entre as deformações é obtida de forma similar à da Equação 4.64:

$$\dot{\varepsilon}_e = m^{-1} : \dot{\varepsilon}_e \quad (4.78)$$

A relação definida pela Equação 4.78, através da equivalência de energia de deformação não é suficiente para que sejam obtidas as deformações finitas num regime elástico-plástico. Por esse motivo, é necessária a postulação da hipótese de equivalência de dissipação plástica entre ambos os estados. Esta premissa origina a seguinte relação:

$$\dot{\varepsilon}_p = \mathbf{M}^{-1} : \dot{\varepsilon}_p \quad (4.79)$$

A taxa de deformação plástica pode ser obtida a partir da teoria clássica da plasticidade via um tensor de encruamento de quarta ordem  $\bar{H}$ , dada por:

$$\dot{\varepsilon}_p = \bar{H} : \dot{\varepsilon} \quad (4.80)$$

Decompondo as deformações para ambos os estados danificado e não danificado obtém-se:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p \quad (4.81a)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p \quad (4.81b)$$

Procedendo a substituição da Equação 4.78 na Equação 4.81b define-se a seguinte relação:

$$\dot{\varepsilon} = (m + \bar{H} : (\mathbf{M} - m))^{-1} : \dot{\varepsilon} \quad (4.82)$$

#### 4.4 Equações Constitutivas

A rigidez elasto-plástica para o material danificado pode ser obtida a partir da relação incremental entre a tensão e a deformação efetivas, baseada na lei de Hooke. A relação fica definida por:

$$\dot{\bar{\sigma}} = \bar{E} : \dot{\bar{\epsilon}}_e \quad (4.83)$$

A taxa de variação da tensão efetiva, bem como a deformação, podem ser transformadas para a configuração danificada usando as Equações 4.76 e 4.78, respectivamente. A relação resultante é dada por:

$$\dot{\sigma} = m^{-1} : \bar{E} : m^{-1} : \dot{\epsilon}_e \quad (4.84)$$

Fazendo uso então das Equações 4.81b e 4.58 na Equação 4.84 obtém-se: a seguinte relação:

$$\dot{\sigma} = E_d : (\dot{\epsilon} - \chi_p : \dot{\sigma}) \quad (4.85)$$

Após algumas manipulações algébricas chega-se a seguinte expressão:

$$\dot{\sigma} = (I + E_d : \chi_p)^{-1} : E_d : \dot{\epsilon} = D : \dot{\epsilon} \quad (4.86)$$

onde  $E_d$  representa a rigidez elástica do material danificado definida por:

$$E_d = m^{-1} : \bar{E} : m^{-1} \quad (4.87)$$

Denominando por  $D$  a rigidez elasto-plástica do material danificado, o mesmo é definido pela expressão:

$$D = (I + E_d : \chi_p)^{-1} : E_d \quad (4.88)$$

Como o presente modelo aborda a resposta inelástica de materiais compósitos danificados, a formulação acima deve ser enquadrada dentro da proposta do trabalho que são os laminados simétricos e ortotrópicos.

Ressalta-se que se faz uso, na implementação computacional nesta dissertação, não mais as matrizes constitutivas para o caso clássico abordado, mas sim, embutindo nesta teoria clássica a formulação apresentada neste capítulo.

A formulação teórica deste capítulo pode ser resumida através de um modelo que se subdivide em três partes como segue abaixo:

Elasticidade	Plasticidade	Dano
$\Delta \varepsilon$	$\Delta \varepsilon = 0$	$\Delta \varepsilon = 0$
$\dot{\phi} = 0$	$\dot{\phi} = 0$	$\dot{\phi} = \begin{cases} 0 \Rightarrow g \leq 0, \\ \lambda_{,d} \frac{\partial g}{\partial Y} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial Y} \dot{Y} \geq 0 \end{cases}$
$\dot{\kappa} = 0$	$\dot{\kappa} = 0$	$\dot{\kappa} = \sqrt{(2/3)\dot{\phi} : \dot{\phi}}$
$\dot{\Gamma} = 0$	$\dot{\Gamma} = 0$	$\dot{\Gamma} = \text{Equação 4.54}$
$\dot{\sigma} = E(\phi) : \dot{\varepsilon}$	$\dot{\sigma} = -E(\phi) : \dot{\varepsilon}_p$	$\dot{\sigma} = \frac{\partial M^{-1}}{\partial \phi} : \dot{\phi} : E : \varepsilon_e$
$\dot{\varepsilon}_p = 0$	$\dot{\varepsilon}_p = \begin{cases} 0 \Rightarrow f \leq 0, \\ \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \geq 0 \end{cases}$	$\dot{\varepsilon}_p = 0$
$\dot{\alpha} = 0$	$\dot{\alpha} = \text{Equação 4.35}$	$\dot{\alpha} = 0$
$\dot{r} = 0$	$\dot{r} = \dot{p} = \dot{\lambda}_p$	$\dot{r} = 0$

#### 4.5 Aspectos Computacionais do Modelo Proposto

O desenvolvimento computacional do modelo elásto-plástico considerando a evolução do dano no material é aqui utilizado para prever o comportamento da resposta inelástica do material. São analisados pelo modelo proposto laminados simétricos uma vez que nessa condição a matriz constitutiva do material, é composta por quatro sub-matrizes, unidas em uma única sub-matriz. A composição desta matriz, já abordada no Capítulo III, é feita de forma a acoplar os efeitos entre os momentos e os esforços normais existentes no laminado e suas respectivas deformações e curvaturas, resultantes da aplicação destes esforços.

A implementação do modelo é feita em três etapas que resumem conjuntamente o comportamento do material. A primeira parte do algoritmo é responsável pela fase elástica do material, a segunda pela parte inelástica e a terceira pelo comportamento evolutivo do dano.

Uma observação pertinente é que a danificação do material pode começar a ocorrer ainda na fase elástica do material, sendo esta dependente apenas da condição que gera o aumento da superfície que caracteriza a variável de dano, similarmente à expansão do domínio da superfície plástica do material.

O algoritmo com as três fases da implementação computacional do modelo é mostrado de forma detalhada no Anexo A no final da presente dissertação.

## CAPÍTULO V

### Simulações Numéricas

Este capítulo trata das simulações numéricas baseadas nas distintas formulações propostas nos Capítulos II e IV, respectivamente, tratando de materiais dúcteis e compósitos.

O modelo de dano elásto plástico aplicado a materiais dúcteis tem aqui a sua utilização estendida a uma liga de alumínio cobre. Já o modelo baseado na resposta inelástica de materiais compósitos considerando a evolução do dano é aplicado a compósitos laminados feitos a base de fibra de carbetto de silício com matriz metálica a base de uma liga de titânio alumínio, fibra de carbono com resina epóxi e fibra de vidro com resina epóxi. .

Para a validação do modelo aplicado ao caso dos compósitos, efetua-se a comparação dos resultados numéricos aqui obtidos, com os resultados numéricos e experimentais referentes ao trabalho de Voyiadjis e Deliktas (2000).

A validação do modelo aplicado ao caso da liga de cobre alumínio já fora confirmada no capítulo II, tomando-se como base os resultados obtidos por Chaboche *et al.*,1994. Num capítulo posterior será feita também a validação de forma experimental.

Os parâmetros que caracterizam os materiais utilizados nas simulações são obtidos a partir das referências bibliográficas citadas acima.

#### **5.1 Resultados Experimentais e Teóricos utilizando a Formulação Proposta aplicada ao caso dos compósitos**

São confrontados e analisados nesta parte da dissertação os resultados experimentais e teóricos apresentados por Voyiadjis e Deliktas (2000). Os resultados teóricos por estes autores são baseados no mesmo formalismo apresentado no Capítulo IV para a obtenção da resposta inelástica em compósitos, associada ao processo de danificação do material.

A análise dos resultados que serão apresentados, oriundos da referência bibliográfica citada no parágrafo anterior, visa atestar a confiabilidade da formulação teórica adotada. Já a validação da implementação computacional do modelo elasto-plástico utilizado neste trabalho será feita através da comparação com os resultados numéricos extraídos da mesma referência.

O modelo elasto-plástico utilizado por Voyiadjis e Deliktas (2000) apresenta uma boa resposta quando comparado a resultados experimentais. Observa-se, contudo, na Figura 5.1 que a resposta elástica do material obtém uma aproximação melhor que a resposta inelástica. Nota-se que o modelo superestima os valores de tensão na região em que é evidenciado o comportamento inelástico do material. Os resultados apresentados pela Figura 5.1 são obtidos para um laminado  $[0]_{8s}$  fabricado a partir de fibra de carbeto de silício, SiC, com matriz metálica de titânio alumínio, TiAl.

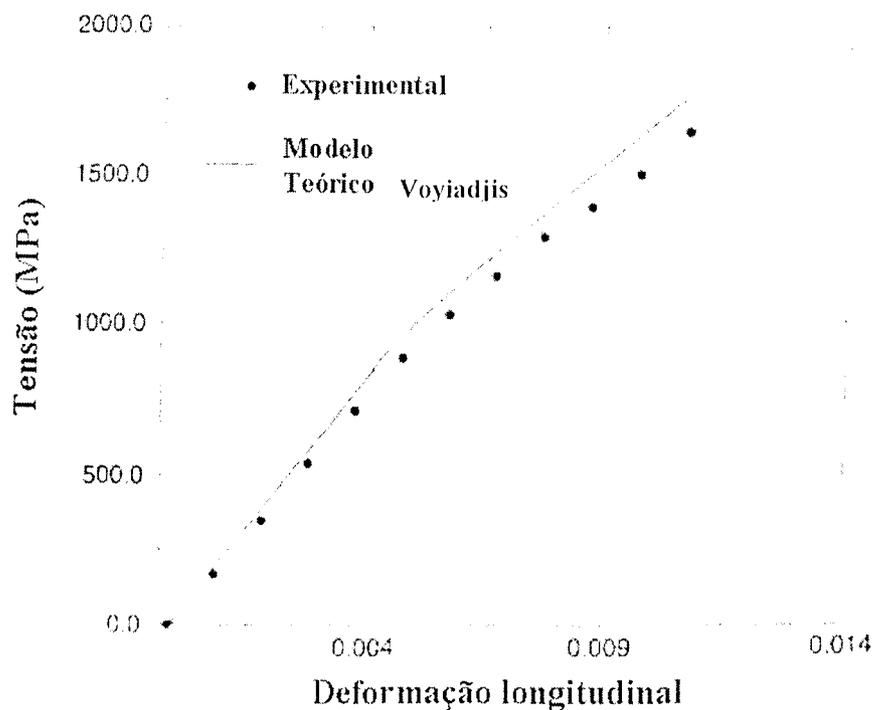


Figura 5.1- Comparação do modelo elasto-plástico com os resultados experimentais  $[0]_{8s}$  [adaptado de Voyiadjis e Deliktas (2000)].

Na Tabela 5.1 apresentam-se as propriedades para o compósito usado nesta dissertação.

Tabela 5.1 – Propriedades Mecânicas do Compósito SiC/TiAl (Voyiadjis e Deliktas, 2000).

<i>Tensão de pseudoescoamento <math>0^\circ</math></i>	1378-1540 MPa
<i>Tensão de pseudoescoamento <math>90^\circ</math></i>	103-206 MPa
<i>Módulo de elasticidade longitudinal</i>	200 GPa
<i>Módulo de elasticidade transversal</i>	136 GPa
<i>Módulo de cisalhamento</i>	52,4 GPa
<i>Coefficiente de Poisson</i>	$n_{12}=0,27$ ; $n_{21}=0,185$ ; $n_{31}=0,31$ .

A direção  $0^\circ$  é considerada como sendo a mesma da aplicação da carga, ou seja, a direção longitudinal. Já a direção  $90^\circ$  é a direção perpendicular à aplicação da carga, ou seja, a direção transversal. A Figura 5.2 ilustra bem essa convenção.

Segundo a formulação apresentada, alguns parâmetros plásticos e relacionados ao processo de danificação do material precisam ser fornecidos. A Tabela 5.2 fornece estes valores.

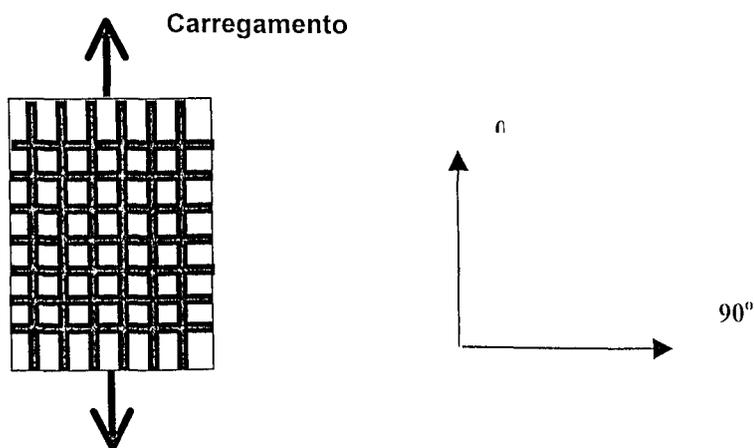


Figura 5.2- Sistema de referência do laminado com a aplicação do carregamento.

Tabela 5.2 – Parâmetros relacionados à pseudoplasticidade e ao dano para o Compósito SiC/TiAl (Voyiadjis e Deliktas, 2000).

<b>Plásticos</b>	<b>Dano</b>
$C^p = 30.000 \text{ MPa}$	$\eta = 0,01 - 0,03$
	$\xi = 0,65 - 0,75$
$\gamma^p = 350$	$\nu = 0,001 - 0,003$

Outros resultados teóricos são também confrontados com os resultados experimentais, utilizando o mesmo material apresentado pelas Tabelas 5.1 e 5.2, alterando somente a orientação e a seqüência das camadas, bem como o número de camadas.

A Figura 5.3 apresenta a comparação entre esses resultados para um sistema de laminados  $[90]_{8s}$  e para um  $[45/-45]_{2s}$ . É mostrado na Figura 5.4, outro resultado oriundo de

simulação numérica comparado ao resultado experimental, desta vez para uma configuração do tipo  $[0/90]_{4s}$ .

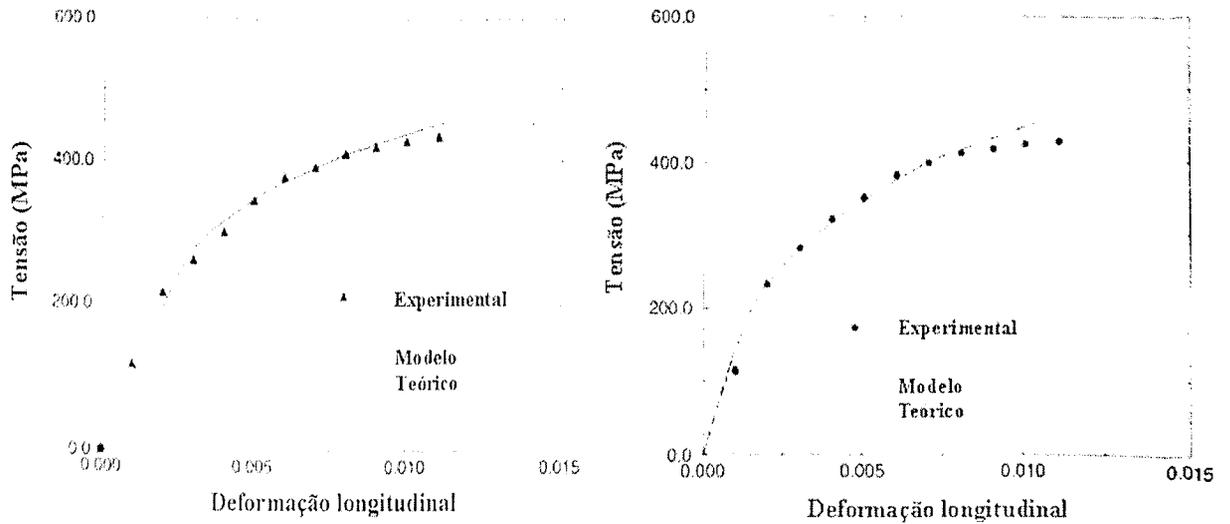


Figura 5.3- Comparação do modelo elasto-plástico com os resultados experimentais para os laminados  $[90]_{8s}$  e  $[45/-45]_{2s}$  [adaptado de Voyiadjis e Deliktas (2000)].

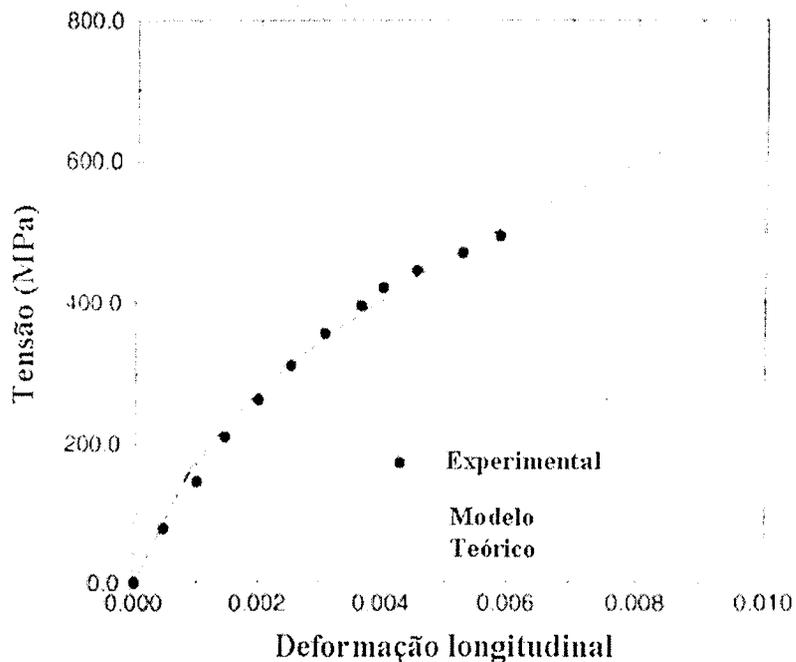


Figura 5.4- Comparação do modelo elasto-plástico com os resultados experimentais  $[0/90]_{4s}$  [adaptado de Voyiadjis e Deliktas (2000)].

Assim como os resultados apresentados para o sistema de laminados do tipo  $(0)_{8s}$ , o sistema  $(90)_{8s}$  e os demais apresentam as mesmas peculiaridades com relação à resposta

elástica e inelástica. Isso ocorre uma vez que os resultados foram obtidos através da mesma formulação teórica e usando o mesmo programa.

## 5.2 Comparação dos Resultados Numéricos aplicados ao caso dos compósitos

Nesta parte do capítulo são apresentados os resultados obtida via simulações numéricas para um material compósito constituído de resina epóxi e fibra de carbono.

Os resultados de natureza numérica que serão apresentados são comparados aos obtidos por Voyiadjis e Deliktas (2000). O propósito desta comparação é validar de uma forma indireta o modelo utilizado na presente dissertação, o qual é baseado na mesma formulação teórica adotada pelo trabalho citado.

Os valores das propriedades mecânicas e dos parâmetros relacionados ao dano e à pseudoplasticidade para o compósito epóxi-carbono são apresentados, respectivamente, nas duas tabelas abaixo:

Tabela 5.3 – Propriedades Mecânicas do Compósito epóxi / carbono.

<i>Tensão de pseudoescoamento 0°</i>	470 MPa
<i>Tensão de pseudoescoamento 90°</i>	120 MPa
<i>Módulo de elasticidade longitudinal</i>	203 GPa
<i>Módulo de elasticidade transversal</i>	11,4 GPa
<i>Módulo de cisalhamento</i>	8,4 GPa
<i>Coefficiente de Poisson</i>	$n_{12}=0,32; n_{21}=0,32; n_{31}=0,32.$

Tabela 5.4 – Parâmetros relacionados à plasticidade e ao dano do compósito epóxi / carbono.

<b>Plásticos</b>	<b>Dano</b>
$C^p = 28.000 \text{ MPa}$	$\eta = 0,007 - 0,025$
	$\xi = 0,45 - 0,65$
$\gamma^p = 320$	$\nu = 0,0008 - 0,0025$

Foram realizadas duas simulações utilizando o material caracterizado nas Tabelas 5.3 e 5.4, sendo que a diferença entre elas está na configuração dos laminados.

A comparação já proposta entre os resultados ficará em função apenas da primeira simulação numérica, na qual se usa um laminado  $[0/90]_{6s}$ . Os resultados para a configuração  $[45/0/-45]_{4s}$  não serão comparados a nenhuma referência, uma vez que não foram encontrados na literatura resultados para mesma. A terceira e última simulação é feita para um compósito à base de fibra de vidro S com resina epóxi.

Os resultados seguintes seguirão o mesmo padrão da apresentação dos três casos anteriores, ou seja, em forma gráfica. Primeiro apresenta-se o resultado referente à fase elástica do material, seguido da resposta inelástica do mesmo, no qual são consideradas as tensões nominais e efetivas.

Finalmente, apresentam-se os valores da tensão efetiva associada ao dano longitudinal, ilustrando-se a natureza anisotrópica do mesmo mostrando-se, em um mesmo gráfico, as duas curvas com os respectivos valores do dano para a direção longitudinal e transversal.

#### ✓ **Resultados para o laminado $[0/90]_{6s}$ epóxi / carbono**

A separação do resultado em resposta elástica e inelástica é baseada na hipótese já apresentada no Capítulo II e traduzida pela Equação 2.18.

Os resultados apresentados na Figura 5.5 evidenciam a presença do dano ainda na fase elástica do material, de uma forma ainda incipiente.

A comparação entre estes resultados e os obtidos de forma também numérica, extraídos do trabalho de Voyiadjis e Deliktas (2000), já validado experimentalmente, levam à conclusão de que o modelo utilizado na presente dissertação para obtenção dos resultados é preciso na determinação do comportamento deste tipo de material na fase elástica.

Na Figura 5.6, se ilustra o comportamento do mesmo material no que tange a sua resposta inelástica, onde se observa uma boa concordância entre os resultados.

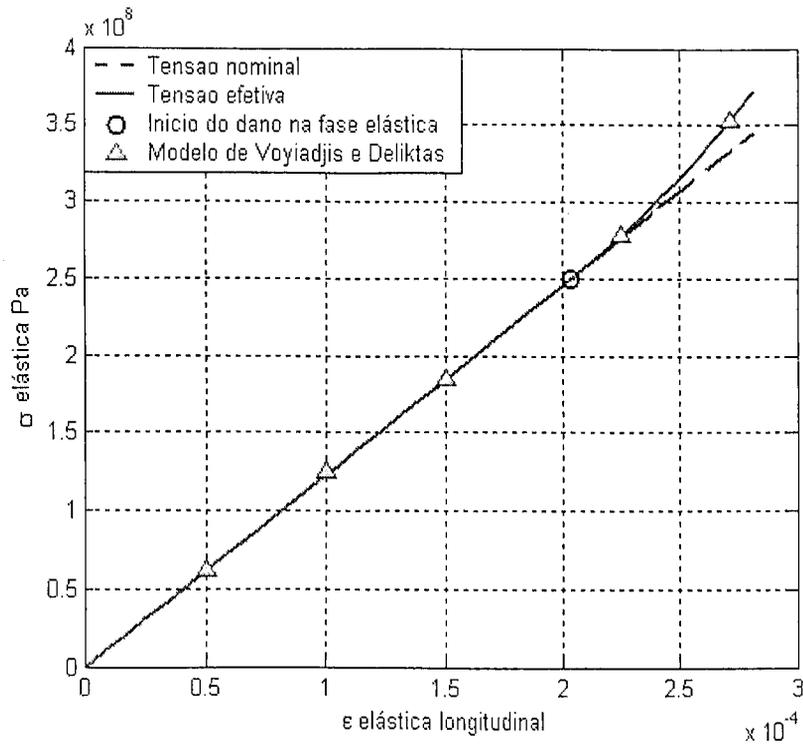


Figura 5.5- Comparação das respostas elásticas do laminado  $[0/90]_{6s}$ .

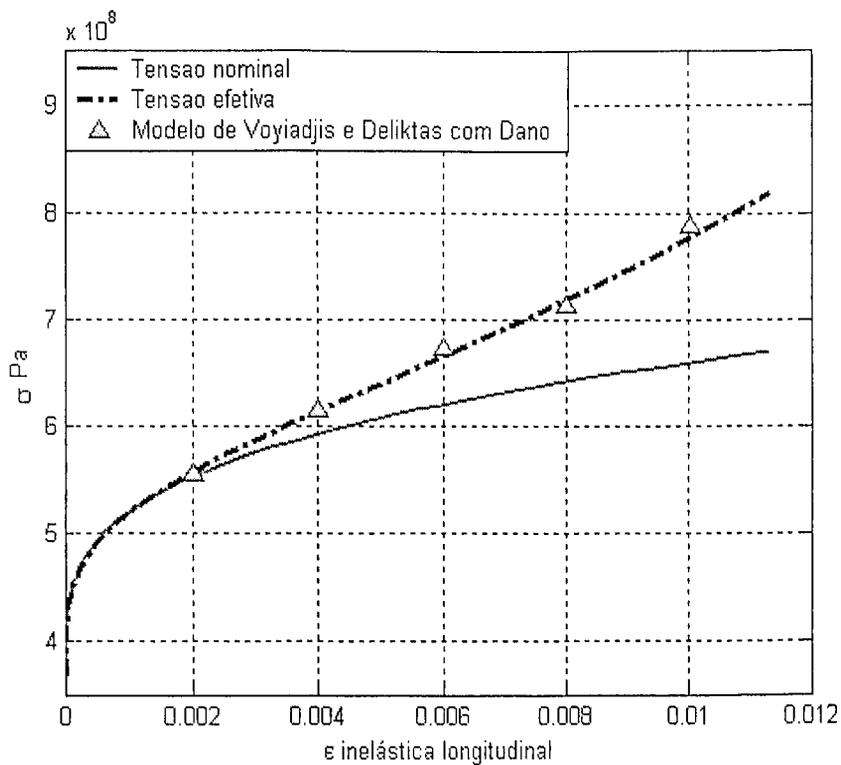


Figura 5.6- Resposta inelástica do laminado  $[0/90]_{6s}$  com as tensões efetiva e nominal comparada à obtida pelo modelo de Voyiadjis e Deliktas.

O crescimento da tensão efetiva obtida via resposta inelástica, ilustrado na Figura 5.7, evidencia a sua correlação com a evolução do estado de danificação do material a partir do instante que se evidencia o seu crescimento associado ao dano através dos tensores do dano e da tensão nominal. A relação entre estes estados foi apresentada no Capítulo IV e sintetizado pela Equação 4.64.

Ilustra-se na Figura 5.7 apenas o dano na direção longitudinal. Entretanto, a tensão efetiva é obtida por uma transformação via tensor de dano, o que significa que o dano na direção transversal também influencia o comportamento global do material.

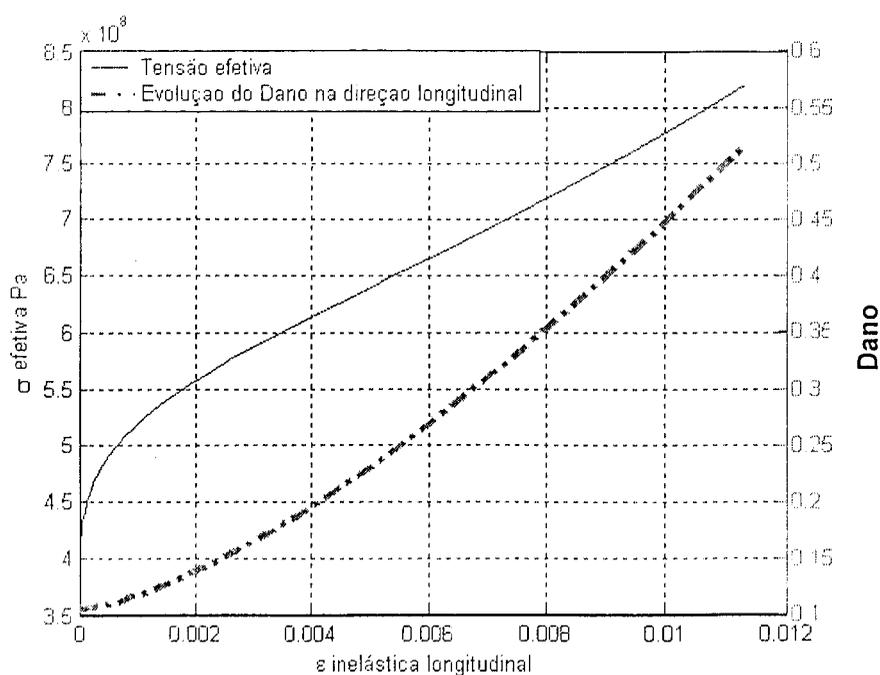


Figura 5.7- Resposta inelástica do laminado  $[0/90]_{6s}$  com a tensão efetiva e o respectivo valor do dano longitudinal.

No Capítulo III, dedicou-se parte do estudo à explanação do comportamento evolutivo do dano de um compósito qualquer com um sistema laminado cruzado, ou seja,  $[0/90]$ . Observa-se, na Figura 3.12 do respectivo capítulo, que a danificação deste material começa na direção transversal evoluindo de forma mais rápida que a danificação na direção longitudinal, chegando-se a um ponto em que o material atinge um estado de tensões no qual tornam-se evidentes as microfissuras, inicialmente nesta direção transversal. De acordo com a definição apresentada na introdução do presente trabalho, estas microfissuras passam a caracterizar um ponto limítrofe entre a Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura.

Esta evolução do dano tanto longitudinal quanto transversal é comprovada pelo modelo e ilustrada na Figura 5.8.

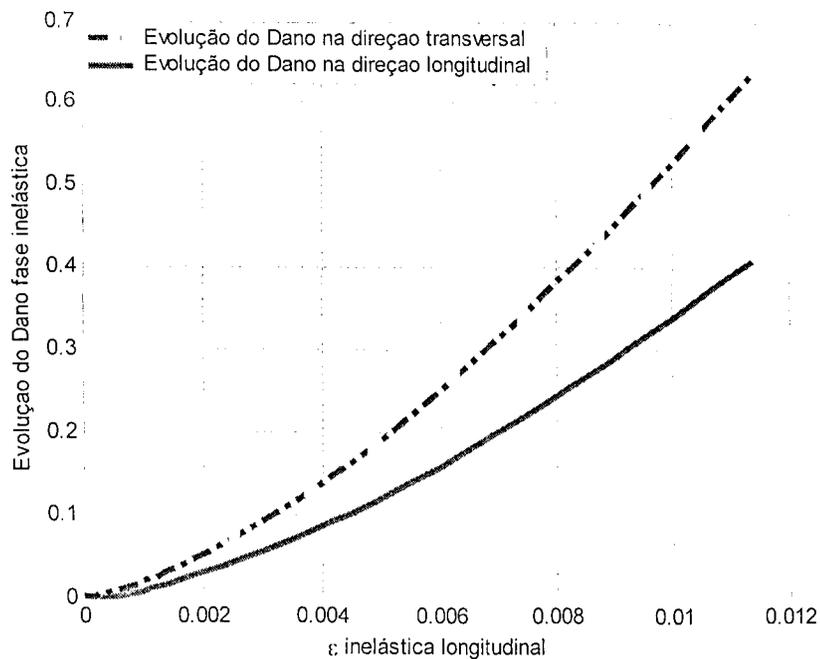


Figura 5.8- Comparação entre a evolução do dano longitudinal e transversal do laminado  $[0/90]_{6s}$ .

#### ✓ Resultados para o laminado $[45/0/-45]_{4s}$ epóxi/carbono

Os resultados da simulação numérica foram obtidos para um outro sistema de laminados, simétrico, feito do mesmo material caracterizado pelas Tabelas 5.3 e 5.4. Entretanto, são usadas duas camadas de cada seqüência, orientadas a  $\pm 45^\circ$ , aumentando a resistência da estrutura na direção longitudinal. No primeiro exemplo, além das camadas a  $0^\circ$ , existiam outras a  $90^\circ$ , o que faz que o laminado seja mais resistente na direção transversal se comparado ao caso aqui analisado.

Uma evidência da maior rigidez existente no segundo laminado resulta da comparação das Figuras 5.5 e 5.9. Observa-se que para os mesmos valores das deformações entre os dois laminados, no segundo caso, se verifica valores mais elevados de tensão que os apresentados na curva do primeiro exemplo.

Outro ponto analisado é o começo da evolução do dano ainda na fase elástica, de forma análoga ao que sucedeu no primeiro exemplo. A explicação para isso é que os parâmetros que caracterizam o dano no material não são alterados pela configuração do laminado, sendo estes inerentes apenas ao tipo de material.

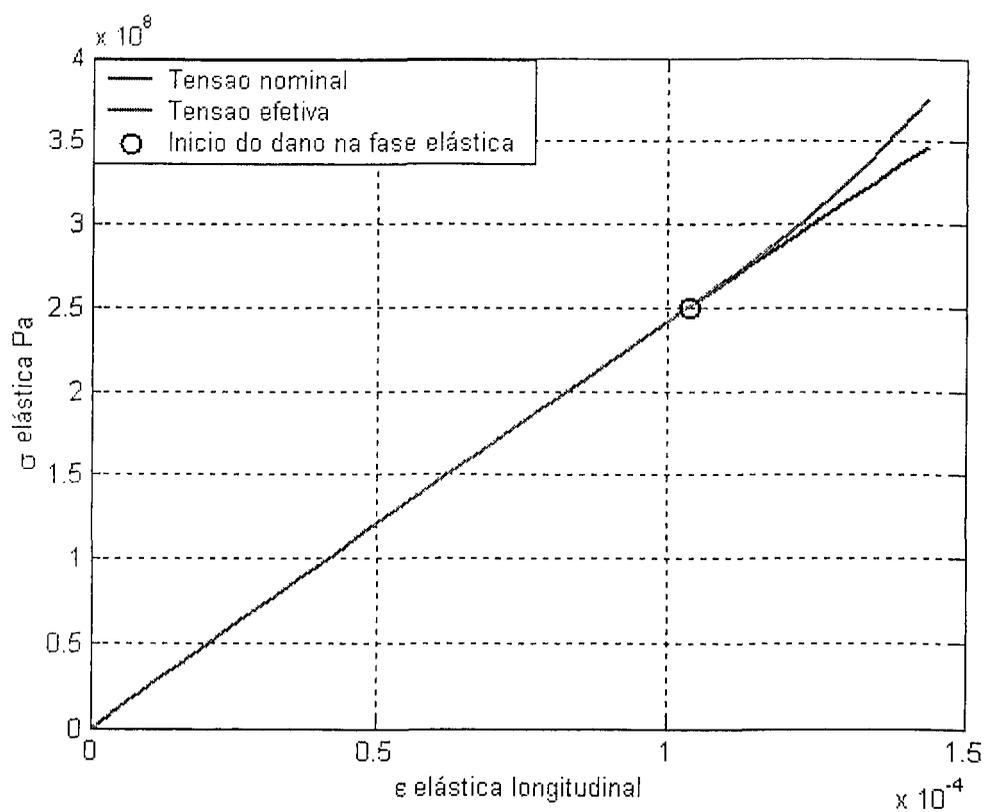


Figura 5.9- Resposta elástica do laminado  $[45/0/-45]_{2s}$ .

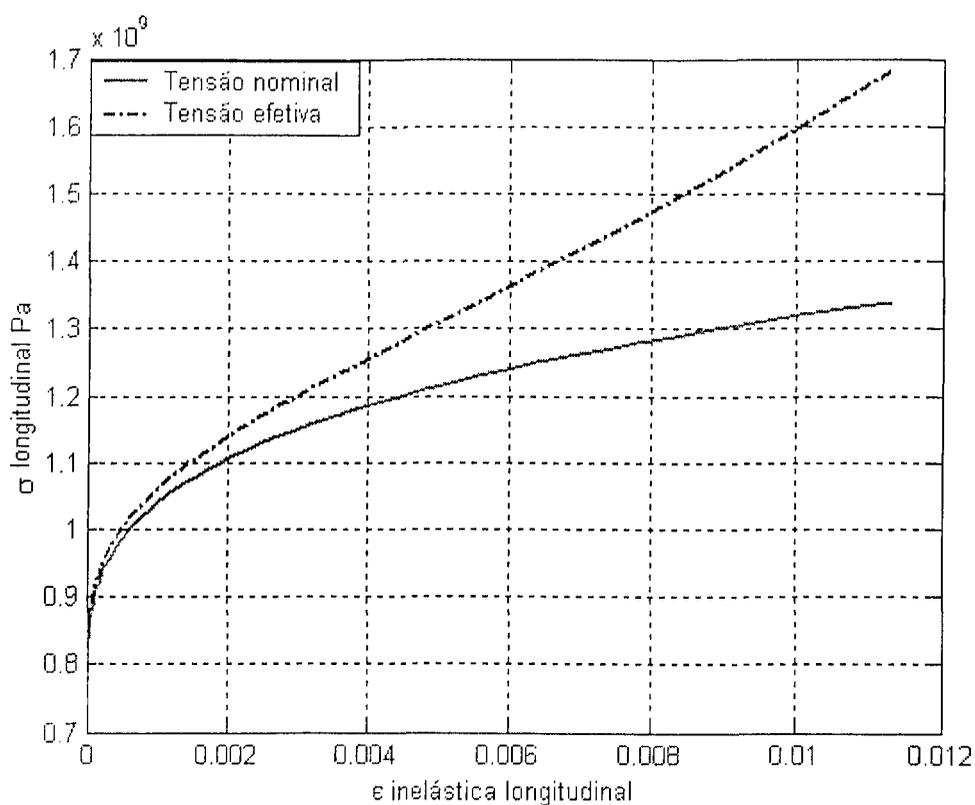


Figura 5.10- Resposta inelástica do laminado  $[45/0/-45]_{4s}$  com as tensões efetiva e nominal.

Na Figura 5.10, percebe-se que, mesmo na fase inelástica do material, para a configuração  $[45/0/-45]_{4s}$ , a análise feita na Figura 5.9, com relação ao aumento da rigidez, continua sendo válida, pois, os valores de tensão são mais altos para este exemplo quando se comparam os valores de deformação entre os dois casos.

As diferenças entre as tensões efetiva e nominal são mais acentuadas para a presente análise. Isso se explica uma vez que a relação entre as duas se dá via o tensor de dano que, nesta análise, apresenta ambas as componentes de dano mais acentuadas que no caso anterior.

A Figura 5.11 ilustra o comportamento do dano longitudinal e da tensão efetiva. Observa-se que pelo fato do material ter uma configuração mais rígida na direção longitudinal, o dano tem a sua curva menos acentuada que no exemplo anterior, onde se tinha uma maior resistência na direção transversal e menor na direção longitudinal.

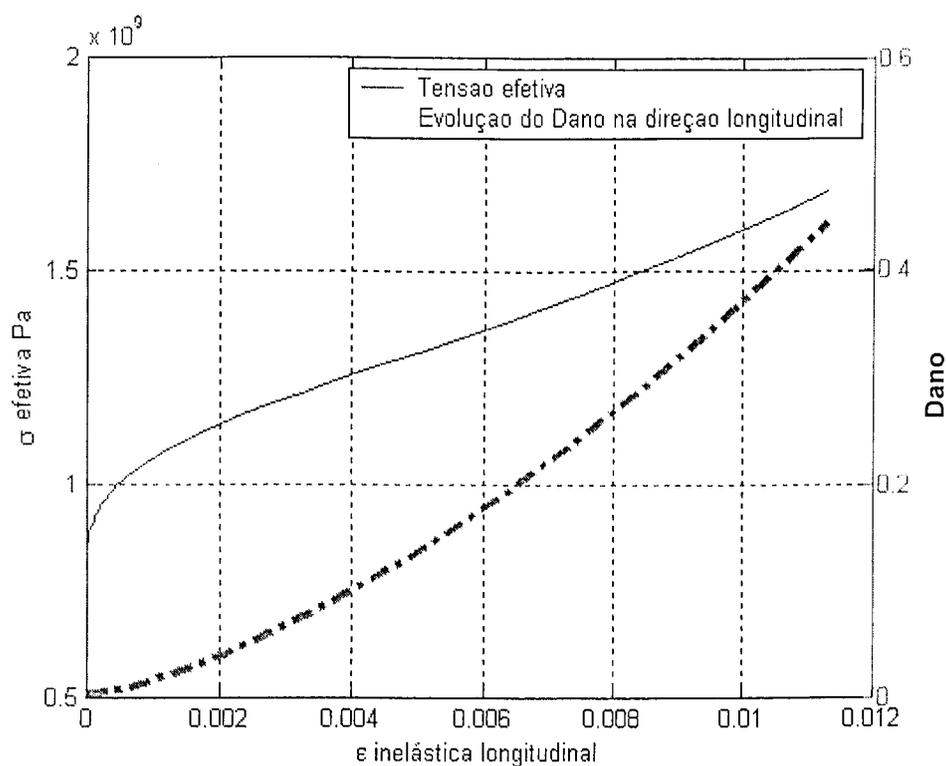


Figura 5.11- Resposta inelástica do laminado  $[45/0/-45]_{4s}$  com a tensão efetiva e o respectivo valor do dano longitudinal.

O aumento da rigidez na direção longitudinal e a redução na direção transversal, para o sistema  $[45/0/-45]_{4s}$ , devido a orientação do laminado, são evidenciados pelo comportamento das curvas mostradas na Figura 5.12.

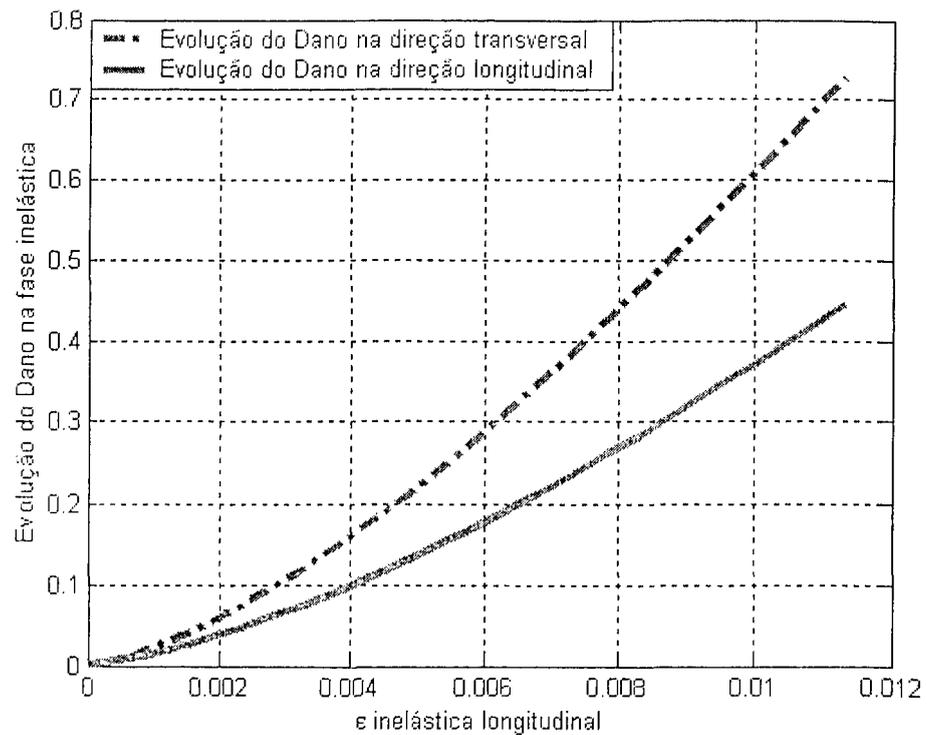


Figura 5.12- Comparação entre a evolução do dano longitudinal e transversal do laminado  $[45/0/-45]_{2s}$ .

#### ✓ Resultados para o laminado $[0/90]_{6s}$ epóxi / vidro

Os resultados obtidos via simulação numérica para a terceira configuração seguirá as mesmas etapas de análise utilizada no segundo exemplo.

O material a ser analisado nesta simulação é diferente daquele usado nas duas simulações anteriores. Ele é constituído de uma matriz de resina epóxi e fibras de vidro, onde a rigidez do mesmo é reduzida de forma perceptível, tanto na fase elástica quanto na inelástica. Isso devido às suas propriedades mecânicas serem inferiores às do material utilizado nas simulações anteriores. Observa-se na Figura 5.13 a queda da rigidez deste compósito quando se compara ao laminado confeccionado de resina epóxi com fibra de carbono. Mesmo sendo ambos os laminados feitos com a mesma resina, a rigidez da fibra de carbono é consideravelmente maior que a da fibra de vidro S ( $E_{\text{fibra de vidro}} = 85.5 \text{ GPa}$ ;  $E_{\text{fibra de carbono}} = 228 \text{ GPa}$ ).

Como o comportamento do material compósito depende do alinhamento, do número de camadas e da seqüência de empilhamento, a configuração  $[0/90]_{6s}$ , idêntica ao do primeiro exemplo é reanalisada. Assim, o fato da utilização da mesma configuração em materiais diferentes contribui para uma análise voltada para a influência das propriedades mecânicas na

rigidez global do material. O comportamento das curvas que descrevem o diagrama de tensão deformação são parecidos quanto à forma, entretanto, os valores de tensão são distintos e, é justamente por essa diferença de valores que fica evidenciada a maior rigidez do compósito com fibra de carbono. O fato da forma da curva ser parecida, principalmente na fase inelástica, é devido ao comportamento da resina que, mesmo possuindo comportamento viscoplástico é aqui, para efeito de simplificação do modelo, considerada como tendo comportamento plástico.

As Tabelas 5.5 e 5.6 trazem as propriedades mecânicas do compósito constituído de fibra de vidro S com resina epóxi, com reforço unidirecional, e os parâmetros relacionados ao comportamento plástico e de danificação do mesmo.

Tabela 5.5 – Propriedades Mecânicas do Compósito S-Glass / Epóxi.

<i>Tensão de pseudoescoamento 0°</i>	370 MPa
<i>Tensão de pseudoescoamento 90°</i>	49 MPa
<i>Módulo de elasticidade longitudinal</i>	203 GPa
<i>Módulo de elasticidade transversal</i>	11,4 GPa
<i>Módulo de cisalhamento</i>	8,4 GPa
<i>Coefficiente de Poisson</i>	$n_{12}=0,32; n_{21}=0,32; n_{31}=0,32.$

Tabela 5.6 – Parâmetros relacionados à plasticidade e ao dano para o caso do S-Glass / Epóxi.

<b><i>Plásticos</i></b>	<b><i>Dano</i></b>
$C^p = 25.000 \text{ MPa}$	$\eta = 0,005 - 0,015$
	$\xi = 0,3 - 0,55$
$\gamma^p = 280$	$\nu = 0,0005 - 0,002$

Na Figura 5.13 nota-se que o comportamento do dano mantém a mesma peculiaridade dos exemplos anteriores, começando ainda no fim da fase elástica. Uma das implicações desta observação é a alteração do módulo de elasticidade do compósito. Com base em medições experimentais, pode-se usar a variação do módulo de elasticidade para quantificar a variável dano.

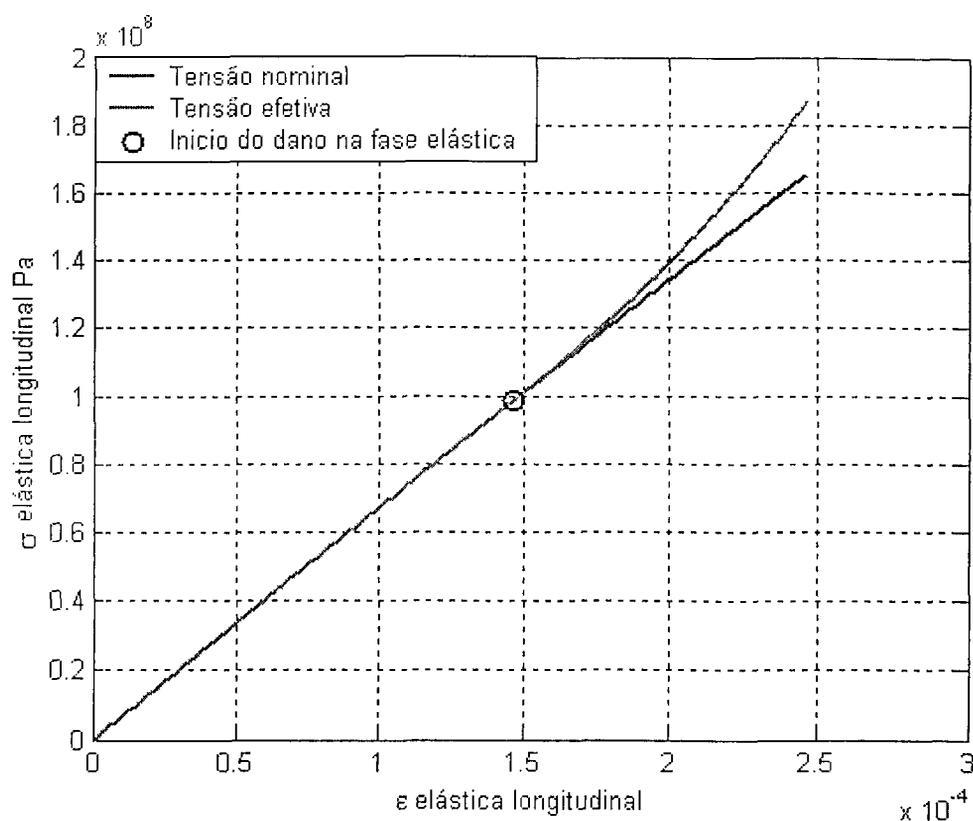


Figura 5.13- Resposta elástica do laminado  $[0/90]_{6s}$  epóxi/vidro.

Na Figura 5.14 se observa o comportamento da resposta inelástica do compósito, onde são plotados os valores da tensão nominal, a qual não considera o dano do material e, o da tensão efetiva, calculada a partir do tensor de dano.

A Figura 5.15 ilustra a evolução do dano na direção longitudinal e o respectivo crescimento da tensão efetiva do material. O processo de danificação para este material tem um comportamento análogo ao de mesma configuração do compósito formado à base de epóxi/carbono. Tal afirmação pode ser comprovada na Figura 5.16, onde a evolução do dano na direção transversal é notadamente mais acentuada do que na direção longitudinal.

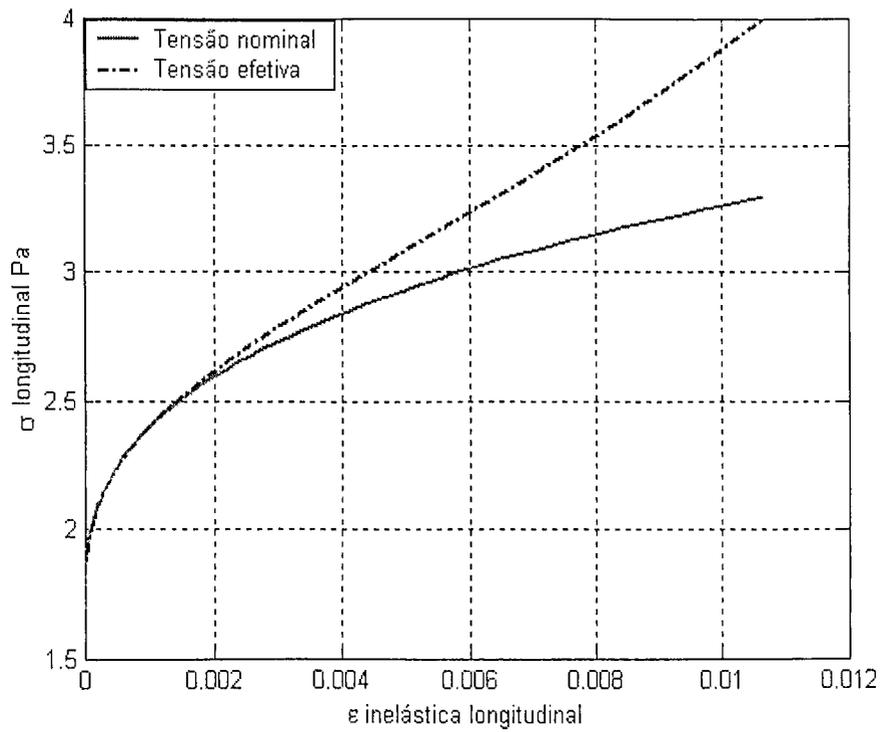


Figura 5.14- Resposta inelástica do laminado  $[0/90]_{6s}$  epóxi/vidro com as tensões efetiva e nominal.

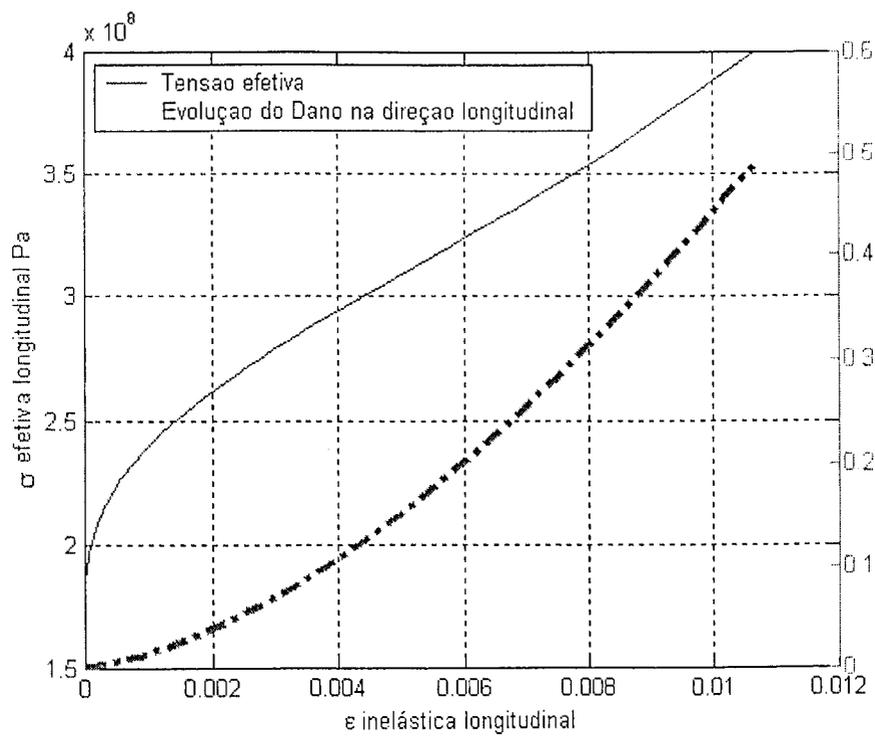


Figura 5.15- Resposta inelástica do laminado  $[0/90]_{6s}$  epóxi/vidro com a tensão efetiva e o respectivo valor do dano longitudinal.

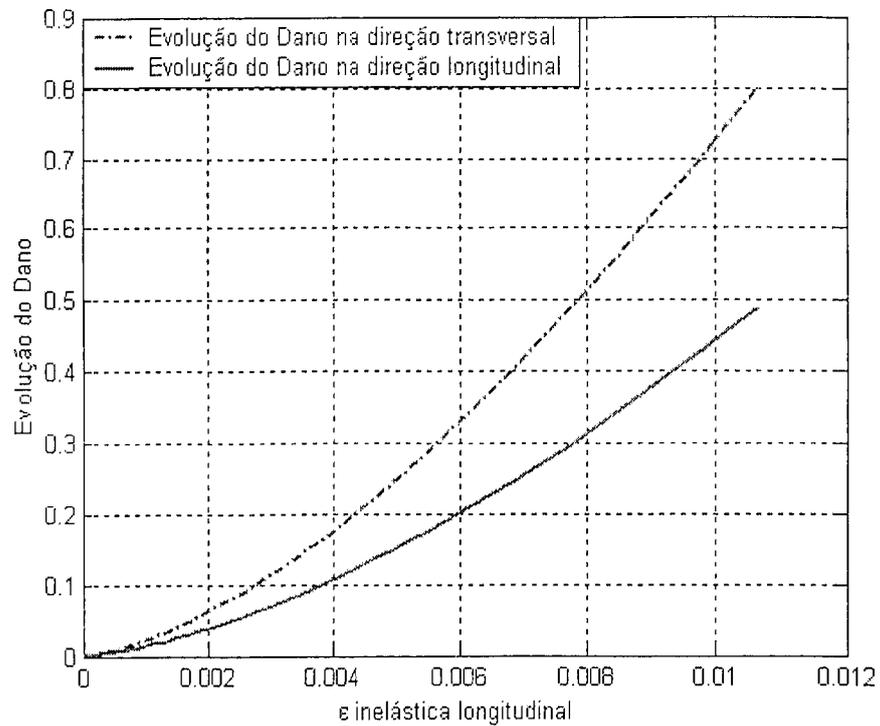


Figura 5.16- Comparação entre a evolução do dano longitudinal e transversal do laminado  $[0/90]_{6s}$  epóxi/vidro.

### 5.3 Resultados Numéricos utilizando a Formulação Proposta aplicada ao caso dos Materiais Dúteis

Nesta parte do capítulo é ilustrado o resultado de uma simulação aplicada a uma liga de Al/Cu. A validação do modelo já fora feita no Capítulo II, para uma liga de Cu/Al, com base em dados da literatura. Mais adiante, no capítulo VII, será realizada a validação experimental do modelo.

A Tabela 5.7 traz os parâmetros utilizados na simulação inerentes à liga.

Tabela 5.7 – Parâmetros da liga Al/Cu

<b>Elásticos</b>	<b>Plásticos</b>	<b>Dano</b>
$E = 70 \text{ GPa}$	$S_y = 94 \text{ MPa}$	$\sigma_D = 88 \text{ MPa}$
$\nu = 0.3$	$K = 70 \text{ GPa}$	$D_c = 0.65$
	$M = 0.3$	$S = 70 \text{ GPa}$
		$s = 0.3$

A Figura 5.17 ilustra a resposta desta liga e a respectiva evolução do dano ao longo do carregamento.

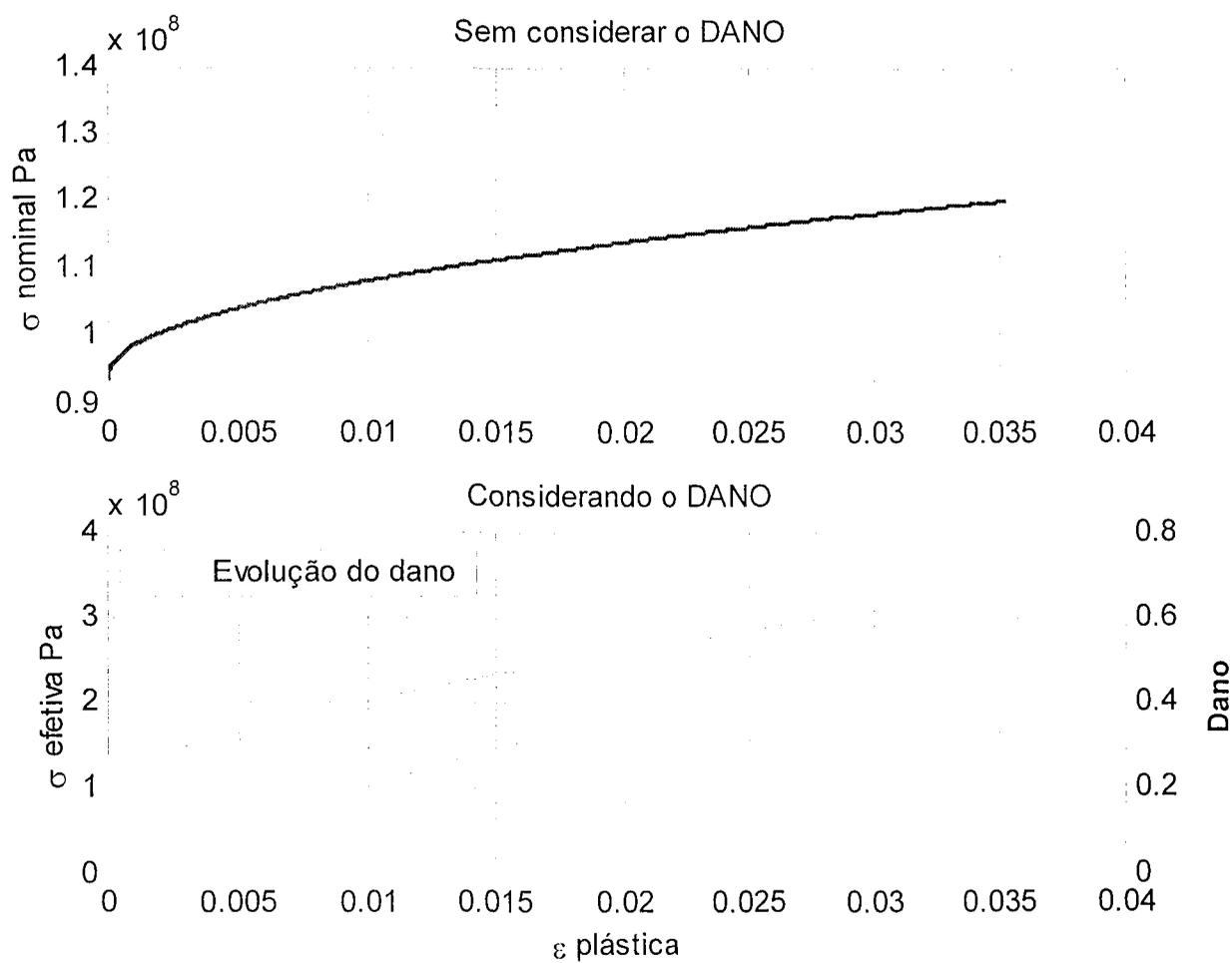


Figura 5.17- Resposta da tensão efetiva, nominal e evolução do dano numa liga Al/Cu.

A discussão dos resultados se dará de forma mais adequada no Capítulo VII.

## CAPÍTULO VI

### Método de monitoramento estrutural baseado na observação da impedância mecânica

Este capítulo aborda as principais características da técnica de monitoramento estrutural baseada na observação da impedância mecânica da estrutura, além de trazer um estudo de caso, comprobatório da eficiência de tal método.

O principal objetivo de estudar a técnica supracitada é para o seu futuro acoplamento aos resultados gerados pelos modelos teóricos de evolução de dano, buscando assim uma interpretação quantitativa, além da qualitativa, quanto à natureza e evolução do dano.

#### 6.1 Método de Impedância

A abordagem da técnica que monitora a integridade de um sistema em tempo real detectando assim o surgimento do dano ainda num estado incipiente é a parte deste trabalho que emoldura o seu aspecto de natureza experimental.

O universo que compreende a técnica aqui abordada faz uma ligação direta ao campo dos materiais inteligentes. Segundo Inman e Park (1998), sistemas que utilizam materiais inteligentes são os que integram à própria estrutura atuadores, sensores e sistemas de controle, permitindo a sua própria adequação, respondendo às condições externas. Exemplos de materiais inteligentes podem ser compreendidos como PZT (zirconato titanato de chumbo), ligas com memória de forma e alguns fluidos magnetoreológicos (Park *et al.*, 1998). A técnica de monitoramento da integridade de um sistema baseada na observação da impedância mecânica é desenvolvida, particularmente, utilizando materiais piezoelétricos. Por toda a sua peculiaridade, a mesma também pode ser enxergada como fazendo parte de uma nova vertente de métodos não destrutivos de avaliação da integridade de componentes ou de estruturas como um todo.

Os materiais piezoelétricos são utilizados uma vez que as medidas da impedância mecânica da estrutura são difíceis de serem realizadas. Assim, o que é medido é a impedância eletromecânica do sistema PZT-estrutura, sendo uma vez feita a consideração que a impedância elétrica do sistema não varia, ficando assim, toda variação atribuída à parte

mecânica do sistema, sendo esta devida a alterações geométricas da estrutura ou pela alteração de propriedades mecânicas da mesma que, indiretamente caracterizam a evolução do estado de danificação.

As medidas de impedância são feitas dentro de uma faixa de altas frequências, sendo estas, geralmente, maiores que 10 kHz. O fato de ser usada dentro desta faixa faz com que existam pequenos comprimentos de ondas, sendo isto o que lhe confere uma característica peculiar para detectar pequenas alterações na integridade abrangendo pequenas regiões da estrutura.

### 6.1.1 Conceitos de Impedância Mecânica e Elétrica

A impedância mecânica de um sistema pode ser definida como a relação entre a força harmônica aplicada a este sistema e a velocidade com que o mesmo se desloca no mesmo ponto (Raju, 1997).

A impedância elétrica é a oposição que um circuito ou componente oferece à corrente alternada. Ela é uma grandeza bidimensional, portanto, dividida em duas partes: resistência e reatância. A resistência nos circuitos de corrente alternada é a mesma que a equivalente da corrente contínua e é expressa como um valor ôhmico positivo. Já a reatância pode ser indutiva, ou seja, valor ôhmico não-negativo, ou capacitiva, ôhmico não-positivo (Gibilisco, 2002).

A resistência é um escalar porque ela pode ser representada em uma escala unidimensional. Assim, para um circuito de corrente contínua, a corrente diminui conforme a resistência aumenta, obedecendo a Lei de Ohm. Da mesma forma, esta lei também assegura o mesmo para a corrente alternada em uma resistência. Já para uma indutância ou capacitância, a situação não é tão simples quanto o cálculo da resistência (Gibilisco, 2002).

A reatância indutiva  $X_L$  de um indutor pode variar desde zero, para o caso de um curto-circuito a alguns Ohms, para uma bobina pequena, chegando a  $K\Omega$  ou  $M\Omega$  para as grandes bobinas. Como resistência pura, a reatância indutiva afeta a corrente em um circuito de corrente alternada. Porém, não sendo resistência pura, a reatância muda de acordo com a frequência. Isto faz com que mude a forma pela qual a corrente varia em função da tensão (Gibilisco, 2002).

Para uma fonte de corrente alternada, se a frequência  $f$  é dada em Hertz e a indutância da bobina  $L$  em Henrys, então a reatância indutiva,  $X_L$ , em Ohms, é definida por:

$$X_L = 2\pi f L \quad (6.1)$$

A reatância indutiva tem sua correspondente, análoga, na forma de reatância capacitiva. Seja um capacitor alimentado por uma fonte de corrente alternada. A frequência da corrente alternada varia de alguns Hz até muitos MHz. Inicialmente, a tensão entre as duas placas do capacitor irá acompanhar quase que exatamente a reversão de polaridade condicionada pela corrente alternada. Ao aumentar-se a frequência, a carga não ficará bem estabelecida em cada ciclo. Quando a frequência tornar-se muito elevada, o conjunto das placas irá se comportar como um curto-circuito (Gibilisco, 2002). Desta forma, a oposição que o capacitor oferecerá para a corrente alternada é denominada por reatância capacitiva,  $X_C$ , que irá variar com o inverso da frequência. Da mesma forma que a reatância indutiva e a resistência, ela também possui sua escala em ohms. Entretanto, os valores são negativos ao invés de positivos e o valor de  $X_C$  aumenta de modo negativo conforme a frequência diminui (Gibilisco, 2002). A reatância capacitiva é expressa em valores absolutos, retirando-se o sinal negativo. Em cálculos de impedância complexa, este valor é sempre considerado uma grandeza não-positiva, o que evita confusão com a reatância indutiva.

Assim, pode-se considerar a reatância capacitiva como uma imagem especular da reatância indutiva, ou seja, é a sua extensão em valores negativos. Para uma dada fonte de corrente alternada de frequência  $f$  em Hz, com uma capacitância  $C$  expressa em Farads, a reatância capacitiva  $X_C$  em Ohms é definida por (Gibilisco, 2002):

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \quad (6.2)$$

Seja o plano  $RX$  que descreve valores complexos. O eixo das abscissas caracteriza os valores para  $R$ , enquanto que, nas ordenadas, são representados os valores para  $X$ . Assim, o lugar geométrico de  $X_L$  é o primeiro quadrante do plano  $RX$ .

Similarmente, o lugar geométrico de  $X_C$  corresponde ao quarto quadrante do plano complexo. As resistências são representadas por números reais não-negativos, enquanto que a reatância pode ser indutiva, ou seja, valores positivos, ou capacitiva, valores negativos, correspondendo aos valores sobre o eixo imaginário. Desta forma, pode-se remover do plano complexo a metade esquerda do gráfico, podendo haver somente valores não-negativos para o eixo real (Gibilisco, 2002).

Os valores expressos neste plano descrevem um valor genérico  $R + jX$  que representa um valor também genérico para a impedância  $Z$ , que é descrita através destas duas componentes. Uma impedância resistiva, ou impedância não-reativa, ou ainda resistência ideal, é representada por um valor de impedância no qual não existe o termo imaginário (Gibilisco, 2002).

A admitância é uma medida que representa a facilidade com que um meio conduz corrente alternada e equivale à condutância no caso de uma corrente contínua. Assim como a impedância, este é um valor complexo.

Da mesma forma como ocorre em um circuito com corrente contínua, a condutância  $G$  aparece em um circuito de corrente alternada. A condutância elétrica é o inverso da resistência e sua unidade é medida em Siemens ou Mho.

O inverso da reatância é a susceptância  $B$ , que também pode ser capacitiva ou indutiva. Combinando a condutância e a susceptância, pode-se formar a admitância complexa  $Y$  que é descrita similarmente à impedância, por  $Y = G + jB$ , sendo o plano complexo desta entidade física similar ao da impedância (Gibilisco, 2002).

### 6.1.2 Método de Monitoramento Estrutural baseado na Impedância

O método de monitoramento baseado na impedância utiliza sensores que monitoram mudanças na rigidez da estrutura, no amortecimento e na massa (Inman *et al.*, 2003). Estes sensores são pequenas pastilhas piezoelétricas, usualmente menores que  $25 \times 25 \times 0,1$  mm coladas a superfície da estrutura monitorada que são utilizadas diretamente para medir a resposta dinâmica local.

Transdutores piezocerâmicos produzem cargas elétricas quando submetidos a esforços de natureza mecânica. Inversamente, uma deformação mecânica é provocada quando um campo elétrico é aplicado. Para um material piezoelétrico linear, a relação que descreve o acoplamento entre as variáveis elétricas e mecânicas é definida por (Crawley *et al.*, 1983):

$$S_i = s_{ij}^E T_j + d_{mi} E_m \quad (6.3.a)$$

$$D_m = d_{mi} T_i + \varepsilon_{mk}^T E_k \quad (6.3.b)$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^E & d \\ d & \varepsilon^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ E \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Onde:

- $S$  : vetor das deformações [m/m];  
 $T$  : vetor das tensões [N/m<sup>2</sup>];  
 $E$  : vetor campo elétrico [v/m];  
 $D$  : vetor de deslocamento elétrico [o/m];  
 $s$  : tensor de flexibilidade [m<sup>2</sup>/N];  
 $d$  : tensor das constantes piezoelétricas em deformação [m/v];  
 $\varepsilon$  : permissividade elétrica [F/m].

Os índices  $i, j, e m$  que podem ser substituídos pelos índices  $1, 2$  e  $3$  indicam as direções da tensão e da deformação e o índice  $k$  a do campo elétrico conforme ilustrado na Figura 6.1. A primeira equação descreve o efeito inverso do PZT, já a segunda o efeito direto.

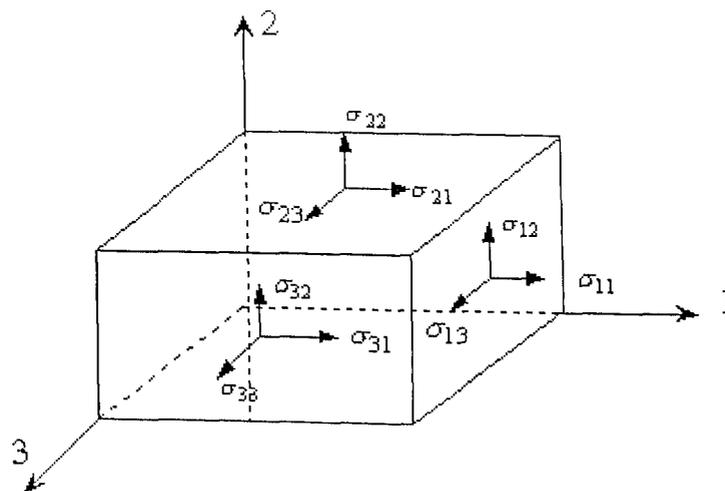


Figura 6.1- Direções das tensões no PZT.

Para obter a leitura da impedância da estrutura, a técnica de monitoramento baseada na impedância do sistema utiliza simultaneamente ambos os efeitos dos materiais piezoelétricos, o direto e o inverso. Quando o campo elétrico alternado atua no PZT, colado na estrutura, o mesmo se deforma conjuntamente com a estrutura fazendo com que o conjunto vibre. Se a frequência de excitação for muito alta, a resposta dinâmica da estrutura refletirá apenas o comportamento de uma pequena região próxima ao PZT. A partir da resposta dinâmica da estrutura, o PZT se deforma gerando um campo elétrico. Assim, o mesmo funciona como um atuador e um sensor de deformações. Quando algum tipo de dano ou uma fissura aparecem na estrutura, a resposta dinâmica da mesma é alterada e percebida através da resposta elétrica do PZT.

As pastilhas de PZT utilizam uma diferença de potencial muito baixa, menores que 1 V, gerando uma alta freqüência de excitação em determinados pontos da estrutura (Moura, 2004). Segundo Raju (1997), o valor de 1V apresenta bons resultados para identificação de mudanças estruturais.

A Figura 6.2 apresenta o modelo unidimensional eletromecânico do sistema de monitoramento de integridade estrutural utilizando os sinais de impedância. É considerado que um atuador PZT axial seja posicionado em uma das extremidades do sistema, enquanto a outra está fixa. Liang *et al.* (1994) demonstraram que a admitância  $Y(\omega)$  do atuador PZT é uma função combinada da impedância mecânica do atuador PZT,  $Z_a(\omega)$  e da estrutura  $Z(\omega)$ , como mostra a equação abaixo:

$$Y(\omega) = \frac{I}{V} = i\omega a \left( \bar{\epsilon}_{33}^T - \frac{Z(\omega)}{Z(\omega) + Z_a(\omega)} d_{3x}^2 \hat{Y}_{xx}^E \right) \quad (6.5)$$

onde  $V$  é a voltagem de entrada no atuador PZT,  $I$  é a corrente de saída do PZT,  $a$  é a constante geométrica,  $d_{3x}$  é a constante de acoplamento piezoelétrico,  $\hat{Y}_{xx}^E$  é o módulo de Young,  $\bar{\epsilon}_{33}^T$  é a constante dielétrica complexa do PZT com tensão zero e  $i$  é a amplitude da corrente.

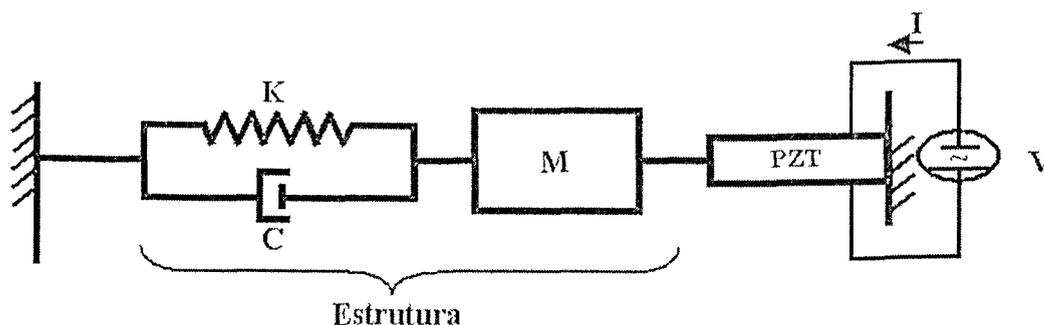


Figura 6.2- Modelo unidimensional do acoplamento eletromecânico utilizado pelo método baseado em impedância.

Supondo que as propriedades mecânicas do PZT não variem ao longo do tempo em que o mesmo é utilizado para o monitoramento, a Equação 6.5 mostra que a impedância elétrica do PZT é diretamente relacionada à impedância mecânica da estrutura, fato que justifica a utilização dos sinais de impedância elétrica do PZT para o monitoramento da integridade estrutural do sistema representado pela impedância mecânica da estrutura. Nota-se que a admitância elétrica é basicamente capacitiva, mostrando que a parte imaginária é o

termo dominante. Este termo imaginário é mais sensível à variação de temperatura do que a parte real. Desta forma, a parte real do sinal é geralmente utilizada na maioria das aplicações (Raju, 1997).

A técnica consiste basicamente na obtenção de funções de resposta em frequência (FRFs) da estrutura e posterior avaliação da modificação destes sinais. Idealmente, uma modificação destas FRFs indicaria uma modificação estrutural e, portanto, algum tipo de dano (Raju, 1997).

Quanto à identificação da melhor banda de frequências a ser utilizada para uma dada estrutura monitorada, pouco trabalho foi realizado neste aspecto. Geralmente é adotado um procedimento de tentativa e erro para identificação da melhor banda. Entretanto, Moura e Steffen (2004) propuseram um procedimento estatístico que pode ser utilizado para obtenção das melhores configurações de ensaios. Sun *et al.* (1995) sugerem que faixas acima de 200 KHz são favoráveis para obter falhas localizadas, enquanto bandas menores que 70 KHz são mais indicadas para áreas maiores de falhas.

Enquanto a maior parte dos trabalhos têm utilizado a parte real da impedância ou da admitância, Bhalla *et al.* (2002) introduzem o conceito de assinatura “ativa”, já que é possível utilizar a componente ativa direta do sinal após filtrar a componente passiva. Como são conhecidas as propriedades do material PZT, pode-se reescrever a Equação 6.5 sob a forma:

$$Y = Y_p + Y_A \quad (6.6)$$

com:

$$Y_p = i\omega a \bar{\epsilon}_{33}^I \quad (6.7)$$

$$Y_A = i\omega a \frac{Z(\omega)}{Z(\omega) + Z_u(\omega)} d_{3,r}^2 \hat{Y}_{,xv}^E \quad (6.8)$$

onde o termo  $Y_p$  denota a parte passiva da admitância e representa a contribuição do PZT. O termo  $Y_A$  representa a parte ativa que equivale à interação PZT-estrutura. Como o termo passivo é representado pela parte real do sinal e o termo ativo pela parte imaginária, basta isolar o termo ativo da Equação 6.6 para trabalhar tanto com a parte imaginária quanto com a real na identificação de falhas, mantendo toda a informação das condições da estrutura (Park *et al.*, 2003).

Quanto à região sensível para identificação de mudanças, Park *et al.* (2003) afirmam que, para um único PZT, o mesmo pode identificar uma falha até a uma distância (radial) de 0,4 m em estruturas compósitas e até 2 metros em estruturas do tipo barra, constituídas de um único material.

Os gráficos das respostas da impedância fornecem informações qualitativas a respeito da integridade da estrutura, enquanto a informação quantitativa geralmente é fornecida através de um escalar. Este valor escalar é descrito como “desvio da raiz média quadrática” por Sun *et al.* (1995), definido por:

$$M = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{[\operatorname{Re}(Z_{i,1}) - \operatorname{Re}(Z_{i,2})]^2}{[\operatorname{Re}(Z_{i,1})]^2}} \quad (6.9)$$

onde M representa a medida da falha,  $Z_{i,1}$  representa o PZT medido sob condições iniciais e  $Z_{i,2}$  representa o sinal a ser comparado, para o i-ésimo valor da frequência.

## 6.2 Comparação com outras Técnicas Não Destrutivas.

As técnicas de inspeção não destrutivas tradicionais incluem técnicas que utilizam ultra-som, emissão acústica, análise de campos magnéticos, líquidos penetrantes, análise de raio-X, análise de respostas globais da estrutura e inspeções visuais (Bray, 1992). Cada técnica tem um domínio particular de aplicação. Por exemplo, no caso das inspeções visuais, essas são muito utilizadas em inspeções de plataformas *offshore*. Para o caso da técnica de emissão acústica, estas são utilizadas em inspeção de reatores nucleares. O que se pode generalizar para todas as técnicas é que estas apresentam tanto aspectos positivos como aspectos negativos em sua utilização. O método de ultra-som, por exemplo, fornece muitos detalhes sobre a natureza do dano, entretanto, é necessário que seja conhecida, previamente, a sua localização na estrutura. Muitas técnicas não destrutivas tradicionais requerem que a estrutura a ser inspecionada esteja num período fora de serviço, enquanto que a técnica baseada na observação da impedância da estrutura tem aplicação *on-line* e oferece possibilidades de aplicação remota.

Abaixo são feitas algumas comparações entre a técnica baseada na observação da impedância com algumas técnicas tradicionais também de natureza não destrutiva.

### ➤ **Comparação com Métodos baseados na Resposta Dinâmica Global da Estrutura**

Como a maioria dos métodos que envolvem respostas dinâmicas globais da estrutura, o método de impedância precisa de testes padrões que envolvem comparações entre respostas correspondentes a diferentes estados de danificação, uma forma de assinatura da estrutura para um dado estado de danificação. A maior diferença do método baseado na impedância da estrutura está na faixa de frequências em que a estrutura é excitada. No caso das técnicas tradicionais são utilizadas baixas frequências que, geralmente não detectam a falha ainda num estágio incipiente.

### ➤ **Comparação com Métodos que utilizam Ultra-som**

Testes que utilizam técnicas ultrassônicas aplicadas a componentes estruturais fazem uso de um transdutor piezoelétrico que produz uma onda acústica no componente. Baseado no tempo de atraso da transmissão da onda, a natureza do defeito no componente é determinada. Usualmente, a natureza mecânica do componente deve ser bem conhecida antes do teste, para que a frequência do sinal ultrassônico possa ser escolhida de acordo com a resposta mecânica do componente. Tipicamente, é utilizada no teste uma única frequência de onda ou apenas poucas frequências diferentes. No caso do método de impedância, é utilizada uma banda larga de altas frequências.

O método ultrassônico, por sua vez, não confere uma autonomia tão boa quanto o método de impedância, pois, o mesmo precisa de que os técnicos tenham uma larga experiência para interpretar os dados obtidos pelo ensaio e discirnam sobre os detalhes contidos nos mesmo.

### ➤ **Comparação com Métodos que utilizam Emissão Acústica**

Os métodos que utilizam emissão acústica usam ondas elásticas provenientes de trincas, movimentação de discordâncias, delaminações e outros tipos de falha. Este método, assim como o de impedância, é apropriado para aplicação em estruturas que estejam em serviço. Entretanto, o método de emissão acústica requer que a estrutura esteja sob atividade química ou sob algum estado de tensão para que a emissão acústica seja gerada a partir da

falha. Outra vantagem advém do fato que as técnicas de emissão acústica necessitam de filtros que garantam o sinal livre de interferência de ruídos oriundos do meio.

De forma resumida, as principais vantagens do método de impedância com relação às demais técnicas de ensaios não destrutivos são listadas abaixo:

- ✓ A técnica não é baseada em nenhum modelo e assim pode ser facilmente aplicada em estruturas complexas;
- ✓ A técnica usa pequenos atuadores não intrusivos que podem ser usados em localizações de difícil acesso;
- ✓ O sensor (PZT) exibe boas características sobre condições normais de trabalho, tem uma grande faixa linear, resposta rápida, baixo peso e longo período de estabilidade;
- ✓ A técnica, pelo fato de trabalhar com altas frequências, é muito sensível as mudanças no comportamento dinâmico da estrutura.
- ✓ As leituras são facilmente interpretadas;
- ✓ A técnica pode ser implementada para monitoramento *on-line*;

O método baseado na observação da impedância também apresenta algumas desvantagens não fugindo assim desta característica apresentada pelos demais métodos citados. Alguns desses pontos negativos tangentes ao método são listados abaixo:

- ✓ Dificuldade de excitar estruturas robustas usando o PZT como atuador;
- ✓ Por usar materiais piezoelétricos esta se torna uma técnica sensível à variação de temperatura;
- ✓ Por ser uma técnica de recente utilização, o desenvolvimento de uma teoria física ainda se encontra numa fase incipiente.

Em geral, a principal vantagem da técnica baseada na observação da impedância é proveniente da sua aplicabilidade para o monitoramento de falhas ainda num estágio incipiente, podendo ser aplicada de forma remota e, em tempo real.

### 6.3 Estudo de Caso: Monitoramento de Alteração Estrutural em Vigas.

Para ilustrar a aplicação da técnica de monitoramento estrutural baseado em sinais de impedância, é proposto um exemplo no qual é adicionada uma massa (simulação da falha) em uma viga de duralumínio para avaliar o processo de monitoramento de alterações estruturais. A viga de alumínio utilizada no experimento e o PZT (estrutura flexível e sensor) têm as seguintes propriedades geométricas,  $a = 303$ ;  $b = 3.9$ ;  $c = 31.75$ ;  $d = 51.4$ ;  $e = 26$ ;  $f = 190$  [mm], indicadas nas Figuras 6.3 (a) e (b).

A impedância elétrica foi medida utilizando-se o analisador de impedância HP4194A, como mostrado pela Figura 6.4 que ilustra também o esquema de instrumentação e monitoramento. Um código C++ foi escrito para tornar possível o processo de aquisição de dados através de uma placa GP-IB instalada no microcomputador. Um PZT ACX *Quick Pack* modelo *QP15N* foi colado à estrutura como mostra a Figura 6.4.

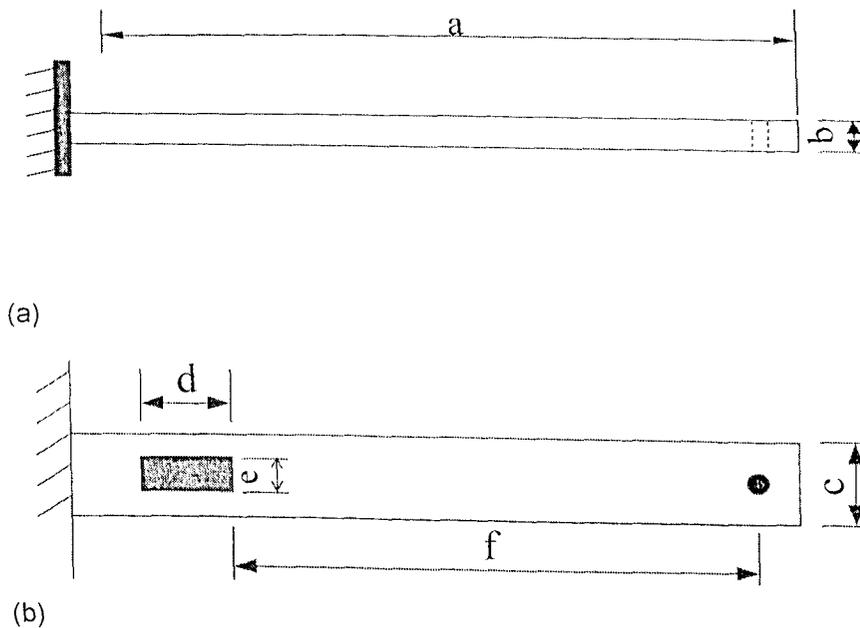


Figura 6.3 - Propriedades geométricas da viga em balanço e do PZT.

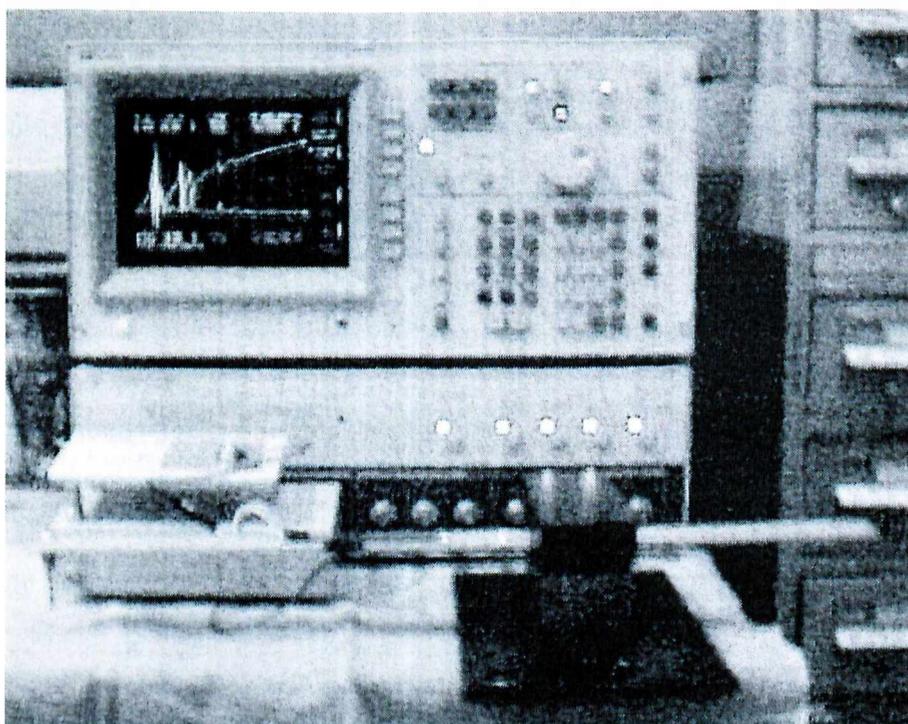
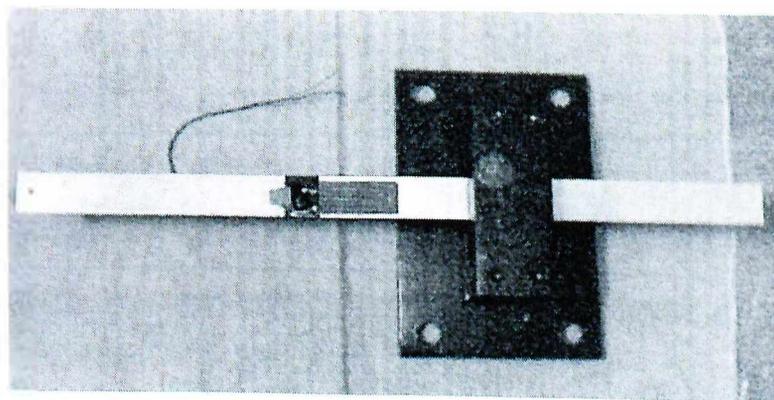


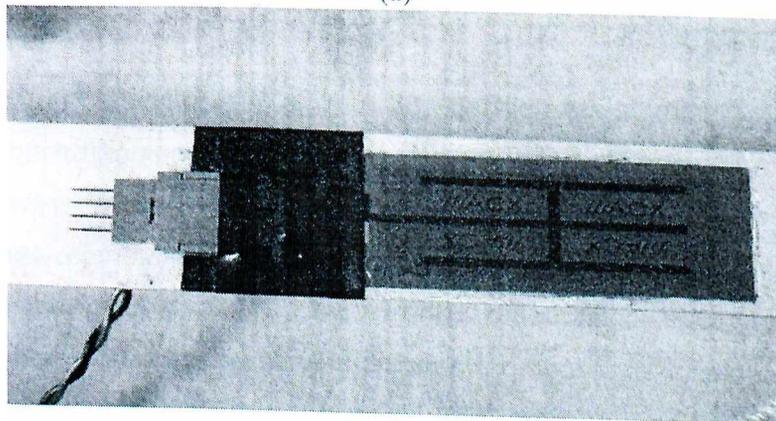
Figura 6.4 - Montagem experimental.

Após ser utilizado o procedimento descrito por Moura and Steffen (2004), foi identificada a banda de frequências mais sensível para o monitoramento da integridade estrutural para o sistema em questão. Assim, foram utilizados na configuração do analisador HP 4149A os seguintes parâmetros: OSC LEVEL; 1 V RMS; Integ. Med.; 16 médias; como início da banda 25437,986 Hz e como fim da banda 31437,986 Hz.

Foi realizado um planejamento fatorial completo  $3 \times 4$  para gerar vários modos de falhas para a viga em estudo, com uma repetição, como pode ser visto na Tabela 6.1. Nesta tabela também são ilustradas as variâncias dos sinais de impedância para cada ensaio. Os fatores estão fornecidos em cada coluna como variáveis normalizadas entre  $-1$  e  $+1$ . O ensaio número 13 representa os sinais da viga sem a inserção de qualquer massa (viga sem falha). O primeiro fator  $f_1$  é a intensidade da falha adicionada localmente através de pesos padrões. O segundo fator  $f_2$  é a localização da massa adicionada. Os valores para  $f_1$  adotados foram 5, 10 e 15g, enquanto que para  $f_2$  os valores foram as posições 1, 2, 3 e 4, conforme mostrado na Figura 6.5.



(a)



(b)

Figura 6.5- Viga em balanço e detalhe do PZT (ACX) colado.

Tabela 6.1- Planejamento fatorial completo para os ensaios de identificação de falhas na viga de alumínio.

Ensaio	Respostas (Variância)			Fator 1 Intensidade da Falha	Fator 2 Localização da Falha
	#1	#2	Média		
1	0,38554	0,38676	0,38615	-1	-1
2	0,65835	0,62368	0,641015	-1	-1/3
3	0,76735	0,85295	0,81015	-1	+1/3
4	1,1329	0,96139	1,047145	-1	+1
5	0,30871	0,38306	0,345885	0	-1
6	0,53825	0,46718	0,502715	0	-1/3
7	0,79047	1,0005	0,895485	0	+1/3
8	0,93929	0,98627	0,96278	0	+1
9	0,33668	0,36145	0,349065	+1	-1
10	0,57975	0,55171	0,56573	+1	-1/3
11	0,88755	0,90276	0,895155	+1	+1/3
12	1,215	1,3918	1,3034	+1	+1
13	0,83215	0,83072	0,831435	-	-

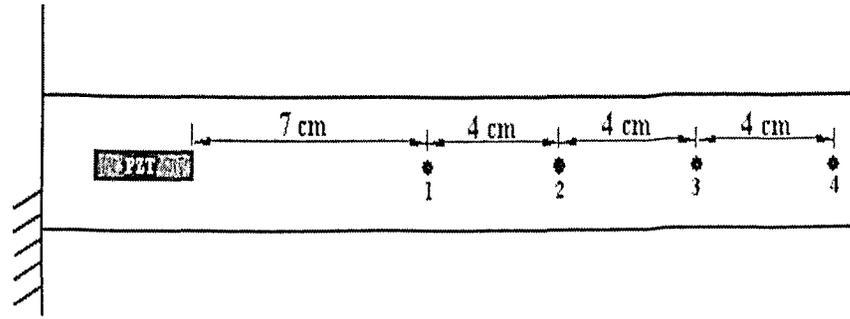


Figura 6.6- Ilustração das posições das falhas na viga de duralumínio.

Para ilustrar a sensibilidade da técnica, é exibido na Figura 6.7 o gráfico de barras da variância média dos sinais de impedância para os experimentos indicados na Tabela 6.1.

Com os resultados obtidos e ilustrados pela Figura 6.7, é possível inferir que a influência da localização da massa adicionada é superior à influência das intensidades das massas adicionadas neste experimento. Para os três conjuntos de dados, relativos aos experimentos números 1 até o 12, o comportamento que se observou foi que, ao se distanciar a massa adicionada (5, 10 ou 15g) do PZT, a influência é maior utilizando-se a variância do sinal. As modificações quanto à intensidade da massa não seguiram um padrão determinado, ou seja, não há sentido em dizer, pelo menos diretamente, que existe alguma variação monotônica entre a intensidade da massa acrescentada e o correspondente acréscimo na variância do sinal.

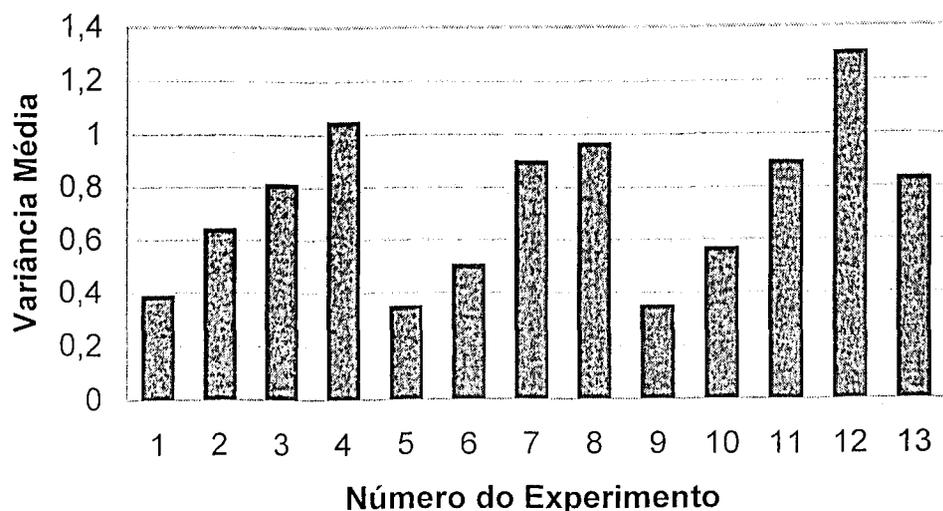


Figura 6.7- Variância média dos sinais de impedância.

## CAPÍTULO VII

### Caracterização do estado de danificação em materiais via acoplamento de um modelo numérico com o método de impedância

O presente capítulo tem por finalidade apresentar e discutir os resultados obtidos a partir do acoplamento entre um modelo numérico e o método de monitoramento baseado na impedância. O modelo em questão quantifica o estado de danificação do material através de seu estado de tensão e é através deste estado que são associadas as respectivas variações no sinal de impedância devidas à presença do dano.

O material aqui utilizado consiste numa liga de alumínio-cobre (Al/Cu) e o modelo numérico aplicado é aquele já descrito no Capítulo II.

#### 7.1 Modelo Numérico de Evolução do Dano Aplicado a Materiais Dúcteis

O modelo numérico que foi apresentado de forma completa no Capítulo II é resumido pelo conjunto de equações mostradas abaixo:

$$\dot{D} = \left( \frac{-Y}{S} \right)^s \frac{\dot{\lambda}}{(1-D)} \quad (7.1)$$

$$f = \frac{\sigma_{eq} - R}{1-D} - \sigma_y = 0 \quad (7.2)$$

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{3}{2} \left( \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \right) \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} \quad (7.3)$$

$$\dot{p} = \left( \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_p : \dot{\varepsilon}_p \right)^{1/2} \quad (7.4)$$

$$\dot{f} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma_{eq}} ; \frac{\dot{\sigma}}{1-D} - \frac{R}{1-D} \dot{p} + \frac{\sigma_{eq} - R}{(1-D)^2} \dot{D} = 0 \quad (7.5)$$

$$\dot{\lambda} = H(f) \frac{\langle \dot{\sigma}_{eq} \rangle (1-D)}{R - \sigma_y (-Y/S)^s} \quad (7.6)$$

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial p} = K p^{1/M} \quad (7.7)$$

## 7.2 Aparato Experimental

Os equipamentos utilizados, indicados na montagem experimental ilustrada na Figura 7.1, foram:

- um analisador de impedância (impedancímetro), modelo HP 4194A;
- uma máquina universal de ensaios de bancada, modelo VERSAT 500, com capacidade de carga de 500 Kgf. A máquina de tração é instrumentada de modo que podem ser digitalizados os valores da força aplicada e do deslocamento sofrido pelo corpo de prova;
- um microcomputador Pentium II, com uma placa de aquisição de dados GP-IB;
- corpos de prova confeccionados segundo a norma da ABNT, NBR 6152, a partir de chapas de uma liga de alumínio-cobre, com a geometria e dimensões indicadas na Figura 7.2.
- pastilhas de PZT, fabricadas pela PiezoSystems (<http://www.piezo.com>), metalizadas com níquel, cortadas nas dimensões 10x10x1 mm.

A Figura 7.3 ilustra, em detalhe, uma pastilha piezoelétrica colada ao corpo de prova fixado à máquina de ensaios. Pode-se observar que a pastilha piezoelétrica é posicionada numa região de maior área do corpo de prova, próxima a uma de suas extremidades, na qual esperam-se menores níveis de tensões e, em consequência, de deformações. Assim, a região em que o material piezoelétrico está fixado não será solicitado com a mesma intensidade que a

área central do corpo de prova, esperando-se que nesta última ocorram os fenômenos de danificação a serem monitorados.

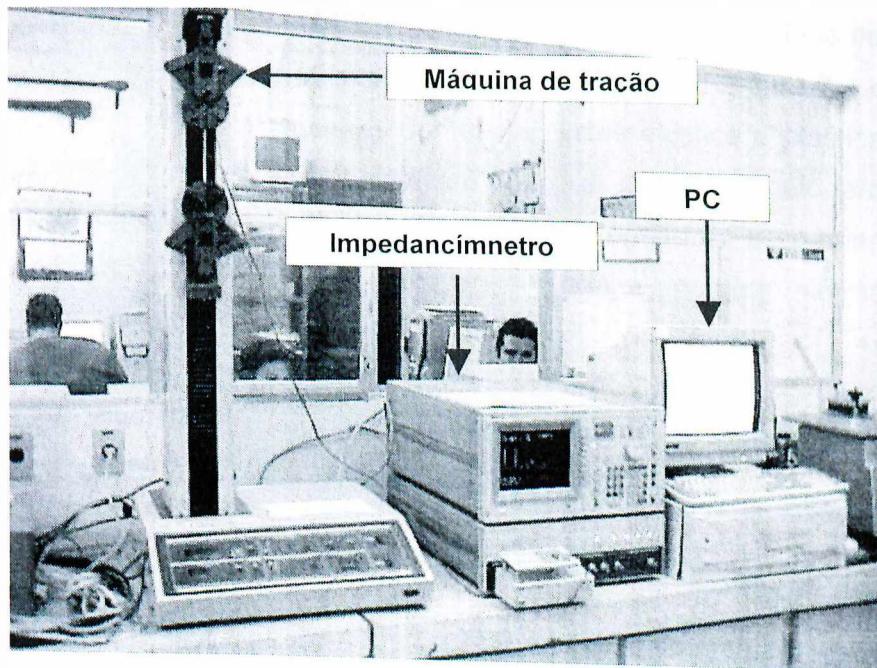
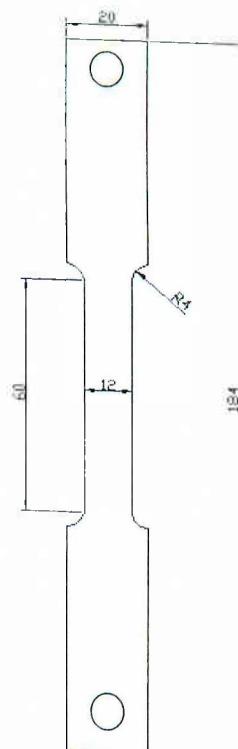


Figura 7.1- Aparato Experimental



Espessura = 1mm

Figura 7.2 – Dimensões dos corpos de prova ensaiados

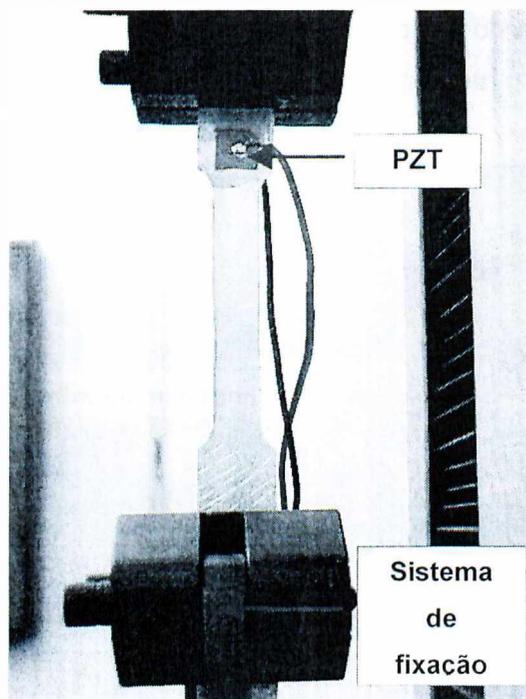


Figura 7.3- Sistema de fixação e PZT.

### 7.3 Procedimento Experimental

Antes de serem ensaiados, os corpos de prova foram submetidos a tratamentos térmicos para alívio de tensões residuais que poderiam ter sido geradas durante sua fabricação.

Nos testes experimentais, o corpo de prova foi submetido a uma força de tração de magnitude crescente, com o propósito de que provocar, no material, o surgimento e a evolução do processo de danificação. Para isso, solicitou-se o material na fase plástica, mantendo-se a progressão do carregamento até a ruptura do corpo de prova. Durante a realização do ensaio de tração foram monitoradas, em tempo real, as alterações no sinal de impedância eletromecânica do conjunto corpo de prova+pastilha piezoelétrica. Figuras adicionais ilustrando algumas fases dos ensaios podem ser vistas no Anexo B desta Dissertação.

### 7.4 Avaliação do Modelo de Evolução do Dano

A partir do procedimento experimental descrito anteriormente foram obtidos diagramas tensão-deformação para o material ensaiado. Estes diagramas foram confrontados aos

diagramas teóricos previstos pelo modelo de evolução do dano no material, visando a validação do modelo implementado.

Para uma análise da repetibilidade dos ensaios de tração, foram realizados cinco ensaios, todos eles mantendo os mesmos parâmetros de ensaio (velocidade de carregamento e escalas de aplicação de força e deslocamento). Pode-se ver na Figura 7.4 que existe uma boa repetibilidade na resposta do material dentro das fases elástica e plástica. Entretanto, o limite de escoamento varia entre os ensaios. Isto pode ser explicado pelo fato do tratamento térmico aplicado não conseguir normalizar plenamente a tensão de escoamento do material. No processo de fabricação dos corpos de prova o material é encruado alterando assim esse limite elástico.

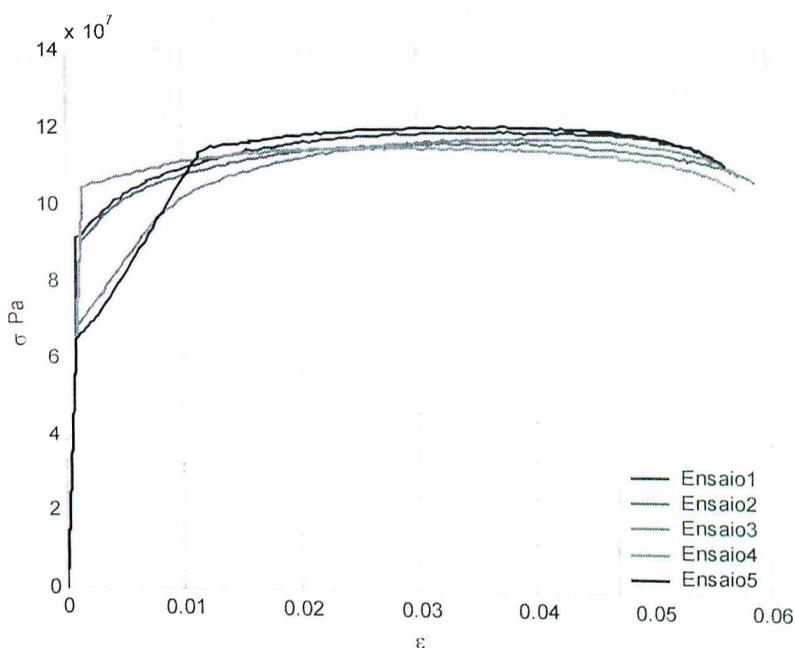


Figura 7.4- Diagramas tensão-deformação obtidos experimentalmente

Os diagramas apresentados acima mostram o comportamento do material até o ponto de ruptura. Entretanto, por definição, o conceito de dano adotado neste trabalho só se aplica até o ponto em que o comportamento do material é afetado apenas em nível microscópico por micro-trincas, movimentação de discordâncias, acúmulos de vazios e outros defeitos de natureza contínua (o que exclui fissuras macroscópicas). Assim, o modelo numérico aqui utilizado prevê o comportamento da curva tensão-deformação até um ponto caracterizado por um valor de dano crítico, sendo este um ponto limítrofe entre a Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura. Este valor também é considerado como uma característica do material. Os capítulos I e II abordam estas questões da diferenciação entre Mecânica do Dano e Mecânica da Fratura.

A Tabela 7.1 traz os parâmetros relacionados às características do comportamento elástico e plástico, bem como ao processo de danificação da liga metálica considerada, fornecidos por Chaboche *et al.* (1994).

Tabela 7.1 – Parâmetros da liga Al/Cu relacionados à fase elástica, plástica e ao dano.

<b>Elásticos</b>	<b>Plásticos</b>	<b>Dano</b>
$E = 70 \text{ GPa}$	$S_y = 94 \text{ MPa}$	$\sigma_D = 88 \text{ MPa}$
$\nu = 0.3$	$K = 70 \text{ GPa}$	$D_c = 0.65$
	$M = 0.3$	$S = 70 \text{ GPa}$
		$s = 0.3$

A Figura 7.5 ilustra a curva tensão-deformação obtida a partir do modelo de dano elasto-plástico, confrontada com as curvas tensão-deformação obtidas por via experimental, limitadas ao ponto que caracteriza o limite da teoria do dano contínuo, sendo considerada nesta figura apenas a tensão nominal. Observe-se que esta é a única forma de se comparar os resultados dos ensaios com os do modelo numérico uma vez que não foi utilizada nenhuma técnica experimental para medir diretamente o estado de danificação do material e, desta forma, obter as tensões efetivas experimentalmente.

Uma outra comparação é feita na Figura 7.6, entre a curva média dos cinco ensaios realizados e o resultado obtido via simulação numérica.

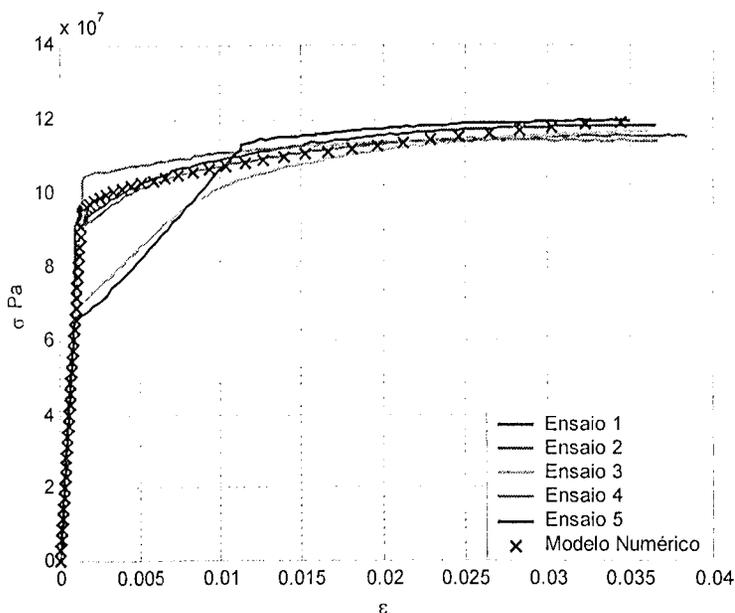


Figura 7.5- Comparação entre o resultado obtido via simulação numérica e os resultados experimentais para a liga Al/Cu.

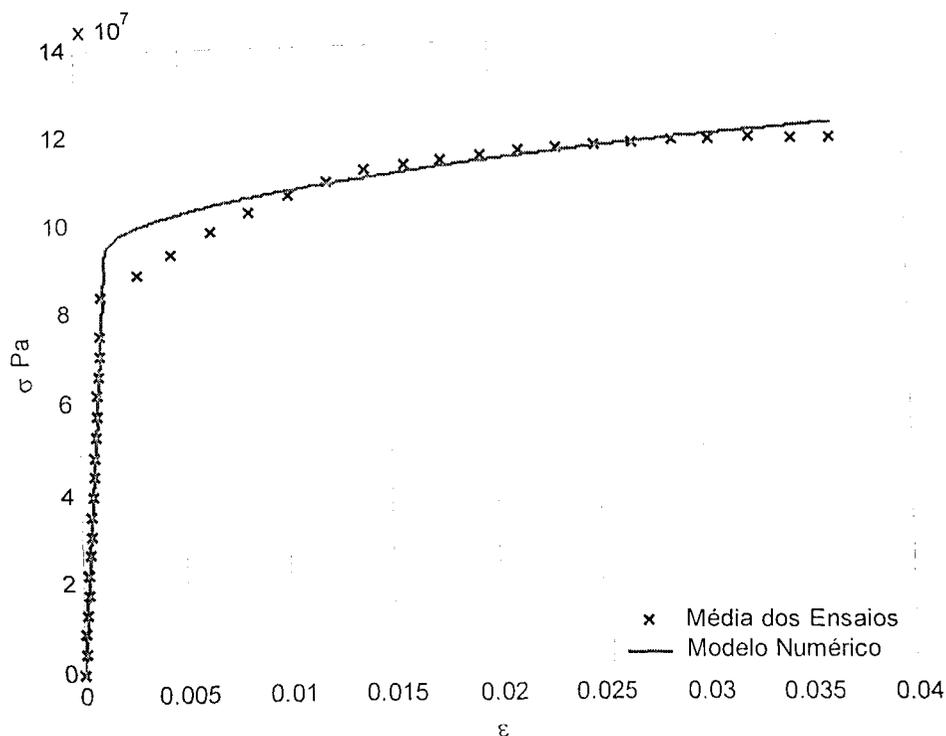


Figura 7.6- Comparação entre o resultado numérico e a média dos experimentais.

O modelo descreve o comportamento do material de forma nominal e, a partir das leis de evolução do dano, as quais quantificam o estado de danificação do material para um dado estado de tensão, obtém-se o respectivo estado de tensão efetiva. A Equação 2.38 fornece a relação entre o estado de tensão efetivo e nominal a partir do estado de danificação.

Sabe-se que a evolução do dano durante a fase elástica surge próxima ao limite desta, sendo pouco significativa para este caso em que é considerado um carregamento uniaxial e contínuo. Assim sendo, será considerado, a seguir, o comportamento da tensão efetiva comparado ao da tensão nominal e o respectivo estado de danificação exclusivamente dentro da zona plástica. Vale lembrar que o valor do dano também limita a extensão da fase plástica ao seu respectivo valor crítico, de modo que a análise não se aplica até o ponto de ruptura de material. Com estas ressalvas, a Figura 7.7 ilustra a evolução da variável dano  $D$  e das tensões efetiva e nominal.

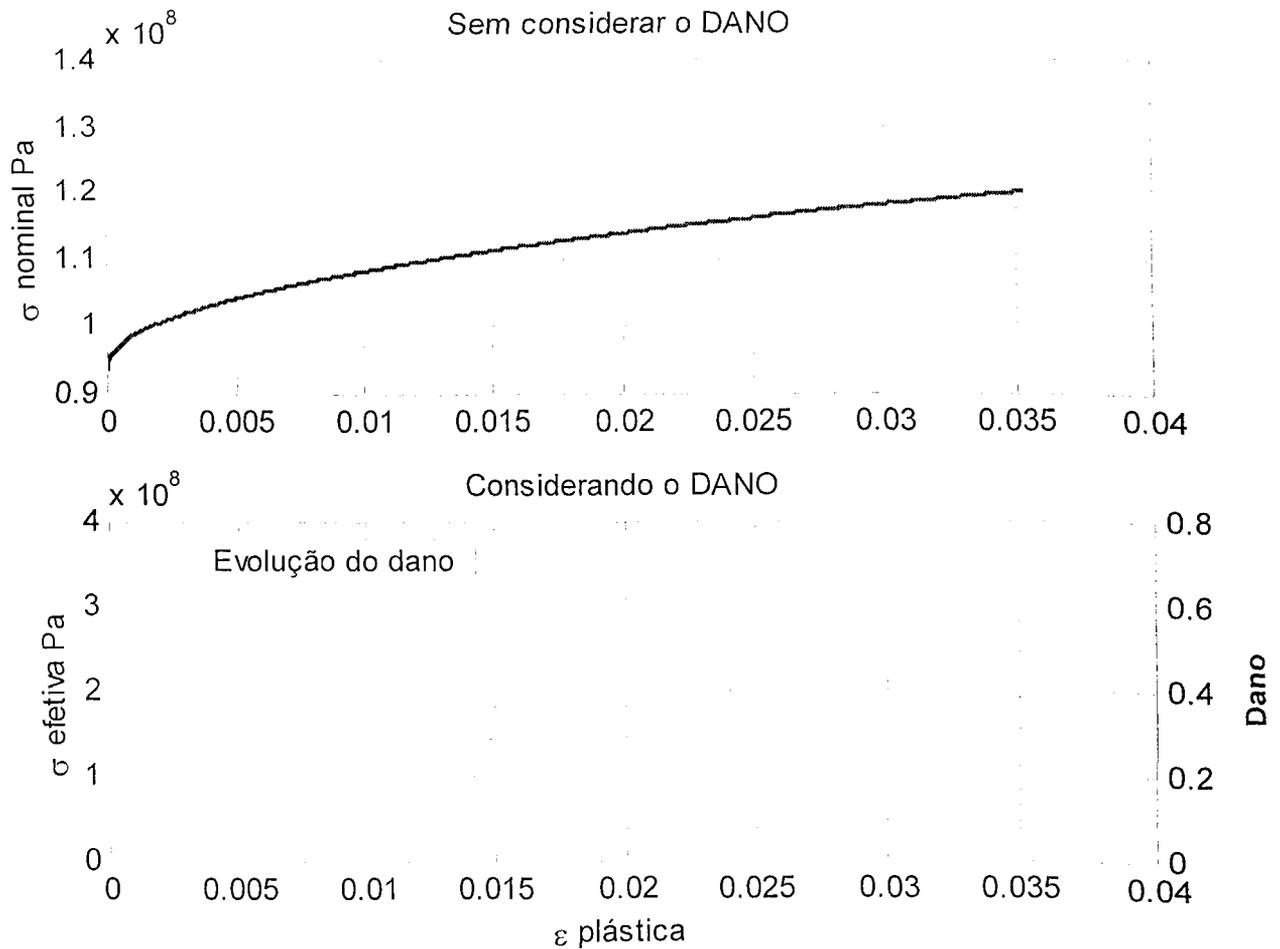


Figura 7.7- Comparação entre os estados de tensão efetiva e nominal.

Nas figuras acima pode-se observar que o comportamento previsto pelo modelo aproxima-se satisfatoriamente do comportamento real do material, notando-se uma discrepância mais pronunciada no início da fase plástica.

### 7.5 Análise da Variação do Sinal de Impedância com o Estado de Tensão

Foram realizados dois ensaios em dois corpos de prova distintos utilizando o aparato experimental descrito na Seção 7.2, buscando identificar uma correlação entre o estado de tensão presente no material e algum parâmetro inerente ao sinal de impedância. Isso com o objetivo de, mediante a utilização do modelo numérico que relaciona a tensão ao dano, estabelecer uma relação entre as características do sinal de impedância e o estado de danificação do material.

Preliminarmente foram realizados alguns testes para identificar o parâmetro da curva de impedância mais adequado, assim como a melhor banda de frequência a ser analisada para cada corpo de prova. Procurou-se determinar um parâmetro que tivesse algum padrão de comportamento associável ao comportamento evolutivo do estado de tensão. Nos testes preliminares percebeu-se que a posição do máximo pico da função de impedância no domínio da frequência, dentro da banda em questão, variava de modo a acompanhar a evolução do valor da tensão aplicada. Esta característica foi então escolhida como parâmetro de monitoramento, e será aqui denominado "parâmetro de impedância". A banda de frequência foi escolhida de forma a se obter a máxima sensibilidade dos picos da função de impedância.

A banda utilizada para os dois corpos de prova utilizados nesta fase dos testes foi de 10KHz a 25 KHz utilizando 64 amostras de aquisição do sinal para obtenção das curvas médias de impedância. O elevado número de amostras foi adotado objetivando a filtragem do ruído aleatório presente nos dados experimentais.

Os corpos de prova foram submetidos a um carregamento progressivo de tração, sendo feita, a cada incremento no valor da carga, a aquisição da respectiva curva de impedância.

A Figura 7.8 ilustra o comportamento parâmetro escolhido do sinal de impedância com a evolução do carregamento.

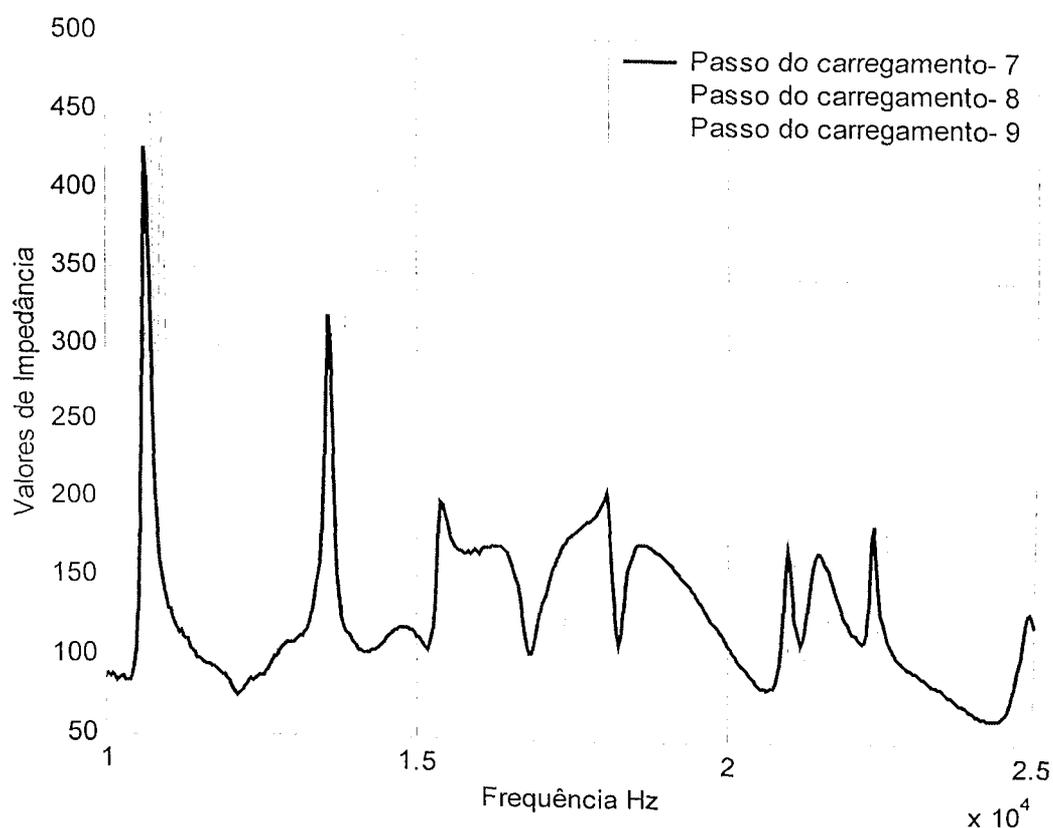


Figura 7.8- Sinal de Impedância para os carregamentos 7,8 e 9.

Na fase inicial do carregamento, assim como na região próxima à ruptura, provavelmente devido à acomodação de folgas na máquina de tração, percebeu-se fortes variações nas curvas de impedância, o que refletiu um comportamento não condizente com o obtido no restante do ensaio. Esse comportamento foi observado para os três primeiros passos do carregamento, assim como os passos 32 e 34. A Figura 7.9 ilustra o comportamento relatado.

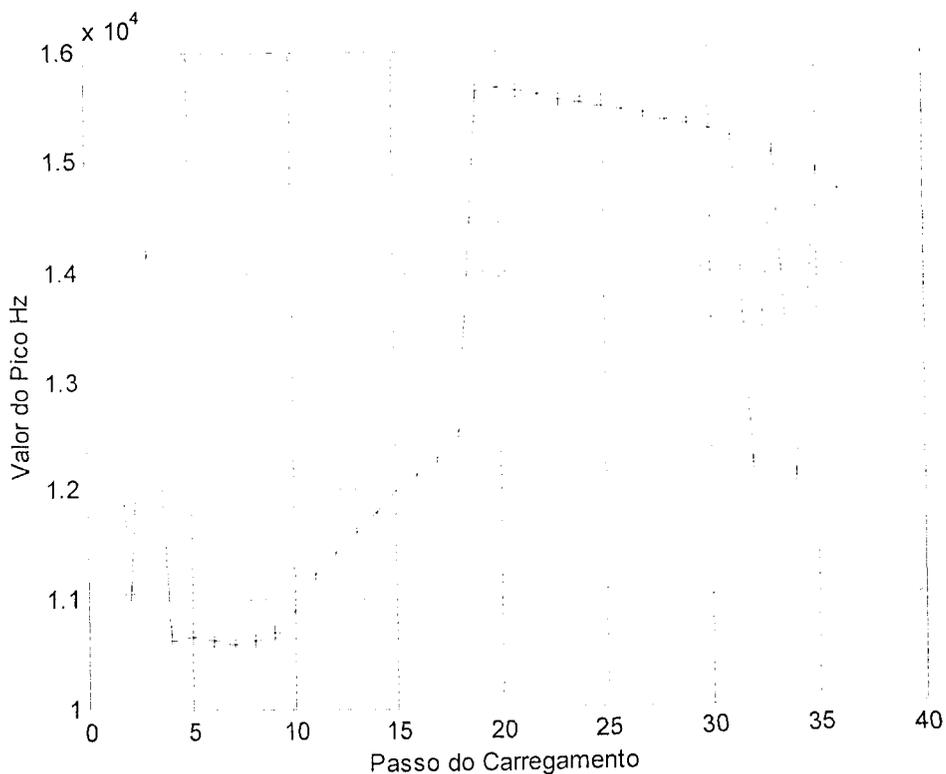


Figura 7.9- Evolução do parâmetro de impedância no primeiro corpo de prova.

A Figura 7.10 ilustra o comportamento para o segundo corpo de prova. Neste caso também pode-se observar que, no início do ensaio (passos 4, 5 e 6 do carregamento) o comportamento foge ao comportamento esperado e da tendência observada no restante do experimento.

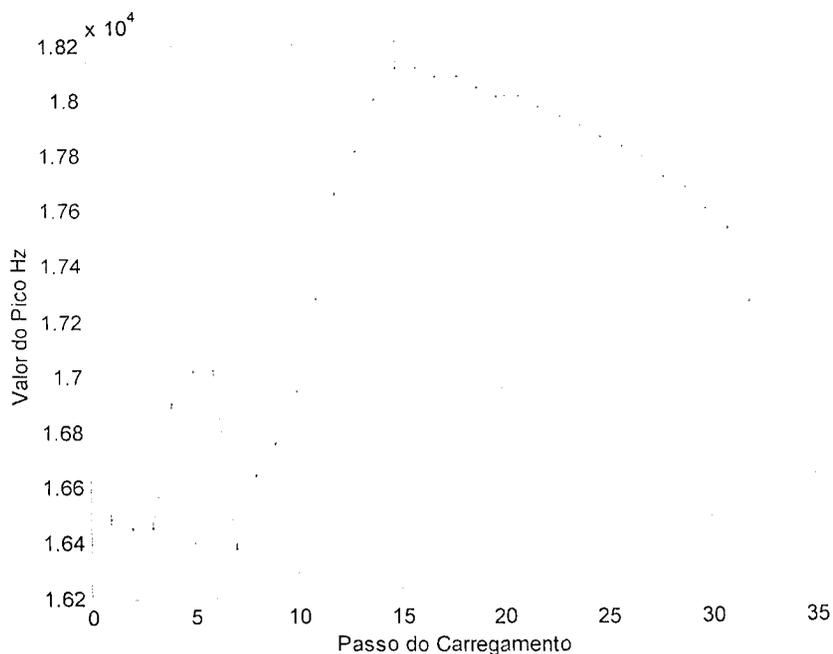


Figura 7.10- Evolução do sinal de impedância no segundo corpo de prova.

Após análise do comportamento do parâmetro de impedância no domínio da frequência, buscou-se correlacionar os valores deste parâmetro com os valores da tensão aplicada. A tensão foi calculada a partir do carregamento aplicado no corpo de prova e de sua área de seção transversal, considerada constante durante o ensaio. As Figuras 7.11 e 7.12 ilustram, para os dois corpos de prova ensaiados, o comportamento do parâmetro de impedância e o estado de tensão do sólido num mesmo gráfico, para os mesmos passos do carregamento.

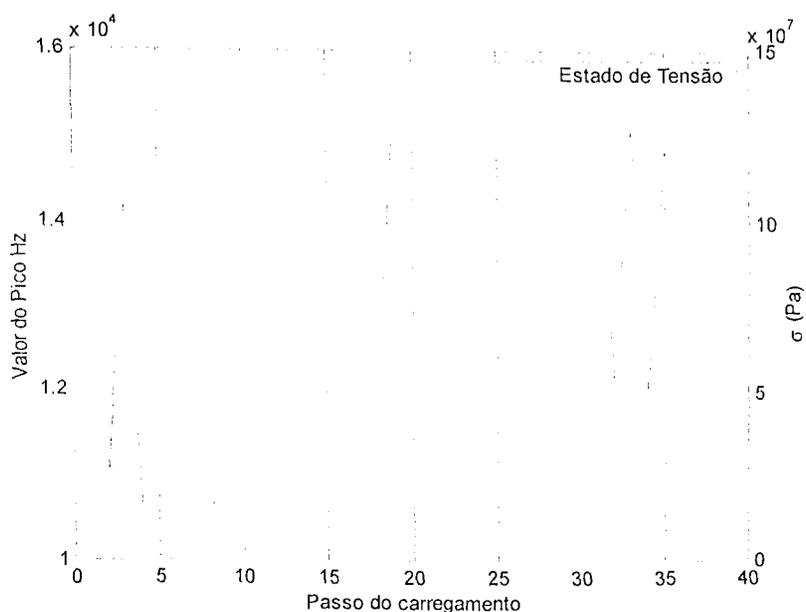


Figura 7.11- Sinal de impedância e estado de tensão para o primeiro corpo de prova

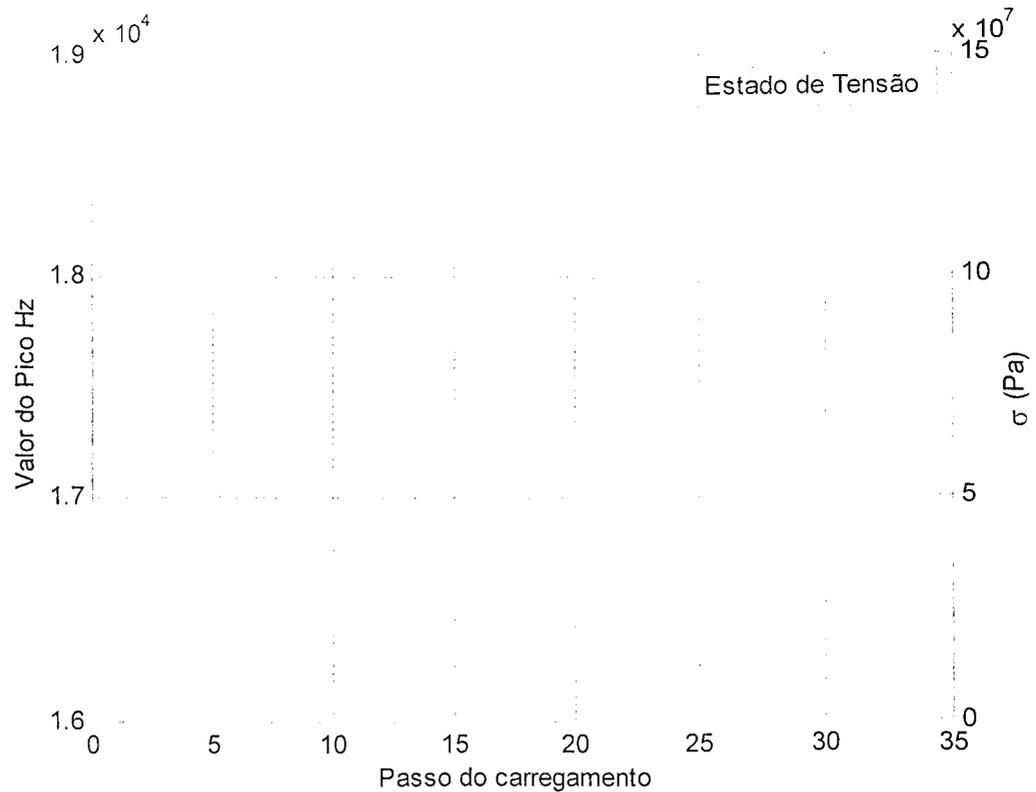


Figura 7.12- Sinal de impedância e estado de tensão para o segundo corpo de prova

Os resultados obtidos confirmam que a variação do parâmetro escolhido para análise pode ser correlacionado com o estado de tensão aplicado, pois pode ser visto que com o aumento do valor de tensão, principalmente na zona elástica, o valor do parâmetro tende também a aumentar. Para esta condição de carregamento, o efeito que pode ser evidenciado é o enrijecimento por tensões, que reflete uma mudança no comportamento dinâmico do material. Assim, principalmente na Figura 7.12, nota-se a mesma tendência na evolução da curva caracterizando a variação do parâmetro de impedância e da curva tensão-passo do carregamento do material dentro da fase elástica.

O comportamento é mais complexo dentro da zona plástica, onde o valor da tensão aumenta no início e posteriormente decresce, enquanto o parâmetro de impedância tem uma redução contínua a partir do escoamento do material. Entretanto, ambas as grandezas permanecem correlacionáveis.

Buscou-se, num passo seguinte, estabelecer uma correlação direta entre a variação do parâmetro inerente ao sinal de impedância e o estado de tensão do sólido, ou seja, a obtenção de uma curva que permitisse obter o estado de tensões a partir do sinal de impedância. Para tal, os pontos que exibiam um comportamento destoante dos demais foram desconsiderados.

As Figuras 7.13 e 7.14 ilustram a correlação entre o estado de tensão e o valor do pico de impedância para os dois corpos de prova ensaiados.

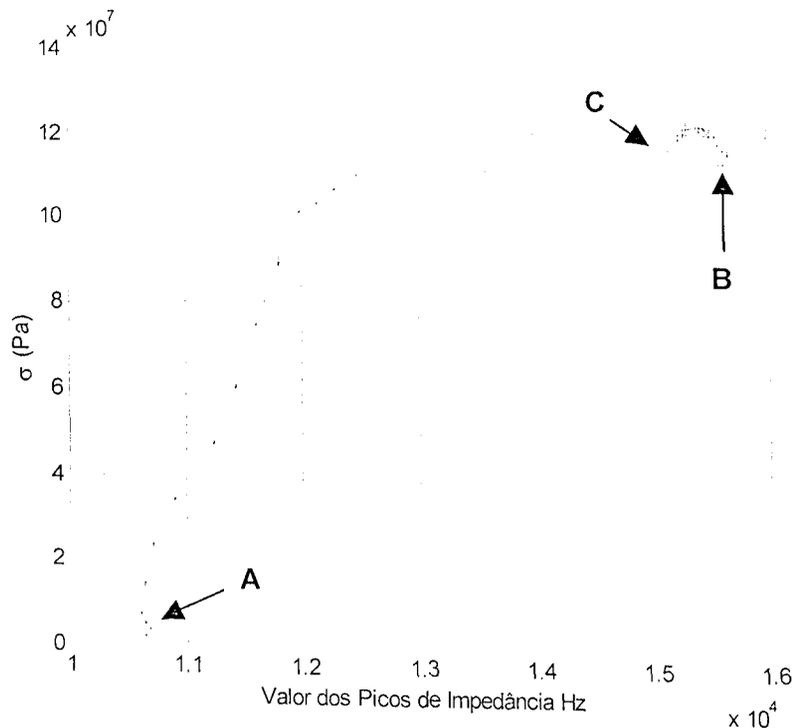


Figura 7.13- Relação entre o sinal de impedância e o estado de tensão para o primeiro corpo de prova

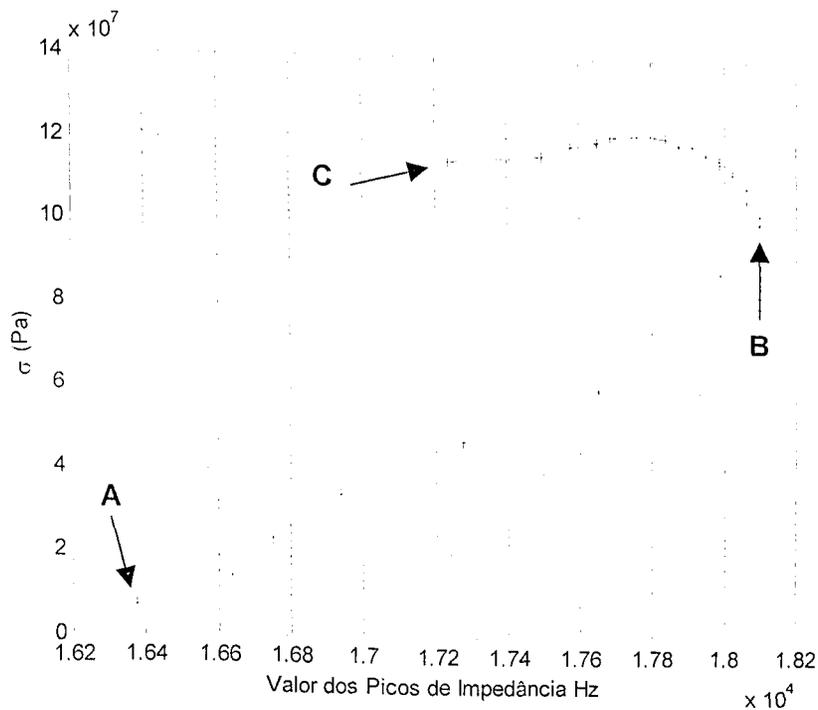
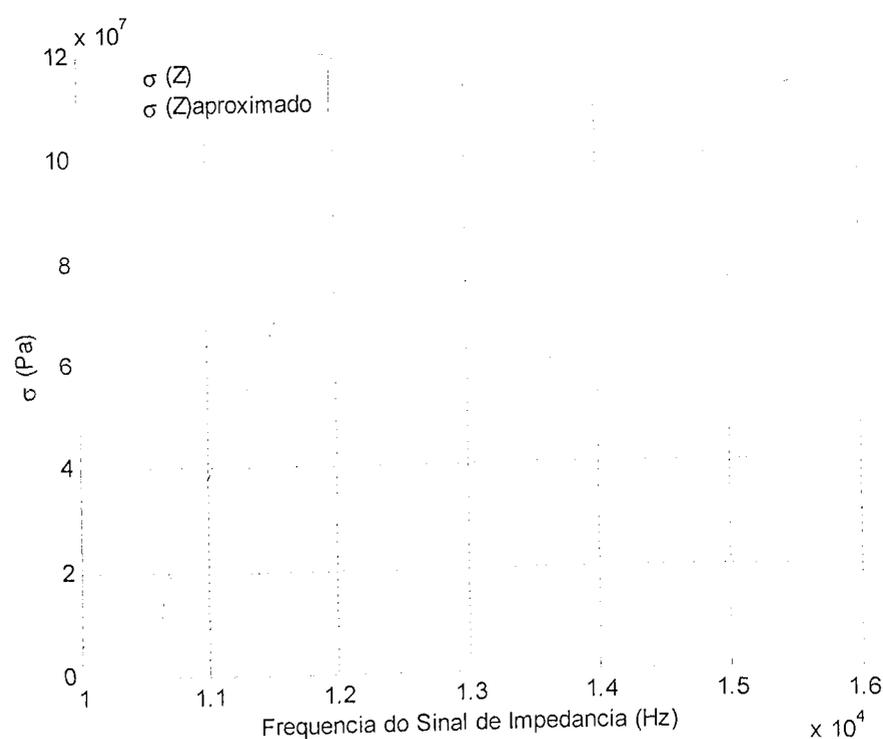


Figura 7.14- Relação entre o sinal de impedância e o estado de tensão para o primeiro corpo de prova

Pode-se notar que o comportamento de cada curva apresenta duas zonas distintas AB e BC, indicadas nas figuras 7.13 e 7.14.

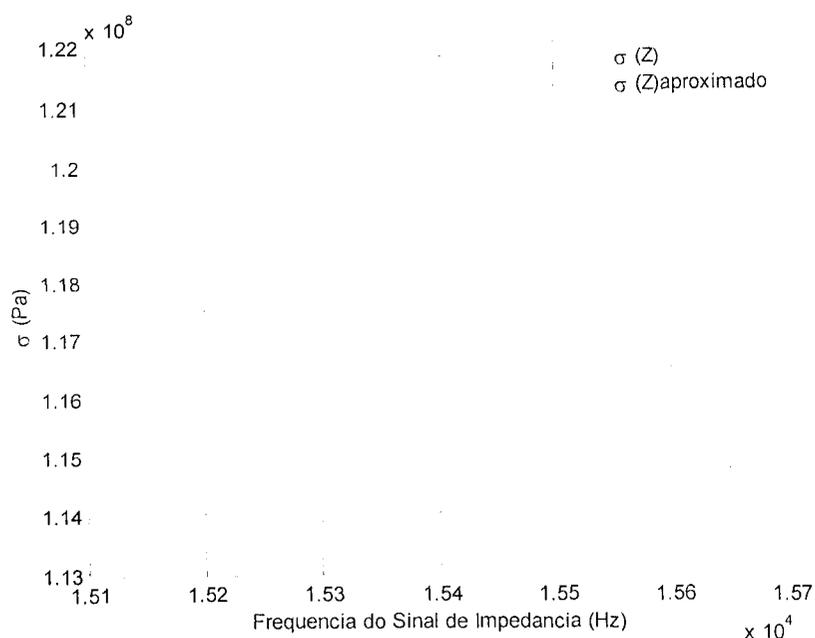
Visando reduzir a influência de erros de medição presentes nos dados experimentais, foi utilizado um procedimento de interpolação polinomial baseada em regressão por mínimos quadrados. Para isso, cada uma das duas zonas foi tratada separadamente. As Figuras 7.15 a 7.18 ilustram os resultados deste procedimento aplicado aos dois corpos de prova, juntamente com as expressões dos polinômios interpoladores.



$$\sigma(Z) = -2,165103 * 10^{11} + 0,000395 * 10^{11} * Z - 7,224174 * 10^{-5} * Z^4 + 6,693356 * 10^{-9} * Z^5 - 1,420712 * 10^{-17} * Z^7 + 1,624114 * 10^{-26} * Z^9$$

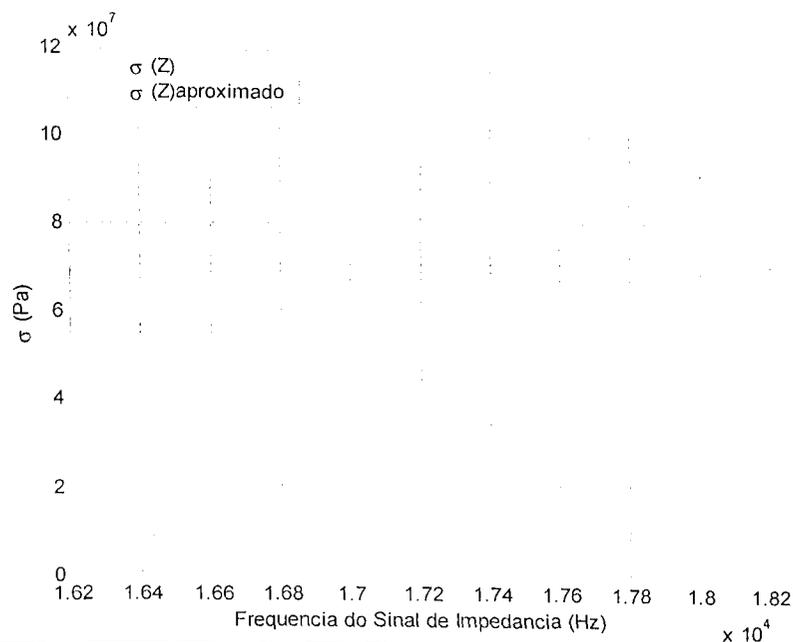
onde  $\sigma$  é o valor da tensão em Pa e  $Z$  é o valor do parâmetro de impedância em Hz.

Figura 7.15- Meta-modelo de regressão e polinômio interpolador com a primeira faixa do primeiro corpo de prova.



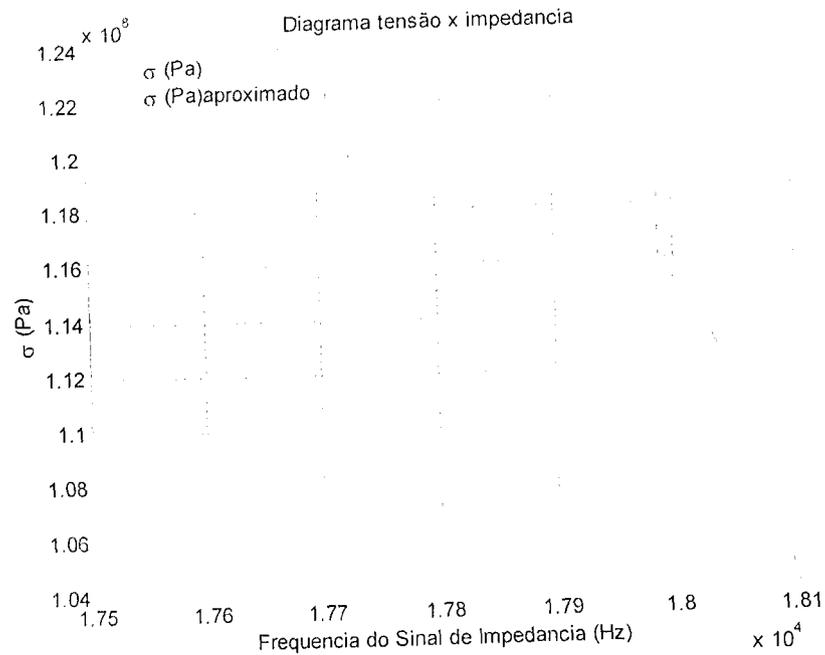
$$\sigma(Z) = -1.699697 * 10^{10} + 1.667755 * 10^6 * Z - 0.002345 * Z^3$$

Figura 7.16- Meta-modelo de regressão e polinômio interpolador com a segunda faixa do primeiro corpo de prova.



$$\sigma(Z) = 4.048756 * 10^{11} - 4.620947 * 10^7 * Z + 1.862823 * 10^{-5} * Z^4 - 9.820949 * 10^{-10} * Z^5 + 5.344529 * 10^{-19} * Z^7$$

Figura 7.17- Meta-modelo de regressão e polinômio interpolador com a primeira faixa do segundo corpo de prova.



$$\sigma(Z) = 1.755744 * 10^{12} - 2.984337 * 10^8 * Z + 1.690807 * 10^4 * Z^2 - 0.319279 * 10^{-10} * Z^3$$

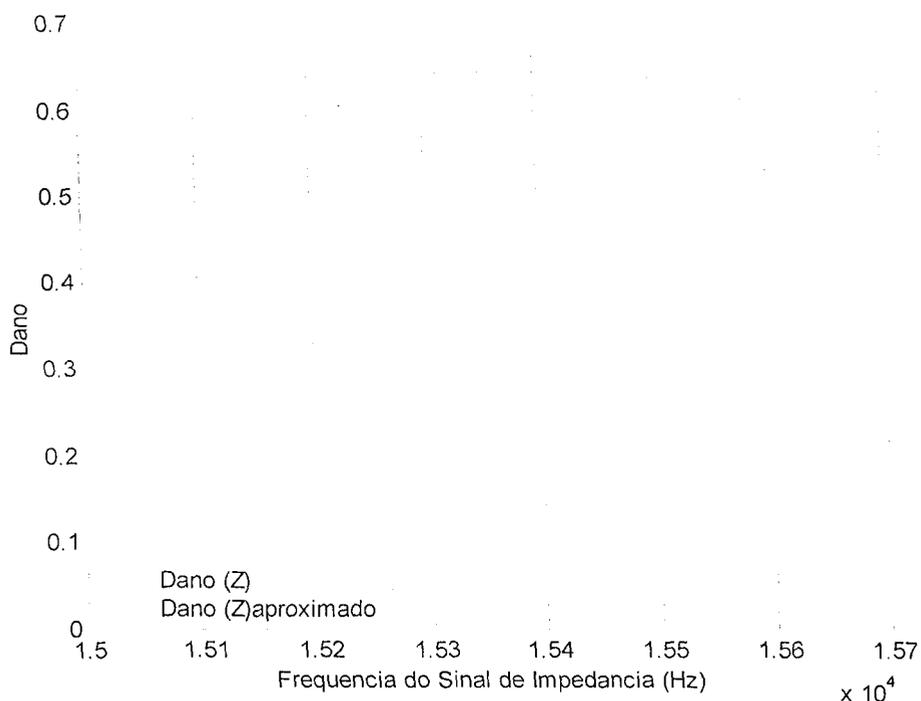
Figura 7.18- Meta-modelo de regressão e polinômio interpolador com a segunda faixa do segundo corpo de prova.

## 7.6 Análise da Variação do Sinal de Impedância com o Estado de Danificação do Material

A partir da relação já estabelecida entre o estado de tensão no sólido e o parâmetro do sinal de impedância, busca-se agora estabelecer uma relação entre o estado de danificação do material e a variação no sinal de impedância. As relações obtidas anteriormente são utilizadas de forma indireta. Uma vez que é conhecido o estado de danificação para um dado estado de tensão e, este já está caracterizado como função do parâmetro de impedância, pode-se substituir os valores de tensão pelos respectivos valor do parâmetro de danificação  $D$ , obtendo-se assim uma nova relação que permite determinar o dano em função do parâmetro do sinal de impedância.

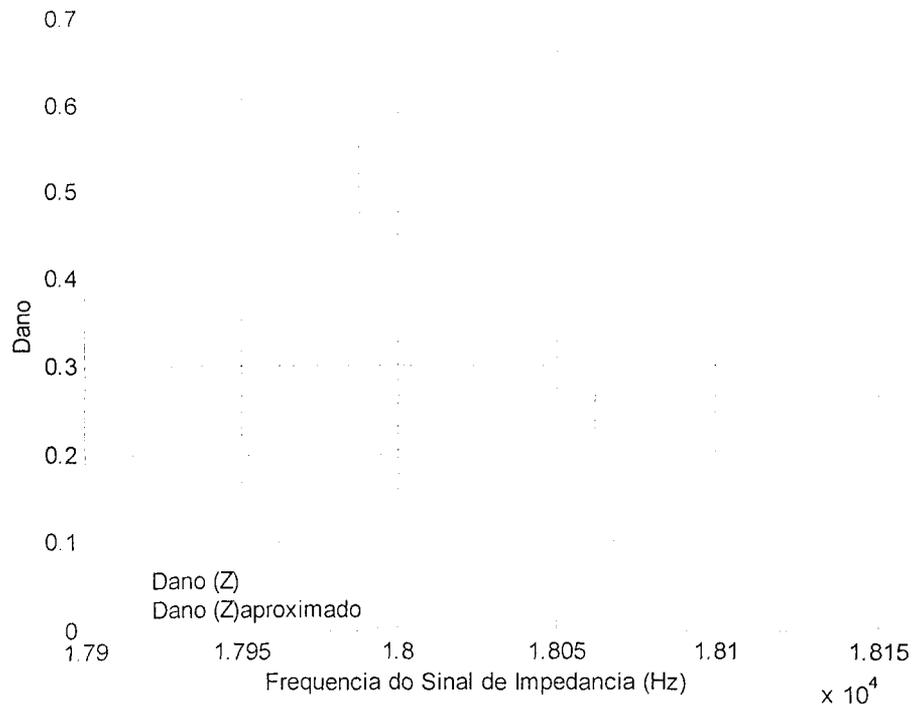
As Figuras 7.18 e 7.19 ilustram a relação entre a evolução do dano e a variação do parâmetro de impedância, sendo também apresentados os polinômios utilizados para interpolação.

Pode-se observar que na Figura 7.19 existem duas faixas onde o dano aumenta, enquanto o parâmetro de impedância permanece na mesma posição. Verificou-se durante os experimentos que uma possível forma de atenuar esse efeito seria dar um maior tempo de estabilização ao sistema antes da aquisição do sinal. Assim, poder-se-ia ter valores do parâmetro de impedância distintos para os estados de danificação correspondentes.



$$D(Z) = 1.610678 * 10^4 - 1.971874 * Z + 5.603925 * 10^{-9} * Z^3 - 7.165196 * 10^{-18} * Z^5$$

Figura 7.19- Relação entre a evolução do dano e o sinal de impedância do primeiro corpo de prova.



$$D(Z) = -1.993982 * 10^5 + 20.728373 * Z - 4.247127 * 10^{-8} * Z^3 + 3.915206 * 10^{-17} * Z^5$$

Figura 7.20- Relação entre a evolução do dano e o sinal de impedância do segundo corpo de prova.

## 7.7 Discussão dos resultados

Os resultados experimentais obtidos revelam que o parâmetro de impedância pode ser usado para monitorar diretamente o estado de tensão aplicado ao corpo de prova e, indiretamente, o estado de danificação do material. No entanto, as seguintes considerações devem ser feitas:

1<sup>a</sup>. Embora estas variações tenham sido observadas para os dois corpos de prova, elas diferem bastante entre si sob o ponto de vista quantitativo. Esta falta de repetibilidade pode ser atribuída a diversos fatores que influenciam as características dinâmicas dos corpos de prova, tais como: variabilidade geométrica e condições de contorno (fixação nos cabeçotes da máquina de ensaios). Além disso, a colagem das pastilhas de PZT introduzem variabilidade devida à espessura da camada de cola e ao posicionamento da pastilha.

2ª. No tocante à correlação entre o dano e o parâmetro de impedância, deve-se considerar que a relação obtida pode estar incluindo outros efeitos físicos, tais como o encruamento e o enrijecimento por tensões, que repercutem sobre as características dinâmicas das peças ensaiadas. O enrijecimento por tensões, evidenciado no trabalho de Rojas no domínio de baixas frequências, é caracterizado por um enrijecimento ou flexibilização em flexão de componentes estruturais submetidos a esforços axiais de tração ou compressão, respectivamente.

## CAPÍTULO VIII

### Conclusões gerais e propostas de continuidade

Realizou-se na presente dissertação um estudo focado no comportamento mecânico de sólidos englobando a sua resposta inelástica bem como a influência da evolução da variável dano. Desenvolveu-se também uma metodologia para o acoplamento de um modelo numérico, de natureza elásto-plástica a uma técnica de monitoramento estrutural denominada método de impedância, objetivando o monitoramento do estado de danificação a partir do sinal de impedância. Tal metodologia foi particularmente aplicada ao caso de uma liga de alumínio cobre ensaiada experimentalmente.

A metodologia de modelagem foi desenvolvida de forma abrangente, permitindo sua aplicação tanto a materiais metálicos, macroscopicamente isotrópicos, quanto a materiais anisotrópicos, como os materiais compósitos. Enfoque particular foi dado a estes últimos na dissertação em virtude de serem eles materiais de grande interesse nas aplicações práticas avançadas, notadamente na indústria aeroespacial, nas quais se requerem altos níveis de confiabilidade. Além disso, os compósitos, pela sua própria natureza, são susceptíveis a diferentes mecanismos de danificação que repercutem significativamente em seu comportamento mecânico (estático e dinâmico).

A comparação entre os resultados obtidos via simulações numéricas e resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura mostra a eficiência da formulação teórica adotada neste trabalho na predição do comportamento real do material, considerando a evolução do dano..

A principal contribuição que se procurou proporcionar com a realização deste trabalho foi o estudo da viabilidade de se usar medições da impedância eletromecânica para monitorar o estado de tensões e, subsequente, de danificação do material. Tal contribuição advém principalmente do fato que a técnica de monitoramento baseada na impedância é uma inovação recente no âmbito da Mecânica dos Sólidos. Embora seja reconhecidamente uma técnica promissora, há presentemente um grande esforço de pesquisa em curso visando ampliar o conhecimento acerca da fenomenologia envolvida e na interpretação qualitativa dos resultados. A principal conclusão obtida da aplicação da técnica da impedância é que o parâmetro de impedância escolhido mostrou-se bastante sensível a variações sofridas pelo

corpo de prova durante os ensaios de tração. Na fase elástica, observou-se uma variação no sinal de forma proporcional ao estado de tensão. Na fase plástica, o sinal de impedância também exibe variações mais complexas, não monotônicas. Acredita-se que tais variações possam resultar da combinação de diversos fatores, dos quais os mais preponderantes são as variações geométricas (principalmente na fase plástica), o estado de danificação e o enrijecimento por tensões. A comprovação desta afirmação e a quantificação das influências de cada um destes fatores exige estudos complementares.

Uma outra contribuição proporcionada foi a de se buscar conferir um caráter quantitativo à técnica de monitoramento baseada na impedância eletromecânica, que até o presente caracteriza-se como uma técnica essencialmente qualitativa, através de um procedimento híbrido numérico-experimental permitindo relacionar o estado de danificação do material aos sinais de impedância. Entretanto, a validação definitiva desta metodologia está condicionada à investigação da influência dos diferentes fatores intervenientes, mencionados no parágrafo anterior. Esta validação também fica sugerida como uma etapa de desenvolvimento futuro.

Outras propostas de trabalho futuro são:

- Realização de uma campanha experimental mais abrangente, possibilitando uma análise estatística das variabilidades observadas;
- Extensão da técnica de monitoramento a outros tipos de componentes estruturais, especialmente em condições em que os campos de tensão variem ao longo do domínio em questão provocando a evolução do dano de forma diferenciada ao longo da estrutura. Para isso será preciso relacionar o estado de tensão em pontos da estrutura com os modelos que descrevem a evolução do dano. Uma solução seria usar o método dos elementos finitos para a discretização do domínio e acoplar numericamente à sua formulação os modelos de dano.
- aplicação da metodologia a materiais compósitos, que foram considerados apenas nas simulações numéricas neste trabalho. Os compósitos têm um aspecto particular que é a presença do dano anisotrópico devido à própria anisotropia do material. Assim, a metodologia terá que ser adaptada para permitir esta análise, pois haverá um único sinal de impedância associado ao dano em três direções.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andreucci, R. Ensaio por ultra-som, aspectos básicos. Andreucci, Assessoria e serviços técnicos, São Paulo, 2002.

Bhalla, S., Naidu, A. S. K., and Soh, C. K. "Influence of Structure– Actuator Interactions and Temperature on Piezoelectric Mechatronic Signatures for NDE," in Proceedings of ISSS-SPIE 2002 International Conference on Smart Materials Structures and Systems, December 12–14, Bangalore, India (paper no ISSS-SA-502), 2002.

Bray, D.E., McBride, D. Nondestructive Testing Techniques. John Wiley and Sons, 1992.

Cawley, P. The Impedance Method of Non-destructive Inspection. Ultrasonics International, 1983.

Daudeville, L., Ladevèze, P. A damage mechanics tool for laminated delamination. Composites structures Elsevier, 1993.

Genovese, M., Oliveira, A. B. de S., Doz, G. N., Brito J. L. V. Análise Experimental para avaliação da Integridade Estrutural por meio das Alterações das Características Mecânicas. XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, 2000.

Gibilisco, S., Manual de Eletrônica e de Telecomunicações, Reichmann e Affonso Editores, Brasil, 2002.

Haiakawa, K., Murakami, S., Liu, Y. An irreversible thermodynamics theory for elastic-plastic-damage materials, European Journal of Mechanics A/Solids, 1998.

Hild, F., Burr, A., Feillard, P. On the mechanical behavior of fiber-reinforced composites, Composites Structures, Elsevier, 1997.

Hull, D., Clyne, T. W. An introduction to composite materials, Cambridge solid state science series, 1996.

- Hult, J. Continuum Damage mechanics, In: Postcritical Behavior and Fracture of Dissipative Solids, CISM, Udine, 1988.
- Hyer, M. W. Stress analysis of fiber-reinforced composite materials, WCB McGraw-Hill, 1997.
- Kabeya, K. Structural Health Monitoring Using Multiple Piezoelectric Sensors and Actuators. Master thesis. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg – USA, 1998.
- Kachanov, L.M. Introduction to Continuum Damage Mechanics, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrech, 1986.
- Kattan, P. I., Voyiadjis, G. Z. A coupled theory of damage mechanics and finite strain elasto-plasticity-I. Damage and elastic deformations, Jornal Engineering sciences, Pergamon Press, 1990.
- Krajcinovic, D. Damage Mechanics, Elsevier, Mechanics of Materials, 8, 1989.
- Lemaitre, J. How to use damage mechanics, Nuclear Engineering and Design, North-Holland, Amstredan, 1984.
- Lemaitre, J., Chaboche, J-L. Mechanics of Solids Materials, Cambrige University Press, 1994.
- Lemaitre, J., Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations, Computer methods in applied mechanics and engineering, North-Holland, Amstredan, 1985.
- Lemaitre, J., Desmorat, R., Sauzay, M. Anisotropic damage law of evolution, European Journal of Machanics A/Solids, 2000.
- Liang, C., Sun, F.P., and Rogers, C.A. "Coupled Electromechanical Analysis of Adaptive Material Systems – Determination of the Actuator Power Consumption and System Energy Transfer," Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 5, 12–20, 1994.
- Moura Jr, J.R.V. and Steffen Jr, V., Impedance-Based Health Monitoring: Frequency Band Evaluation, XXII IMAC, Dearborn, MI – USA, 2004.

Park, G., Inman, D.J. Impedance-based structural health monitoring, Pan American Advanced Damage Prodnosis Studies, Florianópolis-Brasil, 2003.

Park, G., Sohn, H., Farrar, C.R. and Inman, D.J., Overview of Piezoelectric Impedance-Based Health Monitoring and Path Forward, The Shock and Vibration Digest, Vol. 35, No. 6, November, pp. 451-463, 2003.

Pastoukhov, V. A., Voorwald, H. J., Introdução à Mecânica da Integridade Estrutural, Editora UNESP, São Paulo, 1995.

Raju, V. Implementing Impedance-Based Health Monitoring. Master thesis. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg – USA, 1997.

Rashid, K., Al-Rub, A., Voyiadjis, G. Z. On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials, Internacional Journal of Solids and Structures, 2003.

Rojas, J. E. F. Caracterização do efeito de enrijecimento por tensões e identificação de cargas em estruturas baseada em respostas dinâmicas, dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2004.

Sun, F.P., Chaudhry, Z., Liang, C., and Rogers, C.A. "Truss Structure Integrity Identification Using PZT Sensor-Actuator," Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 6, 134-139, 1995.

Voyiadjis, G. Z., Deliktas, B. A coupled anisotropic damage model for inelastic response of composites materials, Computer methods in applied mechanics and engineering, 2000.

### **Outras Referências usadas que não são citadas no texto**

Brünig, M. An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics. International Journal of Plasticity, 2003.

Gardonio, P., Brennan, M.J. On the Origins and Development of Mobility and Impedance Methods In Structural Dynamics. Journal of Sound and Vibration, 2002.

Kattan, P. I., Voyiadjis, G. Z. Overall damage and elastoplastic deformation in fibrous metal matrix composites, *International Journal of Plasticity*, 1993.

Koh, Y.L., Rajic, N., Chium, W.K., Galea, S. *Smart Structure for Composites Repair*, Elsevier Science-Composites Structures, 2000.

Krajcinovic, D., Lemaitre, J. *Continuum Damage Mechanics: Theory and applications*, CISM, Springer-Verlag, 1987.

Lemaitre, J., Duffailly, J. *Damage Measurements, Engineering Fracture Mechanics*, Pergamon Journals, 1987.

Schapery, R. A. A theory of mechanical behavior of elastic media with growing damage and other changes in structure. *Journal Mechanics Physics Solids*, 1990.

Schulz, M. J., Pai, P. F., Inman, D. J. *Health monitoring and active control of composite structures using piezoceramic patches*. Elsevier, Composites, 1999.

Sun, L. Z., Ju, J. W., Liu, H.T. Elastoplastic modeling of metal matrix composites with evolutionary particle debonding. *Mechanics of Materials*, 2003.

Williams, T. O. *Modeling damage evolution in materials: Concepts, approaches and issues*. Pan American Advanced Damage Prodnosis Studies, Florianópolis-Brasil, 2003.

Zou, Y., Tong, L., Steven, G. P. *Vibration-Based Model Dependent Damage (Delamination) Identification and Health Monitoring for Composites Structures- A Review*. *Journal of Sound and Vibration*, 2000.

## ANEXO A

### Estrutura da Implementação Computacional do Modelo de Dano Anisotrópico associado à Resposta Inelástica de Materiais Compósitos.

O programa é baseado na teoria de laminados aplicada a materiais compósitos e na formulação termodinâmica apresentada no Capítulo IV.

Abaixo segue a forma como o programa foi estruturado e implementado computacionalmente.

O programa pode ser dividido em três partes. A primeira é responsável pelo cálculo do estado de deformação no laminado, daí, as outras duas partes ficam na dependência da evolução dos potenciais de dano e plástico.

O programa é dividido em passos, os quais são mostrados e comentados abaixo:

**Passo 1:** Computa o incremento de deformação  $\Delta\varepsilon$  usando a sub-matriz  $A$  da matriz constitutiva do compósito, resultando a seguinte expressão:

$$[\Delta\varepsilon] = [A^{-1}] [\Delta N]. \quad (\text{A } 1)$$

**Passo 2:** Computa o incremento de deformação  $\Delta\varepsilon$  em cada lâmina usando a Equação 1 e a matriz mudança de base  $T_k$ :

$$[\Delta\varepsilon_k] = [T_k] : [A^{-1}] [\Delta N]. \quad (\text{A } 2)$$

**Passo 3:** Divide a equação constitutiva do material em três partes: elástica, plástica e dano.

Elasticidade	Plasticidade	Dano
$\Delta\varepsilon$	$\Delta\varepsilon = 0$	$\Delta\varepsilon = 0$

$$\begin{array}{lll}
 \dot{\phi} = 0 & \dot{\phi} = 0 & \dot{\phi} = \begin{cases} 0 \Rightarrow g \leq 0, \\ \lambda_d \frac{\partial g}{\partial Y} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial Y} \dot{Y} \geq 0 \end{cases} \\
 \\
 \dot{\kappa} = 0 & \dot{\kappa} = 0 & \dot{\kappa} = \sqrt{(2/3)\dot{\phi} : \dot{\phi}} \\
 \\
 \dot{\Gamma} = 0 & \dot{\Gamma} = 0 & \dot{\Gamma} = \text{Equação 4.54} \\
 \\
 \dot{\sigma} = E(\phi) : \dot{\varepsilon} & \dot{\sigma} = -E(\phi) : \dot{\varepsilon}_p & \dot{\sigma} = \frac{\partial M^{-1}}{\partial \phi} : \dot{\phi} : E : \varepsilon_e \\
 \\
 \dot{\varepsilon}_p = 0 & \dot{\varepsilon}_p = \begin{cases} 0 \Rightarrow f \leq 0, \\ \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \geq 0 \end{cases} & \dot{\varepsilon}_p = 0 \\
 \\
 \dot{\alpha} = 0 & \dot{\alpha} = \text{Equação 4.35} & \dot{\alpha} = 0 \\
 \\
 \dot{r} = 0 & \dot{r} = \dot{p} = \dot{\lambda}_p & \dot{r} = 0
 \end{array}$$

**Passo 4:** Checar a condição de pseudoplasticidade. Se o escoamento ocorrer, então o algoritmo que corrige a parte plástica é acionado. Este algoritmo será detalhado a frente.

**Passo 5:** Checar a condição de dano. Se o dano ocorrer, então o algoritmo que corrige a parte relacionada ao dano é acionado. Este algoritmo também será detalhado a frente.

**Passo 6:** Computar o carregamento  $N$  atualizando o estado de tensão usando a relação definida por:

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k dz \quad (\text{A } 3)$$

**Passo 7:** Checar a seguinte condição: Se  $N_{n+1}^{(i+1)} - N_n^{(i)} \leq \text{Tolerancia}$ , depois ir para o próximo carregamento, começando pelo Passo 1. Onde  $i$  representa a corrente iteração e  $n$  o passo do carregamento.

➤ **ALGORITMO QUE CORRIGE A RESPOSTA INELÁSTICA:**

A solução das equações diferenciais que regem o problema é obtida via discretização do domínio. A estruturação das equações é mostrada abaixo:

$$\dot{\bar{\sigma}} = -\bar{E} : \dot{\bar{\varepsilon}}_p = -\dot{\lambda}_p \bar{E} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \quad (\text{A 4})$$

Fazendo a relaxação da Equação 4, tem-se as seguintes relações:

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{(i+1)} - \bar{\sigma}_{n+1}^{(i)} = -\Delta\lambda^p \bar{E} : \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \bar{\sigma}_{n+1}} \quad (\text{A 5})$$

$$\bar{X}_{n+1}^{(i+1)} - \bar{X}_{n+1}^{(i)} = -\Delta\lambda^p \left( \frac{2}{3} C_p \dot{\varepsilon}_p - \gamma_p X \dot{p} \right)_{n+1} \quad (\text{A 6})$$

O multiplicador plástico é obtido via linearização da função de superfície plástica  $f$  :

$$f \cong f_{n+1}^{(i)} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \Big|_{n+1}^{(i)} : (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_{n+1}^{(i)}) + \frac{\partial f}{\partial \bar{X}} \Big|_{n+1}^{(i)} : (\bar{X} - \bar{X}_{n+1}^{(i)}) \quad (\text{A 7})$$

Substituindo as Equações 5 e 6 na Equação 7 chega-se a expressão que define o multiplicador plástico:

$$\Delta\lambda_p = \frac{f_{n+1}^{(i)}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \left( \bar{E} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{2}{3} C \dot{\varepsilon}_p + \gamma X \dot{p} \right)} \quad (\text{A 8})$$

As Equações 6 e 7 são atualizadas a cada iteração até que a condição do Passo 7 seja alcançada dentro de uma dada tolerância.

➤ **ALGORITMO QUE CORRIGE A RESPOSTA CONSIDERANDO O DANO:**

O algoritmo que corrige a resposta do material considerando o dano é obtido usando o mesmo artifício de discretização do domínio enunciado para o caso da resposta inelástica do material.

Partido da equação que define a relação entre a tensão efetiva e a nominal, definida por:

$$\sigma = [M(\phi)]^{-1} : \bar{\sigma} \quad (\text{A } 9)$$

Derivando a Equação 9, chega-se a seguinte expressão:

$$\dot{\sigma} = \dot{M}^{-1} : \bar{\sigma} + M^{-1} : \dot{\bar{\sigma}} \quad (\text{A } 10)$$

Entretanto, a Equação 10 pode ser reduzida uma vez que  $\dot{\bar{\sigma}} = 0$ .

$$\dot{\sigma} = \dot{M}^{-1} : \bar{\sigma} \quad (\text{A } 11)$$

Onde:

$$\dot{M}^{-1} = \frac{\partial M^{-1}}{\partial \phi} : \dot{\phi} \quad (\text{A } 12)$$

Discretizando a Equação 11, tem-se:

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{(i+1)} - \bar{\sigma}_{n+1}^{(i)} = \Delta \lambda_{d,i} \left[ \frac{\partial M^{-1}}{\partial \phi} : \frac{\partial g}{\partial Y} \right]_{n+1}^{(i+1)} : \bar{\sigma} \quad (\text{A } 13)$$

$$\phi_{n+1}^{(i+1)} - \phi_{n+1}^{(i)} = \Delta \lambda_{d,i} \left. \frac{\partial g}{\partial Y} \right|_{n+1}^{(i)} \quad (\text{A } 14)$$

$$\kappa_{n+1}^{(i+1)} - \kappa_{n+1}^{(i)} = \Delta \lambda_{d,i} \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{\partial g}{\partial Y} : \frac{\partial g}{\partial Y} \right)} \Big|_{n+1}^{(i)} \quad (\text{A } 15)$$

$$\Gamma_{n+1}^{(i+1)} - \Gamma_{n+1}^{(i)} = \Delta \lambda_{d,i} \left( C_{d,i} \frac{\partial g}{\partial Y} + \gamma_{d,i} \Gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{\partial g}{\partial Y} : \frac{\partial g}{\partial Y} \right)} \right) \Big|_{n+1}^{(i)} \quad (\text{A } 16)$$

A obtenção do multiplicador dano é feita da mesma forma como se procedeu no caso do multiplicador plástico. A função  $g$  linearizada é definida por:

$$g \cong g_{n+1}^{(i)} + \frac{\partial g}{\partial \sigma} \Big|_{n+1}^{(i)} : (\sigma - \sigma_{n+1}^{(i)}) + \frac{\partial g}{\partial \phi} \Big|_{n+1}^{(i)} : (\phi - \phi_{n+1}^{(i)}) + \frac{\partial g}{\partial \kappa} \Big|_{n+1}^{(i)} (\kappa - \kappa_{n+1}^{(i)}) + \frac{\partial f}{\partial \Gamma} \Big|_{n+1}^{(i)} : (\Gamma - \Gamma_{n+1}^{(i)}) \quad (\text{A } 17)$$

Substituindo as Equações 13-16 na Equação 17, chega-se a seguinte expressão:

$$\Delta \lambda_d = \frac{-g_{n+1}^{(i)}}{H_d} \quad (\text{A } 18)$$

Onde  $H_d$  é dado por:

$$H_d = \left[ \frac{\partial g}{\partial \sigma} : \frac{\partial M^{-1}}{\partial \phi} : \frac{\partial g}{\partial Y} : \bar{\sigma} \right]_{n+1}^{(i+1)} + \left[ \frac{\partial g}{\partial \phi} : \frac{\partial g}{\partial Y} \right]_{n+1}^{(i)} + \left[ \frac{\partial g}{\partial \kappa} \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{\partial g}{\partial Y} : \frac{\partial g}{\partial Y} \right)} \right]_{n+1}^{(i)} + \frac{\partial g}{\partial Y} : \left( C_d \frac{\partial g}{\partial Y} + \gamma_d \Gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{\partial g}{\partial Y} : \frac{\partial g}{\partial Y} \right)} \right)_{n+1}^{(i)} \quad (\text{A } 19)$$

A condição de convergência é a mesma adotada para o caso da resposta inelástica.

## ANEXO B

### Figuras referentes aos ensaios

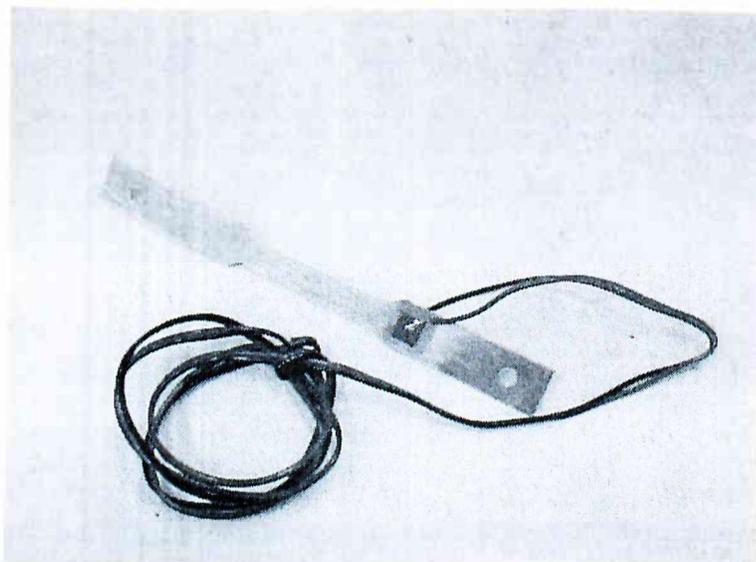


Figura B.1- Corpo de prova instrumentado com PZT

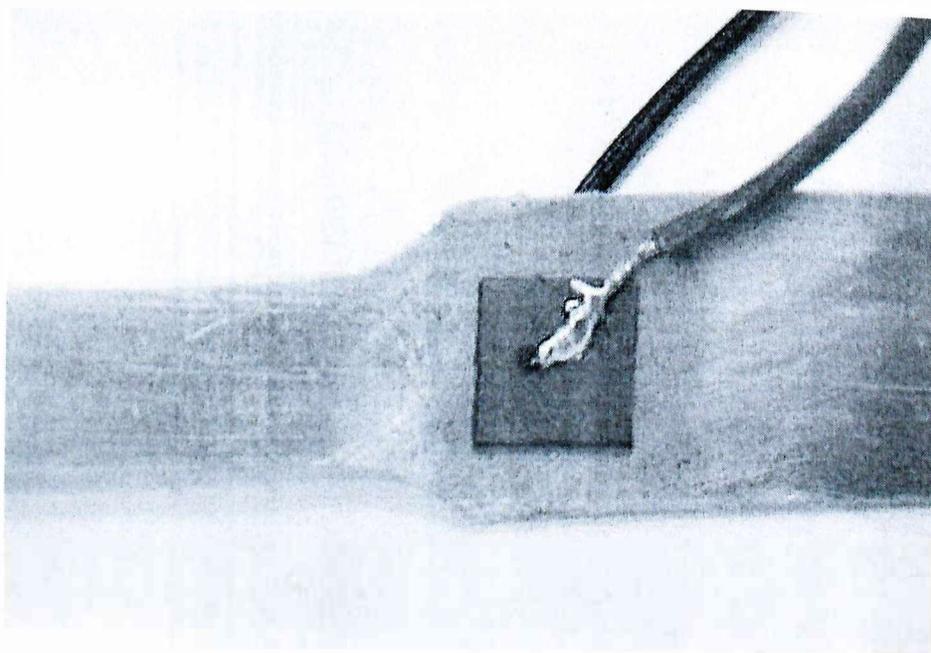


Figura B.2- Detalhe da colagem do PZT

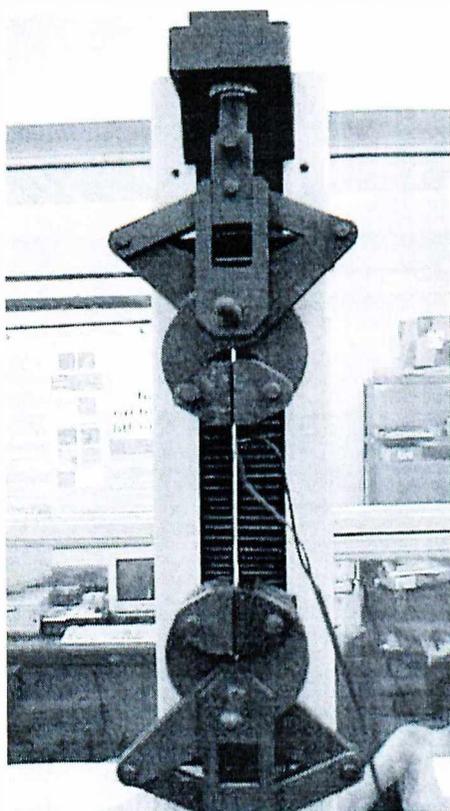


Figura B.3- Fixação do corpo de prova na máquina de tração

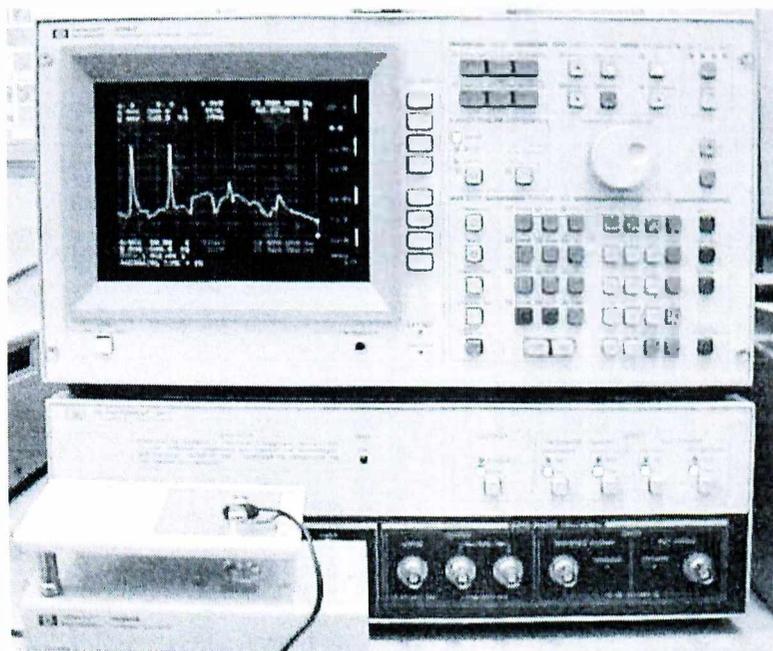


Figura B.4- Analisador de impedância HP 4194A com sinal do ensaio.