

MOV  
621:534  
R7110  
TEC/MEC

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**CARACTERIZAÇÃO DO EFEITO DE ENRIJECIMENTO POR TENSÕES  
E IDENTIFICAÇÃO DE CARGAS EM ESTRUTURAS BASEADA EM  
RESPOSTAS DINÂMICAS**

Dissertação apresentada

à Universidade Federal de Uberlândia por:

**JHOJAN ENRIQUE ROJAS FLORES**

como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em  
Engenharia Mecânica

**SISBI/UFU**



1000220578

Aprovada por:

Prof. Dr. Domingos Alves Rade	FEMEC – UFU	Orientador
Prof. Dr. Cleudmar Amaral de Araújo	FEMEC – UFU	
Prof. Dr. Alfredo Rocha de Faria	CTA – ITA – IEM	

Uberlândia, 30 de Abril de 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
Biblioteca



SISBI/UFU

220578

FU00035783-2

### FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborado pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação

R741c Rojas Flores, Jhojan Enrique, 1978-  
Caracterização do efeito de enrijecimento por tensões e identificação de cargas em estruturas baseada em respostas dinâmicas / Jhojan Enrique Rojas Flores. - Uberlândia, 2004.  
134f. : il.  
Orientador: Domingos Alves Rade.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.  
I. Vibração - Teses. 2. Identificação - Teses. 3. Método dos elementos finitos - Teses. 4. Dinâmica - Teses. 5. Engenharia mecânica - Teses. I. Rade, Domingos Alves. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

621:534 (043.3)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
Av. João Naves de Ávila, 2121 - 38400-902 Fone: 0XX(34)32394149 Ramal 42  
FAX: 0XX(34)32394282 - Campus Santa Mônica - Uberlândia MG



**ALUNO: Jhojan Enrique Rojas Flores**

**NÚMERO DE MATRÍCULA: 5021558-0**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações**

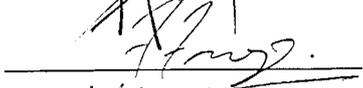
**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:**

*“Caracterização do Efeito de Enrijecimento por Tensões e Identificação de Cargas em Estruturas Baseada nas Respostas Dinâmicas.”*

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Domingos Alves Rade**

A Dissertação foi APROVADA em reunião pública, realizada no Anfiteatro da Biblioteca, Campus Santa Mônica, em 30 de abril de 2004, às horas 14:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

<b>NOME</b>		<b>ASSINATURA</b>
Domingos Alves Rade, Prof. Dr.	UFU	
Cleudmar Amaral de Araújo, Prof. Dr	UFU	
Alfredo Rocha de Faria, Prof. Dr.	ITA	

Uberlândia, 30 de abril de 2004.

A Dios que me concede la vida y nuevas oportunidades de realización a cada día.

A mis amados: Emilio, Clemencia, Everth y Ximena. Por el apoyo, confianza y constantes oraciones.

## **Agradecimentos**

Ao professor Dr. Domingos Alves Rade pela orientação, dedicação e incentivo durante a realização deste trabalho, e principalmente pela amizade e excelência profissional transmitida neste período.

Aos professores e companheiros do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho com sua valiosa ajuda. Em forma especial ao professor Cleudmar Amaral de Araújo, ao amigo Felipe Antonio Chegury Viana e aos amigos do Laboratório de Mecânica das Estruturas.

Ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, pela oportunidade desta realização.

Aos membros da banca examinadora, pelas contribuições dadas ao trabalho.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro.

Rojas, J. E. F., 2004, "Caracterização do Efeito de Enrijecimento por Tensões e Identificação de Cargas em Estruturas Baseada em Respostas Dinâmicas", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG, Brasil.

## Resumo

É bem conhecido o fato que solicitações externas têm significativa influência sobre o comportamento estático e dinâmico de sistemas estruturais tais como colunas, pórticos planos, placas e cascas, através do efeito conhecido por enrijecimento por tensões. Este trabalho apresenta um estudo acerca do efeito do enrijecimento por tensões (*stress-stiffening*) e sua influência sobre as características dinâmicas de sistemas estruturais. É proposto um procedimento inverso para a identificação de cargas externas a partir das respostas dinâmicas observadas. Para tanto, utiliza-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Modos Assumidos (MMA) para modelar sistemas estruturais planos constituídos por elementos de vigas e placas retangulares finas submetidas a condições gerais de carregamento em seu plano, respectivamente. Os modelos são implementados em ambiente MATLAB® e validados mediante confrontação com resultados fornecidos por análise de elementos finitos utilizando o programa comercial ANSYS®. As respostas dinâmicas são caracterizadas em termos dos parâmetros modais (frequências e modos naturais de vibração) e de funções de resposta em frequência. As variações observadas das frequências naturais em função da magnitude do carregamento é interpretada no contexto de um critério dinâmico para determinação de cargas críticas de flambagem. Através dos dados experimentais obtidos em ensaios de vibrações realizados em placas de aço e alumínio, às quais foram aplicadas diferentes cenários de carregamento, é comprovada a influência do carregamento externo no comportamento dinâmico destas estruturas. O procedimento de identificação, consiste em utilizar os parâmetros modais das estruturas sujeitas ao carregamento externo para formar uma função objetivo tendo como variáveis de projeto as cargas que são supostas desconhecidas. O problema de otimização é resolvido numericamente utilizando tanto algoritmos clássicos baseados em gradiente como também algoritmos pseudo-aleatórios (*Particle Swarm Optimization*). Com base nos resultados obtidos, conclui-se acerca da eficiência dos métodos de modelagem na previsão das respostas dinâmicas e da viabilidade das técnicas de identificação propostas na determinação de cargas pelo uso das respostas dinâmicas.

---

*Palavras Chave: Identificação de Cargas. Vibrações. Elementos Finitos. Estabilidade.*

Rojas, J. E. F., 2004, "Characterization of Stress-stiffening Effect and Identification of Loads in Structures from Dynamic Responses", Master Science Dissertation, Federal University of Uberlândia, School of Mechanical Engineering, Uberlândia, MG, Brazil.

### Abstract

It is known that stress state can influence, to a large extent, the static and dynamic behavior of structural systems such as columns, frames, plates and shells. Such phenomenon is known as stress-stiffening effect. This work presents a study on the stress-stiffening effect in relation with the dynamic characteristics of structures. The emphasis is placed on two different aspects, namely: the development of a modeling procedure enabling to characterize the influence of the external loads on the dynamic behavior of two-dimensional frames and rectangular plates; the development of an inverse procedure intended for the determination of external loads, given the dynamic responses of the loaded structure and a numerical model. With this aim, the Finite Element Method and the Assumed Modes Method are used to model the dynamic behavior of externally loaded two-dimensional frames and rectangular plates. Both types of modeling procedures are implemented in MATLAB<sup>®</sup> environment. The dynamic responses are characterized in terms of modal parameters (natural frequencies and vibration mode shapes) and frequency responses functions. The variations of the natural frequencies as a function of the external loads are interpreted in the context of a buckling dynamic criterion. The influence of the stress-stiffening effect on the dynamic behavior of rectangular plates is also characterized through laboratory experiments performed on steel and aluminum plates, to which different load scenarios are applied. The load identification procedure consists in solving a constrained optimization problem in which the cost function expresses the differences between the measured and model-predicted natural frequencies and/or the vibration mode shapes of the loaded structure. The external loads, assumed to be unknown, play the role of design variables. The optimization problem is solved numerically using both a classical gradient-based and a pseudo-random algorithm known as *Particle Swarm Optimization*. The results obtained confirm the paramount influence that the stress-stiffening can have on the dynamic behavior of structural systems and demonstrate the effectiveness of the modeling procedures and the feasibility of the load identification procedure based on the dynamic responses.

---

*Keywords: Load identification. Vibrations. Finite elements. Stability. Inverse Problems.*

Rojas, J. E. F., 2004, "Caracterización del Efecto de Enrijecimiento por Tensiones e Identificación de Cargas en Estructuras Basada en Respuestas Dinámicas", Disertación de Maestría, Universidad Federal de Uberlândia, Facultad de Ingeniería Mecánica, Uberlândia, MG, Brasil.

## Resumen

Es bien conocido el hecho de que esfuerzos externos tienen significativa influencia sobre el comportamiento estático y dinámico de sistemas estructurales tales como columnas, pórticos planos, placas y cáscaras, a través del efecto conocido como enrijecimiento por tensiones. Este trabajo presenta un estudio acerca del efecto de enrijecimiento por tensiones (*stress-stiffening*) y su influencia sobre las características dinámicas de sistemas estructurales. Se propone un procedimiento inverso para la identificación de cargas externas a partir de las respuestas dinámicas observadas. Para esto, se utiliza el Método de Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Modos Asumidos (MMA) para modelar sistemas estructurales planos formados por elementos de viga y placas rectangulares delgadas sometidas a condiciones generales de carga en su plano medio, respectivamente. Los modelos son implementados en ambiente MATLAB® y validados mediante comparación con resultados proporcionados por análisis de elementos finitos utilizando el programa comercial ANSYS®. Las respuestas dinámicas son caracterizadas en función de los parámetros modales (frecuencias y modos naturales de vibración) y de funciones de respuesta en frecuencia. Las variaciones observadas en las frecuencias naturales en función de la magnitud de la carga es interpretada en el contexto de un criterio dinámico para determinación de cargas críticas de pandeo. A través de los datos experimentales obtenidos en ensayos vibratorios realizados en placas de acero y aluminio, a las cuales fueron aplicados diferentes escenarios de carga, se comprueba la influencia de la carga externa en el comportamiento dinámico de estas estructuras. El procedimiento de identificación, consiste en utilizar los parámetros modales de las estructuras sometidas a cargas externas para formar una función objetivo teniendo como variables de proyecto las cargas que son supuestas como desconocidas. El problema de optimización es resuelto numéricamente utilizando tanto algoritmos clásicos basados en gradiente como también algoritmos pseudo-aleatorios (*Particle Swarm Optimization*). Considerando los resultados obtenidos, se concluye acerca de la eficiencia de los métodos de modelación en la previsión de las respuestas dinámicas y de la viabilidad de las técnicas de identificación propuestas en la determinación de cargas usando respuestas dinámicas.

---

*Palabras Clave: Identificación de Cargas. Vibraciones. Elementos Finitos. Estabilidad.*

# SUMÁRIO

<b>Lista de Símbolos e Abreviaturas.....</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Figuras .....</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Tabelas .....</b>	<b>xvi</b>
<b>Capítulo I – Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo II – Modelagem por Elementos Finitos de Sistemas Estruturais Planos</b>	
<b>Considerando a Influência de Esforços Axiais.....</b>	<b>9</b>
2.1 – Modelagem por Elementos Finitos de Colunas e Pórticos Planos.....	9
2.1.1 – Equações do Movimento Longitudinal em Nível Elementar.....	11
2.1.2 – Equações do Movimento Transversal em Nível Elementar.....	14
2.1.3 – Equações do Movimento Longitudinal e Transversal em Nível Elementar.....	19
2.1.4 – Montagem das Matrizes Globais.....	21
2.1.5 – Imposição das Condições de Contorno.....	25
2.2 – Análises Numéricas.....	26
2.2.1 – Análise Estática.....	26
2.2.2 – Análise de Estabilidade Linear.....	27
2.2.3 – Análise Modal.....	27
2.2.3 – Análise Harmônica.....	28
<b>Capítulo III – Caracterização Numérica do Comportamento Dinâmico de Colunas e Pórticos Planos Considerando o Enrijecimento por Tensões.....</b>	<b>29</b>
3.1 – Coluna Bi-apoiada.....	29
3.1.1 – Validação do Modelo de Coluna.....	30
3.1.2 – Caracterização do Enrijecimento por Tensões da Coluna.....	31

3.2 – Pórtico Bidimensional.....	36
3.2.1 – Validação do Modelo do Pórtico.....	37
3.2.2 – Caracterização do Enrijecimento por Tensões do Pórtico.....	38
3.3 – Comentários Sobre os Resultados.....	43
<b>Capítulo IV – Vibrações e Estabilidade de Placas Retangulares Sujeitas a</b>	
<b>Esforços de Membrana.....</b>	<b>45</b>
4.1 – Obtenção do Modelo Matemático pelo Método dos Modos Assumidos.....	45
4.2 – Análises Numéricas.....	51
4.2.1 – Análise Estática.....	51
4.2.2 – Análise de Estabilidade Linear .....	51
4.2.3 – Análise Modal.....	52
4.2.4 – Análise Harmônica.....	53
<b>Capítulo V – Caracterização Numérica do Comportamento Dinâmico de Placas</b>	
<b>Retangulares Considerando o Enrijecimento por Tensionamento.....</b>	<b>55</b>
5.1 – Análise de Convergência do Modelo Obtido pelo MMA.....	56
5.2 – Validação do Modelo Baseado no Método dos Modos Assumidos.....	58
5.3 – Caracterização da Influência dos Esforços de Membrana em Placas.....	60
5.3.1 – Placa AALL.....	63
5.3.2 – Placa EELL.....	66
5.3.3 – Placa AAAA.....	70
5.4 – Comentários Sobre os Resultados.....	74
<b>Capítulo VI – Avaliação Experimental da Influência dos Esforços de Membrana</b>	
<b>Sobre o Comportamento Dinâmico de Placas Retangulares.....</b>	<b>77</b>
6.1 – Aparato Experimental.....	77
6.2 – Procedimento Experimental.....	79
6.3 – Resultados Obtidos para a Placa de Alumínio.....	82
6.4 – Resultados Obtidos para a Placa de Aço.....	85

6.5 – Comentários Sobre os Resultados Experimentais .....	86
<b>Capítulo VII – Identificação de Cargas em Sistemas Estruturais Planos e Placas</b>	
<b>Retangulares a Partir das Respostas Dinâmicas.....</b>	<b>87</b>
7.1 – Fundamentos de Identificação de Parâmetros Através do Ajuste de Modelos.....	87
7.2 – Formulação do Problema de Identificação de Forças.....	89
7.3 – Identificação de Carga em uma Coluna Bi-apoiada.....	92
7.3.1 – Método de Lagrange Newton-SQP.....	93
7.3.2 – Particle Swarm Optimization.....	94
7.4 – Identificação de Cargas em um Pórtico Plano.....	95
7.4.1 – Método de Lagrange Newton-SQP.....	96
7.4.2 – Particle Swarm Optimization.....	98
7.5 – Identificação de Cargas em uma Torre Plana.....	100
7.5.1 – Método de Lagrange Newton-SQP.....	101
7.5.2 – Particle Swarm Optimization.....	102
7.6 – Identificação de Esforços de Membrana em uma Placa Retangular.....	103
7.6.1 – Método de Lagrange Newton-SQP.....	104
7.7 – Comentários Sobre os Resultados de Identificação.....	105
<b>Capítulo VIII – Conclusões Gerais e Propostas de Continuidade.....</b>	<b>107</b>
<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>111</b>
<b>Anexo A.....</b>	<b>117</b>
<b>Anexo B.....</b>	<b>121</b>
<b>Anexo C.....</b>	<b>123</b>
<b>Anexo D.....</b>	<b>127</b>

## Lista de Símbolos e Abreviaturas

### Letras Latinas

$u, v$	: Deslocamentos nodais longitudinais e transversais.
$l_i, A_i, I_i$	: Comprimento do elemento, área e inércia da seção transversal.
$E_i, D$	: Módulo de elasticidade do material e rigidez à flexão.
$p_i(x, t), q_i(x, t)$	: Carregamento longitudinal e transversal distribuído.
$[M], [K]$	: Matriz de massa e rigidez.
$V, T$	: Energia potencial e cinética.
$L$	: Lagrangeano.
$\{F_i(t)\}$	: Vetor de esforços generalizados.
$[H(\Omega)]$	: Matriz de receptâncias ou de funções de resposta em frequência.
$H, A, B, a, b, h$	: Parâmetros geométricos dos modelos das estruturas.
$F, P$	: Força e carga externas.
$H_{ii}(\omega), H_{ij}(\omega)$	: Função de resposta em frequência pontual e cruzada
$N_x, N_y, N_{xy}$	: Esforços de membrana normais e cisalhantes.
$P(x, y, t)$	: Carregamento transversal distribuído.
$w(x, y, t)$	: Campo de deslocamentos transversais de placas.
$A_{mn}(t), C_k(t)$	: Coeficientes de combinação linear (coordenadas generalizadas).
$f_i$	: Frequências naturais [Hz].
$J(\{p\})$	: Valor da função objetivo.
$\{p^l\}, \{p^u\}$	: Restrições laterais.
$\{V_i\}$	: Vetor dos modos naturais de vibração.
$W_\omega, W_F, W_M$	: Fatores de ponderação da função objetivo.
$n_b, w, c_1, c_2, dl, n_{iter}$	: Parâmetros do <i>Particle Swarm Optimization</i> .
$MAC$	: <i>Modal Assurance Criterion</i> .

## Lista de Símbolos e Abreviaturas

### Letras Latinas

$u, v$	: Deslocamentos nodais longitudinais e transversais.
$l_i, A_i, I_i$	: Comprimento do elemento, área e inércia da seção transversal.
$E_i, D$	: Módulo de elasticidade do material e rigidez à flexão.
$p_i(x, t), q_i(x, t)$	: Carregamento longitudinal e transversal distribuído.
$[M], [K]$	: Matriz de massa e rigidez.
$V, T$	: Energia potencial e cinética.
$L$	: Lagrangeano.
$\{F_i(t)\}$	: Vetor de esforços generalizados.
$[H(\Omega)]$	: Matriz de receptâncias ou de funções de resposta em freqüência.
$H, A, B, a, b, h$	: Parâmetros geométricos dos modelos das estruturas.
$F, P$	: Força e carga externas.
$H_{ii}(\omega), H_{ij}(\omega)$	: Função de resposta em freqüência pontual e cruzada
$N_x, N_y, N_{xy}$	: Esforços de membrana normais e cisalhantes.
$P(x, y, t)$	: Carregamento transversal distribuído.
$w(x, y, t)$	: Campo de deslocamentos transversais de placas.
$A_{mm}(t), C_k(t)$	: Coeficientes de combinação linear (coordenadas generalizadas).
$f_i$	: Freqüências naturais [Hz].
$J(\{p\})$	: Valor da função objetivo.
$\{p^L\}, \{p^U\}$	: Restrições laterais.
$\{V_i\}$	: Vetor dos modos naturais de vibração.
$W_\omega, W_V, W_M$	: Fatores de ponderação da função objetivo.
$n_b, w, c_1, c_2, dl, n_{iter}$	: Parâmetros do <i>Particle Swarm Optimization</i> .
<i>MAC</i>	: <i>Modal Assurance Criterion</i> .

## Letras Gregas

$\theta$	: Rotação da seção transversal.
$\phi_i(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$	: Funções de forma do elemento de viga.
$\rho, \nu$	: Densidade volumétrica do material e coeficiente de Poisson.
$[\Theta_i]$	: Matriz de rotação.
$\lambda_r$	: Autovalores associados às cargas críticas e frequências naturais.
$\Delta_r$	: Autovetores associados às cargas críticas.
$\omega, \Omega$	: Frequência de resposta e de excitação.
$\lambda$	: Fator de carga adimensional.

## Superescrito

$(m), (e)$	: Relativos ao modelo e experimento.
$\theta$	: Relativo à transformação do sistema de coordenadas.

## Subscrito

$crit$	: Relativo a cargas críticas.
$m, n$	: Relativos aos coeficientes das funções arbitradas em $x$ e $y$ .
$x, y$	: Relativos às derivadas em relação às respectivas direções.

## Lista de Figuras

Figura 2.1 - Elemento de viga Euler-Bernoulli (adaptado de Rade, 2003).....	10
Figura 2.2 - Acoplamento de dois elementos (Rade, 2003).....	21
Figura 2.3 - Sistemas de referência local e global em um elemento de viga.....	24
Figura 3.1 - Modelo de coluna bi-apoiada.....	30
Figura 3.2 - Modos Naturais de vibração da coluna.....	33
Figura 3.3 - Freqüências naturais da coluna em função da carga axial.....	34
Figura 3.4 - Variação relativa das freqüências naturais da coluna em função da carga axial.....	34
Figura 3.5 - Amplitudes da FRF $H_{22}$ da coluna em função da carga axial.....	35
Figura 3.6 - Amplitudes da FRF $H_{99}$ da coluna em função da carga axial.....	35
Figura 3.7 - Amplitudes da FRF $H_{29}$ da coluna em função da carga axial.....	36
Figura 3.8 - Modelo de pórtico plano.....	37
Figura 3.9 - Modos naturais de vibração do pórtico.....	40
Figura 3.10 - Freqüências naturais do pórtico em função da carga aplicada.....	40
Figura 3.11 - Variação relativa das freqüências naturais do pórtico em função da carga aplicada.....	41
Figura 3.12 - Amplitudes da FRF $H_{77}$ do pórtico em função da carga aplicada.....	42
Figura 3.13 - Amplitudes da FRF $H_{79}$ do pórtico em função da carga aplicada.....	42
Figura 3.14 - Amplitudes da FRF $H_{99}$ do pórtico em função da carga aplicada.....	42
Figura 4.1 - Dimensões e ação de esforços em uma placa retangular.....	45
Figura 5.1 - Dimensões da placa retangular.....	56

Figura 5.2 - Convergência das freqüências naturais em função do parâmetro $N$ .....	57
Figura 5.3 - Convergência das funções de resposta em freqüência com o acréscimo de $N$ .	57
Figura 5.4 - Carregamento transversal ao plano da placa.....	58
Figura 5.5 - Deflexão máxima da placa em função do acréscimo de carga transversal.....	59
Figura 5.6 - Comparação das freqüências naturais para diferentes cargas de compressão.....	59
Figura 5.7 - Comparação de funções de resposta em freqüência da placa submetida a uma força de membrana de compressão.....	60
Figura 5.8 - Esforços de membrana aplicados no plano médio da placa.....	61
Figura 5.9 - Condições de contorno analisadas.....	61
Figura 5.10 - Modos naturais de vibração da placa AALL.....	63
Figura 5.11 - Freqüências naturais em função da variação de $N_x$ e $N_y$ , placa AALL.....	64
Figura 5.12 - Freqüências naturais em função da variação de $N_{xy}$ , placa AALL.....	64
Figura 5.13 - Amplitudes da FRF $H_{4,4}$ devido à variação de $N_x$ , placa AALL.....	65
Figura 5.14 - Amplitudes da FRF $H_{4,4}$ devido à variação de $N_y$ , placa AALL.....	65
Figura 5.15 - Amplitudes da FRF $H_{4,4}$ devido à variação de $N_{xy}$ , placa AALL.....	66
Figura 5.16 - Modos naturais de vibração da placa EELL.....	66
Figura 5.17 - Freqüências naturais em função da variação de $N_x$ e $N_y$ , placa EELL.....	67
Figura 5.18 - Freqüências naturais em função da variação de $N_{xy}$ , placa EELL.....	68
Figura 5.19 - Amplitudes da FRF $H_{4,4}$ devido à variação de $N_x$ , placa EELL.....	68
Figura 5.20 - Amplitudes da FRF $H_{4,4}$ devido à variação de $N_y$ , placa EELL.....	69
Figura 5.21 - Amplitudes da FRF $H_{4,4}$ devido à variação de $N_{xy}$ , placa EELL.....	69
Figura 5.22 - Modos naturais de vibração da placa AAAA.....	70
Figura 5.23 - Freqüências naturais em função da variação de $N_x$ e $N_y$ , placa AAAA.....	71

Figura 5.24 - Freqüências naturais em função da variação de $N_{xy}$ , placa AAAA.....	71
Figura 5.25 - Amplitudes da FRF $H_{4,4}$ devido à variação de $N_x$ , placa AAAA.....	72
Figura 5.26 - Amplitudes da FRF $H_{4,4}$ devido à variação de $N_y$ , placa AAAA.....	72
Figura 5.27 - Amplitudes da FRF $H_{4,4}$ devido à variação de $N_{xy}$ , placa AAAA.....	73
Figura 5.28 - Modos naturais de uma placa apoiada para: $N_{xy}$ e $-N_{xy}$ .....	74
Figura 6.1 - Dispositivo experimental para ensaio de placas.....	77
Figura 6.2 - Aparato experimental.....	79
Figura 6.3 - Cenários de aplicação dos esforços.....	80
Figura 6.4 - Modelo de elementos finitos da placa no ANSYS®.....	80
Figura 6.5 - Distribuições de tensões na placa de alumínio.....	81
Figura 6.6 - Ajuste das FRFs $H_{1,1}$ e $H_{1,3}$ das placas de alumínio e aço respectivamente.....	82
Figura 6.7 - Variação das amplitudes das FRFs $H_{1,1}$ e $H_{1,3}$ em função da carga de compressão aplicada à placa de alumínio.....	82
Figura 6.8 - Variação das amplitudes das FRFs $H_{2,1}$ e $H_{2,2}$ em função da carga de compressão aplicada à placa de alumínio.....	83
Figura 6.9 - Variação das amplitudes das FRFs $H_{2,3}$ e $H_{3,3}$ em função da carga de compressão aplicada à placa de alumínio.....	83
Figura 6.10 - Variação das amplitudes das FRFs $H_{3,2}$ e $H_{3,3}$ em função da carga de tração aplicada à placa de alumínio.....	84
Figura 6.11 - Freqüências naturais estimadas a partir de $H_{1,1}$ e $H_{1,3}$ em função da carga para a placa de alumínio.....	84
Figura 6.12 - Freqüências naturais estimadas a partir de $H_{2,3}$ e $H_{3,3}$ em função da carga para a placa de alumínio.....	85
Figura 6.13 - Variação das amplitudes das FRFs $H_{2,3}$ e $H_{3,3}$ em função da carga de compressão aplicada à placa de aço.....	85
Figura 6.14 - Freqüências naturais estimadas a partir de $H_{3,1}$ e $H_{3,3}$ em função da carga para a placa de aço.....	86

Figura 7.1 - Carga externa aplicada à coluna bi-apoiada.....	92
Figura 7.2 - Evolução do valor da função objetivo da coluna durante otimização por SQP...	94
Figura 7.3 - Cargas externas aplicadas no pórtico plano.....	95
Figura 7.4 - Evolução do valor da função objetivo do pórtico durante otimização por SQP...	97
Figura 7.5 - Modelo de elementos finitos de uma torre plana.....	100
Figura 7.6 - Evolução do valor da função objetivo da torre durante otimização por SQP....	102
Figura 7.7 - Evolução do valor da função objetivo da placa por SQP, caso 1.....	105
Figura 7.8 - Evolução do valor da função objetivo da placa por SQP, caso 2.....	105
Figura A.1 - Coluna de Euler ou bi-apoiada (Chajes, 1974).....	118
Figura A.2-Carga crítica para diferentes condições de contorno da coluna (Chajes, 1974)	119
Figura C.1 - Fluxograma do algoritmo baseado no PSO (Venter, 2002).....	124
Figura C.2 - Variação dos resultados de identificação em função do número de partículas	126
Figura C.3 - Variação dos resultados de identificação em função do número de iterações.	126
Figura D.1 - Trabalho realizado pelas tensões $\sigma_x$ em um elemento diferencial.....	127
Figura D.2 - Elemento de viga Euler-Bernoulli (adaptado de Rade, 2003).....	129
Figura D.3 - Deslocamento do eixo da viga de eixo reto.....	130
Figura D.4 - Deslocamento do eixo da viga de eixo reto.....	132

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Dimensões e propriedades mecânicas da coluna.....	29
Tabela 3.2 - Cargas críticas e frequências naturais de vibração da coluna.....	31
Tabela 3.3 - Frequências naturais da coluna sujeita a carga axial $F = 2,0 \times 10^6 N$ .....	31
Tabela 3.4 - Frequências naturais da coluna em função da carga axial.....	33
Tabela 3.5 - Dimensões e propriedades mecânicas do pórtico.....	36
Tabela 3.6 - Cargas críticas e frequências naturais de vibração do pórtico.....	38
Tabela 3.7 - Frequências naturais do pórtico sujeito a uma força $F = -1,0 \times 10^4 N$ .....	38
Tabela 3.8 - Frequências naturais do pórtico em função da carga aplicada.....	39
Tabela 5.1 - Dimensões e propriedades mecânicas da placa de policarbonato.....	56
Tabela 5.2 - Características físicas e geométricas das placas analisadas.....	60
Tabela 5.3 - Cargas de flambagem das diferentes placas analisadas.....	62
Tabela 6.1 - Características físicas e geométricas das placas ensaiadas.....	78
Tabela 7.1 - Parâmetros do PSO utilizados na identificação de cargas.....	91
Tabela 7.2 - Dimensões e propriedades mecânicas do modelo de coluna.....	92
Tabela 7.3 - Frequências naturais da coluna descarregada e carregada.....	93
Tabela 7.4 - Resultados da identificação de uma carga na coluna usando SQP.....	93
Tabela 7.5 - Identificação de uma carga na coluna usando o PSO.....	94
Tabela 7.6 - Resultados de identificação do carregamento da coluna usando o PSO.....	95
Tabela 7.7 - Dimensões e propriedades mecânicas do pórtico.....	96
Tabela 7.8 - Frequências naturais do pórtico sob diferentes configurações de carregamento.....	96

Tabela 7.9 - Cargas identificadas no pórtico usando SQP.....	97
Tabela 7.10 - Resultados da identificação de cargas no pórtico usando o PSO.....	99
Tabela 7.11 - Resultados da identificação de cargas no pórtico usando o PSO e SQP.....	99
Tabela 7.12 - Freqüências naturais da torre sob diferentes cenários de carregamento.....	101
Tabela 7.13 - Resultados da identificação de cargas na torre usando SQP.....	101
Tabela 7.14 - Resultados da identificação de cargas na torre usando o PSO.....	102
Tabela 7.15 - Características físicas e geométricas da placa totalmente apoiada.....	103
Tabela 7.16 - Freqüências naturais da placa sob diferentes cenários de carregamento.....	103
Tabela 7.17 - Resultados da identificação dos esforços de membrana na placa usando SQP.....	104
Tabela B.1 - Coeficientes das funções de viga, condição: engastada-engastada.....	121
Tabela B.2 - Coeficientes das funções de viga, condição: engastada-livre.....	121
Tabela B.3 - Coeficientes das funções de viga, condição: livre-livre.....	122

# CAPÍTULO I

## Introdução

O problema de determinação de cargas externas a que estão submetidas as estruturas em condições reais de serviço está presente em numerosas situações práticas encontradas no âmbito das engenharias Civil, Estrutural, Mecânica, Aeronáutica, Naval, etc.

A importância atribuída à resolução deste problema vem crescendo, em virtude do envelhecimento das estruturas construídas no passado, a tendência de realização de estruturas cada vez mais leves, esbeltas e complexas. Some-se a isso a necessidade freqüente de se efetuar a verificação das considerações adotadas nos projetos e de avaliação do nível de segurança dos sistemas estruturais, tendo em vista um provável redimensionamento destes sistemas para novas condições operacionais.

Um fator que dificulta a determinação do carregamento através de medições experimentais é que tal procedimento requer que os transdutores (células de carga ou extensômetros) sejam introduzidos na estrutura durante sua montagem, previamente à aplicação das cargas que se desejam determinar. Tal fato impede a utilização deste tipo de procedimento em grande número de estruturas hoje existentes.

É bem conhecido o fato que as solicitações externas podem exercer significativa influência sobre as características dinâmicas de componentes estruturais, através de um efeito conhecido por *stress-stiffening* (enrijecimento por tensões) (Greening e Lieven, 1999). A título de exemplo, pode-se mencionar que este efeito está presente nos instrumentos musicais de corda, nos quais a afinação das cordas é definida por suas freqüências naturais de vibração, o que é feito ajustando-se o grau de tensionamento das mesmas. O enrijecimento por tensões ocorre igualmente em outros tipos de elementos estruturais, tais como barras, vigas, placas e cascas, conforme evidenciado por Lurie (1952).

Com base na influência exercida pelo carregamento externo sobre as respostas dinâmicas é possível, em princípio, por um procedimento inverso, obter informações acerca dos

níveis e distribuições de cargas externas aplicadas à estrutura a partir da medição destas respostas. Como uma aplicação particularmente interessante, destaca-se a utilização da relação existente entre as cargas externas e as frequências naturais das estruturas como um critério para determinação das cargas críticas de flambagem.

A avaliação de carregamentos externos, baseada na utilização de respostas dinâmicas tem numerosas vantagens do ponto de vista de sua aplicabilidade prática, podendo-se citar:

- a relativa facilidade de medição e processamento das respostas dinâmicas, considerando os avanços tecnológicos obtidos nas últimas décadas, em particular, com medições à distância, utilizando técnicas ópticas;
- a ampla acessibilidade a pontos de medição, sabendo que as respostas dinâmicas são características globais das estruturas.

Na forma em que é considerado na presente Dissertação, o problema de determinação do carregamento externo de forma indireta, sendo necessário se dispor de um conjunto de respostas dinâmicas (frequências e/ou modos naturais de vibração, funções de resposta em frequência, por exemplo) e um modelo matemático relacionando as cargas externas e as respostas dinâmicas do sistema estrutural. Busca-se então formular o problema inverso de identificação resolvendo-se um problema de otimização não linear em que as variáveis de projeto são as cargas externas desconhecidas e a função objetivo representa a diferença entre as respostas dinâmicas medidas sobre a estrutura carregada e as correspondentes previsões do modelo matemático. O processo pode ser entendido como um problema de identificação paramétrica baseado em ajuste de modelos. O livro de Friswell e Mottershead (1995) fornece um abrangente apanhado da teoria e das aplicações deste tipo de estratégia.

O tratamento de problemas inversos comporta, invariavelmente, algumas dificuldades intrínsecas, dentre as quais pode-se citar:

- a precisão dos resultados da identificação é determinada pela precisão do modelo matemático disponível;
- do ponto de vista numérico, os problemas de identificação são geralmente mal-condicionados, o que significa que sua solução apresenta-se muito sensível à

presença de incertezas e ruídos que, inevitavelmente, contaminam os dados experimentais utilizados;

- por razões de natureza prática, os dados experimentais utilizados são invariavelmente incompletos, tanto no sentido espacial (respostas conhecidas em um número limitado de posições), quanto no aspecto espectral (respostas determinadas em uma banda de frequências). Conseqüentemente, a unicidade da solução não pode ser assegurada.

Embora não sejam numerosos, alguns estudos reportados na literatura têm como objetivo a investigação das relações existentes entre as cargas externas aplicadas e o comportamento dinâmico de elementos ou sistemas estruturais. Em alguns casos, estas informações foram utilizadas para identificar os esforços aplicados a estruturas.

A relação entre as frequências naturais e a carga, obtida a partir das respostas dinâmicas, prova o interesse prático na determinação da carga atuando em determinados membros de uma estrutura. Rayleigh (1877) foi o primeiro em analisar os efeitos da carga axial sobre as frequências naturais de algumas estruturas. Sua contribuição se limitou a evidenciar esta influência. Stephens (1936) reconheceu a semelhança entre os problemas de estabilidade e vibrações de estruturas, propôs um método para determinar o coeficiente de fixação de elementos estruturais. Weinstein e Chien (1943) investigaram o comportamento vibratório de uma placa engastada submetida a esforços de tração uniforme. Mostraram, por meio de um princípio variacional, que o quadrado da frequência de vibração da placa aumenta em forma aproximadamente linear, com o acréscimo da carga de tração. Chu (1949) determinou uma relação linear entre a carga crítica de uma coluna simplesmente apoiada e de um pórtico com o quadrado das frequências naturais. Seus resultados experimentais mostraram-se muito próximos aos previstos pela teoria.

Lurie (1951) propôs um método de determinação das cargas últimas de flambagem a partir das respostas dinâmicas em colunas e placas finas. Pouco depois (Lurie, 1952), verificou que a resistência à flambagem de uma coluna pode ser encontrada por meio da anulação da primeira frequência natural e utilizou as vibrações laterais de vigas, pórticos e placas para tratar a estabilidade estrutural desses elementos. As mudanças dos autovalores em relação a problemas de flambagem e vibrações foram discutidas brevemente no trabalho de Wittrick (1962) e Baruch (1973). Posteriormente, (Virgin e Plaut, 1993; Go e Liou, 2002) analisaram analítica e experimentalmente os efeitos da carga axial no movimento vibratório de vigas sob

diferentes condições de contorno submetidas a diferentes tipos de excitação. Outros autores (Sweet *et al*, 1977; Segall e Baruch, 1980; Virgin e Plaut, 1990) propuseram métodos não destrutivos para a determinação da carga de flambagem em modelos de colunas, utilizando dados experimentais. O estudo realizado por Laura e Rossi (1989) aborda as dificuldades encontradas em problemas de vibrações e estabilidade de elementos estruturais assim como sua influência na precisão dos resultados experimentais.

A partir dos parâmetros modais (frequências e modos naturais de vibração) Livingston *et al* (1993) estimaram a carga axial atuante em uma viga Euler-Bernoulli apoiada em suportes elásticos, utilizando o Método dos Mínimos Quadrados. Huang (1997) analisou a influência da tensão nas respostas dinâmicas de estruturas por meio do conceito de análise de tensões modais (stress modal analysis).

O trabalho de Greening *et al* (1996) deu início a uma série de estudos acerca da influência de cargas sobre as características dinâmicas de uma estrutura simples. Alguns ensaios experimentais em vigas e placas levaram Greening e Lieven (1999) a verificar as mudanças do comportamento dinâmico com a presença de carregamento nesses elementos estruturais. Mostraram também que as medidas das respostas dinâmicas podem ser utilizadas para prever os níveis de tensões a que estão sujeitas as estruturas. Uma vez investigado o efeito do enrijecimento por tensões, demonstraram que se a modelagem por elementos finitos não inclui este efeito, pode não ser apropriado utilizar estes modelos em análises dinâmicas de estruturas. Posteriormente, a validação de um modelo de elementos finitos de uma treliça permitiu que os mesmos autores (Greening e Lieven, 2003) estudassem o efeito da aplicação de uma carga axial em uma das barras da treliça, utilizando as respostas dinâmicas experimentais num procedimento de ajuste de modelos, onde as cargas axiais foram consideradas como parâmetros de ajuste. Os resultados foram comparados com as cargas estáticas calculadas a partir das medições fornecidas por extensômetros. A análise de sensibilidade dos parâmetros de ajuste também foi incluída no trabalho. Além disso, através de ensaios experimentais em uma estrutura semelhante, Lieven e Greening (2000) analisaram o efeito das tensões residuais introduzidas pelo processo de fabricação sobre as características modais da treliça.

Tratando-se ainda de estruturas formadas por elementos de viga, pode-se citar ainda o trabalho de Mead (2002) que analisa detalhadamente o efeito da carga axial, inserida pelo aquecimento localizado de uma das diagonais da estrutura, sobre a vibração livre de um sistema estrutural formado por vigas de Euler-Bernoulli. Continuando sua pesquisa (Mead,

2003), investigou a influência da distribuição variável de temperatura sobre a flambagem e comportamento dinâmico de placas finas, modeladas utilizando a aproximação de Rayleigh-Ritz, cuja descrição é feita de forma mais detalhada por Young (1950).

Almeida e Hansen (1997) demonstraram a possibilidade de se produzir tensões residuais com o objetivo de melhorar o comportamento mecânico de placas finas. Subseqüentemente, Hernandes *et al* (2000) mostraram que estas tensões podem ser produzidas por atuadores piezelétricos colados às placas. Donadon *et al* (2002) investigaram a eficiência dos atuadores piezelétricos no controle das freqüências naturais de placas laminadas mediante a introdução de tensões de membrana.

Recentemente, Vieira e Rade (2003) e Vieira (2003) propuseram uma metodologia de identificação de tensões de membrana em placas planas a partir das respostas vibratórias transversais, validando o procedimento através de simulações numéricas e de um estudo experimental. Como uma aplicação particular, utilizaram a metodologia para avaliar os níveis de tensões residuais induzidas pelo processo de soldagem.

Este trabalho tem como principal objetivo a realização de um estudo de procedimentos de identificação baseados na exploração de respostas dinâmicas visando a determinação de carregamentos externos atuantes em sistemas estruturais.

Os objetivos específicos são:

1º) implementação computacional de procedimentos de modelagem visando a caracterização da influência do carregamento externo sobre o comportamento dinâmico de colunas, pórticos planos e placas retangulares;

2º) implementação computacional, avaliação numérica e experimental de uma metodologia para resolução do problema inverso de identificação de cargas empregando as auto-soluções (freqüências naturais e modos naturais de vibração) e respostas freqüenciais daqueles tipos de sistemas estruturais.

Desta forma, este trabalho pretende contribuir para a proposição de uma metodologia prática para determinação de cargas estáticas atuantes em sistemas estruturais de grande porte.

A estratégia adotada para formular e resolver o problema de identificação do carregamento externo consiste em utilizar modelos numéricos que consideram o efeito de enrijecimento por tensões. Formula-se então um problema de otimização não linear em que as variáveis de projeto são as cargas externas desconhecidas e a função objetivo representa a diferença entre as respostas dinâmicas medidas sobre a estrutura carregada e as correspondentes previsões dos modelos de elementos finitos. O problema de otimização é resolvido numericamente utilizando algoritmos baseados em gradiente (Vanderplaats, 1999) e também algoritmos evolucionários pseudo-aleatórios, algoritmos genéticos (Goldberg, 1989) e Particle Swarm Optimization (Kennedy e Eberhart, 1995).

Além deste capítulo introdutório, o trabalho contém sete capítulos, organizados da seguinte forma:

O Capítulo II é dedicado ao estudo dos fundamentos de vibrações e da estabilidade de colunas e pórticos planos, empregando modelos analíticos e de elementos finitos destas estruturas.

No Capítulo III é realizada a caracterização numérica do comportamento dinâmico de colunas e pórticos planos considerando o efeito do enrijecimento por tensões.

O Capítulo IV contém uma descrição semelhante à do Capítulo II porém analisando placas retangulares, submetidas a esforços de membrana, modeladas pela utilização do Método dos Modos Assumidos.

A caracterização numérica do comportamento dinâmico de placas retangulares sujeitas a esforços atuantes em seu plano, considerando o efeito do enrijecimento por tensões é detalhada no Capítulo V.

O Capítulo VI dedica-se à comprovação experimental da caracterização descrita no Capítulo V.

Uma vez caracterizada a dependência entre o carregamento aplicado e as respostas dinâmicas das estruturas-teste nos capítulos precedentes, são apresentados, no Capítulo VII, resultados dos procedimentos de identificação de cargas, através do ajuste dos modelos e a minimização de funções objetivo.

Finalmente, no Capítulo VIII são apresentadas as conclusões do estudo e as propostas de continuidade deste trabalho.

## CAPÍTULO II

### **Modelagem por Elementos Finitos de Sistemas Estruturais Planos Considerando a Influência de Esforços Axiais**

Este capítulo aborda a modelagem por elementos finitos de sistemas estruturais planos constituídos por elementos de vigas (vigas-colunas e pórticos planos), considerando o efeito do enrijecimento por tensões. Os desenvolvimentos aqui apresentados enfocam a análise de estabilidade e do comportamento dinâmico destas estruturas e constitui a base para a implementação computacional que foi efetuada no âmbito desta dissertação.

#### **2.1 Modelagem por Elementos Finitos de Colunas e Pórticos Planos**

O procedimento de modelagem por elementos finitos é aqui realizado utilizando a teoria de Euler-Bernoulli para elementos de viga bidimensionais. Esta teoria é fundamentada nas seguintes hipóteses:

- a) as seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares ao seu eixo neutro;
- b) negligenciam-se as deformações devidas ao cisalhamento e a inércia de rotação das seções transversais.

É sabido que a teoria de Euler-Bernoulli é adequada para a representação do comportamento dinâmico de vigas esbeltas, cujo comprimento é muito maior que as dimensões das seções transversais, e no domínio de baixas frequências. Fora destes casos, deve-se fazer uso da teoria de vigas de Timoshenko, a qual considera os efeitos secundários associados às deformações de cisalhamento e à inércia de rotação das seções transversais (Rade, 1987).

Considere-se o elemento genérico de viga, representado na Figura 2.1, contendo dois nós e três graus de liberdade por nó.

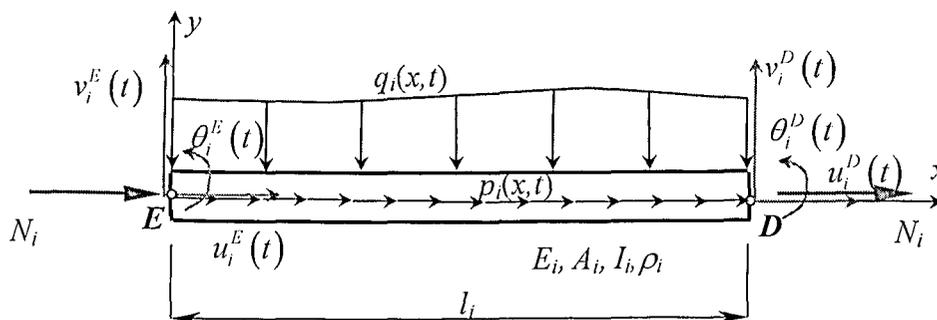


Figura 2.1 - Elemento de viga Euler-Bernoulli (adaptado de Rade, 2003).

Na figura acima,  $u_i^E(t)$  e  $u_i^D(t)$  são os deslocamentos nodais longitudinais,  $v_i^E(t)$  e  $v_i^D(t)$  são os deslocamentos nodais transversais,  $\theta_i^E(t)$  e  $\theta_i^D(t)$  são as rotações das seções transversais nas extremidades do elemento,  $l_i$  é o comprimento do elemento,  $E_i$  é o módulo de elasticidade do material,  $A_i$  é a área da seção transversal,  $I_i$  é o momento de inércia da área da seção transversal em relação ao seu eixo centroidal perpendicular ao plano da figura,  $\rho_i$  é a densidade do material. Além disso,  $p_i(x,t)$  é o carregamento longitudinal distribuído e  $q_i(x,t)$  é o carregamento transversal distribuído, ambos representados em termos de força por unidade de comprimento.

Designam-se genericamente os campos de deslocamento e rotação ao longo do elemento como segue:

- $u_i(x,t)$ : campo de deslocamentos longitudinais ao longo do elemento  $i$ ,
- $v_i(x,t)$ : campo de deslocamentos transversais ao longo do elemento  $i$ ,
- $\theta_i(x,t)$ : campo de rotações das seções transversais ao longo do elemento  $i$ .

Devido ao fato de que os deslocamentos longitudinais são independentes dos demais e sabendo que as rotações e os deslocamentos transversais relacionam-se segundo  $\theta_i(x) = dv_i(x)/dx$ , pode-se analisar separadamente o movimento longitudinal e o movimento transversal, o que é feito a seguir.

### 2.1.1 Equações do Movimento Longitudinal em Nível Elementar

Utiliza-se a seguinte função de interpolação linear para o campo de deslocamentos longitudinais no interior do elemento:

$$u_i(x,t) = u_i^E(t) \psi_1(x) + u_i^D(t) \psi_2(x) \quad (0 \leq x \leq l_i) \quad (2.1)$$

onde as funções de forma são dadas por:

$$\psi_1(x) = 1 - \frac{x}{l_i}, \quad \psi_2(x) = \frac{x}{l_i} \quad (2.2)$$

Considerando apenas a ação do carregamento axial na expressão da energia potencial total, dada por Craig Jr. (1981), escreve-se:

$$V_i^l(t) = \int_0^{l_i} \left\{ \frac{1}{2} E_i A_i \left[ \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} \right]^2 - p_i(x,t) u_i(x,t) \right\} dx \quad (2.3)$$

Introduz-se a aproximação (2.1) na equação anterior, obtendo-se:

$$V_i^l(t) = \int_0^{l_i} \left\{ \frac{1}{2} E_i A_i [u_i^E(t) \psi_1'(x) + u_i^D(t) \psi_2'(x)]^2 - p_i(x,t) [u_i^E(t) \psi_1(x) + u_i^D(t) \psi_2(x)] \right\} dx \quad (2.4)$$

ou, na forma matricial:

$$V_i^l(t) = \frac{1}{2} \{U_i(t)\}^T [K_i^l] \{U_i(t)\} - \{U_i(t)\}^T \{P_i(t)\} \quad (2.5)$$

onde:

$$\{U_i(t)\} = [u_i^E(t) \quad u_i^D(t)]^T \quad (2.6)$$

$$\{P_i(t)\} = [p_i^E(t) \quad p_i^D(t)]^T \quad (2.7)$$

$$[K_i'] = \begin{bmatrix} (K_i')_{11} & (K_i')_{12} \\ (K_i')_{21} & (K_i')_{22} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

com:

$$(K_i')_{11} = \int_0^{l_i} E_i A_i \psi_1'^2(x) dx \quad (2.9)$$

$$(K_i')_{12} = (K_i')_{21} = \int_0^{l_i} E_i A_i \psi_1'(x) \psi_2'(x) dx \quad (2.10)$$

$$(K_i')_{22} = \int_0^{l_i} E_i A_i \psi_2'^2(x) dx \quad (2.11)$$

$$p_i^E(t) = \int_0^{l_i} p_i(x,t) \psi_1(x) dx \quad (2.12)$$

$$p_i^D(t) = \int_0^{l_i} p_i(x,t) \psi_2(x) dx \quad (2.13)$$

Introduzindo as funções de forma (2.2) nas expressões (2.9) a (2.13), considerando o carregamento longitudinal uniformemente distribuído ao longo do comprimento do elemento, e efetuando as operações indicadas, obtém-se a matriz de rigidez elementar correspondente aos deslocamentos longitudinais e o vetor de esforços nodais equivalentes ao carregamento longitudinal distribuído sob a forma:

$$[K_i'] = \frac{E_i A_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\{P_i(t)\} = \frac{p_i(t) l_i}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

A energia cinética associada ao movimento longitudinal é dada por (Craig Jr., 1981):

$$T'_i(t) = \frac{1}{2} \rho_i \int_0^{l_i} \left( \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.16)$$

Introduzindo a aproximação (2.1) na equação anterior, obtém-se:

$$T'_i(t) = \frac{1}{2} \rho_i \int_0^{l_i} \left[ \dot{u}_i^E(t) \psi_1(x) + \dot{u}_i^D(t) \psi_2(x) \right]^2 dx \quad (2.17)$$

ou, na forma matricial:

$$T'_i(t) = \frac{1}{2} \{\dot{U}_i(t)\}^T [M'_i] \{\dot{U}_i(t)\} \quad (2.18)$$

onde:

$$\{\dot{U}_i(t)\} = [\dot{u}_i^E(t) \quad \dot{u}_i^D(t)]^T \quad (2.19)$$

$$[M'_i] = \begin{bmatrix} (M'_i)_{11} & (M'_i)_{12} \\ (M'_i)_{21} & (M'_i)_{22} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

com:

$$(M'_i)_{11} = \int_0^{l_i} \rho_i \psi_1^2(x) dx \quad (2.21)$$

$$(M'_i)_{12} = (M'_i)_{21} = \int_0^{l_i} \rho_i \psi_1(x) \psi_2(x) dx \quad (2.22)$$

$$(M'_i)_{22} = \int_0^{l_i} \rho_i \psi_2^2(x) dx \quad (2.23)$$

Introduzindo as funções de forma (2.2) nas expressões (2.21) a (2.23) e efetuando as integrações indicadas, obtém-se a matriz de massa consistente em nível elementar correspondente aos deslocamentos longitudinais:

$$[M'_i] = \frac{m_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

onde  $m_i = \rho_i A_i l_i$ .

Para obtenção das equações diferenciais do movimento relativas às vibrações longitudinais, utilizam-se as equações de Lagrange (Craig Jr., 1981):

$$\frac{\partial L'_i}{\partial \{U_i(t)\}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'_i}{\partial \{\dot{U}_i(t)\}} \right) = 0 \quad (2.25)$$

onde  $L'_i = T'_i - V'_i$  é o Lagrangeano.

Empregando as equações (2.3) e (2.16) e efetuando as derivações indicadas em (2.25), obtêm-se as equações do movimento em nível elementar:

$$[M'_i] \{\ddot{U}_i(t)\} + [K'_i] \{U_i(t)\} = \{P_i(t)\} \quad (2.26)$$

### 2.1.2 Equações do Movimento Transversal em Nível Elementar

Para obtenção das equações do movimento referentes às vibrações transversais, admite-se que o elemento seja solicitado axialmente por forças concentradas constantes (estáticas) aplicadas nos nós, as quais são denotadas por  $N_i$  na Figura 2.1. O campo de deslocamentos transversais é aproximado por uma função de interpolação cúbica da forma:

$$v_i(x,t) = \phi_1(x)v_i^E(t) + \phi_2(x)\theta_i^E(t) + \phi_3(x)v_i^D(t) + \phi_4(x)\theta_i^D(t) \quad (2.27)$$

Introduzindo a notação matricial, a equação (2.27) assume a forma:

$$v_i(x,t) = [\phi(x)] \{\delta_i(t)\} \quad (2.28)$$

onde:

$$\{\delta_i(t)\} = [v_i^E(t) \quad \theta_i^E(t) \quad v_i^D(t) \quad \theta_i^D(t)]^T \quad (2.29)$$

é o vetor dos graus de liberdade nodais e

$$[\phi_i(x)] = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \phi_3(x) \quad \phi_4(x)] \quad (2.30)$$

é o vetor das funções de forma, que são dadas pelas seguintes expressões (Craig Jr, 1981):

$$\phi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{l_i}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l_i}\right)^3 \quad (2.31)$$

$$\phi_2(x) = x - 2l_i\left(\frac{x}{l_i}\right)^2 + l_i\left(\frac{x}{l_i}\right)^3 \quad (2.32)$$

$$\phi_3(x) = 3\left(\frac{x}{l_i}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l_i}\right)^3 \quad (2.33)$$

$$\phi_4(x) = -l_i\left(\frac{x}{l_i}\right)^2 + l_i\left(\frac{x}{l_i}\right)^3 \quad (2.34)$$

A expressão da energia potencial total associada aos deslocamentos transversais, levando em conta o acoplamento entre a solitação axial e a flexão é dada por Chajes (1974):

$$V_i^f(t) = \int_0^{l_i} \left\{ \frac{1}{2} E_i I_i \left[ \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 - q_i(x,t) v_i(x,t) - \frac{N_i}{2} \left[ \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x} \right]^2 \right\} dx \quad (2.35)$$

Nesta última equação é introduzida a aproximação (2.27), o que conduz à seguinte expressão:

$$V_i^f(t) = \frac{1}{2} \{\delta_i(t)\}^T [K_i^f] \{\delta_i(t)\} - \{\delta_i(t)\}^T \{Q_i(t)\} \quad (2.36)$$

onde:

$$\bullet \quad \{Q_i(t)\} = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad q_3(t) \quad q_4(t)]^T$$

$$\bullet \quad [K_i^f] = [K_i^E] + [K_i^G]$$

$$\bullet \quad [K_i^E] = \begin{bmatrix} k_{11}^E & k_{12}^E & k_{13}^E & k_{14}^E \\ k_{21}^E & k_{22}^E & k_{23}^E & k_{24}^E \\ k_{31}^E & k_{32}^E & k_{33}^E & k_{34}^E \\ k_{41}^E & k_{42}^E & k_{43}^E & k_{44}^E \end{bmatrix}, \quad [K_i^G] = \begin{bmatrix} k_{11}^G & k_{12}^G & k_{13}^G & k_{14}^G \\ k_{21}^G & k_{22}^G & k_{23}^G & k_{24}^G \\ k_{31}^G & k_{32}^G & k_{33}^G & k_{34}^G \\ k_{41}^G & k_{42}^G & k_{43}^G & k_{44}^G \end{bmatrix}$$

com:

$$q_r(t) = \int_0^{l_i} q_r(t) \phi_r(x) dx \quad , \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (2.37)$$

$$k_{rs}^E = \int_0^{l_i} E_r I_r \phi_r''(x) \phi_s''(x) dx \quad , \quad r, s = 1, 2, 3, 4 \quad (2.38)$$

$$k_{rs}^G = \int_0^{l_i} N_r \phi_r'(x) \phi_s'(x) dx \quad , \quad r, s = 1, 2, 3, 4 \quad (2.39)$$

Neste ponto, inserem-se as expressões das funções de forma (2.31) a (2.34) nas equações (2.38) e (2.39) e efetuam-se as integrações, a fim de obter as duas parcelas da matriz de rigidez elementar sob a forma:

$$[K_i^E] = \frac{E_i I_i}{l_i^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_i & -12 & 6l_i \\ & 4l_i^2 & -6l_i & 2l_i^2 \\ & & 12 & -6l_i \\ \text{sim} & & & 4l_i^2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$[K_i^G] = \frac{N_i}{l_i} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{l_i}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{l_i}{10} \\ & \frac{2l_i^2}{15} & -\frac{l_i}{10} & -\frac{l_i^2}{30} \\ & & \frac{6}{5} & -\frac{l_i}{10} \\ sim & & & \frac{2l_i^2}{15} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Observe-se que  $[K_i^E]$  é a matriz de rigidez dita estrutural e  $[K_i^G]$  é a chamada matriz de rigidez geométrica, sendo esta última associada à influência do carregamento axial sobre a rigidez à flexão, representando, portanto, o efeito do enrijecimento por tensões.

Para avaliar as componentes dos esforços nodais considera-se que o carregamento transversal seja uniforme  $q_i(x,t)=q_i(t)$  e efetuam-se as operações indicadas a seguir:

$$q_1(t) = \int_0^{l_i} q_i(t) \phi_1(x) dx = \frac{1}{2} q_i(t) l_i \quad (2.42)$$

$$q_2(t) = \int_0^{l_i} q_i(t) \phi_2(x) dx = \frac{1}{12} q_i(t) l_i^2 \quad (2.43)$$

$$q_3(t) = \int_0^{l_i} q_i(t) \phi_3(x) dx = \frac{1}{2} q_i(t) l_i \quad (2.44)$$

$$q_4(t) = \int_0^{l_i} q_i(t) \phi_4(x) dx = -\frac{1}{12} q_i(t) l_i^2 \quad (2.45)$$

Negligenciando a inércia de rotação das seções transversais, a energia cinética associada ao deslocamento transversal é dada pela equação (Craig Jr., 1981):

$$T_i^f(t) = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \rho_i \left( \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.46)$$

Combinando as equações (2.28) e (2.46) obtém-se:

$$T_i^f(t) = \frac{1}{2} \{ \dot{\delta}_i(t) \}^T [M_i^f] \{ \dot{\delta}_i(t) \} \quad (2.47)$$

onde:

$$[M_i^f] = \int_0^{l_i} [\phi_i(x)]^T [\phi_i(x)] dx \quad (2.48)$$

com:

$$(M_i^f)_{rs} = (M_i^f)_{sr} = \rho_i \int_0^{l_i} \phi_r(x) \phi_s(x) dx \quad (2.49)$$

Efetuada as integrações indicadas obtém-se a matriz de massa elementar consistente correspondente ao movimento de flexão:

$$[M_i^f] = \frac{m_i}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_i & 54 & -13l_i \\ & 4l_i^2 & 13l_i & -3l_i^2 \\ & & 156 & -22l_i \\ sim & & & 4l_i^2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

onde  $m_i = \rho_i A_i l_i$ .

Para obtenção das equações diferenciais do movimento relativas às vibrações transversais, empregam-se as equações de Lagrange (Craig Jr., 1981):

$$\frac{\partial L_i^f}{\partial \{ \delta_i(t) \}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_i^f}{\partial \{ \dot{\delta}_i(t) \}} \right) = 0 \quad (2.51)$$

com  $L_i^f = T_i^f - V_i^f$ .

Empregando as equações (2.35) e (2.46) e efetuando as derivações indicadas em (2.51), obtém-se as equações do movimento em nível elementar:

$$[M_i^f] \{\ddot{\delta}_i(t)\} + [K_i^f] \{\delta_i(t)\} = \{Q_i(t)\} \quad (2.52)$$

### 2.1.3 Equações do Movimento Longitudinal e Transversal em Nível Elementar

Como os deslocamentos longitudinais e transversais são independentes, pode-se combinar as equações (2.26) e (2.52), a fim de obter as equações de equilíbrio em nível elementar envolvendo os seis graus de liberdade do elemento de viga, como segue:

$$[M_i] \{\ddot{\Delta}_i(t)\} + [K_i] \{\Delta_i(t)\} = \{F_i(t)\} \quad (2.53)$$

onde:

- $[M_i] \in R^{6 \times 6}$  : matriz de massa elementar que considera os deslocamentos longitudinais e transversais,
- $[K_i] \in R^{6 \times 6}$  : matriz de rigidez elementar que considera os deslocamentos longitudinais e transversais,
- $\{F_i(t)\} \in R^6$  : vetor dos esforços elementares,
- $\{\Delta_i(t)\} \in R^6$  : vetor de deslocamentos elementares.

com:

$$[K_i] = [K_i^L] + [K_i^G] \quad (2.54)$$

$$\left[ K_i^E \right] = \begin{bmatrix} \frac{E_i A_i}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{E_i A_i}{l_i} & 0 & 0 \\ & \frac{12E_i I_i}{l_i^3} & \frac{6E_i I_i}{l_i^2} & 0 & -\frac{12E_i I_i}{l_i^3} & \frac{6E_i I_i}{l_i^2} \\ & & \frac{4E_i I_i}{l_i} & 0 & -\frac{6E_i I_i}{l_i^2} & \frac{2E_i I_i}{l_i} \\ & & & \frac{E_i A_i}{l_i} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12E_i I_i}{l_i^3} & -\frac{6E_i I_i}{l_i^2} \\ \text{sim} & & & & & \frac{4E_i I_i}{l_i} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\left[ K_i^G \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6 N_i}{5 l_i} & \frac{1}{10} N_i & 0 & -\frac{6 N_i}{5 l_i} & \frac{1}{10} N_i \\ & & \frac{2}{15} N_i l_i & 0 & -\frac{1}{10} N_i & -\frac{1}{30} N_i l_i \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{6 N_i}{5 l_i} & -\frac{1}{10} N_i \\ \text{sim} & & & & & \frac{2}{15} N_i l_i \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\left[ M_i \right] = \frac{m_i}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22l_i & 0 & 54 & -13l_i \\ & & 4l_i^2 & 0 & 13l_i & -3l_i^2 \\ & & & 70 & 0 & 0 \\ & & & & 156 & -22l_i \\ \text{sim} & & & & & 4l_i^2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\{ F_i(t) \} = \left\{ \frac{p_i l_i}{2} \quad \frac{q_i l_i}{2} \quad \frac{q_i l_i^2}{12} \quad \frac{p_i l_i}{2} \quad \frac{q_i l_i}{2} \quad -\frac{q_i l_i^2}{12} \right\}^T \quad (2.58)$$

$$\{ \Delta_i(t) \} = [ u_i^E(t) \quad v_i^E(t) \quad \theta_i^E(t) \quad u_i^D(t) \quad v_i^D(t) \quad \theta_i^D(t) ]^T \quad (2.59)$$

### 2.1.4 Montagem das Matrizes Globais

Para ilustrar o procedimento de montagem das matrizes globais a partir das matrizes elementares, considera-se o acoplamento de apenas dois elementos, ilustrados na Figura 2.2. Evidentemente, o procedimento pode ser aplicado para um número qualquer de elementos.

Para simplificar a notação, omite-se, temporariamente, a dependência dos graus de liberdade em relação ao tempo:

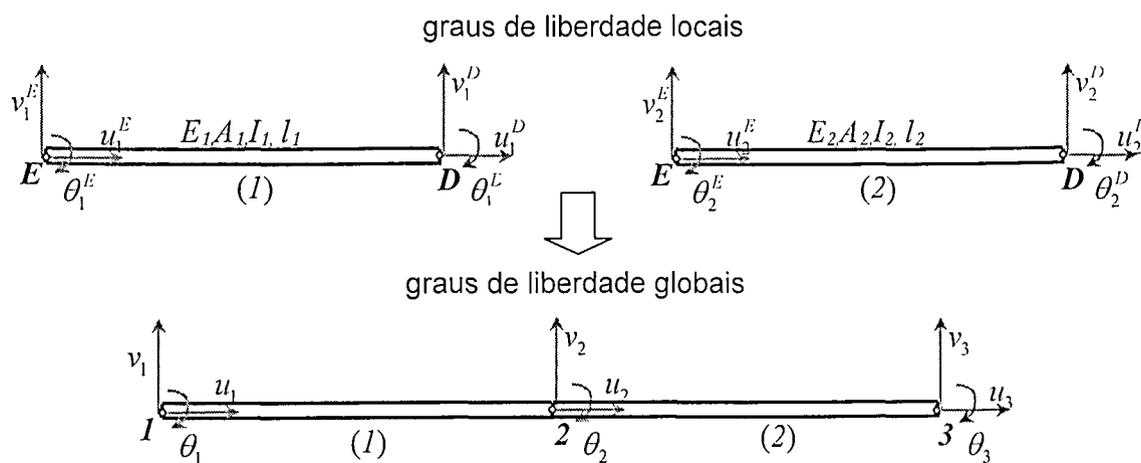


Figura 2.2 - Acoplamento de dois elementos (Rade, 2003).

Estabelece-se para cada elemento, uma transformação linear que relaciona os graus de liberdade locais e globais, como segue:

- **Elemento 1**

$$\begin{Bmatrix} u_1^E \\ v_1^E \\ \theta_1^E \\ u_1^D \\ v_1^D \\ \theta_1^D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\delta_i\} = [T_1]\{\Delta\} \quad (2.60)$$

- Elemento 2

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2^E \\ v_2^E \\ \theta_2^E \\ u_2^D \\ v_2^D \\ \theta_1^D \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \{\delta_2\} = [T_2]\{\Delta\} \quad (2.61)$$

A energia cinética total é a soma da energia cinética de ambos elementos.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_1\}^T [M_1] \{\dot{\delta}_1\} + \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_2\}^T [M_2] \{\dot{\delta}_2\} \quad (2.62)$$

Substituindo as transformações lineares (2.60) e (2.61) na expressão anterior, escreve-se:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\Delta}\}^T [M] \{\dot{\Delta}\} \quad (2.63)$$

onde a matriz de massa global é dada por:

$$[M] = [T_1]^T [M_1] [T_1] + [T_2]^T [M_2] [T_2] \quad (2.64)$$

Da mesma forma, a energia potencial total é a soma da energia potencial de ambos elementos:

$$V = \frac{1}{2} \{\delta_1\}^T [K_1] \{\delta_1\} - \{\delta_1\}^T \{F_1\} + \frac{1}{2} \{\delta_2\}^T [K_2] \{\delta_2\} - \{\delta_2\}^T \{F_2\} \quad (2.65)$$

Substituindo as transformações lineares (2.60) e (2.61) na expressão anterior, escreve-se:

$$V = \frac{1}{2} \{\Delta\}^T [K] \{\Delta\} - \{\Delta\}^T \{F\} \quad (2.66)$$

onde a matriz de rigidez global é expressa segundo:

$$[K] = [T_1]^T [K_1] [T_1] + [T_2]^T [K_2] [T_2] \quad (2.67)$$

e o vetor de esforços generalizados globais:

$$\{F\} = [T_1]^T \{F_1\} + [T_2]^T \{F_2\} \quad (2.68)$$

Aplicando novamente as equações de Lagrange, obtêm-se as equações do movimento em nível global:

$$[M] \{\ddot{\Delta}(t)\} + [K] \{\dot{\Delta}(t)\} = [F(t)] \quad (2.69)$$

Deve-se ressaltar que, considerando o efeito de enrijecimento por tensões, a matriz global  $[K]$  resultará composta por duas parcelas, de acordo com (2.54):

$$[K] = [K^E] + [K^G] \quad (2.70)$$

No caso de sistemas estruturais do tipo pórticos planos, que são considerados neste trabalho, as barras podem ter orientações arbitrárias em relação ao sistema de coordenadas global, conforme ilustrado na Figura 2.3, que mostra um elemento de viga orientado segundo um ângulo ( $\theta_i$ ) em relação ao eixo global  $OX$ .

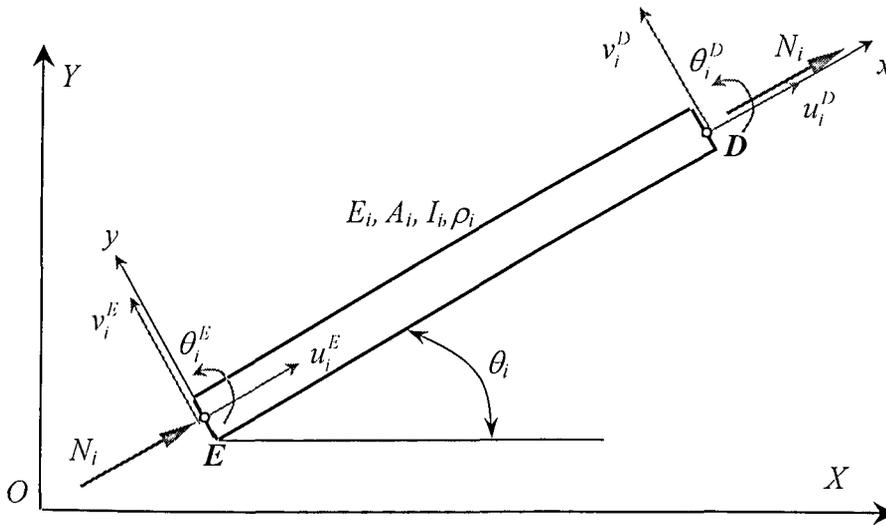


Figura 2.3 - Sistemas de referência local e global em um elemento de viga.

Neste caso, anteriormente à montagem das matrizes elementares, deve-se introduzir matrizes de rotação que promovem a passagem dos graus de liberdade e dos esforços nodais representados nos sistemas de eixos locais para um sistema de coordenadas global comum. Pode-se mostrar (Craig Jr., 1981), que após esta transformação, as matrizes globais e os vetores de esforços generalizados são dados por:

$$[K_i^g] = [\Theta_i]^T [K_i] [\Theta_i] \quad (2.71)$$

$$[M_i^g] = [\Theta_i]^T [M_i] [\Theta_i] \quad (2.72)$$

$$\{F_i^g\} = [\Theta_i]^T \{F_i\} \quad (2.73)$$

onde a matriz transformação é dada por:

$$[\Theta_i] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \text{sen}(\theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_i) & \text{sen}(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

### 2.1.5 Imposição das Condições de Contorno

Para imposição de restrições cinemáticas em termos de deslocamentos e/ou rotações, traduzindo as condições de contorno geométricas, introduz-se um particionamento de coordenadas na equação (2.69):

$$\begin{bmatrix} M_{ll} & M_{li} \\ M_{il} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\Delta}_l \\ \ddot{\Delta}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ll} & K_{li} \\ K_{il} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_l \\ \Delta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_l \\ F_i \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

onde os sub índices  $l$  e  $i$  designam os graus de liberdade livres e os graus de liberdade impostos, respectivamente. Expandido os dois blocos de equações, escreve-se:

$$[M_{ll}]\{\ddot{\Delta}_l\} + [M_{li}]\{\ddot{\Delta}_i\} + [K_{ll}]\{\Delta_l\} + [K_{li}]\{\Delta_i\} = \{F_l\} \quad (2.76)$$

$$[M_{il}]\{\ddot{\Delta}_l\} + [M_{ii}]\{\ddot{\Delta}_i\} + [K_{il}]\{\Delta_l\} + [K_{ii}]\{\Delta_i\} = \{F_i\} \quad (2.77)$$

A partir do primeiro bloco de equações (2.76) obtêm-se as equações do movimento contendo exclusivamente os graus de liberdade livres:

$$[M_{ll}]\{\ddot{\Delta}_l\} + [K_{ll}]\{\Delta_l\} = \{F_l\} - [M_{li}]\{\ddot{\Delta}_i\} - [K_{li}]\{\Delta_i\} \quad (2.78)$$

Uma vez calculadas as respostas nas coordenadas livres mediante a resolução numérica de (2.78), pode-se empregar as equações (2.77) para calcular os esforços de reação aplicados segundo as coordenadas impostas.

No caso particular em que as condições de contorno correspondem a bloqueio dos graus de liberdade impostos  $\{\Delta_i\} = \{\ddot{\Delta}_i\} = \{0\}$ , a equação (2.78) fica reduzida a:

$$[M_{ll}]\{\ddot{\Delta}_l\} + [K_{ll}]\{\Delta_l\} = \{F_l\} \quad (2.79)$$

## 2.2 Análises Numéricas

De posse das equações matriciais do movimento associadas ao modelo de elementos finitos, expressas por (2.78), além da análise de respostas temporais a um dado carregamento e/ou condições iniciais, que pode ser feita por meio da resolução numérica do sistema de equações do movimento, pode-se efetuar outros tipos de análise numérica em regime estático ou dinâmico, conforme procedimento descrito nas sub-seções seguintes:

### 2.2.1 Análise Estática

Na análise estática é possível calcular as deformações, forças, tensões e momentos fletores. Deste modo, para o elemento  $i$  a tensão normal provocada pelos esforços longitudinais é dada por:

$$\sigma_i(x,t) = E_i \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} \quad (2.80)$$

Introduzindo a aproximação (2.1) com as funções de forma (2.2) e efetuando a operação indicada, obtém-se:

$$\sigma_i(t) = \frac{E_i}{l_i} [u_i^D(t) - u_i^E(t)] \quad (2.81)$$

Como  $\sigma_i = P_i / A_i$ , então a força axial atuante no elemento resulta:

$$P_i(t) = \frac{E_i A_i}{l_i} [u_i^D(t) - u_i^E(t)] \quad (2.82)$$

O momento fletor e a força cortante elementares são definidos por:

$$M_i(x,t) = E_i I_i \frac{d^2 v_i(x,t)}{dx^2} \quad (2.83)$$

$$V_i(x,t) = E_i I_i \frac{d^3 v(x,t)}{dx^3} \quad (2.84)$$

Efetuada as operações indicadas nas expressões anteriores, empregando a aproximação (2.27) com as funções de forma (2.31) a (2.34), o momento fletor e a força cortante resultam:

$$M_i(t) = \frac{6E_i I_i}{l_i^2} [v_i^E(t) - v_i^D(t)] + \frac{4E_i I_i}{l_i} \theta_i^E(t) + \frac{2E_i I_i}{l_i} \theta_i^D(t) \quad (2.85)$$

$$V_i(t) = \frac{12E_i I_i}{l_i^3} [v_i^E(t) - v_i^D(t)] + \frac{6E_i I_i}{l_i^2} [\theta_i^E(t) + \theta_i^D(t)] \quad (2.86)$$

### 2.2.2 Análise de Estabilidade Linear

Para calcular o valor da carga crítica, deve-se resolver o seguinte problema de autovalor (Chajes, 1974):

$$([K_{II}^E] - \lambda_r [K_{II}^G]) \{\Delta_r\} = \{0\} \quad (2.87)$$

onde os autovalores  $\lambda_r$  fornecem as cargas críticas de flambagem e os autovetores  $\{\Delta_r\}$  fornecem as deformadas correspondentes.

### 2.2.3 Análise Modal

A análise modal numérica é realizada mediante a resolução do seguinte problema de autovalor:

$$([K_{II}] - \lambda_r [M_{II}]) \{\Delta_r\} = \{0\} \quad (2.88)$$

com  $[K_{II}] = [K_{II}^E] + [K_{II}^G]$ .

A resolução numérica de (2.87) conduz aos autovalores  $\lambda_r$ , que fornecem as frequências naturais e aos autovetores  $\{\Delta_r\}$  fornecem os modos de vibração correspondentes.

É importante ressaltar que, para se fazer uma análise dinâmica de estruturas bidimensionais levando em conta o efeito de enrijecimento por tensões, induzido pelos esforços axiais, é necessário realizar previamente uma análise estática da estrutura submetida ao carregamento externo para, de acordo com a equação (2.82), calcular o esforço axial atuante em cada elemento. Tais esforços são então utilizados na construção da matriz de rigidez geométrica  $[K_{II}^G]$  que figura em (2.88).

## 2.2.4 Análise Harmônica

A análise harmônica é aqui entendida como o cálculo das funções de resposta em frequência (FRFs), conforme desenvolvimento a seguir.

Considerando uma excitação harmônica com frequência  $\Omega$ , do tipo  $\{F_I(t)\} = \{\bar{F}_I\}e^{j\Omega t}$ , à qual corresponde um vetor de respostas harmônicas em regime permanente dada por  $\{\Delta_I(t)\} = \{\bar{\Delta}_I\}e^{j\Omega t}$ , pode-se verificar, a partir da equação do movimento (2.78), que os vetores de amplitudes de resposta e de excitação guardam entre si a relação (Maia, 1997):

$$\{\bar{\Delta}_I\} = [H_{II}(\Omega)]\{\bar{F}_I\} \quad (2.89)$$

onde a matriz de receptâncias ou de funções de respostas em frequência é dada por:

$$[H_{II}(\Omega)] = ([K_{II}] - \Omega^2 [M_{II}])^{-1} \quad (2.90)$$

com  $[K_{II}] = [K_{II}^E] + [K_{II}^G]$ .

À semelhança do que ocorre com a análise modal, para se levar em conta o efeito de enrijecimento por tensões na análise harmônica é necessário realizar previamente uma análise estática da estrutura submetida ao carregamento estático externo para, de acordo com a equação (2.82), calcular o esforço axial atuante em cada elemento. Tais esforços são então utilizados na construção da matriz de rigidez geométrica  $[K_{II}^G]$  que intervém em (2.90).

## CAPÍTULO III

### Caracterização Numérica do Comportamento Dinâmico de Colunas e Pórticos Planos Considerando o Enrijecimento por Tensões

Neste capítulo caracteriza-se, através de simulações numéricas, a influência do enrijecimento por tensões sobre o comportamento dinâmico de colunas e pórticos planos, constituídos por elementos de viga de Euler-Bernoulli. Os resultados são apresentados em termos de parâmetros modais (frequências e modos naturais de vibração) e funções de resposta em frequência. A modelagem por elementos finitos de ambos os tipos de estrutura foi desenvolvida em ambiente MATLAB® 6.0 com base na formulação apresentada no Capítulo II.

Os modelos são inicialmente validados pela confrontação das respostas dinâmicas computadas com as correspondentes obtidas utilizando o programa comercial de elementos ANSYS® 6.0.

#### 3.1 Coluna Bi-apoiada

Foi elaborado um modelo de uma coluna uniforme bi-apoiada, constituído por 10 elementos de viga e 11 nós, ilustrado na Figura 3.1. Cada elemento possui 2 nós e 3 graus de liberdade por nó. Desta forma, o modelo consta de um total de 30 graus de liberdade, número este obtido após a restrição dos graus de liberdade dos nós das extremidades da coluna para levar em conta as condições de contorno geométricas.

As dimensões e propriedades mecânicas utilizadas são apresentadas na Tabela 3.1, onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\rho$  é a densidade volumétrica e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Tabela 3.1 - Dimensões e propriedades mecânicas da coluna.

$H$ [m]	$A$ [m]	$B$ [m]	$E$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
4,00	0,10	0,20	$2,10 \times 10^{11}$	0,30	7800

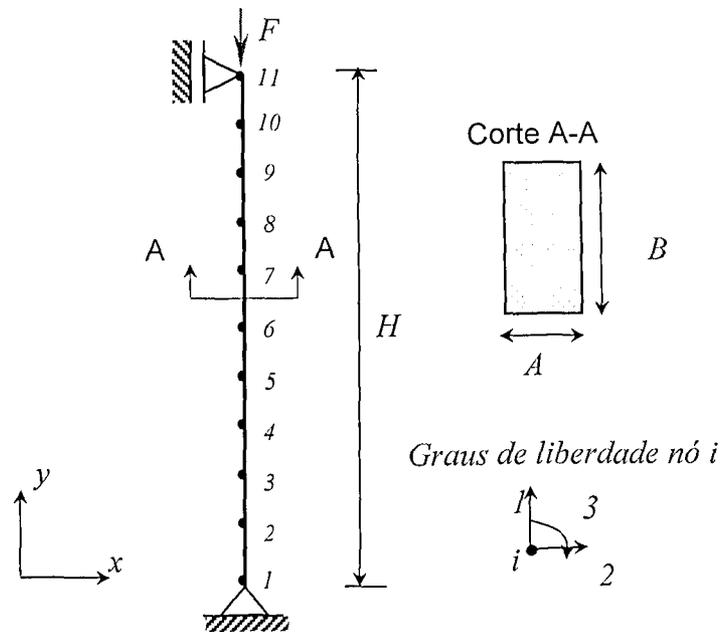


Figura 3.1- Modelo de coluna bi-apoiada.

### 3.1.1 Validação do Modelo de Coluna

A título de validação do procedimento de modelagem implementado, foram calculadas as seis primeiras cargas críticas de flambagem e as seis frequências naturais da coluna descarregada ( $F = 0$ ). Estes cálculos foram realizados com base na resolução numérica da equação (2.87).

Na Tabela 3.2, os resultados obtidos são comparados com os resultados fornecidos pelo programa ANSYS® e com os valores teóricos das cargas críticas de flambagem, calculadas empregando a equação (A.4), do Anexo A. Na tabela, verifica-se que os valores das cargas críticas dos modelos de elementos finitos são praticamente idênticas. Um maior grau de discretização dos modelos permite reduzir a diferença observada entre os valores das cargas críticas dos modelos e os valores teóricos. Verifica-se também uma boa aproximação das frequências naturais de ambos os modelos, sendo os valores teóricos das frequências naturais, calculadas empregando a expressão (A.5). Acredita-se que as diferenças existentes podem estar ligadas à diferença da matriz de massa dos sistemas analisados pelos modelos.

Tabela 3.2 - Cargas críticas e freqüências naturais de vibração da coluna.

Cargas Críticas ( $\times 10^6$ N)			Freqüências Naturais [Hz]		
Teóricas	Modelo Implementado	ANSYS®	Teóricas	Modelo Implementado	ANSYS®
8,64	8,64	8,64	22,91	29,41	29,38
34,54	34,55	34,55	101,46	117,65	117,16
77,72	77,81	77,81	232,16	264,84	262,42
138,17	138,62	138,62	415,10	324,63	324,63
215,90	217,52	217,52	650,30	471,35	463,78
310,89	315,52	315,52	937,77	738,16	719,89

A validação do procedimento de modelagem da coluna sob efeito de carregamento longitudinal é feita com base na Tabela 3.3, onde são comparados os valores das seis primeiras freqüências naturais da coluna sujeita a uma carga de compressão  $F = 2 \times 10^6$  N aplicada na extremidade superior da coluna (nó 11). Verifica-se aqui também que o modelo implementado da coluna fornece valores de freqüências naturais bem próximas dos valores obtidos através do ANSYS®. Desta forma, fica validado o procedimento de modelagem da coluna com inclusão do efeito de enrijecimento por tensões.

Tabela 3.3 - Freqüências naturais da coluna sujeita a carga axial  $F = 2,0 \times 10^6$  N.

Modelo	Freqüências naturais [Hz]					
	1	2	3	4	5	6
Implementado	25,78	114,20	261,41	324,63	467,93	734,76
ANSYS®	25,75	113,72	258,88	324,31	459,65	713,74

### 3.1.2 Caracterização do Enrijecimento por Tensões da Coluna

Utilizando o procedimento de modelagem apresentado no Capítulo II, analisa-se, nesta seção, a influência do enrijecimento por tensões sobre as vibrações transversais da coluna bi-apoiada ilustrada na Figura 3.1. Para tanto, o valor e o sentido de aplicação da carga é variado,

calculando-se, para cada valor, as freqüências naturais e as funções de resposta em freqüência da coluna.

A Tabela 3.4 permite avaliar a modificação dos valores numéricos das seis primeiras freqüências naturais em função da magnitude e do sentido de aplicação da carga, sendo a magnitude expressa em termos de frações da primeira carga crítica de flambagem (a qual, para a coluna em questão, vale  $8,636 \times 10^6$  N). Os sinais (+) e (-) indicam as cargas de tração e compressão, respectivamente.

Evidentemente, no caso de solicitação de tração, em uma situação real de projeto, é necessário verificar se a coluna está corretamente dimensionada ao escoamento, o que é feito comparando a tensão normal a que está sujeita com o limite de escoamento à tração do material.

Tabela 3.4 - Freqüências naturais da coluna em função da carga axial.

Carga axial (% $P_{crit}$ )	Freqüências naturais [Hz]					
	1	2	3	4	5	6
-100,00	0,003	101,90	249,71	324,63	456,43	723,36
-75,00	14,71	106,05	253,57	324,63	460,20	727,09
-50,00	20,80	110,06	257,38	324,63	463,95	730,80
-25,00	25,47	113,92	261,14	324,63	467,66	734,49
-12,50	27,51	115,80	262,99	324,63	469,51	736,33
0,00	29,41	117,65	264,84	324,63	471,35	738,16
12,50	31,20	119,48	266,67	324,63	473,18	739,99
25,00	32,88	121,27	268,48	324,63	475,00	741,82
50,00	36,02	124,79	272,09	324,63	478,63	745,45
75,00	38,91	128,21	275,64	324,63	482,23	749,07
100,00	41,60	131,54	279,15	324,63	485,81	752,67

Na tabela acima verifica-se a contínua diminuição das freqüências naturais à medida que a magnitude da carga de compressão aumenta, ou seja, a coluna perde rigidez à flexão com o acréscimo de carga de compressão. Por outro lado, observa-se o contínuo aumento das freqüências naturais com o aumento da magnitude da carga de tração, ou seja, a coluna enrijece-se à flexão com o acréscimo de carga de tração. Observa-se também que a primeira freqüência natural torna-se nula quando a carga de compressão aplicada equivale à carga crítica de flambagem. Da mesma forma, as freqüências naturais de ordem superior tornam-se nulas para a aplicação de cargas de flambagem da mesma ordem. Por exemplo, a segunda

freqüência natural torna-se nula quando se aplica uma força de compressão correspondente à segunda carga de flambagem, e assim por diante (este comportamento não está ilustrado nos resultados apresentados). Evidentemente, este é uma descrição puramente teórica do comportamento, já que, nas situações práticas, não havendo contraventamento, o máximo valor da carga de compressão que a coluna pode suportar é aquele correspondente à primeira carga de flambagem.

A redução das freqüências naturais com o aumento da carga axial de compressão constitui a base do chamado critério dinâmico para a determinação da carga de flambagem, o qual se baseia na determinação do valor de carga sob a qual a primeira freqüência de vibração se anula. Conforme evidenciado por Bolotin (1963), este é um critério de estabilidade mais geral, sendo aplicável a problemas não conservativos aos quais não se aplica o critério de estabilidade baseada na coexistência de dois estados de equilíbrio estático.

Nos resultados apresentados observa-se, em particular, que a quarta freqüência natural não é alterada com a variação de carga axial. Isso se deve ao fato que esta freqüência corresponde a um modo de vibração longitudinal da coluna, como pode ser observado na Figura 3.2, onde são mostrados os seis primeiros modos naturais de vibração da coluna.

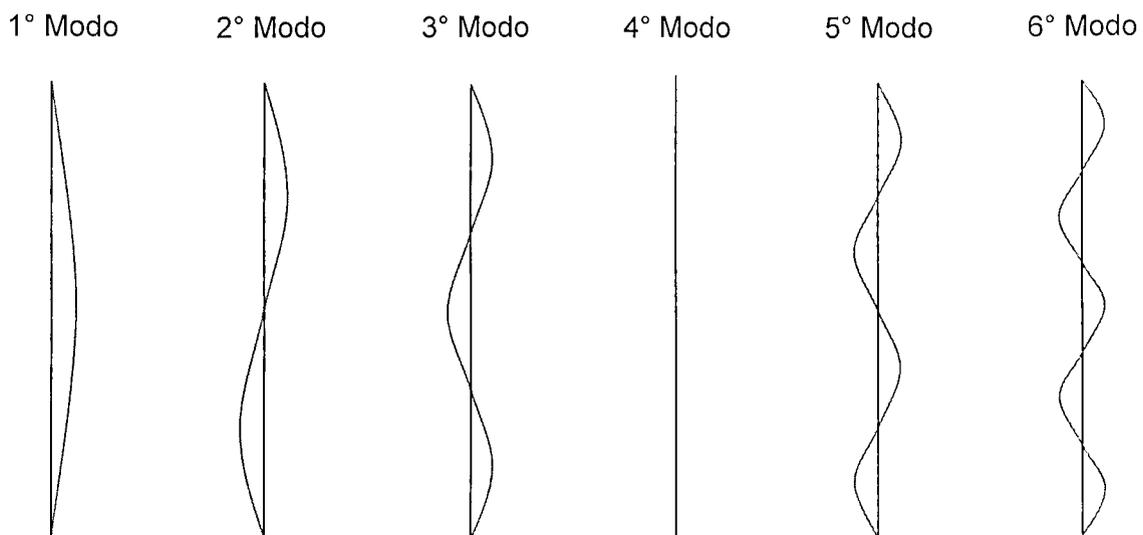


Figura 3.2 - Modos naturais de vibração da coluna.

A Figuras 3.3 e 3.4 mostram graficamente as variações (absolutas à esquerda e relativas à direita) das freqüências naturais em função de frações da carga crítica, para os dois sentidos de aplicação da carga externa. Observa-se que, em geral, as freqüências naturais não apresentam nenhuma relação de proporcionalidade em relação à carga. A primeira freqüência

natural sofre maiores variações que as demais e à medida que a carga de compressão se aproxima do valor crítico em compressão, estas variações tornam-se mais acentuadas.

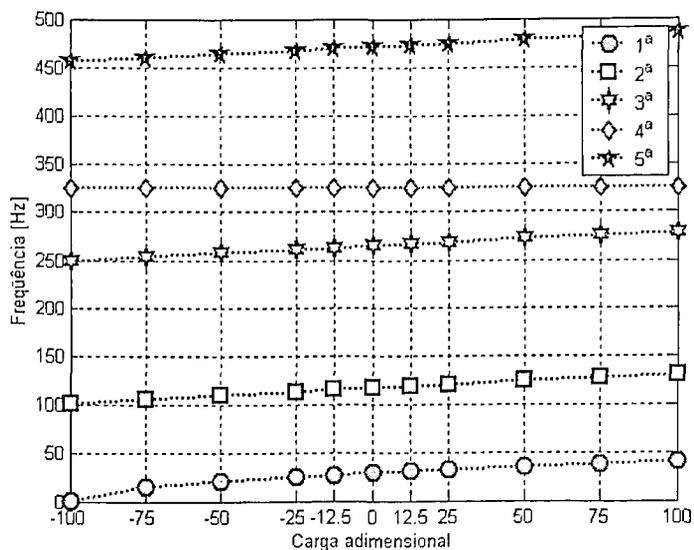


Figura 3.3 - Frequências naturais da coluna em função da carga axial.

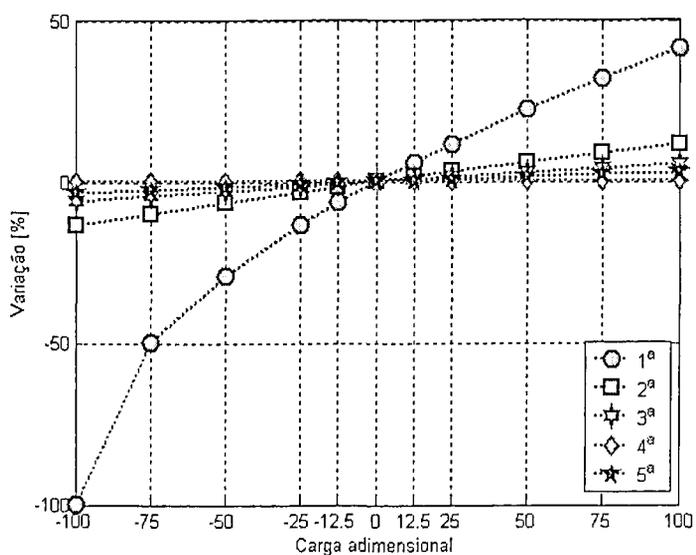


Figura 3.4 - Variação relativa das frequências naturais da coluna em função da carga axial.

As Figuras 3.5 a 3.7 permitem observar a influência da magnitude e do sentido do carregamento externo sobre as amplitudes de algumas funções de resposta em frequência da coluna. Os resultados evidenciam, mais uma vez, a variação da rigidez transversal da coluna sob a ação de cargas axiais, manifestado pelo aumento ou diminuição dos valores das

freqüências de ressonância e de anti-ressonância, quando sujeitas à ação de forças axiais de tração e de compressão, respectivamente.

Conforme evidenciado por Rade (1994), as freqüências de anti-ressonância de uma FRF pontual  $H_{ii}(\omega)$  correspondem às freqüências naturais da coluna sujeita a condições de contorno modificadas pelo bloqueio da coordenada  $i$ . De acordo com este princípio, a análise das anti-ressonâncias permite avaliar as cargas críticas de flambagem e observar a influência do enrijecimento por tensões sobre o comportamento vibratório transversal da coluna contraventada.

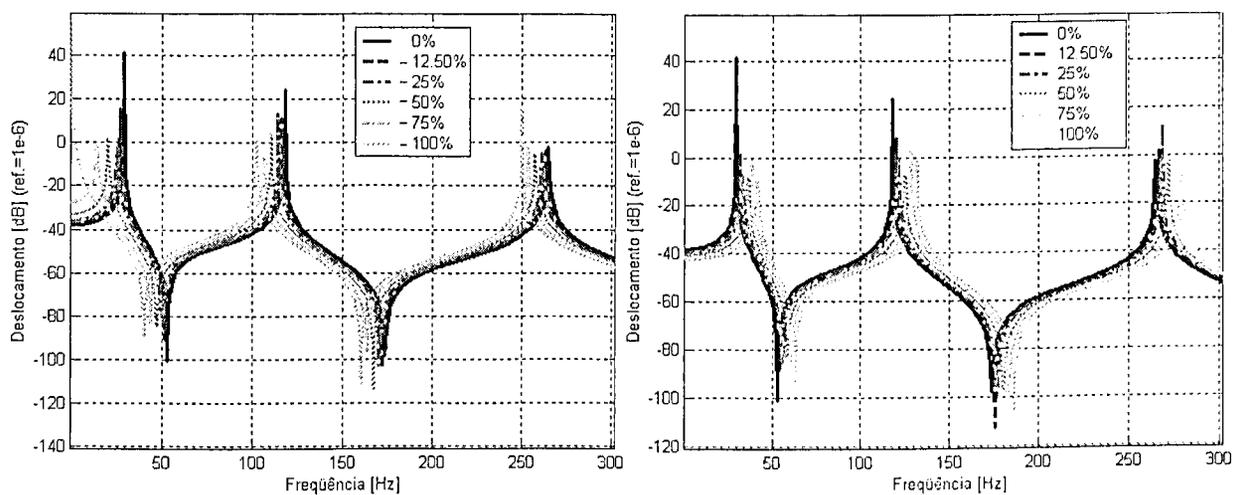


Figura 3.5- Amplitudes da FRF  $H_{22}$  da coluna em função da carga axial.

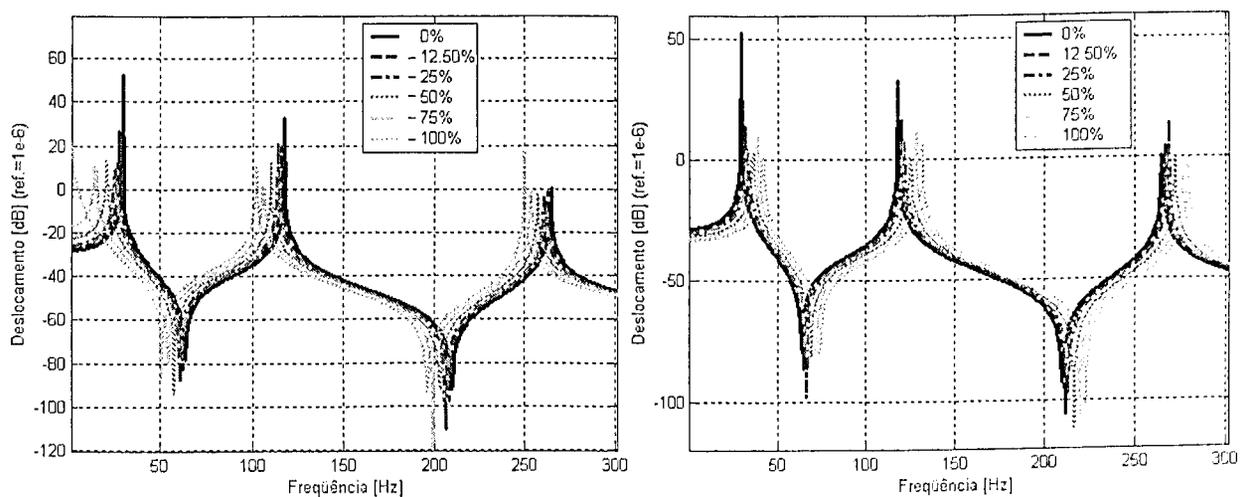


Figura 3.6 - Amplitudes da FRF  $H_{99}$  da coluna em função da carga axial.

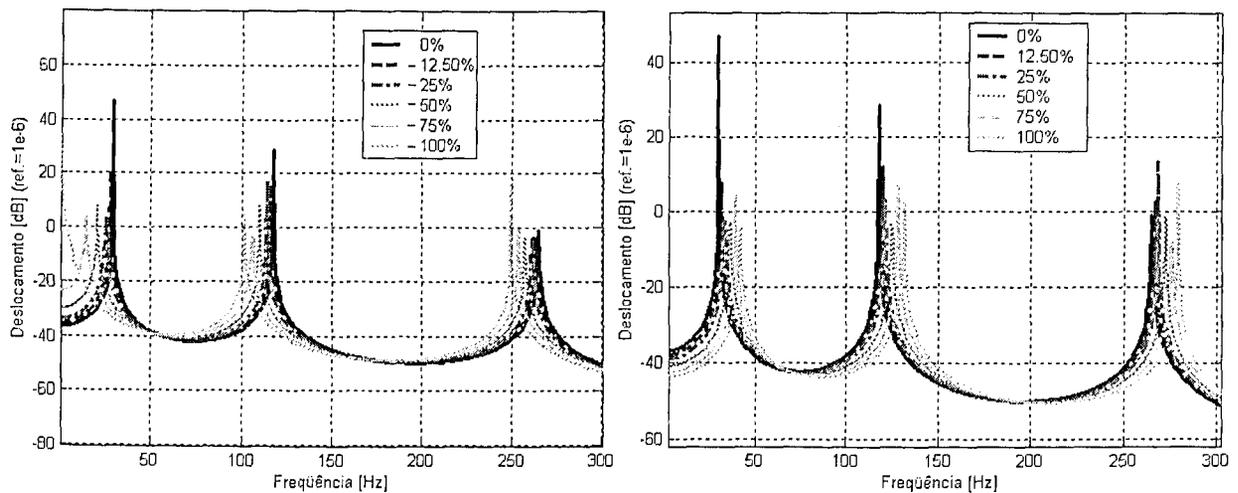


Figura 3.7- Amplitudes da FRF  $H_{29}$  da coluna em função da carga axial.

### 3.2 Pórtico Bidimensional

O comportamento dinâmico de um pórtico plano submetido a carregamento externo é caracterizado nesta seção. Com este objetivo, é utilizado o modelo de um pórtico ilustrado na Figura 3.8, constituído por 24 nós e 24 elementos de viga bidimensional de Euler-Bernoulli, com as mesmas características apresentadas para a coluna estudada na seção anterior. O modelo consta de um total de 66 graus de liberdade, número este obtido após a imposição das condições de contorno.

As dimensões e propriedades mecânicas do material do pórtico são apresentadas na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 - Dimensões e propriedades mecânicas do pórtico.

$B$ [m]	$H$ [m]	$b$ [m]	$h$ [m]	$E$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
1,50	1,00	0,04	0,015	$2,10 \times 10^{11}$	0,30	7800

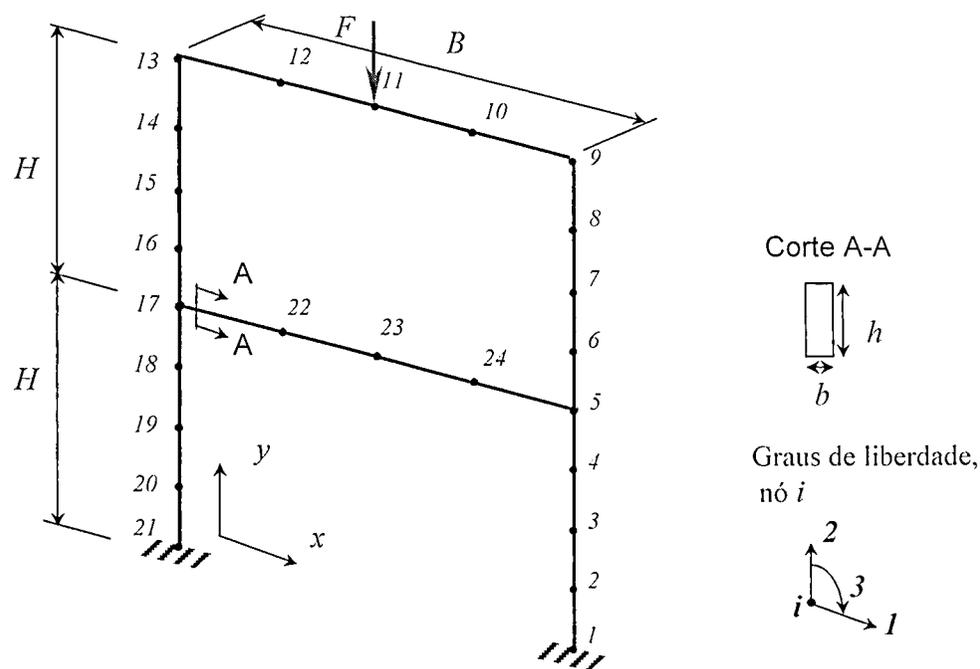


Figura 3.8 - Modelo de pórtico plano.

### 3.2.1 Validação do Modelo do Pórtico

Para a validação do procedimento de modelagem do pórtico foram calculadas as seis primeiras cargas críticas de flambagem e as seis primeiras frequências naturais com base na resolução numérica das equações (2.86) e (2.87).

As cargas críticas foram calculadas a partir da aplicação de uma força concentrada vertical, aplicada no nó número 11, conforme indicado na Figura 3.8.

Na Tabela 3.6, os resultados obtidos são comparados com os resultados fornecidos pelo programa ANSYS®, verificando-se que os valores das cargas críticas e das frequências naturais de ambos os modelos implementados da estrutura descarregada são muito próximos.

Tabela 3.6 - Cargas críticas e frequências naturais de vibração do pórtico.

Cargas Críticas (N) x10 <sup>+4</sup>		Freqs. Naturais [Hz]	
Modelo Implementado	ANSYS®	Modelo Implementado	ANSYS®
2,01	2,01	4,42	4,42
3,93	3,93	15,07	15,07
6,68	6,67	22,74	22,74
9,94	9,92	28,30	28,29
13,81	13,76	51,85	51,84
16,03	15,95	59,64	59,63

A validação do procedimento de modelagem do pórtico sob efeito de carregamento externo é feita com base nos valores apresentados na Tabela 3.7, onde são comparados os valores das seis primeiras frequências naturais do pórtico sujeito a uma força vertical dirigida para baixo  $F = -1,0 \times 10^4 \text{ N}$ . Pelos resultados verifica-se que o modelo implementado do pórtico fornece previsões muito próximas daquelas fornecidas pelo programa ANSYS®, fato que leva a concluir sobre a validação do procedimento de modelagem aplicado a estruturas bidimensionais.

Tabela 3.7 - Frequências naturais do pórtico sujeito a uma força  $F = -1,0 \times 10^4 \text{ N}$ .

Modelo	Frequências naturais [Hz]					
	1	2	3	4	5	6
Implementado	3,22	12,71	21,41	28,62	49,39	57,66
ANSYS®	3,22	12,71	21,41	28,62	49,39	57,65

### 3.2.2 Caracterização do Enrijecimento por Tensões do Pórtico

Nesta seção, verifica-se a influência do carregamento externo sobre o comportamento dinâmico do pórtico através do efeito do enrijecimento por tensões. Para tanto, o valor da força aplicada, indicada na Figura 3.8 é variado, calculando-se, para cada valor, suas frequências naturais.

A Tabela 3.8 permite avaliar a modificação dos valores numéricos das seis primeiras frequências naturais em função da magnitude e do sentido de aplicação da carga, sendo a magnitude expressa em termos de frações da carga crítica de flambagem. Valores positivos indicam força aplicada segundo a orientação do eixo  $y$  (para cima), ao passo que valores negativos indicam forças aplicadas no sentido oposto ao do eixo  $y$  (para baixo).

Tabela 3.8 - Frequências naturais do pórtico em função da carga aplicada.

Carga axial (% $P_{crit}$ )	Frequências naturais [Hz]					
	1	2	3	4	5	6
-100,00	$6,99 \times 10^{-5}$	9,78	19,80	28,90	46,69	55,65
-75,00	2,32	11,32	20,64	28,77	48,06	56,65
-50,00	3,21	12,69	21,40	28,63	49,38	57,65
-25,00	3,87	13,93	22,11	28,46	50,64	58,65
-12,50	4,15	14,51	22,43	28,38	51,25	59,14
0,00	4,42	15,07	22,74	28,30	51,86	59,64
12,50	4,66	15,61	23,03	28,21	52,43	60,14
25,00	4,89	16,13	23,30	28,14	53,00	60,63
50,00	5,32	17,12	23,78	28,01	54,11	61,62
75,00	5,71	18,05	24,14	27,94	55,17	62,59
100,00	6,07	18,94	24,37	27,96	56,17	63,56

Similarmente ao que fora constatado para a coluna estudada na seção precedente, na Tabela 3.8 verifica-se a contínua diminuição das frequências naturais à medida que a magnitude da carga de sentido contrário a  $y$  aumenta, ou seja, o pórtico perde rigidez com o acréscimo desta carga até que a primeira frequência natural torna-se nula quando a carga aplicada equivale à carga crítica de flambagem. Por outro lado, observa-se o contínuo aumento das frequências naturais com o acréscimo da magnitude da carga do mesmo sentido de  $y$ , ou seja, o pórtico enrijece-se com o acréscimo desta carga. A exceção é a quarta frequência natural, que exibe pequena variação, contrária às das demais. Tal fato pode ser explicado observando-se as formas modais apresentadas na Figura 3.9. Nota-se que, para o quarto modo, ao contrário dos demais, praticamente não ocorre movimento de flexão das barras na direção horizontal, perpendicular ao carregamento. Em outros termos, as barras verticais, que são submetidas aos maiores esforços axiais, virtualmente não se movimentam em flexão no modo em questão.

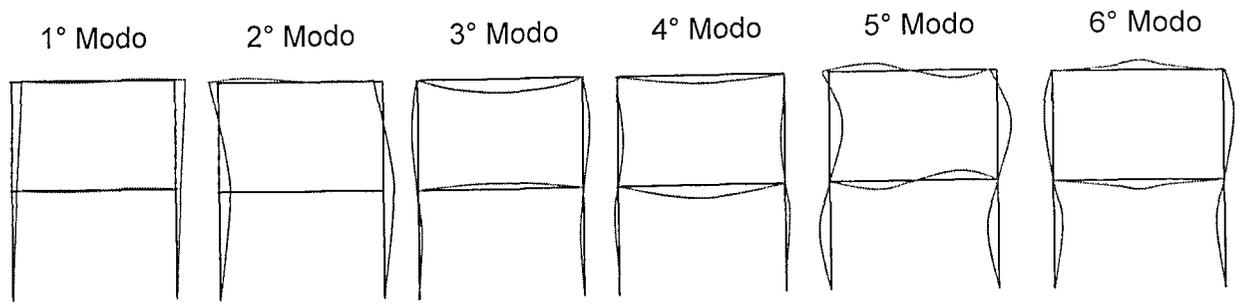


Figura 3.9- Modos naturais de vibração do pórtico.

As Figuras 3.10 e 3.11 mostram graficamente as variações (absolutas e relativas, à esquerda e à direita, respectivamente) das freqüências naturais do pórtico em função de frações da carga crítica, para os dois sentidos de aplicação da carga externa. Observa-se que, em geral, as freqüências naturais não apresentam proporcionalidade em relação à carga. A primeira freqüência natural sofre maiores variações que as demais e à medida que a carga se aproxima ao valor crítico de flambagem, estas variações são mais acentuadas. Nota-se ainda que a partir da quarta freqüência natural, os valores das freqüências variam com o aumento de carga de forma aproximadamente linear.

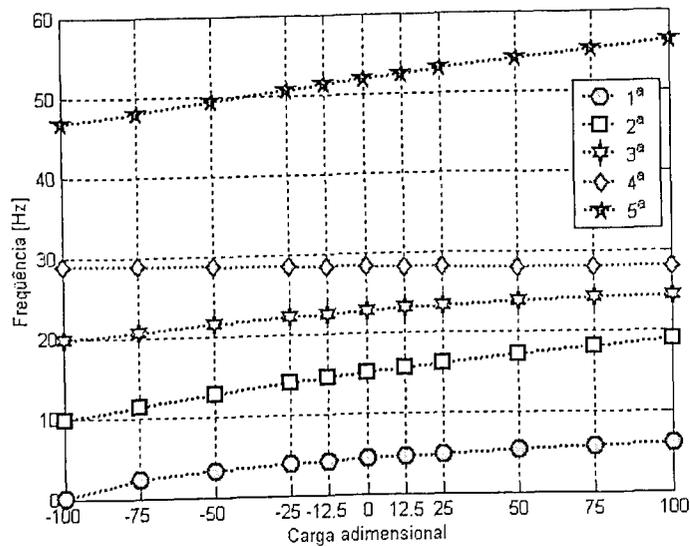


Figura 3.10- Freqüências naturais do pórtico em função da carga aplicada.

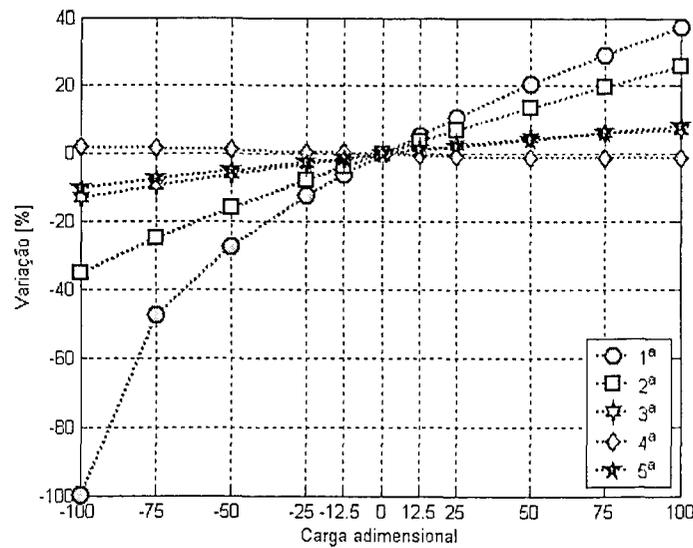


Figura 3.11- Variação relativa das frequências naturais do pórtico em função da carga aplicada.

As Figuras 3.12 a 3.14 permitem observar a influência do carregamento externo, caracterizado em termos de frações da carga crítica, sobre algumas funções de resposta em frequência do pórtico. São mostradas as amplitudes das FRFs pontuais e cruzadas correspondentes aos deslocamentos transversais dos nós 7 e 9 do modelo ilustrado na Figura 3.8, considerando-se um carregamento externo vertical. A influência do carregamento externo sobre as FRFs é evidenciada, notando-se o aumento ou diminuição dos valores das frequências de ressonância e de anti-ressonância conforme o sentido da carga aplicada. Similarmente ao que fora anunciado para o caso da coluna estudada na seção anterior, as frequências de anti-ressonância de uma FRF pontual  $H_{ii}(\omega)$  correspondem às frequências naturais do pórtico com a coordenada  $i$  bloqueada.

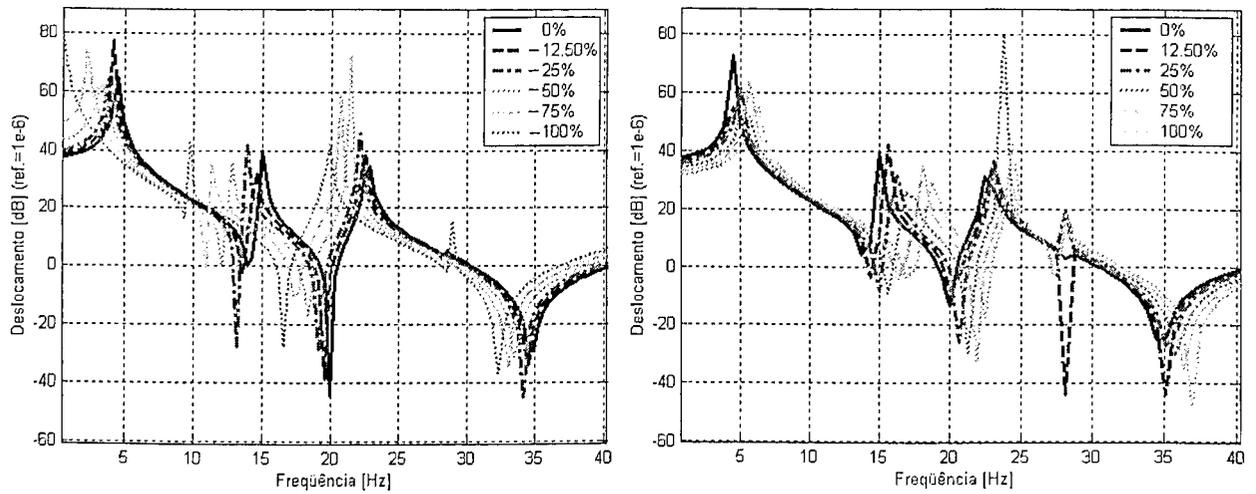


Figura 3.12 - Amplitudes da FRF  $H_{77}$  do pórtico em função da carga aplicada.

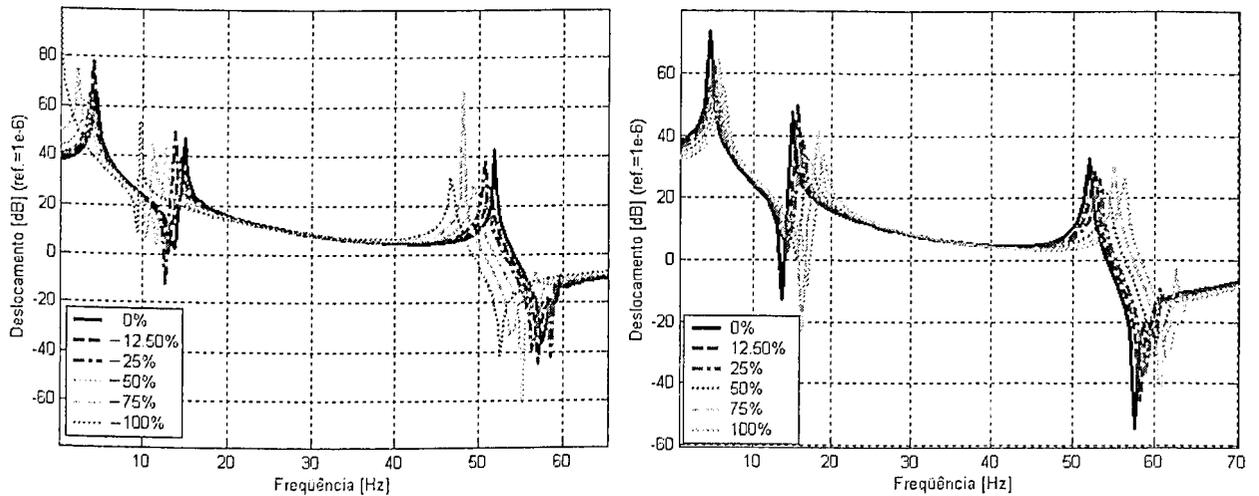


Figura 3.13 - Amplitudes da FRF  $H_{79}$  do pórtico em função da carga aplicada.

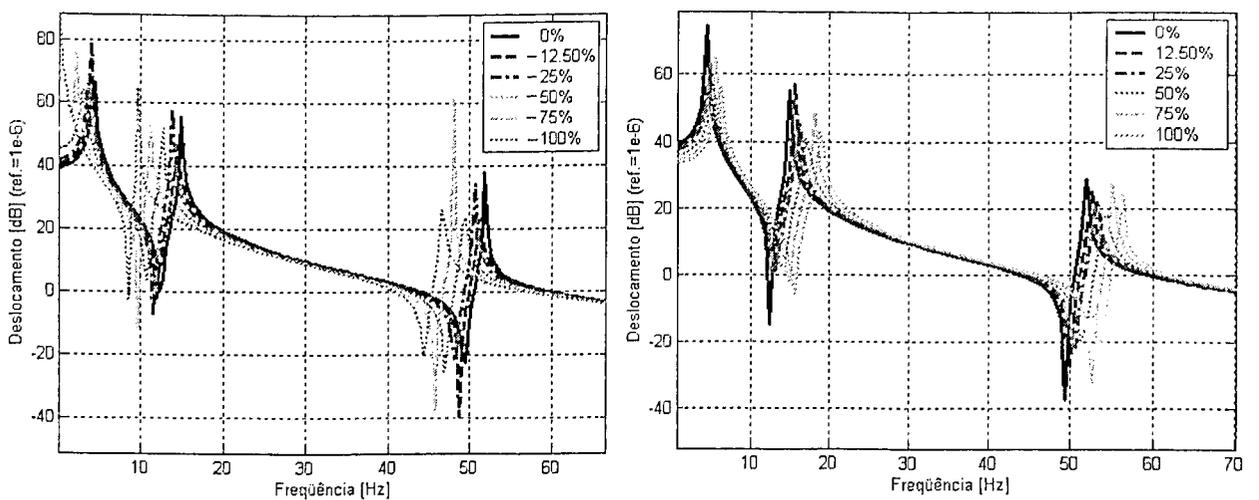


Figura 3.14 - Amplitudes da FRF  $H_{99}$  do pórtico em função da carga aplicada.

### 3.3 Comentários Sobre os Resultados

Os resultados apresentados evidenciam a significativa influência do efeito do enrijecimento por tensões no comportamento dinâmico de sistemas estruturais constituídos por elementos de vigas, em termos da magnitude, direção e sentido de aplicação do carregamento externo. Este fato comprova que a inclusão do efeito de enrijecimento por tensões é indispensável na modelagem do comportamento vibratório de sistemas estruturais.

Há ainda que se notar que o enrijecimento por tensões é também causado pela presença de tensões internas auto-equilibradas, como tensões residuais introduzidas no material por processos termomecânicos de fabricação, tais como soldagem e deformação a frio (Vieira Jr., 2003).

A existência da relação evidenciada entre as respostas dinâmicas e as cargas externas será utilizada, no Capítulo VII, na proposição de um procedimento inverso de identificação de cargas, em sistemas estruturais constituídos por elementos de vigas, a partir do conhecimento de um conjunto de respostas dinâmicas e de um modelo de elementos finitos do sistema estrutural.

## Capítulo IV

### Vibrações e Estabilidade de Placas Retangulares Sujeitas a Esforços de Membrana

Este capítulo aborda os procedimentos de modelagem do comportamento dinâmico e da estabilidade de placas retangulares finas submetidas a condições gerais de carregamento em seu plano.

A partir das hipóteses de teoria de placas de Kirchhoff, a modelagem é desenvolvida com base no Método dos Modos Assumidos, sendo empregadas funções de viga para aproximação do campo de deslocamentos transversais da placa.

#### 4.1 Obtenção do Modelo Matemático pelo Método dos Modos Assumidos

A Figura 4.1 ilustra uma placa retangular submetida à ação simultânea de esforços de membrana normais e cisalhantes atuantes em seu plano médio e um carregamento transversal distribuído.

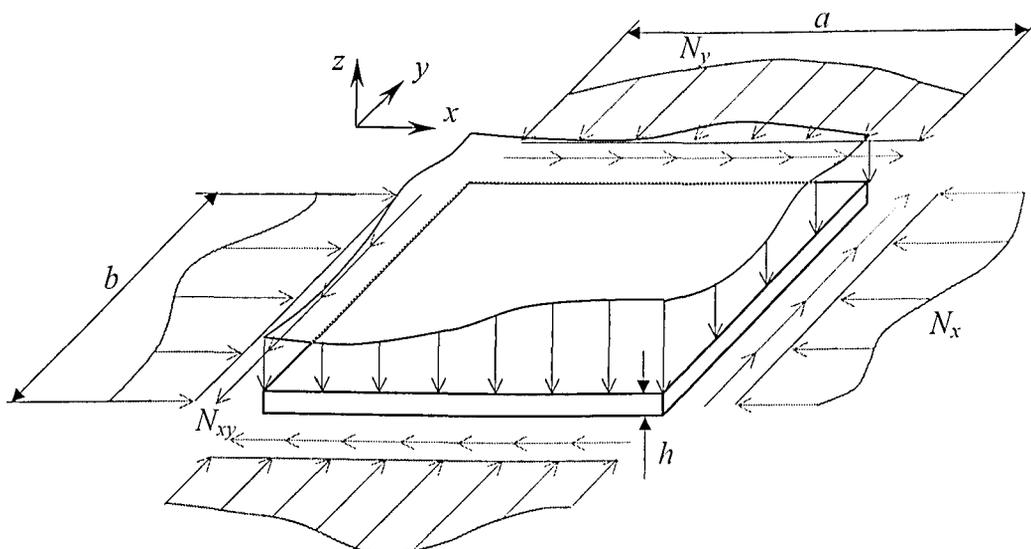


Figura 4.1 - Dimensões e ação de esforços em uma placa retangular.

Na figura anterior:

- $a$ , e  $b$  são as dimensões da placa nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente;
- $h$  é a espessura da placa;
- $N_x$  e  $N_y$  representam as forças normais de membrana por unidade de comprimento nas respectivas direções;
- $N_{xy}$  representa a força de membrana em cisalhamento por unidade de comprimento;
- $P(x, y, t)$  representa o carregamento externo transversal distribuído (força por unidade de área).

De acordo com a teoria de Kirchhoff, válida para placas finas, são admitidas as seguintes hipóteses:

- a) as seções transversais da placa permanecem planas e normais ao seu plano neutro na configuração deformada;
- b) negligenciam-se as tensões de cisalhamento transversal e a inércia de rotação das seções transversais.

Com base nestas hipóteses, a energia de deformação é expressa da seguinte forma (Gérardin e Rixen, 1997):

$$\begin{aligned}
 U(t) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \right. \\
 \left. + N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dx dy
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.2)$$

é a rigidez à flexão da placa,  $w(x, y, t)$  designa o campo de deslocamentos transversais,  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material que constitui a placa.

O trabalho realizado pelo carregamento transversal é dado por (Ugural, 1981):

$$W(t) = \int_0^a \int_0^b P(x, y, t) w(x, y, t) dx dy \quad (4.3)$$

Admitindo que o carregamento externo seja conservativo, a energia potencial total do sistema é dada por:

$$V(t) = U(t) - W(t) \quad (4.4)$$

Introduzindo as expressões (4.1) e (4.3) em (4.4), escreve-se:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2D(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy - \int_0^a \int_0^b q(x, y) w dx dy \quad (4.5)$$

A energia cinética associada ao movimento transversal da placa é expressa segundo (Géradin e Rixen, 1997):

$$T(t) = \frac{1}{2} \rho h \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (4.6)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica da placa.

De acordo com o Método dos Modos Assumidos, uma aproximação para o campo de deslocamentos transversais é adotada da sob a forma:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn}(t) \phi_m(x) \psi_n(y) \quad (4.7)$$

onde  $\phi_m(x)$  e  $\psi_n(y)$  são funções arbitrariamente escolhidas que satisfazem as condições de contorno geométricas da placa.

Diferentes tipos de funções  $\phi_m(x)$  e  $\psi_n(y)$  podem ser utilizadas na expansão (4.7). A título de exemplo Smith *et al.* (1997) usam séries de polinômios ortogonais. Bassily e Dickinson (1972) propuseram utilizar funções de viga que representam os modos normais de vibração de vigas uniformes, mais tarde e com o mesmo objetivo, Zhou (1995) utiliza também o mesmo tipo de funções. Tais funções, que são as utilizadas nas implementações realizadas no âmbito do presente trabalho, podem ser expressas, em sua forma geral, como combinações lineares de funções trigonométricas e trigonométricas hiperbólicas, como segue:

$$\phi_m(x) = A_m \sin(\varepsilon_m x) + B_m \cos(\varepsilon_m x) + C_m \sinh(\varepsilon_m x) + D_m \cosh(\varepsilon_m x) \quad (4.8)$$

$$\psi_n(y) = A_n \sin(\eta_n y) + B_n \cos(\eta_n y) + C_n \sinh(\eta_n y) + D_n \cosh(\eta_n y) \quad (4.9)$$

Os coeficientes:  $A_m, B_m, C_m, D_m, \varepsilon_m, A_n, B_n, C_n, D_n, \eta_n$  dependem das condições de contorno da viga correspondente a cada direção, enquanto  $m$  e  $n$  denotam a ordem dos modos. Young (1950) fornece os valores numéricos destes coeficientes para as combinações de condições de contorno engastada-engastada, engastada-livre e livre-livre, ao passo que aqueles referentes à condição apoiada-apoiada são fornecidos por Lurie (1952). Os valores dos coeficientes para todas estas condições de contorno são apresentadas no Anexo B deste trabalho.

Por conveniência, reescreve-se a equação (4.7) sob a forma:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^N C_k(t) \eta_k(x, y) \quad (4.10)$$

onde:

- $C_k(t) = A_{mm}(t)$  representam os coeficientes de combinação linear (coordenadas generalizadas) a serem determinados.
- $\eta_k(x, y) = \phi_m(x) \psi_n(y)$ .
- $N = pq$ .

Introduz-se ainda a notação matricial na expressão (4.10), escrevendo-se:

$$w(x, y, t) = \{\eta(x, y)\}^T \{C(t)\} \quad (4.11)$$

onde:

$$\{\eta(x, y)\} = [\eta_1(x, y) \quad \eta_2(x, y) \quad \dots \quad \eta_N(x, y)]^T; \quad (4.12)$$

$$\{C(t)\} = [C_1(t) \quad C_2(t) \quad \dots \quad C_N(t)]^T \quad (4.13)$$

Introduzindo a aproximação (4.11) em (4.1) e (4.3), a energia potencial total (4.4) resulta expressa sob a forma:

$$V(t) = \frac{1}{2} \{C(t)\}^T [K] \{C(t)\} - \{C(t)\}^T \{Q(t)\} \quad (4.14)$$

onde:

$$\{Q(t)\} = \int_0^a \int_0^b P(x, y, t) \{\eta\} dx dy \quad (4.15)$$

e a matriz de rigidez é dada por:

$$[K] = [K_1] + [K_2] \quad (4.16)$$

com:

$$[K_1] = \int_0^a \int_0^b D \left[ \{\eta_{xx}\} \{\eta_{xx}\}^T + \{\eta_{yy}\} \{\eta_{yy}\}^T + 2\nu \{\eta_{xx}\} \{\eta_{yy}\}^T + 2(1-\nu) \{\eta_{xy}\} \{\eta_{xy}\}^T \right] dx dy \quad (4.17)$$

$$[K_2] = \int_0^a \int_0^b \left[ N_x \{\eta_x\} \{\eta_x\}^T + N_y \{\eta_y\} \{\eta_y\}^T + 2N_{xy} \{\eta_x\} \{\eta_y\}^T \right] dx dy \quad (4.18)$$

Nas equações (4.17) e (4.18), os índices  $x$  e  $y$  indicam as derivadas parciais dos produtos de funções de viga em relação às variáveis espaciais correspondentes.

Introduzindo a aproximação (4.11) em (4.6), a energia cinética resulta expressa sob a forma:

$$T(t) = \frac{1}{2} \left\{ \dot{C}(t) \right\}^T [M] \left\{ \dot{C}(t) \right\} \quad (4.19)$$

onde a matriz de inércia é dada por:

$$[M] = \rho h \int_0^b \int_0^a \left\{ \eta \right\} \left\{ \eta \right\}^T dx dy \quad (4.20)$$

Para obtenção das equações diferenciais relativas ao movimento transversal da placa, utilizam-se as Equações de Lagrange (Géradin e Rixen, 1997):

$$\frac{\partial L}{\partial \{C(t)\}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \{\dot{C}(t)\}} \right) = \{0\} \quad (4.21)$$

onde:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left\{ \dot{C}(t) \right\}^T [M] \left\{ \dot{C}(t) \right\} - \frac{1}{2} \left\{ C(t) \right\}^T [K] \left\{ C(t) \right\} + \left\{ C(t) \right\}^T \left\{ Q(t) \right\} \quad (4.22)$$

Introduzindo (4.22) em (4.21), obtém-se:

$$[M] \left\{ \ddot{C}(t) \right\} + [K] \left\{ C(t) \right\} = \left\{ Q(t) \right\} \quad (4.23)$$

A resolução numérica de (4.23) fornece as coordenadas generalizadas  $\{C(t)\}$ . Para obter as respostas expressas em coordenadas físicas representando o campo de deslocamentos transversais da placa deve-se introduzir as coordenadas calculadas na equação (4.10).

De forma similar ao que havia sido obtido para estruturas formadas por elementos de viga, observa-se, nas equações (4.16) a (4.18), que o carregamento de membrana aparece na modelagem através da matriz de rigidez, que mostra-se decomposta em duas parcelas: a matriz de rigidez dita estrutural  $[K_1]$ , dada por (4.17), que depende exclusivamente das propriedades físicas e geométricas da placa e a matriz  $[K_2]$ , denominada matriz de rigidez geométrica, expressa por (4.18), que depende essencialmente do carregamento de membrana.

## 4.2 Análises Numéricas

De posse das equações matriciais do movimento expressas por (4.23), além da análise de respostas temporais a um dado carregamento e/ou condições iniciais, que pode ser feita por meio da resolução numérica do sistema de equações do movimento, pode-se efetuar outros tipos de análise numérica em regime estático ou dinâmico, conforme procedimento descrito nas sub-seções seguintes:

### 4.2.1 Análise Estática

Nos problemas de equilíbrio estático, os efeitos de inércia não intervêm o sistema de equações do movimento, o qual fica reduzido ao sistema de equações algébricas lineares:

$$[K]\{C\} = \{Q\} \quad (4.24)$$

onde todas as grandezas são independentes do tempo.

### 4.2.2 Análise de Estabilidade Linear

A instabilidade por flambagem linear de placas pode ocorrer devido ao aumento da carga de compressão ou de cisalhamento aplicada no plano da placa (Oliveira, 1991). A carga de flambagem é aquela que provoca o aparecimento de uma configuração de equilíbrio instável.

Para determinação das cargas de flambagem da placa, introduz-se um fator de carga adimensional  $\lambda$ , de tal forma que:

$$N_x = \lambda N'_x \quad (4.25)$$

$$N_y = \lambda N'_y \quad (4.26)$$

$$N_{xy} = \lambda N'_{xy} \quad (4.27)$$

onde  $N'_x$ ,  $N'_y$  e  $N'_{xy}$  são valores arbitrários dos esforços de membrana.

Conforme detalhado por (Oliveira, 1991), impondo-se a condição de estacionaridade da energia potencial total da placa, chega-se então ao problema de autovalor:

$$([K_1] + \lambda [K'_2])\{C\} = \{0\} \quad (4.28)$$

onde  $[K_1]$  é dado pela expressão (4.17) e  $[K'_2]$  é calculada segundo:

$$[K'_2] = \int_0^a \int_0^b [N'_x \{\eta_x\} \{\eta_x\}^T + N'_y \{\eta_y\} \{\eta_y\}^T + 2N'_{xy} \{\eta_x\} \{\eta_y\}^T] dx dy \quad (4.29)$$

Uma vez determinados os autovalores em (4.28), os valores correspondentes das cargas de membrana que provocam a flambagem são obtidos introduzindo os autovalores nas equações (4.25) a (4.27).

### 4.2.3 Análise Modal

No regime vibratório livre, o sistema de equações de movimento (4.23) assume a forma:

$$[M]\{\ddot{C}(t)\} + [K]\{C(t)\} = \{0\} \quad (4.30)$$

A análise modal numérica é realizada mediante a resolução do seguinte problema de autovalor associado ao sistema (4.30):

$$([K] - \lambda_r [M])\{\Delta_r\} = \{0\} \quad (4.31)$$

A resolução numérica desta equação conduz aos autovalores  $\lambda_r$ , que fornecem as freqüências naturais e aos autovetores  $\{\Delta_r\}$  fornecem os modos de vibração correspondentes.

#### 4.2.4 Análise Harmônica

Para computar as funções de resposta em freqüência, admite-se variação harmônica para as cargas transversais e para os deslocamentos transversais em coordenadas generalizadas de acordo com as relações:

$$P(x, y, t) = \bar{P}(x, y)e^{i\omega t} \quad (4.32)$$

$$w(x, y, t) = \bar{W}(x, y)e^{i\omega t} \quad (4.33)$$

Em regime harmônico, a expansão (4.10) assume a forma:

$$w(x, y, t) = \eta(x, y)\bar{C}(t)e^{i\omega t} \quad (4.34)$$

Introduzindo (4.32) em (4.15), os esforços generalizados em regime harmônico são obtidos sob a forma:

$$\{Q(t)\} = e^{i\omega t} \int_0^b \int_0^a \bar{P}(x, y)\eta(x, y)dx dy \quad (4.35)$$

ou:

$$\{Q(t)\} = \{\bar{Q}\}e^{i\omega t} \quad (4.36)$$

com:

$$\{\bar{Q}\} = \int_0^b \int_0^a \bar{P}(x, y) \eta(x, y) dx dy \quad (4.37)$$

Introduzindo (4.33) e (4.36) em (4.30), obtém-se a seguinte relação matricial entre as amplitudes das forças e coordenadas generalizadas:

$$\{\bar{C}\} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \{\bar{Q}\} \quad (4.38)$$

Para exprimir as respostas harmônicas em termos de coordenadas físicas (deslocamentos transversais), admite-se que as respostas harmônicas sejam observadas em um conjunto de  $c$  pontos da placa identificados por suas coordenadas  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_c, y_c)$ . Introduzindo a transformação de coordenadas em (4.38), obtém-se:

$$\{\bar{W}\} = [\bar{\eta}]^T ([K] - \omega^2 [M])^{-1} [\bar{\eta}] \{\bar{Q}\} \quad (4.39)$$

onde:

$$[\bar{\eta}] = [\{\eta(x_1, y_1)\} \quad \{\eta(x_2, y_2)\} \quad \dots \quad \{\eta(x_c, y_c)\}] \quad (4.40)$$

Evidentemente, a precisão do modelo numérico obtido para a placa depende do número de funções de viga utilizadas na expansão (4.10), fato que exige que um número suficientemente grande seja empregado para assegurar a convergência da série, conforme será evidenciado no capítulo seguinte.

## Capítulo V

### Caracterização Numérica do Comportamento Dinâmico de Placas Retangulares Considerando o Enrijecimento por Tensionamento

Diversos estudos evidenciaram que as características dinâmicas de placas podem ser fortemente influenciadas pela distribuição e magnitude de esforços de membrana normais e cisalhantes (Bailey, 1973; Porter Goff, 1976, Smith *et al.*, 1997; Mead, 2000). Leissa (1969) identifica uma série de trabalhos que analisam o efeito das tensões no plano sobre o comportamento dinâmico de placas em flexão. Tais efeitos devem, portanto, ser considerados em análises numéricas destinadas à caracterização do comportamento dinâmico destes elementos estruturais. Neste sentido, torna-se importante dispor de procedimentos numéricos que permitam prever o comportamento dinâmico de placas sujeitas a esforços em seu plano, situação que ocorre freqüentemente na prática.

Neste capítulo caracteriza-se numericamente o comportamento dinâmico de placas retangulares finas submetidas a condições gerais de carregamento em seu plano, utilizando a técnica dos Modos Assumidos (MMA) desenvolvida no capítulo anterior.

A caracterização é realizada com auxílio de simulações numéricas a partir da implementação computacional do MMA em ambiente Matlab<sup>®</sup> 6.0, tendo sido possível obter as matrizes de inércia e rigidez através de manipulação simbólica.

O comportamento dinâmico é caracterizado em termos de parâmetros modais (freqüências e modos naturais de vibração) e funções de resposta em freqüência. Os resultados obtidos são inicialmente validados mediante confrontação com resultados fornecidos por análise de elementos finitos utilizando o programa comercial ANSYS<sup>®</sup>. Nas simulações examina-se também a convergência das respostas dinâmicas em relação ao número de funções de viga utilizadas nas expansões do Método dos Modos Assumidos. A variação observada das freqüências naturais em função da magnitude do carregamento é interpretada no contexto de um critério dinâmico para determinação de cargas críticas de flambagem da placa.

### 5.1 Análise de Convergência do Modelo Obtido pelo MMA

Para avaliar a convergência das respostas dinâmicas obtidas através do MMA em relação ao número de funções de viga utilizadas na expansão dada pela equação (4.7), modelou-se a placa engastada-engastada-livre-livre ilustrada na Figura 5.1, com as dimensões e propriedades mecânicas apresentadas na Tabela 5.1.

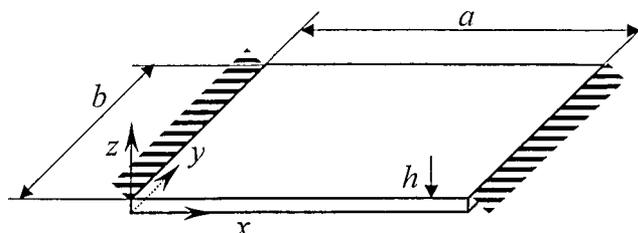


Figura 5.1 - Dimensões da placa retangular.

Tabela 5.1 - Dimensões e propriedades mecânicas da placa de policarbonato.

$a$ [m]	$b$ [m]	$h$ [m]	$E$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
$250 \times 10^{-3}$	$200 \times 10^{-3}$	$1,50 \times 10^{-3}$	$2,4 \times 10^9$	0,37	1200

A Figura 5.2 ilustra a variação dos valores das nove primeiras freqüências naturais em função do número total de funções de viga ( $N = p.q$ ), admitindo  $p = q$ , para a placa sem tensões de membrana. Constata-se que para um número  $N$  reduzido as freqüências naturais são superestimadas e que, com o aumento de  $N$ , obtém-se a convergência, que mostra-se mais rápida para as freqüências de ordem mais baixa.

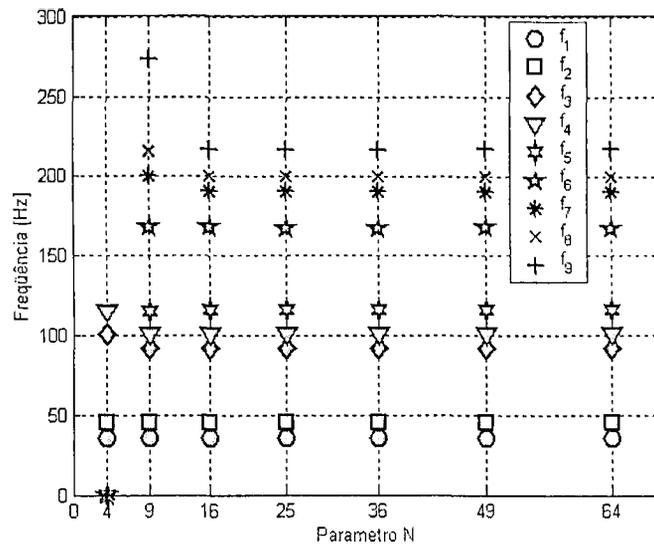


Figura 5.2 - Convergência das frequências naturais em função do parâmetro  $N$ .

Na Figura 5.3 observam-se as amplitudes das funções de resposta em frequência pontuais associadas ao deslocamento transversal do ponto da placa de coordenadas ( $x=0,225$  m e  $y=0,125$  m). Também nestas curvas observa-se a convergência à medida em que o número de funções de viga aumenta. Entretanto, nota-se que as frequências de anti-ressonância não convergem com a mesma rapidez que as frequências de ressonância.

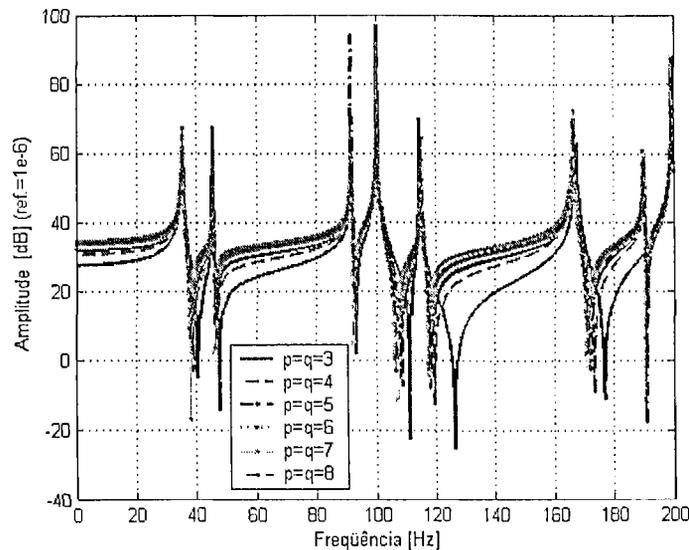


Figura 5.3 - Convergência das funções de resposta em frequência com o acréscimo de  $N$ .

Dos resultados acima conclui-se que, o uso de 4 funções de viga em cada direção ( $N=16$ ) é suficiente para a estimação adequada das 9 primeiras frequências naturais da placa.

## 5.2 Validação do Modelo Baseado no Método dos Modos Assumidos

Nesta seção, os resultados obtidos via Método dos Modos Assumidos são validados mediante confrontação com aqueles fornecidos por análise de elementos finitos utilizando o programa comercial ANSYS®.

No procedimento de validação é analisada a placa engastada-engastada-livre-livre ilustrada na Figura 5.4, cujas dimensões e propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela 5.1. O número de funções de viga utilizado em cada direção é igual a 4 ( $N=16$ ).

Inicialmente comparam-se os deslocamentos resultantes da aplicação de diferentes valores de carregamento transversal estático uniformemente distribuído ( $P$ ), conforme ilustrado na Figura 5.4.

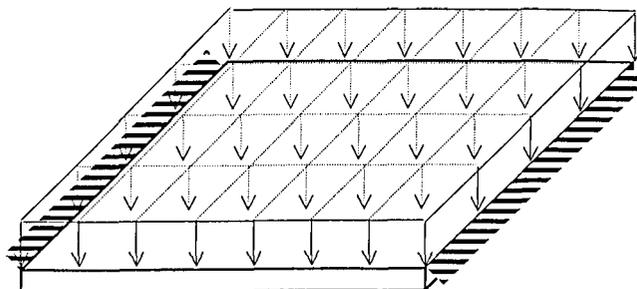


Figura 5.4 - Carregamento transversal ao plano da placa.

Na Figura 5.5 são comparados os deslocamentos transversais no centro da placa ( $x=0,125$  m e  $y=0,1$  m), obtidos através do MMA e do ANSYS®. O modelo de elementos finitos utiliza o elemento de casca SHELL63 e possui 80 elementos (10 divisões na direção  $x$  e 8 na direção  $y$ ). Observa-se que os valores dos deslocamentos transversais são praticamente os mesmos em ambas modelagens.

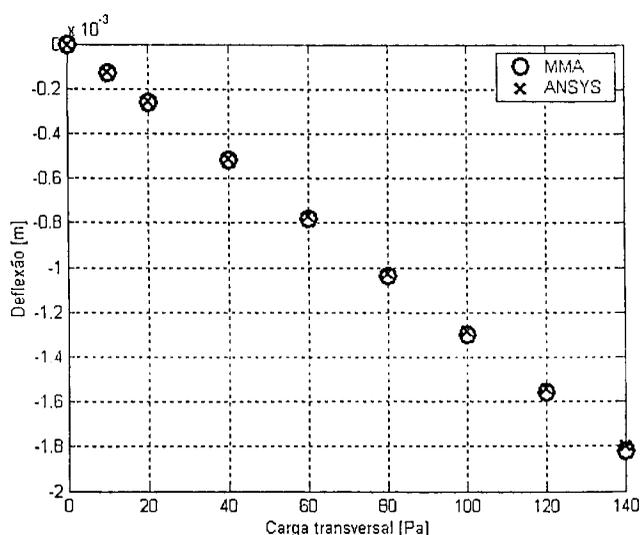


Figura 5.5 - Deflexão máxima da placa em função do acréscimo de carga transversal.

Neste ponto, são incluídos os esforços de membrana no procedimento de validação do modelo, sendo escolhida a compressão uniforme na direção  $y$ .

A comparação das frequências naturais alteradas pela aplicação progressiva deste carregamento até seu valor crítico (472,58 N/m) aparece ilustrada na Figura 5.6. Observa-se que a primeira frequência natural tende a zero com o aumento da carga de compressão, sendo nula sob aplicação da carga de valor correspondente à carga crítica de flambagem. Verifica-se que o MMA determina valores de frequências naturais ligeiramente superiores às fornecidas pelo programa ANSYS®. Entretanto, as diferenças observadas são muito pequenas, fato que permite concluir sobre a validação do modelo baseado no MMA.

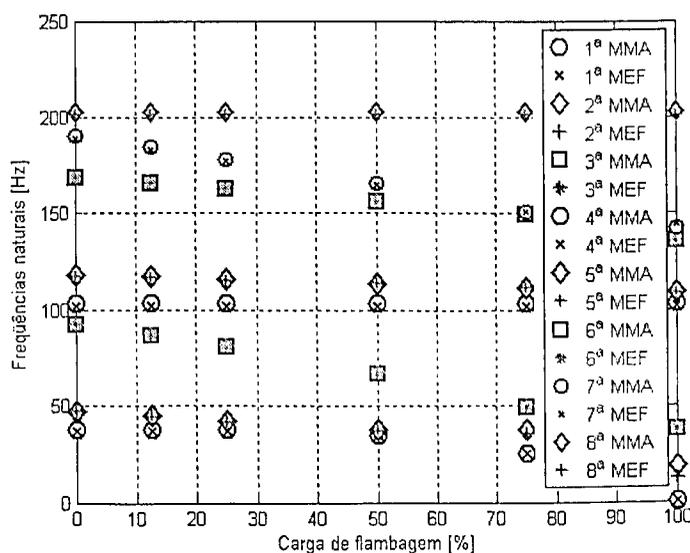


Figura 5.6 - Comparação das frequências naturais para diferentes cargas de compressão.

A Figura 5.7 permite comparar as amplitudes da função de resposta em frequência pontual correspondente ao ponto de coordenadas  $x=0,225$  m e  $y=0,125$  m da placa engastada-engastada-livre-livre, com a presença do esforço normal de membrana aplicado na direção  $y$  equivalente a 12,5% (59,07 N/m) do valor da carga crítica de flambagem. Observa-se que as curvas correspondentes às duas técnicas de modelagem praticamente se sobrepõem na banda analisada.

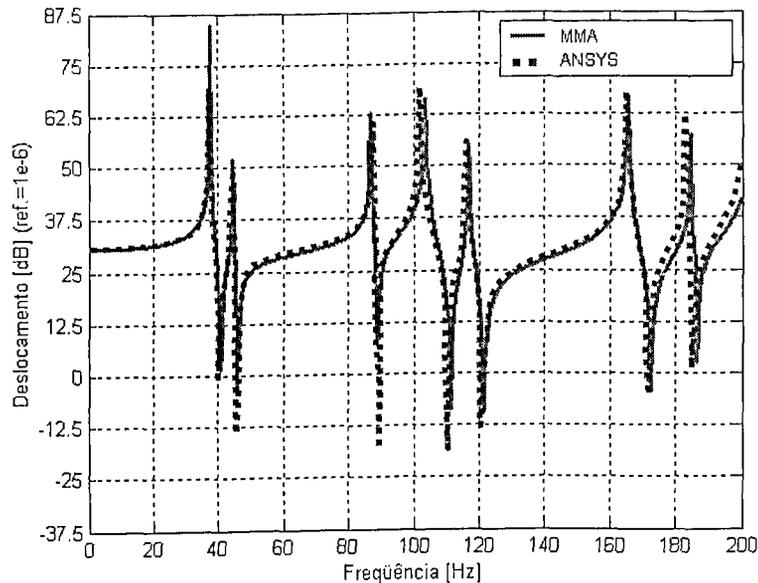


Figura 5.7 - Comparação de funções de resposta em frequência da placa submetida a uma força de membrana de compressão.

### 5.3 Caracterização da Influência dos Esforços de Membrana em Placas

A seguir, analisa-se a influência dos esforços de membrana no comportamento dinâmico de placas retangulares, cujas características físicas e geométricas são apresentadas na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Características físicas e geométricas das placas analisadas.

$a$ [m]	$b$ [m]	$h$ [m]	$E$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
$250 \times 10^{-3}$	$200 \times 10^{-3}$	$1,50 \times 10^{-3}$	$2,4 \times 10^9$	0,37	1200

A Figura 5.8 representa o modelo de placa retangular utilizado nas simulações, assim como os esforços de membrana atuantes em seu plano médio.

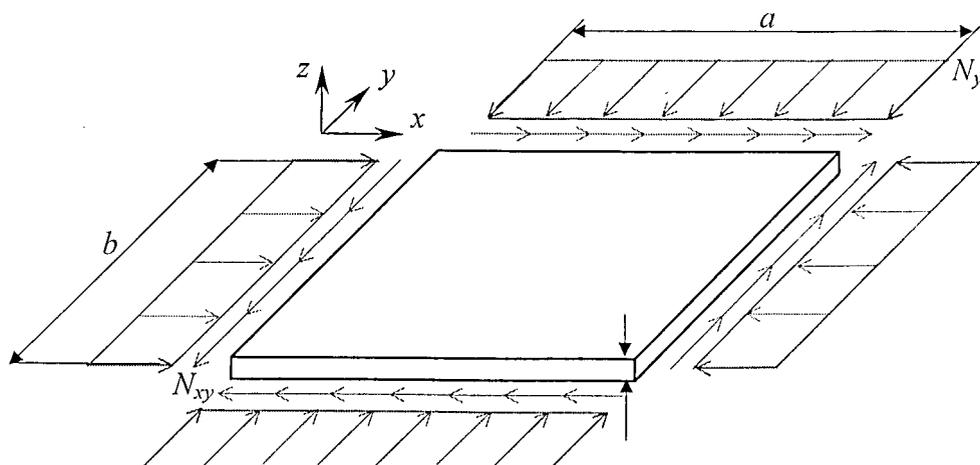


Figura 5.8- Esforços de membrana aplicados no plano médio da placa.

A Figura 5.9 mostra as diferentes condições de contorno analisadas, que serão assim designadas:

- (a) apoiada-apoiada-livre-livre (AALL);
- (b) engastada-engastada-livre-livre (EELL);
- (c) totalmente apoiada (AAAA).

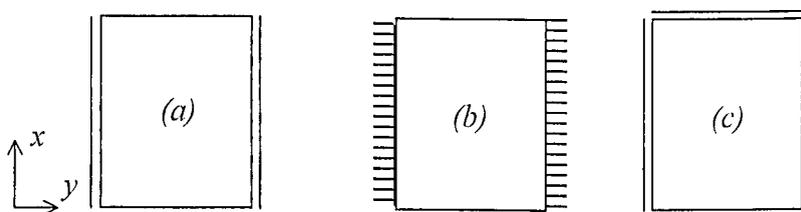


Figura 5.9- Condições de contorno analisadas.

Neste ponto é importante destacar que as condições de contorno apresentadas na Figura 5.9 dizem respeito às restrições impostas aos deslocamentos transversais e rotações nas bordas da placa, estando, portanto, ligadas exclusivamente ao movimento de flexão. Admite-se que a aplicação dos esforços normais e cisalhantes de membrana possa ser feita de forma independente destas condições de contorno, embora tal condição possa ser difícil de se obter na prática para alguma das condições de contorno consideradas. Tal é o caso, por exemplo, das bordas livres, que não são restringidas mecanicamente em termos de deslocamentos transversais e rotações, sendo, contudo, admitido que a elas possam ser aplicados esforços de membrana.

Pela resolução do problema de autovalor de flambagem, expresso pela equação (4.28) determinam-se as cargas críticas normais e cisalhantes das placas em estudo. Estas cargas são apresentadas na Tabela 5.3, ficando aparente a dependência de seus valores em relação às condições de contorno. Os sinais negativos indicam cargas normais de compressão. Evidentemente, valores mais elevados das cargas críticas ocorrem para condições de contorno que tornam a placa mais rígida. Esta regra não se aplica ao caso de carregamento em cisalhamento, onde verifica-se que a placa AAAA apresenta uma carga crítica de cisalhamento menor que a placa AALL. Conforme será evidenciado mais adiante, o comportamento de placas sujeitas a esforços de membrana de cisalhamento mostra-se muito mais complexo que aquele de placas sujeitas a esforços normais.

Tabela 5.3- Cargas de flambagem das diferentes placas analisadas.

Placa	$N_{xcrit} [N/m]$	$N_{ycrit} [N/m]$	$N_{xycrit} [N/m]$
AALL	- 123,50	- 216,24	1838,13
EELL	-495,04	-472,58	2311,78
AAAA	-810,94	-519,00	1511,52

Com o objetivo de analisar a influência dos esforços de membrana sobre as respostas dinâmicas da placa sujeita a cada uma das condições de contorno, nas simulações numéricas apresentadas a seguir os esforços são aplicados separadamente. Evidentemente, o procedimento de modelagem permite analisar os efeitos resultantes das diferentes combinações de esforços de membrana aplicados simultaneamente. Os valores máximos aplicados correspondem aos respectivos valores críticos dados na Tabela 5.3, sendo também variado seu sentido de aplicação. A variação das cinco primeiras frequências naturais em função dos esforços de membrana normais e cisalhantes é analisada em termos de frações das respectivas cargas críticas de flambagem. É verificada também a influência do carregamento sobre a função de resposta em frequência pontual correspondente ao deslocamento transversal do ponto localizado em  $x = 0,175$  m e  $y = 0,025$  m (identificado por ponto 4).

Para auxiliar a interpretação dos resultados são apresentadas graficamente, para cada configuração de condição de contorno, as formas modais das placas na condição sem carregamento de membrana.

### 5.3.1 Placa AALL

A Figura 5.10 ilustra os cinco primeiros modos naturais de vibração da placa AALL isenta de esforços de membrana com seus respectivos valores de freqüências naturais.

A Figura 5.11 mostra as variações das 5 primeiras freqüências naturais em função dos esforços normais,  $N_x$  e  $N_y$ .

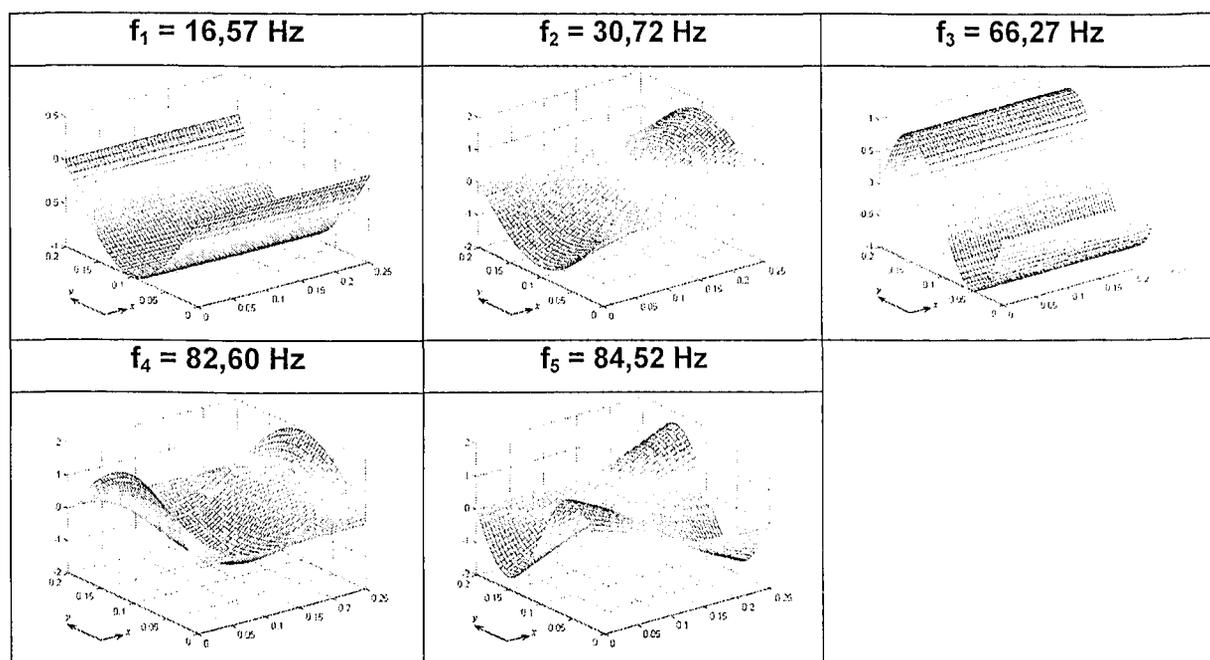


Figura 5.10- Modos naturais de vibração da placa AALL.

Pela observação dos modos naturais de vibração e das variações das freqüências mostradas nas Figuras 5.10 e 5.11, respectivamente, verifica-se que, o primeiro e terceiros modos são caracterizados por deformações de flexão que ocorrem acentuadamente na direção  $y$ . Conseqüentemente, o carregamento  $N_y$  influencia notoriamente a primeira e terceira freqüências naturais, ao passo que o carregamento  $N_x$  não exerce influência sobre estas freqüências. Por outro lado, a segunda e quarta freqüências naturais sofrem forte influência do carregamento  $N_x$  e pouca influência de  $N_y$ . Para o quinto modo de vibração, nota-se um acoplamento mais pronunciado das deformações de flexão em ambas direções, o que torna a quinta freqüência natural igualmente sensível aos carregamentos  $N_x$  e  $N_y$ . Observe-se ainda o entrelaçamento entre as curvas correspondentes às duas primeiras freqüências naturais e às curvas da terceira e quarta freqüências naturais da placa sujeita ao carregamento  $N_x$ , mostrando que, sob ação de cargas crescentes de compressão, a segunda freqüência natural se reduz fortemente, anulando-se sob ação da carga crítica de flambagem.

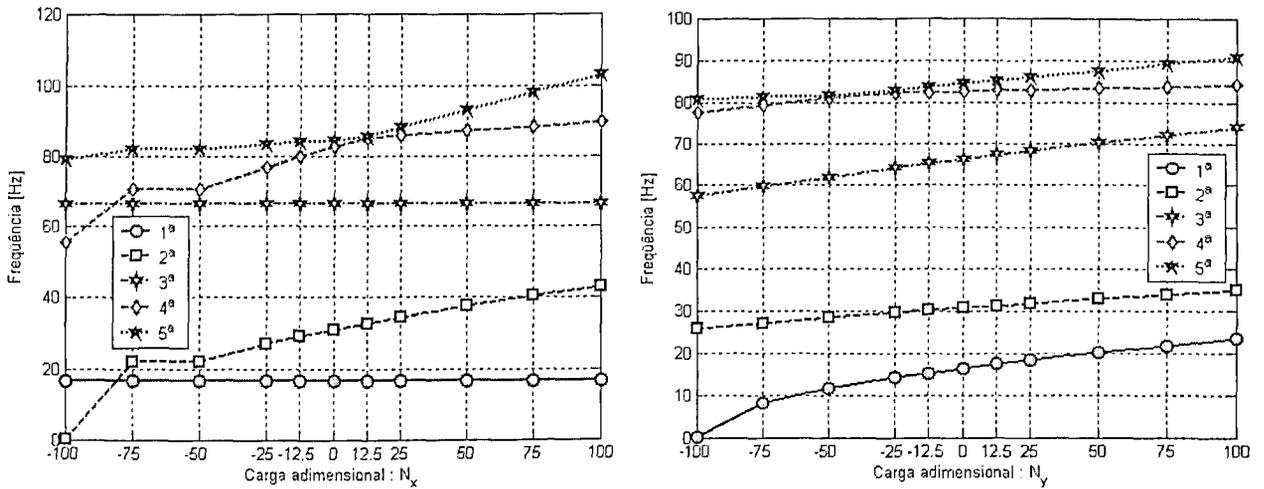


Figura 5.11 - Frequências naturais em função da variação de  $N_x$  e  $N_y$ , placa AALL.

A influência do esforço de membrana de cisalhamento sobre as frequências naturais da placa AALL é ilustrada na Figura 5.12. Verifica-se que o sentido de aplicação da carga de cisalhamento não tem influência sobre os valores das frequências, o que é evidenciado pela simetria das curvas em relação ao eixo correspondente à situação da placa sem carregamento. Observa-se também uma diminuição marcante da segunda e quarta frequências naturais e a anulação da segunda frequência natural sob o valor crítico da carga de cisalhamento.

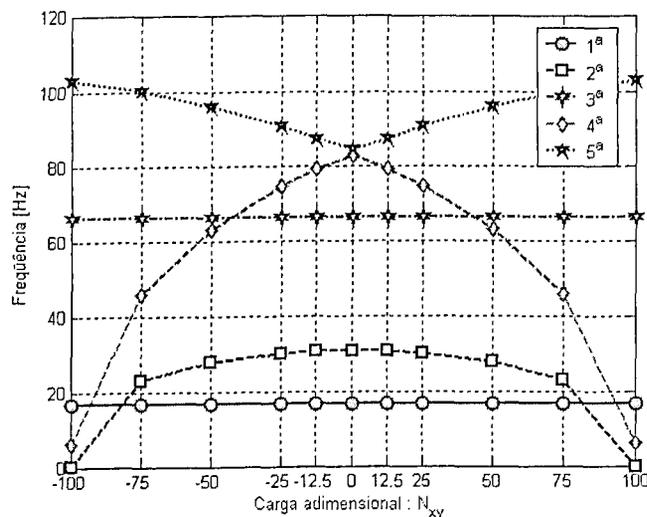


Figura 5.12 - Frequências naturais em função da variação de  $N_{xy}$ , placa AALL.

A influência dos esforços normais e cisalhantes sobre a função de resposta em frequência pontual, correspondente ao deslocamento transversal do ponto 4 é evidenciada nas Figuras 5.13 a 5.15.

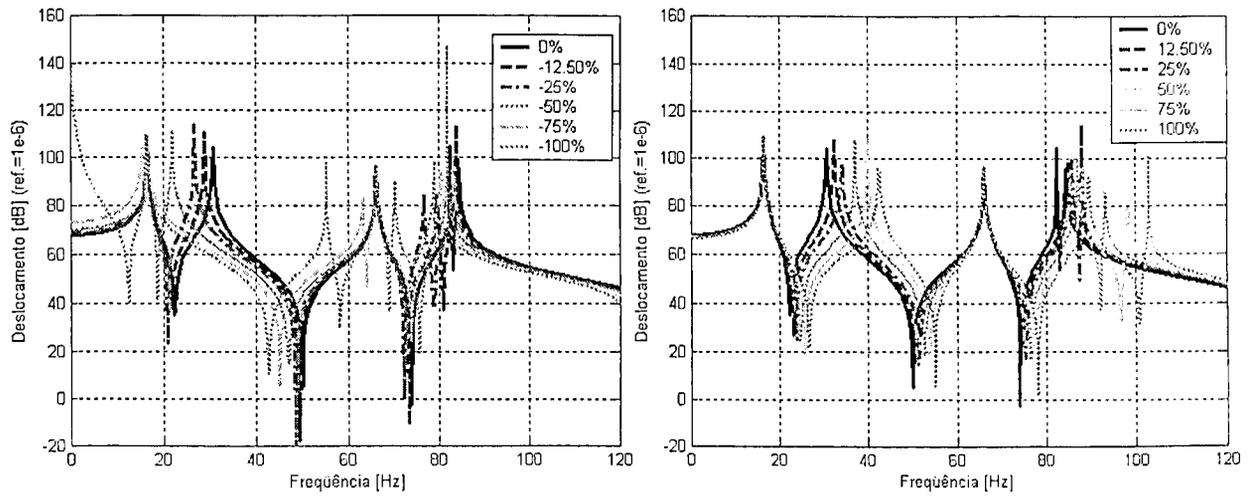


Figura 5.13- Amplitudes da FRF  $H_{4,4}$  devido à variação de  $N_x$ , placa AALL.

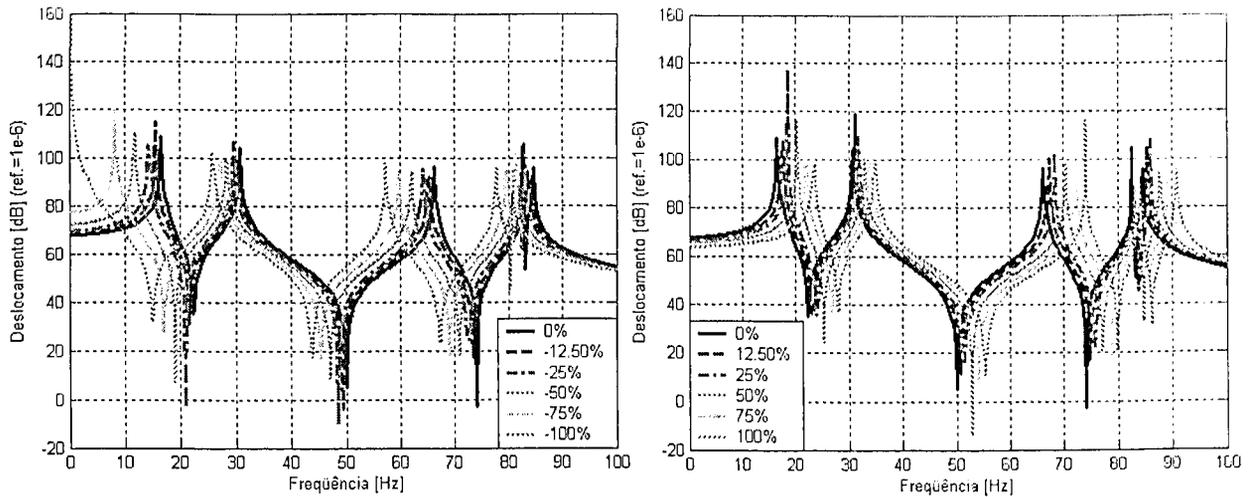


Figura 5.14- Amplitudes da FRF  $H_{4,4}$  devido à variação de  $N_x$ , placa AALL.

Na Figura 5.15, observa-se em particular que o segundo pico de ressonância ocorre na frequência nula para a ação da carga crítica de cisalhamento.

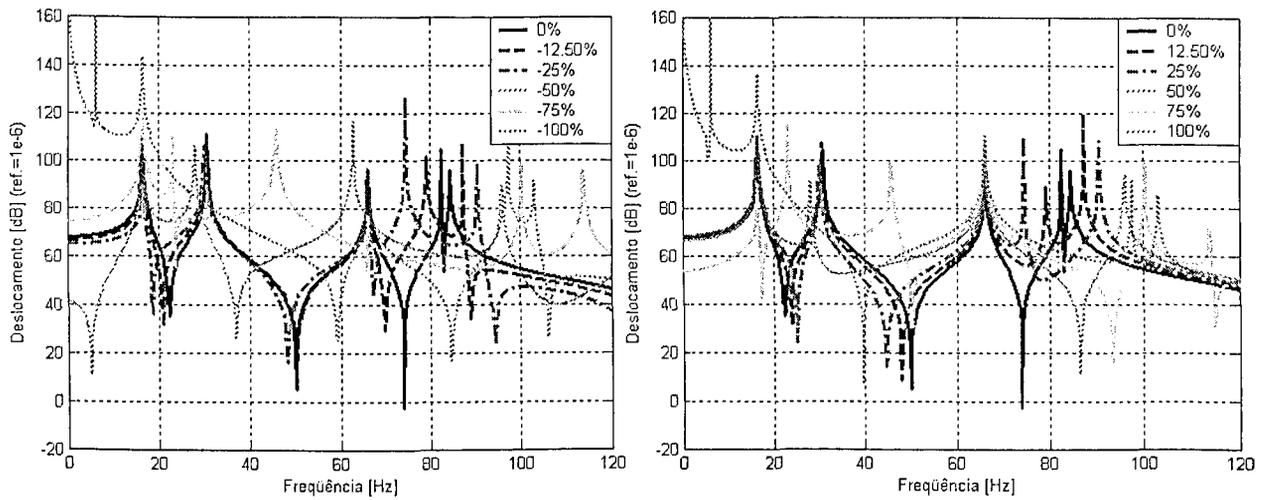


Figura 5.15 - Amplitudes da FRF  $H_{4,4}$  devido à variação de  $N_{xy}$ , placa AALL.

### 5.3.2 Placa EELL

Na Figura 5.16 são apresentadas as cinco primeiras formas modais da placa EELL sem carregamento, sendo também indicados os valores das respectivas freqüências naturais.

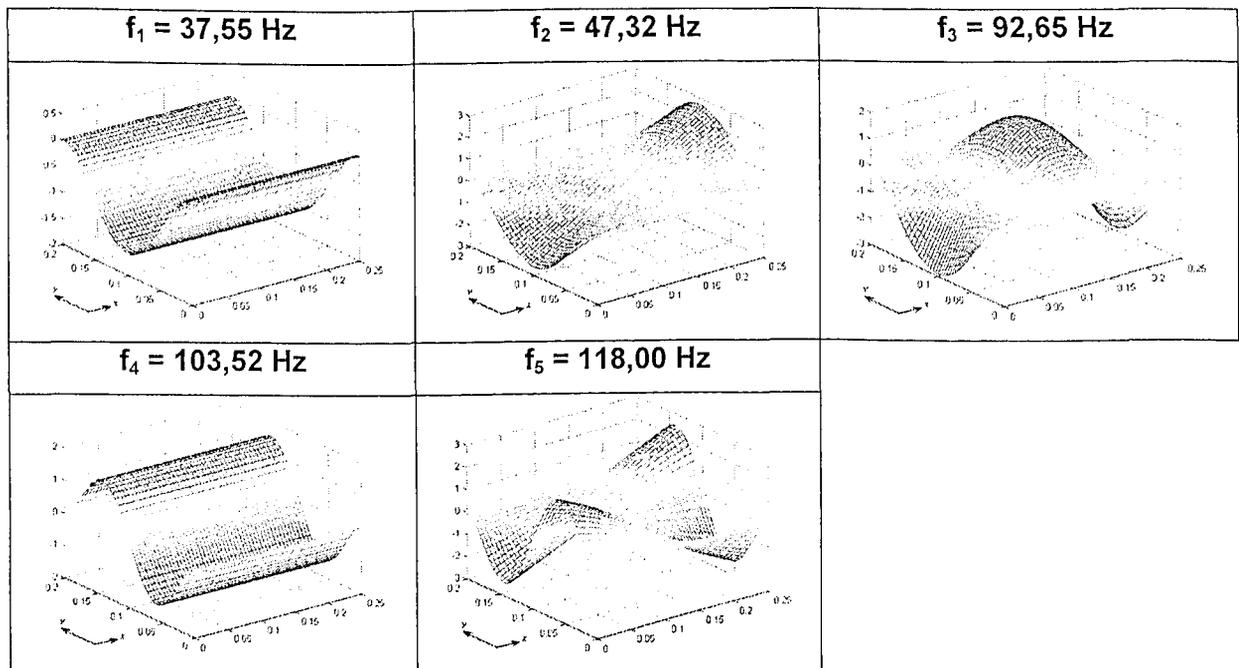


Figura 5.16 - Modos naturais de vibração da placa EELL.

Analisando as formas modais apresentadas na Figura 5.16 e as variações das freqüências naturais, em função das cargas  $N_x$  e  $N_y$ , mostradas na Figura 5.17 constata-se que o primeiro e quarto modos são caracterizados por deformações de flexão que ocorrem predominantemente na direção  $y$ . Este comportamento explica que o carregamento atuante nessa direção influencia fortemente a primeira e quarta freqüências naturais, ao passo que o carregamento  $N_x$  praticamente não tem efeito sobre estas freqüências. Por outro lado, a segunda e terceira freqüências naturais são notoriamente alteradas pelo carregamento  $N_x$ . Para o quinto modo de vibração, observa-se um acoplamento mais pronunciado das deformações de flexão em ambas direções, o que torna a quinta freqüência natural igualmente sensível aos carregamentos  $N_x$  e  $N_y$ . Verifica-se um entrelaçamento entre as curvas correspondentes às duas primeiras freqüências naturais e da primeira e terceira freqüências naturais na compressão e da curvas correspondentes à terceira e quarta freqüências naturais na tração da placa sujeita ao carregamento  $N_x$ . No caso do carregamento aplicado na direção  $y$ , é observado o entrelaçamento das curvas que correspondem à terceira e quarta freqüências naturais.

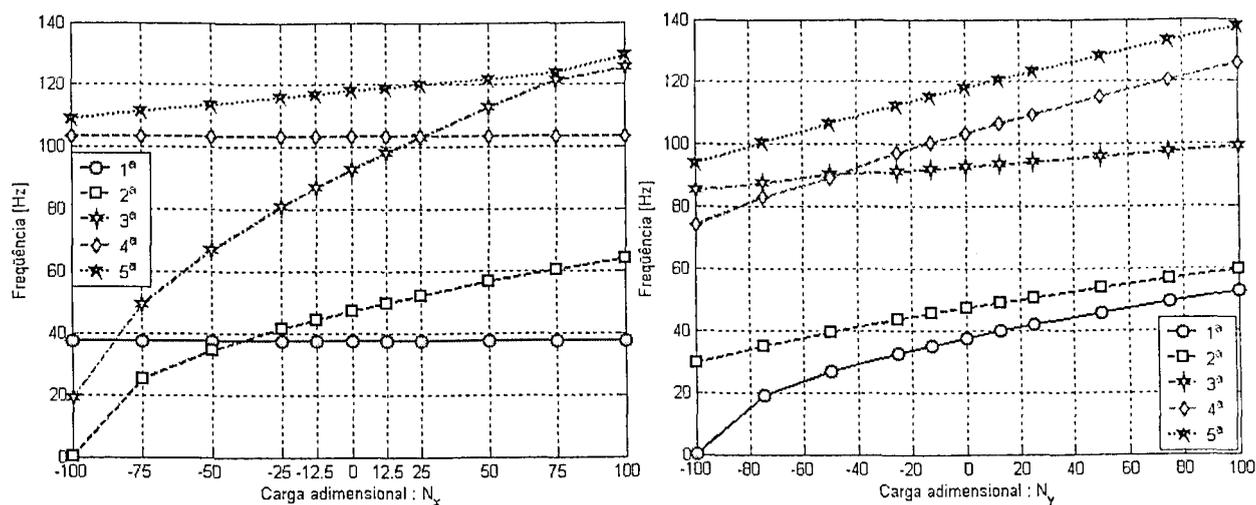


Figura 5.17 - Freqüências naturais em função da variação de  $N_x$  e  $N_y$ , placa EELL.

A influência do esforço de membrana de cisalhamento sobre as freqüências naturais da placa EELL é ilustrada na Figura 5.18. A simetria das curvas em relação ao eixo correspondente à situação da placa sem carregamento confirma mais uma vez o fato de que o sentido de aplicação da carga de cisalhamento não tem influência sobre os valores das freqüências. Observa-se uma diminuição acentuada da segunda e terceira freqüências naturais, sendo a primeira e a quartas praticamente não modificadas.

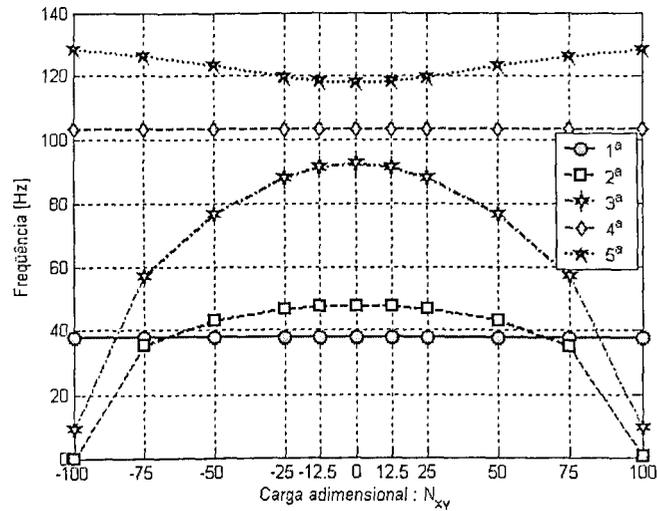


Figura 5.18 - Frequências naturais em função da variação de  $N_{xy}$ , placa EELL.

A influência dos esforços normais e cisalhantes sobre a função de resposta em frequência pontual, correspondente ao deslocamento transversal do ponto 4, é ilustrada nas Figuras 5.19 a 5.21. Observa-se que o carregamento de compressão em  $x$  provoca a diminuição de quase todas as ressonâncias, exceto da primeira e quarta, com a particularidade de que para 100% da carga crítica a segunda ressonância ocorre a frequência zero. Isto se deve ao entrelaçamento observado na Figura 5.17 entre as curvas correspondentes às duas primeiras frequências naturais na condição de compressão.

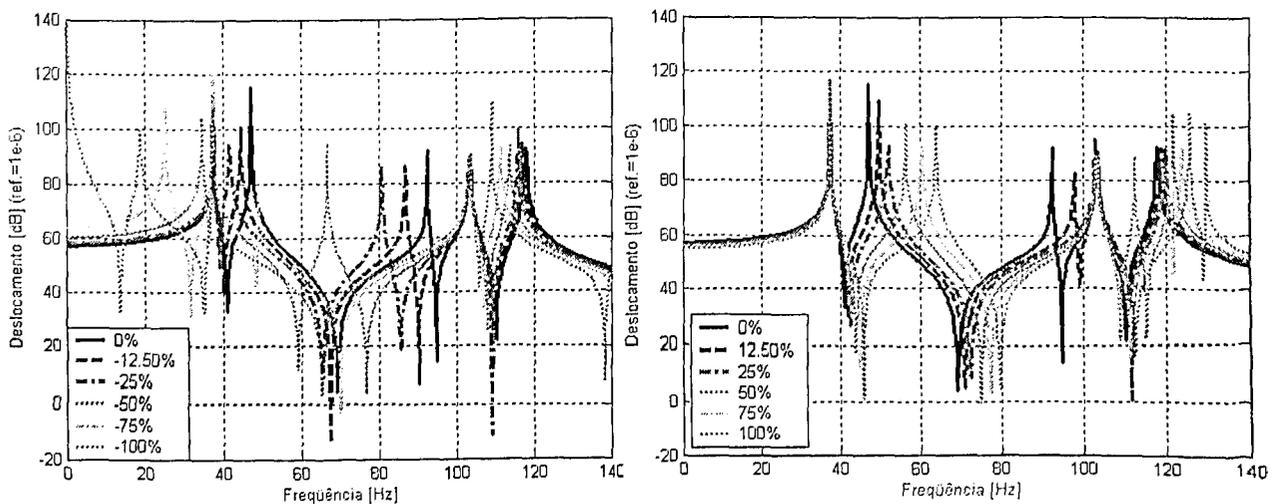


Figura 5.19 - Amplitudes da FRF  $H_{4,4}$  devido à variação de  $N_x$ , placa EELL.

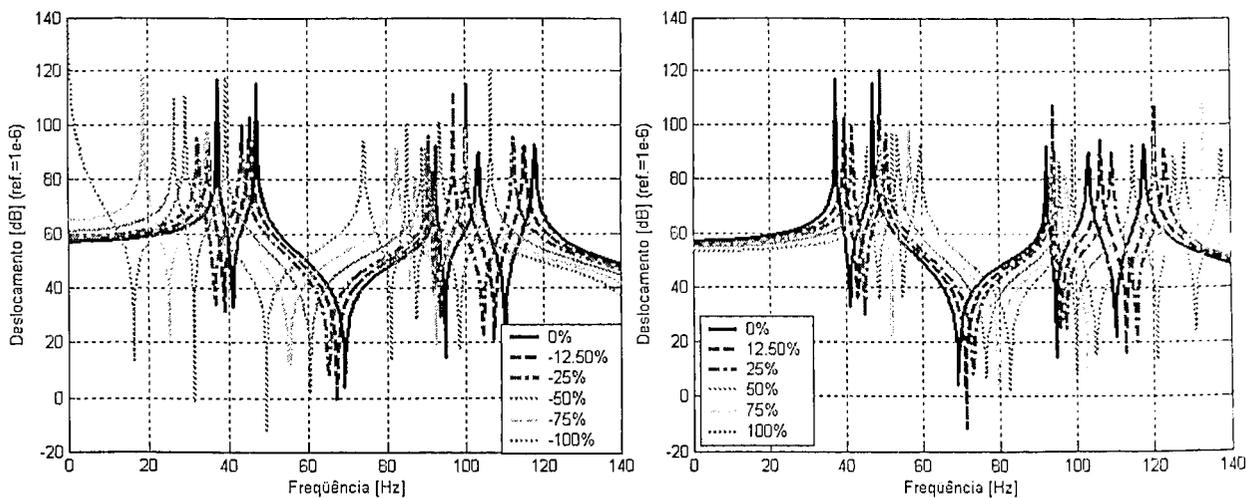


Figura 5.20 - Amplitudes da FRF  $H_{4,4}$  devido à variação de  $N_y$ , placa EELL.

Nas funções de resposta em frequência mostradas na Figura 5.21, observa-se novamente que o sentido de aplicação do cisalhamento não influencia nas respostas freqüenciais analisadas. Verifica-se que a primeira ressonância não é alterada como as demais, sendo que a segunda ocorre na freqüência nula sob a aplicação da carga crítica.

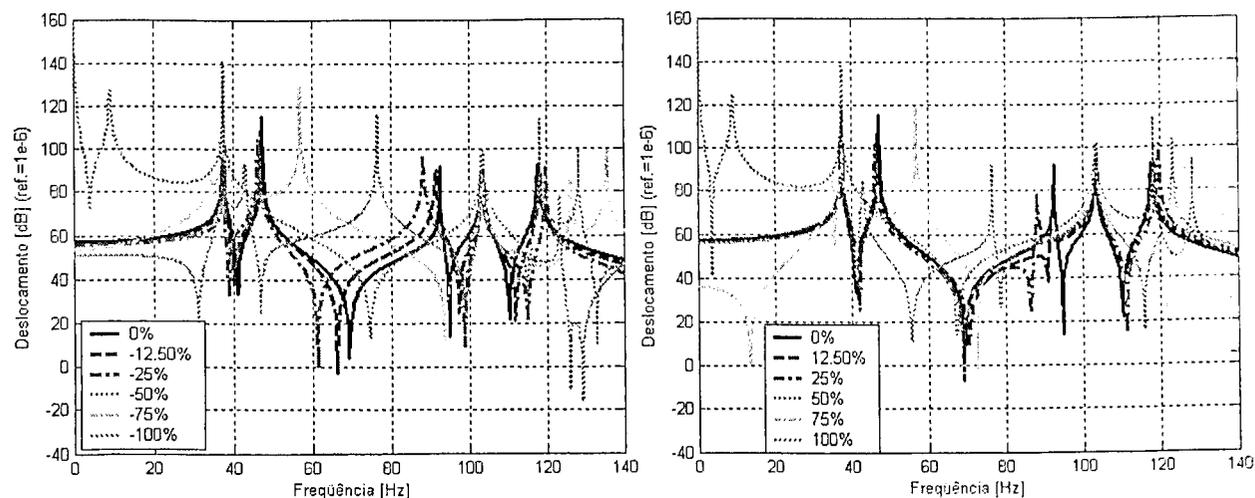


Figura 5.21 - Amplitudes da FRF  $H_{4,4}$  devido à variação de  $N_{xy}$ , placa EELL.

### 5.3.3 Placa AAAA

A Figura 5.22 mostra os cinco primeiros modos naturais de vibração da placa AAAA isenta de esforços de membrana, sendo também apresentados os valores das respectivas freqüências naturais.

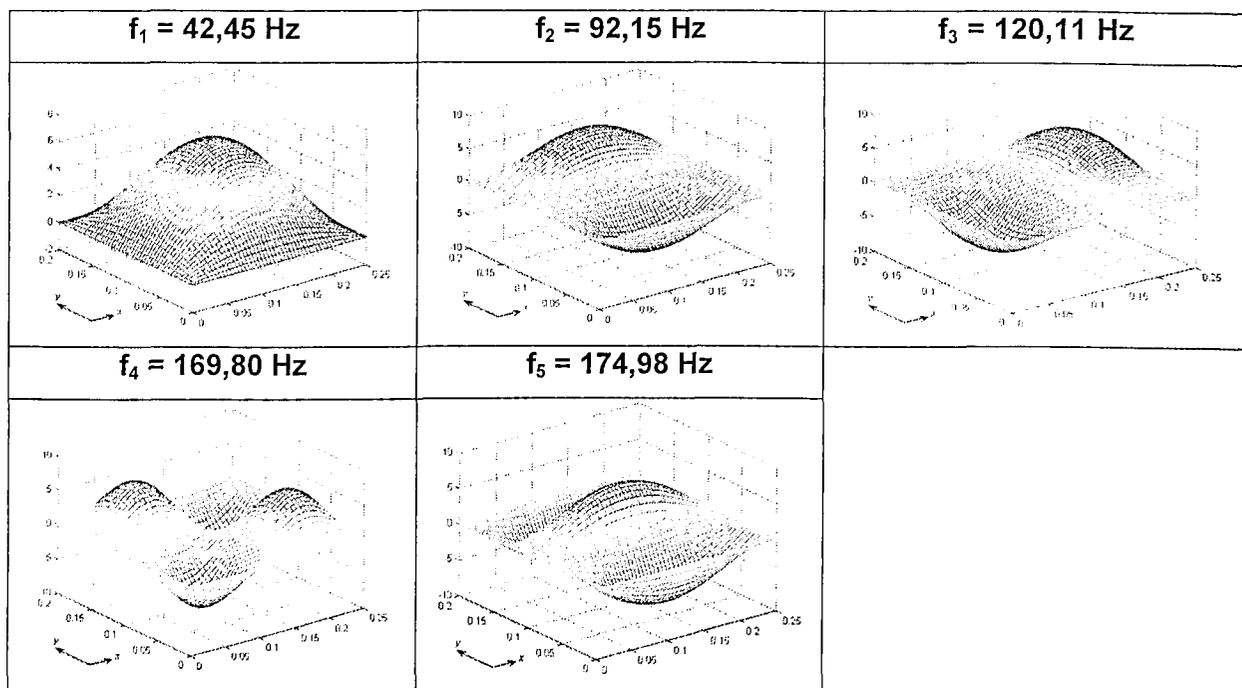


Figura 5.22 - Modos naturais de vibração da placa AAAA.

As formas modais apresentadas na Figura 5.22 e as variações das freqüências naturais em função da aplicação de carregamento normal mostradas na Figura 5.23, indicam que todas as freqüências são sensíveis ao carregamento normal, sendo a segunda e terceira freqüências naturais menos influenciadas pelo carregamento atuante na direção  $x$  e  $y$  respectivamente, em comparação com as demais freqüências naturais.

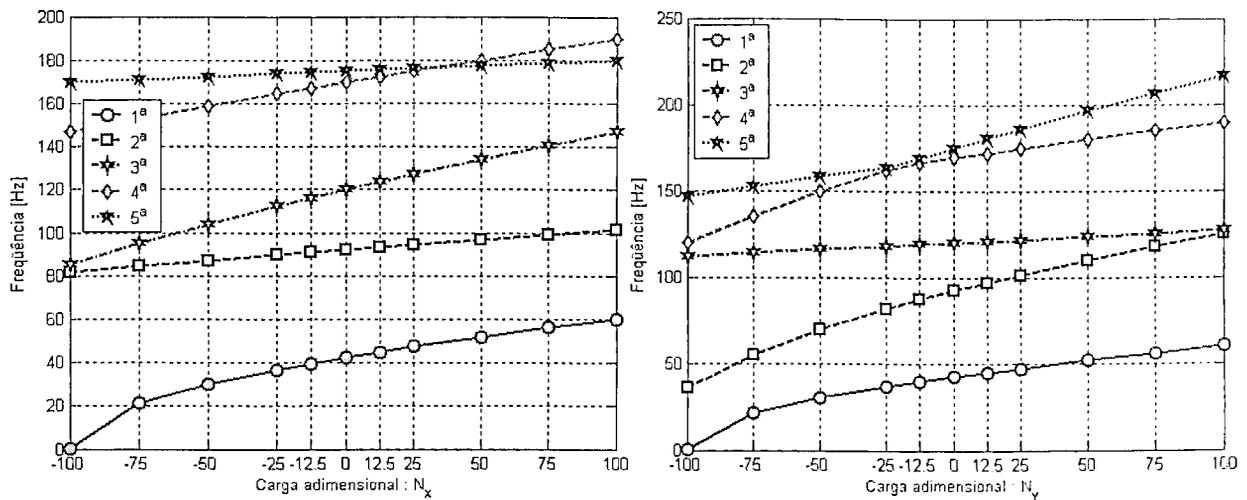


Figura 5.23 - Frequências naturais em função da variação de  $N_x$  e  $N_y$ , placa AAAA.

A influência do carregamento cisalhante sobre as frequências naturais da placa AAAA é ilustrada na Figura 5.24. Verifica-se mais uma vez que o sentido de aplicação da carga de cisalhamento não altera os valores das frequências naturais.

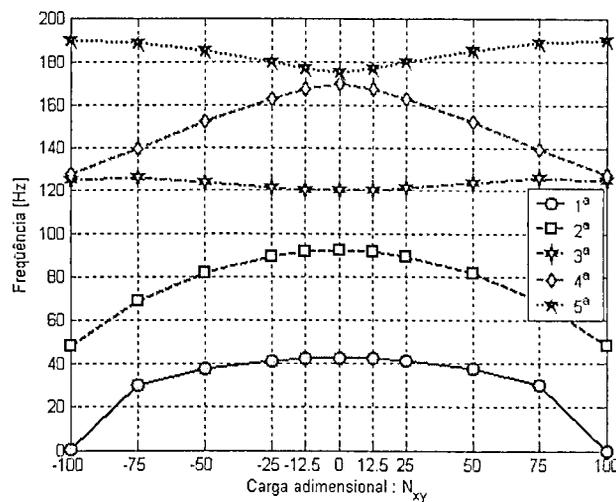


Figura 5.24 - Frequências naturais em função da variação de  $N_{xy}$ , placa AAAA.

A influência dos esforços de membrana normais e cisalhantes sobre a função de resposta em frequência pontual que corresponde ao deslocamento transversal do ponto 4, é mostrada nas Figuras 5.25 a 5.27. Nas curvas das funções de resposta analisadas, observa-se que o carregamento normal provoca modificações em todas as ressonâncias e anti-ressonâncias de acordo com a Figura 5.23.

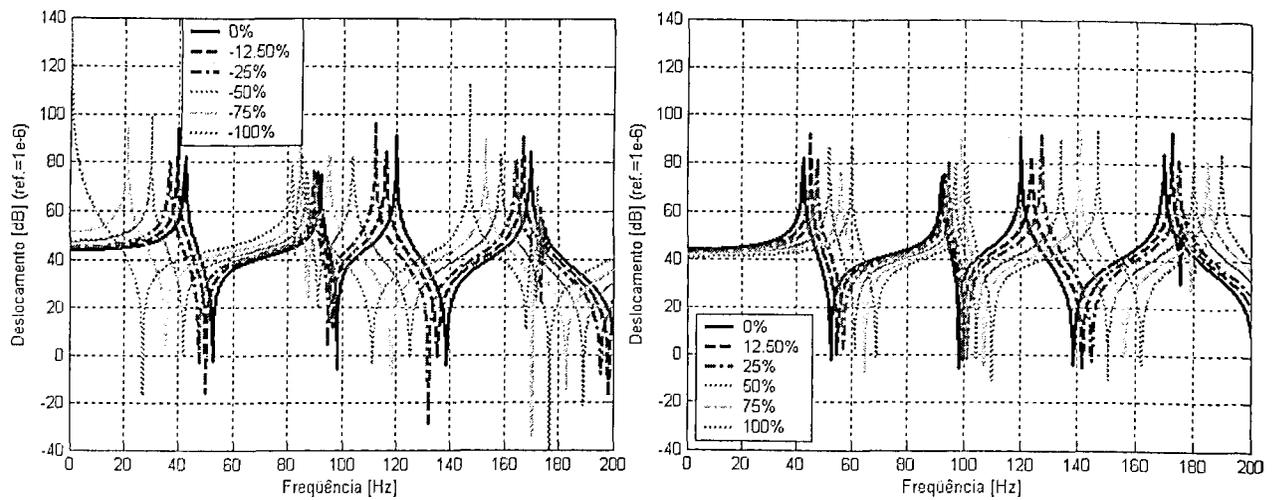


Figura 5.25 - Amplitudes da FRF  $H_{4,4}$  devido à variação de  $N_x$ , placa AAAA.

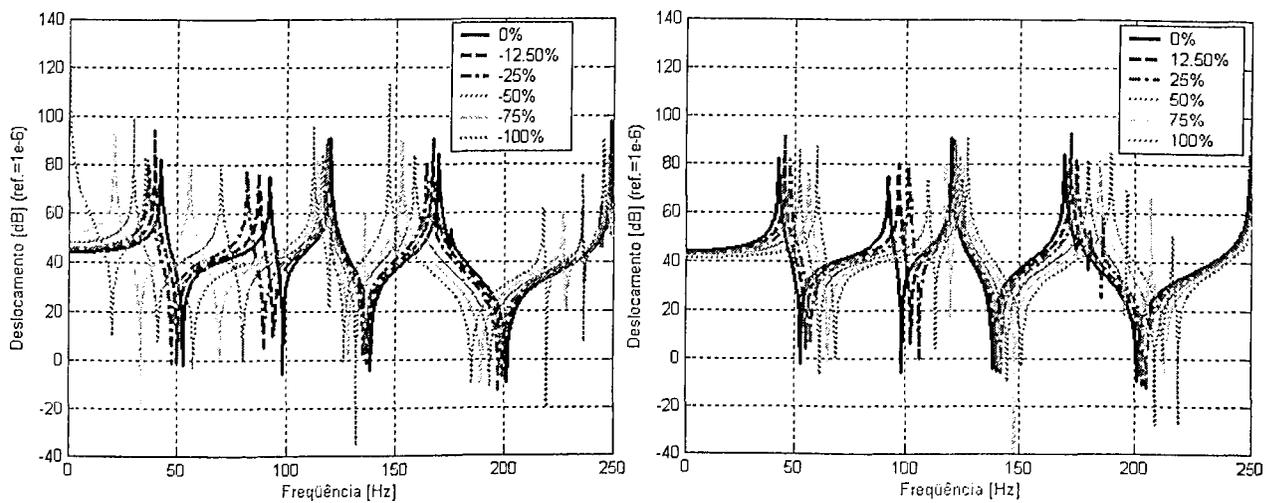


Figura 5.26 - Amplitudes da FRF  $H_{4,4}$  devido à variação de  $N_y$ , placa AAAA.

Nas curvas das funções de resposta em frequência ilustradas na Figura 5.27, é verificado que independente do sentido de aplicação do cisalhamento, a carga de cisalhamento crítica leva à anulação da primeira frequência natural.

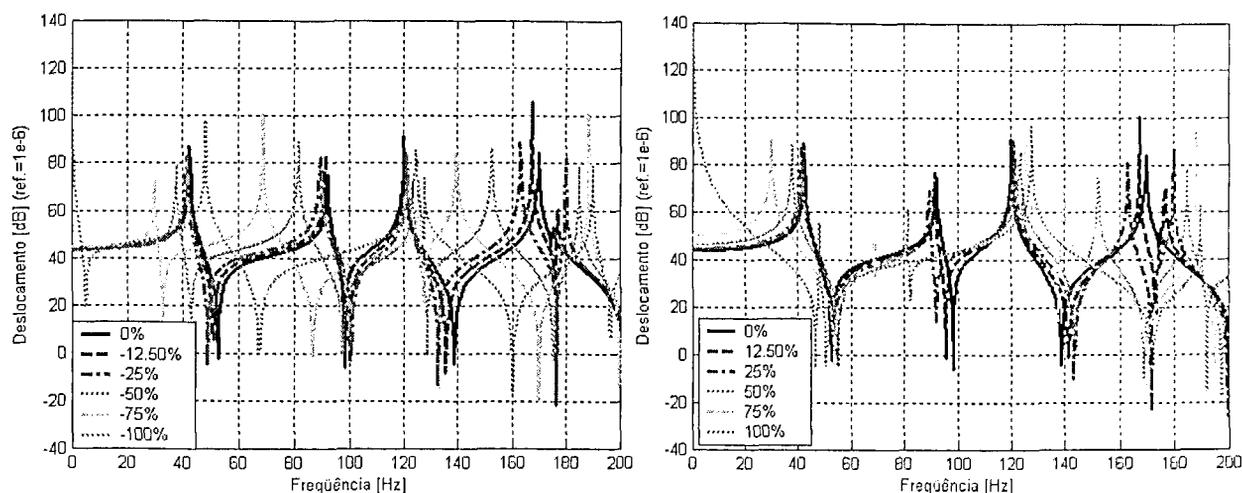


Figura 5.27 - Amplitudes da FRF  $H_{4,4}$  devido à variação de  $N_{xy}$ , placa AAAA.

Para esta condição de contorno, os resultados são corroborados pelo trabalho de Mei e Yang (1972), onde é estudado o efeito da distribuição de tensões nas vibrações de uma placa simplesmente apoiada usando o Método de Elementos Finitos.

Em placas retangulares, espera-se que tensões cisalhantes positivas e negativas tenham o mesmo efeito em uma frequência natural (Mead, 2002 e Smith *et al*, 1997). As simulações numéricas mostraram que a carga de flambagem e as frequências naturais de placas retangulares sujeitas ao cisalhamento independem do sinal do carregamento e que a variação deste sinal produz, na resolução do problema de autovalor, mesmos autovalores, mas diferentes autovetores. A Figura 5.28 confirma este comportamento, em uma placa totalmente apoiada, solicitada a 75% de sua carga crítica de cisalhamento. Este fato explica o comportamento observado das FRFs de placas sujeitas a carregamento de cisalhamento. Na Figura 5.28, por exemplo, nota-se que os valores das frequências naturais, que são os autovalores do problema, de fato independem do sinal de  $N_{xy}$ . Contudo, esta independência não se aplica às frequências de anti-ressonância, que são determinadas pelas componentes dos autovetores.

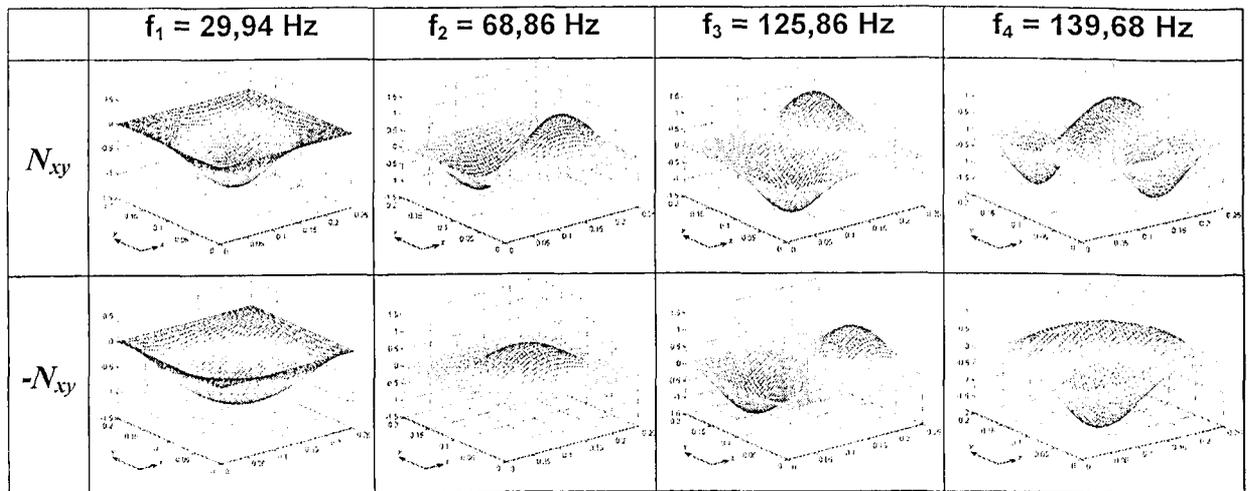


Figura 5.28 - Modos naturais de uma placa apoiada para:  $N_{xy}$  e  $-N_{xy}$ .

#### 5.4 Comentários Sobre os Resultados

Com base nos resultados obtidos, conclui-se acerca da utilidade e eficiência do método de modelagem baseado no MMA para a previsão das respostas dinâmicas de placas retangulares sujeitas a esforços de membrana, além da utilidade da técnica para avaliação da estabilidade estrutural. Os resultados apresentados evidenciam a significativa influência dos esforços de membrana em termos da magnitude, direção e sentido de aplicação sobre o comportamento dinâmico de placas retangulares.

Nas figuras que mostram as variações absolutas das freqüências naturais em função da variação dos esforços de membrana observa-se que, em geral, as freqüências naturais: têm seus valores diminuídos à medida que a carga de compressão aumenta e acrescidos à medida que a carga de tração é acrescida. A modificação dos valores das freqüências, não apresenta nenhuma relação de proporcionalidade em relação à carga aplicada. Quando as freqüências naturais variam com a carga externa, esta variação é mais acentuada para valores de carga próximos aos das cargas críticas. A condição de flambagem é traduzida pela anulação de uma das primeiras freqüências naturais (não necessariamente a primeira). Verifica-se em todas as placas analisadas que o sentido de aplicação da carga de cisalhamento não tem influência sobre os valores das freqüências naturais, mas têm influência sobre as freqüências de anti-ressonância. De modo geral, o comportamento dinâmico de placas solicitadas em cisalhamento mostra-se mais complexo que o de placas sujeitas a cargas normais.

A relação caracterizada entre as respostas dinâmicas e os esforços de membrana será utilizada, no Capítulo VII, na proposição de um procedimento inverso de identificação de cargas a partir do conhecimento de um conjunto de respostas dinâmicas e de um modelo matemático.

## CAPÍTULO VI

### Avaliação Experimental da Influência dos Esforços de Membrana Sobre o Comportamento Dinâmico de Placas Retangulares

Este capítulo descreve o estudo realizado com vistas à caracterização experimental da influência dos esforços de membrana no comportamento dinâmico de placas retangulares finas. O estudo experimental é baseado na análise das funções de resposta em frequência adquiridas experimentalmente e as frequências naturais estimadas a partir destas funções.

#### 6.1 Aparato Experimental

Na Figura 6.1 é ilustrado o dispositivo confeccionado para fixação da placa em condição de contorno engastada-engastada-livre-livre. O dispositivo permite, através do acionamento do parafuso indicado, aplicar diferentes valores de carga  $F$  de tração ou compressão na direção  $x$ , que é registrada através da célula de carga. Os ensaios foram realizados em duas placas retangulares, sendo uma de aço e a outra de alumínio, cujas propriedades físicas e geométricas são fornecidas na Tabela 6.1.

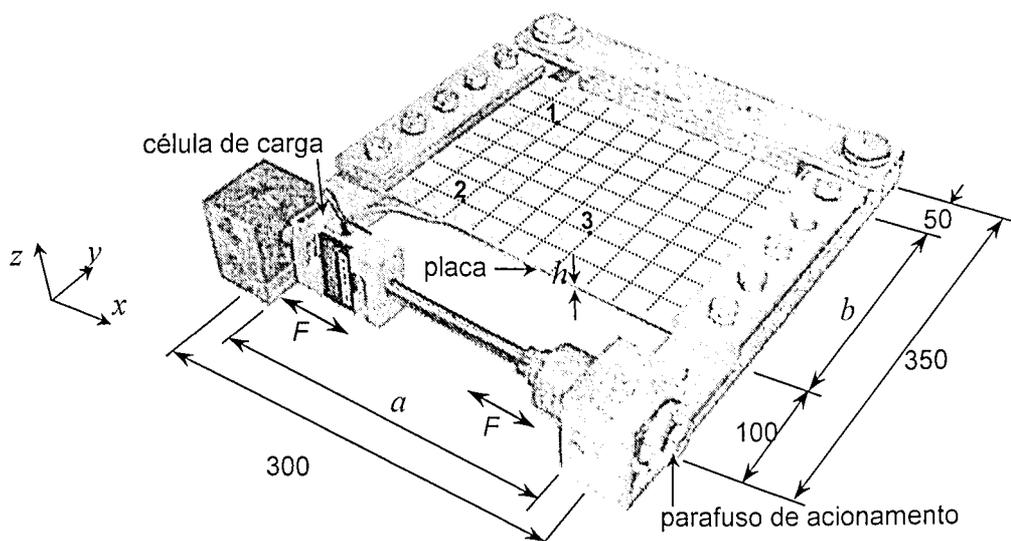


Figura 6.1 - Dispositivo experimental para ensaio de placas.

Tabela 6.1- Características físicas e geométricas das placas ensaiadas.

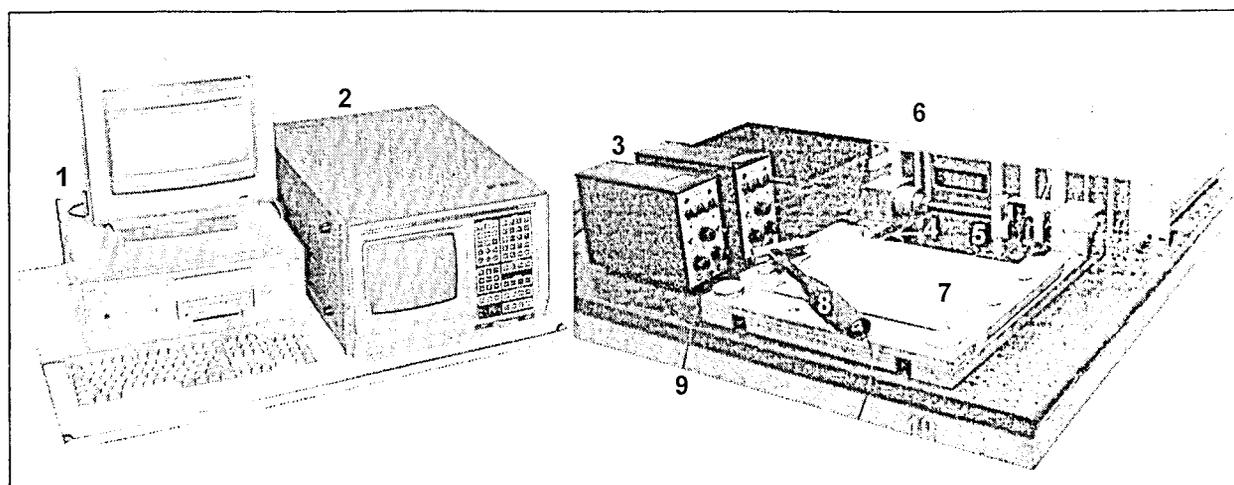
Placa	$a$ [m]	$b$ [m]	$h$ [m]	$E$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Alumínio *	$250 \times 10^{-3}$	$200 \times 10^{-3}$	$1,50 \times 10^{-3}$	$0,7 \times 10^9$	0,33	2750
Aço **	$250 \times 10^{-3}$	$200 \times 10^{-3}$	$1,50 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{11}$	0,29	7850

\*Alumínio 2048 - <http://www.matweb.com>

\*\*Aço AISI 1020 recozido - <http://www.matweb.com>

A Figura 6.2 ilustra a montagem experimental, estando indicados os seguintes equipamentos utilizados nos ensaios:

- Um micro computador para transferência de dados.
- Um analisador de espectro de dois canais Scientific Atlanta - SD380.
- Dois amplificadores de carga Brüel & Kjaer, ambos ajustados com ganho de 10 mV/unid. saída e faixa operacional de 1 Hz a 1 KHz.
- Um acelerômetro piezoelétrico Brüel & Kjaer com sensibilidade 0,344 pC/m/s<sup>2</sup>.
- Uma célula de carga Kratos modelo MM com capacidade de 200 kgf.
- Um indicador de sinais Kratos modelo IK-1A com precisão de 0,10%  $fs \pm 1.digito$  e sensibilidade de 2mV.fs (fs=fundo de escala).
- Um martelo de impacto, Brüel & Kjaer, modelo 8202 com célula de carga e sensibilidade de 1,03 pC/m/s<sup>2</sup>.
- Cabos e conexões.



1-micro-computador; 2-SD380; 3-amplificadores de carga; 4-acelerômetro; 5-célula de carga; 6- indicador de sinais; 7-placa; 8-martelo de impacto; 9-cabos; 10-mesa inercial.

Figura 6.2 - Aparato experimental.

## 6.2 Procedimento Experimental

Inicialmente, foram realizadas simulações numéricas por elementos finitos no ANSYS® para estimar o valor da primeira carga de flambagem das placas, verificando-se que este valor seria aproximadamente 100 kgf. Posteriormente, a célula de carga de capacidade de 200 kgf foi calibrada até uma carga de aproximadamente 110 kgf.

Os ensaios experimentais foram realizados em três etapas correspondentes a três cenários de carregamento ilustrados na Figura 6.3. (A): placa de alumínio "tracionada". (B): placa de alumínio "comprimida". (C): placa de aço "comprimida". Diferentes valores da força  $F$  foram aplicados e, para cada um deles, foram realizados os ensaios de vibração para a obtenção das FRFs associadas ao movimento de flexão das placas.

O modelo de elementos finitos do ANSYS® é ilustrado na Figura 6.4

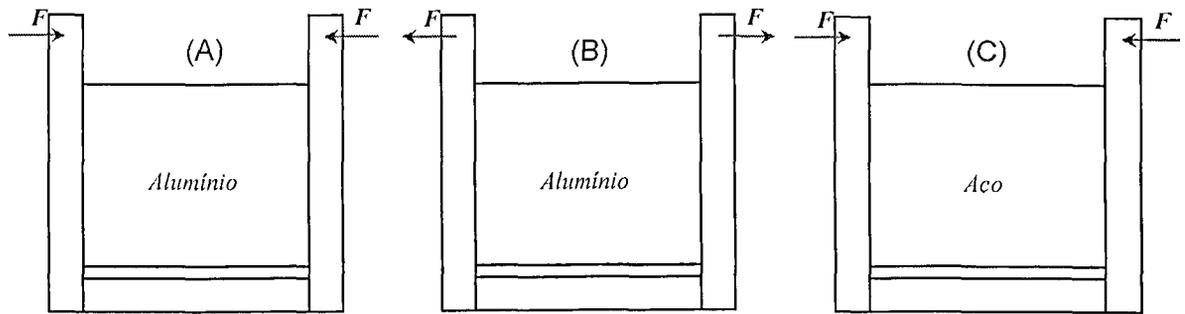


Figura 6.3 - Cenários de aplicação dos esforços.

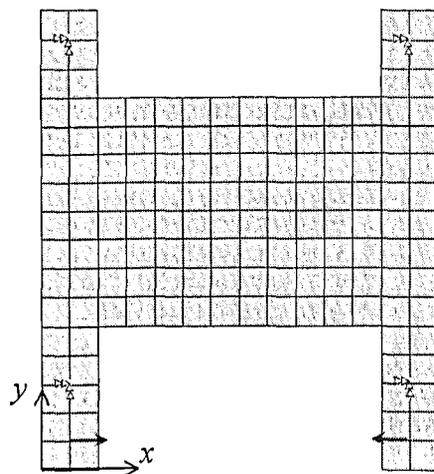


Figura 6.4 - Modelo de elementos finitos da placa no ANSYS®.

A Figura 6.5 mostra as distribuições de tensões normais e da tensão cisalhante para a aplicação de uma força  $F = 50$  N no cenário (A) obtidas pela análise de elementos finitos. Evidencia-se uma distribuição não uniforme das tensões, e no caso das tensões normais, a distribuição é simétrica em relação ao eixo  $y$ .

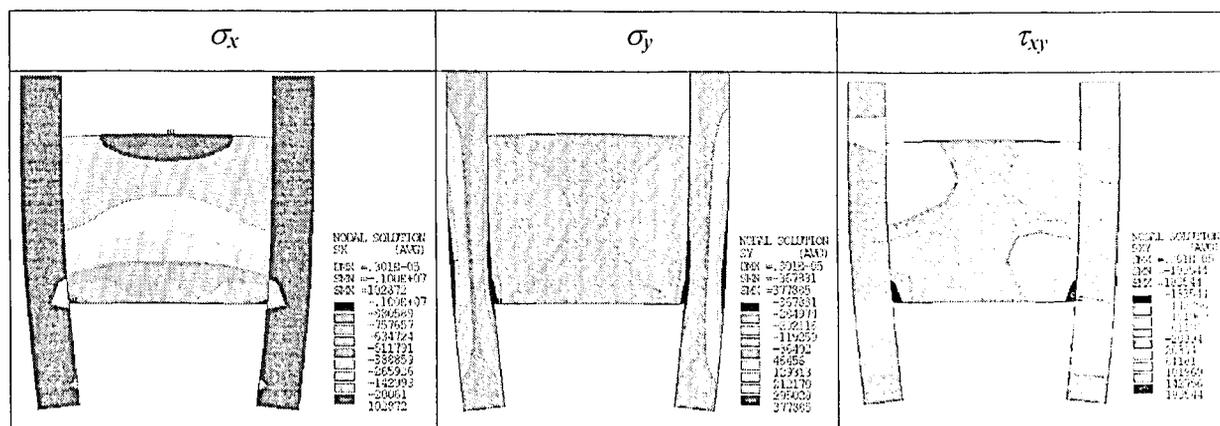


Figura 6.5 - Distribuições de tensões na placa de alumínio.

As funções de resposta em frequência que correspondem ao deslocamento transversal nos pontos 1, 2 e 3 (ilustrados na Figura 6.1) foram obtidas através de excitações por impacto, medindo-se a resposta com o auxílio do acelerômetro piezelétrico. O valor de carga aplicado à placa foi medido através da célula de carga e indicado pelo condicionador de sinais Kratos. Os dados da excitação e da resposta foram processados pelo analisador de espectro que forneceu as funções densidade espectral da entrada e da saída para 10 médias e  $\Delta f = 0,625$  [Hz]. A partir destas funções, utilizando os estimadores das FRFs, para cada cenário de carregamento, foram computadas as seguintes funções: cenário (A)  $H_{1,1}$ ,  $H_{1,3}$ ,  $H_{2,1}$ ,  $H_{2,2}$ ,  $H_{2,3}$  e  $H_{3,3}$ ; cenário (B)  $H_{3,2}$  e  $H_{3,3}$  e cenário (C)  $H_{3,2}$  e  $H_{3,3}$ .

Para estimar os valores das frequências naturais através das funções de resposta em frequência experimentais, aplicou-se o *Rational Fraction Polynomial Method* - RFP (Richardson e Formenti, 1982). Este método constitui-se em uma ferramenta de identificação modal no domínio da frequência e não requer valores de estimativas iniciais dos parâmetros modais. Devido à sua abordagem pelo Método dos Mínimos Quadrados, pode operar com a presença de ruído nos dados experimentais e com efeitos residuais dos modos que encontram-se fora da banda espectral de análise. O método expressa as FRFs em forma de frações polinomiais parciais, definindo a função erro como a diferença entre as frações ajustadas e as experimentais. O uso de técnicas de otimização permite a resolução indireta do problema de identificação, encontrando assim, os coeficientes dos polinômios que formam as frações, dos quais são extraídas as frequências naturais do sistema. A estimativa das frequências naturais foi realizada dentro de uma banda de 50 e 450 Hz, conseguindo um ajuste muito bom. A título de exemplo, a Figura 6.6 ilustra o ajuste realizado nas FRFs  $H_{1,1}$  e  $H_{3,3}$  nas placas carregadas de alumínio (-10,00 Kg) e aço (-80,50 Kg), respectivamente.

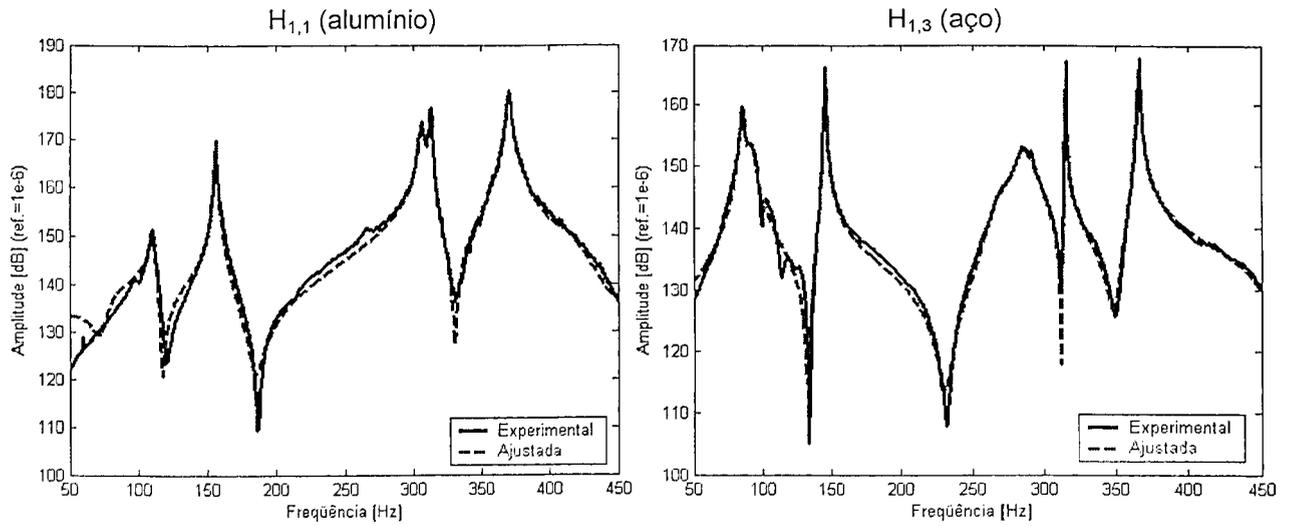


Figura 6.6 - Ajuste das FRFs  $H_{1,1}$  e  $H_{1,3}$  das placas de alumínio e aço respectivamente.

### 6.3 Resultados Obtidos para a Placa de Alumínio

As Figuras 6.7 a 6.9 representam a variação das amplitudes das funções de resposta em frequência e das frequências naturais correspondentes a cargas aplicadas no cenário (A).

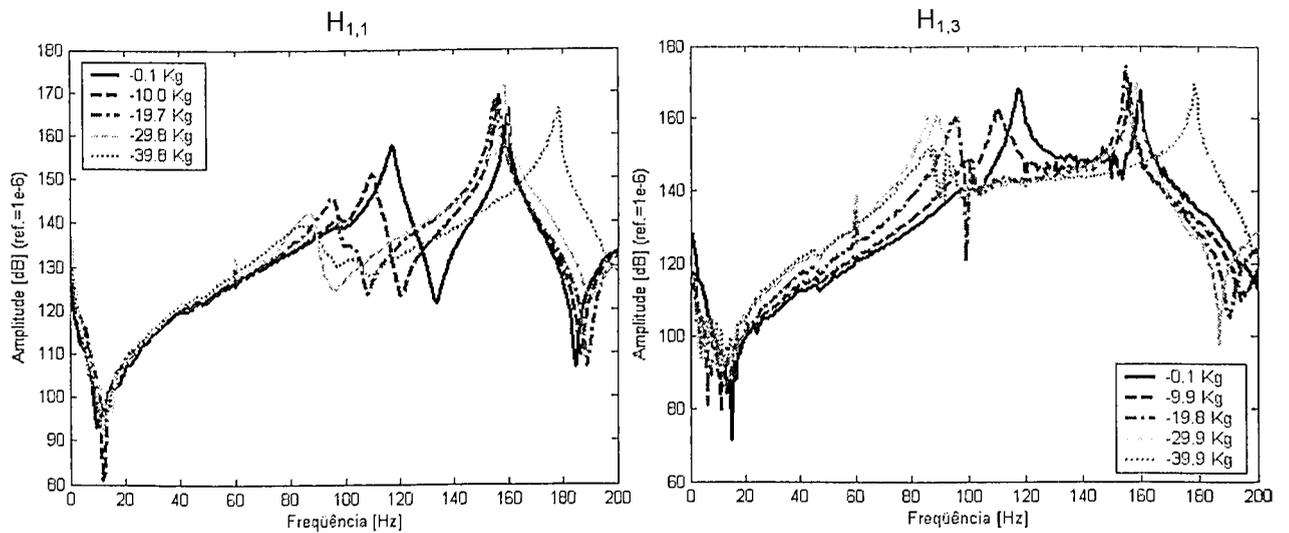


Figura 6.7- Variação das amplitudes das FRFs  $H_{1,1}$  e  $H_{1,3}$  em função da carga de compressão aplicada à placa de alumínio.

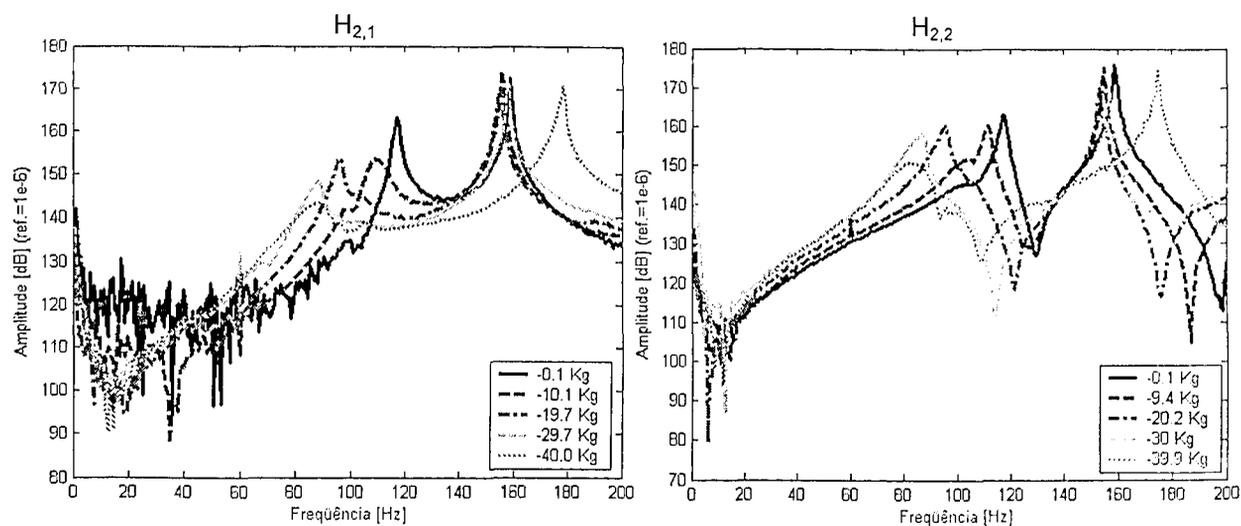


Figura 6.8 - Variação das amplitudes das FRFs  $H_{2,1}$  e  $H_{2,2}$  em função da carga de compressão aplicada à placa de alumínio.

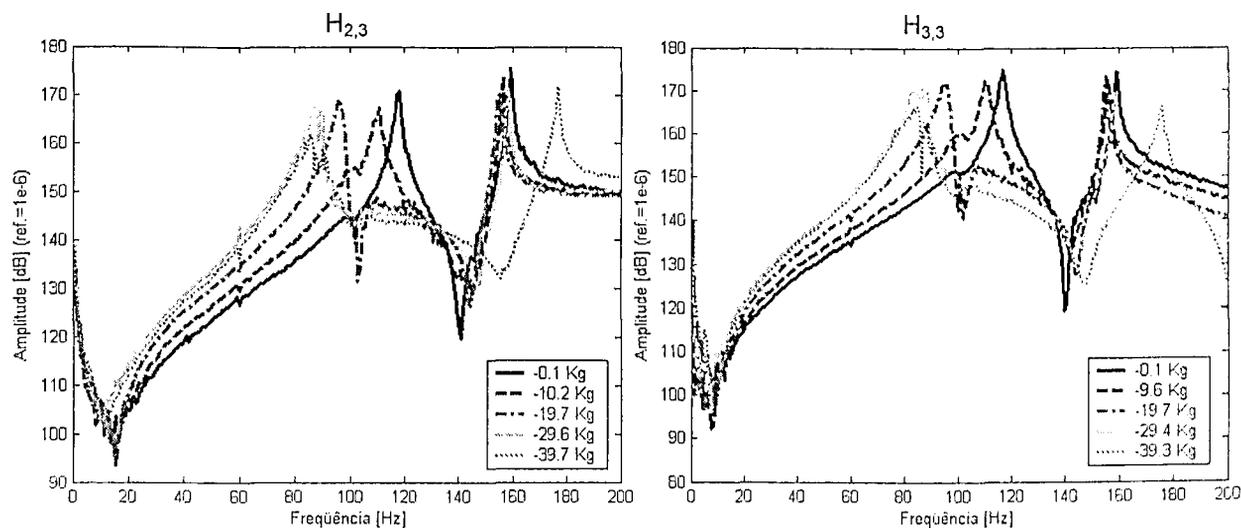


Figura 6.9-Variação das amplitudes das FRFs  $H_{2,3}$  e  $H_{3,3}$  em função da carga de compressão aplicada à placa de alumínio.

A Figura 6.10 representa variação das amplitudes das funções de resposta em frequência em função do carregamento aplicado correspondentes ao cenário (B).

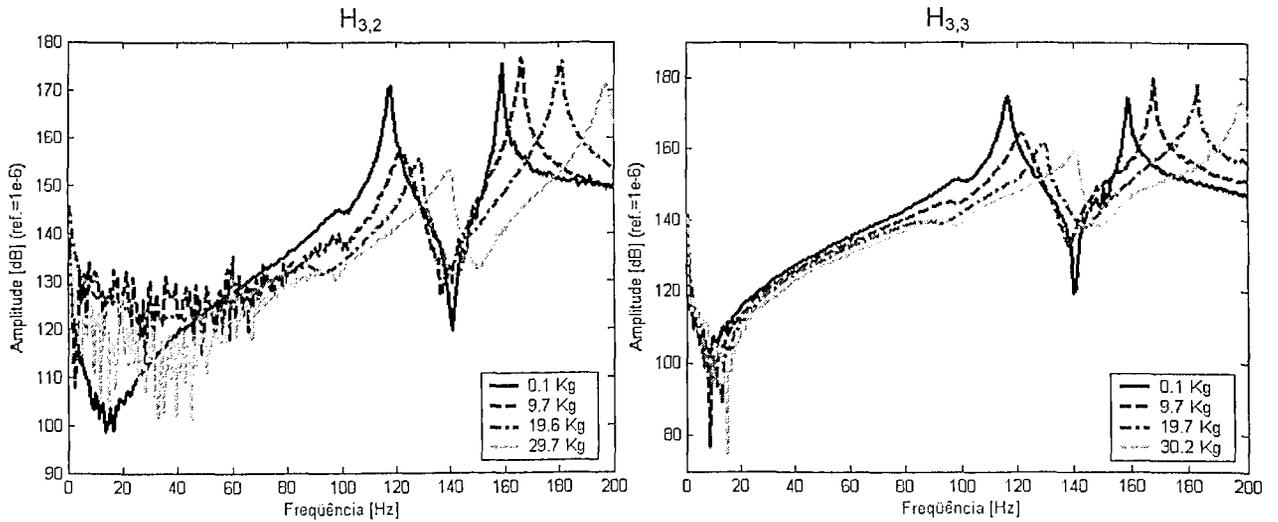


Figura 6.10 - Variação das amplitudes das FRFs  $H_{3,2}$  e  $H_{3,3}$  em função da carga de tração aplicada à placa de alumínio.

A Figuras 6.11 e 6.12 ilustram a variação das freqüências naturais em função da carga aplicada nos cenários (A) e (B).

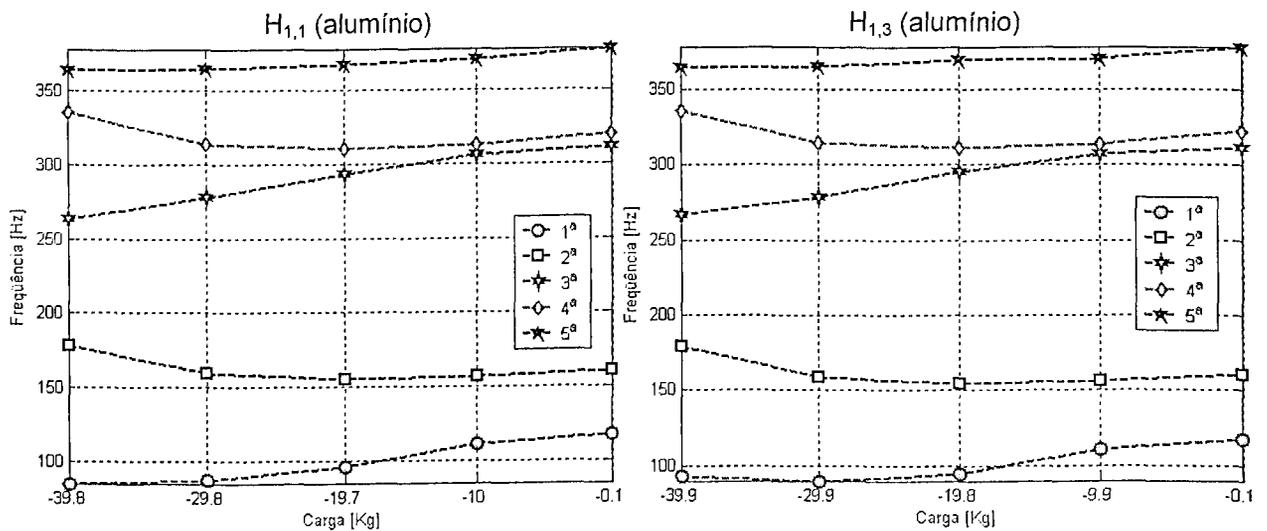


Figura 6.11- Freqüências naturais estimadas a partir de  $H_{1,1}$  e  $H_{1,3}$  em função da carga para a placa de alumínio.

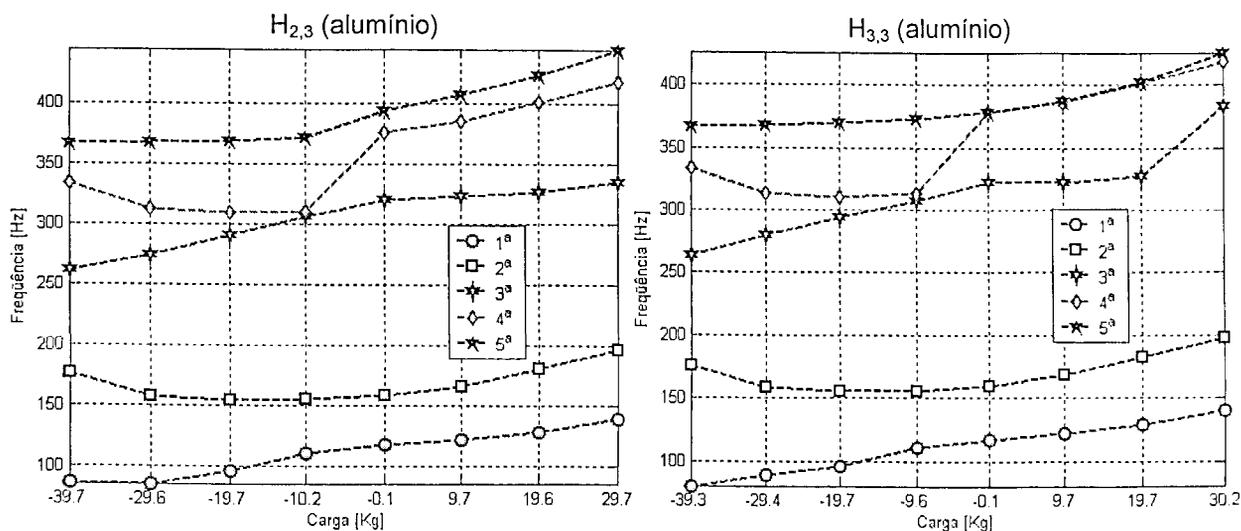


Figura 6.12- Frequências naturais estimadas a partir de H<sub>2,3</sub> e H<sub>3,3</sub> em função da carga para a placa de alumínio.

#### 6.4 Resultados Obtidos para a Placa de Aço

As Figuras 6.13 e 6.14 representam a variação das amplitudes das funções de resposta em frequência e as frequências naturais correspondentes às cargas aplicadas no cenário (C).

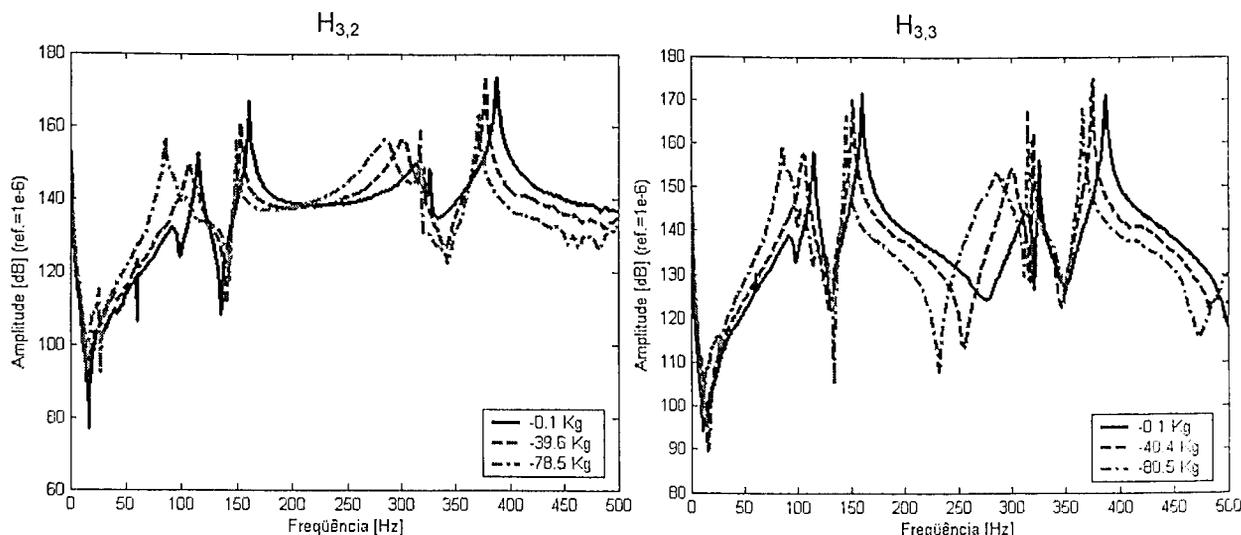


Figura 6.13 - Variação das amplitudes das FRFs H<sub>3,2</sub> e H<sub>3,3</sub> em função da carga de compressão aplicada à placa de aço.

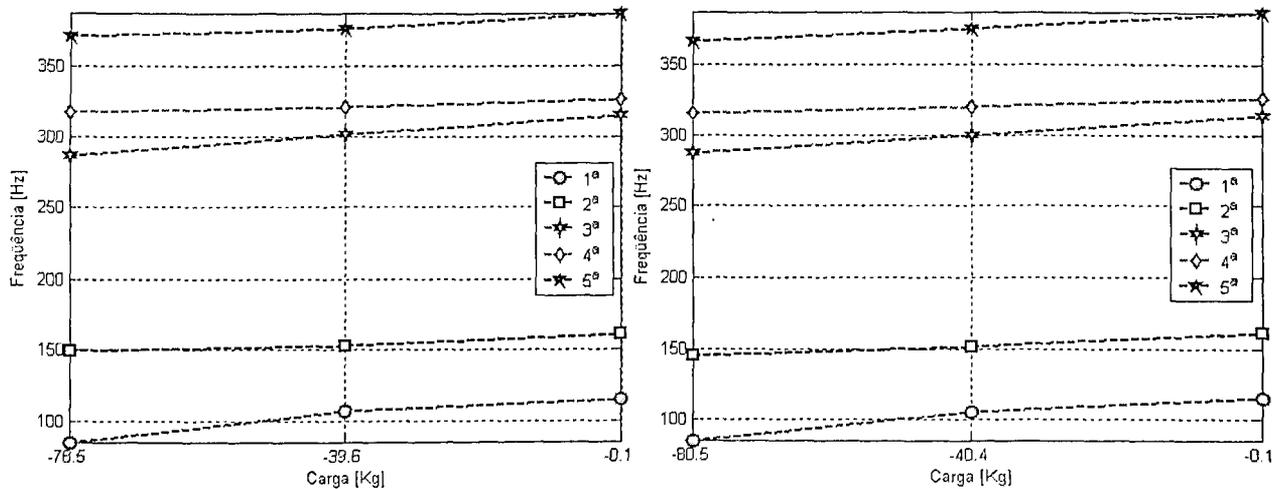


Figura 6.14 - Frequências naturais estimadas a partir de  $H_{3,1}$  e  $H_{3,3}$  em função da carga para a placa de aço.

### 6.5 Comentários Sobre os Resultados Experimentais

Conforme evidenciado na Figura 6.5, o estado de tensões gerado pelo dispositivo de fixação e aplicação de carga é um estado relativamente complexo, combinando tensões normais nas duas direções principais da placa e tensões de cisalhamento. Este fato explica a tendência de variação não monotônica das frequências naturais em função da carga aplicada (ver, por exemplo, a Figura 6.9).

Nos ensaios experimentais não foi possível caracterizar a condição de flambagem da placa pela anulação de uma de suas frequências naturais. Isso deve-se ao fato de que as placas ensaiadas apresentaram empenamento, o qual se amplificava com o aumento da carga de compressão aplicada. De fato, imperfeições iniciais dificultam a caracterização de cargas de flambagem.

Os resultados dos ensaios experimentais permitiram evidenciar mais uma vez, a significativa influência dos esforços de membrana sobre o comportamento dinâmico das placas ensaiadas e a possibilidade de relacionar os valores das frequências naturais com a carga aplicada. Esta característica será explorada no próximo capítulo na proposição de um método de identificação do carregamento externo a partir dos valores das frequências naturais da placa carregada.

## CAPÍTULO VII

### Identificação de Cargas em Sistemas Estruturais Planos e Placas Retangulares a Partir das Respostas Dinâmicas

Nos capítulos precedentes ficou evidenciada a dependência das respostas dinâmicas de sistemas estruturais compostos por vigas e de placas retangulares em relação a cargas axiais, no primeiro caso, e a esforços normais e cisalhantes no segundo caso. Com base neste fenômeno, neste capítulo é proposto um procedimento inverso para a identificação de cargas externas a partir das respostas dinâmicas destes dois tipos de elementos estruturais. De acordo com o procedimento de identificação proposto, empregando os modelos de elementos finitos e os baseados no MMA, desenvolvidos nos capítulos anteriores, as frequências e os modos naturais de vibração da estrutura sujeita ao carregamento externo são usados para formar uma função objetivo tendo como variáveis de projeto as cargas que são supostas desconhecidas. O problema de otimização é resolvido numericamente utilizando tanto algoritmos clássicos baseados em gradiente como algoritmos pseudo-aleatórios (Algoritmos Genéticos e *Particle Swarm Optimization*).

#### 7.1 Fundamentos de Identificação de Parâmetros Através do Ajuste de Modelos

O procedimento de identificação apresentado neste capítulo pode ser considerado como um procedimento de identificação paramétrica baseada no ajuste de modelos de elementos finitos, razão pela qual se apresentam, nesta seção, alguns conceitos gerais sobre este tipo de problema, que é tratado em profundidade no livro de Friswell e Mottershead (1995).

Os procedimentos clássicos de ajuste de modelos consistem em promover correções nas matrizes de massa e rigidez (e, menos frequentemente, de amortecimento) com o objetivo de minimizar as diferenças observadas entre as previsões de um modelo inicial e as correspondentes respostas dinâmicas medidas experimentalmente sobre um protótipo da estrutura. Trata-se, portanto, de uma estratégia de conciliação entre modelagem numérica e experimentação. Na maior parte dos casos os erros de modelagem são parametrizados, de modo que passam a ser representados por um conjunto de parâmetros corretores de massa,

rigidez e amortecimento a serem aplicados a zonas do modelo onde se admite estarem concentrados os erros de modelagem. Formula-se então um problema de otimização em que a função objetivo representa a diferença entre as respostas experimentais medidas e as correspondentes previsões do modelo inicial. Os parâmetros de correção são as variáveis de projeto. Em geral, o problema de otimização é não linear, com restrições.

Quando associada a problemas reais de Engenharia, a identificação paramétrica apresenta um certo número de dificuldades que limitam consideravelmente a sua aplicabilidade e chances de sucesso. Dentre elas, podem-se citar:

- a presença dos erros aleatórios e sistemáticos nos dados experimentais;
- os dados experimentais são inevitavelmente truncados, tanto no domínio espacial (número limitado de sensores) quanto no domínio temporal (observação das respostas em uma banda de frequência limitada, contendo apenas alguns modos de vibração da estrutura);
- como resultado da dificuldade anterior, o problema de identificação não possui solução única, sendo geralmente caracterizado por mau condicionamento numérico;
- Incompatibilidade entre as dimensões dos vetores formados pelas respostas dinâmicas experimentais e do modelo de elementos finitos, uma vez que, geralmente, o número de graus de liberdade do modelo excede em muito o número de coordenadas instrumentadas durante os ensaios. Este fato requer o uso de procedimentos especiais de adaptação entre os dois conjuntos de dados, que geralmente são aproximados e introduzem erros adicionais.

Apesar destas dificuldades, algumas das quais podem ser evitadas ou minimizadas mediante a adoção de procedimentos especiais tanto nos procedimentos experimentais quanto numéricos, o estado atual da arte revela que procedimentos de ajuste têm sido usados com relativo sucesso em numerosas aplicações industriais.

## 7.2 Formulação do Problema de Identificação de Forças

O procedimento de identificação de esforços externos, proposto neste capítulo, consiste na minimização de uma função objetivo traduzindo a diferença normalizada entre as freqüências e modos naturais obtidos experimentalmente sobre a estrutura sujeita ao carregamento e as correspondentes respostas dinâmicas previstas pelo modelo de elementos finitos no qual é incluído o efeito do enrijecimento por tensões. Neste problema de otimização, as variáveis de projeto são as cargas externas. Busca-se, assim, determinar as cargas a serem aplicadas no modelo que conduzam à melhor reprodução das respostas experimentais da estrutura carregada.

Evidentemente, em uma situação real de Engenharia, tanto os erros de modelagem, em termos dos parâmetros físicos e/ou geométricos do modelo, quanto as forças a serem identificadas, influem sobre as respostas dinâmicas da estrutura. Contudo, neste trabalho admitem-se, como incógnitas, apenas as forças externas, o que pressupõe que o modelo de elementos finitos utilizado seja isento de erros de modelagem ou tenha sido previamente corrigido, ou ainda que a influência das forças externas seja muito superior aos erros de modelagem existentes. Ressalte-se ainda que é perfeitamente possível formular o problema mais geral de identificação em que tanto os erros de modelagem quanto os esforços externos são considerados desconhecidos, simultaneamente.

A função objetivo utilizada neste trabalho é definida da forma:

$$J(\{p\}) = \sum_{i=1}^m \left\{ W_{\omega} \frac{|\omega_i^{(m)}(\{p\}) - \omega_i^{(e)}|}{\omega_i^{(e)}} + W_f \frac{\|\{V_i^{(m)}\}(\{p\}) - \{V_i^{(e)}\}\|}{\|\{V_i^{(e)}\}\|} + \right. \\ \left. + W_M \{1 - MAC[\{V_i^{(m)}\}(\{p\}), \{V_i^{(e)}\}]\} \right\} \quad (7.1)$$

com as restrições laterais:

$$\{p^L\} \leq \{p\} \leq \{p^U\} \quad (7.2)$$

onde:

- os superescritos <sup>(m)</sup> e <sup>(e)</sup> designam quantidades relativas ao modelo e experimentais, respectivamente;

$$\bullet \quad MAC\left[\left\{V_i^{(m)}(\{p\})\right\}, \left\{V_i^{(e)}\right\}\right] = \frac{\left[\left\{V_i^{(m)}(\{p\})\right\}^T \left\{V_i^{(e)}\right\}\right]}{\left\|\left\{V_i^{(m)}(\{p\})\right\}\right\| \left\|\left\{V_i^{(e)}\right\}\right\|} \quad \text{é o conhecido Modal}$$

*Assurance Criterion*;

- $m$  é o número de modos de vibração utilizados;
- $\{p\}$  é o vetor das cargas externas a serem identificadas;
- $\omega_i^{(m)}(\{p\})$  e  $\{V_i^{(m)}(\{p\})\}$  são as freqüências naturais e os modos naturais de vibração previstos pelo modelo de elementos finitos, respectivamente;
- $\omega_i^{(e)}(\{p\})$  e  $\{V_i^{(e)}(\{p\})\}$  são as freqüências naturais e os modos naturais de vibração experimentais da estrutura carregada, respectivamente;
- $W_\omega$ ,  $W_V$  e  $W_M$  são fatores de ponderação.

As restrições laterais são introduzidas para limitar os valores das variáveis de projeto em um subdomínio viável do espaço de busca, levando-se em conta a possibilidade de ocorrência de flambagem ou colapso por níveis excessivos de cargas externas.

A resolução numérica do problema de otimização pode ser feita empregando diferentes estratégias, que se podem classificar em métodos tradicionais, baseados em gradiente (Vanderplaats, 1999) e em métodos heurísticos pseudo-aleatórios (Goldberg, 1989).

Nas aplicações realizadas no âmbito deste trabalho, a função objetivo foi construída usando os primeiros conjuntos de parâmetros modais e restringindo o valor da carga total identificada entre zero e o valor correspondente à primeira carga de flambagem da cada estrutura. Propôs-se identificar sucessivamente, diferentes cenários de carregamento, caracterizados por diferentes números de cargas desconhecidas, objetivando avaliar a influência do número de incógnitas no desempenho do procedimento de identificação dos algoritmos utilizados.

Os problemas de otimização foram resolvidos numericamente utilizando algoritmos baseados em busca linear como a Programação Quadrática Seqüencial (SQP) e também os algoritmos pseudo-aleatórios Algoritmos Genéticos - GA (Goldberg, 1989) e Particle Swarm Optimization - PSO (Kennedy e Eberhart, 1995).

O algoritmo de busca linear utilizado no procedimento de identificação de cargas baseia-se no Método de Lagrange-Newton-SQP (Programação Quadrática Seqüencial) e procura minimizar uma função de várias variáveis  $f(x)$ , sujeita a restrições lineares e/ou não lineares de igualdade e/ou desigualdade ( $Ax \leq B$ ,  $A_{eq}x = B_{eq}$ ,  $Cx \leq 0$ ,  $C_{eq}x = 0$ ) e restrições laterais

impostas às variáveis ( $l_b \leq x \leq l_u$ ). Para a determinação dos parâmetros ótimos é requerida uma estimativa inicial dos mesmos. O algoritmo retorna os parâmetros ótimos, o valor da função objetivo e a evolução da função objetivo ao longo do processo iterativo. Conseqüentemente, os resultados obtidos por SQP dependem das estimativas iniciais das forças e do número de variáveis identificadas.

Com o propósito de identificar parâmetros de cargas em estruturas sem a necessidade de definição de estimativas iniciais, indispensáveis para o algoritmo baseado na SQP, em um primeiro momento foi utilizado um otimizador implementado em ambiente MATLAB® o qual se baseia nos Algoritmos Genéticos. Os resultados obtidos não foram satisfatórios em comparação com os obtidos pela busca linear. Desta forma optou-se pela outra técnica de otimização heurística (PSO), a qual permitiu a identificação de cargas sem a necessidade de se adotar valores de partida para os parâmetros de projeto. Por esta razão, são aqui apresentados apenas os resultados de identificação de cargas através da SQP e PSO.

Para maiores detalhes, no Anexo C são apresentados os fundamentos do PSO e uma avaliação da influência dos parâmetros deste método sobre os resultados de identificação de cargas. Esta avaliação permitiu definir os parâmetros do PSO utilizados nos procedimentos de otimização, os quais são mostrados na Tabela 7.1. Em alguns casos são utilizados valores dos parâmetros diferentes aos da Tabela 7.1, nesses casos são especificados os valores utilizados nas respectivas aplicações.

Tabela 7.1- Parâmetros do PSO utilizados na identificação de cargas.

$n_b$	$w$	$c_1$	$c_2$	$dt$	$n_{iter}$
50,00	1,40	1,50	2,50	1,00	100,00

onde:

- $n_b$  é o número de partículas ou indivíduos;
- $w$  é a inércia da partícula;
- $c_1$  é o parâmetro de confiança do indivíduo;
- $c_2$  é o parâmetro de confiança do bando;
- $dt$  é o intervalo de tempo unitário;
- $n_{iter}$  é o número de vezes que os parâmetros de posição, velocidade e extinção de massa é atualizada pelo algoritmo.

### 7.3 Identificação de Carga em uma Coluna Bi-apoiada

É proposta a determinação da magnitude de uma carga de compressão axial ( $F$ ) equivalente à metade do valor da carga crítica de flambagem, aplicada na extremidade superior de uma coluna bi-apoiada, cujo modelo de elementos finitos é ilustrado na Figura 7.1.

As dimensões e propriedades mecânicas do modelo são apresentadas na Tabela 7.2, onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\rho$  é a densidade volumétrica e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Tabela 7.2- Dimensões e propriedades mecânicas do modelo de coluna.

$H$ [m]	$A$ [m]	$B$ [m]	$E$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
4,00	0,10	0,20	$2,10 \times 10^{11}$	0,30	7800,00

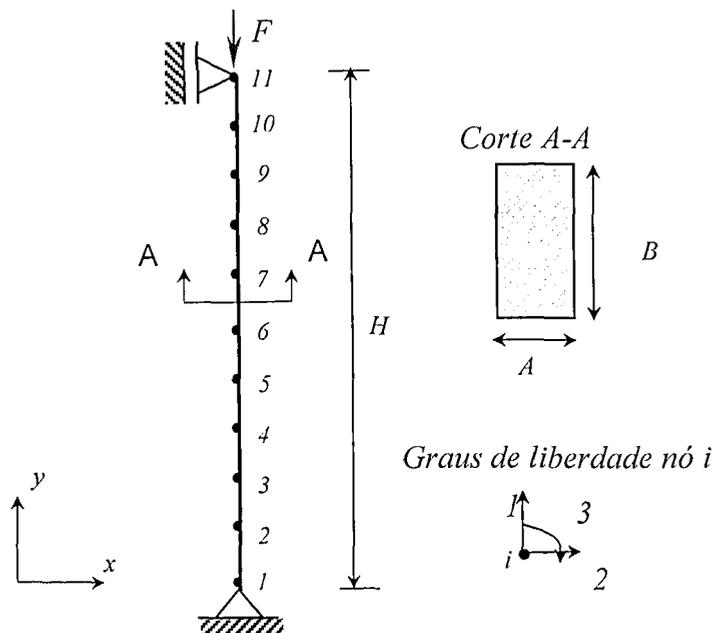


Figura 7.1- Carga externa aplicada à coluna bi-apoiada.

No procedimento de identificação, não foi explorado o *MAC*, ou seja, na Equação (7.1) adotou-se a ponderação  $W_M = 0$ , sendo os demais fatores de ponderação unitários.

Os valores das seis primeiras frequências naturais da coluna sem e com a presença carga  $F=4.317.950$  [N] são apresentados na Tabela 7.3.

Tabela 7.3- Freqüências naturais da coluna descarregada e carregada.

Condição de Carregamento	Freqüências naturais [Hz]					
	1	2	3	4	5	6
Sem carga	29,41	117,65	264,84	324,63	471,35	738,16
Com carga	20,80	110,06	257,38	324,63	463,95	730,80

### 7.3.1 Método de Lagrange-Newton-SQP

Na Tabela 7.4 apresentam-se os resultados do processo de identificação para dois valores de estimativas iniciais da carga axial. Observa-se que os erros entre as cargas identificadas e o valor exato são pequenos, observando-se significativas reduções dos valores da função objetivo. Os tempos de processamento são bastante curtos. Desta forma, verifica-se que para esta aplicação o método de identificação proposto utilizado é bastante preciso e eficiente do ponto de vista do esforço computacional.

Tabela 7.4- Resultados da identificação de uma força na coluna usando SQP.

Carga [N]			Erro [%]	Função Objetivo		Tempo [min.]
Inicial	Identificada	Exata		Inicial	Final	
-4000000,00	-4298168,71	-4317950,00	0,46	2,04	0,0028	0,069
-3000000,00	-4172961,67	-4317950,00	3,36	0,18	0,02	0,073

A Figura 7.2 ilustra a evolução da função objetivo durante o procedimento de otimização para ambas estimativas iniciais.

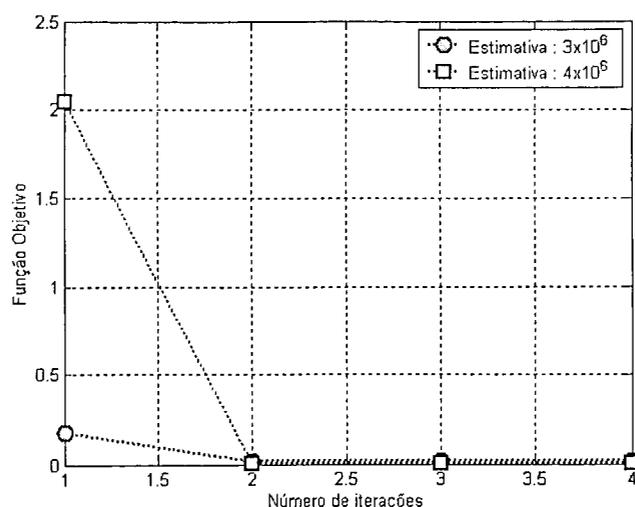


Figura 7.2 - Evolução do valor da função objetivo da coluna durante otimização por SQP.

### 7.3.2 Particle Swarm Optimization

Os resultados da Tabela 7.5 demonstram a precisão do algoritmo PSO que utilizou os parâmetros dados na Tabela 7.1 para identificar a carga axial. Comparando a diferença percentual entre a carga identificada e o valor exato das Tabelas 7.4 e 7.5, observa-se que o algoritmo que se baseia no PSO proporcionou para esta aplicação, uma identificação mais precisa que o SQP.

Tabela 7.5- Resultados da identificação de uma força na coluna usando o PSO.

Carga [N]		Erro [%]	Função Objetivo	Tempo [min.]
Identificada	Exata			
-4314918,08	-4317950,00	0,07	$4,40 \times 10^{-4}$	4,30

Considera-se a seguir um problema mais difícil em que admite-se que tanto a posição da carga axial quanto a sua magnitude sejam desconhecidas, devendo ser identificadas pelo algoritmo. Neste caso, tem-se um problema de otimização discreto-continuo, onde o parâmetro discreto é a posição e o parâmetro contínuo é a magnitude da carga. Em se tratando de modelos de elementos finitos, a posição é dada pelo número do nó onde a carga é aplicada, que para o modelo da coluna em questão, pode variar de 1 a 11.

Os resultados da Tabela 7.6 mostram que o algoritmo PSO foi capaz de identificar corretamente a posição e a magnitude do carregamento.

Tabela 7.6- Resultados de identificação do carregamento da coluna usando o PSO.

Parâmetro	Carga [N]		Erro [%]	Função Objetivo	Tempo [min.]
	Identificada	Exata			
Magnitude	-4359384,03	-4317950,00	0,96	$6,03 \times 10^{-3}$	4,31
Posição	11	11	-		

#### 7.4 Identificação de Cargas em um Pórtico Plano

Com o objetivo de avaliar a eficiência da técnica de identificação quando aplicada a estruturas bidimensionais propõe-se, nesta seção, identificar as magnitudes das forças aplicadas no modelo do pórtico plano esquematizado na Figura 7.3, cujos valores exatos são também indicados. São considerados diferentes cenários de carregamento, consistindo de subconjuntos das forças indicadas.

As dimensões e propriedades mecânicas do material do pórtico são apresentadas na Tabela 7.7.

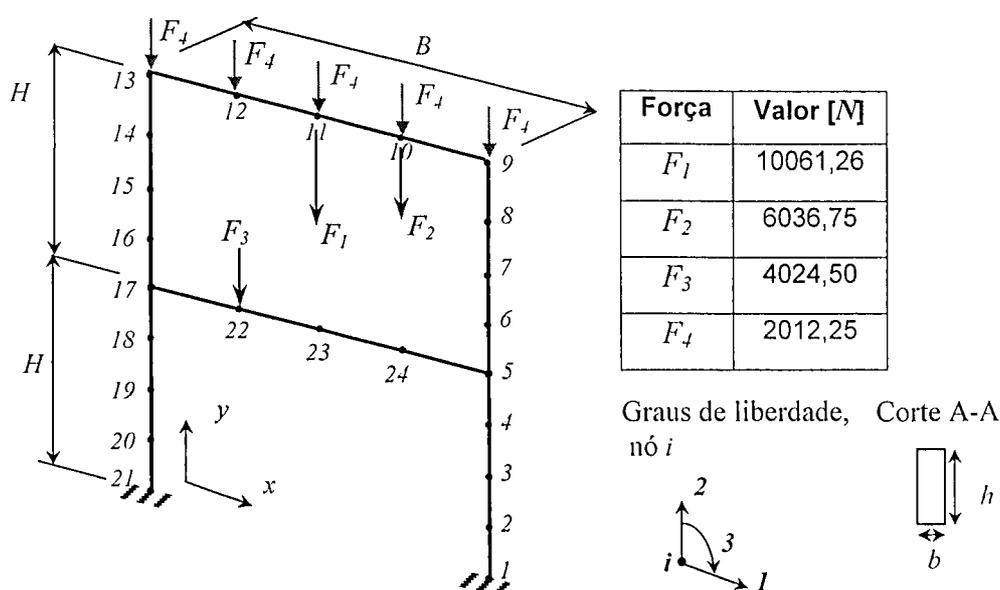


Figura 7.3 - Cargas externas aplicadas no pórtico plano.

Tabela 7.7- Dimensões e propriedades mecânicas do pórtico.

$B$ [m]	$H$ [m]	$b$ [m]	$h$ [m]	$E$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
1,50	1,00	0,04	0,015	$2,10 \times 10^{11}$	0,30	7800,00

Neste problema, o procedimento de identificação adota a ponderação  $W_M = 0$  na função objetivo (7.1) quando é identificada somente uma força. A partir da identificação simultânea de duas até cinco forças, todos os fatores de ponderação da função objetivo têm valor unitário.

A Tabela 7.8 apresenta os valores das seis primeiras freqüências naturais da estrutura sob diferentes cenários de carregamento. Ressalta-se que os valores das cargas são tais que em nenhum dos cenários de carregamento a estrutura perde estabilidade por flambagem.

Tabela 7.8- Freqüências naturais do pórtico sob diferentes configurações de carregamento.

Cenários de Carregamento		Freqüências naturais [Hz]					
		1	2	3	4	5	6
(1)	Sem carga	4,42	15,07	22,74	28,30	51,85	59,64
(2)	$F_1$	3,21	12,69	21,40	28,67	49,38	57,65
(3)	$F_1, F_2$	2,08	11,04	20,57	28,66	47,74	56,49
(4)	$F_1, F_2, F_3$	1,69	10,70	20,41	28,54	47,40	56,25
(5)	$F_1, F_2, F_3, F_4, F_4$	3,20	12,72	21,70	28,30	49,39	57,62

#### 7.4.1 Método de Lagrange-Newton-SQP

Os resultados de otimização obtidos usando o SQP são mostrados na Tabela 7.9, considerando os diferentes cenários de carregamento. Eles permitem concluir que a técnica de otimização utilizada na identificação de várias cargas no pórtico é eficiente, já que a minimização da função objetivo é alcançada e a diferença percentual entre os valores exatos e identificadas é pequena. Nota-se, contudo, que quando são identificadas simultaneamente 5 forças, os resultados são menos precisos, o que pode ser atribuído à natural dificuldade de se resolver o problema de otimização em um espaço de busca de dimensão mais elevada. Em todos os casos, o tempo de processamento necessário mostrou-se bastante reduzido.

Tabela 7.9 - Cargas identificadas no pórtico usando SQP.

Cenário		Carga [N]			Erro [%]	Função Objetivo		Tem. [min]
		E. Inicial	Identificada	Exata		Inicial	Final	
(2)	$F_1$	-15000,00	-10061,25	-10061,26	$9 \times 10^{-5}$	0,63	$1,7 \times 10^{-7}$	0,11
(3)	$F_1$	-12000,00	-10061,26	-10061,26	$9 \times 10^{-8}$	4,21	$3,06 \times 10^{-7}$	0,23
	$F_2$	-5000,00	-6036,75	-6036,75	$9 \times 10^{-8}$			
(4)	$F_1$	-12000,00	-10061,20	-10061,26	$6 \times 10^{-4}$	4,18	$2,93 \times 10^{-6}$	0,38
	$F_2$	-5000,00	-6036,81	-6036,75	$9 \times 10^{-4}$			
	$F_3$	-3000,00	-4024,49	-4024,50	$2 \times 10^{-4}$			
(5)	$F_4$	-10000,00	-2077,72	-2012,25	3,25	16,44	$9,03 \times 10^{-5}$	0,62
	$F_4$	-10000,00	-1869,46	-2012,25	7,10			
	$F_4$	-10000,00	-2064,72	-2012,25	2,61			
	$F_4$	-10000,00	-2084,93	-2012,25	3,61			
	$F_4$	-10000,00	-1964,50	-2012,25	2,37			

A Figura 7.4 ilustra a evolução da função objetivo durante os procedimentos de minimização.

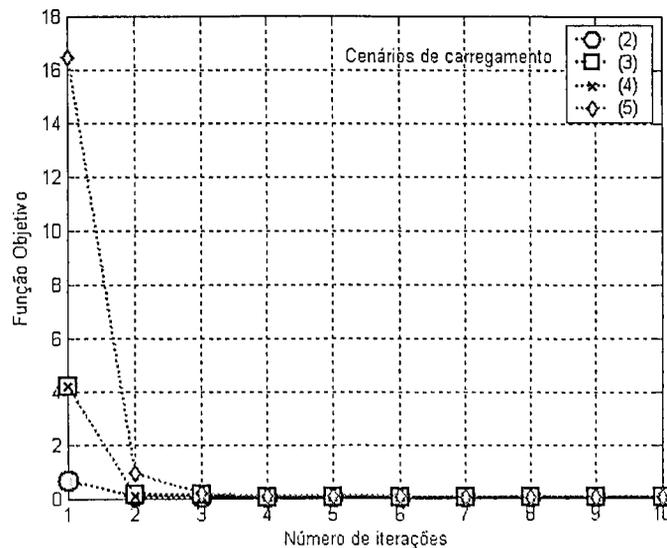


Figura 7.4 - Evolução do valor da função objetivo do pórtico durante otimização por SQP.

#### 7.4.2 Particle Swarm Optimization

Os resultados do processo de identificação do problema proposto utilizando PSO, para os diferentes cenários de carregamento, são mostrados na Tabela 7.10. Em todos os cenários de carregamento foram utilizados os parâmetros da Tabela 7.1, sendo que para o cenário 5, foram utilizadas 150 partículas e 150 iterações. Observa-se que quando se identificam 5 forças simultaneamente, o tempo de processamento é mais prolongado e a diferença entre os valores identificados e exatos é mais acentuada, com um erro médio de 85 % (cenário 5a). Levando em conta a natureza aleatória do PSO, propôs-se, para a identificação simultânea de 5 forças, utilizar uma estratégia alternativa que consiste em repetir o procedimento de otimização 10 vezes, cada uma delas usando 80 partículas e 80 iterações, e adotar, como solução ótima, o valor médio das cargas identificadas em cada um dos 10 cálculos de otimização. Os resultados obtidos através desta estratégia são identificados na Tabela 7.10 como cenário 5b, observando-se que, embora o tempo de processamento seja quase 10 vezes maior que o do teste de identificação precedente, o erro médio das cargas identificadas é bem menor, situando-se em 19,41%.

Comparando os resultados das Tabelas 7.9 a 7.10, observa-se que os erros incidindo sobre os valores das forças identificadas pelo método PSO são maiores que aqueles proporcionados pelo método de busca linear, especialmente quando são identificadas simultaneamente 5 cargas, sendo que a diferença observada pode ser minorada repetindo o processo de otimização várias vezes e tomando a média dos valores identificados.

Considere-se o caso em que se desconhece a posição de aplicação das forças externas no quarto cenário de carregamento. Pela combinação dos algoritmos de identificação utilizados forma-se um procedimento de identificação discreto-contínuo, onde são dispensadas as estimativas iniciais (as quais são fornecidas pelo método heurístico) para as cargas desconhecidas, que devem ser fornecidas como ponto de partida para método clássico de otimização. A Tabela 7.11 permite concluir que, para esta aplicação, o método híbrido de otimização identifica satisfatoriamente os parâmetros de projeto (tanto magnitudes como posições das cargas).

Tabela 7.10- Resultados da identificação de cargas no pórtico usando o PSO.

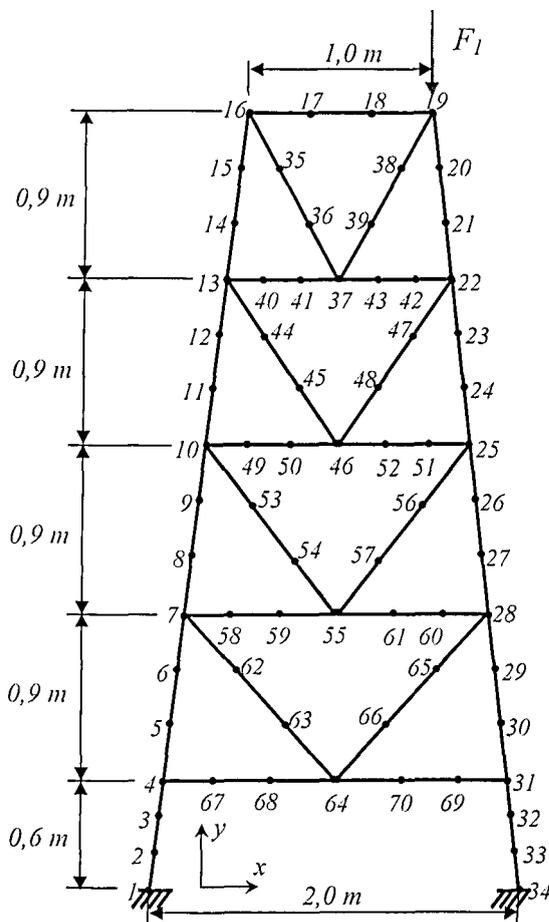
Cenário		Carga [N]		Erro [%]	Função Objetivo	Tempo [min]
		Identificada	Exata			
(2)	$F_1$	-10062,66	-10061,26	0,014	$1,63 \times 10^{-4}$	3,68
(3)	$F_1$	-10132,48	-10061,26	0,71	$3,48 \times 10^{-3}$	19,75
	$F_2$	-5961,96	-6036,75	1,24		
(4)	$F_1$	-10496,98	-10061,26	4,33	$5,91 \times 10^{-2}$	19,74
	$F_2$	-5708,31	-6036,75	5,44		
	$F_3$	-3326,96	-4024,50	17,33		
(5a)	$F_4$	-727,71	-2012,25	63,84	0,04	82,09
	$F_4$	-4865,93	-2012,25	141,82		
	$F_4$	-638,03	-2012,25	68,29		
	$F_4$	-342,02	-2012,25	83,00		
	$F_4$	-3527,75	-2012,25	75,32		
(5b)	$F_4$	-2238,44	-2012,25	11,24	0,09	238,90
	$F_4$	-1278,33	-2012,25	36,47		
	$F_4$	-2520,65	-2012,25	25,27		
	$F_4$	-2269,63	-2012,25	12,78		
	$F_4$	-1784,94	-2012,25	11,30		

Tabela 7.11- Resultados da identificação de cargas no pórtico usando o PSO e SQP.

Cenário	PSO		PSO + SQP		Exata [N] (nó)
	Força [N] (nó)	Erro [%]	Força [N] (nó)	Erro [%]	
(4)	6861,52 (11)	31,80	10061,33 (11)	$7,78 \times 10^{-4}$	10061,25 (11)
	8810,04 (10)	45,94	6036,66 (10)	0,001	6036,75 (10)
	4652,32 (22)	15,60	4024,50 (22)	$1,10 \times 10^{-4}$	4024,50 (22)

### 7.5 Identificação de Cargas em uma Torre Plana

Com o objetivo de avaliar a eficiência do algoritmo de identificação quando aplicados a problemas bidimensionais mais complexos é proposto identificar a magnitude da força  $F_1$  aplicada ao modelo de elementos finitos da torre ilustrada na Figura 7.6. São considerados três valores diferentes desta força, os quais estão indicados na figura, juntamente com as características geométricas e físicas da estrutura. Neste problema, a posição e a direção de aplicação da carga foram consideradas conhecidas.



Força	Valor [N]
$F_1$	18000
$F_1$	360000
$F_1$	4202154

Modelo de elementos finitos

81 elementos

204 graus de liberdade

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ [Pa]}$$

$$A = 6,16 \times 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$I = 7,40 \times 10^{-7} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$\rho = 7800 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$$

$$\nu = 0,30$$

Figura 7.5 - Modelo de elementos finitos de uma torre plana.

Neste caso, adotou-se a ponderação  $W_V = 0$ , os demais fatores de ponderação tendo valor unitário.

Os valores das primeiras seis freqüências naturais da estrutura sujeita aos diferentes cenários de carregamento são apresentados na Tabela 7.12. Ressalta-se que todos os três

valores da força empregados são inferiores à carga de flambagem (4568677,86 [N]), sendo o valor da carga do cenário 4 aproximadamente 90% da carga de flambagem.

Tabela 7.12- Frequências naturais da torre sob diferentes cenários de carregamento.

Cenários de Carregamento		Frequências naturais [Hz]					
		1	2	3	4	5	6
(1)	Sem carga	29,51	82,12	145,49	161,58	217,74	333,44
(2)	$F_l=18000,00$ [N]	29,47	81,99	145,27	161,58	217,46	333,38
(3)	$F_l=360000,00$ [N]	28,69	79,48	141,01	161,55	212,03	332,14
(4)	$F_l=4202154,00$ [N]	13,86	37,58	68,76	125,01	161,06	224,03

### 7.5.1 Método de Lagrange-Newton-SQP

Na Tabela 7.13 encontram-se os resultados do procedimento de identificação obtidos utilizando o algoritmo SQP. Os resultados demonstram mais uma vez a eficiência do procedimento de identificação de forças em modelos de elementos finitos mais complexos e de maior dimensão.

Tabela 7.13- Resultados da identificação de cargas na torre usando SQP.

Cenário	Carga [N]			Erro [%]	Função Objetivo		Tempo [min]
	E. Inicial	Identificada	Exata		Inicial	Final	
(2)	-15000,00	-18000,24	-18000,00	0,0013	0,002	$1,38 \times 10^{-7}$	2,52
(3)	-200000,00	-359999,30	-360000,00	$1,94 \times 10^{-4}$	0,1	$4,44 \times 10^{-7}$	4,75
(4)	-1867624,00	-4202154,10	-4202154,00	$2,38 \times 10^{-6}$	12,85	$4,82 \times 10^{-7}$	24,58

A evolução da função objetivo durante o processo de otimização é ilustrada na Figura 7.6. Nota-se que um maior número de iterações e, conseqüentemente, maior tempo de processamento, foi necessário para a identificação da carga de -4202154 [N].

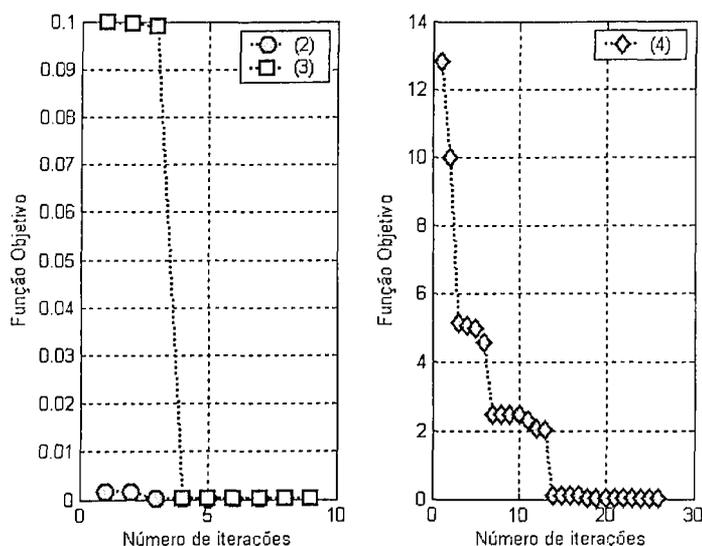


Figura 7.6 - Evolução do valor da função objetivo da torre durante otimização por SQP.

### 7.5.2 Particle Swarm Optimization

Os resultados de identificação utilizando o algoritmo que utiliza os parâmetros da Tabela 7.1 são apresentados na Tabela 7.14. Constata-se que somente no segundo cenário obteve-se precisão aceitável para a carga identificada. Nos demais cenários, os erros obtidos foram consideravelmente maiores, indicando o insucesso do PSO. Acredita-se contudo, que os erros possam ser diminuídos repetindo-se o processo de otimização várias vezes e tomando como solução a média dos resultados obtidos, como fora evidenciado na subseção 7.4.2. Destaca-se ainda o fato que o tempo de processamento é consideravelmente maior que aquele necessário ao tratamento das estruturas precedentes, devido ao maior número de graus de liberdade do modelo de elementos finitos da torre considerada nesta seção.

Tabela 7.14 - Resultados da identificação de cargas na torre usando o PSO.

Cenário	Carga [N]		Erro [%]	Função Objetivo	Tempo [min.]
	Identificada	Exata			
(2)	-17997,86	-18000,00	0,012	$7,06 \times 10^{-7}$	266,83
(3)	-39995,87	-360000,00	88,89	0,11	265,80
(4)	-39992,14	-4202154,00	99,04	5,51	265,87

## 7.6 Identificação de Esforços de Membrana em uma Placa Retangular

Nesta seção propõe-se identificar a magnitude dos esforços normais e cisalhantes atuantes no plano médio de uma placa retangular totalmente apoiada, cujas características físicas e geométricas encontram-se na Tabela 7.15. Neste problema, consideram-se conhecidas a direção e o sentido de aplicação dos esforços de membrana. A Figura 5.8 representa o modelo de placa retangular utilizado nas simulações, assim como os esforços de membrana atuantes em seu plano médio.

Tabela 7.15 - Características físicas e geométricas da placa totalmente apoiada.

$a$ [m]	$b$ [m]	$h$ [m]	$E$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
$250 \times 10^{-3}$	$200 \times 10^{-3}$	$1,50 \times 10^{-3}$	$2,40 \times 10^9$	0,37	1200,00

Neste problema, a ponderação adotada na expressão da função objetivo (7.1) é de  $W_1 = W_M = 0$ . Os valores críticos dos esforços de membrana, considerados independentemente, são:  $N_{xcrit} = -810,94$  [N/m];  $N_{ycrit} = -519,00$  [N/m];  $N_{xycrit} = 1511,52$  [N/m].

Na Tabela 7.16 aparecem os valores das seis primeiras frequências naturais da placa descarregada e sujeita a diferentes cenários de carregamento.

Tabela 7.16 - Frequências naturais da placa sob diferentes cenários de carregamento.

Cenários de Carregamento		Frequências naturais [Hz]					
		1	2	3	4	5	6
(1)	Sem carga	42,45	92,15	120,11	169,8	174,98	249,53
(2)	$N_x = -800,00$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 0$	4,93	37,16	112,46	120,91	147,39	218,69
(3)	$N_x = 0$ $N_y = -500,00$ $N_{xy} = 0$	8,12	82,19	86,49	147,95	169,95	215,96
(4)	$N_x = 0$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 1200,00$	27,76	65,97	126,24	137,21	188,78	226,77

### 7.6.1 Método de Lagrange-Newton-SQP

Os resultados da identificação dos esforços de membrana empregado o SQP são mostrados na Tabela 7.17, permitindo concluir que esta técnica de otimização proporciona os valores exatos das cargas aplicadas, para estimativas iniciais equivalentes a aproximadamente 10 e 1% do valor dos valores exatos.

Tabela 7.17 - Resultados da identificação dos esforços de membrana na placa usando SQP.

Cen.	Carga [N]			Erro [%]	Função Objetivo		Tempo [min.]
	Identificada	E. Inicial	Exata		Inicial	Final	
(2)	$N_x = -800,00$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 0$	$N_x = -80,00$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 0$	$N_x = -800,00$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 0$	0	9,29	$1,56 \times 10^{-7}$	9,68
	$N_x = -800,00$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 0$	$N_x = -8,00$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 0$	$N_x = -800,00$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 0$	0	9,83	$1,35 \times 10^{-7}$	6,79
(3)	$N_x = 0$ $N_y = -500,00$ $N_{xy} = 0$	$N_x = 0$ $N_y = -50,00$ $N_{xy} = 0$	$N_x = 0$ $N_y = -500,00$ $N_{xy} = 0$	0	4,73	$5,41 \times 10^{-8}$	7,28
	$N_x = 0$ $N_y = -500,00$ $N_{xy} = 0$	$N_x = 0$ $N_y = -5,00$ $N_{xy} = 0$	$N_x = 0$ $N_y = -500,00$ $N_{xy} = 0$	0	5,04	$6,17 \times 10^{-7}$	9,67
(4)	$N_x = 0$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 1200,00$	$N_x = 0$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 120,00$	$N_x = 0$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 1200,00$	0	1,36	$5,18 \times 10^{-8}$	9,03
	$N_x = 0$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 1200,00$	$N_x = 0$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 12,00$	$N_x = 0$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 1200,00$	0	1,39	1,39	0,31

As Figuras 7.8 e 7.9 mostram a evolução da função objetivo durante o processo de otimização para diferentes cenários de carregamento, quando as estimativas iniciais equivalem a aproximadamente 10% (caso 1) e 1% (caso 2) dos valores exatos, respectivamente.

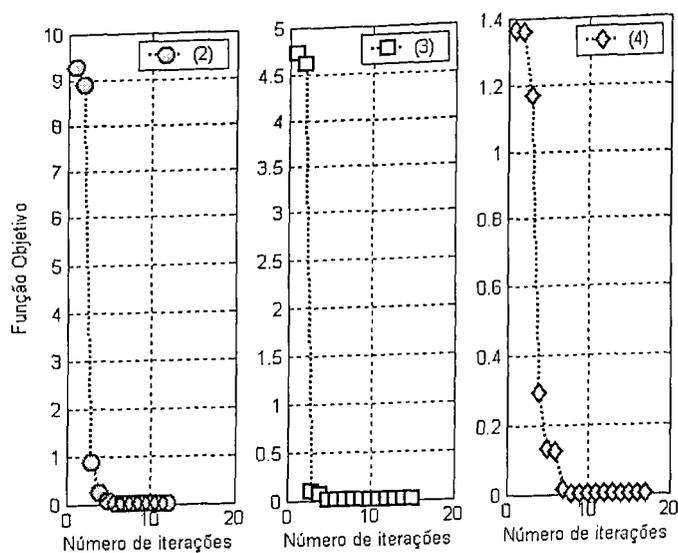


Figura 7.7 - Evolução do valor da função objetivo da placa por SQP, caso 1.

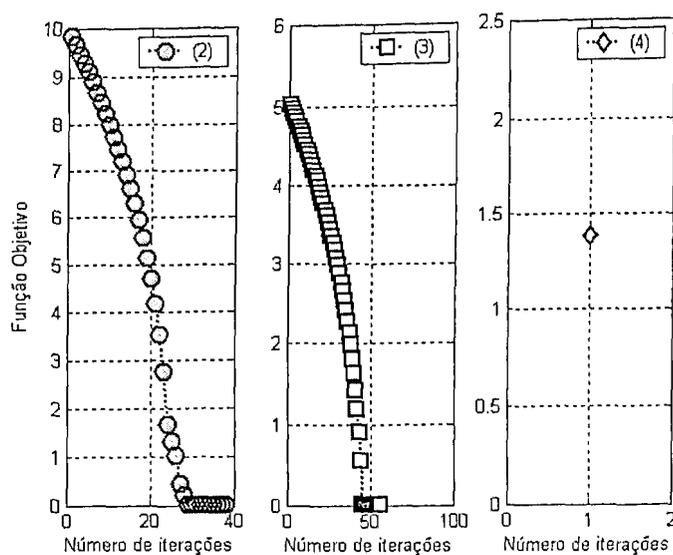


Figura 7.8 - Evolução do valor da função objetivo da placa por SQP, caso 2.

## 7.7 Comentários Sobre os Resultados de Identificação

Considerando os resultados obtidos, evidencia-se a possibilidade de se identificar o carregamento externo nas estruturas-teste apresentadas, a partir da resolução de procedimentos inversos empregando um conjunto de respostas dinâmicas. Este procedimento pode ser explorado em diversas situações práticas da engenharia de estruturas. Os resultados

permitem também avaliar a precisão das técnicas de identificação que, na grande maioria dos casos examinados, é considerada satisfatória. Evidentemente, em situações práticas, a presença de erros sistemáticos e/ou aleatórios presentes nas respostas dinâmicas experimentais devem se propagar nas estimativas das forças.

Nos exemplos estudados o método de otimização SQP proporcionou resultados mais precisos que o método heurístico PSO, sendo que a precisão do PSO pôde ser melhorada pela repetição do processo de otimização e uma escolha judiciosa dos parâmetros do método.

## CAPÍTULO VIII

### Conclusões Gerais e Propostas de Continuidade

Foi realizado um estudo numérico e experimental acerca do efeito do enrijecimento por tensões e sua influência sobre as características dinâmicas de sistemas estruturais planos constituídos por elementos de vigas e de placas retangulares submetidas a condições gerais de carregamento em seu plano. Foram desenvolvidos e implementados modelos numérico-computacionais baseados no Método dos Elementos Finitos e o Método dos Modos Assumidos, respectivamente. A partir dos modelos, a caracterização do comportamento dinâmico foi realizada através de análises de parâmetros modais (frequências naturais e modos naturais de vibração) e de funções de resposta em frequência. Com base na relação existente entre as cargas externas aplicadas e as respostas dinâmicas, foi proposto e avaliado, por simulações numéricas, um procedimento inverso destinado à identificação das cargas aplicadas a partir do conhecimento de um conjunto de soluções próprias medidas da estrutura carregada. O problema de identificação é formulado como um problema de otimização, para cuja resolução foram utilizados tanto os métodos de otimização clássicos, baseados em gradiente, bem como métodos pseudo-aleatórios baseados em *Particle Swarm Optimization* (PSO).

As numerosas simulações numéricas realizadas permitiram caracterizar a dependência entre o carregamento aplicado e as respostas dinâmicas das estruturas-teste e avaliar o desempenho dos procedimentos de modelagem desenvolvidos como uma ferramenta de análise vibratória e de estabilidade. A partir dos resultados obtidos, pode-se enunciar as seguintes conclusões:

- O enrijecimento por tensões pode provocar significativas alterações do comportamento dinâmico, devendo, pois ser incluído no procedimento de modelagem dinâmica, sob pena de se perder na capacidade preditiva dos modelos.
- Os métodos de modelagem mostraram-se eficientes para caracterizar o comportamento dinâmico dos sistemas estruturais analisados ao representar a dependência das características dinâmicas dos sistemas em relação à carga externa aplicada, e úteis para avaliar a estabilidade estrutural dos sistemas através do critério que diz respeito à

anulação de uma das freqüências naturais da estrutura quando a mesma é solicitada em sua carga crítica de flambagem. As simulações numéricas evidenciam que as freqüências naturais e as funções de resposta em freqüência são alteradas com o módulo, direção e sentido de aplicação das cargas nos sistemas analisados, sendo que:

- nos sistemas estruturais constituídos por elementos de viga, cargas de tração axial aumentam as freqüências naturais associadas aos modos de flexão, ou seja, tornam a estrutura mais rígida, enquanto cargas de compressão as diminuem, tornando a estrutura mais flexível, verificando-se a anulação da primeira freqüência natural para a ação da primeira carga crítica.
- observa-se que o tipo de dependência do comportamento dinâmico em relação ao carregamento depende das condições de contorno. De modo geral, no que diz respeito aos carregamentos normais uniformes, a influência sobre o comportamento dinâmico é similar àquele observado para componentes estruturais do tipo vigas-colunas, sendo possível relacionar o grau de influência do carregamento com as variações das freqüências naturais observando as formas modais. Pode-se também caracterizar facilmente a condição de flambagem mediante a anulação de uma das primeiras freqüências naturais sob carregamentos de compressão. Por outro lado, o comportamento dinâmico de placas sujeitas a cargas de cisalhamento uniforme revela-se mais complexo, não havendo, para todos os casos de condições de contorno, variações monotônicas das freqüências naturais em função da magnitude do carregamento. Interessantes entrelaçamentos entre as curvas representando as variações das diferentes freqüências naturais são observados.
- A análise das funções de resposta em freqüência adquiridas experimentalmente e as freqüências naturais estimadas destas FRFs com o auxílio do método RFP (*Rational Fraction Polynomial Method*), permitiu a caracterização experimental da influência dos esforços de membrana no comportamento dinâmico de placas retangulares finas sujeitas a distribuições não uniformes das tensões de membrana. Embora não tenha sido possível caracterizar a instabilidade pela anulação de uma das freqüências naturais das placas, os resultados experimentais confirmam as tendências observadas nas simulações numéricas no tocante à influência dos esforços de membrana.

- Evidenciou-se a possibilidade de se identificar o carregamento externo nas estruturas-teste, a partir da resolução de problemas inversos empregando um conjunto de respostas dinâmicas. Foi possível avaliar a precisão dos métodos de otimização utilizados (clássicos e pseudo-aleatórios) na implementação dos algoritmos de identificação, os quais proporcionaram resultados muito próximos aos valores exatos na maior parte dos casos examinados. Os resultados permitiram avaliar a precisão das técnicas de identificação que, na grande maioria dos casos examinados, é considerada satisfatória. Os métodos clássicos de otimização dependem de um ponto de partida ou estimativa inicial para obter resultados satisfatórios no processo de otimização. Já os métodos heurísticos evitam esta dependência, a custo de cálculos mais demorados e menos precisos. Contudo, cada método apresenta vantagens e particularidades que devem ser levadas em consideração quando de sua escolha para uma determinada aplicação específica. Além disso uma estratégia que se mostrou conveniente consiste em combinar os dois tipos de métodos em um procedimento híbrido.

A pesquisa realizada permitiu identificar alguns tópicos importantes a serem investigados no futuro, dentre os quais destacam-se:

- modelagem por elementos finitos do efeito do enrijecimento por tensões combinado de outros tipos de elementos estruturais como cascas e sólidos tridimensionais, permitindo a modelagem de estruturas mais complexas, comuns em aplicações de Engenharia.
- aperfeiçoamento dos algoritmos de identificação para seu uso posterior na identificação de diversas configurações de carregamento nas estruturas a serem modeladas.
- validação experimental da metodologia de identificação de cargas em sistemas estruturais constituídos por elementos de viga e em placas finas submetidas a esforços normais e cisalhantes constantes e variáveis em seu plano.
- ampliação dos procedimentos de ajuste de modelos de elementos finitos a partir das respostas experimentais, para se levar em conta a influência do efeito de enrijecimento por tensões.

## Referências Bibliográficas

Almeida, S. F. M., Hansen, J. S., 1997, "Enhanced Elastic Buckling Loads of Composite Plates with Tailored Thermal Residual Stresses", Journal of Applied Mechanics, Vol. 64, No. 4, pp. 772-780.

Bassily, S. F., Dickinson, S.M., 1972, "Buckling and Lateral Vibrations of Rectangular Plates Subject to Inplane Loads – A Ritz Approach", Journal of Sound and Vibration, Vol. 24, No. 2, pp. 219-239.

Bailey, C. D., 1973, "Vibration of Thermally Stressed Plates with Various Boundary Conditions", American Institute of Aeronautics and Aeronautics Journal, Vol. 11, pp. 14-19.

Baruch, M., 1973, "Integral Equations for Nondestructive Determination of Buckling Loads for Elastic Plate and Bars", Israel Journal of Technology, Vol. 11, pp. 1-8.

Bolotin, N. V. V., 1963, "Nonconservative Problems of Theory of Elastic Stability, Pergamon Press.

Chajes, A., 1974, "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Chu, T. H., 1949, "Determination of Buckling Loads by Frequency Measurements", Thesis at the California Institute of Technology.

Craig, R. R. Jr., 1981, "Structural dynamics: An Introduction to Computer Methods", New York: John Wiley, 1981, 544 p;

Donadon, M. V., Almeida, S. F. M., Faria, A. R., 2002, "Stiffening Effects on the Natural Frequencies of Laminated Plates with Piezoelectric Actuators", Composites Part B-Engineering, USA, Vol. 33, No. 5, pp.335 - 342.

Friswell, M. I., Mottershead, J. E., 1995, "Finite Element Model Updating in Structural Dynamics", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 286.

Fung, Y.C., 1968, "*Foundations of Solid Mechanics*", Prentice-Hall, 1968.

Gérardin, M., Rixen, D., 1997, "Mechanical Vibrations – Theory and Application to Structural Dynamics", John Wiley & Sons, U.K., pp. 425.

Go, C. G., Liou, C. D., 2002, "Load-response Determination for Imperfect Column Using Vibratory Data", *Journal of Sound and Vibration*, accepted 20 December 2002, in press.

Goldberg, D. E., 1989, "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning", reading MA: Addison Wesley.

Greening, P. D., Lieven, N. A. J., Vann, A. M., 1996, "Effect of a Pre-load on The Dynamic Properties of a Simple Structure", *Proceedings of 2<sup>nd</sup> International Conference, Structural Dynamics Modelling: Test, Analysis, Correlation and Updating*, Cumbria, UK.

Greening, P. D., Lieven, N. A. J., 1999, "Modeling Dynamic Response of Stressed Structures", *Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, Florida, pp. 103-108.

Greening, P. D., Lieven, N. A. J., 2003, "Identification and Updating of Loading in Frameworks Using Dynamic Measurements", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, No. 1, pp.101-115.

Hernandes, J. A., Almeida, S. F. M., Nabarrete, A., 2000, "Stiffening Effects on the Free Vibration Behavior of Composite Plates with PZT Actuators", *Composite Structures*, Inglaterra, Vol. 49, No. 1, pp. 55–63.

Huang, L., 1997, "Analysis of Dynamic Stress Responses in Structural Vibration", *Proceedings of the 16<sup>th</sup> Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Design Engineering Technical Conference*, Sacramento, California.

Kaldas, M. M., Dickinson, S. M., 1981, "Vibration and Buckling Calculations for Rectangular Plates Subject to Complicated In-plane Stress Distributions by Using Numerical Integration in a Rayleigh-Ritz Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 75, pp. 151-152.

Kennedy, J., Eberhart, R. C., 1995, "Particle Swarm Optimization", *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks*, Perth, Australia, pp. 1942-1948.

- Laura, P. A. A., Rossi, R. E., 1989, "On the Relative Accuracy and Relative Difficulties of Vibrations and Buckling Problems of Structural Elements", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 134, No. 3, pp. 381-387.
- Leissa, A. W., 1969, "Vibration of Plates", U.S. Government Printing Office, NASA SP-160.
- Lieven, N. A. J., Greening, P. D., 2000, "Effect of Experimental Pre-stress and Residual Stress on Modal Behavior", *Philosophical Transactions of Royal Society London A* 359, p. 97-11.
- Livingston, T., Béliveau, J. G., Huston, D. R., 1993, "Estimation of Axial Load in Prismatic Members Using Flexural Vibrations", submitted to *Journal of Sound and Vibration*.
- Lurie, H., 1951, "Effective End Restraint of Columns by Frequency Measurements", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 19, pp. 21-22.
- Lurie, H., 1952, "Lateral Vibrations as Related to Structural Stability", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, pp. 195-204.
- Maia, N. M. M., Montalvão e Silva, J. M., 1997, "Theoretical and Experimental Modal Analysis", Research Studies Press LTD., England, pp. 468.
- Mead, D. J., 2002, "Free Vibrations of Self-strained Assemblies of Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 249, pp. 101-127.
- Mead, D. J., 2003, "Vibration and Buckling of Flat Free-Free Plates Under Non-uniform In-plane Thermal Stresses", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, pp. 141-165.
- Oliveira, E. R. F., 1991, "Determinação da Capacidade Máxima de Placas Cisalhadas com Furos Circulares", *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil, pp. 100.
- Pomeroy, P., 2003, "An Introduction to Particle Swarm Optimization", [www.adaptiveview.com](http://www.adaptiveview.com).
- Porter Goff, R. E. D., 1976, "The Effect of Self-Equilibrating Stresses on the Natural Frequencies of a Free-Free Rectangular Plate", *Journal of Sound and Vibration* Vol. 47, pp. 85-94.

- Rade, D. A., 1987, "Vibrações e Estabilidade de Vigas Segundo a Teoria de Timoshenko", Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José Dos Campos, SP, Brasil.
- Rade, D. A., 1994, "Correction Paramétrique de Modèles Éléments Finis: Élargissement de l'Espace de Connaissance", Tese de Doutorado, Université de Franche-COMTÉ, UF-C, Besançon, França.
- Rade, D. A., 2003, "Método dos Elementos Finitos em Engenharia Mecânica", Apostila, Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG, Brasil.
- Rayleigh, Lord, 1877, "Theory of Sound", Vol. 2, 2<sup>nd</sup> edition, Dover, New York, 1877, 1945 re-issue.
- Richardson, M. H., Formenti, D. L., 1982, "Parameter Estimation from Frequency Response Measurements Using Rational Fraction Polynomials", Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC I), Orlando, Florida, USA, pp. 167-181.
- Segall, A., Baruch, M., 1980, "A Nondestructive Dynamic Method for the Determination of the Critical Load of Elastic Columns", Journal of Experimental Mechanics, pp. 285-288.
- Smith, S. T., Bradford, M. A., Oehlers, D.J., 1997, "Elastic Buckling of Unilaterally Constrained Rectangular Plates in Pure Shear", Engineering Structures, Vol. 21, pp. 443-453.
- Stephens, B. C., 1936, "Natural Vibration Frequencies of Structural Members as an Indication of end Fixity and Magnitude of Stress", Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 4, pp. 54-56.
- Sweet, A. L., Genin, J., Makar, P. F., 1977, "Determination of Column Buckling Criteria Using Vibratory Data", Experimental Mechanics, Vol. 17, pp. 385-391.
- Ugural, A. C., 1981, "Stresses in Plates and Shells", McGraw-Hill Inc.
- Vanderplaats, G. N., 1999 "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design", Vanderplaats Research and Development, Inc., 3<sup>rd</sup> edition.

Venter, G., Sobieszczanski-Sobieski, J., 2002, "Particle Swarm Optimization", Proceedings of the 43<sup>rd</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Denver, CO, Vol. AIAA-2002-1235, pp. 22-25.

Vieira Jr. A. B., 2003, "Identificação de Tensões em Placas Retangulares a Partir de Respostas Vibratórias, com Aplicação a Tensões Residuais de Soldagem", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

Vieira Jr. A. B., Rade, D. A., 2003, "Identification of Stresses in Plates from Dynamic Responses", Proceedings of IMACXXI - Conference and Exposition on Structural Dynamics, Orlando, USA (CD-ROM).

Virgin, L. N., Plaut, R. H., 1990, "Use of Frequency Data to Predict Buckling", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 116, pp. 2330-2335.

Virgin, L. N., Plaut, R. H., 1993, "Effect of Axial Load on Forced Vibrations of Beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 168, No. 3, pp. 395-405.

Weinstein, A., Chien, W. Z., 1943, "On the Vibrations of a Clamped Plate Under Tension", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 1, pp. 61-68.

Wittrick, W. H., 1962, "Rates of Changes of Eigenvalues, with Reference to Buckling and Vibrations Problems", Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 66, pp. 590-591.

Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method", Annual Conference of the Applied Mechanics Division, Purdue University, Lafayette.

Zhou, D., 1995, "Natural Frequencies of Rectangular Plates Using a Set of Static Beam Functions in Rayleigh-Ritz Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 189, No. 1, pp. 81-87.

# ANEXO A

## Estabilidade de Colunas

Considerando os princípios de estabilidade estrutural, a máxima carga de compressão que uma coluna pode suportar é chamada carga crítica (denotada por  $P_{crit}$ ) ou também chamada por alguns autores como carga de flambagem. Às vezes a carga crítica refere-se a uma solução analítica idealizada, enquanto que, a carga de flambagem é verificada experimentalmente (Chajes, 1974).

Para análise de estabilidade pelo Método de Euler, são admitidas as seguintes hipóteses:

- material homogêneo e isotrópico;
- efeito do cisalhamento desprezado;
- coluna perfeitamente reta com seção transversal uniforme;
- carregamento atuante no plano que contém um dos eixos principais de simetria das seções transversais;
- material com comportamento linear e elástico;
- carga aplicada no centróide da seção transversal;
- carga quase estática.

A equação do movimento vibratório livre de uma viga, assumindo a ocorrência de pequenas deflexões e a presença de uma carga axial constante, é dada por (Chajes, 1974):

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde  $EI$  é a rigidez à flexão,  $A$  é a área da seção transversal,  $P$  é a carga axial constante,  $\rho$  é a densidade do material,  $v$  e  $x$  representam os deslocamentos transversais e longitudinais respectivamente.

De acordo com Chajes (1974), a carga crítica corresponde ao valor da carga para o qual a configuração de equilíbrio é ligeiramente curva. Considere-se a coluna bi-apoiada ilustrada na Figura A.1.

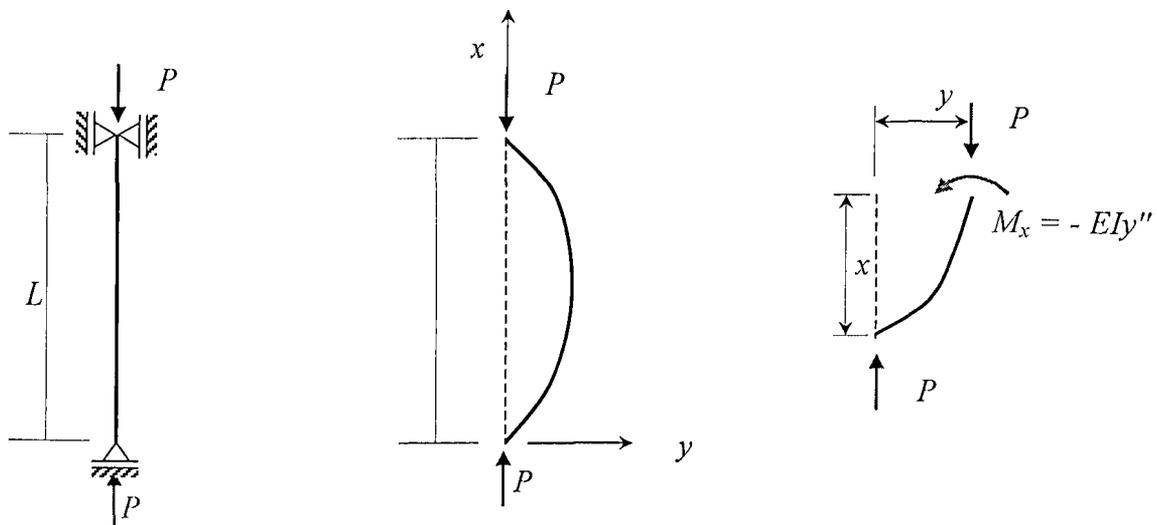


Figura A.1- Coluna de Euler ou bi-apoiada (Chajes, 1974).

Pelo equilíbrio de momentos fletores numa posição qualquer da viga, tem-se:

$$EIy'' + Py = 0 \quad (\text{A.2})$$

A solução geral desta equação diferencial é dada por:

$$y = A \operatorname{sen} kx + B \operatorname{sen} kx \quad (\text{A.3})$$

a qual é satisfeita se:  $k^2 = P/EI$

Para determinar as constantes  $A$  e  $B$  da equação anterior, definem-se as condições de contorno:  $y=0$  em  $x=0$  e em  $x=L$ . Aplicando a primeira condição ( $B=0$ ), e utilizando a segunda ( $A \operatorname{sen} kL = 0$ ) esta igualdade é satisfeita se:  $\operatorname{sen} kL = 0$ , portanto:  $kL = n\pi$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$

Substituindo o valor de  $k$  para  $n=1$ , determina-se o valor da carga crítica:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad y = A \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad \Rightarrow \quad P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (\text{A.4})$$

A carga crítica é a menor carga para a qual o estado de equilíbrio neutro é possível. Ou seja, é a menor carga para a qual a coluna sai do equilíbrio neutro. Qualquer carga maior que carga crítica pode causar a instabilidade da estrutura.

Os modos de flambagem da coluna dependem de  $n$ .

Da mesma forma, outras condições de contorno podem ser analisadas. Para cada caso, a formulação de Euler pode ser usada para obter a carga crítica. Utilizando o conceito de comprimento de flambagem efetivo ( $\lambda$ ), ou seja, o comprimento de uma coluna de Euler equivalente, tem-se:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{\lambda^2} \quad (\text{A.5})$$

A seguir estão esquematizadas colunas com diferentes condições de contorno e suas cargas críticas em função dos comprimentos efetivos. O coeficiente de flambagem  $k$  é o número que relaciona o comprimento efetivo com o comprimento total da barra e aparece para cada condição de contorno na figura abaixo.

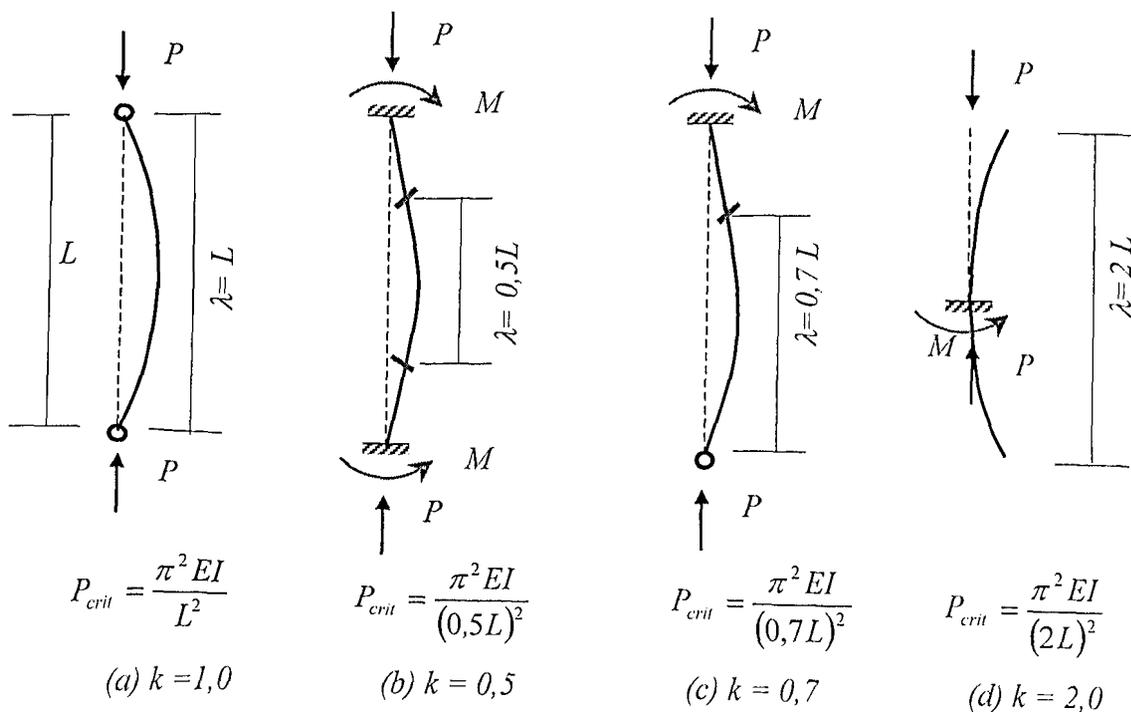


Figura A.2 - Carga crítica para diferentes condições de contorno da coluna (Chajes, 1974).

Tratando-se de uma viga bi-apoiada, a expressão que relaciona as freqüências naturais sob a aplicação de uma carga axial, após ter-se assumido uma solução harmônica para o problema e ter aplicado as condições de contorno, é dada por (Lurie, 1952):

$$\omega_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \left[ \frac{EI}{\rho A} \left( 1 - \frac{P}{P_{crit}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad n=1,2,3,\dots \quad (\text{A.6})$$

## ANEXO B

### Funções de Viga e seus Coeficientes

As funções de viga para as combinações de condições de contorno engastada-engastada, engastada-livre e livre-livre, são (Kaldas e Dickinson, 1981):

$$\phi_m(x) = A_m \sin(\varepsilon_m x) + B_m \cos(\varepsilon_m x) + C_m \sinh(\varepsilon_m x) + D_m \cosh(\varepsilon_m x) \quad (\text{B.1})$$

$$\psi_n(y) = A_n \sin(\eta_n y) + B_n \cos(\eta_n y) + C_n \sinh(\eta_n y) + D_n \cosh(\eta_n y) \quad (\text{B.2})$$

Os coeficientes que aparecem nestas funções são dados nas tabelas seguintes:

Tabela B.1 - Coeficientes das funções de viga, condição: engastada-engastada.

$r$	$A_m / A_n$	$B_m / B_n$	$C_m / C_n$	$D_m / D_n$	$\varepsilon_m / \eta_n (\times l)$
1	0,98250222	-1,0	-0,98250222	1,0	4,7300408
2	1,00077731	-1,0	-1,00077731	1,0	7,8532046
3	0,99996645	-1,0	-0,99996645	1,0	10,9956078
4	1,00000145	-1,0	-1,00000145	1,0	14,1371655
5	0,99999994	-1,0	-0,99999994	1,0	17,2787596
6	1,0	-1,0	-1,0	1,0	20,4203522
>6	1,0	-1,0	-1,0	1,0	$(2r + 1)\pi/2$

Tabela B.2 - Coeficientes das funções de viga, condição: engastada-livre.

$r$	$A_m / A_n$	$B_m / B_n$	$C_m / C_n$	$D_m / D_n$	$\varepsilon_m / \eta_n (\times l)$
1	0,7340955	-1,0	-0,7340955	1,0	1,8751041
2	1,01846644	-1,0	-1,01846644	1,0	4,6940911
3	0,99922450	-1,0	-0,99922450	1,0	7,8547574
4	1,00003355	-1,0	-1,00003355	1,0	10,9955407
5	0,99999855	-1,0	-0,99999855	1,0	14,1371684
>5	1,0	-1,0	-1,0	1,0	$(2r - 1)\pi/2$

Tabela B.3- Coeficientes das funções de viga, condição: livre-livre.

$r$	$A_m / A_n$	$B_m / B_n$	$C_m / C_n$	$D_m / D_n$	$\varepsilon_m / \eta_n (\times l)$
1	0,7340955	-1,0	-0,7340955	1,0	1,8751041
2	1,01846644	-1,0	-1,01846644	1,0	4,6940911
3	0,99922450	-1,0	-0,99922450	1,0	7,8547574
4	1,00003355	-1,0	-1,00003355	1,0	10,9955407
5	0,99999855	-1,0	-0,99999855	1,0	14,1371684
>5	1,00000000	-1,0	-1,00000000	1,0	$(2r - 1)\pi/2$

onde:  $r = m$  ou  $n$  e  $l = a$  ou  $b$ .

Para a condição de contorno livre-livre, quando  $r=1$ :

$$\phi_m(x) = 1 \quad (\text{B.3})$$

e quando  $r=2$ :

$$\phi_m(x) = \sqrt{3} \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right) \quad (\text{B.4})$$

As funções de viga utilizadas para a condição apoiada-apoiada são propostas por Lurie (1952), onde os coeficientes são os parâmetros  $m$  e  $n$ : sen

$$\phi_m(x) = \text{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\psi_n(y) = \text{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (\text{B.6})$$

## ANEXO C

### *Particle Swarm Optimization*

Apresenta-se, neste apêndice, os fundamentos do *Particle Swarm Optimization* utilizado nos procedimentos de identificação de forças.

O algoritmo pseudo-aleatório utilizado na identificação de forças foi baseado nos princípios de *Particle Swarm Optimization* (PSO). Este método possui robustez comparável a dos Algoritmos Genéticos e requer o ajuste de poucos parâmetros.

O método foi desenvolvido originalmente por James Kennedy e Russell Eberhart e emergiu a partir de experiências realizadas com algoritmos que modelavam o comportamento social observado em muitas espécies de aves (Pomeroy, 2003). O algoritmo PSO é baseado em um modelo simplificado da teoria de enxames. Os pássaros ou partículas fazem uso de suas experiências individuais e da experiência do bando ou população para encontrar a fonte de alimento (projeto ótimo). Desta forma, uma partícula que encontra a solução ótima tende a levar as demais à mesma solução até que a população inteira encontre a mesma solução. Essencialmente, cada partícula tenta ficar junto às demais enquanto tenta não colidir com suas semelhantes.

O PSO atualiza a posição de cada partícula, seu grau de conhecimento e o da população, considerando a sua velocidade. Isto modela o comportamento social de algumas espécies de aves.

Como visto no fluxograma da Figura C.1, o algoritmo segue os seguintes passos (Venter, 2002):

1. Cria-se uma população inicial com distribuição aleatória de partículas e velocidades iniciais também aleatórias.
2. Calcula-se o vetor de velocidades para cada partícula, usando a memória de cada partícula e o conhecimento adquirido pela população.
3. Atualiza-se a posição de cada partícula usando o vetor de velocidades e a posição anterior.
4. Testa-se a convergência.

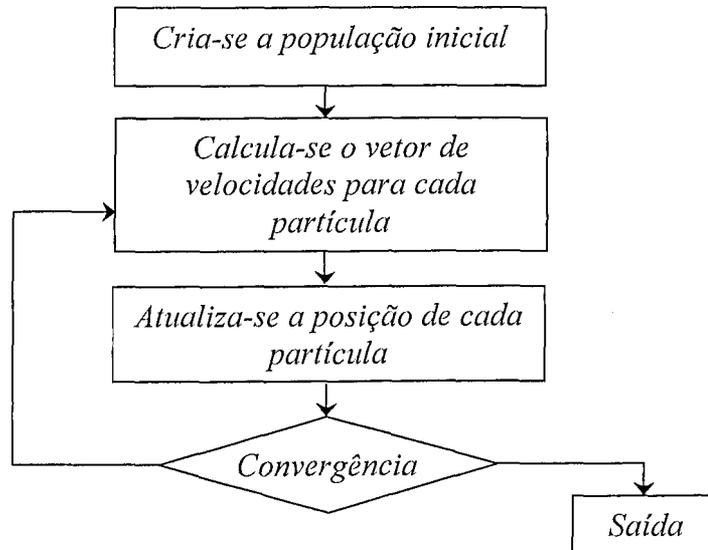


Figura C.1- Fluxograma do algoritmo baseado no PSO (Venter, 2002).

A posição das partículas é atualizada de acordo à seguinte equação (Kennedy e Eberhart, 1995):

$$x_{k+1}^i = x_k^i + v_{k+1}^i \Delta t \quad (\text{C.1})$$

onde  $x_{k+1}^i$  representa a posição de cada partícula  $i$  na iteração  $k+1$ ,  $v_{k+1}^i$  representa o vetor de velocidade e  $\Delta t$  corresponde ao passo de tempo. O vetor de velocidade é atualizado segundo a seguinte equação:

$$v_{k+1}^i = wv_k^i + c_1 r_1 \frac{(p^i - x_k^i)}{\Delta t} + c_2 r_2 \frac{(p_k^s - x_k^i)}{\Delta t} \quad (\text{C.2})$$

onde  $r_1$  e  $r_2$  são números aleatórios variando entre 0 e 1,  $p^i$  é a melhor posição encontrada pela partícula e  $p_k^s$  é a melhor posição da população na iteração  $k$ . Existem três parâmetros a serem definidos: a inércia da partícula ( $w$ ), e os dois parâmetros de confiança  $c_1$  e  $c_2$  os quais indicam quanto a partícula confia em si e na população, respectivamente. A inércia controla a capacidade de exploração do algoritmo, sendo valores altos e baixos os que determinam um comportamento de busca do ótimo em forma global e local, respectivamente (Venter, 2002).

A população inicial é criada geralmente com partículas distribuídas aleatoriamente sobre o espaço de projeto, cada uma com um vetor de velocidade aleatório inicial.

A literatura propõe que sejam usados  $c_1 = c_2 = 2$  e para a inércia valores no intervalo  $0,8 < w < 1.4$  (Venter, 2002).

Através de uma formulação apropriada do problema de otimização o algoritmo pode trabalhar com restrições. Uma possibilidade é trabalhar com funções de penalidade estendida quadrática (*quadratic extended penalty function*) (Vanderplaats, 1999). Desta maneira é criada uma função pseudo-objetivo definida como:

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \alpha \sum_{i=1}^m \max[0, g_i(x)]^2 \quad (\text{C.3})$$

onde  $f(x)$  é a função objetivo original,  $\alpha$  é o parâmetro de penalidade,  $g_i(x)$  é o conjunto de todas as restrições (com violações para  $g_i(x) > 0$ ).

### C.1 Influência dos Parâmetros do Método na Identificação de Cargas

Com o objetivo de avaliar o método pseudo-aleatório e encontrar parâmetros adequados para a identificação de cargas, é analisada a influência do número de partículas e de iterações na identificação de cargas, no modelo de coluna da Seção 3.1. Os demais parâmetros do método são adotados de acordo com valores recomendados na literatura (Tabela 7.1).

A variação do valor da carga identificada e da função objetivo com o acréscimo do número de partículas mantendo o número de iterações constante, é ilustrado na Figura C.2. Devido à natureza pseudo-aleatória do método, não se verifica a convergência dos resultados e a diminuição progressiva do valor da função objetivo. Este fato é confirmado pela diferença dos resultados quando o algoritmo é executado várias vezes, mantendo-se todos os parâmetros constantes. Observa-se também que para esta aplicação, são obtidos resultados satisfatórios para um número diferente de partículas, por exemplo 50 e 150.

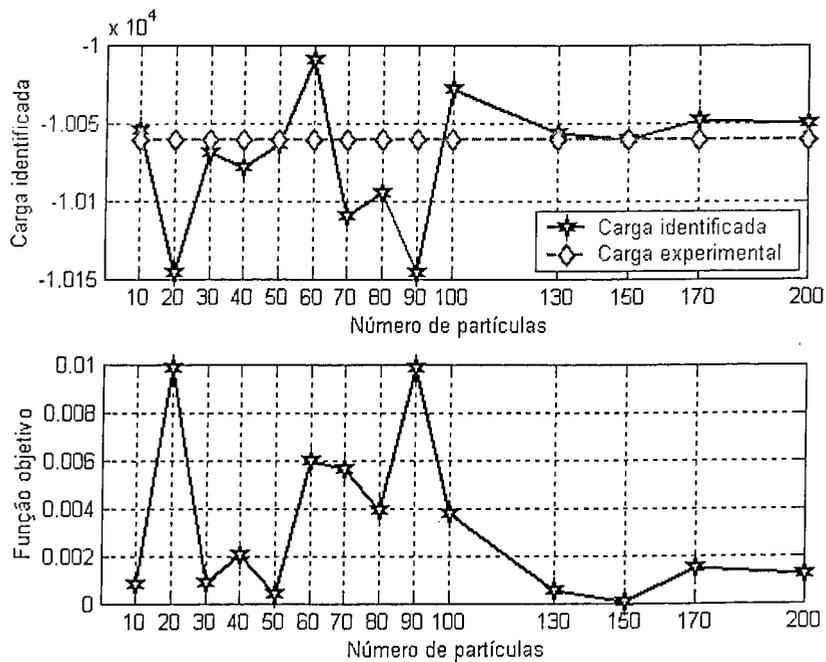


Figura C.2 - Variação dos resultados de identificação em função do número de partículas.

A variação das cargas identificadas em função do acréscimo do número de iterações para um determinado número de partículas é ilustrado na Figura C.3. Verifica-se que para esta aplicação, resultados precisos podem ser determinados para por exemplo: 50 partículas e 100 iterações, 100 partículas e 40 iterações, 150 partículas e 30 iterações, 200 partículas e 20 iterações. Assim sendo, adotam-se como parâmetros: 50 partículas e 100 iterações.

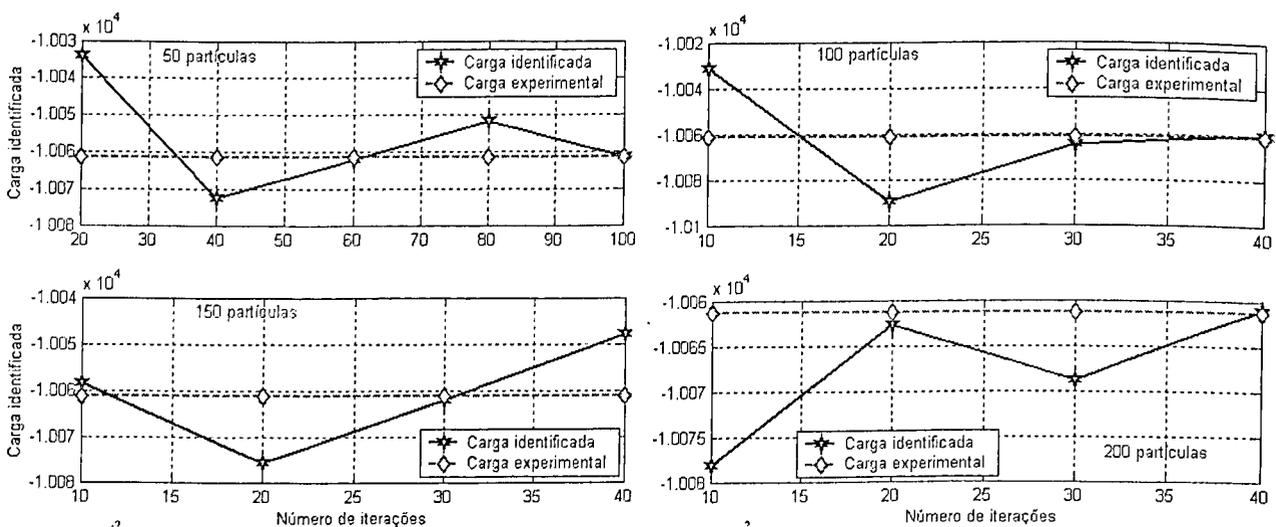


Figura C.3 - Variação dos resultados de identificação em função do número de iterações.

## ANEXO D

### Energia Potencial em Vigas

Quando um corpo elástico é submetido a deformações as forças internas realizam trabalho que fica armazenado sob a forma de energia de deformação. Considerando a ação das tensões  $\sigma_x$  em um elemento diferencial (ilustrado na Figura D.1).

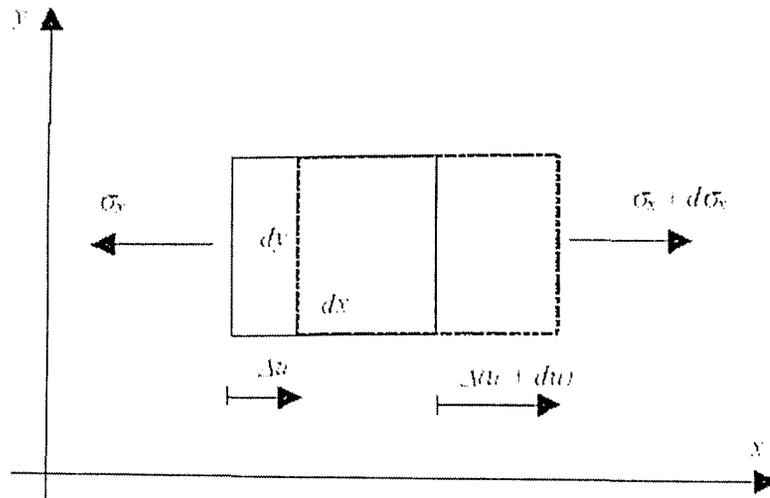


Figura D.1 - Tensões e alongamentos em um elemento diferencial.

O trabalho realizado pelas forças resultantes das tensões é:

$$\Delta W = -(\sigma_x dydz) \Delta u + [(\sigma_x + d\sigma_x) dydz (\Delta u + \Delta du)] \quad (D.1)$$

Desprezando os infinitésimos de ordem superior, o incremento de trabalho resulta:

$$\Delta W = (\sigma_x dydz) \Delta du \quad (D.2)$$

Observa-se que na direção  $x$ :  $du = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_x} d\varepsilon_x = \sigma_x dx$ . Logo o incremento diferencial  $\Delta du$  para o elemento de comprimento  $dx$  é:

$$\Delta du = d\varepsilon_x dx \quad (D.3)$$

Portanto, o incremento infinitesimal do trabalho resulta:

$$\Delta W = \sigma_x d\varepsilon_x dx dy dz \quad (D.4)$$

Denominando  $\hat{U}$  a energia de deformação por unidade de volume, um incremento diferencial  $d\hat{U}$  desta energia deve ser igual ao incremento do trabalho interno por unidade de volume, isto é:

$$d\hat{U} = \sigma_x d\varepsilon_x. \quad (D.5)$$

Logo, a energia de deformação específica será:

$$\hat{U} = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x \quad (D.6)$$

Então, a energia de deformação total é dada por:

$$U = \int_V \hat{U} dV = \int_V \left( \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x \right) dV \quad (D.7)$$

Considerando somente a energia de deformação associada à flexão:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV, \quad (D.8)$$

as expressões análogas para as tensões  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  são:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_y \varepsilon_y dV \quad (D.9)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau_{xy} \gamma_{xy} dV \quad (D.10)$$

Se o material tem comportamento elástico e apresenta um estado plano de tensões, a energia de deformação total produzida pelas tensões é:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (D.11)$$

Até aqui se considerou sucintamente os conceitos da mecânica dos sólidos relacionados à energia de deformação com o objetivo de empregá-los em elementos de viga. Considerando o elemento de viga de seção constante, ilustrado pela Figura D.2.

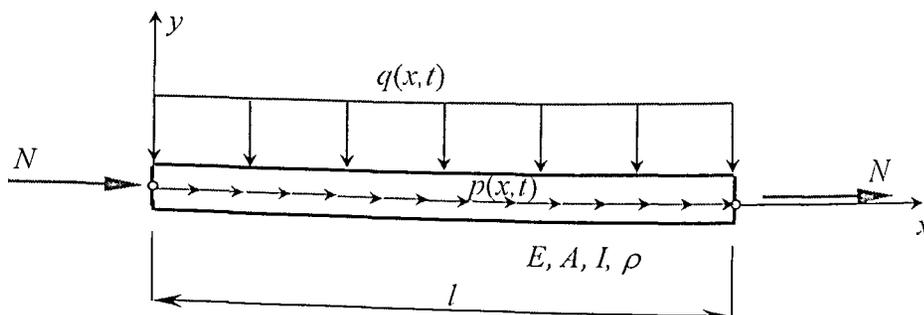


Figura D.2 - Elemento de viga Euler-Bernoulli (adaptado de Rade, 2003).

Desprezando as deformações cisalhantes, e considerando que as seções transversais permanecem planas, a energia de deformação é dada pela equação (D.8).

Chamando  $u_0$ ,  $v_0$  os deslocamentos do ponto O do eixo centroidal (Figura D.3), os deslocamentos  $u$ ,  $v$  de um ponto  $p$  contido na mesma seção são:

$$u = u_0 - y \sin \theta \quad (D.12)$$

$$v = v_0 - y(1 - \cos \theta) \quad (D.13)$$

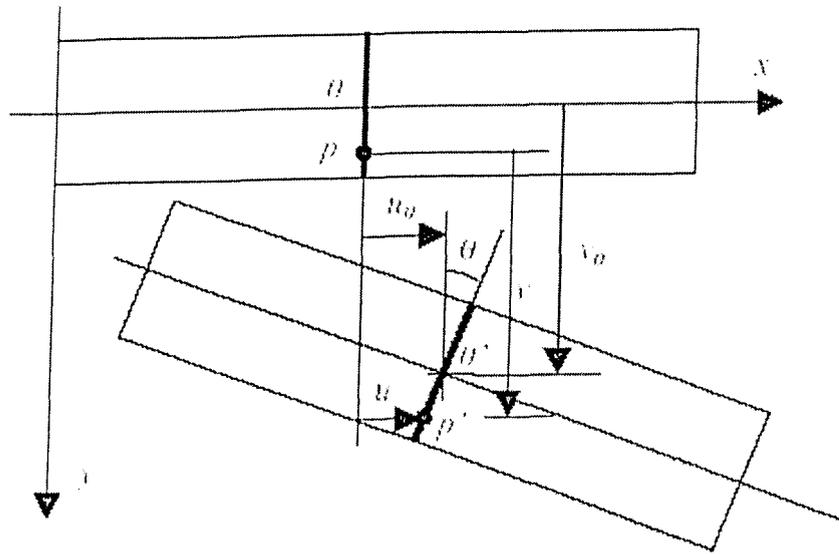


Figura D.3 - Deslocamento do eixo da viga de eixo reto.

Como as deformações são muito pequenas,  $\theta \ll 1$ , ou seja:  $\cos \theta \approx 1$  e  $\text{sen} \theta \approx \tan \theta = dv_0/dx$ , as expressões anteriores resultam:

$$u = u_0 - y \frac{dv_0}{dx} \quad (\text{D.14})$$

$$v = v_0 \quad (\text{D.15})$$

Para um material isotrópico linear em estado plano de tensão, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (\text{D.16})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \approx 0 \quad (\text{D.17})$$

Conseqüentemente:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x \quad (\text{D.18})$$

Portanto, de (D.16), tem-se:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (\text{D.19})$$

Combinando (D.3) e (D.14), tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du_0}{dx} - y \frac{d^2v_0}{dx^2} \quad (\text{D.20})$$

Introduzindo (D.20) em (D.8), escreve-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_0^l E \int_A \left( \frac{du_0}{dx} - \frac{d^2v_0}{dx^2} y \right)^2 dA dx \quad (\text{D.21})$$

ou seja:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l E \left[ \int_A \left( \frac{du_0}{dx} \right)^2 dA - 2 \frac{du_0}{dx} \frac{d^2v_0}{dx^2} \int_A y dA + \left( \frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^2 \int_A y^2 dA \right] dx \quad (\text{D.22})$$

Sabendo que:

$$\int_A dA = A \quad (\text{D.23})$$

$$\int_A y dA = 0 \quad (\text{D.24})$$

$$\int_A y^2 dA = I_z, \quad (\text{D.25})$$

a energia de deformação resulta:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left( \frac{du_0}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^2 dx \quad (\text{D.26})$$

onde a primeira integral representa a energia de deformação devida ao esforço axial e a segunda integral representa a energia de deformação associada à flexão.

Para avaliar o trabalho realizado durante a flexão da viga por uma carga axial concentrada  $N$  é necessário obter a expressão de  $\Delta_s$  (mostrado na Figura D.4).

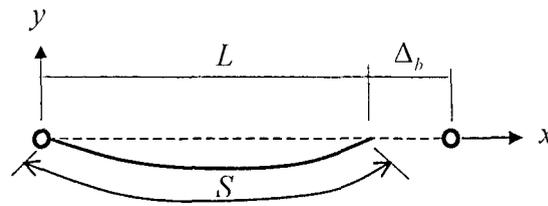


Figura D.4 - Deslocamento do eixo da viga de eixo reto.

Na Figura D.4,  $\Delta_b$  é igual a:

$$\Delta_b = S - L \quad (\text{D.27})$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, o comprimento do elemento diferencial  $ds$ , é:

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (\text{D.28})$$

Integrando ao longo do comprimento da viga, o comprimento total resulta:

$$S = \int_0^L \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (\text{D.29})$$

Esta integral pode ser resolvida se o integrando for expandido aplicando o termo binomial:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots \quad (\text{D.30})$$

Assumindo que as deformações são pequenas, a expressão do comprimento de arco se reduz a:

$$S = \int_0^L \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (\text{D.31})$$

Para determinar  $\Delta_b$ , pode-se escrever que:

$$S - L = \int_0^l \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx, \quad (\text{D.32})$$

portanto:

$$\Delta_b = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (\text{D.33})$$

Sabendo que:

$$\Delta W = -\Delta U \quad (\text{D.34})$$

e que:

$$\Delta W = N \Delta_b, \quad (\text{D.35})$$

obtém-se o trabalho realizado pela força externa  $N$  :

$$\Delta W = -\frac{N}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (\text{D.36})$$

O trabalho realizado pelas forças externas distribuídas transversais e longitudinais, assumidas de módulo e direção constantes, é:

$$W = - \int_l q(x,t) v(x,t) dx - \int_l p(x,t) u(x,t) dx \quad (\text{D.37})$$

Desta forma, considerando a ação do carregamento axial, a expressão da energia potencial total resulta:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EA \left( \frac{du_0}{dx} \right)^2 - p(x,t) u_0(x,t) \right] dx \quad (\text{D.38})$$

e a expressão da energia potencial total associada aos deslocamentos transversais, levando em conta o acoplamento entre a sollicitação axial e a flexão resulta:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EI \left( \frac{d^2 v_0}{dx^2} \right)^2 - q(x,t) v_0(x,t) - \frac{N}{2} \left( \frac{dv_0}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (\text{D.39})$$