

500  
MON  
620.17  
C972a  
TES/MEC

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO MECÂNICO E ELABORAÇÃO DE  
PLACAS SANDUÍCHES ANISOTRÓPICAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal  
de Uberlândia, por JESIEL CUNHA, <sup>1955</sup> para obtenção do  
título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Aprovada em 18/12/1992, com conceito "A", pela  
Banca Examinadora:

Prof. Dr. Renan Billa ( orientador ) - UFU, 1951

Prof. Dr. Henner Alberto Gomide - UFU

Prof. Dr. Adilson Rodrigues da Costa - UFOP

DIRBI/UFU

620.17 C972a /TES/FU  
01421/93



1000017149

Uberlândia, 18 de dezembro de 1992

À minha querida mãe, Ivone.

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Renan Billa, pela paciência e dedicação com que orientou o trabalho .

Ao professor Henner Alberto Gomide, pela confiança na utilização dos laboratórios .

A todos os colegas e funcionários do DEEME que contribuíram para a realização deste trabalho.

A Perstorp do Brasil Ind. e Comércio, pelo apoio na concessão de materiais para realização da parte experimental.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e à FAPEMIG (Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de Minas Gerais), pelo apoio financeiro.

# ANÁLISE DO COMPORTAMENTO MECÂNICO E ELABORAÇÃO DE PLACAS SANDUÍCHES ANISOTRÓPICAS

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	XI
LISTA DE TABELAS.....	XVI
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XVII
1 - INTRODUÇÃO.....	1

### 1ª PARTE

PROGRAMA DE CÁLCULO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE PLACAS SANDUÍCHES.....	5
2 - REVISÃO DOS ESTUDOS DE PLACAS ESTRATIFICADAS ANISOTRÓPICAS.....	6
3 - AS ESTRUTURAS SANDUÍCHES.....	12

3.1 - Generalidades sobre os painéis sanduíches.....	12
3.2 - Teorias de placas sanduíches.....	15
3.3 - Hipóteses clássicas das placas sanduíches.....	16
3.4 - Aspectos fundamentais que interferem no comportamento de placas sanduíches.....	17
3.4.1 - Efeito do cisalhamento transversal.....	17
3.4.2 - Continuidade nas interfaces e condições limites sobre as faces da placa.....	18
3.4.3 - Tensões atuantes nas camadas.....	19
4 - FORMULAÇÃO GERAL DA TEORIA UTILIZADA, APLICADA À PLACA SANDUÍCHE.....	21
4.1 - Definição da estrutura.....	21
4.2 - Princípio do método.....	22
4.3 - Campo de deslocamentos.....	22
4.4 - Sistema de equações.....	23
4.5 - Cálculo dos deslocamentos.....	26
4.6 - Cálculo das tensões.....	27
4.6.1 - Tensões no plano ( $x_1, x_2$ ).....	27
4.6.2 - Tensões transversais.....	28
4.7 - Condições de contorno associadas.....	31
4.8 - Estruturas multicamadas.....	32
5 - CÁLCULO TRIDIMENSIONAL DE PLACAS SANDUÍCHES EM FLEXÃO UTILIZANDO SÉRIES DE FOURIER.....	33
5.1 - Definição do problema abordado.....	33
5.2 - Formulação analítica.....	34
5.2.1 - Resolução por séries de Fourier.....	34

5.2.2 - Análise da aproximação espectral.....	50
5.3 - Implementação computacional.....	52
5.4 - Exemplos numéricos aplicados.....	54
5.4.1 - Primeiro exemplo.....	54
5.4.2 - Segundo exemplo.....	62
6 - CÁLCULO TRIDIMENSIONAL DE PLACAS SANDUÍCHES EM FLEXÃO USANDO ELEMENTOS FINITOS.....	69
6.1 - Introdução.....	69
6.2 - Apresentação do modelo analítico de cálculo.....	69
6.3 - Discretização por elementos finitos.....	72
6.3.1 - O princípio variacional.....	72
6.3.2 - Funções de interpolação dos deslocamentos generalizados.....	73
6.3.3 - Vetor deformação generalizado.....	75
6.3.4 - Equações de rigidez do elemento.....	77
6.3.5 - Vetor força do elemento.....	78
6.3.6 - Equação força-deslocamento do elemento.....	78
6.3.7 - Sistema global de equações.....	80
6.3.8 - Cálculo das deformações e tensões.....	80
6.3.9 - Estrutura do programa computacional elaborado.....	83
6.4 - Análise numérica.....	85
6.5 - Análise das duas metodologias de cálculo.....	88
7 - CÁLCULO DE PLACAS SANDUÍCHES SOB AÇÃO HIGROTÉRMICA.....	89
7.1 - Introdução.....	89
7.2 - Metodologia de cálculo.....	90

7.2.2 - Forças resultantes equivalentes.....	91
7.2.3 - Equacionamento do problema.....	93
7.2.4 - Análise do efeito higroscópico.....	102
7.3 - Exemplo numérico.....	103
7.3.1 - Tensões obtidas.....	103
7.3.2 - Análise dos resultados.....	106

## 2ª PARTE

ELABORAÇÃO E ANÁLISE EXPERIMENTAL DAS PLACAS SANDUÍCHES.....	107
--	-----

8 - CONCEPÇÃO DE PLACAS SANDUÍCHES USADAS COMO SUPORTE ISOLANTE PARA CIRCUITOS IMPRESSOS.....	108
8.1 - Introdução.....	108
8.2 - Desenvolvimento de um dispositivo para moldagem de estratificados por compressão à quente.....	108
8.3 - Definição dos materiais utilizados.....	113
8.4 - Estudo do ciclo de moldagem.....	115
8.5 - Procedimento de moldagem.....	118
8.5.1 - Composição química.....	118
8.5.2 - Composição dos materiais na prensa.....	119
8.5.3 - Ciclo de temperatura.....	120
8.5.4 - Ciclo de pressão.....	121
8.5.5 - Ciclos de pressão e temperatura simplificados.....	122
8.6 - Resultado obtido.....	123

9 - ENSAIOS MECÂNICOS NAS PLACAS SANDUÍCHES ELABORADAS.....	125
9.1 - Ensaio de tração unidirecional.....	125
9.1.1 - Características dos ensaios de tração.....	125
9.1.2 - Realização do ensaio.....	126
9.2 - Ensaio de flexão em 3 pontos.....	133
9.2.1 - Execução do ensaio.....	134
9.2.2 - Resultados obtidos.....	136
9.3 - Ensaio de carga concentrada.....	138
9.3.1 - Procedimento experimental.....	138
9.3.2 - Comparação dos resultados.....	140
9.4 - Análise da ruptura das placas sob flexão.....	142
9.4.1 - Critério de ruptura tridimensional.....	142
9.4.2 - Verificação experimental do critério de ruptura.....	143
10 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	146
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	150
ANEXOS.....	157
Anexo I - Equações constitutivas para a elasticidade linear.....	158
Anexo II - Propriedades mecânicas e físicas de uma monocamada ortotrópica.....	161
Anexo III - Propriedades físicas, elétricas e mecânicas de uma espuma sintática de microesferas ocas de vidro e resina epóxi.....	164

Anexo IV - Entrada dos dados nos programas computacionais.....	170
Anexo V - Descrição dos materiais utilizados na confeção de painéis sanduíches.....	176
Anexo VI - Publicações.....	178

CUNHA, J., "Análise do comportamento mecânico e elaboração de placas sanduíches anisotrópicas", Uberlândia, 1992, 180 p.

## RESUMO

Apresenta-se neste trabalho um estudo teórico / numérico de cálculo tridimensional de deslocamentos, deformações e tensões em placas sanduíches assimétricas. Através da teoria de ordem superior, a abordagem é feita em placas sob cargas estáticas de flexão e sujeitas à ações higrotérmicas. Os programas computacionais desenvolvidos utilizam o método analítico, com séries de Fourier e a técnica de elementos finitos. Conjuntamente, foi estudado o critério de ruptura que melhor se adapta aos sanduíches. Os resultados obtidos foram verificados experimentalmente, demonstrando a eficiência dos modelos implementados. Numa segunda etapa, foi elaborado um novo tipo de suporte isolante (no Brasil) para circuitos impressos, com a concepção das estruturas sanduíches. O protótipo obtido apresentou boas propriedades diante das exigências normativas de laminados elétricos, com algumas vantagens em relação aos seus similares.

LAMINADO COMPOSTO - SANDUÍCHE - FLEXÃO - HIGROTÉRMICO -  
LAMINADO ELÉTRICO

CUNHA, J., "Analysis of the mechanical behavior and elaboration of anisotropic sandwich plates", Uberlândia, 1992, 180 p.

## ABSTRACT

A theoretical and numerical tridimensional calculation of displacements, strains and stresses in antisymmetric sandwich plates is presented. The study was carried out in plates, under static bending loads and subjected to hygrothermal actions using the higher-order theory. The developed computational programs use the analytical method with Fourier series and finite element technique. The rupture criterion that best fits the sandwich plates was also studied. The experimental results demonstrated the efficiency of the implemented models. In a second part of the work, a new type (in Brazil) of support for printed circuit boards was elaborated with the sandwich panels conception. The obtained prototype presented good properties, considering the standard of electrical laminates, with some advantages in relation to its similars.

LAMINATED COMPOSITE - SANDWICH - BENDING - HYGROTHERMAL -  
ELECTRICAL LAMINATES

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PÁG.
2.1 - Representação de um estratificado.....	6
3.1 - Configurações básicas de estruturas sanduíches.....	13
3.2 - Esquema de um painel sanduíche híbrido.....	15
3.3 - Representação da interface do sanduíche.....	19
3.4 - Distribuição das tensões em uma estrutura sanduíche....	20
4.1 - Representação da placa sanduíche estudada.....	21
4.2 - Geometria de um multicamadas.....	32
5.1 - Placa sanduíche simplesmente apoiada, sob flexão.....	33
5.2 - Placa sob carregamento senoidal.....	44
5.3 - Placa sob carregamento uniforme.....	44
5.4 - Placa sob carregamento triangular.....	45
5.5 - Placa sob carregamento parcial.....	46
5.6 - Placa sob carregamento linear.....	46
5.7 - Placa sob carregamento concentrado.....	47
5.8 - Alisamento das funções de carregamento.....	52
5.9 - Organograma do programa de cálculo por séries de Fourier.....	53
5.10 - Variação da tensão de cisalhamento $\tau_{13}$ ao longo da espessura da placa, para carregamento uniforme.....	58
5.11 - Variação da tensão de cisalhamento $\tau_{23}$ ao longo da espessura da placa, para carregamento uniforme.....	59

5.12 - Variação da tensão cisalhante $\tau_{13}$ ao longo da espessura e do eixo $ox_1$ , em $x_2 = 0.5a$ .....	60
5.13 - Variação da tensão cisalhante $\tau_{23}$ ao longo da espessura e do eixo $ox_1$ , em $x_2 = 0.5a$ .....	60
5.14 - Efeito do alisamento sobre o resultado de $\tau_{23}$ ( carregamento uniforme ), para diferentes ordens de desenvolvimento das séries de Fourier.....	61
5.15 - Variação do deslocamento $u_1$ ao longo da espessura, no ponto $(a/4, a/4, x_3)$ .....	63
5.16 - Variação da tensão normal $\sigma_{22}$ ao longo da espessura, no ponto $(a/4, a/4, x_3)$ .....	64
5.17 - Variação da tensão de cisalhamento $\tau_{12}$ ao longo da espessura, no ponto $(a/4, a/4, x_3)$ .....	64
5.18 - Variação da flecha $u_3 \times m_1$ em relação à espessura normalizada $a/h$ , no ponto $(0.5a, 0.5a, +h/2)$ .....	65
5.19 - Variação da tensão normal $\sigma_{22}$ ao longo da espessura e do eixo $ox_1$ , em $x_2 = 0.5a$ .....	66
5.20 - Variação da tensão de cisalhamento $\tau_{12}$ ao longo da espessura e do eixo $ox_1$ , em $x_2 = 0.5a$ .....	66
5.21 - Variação do deslocamento $u_1$ ao longo da espessura, para uma placa assimétrica.....	67
5.22 - Variação da tensão normal $\sigma_{22}$ ao longo da espessura, para uma placa assimétrica.....	67
5.23 - Variação da tensão de cisalhamento $\tau_{12}$ ao longo da espessura, para uma placa assimétrica.....	68
6.1 - Elemento isoparamétrico com 9 nós.....	74
6.2 - Organograma do programa de elementos finitos.....	84
6.3 - Malha de elementos finitos.....	85

7.1 -	Variação da temperatura ao longo de $x_3$ .....	98
7.2 -	Efeito da variação de $a/h$ sobre as tensões $\sigma_{22}$ e $\tau_{12}$ , no ponto $(a/4, a/4, h/2)$ .....	104
7.3 -	Distribuição das tensões $\sigma_{22}$ e $\tau_{12}$ ao longo da espessura da placa, no ponto $(a/4, a/4, x_3)$ .....	105
7.4 -	Influência da variação da espessura da alma sobre as tensões $\sigma_{11}$ e $\tau_{12}$ , no ponto $(a/4, a/4, +h/2)$ .....	105
7.5 -	Variação das tensões cisalhantes $\tau_{13}$ e $\tau_{23}$ com a relação $a/h$ , no ponto $(a/4, a/4, +h/5)$ .....	106
8.1 -	Equipamento de moldagem por compressão à quente.....	109
8.2 -	Vista geral do equipamento de moldagem.....	111
8.3 -	Vista do aparato de moldagem, acoplado à MTS.....	111
8.4 -	Detalhe do dispositivo de moldagem por compressão à quente.....	112
8.5 -	Sistema de controle de carga.....	112
8.6 -	Sistema de controle de temperatura.....	113
8.7 -	Configuração básica do laminado elétrico.....	113
8.8 -	Evolução da viscosidade das resinas, em função do tempo.....	116
8.9 -	Curva típica da reatividade de uma resina termofixa...117	
8.10 -	Disposição dos materiais na prensa.....	120
8.11 -	Ciclo de temperatura otimizado.....	120
8.12 -	Ciclo de pressão otimizado.....	121
8.13 -	Ciclo de temperatura simplificado.....	122
8.14 -	Ciclo de pressão simplificado.....	122
8.15 -	Laminados elétricos tipo sanduíche obtidos.....	123
9.1 -	Geometria dos corpos de prova de tração.....	126
9.2 -	Montagem do ensaio de tração.....	127

9.3 - Gráfico tensão x deformação na direção $\theta = 45^\circ$ .....	128
9.4 - Gráfico tensão x deformação na direção $\theta = 0^\circ$ .....	128
9.5 - Evolução do módulo de elasticidade médio com t/h.....	132
9.6 - Evolução da tensão de ruptura em função de t/h.....	133
9.7 - Vista do dispositivo para ensaio de flexão em 3 pontos.....	134
9.8 - Dimensões utilizadas no ensaio de flexão em 3 pontos.....	135
9.9 - Detalhe do posicionamento do corpo de prova no ensaio de flexão em 3 pontos.....	135
9.10 - Variação da flecha em relação à força aplicada, para t/h = 0.86.....	136
9.11 - Esquematização da montagem experimental do ensaio de carga concentrada.....	139
9.12 - Vista do dispositivo de ensaio de carga concentrada.....	139
9.13 - Detalhe da aplicação da carga no centro da placa.....	140
9.14 - Evolução da deformação normal $\epsilon_{11}$ em função da carga aplicada.....	141
9.15 - Evolução da deformação normal $\epsilon_{22}$ em função da carga aplicada.....	141
9.16 - Malha utilizada para o cálculo das tensões críticas de ruptura.....	144
II.1 - Referência da monocamada.....	161
III.1- Variação da densidade em função da taxa volumétrica de microesferas.....	165
III.2- Variação da resistência à compressão em função da taxa volumétrica de microesferas.....	165

III.3-	Resistência ao choque em função da taxa volumétrica de microesferas.....	166
III.4-	Variação do módulo de elasticidade em função da taxa volumétrica de microesferas.....	166
III.5-	Variação da rigidez específica em função da taxa volumétrica de microesferas.....	167
III.6-	Variação da permissividade dielétrica em função da taxa volumétrica de microesferas.....	167
III.7-	Variação da condutividade térmica em função da taxa volumétrica de microesferas.....	168
III.8-	Variação da difusividade térmica em função da taxa volumétrica de microesferas.....	169

## LISTA DE TABELAS

TABELA	PÁG.
5.1 - Tensões em uma placa constituída de 4 camadas orientadas $[0/90_2/0]$ , sob carregamento senoidal.....	56
5.2 - Influência da razão de espessura $(h-t)/t$ sobre as tensões em uma placa $[0/90_2/0]$ , para carregamento senoidal.....	57
6.1 - Deslocamentos para uma placa sanduíche sob carregamento uniforme, calculados por elementos finitos e séries de Fourier.....	86
6.2 - Tensões normais para uma placa sanduíche sob carregamento senoidal, calculadas por elementos finitos e séries de Fourier.....	87
III.1- Características das microesferas ocas de vidro.....	164
III.2- Variação de $tg\delta$ em função da taxa volumétrica de microesferas.....	168

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $x_1, x_2, x_3$  - coordenadas cartesianas do referencial da placa  
 $n, t$  - normal e tangente ao contorno da placa  
 $u_1, u_2, u_3$  - deslocamentos de um ponto  
 $a_j, b_j, c_j$  - deslocamentos generalizados  
 $u^0, \psi, \varphi, \phi, \theta$  - funções dos deslocamentos generalizados  
 $[A], [D]$  - matrizes de rigidez globais  
 $[U], \delta$  - vetores dos deslocamentos generalizados  
 $[F]$  - vetor das forças generalizadas  
 $\epsilon_{ij}$  - tensor deformação  
 $\sigma_{ij}$  - tensor tensão  
 $P_1, P_2$  - carregamentos normais às faces da placa  
 $N, M, P, Q, R, S, M^*$  - forças resultantes  
 $C_{ij}$  - coeficientes elásticos  
 $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, F_{ij}, H_{ij}, K_{ij}, L_{ij}$  - módulos de rigidez  
 $\sigma_k$  - fator de alisamento das séries de Fourier  
 $N_i$  - funções de interpolação  
 $\xi, \eta$  - coordenadas locais do elemento  
 $[B]$  - matriz que relaciona deformação e deslocamento  
 $[J]$  - matriz jacobiano  
 $[K]$  - matriz de rigidez do elemento  
 $N^T, M^T$  - forças resultantes térmicas  
 $[\alpha]$  - tensor de dilatação térmica  
 $[f^T]$  - vetor das forças térmicas

$T(x_1, x_2, x_3)$  - carregamento térmico

$T_A, T_D$  - temperaturas nas faces da placa

$\sigma_R$  - tensão de ruptura

$E_m$  - módulo de elasticidade médio em tração

$E_a$  - módulo de elasticidade aparente em flexão

$F_r, G_r, H_r, L_r, M_r, N_r$  - parâmetros escalares que caracterizam  
o estado de deformação do material

$X_r, Y_r, Z_r$  - limites de ruptura em tração

$Q_r, R_r, S_r$  - limites de ruptura em cisalhamento

$V$  - fração de volume

Superescritos e subescritos :

a - propriedade relativa à alma

p - propriedade relativa às peles

R - relativo à ruptura

Notação :

$$,i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Os materiais compostos têm papel de destaque na engenharia de estruturas onde altas relações resistência / peso específico são requeridas. Tanto do ponto de vista de esforços mecânicos como de outros efeitos específicos, como ações da temperatura e de umidade, os materiais modernos são exigidos no desempenho de funções múltiplas. A possibilidade de variação dos elementos constituintes da estrutura segundo as direções preferenciais dos esforços, garante aos compostos uma eficiência global excepcional. Neste sentido, os painéis sanduíches destacam-se pela variedade de combinação de materiais, apresentando características de leveza e rigidez.

No Brasil, o trabalho com compostos é incipiente e a maioria dos materiais de alta performance, assim como os "softwares" de cálculo estrutural, são importados. Nesta linha de raciocínio, a proposta inicial deste trabalho foi de se estudar o comportamento mecânico de placas sanduíches, elaborando-se um programa computacional, que seria comprovado experimentalmente. Para isto, uma placa sanduíche teria que ser concebida. Surgiu então a idéia de se propor uma aplicação prática para este material a ser obtido.

Utilizando-se da sugestão de Nwokoye [17], elaborou-se um novo tipo de suporte isolante para circuitos impressos, com a concepção das estruturas sanduíches. O objetivo é de se moldar um protótipo nacional, com tecnologia e materiais disponíveis no mercado interno. Este laminado elétrico é do tipo FR-4, sendo comparável aos de tecido de fibra de vidro / resina epóxi, e apresentando as vantagens de ser mais leve e permitir a diminuição dos custos de produção.

Quanto ao estudo do comportamento mecânico de placas sanduíches, a análise é feita em dois aspectos referentes à origem das tensões mecânicas. Esta análise permitiu a elaboração de um programa computacional, que será o primeiro passo para a constituição de um "software" de cálculo de estruturas de materiais compostos do LCMM (Laboratório de Comportamento Mecânico dos Materiais).

#### 1) Cálculo de placas sanduíches anisotrópicas assimétricas sob flexão

Neste caso a formulação analítica utiliza a teoria de ordem superior de placas, que inclui o efeito das deformações cisalhantes transversais. Esta teoria é um modelo mais sofisticado do comportamento de estratificados em flexão, e vem substituir a teoria clássica das placas, que é inadequada para este tipo de aplicação. No cálculo das forças resultantes a lei de Hooke generalizada será utilizada, permitindo a identificação tridimensional do campo de tensões.

Duas metodologias de cálculo são adotadas para as placas sanduíches. O método analítico aplica uma teoria de ordem

superior mais geral, desenvolvendo as formulações por séries duplas de Fourier, com a suposição de um campo de deslocamentos cinematicamente admissível. Neste estudo é abordado também o problema da convergência da aproximação espectral. O outro método aplicado é o de elementos finitos (MEF), que adota uma teoria de ordem superior mais simplificada, com um tratamento numérico que utiliza elementos de continuidade do tipo  $C^0$ .

O objetivo de se desenvolver estas duas técnicas de cálculo está no fato de que o método analítico, embora mais preciso, tem suas limitações com respeito à geometria da placa, à variação do carregamento e das condições de contorno. No caso do cálculo feito por elementos finitos estas dificuldades são superadas. No entanto, aparecem aqui problemas de precisão na aproximação, causados pela descontinuidade das derivadas (representadas pelas deformações). Isto será amenizado com a associação da técnica de diferenças finitas.

Finalmente, para integração desta parte de cálculo das placas sob flexão, foi estudado o critério de ruptura tridimensional que melhor se adapta às placas sanduíches.

## 2) Cálculo de placas sanduíches anisotrópicas assimétricas sob ação higrotérmica

Este estudo é justificado por ser um problema crítico para os materiais compostos em geral, sendo motivo de numerosos trabalhos recentes. A grande variedade de aplicação dos compostos, em especial no setor aeroespacial e na engenharia de construções, expõe estes materiais à ambientes agressivos, induzindo as estruturas à dilatações que comprometem a

resistência mecânica.

A análise que é feita utiliza uma metodologia análoga à desenvolvida por séries de Fourier. Isto vai permitir uma variação significativa dos carregamentos térmicos e higroscópicos, identificando as tensões no estado tridimensional.

Na etapa final do trabalho são realizados os ensaios experimentais (tração, flexão em 3 pontos e carga concentrada), para validar-se os programas computacionais elaborados, além de permitirem a qualificação dos protótipos de laminados elétricos concebidos.

## 1ª PARTE

## PROGRAMA DE CÁLCULO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE PLACAS SANDUÍCHES

Esta primeira parte do trabalho tem por objetivo a elaboração de um programa computacional de cálculo dos deslocamentos, deformações e tensões tridimensionais em placas sanduíches assimétricas, sob flexão elástica, e sujeitas à ações higrotérmicas. Para isto serão utilizadas duas metodologias de cálculo : formulação analítica, através das séries de Fourier, e formulação numérica, pelo método de elementos finitos.

## CAPÍTULO 2

## REVISÃO DOS ESTUDOS DE PLACAS ESTRATIFICADAS ANISOTRÓPICAS

Uma estrutura multicamadas ou um estratificado é um conjunto de várias monocamadas empilhadas, com diferentes orientações. A fig. 2.1 mostra esquematicamente a constituição de um estratificado.

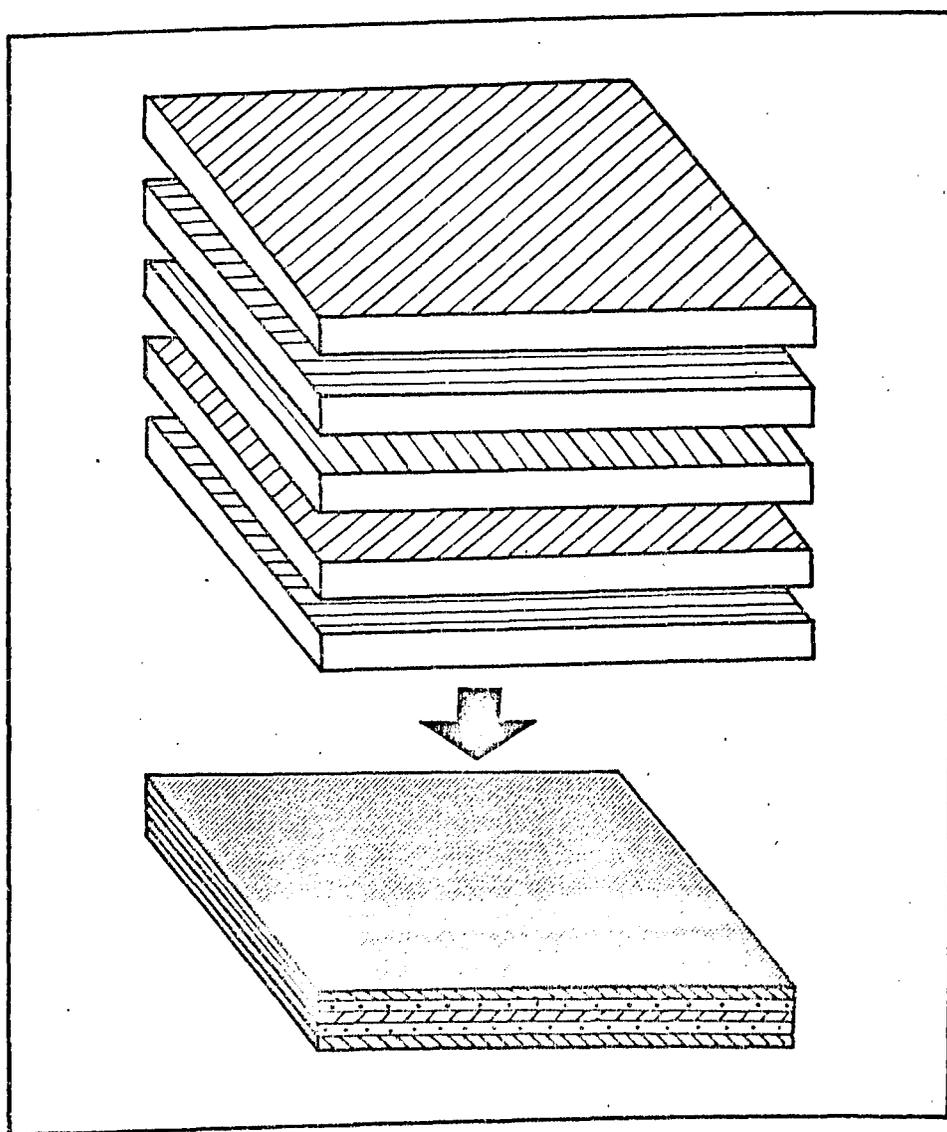


Figura 2.1 - Representação de um estratificado

Como introdução ao estudo de placas estratificadas, relaciona-se abaixo as hipóteses clássicas de Love-Kirchhoff, que são um ponto de referência da problemática de cálculo das placas de materiais compostos. A teoria clássica de placas multicamadas pode ser enunciada da seguinte forma:

- a) a deflexão da superfície média é pequena comparada com a espessura da placa;
- b) o plano médio permanece indeformado subsequentemente à flexão;
- c) a geometria e os materiais constituintes da placa são tais, que os fenômenos de esforços normais e de flexão são desacoplados. Isto é verdade para placas isotrópicas ou multicamadas simétricas. Em geral, os dois fenômenos são interligados;
- d) as seções planas inicialmente normais à superfície média, permanecem planas e normais à superfície depois da flexão. Isto significa que as deformações cisalhantes transversais são desprezadas;
- e) a tensão normal transversal é pequena quando comparada com as outras componentes e pode ser desprezada.

Estas suposições implicam no tratamento em duas dimensões, diminuindo a complexidade do problema tridimensional. Todavia, as simplificações sugeridas podem levar a erros significativos no cálculo das tensões, principalmente considerando-se que as placas estratificadas em geral são sensíveis ao cisalhamento. Isto é explicado pelo fato de que a relação entre o módulo de elasticidade e o módulo de cisalhamento chega a cinquenta para

os compostos, enquanto que para os materiais isotrópicos esta relação está em torno de três. Portanto, as teorias de cálculo destes materiais devem levar em conta esta realidade física.

As relações constitutivas que governam o estado de tensões das placas podem ser obtidas por duas formas de tratamento. Uma metodologia explora diretamente as equações de equilíbrio, que caracterizam o estado de equilíbrio dos corpos elásticos, integrando - as ao longo da espessura da placa. Os outros métodos baseiam-se no princípio variacional, onde a energia potencial de deformação assume um valor mínimo quando a distribuição das tensões no corpo corresponde ao estado de equilíbrio.

E. Reissner [1,2,3] foi o primeiro autor a considerar o efeito das deformações cisalhantes transversais, fazendo hipóteses sobre a forma das tensões e considerando o fenômeno de acoplamento entre o alongamento no plano e a flexão transversal. Ele aplicou o princípio da energia complementar mínima, conjuntamente com o método dos multiplicadores de Lagrange. R.D. Mindlin [4,5] estudou o movimento de placas isotrópicas a partir das equações da elasticidade tridimensional, e introduziu os fatores de correção para o efeito do cisalhamento. N. J. Pagano [6] apontou as limitações da teoria clássica das placas, apresentando soluções para placas simplesmente apoiadas, sob flexão cilíndrica.

As teorias subsequentes se baseiam na teoria de Reissner, que é na verdade uma generalização da teoria clássica das placas. Estes estudos estabelecem um campo de deslocamentos cinematicamente admissível, o que facilita a imposição das

condições de contorno. Reissner assume que os deslocamentos são da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 + x_3 \psi_1 \\ u_2 &= u_2^0 + x_3 \psi_2 \\ u_3 &= u_3^0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Esta foi a primeira teoria consistente que incorporou o efeito das tensões de cisalhamento transversais, sendo chamada de teoria das deformações cisalhantes. Pode-se observar no entanto, que a teoria prevê que as tensões  $\tau_{i3}$  ( $i = 1, 2$ ) são uniformes ao longo da espessura da placa, o que não ocorre na realidade. Torna-se necessário deste modo, a introdução dos fatores de correção das tensões. Surgem então as chamadas teorias de ordem superior, que estabelecem variação parabólica das deformações cisalhantes transversais ao longo da espessura, dispensando a correção. A terminologia ordem superior se refere ao nível de truncamento dos termos da expansão em séries de potência dos deslocamentos, o que fornecerá a ordem final do sistema de equações diferenciais parciais.

Lo, Christensen e Wu [7] assumem um campo de deslocamentos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 + x_3 \psi_1 + x_3^2 \theta_1 + x_3^3 \phi_1 \\ u_2 &= u_2^0 + x_3 \psi_2 + x_3^2 \theta_2 + x_3^3 \phi_2 \\ u_3 &= u_3^0 + x_3 \psi_3 + x_3^2 \theta_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Neste caso, o desenvolvimento das equações que governam o equilíbrio da placa foi feito através do princípio da energia potencial estacionária. Esta teoria é bastante completa, já que inclui os modos de deformação no plano e fora do plano da placa. J.N. Reddy [8] estabeleceu uma formulação semelhante, supondo porém, que a deflexão transversal é constante ao longo da espessura da placa, ou seja :

$$u_3 = u_3^0 \quad (2.3)$$

Isto quer dizer a tensão normal transversal é desprezada. Reddy utiliza o princípio dos deslocamentos virtuais para determinar as equações de equilíbrio do sistema.

Outros autores, como H. Murakami [9], J.M. Whitney [10,11], C. Kassapoglou e P.A. Lagas [12], A.K. Noor e W.S. Burton [13], e S.-I. Chou e outros [14] partiram de metodologias de cálculo semelhantes às anteriores, introduzindo funções que simplificavam o equacionamento, o que reduzia a generalidade das aplicações. T. Kant [15] adotou um campo de deslocamentos que considera uma variação quadrática das deformações cisalhantes transversais e variação linear da deformação normal transversal, da seguinte forma :

$$\begin{aligned} u_1 &= x_3 \psi_1 + x_3^3 \phi_1 \\ u_2 &= x_3 \psi_2 + x_3^3 \phi_2 \\ u_3 &= u_3^0 + x_3^2 \theta_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Esta formulação tem boa aproximação e permite reduzir a ordem final do sistema de equações, o que é uma vantagem quando se

resolve o problema por métodos aproximados. Este é o caso de B. N. Pandya e T. Kant [16], que utilizaram a técnica de elementos finitos.

A generalização da teoria de ordem superior foi feita por Nwokoye [17], que desenvolveu os deslocamentos em séries de potência, como segue :

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{j=0}^k x_3^j a_j(x_1, x_2) \\ u_2 &= \sum_{j=0}^k x_3^j b_j(x_1, x_2) \\ u_3 &= \sum_{j=0}^{k-1} x_3^j c_j(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Esta é na verdade uma extensão da teoria de Lo, Christensen e Wu e, em princípio, quanto maior o número de termos na série, maior será a precisão dos resultados. Isto no entanto, torna a análise das formulações complexa, no sentido da interpretação física dos termos envolvidos e da ordem elevada do sistema de equações.

Neste trabalho será adotada a teoria de ordem superior relativa às proposições de Lo, Christensen e Wu [7].

## CAPÍTULO 3

### AS ESTRUTURAS SANDUÍCHES

#### 3.1 - GENERALIDADES SOBRE OS PAINÉIS SANDUÍCHES

As placas sanduíches são um caso particular das placas estratificadas, e se destacam pela baixa densidade e grande rigidez à flexão. Elas são estruturas globalmente anisotrópicas, sendo constituídas de três elementos diferentes : duas camadas externas , chamadas peles ( ou "skins" ), e no centro a alma ( ou "core" ). A fig. 3.1 mostra alguns exemplos de estruturas sanduíches.

Ao contrário de uma placa estratificada propriamente dita, onde todas as camadas têm um comportamento mais ou menos idêntico, em uma estrutura sanduíche as peles e a alma desempenham funções distintas. A alma funciona como um estabilizador ou espaçador das peles, e , desta forma, deve possuir uma certa rigidez às deformações perpendiculares ao plano das peles, ou seja, rigidez ao cisalhamento transversal. Isto vai permitir que as peles trabalhem praticamente como membranas.

A alma é constituída de materiais essencialmente leves e de baixa rigidez. O aspecto geométrico destes materiais é frequentemente complicado, o que gera propriedades mecânicas

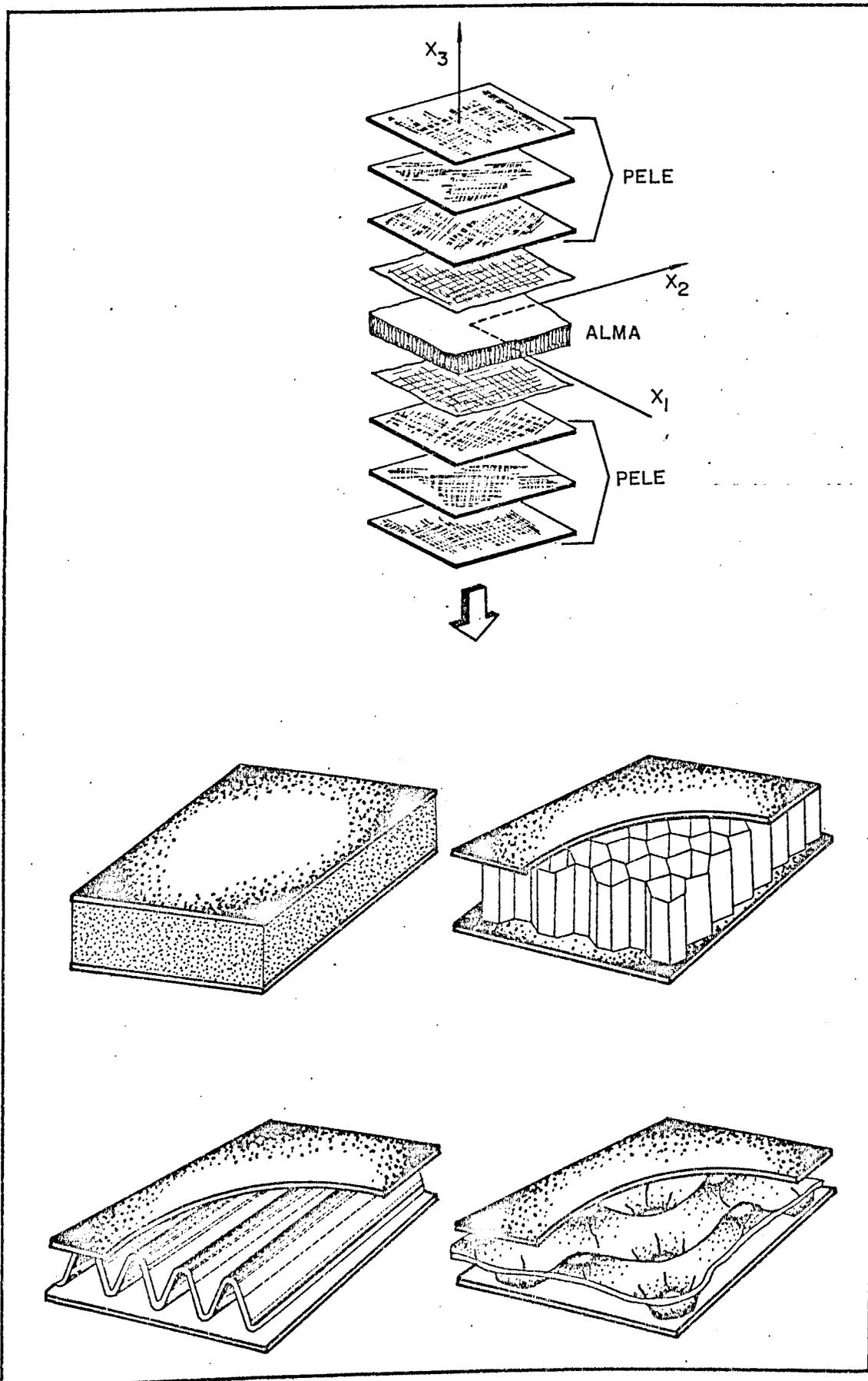


Figura 3.1 - Configurações básicas de estruturas sanduíches

locais extremamente complexas. Por comodidade técnica e numérica é comum tomar estes elementos como homogêneos, com propriedades físicas médias equivalentes. Assim, pode-se dividir a alma em quatro formas básicas principais, conforme é mostrado na fig. 3.1 :

- alma plana : considerada na maioria dos casos como um material homogêneo isotrópico;
- alma em colméia : considerada um material ortotrópico ou isotrópico transversal;
- alma ondulada : frequentemente suposta como um material monoclinico;
- alma alveolar : pouco empregada, podendo ser considerada um material anisotrópico geral, ou sob certas condições, como monoclinico.

Os materiais constituintes da alma podem ser de polímeros expandidos, borrachas, elastômeros, madeira, e até metálicos.

As peles, ao contrário da alma, são materiais densos, rígidos e de alta resistência mecânica. Elas podem ser compostas de ligas metálicas leves e principalmente de estratificados.

Os principais elementos utilizados na elaboração dos painéis sanduíches estão descritos no ANEXO V.

A escolha dos materiais que constituem a estrutura passa por uma associação eficaz dos componentes, segundo as propriedades finais desejadas. Portanto, as soluções técnicas que satisfaçam à especificações e critérios, não se resumem aos esforços mecânicos estáticos e consideram outros fatores como resistência ao fogo, isolamento térmica, resistência ao choque, etc.

Neste contexto, M. L. Sanmartin [18] apresentou um painel sanduíche assimétrico que procura satisfazer a várias propriedades simultaneamente. Este painel está mostrado na fig. 3.2 e pode ser denominado, na terminologia de materiais compostos, como um sanduíche híbrido.

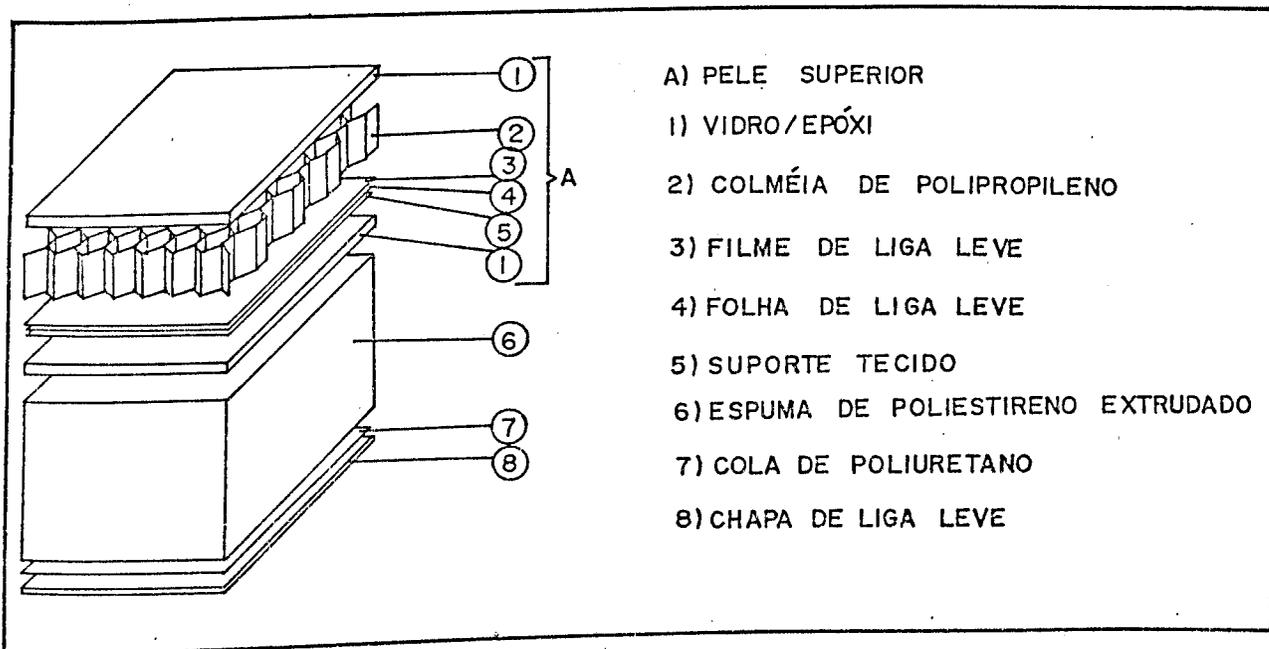


Figura 3.2 - Esquema de um painel sanduíche híbrido

As aplicações dos painéis sanduíches são múltiplas. Vão desde o uso em transportes como ônibus, trens e barcos, até estruturas do setor aeronáutico, espacial e de armamentos.

### 3.2 - TEORIAS DE PLACAS SANDUÍCHES

Historicamente, a análise dos materiais para a indústria aeronáutica trouxe a maioria dos estudos relativos à placas sanduíches. Assim, Reissner [1] utiliza o teorema da energia complementar para o estudo de placas sanduíches constituídas de

materiais isotrópicos. Ele faz hipóteses de que as deformações cisalhantes transversais atuam na alma, enquanto que as peles trabalham como membranas, ou seja, apenas as tensões do plano da placa atuam. N.J. Pagano [19] apresenta soluções da elasticidade tridimensional para placas simplesmente apoiadas, utilizando diretamente as equações constitutivas. Em 1972, J. M. Whitney [11] soluciona o problema para placas sanduíches com sequência de empilhamento arbitrário, através das equações de equilíbrio. Ele considera flexão cilíndrica e determina os fatores de correção cisalhante. N. Paydar e C. Libove [20] utilizaram o princípio da energia potencial total estacionária e formularam soluções para placas sanduíches com espessura variável, pelo método de diferenças finitas.

Outros aspectos importantes do cálculo de placas sanduíches sob flexão já foram discutidos anteriormente, visto que os sanduíches são uma particularidade das placas estratificadas.

### 3.3 - HIPÓTESES CLÁSSICAS DAS PLACAS SANDUÍCHES

Tal qual às placas isotrópicas e estratificadas, as placas sanduíches são objeto de várias suposições gerais de comportamento. Estas hipóteses são :

- a) a placa é fina ou moderadamente espessa;
- b) o sanduíche é constituído de um empilhamento de três camadas paralelas, perfeitamente ligadas entre si;
- c) cada camada tem um comportamento elástico linear;
- d) os deslocamentos e as deformações são pequenos;

- e) cada camada está num estado plano de tensões;
- f) as forças de massa são desprezadas;
- g) o carregamento transversal é normal.

Com excessão da hipótese (e), onde o correto é de se considerar a elasticidade tridimensional, as demais hipóteses são válidas. A estas hipóteses comuns aos meios estratificados, serão abordados a seguir os pontos fundamentais mais significativos do comportamento mecânico dos painéis sanduíches.

### 3.4 - ASPECTOS FUNDAMENTAIS QUE INTERFEREM NO COMPORTAMENTO DE PLACAS SANDUÍCHES [20]

Estas características influenciam decisivamente nas formulações de placas sanduíches e foram obtidas à partir de dados empíricos, provenientes principalmente de estudos feitos pelo setor aeronáutico.

#### 3.4.1 - EFEITO DO CISALHAMENTO TRANSVERSAL

A consideração dos efeitos das tensões cisalhantes transversais para estratificados é de fundamental importância, conforme já foi discutido. Nos sanduíches isto é ainda mais crítico, dada a ordem de grandeza destas tensões. Elas são responsáveis pelo efeito de delaminação, que é o descolamento das camadas. Este fenômeno é característico dos estratificados em geral e tem sido objeto de vários estudos teóricos e experimentais.

### 3.4.2 - CONTINUIDADE NAS INTERFACES E CONDIÇÕES LIMITES SOBRE AS FACES DA PLACA

A consideração das condições de contorno nas faces da placa tem um papel fundamental na resolução do problema de flexão. Estas condições são dadas pelas expressões :

$$\begin{aligned}\sigma_{13}(\pm h/2) &= 0 \\ \sigma_{33}(+ h/2) &= P_1 \\ \sigma_{33}(- h/2) &= P_2\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$i = 1, 2$$

onde  $h$  é a espessura total da placa e  $P_1$  e  $P_2$  são os carregamentos aplicados sobre as faces superior e inferior da placa.

Tão importante quanto as condições na fronteira, é a garantia de continuidade do meio, demonstrada por duas imposições que exprimem a coesão mecânica das interfaces (fig. 3.3). Esta continuidade, na interface do vetor tensão  $\sigma_{13}$  e do vetor deslocamento  $u_i$ , é traduzida por seis condições escalares :

$$\begin{aligned}u_i(p_1) &= u_i(p_2) \\ \sigma_{13}(p_1) &= \sigma_{13}(p_2)\end{aligned}\quad i = 1, 2, 3\tag{3.2}$$

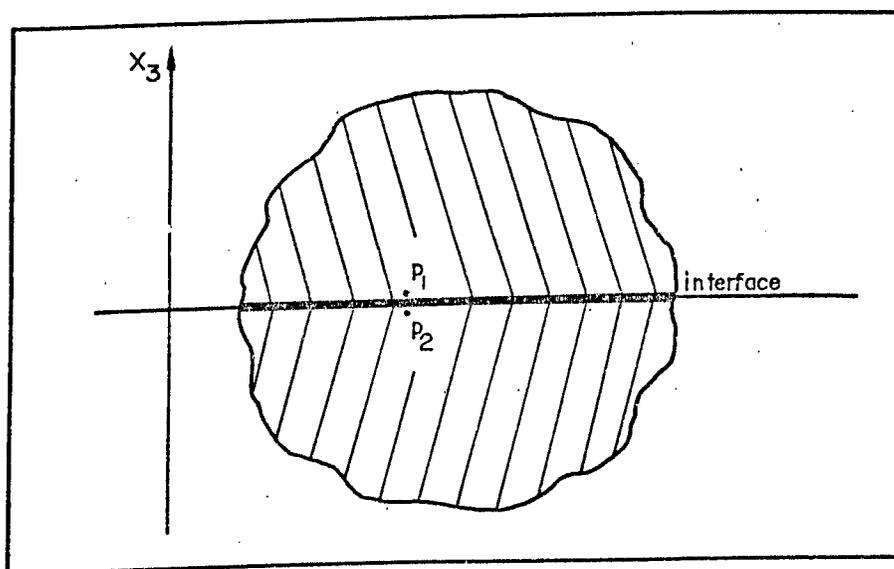


Figura 3.3 - Representação da interface do sanduíche

As condições 3.2 não implicam na continuidade dos tensores de deformação e tensão, e isto ocorre pela diferença de características geométricas e mecânicas de cada camada do sanduíche. Neste sentido, pode-se considerar que os coeficientes elásticos de cisalhamento são parâmetros que representam a diferença das características de duas camadas, e assim podem ser usados para corrigir as tensões transversais.

#### 3.4.3 - TENSÕES ATUANTES NAS CAMADAS

A forma da solicitação no sanduíche também é influenciada pelas características peculiares de cada camada. Os estudos efetuados permitiram a constatação de dois aspectos :

- as tensões de cisalhamento transversal  $\sigma_{\alpha 3}$  ( $\alpha = 1, 2$ )

atuam essencialmente na alma, o que quer dizer que a alma trabalha praticamente em cisalhamento ;

- as tensões no plano da placa  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) estão localizadas essencialmente nas peles, o que quer dizer que as peles trabalham como membranas.

A fig. 3.4 mostra o estado de tensões em uma placa sanduíche sob flexão.

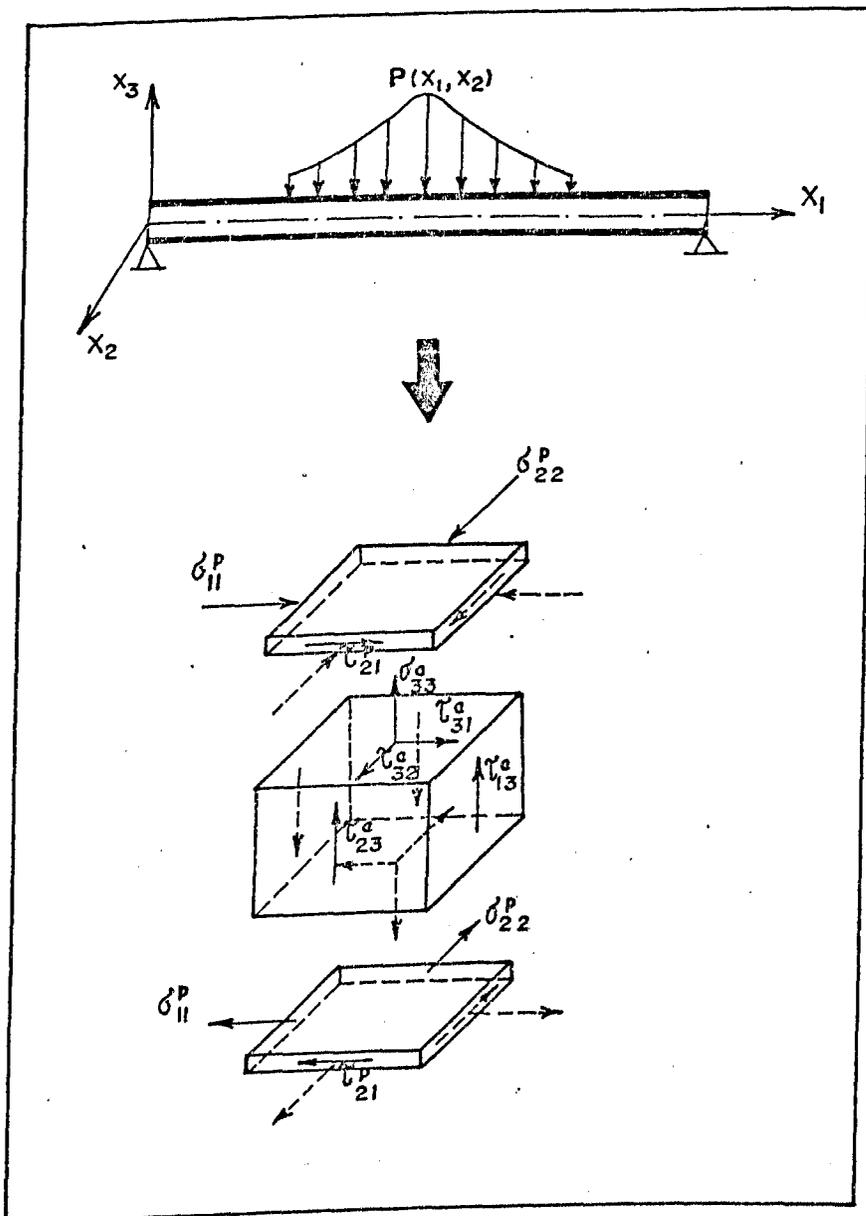


Figura 3.4 - Distribuição das tensões em uma estrutura sanduíche

## CAPÍTULO 4

FORMULAÇÃO GERAL DA TEORIA UTILIZADA, APLICADA  
À PLACA SANDUÍCHE4.1 - DEFINIÇÃO DA ESTRUTURA

A placa sanduíche é assimétrica, sendo constituída por três camadas diferentes de materiais anisotrópicos. Nesta placa os carregamentos estáticos atuam no plano  $(x_1, x_2)$ .

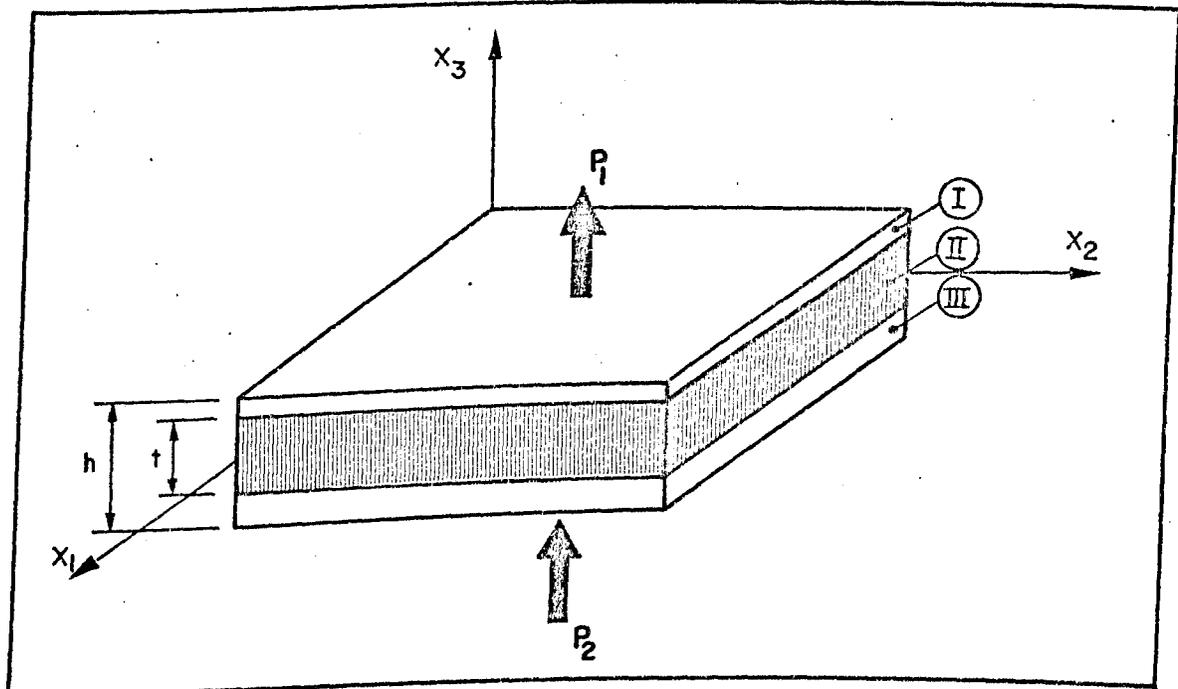


Figura 4.1 - Representação da placa sanduíche estudada

Na figura 4.1, a constituição do sanduíche é :

- $h$  : espessura total da placa ;
- $t$  : espessura da alma ;
- $P_1$  : carregamento transversal na face superior ;
- $P_2$  : carregamento transversal na face inferior.

Os índices I, II e III denotam a pele superior, a alma e a pele inferior respectivamente.

#### 4.2 - PRINCÍPIO DO MÉTODO

O estudo é baseado nas formulações de Lo, Christensen e Wu [7], e Nwokoye [17]. A solução é fundamentada em modelizações compatíveis com os fenômenos físicos estudados, assegurando a continuidade dos deslocamentos e das tensões, e as condições de contorno. Assim, pode-se resumir as etapas do método da seguinte forma :

- a) construir um campo de deslocamentos cinematicamente admissível;
- b) estabelecer um sistema de equações diferenciais à partir das equações de equilíbrio;
- c) deduzir as tensões à partir das leis de comportamento.

#### 4.3 - CAMPO DE DESLOCAMENTOS

Os deslocamentos são desenvolvidos em séries de potência, com as seguintes expressões :

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{j=0}^k x_3^j a_j(x_1, x_2) \\
 u_2(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{j=0}^k x_3^j b_j(x_1, x_2) \\
 u_3(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{j=0}^{k-1} x_3^j c_j(x_1, x_2)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Os termos  $a_j(x_1, x_2)$ ,  $b_j(x_1, x_2)$  e  $c_j(x_1, x_2)$  são as funções incógnitas dos deslocamentos a determinar. Eles serão chamados de deslocamentos generalizados.

Desenvolvendo as equações 4.1 para  $K = 3$ , a fórmula dos deslocamentos pode ser escrita na forma expandida :

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_1(x_1, x_2) + x_3^2 \theta_1(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_1(x_1, x_2) \\
 u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_2(x_1, x_2) + x_3^2 \theta_2(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_2(x_1, x_2) \\
 u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_3(x_1, x_2) + x_3^2 \theta_3(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_3(x_1, x_2)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

A ordem de desenvolvimento destas séries é consistente, no sentido de que as deformações cisalhantes transversais devido aos deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$ , são da mesma ordem em  $x_3$  do que aquelas determinadas pelo deslocamento transversal  $u_3$ .

#### 4.4 - SISTEMA DE EQUAÇÕES

O sistema de equações tem  $3K + 2$  incógnitas, que são os deslocamentos generalizados, necessitando portanto de  $3K + 2$

equações linearmente independentes para sua resolução. Isto será conseguido utilizando-se as equações de equilíbrio.

Na ausência de forças de corpo, as equações de equilíbrio para cada camada podem ser escritas sob a forma :

$$\operatorname{div} \bar{T} = \vec{0} \quad (4.3)$$

Estas equações são integradas ao longo da espessura da placa, com  $x_3^j$  como termo de ponderação:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \operatorname{div} \bar{T} x_3^j dx_3 = 0 \quad , \quad \text{com } j = 0, 1, \dots, K \quad (4.4)$$

Os cálculos para ordem  $K = 3$  resultam nas seguintes relações :

$$K = 0 \quad \begin{cases} N_{1,1} + N_{12,2} + q_1 = 0 \\ N_{21,1} + N_{2,2} + q_2 = 0 \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} + q = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$K = 1 \quad \begin{cases} M_{1,1} + M_{12,2} - Q_1 + m_1 = 0 \\ M_{21,1} + M_{2,2} - Q_2 + m_2 = 0 \\ R_{1,1} + R_{2,2} - N_3 + m = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$K = 2 \quad \begin{cases} P_{1,1} + P_{12,2} - 2R_1 + n_1 = 0 \\ P_{21,1} + P_{2,2} - 2R_2 + n_2 = 0 \\ S_{1,1} + S_{2,2} - 2M_3 + n = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$K = 3 \begin{cases} M_{1,1}^* + M_{12,2}^* - 3S_1 + l_1 = 0 \\ M_{21,1}^* + M_{2,2}^* - 3S_2 + l_2 = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

onde ,

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_{12} & Q_1 & Q_2 \\ M_1 & M_2 & M_{12} & R_1 & R_2 \\ P_1 & P_2 & P_{12} & S_1 & S_2 \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_3^2 \\ x_3^3 \end{bmatrix} [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}] dx_3 \quad (4.9)$$

$$[M_1^* \quad M_2^* \quad M_{12}^*] = \int_{-h/2}^{+h/2} [x_3^3] [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}] dx_3$$

$$\begin{bmatrix} N_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \end{bmatrix} \sigma_{33} dx_3$$

são os esforços resultantes, e ainda

$$[q_1, n_1] = [\tau_{13}(+h/2) - \tau_{13}(-h/2)] [1, h^2/4]$$

$$[q_2, n_2] = [\tau_{23}(+h/2) - \tau_{23}(-h/2)] [1, h^2/4]$$

$$[m_1, l_1] = [\tau_{13}(+h/2) + \tau_{13}(-h/2)] [h/2, h^3/8]$$

(4.10)

$$[m_2, l_2] = [\tau_{23}(+h/2) + \tau_{23}(-h/2)] [h/2, h^3/8]$$

$$[q, n] = [\tau_{33}(+h/2) - \tau_{33}(-h/2)] [1, h^2/4]$$

$$[ m ] = [ \tau_{33}(+ h/2) + \tau_{33}(- h/2) ] [ h/2 ]$$

que são os termos que representam as condições de fronteira sobre as faces.

#### 4.5 - CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS

A introdução das leis de comportamento nas fórmulas 4.9 e 4.10 permite escrever o sistema de  $3K + 2$  equações, com  $3K + 2$  incógnitas, sob a forma:

$$[ A ] [ U ] = [ F ] \quad (4.11)$$

onde :

[ A ] : matriz de rigidez, de ordem  $(3K + 2, 3K + 2)$

$$[ U ] = \begin{bmatrix} a_0(x_1, x_2) \\ b_0(x_1, x_2) \\ c_0(x_1, x_2) \\ a_1(x_1, x_2) \\ \dots \\ c_{k-1}(x_1, x_2) \\ a_k(x_1, x_2) \\ b_k(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad \text{vetor coluna dos deslocamentos} \\ \text{generalizados, de ordem } (3k+2) \quad (4.12)$$

$$[ F ] = - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ -q \\ m_1 \\ m_2 \\ -m \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{vetor coluna das for\c{c}as generalizadas} \\ \text{aplicadas sobre as faces da placa, de} \\ \text{ordem } (3K + 2) \end{array} \quad (4.13)$$

A resolu\c{c}o\c{a}o do sistema 4.11 identifica os deslocamentos generalizados, e com 4.2 determina-se os deslocamentos  $u_1, u_2$  e  $u_3$ .

#### 4.6 - C\c{A}LCULO DAS TENS\c{O}ES

##### 4.6.1 - Tens\c{o}es no plano ( $x_1, x_2$ )

Primeiramente \c{e} calculado o tensor deforma\c{c}o\c{a}o, dado pela express\c{a}o:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.14)$$

A seguir, o c\c{a}lculo das tens\c{o}es  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  e  $\tau_{12}$  \c{e} feito diretamente pela lei de comportamento (ou lei de Hooke generalizada). Para cada camada  $p$ , tem-se :

$$\sigma_{ij}^p = C_{ijkl}^p \varepsilon_{kl} \quad (4.15)$$

Uma descri\c{c}o\c{a}o geral das leis de comportamento \c{e} feita no ANEXO I.

#### 4.6.2 - Tensões transversais

As tensões  $\tau_{13}, \tau_{23}$  e  $\sigma_{33}$  não podem ser calculadas diretamente pela lei de comportamento. Isto é explicado pela diferença das características geométricas e mecânicas de cada camada, conforme foi discutido no item 3.4.2.

Duas metodologias de cálculo das tensões transversais serão apresentadas a seguir. Elas satisfazem às condições 3.1 e 3.2.

##### 4.6.2.1 - FORMULAÇÃO DE KROMM

Esta formulação é baseada na terceira equação de equilíbrio, dada em 4.5 :

$$Q_{\alpha, \alpha} + q = 0 \quad \alpha = 1, 2$$

onde,

$$Q_{\alpha} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (4.16)$$

e

$$q = [\sigma_{33}(+h/2) - \sigma_{33}(-h/2)]$$

Assim, as tensões transversais podem ser expressas pela teoria de Kromm :

$$\sigma_{\alpha 3} = f(x_3) Q_{\alpha} \quad \alpha = 1, 2$$

com

$$\int_{-h/2}^{+h/2} f(x_3) dx_3 = 1 \quad (4.17)$$

$$f(\pm h/2) = 0$$

sendo  $f(x_3)$  uma função que permite assegurar a continuidade das tensões na interface, e as condições de contorno nas faces da placa. A normalização de  $f(x_3)$  permite interpretar  $Q_\alpha$  como os esforços cortantes.

O critério escolhido para a correção das tensões de cisalhamento transversal considera a razão entre os módulos de cisalhamento  $G_{\alpha 3}$  da alma (II) e das peles (I ou III) :

$$\lambda_\alpha = \frac{G_{\alpha 3}(\text{II})}{G_{\alpha 3}(\text{I ou III})} \quad (4.18)$$

Três casos são possíveis nesta formulação. Para cada caso será determinada a função analítica  $f(x_3)$ .

Caso 1 :  $\lambda_\alpha < 1$

$$f(x_3) = \begin{cases} K(t) (1 - 4x_3^2/h^2) & \text{em I e III} \\ K(t) (1 - t^2/h^2) & \text{em II} \end{cases} \quad (4.19)$$

onde  $K(t) = 3h^2/2(h^3 - t^3)$

Caso 2 :  $\lambda_\alpha = 1$

$$f(x_3) = (3/2h) (1 - 4x_3^2/h^2) \quad \text{em I, II ou III} \quad (4.20)$$

Caso 3 :  $\lambda_\alpha > 1$

$$f(x_3) = \begin{cases} K(t) (1 - 4x_3^2/h^2) & \text{em I e II} \\ K(t) (1 - t^2/h^2) + (3/2h) (1 - 4x_3^2/t^2) & \text{em II} \end{cases} \quad (4.21)$$

com 
$$K(t) = 3h/2(h^2 + ht + t^2)$$

A determinação de  $\sigma_{33}$  é feita pela fórmula :

$$\sigma_{33} = g(x_3) (P_1 + P_2) + 1/2 (P_1 - P_2) \quad (4.22)$$

onde :

$$g(x_3) = \begin{cases} k(t) (x_3 - 4x_3^3/3h^2 + t^3/3h^2) & \text{em I} \\ k(t) (1 - t^2/h^2) x_3 & \text{em II} \\ k(t) (x_3 - 4x_3^3/3h^2 - t^3/3h^2) & \text{em III} \end{cases} \quad (4.23)$$

sendo,

$$k(t) = 3h^2/2(h^3 - t^3)$$

$$P_1 = \sigma_{33}(+h/2)$$

$$P_2 = \sigma_{33}(-h/2)$$

$g(x_3)$  tem a função de assegurar a continuidade nas interfaces.

Vale observar que as formulações de Kromm citadas em 4.6.2.1 são válidas apenas para sanduíches simétricos.

#### 4.6.2.2 - FORMULAÇÃO DIRETA

Neste caso a correção é feita por integração direta das duas primeiras equações de equilíbrio :

$$\sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2, x_3) = - \int_{x_3}^{h/2} (\sigma_{\alpha 1, 1} + \sigma_{\alpha 2, 2}) dx_3, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.24)$$

A tensão normal transversal  $\sigma_{33}$  é obtida através da terceira equação de equilíbrio, sob a forma :

$$\sigma_{33} = - \int_{x_3}^{h/2} (\sigma_{13, 1} + \sigma_{23, 2}) dx_3 \quad (4.25)$$

#### 4.7 - CONDIÇÕES DE CONTORNO ASSOCIADAS

A discussão das condições de contorno em placas é complexa, em especial quando se considera a teoria de ordem superior. Estas condições podem ser colocadas sob duas formas, admitindo que as suposições iniciais estabelecem :

- a) Um campo de deslocamentos cinematicamente admissível. Isto quer dizer que a condição  $u_i = \bar{u}_i$  deve ser satisfeita;
- b) Um campo de tensões estaticamente admissível. Neste caso a condição  $\sigma_{ij} n^j = \bar{T}_i$  deve ser satisfeita.

Assim, ao longo da borda da placa, um membro de cada uma das expressões abaixo deve ser prescrito :

$$N_n \text{ ou } u_n^0, N_{nt} \text{ ou } u_t^0, M_n \text{ ou } \psi_n, M_{nt} \text{ ou } \psi_t, P_n \text{ ou } \theta_n, P_{nt} \text{ ou } \theta_t, \\ M_n^* \text{ ou } \phi_n, M_{nt}^* \text{ ou } \phi_t, Q_n \text{ ou } u_3^0, R_n \text{ ou } \psi_3, S_n \text{ ou } \theta_3, T_n \text{ ou } \phi_3 \quad (4.26)$$

sendo  $n$  e  $t$  as direções normal e tangencial da borda da placa.

#### 4.8 - ESTRUTURAS MULTICAMADAS

É importante destacar que as formulações gerais tomadas neste capítulo são válidas para as estruturas multicamadas ou estratificadas, com a possibilidade de se variar os materiais e a direção das fibras em cada uma das camadas. A mudança básica seria feita no cálculo da matriz de rigidez do sistema. A figura 4.2 mostra a constituição de uma placa multicamadas.

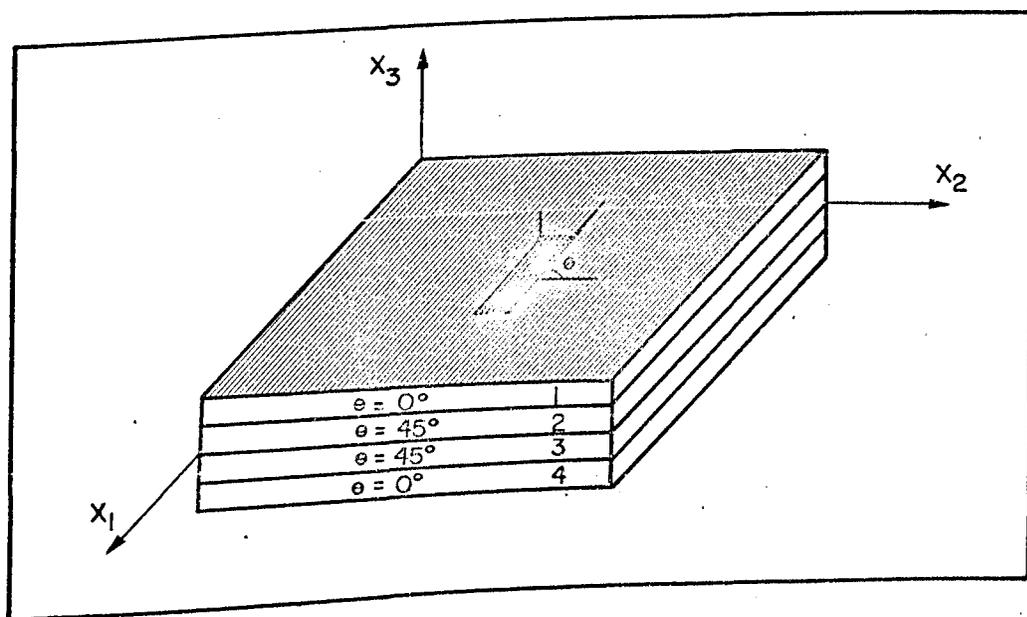


Figura 4.2 - Geometria de um multicamadas

## CAPÍTULO 5

CÁLCULO TRIDIMENSIONAL DE PLACAS SANDUÍCHES EM FLEXÃO  
UTILIZANDO SÉRIES DE FOURIER5.1 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA ABORDADO

Esta aplicação considera uma placa sanduíche retangular assimétrica, simplesmente apoiada. A mesma é constituída de camadas ortotrópicas e tem os carregamentos estáticos normais ao seu plano médio, nas faces inferior e superior (figura 5.1).

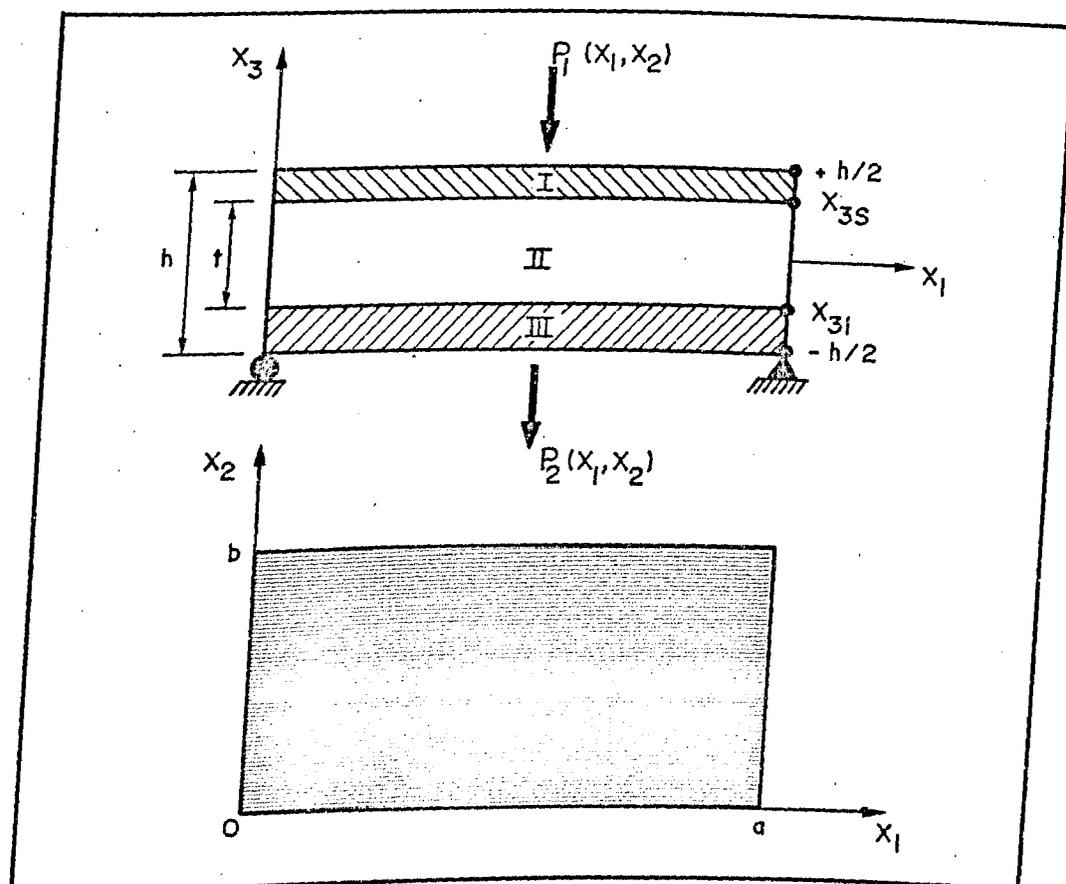


Figura 5.1 - Placa sanduíche simplesmente apoiada, sob flexão

As condições de contorno para as bordas da placa são :

$$\begin{aligned} u_2 = u_3 = 0 & \quad \text{em} \quad x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = a \\ u_1 = u_3 = 0 & \quad \text{em} \quad x_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = b \end{aligned}$$

As condições de contorno para as faces da placa são :

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, x_2, +h/2) &= P_1(x_1, x_2) \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, -h/2) &= P_2(x_1, x_2) \\ \tau_{13}(x_1, x_2, \pm h/2) &= \tau_{23}(x_1, x_2, \pm h/2) = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

## 5.2 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA

### 5.2.1 - RESOLUÇÃO POR SÉRIES DE FOURIER

Os deslocamentos são desenvolvidos em séries duplas de Fourier. Isto vai garantir que as condições de contorno da placa, que é simplesmente apoiada, sejam satisfeitas. Esta solução é clássica, sendo colocada da seguinte forma :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_0^{mn} + a_1^{mn} x_3 + a_2^{mn} x_3^2 + \dots + a_k^{mn} x_3^k) \times \\ &\quad \cos \frac{m\pi x_1}{a} \quad \text{sen} \frac{n\pi x_2}{b} \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (b_0^{mn} + b_1^{mn} x_3 + b_2^{mn} x_3^2 + \dots + b_k^{mn} x_3^k) \times \\ &\quad \text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \quad \cos \frac{n\pi x_2}{b} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (c_0^{mn} + c_1^{mn} x_3 + c_2^{mn} x_3^2 + \dots + c_{k-1}^{mn} x_3^{k-1}) \times \\ \text{sen } \frac{m\pi x_1}{a} \quad \text{sen } \frac{n\pi x_2}{b}$$

Os termos de rigidez são definidos como :

$$[ A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, F_{ij}, H_{ij}, K_{ij}, L_{ij} ] = \\ C_{ij} \int_{-h/2}^{+h/2} [ 1, x_3, x_3^2, x_3^3, x_3^4, x_3^5, x_3^6 ] dx_3 \quad (5.3)$$

Considerando que a placa é assimétrica, e observando a fig. 5.1, os cálculos de 5.3 levam aos seguintes resultados :

$$A_{ij} = C_{ij}^I (h/2 - x_{3S}) + C_{ij}^{II} (x_{3S} - x_{3I}) + C_{ij}^{III} (x_{3I} + h/2)$$

$$B_{ij} = C_{ij}^I (h^2/8 - x_{3S}^2/2) + C_{ij}^{II} (x_{3S}^2/2 - x_{3I}^2/2) + C_{ij}^{III} (x_{3I}^2/2 - h^2/8)$$

$$D_{ij} = C_{ij}^I (h^3/24 - x_{3S}^3/3) + C_{ij}^{II} (x_{3S}^3/3 - x_{3I}^3/3) + C_{ij}^{III} (x_{3I}^3/3 + \\ h^3/24)$$

$$F_{ij} = C_{ij}^I (h^4/64 - x_{3S}^4/4) + C_{ij}^{II} (x_{3S}^4/4 - x_{3I}^4/4) + C_{ij}^{III} (x_{3I}^4/4 - \\ h^4/64)$$

$$H_{ij} = C_{ij}^I (h^5/160 - x_{3S}^5/5) + C_{ij}^{II} (x_{3S}^5/5 - x_{3I}^5/5) + C_{ij}^{III} (x_{3I}^5/5 + \\ h^5/160)$$

$$K_{ij} = C_{ij}^I (h^6/384 - x_{3S}^6/6) + C_{ij}^{II} (x_{3S}^6/6 - x_{3I}^6/6) + C_{ij}^{III} (x_{3I}^6/6 - h^6/384)$$

$$L_{ij} = C_{ij}^I (h^7/896 - x_{3S}^7/7) + C_{ij}^{II} (x_{3S}^7/7 - x_{3I}^7/7) + C_{ij}^{III} (x_{3I}^7/7 + h^7/896) \quad (5.4)$$

Os termos  $C_{ij}^I$ ,  $C_{ij}^{II}$  e  $C_{ij}^{III}$  são os coeficientes elásticos da pele superior, da alma e da pele inferior respectivamente. Eles são dados no ANEXO I.

Conforme foi visto, o campo de deslocamentos é dado pelas expressões :

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha^0 + x_3 \psi_\alpha(x_1, x_2) + x_3^2 \theta_\alpha(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_\alpha(x_1, x_2) \quad \alpha=1,2$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^0 + x_3 \psi_3(x_1, x_2) + x_3^2 \theta_3(x_1, x_2) \quad (5.5)$$

Os deslocamentos generalizados são escritos sob a forma :

$$\begin{bmatrix} u_1^0 \\ \psi_1 \\ \theta_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} a_{0mn} \\ a_{1mn} \\ a_{2mn} \\ a_{3mn} \end{bmatrix} \cos \alpha x_1 \quad \text{sen } \beta x_2$$

$$\begin{bmatrix} u_2^0 \\ \psi_2 \\ \theta_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} b_{0mn} \\ b_{1mn} \\ b_{2mn} \\ b_{3mn} \end{bmatrix} \text{sen } \alpha x_1 \quad \cos \beta x_2 \quad (5.6)$$

$$K_{ij} = C_{ij}^I (h^6/384 - x_{3S}^6/6) + C_{ij}^{II} (x_{3S}^6/6 - x_{3I}^6/6) + C_{ij}^{III} (x_{3I}^6/6 - h^6/384)$$

$$L_{ij} = C_{ij}^I (h^7/896 - x_{3S}^7/7) + C_{ij}^{II} (x_{3S}^7/7 - x_{3I}^7/7) + C_{ij}^{III} (x_{3I}^7/7 + h^7/896) \quad (5.4)$$

Os termos  $C_{ij}^I$ ,  $C_{ij}^{II}$  e  $C_{ij}^{III}$  são os coeficientes elásticos da pele superior, da alma e da pele inferior respectivamente. Eles são dados no ANEXO I.

Conforme foi visto, o campo de deslocamentos é dado pelas expressões :

$$u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3) = u_{\alpha}^0 + x_3 \psi_{\alpha}(x_1, x_2) + x_3^2 \theta_{\alpha}(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_{\alpha}(x_1, x_2) \quad \alpha=1,2$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^0 + x_3 \psi_3(x_1, x_2) + x_3^2 \theta_3(x_1, x_2) \quad (5.5)$$

Os deslocamentos generalizados são escritos sob a forma :

$$\begin{bmatrix} u_1^0 \\ \psi_1 \\ \theta_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\mathcal{R}} \sum_{n=1}^{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} a_0^{mn} \\ a_1^{mn} \\ a_2^{mn} \\ a_3^{mn} \end{bmatrix} \cos \alpha x_1 \quad \text{sen } \beta x_2$$

$$\begin{bmatrix} u_2^0 \\ \psi_2 \\ \theta_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\mathcal{R}} \sum_{n=1}^{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} b_0^{mn} \\ b_1^{mn} \\ b_2^{mn} \\ b_3^{mn} \end{bmatrix} \text{sen } \alpha x_1 \quad \cos \beta x_2 \quad (5.6)$$

$$\begin{bmatrix} u_3^0 \\ \psi_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} C_0^{mn} \\ C_1^{mn} \\ C_2^{mn} \end{bmatrix} \sin \alpha x_1 \sin \beta x_2$$

com  $\alpha = m\pi/a$  e  $\beta = n\pi/b$

Considerando o caso para  $k = 3$  e observando as expressões 4.9 , 4.14 e 5.4 , tem-se os esforços resultantes :

$$N_1 = A_{11}u_{1,1}^0 + A_{12}u_{2,2}^0 + A_{13}\psi_3 + D_{11}\theta_{1,1} + D_{12}\theta_{2,2} + B_{11}\psi_{1,1} + F_{11}\phi_{1,1} + B_{12}\psi_{2,2} + F_{12}\phi_{2,2} + 2B_{13}\theta_3 \quad (5.7)$$

$$N_2 = A_{12}u_{1,1}^0 + A_{22}u_{2,2}^0 + A_{23}\psi_3 + D_{12}\theta_{1,1} + D_{22}\theta_{2,2} + F_{22}\phi_{2,2} + 2B_{23}\theta_3 + B_{22}\psi_{2,2} + B_{12}\psi_{1,1} + F_{12}\phi_{1,1} \quad (5.8)$$

$$N_3 = A_{13}u_{1,1}^0 + A_{23}u_{2,2}^0 + A_{33}\psi_3 + D_{13}\theta_{1,1} + D_{23}\theta_{2,2} + 2B_{33}\theta_3 + F_{13}\phi_{1,1} + F_{23}\phi_{2,2} \quad (5.9)$$

$$N_{12} = A_{66}(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) + D_{66}(\theta_{1,2} + \theta_{2,1}) + B_{66}(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}) + F_{66}(\phi_{1,2} + \phi_{2,1}) \quad (5.10)$$

$$Q_1 = A_{55}(\psi_1 + u_{3,1}^0) + D_{55}(3\phi_1 + \theta_{3,1}) + B_{55}(\psi_{3,1} + 2\theta_1) \quad (5.11)$$

$$Q_2 = A_{44}(\psi_2 + u_{3,2}^0) + D_{44}(3\phi_2 + \theta_{3,2}) + B_{44}(\psi_{3,2} + 2\theta_2) \quad (5.12)$$

$$M_1 = D_{11}\psi_{1,1} + D_{12}\psi_{2,2} + 2D_{13}\theta_3 + H_{11}\phi_{1,1} + H_{12}\phi_{2,2} + B_{13}\psi_3 + F_{11}\theta_{1,1} + F_{12}\theta_{2,2} \quad (5.13)$$

$$M_2 = D_{12}\psi_{1,1} + D_{22}\psi_{2,2} + 2D_{23}\theta_3 + H_{12}\phi_{1,1} + H_{22}\phi_{2,2} + B_{23}\psi_3 + F_{12}\theta_{1,1} + F_{22}\theta_{2,2} \quad (5.14)$$

$$M_3 = D_{13}\psi_{1,1} + D_{23}\psi_{2,2} + 2D_{33}\theta_3 + H_{13}\phi_{1,1} + H_{23}\phi_{2,2} + B_{13}u_{1,1}^0 + B_{23}u_{2,2}^0 + B_{33}\psi_3 + F_{13}\theta_{1,1} + F_{23}\theta_{2,2} \quad (5.15)$$

$$M_{12} = D_{66}(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}) + H_{66}(\phi_{1,2} + \phi_{2,1}) + F_{66}(\theta_{2,1} + \theta_{1,2}) \quad (5.16)$$

$$R_1 = D_{55}(2\theta_1 + \psi_{3,1}) + F_{55}(3\phi_1 + \theta_{3,1}) \quad (5.17)$$

$$R_2 = D_{44}(2\theta_2 + \psi_{3,2}) + F_{44}(3\phi_2 + \theta_{3,2}) \quad (5.18)$$

$$P_1 = D_{11}u_{1,1}^0 + D_{12}u_{2,2}^0 + D_{13}\psi_3 + H_{11}\theta_{1,1} + H_{12}\theta_{2,2} + 2F_{13}\theta_3 + K_{11}\phi_{1,1} + K_{12}\phi_{2,2} \quad (5.19)$$

$$P_2 = D_{12}u_{1,1}^0 + D_{22}u_{2,2}^0 + D_{23}\psi_3 + H_{12}\theta_{1,1} + H_{22}\theta_{2,2} + 2F_{23}\theta_3 + K_{12}\phi_{1,1} + K_{22}\phi_{2,2} \quad (5.20)$$

$$P_{12} = D_{66}(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) + H_{66}(\theta_{1,2} + \theta_{2,1}) + K_{66}(\phi_{2,1} + \phi_{1,2}) \quad (5.21)$$

$$S_1 = D_{55}(\psi_1 + u_{3,1}^0) + H_{55}(3\phi_1 + \theta_{3,1}) + F_{55}(\psi_{3,1} + 2\theta_1) \quad (5.22)$$

$$S_2 = D_{44}(\psi_2 + u_{3,2}^0) + H_{44}(3\phi_2 + \theta_{3,2}) + F_{44}(\psi_{3,2} + 2\theta_2) \quad (5.23)$$

$$M_1^* = H_{11}\psi_{1,1} + H_{12}\psi_{2,2} + 2H_{13}\theta_3 + L_{11}\phi_{1,1} + L_{12}\phi_{2,2} + F_{11}u_{1,1}^0 + \\ F_{12}u_{2,2}^0 + F_{13}\psi_3 + K_{11}\theta_{1,1} + K_{12}\theta_{2,2} \quad (5.24)$$

$$M_2^* = H_{12}\psi_{1,1} + H_{22}\psi_{2,2} + 2H_{23}\theta_3 + L_{12}\phi_{1,1} + L_{22}\phi_{2,2} + F_{12}u_{1,1}^0 + \\ F_{22}u_{2,2}^0 + F_{23}\psi_3 + K_{12}\theta_{1,1} + K_{22}\theta_{2,2} \quad (5.25)$$

$$M_{12}^* = H_{66}(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}) + L_{66}(\phi_{1,2} + \phi_{2,1}) + F_{66}(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) + \\ K_{66}(\theta_{1,2} + \theta_{2,1}) \quad (5.26)$$

Quando expressas em termos de deslocamentos, as equações de equilíbrio (4.5 a 4.8) compreendem um conjunto de 11 equações diferenciais parciais de 2ª ordem acopladas :

$$A_{11}u_{1,11}^0 + A_{12}u_{2,21}^0 + A_{13}\psi_{3,1} + D_{11}\theta_{1,11} + D_{12}\theta_{2,21} + \\ A_{66}(u_{1,22}^0 + u_{2,12}^0) + D_{66}(\theta_{1,22} + \theta_{2,12}) + B_{11}\psi_{1,11} + F_{11}\phi_{1,11} +$$

$$\begin{aligned} & \psi_{2,12}(B_{12} + B_{66}) + \phi_{2,12}(F_{12} + F_{66}) + B_{66}\psi_{1,22} + F_{66}\phi_{1,22} + \\ & 2B_{13}\theta_{3,1} + q_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} & A_{12}u_{1,21}^0 + A_{22}u_{2,22}^0 + A_{23}\psi_{3,2} + D_{12}\theta_{1,12} + D_{22}\theta_{2,22} + \\ & A_{66}(u_{1,12}^0 + u_{2,11}^0) + D_{66}(\theta_{1,21} + \theta_{2,11}) + B_{66}\psi_{2,11} + F_{66}\phi_{2,11} + \\ & F_{22}\phi_{2,22} + 2B_{23}\theta_{3,2} + B_{22}\psi_{2,22} + \psi_{1,12}(B_{12} + B_{66}) + \phi_{1,12}(F_{12} + F_{66}) + \\ & q_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} & A_{55}(\psi_{1,1} + u_{3,11}^0) + D_{55}(3\phi_{1,1} + \theta_{3,11}) + A_{44}(\psi_{2,2} + u_{3,22}^0) + \\ & D_{44}(3\phi_{2,2} + \theta_{3,22}) + B_{55}\psi_{3,11} + B_{44}\psi_{3,22} + 2B_{55}\theta_{1,1} + 2B_{44}\theta_{2,2} + q = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} & D_{11}\psi_{1,11} + D_{12}\psi_{2,21} + 2D_{13}\theta_{3,1} + H_{11}\phi_{1,11} + H_{12}\phi_{2,21} + \\ & D_{66}(\psi_{1,22} + \psi_{2,12}) + H_{66}(\phi_{1,22} + \phi_{2,12}) - A_{55}(\psi_1 + u_{3,1}^0) - \\ & D_{55}(3\phi_1 + \theta_{3,1}) + B_{13}\psi_{3,1} - B_{55}\psi_{3,1} + F_{11}\theta_{1,11} + F_{66}\theta_{1,22} - 2B_{55}\theta_1 + \\ & \theta_{2,12}(F_{12} + F_{66}) + m_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned}
& D_{12}\psi_{1,12} + D_{22}\psi_{2,22} + 2D_{23}\theta_{3,2} + H_{12}\phi_{1,12} + H_{22}\phi_{2,22} + \\
& D_{66}(\psi_{1,21} + \psi_{2,11}) + H_{66}(\phi_{1,21} + \phi_{2,11}) - A_{44}(\psi_2 + u_{3,2}^0) - \\
& D_{44}(3\phi_2 + \theta_{3,2}) + \psi_{3,2}(B_{23} - B_{44}) + \theta_{1,12}(F_{12} + F_{66}) + F_{66}\theta_{2,11} + \\
& F_{22}\theta_{2,22} - 2B_{44}\theta_2 + m_2 = 0
\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
& D_{55}(2\theta_{1,1} + \psi_{3,11}) + D_{44}(2\theta_{2,2} + \psi_{3,22}) - A_{13}u_{1,1}^0 - A_{23}u_{2,2}^0 - \\
& A_{33}\psi_3 - D_{13}\theta_{1,1} - D_{23}\theta_{2,2} + \phi_{1,1}(F_{13} - 3F_{55}) + \phi_{2,2}(F_{23} - 3F_{44}) - \\
& F_{55}\theta_{3,11} - F_{44}\theta_{3,22} + 2B_{33}\theta_3 + m = 0
\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
& D_{11}u_{1,11}^0 + D_{12}u_{2,12}^0 + D_{13}\psi_{3,1} + H_{11}\theta_{1,11} + H_{12}\theta_{2,12} + \\
& D_{66}(u_{1,22}^0 + u_{2,12}^0) + H_{66}(\theta_{1,22} + \theta_{2,12}) - 2D_{55}(2\theta_1 + \psi_{3,1}) + \\
& + 2\theta_{3,1}(F_{13} - F_{55}) + \phi_{2,12}(K_{12} + K_{66}) + K_{11}\phi_{1,11} + K_{66}\phi_{1,22} - \\
& 6F_{55}\phi_1 + n_1 = 0
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
& D_{12}u_{1,12}^0 + D_{22}u_{2,22}^0 + D_{23}\psi_{3,2} + H_{12}\theta_{1,12} + H_{22}\theta_{2,22} + \\
& D_{66}(u_{1,21}^0 + u_{2,11}^0) + H_{66}(\theta_{1,12} + \theta_{2,11}) - 2D_{44}(2\theta_2 + \psi_{3,2}) +
\end{aligned}$$

$$+ 2\theta_{3,2}(F_{23} - F_{44}) + \phi_{1,12}(K_{12} + K_{66}) + K_{11}\phi_{1,11} + K_{66}\phi_{1,22} -$$

$$6F_{55}\phi_1 + n_2 = 0 \quad (5.34)$$

$$D_{55}(\psi_{1,1} + u_{3,11}^0) + H_{55}(3\phi_{1,1} + \theta_{3,11}) + D_{44}(\psi_{2,2} + u_{3,22}^0) +$$

$$+ H_{44}(3\phi_{2,2} + \theta_{3,22}) - 2D_{13}\psi_{1,1} - 2D_{23}\psi_{2,2} - 4D_{33}\theta_3 - 2H_{13}\phi_{1,1} -$$

$$2H_{23}\phi_{2,2} + 2B_{13}u_{1,1}^0 + 2B_{23}u_{2,2}^0 - F_{55}\psi_{3,11} - F_{44}\psi_{3,22} + 2B_{33}\psi_3 +$$

$$2\theta_{1,1}(F_{13} - F_{55}) + 2\theta_{2,2}(F_{23} - F_{44}) + n = 0 \quad (5.35)$$

$$H_{11}\psi_{1,11} + H_{12}\psi_{2,21} + 2H_{13}\theta_{3,1} + L_{11}\phi_{1,11} + L_{12}\phi_{2,21} +$$

$$H_{66}(\psi_{1,22} + \psi_{2,21}) + L_{66}(\phi_{1,22} + \phi_{2,21}) - 3D_{55}(\psi_1 + u_{3,1}^0) -$$

$$3H_{55}(3\phi_1 + \theta_{3,1}) + F_{11}u_{1,11}^0 + F_{66}u_{1,22}^0 + u_{2,12}^0(F_{12} + F_{66}) +$$

$$\psi_{3,1}(F_{13} - 3F_{55}) + K_{11}\theta_{1,11} + K_{66}\theta_{1,22} - 6F_{55}\theta_1 + \theta_{2,12}(K_{12} + K_{66}) +$$

$$l_1 = 0 \quad (5.36)$$

$$H_{12}\psi_{1,12} + H_{22}\psi_{2,22} + 2H_{23}\theta_{3,2} + L_{12}\phi_{1,12} + L_{22}\phi_{2,22} +$$

$$H_{66}(\psi_{1,21} + \psi_{2,11}) + L_{66}(\phi_{1,12} + \phi_{2,11}) - 3D_{44}(\psi_2 + u_{3,2}^0) -$$

$$\begin{aligned}
& 3H_{44}(3\phi_2 + \theta_{3,2}) + F_{66}u_{2,11}^0 + F_{22}u_{2,22}^0 + u_{1,12}^0(F_{12} + F_{66}) + \\
& \psi_{3,2}(F_{23} - 3F_{44}) + K_{66}\theta_{2,11} + K_{22}\theta_{2,22} - 6F_{44}\theta_2 + \theta_{1,12}(K_{12} + K_{66}) + \\
& l_2 = 0
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Com as equações de 5.27 a 5.37, pode-se escrever o referido sistema  $[A][U] = [F]$ . Assim, considerando as condições 5.1, o vetor força fica sob a forma :

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 - P_2 \\ 0 \\ 0 \\ (P_1 + P_2)h/2 \\ 0 \\ 0 \\ (P_1 - P_2)h^3/8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

Os carregamentos transversais  $P_1$  e  $P_2$  são desenvolvidos em séries duplas de Fourier :

$$P(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{b} \tag{5.39}$$

onde o coeficiente  $P_{mn}$  é dado por :

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P(x_1, x_2) \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 \tag{5.40}$$

Seis tipos de carregamento serão considerados :

1) Carregamento senoidal

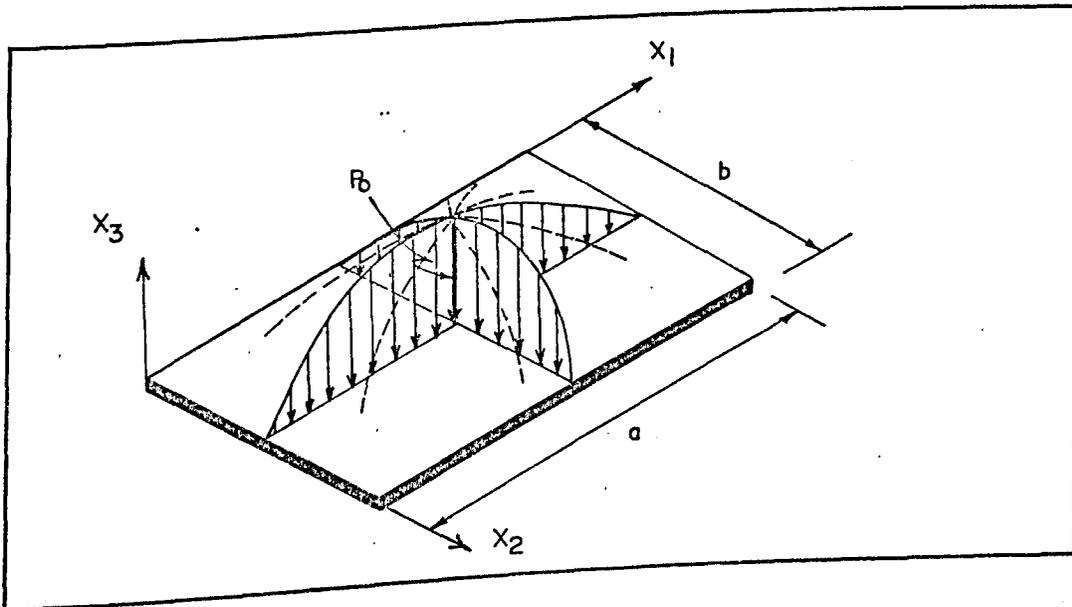


Figura 5.2 - Placa sob carregamento senoidal.

$$P(x_1, x_2) = P_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi x_2}{b} \quad (5.41)$$

2) Carregamento uniforme

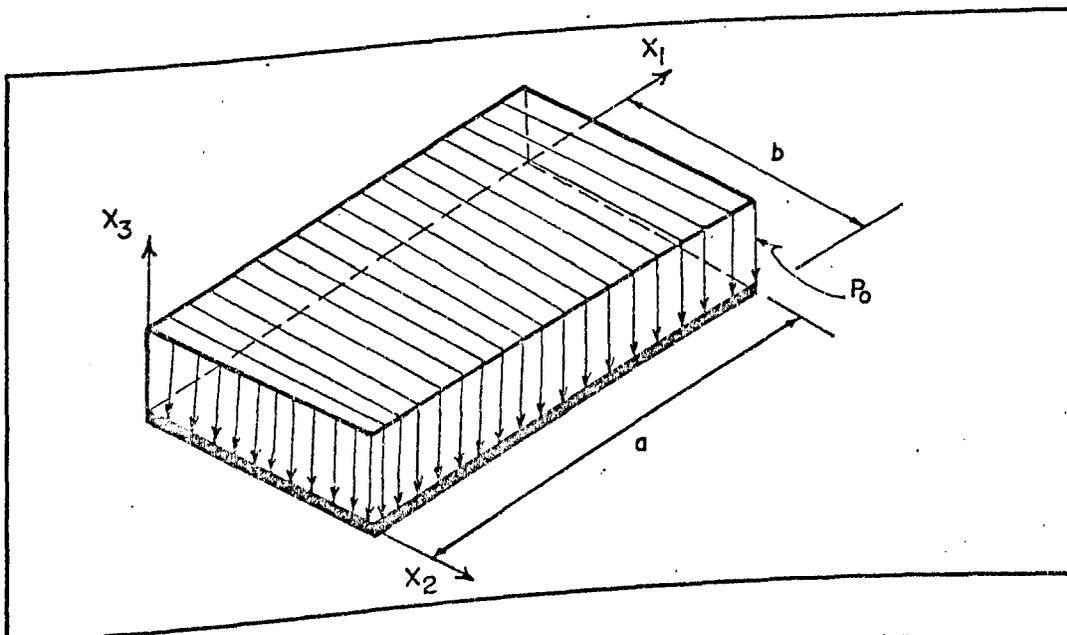


Figura 5.3 - Placa sob carregamento uniforme

$$P(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 P_0}{\pi^2 mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{b} \quad (5.42)$$

com  $m$  e  $n$  ímpares

### 3) Carregamento triangular

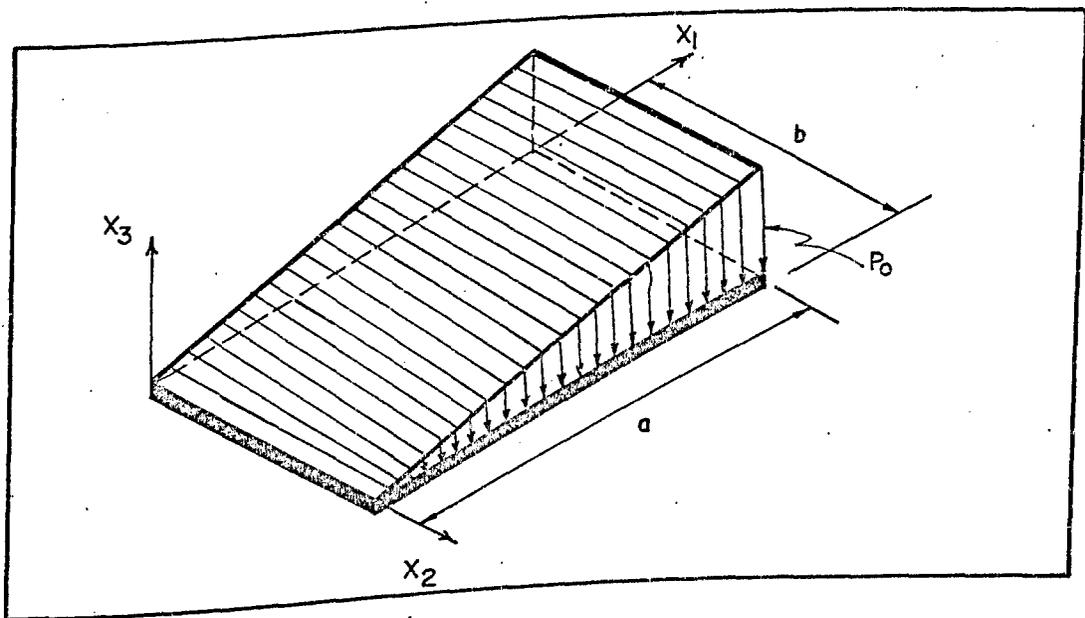


Figura 5.4 - Placa sob carregamento triangular

$$P(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 P_0 \cos m\pi}{\pi^2 mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{b} \quad (5.43)$$

com  $m$  e  $n$  pares ou ímpares

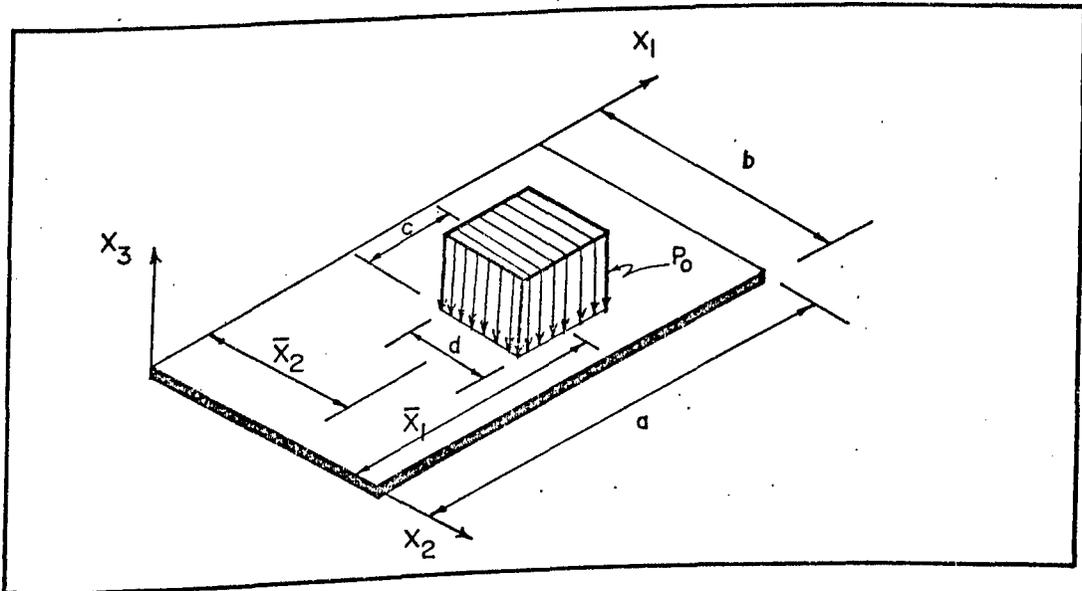
4) Carregamento parcial

Figura 5.5 - Placa sob carregamento parcial

$$P(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 P_0}{\pi^2 mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi \bar{x}_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi \bar{x}_2}{b} \times$$

$$\times \operatorname{sen} \frac{m\pi c}{2a} \operatorname{sen} \frac{n\pi d}{2b} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{b} \quad (5.44)$$

com  $m$  e  $n$  pares ou ímpares

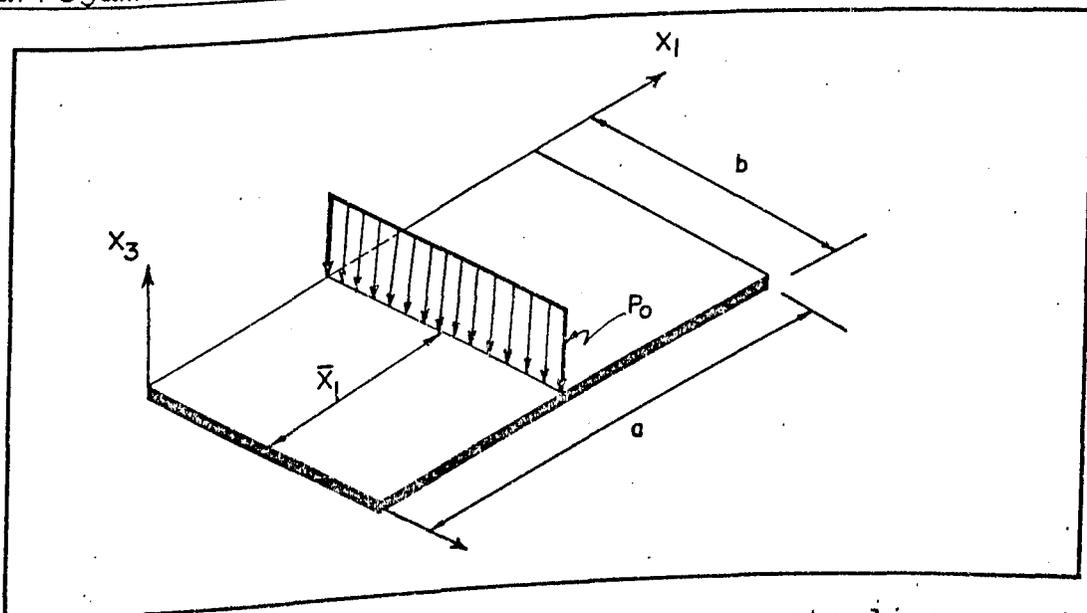
5) Carregamento linear

Figura 5.6 - Placa sob carregamento linear

$$P(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 P_0}{\pi a n} \operatorname{sen} \frac{m\pi \bar{x}_1}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{b} \quad (5.45)$$

com  $m$  e  $n$  pares ou ímpares

### 6) Carregamento concentrado

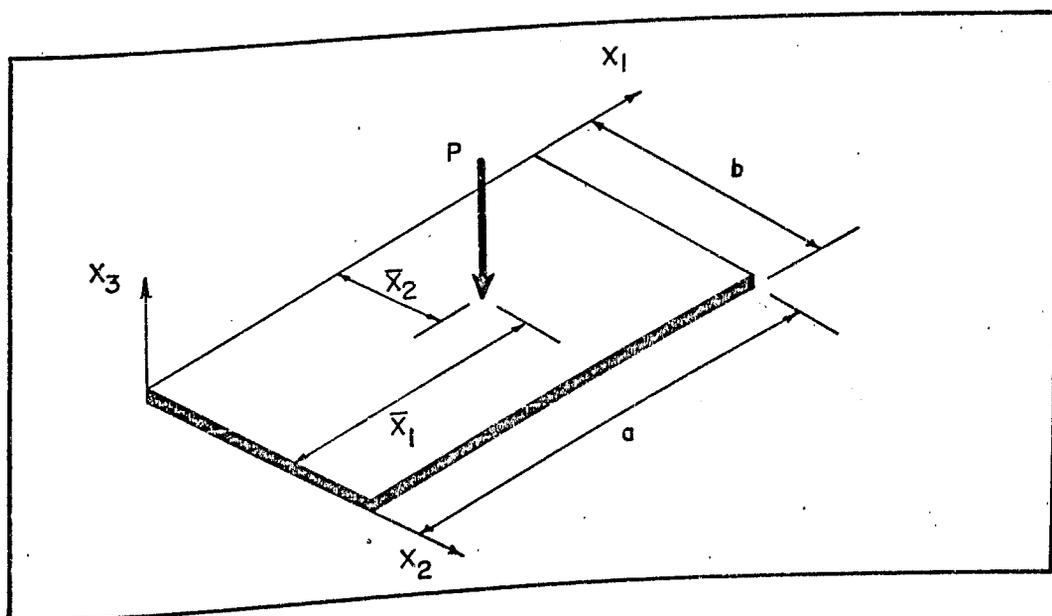


Figura 5.7 - Placa sob carregamento concentrado

$$P(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4P}{ab} \operatorname{sen} \frac{m\pi \bar{x}_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi \bar{x}_2}{b} \times \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{b} \quad (5.46)$$

com  $m$  e  $n$  pares ou ímpares

Considerando estas expressões para os carregamentos transversais e as equações de 5.27 a 5.38, pode-se obter, após algumas simplificações, a forma final do sistema global de equações.

Assim, a matriz de rigidez [A] fica sob a forma :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	$\alpha^2 A_{11} - \beta^2 A_{66}$	$\alpha\beta(A_{12} + A_{66})$	0	$\alpha^2 B_{11} - \beta^2 B_{66}$	$-\alpha\beta(B_{12} + B_{66})$	$\alpha A_{13}$	$-\alpha^2 D_{11} - \beta^2 D_{66}$	$-\alpha\beta(D_{12} + D_{66})$	$2\alpha B_{13}$	$-\alpha^2 F_{11} - \beta^2 F_{66}$	$-\alpha\beta(F_{12} + F_{66})$	1
		$-\alpha^2 A_{66} - \beta^2 A_{22}$	0	$-\alpha\beta(B_{12} + B_{66})$	$-\alpha^2 B_{66} - \beta^2 B_{22}$	$\beta A_{23}$	$-\alpha\beta(D_{12} + D_{66})$	$-\alpha^2 D_{66} - \beta^2 D_{22}$	$2\beta B_{23}$	$-\alpha\beta(F_{12} + F_{66})$	$-\alpha^2 F_{66} - \beta^2 F_{22}$	2
			$-\alpha^2 A_{55} - \beta^2 A_{44}$	$-\alpha A_{55}$	$-\beta A_{44}$	$-\alpha^2 B_{55} - \beta^2 B_{44}$	$-2\alpha B_{55}$	$-2\beta B_{44}$	$-\alpha^2 D_{55} - \beta^2 D_{44}$	$-3\alpha D_{55}$	$-3\beta D_{44}$	3
				$-\alpha^2 D_{11} - \beta^2 D_{66} - A_{55}$	$-\alpha\beta(D_{12} + D_{66})$	$\alpha(B_{13} + B_{55})$	$-\alpha^2 F_{11} - \beta^2 F_{66} - 2B_{55}$	$-\alpha\beta(F_{12} + F_{66})$	$\alpha(2D_{13} + D_{55})$	$-\alpha^2 H_{11} - \beta^2 H_{66} - 3D_{55}$	$-\alpha\beta(H_{12} + H_{66})$	4
					$-\alpha^2 D_{66} - \beta^2 D_{22} - A_{44}$	$\beta(B_{23} + B_{44})$	$-\alpha\beta(F_{12} + F_{66})$	$-\alpha^2 F_{66} - \beta^2 F_{22} - 2B_{44}$	$\beta(2D_{23} + D_{44})$	$-\alpha\beta(H_{12} + H_{66})$	$-\alpha^2 H_{66} - \beta^2 H_{22} - 3D_{44}$	5
						$-\alpha^2 D_{55} - \beta^2 D_{44} - A_{33}$	$\alpha(D_{13} + 2D_{55})$	$\beta(D_{23} + 2D_{44})$	$-\alpha^2 F_{55} - \beta^2 F_{44} - 2B_{33}$	$\alpha(F_{13} + 3F_{55})$	$\beta(F_{23} + 3F_{44})$	6
							$\alpha^2 H_{11} - \beta^2 H_{66} - 4D_{55}$	$-\alpha\beta(H_{12} + H_{66})$	$2\alpha(F_{13} + F_{55})$	$-\alpha^2 K_{11} - \beta^2 K_{66} - 6F_{55}$	$-\alpha\beta(K_{12} + K_{66})$	7
								$-\alpha^2 H_{66} - \beta^2 H_{22} - 4D_{44}$	$2\beta(F_{23} + F_{44})$	$-\alpha\beta(K_{12} + K_{66})$	$-\alpha^2 K_{66} - \beta^2 K_{22} - 6F_{44}$	8
									$-\alpha^2 H_{55} - \beta^2 H_{44} - 4D_{33}$	$\alpha(2H_{13} + 3H_{55})$	$\beta(2H_{23} + 3H_{44})$	9
										$-\alpha^2 L_{11} - \beta^2 L_{66} - 9H_{55}$	$-\alpha\beta(L_{12} + L_{66})$	10
											$-\alpha^2 L_{66} - \beta^2 L_{22} - 9H_{44}$	11

[ SIMÉTRICA ]

(5.47)

Para os seis tipos de carregamento, os vetores força generalizados (expressão 5.38) resultam :

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_0 \\ 0 \\ 0 \\ h P_0 / 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h^2 P_0 / 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) - carregamento senoidal

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{16 P_0}{\pi^2 mn} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{8 h P_0}{\pi^2 mn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4 h^2 P_0}{\pi^2 mn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) - carregamento uniforme

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 P_0 \rho_0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 h P_0 \rho_0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 h^2 P_0 \rho_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) - carregamento triangular

(5.48)

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \rho_1 \\ 0 \\ 0 \\ 8 h \rho_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 h^2 \rho_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4) - carregamento parcial

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4 P \rho_2}{a b} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2 h P \rho_2}{a b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{h^2 P \rho_2}{a b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(5) - carregamento concentrado

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{8 P_0 \rho_3}{\pi b m} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4 h P_0 \rho_3}{\pi b m} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2 h^2 P_0 \rho_3}{\pi b m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(6) - carregamento linear

com :

$$\rho_0 = \cos m\pi / (\pi^2 mn)$$

$$\rho_1 = \text{sen} \frac{m\pi \bar{x}_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi \bar{x}_2}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{2a} \text{sen} \frac{n\pi d}{2b} \times (P_0 / \pi^2 mn)$$

$$\rho_2 = \text{sen} \frac{m\pi \bar{x}_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi \bar{x}_2}{b}$$

$$\rho_3 = \text{sen} \frac{m\pi \bar{x}_1}{a}$$

A solução das equações citadas (isto é, do sistema  $[A][U]=[F]$ ) leva aos deslocamentos, deformações e tensões atuantes na placa, conforme foi mostrado em 4.5 e 4.6.

### 5.2.2 - ANÁLISE DA APROXIMAÇÃO ESPECTRAL

A expansão de uma função  $u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k \phi_k$  em termos de uma sequência infinita de funções ortogonais  $\{\phi_k\}$ , pode gerar imprecisões que influenciam decisivamente o domínio de aplicabilidade destes métodos em computação científica. Neste sentido, um aspecto importante da aproximação dos carregamentos sobre as faces da placa através das séries de Fourier, será considerado para a resolução do problema.

A convergência dos valores no desenvolvimento da série de Fourier para os carregamentos, vai depender da continuidade do mesmo ao longo da placa. Isto porque nas proximidades de uma descontinuidade ocorre uma oscilação em torno da função exata. Esta oscilação não desaparece quando se aumenta o número de termos na série. Este comportamento não esperado constitui o

Fenômeno de Gibbs, que no salto da descontinuidade faz com que as aproximações ultrapassem em cerca de 9 % o valor exato da função [22].

#### 5.2.2.2 - ALISAMENTO DAS SÉRIES TRUNCADAS DE FOURIER

Uma forma simples e direta de atenuar o efeito do Fenômeno de Gibbs, é de se multiplicar cada coeficiente  $\hat{u}_k$  pelo fator  $\sigma_k$ . Desta forma, obtém-se a série alisada :

$$\sigma_N u = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \sigma_k \hat{u}_k e^{ikx} \quad (5.49)$$

O termo  $\sigma_k$  deve ser um número real e positivo, onde  $\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_k = -\sigma_{-k}$  e  $\sigma_k$  é uma função decrescente de  $|k|$ .  
 Usou-se o método de alisamento do cosseno aumentado, que tem se mostrado o mais efetivo entre os vários existentes [22].  
 Neste caso, o fator  $\sigma_k$  vale :

$$\sigma_k = \frac{1 + \cos 2k\pi/N}{2}, \quad k = -N/2, \dots, N/2 \quad (5.50)$$

Portanto, este procedimento de alisamento será utilizado no desenvolvimento das séries de Fourier dos carregamentos. Um exemplo desta análise pode ser observado na figura 5.8, onde a função alisada do carregamento parcial mostrou uma aproximação

melhor em relação à curva real, atenuando o Fenômeno de Gibbs.

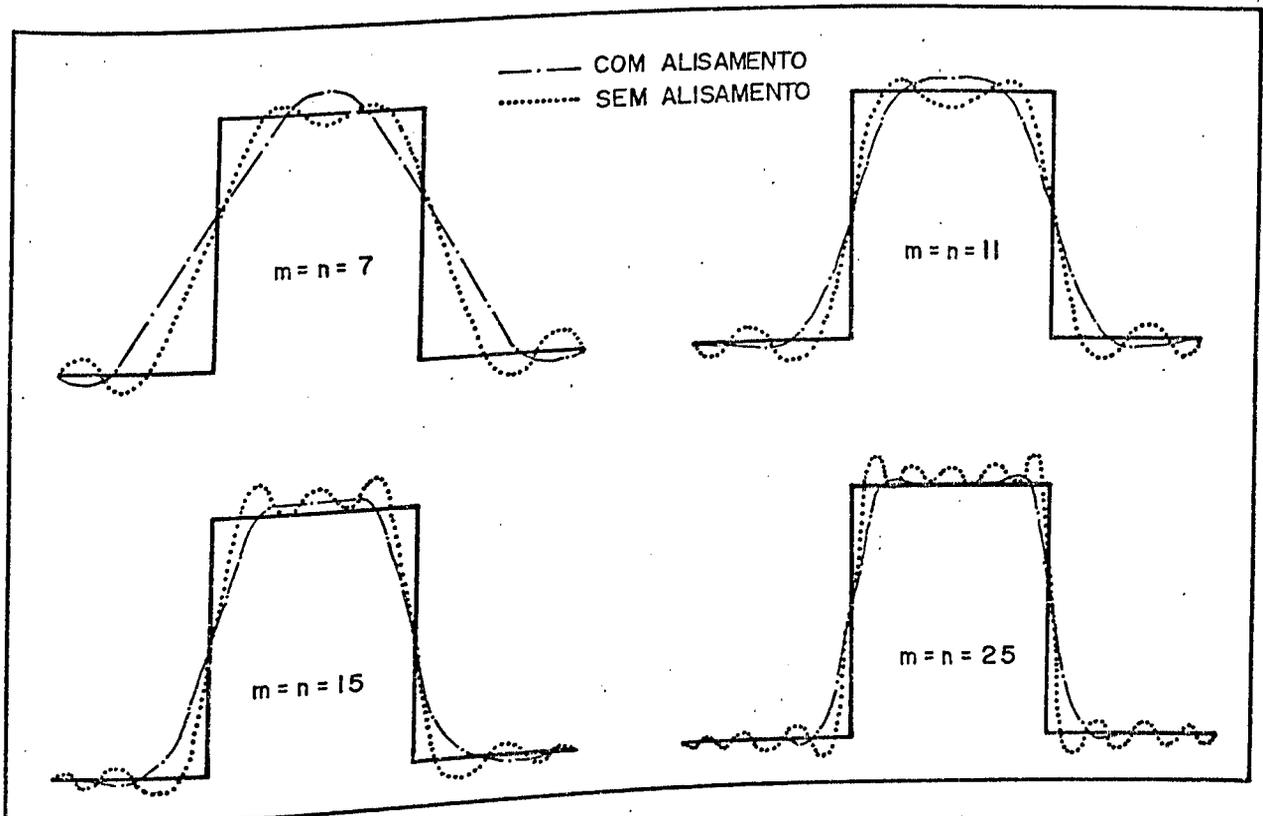


Figura 5.8 - Alisamento das funções de carregamento

### 5.3 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

À partir das formulações de 5.1 e 5.2 elaborou-se um programa computacional em linguagem FORTRAN 5.0. Um esquema simplificado da estrutura de operação do mesmo está mostrado na figura 5.9.

Os arquivos de entrada deste programa são dados no ANEXO IV.

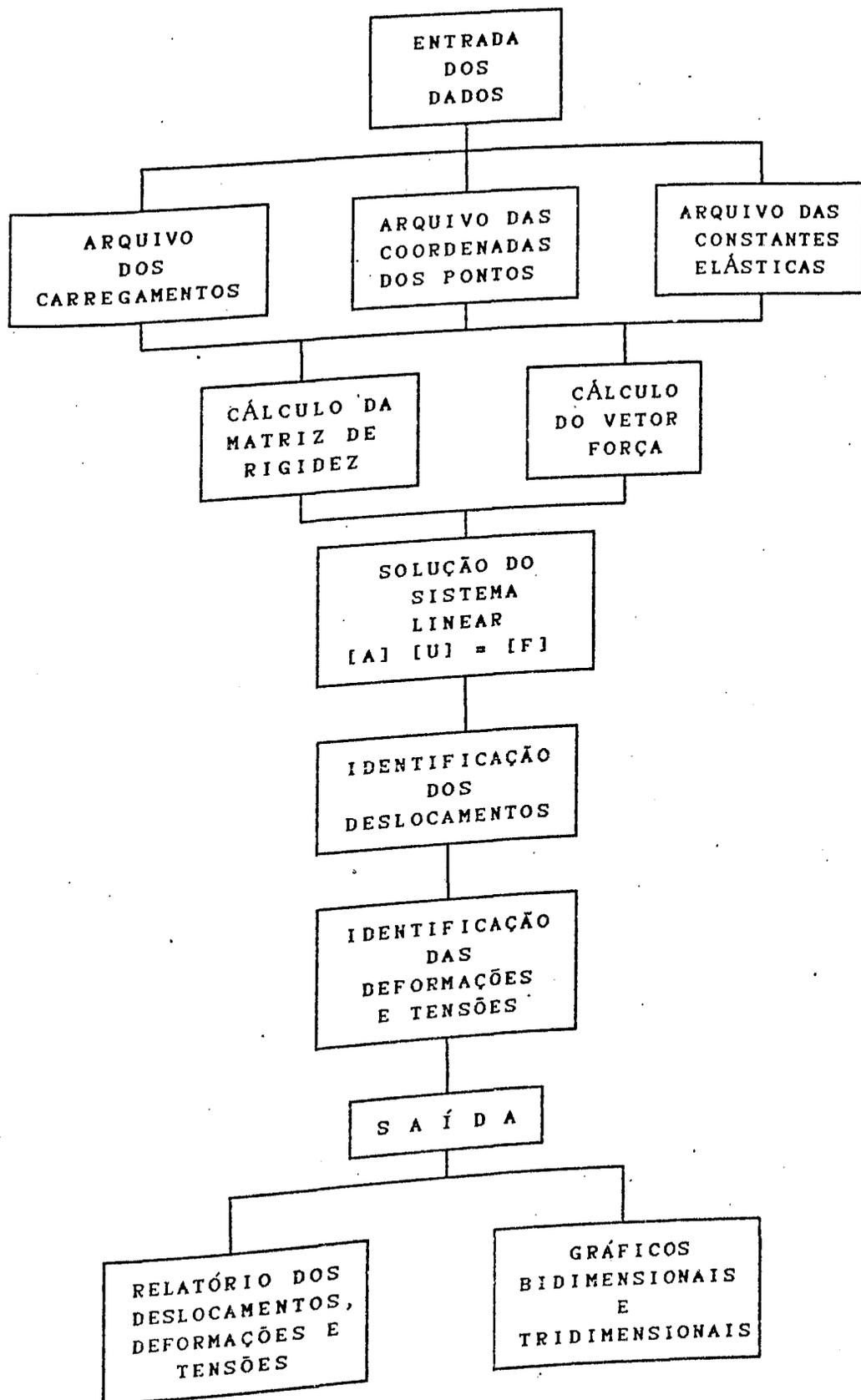


Figura 5.9 - Organograma do programa de cálculo por séries de Fourier

## 5.4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS APLICADOS

O objetivo destas análises é de se demonstrar a precisão e a eficiência das formulações utilizadas e conseqüentemente do programa computacional elaborado.

### 5.4.1 - PRIMEIRO EXEMPLO

As placas sanduíches são constituídas de monocamadas à  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , sob carregamentos senoidal e uniforme. As propriedades elásticas do material são :

$$E_1/E_2 = E_1/E_3 = 25 \quad , \quad G_{12}/E_2 = G_{13}/E_3 = 0.5 \quad , \quad G_{23}/E_3 = 0.2$$

$$E_2 = P_0 = 10^6 \text{ N/m}^2 \quad , \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

As coordenadas de cálculo das tensões são as seguintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} & : ( 0.4718a, 0.4718a, 1/2 h ) \\ \sigma_{22} & : ( 0.4718a, 0.4718a, \text{interface} ) \\ \tau_{12} & : ( 0.0282a, 0.0282a, 1/2 h ) \\ \tau_{13} & : ( 0.0528a, 0.4472a, 0 ) \\ \tau_{23} & : ( 0.4472a, 0.0528a, 0 ) \end{aligned}$$

Os valores apresentados são adimensionalizados pelas constantes :

$$m_1 = h^2 / P_0 a^2 \quad , \quad m_2 = h / P_0 a \quad , \quad m_3 = 100 h^3 E_2 / P_0 a^4$$

a) Carregamento senoidal

A estrutura consiste de um empilhamento de quatro camadas de mesma espessura, orientadas à  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $0^\circ$ , o que é equivalente a um sanduíche.

Os valores obtidos são comparados com as teorias de Pagano, Mindlin, Reddy, Pandya & Kant e Nwokoye (referência [17]). Os resultados deste trabalho serão identificados por LCMM (Laboratório de Comportamento Mecânico dos Materiais).

A tabela 2 mostra as tensões calculadas para placas finas ( $a/h \approx 100$ ) e moderadamente espessa ( $a/h \leq 10$ ).

Tabela 5.1 - Tensões em uma placa constituída de 4 camadas orientadas  $[0/90_2/0]$ , sob carregamento senoidal

Autor	a/h	$\sigma_{11} \times m_1$	$\sigma_{22} \times m_1$	$\tau_{12} \times m_1$	$\tau_{13} \times m_2$	$\tau_{23} \times m_2$
Mindlin	4	0.4121	0.5829	0.03084	0.2389	0.2473
Reddy		0.6651	0.6322	0.04400	0.2064	0.2389
Elast. 3D		0.7200	0.6630	0.04670	0.2190	0.2920
Pandya-Kant		0.7193	0.6250	0.04537	0.2023	0.2610
Nwokoye k=4		0.7181	0.6061	0.04519	0.2389	0.2652
LCMM		0.7194	0.6107	0.04287	0.2389	0.2652
Mindlin	10	0.5063	0.3654	0.02415	0.2819	0.1600
Reddy		0.5456	0.3888	0.02680	0.2640	0.1531
Elast. 3D		0.5590	0.4010	0.02750	0.3010	0.1960
Pandya-Kant		0.5676	0.3948	0.02728	0.2702	0.1715
Nwokoye k=4		0.5552	0.3844	0.02702	0.2965	0.1694
LCMM		0.5553	0.3845	0.02702	0.2965	0.1694
Mindlin	100	0.5416	0.2704	0.02135	0.2921	0.1231
Reddy		0.5387	0.2708	0.02130	0.2897	0.1117
Elast. 3D		0.5390	0.2710	0.02140	0.3390	0.1390
Pandya-Kant		0.5442	0.2734	0.02154	0.3014	0.1240
Nwokoye k=4		0.5346	0.2675	0.02118	0.3244	0.1223
LCMM		0.5346	0.2675	0.02118	0.3244	0.1223

Pode-se notar que há uma boa concordância entre os valores de Nwokoye para  $k=4$ , e os resultados deste trabalho ( $k=3$ ). Isto demonstra que o desenvolvimento da série dos deslocamentos até  $k=3$  é suficiente.

A tabela 5.2 mostra a influência sobre as tensões, da variação da espessura da alma em relação à espessura total da placa, para  $a/h = 10$ .

Tabela 5.2 - Influência da razão de espessura  $(h-t)/t$  sobre as tensões em uma placa  $[0/90_2/0]$ , para carregamento senoidal

Autor	$\frac{h-t}{t}$	$\sigma_{11} \times m_1$	$\sigma_{22} \times m_1$	$\tau_{12} \times m_1$	$\tau_{13} \times m_2$	$\tau_{23} \times m_2$
Pandya-Kant LCMM e Nwo.	1/4	0.5251	0.4885	0.02284	0.1498	0.2758
		0.5114	0.4791	0.02272	0.1559	0.2905
Pandya-Kant LCMM e Nwo.	2/3	0.5427	0.4415	0.02588	0.2314	0.2108
		0.5304	0.4290	0.02565	0.2503	0.2094
Pandya-Kant Pagano Reddy LCMM e Nwo.	1	0.5676	0.3948	0.02728	0.2702	0.1715
		0.5590	0.4010	0.02750	0.3010	0.1960
		0.5456	0.3888	0.02680	0.2640	0.1531
		0.5552	0.3844	0.02702	0.2965	0.1694
Pandya-Kant LCMM e Nwo.	3/2	0.5889	0.3271	0.02799	0.3050	0.1303
		0.5735	0.3196	0.02772	0.3386	0.1341
Pandya-Kant Pagano LCMM e Nwo.	2	0.5917	0.2735	0.02803	0.3248	0.1048
		0.5900	0.2880	0.02890	0.3570	0.1228
		0.5794	0.2629	0.02778	0.3625	0.1158
Pandya-Kant LCMM e Nwo.	4	0.5902	0.1587	0.02735	0.3542	0.0653
		0.5782	0.1489	0.02713	0.3978	0.0947

b) Carregamento uniforme

O sanduíche é formado por três camadas orientadas a  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $0^\circ$ , de mesma espessura.

As figuras 5.10 e 5.11 mostram as tensões cisalhantes transversais, corrigidas segundo Kromm, em comparação com os resultados de Nwokoye [17] ( $k=4$ ). A diferença de valores pode ser explicada pela influência do alisamento da função de carregamento, que não ocorreu no caso da resolução feita por Nwokoye [17].

Pode-se notar que as tensões de cisalhamento atuam principalmente na alma. Isto implica que este elemento possui também uma função estrutural no desempenho da resistência global do sanduíche.

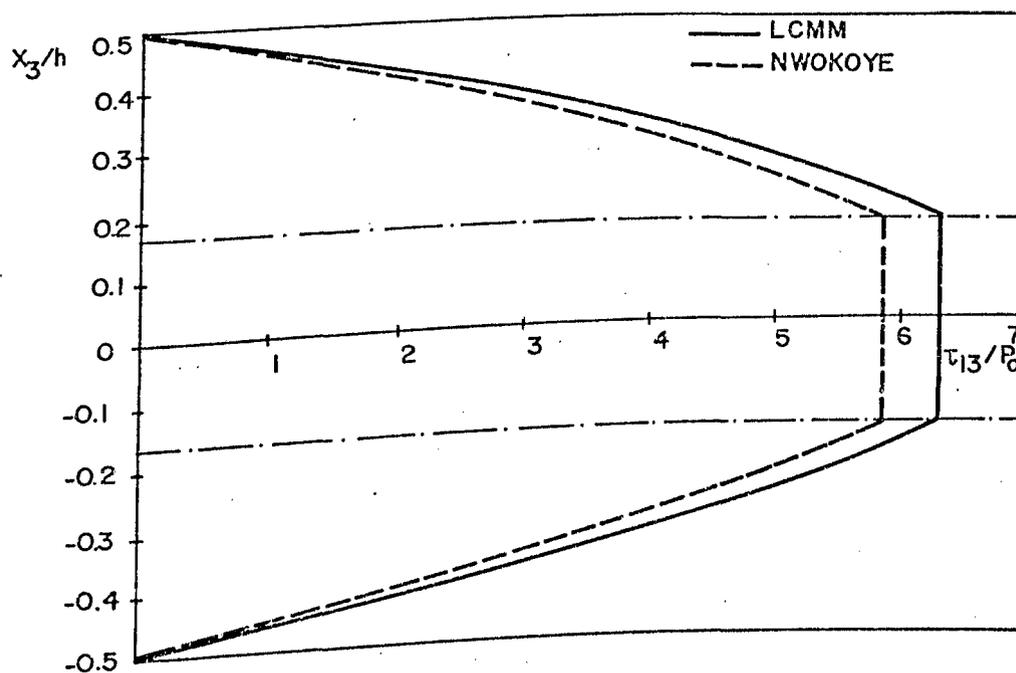


Figura 5.10 - Variação da tensão de cisalhamento  $\tau_{13}$  ao longo da espessura da placa, para carregamento uniforme

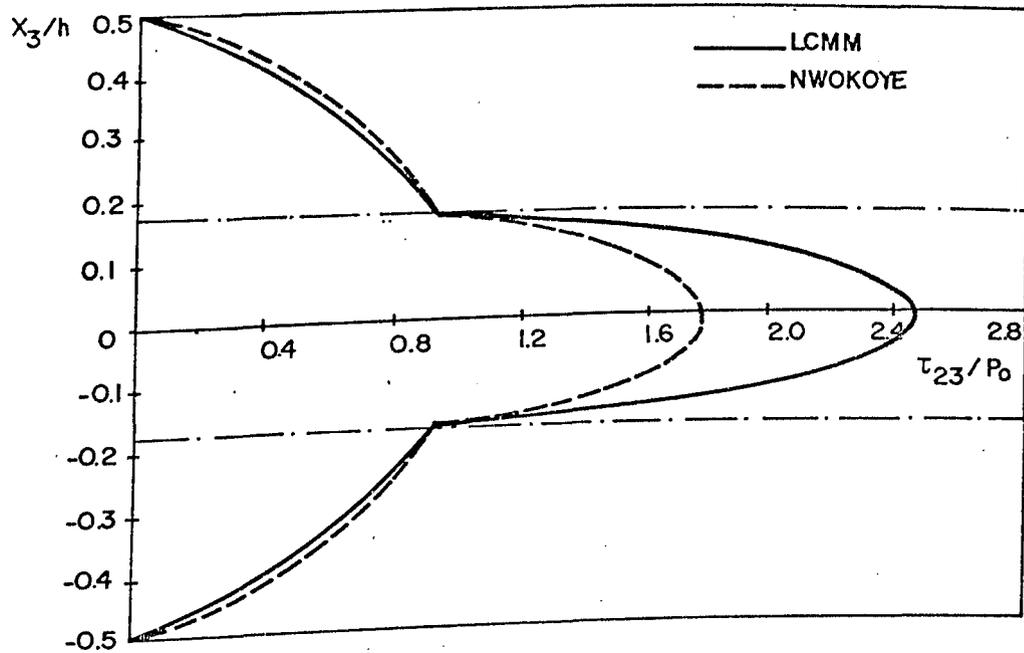


Figura 5.11 - Variação da tensão de cisalhamento  $\tau_{23}$  ao longo da espessura da placa, para carregamento uniforme

Como opção de saída, o programa computacional proporciona a confecção de gráficos tridimensionais. Estes gráficos facilitam a visualização e permitem uma melhor interpretação da variação das tensões ao longo da placa. Assim, as figuras 5.10 e 5.11 podem ser observadas ao longo do eixo  $ox_1$ , nos gráficos das figuras 5.12 e 5.13.

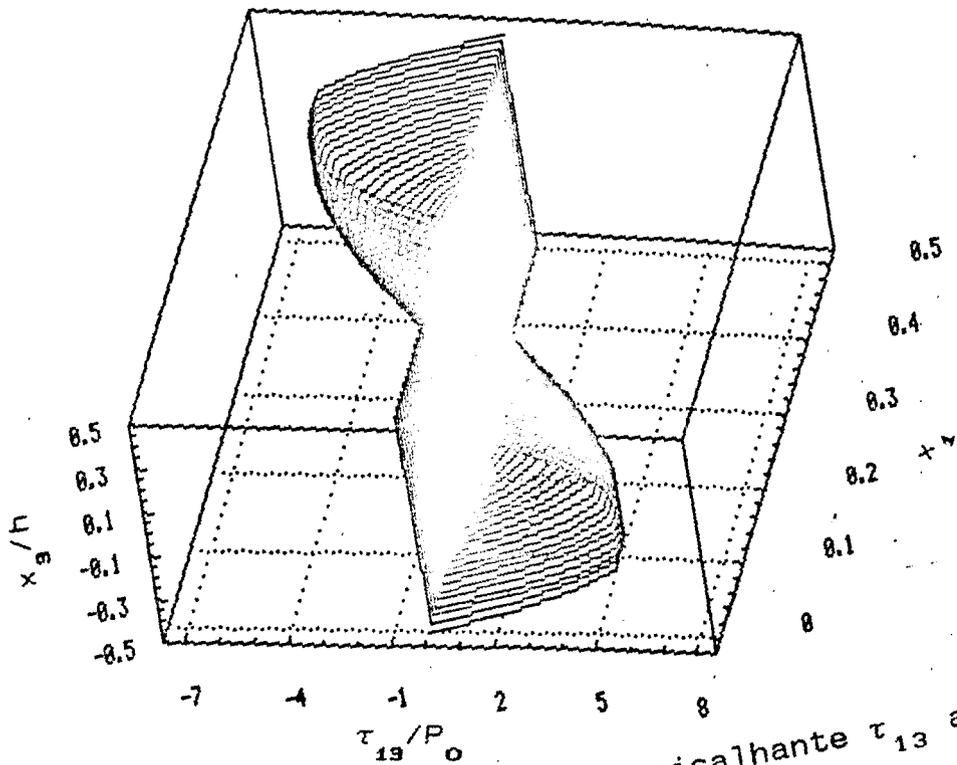


Figura 5.12 - Variação da tensão cisalhante  $\tau_{13}$  ao longo da espessura e do eixo  $ox_1$ , em  $x_2 = 0.5a$ .

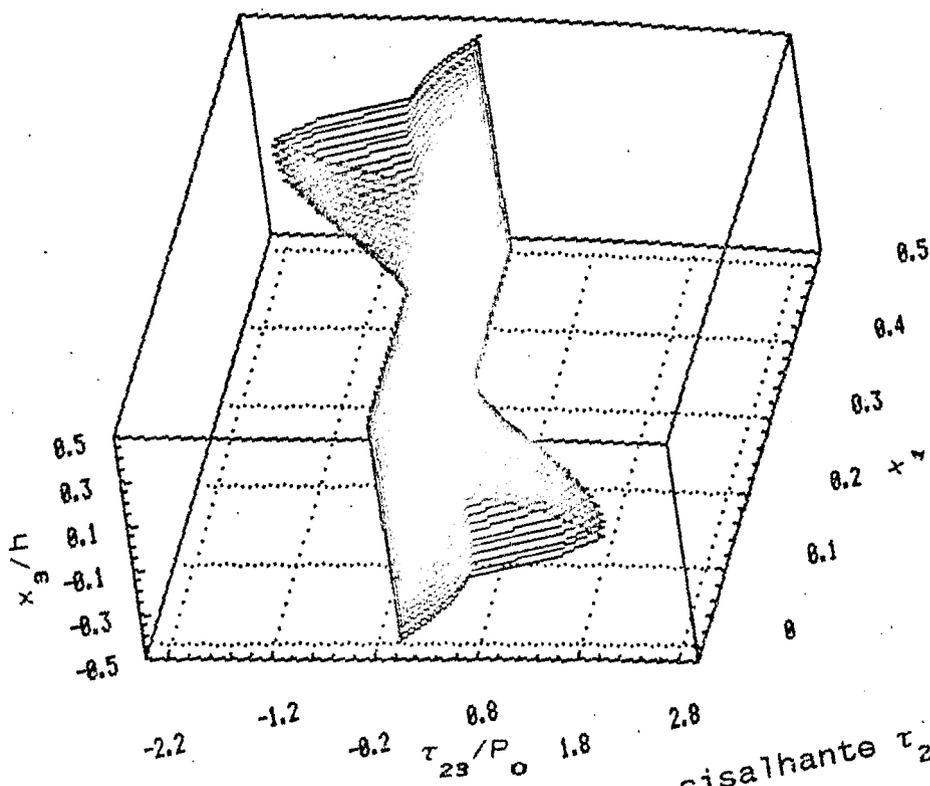


Figura 5.13 - Variação da tensão cisalhante  $\tau_{23}$  ao longo da espessura e do eixo  $ox_1$ , em  $x_2 = 0.5a$ .

A figura 5.14 mostra a influência do alisamento das funções desenvolvidas em séries de Fourier, sobre o resultado da tensão cisalhante  $\tau_{23}$ .

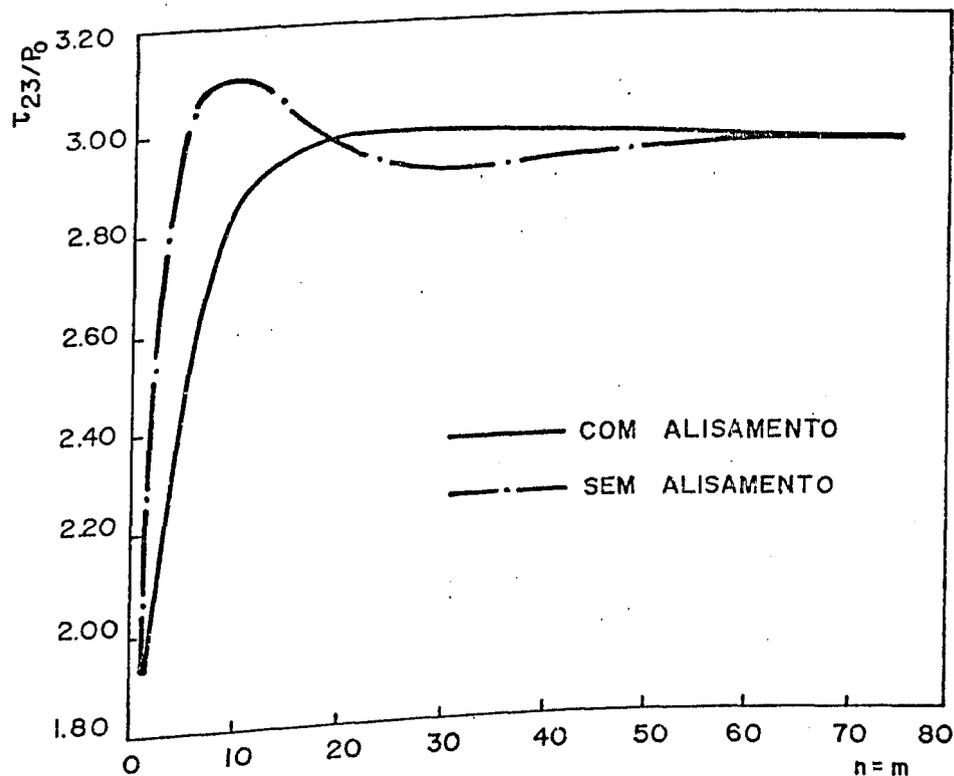


Figura 5.14 - Efeito do alisamento sobre o resultado de  $\tau_{23}$  (carregamento uniforme), para diferentes ordens de desenvolvimento das séries de Fourier.

Na prática, o alisamento das funções desenvolvidas em séries de Fourier permite uma maior confiabilidade na escolha da ordem de desenvolvimento destas séries. Em outras palavras, eliminando-se o efeito oscilatório imprevisível causado pelo Fenômeno de Gibbs, assegura-se uma maior regularidade dos resultados quando se muda o número de termos nas séries.

5.4.2 - SEGUNDO EXEMPLO

Nesta aplicação, as peles do sanduiche são em resina epóxi, reforçadas por fibras de grafite. A alma (colméia) é de resina, reforçada por fibras de vidro.

As características das peles ortotrópicas são :

$$E_L = 1.75 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad E_T = 7 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$G_{LT} = 3.50 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \quad G_{TT} = 1.4 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$$

Os índices L e T se referem às direções paralela e transversal das fibras, respectivamente.

A alma é isotrópica transversal, com as seguintes constantes elásticas :

$$E_1 = E_2 = 2.80 \times 10^8 \text{ N/m}^2 \quad E_3 = 3.5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$G_{13} = G_{23} = 4.20 \times 10^8 \text{ N/m}^2 \quad G_{12} = 1.12 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$\nu_{12} = \nu_{31} = \nu_{32} = 0.25$$

As dimensões da placa são :

$$a = 0.5 \text{ m} \quad , \quad b = 0.5 \text{ m} \quad , \quad h = 0.05 \text{ m} \quad , \quad t = 0.045 \text{ m}$$

O carregamento é senoidal na face superior, com  $P_0 = 1 \text{ MPa}$ .

A figura 5.15 mostra a variação do deslocamento  $u_1$  ao longo da espessura da placa. Os resultados são comparados com os de Phan Dang [21].

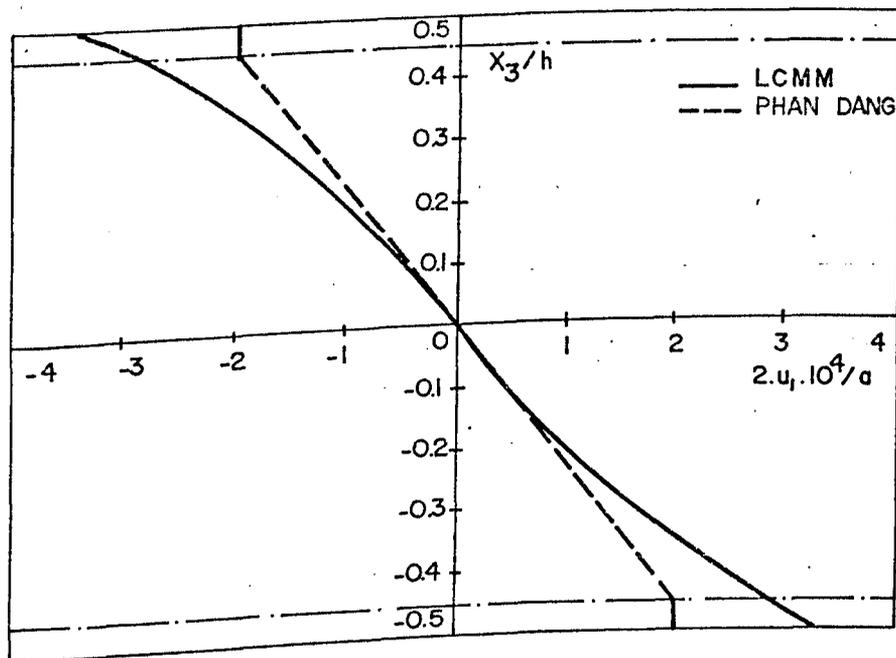


Figura 5.15 - Variação do deslocamento  $u_1$  ao longo da espessura, no ponto  $(a/4, a/4, x_3)$ .

A variação das tensões do plano médio da placa ao longo da espessura está mostrada nas figuras 5.16 e 5.17, comprovando que estas tensões atuam essencialmente nas peles. A seguir, a figura 5.18 mostra a evolução da flecha normalizada, quando a placa se torna mais delgada.

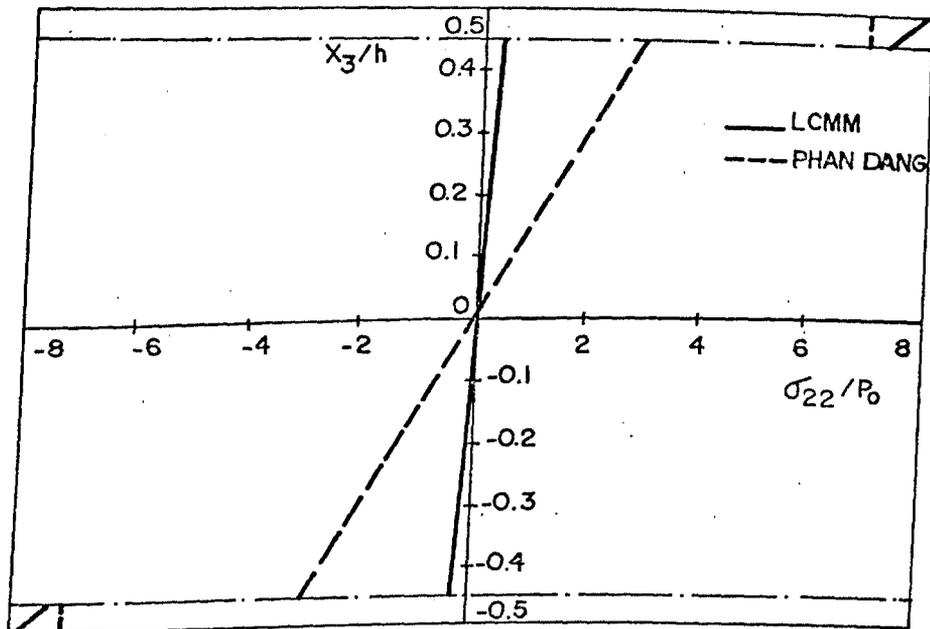


Figura 5.16 - Variação da tensão normal  $\sigma_{22}$  ao longo da espessura, no ponto  $(a/4, a/4, x_3)$ .

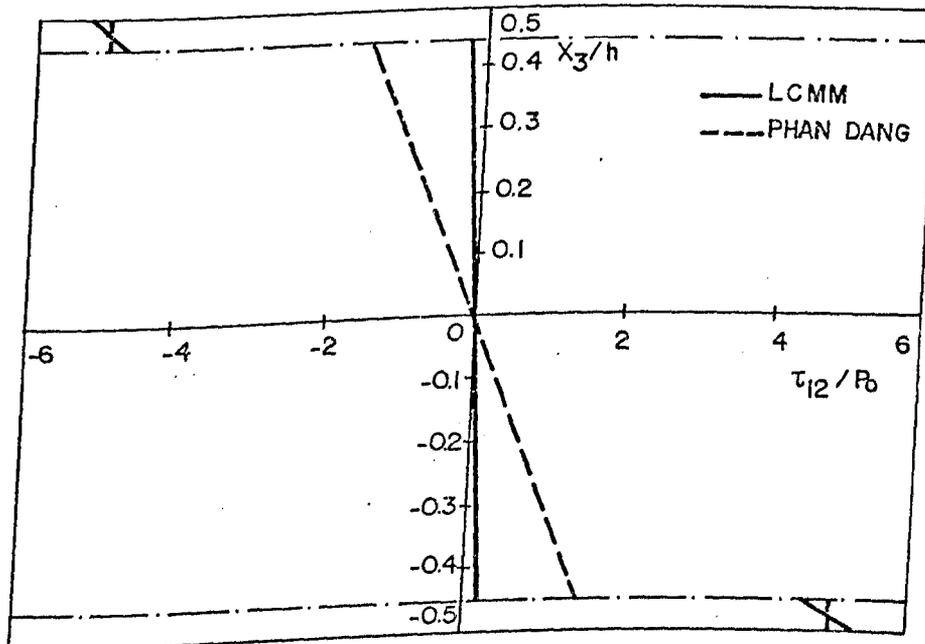


Figura 5.17 - Variação da tensão de cisalhamento  $\tau_{12}$  ao longo da espessura, no ponto  $(a/4, a/4, x_3)$ .

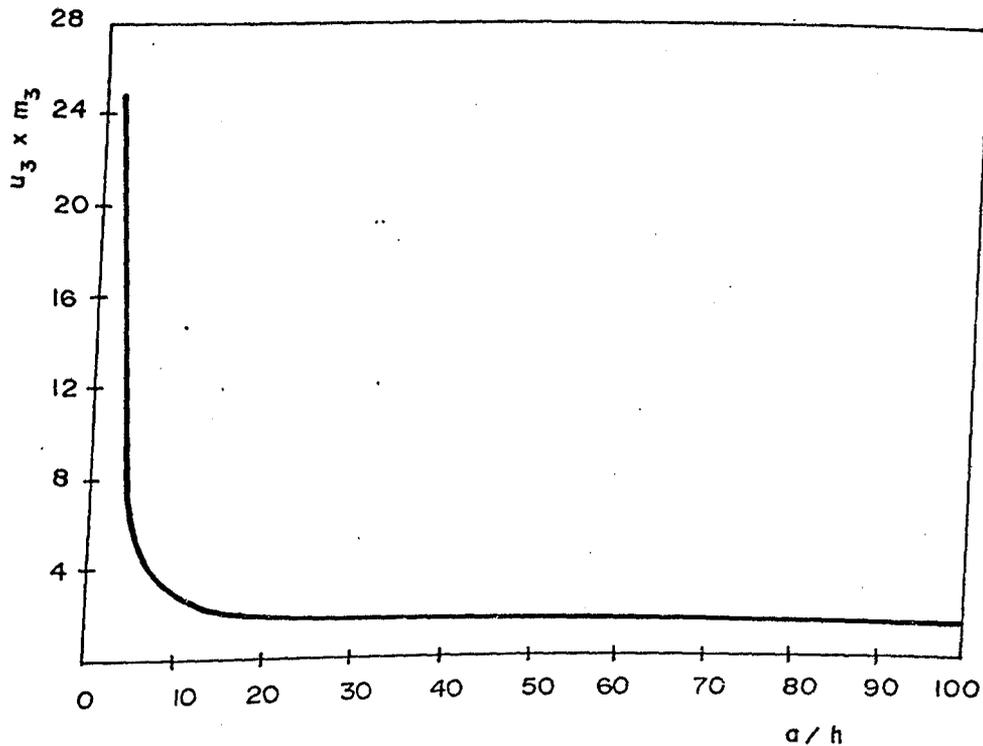


Figura 5.18 - Variação da flecha  $u_3 \times m_1$  em relação à espessura normalizada  $a/h$ , no ponto  $(0.5a, 0.5a, +h/2)$

Os diagramas tridimensionais das figuras 5.16 e 5.17 estão mostrados nos gráficos 5.19 e 5.20, ao longo do eixo  $ox_1$ .

Os exemplos subsequentes (figuras 5.21, 5.22 e 5.23) se referem à placas sanduíches assimétricas. São dados os gráficos relativos às figuras 5.15, 5.16 e 5.17, mudando-se apenas a espessura das peles ( $x_{3S} = 0.023$  m e  $x_{3I} = 0.022$  m).

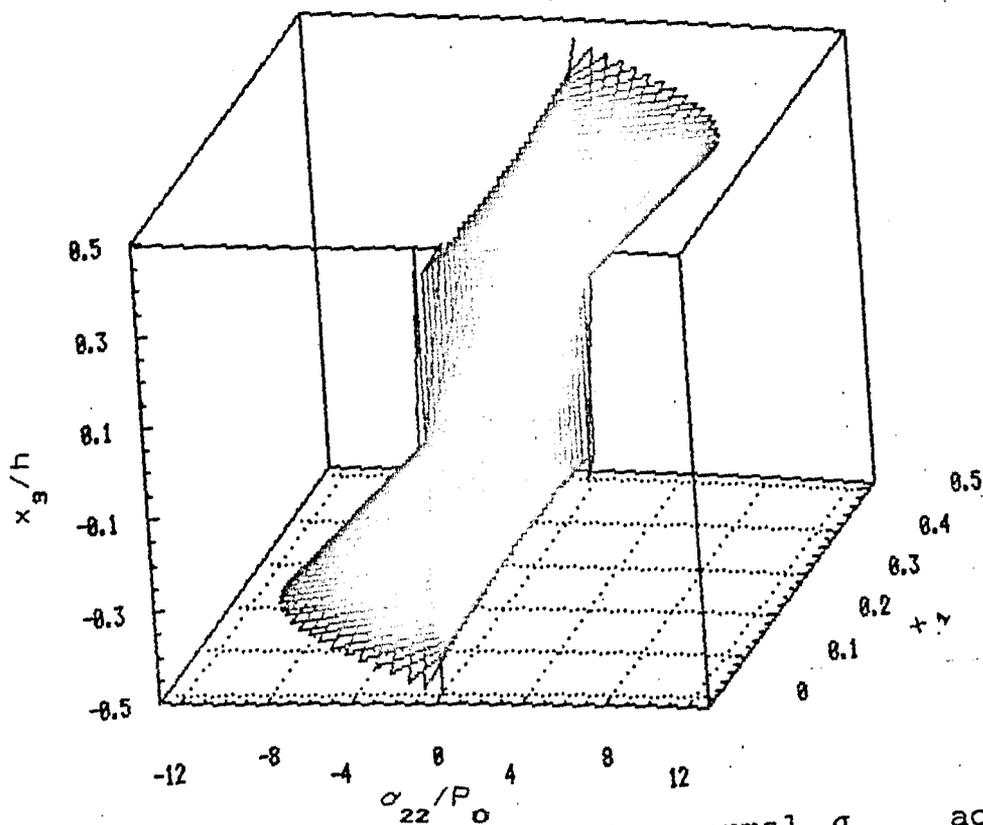


Figura 5.19 - Variação da tensão normal  $\sigma_{22}$  ao longo da espessura e do eixo  $ox_1$ , em  $x_2 = 0.5a$ .

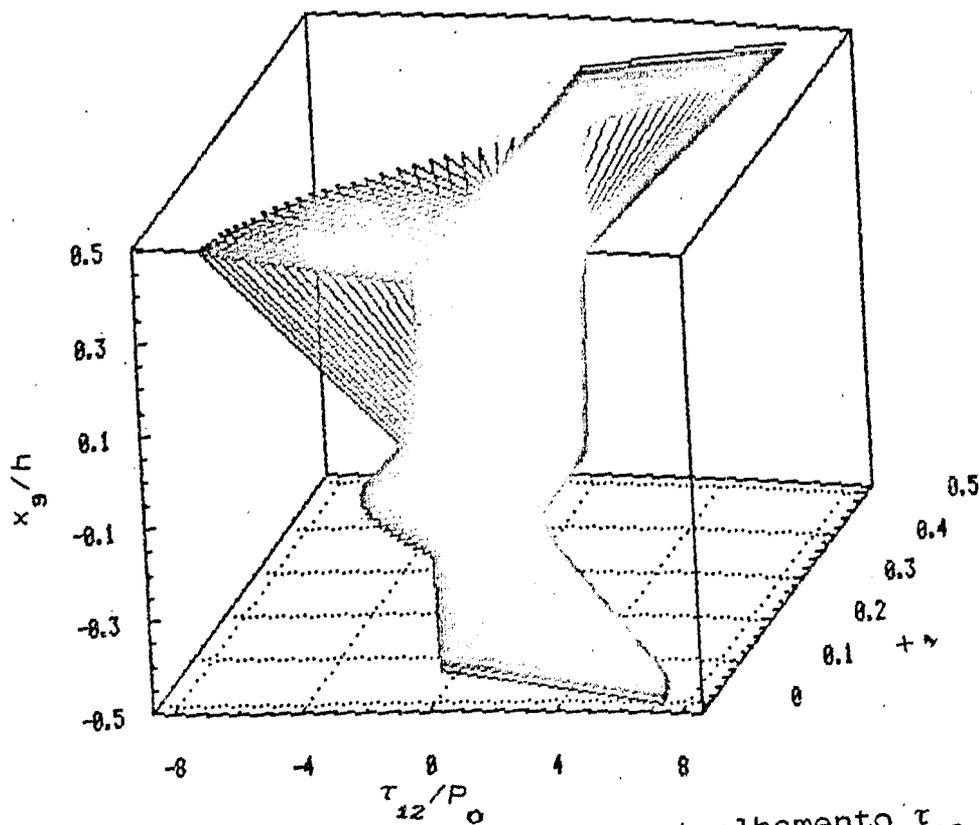


Figura 5.20 - Variação da tensão de cisalhamento  $\tau_{12}$  ao longo da espessura e do eixo  $ox_1$ , em  $x_2 = 0.5a$ .

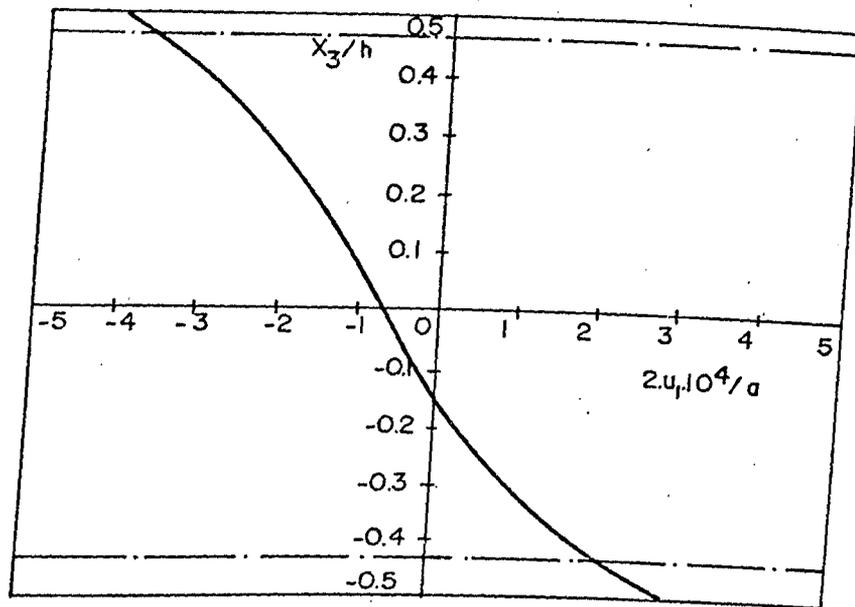


Figura 5.21 - Variação do deslocamento  $u_1$  ao longo da espessura, para uma placa assimétrica.

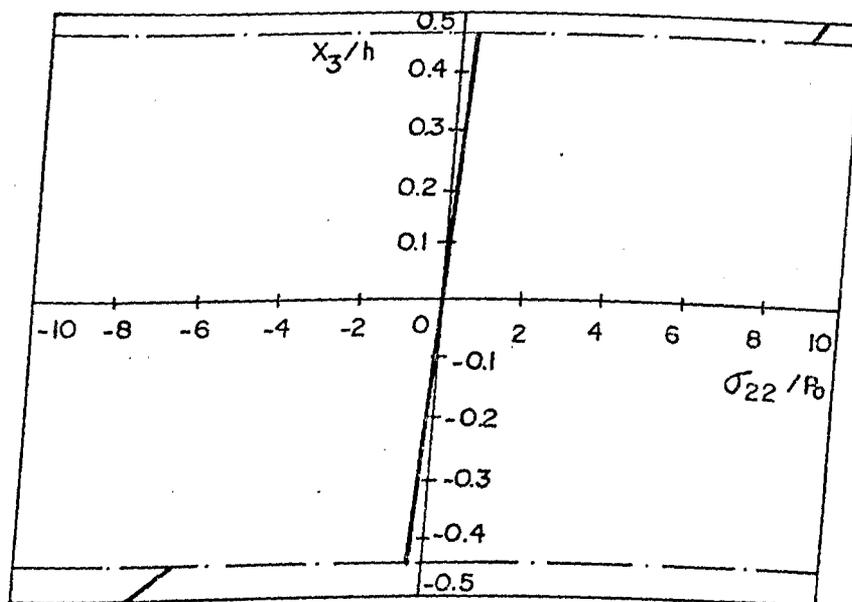


Figura 5.22 - Variação da tensão normal  $\sigma_{22}$  ao longo da espessura, para uma placa assimétrica.

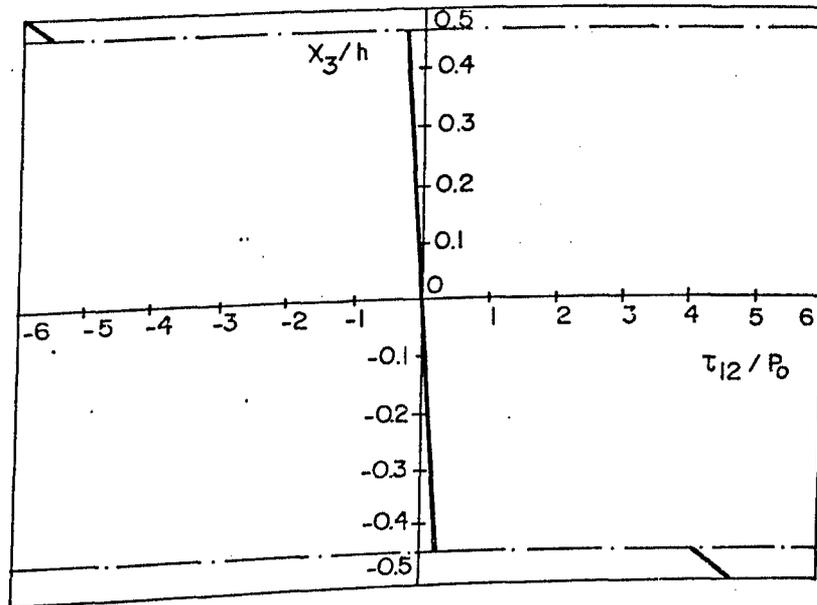


Figura 5.23 - Variação da tensão de cisalhamento  $\tau_{12}$  ao longo da espessura, para uma placa assimétrica.

Nota-se na figura 5.21 uma translação da curva do deslocamento, enquanto que os gráficos das tensões (figuras 5.22 e 5.23) mostram que os valores críticos estão na pele superior (que tem uma espessura menor), como era de se esperar.

## CAPÍTULO 6

CÁLCULO TRIDIMENSIONAL DE PLACAS SANDUÍCHES EM FLEXÃO  
USANDO ELEMENTOS FINITOS6.1 - INTRODUÇÃO

O procedimento de cálculo utilizado é baseado no estudo de B.N.Pandia e T.Kant [16], que desenvolveram uma formulação para elementos finitos da teoria de ordem superior, aplicada à flexão em laminados compostos. O princípio considera um campo de variáveis contínuo nas interfaces dos elementos, ou seja, admite continuidade  $C^0$ . Esta modelização permite uma aproximação muito boa em relação aos métodos considerados tradicionais.

6.2 - APRESENTAÇÃO DO MODELO ANALÍTICO DE CÁLCULO

O campo de deslocamentos adotado é da seguinte forma :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 \psi_1(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_1(x_1, x_2)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 \psi_2(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_2(x_1, x_2) \quad (6.1)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^0(x_1, x_2) + x_3^2 \theta_3(x_1, x_2)$$

Esta suposição de cálculo é consistente no sentido de que é prevista uma variação linear da deformação normal na direção  $x_3$ , e uma variação parabólica para as deformações cisalhantes transversais. Isto quer dizer que a introdução dos fatores de correção de cisalhamento é dispensada.

Utilizando a expressão 4.14, obtém-se o campo de deformações:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= x_3 k_1 + x_3^3 k_1^* & \varepsilon_{22} &= x_3 k_2 + x_3^3 k_2^* \\
 \varepsilon_{33} &= x_3 k_3 & \gamma_{12} &= x_3 k_{12} + x_3^3 k_{12}^* \\
 \gamma_{13} &= \varphi_1 + x_3^2 \varphi_1^* & \gamma_{23} &= \varphi_2 + x_3^2 \varphi_2^*
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde :

$$\begin{aligned}
 [k_1, k_2, k_{12}]^t &= [\psi_{1,1}, \psi_{2,2}, \psi_{1,2} + \psi_{2,1}]^t \\
 [k_1^*, k_2^*, k_{12}^*, k_3]^t &= [\phi_{1,1}, \phi_{2,2}, \phi_{1,2} + \phi_{2,1}, 2\theta_3]^t \\
 [\varphi_1, \varphi_2]^t &= [u_{3,1}^0 + \psi_1, u_{3,2}^0 + \psi_2]^t \\
 [\varphi_1^*, \varphi_2^*]^t &= [\theta_{3,1} + 3\phi_1, \theta_{3,2} + 3\phi_2]^t
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

O procedimento de cálculo das tensões é análogo ao desenvolvido no capítulo anterior, ou seja, é feita uma integração das tensões ao longo da espessura, para se obter as equações constitutivas dos esforços sobre a placa :

$$\begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

onde :

$[ M ]$  e  $[ Q ]$  são os vetores momento e cortante resultantes

$$[ M ] = [ M_1, M_2, M_{12}, M_1^*, M_2^*, M_{12}^*, M_3 ]^t \quad (6.5)$$

$$[ Q ] = [ Q_1, Q_2, S_1, S_2 ]^t$$

sendo  $M_1, M_2, M_{12}, M_1^*, M_2^*, M_{12}^*, M_3, Q_1, Q_2, S_1$  e  $S_2$  os

valores das expressões 4.9.

$$[ k ] = [ k_1, k_2, k_{12}, k_1^*, k_2^*, k_{12}^*, k_3 ]^t \quad (6.6)$$

$$[ \varphi ] = [ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^* ]^t$$

A matriz de rigidez  $[D]$ , dada a seguir, possui os termos idênticos àqueles das expressões 5.4 .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$D_{11}$	$D_{12}$	0	$H_{11}$	$H_{12}$	0	$D_{13}$	0	0	0	0	0	1
$D_{12}$	$D_{22}$	0	$H_{12}$	$H_{22}$	0	$D_{23}$	0	0	0	0	0	2
0	0	$D_{66}$	0	0	$H_{66}$	0	0	0	0	0	0	3
$H_{11}$	$H_{12}$	0	$L_{11}$	$L_{12}$	0	$H_{13}$	0	0	0	0	0	4
$H_{12}$	$H_{22}$	0	$L_{12}$	$L_{22}$	0	$H_{23}$	0	0	0	0	0	5
0	0	$H_{66}$	0	0	$L_{66}$	0	0	0	0	0	0	6
$D_{13}$	$D_{23}$	0	$H_{13}$	$H_{23}$	0	$D_{33}$	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	0	0	$A_{55}$	0	$D_{55}$	0	0	8
0	0	0	0	0	0	0	0	$A_{44}$	0	$D_{44}$	0	9
0	0	0	0	0	0	0	$D_{55}$	0	$H_{55}$	0	0	10
0	0	0	0	0	0	0	0	$D_{44}$	0	$H_{44}$	0	11

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} =$$

### 6.3 - DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

#### 6.3.1 - O PRINCÍPIO VARIACIONAL

A energia potencial total do sistema  $\pi$  é dada por :

$$\pi = \frac{1}{2} \iint_A [\epsilon]^t [\sigma] dA - \iint_A (P_1 + P_2) \left( u_3^0 + \frac{1}{4} h^2 \theta_3 \right) dA \quad (6.7)$$

onde,

$[\epsilon]$  é o vetor deformação generalizado, que vale :

$$[ \epsilon ] = [ k_1, k_2, k_{12}, k_1^*, k_2^*, k_{12}^*, k_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^* ]^t \quad (6.8)$$

$[ \sigma ]$  é o vetor tensão generalizado, dado por :

$$[ \sigma ] = [ M_1, M_2, M_{12}, M_1^*, M_2^*, M_{12}^*, M_3, Q_1, Q_2, Q_1^*, Q_2^* ]^t \quad (6.9)$$

$P_1$  e  $P_2$  são os carregamentos transversais que atuam nas faces da placa.

### 6.3.2 - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS GENERALIZADOS

A energia potencial  $\pi$ , no domínio  $\Omega$ , pode ser escrita como a soma das energias dos  $n$  elementos, nos subdomínios  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ , isto é :

$$\pi ( \delta ) = \sum_{e=1}^n \pi^{(e)} ( \delta ) \quad (6.10)$$

sendo  $\delta$  o vetor dos deslocamentos generalizados, definido da seguinte forma :

$$\delta = [ u_3^0, \psi_1, \psi_2, \theta_3, \phi_1, \phi_2 ]^t \quad (6.11)$$

Considerando continuidade  $C^0$ , este vetor é discretizado como :

$$\delta = \sum_{i=1}^{NNE} N_i(x_1, x_2) \delta_i \quad (6.12)$$

onde NNE é o número de nós por elemento e  $N_i(x_1, x_2)$  são as funções de interpolação associadas a cada nó  $i$ .

Nesta análise será utilizado um elemento quadrilateral de lados curvos com 9 nós. Este elemento pode ser visto abaixo, em coordenadas locais ."

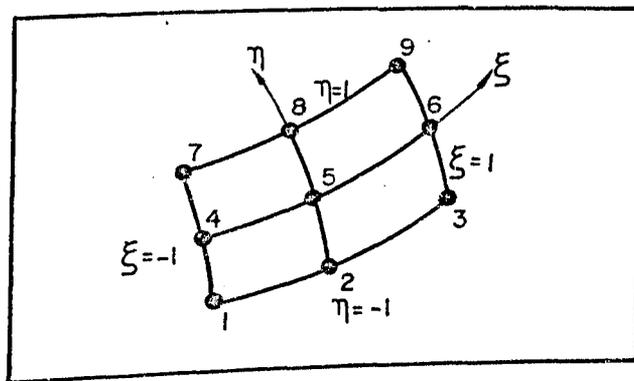


Figura 6.1 - Elemento isoparamétrico com 9 nós

As coordenadas locais dos nós do elemento são dadas por :

$$x_1 = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) x_{1i} \quad x_2 = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) x_{2i} \quad (6.13)$$

onde  $x_{1i}$  e  $x_{2i}$  são as coordenadas globais dos nós que compõem a placa.

As 9 funções de interpolação valem :

$$N_1 = [0.5\xi (\xi - 1)] [0.5\eta (\eta - 1)]$$

$$N_2 = [1 - \xi^2] [0.5\eta (\eta - 1)]$$

$$N_3 = [0.5\xi (\xi + 1)] [0.5\eta (\eta - 1)]$$

$$N_4 = [0.5\xi (\xi - 1)] [1-\eta^2]$$

$$N_5 = [1-\xi^2] [1-\eta^2]$$

$$N_6 = [0.5\xi (\xi + 1)] [1-\eta^2] \quad (6.14)$$

$$N_7 = [0.5\xi (\xi - 1)] [0.5\eta (\eta + 1)]$$

$$N_8 = [1-\xi^2] [0.5\eta (\eta + 1)]$$

$$N_9 = [0.5\xi (\xi + 1)] [0.5\eta (\eta + 1)]$$

### 6.3.3 - VETOR DEFORMAÇÃO GENERALIZADO

Com o vetor deslocamento generalizado  $\delta$  conhecido em todos os pontos do elemento, o vetor deformação (fórmula 6.8) é calculado pela expressão :

$$[\epsilon] = \sum_{i=1}^9 [B]_i \delta_i \quad (6.15)$$

sendo  $[B]_i$  a matriz que relaciona deformação e deslocamento, dada a seguir.

$$[B]_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & 0 & 2N_i & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 3N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 & 3N_i \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Para expressar os componentes de  $[B]_i$  em coordenadas locais, as seguintes relações são utilizadas :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (6.17)$$

onde  $[J]$  é a matriz Jacobiano associada a um elemento, que vale [23] :

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} (\xi, \eta) x_{1i} & \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} (\xi, \eta) x_{2i} \\ \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (\xi, \eta) x_{1i} & \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (\xi, \eta) x_{2i} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

#### 6.3.4 - EQUAÇÕES DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

Usando as relações padrões [24], a matriz de rigidez do elemento em termos de coordenadas locais, é escrita como :

$$[K]_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]_i^T [D] [B(\xi, \eta)]_j |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (6.19)$$

$$i = 1, 2, \dots, j, \dots, 9$$

Esta integral é calculada numericamente pelo método da quadratura de Gauss :

$$[K]_{ij}^{(e)} = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} w_i w_j [B(\xi_i, \eta_j)]_i^T [D] [B(\xi_i, \eta_j)]_j |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (6.20)$$

onde :

$W_i$  e  $W_j$  são os fatores de peso da integração ;

$\xi_i$  e  $\eta_j$  são os pontos da quadratura ;

NG é o número de pontos de integração em cada direção, adotado igual a 4.

### 6.3.5 - VETOR FORÇA DO ELEMENTO

O vetor força devido à carga distribuída transversal  $P$ , é escrito sob a forma :

$$[F]_i^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_i(\xi, \eta)]^t [P] |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (6.21)$$

Expressando numericamente esta integral, tem-se :

$$[F]_i^{(e)} = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} W_i W_j |J(\xi_i, \eta_j)| N_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} h^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (P_1 + P_2) \quad (6.22)$$

Os carregamentos nodais  $P_1$  e  $P_2$  sobre as faces da placa podem ser expandidos em séries de Fourier, como foi feito no capítulo 5.

### 6.3.6 - EQUAÇÃO FORÇA-DESLOCAMENTO DO ELEMENTO

Observando-se as equações de rigidez e força, monta-se o seguinte sistema para o elemento :

$$[K]^{(e)} [\delta]^{(e)} = [F]^{(e)} \quad (6.23)$$

Neste sistema, a matriz de rigidez completa é da forma :

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} [K]^{11} & [K]^{12} & \dots & [K]^{19} \\ [K]^{21} & [K]^{22} & \dots & [K]^{29} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K]^{91} & [K]^{92} & \dots & [K]^{99} \end{bmatrix} \quad 54 \times 54 \quad (6.24)$$

Este arranjo dos termos implica que o vetor dos deslocamentos nodais discretos tenha a seguinte ordenação :

$$[\delta]^{(e)} = \begin{bmatrix} [\delta]^1 \\ [\delta]^2 \\ [\delta]^3 \\ [\delta]^4 \\ [\delta]^5 \\ [\delta]^6 \end{bmatrix} \quad 54 \times 1 \quad (6.25)$$

De forma análoga, o vetor das forças generalizadas é dado por :

$$[F]^{(e)} = \begin{bmatrix} [F]^1 \\ [F]^2 \\ [F]^3 \\ [F]^4 \\ [F]^5 \\ [F]^6 \end{bmatrix} \quad 54 \times 1 \quad (6.26)$$

### 6.3.7 - SISTEMA GLOBAL DE EQUAÇÕES

Após a montagem das equações elementares, o próximo passo na formulação de elementos finitos é o acoplamento destas equações, formando o sistema global. Este sistema tem a mesma forma do elementar, com as dimensões expandidas.

$$[K]_{6m \times 6m} [\delta]_{6m \times 1} = [F]_{6m \times 1} \quad (6.27)$$

sendo  $m$  o número de nós globais da placa.

### 6.3.8 - CÁLCULO DAS DEFORMAÇÕES E TENSÕES

#### 6.3.8.1 - CÁLCULO DIRETO, USANDO ELEMENTOS FINITOS

Obtidos os deslocamentos generalizados em cada nó da placa através da equação 6.27, as deformações podem ser calculadas pelas expressões 6.2. Para isto, o campo de deslocamentos é interpolado, conforme equação 6.12 :

$$\delta(\xi, \eta) = \delta_1 N_1(\xi, \eta) + \delta_2 N_2(\xi, \eta) + \dots + \delta_9 N_9(\xi, \eta) = \delta_i N_i \quad (6.28)$$

Utilizando a fórmula 6.17, pode-se escrever :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \delta}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \delta}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

onde :

$$\frac{\partial \delta}{\partial \xi} = \delta_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \eta} = \delta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

Calculadas as deformações, as tensões são obtidas pela lei de comportamento 4.15.

#### 6.3.8.2 - CÁLCULO POR DIFERENÇAS FINITAS

Quando o cálculo das tensões é feito usando-se elementos de ordem  $C^0$ , há uma descontinuidade destas tensões de elemento para elemento, gerando uma imprecisão nos resultados.

Uma forma de resolver este problema é de se calcular as tensões por diferenças finitas, que considera para as derivadas os valores nodais dos deslocamentos generalizados, evitando a descontinuidade.

Por outro lado, a técnica de diferenças finitas tem suas limitações em relação ao método de elementos finitos, como por exemplo a dificuldade de se variar a geometria da placa.

Para o cálculo das deformações ao longo da placa, foram utilizados três métodos :

##### a) Diferenças Superiores ("Forward Difference")

Este processo foi aplicado no cálculo das deformações dos pontos nas fronteiras esquerda e inferior da placa. A fórmula

para a derivada no nó  $n$ , usando 3 pontos, é :

$$\begin{aligned}
 y'_n &= \frac{2x_n - x_{n+1} - x_{n+2}}{x_n^2 - x_n x_{n+1} - x_n x_{n+2} + x_{n+1} x_{n+2}} y_n + \\
 &\quad \frac{x_n - x_{n+2}}{x_{n+1}^2 - x_n x_{n+1} + x_n x_{n+2} - x_{n+1} x_{n+2}} y_{n+1} + \\
 &\quad \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+2}^2 + x_n x_{n+1} - x_n x_{n+2} - x_{n+1} x_{n+2}} y_{n+2}
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

b) Diferenças Inferiores ("Backward Difference")

As diferenças inferiores foram utilizadas para o cálculo das deformações nos pontos da fronteira direita e superior da placa. A derivada vale :

$$\begin{aligned}
 y'_n &= \frac{2x_n - x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n^2 - x_n x_{n-1} - x_n x_{n-2} + x_{n-1} x_{n-2}} y_n + \\
 &\quad \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-2}^2 - x_n x_{n-2} + x_n x_{n-1} - x_{n-1} x_{n-2}} y_{n-2} + \\
 &\quad \frac{x_n - x_{n-2}}{x_{n-1}^2 - x_n x_{n-1} - x_n x_{n-2} - x_{n-1} x_{n-2}} y_{n-1}
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

c) Diferenças Centrais ("Central Difference")

Para os demais pontos da placa utilizou-se a fórmula das diferenças centrais, dada por :

$$\begin{aligned}
 y'_n = & \frac{2 x_n - x_{n+1} - x_{n-1}}{x_n^2 - x_n x_{n+1} - x_n x_{n-1} + x_{n-1} x_{n+1}} y_n + \\
 & \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n-1}^2 + x_n x_{n+1} - x_n x_{n-1} - x_{n-1} x_{n+1}} y_{n-1} + \\
 & \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1}^2 - x_n x_{n+1} + x_n x_{n-1} - x_{n-1} x_{n+1}} y_{n+1}
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

6.3.9 - ESTRUTURA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL ELABORADO

Com as formulações descritas, foi elaborado um programa computacional em linguagem FORTRAN 5.0. Este programa é estruturado, com entrada e saída via arquivo de dados (estes arquivos estão mostrados no ANEXO IV).

Para a montagem e resolução do sistema global de equações foi utilizada uma subrotina otimizada, elaborada por Ribeiro [25].

A configuração básica do programa é dada a seguir.

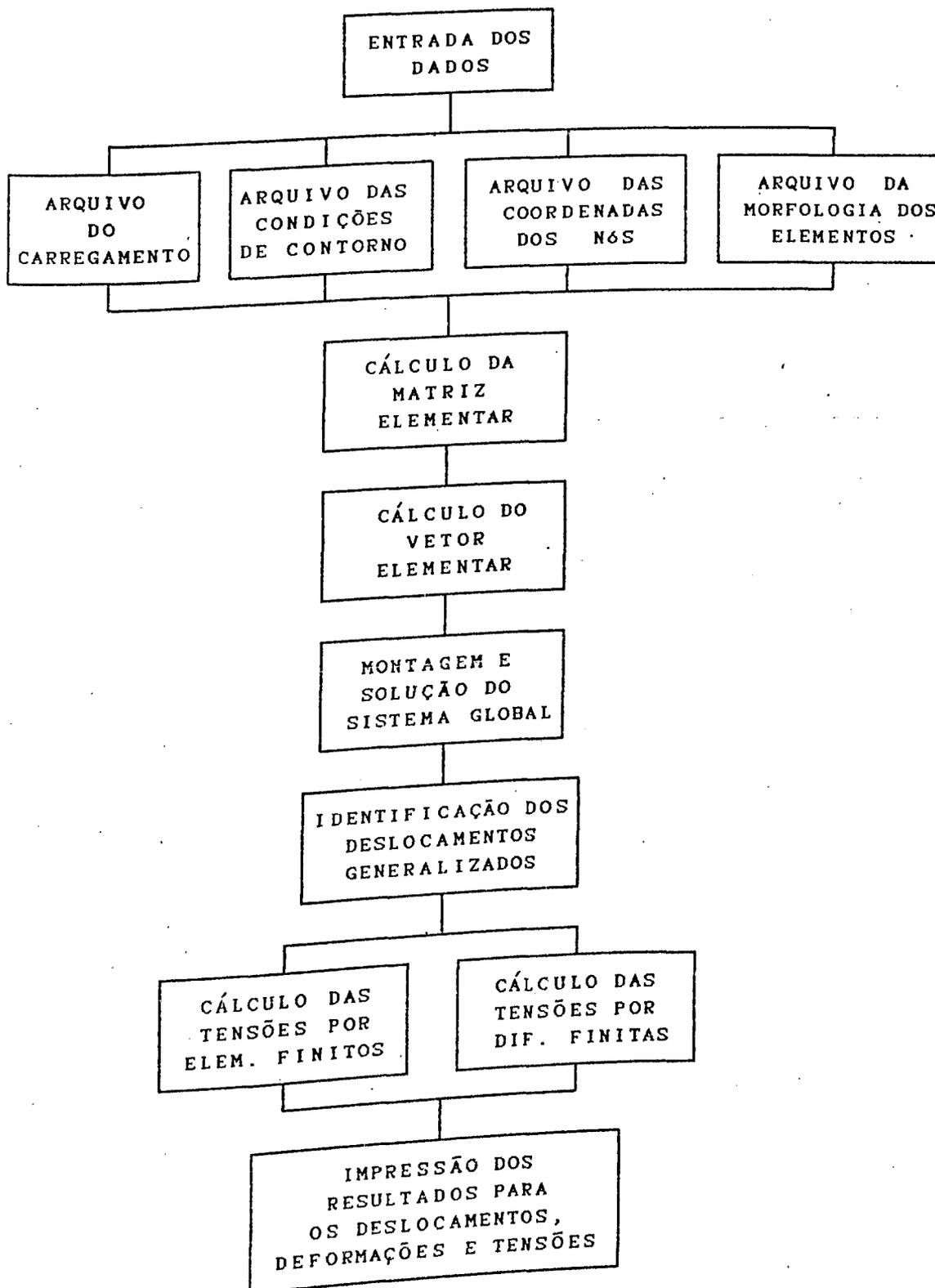


Figura 6.2 - Organograma do programa de elementos finitos

## 6.4 - ANÁLISE NUMÉRICA

Nesta seção, um breve exame da simulação por elementos finitos será feito, e os resultados serão comparados com os da formulação desenvolvida por séries de Fourier.

A placa sanduíche neste caso é simplesmente apoiada, tendo as seguintes condições de contorno :

$$u_3^0 = \theta_3 = \psi_t = \phi_t = 0$$

As características geométricas e mecânicas do material são as mesmas do segundo exemplo do capítulo 5. A malha utilizada no cálculo tem a seguinte configuração :

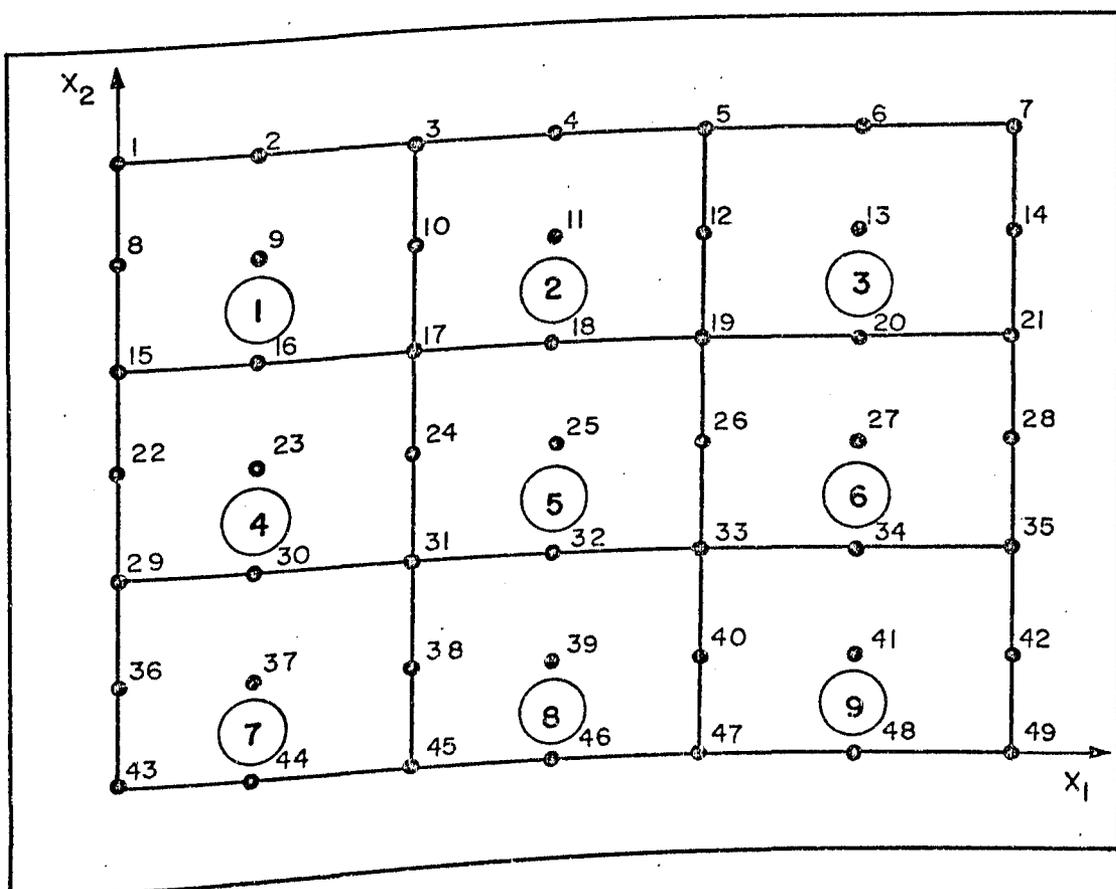


Figura 6.3 - Malha de elementos finitos

O cálculo das tensões foi feito em alguns nós da placa, na cota  $x_3 = +h/2$ . Dois tipos de carregamento transversal foram considerados : uniforme e senoidal.

a) Carregamento uniforme

Os resultados para os deslocamentos estão mostrados na tabela 6.1. Eles demonstram uma correlação muito boa com os valores calculados pela formulação que utiliza séries de Fourier.

Tabela 6.1 - Deslocamentos para uma placa sanduíche sob carregamento uniforme, calculados por elementos finitos e séries de Fourier

DESLOC. NÓ	$u_1 \times 10^{-4}$		$u_2 \times 10^{-4}$		$u_3 \times 10^{-3}$	
	FOURIER	EL.FIN.	FOURIER	EL.FIN.	FOURIER	EL.FIN.
13	1.285	1.279	2.050	2.069	0.942	0.941
17	-1.147	-1.150	1.154	1.524	2.411	2.403
18	0	0	1.770	1.766	2.739	2.730
23	-2.282	-2.270	0	0	1.594	1.591
25	0	0	0	0	3.029	3.019
30	-2.051	-2.045	-0.890	-0.865	1.453	1.449
37	-1.290	-1.282	-2.044	-2.074	0.954	0.946
40	0.714	0.712	-3.455	-3.463	1.550	1.540

2) Carregamento senoidal

Neste caso as tensões foram calculadas por diferenças finitas. O carregamento foi obtido pela expansão em séries de Fourier.

Tabela 6.2 - Tensões normais para uma placa sanduíche sob carregamento senoidal, calculadas por elementos finitos e séries de Fourier.

TENSÃO NÓ	$\sigma_{11} \times 10^8$		$\sigma_{22} \times 10^7$		$\sigma_{33} \times 10^6$	
	FOURIER	EL.FIN.	FOURIER	EL.FIN.	FOURIER	EL.FIN.
13	0.475	0.457	0.391	0.384	0.976	0.984
17	1.439	1.361	1.184	1.098	2.774	2.503
18	1.660	1.595	1.365	1.280	3.200	3.240
23	0.957	0.921	0.787	0.776	1.898	1.986
25	1.914	1.845	1.574	1.552	3.914	3.986
30	0.830	0.797	0.682	0.641	1.599	1.624
37	0.478	0.461	0.393	0.387	0.922	0.992
40	0.830	0.786	0.682	0.663	1.422	1.530

### 6.5 - ANÁLISE DAS DUAS METODOLOGIAS DE CÁLCULO

Os valores das tabelas 6.1 e 6.2 demonstram que um refinamento da malha poderia aproximar mais os resultados. Desta forma, a resolução do problema por elementos finitos mostrou ser eficiente. Além disso, o MEF tem as vantagens de se poder variar a geometria da placa (inclusive a espessura); escolher-se um carregamento qualquer (inclusive cargas nodais concentradas), e impor-se condições de contorno arbitrarias. Por outro lado, a formulação que utiliza Fourier tem uma precisão maior dos resultados, indicando uma possível aplicação em otimização de estruturas de materiais compostos em geral. Isto é de grande valia, visto que o ganho de décimos de milímetros no cálculo destes materiais pode significar uma grande economia no projeto final.

## CAPÍTULO 7

### CÁLCULO DE PLACAS SANDUÍCHES SOB AÇÃO HIGROTÉRMICA

#### 7.1 - INTRODUÇÃO

Com o aumento da aplicação dos materiais compostos no setor aeroespacial e na engenharia de estruturas, o comportamento termomecânico e higromecânico destes materiais tem recebido grande atenção.

É sabido que os compostos de matriz polimérica em geral são sensíveis às variações de temperatura e à concentração de umidade. A absorção de umidade por exemplo, reduz a temperatura de transição vítrea da matriz, diminuindo as características de resistência da estrutura à temperaturas elevadas. Outras propriedades mecânicas são afetadas pelos efeitos higrotérmicos, como a tenacidade à fratura e a resistência ao impacto.

Do ponto de vista do comportamento mecânico, estes fenômenos induzem à deformações locais, que ao nível global geram tensões internas. Estas tensões podem ser causadas por dois fatores básicos :

- anisotropia dos materiais : a heterogeneidade da estrutura provoca expansões e contrações diferenciadas dos componentes, gerando as tensões ;

- condições de contorno : as restrições na fronteira bloqueiam os deslocamentos, produzindo as tensões, mesmo quando não há gradientes térmicos ou de umidade.

Neste capítulo será desenvolvido um estudo de cálculo das tensões em placas sanduíches assimétricas, sob diversas formas de ação térmica.

## 7.2 - METODOLOGIA DE CÁLCULO

### 7.2.1 - TEORIAS DE CÁLCULO DAS TENSÕES HIGROTÉRMICAS

A maioria dos autores que tem abordado o tema, o fazem de maneira a focar um aspecto particular da estrutura, ou então utilizam formulações que simplificam as variáveis envolvidas no problema. R. B. Pipes e outros [26] calcularam as tensões residuais no plano da placa, induzidas pelas características higroscópicas e termoelásticas de compostos unidirecionais. R. Hussein [27] determinou as tensões cisalhantes transversais de origem térmica em painéis sanduíches, destacando as características de vinculação entre as peles e a alma. Y.R. Wang e T. Chou [28] estudaram as tensões térmicas tridimensionais em laminados compostos, sob regime transiente. A.S.D. Wang e F.W. Crossman [29] analisaram as tensões induzidas nos bordos livres. O método "strip-prisma-finito" foi utilizado por K.P. Chong e outros [30] para o cálculo das tensões em painéis sanduíches pré-fabricados, com aplicação na construção civil. W.B. Avery e C.T. Heracovich [31] estudaram o efeito da

anisotropia das fibras nas tensões térmicas. H.I. Ene [32] desenvolveu uma formulação matemática mais elaborada para a dedução das equações constitutivas. A fase plástica das deformações térmicas foi estudada por G. J. Dvorak [33]. M.V.Gandhi e outros [34] analisaram dinamicamente uma placa sujeita a um meio higrotérmico, utilizando as equações de equilíbrio e montando um sistema de equações idêntico àquele do cálculo devido ao carregamento mecânico estático.

Uma abordagem mais genérica e consistente do assunto foi elaborada por J.N.Reddy e W.C.Chao [35]. Eles determinaram as tensões em placas multicamadas simplesmente apoiadas, sujeitas a diversos tipos de carregamentos térmicos. Para isto utilizaram a teoria das deformações cisalhantes, desenvolvendo as formulações através de séries de Fourier e por elementos finitos. Este estudo será a base da metodologia de cálculo desenvolvida a seguir.

#### 7.2.2 - FORÇAS RESULTANTES EQUIVALENTES

No caso geral da elasticidade, as deformações de origem térmica são somadas às deformações de origem mecânica :

$$\epsilon^{total} = \epsilon^{mecânica} + \epsilon^{térmica} \quad (7.1)$$

Desta forma, as deformações mecânicas são :

$$\epsilon^m = \epsilon^{total} - \epsilon^{térmica} \quad (7.2)$$

As tensões de origem térmica em cada camada  $k$  de um laminado, podem ser calculadas por 7.2 e pela lei de comportamento :

$$[ \sigma^T ]_k = [ C_{ij} ]_k [ \epsilon^m ]_k \quad (7.3)$$

Integrando esta equação ao longo da espessura da placa, determina-se as forças resultantes equivalentes para uma variação linear da temperatura . Estas forças são as ações normais e os momentos, sendo definidos na forma clássica pelas expressões :

$$[ N^T ] = \int_{-h/2}^{+h/2} [ C_{ij} ]_k [ \alpha ]_k t_0 dx_3 + \int_{-h/2}^{+h/2} [ C_{ij} ]_k [ \alpha ]_k t_1 x_3 dx_3 \quad (7.4)$$

$$[ M^T ] = \int_{-h/2}^{+h/2} [ C_{ij} ]_k [ \alpha ]_k t_0 x_3 dx_3 + \int_{-h/2}^{+h/2} [ C_{ij} ]_k [ \alpha ]_k t_1 x_3^2 dx_3 \quad (7.5)$$

ou ,

$$[ N^T ] = t_0 [ A^T ] + t_1 [ B^T ] \quad (7.6)$$

$$[ M^T ] = t_0 [ B^T ] + t_1 [ D^T ]$$

onde :

$t_0$  e  $t_1$  : parâmetros da distribuição de temperatura ;

$[ \alpha ]$  : tensor de dilatação térmica ;

$[ A^T ], [ B^T ], [ D^T ]$  : matrizes de rigidez

$$[A_i^T] = \sum_{k=1}^n [C_{ij}]_k [\alpha_j]_k (x_{3(k)} - x_{3(k-1)})$$

$$[B_i^T] = 1/2 \sum_{k=1}^n [C_{ij}]_k [\alpha_j]_k (x_{3(k)}^2 - x_{3(k-1)}^2) \quad (7.7)$$

$$[D_i^T] = 1/3 \sum_{k=1}^n [C_{ij}]_k [\alpha_j]_k (x_{3(k)}^3 - x_{3(k-1)}^3)$$

A análise termomecânica de um estratificado pode ser desacoplada da análise mecânica, calculando-se primeiro as forças resultantes equivalentes  $N^T$  e  $M^T$  e depois as forças mecânicas  $N$  e  $M$ . Os esforços e momentos resultantes do efeito térmico são calculados e posteriormente somados a  $N$  e  $M$ . É como se  $N^T$  e  $M^T$  fossem cargas exteriores agindo na placa, havendo portanto uma superposição de efeitos.

### 7.2.3 - EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

Um primeiro aspecto a se considerar é que as tensões térmicas em estruturas sanduíches podem ser consideráveis ou insignificantes, dependendo das propriedades elásticas dos componentes. Um painel sanduíche com uma alma que tenha baixos módulos elásticos pode não gerar tensões térmicas importantes. Todavia, se a alma possui alguma rigidez, as tensões atuam de forma significativa.

Outro fator que influencia decisivamente o comportamento da estrutura sob ação higrotérmica é a possibilidade de haver "deslizamento" entre as camadas. Neste sentido, serão adotadas as hipóteses clássicas de placas sanduíches, que supõem uma ligação perfeita entre as camadas.

#### 7.2.3.1 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O campo de deslocamentos adotado é o da teoria das deformações cisalhantes, expresso por :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_1(x_1, x_2)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = u_2^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_2(x_1, x_2) \quad (7.8)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^0(x_1, x_2)$$

Esta suposição para os deslocamentos é válida porque a tensão normal transversal  $\sigma_{33}$  pode ser desprezada. Neste caso esta tensão é pequena quando comparada com as outras componentes.

Outro ponto a se observar, é que a não consideração de variação parabólica para as deformações de cisalhamento transversal implica no uso dos fatores de correção cisalhante para estas tensões.

As equações de equilíbrio são obtidas de forma análoga ao descrito anteriormente ( capítulo 5 ), e valem :

$$N_{1,1} + N_{12,2} = f_1^T$$

$$N_{21,1} + N_{2,2} = f_2^T$$

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} = 0 \quad (7.9)$$

$$M_{1,1} + M_{12,2} - Q_1 = f_4^T$$

$$M_{21,1} + M_{2,2} - Q_2 = f_5^T$$

A placa sanduiche, constituída de camadas ortotrópicas, é simplesmente apoiada e as condições de contorno são satisfeitas com o desenvolvimento dos deslocamentos em séries de Fourier :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ( \dot{u}_1^{0\ mn} + x_3 \psi_1^{mn} ) \cos \frac{m\pi x_1}{a} \quad \text{sen} \frac{n\pi x_2}{b} \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ( u_2^{0\ mn} + x_3 \psi_2^{mn} ) \text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \quad \cos \frac{n\pi x_2}{b} \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ( u_3^{0\ mn} ) \text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \quad \text{sen} \frac{n\pi x_2}{b} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Quando substituídos nas equações de equilíbrio 7.9, os deslocamentos formam um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem, que pode ser colocado sob a forma já conhecida :

$$[ A ] [ U ] = [ f^T ] \quad (7.11)$$

A matriz de rigidez  $[A]$  é obtida tomando-se uma submatriz correspondente às cinco primeiras colunas e linhas da matriz 5.47 (ordem do sistema para  $k = 1$ ). Da mesma forma, o vetor dos deslocamentos generalizados  $[U]$  corresponde aos cinco primeiros termos de 4.12.

### 7.2.3.2 - CÁLCULO DO VETOR DAS FORÇAS TÉRMICAS $[f^t]$

Conforme foi discutido em 7.2.2, os efeitos térmicos são colocados sob a forma de forças resultantes equivalentes. Observando as equações de equilíbrio 7.9, tem-se :

$$[f^T] = \begin{bmatrix} N_{1,1}^T + N_{12,2}^T \\ N_{12,1}^T + N_{2,2}^T \\ 0 \\ M_{1,1}^T + M_{12,2}^T \\ M_{12,1}^T + M_{2,2}^T \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Como o sistema referencial da placa coincide com os eixos de ortotropia dos materiais, o tensor de dilatação térmica vale :

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Isto implica que os esforços  $N_{12}^T$  e  $M_{12}^T$  são iguais a zero.

Finalmente, observando as expressões 7.4, 7.5, 7.12 e 7.13, e após as simplificações, as forças térmicas resultam :

$$f_1^T{}^{mn} = \alpha [(A_{11} \alpha_{11} + A_{12} \alpha_{22}) T_0^{mn} + (B_{11} \alpha_{11} + B_{12} \alpha_{22}) T_1^{mn}]$$

$$f_2^T{}^{mn} = \beta [(A_{12} \alpha_{11} + A_{22} \alpha_{22}) T_0^{mn} + (B_{12} \alpha_{11} + B_{22} \alpha_{22}) T_1^{mn}]$$

$$f_3^T{}^{mn} = 0 \quad (7.14)$$

$$f_4^T{}^{mn} = \alpha [(B_{11} \alpha_{11} + B_{12} \alpha_{22}) T_0^{mn} + (D_{11} \alpha_{11} + D_{12} \alpha_{22}) T_1^{mn}]$$

$$f_5^T{}^{mn} = \beta [(B_{12} \alpha_{11} + B_{22} \alpha_{22}) T_0^{mn} + (D_{12} \alpha_{11} + D_{22} \alpha_{22}) T_1^{mn}]$$

Com estas expressões pode-se resolver o sistema 7.11, identificando-se os deslocamentos, as deformações e as tensões devido ao efeito térmico.

A seguir é feita uma apreciação mais detalhada da variação de temperatura na placa, e como os parâmetros envolvidos foram considerados nas formulações citadas.

#### 7.2.3.3 - CARREGAMENTO TÉRMICO

A distribuição de temperatura é linear ao longo da espessura da placa. Para isto, é considerada uma condução de calor em regime permanente unidirecional, ou seja :

$$\frac{d}{dx_3} \left( k \frac{dT}{dx_3} \right) = 0, \text{ portanto } T = \frac{c_1}{k} x_3 + c_2 \quad (7.15)$$

onde  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica na direção  $x_3$ ,

suposto constante com a variação da temperatura. A figura 7.1 mostra o esquema de variação da temperatura nas camadas do sanduíche assimétrico.

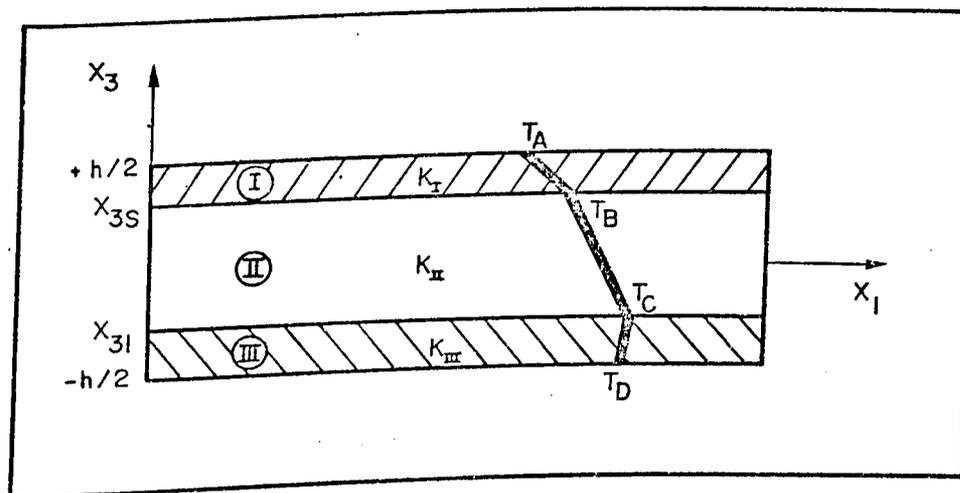


Figura 7.1 - Variação da temperatura ao longo de  $x_3$ .

Supondo que a função 7.15 é contínua por partes, tem-se :

$$T(x_3) = \begin{cases} T_I(x_3) & \text{se } x_{3S} \leq x_3 \leq +h/2 \\ T_{II}(x_3) & \text{se } x_{3I} \leq x_3 \leq x_{3S} \\ T_{III}(x_3) & \text{se } -h/2 \leq x_3 \leq x_{3I} \end{cases} \quad (7.16)$$

As equações de  $T_I(x_3)$ ,  $T_{II}(x_3)$  e  $T_{III}(x_3)$  são facilmente deduzidas, considerando que  $T_A$  e  $T_D$  são conhecidas, e utilizando-se da equação do fluxo de calor de Fourier :

$$q = -k \frac{dT}{dx_3} \quad (7.17)$$

Os resultados obtidos para estes cálculos são os seguintes :

a) Pele superior

$$T_I(x_3) = \underbrace{\left[ \frac{2(T_A - T_2)}{h} \right]}_{t_1} x_3 + t_0 \quad (7.18)$$

onde ,

$$t_0 = \frac{T_A x_{3S} - T_B h/2}{x_{3S} - h/2}$$

b) Alma

$$T_{II}(x_3) = \underbrace{\left[ \frac{(T_B - T_2)}{x_{3S}} \right]}_{t_1} x_3 + t_0 \quad (7.19)$$

onde ,

$$t_0 = \frac{T_B x_{3I} - T_C x_{3S}}{x_{3I} - x_{3S}}$$

c) Pele Inferior

$$T_{III}(x_3) = \underbrace{\left[ \frac{(T_C - T_2)}{x_{3I}} \right]}_{t_1} x_3 + t_0 \quad (7.20)$$

onde ,

$$t_0 = \frac{T_C h/2 + T_D x_{3I}}{x_{3I} + h/2}$$

Para os três casos, tem-se :

$$T_B = T_A + q \frac{(h/2 - x_{3S})}{k_I}$$

$$T_C = T_D - q \frac{(h/2 + x_{3I})}{k_{III}}$$

$$q = \frac{T_A - T_D}{\frac{(h/2 - x_{3S})}{k_I} + \frac{(x_{3S} - x_{3I})}{k_{II}} + \frac{(h/2 + x_{3I})}{k_{III}}}$$

As fórmulas 7.18, 7.19 e 7.20 descrevem a distribuição da temperatura ao longo da espessura da placa. A variação da temperatura no plano  $(x_1, x_2)$  será obtida desenvolvendo-se os termos  $T_0$  e  $T_1$  em séries de Fourier. Com isto serão caracterizados os carregamentos térmicos tridimensionais :

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + x_3 T_1(x_1, x_2) \quad (7.21)$$

O desenvolvimento de 7.21 segue a metodologia de cálculo aplicada às cargas estáticas (capítulo 5). Assim, os valores de  $T_0(x_1, x_2)$  e  $T_1(x_1, x_2)$  para três diferentes tipos de carregamento valem :

### 1) Carregamento térmico senoidal

$$T_0(x_1, x_2) = t_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi x_2}{b}$$

$$T_1(x_1, x_2) = t_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi x_2}{b} \quad (7.22)$$

2) Carregamento térmico uniforme

$$T_0(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \cdot t_0}{\pi^2 mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{b} \quad (7.23)$$

$$T_1(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 t_1}{\pi^2 mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{b}$$

3) Carregamento térmico triangular

$$T_0(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 t_0 \cos n\pi}{\pi^2 mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{b} \quad (7.24)$$

$$T_1(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 t_1 \cos n\pi}{\pi^2 mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{b}$$

Estes carregamentos implicam que  $T_A$  e  $T_D$  são as temperaturas nas seguintes posições do plano  $(x_1, x_2)$  :

- carregamento senoidal : no centro da placa
- carregamento uniforme : em qualquer ponto
- carregamento triangular : na borda da placa

#### 7.2.3.4 - CÁLCULO DAS TENSÕES

Após a resolução do sistema 7.11 e a identificação dos deslocamentos, o procedimento de cálculo das tensões é idêntico ao descrito no item 4.6. Neste caso porém, há que se corrigir as tensões de cisalhamento transversal. O fator de correção cisalhante utilizado é o da teoria de Mindlin [4], e vale 5/6.

#### 7.2.4 - ANÁLISE DO EFEITO HIGROSCÓPICO

Todas as considerações feitas anteriormente para a ação térmica são válidas para a ação da umidade. Isto porque do ponto de vista das deformações mecânicas o efeito de ambas é o mesmo. Deve-se no entanto considerar a seguinte correlação entre as grandezas físicas para as fórmulas citadas :

{	T	: temperatura
	C	: concentração de umidade
	$\alpha$	: coeficiente de expansão térmica
	$\beta$	: coeficiente de expansão higroscópica
	k	: coeficiente de condutividade térmica
{	D	: coeficiente de difusão de umidade

Portanto, basta trocar estes parâmetros nas formulações anteriores para a obtenção das tensões devido ao efeito da umidade.

As propriedades físicas para materiais ortotrópicos citadas anteriormente, podem ser calculadas segundo fórmulas apresentadas no ANEXO II.

### 7.3 - EXEMPLO NUMÉRICO

O programa computacional elaborado possibilita a análise das tensões higrótérmicas tridimensionais em placas sanduíches anisotrópicas e assimétricas.

O exemplo aplicado considera uma placa quadrada composta de quatro monocamadas orientadas a  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $0^\circ$ , sob carregamento térmico senoidal. As constantes elásticas são as mesmas do exemplo 5.4.1 e os parâmetros físicos valem:

$$T_A = 303 \text{ K}$$

$$T_D = 323 \text{ K}$$

$$\alpha_{11} = 22.1 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

$$\alpha_{22} = 8.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

#### 7.3.1 - TENSÕES OBTIDAS

A variação das tensões  $\sigma_{22}$  e  $\tau_{12}$  com a mudança das dimensões da placa está mostrada na fig. 7.2. Os valores estão adimensionalizados (onde  $t_p$  é a temperatura no ponto analisado).

A forma da curva, assim como a ordem de grandeza das tensões são condizentes com os resultados obtidos por J.N. Reddy e W.C. Chao [35].

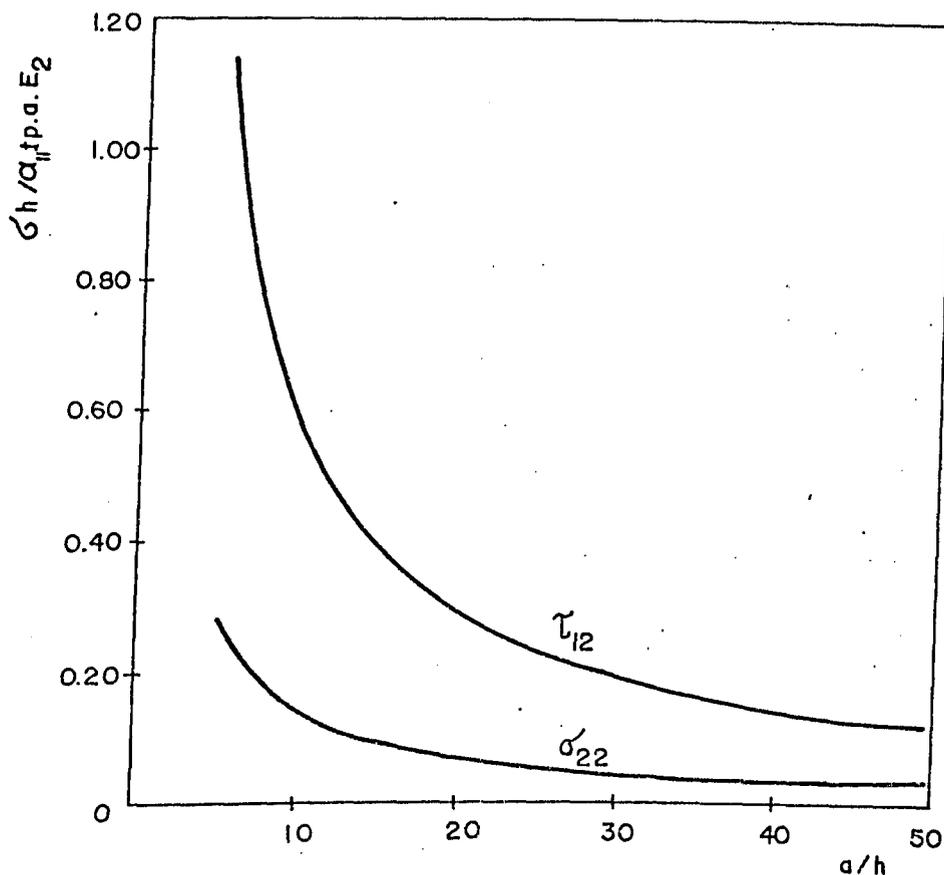


Figura 7.2 - Efeito da variação de  $a/h$  sobre as tensões  $\sigma_{22}$  e  $\tau_{12}$ , no ponto  $(a/4, a/4, h/2)$ .

A figura 7.3 mostra o comportamento de  $\tau_{12}$  e  $\sigma_{22}$  ao longo da espessura da placa, para  $a/h = 10$ . A seguir, a fig. 7.4 demonstra que a variação da espessura da alma em relação à espessura total da placa, praticamente não tem efeito sobre as tensões  $\sigma_{11}$  e  $\tau_{12}$ . O comportamento das tensões de cisalhamento transversal, com a variação de  $a/h$ , está mostrado na figura 7.5.

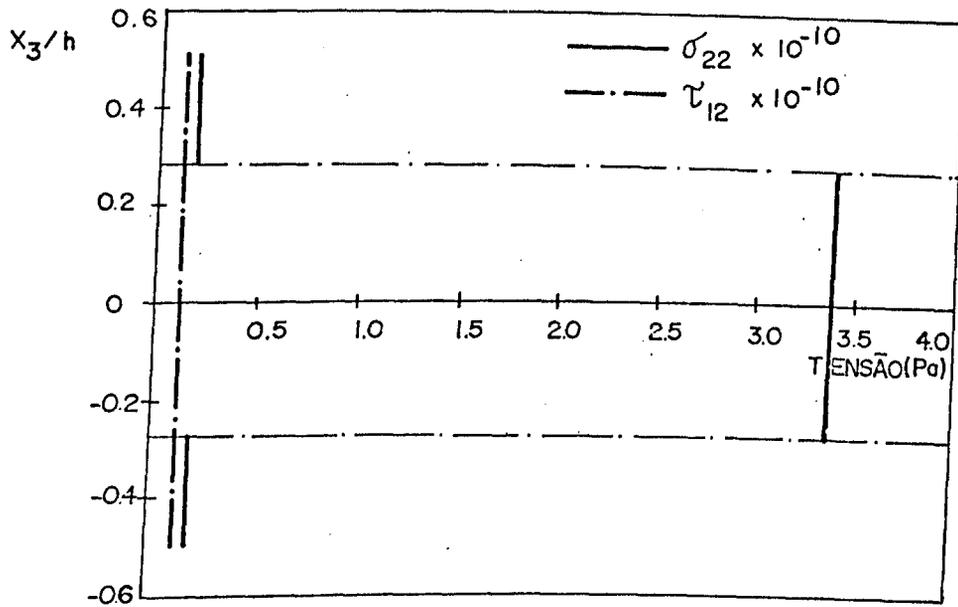


Figura 7.3 - Distribuição das tensões  $\sigma_{22}$  e  $\tau_{12}$  ao longo da espessura da placa, no ponto  $(a/4), a/4, x_3$ .

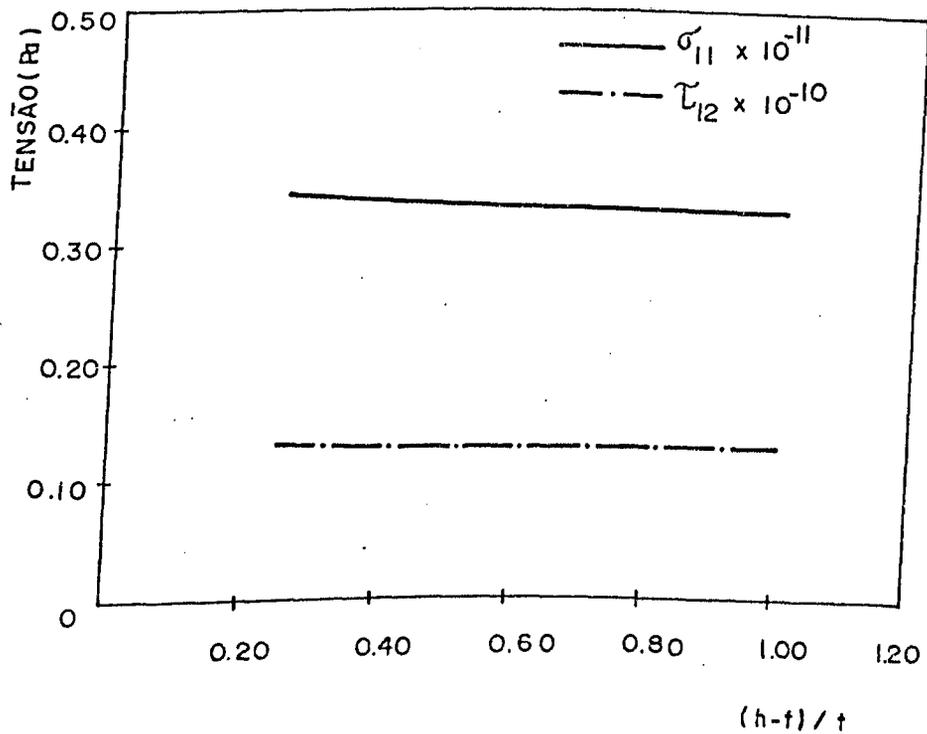


Figura 7.4 - Influência da variação da espessura da alma sobre as tensões  $\sigma_{11}$  e  $\tau_{12}$ , no ponto  $(a/4, a/4, +h/2)$ .

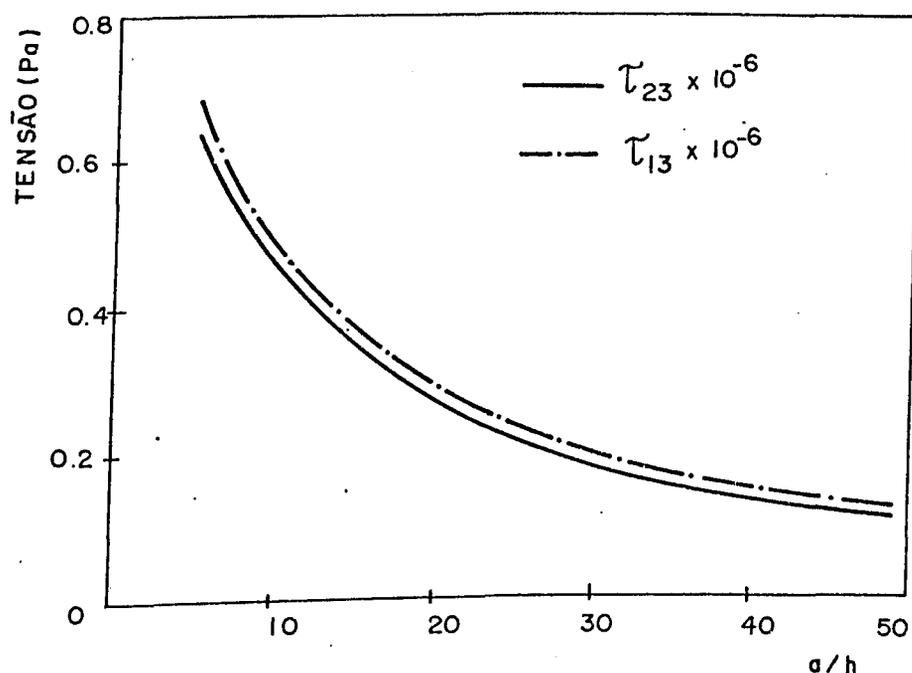


Figura 7.5 - Variação das tensões cisalhantes  $\tau_{13}$  e  $\tau_{23}$  com a relação  $a/h$ , no ponto  $(a/4, a/4, +h/5)$ .

### 7.3.2 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os valores apresentados nas figs. 7.3 , 7.4 e 7.5 se aproximam de forma qualitativa dos resultados de R. B. Pipes e outros [26], R. Hussein [27] e Y. R. Wang e T. Chou [28]. Não foi possível uma avaliação quantitativa, pela dificuldade de implementar-se exemplos similares, diante dos dados fornecidos por estes autores.

O nível das tensões obtidas indica claramente a importância da consideração dos efeitos térmicos em placas sanduíches. Estes efeitos, além de provocarem a degradação física dos materiais, causam as tensões mecânicas, que podem provocar a ruptura da estrutura.

Esta análise conclui a primeira etapa do trabalho. A seguir, será desenvolvida a parte experimental das placas sanduíches.

## 2 : PARTE

## ELABORAÇÃO E ANÁLISE EXPERIMENTAL DAS PLACAS SANDUÍCHES

Esta segunda parte do trabalho pode ser dividida em dois tópicos :

- primeiramente será moldada uma placa sanduíche. Esta placa tem uma proposta de aplicação prática, sendo utilizada como suporte isolante para circuitos impressos ;

- a seguir, com os protótipos elaborados, serão efetuados os ensaios mecânicos que possibilitarão a validação experimental dos programas computacionais de cálculo das tensões, feitos na primeira parte. Além disso, as placas serão qualificadas segundo exigências das normas de laminados elétricos (resistência à flexão).

## CAPÍTULO 8

### CONCEPÇÃO DE PLACAS SANDUÍCHES USADAS COMO SUPORTE ISOLANTE PARA CIRCUITOS IMPRESSOS

#### 8.1 - INTRODUÇÃO

As atuais placas usadas como laminados elétricos (vidro / epóxi) estão super - dimensionadas em relação às solicitações mecânicas. Estas placas têm como exigências básicas de qualificação, além de boas propriedades físicas e elétricas, as seguintes características :

- resistência e rigidez à flexão ;
- estabilidade dimensional ;
- planicidade.

As estruturas sanduiches possuem estas qualidades de forma destacada. Daí a idéia de se elaborar um suporte isolante para circuitos impressos com a concepção dos sanduiches. Esta proposta foi feita na França em 1989, por Nwokoye [17].

#### 8.2 - DESENVOLVIMENTO DE UM DISPOSITIVO PARA MOLDAGEM DE ESTRATIFICADOS POR COMPRESSÃO À QUENTE

Para fabricação das placas sanduiches foi projetado e construído um dispositivo de moldagem por compressão à quente. Este dispositivo é acoplado à uma Máquina Universal de Ensaios MTS, o que possibilita o controle do processo em carga (figura 8.1).

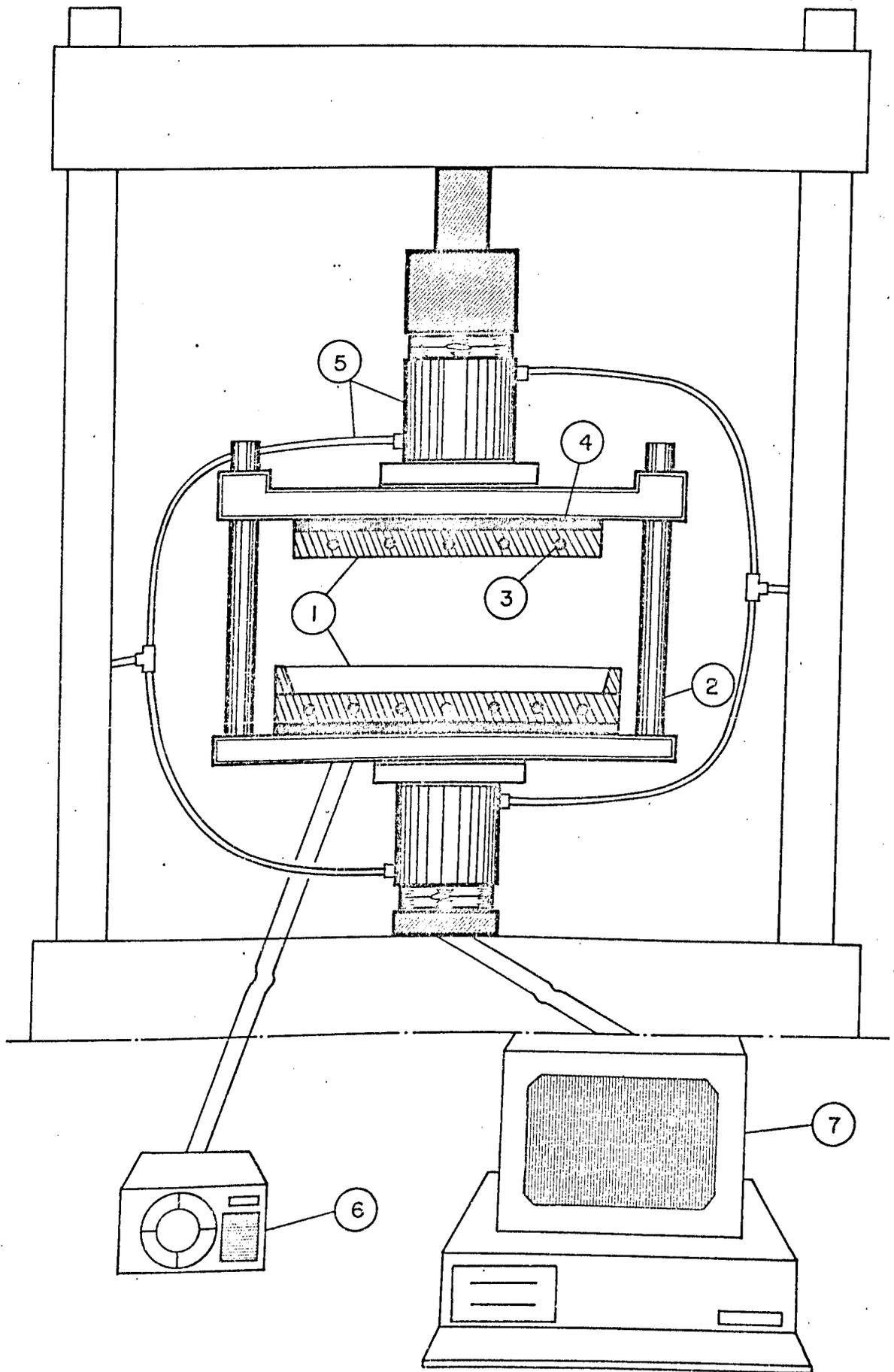


Figura 8.1 - Equipamento de moldagem por compressão à quente

Os principais componentes do equipamento desenvolvido são descritos a seguir :

- 1) Placas de prensagem : esta placas possuem superfície útil de 200 x 250 mm e são feitas em aço ;
- 2) Sistema de guias : é constituído de duas placas-base e quatro barras verticais com juntas autografitadas ;
- 3) Aquecimento elétrico : foi feito com resistências elétricas, isoladas por tubos cerâmicos refratários ;
- 4) Isolação térmica : esta camada de isolamento é composta por mantas de asbesto ;
- 5) Circuito de resfriamento : é feito com circulação de água e visa isolar termicamente a MTS ;
- 6) Controle de temperatura : para o aquecimento em rampa foi utilizado um potenciômetro, e para obtenção de temperaturas constantes foi usado um controlador tipo PD. A velocidade de aquecimento para o dispositivo alcança 7°C / min, e a temperatura máxima atingida é de aproximadamente 300 °c ;
- 7) Controle de carga : foi efetuado pela MTS, e o monitoramento feito por computador. A força de fechamento pode variar de 0 a 70 KN .

As figuras de 8.2 a 8.6 mostram de forma mais detalhada os componentes descritos anteriormente.

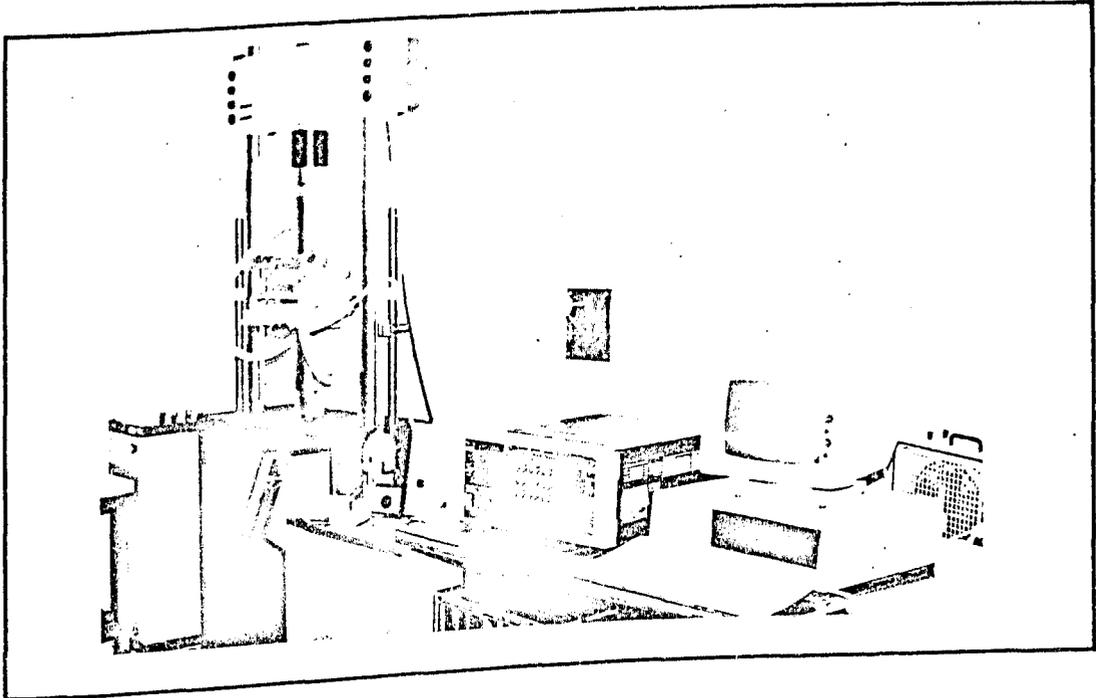


Figura 8.2 - Vista geral do equipamento de moldagem

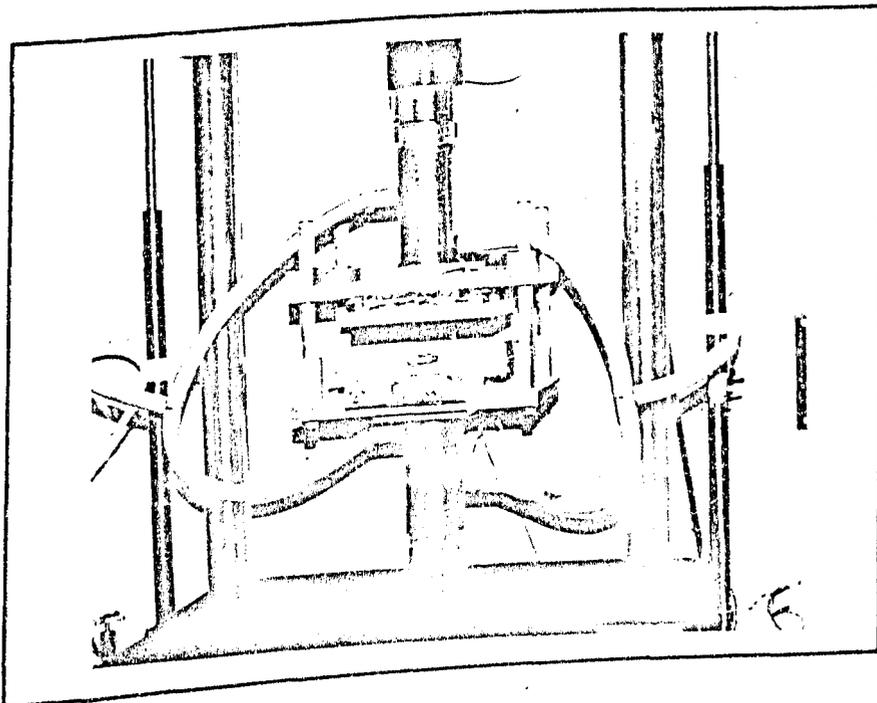


Figura 8.3 - Vista do aparato de moldagem, acoplado à MTS

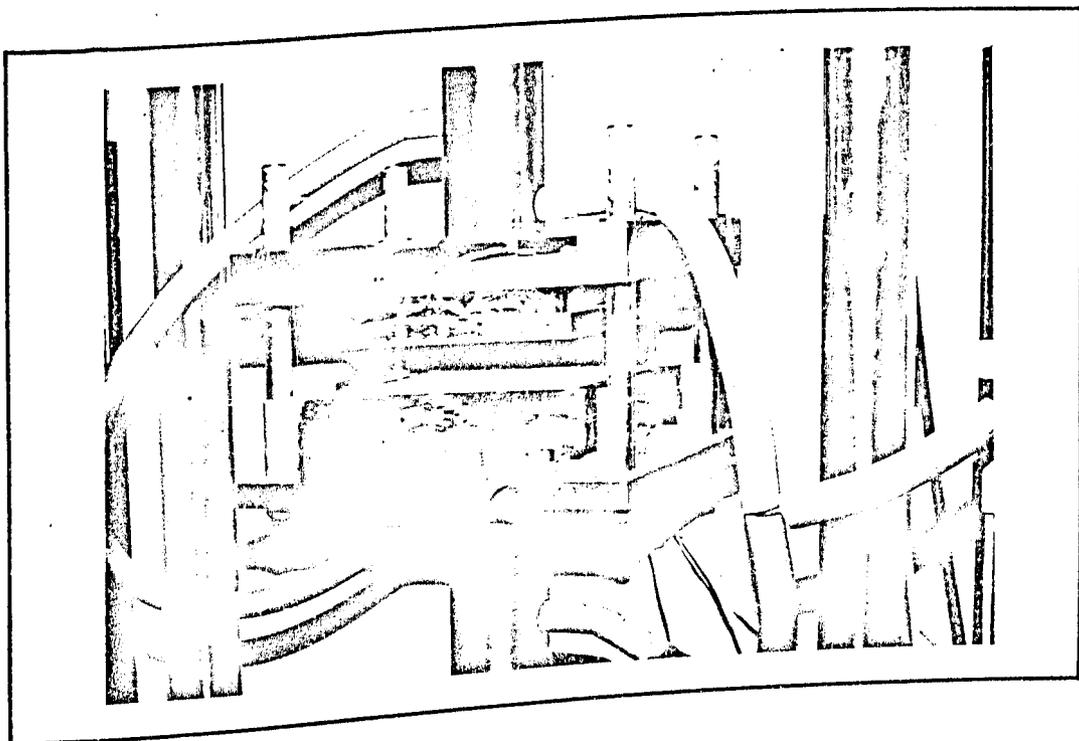


Figura 8.4 - Detalhe do dispositivo de moldagem por compressão à quente

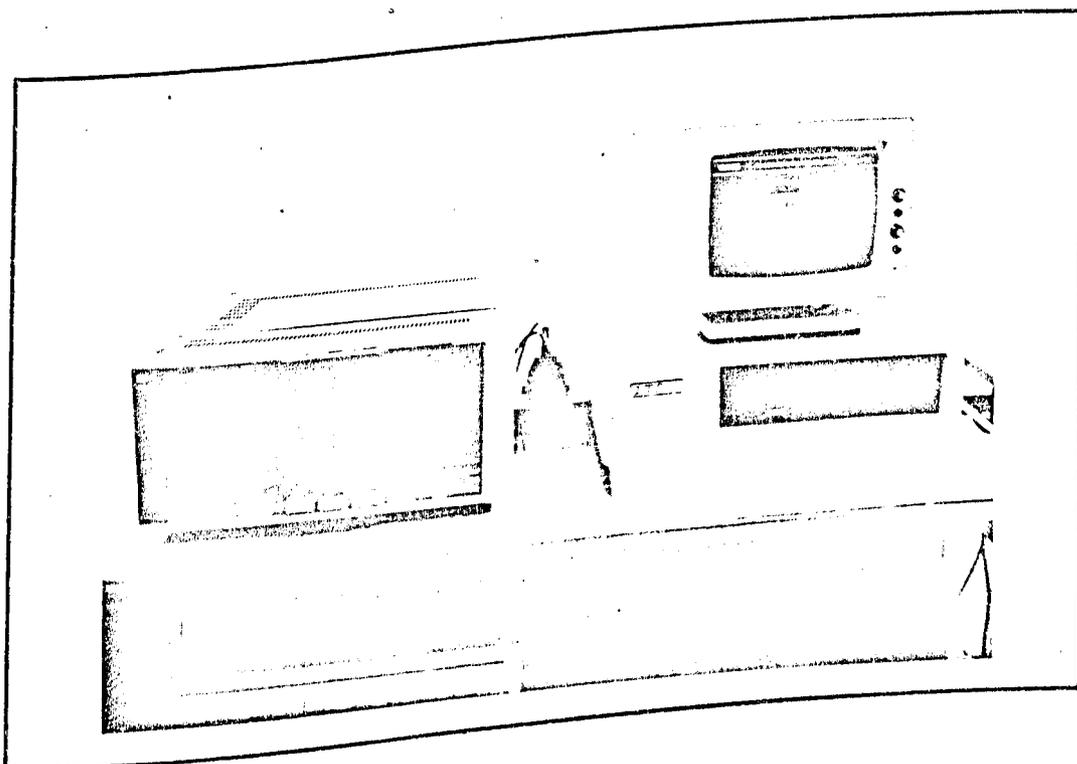


Figura 8.5 - Sistema de controle de carga

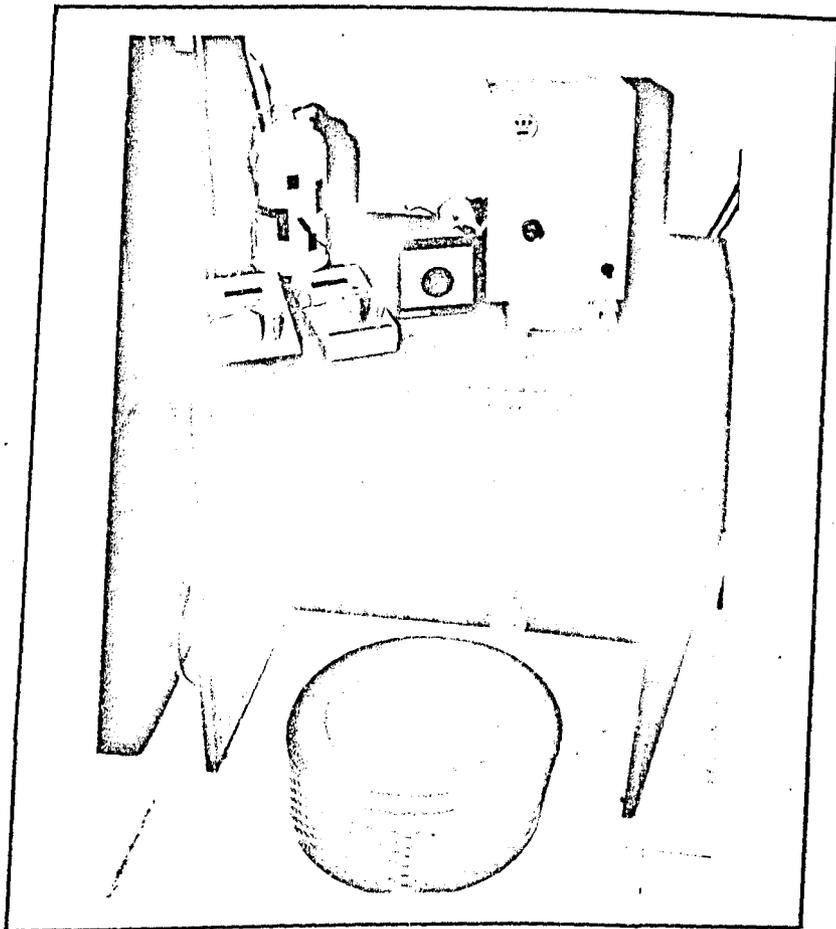


Figura 8.6 - Sistema de controle de temperatura

### 8.3 - DEFINIÇÃO DOS MATERIAIS UTILIZADOS

Além de satisfazerem às exigências físicas, elétricas e mecânicas dos laminados tipo FR-4 (epóxi), os componentes devem permitir a compatibilidade de materiais na interface pele-alma. A estrutura básica do suporte isolante é mostrada na figura 8.7.

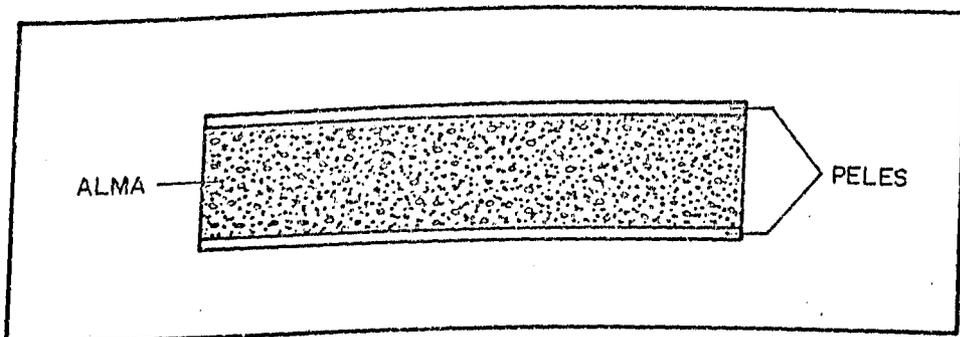


Figura 8.7 - Configuração básica do laminado elétrico

Os materiais selecionados foram os seguintes :

a) Peles

Utilizou-se "prepreg" de tecido de fibra de vidro e resina epóxi. Este material é rígido e garante a resistência mecânica do laminado. As suas características são :

- Referência do fabricante : P-7628
- Número de feixes (trama x corrente) : 17 x 12
- Peso aproximado : 197 g/m<sup>2</sup>
- Conteúdo em resina : 40.9 a 41.2 %
- Espessura prensada : 0.185 mm

b) Alma

É constituída por uma espuma sintática : mistura de resina epóxi e microesferas ocas de vidro. Esta formação permite melhorar a estabilidade dimensional e diminuir a densidade. As propriedades destes materiais são :

b.1) Resina epóxi bromada :

- Referência do fabricante : XB81258.00
- Peso equivalente em epóxi : 420-465
- Viscosidade cinemática a 25 °c (cps) : 1000-4000
- Conteúdo em sólidos : 80 %
- Conteúdo em bromo : 18.5-20.5 %

## b.2) Microesferas ocas de vidro :

- Referência do fabricante : Q-CEL 400
- Cor : branca
- Densidade efetiva : 0.160-0.185 g/cm<sup>3</sup>
- Dimensão das partículas :  
Média : 75 µm  
Variação : 10-200 µm

## b.3) Endurecedores :

- Diciandiamida
- Benzil Dimetil Amina

## b.4) Solventes :

- Dowanol PM
- Dimetil Formamida
- Metil Etil Cetona

8.4 - ESTUDO DO CICLO DE MOLDAGEM

O conhecimento preciso do comportamento da resina durante o processo de polimerização é de fundamental importância para a fabricação de materiais compostos.

Vários autores estudaram o comportamento da resina e dos pré-impregnados durante os processos de transformação, podendo-se citar J.M. Tang e outros [36], B.M. Fanconi e outros [37], M. F. Fesquet e outros [38] e A.R. Mallow e outros [39]. O objetivo principal destes estudos é de conhecer-se, para uma determinada

técnica de moldagem, os valores a serem impostos para a temperatura e a pressão em cada fase do processo de cura.

A fig. 8.8 mostra a evolução da viscosidade de dois tipos de resina, à uma determinada temperatura de moldagem.

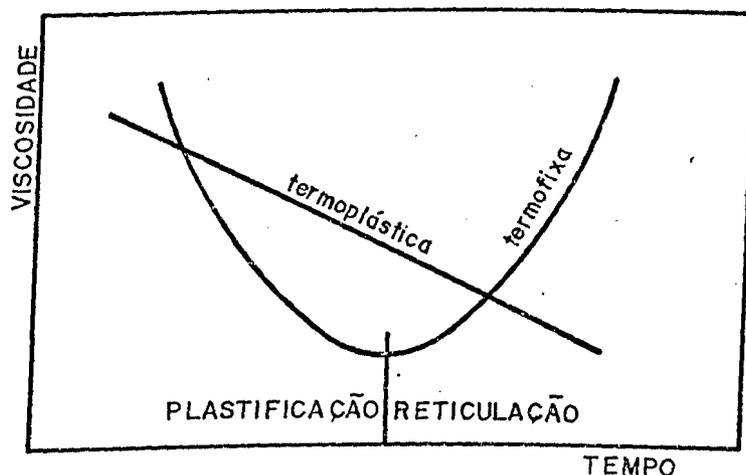


Figura 8.8 - Evolução da viscosidade das resinas, em função do tempo

Para as resinas termofixas observa-se na figura 8.8 duas fases distintas. Na fase de plastificação há uma diminuição sensível da viscosidade, sob ação da temperatura. Na fase de reticulação a densidade aumenta, conduzindo à uma estrutura tridimensional.

Outro comportamento a ser observado é a variação da reatividade das resinas termofixas (fig.8.9). Por ter uma reação essencialmente exotérmica, o controle do processo de moldagem por compressão à quente pode ser influenciado.

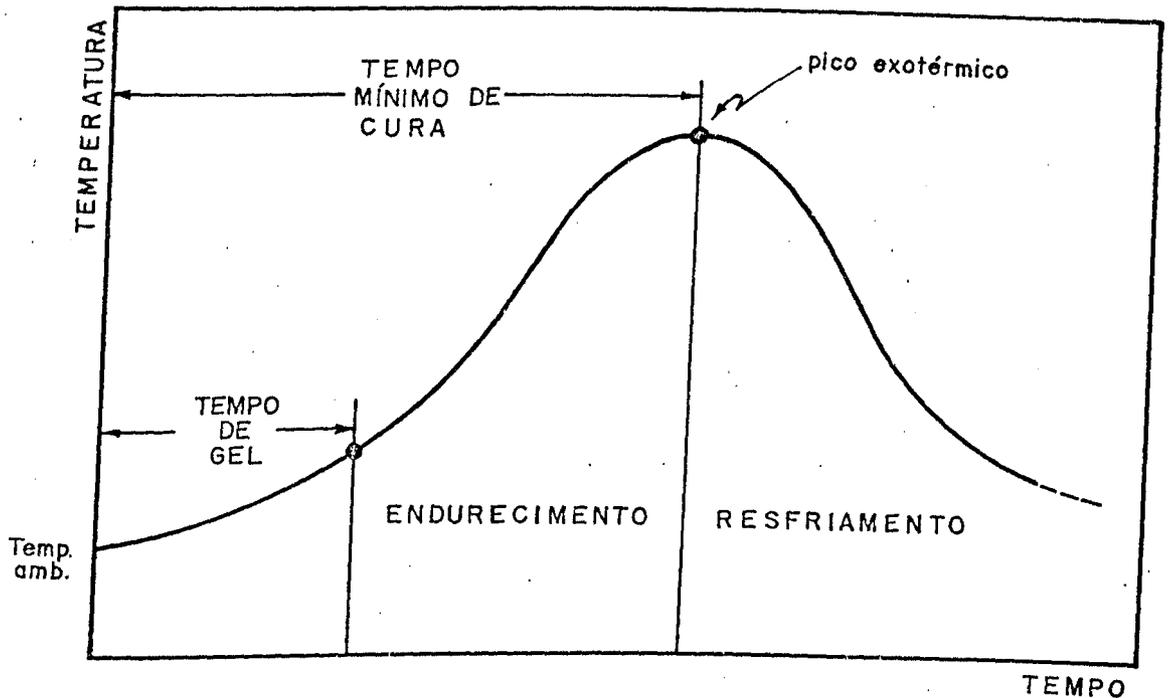


Figura 8.9 - Curva típica da reatividade de uma resina termofixa

Dois parâmetros físicos influenciam decisivamente na definição do ciclo de cura : a temperatura de transição vítrea (TG) e o tempo de gel (tg). Estes parâmetros auxiliam na escolha do tempo correto de aplicação da temperatura e da pressão sobre o laminado.

Existem várias formas de se determinar a Tg e o tg, que são característicos de cada sistema. Nwokoye [17] desenvolveu uma técnica que utiliza o próprio equipamento de moldagem por compressão à quente. Este método é baseado na mudança de volume da resina durante a fase de polimerização e a consequente variação de força no sistema (variação esta que é "percebida" pela MTS).

Com a determinação de  $T_g$  e  $t_g$ , e considerando comportamento da resina descrito nas figuras 8.8 e 8.9, possível obter ciclos otimizados de pressão e temperatura. Isto foi feito por Nwokoye [17], e este ciclo será adotado aqui como referencial para o processo de moldagem.

#### 8.5 - PROCEDIMENTO DE MOLDAGEM

O ciclo de laminação é feito com prensagem a frio. Desta forma os componentes são colocados diretamente na prensa, iniciando-se o aquecimento e a aplicação da carga.

Após diversas moldagens chegou-se à composição química mais equilibrada, e aos ciclos de pressão e temperatura melhor adaptados ao processo. Estas etapas serão descritas a seguir.

##### 8.5.1 - COMPOSIÇÃO QUÍMICA

A formulação básica da espuma sintática desenvolvida é :  
- verniz de impregnação (obtido à partir de [40])

Componentes		Partes em Peso
Resina epóxi		125.0
Endurecedores	diciandiamida	3.0
	benzil dimetil amina	0.25
Solventes	dowanol PM	16.25
	dimetil formamida	16.25
	metil etil cetona	8.125

- microesferas ocas de vidro : 72 % em volume.

Em relação à proporção de microesferas ocas de vidro, um estudo feito por G. Villoutreix e outros [41], indicou uma diminuição das propriedades térmicas, elétricas e mecânicas, quando aumenta-se a quantidade de microesferas. Estas propriedades são :

- resistência à compressão ;
- resistência ao choque ;
- módulo de elasticidade (E) ;
- densidade (d) ;
- permissividade dielétrica ;
- fator de perdas ;
- condutividade térmica .

No estudo constatou-se que apenas a difusividade térmica e a rigidez específica ( $E/d$ ) cresceram com o aumento da proporção de microesferas.

Os gráficos ilustrativos das propriedades citadas estão mostrados no ANEXO III.

#### 8.5.2 - COMPOSIÇÃO DOS MATERIAIS NA PRENSA

A colocação dos diversos componentes do laminado na prensa segue a esquematização mostrada na figura 8.10.

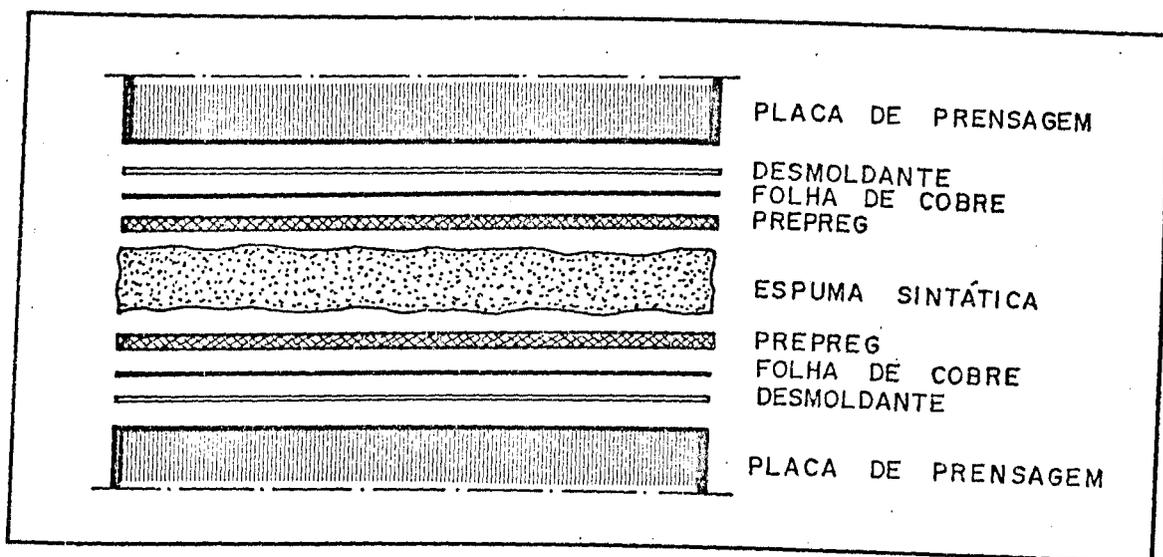


Figura 8.10 - Disposição dos materiais na prensa

### 8.5.3 - CICLO DE TEMPERATURA

O ciclo de temperatura otimizado tem cinco fases distintas (fig. 8.11). O aumento gradativo da temperatura permitiu a obtenção de um material com estrutura homogênea, além da boa rigidez no final do processamento.

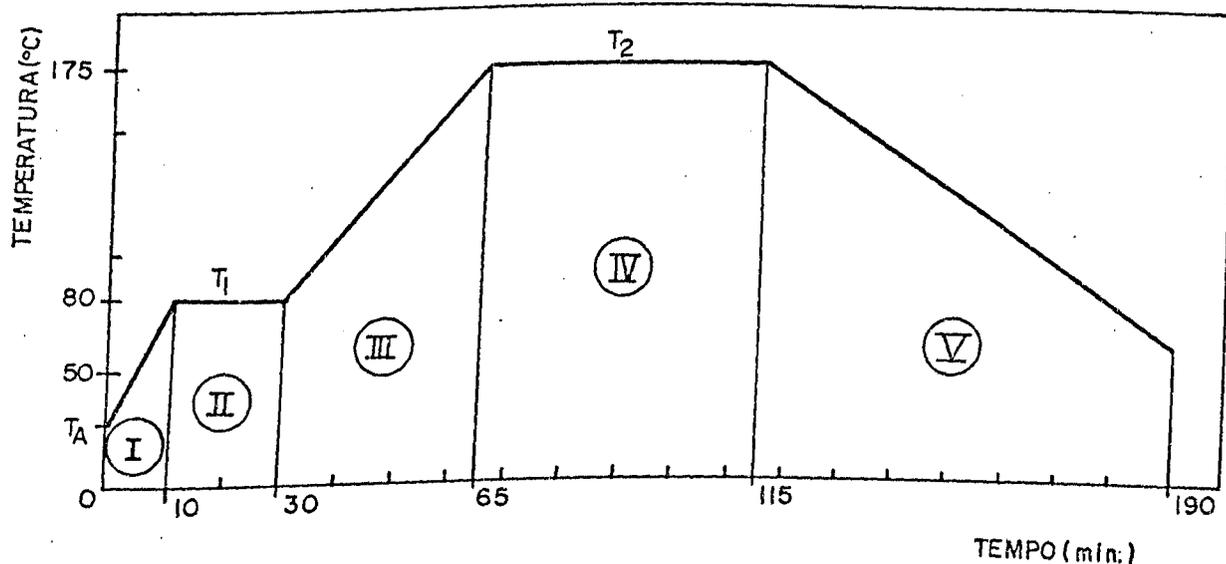


Figura 8.11 - Ciclo de temperatura otimizado

- Fase I : aquecimento à partir da temperatura ambiente  $T_A$ , até  $T_1 = 80$  °c, com elevação de  $5.5$  °c/min .  $T_1$  deve ser escolhida de acordo com a temperatura de ebulição dos solventes ;
- Fase II : patamar de  $80$  °c, durante  $20$  min ;
- Fase III : aquecimento de  $2.7$  °c/min, até  $T_2 = 175$  °c . A temperatura  $T_2$  está abaixo da resistência térmica da resina ;
- Fase IV : patamar de  $175$  °c, durante  $50$  min ;
- Fase V : resfriamento até  $50$  °c, com um decréscimo de  $1.7$  °c/min . Esta taxa de resfriamento pode ser aumentada, dependendo das possibilidades do sistema.

#### 8.5.4 - CICLO DE PRESSÃO

A aplicação da pressão deve ser suficiente para permitir uma boa impregnação das fibras e garantir um material isento de bolhas. Além disso, o acabamento superficial do laminado deve ser observado. Com estas considerações, o ciclo de carregamento otimizado tem duas fases (figura 8.12).

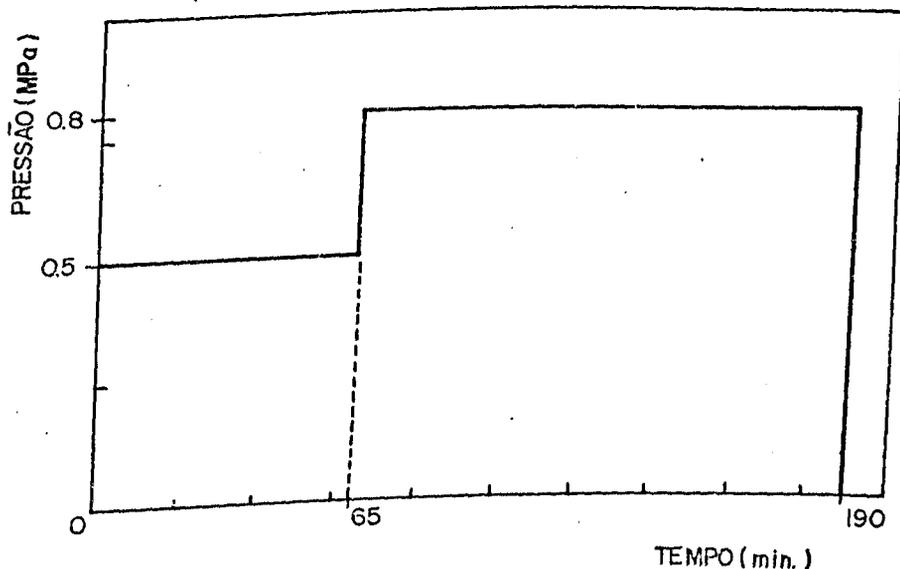


Figura 8.12 - Ciclo de pressão otimizado

### 8.5.5 - CICLOS DE PRESSÃO E TEMPERATURA SIMPLIFICADOS

Uma opção de um ciclo de cura simplificado pode ser visto nas figuras 8.13 e 8.14. Este ciclo é mais "prático" do ponto de vista de controle, além de permitir a diminuição do tempo de moldagem. O resultado final obtido com este ciclo é compatível com o resultado do ciclo otimizado.

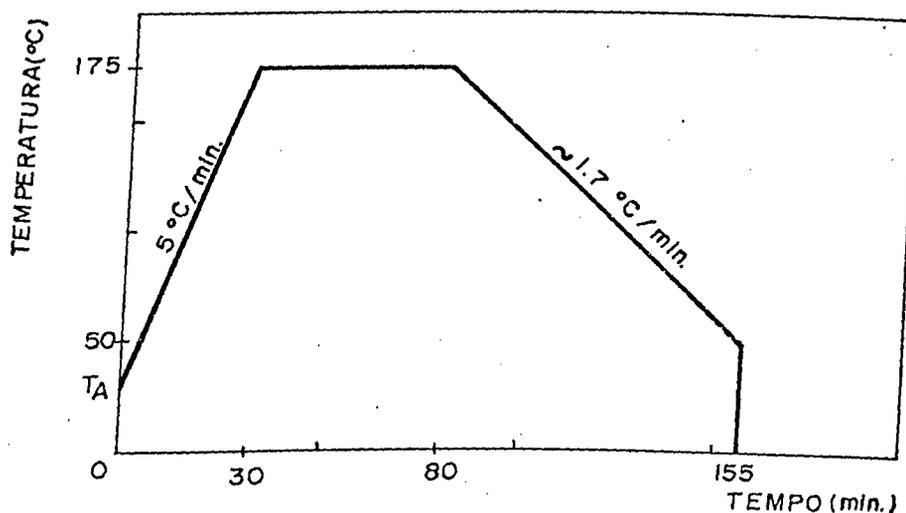


Figura 8.13 - Ciclo de temperatura simplificado

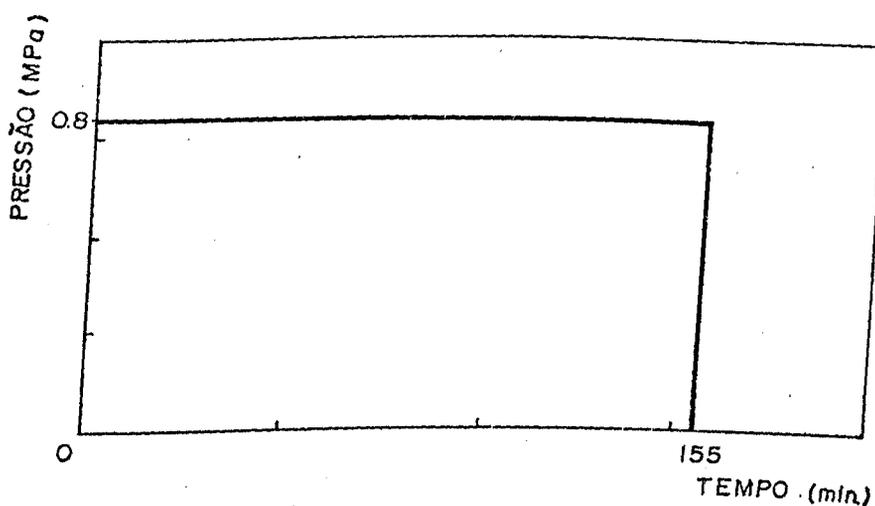


Figura 8.14 - Ciclo de pressão simplificado

### 8.6 - RESULTADO OBTIDO

Em relação ao processo de moldagem, o sistema de controle proposto demonstrou sua eficiência, com a obtenção dos ciclos de pressão e temperatura escolhidos. Neste sentido, alguns cuidados devem ser tomados durante a cura, como o domínio do escape de gases, advindos da ebulição dos solventes, além da fuga da própria resina. Outro aspecto é que os materiais utilizados na confecção do dispositivo não devem ser "sensíveis" às variações de temperatura, causadas pelas reações da resina, que são caracteristicamente exotérmicas. Isto pode interferir no funcionamento do dispositivo e no próprio controle dos parâmetros envolvidos.

Foram confeccionados suportes isolantes para circuitos impressos de simples e dupla face. Os protótipos (fig. 8.15)

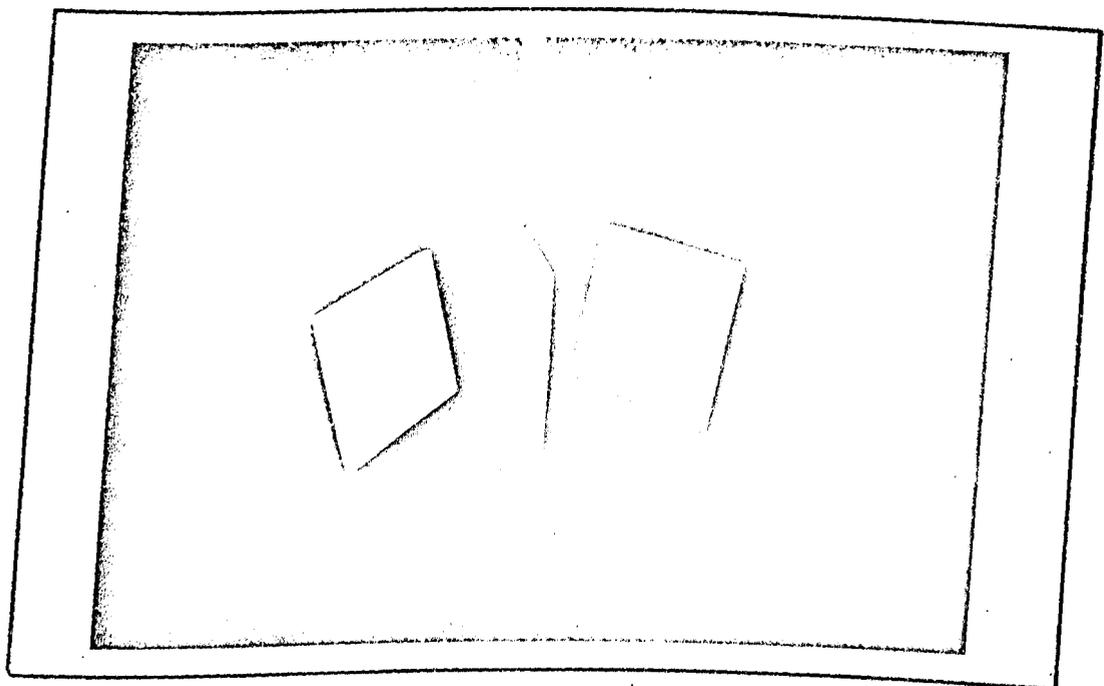


Figura 8.15 - Laminados elétricos tipo sanduíche obtidos

têm cor esbranquiçada e o acabamento superficial é satisfatório, considerando o aparelhamento disponível. Além disso, uma boa aderência do condutor na matriz durante a soldagem foi verificada.

Uma primeira análise permite dizer que o suporte elaborado tem boas qualidades, mesmo não se efetuando os ensaios físicos e elétricos correspondentes. Esta conclusão pode ser justificada pela natureza dos materiais envolvidos na confecção do modelo, ou seja, os materiais possuem boas propriedades físicas e elétricas para a finalidade desejada.

As características destacadas para os sanduíches foram confirmadas : rigidez à flexão, leveza, estabilidade dimensional e planicidade.

A densidade do material obtido é de  $1.10 \text{ g/cm}^3$ , enquanto que para os de vidro/epóxi, existentes no mercado, este valor é de  $1.85 \text{ g/cm}^3$ .

Como análise final, um levantamento preliminar permitiu concluir que o custo do suporte sanduíche é bem menor que o custo dos materiais similares (vidro/epóxi).

## CAPÍTULO 9

### ENSAIOS MECÂNICOS NAS PLACAS SANDUÍCHES ELABORADAS

Neste capítulo será feita a verificação experimental (ensaios de tração e carga concentrada) dos modelos teóricos desenvolvidos na primeira parte e a qualificação dos protótipos elaborados, do ponto de vista de resistência mecânica em flexão (ensaio de flexão em três pontos).

#### 9.1 - ENSAIO DE TRACÇÃO UNIDIRECIONAL

##### 9.1.1 - CARACTERÍSTICAS DOS ENSAIOS DE TRACÇÃO

Diversos autores estudaram o comportamento dos estratificados sob tração, dentre eles P. Michel [42], Tarnopol'skii [43], Tolf e Clarin [44], Pindera e Herakovich [45] e Seichepine e outros [46].

De uma forma geral, os principais aspectos envolvidos neste tipo de ensaio para os materiais compostos, e em especial para os de vidro/epóxi, são os seguintes :

- em carregamento monotônico, o comportamento sob tração nas direções do reforço é praticamente linear, elástico e frágil. Fora dos eixos do reforço, o comportamento é elastoplástico.

- na realização do experimento, a influência dos esforços exercidos nas extremidades (fixação) sobre a distribuição do campo de tensões é considerável ;
- influência dos bordos livres : durante o ensaio aparecem tensões de cisalhamento transversal que provocam o descolamento das camadas. Este fenômeno chama-se delaminação e é causado pela diferença de rigidez de camadas adjacentes.

### 9.1.2 - REALIZAÇÃO DO ENSAIO

#### 9.1.2.1 - Forma dos corpos de prova

A forma dos corpos de prova deve ser tal, que evite a delaminação nas bordas, e a ruptura das extremidades, causada pelas garras de fixação. O acabamento do material no processo de usinagem também pode auxiliar nestes aspectos.

A geometria escolhida [43] está mostrada na figura abaixo :

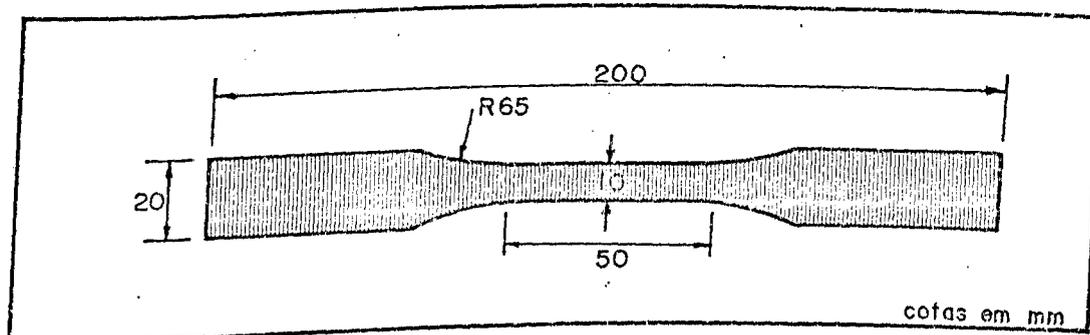


Figura 9.1 - Geometria dos corpos de prova de tração

### 9.1.2.2 - Curvas tensão x deformação obtidas

Foram realizados diversos ensaios (fig. 9.2) variando-se a relação t/h. A taxa de deslocamento que possibilitou os melhores resultados foi de 0.5 mm/min.

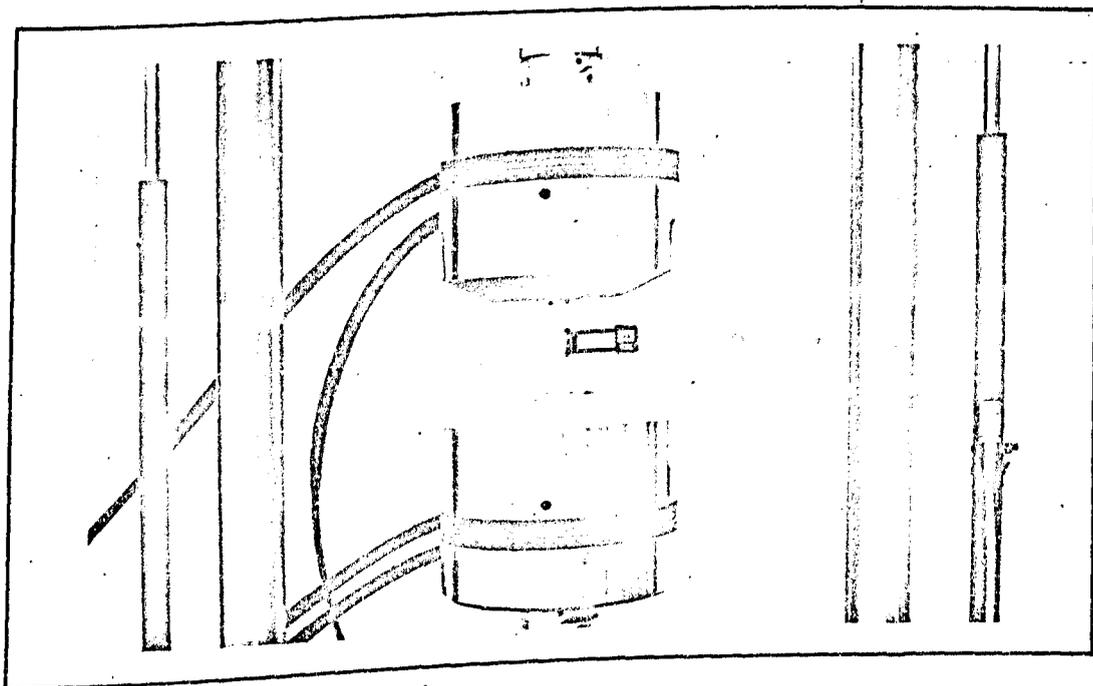


Figura 9.2 - Montagem do ensaio de tração

As figuras 9.3 e 9.4 mostram os diagramas tensão x deformação para as duas direções críticas de sollicitação. O resultado de 9.4 mostra o comportamento frágil dos sanduíches quando a sollicitação é na direção das fibras, enquanto que a fig. 9.3 demonstra um comportamento menos acentuado quando a direção dos esforços sobre o corpo de prova está "fora dos eixos".

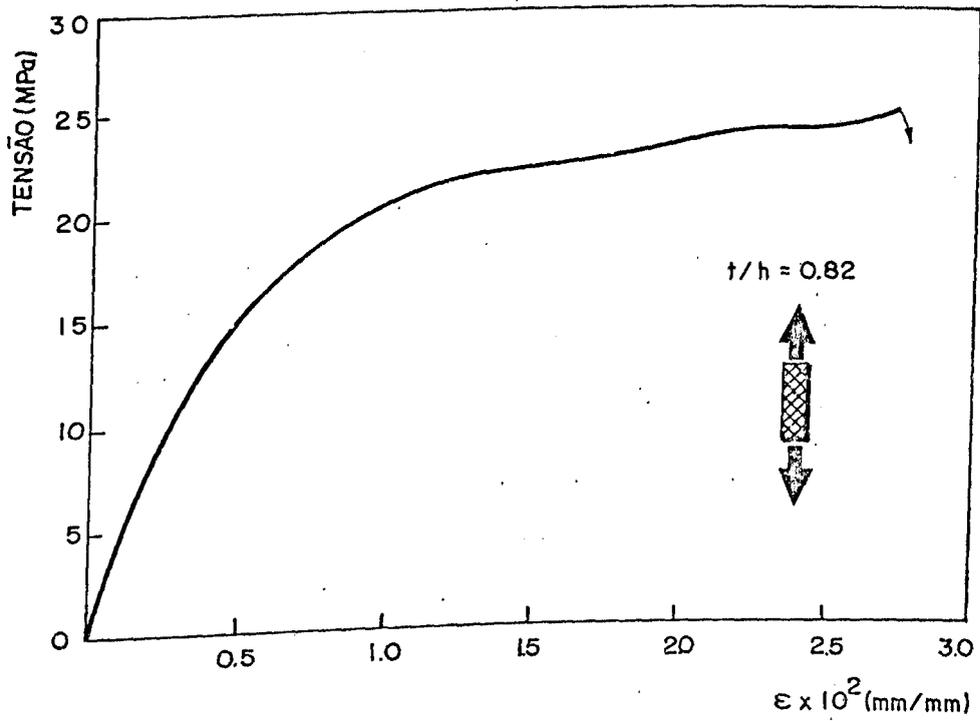


Figura 9.3 - Gráfico tensão x deformação na direção  $\theta = 45^\circ$

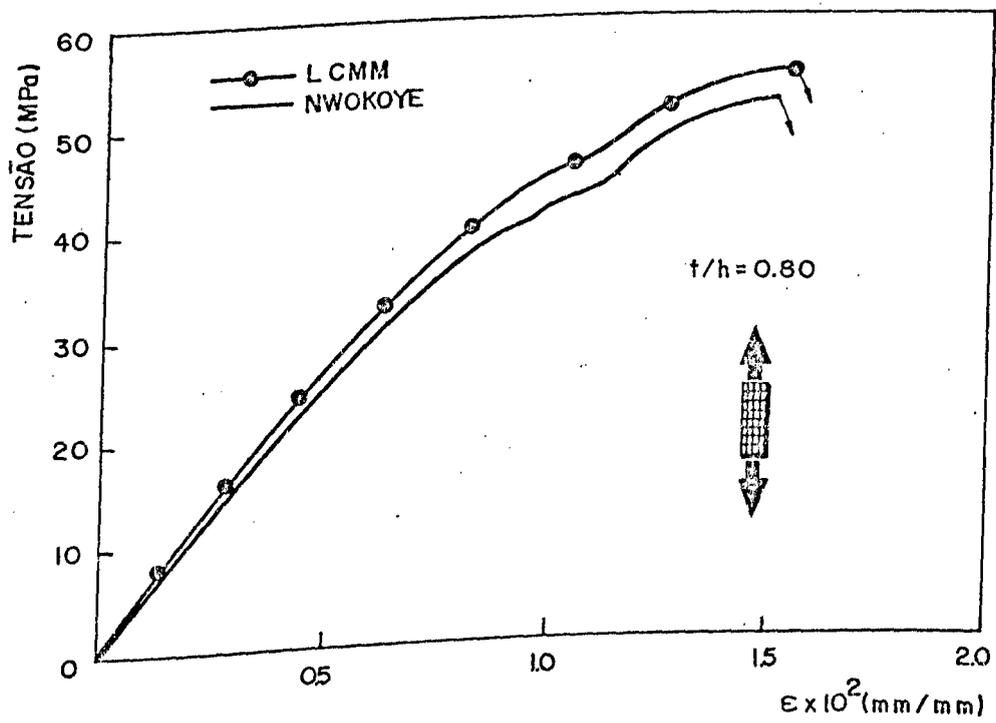


Figura 9.4 - Gráfico tensão x deformação na direção  $\theta = 0^\circ$

O diagrama da figura 9.4 mostra uma similaridade entre os resultados do LCMM e os de Nwokoye [17]. Isto era esperado, porque as características dos materiais que compõem os sanduíches elaborados nos dois casos são idênticas. Desta maneira, como forma de aproximação, os dados da identificação feita por Nwokoye [17] serão adotados aqui e utilizados nas análises feitas subsequentemente. Esta identificação é complexa quando feita mecanicamente, e o LCMM não dispõe do aparelhamento específico, necessário para sua efetuação.

Os valores para as peles ortotrópicas foram obtidos por medições ultrasonoras [17], e valem :

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= 27500 \text{ MPa} & \nu_{12} &= 0.279 \\
 E_{22} &= 25000 \text{ MPa} & \nu_{13} &= 0.271 \\
 E_{33} &= 1600 \text{ MPa} & \nu_{23} &= 0.084 \\
 G_{12} &= 7130 \text{ MPa} \\
 G_{13} &= 8030 \text{ MPa} \\
 G_{23} &= 6900 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

A alma é suposta isotrópica e as constantes elásticas são :

$$E = 1603 \text{ MPa} \quad G = 616 \text{ MPa} \quad \nu = 0.30$$

### 9.1.2.3 - MODELOS PREVISIONAIS

A modelização do ensaio de tração unidirecional vai permitir, em comparação com os resultados experimentais, a validação destes modelos teóricos sob o aspecto da rigidez e da tensão máxima suportada pelo sanduíche em tração.

a) Módulo de elasticidade médio  $E_m$ 

Considerando apenas o esforço de tração uniaxial, a lei de Hooke permite obter facilmente a expressão para o módulo de elasticidade médio :

$$E_m = \frac{1}{h} \left( A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) \quad (9.1)$$

b) Ruptura do material em tração

A ruptura dos sanduíches em tração é função da relação  $t/h$  [17], e pode ser dividida em duas partes :

b.1) Para  $t/h > 0.5$ 

Há a ruptura da alma, levando à ruptura total do sanduíche. Neste caso, o modelo que melhor descreve o comportamento é o critério de ruptura de Von Mises :

$$\sigma_R = \sigma_R^a g_a(t/h) \quad (9.2)$$

onde ,

$\sigma_R^a$  : tensão de ruptura da alma

$$g_a(t/h) = \frac{1}{h \Delta} \left( \phi_1^a{}^2 + \phi_2^a{}^2 - \phi_1^a \phi_2^a \right)$$

$$\phi_1^a(t/h) = C_{12}^a - C_{11}^a A_{12} / A_{11}$$

$$\phi_2^a(t/h) = C_{22}^a - C_{12}^a A_{12} / A_{11}$$

$$\Delta = A_{22} A_{12}^2 / A_{11}$$

b.2) Para  $t/h \leq 0.5$

Há a ruptura da alma, conduzindo à uma redistribuição das tensões na interface e nas peles. Nesta condição, o critério de ruptura de Norris é melhor adaptado :

$$\sigma_R = \sigma_R^P g_p(t/h) \quad (9.3)$$

onde ,

$\sigma_R^P$  : tensão de ruptura da pele

$$g_p(t/h) = \frac{1}{h \Delta} \left( \phi_1^P + \phi_2^P - \frac{E_1^P}{E_2^P} \phi_1^P \phi_2^P \right)$$

$$\phi_1^P(t/h) = C_{12}^P - C_{11}^P A_{12} / A_{11}$$

$$\phi_2^P(t/h) = C_{22}^P - C_{12}^P A_{12} / A_{11}$$

$$\Delta = A_{22} A_{12}^2 / A_{11}$$

Os critérios de Von Mises e Norris consideram a energia de distorção, aplicada à alma e às peles respectivamente. Nos dois casos a alma é considerada isotrópica e as peles são ortotrópicas. Norris admite a diferença dos módulos elásticos nos sentidos de reforço do tecido, enquanto que o critério de Von Mises supõe um tecido equilibrado.

### 9.1.2.4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

#### a) Módulo de elasticidade

A fig. 9.5 mostra que os valores obtidos experimentalmente estão abaixo dos valores teóricos (expressão 9.1). Isto pode ser explicado por fatores relativos ao ensaio experimental, citados no item 9.1.1 .

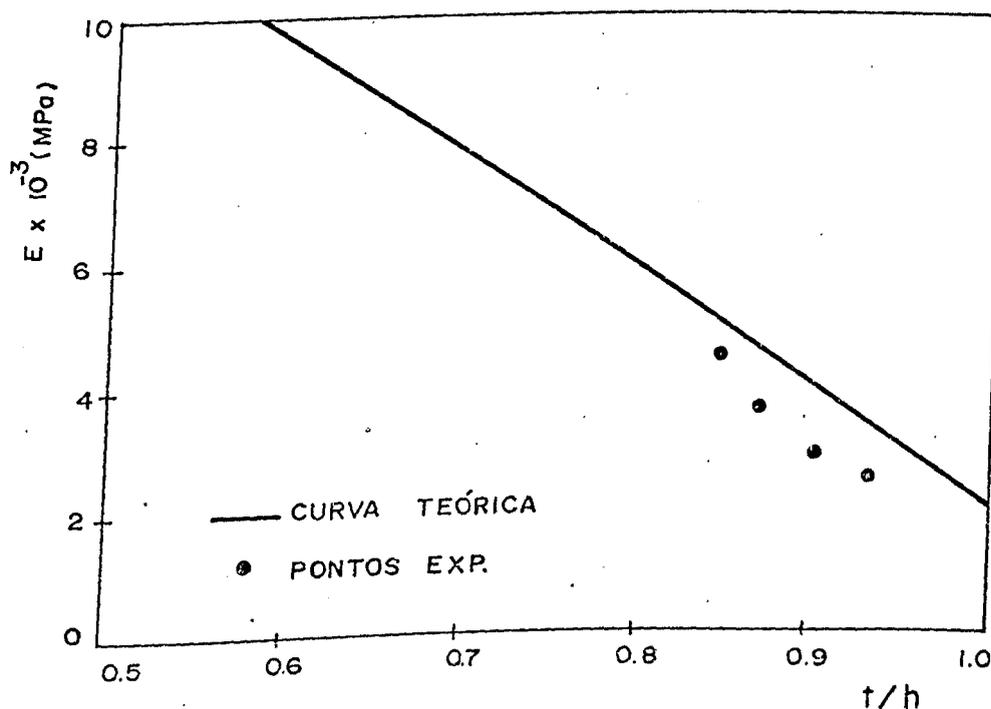


Figura 9.5 - Evolução do módulo de elasticidade médio com  $t/h$

#### b) Tensões de ruptura

Conforme esperado, a ruptura do sanduíche ocorreu de forma "brusca", caracterizando um material essencialmente frágil.

Na fig. 9.6 os resultados experimentais são comparados com os obtidos à partir das fórmulas 9.2 (curva 1) e 9.3 (curva 2),

demonstrando uma boa correlação. O efeito da variação de  $t/h$  não foi analisado para relações menores, e desta forma, apenas o critério de Von Mises foi verificado.

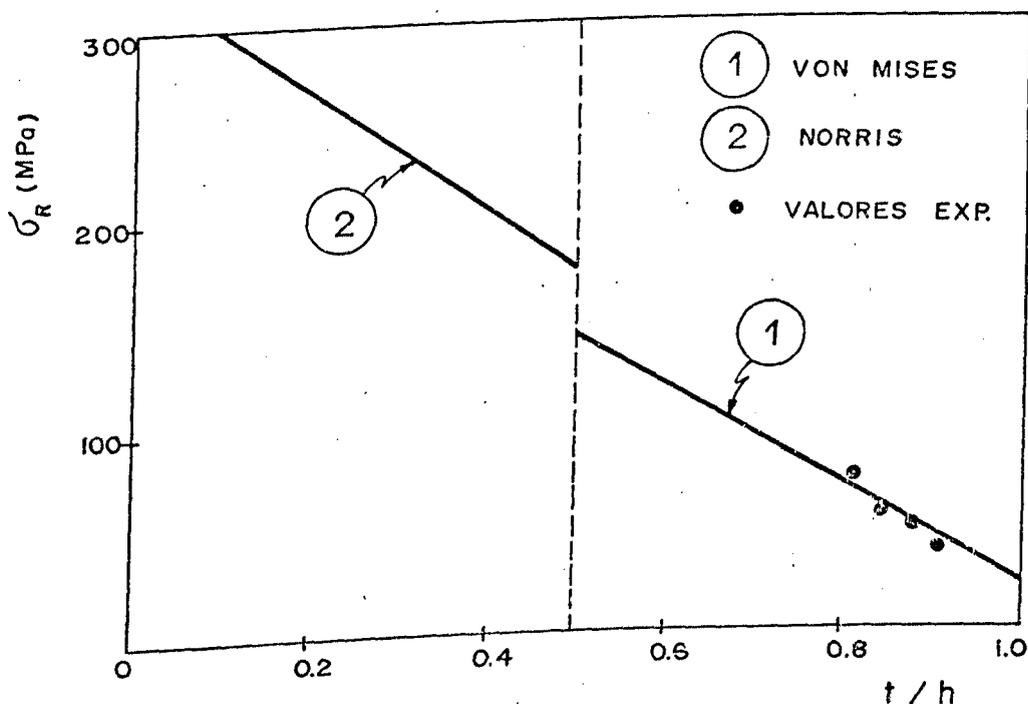


Figura 9.6 - Evolução da tensão de ruptura em função de  $t/h$

## 9.2 - ENSAIO DE FLEXÃO EM 3 PONTOS

O teste de flexão em 3 pontos vai permitir identificar a rigidez do material em flexão, e possibilitar o cálculo das tensões de ruptura, para comparação com os valores exigidos pelas normas de laminados elétricos.

Embora forneça dados de grandes deslocamentos, o ensaio de flexão em 3 pontos tem a desvantagem de apresentar um campo de tensões variável sobre o corpo de prova, o que gera modos de ruptura frequentemente complexos para os materiais compostos [47,48].

### 9.2.1 - EXECUÇÃO DO ENSAIO

Os ensaios foram realizados na MTS, utilizando-se o dispositivo mostrado na figura 9.7. Este dispositivo foi projetado e construído para ensaios em materiais compostos, e apresenta bastante praticidade, possibilitando o controle em carga e deslocamento (adquiridos via micro-computador).

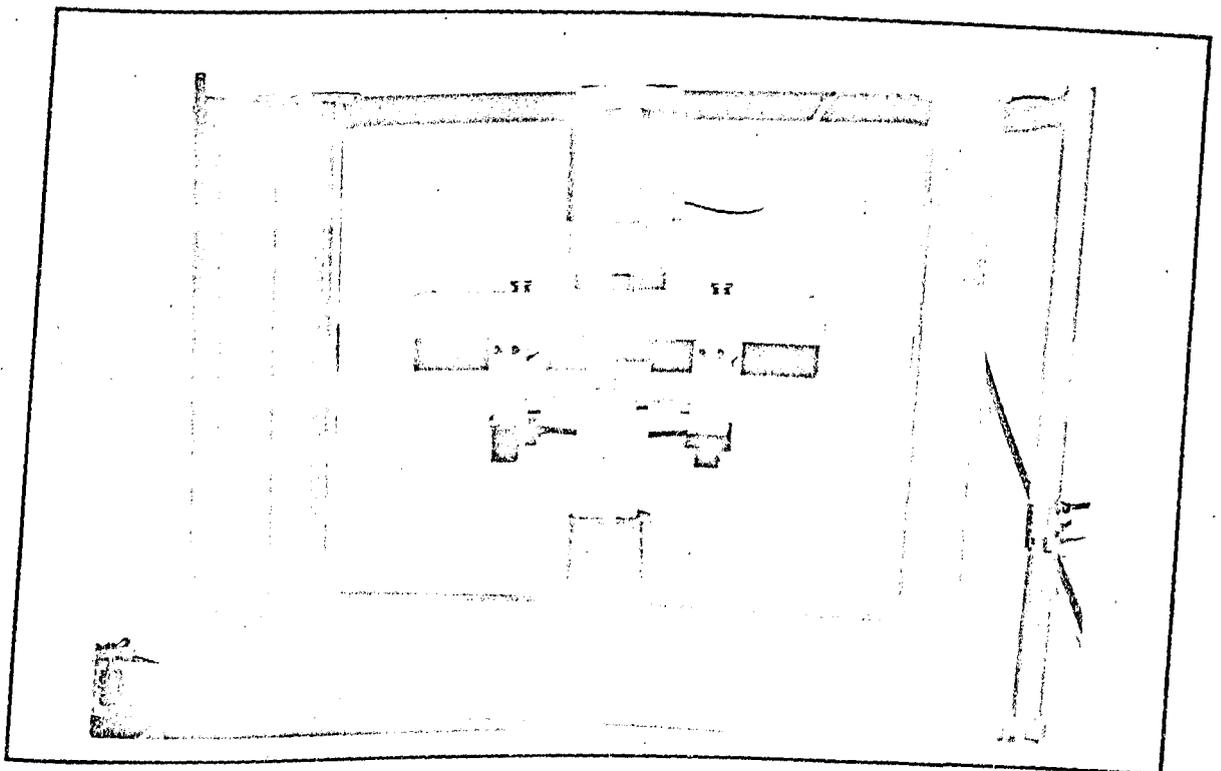


Figura 9.7 - Vista do dispositivo para ensaio de flexão em 3 pontos

A geometria dos corpos de prova e a montagem do ensaio estão esquematizados na fig. 9.8.

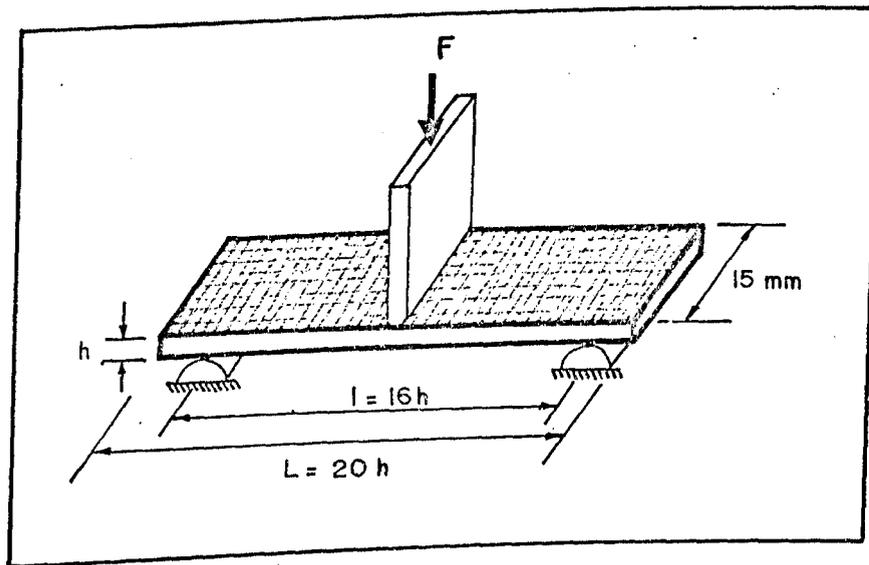


Figura 9.8- Dimensões utilizadas no ensaio de flexão em 3 pontos

Os sanduíches são posicionados na direção das fibras. A carga é aplicada no centro do corpo de prova, com velocidade de  $0.56\text{ mm/min}$ , até a ruptura (detalhe na figura 9.9).

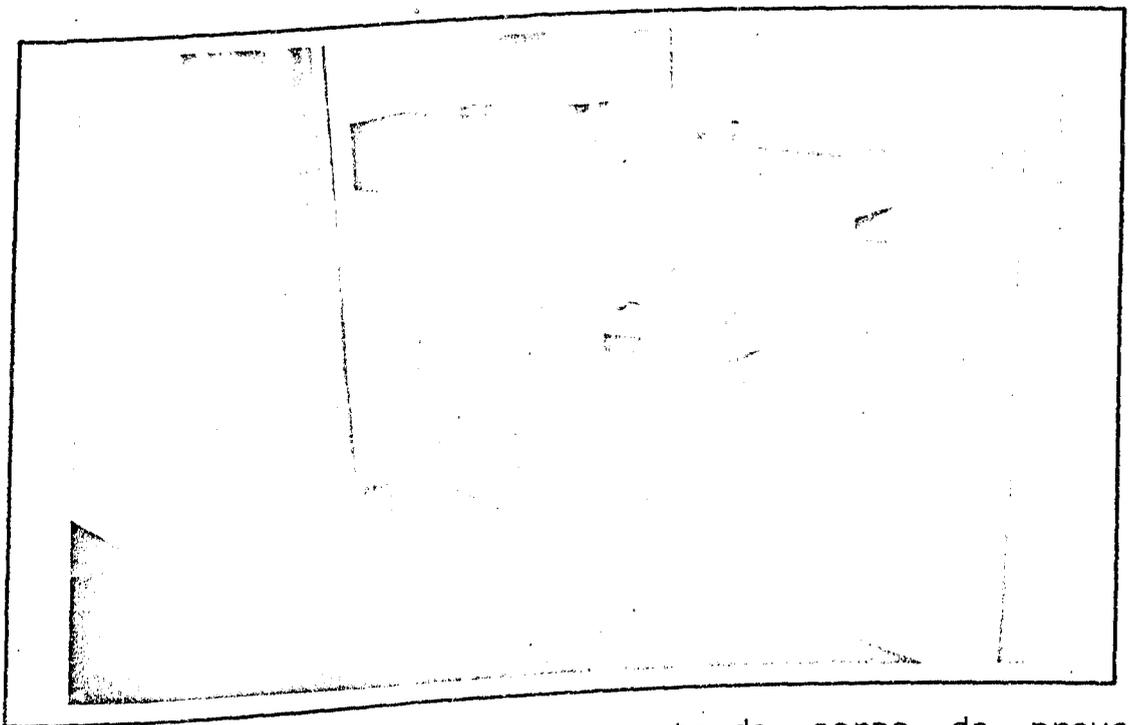


Figura 9.9 - Detalhe do posicionamento do corpo de prova no ensaio de flexão em 3 pontos

### 9.2.2 - RESULTADOS OBTIDOS

#### 9.2.2.1 - Módulo de elasticidade aparente $E_a$

Para flexão em 3 pontos, o módulo elástico aparente é dado pela equação [49] :

$$E_a = \frac{m l^3}{4 b h^3} \quad (9.4)$$

onde :

$b$ ,  $h$  e  $l$  representam respectivamente a largura, a espessura e a distância entre apoios da placa ;

$m$  é a inclinação da curva força x flecha em relação à origem. O resultado de um ensaio está mostrado na figura 9.10.

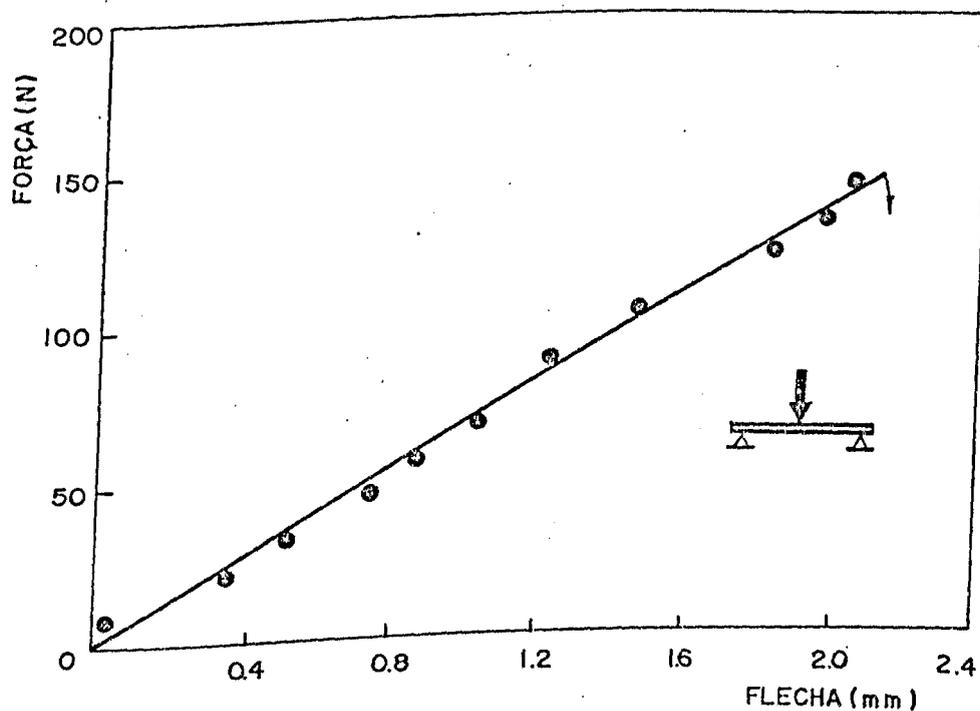


Figura 9.10 - Variação da flecha em relação à força aplicada, para  $t/h = 0.86$

Por outro lado, o módulo de elasticidade em flexão pode ser obtido diretamente das leis constitutivas, valendo :

$$E_a = \frac{12}{h^3} \left( D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} \right) \quad (9.5)$$

Os valores obtidos experimentalmente (expressão 9.4 ) e teoricamente ( fórmula 9.5), para  $t/h = 0.86$ , são :

$$E_a \text{ (teórico)} = 9.50 \times 10^3 \text{ MPa}$$

$$E_a \text{ (experimental)} = 7.96 \times 10^3 \text{ MPa}$$

Como aconteceu no caso da tração, o valor experimental está abaixo do teórico. As prováveis causas disto estão ligadas à obtenção dos corpos de prova e a própria realização do ensaio (condições de apoio e aplicação da carga; sistema de aquisição dos dados, etc.).

#### 9.2.2.2 - Ruptura estática

No caso de placas sanduíches sob flexão, a ruptura das peles em tração ou compressão ocasiona a ruptura total da estrutura. Isto acontece porque, diferentemente do ensaio de tração, na flexão, a posição de cada camada em relação ao plano médio interfere no comportamento global do sanduíche.

A tensão máxima de flexão em 3 pontos para uma determinada força  $F_R$  no momento da ruptura, vale [49] :

$$\sigma_R = \frac{3 F_R l}{2 b h^2} \quad (9.6)$$

Os ensaios realizados levam ao seguinte resultado (valor médio), obtido da expressão 9.6 :

$$\sigma_R = 2550 \text{ Kgf/cm}^2$$

Este valor está acima dos exigidos pelas normas [50] de laminados elétricos do tipo fenolite, e abaixo dos valores, para os de vidro/epóxi (que estão super-dimensionados).

### 9.3 - ENSAIO DE CARGA CONCENTRADA

Este ensaio tem por objetivo a simulação experimental de uma placa sanduíche simplesmente apoiada, sob carga concentrada. Isto vai possibilitar a validação dos programas computacionais de cálculo das tensões, feitos na primeira parte.

#### 9.3.1 - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Na realização do ensaio foram medidas as deformações normais na face inferior da placa sanduíche, segundo a montagem esquematizada na figura 9.11.

A carga é aplicada no centro da placa, até a ruptura. Para isto foi construído um dispositivo que simula uma placa simplesmente apoiada, através de um sistema de roletes. Este aparato é acoplado à MTS, o que possibilita o controle em força e deslocamento (figuras 9.12 e 9.13).

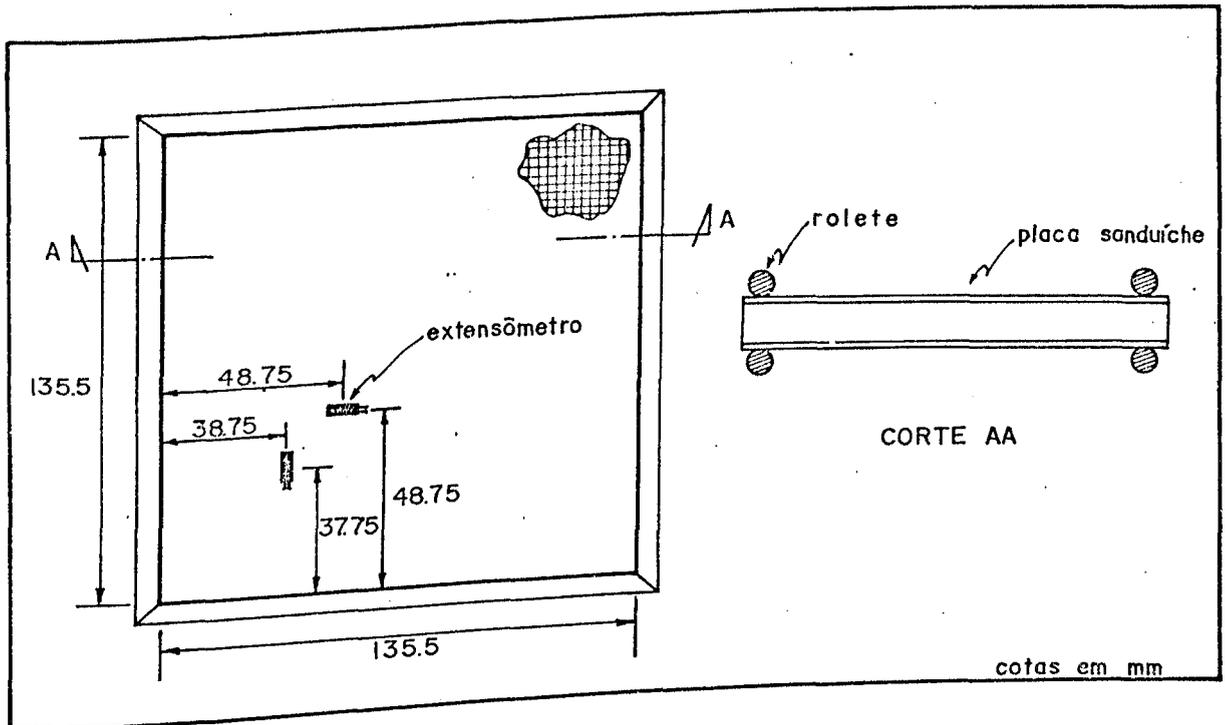


Figura 9.11 - Esquemática da montagem experimental do ensaio de carga concentrada

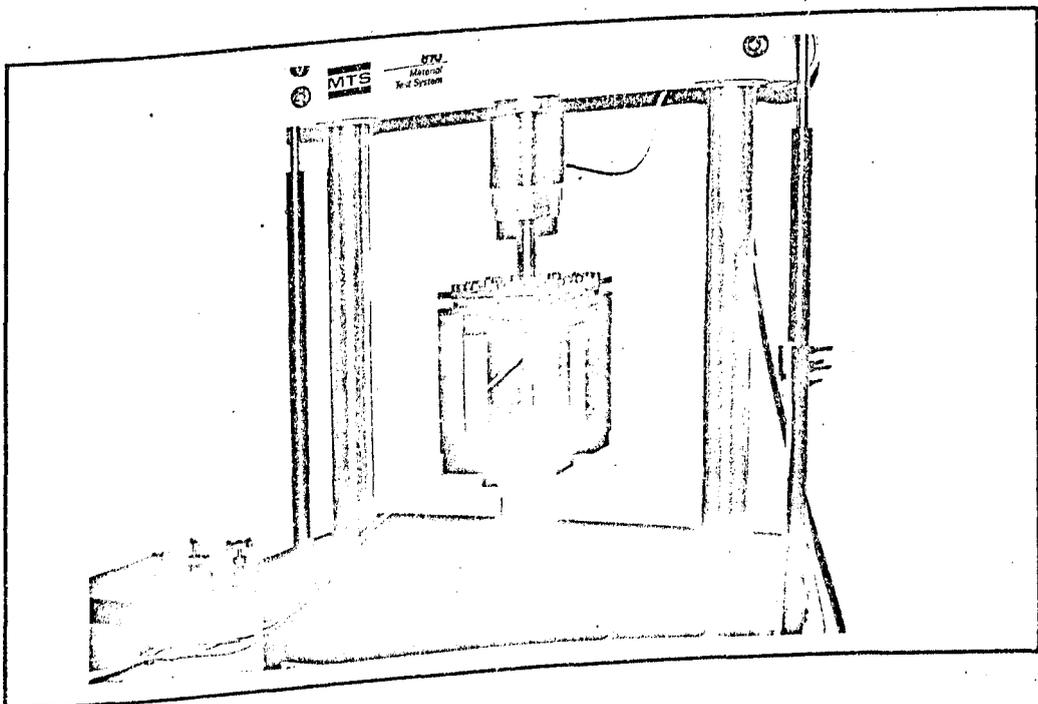


Figura 9.12 - Vista do dispositivo de ensaio de carga concentrada

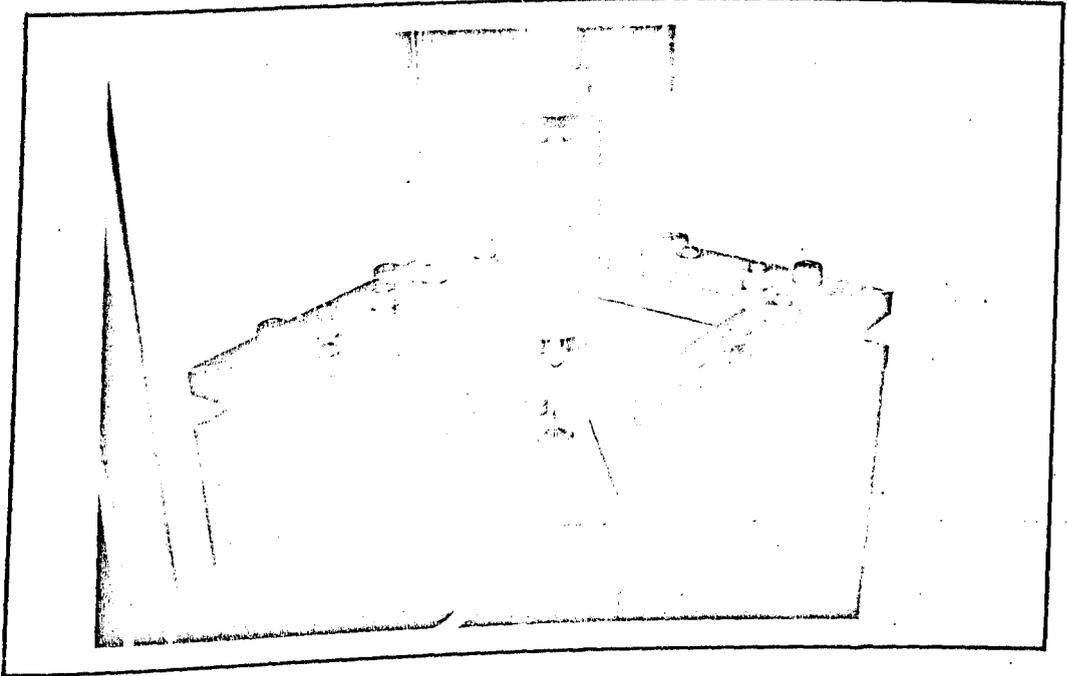


Figura 9.13 - Detalhe da aplicação da carga no centro da placa

### 9.3.2 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

As figuras 9.14 e 9.15 mostram os valores para as deformações normais  $\epsilon_{11}$  e  $\epsilon_{22}$  obtidos segundo a simulação experimental e os programas numéricos.

As curvas teóricas são lineares, enquanto que as curvas experimentais não têm uma progressão bem definida (conforme foi verificado com os demais ensaios realizados). A diferença média dos valores está em torno de 11%. Isto pode ser explicado pela dificuldade da simulação numérica e experimental de uma carga puntual, dada a concentração de esforços no local. Apesar disso, pode-se dizer que os resultados demonstram uma boa correspondência de valores, o que comprova a eficiência das duas formas de abordagem do problema.

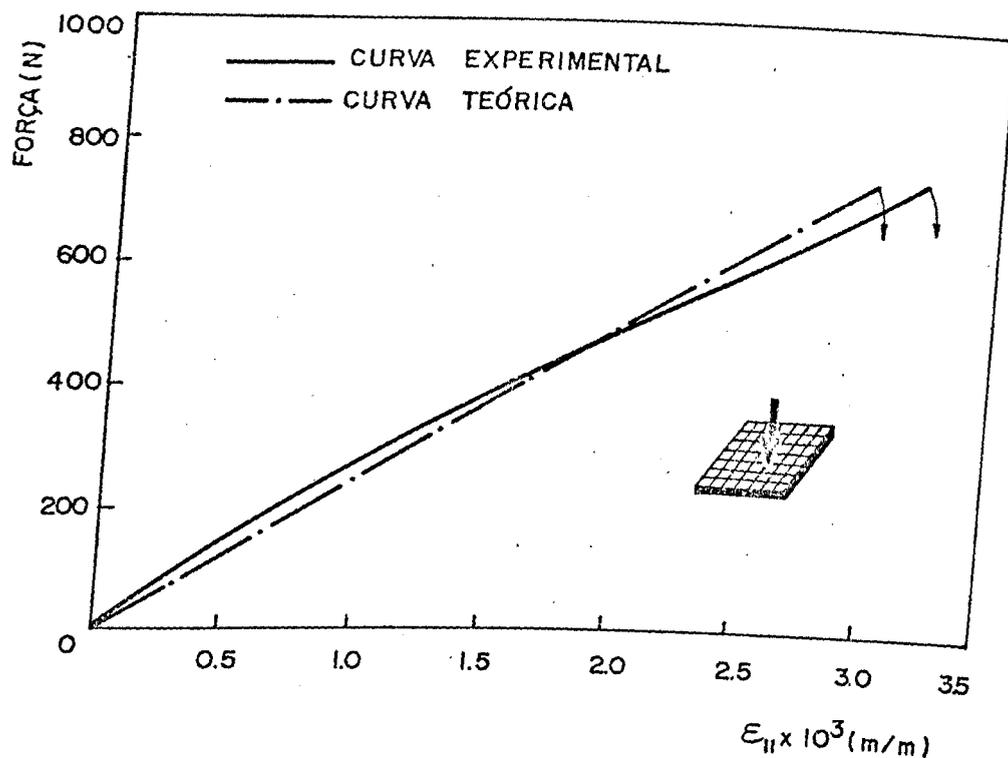


Figura 9.14 - Evolução da deformação normal  $\epsilon_{11}$  em função da carga aplicada

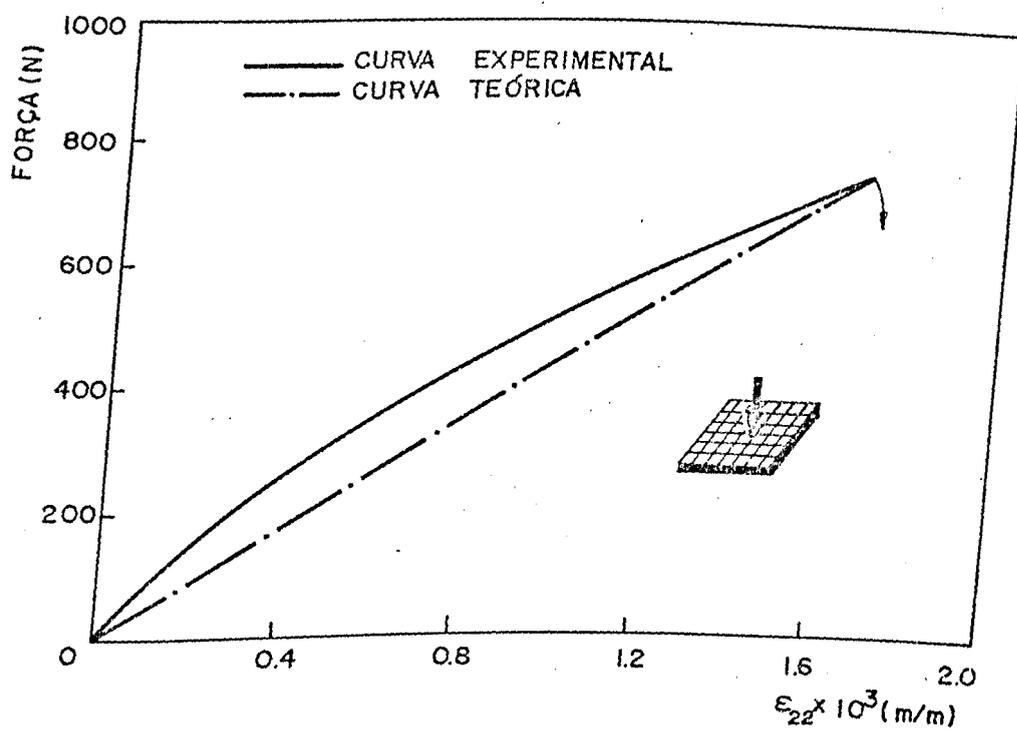


Figura 9.15 - Evolução da deformação normal  $\epsilon_{22}$  em função da carga aplicada

## 9.4 - ANÁLISE DA RUPTURA DAS PLACAS SOB FLEXÃO

### 9.4.1 - CRITÉRIO DE RUPTURA TRIDIMENSIONAL

O critério de Hill é muito utilizado para materiais compostos do tipo vidro / epóxi [51]. Este modelo é uma generalização do critério de Von Mises e sua formulação polinomial é dada por :

$$F_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} = 1 \quad i,j,k,l = 1,2,3 \quad (9.7)$$

Para materiais ortotrópicos o critério pode ser escrito como :

$$F_r (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G_r (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H_r (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2 L_r \sigma_{23}^2 + 2 M_r \sigma_{13}^2 + 2 N_r \sigma_{12}^2 = 1 \quad (9.8)$$

onde  $F_r$ ,  $G_r$ ,  $H_r$ ,  $L_r$ ,  $M_r$  e  $N_r$  são parâmetros escalares que caracterizam o estado de deformação do material. A determinação destes coeficientes leva aos seguintes resultados :

$$\begin{aligned} F_r &= \frac{1}{2} \left( 1 / Y_r^2 + 1 / Z_r^2 - 1 / X_r^2 \right) \\ G_r &= \frac{1}{2} \left( 1 / Z_r^2 + 1 / X_r^2 - 1 / Y_r^2 \right) \\ H_r &= \frac{1}{2} \left( 1 / X_r^2 + 1 / Y_r^2 - 1 / Z_r^2 \right) \\ L_r &= \frac{1}{2Q_r^2} \quad M_r = \frac{1}{2R_r^2} \quad N_r = \frac{1}{2S_r^2} \end{aligned} \quad (9.9)$$

sendo,

$X_r$ : limite de ruptura em tração na direção  $x_1$

$Y_r$ : limite de ruptura em tração na direção  $x_2$

$Z_r$ : limite de ruptura em tração na direção  $x_3$

$Q_r$ : limite de ruptura em cisalhamento no plano  $(x_1, x_2)$

$R_r$ : limite de ruptura em cisalhamento no plano  $(x_2, x_3)$

$S_r$ : limite de ruptura em cisalhamento no plano  $(x_1, x_3)$

Embora seja um critério bem adaptado aos sanduíches, a formulação de Hill não diferencia as tensões de tração e compressão. Isto no entanto não é relevante, visto que a ruptura sob flexão é governada pelas peles, onde a resistência à tração e compressão são próximas na maioria dos casos. Desta forma, o critério de Hill será adotado para a placa sanduíche elaborada, e a verificação experimental do modelo será efetuada com a realização do ensaio de carga concentrada (descrito anteriormente).

#### 9.4.2 - VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DO CRITÉRIO DE RUPTURA

Para o cálculo teórico da carga crítica, utilizou-se as tensões de ruptura calculadas no estudo de G. Sola [52], que é uma extensão do estudo de Nwokoye [17] :

- Para a alma (isotrópica)

$$X_r = Y_r = Z_r = 25 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$Q_r = R_r = S_r = 14.434 \times 10^6 \text{ Pa}$$

- Para as peles (ortotrópicas)

$$X_r = 30 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$Y_r = 30 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$Z_r = 10 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$Q_r = 10 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$R_r = 10 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$S_r = 7.5 \times 10^7 \text{ Pa}$$

Pelas relações de simetria, a ruptura ocorre na região de aplicação da carga, onde as tensões normais e de cisalhamento são máximas. Para a constatação do ponto crítico, foi utilizada uma malha (figura 9.16) que "varre" toda a placa.

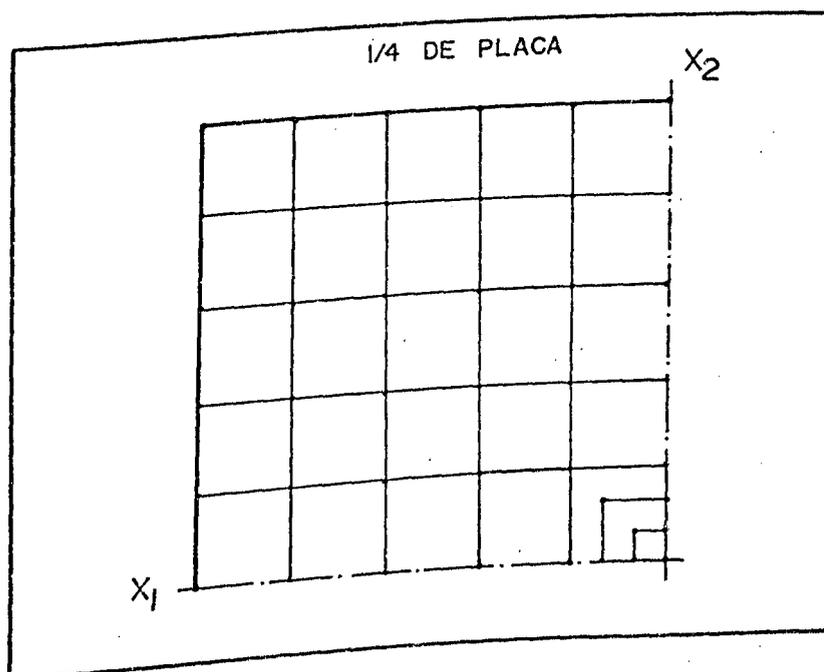


Figura 9.16 - Malha utilizada para o cálculo das tensões críticas de ruptura

Na realização do ensaio experimental, a aplicação da carga é feita gradualmente, com controle da velocidade de deslocamento. A ruptura ocorreu exatamente no ponto de aplicação da carga, sendo que o processo é caracterizado por um comportamento "menos frágil" do sanduíche.

Os resultados obtidos para a simulação computacional e os ensaios experimentais (valor médio) foram os seguintes :

$$F_R \text{ (teórica)} = 510 \text{ N}$$
$$F_R \text{ (experimental)} = 540 \text{ N}$$

A diferença dos valores pode ser explicada pela dificuldade de se precisar a montagem e a medição experimental. Além disso, existe a problemática da simulação a nível teórico e experimental, da aplicação de uma carga concentrada.

Com estas considerações, e levando-se em conta a dificuldade de se trabalhar com a ruptura de materiais anisotrópicos, pode-se dizer que os valores obtidos para a força  $F_R$  foram satisfatórios. Conclui-se desta forma, que o critério de Hill caracterizou bem a ruptura do painel sanduíche elaborado.

## CAPITULO 10

## CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Esta análise final do trabalho pode ser dividida em três partes interdependentes.

Primeiramente foram desenvolvidos três programas de cálculo das tensões em placas sanduíches. No caso da placa sob flexão, o método analítico que utiliza séries de Fourier demonstrou ser o mais preciso quando comparado com outros autores. Neste estudo, a análise da convergência das séries permitiu uma considerável atenuação do Fenômeno de Gibbs, embora a aproximação para carregamentos críticos como o de carga concentrada, não tenha sido inteiramente satisfeita. Quanto às limitações naturais do método analítico (variação da geometria da placa, do carregamento e das condições de contorno), estas dificuldades podem ser atenuadas com aplicação de formulações específicas, desenvolvidas recentemente por diversos autores, em associação com os procedimentos tradicionais (Método da Superposição, por exemplo). Este estudo é sugestivo para trabalhos futuros.

Em relação ao programa de elementos finitos, considerando os resultados obtidos, e pela sua característica de flexibilidade, a aplicação no cálculo estrutural é indicada. O problema da descontinuidade das deformações foi eliminado com o uso da

técnica de diferenças finitas, embora esta técnica tenha suas limitações em relação à geometria da placa. Mesmo não sendo apresentada uma verificação mais ampla das potencialidades do método, o programa desenvolvido apresenta condições para tal, bastando interpretar-se corretamente os parâmetros envolvidos na formulação. O objetivo principal aqui foi de compor - se uma estruturação básica do programa, mostrando sua validade operacional. Isto foi comprovado satisfatoriamente.

Nesta mesma linha de raciocínio, a análise das tensões termomecânicas permitiu uma primeira verificação da validade da metodologia utilizada, e a conseqüente eficiência do programa computacional elaborado. Neste caso específico, uma avaliação mais precisa ficou prejudicada, dada a dificuldade de se encontrar na literatura os exemplos aplicados, similares aos pretendidos para a formulação desenvolvida. Isto aconteceu porque a maioria dos autores não considera a variação do campo de temperatura no plano  $(x_1, x_2)$  da placa.

Um fator a ser destacado nestes três estudos é a possibilidade de trabalhar-se com uma placa sanduíche assimétrica, o que não é usual na literatura relativa ao tema. Este aspecto pode facilitar o desenvolvimento de novos tipos de estruturas sanduíches (como a que foi mostrada na fig. 3.2).

Quanto ao suporte isolante para circuitos impressos elaborado, o resultado obtido superou as expectativas iniciais. O conhecimento do processo, em relação ao aspecto de concepção da estrutura e manipulação da metodologia de moldagem, permitiu o domínio básico da tecnologia. Ressalta-se que o objetivo principal da pesquisa não foi de se obter um produto acabado

para efetivação mercadológica, mas sim um protótipo que demonstrasse a eficiência do sistema proposto.

Deve-se observar também a dificuldade natural da moldagem de materiais compostos com ciclos de pressão e temperatura controlados, da forma que foi realizado.

Finalmente, na parte relativa aos ensaios mecânicos, os resultados obtidos foram satisfatórios, comprovando a eficiência dos dispositivos construídos e validando a metodologia experimental utilizada. Vale destacar que no Brasil não existe uma normalização efetiva para ensaios em materiais compostos, como em outros países.

Como proposição para trabalhos futuros sugere-se incrementar os programas computacionais, incluindo as estruturas multicamadas, com destaque à implementação de recursos gráficos. Em relação às tensões térmicas e higroscópicas, uma abordagem experimental do problema poderia ser feita, incluindo-se o regime transiente.

Na parte experimental, o controle de temperatura deve ser melhorado, o que possibilitaria a identificação da temperatura de transição vítrea e do tempo de gel, conforme foi discutido. Novas moldagens devem ser feitas (inclusive com outros materiais), aumentando-se o espectro da relação  $t/h$ . Isto permitirá uma avaliação mais abrangente do comportamento do sanduíche sob tração e flexão. Posteriormente, pode ser efetuada a identificação completa das propriedades elásticas dos materiais envolvidos (isotrópicos e ortotrópicos).

Vale reafirmar que, sendo este trabalho o primeiro na área de Materiais Compostos do Departamento de Engenharia Mecânica da

Universidade Federal de Uberlândia, existe um vasto campo de atuação, tanto a nível acadêmico como de pesquisa aplicada, a ser explorado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - REISSNER, E., "Small Bending and stretching of sandwich type shells", NACA Report 975, 1950
- [2] - REISSNER and STAVSKY, "Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates", Journal of Applied Mech., Vol. 28, 1961, 402-408
- [3] - REISSNER, E., "A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates", AIAA Journal, vol.10, 1972, 716-719
- [4] - MINDLIN, R. D., "Influence of rotary inertia and shear deformation on flexural motions of isotropic, elastic plates", Journal of applied mech., vol.18, 1951, 31-38
- [5] - MINDLIN, R.D. and MEDICK, M.A., "Extensional vibration of elastic plates", Journal of applied mech., vol.56, 1959, 561-569
- [6] - PAGANO, N.J., "Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending", Journal of composite materials, vol.3, 1969, 398-411
- [7] - LO, K.H., CHRISTENSEN, R.M. and WU, E.M., "A higher-order theory of plate deformation", Journal of applied mech., 1977, 663-676
- [8] - REDDY, J.N., "A simple higher-order theory for laminated composite plates", Journal of applied mech., vol. 51, 1984, 745-752

- [9] - MURAKAMI, H., "Laminated plate theory with improved in-plane responses", Journal of applied mech., vol.53, 1986, 661-666
- [10] - WHITNEY, J.M., "Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates", Journal of composite materials, vol.6, 1972, 426-440
- [11] - WHITNEY, J. M., "The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates", Journal of composite materials, vol.3, 1969, 534-546
- [12] - KASSAPOGLOU, C., and LAGAS, P.A., "An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials", Journal of applied mech., vol.53, 1986, 744-750
- [13] - NOOR, A.K. and BURTON, W.S., "Three-dimensional solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plates", ASME, vol.57, 1990, 182-188
- [14] - CHOU, S.-I., EKSTRON, R.E. and MESSMAN R., "Interlaminar normal stresses in a multilayered plate-theory and experiment", Society for experimental mech., 1986, 508-512
- [15] - KANT, T., "Numerical analysis of thick plates", Comput. methods in applied mech. engineering, vol.31, 1982, 1-18
- [16] - PANDYA, B.N. and KANT, T., "Flexural analysis of laminated composites using refined higher-order C' plate bending elements", Computer methods in applied mech. and engineering, vol.66, 1988, 173-198

- [17] - DONATUS, N.O., "Nouveau materiau sandwich pour circuits imprimés : analyse theorique, realisation de prototypes et essais de validation", Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Franche-Comté, Besançon, 1989
- [18] - SANMARTIN, M.-L., "Matériau sandwich nouveau", Matériaux et techniques, 1988, 3-7
- [19] - PAGANO, N.J., "Exact solution for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", Journal of composite materials, vol.4, 1970, 20-34
- [20] - PAYDAR, N. and LIBOVE, C., "Bending of sandwich plates of variable thickness", Journal of applied mech., vol.55, 1988, 419-424
- [21] - DANG, P., "Théories des plaques sandwichs élastiques anisotropes", Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Technologie, Compiègne, 1976
- [22] - CANUTO, C., HUSSAINI, M.Y., QUARTEZONI, A. and ZANG, T.A. "Spectral Methods in Fluid Dynamics", New York, 1988
- [23] - HUEBNER, K.H. and THORNTON, E.A., "The finite element method for engineers", New York, 1982
- [24] - ZIENKIEWICZ, O. C. , " The finite element method ", McGraw-Hill, 1977
- [25] - RIBEIRO, C.R., "Um programa para análise de problemas de engenharia via elementos finitos", Publicação interna do Depart. Eng. Mecânica, UFU, 1990
- [26] - PIPES, R.B., VINSON, J.R. and CHOU, T.-W., "On the hygrothermal response of laminated composite systems", Journal of composite materials, vol.10, 1976, 129-148

- [27] - HUSSEIN, R., "Thermal stresses in sandwich panels"  
Canadian aeronautics and space journal, vol.30, 1984  
152-161
- [28] - WANG, Y.R. and CHOU, T.-W., "Three-dimensional transient  
interlaminar thermal stresses in angle-ply composites"  
Journal of applied mech., vol.56, 1989, 601-608
- [29] - WANG, A.S.D. and CROSSMAN, F.W., " Edge effects on  
thermally induced stresses in composite laminates",  
Journal of composite materials, vol.11, 1977, 300-312
- [30] - CHONG, K.P., THAM, L.G. and CHEUNG, Y.G., "Thermal  
behavior of formed sandwich plate by  
finite-prism-strip method", Computers & structures ,  
vol.15, 1981, 321-324
- [31] - AVERY, W.B. and HERAKOVICH, C.T., "Effect of fiber  
anisotropy on thermal stresses in fibrous composites",  
Journal of applied mech., vol.53, 1986, 751-756
- [32] - ENE, H.I., "On the hygrothermomechanical behavior of a  
composite material" , Int. journal eng. science,  
vol.24, 1986, 841-847
- [33] - DVORAK, G. J., "Thermal expansion of elastic-plastic  
composite materials" , Journal of applied mech.,  
vol.53, 1986, 737-743
- [34] - GANDHI, M. V., USMAN, M. and CHAO, L., " Nonlinear  
vibration of laminated composite plates in  
hygrothermal environments", ASME, vol. 110, 1988,  
140-145

- [35] - REDDY, J.N. and CHAO, W.C., "A comparison of closed-form and finite element solutions of thick laminated anisotropic rectangular plates", Nuclear engineering and design, vol.64, 1981, 153-167
- [36] - TANG, J.-M., LEE, W.I., SPRINGER, G.S., "Effects of cure pressure on resin flow, voids, and mechanical properties", Journal of composite materials, vol.21, 1987, 421-439
- [37] - FANCONI, B.M., WANG, F.W. and HUSTON, D.L., "Comparisons among process monitoring techniques", ANTEC, 1987, 1100-1102
- [38] - FESQUET, M.F., MOURCIA, M.O., MERLE, M., "La détermination des temps de gélification et de durcissement dans le domaine des matériaux composites", Composites, mars-avril/1986, 14-16
- [39] - MALLOW, A.R., MUNCASTER, F.R. and CAMPBELL, F.C., "Science based cure model for composites", Proceedings of the american soc. of composites, 1986, 171-185
- [40] - "FORMULATING WITH DOW EPOXY RESINS - ELECTRICAL LAMINATES", The Dow Chemical Company, 1983
- [41] - VILLOUTREIX, G., VILLOUTREIX, J., BERLOT, R., SCAON, L.L., VILLEPONTOUX, D., "Contribution a l'étude des propriétés mécaniques, électriques et thermiques de composites chargés de microsphères de verre creuses. Influence du taux de charge sur ces propriétés", Composites, mars-avril/1988, 41-45

- [42] - MICHEL, P., "Étude expérimentale et modélisation de caractéristiques mécaniques d'un matériau composite en verre-époxy", Thèse de docteur-Ingénieur, Univ. de Franche-Comté, Besançon, 1983
- [43] - TARNOPOL'SKII Yu.M. and KINCIS, T., "Static test methods for composites", New York, 1985
- [44] - TOLF, G. and CLARIN, P., "Comparison between flexural and tensile modulus of fibre composites", Fibre science and technology, vol.21, 1984, 319-326
- [45] - PINDER, M. -J. and HERAKOVICH, C. T. , " Shear characterization of unidirectional composites with the off-axis tension test", Experimental mechanics, 1985, 103-112
- [46] - SEICHEPINE, J. L., VAUTRIN, A et GUITARD, D., "Interpretation d'essais de traction, de flexion trois points, et de dilatométrie de plaques stratifiées epoxy / carbone " , Colloques internationaux du CNRS, 1979, 869-884
- [47] - BURGADE, G., "Tests mécaniques sur les composites", Bombannes-Carcans, 1979
- [48] - HOFFMAN, P., VIOLLAZ, F., SAUTEREAU, H. et FEVE, M., "Détermination des caractéristiques mécaniques et étude de l'endommagement de matériaux composites à l'aide d'un essai de flexion 3 pts - application à l'étude de l'interface de composites carbone/époxyde", Composites, novembre-décembre/1986, 30-34
- [49] - PASCAULT, J.P. et PILLOT, C., "Propriétés mécaniques des stratifiées et modélisation des interfaces", INSA-Lyon

- [50] - "LAMINADOS INDUSTRIAIS-COBREADOS-MULTILAYER", Perstorp do Brasil
- [51] - WEISS, J. et BORD, C., "Les matériaux composites", L'usine, Paris, 1983
- [52] - SOLA, G., "Logiciel de calcul tridimensionnel de plaques stratifiées sollicitées en flexion - mise en évidence de la rupture-validation expérimentale", DEA, Université de Besançon, 1990
- [53] - WEETON, J.W., PETERS, D.M. and THOMAS, K.L., "Engineers' Guide to composite materials", ASM, Ohio, 1987

A N E X O S

## ANEXO I

## EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA A ELASTICIDADE LINEAR

A lei de comportamento ou lei de Hooke generalizada é escrita sob a forma :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

ou

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3$  (I.1)

O tensor de rigidez  $C_{ijkl}$  assim como o tensor de flexibilidade  $S_{ijkl}$  possuem no caso mais abrangente 81 constantes. Todavia, os casos gerais de anisotropia são raramente úteis. Os tipos mais utilizados são dados a seguir.

I.1 - Material isotrópico

Neste caso a lei de comportamento possui apenas duas constantes independentes :

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad (I.2)$$

onde :

$\lambda$  e  $\mu$  : constantes de Lamé

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$\delta_{ij}$  : delta de kronecker

## I.2 - Material ortotrópico

Estes materiais possuem três planos ortogonais de simetria elástica, com 9 constantes independentes. Sob a forma matricial, a lei de comportamento é :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{I.3})$$

onde :

$$C_{11} = \frac{E_1 (1 - \nu_{32} \nu_{23})}{A} \quad C_{12} = \frac{E_2 (\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{32})}{A}$$

$$C_{13} = \frac{E_3 (\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23})}{A} \quad C_{23} = \frac{E_3 (\nu_{23} + \nu_{13} \nu_{21})}{A}$$

$$C_{22} = \frac{E_2 (1 - \nu_{31} \nu_{13})}{A} \quad C_{33} = \frac{E_3 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}{A}$$

$$C_{44} = G_{23} \quad C_{55} = G_{13} \quad C_{66} = G_{12}$$

$$A = 1 - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{31}\nu_{21}$$

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} \quad \nu_{32} = \frac{E_3}{E_2} \nu_{23} \quad \nu_{31} = \frac{E_3}{E_1} \nu_{13}$$

Se existe uma isotropia transversal, as constantes são reduzidas para 5, e a lei de comportamento resulta :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{I.4})$$

$$C^* = (C_{11} - C_{12}) / 2$$

### I.3 - Material monoclinico

É o caso onde o material possui apenas um plano de simetria, existindo 13 constantes independentes. Considerando que o plano  $(x_1, x_2)$  é o de simetria, tem-se :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\gamma\delta} + C_{\alpha\beta 33} \epsilon^{33} \\ \sigma_{33} &= C_{33\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta} + C_{3333} \epsilon^{33} \\ \sigma_{\alpha 3} &= 2 C_{\alpha 3\beta 3} \epsilon^{\beta 3} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \gamma, \delta &= 1, 2, 3 \\ \alpha, \beta &= 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

## ANEXO II

PROPRIEDADES MECÂNICAS E FÍSICAS DE UMA MONOCAMADA  
ORTOTRÓPICA

As constantes elásticas e higrotérmicas de uma camada unidirecional (figura II.1) podem ser determinadas pelas propriedades da matriz (m) e das fibras (f), através da lei da mistura .

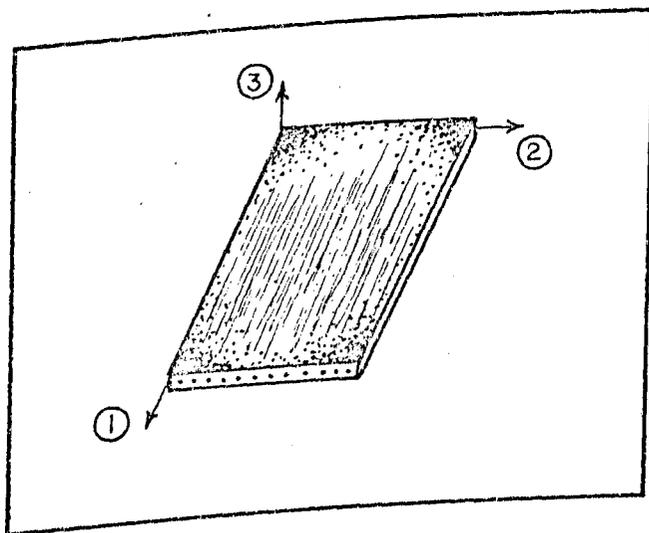


Figura II.1 - Referência da monocamada

## II.1 - Propiedades elásticas [28]

$$E_1 = E_{f1} V_f + E_m V_m$$

$$E_2 = E_3 = E_m / [1 - \sqrt{V_f} (1 - E_m / E_{f2})]$$

$$G_{12} = G_{13} = G_m / [1 - \sqrt{V_f} (1 - G_m / G_{f12})]$$

(II.1)

$$G_{23} = G_m / [1 - \sqrt{V_f} (1 - G_m / G_{f23})]$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{f12} V_f + \nu_m V_m$$

$$\nu_{23} = E_2 / 2G_{23} - 1$$

## II.2 - Propiedades térmicas [28]

$$\alpha_{11} = (\alpha_{f1} E_{f1} V_f + \alpha_m E_m V_m) / E_1$$

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{f2} \sqrt{V_f} + (1 - \sqrt{V_f}) (1 + V_f \nu_m E_{f1} / E_1) \alpha_m$$

(II.2)

$$K_I = K_{f1} V_f + K_m V_m$$

$$K_{II} = K_{III} = (1 - \sqrt{V_f}) K_m + K_m \sqrt{V_f} / [(1 - \sqrt{V_f}) (1 + K_m / K_{f2})]$$

### II.3 - Propiedades higroscópicas [53]

$$D_I = (1 - V_f) D_m$$

$$D_{II} = D_{III} = (1 - \sqrt{V_f}) D_m \quad (\text{II.3})$$

$$\beta_{11} = \beta_m (1 - V_f) E_m / E_1$$

$$\beta_{22} = \beta_{33} = \beta_m (1 - \sqrt{V_f}) \left[ 1 + \frac{\sqrt{V_f} (1 - \sqrt{K_f}) E_m}{\sqrt{V_f} E_2 + (1 - \sqrt{V_f}) E_m} \right]$$

## ANEXO III

## PROPRIEDADES FÍSICAS, ELÉTRICAS E MECÂNICAS DE UMA ESPUMA SINTÁTICA DE MICROESFERAS OCAS DE VIDRO E RESINA EPÓXI

O estudo feito por G.Villoutreix e outros [41] permitiu a identificação das propriedades físicas, elétricas e mecânicas da espuma sintática, quando se variava a porcentagem de microesferas ocas de vidro. Este estudo serve de orientação para o dimensionamento deste tipo de estrutura, quando se deseja obter propriedades específicas para determinadas finalidades.

A composição da espuma sintática utilizada no estudo é a seguinte :

- resina epóxi : XB 3052 A
- microesferas ocas de vidro :

Tabela III.1 - Características das microesferas ocas de vidro

SÉRIE	B23/500	B37/2000	C15/250	E22X
PROPRIEDADES				
densidade média	0.23	0.37	0.15	0.22
espessura parede $\mu\text{m}$	0.93	1.35	0.60	0.52
diâmetro médio $\mu\text{m}$	60	55	60	35
vidro/vazios Vol. $10^2$	10.00	17.00	6.23	9.44

Os resultados obtidos são mostrados a seguir :

## 1 - Propriedades mecânicas

### 1.1 - Densidade

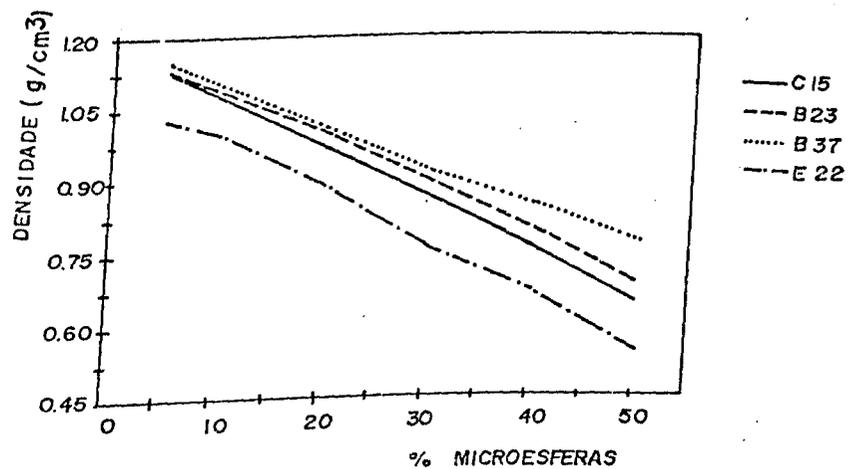


Figura III.1 - Variação da densidade em função da taxa volumétrica de microesferas

### 1.2 - Resistência à compressão

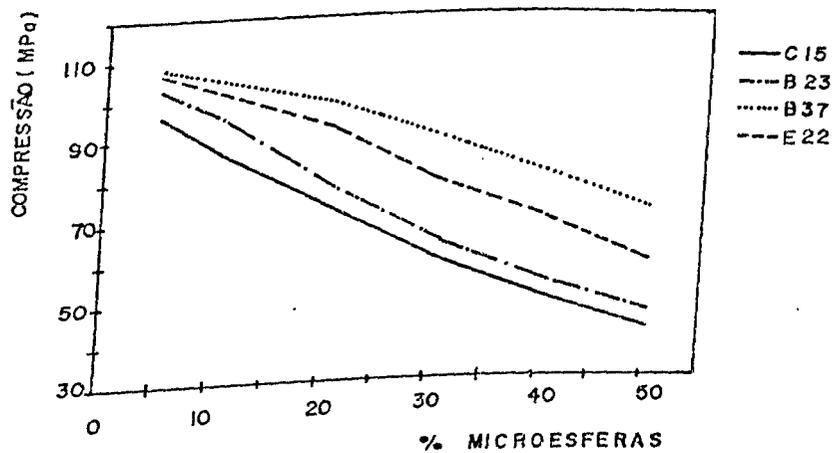


Figura III.2- Variação da resistência à compressão em função da taxa volumétrica de microesferas

## 1.2 - Resistência ao choque

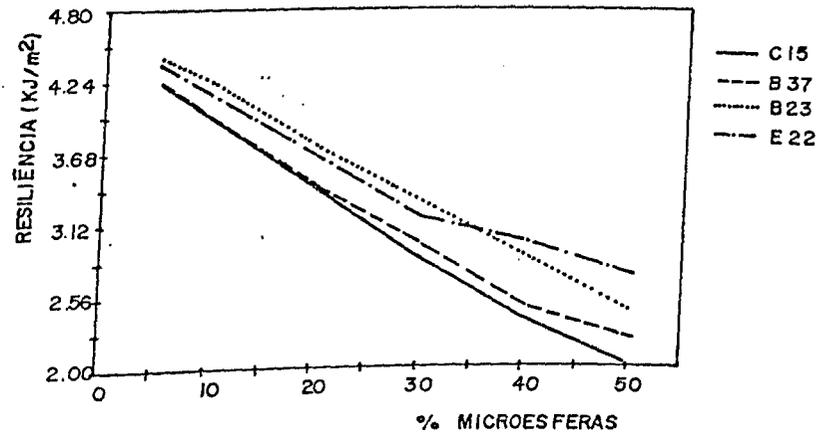


Figura III.3 - Resistência ao choque em função da taxa volumétrica de microesferas

## 1.4 - Módulo de elasticidade

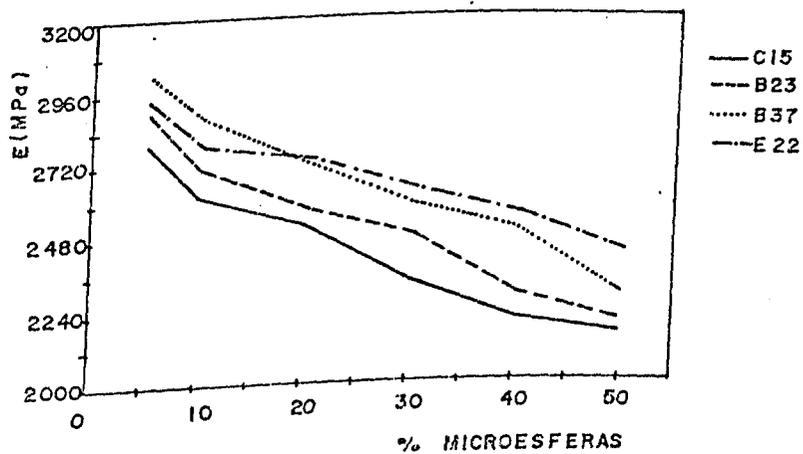


Figura III.4 - Variação do módulo de elasticidade em função da taxa volumétrica de microesferas

## 1.5 - Rigidez específica

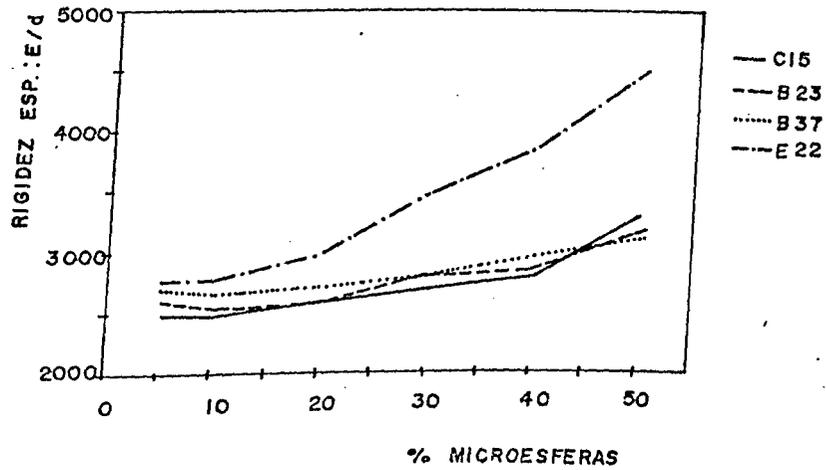


Figura III.5 - Variação da rigidez específica em função da taxa volumétrica de microesferas

2 - Propriedades elétricas

## 2.1 - Permissividade dielétrica

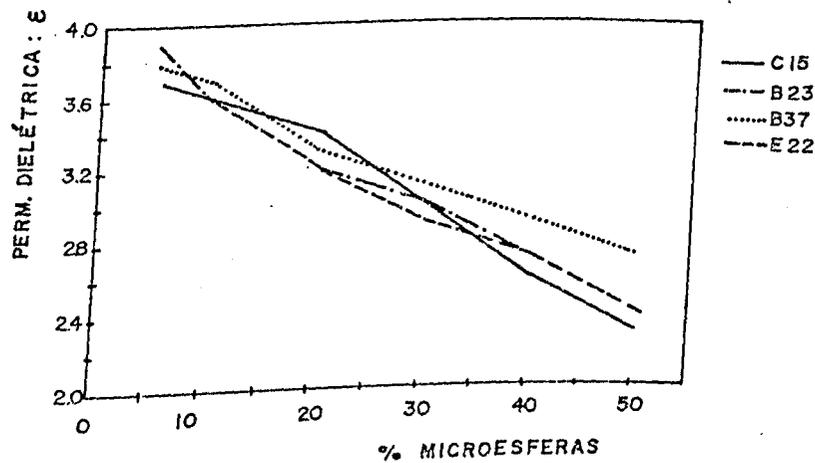


Figura III.6 - Variação da permissividade dielétrica em função da taxa volumétrica de microesferas

2.2 - Fator de perdas -  $\text{tg } \delta$ Tabela III.2 - Variação de  $\text{tg } \delta$  em função da taxa volumétrica de microesferas

$\text{tg } \delta - 10^2$	resina pura	5%	10%	20%	30%	40%	50%
C 15	3.7	3.2	2.9	3.5	2.3		
B 23		3.7	3.6	3.4	2.9	2.4	
B 37		2.8	3.1	3.6	2.7	2.6	2.2
E 22		3.5	3.0	2.9	2.8	2.4	2.2

3 - Propriedades térmicas

## 3.1 - Condutividade térmica

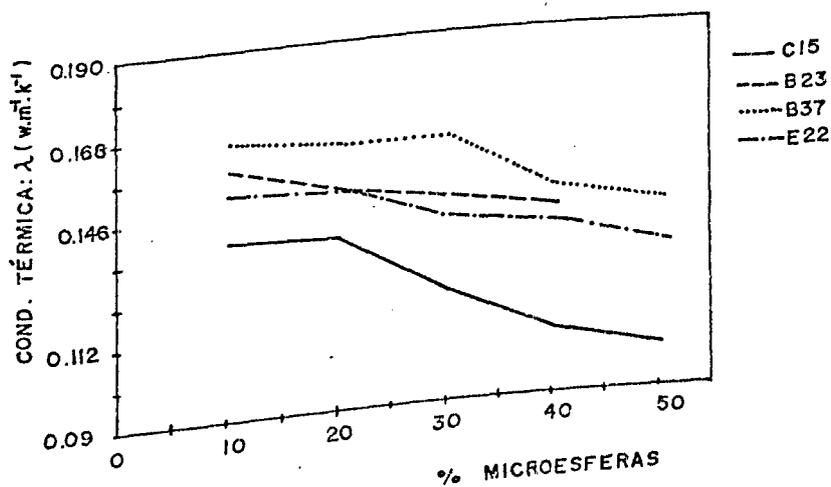


Figura III.7 - Variação da condutividade térmica em função da taxa volumétrica de microesferas

## 3.2 - Difusividade térmica

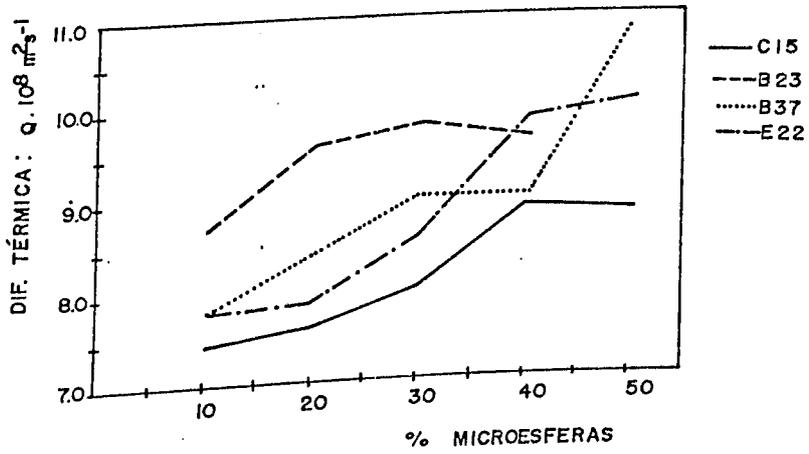


Figura III.8 - Variação da difusividade térmica em função da taxa volumétrica de microesferas

## ANEXO IV

## ENTRADA DOS DADOS NOS PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

Os arquivos dados a seguir mostram como é feita a entrada dos parâmetros de cálculo, o que possibilita a utilização dos programas elaborados. Estes arquivos foram montados para o cálculo das tensões nos exemplos dos capítulos 5, 6 e 7. Os dados não mostrados são fornecidos por via conversacional.

## IV.1 - Programa de cálculo que utiliza as séries de Fourier

```

C*****
C
C      ARQUIVO DOS PARAMETROS DE CARREGAMENTO
C
C*****
C
C      OS PARAMETROS SAO :
C
C      PARA CARREGAMENTO SENOIDAL : Po1, Po11(face inferior)
C      PARA CARREGAMENTO UNIFORME : Po2 , Po22
C      PARA CARREGAMENTO PARCIAL : Po3,Po33,Xb1,xb2,c,d
C      PARA CARREGAMENTO CONCENTRADO : P4,P44,Xb11.Xb22
C      PARA CARREGAMENTO LINEAR : Po5,Po55,XXb2
C      PARA CARREGAMENTO TRIANGULAR :Po4,Po44
C
C      ELES ENTRAM NA SEGUINTE ORDEM :
C
C      Po1,Po2,Po3,Po4,Xb1,xb2,c,d,P4,Xb11,Xb22,Po5,XXb2
C      Po11,Po22,Po33,Po44,P44,Po55
C*****
C
C      -1D6,-1D6,-1D6,-1D6,.66,.5,.4,.4,1D6,.25,.25,1D6,.25
C      0,0,0,0,0,0

```

```

C*****
C
C      ARQUIVO DE ENTRADA DAS COORDENADAS DOS PONTOS
C
C*****
C
C      AS COORDENADAS ENTRAM POR PONTO : X1,X2,X3
C
C*****
C
C      .167,.333,.025
C      .25,.333,.025
C      .0833,.167,.025
C      .0833,.0833,.025

```

```

C*****
C
C      ARQUIVO DAS CONSTANTES ELASTICAS
C      E DAS TENSOES DE RUPTURA
C
C*****
C
C      ENTRE , PELA ORDEM :
C
C      E1,E2,E3,G12,G13,G23,NI12,NI13,NI23
C
C      PRIMEIRA LINHA : CONSTANTES DA PELE SUPERIOR
C
C      SEGUNDA LINHA : CONSTANTES DA PELE INFERIOR
C
C      TERCEIRA LINHA : CONSTANTES DA ALMA
C
C
C      X,Y,Z,Q,R,S
C
C      QUARTA LINHA : TENSOES DE RUPTURA DA ALMA
C
C      QUINTA LINHA : TENSOES DE RUPTURA DA PELE SUPERIOR
C
C      SEXTA LINHA : TENSOES DE RUPTURA DA PELE INFERIOR
C
C*****
C
C      25D6,1D6,1D6,0.5D6,0.5D6,0.2D6,0.25,0.25,0.25
C      25D6,1D6,1D6,0.5D6,0.5D6,0.2D6,0.25,0.25,0.25
C      25D6,1D6,1D6,0.5D6,0.5D6,0.5D6,0.01,0.25,0.25
C      1D6,25D6,1D6,0.5D6,0.2D6,14.434D6,14.434D6
C      25D6,25D6,25D6,14.434D6,100D6,75D6
C      300D6,300D6,100D6,100D6,100D6,75D6
C      300D6,300D6,100D6,100D6,100D6,75D6

```

## IV.2 - Programa de cálculo que utiliza elementos finitos

```

C*****
C*          ARQUIVO DA MORFOLOGIA DOS ELEMENTOS          **
C*****
C*          ENTRE COM O NUMERO DOS 9 NOS DE CADA ELEMENTO          **
C*
C*****
C
15.16,17,8,9,10,1,2,3
17,18,19,10,11,12,3,4,5.
19,20,21,12,13,14,5,6,7
29,30,31,22,23,24,15,16,17
31,32,33,24,25,26,17,18,19
33,34,35,26,27,28,19,20,21
43,44,45,36,37,38,29,30,31
45,46,47,38,39,40,31,32,33
47,48,49,40,41,42,33,34,35

```

```

C*****
C*          ARQUIVO DE CARREGAMENTO DOS NOS          **
C*****
C*          ENTRADA DOS DADOS: NUMERO DO NO, VALOR DA CARGA          **
C*
C*****
C
9, 249002.
10, 431962.
11, 498185.
12, 431962.
13, 248188.
16, 433378.
17, 751812.
18, 867071.
19, 751812.
20, 431962.
23, 499819.
24, 867071.
25,1000000.
26, 867071.
27, 498185.
30, 433378.
31, 751812.
32, 867071.
33, 751812.
34, 431962.
37, 249819.
38, 433378.
39, 499819.
40, 433378.
41, 249002.

```

```

C*****
C*          ARQUIVO DOS PARAMETROS DE ENTRADA          **
C*****
C*
C* ENTRE, PELA ORDEM : NUMERO DE ELEMENTOS, NUMERO TOTAL DE **
C*                      NOS, NUMERO DE NOS COM RESTRICOES, **
C*                      NUMERO DE NOS COM CARGA, COORDENADA X3, **
C*                      ESPESSURA DA ALMA, ESPESSURA TOTAL DA **
C*                      PLACA **
C* **
C*****
C
9.49,24,49,.025,.045,.05
    
```

```

C*****
C* ARQUIVO DAS RESTRICOES NOS NOS ( CONDICoes DE CONTORNO ) **
C*****
C*
C*
C* ENTRADA DOS DADOS : NUMERO DO NO, 0 = LIVRE          **
C*                      1 = RESTRINGIDO **
C*
C*                      COLUNA 2 = u30 **
C*                      COLUNA 3 = psi1 **
C*                      COLUNA 4 = psi2 **
C*                      COLUNA 5 = teta3 **
C*                      COLUNA 6 = fi1 **
C*                      COLUNA 7 = fi2 **
C* **
C*
C*****
C
    
```

```

1,1,1,1,1,1,1
2,1,1,0,1,1,0
3,1,1,0,1,1,0
4,1,1,0,1,1,0
5,1,1,0,1,1,0
6,1,1,0,1,1,0
7,1,1,1,1,1,1
14,1,0,1,1,0,1
21,1,0,1,1,0,1
28,1,0,1,1,0,1
35,1,0,1,1,0,1
42,1,0,1,1,0,1
49,1,1,1,1,1,1
48,1,1,0,1,1,0
47,1,1,0,1,1,0
46,1,1,0,1,1,0
45,1,1,0,1,1,0
44,1,1,0,1,1,0
43,1,1,1,1,1,1
36,1,0,1,1,0,1
29,1,0,1,1,0,1
22,1,0,1,1,0,1
15,1,0,1,1,0,1
8,1,0,1,1,0,1
    
```

```

C*****
C***** ARQUIVO DAS COORDENADAS DOS NOS ***** **
C*****
C*
C* ENTRADA DOS DADOS: NUMERO DO NO. X1, X2 **
C*
C*****
C
1,.0,.5
2,.0833,.5
3,.167,.5
4,.25,.5
5,.333,.5
6,.417,.5
7,.5,.5
8,.0,.417
9,.0833,.417
10,.167,.417
11,.25,.417
12,.333,.417
13,.417,.417
14,.5,.417
15,.0,.333
16,.0833,.333
17,.167,.333
18,.25,.333
19,.333,.333
20,.417,.333
21,.5,.333
22,.0,.25
23,.0833,.25
24,.167,.25
25,.25,.25
26,.333,.25
27,.417,.25
28,.5,.25
29,.0,.167
30,.0833,.167
31,.167,.167
32,.25,.167
33,.333,.167
34,.417,.167
35,.5,.167
36,.0,.0833
37,.0833,.0833
38,.167,.0833
39,.25,.0833
40,.333,.0833
41,.417,.0833
42,.5,.0833
43,.0,.0
44,.0833,.0
45,.167,.0
46,.25,.0
47,.333,.0
48,.417,.0
49,.5,.0

```

## IV.3 - Programa de cálculo das tensões devido ao efeito térmico

```

C*****
C
C      ARQUIVO DOS PARAMETROS DE CARREGAMENTO TERMICO
C
C*****
C      OS PARAMETROS SAO :
C
C
C      AF1 = COEF. DE DILATAÇAO LONGITUDINAL DA PELE SUPERIOR
C      AF2 = COEF. DE DILATAÇAO LONGITUDINAL DA ALMA
C      AF3 = COEF. DE DILATAÇAO LONGITUDINAL DA PELE INFERIOR
C      AF11 = COEF. DE DILATAÇAO TRANSVERSAL DA PELE SUPERIOR
C      AF22 = COEF. DE DILATAÇAO TRANSVERSAL DA ALMA
C      AF33 = COEF. DE DILATAÇAO TRANSVERSAL DA PELE INFERIOR
C      CAPS = CONDUTIVIDADE TERMICA DA PELE SUPERIOR
C      CAA = CONDUTIVIDADE TERMICA DA ALMA
C      CAPI = CONDUTIVIDADE TERMICA DA PELE INFERIOR
C
C      TA = TEMPERATURA NA FACE SUPERIOR DA PLACA
C      TD = TEMPERATURA NA FACE INFERIOR DA PLACA
C      *ESTAS TEMPERATURAS ESTAO ( PLANO XIX2 ) :
C      PARA CARREGAMENTO TERMICO SENDIDAL : NO MEIO DA PLACA
C      PARA CARREGAMENTO TERMICO UNIFORME : qq/ PONTO
C      PARA CARREGAMENTO TERMICO TRIANGULAR : NA BORDA
C
C      ELES ENTRAM NA SEGUINTE ORDEM :
C
C      TA,TD,AF1,AF2,AF3,AF11,AF22,AF33,CAPS,CAA,CAPI
C
C*****
C
225.,175.,8.6,22.1,8.6,22.1,8.6,22.1,0.3,0.3,0.3

```

## ANEXO V

## DESCRIÇÃO DOS MATERIAIS UTILIZADOS NA CONFECÇÃO DE PAINÉIS SANDUÍCHES

Os materiais mais utilizados na confecção das estruturas sanduíches são os seguintes [51,53] :

V.1 - Alma

## V.1.1 - Alma plana

- balsa e contraplacas (madeiras)
- diferentes espumas flexíveis ou rígidas :
  - poliuretano ;
  - resina fenólica ;
  - poliéster ;
  - epóxi ;
  - silicone ;
  - PVC ;
  - polietileno ;
  - polipropileno ;
  - poliestireno ;
  - acrilonitrilo-butadieno-estireno (ABS) ;
  - acetato de celulose ;
  - copolímero de etileno e acetato de vinil.

## V.1.2 - Alma em colméia

- papel kraft ;
- papel kraft impregnado de resina ;
- poliéster reforçado de fibras de vidro ;
- papel poliamida (Nomex) ;
- ligas de alumínio ;
- ligas de titânio, aço e superligas.

V.2 - Peles

- resinas termofixas reforçadas por tecidos ou "mat" de fibras de vidro, carbono ou aramida ;
- fibras de celulose impregnadas ;
- ligas de alumínio e aço.

A união das peles e da alma é feita por uma ligação do tipo colagem, com a ajuda de resinas compatíveis com os materiais presentes. Esta ligação pode ser clássica, com a interposição de um filme de cola, ou resultar do processo de fabricação (impregnação direta das peles sobre a alma).

PUBLICAÇÕES

## ANEXO VI

A seguir é apresentada a relação dos trabalhos publicados em congressos científicos e seminários, desenvolvidos durante a execução da dissertação.

- [1] - CUNHA, J. e BILLA, R., " Cálculo tridimensional de placas sanduíches anisotrópicas solicitadas em flexão ", Anais do XI COBEM, São Paulo, 1991, 125-128
- [2] - CUNHA, J. e BILLA, R., " Elaboração e identificação de um novo material para circuitos impressos : Sanduíche Multicamadas", Anais do SIMPÓSIO FRANCO-BRASILEIRO DE CIÊNCIAS DOS MATERIAIS, Ouro Preto, 1992, 34-35
- [3] - CUNHA, J. e BILLA, R., " Cálculo de placas sanduíches ou estratificadas solicitadas elasticamente em flexão", Anais do SIMPÓSIO FRANCO-BRASILEIRO DE CIÊNCIAS DOS MATERIAIS, Ouro Preto, 1992, 32-33
- [4] - CUNHA, J. e BILLA, R., "Projeto e fabricação de um novo material do tipo sanduíche", Anais do II CONGRESSO DE ENG. MECÂNICA NORTE-NORDESTE, João Pessoa, 1992, 325-331

- [5] - CUNHA, J. e BILLA, R., "Caracterização mecânica de placas sanduíches :ensaio unidirecional e de carga concentrada" Anais do VI SEMEC-UFU, Uberlândia, 1992
- [6] - MURILO, C., CUNHA, J. e BILLA, R., " Ensaio de flexão em 3 pontos para materiais compostos", Anais do VI SEMEC-UFU, Uberlândia, 1992
- [7] - CUNHA, J. e BILLA, R., "Desenvolvimento de um dispositivo para moldagem de materiais compostos por compressão à quente", X CBECIMAT, Águas de Lindóia, dezembro/1992
- [8] - CUNHA, J. e BILLA, R., "Análise da ruptura de placas sanduíches anisotrópicas", X CBECIMAT, Águas de Lindóia, dezembro/1992