FIDEL EDUARDO HUAYHUAS CHIPANA

Aplicação da técnica do vetor mãe em problemas de espaçabilidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2019

FIDEL EDUARDO HUAYHUAS CHIPANA

Aplicação da técnica do vetor mãe em problemas de espaçabilidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

UBERLÂNDIA - MG
2019

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C541
2019

Chipana, Fidel Eduardo Huayhuas, 1983-
Aplicação da técnica do vetor mãe em problemas de espaçabilidade [recurso eletrônico] / Fidel Eduardo Huayhuas Chipana. - 2019.

Orientador: Vinícius Vieira Fávaro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2019.2385
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Vieira Fávaro, Vinícius , 1981-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAçÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Fidel Eduardo Huayhuas Chipana.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11712MAT003.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Aplicação da técnica do vetor mãe em problemas de espaçabilidade

ORIENTADOR: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 26 de agosto de 2019, às 13:45h, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr.Vinícius Vieira Fávaro UFU - Universidade Federal de Uberlândia (orientador)	
Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço USP - Universidade de São Paulo	
Prof. Dr. Blas Melendez Caraballo UFU - Universidade Federal de Uberlândia	

Uberlândia-MG, 26 de agosto de 2019.

Dedicatória

Aos meus pais Félix Huayhuas Laupa e Florencia Chipana Ccaccya com muito amor....

Agradecimentos

Agradeço principalmente a Deus por estar sempre ao meu lado, e ter colocado anjos no meu caminho no Brasil.

Agradeço à Universidade Federal de Uberlândia por ter me recebido tão bem. Nunca esquecerei esta maravilhosa casa que será sempre minha. Ao programa de Mestrado em Matemática da UFU, pelo privilégio e a oportunidade de fazer o curso. Aos coordenadores Dr. Mário Henrique de Castro, Dr. Thiago Aparecido Catalan, e a Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice por serem tão prestativos e atenciosos sempre. Aos professores Dr. Jean Venato Santos, Dr. Márcio Colombo Fenille, Dr. Cícero Fernandes De Carvalho, Dr. Mário Henrique de Castro, Dr Geraldo Marcio De Azevedo Botelho e Dr.Fernando Rodrigo Rafaeli, pelo fornecimento literário durante o curso.

Ao meu orientador, Vínícius Fávaro por ter aceitado me orientar. Por todo o apoio, conhecimento literário que me ensinou e a imensa paciência que teve comigo. Pelo imenso trabalho de correção. Muito obrigado mesmo.

Agradeço ao meu pai Félix e minha mãe Florencia por sempre torcer por mim. Pela educação e o exemplo de luta no dia a dia.

Á minha família, que sempre torceu por mim. Meus irmãos Angel, Luis, César, Reynalda e Geannette. Meus sobrinhos Gianmarco, Elias, Ismael e Isaías. Meu tio Orlando, minhas tias Justina e Isabel, por último ao meu primo Juan.

Ao meu anjo Edna, pelos cuidados nos momentos mais difíceis e pelo suporte fundamental que me forneceu durante minha estadia no Brasil, muito obrigado mesmo.

A equipe médica que pertence a UPA do Rio de Janeiro e a equipe médica do UAI de Uberlândia, por ter me atendido da melhor forma sempre que precisei.

A minha família carioca que ganhei a qual é composta por dona Inacia Lima, dona Ivete, o senhor Manoel Aoreliano, Paloma, Beatriz e o Ramon.

A o meu amigo Ueslei Ferreira Costa.

Aos meus colegas do mestrado Telmo, Rejiane, Geivison, Augusto, Ariel, Geovany e Jeremias.

Aos meus amigos funcionários da Biblioteca da UFU, o senhor Ricardo e a dona Ana Maria, sempre atenciosos.

As professoras Benice e Lidiane do Centro de Línguas, pelas aulas de português.

Aos meus amigos Gabrielinho, Meiri, Fiorella, Lisbeth, Wilcon, Yohana, Rai, Anderson e Duterval, Omar e Simalia, pelas conversas motivadoras e também pelas conversas engraçadas.

Aos funcionários do restaurante universitário da UFU, por cada dia ter me fornecido um alimento gostoso e saudável, pela convivência e amizade que surgiu durante minha permanência na UFU, Jackelin, Ana Flávia, dona Telma, Marcia, Anni, Damiana, Cassia, Jussecleia, Larissa, Cida, Mateus e Marcos Aurélio. Nunca os esquecerei.

E finalmente, agradeço o apoio financeiro fornecido da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, durante a realização do curso, a qual foi essencial para concluir meus estudos de mestrado satisfatoriamente.

HUAYHUAS-CHIPANA, F. E. *Aplicação da técnica do vetor mãe em problemas de espaçabilidade.* 2019. - 70 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho utilizaremos a técnica do vetor mãe para explorar a espaçabilidade de certos conjuntos de sequências e de funções mensuráveis. Estudaremos também a espaçabilidade do conjunto das funções de c_0 em c_0 para as quais não vale a forma fraca do teorema de Peano.

Palavras-chave: Espaços vetoriais topológicos, espaçabilidade, espaços de sequências, espaços de funções, forma fraca do teorema de Peano.

HUAYHUAS-CHIPANA, F. E. *Application of the mother vector technique in problems of spaceability.* 2019. - 70 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work we use the mother vector technique to explore the spaceability of some sequence sets and measurable functions sets. We also study the spaceability of the set of mappings from c_0 em c_0 for which the weak form of Peano's theorem fails to be true.

Keywords: Topological vector spaces, spaceability, sequences spaces, functions spaces, weak form of Peano theorem.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\emptyset$	Conjunto vazio
$\mathrm{card}(X)$	Cardinalidade do conjunto X
$A - B$	Diferença dos conjuntos A e B
$A^{\complement}$	Complemento do conjunto A
$P(A)$	Conjunto das partes do conjunto A
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	O corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\lvert \cdot \rvert$	Valor absoluto ou módulo
$\dim(E)$	Dimensão do espaço vetorial E
E, F e X_n	Espaços vetoriais ou espaços normados ou espaços de Banach ou espaços vetoriais topológicos sobre o corpo $\mathbb{K}$
$\mathrm{span}(A)$	O subespaço linear gerado pelo conjunto A
$\overline{A}$	O fecho do conjunto A
$\langle x, y \rangle$	O produto interno de x e y
$(E, \lVert \cdot \rVert)$	Espaço vetorial normado com norma $\lVert \cdot \rVert$
$\mathcal{L}(E, F)$	Espaço vetorial dos operadores lineares contínuos entre os espaços normados E e F
$(X, \mathcal{T})$	Espaço topológico
$\mathcal{U}_x$	Sistema de vizinhanças do ponto x na topologia $\mathcal{T}$
$\mathcal{B}_x$	Base de vizinhanças do ponto x na topologia $\mathcal{T}$
$\langle x, y \rangle$	Produto interno dos vetores x e y
$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$	Conjunto das sequências de escalares
c_0	Espaço das sequências de escalares que convergem para zero

c_{00}	Espaço das sequências de escalares eventualmente nulas
ℓ_p	Espaço das sequências de escalares absolutamente p-somáveis onde $0 < p < \infty$
$\ell_p^+(X)$	Interseção dos espaços vetoriais $\ell_q(X)$, onde $1 \leq p < q < \infty$
$\ell_p^-(X)$	União dos espaços vetoriais $\ell_q(X)$, onde $0 < q < p < \infty$
ℓ_p^+	Interseção dos espaços vetoriais ℓ_q, onde $1 \leq p < q < \infty$
ℓ_p^-	União dos espaços vetoriais ℓ_q, onde $0 < q < p < \infty$
$\prod_{n=1}^{\infty} X_n$	Produto cartesiano dos espaços normados X_n
$\left(\sum_n X_n\right)_\infty$	Espaço das sequências de vetores limitadas
$\left(\sum_n X_n\right)_0$	Espaço das sequências de vetores que convergem para zero
$\left(\sum_n X_n\right)_{00}$	Espaço das sequências de vetores eventualmente nulas
$\left(\sum_n X_n\right)_p$	Espaço das sequências de vetores fortemente p- somáveis
$\left(\sum_n X_n\right)_p^-$	União dos espaços vetoriais $\left(\sum_n X_n\right)_q$, onde $0 < q < p < \infty$
$\left(\sum_n X_n\right)_p^+$	Interseção dos espaços vetoriais $\left(\sum_n X_n\right)_q$, onde $1 \leq p < q < \infty$
$C(c_0)$	Espaço vetorial das funções contínuas de c_0 em c_0
$\mathscr{K}(c_0)$	Espaço das funções contínuas de c_0 em c_0, para as quais a forma fraca do teorema de Peano não é válida
ℓ_∞	Espaço das sequências de escalares limitadas
$L_p[0,1]$	Espaço das funções mensuráveis $f\colon [0,1] \to \mathbb{K}$ tais que $\int_0^1 \lvert f\rvert^p < \infty$, onde $0 < p < \infty$
$m(A)$	Medida de Lebesgue do conjunto A
χ_A	Função característica do conjunto A

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Podemos dizer que a estrutura principal da Análise Funcional é a estrutura de espaço vetorial, principalmente os de dimensão infinita, munido com uma topologia, a qual torna as operações de soma e produto por escalar contínuas. Tais estruturas são chamadas de espaços vetoriais topológicos e os exemplos clássicos são os espaços normados.

Nesses ambientes, um assunto que ganhou bastante notoriedade nos últimos 15 anos é o de lineabilidade/espaçabilidade. Grosso modo, lineabilidade é a busca por linearidade em ambientes em que, a princípio, não se tem um estrutura linear. O termo *lineabilidade* foi introduzido por Gurariy no início dos anos 2000 e sua definição precisa é a seguinte:

Seja E um espaço vetorial topológico. Dizemos que $A \subset E$ é:

- λ-*lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão λ (aqui λ pode ser um número natural ou um cardinal transfinito).

- λ-*espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão λ e fechado em E.

Diversos pesquisadores nos mais diferentes contextos da Análise Matemática passaram a explorar esta busca por linearidade. A vasta lista de referências do livro [1] intitulado *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*, publicado em 2015, mostra a vitalidade do assunto. Apenas para citar alguns conjuntos/tópicos em que se foram exploradas as noções de lineabilidade e espaçabilidade: conjuntos de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto [16, 18, 19], conjuntos de sequências [3, 7, 13, 28], conjuntos de funções mensuráveis [8, 28], conjuntos de vetores hipercíclicos [4, 6], conjuntos de zeros de polinômios [2], conjuntos de polinômios somantes em espaços de Banach [9, 23], dentre vários outros.

As técnicas para se explorar os problemas de lineabilidade são das mais variadas possíveis. Uma técnica que foi bem sucedida para se explorar problemas de espaçabilidade em conjuntos de sequências e de funções mensuráveis é conhecida como "técnica do vetor mãe". Genericamente falando, esta técnica consiste no seguinte:

Sejam E um espaço vetorial topológico de dimensão infinita e $A \subseteq E$. O método consiste em manipular, de maneira conveniente, um vetor (que pode ou não pertencer a A) a fim de, a partir dele, criar um espaço vetorial de dimensão infinita (fechado, no caso da espaçabilidade) em $A \cup \{0\}$. Uma estratégia bastante eficiente para o uso desse vetor mãe, e que trataremos nesse trabalho, é a de definir um operador linear injetivo de um espaço vetorial topológico X (em geral de dimensão infinita) em E, digamos $T\colon X \to E$, tal que $T(X) \subset A \cup \{0\}$. Isso mostra que A é $(\dim X)$-lineável. Quando estamos interessados também na espaçabilidade, tenta-se provar ou que $T(X)$ é fechado em E, ou que $\overline{T(X)} \subset A \cup \{0\}$.

Neste trabalho exploraremos a técnica do vetor mãe em três tópicos distintos. O primeiro é em conjuntos de sequências bastante gerais, que englobam os casos clássicos de sequências absolutamente p-somáveis, limitadas, que convergem para zero, dentre outros.

O segundo é em conjuntos de funções mensuráveis p-integráveis de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$. Mais precisamente, provaremos que o conjunto $L_p[0,1] - \bigcup\limits_{q>p} L_q[0,1]$ é espaçável, para cada $p > 0$.

Já o terceiro é no estudo de equações diferenciais ordinárias. Mostraremos que o conjunto das funções contínuas de c_0 em c_0 para as quais a Forma Fraca do Teorema de Peano não é valida, é espaçável.

Estes tópicos estão respectivamente nos Capítulos 3, 4 e 5 deste trabalho e serão detalhados em cada um deles. O Capítulo 1 é dedicado as definições e resultados básicos da Teoria de Cardinais, de Análise Funcional e de Topologia Geral que serão utilizados no desenvolvimento desta dissertação. Já o Capítulo 2 é dedicado ao estudo detalhado dos espaços de sequências que serão necessários nos capítulos posteriores, principalmente no Capítulo 3. Os resultados do Capítulo 3 estão baseados nos artigos [3, 7], os do Capítulo 4 no artigo [8] e os do Capítulo 5 também no artigo [3].

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre cardinais, espaços vetoriais, espaços topológicos e espaços vetoriais topológicos, que serão utilizados em algumas demonstrações no decorrer desta dissertação.

1.1 Cardinais

Embora não definiremos o que são os *números cardinais* diremos que eles servem para medir conjuntos em termos da quantidade de elementos que possuem. Como os autores do livro Lineability The Search for Linearity in Mathematics, dizem: *Os números cardinais são em certo sentido, uma extensão dos números naturais e a aritmética cardinal é a extensão da aritmética básica dos números naturais aos cardinais.* Aceitaremos a convenção que a cada conjunto A está associado um número cardinal, denotado $\operatorname{card}(A)$, que nos dá a quantidade de elementos de A. A seguir, daremos definições que permitirão trabalhar com números cardinais.

Definição 1.1 Sejam A e B dois conjuntos, diremos que:

(a) $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$ se existe uma aplicação $f : A \to B$ injetora.

(b) $\operatorname{card}(A) \geq \operatorname{card}(B)$ se existe uma aplicação $f : A \to B$ sobrejetora.

(c) $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$ se existe uma aplicação $f : A \to B$ bijetora.

(d) $\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(B)$ se $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$ e não existe uma aplicação $f : A \to B$ bijetora.

(e) $\text{card}(A) > \text{card}(B)$ se $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$ e não existe uma aplicação $f : A \to B$ bijetora.

Diremos que um número cardinal $\text{card}(A)$ é:

(f) *finito* se A é um conjunto finito, caso contrário é chamado de *infinito*.

(g) *enumerável* se A é finito ou $\text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{N})$.

Escreveremos $\text{card}(A) = n$ para denotar o cardinal de um conjunto finito A com n elementos. Também escreveremos

$$\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad \text{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}.$$

Usaremos letras gregas para denotar números cardinais. Abaixo listamos algumas propriedades importantes envolvendo ordem para os cardinais.

Teorema 1.2 (Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder) *Se* $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ *e* $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$*, então* $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

Demonstração. Veja [1, Theorem I.3, p. 2]. ■

Proposição 1.3 *Se α, β são dois números cardinais quaisquer, então $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$.*

Demonstração. Veja [1, Theorem I.5, p. 3]. ■

Proposição 1.4 *Para qualquer conjunto A, tem-se* $\text{card}(A) < \text{card}(P(A))$.

Demonstração. Veja [1, Theorem I.6, p. 4]. ■

Proposição 1.5 *Se α é um número cardinal infinito, então $\alpha \geq \aleph_0$.*

Demonstração. Veja [1, Theorem I.7, p. 4]. ■

Proposição 1.6 $\mathbb{R} = P(\mathbb{N})$*, ou seja,* $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Demonstração. Veja [1, Theorem II.6, p. 9]. ■

1.1.1 Aritmética dos cardinais e propriedades

Vamos definir operações de números cardinais.

Definição 1.7 Sejam α, β quaisquer números cardinais. Definimos:

(a) $\alpha + \beta := \text{card}(A \cup B)$, onde $\alpha = \text{card}(A)$, $\beta = \text{card}(B)$ e $A \cap B = \emptyset$.

(b) $\alpha \cdot \beta := \text{card}(A \times B)$, onde $\alpha = \text{card}(A)$, $\beta = \text{card}(B)$.

(c) $\alpha^\beta := \text{card}(A^I)$, onde $\alpha = \text{card}(A)$, $\beta = \text{card}(I)$ e $A^I := \{f\colon I \to A;\ f \text{ função}\}$.

Veremos que algumas propriedades dos números reais continuam valendo para os números cardinais. Não é difícil verificar os seguintes resultados para números cardinais.

Proposição 1.8 *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$ números cardinais. Então:*

(a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$

(b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$

(c) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma).$

(d) $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = (\alpha^\gamma) \cdot (\beta^\gamma).$

(e) $\alpha^{\beta+\gamma} = \left(\alpha^\beta\right) \cdot (\alpha^\gamma).$

(f) $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\gamma)^\beta.$

Demonstração. Veja [29, Theorem 6.4.3, p. 129] e [29, Theorem 6.5.2, p. 135]. ■

Proposição 1.9 *Sejam α, β números cardinais, com $1 \leq \beta \leq \alpha$ e α infinito. Então:*

(a) $\alpha + \beta = \alpha.$

(b) $\alpha \cdot \beta = \alpha.$

Demonstração. Veja [1, Theorem II.2, p. 6] e [1, Theorem II.4, p. 7]. ■

Utilizando as propriedades aritméticas acima e a Proposição 1.6, obtemos:

Corolário 1.10 $\text{card}\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right) = \mathfrak{c}.$

Demonstração. Temos que

$$\text{card}\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right) = \text{card}(\mathbb{K})^{\text{card}(\mathbb{N})} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{(\aleph_0 \cdot \aleph_0)} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

■

1.2 Decomposição dos naturais

Nos resultados principais do nosso trabalho será muito útil escrever o conjunto dos números naturais como uma união infinita de conjuntos infinitos e dois a dois disjuntos. Há várias maneiras de se fazer esta decomposição. A título de ilustração, a próxima proposição nos dá uma maneira de fazer tal decomposição. Para isso usaremos os dois importantes resultados a seguir da álgebra.

Teorema 1.11 *(Teorema Fundamental da Aritmética) Todo número natural maior do que* 1 *ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

Demonstração. Veja [21, Teorema 7.1.1, p. 83]. ■

Teorema 1.12 *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Veja [21, Teorema 7.2.1, p. 88]. ■

Proposição 1.13 *Sejam*

$$\mathbb{N}_1 := \{1\} \cup \{p\colon p \text{ é primo}\}$$

e

$$\mathbb{N}_i := \{p_1 p_2 \cdots p_i\colon p_1, p_2, \ldots, p_i \text{ são primos}\},$$

para todo $i \geq 2$*. Então cada* $\mathbb{N}_i$ *é um subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$*, satisfazendo* $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$ *e* $\mathbb{N} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$*.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.12, $\mathbb{N}_1 = \{1\} \cup \{p : p \text{ é } primo\} \subseteq \mathbb{N}$ é infinito. Consequentemente $\mathbb{N}_i$ é um conjunto infinito, para cada $i \in \mathbb{N}$.
Pelo Teorema Fundamental da Aritmética (Teorema 1.11) segue que $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j \neq \emptyset$, se $i \neq j$ e também que $\mathbb{N} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$. ■

1.3 Resultados da Álgebra Linear

Aqui daremos alguns resultados que são válidos para espaços vetoriais sobre corpos arbitrários, lembrando que nosso interesse é o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos.

Definição 1.14 Uma família $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de subespaços de um espaço vetorial V, sobre um corpo $\mathbb{K}$ é chamada *cadeia*, se para quaisquer $\alpha, \beta \in \Lambda$, temos $W_\alpha \subseteq W_\beta$, ou $W_\beta \subseteq W_\alpha$.

Proposição 1.15 *Sejam V um espaço vetorial e $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de subespaços vetoriais de V. Então*

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha$$

também é um subespaço de V.

Demonstração. Veja [24, Proposition 1.3.6, p. 12]. ■

Proposição 1.16 *Seja V um espaço vetorial e seja $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma cadeia. Então*

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha$$

também é um subespaço de V.

Demonstração. Veja [24, Proposition 1.3.10, p. 12]. ■

Proposição 1.17 *Se A é um conjunto gerador de um espaço vetorial $V \neq \{0\}$, então existe uma base de V contida em A.*

Demonstração. Veja [12, Proposição 2.8.1, p. 76]. ■

1.4 Espaços métricos

Definição 1.18 Seja X um conjunto não vazio. Uma função $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ é chamada de *métrica* se verifica as seguintes condições:

D1) $d(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$;

D2) $d(x,y) = 0$ se, e somente se $x = y$;

D3) $d(x,y) = d(y,x)$ para todos $x, y \in X$;

D4) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, para todos $x, y, z \in X$.

O par (X,d) é chamado de *espaço métrico*. Com frequência escreveremos espaço métrico X no lugar do espaço métrico (X,d). Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ converge para $x \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. Neste caso, dizemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência convergente em X e que x é limite de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ é dita de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, sempre que $n, m > n_0$. O espaço *espaço métrico completo* se toda sequência de Cauchy converge em X.

Proposição 1.19 *Sejam X um espaço métrico completo e A um subespaço métrico de X. Então A é fechado se, e somente se, A é completo.*

Demonstração. Veja [25, Proposição 6, p. 166]. ■

Proposição 1.20 *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência).*

Demonstração. Veja [25, Proposição 3, p. 162]. ■

1.5 Espaços normados

Definição 1.21 Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $p\colon E \to \mathbb{R}$ é chamada de *norma*se verifica as seguintes condições:

N1) $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$;

N2) $p(x) = 0$ implica $x = 0$;

N3) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in E$;

N4) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in E$.

Se a condição N2) não é satisfeita p é dita *seminorma*. Em geral se usa $\|\cdot\|$ para denotar uma norma. O espaço vetorial E, junto com a norma $\|\cdot\|$ é chamado de *espaço normado*. E é chamado de *espaço de Banach* se for completo com relação a métrica natural induzida pela norma $d(x, y) = \|x - y\|$.

Proposição 1.22 *Sejam E um espaço normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Então E é um espaço de Banach se, e somente se,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \quad \textit{implica que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ é convergente em } E.$$

Demonstração. Veja [30, theorem 2.1.10, p. 69]. ■

Proposição 1.23 *Seja E um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ com $\dim(E) = \infty$. Então $\dim(E) \geq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Veja [1, Proposition III.5, p. 14]. ■

Teorema 1.24 *Seja E é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ com $\dim(E) = \infty$. Então toda base de E tem dimensão igual a cardinalidade de E. Mais especificamente $\dim(E) = \operatorname{card}(E)$.*

Demonstração. Veja [20, Theorem 3.5, p. 5]. ■

Teorema 1.25 *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T\colon E \to F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *T é lipschitziano.*

(b) *T é uniformemente contínuo.*

(c) *T é contínuo.*

(d) *T é contínuo em algum ponto de E.*

(e) *T é contínuo na origem.*

(f) $\|T\| := \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.

(g) *Existe uma constante $C \geqslant 0$ tal que $\|T(x)\| \leqslant C\|x\|$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Veja [10, Teorema 2.1.1, p. 32]. ■

Teorema 1.26 (Teorema de Banach-Steinhaus) *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E,F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$ existe $C_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < C_x.$$

Então $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.

Demonstração. Veja [10, Teorema 2.3.2, p. 38]. ■

Corolário 1.27 *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E,F)$ tal que $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F para todo x em E. Se definirmos*

$$T\colon E \to F \ , \ T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x),$$

então T é um operador linear e contínuo.

Demonstração. Veja [10, Corolário 2.3.3, p. 39]. ■

Teorema 1.28 (O Teorema de Riesz) *Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi\colon H \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle \quad \textit{para todo}\, x \in H.$$

Além disso, $\|\varphi\| = \|y_0\|$.

Demonstração. Veja [10, Teorema 5.5.2, p. 126]. ■

Definição 1.29 Dizemos que dois espaços normados E e F são *topologicamente isomorfos*, ou simplesmente *isomorfos*, se existir um operador linear contínuo bijetor $T\colon E \to F$ cujo operador inverso $T^{-1}\colon F \to E$ é também contínuo. Tal operador é chamado de *isomorfismo*.

Proposição 1.30 *Sejam E e F espaços normados isomorfos. Então E é um espaço de Banach se, e somente se, F é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [32, Lemma 4.38, p. 110]. ■

1.6 Espaços Topológicos

Definição 1.31 Seja X um conjunto. Chamaremos de uma *topologia* em X a uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\emptyset$ e X pertencem a $\mathcal{T}$;

(b) A união de uma família arbitrária de membros de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$;

(c) A interseção de uma família finita de membros de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.

Os membros de $\mathcal{T}$ são chamados de *abertos*. O par $(X, \mathcal{T})$ é chamado de *espaço topológico*. Quando não houver risco de confusão diremos simplesmente que X é um espaço topológico. Se $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ são duas topologias no mesmo conjunto X, e $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$, diremos que $\mathcal{T}$ é *mais fraca* do que $\mathcal{S}$, ou $\mathcal{S}$ é *mais fina* do que $\mathcal{T}$. Duas topologias em X são iguais se $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

Definição 1.32 Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Uma coleção $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ é dito uma *base* para a topologia $\mathcal{T}$ se dado $U \in \mathcal{T}$ existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$U = \bigcup \{V : V \in \mathcal{C}\}.$$

Definição 1.33 Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $x \in X$. Uma *vizinhança* de x é qualquer subconjunto V de X que contém um aberto $O \in \mathcal{T}$, verificando $x \in O \subset V$. Se $V \in \mathcal{T}$ com $x \in V$ diremos que V é uma *vizinhança aberta*. A coleção $\mathcal{U}_x$ de todas as vizinhanças de x é chamada de *sistema de vizinhanças* de x. Como $X \in \mathcal{U}_x$ temos assim que $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$. Uma base de vizinhanças em x é uma subcoleção $\mathcal{B}_x$, com $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x$, tendo a propriedade que cada $U \in \mathcal{U}_x$ contém algum $V \in \mathcal{B}_x$. Assim, $\mathcal{U}_x$ pode ser determinado por $\mathcal{B}_x$ da seguinte forma:

$$\mathcal{U}_x = \{U \subseteq X : V \subseteq U \text{ para algum } \ V \in \mathcal{B}_x\}.$$

Uma vez escolhida uma base de vizinhanças em x seus elementos são chamadas *vizinhanças básicas*.

Proposição 1.34 *Seja X um conjunto não vazio. Para cada $x \in X$ seja $\mathcal{B}_x$ uma família não vazia de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

(a) *$x \in U$ para cada $U \in \mathcal{B}_x$.*

(b) *Dados $U, V \in \mathcal{B}_x$, existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subseteq U \cap V$.*

(c) *Dado $U \in \mathcal{B}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$, $V \subseteq U$, tal que para cada $y \in V$ existe $W \in \mathcal{B}_y$ tal que $W \subseteq U$.*

Seja

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X : \text{ para cada } \ x \in U \text{ existe } V \in \mathcal{B}_x \text{ tal qiue } V \subseteq U\}.$$

Então $\mathcal{T}$ é uma topologia em X e $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x em $(X, \mathcal{T})$ para cada $x \in X$.

Demonstração. Veja [10, Teorema B15, p. 353]. ■

Definição 1.35 Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. X é dito de *Hausdorff* se para cada x e y, elementos distintos de X, existem vizinhanças U de x e V de y com $U \cap V = \emptyset$.

1.7 Convergência em Espaços Topológicos

Definição 1.36 Seja um conjunto $\Lambda \neq \emptyset$ e seja $\preccurlyeq$ uma relação em Λ satisfazendo as seguintes condições:

(a) Para todo $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \preccurlyeq \lambda$;

(b) Se $\lambda \preccurlyeq \nu$ e $\nu \preccurlyeq \eta$, então $\lambda \preccurlyeq \eta$;

(c) Para quaisquer $\lambda, \nu \in \Lambda$, existe $\eta \in \Lambda$ tal que $\lambda \preccurlyeq \eta$ e $\nu \preccurlyeq \eta$.

O conjunto Λ munido com essa relação $\preccurlyeq$ é chamado de *conjunto dirigido*, e será denotado por $(\Lambda, \preccurlyeq)$.

Definição 1.37 Sejam X um conjunto não vazio, e $(\Lambda, \preccurlyeq)$ um conjunto dirigido. Uma aplicação $P\colon \Lambda \to X$ é chamada de *rede* em X indexada por Λ. Em geral denotaremos uma rede $P : \Lambda \to X$ simplesmente por $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Definição 1.38 (Convergência de redes) Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em X. Diremos que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *converge* para $x \in X$, se para cada $U \in \mathcal{U}_x$ existe um índice $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$x_\lambda \in U, \text{ sempre que } \lambda_0 \preccurlyeq \lambda.$$

Neste caso escreveremos simplesmente por $x_\lambda \xrightarrow{\lambda} x$.

Definição 1.39 (Convergência de sequências) Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço topológico X converge para $x \in X$ ($x_n \xrightarrow{n} x$) quando para cada vizinhança U de x, existir um inteiro positivo n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $x_n \in U$.

Proposição 1.40 *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $x \in X$, $A \subseteq X$. São equivalentes:*

(a) $x \in \overline{A}$.

(b) *existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em A tal que $x_\lambda \xrightarrow{\lambda} x$.*

(c) $U \cap A \neq \emptyset$*, para todo* $U \in \mathcal{U}_x$.

Demonstração. Veja [10, Proposição B.12 (f), p.352] e [10, Teorema B.31, p. 356]. ■

1.8 Espaços vetoriais topológicos

Definição 1.41 Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\mathcal{T}$ uma topologia em E. Dizemos que o par $(E, \mathcal{T})$ é um *espaço vetorial topológico* se as operações algébricas

(a) $s\colon E \times E \to E, \;\; s(x, y) = x + y$ e

(b) $m\colon \mathbb{K} \times E \to E, \;\; m(a, x) = ax$

são contínuas quando consideramos em $E \times E$, $\mathbb{K} \times E$ as respectivas topologias produto e em $\mathbb{K}$ a topologia usual. Neste caso diremos que $\mathcal{T}$ é uma *topologia vetorial*. Quando não houver necessidade nem perigo de ambiguidade, ao nos referirmos a um espaço vetorial topológico escreveremos simplesmente E no lugar de $(E, \mathcal{T})$.

Exemplo 1.42 Todo espaço normado é um espaço vetorial topológico.

Sejam A, B subconjuntos de um espaço vetorial E, $x_0 \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Denotaremos $A + B = \{x + y : \ x \in A, \, y \in B\}$, $x_0 + A = \{x + a : a \in A\}$ e $\alpha A = \{\alpha x : \ x \in A\}$.

A seguinte proposição diz que, em um espaço vetorial topológico, as translações e as homotetias são homeomorfismos. Em consequência, a partir de vizinhanças do zero podemos obter vizinhanças de qualquer outro ponto e vice-versa. Portanto, a topologia de um espaço vetorial topológico pode ser conhecida a partir de uma base vizinhanças do zero. Veremos também que um operador linear entre dois espaços vetoriais topológicos é contínuo se, e somente se, é contínuo no zero.

Proposição 1.43 *As translações e as homotetias são homeomorfismos em um espaço vetorial topológico. Mais precisamente, se E é um espaço vetorial topológico, $x_0 \in E$ e $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, então as funções*

$$x \in E \mapsto x + x_0 \in E \quad e \; x \in E \mapsto ax \in E$$

são homeomorfismos. A homotetia é também um isomorfismo.

Demonstração. Veja [10, Proposição 8.1.4, p. 222]. ■

Corolário 1.44 *As seguintes afirmações são equivalentes para um subconjunto V do espaço vetorial topológico E:*

(a) *V é uma vizinhança da origem em E.*

(b) *$\lambda V = \{\lambda x : x \in V\}$ é uma vizinhança da origem em E para algum $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.*

(c) *$\lambda V = \{\lambda x : x \in V\}$ é uma vizinhança da origem em E para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.*

(d) *$x_0 + V = \{x_0 + x : x \in V\}$ é uma vizinhança de x_0 para algum $x_0 \in E$.*

(e) *$x_0 + V = \{x_0 + x : x \in V\}$ é uma vizinhança de x_0 para todo $x_0 \in E$.*

Demonstração. Veja [10, Corolário 8.1.5, p. 222]. ■

A próxima proposição será usada diversas vezes ao longo do trabalho.

Proposição 1.45 *Sejam E um espaço vetorial topológico e F subespaço vetorial de E. Então $\overline{F}$ é um subespaço vetorial fechado de E.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \overline{F}$ e V qualquer vizinhança de $x + y$. Então existem vizinhanças V_x e V_y de x e y respectivamente tais que $V_x + V_y \subseteq V$. Já que $V_x \cap F \neq \emptyset$ e $V_y \cap F \neq \emptyset$, existem $u \in V_x \cap F$ e $v \in V_y \cap F$. Como F é subespaço, temos $u + v \in F$. Além disso, $u + v \in V_x + V_y \subseteq V$, logo $V \cap F \neq \emptyset$, portanto $x + y \in \overline{F}$.

Sejam $x \in \overline{F}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e W qualquer vizinhança de λx. Então existe uma vizinhança V_x de x tal que $\lambda V_x \subseteq W$. Já que $V_x \cap F \neq \emptyset$, existe $u \in V_x \cap F$. Como F é subespaço, temos $\lambda u \in F$ e $\lambda u \in \lambda V_x$. Assim, $W \cap F \neq \emptyset$, portanto $\lambda x \in \overline{F}$. Isto mostra que $\overline{F}$ é um espaço vetorial de E. ■

1.8.1 Espaços localmente convexos

Definição 1.46 Um subconjunto A de um espaço vetorial E é dito:

(a) *convexo* se $\alpha x + \beta y \in A$ para todos $x, y \in A$ e $\alpha, \beta \geqslant 0$, com $\alpha + \beta = 1$.

(b) *absorvente* se para todo $x \in E$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que $x \in \lambda A$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \geq \lambda_0$.

(c) *equilibrado* se $\lambda x \in A$ para todo $x \in A$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq 1$; isto é , $\lambda A \subseteq A$ sempre que $|\lambda| \leq 1$.

Proposição 1.47 *Sejam E um espaço vetorial, e $p \colon E \to \mathbb{R}$ uma seminorma. Então o conjunto*

$$U_{p,\varepsilon} = \{x \in E : p(x) < \varepsilon\}$$

é convexo, equilibrado e absorvente para todo $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Veja [31, Theorem 1.34, p. 24]. ■

Observação 1.48 Um espaço vetorial topológico não precisa ter uma base de vizinhanças do zero consistindo de conjuntos convexos, mas os espaços de nosso interesse satisfazem essa condição.

Definição 1.49 Diremos que E é um *espaço localmente convexo* se E é um espaço vetorial topológico tal que cada vizinhança de zero contém uma vizinhança convexa de zero. Neste caso diremos que a topologia de E é uma *topologia localmente convexa.*

Observação 1.50 Dentro dos espaços vetoriais topológicos, são de maior interesse os espaços localmente convexos, isto é, aqueles que tenham vizinhanças convexas do zero, pois sua topologia é gerada por uma família de seminormas, como veremos a seguir.

1.8.2 A topologia gerada por uma família de seminormas

Em um espaço normado consideramos a topologia gerada pela norma. Veremos que na ausência de uma norma, qualquer família de seminormas também gera uma topologia, nem sempre normada mas sempre localmente convexa. Introduziremos agora a topologia determinada em um espaço vetorial por uma família de seminormas. Esta topologia será uma topologia localmente convexa.

Proposição 1.51 *Sejam E um espaço vetorial, e $\mathcal{P}$ uma família de seminormas em E. Seja*

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \bigcap_{p \in \mathcal{P}_0} U_{p,\varepsilon} : \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \text{ finito}, \ \varepsilon > 0 \right\}.$$

Então existe uma única topologia localmente convexa $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ em E que admite $\mathcal{B}_0$ como base de vizinhanças de zero. $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ é a topologia vetorial mais fraca em E tal que cada $p \in \mathcal{P}$ é contínua. Diremos que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ é a topologia localmente convexa definida por $\mathcal{P}$.

Demonstração. Veja [10, Teorema 8.3.3, p. 234] ou [27, Proposição 4.3, p. 10]. ∎

Definição 1.52 Sejam E um espaço vetorial, e $\mathcal{P}$ uma família de seminormas em E, diremos que $\mathcal{P}$ é uma *família dirigida de seminormas* em E, se $\mathcal{P}$ com a relação $\leq$ é um conjunto dirigido.

Observação 1.53 Se p, q são seminormas definidas em E tais que $p \leq q$, então $U_{q,\varepsilon} \subseteq U_{p,\varepsilon}$.

Se na hipótese da Proposição 1.51, trocamos uma família de seminormas por uma família dirigida de seminormas teremos que os conjuntos $U_{p,\varepsilon}$ determinados pelas seminormas da família formarão as vizinhanças básicas de zero da topologia localmente convexa, isto é, não fará falta fazer as interseções finitas dos $U_{p,\varepsilon}$.

Corolário 1.54 *Seja E um espaço vetorial, e seja $\mathcal{P}$ uma família dirigida de seminormas em E. Então os conjuntos $U_{p,\varepsilon}$ com $p \in \mathcal{P}$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças de zero em $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de zero. Pela Proposição 1.51 existe $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ conjunto finito tal que

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}_0} U_{p,\varepsilon} \subseteq U.$$

Como $\mathcal{P}$ é uma família dirigida de seminormas em E, existe $q \in \mathcal{P}$ tal que $q \geq p$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Daí resulta que

$$U_{q,\varepsilon} \subseteq \bigcap_{p \in \mathcal{P}_0} U_{p,\varepsilon} \subseteq U.$$

Provando assim que a família $\{U_{p,\varepsilon}\colon\ p \in \mathcal{P}\,,\ \varepsilon > 0\}$ forma uma base de vizinhanças de zero. ■

Proposição 1.55 *Seja E um espaço localmente convexo cuja topologia é gerada por uma família dirigida $\mathcal{P}$ de seminormas. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Então*

(a) $x_n \xrightarrow{n} x$ *em E na topologia gerada pela família $\mathcal{P}$ se, e somente se, $p(x_n - x) \xrightarrow{n} 0$, para todo $p \in \mathcal{P}$.*

(b) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é de Cauchy em E se, e somente se, $p(x_m - x_n) \longrightarrow 0$, quando $m, n \longrightarrow \infty$, para todo $p \in \mathcal{P}$.*

Demonstração. (a)($\Rightarrow$) Sejam $p \in \mathcal{P}$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Corolário 1.54, $U_{p,\varepsilon}$ é uma vizinhança básica de zero. Como $x_n \xrightarrow{n} x$ em E, logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n - x \in U_{p,\varepsilon} \text{ , sempre que } n \geq n_0,$$

ou seja,

$$p(x_n - x) < \varepsilon \text{ , sempre que } n \geq n_0.$$

Portanto $p(x_n - x) \xrightarrow{n} 0$.

($\Leftarrow$) Por hipótese $p(x_n - x) \xrightarrow{n} 0$, para todo $p \in \mathcal{P}$. Considere uma vizinhança básica de zero, a qual é da forma $U_{p,\varepsilon}$, conforme Corolário 1.54. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p(x_n - x) < \varepsilon \text{ , sempre que } n \geq n_0.$$

Daí, para todo $n \geq n_0$, $x_n - x \in U_{p,\varepsilon}$. Portanto $x_n \xrightarrow{n} x$ em E.

(b) Similar a prova do item (a).

■

Proposição 1.56 *Sejam E e F dois espaços localmente convexos, e sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ famílias dirigidas de seminormas que definem as topologias de E e F, respetivamente. Então uma transformação linear $T : E \to F$ é contínua se, e somente se, dada $q \in \mathcal{Q}$, existem $p \in \mathcal{P}$ e $c > 0$ tais que*

$$q\,(T(x)) \leq cp(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in E.$$

Demonstração. Veja [11, Theorem 1.9.3, p. 60]. ■

1.9 Espaços de Fréchet

Definição 1.57 (a) Um espaço vetorial topológico E é dito *metrizável* se existe uma métrica d em E que define a topologia de E.

(b) Se E é um espaço vetorial, então uma métrica d em E é dita *invariante sob translações* se

$$d(x,y) = d(a+x, a+y) \quad \text{para todo} \quad x,y,a \in E.$$

A proposição a seguir nos uma condição necessária e suficiente para um espaço localmente convexo de Hausdorff ser metrizável.

Proposição 1.58 *Seja E um espaço localmente convexo de Hausdorff. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E é metrizável.*

(b) *Existe uma base enumerável de vizinhanças de zero em E.*

(c) *Existe uma sequência de seminormas que define a topologia de E.*

Se alguma destas condições é verificada, então existe uma métrica em E, invariante sob translações, que define a topologia de E.

Demonstração. Veja [33, Theorem 6.1, p. 28] ou [27, Teorema 12.2, p. 38]. ■

Definição 1.59 Diremos que um espaço vetorial topológico E é um *espaço de Fréchet* se E é um espaço localmente convexo, métrizável e completo.

Exemplo 1.60 Todo espaço de Banach é um espaço de Fréchet.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS DE SEQUÊNCIAS VETORIAIS

Neste capítulo estudaremos generalizações de espaços de sequências clássicos da análise funcional. Os espaços clássicos são aqueles nos quais os termos de uma sequência pertencem no corpo $\mathbb{K}$, tais como $\ell_p, \ell_\infty(\mathbb{K}), c(\mathbb{K})$ e $c_0(\mathbb{K})$. Agora vamos dar mais liberdade aos termos de uma sequência, isto é, cada termo de uma sequência pertence a um espaço normado arbitrário. O objetivo será explorar ambientes em que podemos estudar os conceitos de lineabilidade e espaçabilidade. Começaremos esse capítulo com os espaços normados (ou p-normados) de sequências escalares.

2.1 Espaços (p-)normados de sequências de escalares

Muitos resultados dessa seção são casos particulares do caso vetorial que veremos na seção posterior. Mas, como os espaços de sequências de escalares são bastante usuais, e também para facilitar a familiarização do leitor com espaços p-normados, preferimos incluir algumas demonstrações do caso escalar.

Definição 2.1 Seja $p \geq 1$. Denotaremos por ℓ_p o espaço vetorial de todas as sequências de escalares que são *absolutamente p-somáveis*, isto é,

$$\ell_p = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\},$$

o qual se torna um espaço normado completo com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço vetorial de todas as sequências de escalares que são limitadas é denotado por ℓ_∞ e ele também se torna um espaço normado completo com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|.$$

O subespaço fechado de ℓ_∞ formado pelas sequências que convergem para zero é denotado c_0.

As demonstrações que estes espaços são normados e completos podem ser encontradas em qualquer livro introdutório de análise funcional. Por exemplo na prova do caso em que $1 \leq p < \infty$, faz-se necessário o uso de duas importantes desigualdades, a de Hölder e a de Minkowski. Como elas serão necessárias também em outros lugares nesse trabalho, vamos enuncia-las aqui.

Proposição 2.2 (Desigualdade de Hölder) *Seja* $1 < p, q < \infty$, *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *e sejam* $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ *e* $(\eta_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$. *Então* $(\xi_j\eta_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ *e*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j\eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^q\right)^{1/q}.$$

Demonstração. Veja [22, Theorem 1.3.12, p. 12]. ■

Proposição 2.3 (Desigualdade de Minkowski) *Seja* $1 \leq p < \infty$, *e sejam* $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$, $(\eta_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. *Então* $(\xi_j + \eta_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ *e*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p\right)^{1/q}.$$

Demonstração. Veja [22, Theorem 1.3.12, p. 12]. ■

Neste trabalho também estamos interessados nos espaços ℓ_p no caso em que $0 < p < 1$. Esses espaços são definidos da mesma forma, entretanto eles não são normados, como veremos a seguir. Para introduzir esses espaços, precisamos do conceito de p-norma.

Definição 2.4 Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, uma aplicação $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ é uma *p-norma* se satisfaz as condições (N1),(N2) e (N3) da Definição 1.21, porém a desigualdade triangular (N4) vale da seguinte forma:

N4$'$) $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$ para todos $x, y \in E$, onde $0 < p < 1$.

O espaço vetorial E, junto com a *p-norma* $\|\cdot\|$ é chamado de *espaço p-normado*. É fácil ver que uma p-norma em um espaço vetorial induz uma métrica $d(x,y) = \|x-y\|^p$. Dizemos que E é um *espaço p-Banach* se for completo com relação a essa métrica induzida pela p-norma.

Vejamos algumas propriedades importantes da p-norma.

Proposição 2.5 *Seja E um espaço p-normado. Então:*

(a) $\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^p \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p$ *para quaisquer* $x_1, \ldots x_n \in E$.

(b) $|\|x\|^p - \|y\|^p| \leq \|x-y\|^p$ *para quaisquer* $x, y \in E$.

(c) *Se $\|\cdot\|$ é a p-norma no espaço E, então essa p-norma é contínua.*

(d) *A função $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$, dada por $d(x,y) = \|x-y\|^p$ define uma métrica em E.*

Demonstração. A prova de (a) segue facilmente por indução. As demonstrações de (b) e (d) seguem de maneira análoga ao caso normado, mas usando (N4$'$). A continuidade de (c) é consequência imediata de (b). ■

O próximo resultado fornece um critério muito útil para provar que um espaço p-normado é completo.

Proposição 2.6 *Sejam E um espaço p-normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Então E é p-Banach se, e somente se,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty \quad \textit{implica que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \textit{é convergente em } E.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que E é p-Banach com $0 < p < 1$, sejam $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ as sequências das somas parciais das séries $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p$ respectivamente. Por hipótese a série $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty$, logo segue que $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Assim dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=r+1}^{k} \|x_j\|^p = \left|\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^p - \sum_{j=1}^{r} \|x_j\|^p\right| = |t_k - t_r| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad k > r > k_0.$$

Pela Proposição 2.5 temos que

$$d(s_k, s_r) = \|s_k - s_r\|^p = \left\| \sum_{j=r+1}^{k} x_j \right\|^p \leq \sum_{j=r+1}^{k} \|x_j\|^p < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad k > r > k_0.$$

Isto significa que $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy no espaço métrico E, o qual é completo por hipótese (E é p-Banach), então $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ converge em E, isto é, existe $s \in E$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d\left(s_n, s\right) = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - s \right\|^p = 0.$$

Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente em E, isto prova o que queríamos.

($\Leftarrow$) Por hipótese, toda série em E absolutamente p-somável, é convergente em E. Provaremos que E é um espaço p-Banach. Para isto, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ qualquer sequência de Cauchy em E. Pela Proposição 1.20 basta mostrar que ela possui uma subsequência convergente em E.

$$\text{Para } \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \exists\, n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_m - x_n\|^p < \frac{1}{2} \quad \text{sempre que} \quad m, n \geqslant n_1. \tag{2.1}$$

$$\text{Para } \varepsilon = \frac{1}{2^2}, \quad \exists\, \tilde{n}_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_m - x_n\|^p < \frac{1}{2^2} \quad \text{sempre que} \quad m, n \geqslant \tilde{n}_2. \tag{2.2}$$

Seja $n_2 > \max\{\tilde{n}_2, n_1\}$, logo substituindo na equação (2.1) temos que,

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^p < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Para } \varepsilon = \frac{1}{2^3}, \quad \exists \tilde{n}_3 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_m - x_n\|^p < \frac{1}{2^3} \quad \text{sempre que} \quad m, n \geqslant \tilde{n}_3. \tag{2.3}$$

Seja $n_3 > \max\{\tilde{n}_3, n_2\}$, logo substituindo na equação (2.2) temos que,

$$\|x_{n_3} - x_{n_2}\|^p < \frac{1}{2^2}.$$

Assim sucessivamente, para

$$\varepsilon = \frac{1}{2^i}, \quad \exists\, \tilde{n}_i \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_m - x_n\|^p < \frac{1}{2^i} \quad \text{sempre que} \quad m, n \geqslant \tilde{n}_i. \tag{2.4}$$

Seja $n_i > \max\{\tilde{n}_i, n_{i-1}\}$, temos que

$$\|x_{n_i} - x_{n_{i-1}}\|^p < \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Dessa forma construímos uma subsequência $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\|x_{n_i} - x_{n_{i-1}}\|^p < \frac{1}{2^{i-1}}$$

para todo $i \geq 2$. Como $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} < \infty$ temos que $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \|x_{n_i} - x_{n_{i-1}}\|^p < \infty$ e da hipótese segue que $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \left(x_{n_i} - x_{n_{i-1}}\right) = s$, isto é, a sequência da somas parciais $(s_k)_{k=2}^{\infty}$ converge para $s \in E$, onde $s_k = \displaystyle\sum_{i=2}^{k} (x_n - x_{n_i}) = x_{n_k} - x_{n_1}$. Isto é,

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} - x_{n_1}) = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k}) - x_{n_1}.$$

Assim $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge em E e, portanto, a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge em E. Logo E é completo. ■

Definição 2.7 *Conforme já dito, para $0 < p < 1$ definimos os espaços ℓ_p da mesma forma que para $p \geq 1$, isto é,*

$$\ell_p = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} : x_j \in \mathbb{K} \quad \textit{para todo } j \in \mathbb{N} \textit{ e } \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\}.$$

Nosso próximo objetivo é provar que ℓ_p é um espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais.

Proposição 2.8 *Sejam $s, t \geq 0$ e $p \geq 1$. Então*

$$(s+t)^p \leq 2^p(s^p + t^p).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade suponha que $s < t$. Então

$$(s+t)^p \leq (2t)^p = 2^p t^p \leq 2^p(s^p + t^p).$$

■

Proposição 2.9 *Sejam $s, t \geq 0$ e $0 < p \leq 1$. Então,*

$$(s+t)^p \leq s^p + t^p.$$

Demonstração. O caso quando $p = 1$ é óbvio. Para o caso $0 < p < 1$, fixe s e considere a seguinte função diferenciável

$$f_s : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_s(t) = s^p + t^p - (s+t)^p.$$

A condição $0 < p < 1$ implica que f_s tem derivada não negativa, logo é monótona não decrescente em $[0, \infty)$. Já que $f_s(0) = 0$, segue que $f_s(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Isso implica que,

$$(s+t)^p \leq s^p + t^p \quad \text{para todo } s, t \geq 0.$$

■

Proposição 2.10 *Para $0 < p < 1$, ℓ_p é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.*

Demonstração. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}$, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Devemos mostrar que $(x_j + \alpha y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Da desigualdade triangular segue que $|x_j + \alpha y_j| \leq |x_j| + |\alpha||y_j|$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 2.9 temos,

$$(|x_j + \alpha y_j|)^p \leq |x_j|^p + |\alpha|^p |y_j|^p \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Já que $\sum_{j=1}^{\infty} (|x_j|^p + |\alpha|^p |y_j|^p) < \infty$, segue que $\sum_{j=1}^{\infty} (|x_j + \alpha y_j|^p) < \infty$. ■

Proposição 2.11 *Seja $0 < p < 1$. A função*

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p,$$

define uma p-norma em ℓ_p. Consequentemente a função

$$d_p : \ell_p \times \ell_p \longrightarrow \mathbb{R} \quad , d_p\left((x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p,$$

é uma métrica em ℓ_p.

Demonstração. Basta provar que $\|\cdot\|_p$ é uma p-norma. O fato que d_p é uma métrica segue diretamente da Proposição 2.5(d). A única propriedade de p-norma que precisamos verificar é $\|x+y\|_p^p \leq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p$, para todos $x, y \in \ell_p$, pois as demonstrações das demais são idênticas as do caso $p \geq 1$. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Pela Proposição 2.9, temos que, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$|x_j + y_j|_p^p \leq |x_j|_p^p + |y_j|_p^p.$$

Logo

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty}\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|_p^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|_p^p + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|_p^p = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p^p + \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_p^p.$$

■

Observação 2.12 *A métrica definida na Proposição 2.11 não provém de uma norma. Mais precisamente, não existe uma norma* $\|\cdot\|$ *em* ℓ_p*, com* $0 < p < 1$*, tal que* $d_p(x, y) = \|x - y\|$ *para todo* $x, y \in \ell_p$*. Para isso basta observar que a bola aberta de raio* 1*,* $B_1(0) = \{x \in \ell_p : d_p(x, 0) < 1\}$*, não é um conjunto convexo.*

Um resultado particularmente importante para nós é que os espaços ℓ_p têm dimensão infinita. Isso é fácil de ver, pois o conjunto dos vetores canônicos

$$e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots),$$

com $n \in \mathbb{N}$, onde o 1 aparece na n-ésima coordenada e as demais são nulas, é linearmente independente. Mas podemos calcular precisamente a dimensão de ℓ_p.

Observação 2.13 Analisando a demonstração da Proposição 1.23 do Teorema 1.24, é fácil ver que os resultados continuam verdadeiros se o espaço E for p-Banach. Mais precisamente, estes dois resultados podem ser reescritos conforme a seguir.

Proposição 2.14 *Seja* E *um espaço p-Banach sobre* $\mathbb{K}$ *com* $\dim(E) = \infty$*. Então* $\dim(E) \geq \mathfrak{c}$.

Teorema 2.15 *Seja* E *é um espaço de Banach (ou p-Banach) sobre* $\mathbb{K}$ *com* $\dim(E) = \infty$*. Então toda base de Hamel de* E *tem dimensão igual a cardinalidade de* E*. Mais especificamente* $\dim(E) = \mathrm{card}(E)$.

Proposição 2.16 *Seja* $0 < p \leq \infty$*. Então*

$$\dim(\ell_p) = \mathrm{card}(\mathbb{K}) = \mathfrak{c}.$$

Demonstração. Como ℓ_p é um espaço de Banach (p-Banach se $0 < p < 1$), segue da Proposição 1.23 e do Teorema 1.24 (Proposição 2.14 e Teorema 2.15 no caso $0 < p < 1$) que

$$\mathfrak{c} \leq \dim(\ell_p) = \mathrm{card}(\ell_p).$$

Já que $\ell_p \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, segue $\mathrm{card}(\ell_p) \leq \mathrm{card}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{c}$ e esta última igualdade segue do Corolário 1.10. Pelo Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder (Teorema 1.2), segue que $\mathrm{card}(\ell_p) = \mathfrak{c}$. Portanto temos $\dim(\ell_p) = \mathfrak{c}$. ■

É um resultado simples provar que se $p > q > 0$ então $\ell_q \subset \ell_p$ e que a inclusão é própria, isto é, $\ell_p - \ell_q \neq \emptyset$. Agora, o que podemos dizer de $\ell_p - \bigcup\limits_{0<q<p} \ell_q$? Provaremos a seguir que $\ell_p - \bigcup\limits_{0<q<p} \ell_q$ também é não vazio.

Proposição 2.17 *$\ell_p - \bigcup\limits_{0<q<p} \ell_q \neq \emptyset$ para todo $p > 0$.*

Demonstração. Demonstraremos em um primeiro passo o caso particular no qual $\ell_2 - \bigcup\limits_{0<q<2} \ell_q \neq \emptyset$. Note que $\bigcup\limits_{0<q<2} \ell_q = \bigcup\limits_{1<q<2} \ell_q$. Sabemos que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_2$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_r$ para todo $r > 2$, pois $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{r/2}} < \infty$ respectivamente. Note que para $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$, $1 < q < 2$, segue da desigualdade de Hölder (Proposição 2.2) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| \leq \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty} \right\|_{q'} \cdot \left\| (y_n)_{n=1}^{\infty} \right\|_q < \infty, \tag{2.5}$$

onde q' é o expoente conjugado de q, isto é, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Suponha, por absurdo, que $\ell_2 = \bigcup\limits_{1<q<2} \ell_q$. Logo da equação (2.5) temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| < \infty$ para toda $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Assim, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} y_n$ converge, para toda $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Isto garante que a seguinte sequência de funcionais lineares

$$T_k : \ell_2 \to \mathbb{K}, \quad T_k\left((y_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} y_n,$$

está bem definida. A linearidade de T_k é óbvia e novamente da equação(2.5) segue que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| T_k\left((y_n)_{n=1}^{\infty}\right) \right| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| \leq \sum_{n=1}^{k} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| < \infty,$$

para todo $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Pelo Corolário 1.27, concluímos que

$$T\left((y_n)_{n=1}^{\infty}\right) := \lim_{k} T_k\left((y_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} y_n$$

define um funcional linear contínuo em ℓ_2. Como ℓ_2 é um espaço de Hilbert, segue do Teorema de Riesz (Teorema 1.28) que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. O que é uma contradição, pois

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Portanto, existe $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 - \bigcup_{1<q<2} \ell_q$. Para o caso geral, considere a sequência $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 - \bigcup_{0<q<2} \ell_q$ e vejamos que

$$\left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p - \bigcup_{1<q<p} \ell_q.$$

De fato,

$$\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

pois $x \in \ell_2$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{\frac{2q}{p}} = \infty,$$

pois $0 < \frac{2q}{p} < 2$, daí $x \notin \bigcup_{0<r<2} \ell_r$. Como

$$\ell_p - \bigcup_{1<q<p} \ell_q = \ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q,$$

segue que

$$\ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q \neq \emptyset,$$

como queríamos. ∎

Vejamos agora que $c_0 - \bigcup_{p>0} \ell_p$ também é não vazio.

Proposição 2.18 $c_0 - \bigcup_{p>0} \ell_p \neq \emptyset$.

Demonstração. Basta notar que a sequência $\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge para zero, mas $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\ln(n+1)}\right|^p = \infty$, para todo $p > 0$. ∎

2.2 Espaços (p-)normados de sequências vetoriais

Definição 2.19 Seja $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços vetoriais normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, com a norma em cada X_n denotada por $\|\cdot\|_{X_n}$. O *produto cartesiano* dos espaços normados X_n é o conjunto

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in X_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Não é difícil ver que $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ é um espaço vetorial com as operações

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} := (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty},$$
$$\alpha (x_n)_{n=1}^{\infty} := (\alpha x_n)_{n=1}^{\infty},$$

onde $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definição 2.20 Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ é *limitada* se existe uma constante $M \geq 0$ tal que $\|x_n\|_{X_n} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O subconjunto de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ formado por todas as sequências *limitadas* será denotado por $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$.

Proposição 2.21 $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$ *é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então existem constantes M_1 e M_2 tais que $\|x_n\|_{X_n} \leq M_1$ e $\|y_n\|_{X_n} \leq M_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da desigualdade triangular da norma em X_n, segue que

$$\|\alpha x_n + y_n\|_{X_n} \leq |\alpha| \|x_n\|_{X_n} + \|y_n\|_{X_n} \leq \alpha M_1 + M_2 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim a sequência $(\alpha x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada e, portanto, $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$ é um espaço vetorial. ■

Proposição 2.22 *Em* $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$ *a função*

$$\| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n}$$

define uma norma.

Demonstração. Essa demonstração segue diretamente usando a norma de cada X_n. Provaremos só a desigualdade triangular. De fato, sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$.

Da desigualdade triangular no espaço normado X_n, temos

$$\begin{aligned}\|x_n + y_n\|_{X_n} \leq \|x_n\|_{X_n} + \|y_n\|_{X_n} &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n} + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n} \\ &= \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\infty} + \| (y_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\infty} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Segue que

$$\| (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\infty} \leq \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\infty} + \| (y_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\infty}.$$

■

Proposição 2.23 *Seja $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach. Então $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\infty}$ se, e somente se, cada $(X_n, \|\cdot\|_{X_n})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n é um espaço de Banach. Seja $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$. Como cada $x^k \in \left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$, denotaremos $x^k = \left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x^k - x^r\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que } k, r \geq k_0. \tag{2.6}$$

Como

$$\left\|x_j^k - x_j^r\right\|_{X_j} \leq \|x^k - x^r\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que } k, r \geq k_0 \quad \text{e para todo } j \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

então para j fixo, a sequência $\left(x_j^k\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em X_j. Como X_j é um espaço de Banach, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^k = y_j \in X_j$. Assim, formamos a sequência $y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$ onde $y_j \in X_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $y \in \left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$ e que $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k - y\|_{\infty} = 0$. Das equações (2.6) e (2.7) segue que

$$\|x_j^k - x_j^r\|_{X_j} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que } k, r \geq k_0 \quad \text{e } j \in \mathbb{N}.$$

Mantendo k fixo, fazendo $r \to \infty$, e da continuidade da norma $\|\cdot\|_{X_j}$ temos,

$$\|x_j^k - y_j\|_{X_j} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que } k \geq k_0 \quad \text{e } j \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Em particular, para $k = k_0$ temos

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j^{k_0} - y_j\|_{X_j} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

isto é, $(x_j^{k_0})_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$. Portanto, $y = x^{k_0} - (x^{k_0} - y) \in \left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$. Pois $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$ é um espaço vetorial. Mais ainda, da equação (2.8) temos,

$$\|x^k - y\|_{\infty} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j^k - y_j\|_{X_j} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{sempre que } k \geq k_0,$$

e assim concluímos que $\|x^k - y\|_{\infty} \xrightarrow{k} 0$.
Para a recíproca, seja $i \in \mathbb{N}$ fixo e denote $\sum X_i := \{(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots)\colon x_i \in X_i\}$. Já que o subespaço $\sum X_i$ é fechado em $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$, logo é Banach. Não é difícil ver que $\sum X_i$ e X_i são isometricamente isomorfos, em particular isomorfos pela Proposição 1.30. Logo X_i é Banach. ∎

Um espaço que será importante é o análogo do espaço c_0 no caso vetorial. Mais precisamente:

Definição 2.24 Seja $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços normados. Denotaremos

$$\left(\sum_n X_n\right)_0 := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in X_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{X_n} = 0\right\}.$$

Proposição 2.25 *$\left(\sum_n X_n\right)_0$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_0$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Da desigualdade triangular da norma em X_n, temos

$$0 \leq \|\alpha x_n + y_n\|_{X_n} \leq |\alpha|\|x_n\|_{X_n} + \|y_n\|_{X_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} (|\alpha|\|x_n\|_{X_n} + \|x_n\|_{X_n}) = 0$, temos que $(\alpha x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_0$. ∎

Proposição 2.26 *Seja $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach. Então $\left(\sum_n X_n\right)_0$ é um subespaço fechado de $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$, logo $\left(\sum_n X_n\right)_0$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de elementos de $\left(\sum_n X_n\right)_0$ que converge para $y \in \left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$. Devemos mostrar que $y \in \left(\sum_n X_n\right)_0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_i^k - y_i\|_{X_i} \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j^k - y_j\|_{X_j} = \|x^k - y\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, sempre que $k \geq k_0$. Em particular para $k = k_0$

$$\|x_i^{k_0} - y_i\|_{X_i} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Como a sequência $x^{k_0} = \left(x_i^{k_0}\right)_{i=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_0$, temos que $\|x_i^{k_0}\|_{X_i} \xrightarrow{i} 0$ e segue que existe $i_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|x_i^{k_0}\|_{X_i} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que } i \geqslant i_0.$$

Logo,

$$\|y_i\|_{X_i} = \|x_i^{k_0} + y_i - x_i^{k_0}\|_{X_i} \leqslant \|x_i^{k_0}\|_{X_i} + \|x_i^{k_0} - y_i\|_{X_i} < \varepsilon \quad \text{sempre que } i \geqslant i_0.$$

O que prova que $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_0$. ■

Definição 2.27 Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ é *eventualmente nula* se existe uma constante $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para todo $n \geq n_0$. O conjunto das sequências *eventualmente nulas* será denotado por $\left(\sum_n X_n\right)_{00}$.

Proposição 2.28 $\left(\sum_n X_n\right)_{00}$ *é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_{00}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então existem n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$, tais que $x_n = 0$, para todo $n \geq n_1$ e $y_n = 0$, para todo $n \geq n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos

$$\alpha x_n + y_n = 0 \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Assim a sequência $(\alpha x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ é eventualmente nula. Portanto $\left(\sum_n X_n\right)_{00}$ é um espaço vetorial. ■

Observação 2.29 $\left(\sum_n X_n\right)_{00}$ não é um subespaço fechado de $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$ e, consequentemente, não é um espaço de Banach. De fato, admitiremos que $X_n \neq \{0\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, podemos escolher $x_n \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $\|x_n\|_{X_n} = 1$, e para cada $k \in \mathbb{N}$ seja

$$x^k = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots, \frac{x_k}{k}, 0, 0 \cdots\right).$$

Tomando $x = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots\right)$, vejamos que $\lim_{k\to\infty} x^k = x$ em $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$.

$$\|x^k - x\|_{\infty} = \left\| \left(0, 0, \cdots, 0, \frac{x_{k+1}}{k+1}, \frac{x_{k+2}}{k+2}, \cdots\right) \right\|_{\infty} = \frac{1}{k+1}.$$

Já que $\lim_{k\to\infty} \|x^k - x\|_{\infty} = 0$ temos então $\lim_{k\to\infty} x^k = x$ em $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$. Mas $x \notin \left(\sum_n X_n\right)_{00}$, portanto $\left(\sum_n X_n\right)_{00}$ não é um subespaço fechado de $\left(\sum_n X_n\right)_{\infty}$. Pela Proposição 1.19, $\left(\sum_n X_n\right)_{00}$ não é um espaço de Banach.

Definição 2.30 Seja $0 < p < \infty$. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ é *fortemente p-somável* se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p < \infty$. O conjunto das sequências fortemente *p-somáveis* será denotado por $\left(\sum_n X_n\right)_p$. Isto é,

$$\left(\sum_n X_n\right)_p := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in X_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad \text{e } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p < \infty\right\}.$$

Proposição 2.31 *Seja $0 < p < \infty$. Então $\left(\sum_n X_n\right)_p$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Vejamos primeiro o caso quando $1 \leq p < \infty$. Da desigualdade triangular da norma em X_n e pela Proposição 2.8 temos que

$$\begin{aligned} \|\alpha x_n + y_n\|_{X_n}^p &\leq (|\alpha|\|x_n\|_{X_n} + \|y_n\|_{X_n})^p \\ &\leq 2^p \left(|\alpha|^p\|x_n\|_{X_n}^p + \|y_n\|_{X_n}^p\right) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha x_n + y_n\|_{X_n}^p &\leq 2^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|\alpha|^p\|x_n\|_{X_n}^p + \|y_n\|_{X_n}^p\right)\right) \\ &= 2^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^p\|x_n\|_{X_n}^p + \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_{X_n}^p\right) < \infty. \end{aligned}$$

Portanto $(\alpha x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p$.

Agora, quando $0 < p < 1$, da desigualdade triangular da norma em X_n e pela Proposição 2.9 temos que,

$$\begin{aligned} \|\alpha x_n + y_n\|_{X_n}^p &\leq (|\alpha|\|x_n\|_{X_n} + \|y_n\|_{X_n})^p \\ &\leq |\alpha|^p\|x_n\|_{X_n}^p + \|y_n\|_{X_n}^p \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha x_n + y_n\|_{X_n}^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\alpha|^p\|x_n\|_{X_n}^p + \|y_n\|_{X_n}^p\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^p \|x_n\|_{X_n}^p + \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_{X_n}^p < \infty.$$

Portanto $(\alpha x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p$. Assim, em ambos os casos, $\left(\sum_n X_n\right)_p$ é um espaço vetorial. ■

Proposição 2.32 *Seja $1 \leq p < \infty$. Então a função*

$$\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $\left(\sum_n X_n\right)_p$.

Demonstração.

(N1) É claro que se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p$, então $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$.

(N2) Se $\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \|_p = 0$, então

$$0 \leq \|x_n\|_{X_n}^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_{X_j}^p = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então, $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $(x_n)_{n=1}^{\infty} = 0$.

(N3) Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$\|\alpha (x_j)_{j=1}^{\infty} \|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\alpha x_j\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha|^p \|x_j\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \| (x_j)_{j=1}^{\infty} \|_p.$$

(N4) Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p$. Pela desigualdade triangular da norma $\|\cdot\|_{X_j}$, temos

$$\| (x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} \|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j + y_j\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\|x_j\|_{X_j} + \|y_j\|_{X_j} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.9)$$

Já que $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p$, temos que $\left(\|x_n\|_{X_n}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(\|y_n\|_{X_n}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$.

Pela desigualdade de Minkowski 2.3 em ℓ_p, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\|x_j\|_{X_j}+\|y_j\|_{X_j}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|y_j\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.10}$$

De (2.9) e (2.10) resulta que

$$\|\,(x_j)_{j=1}^{\infty}+(y_j)_{j=1}^{\infty}\,\|_p \leq \|\,(x_j)_{j=1}^{\infty}\,\|_p+\|\,(y_j)_{j=1}^{\infty}\,\|_p.$$

■

Proposição 2.33 *Seja $0<p<1$. Então a função*

$$\|\,(x_j)_{j=1}^{\infty}\,\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma p-norma em $\left(\sum_n X_n\right)_p$.

Demonstração. Pela Proposição anterior, as condições (N1), (N2) e (N3) da Definição 2.4 são satisfeitas. Dados $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p$, resta provar que

$$\|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}+(y_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_p^p \leq \|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_p^p+\|\,(y_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_p^p.$$

Pela Proposição 2.9,

$$\begin{aligned}\|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}+(y_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n+y_n\|_{X_n}^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\|x_n\|_{X_n}^p+\|y_n\|_{X_n}^p\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{X_n}^p+\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|_{X_n}^p = \|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_p^p+\|\,(y_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_p^p.\end{aligned}$$

■

Assim, para $0<p<1$, a p-norma definida em $\left(\sum_n X_n\right)_p$ induz a métrica

$$d:\left(\sum_n X_n\right)_p \times \left(\sum_n X_n\right)_p \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \; d\left((x_j)_{j=1}^{\infty},(y_j)_{j=1}^{\infty}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j-y_j\|_{X_j}^p.$$

Proposição 2.34 *Sejam $0<p<\infty$ e $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach. Então $\left(\sum_n X_n\right)_p$ é um espaço de Banach se $1\leq p<\infty$, e p-Banach se $0<p<1$.*

Demonstração. Note que a demonstração que faremos vale tanto para o caso normado ($p \geq 1$), quanto para o caso p-normado ($0 < p < 1$), pois no caso normado a métrica é dada por $d((x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty}) = \| (x_j)_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty} \|_p$ e no caso p-normado é dada por $d((x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty}) = \| (x_j)_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty} \|_p^p$. Suponha que, para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n é um espaço de Banach. Seja $\left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ qualquer sequência de Cauchy em $\left(\sum_n X_n\right)_p$. Devemos mostrar que existe $y \in \left(\sum_n X_n\right)_p$ com $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} x^k = y$ em $\left(\sum_n X_n\right)_p$. Denotemos $x^k = \left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Vejamos que fixado $j \in \mathbb{N}$ a sequência $\left(x_j^k\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em X_j, e portanto convergente em X_j. De fato, já que $\left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\left(\sum_n X_n\right)_p$ então dado $\varepsilon > 0$ existe um $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tal que

$$\|x^k - x^r\|_p < \varepsilon \quad \text{sempre que } k, r \geq k_0,$$

isto é,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^k - x_j^r\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \| \left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} - \left(x_j^r\right)_{j=1}^{\infty} \|_p < \varepsilon \quad \text{sempre que } k, r \geq k_0.$$

Já que $\|x_j^k - x_j^r\|_{X_j} \leq \| \left(x_i^k\right)_{i=1}^{\infty} - (x_i^r)_{i=1}^{\infty} \|_p$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\|x_j^k - x_j^r\|_{X_j} < \varepsilon \text{ sempre que } k, r \geq k_0 \text{ e para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$, a sequência $\left(x_j^k\right)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em X_j e como X_j é completo, existe $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} x_j^k = y_j \in X_j$. Assim formamos a sequência $y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$, onde $y_j \in X_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Resta provar que $y \in \left(\sum_n X_n\right)_p$ e que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} x^k = y$ em $\left(\sum_n X_n\right)_p$. Como

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^k - x_j^r\|_{X_j}^p = \|x^k - x^r\|_p^p < \varepsilon^p \quad \text{sempre que } k, r \geq k_0,$$

em particular, para todo $m \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\sum_{j=1}^{m} \|x_j^k - x_j^r\|_{X_j}^p < \varepsilon^p \quad \text{sempre que } k, r \geq k_0. \tag{2.11}$$

Fixando k e fazendo $r \longrightarrow \infty$ na equação (2.11), segue da continuidade de $\| \cdot \|_{X_j}$ que

$$\sum_{j=1}^{m} \|x_j^k - y_j\|_{X_j}^p \leqslant \varepsilon^p \quad \text{sempre que } k \geq k_0, \text{ e para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Agora, fazendo $m \longrightarrow \infty$ na equação (2.12) temos

$$\|x^k - y\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^k - y_j\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \quad \text{sempre que } k \geq k_0. \tag{2.13}$$

Em particular, para $k = k_0$, obtemos

$$x_0^k - y = (x_j^{k_0})_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty} = (x_j^{k_0} - y_j)_{j=1}^{\infty} \in \left(\sum\nolimits_n X_n\right)_p$$

Já que $\left(\sum_n X_n\right)_p$ é um espaço vetorial, resulta que $y = x^{k_0} - (x^{k_0} - y) \in \left(\sum_n X_n\right)_p$ e pela equação (2.13), concluímos que $x^k \xrightarrow{k} y$ em $\left(\sum_n X_n\right)_p$.

■

Proposição 2.35 *Se $0 < p < q$, então $\left(\sum_n X_n\right)_p \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_q$. Além disso*

$$\|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_q \leq \|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_p$$

para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p$, isto é, a aplicação inclusão $\left(\sum_n X_n\right)_p \hookrightarrow \left(\sum_n X_n\right)_q$ é contínua.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p$ com $\|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_p = 1$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p = 1$ e segue que

$$\|x_n\|_{X_n}^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_{X_j}^p = 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Como $p < q$, temos $\|x_n\|_{X_n}^q \leq \|x_n\|_{X_n}^p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p = 1, \quad \text{ou seja, } \|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_q \leq 1. \tag{2.15}$$

Portanto $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_q$ e $\|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_q \leq \|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_p$.

Seja agora $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_p - \{0\}$ e considere $\dfrac{x}{\|x\|_p}$. Por (2.15), temos

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_p}\right\|_q \leq 1.$$

Portanto $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\sum_n X_n\right)_q$ e pela homogeneidade da norma (p-norma), temos que $\| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_q \leq \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_p$. Quando $x = 0$, temos $\|x\|_q = 0$ e vale a igualdade. ∎

Proposição 2.36 *Seja $0 < p < q < \infty$. Então*

$$\left(\sum_n X_n\right)_{00} \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_p \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_q \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_0 \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_\infty .$$

Demonstração. Todas as inclusões são triviais, exceto a que já foi provada na Proposição 2.35. ∎

Observação 2.37 *Um subconjunto de $\left(\sum_n X_n\right)_p$ que estaremos particularmente interessado é $\bigcup_{0<q<p} \left(\sum_n X_n\right)_q$. Denotaremos tal subconjunto por $\left(\sum_n X_n\right)_p^-$.*

Proposição 2.38 *Se $0 < p < \infty$, então $\left(\sum_n X_n\right)_p^-$ é um subespaço vetorial de $\left(\sum_n X_n\right)_p$.*

Demonstração. O fato que $\bigcup_{0<q<p} \left(\sum_n X_n\right)_q \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_p$ segue diretamente da Proposição 2.35. Pelas Proposições 2.31 e 1.16, segue que $\bigcup_{0<q<p} \left(\sum_n X_n\right)_q$ é um espaço vetorial. ∎

Proposição 2.39 *Se $0 < p < \infty$, então $\bigcup_{p>0} \left(\sum_n X_n\right)_p$ é um subespaço vetorial de $\left(\sum_n X_n\right)_0$.*

Demonstração. O fato que $\bigcup_{p>0} \left(\sum_n X_n\right)_p \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_0$ segue diretamente da Proposição 2.36. Pelas Proposições 2.36 e 1.16, segue que $\bigcup_{p>0} \left(\sum_n X_n\right)_p$ é um espaço vetorial. ∎

Observação 2.40 Seja X um espaço de Banach. Quando $X_n = X$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos alguns casos clássicos de espaços de sequências vetoriais como $\ell_p(X)$, $c_0(X)$, $\ell_\infty(X)$, $\ell_p^-(X)$ e $\bigcup_{p>0} \ell_p(X)$. Esses espaços serão explorados no próximo capítulo.

2.3 Espaços de Fréchet de sequências vetoriais

Definição 2.41 Sejam $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach e $1 \leqslant p < \infty$. Definimos

$$\left(\sum_n X_n\right)_p^+ := \bigcap_{q>p} \left(\sum_n X_n\right)_q .$$

Proposição 2.42 *$\left(\sum_n X_n\right)_p^+$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências .*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 1.15. ■

Vejamos que podemos expressar $\left(\sum_n X_n\right)_p^+$ como uma interseção enumerável de subespaços.

Proposição 2.43 *Sejam $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços normados e $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\left(\sum_n X_n\right)_p^+ = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_n X_n\right)_{p_k}$$

onde $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ é qualquer sequência decrescente de escalares convergindo para p.

Demonstração. Seja $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ qualquer sequência decrescente convergindo para p. Então $p_k \xrightarrow{k} p = \inf_{k\in\mathbb{N}}\{p_k\}$. Logo $p \leq p_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Claramente

$$\left(\sum_n X_n\right)_p^+ \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_n X_n\right)_{p_k} .$$

Para a inclusão contrária, seja $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_n X_n\right)_{p_k}$. Para qualquer $q > p = \inf_{k\in\mathbb{N}}\{p_k\}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p \leq p_{k_0} < q$. Pela Proposição 2.35, temos que $x \in \left(\sum_n X_n\right)_{p_{k_0}} \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_q$. Assim

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_n X_n\right)_{p_k} \subset \left(\sum_n X_n\right)_p^+ .$$

■

Proposição 2.44 Sejam $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços normados e $q > p \geq 1$. Se $X_n \neq \{0\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então valem e são estritas as inclusões:

$$\left(\sum_n X_n\right)_p \subset \left(\sum_n X_n\right)_p^+ \subset \left(\sum_n X_n\right)_q .$$

Demonstração. Pela Proposição 2.36 valem as inclusões. Vejamos que são estritas. Seja $x_n \in X_n$ com $\|x_n\|_{X_n} = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e considere a sequência

$$x = \left(\frac{1}{n^{1/p}} x_n\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Então $x \in \left(\sum_n X_n\right)_p^+ - \left(\sum_n X_n\right)_p$, de fato:

- $\|x\|_r^r = \sum_{n=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{n^{1/p}} x_n\right\|_{X_n}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{r}{p}}} \|x_n\|_{X_n}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{r}{p}}} < \infty$, para todo $r > p$, implica que $x \in \left(\sum_n X_n\right)_p^+$.

- $\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{n^{1/p}} x_n\right\|_{X_n}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \|x_n\|_{X_n}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, implica que $x \notin \left(\sum_n X_n\right)_p$.

Para a segunda inclusão, seja $p < r < q$ e considere a sequência $y = \left(\frac{1}{n^{1/r}} x_n\right)_{n=1}^{\infty}$. Então $y \in \left(\sum_n X_n\right)_q - \left(\sum_n X_n\right)_r$, de fato:

- $\|y\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{n^{1/r}} x_n\right\|_{X_n}^q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{q}{r}}} \|x_n\|_{X_n}^q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{q}{r}}} < \infty$, pois $1 < \frac{q}{r}$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{n^{1/r}} x_n\right\|_{X_n}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{r}}} \|x_n\|_{X_n}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{r}}} = \infty$, pois $\frac{p}{r} < 1$.

Como $\left(\sum_n X_n\right)_p^+ \subset \left(\sum_n X_n\right)_r$, segue que $y \in \left(\sum_n X_n\right)_q - \left(\sum_n X_n\right)_p^+$. ■

Proposição 2.45 *Seja $\mathcal{T}$ a topologia em $\left(\sum_n X_n\right)_p^+$ definida pela família de normas $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_q : q > p\}$. Então $\left(\left(\sum_n X_n\right)_p^+, \mathcal{T}\right)$ é um espaço de Fréchet.*

Demonstração. Pela definição de $\mathcal{T}$, segue que ela é localmente convexa. É fácil ver que a família $\{\|\cdot\|_{p_k} : k \in \mathbb{N}\}$, onde (p_k) é qualquer sequência decrescente convergindo para p, também gera $\mathcal{T}$. Logo segue da Proposição 1.58 que $\mathcal{T}$ é metrizável. Só falta provar que o espaço é completo. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\left(\sum_n X_n\right)_p^+$. Pelo Corolário 1.54 e pela Proposição 1.55, dados $q > p$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_m - x_n \in U_{q,\varepsilon}$, sempre que $m, n \geq n_0$, ou seja,

$$\|x_m - x_n\|_q < \varepsilon \text{ sempre que } m, n \geq n_0.$$

Logo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\left(\sum_n X_n\right)_q$, e já que este espaço é de Banach existe $x^q \in \left(\sum_n X_n\right)_q$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^q$ em $\left(\sum_n X_n\right)_q$. Como $q > p$ é arbitrário, para $q' > p$, segue que existe $x^{q'} \in \left(\sum_n X_n\right)_{q'}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^{q'}$ em $\left(\sum_n X_n\right)_{q'}$. Como ou $\left(\sum_n X_n\right)_q \subset \left(\sum_n X_n\right)_{q'}$ ou $\left(\sum_n X_n\right)_{q'} \subset \left(\sum_n X_n\right)_q$ e as inclusões são contínuas (veja Proposição 2.35), segue da unicidade do limite que $x_q = x'_q$, ou seja, o limite da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ independe do $q > p$. Assim, existe $x \in \left(\sum_n X_n\right)_q$, para todo $q > p$ tal que $x_n \to x$ em $\left(\sum_n X_n\right)_q$. Da Proposição 1.55, segue que $x_n \to x$ na topologia de $\left(\sum_n X_n\right)_p^+$. Isto mostra que $\left(\sum_n X_n\right)_p^+$ é completo. ■

Observação 2.46 Quando $X_n = \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o espaço $\left(\sum_n X_n\right)_p^+$ coincide com o espaço classico $\ell_p^+ = \bigcap_{q>p} \ell_q$ introduzido por Metafune e Moscatelli em [26].

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DA TÉCNICA DO VETOR MÃE EM ESPAÇOS DE SEQUÊNCIAS

Neste capítulo estamos interessados em estudar a espaçabilidade de alguns conjuntos de sequências estudados no capítulo anterior. Os teoremas principais deste capítulo estão baseados nos artigos [3, 7] [3, 7]. Iniciaremos relembrando os conceitos de lineabilidade e espaçabilidade.

Definição 3.1 Sejam E um espaço vetorial topológico, A um subconjunto não vazio de E e μ um número cardinal.

(a) A é dito *μ-lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de dimensão μ.

(b) A é dito *μ-espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial fechado de dimensão μ.

(c) A é dito *maximal espaçável* se $\dim(E) = \mu$ e A é *μ-espaçável*.

Usualmente o conjunto A é dito *lineável* (resp. *espaçável*), se o subespaço contido nele é de dimensão infinita (resp. de dimensão infinita e fechado), mas sem se preocupar com o "tamanho" dessa dimensão.

Observação 3.2 Observe que, se estivermos só com espaços vetoriais, sem nenhuma topologia em E, a noção de lineabilidade ainda é válida. É claro que espaçabilidade implica lineabilidade.

Conforme o título deste trabalho indica, estamos interessados em estudar lineabilidade e espaçabilidade utilizando uma técnica que ficou conhecida como *técnica do vetor mãe*.

3.1 O uso da técnica em conjuntos de sequências

Definição 3.3 Sejam X um espaço de Banach e $(X_i)_{i\in I}$ uma família de espaços de Banach. Dizemos que a família $(X_i)_{i\in I}$ contém *cópias isomorfas de X uniformemente* se existe $\delta > 0$ e uma família de isomorfismos sobre sua imagem $R_i\colon X \longrightarrow X_i$ tais que $\sup\limits_{i\in I}\{\|R_i\|, \|R_i^{-1}\|\} \leq \delta$.

Observação 3.4 Em vários resultados de espaçabilidade em conjuntos de sequências deste capítulo, aparecerá no enunciado dos teoremas que os conjuntos são $\left(\dim\left(\overline{T\left(\ell_1\left(X\right)\right)}\right)\right)$-espaçável. Note que $\dim \ell_1(X) = \dim \ell_p(X)$, para todo $p > 0$, pois nesse caso, dimensão e cardinalidade coincidem. Esse T que aparece, na verdade será um operador linear injetor que será construído nas demonstrações. Logo, da injetividade de T, $T\left(\ell_1\left(X\right)\right)$ (ou $T\left(\ell_p\left(X\right)\right)$) é um espaço vetorial com a mesma cardinalidade que $\ell_1\left(X\right)$. Quando X é um espaço de Banach de dimensão infinita e a cardinalidade de X não é um cardinal cofinal, é possível provar $\dim(\ell_1\left(X\right)) = \dim X$ e que $\dim X = \dim\left(\overline{T\left(\ell_p\left(X\right)\right)}\right)$. Nesses casos, nos enunciados dos resultados apareceria apenas $\dim X$-espaçável. Como o assunto de cofinalidade foge do escopo deste trabalho, não entraremos em detalhes destes fatos. Mas apenas para ilustrar, para espaços de Banach X cuja cardinalidade é $\mathfrak{c}, 2^{\mathfrak{c}}, 2^{2^{\mathfrak{c}}}, \ldots$, os enunciados valeriam com $\dim X$-espaçável.

Teorema 3.5 *Seja $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach que contém uma subsequência de cópias isomorfas uniformemente do espaço de Banach de dimensão infinita X. Então:*

(a) $\left(\sum_n X_n\right)_p - \left(\sum_n X_n\right)_p^- $ *é* $\left(\dim\left(\overline{T\left(\ell_1\left(X\right)\right)}\right)\right)$*-espaçável, para todo* $0 < p < \infty$.

(b) $\left(\sum_n X_n\right)_0 - \bigcup\limits_{p>0}\left(\sum_n X_n\right)_p$ *é* $\left(\dim\left(\overline{T\left(\ell_1\left(X\right)\right)}\right)\right)$*-espaçável .*

Demonstração.

(a) Mostraremos que $\left(\sum_n X_n\right)_p - \left(\sum_n X_n\right)_p^-$ contém um subespaço (exceto pelo vetor nulo) de dimensão igual a $\dim\left(\overline{T\left(\ell_1\left(X\right)\right)}\right)$.

Sem perda de generalidade assumiremos que a sequência $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ contém cópias isomorfas uniformemente de X, ou seja, existe $\delta > 0$ e uma sequência de isomorfismos sobre sua imagem $R_n\colon X \longrightarrow X_n$ tal que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\|R_n\|, \|R_n^{-1}\|\} \leq \delta$.

Passo 1. A Proposição 2.38 garante que $\left(\sum_n X_n\right)_p^- \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_p$. Pela Proposição 2.17 considere $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p - \bigcup\limits_{0<q<p} \ell_q$ (este é o vetor mãe). Decomponha $\mathbb{N}$ como uma união enumerável de conjuntos infinitos e disjuntos dois a dois (uma decomposição é dada,

por exemplo, na Proposição 1.13). Assim, para $i \in \mathbb{N}$, denote por $\mathbb{N}_i = \{i_1 < i_2 < \dots\}$ os subconjuntos de tal decomposição. Chame de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ os vetores unitários canônicos do espaço das sequências de escalares. Defina

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_{i_j} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

isto é,

$$y_i = \left(0, \dots, 0, \underbrace{\xi_1}_{\text{posição}\, i_1}, 0, \dots, 0, \underbrace{\xi_2}_{\text{posição}\, i_2}, 0, \dots, 0, \underbrace{\xi_3}_{\text{posição}\, i_3}, 0, \dots, 0, \underbrace{\xi_j}_{\text{posição}\, i_j}, 0, \dots\right). \tag{3.2}$$

Já que $\|y_i\|_r = \|\xi\|_r$ para todo $r > 0$, então $y_i \in \ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q$, para todo $i \in \mathbb{N}$.
Para $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e $w \in X$ definimos,

$$x \otimes w := (x_n R_n(w))_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n, \tag{3.3}$$

É fácil ver que, para todos $w, w_1, w_2 \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ valem as propriedades

$$x \otimes (w_1 + w_2) = x \otimes w_1 + x \otimes w_2 \quad \text{e} \quad \lambda(x \otimes w) = x \otimes (\lambda x), \tag{3.4}$$

as quais justificam o uso do símbolo $\otimes$ do produto tensorial.
Passo 2. Considere $\tilde{s} = 1$ se $p \geq 1$ e $\tilde{s} = p$ se $0 < p < 1$. Defina a seguinte aplicação:

$$T \colon \ell_{\tilde{s}}(X) \longrightarrow \left(\sum\nolimits_n X_n\right)_p, \quad T((w_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \otimes w_j.$$

Mostraremos que esta aplicação está bem definida. Ainda mais, é um operador linear injetivo. De fato seja $(w_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}(X)$. Como $y_j \otimes w_j \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ para cada $j \in \mathbb{N}$, mais precisamente,

$$y_j \otimes w_j = \left(0, \dots, 0, \underbrace{\xi_1 R_{j_1}(w_j)}_{\text{posição}\, j_1}, 0, \dots, 0, \underbrace{\xi_2 R_{j_2}(w_j)}_{\text{posição}\, j_2}, 0, \dots, 0, \underbrace{\xi_k R_{j_k}(w_j)}_{\text{posição}\, j_k}, 0, \dots\right). \tag{3.5}$$

Já que

$$\|y_j \otimes w_j\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k R_{j_k}(w_j)\|_{X_{j_k}}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p.\|R_{j_k}(w_j)\|_{X_{j_k}}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p.\|R_{j_k}\|^p.\|w_j\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \delta\|w_j\|_X.\|\xi\|_p < \infty,$$

segue que $y_j \otimes w_j \in \left(\sum_n X_n\right)_p$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Além disso

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j \otimes w_j\|_p^{\tilde{s}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\delta\|w_j\|_X.\|\xi\|_p)^{\tilde{s}} = \delta^{\tilde{s}}\|\xi\|_p^{\tilde{s}} \cdot \|(w_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\tilde{s}}^{\tilde{s}} < \infty.$$

Por conseguinte $\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j \otimes w_j\|_p < \infty$ se $p \geqslant 1$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j \otimes w_j\|_p^{\tilde{s}} < \infty$ se $0 < p < 1$. Como $\left(\sum_n X_n\right)_p$ é um espaço de Banach se $p \geqslant 1$ (p-Banach se $0 < p < 1$), segue da Proposição 1.22 (Proposição 2.6 se $0 < p < 1$) que a série $\sum_{j=1}^{\infty} y_j \otimes w_j$ converge em $\left(\sum_n X_n\right)_p$. Isto garante a boa definição de T.

Vejamos que T é linear. De fato, sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}(X)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$T\left(\alpha\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} + \left(z_n\right)_{n=1}^{\infty}\right) = T\left(\left(\alpha x_n + z_n\right)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(y_n \otimes \left(\alpha x_n + z_n\right)\right)$$

e das definições dadas em (3.4) temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(y_n \otimes \left(\alpha x_n + z_n\right)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha\left(y_n \otimes x_n\right) + y_n \otimes z_n\right) \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} y_n \otimes x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \otimes z_n = \alpha T\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} + T\left(z_n\right)_{n=1}^{\infty}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Portanto T é linear. Vejamos agora que T é injetivo. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}(X)$ tal que $T\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = 0$. Observe que

$$\begin{aligned}T\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n \otimes x_n = (0, 0, \ldots) \\ &\Leftrightarrow \quad \xi_k R_{n_k}(x_n) = 0, \quad \text{para todo } n,\, k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Como $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q$, existe k_0 (na verdade, uma infinidade de índices) tal que

$\xi_{k_0} \neq 0$. Logo, $R_{n_{k_0}}(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $R_{n_{k_0}}$ é isomorfismo segue que $x_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $(x_n)_{n=1}^{\infty} = 0$ e isto implica que T é injetivo. Dessa injetividade, segue que $T\left(\ell_{\tilde{s}}(X)\right)$ é um subespaço de $\left(\sum_n X_n\right)_p$ de mesma dimensão que $\ell_{\tilde{s}}(X)$. Pela Proposição 1.45, segue que $\overline{T(\ell_{\tilde{s}}(X))}$ é um subespaço fechado de $\left(\sum_n X_n\right)_p$.

Passo 3. Resta mostrar que

$$\overline{T(\ell_{\tilde{s}}(X))} - \{0\} \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_p - \bigcup_{0<q<p} \left(\sum_n X_n\right)_q .$$

Seja $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_{\tilde{s}}(X))}$, $z \neq 0$. Usando a caracterização de fecho por sequências, existem sequências $\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}(X)$, $k \in \mathbb{N}$, tais que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} T\left(\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) = z \quad \text{em} \quad \left(\sum_n X_n\right)_p .$$

Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$T\left(\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \otimes w_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_{i_j}\right) \otimes w_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_{i_j} \otimes w_i^{(k)}.$$

Daí, para cada $i, j \in \mathbb{N}$, a i_j-ésima coordenada de $T\left(\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é

$$\xi_j R_{i_j}\left(w_i^{(k)}\right). \tag{3.7}$$

Já que $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \neq 0$ então existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que $z_r \neq 0$. Como $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$, então existem únicos $m, t \in \mathbb{N}$ tais que $m_t = r$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, por (3.7) temos que a r-ésima coordenada de $T\left(\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é $\xi_t R_r\left(w_m^{(k)}\right)$. Já que a convergência em $\left(\sum_n X_n\right)_p$ implica em convergência em cada coordenada, temos que $z_r = \lim_{k\longrightarrow\infty} \xi_t R_r\left(w_m^{(k)}\right)$. Como $z_r \neq 0$, segue que $\xi_t \neq 0$ e já que $R_r : X \to X_r$ é um isomorfismo sobre sua imagem e X é completo, segue que $R_r(X) = \overline{R_r(X)}$. Assim

$$z_r = \lim_{k\longrightarrow\infty} \xi_t R_r(w_m^{(k)}) = \xi_t \cdot \lim_{k\longrightarrow\infty} R_r(w_m^{(k)}) \in \overline{R_r(X)} = R_r(X).$$

Da continuidade de R^{-1}, temos

$$\begin{aligned} R_r^{-1}(z_r) &= R_r^{-1}\left(\xi_t . \lim_{k\longrightarrow\infty} R_r\left(w_m^{(k)}\right)\right) = \xi_t R_r^{-1}\left(\lim_{k\longrightarrow\infty} R_r\left(w_m^{(k)}\right)\right) \\ &= \xi_t \lim_{k\longrightarrow\infty} (R_r^{-1} R_r)\left(w_m^{(k)}\right) = \xi_t \lim_{k\longrightarrow\infty} w_m^{(k)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Denotemos

$$\alpha_m := \lim_{k \longrightarrow \infty} w_m^{(k)} = \frac{R_r^{-1}(z_r)}{\xi_t} \neq 0.$$

Novamente de (3.7) segue que, para $j, k \in \mathbb{N}$, a m_j-ésima coordenada de $T\left(\left(w_i^{(k)}\right)\right)_{i=1}^{\infty}$ é $\xi_j R_{m_j}(w_m^{(k)})$. Por outro lado,

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \xi_j R_{m_j}(w_m^{(k)}) = \xi_j . \lim_{k \longrightarrow \infty} R_{m_j}(w_m^{(k)}) = \xi_j R_{m_j}\left(\lim_{k \longrightarrow \infty} w_m^{(k)}\right) = \xi_j R_{m_j}(\alpha_m) \tag{3.9}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Pela convergência em cada coordenada temos

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \xi_j R_{m_j}(w_m^{(k)}) = z_{m_j}. \tag{3.10}$$

Então segue de (3.9) e (3.10), e da unicidade do limite em X_{m_j} que

$$z_{m_j} = \xi_j R_{m_j}(\alpha_m), \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Lembre que m está fixo, pois foi escolhido, satisfazendo $m_t = r \in \mathbb{N}_m$. Assim $\left(z_{m_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ é uma subsequência de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ Finalmente, veremos que $z \notin \left(\sum_n X_n\right)_p^-$. Para todo $0 < q < p$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_{X_n}^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|z_{m_j}\|_{X_{m_j}}^q = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^q . \|R_{m_j}(\alpha_m)\|_{X_{m_j}}^q. \tag{3.11}$$

Da continuidade de $R_{m_j}^{-1}$ temos

$$\|\alpha_m\|_X = \left\| \left(R_{m_j}^{-1} \circ R_{m_j}\right)(\alpha_m) \right\|_X \leq \|R_{m_j}^{-1}\| \|R_{m_j}(\alpha_m)\|_X,$$

donde segue que

$$\frac{\|\alpha_m\|_X^q}{\|R_{m_j}^{-1}\|^q} \leq \|R_{m_j}(\alpha_m)\|_X^q \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Substituindo (3.12) em (3.11), temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_{X_n}^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^q . \|R_{m_j}(\alpha_m)\|_{X_{m_j}}^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^q \frac{\|\alpha_m\|_X^q}{\|R_{m_j}^{-1}\|^q} \geq \frac{1}{\delta^q} . \|\alpha_m\|_X^q . (\|\xi\|_q)^q = \infty.$$

Logo $z \notin \bigcup_{0<q<p} \left(\sum_n X_n\right)_q$, portanto,

$$\overline{T(\ell_{\tilde{s}}(X))} - \{0\} \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_p - \bigcup_{0<q<p} \left(\sum_n X_n\right)_q,$$

como queríamos demonstrar.

(b) A demonstração segue a mesma linha de (a), por isso usaremos a mesma notação e focaremos apenas nos detalhes diferentes. Mostraremos que $\left(\sum_n X_n\right)_0 - \bigcup_{p>0} \left(\sum_n X_n\right)_p$ contém, exceto pelo vetor nulo, um subespaço fechado de dimensão infinita, mais precisamente, de dimensão igual a dim $\left(\overline{T\left(\ell_1(X)\right)}\right)$.

Passo 1. Pela Proposição 2.18, podemos considerar $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0 - \bigcup_{p>0} \ell_p$. Definindo

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_{i_j} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},$$

é claro que $y_i \in c_0 - \bigcup_{p>0} \ell_p$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Paso 2. Defina

$$T\colon \ell_1(X) \longrightarrow \left(\sum_n X_n\right)_0, \quad T((w_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \otimes w_j,$$

onde a notação $\otimes$ é a mesma dada em (a). Vejamos que T está bem definida. Para $(w_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1(X)$ temos que $y_j \otimes w_j \in \left(\sum_n X_n\right)_0$ para cada $j \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\|y_j \otimes w_j\|_{X_{j_k}} = |\xi_k| \|R_{j_k}(w_j)\|_{X_{j_k}} \leq |\xi_k| \|R_{j_k}\| \|w_j\|_X \leq \delta \|w_j\|_X |\xi_k|. \tag{3.13}$$

Como $\xi \in c_0$, fazendo $k \to \infty$ em (3.13), segue que $y_j \otimes w_j \in \left(\sum_n X_n\right)_0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, e

$$\begin{aligned} \|y_j \otimes w_j\|_\infty &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\xi_k R_{j_k}(w_j)\|_{X_{j_k}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k| \|R_{j_k}\| \|w_j\|_X \\ &\leq \delta \|w_j\|_X \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k| < \infty. \end{aligned}$$

Além disso

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j \otimes w_j\|_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} (\delta \|w_j\|_X \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|) = \delta \|\xi\|_\infty \| (w_j)_{j=1}^{\infty} \| < \infty.$$

Portanto segue da Proposição 1.22 que a série $\sum_{j=1}^{\infty} y_j \otimes w_j$ converge em $\left(\sum_n X_n\right)_0$. Logo a aplicação T está bem definida e a linearidade e injetividade são análogas ao caso (a).

Paso 3. Mostraremos que

$$\overline{T(\ell_1(X))} - \{0\} \subseteq \left(\sum\nolimits_n X_n\right)_0 - \bigcup_{p>0}\left(\sum\nolimits_n X_n\right)_p.$$

Seja $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_1(X))} - \{0\}$ e considere sequências $\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1(X)$, $k \in \mathbb{N}$, tais que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} T\left(\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) = z \quad \text{em} \quad \left(\sum\nolimits_n X_n\right)_0.$$

Já que $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \neq 0$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $z_r \neq 0$. Sejam $m, t \in \mathbb{N}$ tais que $m_t = r$. Temos que a r-ésima coordenada de $T\left(\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é $\xi_t R_r\left(w_m^{(k)}\right)$. Como convergência em $\left(\sum_n X_n\right)_0$ implica em convergência em cada coordenada, temos $z_r = \lim_{k\longrightarrow\infty} \xi_t R_r\left(w_m^{(k)}\right)$. Como $z_r \neq 0$, segue que $\xi_t \neq 0$ e

$$z_r = \lim_{k\longrightarrow\infty} \xi_t R_r(w_m^{(k)}) = \xi_t \lim_{k\longrightarrow\infty} R_r(w_m^{(k)}) \in \overline{R_r(X)} = R_r(X).$$

Denote

$$\alpha_m := \lim_{k\longrightarrow\infty} w_m^{(k)} = \frac{R_r^{-1}(z_r)}{\xi_t} \neq 0.$$

Da mesma forma que feito em (a), obtemos

$$z_{m_j} = \xi_j R_{m_j}(\alpha_m)$$

e

$$\|R_{m_j}(\alpha_m)\| \geq \frac{\|\alpha_m\|^q}{\|R_{m_j}^{-1}\|^q}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

Além disso, para todo $p > 0$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_{X_n}^p \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|z_{m_j}\|_{X_{m_j}}^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p . \|R_{m_j}(\alpha_m)\|_{X_{m_j}}^p.$$

Por (3.14) temos,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p . \|R_{m_j}(\alpha_m)\|_{X_{m_j}}^p \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \frac{\|\alpha_m\|_X^p}{\|R_{m_j}^{-1}\|^p} \geq \frac{1}{\delta^p} . \|\alpha_m\|_X^p . (\|\xi\|_p)^p = \infty$$

Portanto $z \notin \bigcup_{p>0} \left(\sum_n X_n\right)_p$ e assim

$$\overline{T(\ell_1(X))} - \{0\} \subseteq \left(\sum_n X_n\right)_0 - \bigcup_{p>0} \left(\sum_n X_n\right)_p .$$

■

Teorema 3.6 *Seja* $(X_n)_{n=1}^\infty$ *uma sequência de espaços de Banach que tem uma subsequência contendo cópias isomorfas uniformemente do espaço de Banach* X *de dimensão infinita. Então* $\left(\sum_n X_n\right)_p^+ - \left(\sum_n X_n\right)_p$ *é* $\dim\left(\overline{T\left(\ell_1(X)\right)}\right)$*-espaçável.*

Demonstração. A prova segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.5. A principal diferença é que aqui a topologia em $\left(\sum_n X_n\right)_p^+$ é a topologia localmente convexa gerada pela família de normas. Nesta demonstração, quando escrevermos *como antes* significará como na demonstração do Teorema 3.5. Sem perda de generalidade *como antes* assumiremos que a sequência $(X_n)_{n=1}^\infty$ contém cópias isomorfas uniformemente de X. A Proposição 2.44 garante que $\left(\sum_n X_n\right)_p^+ - \left(\sum_n X_n\right)_p \neq \emptyset$, seja então $\xi = (\xi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^+ - \ell_p$ (este é o vetor mãe). Decomponha $\mathbb{N}$ e defina $y_j \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$, *como antes*. Já que $\|y_j\|_r = \|\xi\|_r$ para cada $r > 0$, temos que $y_j \in \ell_p^+ - \ell_p$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Considere

$$T : \ell_1(X) \longrightarrow \left(\sum_n X_n\right)_p^+, \quad T((w_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty y_j \otimes w_j,$$

onde $y_j \otimes w_j$ é definido *como antes*. Vejamos que T está bem definida, é linear e injetivo. De fato, seja $(w_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1(X)$. Mostraremos que a série $\sum_{j=1}^\infty y_j \otimes w_j$ converge em $\left(\sum_n X_n\right)_p^+$, onde $y_j \otimes w_j$ foi definido *como antes*. Considere a sequência de somas parciais $s_n = \sum_{j=1}^n y_j \otimes w_j$. Para qualquer $q > p$ fixo, vejamos que $y_j \otimes w_j \in \left(\sum_n X_n\right)_q$ para cada $j \in \mathbb{N}$. De fato *como antes*

$$\begin{aligned}\|y_j \otimes w_j\|_q &= \left(\sum_{k=1}^\infty \|\xi_k R_{j_k}(w_j)\|_{X_{j_k}}^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^q . \|R_{j_k}(w_j)\|_{X_{j_k}}^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^q . \|R_{j_k}(w_j)\|^q . \|w_j\|_X^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \delta \|w_j\|_X . \|\xi\|_q < \infty.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\sum_{j=1}^{n} \|y_j \otimes w_j\|_q \leq \sum_{j=1}^{\infty} \delta \|\xi\|_q \|w_j\|_X = \delta \|\xi\|_q \|(w_j)_{j=1}^{\infty}\|_1 < \infty$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo $\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j \otimes w_j\|_q < \infty$. Como $\left(\sum_n X_n\right)_q$ é um espaço de Banach, segue da Proposição 1.22 que existe $S_q \in \left(\sum_n X_n\right)_q$ tal que $S_q = \lim_{n \longrightarrow \infty} s_n$ em $\left(\sum_n X_n\right)_q$. Como $q > p$ foi tomado arbitrário, então utilizando o mesmo raciocínio da demonstração da Proposição 2.45, segue que S_q independe de q, ou seja, chamando tal limite de S, segue que $S = \lim_{n \longrightarrow \infty} s_n$ em $\left(\sum_n X_n\right)_q$, para todo $q > p$. Pela Proposição 1.55, segue que $S = \lim_{n \longrightarrow \infty} s_n$ em $\left(\sum_n X_n\right)_p^+$. Portanto, $\sum_{j=1}^{\infty} y_j \otimes w_j$ converge em $\left(\sum_n X_n\right)_p^+$, daí a aplicação T está bem definida. Também, *como antes* T é linear e injetivo.
Só falta mostrar que

$$\overline{T(\ell_1(X))} - \{0\} \subseteq \left(\sum\nolimits_n X_n\right)_p^+ - \left(\sum\nolimits_n X_n\right)_p.$$

Seja $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_1(X))}$, $z \neq 0$. Então existem sequências $\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1(X)$, $k \in \mathbb{N}$, tais que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} T\left(\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) = z \quad \text{em} \quad \left(\sum\nolimits_n X_n\right)_p^+$$

Já que a topologia de $\left(\sum_n X_n\right)_p^+$ é gerada pelas normas $\|\cdot\|_q$, $q > p$, pela Proposição 1.55, para todo $q > p$ temos que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \left\| T\left(\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) - z \right\|_q = 0.$$

Note que *como antes*, tomando $r \in \mathbb{N}$ tal que $z_r \neq 0$ e considerando $m, t \in \mathbb{N}$ tais que $m_t = r$, segue que a r-ésima coordenada de $T\left(\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é $\xi_t R_r\left(w_m^{(k)}\right)$ e utilizando a convergência em cada coordenada, temos que $z_r = \lim_{k \longrightarrow \infty} \xi_t R_r\left(w_m^{(k)}\right)$. *Como antes*, temos que $\xi_t \neq 0$, $z_r \in \overline{R_r(X)} = R_r(X)$ e

$$\alpha_m := \lim_{k \longrightarrow \infty} w_m^{(k)} = \frac{R_r^{-1}(z_r)}{\xi_t} \neq 0.$$

Além disso, a m_j-ésima coordenada de $T\left(\left(w_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é $\xi_j R_{m_j}(w_m^{(k)})$ e fazendo os cálculos *como antes*, obtemos

$$z_{m_j} = \xi_j R_{m_j}\,(\alpha_m)$$

e

$$\|R_{m_j}(\alpha_m)\|_X^p \geq \frac{\|\alpha_m\|^p}{\|R_{m_j}^{-1}\|^p} \text{ para todo } \ j \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Finalmente, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_{X_n}^p \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|z_{m_j}\|_{X_{m_j}}^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \cdot \|R_{m_j}(\alpha_m)\|_{X_{m_j}}^p.$$

e substituindo (3.15) obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \cdot \|R_{m_j}(\alpha_m)\|_{X_{m_j}}^p \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \frac{\|\alpha_m\|_X^p}{\|R_{m_j}^{-1}\|^p} \geq \frac{1}{\delta^q} \cdot \|\alpha_m\|_X^p \cdot \|\xi\|_p^p = \infty.$$

Portanto,

$$\overline{T(\ell_1(X))} - \{0\} \subseteq \left(\sum\nolimits_n X_n\right)_p^+ - \left(\sum\nolimits_n X_n\right)_p.$$

■

Finalizamos este capítulo com um resultado.

Corolário 3.7 *Seja X um espaço de Banach. Então:*

(a) $\ell_p(X) - \ell_p(X)^-$ *é espaçável, para todo* $0 < p < \infty$.

(b) $c_0(X) - \bigcup\limits_{p>0} \ell_p(X)$ *é espaçável.*

(c) $\ell_p(X)^+ - \ell_p(X)$ *é espaçável, para todo* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. As demonstrações dos três ítens seguem diretamente dos Teoremas 3.5 e 3.6, bastando para isso tomar $X_n = X$ e o isomorfismo R_n como sendo a identidade, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO DA TÉCNICA DO VETOR MÃE EM CONJUNTOS DE FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Neste capítulo estamos interessados em estudar a espaçabilidade de um certo subconjunto do espaço das funções mensuráveis p-integráveis, $0 < p < \infty$. Cabe ressaltar que, para $p = \infty$, não vale o resultado de espaçabilidade no contexto que abordaremos (veja [5, Theorem 3.3]). No caso $p = \infty$ vale a lineabilidade, exatamente como faremos no Teorema 4.5. O teorema principal deste capítulo está baseado no artigo [8]. Começaremos com algumas definições e resultados preliminares.

4.1 Espaços $L_p[0,1]$ e resultados preliminares

Definição 4.1 Dado $0 < p < \infty$, denotamos por $L_p[0,1]$, ou somente L_p o espaço das funções $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mensuráveis e p-integráveis, isto é,

$$L_p[0,1] = \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\colon f \text{ é mensurável e } \int |f|^p < \infty\}.$$

Apesar de estarmos escrevendo $f \in L_p[0,1]$ na verdade estamos considerando a classe de equivalência $[f]$ de todas as funções que são iguais a f quase sempre. Relembre que $f = g$ quase sempre (ou q.s.) se são iguais exceto em um subconjunto de $[0,1]$ de medida nula.

Para $1 \leq p < \infty$, $L_p[0,1]$ é um espaço de de Banach com a norma usual

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $0 < p < 1$, $\|\cdot\|_{L_p}$ é uma p-norma que torna $L_p[0,1]$ um espaço p-Banach.

Definição 4.2 Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida, $f, g, f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Diz- se que:

(a) f é *igual a* g μ*-quase sempre* se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A^{\complement}$. Neste caso escreve-se $f = g$ μ-quase sempre ou $f = g$ μ-q.s.

(b) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge para* f μ*-quase sempre* se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in A^{\complement}$. Neste caso escreve-se $f_n(x) \to f(x)$ μ-quase sempre ou $f = g$ μ-q.s. ou $f = \lim\limits_n f_n$ μ-q.s.

Proposição 4.3 *Se $f_n \to f$ em $L_1[0,1]$, então existe uma subsequência $\left(f_{n_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ tal que $f_{n_j} \to f$ μ-q.s.*

Demonstração. Veja [15, Corollary 2.32 p. 62]. ■

4.2 Resultado principal

Não é difícil ver que se $q > p$ então $L_q[0,1] \subset L_p[0,1]$ e a inclusão é contínua e própria. Logo faz sentido se perguntar se $L_p[0,1] - \bigcup\limits_{q>p} L_q[0,1]$ é não vazio. Essa pergunta não é trivial de se responder, mas de fato $L_p[0,1] - \bigcup\limits_{q>p} L_q[0,1] \neq \emptyset$. Mais ainda, $L_p[0,1] - \bigcup\limits_{q>p} L_q[0,1]$ é espaçável. Provaremos este fato nessa seção, mas começaremos com o seguinte:

Proposição 4.4 $L_p[0,1] - \bigcup\limits_{q>p} L_q[0,1] \neq \emptyset$ *para todo* $p > 0$.

Demonstração. É fácil ver que $\bigcup\limits_{q>p} L_q[0,1] = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} L_{p+\frac{1}{n}}[0,1]$. Decomponha $[0,1) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, onde $I_n := [a_n, b_n) = \left[1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}, 1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$. Note que $I_n \cap I_m = \emptyset$ sempre que $n \neq m$ Veja que para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in I_n$ existe um único $t_{x,n} \in [0,1)$ tal que

$$x = (1 - t_{x,n})a_n + t_{x,n}b_n.$$

Para ver isso, basta notar que a função $h\colon [0,1] \to [a_n, b_n]$, $h(t) = (1-t)a_n + tb_n$ é bijetora. Por outro lado, como $L_{p+\frac{1}{n}}[0,1] \subsetneqq L_p[0,1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $h_n \in L_p[0,1] - L_{p+\frac{1}{n}}[0,1]$ Definamos a seguinte sequência de funções:

$$g_n(x) = \begin{cases} h_n(t_{x,n}) & \text{se } x \in I_n \\ 0 & \text{se } x \notin I_n \end{cases}$$

A ideia geométrica da construção de cada g_n é reproduzir a função h_n, que está definida em $[0,1]$, no intervalo I_n. Seja

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{g_i}{\|g_i\|_{L_p}}.$$

Vejamos que $g \in L_p[0,1]$. De fato,

$$\|g\|_{L_p} = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{g_i}{\|g_i\|_{L_p}} \right\|_{L_p} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|g_i\|_{L_p}}{\|g_i\|_{L_p}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty.$$

Agora, $g \notin L_{p+\frac{1}{n}}[0,1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pois se $g \in L_{p+\frac{1}{n}}[0,1]$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então

$$g\chi_{I_n} = \frac{1}{2^n} \frac{g_n}{\|g_n\|_{L_p}} \in L_{p+\frac{1}{n}}[0,1],$$

onde χ_{I_n} denota a função característica do conjunto I_n. Como $L_{p+\frac{1}{n}}[0,1]$ é um espaço vetorial, segue que $g_n \in L_{p+\frac{1}{n}}[0,1]$, o que é uma contradição, pois

$$\|g_n\|_{L_{p+\frac{1}{n}}} = (b_n - a_n)^{p+\frac{1}{n}} \|h_n\|_{L_{p+\frac{1}{n}}} = \infty.$$

Portanto $g \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_{p+\frac{1}{n}}[0,1]$. Logo, $L_p[0,1] - \bigcup_{q>p} L_q[0,1] \neq \emptyset$.

■

Teorema 4.5 $L_p[0,1] - \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ *é espaçável para cada* $p > 0$.

Demonstração. Primeiramente note que $[0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, onde

$$I_n := [a_n, b_n) = \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in I_n$ existe um único $t_{x,n} \in [0,1)$ tal que

$$x = (1 - t_{x,n})a_n + t_{x,n}b_n.$$

Seja $f \in L_p[0,1] - \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$. Essa f será o vetor mãe e a partir dela construiremos uma sequência de funções $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, com $f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, da seguinte maneira:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(t_{x,n}) & \text{se } x \in I_n, \\ 0 & \text{se } x \notin I_n. \end{cases}$$

A ideia geométrica da construção de cada f_n é reproduzir o gráfico da f no intervalo I_n. Por construção, temos

$$\|f_n\|_{L_p} = (b_n - a_n)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p} < \|f\|_{L_p} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Com efeito

$$\|f_n\|_{L_p} = \left(\int_{I_n} |f_n(x)|^p + \int_{I_n^{\complement}} |f_n(x)|^p \right)^{1/p} = \left(\int_{a_n}^{b_n} |f(t_{x,n})|^p \right)^{1/p}.$$

Já que $\dfrac{x - a_n}{b_n - a_n} = t_{x,n}$, segue que

$$\left(\int_{a_n}^{b_n} \left| f\left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n} \right) \right|^p \right)^{1/p} = (b_n - a_n)^{1/p} \left(\int_0^1 |f(y)|^p \right)^{1/p} = (b_n - a_n)^{1/p} \|f\|_{L_p}.$$

Veja que as funções f_n são linearmente independentes, pois elas têm suportes disjuntos. Com efeito, considere a seguinte combinação linear:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0 \ \mu\text{-q.s.} \tag{4.1}$$

Escolha $x_r \in I_r$ tal que $f_r(x_r) \neq 0$. Avaliando em (4.1) temos

$$\alpha_r f_r(x_r) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right)(x_r) = 0,$$

e daí $\alpha_r = 0$. Procedendo de maneira semelhante segue que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Se quiséssemos provar apenas a lineabilidade, bastaria provar que

$$\operatorname{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\} - \{0\} \subseteq L_p[0,1] - \bigcup_{q>p} L_q[0,1],$$

pois isso garante que $L_p[0,1] - \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ é $\aleph_0$-lineável.
Mas queremos provar mais, a espaçabilidade. Nossa estratégia será definir um operador

linear injetivo

$$T\colon F \to L_p[0,1],$$

onde F é um espaço de Banach cuja dimensão é igual a $\mathfrak{c}$, tal que

$$\overline{T(F)} \subseteq \left(L_p[0,1] - \bigcup_{q>p} L_q[0,1] \right) \cup \{0\}.$$

Isto é equivalente a provar que $\overline{T(F)} \cap L_q[0,1] = \{0\}$ para cada $q > p$. Primeiro note que se $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s(\mathbb{R})$, onde $s = 1$ se $p \geq 1$ e $s = p$ se $0 < p < 1$, então

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n f_n\|_{L_p}^s &= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^s \|f_n\|_{L_p}^s \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^s \|f\|_{L_p}^s \\ &= \|f\|_{L_p}^s \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_s^s < \infty.\end{aligned}$$

Já que, para $p \geqslant 1$, $L_p[0,1]$ é um espaço de Banach (p-Banach para $0 < p < 1$), então pela Proposição 1.22 (Proposição 2.6 para $0 < p < 1$), temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \in L_p[0,1]$. Isto implica que o operador

$$T\colon \ell_s(\mathbb{R}) \longrightarrow L_p[0,1]\ ,\ T\left((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \tag{4.2}$$

está bem definido. Veja que T é linear e injetivo. Com efeito, sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}T\left(\alpha\,(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty}\right) = T\left((\alpha x_j + y)_{j=1}^{\infty}\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha x_j + y_j) f_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha \alpha_j f_j + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j f_j = \alpha T\left((\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right) + T\left((\beta_j)_{j=1}^{\infty}\right).\end{aligned}$$

Portanto T é linear. Agora se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n = 0$ μ-q.s. então, dado qualquer $k \in \mathbb{N}$ e tomando $x_k \in I_k$, tal que $f_k(x_k) \neq 0$,obtemos

$$\alpha_k f_k(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(x_k) = 0.$$

Logo $\alpha_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, T é injetivo. Assim, $T\left(\ell_s(\mathbb{R})\right)$ é um subespaço de $L_p[0,1]$ da mesma dimensão que $\ell_s(\mathbb{R})$. Pela Proposição 1.45, segue que

$\overline{T(\ell_s(\mathbb{R}))}$ é um subespaço fechado de $L_p[0,1]$. Nosso objetivo agora será provar que $\overline{T(\ell_s(\mathbb{R}))} \cap L_q[0,1] = \{0\}$ para todo $q > p$. De fato, seja $g \in \overline{T(\ell_s(\mathbb{R}))} - \{0\}$. Então $g \neq 0$ μ-q.s., isto é, o conjunto $A = \{x \in [0,1] : g(x) \neq 0\}$ tem medida positiva de Lebesgue. Como $g \in \overline{T(\ell_s(\mathbb{R}))}$, existem sequências $\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_s(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$ tais que

$$g = \lim_{k\to\infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)\right) \text{ em } L_p[0,1],$$

isto é, $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} f_n - g\right\|_{L_p} \longrightarrow 0$ quando $k \to \infty$. Pela Proposição 4.3, existe uma subsequência $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k_j)} f_n\right)_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{k_j} f_n(x) \longrightarrow g(x) \quad \mu\text{-q.s.,} \quad \text{quando } j \to \infty.$$

Seja $B = \{x \in [0,1]$: onde o limite acima existe$\}$. Então $B^{\complement} = [0,1] - B$ tem medida de Lebesgue nula já que $A = (B \cap A) \cup \left(B^{\complement} \cap A\right)$. Como $\left(B^{\complement} \cap A\right) \subset B^{\complement}$, segue que $B^{\complement} \cap A$ tem medida nula. Além disso, como $m(A) = m\,(B \cap A) + m\left(B^{\complement} \cap A\right)$, segue que $m(B \cap A) = m(A) > 0$. Logo existe um $x_0 \in B \cap A$, $x_0 \neq 1$, tal que $g(x_0) \neq 0$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k_j)} f_n(x_0) \longrightarrow g(x_0) \quad \text{em } \mathbb{R}, \qquad \text{quando } j \to \infty.$$

Já que, $x_0 \in [0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, existe um único $r \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in I_r$. Assim

$$a_r^{(k_j)} f_r(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k_j)} f_n(x_0) \longrightarrow g(x_0) \quad \text{quando } j \to \infty. \tag{4.3}$$

Note que f poderia ter sido escolhida de tal maneira que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [0,1]$. Consequentemente $f_r(x) \neq 0$ para todo $x \in I_r$. Logo, de (4.3),

$$\lim_{j\to\infty} a_r^{(k_j)} = \frac{g(x_0)}{f_r(x_0)} = \eta \neq 0 \tag{4.4}$$

e assim

$$f_r(x) a_r^{k_j} \longrightarrow g(x) \quad \mu\text{-q.s.} \quad \text{em } I_r \text{ quando } j \to \infty.$$

Portanto

$$f_r(x) \lim_{j\to\infty} a_r^{(k_j)} = \lim_{j\to\infty} f_r(x) a_r^{(k_j)} = g(x) \quad \mu\text{-q.s.} \quad \text{em } I_r \tag{4.5}$$

e resulta de (4.4) e (4.5) que

$$g(x) = \eta f_r(x) \quad \mu\text{-q.s.} \quad x \in I_r.$$

Logo $\|g\|_{L_q} = \|\eta f_r\|_{L_q} = |\eta| \|f_r\|_{L_q} = \infty$ e, portanto, $g \notin L_q[0,1]$, finalizando a prova. ■

CAPÍTULO 5

ESPAÇABILIDADE E A FORMA FRACA DO TEOREMA DE PEANO

O teorema principal deste capítulo está baseado no artigo [3]. Antes de motivarmos o resultado principal desse capítulo, relembraremos a noção de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em espaços de Banach.

Definição 5.1 Seja u uma aplicação definida em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ com valores em um espaço de Banach X, isto é, $u\colon I \to X$. Dizemos que u é *diferenciável* em $t_0 \in I$, se dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ e um elemento $a \in X$ tal que

$$\|u(t) - u(t_0) - (t - t_0)a\| < \varepsilon \text{ sempre que } |t - t_0| < \delta.$$

O único elemento $a \in X$ é chamado de *derivada de* u em t_0 e é denotado por $u'(t_0)$.

Sejam X um espaço de Banach, $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times X$ um subconjunto aberto, $(t_0, x_0) \in \Omega$, e $f\colon \Omega \to X$ uma função contínua. O Problema de Cauchy ou Problema de Valor Inicial associado a f é

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

consistindo da equação diferencial $x' = f(t, x)$ e a condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Definição 5.2 Uma solução do problema de valor inicial dado em (5.1), é uma função diferenciável $u\colon I \to X$ definida em algum intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $G(u) = \{(t, u(t))\colon t \in I\} \subseteq \Omega$,

2. $u' = f(t, u)$ para todo $t \in I$,

3. $u(t_0) = x_0$.

Sejam X um espaço de Banach real e $f\colon \mathbb{R} \times X \to X$ uma função contínua. A Forma Fraca do Teorema de Peano afirma que se X é um espaço de dimensão finita, então a equação diferencial ordinária

$$u' = f(t, u) \tag{5.2}$$

tem alguma solução em algum intervalo aberto I de $\mathbb{R}$. O estudo da não validade do teorema clássico de Peano em espaços lineares arbitrários de dimensão infinita foi iniciado por Dieudonné [14] em 1950. Ele provou a existência de uma função contínua $f\colon c_0 \to c_0$ tal que se $f(t, u) := f(u)$, então o Problema de Cauchy associado a (5.2)

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.3}$$

não tem solução em torno do vetor nulo de $\mathbb{R} \times c_0$. Posteriormente, contraexemplos nos espaços de Hilbert e em espaços de Banach não-reflexivos foram obtidos por Yorke em [34]. Finalmente, em 1975, Godunov [17] provou que o Teorema de Peano é valido em X se, e somente se, X tem dimensão finita.

5.1 A não validade da Forma Fraca do Teorema de Peano no espaço $C(c_0)$

Seja c_0 o espaço vetorial das sequências convergindo para zero munido da norma do supremo. Denotaremos com $C(c_0)$ o conjunto das funções contínuas definidas em c_0, Claramente $C(c_0)$ é um espaço vetorial de dimensão infinita. Dotaremos este espaço vetorial de uma topologia, chamada de *topologia da convergência uniforme sobre conjuntos limitados*. $C(c_0)$ com esta topologia será um espaço vetorial topológico completo. Para isso começamos por definir as vizinhanças básicas de um elemento $f \in C(c_0)$. Dado $U \subseteq c_0$ limitado e qualquer $\varepsilon > 0$, o conjunto

$$B_U(f, \varepsilon) = \{g \in C(c_0) : \sup_{x \in U} \|f(x) - g(x)\|_\infty < \varepsilon\}$$

é uma vizinhança de f. Mais precisamente, para cada $f \in C(c_0)$ seja

$$\mathcal{B}_f = \{B_U(f, \varepsilon) \colon U \subseteq c_0 \text{ é limitado e } \varepsilon > 0\}$$

uma família de subconjuntos de $C(c_0)$. Não é difícil ver que essa família satisfaz as condições da Proposição 1.34. A topologia que tem como base de vizinhanças de cada $f \in C(c_0)$ os conjuntos descritos acima, será denotada por $\mathcal{T}_{uc}$.

Proposição 5.3 *$(C(c_0), \mathcal{T}_{uc})$ é um espaço topológico de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $f, g \in C(c_0)$ com $f \neq g$. Então existe $x_0 \in c_0$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Considere o subconjunto $U = \{x_0\} \subseteq c_0$, o qual é limitado, e seja $\varepsilon = \dfrac{\|f(x_0) - g(x_0)\|_\infty}{2} > 0$. Considere as vizinhanças $B_U(f, \varepsilon)$ e $B_U(g, \varepsilon)$ de f e g respectivamente. Vejamos que $B_U(f, \varepsilon) \cap B_U(g, \varepsilon) = \emptyset$. De fato, suponha que exista $h \in B_U(f, \varepsilon) \cap B_U(g, \varepsilon)$. Então $\|h(x_0) - f(x_0)\|_\infty < \varepsilon$ e $\|h(x_0) - g(x_0)\|_\infty < \varepsilon$, e pela desigualdade triangular temos

$$2\varepsilon = \|f(x_0) - g(x_0)\|_\infty \leq \|h(x_0) - f(x_0)\|_\infty + \|h(x_0) - g(x_0)\|_\infty < 2\varepsilon,$$

o que é uma contradição. Portanto, $(C(c_0), \mathcal{T}_{uc})$ é um espaço de Hausdorff. ■

Observação 5.4 A partir de agora usaremos as seguintes notações:

- 0_f é a aplicação nula no espaço $C(c_0)$.
- 0_{c_0} é a sequência nula no espaço c_0.
- 0 é o zero escalar.

Proposição 5.5 *$(C(c_0), \mathcal{T}_{uc})$ é completo.*

Demonstração. Sejam $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede de Cauchy em $(C(c_0), \mathcal{T}_{uc})$ e $B_U(0_f, \varepsilon)$ uma vizinhança de 0_f, ou seja, $U \subset c_0$ é limitado. Então existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $f_\lambda - f_{\overline{\lambda}} \in B_U(0_f, \varepsilon)$ sempre que $\lambda, \overline{\lambda} \geq \lambda_0$, isto é,

$$\sup_{x \in U} \|f_\lambda(x) - f_{\overline{\lambda}}(x)\|_\infty < \varepsilon \text{ , sempre que } \lambda, \overline{\lambda} \geq \lambda_0.$$

Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$|f_{n\lambda}(x) - f_{n\overline{\lambda}}(x)| < \varepsilon \text{ , sempre que } \lambda, \overline{\lambda} \geq \lambda_0,$$

onde $f_\lambda(x) := (f_{n\lambda}(x))_{n=1}^\infty$, para todo λ. Assim, para $n \in \mathbb{N}$ fixo, $(f_{n\lambda}(x))_{\lambda \in \Lambda}$ é uma rede de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo converge, digamos

$$f_{n\lambda}(x) \xrightarrow{\lambda} f_n(x) \in \mathbb{R}.$$

Defina

$$f : c_0 \to c_0 \, , f(x) = (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \, .$$

Como

$$|f_{n\lambda}(x) - f_{n\overline{\lambda}}(x)| \leq \sup_{x \in U} \|f_\lambda(x) - f_{\overline{\lambda}}(x)\|_\infty < \varepsilon \ , \text{ sempre que } \lambda, \overline{\lambda} \geq \lambda_0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, passando o limite em $\overline{\lambda}$ e usando a continuidade do módulo, resulta que

$$|f_{n\lambda}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \ , \text{ sempre que } \lambda \geq \lambda_0 \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$\sup_{x \in U} \|f_\lambda(x) - f(x)\|_\infty < \varepsilon \ , \text{ sempre que } \lambda \geq \lambda_0,$$

ou seja, $f_\lambda - f \in B_U(0_f, \varepsilon)$, para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Como $C(c_0)$ é um espaço vetorial, segue que $f = f_{\lambda_0} - (f_{\lambda_0} - f) \in C(c_0)$. Portanto $C(c_0)$ é completo.

■

Denotemos por $\mathscr{K}(c_0)$ o subconjunto dos campos vetoriais contínuos $f \colon c_0 \to c_0$, para os quais não é valida a Forma Fraca do Teorema de Peano.

O resultado principal deste capítulo é o seguinte:

Teorema 5.6 *O conjunto $\mathscr{K}(c_0)$ dos campos vetoriais contínuos em c_0, tal que a Forma Fraca do Teorema de Peano não é valida, é espaçável em $C(c_0)$.*

Antes de demonstrar este resultado, precisaremos de alguns resultados preliminares.

Lema 5.7 *Seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$. Então f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ considere $\delta = \varepsilon^2$. Assim:

1. Se $a, b \geq 0$ com $|a - b| < \varepsilon^2$, então

$$|f(a) - f(b)|^2 = |\sqrt{a} - \sqrt{b}|^2 \leq |\sqrt{a} - \sqrt{b}||\sqrt{a} + \sqrt{b}| = |a - b| < \varepsilon^2.$$

   Analogamente para $a, b \leq 0$.

2. Se $a \geq 0$ e $b \leq 0$, e $a \geq -b$ com $|a - b| < \varepsilon^2$, então

$$|f(a) - f(b)|^2 = |\sqrt{a} - \sqrt{-b}|^2 \leq |\sqrt{a} - \sqrt{-b}||\sqrt{a} + \sqrt{-b}| = |a - b| < \varepsilon^2.$$

   Analogamente para $a \leq -b$.

   Portanto a função f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

■

Proposição 5.8 *A função*

$$D\colon c_0 \to c_0\,,\ D\left((x_n)\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

é uniformemente contínua em c_0*, em particular contínua.*

Demonstração. Pelo Lema 5.7 a função $f(x) = \sqrt{|x|}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Assim dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } \ |x - y| < \delta.$$

Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em c_0 tais que $\|\,(x_n)_{n=1}^{\infty} - (y_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_{\infty} < \delta$. Então, para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que $|x_i - y_i| < \delta$ e daí

$$|f(x_i) - f(y_i)| = \left|\sqrt{|x_i|} - \sqrt{|y_i|}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Daí temos que

$$\begin{aligned}\|D\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) - D\left((y_n)_{n=1}^{\infty}\right)\|_{\infty} &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|f(x_n) + \frac{1}{n+1} - f(y_n) - \frac{1}{n+1}\right| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}|f(x_n) - f(y_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Assim D é uniformemente contínua. ■

Proposição 5.9 *Se* $U \subseteq c_0$ *é limitado, então* $f(U) \subseteq c_0$ *é limitado, onde* $f((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \left(\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Demonstração. Como, U é limitado, existe $K \geq 0$ tal que $\|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_{\infty} \leq K$, para todo $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in U$. Segue que $|x_n| \leq \|\,(x_n)_{n=1}^{\infty}\,\|_{\infty} \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo

$$\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{K} + 1\ ,\ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\|f\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right)\|_{\infty} \leq \sqrt{K} + 1$, para todo $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in U$. ■

Proposição 5.10 *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda > 0$*, então*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{|x|} + \lambda} \leqslant 2\left(\sqrt{|\alpha|} + \sqrt{|\beta|}\right).$$

Demonstração. Façamos o caso $\alpha < 0 < \beta$ (os demais são análogos). Como $\lambda > 0$, segue que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{|x|}+\lambda} \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}. \tag{5.4}$$

Como

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int_{0}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_{0}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= -2\sqrt{(-\alpha)} + 2\sqrt{(\beta)} \leqslant 2\left(\sqrt{|\alpha|} + \sqrt{|\beta|}\right),\end{aligned}$$

decorre o que queríamos. ■

Demonstração do Teorema 5.6. Mostraremos que $\mathscr{K}(c_0)$ contém exceto pelo vetor nulo um subespaço de dimensão infinita e fechado com respeito a topologia $\mathcal{T}_{uc}$ de $C(c_0)$. Faremos a demonstração em três passos.

Passo 1. Neste passo escolheremos o vetor mãe e, a partir dele, construiremos vetores linearmente independentes que tenham as mesmas propriedades que o vetor mãe. Sejam $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ os vetores unitários canônicos do espaço das sequências reais e defina o campo vetorial $f \in C(c_0)$ por

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}\right) e_n.$$

Pela Proposição 5.8, $f \in C(c_0)$ e o fato que $f \in \mathscr{K}(c_0)$ foi provado em [14] (este é o vetor mãe). Considere uma decomposição de $\mathbb{N}$ como uma união infinita de conjuntos infinitos e dois a dois disjuntos, por exemplo como na decomposição dada na Proposição 1.13. Denotemos os conjuntos dessa decomposição por $\mathbb{N}_i = \{i_1 < i_2 < \cdots\}$ e, para cada $i \in \mathbb{N}$, defina a aplicação

$$\mathbb{N}_i f \colon c_0 \to c_0 \ , \ \mathbb{N}_i f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) e_{i_n},$$

onde $f_n(x) = \sqrt{|x_n|} + \dfrac{1}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Um argumento similar ao que foi feito na Proposição 5.8 garante que $\mathbb{N}_i f \in C(c_0)$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Passo 2. Aqui definiremos um operador linear injetivo entre o espaço de Banach $\ell_1(\mathbb{R})$ e o espaço vetorial topológico $C(c_0)$. Seja

$$L\colon \ell_1(\mathbb{R}) \to C(c_0) \ , \ L\left((a_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{N}_i f.$$

Vejamos que L está bem definido. De fato, seja $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1(\mathbb{R})$ e considere a sequência de somas parciais, $m \in \mathbb{N}$,

$$s_m = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{N}_i f \in C(c_0).$$

Provaremos que $(s_m)_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{T}_{uc}$. Sejam $U \subseteq c_0$ um subconjunto limitado e $\varepsilon > 0$. Vejamos que $s_m - s_n \in B_U(0_f, \varepsilon)$, para m e n suficientemente grandes. Para isso, sejam $x \in U$ e $m > n$. Então

$$\begin{aligned}
\|(s_m - s_n)(x)\|_{\infty} &= \left\| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \mathbb{N}_i f(x) \right\|_{\infty} \leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i| \|\mathbb{N}_i f(x)\|_{\infty} \\
&= \|f(x)\|_{\infty} \left(\sum_{i=n+1}^{m} |a_i| \right) \leq \left(\sup_{x \in U} \|f(x)\|_{\infty} \right) \left(\sum_{i=n+1}^{m} |a_i| \right) \\
&\leq M \sum_{i=n+1}^{m} |a_i|,
\end{aligned}$$

onde a existência da constante M é garantida pela Proposição 5.9. Como $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1(\mathbb{R})$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=n+1}^{m} |a_i| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{sempre que} \quad m > n \geq n_0.$$

Daí

$$\sup_{x \in U} \|(s_m - s_n)(x)\|_{\infty} < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad m > n \geq n_0,$$

ou seja, $(s_m - s_n) \in B_U(0, \varepsilon)$, sempre que $m > n \geq n_0$. Logo $(s_m)_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $C(c_0)$. Uma vez que $C(c_0)$ é um espaço vetorial topológico completo, o limite

$$\lim_{m \to \infty} s_m = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{N}_i f \in C(c_0)$$

existe. Portanto L está bem definido. Vejamos que L é um operador linear. Sejam $(a_i)_{i=1}^{\infty}, (b_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
L\left(\alpha (a_i)_{i=1}^{\infty} + (b_i)_{i=1}^{\infty}\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha a_i + b_i) \mathbb{N}_i f = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha a_i \mathbb{N}_i f + b_i \mathbb{N}_i f\right) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{N}_i f + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \mathbb{N}_i f = \alpha L\left((a_i)_{i=1}^{\infty}\right) + L\left((b_i)_{i=1}^{\infty}\right).
\end{aligned}$$

Para provar que L é injetivo, seja $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1(\mathbb{R})$ tal que $L\left((a_i)_{i=1}^{\infty}\right) = 0_f$. Então

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{N}_i f = 0_f$, ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{N}_i f(x) = 0_{c_0}$, para todo $x \in c_0$. Como $f(x) \neq 0$, para todo $x \in c_0$, segue que $\mathbb{N}_i f(x) \neq 0_{c_0}$, para todo $x \in c_0$ e todo $i \in \mathbb{N}$. Como as funções $\mathbb{N}_i f$ têm suportes disjuntos, segue que $a_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo L é injetivo, portanto, $L(\ell_1(\mathbb{R}))$ é um subespaço de $C(c_0)$ da mesma dimensão que $\ell_1(\mathbb{R})$.

Passo 3. Vamos mostrar que

$$\overline{L(\ell_1(\mathbb{R}))}^{\mathcal{T}_{uc}} - \{0_f\} \subseteq \mathscr{K}(c_0).$$

De fato, seja $h \in \overline{L(\ell_1(\mathbb{R}))}^{\mathcal{T}_{uc}} \subseteq C(c_0)$, com $h \neq 0_f$. Denotemos

$$h\colon c_0 \to c_0,\ \ h(x) = (h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x), \ldots)\,,\ \ x \in c_0.$$

Já que $h \neq 0_f$ existe $x_0 \in c_0$ tal que $h(x_0) \neq 0_{c_0}$, logo existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $h_r(x_0) \neq 0$. Como $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$ temos que existem únicos $m, s \in \mathbb{N}$ tais que $r = m_s$. Como $h \in \overline{L(\ell_1(\mathbb{R}))}^{\mathcal{T}_{uc}}$, existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \ell_1(\mathbb{R})$ tal que

$$L(x_\lambda) \xrightarrow{\lambda} h \text{ em } C(c_0).$$

Isto é,

$$L(x_\lambda) \xrightarrow{\lambda} h,$$

uniformemente sobre $\{x \in c_0 : \|x\|_\infty \leq N\}, N \in \mathbb{N}$. Em consequência, para cada $x \in c_0$ temos

$$L(x_\lambda)(x) \xrightarrow{\lambda} h(x). \tag{5.5}$$

Denote

$$L(x_\lambda)\colon c_0 \to c_0\ ,\ L(x_\lambda)(x) = \left(L_i\left(x_\lambda\right)(x)\right)_{i=1}^{\infty},$$

para todo $\lambda \in \Lambda$. Como convergência em c_0 implica convergência em cada coordenada, segue que

$$L_n(x_\lambda)(x) \xrightarrow{\lambda} h_n(x)\,,\ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\,,\ \ \text{para todo } x \in c_0.$$

Denotando $x_\lambda = (a_i^\lambda)_{i=1}^{\infty}$, para cada $\lambda \in \Lambda$, obtemos

$$a_i^\lambda f_{i_j}(x) = L_{i_j}(x_\lambda)(x) \xrightarrow{\lambda} h_{i_j}(x)\,,\ \text{ para todo } i, j \in \mathbb{N}\,,\ \ \text{para todo } x \in c_0.$$

Em particular quando $i = m$,

$$a_m^\lambda f_{m_j}(x) = L_{m_j}(x_\lambda)(x) \xrightarrow{\lambda} h_{m_j}(x)\,,\ \text{ para todo } j \in \mathbb{N}\,,\ \ \text{para todo } x \in c_0. \tag{5.6}$$

Mais ainda, para $j = s$ e $x = x_0$ em (5.6) e lembrando que $m_s = r$, temos

$$a_m^\lambda f_r(x_0) = a_m^\lambda f_{m_s}(x_0) \xrightarrow{\lambda} h_{m_s}(x_0) = h_r(x_0) \neq 0.$$

Como $h_r(x_0) \neq 0$ segue que $f_r(x_0) \neq 0$ e daí temos

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} a_m^\lambda := \frac{h_r(x_0)}{f_r(x_0)} \neq 0.$$

Chamando

$$a_r := \lim_{\lambda \in \Lambda} a_m^\lambda,$$

temos

$$a_m^\lambda f_{m_j}(x) \xrightarrow{\lambda} a_r f_{m_j}(x)\,, \ \forall x \in c_0.$$

Logo, segue do fato que a topologia $\mathcal{T}_{uc}$ é de Hausdorff e de (5.6) que

$$h_{m_j}(x) = a_r f_{m_j}(x)\,, \ \forall x \in c_0, \ \forall j \in \mathbb{N} \tag{5.7}$$

Finalmente, vejamos que $h \in \mathscr{K}(c_0)$. Procederemos por contradição usando uma ideia de [14]. Suponha que $h \notin \mathscr{K}(c_0)$. Então existe uma solução $u(t) = (u_n(t))_{n=1}^\infty$ de (5.2) definida em algum intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Fixe qualquer $a \in I$ e seja $b = u(a) = (b_i)_{i=1}^\infty$. Por (5.7), temos

$$u'_{m_j}(t) = h_{m_j}(u(t)) = a_r f_{m_j}(u(t)) = a_r\left(\sqrt{|u_{m_j}(t)|} + \frac{1}{m_j + 1}\right),$$

e $u_{m_j}(a) = b_{m_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $t \in I$. Em resumo, cada u_{m_j} é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'_{m_j}(t) = a_r\left(\sqrt{|u_{m_j}(t)|} + \dfrac{1}{m_j+1}\right), \\ u'_{m_j}(t) = b_{m_j}, \end{cases} \tag{5.8}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $t \in I$. Se $w'(t) = \lambda\left(\sqrt{|w(t)|} + \gamma\right)$ com $\gamma, \lambda > 0$, $t \geq t_0$ e $w(t_0) = y_0$, então pela Proposição 5.10, segue

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{t_0}^t ds = \int_{t_0}^t \frac{w'(s)}{\lambda\left(\sqrt{|w(s)|} + \gamma\right)} ds \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{w(t_0)}^{w(t)} \frac{dx}{\sqrt{|x|} + \gamma} \leq \frac{2}{\lambda}\left(\sqrt{|w(t)|} + \sqrt{|w(t_0)|}\right). \end{aligned}$$

Da (5.8), se $a_r > 0$, então

$$0 < \frac{a_r(t-a)}{2} \leq \sqrt{|u_{m_j}(t)|} + \sqrt{|u_{m_j}(a)|} \tag{5.9}$$

para todo $t > a$ e para todo $j \in \mathbb{N}$. Fazendo $j \to \infty$ em (5.9) e lembrando que $\left(u_{m_j}(t)\right)_{j=1}^{\infty}, \left(u_{m_j}(a)\right)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ para todo $t \in I$, temos $0 < 0$, o que é uma contradição. Se $a_r < 0$ defina $v_{m_j}(t) = -u_{m_j}(t)$ para todo $t \in I$ e $j \in \mathbb{N}$. Então v_{m_j} é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} v'_{m_j}(t) = -a_r\left(\sqrt{|v_{m_j}(t)|} + \dfrac{1}{m_j+1}\right), \\ v'_{m_j}(t) = -b_{m_j}, \end{cases} \tag{5.10}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $t \in I$. Como $-a_r > 0$, procedendo de maneira análoga ao caso anterior, teremos uma contradição. Portanto $h \in \mathscr{K}(c_0)$, como queríamos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Aron, R. M., Bernal-Gonzalez, L., Pellegrino, D. M., and Seoane-Sepúlveda, J. B., *Lineability: the Search for Linearity in Mathematics*, Chapman and Hall/CRC, 2015. https://doi.org/10.1201/b19277

[2] Aron, R. M., Gonzalo, R., and Zagorodnyu, A., *Zeros of real polynomials*, Linear Multilinear Algebra **48** (2000), 107–115. https://doi.org/10.1080/03081080008818662

[3] Barroso, C. S., Botelho, G., Fávaro, V. V., and Pellegrino, D., *Lineability and spaceability for the weak form of Peano's theorem and vector-valued sequence spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 1913–1923. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2012-11466-2

[4] Bayart, F., *Porosity and hypercyclic operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 3309–3316. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-05-07842-1

[5] Bernal-González, L., and Ordóñez Cabrera, M.*Spaceability of strict order integrability,* J. Math. Anal. Appl. **385** (2012) 303–309. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.06.043

[6] Bertoloto, F., Botelho, G., Fávaro, V. V., Jatobá, A. M., Hypercyclicity of convolution operators on spaces of entire functions, Ann. Inst. Fourier Grenoble **63** (2013), 1263–1283. https://doi.org/10.5802/aif.2803

[7] Botelho, G., Diniz, D., Fávaro V. V., and Pellegrino, D.,*Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), 1255–1260. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.11.012

[8] Botelho, G., Fávaro, V. V., Pellegrino, D., and Seoane-Sepúlveda, J. B., *$L_p[0,1] - \cup_{q>p} L_q[0,1]$ is spaceable for every $p > 0$*, Linear Algebra Appl. **436** (2012), 2963–2965. https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.12.028

[9] Botelho, Matos, M. C., and Pellegrino, D., *Lineability of summing sets of homogeneous polynomials*, Linear Multilinear Algebra **58** (2010), 61–74. https://doi.org/10.1080/03081080802095446

[10] Botelho, G., Pellegrino, D., and Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, 2012.

[11] Bogachev, V. I., and Smolyanov, O. G., *Topological Vector Spaces and Their Applications*, Springer, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57117-1

[12] Coelho, Flávio Ulhoa and Lourenco, Mary Lílian, *Curso de Álgebra Linear, Um Vol. 34*, Edusp, 2001.

[13] Cariello, D., and Seoane-Sepúlveda, J. B., *Basic sequences and spaceability in ℓ_p spaces*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 3797–3814. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.12.011

[14] Dieudonné, J., Deux exemples singuliers d'équations différentielles, Acta Sci. Math. (Szeged) **12B** (1950), 38–40.

[15] Folland, G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, 2013.

[16] Fonf, V., Gurariy, V., and Kadets, M., *An infinite dimensional subspace of $C[0,1]$ consisting of nowhere differentiable functions*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **52** (1999), 13–16.

[17] Godunov, A. N., *Peano's theorem in Banach spaces*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. [Functional Anal. Appl.] **9** (1975), 59–60. https://doi.org/10.1007/BF01078180

[18] Gurariy, V. I., *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **167** (1966), 971–973.

[19] Gurariy, V. I., and Quarta, L., *On lineability of sets of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **294** (2004), 62-72. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.01.036

[20] Halbeisen, L., and Hungerbühler, N., *The cardinality of Hamel bases of Banach spaces*, East-West J. of Mathematics **2** (2000), 153-159.

[21] Hefez, A., *Elementos de Aritmética*, SBM, 2006.

[22] Hutson, Vivian and Pym, J and Cloud, M, *Applications of Functional Analysis and Operator Theory,*, Elsevier, 2005.

[23] Kitson, D., and Timoney, R., *Operator ranges and spaceability*, J. Math. Anal. Appl. **378** (2011), 680–686. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.12.061

[24] Lal, R., *Algebra 2: Linear Algebra, Galois Theory, Representation Theory, Group Extensions and Schur Multiplier*, Springer, 2017.

[25] Lima, E. L., *Espaços Métricos, Terceira Edição*, SBM, 1977.

[26] Metafune, G., and Moscatelli, V. B., *On the space* $l^{p+} = \bigcap_{q>p} l^q$, Math. Nachr. **147** (1990), 7–12. https://doi.org/10.1002/mana.19901470102

[27] Mujica, J., *Notas de Aula de Espaços Vetoriais Topológicos*, IMECC-UNICAMP, 2004.

[28] Muñoz-Fernández, G. A., Palmberg, N., Puglisi, D., and Seoane-Sepúlveda, J. B., *Lineability in subsets of measure and function spaces*, Linear Algebra Appl. **428** (2008), 2805–2812. https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.01.008

[29] Oubiña, L., *Introducción a la Teoría de Conjuntos*, EUDEBA, 1976.

[30] Rabindranath, Sen., *A First Course in Functional Analysis*, ANTHEM PRESS, 2013.

[31] Rudin, Walter., *Functional Analysis*, McGrawHill, 1973.

[32] Rynne, B., and Youngson, M. A., *Linear Functional Analysis*, Springer Science & Business Media, 2013.

[33] Schaefer, H. H., *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, 1971. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9928-5

[34] Yorke, J. A., *A continuous differential equation in Hilbert space without existence*, Funkcial. Ekvac. **13** (1970), 19–21.