

GABRIELA COSTA DE OLIVEIRA

Estudo do Desempenho Térmico de Ferramentas de
Corte Revestidas a Partir da Obtenção da Solução
Analítica de um Modelo Térmico de Condução de Calor
3D Transiente Dupla Camada



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2019

GABRIELA COSTA DE OLIVEIRA

Estudo do Desempenho Térmico de Ferramentas de
Corte Revestidas a Partir da Obtenção da Solução
Analítica de um Modelo Térmico de Condução de Calor
3D Transiente Dupla Camada

Tese apresentada ao Programa de Pós-
graduação em Engenharia Mecânica da Uni-
versidade Federal de Uberlândia.

Área de Concentração: Transferência de Calor
e Mecânica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães

**Uberlândia
2019**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

O48
2019

Oliveira, Gabriela Costa de, 1989-
Estudo do Desempenho Térmico de Ferramentas de Corte
Revestidas a Partir da Obtenção da Solução Analítica de um
Modelo Térmico de Condução de Calor 3D Transiente Dupla
Camada [recurso eletrônico] / Gabriela Costa de Oliveira. -
2019.

Orientador: Gilmar Guimarães.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2033>

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Guimarães, Gilmar, 1960-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-
graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

ATA DE DEFESA

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado, 272, COPEM				
Data:	vinte e oito de junho de dois mil e dezenove	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:30
Matrícula do Discente:	11513EMC017				
Nome do Discente:	Gabriela Costa de Oliveira				
Título do Trabalho:	Estudo do Desempenho Térmico de Ferramentas de Corte Revestidas a partir da Obtenção da Solução Analítica de um Modelo Térmico de Condução de Calor 3D Transiente Dupla Camada				
Área de concentração:	Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos				
Linha de pesquisa:	Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se na sala 1B132 - Bloco 1B, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Márcio Bacci da Silva - FEMEC/UFU; Francisco José de Souza - FEMEC/UFU e Gilmar Guimarães - FEMEC/UFU orientador(a) do(a) candidato(a). Ressalta-se que o Prof. Dr. Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva - UNIFEI e Prof. Dr. Saulo Guths - UFSC participaram da defesa por meio de vídeo conferência desde a cidade de Itajubá/MG e Florianópolis/SC e os demais membros da banca e o aluno participaram *in loco*

Iniciando os trabalhos o(a) presidente da mesa, Dr(a). Gilmar Guimarães apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado(a).

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Saulo Guths, Usuário Externo**, em 05/07/2019, às 09:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva, Usuário Externo**, em 05/07/2019, às 09:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gilmar Guimarães, Professor(a) do Magistério Superior**, em 05/07/2019, às 09:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco José de Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 05/07/2019, às 10:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcio Bacci da Silva, Professor(a) do Magistério Superior**, em 05/07/2019, às 14:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1374124** e o código CRC **0938D984**.

Ao Sidney.

Agradecimentos

À minha família.

Ao Sidney por ser tão importante em minha vida. Devido a seu companherismo, amizade, paciência, compreensão, apoio, alegria e amor, este trabalho pode ser concretizado.

Aos professores da FACIP que ajudaram na minha formação.

Aos amigos do LTCME e LPM.

Às meninas da secretaria da pós.

A todos amigos da FEMEC, docentes, técnicos-administrativos e discentes.

Especialmente, ao meu, mais que orientador, Gilmar.

Às agências financiadoras CAPES, CNPq e FAPEMIG.

Oliveira, G. C. **Estudo do Desempenho Térmico de Ferramentas de Corte Revestidas a Partir da Obtenção da Solução Analítica de um Modelo Térmico de Condução de Calor 3D Transiente Dupla Camada**. 2019. 129f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

A evolução tecnológica da produção de ferramentas levou ao desenvolvimento e a aplicação de revestimentos de ferramentas facilitando o corte por atrito através da atuação nos mecanismos tribológicos. Uma das principais funções dos revestimentos é o de proporcionar um menor desgaste da ferramenta, porém as características de isolamento térmico é outro efeito desejado. Este trabalho é dedicado ao desenvolvimento de ferramentas matemáticas para o estudo do comportamento térmico de ferramentas revestidas durante a simulação de um processo de corte ortogonal. Neste sentido, desenvolvem-se soluções analíticas aliadas à técnica inversa TFBGF (transfer function based Green's functions) para a estimativa do fluxo de calor gerado na interface peça-ferramenta revestida. Apresentam-se soluções de dois problemas diretos relacionados á ferramenta revestida: um problema térmico mais simples, 1D multicamada transiente para um melhor entendimento do desenvolvimento da metodologia de solução e o problema 3D transiente dupla camada que simula o problema de usinagem ortogonal. Apresentam-se ainda a técnica inversa TFBGF e a proposta de adaptação a problemas de dupla camada. As soluções dos problemas diretos relacionados, 1D e 3D, são verificadas para se garantir a implementação numérica das soluções. Análises da influência da espessura e das propriedades térmicas do revestimento em amostras duplas camada são também apresentadas. Estudam-se a influência das propriedades térmicas de vários tipos de revestimento, a variação de temperatura na interface peça ferramenta, na interface revestimento e substrato e na obtenção do fluxo de calor gerado na interface. A obtenção da solução analítica de um problema 3D transiente, dupla camada com aquecimento parcial representa uma grande contribuição desse trabalho, uma vez que esta solução não se encontra disponível na literatura. A adaptação da técnica TFBGF para domínios dupla camada também se mostra uma ferramenta poderosa no estudo de materiais revestidos.

Palavras-chave: funções de Green, solução analítica, multicamada, condução de calor, ferramenta revestida

Oliveira, G. C. **Study of the Thermal Performance of Coated Cutting Tools from Obtaining the Analytical Solution of a Transient two-Layer Transient 3D Heat Conduction Model.** 2019. 129p. Master's Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The technological evolution of the production of tools led to the development and application of tool coatings facilitating the frictional cutting through the performance in the tribological mechanisms. One of the main functions of the coatings is to provide less wear of the tool, but the thermal insulation characteristics is another desired effect. This work is dedicated to the development of mathematical tools for the study of the thermal behavior of coated tools during the simulation of an orthogonal cutting process. In this sense, analytical solutions were developed in conjunction with the TFBGF (transfer function based Green's functions) inverse technique for estimating the heat flux generated at the coated tool interface. We present solutions of two direct problems related to the coated tool: a simpler thermal problem, 1D transient two-layer for a better understanding of the development of the solution methodology and the 3D transient two-layer problem that simulates the problem of orthogonal machining. This work presents the TFBGF inverse technique and the proposal of adaptation to two-layer problems. The solutions of the related direct problems, 1D and 3D, were verified to guarantee the numerical implementation of the solutions. Analysis of the influence of the thickness and the thermal properties of the coating on two-layer samples are also presented. The influence of the thermal properties of various types of coating, the temperature variation in the tool piece interface, the coating and substrate interface and the generation of heat generated at the interface were studied. Obtaining the analytical solution of a transient 3D two-layer partial heating problem represents a major contribution of this work since this solution is not available in the literature. The adaptation of the TFBGF technique to two-layer domains also proves to be a powerful tool in the study of coated materials.

Keywords: Green's function, analytical solution, multilayer, heat conduction, coated tool

Lista de Figuras

3.1	Problema térmico: placa plana, com duas camadas, submetida a um fluxo de calor em $x = 0$, e à condição de isolamento térmico na superfície oposta, $x = L$.	16
3.2	Fluxo de calor discreto.	19
3.3	Sistema dinâmico de uma entrada e saída.	21
3.4	Problema $X33Y2C12Z33$	26
3.5	Problema $X33Y2C12Z33$	29
4.1	Equivalência entre $X33Y3C13Z33$ e $X33Y33Z33$	61
4.2	Fluxo de calor pulso triangular	62
4.3	Verificação das soluções $X33Y33Z33$ e $X33Y2C13Z33$ no ponto $y=W$	63
4.4	Diferença de temperatura das soluções no ponto $y=W$	63
4.5	Verificação das soluções $X33Y33Z33$ e $X33Y2C13Z33$ no ponto $y=b$	64
4.6	Diferença de temperatura das soluções no ponto $y=b$	64
4.7	Verificação das soluções $X33Y33Z33$ e $X33Y2C13Z33$ no ponto $y=0$	65
4.8	Diferença de temperatura das soluções no ponto $y=0$	65
4.9	Perfil de temperatura ao longo do tempo da solução 3D $X33Y3C13Z33$ para as posições $x = 0, b$ e L	68
4.10	Perfil de temperatura ao longo do tempo da solução 1D $X2C12$ para as posições $x = 0, b$ e L	69
4.11	Verificação computacional das soluções $X33Y3C13Z33$ e $Y2C12$ para $x = 0$	69
4.12	Diferença Absoluta entre as soluções $X33Y3C13Z33$ e $Y2C12$ para $x = 0$	70
4.13	Verificação computacional das soluções $X33Y3C13Z33$ e $Y2C12$ para $x = b$	70
4.14	Diferença Absoluta entre as soluções $X33Y3C13Z33$ e $Y2C12$ para $x = b$	71
4.15	Verificação computacional das soluções $X33Y3C13Z33$ e $Y2C12$ para $x = W$	71
4.16	Diferença Absoluta entre as soluções $X33Y3C13Z33$ e $Y2C12$ para $x = W$	72
5.1	Fluxo de calor com pulso triangular.	76
5.2	Temperaturas sintéticas obtidas com a imposição de um fluxo de calor triangular.	76
5.3	Resposta Impulsiva do problema $X2C12$ com camadas com as mesmas propriedades térmicas.	77
5.4	Fluxo de calor estimado usando a função de transferência e temperaturas calculadas em $x = 0$	79
5.5	Fluxo de calor estimado usando a função de transferência e temperaturas calculadas em $x = b$	79

5.6	Fluxo de calor estimado usando a função de transferência e temperaturas calculadas em $x = L$.	80
5.7	Diferença percentual entre o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = 0$.	81
5.8	Diferença percentual entre o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = b$.	81
5.9	Diferença percentual entre o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = L$.	82
5.10	Comparação entre as temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = 0$.	83
5.11	Comparação entre as temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = b$.	83
5.12	Comparação entre as temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = L$.	84
5.13	Diferença relativa entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado na posição $x = 0$.	84
5.14	Diferença relativa entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado na posição $x = b$.	85
5.15	Diferença relativa entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado na posição $x = L$.	85
5.16	Temperaturas obtidas a partir do uso de um fluxo de calor triangular com propriedades termofísicas distintas.	87
5.17	Resposta impulsiva h_1 .	88
5.18	Resposta impulsiva h_2 .	88
5.19	Fluxo de calor estimado usando a função de transferência h_1 calculadas em $x = 0$.	90
5.20	Fluxo de calor estimado usando a função de transferência h_1 calculadas em $x = b$.	90
5.21	Fluxo de calor estimado usando a função de transferência h_2 calculadas em $x = L$.	91
5.22	Diferença absoluta entre o fluxo de calor simulado e estimado considerando h_1 para as posições $x = 0, b$.	91
5.23	Diferença absoluta entre o fluxo de calor simulado e estimado considerando h_2 para a posição $x = L$.	92
5.24	Comparação entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado em $x = 0$.	93
5.25	Comparação entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado em $x = b$.	93
5.26	Comparação entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado em $x = L$.	94
5.27	Diferença relativa entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado para as posições $x = 0, b$ e L usando h_1 .	94
5.28	Diferença relativa entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado na posição $x = L$.	95

5.29	Comparação entre os fluxos de calor estimado e imposto, considerando uma espessura de revestimento de $12\mu m$, e usando função de transferência de temperaturas sintéticas obtidas em $x = L$	96
5.30	Comparação entre os fluxos de calor estimado e imposto, considerando uma espessura de revestimento de $8\mu m$, e usando função de transferência de temperaturas sintéticas obtidas em $x = L$	97
5.31	Comparação entre os fluxos de calor estimado e imposto, considerando uma espessura de revestimento de $4\mu m$, e usando função de transferência de temperaturas sintéticas obtidas em $x = L$	97
5.32	Evolução da temperatura estimada considerando espessura de revestimento igual a $12\mu m$	98
5.33	Evolução da temperatura estimada considerando espessura de revestimento igual a $8\mu m$	98
5.34	Evolução da temperatura estimada considerando espessura de revestimento igual a $4\mu m$	99
5.35	Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de cobalto e espessura $12\mu m$	101
5.36	Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de cobalto e espessura $8\mu m$	101
5.37	Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de cobalto e espessura $4\mu m$	102
5.38	Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de Al_2O_3 e espessura $12\mu m$	102
5.39	Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de Al_2O_3 e espessura $8\mu m$	103
5.40	Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de Al_2O_3 e espessura $4\mu m$	103
5.41	Fluxo de calor retangular.	105
5.42	X33Y3C13Z33 com área parcial com fluxo de calor.	105
5.43	Evolução das temperaturas calculadas nas posições 1, 2 e 3.	106
5.44	Função de transferência nas posições $Ta1, Ta2$ e $Ta3$	107
5.45	Comparação entre o fluxo de calor imposto q e o fluxo de calor estimado q_1 para posição 1.	108
5.46	Comparação entre o fluxo de calor imposto q e o fluxo de calor estimado q_2 para posição 2.	108
5.47	Comparação entre o fluxo de calor imposto q e o fluxo de calor estimado q_3 para posição 3.	109
5.48	Evolução de temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto $Ta1(q)$ e fluxo de calor estimado $Ta1(q1)$	110
5.49	Evolução de temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto $Ta1(q)$ e fluxo de calor estimado $Ta2(q2)$	110
5.50	Evolução de temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto $Ta3(q)$ e fluxo de calor estimado $Ta3(q3)$	111
5.51	Campo de temperatura no plano XZ com $y=W$, vista superior.	112

5.52	Campo de temperatura no plano XY com $z=0$, vista frontal.	112
5.53	Campo de temperatura no plano YZ com $x=0$, vista lateral.	113
6.1	Modelo 1D para análise do revestimento.	115
6.2	Fluxo imposto, fluxo estimado considerando o modelo com revestimento de cobalto e o fluxo estimado desprezando o efeito do revestimento.	115
6.3	Comparação entre os perfis de temperaturas obtidas usando o fluxo de calor estimado q_1 e o fluxo de calor imposto q_1 ambos considera-se o efeito do revestimento.	116
6.4	Diferença relativa entre o fluxo de calor estimado considerando o efeito do revestimento.	117
6.5	Comparação entre os perfis de temperaturas obtidas usando o fluxo de calor imposto q_1 e o fluxo de calor estimado q_0 desprezando o efeito do revestimento.	117
6.6	Diferença relativa entre o fluxo de calor estimado desprezando o efeito do revestimento.	118
6.7	Modelos 3D de dupla camada e camada simples.	119
6.8	Diferença relativa entre o fluxo de calor estimado desprezando o efeito do revestimento.	120

Lista de Tabelas

3.1	Comparação entre as soluções obtidas pelas Eqs. (3.5) e (3.6)	20
4.1	Autovalores dos problemas térmicos $X33Y33Z33$ e $X33Y3C13Z33$	67
4.2	Autovalores dos problemas térmicos $X22C12$ e $X33Y3C13Z33$	73
5.1	Propriedades termofísicas da ferramenta e dos revestimentos Cobalto e Al_2O_3 . .	100
B.1	Equação transcendental para demais condições de contorno.	130

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	Introdução	4
2.2	Soluções numéricas em condução de calor multicamadas com aplicações em ferramentas revestidas	4
2.3	Soluções analíticas em condução de calor multicamadas com aplicações em ferramentas revestidas	8
2.4	Problemas inversos aplicados a multicamadas	11
3	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	15
3.1	Introdução	15
3.2	Problema térmico 1D Y2C12	16
3.2.1	Solução analítica do problema direto	17
3.2.2	Solução híbrida	18
3.2.3	Função de transferência analítica	21
3.2.4	Solução do problema inverso	24
3.3	Problema térmico 3D X33Y2C13Z33	25
3.3.1	Solução analítica do problema direto 3D multicamada	28
3.3.1.1	Obtenção das autofunções Y_1 e Y_2	32
3.3.1.2	Obtenção da norma N_y	37
3.3.1.3	Obtenção dos autovalores λ_n	39
3.3.1.4	Equação-Solução da temperatura para o modelo de dupla camada	40
3.3.2	Função de transferência	55
3.3.3	Problema inverso	59
4	EQUAÇÃO-SOLUÇÃO MULTICAMADA 3D X33Y3C13Z33: VERIFICAÇÃO E COMPARAÇÃO COM SOLUÇÕES ANALÍTICAS	60
4.1	Introdução	60
4.2	Verificação intrínseca entre as soluções 3D X33Y3C13Z33 e X33Y33Z33	61
4.3	Verificação intrínseca da solução 3D X33Y3C13Z33 com a solução 1D Y2C12	67

5	PROBLEMA INVERSO TFBGF MULTICAMADA	74
5.1	Introdução	74
5.2	Problema térmico 1D Y2C12	74
5.2.1	Problema direto	75
5.2.2	Função de transferência	77
5.2.3	Problema Inverso	78
5.2.4	Análise da influência da espessura (b) na estimativa do fluxo de calor .	95
5.2.5	Propriedades térmicas α e k	99
5.3	Problema térmico 3D X33Y3C13Z33	104
5.3.1	Problema direto	104
5.3.2	Função de Transferência	106
5.3.3	Problema inverso, estimativa do fluxo de calor imposto	107
6	RESULTADOS	114
6.1	Introdução	114
6.2	Efeito do revestimento na estimativa do fluxo de calor de uma ferramenta usando o modelo 1D	114
6.3	Efeito do revestimento na estimativa do fluxo de calor de uma ferramenta usando o modelo 3D	118
7	CONCLUSÃO	121
	Referências Bibliográficas	124
A	Solução Analítica 3D de única camada	129
B	Equações transcendental para demais condições de contorno	130

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

No processo de fabricação, como em vários processos nos quais ocorrem altas deformações de material, uma grande quantidade de calor é gerada. A geração de calor devido ao atrito entre o contato peça e ferramenta exerce forte influência no desempenho desses processos. O desempenho das ferramentas é fundamental para o sucesso de qualquer processo de fabricação tanto do ponto de vista da qualidade final do material acabado quanto do ponto de vista econômico que ocupa na cadeia produtiva. A temperatura da ferramenta de corte tem influência direta na sua vida útil e um melhor controle dos parâmetros de usinagem, como velocidade de avanço e de corte possibilita um aumento de produtividade e menores custos de produção.

A evolução tecnológica da produção de ferramentas levou ao desenvolvimento e a aplicação de revestimentos nas ferramentas facilitando o corte por atrito através da atuação nos mecanismos tribológicos. Com o avanço na tecnologia da técnica de deposição de revestimentos pela indústria, tem havido um grande crescimento em aplicações industriais automotivas, aeroespaciais e no setor de ferramentas de precisão. Uma das principais funções dos revestimentos é o de proporcionar um menor desgaste da ferramenta. As características de isolamento térmico é outro efeito desejado.

A medição direta da temperatura usando sensores de contato torna-se de difícil execução devido ao movimento relativo entre peça e ferramenta. Por outro lado, a produção de cavaco na região de contato também dificulta o uso de sensores infravermelhos como as câmeras térmicas.

Nesse sentido, o uso de técnicas de solução por problemas inversos é uma alternativa para se determinar a temperatura na região de contato peça-ferramenta-cavaco, uma vez, que sua principal característica é o uso de dados experimentais em regiões afastadas da geração de calor normalmente de difícil acesso. Em problemas diretos de condução de calor se o fluxo de

calor (a causa) é conhecido o campo de temperatura (o efeito) pode então ser determinado. Em contrapartida em um problema inverso estima-se a causa a partir do conhecimento do efeito em algum ponto de fácil acesso. Assim o uso de temperaturas experimentais permite a obtenção da solução do problema térmico que pode ser: a obtenção das propriedades térmicas, obtenção do fluxo de calor superficial, obtenção da fonte de calor interna ou ainda a obtenção da temperatura superficial numa face sem acesso direto, entre outros (FERNANDES, 2013).

Para a aplicação de qualquer técnica inversa, faz-se necessário a obtenção da solução do problema direto associado ao problema inverso em estudo. Ou seja, faz-se necessário a obtenção do campo de temperatura em função do contorno a ser estimado. Nesse caso, a ferramenta sujeita ao processo de corte ortogonal deve ser modelada termicamente.

A maior dificuldade, nesse caso, encontra-se na modelagem da ferramenta revestida, uma vez que os revestimentos possuem espessuras menores que $20\mu m$, a transferência de calor é tridimensional e a região de geração de calor representada pelo contato entre a peça e ferramenta são de poucos milímetros. A diferença entre a espessura do revestimento e a espessura da ferramenta faz com que soluções numéricas sejam de difícil aplicação com uma incerteza relativa devido à razão de aspectos entre essas espessuras. Normalmente o refinamento da malha e sua transição são os maiores obstáculos a serem vencidos, resultando em malhas com um grande número de nós e um custo computacional bastante elevado.

Uma proposta para a solução deste problema é o uso de soluções analíticas aliadas às técnicas inversas. Embora essas soluções sejam de difícil obtenção para geometrias complexas, elas podem ser obtidas considerando ferramentas de corte de geometrias cartesianas.

Várias técnicas são usadas nas soluções de problema inversas em condução de calor. Citam-se por exemplo: o método de mínimos quadrados, teorema de Duhamel, Função Especificada, algoritmo genéticos e Simulated Annealing. Nesse trabalho será desenvolvido uma adaptação da técnica TFBGF, proposta por Fernandes (2013) que obtém a solução do problema inverso usando-se os dados de temperatura em regiões de fácil acesso e a função de transferência do sistema calculada nessas regiões.

A metodologia da técnica (TFBGF) consiste na determinação da função de transferência de um sistema térmico. Com a função transferência é possível estabelecer o método de estimativa do fluxo de calor usando técnicas de deconvolução. Esta técnica foi desenvolvida para materiais homogêneos e nesse trabalho será estendida para materiais compostos, uma vez que o objetivo é o de estimar o fluxo de calor gerado no processo de corte, proveniente de um modelo tridimensional em uma amostra composta de dupla camada, onde a primeira camada representa o revestimento e a segunda a ferramenta.

Assim, propõe-se neste trabalho, a estimativa do fluxo de calor gerado na interface peça-

ferramenta revestida, além da determinação do campo de temperatura na interface entre o revestimento e o substrato da ferramenta. A metodologia proposta baseia-se na solução analítica do problema direto, obtenção e uso da função transferência para a estimativa do fluxo de calor imposto. Uma vez estimado o fluxo de calor, o problema direto é resolvido e todo o campo de temperatura é calculado.

Apresenta-se a seguir uma breve revisão bibliográfica dos principais trabalhos da literatura relacionados aos modelos e soluções de problemas térmicos em domínios multicamadas. Citam-se trabalhos considerando sua solução numérica e analítica com aplicações em ferramenta revestida. Posteriormente, apresentam-se os trabalhos voltados a aplicação em problemas inversos multicamadas. O capítulo 3 trata da obtenção das soluções de dois problemas diretos relacionados á ferramenta revestida: um problema térmico mais simples, 1D multicamada transiente para um melhor entendimento do desenvolvimento da metodologia de solução e o problema 3D transiente dupla camada que simula o problema de usinagem ortogonal. Apresenta-se também neste capítulo a técnica inversa TFBGF e a proposta de adaptação a problemas de dupla camada. No capítulo 4 o as soluções dos problemas diretos relacionados, 1D e 3D, são verificados para se garantir a implementação numérica das soluções.

No capítulo 5 apresentam-se em detalhes a técnica inversa aplicada aos problemas térmicos 1D e 3D, análises da influência da espessura e as propriedades térmicas do revestimento em amostras dupla camada 1D. Esses efeitos são também explorados no capítulo 5, dando-se maior ênfase na obtenção do campo de temperatura tridimensional em uma ferramenta revestida durante a simulação de um processo de corte ortogonal.

Conclusões sobre o desenvolvimento da técnica, sua aplicação e propostas para trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 6.

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se uma breve revisão de trabalhos encontrados na literatura que abordam modelos e soluções de problemas térmicos que envolvem meios com mais de um material, denominado material composto. Os trabalhos são apresentados considerando o tipo de solução (numérica/analítica) suas aplicações e problemas inversos.

2.2 Soluções numéricas em condução de calor multica- madas com aplicações em ferramentas revestidas

Radulescu & Kapoor (1994) apresentaram-se em seu trabalho um modelo numérico tri-dimensional da ferramenta de corte e do cavaco para determinar os campos de temperatura durante a usinagem com corte interrompido e corte contínuo a partir de simulações de uma fonte de calor conhecida. Todavia, na modelagem da ferramenta, as condições de contorno são simplificadas desprezando-se os efeitos convectivos e de resistência de contato.

Grzesik (1999) apresentou uma investigação experimental de pastilhas revestidas considerando diferentes fatores, como condição de corte e revestimentos, de forma a obter a influência na temperatura de corte destas ferramentas, na interface revestimento-substrato e cavaco, considerando a usinagem de aço médio carbono e aço inoxidável austenítico. Em seu trabalho, considerou revestimento de carbetto de titânio (TiC), composto de carbetto de titânio e nitreto de titânio (TiC/TiN) e composto de carbetto de titânio, óxido de alumínio e nitreto de titânio (TiC/Al₂O₃/TiN).

Para a obtenção da temperatura na interface foram inseridos termopares tipo K na fer-

ramenta sendo as temperaturas dos termopares no interior da ferramenta usadas para a investigação. Grzesik (1999) concluiu que a temperatura média da interface peça-ferramenta é influenciada pelas propriedades térmicas do material base e do revestimento. Em particular ele concluiu que a condutividade térmica da ferramenta e da camada afetam significativamente a temperatura da interface.

Em seu trabalho, Grzesik (1999) concluiu também que o uso de revestimento contribuiu bastante para a redução de atrito na interface de corte que resulta também no decréscimo de geração de calor e redução da temperatura na interface cavaco ferramenta. Entretanto, ocorre também uma redução no comprimento de contato da região de interface o que representa uma proteção da difusão da ferramenta. Esse efeito, porém faz com que o calor gerado por área aumente e fique localizado.

Du, Lovell & Wu (2000) estudaram ferramentas revestidas considerando um problema térmico unidimensional em regime permanente de duas camadas, com condições de contorno de isolamento térmico e temperatura prescrita. Os autores apresentam duas técnicas para determinar o campo de temperatura com materiais que continham revestimentos finos. A primeira técnica baseou-se em elementos finitos cujo revestimento possuiu uma espessura limite e , o segundo método, mais eficiente computacionalmente, baseou-se em aproximações por uma única camada, cuja aplicação é voltada a revestimentos muitos finos. Exemplos comparando as duas técnicas foram apresentados considerando apenas uma camada de revestimento, e três tipos de revestimento distintos. Os autores concluíram que o método de aproximações por uma camada foi mais eficiente quando o revestimento possui espessura muito fina.

Wu & Chu (2004) abordaram um problema térmico unidimensional, em regime transiente, constituído por duas camadas, cujas condições de contorno são fluxo de calor prescrito em ambas as extremidades. Para obtenção da solução numérica usou-se o método de Diferenças Finitas. O objetivo principal desse trabalho foi determinar o comportamento térmico da temperatura na interface do substrato de película fina. Nesse estudo os autores consideraram o efeito de resistência térmica na interface e com isso os resultados numéricos mostraram uma queda brusca de temperatura na interface.

A obtenção da temperatura na interface cavaco ferramenta têm sido um dos principais focos da usinagem há várias décadas, mas agora esse problema tornou-se mais importante devido ao uso mais amplo de revestimentos avançados para ferramentas de corte. Praticamente, há uma falta de programas de simulação para previsão das temperaturas na zona de corte ao usinar-se com ferramentas de corte com revestimento diferente (NIESLONY, 2004).

Nieslony (2004) usaram um algoritmo baseado em Elementos Finitos para determinar a temperatura de uma ferramenta de aço AISI 1045 usada em um processo de corte ortogo-

nal revestida na interface ferramenta-cavaco. Eles mostraram que dependendo do tipo de revestimento da ferramenta, a área de contato entre a ferramenta e o cavaco e a temperatura média na interface de contato ferramenta-peça são modificadas. Os autores chegaram a esta conclusão, mesmo não provando que o revestimento é capaz de isolar o substrato da ferramenta.

Grzesik (2005) considerou um modelo bidimensional 2D, que simula uma ferramenta revestida, cujas às condições de contorno estão submetidas a um efeito por convecção. Obteve-se a solução pelos métodos analítico (híbrido) e numérico, cujo objetivo do estudo é analisar a melhor técnica para obtenção da distribuição de temperatura. As temperaturas em dois pontos, na ferramenta e no revestimento. As técnicas (híbrida e numérica) forneceram resultados satisfatórios, porém o autor relata que a a solução numérica pode ser ajustada/melhorada considerando-se dados com reais, o estudou usou-se dados fornecidos pelo fabricante.

Brito *et al.* (2009) apresentaram um problema térmico tridimensional em regime transiente, de duas camadas, considerando condições de contorno por convecção e fluxo de calor conhecidas. Obteve-se a solução do problema numericamente, usando o pacote comercial ANSYS (*Academic Research, v. 11.*), baseado em Elementos Finitos. O objetivo da obtenção da solução numérica foi aplicá-la em ferramentas de metal duro revestidas. Analisaram-se quatro casos com ferramenta de corte revestidas, usando uma única camada de revestimento, variando sua espessura e dois tipos de fluxos de calor utilizados na interface ferramenta-cavaco. Com isto, obtiveram-se os campos de temperaturas nas ferramentas de corte e uma análise numérica da influência térmica deste revestimento foi apresentada.

Armando *et al.* (2009) analisaram um problema térmico bidimensional em regime permanente de duas camadas, sujeita as condições de contorno de isolamento térmico e fluxo de calor por convecção. Para obtenção da solução numérica usou-se um método computacional de dinâmica dos fluidos (CFD). A fim de aplicar a solução numérica em fornos industriais, os autores propuseram uma análise da transferência de calor numa parede de um forno incluindo uma camada de ar. A análise consistiu no estudo da transferência de calor na camada de ar para determinar o fluxo de calor que passa através da parede do forno. Nesse estudo, a espessura da camada de ar foi determinada para identificar o princípio da convecção natural, o que representou uma redução do efeito de isolamento na parede do forno. Além disso, foram analisadas diferentes combinações de espessura de camada de ar para melhorar a capacidade de isolamento da parede. Com esse estudo, os autores concluíram que uma camada de ar com 10 cm de espessura apresenta a melhor capacidade de isolamento.

A importância dos revestimentos em ferramentas cresceu na indústria metal mecânica, em particular nas ferramentas de usinagem, em razão da proteção contra o desgaste. Esses

revestimentos consistem de uma ou mais camadas de materiais diferentes da base, propiciando uma flexibilidade na seleção dos sistemas de acordo com as necessidades de cada aplicação. Uma das vantagens em usar revestimento em ferramenta de corte é a redução do desgaste da ferramenta protegendo a ferramenta de uma temperatura mais elevada. O revestimento de ferramentas de metal duro ganhou uma importância muito grande, pois tal revestimento pode garantir um desempenho bem superior a ferramenta sem revestimento na usinagem de materiais ferrosos, sendo estes os materiais mais usados na indústria mecânica (MACHADO *et al.*, 2011).

Na indústria, as ferramentas de corte, por exemplo, quase todas são revestidas com camadas finas de carboneto de titânio (TiC), carbonitreto de titânio (TiCN), cobalto (Co), nitreto de titânio (TiN) e óxido de alumínio (Al_2O_3) que proporcionam um menor desgaste, com características de isolamento térmico. Ambas as combinações desses revestimentos são depositados em metal duro ou aço de alta velocidade (DU; LOVELL; WU, 2000). Normalmente, a espessura das camadas de revestimento pode variar entre $4\mu m$ e $12\mu m$ Machado *et al.* (2011).

Nieslony W. Grzesik (2013) desenvolveram-se um experimento para investigar a influência de parâmetros (análise de sensibilidade, temperatura média da interface e forças de corte) durante um processo de torneamento simples sobre um arranjo ortogonal, considerou-se para o experimento uma ferramenta C45 (AISI 1045) de aço carbono revestida carboneto. O objetivo do trabalho foi analisar os dados obtidos comparando-os com resultados obtidos pela literatura por técnicas numérica. Os autores concluíram o trabalho obtendo-se resultados satisfatórios com erros inferiores a 15%.

Brito R.F.; Carvalho (2015) propuseram uma geometria para representar o modelo numérico do problema de usinagem. Para isto os autores utilizaram uma técnica inversa não linear de condução de calor juntamente com o programa comercial COMSOL. Assim, o fluxo de calor e o campo de temperatura na ferramenta durante a usinagem foram determinados. Experimentos foram conduzidos com o objetivo de validar os resultados numéricos obtidos.

Garcia-Gonzales Wilfredo Moscoso-Kingsley (2016) tiveram como objetivo investigar as mudanças de temperatura na interface da ferramenta quando aplica-se um revestimento. A ferramenta usada nos testes foi uma ferramenta YAG revestida com TiN, considerou-se uma espessura de $100nm$ de revestimento. Para medir a temperatura na interface da ferramenta durante o processo usou-se termografia infravermelha. Usando esse método os autores concluíram que o desempenho da ferramenta é alterado de acordo com o revestimento usado e o revestimento de TiN apresentou um menor desgaste a ferramenta.

Ferreira (2017) analisou os efeitos térmicos de revestimentos em uma ferramenta de metal

duro durante o processo de torneamento, usando o programa COMSOL Multiphysics 5.2 e uma técnica de problemas inversos. O modelo térmico consiste em uma ferramenta de metal duro, um porta-ferramentas e um calço e é descrito pela equação de difusão de calor tridimensional transiente que foi resolvida usando o programa COMSOL. O modelo está sujeito às condições de contorno de convecção e radiação nas regiões expostas ao ambiente e fluxo de calor prescrito na interface de contato cavaco-ferramenta. Usa-se o método de Função Especificada para a solução do problema inverso. As temperaturas na interface cavaco-ferramenta para as ferramentas de corte sem revestimento e revestidas foram determinadas. Para ambos os materiais do revestimento na ferramenta de corte revestida, a temperatura na interface cavaco-ferramenta foi superior quando comparado com a ferramenta de corte sem revestimento.

Como visto, existem muitos trabalhos que abordam soluções numéricas de problemas térmicos multicamada cuja as aplicações são voltadas para o estudo de ferramenta revestida, porém existe uma limitação da solução numérica quando deseja-se que a espessura do revestimento seja muito fina, isso foi verificado em Oliveira (2015). Esse problema se deve à transição necessária para a construção da malha numérica. Normalmente o domínio tem dimensões da ordem de milímetros enquanto a camada de revestimento é da ordem de micrômetros. Como o refinamento da malha, na região do revestimento deve ser inferior à camada (micrômetros), uma malha adequada acarreta em milhões de nós que por sua vez torna muito onerosa a técnica numérica.

2.3 Soluções analíticas em condução de calor multicamadas com aplicações em ferramentas revestidas

Haji-Sheikh & Beck (2002), apresentaram uma proposta para o desenvolvimento e obtenção da solução analítica de problemas envolvendo multicamadas. Considerou-se um problema de transferência de calor por condução tridimensional em regime permanente, constituído por duas camadas. Uma tabela com as equações transcendentes para obtenção dos autovalores é apresentada. Considerando um modelo unidimensional foram apresentados três exemplos numéricos.

O trabalho de Rech, Battaglia & Moisan (2004) apresentaram uma solução analítica de difusão de calor unidimensional e tridimensional sujeito as condições de contorno de fluxo de calor em uma das extremidades e efeito de convecção na extremidade oposta, afim de aplicá-la em ferramentas revestidas para uma melhor compreensão do fluxo de calor imposto no substrato da ferramenta durante uma operação de torneamento, sem considerar a sua

influência tribológica. Para obter o modelo de transferência de calor da ferramenta usou-se um método analítico baseado em quadripolos. Vários exemplos foram apresentados, variando-se a espessura do revestimento.

A limitação da técnica do quadripolo reside na necessidade do conhecimento do fluxo de calor e temperatura nas superfícies e interface, o que na prática nem sempre é possível.

Singh, Jain & Rizwan-uddin (2007) abordaram em seu trabalho um problema de condução de calor em uma geometria cilíndrica bidimensional em regime transiente composto por três camadas. Determinou-se a solução analítica usando coordenadas polares e o método de separação de variáveis. Os autores relataram que um cuidado deve ser tomado na obtenção dos autovalores, uma vez, que problemas bidimensionais ou tridimensionais podem apresentar autovalores imaginários (números complexos), dependendo das configurações do problema (modelo). Afirmaram também que a solução é válida para qualquer combinação de contorno do primeiro ou segundo tipo. Apesar do trabalho apresentar uma solução analítica 2D, é bem rico em termos dos cálculos dos autovalores, detalhando a obtenção do mesmo.

Zhang (2008) apresentou uma solução analítica em condução de calor unidimensional de dupla camada, em regime permanente usando-se o método de transformada de Laplace, o problema em questão modela uma ferramenta revestida. O objetivo do trabalho foi a obtenção da distribuição de temperatura. O estudo mostrou que os materiais e propriedades térmicas usados como revestimento/espessura e substrato influenciam na distribuição de temperatura, isso também foi observado no trabalho de Nieslony (2004). Encontra-se em Zhang (2008) alguns dados para selecionar materiais de revestimento apropriados para reduzir a temperatura na interface ferramenta/revestimento.

Belghazi, Ganaoui & Labbe (2009) trataram de um problema térmico de transferência de calor, unidimensional, em regime transiente composto por duas camadas, submetido a uma fonte de calor em movimento. Nesse trabalho, considerou-se a resistência de contato. O método para obtenção da solução analítica, consistiu na derivação da parte homogênea da solução usando o método de separação de variáveis e expressando o termo fonte em forma de série. Mostrou-se que a convergência da série é alcançada para os primeiros vinte autovalores usando o método de Newton-Raphson. Os autores afirmaram que este modelo analítico pode ser usado também para estimativa da resistência térmica entre os contatos das camadas.

Singh, Jain & Rizwan-uddin (2011) apresentaram em seu trabalho uma solução analítica baseada no método da transformada integral (FIT) para obter a distribuição de temperatura. Tratou-se portanto de um problema térmico unidimensional, em regime transiente composto por três camadas, submetidas a condições de contorno do segundo tipo. A solução analítica, obtida em um sistema de coordenadas cilíndricas, mostrou-se válida para qualquer

combinação de condições de contorno não homogêneas.

Kayhani, Norouzi & Delouei (2011) analisaram um problema térmico de transferência de calor, em regime permanente composto por duas camadas. A solução analítica foi obtida em um sistema de coordenadas cilíndricas usando-se o método de separação de variáveis. Os autores propuseram esse estudo como instrumento para aplicação em um tubo de refrigeração composto de duas camadas, com um fluxo de calor variando na espessura do tubo. Observou-se que foi possível aplicar o método de separação de variáveis para obtenção da solução analítica devido as condições de contorno serem homogêneas.

Norouzi *et al.* (2016) apresentaram uma solução analítica bidimensional de dupla-camada em uma direção, também usando-se coordenadas cilíndricas. Para avaliar a capacidade da solução analítica proposta, duas distribuições de fluxo de calor externos diferentes foram modelados e aplicados à superfície exterior do cilíndrico composto. Devido à importância do conhecimento sobre os valores máximos de temperatura, gráficos foram apresentados mostrando estes valores em função de dois parâmetros importantes para ambas as distribuições de fluxo de calor externas. Os autores concluíram o trabalho relatando que o estudo é útil para as análises de tensões térmicas, fratura térmica e processos de produção.

R.Rodrigo & L.Worthy (2016) apresentaram uma solução analítica unidimensional multicamada cujas às condições de contorno são não homogêneo, usaram-se o método de transformada de Laplace para obtenção da solução analítica, os autores desprezaram o efeito de contato. Alguns exemplos para mostrar a distribuição de temperatura são apresentados.

Carr (2018) apresentou um método semi-analítico para desenvolvimento de soluções em condução de calor multicamada onde tem-se condições de contorno transiente. O modelo apresentado é unidimensional constituído por várias camadas. O objetivo principal deste trabalho foi homogeneizar as condições de contorno. Um estudo numérico foi apresentado para analisar a taxa de convergência dos autovalores. Os autores relataram que o método semi-analítico é capaz de obter resultados satisfatórios quando tem-se condições que variam com o tempo.

SHAN Xu ZHANG (2018) apresentaram um modelo melhorado em condução de calor de dupla camada, unidimensional e transiente baseado no método proposto em Komanduri-Hou e o modelo de Huang-Liang, nesse método consideram-se uma fonte de calor em movimento. Comparações dos dados obtidos pelo modelo proposto e resultados experimentais são apresentados. Os resultados experimentais mostraram-se consistentes com os do modelo proposto obtendo uma diferença relativa de temperatura de 0,49%.

Observa-se, que vários autores abordam o desenvolvimento de soluções analíticas multicamadas com aplicações em ferramentas revestidas. Entretanto, a maioria delas se restringe

a problemas uni e bidimensionais com regime permanente.

Neste trabalho propõem-se o procedimento desenvolvido por Haji-Sheikh & Beck (2002) para obtenção da equação-solução analítica tridimensional decorrente de um problema térmico, transiente em condução de calor multicamada. A contribuição deste trabalho é a obtenção da solução analítica 3D multicamada considerando condições de contorno específicas, isto é, um fluxo de calor em uma área pré determinada na direção que tem-se a geometria de dupla camada, e usa-se o método de Funções de Green (FG). Uma outra contribuição é o desenvolvimento para obtenção das auto-funções necessárias para adequar a função em termos de (FG) o que é inédito na literatura.

Como mencionado, o objetivo do trabalho é aplicar a técnica de problema inverso para obtenção do fluxo de calor imposto em um processo de usinagem usando ferramentas revestidas. Embora uma revisão completa de trabalhos voltados à solução de problemas inversos seja interessante para o estabelecimento do estado da arte desta linha de pesquisa, o objetivo agora é a apresentação sucinta de algumas técnicas existentes neste campo, cuja as aplicações são voltadas à multicamadas.

2.4 Problemas inversos aplicados a multicamadas

Na literatura, uma variedade de aproximações analíticas e numéricas são propostas para a solução dos problemas inversos em condução de calor. Dedicar-se essa seção para alguns trabalhos que abordam problemas inversos aplicados à multicamada.

A técnica de filtragem de Kalman tem sido usada por vários autores para resolver problemas inversos, que consistem em utilizar medições de grandezas realizadas ao longo do tempo (contaminadas com ruído e outras incertezas) e gerar resultados que tendem a se aproximar dos valores reais das grandezas medidas e valores associados. Dentre eles, destaca-se (TUAN *et al.*, 1996), (NAJAFI; WOODBURY; BECK, 2015c) e (NAJAFI; WOODBURY; BECK, 2015a).

(TUAN *et al.*, 1996) e (NAJAFI; WOODBURY; BECK, 2015c) abordaram uma metodologia para a solução de um problema inverso em condução de calor em tempo real. O objetivo foi estimar duas distribuições de fluxo de calor distintas aplicadas em duas superfícies de contorno. Um algoritmo de mínimos quadrados é apresentado e fornece a relação recursiva entre o valor observado do fluxo de calor desconhecido e o valor teórico de Kalman. O objetivo do trabalho (NAJAFI; WOODBURY; BECK, 2015c) também foi estimar o fluxo de calor, porém a solução foi desenvolvida com base no mínimos quadrados dos erros entre as temperaturas estimadas e medidas em relação ao fluxo de calor desconhecidos. Duas ex-

periências numéricas foram desenvolvidas utilizando o software ANSYS para demonstrar o desempenho da solução proposta. A solução apresentada pode ser utilizada para calcular os fluxos de calor quase em tempo real em uma variedade de aplicações, incluindo a temperatura do metal. Em tempo real a medição precisa de fluxo de calor melhora a controlabilidade de numerosos processos industriais.

(MAILLET; MOYNE; RÉMEY, 1999) tem por objetivo analisar a influência de uma camada extra na medição da difusividade térmica. O modelo teórico foi obtido pela solução da equação de transferência de calor unidimensional em termos de quadripolos. Uma aproximação por série de Taylor do modelo teórico foi apresentada. Para obtenção da difusividade térmica usou-se o método flash, esse método é usado especificamente para determinar difusividade térmica. Dois exemplos numéricos também foram apresentados, um com material condutor e o outro com material isolante, os resultados mostraram que em ambos casos o fato de existir uma camada extra modifica significativamente a difusividade térmica, os autores relataram que para uma melhora nos resultados seria viável diminuir a espessura da camada extra.

Outra técnica bastante usada é o método do gradiente conjugado com equação adjunta. Essa técnica baseia-se num processo de otimização com regularização iterativa, ou seja, os resultados da minimização da função objetivo tendem a se estabilizar em função do número de iterações. Esta metodologia pode ser empregada para a solução de problemas inversos lineares e não lineares, como também em problemas de estimação de parâmetros. Além disso, o parâmetro a ser estimado pode ser a condição do contorno (fluxo de calor ou temperatura superficial) ou propriedade térmica (condutividade ou difusividade). Em todos os casos não é necessário que se tenha conhecimento prévio sobre a forma funcional destes parâmetros. Usando essa técnica, Lima (2001) estima a taxa de transferência de calor na interface cavaco-ferramenta de um problema de usinagem.

Beck, Blackwell & Clair (1995) utilizaram o teorema de Duhamel, a expansão em série de Taylor e a otimização por mínimos quadrados na elaboração do método da Função Especificada que é, até hoje, uma das técnicas de solução de problemas inversos mais usadas. A técnica consiste na minimização sucessiva do erro estimado para apenas o tempo atual e alguns passos de tempo futuros. Este método apresenta robustez aos ruídos presentes nos dados, é de fácil implementação e não exige grande poder de processamento.

Alguns pesquisadores têm proposto adaptações desse método buscando a minimização dos problemas decorridos com a existência de erros de medição. Observa-se isso no trabalho Ling, Chirikuri & Keanini (2005), usou-se passos de tempo que são maiores que os pequenos intervalos experimentais de amostragem, bem como passos de tempo futuros que são iguais

aos 6 intervalos de amostragem. Esta técnica modificada proporciona uma supressão mais rápida do erro, melhora a estabilidade e precisão atuando com níveis comparáveis de dados truncados e erros nas medidas de temperatura.

T.WeiY & S.Li (2009) propuseram um método de regularização para determinar parâmetros presentes nas condições de contorno. O modelo apresentado trata-se de um problema unidimensional transiente com um domínio multicamada. A solução numérica é baseada no uso do método de soluções fundamentais e uma técnica discreta de regularização de Tikhonov. Aplicaram-se a regra de validação generalizada para a escolha de um parâmetro de regularização para obter uma aproximação numérica estável. Experimentos numéricos para cinco exemplos mostram que o método proposto é efetivo e estável.

(NAJAFI; WOODBURY; BECK, 2015b) apresentaram uma solução de problema inverso em condução de calor em um meio de multi-camada. A medição de temperatura foi feita em duas localizações no interior da camada. Uma solução foi proposta para resolver esse problema com base no método de mínimos quadrados dos erros entre os valores calculados e conhecidos usando regularização de Tikhonov para a estabilidade da solução. O algoritmo resultante é escrito em forma de filtro. A solução em forma de filtro pode ser utilizada para a estimativa em tempo real do fluxo de calor. A solução proposta é então demonstrada através de diversos experimentos numéricos. Os resultados são comparados com as soluções exatas e pôde-se perceber uma boa concordância entre os resultados apresentados nos três casos.

Mishra Kirk D. Dolan (2016) desenvolveram um instrumento ('Thermal Properties Cell') baseado em um método rápido não isotérmico para estimar propriedades térmicas dependentes da temperatura. A novidade do instrumento está na sua capacidade de analisar dados de temperatura transiente usando uma forma não-linear, cujo modelo é de dupla camada bidimensional. Condutividades térmicas de diferentes materiais foram testadas.

Uma análise para determinar condições de contorno não homogêneas é apresentada por M.Lei M.Li (2018), o modelo em estudo é decorrente de um problema unidimensional multicamada, a distribuição de temperatura é obtida pelo método de elementos finitos. Três exemplos numéricos são apresentados para validar a precisão do método.

Compreender a transferência de calor usando a equação da bio-transferência é muito importante para aplicações clínicas. No trabalho Li Chenlin Li (2018) usaram a teoria termo-elástica sem dissipação de energia para investigar a transferência de calor com propriedades térmicas variáveis. A equação do modelo são obtidas pelos métodos de transformada de Kirchoff e Laplace. Exemplos numéricos são apresentados.

Existem ainda várias ferramentas numéricas de otimização que podem ser usadas para solução de problemas inversos. Nestes casos as ferramentas são usadas para ajustar a resposta

medida à resposta calculada tendo como variável de projeto a entrada desconhecida.

Observa-se, que os problemas em condução de calor multicamada tem uma grande aplicabilidade, porém a maioria dos trabalhos encontrados na literatura abordam soluções semi-analíticas ou numéricas.

Como mencionado, a proposta do trabalho é o desenvolvimento da equação-solução analítica 3D multicamada transiente. Obtida a solução analítica do problema térmico 3D (problema direto) é possível aplicar a proposta deste trabalho, que é estimar o fluxo de calor gerado em um processo de usinagem (problema inverso) pelo método (TFBGF). Propõem-se também, como já mencionado, a adaptação desse método para materiais compostos.

Capítulo 3

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

3.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo o desenvolvimento para a obtenção da solução do problema direto e inverso em condução de calor unidimensional transiente de duas camadas. Apresenta-se também, a obtenção da solução analítica do problema direto 3D de dupla camada.

Inicialmente, apresenta-se a solução analítica de dupla camada do problema direto unidimensional, em termos da aplicação de um fluxo de calor discreto. A partir da Função de Green que descreve o problema de transferência de calor, mostra-se uma metodologia para identificação e obtenção da função de transferência analítica por meio de Funções de Green para problemas de condução de calor com meio compostos.

Usam-se as funções de transferência para caracterizar a relação entre entrada e saída de um sistema dinâmico, respectivamente representadas por $x(t)$ e $y(t)$. Pode-se portanto, traçar uma equivalência entre sistemas dinâmicos e problemas de condução de calor, ambos descritos por um conjunto de equações diferenciais. Desta forma, o fluxo de calor é tratado como entrada (excitação) do sistema, e o campo de temperatura como resposta (causa) a esse fluxo (FERNANDES, 2013).

A obtenção da solução analítica de um problema de condução de calor 3D transiente multicamada requer procedimentos mais elaborados que a solução de problemas de uma única camada, tanto para adequar a equação-solução em termos de Funções de Green, quanto para obtenção dos autovalores. Apresenta-se também, os cálculos necessários para obtenção das autofunções e dos autovalores do modelo térmico multicamada.

3.2 Problema térmico 1D Y2C12

O problema térmico unidimensional (1D) de condução de calor mostrado na Fig. 3.1 é definido por uma placa plana, com duas camadas, submetida a um fluxo de calor, $q(t)$ em $x = 0$, e à condição de isolamento térmico na superfície oposta, $x = L$, cujas propriedades termofísicas são diferentes em cada camada, delimitada por $x = b$. O problema é referenciado como X2C12 por (HAJI-SHEIKH, 2014).

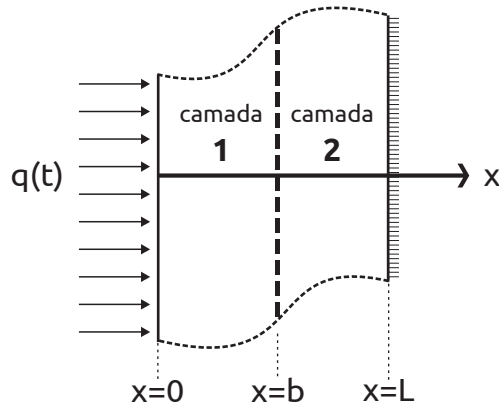


Figura 3.1: Problema térmico: placa plana, com duas camadas, submetida a um fluxo de calor em $x = 0$, e à condição de isolamento térmico na superfície oposta, $x = L$.

Descreve-se matematicamente, o problema da Fig. 3.1 representado pela equação da difusão de calor unidimensional

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq b \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad b \leq x \leq L \quad (3.1b)$$

Sujeita às condições de contorno

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t); \quad -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.1c)$$

e condições de continuidade

$$T_1|_{x=b} = T_2|_{x=b} \quad (3.1d)$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=b} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=b} \quad (3.1e)$$

e à condição inicial

$$T_1(x, 0) = T_2(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (3.1f)$$

3.2.1 Solução analítica do problema direto

A solução do problema direto dado pelas Eqs. (3.1a) - (3.1f) foi obtida pelo método de funções de Green e encontra-se em Oliveira (2015).

Uma das vantagens das funções de Green é a sua fácil transposição para problemas multidimensionais (2D e 3D), uma vez que, as funções de Green 2D ou 3D podem ser obtidas pelo produto de problemas unidimensionais. Outra vantagem é a sua capacidade de resolver problemas com condições de contorno complexas, como fluxo de calor com variação espacial e temporal (FERNANDES, 2013).

A solução analítica do problema (OLIVEIRA, 2015) é dada por:

$$\begin{aligned} T_1(x, t) &= \alpha_1 \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} G_{11}(x, t|x', \tau) \frac{g_1(x', \tau)}{k_1} dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{1n}}{N_x} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_{x_1}^{x_2} X_{1n}(x') q(t) \delta(x' - 0) dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{1n}(x) X_{1n}(0)}{N_x} \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma x) \cos(0)}{N_x} \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned}
T_2(x, t) &= \alpha_1 \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} G_{21}(x, t|x', \tau) \frac{g_1(x', \tau)}{k_1} dx' d\tau \\
&= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}}{N_x} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_{x_1}^{x_2} X_{1n}(x') q(t) \delta(x' - 0) dx' d\tau \\
&= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}(x) X_{1n}(0)}{N_x} \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \\
&= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_x} \left\{ \left[\cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) \text{sen}(\gamma b) \text{sen}(\eta b) \right] \cos(\eta x) \right. \\
&\quad \left. + \left[\cos(\gamma b) \text{sen}(\eta b) - \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) \text{sen}(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \text{sen}(\eta x) \right\} \cos(0) \\
&\quad \times \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau
\end{aligned} \tag{3.2b}$$

onde λ_n são os n autovalores e γ e η estão relacionados com λ pela seguinte expressão

$$\gamma^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha_1} \quad e \quad \eta^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha_2} \tag{3.3}$$

Observa-se das Eqs. (3.2a) - (3.2b) que o problema direto se estabelece caso o fluxo de calor seja conhecido, restando apenas o cálculo das integrais. Por exemplo, se o fluxo de calor é constante ou somente dependente da posição, ou ainda uma função exponencial, $q(t) = c_1 e^{(-c_2 t)}$, com c_1 e c_2 não nulos, a solução é facilmente determinada de forma analítica. Entretanto, em uma situação real o fluxo de calor, $q(t)$, não é descrito por uma expressão analítica, uma vez que sua natureza é discreta. Nesse caso, a solução poderia ser chamada de “híbrida”, pois a integral é necessariamente calculada a partir da discretização do fluxo de calor, (FERNANDES, 2013).

3.2.2 Solução híbrida

A solução híbrida é uma alternativa para casos reais onde o fluxo de calor não é constante. Nesse caso, o fluxo de calor experimental (dados discretos) é representado como um vetor onde cada componente é um valor de fluxo, e esse fluxo é considerado constante para cada intervalo de tempo, como mostra na figura, ou seja, $q(t) = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]$ sendo q_n a componente para o intervalo $\Delta_t = t_{n+1} - t_n$ com $n = 1, 2, \dots, N - 1$ (FERNANDES, 2013).

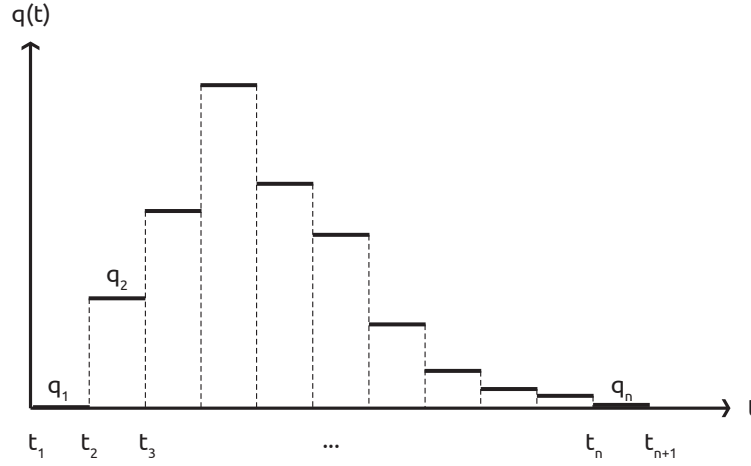


Figura 3.2: Fluxo de calor discreto.

Sendo assim, a integral que aparece nas Eqs. (3.2a)-(3.2b) pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \int_0^t q(t)e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau &= \int_{t_1=0}^{t_2} q_1e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau + \int_{t_2}^{t_3} q_2e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau + \dots \\ &+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} q_n e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau = \frac{1}{-\lambda_n^2 t} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (e^{-\lambda_n^2(t_{n+1})} - e^{-\lambda_n^2(t_n)}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Então, a solução de temperatura dadas pelas Eqs. (3.2a)-(3.2b) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$T_1(x, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma x)\cos(0)}{N_x} \frac{1}{-\lambda_n^2 t} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (e^{-\lambda_n^2(t_{n+1})} - e^{-\lambda_n^2(t_n)}) \quad (3.5a)$$

$$\begin{aligned} T_2(x, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_x} \left\{ \left[\cos(\eta b)\cos(\gamma b) + \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \left(\frac{\gamma}{\eta}\right) \text{sen}(\gamma b)\text{sen}(\eta b) \right] \cos(\eta x) \right. \\ &+ \left. \left[\cos(\gamma b)\text{sen}(\eta b) - \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \left(\frac{\gamma}{\eta}\right) \text{sen}(\gamma b)\cos(\eta b) \right] \text{sen}(\eta x) \right\} \cos(0) \\ &\times \frac{1}{-\lambda_n^2 t} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (e^{-\lambda_n^2(t_{n+1})} - e^{-\lambda_n^2(t_n)}) \end{aligned} \quad (3.5b)$$

Para validar a solução híbrida dada pela Eq. (3.5), obtém-se a solução analítica considerando o fluxo de calor, $q(t) = c_1 e^{-c_2 t}$ na Eq. (3.2) e assim, resolvendo as integrais no tempo

das Eqs. (3.2a)-(3.2b) obtém-se

$$T_1(x, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma x) \cos(0)}{N_x} \frac{c_1 (e^{-c_2 t} - e^{-\lambda_n^2 t})}{\lambda_n^2 - c_2} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} T_2(x, t) = & \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_x} \left\{ \left[\cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) \text{sen}(\gamma b) \text{sen}(\eta b) \right] \cos(\eta x) \right. \\ & + \left. \left[\cos(\gamma b) \text{sen}(\eta b) - \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) \text{sen}(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \text{sen}(\eta x) \right\} \cos(0) \\ & \times \frac{c_1 (e^{-c_2 t} - e^{-\lambda_n^2 t})}{\lambda_n^2 - c_2} \end{aligned} \quad (3.6b)$$

As soluções dadas pelas Eqs. (3.5)- (3.6) são implementadas no MATLAB com as seguintes características físicas e geométricas: $k_1 = 401[W/m \cdot K]$, $k_2 = 401[W/mK]$, $\alpha_1 = 117E^{-6}[m^2/s]$, $\alpha_2 = 117E^{-6}[m^2/s]$, $T_0 = 0[^\circ C]$, $L = 5E^{-2}[m]$ e $dt = 1; 0,5; 0,1; 0,01[s]$. Para o fluxo de calor discreto, aplicado somente na Eq. (3.5), tem-se o vetor $q_n = [0 \ c_1 \exp(-c_2 t)]$, com $c_1 = 4E5$ e $c_2 = 0,002$.

Apresentam-se na tabela (3.1) comparações entre as soluções puramente analítica (Eq. (3.6)) e híbrida (Eq. (3.5)).

Tabela 3.1: Comparação entre as soluções obtidas pelas Eqs. (3.5) e (3.6)

$x = 0$	$dt = 1s$			$dt = 0,5s$		$dt = 0,1s$		$dt = 0,01s$	
t	Eq. (3.5)	Eq. (3.6)	diferença.	Eq. (3.6)	diferença.	Eq. (3.6)	diferença.	Eq. (3.6)	diferença.
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,0	4,0033	4,0513	0,0480	4,0066	0,0033	4,0050	0,0017	4,0039	0,0006
2,0	6,6592	6,7533	0,0941	6,6648	0,0056	6,6622	0,0030	6,6593	0,0001
3,0	9,0282	9,1498	0,01216	9,0359	0,0077	9,0233	0,0049	9,0323	0,0041
4,0	11,3479	11,4883	0,1404	11,3577	0,0098	11,3415	0,0064	11,3533	0,0054
5,0	13,6561	13,8122	0,1561	13,6679	0,0118	13,6639	0,0078	13,6626	0,0065
6,0	15,9585	15,1338	0,1753	15,9724	0,0139	15,9499	0,0086	15,9661	0,0076
7,0	18,2561	18,4578	0,2017	18,2722	0,0161	18,2658	0,0097	18,2649	0,0088
8,0	20,5492	20,7726	0,2234	20,5673	0,0181	20,5611	0,0119	20,5591	0,0099
9,0	22,8376	23,0789	0,2413	22,8578	0,0202	22,8511	0,0135	22,8487	0,0111
10,0	24,1213	24,3819	0,2606	24,2231	0,1018	24,1356	0,0143	24,1103	0,0110

Observa-se que quanto menor for o intervalo de discretização de tempo mais próximas as soluções estarão uma da outra. Mesmo para o passo de discretização de tempo igual

um segundo ($dt = 1$ s), que é possível de ser realizado experimentalmente, as duas soluções mostram-se muito próximas. A força da solução híbrida reside no fato que posteriormente dada a solução do problema inverso, tem-se uma estimativa para o fluxo de calor. Torna-se, portanto, necessária a sua verificação/validação, ou seja, é necessário verificar se o fluxo de calor estimado retorna o campo de temperatura esperado (FERNANDES, 2013).

3.2.3 Função de transferência analítica

Nesta seção detalha-se o procedimento de identificação da função transferência que é a ferramenta usada para a estimativa do fluxo de calor.

Para obtenção da função de transferência analítica propõem-se uma metodologia baseada na teoria de sistemas dinâmicos de uma entrada e uma saída.

A análise de sistemas dinâmicos é facilitada pelo uso da transformada de Laplace, pois, ela fornece a relação matemática entre a entrada e saída do sistema dinâmico. Em um sistema dinâmico linear, Fig. (3.3), a relação entre a entrada e saída no domínio da variável complexa s é dada pela multiplicação expressa na Eq. (3.7)

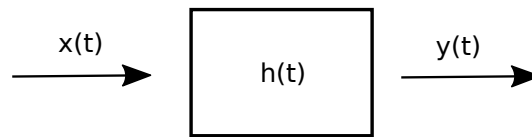


Figura 3.3: Sistema dinâmico de uma entrada e saída.

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \quad (3.7)$$

Aplicando-se o Teorema da Convolução à Eq. (3.7), a entrada do sistema, $y(t)$, é dada pela convolução entre $h(t)$ e $x(t)$, ou seja, a integral de convolução fornece a relação entre entrada e saída no domínio do tempo, e é dada por

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s) \cdot X(s)] = h(t) * x(t) \quad (3.8)$$

Matematicamente, em termos de fluxo de calor q (entrada) e temperatura T (saída),

tem-se

$$T_1(x, t) = h_1(x, t) * q(t) = \int_0^t h_1(x, t - \tau)q(\tau)d\tau \quad (3.9)$$

$$T_2(x, t) = h_2(x, t) * q(t) = \int_0^t h_2(x, t - \tau)q(\tau)d\tau \quad (3.10)$$

onde a função $h(x, t) = 0$ para $\tau < 0$ e nas Eqs. (3.9)-(3.10), T_1 e T_2 são as soluções de temperatura, obtida pelo problema direto e é referente a primeira e segunda camada respectivamente.

Como a função de transferência é independente do par de entrada/saída propõem-se como sinal de entrada (fluxo de calor), a função Delta de Dirac, isto é, $q(t) = \delta(t)$, obtendo-se as saídas $T_1(x, t)$ e $T_2(x, t)$ como

$$T_1(x, t) = h_1(x, t) * q(t) = \int_0^t h_1(x, t - \tau)\delta(\tau)d\tau = h_1(x, t) \quad (3.11)$$

$$T_2(x, t) = h_2(x, t) * q(t) = \int_0^t h_2(x, t - \tau)\delta(\tau)d\tau = h_2(x, t) \quad (3.12)$$

Nota-se, que da propriedade do elemento neutro da convolução, tem-se $h * \delta = h$. Logo, a resposta impulsiva é obtida sem a necessidade de se resolver a integral.

O problema de condução de calor 1D, X2C12, e a teoria de sistema dinâmico de uma entrada e saída podem ser relacionados a partir das Eqs. (3.2) - (3.11) - (3.12). Relacionando essas equações é possível obter a resposta impulsiva $h_1(x, t)$ e $h_2(x, t)$. Observa-se, que a solução dada pela Eq. (3.2) pode ser re-escrita da seguinte forma

$$\Theta_1(x, t) = T_1(x, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t G_{11}(x, t|0, t - \tau)q(t)d\tau \quad (3.13)$$

$$\Theta_2(x, t) = T_2(x, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t G_{21}(x, t|0, t - \tau)q(t)d\tau \quad (3.14)$$

Onde $G_{11}(x, t|x', \tau)$ e $G_{21}(x, t|x', \tau)$ é a FG do problema $X2C12$ e é dada pelas seguintes Eqs. (3.15) - (3.16) (HAJI-SHEIKH, 2014).

$$\begin{aligned} G_{11}(x, t|0, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} X_{1n}(x) X_{1n}(x') \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} \cos(\gamma x) \cos(0) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} G_{21}(x, t|0, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} X_{2n}(x) X_{1n}(x') \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_x} \left\{ \left[\cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) \text{sen}(\gamma b) \text{sen}(\eta b) \right] \cos(\eta x) \right. \\ &\quad \left. + \left[\cos(\gamma b) \text{sen}(\eta b) - \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) \text{sen}(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \text{sen}(\eta x) \right\} \cos(0) \end{aligned} \quad (3.16)$$

E ainda, considerando o fluxo de calor, $q(t) = \delta(t)$ nas Eqs. (3.13) - (3.14) tem-se

$$\Theta_1(x, t) = T_1(x, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} G_{11}(x, t|0, t - \tau) \quad (3.17)$$

$$\Theta_2(x, t) = T_2(x, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} G_{21}(x, t|0, t - \tau) \quad (3.18)$$

Assim, comparando as Eqs. (3.11) - (3.12) e (3.17) - (3.18), conclui-se que a resposta impulsiva para o problema de condução de calor $X2C12$ é dada por

$$h_1(x, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_x} \cos(\gamma x) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
h_2(x, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_x} \left\{ \left[\cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) \operatorname{sen}(\gamma b) \operatorname{sen}(\eta b) \right] \cos(\eta x) \right. \\
\left. + \left[\cos(\gamma b) \operatorname{sen}(\eta b) - \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) \operatorname{sen}(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \operatorname{sen}(\eta x) \right\} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Note que, se considerarmos as mesmas propriedades termofísicas nas Eqs. (3.19) - (3.20), isto é, $k_1 = k_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\gamma = \eta$ e a relação da Eq. (3.3) tem-se que $h_1(x, t) = h_2(x, t)$.

Uma vez obtida a função de transferência do problema *X2C12*, por meio da transformada de Laplace da resposta impulsiva, e, com o conhecimento da resposta do sistema (temperatura experimental ou hipotética) é possível obter-se uma estimativa para o fluxo de calor. Este é o procedimento proposto para a solução do problema inverso que será apresentado a seguir.

3.2.4 Solução do problema inverso

Sabe-se que, para um sistema dinâmico linear, a relação entre a entrada e saída no domínio da variável complexa s é dada pela multiplicação expressa na Eq. (3.7), ou no domínio do tempo pela convolução.

Assim, a análise de sistemas dinâmicos é facilitada pelo uso da transformada de Laplace, pois, ela fornece a relação matemática entre a entrada e saída do sistema dinâmico. Em termos do par fluxo de calor/temperatura tem-se

$$\mathcal{L}[T_1(x, t)] = \mathcal{L}[h_1(x, t) * q(t)] \Rightarrow T_1(x, s) = H(x, s) \cdot q(s) \quad (3.21)$$

e

$$\mathcal{L}[T_2(x, t)] = \mathcal{L}[h_2(x, t) * q(t)] \Rightarrow T_2(x, s) = H(x, s) \cdot q(s) \quad (3.22)$$

Note que as Eqs. (3.21) - (3.22) tratam-se de uma multiplicação, logo pode-se escrever

$$q(s) = \frac{1}{H(x, s)} \cdot T(x, s) \quad (3.23)$$

E ainda, no domínio do tempo, aplica-se a transformada inversa de Laplace, e obtém-se

a convolução, em termos matemáticos como

$$\mathcal{L}^{-1}[q(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{H(x, s) \cdot T(x, s)} \right] \Rightarrow q(t) = \frac{1}{h(x, t)} * T_2(x, t) \quad (3.24)$$

Numericamente, esta operação descrita pela Eq. (5.3) será realizada no *software* MATLAB usando as seguintes funções: *fft* e *ifft*, que respectivamente aplicam a transformada rápida de Fourier e sua inversa às funções T , q e h . Usa-se sem problemas a transformada rápida de Fourier neste caso, pois, sabe-se que a transformada de Laplace é um caso particular da transformada de Fourier.

3.3 Problema térmico 3D X33Y2C13Z33

Um modelo térmico equivalente para a descrição do problema de condução de calor originado por um processo de usinagem utilizando-se ferramenta revestida de geometria definida é representado pela Fig. 3.4, onde a camada 1 representa o revestimento e a camada 2 a ferramenta (substrato). A ferramenta de corte é analisada como um corpo de geometria retangular que é submetido a um fluxo de calor superficial.

O problema mostrado na Fig. 3.4 é um problema de condução de calor cuja as faces, exceto a região onde ocorre o fluxo de calor, estão sujeitas à uma troca de calor por convecção. Em um processo de usinagem de corte ortogonal pode-se identificar que as superfícies laterais e superiores estão, de fato, expostas à um meio à temperatura ambiente.

Nota-se, que o problema é constituído por duas camadas na direção do eixo y , cujas propriedades termofísicas são distintas para cada camada, delimitada por $y = b$. Esse problema é referenciado como X33Y2C12Z33 por (HAJI-SHEIKH, 2014).

O problema térmico dado pela Fig. 3.4 é descrito matematicamente pela equação da difusão de calor

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (3.25a)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (3.25b)$$

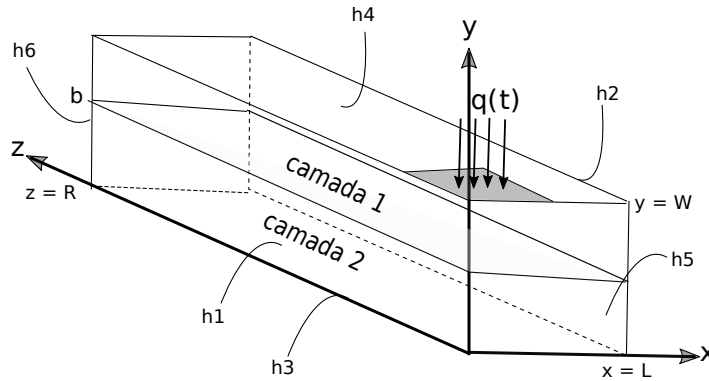


Figura 3.4: Problema X33Y2C12Z33

Sujeito as condições de contorno na direção x ,

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -h_1(T - T_\infty); \quad -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2(T - T_\infty) \quad (3.25c)$$

na direção y ,

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = -h_3(T - T_\infty); \quad -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=W} = -q(t) + h_4(T - T_\infty) \quad (3.25d)$$

na direção z ,

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -h_5(T - T_\infty); \quad -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=R} = h_6(T - T_\infty) \quad (3.25e)$$

e às condições de continuidade

$$T_1|_{y=b} = T_2|_{y=b}; \quad -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=b} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=b} \quad (3.25f)$$

e à condição inicial

$$T_1(x, y, z, 0) = T_2(x, y, z, 0) = F(x, y, z) - T_\infty \quad (3.25g)$$

As equações (3.25a) - (3.26g) podem ser homogeneizadas definindo-se a variável $\theta = T - T_\infty$, assim

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \quad (3.26a)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \quad (3.26b)$$

Sujeito as condições de contorno na direção x ,

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -h_1 \theta_1; \quad -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2 \theta_1 \quad (3.26c)$$

na direção y ,

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = -h_3 \theta_1; \quad -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \Big|_{y=W} - h_4 \theta_2 = -q(t) \quad (3.26d)$$

na direção z ,

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -h_5 \theta_1; \quad -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=R} = h_6 \theta_1 \quad (3.26e)$$

e às condições de continuidade

$$\theta_1|_{y=b} = \theta_2|_{y=b}; \quad -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \Big|_{y=b} = -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \Big|_{y=b} \quad (3.26f)$$

e à condição inicial

$$\theta_1(x, y, z, 0) = \theta_2(x, y, z, 0) = F(x, y, z) - T_\infty \quad (3.26g)$$

Observa-se ainda que o problema descrito pelas Eqs. (3.26a)-(3.26g) é equivalente ao problema com geração de calor “superficial” em $y = W$, isto é, $g(x, W, z, t) = q(t)\delta(y - W)$ e fluxo de calor nulo em $y = W$. Desta forma, supondo que a não homogeneidade associada à condição de contorno em $y = W$ é removida por meio da adição da função $g(x, W, z, t)$ à equação diferencial referente a camada 1 Eq. (3.26). Portanto, o problema descrito anteriormente é equivalente ao que é dado pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} + \frac{g(x, W, z, t)}{k_1} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \quad (3.27a)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \quad (3.27b)$$

Sujeito as condições de contorno na direção x ,

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -h_1 \theta_1; \quad -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2 \theta_1 \quad (3.27c)$$

na direção y ,

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = -h_3 \theta_1; \quad -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \Big|_{y=W} - h_4 \theta_2 = 0 \quad (3.27d)$$

na direção z ,

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -h_5 \theta_1; \quad -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=R} = h_6 \theta_1 \quad (3.27e)$$

e às condições de continuidade

$$\theta_1|_{y=b} = \theta_2|_{y=b}; \quad -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \Big|_{y=b} = -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \Big|_{y=b} \quad (3.27f)$$

e à condição inicial

$$\theta_1(x, y, z, 0) = \theta_2(x, y, z, 0) = F(x, y, z) - T_\infty \quad (3.27g)$$

Observa-se assim que a solução do problema dado pelas Eqs. (3.27a) - (3.27g) podem ser obtidas pelo método de funções de Green.

3.3.1 Solução analítica do problema direto 3D multicamada

Para obtenção do problema direto, tanto o fluxo de calor imposto, como as propriedades térmicas e os diversos parâmetros como os coeficientes $h_i = h$ devem ser conhecidos.

A equação-solução integral para problemas multicamadas (HAJI-SHEIKH, 2014) para cada temperatura em cada região i baseada em funções de Green de acordo com (HAJI-

SHEIKH, 2014) é dada por

$$\begin{aligned} \theta_i(x, t) = & \sum_{j=1}^M \left\{ \int_0^L \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_0^R G_{ij}(x, y, z, t|x', y', z', 0) F_j(x', y', z', 0) dx' dy' dz' \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_j}{k_j} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_j(x, y', z, \tau) G_{ij}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' d\tau \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde o primeiro termo é referente ao termo da temperatura inicial ($F(x, y, z, 0)$) e o segundo termo está relacionado com a condição de contorno de fluxo de calor imposto à área arbitrária $0 \leq L_1 \leq x \leq L_2 \leq L$ e $0 \leq R_1 \leq z \leq R_2 \leq R$ em $y = W$ como mostra a Fig. (3.5).

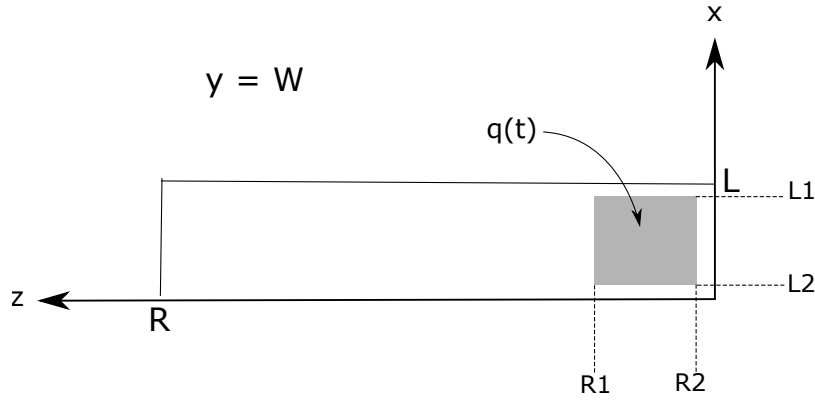


Figura 3.5: Problema X33Y2C12Z33

Nota-se também, na Eq. (3.28) que $y_j \leq y \leq y_{j+1}$, para $j = 1, 2, \dots, M$, são os limites de cada camada, e, $G_{ij}(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ é a função de Green para problemas multicamadas.

Se $M = 1$ tem-se

$$\begin{aligned} \theta_1(x, y, z, t) = & \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} \int_0^R G_{11}(x, y, z, t|x', y', z', 0) F_1(x', y', z', 0) dx' dy' dz' \\ & + \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_1(x, y', z, \tau) G_{11}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' d\tau \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde $y_1 = 0$ e $y_2 = W$, portanto a solução (3.29) é algebricamente idêntica a solução do problema 3D X33Y33Z33 de única camada (Anexo A).

Se $M = 2$, define-se duas camadas dadas pelos seguintes intervalos $0 \leq y \leq b$ e $b \leq y \leq W$ onde tem-se respectivamente as camadas 2 e 1, sendo $y_1 = W$, $y_2 = b$ e $y_3 = 0$. Assim, tem-se

as soluções de θ_1 e θ_2 definidas:

$$\begin{aligned}
\theta_1(x, y, z, t) &= \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} \int_0^R G_{11}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_1(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\
&+ \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_1(x, y', z, \tau)G_{11}(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz'd\tau \\
&+ \int_0^L \int_{y_2}^{y_3} \int_0^R G_{12}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_2(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\
&+ \frac{\alpha_2}{k_2} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_2(x, y', z, \tau)G_{12}(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz'd\tau
\end{aligned} \tag{3.30a}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(x, y, z, t) &= \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} \int_0^R G_{21}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_1(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\
&+ \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_1(x, y', z, \tau)G_{21}(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz'd\tau \\
&+ \int_0^L \int_{y_2}^{y_3} \int_0^R G_{22}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_2(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\
&+ \frac{\alpha_2}{k_2} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_2(x, y', z, \tau)G_{22}(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz'd\tau
\end{aligned} \tag{3.30b}$$

Como o fluxo de calor é aplicado na superfície, $g(y, t) = q(t)\delta(y - W)$, isto implica que ele ocorre em $y = W$, assim, $g_1(y, t) = g(y, t)$ e $g_2(y, t) = 0$, portanto o segundo termo das equações (3.30a) - (3.30b) são nulos. Assim,

$$\begin{aligned}
\theta_1(x, y, z, t) &= \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} \int_0^R G_{11}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_1(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\
&+ \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_1(x, y', z, \tau)G_{11}(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz'd\tau \\
&+ \int_0^L \int_{y_2}^{y_3} \int_0^R G_{12}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_2(x', y', z', 0)dx'dy'dz'
\end{aligned} \tag{3.31a}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(x, y, z, t) = & \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} \int_0^R G_{21}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_1(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\
& + \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_1(x, y', z, \tau)G_{21}(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz'd\tau \quad (3.31b) \\
& + \int_0^L \int_{y_2}^{y_3} \int_0^R G_{22}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_2(x', y', z', 0)dx'dy'dz'
\end{aligned}$$

Obtém-se a função de Green $G_{ij}(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ observando-se os tipos de condições de contorno nas direções de x,y e z, como sendo três problemas unidimensionais independentes. Ou seja, $G_{ij}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X33}G_{Y2C13}G_{Z33}$.

Na direção x e z, têm-se as condições de contorno do tipo três, que significa condição de convecção, e a função de Green unidimensional é facilmente encontrada em Cole *et al.* (2010), porém na direção y temos um problema unidimensional constituído por duas camadas submetido a condição de convecção em ambos os sentidos, exceto à área arbitrária onde ocorre o fluxo de calor Fig. (3.5).

De acordo com Cole *et al.* (2010) na direção x, tem-se

$$\begin{aligned}
G_{X33}(x, t|x', \tau) = & \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_m^2 \alpha(t-\tau)/L^2} \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) \right] \\
& \times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} \right]} + B_1 \quad (3.32)
\end{aligned}$$

onde $\tan \alpha_m = \frac{\alpha_m(B_1+B_2)}{\alpha_m^2 - B_1 B_2}$, $B_1 = \frac{h_1 L}{k_1}$ e $B_2 = \frac{h_2 L}{k_1}$

Na direção z tem se a mesma função de green, tornando-se necessário apenas mudar à variáveis que caracterizam o problema no eixo z. Ou seja,

$$\begin{aligned}
G_{Z33}(z, t|z', \tau) = & \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\gamma_p^2 \alpha(t-\tau)/R^2} \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) \right] \\
& \times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\alpha_p^2 + B_6^2)} \right]} + B_5 \quad (3.33)
\end{aligned}$$

onde $\tan \gamma_p = \frac{\gamma_p(B_5+B_6)}{\gamma_p^2 - B_5 B_6}$, $B_5 = \frac{h_5 R}{k_1}$ e $B_6 = \frac{h_6 R}{k_1}$.

Como já mencionado, na direção y temos duas camadas e a função de Green multicamada

G_{ij} é dada por (HAJI-SHEIKH; BECK, 2002)

$$G_{ij}(y, t|y', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_y} Y_{in}(y) Y_{jn}(y'), \quad (3.34)$$

onde Y_{in}, Y_{jn} são as autofunções que se deseja obter, α_m, λ_n e γ_p os autovalores, os índices $m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N$ e $p = 1, \dots, P$ definem a quantidade de interações (autovalores) necessárias para a convergência das séries, dado um erro de truncamento, ε , desejado. B_i é o número de Biot e N_y a norma, definida como

$$N_y = \sum_{j=1}^M \int_{y_j}^{y_{j+1}} [Y_{jn}(y')]^2 dy' \quad (3.35)$$

Observa-se, portanto pelas Eqs. (3.31a)- (3.31b) que para esse caso serão necessárias as seguintes funções de Green

$$G_{11}(y, t|y', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} Y_{1n}(y) Y_{1n}(y') \quad (3.36)$$

$$G_{12}(y, t|y', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} Y_{1n}(y) Y_{2n}(y') \quad (3.37)$$

$$G_{21}(y, t|y', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} Y_{2n}(y) Y_{1n}(y') \quad (3.38)$$

$$G_{22}(y, t|y', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} Y_{2n}(y) Y_{2n}(y') \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

A seguir o problema na direção y será tratado como um problema unidimensional, obtendo-se as autofunções referente as duas camadas, isto é, $Y_1 = Y_{1n}(y)$ e $Y_2 = Y_{2n}(y)$.

3.3.1.1 Obtenção das autofunções Y_1 e Y_2

Assumindo que as condições de contorno são homogêneas, propõem-se que as autofunções sejam obtidas por funções de variáveis independentes no espaço e no tempo.

Assim, usando o método de separação de variáveis proprõem-se

$$\theta_1(y, t) = Y_1(y)\Gamma_1(t) \quad (3.41a)$$

$$\theta_2(y, t) = Y_2(y)\Gamma_2(t) \quad (3.41b)$$

Lembrando que $\theta_1 = T_1 - T_\infty$ e $\theta_2 = T_2 - T_\infty$ e substituindo a Eq. (3.41a) na Eq. (3.25a) e à Eq. (3.41b) na Eq. (3.26b) obtém-se

$$\frac{1}{Y_1} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_1 \Gamma_1} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t} \quad (3.42a)$$

e

$$\frac{1}{Y_2} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_2 \Gamma_2} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial t} \quad (3.42b)$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2} + \frac{\lambda^2}{\alpha_1} Y_1 = 0 \quad (3.43)$$

e

$$\frac{\partial^2 Y_2}{\partial y^2} + \frac{\lambda^2}{\alpha_2} Y_2 = 0 \quad (3.44)$$

Definindo

$$\phi^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha_1} \quad e \quad \eta^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha_2} \quad (3.45)$$

Obtém-se as soluções

$$Y_1 = A \cos(\phi y) + B \sin(\phi y) \quad (3.46a)$$

$$Y_2 = C \cos(\eta y) + D \sin(\eta y) \quad (3.46b)$$

Os coeficientes A , B , C e D são obtidos aplicando-se as condições de contorno e às condições de continuidade (HAJI-SHEIKH; BECK, 2002).

Ou seja, a condição de contorno em $y = 0$, dada por

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = -h_3 \theta_1 \quad (3.47)$$

pode ser reescrita como

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = -h_3 \theta_1 \quad \Rightarrow \quad -k_1 \frac{\partial Y_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = -h_3 Y_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Y_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{-h_3 Y_1}{-k_1} \quad (3.48)$$

Aplicando-se as condições de contorno em $y = 0$ Eq. (3.48) obtém-se

$$-A\phi\text{sen}(0) + B\phi\text{cos}(0) = \frac{h_3}{k_1}(A\text{cos}(0) + B\text{sen}(0)) \quad (3.49)$$

Como $\text{sen}(0) = 0$ e $\text{cos}(0) = 1$, conclui-se que o coeficiente $B = \left(\frac{h_3}{k_1\phi}\right)A$ e $A = \frac{B\phi k_1}{h_3}$.

Como $B = \left(\frac{h_3}{k_1\phi}\right)A$ e $A = \frac{B\phi k_1}{h_3}$, sem perda de generalidade o coeficiente A da Eq. (3.46a) pode assumir qualquer valor constante, incluindo o valor unitario, $A = 1$ (ÖZİŞİK, 1993).

Assim, substituindo os coeficientes A e B na Eq. (3.46a) tem-se

$$Y_1 = 1\text{cos}(\phi y) + \frac{h_3}{k_1\phi}\text{sen}(\phi y) \quad (3.50)$$

Logo, a autofunção Y_1 está determinada e é dada por

$$Y_1 = \text{cos}(\phi x) + \left(\frac{h_3}{k_1\phi}\right)\text{sen}(\gamma y) \quad (3.51)$$

Para obtenção da autofunção Y_2 usa-se as condições de continuidade ($y = b$). Em $y = b$ tem-se

$$\theta_1|_{y=b} = \theta_2|_{y=b}; \quad -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \Big|_{y=b} = -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \Big|_{y=b} \quad (3.52)$$

e pode ser re-escrita como

$$Y_1|_{y=b} = Y_2|_{y=b}; \quad -k_1 \frac{\partial Y_1}{\partial y} \Big|_{y=b} = -k_2 \frac{\partial Y_2}{\partial y} \Big|_{y=b} \quad (3.53)$$

Substituindo as Eqs. (3.51) - (3.46b) na primeira equação da Eq. (3.53) tem-se

$$\text{cos}(\phi y) + \left(\frac{h_3}{k_1\phi}\right)\text{sen}(\phi y) = C\text{cos}(\eta y) + D\text{sen}(\eta y) \quad (3.54)$$

aplicando a condição de continuidade e re-escrivendo a Eq. (3.54) tem-se

$$\text{cos}(\phi b) + \left(\frac{h_3}{k_1\phi}\right)\text{sen}(\phi b) - C\text{cos}(\eta b) - D\text{sen}(\eta b) = 0 \quad (3.55)$$

Analogamente, substituindo as autofunções Y_1 e Y_2 dadas pela Eq. (3.51) - (3.46b) na

segunda Eq. (3.53) segue-se

$$-k_1 \frac{\partial(\cos(\phi y) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi}\right) \text{sen}(\phi y))}{\partial y} = -k_2 \frac{\partial(C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y))}{\partial y} \quad (3.56)$$

Analogamente, resolvendo a derivada com relação a y tem-se

$$-k_1 \left[-\phi \text{sen}(\phi y) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi}\right) \phi \cos(\phi y) \right] = -k_2 [-C \eta \text{sen}(\eta y) + D \eta \cos(\eta y)] \quad (3.57)$$

colocando em evidência ϕ e η tem-se

$$-k_1 \phi \left[-\text{sen}(\phi y) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi}\right) \cos(\phi y) \right] = -k_2 \eta [-C \text{sen}(\eta x) + D \cos(\eta x)] \quad (3.58)$$

dividindo ambos membros da Eq. (3.58) por $-k_2 \eta$ segue-se,

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \left(\frac{\gamma}{\eta}\right) \left[-\text{sen}(\phi y) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi}\right) \cos(\phi y) \right] = -C \text{sen}(\eta y) + D \cos(\eta y) \quad (3.59)$$

Aplicando a condição de continuidade em $y = b$ e re-escrevendo a Eq. (3.59) tem-se

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \left(\frac{\gamma}{\eta}\right) \left[-\text{sen}(\phi b) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi}\right) \cos(\phi b) \right] + C \text{sen}(\eta b) - D \cos(\eta b) = 0 \quad (3.60)$$

Em $y = W$, tem-se

$$-k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \Big|_{x=W} - h_4 \theta_2 = -q(t) \quad (3.61)$$

e pode ser re-escrita por

$$-k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \Big|_{y=W} = -q(t) \quad \Rightarrow \quad -k_2 \frac{\partial Y_2}{\partial y} \Big|_{y=W} - h_4 Y_2 = 0 \quad (3.62)$$

Sustituindo a autofunção Y_2 na Eq. (3.62) segue-se

$$-k_2 \frac{\partial(C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y))}{\partial y} - h_4 [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] = 0 \quad (3.63)$$

Resolvendo a derivada em relação a y e aplicando a condição de contorno $y = W$ tem-se

$$-k_2 [-C \eta \text{sen}(\eta W) + D \eta \cos(\eta W)] - h_4 [C \cos(\eta W) + D \text{sen}(\eta W)] = 0 \quad (3.64)$$

Uma vez aplicadas todas as condições de contorno e as condições de continuidade, as Eqs. (3.55),(3.60) e (3.64) em forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi b) + H \operatorname{sen}(\phi b) & \cos(\eta b) & \operatorname{sen}(\eta b) \\ -K \operatorname{sen}(\eta b) + KH \cos(\eta b) & -\operatorname{sen}(\eta b) & \cos(\eta b) \\ 0 & k_2 \eta \operatorname{sen}(\eta W) & -k_2 \eta \cos(\eta W) \\ & -h_4 \cos(\eta W) & -h_4 \operatorname{sen}(\eta W) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

onde

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \eta \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} h_3 \\ k_1 \phi \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

Observa-se, na Eq. (3.65) que ainda resta a identificação dos coeficientes C e D . Assim, para sua obtenção, são necessárias apenas duas equações, ou seja, tomando as Eqs. (3.55)-(3.60) tem-se o seguinte sistema linear em sua forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\eta b) & \operatorname{sen}(\eta b) \\ -\operatorname{sen}(\eta b) & \cos(\eta b) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\phi b) + H \operatorname{sen}(\phi b) \\ -K \operatorname{sen}(\phi b) + KH \cos(\phi b) \end{bmatrix}}_B \quad (3.67)$$

Apresenta-se, na Eq. (3.68) a notação do sistema linear dado pela Eq. (3.67) em sua forma simplificada. Para a solução desse sistema é necessário e suficiente que exista a matriz inversa tal que, satisfaça a expressão abaixo (3.68)

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = B \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1} \quad (3.68)$$

onde A^{-1} é denotado como matriz inversa.

De acordo com (OLIVEIRA, 2015) tem-se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\eta b) & -\operatorname{sen}(\eta b) \\ \operatorname{sen}(\eta b) & \cos(\eta b) \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Pontanto,

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\eta b) & -\operatorname{sen}(\eta b) \\ \operatorname{sen}(\eta b) & \cos(\eta b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi b) + H \operatorname{sen}(\phi b) \\ -K \operatorname{sen}(\phi b) + KH \cos(\phi b) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$C = \cos(\eta b)[\cos(\phi b) + H \operatorname{sen}(\phi b)] + K \operatorname{sen}(\eta b) \operatorname{sen}(\phi b) - KH \operatorname{sen}(\eta b) \cos(\phi b) \quad (3.71)$$

$$D = \operatorname{sen}(\eta b)[\cos(\phi b) + H \operatorname{sen}(\phi b)] - K \cos(\eta b) \operatorname{sen}(\phi b) + KH \cos(\eta b) \cos(\phi b) \quad (3.72)$$

Os valores de C e D são verificados de acordo com (COLE *et al.*, 2010) como mostra em Anexo B.

3.3.1.2 Obtenção da norma N_y

Obtidas as autofunções, para identificar a função de Green é necessário a obtenção da norma, que consiste na soma das integrais das autofunções referentes a cada camada, ou seja,

$$N_y = \int_{y_1}^{y_2} [Y_1(y')]^2 dy' + \int_{y_2}^{y_3} [Y_2(y')] dy' \quad (3.73)$$

onde o intervalo da primeira e da segunda integral da Eq. (3.73) referem-se respectivamente a primeira e segunda camada. Substituindo as autofunções Y_1 e Y_2 , a norma passa a ser definida por:

$$N_y = \underbrace{\int_0^b [\cos(\phi y') + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi}\right) \operatorname{sen}(\phi y')]^2 dy'}_1 + \underbrace{\int_b^W [C \cos(\eta y') + D \operatorname{sen}(\eta y')]^2 dy'}_2 \quad (3.74)$$

Resolvendo as integrais, tem-se, onde $H = \frac{h_3}{k_1 \phi}$

$$\begin{aligned} \text{Integral 1} &= \int_0^b [\cos(\phi y') + H \operatorname{sen}(\phi y')]^2 dy' \\ &= \int_0^b \cos(\phi y')^2 + 2[\cos(\phi y') H \operatorname{sen}(\phi y')] + H^2 \operatorname{sen}(\phi y')^2 dy' \\ &= \underbrace{\int_0^b \cos(\phi y')^2 dy'}_A + \underbrace{2H \int_0^b \cos(\phi y') \operatorname{sen}(\phi y') dy'}_B + \underbrace{H^2 \int_0^b \operatorname{sen}(\phi y')^2 dy'}_C \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\text{Integral A} = \int_0^b \cos(\phi y')^2 dy' = \frac{2\phi y' + \text{sen}(2\phi y')}{4\phi} \Big|_0^b = \frac{2\phi b + \text{sen}(2\phi b)}{4\phi} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \text{Integral B} &= 2H \int_0^b \cos(\phi y') \text{sen}(\phi y') dy' = -\frac{\cos(\phi y')^2}{2\phi} \Big|_0^b \\ &= \frac{-\cos(\phi b)^2}{2\phi} + \frac{1}{2\phi} = 2H \frac{\text{sen}(\phi b)^2}{2\phi} \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \text{Integral C} &= H^2 \int_0^b \text{sen}(\phi y') dy' = \left[\frac{y'}{2} - \frac{\text{sen}(2\phi y')}{4\phi} \right] \Big|_0^b \\ &= H^2 \left[\frac{b}{2} - \frac{\text{sen}(2\phi b)}{4\phi} \right] \end{aligned} \quad (3.78)$$

Portanto, Integral I = Integral A + Integral B + Integral C.

$$\begin{aligned} \text{Integral 2} &= \int_b^W [C \cos(\eta y') + D \text{sen}(\eta y')]^2 dy' \\ &= \int_b^W C^2 \cos^2(\eta y') + 2CD \cos(\eta y') \text{sen}(\eta y') + D^2 \text{sen}^2(\eta y') dy' \\ &= C^2 \int_b^W \cos^2(\eta y') dy' + 2CD \int_b^W \cos(\eta y') \text{sen}(\eta y') dy' + D^2 \int_b^W \text{sen}^2(\eta y') dy' \\ &= \frac{C^2}{4\eta} (2\eta(W - b) - \text{sen}(2b\eta) + \text{sen}(2L\eta)) + \frac{2CD}{4\eta} (\cos(2b\eta) - \cos(2L\eta)) \\ &\quad + \frac{D^2}{4\eta} (2\eta(W - b) + \text{sen}(2b\eta) - \text{sen}(2W\eta)) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Logo, a norma é definida por:

$$N_y = \text{Integral 1} + \text{Integral 2} \quad (3.80)$$

Observa-se, que resta ainda o cálculo dos autovalores λ_n .

3.3.1.3 Obtenção dos autovalores λ_n

Os autovalores para o problema térmico $Y2C13$ devem ser obtidos por um método numérico, por tratar-se de uma equação transcendental.

A obtenção da equação transcendental é dada pelo cálculo do determinante da Eq. (3.65) que é composto pelas condições de continuidade em $y = b$ e condição de contorno em $y = W$. Assim, escrevendo a matriz de seus coeficientes tem-se

$$\begin{vmatrix} \cos(\phi b) + H \operatorname{sen}(\phi b) & \cos(\eta b) & \operatorname{sen}(\eta b) \\ -K \operatorname{sen}(\eta b) + KH \cos(\eta b) & -\operatorname{sen}(\eta b) & \cos(\eta b) \\ 0 & k_2 \eta \operatorname{sen}(\eta W) & -k_2 \eta \cos(\eta W) \\ & -h_4 \cos(\eta W) & -h_4 \operatorname{sen}(\eta W) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.81)$$

Aplicando a regra de Sarrus, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} \cos(\phi b) + H \operatorname{sen}(\phi b) & \cos(\eta b) & \operatorname{sen}(\eta b) \\ -K \operatorname{sen}(\eta b) + KH \cos(\eta b) & -\operatorname{sen}(\eta b) & \cos(\eta b) \\ 0 & k_2 \eta \operatorname{sen}(\eta W) & -k_2 \eta \cos(\eta W) \\ & -h_4 \cos(\eta W) & -h_4 \operatorname{sen}(\eta W) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos(\phi b) + H \operatorname{sen}(\phi b) & \cos(\eta b) \\ -K \operatorname{sen}(\eta b) + KH \cos(\eta b) & -\operatorname{sen}(\eta b) \\ 0 & -h_4 \cos(\eta W) \end{vmatrix} \quad (3.82)$$

Resolvendo o sistema linear dado pela Eq. (3.82), obtém-se a equação transcendental Eq. (3.83)

$$\frac{[\eta(b-W)] \tan[\eta(b-W)] - \frac{h_4(b-W)}{k_2}}{\frac{h_4(b-W)}{k_2} \tan[\eta(b-W)] + [\eta(b-W)]} = -K \frac{\phi b \tan(\phi b) - \frac{h_3 b}{k_1}}{\frac{h_3 b}{k_1} \tan(\phi b) + \phi b} \quad (3.83)$$

Considera-se, $\bar{\eta} = \eta(b-W)$, $\bar{\phi} = \phi b$, $\beta i_1 = \frac{h_4(b-W)}{k_2}$ e $\beta i_2 = \frac{h_3 b}{k_1}$, assim, a Eq. (3.83) pode ser re-escrita da seguinte maneira

$$\frac{\bar{\eta} \tan(\bar{\eta}) - \beta i_2}{\beta i_2 \tan(\bar{\eta}) + \bar{\eta}} = -K \frac{\bar{\phi} \tan(\bar{\phi}) - \beta i_1}{\beta i_1 \tan(\bar{\phi}) + \bar{\phi}} \quad (3.84)$$

A solução da Eq. (3.84) pode ser obtida aplicando-se vários métodos matemáticos. Neste sentido (ÖZİŞİK, 1993) sugere várias técnicas clássicas como: Método de Newton-Raphson, Bisseção e Secante. Na verdade qualquer um desses métodos são suficientes para obtenção das raízes destas equações. Entretanto um cuidado especial deve ser tomado em relação a

obtenção de todas as raízes. Observa-se que como os métodos são iterativos, corre-se algum risco de se perder o primeiro autovalor dependendo das características físicas e geométricas do problema e do primeiro autovalor estimado (FERNANDES, 2009)(OLIVEIRA, 2015).

Sendo assim, Beck (1992) e Haji-Sheik & Beck (2000) apresentam soluções para a equação transcendental baseadas em aproximações assintóticas que evitam estes problemas. Esse método consiste na intersecção das curvas dadas pelos termos dos lados direito e esquerdo da Eq. (3.83) respectivamente. Deste modo, os autovalores são obtidos buscando-se as intersecções que estão localizadas em um determinado intervalo. Devido a simetria com relação ao eixo y existem autovalores negativos, porém, somente serão considerados autovalores positivos, desde que, a solução permanece inalterada pelo sinal da raíz.

Obtidos os autovalores, a função de Green é facilmente identificada e com isso pode-se obter a solução analítica do problema direto.

3.3.1.4 Equação-Solução da temperatura para o modelo de dupla camada

Como visto, a equação-solução de temperatura para cada camada é dada pelas Eqs. (3.85a)-(3.85b):

$$\begin{aligned} \theta_1(x, y, z, t) = & \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} \int_0^R G_{11}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_1(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\ & + \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_1(x, y', z, \tau)G_{11}(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz'd\tau \quad (3.85a) \\ & + \int_0^L \int_{y_2}^{y_3} \int_0^R G_{12}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_2(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta_2(x, y, z, t) = & \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} \int_0^R G_{21}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_1(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\ & + \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_1(x, y', z, \tau)G_{21}(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz'd\tau \quad (3.85b) \\ & + \int_0^L \int_{y_2}^{y_3} \int_0^R G_{22}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_2(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \end{aligned}$$

Onde as funções de Green são dadas por:

$$G_{11}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X33} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} Y_{1n}(y) Y_{1n}(y') G_{Z33} \quad (3.86a)$$

$$G_{12}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X33} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} Y_{1n}(y) Y_{2n}(y') G_{Z33} \quad (3.86b)$$

$$G_{21}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X33} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} Y_{2n}(y) Y_{1n}(y') G_{Z33} \quad (3.86c)$$

$$G_{22}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X33} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} Y_{2n}(y) Y_{2n}(y') G_{Z33} \quad (3.86d)$$

onde

$$Y_1 = \cos(\phi y) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi} \right) \text{sen}(\phi y) \quad (3.87)$$

$$Y_2 = C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y) \quad (3.88)$$

e os coeficientes C e D são dados pela Eqs. (3.71)-(3.72).

Resolvendo as multiplicações das Eqs. (3.86) tem-se:

$$\begin{aligned}
G_{11}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t-\tau)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2} \right] + B_1} \\
&\times \left[\cos(\phi y) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi} \right) \text{sen}(\phi y) \right] \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2} \right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) \right] \\
&\times \left[\cos(\phi y') + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi} \right) \text{sen}(\phi y') \right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.89a}$$

$$\begin{aligned}
G_{12}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t-\tau)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2} \right] + B_1} \\
&\times \left[\cos(\phi y) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi} \right) \text{sen}(\phi y) \right] \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2} \right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) \right] \\
&\times \left[C \cos(\eta y') + D \text{sen}(\eta y') \right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.89b}$$

$$\begin{aligned}
G_{21}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t-\tau)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2} \right] + B_1} \\
&\times [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2} \right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) \right] \\
&\times \left[\cos(\phi y') + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi}\right) \text{sen}(\phi y') \right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.89c}$$

$$\begin{aligned}
G_{22}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t-\tau)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2} \right] + B_1} \\
&\times [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2} \right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) \right] \\
&\times [C \cos(\eta y') + D \text{sen}(\eta y')] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.89d}$$

Logo, avaliando as funções de Grenn (3.89) para $\tau = 0$ tem-se:

$$\begin{aligned}
G_{11}(x, y, z, t|x', y', z', 0) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
&\times \left(\cos(\phi y) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y)\right) \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right)\right] \\
&\times \left(\cos(\phi y') + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y')\right) \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.90a}$$

$$\begin{aligned}
G_{12}(x, y, z, t|x', y', z', 0) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
&\times \left[\cos(\phi y) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi}\right) \text{sen}(\phi y)\right] \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right)\right] \\
&\times [C \cos(\eta y') + D \text{sen}(\eta y')] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.90b}$$

$$\begin{aligned}
G_{21}(x, y, z, t|x', y', z', 0) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2} \right] + B_1} \\
&\times [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2} \right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) \right] \\
&\times \left[\cos(\phi y') + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi}\right) \text{sen}(\phi y') \right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.90c}$$

$$\begin{aligned}
G_{22}(x, y, z, t|x', y', z', 0) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2} \right] + B_1} \\
&\times [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2} \right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) \right] \\
&\times [C \cos(\eta y') + D \text{sen}(\eta y')] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.90d}$$

e avaliando a função (G_{12} e G_{22}) em $y' = W$ obtém-se

$$\begin{aligned}
G_{12}(x, y, z, t|x', y', z', 0) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t-\tau)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
&\times \left[\cos(\phi y) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi}\right) \operatorname{sen}(\phi y)\right] \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right)\right] \\
&\times [C \cos(\eta W) + D \operatorname{sen}(\eta W)] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.91a}$$

$$\begin{aligned}
G_{22}(x, y, z, t|x', y', z', 0) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
&\times [C \cos(\eta y) + D \operatorname{sen}(\eta y)] \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right)\right] \\
&\times [C \cos(\eta W) + D \operatorname{sen}(\eta W)] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.91b}$$

Desta forma, substitui-se as Eqs.(3.90)-(3.91) na Eq. (3.85a) para resolução das integrais analíticas e obtenção da solução de temperatura. Assim, obtém-se para o primeiro termo da

solução(3.85a)

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_0^b \int_0^R G_{11}(x, y, z, t|x', y', z', 0)\theta_1(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\
&= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t)} \\
&\times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
&\times \left(\cos(\phi y) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y)\right) \\
&\times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
&\times \int_0^L \int_0^b \int_0^R \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right] \\
&\times \left(\cos(\phi y') + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y')\right) \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right] dx'dy'dz'
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Restando apenas o cálculo das integrais.

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_0^b \int_0^R \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right] \\
&\times \left(\cos(\phi y') + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y')\right) \times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right] dx'dy'dz' \\
&= \frac{LR}{\alpha_m \gamma_p} [\alpha_m \text{sen} \alpha_m - B_1 (\cos \alpha_m - 1)] \\
&\times \left[\frac{\text{sen}(\phi b)}{\phi} + \frac{h_3}{k_1 \phi^2} (\phi - \cos(\phi b))\right] \times [\gamma_p \text{sen} \gamma_p - B_5 (\cos \gamma_p - 1)]
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Sendo que, para o segundo termo da Eq. (3.85a) tem-se que

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_b^W \int_0^R G_{12}(x, y, z, t | x', y', z', 0) \theta_2(x', y', z', 0) dx' dy' dz' \\
&= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)} \\
&\times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
&\times \left(\cos(\phi y) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y)\right) \\
&\times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
&\times \int_0^L \int_b^W \int_0^R \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right] \\
&\times [C \cos(\eta y') + D \text{sen}(\eta y')] \times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right] dx' dy' dz'
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Restando apenas o cálculo da integral.

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_b^W \int_0^R \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right] \\
&\times [C \cos(\eta y') + D \text{sen}(\eta y')] \times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right] dx' dy' dz' \\
&= \frac{LR}{\alpha_m \gamma_p} [\alpha_m \text{sen} \alpha_m - B_1 (\cos \alpha_m - 1)] \\
&\times \left[\frac{-C \text{sen}(\eta b) + D \cos(\eta b) + C \text{sen}(\eta W) - D \cos(\eta W)}{\eta}\right] \\
&\times [\gamma_p \text{sen} \gamma_p - B_5 (\cos \gamma_p - 1)]
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Em relação ao terceiro termo da Eq. (3.85a) tem-se que

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_2}{k_2} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G_{12}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' d\tau \\
&= \frac{\alpha_2}{k_2} \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t-\tau)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right]}{\left(\alpha_m^2 + B_1^2\right) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \times \left(\cos(\phi y) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y)\right) \\
&\times \left(\cos(\phi W) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi W)\right) \times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right]}{\left(\gamma_p^2 + B_5^2\right) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
&\times \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right] \times \left[q(\tau) e^{\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t)}\right] dx' dz' d\tau
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Restando apenas o cálculo das integrais.

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right] dx' dz' d\tau \\
&= \left[L \left[\text{sen}\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right)\right] - \frac{B_1 L}{\alpha_m} \left[\cos\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right)\right]\right] \\
&\times \left[R \left[\text{sen}\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \text{sen}\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right)\right] - \frac{B_5 R}{\gamma_p} \left[\cos\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right)\right]\right] \\
&\times \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t)}\right] d\tau
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Analogamente, substitui-se as Eqs. (3.91)-(3.90) na Eq.(3.85b) para resolução das integrais analíticas e obtenção da solução de temperatura para segunda camada. Assim, obtém-se

o primeiro termo da solução(3.85b)

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} \int_0^R G_{21}(x, y, z, t|x', y', z', 0)\theta_1(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\
&= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t)} \\
&\times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
&\times [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \\
&\times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
&\times \int_0^L \int_0^b \int_0^R \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right] \\
&\times \left(\cos(\phi y') + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y') \right) \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) \right] dx'dy'dz'
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Restando o cálculo da integral que é exatamente igual a Eq. (3.93).

Para o segundo termo da Eq. (3.85b) tem-se que

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_b^W \int_0^R G_{22}(x, y, z, t|x', y', z', 0)\theta_2(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\
&= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t)} \\
&\times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
&\times [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \\
&\times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
&\times \int_0^L \int_b^W \int_0^R \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right] \\
&\times [C \cos(\eta y') + D \text{sen}(\eta y')] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) \right] dx'dy'dz'
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Restando o cálculo da integral que é exatamente igual a Eq. (3.95).

Para o terceiro termo da Eq. (3.85b) tem-se que

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_2}{k_2} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G_{22}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' d\tau \\
&= \frac{\alpha_2}{k_2} q_2(x, z, t) \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t-\tau)} \\
&\times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
&\times [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \\
&\times \left(\cos(\phi W) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi W) \right) \\
&\times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
&\times \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) \right] \times \left[q(\tau) e^{\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)} \right] dx' dz' d\tau
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Restando o cálculo da integral que é exatamente igual a Eq. (3.97).

Portanto, substituindo as Eqs.(3.92)-(3.94)-(3.96) na Eq. (3.85a), obtém-se a solução

análítica referente a primeira camada em termos da variável de homogeneização θ_1 .

$$\begin{aligned}
\theta_1(x, y, z, t) = & \\
& \frac{4}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)} \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
& \times \left(\cos(\phi y) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y)\right) \times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
& \times \frac{1}{\alpha_m \gamma_p} [\alpha_m \text{sen} \alpha_m - B_1 (\cos \alpha_m - 1)] \times \left[\frac{\text{sen}(\phi b)}{\phi} + \frac{h_3}{k_1 \phi^2} (\phi - \cos(\phi b))\right] \\
& \times [\gamma_p \text{sen} \gamma_p - B_5 (\cos \gamma_p - 1)] \\
& + \frac{4}{N_y} \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)} \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
& \times \left(\cos(\phi y) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y)\right) \times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
& \times \frac{1}{\alpha_m \gamma_p} [\alpha_m \text{sen} \alpha_m - B_1 (\cos \alpha_m - 1)] \\
& \times \left[\frac{-C \text{sen}(\eta b) + D \cos(\eta b) + C \text{sen}(\eta W) - D \cos(\eta W)}{\eta}\right] \\
& \times [\gamma_p \text{sen} \gamma_p - B_5 (\cos \gamma_p - 1)] \\
& + \frac{\alpha_2}{k_2} \frac{4}{N_y} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t-\tau)} \\
& \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \times \left(\cos(\phi y) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y)\right) \\
& \times \left(\cos(\phi W) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi W)\right) \times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
& \times \left[L \left[\text{sen}\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right)\right] - \frac{B_1 L}{\alpha_m} \left[\cos\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right)\right]\right] \\
& \times \left[R \left[\text{sen}\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \text{sen}\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right)\right] - \frac{B_5 R}{\gamma_p} \left[\cos\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right)\right]\right] \\
& \times \int_0^t \left[q(\tau) e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)}\right] d\tau
\end{aligned}$$

(3.101)

Da mesma forma, substituindo as Eqs.(3.98)-(3.99)-(3.100) na Eq. (3.85b), obtém-se a

solução analítica referente a primeira camada em termos da variável de homogeneização θ_2 .

$$\begin{aligned}
\theta_2(x, y, z, t) = & \\
& \frac{4}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)} \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
& \times [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
& \times \frac{1}{\alpha_m \gamma_p} [\alpha_m \text{sen} \alpha_m - B_1 (\cos \alpha_m - 1)] \times \left[\frac{\text{sen}(\phi b)}{\phi} + \frac{h_3}{k_1 \phi^2} (\phi - \cos(\phi b)) \right] \\
& \times [\gamma_p \text{sen} \gamma_p - B_5 (\cos \gamma_p - 1)] \\
& + \frac{4}{N_y} \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)} \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \\
& \times [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
& \times \frac{1}{\alpha_m \gamma_p} [\alpha_m \text{sen} \alpha_m - B_1 (\cos \alpha_m - 1)] \\
& \times \left[\frac{-C \text{sen}(\eta b) + D \cos(\eta b) + C \text{sen}(\eta W) - D \cos(\eta W)}{\eta} \right] \\
& \times [\gamma_p \text{sen} \gamma_p - B_5 (\cos \gamma_p - 1)] \\
& + \frac{\alpha_2}{k_2} q_2(x, z, t) \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t-\tau)} \\
& \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \times [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \\
& \times \left(\cos(\phi W) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi W) \right) \times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2}\right] + B_5} \\
& \times \left[L \left[\text{sen}\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] - \frac{B_1 L}{\alpha_m} \left[\cos\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] \right] \\
& \times \left[R \left[\text{sen}\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \text{sen}\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] - \frac{B_5 R}{\gamma_p} \left[\cos\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] \right] \\
& \times \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)} \right] d\tau
\end{aligned}$$

$$(3.102)$$

Resta, portanto, resolver a integral temporal que aparece nas Eqs. (3.101) - (3.102). Assim, como mostrado na seção 2.2.2, se o fluxo de calor, $q(t)$, tem origem discreta, implementa-se a solução em termos de solução híbrida.

A solução em termos da variável original T é dada por $T = \theta + T_\infty$.

3.3.2 Função de transferência

Como já visto, a solução geral do problema ($X33Y3C13Z33$) é dada pelas Eqs. (3.85a)-(3.85b), e pode ser re-escrita como:

$$\begin{aligned} \Theta_1(x, y, z, t) &= \theta_1(x, y, z, t) - \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} \int_0^R G_{11}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_1(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\ &\quad - \int_0^L \int_{y_2}^{y_3} \int_0^R G_{12}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_2(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_1(x, y', z, \tau)G_{11}(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz'd\tau \end{aligned} \quad (3.103a)$$

$$\begin{aligned} \Theta_2(x, y, z, t) &= \theta_2(x, y, z, t) - \int_0^L \int_{y_1}^{y_2} \int_0^R G_{21}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_1(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\ &\quad - \int_0^L \int_{y_2}^{y_3} \int_0^R G_{22}(x, y, z, t|x', y', z', 0)F_2(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} g_1(x, y', z, \tau)G_{21}(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz'd\tau \end{aligned} \quad (3.103b)$$

Organizando as expressões anteriores em termos do Teorema da Convolução, é possível visualizar a operação de convolução entre o fluxo de calor, $q(t)$ e a integral de área da função de Green.

$$\Theta_1(x, y, z, t) = \int_0^t g_1(x, y', z, \tau) \left(\frac{\alpha_1}{k_1} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G_{11}(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz' \right) d\tau \quad (3.104)$$

$$\Theta_2(x, y, z, t) = \int_0^t g_1(x, y, z, \tau) \left(\frac{\alpha_1}{k_1} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G_{21}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' \right) d\tau \quad (3.105)$$

As funções de Green são dadas pelas Eqs. (3.110)-(3.111). Logo, considerando o fluxo de calor como a função de Delta de Dirac, $q(t) = \delta(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} h_1(x, y, z, t) &= \int_0^t \delta(\tau) \left(\frac{\alpha_1}{k_1} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G_{11}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' \right) d\tau \\ &= \delta(t) * \left(\frac{\alpha_1}{k_1} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G_{11}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' \right) \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} h_2(x, y, z, t) &= \int_0^t \delta(\tau) \left(\frac{\alpha_1}{k_1} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G_{11}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' \right) d\tau \\ &= \delta(t) * \left(\frac{\alpha_1}{k_1} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G_{21}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' \right) \end{aligned} \quad (3.107)$$

Assim, identifica-se a função de transferência do problema de condução de calor (X33Y3C13Z33) como sendo

$$h_1(x, y, z, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G_{11}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' \quad (3.108)$$

$$h_2(x, y, z, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G_{21}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' \quad (3.109)$$

onde

$$\begin{aligned}
G_{11}(x, y, z, t|x', y', z', 0) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2} \right] + B_1} \\
&\times \left(\cos(\phi y) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi y) \right) \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2} \right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) \right] \\
&\times \left(\cos(\phi W) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \text{sen}(\phi W) \right) \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.110}$$

$$\begin{aligned}
G_{21}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) &= \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t-\tau)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2} \right] + B_1} \\
&\times [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2} \right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x')}{L}\right) \right] \\
&\times [\cos(\phi W) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi}\right) \text{sen}(\phi W)] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z')}{R}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Observa-se, que, é necessário realizar a integração de área para obter a expressão analítica

para a função de transferência, isto é, integrar os termos dependentes de x' e z' .

$$\begin{aligned}
& \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right] \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) \right] dx' dz' \\
&= \left[L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] - \frac{B_1 L}{\alpha_m} \left[\cos\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] \right] \\
&\times \left[R \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] - \frac{B_5 R}{\gamma_p} \left[\cos\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] \right]
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Portanto, as funções de transferência para o problema 3D $X33Y3C13Z33$ é dada por

$$\begin{aligned}
h_1(x, y, z, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2} \right] + B_1} \left(\cos(\phi y) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \operatorname{sen}(\phi y) \right) \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2} \right] + B_5} \left(\cos(\phi W) + \frac{h_3}{k_1 \phi} \operatorname{sen}(\phi W) \right) \\
&\times \left[L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] - \frac{B_1 L}{\alpha_m} \left[\cos\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] \right] \\
&\times \left[R \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] - \frac{B_5 R}{\gamma_p} \left[\cos\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] \right]
\end{aligned} \tag{3.113}$$

e

$$\begin{aligned}
h_2(x, y, z, t) = & \frac{4}{LR} \frac{1}{N_y} \theta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \lambda_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha(t-\tau)} \\
& \times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) + B_1 \text{sen}\left(\frac{\alpha_m(x)}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\alpha_m^2 + B_2^2} \right] + B_1} [C \cos(\eta y) + D \text{sen}(\eta y)] \\
& \times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) + B_5 \text{sen}\left(\frac{\gamma_p(z)}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{\gamma_p^2 + B_6^2} \right] + B_5} \left[\cos(\phi W) + \left(\frac{h_3}{k_1 \phi} \right) \text{sen}(\phi W) \right] \\
& \times \left[L \left[\text{sen}\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] - \frac{B_1 L}{\alpha_m} \left[\cos\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] \right] \\
& \times \left[R \left[\text{sen}\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \text{sen}\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] - \frac{B_5 R}{\gamma_p} \left[\cos\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] \right]
\end{aligned} \tag{3.114}$$

3.3.3 Problema inverso

A solução do problema inverso para o caso do problema $X33Y3C13Z33$ é obtida a partir do conhecimento da sua função de transferência, e do campo de temperatura. Aplica-se os mesmos procedimentos computacionais feitos no caso do problema unidimensional $Y2C12$, mostrado na seção 2.2.4.

Capítulo 4

EQUAÇÃO-SOLUÇÃO MULTICAMADA 3D X33Y3C13Z33: VERIFICAÇÃO E COMPARAÇÃO COM SOLUÇÕES ANALÍTICAS

4.1 Introdução

Uma vez que a implementação de uma solução analítica é numérica, a sua verificação é necessária para garantir a consistência de suas soluções. Essa verificação torna-se imprescindível para que seu uso em si possa ser assegurado, e também nas validações de códigos numéricos. A importância em se estudar e utilizar métodos de verificação está no estabelecimento de garantia de exatidão da solução calculada, como afirma (BECK *et al.*, 2006a)(OLIVEIRA, 2015).

Pode-se conceituar a verificação intrínseca como o processo de comparação entre duas soluções exatas obtidas por métodos diferentes ou de problemas diferentes mas que possuem o mesmo resultado numérico. Por exemplo, compara-se duas soluções analíticas exatas que possuem geometrias distintas, ou seja, considera-se um problema térmico unidimensional de transferência de calor, denotado por $X11$, isto é, uma placa plana submetida condições de contorno de temperatura prescrita em ambas as extremidades e um outro problema, denotado por $X10$, cuja placa possui comprimento semi-infinito, é submetido a condição de contorno de temperatura prescrita em $x = 0$. Observa-se que os dois problemas possuem a mesma condição de contorno em $x = 0$. Assim, esses dois problemas podem ser verificados intrínsecamente, fazendo-se o tamanho da placa do problema $X11$ ser grande o suficiente para que

possa ser considerado de comprimento infinito (OLIVEIRA, 2015).

Verifica-se intrinsecamente, a solução computacional para a Eq. (3.85a)-(3.85b) que descreve a distribuição de temperatura (problema direto) para esse problema 3D.

Inicialmente, verifica-se intrinsecamente a solução analítica de dupla-camada $X33Y3C13Z33$ com uma solução analítica de camada simples $X33Y33Z33$ que encontra-se verificada em Fernandes (2013). Outra maneira de verificar intrinsecamente a solução, é que a verificação pode ser feita a partir da solução do problema unidimensional $X2C12$, considerando-se o fluxo de calor atuando em toda área delimitada por $0 \leq x \leq L$ e $0 \leq z \leq R$ quando $y = W$, e, além disso, faz-se cada coeficiente de convecção, h_i , suficientemente pequeno para que as demais áreas sofram isolamento térmico, conforme o esquema apresentado na Fig. (4.1)

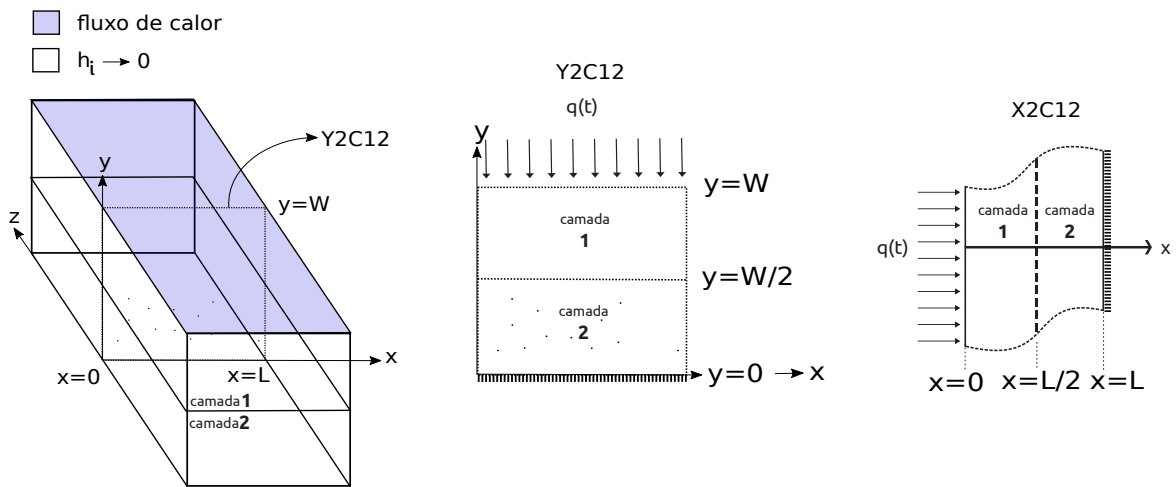


Figura 4.1: Equivalência entre $X33Y3C13Z33$ e $X33Y33Z33$

4.2 Verificação intrínseca entre as soluções 3D $X33Y3C13Z33$ e $X33Y33Z33$

A equação-solução de dupla-camada $X33Y3C13Z33$ que descreve a distribuição de temperatura é representada pela Fig. (3.4) onde a geometria analisada é composta por materiais distintos em cada camada delimitada por b .

Para verificação da equação-solução computacional entre as soluções 3D $X33Y3C13Z33$ e $X33Y33Z33$, considera-se que ambas as camadas possuem as mesmas propriedades termo-físicas e geométricas na Eq. (3.85a)-(3.85b), isto é, a condutividade e difusividade térmica usada na primeira camada é a mesma usada na segunda camada.

Pode-se considerar um fluxo de calor qualquer, por exemplo, o pulso triangular (*tripuls*, no MATLAB) mostrado na Fig. (4.2). Considera-se também, nesse caso, as propriedades termofísicas de um tipo aço rápido, cuja condutividade térmica é $k_1 = k_2 = 24 [W/mK]$, e difusividade térmica $\alpha_1 = \alpha_2 = 7.0868e - 06 [m^2/s]$, temperatura inicial $T_0 = 25 [^{\circ}C]$, temperatura ambiente $T_{inf} = 30 [^{\circ}C]$, coeficiente de convecção $h = 0.01$. A geometria analisada é dada por $L = 1 \times 10^{-2}$, $W = 1 \times 10^{-2}$ e $R = 10 \times 10^{-2}$ (compatíveis com a geometria de uma ferramenta de usinagem) e a divisão das camadas é dada por $b = W/2$.

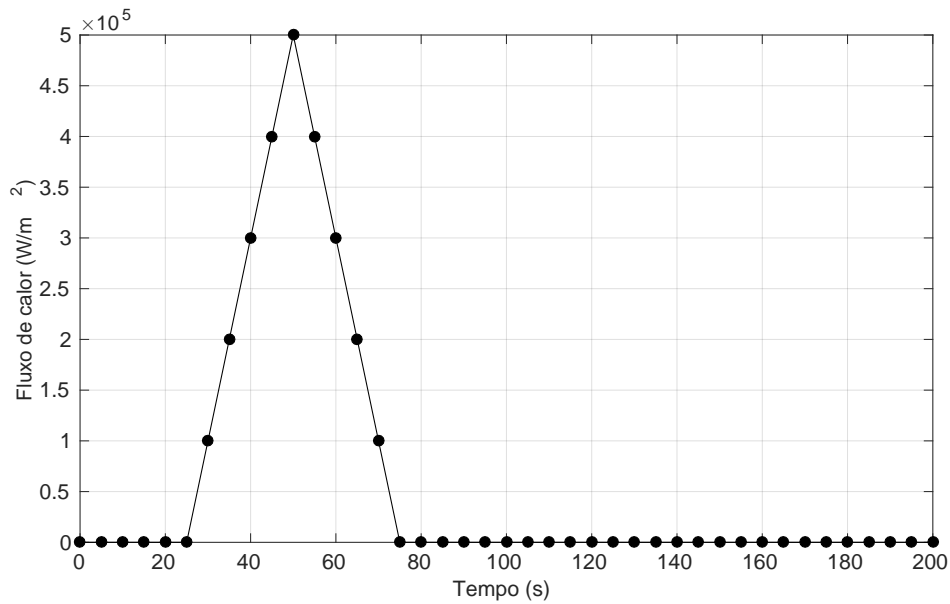


Figura 4.2: Fluxo de calor pulso triangular

As Figs (4.3) - (4.5) - (4.7) mostram a comparação/verificação entre as temperaturas calculadas por meio das soluções que descrevem os problemas $X33Y33Z33$ e $X33Y2C13Z33$ para as posições $y = W, b, 0$. As Figs. (4.4)- (4.6) - (4.8) mostram que a diferença de temperatura não é superior a $4,5 \times 10^{-4}(^{\circ}C)$, portanto, pode-se concluir que as soluções para os problemas $X33Y33Z33$ e $X33Y2C13Z33$ são compatíveis quando os mesmos são configurados de modo equivalente.

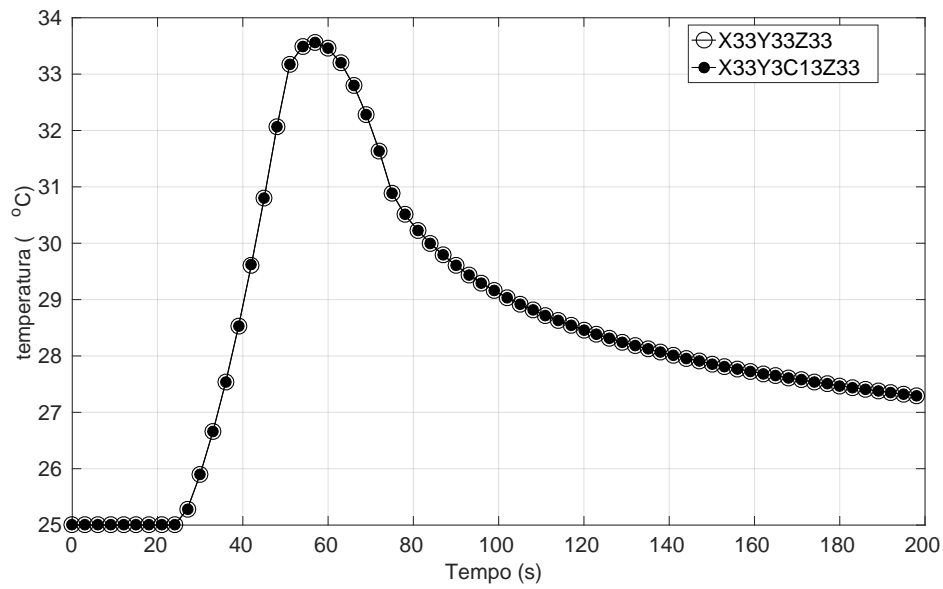


Figura 4.3: Verificação das soluções X33Y33Z33 e X33Y2C13Z33 no ponto $y=W$.

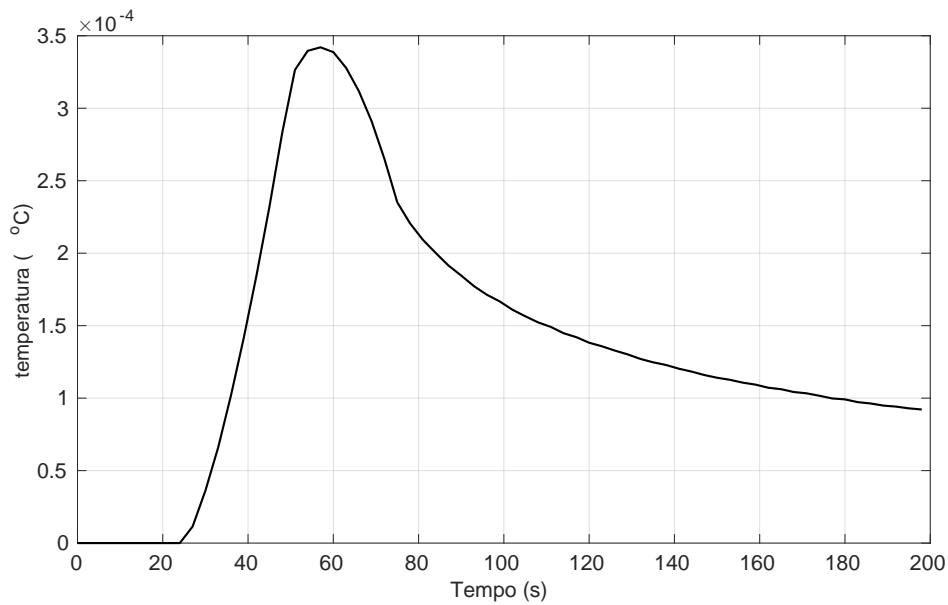


Figura 4.4: Diferença de temperatura das soluções no ponto $y=W$

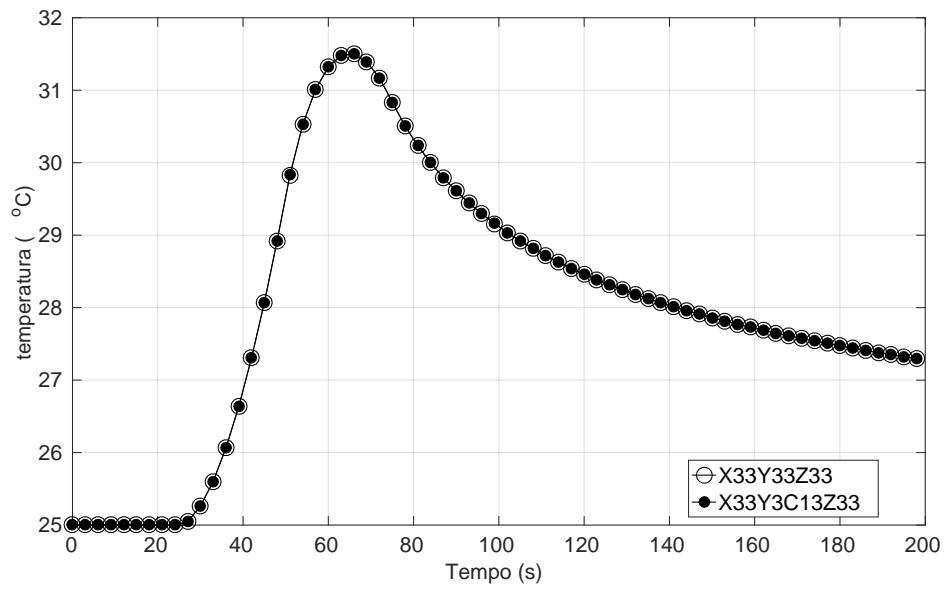


Figura 4.5: Verificação das soluções X33Y33Z33 e X33Y2C13Z33 no ponto $y=b$.

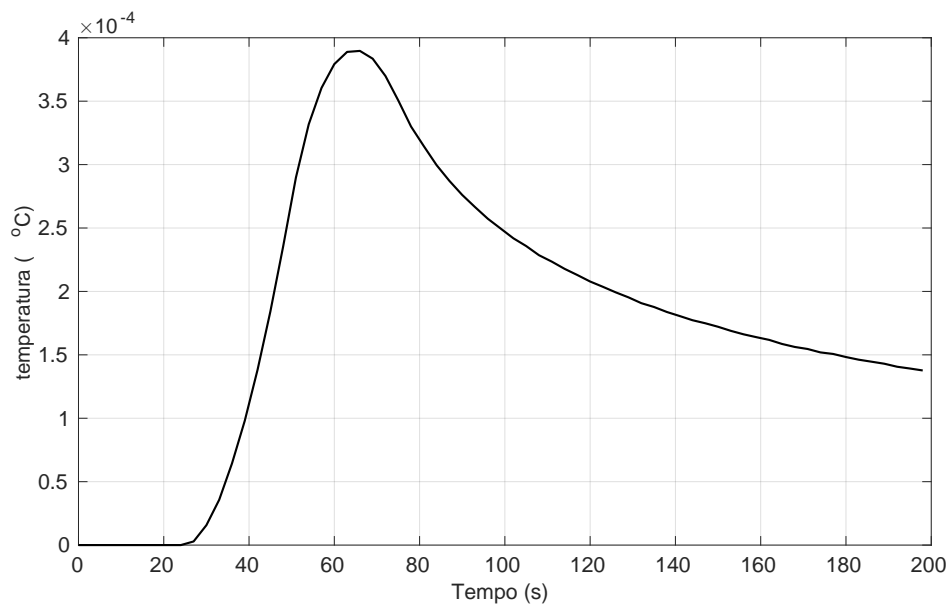


Figura 4.6: Diferença de temperatura das soluções no ponto $y=b$

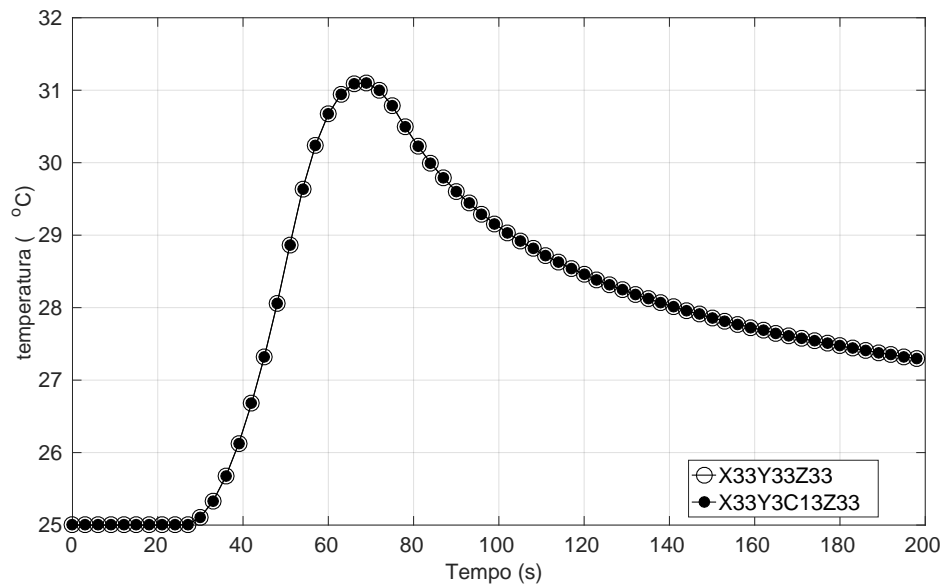


Figura 4.7: Verificação das soluções X33Y33Z33 e X33Y2C13Z33 no ponto $y=0$.

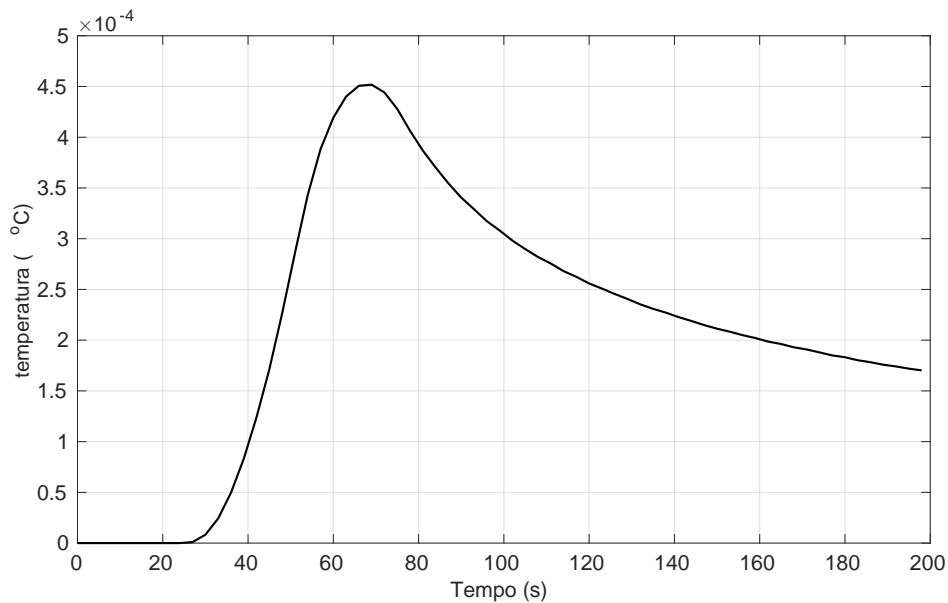


Figura 4.8: Diferença de temperatura das soluções no ponto $y=0$

É importante observar que quando considera-se as mesmas propriedades termofísicas e geométricas no problema X33Y3C13Z33 a estrutura matemática das soluções são compati-

veis, assim como, a equação transcendental para obtenção dos autovalores. Para o problema $X33Y33Z33$, sabe-se que, os autovalores α_m, β_n e γ_p são raízes das seguintes equações transcendentais:

$$\tan\alpha_m = \frac{\alpha_m(B_1 + B_2)}{\alpha_m^2 - B_1B_2}, B_1 = \frac{h_1L}{k_1} \text{ e } B_2 = \frac{h_2L}{k_1} \quad (4.1)$$

$$\tan\beta_n = \frac{\beta_n(B_3 + B_4)}{\beta_n^2 - B_3B_4}, B_3 = \frac{h_3W}{k_1} \text{ e } B_4 = \frac{h_4W}{k_1}. \quad (4.2)$$

$$\tan\gamma_p = \frac{\gamma_p(B_5 + B_6)}{\gamma_p^2 - B_5B_6}, B_5 = \frac{h_5R}{k_1} \text{ e } B_6 = \frac{h_6R}{k_1}. \quad (4.3)$$

O número de Biot, β_i com $i = 1, 2, \dots, 6$, que aparece em cada uma das Eqs. (4.1) - (4.2) - (4.3), é diretamente proporcional ao coeficiente de convecção, h_i .

Como visto, no capítulo anterior, os autovalores do problema $X33Y3C13Z33$, na direção de dupla camada y , são obtidos pela equação transcendental

$$\frac{\bar{\eta}\tan(\bar{\eta}) - \beta i_2}{\beta i_2\tan(\bar{\eta}) + \bar{\eta}} = -K \frac{\bar{\phi}\tan(\bar{\phi}) - \beta i_1}{\beta i_1\tan(\bar{\phi}) + \bar{\phi}} \quad (4.4)$$

Deve-se observar ainda que se considerar $M = 1$ na Eq. (4.5), isto é, $k_1 = k_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\eta = \phi$, tem-se,

$$\tan(\bar{\eta}) = \frac{\bar{\eta}(\beta i_1 + \beta i_2)}{\bar{\eta}^2 - \beta i_1 + \beta i_2} \quad (4.5)$$

Ou seja, a Eq. (4.5) passa a ser igual a Eq.(4.2).

A Tab. (4.2) apresenta dez autovalores calculados com as soluções $X33Y33Z33$ e $X33Y3C13Z33$. Para essa verificação intrínseca, usou-se 50 autovalores.

Tabela 4.1: Autovalores dos problemas térmicos $X33Y33Z33$ e $X33Y3C13Z33$.

m, n, p	$X33Y3C13Z33$	$X33Y33Z33$
1	0,0317	0,0317
2	3,1416	3,1416
3	6,2833	6,2833
4	9,4249	9,4249
5	12,5665	12,5665
6	15,7080	15,7080
7	18,8496	18,8496
8	21,9912	21,9912
9	25,1328	25,1328
10	28,2744	28,2744

4.3 Verificação intrínseca da solução 3D $X33Y3C13Z33$ com a solução 1D $Y2C12$

O objetivo deste seção é fazer a verificação intrínseca da solução tridimensional de duas camadas $X33Y3C13Z33$ com a solução de dupla camadas unidimensional $Y2C12$ que já encontra-se verificada (OLIVEIRA, 2015).

Para isso, reduz-se o problema tridimensional $X33Y3C13Z33$ em um problema unidimensional, conforme (BECK *et al.*, 2006b) Fig. (4.1). Assim, faz-se, $R \rightarrow \text{inf}$ e $L \rightarrow \text{inf}$, desta forma os termos dependentes de R e L tenderão a zero. Isto implica, matematicamente a não influência dos termos dependentes de R e L , e fisicamente significa que o problema passará a não ter mais influência dos contornos $x = 0$, $x = L$, $z = 0$ e $z = R$, isto é, haverá difusão de calor somente na direção do eixo y .

Para verificação da solução computacional, considera-se as seguintes propriedades: fluxo de calor triangular Fig. (4.2), condutividade térmica $k_1 = 237 [W/mK]$, $k_2 = 401 [W/mK]$, difusividade térmica $\alpha_1 = 97.1 \times 10^{-6}$, $\alpha_2 = 117 \times 10^{-6}$, divisão da camada $b = L/2$ para a solução do problema $X33Y3C13Z33$ os coeficientes de convecção $h_i = 0.01[W/m^2K]$, para

$i \neq 4$ e $h_4 = 0$ (para a área da face onde há fluxo de calor) e, comprimento $L = 1 \times 10^{-2}$, $W = 1 \times 10^{-2}$ e $R = 10 \times 10^{-2}$, para a verificação os comprimentos L e R não devem interferir no resultado; temperatura inicial $T_0 = 25$ [°C] e ambiente, $T_{inf} = 0$ [°C].

As Figs. (4.9)-(4.10) apresentam os perfis de temperatura das soluções $X33Y3C13Z33$ e $X2C12$ para as posições de interesse, isto é, $x = 0, b, L$.

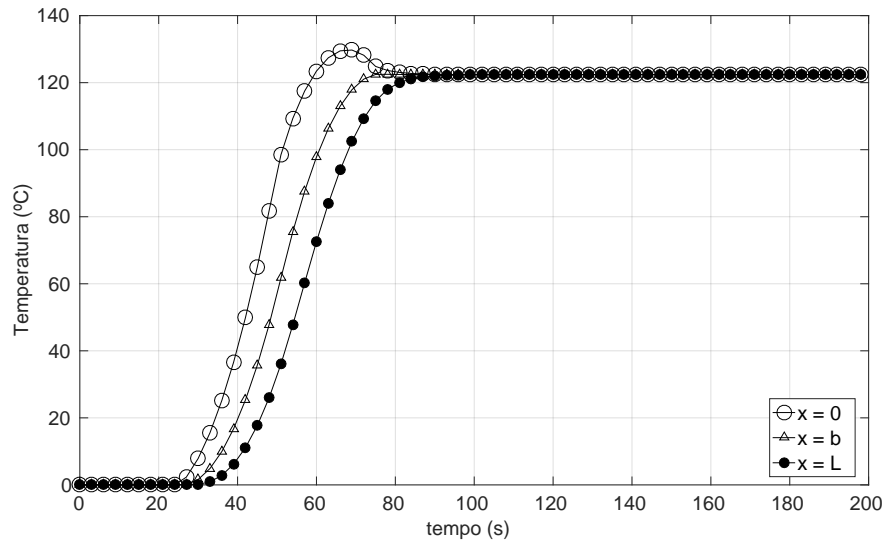


Figura 4.9: Perfil de temperatura ao longo do tempo da solução 3D $X33Y3C13Z33$ para as posições $x = 0, b$ e L .

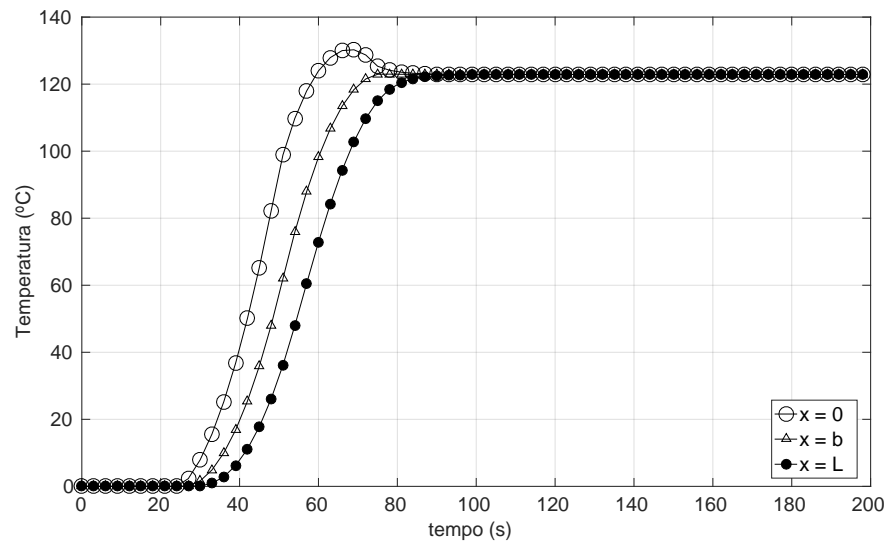


Figura 4.10: Perfil de temperatura ao longo do tempo da solução 1D X2C12 para as posições $x = 0, b$ e L .

As figs. (4.11) - (4.13) - (4.15) mostram a comparação entre as duas soluções para as posições $x = 0, b$ e L .

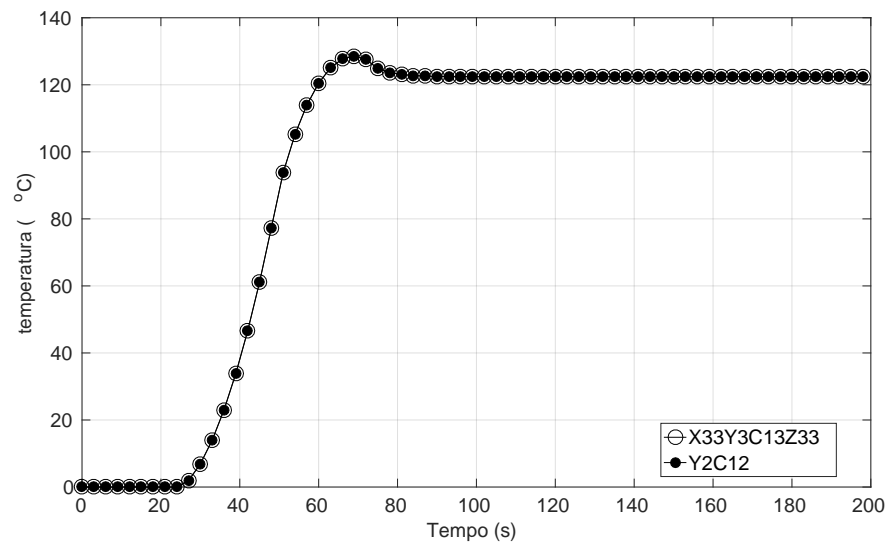


Figura 4.11: Verificação computacional das soluções X33Y3C13Z33 e Y2C12 para $x = 0$.

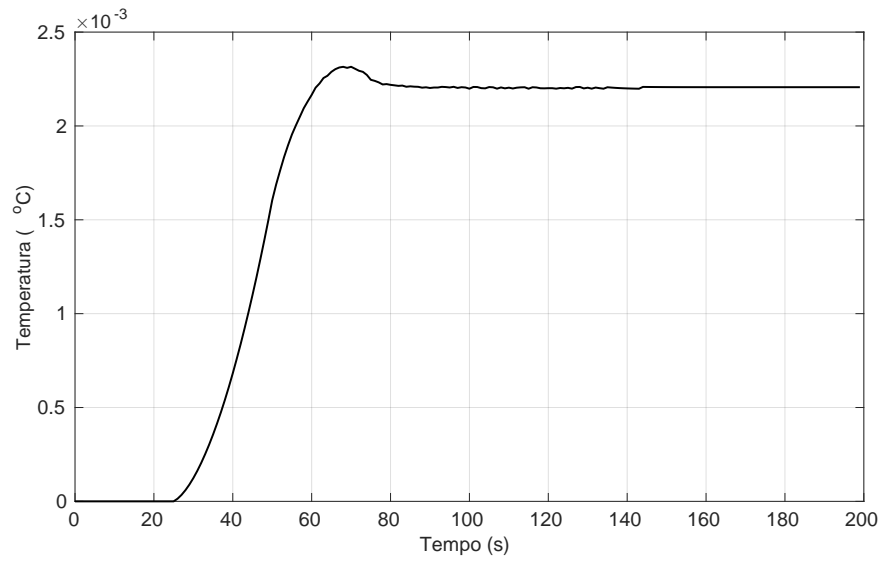


Figura 4.12: Diferença Absoluta entre as soluções X33Y3C13Z33 e Y2C12 para $x = 0$.

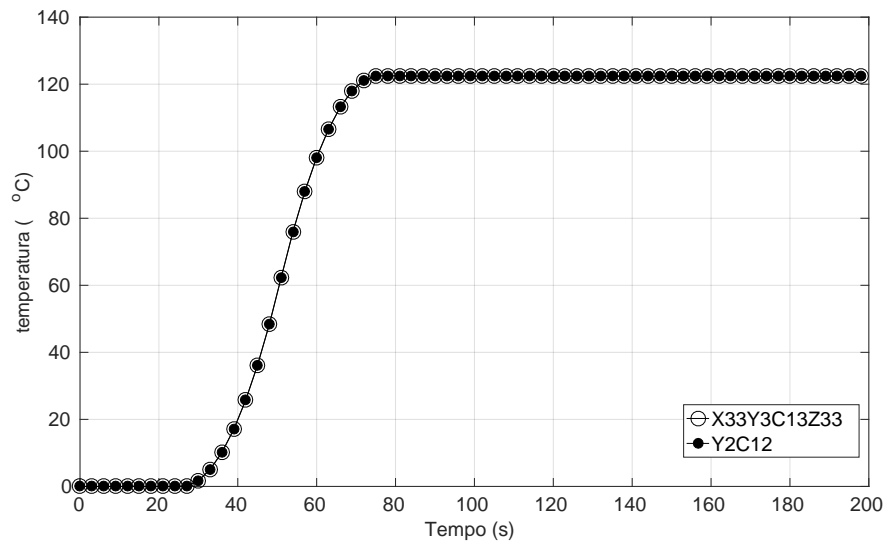


Figura 4.13: Verificação computacional das soluções X33Y3C13Z33 e Y2C12 para $x = b$.

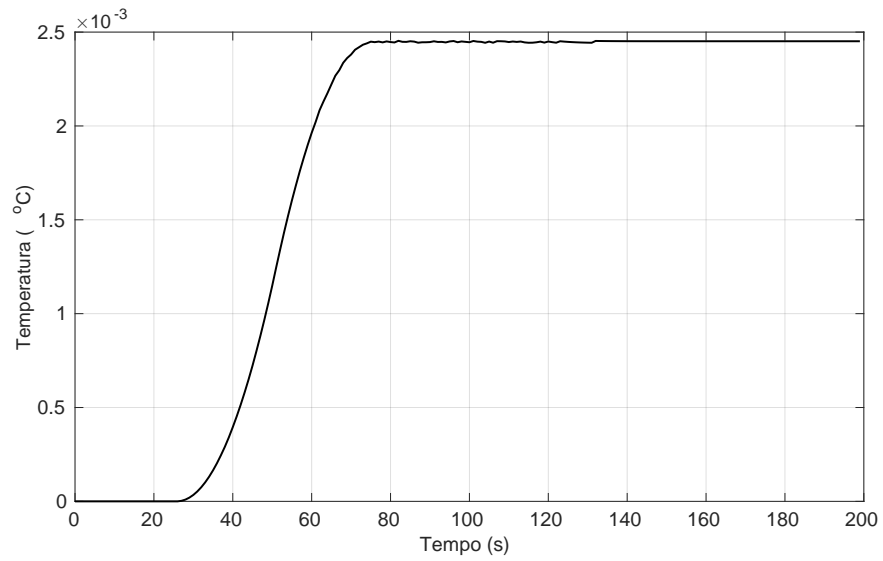


Figura 4.14: Diferença Absoluta entre as soluções X33Y3C13Z33 e Y2C12 para $x = b$.

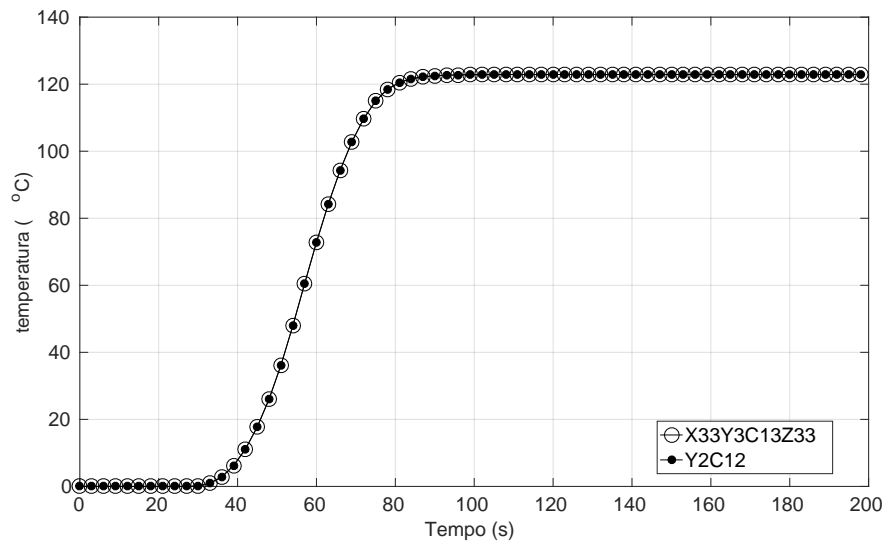


Figura 4.15: Verificação computacional das soluções X33Y3C13Z33 e Y2C12 para $x = W$.

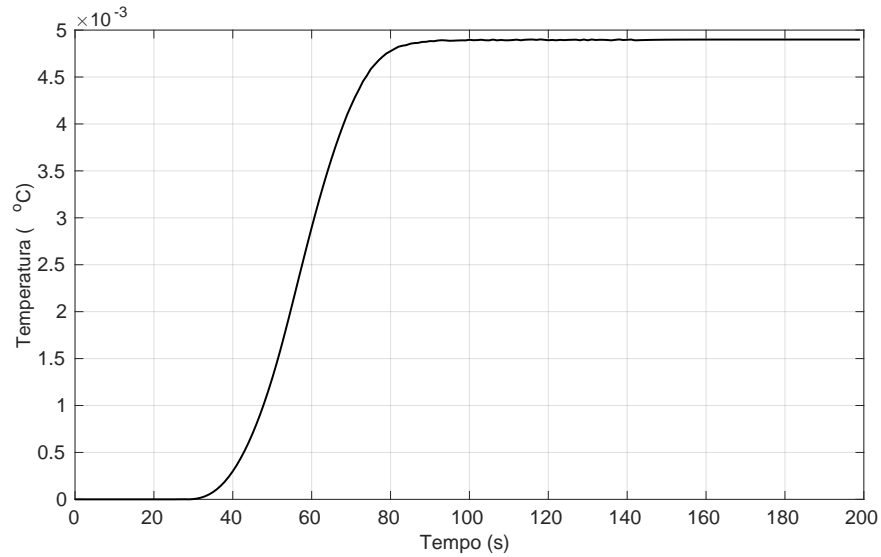


Figura 4.16: Diferença Absoluta entre as soluções $X33Y3C13Z33$ e $Y2C12$ para $x = W$.

Observa-se nas Figs. (4.12) - (4.14) - (4.16) o mesmo comportamento entre as soluções quando configurados de forma similar, a diferença absoluta máxima é $4,8 \times 10^{-3} (^\circ C)$.

Observa-se também, na Tab. (4.3) que os autovalores calculados com as soluções $X2C12$ e $X33Y3C13Z33$ também são compatíveis, uma vez que, se considerarmos $h_i = 0$ a equação transcendental do problema $X33Y3C13Z33$ Eq. (4.4) passa a ser exatamente a mesma do problema unidimensional $X2C12$ Eq.(4.6), assim, torna-se possível a comparação entre as soluções que definem os problemas $X2C12$ e $X33Y3C13Z33$.

$$\tan(\bar{\eta}) = -K \tan(\bar{\phi}) \quad (4.6)$$

Com isso, conclui-se a verificação da solução $3D$ de dupla camada.

Tabela 4.2: Autovalores dos problemas térmicos $X22C12$ e $X33Y3C13Z33$.

n	$X2C12$	$X33Y33Z33$
1	0,8581	0,8581
2	1,5890	1,5890
3	1,5890	1,5890
4	2,2654	2,2654
5	2,5639	2,5639
6	2,7243	2,7243
7	3,1940	3,1940
8	3,7757	3,7757
9	4,2393	4,2393
10	5,2860	5,2862

Capítulo 5

PROBLEMA INVERSO TFBGF MULTICAMADA

5.1 Introdução

Neste capítulo, mostra-se a aplicação da metodologia descrita na fundamentação teórica, quanto aos procedimentos computacionais implementados em MATLAB. Os testes são realizados com dados sintéticos que simulam dados experimentais. Os testes no MATLAB referem-se aos mesmos problemas estudados teoricamente nos fundamentos da técnica de obtenção da solução do problema inverso por meio da identificação da função de transferência analítica, ou seja, apresenta-se a solução computacional para os problemas unidimensional $X2C12$ e $X33Y3C13Z33$.

Na primeira etapa, estima-se o fluxo de calor do problema unidimensional $X2C12$ considerando as mesmas propriedades termofísicas, isto é, $k_1 = k_2$ e $\alpha_1 = \alpha_2$. Analisa-se a estimativa do fluxo de calor quanto a variação do revestimento da peça (camada 1), isto é, o comprimento b , e, posteriormente, estima-se o fluxo de calor onde cada camada possui propriedades termofísicas distintas, simulando uma ferramenta com revestimento. Apresenta-se também, a estimativa de fluxo de calor para o problema tridimensional $X33Y3C13Z33$.

5.2 Problema térmico $1D$ $Y2C12$

Como mencionado, o problema unidimensional ($1D$) de condução de calor mostrado na Fig. 3.1 é definido por uma placa plana, com duas camadas de propriedades térmicas distintas, sendo um fluxo de calor, $q(t)$ imposto em $x = 0$, enquanto a superfície oposta, $x = L$, está isolada.

5.2.1 Problema direto

Para obter a solução computacional do problema direto unidimensional, *X2C12*, dado pela Eq. (3.5), é necessário considerar um fluxo de calor discreto, $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$. Desta forma, constroi-o na forma de um vetor, no MATLAB. Simula-se inicialmente a imposição de um fluxo de calor triangular. usando-se a função *tripuls* ($q = c_1 * \text{tripuls}(t - c_2, c_2)$). As constantes c_1 e c_2 podem assumir qualquer valor, sendo escolhido $c_1 = 3e5$ e $c_2 = 300$.

Considera-se as características físicas e geométricas compatíveis com as propriedades de uma ferramenta usada na usinagem, ou seja, um aço rápido, condutividade térmica, $k_1 = 401[W/m \cdot K]$, $k_2 = 401[W/mK]$, difusividade térmica, $\alpha_1 = 117E - 6[m^2/s]$, $\alpha_2 = 117E - 6[m^2/s]$, temperatura inicial $T_0 = 0[^\circ C]$, comprimento da placa, $L = 10E - 02[m]$ e $dt = 1[s]$, $t = [0 : dt : tf]$, $tf = 1024[s]$.

Propõe-se a adição de ruído as temperaturas calculadas no problema direto usando a solução híbrida. O objetivo é aproximar a técnica empregada a uma situação real, onde as temperaturas medidas em uma amostra sofrem o efeito de ruídos provenientes de diversas fontes. Assim, adiciona-se um ruído aleatório de amplitude de $0,2^\circ C$, o que é usualmente observado experimentalmente.

A Fig.(5.1) mostra o fluxo de calor triangular usado para gerar as temperaturas sintéticas. Obtem-se, a distribuição de temperatura para as posições $x = 0$, b e L como mostra a Fig. (5.2).

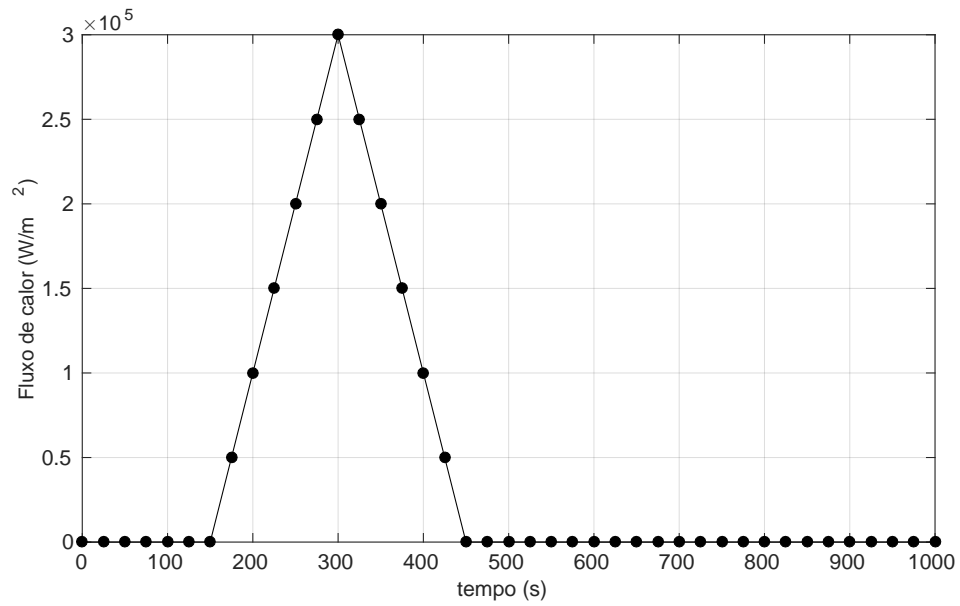


Figura 5.1: Fluxo de calor com pulso triangular.

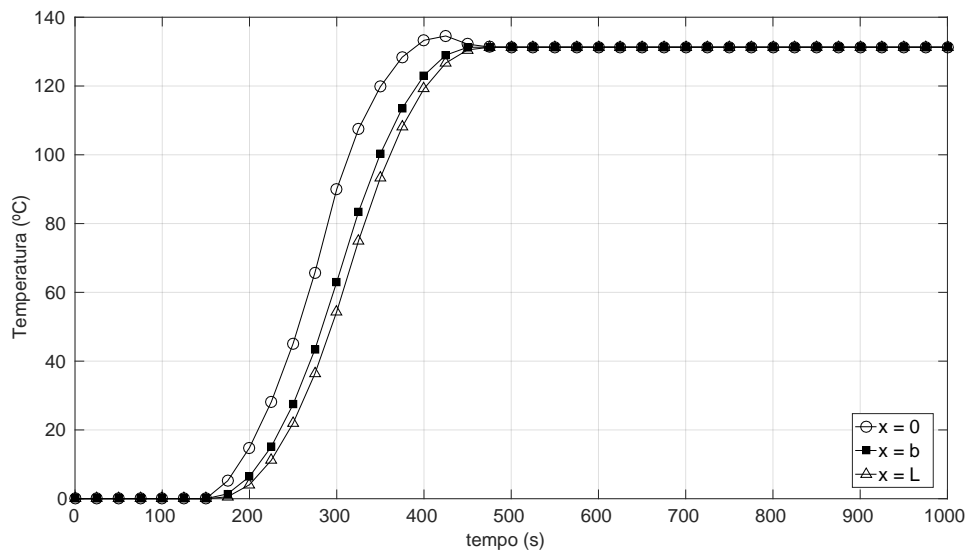


Figura 5.2: Temperaturas sintéticas obtidas com a imposição de um fluxo de calor triangular.

5.2.2 Função de transferência

Como visto anteriormente, a resposta impulsiva do sistema, h , representada pelo problema térmico $X2C12$ com propriedades termofísicas iguais, é dada por

$$h_1(x, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_x} \cos(\gamma x) \quad (5.1)$$

Para atribuir valores numéricos à resposta impulsiva, dada pela Eq. (5.1), considera-se as mesmas informações usadas para a obtenção das temperaturas apresentadas na Fig. (5.2), isto é, os mesmos dados, propriedades termofísicas, α_1 , k_1 , comprimento, anteriormente mencionados. A Fig. (5.3) mostra o comportamento da resposta impulsiva ao longo do tempo, para as posições desejadas, isto é, $x = 0, b, L$.

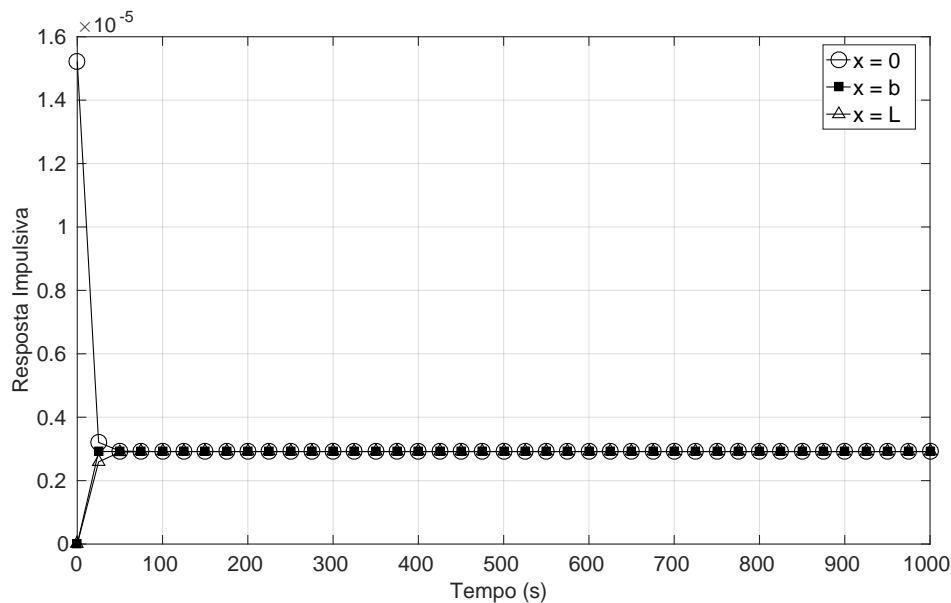


Figura 5.3: Resposta Impulsiva do problema $X2C12$ com camadas com as mesmas propriedades térmicas.

Observa-se na Fig. (5.3), a resposta impulsiva possui comportamento decrescente a partir do seu valor máximo para a posição $x = 0$, devido ao fato da posição está mais próxima a fonte de calor. Já para as posições $x = b$ e $x = L$ o comportamento da resposta impulsiva é crescente, pois estão se distanciando da fonte de calor.

Conhecendo-se a resposta impulsiva do problema de condução de calor pode-se determinar os valores numéricos que a representa, desta maneira, através da aplicação da transformada de

Fourier à resposta impulsiva obtém-se a função de transferência que possibilita, conhecendo-se as temperaturas que podem ser medidas experimentalmente ou simuladas, estimar o fluxo de calor. A solução computacional do problema inverso é apresentada a seguir.

5.2.3 Problema Inverso

O procedimento computacional é fundamentado pelas seguintes equações:

$$q(s) = \frac{1}{H(x, s)} \cdot T_2(x, s) \quad (5.2)$$

no domínio de Laplace, ou por meio da convolução

$$q(t) = \frac{1}{h(x, t)} * T_2(x, t) \quad (5.3)$$

no domínio do tempo.

Os vetores de temperatura, $T_2(x, t)$ e da resposta impulsiva, $h(x, t)$ são conhecidos. Então, para cada posição de interesse $x = 0, b, L$ realiza-se um procedimento computacional para estimativa do fluxo de calor. Assim, pode-se aplicar a transformada rápida de Fourier, usando a função do MATLAB *fft*, e a relação descrita pela Eq. (5.2). Logo, tem-se os valores de fluxo estimados, restando apenas aplicar a transformada inversa *ifft* para obtenção dos valores estimados no domínio do tempo.

As Figs. (5.4)-(5.5)-(5.6) apresentam as estimativas do fluxo de calor usando as temperaturas medidas nas posições $x = 0$, $x = b$ e $x = L$.

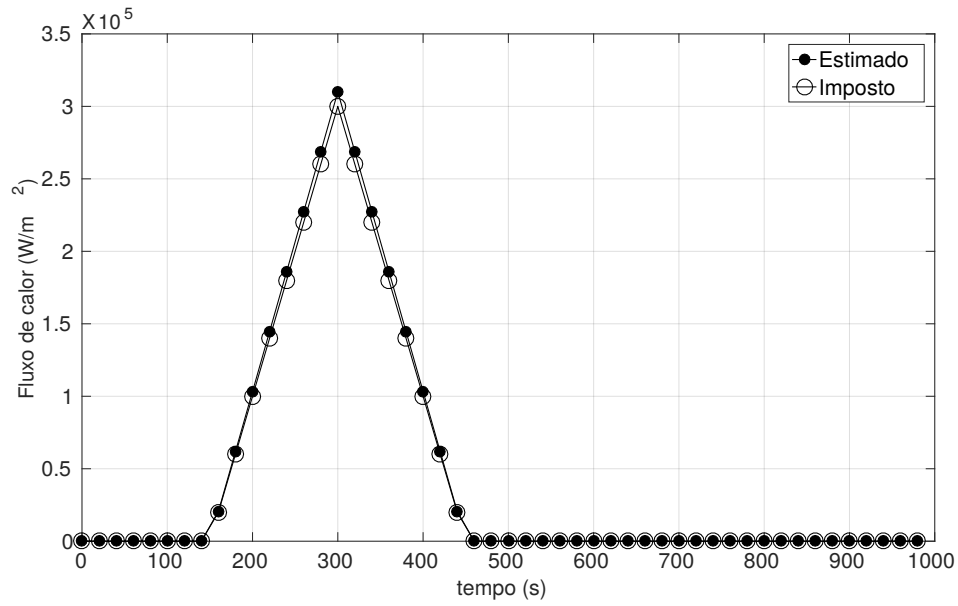


Figura 5.4: Fluxo de calor estimado usando a função de transferência e temperaturas calculadas em $x = 0$.

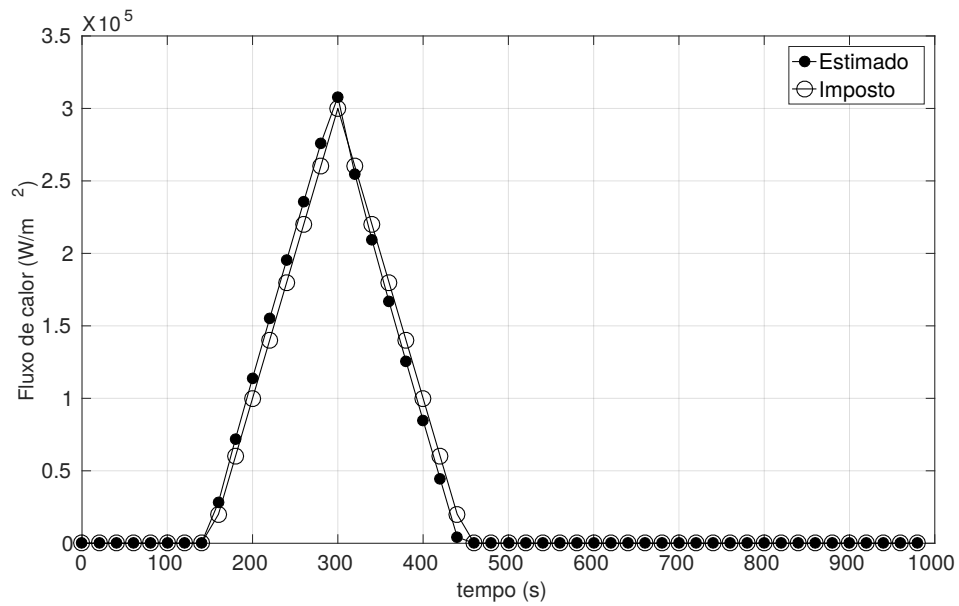


Figura 5.5: Fluxo de calor estimado usando a função de transferência e temperaturas calculadas em $x = b$.

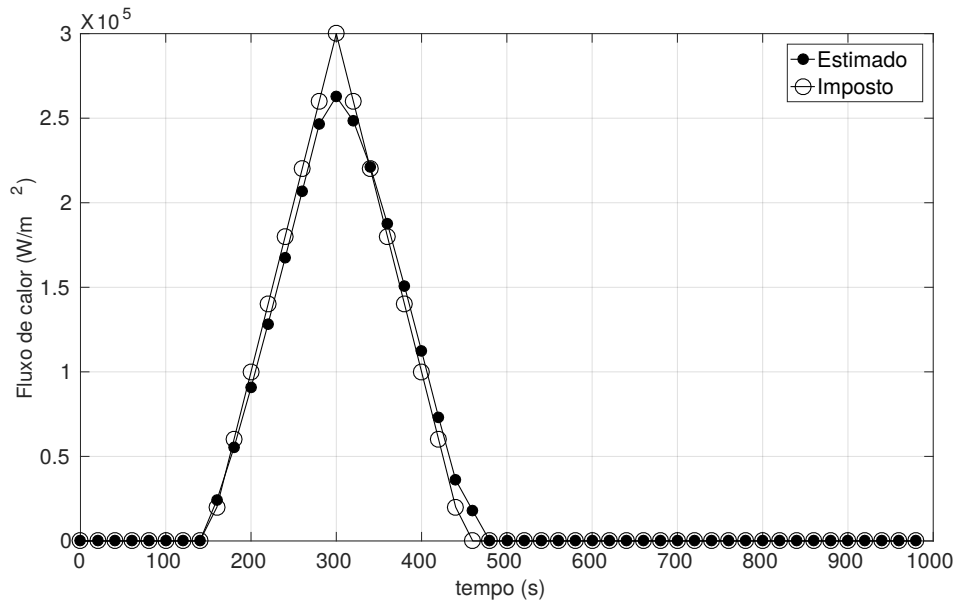


Figura 5.6: Fluxo de calor estimado usando a função de transferência e temperaturas calculadas em $x = L$.

A relação entre o fluxo de calor imposto e o fluxo de calor estimado pode ser representada pela diferença percentual (%) Figs. (5.2.3)-(5.2.3)-(5.2.3) para cada uma das posições de cálculo.

Observa-se aqui, que a posição que obteve a melhor estimativa foi em $x = 0$, o que já era de se esperar, uma vez que a fonte de calor está posicionado exatamente em $x = 0$ e a pior estimativa foi para $x = L$, posição oposta a fonte de calor, em termos percentuais o erro médio é de 3%, para a posição $x = 0$ e 12% para a posição $x = L$. Na Fig. (5.6) é possível observar que o fluxo de calor estimado está defasado em relação ao imposto, por isso o erro é maior.

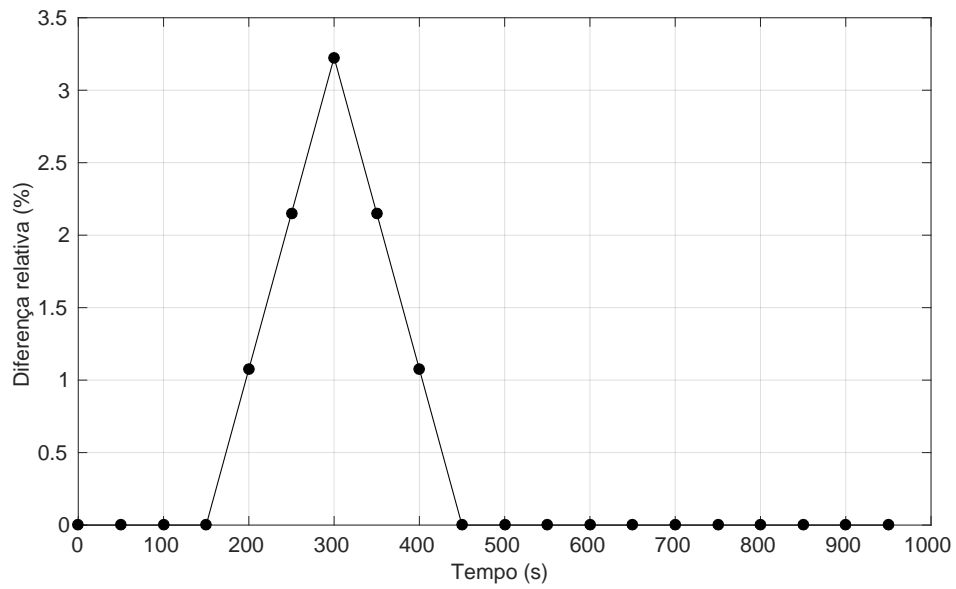


Figura 5.7: Diferença percentual entre o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = 0$.

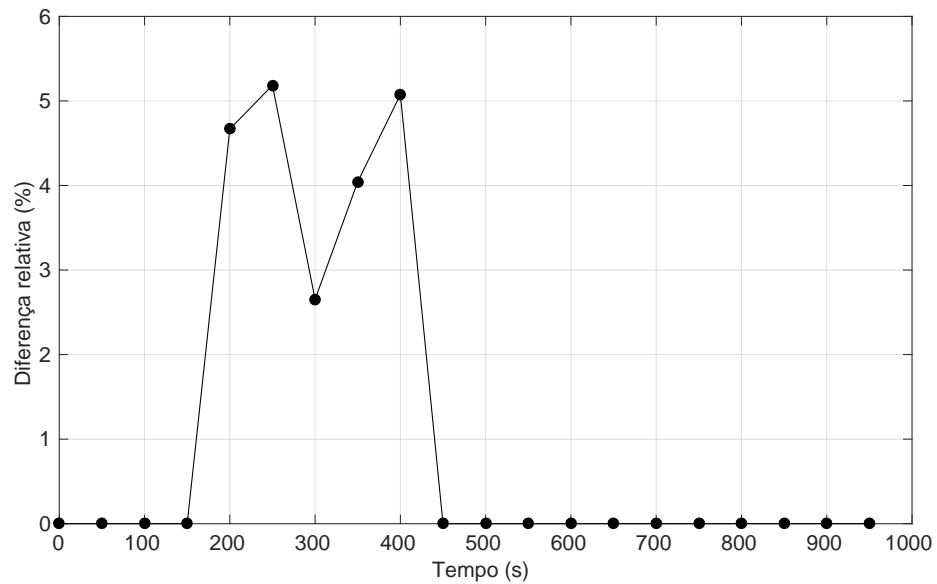


Figura 5.8: Diferença percentual entre o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = b$.

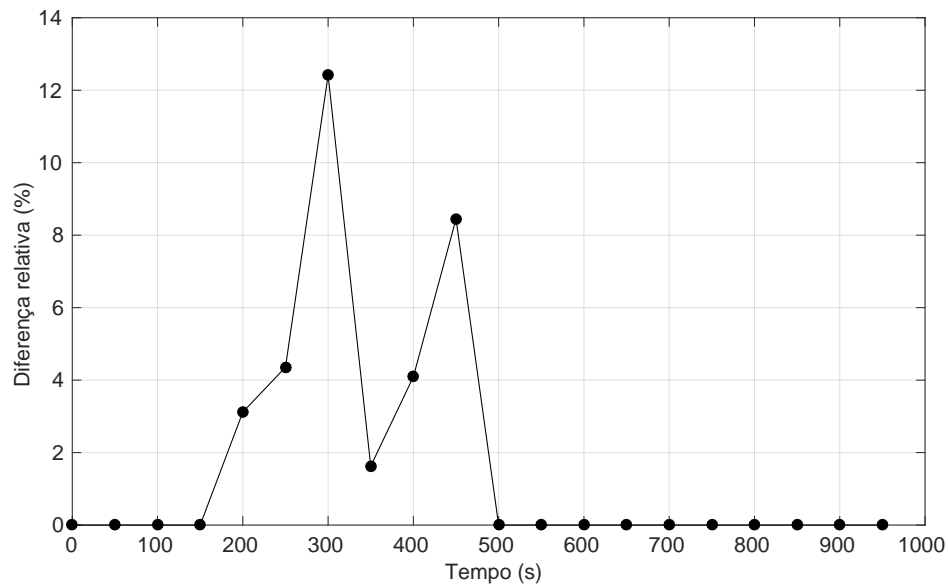


Figura 5.9: Diferença percentual entre o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = L$.

Até aqui, a solução do problema inverso foi apresentada em termos de comparação entre os fluxos imposto e estimado, porém, em uma situação real, o fluxo de calor não é conhecido. Nesse caso, a solução do problema inverso deve ser apresentada em termos de temperatura, isto é, deve-se mostrar a comparação entre as temperaturas 'reais' (que na verdade foram simuladas por meio da solução híbrida) e as temperaturas obtidas por meio do fluxo que foi estimado, ou seja, é necessário verificar se o fluxo estimado retorna as temperaturas conhecidas.

As Figs. (5.10)-(5.12)-(5.11) mostram as temperaturas obtidas por meio de cada um dos fluxos estimados por seus respectivos dados de posição de análise (0,b,L), e as Figs. (5.13)-(5.14)-(5.15) a diferença relativa (%).

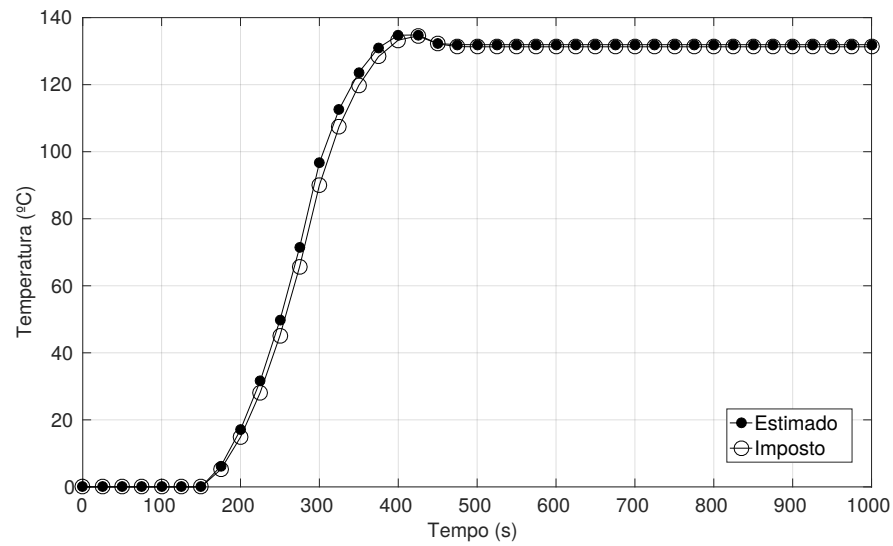


Figura 5.10: Comparação entre as temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = 0$.

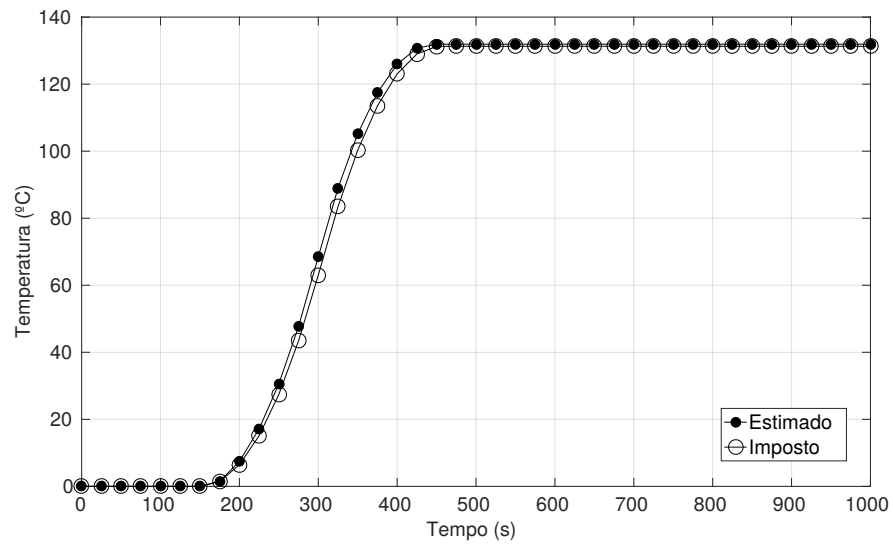


Figura 5.11: Comparação entre as temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = b$.

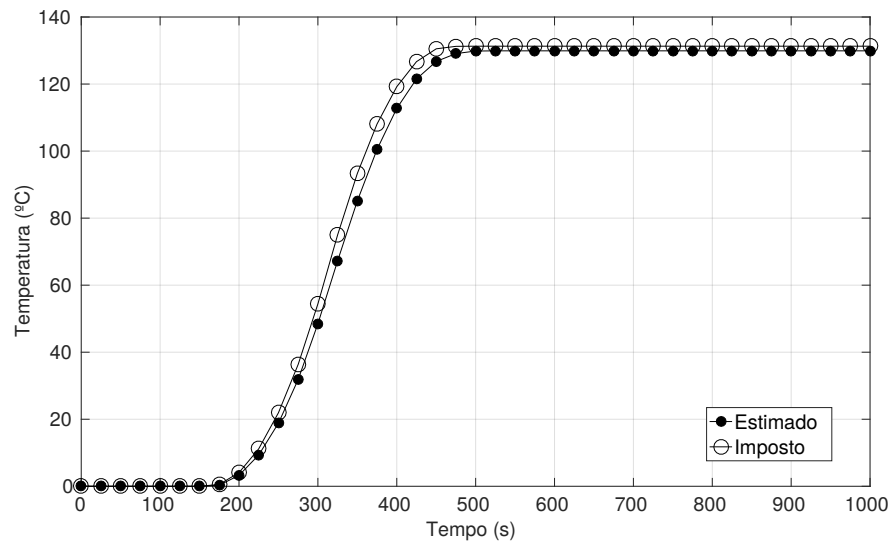


Figura 5.12: Comparação entre as temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto e estimado para a posição $x = L$.

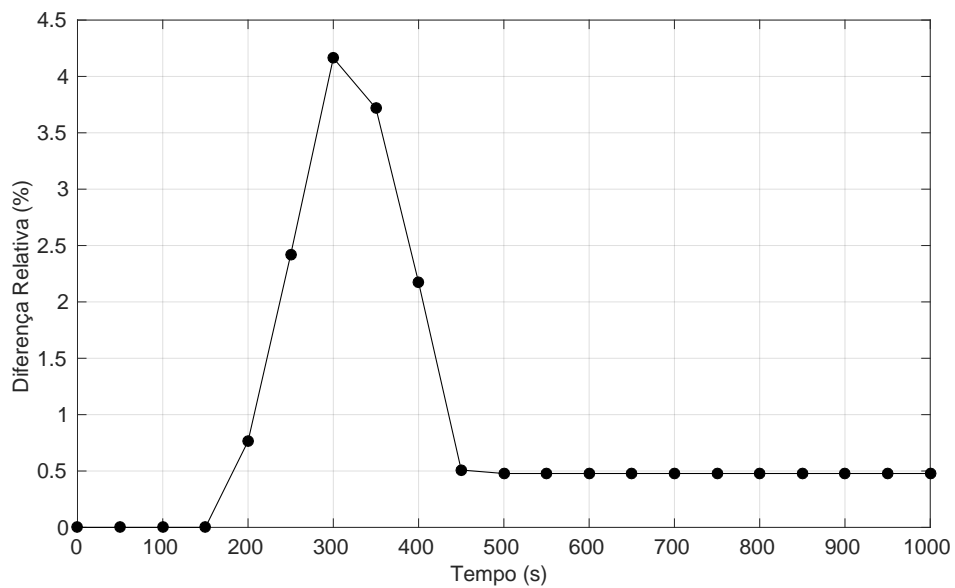


Figura 5.13: Diferença relativa entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado na posição $x = 0$.

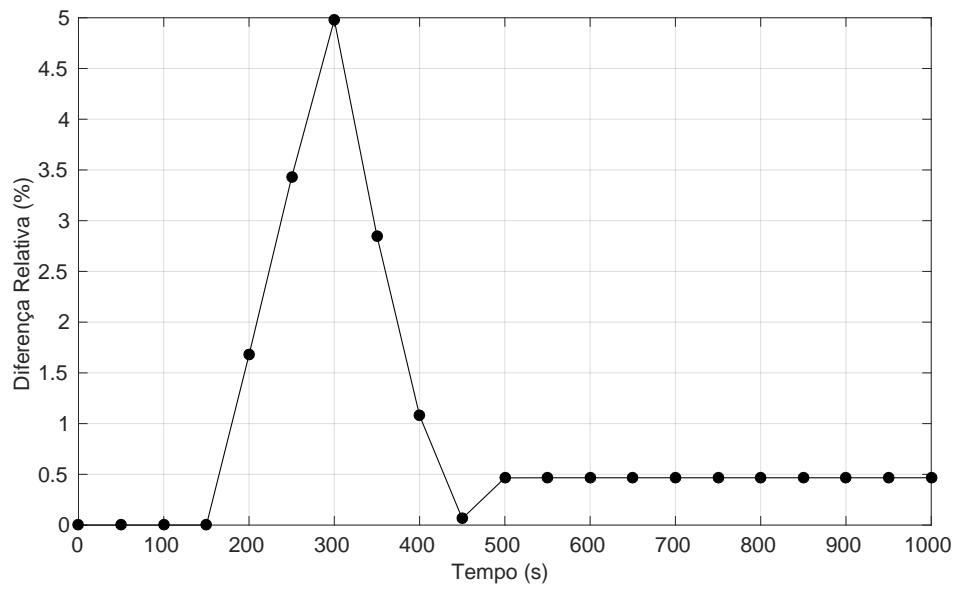


Figura 5.14: Diferença relativa entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado na posição $x = b$.

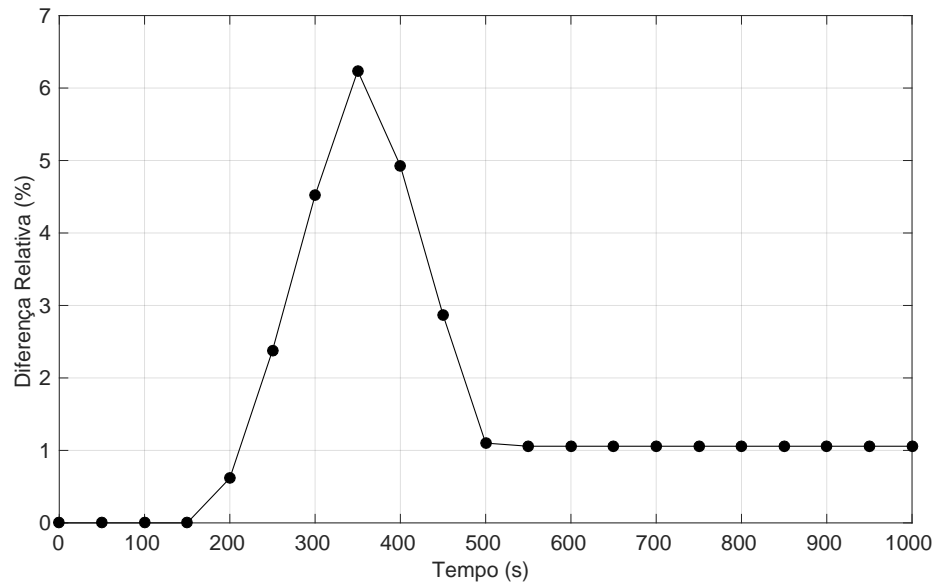


Figura 5.15: Diferença relativa entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado na posição $x = L$.

Como esperado, da estimativa para o fluxo de calor com menor erro médio percentual, e portanto menor defasagem, de informações provenientes da posição $x = 0$, tem-se a melhor estimativa para as temperaturas, como mostra a Fig. (5.13), onde a máxima diferença relativa entre temperaturas obtidas usando o fluxo de calor estimado e imposto e simulada é de 4%, quando se configura regime transiente. Para as posições, $x = b$ e $x = L$ as máximas diferenças encontradas são de 5% e 6% respectivamente. Na Fig. (5.12) é evidente o atraso entre a temperatura obtida com fluxo de calor estimado e imposto que é proveniente da defasagem do fluxo de calor estimado mostrado na Fig. (5.6).

Note que, até agora, mostrou-se testes onde as propriedades termofísicas são iguais. A seguir, aborda-se, testes considerando as propriedades termofísicas distintas, que é o grande interesse de estudo.

Como mencionado, os testes a seguir, tem como objetivo simular a estimativa do fluxo de calor em um processo de usinagem, considerando uma ferramenta revestida com nitreto de titânio (TiN) e o material base é de metal duro ISO K10, assim, tem-se condutividade térmica, $k_1 = 21[W/mK]$, $k_2 = 130[W/mK]$, difusividade térmica, $\alpha_1 = 0,7E^{-5}[m^2/s]$, $\alpha_2 = 4,36E^{-5}[m^2/s]$, temperatura inicial $T_0 = 0[^\circ C]$, comprimento da placa, $L = 10E^{-2}[m]$, $b = 1E^{-2}[m]$ e $dt = 1[s]$, $t = [0 : dt : tf]$, $tf = 1024[s]$. O fluxo de calor considerado é o mesmo usado anteriormente, ou seja, um fluxo de calor triangular Fig. (5.1).

A solução computacional do problema direto com propriedades termofísicas distintas é dado pela Fig. (5.16)

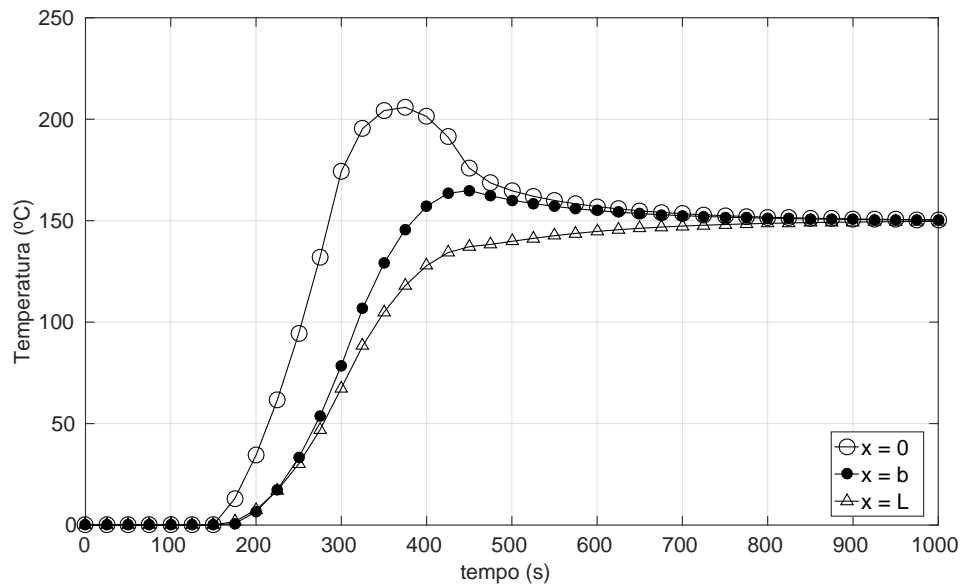


Figura 5.16: Temperaturas obtidas a partir do uso de um fluxo de calor triangular com propriedades termofísicas distintas.

Observa-se que, um cuidado deve ser tomado em relação a estimativa do fluxo de calor em determinados pontos do domínio. Lembrando-se, que o problema em estudo trata-se de um problema de duas camadas delimitada por $x = b$. Assim, para qualquer ponto do domínio entre $0 \leq x \leq b$ que deseja-se obter a estimativa do fluxo de calor, usa-se, h_1 e $b \leq x \leq L$, usa-se, h_2 (função de transferência referente a camada 1 Eq. (3.19) e camada 2 Eq. (3.20), respectivamente).

Estima-se o fluxo de calor para três posições do domínio, sendo elas, $x = 0$, $x = b$ e $x = L$. Assim, considera-se h_1 para estimar o fluxo de calor nas posições $(0, b)$ e h_2 para a posição L .

Nas Figs. (5.17)-(5.18) tem-se o perfil computacional da resposta impulsiva referente a camada 1 e 2, respectivamente.

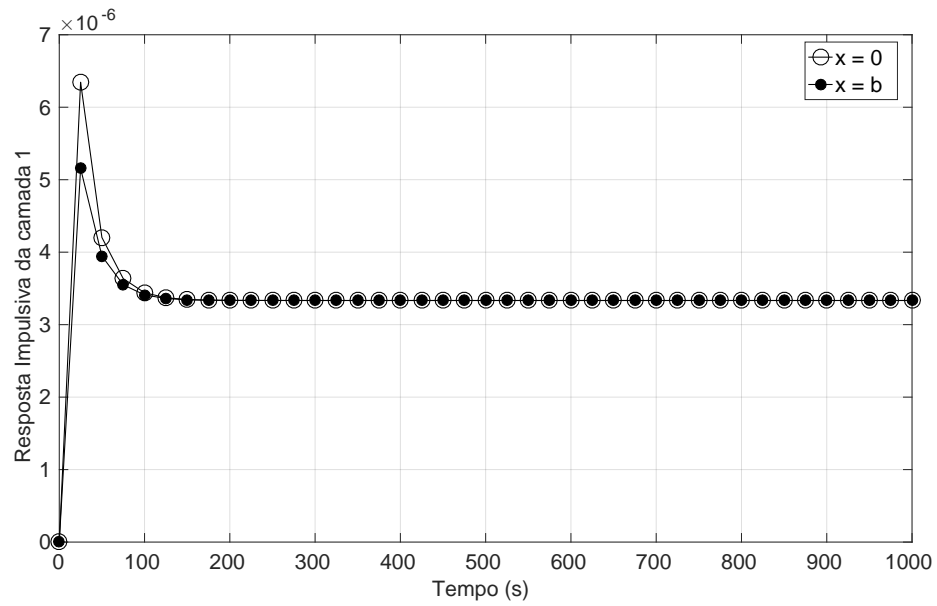


Figura 5.17: Resposta impulsiva h_1 .

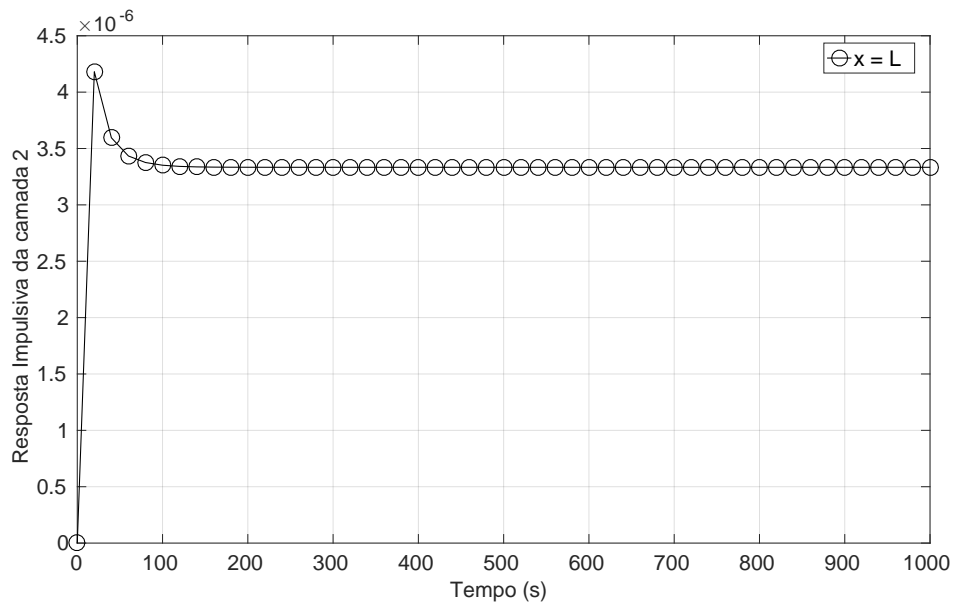


Figura 5.18: Resposta impulsiva h_2 .

Observa-se, nas Figs. (5.17)-(5.18) que para as três posições escolhidas o comportamento da resposta impulsiva são semelhantes, apresentando um comportamento decrescente a partir

do seu valor máximo, exceto nos tempos iniciais, para 10 segundos é possível observar que para as posições $x = 0, b$ o valor máximo é de $6,7 \times 10^{-6}$ e $5,2 \times 10^{-6}$, enquanto para a posição $x = L$ tem-se $4,3 \times 10^{-6}$. Esse decréscimo nos valores máximos observados são justificados pelo distanciamento da fonte de calor.

Sendo assim, conhecendo então os valores de temperatura, que foram calculados por meio da Eq. (3.5), mostrada na Fig. (5.16) como temperaturas hipotéticas, e, conhecendo-se a função de transferência analítica mostra-se aqui a possibilidade de obter estimativas para o fluxo de calor pulso triangular, que originaram essas temperaturas.

Então, o procedimento computacional é análogo ao descrito anteriormente. Obtem-se as estimativas para o fluxo de calor pulso triangular, considerando as temperaturas e as funções de transferência calculadas para cada uma das posições de interesse $x = 0, x = b$ e $x = L$. As estimativas são apresentadas nas Figs. (5.19)-(5.20)-(5.21), neste caso, o atraso e a atenuação para o fluxo de calor estimado são mais visíveis, para as posições $x = b$ e $x = L$.

As Figs. (5.22)-(5.23) mostram a diferença absoluta entre o fluxo imposto e estimado, para cada uma das posições de cálculo. Observa-se aqui, que a diferença informa o montante de fluxo de calor (W/m^2) excedente ao fluxo de calor imposto. A posição em que obteve a melhor estimativa foi em $x = 0$ e a pior estimativa foi para a posição $x = L$, posição oposta a fonte de calor. Na Fig. (5.23) é possível observar que o fluxo de calor estimado está defasado em relação ao imposto, por isso a diferença é maior.

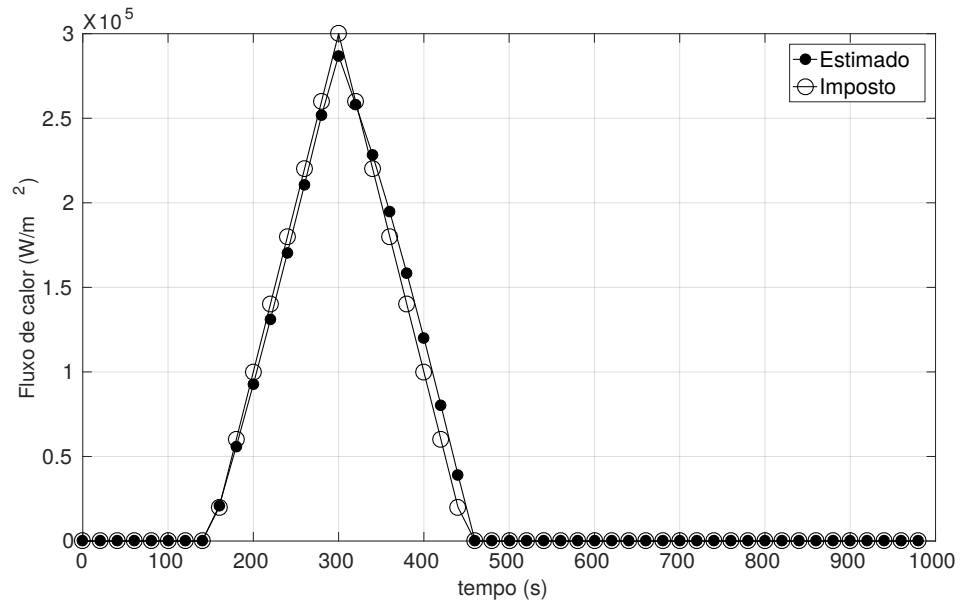


Figura 5.19: Fluxo de calor estimado usando a função de transferência h_1 calculadas em $x = 0$.

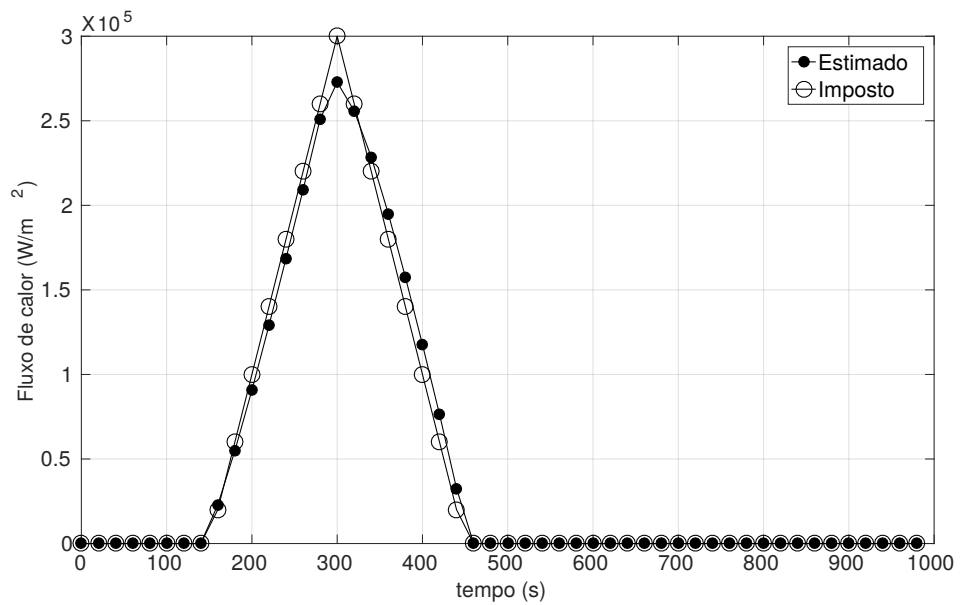


Figura 5.20: Fluxo de calor estimado usando a função de transferência h_1 calculadas em $x = b$.

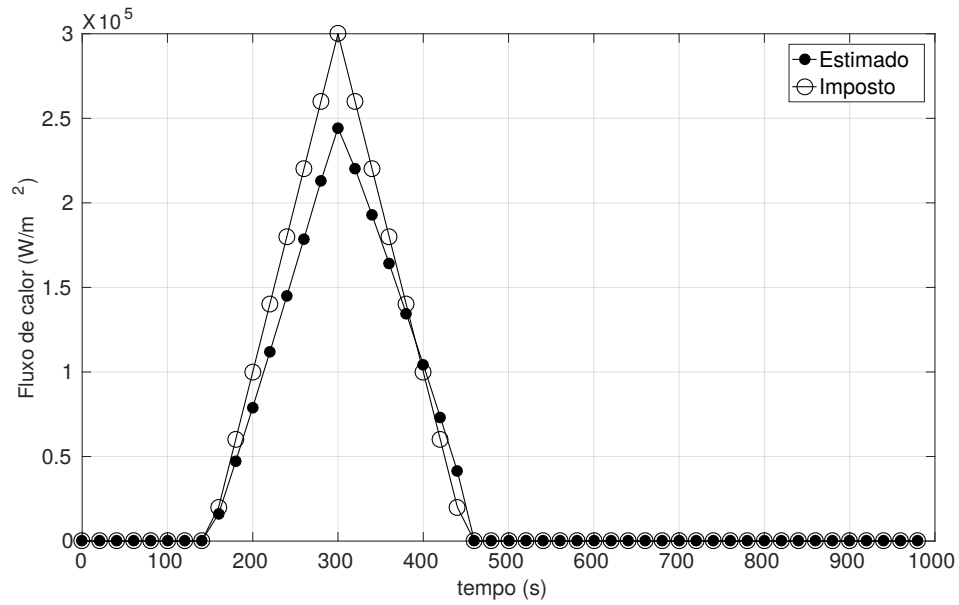


Figura 5.21: Fluxo de calor estimado usando a função de transferência h_2 calculadas em $x = L$.

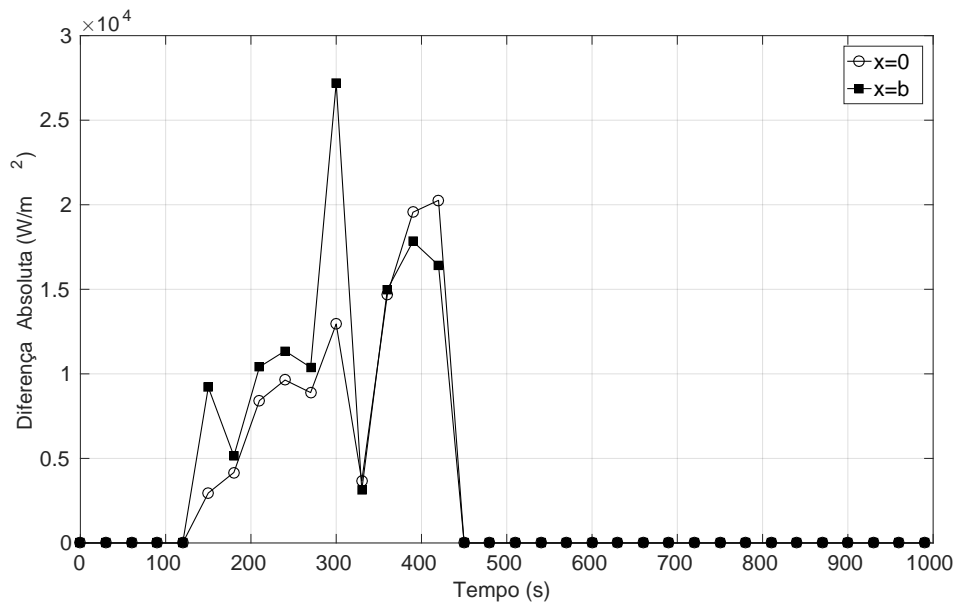


Figura 5.22: Diferença absoluta entre o fluxo de calor simulado e estimado considerando h_1 para as posições $x = 0, b$.

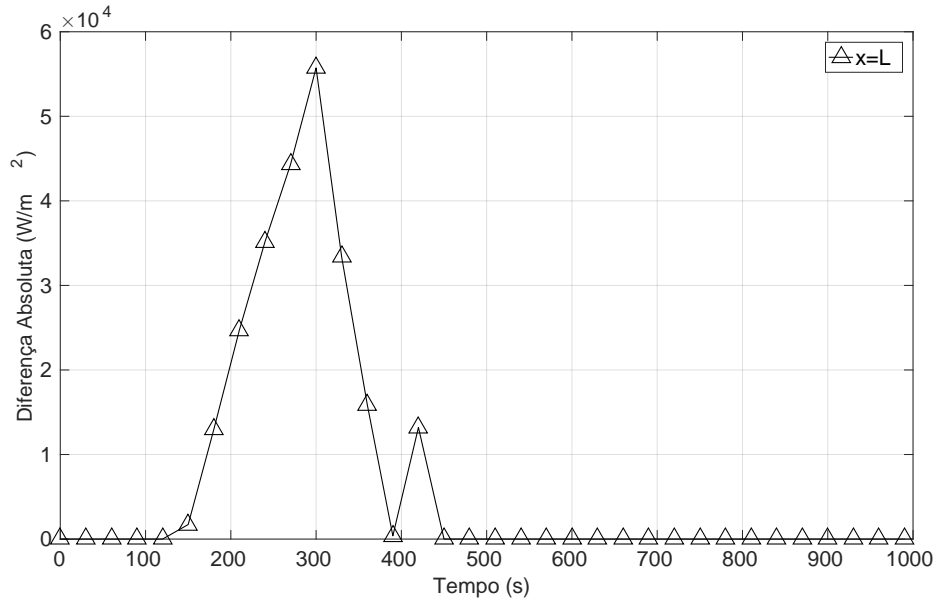


Figura 5.23: Diferença absoluta entre o fluxo de calor simulado e estimado considerando h_2 para a posição $x = L$.

Apresenta-se a solução do problema inverso graficamente nas Figs. (5.24)-(5.25)-(5.26) que mostram as temperaturas obtidas por meio de cada um dos fluxos de calor estimados por seus respectivos dados de posição de análise $(0, b, L)$. Isto é, ressalta-se que a fonte de calor está posicionada em $x = 0$, e foram obtidas três estimativas para o fluxo de calor, por meio de dados (temperatura e função de transferência) calculados para as posições $(0, b, L)$.

Assim, como esperado, da estimativa para o fluxo de calor com menor erro médio, e portanto menor defasagem, de informações provenientes da posição $x = 0$, tem-se a melhor estimativa para as temperaturas, como mostra a Fig. (5.27), onde a máxima diferença entre temperatura geradas com os fluxos de calor estimado e imposto é de 3%, quando se configura regime transiente. Para as posições $x = b$ e $x = L$ as máximas diferenças encontradas são de 4% e 8%, a diferença obtida pela posição $x = L$ é justificada por ser a posição oposta a fonte de calor.

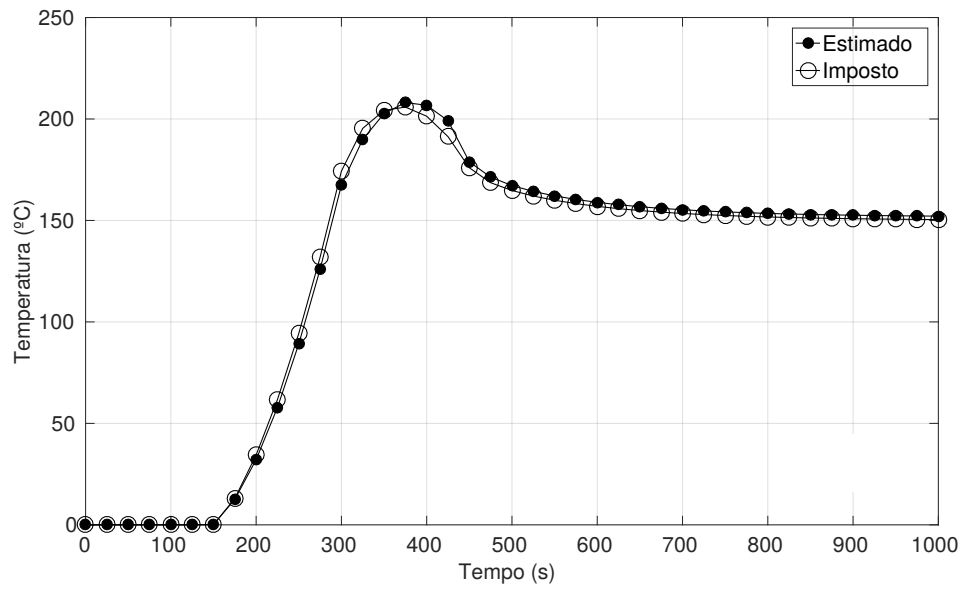


Figura 5.24: Comparação entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado em $x = 0$.

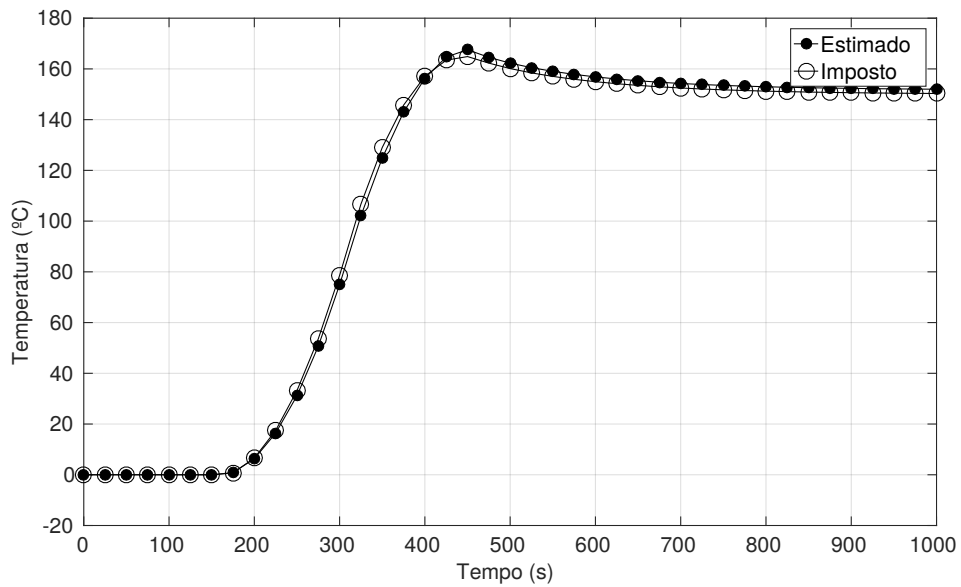


Figura 5.25: Comparação entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado em $x = b$.

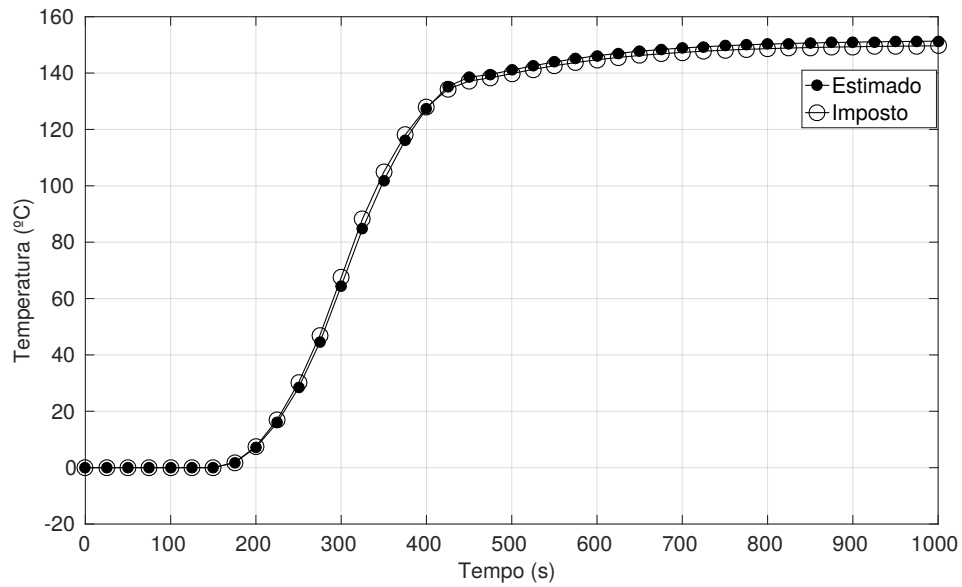


Figura 5.26: Comparação entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado em $x = L$.

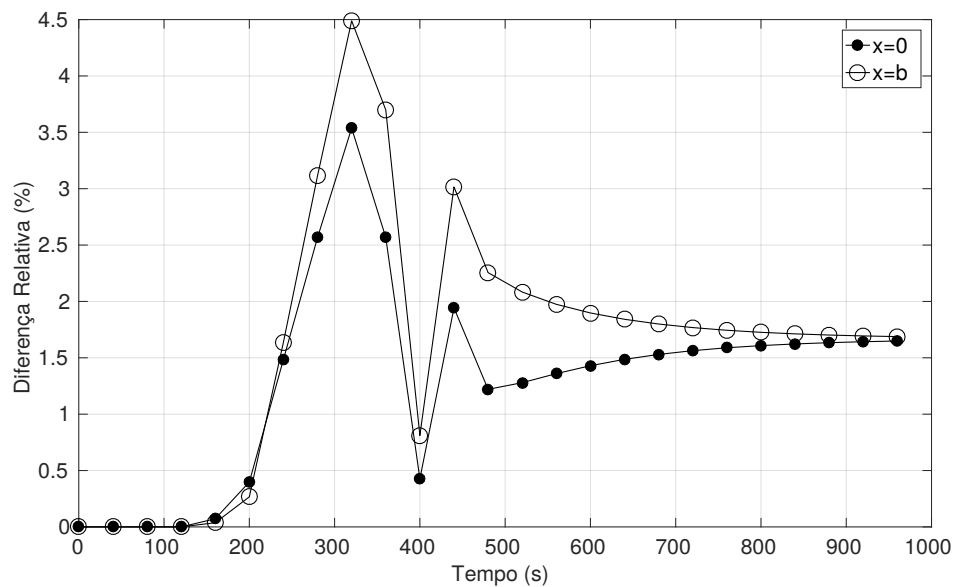


Figura 5.27: Diferença relativa entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado para as posições $x = 0, b$ e L usando h_1 .

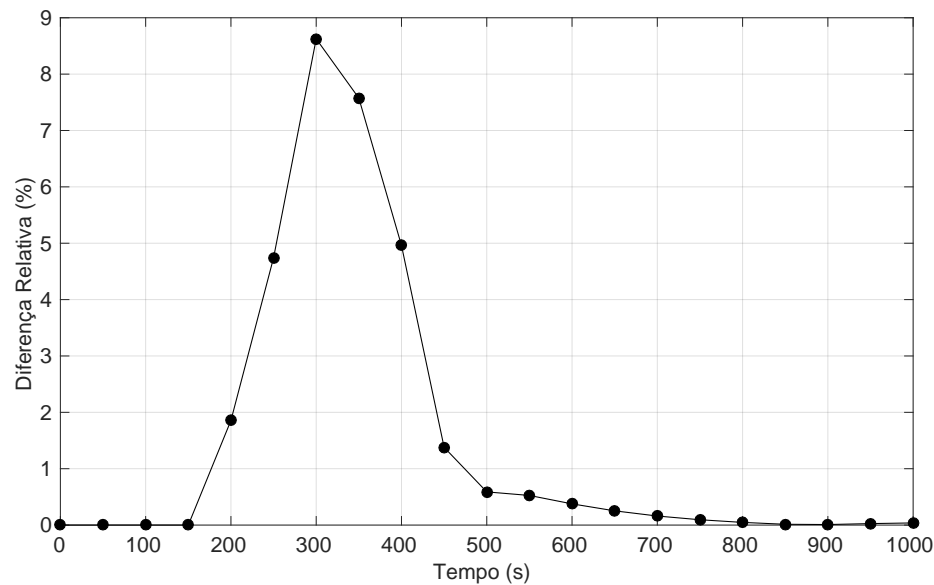


Figura 5.28: Diferença relativa entre as temperaturas obtidas com os fluxos de calor imposto e estimado na posição $x = L$.

Nessas seções procurou-se expor a solução teórica do problema inverso em condução de calor de dupla camada, considerando propriedades térmicas distintas para cada camada.

Como pode-se observar, a técnica de problema inverso proposta para materiais compostos é eficiente e válida, obtendo-se diferença de temperaturas inferiores a 13%, dependendo da posição de análise e das propriedades termofísicas que também ajudam a descrever o sistema. Ressalta-se, que o modelo 1D permite acesso somente na posição $x = L$, posição oposta a fonte de calor, isso justifica a diferença de temperatura ser alta. Em sequência, faz-se a análise da influência da espessura da camada na estimativa do fluxo de calor.

5.2.4 Análise da influência da espessura (b) na estimativa do fluxo de calor

Como mencionado, a importância dos revestimentos cresceu na indústria metal mecânica, em particular nas ferramentas de usinagem, em razão da proteção contra os desgastes. Esses revestimentos consistem de uma ou mais camadas de materiais diferentes da base, propiciando uma flexibilidade na seleção dos sistemas de acordo com as necessidades de cada aplicação (ALMEIDA, 2010). Uma das vantagens em usar revestimento em ferramenta de corte é a redução do desgaste da ferramenta protegendo a ferramenta de uma temperatura mais

elevada.

Observa-se, nesse contexto, que a grande maioria das ferramentas atuais possuem revestimento, e, portanto, qualquer análise térmica dessas ferramentas devem considerar a sua presença. Usualmente, as espessuras desses revestimentos variam entre $1\mu m$ a $20\mu m$ Machado *et al.* (2011).

Essa seção, trata-se da influência dessas espessuras nas estimativas do fluxo de calor. Inicialmente, será considerado o modelo 1D e posteriormente o modelo 3D.

Especificamente, serão considerados nesta análise, espessuras de revestimento iguais a $4\mu m$, $8\mu m$ e $12\mu m$.

As Figs.(5.29)-(5.30)-(5.31) apresentam as estimativas do fluxo de calor considerando espessuras de $12\mu m$, $8\mu m$ e $4\mu m$, respectivamente e temperaturas sintéticas na posição $x = L$.

Uma vez obtido o fluxo de calor, a temperatura em qualquer ponto pode então ser calculada. As Figs.(5.32)-(5.33)-(5.34) apresentam o campo de temperatura calculado em cada posição ($x = 0, b$ e L), respectivamente para $12\mu m$, $8\mu m$ e $4\mu m$.

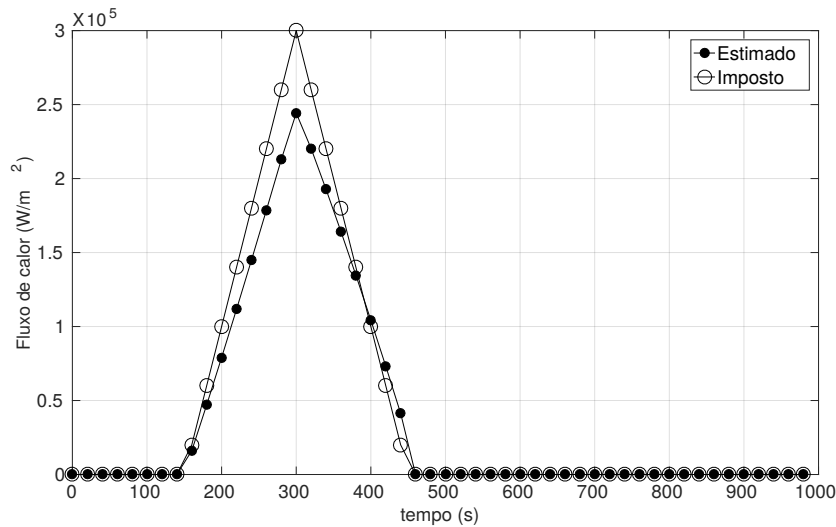


Figura 5.29: Comparação entre os fluxo de calor estimado e imposto, considerando uma espessura de revestimento de $12\mu m$, e usando função de transferência de temperaturas sintéticas obtidas em $x = L$.

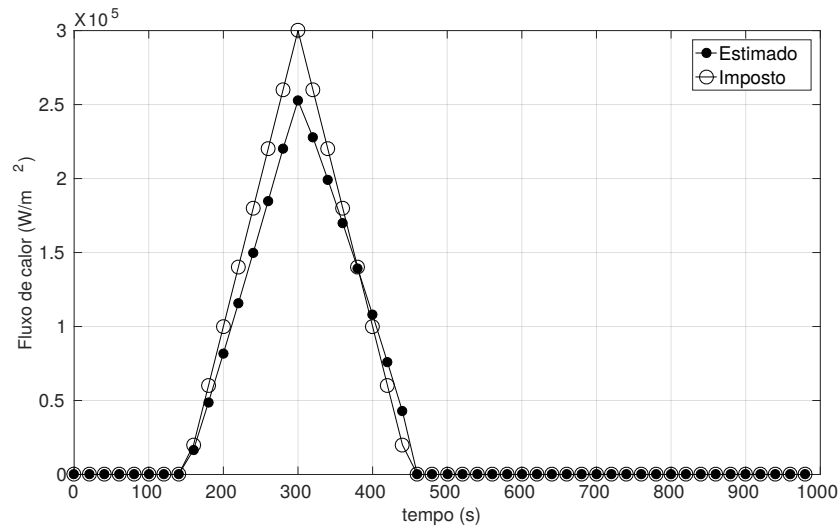


Figura 5.30: Comparação entre os fluxos de calor estimado e imposto, considerando uma espessura de revestimento de $8\mu m$, e usando função de transferência de temperaturas sintéticas obtidas em $x = L$.

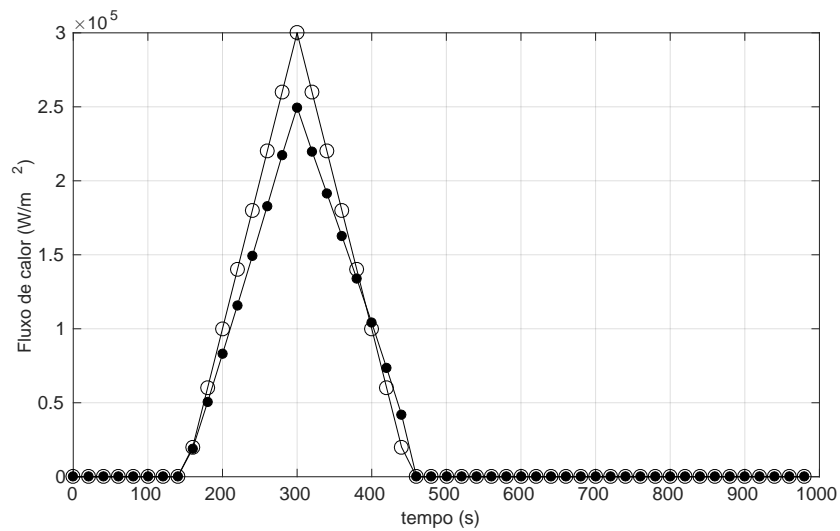


Figura 5.31: Comparação entre os fluxos de calor estimado e imposto, considerando uma espessura de revestimento de $4\mu m$, e usando função de transferência de temperaturas sintéticas obtidas em $x = L$.

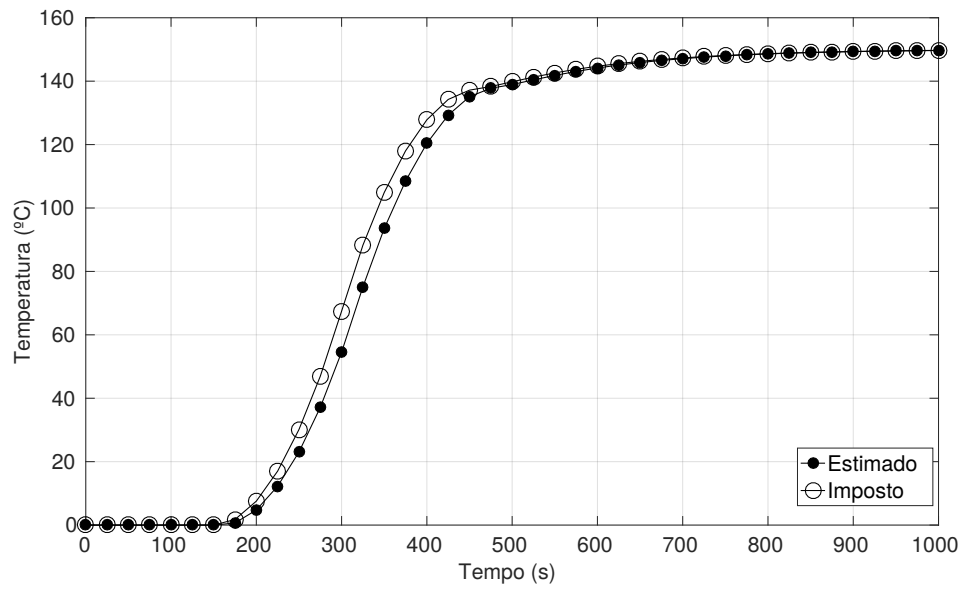


Figura 5.32: Evolução da temperatura estimada considerando espessura de revestimento igual a $12\mu m$.

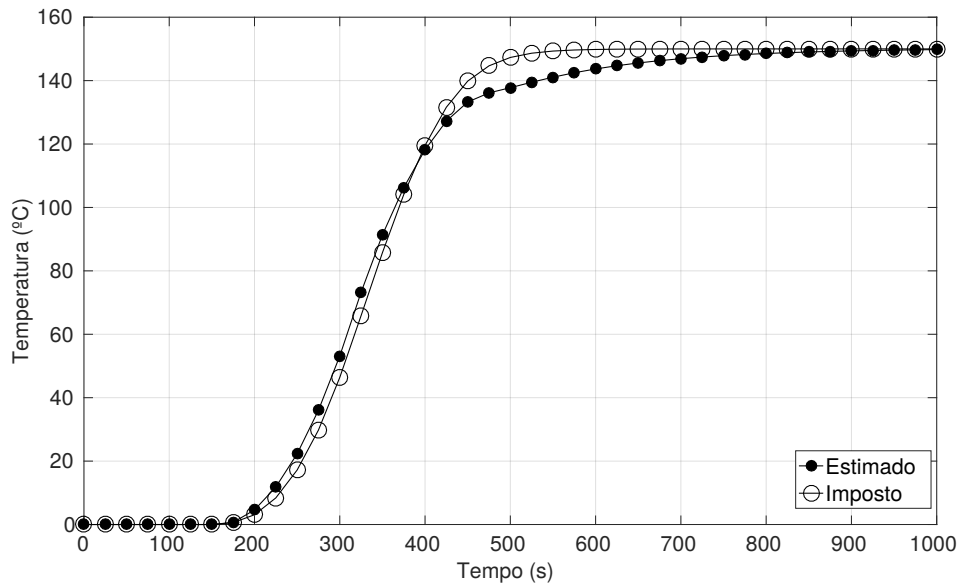


Figura 5.33: Evolução da temperatura estimada considerando espessura de revestimento igual a $8\mu m$.

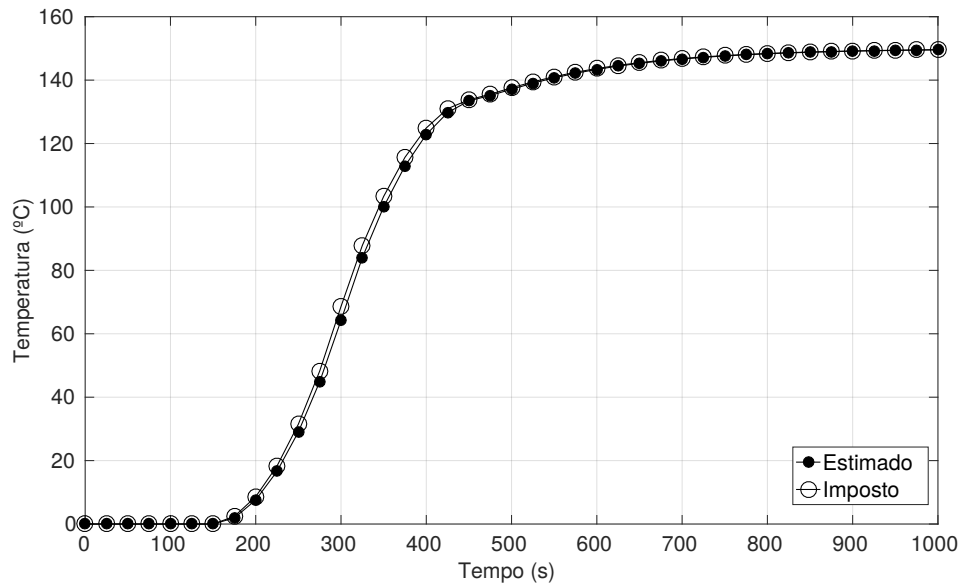


Figura 5.34: Evolução da temperatura estimada considerando espessura de revestimento igual a $4\mu m$.

Observa-se nas Figs. (5.29)-(5.30)-(5.31) que a melhor estimativa é obtida para o problema térmico com revestimento de $4\mu m$. Esse comportamento é esperado uma vez que, a sensibilidade no ponto de estimativa do fluxo de calor é maior. Isso se dá pois, a sensibilidade está diretamente relacionada com os efeitos de α_1 e k_1 quando varia-se as espessuras do revestimento, pois estes, apresentam efeito de isolamento térmico na ferramenta. Logo, quanto menor a espessura do revestimento melhor é a estimativa do fluxo de calor.

5.2.5 Propriedades térmicas α e k

Além da espessura do revestimento, as propriedades térmicas desempenham um papel importante no estabelecimento das temperaturas na interface durante o processo de corte ortogonal.

Este efeito pode ser observado considerando o mesmo fluxo de calor imposto na interface e, em decorrência na obtenção da temperatura em $x = L$. Assim, espera-se que uma maior resistência térmica devido ao revestimento possa implicar em uma menor temperatura na interface entre revestimento e substrato.

A tab. (5.1) mostra as propriedades térmicas dos respectivos revestimentos que será usado nesta análise e encontra-se (BRITO R.F.; CARVALHO, 2015).

Tabela 5.1: Propriedades termofísicas da ferramenta e dos revestimentos Cobalto e Al_2O_3 .

Propriedades	Ferramenta	Co	Al_2O_3
$\alpha \times 10^{-5} [m^2/s]$	4,36	2,66	0,76
$k [W/mK]$	130	99,2	36

A solução do problema direto considerando o mesmo fluxo de calor e um revestimento (k_1) de cobalto com espessuras de $12\mu m$, $8\mu m$ e $4\mu m$, respectivamente é apresentado nas Figs. (5.35)-(5.36)-(5.37). A mesma solução é apresentada considerando um revestimento de Al_2O_3 com espessuras $12\mu m$, $8\mu m$ e $4\mu m$, respectivamente nas Figs. (5.38)-(5.39)-(5.40). Esta análise se faz necessária, devido ao desconhecimento da intensidade do calor gerado na peça-ferramenta durante o processo real de corte ortogonal. É importante observar que a análise térmica do comportamento da ferramenta revestida não considerou os efeitos tribológicos da adição de revestimento no metal base.

Observa-se que, como esperado, ao reduzir-se a espessura do revestimento obtém-se uma menor temperatura na interface ($x=b$) em relação a temperatura obtida pela ferramenta sem revestimento. Isso se dá, devido ao efeito de isolamento térmico presente no revestimento. Observa-se também, que a sensibilidade, assim como no caso anterior, é maior quando a espessura do revestimento é menor.

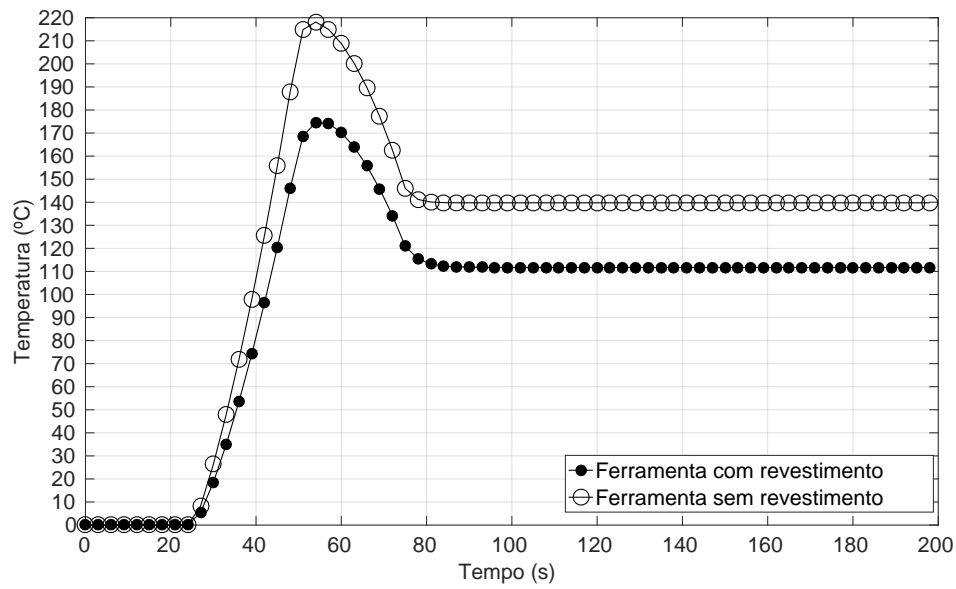


Figura 5.35: Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de cobalto e espessura $12\mu m$.

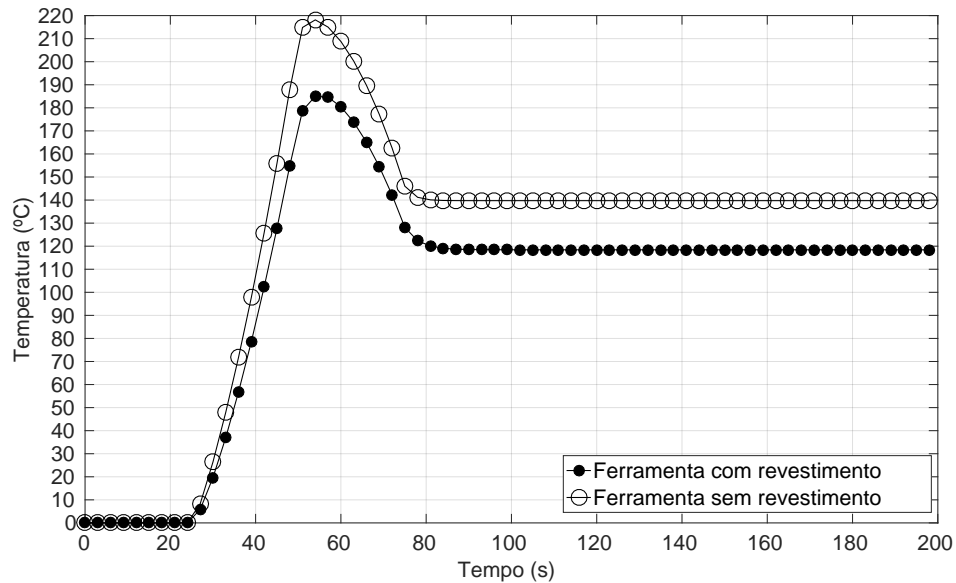


Figura 5.36: Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de cobalto e espessura $8\mu m$.

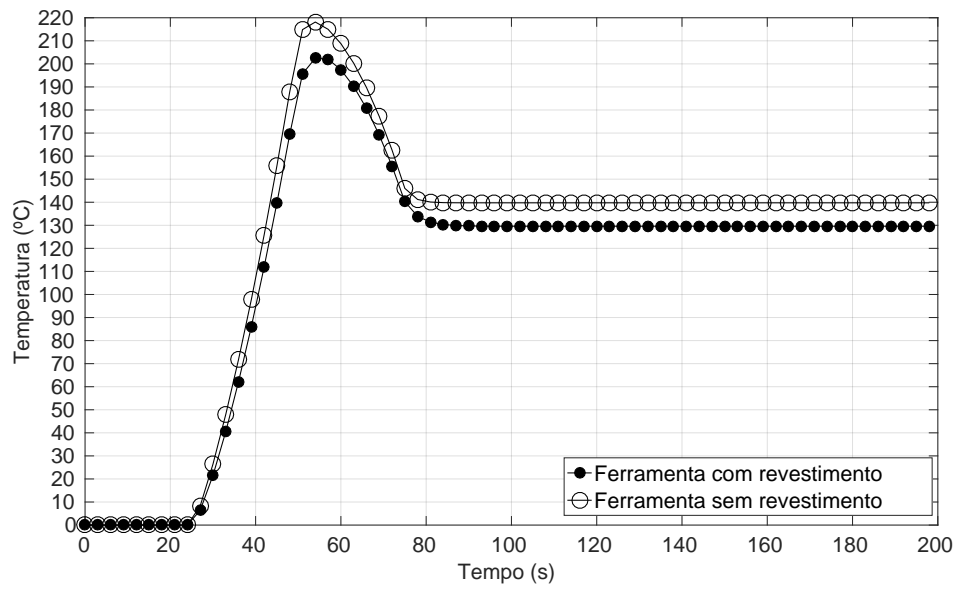


Figura 5.37: Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de cobalto e espessura $4\mu m$.

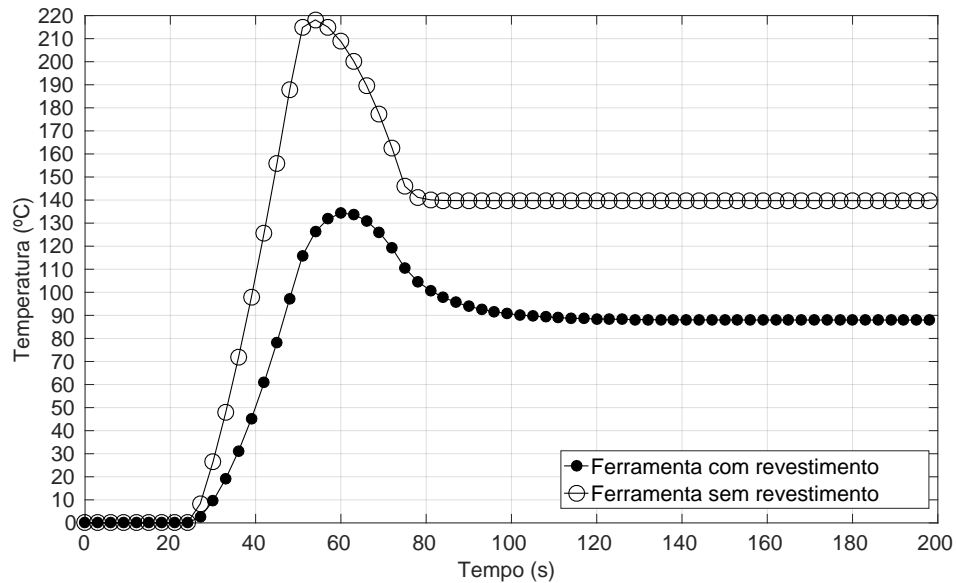


Figura 5.38: Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de Al_2O_3 e espessura $12\mu m$.

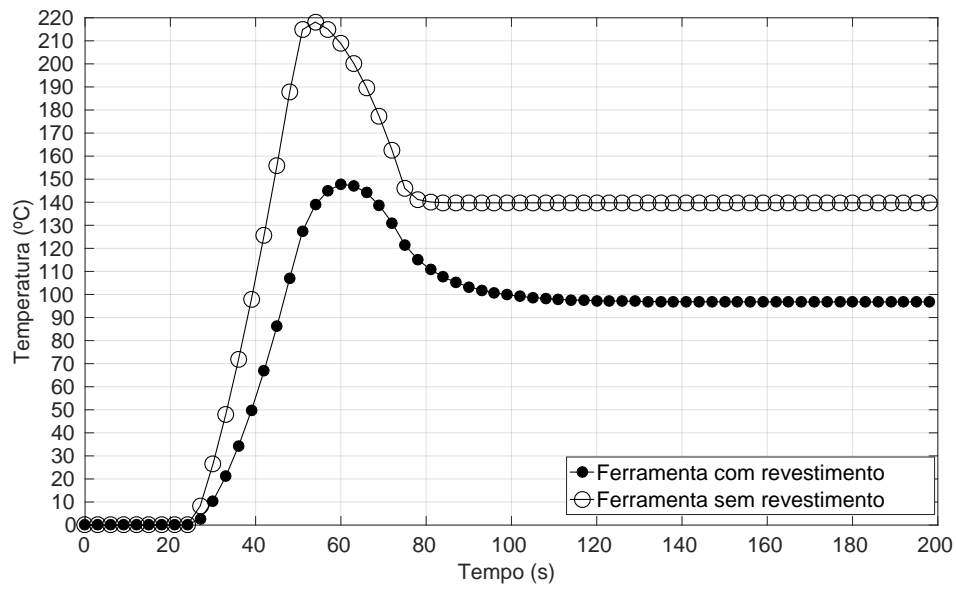


Figura 5.39: Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de Al_2O_3 e espessura $8\mu m$.

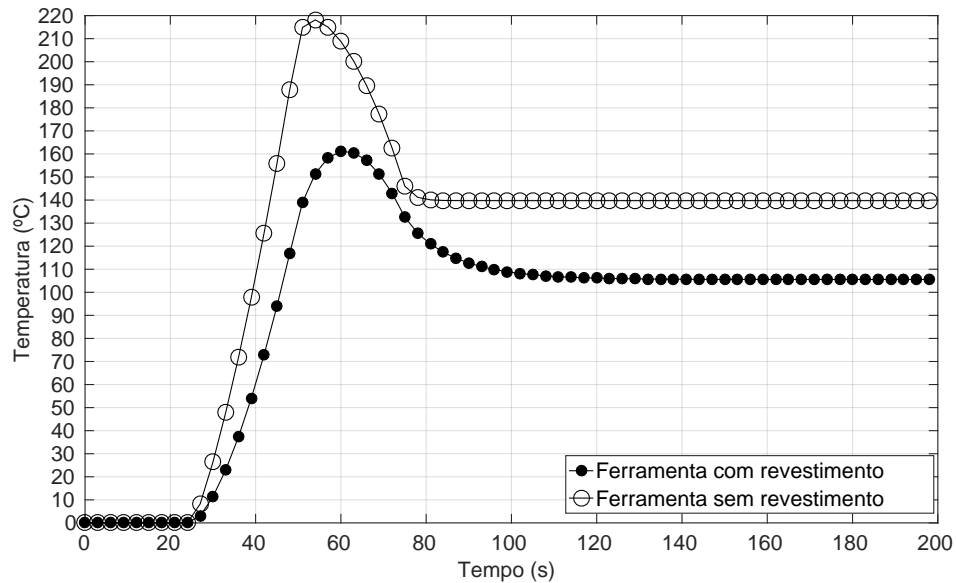


Figura 5.40: Comparação e evolução de temperatura na interface ($x=b$) considerando revestimento de Al_2O_3 e espessura $4\mu m$.

Observa-se que ambos os revestimentos, cobalto e Al_2O_3 , apresentaram uma menor temperatura na interface, essa diferença pode ser observada, por exemplo, para o caso em que tem-se espessura de revestimento igual a $4\mu m$, para efeito de isolamento térmico o revestimento de Al_2O_3 mostrou-se mais eficiente, uma vez que a temperatura na interface é de no máximo $60[^\circ C]$ enquanto o revestimento de cobalto apresenta diferença máxima de $20[^\circ C]$.

5.3 Problema térmico 3D X33Y3C13Z33

Apresentam-se, nesta seção, alguns resultados da solução do problema térmico 3D. Inicialmente, a solução do problema direto, as funções de transferência e a estimativa do fluxo de calor imposto em um problema específico. No capítulo 5 resultados dessa solução são explorados mais profundamente.

Analogamente ao caso 1D da seção anterior, a técnica TFBGF é usada como ferramenta da estimativa do fluxo de calor imposto na superfície. Como já mencionado, a motivação dessa solução desse problema decorre da modelagem térmica de uma ferramenta durante um processo de corte ortogonal.

Em casos práticos, a geração de calor que ocorre devido ao cisalhamento do material em contato com a ferramenta é usualmente desconhecida. Nesse caso, o uso de técnicas inversas é uma ferramenta poderosa para a sua obtenção. Como as ferramentas atualmente são sempre revestidas, o aquecimento é parcial, o problema térmico decorrente é tridimensional, transiente e ocorre em um domínio de dupla camada.

5.3.1 Problema direto

Para obtenção do problema direto, considera-se um fluxo retangular, como mostra a Fig. (5.41) construído no MATLAB, imposto em uma área parcial da geometria tridimensional, como mostra a Fig. (5.42).

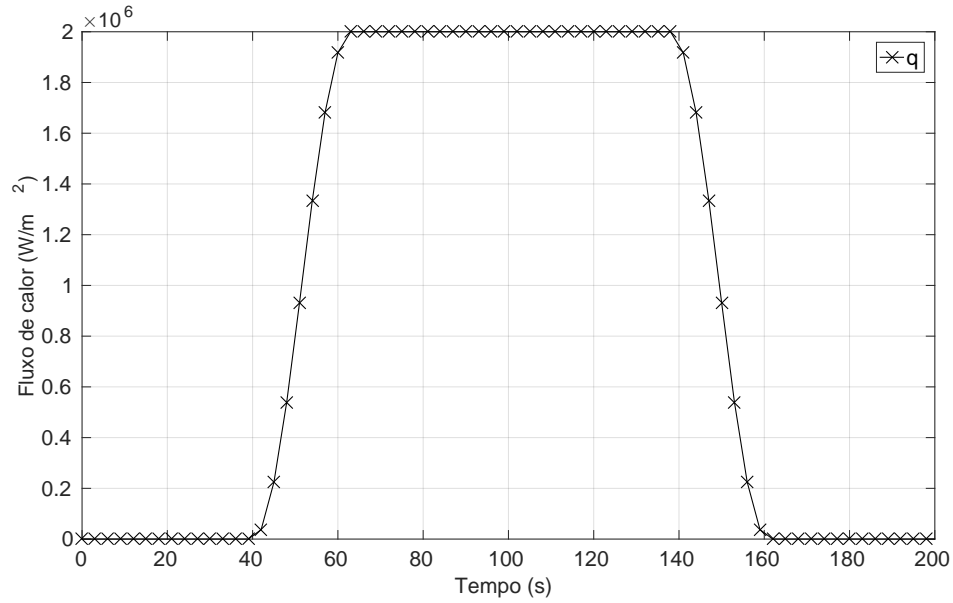


Figura 5.41: Fluxo de calor retangular.

Considera-se nesse caso, um revestimento de cobalto com espessura $b = 4\mu\text{m}$, substrato de metal duro ISO K 10 como material base, os coeficientes de convecção $h_i = 20[\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$ e, comprimento $L = W = 1\text{E}^{-02}[\text{m}]$ e $R = 10\text{E}^{-02}$ (compatíveis com a geometria de uma ferramenta de usinagem); temperatura inicial, $T_0 = 25[^\circ\text{C}]$ e ambiente, $T_\infty = 30[^\circ\text{C}]$; intervalo de discretização do tempo $dt = 1[\text{s}]$ e tempo final de simulação sendo $t_f = 200[\text{s}]$.

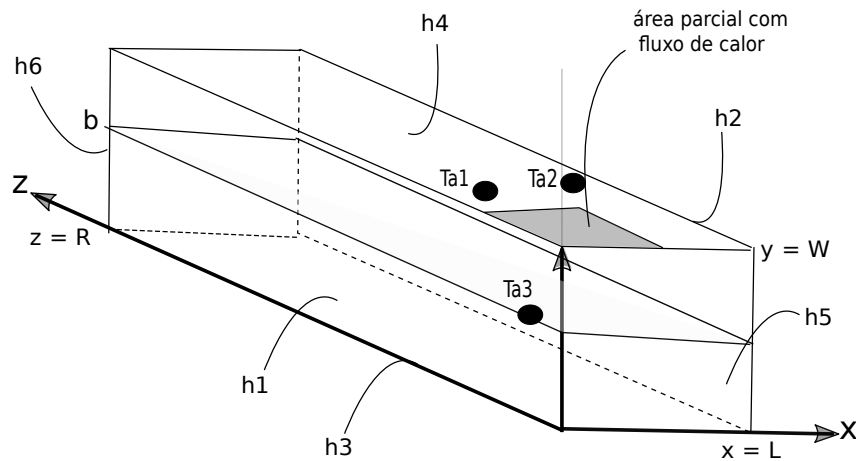


Figura 5.42: X33Y3C13Z33 com área parcial com fluxo de calor.

Supõem-se o fluxo de calor atuando na área quadrada delimitada por $0 < x < L/5$ e $0 < z < R/50$, em $y = W$. As temperaturas nas posições $Ta1 = (L/5, W, 4R/50)$, $Ta2 = (4L/5, W, 4R/50)$ e $Ta3 = (0, W/2, R/50)$ Fig. (5.42) são calculadas usando-se a solução híbrida.

A Fig.(5.43) mostra a evolução de temperatura nas respectivas posições de interesse.

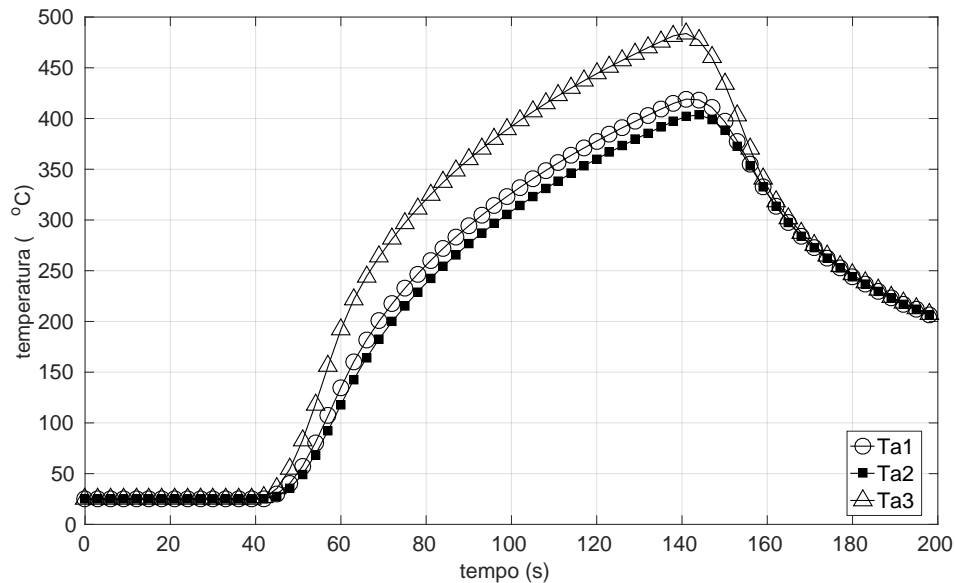


Figura 5.43: Evolução das temperaturas calculadas nas posições 1, 2 e 3.

Observa-se que para a posição $Ta3$ as temperaturas são mais elevadas quando comparadas com as demais posições, isso se deve a $Ta3$ estar posicionada a $4\mu m$ da fonte de calor.

5.3.2 Função de Transferência

Analogamente ao caso 1D, calculam-se as funções de transferência em cada posição. Estas funções são apresentadas na Fig. (5.44).

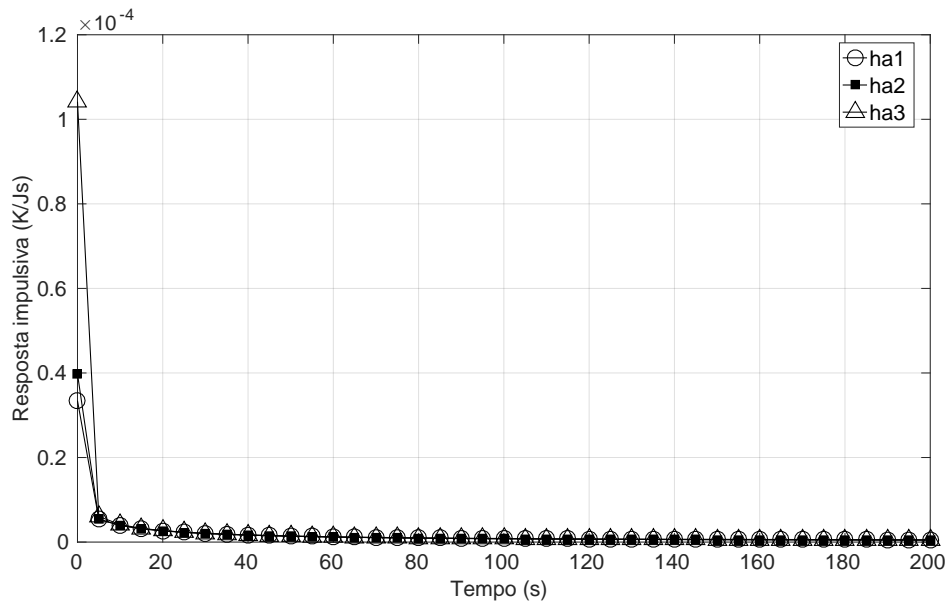


Figura 5.44: Função de transferência nas posições $Ta1, Ta2$ e $Ta3$.

Observa-se um comportamento semelhante para as posições $Ta1, Ta2$ e $Ta3$, porém no tempo inicial a função de transferência ($ha3$) atinge uma máxima de $1,1 \times 10^{-4}$.

5.3.3 Problema inverso, estimativa do fluxo de calor imposto

A partir dos pares dos vetores de temperatura e função de transferência, $\{Ta1, Ha1\}$, $\{Ta2, Ha2\}$ e $\{Ta3, Ha3\}$, pode-se estimar o fluxo de calor usando a técnica TFBGF. As Figs. (5.45)-(5.46)-(5.47) mostram comparações entre o fluxo de calor imposto q e o fluxo de calor estimado q_1 . Observam-se uma excelente concordância entre os fluxos, obtendo-se desvios menores que 4%, 1,5% e 1% respectivamente para as posições $Ta1, Ta2$ e $Ta3$.

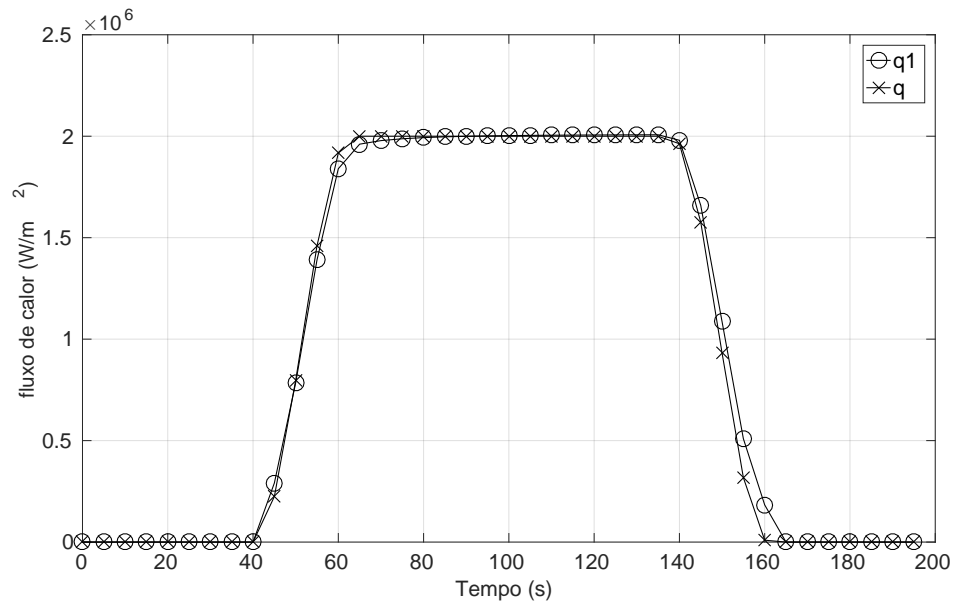


Figura 5.45: Comparação entre o fluxo de calor imposto q e o fluxo de calor estimado q_1 para posição 1.

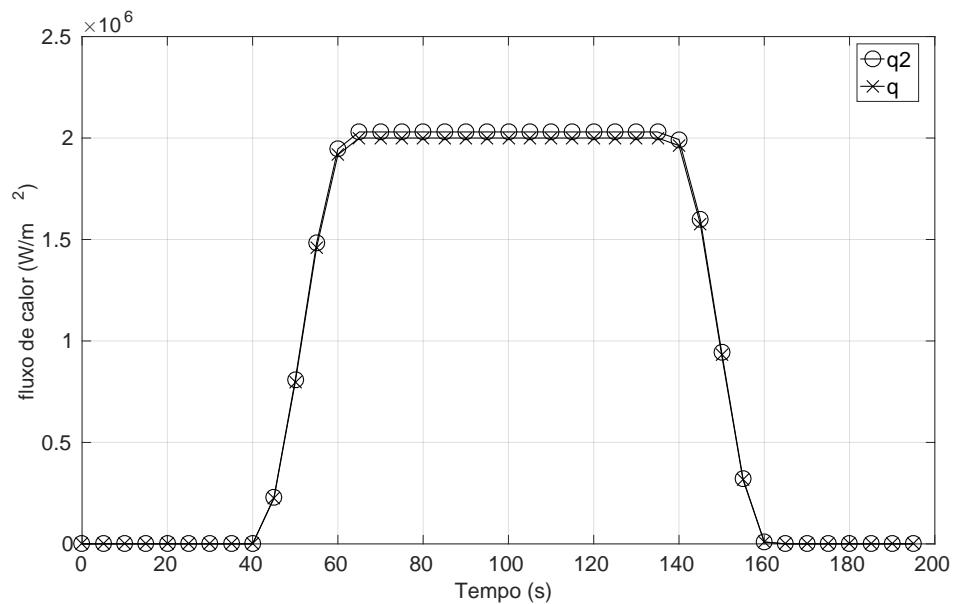


Figura 5.46: Comparação entre o fluxo de calor imposto q e o fluxo de calor estimado q_2 para posição 2.

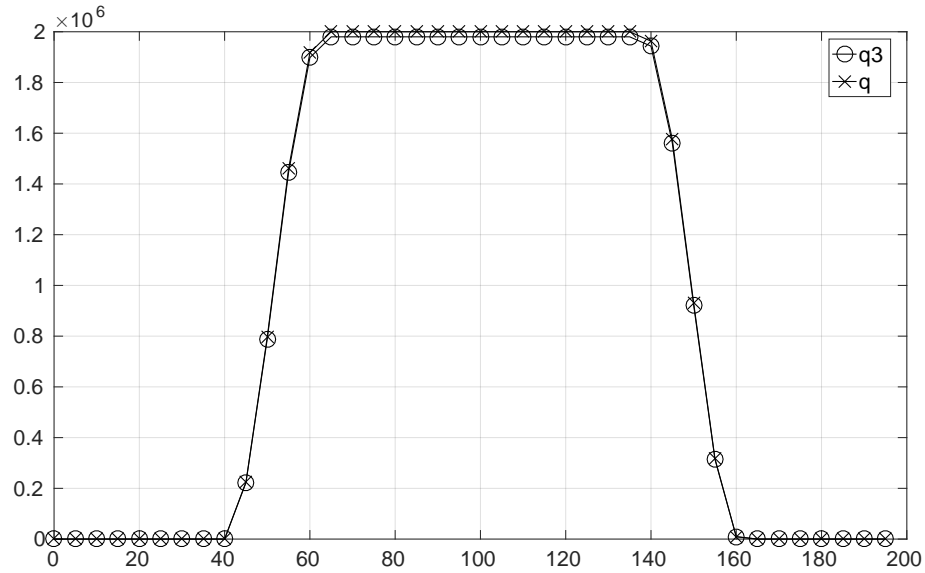


Figura 5.47: Comparação entre o fluxo de calor imposto q e o fluxo de calor estimado q_3 para posição 3.

Fazendo uma analogia com o modelo 1D, é fácil perceber que as melhores estimativas são provenientes do modelo 3D, uma vez, que o mesmo permite acesso na superfície $y = W$, onde está localizada a área da fonte de calor, tendo assim uma maior sensibilidade. A sensibilidade representa o quanto a temperatura, num determinado ponto, está variando em função do fluxo de calor aplicado.

Uma vez obtido o fluxo de calor, obtém-se o campo de temperatura resolvendo o problema direto para qualquer posição do domínio, faz-se então, para as posições $Ta1, Ta2$ e $Ta3$ e posteriormente mostra-se o campo de temperatura em três faces distintas considerando um tempo de 60s.

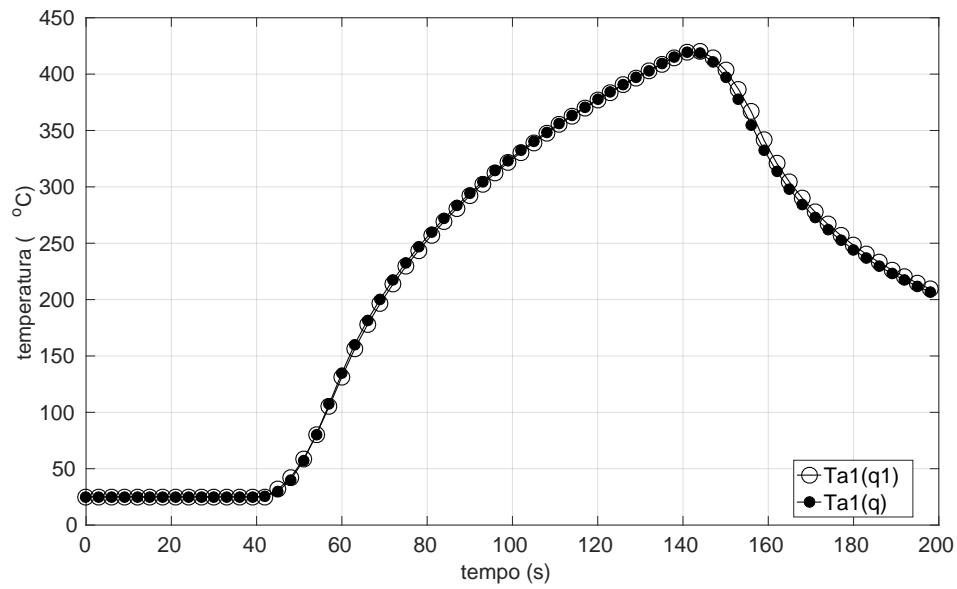


Figura 5.48: Evolução de temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto $Ta1(q)$ e fluxo de calor estimado $Ta1(q1)$.

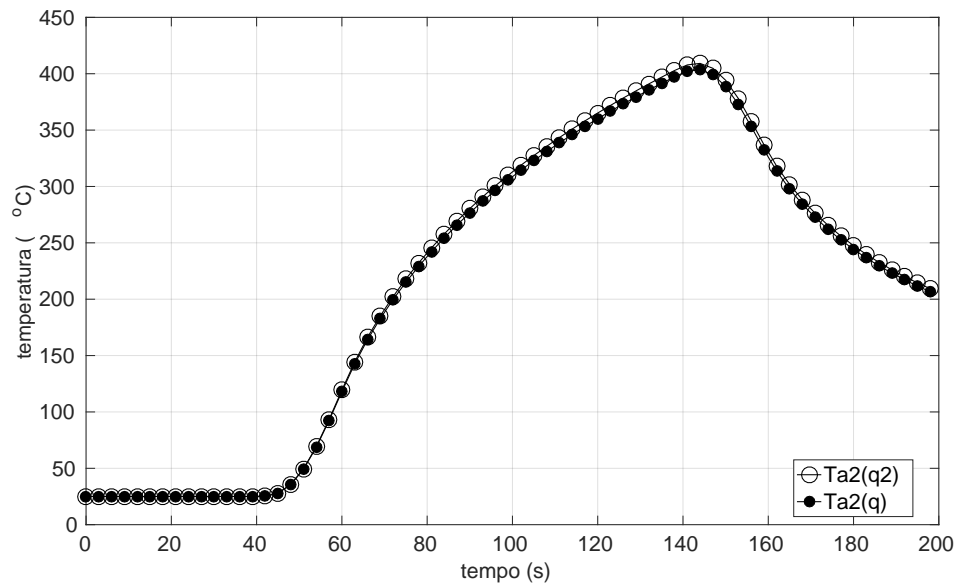


Figura 5.49: Evolução de temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto $Ta1(q)$ e fluxo de calor estimado $Ta2(q2)$.

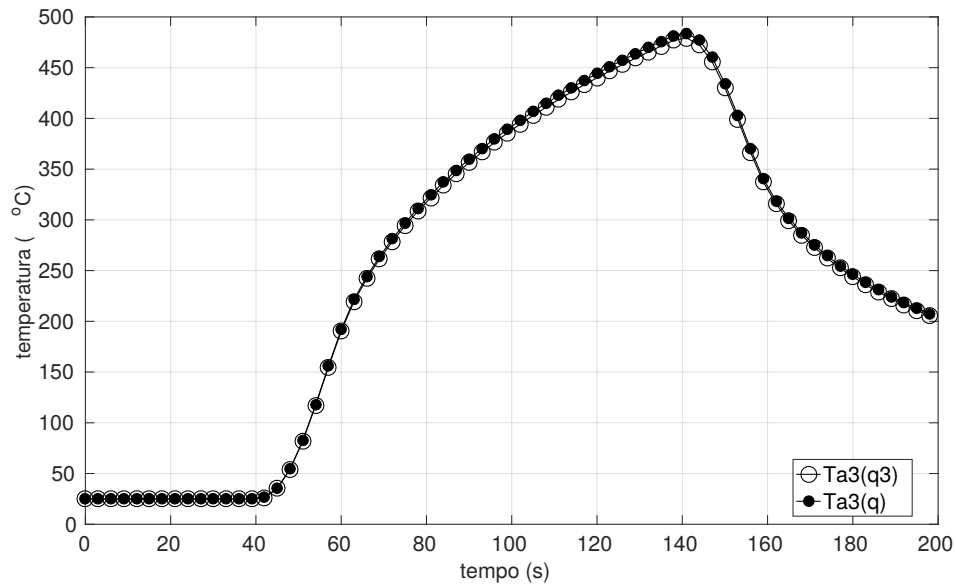


Figura 5.50: Evolução de temperaturas obtidas com o fluxo de calor imposto $Ta3(q)$ e fluxo de calor estimado $Ta3(q3)$.

Observa-se, que o fluxo de calor estimado nas posições $Ta1$, $Ta2$ e $Ta3$ foi capaz de retornar as temperaturas hipotéticas quando usado no problema direto, Figs. (5.48)-(5.49)-(5.50). Ambos os perfis de temperaturas recalculados a partir do fluxo de calor estimado obtiveram diferença percentual máxima de 1% quando comparados com as temperaturas hipotéticas.

As Figs. (5.51)-(5.52)-(5.53) mostram o campo de temperatura em três faces, no plano XZ com $y=W$, vista superior, no plano XY com $z=0$, vista frontal, no plano YX com $x=0$, vista lateral, respectivamente, com um tempo de 60s, que permitem um melhor entendimento físico do problema.

Os campos de temperatura foram gerados usando o fluxo de calor estimado $q3$ aplicado ao problema direto 3D de dupla camada, isto é possível pois o modelo térmico permite o cálculo de temperatura para qualquer ponto de interesse no domínio, considera-se um revestimento de $4\mu m$.

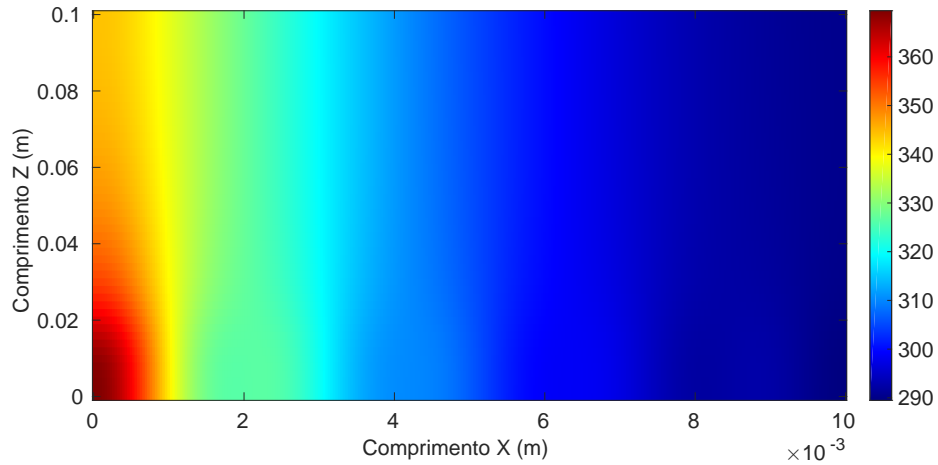


Figura 5.51: Campo de temperatura no plano XZ com $y=W$, vista superior.

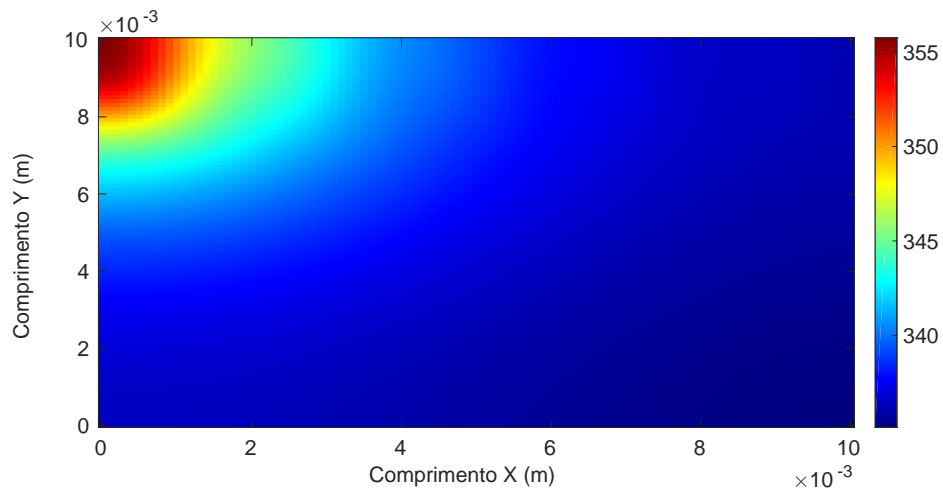


Figura 5.52: Campo de temperatura no plano XY com $z=0$, vista frontal.

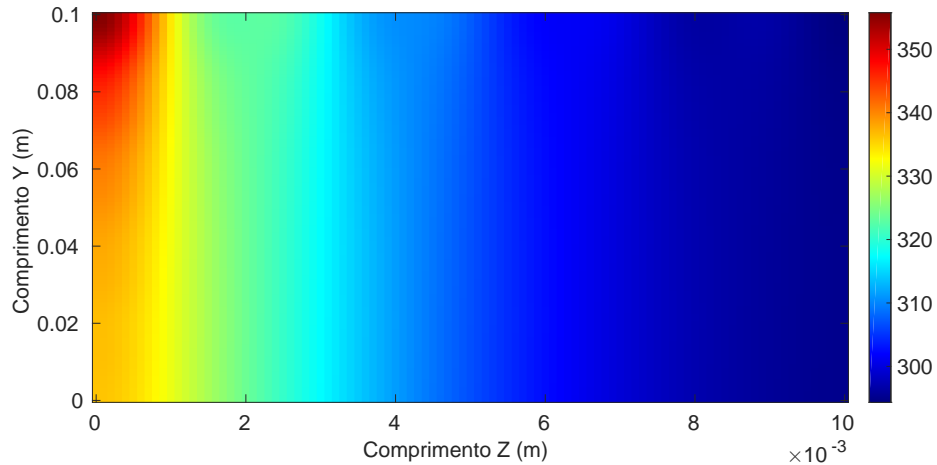


Figura 5.53: Campo de temperatura no plano YZ com $x=0$, vista lateral.

A Fig. (5.51) apresenta o campo de temperatura no plano XZ, vista superior, com $y=W$, pode-se observar que a difusão de calor inicia-se a partir da região onde está localizada a fonte de calor, isto é, a origem do sistema cartesiano, ponto de contato peça-ferramenta revestida durante um processo de corte ortogonal. Observa-se também, que há maior difusão de calor no sentido x do plano cartesiano, devido ao fato da superfície apresentada ser formada apenas pelo revestimento e o mesmo por possuir efeito de isolamento térmico apresenta maiores temperaturas, com uma variação de 100°C .

O campo de temperatura no plano XY, vista frontal, com $z=0$, Fig. (5.52). O plano XY é formado pelas camadas revestimento e substrato observa-se que o início do processo se dá a partir de região onde está localizada a fonte de calor, gerando uma variação de temperatura de 20°C . Na Fig. (5.53) apresenta-se variação no campo de temperatura 70°C , o plano YZ, $x=0$, é formado por parte revestimento parte substrato, observa-se o perfil de difusão ocorrendo na maior parte para direção do eixo y , devido ao fato de ser o maior ponto de contato peça-ferramenta revestida durante o processo de corte ortogonal.

Capítulo 6

RESULTADOS

6.1 Introdução

No capítulo anterior mostrou-se a proposta de solução do problema inverso, isto é, a possibilidade de se estimar o fluxo de calor por meio da função de transferência analítica e por temperaturas simuladas computacionalmente e 'experimentalmente'.

Esse capítulo, trata-se da influência do revestimento nas estimativas do fluxo de calor.

Como já mencionado, a grande maioria das ferramentas atuais possuem revestimento, e, portanto, qualquer análise térmica dessas ferramentas devem considerar a sua presença. A espessura do revestimento é muito menor em relação a espessura do substrato. O objetivo desse capítulo é analisar o quanto o revestimento pode influenciar na estimativa do fluxo de calor.

Inicialmente, será considerado o modelo 1D e posteriormente o modelo 3D.

6.2 Efeito do revestimento na estimativa do fluxo de calor de uma ferramenta usando o modelo 1D

Obtém-se o campo de temperatura $Y = T_1 + \varepsilon$, onde ε representa o desvio padrão aos erros de medições presentes na temperatura experimental, pelo problema direto na posição oposta a fonte de calor imposta ($x = L$), que foram calculados por meio da Eq. (3.5), mostrada na Fig. (5.16) e, estima-se os fluxos de calor (problema inverso) q_1 e q_0 Figs. (6.1). O objetivo aqui é analisar a influência do revestimento sobre a ferramenta nas estimativas de fluxo de calor, qual seria o fluxo de calor estimado se o revestimento fosse desconsiderado?

A Fig. (6.2) mostra a comparação entre os fluxos q_1 (estimado e imposto) e o fluxo de

calor estimado q_0 , usando um revestimento de cobalto e uma espessuras de $12\mu m$.

A solução do problema inverso é mostrada em termos da comparação entre temperatura 'experimental' e estimada, o que significa mostrar que o fluxo de calor estimado (q_1 e q_0) é capaz de descrever as temperaturas 'experimentais'.

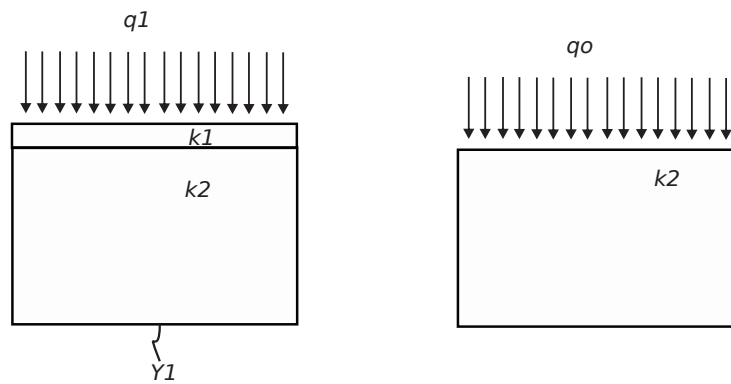


Figura 6.1: Modelo 1D para análise do revestimento.

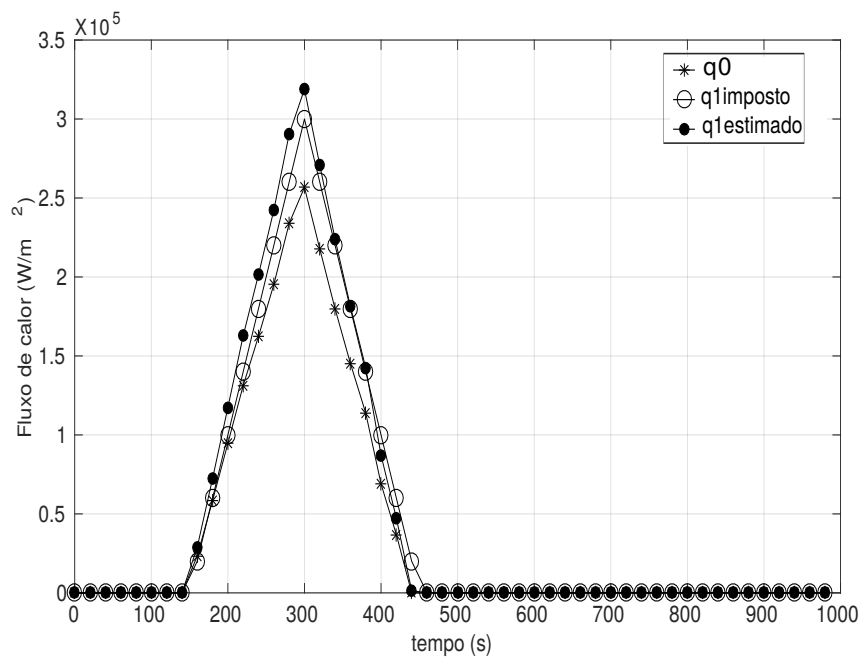


Figura 6.2: Fluxo imposto, fluxo estimado considerando o modelo com revestimento de cobalto e o fluxo estimado desprezando o efeito do revestimento.

Observa-se, na Fig. (6.2) que o fluxo de calor estimado q_0 , decorrente do problema térmico que despreza o efeito do revestimento, é menor quando comparado com o fluxo de calor imposto, apresentando uma diferença percentual máxima de 16,5%. Já o fluxo de calor estimado q_1 decorrente do problema térmico que considera o efeito do revestimento, é ligeiramente maior quando comparado com o fluxo de calor imposto, apresentando uma diferença percentual de no máximo 8% quando comparado com o fluxo de calor imposto.

Esse fato, é devido que as temperaturas usadas para estimar o fluxo de calor são provenientes de um problema de dupla camada, como experimentalmente é feito, desse modo a estimativa apresentada quando usa-se um modelo de camada simples deverá divergir mais do fluxo de calor imposto, fato que é esperado, pois trata-se da estimativa através de um modelo que não é compatível com a situação real. Desse modo, apresenta-se o melhor desempenho na estimativa de fluxo de calor quando usa-se o modelo de dupla camada.

Como já mencionado, com a estimativa do fluxo de calor é possível obter o campo de temperatura para qualquer ponto do domínio. As Figs. (6.3)-(6.5) mostram a evolução da temperatura para a posição $x = L$, onde obtém-se o perfil térmico considerando o fluxo de calor q_1 e q_0 estimado, respectivamente.

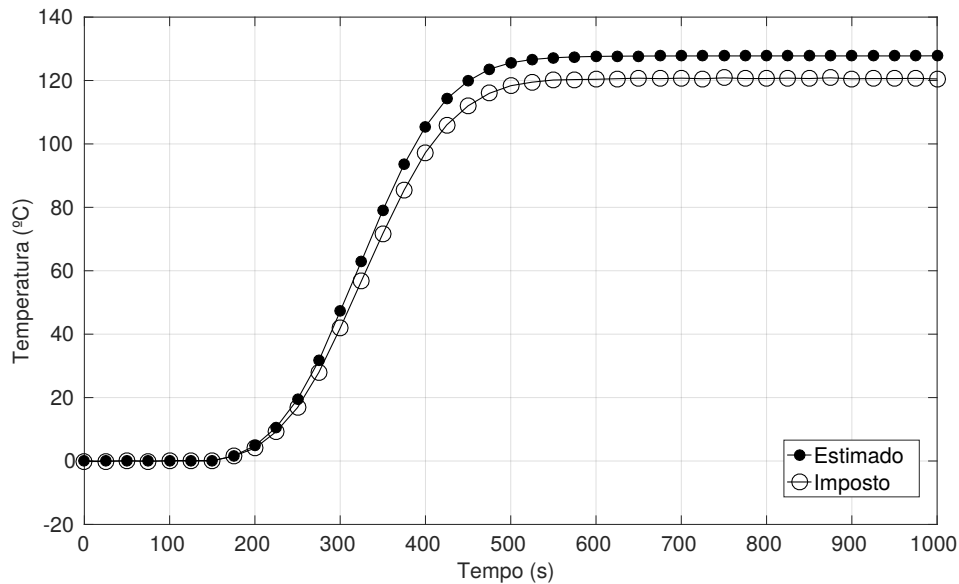


Figura 6.3: Comparação entre os perfis de temperaturas obtidas usando o fluxo de calor estimado q_1 e o fluxo de calor imposto q_1 ambos considera-se o efeito do revestimento.

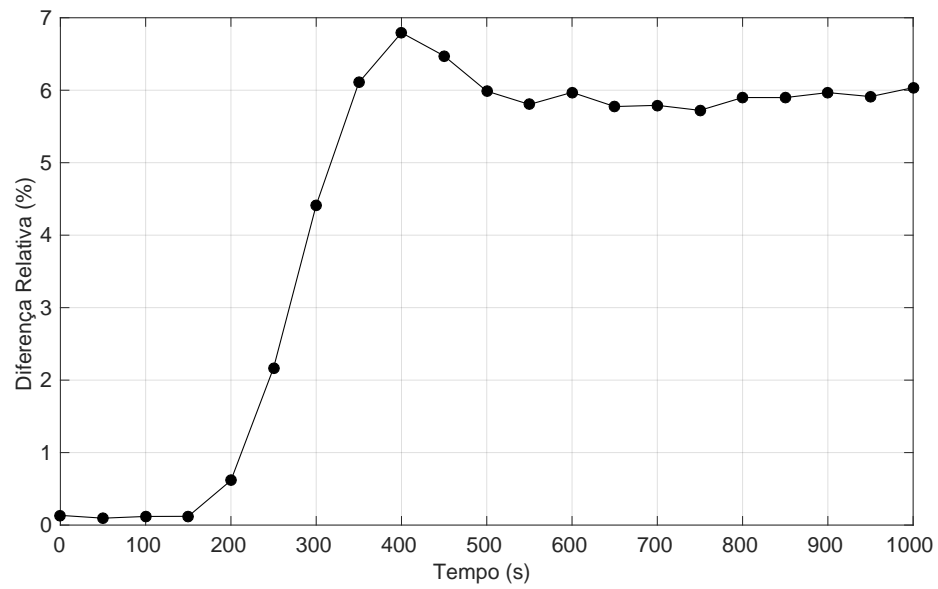


Figura 6.4: Diferença relativa entre o fluxo de calor estimado considerando o efeito do revestimento.

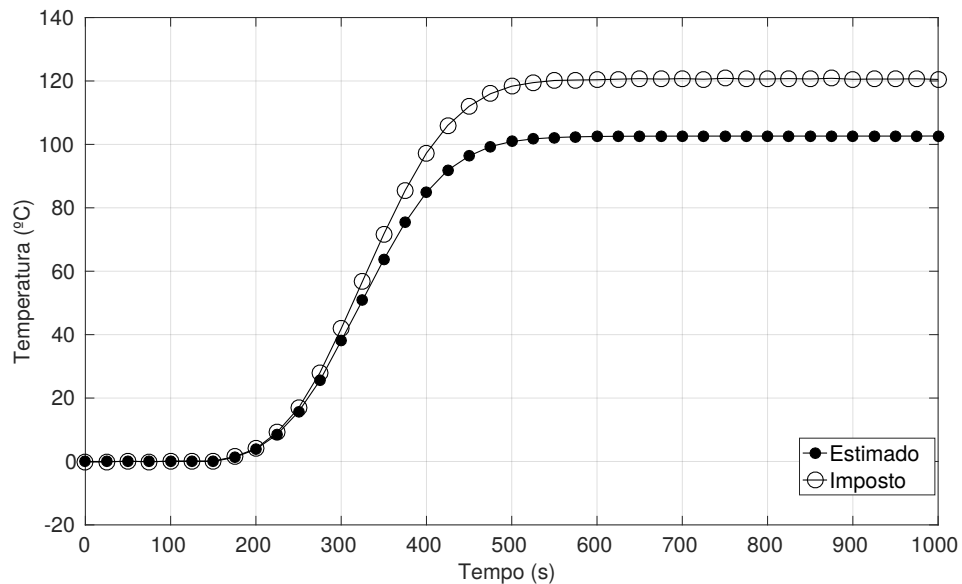


Figura 6.5: Comparação entre os perfis de temperaturas obtidas usando o fluxo de calor imposto q_1 e o fluxo de calor estimado q_0 desprezando o efeito do revestimento.

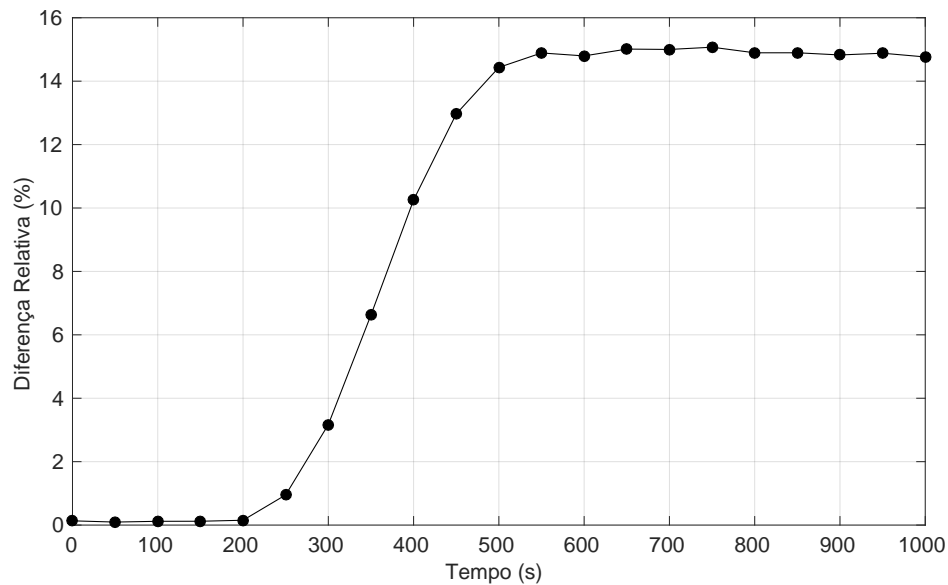


Figura 6.6: Diferença relativa entre o fluxo de calor estimado desprezando o efeito do revestimento.

Observa-se, uma diferença de 7% nos modelos apresentados. Enquanto o modelo que considera o revestimento apresentou uma diferença de 7% o modelo que despreza o revestimento obteve uma diferença de 16%, uma diferença significativa nos cálculos de temperatura.

Com isso, o problema térmico de dupla-camada e a técnica de problema inverso para estimativa do fluxo de calor mostrou-se bastante eficiente com uma diferença percentual de máxima de 7%.

É interessante destacar a grande força da técnica inversa usada, que por sua vez se baseia-se na solução analítica do problema direto. Observa-se, neste caso, que o uso de métodos numéricos para a solução de problema direto acarreta em grandes dificuldades devido às pequenas dimensões da área de contato ferramenta-revestimento.

6.3 Efeito do revestimento na estimativa do fluxo de calor de uma ferramenta usando o modelo 3D

Apresentam-se, nesta seção, alguns resultados sobre a influência do revestimento na ferramenta, considerando agora o modelo 3D, um revestimento de cobalto de espessura $4\mu m$.

Analogamente, usa-se a mesma metodologia apresentada ao caso 1D da seção anterior,

investiga-se, a estimativa do fluxo de calor considerando um modelo com ferramenta revestida e um modelo sem revestimento Fig. (6.7).

Obtém-se o campo de temperatura através do problema direto de dupla camada (solução híbrida) na posição $Ta1$ Fig. (6.7) que é dada pela Fig. (5.43). Então, estima-se o fluxo de calor nas posições $Ta1$ ($qa1$) e $Ta2$ ($qa2$) usando as funções de transferência de dupla camada e camada simples, respectivamente. Desse modo, pretende-se comparar o fluxo de calor estimado para ambos os modelos.

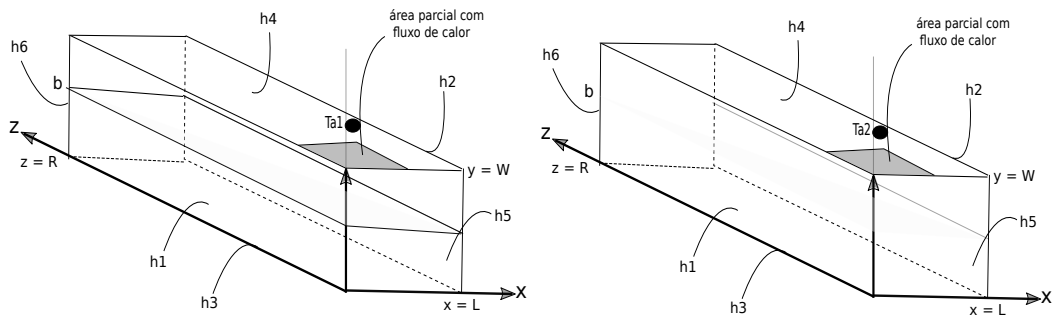


Figura 6.7: Modelos 3D de dupla camada e camada simples.

A Fig. (6.8) mostra a comparação entre os fluxos $qa1$ (estimado e imposto) e o fluxo de calor estimado q_2 , usando um revestimento de cobalto e uma espessura de $12\mu m$.

Observa-se, como no caso 1D o fluxo de calor estimado proveniente do modelo sem revestimento apresenta um fluxo de calor menor quando comparado com o fluxo de calor imposto, com uma máxima percentual de 20%. Já o fluxo de calor estimado proveniente do modelo de dupla camada é ligeiramente maior comparado com o fluxo de calor imposto, com uma máxima percentual de 3%.

Ressalta-se, que para as estimativas do fluxo de calor, o modelo de camada simples, sem revestimento, usa-se a função de transferência da camada 2, pois nesse caso despreza-se o efeito do revestimento, levando em conta apenas propriedades térmicas referente a segunda camada. Para estimativa do fluxo de calor proveniente do modelo de dupla camada, usou-se a função de transferência referente a camada 1. Apesar da estrutura matemática das equações serem as mesmas as propriedades térmicas são distintas.

Como visto, o modelo de dupla camada apresenta os melhores resultados, sendo assim, ressalta-se a sua importância para essas aplicações.

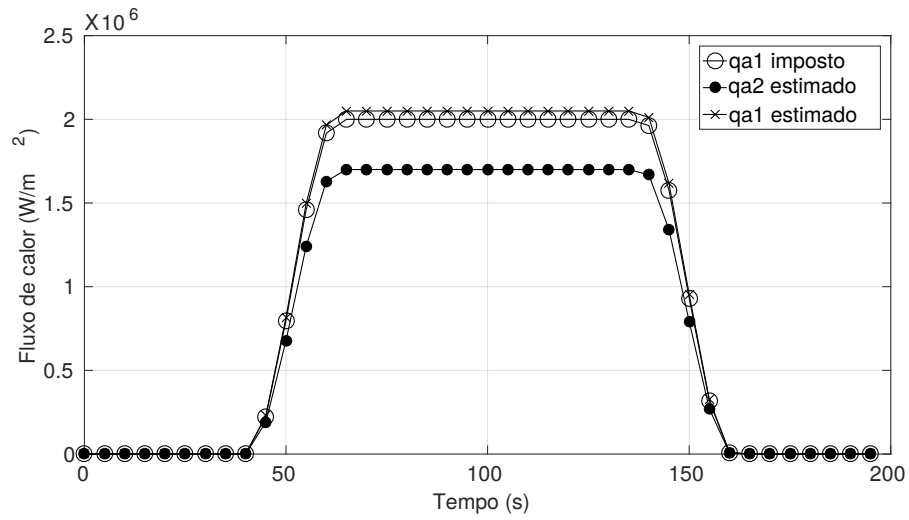


Figura 6.8: Diferença relativa entre o fluxo de calor estimado desprezando o efeito do revestimento.

Capítulo 7

CONCLUSÃO

Propôs-se nesse trabalho, como objetivo principal, a obtenção da solução de um problema inverso decorrente de um processo de usinagem ortogonal usando ferramentas revestidas. Especificamente estimou-se o fluxo de calor gerado na interface peça-ferramenta revestida e determinou-se o campo de temperatura na interface entre o revestimento e o substrato da ferramenta. O Processo de usinagem de corte ortogonal foi simulado numericamente.

A metodologia baseou-se na obtenção da solução analítica do problema direto, da e da obtenção e uso da função de transferência para a estimativa do fluxo de calor imposto. A técnica usada para a solução do problema inverso foi a TFBGF, sendo nesse trabalho adaptada para um domínio multicamadas.

Alguns passos iniciais foram desenvolvidos de forma a auxiliar a se atingir o objetivo principal. Inicialmente abordou-se uma solução analítica dupla camada de um modelo unidimensional. Essa abordagem permitiu estabelecer as características necessárias para a obtenção das funções de transferências de ambas as camadas, revestimento e substrato. O seu uso na estimativa do fluxo de calor aplicado no revestimento através do uso da função de transferência calculada no substrato permitiu a segurança do uso da técnica em problemas multicamadas e, portanto deu caráter generalista a esta proposta.

Num segundo momento abordou-se então o problema tridimensional transiente dupla camada com aquecimento parcial. Além da obtenção das soluções analíticas dos problemas 1D e 3D transientes duplas ? camadas e da solução do problema inverso através da técnica modificada TFBGF pode se explorar a influência térmica do revestimento nas ferramentas.

Tanto a influência das propriedades térmicas de vários tipos de revestimento quanto a variação de temperatura na interface peça ferramenta, na interface revestimento e substrato quanto a influência desses revestimentos na obtenção do fluxo de calor gerado na interface foi verificada.

Algumas perguntas relativas ao comportamento térmico desses revestimentos puderam então ser respondidas. Por exemplo, quais seriam os efeitos térmicos dos revestimentos durante um processo de usinagem ortogonal. Esses revestimentos realmente protegem o substrato, no sentido de diminuir a sua temperatura? Qual o efeito desses revestimentos do ponto de vista da geração de calor devido ao atrito?

Este trabalho procurou também responder se o uso de modelos de ferramentas sem revestimento seria adequado na abordagem de problemas térmicos decorrentes de processos de usinagem ortogonal usando-se ferramentas revestidas.

Nesse sentido, resultados obtidos apontam para a diminuição da temperatura na interface revestimento substrato, tornando a técnica uma ferramenta importante para a otimização e escolha de revestimentos em ferramentas de usinagem. Estabeleceu-se também incertezas no uso de modelagem simples (uma camada) em ferramentas revestidas.

A obtenção da solução analítica de um problema 3D transiente, dupla camada com aquecimento parcial representa uma grande contribuição desse trabalho, uma vez que esta solução não se encontra disponível na literatura. A adaptação da técnica TFBGF para domínios dupla camada também se mostra uma ferramenta poderosa no estudo de materiais revestidos. Ela pode, por exemplo, ser aplicada no auxílio da identificação de propriedades térmicas tanto efetivas, quanto do revestimento e do material base, uma vez que as funções de transferências dessas camadas são identificadas de forma independente.

O baixo custo computacional assim como a exatidão nas soluções imprime um caráter de robustez a esta técnica, principalmente quando comparadas a aplicações com técnicas de otimização onde a solução do problema direto deve ser resolvida várias vezes.

Observa-se, nesse caso, que soluções numéricas que abordam pastilhas revestidas tem um alto custo computacional e uma relativa incerteza na obtenção da solução. Isto se dá devido ao refino grosseiro da malha na direção da espessura onde normalmente é usados apenas um nó, uma vez que os revestimentos são da ordem de μm e os substratos da ordem de centímetros.

Propostas de trabalhos futuros

A ferramenta matemática desenvolvida nesse trabalho permite a seu uso direto em:

- i) Problemas de estimativas de propriedades térmicas de pastilhas revestidas, identificando-se as propriedades do revestimento e do substrato.
- ii) Identificação da espessura de revestimento ou de tintas.
- iii) Obtenção da geração de calor em outros tipos de ferramenta como fresas ou brocas.
- iv) Aplicação da técnica no desenvolvimento de soluções analíticas da equação da bio-transfêrencia de calor uma vez que o tecido epiteliais tem várias camadas.
- v) Extensão da solução para multicamadas

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, C. M. de. *Avaliação do desgaste da ferramenta de meral duro revestida com TiN no fresamento do aço ABNT4140 laminado a quente e temperado/revenido*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia universidade católica de minas gerais, 2010.

ARMANDO, G.-M. *et al.* Analysis of the conjugate heat transfer in a multi-layer wall including an air layer. *Applied Thermal Engineering*, v. 30, p. 599–604, November 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2009.11.004>>.

BECK, J. *Heat conduction using Green's functions*. [S.l.]: Hemisphere Pub. Corp., 1992. (in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences). ISBN 9781560320968.

BECK, J. V.; BLACKWELL, B.; CLAIR, C. R. S. *Inverse Heat Conduction: Ill-posed Problems*. New York, NY: Wiley-Interscience, 1995.

BECK, J. V. *et al.* Intrinsic verification in linear heat conduction. *Heat and Mass Transfer*, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.01.045>>.

BECK, J. V. *et al.* Intrinsic verification methods in linear heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 49, n. 17-18, p. 2984 – 2994, 2006. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V3H-4JT3S7P-2/2/44d8680d67af1424d7b50c040785cff>>.

BELGHAZI, H.; GANAOU, M. E.; LABBE, J. Analytical solution of unsteady heat conduction in a two-layered material in imperfect contact subjected to a moving heat source. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 49, p. 311–318, September 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2009.06.006>>.

BRITO, R. F. *et al.* Análise térmica em ferramenta de metal duro revestida. *CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA DE FABRICAÇÃO*, 2009.

BRITO R.F.; CARVALHO, S. R. L. e. S. S. M. M. Experimental investigation of thermal aspects in a cutting tool using comsol and inverse problem. *Applied Thermal Engineering*, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2015.03.083>>.

CARR, N. G. M. E. J. Semi-analytical solution of multilayer diffusion problems with time-varying boundary conditions and general interface conditions. *Applied Mathematics and Computation*, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.03.095>>.

COLE, K. D. *et al.* *Heat Conduction Using Green's Functions*. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2010. (Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences). ISBN 9781439813546.

DU, F.; LOVELL, M. R.; WU, T. W. Boundary element method analysis of temperature fields in coated cutting tools. *Solids and Structures*, v. 38, p. 4557–4570, July 2000. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00291-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00291-2)>.

FERNANDES, A. P. *Funções de Green: soluções analíticas aplicadas a problemas inversos em condução de calor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2009. Disponível em: <<http://www.bdtd.ufu.br>>.

FERNANDES, A. P. *Função transferência analítica aplicada a solução de problemas inversos em condução de calor*. [S.l.], 2013.

FERREIRA, D. C. *Análise Numérica da Influência Térmica dos Revestimentos em Ferramentas de Corte Usando o Programa COMSOL e Problemas Inversos*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ, 2017.

GARCIA-GONZALES WILFREDO MOSCOSO-KINGSLEY, B. M. J. C. Rake face temperature when machining with coated cutting tools. *Procedia Manufacturing*, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.promfg.2016.08.066>>.

GRZESIK, W. Experimental investigation of the cutting temperature when turning with coated indexable inserts. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 1999. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(98\)00044-3](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(98)00044-3)>.

GRZESIK, W. Determination of temperature distribution in the cutting zone using hybrid analytical-fem technique. *Machine tools and Manufacture*, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2005.07.009>>.

HAJI-SHEIK, A.; BECK, J. V. An efficient method of computing eigenvalues in heat conduction. *Numerical heat transfer. Part B, fundamentals*, v. 38, n. 2, p. 133–156, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/104077900750034643>>.

HAJI-SHEIKH, A. *Two-layer slab with perfect contact between layers; with zero in heat flux at one boundary, zero heat flux at other boundary*. 2014. Disponível em: <<http://exact.unl.edu/>>.

HAJI-SHEIKH, A.; BECK, J. Temperature solution in multi-dimensional multi-layer bodies. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 45, n. 9, p. 1865 – 1877, 2002. ISSN 0017-9310. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(01\)00279-4](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(01)00279-4)>.

KAYHANI, M.; NOROUZI, M.; DELOUEI, A. A. A general analytical solution for heat conduction in cylindrical multilayer composite laminates. *Elsevier*, v. 52, p. 73–82, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2011.09.002>>.

- LI CHENLIN LI, Z. X.-X. T. X. Analytical study of transient thermo-mechanical responses of dual-layer skin tissue with variable thermal material properties. *International Journal of Thermal Sciences*, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2017.11.002>>.
- LIMA, F. R. S. *Modelagem Tridimensional de Problemas Inversos em Condução de Calor: Aplicações em Processos de Usinagem*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2001.
- LING, H. P. X.; CHERIKURI, R. G.; KEANINI, A. A modified sequential function specification finite element-based method for parabolic inverse heat conduction problems. *Comput. Mech.*, v. 36, n. 2, p. 117–128, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00466-004-0644-3>>.
- MACHADO, A. R. *et al. Teoria da usinagem dos materiais*. Blucher: [s.n.], 2011.
- MAILLET, D.; MOYNE, C.; RÉMEY, B. Effect of a thin layer on the measurement of the thermal diffusivity of a material by a flash method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 43, p. 4057–4060, November 1999. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(00\)00020-X](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(00)00020-X)>.
- MISHRA KIRK D. DOLAN, J. V. B. F. O. D. K. A novel instrument for rapid measurement of temperature-dependent thermal properties of conduction-heated food up to 140 °C. *Journal of Food Engineering*, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2016.06.028>>.
- M. LEI M. LI, P. C. Moving boundary analysis in heat conduction with multilayer composites by finite block method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.01.009>>.
- NAJAFI, H.; WOODBURY, K. A.; BECK, J. V. A filter based solution for inverse heat conduction problems in multi-layer mediums. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 83, p. 710–720, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.12.055>>.
- NAJAFI, H.; WOODBURY, K. A.; BECK, J. V. A filter based solution for inverse heat conduction problems in multi-layer mediums. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 83, p. 710–720, 2015.
- NAJAFI, H.; WOODBURY, K. A.; BECK, J. V. Real time solution for inverse heat conduction problems in a two-dimensional plate with multiple heat fluxes at the surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 91, p. 1148–1156, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.08.020>>.
- NIESLONY, W. G. . M. B. . P. Finite difference analysis of the thermal behaviour of coated tools in orthogonal cutting of steels. *Machine tools and Manufacture*, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2004.05.008>>.

NIESLONY W. GRZESIK, P. L. W. H. P. Fem-based modelling of the influence of thermophysical properties of work and cutting tool materials on the process performance. *Elsevier*, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.procir.2013.06.056>>.

NOROUZI, M. *et al.* A general exact analytical solution for anisotropic non-axisymmetric heat conduction in composite cylindrical shells. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 93, p. 41–56, February 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.072>>.

OLIVEIRA, G. C. de. *Soluções Analíticas Multicamada: Aplicação em Ferramentas Revestidas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2015.

ÖZİŞİK, M. N. *Heat Conduction*. Nova Iorque, NY: Wiley, 1993. (Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471532569.

RADULESCU, R.; KAPOOR, S. G. An analytical model for prediction of tool temperature fields during continuous and interrupted cutting. *Journal of engineering for industry*, v. 116, n. 2, p. 135–143, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.2901923>>.

RECH, J.; BATTAGLIA, J.; MOISAN, A. Thermal influence of cutting tool coatings. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 159, n. 1, p. 119–124, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2004.04.414>>.

R.RODRIGO, M.; L.WORTHY, A. A solution of multilayer diffusion problems via the laplace transform. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.042>>.

SHAN XU ZHANG, B. S. D. Z. C. An improved analytical model of cutting temperature in orthogonal cutting of Ti6Al4V. *Chinese Society of Aeronautics and Astronautics Beihang University*, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cja.2018.12.001>>.

SINGH, S.; JAIN, P. K.; RIZWAN-UDDIN. Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction. *Elsevier*, v. 47, p. 261–273, March 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2007.01.031>>.

SINGH, S.; JAIN, P. K.; RIZWAN-UDDIN. Finite integral transform method to solve asymmetric heat conduction in a multilayer annulus with time-dependent boundary conditions. *Nuclear Engineering and Design*, v. 241, p. 144–154, October 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2010.10.010>>.

TUAN *et al.* An input estimation approach to on-line two-dimensional inverse heat conduction problems. *Numerical heat transfer. Part B fundamentals*, v. 29, p. 345–363, 1996.

T.WEIIY; S.LI. An inverse boundary problem for one-dimensional heat equation with a multilayer domain. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2008.04.006>>.

WU, S.-K.; CHU, H.-S. Inverse determination of surface temperature in thin-films/substrate systems with interface thermal resistance. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, p. 3507–3515, July 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.01.022>>.

ZHANG, Z. L. S. An analytical model for transient temperature distributions in coated carbide cutting tools. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.08.001>>.

Anexo A

Solução Analítica 3D de única camada

A solução analítica do problema homogêneo 3D de única camada em termos de funções de Green é dada por:

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) = & \int_0^L \int_0^{y_W} \int_0^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0)\theta(x', y', z', 0)dx'dy'dz' \\ & + \frac{\alpha_1}{k_1} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} q(\tau)G(x, y, z, t|x', W, z', \tau)dx'dz'd\tau \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Anexo B

Equações transcendental para demais condições de contorno

A tabela (B.1) apresenta as equações transcendental para demais condições de contorno desenvolvida por (HAJI-SHEIKH; BECK, 2002).

Tabela B.1: Equação transcendental para demais condições de contorno.

Caso	Autocondição
X11	$\cot(\bar{\eta}) = - \left(\frac{c-b}{b}\right) \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right) \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \cot(\bar{\gamma})$
X12	$\tan(\bar{\eta}) = - \left(\frac{c-b}{b}\right) \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right) \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \cot(\bar{\gamma})$
X13	$\frac{\bar{\eta}\tan(\bar{\eta})-B_{i2}}{(B_{i2})\tan(\bar{\eta})+\bar{\eta}} = \left(\frac{c-b}{b}\right) \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right) \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \cot(\bar{\gamma})$
X21	$\cot(\bar{\eta}) = \left(\frac{c-b}{b}\right) \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right) \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \tan(\bar{\gamma})$
X22	$\tan(\bar{\eta}) = - \left(\frac{c-b}{b}\right) \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right) \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \tan(\bar{\gamma})$
X23	$\frac{\bar{\eta}\tan(\bar{\eta})-B_{i2}}{(B_{i2})\tan(\bar{\eta})+\bar{\eta}} = - \left(\frac{c-b}{b}\right) \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right) \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \tan(\bar{\gamma})$
X31	$\cot(\bar{\eta}) = \left(\frac{c-b}{b}\right) \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right) \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \frac{\bar{\gamma}\tan(\bar{\gamma})-B_{i1}}{B_{i1}\tan(\bar{\gamma})+\bar{\gamma}}$
X32	$\tan(\bar{\eta}) = - \left(\frac{c-b}{b}\right) \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right) \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \frac{\bar{\gamma}\tan(\bar{\gamma})-B_{i1}}{B_{i1}\tan(\bar{\gamma})+\bar{\gamma}}$
X33	$\frac{\bar{\eta}\tan(\bar{\eta})-B_{i2}}{B_{i2}\tan(\bar{\eta})+\bar{\eta}} = - \left(\frac{c-b}{b}\right) \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right) \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \frac{\bar{\gamma}\tan(\bar{\gamma})-B_{i1}}{B_{i1}\tan(\bar{\gamma})+\bar{\gamma}}$