

LORRANE PEREIRA RIBEIRO

METODOLOGIA ÓTIMA ROBUSTA PARA O PROJETO DE
UMA TÉCNICA DE CONTROLE PASSIVO DE SUPRESSÃO DO
FENÔMENO DE *FLUTTER* EM PAINÉIS COMPÓSITOS DE
INTERESSE AERONÁUTICO



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2019

LORRANE PEREIRA RIBEIRO

**METODOLOGIA ÓTIMA ROBUSTA PARA O PROJETO DE UMA
TÉCNICA DE CONTROLE PASSIVO DE SUPRESSÃO DO
FENÔMENO DE *FLUTTER* EM PAINÉIS COMPÓSITOS DE
INTERESSE AERONÁUTICO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

UBERLÂNDIA – MG

2019

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R484
2019 Ribeiro, Lorrane Pereira, 1990-
Metodologia ótima robusta para o projeto de uma técnica de controle passivo de supressão do fenômeno de flutter em painéis compósitos de interesse aeronáutico [recurso eletrônico] / Lorrane Pereira Ribeiro. - 2019.

Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2404>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. I. de Lima, Antônio Marcos Gonçalves, 1975-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado, nº 279, COPEM				
Data:	vinte e cinco de setembro de dois mil e dezenove	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	18:00
Matrícula do Discente:	11523EMC015				
Nome do Discente:	Lorrane Pereira Ribeiro				
Título do Trabalho:	Metodologia Ótima Robusta para o Projeto de uma Técnica de Controle Passivo de Supressão do Fenômeno de <i>Flutter</i> em Painéis Compósitos de Interesse Aeronáutico				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Bolsa de Produtividade PQ-2				

Reuniu-se no Auditório do Laboratório de Mecânica dos Fluidos - Bloco 5P, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Aline Souza de Paula - UnB; Edson Hideki Koroishi - UTFPR; Aldemir Aparecido Cavalini Júnior - FEMEC/UFU; Roberto Mendes Finzi Neto - FEMEC/UFU; Antônio Marcos Gonçalves de Lima - FEMEC/UFU, orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/09/2019, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Aline Souza de Paula, Usuário Externo**, em 25/09/2019, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Hideki Koroishi, Usuário Externo**, em 25/09/2019, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roberto Mendes Finzi Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/09/2019, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em



25/09/2019, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1575753** e o código CRC **10A04F01**.

*Dedico este trabalho: a Deus, à minha mãe,
aos meus avós maternos e, ao meu namorado
Júnior, que sempre se mostraram presentes em
minha vida.*

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial à minha mãe Lara e aos meus avós, Antônia e Antônio, que me apoiaram incondicionalmente neste caminho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, pela dedicação, esforço e competência em sua orientação além de auxiliar no meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus amigos e colegas do programa de Pós-Graduação da FEMEC/UFU, em especial, aos do Laboratório LMEst, pela parceria nos trabalhos e alto nível das conversas.

Ao meu namorado Júnior, pelo amor e paciência, por ter sempre acreditado em meu potencial, além de me apoiar nos momentos difíceis e compreender minha ausência quando foi necessária.

À amizade que construí nestes últimos anos com a Karina Mayumi que me acolheu no laboratório, me mostrou os caminhos a seguir, me deu forças e apoio em muitos momentos difíceis desta jornada. Muito obrigada por toda paciência e disposição a ajudar. Você é maravilhosa!

À minha querida amiga Danúbia, por sempre me escutar, me apoiar, me mostrar caminhos e soluções quando tudo parecia difícil.

Aos meus amigos Hélio, Nathali e Kamilla pela amizade construída em meio as pesquisas e que se tornou muito importante para mim. Levarei vocês sempre comigo.

Aos professores, técnicos e demais colaboradores do programa de Pós-Graduação da FEMEC/UFU, que trabalharam fortemente para a minha formação, agregando conceitos valiosos e uma nova forma de enxergar os problemas de engenharia.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, ao programa de Pós-Graduação da FEMEC/UFU, ao Laboratório de Mecânica de Estruturas – Prof. José Eduardo Tannús Reis pela oportunidade de realizar este trabalho.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida para realização do trabalho e aos órgãos de fomento CNPq e FAPEMIG.

RIBEIRO, L. P. **Metodologia ótima robusta para o projeto de uma técnica de controle passivo de supressão do fenômeno de *flutter* em painéis compósitos de interesse aeronáutico**. 2019. 143f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019.

Resumo

Confiabilidade e segurança em estruturas aeronáuticas são fundamentais e, para isso, é necessário que se conheça as respostas destes sistemas e se realize uma investigação da estabilidade dinâmica e aeroelástica das mesmas para várias condições de carregamento. Neste sentido, o emprego dos materiais compósitos tem sido cada vez mais comum na indústria aeronáutica para a construção de estruturas cada vez mais leves e com melhores propriedades mecânicas. Entretanto, problemas como vibrações e ruído indesejáveis são potencializados com o emprego de tais materiais para atender aos interesses de construção de estruturas leves e com aumento das velocidades de operação. Portanto, torna-se necessário o uso de estratégias de controle eficazes para atacar tais problemas. Este trabalho demonstra a viabilidade do uso de uma ferramenta de controle passivo do *flutter* de painéis compósitos através do emprego dos circuitos elétricos *shunt* multimodais. Para uma aplicação mais realística de interesse industrial, foi considerada a presença de incertezas nos principais parâmetros de projeto do sistema de controle e estes parâmetros incertos modelados como campos estocásticos Gaussianos e discretizados através da expansão de Karhunen-Loeve no contexto do Método dos Elementos Finitos Estocásticos. Além disso, para obtenção de um circuito *shunt* multimodal mais eficiente e robusto no tocante ao controle aeroelástico, uma estratégia de otimização multiobjetivo robusta também foi implementada. Neste caso, funções de vulnerabilidades adicionais foram combinadas com as funções objetivo originais do problema para levar em conta as incertezas nos parâmetros de projeto durante o processo de otimização. Entretanto, tendo em vista o alto custo computacional requerido na obtenção das soluções ótimas e robustas, o emprego de uma técnica de redução de modelos bem adaptada aos sistemas aeroeletromecânicos se fez necessária.

Palavras-chave: aeroelasticidade, modelagem estocástica, materiais compósitos, circuitos shunt multimodais, otimização multiobjetivo robusta

RIBEIRO, L. P. **Optimal robust methodology for the design of a passive control technique for *flutter* phenomena suppression in aeronautical composite panels.** 2019. 143f. Thesis (Mechanical Engineering), Federal University of Uberlândia, Uberlândia, 2019.

Abstract

Reliability and safety in aeronautical structures are fundamental aspects to deal with. Thus, it is necessary to know the responses of such systems in order to investigate their dynamic and aeroelastic stability for various loading scenarios. The use of composite materials has been increasingly in aeronautical industries for the construction of lighter structures with better mechanical properties. However, problems such as vibrations and noise are augmented significantly by the use of such materials due to the construction of lighter structures with increasing their operating speeds. Therefore, it is necessary to use efficient control strategies to deal with such problems. This work demonstrates the feasibility of using a passive composite panel flutter control tool via multimodal shunt electrical circuits. For a more realistic application of industrial interest, uncertainties present in main design parameters of the control system was considered and these uncertainties modeled as Gaussian stochastic fields and discretized by Karhunen-Loeve expansion in the context of the Stochastic Finite Element Method. In addition, to achieve a more efficient and robust multimodal shunt circuit in aeroelastic control, a robust multi-objective optimization strategy was also implemented. In this case, additional vulnerability functions were combined with the original problem objective functions to account uncertain parameters during the optimization process. However, due to high computational cost required to obtain the optimal and robust solutions, a model reduction technique well adapted to the aeroelectromechanical systems was used.

Keywords: aeroelasticity, stochastic modeling, composite materials, multimodal shunt circuits, robust multiobjective optimization

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Crescente utilização de materiais compósitos na indústria aeronáutica, Boeing (fonte: http://www.modernairliners.com/boeing-787-dreamliner/boeing-787-dreamliner-specs/ . Acessado em 06/08/2019).....	22
Figura 2.1 – Classificação dos materiais compósitos (adaptado de Callister Jr. e Rethwisch (2009)).....	27
Figura 2.2 – Compósito estrutural do tipo laminado formado por várias lâminas (adaptado de Mendonça (2005)).....	27
Figura 2.3 - Representação do efeito inverso dos piezelétricos: dimensões do elemento para diferentes polaridades de aplicação de voltagem (adaptado de Santana (2007)).....	33
Figura 2.4 - Estrutura amortecida via uso de circuito <i>shunt</i> ligado ao elemento piezelétrico (adaptado de Caruso (2001)).....	35
Figura 2.5 – Aproximação frequências naturais com aumento da velocidade do fluxo de ar sob a estrutura.....	38
Figura 3.1 - Elemento retangular de oito nós da família Serendipity, em coordenadas locais (esquerda) e globais (direita), (adaptado de Faria, 2006).....	48
Figura 3.2 - Representação esquemática das funções de interface.....	62
Figura 3.3 - Representação dos potenciais elétricos nodais por interface.....	63
Figura 3.4 – Circuito <i>shunt</i> ressonante multimodal paralelo para atenuação de dois modos simultâneos proposto por Wu (1998).....	69
Figura 3.5 – Algoritmo de resolução do problema de <i>flutter</i>	75
Figura 3.6 – Diagrama V-g: a) Parte real duas frequências naturais versus velocidade de escoamento; b) Amortecimento modal versus velocidade de escoamento.....	77
Figura 3.7 – Algoritmo do processo de construção da base do método IERM.....	80
Figura 4.1 – Domínio de correlação para o elemento finito de placa compósita.....	83
Figura 5.1 – Algoritmo NSGA para um problema POMD (adaptado de de Lima (2007)).....	92
Figura 5.2 – Exemplo de ordenamento por Front do NSGA (adaptado de Deb (2001)).....	94
Figura 5.3 – Ilustração de soluções ótimas (adaptado de Lee e Park (2001)).....	95
Figura 5.4 – Metodologias de otimização determinística (POMD) e robusta (POMR) (adaptado de Ait Brik (2005)).....	97
Figura 6.1 – Placa compósita com camada piezelétrica (azul) acoplada de <i>shunt</i> sujeita a um fluxo supersônico.....	98

Figura 6.2 – Comparação entre as FRFs da placa compósita sem PZT dos modelos MATLAB® e ANSYS®	101
Figura 6.3 – Análise de convergência do modelo de placa compósita sem o PZT.....	101
Figura 6.4 – Comparação entre os diagramas V-g e FRFs dos sistemas completo e reduzido: (a,b) diagrama V-g; (c) FRFs.....	102
Figura 6.5 – Amortecimentos modais da placa compósita com PZT sujeita a um fluxo supersônico.....	104
Figura 6.6 – Funções de resposta em frequência para cada passo de velocidade.....	104
Figura 6.7 – FRFs para a velocidade de escoamento de 1300 m/s.....	105
Figura 6.8 – Diagrama V-g: a) Duas primeiras frequências naturais variando com a velocidade; b) Amortecimentos modais para os dois primeiros modos.....	106
Figura 6.9 – Gráfico de convergência ao se considerar todos elementos do circuito como incertos e 20% de incerteza associada a cada parâmetro.....	108
Figura 6.10 – Tolerância no parâmetro de espessura h_{pzt} : a) Faixa de valores de espessura; b) Tolerância conforme faixa de espessura (adaptado de PI Group (2015)).....	109
Figura 6.11 – Envelope amortecimento modal: detalhe da região de interesse.....	110
Figura 6.12 – Envelope das FRFs para velocidade escoamento de 1300 m/s.....	110
Figura 6.13 – Envelopes amortecimentos modais FRFs: todos parâmetros do circuito incertos.....	113
Figura 6.14 – Envelopes das FRFs: todos parâmetros do circuito incertos.....	113
Figura 6.15 – Envelopes amortecimentos modais: R_1 e L_1 incertos.....	114
Figura 6.16 – Envelopes das FRFs: R_1 e L_1 incertos.....	114
Figura 6.17 – Envelopes (a) amortecimentos modais e (b) FRFs: R_{21} e L_{21} incertos.....	115
Figura 6.18 – Envelopes (a) amortecimentos modais e (b) FRFs: C_{1b} e L_{1b} incertos.....	116
Figura 6.19 – Frente de Pareto para o POMD.....	118
Figura 6.20 – Respostas do sistema ótimo determinístico: (a) gráfico V-g; (b) FRFs.....	120
Figura 6.21 - Soluções de Pareto para o POMR: a) f_1 versus vulnerabilidade de f_1 ; b) f_2 versus vulnerabilidade de f_2	122
Figura 6.22 – Comparação das Frentes de Pareto dos problemas POMD e POMR.....	122
Figura 6.23 – Comparação otimizações: a) Amortecimentos modais; b) FRFs.....	124
Figura 6.24 – Envelopes dos gráficos V-g (a,b) e FRFs (c,d) obtidos para um perturbação de 15% introduzida nas soluções ótimas determinística e robusta.....	125

Figura 6.25 – Envelopes de amortecimentos modais para nível de incerteza igual a 15%: a) otimização robusta; b) cenário 1; c) cenário 2.....	126
Figura 6.26 – Envelopes de FRFs para nível de incerteza igual a 15%: a) otimização robusta; b) cenário 1; c) cenário 2.....	127
Figura 6.27 – Análise variações no parâmetro L_1 : a) FRFs; b) e c) gráfico V-g.....	129

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS LATINOS

c, s	$\text{cosseno}(\theta), \text{seno}(\theta)$
k	k -ésima camada
T, T_b, T_s	Matrizes que rotacionam de um ângulo θ as matrizes de propriedades mecânicas, sendo T a matriz completa, e com separação de efeitos, flexão-membrana, T_b , e cisalhamento, T_s .
Q	Matriz que rotaciona de um ângulo θ as matrizes de propriedades elétricas
u_0, v_0, w_0	Componentes dos deslocamentos nas respectivas direções de coordenadas (x, y, z) em um ponto do plano médio, ou seja, $z = 0$
u, v, w	Deslocamentos totais nas respectivas direções (x, y, z)
K_{ij}	Coefficiente de acoplamento piezoeletrico
d	Matriz de constantes piezoeletricas de deformação
E, E_0, E_i	Vetor dos campos elétricos totais e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
D, D_0, D_i	Vetor de deslocamentos elétricos totais e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
C, C_b, C_s	Tensor de elasticidade linear total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
e, e_b, e_s	Tensor de constantes dielétricas total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente

U, \mathbf{u}, A_u	Campo de deslocamentos mecânicos, graus de liberdade mecânicos e matriz com o parâmetro z fatorado, respectivamente
D_b, D_s	Matrizes dos operadores diferenciais com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
J, J	Matriz Jacobiana e Jacobiano, respectivamente, sendo $J = \det(\mathbf{J})$
\mathbf{u}_e	Variáveis mecânicas nodais
N, N_ϕ, N_x	Matriz de Funções de Forma, Funções de Forma elétrica e derivada da matriz de Funções de Forma em relação a x , respectivamente.
B, B_b, B_s	Matriz que correlaciona deformações e deslocamentos nodais total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
E_e, P_e	Energia cinética e energia potencial de deformação mecânica, ambas a nível elementar
U_e	Energia de deformação a nível elementar, realizando-se uma integração no volume do elemento finito entre a diferença da energia de deformação mecânica e da energia de deformação elétrica
$M^e, K_{uu}^e, K_{ub}^e, K_{us}^e$	Matrizes mecânicas elementares de massa, de rigidez mecânica e de rigidezes mecânica com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
M, K_{uu}	Matrizes globais de massa e rigidez mecânica, respectivamente
$\mathbf{f}(t), \mathbf{F}(\omega)$	Vetor dos esforços generalizados, no domínio do tempo e no domínio da frequência, respectivamente
$\mathbf{q}(t), \mathbf{Q}(\omega)$	Vetor de cargas elétricas, no domínio do tempo e no domínio da frequência, respectivamente
L_{kd}, L_{ku}	Funções <i>layerwise</i> transversais para as interfaces inferior e superior, respectivamente.

$\mathbf{B}_\phi, \mathbf{B}_{\phi 0}, \mathbf{B}_{\phi i}$	Matriz que correlaciona o campo elétrico e os potenciais elétricos nodais completa e, com separação de efeitos: circuito aberto e fechado, respectivamente
$\mathbf{K}_{u\phi}^e, \mathbf{K}_{\phi\phi}^e$	Matrizes de rigidezes elementares, eletromecânica e elétrica, respectivamente
$\mathbf{K}_{u\phi}, \mathbf{K}_{\phi\phi}, \mathbf{K}_{aerod.}$	Matrizes de rigidezes globais, eletromecânica, elétrica e aerodinâmica, respectivamente
C_{PZT}	Capacitância inerente à pastilha piezelétrica
$Z(\omega)$	Impedância elétrica
R_n, L_n	Resistor e indutor referentes ao amortecimento do n -ésimo modo, respectivamente
\bar{L}_n, \bar{C}_n	Indutor e capacitor formadores do circuito de bloqueio para o n -ésimo modo, respectivamente, onde $\bar{L}_n \bar{C}_n = 1/\omega_n^2$
K_{ij}	Coefficiente de acoplamento eletromecânico
g_j	Amortecimento modal para cada passo de velocidade j
p_∞	Pressão não perturbada (pressão distante do sistema)
a_∞	Velocidade do som no ar não-perturbado
U_∞	Velocidade do escoamento não-perturbado
q	Pressão dinâmica
M_∞	Número de Mach
\mathbf{T}_{IERM}	Base de Ritz enriquecida iterativa
\mathbf{F}_b	Vetor de excitação
\mathbf{ZZ}	Matriz de rigidez dinâmica
\mathbf{ZZ}_r	Matriz de rigidez dinâmica reduzida
\mathbf{R}_f	Resíduo de força devido ao erro de aproximação
\mathbf{R}_d	Resíduo estático de deslocamento
$H(\bullet), \hat{H}(\bullet)$	Campo estocástico e campo estocástico aproximado, respectivamente

f_r	Autovetor solução da Integral de Fredholm
l_x, l_y	Comprimentos de correlação nas direções x e y , respectivamente
n_{KL}	Número de termos na expansão da série de Karhunen-Loève
$\mathbf{M}^e(\theta), \mathbf{K}_{uu}^e(\theta)$	Matrizes estocásticas elementares de massa e rigidez mecânica, respectivamente
$\mathbf{K}_{u\phi}^e(\theta), \mathbf{K}_{\phi\phi}^e(\theta)$	Matrizes estocásticas de rigidezes elementares, eletromecânica e elétrica, respectivamente
$\mathbf{M}(\theta), \mathbf{K}_{uu}(\theta)$	Matrizes estocásticas mecânicas globais de massa e de rigidez, respectivamente
$\mathbf{K}_{u\phi}(\theta), \mathbf{K}_{\phi\phi}(\theta), \mathbf{K}_{aero}(\theta)$	Matrizes estocásticas de rigidezes globais, eletromecânica, elétrica e aerodinâmica, respectivamente
$F(\mathbf{x})$	Vetor de funções objetivo a serem otimizadas
$g_i(\mathbf{x})$	Restrições de igualdade e desigualdade no problema de otimização
sh	Função <i>sharing</i> (NSGA)
$d(x_i, x_j)$	Distância euclidiana entre dois indivíduos (NSGA)
$f_i^v(\mathbf{x})$	Função vulnerabilidade associada à i -ésima função objetivo

SÍMBOLOS GREGOS

θ_k	Ângulo de orientação das fibras da k -ésima camada do compósito
$\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$	Deformações cisalhantes transversais
ε_{zz}	Deformação normal

ψ_x, ψ_y, ψ_z	Rotações da seção transversal nas direções x, y e z , respectivamente
$\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z, \Phi_x, \Phi_y$	Funções dependentes apenas das coordenadas (x, y) , as quais não apresentam significado físico evidente, mas, podem ser vistas como rotações de ordem superior (Teoria HSDT)
$\varepsilon, \varepsilon_b, \varepsilon_s$	Vetor de deformações mecânicas total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
$\sigma, \sigma_b, \sigma_s$	Vetor das tensões mecânicas total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
χ, χ_b, χ_s	Matriz de permissividade elétrica total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
ξ, η	Coordenadas locais
ρ_k	Densidade do material da k -ésima camada
Φ_k, Φ_{k+1}	Vetor contendo as funções <i>layerwise</i> no plano, dadas pela função potencial elétrico das interfaces inferior e superior, respectivamente, da k -ésima camada
$\Phi_{(k)}$	Vetor potencial elétrico da k -ésima camada
φ_{ek}	Vetor contendo os potenciais elétricos nodais
ξ_r	Variáveis aleatórias ortogonais de média zero
λ_r	Autovalor solução da Integral de Fredholm
Ω_x, Ω_y	Domínios estocásticos nas direções x e y , respectivamente
ω_n	Frequência natural do sistema
γ_{ar}	Relação entre os calores específicos do ar ($\approx 1,4$)
ρ_a	Densidade do ar
$\partial W / \partial t$	Amortecimento aerodinâmico

Φ_0	Base de redução inicial associada ao sistema conservativo
\sim	Aproximação da resposta dinâmica completa
η_{red}	Resposta dinâmica reduzida
σ_{niche}	Intervalo de <i>niche</i> (NSGA)

ABREVIACÕES

ESL	<i>Equivalent single-layer theories</i> (Teorias da camada Equivalente Única)
CLT	<i>Classical Laminated Theory</i> (Teoria Clássica dos Laminados)
FSDT	<i>First-Order Shear Deformation Theory</i> (Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem)
HSDT	<i>High-Order Shear Deformation Theory</i> (Teoria da Deformação Cisalhante de Alta Ordem)
PZT	<i>Lead zirconate titanate</i> (Titanato Zirconato de Chumbo)
PVDF	Polyvinylidene fluoride (Polifluoreto de Vinilideno)
SFEM	<i>Stochastic Finit Element Method</i> (Método dos Elementos Finitos Estocásticos)
KL	Método de expansão em série de Karhunem-Loève
MME	Método da Máxima Entropia
HCL	Amostragem por Hipercubo Latino
MCS	Método da Simulação de Monte Carlo
FDP	Função Distribuição de Probabilidade
FRF	Função de Resposta em Frequência
POMD	Problema de Otimização Multiobjetivo Determinístico
POMR	Problema de Otimização Multiobjetivo Robusto

NSGA	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm</i> (Algoritmo Genético de Classificação Não Dominado)
LMEst	Laboratório de Mecânica de Estruturas
UFU	Universidade Federal de Uberlândia

SUMÁRIO

CAPÍTULO I	21
1. INTRODUÇÃO.....	21
1.1. Objetivos	24
1.2. Organização da Tese	24
CAPÍTULO II	26
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	26
2.1. Materiais Compósitos.....	26
2.2. Teorias de placas e cascas compósitas laminadas	27
2.2.1. <i>Teoria Clássica dos Laminados (CLT)</i>	28
2.2.2. <i>Teoria FSDT</i>	29
2.2.3. <i>Teoria HSDT</i>	30
2.2.4. <i>Teoria Mista</i>	31
2.3. Fundamentos da piezoelectricidade linear	32
2.4. Controle passivo de vibrações via circuitos elétricos <i>shunt</i>	34
2.5. Aeroelasticidade de placas	36
2.6. Conceitos fundamentais sobre incertezas.....	39
2.7. Noção sobre o problema de otimização multiobjetivo (POMR).....	41
2.8. Estado da arte	42
CAPÍTULO III	46
3. MODELAGEM DETERMINÍSTICA DO SISTEMA AEROELETROMECHANICO 46	
3.1. Modelagem placas compósitas.....	46
3.2. Modelagem do problema eletromecânico	57
3.2.1. <i>Rotação das matrizes de propriedades</i>	57
3.2.2. <i>Discretização do potencial elétrico por camadas</i>	62
3.2.3. <i>Matrizes de rigidezes elementares do sistema eletromecânico</i>	64
3.3. Inclusão dos circuitos elétricos <i>shunt</i>	66
3.3.1. <i>Sintonização do circuito elétrico shunt</i>	68
3.3.2. <i>Shunt ressonante multimodal paralelo</i>	68
3.3.3. <i>Impedância equivalente total do circuito</i>	70
3.4. Modelagem aeroeletromecânica.....	71
3.4.1. <i>Adição do escoamento de ar no modelo</i>	71

3.4.2. <i>Predição do flutter</i>	73
3.5. Redução do modelo aeroeletromecânico.....	77
CAPÍTULO IV	81
4. MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO SISTEMA AEROELETROMECHANICO	81
4.1. Expansão de Karhunen-Loève (KL).....	81
4.2. Formulação do problema de EF estocástico.....	86
CAPÍTULO V	90
5. METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO ROBUSTA.....	90
5.1. Definição do problema de otimização multiobjetivo	90
5.2. Escolha do algoritmo de otimização multiobjetivo	91
5.3. Problema de otimização multiobjetivo robusto	94
CAPÍTULO VI	98
6. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	98
6.1. Sistema aeroeletromecânico determinístico	98
6.1.1. <i>Verificação da modelagem determinística da placa compósita sem o PZT</i> 100	
6.1.2. <i>Redução de modelos</i>	102
6.1.3. <i>Predição flutter</i>	103
6.1.4. <i>Inclusão do circuito elétrico shunt multimodal</i>	104
6.2. Sistema aeroeletromecânico estocástico	107
6.2.1. <i>Influência das incertezas nos parâmetros estruturais</i>	109
6.2.2. <i>Influência das incertezas nos parâmetros do circuito shunt</i>	111
6.3. Problema de otimização multiobjetivo determinístico (POMD).....	117
6.4. Problema de otimização multiobjetivo robusto (POMR).....	120
6.4.1. <i>Avaliação da robustez das soluções ótimas determinística e robusta</i>	124
6.4.2. <i>Avaliação da robustez associada ao parâmetro L1</i>	125
CAPÍTULO VII.....	130
7. CONCLUSÕES GERAIS E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	130
7.1. Resumo e avaliação	130
7.2. Sugestões de trabalhos futuros	133
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	134

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Diante dos crescentes avanços das pesquisas em engenharia de materiais nas últimas décadas, os materiais compósitos têm assumido papel cada vez mais importante na indústria, fornecendo características mecânicas únicas que possibilitaram grandes ganhos em diversas aplicações, tais como em aeronaves, satélites artificiais, instalações industriais, estruturas de construção civil, dentre outras (REDDY 1997; SOUZA 2003; FARIA, 2006; CALLISTER Jr. e RETHWISCH,2009). Como exemplo, pode-se citar o setor aeronáutico, que requer estruturas resistentes e de mínimo peso, considerando ainda aspectos relacionados ao conforto acústico e segurança. A Fig. 1.1 mostra o emprego crescente dos materiais compósitos no Boieng 787, de 2011, em comparação com o Boeing 777, de 1995.

Em aplicações aeronáuticas e automotivas, o uso dos materiais compósitos permitiu a concepção de estruturas cada vez mais leves, flexíveis e eficientes. No entanto, a flexibilidade combinada com os efeitos de anisotropia de tais materiais representam vários desafios para os engenheiros e projetistas que devem considerar tais efeitos ao dimensionar uma estrutura compósita. Além disso, o interesse em alcançar a estabilidade dinâmica de tais sistemas é de suma importância em aplicações aeronáuticas, uma vez que as amplitudes de vibrações estão diretamente relacionadas às instabilidades aeroelásticas e, conseqüentemente, à fadiga (PALMERI e RICCIARDELLI, 2006). Esta é a razão pela qual, mais recentemente, estratégias de controle de vibrações e ruído vem sendo aplicadas em sistemas aeroelásticos para prevenir

o fenômeno do *flutter* que pode ser catastrófico (KUO, 2011; ALMEIDA, DONADON e DE ALMEIDA, 2012).

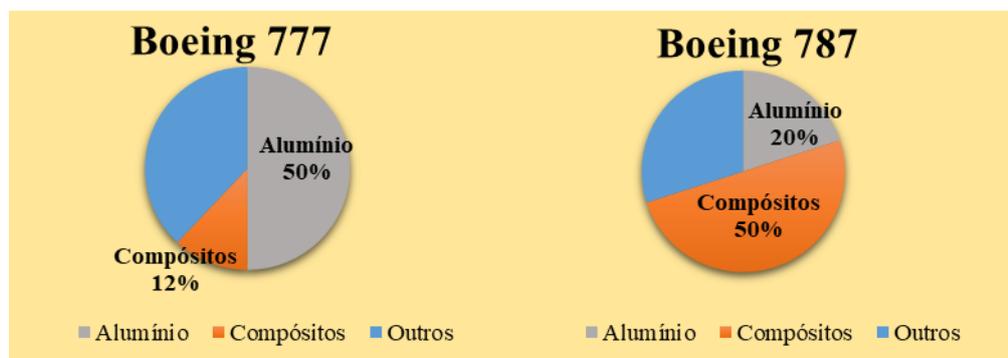


Figura 1.1 – Crescente utilização de materiais compósitos na indústria aeronáutica, *Boeing* (fonte: <http://www.modernairliners.com/boeing-787-dreamliner/boeing-787-dreamliner-specs/>. Acessado em 06/08/2019).

O *flutter* é uma instabilidade aeroelástica auto-excitada causada pela interação de forças elásticas, aerodinâmicas e inerciais, resultando em grandes amplitudes de vibrações que modificam o modo como as cargas aerodinâmicas atuam na estrutura num processo oscilatório iterativo e auto-excitado. Nesta condição de instabilidade, altas tensões internas podem surgir de forma a limitar as amplitudes de vibrações de painéis aeronáuticos e levar a fadiga estrutural (DOWELL, 1975).

O *flutter* de painéis teve sua primeira ocorrência durante a Segunda Guerra Mundial no ano de 1944 onde 70 dos 500 foguetes V-2 sofreram falhas por razões até então desconhecidas. Alguns anos depois, estas falhas seriam identificadas por Jordan (1956) como sendo o “*flutter*” de painéis. O mesmo tipo de falha foi identificado posteriormente em vários outros projetos como nos primeiros voos do X-15, nos ensaios em túnel de vento do X-20 e no desenvolvimento do Titan II e III e S-IV B (PEGADO, 2003).

A partir da identificação do *flutter* de painéis na década de 50, muitas pesquisas foram realizadas sobre o tema com o intuito de se obter modelos cada vez mais representativos deste fenômeno. Neste caso, teorias lineares e não-lineares foram propostas mas o interesse pelo assunto diminuiu entre os anos 70 e 90. Com o crescente uso dos materiais compósitos pela

indústria aeronáutica a partir da década de 90, o interesse no comportamento aeroelástico de painéis compósitos aumentou significativamente.

Melhorias no desempenho dinâmico e aeroelástico de estruturas compósitas de interesse aeronáutico sujeitas ao *flutter* podem ser alcançadas por meio de estratégias de controle passivo ou ativo de vibrações, empregando-se os materiais inteligentes. Neste caso, as chamadas técnicas de controle passivo têm sido incorporadas em muitos sistemas industriais devido às inúmeras vantagens quando comparadas com as técnicas de controle ativo, como por exemplo, baixo custo efetivo e de fácil manutenção e aplicação (LIMA, 2007). Além disso, tais técnicas não necessitam de nenhuma fonte externa de energia, fato que garante inerente estabilidade ao sistema e as tornam mais bem adaptadas aos sistemas aeroelásticos. Tipicamente, o controle passivo de vibrações pode ser obtido com a utilização de materiais piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt* (VIANA e STEFFEN Jr., 2006; TRINDADE e BENJEDDOU, 2009; SANTOS, 2012). Portanto, a partir da combinação da estrutura compósita em regime de escoamento supersônico com materiais piezelétricos acoplados de circuitos elétricos *shunt*, torna-se de especial interesse o amortecimento das vibrações devidas às cargas aerodinâmicas e, por consequência, a supressão do *flutter*.

No que tange à técnica de controle de interesse deste trabalho, é sabido que pequenas variações nos parâmetros dos circuitos elétrico *shunt* multimodais levam à sua perda de eficácia (ZAMBOLINI-VICENTE, 2019). Assim, a implementação de técnicas numéricas de otimização, levando-se em conta as incertezas inerentes aos parâmetros do circuito, com vistas à obtenção de projetos ótimos e mais robustos, se fazem necessárias neste tipo de estudo. Uma estratégia de otimização multiobjetivo é adotada neste trabalho combinada com a noção de funções de vulnerabilidade. Esta metodologia é utilizada no projeto ótimo e robusto dos parâmetros do circuito cujo principal objetivo é o aumento da velocidade crítica de ocorrência do fenômeno de *flutter*.

Entretanto, a implementação de modelos aeroeletromecânicos estocásticos combinados com técnicas de otimização muitas vezes pode ser inviável do ponto de vista do alto custo computacional requerido na avaliação das respostas aleatórias. Isto faz com que seja necessário o emprego de métodos de redução de modelos. Neste caso, foi desenvolvida uma base de redução iterativa de Ritz enriquecida com resíduos estáticos associados aos esforços externos e ao carregamento aerodinâmico, conforme os trabalhos de Briend (2017) e Cunha-Filho et al. (2018).

1.1. Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é demonstrar a viabilidade de aplicação de circuitos elétricos *shunt* acoplados a elementos piezelétricos no que tange ao aumento da estabilidade aeroelástica de painéis compósitos.

Objetivos específicos:

- Realizar a modelagem por elementos finitos de painéis compósitos planos em regime supersônico contendo materiais piezelétricos acoplados de circuitos elétricos *shunt* multimodais com topologia em paralelo com vistas à supressão do *flutter*;
- Estender a modelagem determinística do sistema aeroeletromecânico ao caso estocástico para levar em conta as incertezas presentes no sistema de controle. Neste caso, as incertezas são introduzidas no sistema segundo o método de discretização de Karhunen-Loève de campos aleatórios;
- Avaliar a influência da dispersão dos parâmetros estruturais e dos parâmetros do circuito na variabilidade das respostas dinâmica e aeroelástica do sistema;
- Projetar de forma ótima e robusta a ferramenta de controle, ou seja, otimizar os parâmetros do circuito *shunt* levando-se em conta as incertezas no modelo.

1.2. Organização da Tese

Além deste capítulo introdutório, o segundo capítulo dedica-se a uma breve revisão da literatura, abordando as principais teorias empregadas na modelagem de estruturas compósitas, a piezeletricidade linear e seu emprego enquanto técnica de controle de vibrações, os conceitos fundamentais sobre incertezas e otimização multiobjetivo, além das teorias aerodinâmicas, a predição do fenômeno de *flutter* de painéis e uma breve apresentação de trabalhos que ilustram o estado da arte.

A modelagem por elementos finitos determinística de placas compósitas contendo material piezelétrico acoplado de circuito elétrico *shunt* e sujeita a um fluxo supersônico, é apresentada no terceiro capítulo. Ênfase é dada à Teoria Mista para a construção do modelo

aeroeletromecânico e à Teoria do Pistão na inserção do carregamento aerodinâmico ao sistema. O processo de construção da base de redução é também apresentado neste capítulo.

O quarto capítulo dedica-se à modelagem estocástica do problema onde as variáveis fatoradas das matrizes de massa e rigidezes e os parâmetros do circuito *shunt* são considerados como incertos e modelados como campos estocásticos homogêneos gaussianos. A discretização destes campos estocásticos é realizada por meio da expansão de Karhunen-Loève, obtendo-se as matrizes estocásticas do sistema aeroeletromecânico.

O quinto capítulo apresenta, de forma sucinta, a estratégia de otimização multiobjetivo robusta implementada neste trabalho. No caso determinístico, otimiza-se as funções objetivo originais, enquanto que no problema robusto, funções vulnerabilidade são acrescentadas ao problema de otimização determinístico com intuito de contabilizar as incertezas presentes nos parâmetros de projeto, de maneira que essas funções vulnerabilidade possam ser otimizadas ao mesmo tempo que as funções objetivo originais. Além disso, uma breve introdução ao algoritmo de otimização NSGA e ao critério de dominância de Pareto para obter as soluções ótimas e robustas do problema aeroeletromecânico também é abordado neste capítulo.

O sexto capítulo traz as simulações numéricas e o sétimo capítulo as conclusões gerais e as sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Materiais Compósitos

Os compósitos são materiais que apresentam uma fase descontínua, chamada de reforço, embebida de uma fase contínua, chamada de matriz, onde a sua distribuição e interação vão determinar as propriedades finais do material. Segundo Callister Jr. e Rethwisch (2009), a classificação dos materiais compósitos se dá em termos da morfologia de seus agentes de reforço, onde tem-se os compósitos particulados, os compósitos reforçados com fibras e os compósitos estruturais, conforme ilustrado na Fig. 2.1.

Os compósitos laminados são os de interesse deste trabalho. Segundo Reddy (1997), a construção de um compósito laminado se dá pelo empilhamento de lâminas de materiais compósitos, podendo apresentar diferentes composições ou diferentes orientações de fibras. Nota-se na Fig. 2.2 a rotação das lâminas do compósito em relação a um sistema global de orientação. Este recurso pode ser utilizado de forma a maximizar a rigidez e a resistência mecânica e minimizar o peso final da estrutura, projetando-se assim cada lâmina do compósito com variação no ângulo de orientação da lâmina/fibra de forma a atingir estes objetivos. A designação dos laminados é efetuada segundo a disposição das camadas e a orientação das mesmas com relação ao eixo referencial global adotado (MENDONÇA, 2005; REDDY, 1997).

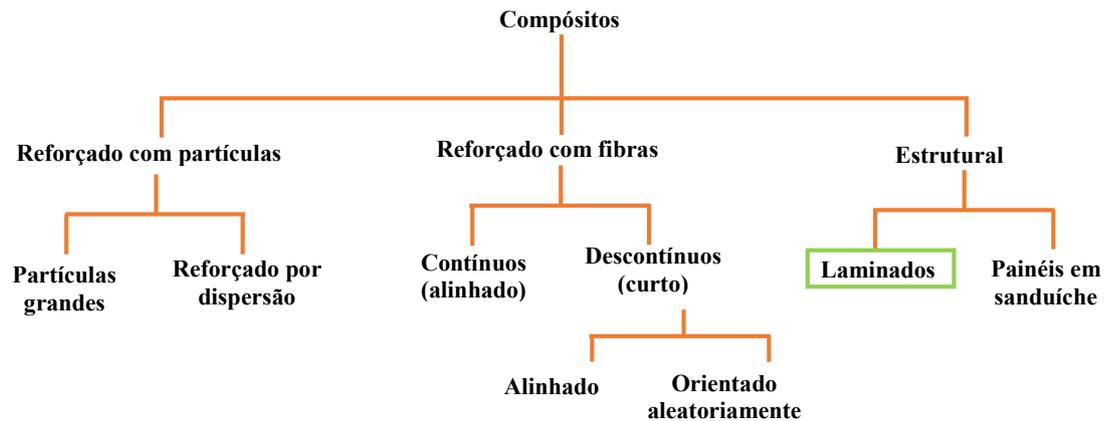


Figura 2.1 – Classificação dos materiais compósitos (adaptado de Callister Jr. e Rethwisch (2009)).

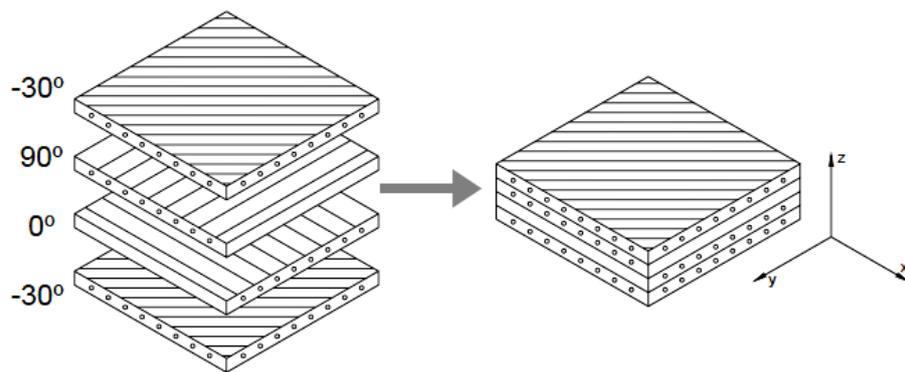


Figura 2.2 – Compósito estrutural do tipo laminado formado por várias lâminas (adaptado de Mendonça (2005)).

2.2. Teorias de placas e cascas compósitas laminadas

Uma grande diversidade de teorias pode ser encontrada na literatura, no que diz respeito à modelagem de estruturas compósitas laminadas, as quais são utilizadas na formulação de elementos finitos de materiais compósitos. Cada uma destas teorias apresenta suas particularidades, suas considerações, suas aplicações e simplificações. Desta forma, cada uma se demonstra mais adequada para cada tipo de problema, apresentando vantagens e desvantagens, tanto na sua aplicabilidade, no quão próximo se consegue chegar ao resultado real, e no esforço computacional envolvido na sua implementação. Assim, observa-se que a

principal diferença entre as várias teorias existentes se dá pela ordem das funções polinomiais escolhidas na aproximação das variáveis de campo mecânicas e a sua abrangência de aplicação (REDDY, 1997; MENDONÇA 2005).

De acordo com Reddy (1997), duas abordagens são utilizadas na classificação das teorias de placas compósitas: Teorias da Camada Equivalente Única (*Equivalent single-layer theories* - ESL) e Teoria da Elasticidade Tridimensional. As teorias ESL se dão no plano a partir da simplificação da Teoria da Elasticidade Tridimensional e consideram a modelagem da estrutura compósita laminada como uma única camada equivalente. Já na Teoria da Elasticidade Tridimensional, não há simplificações e, desta forma, cada camada é modelada como um sólido em três dimensões. Dentro do grupo ESL, encontram-se a Teoria Clássica dos Laminados (CLT) e as Teorias de deformação cisalhante de placas laminadas, como a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (*First-Order Shear Deformation Theory* - FSDT) e a Teoria de Deformação Cisalhante de Terceira Ordem ou de Alta Ordem (*High-Order Shear Deformation Theory* - HSDT). Já no grupo da Teoria da Elasticidade Tridimensional estão as formulações tradicionais de elasticidade tridimensional e as teorias *Layerwise*.

2.2.1. Teoria Clássica dos Laminados (CLT)

Dentre as teorias que modelam todas as camadas do laminado como uma única equivalente, a Teoria Clássica dos Laminados é a mais simples sendo uma extensão da teoria clássica de placas de Kirchhoff para placas compósitas laminadas. A CLT possui os seguintes campos de deslocamentos (REDDY, 1997; MENDONÇA 2005):

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - zw_{0,x} \quad (2.1a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - zw_{0,y} \quad (2.1b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.1c)$$

onde (x, y, z) é um conjunto de coordenadas cartesianas escolhido de forma que $(x, y, 0)$ é o plano médio não deformado; t é o tempo; $u(x, y, z, t)$ e $v(x, y, z, t)$ são os deslocamentos nas direções x e y , respectivamente; $w(x, y, z, t)$ é o deslocamento transversal constante ao longo da espessura do laminado; u_0 , v_0 e w_0 , são as componentes dos deslocamentos nas respectivas direções de coordenadas (x, y, z) em um ponto do plano médio, ou seja, $z = 0$ e $w_{0,x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}$, $w_{0,y} = \frac{\partial w_0}{\partial y}$ são as rotações em torno dos eixos y e x , respectivamente.

Desta maneira, conhecidos os deslocamentos do plano médio da superfície de referência, u_0 , v_0 e w_0 , os deslocamentos de qualquer ponto arbitrário do contínuo tridimensional são determinados por meio das Eqs.(2.1). Observa-se que este campo de deslocamento implica que, uma linha reta e perpendicular à superfície média indeformada, também conhecida como superfície de referência, permanece reta e perpendicular a esse plano e não se alonga na direção da espessura, ou seja, permanece inextensível nesta direção (REDDY, 1997).

Assim, a teoria CLT não leva em consideração o efeito das deformações cisalhantes transversais $(\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})$ e nem da deformação normal transversal (ε_{zz}) . Portanto, esta teoria até pode ser utilizada na análise de tensões de placas compósitas, mas, só é interessante o uso da mesma na modelagem de compósitos laminados finos por conta da sua precisão, pois, o erro ao se utilizar esta teoria aumenta à medida que se aumenta a relação entre a espessura e a largura da estrutura laminada (REDDY, 1997; MENDONÇA, 2005).

2.2.2. Teoria FSDT

A segunda teoria do conjunto de teorias ESL é a utilizada neste trabalho. Esta teoria considera cinco graus de liberdade em seu campo de deslocamentos dado pelas seguintes expressões (REDDY, 1997; FARIA, 2006):

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) \quad (2.2a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) \quad (2.2b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.2c)$$

onde ψ_x e ψ_y são as rotações em torno dos eixos y e x , respectivamente, dos segmentos normais à superfície de referência.

A FSDT consegue prever o comportamento de estruturas mais espessas do que a CLT e é baseada na teoria de placas de Mindlin-Reissner, na qual seções planas normais permanecem planas com relação à superfície média, mas não necessariamente normais durante e após a flexão. A FSDT assume que a deformação cisalhante transversal varia linearmente ao longo da espessura do laminado, o que não acontece nos casos reais, requerendo assim, a introdução de uma constante de correção para as deformações de cisalhamento transversais adotados na literatura como $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 5/6$ ou $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 2/3$ (REDDY, 1997; FARIA, 2006).

Desta forma, a teoria FSDT foi escolhida na modelagem da estrutura compósita laminada deste trabalho uma vez que a mesma se encaixa na classe de placas e cascas finas e moderadamente finas. Além disso, a FSDT é considerada a teoria que apresenta a melhor relação entre capacidade de predição e custo computacional para uma larga classe de aplicações. Como desvantagens desta teoria pode-se citar o problema de travamento ou *shear locking* na modelagem de placas extremamente finas (relação entre espessura e comprimento $< 0,02$), sendo que, tal problema leva a rigidez excessiva, além também da desvantagem de requerer um fator de correção para as deformações cisalhantes transversais (MENDONÇA, 2005; FARIA, 2006).

2.2.3. Teoria HSDT

A HSDT é a teoria que conduz a distribuições de tensões e deformações cisalhantes transversais (ε_{xz} e ε_{yz}) e normais (ε_{zz}) bem próximas das obtidas pela Teoria da Elasticidade Tridimensional, não necessitando assim de constantes de correção para as deformações

cisalhantes transversais, além de não apresentar o problema de travamento (*shear locking*) para o caso de modelagem de placas finas. Esta teoria é recomendada quando se tem placas compósitas laminadas espessas (relação entre espessura e comprimento $>0,25$) uma vez que assume uma distribuição parabólica ao longo da espessura do laminado e adota uma variação cúbica para os deslocamentos coplanares (REDDY, 1997; MENDONÇA, 2005; FARIA 2006). A seguir é mostrado seu campo de deslocamentos segundo o trabalho de Lo, Christensen e Wu (1977):

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\zeta_x(x, y, t) + z^3\Theta_x(x, y, t) \quad (2.3a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\zeta_y(x, y, t) + z^3\Theta_y(x, y, t) \quad (2.3b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2\zeta_z(x, y, t) \quad (2.3c)$$

onde, ψ_x , ψ_y e ψ_z são as rotações da seção transversal nas direções y , x e z . As funções ζ_x , ζ_y , ζ_z , Θ_x e Θ_y são funções dependentes apenas das coordenadas (x, y) , as quais não apresentam significado físico evidente, mas, podem ser vistas como rotações de ordem superior que descrevem a deformação de uma linha normal em relação ao plano de referência (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977; MENDONÇA, 2005). Nestas condições, esta linha não permanece reta depois da deformação.

Naturalmente, a utilização de onze graus de liberdade na definição do campo de deslocamentos da HSDT aumenta o custo computacional associado à implementação de modelos baseados nesta teoria.

2.2.4. Teoria Mista

A estrutura compósita laminada modelada neste trabalho apresenta certo número de camadas em que uma é o elemento piezelétrico colado na face inferior ou superior da mesma. Desta forma, faz-se o uso da Teoria Mista, a qual considera o campo de deslocamentos

mecânicos concebido de forma condensada em uma única camada equivalente e o potencial elétrico distribuído por camadas (SARAVANOS e HEYLIGER, 1995; CHEE, 2000).

Para a modelagem dos campos de deslocamentos mecânicos, a Teoria Mista pode adotar as aproximações tanto de baixa ordem, utilizando-se a teoria FSDT ou de alta ordem, utilizando-se a HSDT (REDDY, 1997). Esta é uma das principais vantagens da Teoria Mista em relação à teoria da camada equivalente discreta, pois ela considera os campos de deslocamentos mecânicos como sendo condensados em uma camada equivalente única, tendo como atrativo o baixo custo computacional comparado ao custo das teorias que consideram os campos de deslocamentos mecânicos como discretos em cada camada (SARAVANOS e HEYLIGER, 1995; SARAVANOS, 1999). Além disso, ela apresenta a vantagem de considerar as variáveis elétricas definidas segundo a estratificação do compósito, permitindo que seja realizada a introdução de diferentes sensores e atuadores na modelagem, além da possibilidade da captura da heterogeneidade elétrica que é induzida pelas camadas piezelétricas embutidas no compósito ao longo da espessura (FARIA, 2006; SARAVANOS, 1999).

2.3. Fundamentos da piezeletricidade linear

A piezeletricidade trata-se de uma propriedade dos materiais dielétricos, naturais ou sintéticos, que não apresentam estrutura cristalina simétrica em relação ao centro da célula. Tal propriedade pode ser observada em materiais inorgânicos como o quartzo, a turmalina e cerâmicas e em materiais orgânicos como os polímeros e tecidos biológicos, tais como osso, cabelo e pele (PIEFORT, 2001; SANTANA, 2007).

O efeito piezelétrico direto consiste na habilidade de ao se submeter um material piezelétrico a um carregamento mecânico externo, haver uma distribuição de cargas na superfície do mesmo, sendo que, tal característica é bastante utilizada na construção de sensores de deformação e para medidas indiretas de força e pressão. Já o efeito inverso se dá quando o piezelétrico é submetido a um campo elétrico e variações em sua forma e dimensões podem então ser observadas, sendo tal característica explorada na construção de atuadores e geradores de movimento (PIEFORT, 2001; FARIA, 2006; SANTANA, 2007). Os materiais piezelétricos mais utilizados em aplicações industriais são os piezocerâmicos, que possuem como principal

representante o Titanato Zirconato de Chumbo (PZT) e os piezopolímeros, principalmente representados pelo Polifluoreto de Vinilideno (PVDF) (SANTANA, 2007).

Na Fig. 2.3 é mostrada a resposta de um piezelétrico a uma carga elétrica aplicada, o qual sofre mudanças em suas dimensões, caracterizando-se assim o efeito inverso destes materiais. O piezelétrico mostrado foi polarizado na direção 3 com a direção de polarização do mesmo indicado pela seta vermelha. Ao aplicar uma voltagem com a mesma polaridade do piezelétrico, há uma expansão na direção 3 e contrações nas direções 1 e 2. Agora, no segundo caso, ao se aplicar uma polaridade contrária aquela do piezelétrico, há uma contração do mesmo na direção 3 e uma expansão nas direções 1 e 2. O elemento piezelétrico utilizado neste trabalho também é polarizado ao longo da espessura (direção 3), o qual foi concebido para atuar primariamente na direção do comprimento (direção 1), sendo o modo de atuação o 31.

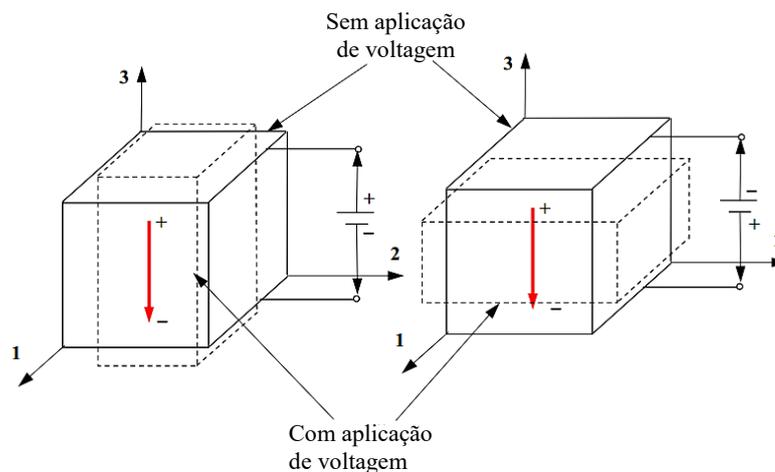


Figura 2.3 – Representação do efeito inverso dos piezelétricos: dimensões do elemento para diferentes polaridades de aplicação de voltagem (adaptado de Santana (2007)).

O coeficiente de acoplamento piezelétrico, K_{ij} , para um dado modo "ij" é que indica a capacidade de transformação de energia elétrica em mecânica e vice-versa, sendo que, em geral, os PZTs possuem maior coeficiente de acoplamento se comparados aos PVDF's. É interessante salientar que para garantir que o efeito piezelétrico continue funcionando perfeitamente, o elemento não deve ser submetido a elevados campos elétricos no sentido oposto ao campo original de fabricação. Deve-se evitar também temperaturas elevadas, acima da temperatura de

Curie, que é a temperatura na qual a estrutura cristalina do material sofre uma transição de fase e o mesmo deixa de apresentar propriedades piezelétricas. Depois de ultrapassada esta temperatura, o material perde a polarização remanescente induzida tornando-se inútil para a utilização como transdutor de energia elétrica em mecânica (FARIA, 2006; SANTANA, 2007).

2.4. Controle passivo de vibrações via circuitos elétricos *shunt*

Os materiais piezelétricos possuem uso bastante comum no controle de vibrações tanto em técnicas ativas quanto passivas. As técnicas ativas são caracterizadas pela presença dos atuadores, fontes de potência e sistemas de controle. Já nas técnicas passivas, as fontes de potência e os sistemas de controle são suprimidos, explorando as características físicas dos materiais inteligentes, de forma que uma parcela da energia de deformação é absorvida nos modos de interesse e dissipada através de algum mecanismo de dissipação (CARUSO, 2001; MENDONÇA, 2005). O interesse neste trabalho se dá pela técnica de controle passivo usando materiais piezelétricos acoplados de circuitos elétricos *shunt* multimodais.

Como já mencionado, devido ao efeito piezelétrico, camadas piezelétricas apresentam a capacidade de conversão de energia mecânica em energia elétrica durante um ciclo de vibração e vice-versa, permitindo, assim, a capacidade de dissipação de energia elétrica através do circuito elétrico passivo (*shunt*). Em comparação com outras técnicas que, tipicamente, introduzem alto amortecimento, tais como as técnicas que utilizam os materiais viscoelásticos ou também técnicas de amortecimento ativo com controle de *feedback* ou ainda ligas com memória de forma, o conceito de amortecimento passivo utilizando-se materiais piezelétricos e circuitos elétricos *shunt* trazem consigo características muito desejáveis para aplicações em aeroelasticidade. Dentre estas características, pode-se citar: a possibilidade de mudança do grau de amortecimento de forma espontânea ou periódica, sendo que, esta modificação se dá por meio da variação das propriedades dos elementos elétricos passivos do *shunt* (resistores, capacitores, indutores etc.) ou através da reconfiguração do circuito elétrico; a melhoria no amortecimento em estruturas compósitas não reduz a rigidez do laminado, como no caso da utilização de camadas viscoelásticas; é uma técnica que requer o mínimo em *hardware*, o qual pode até ser embutido no laminado, utilizando-se então de tecnologia embarcada, acrescentando-se assim o mínimo de massa à estrutura. Conseqüentemente, a abordagem pode

ser muito adequada para o controle de vibrações de sistemas em rotação ou componentes móveis, tais como pás de turbomáquinas e helicópteros (HAGOOD e VON FLOTOW, 1991; SARAVANOS, 1999).

Desta forma, o amortecimento passivo de vibrações pode ser obtido colando-se um elemento piezelétrico na estrutura que se deseja amortecer e conectando-se aos eletrodos deste um circuito elétrico externo *shunt*, o qual será composto de uma impedância elétrica. Assim, para que a energia de um determinado modo seja absorvida e dissipada neste circuito, basta sintonizar o mesmo de acordo com o modo de vibração de interesse (CARUSO, 2001). Um arranjo típico contendo um elemento piezelétrico acoplado a uma estrutura e um circuito *shunt* ligado aos eletrodos deste elemento é apresentado na Fig. 2.4.

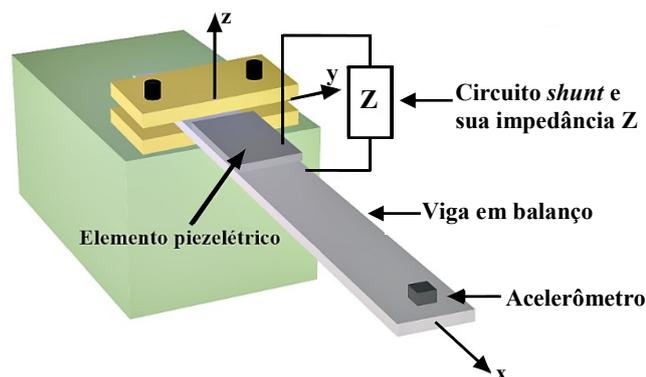


Figura 2.4 – Estrutura amortecida via uso de circuito *shunt* ligado ao elemento piezelétrico (adaptado de Caruso (2001)).

Caruso (2001) ressalta que um circuito elétrico *shunt* também pode ser utilizado em conjunto com uma técnica de controle ativo, obtendo-se um mecanismo de controle semi-ativo. Neste caso, o circuito elétrico *shunt* adicionaria amortecimento ao sistema controlado além de proporcionar um aumento na margem de estabilidade do controle ativo, trabalhando assim com as características favoráveis de cada um dos tipos de controle.

Dentre as topologias de circuitos elétricos *shunt*, o circuito ressonante se destaca. Em sua topologia monomodal é formado por um indutor e um resistor e, em sua topologia multimodal, mais complexa, compreendendo resistores, indutores e capacitores. Este circuito

permite a sintonia para qualquer frequência que se queira amortecer, seja uma frequência natural do sistema ou não. É importante ressaltar ainda o fato de que a realização de certas modificações na configuração deste tipo de circuito possibilita o amortecimento simultâneo de mais de um modo de vibrar, como é o caso dos circuitos multimodais. Neste trabalho é dada atenção especial ao circuito *shunt* ressonante multimodal na topologia em paralelo, proposto inicialmente por Wu (1998), que será discutido no terceiro capítulo.

2.5. Aeroelasticidade de placas

A aeroelasticidade é um campo de estudos de natureza intrinsecamente interdisciplinar, uma vez que envolve a interação mútua de três forças distintas, a saber: aerodinâmicas, elásticas e inerciais. Segundo Wright e Cooper (2007), a aeroelasticidade estática considera os efeitos não oscilatórios das forças aerodinâmicas que atuam sobre a estrutura da aeronave, a qual é flexível. A divergência, a qual diz respeito a interação entre forças elásticas e aerodinâmicas, é um dos principais problemas na aeroelasticidade estática. Já aeroelasticidade dinâmica diz respeito aos efeitos oscilatórios das interações aeroelásticas sendo o *flutter* o principal interesse dessa área devido ao seu inerente potencial catastrófico. Esta instabilidade envolve dois ou mais modos de vibrar e surge do acoplamento entre forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais. Isto significa que a estrutura pode extrair energia do fluxo de ar e aumentar suas amplitudes de vibração. A principal dificuldade em prever o fenômeno do *flutter* reside na natureza instável das forças aerodinâmicas e momentos gerados quando a estrutura da aeronave oscila.

Dugundji (2003) apresenta uma perspectiva das principais evoluções da engenharia entre os anos de 1953 e 1993 relacionada aos estudos de aeroelasticidade, do *flutter* e de técnicas de modelagem via método dos elementos finitos. A tabela 2.1 traz uma síntese dessa evolução. Nota-se claramente que o *flutter* é o fenômeno aeroelástico mais estudado. Tantos estudos revelam uma grande preocupação uma vez que há grande dificuldade em prevê-lo e evitá-lo.

Para uma estrutura imersa num escoamento de ar que gera um carregamento aerodinâmico, sua flexibilidade faz com que ela se deforme. Estas deformações irão alterar a forma como o carregamento aerodinâmico atua sobre a estrutura e gerar novas deformações, iniciando-se um processo iterativo e auto-alimentado. Este processo pode se estabilizar ou divergir em um caráter oscilatório, característico do *flutter* (BENINI, 2002). A Fig. 2.5 permite

entender o *flutter* de uma maneira fácil e intuitiva. Ela mostra a aproximação de duas frequências naturais de uma estrutura à medida que a velocidade do fluxo de ar sob a mesma aumenta. À medida que a pressão crítica do escoamento λ aumenta, o carregamento aerodinâmico altera o comportamento dinâmico da estrutura, fazendo com que seus autovalores, ω^2 , sejam deslocados, um em direção ao outro, podendo coalescer (unir), caracterizando a ocorrência do *flutter*.

Tabela 2.1 – Evoluções de engenharia entre 1953 e 1993, relacionadas ao estudo de *flutter* (adaptado de Dugundji (2003))

Década	Evoluções de Engenharia
1950	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Computação digital; ▪ Efeitos de aquecimento na aerodinâmica; ▪ Avanços no estudo do mecanismo de <i>flutter</i>; ▪ <i>Flutter</i> de placas planas.
1960	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Método dos elementos finitos para estruturas; ▪ <i>Flutter</i> de hélices em rotação; ▪ Método de painéis para carregamentos aerodinâmicos.
1970	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Representação completa da aeronave por elementos estruturais e painéis aerodinâmicos; ▪ <i>Computational Fluid Dynamic</i> (CFD) ▪ Representação no espaço de estados para sistemas de controle; ▪ Não-linearidades estruturais.
1980	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Técnicas de coleta de dados digitais; ▪ Introdução dos compósitos; ▪ <i>Flutter</i> nas pás de compressores <i>fan</i>; ▪ Atuadores piezelétricos e controle ativo;
1990	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Não-linearidades e ciclos-limites.

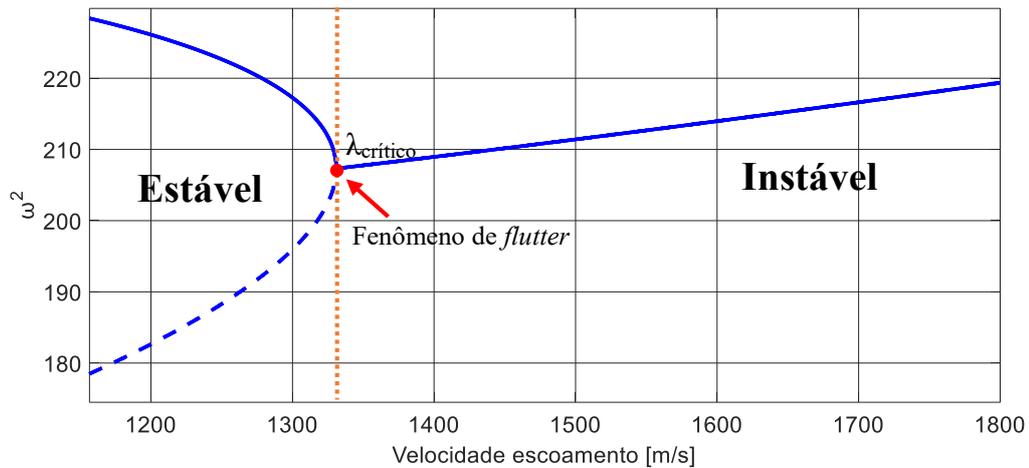


Figura 2.6 – Aproximação frequências naturais com aumento da velocidade do fluxo de ar sob a estrutura.

O fenômeno do *flutter* pode ocorrer em seções típicas (asas) ou em painéis aeroelásticos (cascas e placas). Em seções típicas, ele ocorre em regimes subsônicos e apresenta vibrações de amplitudes crescentes de forma exponencial, podendo levar a mesma ao colapso de maneira súbita e catastrófica. Já em painéis aeronáuticos, o *flutter* ocorre normalmente em regime supersônico e, devido às não linearidades geométricas, surgem tensões internas que limitam as amplitudes de vibrações do sistema, causando assim fadiga na própria estrutura ou na que a suporta (DOWELL, 1970). Vale ressaltar que o *flutter* de painéis é o foco deste trabalho.

O trabalho de Benini (2002) destaca duas frentes no estudo do *flutter*: a primeira, modelada no domínio do tempo, permite o conhecimento do comportamento da estrutura para qualquer velocidade de voo, facilitando a interpretação física do fenômeno. Além disso, esta permite a incorporação de não-linearidades e são mais adequadas para o projeto de sistemas de controle ativo para supressão do *flutter*. Já a segunda, modelada no domínio da frequência, é utilizada, normalmente, em controladores passivos e se atém à parte linear do sistema. Possui como vantagens o fato de requerer menor esforço computacional e da determinação da velocidade de *flutter* com maior precisão. Assim, as características e vantagens da análise do *flutter* de sistemas aeroelásticos no domínio da frequência descrevem exatamente o que se busca neste trabalho.

Dowell (1970) dividiu os estudos aeroelásticos em quatro grandes categorias e os modelos utilizados, como mostrado na Tabela 2.2. Posteriormente, foi adicionada uma quinta categoria para levar em conta escoamentos hipersônicos.

Tabela 2.2 – Modelos utilizados no estudo do fenômeno de *flutter*

Tipo	Modelo Estrutural	Modelo Aerodinâmico
1	Linear	Teoria do Pistão Linear
2	Linear	Teoria Potencial Linearizada
3	Não-linear	Teoria do Pistão Linear
4	Não-linear	Teoria Potencial Linearizada
5	Não-linear	Teoria do Pistão Não-linear

Neste trabalho, a Teoria do Pistão Linear, para aerodinâmica quase-estacionária, será utilizada para calcular os carregamentos aerodinâmicos do escoamento supersônico sobre um painel compósito plano contendo materiais piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt*.

A Teoria do Pistão, proposta inicialmente por Lighthill (1953), fornece o campo de pressão aeroelástico devido a um escoamento de ar passando por um dos lados de um painel à medida que sua velocidade aumenta. Pode-se dizer que esta teoria é adequada para o problema tratado nesta Tese, uma vez que utiliza-se de um regime de escoamento supersônico, isentrópico e invíscido além de serem desconsideradas as mudanças de fase entre o corpo e o escoamento.

2.6. Conceitos fundamentais sobre incertezas

As incertezas em sistemas de engenharia têm origens diversas: elas podem decorrer das tolerâncias de fabricação, das condições de contorno, das variabilidades afetando as propriedades dos materiais, etc. (SCHUELLER, 2001). Além disso, a modelagem dos sistemas físicos passa geralmente por uma etapa de equacionamento matemático que é, na maioria dos casos, difícil de ser resolvida numericamente e, conseqüentemente, com um custo de resolução elevado. Nesta etapa de equacionamento, hipóteses de simplificação são assumidas, o que resulta em outras fontes de incerteza. As incertezas devem ser levadas em conta na modelagem,

obtendo-se um modelo mais elaborado e oneroso, porém, com respostas mais próximas as dos sistemas reais.

De uma maneira geral, as incertezas são consideradas nos modelos segundo a aproximação não paramétrica que permite a introdução das mesmas diretamente nas matrizes dos modelos numéricos (SOIZE, 2001), e pela aproximação paramétrica, utilizando-se principalmente o método dos elementos finitos estocásticos (*Stochastic Finite Element Method* - SFEM), que permite uma combinação da análise clássica por elementos finitos e a análise estatística (GHANEM e SPANOS, 1991; SHUELLER, 2001).

Dessombz et al. (2001) definem incertezas no estado de concepção em duas etapas: as incertezas estatísticas, modeladas por variáveis aleatórias, no qual se conhece bem a lei de probabilidade e, as variáveis incertas e limitadas, que são modeladas por intervalos definidos pela física. Além disso, as incertezas podem ser classificadas em quatro grandes categorias:

- Parâmetros aleatórios: são os parâmetros físicos ou mecânicos nos quais se conhece as tolerâncias. Eles podem ser, por exemplo, a espessura de chapas metálicas, frequentemente modeladas por uma lei Gaussiana (GHANEM e SPANOS, 1991);
- Parâmetros mal conhecidos: as condições de limite são problemas típicos. Por exemplo, um engaste corresponde a uma alta rigidez, mas se conhece somente a ordem de grandeza; os diferentes tipos de montagem mecânica, como soldagem, colagem, etc., são difíceis de serem modelados e, em muitos casos, os valores determinísticos utilizados para representar esses fenômenos são insuficientes;
- Parâmetros variáveis: pode-se distinguir aqui os parâmetros que podem ser variáveis no tempo que são difíceis de serem modelados, como por exemplo, a degradação ou o envelhecimento de um material viscoelástico no tempo;
- Incertezas no modelo: são por exemplo as leis do comportamento adotadas que representam mal ou de forma incompleta os fenômenos físicos, os erros associados à escolha da malha de elementos finitos, o número de elementos na malha, o tipo de elemento escolhido, etc. Em geral, essas incertezas são difíceis de serem avaliadas.

No que diz respeito aos métodos existentes para a resolução dos problemas estocásticos, os mesmos são classificados em quatro categorias: o método de Simulação de Monte Carlo (MCS) (SCHINOZURA, 1972; RUBINSTEIN, 1981; PAPADRAKAKIS e KOTSOPULOS, 1999) frequentemente considerado como sendo a referência, mas que possui o inconveniente

de apresentar um alto custo computacional em virtude do número elevado de cálculos para a convergência. Como alternativa, o método Hipercubo Latino (HCL) foi proposto (IMAN e CONOVERS, 1980; FLORIAN, 1992; MANTEUFEL, 2000) para reduzir o número de cálculos necessários para a convergência da simulação de Monte Carlo, conservando o nível de predição; os métodos de perturbação, que são a base das expansões em série de Taylor (KLEIBER e HIEN, 1992; ALVIN, 1998) ou em série de Neumann (YAMAZAKI e SCHINOZUKA, 1988; LEI e QIU, 2000), os quais se fundamentam nas respostas ao redor das médias das variáveis aleatórias. Existem também os métodos espectrais que utilizam as funções de base no espaço de Hilbert associadas aos problemas aleatórios (GHANEM e SPANOS, 1991; GHANEM e KRUGER, 1996). Estas funções podem ser polinômios ortogonais de uma maneira geral e um caos polinomial em particular. Neste caso, utilizam-se as variáveis aleatórias onde os campos aleatórios contínuos são discretizados.

Neste trabalho utiliza-se particularmente o método da simulação de Monte Carlo com amostragem via Hipercubo Latino combinado com a técnica de discretização de campos aleatórios de Karhunen-Loève para a construção do modelo aeroeletromecânico estocástico.

2.7. Noção sobre o problema de otimização multiobjetivo (POMR)

A maioria dos problemas reais apresentam diferentes possibilidades de soluções e a otimização permite encontrar a melhor solução do problema considerando algum critério de desempenho, de forma a obter um sistema mais confiável e eficiente. O conceito de otimização diz respeito a um conjunto de operações em que há uma busca pela minimização ou maximização de uma determinada função, denominada função objetivo, a qual pode estar sujeita ou não a restrições de igualdade e desigualdade, com o intuito de se obter um melhor aproveitamento dos recursos disponíveis (DEB, 2001).

Na fase inicial de concepção de sistemas de engenharia, depara-se com muitas variáveis de projeto, restrições econômicas e tecnológicas, além de, em muitos casos, projetos com mais de um objetivo a ser alcançado. Com o uso de técnicas numéricas de otimização, consegue-se atingir o desempenho máximo do sistema, a partir dos parâmetros ótimos obtidos através da minimização ou maximização de alguma função custo, além de garantir também a robustez e

confiabilidade associadas a essa solução (DE LIMA, RADE, BOUHADDI, 2010; MOREIRA, 2015).

Os métodos de otimização podem ser classificados em função da natureza dos algoritmos como estocásticos ou determinísticos. Os métodos determinísticos dizem respeito às técnicas que fazem uso direto do cálculo de derivadas ou necessitam de algum tipo de informação do gradiente, não havendo oportunidade para decisões de caráter aleatório. Já os métodos estocásticos, também conhecidos como não determinísticos ou aleatórios, utilizam regras de probabilidade de forma a introduzir aleatoriedade no algoritmo, resultando em um aspecto menos rigoroso e uma chance menor de que o problema venha a convergir para mínimos locais se comparado aos métodos determinísticos (SUDRET e DER KIUREGHIAN, 2000; SUDRET, 2007).

O número de objetivos a serem otimizados resultam em outra classificação, podendo ser mono-objetivo ou multiobjetivo. Os problemas mono-objetivo caracterizam-se pela existência de uma única função custo enquanto que os multiobjetivo apresentam mais de uma função a ser otimizada. Problemas de otimização multiobjetivo são em geral caracterizados por diferentes funções objetivo conflitantes em alguma parte do espaço de projeto e buscam otimizar várias componentes de um vetor custo, a partir de um conjunto das soluções de Pareto (DEB, 2001).

2.8. Estado da arte

A partir da década de 90, com o crescente uso dos compósitos na indústria aeronáutica, houve um maior interesse no estudo do comportamento aeroelástico de painéis compósitos. Como exemplo pode-se citar o trabalho de Singha e Ganapathi (2005) onde o efeito dos parâmetros estruturais de painéis compósitos como ângulo de orientação de fibras, condições de contorno e amortecimento estrutural, foi investigado nas características do *flutter*. Os autores concluíram que todos os parâmetros citados têm direta influência na pressão aerodinâmica crítica. Já em Kuo (2011) o efeito do espaçamento das fibras em placas de material compósito foi avaliado. O autor concluiu que a sequência dos modos naturais pode ser alterada em função da disposição das fibras, além de que este espaçamento pode variar o valor de pressão dinâmica crítica e, conseqüentemente, alterar a velocidade de ocorrência do *flutter*.

Muitos foram os trabalhos que se destinaram a verificar a influência de parâmetros estruturais nas características do *flutter* e que também se preocuparam com os modelos de placas compósitas e teorias aerodinâmicas lineares e não-lineares. Pegado (2003) estudou a instabilidade aeroelástica de painéis sujeitos a fluxos supersônicos inserindo não-linearidades estruturais e aerodinâmicas em seu modelo através do método da perturbação. Kouchakzadeh, Rasekh e Haddadpour (2010) avaliaram o problema aeroelástico de uma placa compósita sujeita a um escoamento supersônico através da Teoria do Pistão linear. Os autores fizeram uso da teoria de von-Karman para a modelagem não-linear do sistema e determinação do ciclo limite, onde as não-linearidades estavam associadas ao acoplamento das deformações. Zhao and Cao (2013) investigaram a influência do enrijecimento de painéis compósitos pela aplicação de barras fixadas à superfície do painel.

No que diz respeito ao emprego de piezocerâmicas, Song e Li (2011) estudaram como atuar nos limites de ocorrência de *flutter* de placas compósitas laminadas através de técnicas de controle ativo de vibração. Nesta mesma linha de pesquisa, Almeida et al. (2012) estudaram os limites da estabilidade aeroelástica de painéis compósitos curvos sujeitos a efeitos de enrijecimento causados por atuadores piezelétricos. Os autores verificaram que a rigidez aeroelástica pode ser aumentada através desta técnica de controle ativo de vibrações. Moon e Kim (2001) aplicaram estratégias de controle ativo e passivo para controlar o *flutter* de placas compósitas. No método ativo, um controlador ideal baseado no esquema linear foi implementado e, para o caso passivo, os autores utilizaram elementos piezelétricos combinados com um circuito *shunt* monomodal.

Outro importante aspecto no tocante à modelagem de sistemas aeroelásticos com materiais piezelétricos acoplados de circuitos elétricos *shunt* é a consideração das incertezas nos modelos. No estudo das incertezas, diversos trabalhos tratam da introdução das mesmas em modelos de elementos finitos de sistemas dinâmicos em geral, tais como os trabalhos de Ghanem e Spanos (1991); Ritto, Soize e Sampaio (2010); Sampaio e Cataldo (2010); Soize (2001; 2013); Koroishi et al. (2012); Gonçalves, Rosa e de Lima (2019). Tais trabalhos evidenciaram a importância da consideração das incertezas paramétricas e não-paramétricas em modelos de vários sistemas de engenharia, apontando os limites de projetos admissíveis e consequências das respostas das estruturas quando são observadas perturbações nas variáveis de interesse.

No âmbito de pesquisas do laboratório LMEst-UFU no que diz respeito a circuitos *shunt* os trabalhos se iniciaram com Viana (2005) com vistas ao amortecimento de vibrações usando pastilhas piezelétricas e circuitos *shunt* ressonantes onde os dispositivos envolvidos no controle passivo, pastilha piezelétrica e indutor sintético – dos tipos Riordan e Antoniou, foram analisados sob o ponto de vista elétrico e experimental. Com a consideração de incertezas, Zambolini-Vicente (2014) e Silva (2014) realizaram o projeto robusto de circuitos *shunt* para o controle passivo de vibrações de estruturas compósitas, sendo os tipos de circuitos analisados a principal diferença entre os dois trabalhos. O primeiro autor avaliou comparativamente o controle de vibrações via *shunt* resistivo e ressonante série monomodal. Já o segundo autor a comparação entre circuitos multimodais com topologias em série e paralelo. Em ambas contribuições a espessura do elemento piezelétrico e os parâmetros do circuito *shunt* foram tomados como variáveis aleatórias e seus modelos probabilísticos determinados via Método da Máxima Entropia (MME). Além disso, incertezas também foram consideradas na otimização, obtendo-se um projeto ótimo e robusto. Em Ribeiro (2015) uma modelagem estocástica de estruturas compósitas incorporando circuitos *shunt* para o controle passivo de vibrações também foi realizada, porém, as principais variáveis de projeto foram modeladas como campos estocásticos Gaussianos e estes campos discretizados via expansão em série de Karhunen-Loève para obtenção da matrizes estocásticas de massa e rigidezes. Em termos de modelagem estocástica e avaliação experimental do circuito, Zambolini-Vicente (2019) realizou a concepção de um protótipo atenuador de vibrações multimodal self-powered, integrando em um mesmo dispositivo material piezelétrico e circuitos elétricos não-lineares.

Quanto à aplicação de circuitos *shunt* não somente no controle de vibrações de painéis compósitos mas também no ganho aeroelástico, Leão (2015) realizou um estudo sobre a influência do circuito *shunt* multimodal em série na melhora da velocidade de *flutter* da estrutura. Entretanto, não foi computada a influência das incertezas presentes nos parâmetros do circuito nem o emprego de técnicas de otimização. Assim, esta Tese além de avaliar uma diferente topologia de *shunt* multimodal, o circuito em paralelo, faz uma extensão da modelagem determinística ao contexto estocástico, concebendo-se o modelo determinístico de forma parametrizada onde as principais variáveis de projeto foram fatoradas das matrizes de massa e rigidezes e estas, assim como os parâmetros do circuito, tomados como incertos também no processo de otimização. Desta maneira, este trabalho apresenta uma ferramenta de controle ótima e robusta tanto no que diz respeito ao controle de vibrações como no aumento

da velocidade de ocorrência do fenômeno de *flutter* de estruturas compósitas sujeitas a escoamentos supersônicos.

CAPÍTULO III

MODELAGEM DETERMINÍSTICA DO SISTEMA AEROELETROMECHANICO

3.1. Modelagem placas compósitas

A modelagem determinística do problema mecânico envolvendo uma placa compósita é realizada via teoria FSDT, onde os deslocamentos em um ponto arbitrário do elemento foram previamente definidos pelas Eqs. (2.5), as quais podem ser escritas de forma condensada como apresentado na Eq. (3.1).

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) \quad (2.5a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) \quad (2.5b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.5c)$$

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{A}_u(z)\mathbf{u}(x, y, t) \quad (3.1)$$

Sendo que:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \{u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)\}^T \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{A}_u(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_0 + z\mathbf{A}_1 \quad (3.2b)$$

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \{u_0(x, y, t), v_0(x, y, t), w_0(x, y, t), \psi_x(x, y, t), \psi_y(x, y, t)\}^T \quad (3.2c)$$

A partir dos campos de deslocamentos, as deformações resultantes podem ser separadas nos efeitos de flexão-membrana e cisalhamento, $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_s$, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(x, y, z, t) = \mathbf{D}_b(z)\mathbf{u}(x, y, t) = (\mathbf{D}_0 + z\mathbf{D}_1)\mathbf{u}(x, y, t) \quad (3.3a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x, y, z, t) = \mathbf{D}_s(z)\mathbf{u}(x, y, t) \quad (3.3b)$$

$$\text{onde } \mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ são}$$

as matrizes dos operadores diferenciais de flexão-membrana, $\mathbf{D}_b = (\mathbf{D}_0 + z\mathbf{D}_1)$, e cisalhamento, \mathbf{D}_s .

Para a construção do modelo de elementos finitos é adotado um elemento de placa plana retangular com oito nós da família *Serendipity* (REDDY, 1997), como ilustrado na Fig. 3.1, de dimensões (a, b) em coordenadas locais e globais, sendo que, $a = 2a'$ e $b = 2b'$, obtendo-se as relações entre as coordenadas dadas pela Eqs. (3.4).

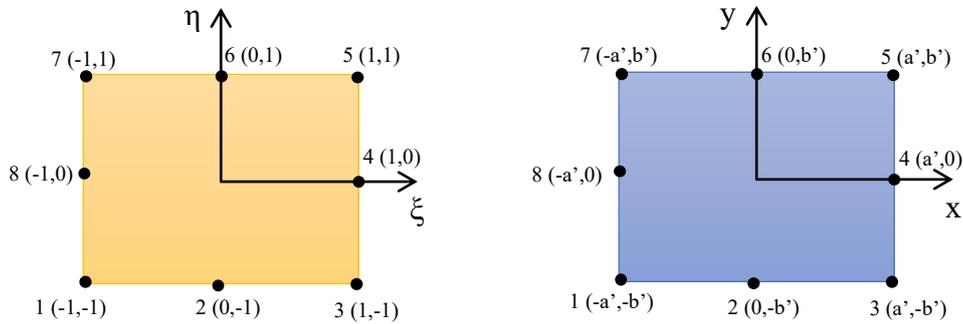


Figura 3.1 – Elemento retangular de oito nós da família *Serendipity*, em coordenadas locais (esquerda) e globais (direita), (adaptado de Faria, 2006).

A Fig. 3.1 ilustra o elemento finito de dimensões (a, b) em coordenadas locais (ξ, η) e globais (x, y) , sendo que, $a = 2a'$ e $b = 2b'$, obtendo-se as seguintes relações entre coordenadas:

$$x = \frac{I}{2} \left[\xi (x_4 - x_8) + x_8 + x_4 \right] \quad (3.4a)$$

$$y = \frac{I}{2} \left[\eta (y_6 - y_2) + y_6 + y_2 \right] \quad (3.4b)$$

Desta forma, a matriz Jacobiana de transformação linear entre as coordenadas globais e locais pode ser definida conforme a Eq. (3.5) e o Jacobiano, $J = \det(\mathbf{J}) = ab / 4$.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} (x_4 - x_8) & 0 \\ 0 & (y_6 - y_2) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Em função da utilização da teoria FSDT sabe-se que a mesma adota cinco variáveis mecânicas na definição do seu campo de deslocamentos, as quais podem ser expressas em termos das suas 40 correspondentes variáveis mecânicas nodais, $\mathbf{u}_e = \{u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, \psi_{x_{ij}}, \psi_{y_{ij}}\}$ com $i=1, \dots, 8$, designando cada um dos oito nós do elemento, e $j=1, \dots, 5$, referenciando os cinco graus de liberdade em cada nó, totalizando 40 graus de liberdade por EF.

A correspondência entre os deslocamentos totais do elemento finito e a contribuição de cada nó se dá por meio das Funções de Forma, N , que representam as especificidades de cada tipo de elemento. As funções de forma, para o tipo de elemento finito utilizado, são definidas a seguir e já se encontram representadas em termos das coordenadas locais (ξ, η) , com ξ e η variando de -1 a 1 .

$$N_1(\xi, \eta) = -(1/4)(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \quad (3.6a)$$

$$N_2(\xi, \eta) = (1/2)(1-\xi)(1+\xi)(1-\eta) \quad (3.6b)$$

$$N_3(\xi, \eta) = -(1/4)(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) \quad (3.6c)$$

$$N_4(\xi, \eta) = (1/2)(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta) \quad (3.6d)$$

$$N_5(\xi, \eta) = -(1/4)(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) \quad (3.6e)$$

$$N_6(\xi, \eta) = (1/2)(1-\xi)(1+\xi)(1+\eta) \quad (3.6f)$$

$$N_7(\xi, \eta) = -(1/4)(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \quad (3.6g)$$

$$N_8(\xi, \eta) = (1/2)(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta) \quad (3.6h)$$

Neste caso, o vetor dos deslocamentos do EF pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, t) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{u}_e(t) \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{u}_e = \{u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, \psi_{x_{ij}}, \psi_{y_{ij}}\}$, com $i=1\dots 8$ e $j=1\dots 5$, tendo-se um vetor de dimensão 40×1 e $N(\xi, \eta)$ é a matriz de Funções de Forma a qual possui valores reais e dimensão 5×40 .

A partir da Eq. (3.7), a Eq. (3.1) pode ser reescrita como segue:

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, z, t) = \mathbf{A}_u(z) \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{u}_e(t) \quad (3.8)$$

As Equações (3.3), também podem ser combinadas com a Eq. (3.1):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t) = (\mathbf{D}_0 + z\mathbf{D}_1) \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{u}_e(t) = (\mathbf{B}_{b0} + z\mathbf{B}_{b1}) \mathbf{u}_e \quad (3.9a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(\xi, \eta, z, t) = \mathbf{D}_s(z) \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{u}_e(t) = \mathbf{B}_{s0} \mathbf{u}_e \quad (3.9b)$$

Nesta fase, parte-se das expressões das energias cinética e de deformação mecânica para cálculo das matrizes elementares de massa e rigidez do sistema. A energia cinética a nível elementar é definida da seguinte forma:

$$E_c = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho_k \mathbf{U}_t^T \mathbf{U}_t dV_e \quad (3.10)$$

onde ρ_k é a densidade do material na k -ésima camada, V_e é o volume do elemento finito e \mathbf{U}_t é a variação no tempo do vetor dos campos de deslocamentos dado pela Eq. (3.1).

A partir da Eq. (3.10), chega-se à seguinte expressão para o cálculo da matriz de massa:

$$\mathbf{M}^e = \sum_{k=1}^n \int_{V_e} \rho_k \mathbf{N}^T \mathbf{A}_u^T \mathbf{A}_u \mathbf{N} dV_e \quad (3.11)$$

onde k designa o número da camada do compósito na qual a integração está sendo realizada.

Para entender melhor como é realizada a integração da matriz de massa elementar e o processo de parametrização: sabe-se que a matriz A_u pode ser decomposta em duas fatorando-se o termo z , que diz respeito à espessura das camadas, sendo $A_u = A_0 + zA_1$. Desta forma, ao se realizar a multiplicação, $A_u^T A_u$, tem-se como resultado uma matriz independente do parâmetro z , $\bar{A}_1 = A_0^T A_0$, \bar{A}_2 com z fatorado e \bar{A}_3 com z^2 fatorado. Portanto, para se encontrar a matriz de massa elementar, realiza-se a integração do sistema parametrizado da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \rho_k \mathbf{N}^T (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3) \mathbf{N} J d\eta d\xi dz \quad (3.12)$$

onde z_k e z_{k+1} indicam as coordenadas da camada na qual está se realizado a integração.

Conforme a parametrização da espessura e da densidade, ρ_k , de cada camada, obtém-se a matriz de massa da forma:

$$\mathbf{M}^e = \sum_{k=1}^n (z_{k+1} - z_k) \rho_k \mathbf{M}_{u1} + (z_{k+1}^2 - z_k^2) \rho_k \mathbf{M}_{u2} + (z_{k+1}^3 - z_k^3) \rho_k \mathbf{M}_{u3} \quad (3.13)$$

ou ainda,

$$\mathbf{M}^e = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^3 t_k^i \rho_k \mathbf{M}_{ui} \quad (3.14)$$

onde $(z_{k+1}^i - z_k^i) = t_k^i = [k^i - (k-1)^i] h_k^i$, com $i=1, \dots, 3$ sendo h_k a espessura de cada camada do compósito.

Salienta-se sobre a vantagem da parametrização do modelo, uma vez que ela facilita a introdução das incertezas presentes nos parâmetros por meio das variáveis aleatórias fatoradas das matrizes de massa e rigidezes, as quais são representadas pelas espessuras das camadas e pelos ângulos de direções das fibras do compósito.

A importância da adoção de um sistema de coordenadas comum a toda estrutura está no fato do mesmo ser utilizado na formulação das equações constitutivas e na modelagem numérica da estrutura compósita. A computação do ângulo de direção das fibras de cada camada de compósito na formulação do problema de EF é feita via matrizes de transformação, as quais, por rotação de um ângulo θ em torno do eixo z , transformam as matrizes das propriedades dos materiais, sendo a matriz \mathbf{T} para propriedades mecânicas e \mathbf{Q} para propriedades elétricas. As matrizes de transformação são apresentadas nas Eqs. (3.15) e (3.16) (REDDY, 1997; FARIA 2006).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde c e s designam, respectivamente, $\cos(\theta_k)$ e $\sin(\theta_k)$, sendo θ_k o ângulo de orientação das fibras da k -ésima camada.

Com a orientação interna da estrutura do material em decorrência do número de planos de simetria, há redução do número de termos independentes de rigidez na matriz de propriedades que cada material possui. Desta forma, os materiais podem ser classificados em isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos (REDDY, 1997, MENDONÇA, 2005), sendo os ortotrópicos de interesse deste trabalho. A Eq. (3.17) apresenta a relação entre tensão e deformação, $\sigma = C\varepsilon$, para esses materiais, onde C é a matriz das propriedades mecânicas.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Ressalta-se que tanto a matriz de propriedades mecânicas, C , como a matriz de transformação das propriedades mecânicas, T , podem ser separadas em termos dos efeitos de flexão-membrana e cisalhamento:

$$C_b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.18a)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \quad (3.18b)$$

$$T_b = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sc & -sc & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.18c)$$

$$T_s = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (3.18d)$$

As matrizes \mathbf{T}_b e \mathbf{T}_s podem ainda ser fatoradas em termos dos ângulos de direção das fibras de cada camada k do compósito:

$$\mathbf{T}_b = c_k^2 \mathbf{T}_{b1} + \mathbf{T}_{b2} + s_k c_k \mathbf{T}_{b3} \quad (3.19a)$$

$$\mathbf{T}_s = c_k \mathbf{T}_{s1} + s_k \mathbf{T}_{s2} \quad (3.19b)$$

$$\text{onde } \mathbf{T}_{b1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{b2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{b3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{s1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{s2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_k = \text{sen}(\theta_k) \text{ e } c_k = \text{cos}(\theta_k).$$

Para obtenção das matrizes de rigidezes do sistema, as matrizes de propriedades mecânicas, \mathbf{C}_b e \mathbf{C}_s , devem ser transformadas de maneira a levar em consideração os ângulos de direção das fibras do compósito. Para isso, utiliza-se das matrizes de transformação das propriedades mecânicas, \mathbf{T}_b e \mathbf{T}_s :

$$\mathbf{C}_{bt} = \mathbf{T}_b \mathbf{C}_b \mathbf{T}_b^T \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{C}_{st} = \mathbf{T}_s \mathbf{C}_s \mathbf{T}_s^T \quad (3.20b)$$

Combinando as Eqs. (3.19) e (3.20) obtém-se as seguintes matrizes de propriedades mecânicas parametrizadas:

$$\mathbf{C}_{bt} = c_k^4 \mathbf{C}_{bt1} + c_k^2 \mathbf{C}_{bt2} + s_k c_k^3 \mathbf{C}_{bt3} + \mathbf{C}_{bt4} + s_k c_k \mathbf{C}_{bt5} + s_k^2 c_k^2 \mathbf{C}_{bt6} \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{C}_{st} = c_k^2 \mathbf{C}_{st1} + s_k c_k \mathbf{C}_{st2} + s_k^2 \mathbf{C}_{st3} \quad (3.21b)$$

onde $\mathbf{C}_{bt1} = \mathbf{T}_{b1} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b1}^T$, $\mathbf{C}_{bt2} = \mathbf{T}_{b1} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b2}^T + \mathbf{T}_{b2} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b1}^T$, $\mathbf{C}_{bt3} = \mathbf{T}_{b1} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b3}^T + \mathbf{T}_{b3} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b1}^T$, $\mathbf{C}_{bt4} = \mathbf{T}_{b2} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b2}^T$,
 $\mathbf{C}_{bt5} = \mathbf{T}_{b2} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b3}^T + \mathbf{T}_{b3} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b2}^T$, $\mathbf{C}_{bt6} = \mathbf{T}_{b3} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b3}^T$, $\mathbf{C}_{st1} = \mathbf{T}_{s1} \mathbf{C}_s \mathbf{T}_{s1}^T$, $\mathbf{C}_{st2} = \mathbf{T}_{s1} \mathbf{C}_s \mathbf{T}_{s2}^T + \mathbf{T}_{s2} \mathbf{C}_s \mathbf{T}_{s1}^T$,
 $\mathbf{C}_{st3} = \mathbf{T}_{s2} \mathbf{C}_s \mathbf{T}_{s2}^T$.

A partir das relações, $\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{C}_{bt} \boldsymbol{\varepsilon}_b$ e $\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{C}_{st} \boldsymbol{\varepsilon}_s$, e da energia potencial de deformação mecânica, $P_e = \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\eta d\xi dz$, pode-se obter as matrizes de rigidezes para os efeitos de flexão-membrana e cisalhamento.

$$\mathbf{K}_{ub}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}_{bu}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{bu} J dV_e \quad (3.22a)$$

$$\mathbf{K}_{us}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}_{s0}^T \mathbf{C}_{st} \mathbf{B}_{s0} J dV_e \quad (3.22b)$$

onde $\mathbf{B}_{bu} = (\mathbf{B}_{b0} + z\mathbf{B}_{b1})$ e V_e é o volume do elemento finito. Além disso, o termo $\mathbf{B}_{bu}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{bu}$ resulta em três matrizes, a saber: \mathbf{B}_{bz0} , independente de z , \mathbf{B}_{bz1} , com z fatorado e \mathbf{B}_{bz2} , dependente do termo z^2 , sendo que, $\mathbf{B}_{bz0} = \mathbf{B}_{b0}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{b0}$, $\mathbf{B}_{bz1} = \mathbf{B}_{b0}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{b1} + \mathbf{B}_{b1}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{b0}$ e $\mathbf{B}_{bz2} = \mathbf{B}_{b1}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{b1}$. Já a multiplicação da parcela de cisalhamento independe do parâmetro z e resulta em apenas um termo, dado por $\mathbf{B}_{sz0} = \mathbf{B}_{s0}^T \mathbf{C}_{st} \mathbf{B}_{s0}$.

Em função da parametrização, observa-se que as matrizes de propriedades \mathbf{C}_{bt} e \mathbf{C}_{st} dadas nas Eqs. (3.20) são compostas por seis e três matrizes, respectivamente. Desta forma, \mathbf{B}_{bz0} , \mathbf{B}_{bz1} e \mathbf{B}_{bz2} , são todas formadas por seis matrizes, sendo que, de forma simplificada, ${}_j \mathbf{B}_{bz0}$, ${}_j \mathbf{B}_{bz1}$ e ${}_j \mathbf{B}_{bz2}$ com $j=1, \dots, 6$. Já a parcela de cisalhamento, \mathbf{B}_{sz0} , é composta por três matrizes, sendo dadas por ${}_j \mathbf{B}_{sz0}$, com $j=1, \dots, 3$.

Portanto, tem-se as seguintes expressões para o cálculo das matrizes de rigidezes:

$${}_j \mathbf{K}_{bz0}^e = \sum_{k=1}^n t_k \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left[c_k^4 ({}_1 \mathbf{B}_{bz0}) + c_k^2 ({}_2 \mathbf{B}_{bz0}) + s_k c_k^3 ({}_3 \mathbf{B}_{bz0}) + ({}_4 \mathbf{B}_{bz0}) + \right. \\ \left. + s_k c_k ({}_5 \mathbf{B}_{bz0}) + s_k^2 c_k^2 ({}_6 \mathbf{B}_{bz0}) \right] J d\eta d\xi \quad (3.23a)$$

$${}_j \mathbf{K}_{bz1}^e = \sum_{k=1}^n t_k^2 \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left[c_k^4 ({}_1 \mathbf{B}_{bz1}) + c_k^2 ({}_2 \mathbf{B}_{bz1}) + s_k c_k^3 ({}_3 \mathbf{B}_{bz1}) + ({}_4 \mathbf{B}_{bz1}) + \right. \\ \left. + s_k c_k ({}_5 \mathbf{B}_{bz1}) + s_k^2 c_k^2 ({}_6 \mathbf{B}_{bz1}) \right] J d\eta d\xi \quad (3.23b)$$

$${}_j \mathbf{K}_{bz2}^e = \sum_{k=1}^n t_k^3 \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left[c_k^4 ({}_1 \mathbf{B}_{bz2}) + c_k^2 ({}_2 \mathbf{B}_{bz2}) + s_k c_k^3 ({}_3 \mathbf{B}_{bz2}) + ({}_4 \mathbf{B}_{bz2}) + \right. \\ \left. + s_k c_k ({}_5 \mathbf{B}_{bz2}) + s_k^2 c_k^2 ({}_6 \mathbf{B}_{bz2}) \right] J d\eta d\xi \quad (3.23c)$$

$${}_j \mathbf{K}_{sz0}^e = \sum_{k=1}^n t_k \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left[c_k^2 ({}_1 \mathbf{B}_{sz0}) + s_k c_k ({}_2 \mathbf{B}_{sz0}) + s_k^2 ({}_3 \mathbf{B}_{sz0}) \right] J d\eta d\xi \quad (3.23d)$$

A matriz de rigidez elementar é a soma dos efeitos de flexão-membrana e cisalhamento,

$\mathbf{K}_{uu}^e = \mathbf{K}_{ub}^e + \mathbf{K}_{us}^e$, as quais podem ser escritas também de uma forma simplificada, como segue:

$$\mathbf{K}_{ub}^e = \sum_{k=1}^n t_k \sum_{i=1}^3 \left[c_k^4 ({}_i \mathbf{K}_{bzi}^{(k)}) + c_k^2 ({}_2 \mathbf{K}_{bzi}^{(k)}) + s_k c_k^3 ({}_3 \mathbf{K}_{bzi}^{(k)}) + ({}_4 \mathbf{K}_{bzi}^{(k)}) + \right. \\ \left. + s_k c_k ({}_5 \mathbf{K}_{bzi}^{(k)}) + s_k^2 c_k^2 ({}_6 \mathbf{K}_{bzi}^{(k)}) \right] \quad (3.24a)$$

$$\mathbf{K}_{us}^e = \sum_{k=1}^n t_k \left[c_k^2 ({}_1 \mathbf{K}_{sz0}^{(k)}) + s_k c_k ({}_2 \mathbf{K}_{sz0}^{(k)}) + s_k^2 ({}_3 \mathbf{K}_{sz0}^{(k)}) \right] \quad (3.24b)$$

De posse das matrizes elementares do problema mecânico determinístico, pode-se obter a Função de Resposta em Frequência (FRF) do sistema a nível global via emprego de

procedimentos clássicos de montagem de elementos finitos conhecendo-se a conectividade dos nós:

$$\mathbf{H}(\omega) = [\mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}]^{-1} \quad (3.25)$$

onde \mathbf{M} e \mathbf{K}_{uu} são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez globais.

3.2. Modelagem do problema eletromecânico

Para a modelagem de estruturas compósitas laminadas contendo elementos piezelétricos é empregada a Teoria Mista que combina a teoria da camada equivalente única com a teoria das camadas equivalentes discretas. Neste contexto, os deslocamentos mecânicos foram aproximados pela FSDT e o potencial elétrico calculado por camadas e dado pela seguinte expressão (CHEE, 2000):

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{n^{\circ} \text{camadas} + 1} L_j(z) \Phi_j(x, y, t) \quad (3.26)$$

onde, Φ_j é o potencial elétrico de cada interface, j , das camadas ao longo da espessura e L_j são as funções *layerwise* transversais a serem definidas na sequência do capítulo.

3.2.1. Rotação das matrizes de propriedades

Para um dado elemento piezelétrico livre de tensões mecânicas e campos elétricos aplicados, tem-se as seguintes equações de deformações mecânicas e deslocamentos elétricos (PIEFORT, 2001; SARAVANOS e HEYLIGER, 1995; SARAVANOS, 1999; FARIA, 2006):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}^T \mathbf{E} \quad (3.27a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \quad (3.27b)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ [m/m] é o vetor de deformações mecânicas, \mathbf{d} [C/N] é a matriz de constantes piezelétricas de deformação, \mathbf{E} [V/m] é o vetor de campos elétricos, \mathbf{D} [C/m²] é o vetor de deslocamentos elétricos e $\boldsymbol{\sigma}$ [N/m²] é o vetor de tensões mecânicas. O sobrescrito $(.)^T$ indica a transposição da matriz dada.

No caso de aplicação simultânea ao piezelétrico de carregamento mecânico e elétrico, descreve-se o acoplamento eletromecânico de acordo com as seguintes relações (HAGOOD e VON FLOTOW, 1991; FARIA, 2006):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}^E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}^T \mathbf{E} \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\chi}^\sigma \mathbf{E} \quad (3.28b)$$

onde \mathbf{s}^E [m²/N] é a matriz da flexibilidade medida em um campo elétrico constante (eletrodos em curto-circuito) e $\boldsymbol{\chi}^\sigma$ [N/V²] é a matriz de constantes dielétricas medida para uma tensão mecânica constante.

As equações de acoplamento eletromecânico podem também ser escritas de forma a se isolar as tensões mecânicas.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \quad (3.29a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\chi}^\varepsilon \mathbf{E} \quad (3.29b)$$

onde $C^E [N/m^2]$ é o tensor de elasticidade linear para campo elétrico constante, $e [N/V^2]$ é o tensor de constantes dielétricas para deformação mecânica constante e $\chi^e [N/Vm]$ é a matriz de permissividade elétrica para deformação mecânica constante (HAGOOD e VON FLOTOW, 1991; SARAVANOS, 1999; PIEFORT, 2001; FARIA, 2006).

A Eq. (3.29) em sua forma matricial é expressa na Eq. (3.30):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & C_{14}^E & C_{15}^E & C_{16}^E & -e_{11} & -e_{21} & -e_{31} \\ C_{21}^E & C_{22}^E & C_{23}^E & C_{24}^E & C_{25}^E & C_{26}^E & -e_{12} & -e_{22} & -e_{32} \\ C_{31}^E & C_{32}^E & C_{33}^E & C_{34}^E & C_{35}^E & C_{36}^E & -e_{13} & -e_{23} & -e_{33} \\ C_{41}^E & C_{42}^E & C_{43}^E & C_{44}^E & C_{45}^E & C_{46}^E & -e_{14} & -e_{24} & -e_{34} \\ C_{51}^E & C_{52}^E & C_{53}^E & C_{54}^E & C_{55}^E & C_{56}^E & -e_{15} & -e_{25} & -e_{35} \\ C_{61}^E & C_{62}^E & C_{63}^E & C_{64}^E & C_{65}^E & C_{66}^E & -e_{16} & -e_{26} & -e_{36} \\ e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & \chi_{11}^e & \chi_{12}^e & \chi_{13}^e \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & \chi_{21}^e & \chi_{22}^e & \chi_{23}^e \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & \chi_{31}^e & \chi_{32}^e & \chi_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Neste trabalho é utilizado um piezelétrico com características ortotrópicas cuja forma da matriz elasto-piezo-dielétrica do material, definida na Eq. (3.30), é dada como segue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & \chi_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Ou ainda de forma simplificada:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \chi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Nota-se que tais propriedades ainda não levam em conta a direção das fibras do compósito laminado. Para que a Eq. (3.32) possa ser escrita levando-se em consideração as direções das fibras, faz-se necessário o uso das matrizes de transformação \mathbf{T} e \mathbf{Q} definidas nas equações (3.15) e (3.16), respectivamente, ou \mathbf{T}_b e \mathbf{T}_s , definidas em (3.18). Já a matriz \mathbf{Q} e sua inversa, fatoradas em termos do ângulo θ_k , são definidas como segue:

$$\mathbf{Q} = c_k \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + s_k \mathbf{Q}_3 \quad (3.33a)$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = c_k \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + s_k \mathbf{Q}_{3i} \quad (3.33b)$$

$$\text{onde, } \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q}_{3i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, as Eqs. (3.32) podem ser reescritas como segue:

- Flexão-membrana:

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{T}_b \mathbf{C}_b \mathbf{T}_b^T \boldsymbol{\varepsilon}_b - \mathbf{T}_b \mathbf{e}_b \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{E} \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{Q} \mathbf{e}_b^T \mathbf{T}_b^T \boldsymbol{\varepsilon}_b - \mathbf{Q} \chi_b \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{E} \quad (3.34b)$$

$$\text{onde, } \boldsymbol{\sigma}_b = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}, \mathbf{D}_0 = \{D_3\}, \mathbf{e}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\chi}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}.$$

▪ Cisalhamento:

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{T}_s \mathbf{C}_s \mathbf{T}_s^T \boldsymbol{\varepsilon}_s - \mathbf{T}_s \mathbf{e}_s \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{E} \quad (3.35a)$$

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{Q} \mathbf{e}_s^T \mathbf{T}_s^T \boldsymbol{\varepsilon}_s - \mathbf{Q} \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{E} \quad (3.35b)$$

$$\text{onde, } \boldsymbol{\sigma}_s = \begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix}, \mathbf{D}_i = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}, \mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\chi}_s = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A parametrização de $\mathbf{C}_{bt} = \mathbf{T}_b \mathbf{C}_b \mathbf{T}_b^T$ e $\mathbf{C}_{st} = \mathbf{T}_s \mathbf{C}_s \mathbf{T}_s^T$ foi apresentada nas Eqs. (3.21). Já os tensores de constantes dielétricas, \mathbf{e} , e permissividade dielétrica, $\boldsymbol{\chi}$, para os casos de flexão-membrana e cisalhamento, são parametrizados como segue:

$$\mathbf{e}_{bt} = \mathbf{T}_b \mathbf{e}_b \mathbf{Q}^{-1} = c_k^2 \mathbf{e}_{bt1} + \mathbf{e}_{bt2} + s_k c_k \mathbf{e}_{bt3} \quad (3.36a)$$

$$\mathbf{e}_{st} = \mathbf{T}_s \mathbf{e}_s \mathbf{Q}^{-1} = c_k^2 \mathbf{e}_{st1} + c_k s_k \mathbf{e}_{st2} + s_k^2 \mathbf{e}_{st3} \quad (3.36b)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{bt} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\chi}_b \mathbf{Q}^{-1} = \boldsymbol{\chi}_{bt1} \quad (3.36c)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{st} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}^{-1} = c_k^2 \boldsymbol{\chi}_{st1} + s_k c_k \boldsymbol{\chi}_{st2} + s_k^2 \boldsymbol{\chi}_{st3} \quad (3.36d)$$

onde, $\mathbf{e}_{bt1} = \mathbf{T}_{b1} \mathbf{e}_b \mathbf{Q}_2$, $\mathbf{e}_{bt2} = \mathbf{T}_{b2} \mathbf{e}_b \mathbf{Q}_2$, $\mathbf{e}_{bt3} = \mathbf{T}_{b3} \mathbf{e}_b \mathbf{Q}_3$, $\mathbf{e}_{st1} = \mathbf{T}_{s1} \mathbf{e}_s \mathbf{Q}_1$, $\mathbf{e}_{st2} = \mathbf{T}_{s1} \mathbf{e}_s \mathbf{Q}_{3i} + \mathbf{T}_{s2} \mathbf{e}_s \mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{e}_{st3} = \mathbf{T}_{s2} \mathbf{e}_s \mathbf{Q}_{3i}$, $\boldsymbol{\chi}_{bt1} = \mathbf{Q}_2 \boldsymbol{\chi}_b \mathbf{Q}_2$, $\boldsymbol{\chi}_{st1} = \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}_1$, $\boldsymbol{\chi}_{st2} = \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}_{3i} + \mathbf{Q}_3 \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}_1$ e $\boldsymbol{\chi}_{st3} = \mathbf{Q}_3 \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}_{3i}$.

3.2.2. Discretização do potencial elétrico por camadas

Dada uma estrutura laminada dividida em várias camadas, cada camada k pode ser aproximada por uma função campo potencial elétrico linear. Desta forma, a função potencial elétrico de uma camada k , $\Phi_{(k)}$, é composta por duas funções potencial elétrico de interface, Φ_k e Φ_{k+1} , nas interfaces inferior e superior de cada camada, respectivamente, como ilustrado na figura 3.2. Assim o potencial elétrico da k -ésima camada é dado da forma (CHEE, 2000):

$$\Phi_{(k)}(x,y,z,t) = L_{kd}(z)\Phi_k(x,y,t) + L_{ku}(z)\Phi_{k+1}(x,y,t) \quad (3.37)$$

onde, Φ_k e Φ_{k+1} são os potenciais elétricos das interfaces inferior e superior da k -ésima camada; $L_{kd}(z) = (z_{k+1} - z) / (z_{k+1} - z_k)$ e $L_{ku}(z) = (z - z_k) / (z_{k+1} - z_k)$ são as funções *layerwise* transversais para as interfaces inferior e superior, respectivamente.

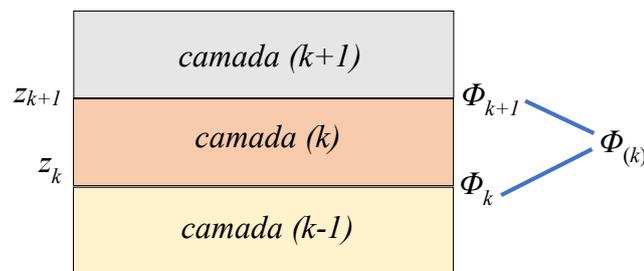


Figura 3.2 – Representação esquemática das funções de interface.

Com relação ao campo elétrico de cada camada k do laminado, o qual está presente nas equações (3.34) e (3.35), sabe-se que o mesmo é definido como sendo o negativo do gradiente do potencial elétrico, como representado na equação seguinte (BOYLESTAD, 2019):

$$\mathbf{E}_{(k)}(x,y,z,t) = -\nabla\Phi_{(k)}(x,y,t) = -\mathbf{L}_k^{\partial}(z)\Phi_k(x,y,t) \quad (3.38)$$

$$\text{onde } \mathbf{L}_k^{\hat{}}(z) = \begin{bmatrix} L_{kd} \partial/\partial x & L_{ku} \partial/\partial x \\ L_{kd} \partial/\partial y & L_{ku} \partial/\partial y \\ 1/(z_k - z_{k+1}) & 1/(z_{k+1} - z_k) \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\Phi}_k = \begin{Bmatrix} \Phi_k \\ \Phi_{k+1} \end{Bmatrix}.$$

Como mencionado na seção anterior, o elemento finito utilizado é o de placa plana retangular da família *Serendipity* (REDDY, 1997), ilustrado na Figura , o qual possui oito nós. Assim, cada uma das $k+1$ interfaces das k camadas do compósito terá a presença de oito potenciais elétricos nodais, ou seja, um grau de liberdade elétrico por nó, como ilustrado na Fig. 3.3 para a primeira camada.

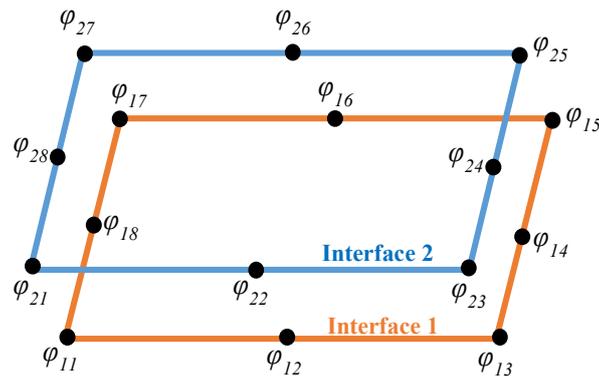


Figura 3.3 – Representação dos potenciais elétricos nodais por interface.

Portanto, pode-se relacionar o vetor dos potenciais elétricos das interfaces, $\boldsymbol{\Phi}_k$, com os potenciais elétricos nodais, por meio das funções de forma como segue (SARAVANOS e HEYLIGER, 1995):

$$\boldsymbol{\Phi}_k(\xi, \eta, t) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \boldsymbol{\phi}_{ek}(t) \quad (3.39)$$

Os conceitos de funções de forma e potenciais elétricos nodais podem ser também introduzidos no potencial elétrico de uma camada genérica k , dada na Eq. (3.37), da forma:

$$\Phi_{(k)}(\xi, \eta, z, t) = L_k(z) N(\xi, \eta) \varphi_{ek}(t) = N_\varphi(\xi, \eta, z) \varphi_{ek}(t) \quad (3.40)$$

onde $N_\varphi = L_k(z) N(\xi, \eta)$ são as funções de forma elétricas e $L_k = [\dots L_{kd} \quad L_{ku} \quad \dots]$.

Já o campo elétrico de uma camada genérica k , dado na Eq. (3.38), pode ser reescrito em termos das funções de forma e potenciais elétricos nodais, levando-se em conta também a separação dos efeitos de flexão-membrana e cisalhamento:

$$\mathbf{E}_{(k)}(\xi, \eta, z, t) = -\nabla \Phi_{(k)}(\xi, \eta, z, t) = -\nabla N_\varphi(\xi, \eta, z) \varphi_{ek}(t) = -\mathbf{B}_\varphi(\xi, \eta, z) \varphi_{ek}(t) \quad (3.41)$$

Devido à separação dos efeitos de flexão-membrana e cisalhamento, torna-se interessante separar também o vetor campo elétrico $\mathbf{E}_{(k)}$ em outros dois, sendo que, $\mathbf{E}_{(k)}^i$ refere-se à condição de circuito fechado e, $\mathbf{E}_{(k)}^0$, a de circuito aberto, de forma que:

$$\mathbf{E}_{(k)}^i(\xi, \eta, z, t) = -\mathbf{B}_{\varphi i}(\xi, \eta, z) \varphi_{ek}(t) \quad (3.42a)$$

$$\mathbf{E}_{(k)}^0(\xi, \eta, z, t) = -\mathbf{B}_{\varphi 0}(\xi, \eta, z) \varphi_{ek}(t) \quad (3.42b)$$

onde $\mathbf{B}_{\varphi i} = \frac{l}{t_k} \mathbf{B}_{\varphi i}^l + \frac{z}{t_k} \mathbf{B}_{\varphi i}^2$ e $\mathbf{B}_{\varphi 0} = \frac{l}{t_k} \mathbf{B}_{\varphi 0}^l$.

3.2.3. Matrizes de rigidezes elementares do sistema eletromecânico

Para o sistema acoplado eletromecânico, as matrizes de rigidezes elementares são agora obtidas pela energia de deformação envolvendo a parte elétrica da seguinte forma:

$$U_e = \int_{V_e} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{E}^T \mathbf{D}) dV_e \quad (3.43)$$

Introduzindo-se as Equações (3.34), (3.35) em (3.43), tem-se:

$$U_e = \int_{V_e} (\mathbf{A}_{uu} + \mathbf{B}_{u\phi} + \mathbf{C}_{\phi u} + \mathbf{D}_{\phi\phi}) dV_e \quad (3.44)$$

De forma que:

$$\mathbf{A}_{uu} = \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{C}_{bt} \boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{C}_{st} \boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{u}_s^T (\mathbf{B}_{bu}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{bu} + \mathbf{B}_{s0}^T \mathbf{C}_{st} \mathbf{B}_{s0}) \mathbf{u}_e \quad (3.45a)$$

$$\mathbf{B}_{u\phi} = -\boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{e}_{bt} \mathbf{E}_{(k)}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{e}_{st} \mathbf{E}_{(k)}^i = \mathbf{u}_e^T (\mathbf{B}_{bt}^T \mathbf{e}_{bt} \mathbf{B}_{\phi 0} + \mathbf{B}_{s0}^T \mathbf{e}_{st} \mathbf{B}_{\phi i}) \boldsymbol{\phi}_{ek} \quad (3.45b)$$

$$\mathbf{C}_{\phi u} = -\mathbf{E}_{(k)}^i \mathbf{e}_{bt}^T \boldsymbol{\varepsilon}_b - \mathbf{E}_{(k)}^i \mathbf{e}_{st}^T \boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{\phi}_{ek}^T (\mathbf{B}_{\phi i}^T \mathbf{e}_{bt}^T \mathbf{B}_{bu} + \mathbf{B}_{\phi 0}^T \mathbf{e}_{st}^T \mathbf{B}_{s0}) \mathbf{u}_e \quad (3.45c)$$

$$\mathbf{D}_{\phi\phi} = -\mathbf{E}_{(k)}^i \boldsymbol{\chi}_{bt} \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_{(k)}^i \boldsymbol{\chi}_{st} \mathbf{E}_{(k)}^i = \boldsymbol{\phi}_{ek}^T (-\mathbf{B}_{\phi 0}^T \boldsymbol{\chi}_{bt} \mathbf{B}_{\phi 0} - \mathbf{B}_{\phi i}^T \boldsymbol{\chi}_{st} \mathbf{B}_{\phi i}) \boldsymbol{\phi}_{ek} \quad (3.45d)$$

Assim, é possível obter as matrizes de rigidezes elementares da parte mecânica, \mathbf{K}_{uu}^e , eletromecânicas, $\mathbf{K}_{u\phi}^e$ e $\mathbf{K}_{\phi u}^e$, e a rigidez elétrica, $\mathbf{K}_{\phi\phi}^e$, através das seguintes integrações:

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_k+1} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} (\mathbf{B}_{bu}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{bu} + \mathbf{B}_{s0}^T \mathbf{C}_{st} \mathbf{B}_{s0}) J d\eta d\xi dz \quad (3.46a)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_k+1} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} (\mathbf{B}_{bt}^T \mathbf{e}_{bt} \mathbf{B}_{\phi 0} + \mathbf{B}_{s0}^T \mathbf{e}_{st} \mathbf{B}_{\phi i}) J d\eta d\xi dz \quad (3.46b)$$

$$\mathbf{K}_{\phi u}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_k+1} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left(\mathbf{B}_{\phi i}^T \mathbf{e}_{bt}^T \mathbf{B}_{bu} + \mathbf{B}_{\phi 0}^T \mathbf{e}_{st}^T \mathbf{B}_{s0} \right) J d\eta d\xi dz \quad (3.46c)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_k+1} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left(-\mathbf{B}_{\phi 0}^T \boldsymbol{\chi}_{bt} \mathbf{B}_{\phi 0} - \mathbf{B}_{\phi i}^T \boldsymbol{\chi}_{st} \mathbf{B}_{\phi i} \right) J d\eta d\xi dz \quad (3.46d)$$

De posse das matrizes elementares de massa e rigidezes mecânicas, eletromecânicas e elétricas, obtém-se as matrizes globais do sistema eletromecânico e a consequente Função de Resposta em Frequência:

$$\mathbf{H}(\omega) = \left[\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\phi} (\mathbf{K}_{\phi\phi})^{-1} \mathbf{K}_{\phi u} - \omega^2 \mathbf{M} \right]^{-1} \quad (3.47)$$

3.3. Inclusão dos circuitos elétricos *shunt*

No sistema piezo-*shunt* são considerados dois eletrodos na pastilha piezelétrica. Os nós que constituem cada eletrodo são equipotenciais elétricos. Esta condição é considerada introduzindo uma transformação no vetor dos potenciais elétricos. As equações do movimento no domínio de Fourier, negligenciando-se as condições iniciais, são dadas por (ZAMBOLINI-VICENTE, 2014; RIBEIRO e DE LIMA, 2014):

$$\left(\mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{U}(\omega) + \mathbf{K}_{u\phi} \boldsymbol{\Phi}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (3.48a)$$

$$\mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U}(\omega) + \mathbf{K}_{\phi\phi} \boldsymbol{\Phi}(\omega) = \mathbf{Q}(\omega) \quad (3.48b)$$

onde $\boldsymbol{\Phi}(\omega)$ diz respeito ao vetor formado pelos potenciais elétricos que permanecem independentes entre si.

Em Boylestad (2019), alguns conceitos básicos de circuitos elétricos são apresentados e, dentre eles, a definição de corrente elétrica como sendo a variação instantânea de cargas no tempo. Além disso, segundo a Lei de Ohm, a corrente elétrica é proporcional ao potencial elétrico, sendo essa proporção, o inverso da impedância elétrica do circuito, conforme a relação, $\frac{dq(t)}{dt} = \mathbf{I}(t) = \mathbf{Z}^{-1} \boldsymbol{\Phi}(t)$, cuja a transformada de Fourier fornece a expressão:

$$\mathbf{Q}(\omega) = (1/j\omega) \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \mathbf{L} \boldsymbol{\Phi}(\omega) \quad (3.49)$$

onde a matriz \mathbf{L} permite selecionar dentre os potenciais elétricos independentes, aqueles que correspondem aos eletrodos dos circuitos *shunt* conectados.

Combinando-se as Eqs. (3.48b) e (3.49), obtém-se:

$$\mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U}(\omega) + \left(\mathbf{K}_{\phi\phi} - \frac{\mathbf{Z}^{-1}(\omega)}{j\omega} \mathbf{L} \right) \boldsymbol{\Phi}(\omega) = 0 \quad (3.50)$$

Portanto, pode-se obter a seguinte matriz FRF do sistema eletromecânico através da combinação das Eqs. (3.48a) e (3.50):

$$\mathbf{H}(\omega) = \left[\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\phi} \left(\mathbf{K}_{\phi\phi} - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \right)^{-1} \mathbf{K}_{\phi u} - \omega^2 \mathbf{M} \right]^{-1} \quad (3.51)$$

Vale ressaltar que a Eq. (3.51) pode ser utilizada para diferentes tipos de circuitos *shunt* mediante a introdução das expressões de suas impedâncias elétricas, $\mathbf{Z}(\omega)$.

3.3.1. Sintonização do circuito elétrico *shunt*

Sintonizar um circuito *shunt* diz respeito a ajustar os valores dos seus parâmetros como resistência, indutância, capacitância, dentre outros, de forma que a impedância equivalente do circuito esteja em acordo com os modos naturais que se deseja amortecer. Desta maneira, os circuitos *shunt*, independente da sua topologia (série, paralelo, chaveado, etc.) necessitam de sintonização para os modos de interesse.

De acordo com Hagood e Von Flotow (1991), a escolha da impedância elétrica correta faz com que o pico da curva do fator de perda seja movido para os picos de frequências de interesse. Assim, proporciona-se a maior dissipação possível para as frequências de interesse.

Neste trabalho foram realizadas simulações com a topologia do circuito em paralelo com a pastilha piezolétrica. O circuito foi adaptado para amortecer dois modos apenas. Como o foco é amortecer vibrações e retardar a coalescência dos dois primeiros modos naturais da estrutura, o que incorre no *flutter*, amortecer apenas estes dois modos é suficiente.

3.3.2. *Shunt* ressonante multimodal paralelo

A primeira proposição de circuito *shunt* multimodal utilizando-se de apenas uma pastilha piezolétrica foi realizada por Wu (1996) com a topologia em paralelo. Entretanto, devido ao grande número de indutores para construção destes circuitos, modificações foram realizadas pelo próprio Wu (1998), conforme ilustrado na Fig. 3.4, para diminuir os circuitos de bloqueio, que são filtros formados por indutores e capacitores em paralelo para inativar o modo que não se deseja amortecer e fazer com que apenas um ramo do circuito atue por vez.

Na Figura 3.4, os termos, R_1 e L_1 , são responsáveis pela atenuação do primeiro modo e o segundo ramo responsável pela atenuação do segundo modo. \bar{L}_1 e \bar{C}_1 formam um circuito de bloqueio. Assim, para que o segundo modo do sistema seja amortecido sem interferência entre os circuitos de controle, este circuito de bloqueio cria uma impedância infinita, dada por $\bar{L}_1\bar{C}_1 = 1/\omega_1^2$, permitindo, desta forma, que o segundo ramo seja exclusivo para amortecer o segundo modo (SILVA, 2014).

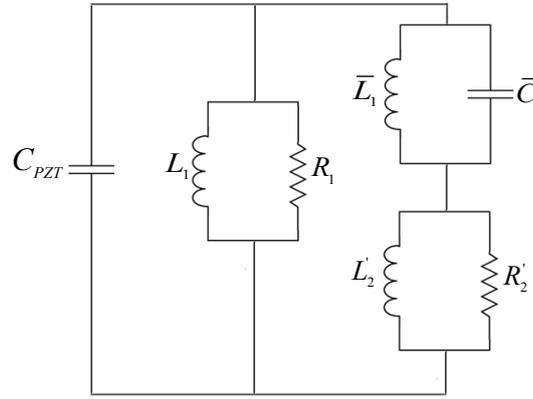


Figura 3.4 – Circuito *shunt* ressonante multimodal paralelo para atenuação de dois modos simultâneos proposto por Wu (1998).

O parâmetro C_{PZT} representa a capacitância da pastilha piezelétrica que é dada por:

$$C_{PZT} = \mathbf{K}_{\phi\phi} - \mathbf{K}_{u\phi}^T (\mathbf{K}_{\phi\phi})^{-1} \mathbf{K}_{u\phi} \quad (3.52)$$

Os parâmetros R_1 e L_1 do circuito e R_2 e L_2 , utilizados na obtenção dos parâmetros R_2' e L_2' , são calculados com a ajuda das equações propostas por Hagood e Von Flotow (1991).

$$R_n = \frac{\sqrt{2K_{ij}}}{C_{PZT}\omega_n(1+K_{ij}^2)} R_1 \quad (3.53a)$$

$$L_n = \frac{1}{C_{PZT}\omega_n^2(1+K_{ij}^2)} \quad (3.53b)$$

onde ω_n representa a frequência natural do n -ésimo modo que se deseja amortecer e K_{ij} é o coeficiente de acoplamento eletromecânico.

Quanto aos parâmetros R_2' e L_2' do circuito da Fig. 3.4, sabe-se que, para que o circuito atue corretamente, é necessário que a indutância total de cada ramo permaneça a mesma, após a inserção do circuito de bloqueio. Assim, R_2' e L_2' , são calculados da forma:

$$R'_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \quad (3.54a)$$

$$L'_2 = \frac{L_1 L_2 + L_2 \bar{L}_1 - L_1 \bar{L}_1 - \omega_2^2 L_1 L_2 \bar{L}_1 \bar{C}_1}{(L_1 - L_2)(1 - \omega_2^2 \bar{L}_1 \bar{C}_1)} \quad (3.54b)$$

onde R_1 e L_1 são dados pelas Eqs. (3.53).

3.3.3. Impedância equivalente total do circuito

Para o cálculo da impedância equivalente total do circuito, associações em série e paralelo, de acordo com a posição dos componentes, foram realizadas conforme as relações,

$Z(\omega) = Z_1 + Z_2$ e $Z(\omega) = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$. Tem-se então a impedância de cada componente:

$$Z(\omega)_{Resistor} = R \quad (3.55a)$$

$$Z(\omega)_{Indutor} = j\omega L \quad (3.55b)$$

$$Z(\omega)_{Capacitor} = \frac{1}{j\omega C} \quad (3.55c)$$

Para o circuito proposto por Wu (1998), com configuração em paralelo e para o controle de dois modos de forma simultânea, a impedância equivalente total é:

$$Z(\omega) = \frac{R_1 L_1 \omega \left[\frac{\bar{L}_1}{\bar{C}_1 \left(\bar{L}_1 \omega j - \frac{j}{\bar{C}_1 \omega} \right)} + \frac{L'_2 R'_2 \omega j}{R'_2 + L'_2 \omega j} \right] j}{(R_1 + L_1 \omega j) \left[\frac{\bar{L}_1}{\bar{C}_1 \left(\bar{L}_1 \omega j - \frac{j}{\bar{C}_1 \omega} \right)} + \frac{L_1 R_1 \omega j}{R_1 + L_1 \omega j} + \frac{L'_2 R'_2 \omega j}{R'_2 + L'_2 \omega j} \right]} \quad (3.56)$$

Desta maneira, de acordo com a topologia a ser utilizada para o controle passivo das vibrações mecânicas, a expressão da impedância, $Z(\omega)$, deve ser introduzida na equação da Função de Resposta em Frequência (FRF) do sistema.

3.4. Modelagem aeroeletromecânica

3.4.1. Adição do escoamento de ar no modelo

O modelo eletromecânico com circuito *shunt* multimodal recebe um carregamento aerodinâmico que altera suas respostas dinâmicas à medida em que há uma variação crescente da velocidade do escoamento de ar sobre a estrutura. Assim, com essa variação crescente de velocidade do carregamento, há um deslocamento das frequências naturais, uma em direção à outra, até que haja união das mesmas, denominada coalescência. A partir deste ponto, a estrutura se torna instável, sendo observado um movimento que ocorre de forma acoplada entre dois ou mais modos naturais, que geralmente são de flexão-torção.

Neste trabalho, a Teoria do Pistão (ASHLEY, 1956) foi a utilizada para prever a velocidade de ocorrência do *flutter* do painel compósito com elemento piezelétrico acoplado de circuito *shunt* multimodal. Esta teoria considera que o carregamento aerodinâmico sobre o painel eletromecânico pode ser calculado pela variação de sua pressão aerodinâmica por meio da seguinte relação (PEGADO, 2003):

$$p = p_{\infty} \left[1 + \frac{\gamma_{ar} - 1}{2a_{\infty}} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right]^{\frac{2\gamma_{ar}}{\gamma_{ar} - 1}} \quad (3.57)$$

onde p_{∞} é a pressão não perturbada (pressão distante do sistema), a_{∞} é a velocidade do som no ar não-perturbado, γ_{ar} é a relação entre os calores específicos do ar ($\approx 1,4$) e U_{∞} é a velocidade do escoamento não-perturbado. A direção do escoamento é determinada pela variável em relação à qual é derivado o deslocamento transversal, W , da placa em relação em relação à direção x .

A Eq. (3.57) pode ser expandida em série, onde a ordem desta expansão determinará o grau de não linearidade da Teoria do Pistão. Caso o objetivo do trabalho fosse a determinação dos deslocamentos e por consequência o ciclo limite da estrutura, seria necessário uma abordagem não linear. Como este trabalho visa apenas a obtenção da velocidade crítica de ocorrência de *flutter*, a Teoria do Pistão pode ser truncada em seu termo de primeira ordem como segue:

$$p - p_{\infty} = \frac{2q}{\beta} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \zeta \frac{\partial W}{\partial t} \right) \right] \quad (3.58)$$

onde $q = (1/2)\rho_a U_{\infty}^2$ é a pressão dinâmica, sendo ρ_a a densidade do ar, $\beta = \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}$, M_{∞} é o número de Mach e $\zeta = \frac{M_{\infty}^2 - 2}{M_{\infty}^2 - 1} \frac{1}{U_{\infty}}$.

A teoria do Pistão tem aplicação em escoamentos supersônicos e até mesmo hipersônicos, o que define $M_{\infty} = 1$ como sendo o limite inferior de validade de teoria. No entanto, muitos autores afirmam que o verdadeiro limite inferior é em torno de $M_{\infty} = 1,7$, o que aparenta ser bastante condizente, uma vez que o parâmetro ζ exige a condição $M_{\infty} \geq \sqrt{2}$ para ser definido (MEIJER e DALA, 2016).

Salienta-se que amortecimento aerodinâmico, $\partial W / \partial t$, foi desprezado para o caso em estudo devido a sua pequena contribuição se comparada com o amortecimento inserido via *shunt*. Desta forma, recai-se num problema mais simples (BISMARCK-NASR, 1999):

$$p - p_\infty = \frac{2q}{\beta} \frac{\partial W}{\partial x} \quad (3.59)$$

O modelo descrito pela Eq. (3.59) recebe o nome de Modelo de Ackeret ou Modelo de Aproximação Quase-Estacionário da Teoria Linear do Escoamento Potencial, sendo este modelo a forma mais simples da Teoria do Pistão, porém, suficiente para prever as respostas do sistema e de acordo com suas restrições, onde considerou-se o uso de painéis compósitos de placas finas e pequenos deslocamentos.

Na integração do carregamento aerodinâmico ao modelo eletromecânico, foi utilizado o trabalho da força aerodinâmica, como indicado no trabalho de Almeida (2011).

$$W_{aerod.}^F = \int w \frac{2q}{\beta} \frac{\partial w}{\partial x} dA \quad (3.60)$$

E, após manipulações, chega-se à matriz de rigidez aerodinâmica, $\mathbf{K}_{aerod.}$, a qual é então adicionada à rigidez mecânica da estrutura.

$$W_{aerod.}^F = \frac{2q}{\beta} \int \mathbf{N}_x^T(\xi, \eta) \mathbf{N}(\xi, \eta) dA = \frac{2q}{\beta} \mathbf{K}_{aerod.} \quad (3.61)$$

onde \mathbf{N}_x diz respeito à derivada da matriz de Funções de Forma em relação a x .

A Teoria do Pistão, como já mencionado, adiciona o carregamento aerodinâmico na forma de uma matriz de rigidez aerodinâmica, que é então somada à rigidez mecânica da estrutura. Portanto, chega-se a FRF do sistema aeroeletromecânico:

$$\mathbf{H}(\omega) = \left[\left(\mathbf{K}_{uu} + (2q/\beta) \mathbf{K}_{aerod.} \right) - \mathbf{K}_{u\phi} \left(\mathbf{K}_{\phi\phi} - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \right)^{-1} \mathbf{K}_{\phi u} - \omega^2 \mathbf{M} \right]^{-1} \quad (3.62)$$

3.4.2. Predição do flutter

Após a construção das equações do movimento para o problema aeroeletromecânico acoplado, recai-se em um problema não-linear de resolução de autovalor. O problema é não linear porque a impedância elétrica $Z(\omega)$ é dependente da frequência e, desta maneira, a matriz de rigidez associada a ela também.

No trabalho de Meunier (2001) um problema semelhante é encontrado e a solução se dá por meio de um método iterativo. A Fig. 3.5 apresenta o esquema do algoritmo utilizado conforme as seguintes etapas principais, onde $\mathbf{K}_{shunt} = \mathbf{K}_{\phi\phi} + \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega)$.

Algoritmo:

1. Para cada passo crescente de velocidade de escoamento, inicia-se o método com um valor inicial adotado de frequência ($\omega_0 = 0$, por exemplo).
2. Para este valor inicial de frequência, o problema de autovalor, que neste momento será linear, poderá então ser resolvido, encontrando-se novos autovalores ω_{j+1} .
3. Estes novos autovalores são comparados com os autovalores da iteração anterior. Se esta diferença, ponderada pelos novos autovalores, for maior que uma tolerância pré-estabelecida, parte-se para uma nova iteração, para refinar os resultados de autovalores.
4. Quando a tolerância for satisfeita para aquele autovalor, encontram-se os próximos autovalores para aquele valor de velocidade (no caso deste trabalho, o segundo laço sobre ω com ω_j acontece até que se encontre os dois primeiros autovalores para um dado valor de velocidade).
5. Encontrados os autovalores complexos para aquele valor de velocidade, os mesmos são armazenados para posteriormente serem plotados no diagrama V-g.
6. Segue-se para o próximo valor de velocidade ($U_i = U_{i+1}$) e repete-se o método, até cobrir todo o intervalo velocidades de escoamento desejado.

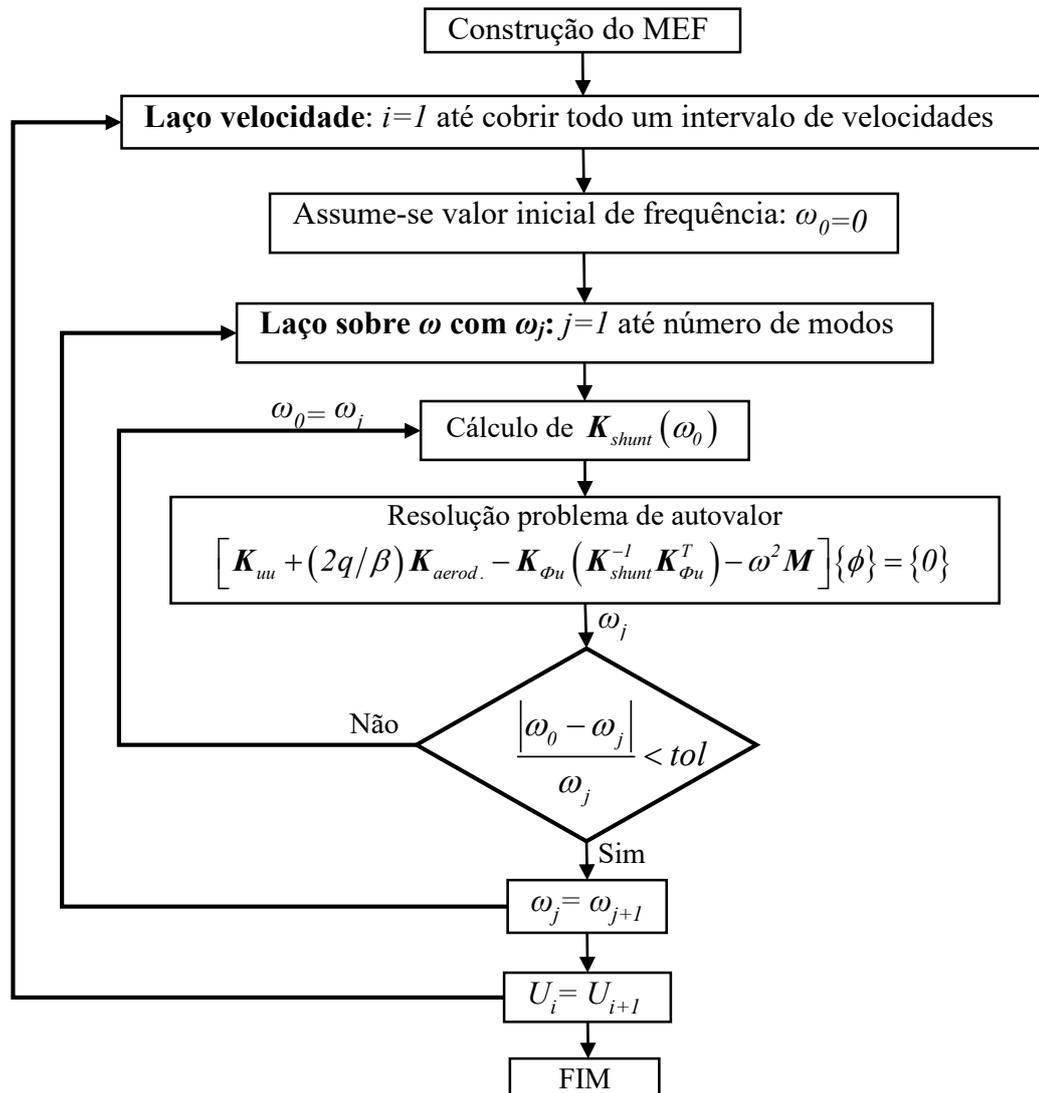


Figura 3.5 – Algoritmo de resolução do problema de *flutter*.

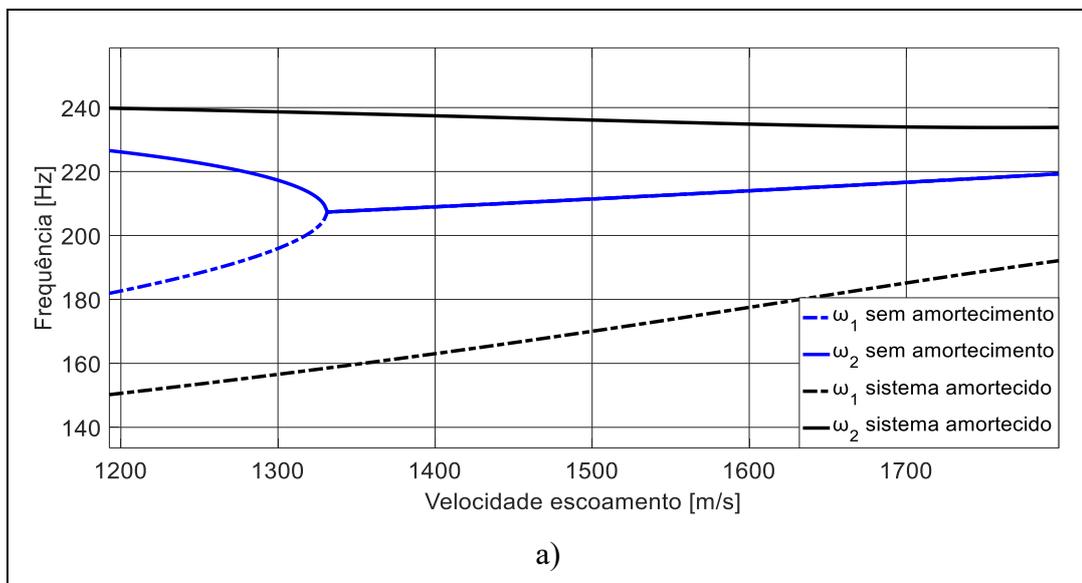
O amortecimento modal para cada passo de velocidade é assim calculado:

$$g_j = \frac{\text{Im}ag(\omega_j)}{\text{Real}(\omega_j)} \quad (3.64)$$

Tanto os valores de amortecimento modal, g_j , quando os autovalores, ω_j , para cada passo de velocidade de escoamento j , são utilizados na construção do diagrama V-g. Este diagrama, conforme indicado na Figura 3.6, é um conjunto de dois gráficos e é construído da

seguinte forma: no primeiro gráfico, Fig. 3.6 a), a parte real dos autovalores é utilizada para mostrar a aproximação das frequências naturais, à medida que a velocidade do escoamento cresce; já no segundo gráfico, Fig. 3.6 b), o amortecimento modal varia, também à medida que a velocidade do escoamento cresce.

Conforme pode ser verificado pelo diagrama V-g, para a curva em azul, que representa a estrutura sem amortecimento, as frequências naturais se coalescem (unem). Já para a resposta da curva em preto, que diz respeito a uma sistema amortecido, estas frequências se aproximam, porém não se unem. Isto é característico da resposta de uma estrutura amortecida. Porém, a predição do ponto exato de ocorrência do *flutter*, é obtida observando-se o gráfico do amortecimento modal do diagrama V-g: para a curva azul, o amortecimento modal permanece nulo até o ponto de ocorrência de *flutter*, uma vez que, como o sistema não possui amortecimento, não possui parcela imaginária em suas frequências naturais, indicando que o aparecimento dessas parcelas representa instabilidade no sistema. Já para a estrutura amortecida, o *flutter* é percebido quando há mudança de sinal da parte complexa da frequência natural, fazendo com que, neste caso, o amortecimento modal passe de um valor negativo para um valor positivo. Portanto, a mudança de sinal no valor do amortecimento modal é o que indicará o ponto exato de ocorrência do fenômeno de *flutter* num sistema amortecido.



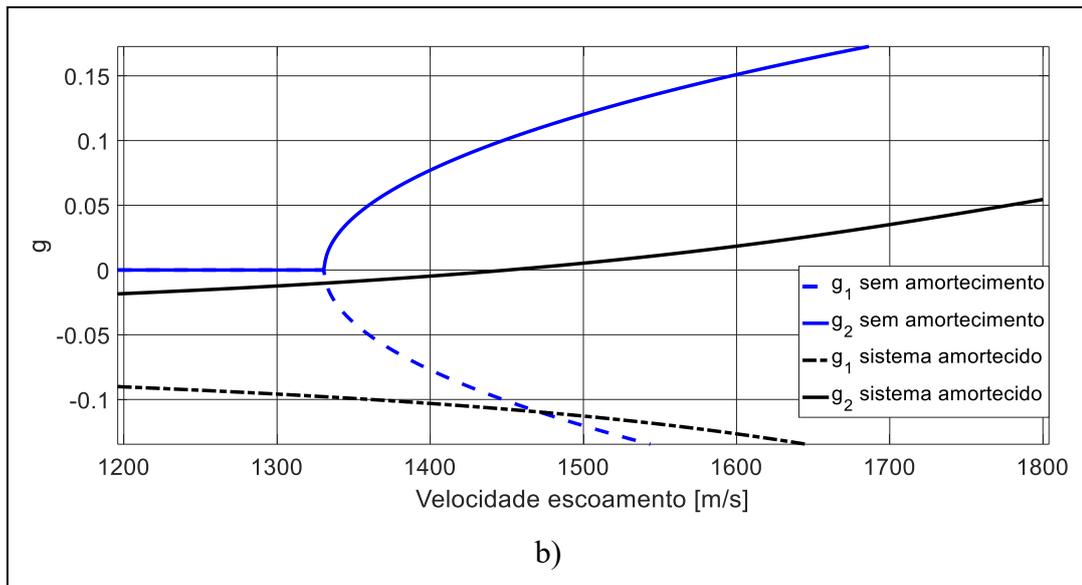


Figura 3.6 – Diagrama V-g: a) Parte real duas frequências naturais *versus* velocidade de escoamento; b) Amortecimento modal *versus* velocidade de escoamento.

3.5. Redução do modelo aeroeletromecânico

Esta seção é dedicada ao método de redução aplicado ao sistema aeroeletromecânico com a finalidade de reduzir o esforço computacional requerido na determinação das velocidades de *flutter* do sistema com vistas à construção do modelo aeroeletromecânico estocástico e o uso da técnica de otimização multiobjetivo robusta.

O método de redução de modelo apresentado neste trabalho é o chamado Método de Ritz Enriquecido Iterativo (IERM), proposto por Cunha-Filho et al. (2018) e Briend (2017), para aplicação em sistemas aeroviscoelásticos. Como no problema aeroeletromecânico há também a dependência do sistema com a frequência, a base T_{IERM} foi adaptada, com o propósito da redução de modelos de elementos finitos de estruturas amortecidas via *shunt* (dependentes da frequência) acoplados com fluidos incompressíveis.

Uma base de redução fundamentada com autovetores provenientes do problema conservativo Φ_0 é utilizada, porém, devido à dependência da frequência, esta é enriquecida com informações dinâmicas do problema completo, dado na Eq. (3.63), que neste caso, é um problema aeroeletromecânico com circuito *shunt* conectado. Por meio de um processo iterativo,

há inserção de autovetores com informações dinâmicas, pelo qual valores específicos de frequência são utilizados. Estes valores correspondem aos autovalores, Φ_0 , associados aos autovetores de interesse. O que rege o processo iterativo é um critério baseado na energia de deformação do sistema. A inclusão de diferentes velocidades no método iterativo de construção da base é realizada, sendo assim, a base é enriquecida não apenas com informações puramente dinâmicas, mas também, o fornecimento de características aerodinâmicas do sistema.

A seguir é apresentado o algoritmo de construção da base iterativa T_{IERM} e um esquema deste algoritmo na Fig. 3.7.

Algoritmo:

1. Inicialização:

Obtenção da base inicial, Φ_0 , do sistema conservativo, associada à matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}\mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\phi} \left(\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}^T \right).$$

Desta base inicial, são utilizados somente os N_R primeiros autovetores (modos de corpo rígido incluídos) e as N_R primeiras frequências naturais ω_k (removendo os modos de corpo rígido). Define-se também uma tolerância tol , um vetor de excitação \mathbf{F}_b , e um intervalo de velocidades contendo N_R velocidades que deve respeitar os limites de validade da teoria aerodinâmica e conter a velocidade crítica de ocorrência do fenômeno de *flutter*. Inicializa-se a base de redução tal como $\mathbf{T}_{IERM} = \Phi_0$. Ressalta-se que no caso deste trabalho utilizou-se $N_R=10$, sendo este valor, portanto, o mesmo para o intervalo de velocidades a se cobrir e para o número de modos da base inicial, apenas por uma questão de simplificação dos cálculos e do algoritmo.

2. Primeiro laço:

Inicia-se o laço variando $k = 1$ até N_R : Para cada k , computa-se a matriz de rigidez dinâmica, $\mathbf{Z}\mathbf{Z} = \mathbf{K}_{uu} + (2q_k/\beta_k) \mathbf{K}_{aero} - \mathbf{K}_{u\phi} \left(\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}^T \right) - \omega_k^2 \mathbf{M}$, dependente da velocidade U_k . Define-se então um erro inicial: $\varepsilon = 1 \leq tol$.

3. Segundo laço:

- (a) O segundo laço se dá sobre o erro ε , iniciando-se com a computação da matriz de rigidez dinâmica reduzida: $\mathbf{ZZ}_r = \mathbf{T}_{IERM}^T \mathbf{ZZT}_{IERM}$;
- (b) Na sequência, a resposta dinâmica reduzida, $\boldsymbol{\eta}_{red} = \mathbf{ZZ}_r^{-1} \mathbf{T}_{IERM}^T \mathbf{F}_b$, e a aproximação da resposta completa correspondente, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{T}_{IERM} \boldsymbol{\eta}_{red}$, são computadas;
- (c) A seguir, o resíduo de força devido ao erro de aproximação: $\mathbf{R}_f = \mathbf{ZZ}\boldsymbol{\eta} - \mathbf{F}_b$;
- (d) Finalmente, o resíduo estático de deslocamento associado a este resíduo de força: $\mathbf{R}_d = \mathbf{KK}^{-1} \mathbf{R}_f$.
4. Calcula-se o novo erro comparando as energias de deformação do resíduo e da aproximação $\varepsilon = \mathbf{R}_d^T [\mathbf{KK}] \mathbf{R}_d / \boldsymbol{\eta}^T [\mathbf{KK}] \boldsymbol{\eta}$. Caso este erro seja maior que a tolerância estabelecida tol , a parte real do atual resíduo de deslocamento, \mathbf{R}_d , é adicionada à base \mathbf{T}_{IERM} . A base é então ortogonalizada para manter a base de posto cheio (do inglês *full-rank*) e, volta-se na etapa 3(a), **segundo laço**, com a nova base atualizada. A base é enriquecida para este valor de velocidade até o erro atinja o critério de parada.
5. Quando o erro for menor que a tolerância tol , volta-se na etapa 2, dada pelo **primeiro laço**, com a próxima iteração $k = k+1$ e realiza-se o enriquecimento da base para um novo valor de velocidade de escoamento.

O vetor de excitação, \mathbf{F}_b , usado no algoritmo é também um parâmetro cuja escolha deve ser feita com atenção. Para o caso da análise de *flutter*, como não se sabe qual gdl excitado fornecerá a base de melhor qualidade, é conveniente adotar um vetor \mathbf{F}_b cheio de 1, ou seja, excita-se todos os gdl's de forma unitária para a construção da base. Observa-se que esta estratégia influenciou diretamente na precisão da base em aproximar o sistema completo.

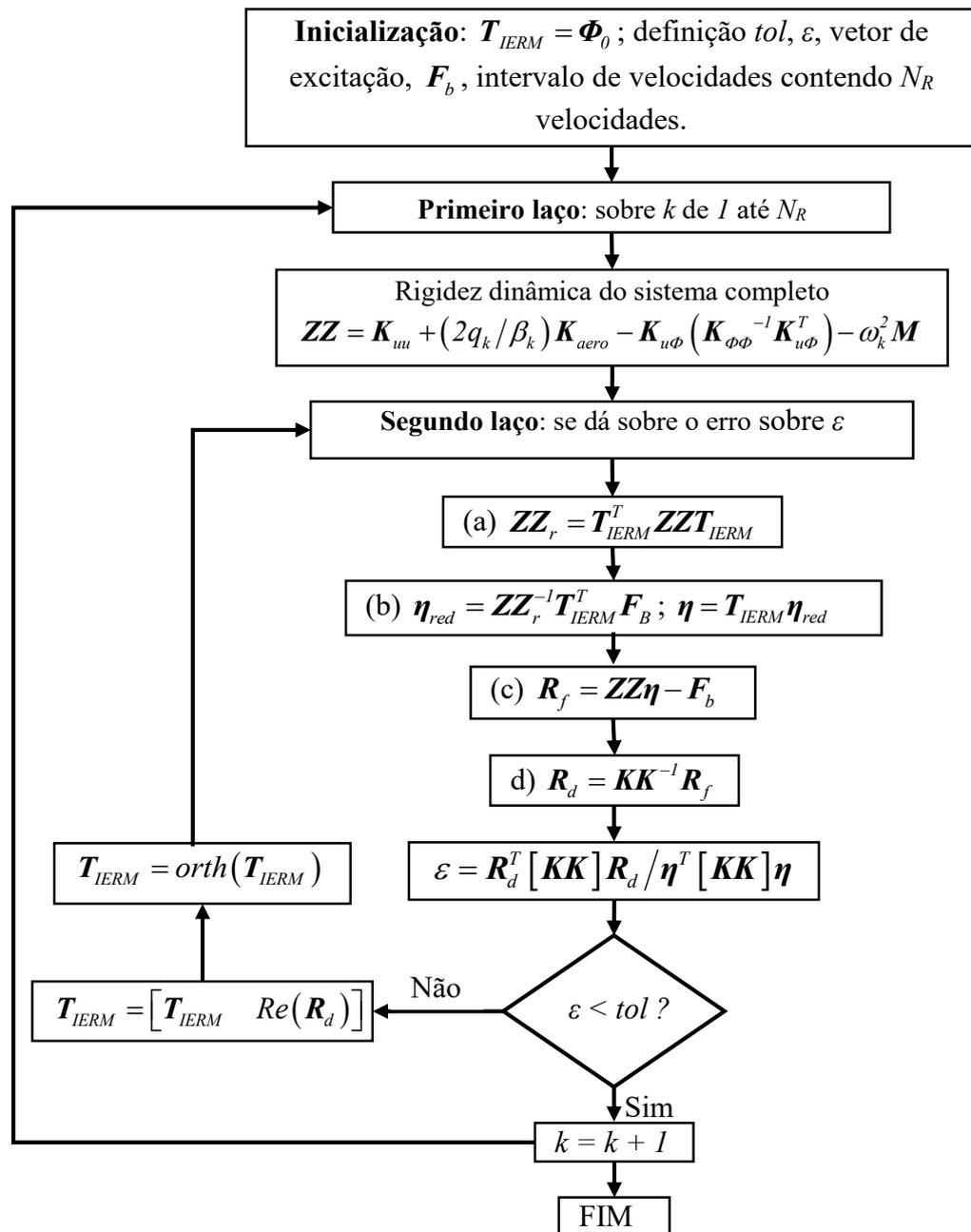


Figura 3.7 – Algoritmo do processo de construção da base do método IERM.

CAPÍTULO IV

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO SISTEMA AEROELETROMECHANICO

Este capítulo propõe um modelo de propagação de incertezas ao nível dos elementos finitos estocástico do modelo aeroeletromecânico desenvolvido no capítulo anterior. Por meio desta modelagem, é possível considerar as incertezas presentes nos parâmetros de concepção mais influentes do sistema tais como os parâmetros estruturais que foram fatorados das matrizes de massa e rigidezes e os parâmetros do circuito elétrico *shunt*. Para tanto, estes parâmetros serão modelados como campos estocásticos gaussianos e discretizados conforme a expansão de Karhunen-Loève.

4.1. Expansão de Karhunen-Loève (KL)

De acordo com Ghanem e Spanos (1991) um campo aleatório $H(\mathbf{x}, \theta)$ é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um conjunto de parâmetros contínuos $\mathbf{x} \in \Omega$, onde $\Omega \subset R^d$ representa o conjunto aberto que descreve a geometria do sistema físico.

Um campo aleatório é chamado de unidimensional ou multidimensional de acordo com a dimensão d de \mathbf{x} , que é $d=1$ ou $d>1$. Para o caso em questão, o campo estocástico é bidimensional, uma vez que se utiliza um elemento de placa plana retangular.

O procedimento de discretização utilizado se baseia na aproximação de $H(\mathbf{x},\theta)$ por $H_{approx.}(\mathbf{x},\theta)$. Dentre os métodos de expansão em série disponíveis na literatura que podem ser utilizados para discretizar espacialmente um campo estocástico, utiliza-se neste trabalho a expansão de Karhunen-Loève, como detalhado no trabalho de Ghanem e Spanos (1991). A discretização por Karhunen-Loève de um campo aleatório gaussiano homogêneo é dada por:

$$H(\mathbf{x},\theta) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_r} \xi_r(\theta) f_r(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

onde $\{\xi_r, r \in N^*\}$ são as variáveis ortogonais de média zero e $\{\lambda_r, f_r(\mathbf{x})\}$ são as soluções da seguinte Integral de Fredholm do problema de autovalores:

$$\int_{\Omega_e} C_{HH}(x_1, x_2) f_r(\mathbf{x}) dx_1 = \lambda_r f_r(x_2) \quad (4.2)$$

onde o *kernel*, $C_{HH}(\bullet, \bullet)$, sendo uma função de autocovariância, é limitado, simétrico e definido positivo. Assim, o conjunto f_r forma uma base ortogonal completa. O conjunto de autovalores é em sua maioria real, positivo, numerável e tem o zero como o único ponto de acumulação (GHANEM e SPANOS, 1991; SUDRET e DER KIUREGHIAN, 2000).

Como não há acumulação dos autovalores em torno de um valor não nulo, se torna possível ordená-los em uma série decrescente que converge para zero. Pode-se então, após o M -ésimo termo da série, realizar o truncamento da mesma, obtendo-se o campo estocástico aproximado dado pela seguinte expressão:

$$H_{approx.}(\mathbf{x}, \theta) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^M \sqrt{\lambda_r} \xi_r(\theta) f_r(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{x} \in \Omega_e$.

Para a resolução analítica da Integral de Fredholm, existem três tipos comuns de funções de covariância mais utilizados na literatura: a exponencial, a exponencial quadrática e a senoidal (GHANEM e SPANOS, 1991). Neste trabalho, a função de covariância exponencial é utilizada e, por se tratar de um elemento de placa plana retangular, como visto na Fig. 4.1, o problema é bidimensional com os domínios $(x_1, x_2) \in \Omega_x$ e $(y_1, y_2) \in \Omega_y$, onde $\Omega_x = [0, a]$, $\Omega_y = [0, b]$. Além disso, l_x e l_y são os comprimentos de correlação nas direções x e y , respectivamente. A função de covariância para este problema é dada como:

$$C[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = C(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \exp\left(-\frac{x_1 - x_2}{l_x} - \frac{y_1 - y_2}{l_y}\right) \quad (4.4)$$

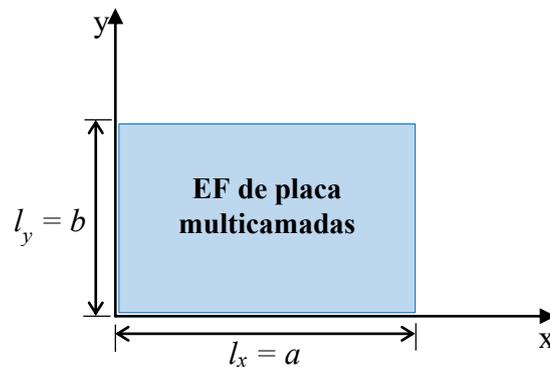


Figura 4.1 – Domínio de correlação para o elemento finito de placa compósita.

Ghanem e Spanos (1991) traz a resolução analítica da Integral de Fredholm, Eq. (4.2), para um problema bidimensional considerando a função de covariância exponencial, Eq. (4.4). A escolha da função de covariância do tipo exponencial possui como consequência imediata a propriedade da separabilidade, onde o problema bidimensional pode ser considerado como

sendo dois problemas de autovalores unidimensionais, como apresentado nas seguintes equações (DE LIMA, 2007):

$$f_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x})f_j(\mathbf{y}) \quad (4.5a)$$

$$\lambda_r = \lambda_i \lambda_j \quad (4.5b)$$

Neste sentido, os termos $[\lambda_i, f_i(\mathbf{x})]$ são soluções da integral de Fredholm pela introdução da função de covariância exponencial via decomposição de Karhunen-Loève com um comprimento de correlação $l_x \in \Omega_x$. Já os termos $[\lambda_j, f_j(\mathbf{y})]$ são obtidos resolvendo-se o mesmo problema, mas, para um comprimento de correlação $l_y \in \Omega_y$. De acordo com De Lima (2007):

- Para o caso onde i e j são ímpares ($i \geq 1$ e $j \geq 1$):

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2}; f_i(\mathbf{x}) = \alpha_i \cos(\omega_i \mathbf{x}) \quad (4.6a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2}; f_j(\mathbf{y}) = \alpha_j \cos(\omega_j \mathbf{y}) \quad (4.6b)$$

onde $c_1 = \frac{l}{l_x}$, $c_2 = \frac{l}{l_y}$, $\alpha_i = \frac{l}{\sqrt{a + \frac{\text{sen}(2\omega_i a)}{2\omega_i}}}$ e $\alpha_j = \frac{l}{\sqrt{b + \frac{\text{sen}(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}$.

Já termos ω_i e ω_j representam as soluções das seguintes equações transcendentais nos respectivos domínios: $\left[(i-1)\frac{\pi}{a}, \left(i - \frac{l}{2}\right)\frac{\pi}{a} \right]$ e $\left[(j-1)\frac{\pi}{b}, \left(j - \frac{l}{2}\right)\frac{\pi}{b} \right]$.

$$c_1 - \omega_i t g(\omega_i a) = 0 \quad (4.7a)$$

$$c_2 - \omega_j t g(\omega_j b) = 0 \quad (4.7b)$$

- Para o caso onde i e j são pares ($i \geq 2$ e $j \geq 2$):

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2}; f_i(\mathbf{x}) = \alpha_i \text{sen}(\omega_i \mathbf{x}) \quad (4.8a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2}; f_j(\mathbf{y}) = \alpha_j \text{sen}(\omega_j \mathbf{y}) \quad (4.8b)$$

$$\text{onde } c_1 = \frac{l}{l_x}, c_2 = \frac{l}{l_y}, \alpha_i = \frac{l}{\sqrt{a + \frac{\text{sen}(2\omega_i a)}{2\omega_i}}} \text{ e } \alpha_j = \frac{l}{\sqrt{b + \frac{\text{sen}(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}.$$

Similarmente, os termos ω_i e ω_j representam as soluções das seguintes equações transcendentais nos respectivos domínios: $\left[\left(i - \frac{l}{2} \right) \frac{\pi}{a}, i \frac{\pi}{a} \right]$ e $\left[\left(j - \frac{l}{2} \right) \frac{\pi}{b}, j \frac{\pi}{b} \right]$.

$$\omega_i + c_1 t g(\omega_i a) = 0 \quad (4.9a)$$

$$\omega_j + c_2 t g(\omega_j b) = 0 \quad (4.9b)$$

Vale ressaltar que dentre as propriedades já citadas do método de Karhunen-Loève discutidas em Ghanem e Spanos (1991), devido à ortonormalidade das autofunções, pode-se obter uma forma fechada para cada variável aleatória da série através da seguinte transformação linear:

$$\xi_r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} \int_{\Omega_e} [H(\mathbf{x}, \theta) - \mu(\mathbf{x})] f_r(\mathbf{x}) d\Omega_e \quad (4.10)$$

Além disso, sendo $H(\mathbf{x}, \theta)$ um campo aleatório Gaussiano, cada variável aleatória normalizada padrão, ξ_r , segue também uma distribuição Gaussiana e tem-se a garantia que as mesmas serão independentes. No caso de um campo não Gaussiano, a expansão de Karhunen-Loève não deixa de existir, mas, as variáveis aleatórias que aparecem na série possuem uma função densidade de probabilidade (FDP) desconhecida e as mesmas podem não ser independentes (LOÈVE, 1978).

4.2. Formulação do problema de EF estocástico

A discretização do campo aleatório $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta)$ é realizada por meio da expansão de Karhunen-Loève, aproximando-se $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta)$ por $H_{approx.}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta)$. Assim, a discretização por Karhunen-Loève de um campo gaussiano homogêneo sobre a base das autofunções é dada como:

$$H_{approx.}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) = \mu + \sum_{r=1}^M H_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \xi_r(\theta) \quad (4.11)$$

A partir da Eq. (3.11) referente à integração da matriz de massa elementar e da expansão de Karhunen-Loève (4.8), pode-se obter a matriz de massa estocástica de cada camada k :

$$\mathbf{M}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \rho_k \mathbf{N}^T \mathbf{A}_u^T \mathbf{A}_u \mathbf{N} d\Omega_e \quad (4.12)$$

As matrizes de rigidezes estocásticas do sistema aeroeletromecânico são obtidas de maneira similar, combinando-se a decomposição de Karhunen-Loève com as Eqs. (3.23) e (3.46) para os problemas mecânicos e eletromecânicos, respectivamente, e com a Eq. (3.62) referente à matriz de rigidez aerodinâmica. O procedimento de integração para cada uma delas é apresentado na sequência e demonstra-se apenas uma das matrizes eletromecânicas de rigidez, uma vez que $\mathbf{K}_{\phi u}^e = \mathbf{K}_{u\phi}^{e T}$.

$$\mathbf{K}_{uu}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_u d\Omega_e \quad (4.13a)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}_t \mathbf{B}_\phi d\Omega_e \quad (4.13b)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \mathbf{B}_\phi^T \boldsymbol{\chi}_t \mathbf{B}_\phi d\Omega_e \quad (4.13c)$$

$$\mathbf{K}_{aero}^e(\theta) = \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \mathbf{N}_x^T \mathbf{N} d\Omega_e \quad (4.13d)$$

onde $\mathbf{B}_u = \mathbf{B}_{bu} + \mathbf{B}_{s0}$, $\mathbf{B}_\phi = \mathbf{B}_{\phi i} + \mathbf{B}_{\phi 0}$, $\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_{bt} + \mathbf{C}_{st}$, $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{bt} + \mathbf{e}_{st}$ e $\boldsymbol{\chi}_t = \boldsymbol{\chi}_{bt} + \boldsymbol{\chi}_{st}$ estão definidos no terceiro capítulo, conforme o processo de parametrização.

Portanto, tem-se as seguintes expressões para as matrizes estocásticas do problema aeroeletromecânico sujeito a incertezas, conforme a Eq. (4.11):

$$\mathbf{M}^e(\theta) = \mathbf{M}^e + \mathbf{M}_r^e(\theta) = \mathbf{M}^e + \sum_{r=1}^M \bar{\mathbf{M}}^e \xi_r(\theta) \quad (4.14a)$$

$$\mathbf{K}_{uu}^e(\theta) = \mathbf{K}_{uu}^e + \mathbf{K}_{uur}^e(\theta) = \mathbf{K}_{uu}^e + \sum_{r=1}^M \bar{\mathbf{K}}_{uu}^e \xi_r(\theta) \quad (4.14b)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e(\theta) = \mathbf{K}_{u\phi}^e + \mathbf{K}_{u\phi r}^e(\theta) = \mathbf{K}_{u\phi}^e + \sum_{r=1}^M \bar{\mathbf{K}}_{u\phi}^e \xi_r(\theta) \quad (4.14c)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e(\theta) = \mathbf{K}_{\phi\phi}^e + \mathbf{K}_{\phi\phi r}^e = \mathbf{K}_{\phi\phi}^e + \sum_{r=1}^M \bar{\mathbf{K}}_{\phi\phi}^e \xi_r(\theta) \quad (4.14d)$$

$$\mathbf{K}_{aero}^e(\theta) = \mathbf{K}_{aero}^e + \mathbf{K}_{aero.r}^e(\theta) = \mathbf{K}_{aero}^e + \sum_{r=1}^M \bar{\mathbf{K}}_{aero}^e \xi_r(\theta) \quad (4.14e)$$

onde \mathbf{M}^e , \mathbf{K}_{uu}^e , $\mathbf{K}_{u\phi}^e$, $\mathbf{K}_{\phi\phi}^e$ e \mathbf{K}_{aero}^e denotam as matrizes de massa e rigidezes determinísticas definidas no terceiro capítulo, enquanto $\mathbf{M}_r^e(\theta)$, $\mathbf{K}_{uur}^e(\theta)$, $\mathbf{K}_{u\phi r}^e(\theta)$, $\mathbf{K}_{\phi\phi r}^e$ e $\mathbf{K}_{aero.r}^e(\theta)$ são as matrizes estocásticas, de maneira que:

$$\bar{\mathbf{M}}^e = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho_k \mathbf{N}^T \mathbf{A}_u^T \mathbf{A}_u \mathbf{N} d\Omega_e \quad (4.15a)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{uu}^e = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_u d\Omega_e \quad (4.15b)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{u\phi}^e = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}_t \mathbf{B}_\phi d\Omega_e \quad (4.15c)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{\phi\phi}^e = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{B}_\phi^T \chi_t \mathbf{B}_\phi d\Omega_e \quad (4.15d)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{aero}^e(\theta) = \int_{\Omega_e} H_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}_x^T \mathbf{N} d\Omega_e \quad (4.15e)$$

onde $H_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\lambda_r} f_r$, sendo λ_r e f_r os autovalores e autofunções resultantes da solução da Integral de Fredholm, dada na Eq. (4.2).

As parcelas estocásticas de cada matriz elementar são apresentadas em sua forma final:

$$\mathbf{M}_r^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \rho_k \mathbf{N}^T \mathbf{A}_u^T \mathbf{A}_u \mathbf{N} d\Omega_x d\Omega_y \quad (4.16a)$$

$$\mathbf{K}_{uur}^e = \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_u d\Omega_x d\Omega_y \quad (4.16b)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi r}^e = \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}_t \mathbf{B}_\phi d\Omega_x d\Omega_y \quad (4.16c)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi r}^e = \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \mathbf{B}_\phi^T \chi_t \mathbf{B}_\phi d\Omega_x d\Omega_y \quad (4.16d)$$

$$\mathbf{K}_{aero.r}^e = \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \mathbf{N}_x^T \mathbf{N} d\Omega_x d\Omega_y \quad (4.16e)$$

De posse das matrizes elementares estocásticas, obtém-se as matrizes globais do problema aeroeletromecânico estocástico e a consequente FRF do sistema:

$$\mathbf{H}(\omega, \theta) = \left[\mathbf{K}_{uu}(\theta) + \mathbf{K}_{aero}(\theta) - \mathbf{K}_{u\phi}(\theta) \mathbf{K}_{shunt} \mathbf{K}_{\phi u}(\theta) - \omega^2 \mathbf{M}(\theta) \right]^{-1} \quad (4.17)$$

onde $\mathbf{K}_{shunt} = \left(\mathbf{K}_{\phi\phi}(\theta) - (1/j\omega) \mathbf{Z}^{-1}(\omega, \theta) \right)^{-1}$.

CAPÍTULO V

METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO ROBUSTA

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos fundamentais a respeito da estratégia de otimização multiobjetivo a ser combinada com a noção de funções de vulnerabilidade para o caso de otimização robusta. Esta metodologia tem como intuito o projeto ótimo e robusto de sistemas aeroeletromecânicos estocásticos de interesse deste trabalho, visando o aumento da velocidade crítica do *flutter*, porém, mantendo-se um bom compromisso com a atenuação dos níveis de vibrações. Para tanto, as funções de vulnerabilidade e o método utilizado no problema de otimização multiobjetivo robusto são definidos com destaque para o algoritmo evolucionário *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA) e para o critério de dominância de Pareto para os sistemas determinístico e estocástico.

5.1. Definição do problema de otimização multiobjetivo

A solução de um problema de otimização multiobjetivo, ao contrário da solução de uma otimização mono-objetivo, não é única, mas constituída de um conjunto de soluções conhecidas como soluções de Pareto (ESCHENAUER, OSYCZKA e KOSHI, 1990). Assim, todas as soluções deste conjunto são ótimas de forma que não se possa melhorar o custo de uma função

objetivo sem a degradação do outro objetivo. Na solução de um problema multiobjetivo, busca-se inicialmente obter o conjunto das soluções de Pareto ou amostrar as soluções diversificadas deste conjunto. Num segundo momento, é feita a escolha de uma solução a partir deste conjunto de acordo com preferências do projetista. O conhecimento prévio do problema e dos fatores que influenciam no mesmo é que irá influenciar na escolha de uma solução em relação às outras.

De forma geral, pode-se definir o POMD da seguinte forma (AIT BRIK, 2005):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \\ g_i(\mathbf{x}) &\leq 0 \quad i = 1, \dots \\ \mathbf{x}_L &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad \mathbf{x} \in C \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é o vetor de funções objetivo a serem otimizadas para $n \geq 2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ é o vetor das variáveis de projeto; $g_i(\mathbf{x})$ são as restrições de igualdade e desigualdade e $C \subset R^k$ é o conjunto realizável (espaço de projeto).

5.2. Escolha do algoritmo de otimização multiobjetivo

De acordo com Ait Brik (2005) existem dois tipos de solução para um problema de otimização multiobjetivo: o primeiro é denominado método de ponderação e o segundo diz respeito aos métodos que permitem encontrar o conjunto das soluções ótimas de Pareto.

O método de ponderação consiste em transformar um problema multiobjetivo num problema mono-objetivo onde as funções custo são ponderadas e a resolução do problema torna-se clássica. Nota-se que nesta solução o projetista precisa intervir desde o começo do problema, exprimindo suas preferências na ponderação das funções custo. Isto pode ser um inconveniente uma vez que o projetista pode não ter informações precisas a respeito do problema ou quando lhe falte experiência. Outro problema é que a solução encontrada é ótima no contexto de uma função mono-objetivo que pode não satisfazer necessariamente todos os critérios multiobjetivos, além de desconsiderar o significado físico do problema de partida (VANDERPLAATS, 1984; DAS e DENNIS, 1997).

No que diz respeito ao segundo tipo de solução do problema multiojetivo, nota-se que existe um certo número de técnicas que permitem encontrar o conjunto das soluções ótimas de Pareto (DAS e DENNIS, 1997; STEUER, 1986), tendo como principal vantagem o fato de suas soluções ótimas independerm das preferências do projetista, além da necessidade do algoritmo ser executado uma única vez, visto que, o conjunto de soluções de Pareto não sofrerá mudanças significativas desde que a descrição do problema não seja alterada.

Neste contexto, os algoritmos evolucionários tornam-se atrativos para os problemas multiobjetivos de interesse deste trabalho, como o conhecido NSGA proposto inicialmente por Srinivas e Deb (1993). Este algoritmo se baseia no conceito de dominância de Pareto de forma que as soluções são ordenadas via procedimento denominado *ranking*, de maneira que, os indivíduos não dominados são posicionados no *Front* nº1 e, em seguida, eliminados da população. O segundo conjunto de indivíduos não dominados é posicionado no *Front* nº 2, e assim por diante. Este procedimento de classificação em *Fronts* ocorre de forma iterativa até que todos os indivíduos da população tenham um *Front* e pode ser melhor compreendido na Fig. (5.1) a qual traz um esquema do algoritmo NSGA para um problema POMD.

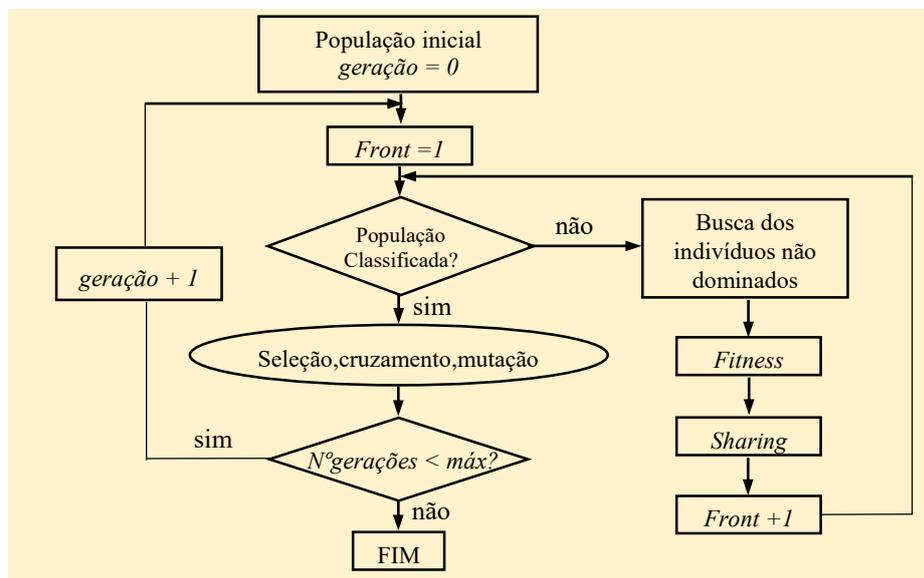


Figura 5.1 – Algoritmo NSGA para um problema POMD (adaptado de de Lima (2007)).

O que existe inicialmente é toda uma população que ainda não foi classificada, sob a qual é realizado um processo de atribuição a cada indivíduo um grau de dominância em relação a todos os outros indivíduos da população. Isso é obtido comparando uns com os outros e assim classificando-os de acordo com o critério de dominância, *ranking*. Atribuídos os valores de *ranking* a todos da população, os indivíduos são classificados em *Fronts* de acordo com os seus valores de dominância. Os melhores classificados no primeiro *Front* e os piores no último *Front*. Esta etapa acontece até que não haja mais indivíduos para classificar.

Um melhor detalhamento do princípio de funcionamento do algoritmo NSGA assim como aplicações pode ser encontrado em trabalhos como o Srinivas e Deb (1993), Deb (2001), de Lima (2007), Lobato (2008), Zambolini-Vicente (2014), Silva (2014), Moreira (2015), dentre outros.

Alocados todos indivíduos em algum *Front*, eles irão agora ser classificados de acordo com a uniformidade com que estas soluções estão distribuídas neste conjunto. Faz-se então a introdução da técnica de formação de *niche*. A técnica de formação de *niche* (*sharing*) é responsável por dividir os valores da função *fitness* ($fit_i = 1/r$, onde i indica o indivíduo da população e r o *ranking* a que ele pertence) pela função *niche* (*sharing*), definida na Eq. (5.2). Evita-se com esta técnica a concentração de soluções em cima de um mesmo ponto ou região além da ordenação dos indivíduos dentro de um mesmo *Front*.

$$sh(d(x_i, x_j)) = \begin{cases} 1 - d(x_i, x_j) / \sigma_{niche} & \text{se } d(x_i, x_j) < \sigma_{niche} \\ 0 & \text{se } d(x_i, x_j) \geq \sigma_{niche} \end{cases} \quad (5.2)$$

onde x_i e x_j são os indivíduos, sh é a função *sharing*, σ_{niche} é a constante definida a priori que determina o intervalo de *niche* e $d(x_i, x_j)$ é a distância euclidiana entre os dois indivíduos.

A alocação dos indivíduos em *Fronts* e a ordenação destas soluções dentro de um mesmo *Front*, pode ser visualizada na Fig. (5.2).

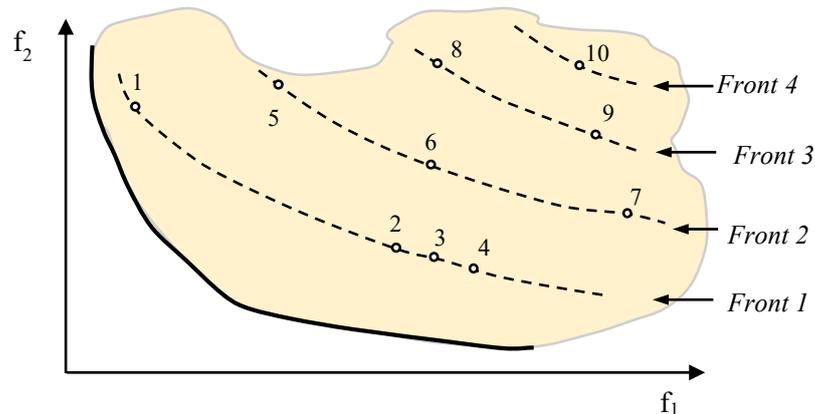


Figura 5.2 – Exemplo de ordenamento por *Front* do NSGA (adaptado de Deb (2001)).

Nota-se que, em geral, um grande número de soluções são encontradas no primeiro *Front* de Pareto, o que pode indicar um problema *a posteriori* ao projetista na escolha final da solução a ser implementada. No entanto, métodos que agrupam as soluções em famílias que têm propriedades estatísticas semelhantes podem auxiliar neste problema (ROSENMAN E GERO, 1985; MORSE, 1980).

Portanto, pode-se afirmar que a principal dificuldade de um problema multiobjetivo não está na busca da solução ótima, mas de um conjunto de soluções satisfatórias, as quais devem ser submetidas a uma operação de classificação. Nesse sentido, diz-se que os métodos de resolução dos problemas multiobjetivo são métodos de auxílio à decisão, porque a escolha final será feita pelo projetista.

5.3. Problema de otimização multiobjetivo robusto

A utilização de técnicas de otimização numérica pode ser dificultada em virtude de alguns fatores como: descontinuidades das funções objetivo a serem otimizadas, sensibilidade diferente para cada variável de projeto, dificuldade na estimativa inicial das variáveis de projeto e a existência de ruídos nas respostas do modelo (VANDERPLAATS, 1984). Neste estudo, salienta-se a preocupação com as incertezas presentes nas variáveis de projeto, de maneira que pequenas variações nos parâmetros estruturais ou do circuito elétrico *shunt* podem acarretar

grandes variações nos objetivos e, conseqüentemente, na velocidade de ocorrência do fenômeno de *flutter*.

A consideração das incertezas nas variáveis de projeto aumenta a complexidade do problema de otimização, porém, se faz necessária na garantia de soluções ótimas e robustas, com vistas a aplicações mais realísticas de interesse prático. Pode-se citar também o fato de que a exigência de um alto grau de precisão na fabricação onera muito o processo de construção dos sistemas otimizados, tornando-os economicamente inviável em muitos casos (MOREIRA, 2015).

Lee e Park (2001) ilustraram a partir da Fig. 5.5 duas soluções ótimas, sendo a solução A denominada ótimo determinístico e a solução B ótimo robusto. Observa-se que o desempenho do ótimo determinístico é melhor que o do ótimo robusto, no entanto, a solução determinística apresenta uma maior susceptibilidade quando o sistema é submetido a pequenas perturbações se comparado ao ótimo B robusto.

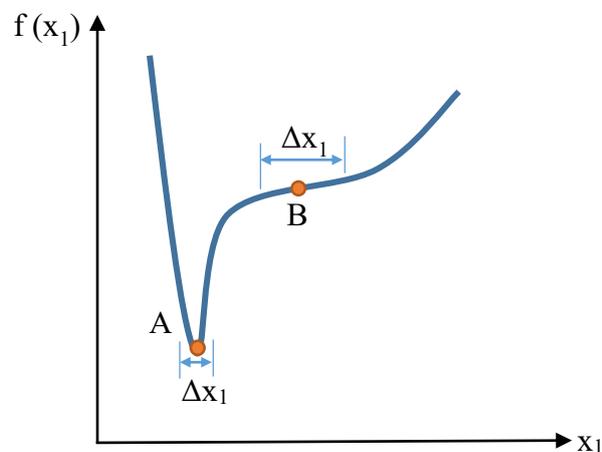


Figura 5.3 – Ilustração de soluções ótimas (adaptado de Lee e Park (2001)).

Neste sentido, a otimização robusta se torna uma metodologia bastante interessante para levar em conta as incertezas não somente nas variáveis de projeto, mas também nas avaliações das restrições, possibilitando a obtenção de soluções menos sensíveis a variações, mesmo sendo consideradas “subótimas”. Para tanto, introduz-se o conceito de função de vulnerabilidade: são aquelas que, de forma simultânea, minimizam as funções custo e minimizam também as

vulnerabilidades dessas funções. Neste caso, o problema POMD (5.1) deve ser alterado para levar em conta também a presença das funções de vulnerabilidade associadas à cada função objetivo. O problema de otimização multiobjetivo robusto (POMR) pode ser definido como em (5.3) e nota-se que, para cada função objetivo $f_i(\mathbf{x})$, existe uma função vulnerabilidade $f_i^v(\mathbf{x})$ associada, que nada mais é que uma medida de dispersão, definida em (5.4) (DE LIMA, 2007).

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}^*(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_1^v(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_2^v(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}), f_n^v(\mathbf{x})) \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots \\ \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad \mathbf{x} \in C \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Assim, se o problema de otimização determinístico possuir duas funções objetivo originais, no problema de robusto, serão quatro funções objetivo: as duas funções objetivo do problema determinístico original e mais duas funções de vulnerabilidade associadas a cada uma das funções objetivo. Define-se a função vulnerabilidade como:

$$f^v = (\sigma_f / \mu_f)^{-1} \quad (5.4)$$

onde σ_f / μ_f é uma medida da dispersão, sendo μ_f a média e σ_f o desvio.

A Fig. 5.4 ilustra uma comparação da metodologia de otimização determinística e da robusta com o intuito de ressaltar que na otimização robusta considera-se as incertezas nos parâmetros de projeto do sistema estocástico a partir das funções de vulnerabilidade. Enfatiza que o problema POMR deve ser capaz de encontrar ótimos estáveis quando os parâmetros do projeto são aleatórios.

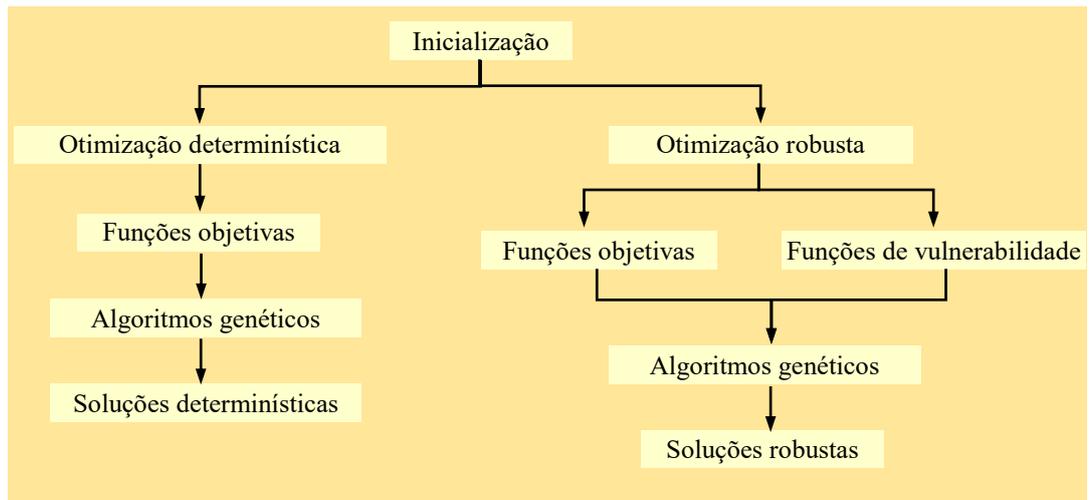


Figura 5.4 – Metodologias de otimização determinística (POMD) e robusta (POMR) (adaptado de Ait Brik (2005)).

Portanto, o problema POMR consiste em avaliar numericamente as funções objetivo e suas funções vulnerabilidade de maneira simultânea, como apresentado na Eq. (5.4), uma vez que não se trata apenas em caracterizar um ótimo, mas de integrar um critério de robustez ao algoritmo de busca.

As funções objetivo a serem utilizadas nos problemas de otimização determinístico e robusto são convenientemente definidas no sexto capítulo.

CAPÍTULO VI

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

6.1. Sistema aeroeletromecânico determinístico

Nesta seção, são apresentados os resultados das simulações numéricas para uma placa de material compósito quadri-apoiada contendo uma camada de PZT acoplado de *shunt* multimodal, como ilustrado na Fig. 6.1.

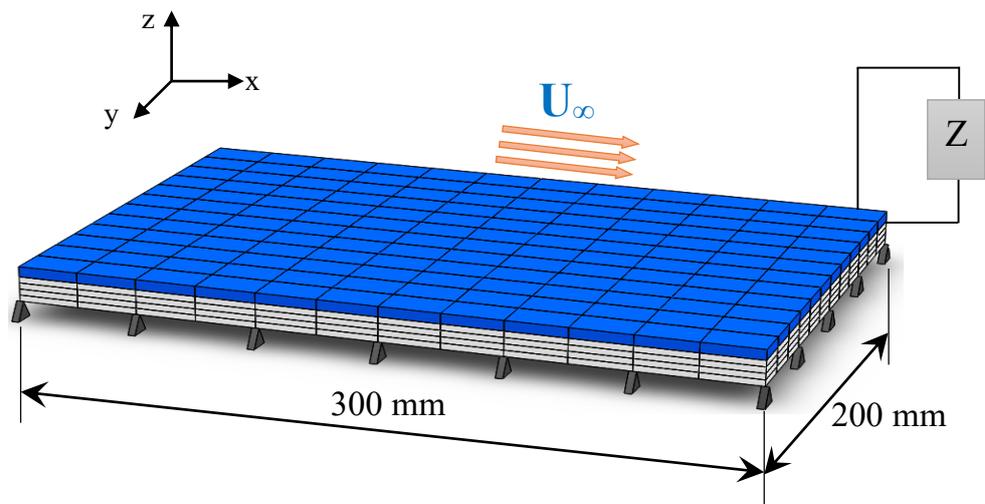


Figura 6.1 – Placa compósita com camada piezolétrica (azul) acoplada de *shunt* sujeita a um fluxo supersônico.

Cada camada do compósito de configuração, $[0^\circ/75^\circ/75^\circ/0^\circ]$, possui 0,30 mm de espessura e o PZT possui espessura de 0,50 mm. A densidade do compósito é 1578 Kg/m^3 e a do PZT é 7700 Kg/m^3 . A placa foi discretizada em uma malha regular de 12×12 EF's.

As propriedades mecânicas do compósito e do PZT são definidas na Tab. 6.1, sendo que, ν_{12} , ν_{13} e ν_{23} são os coeficientes de Poisson; E_1 , E_2 e E_3 , os Módulos de Young e G_{12} , G_{13} e G_{23} , de Cisalhamento. Já as propriedades eletromecânicas e elétricas do elemento piezolétrico, PZTG1195, são dadas na Tab. 6.2 e Tab. 6.3, respectivamente (ZAMBOLINI-VICENTE, 2014):

Tabela 6.1 – Propriedades mecânicas do compósito e do PZT

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
Compósito	173,06	33,09	5,17	9,38	8,27	3,24	0,04	0,25	0,17
PZT G1195	69,00	69,00	69,00	24,20	24,20	24,20	0,33	0,33	0,33

Tabela 6.2 – Propriedades eletromecânicas do PZT

Material	e_{15} (C/m ²)	e_{24} (GPa)	e_{31} (GPa)	e_{32} (GPa)	e_{33} (GPa)
PZT G1195	0,00	0,00	-18,30	-9,01	-9,01

Tabela 6.3 – Propriedades elétricas do PZT

Material	χ_{11} (F/m)	χ_{22} (F/m)	χ_{33} (F/m)
PZT G1195	$-1,59 \times 10^{-8}$	$-1,59 \times 10^{-8}$	$-1,59 \times 10^{-8}$

Numa primeira fase, são apresentados os resultados das simulações realizadas com a placa da Fig. 6.1 afim de demonstrar a atuação dos circuitos *shunt* multimodais no aumento do ganho aeroelástico, em termos da supressão do *flutter*, e redução dos níveis de vibração do sistema aeroeletromecânico determinístico. Em seguida, serão introduzidas as incertezas nos parâmetros da estrutura e do circuito *shunt*, com o objetivo de verificar os procedimentos de modelagem do sistema aeroeletromecânico estocástico, além da avaliação da influência das mesmas nas respostas dinâmicas e aerodinâmicas. Por último, a otimização dos parâmetros do

shunt é realizada, tanto de forma determinística quanto robusta com o intuito de se encontrar a melhor configuração do circuito, levando-se em conta o compromisso entre ganho aeroelástico e redução dos níveis de vibrações.

6.1.1. Verificação da modelagem determinística da placa compósita sem o PZT

Primeiramente, foi realizada a validação do código numérico computacional implementado em ambiente MATLAB[®] por confrontação com resultados obtidos pela utilização do software ANSYS[®]. O objetivo foi confrontar as frequências naturais e FRFs obtidas no MATLAB e no ANSYS como apresentado na Tab. 6.4 e Fig. 6.2, respectivamente. Neste caso, foi desconsiderada a presença do PZT e *shunt* na placa da Fig. 6.1, resultando numa placa compósita de 4 camadas. O EF utilizado na modelagem via ANSYS[®] foi o SHELL181 que é o mais empregado na modelagem de placas compósitas e sanduíches.

Tabela 6.4 – Comparação entre as frequências naturais da placa compósita sem o PZT dos modelos Matlab e ANSYS

Freq. Nat. [Hz]	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆	f ₇	f ₈
Matlab [®]	43,77	117,36	127,50	174,45	254,51	274,30	286,64	311,70
ANSYS [®]	43,45	116,76	128,04	173,89	255,98	279,36	287,12	314,54

Assim, nota-se uma grande proximidade entre os valores obtidos, principalmente, para os dois primeiros modos que são os de interesse devido a sua coalescência quando a estrutura é submetida a carregamento aerodinâmico. Desta maneira, o modelo desenvolvido em Matlab[®] é considerado suficiente para as análises e simulações aeroelásticas a serem realizadas.

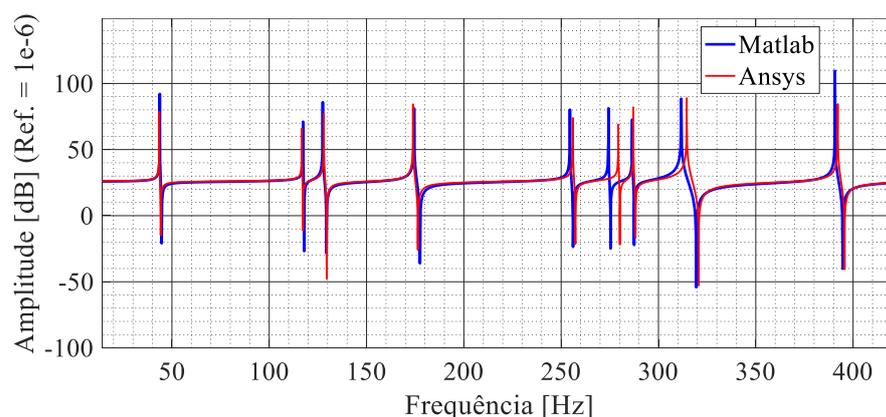


Figura 6.2 – Comparação entre as FRFs da placa compósita sem PZT dos modelos MATLAB[®] e ANSYS[®].

Nesta fase, foi também realizado um estudo de convergência da malha de EF's, uma vez que uma malha muito refinada pode dificultar a otimização robusta envolvendo o modelo aeroeletromecânico estocástico, mesmo quando métodos de redução de modelos são utilizados. Para realização deste estudo, levou-se em consideração os modos de interesse: primeiro e segundo, além de uma malha contendo 30x30 EF's como sendo a referência. As frequências naturais para cada malha foram salvas e posteriormente utilizadas no cálculo do erro relativo, como mostrado na Fig. 6.3. Pode-se notar que a partir da malha 12x12, o erro relativo de ambos os modos é menor que 1%. Assim, qualquer malha acima desta, satisfaria uma condição de erro menor que 1%. Portanto, será adotado neste trabalho a malha 12x12.

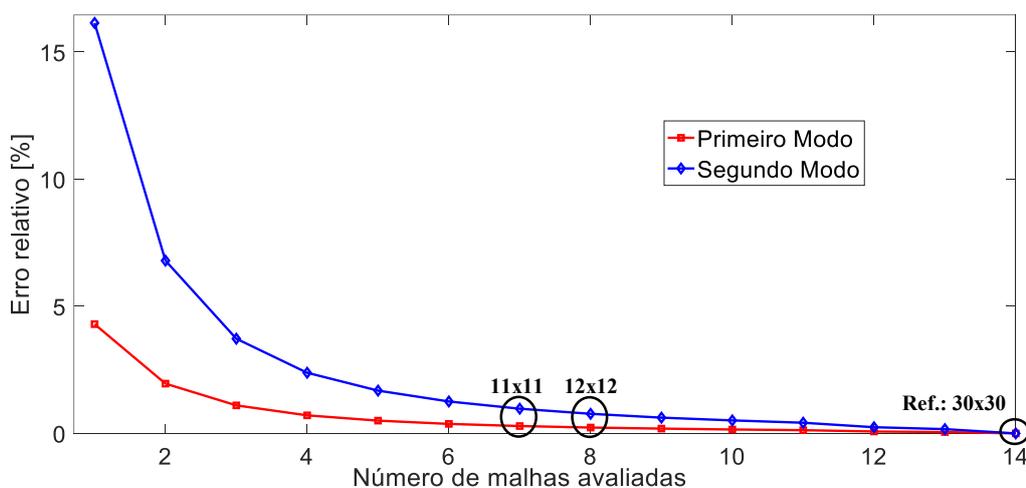


Figura 6.3 – Análise de convergência do modelo de placa compósita sem o PZT.

6.1.2. Redução de modelos

Nesta seção, será avaliada a capacidade do método de redução proposto neste trabalho, conforme apresentado na seção 3.5, em aproximar os comportamentos dinâmico e aerodinâmico do sistema aeroeletromecânico determinístico. Neste caso, optou-se por construir os diagramas V-g e as FRFs dos sistemas completo e reduzido, como apresentados na Fig. 6.4.

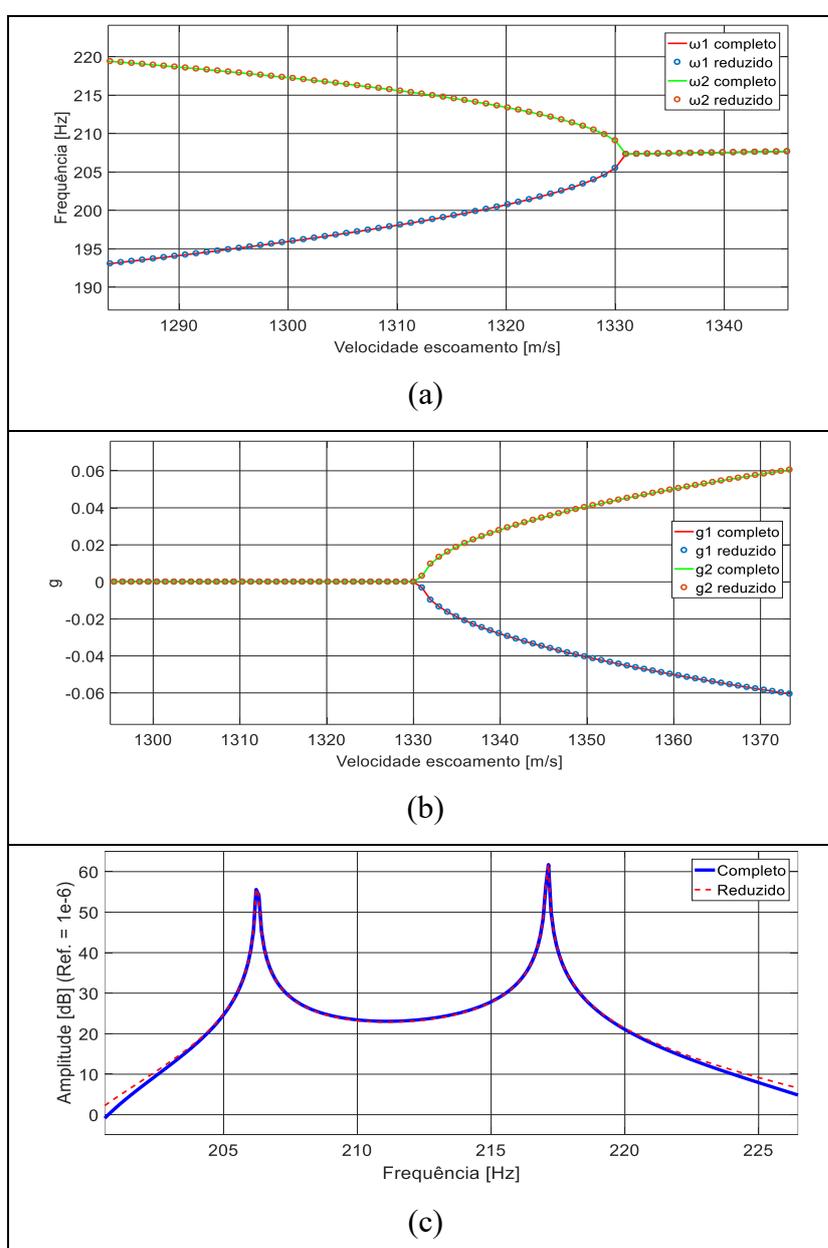


Figura 6.4 – Comparação entre os diagramas V-g (a,b) e FRFs (c) dos sistemas completo e reduzido.

A partir da análise visual da Fig. 6.4, percebe-se claramente a capacidade do método de redução iterativo em aproximar as respostas dinâmicas e aerodinâmicas do sistema completo. Além disso, a Tab. 6.5 permite concluir sobre a eficiência do método em termos da redução do custo computacional de cálculo no contexto determinístico para cada uma das respostas, notando-se um ganho computacional médio de aproximadamente 98%.

Tabela 6.5 – Gasto de tempo no cálculo das respostas dos modelos completo e reduzido

	Tempo [s]	Gdl's
Completo	763,76	2309×2309
Reduzido	17,19	31×31

6.1.3. Predição flutter

Este estudo visa descobrir, dentre os vários modos da estrutura da Fig. 6.1, quais deles tendem a se coalescer primeiro quando a mesma está sujeita a um fluxo supersônico com velocidade de escoamento crescente. Vale ressaltar que nesta etapa a estrutura compósita contém a camada de PZTG1195, mas sem que o mesmo esteja acoplado de circuito *shunt*. A Fig. 6.5 mostra a variação dos quinze primeiros amortecimentos modais (g) em função da velocidade do fluxo. Destaque foi dado aos dois primeiros amortecimentos modais: em azul, referente ao primeiro modo e em verde, referente ao segundo modo. O restante na cor preta.

No caso de uma estrutura sem amortecimento, o valor do amortecimento modal, g , permanece igual a zero até o ponto de *flutter*. A partir do ponto de coalescência, os valores de g_1 (amortecimento modal do primeiro modo) e g_2 (amortecimento modal do segundo modo) não são mais iguais a zero, como pode ser observado na Fig. 6.5. Assim, nota-se que a velocidade de ocorrência deste fenômeno acontece a 1331 m/s e a coalescência se dá entre os dois primeiros modos de vibrar da estrutura.

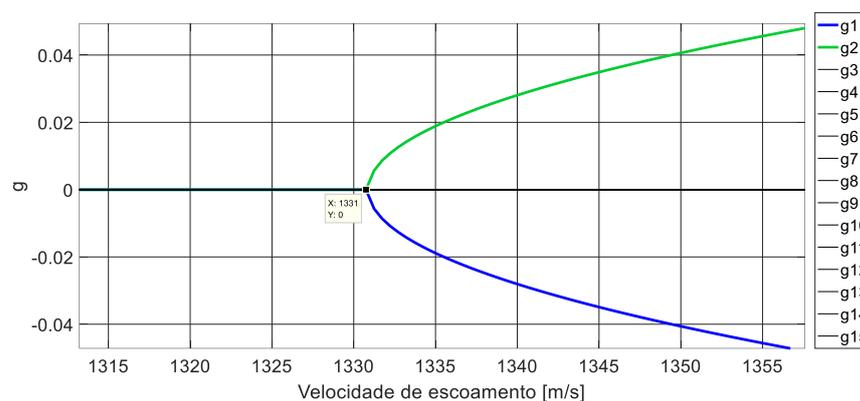


Figura 6.5 – Amortecimentos modais da placa composta com PZT sujeita a um fluxo supersônico.

Outra forma de identificar o *flutter* é através da construção das FRFs do sistema para cada passo de velocidade do escoamento, como mostra a Fig. 6.6. Nota-se que à medida que a velocidade aumenta, as ressonâncias relativas à primeira e à segunda frequências naturais se aproximam. A curva de FRF em destaque apresenta o momento imediatamente após o *flutter*, ilustrando onde ocorreu a instabilidade.

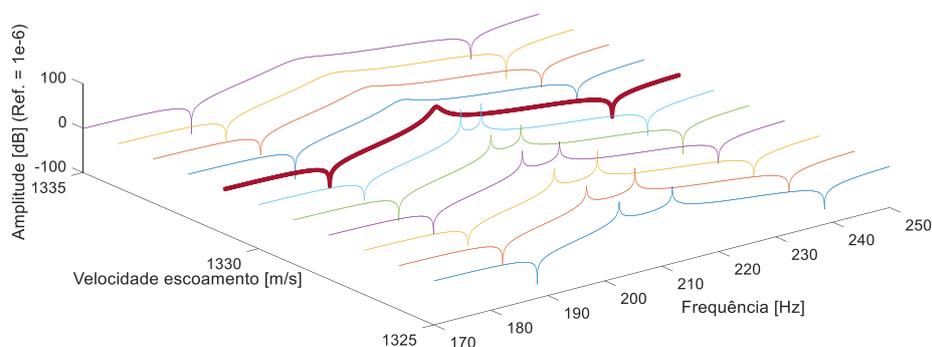


Figura 6.6 – Funções de resposta em frequência para cada passo de velocidade.

6.1.4. Inclusão do circuito elétrico *shunt* multimodal

Para fins de atenuação das vibrações e consequente ganho aeroelástico do sistema aeroeletromecânico em questão, utilizou-se do circuito elétrico *shunt* multimodal em paralelo. Nesta etapa, a sintonização do circuito foi realizada através das equações de Hagood e Flotow

(1991) combinadas com as equações de Wu (1998). Esta sintonização é feita na velocidade de ocorrência do *flutter* para a condição “*Open Circuit*”, que é a situação em que há a presença mecânica do material piezolétrico sobre a placa, mas não há atuação elétrica. Assim, os valores dos parâmetros do circuito foram calculados de acordo com o procedimento apresentado na seção 3.3. Vale salientar que os valores da Tab. 6.6 foram utilizados nas simulações dos problemas determinísticos e estocásticos.

Tabela 6.6 – Parâmetros nominais do circuito elétrico *shunt* utilizado

Parâmetros ótimos via Hagood e Von Flotow (1991) e Wu (1998)	R_1 [Ω]	L_1 [H]	R_{2l} [Ω]	L_{2l} [H]	L_{1b} [H]	C_{1b} [nF]
	243,84	0,21	13933,79	42,11	1,28	470,00

Pela análise da Tab. 6.6, nota-se um alto valor para a indutância L_{2l} . Assim, para uma montagem experimental seria necessário o uso de impedâncias sintéticas dos tipos Riordan e Antoniou como investigadas no trabalho de Viana (2005).

Pela análise da Fig. 6.7, nota-se claramente a grande capacidade de atenuação passiva dos níveis de vibrações proporcionada pelo circuito multimodal paralelo para os dois primeiros modos de vibração da estrutura.

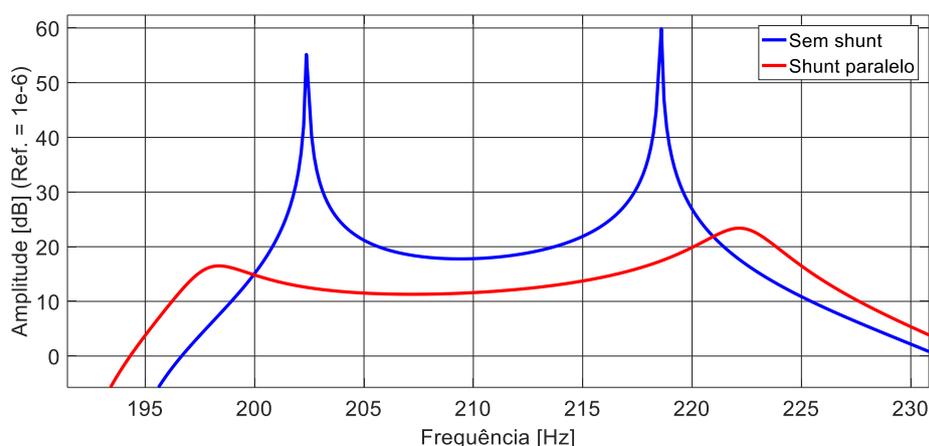


Figura 6.7 – FRFs para a velocidade de escoamento de 1300 m/s.

Em se tratando de ganho aeroelástico, os resultados da Fig. 6.8 mostram ganhos mais modestos. A velocidade crítica passou de 1331 m/s, sem nenhum tipo de amortecimento, para 1348 m/s para o sistema aeroeletromecânico amortecido via *shunt*, como visto na Tab. 6.7. Este pequeno ganho aeroelástico pode ser explicado pela sintonização do circuito, de forma que, as equações para o cálculo de seus parâmetros foram obtidas com o intuito de atenuar somente as vibrações, não considerando a coalescência dos modos como sendo também um objetivo. Assim, será apresentada em seções subsequentes, a otimização dos parâmetros do circuito, com o intuito de melhorar a velocidade crítica de ocorrência do *flutter* mantendo o melhor compromisso com a amplitude dos modos em questão.

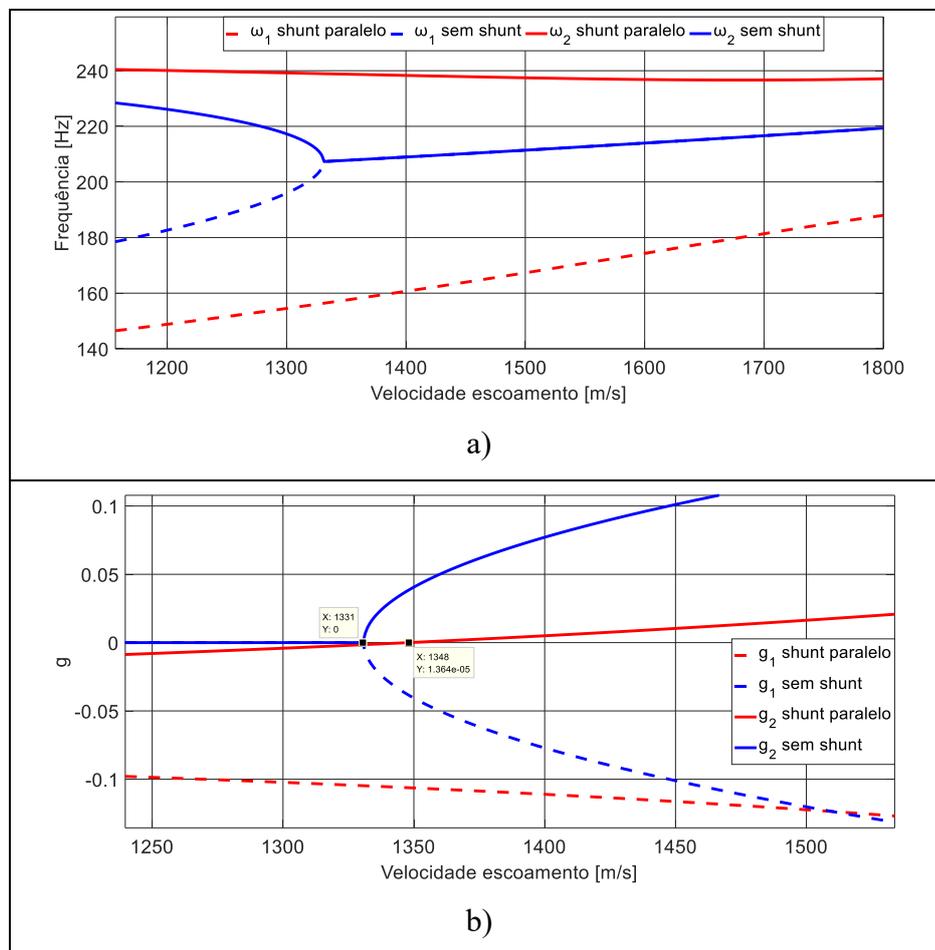


Figura 6.8 – Diagrama V-g: a) Duas primeiras frequências naturais variando com a velocidade; b) Amortecimentos modais para os dois primeiros modos.

Tabela 6.7 – Comparação resultados sistema sem *shunt* versus *shunt* paralelo

	Velocidade <i>flutter</i> [m/s]	Amplitude [dB] 1º modo	Amplitude [dB] 2º modo
Sem <i>shunt</i>	1331	55,17	59,84
<i>Shunt</i> paralelo	1348	16,49	23,39

6.2. Sistema aeroeletromecânico estocástico

Nesta seção, é dada ênfase às simulações do problema estocástico aeroeletromecânico para avaliar a influência das incertezas presentes tanto nos parâmetros estruturais, que foram fatorados das matrizes de massa e rigidez, como nos parâmetros do circuito elétrico *shunt*. Neste caso, a determinação dos domínios do problema estocástico foi realizada de acordo com de Lima, Rade e Bouhaddi (2010) e Koroishi et al. (2012) sendo definidos conforme seus comprimentos de correlação, previamente apresentados na Fig. 4.1, como iguais ao tamanho do EF e apresentados na Tab. 6.8:

Tabela 6.8 – Domínios estocásticos e comprimentos de correlação

Domínios [mm]		Comp. de correlação [mm]	
Ω_x	Ω_y	$L_{cov,x}$	$L_{cov,y}$
[0,00; 25,00]	[0,00; 16,67]	25,00	16,67

Utilizando-se da expansão de Karhunen-Loève na discretização dos campos estocásticos definida na Eq. (4.13), houve a necessidade, em um primeiro momento, da escolha do número de termos da série. Assim, de acordo com a literatura (GHANEM e SPANOS, 1991; SUDRET e DER KIUREGHIAN, 2000; SUDRET, 2007; DE LIMA; 2007; KOROISHI, 2012) constatou-se que a utilização de dez termos na expansão da série seria adequado. Os trabalhos nesta área atestam que a partir de quatro termos já se pode garantir uma convergência razoável. Fixando-se o número de termos da série, $M = 10$, o próximo passo foi a utilização do Método de Monte Carlo como solver estocástico combinado com a amostragem por Hipercubo Latino. Um intervalo de confiança de 99,73% (três desvios-padrão) foi utilizado na amostragem dos parâmetros aleatórios. Conforme exige a expansão de Karhunen-Loève, os parâmetros como espessuras, indutâncias, resistências, capacitâncias foram amostrados seguindo uma

distribuição Gaussiana. Como não podem assumir valores negativos, foram gerados conforme valores máximos e mínimos atribuídos como parâmetros de entrada na função de amostragem (truncamento).

Na sequência, o interesse foi o de verificar a convergência da variabilidade das respostas estocásticas. Assim, foi realizado para cada caso um teste de convergência com intuito de identificar o número mínimo de amostras por meio da seguinte relação:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} |F_j(\omega, \Omega, \theta) - Fmed_j(\omega, \Omega, \theta)|^2} \quad (6.1)$$

onde n_s é o número de amostras a serem utilizadas na simulação de Monte Carlo, F_j é a resposta estocástica e $Fmed_j$ é a resposta média.

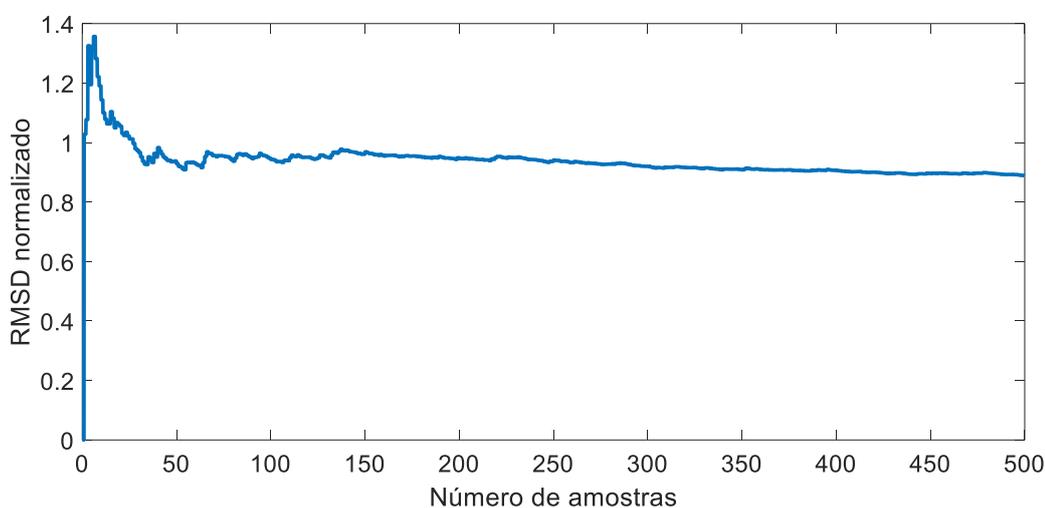


Figura 6.9 – Gráfico de convergência ao se considerar todos elementos do circuito como incertos e 20% de incerteza associada a cada parâmetro.

Neste caso, as respostas estocásticas são as FRFs e os diagramas V-g (amortecimento modal e frequências naturais em função da velocidade do escoamento). Foi observado que todas as respostas estocásticas do sistema convergem a partir de 200 amostras. Porém, para se ter

melhor confiança, um total de 500 amostras foi utilizado em cada simulação de Monte Carlo. A título de ilustração, a Fig. 6.9 apresenta o gráfico de convergência do envelope de FRFs para o caso onde se considerou todos elementos do circuito como incertos e, com uma incerteza associada a cada parâmetro de 20% que, como será visto na sequência, representa o pior cenário. Gráficos de convergência semelhantes foram obtidos para todos casos e cenários simulados.

Na sequência são apresentadas as simulações realizadas para vários cenários de incertezas relativos aos parâmetros incertos e suas dispersões.

6.2.1. Influência das incertezas nos parâmetros estruturais

Segundo Setter (2002), o nível de incertezas na espessura dos materiais piezelétricos depende diretamente da qualidade no processo de fabricação dos mesmos. Neste sentido, partindo-se de catálogos disponíveis dos fabricantes PI – Piezotechnology[®] e Midé Technology Corporation[®], será considerado que a tolerância na espessura do elemento PZTG1195 pode atingir 5%, como ilustrado na Fig.6.10.

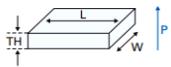
 <p>Plate / block</p> <p>Length L: 1 to 80 mm, Width W: 1 to 60 mm, Thickness TH: 0.1 to 30 mm</p> <p>a)</p>	<p>Standard tolerances</p> <p>Dimensions, as fired ± 0.3 mm resp. ± 3 %</p> <p>Length L, width W (dimensions; tolerance) < 15 mm; ± 0.15 mm < 40 mm; ± 0.25 mm < 20 mm; ± 0.20 mm < 80 mm; ± 0.30 mm</p> <p>Outer diameter OD, inner diameter ID (dimensions; tolerance) < 15 mm; ± 0.15 mm < 40 mm; ± 0.25 mm < 20 mm; ± 0.20 mm < 80 mm; ± 0.30 mm</p> <p>Thickness TH (dimensions; tolerance) < 10 mm; ± 0.05 mm < 40 mm; ± 0.15 mm < 20 mm; ± 0.10 mm < 80 mm; ± 0.20 mm</p> <p>b)</p>
--	---

Figura 6.10 – Tolerância no parâmetro de espessura h_{pzt} : a) Faixa de valores de espessura; b) Tolerância conforme faixa de espessura (adaptado de PI Group (2015)).

No que diz respeito a compósitos, uma série de trabalhos retrata algumas fontes de incertezas no processo de fabricação dos mesmos como no trabalho de Alves (2017). Essas incertezas influenciam, principalmente, a espessura das camadas e os ângulos de direções das fibras. O autor considera um nível de incerteza da ordem de 3%, para ambos os parâmetros. Neste trabalho, o valor limite da dispersão relativa será considerado de 10%, já que valores de incertezas bastante superiores acarretariam não em uma perturbação, mas uma modificação estrutural (LIMA Jr., 1999). As respostas estocásticas foram obtidas a partir do valor médio da espessura do PZT, $h_{pzt} = 0,50$ mm, do valor médio da espessura de cada camada do compósito, $h_{comp} = 0,30$ mm e do valor médio dos ângulos de suas fibras $[0^\circ/75^\circ/75^\circ/0^\circ]$.

Tabela 6.9 – Parâmetros incertos da estrutura e cenário de incerteza analisado

Parâmetros incertos									
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
Cenário	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%

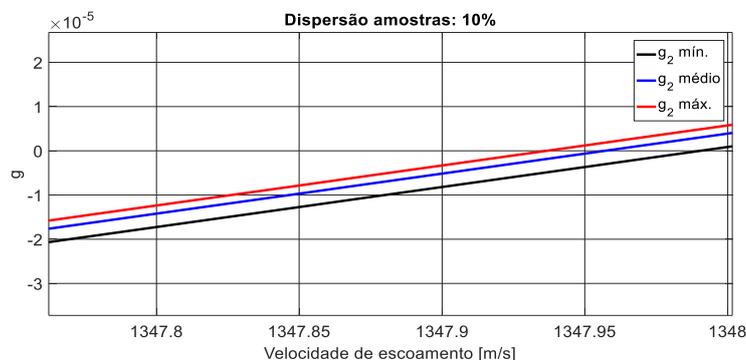


Figura 6.11 – Envelope amortecimento modal: detalhe da região de interesse.

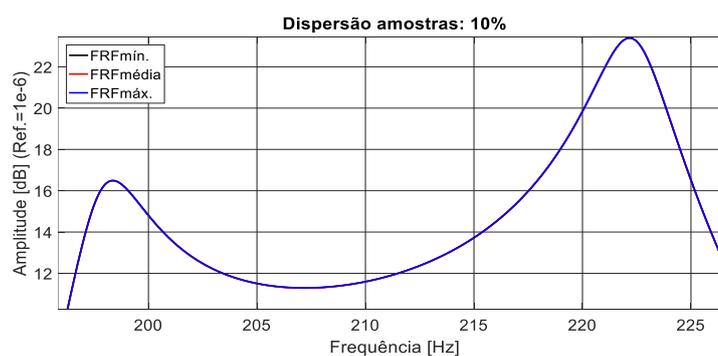


Figura 6.12 – Envelope das FRFs para velocidade escoamento de 1300 m/s.

As Figs. 6.11 e 6.12 apresentam os envelopes das soluções em termos do amortecimento modal na região próxima ao *flutter* e das amplitudes das FRFs do sistema aeroeletromecânico estocástico. De uma maneira geral, percebe-se uma pequena influência dos parâmetros incertos nas respostas estocásticas do sistema. Em particular, no ponto de ocorrência do *flutter*, nota-se que a velocidade mínima, foi de 1347,95 e a máxima de 1348,00 m/s, como visto na Fig. 6.11.

Como possíveis explicações para a pequena influência dos parâmetros estruturais incertos nas respostas aeroeláticas e dinâmicas do sistema se tem a ordem de grandeza dos parâmetros estruturais, principalmente as espessuras das camadas, as quais são da ordem de 10^{-3} metros. Porém, deve-se citar também as condições de contorno adotadas. Sabe-se que uma placa quadri-apoiada restringe vários gdl's e uma outra configuração, como livre-livre, pudesse levar à uma maior influência destes parâmetros. Para tanto, esta análise de sensibilidade fica como um trabalho futuro e, nas simulações que seguem, são consideradas incertezas somente nos parâmetros do controle (circuito *shunt*).

6.2.2. Influência das incertezas nos parâmetros do circuito *shunt*

No caso dos parâmetros do circuito, conforme Boylestad (2019), na prática, a série E6 de resistores padrões disponíveis comercialmente apresentam 20% de tolerância em relação ao valor nominal de resistência. O mesmo vale para indutores e capacitores. A Tab. 6.10 define os cenários de incertezas nos parâmetros do circuito a serem investigados.

Tabela 6.10 – Parâmetros incertos do circuito *shunt* e cenários de incerteza analisados

Conjuntos simulações	Parâmetros incertos					
	R_1 [Ω]	L_1 [H]	R_{21} [Ω]	L_{21} [H]	L_{1b} [H]	C_{1b} [nF]
1°	R_1 [Ω]	L_1 [H]	R_{21} [Ω]	L_{21} [H]	L_{1b} [H]	C_{1b} [nF]
2°	R_1 [Ω]	L_1 [H]	-	-	-	-
3°	-	-	R_{21} [Ω]	L_{21} [H]	-	-
4°	-	-	-	-	L_{1b} [H]	C_{1b} [nF]

As tabelas 6.11 a 6.14 apresentam os valores nominais de cada variável incerta do circuito e os cenários de dispersão dos parâmetros para cada conjunto de simulações da Tab. 6.10.

Tabela 6.11 – Níveis de incertezas para o 1º conjunto de simulações

Parâmetros incertos	R₁ [Ω]	L₁ [H]	R_{2l} [Ω]	L_{2l} [H]	L_{1b} [H]	C_{1b} [nF]
Valores nominais	243,84	0,21	13933,79	42,11	1,28	470,00
Cenários dispersão amostras						
Cenário 1	5%	5%	5%	5%	5%	5%
Cenário 2	20%	20%	20%	20%	20%	20%

Tabela 6.12 – Níveis de incertezas para o 2º conjunto de simulações

Parâmetros incertos	R₁ [Ω]	L₁ [H]
Valores nominais	243,84	0,21
Cenários de dispersão		
Cenário 1	5%	5%
Cenário 2	20%	20%

Tabela 6.13 – Níveis de incerteza para o 3º conjunto de simulações

Parâmetros incertos	R_{2l} [Ω]	L_{2l} [H]
Valores nominais	13933,79	42,11
Cenários de dispersão		
Cenário 1	20%	20%

Tabela 6.14 – Níveis de incerteza para o 4º conjunto de simulações

Parâmetros incertos	C_{1b} [nF]	L_{1b} [H]
Valores nominais	470,00	1,28
Cenários de dispersão		
Cenário 1	20%	20%

- Respostas estocásticas - 1º conjunto de simulações

As Figs. 6.13 e 6.14 apresentam os envelopes do amortecimento modal e das amplitudes das FRFs para o primeiro conjunto de simulações. Para facilitar a análise dos resultados, a Tab. 6.15 traz os valores numéricos referentes aos extremos máximos e mínimos dos envelopes, sendo que, entre parênteses, estão computados os valores dessas diferenças.

Tabela 6.15 – Valores numéricos dos envelopes para todos parâmetros do circuito incertos

Cenário	Dispersão amostras	Env. Velocidade flutter [m/s]	Env. Amplitude [dB] 1º modo	Env. Amplitude [dB] 2º modo
1	5%	1277 - 1428 (151)	15,04 - 18,20 (3,16)	22,04 - 25,07 (3,03)
2	20%	1131 - 1827 (696)	12,32 - 28,99 (16,67)	19,24 - 33,82 (14,58)

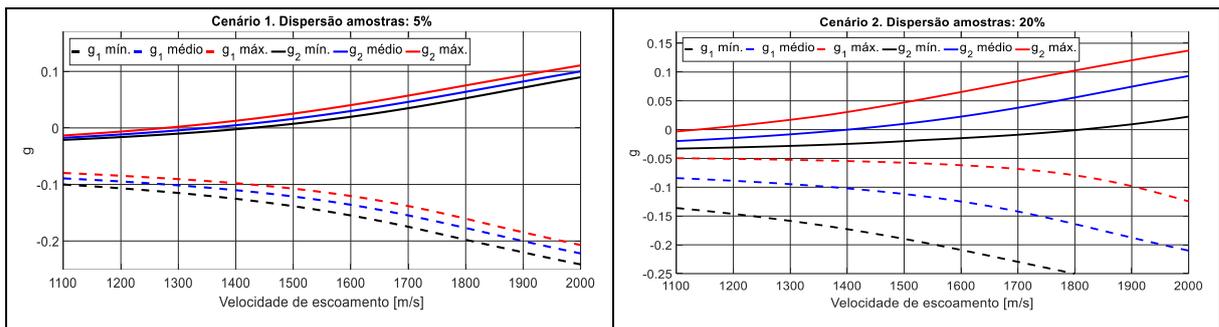


Figura 6.13 – Envelopes amortecimentos modais: todos parâmetros do circuito incertos.

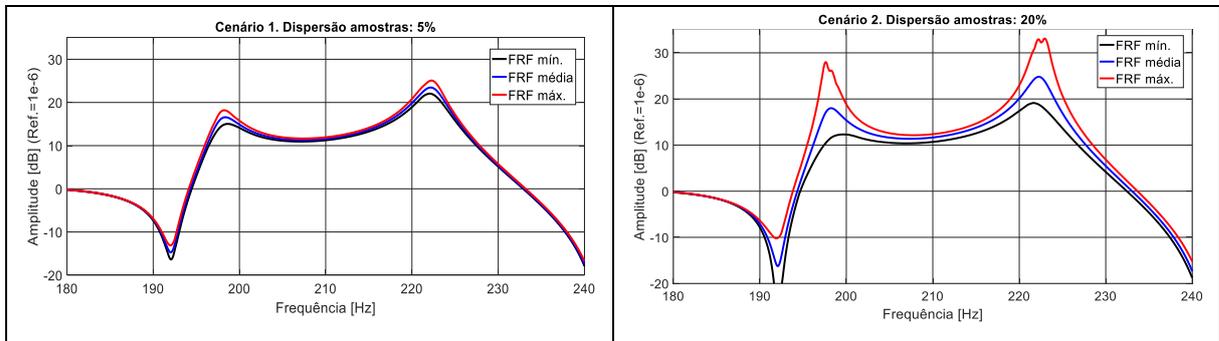


Figura 6.14 – Envelopes das FRFs: todos parâmetros do circuito incertos.

As Figs. 6.13 e 6.14 mostram que os intervalos de confiança dos amortecimentos modais e das amplitudes das FRFs, delimitados pelos extremos estatísticos, expandiram com o aumento das incertezas nos parâmetros do circuito. Além disso, as respostas estocásticas médias encontram-se, para todos os cenários, dentro do envelope de soluções, demonstrando uma boa predição do modelo aeroeletromecânico nominal quanto aos níveis de incerteza investigados.

- Respostas estocásticas - 2º conjunto de simulações

Como visto na Tabela 6.12, neste conjunto de simulações, apenas os parâmetros do circuito responsáveis pelo primeiro modo, R_1 e L_1 , são incertos. O restante dos parâmetros do circuito são definidos como sendo os seus valores nominais.

Tabela 6.16 – Valores numéricos dos envelopes para R_1 e L_1 incertos

Cenário	Dispersão amostras	Env. Velocidade flutter [m/s]	Env. Amplitude [dB]	
			1º modo	2º modo
1	5%	1284 - 1426 (142)	15,17 - 18,19 (3,02)	22,06 - 25,02 (2,96)
2	20%	1157 - 1839 (682)	12,31 - 28,00 (15,69)	19,14 - 33,00 (13,86)

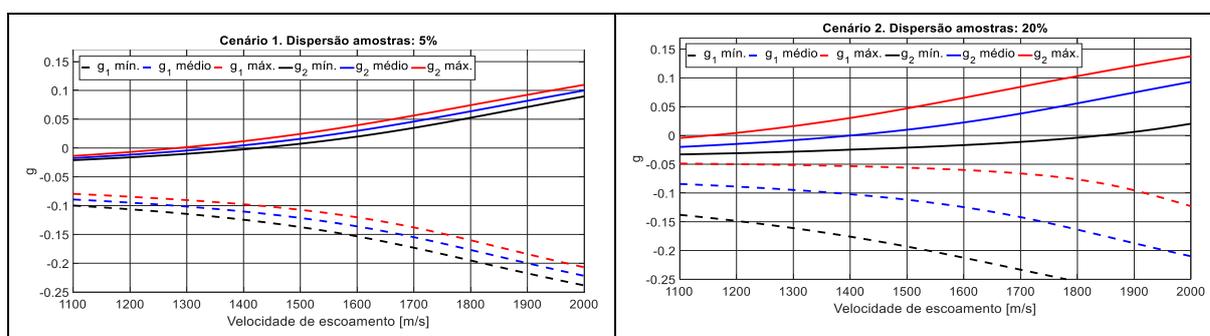


Figura 6.15 – Envelopes amortecimentos modais: R_1 e L_1 incertos.

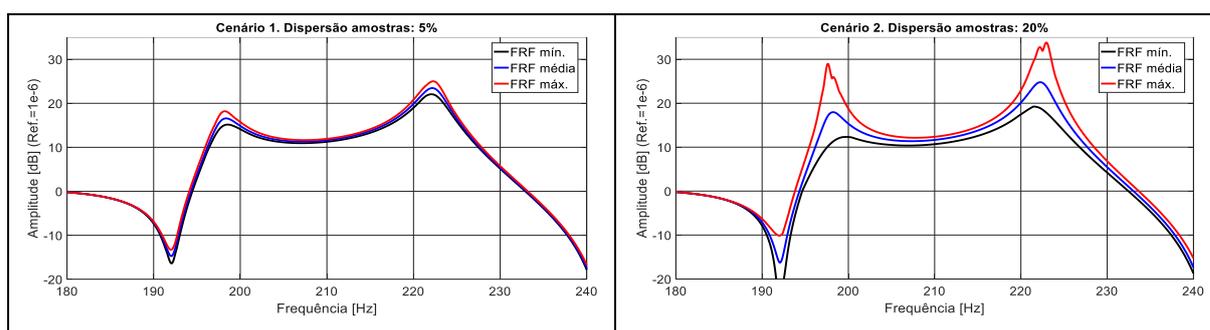


Figura 6.16 – Envelopes das FRFs: R_1 e L_1 incertos.

A partir dos envelopes das respostas estocásticas do 2º conjunto de simulações, nota-se que, a maior influência na variabilidade das respostas se dá por conta dos parâmetros ligados ao primeiro modo de vibração, R_1 e L_1 . Esta maior influência se deve, em partes, pelo fato do segundo modo de vibração ser um modo de torção que, sem o carregamento aerodinâmico, não

consegue ser atuado pelo circuito. Com a presença do carregamento aerodinâmico, a dinâmica do sistema é modificada, havendo a interação das forças aerodinâmicas e o segundo modo passa a ser atuado, mas, permanece a maior influência das variáveis relacionadas ao primeiro modo.

Através da análise dos resultados das Tabs. 6.16 e 6.15, fica evidente o risco de piora na velocidade de *flutter*. Essa piora pode ser observada no extremo mínimo dos envelopes de todos os cenários de dispersão. O pior caso é o cenário 2 da Tab. 6.15 cujo extremo mínimo apresenta uma velocidade de *flutter* de 1131 m/s, sendo que, a velocidade crítica do sistema sem amortecimento é de aproximadamente 1331 m/s. Ou seja, neste caso, a presença do circuito pode levar à uma instabilidade aeroelástica da estrutura.

- Respostas estocásticas - 3° conjunto de simulações

Este conjunto de simulações diz respeito aos parâmetros do circuito responsáveis pelo segundo modo, R_{21} e L_{21} , como visto na Tab. 6.13. Vale ressaltar que, neste ponto, foi considerado apenas o pior caso referente ao de maior dispersão, uma vez que é pequena a influência desses parâmetros na variabilidade das respostas aleatórias do sistema.

Os envelopes contendo as respostas estocásticas deste conjunto de simulações podem ser observados nas Figs. 6.17 e, os valores numéricos dos envelopes, na Tab. 6.17.

Tabela 6.17 – Valores numéricos dos envelopes para R_{21} e L_{21} incertos

Cenário	Dispersão amostras	Env. Velocidade <i>flutter</i> [m/s]	Env. Amplitude [dB] 1° modo	Env. Amplitude [dB] 2° modo
1	20%	1413-1418 (5)	16,48-16,50 (0,02)	23,33- 23,47 (0,14)

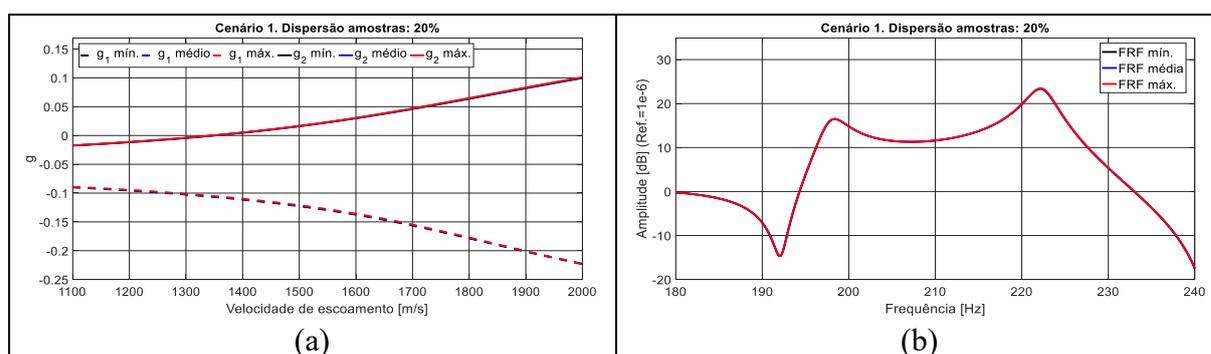


Figura 6.17 – Envelopes (a) amortecimentos modais e (b) FRFs: R_{21} e L_{21} incertos.

Novamente, a pequena influência de R_{21} e L_{21} pode ser explicada pelo fato do segundo modo de vibração da placa ser um modo de torção.

- Respostas estocásticas - 4º conjunto de simulações

Este conjunto de simulações diz respeito aos parâmetros responsáveis pelo circuito de bloqueio, C_{1b} e L_{1b} , como definido na Tab. 6.14, sendo considerado também apenas o cenário de maior dispersão.

Tabela 6.18 – Valores numéricos dos envelopes para C_{1b} e L_{1b} incertos

Cenário	Dispersão amostras	Env. Velocidade flutter [m/s]	Env. Amplitude [dB] 1º modo	Env. Amplitude [dB] 2º modo
1	20%	1408 – 1416 (8)	16,43-16,58 (0,15)	23,30- 23,46 (0,16)

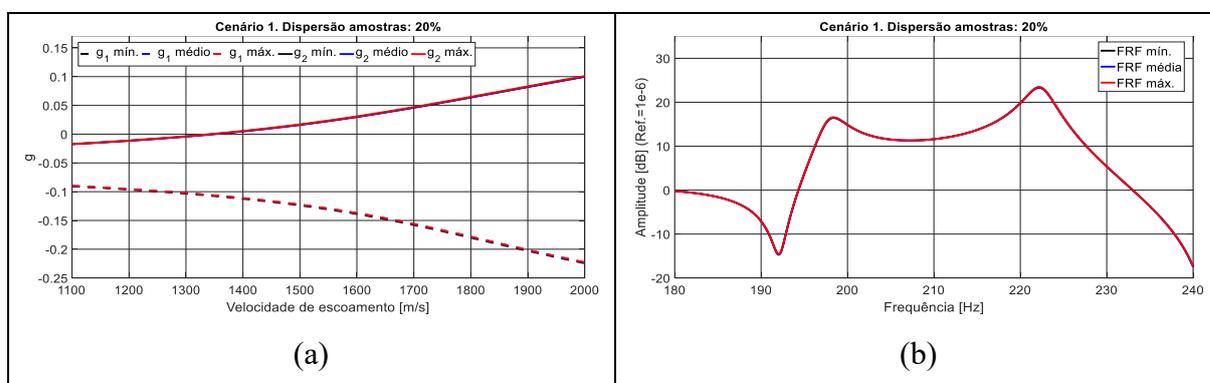


Figura 6.18 – Envelopes (a) amortecimentos modais e (b) FRFs: C_{1b} e L_{1b} incertos.

O circuito de bloqueio é apenas um filtro que inativa a atuação do primeiro modo quando o segundo modo está sendo amortecido e sua pequena influência na variabilidade das respostas estocásticas se deve pelo fato dele não ter uma relação diretamente com as respostas do sistema, mas, uma função interna que garante o correto funcionamento do *shunt*.

6.3. Problema de otimização multiobjetivo determinístico (POMD)

Nesta seção, será empregado o método POMD para otimizar o problema determinístico. Neste caso, pretende-se usar a otimização para aumentar a velocidade de *flutter* (ganho aeroelástico), porém, mantendo-se a amplitude das vibrações do sistema em um nível aceitável. Portanto, busca-se o melhor compromisso entre esses dois objetivos. A primeira estratégia é aumentar a velocidade em que o amortecimento modal, g , cruza o eixo do zero, aumentando, por consequência, a velocidade de *flutter*. Esta função objetivo é modelada como sendo a soma dos amortecimentos modais num intervalo de velocidades e então minimizada. Já o segundo objetivo a ser minimizado é a soma das amplitudes de vibração do primeiro e segundo modos. Portanto, a Eq. (6.2) define o problema de otimização multiobjetivo bastante interessante a ser resolvido do ponto de vista da análise de problemas aeroeletromecânicos.

$$\text{Minimizar} \begin{cases} f_1 = \sum \text{amortecimentos modais}(g) \\ f_2 = \text{amplitude}(1^\circ \text{ Modo}) + \text{amplitude}(2^\circ \text{ Modo}) \end{cases} \quad (6.2)$$

Na Tab. 6.19 estão definidas as variáveis de projeto com os seus valores nominais e correspondentes variações consideradas no espaço de busca para a otimização. Já na Tab. 6.20 estão definidos os valores dos parâmetros utilizados no algoritmo NSGA.

Tabela 6.19 – Definição do espaço de projeto para o problema POMD

Variáveis de projeto	Valores nominais	Variações admissíveis
R_1 [Ω]	243,84	50%
L_1 [H]	0,21	50%
R_{21} [Ω]	13933,79	50%
L_{21} [H]	42,11	50%
L_{1b} [H]	1,28	50%
C_{1b} [nF]	470,00	50%

Tabela 6.20 – Parâmetros do NSGA

Probabilidade de seleção	0,25
Probabilidade de reprodução	0,25
Probabilidade de mutação	0,25
Número de gerações	100
Número de indivíduos	50
Coefficiente de niche (σ)	0,20

A Fig. 6.19 apresenta as soluções de Pareto para o problema POMD. A escolha do ponto ótimo A na Frente de Pareto foi feita em atendimento ao melhor compromisso entre as duas funções objetivo. Os valores ótimos determinísticos das variáveis de projeto são apresentados na Tab. 6.21 e os valores numéricos das respostas do sistema com *shunt* otimizado estão definidos na Tab. 6.22.

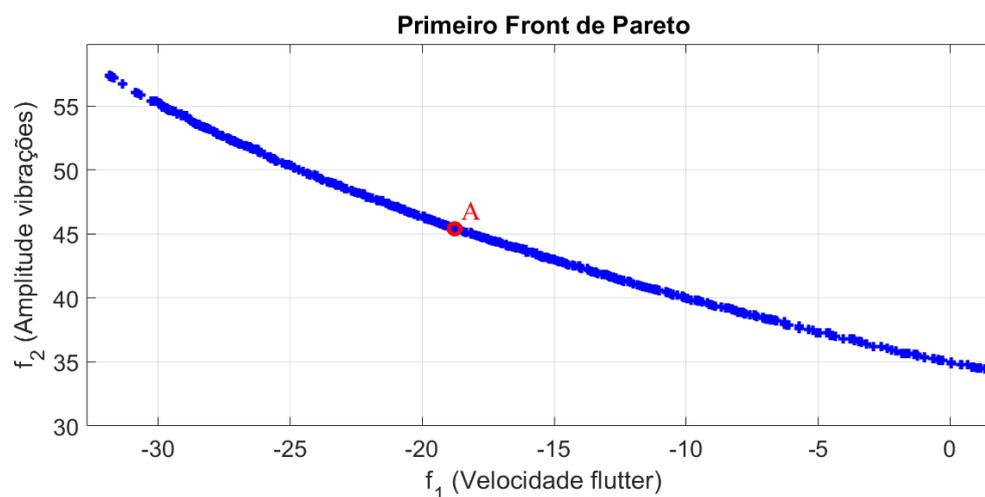


Figura 6.19 – Frente de Pareto para o POMD.

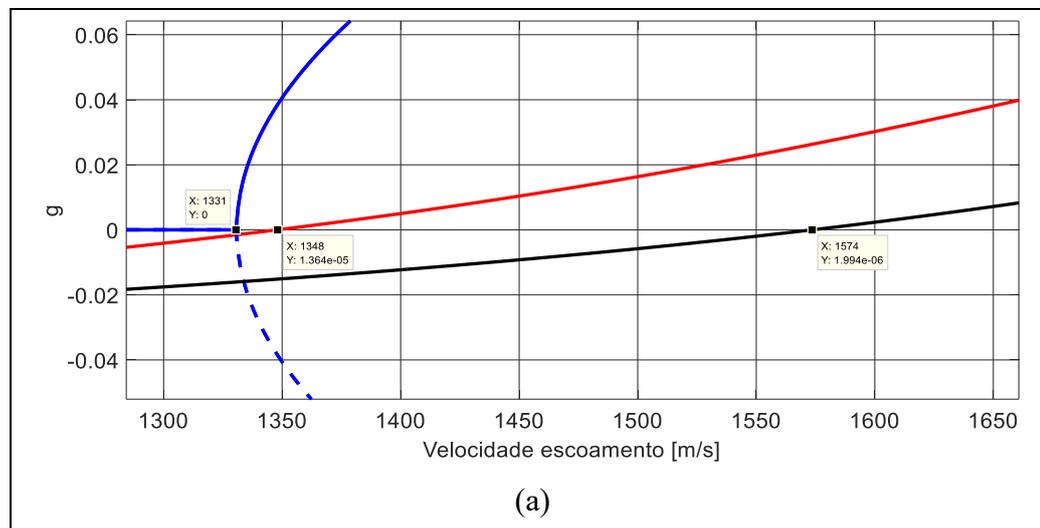
Tabela 6.21 – Valores parâmetros ótimos determinísticos

	R_1 [Ω]	L_1 [H]	R_{2l} [Ω]	L_{2l} [H]	L_{1b} [H]	C_{1b} [nF]
Parâmetros ótimos	236,78	0,113	17576,46	58,13	1,56	510,11
Parâmetros nominais	243,84	0,21	13933,79	42,11	1,28	470,00

De posse dos valores ótimos, é possível obter as respostas dinâmica e aerodinâmica do controle otimizado e compará-lo com o nominal, como visto na Fig. 6.20 e na Tab. 6.22. Em termos de ganho aeroelástico, nota-se que o controle via *shunt* otimizado é mais eficiente do que o nominal. Em termos de vibrações, o sistema com *shunt* otimizado sofre uma pequena piora. Esta piora pode ser explicada pelo fato dos parâmetros nominais serem calculados analiticamente como sendo ótimos para vibrações, conforme trabalho de Hagood e Von Flotow (1991), e não para aumento da velocidade de *flutter*. Além disso, os resultados evidenciam que como são objetivo conflitantes, não há como melhorar um objetivo sem piorar o outro.

Tabela 6.22 – Respostas dos sistemas com *shunt* otimizado e com *shunt* nominal

	Velocidade <i>flutter</i> [m/s]	Amplitude [dB] 1° modo	Amplitude [dB] 2° modo
<i>Shunt</i> otim. determ.	1574	21,61	27,69
<i>Shunt</i> nominal	1348	16,49	23,39



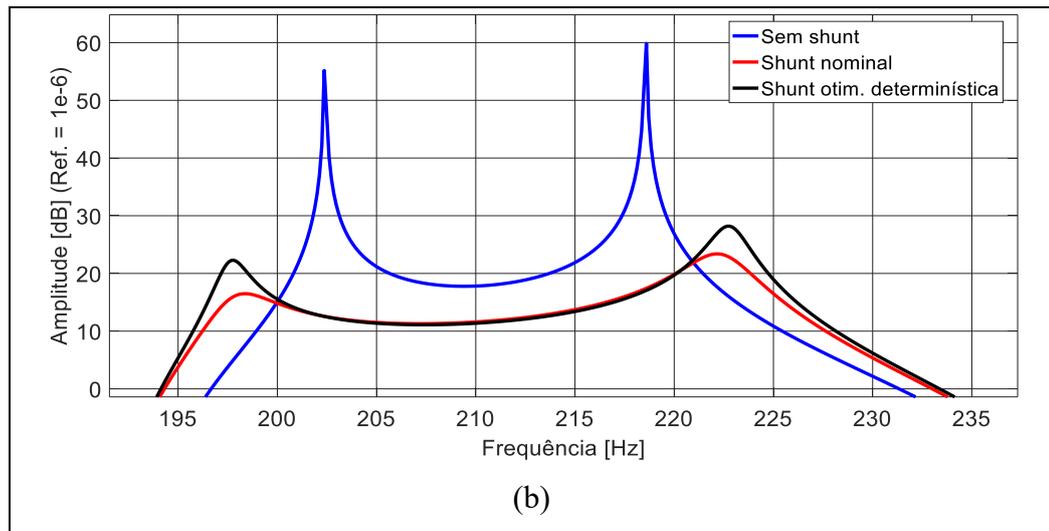


Figura 6.20 – Respostas do sistema ótimo determinístico: (a) diagrama V-g; (b) FRFs.

6.4. Problema de otimização multiobjetivo robusto (POMR)

No problema POMR são consideradas incertezas nas variáveis de projeto durante o procedimento de otimização, conforme espaço de projeto definido Tab. 6.23. Desta forma, as funções objetivo a serem otimizadas são as mesmas do problema POMD, além das funções de vulnerabilidade associadas à cada função objetivo, como definido pela Eq. (6.3).

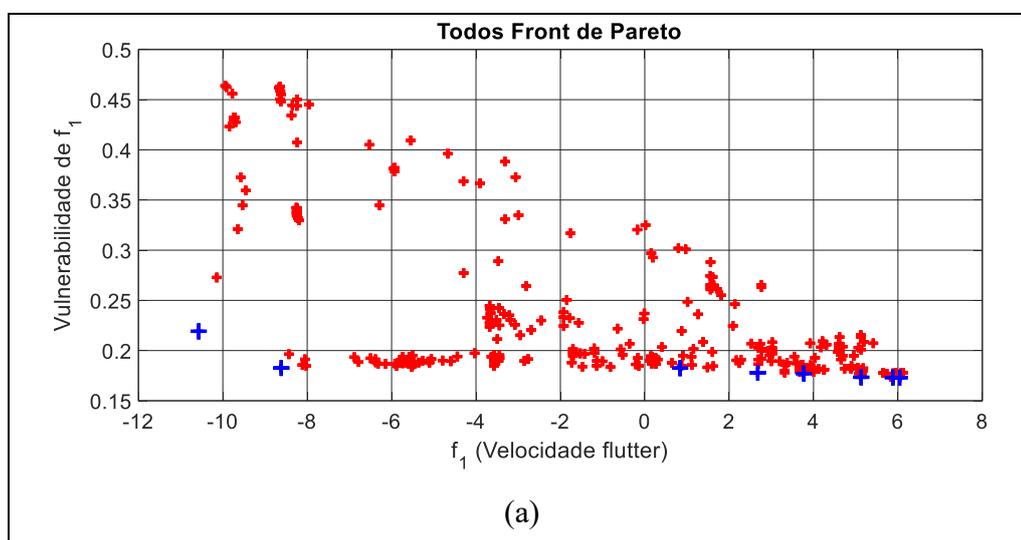
$$\text{Minimizar} \begin{cases} f_1 = \sum \text{amortecimentos modais}(g) \\ f_2 = \text{amplitude}(1^\circ \text{ Modo}) + \text{amplitude}(2^\circ \text{ Modo}) \\ f_3 = \sigma_1 / \mu_1 : \text{vulnerabilidade da } f_1 \\ f_4 = \sigma_2 / \mu_2 : \text{vulnerabilidade da } f_2 \end{cases} \quad (6.3)$$

Tabela 6.23 – Definição do espaço de projeto para o problema POMR

Variáveis de projeto	Valores nominais	Variações admissíveis	Níveis de Incertezas
R_1 [Ω]	243,84	50%	$\Delta R_1 = 15\%$
L_1 [H]	0,21	50%	$\Delta L_1 = 15\%$
R_{21} [Ω]	13933,79	50%	$\Delta R_{21} = 15\%$
L_{21} [H]	42,11	50%	$\Delta L_{21} = 15\%$
L_{1b} [H]	1,28	50%	$\Delta L_{1b} = 15\%$
C_{1b} [nF]	470,00	50%	$\Delta C_{1b} = 15\%$

Da mesma forma que na otimização multiobjetivo do problema determinístico, aplicou-se o NSGA, cujos parâmetros foram definidos da Tab. 6.20. Para obter as funções de vulnerabilidade, a cada geração da otimização foram realizadas 200 tiragens aleatórias, com base em um estudo prévio de convergência das respostas estocásticas do sistema.

A Fig. 6.21 apresenta as soluções de Pareto para o problema robusto em termos de cada função objetivo e a sua correspondente função de vulnerabilidade. Este tipo de plotagem permite identificar com mais facilidade os pontos com menores dispersões ao redor de cada solução ótima encontrada no espaço objetivo. Note que os pontos em azul formam as primeiras frentes de Pareto e os pontos em vermelho as demais frentes. Da Fig. 6.21(a), nota-se o intervalo de dispersão entre 0,15% e 0,50% (intervalo de 0,35%), relativo à primeira função objetivo. Para a segunda função objetivo, a Fig. 6.21(b) traz uma dispersão entre 0,08% a 0,2% (intervalo de 0,12%). Portanto, pode-se concluir que a vulnerabilidade da função objetivo f_2 é menor. Essa menor vulnerabilidade é explicada em função dos parâmetros nominais do circuito utilizados no NSGA serem já ótimos pela literatura no que diz respeito a atenuação dos níveis de vibrações.



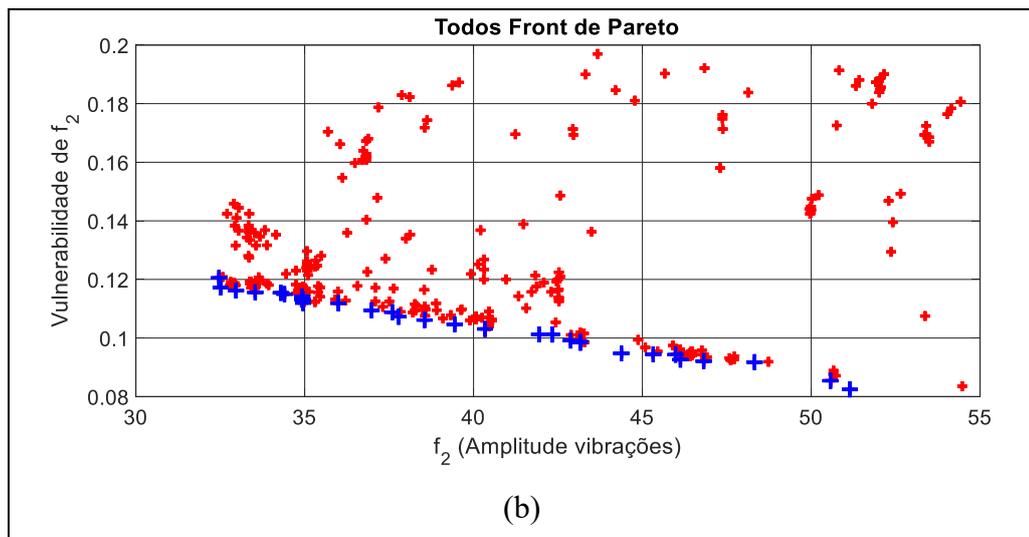


Figura 6.21 – Soluções de Pareto para o POMR: (a) f_1 versus vulnerabilidade de f_1 ; (b) f_2 versus vulnerabilidade de f_2 .

A Fig. 6.22 permite comparar as frentes de Pareto dos problemas POMD (curva em azul) e POMR (curva em vermelho). Nota-se que as soluções ótimas determinísticas dominam as soluções robustas no que tange ao aumento da velocidade de *flutter*, que é um dos principais objetivos deste trabalho. Entretanto, as soluções determinísticas correspondentes ao ponto A (determinístico) não são robustas no que diz respeito às incertezas nas suas variáveis ótimas quando comparadas com as geradas para o ponto B (robusto), como visto na sequência.

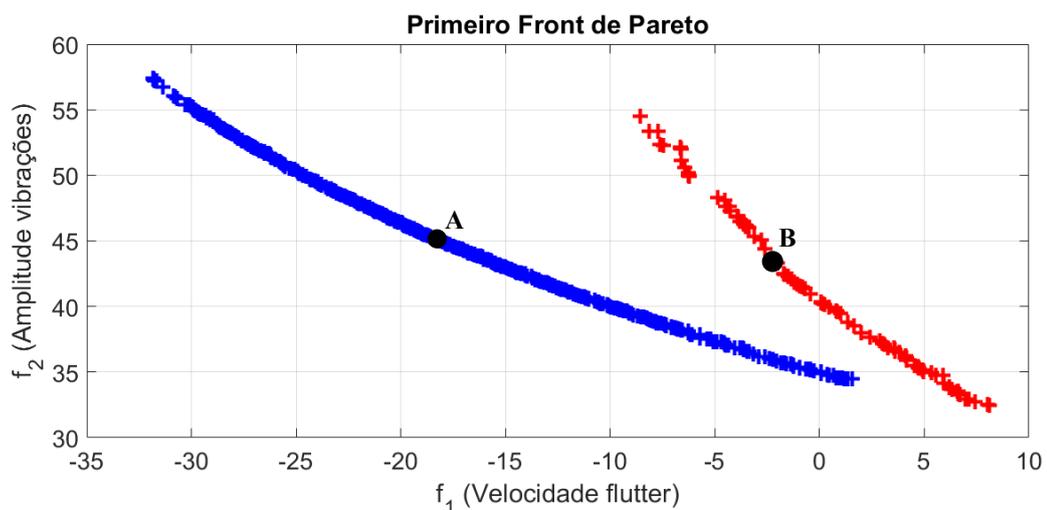


Figura 6.22 – Comparação das Frentes de Pareto dos problemas POMD (azul) e POMR (vermelho).

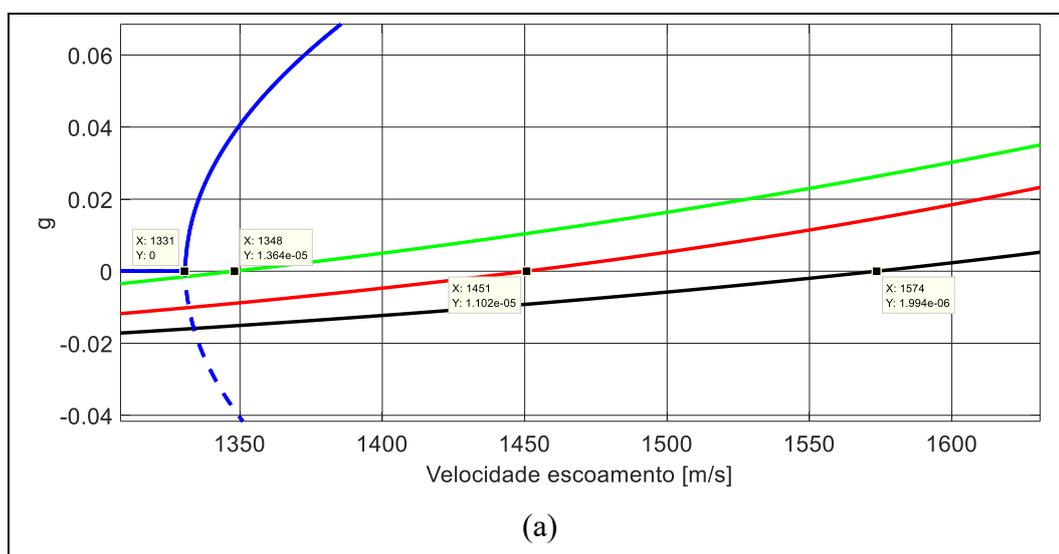
Os valores dos parâmetros ótimos determinísticos e robustos referentes aos pontos A e B estão definidos na Tab. 6.24. Já os valores das velocidades de *flutter* e amplitudes de vibração ótimos, obtidos via Fig. 6.23, são apresentados na Tab. 6.25.

Tabela 6.24 – Valores parâmetros ótimos determinísticos e robustos

	R_1 [Ω]	L_1 [H]	R_{21} [Ω]	L_{21} [H]	L_{1b} [H]	C_{1b} [nF]
Parâmetros ótimos robusto (B)	186,67	0,21	9706,21	32,13	1,08	677,76
Parâmetros ótimos determ. (A)	236,78	0,113	17576,46	58,13	1,56	510,11
Parâmetros nominais	243,84	0,21	13933,79	42,11	1,28	470,00

Tabela 6.25 – Respostas do sistema com circuitos *shunt* otimizados

	Velocidade <i>flutter</i> [m/s]	Amplitude [dB] 1° modo	Amplitude [dB] 2° modo
<i>Shunt</i> otim. robusta	1451	18,44	25,65
<i>Shunt</i> otim. determinística	1574	21,61	27,69
<i>Shunt</i> nominal	1348	16,49	23,39



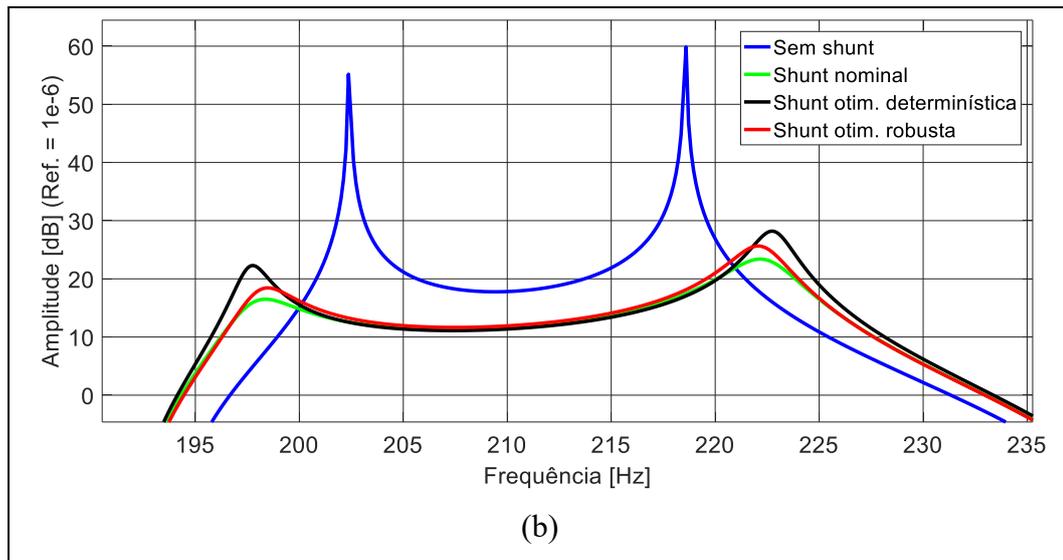
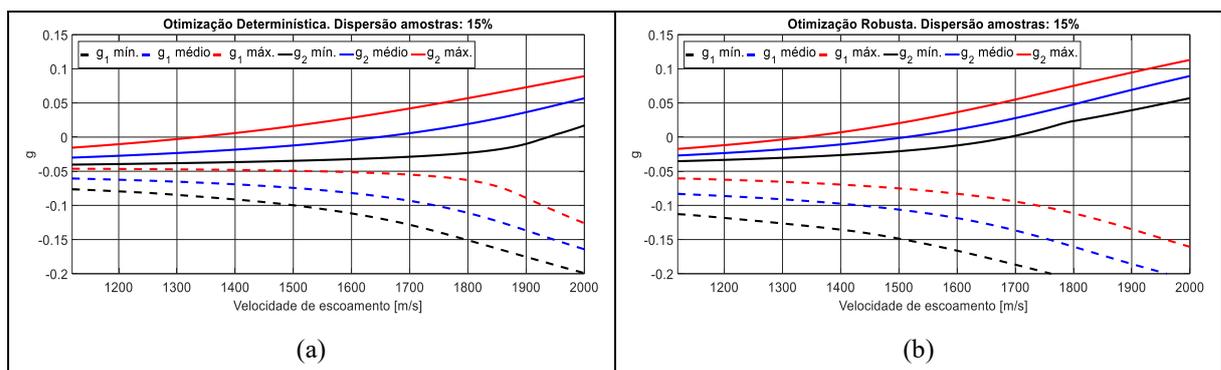


Figura 6.23 – Comparação otimizações: (a) Amortecimentos modais; (b) FRFs.

6.4.1. Avaliação da robustez das soluções ótimas determinística e robusta

Esta etapa diz respeito à avaliação da estabilidade das soluções ótimas determinística e robusta da Tab. 6.24. Para isto, foram geradas aleatoriamente 200 amostras de cada variável de projeto relativa aos pontos A e B, utilizando Hipercubo Latino e construído os envelopes das soluções em termos das FRFs e dos gráficos V-g do amortecimento modal. A Fig. 6.24 apresenta os resultados obtidos para um nível de incerteza de 15% introduzido nos valores ótimos das variáveis de projeto. Nota-se que as soluções ótimas robustas levam a comportamentos mais estáveis do sistema quando comparadas às soluções determinísticas, uma vez que as suas respostas dinâmica e aerodinâmica apresentam menores intervalos de confiança.



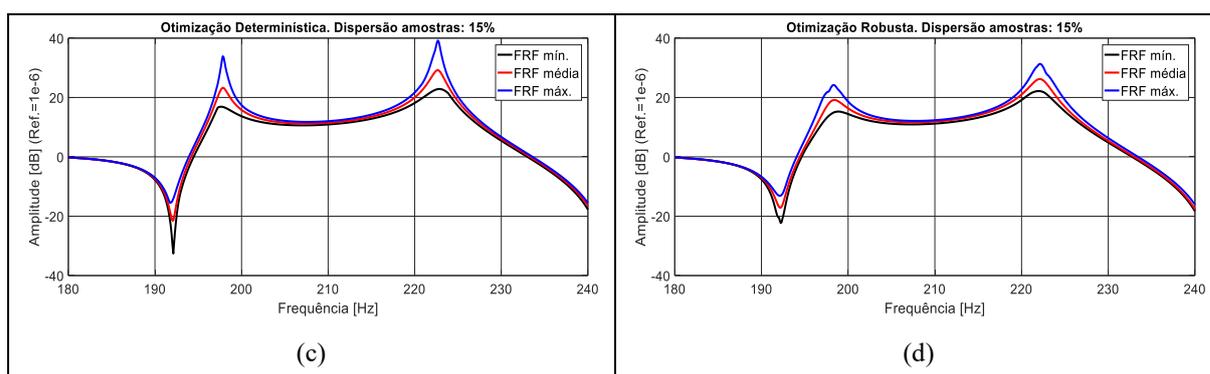


Figura 6.24 – Envelopes dos diagramas V-g (a,b) e FRFs (c,d) obtidos para uma perturbação de 15% introduzida nas soluções ótimas determinística e robusta.

Em termos numéricos, é possível identificar dentre as soluções ótimas, a que apresenta menor nível de dispersão. Para isto, foram computados os extremos estatísticos dos envelopes de velocidade de *flutter* e das amplitudes do 1º e 2º modos das FRFs, obtendo-se as variações dadas na Tab. 6.26. Isto permite identificar mais facilmente a robustez das soluções ótimas robustas frente às determinísticas.

Tabela 6.26 – Variações dos envelopes para soluções determinística e robusta

Otimização	Dispersão amostras	Envelope Veloc. <i>flutter</i> [m/s]	Envelope Amp. [dB] 1º modo	Envelope Amp. [dB] 2º modo
Determinística	15%	1335 – 1938 (603)	16,89 – 33,89 (17)	22,86 – 39,2 (16,34)
Robusta	15%	1336 – 1689 (353)	15,25 – 24,21 (8,96)	22,17 – 31,31 (9,14)

6.4.2. Avaliação da robustez associada ao parâmetro L_1

Como pode ser observado nos valores ótimos robustos, o parâmetro L_1 não sofreu alteração em seu valor nominal em função da otimização robusta, mantendo-se $L_1 = 0,21$ [H]. Assim, este parâmetro foi avaliado para um estudo mais detalhado da robustez que estaria associada a ele. A Tabela 6.27 apresenta dois cenários para esta avaliação. Nota-se que, a única mudança de valores nos parâmetros se deu em L_1 , para os cenários 1 e 2. Neste caso, foram geradas aleatoriamente 200 amostras com o Hipercubo Latino para cada cenário e construídos

os envelopes das soluções (V-g e FRFs) para o nível de incerteza de 15% aplicado aos parâmetros do circuito.

Tabela 6.27 – Cenários de avaliação da robustez de L_1

	R_1 [Ω]	L_1 [H]	R_{21} [Ω]	L_{21} [H]	L_{1b} [H]	C_{1b} [nF]
Parâmetros nominais	243,84	0,21	13933,79	42,11	1,28	470,00
Parâmetros ótimos robustos	186,67	0,21	9706,21	32,13	1,08	677,76
Cenário 1 ($L_1 = 0,16$ [H])	186,67	0,16	9706,21	32,13	1,08	677,76
Cenário 2 ($L_1 = 0,11$ [H])	186,67	0,11	9706,21	32,13	1,08	677,76

Valores superiores de L_1 não foram avaliados na robustez do sistema por não pertencerem ao espaço de soluções ótimas de Pareto.

Em termos de avaliação numérica, foram computados os extremos estatísticos dos envelopes da velocidade de *flutter* e das amplitudes do 1º e 2º modos das FRFs apresentados nas Figs. 6.25 e 6.26, respectivamente, obtendo-se os valores das variações dados na Tab. 6.28.

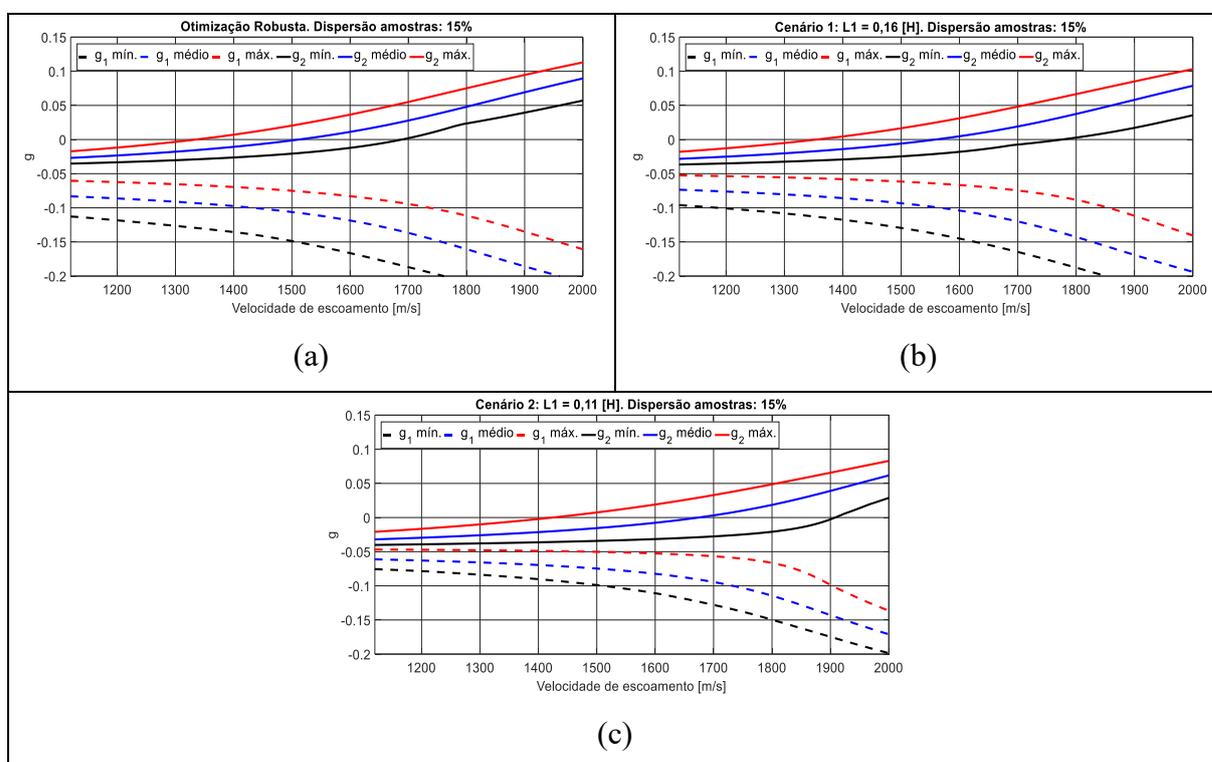


Figura 6.25 – Envelopes de amortecimentos modais para nível de incerteza igual a 15%: (a) otimização robusta; (b) cenário 1; (c) cenário 2.

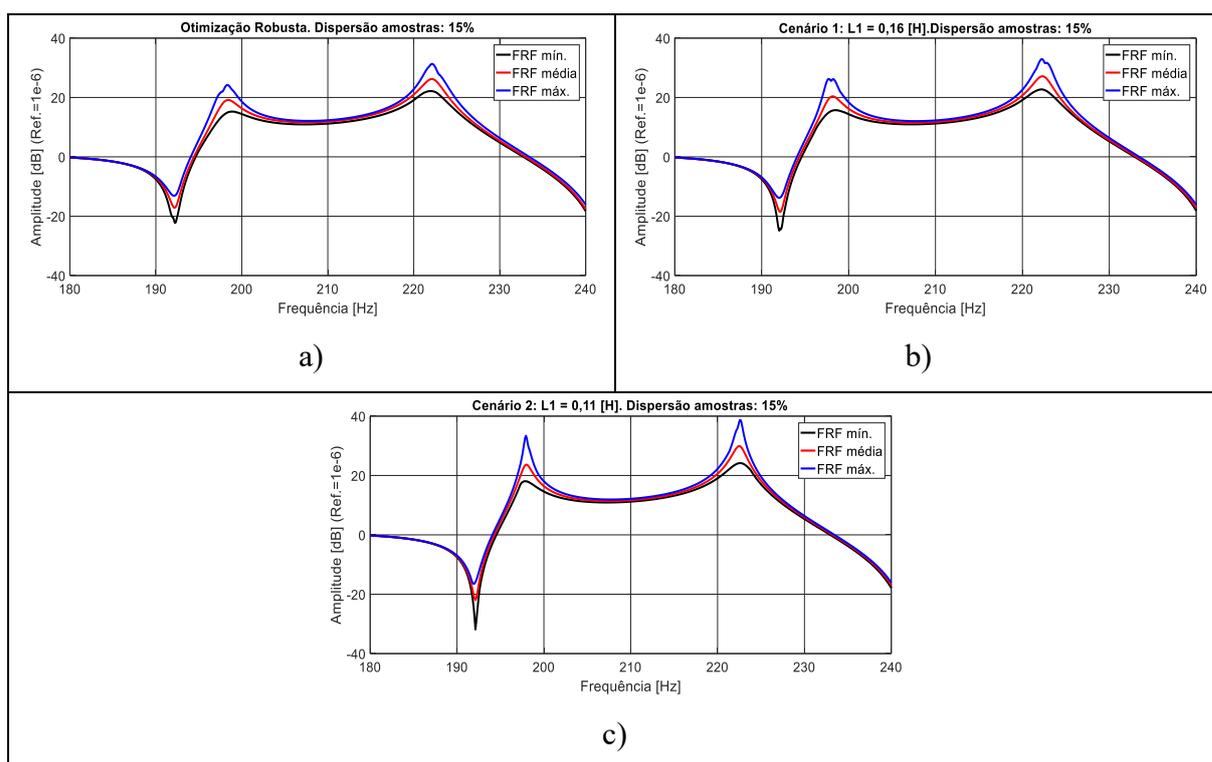


Figura 6.26 – Envelopes de FRFs para nível de incerteza igual a 15%: a) otimização robusta; b) cenário 1; c) cenário 2.

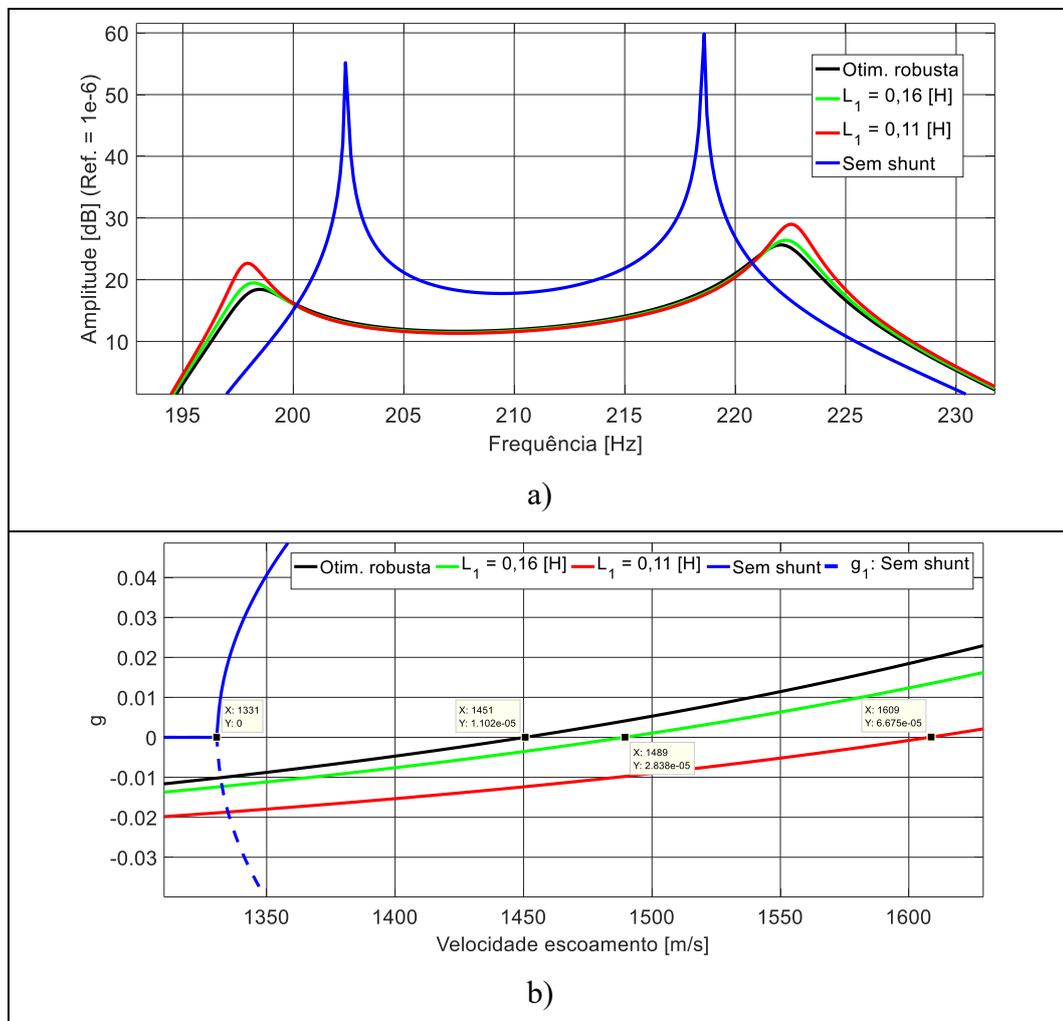
Tab. 6.28 – Variações dos envelopes

	Dispersão amostras	Envelope Veloc. flutter [m/s]	Envelope Amp. [dB] 1º modo	Envelope Amp. [dB] 2º modo
Otimização robusta	15%	1336 – 1689 (353)	15,25 – 24,21 (8,96)	22,17 – 31,31 (9,14)
Cenário 1 (L1 = 0,16 [H])	15%	1355 – 1776 (421)	15,73 – 26,27 (10,54)	22,72 – 32,91 (10,19)
Cenário 2 (L1 = 0,11 [H])	15%	1425 – 1909 (484)	18,08 – 33,40 (15,32)	24,18 – 38,70 (14,52)

Os resultados da Tab. 6.28 evidenciam que o parâmetro L_1 está associado a robustez do sistema e que o decréscimo no seu valor, leva a diminuição desta. É interessante observar que para valores menores que L_1 ótimo robusto, apesar da diminuição da robustez, o valor mínimo da velocidade de ocorrência do flutter no envelope aumentou. Isto pode ser observado no cenário 2 da Tab. 6.28: o valor mínimo da velocidade de flutter passou de 1336 m/s (para L_1 ótimo robusto) para 1425 m/s neste cenário. Este resultado reforça o fato de que o parâmetro

L_1 influencia diretamente na variabilidade das respostas, porém, sua dispersão, não apresenta risco de adição de instabilidade aeroelástica ao sistema areoeletromecânico.

Para evidenciar o comportamento do sistema areoeletromecânico com a variação de L_1 , são apresentadas as respostas do sistema na Fig. 6.27. Nota-se que, com a diminuição no valor do parâmetro, há um afastamento do primeiro e segundo modo, uma vez que, o parâmetro indutivo é responsável pelo posicionamento dos modos em frequência. Esse afastamento dos modos faz com que a velocidade crítica na qual ocorre a coalescência dos mesmos aumente, tendo um consequente aumento do ganho aeroelástico.



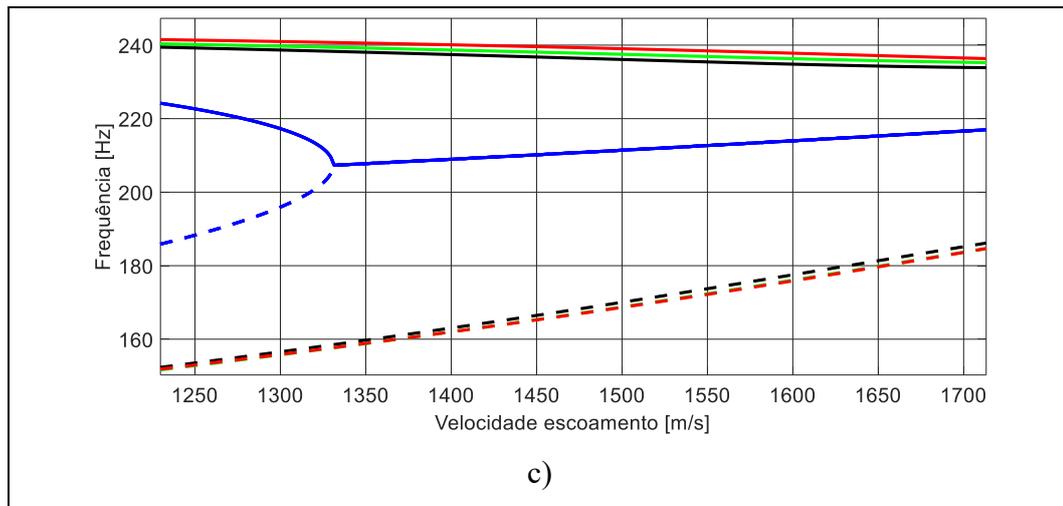


Figura 6.27 – Análise variações no parâmetro L_1 : a) FRFs; b) e c) diagrama V-g.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES GERAIS E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

7.1. Resumo e avaliação

Esta tese representa uma continuidade aos desenvolvimentos que vem sendo realizados no LMEst/UFU no tocante à modelagem numérico-computacional e projeto ótimo de estruturas compósitas contendo elementos piezelétricos acoplados de circuitos elétricos *shunt* multimodais na presença de incertezas paramétricas. A grande contribuição desta Tese diz respeito à comprovação da viabilidade de utilização de circuitos elétricos *shunt* acoplados a elementos piezelétricos no que tange ao aumento da estabilidade aeroelástica de painéis compósitos. Assim, se tem hoje disponível uma ferramenta numérico-computacional para tratar de maneira ótima e robusta os problemas da dinâmica e aerodinâmica de sistemas aeroeletromecânicos.

A partir dos resultados obtidos, evidencia-se as seguintes conclusões específicas:

1^a) Os procedimentos de modelagem desenvolvidos demonstraram ser representativos para a caracterização do comportamento aeroelástico de sistemas estruturais compósitos incorporando elementos piezelétricos acoplados de circuitos elétricos *shunt* multimodais;

2^a) Nota-se a grande capacidade de atenuação dos níveis de vibrações proporcionada pelo circuito multimodal paralelo para os dois primeiros modos de vibração da estrutura quando a mesma é submetida à carregamento aerodinâmico. O ganho em estabilidade aeroelástica foi

modesto em um primeiro momento, visto que, a sintonização do circuito *shunt* nominal foi realizada por meio de expressões disponíveis na literatura, as quais tem como intuito a sintonização para atenuação de vibrações somente, não considerando o aumento da velocidade de *flutter* como sendo também um objetivo a ser alcançado;

3^a) No que diz respeito às respostas estocásticas do sistema, para todos os cenários investigados, os envelopes delimitados pelos extremos estatísticos das soluções expandiram-se com o aumento do nível de dispersão ao redor dos parâmetros incertos, ocorrendo também o consequente aumento do intervalo de confiança das respostas do sistema de estarem contidas nos envelopes. Além disso, as respostas médias estocásticas encontraram-se dentro dos envelopes para todos os cenários, demonstrando uma boa predição do modelo aeroeletromecânico médio quanto aos níveis de incerteza investigados;

4^a) Verificou-se pequena influência dos parâmetros estruturais nas respostas estocásticas do sistema aeroeletromecânico. Possíveis explicações: ordem de grandeza destes parâmetros, principalmente as espessuras das camadas, as quais são da ordem de 10^{-3} metros e a condição de contorno investigada;

5^a) Quanto à influência dos parâmetros do circuito *shunt* multimodal na variabilidade das respostas, verificou-se uma maior influência dos parâmetros ligados ao primeiro modo de vibração da estrutura, R_1 e L_1 . Esta maior influência pode ser explicada em parte pelo fato do segundo modo de vibração ser um modo de torção que, sem o carregamento aerodinâmico, não consegue ser acionado pelo circuito multimodal. Com a presença do carregamento aerodinâmico, a dinâmica do sistema é alterada significativamente em função da velocidade do escoamento e o segundo modo da estrutura passa a ser atenuado. Entretanto, permanece a maior influência das variáveis do circuito *shunt* relacionadas ao primeiro modo;

6^a) Para o problema POMD dos parâmetros do circuito, observou-se a maior eficácia do sistema otimizado em relação ao nominal em termos de ganho em estabilidade aeroelástica. Entretanto, houve uma pequena piora na atenuação dos níveis de vibrações. Essa piora é explicada pelo fato dos parâmetros nominais serem calculados como ótimos via expressões analíticas propostas por Hagood e Von Flotow (1991) para atenuação de vibrações e não para melhora na velocidade de *flutter*. Assim, os resultados evidenciam que como são funções objetivo conflitantes, não há como melhorar um objetivo sem que haja a piora do outro;

7^a) No caso do problema POMR, foi observada a menor vulnerabilidade da função objetivo relacionada à minimização das amplitudes de vibrações. Novamente, essa menor vulnerabilidade pode ser explicada pelo fato dos parâmetros do circuito nominal utilizados no NSGA serem parâmetros já ótimos pela literatura no que diz respeito à atenuação das vibrações. Ao comparar as frentes de Pareto dos problemas POMD e POMR fica claro a dominância das soluções ótimas determinísticas em relação às soluções ótimas-robustas no que tange ao aumento da velocidade crítica de ocorrência do *flutter*, principal interesse deste trabalho. Entretanto, investigações a posteriori de vulnerabilidade mostraram que as soluções ótimas determinísticas não são robustas no que diz respeito a pequenas perturbações introduzidas nas suas variáveis ótimas, quando comparadas com as correspondentes geradas para o espaço de soluções robustas;

8^a) Uma das contribuições das otimizações realizadas nos parâmetros do circuito foi o de afastar o risco de piora no ponto de ocorrência do *flutter* do painel compósito. Este risco foi observado nas respostas estocásticas do sistema para os parâmetros nominais tomados como incertos nos extremos mínimos de velocidade de *flutter* dos envelopes, principalmente para as incertezas associadas ao parâmetro R_1 , podendo o circuito, naquele caso, ao ser conectado ao sistema, levar consigo instabilidade aeroelástica. Além disso, foi verificado que o parâmetro L_1 está associado à robustez do sistema e, para valores menores de L_1 em relação ao ótimo-robusto, esta robustez diminui, porém, sua dispersão não apresenta risco à estabilidade aeroelástica do sistema aeroeletromecânico;

9^a) Em se tratando do comportamento dinâmico do sistema aeroeletromecânico, foi observado que com a diminuição no valor do parâmetro, L_1 , houve um afastamento do primeiro e segundo modo, uma vez que o parâmetro indutivo é responsável pelo posicionamento dos modos em frequência. Esse afastamento dos modos faz com que a velocidade crítica na qual ocorre a coalescência dos mesmos aumente, levando a um ganho em termos de estabilidade aeroelástica do sistema. Porém, essa mesma variação em L_1 e conseqüente deslocamento das frequências de sintonização implica em um funcionamento não mais ótimo do circuito em relação à redução dos níveis de vibrações. Desta maneira, para um mesmo valor de amortecimento (resistores), a atenuação das vibrações foi prejudicada, o que pode explicar o conflito entre as duas funções objetivo.

7.2. Sugestões de trabalhos futuros

O presente trabalho de tese possibilitou o surgimento de inúmeras perspectivas no qual pode-se citar:

- Utilização da teoria de alta ordem para aproximação dos campos de deslocamentos mecânicos, para que se possa então realizar a modelagem de estruturas compósitas do tipo placas mais espessas e também com geometrias mais complexas;
- Inserção de outras topologias de circuitos *shunt* à modelagem aeroeletromecânica, como o capacitivo, que faz variar a rigidez da pastilha piezelétrica, conforme levantado por Viana (2005), ou a combinação de mais de uma topologia (série e paralelo);
- Utilizar-se de um controle piezelétrico ativo-passivo. Os trabalhos de Raja et al. (2006) e Almeida et al. (2012) evidenciaram a eficiência do controle piezelétrico ativo, para painéis de materiais compósitos no ganho em estabilidade aeroelástica. Assim, uma combinação de técnicas ativas e passivas poderia aumentar ainda mais esse ganho;
- Melhoramento do modelo aerodinâmico para tratar painéis compósitos com curvatura combinado com teorias de alta ordem. Além disso, deve-se investigar a presença do amortecimento aerodinâmico e a aplicação da Teoria do Pistão não linear.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIT BRIK, A. **Méthodologie de conception robuste et optimisation dans un concept d'architectures mécaniques nouvelles en avant projet**. Tese de doutorado, Besançon, 2005.

ALMEIDA, A. E. **O Efeito de Enrijecimento por Tensão Piezeletricamente Induzida na Estabilidade Aeroelástica de Painéis Aeronáuticos**, 100f., Tese de Mestrado em Ciências - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, São Paulo, 2011.

ALMEIDA, A.; DONADON, M. V.; DE ALMEIDA, S. F. M. The effect of piezoelectrically induced stress stiffening on the aeroelastic stability of curved composite panel. **Composite Structures**, v. 94, p. 3601-3611, 2012. .
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.06.008>

ASHLEY, H.; ZARTARIAN, G. Piston Theory: a New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 12, p. 1109-1918, 1956.
<https://doi.org/10.2514/8.3740>

ALVES, J. P. N. P, **Avaliação da Incerteza em Modelos de Materiais Compósitos Laminados**. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2017.

ALVIN, K. F. Efficient computation of eigenvector sensitivities for structural dynamics. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, v. 35, n.11, 1997.
<https://doi.org/10.2514/2.24>

BENINI, G. R. **Modelo Numérico para Simulação da Resposta Aeroelástica de Asas Fixas**. s.l.: 97f. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2002.

BISMARCK-NASR, M. N. **Structural Dynamics in Aeronautical Engineering**. Reston, VA: AIAA Education Series, 1999. <https://doi.org/10.2514/4.862458>

BOYLESTAD, R. L. **Introdução à Análise de Circuitos**. 13ª. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2019.

BRIEND, Y. P. J. **Contribuição aos métodos de redução aplicados a sistemas aeroviscoelásticos**, 138 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017.

CALLISTER, W. D. J.; RETHWISCH, D. G. **Materials Science and Engineering an Introduction**. 9^a. ed. Utah: John Wiley & Sons. Inc, v. 2, 2009.

CARUSO, G. A. Critical Analysis of Electric Shunt Circuits Employed in Piezoelectric Passive Vibration Damping. **Smart Materials and Structures**, v. 10, p. 1059-1068, 2001. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/5/322>

CHEE, C. Y. K. **Static Shape Control of Laminated Composite Plate Smart Structure using Piezoelectric Actuators**. Tese de Pós-Doutorado, University of Sydney: Department of Aeronautical Engineering, Sydney, Austrália, 2000.

CUNHA-FILHO, A. G.; BRIEND, Y. P. J.; DE LIMA, A. M. G.; DONADON, M. V. An efficient iterative model reduction method for aeroviscoelastic panel *flutter* analysis in the supersonic regime. **Mechanical. Systems and Signal Processing**. v. 104, p. 575-588, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.11.018>

DAS, I.; DENNIS, J. E. A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generations in multicriteria optimization problems. **Journal of Structural Optimization**, v.14, p. 63-69, 1997. <https://doi.org/10.1007/BF01197559>

DE LIMA, A.M.G. **Modélisation et Optimisation Robuste de l'amortissement Viscoélastique de Systèmes Mécaniques**. Tese de Doutorado, Université de Franche-Comté, 2007.

DE LIMA, A. M. G.; RADE, D. A.; BOUHADDI, N. Stochastic Modeling of Surface Viscoelastic Treatments Combined with Model Condensation Procedures. **Shock and Vibration**, v. 17, p. 429-444, 2010. <https://doi.org/10.3233/SAV-2010-0538>

DEB, K. **Multi-objective optimization using evolutionary algorithms**. 1^a ed. England: John Wiley & Sons, LTD, 2001..

DESSOMBZ, O.; THOUVEREZ, F.; LAINE, J. P.; JÉZÉQUEL, L. Analysis of Mechanical Systems Using Interval Computations Applied to Finite Element Methods. **Journal of Sound and Vibration**, v. 239(5), p. 949-968, 2001. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3191>

DIACENCO, A. A. **Modelagem por elementos finitos de materiais compósitos estruturais incorporando material viscoelástico para o controle passivo de vibração e ruído**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, 2010.

DOWELL, E. H. Panel Flutter: a review of the aeroelastic stability of plates and shells. **AIAA Journal**, v. 8, n. 3, pp. 385-399, 1970. <https://doi.org/10.2514/3.5680>

DOWELL, E. H. **Aeroelasticity of plates and shells**. Princetown. New York, USA: Noordhoff International Publishing, 1975.

DUGUNDJI, J. Personal Perspective of Aeroelasticity During the Years 1953-1993. **Journal of Aircraft**, v. 40, n. 5, p. 809-812, 2003. <https://doi.org/10.2514/2.6864>

ESCHENAUER, H.; KOSHI, J.; OSYCZKA, A. **Multicriteria Design Optimization: Procedures and Applications**. Germany: Springer-Verlag, 482 p., 1990. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-48697-5>

FARIA, A. W. **Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas Dotadas de Sensores e Atuadores Piezoelétricos: Implementação Computacional e Avaliação Numérica**, 152f. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2006.

FLORIAN, A. An efficient sampling scheme: updates Latin Hypercube sampling. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 7, p. 123-130, 1992. [https://doi.org/10.1016/0266-8920\(92\)90015-A](https://doi.org/10.1016/0266-8920(92)90015-A)

GHANEM, R. G.; SPANOS, P. D. **Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach**. Spring Verlag, 1991. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3094-6>

GHANEM R.G.; KRUGER R. Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 129(3), p. 289-303, 1996. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00909-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00909-4)

GONÇALVES, L. K. S.; ROSA, U. L.; DE LIMA, A. M. G. Fatigue damage investigation and optimization of a viscoelastically damped system with uncertainties. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 41, p. 382, 2019. <https://doi.org/10.1007/s40430-019-1879-4>

HAGOOD, N. W.; VON FLOTOW, A. Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks. **Journal of Sound and Vibration**, v. 146, n. 2, p. 243-268, 1991. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90762-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90762-9)

IMAN, R. L.; CONOVER, W. J. Small sample sensitivity analysis techniques for computer models, with and application to risk assessment. **Communications in Statistics – Theory and Methods**, v. 9(17), p. 1749-1842, 1980. <https://doi.org/10.1080/03610928008827996>

JORDAN, P.F. The physical nature of panel *flutter*. **Aero Dig**, v. 34(8), 1956.

KLEIBER, M.; HIEN, T. D. **The stochastic finite element method, basic perturbation technique and computer implementation**. John Wiley & Sons, 1992.

KOROISHI, E. H. et al. Stochastic Modeling of Flexible Rotors. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v.34, p. 574-583, 2012. <http://dx.doi.org/10.1590/S1678-58782012000600006>

KOUCHAKZADEH, M. A.; RASEKH, M.; HADDADPOUR, H. Panel flutter analysis of general laminated composite plates. **Composite Structures**, v. 92, pp. 2906-2915, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.001>

KUO, S.Y. *Flutter* of rectangular composite plates with variable fiber pacing. **Composite Structures**; v. 93, p. 2533–2540, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.04.015>

LEÃO, L. S. et al. Dynamic aeroelastic behavior of composite plates with multimode resonant *shunted* piezoceramics in series. **Composite Structures**, v. 153, p. 815-824, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.010>

LEE, K. H.; PARK, G. J. Robust optimization considering tolerances of design variables. **Journal of Computers and Structures**, v. 79, p. 77-86, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00117-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00117-6)

LEI, Z.; QIU, C. Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation. **Computers and Structures**, v. 77, p. 651-657, 2000. [https://doi.org/10.1016/s0045-7949\(00\)00019-5](https://doi.org/10.1016/s0045-7949(00)00019-5)

LIGHTHILL, M. J. Oscillating airfoils at high Mach number. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v.20, p. 402–406, 1953. <https://doi.org/10.2514/8.2657>

LO, K. H.; CHRISTENSEN, R. M.; WU, E. M. A High Order Theory of Plate Deformation - Part 1: Homogeneous Plates. **Journal of Applied Mechanics**. v. 44, p. 663-668, 1977. <https://doi.org/10.1115/1.3424154>

LOBATO, F. S. **Otimização Multi-Objetivo para o Projeto de Sistemas de Engenharia**, 402 f. Tese de Doutorado apresentada no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, 2008.

LOËVE, M. **Probability Theory. Graduate texts in mathematic**. 4ª. ed. New York: Springer Verlag, v. 2, 1978.

MANTEUFEL, R. D. Evaluating the convergence of Latin Hypercube sampling. **AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**, v. 3, p. 100-106, 2000. <https://doi.org/10.2514/6.2000-1636>

MEIJER, M.C.; DALA, L. Generalized Formulation and Review of Piston Theory for Airfoils. **AIAA Journal**, v. 54, n. 1, p. 17-27, 2016. <https://doi.org/10.2514/1.j054090>

MENDONÇA, P. T. R. **Materiais Compostos & Estruturas-Sanduiche: Projeto e Análise**. 1ª ed. Manole, 2005.

MEUNIER, M.; SHENOI, R. A. 2001. Dynamic Analysis of Composite Sandwich Plates with Damping Modelled using High Order Shear Deformation Theory. **Composite Structures**, v.54, p. 243-254, 2001. [https://doi.org/10.1016/s0263-8223\(01\)00094-0](https://doi.org/10.1016/s0263-8223(01)00094-0)

MOON, S. H.; KIM, S. J. Active and passive suppressions of nonlinear panel flutter using finite element method. **AIAA**, v. 39, pp. 2042-2050, 2001. <https://doi.org/10.2514/2.1217>

MOREIRA, F. R. **Otimização robusta multiobjetivo para o projeto de sistemas de engenharia**, 267 f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

MORSE, J. N. Reducing the size of the nondominated set: pruning by clustering, **Computers & Operations Research**, v. 7, p. 55-66, 1980. [https://doi.org/10.1016/0305-0548\(80\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0305-0548(80)90014-3)

PALMERI, A.; RICCIARDELLI, F. Fatigue analyses of buildings with viscoelastic dampers. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v.94, p. 377-395, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2006.01.005>

PAPADRAKAKIS, M.; KOTSOPULOS, A. Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo Simulation. **Computers Methods Applied Mechanics Engineering**, v. 168, p. 305-320, 1999. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(98\)00147-9](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(98)00147-9)

PEGADO, H. A. **Método de Perturbações no Estudo de Não-linearidades na Aeroelasticidade de Painéis em Regime Supersônico**, 91f. Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, São Paulo, 2003.

PIEFORT, V. **Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures**, 126f. Tese de Doutorado, Université Libre de Bruxelles, Bruxelas, Bélgica, 2001.

PI GROUP, **Piezoelectric Ceramic Products**, 44f. Manual de aplicação técnica, Lederhose, Germany, 2016.

PINHEIRO, M. A. S.; BECKHAUSER, G. N.; MENEZES, M. R. Aplicativo Voltado para a Macromecânica Básica das Estruturas Laminadas de Material Compósito. **Boletim SBMAC** (Rio de Janeiro), Rio de Janeiro, v. VII, p. 209-222, 2006.

RAJA, S.; PASHILKAR, A. A.; SREEDDEED, R.; KAMESH, J. V. Flutter control of a composite plate with piezoelectric multilayered actuators. **Aerosp Sci Technol**, v.10, pp. 435-441, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2006.01.003>

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis**. 2.ed. Florida: CRC Press, 1997.

RIBEIRO, L. P.; DE LIMA, A. M. G. Projeto Ótimo de Circuitos Shunt para o Controle de Vibrações de Estruturas Compostas. **Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, Fortaleza, Brazil, 2014.

RIBEIRO, L. P. **Modelagem estocástica de estruturas compósitas incorporando circuitos *Shunt* para o controle passivo de vibrações**, 121 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

RITTO, T. G.; SOIZE, C.; SAMPAIO, R. Stochastic Dynamics of a Drill-String with Uncertain Weight-on-Hook. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v.XXXII, n. 3, p. 250-258, 2010. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782010000300008>

ROSENMAN, M.A.; GERO, J.S. Reducing the Pareto optimal set in multicriteria optimization (with application to Pareto optimal dynamic programming). **Engineering Optimization**, v.8, p. 189-206, 1985. <https://doi.org/10.1080/03052158508902489>

RUBINSTEIN, R. Y. **Simulation and the Monte Carlo Method**. John & Wiley & Sons, 1981. <https://doi.org/10.1002/9780470316511>

SAMPAIO, R.; CATALDO E. Comparing two strategies to model uncertainties in structural dynamics. **Shock Vibration**, v. 17(2), p. 171-186, 2010. <https://doi.org/10.1155/2010/837362>

SANTANA, D. C. **Modelagem e otimização de shunts piezelétricos aplicados ao controle passivo de vibrações**, 203 f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

SANTOS, H. F. L. **Controle ativo-passivo de vibrações estruturais usando materiais piezelétricos: Otimização e quantificação de incertezas**, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia da Universidade de São Paulo. São Carlos, SP, 2012.

SARAVANOS, D. A.; HEYLIGER P. R. Coupled Layerwise Analysis of Composite Beams with Embedded Piezoelectric Sensors and Actuators. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 6, n. 3, p. 350-363, 1995. <https://doi.org/10.1177/1045389X9500600306>

SARAVANOS, D. A. Damped Vibration of Composite Plates with Passive Piezoelectric-Resistor Elements. **Journal of Sound and Vibration**, v. 221, n. 5, p. 867-885, 1999. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.2037>

SCHINOZURA, M. Monte Carlo Solution of Structural dynamics. **Computers and Structures**, v. 2, p. 855-874, 1972. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(72\)90043-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(72)90043-0)

SETTER, N. **Piezoelectric Materials in Devices**: Extended reviews on current and emerging piezoelectric materials, technology and applications. Ceramics Lab., EPFL, 2002.

SHUELLER, G., I. Computational stochastic mechanics - recent advances. **Journal of Computers and Structures**, v. 79, p. 2225-2234, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00078-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00078-5)

SILVA, V. A. C. 2014. **Concepção Robusta de Circuitos Elétricos Shunt Multimodais para o Controle Passivo de Vibrações de Estruturas Compostas. Dissertação de Mestrado**, 109f. Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2014.

SILVA, V. A. C.; DE LIMA, A. M. G.; BOUHADDI, N.; LACERDA, H. B. Uncertainty propagation and experimental verification of nonlinear viscoelastic sandwich beams. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 132, p. 654-669, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.07.022>

SINGHA, M. K.; GANAPATHI, M. A parametric study on supersonic flutter behavior of laminated composite skew flat panels. **Composite Structures**, v. 69, pp. 55-63, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.04.018>

SOIZE, C. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. **Journal of the Acoustical Society of America**, v.109 (5), 2001. <https://doi.org/10.1121/1.1360716>

SOIZE, C. Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics - recent theoretical advances. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332(10), p. 2379-2395, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.10.010>

SONG, Z. G.; LI, F. M. Active aeroelastic flutter analysis and vibration control of supersonic composite laminated plate. **Composite Structures**, v.94, pp. 702–713, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.09.005>

SOUZA, C. E. **Otimização em dois níveis da orientação e da topologia de cascas laminadas**, 131f. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

SRINIVAS, N.; DEB, K. Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms. **Journal of Evolutionary Computation**, v. 2, n. 3, p. 221-248, 1993. <https://doi.org/10.1162/evco.1994.2.3.221>

STEUER, R. E. **Multiple Criteria: Theory, Computation and Application**. New York: John Wiley & Sons, 1986.

SUDRET, B.; DER KIUREGHIAN A. **Stochastic finite elements and reliability: a state-of-the-art report**. Technical report no. UCB/SEMM-2000/08, p. 173 University of California, Berkeley; 2000.

SUDRET, B. **Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models - Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods**. Clermont-Ferrand (France): Habilitation à diriger des recherches. Université Blaise Pascal; 2007.

TRINDADE, M. A.; BENJEDDOU, A. Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptative structures: critical evaluation and optimization. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 16, n. 3, p. 210-223, 2009. <https://doi.org/10.1080/15376490902746863>

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical optimization techniques for engineering design**. New York: McGraw-Hill, 1984.

VIANA, F.A.C. **Amortecimento de vibrações usando pastilhas piezoelétricas e circuitos *shunt* ressonantes**, 105f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2005.

VIANA, F. A. C.; STEFFEN JR, V. Multimodal vibration damping through piezoelectric patches and optimal resonant *shunt* circuits. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 28, n. 3, p. 293-310, 2006. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782006000300007>

YAMAZAKI, F.; SCHINOZUKA, M. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. **Journal of Engineering Mechanics ASCE**, v. 114(8), p. 1335-1354, 1988. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1988\)114:8\(1335\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:8(1335))

ZAMBOLINI-VICENTE, B. G. G. L. **Projeto robusto de circuitos *shunt* para o controle passivo de vibrações de estruturas compostas**, 97f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2014.

ZAMBOLINI-VICENTE, B. G. G. L. **Projeto de um Protótipo Atenuador de Vibrações Multimodal Self-powered Empregando Material Piezelétrico e Circuito Eletrônico**, 138f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019.

ZHAO, H.; CAO, D. A study on the aero-elastic flutter of stiffened laminated composite panel in the supersonic flow. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, pp. 4668-4679, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.04.006>

ZITZLER, E.; THIELE, L. **An evolutionary algorithm for multiobjective optimization: the strength Pareto approach**. Zurich: TIK-Report, n. 43, 1998.