UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE CIÊNCIAS INTEGRADAS DO PONTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – MESTRADO PROFISSIONAL

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS NO GEOGEBRA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

LUCAS RAFAEL PEREIRA SILVA

Orientadora: Profª Drª Odaléa Aparecida Viana

Uberlândia – MG, 2018.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE CIÊNCIAS INTEGRADAS DO PONTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – MESTRADO PROFISSIONAL

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS NO GEOGEBRA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

LUCAS RAFAEL PEREIRA SILVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª Drª Odaléa Aparecida Viana

Uberlândia – MG, 2018.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

S586c 2018

Silva, Lucas Rafael Pereira, 1989-
Congruência de triângulos no geogebra [recurso eletrônico] : uma proposta didática para o ensino fundamental / Lucas Rafael Pereira Silva. - 2018.

Orientadora: Odaléa Aparecida Viana.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.575
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Ciência - Estudo e ensino. 2. Ensino auxiliado por computador. 3. Geometria - Formação de professores. 4. Geometria (Ensino fundamental) - Estudo e ensino. I. Viana, Odaléa Aparecida, (Orient.) II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

Gloria Aparecida - CRB-6/2047

Ata da defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO junto ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional da Universidade Federal de Uberlândia.

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional/16-2018 PPGECM

Data: 06 de abril de 2018

Discente: Lucas Rafael Pereira Silva, matrícula 11512ECM008

Título do Trabalho: "CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS NO GEOGEBRA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL".

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática

Às nove horas do dia seis de abril do ano de dois mil e dezoito, na sala de videoconferência do *campus* Pontal da Universidade Federal de Uberlândia, reuniu-se a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, assim composta: Professores Doutores: Odaléa Aparecida Viana (orientadora)/UFU; Leandro de Oliveira Souza/UFU; Nelson Antônio Pirola/UNESP-Bauru. Ressalta-se que o Prof. Dr. Nelson Antônio Pirola participou da banca via webconferência da cidade de Bauru – SP e o aluno e os outros membros da banca participaram *in loco*. Iniciando os trabalhos a presidente da mesa apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir, a senhora presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu os conceitos finais. Em face do resultado obtido, a Banca Examinadora considerou o candidato aprovado. Esta defesa de Dissertação de Mestrado Profissional é parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre. O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU. Nada mais havendo a tratar, foram encerrados os trabalhos às doze horas. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Odaléa Viana
Profa. Dra. Odaléa Aparecida Viana
UFU

LSouza
Prof. Dr. Leandro de Oliveira Souza
UFU

Via webconferência
Prof. Dr. Nelson Antônio Pirola
UNESP-Bauru

***Dedico** este trabalho a minha mãe Divina Aparecida Pereira por acreditar em meu potencial e me incentivar durante toda minha trajetória acadêmica e profissional.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a **Deus**, que sempre me guardou com tanto carinho sendo meu fiel companheiro durante minha vida, especialmente nesta trajetória.

A minha mãe **Divina Aparecida Pereira**, que bravamente investiu e acreditou em mim e em minha carreira acadêmica.

A minha orientadora, **Profa. Dra. Odaléa Aparecida Viana**, por ter acreditado em meu potencial, acompanhando minha trajetória acadêmica, profissional e me acolhendo enquanto aluno e também orientando. Sinto-me privilegiado!

Ao **Serviço Público Federal** por todo o investimento em minha formação.

A **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior** (CAPES) e ao **Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência** (PIBID), por fomentar minha formação inicial.

A **Universidade Federal de Uberlândia** e a **Faculdade de Ciências Integradas do Pontal** pela oportunidade de poder adquirir novos conhecimentos.

Aos membros da banca, **Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola** e **Prof. Dr. Leandro de Oliveira Souza**, pelas contribuições neste trabalho.

Aos professores da Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, que não pouparam esforços para me ensinar e orientar com sabedoria.

Ao **Prof. Dr. Vlademir Marim**, que sempre me incentivou e propiciou a minha participação no Subprojeto Matemática do Pontal (PIBID/UFU).

Ao **Prof. Dr. Mauro Machado Vieira**, do Curso de Pedagogia da FACIP/UFU, por me orientar em projetos pessoais, incentivando minha dedicação acadêmica.

Ao **Prof. Dr. Odilon José de Oliveira Neto**, do Curso de Administração da FACIP/UFU, por me apoiar, incentivar e orientar.

Aos meus dois pais **Rogério Édson Ribeiro** e **Edvaldo Pereira da Silva**, que me ensinaram a crescer e confiar em meu potencial.

Ao meu irmão **Renato Pereira Silva**, por compartilhar as dificuldades e conquistas. Só Deus sabe o que passamos!

A **Jéssica Silva Souza**, noiva, companheira e amiga que sempre acreditou nos meus sonhos.

Ao **Dr. Frederico Homem da Silva**, médico da Unidade de Terapia Intensiva e médico assistente do serviço de Eletrofisiologia e Marcapasso do Hospital de Clínicas da Universidade Federal de Uberlândia. **Muito obrigado pelo sucesso em minha cirurgia e por exercer a arte de cuidar da vida com respeito, amor e dignidade!**

A **todos os meus colegas do Curso de Graduação em Matemática**, em especial à primeira turma do Curso de Graduação em Matemática da FACIP/UFU. Vocês são inesquecíveis!

A **todos os meus colegas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional**.

MUITO OBRIGADO A TODOS!

RESUMO

Este trabalho, realizado no âmbito do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, teve como objetivo analisar as contribuições de uma proposta de ensino na forma de uma sequência didática direcionada a alunos do oitavo ano do ensino fundamental para a aprendizagem do conceito de congruência, em especial dos casos de congruência de triângulos. Especificamente, pretendeu-se (a) descrever as atividades e sua aplicação na sala de aula; (b) analisar a potencialidade significativa da sequência didática tendo por base a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel; (c) evidenciar níveis do pensamento geométrico que foram propostos por Van Hiele e habilidades geométricas elencadas por Alan Hoffer e (d) identificar contribuições da utilização do software GeoGebra quanto ao desenvolvimento das habilidades geométricas e ao avanço nos níveis de formação conceitual. A sequência didática era formada por seis atividades e aplicada a trinta alunos de uma escola pública no decorrer de vinte aulas regulares, caracterizando a chamada pesquisa do professor. O material analisado tinha características para ser considerado como potencialmente significativo. Foram identificados os níveis 1, 2 e 3 de pensamento geométrico requeridos nas atividades bem como elencadas as habilidades de visualização, desenho, verbal, desenho, lógica e aplicações. Considerou-se um possível avanço no nível de formação conceitual dos alunos quando estabeleceram as condições relativas aos casos de congruência, em especial utilizando o *software* GeoGebra, considerado como elemento motivador. O autor enaltece a importância da pesquisa na sua formação continuada e espera que o produto educacional gerado alcance outros professores e contribua tanto para o processo de ensino e aprendizagem de geometria em sala de aula, quanto para outras pesquisas no âmbito da Educação Matemática.

Palavras-chave: congruência de triângulos; aprendizagem significativa; formação conceitual; habilidades geométricas; *software* GeoGebra.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO

Ao voltar nossa atenção para os estudos acerca do processo de ensino e aprendizagem em matemática, nos deparamos com várias questões ainda não resolvidas, conforme indicam, por exemplo, os trabalhos de Oliveira (2008) e Zacarias (2008). As relações professor-aluno, a mobilização da família e do aluno em relação à escola, a autonomia e autoconfiança em relação ao aprendizado da matemática, o conhecimento da matemática escolar enquanto saber procedimental, conceitual e atitudinal, além da percepção predominante em relação ao que seja aprender matemática, são questões citadas pelos autores que podem ou não explicar o fracasso escolar dos alunos em matemática.

Além de levantar possíveis hipóteses explicativas para o fenômeno da aprendizagem, trabalhos em educação matemática buscam indicar os saberes matemáticos que necessitariam ser mais bem articulados para que os objetivos do ensino dessa disciplina sejam alcançados.

Neste sentido, faz-se necessário um olhar sobre o papel dos conteúdos escolares que podem ser considerados como essenciais para o desenvolvimento do aluno (COLL et al, 1998). Entre esses, destacam-se os conteúdos de geometria no ensino básico, nosso foco de estudo.

Nossa experiência de alguns anos como professor de matemática no ensino fundamental permite fazer considerações acerca da complexidade do processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos. Concorda-se com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) quando o documento ressalta que a geometria desempenha um papel fundamental no currículo na medida em que se possibilita ao aluno o desenvolvimento de um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

No segundo ciclo do ensino fundamental, especificamente no 8º ano, um dos temas cuja aprendizagem parece exemplificar o avanço no desenvolvimento do pensamento geométrico é a congruência de polígonos; em especial, destaca-se o entendimento dos casos de congruência de triângulos.

A Base Nacional Comum Curricular da Educação Básica[1] - BNCC (BRASIL, 2017), cuja finalidade é orientar os sistemas na elaboração de suas propostas curriculares, indica que, no 8° ano do Ensino Fundamental, a noção de congruência pode ser estudada como um caso especial de semelhança, retomando ideias aprendidas anteriormente. O documento enfatiza que o estudante deve ser capaz de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes e de aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, o que contribui para a formação do raciocínio dedutivo, um dos objetivos do ensino da matemática.

Entre os poucos trabalhos que discutem possibilidades para o ensino de congruência, destaca-se o de Leivas e Fogaça (2017) que se apoia na ideia de transformações geométricas no plano (translação e rotação) e o de Patkin & Plaksin (2011) que sugere tarefas de investigação e de discussão sobre as condições “suficientes e insuficientes” dos casos de congruência de triângulos.

Já Leung et al. (2014), consideram um desafio ensinar os alunos a utilizarem a dedução lógica para provar proposições geométricas e usam como exemplo o que ocorre durante uma simples verificação de casos de congruência de triângulos. Esta dificuldade estaria diretamente relacionada à aprendizagem de conceitos abstratos. Os autores ponderam acerca da importância da formação do raciocínio lógico matemático e da necessidade de ensinar o aluno a utilizar argumentos lógicos para a aprendizagem de conceitos de geometria.

A formação de conceitos é um dos temas de pesquisa da área da Educação Matemática. Proença e Pirola (2009) realçam a importância de o aluno dominar os atributos definidores e conseguir dar exemplos e não exemplos do conceito de modo a prevenir erros de supergeneralização[2]. De acordo com a teoria de Van Hiele

---

[1] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi homologada em 20 de dezembro de 2017, em Brasília, pelo Ministro da Educação José Mendonça Filho. O documento, discutido e debatido desde 2014 apresenta três versões sendo a última aprovada pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) no dia 15 de dezembro de 2017, após passar por audiências públicas pelo país. A BNCC servirá de referência para a construção dos currículos de todas as escolas da rede pública com implementação preferencialmente em 2019 e até o prazo máximo do ano letivo de 2020.

[2] Os exemplos são as figuras que contêm os atributos definidores próprios de um conceito e os não-exemplos são figuras que não apresentam todos os atributos definidores contidos nos exemplos. O uso de exemplos e não-exemplos é de extrema importância para formar um conceito em cada um dos níveis cognitivos, uma vez que permitem que o aluno não subgeneralize (triângulos equiláteros são os únicos exemplos de triângulos), e previne erros de supergeneralização - como denominar de triângulo uma pirâmide que possui faces laterais triangulares (KLAUSMEIER & GOODWIN, 1977 *apud* PROENÇA & PIROLA, 2009).

(1986), os alunos, enquanto aprendem geometria, podem progredir numa hierarquia de formação conceitual que se dá em cinco níveis: desde o reconhecimento de figuras, passando pela análise de propriedades, dedução informal e formal até o rigor matemático. Pesquisas investigam os níveis de conceituação de alunos bem como sugerem metodologias que possam contribuir para o avanço do chamado pensamento geométrico (INOUE, 2004; MORACO, 2006; REZI, 2001; RODRIGUES, 2015; VIANA, 2000).

Outras pesquisas sugerem o desenvolvimento de habilidades consideradas importantes para a aprendizagem da geometria (DOBARRO & BRITO, 2010). Vários trabalhos buscam apoio na perspectiva de Alan Hoffer (1981) – que aponta as habilidades referentes à visualização, ao desenho, à lógica, à verbalização e à aplicação do conhecimento geométrico em outras áreas – como pode ser visto em Passos & Nacarato (2014).

Destacam-se os trabalhos que realçam a importância da ativação dos conhecimentos prévios com vistas a relacionar as ideias anteriores às informações novas recebidas pelo aluno (AQUINO & ALVES, 2015; SILVA, BOIAGO & VIANA, 2012; VIANA, 2011) – o que toma como pressuposto a teoria da aprendizagem significativa proposta por David Ausubel. Conforme Ausubel (2000), além dos conhecimentos prévios e da motivação para aprender, uma condição para a atribuição de significados refere-se ao material de aprendizagem apresentados aos alunos – que deve ser potencialmente significativo, isto é, ser organizado numa sequência lógica e numa linguagem adequada.

Acrescenta-se, entre outras metodologias e recursos didáticos propostos por educadores matemáticos, o destaque dado à utilização de *softwares* de geometria dinâmica. Conforme pondera Borba (2010), os *softwares* geométricos possibilitam ao aluno enxergar as diferentes variações de uma construção geométrica, além de inferir propriedades das figuras, verificar teoremas e chegar a generalizações.

Os PCN (BRASIL, 1998) também chamam a atenção sobre a existência de alguns *softwares* que podem ser integrados às atividades de ensino da geometria. Dentre os *softwares* em evidência no âmbito da Educação Matemática encontra-se o

GeoGebra[3], um *software* livre de matemática dinâmica que reúne elementos de geometria, álgebra e cálculo, conforme pode ser visto em vários trabalhos, como os de Edwards e Jones (2006), Hohenwarter e Jones (2007), Lovis e Franco (2013), Meier e Gravina (2012), Moran e Franco (2014), Oliveira e Araújo (2012), Pereira (2012), entre outros.

A experiência do autor deste trabalho também como professor de informática permite concordar com os autores quando estes sugerem que o dinamismo dos softwares possibilita a realização de atividades investigativas e isto motiva os alunos para a aprendizagem da matemática. A motivação do aluno é uma das condições necessárias para a aprendizagem significativa, de acordo com Ausubel (2000).

Assim, questionou-se se uma proposta didática direcionada a alunos do ensino fundamental e contendo atividades de construção de figuras no GeoGebra contribuiria para a aprendizagem significativa do conceito de congruência de triângulos, em especial dos casos de congruência.

A escolha desse tema deu-se devido à insatisfação deste professor com a abordagem usual feita pelos livros didáticos: os casos de congruência são, na maioria das vezes, apresentados sob a forma de proposições substantivas – as quais devem ser compreendidas e lembradas pelos alunos – sem problematizar nem promover discussões sobre o assunto. Considerando o tema congruência propício para identificar, analisar e acompanhar o raciocínio geométrico, questionou-se como poderiam ser encaminhadas atividades que promovessem aprendizagem significativa e também favorecessem o desenvolvimento de habilidades e o avanço nos níveis do pensamento em geometria.

Este autor também teve experiência de organização e de aplicação de sequências didáticas enquanto licenciando do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), subprojeto Matemática Pontal da Universidade Federal de Uberlândia. As sequências didáticas conceituais eram planejadas e aplicadas junto a alunos das escolas parceiras do programa e tinham o "objetivo de promover a aprendizagem significativa de conceitos (como foco) e também de procedimentos relativos a um conteúdo especifico, além de favorecer atitudes favoráveis à matemática" (VIANA, 2015c, p.78).

---

[3] O GeoGebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade Austríaca de Salzburg em 2001.

Assim, com o intuito de contribuir com as pesquisas, as reflexões e as compreensões existentes acerca da aprendizagem da geometria, ressalta-se a pergunta norteadora desta pesquisa, fruto da breve revisão bibliográfica e dos estudos teóricos realizados e, principalmente, da experiência do autor enquanto professor do ensino básico: **como uma proposta de ensino na forma de uma sequência didática direcionada a alunos do oitavo ano do ensino fundamental pode contribuir para a aprendizagem do conceito de congruência, em especial dos casos de congruência de triângulos?**

De maneira mais específica, têm-se as perguntas:

Quais as características da sequência didática que permitem considerá-la como um material de aprendizagem potencialmente significativo?

Que níveis do pensamento geométrico e que habilidades geométricas podem ser evidenciados nas atividades constantes da sequência didática?

Quais as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra nas atividades propostas quanto ao desenvolvimento das habilidades geométricas e ao avanço nos níveis de formação conceitual?

Pretendeu-se responder a estas perguntas planejando e aplicando a sequência didática junto a alunos do 8º ano do ensino fundamental, na escola em que este autor atuava como professor de matemática. A sequência didática, após análise e discussão teórica, deve originar um produto educacional no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, conforme o regulamento do programa (UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA, 2013) e as orientações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES (BRASIL, 2009). Este será formado pela sequência didática acompanhada de orientações ao professor e material de apoio.

O trabalho aqui apresentado caracteriza-se como pesquisa do professor, que visa, entre outros objetivos “compreender a natureza dos fenômenos educativos em razão da necessidade de aprendizado dos alunos” (FAGUNDES, 2016, p.295). No âmbito do mestrado profissionalizante, a pesquisa visa ainda o desenvolvimento e aperfeiçoamento profissional, priorizando as ações direcionadas para a intervenção nas práticas de sala de aula e a elaboração de um produto educacional (GOMES, 2013).

Após aplicação, análises e discussão da proposta aqui apresentada, espera-se poder contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da geometria com a apresentação do produto educacional oriundo deste trabalho.

CAPÍTULO I: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Acreditando que, para se avançar nas discussões sobre uma determinada área do conhecimento científico, faz-se necessário um olhar sobre as pesquisas desenvolvidas sobre o tema e, entendendo que, este processo de busca é capaz de impulsionar uma reflexão sobre a relevância e as contribuições do trabalho pretendido no âmbito da Educação Matemática, considera-se de suma importância a realização de uma revisão da literatura. Esta também pode ser considerada primordial para analisar até que ponto a pesquisa e o produto educacional construído a partir dela avançam em discussões, reflexões e contribuições, em relação a outros de mesma natureza.

Segundo Alves (1992), a revisão de literatura tem como objetivo específico orientar o caminho a ser trilhado pelo pesquisador, desde a definição do problema, a elaboração de referenciais teóricos e metodológicos até a interpretação dos resultados.

Neste sentido, realizou-se uma pesquisa de dissertações, de teses e também de artigos científicos oriundos de discussões realizadas por diversos autores sobre as temáticas relacionadas ao presente trabalho.[4]

Inicialmente optou-se por levantar trabalhos que discutiam sobre congruência de triângulos. Em uma pesquisa minudente foi possível perceber a carência de pesquisas no âmbito nacional sobre o tema; entretanto, na bibliografia internacional, podemos destacar os trabalhos de Patkin & Plaksin (2011) e de Leung et al. (2014).

Neste sentido, Patkin & Plaksin (2011) sugeriram a realização de uma tarefa que trazia para a sala de aula a investigação e discussão sobre as condições “suficientes e insuficientes” dos casos de congruência de triângulos. O objetivo da tarefa era encontrar o número mínimo de componentes idênticos em dois triângulos, o que seria suficiente para assegurar a congruência. As autoras, referindo-se aos estudos de Van Hiele (1986), destacaram o modelo teórico referente ao pensamento e à formação conceitual, ponderando que a aquisição e compreensão dos conceitos geométricos devem acontecer de forma gradual. Além disso, referindo-se aos níveis

---

[4] A pesquisa foi realizada utilizando-se o Google Acadêmico e bibliotecas digitais de universidades do país.

de formação conceitual definidos por Van Hiele, as autoras consideraram importante a distinção entre conceito, definição do conceito de congruência e as condições necessárias e suficientes. Fundamentaram-se em Vinner (1991) para destacar que os alunos devem ser ajudados a chegar ao estágio em que possam diferenciar a imagem do conceito e definição de conceito. Na opinião das autoras, seria importante variar os métodos de ensino em geometria e integrar exemplos, métodos e questões que possam ser consideradas não convencionais, em que o aluno é incentivado a fazer perguntas e investigações. Patkin & Plaksin (2011) ponderaram que na aquisição gradual é possível reduzir as dificuldades e os erros dos alunos em geometria.

Utilizando um estudo de caso para investigar a competência didática e o conhecimento dos professores sobre o conceito de congruência de triângulos, Leung et al. (2014), consideraram ser um desafio ensinar os alunos a utilizarem a dedução lógica para provar proposições geométricas. Segundo os autores, isso ocorre mesmo durante uma simples verificação de casos de congruência de triângulos. Esta dificuldade estaria diretamente relacionada à aprendizagem de conceitos abstratos. Neste sentido, os autores ponderaram que os alunos de sua pesquisa não haviam aprendido a justificar uma afirmação a partir de um argumento lógico-dedutivo, o que comprometeu a aprendizagem da geometria.

Já o trabalho de Leivas e Fogaça (2017) analisa como alunos de uma turma de Geometria I, de um curso de Licenciatura em Matemática, constroem o conceito de congruência de figuras geométricas planas, por meio de registros de representação semiótica definidos por Duval (2009) e geometria dinâmica (utilizando o *software* GeoGebra).

A fim de apurar a definição de congruência de figuras planas, os autores propõem atividades que procuram efetuar tratamentos (dentro do registro figural) e conversão do registro figural para o discursivo (verbal e escrito). Além disso, transita-se entre operações 2D (rotações e translações) e 3D (reflexões).

Foram elaboradas quatro unidades didáticas. Nestas, segundo os autores, foi possível identificar: várias incompreensões vinculadas às operações discursivas quando os alunos deveriam descrever quais movimentos realizaram com as figuras a fim de obter a congruência ou não entre elas; a dificuldade dos estudantes na visualização e diferenciação de operações (rotações, translações e reflexões) e dificuldades na conversão do registro figural para o registro discursivo. Já nas atividades de laboratório com a utilização do *software* GeoGebra os autores trabalharam com os casos de congruência de triângulo sendo possível identificar tratamentos corretos e dificuldades no processo de conversão dos registros.

Desta forma, Leivas e Fogaça (2017) salientam a importância da realização de atividades com os alunos que estimulem a habilidade visual, sendo esta considerada pelos mesmos como essencial para a aprendizagem de conceitos geométricos. Além disso, ressaltam a importância de atividades que trabalhem com as conversões dos registros estimulando a habilidade verbal dos alunos.

Como o presente trabalho visa apresentar e analisar uma proposta aplicada a alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, objetivando a formação conceitual dos casos de congruência de triângulos, fez-se necessário um olhar sobre trabalhos referentes ao tema congruência de polígonos.

Com relação ao conceito de polígono, o estudo realizado por Proença e Pirola (2009), apresenta uma investigação sobre o conhecimento de 253 alunos do Ensino Médio. Neste foram destacadas dificuldades dos sujeitos em identificar três atributos definidores de polígonos: figura plana, segmentos de reta e figura simples. Com base em Klausmeier e Goodwin (1977), foi enfatizado que por meio dos atributos definidores os estudantes teriam a possibilidade de realizar inclusão de classes (componente básico no nível classificatório) de forma adequada e também identificar relações subordinadas e supra-ordenadas (componente básico do nível formal). Salientou ainda que a discussão dos atributos definidores em aula expositiva parece não ser suficiente para a aprendizagem, mas que o uso de materiais manipuláveis e de *softwares* de geometria dinâmica – entre outras metodologias e recursos didáticos – poderia contribuir para a aquisição do conceito de polígonos.

Ainda no campo da formação conceitual, podemos destacar a investigação realizada por Pirola et al. (2004) que buscou analisar quais os atributos definidores que alguns alunos do ensino fundamental mais identificavam em relação ao triângulo e ao paralelogramo. Em um estudo de caso com 20 alunos, escolhidos aleatoriamente, das quatro últimas séries do ensino fundamental de uma escola da Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo, foi possível perceber que os estudantes apresentavam dificuldade em definir o conceito como entidade pública. Com relação ao conceito de triângulo os autores salientaram que, apesar desta dificuldade, os sujeitos não apresentavam muitas dificuldades na descriminação de exemplos e não exemplos. Fundamentando-se em Klausmeier e Goodwin (1977), os autores destacaram ainda a importância do estudo sobre a formação de conceitos, podendo este proporcionar aos educadores a compreensão sobre sua aquisição, sobre o processamento das informações na estrutura cognitiva, bem como o conhecimento sobre retenção e a transferência de conceitos e princípios em situações-problema.

Com o objetivo de promover a aprendizagem significativa de conceitos (como foco) e também de procedimentos relativos a um conteúdo especifico, além de favorecer atitudes favoráveis à matemática, Viana (2015c) apresenta exemplos da atividade intitulada 'sequência didáticas conceituais' planejadas e aplicadas nas escolas parceiras do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), subprojeto Matemática Pontal da Universidade Federal de Uberlândia. Trabalhos como os de Silva, Boiago & Viana (2012), Silva, Miranda & Viana (2013), relatam e refletem sobre atividades vivenciadas no âmbito do PIBID com foco no ensino e aprendizagem significativa de conceitos referentes à geometria.

O trabalho de Silva, Miranda & Viana (2013) apresenta uma proposta de sequência didática com modelagem geométrica destinada a alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de escolas do PIBID discutida nas reuniões entre licenciandos, professora supervisora e coordenadora do Subprojeto Matemática/Pontal. Esta propõe a abordagem de conceitos como os de elementos da circunferência, posições relativas de circunferências, posições relativas de reta e circunferência, utilizando como ferramenta metodológica a modelagem matemática. A proposta apresenta como sugestão as seguintes fases: escolha do desenho (problema a ser modelado); esboço do desenho, buscando identificar conceitos geométricos aprendidos; identificação das propriedades das figuras envolvidas, das posições relativas, paralelismo, perpendicularismo, etc.; cálculos das medidas de ângulos e segmentos; reprodução do desenho coma utilização do *software* GeoGebra e a 'arte final' em que são escolhidas cores e contornos para a figura. Os autores ponderam que a proposta, ao relacionar a matemática com figuras, slogans ou imagens do cotidiano há a intenção de se construir "uma ponte" entre matemática-realidade-aprendizagem, possibilitando um elo entre essas perspectivas.

Já o estudo de Silva, Boiago & Viana (2012) apresenta uma sequência didática planejada, executada, desenvolvida e refletida a partir do conhecimento prévio apresentado por alunos do sexto ano do Ensino Fundamental referente ao conceito de quadriláteros. A sequência foi desenvolvida em uma escola municipal da cidade de Ituiutaba – MG em quatro turmas (aproximadamente 140 alunos) tendo como principal ação metodológica a classificação e reclassificação de polígonos (convexos e não convexos, regulares e não regulares) e não-polígonos, com o objetivo de elevação dos níveis de formação de conceitos. A confecção dos materiais manipuláveis para a aplicação da sequência didática tentou satisfazer as ponderações de Klausmeier e Goodwin (1977) acerca da importância dos exemplos e não exemplos no processo de formação conceitual. Os autores ponderam ter notado nos alunos um desenvolvimento conceitual após a realização das atividades propostas na sequência, do nível concreto para o nível identidade, pois ao final passaram a realizar generalizações de duas ou mais formas de um mesmo objeto. Por fim, ponderam que a sequência didática atende, dentro do possível, às condições para que ocorra um processo de aprendizagem significativa referente ao conceito de quadriláteros.

Tendo também como pressuposto teórico a aprendizagem significativa de David Ausubel, a pesquisa de Aquino & Alves (2015), desenvolvida com alunos do 3º ano do Ensino Médio visa abordar a área e volume de prismas. As autoras aplicaram inicialmente um questionário de sondagem, a fim de identificar os conhecimentos prévios dos alunos com relação aos elementos de um prisma, quanto à definição e cálculo de área de polígonos, nome e elementos do tetraedro, possíveis planificações para o tetraedro e identificação de quais poliedros regulares os alunos conheciam. Por meio deste foi possível verificar dificuldades relevantes com relação a estes conhecimentos bem como a falta de interesse dos alunos pelo conteúdo de geometria.

Neste sentido, propôs-se uma metodologia para o desenvolvimento de habilidades visuais utilizando, dentre outros recursos, o *software* POLY. Na atividade de laboratório os alunos exploraram incialmente o *software* de forma livre e, em seguida, identificaram elementos de prismas de base triangular, pentagonal, hexagonal, octogonal e decagonal. Nesta foi possível identificar um considerável aumento de interesse dos alunos, maior interação entre os mesmos, avanços com relação aos elementos e ao conceito de prismas.

Segundo Aquino & Alves (2015) a teoria de Ausubel ofereceu uma fundamental contribuição orientando o trabalho e auxiliando na identificação dos conhecimentos prévios dos alunos, sendo possível observar a forte presença da aprendizagem mecânica, dificuldades de significação e consequentemente desinteresse ocasionado, segundo as autoras, pela falta de relação do conteúdo com a realidade. Neste sentido, consideraram que a elaboração de metodologias diferentes das tradicionais oferecem aos alunos a percepção de quanto à matemática faz parte da vida do ser humano e de que também há formas de aprendizagem bem distintas. Sobre a utilização do *software*, as autoras consideram que este desenvolveu papel fundamental na proposta despertando a curiosidade dos alunos e o esclarecimento de dúvidas com relação aos elementos de sólidos geométricos, favorecendo avanços com relação às habilidades visuais dos sujeitos.

Em relação à formação conceitual em geometria encontramos, na literatura nacional e internacional, autores como Viana (2000), Inoue (2004), Moraco (2006), Rodrigues (2015) e Villiers (2010) que se fundamentaram na teoria de Van Hiele (1986) procurando explicar o modo de pensar dos alunos quando aprendem geometria. A teoria trata de níveis hierárquicos de formação conceitual e de desenvolvimento de habilidades geométricas.

Viana (2000) analisou em seu trabalho o conhecimento geométrico sobre figuras espaciais de 377 alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental do Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério (CEFAM). Além dos sujeitos serem avaliados com relação ao desempenho, foram classificados de acordo com os graus de aquisição dentro dos níveis de conceituação propostos por Van Hiele. Segundo a autora, os resultados obtidos por meio de testes estatísticos mostraram que influenciaram no desempenho o fato de gostar de geometria e de matemática, a procedência dos alunos, a avaliação que fizeram do ensino de geometria e sua série. Entretanto, muitos dos alunos não conseguiram fazer uma leitura geométrica formal do material, estando em um nível de conhecimento que não os possibilitava formalizar relações entre as propriedades das principais figuras espaciais utilizadas, ou seja, foi verificada a baixa aquisição dos Níveis 1 (reconhecimento e nomeação das figuras) e 2 (análise de propriedades), estabelecidas a partir da porcentagem de acertos das questões selecionadas para representar cada nível. A autora concluiu que a simples classificação de alunos em níveis de conceituação a partir de um questionário não é adequada, pois podem existir diferenças de desempenho dentro de cada nível, dependendo da habilidade requerida pelas questões avaliativas propostas.

Já Inoue (2004) descreve o processo de formação do conceito de quadriláteros no decorrer da realização de uma sequência de atividades, verificando a possibilidade de avanços no desenvolvimento do pensamento geométrico de 28 alunos do 7º Ano do Ensino Fundamental. As atividades consistiram na apresentação, de forma gradual, de figuras tridimensionais e materiais manipuláveis; na abordagem de um grande número de exemplos; na construção de figuras; na confecção de modelos com varetas e argila; na classificação de figuras a partir de suas propriedades e na evolução gradual da linguagem específica da geometria. A autora conclui que houve evolução no pensamento geométrico, mas pondera que os alunos parecem oscilar entre os níveis durante a aplicação da sequência.

O trabalho de Moraco (2006) realizou uma análise sobre os conhecimentos prévios e dificuldades apresentadas por alunos do Ensino Médio em tarefas envolvendo conceitos geométricos como figura plana e não plana, cubos, pirâmides, etc. Foram sujeitos da pesquisa 81 alunos de três séries de uma escola pública do Estado de São Paulo. Inicialmente aplicou-se um questionário para conhecimento de alguns dados dos alunos e a metodologia abordada foi a descritiva com abordagem qualitativa. Neste trabalho, a análise dos resultados mostrou um desempenho muito baixo na avaliação envolvendo conceitos geométricos, sendo que a dificuldade na visualização e na representação geométrica, componentes do pensamento geométrico, constituiu-se em um fator que contribuiu para o desempenho insatisfatório dos participantes da pesquisa. Segundo a autora, fundamentando-se em Klausmeier (1977), a ordem de construção dos conceitos geométricos trabalhados enquanto entidade pública difere da ordem de construção dos conceitos enquanto construto mental. Além disso, a autora chamou a atenção para a importância do material utilizado pelos alunos e professores que, segundo Van Hiele, deveria propiciar ao aluno, condições para ativar conhecimentos prévios buscando respostas às questões propostas. Novamente neste estudo os participantes encontraram dificuldades logo no primeiro nível de Van Hiele, que é o visual ou reconhecimento.

Rodrigues (2015) apresenta uma proposta para o ensino de geometria, especificamente dos conceitos relativos aos triângulos com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Esta também, tomando como pressuposto teórico a teoria de Van Hiele, apresenta uma sequência didática que objetiva o desenvolvimento dos alunos quanto à classificação dos triângulos, condição de existência, medidas dos lados e ângulos, soma dos ângulos internos, teorema do ângulo externo e casos de congruência.

Por meio de um teste, conforme sugerido Van Hiele (1986), que procura determinar o nível de raciocínio geométrico dos alunos, a autora propôs 15 questões distribuídas em três blocos, cada um deles correspondente a um dos níveis de formação conceitual. Neste foi possível identificar que, dos 35 sujeitos, 17 deles não atingiram nem o nível 1 (básico), 18 atingiram o nível 1 (básico) e nenhum aluno atingiu níveis superiores. Elaborou-se também um teste sobre triângulos em que foi possível identificar interesse dos alunos em resolver as questões, entretanto, muita dificuldade na resolução destas, salientando o baixo conhecimento dos sujeitos para este tópico.

Neste sentido, realizou-se uma intervenção pedagógica com atividades que buscavam favorecer o desenvolvimento de habilidades e competências, objetivando promover o avanço na aprendizagem dos conceitos sobre triângulos pelos sujeitos da pesquisa.

A metodologia utilizada priorizou o uso de materiais manipuláveis iniciando com a análise de obras de arte, nas quais continham triângulos, e montagem de figuras com peças do Tangram[5], visando o desenvolvimento do nível 1 (básico). Trabalhou-se com a propriedade importante da rigidez triangular com a utilização de palitos e com fotos tiradas pelos próprios alunos. A desigualdade triangular foi trabalhada com a manipulação de palitos e massa modelar, bem como por meio de construções com régua e compasso. Utilizou-se o geoplano para obter a classificação dos triângulos. A congruência de triângulos foi trabalhada por meio da justaposição de figuras e com o auxílio de régua e transferidor para a medição de lados e ângulos, evidenciando o desenvolvimento das habilidades visuais e um avanço para o nível 2 (análise) de Van Hiele. Com o objetivo de que os alunos deduzissem a soma dos ângulos internos de um triângulo utilizou-se o *software* GeoGebra. Já para classificar os triângulos quanto aos ângulos desenvolveu-se a construção do Triângulo de Sierpinski. E, por fim, o trabalho com os ângulos externos foi desenvolvido por meio da observação e relação entre os ângulos internos e o ângulo raso (180º) formado pelo prolongamento dos lados de triângulos.

---

[5] O Tangram é um quebra-cabeças chinês formado por 7 peças. Essas peças são 2 triângulos grandes, 2 pequenos, 1 médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Com essas peças podemos formar várias figuras, utilizando todas elas sem sobrepô-las.

Após o desenvolvimento das atividades e a reaplicação do teste sobre triângulos, Rodrigues (2015) considerou que o uso de materiais manipuláveis aliado a uma sequência didática embasada na teoria de Van Hiele contribuiu de forma significativa para a aprendizagem dos conceitos relativos aos triângulos no 8º ano do Ensino Fundamental. A autora destaca ainda que o modelo de aprendizagem baseado na teoria de Van Hiele foi de extrema importância, à medida que auxiliou na análise do nível de raciocínio geométrico dos sujeitos da pesquisa e norteou a elaboração de atividades, as quais estavam de acordo com as fases de aprendizagem da referida teoria.

Buscando apresentar uma retrospectiva das pesquisas sobre a Teoria de Van Hiele nos últimos 30 anos, Villiers (2010) destaca e ilustra alguns aspectos importantes sobre as implicações teóricas para a concepção de atividades de aprendizagem em contextos de geometria dinâmica. Neste trabalho, em sua revisão de literatura, o autor apresenta como aspectos da teoria tradicionalmente são abordados de forma inadequada por professores. São destacados, por exemplo, as atividades informais nos Níveis 1 e 2 que deveriam fornecer as 'subestruturas conceituais' adequadas para as atividades dos níveis seguintes; o uso de definições formais fornecidas por livros aos alunos em níveis iniciais e que deveriam ser desenvolvidas apenas no Nível 3; a tendência das definições espontâneas dos alunos nos Níveis 1 e 2 a serem particionais (uma vez que no ensino tradicional as crianças são, em sua maioria, apresentadas a retângulos, losangos, paralelogramos, entre outros, como objetos geométricos e estáticos); construções geométricas inadequadas para alunos no Nível 1 (por exemplo, não poderiam construir um quadrado se não conhecem suas propriedades e que algumas destas são suficientes e outas não). Por fim, Villiers (2010) considera que parece que um dos principais problemas pendentes de pesquisa sobre a teoria de Van Hiele é referente ao raciocínio hierárquico (inclusões de classes). Além disso, pondera que mais pesquisas são necessárias sobre como o uso de *softwares* de geometria dinâmica pode aprimorar, ou prejudicar, o desenvolvimento do raciocínio geométrico, citando, por exemplo, a pesquisa de Idris (2009) *apud* Villiers (2010), que relata que o uso de *softwares* de geometria dinâmica com um grupo experimental de alunos Malaios os auxiliou a atingir níveis mais altos de Van Hiele do que um grupo de controle que recebeu um ensino tradicional.

Borba (2010) considera que a utilização de recursos tecnológicos nos processos educacionais possibilita a compreensão de conceitos matemáticos que requerem múltiplas representações. Os *softwares* geométricos possibilitam ao aluno enxergar as diferentes variações de uma construção geométrica – o que contribuiria para desenvolver habilidades de visualização –, além de inferir propriedades, verificar teoremas e chegar a generalizações. Além disso, afirma que a investigação matemática é uma das principais características dos *softwares* de acordo com os professores que utilizam esta metodologia em sala de aula.

Estudos nesta área indicam que possivelmente as novas tecnologias de acesso às informações podem resultar em tendências educacionais inovadoras, já que promovem o desenvolvimento de competências e habilidade exigidas pela sociedade moderna.

Dentre os *softwares* matemáticos em evidência no âmbito da Educação Matemática encontra-se o GeoGebra. Trata-se de um *software* matemático livre, de matemática dinâmica, que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo, desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade Austríaca de Salzburg em 2001.

Baseando-se na teoria da aprendizagem significativa, Barros, Mognon e Kato (2012), apresentam um estudo sobre o uso do GeoGebra nas aulas de matemática. As autoras apontaram que o *software* pode ser utilizado nas aulas de matemática como um organizador prévio dos conteúdos a serem trabalhados, pois permite melhor visualizar o significado dos conceitos, auxiliando no processo de aprendizagem significativa. Além disso, o uso deste *software* pode aprimorar o reconhecimento de várias representações de um conceito matemático – auxiliando no esclarecimento da ideia de que um conceito pode ter diferentes representações – e auxiliar na concentração e motivação dos alunos.

Cyrino e Baldini (2012) buscaram conhecer as discussões e perspectivas presentes em pesquisas brasileiras que tinham como foco o uso do *software* GeoGebra na formação de professores de Matemática, analisando os objetivos e as questões de investigação constantes em dissertações de mestrado (acadêmico e profissional) e teses de doutorado disponíveis no Banco de Dados da CAPES. Segundo as autoras, a utilização do GeoGebra como recurso nas aulas de matemática pode propiciar um ambiente favorável à construção de conceitos e ideias matemáticas. Entretanto, ponderam que é necessário que o professor explore o caráter dinâmico do *software*, propondo atividades que favoreçam o processo de investigação matemática pelos alunos.

Neste sentido, concordam com as ideias presentes em Valente (1999), afirmando não ser suficiente instrumentalizar o professor e o futuro professor com mais uma ferramenta; há necessidade de discussões nos cursos de formação (inicial e continuada) que promovam reflexões e análises sobre o uso desta ferramenta na concepção da aprendizagem significativa, considerando os conhecimentos prévios dos alunos e os aspectos históricos e sociais da evolução desse novo conhecimento.

Trabalhos como os de Viana & Boiago (2015a) e Viana & Boiago (2015b) buscam analisar processos cognitivos específicos da atividade geométrica advindos do uso do *software* GeoGebra em atividades de modelagem matemática e de desenho geométrico. Além de propor atividades de planificação, de construção de formas e de cálculo de área total de figuras, são analisadas as operações figurais por meio dos registros de representações semióticas produzidas pelos sujeitos participantes das pesquisas com base na teoria de Raymond Duval.

Viana e Boiago (2015b) apresentaram as fases da modelagem matemática de logotipos, identificaram as etapas do processo de solução de problemas, relacionando-as às fases da modelagem matemática e analisaram as representações produzidas por estudantes do ensino médio. O trabalho utilizou aportes teóricos da psicologia relativos ao processo de solução de problemas e às atividades cognitivas envolvidas na formação, tratamento e conversão dos registros de representação semiótica. As atividades foram desenvolvidas na forma de seis encontros de cinquenta minutos cada, realizados em horário extra turno regular, nas dependências de uma instituição pública de ensino e solicitavam a identificação e a construção de figuras no papel e também por meio do *software* GeoGebra. Os autores consideraram que a modelagem matemática realizada pelos alunos favoreceu a compreensão de alguns conceitos e procedimentos referentes à geometria plana básica, já que foram propiciadas condições para diversas formas de tratamento e conversão dos registros de representação semiótica, conforme perspectiva teórica de Raymond Duval.

Em trabalho similar, Viana & Boiago (2015a) analisaram, com base na teoria dos registros de representação semiótica de Raymound Duval, as construções figurais realizadas no *software* GeoGebra por alunos de ensino médio em atividades de desenho geométrico, identificando as operações mereológicas de reconfiguração e de desconstrução dimensional.

Os autores ponderam sobre a carência de pesquisas sobre o tema e a necessidade de se compreender o potencial semântico do *software* e os significados que emergem do seu uso, para que possa ser incorporado como recurso tecnológico nas aulas de matemática. A atividade de construção geométrica das figuras, quando feita na tela do GeoGebra, parece exigir dos alunos operações cognitivas que ultrapassam aquelas requeridas no desenho geométrico convencional, isto é, em que se solicita a construção de alguma figura ou de seus elementos a partir de informações sobre as unidades figurais. Por fim, os autores esperam contribuir para o entendimento de alguns processos cognitivos específicos da atividade geométrica, já que o GeoGebra permite interpretar e construir figuras envolvendo os diferentes tipos de apreensão em geometria e do modo fenomenológico de produção a partir do *software* em atividades voltadas para a formação de conceitos, princípios e relações que caracterizam o chamado raciocínio geométrico dos estudantes.

A breve revisão bibliográfica aqui realizada mostrou, assim como defendido por Alves (1992), sua importância. Por meio desta, pudemos, apesar de perceber a carência de trabalhos relacionados ao tema que se pretende investigar, elencar alguns aspectos que contribuíram para a elaboração do nosso estudo:

a) A formação dos conceitos em geometria é de natureza complexa e há necessidade de se trabalhar com atividades de identificação de atributos definidores e com muitos exemplos e não exemplos do conceito;
b) O entendimento das condições necessárias e suficientes para a congruência de triângulos parece exigir um nível de dedução informal e é necessário um trabalho que favoreça o desenvolvimento do nível de raciocínio geométrico do aluno;
c) Há diferentes habilidades que podem ser desenvolvidas na aprendizagem em geometria e estas estão relacionadas aos níveis de conceituação;
d) A organização do trabalho pedagógico na forma de sequências didáticas envolvendo vários recursos pode ser útil na formação de conceitos em geometria para alunos do ensino fundamental;
e) Para a aprendizagem significativa de conceitos geométricos é necessário organizar um material que garanta a ativação dos conhecimentos prévios, sendo importante o trabalho com a visualização e a manipulação de

materiais e também com a introdução gradual da linguagem relativa aos termos geométricos de modo a favorecer os mecanismos para que ocorra a atribuição de significados;

f) O *software* GeoGebra permite atividades investigativas e configura-se como um recurso importante para a aprendizagem da geometria.

CAPÍTULO II: ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA E ALGUMAS PERSPECTIVAS TEÓRICAS

2.1 A geometria no ensino básico

Vários autores estudam sobre os conteúdos escolares e seu papel nos objetivos educacionais. Destaca-se a perspectiva de Coll et al.(1998) que indicam que os conteúdos designam o conjunto de conhecimentos historicamente construídos e culturalmente organizados, cuja assimilação e apropriação pelos alunos é considerada essencial para o seu desenvolvimento e socialização.

Os conteúdos escolares são vistos como uma seleção de formas ou saberes culturais: conceitos, explicações, raciocínios, habilidades, linguagens, valores, crenças, sentimentos, atitudes, interesses, modelos de conduta etc. Além disso, sua assimilação é considerada essencial para a produção de desenvolvimento e uma socialização adequada dos alunos, onde esta assimilação requer uma ajuda específica. Ainda, na concepção da aprendizagem significativa a ideia é construir significados e atribuir sentido ao que se aprende (COLL et al., 1998).

Estes conteúdos escolares correspondem aos conteúdos conceituais que compreende os fatos, dados, conceitos e princípios; aos conteúdos procedimentais em que fazem parte os procedimentos, as técnicas e o saber fazer; e aos conteúdos atitudinais, que são as atitudes, valores e normas.

Os conteúdos escolares relativos à Matemática são elencados a partir dos objetivos dessa disciplina. No ensino básico, o Conteúdo Básico Comum – CBC (MINAS GERAIS, 2007) baseia-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e busca estabelecer os conhecimentos, as habilidades e competências a serem adquiridos pelos alunos na educação básica, bem como as metas a serem alcançadas pelos professores a cada ano. O documento indica esses objetivos: identificar os conhecimentos matemáticos como meios de compreender e transformar o mundo à sua volta; selecionar, organizar e produzir informações relevantes; resolver situações-problema, validando estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos; comunicar-se matematicamente;

estabelecer conexões entre conhecimentos de outras áreas; interagir com seus pares de forma cooperativa.

Já a proposta da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), recentemente elaborada e discutida no país e cuja finalidade é orientar os sistemas na elaboração de suas propostas curriculares, define quatro objetivos gerais para o Ensino Fundamental apresentando quatro eixos de formação: eixo 1 – letramentos e capacidade de aprender; eixo 2 – leitura do mundo natural e social; eixo 3 – ética e pensamento crítico e eixo 4 – solidariedade e sociabilidade. Destacam-se os objetivos gerais distribuídos nos quatros eixos: usar conhecimentos matemáticos para compreender o mundo à sua volta; desenvolver o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e a capacidade para criar/elaborar e resolver problemas; fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, sabendo selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avalia-las criticamente; estabelecer relações entre conceitos matemáticos; comunicar-se matematicamente; desenvolver a autoestima e a perseverança na busca de soluções, trabalhando coletivamente, respeitando o modo de pensar dos/as colegas, aprendendo com eles/as e usar tecnologias digitais no trabalho com conceitos matemáticos nas práticas sociocientíficas.

Os conceitos geométricos constituem uma parte importante do currículo de matemática de acordo com os PCN, uma vez que é por meio deles que o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento e habilidades que lhe permite compreender, descrever e representar formas presentes em seu cotidiano. Destacam-se alguns objetivos em relação ao ensino de geometria, para o terceiro ciclo do Ensino Fundamental (6º e 7º ano):

> [...] resolver situações-problemas de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulos, de paralelismo e de perpendicularismo, elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas; estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista; [...] transformação, ampliação e redução de figuras geométricas planas. (BRASIL, 1998, p. 64)

Já para o quarto ciclo (8º e 9º ano) destacam-se os objetivos:

> [...] interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano; produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas [...]; ampliar e aprofundar noções geométricas [...] para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais. (BRASIL, 1998, p.82)

Na proposta curricular do Conteúdo Básico Comum do estado de Minas Gerais não são apresentados os objetivos do ensino de geometria no Ensino Fundamental. Entretanto, a Base Nacional Curricular Comum, organiza estes objetivos por unidades de conhecimento do 6º ao 9º anos, justificando esta organização pela importância de uma visão do conjunto de objetos de uma mesma unidade, o que permite identificar as aprendizagens já realizadas pelo estudante em anos anteriores e reconhecer em que medida as aprendizagens a serem efetivadas no atual ano escolar se articula àquelas dos anos posteriores (BRASIL, 2017).

No 6º ano do Ensino Fundamental a proposta da BNCC destaca o trabalho com: a ideia de coordenadas cartesianas (plano cartesiano); as figuras geométricas (observação e construção com uso de materiais de desenho e/ou '*softwares'* de geometria dinâmica) compreendendo suas propriedades e suas relações e a articulação do trabalho com as figuras geométricas com a unidade de Grandezas e Medidas (atividades de cálculo de medida da área de figuras planas).

O estudo de figuras e seu reconhecimento como lugar geométrico, segundo o documento, deve ser iniciado no 7º ano, a partir da construção da circunferência e das primeiras noções de equidistância. Além disso, torna-se importante, segundo o documento, o trabalho com as transformações geométricas em um primeiro momento envolvendo construção e o reconhecimento de figuras obtidas por simetria, rotação e translação e, mais adiante, a construção de figuras obtidas por composições de transformações geométricas. É necessário ainda expandir e sistematizar o trabalho envolvendo semelhança de figuras planas em situações de ampliação e redução. No 7° ano, o estudante deve ser capaz de reconhecer a conservação dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes.

Na etapa posterior, ou seja, no 8º ano, a Base Nacional Curricular Comum destaca que a noção de congruência pode ser estudada como um caso especial de semelhança. Entretanto, chama a atenção que nesta etapa é importante que o estudante seja capaz de conhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes e que saiba aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, o que pode contribuir para a formação do raciocínio dedutivo, aplicando-se esses conhecimentos também a situações cotidianas como de propriedades dos quadriláteros.

Por fim, no 9º ano, o uso da propriedade envolvendo semelhança de figuras planas devido à conservação dos ângulos e à proporcionalidade entre os lados correspondentes é ampliado de modo a conduzir o estudante a compreender as condições necessárias e suficientes para obter triângulos semelhantes e utilizar a semelhança de triângulos para estabelecer as relações métricas no triângulo retângulo, incluindo o teorema de Pitágoras. Além disso, a BNCC considera que o desenvolvimento da habilidade de desenhar objetos em perspectiva deve ser iniciado no 9º ano, a partir do reconhecimento e da representação intuitiva de vistas ortogonais.

De forma geral, pudemos observar certa semelhança entre os objetivos do ensino de geometria ao compararmos os Parâmetros Curriculares Nacionais com a proposta da Base Nacional Comum Curricular. Podemos destacar, nesta pequena revisão sobre estes documentos, que um dos objetivos é o trabalho com os casos de congruência de triângulos. O quadro comparativo abaixo mostra as habilidades e competências a serem adquiridas pelos alunos no Ensino Fundamental em relação a este conteúdo de acordo com os PCN, CBC e BNCC.

Quadro 1. Habilidades e competências a serem adquiridas no Ensino Fundamental em relação ao tema congruência de triângulos segundo os PCN, CBC e BNCC.

	Etapa	**Habilidades**
PCN	**4º ciclo** **(8º e 9º Anos)**	➢ Desenvolver o conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície). ➢ Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
CBC	**8º Ano**	➢ Reconhecer triângulos congruentes a partir dos critérios de congruência. ➢ Resolver problemas que envolvam critérios de congruência de triângulos. ➢ Utilizar congruência de triângulos para descrever propriedades de quadriláteros: quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos.
BNCC	**8º Ano**	➢ Reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes e aplicar esse conhecimento

		em demonstrações simples, como de propriedades dos quadriláteros.

Portanto, como pôde ser observado, é conveniente, segundo as orientações dos três documentos, que o trabalho com os casos de congruência de triângulos ocorra com maior ênfase no 4º ciclo, compreendido entre 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. O presente trabalho propõe a exploração deste tema por meio de uma sequência de atividades a ser explorada neste ciclo, especificamente no 8º ano.

Convém esclarecer que são quatro os casos de congruência de triângulo. Utilizando as definições de Dolce & Pompeo (1993) tem-se:

1º Caso – LAL – se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes;

2º Caso – ALA – se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes;

3º Caso – LLL – se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes; 4º Caso – $\mathrm{LAA_O}$ – se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

Entretanto, foram selecionados para a sequência didática os três primeiros casos, pois a construção do 4º Caso ($\mathrm{LAA_O}$) por meio do *software* GeoGebra exigiria comandos mais avançados como, por exemplo, a construção de arcos capazes. Este caso foi trabalhado em aulas posteriores à aplicação da sequência.

2.2 A perspectiva ausubeliana de aprendizagem significativa

A teoria da aprendizagem significativa proposta pelo psicólogo norte-americano David Ausubel (1918-2008) foi uma das primeiras propostas psicoeducativas que tentam explicar a aprendizagem escolar e o ensino a partir de ideias distintas dos princípios comportamentalistas.

A teoria de Ausubel trata da aprendizagem produzida em um contexto educativo, ocupando-se dos processos de ensino-aprendizagem dos conceitos científicos a partir dos conceitos cotidianos. O autor analisa a situação escolar a partir de duas dimensões: uma referente ao tipo de aprendizagem realizada pelo aluno e a outra referente à estratégia de instrução planejada para estimular essa aprendizagem.

Segundo Ausubel (2000), os conceitos são definidos como sendo objetos, eventos, situações ou propriedades que possuem atributos comuns de critério comuns e que são representados por meio de algum símbolo ou signo. Diferem dos procedimentos que, conforme de Pozo (1998), são definidos como um conjunto de ações ordenadas, orientadas para a consecução de uma meta.

No âmbito escolar, Ausubel (2000) evidencia que a aprendizagem de conceitos deve acontecer de modo significativo. Este tipo de aprendizagem refere-se ao processo que permite que uma nova informação, ideia ou conceito se incorpore na estrutura cognitiva do sujeito se relacionando com um aspecto relevante de sua estrutura cognitiva. A nova informação pode interagir com uma estrutura de conhecimento específica, onde existem os chamados conceitos subsunçores. Para promover essa aprendizagem, o professor pode propor situações que favoreçam a ativação dos conhecimentos prévios dos estudantes acerca do material a ser estudado.

Neste processo, se existir pouca associação com conceitos relevantes, a aprendizagem pode ser chamada de mecânica ou memorística. Neste sentido, Ausubel faz uma distinção entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica. A diferença existente entre elas é que na mecânica os conteúdos estão relacionados entre si de uma maneira arbitrária, carecendo de significado para o sujeito que está aprendendo; já na significativa, o mesmo estabelece relações amplas e não aleatórias.

Segundo Ausubel (2000), existem diferenças entre as condições necessárias para aprendizagem significativa e a mecânica. Na aprendizagem significativa há necessidade do sujeito empreender um esforço deliberado para relacionar os novos conceitos com os já existentes na sua estrutura cognitiva. Na aprendizagem mecânica o aluno não realiza nenhum esforço para integrar novos conceitos e procedimentos aos existentes em sua estrutura cognitiva.

O autor salienta que estes dois tipos de aprendizagem (significativa e mecânica) estão em extremos opostos de um mesmo contínuo, ou seja, é possível que uma aprendizagem inicialmente mecânica passe, progressivamente, à significativa.

Além desse contínuo há outro distinto, que se refere às estratégias que promovem a aprendizagem, tendo em uma extremidade a aprendizagem por descoberta e em outra extremidade a aprendizagem por recepção. Na aprendizagem receptiva o novo conhecimento é apresentado ao aprendiz e o sujeito que aprende tem que apenas relacionar a nova informação ativa e significativamente a aspectos relevantes de sua estrutura cognitiva e retê-la para relacioná-la ou reconhecê-la posteriormente ou utilizá-la como base para uma nova aprendizagem. Já na aprendizagem por descoberta o conteúdo principal a ser aprendido deve ser descoberto de maneira independente pelo sujeito antes de relacionar-se com conhecimentos de sua estrutura cognitiva.

O que definirá o significado da aprendizagem será a forma como o aprendiz realizará, ou não, a ancoragem das novas ideias àquelas existentes em sua estrutura cognitiva. Assim, tanto a aprendizagem receptiva como a aprendizagem por descoberta podem ser significativa ou mecânica.

A teoria também indica dois conjuntos de condições necessárias para que a aprendizagem significativa ocorra: condições relativas ao material e aquelas relativas ao aluno (ou sujeito que aprende). As condições relativas ao material exige que este tenha uma organização interna (estrutura lógica ou conceitual explícita), vocabulário e terminologias adaptados ao aluno. Já as condições relativas ao aluno referem-se à necessidade que este tenha os conhecimentos prévios sobre o assunto a ser aprendido e a predisposição favorável para a compreensão (motivação, atitudes, crenças de autoeficácia, etc.) – o que leva ao emprego do esforço cognitivo para estabelecer as relações e atribuir significado e sentido ao que se aprende.

Assim, a aprendizagem pode ser por recepção significativa quando há a aquisição de novos significados a partir do material de aprendizagem apresentado. Para que seja potencialmente significativo este deve estar relacionado de forma não arbritrária e não literal com estruturas apropriadas e relevantes. A estrutura cognitiva do aprendiz deve conter ideias âncoras relevantes, com as quais ele possa relacionar o novo material.

Estas ideias já existentes na estrutura cognitiva do sujeito – que podem ser um conceito, uma proposição uma imagem, um símbolo, enfim um conhecimento específico, com pelo menos alguma clareza, estabilidade e diferenciação – são definidos por Ausubel (2000) como subsunçores. Neste sentido, a estrutura cognitiva seria então formada por um conjunto de subsunçores e suas inter-relações.

Assim, a interação entre os novos significados potenciais e os subsunçores é que dá origem a significados verdadeiros ou psicológicos. Entretanto, a interação cognitiva que se espera na aprendizagem significativa é a não-arbitrária e a não-literal. A primeira significa que a interação não se dá com qualquer conhecimento prévio que exista na estrutura cognitiva, mas com conhecimentos especificamente relevantes. Na não-literal espera-se que o aprendiz não faça uma internalização literalmente (apenas simbólica) mas sim matizada com significados pessoais.

Ausubel (2000) apresenta os tipos de aprendizagem significativa: a aprendizagem representacional, a de conceitos e a de proposições.

A aprendizagem representacional é aquela em que símbolos arbitrários passam a representar seus referentes objetos, eventos, conceitos. A aprendizagem conceitual é também uma aprendizagem de representações, pois conceitos também são representados por símbolos isolados (palavras-conceito, nome). Entretanto, conceitos são genéricos, categoriais, representam regularidades em objetos, eventos, fenômenos que apresentam diversidades ao longo de distintas dimensões que compartilham certos atributos e características. Por fim, a aprendizagem proposicional trata de captar o significado de ideias expressas em forma de proposições.

Para ocorrer a assimilação, um conceito (ou proposição) potencialmente significativo deve ser assimilado sob uma ideia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, por processos de diferenciação e integração, definidos por Ausubel (2000) como diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. Na primeira, o progresso de assimilação acontece de forma progressista, em que o sujeito consegue diferenciar os significados das ideias. Já na reconciliação integrativa o sujeito busca integrar os significados, delineando as diferenças e as similaridades entre ideias relacionadas. Assim, toda aprendizagem que resultar em reconciliação integrativa resultará em diferenciação progressista adicional de conceitos e proposições.

A nova informação pode se vincular a aspectos preexistentes na estrutura cognitiva por meio de três formas de assimilação: aprendizagem subordinada, aprendizagem superordenada e aprendizagem combinatória.

Na aprendizagem subordinada a nova ideia que está sendo aprendida se encontra hierarquicamente subordinada a uma preexistente na estrutura cognitiva, podendo haver a inclusão derivativa e a inclusão correlativa. Segundo Viana (2011), na primeira a nova informação *a* é vinculada à ideia estabelecida *A* e representa um exemplo específico ou ilustrativo. Não se mudam os atributos do critério do conceito *A*, mas reconhecem-se novos exemplos como relevantes. Na inclusão correlativa a nova informação *x* é vinculada à ideia *X*, porém é uma modificação, uma elaboração, uma qualificação ou uma delimitação de *X.*

Já na aprendizagem superordenada existem ideias já estabelecidas (*a1, a2, a3*) que passam a ser reconhecidas como exemplos mais específicos da ideia nova mais geral *A.* Esta ideia supraordenada *A* é definida por um novo conjunto de atributos de critérios que abrangem as ideias subordinadas anteriores.

Por fim, na aprendizagem combinatória a ideia nova *A* relaciona-se com as ideias já existentes *B, C* e *D*, porém não é mais inclusiva nem mais específica que *B, C*, e *D*, ou seja, não existe uma relação hierárquica entre elas. Assim, considera-se, neste caso, que a ideia nova *A* possui alguns atributos de critério em comum com as ideias preexistentes, sendo possível que a nova incorporação de novos conceitos no mesmo nível hierárquico possa culminar na necessidade de diferenciá-los ou integrá-los dentro de um novo conceito mais geral.

A teoria de Ausubel (2000) enfatiza a importância dos conhecimentos prévios, uma vez que estes influenciam o processo de aprendizagem, desempenhando o papel de ideia âncora para a atribuição de novos sentidos. Além disso, segundo Pozo (1998), os conhecimentos prévios estes são construções pessoais, bastante estáveis e resistentes a mudanças e devem ser ativados para que aconteça a compreensão dos conceitos. Neste sentido, para diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos pode-se utilizar questionários, situações-problema, entrevista individual/coletiva. Este diagnóstico pode facilitar a organização do material e auxiliar as argumentações em sala de aula.

Finalmente, pode-se concluir que a aprendizagem significativa não é sinônimo de aprendizagem de material significativo, pois este é apenas *potencialmente* significativo. Neste sentido, se não houver um mecanismo de aprendizagem significativa, o aluno pode aprender o material por memorização apenas. Ausubel (2000) afirma que, para serem identificados a estrutura lógica e os mecanismos de aprendizagem significativa, o material de aprendizagem deve atender a dois princípios norteadores, já expostos anteriormente: (a) a disponibilidade, a estabilidade e a clareza de ideias ancoradas e especificamente relevantes na estrutura cognitiva do aprendiz e (b) a capacidade para a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora das ideias para a assimilação de conceitos e proposições.

Apesar de se considerar a complexidade na identificação dos princípios norteadores de um material didático em uma situação real de aprendizagem, estes foram adotados para as análises propostas neste trabalho.

2.3 O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico

O modelo de Van Hiele (1986) procura explicar o modo de pensar dos alunos quando aprendem geometria. A teoria trata de níveis hierárquicos de formação conceitual e de desenvolvimento de habilidades geométricas, sendo utilizada tanto para avaliar a aprendizagem dos alunos nesse conteúdo, como para orientar a prática pedagógica do professor.

Os estudos de Van Hiele (1986) tiveram início com as próprias dificuldades que o autor enfrentou enquanto estudante; na época, o ensino de geometria era basicamente formado por demonstrações e axiomas que, quando não sendo entendidos, acabavam sendo decorados pela maioria dos estudantes.

A teoria sobre o ensino e aprendizagem da geometria – desenvolvida na Holanda, em meados dos anos 50, por Pierre van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele-Geldof – descrevia características do processo de pensamento, estando fundamentada, segundo Hamazaki (2004, p.3), em três pilares: gradual, global e construtivo. Gradual porque considerava que o raciocínio, a intuição e a linguagem geométrica deveriam ser obtidos gradualmente. Global, porque as propriedades e as figuras não seriam abstrações isoladas, mas sim inter-relacionadas. E, por fim, construtivo, pois não pressupunha simples transmissão de conhecimento e sim um trabalho em que o aluno possa construir seus próprios conceitos.

Van Hiele (1986) construiu, assim, o modelo de pensamento ou de formação conceitual que consiste em cinco níveis de compreensão: “visualização” (ou reconhecimento), “análise”, “dedução informal” (ou ordenação, ou síntese, ou abstração), “dedução formal” e “rigor”, sugerindo que os alunos avancem nesta sequência hierárquica no processo de aprendizagem em geometria.

O primeiro nível é chamado por alguns autores de Nível 0 e por outros de Nível 1, dependendo da literatura. No presente trabalho, consideraremos a sequência hierárquica dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, de acordo com o modelo de Van Hiele, nomeando-os de Nível 1 até o Nível 5.

O Nível 1 de Van Hiele, segundo Crowley (1994, p.2), é o nível básico em que os alunos reconhecem os conceitos geométricos como entidades totais, não sendo identificadas as suas partes ou suas propriedades. Por exemplo, neste nível o aluno pode reconhecer um dado, chamá-lo de cubo, mas não é capaz de reconhecer as seis faces quadradas.

Jaime e Gutiérrez (1990) resumem algumas características desse tipo de pensamento: percepção das figuras geométricas em sua totalidade, de maneira global, como se fossem unidades, e possível inclusão de atributos irrelevantes nas descrições que são feitas; percepção das figuras como objetos individuais, ou seja, não capacidade para generalizar as características reconhecidas em uma figura a outras de sua mesma classe; descrição dos aspectos físicos das figuras; os reconhecimentos, diferenciações ou classificações de figuras que são realizados se baseiam em semelhanças ou diferenças físicas globais entre elas.

No Nível 2, da Análise, os alunos passam a identificar as características das figuras, reconhecendo-as por meio de análise de algumas propriedades. Por exemplo, neste nível o aluno seria capaz de perceber os lados opostos e, possivelmente, até que as diagonais de um retângulo são congruentes, mas não notaria como os retângulos se relacionam com os quadrados ou com os triângulos retângulos (CROWLEY, 1994, p.3). Em outras palavras, o aluno não é capaz de explicar relações entre propriedades, não vê inter-relações entre as figuras e não entende as definições.

Ainda neste nível, pode-se dizer que o aluno: percebe que as figuras geométricas são formadas por partes ou elementos e que tem propriedades matemáticas; pode descrever as partes que formam uma figura e enunciar suas propriedades, embora de uma maneira informal; pode generalizar propriedades a partir de uma experimentação; não é capaz de relacionar umas propriedades com outras, não conseguindo realizar classificações lógicas de figuras baseando-se em suas propriedades ou elementos (JAIME & GUTIÉRREZ, 1990).

Neste sentido, o Nível 2 é o primeiro que oferece o raciocínio matemático, pois nesta fase os alunos são capazes de descobrir e generalizar propriedades (a partir da manipulação e da observação necessariamente); ressalta que esta capacidade de generalização torna-se limitada, pois os alunos usarão as propriedades como se fossem independentes entre si – por exemplo, não relacionarão a existência de ângulos retos num retângulo com a perpendicularidade ou paralelismo. O aluno dá mais importância à existência de algumas propriedades diferenciadas nas figuras que à existência de propriedades comuns.

Já no Nível 3, da Ordenação, os alunos são capazes de reconhecer propriedades dentro de figuras. Por exemplo, num quadrilátero, eles podem reconhecer e concluir que, se os lados opostos são paralelos, então necessariamente os ângulos opostos são iguais. Podem também reconhecer propriedades entre as figuras: um quadrado é reconhecido como um retângulo porque tem todas as propriedades de um retângulo. Entretanto, nesse nível o aluno pode não ser capaz de explicar porque as diagonais de um retângulo são congruentes.

Assim, Jaime e Gutiérrez (1990), conclui que os alunos neste nível: apresentam a capacidade de raciocínio matemático formal, entendendo que algumas propriedades decorrem de outras e descobrindo estas implicações; podem classificar logicamente as diferentes famílias de figuras a partir de suas propriedades ou relações já conhecidas; podem descrever uma figura de maneira formal, dando definições matematicamente corretas; compreendem passos sucessivos individuais de um raciocínio lógico formal, mas os veem de forma isolada por não compreenderem a necessidade de um encadeamento desses passos, não entendendo também a estrutura de uma demonstração.

Com relação ao Nível 4 (dedução), Crowley (1994, p.4) e Hoffer (1981) relatam que neste nível o aluno passa a compreender o significado de dedução como uma ferramenta para estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático; é capaz de distinguir uma afirmação e sua recíproca, de construir demonstrações, além de saber o papel de axiomas, postulados, teoremas e demonstrações.

Finalmente, no Nível 5 (rigor), Crowley (1994, p.4) afirma é possível entender geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes. Entretanto, Nasser (1990) citado por Viana (2000), adverte que esse nível mais avançado raramente é alcançado por alunos do Ensino Médio.

Vários teóricos afirmam que o modelo de Van Hiele pode ser uma espécie de avaliador do pensamento geométrico dos alunos, podendo ser utilizado pelos professores para verificar o progresso dos níveis de formação conceitual.

Apesar de se considerar a complexidade de diagnóstico desses níveis, as características aqui expostas serviram de base para as análises propostas neste trabalho.

2.3.1 As fases do aprendizado na perspectiva de Van Hiele.

O modelo de Van Hiele sugere, segundo Crowley (1994, p.6), que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida que da idade ou da maturidade. Portanto, o conteúdo e o material a ser utilizado – bem como a metodologia e a organização da sequência de atividades – devem se constituir como pontos fundamentais da intervenção pedagógica. Nesse sentido, com a intenção de orientar os professores na elaboração de atividades que possibilitem os alunos a alcançar os níveis, Van Hiele considerou cinco etapas: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração.

Na etapa inicial, a Fase 1 (interrogação), faz-se necessária uma conversa entre professor e alunos e o desenvolvimento de atividades envolvendo os objetos de estudo[6] do respectivo nível. Segundo Hoffer (1981) citado por Crowley (1994, p.6), fazem-se observações, levantam-se questões e introduz-se um vocabulário específico do nível. O objetivo dessas atividades é a identificação, por parte do professor, dos conhecimentos prévios dos alunos sobre o tópico e também a identificação, por parte dos alunos, em que direção os estudos avançarão.

Na Fase 2, a da orientação dirigida, segundo Crowley (1994, p.6), os alunos exploram o assunto por meio de uma sequência ordenada pelo professor. Tais atividades permitirão revelar gradualmente aos alunos as estruturas do material.

---

[6] Os objetos de estudos variam de acordo com os níveis. Assim, no Nível 1, os objetos são as figuras (exemplo: paralelogramos); no Nível 2, são as propriedades da figuras (exemplo: lados paralelos); no Nível 3, são afirmações que relacionam propriedades (exemplo, paralelismo); no Nível 4, são os teoremas ou sequências parciais de afirmações (exemplo, se um quadrilátero é um paralelogramo, então suas diagonais se encontram no seu ponto médio); no Nível 5, são propriedades que analisam os postulados e teoremas (exemplo: paralelismo de retas faz parte da geometria euclidiana).

Na fase seguinte, a da Explicitação, os alunos expressam suas visões sobre as estruturas que foram observadas; cabe ao professor orientar os alunos para que eles utilizem a linguagem adequada.

Segundo Crowley (1994, p.7), na Fase 4, da orientação livre, o aluno vê-se em tarefas mais complexas, com muitos passos, que podem ser concluídas de diversas maneiras. Ainda, segundo Hoffer (1981) citado por Crowley (1994, p.7), nesta fase tornam-se explícitas outras relações entre os objetos de estudo.

Por fim, na Fase 5, da integração, segundo Crowley (1994, p.7), os alunos reveem e sumarizam o que aprenderam. Ao término desta fase, os alunos provavelmente teriam construído uma nova rede de relações e alcançariam um novo nível de pensamento, substituindo o antigo, estando prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte.

Viana (2000) pondera que, com exceção da última fase, as outras podem ocorrer em diversas ordens e até simultaneamente.

Neste trabalho, as fases de aprendizado orientaram as atividades planejadas para sequência didática, objeto de estudo desta investigação.

2.4 As habilidades geométricas

O modelo de Van Hiele de pensamento geométrico apresenta, na descrição de suas características, alguns verbos que, de certa forma, indicam uma relação à forma procedimental de aplicação dos conceitos. Estes procedimentos em geometria podem ser chamados de habilidades geométricas e podem demonstrar, ao menos em parte, os conceitos adquiridos.

No campo das habilidades geométricas, Hoffer (1981) estabeleceu cinco habilidades básicas: visual, verbal, gráfica, lógica e aplicações; o autor também descreve cinco níveis para o desenvolvimento delas. No nível básico (reconhecimento) considera-se a habilidade visual a mais requisitada; no segundo nível, talvez haja a predominância da verbal, uma vez que a análise requer que os alunos descrevam propriedades; nos níveis seguintes (ordenação, dedução e rigor) a habilidade mais evidente seria a lógica, utilizada para classificar figuras e deduzir teoremas.

Cabe ressaltar que, dependendo da dimensão[7] dada ao ensino de geometria algumas habilidades dos alunos podem se desenvolver mais do que outras. Além disso, em concordância com as ideias de Hoffer (1981), acredita-se que o ensino de geometria no Ensino Fundamental e Médio deveria proporcionar, em suas diversas instâncias, oportunidades para que todas as habilidades fossem desenvolvidas pelos alunos.

A habilidade visual está ligada à capacidade de interpretar informações a partir de figuras, de formar e manipular imagens mentais. Com essa habilidade, o aluno poderia reconhecer figuras diferentes de um desenho, estabelecer propriedades comuns de diferentes tipos de figuras e até deduzir informações a partir de uma figura. Poderia, por exemplo, realizar rotações mentais de polígonos a fim de identificar visualmente a congruência entre eles, imaginar secções em cubos etc.

Sobre a habilidade visual, Hoffer (1981) destacou que os aspectos visuais da geometria serviam primariamente como uma ferramenta para provas. Entretanto, apesar do contexto cronológico em que as ideias de Hoffer foram publicadas, é comum, atualmente, nas avaliações de larga escala como o Exame Nacional do Ensino Médio e a Prova Brasil, nos depararmos com questões que solicitam, por exemplo, a identificação da planificação correta de um sólido geométrico, entre outas planificações apresentadas, o que demandaria habilidade visual do estudante (VIANA, 2000, 2014,2015d).

Já a habilidade verbal se refere ao uso do vocabulário presente na geometria como postulados, definições precisas, propriedades de figuras e relações entre figuras. Segundo Hoffer (1981) alguns alunos têm dificuldade considerável quando estão fazendo a descrição de um conceito. Além disso, frequentemente expressam ideias de maneiras imprecisas que destoam das dos professores e textos. Neste sentido, o trabalho com esta habilidade pode ser realizado partindo de análises de

---

[7] As dimensões, de acordo com Usiskin (1994) são as diferentes maneiras de se considerar a geometria. Em uma dimensão 1, a geometria seria vista como o estudo da visualização, do desenho e da construção de figuras (o desenvolvimento de conceitos seria baseado principalmente nas habilidades visual e gráfica). Já em uma dimensão 2, a geometria seria encarada como estudo do mundo real, físico (a formação e a aplicação de conceitos poderia acontecer ao explorar formas da natureza, por exemplo). Na dimensão 3 a geometria seria um veículo para representar conceitos matemáticos, ou outros, cuja origem não é visual. Por fim, a dimensão 4, trata-se da geometria como exemplo de um sistema matemático (sistema dedutivo), e assim, ideias de lógica seriam os elementos de ensino da geometria.

propriedades como, por exemplo, enunciar as propriedades do retângulo e obter uma definição breve e precisa para o mesmo.

Sobre a habilidade gráfica, Hoffer (1981) destaca que a mesma está intimamente relacionada com a formação do conceito geométrico. Para o aluno desenhar uma figura é necessário – além do manuseio de instrumentos de desenho como régua, compasso, esquadro e outros – a exploração de propriedades das figuras, o estabelecimento de relações entre as medidas dos segmentos, os conceitos de ângulo, de mediatriz, de perpendicularismo, etc.

Neste sentido, considera que as habilidades de desenhar devem ser desenvolvidas nos alunos, já que, na prática, pode haver situações cotidianas em que haja mais necessidade de se fazer um desenho que provar um teorema. Acrescenta-se que a habilidade de desenhar também está ligada à capacidade de representação dos conceitos, importante no processo de aprendizagem da geometria. A discussão apresentada por Hoffer (1981) apresenta, por exemplo, que o uso de uma régua e transferidor pode preparar os alunos para os postulados de reta e ângulo; construções com régua e compasso podem fazer com que os alunos entendam propriedades de figuras; a utilização da malha quadriculada pode preparar os alunos para conceitos de área e volume, auxiliando-os também a desenhar figuras em duas e três dimensões. Estas construções podem ser realizadas em ambientes computacionais com a utilização de *softwares* de geometria dinâmica como, por exemplo, o GeoGebra.

Hoffer (1981), ao se referir à habilidade lógica, salienta que a necessidade de o alunos saber reconhecer e analisar argumentos válidos e não válidos no contexto de figuras geométricas. As habilidades lógicas estão relacionadas à classificação de figuras de acordo com as semelhanças e diferenças, ao estabelecimento de propriedades, à inclusão de classes, à dedução de consequências a partir de informações de figuras etc. Uma atividade baseada em habilidade lógica seria, por exemplo, solicitar aos alunos que registrem conclusões acerca das condições necessárias e suficientes para a congruência de triângulos.

Além das habilidades visual, verbal gráfica e lógica, Hoffer (1981) define a habilidade de aplicação. Esta, segundo o autor, pode ser relacionada diretamente a descrição matemática de fenômenos por meio da Modelagem Matemática. Um modelo matemático pode auxiliar a descrever um fenômeno e a buscar soluções em diversas áreas como agricultura, biologia, administração, geografia e psicologia.

Neste sentido, um trabalho com a habilidade de aplicação evidencia a matemática utilitária, quando, por exemplo, solicita-se ao aluno a descrição das formas de uma sala de aula ou de uma pista de atletismo. Segundo Viana (2000) não se deveria reduzir o estudo da geometria a aplicações práticas; no entanto, desconsiderá-las seria tornar cada vez menos significativo o ensino desta disciplina.

Como o modelo de Van Hiele de pensamento geométrico apresenta, na descrição de suas características, alguns verbos que indicam uma relação com as habilidades geométricas, faz-se necessário ainda considerar as relações entre os cinco níveis de desenvolvimento conceitual de Van Hiele e as citadas habilidades, conforme apontadas por Hoffer (1981). O Quadro 2 a seguir apresentado por Viana (2000) resume essa relação.

Quadro 2. Habilidades básicas em geometria (VIANA, 2000, com base em Hoffer, 1981)

NIVEL HABILIDADE	RECONHE-CIMENTO	ANÁLISE	ORDENAÇÃO	DEDUÇÃO	RIGOR
VISUAL	Reconhece figuras diferentes num desenho. Reconhece informações rotuladas numa figura	Percebe as propriedades de uma figura como parte de uma figura maior	Reconhece relações entre diferentes tipos de figuras. Reconhece propriedades comuns de diferentes tipos de figuras.	Usa informação sobre uma figura para produzir outras informações.	Reconhece suposições injustificadas feitas através do uso de figuras. Concebe figuras relacionadas em vários sistemas dedutivos
VERBAL	Associa o nome correto com uma figura dada. Interpreta sentença que descreva figuras.	Descreve acuradamente várias propriedades de uma figura	Define palavras precisa e concisamente. Formula sentenças mostrando relações entre figuras.	Entende a distinção entre definições, postulados e teoremas. Reconhece o que é dado num problema e o que se pede.	Formula extensões de resultados conhecidos. Descreve vários sistemas dedutivos.
GRÁFICA	Faz esquemas de figuras identificando acuradamente as partes dadas.	Traduz numa figura a informação verbal dada. Usa as propriedades de figuras para desenhar ou construir as figuras.	Dadas certas figuras é capaz de construir outras figuras relacionadas às figuras dadas	Reconhece quando e como usar elementos auxiliares numa figura. Deduz a partir de informação dada como desenhar ou construir uma figura específica	Entende as limitações e capacidades de vários instrumentos de desenho. Representa pictoricamente conceitos em vários sistemas dedutivos
LÓGICA	Percebe que há diferenças e semelhanças entre figuras. Entende a conservação da forma de figuras em posições diferentes.	Entende que figuras podem ser classificadas em diferentes critérios. Percebe que propriedades podem ser usadas para distinguir as figuras.	Entende qualidades de uma boa definição. Usa propriedades de uma figura para determinar se uma classe de figuras está contida numa outra classe.	Usa regras de lógica para desenvolver provas. É capaz de deduzir conseqüências a partir de informação dada.	Entende as limitações e capacidades de hipóteses e postulados.Sabe quando um sistema de postulados é independente, consistente e categórico.
APLICAÇÕES	Identifica formas geométricas em objetos físicos	Reconhece propriedades geométricas de objetos físicos. Representa fenômenos físicos em papel ou num modelo	Entende o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos.	É capaz de deduzir propriedades de objetos a partir de informações dadas ou obtidas. É capaz de resolver problemas que relacionam objetos.	Usa modelos matemáticos para representar sistemas abstratos. Desenvolve modelos matemáticos para descrever fenômenos físicos, sociais e da natureza.

Neste sentido, o presente trabalho pretende deve tomar as descrições constantes nesse quadro para compor as análises pretendidas.

2.5 O uso da informática em sala de aula e as contribuições do *software* GeoGebra para o ensino de geometria

Os estudos de Valente (1999) apresentam uma análise e uma contextualização histórica da influência da Informática na Educação Americana e Francesa no Brasil. Segundo o autor, os acontecimentos significativos no âmbito educacional em outros países – como os Estados Unidos da América e a França – despertaram o interesse de educadores de algumas universidades brasileiras em utilizar o computador no processo de ensino e aprendizagem escolar.

Segundo Souza (1983), citado por Valente (1999), a Primeira Conferência Nacional de Tecnologia em Educação Aplicada ao Ensino Superior (I CONTECE) ocorreu no ano de 1971, realizada no Rio de Janeiro, tendo como ministrante de um seminário sobre o uso de computadores no ensino de Física, o norte-americano E. Huggins – especialista da Universidade de Darmouth (E.U.A.). Já no ano de 1982, no I Seminário Nacional de Informática na Educação, realizado em Brasília, a francesa Mme. Françoise Faure, encarregada da Área Internacional da Direção Geral das Indústrias Eletrônicas e de Informática da França, ministrou duas palestras técnicas do evento.

Refletindo ainda a influência latino-americana, Valente (1999) salienta que os recursos tecnológicos existentes no início dos anos 1970 nos Estados Unidos eram semelhantes aos que existiam no Brasil. Porém, segundo Ahl (1977), conforme apontado por Valente (1999), o número de escolas que usavam computadores como recurso educacional na época ainda era muito pequeno. Entretanto, algumas escolas já tinham à sua disposição muitas experiências sobre o uso do computador; um dos exemplos é a máquina de ensinar, idealizada por Skinner[8] no início dos anos 50.

Conforme aponta Valente (1999), o aparecimento dos microcomputadores, principalmente o *Apple*[9], permitiu uma grande disseminação do uso dos mesmos na

---

[8] Informações sobre a máquina de ensinar pode ser vista em Monica (1977).

[9] O Apple foi o microcomputador disseminado nas escolas dos Estados Unidos. Era uma máquina simples, de fácil compreensão e domínio, muito flexível, relativamente poderosa e robusta. A flexibilidade e fácil domínio fizeram com que fosse possível o desenvolvimento de todo tipo de *software* e de *hardware* para essa máquina. E isso era feito tanto por empresas e por especialistas da área da computação, quanto por professores, pais, alunos e pessoas que se interessavam pela

escola. Permitiu também a divulgação de novas modalidades de uso do computador na educação, como ferramenta na resolução de problemas, na produção textual, manipulação de banco de dados e controle de processos em tempo real.

Os estudos de Valente (1999) ainda apontam que a proliferação dos microcomputadores ocorreu no início da década de 1990, permitindo o uso do computador em todos os níveis da educação americana, sendo largamente utilizado na maioria das escolas de ensino fundamental, ensino médio e universidades. No Brasil não foi diferente; as políticas e propostas pedagógicas da informática na educação, após a criação do Programa Nacional de Informática na Educação (ProInfo), em 1997, foram ainda mais fundamentadas nas pesquisas realizadas entre as universidades e escolas da rede pública.

O autor conclui – a partir do conhecimento da história da implementação da informática no ensino brasileiro e de reflexões sobre as experiências realizadas nessa área – que a promoção de mudanças pedagógicas não depende simplesmente da instalação de computadores nas escolas, sendo necessário repensar a dimensão do espaço e do tempo da escola. Neste sentido, o papel do professor passa a ser o de facilitador do processo de aprendizagem e, por outro lado, o aluno passa a ser ativo aprendiz, construtor do seu conhecimento (VALENTE, 1999).

Já Borba (2010) pondera que a utilização de recursos tecnológicos nos processos educacionais possibilita a articulação de diferentes conceitos no meio da sociedade da cultura digital. Esta propicia aos alunos desenvolver competências e habilidade exigidas pela sociedade moderna, auxiliando-o ainda no processo de aprendizagem.

Uma das maneiras de se trabalhar com o uso da informática no ensino é a utilização de alguns *softwares* matemáticos que podem aumentar a produção do conhecimento dos alunos. No campo da geometria, considera-se que estes podem influenciar o progresso dos níveis de formação conceitual, além de possibilitar o desenvolvimento das habilidades geométricas. Borba (2010) considera que os *softwares* geométricos possibilitam ao aluno enxergar as diferentes variações de

---

produção de material a ser utilizado na educação. O resultado foi a avalanche de *software* educacional produzido, como mencionado anteriormente. (VALENTE, 1999) uma construção geométrica, além de inferir propriedades, verificar teoremas e chegar a generalizações.

Cabe ressaltar que, para utilização adequada de *softwares* matemáticos em sala de aula é preciso o professor estar sempre em formação continuada, ou seja, exige uma sensibilidade do professor para que a metodologia adotada permita explorar as potencialidades deste recurso que evolui constantemente (BORBA, 2010). Além disso, Santos (2008) complementa o pensamento afirmando que no uso desta metodologia deve-se refletir sobre a elaboração de atividades a serem propostas aos alunos, bem como as maneiras como serão conduzidas as discussões e a socialização dos resultados obtidos após a investigação. Nesse sentido, a faz-se necessário que os professores estejam sempre atualizados por meio da pesquisa e da formação continuada para desenvolver competências de ordem teórico-prática.

Dentre os *softwares* matemáticos em evidência no âmbito da Educação Matemática encontra-se o GeoGebra. Trata-se de um *software* matemático livre, de matemática dinâmica, que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo, desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade Austríaca de Salzburg em 2001.

Baseando-se na Teoria da Aprendizagem Significativa, Barros, Mognon e Kato (2012) apontam que o *software* pode ser utilizado nas aulas de matemática também como um organizador prévio dos conteúdos a serem trabalhados, pois permite melhor visualizar o significado dos conceitos, auxiliando no processo de aprendizagem significativa.

Em concordância com estas reflexões, Cyrino e Baldini (2012) afirmam que a utilização do GeoGebra como recurso nas aulas de matemática pode condicionar a criação de um ambiente favorável à construção de conceitos e ideias matemáticas. Entretanto, a autora afirma que é necessário que o professor explore seu caráter dinâmico, propondo atividades que favoreçam o processo de investigação matemática pelos alunos.

As autoras, concordando com as ideias de Valente (1999), afirmam que não é suficiente instrumentalizar o professor e o futuro professor com mais uma ferramenta: elas ressaltam a necessidade de discussões nos cursos de formação (inicial e continuada) que promovam reflexões e análises sobre o uso desta ferramenta na concepção da aprendizagem significativa, considerando os conhecimentos prévios dos alunos e os aspectos históricos e sociais da evolução desse novo conhecimento.

Assim, tais reflexões podem auxiliar o professor em formação inicial e/ou continuada a sistematizar relações entre diversos conhecimentos, esclarecer vínculos e avaliar a relevância dos novos conhecimentos adquiridos através do uso do *software*.

Segundo Franchi (2005; 2007), citado por Malheiros (2012), com as TIC´s surgem novas possibilidades de trabalhos envolvendo geometria e a modelagem matemática, uma vez que, no cotidiano escolar tem-se verificado um aumento significativo como relação ao uso das TIC´s. Desta forma, aumentam-se as possibilidades de experimentação e investigação de determinadas situações, possibilitando que simulações e previsões sejam realizadas por meio de construções geométricas.

No presente trabalho são analisadas as ações propostas para serem realizadas no GeoGebra de modo a elencar possíveis contribuições da utilização do software para a aprendizagem dos casos de congruência de triângulos.

CAPÍTULO III: A PESQUISA

3.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo analisar as contribuições de uma proposta de ensino na forma de uma sequência didática direcionada a alunos do oitavo ano do ensino fundamental para a aprendizagem do conceito de congruência, em especial dos casos de congruência de triângulos.

Especificamente, pretende-se:

a) Descrever as atividades e sua aplicação na sala de aula.
b) Analisar a potencialidade significativa da sequência didática, ou seja, a estrutura lógica das atividades propostas e os mecanismos de aprendizagem significativa.
c) Evidenciar níveis do pensamento geométrico e habilidades geométricas nas atividades constantes da sequência didática.
d) Identificar contribuições do *software* GeoGebra quanto ao desenvolvimento das habilidades geométricas e ao avanço nos níveis de formação conceitual.

3.2 Tipologia da pesquisa e coleta de dados

A pesquisa aqui apresentada foi realizada a partir de uma ação pedagógica do próprio pesquisador, em que a coleta de dados é realizada onde o fenômeno pesquisado acontece, ou seja, na sala de aula. Assim, a mesma tem características da chamada “pesquisa do professor”, conforme definições de André (2006), Carneiro (2008), Fazenda (2005), Ludke (2001a, 2001b) e Zeichner (1998). Diferente da pesquisa científica – que tem a preocupação com a originalidade, a validade e o reconhecimento por uma comunidade científica – a pesquisa do professor tem caráter instrumental e utilitário e busca o conhecimento da realidade, para transformá-la, visando a melhoria das práticas pedagógicas.

Segundo Fiorentini & Lorenzato (2009), algumas etapas devem ser atendidas neste tipo de pesquisa: a escolha de um tema oriundo de inquietações do professor, uma justificativa, uma revisão bibliográfica, uma questão norteadora, uma teoria que sirva de base para as análises de sua prática, um referencial metodológico, uma ação didática e, posteriormente, uma análise dos dados, as considerações finais e, a partir disso, a geração de um material didático pedagógico.

Percebe-se que este tipo de investigação nasce da prática e traz propostas para a prática. Na situação de professor-pesquisador, ele "centraliza a prática, forçando as fronteiras entre o relato de experiência e a pesquisa" (CARNEIRO, 2008, p.203).

Essa concepção de pesquisa está amparada pelo parecer do Conselho Nacional de Educação (CNE/CP) nº 9/2001 (BRASIL, 2002) quando pondera que:

> [...] a pesquisa (ou investigação) que se desenvolve no âmbito do trabalho de professor refere-se, antes de mais nada, a uma atitude cotidiana de busca de compreensão dos processos de aprendizagem e desenvolvimento de seus alunos e à autonomia na interpretação da realidade e dos conhecimentos que constituem seus objetos de ensino. Portanto, o foco principal [...] é o próprio processo de ensino e de aprendizagem dos conteúdos escolares na educação básica. (BRASIL, 2002, p. 35).

As atividades propostas neste trabalho apresentam como metodologia as sequências didáticas conceituais que, conforme descrição dada por Viana (2015c) tem como objetivo "promover a aprendizagem significativa de conceitos (como foco) e também de procedimentos relativos a um conteúdo especifico, além de favorecer atitudes favoráveis à matemática" (p.78).

A abordagem realizada foi a de qualitativa e descritiva conforme Ludke (2001a), tendo a preocupação de apresentar o fenômeno educativo que ocorreu durante o planejamento e aplicação da sequência didática proposta, além de algumas características relativas aos alunos no processo de aprendizagem.

Os métodos de coleta de dados foram a observação das atitudes dos alunos durante a aplicação da sequência didática, gravação de áudios, fichas de registros em folha xerocada, arquivos das construções realizadas no GeoGebra e diários de bordo com anotações realizadas próximas aos momentos de observação, com a finalidade de evitar esquecimentos.

3.3 Participantes e contexto da pesquisa

A sequência foi formada por oito atividades e aplicada a uma turma de aproximadamente 30 alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Ituiutaba – MG. As atividades foram distribuídas ao longo de 20 aulas regulares de 50 minutos. Como na instituição não havia um componente curricular específico para desenho geométrico, o professor reservou duas aulas duplas semanais – entre as seis aulas da disciplina Matemática – para trabalhar o conteúdo de geometria. Parte das aulas aconteceu na própria sala de aula e outra parte no Laboratório de Informática da escola.

Assim, a sequência didática foi aplicada durante essas aulas no período de agosto a outubro de 2016.

A escolha desta instituição deu-se pelo fato do autor ser professor de matemática em efetivo exercício desta escola. Uma das atribuições necessárias aos participantes do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional da Universidade Federal de Uberlândia é estar em efetivo exercício profissional, de acordo com o parágrafo primeiro, artigo 12, da Resolução nº 05/2013, do Conselho de Pesquisa e Pós-Graduação (UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA, 2013).

A escolha do 8º ano do Ensino Fundamental também se deu pelo fato de haver indicativos dados pelo Currículo Básico Comum do Estado de Minas Gerais para que nesse ano sejam oferecidas atividades para a introdução e consolidação de habilidades relacionadas aos casos de congruência de triângulos.

3.4 O material de aprendizagem: elaboração, aplicação e apresentação de alguns resultados da sequência didática

A proposta foi escrita na forma de uma sequência didática que, para Zabala (1998), é um “conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (pag. 18). A sequência teve como base a prática pedagógica desenvolvida pelo autor e se fundamenta nos pressupostos teóricos apresentados neste trabalho.

Assim, para atender ao primeiro objetivo específico deste trabalho, são descritas as atividades, sendo ressaltados os objetivos, os materiais utilizados, os procedimentos realizados e alguns resultados obtidos após aplicação da sequência didática.

Atividade 01 – Polígonos

a) *Objetivo da atividade*: revisar e/ou obter uma definição formal de polígonos a partir da análise de propriedades de figuras geométricas planas fechadas.

b) *Materiais utilizados*:

- 1ª Ficha de registro (Apêndice A).
- *Slides* com figuras geométricas planas (Slide 1, Slide 2 e Slide 3).
- Lápis, borracha e régua.

c) *Tempo de duração*: duas aulas.

d) *Local*: sala de aula

e) *Procedimentos realizados e alguns resultados*:

No primeiro momento foi entregue aos alunos a 1ª Ficha de Registros (Anexo I), ou seja, uma folha xerocada contendo quadros para serem preenchidos de acordo com as etapas da atividade. Por meio do *Slide* 1, foi apresentado um conjunto de figuras, contendo polígonos, não polígonos, pares de polígonos congruentes e não congruentes. A Figura 1 mostra o material utilizado.

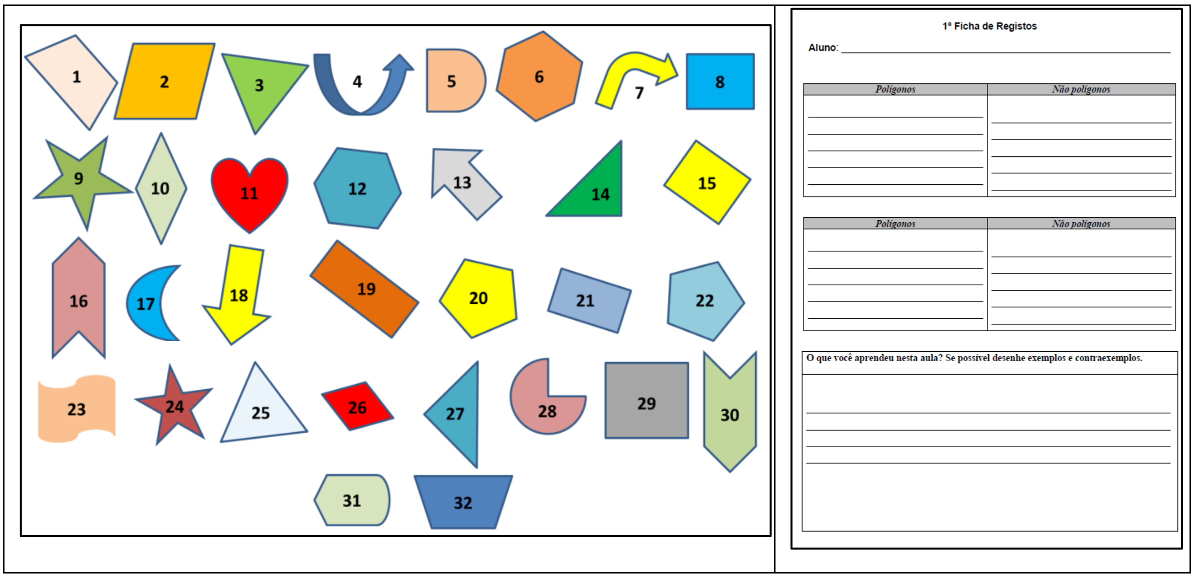


Figura 1. (a) *Slide* 1 contendo figuras geométricas planas e (b) 1ª Ficha de registros
Fonte: arquivo pessoal do autor

Com a ficha xerocada (Figura 1-b) em mãos, foi solicitado aos alunos que observassem as figuras do *slide* e preenchessem o primeiro quadro, anotando os números dos polígonos e os dos não polígonos. Apesar de a atividade ter sido proposta para ser realizada de forma individual, houve pequenos diálogos entre os alunos durante esta etapa. O professor não interviu na atividade em um primeiro instante: apenas incentivou para que eles se valessem de seu conhecimento anterior sobre o assunto.

Após um intervalo de aproximadamente sete minutos, como alguns alunos ainda tinham dúvidas com relação a esta classificação, o professor dialogou com a classe, recordando a definição de polígonos a partir de seus atributos definidores:

Professor: vamos observar agora algumas das figuras deste slide, chamadas de figuras geométricas planas. A figura 1 é uma linha fechada?

Alunos: como assim, fechada?

Professor: uma região do plano delimitada totalmente é considerada fechada, portanto a figura número 1 é fechada?

Alunos: sim! Todas são!

Professor: e a figura número 23? É fechada?

Alunos: não professor, esta não!

Professor: a figura número 1 é formada apenas por segmentos de reta simples, ou seja, que não se cruzam ou possuem linhas curvas?

Alunos: é formada apenas por segmentos de reta.

Professor: como esta figura geométrica é plana, fechada e formada apenas por segmentos de retas simples é chamada de polígono.

O professor deu sequência à atividade questionando os alunos a respeito de outros polígonos e também dos não polígonos.

Professor: e a figura número 4 é polígono?

Alunos: não!

Professor: por quê?

Alunos: porque ela possui curvas.

Professor: quais outras figuras não são formadas apenas por segmentos de reta?

Alunos: as figuras número 4, 5, 7, 11, 17, 23, 28 e 31.

Após este diálogo o professor avançou para o *Slide* 2 (Figura 2-a) que continha apenas os não polígonos para que os alunos pudessem avaliar suas respostas. Em seguida voltou ao Slide 1 (Figura 1-a) e solicitou que os alunos, a partir de um diálogo acerca dos atributos definidores de polígono, preenchessem o segundo quadro da ficha xerocada (Figura 1-b), fazendo a correção da tarefa.

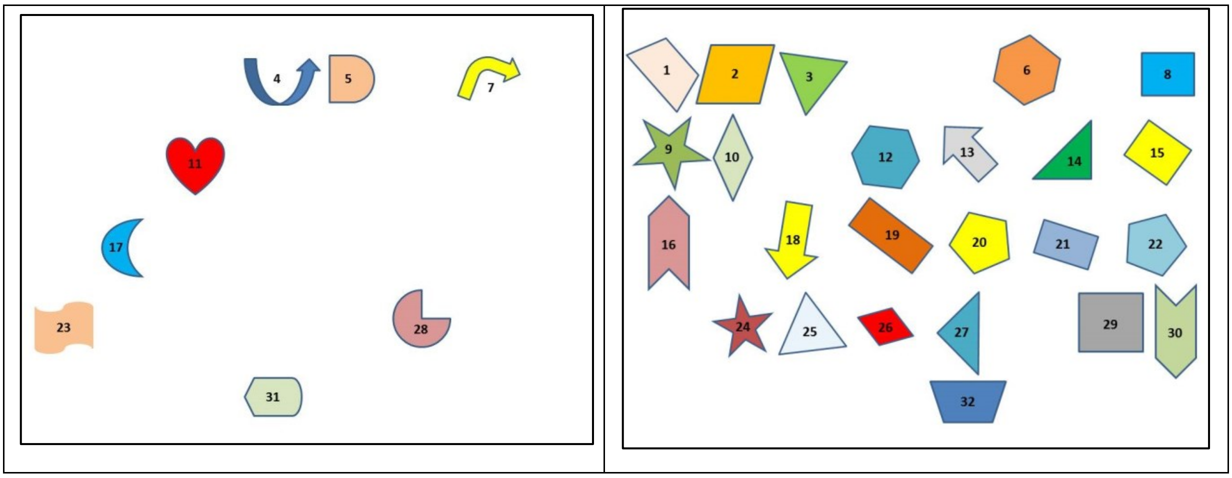


Figura 2. (a) *Slide* 2 contendo os não polígonos e (b) *Slide* 3 contendo os polígonos
Fonte: arquivo pessoal do autor

Para a conclusão da atividade, o professor apresentou o *Slide 3* contendo somente os polígonos (Figura 2-b), o professor solicitou que os alunos descrevessem na ficha de registros o que eles tinham aprendido naquela aula. Assim, eles foram orientados a registrar, na forma de palavras e de desenhos, a distinção entre polígonos e não polígonos, apresentando exemplos e não exemplos do conceito.

Ao término do preenchimento, as folhas foram recolhidas. A Figura 3-a mostra um momento da aula em que os alunos executavam a atividade e também um exemplo de ficha preenchida (Figura 3-b).

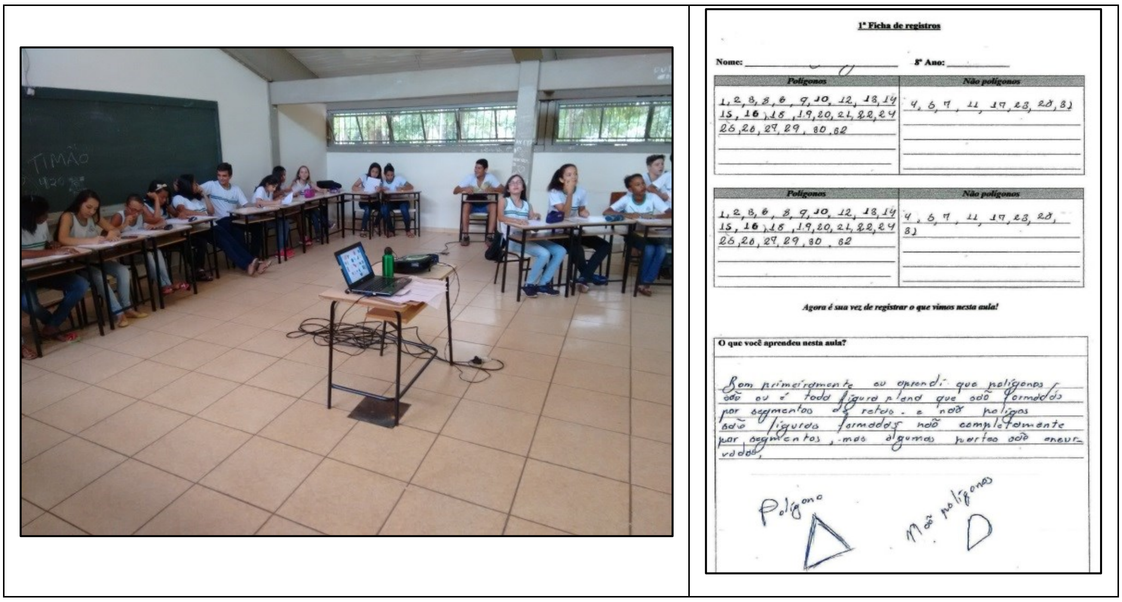


Figura 3. (a) Alunos preenchendo a 1ª Ficha de Registros e
(b) exemplo de preenchimento da 1ª Ficha de Registros
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Atividade 02 – Polígonos congruentes

a) *Objetivo da atividade*: Identificar em um conjunto de polígonos os pares de polígonos congruentes, obtendo as condições necessárias e suficientes para a congruência de polígonos.

b) *Materiais utilizados*:

- 2ª Ficha de registro (Apêndice B).
- *Slides* com figuras geométricas planas (Slides 4 a 38 – incluindo as animações).
- Lápis, borracha, régua, folha de papel cartão contendo polígonos congruentes e não congruentes.

c) *Tempo de duração*: duas aulas.

d) *Local*: sala de aula

e) *Procedimentos realizados e alguns resultados*:

O professor deu sequência à apresentação, mostrando o *Slide* 3 que continha somente os polígonos que tinham sido identificados na Atividade 01. Entre estes, havia alguns pares de polígonos congruentes e também pares de polígonos que, apesar de terem características comuns (como lados e ângulos correspondentes congruentes), não eram congruentes, conforme pode ser verificado na Figura 4-a.

Os alunos deveriam “separar”, por meio de observação no *Slide* 3, os pares de polígonos inicialmente chamados de “iguais” e os pares de polígonos “parecidos”, registrando os resultados no primeiro quadro da 2ª ficha de registros apresentada na Figura 4-b.

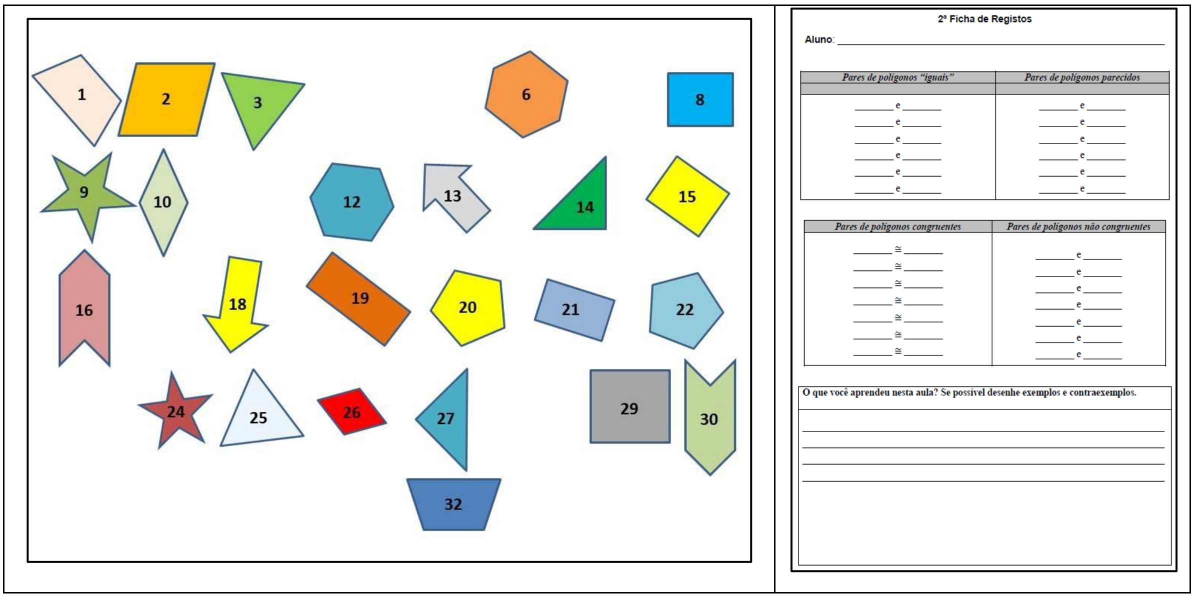


Figura 4. (a) *Slide* 3 e (b) 2ª Ficha de registros
Fonte: arquivo pessoal do autor

Neste momento, apesar de a atividade ser proposta de forma individual, houve alguns diálogos entre os alunos:

Aluno A: já achei um par igual! O polígono 1 é igual ao 32!

Aluno B: o polígono 2 é igual ao 29, porém o polígono 2 só está inclinado.

Aluno A: mas pra ser igual tem que ser igual mesmo! Não pode estar inclinado!

Aluno B: mas e o polígono de número 2? Parece que não tem nenhum igual... Professor, todos têm um par igual?

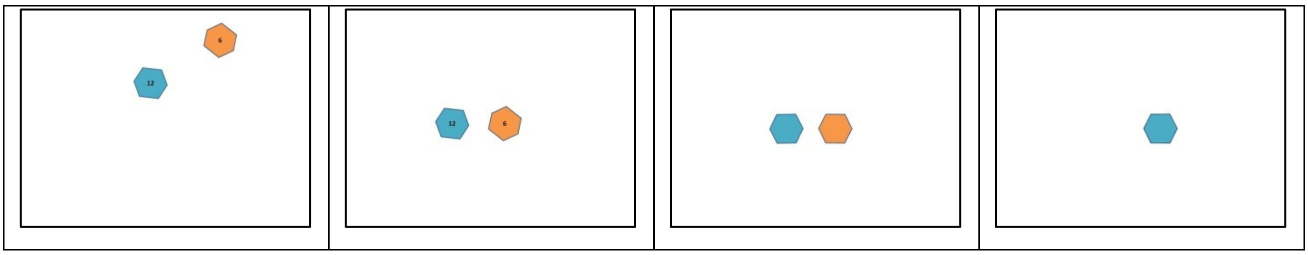
Professor: Nem todos. No quadro polígonos “iguais” vocês devem observar e registrar apenas os números correspondentes aos pares de polígonos que acreditam serem iguaizinhos mesmo! Deixem pra preencher os “parecidos” depois de encontrarem os iguais.

Foi possível observar, por meio de gestos e relatos dos alunos, que alguns tentaram sobrepor, no plano do pensamento, os pares de figuras que intuitivamente consideravam congruentes, realizando rotações e, provavelmente, analisando também propriedades ou componentes das figuras como a posição dos vértices e a congruência com relação aos lados e ângulos correspondentes.

Neste momento da proposta foi possível observar que a maioria dos alunos estava ansiosa para descobrir se os polígonos que eles haviam separados eram realmente “iguais” ou “parecidos”. A Figura 5 abaixo apresenta o momento da execução desta proposta.

Figura 5. Alunos no início da segunda atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

Dando sequência à atividade, como forma de correção e síntese, o professor simulou, por meio de *slides* animados, a verificação da congruência dos polígonos, chamados inicialmente pelo mesmo de polígonos “iguais”. As figuras foram rotacionadas e sobrepostas nos *slides* de forma que os alunos pudessem verificar tanto a congruência com relação aos lados quanto com relação aos ângulos correspondentes. A Figura 6 apresenta alguns *slides* utilizados nesta apresentação.



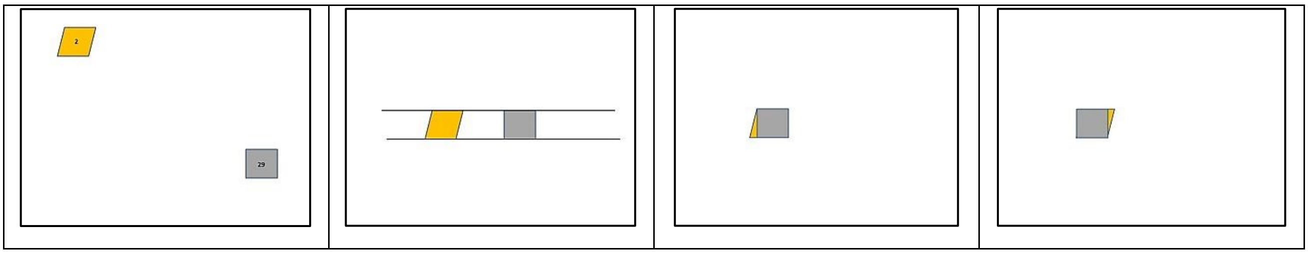


Figura 6. Alguns *slides* animados utilizados na segunda atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

Neste momento houve diálogo entre o professor e os alunos e também entre os alunos, confrontando as ideias iniciais dos mesmos com relação aos pares de polígonos congruentes.

Professor: vamos observar agora alguns dos polígonos deste slide. O polígono número 6 é "igual" ou "parecido" com o polígono número 12?

Alunos: igual!

Professor: como assim? Se eu tentar colocar sobrepô-los irá ficar certinho?

Alunos: sim! Os dois estão apenas virados!

Professor: então vamos verificar! Observem os slides animados e vejamos... Muito bem! Os polígonos 6 e 12 são realmente iguaizinhos pois houve sobreposição entre eles. Observem que os lados correspondentes nos dois polígonos são congruentes, isto é, têm a mesma medida. Esta é uma condição necessária para que os polígonos também sejam iguais. Nós vamos chamar agora os polígonos iguais de polígonos congruentes! Mas vejam: será que só isto basta? O que vocês colocaram com relação aos polígonos 2 e 29?

Aluno A: eu registrei que eles são iguais.

Aluno B: não são! Um é mais inclinado que o outro e se formos sobrepô-los irá ficar passando!

Professor: vamos verificar por meio dos slides animados, então, se os polígonos 2 e 29 são congruentes. Vejamos que o polígono 2 e o polígono 29 possuem lados correspondentes congruentes, da mesma maneira que os polígonos 6 e 12. Entretanto, podemos observar que os lados do polígono 29 formam, dois a dois, ângulos de 90 graus. Já os lados correspondentes no polígono 2 não formam ângulos de 90 graus dois a dois. Vejam!

Alunos: ah sim... Então quer dizer que os polígonos 2 e 29 não são iguais?

Professor: observem que, conforme havíamos observado, a congruência com relação aos lados correspondentes é uma condição necessária para que dois polígonos sejam congruentes. Entretanto, observando os polígonos 2 e 29 podemos concluir que não é uma condição suficiente. Vejamos que ainda "dependemos" das medidas dos ângulos correspondentes. Estes devem ser congruentes, não é mesmo?

Alunos: sim!

Foram utilizadas também algumas figuras em material manipulado, impressas em papel cartão, para que os alunos verificassem a sobreposição das mesmas. O tamanho era de, aproximadamente, duas figuras por folha de papel A4. A Figura 7 apresenta o material.

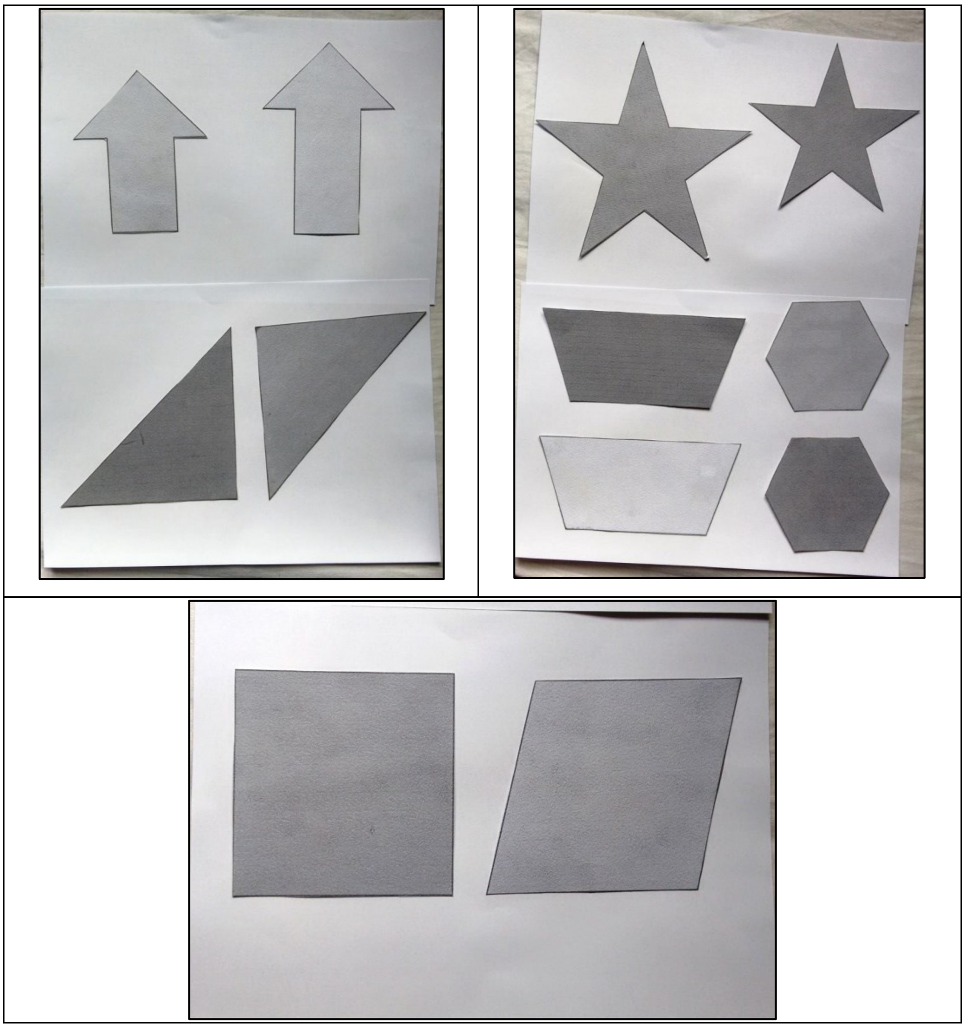
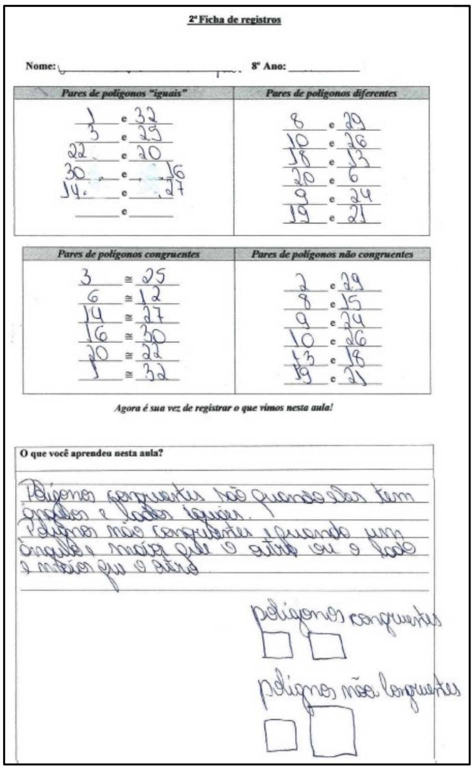


Figura 7. Material manipulável em papel cartão utilizado na segunda atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

Como forma de correção e síntese dos registros anteriores dos alunos o professor solicitou que os mesmos separassem novamente, registrando no segundo quadro da 2ª Ficha de Registro os pares de polígonos congruentes e os pares de polígonos que, apesar de parecidos, não eram congruentes.

Para finalizar a atividade, o professor propôs aos alunos que falassem, lembrando-se das discussões realizadas anteriormente, quais as condições necessárias e suficientes para que dois polígonos fossem considerados congruentes. Por fim, solicitou que os mesmos escrevessem suas conclusões na 2ª

Ficha de Registros. Neste momento não houve interferência do professor e as fichas foram recolhidas. A Figura 8 mostra um exemplo de uma ficha preenchida por um dos alunos.


2ª Ficha de registros

Nome: ____ 8º Ano: ____

Pares de polígonos "iguais"	Pares de polígonos diferentes
1 e 32	8 e 29
3 e 25	10 e 26
22 e 20	18 e 13
30 e 16	20 e 6
14 e 27	9 e 24
e	19 e 21

Pares de polígonos congruentes	Pares de polígonos não congruentes
3 ≅ 25	2 e 29
6 ≅ 12	8 e 15
14 ≅ 27	9 e 24
16 ≅ 30	10 e 26
20 ≅ 22	13 e 18
1 ≅ 32	19 e 21

Agora é sua vez de registrar o que vimos nesta aula!

O que você aprendeu nesta aula?

Polígonos congruentes são quando eles tem ângulos e lados iguais.
Polígonos não congruentes quando um ângulo é maior que o outro ou o lado é maior que o outro

polígonos congruentes

polígonos não congruentes

Figura 8. Exemplo da 2ª Ficha de Registros preenchida
Fonte: arquivo pessoal do autor

Atividade 03 – Construindo triângulos

a) *Objetivo da atividade*: obter, por meio de construções, utilizando o *software* GeoGebra, uma maneira mais prática de construir triângulos.

b) *Materiais utilizados*:

- Computador com o *software* GeoGebra.
- *Notebook e Datashow.*

c) *Tempo de duração*: duas aulas.

d) *Local*: Laboratório de Informática

e) Procedimentos realizados e alguns resultados:

A terceira atividade teve como objetivo obter, por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, uma maneira mais prática de construir triângulos. O professor já havia realizado, em aulas anteriores, algumas atividades de construção de régua e compasso com o uso do GeoGebra tais como: ponto médio de um segmento; distância entre ponto e reta; retas perpendiculares; retas paralelas; ângulos opostos pelo vértice e retas paralelas cortadas por transversal. Desta forma, os alunos já estavam familiarizados com o recurso. A Figura 9 apresenta o menu do *software* GeoGebra.

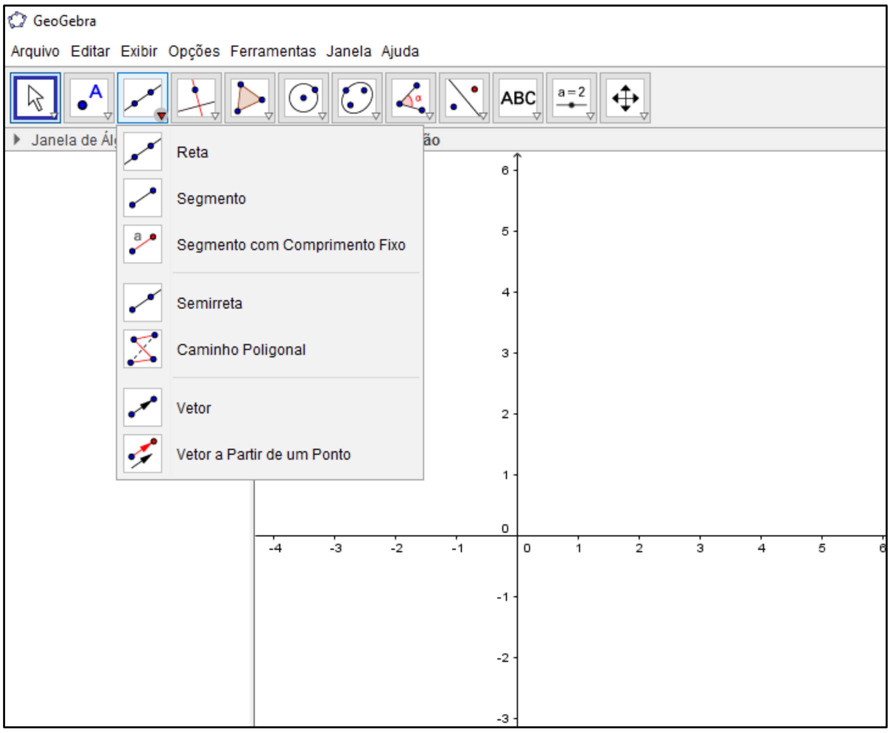


Figura 9. Menu do *software* GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

A aplicação desta atividade ocorreu no Laboratório de Informática da escola onde havia cerca de 25 computadores funcionando com o *software*. Desta forma, como a quantidade de alunos frequentes da turma era de aproximadamente 30, alguns tiveram que formar duplas para a realização da atividade. A Figura 10 apresenta um dos grupos de alunos.

Figura 10. Grupo de alunos no Laboratório de Informática
Fonte: arquivo pessoal do autor

Para que os alunos pudessem acompanhar melhor a sequência de comandos, o professor, além de informar oralmente quais comandos seriam utilizados, reproduzia-os em seu *notebook* pessoal, fazendo a projeção de sua tela em uma das paredes do laboratório de informática.

Inicialmente o professor solicitou que os alunos construíssem um segmento $\overline{AB}$ com comprimento fixo de $3\ cm$; em sequência, um segmento $\overline{AC}$ de comprimento $4\ cm$ e, por fim, um segmento $\overline{BD}$ de comprimento 5 cm. Os alunos foram solicitados a tentar formar um triângulo ΔABC fazendo coincidir o ponto C com o ponto D. Neste momento foi possível observar alguns diálogos entre os alunos:

Aluno A: nossa como é difícil coincidir os pontos C e D. Não fecha!

Aluno B: consegui fechar o meu! Ficou perfeito!

Aluno A: agora eu também consegui!

A Figura 11 mostra como deveria ficar esta construção no *software* GeoGebra.

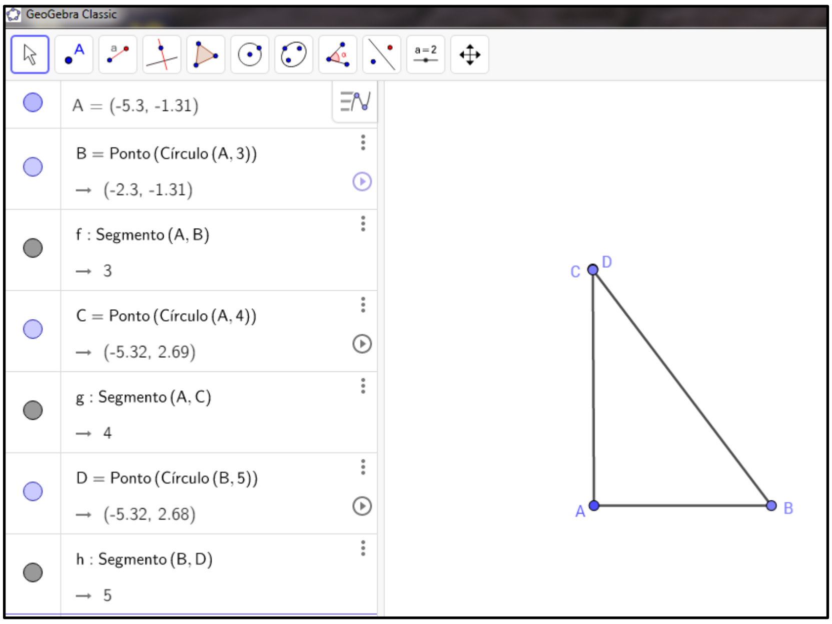


Figura 11. Construção do triângulo ΔABC no *software* GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Após os alunos formarem o triângulo ΔABC, o professor solicitou que os mesmos habilitassem a função rastro nos pontos C e D e realizassem rotações destes em torno dos pontos A e B. Pôde-se perceber que alguns alunos utilizaram-se da criatividade utilizando diferentes cores para o rastro e também diferentes espessuras.

Assim, eles puderam verificar que o conjunto de pontos equidistantes 4 cm de *A* e o conjunto de pontos equidistantes $5\,cm$ de B eram, respectivamente, a circunferência de centro em A e raio 4 cm e a de centro em B e raio 5 cm. Verificaram também que cada um dos pontos de intersecção dessas circunferências (*C* e *D*) poderia ser o vértice que "fechava" o triângulo, formando, então o ΔABC e o ΔABD. Neste momento, o professor indagou os alunos tanto a respeito da construção quanto a respeito da conclusão obtida. A Figura 12-a mostra a construção da atividade na tela do GeoGebra e a figura 12-b ilustra os alunos no laboratório realizando a atividade.

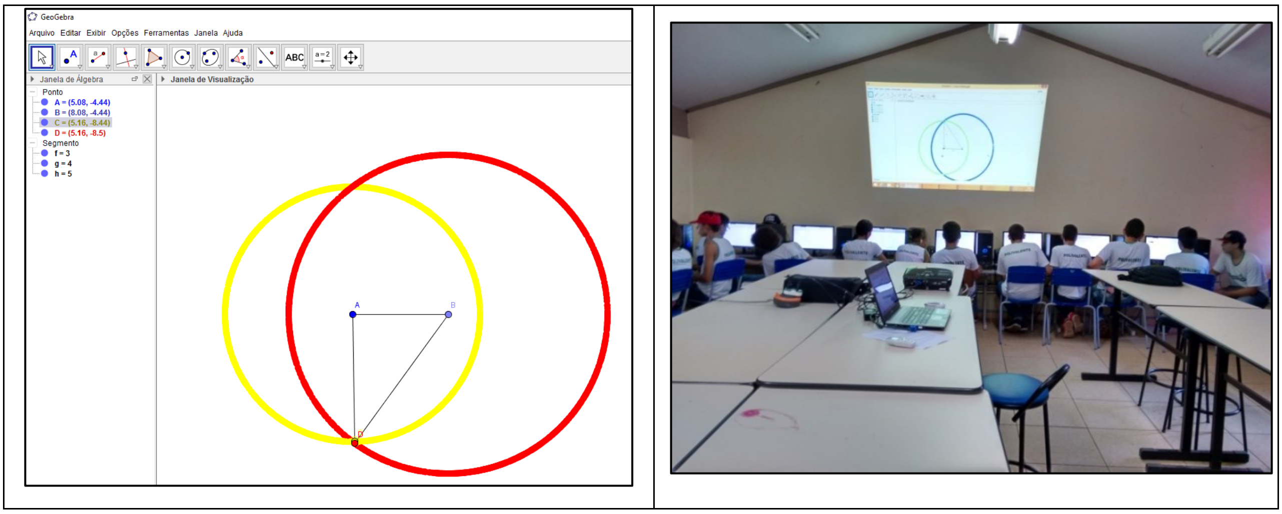


Figura 12. (a) construção da atividade na tela do GeoGebra e (b) alunos no laboratório de informática
Fonte: arquivo pessoal do autor

Após verificarem a maneira mais prática de construir triângulos, o professor solicitou que os alunos registrassem, utilizando-se da ferramenta texto, no próprio arquivo do GeoGebra, o que haviam aprendido naquela aula. Não houve neste momento intervenção do professor. Por fim, solicitou que os mesmos gravassem o arquivo com seus nomes, encerrando assim a atividade.

Atividade 04 – Condição de existência de triângulos

a) Objetivo da atividade: concluir, por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, qual é a condição de existência de triângulos.

b) Materiais utilizados:

- Computador com o *software* GeoGebra.
- *Notebook e Datashow.*

c) Tempo de duração: duas aulas.

d) Local: Laboratório de Informática

e) Procedimentos realizados e alguns resultados:

O professor iniciou a aula retomando as conclusões dos alunos obtidas na aula anterior. Desta forma, solicitou que os mesmos abrissem o arquivo da terceira atividade e comentassem sobre suas conclusões a respeito da maneira mais prática de construir triângulos. Parte do diálogo pode ser visto a seguir.

Professor: abram o arquivo da aula anterior e me digam o que registraram.

Aluno A: eu registrei que a maneira mais prática de construir triângulos é por meio de círculos!

Aluno B: eu escrevi circunferência. Está correto?

Professor: sim! A maneira mais prática de construir triângulos é por meio de circunferências mesmo! É uma construção similar àquelas que fizemos anteriormente de retas paralelas e retas perpendiculares utilizando-se de régua e compasso. Lembram-se dessas construções anteriores? Então... A maneira mais prática de construir triângulos é com a utilização de circunferências e segmentos, ou seja, por meio de régua e compasso.

Desta forma, para iniciar a quarta atividade da sequência, após retomar a aula anterior, o professor solicitou que os alunos criassem um novo arquivo no GeogGebra. Em sequência indagou os alunos sobre a possibilidade de construir triângulos com medidas de lados quaisquer:

Professor: será que é possível construir triângulos com quaisquer medidas para seus lados?

Aluno A: eu acredito que sim professor!

Aluno B: eu acredito que não!

Professor: vamos conferir então! Vamos tentar construir um triângulo cujos lados sejam 10 cm, 4 cm e 5 cm.

O professor solicitou que os alunos construíssem um segmento $\overline{AB}$ com comprimento fixo de $10\,cm$; em sequência, utilizando a ferramenta “Círculo dados Centro e Raio” construíssem uma circunferência com centro no ponto A e raio $4\,cm$. Posteriormente, de forma análoga, uma circunferência com centro no ponto B e raio $5\,cm$. A Figura 13 mostra como deveria ser a construção no GeoGebra.

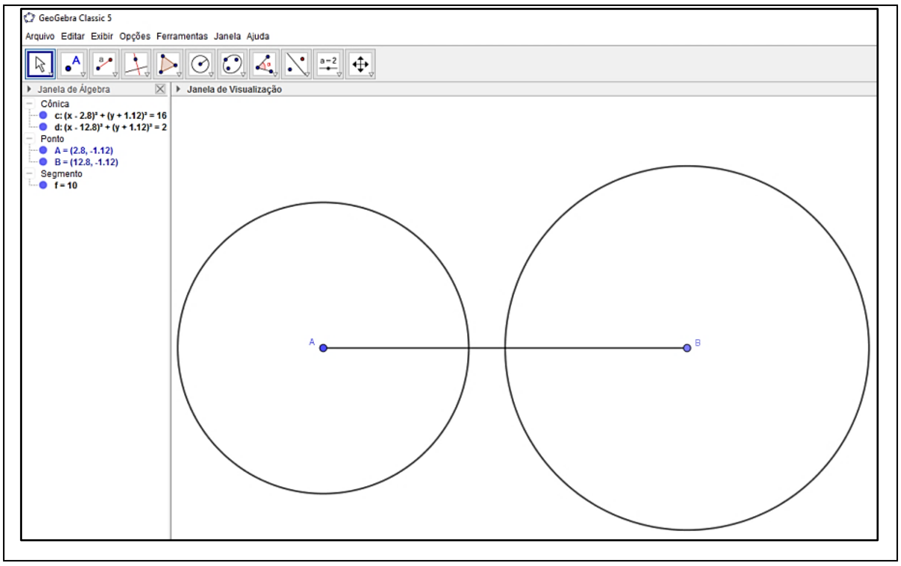


Figura 13. Primeira construção da atividade 4 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Após os alunos realizarem esta primeira construção o professor indagou sobre possibilidade de construir um triângulo ΔABC ou um triângulo ΔABD cujos lados fossem de medidas $10\ cm$, $4\ cm$ e $5\ cm$:

Professor: observando a construção que acabamos de concluir, é possível obter dois pontos de intersecção (C e D) entre a circunferência com centro no ponto A e raio 4 cm e a circunferência com centro no ponto B e raio 5 cm afim de formar o triângulo ∆ABC e o triângulo ∆ABD?

Alunos: não professor! Não há intersecção entre as circunferências!

Professor: alguém saberia me dizer por quê?

Alunos: porque a circunferência com centro em A é menor que a circunferência com centro em B. Ela teria que ser maior ou do mesmo tamanho para que tivéssemos a intersecção.

Professor: mas se os raios das duas circunferências fossem os mesmos seria possível formar os triângulos ∆ABC e ∆ABD? Vamos verificar? Antes de verificarmos lembrem as medidas que utilizamos para os raios: 4 cm e 5 cm. Ok?

Alunos: sim!

Para que os alunos pudessem verificar empiricamente, por meio do *software* GeoGebra, a condição de existência de triângulos, fez-se necessário ainda realizar uma segunda construção. Desta forma, o professor solicitou que os mesmos gravassem o arquivo anterior e abrissem um novo arquivo.

Como o novo arquivo aberto o professor solicitou que os alunos construíssem um segmento $\overline{AB}$ com comprimento fixo de $10\ cm$; em sequência, utilizando a ferramenta “Círculo dados Centro e Raio” construíssem uma circunferência com centro no ponto A e raio $5\ cm$. Posteriormente, de forma análoga, uma circunferência com centro no ponto B e raio também de $5\ cm$ e, em seguida, questionou os alunos:

Professor: observando esta nova construção, é possível obter dois pontos de intersecção (C e D) entre a circunferência com centro no ponto A e raio 5 cm e a circunferência com centro no ponto B e raio 5 cm, afim de formar o triângulo ∆ABC e o triângulo ∆ABD?

Aluno A: sim! Elas se encontram em vários pontos! Veja!

Aluno B: eu acredito que elas se encontram em apenas um ponto!

Professor: vamos verificar então qual é(são) o(os) ponto(s) de intersecção entre as duas circunferências? Vamos ver se é possível formar o triângulo ∆ABC e o triângulo ∆ABD cujas medidas dos lados são 10 cm, 5 cm e 5 cm?

Dando sequência à atividade o professor solicitou então que os alunos, por meio da seleção da ferramenta "Interseção de Dois Objetos" do GeoGebra, marcassem tanto a circunferência com centro em A, quanto a circunferência com centro em B, afim de obter o ponto de intersecção entre as mesmas. A Figura 14 mostra como deveria ser a construção no *software*.

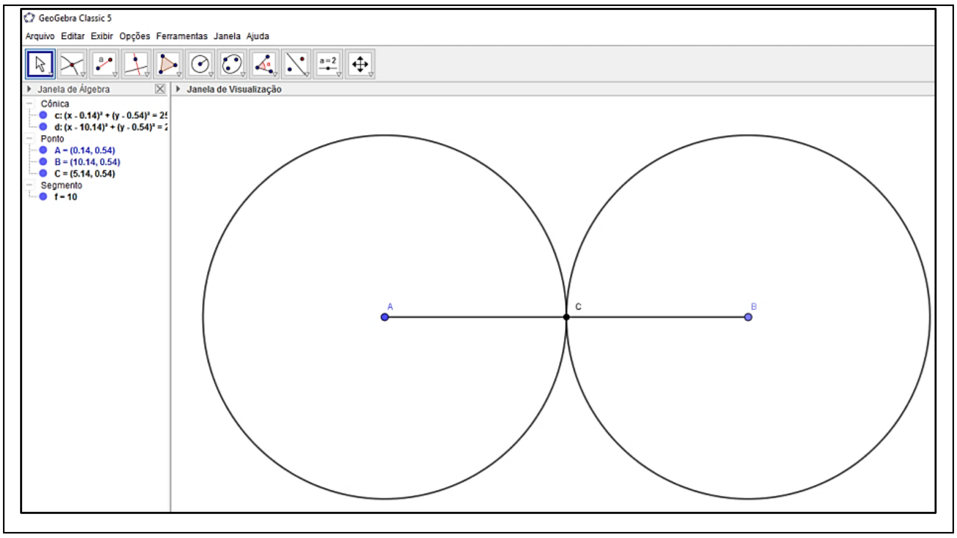


Figura 14. Segunda construção da atividade 4 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Após os alunos verificarem que havia um único ponto de intersecção entre as circunferências o professor indagou-os novamente:

Professor: e aí pessoal, temos um ou mais pontos de intersecção entre as duas circunferências?

Alunos: apenas um professor!

Professor: será então possível formar os triângulos ∆ABC e ∆ABD cujas medidas dos lados são 10 cm, 5 cm e 5 cm?

Aluno A: sim!

Aluno B: não professor! Se ligarmos os pontos A, B e C teremos um segmento de reta!

Professor: isso mesmo pessoal! Então vamos retomar o que fizemos. Observem que na primeira construção tentamos, por meio de circunferências, obter os triângulos ∆ABC e ∆ABD cujas medidas dos lados fossem 10 cm, 4 cm e 5 cm. Como não houve intersecção entre as circunferências não foi possível. Já na segunda, tentamos construir os triângulos ∆ABC e ∆ABD cujas medidas dos lados fossem 10 cm, 5 cm e 5 cm. Também não foi possível, por haver apenas um ponto de intersecção entre as duas circunferências, ou seja, não formaríamos um triângulo ∆ABC ou um triângulo ∆ABD, pois os pontos A, B e D estariam contidos em um mesmo segmento de reta. Pois bem, tentem construir, um triângulo cujas medidas são 10 cm, 5 cm e 6 cm no GeoGebra.

Como os alunos já haviam realizado as duas construções anteriores, o professor deixou-os incialmente livres para fazerem esta construção, sem a necessidade de instruções. A Figura 15 mostra como esta foi realizada no ambiente do GeoGebra.

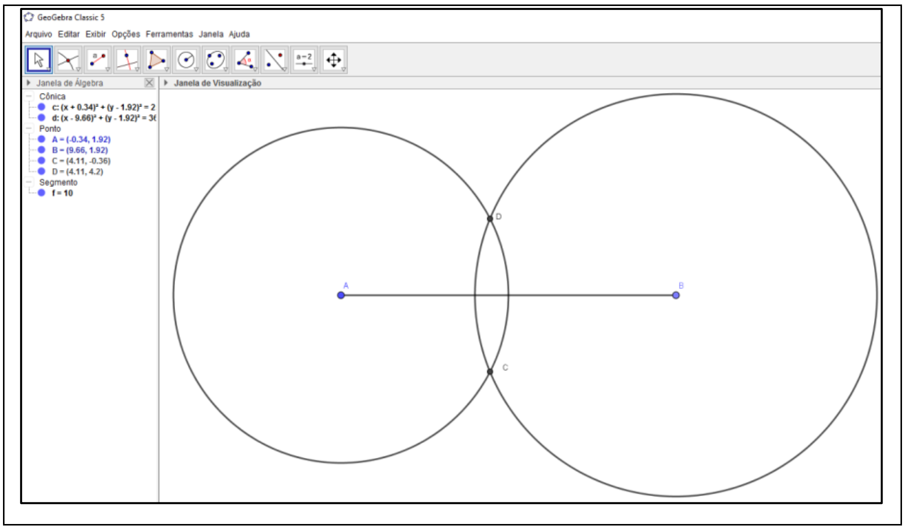


Figura 15. Segunda construção da atividade 4 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Dando sequência à construção o professor solicitou aos alunos que, por meio da ferramenta "Polígono" formasse , selecionando os pontos A, B e C e, em seguida os pontos A, B e D, os triângulos ΔABC e ΔABD.

Para que pudessem também observar um dos vários recursos da janela de álgebra, localizada do lado esquerdo da tela padrão do GeoGebra, o professor solicitou que os mesmos verificassem as medidas dos lados dos triângulos, ou seja, a medida dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e também a medida dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$, observando que foi possível construir triângulos cujas medidas dos lados eram

10 cm, *5 cm* e *6 cm*. A Figura 16 apresenta esta última construção da atividade no *software*.

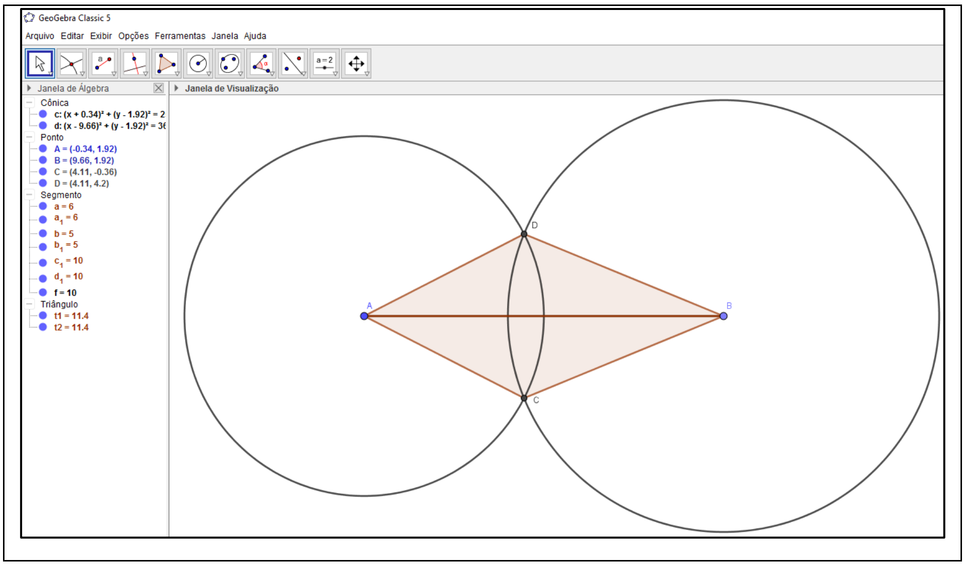


Figura 16. Terceira construção da atividade 4 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Novamente, para dar encaminhamento final à atividade o professor indagou-os:

Professor: pois bem, pessoal! Tentamos inicialmente construir um triângulo cujas medidas dos lados fossem 10 cm, 4 cm e 5 cm. Foi possível?

Alunos: não!

Professor: logo em seguida tentamos construir um triângulo cujas medidas dos lados fossem 10 cm, 5 cm e 5 cm. Foi possível construir?

Alunos: não professor!

Professor: por fim, conseguimos construir estes dois triângulos ΔABC e ΔABD cujas medidas dos lados são 10 cm, 5 cm e 6 cm. Desta forma, pensem um pouco sobre quando é possível construir triângulos, ou seja, qual a relação entre as medidas dos lados dos triângulos que faz com que seja possível sua existência.

O professor, na intenção de que os alunos obtivessem uma conclusão sobre a condição de existência de triângulos, solicitou que os mesmos registrassem o que haviam aprendido na aula, utilizando-se da ferramenta texto, no próprio arquivo do GeoGebra. Não houve neste momento intervenção do professor. Por fim, solicitou que os mesmos gravassem o arquivo com seus nomes, encerrando assim a atividade.

Atividade 05 – 1º caso de congruência de triângulos (LLL)

a) *Objetivo da atividade*: levar o aluno a identificar, por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, uma primeira condição necessária e suficiente para que dois triângulos sejam congruentes: ter lados correspondentes congruentes (caso LLL).

b) *Materiais utilizados*:

- Computador com o *software* GeoGebra.
- *Notebook e Datashow.*
- 3ª Ficha de registro (Apêndice C).
- Lápis e borracha.

c) *Tempo de duração*: três aulas.

d) *Local*: Laboratório de Informática e sala de aula

e) *Procedimentos realizados e alguns resultados*:

Primeiramente o professor retomou a atividade anterior, cujo objetivo era obter, por meio de construções no *software* GeoGebra, a condição de existência de triângulos.

Professor: pessoal, alguém consegue me dizer o que vimos na aula passada?

Alunos: sim professor! Vimos como construir triângulos por meio de circunferência. Também vimos que não conseguimos construir qualquer triângulo, nem todos dão certo.

Professor: muito bem! Em quais casos então é possível construir triângulos?

Alunos: quando as circunferências se interceptam em dois pontos!

Professor: muito bem! O que essas circunferências têm a ver com os triângulos que construímos?

Alunos: são os lados do triângulo!

Professor: como assim? As circunferências são os lados dos triângulos?

Alunos: não! É por meio delas que conseguimos construir os lados dos triângulos.

Professor: muito bem! Então vamos sintetizar. Vimos na aula anterior que só será possível construir triângulos quando a soma da medida dos raios das circunferências é maior que a medida do primeiro segmento que construímos, está correto?

Alunos: sim professor!

Professor: então, desta forma, como o primeiro segmento que nós construímos era o lado maior do triângulo e os outros dois lados do triângulo foram formados pelos raios das circunferências cuja soma de suas medidas era maior que a medida do primeiro lado do triângulo, podemos dizer que a condição para que possamos construir triângulos, ou seja, a condição de existência de triângulos é que a soma da medida dos lados menores deve ser maior que a medida do lado maior?

Alunos: sim professor!

Professor: E se as medidas dadas fossem, por exemplo, 8 cm, 3 cm e 5 cm?

Alunos: não seria possível, pois cinco mais oito dá oito, igual à medida do lado maior!

Professor: E se fossem 7 cm, 5 cm e 4 cm?

Alunos: cinco mais quatro nove! Nove é maior que sete! Esse é possível!

Após este diálogo o professor propôs que os alunos construíssem, no *software* GeoGebra, utilizando a ferramenta “Polígono”, um triângulo ΔABC de lados com medidas quaisquer. A Figura 17 mostra um exemplo desta construção.

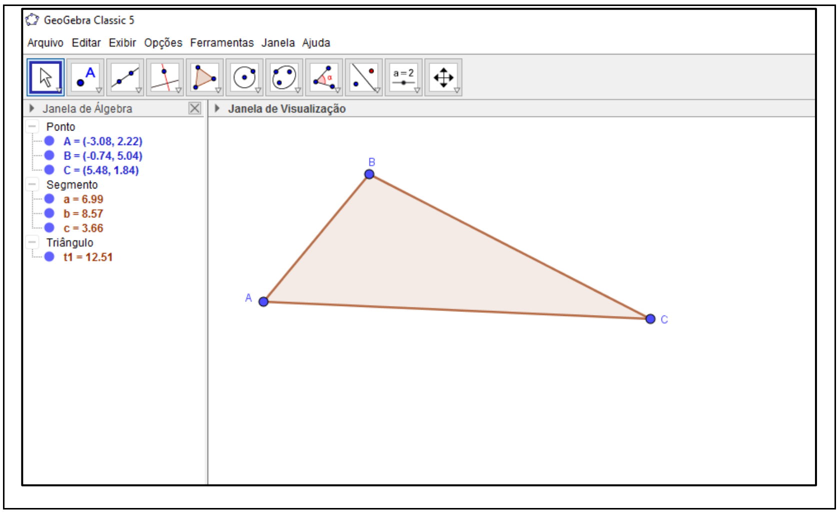


Figura 17. Início da construção da atividade 5 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Em seguida o professor solicitou aos alunos que construíssem, utilizando a ferramenta “Reta”, uma reta auxiliar qualquer que o mecanismo de construção do próprio *software* faz passar por dois pontos D e E. Renomeou-se o ponto D para A' e ocultou-se o ponto E.

Para que os alunos pudessem reproduzir exatamente a medida do segmento $\overline{AC}$ na reta auxiliar, selecionou-se a ferramenta “Compasso” e clicou-se tanto no ponto A quanto no ponto C e, em seguida, no ponto A'. O professor indagou os alunos para que percebessem que a ferramenta “Compasso” do GeoGebra simula o movimento do compasso e constrói uma circunferência cuja medida do raio é exatamente a distância entre os pontos A e C selecionados inicialmente:

Professor: pessoal, ao clicarmos no ponto A, C e por último no ponto A' o que GeoGebra construiu?

Alunos: uma circunferência.

Professor: alguém sabe me dizer a medida do raio dessa circunferência?

Alunos: deve ser a mesma medida da distância entre os pontos A e C.

Professor: muito bem! A ferramenta compasso do GeoGebra simula o compasso manual e utilizamos para reproduzir marcações em segmentos ou retas, ou seja, como selecionamos inicialmente os pontos A e C seria como se tivéssemos posicionados a ponta seca do compasso manual sobre o ponto A e a ponta de grafite sobre o ponto C, obtendo a medida do segmento $\overline{AC}$. Ao clicarmos no ponto A' o GeoGebra constrói uma circunferência com centro em A' e raio cuja medida é a mesma do segmento $\overline{AC}$, ou seja, seria como se colocássemos a ponta seca do compasso em A' e fizéssemos uma marcação sobre a reta auxiliar cuja distância entre esta marcação e A' é a mesma distância entre os pontos A e C.

Continuando com a construção na reta auxiliar, o professor solicitou que os alunos, com a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" selecionassem a reta auxiliar e a circunferência. Com esta seleção, por comando automático do *software*, são determinados os pontos D e F. Os alunos ocultaram tanto a circunferência quanto o ponto D e renomearam o ponto F para C'.

Com a ferramenta "Compasso" selecionada, foi solicitado aos alunos que construíssem uma circunferência de centro em A' e raio com mesma medida de $\overline{AB}$. De maneira análoga, uma circunferência com centro em C' e raio com mesma medida de $\overline{BC}$.

Marcou-se a intersecção entre as circunferências e, por comando automático do *software*, foram determinados os pontos F e G. Neste momento, houve necessidade de diálogo com os alunos para que percebessem que os pontos F e G eram vértices correspondentes ao vértice B do triângulo ΔABC construído no início da atividade.

Professor: pessoal, alguém sabe me dizer qual a relação entre os pontos B, F e G?

Alunos: são pontos dos dois triângulos.

Professor: sim, esses pontos recebem um nome específico. Alguém sabe me dizer qual nome dado para esse ponto de encontro de dois segmentos (lados) em um polígono qualquer?

Alunos: é vértice?

Professor: isso mesmo! Vértice! Sabem me dizer também qual é a relação entre os vértices B, F e G?

Alunos: são iguais?

Professor: no caso, porque estão em posições correspondentes?

Alunos: sim!

Professor: bom, neste caso dizemos que são correspondentes, ou seja, A e A' são vértices correspondentes. Assim, os vértices C e C' e os vértices B, F e G também são. Entenderam?

Alunos: ah sim!

O professor solicitou que os alunos ocultassem o vértice G, localizado acima da reta auxiliar para que, em alguns casos, o triângulo $\Delta A'B'C'$ reproduzisse uma rotação do triângulo ΔABC com relação ao segmento $\overline{A'C'}$. Renomeou-se o ponto F para B' e ocultaram-se as circunferências utilizadas para a obtenção do ponto, assim como a reta auxiliar, deixando na janela de visualização do *software* apenas o triângulo ΔABC e os pontos A', B' e C'. A Figura 18 apresenta esta etapa da construção na tela do GeoGebra.

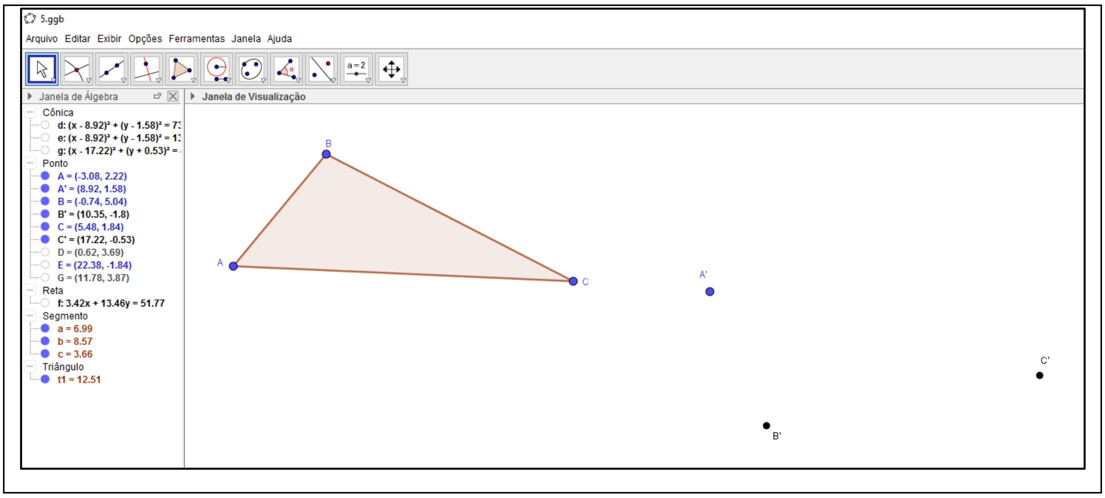


Figura 18. Construção da atividade 5 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Com a ferramenta "Polígono" selecionada realizou-se a construção do triângulo $\Delta A'B'C'$. Solicitou-se aos alunos que, por meio da utilização da ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" medissem os lados dos dois triângulos e verificassem a congruência com relação aos lados correspondentes. Neste momento foram realizadas algumas perguntas aos alunos para que os mesmos percebessem que os lados correspondentes dos triângulos eram congruentes por construção.

Professor: a medida do lado $\overline{AB}$ no triângulo ΔABC é a mesma medida de qual lado no triângulo $\Delta A'B'C'$?

Alunos: igual à medida do lado $\overline{A'B'}$.

Professor: então podemos dizer que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são congruentes?

Alunos: sim!

Professor: por que será que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, lados do triângulo ΔABC também são congruentes à $\overline{A'C'}$ e $\overline{B'C'}$? Sendo estes lados correspondentes à $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ no triângulo $\Delta A'B'C'$? Como conseguimos construir lados correspondentes congruentes? Vocês se lembram?

Alunos: é porque utilizamos a ferramenta compasso?

Professor: exatamente! Os lados correspondentes dos dois triângulos são congruentes por construção, ou seja, da forma que utilizamos a ferramenta compasso na reta auxiliar, realizando medições no primeiro triângulo, fizemos com que os lados correspondentes fossem congruentes, ou seja, de mesma medida. Entenderam?

Alunos: agora sim, professor!

Após esta intervenção o professor recordou, juntamente com os alunos, qual era o objetivo e conclusões da segunda atividade da sequência, retomando as condições necessárias e suficientes para a congruência de polígonos.

Professor: vocês se lembram de o que fizemos na segunda atividade?

Alunos: era aquela de polígonos?

Professor: sim! A segunda, em que falávamos das condições necessárias para que dois polígonos fossem congruentes... Lembram-se?

Aluno: sim! Para que dois polígonos fossem congruentes bastava os lados serem iguais.

Professor: é isso mesmo pessoal? Vocês lembram que fizemos alguns casos em que os lados correspondentes eram congruentes, porém os polígonos não se sobrepunham, ou seja, não eram congruentes? O que havíamos concluído então? Tem algo a ver com ângulos...

Alunos: ah sim, os ângulos também tinham que ter mesma medida!

Professor: isso mesmo! Então, para que dois polígonos sejam congruentes, uma condição necessária, mas não suficiente é que os lados correspondentes sejam congruentes?

Alunos: sim!

Professor: pois bem, aqui nesses dois triângulos que construímos pudemos verificar que os lados correspondentes são congruentes conforme construímos, mas só isso já basta para que eles sejam congruentes?

Alunos: parece que sim professor!

Professor: Será que nos triângulos, se os lados correspondentes são congruentes os ângulos correspondentes também são? Será que há necessidade de checar?

Alunos: visualmente parece que os ângulos possuem mesma medida!

Professor: na nossa construção, construímos algum ângulo correspondente congruente? Como foi isso?

Alunos: não, somente os lados correspondentes congruentes.

Professor: então vamos verificar os ângulos, mas sabendo que, em nossa construção reproduzimos no segundo triângulo, somente os lados correspondentes congruentes, ok?

Alunos: Ok! Então podemos medir os ângulos nos dois triângulos para verificar?

Professor: sim!

Solicitou-se então, que os alunos, por meio da ferramenta “Ângulo”, obtivessem as medidas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ do triângulo ΔABC e também dos ângulos $\widehat{A'}$, $\widehat{B'}$ e $\widehat{C'}$ do triângulo $\Delta A'B'C'$. A Figura 19 exemplifica esta construção final da atividade.

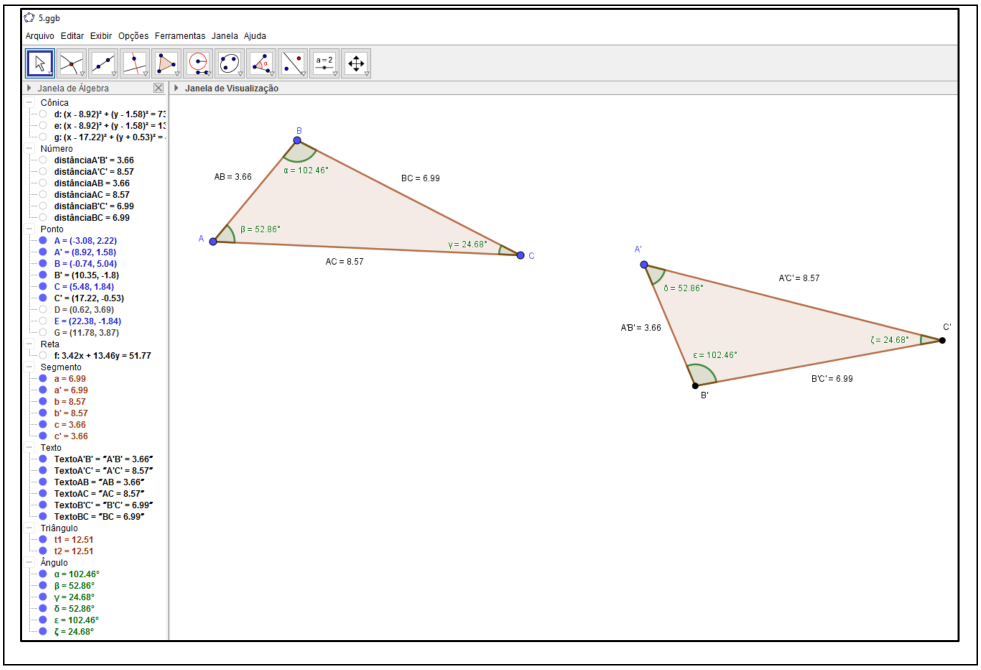


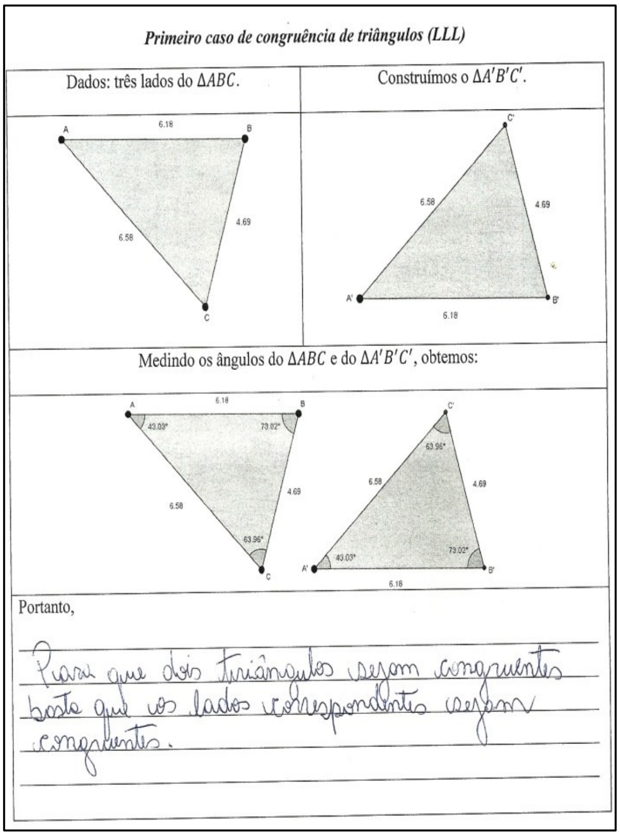
Figura 19. Construção final da atividade 5 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

O professor instruiu os alunos a movimentar (aumentar ou diminuir) os lados de um dos triângulos, percebendo que os ângulos correspondentes dos dois triângulos também se alteravam, formando outras representações de triângulos congruentes. Solicitou-se que registrassem suas conclusões acerca desta atividade utilizando a ferramenta texto no próprio GeoGebra e gravassem este arquivo. Neste momento de conclusão não houve intervenção do professor. Podemos observar na Figura 19 um dos alunos em fase de conclusão da atividade.

Figura 20. Aluno em fase de conclusão da atividade 5
Fonte: arquivo pessoal do autor

A terceira aula da atividade deu-se na sala e o professor entregou aos alunos a 3ª ficha de registros (Apêndice C) para que fizessem suas sínteses. Ele disponibilizou aos alunos imagens das etapas do processo de construção realizado no laboratório.

O professor recordou juntamente com os mesmos o processo de construção dos dois triângulos e formalizou o primeiro caso de congruência de triângulos solicitando que os alunos fizessem o registro da 1ª condição necessária e suficiente para congruência de triângulos, ou seja, o caso 1º caso de congruência de triângulos (LLL). A Figura 21 apresenta um exemplo da ficha preenchida.


Primeiro caso de congruência de triângulos (LLL)

Dados: três lados do ΔABC.	Construímos o $\Delta A'B'C'$.

Medindo os ângulos do ΔABC e do $\Delta A'B'C'$, obtemos:

Portanto,

Para que dois triângulos sejam congruentes basta que os lados correspondentes sejam congruentes.

Figura 21. Exemplo da 3ª Ficha de registros preenchida
Fonte: arquivo pessoal do autor

Atividade 06 – 2º caso de congruência de triângulos (ALA)

a) *Objetivo da atividade*: identificar, por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, outra condição necessária e suficiente para dois triângulos serem congruentes: ter dois ângulos correspondentes congruentes assim como o lado compreendido entre estes ângulos (caso ALA).

b) *Materiais utilizados*:

- Computador com o *software* GeoGebra.
- *Notebook e Datashow.*
- 4ª Ficha de registro (Apêndice D).
- Lápis e borracha.

c) *Tempo de duração*: três aulas.

d) *Local*: Laboratório de Informática e sala de aula

e) *Procedimentos realizados e alguns resultados*:

No laboratório de informática o professor solicitou inicialmente aos alunos que construíssem, com a utilização da ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo” do *software* GeoGebra, um segmento $\overline{AB}$ (lado do primeiro triângulo), de medida igual ou superior a $5\ cm$ para uma melhor visualização.

Em seguida, solicitou que, utilizando a ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa”, fizessem a marcação de um ângulo $\hat{A}$ (ângulo formado no vértice A) menor que 90º (por exemplo 60°). Neste momento foi necessário retomar uma propriedade importante dos triângulos: a soma da medida dos ângulos internos.

Professor: pessoal, vamos fazer a construção de um triângulo e nós mesmos vamos definir dois de seus ângulos. Desta forma, é necessário recordar uma propriedade importantíssima dos triângulos. Alguém saberia me dizer qual propriedade dos triângulos nos remete aos ângulos internos?

Alunos: tem a ver com a soma das medidas dos ângulos?

Professor: sim!

Alunos: ah sim, é 180!

Professor: como assim, 180?

Alunos: a soma dos ângulos é 180!

Professor: ah sim, vocês querem dizer que a soma da medida dos ângulos internos de todo triângulo é igual à 180º? É isso?

Alunos: sim professor!

Após este diálogo com os alunos, o professor solicitou que os mesmos, de maneira análoga ao procedimento anterior, construíssem outro ângulo $\hat{B}$ com amplitude fixa (por exemplo, 30º).

Como, de forma automática, ao construir o ângulo $\hat{A}$ e o ângulo $\hat{B}$, são definidos pelo GeoGebra o pontos A' e B', respectivamente, foi solicitado que os alunos selecionassem a ferramenta “Reta” e construíssem duas retas auxiliares: uma passado pelos pontos A e B' e outra passando pelos pontos B e A', conforme apresentado na Figura 22.

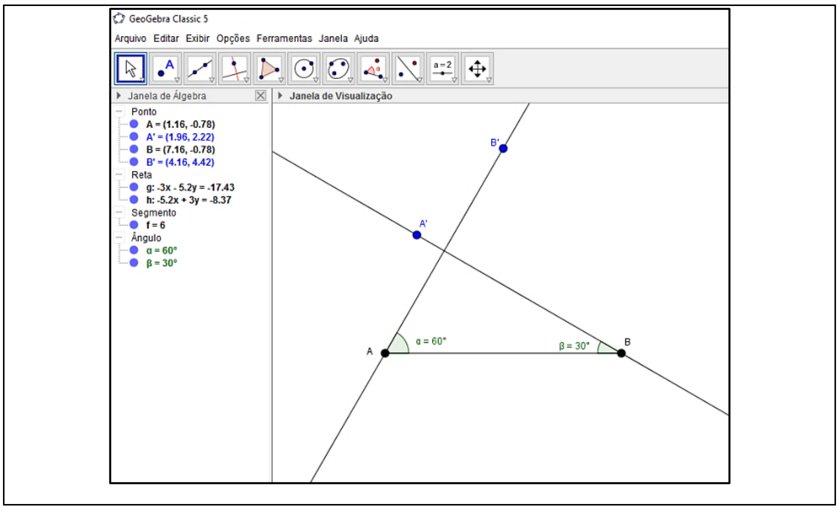


Figura 22. Início da construção da atividade 6 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Dando continuidade à atividade, o professor chamou a atenção para que os alunos observassem que o ponto de intersecção das duas retas era exatamente o vértice C do triângulo ΔABC a ser construído; a seguir, solicitou que utilizassem a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” para obter o vértice C.

Na sequência, os alunos ocultaram o segmento com comprimento fixo $\overline{BC}$ e também as retas auxiliares, deixando apenas os três vértices deste primeiro triângulo.

Com a ferramenta “Polígono” o professor solicitou que os alunos construíssem então o triângulo ΔABC. A Figura 23 apresenta um exemplo desta construção.

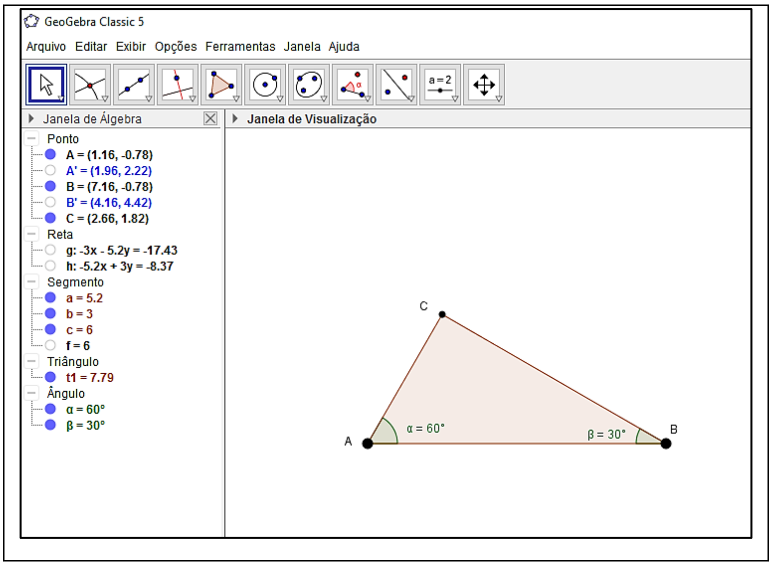


Figura 23. Construção da atividade 6 no *software*
Fonte: arquivo pessoal do autor

Em seguida, o professor solicitou que os alunos realizem a construção de um segundo triângulo $\Delta A'B'C'$, com mesma medida de segmento com comprimento fixo, e mesmos ângulos de amplitude fixa (por exemplo, 60º e 30º). Entretanto, para que não fosse realizada a mesma construção – que remeteria a dois triângulos visualmente congruentes – o professor solicitou que a marcação do ângulo $\widehat{A}'$ fosse realizada em 60° no sentido horário (sendo que o ângulo $\hat{A}$ havia sido construído em sentido anti-horário). De forma análoga trocou-se o sentido do ângulo $\hat{B}$, também vértice do triângulo $\Delta A'B'C'$.

Assim como na construção do triângulo ΔABC, com auxílio de retas auxiliares os alunos obtiveram o vértice C', ocultaram o segmento inicial construído e as retas auxiliares e, por meio da seleção da ferramenta polígono, obtiveram a construção do triângulo $\Delta A'B'C'$.

Em fase final da atividade o professor retomou, por meio de diálogo com os alunos, a construção realizada, tendo por objetivo que os mesmos percebessem que os dois triângulos possuíam, por construção, dois ângulos correspondentes congruentes, assim como o lado compreendido entre eles.

Professor: pessoal, vamos observar o que acabamos de construir... Alguém saberia me dizer?

Alunos: dois triângulos (risos)!

Professor: sim, entendo. Digo, de que forma obtivemos o segundo triângulo?

Alunos: com mesmas medidas de ângulos e lados do primeiro.

Professor: então construímos o segundo triângulo reproduzindo os três lados e os três ângulos do primeiro? Foi isso?

Alunos: não, somente dois ângulos e um lado.

Professor: como podemos relacionar esse lado com os ângulos?

Alunos: esse lado está no meio dos ângulos.

Professor: é basicamente isto... E o que podemos dizer sobre os ângulos e o lado correspondentes do primeiro e do segundo triângulo?

Alunos: eles possuem mesma medida!

Professor: então, podemos dizer em síntese que, os dois triângulos possuem, por construção, ou seja, devido à forma como foram construídos, dois ângulos correspondentes congruentes e o lado compreendido entre eles congruente?

Alunos: sim professor!

Professor: então... Será que podemos dizer que os dois triângulos, que são polígonos, são congruentes?

Alunos: sim!

Professor: mas dois ângulos correspondentes congruentes e um lado compreendido entre eles seria uma condição suficiente para que dois triângulos sejam congruentes? Vocês não acreditam que tenhamos que medir todos os lados e ângulos para verificar?

Alunos: acho que sim!?

Professor: OK! Então vamos verificar? Meçam os três lados e três ângulos dos dois triângulos.

Após os alunos medirem, utilizando ferramentas do GeoGebra, os lados e ângulos dos triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ o professor solicitou que os mesmos registrassem suas conclusões acerca desta atividade utilizando a ferramenta texto no próprio GeoGebra e gravassem este arquivo. Neste momento de conclusão não houve intervenção do professor. A Figura 24 exemplifica a construção final da atividade.

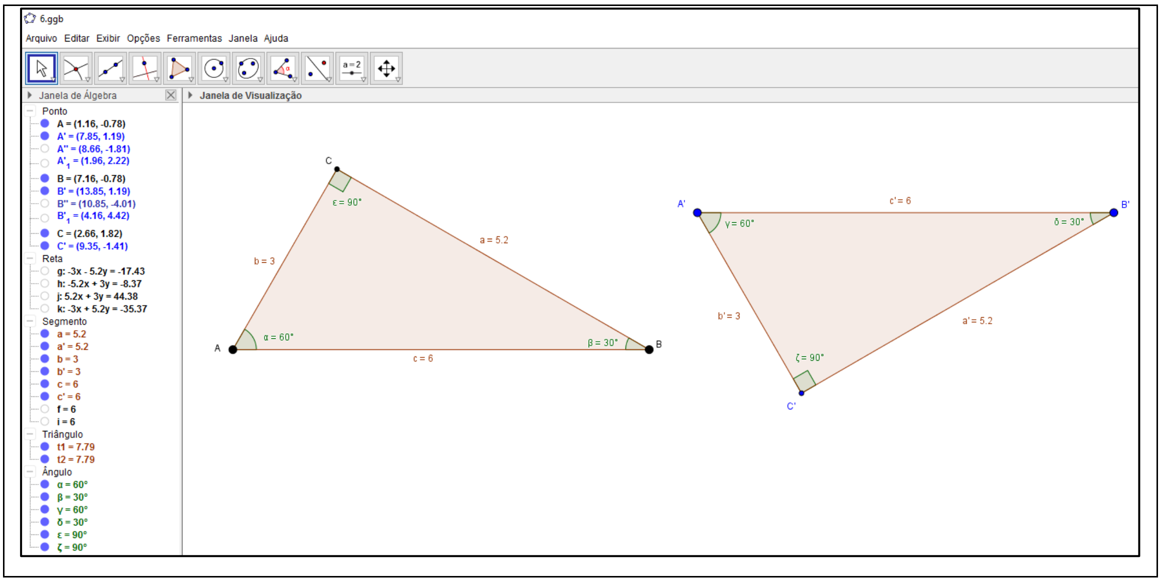
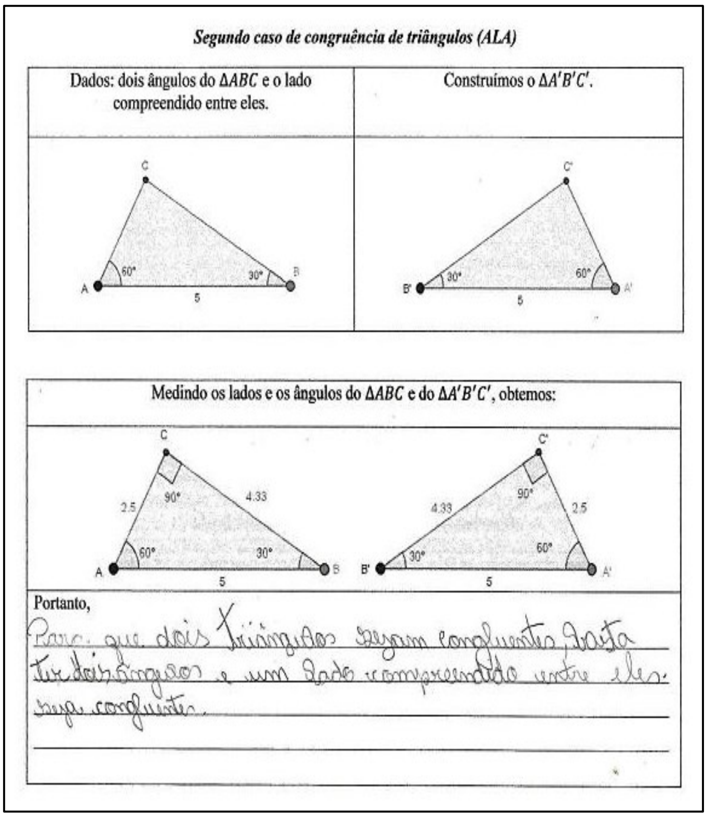


Figura 24. Construção final da atividade 6 na tela do *software*
Fonte: arquivo pessoal do autor

Assim como na atividade anterior, em aula posterior ao laboratório (terceira aula da atividade), para a realização de síntese e análise da atividade, o professor, em sala de aula, entregou aos alunos a 4ª ficha de registros (Apêndice D). Nesta disponibilizou-se aos alunos imagens das etapas do processo de construção realizado no laboratório.

O professor recordou juntamente com os mesmos o processo de construção dos dois triângulos e formalizou o segundo caso de congruência de triângulos solicitando que os alunos fizessem o registro da 2ª condição necessária e suficiente para congruência de triângulos, ou seja, o caso ALA. A Figura 25 apresenta um exemplo da ficha preenchida.


Segundo caso de congruência de triângulos (ALA)

Dados: dois ângulos do ΔABC e o lado compreendido entre eles.	Construímos o $\Delta A'B'C'$.

Medindo os lados e os ângulos do ΔABC e do $\Delta A'B'C'$, obtemos:

Portanto,
Para que dois triângulos sejam congruentes basta ter dois ângulos e um lado compreendido entre eles. seja congruentes.

Figura 25. Exemplo da 4ª Ficha de registros preenchida
Fonte: arquivo pessoal do autor

Atividade 07 – 3º caso de congruência de triângulos (LAL)

a) Objetivo da atividade: identificar, por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, que uma condição necessária e suficiente para que dois triângulos sejam congruentes é terem dois lados e o ângulo formado por esses lados respectivamente congruentes.

b) Materiais utilizados:

- Computador com o *software* GeoGebra.
- *Notebook e Datashow.*
- 5ª Ficha de registro (Apêndice E).
- Lápis e borracha.

c) Tempo de duração: três aulas.

d) Local: Laboratório de Informática e sala de aula

e) Procedimentos realizados e alguns resultados:

O início da atividade também ocorre no laboratório de informática. Os alunos deveriam construir no *software* GeoGebra, com a utilização da ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo”, um segmento $\overline{AB}$ (lado do primeiro triângulo), de medida igual ou superior a $5\ cm$ para uma melhor visualização.

Em seguida, solicitou-se que os alunos, utilizando-se da ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa” fizessem a marcação de um ângulo $\hat{A}$ (ângulo formado no vértice A) menor que 90º (por exemplo, 60°).

Após obterem o ângulo $\hat{A}$, foi solicitado que, utilizando a ferramenta “Reta”, construíssem uma reta auxiliar passando pelo ponto A e pelo ponto B', este construído por comando automático após a construção do ângulo com amplitude fixa.

O professor solicitou que os alunos ocultassem o ponto B' e, por meio da seleção da ferramenta “Círculo dado Centro e Raio”, construíssem uma circunferência com centro no vértice A e raio qualquer, definido pelos mesmos. Em seguida, marcassem o ponto de intersecção entre a circunferência e a reta auxiliar, obtendo assim, o vértice C do primeiro triângulo ΔABC, conforme apresentado na Figura 26.

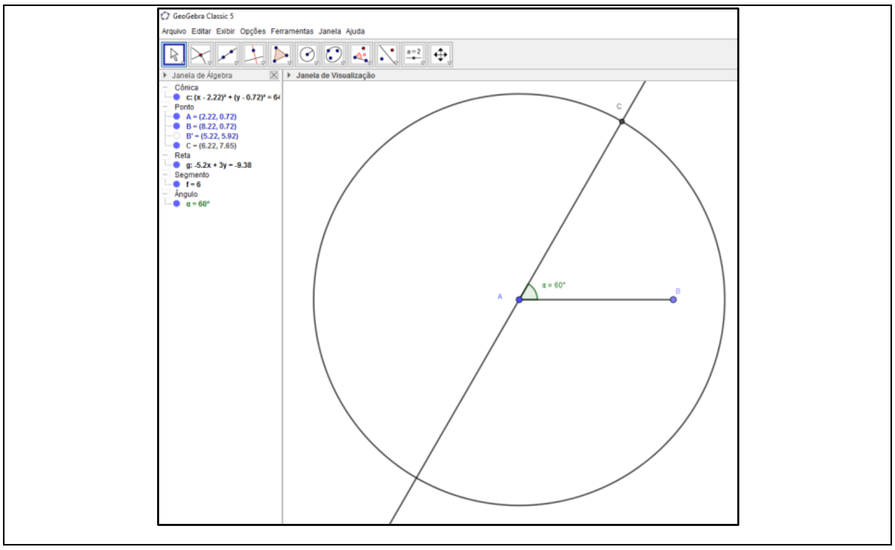


Figura 26. Construção inicial da atividade 7 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Dando prosseguimento à atividade, foi solicitado que ocultassem os objetos auxiliares deixando visível somente os pontos A, B e C. Com a ferramenta “Polígono” selecionada, construiu-se o triângulo ΔABC.

De maneira análoga a esta construção inicial, os alunos obtiveram também o triângulo $\Delta A'B'C'$. Foi necessária a intervenção do professor para que percebessem que a congruência dos triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ era devida à congruência de dois lados correspondentes e também do ângulo compreendido entre esses lados.

Professor: o que podemos dizer sobre o segundo triângulo que construímos?

Alunos: é congruente ao primeiro!

Professor: calma... Como podemos chegar a esta conclusão?

Alunos: de acordo com as atividades anteriores! Nas duas atividades anteriores os triângulos eram congruentes, então esses também são!

Professor: pois bem, vamos discutir então como o segundo triângulo foi construído, ou seja, quais medidas foram reproduzidas do primeiro triângulo no segundo? Dois lados, dois ângulos, um ângulo e um lado, um lado e um ângulo...

Alunos: utilizamos dois lados e um ângulo!

Professor: mas esse ângulo tem alguma relação com esses lados?

Alunos: sim! Está entre os dois lados.

Professor: e há congruência entre esses dois lados e este ângulo?

Alunos: sim! Tanto os lados quanto os ângulos possuem mesma medida!

Professor: então podemos afirmar que construímos dois triângulos de forma que dois lados correspondentes e o ângulo compreendido entre esses lados são congruentes?

Alunos: sim!

Professor: será então que os dois triângulos são congruentes? Vamos conferir? Obtenham as medidas dos três lados e dos três ângulos nos dois triângulos e vejamos se realmente são.

Após os alunos medirem e verificarem que os dois triângulos eram congruentes, pois havia congruência entre os lados e ângulos correspondentes, o professor solicitou que os mesmos registrassem suas conclusões acerca desta atividade no próprio arquivo e fizessem a gravação. Neste momento do registro de suas conclusões não houve intervenção do professor. A Figura 27 exemplifica a construção final da atividade.

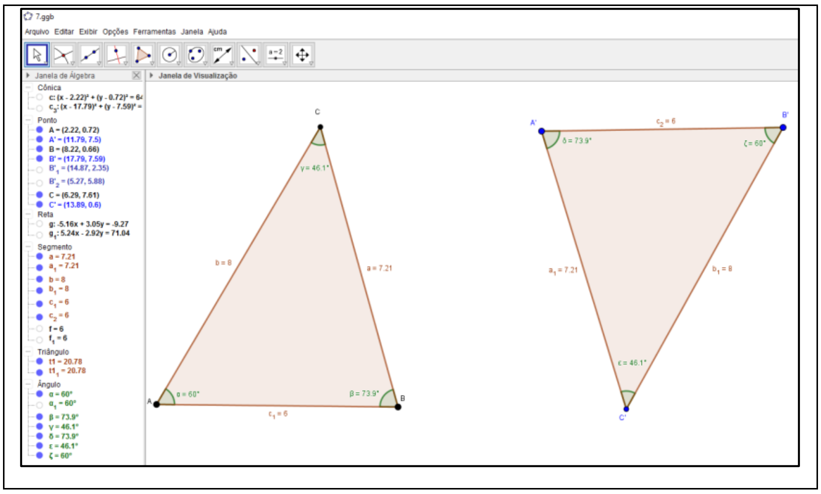


Figura 27. Construção final da atividade 7 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Assim como nas atividades anteriores, em aula posterior ao laboratório (terceira aula da atividade), realizou-se também a síntese e análise da atividade em sala de aula, com anotações dos alunos na 5ª ficha de registros (Apêndice E). Nesta disponibilizou-se aos alunos, imagens das etapas do processo de construção realizado no laboratório.

O professor recordou, juntamente com os alunos, o processo de construção dos dois triângulos e formalizou o terceiro caso de congruência de triângulos solicitando que fizessem o registro formal da 3ª condição necessária e suficiente para congruência de triângulos, ou seja, o caso LAL. Na Figura 28 podemos ver um exemplo da ficha preenchida.

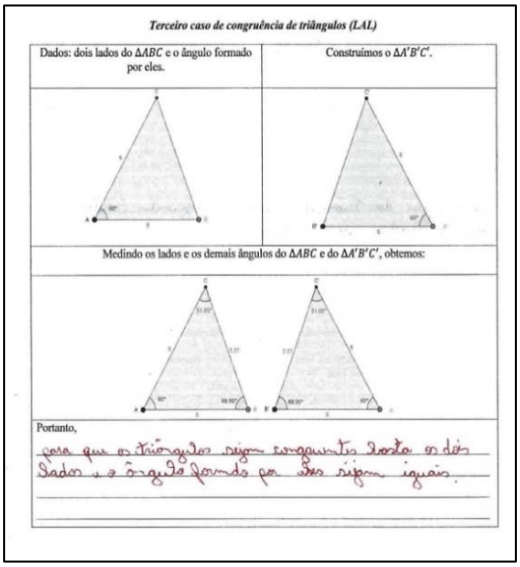


Figura 28. Exemplo da 5ª Ficha de registros preenchida
Fonte: arquivo pessoal do autor

Atividade 08 – decomposição de polígonos regulares

a) Objetivo da atividade: avaliar o estabelecimento dos três casos de congruência de triângulos

b) Materiais utilizados:

- Computador com o *software* GeoGebra.
- *Notebook e Datashow.*

c) Tempo de duração: duas aulas.

d) Local: Laboratório de Informática

e) Procedimentos realizados e alguns resultados:

Tendo como objetivo avaliar o entendimento dos três casos de congruência de triângulos trabalhados nas aulas, o professor propôs a oitava atividade, a ser realizada também com a utilização do *software* GeoGebra no laboratório de informática.

A atividade consistia em construir polígonos regulares, traçar as diagonais por um vértice e identificar casos de congruência de triângulos formados por esta decomposição. Desta forma, foi necessário revisar com os mesmos a definição de polígono regular:

Professor: vocês se lembram na primeira e segunda atividade em que vimos vários exemplos de polígonos? Alguém saberia dizer o que é um polígono regular?

Alunos: são os polígonos que conhecemos? Triângulo, quadrado, retângulo, etc.?

Professor: a palavra regular nos remete a alguma propriedade, não é?

Alunos: sim! Lembra regularidade (risos)!

Professor: e se eu disser pra vocês que os triângulos equiláteros são polígonos regulares assim como os quadrados, dentre outros? Quais propriedades possuem os triângulos equiláteros e os quadrados?

Alunos: lados iguais? Sabemos que os quadrados possuem lados iguais!

Professor: isso mesmo! Triângulos equiláteros também! São triângulos que possuem os três lados e os três ângulos congruentes!

Alunos: ah sim!

Professor: alguém se lembra de mais algum polígono regular além de triângulos equiláteros e quadrados?

Alunos: acho que não (risos)!

Professor: não se lembram de ter estudado polígonos regulares como o pentágono...?

Alunos: ah sim! Hexágono, heptágono, etc.

Professor: sim! Os polígonos regulares são aqueles que possuem lados e ângulos internos congruentes. Além disso, são nomeados de acordo com a quantidade de lados: triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono, decágono, etc. Ok?

Alunos: ok, professor! Então o que vamos fazer?

Após recordar como os alunos a definição de polígono regular os mesmos foram solicitados a construírem um segmento $\overline{AB}$ com comprimento fixo (que serviu para indicar a medida dos lados do polígono regular a ser construído). Posteriormente, foi solicitado que ocultassem o segmento exibindo somente suas extremidades (pontos A e B).

Com a ferramenta “Polígono Regular” do GeoGebra traçou-se, partindo dos pontos A e B, um polígono regular definindo a quantidade de vértices desse polígono. A atividade iniciou-se com um polígono regular de 4 vértices (quadrado).

Após a construção do quadrado o professor solicitou que os alunos traçassem, utilizando a ferramenta “Segmento”, a diagonal que cujos vértices A e B são extremidades, formando os triângulos ΔABC e ΔACD. A Figura 29 mostra a construção na tela do GeoGebra.

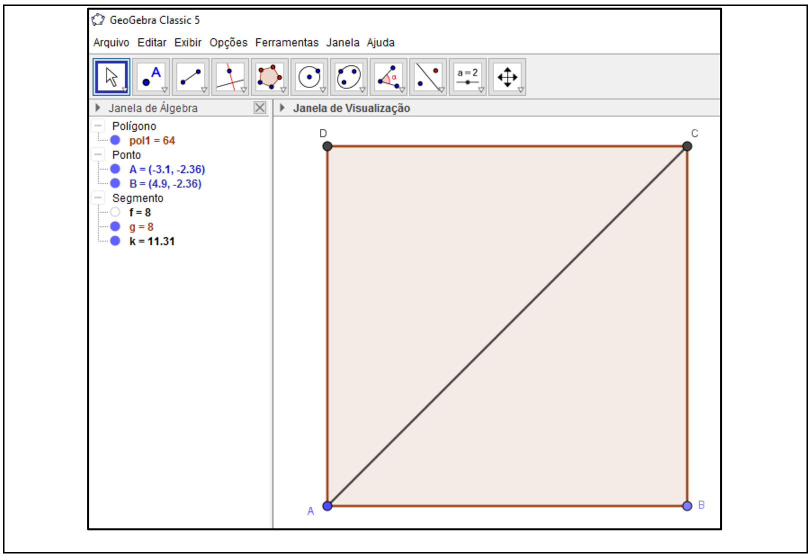


Figura 29. Construção inicial da atividade 8 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Solicitou-se que os alunos realizassem medições entre ângulos e lados desses triângulos, identificassem diferentes casos de congruência e registrassem suas conclusões no próprio arquivo do GeoGebra. Neste momento não houve intervenção do professor. A Figura 30 ilustra este momento em que os alunos registram suas conclusões no arquivo nesta etapa da atividade.

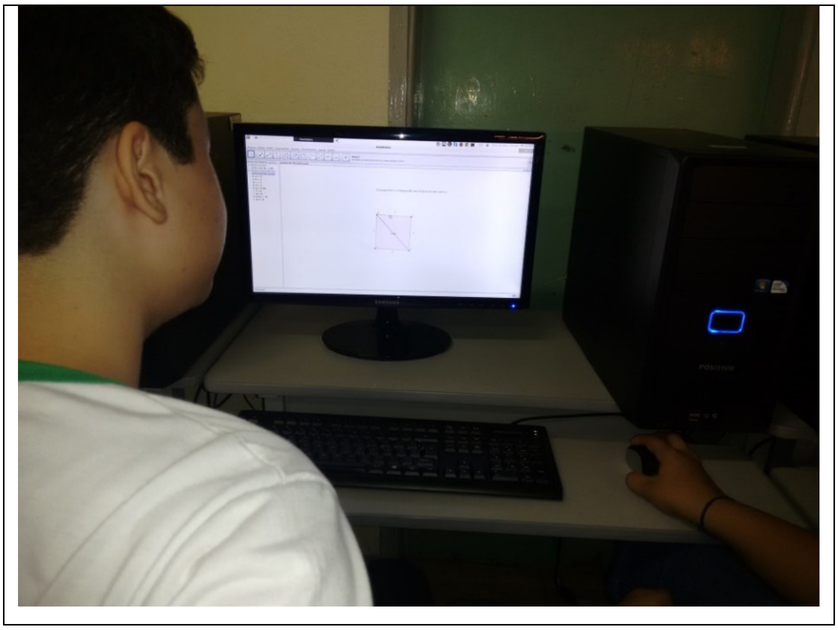


Figura 30. Construção inicial da atividade 8 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Após os alunos registrarem suas conclusões, identificado os casos de congruência identificados nos triângulos obtidos pela decomposição, o professor indagou-os a fim de obter um *feedback* e síntese desta etapa da atividade e da sequência didática em contexto geral:

Professor: pessoal, quantos triângulos foram formados traçando-se esta diagonal por um dos vértices do quadrado?

Alunos: dois triângulos!

Professor: eles são congruentes?

Alunos: sim!

Professor: por qual caso?

Aluno A: eu coloquei que eles são congruentes pelo caso LLL!

Aluno B: eu coloquei que eles são congruentes pelo caso LAL! Pois o ângulo do quadrado é 90º.

Professor: alguém concluiu que eles são congruentes por outro caso de congruência?

Aluno C: eu coloquei que são congruentes pelo caso ALA!

Professor: de acordo com a fala de vocês, o que podemos concluir?

Alunos: que os triângulos são congruentes?!

Professor: polígonos congruentes possuem tanto os ângulos correspondentes congruentes, não é mesmo?

Alunos: sim!

Professor: então podemos concluir que, dados triângulos quaisquer, se eles cumprem qualquer uma das condições necessárias e suficientes para que haja a congruência entre eles (LLL, LAL, ALA...), também cumprirão qualquer outro caso de congruência. Em outras palavras, se os triângulos são congruentes por um dos casos dizemos, de forma geral, que eles são congruentes e, portanto cumprem qualquer outro caso de congruência. Entenderam?

Alunos: ah sim! Por isso que encontramos diferentes casos, não é?

Professor: sim! Nós iremos fazer o mesmo procedimento com outros polígonos regulares e a tarefa de vocês é identificar diferentes casos, mas sabendo de tudo que acabamos de conversar, ok?

Alunos: sim professor!

Dando continuidade à atividade o professor solicitou que os mesmos, de maneira análoga à construção anterior, construíssem um pentágono regular, traçasse as diagonais por um vértice e indicassem casos de congruência dos triângulos formados.

Neste momento foi possível observar que os alunos caminharam sozinhos, sem solicitar mais orientações do professor. Além disso, após realizarem suas conclusões, realizaram também edições alterando espessura de segmentos, cores dos pontos e demais componentes na construção, demostrando criatividade e estarem motivados ao realizarem esta atividade. A Figura 31 apresenta uma das produções dos alunos nesta etapa:

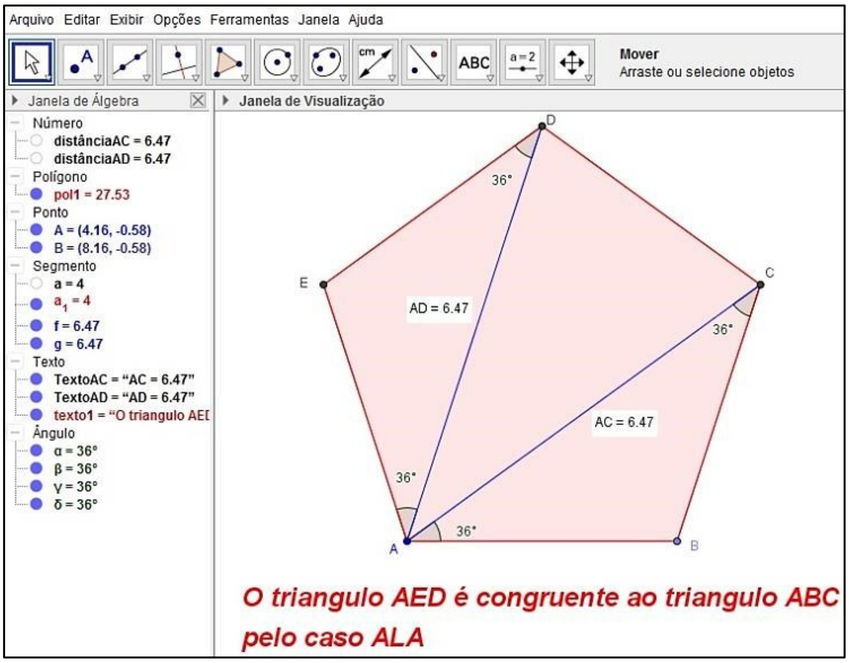


Figura 31. Produções dos alunos no GeoGebra durante a oitava atividade.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Após os alunos registrarem suas conclusões o professor dialogou com a classe a fim de discutir sobre os três triângulos formados pela decomposição:

Professor: quantos triângulos foram formados traçando-se diagonais por um vértice do pentágono?

Alunos: três triângulos!

Professor: todos os três são congruentes?

Alunos: não, somente dois!

Professor: como vocês concluíram isso?

Aluno A: dá pra verificar visualmente que eles não são!

Aluno B: eu fiz a medição dos lados e dos ângulos e realmente não são!

Professor: muito bem! Realmente somente dois dos triângulos são congruentes. Observem que o triângulo que não é congruente possui somente um dos lados congruente aos demais que é justamente o lado do polígono regular. Conseguiram visualizar?

Alunos: sim professor!

De forma análoga o professor avançou, juntamente com os alunos, para decomposição de polígonos regulares até o dodecágono (polígono de doze lados). A Figura 32 mostra duas das produções dos alunos nesta parte final.

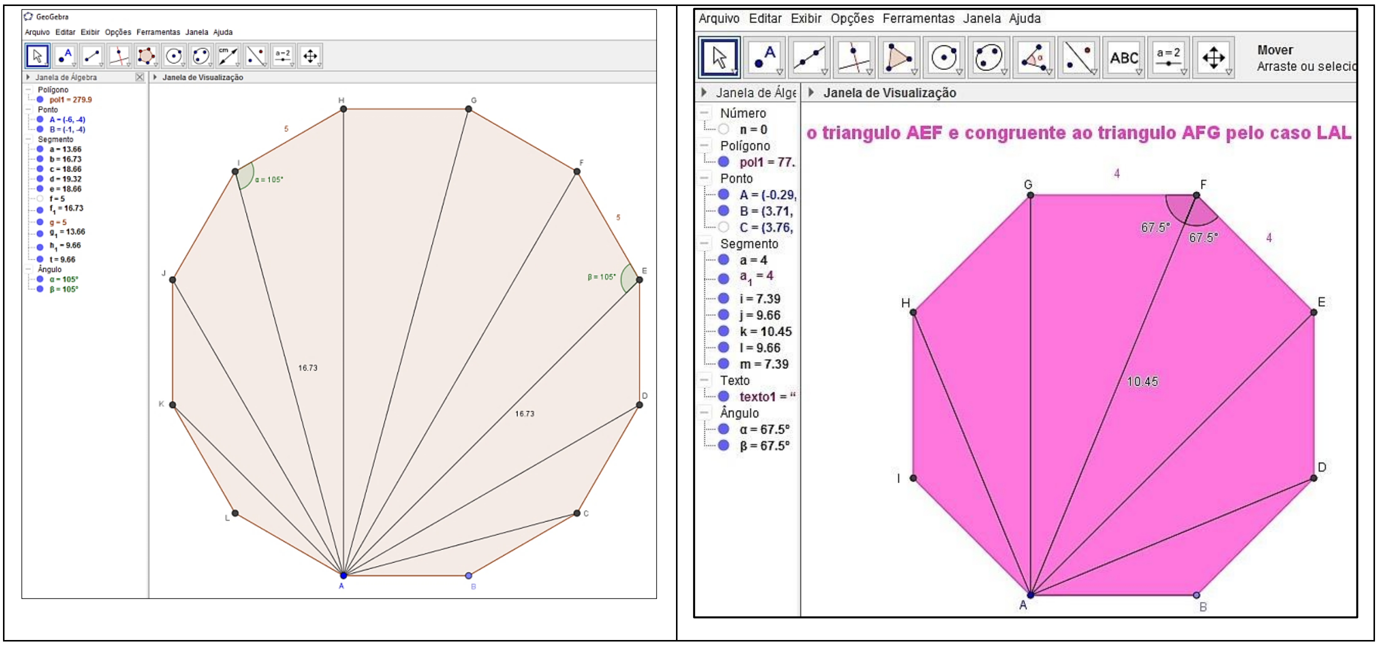


Figura 32. Produções dos alunos no GeoGebra ao final da oitava atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

Nesta atividade, ao final de cada construção, o professor disponibilizava três minutos para que os alunos realizassem edições, caso quisessem. Neste momento, foi possível observar a interação entre os alunos quando comparavam as suas produções e discutiam as funcionalidades de determinadas ferramentas de edição.

Por fim, o professor solicitou que os alunos realizassem verbalmente uma avaliação das aulas compostas pelas oito atividades. O diálogo a seguir ilustra parte deste momento:

Professor: pessoal, agora quero que vocês me digam: gostaram das atividades que fizemos?

Alunos: sim! Gostamos!

Professor: de qual atividade mais gostaram?

Aluno A: eu gostei mais da segunda atividade, pois fiquei muito curiosa para saber quais eram os pares de polígonos congruentes.

Aluno B: eu gostei das atividades de laboratório!

Professor: por quê?

Aluno B: porque gostei de trabalhar com o GeoGebra! Dá pra fazer muita coisa!

Professor: alguém mais quer destacar alguma atividade ou fazer uma avaliação das aulas?

Aluno C: eu gostei mais das atividades de laboratório!

Professor: por quê?

Aluno C: porque aqui tem ar condicionado ué (risos)...! Estou brincando professor! É porque gosto de informática mesmo!

Aluno D: eu gostei mais desta última atividade!

Professor: por quê?

Aluno D: achei interessante a decomposição dos polígonos regulares, pois formam vários triângulos. Nesta última formaram dez triângulos! Só que eram congruentes de dois em dois!

Aluno E: toda aula de geometria poderia ser aqui no laboratório (risos)!

Professor: agora quero que me digam: vocês acreditam que aprenderam tudo mesmo?

Alunos: sim!

Professor: posso cobrar na prova então né (risos)?

Alunos: aí não professor (risos)!

Desta forma, o professor encerrou as atividades da sequência didática proposta. O assunto foi retomado algumas semanas depois com exercícios retirados de livros didáticos e do livro adotado pela escola. Posteriormente foi apresentado o 4º caso de congruência de triângulos ($\mathrm{LAA_O}$) sem construção no GeoGebra.

CAPÍTULO IV: ANÁLISE

4.1 A potencialidade significativa do material

Conforme anunciado, um dos objetivos deste trabalho é analisar a potencialidade significativa da sequência didática, ou seja, a estrutura lógica das atividades propostas e os mecanismos de aprendizagem significativa.

Na perspectiva de Ausubel (2000), a aprendizagem significativa envolve a aquisição de novos significados a partir do material de aprendizagem potencialmente significativo para o aprendiz, ou seja, o próprio material de aprendizagem deve estar relacionado de forma não arbitrária (plausível, sensível e não aleatória) e não literal com qualquer estrutura cognitiva apropriada e relevante. Neste sentido, pretende-se analisar as características da sequência didática apresentada neste trabalho de modo a considerá-la como um material de aprendizagem potencialmente significativo, realçando aspectos referentes às fases de planejamento e de aplicação das atividades.

Ausubel (2000) afirma que, para serem identificados a estrutura lógica e os mecanismos de aprendizagem significativa, o material de aprendizagem deve atender a dois princípios norteadores: (a) a disponibilidade, a estabilidade e a clareza de ideias ancoradas e especificamente relevantes na estrutura cognitiva do aprendiz e (b) a capacidade para a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora das ideias para a assimilação de conceitos e proposições.

Assim, o primeiro aspecto a ser analisado refere-se à disponibilidade das ideias existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, ou seja, às formas empregadas na sequência didática para mobilizar aqueles conhecimentos prévios dos alunos considerados relevantes para o estabelecimento de relações e atribuição de significados.

Optando por ativar o conhecimento relativo a polígonos, a primeira atividade foi planejada para servir como um organizador avançado: este, conforme define Ausubel (2000), é um mecanismo pedagógico que ajuda a estabelecer uma “ligação entre aquilo que o aprendiz já sabe e aquilo que precisa saber” (p. 11) principalmente quando as ideias relevantes existentes na estrutura cognitiva são demasiado gerais e pouco eficientes para servirem como ideias ancoradas.

Assim, a atividade foi iniciada com apresentação de um *slide* contendo polígonos elementares (como quadrado, triângulo, trapézio etc. – que são trabalhados desde os anos iniciais do ensino fundamental), outros menos conhecidos (convexos e não convexos) e também figuras que não eram polígonos. Havia pares de polígonos congruentes entre as figuras, além de pares que tinham algumas características comuns, mas que não eram polígonos congruentes (Figura 1).

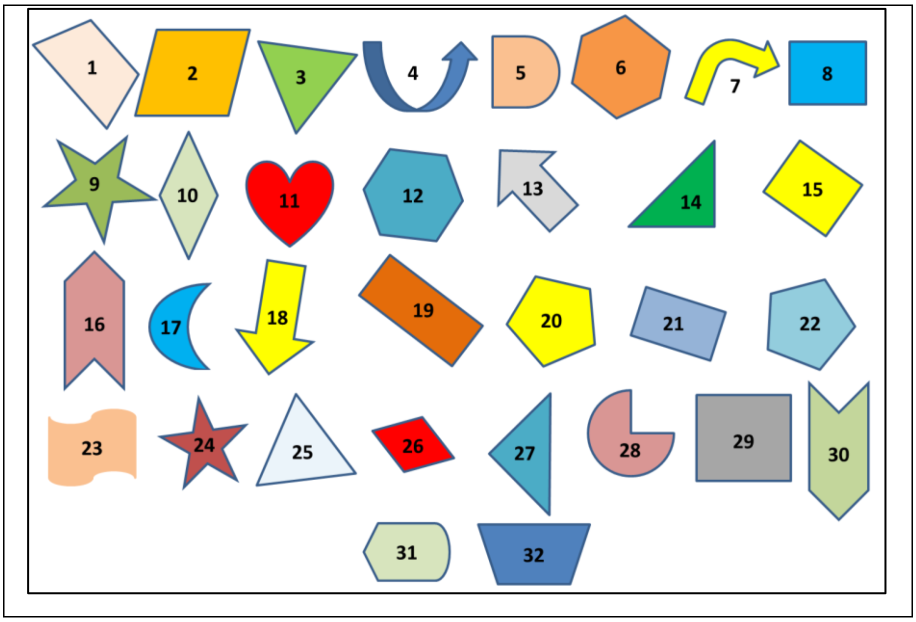


Figura 33. *slide* 1 da primeira atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

Para facilitar o processo de diferenciação das figuras – já que foram apresentadas juntas – elas foram numeradas e, a cada indicação de uma figura, eram promovidos diálogos que tinham a intenção de mobilizar as ideias referentes aos atributos definidores de polígonos (figura plana, formada por segmentos de reta, fechada e simples) a partir da indicação de uma figura específica, mostrada no slide.

Assim, quando o professor perguntava: “a figura 1 é uma linha fechada?”; “e a figura número 23?” e “a figura número 1 é formada apenas por segmentos de reta simples, ou seja, que não se cruzam ou possuem linhas curvas?” buscava a clareza do conceito de polígono; quando o aluno foi solicitado a responder: “O que você aprendeu nesta aula? Desenhe exemplos e contraexemplos” na 1ª Ficha de

Registros, buscava-se a estabilidade do conceito (e sua definição não-literal) para que este ficasse disponível para a segunda atividade – o que contribuiria para a discriminação das ideias contidas na sequência.

Para conceituar polígonos congruentes, optou-se por retomar, como ideias ancoradas na estrutura cognitiva dos alunos, os significados de igualdade e de similaridade. Assim, na 2ª Ficha de Registros e nos diálogos estabelecidos, foram utilizadas as expressões “polígonos iguais” e “polígonos parecidos” para diferenciar pares de polígonos congruentes daqueles pares de polígonos que atendiam apenas a uma das condições necessárias para a congruência. Como exemplo deste caso, citam-se dois quadriláteros com lados correspondentes congruentes e ângulos correspondentes não congruentes, ou seja, um quadrado e um losango não quadrado. Ao verificarmos os questionamentos: “s*e eu tentar colocar sobrepô-los irá ficar certinho?”,* ou *“será que só isto basta?”;* e ao sintetizar: *“podemos concluir que não é uma condição suficiente, pois dependemos das medidas dos ângulos correspondentes”,* nota-se que o professor buscava a apreensão de semelhanças e diferenças e também resolução de contradições entre conceitos e proposições novos e os já enraizados.

A mobilização de conhecimentos prévios ao longo da sequência didática pode ser notada nas atividades de construção utilizando o GeoGebra, realizadas no laboratório de informática. Por exemplo, na construção de triângulos foram revisados vários conceitos e proposições: soma dos ângulos internos de um triângulo; circunferência e seus elementos; posições relativas entre retas e circunferências etc. Estes conhecimentos, uma vez que já presentes na estrutura cognitiva dos sujeitos, podem ser considerados como subsunçores, podendo interagir com os novos potenciais significados.

Entretanto, cabe ressaltar que, segundo Ausubel (2000), a aprendizagem significativa não é sinônimo de aprendizagem de material significativo. O autor enfatiza que o material de aprendizagem apenas é *potencialmente* significativo. Neste sentido, se não houver um mecanismo de aprendizagem significativa, o aluno pode aprender o material por memorização apenas. Assim, o segundo aspecto a ser analisado na sequência didática diz respeito ao princípio que evidencia a capacidade para a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora das ideias para a assimilação de conceitos e proposições.

A aprendizagem de conceitos e a aprendizagem de proposições diferem da aprendizagem representacional, conforme Ausubel (2000). Nesta, símbolos arbitrários passam a representar seus referentes objetos, eventos e conceitos. Já aprendizagem conceitual é também uma aprendizagem de representações, pois conceitos também são representados por símbolos isolados (palavras-conceito, nome); entretanto, conceitos são genéricos, categoriais, representam regularidades em objetos, eventos, fenômenos que apresentam diversidades ao longo de distintas dimensões que compartilham certos atributos e características. Por fim, a aprendizagem proposicional trata de captar o significado de ideias expressas em forma de proposições. A sequência didática aqui analisada objetivava a assimilação do conceito de congruência de triângulos, envolvendo as proposições referentes aos casos de congruência.

Um conceito (ou proposição) potencialmente significativo deve ser assimilado sob uma ideia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, por processos de diferenciação e integração, definidos por Ausubel (2000) como diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. Na primeira, o processo de assimilação acontece de forma progressiva, em que o sujeito consegue diferenciar os significados das ideias. Já na reconciliação integrativa o sujeito busca integrar os significados, delineando as diferenças e as similaridades entre ideias relacionadas. Assim, toda aprendizagem que resultar em reconciliação integrativa resultará em diferenciação progressista adicional de conceitos e proposições.

Em termos gerais, a sequência didática foi planejada segundo uma organização lógica, já que tinha por base uma hierarquia conceitual para facilitar o processo de diferenciação progressiva. Tomou-se como princípio partir de um universo maior, no caso, o conjunto de figuras geométricas planas (em que os conceitos são mais gerais, num nível hierarquicamente superior), perpassando pela aprendizagem de congruência de polígonos até a situação mais particular de congruência de triângulos, em que as proposições referentes aos casos de congruência são especificadas (nível hierarquicamente inferior).

Pode-se observar que várias atividades buscavam promover os processos cognitivos de diferenciação progressiva e de reconciliação integrativa. Por exemplo, na primeira atividade, foram apresentadas todas as figuras de uma vez com a proposta de que os alunos as diferenciassem e, por meio da observação, identificação de atributos e análise de propriedades, realizem classificações relacionando conhecimentos já existentes em suas estruturas cognitivas e buscando, assim, integrar os significados das ideias.

Assim também aconteceu na segunda atividade, quando os pares de polígonos foram diferenciados pelos alunos, sendo identificados ora a congruência de lados, ora a congruência de ângulos. Evidentemente, a reconciliação integradora foi facilitada pelo professor quando explicitava as situações de necessidade e de suficiência das condições para a congruência dos polígonos, buscando a generalização e formalização do conceito por meio de proposições.

Segundo Ausubel (2000) a nova informação pode se vincular a aspectos preexistentes na estrutura cognitiva por meio de três formas de assimilação: aprendizagem subordinada, aprendizagem superordenada e aprendizagem combinatória.

Na aprendizagem subordinada, a nova ideia que está sendo aprendida encontra-se hierarquicamente subordinada a uma preexistente na estrutura cognitiva, podendo haver a inclusão derivativa (quando a nova informação *a* é vinculada à ideia geral já estabelecida A e representa um exemplo específico ou ilustrativo) ou a inclusão correlativa (quando a nova informação x é vinculada à ideia X, porém é uma modificação, uma elaboração, uma qualificação ou uma delimitação de X). Na sequência didática, optou-se por apresentar a congruência de triângulos como uma situação específica subordinada ao conceito mais geral de congruência de polígonos. Assim, triângulos congruentes foram apresentados em um momento como um exemplo específico de polígonos congruentes; no detalhamento proporcionado pelas construções geométricas, os alunos puderam perceber as delimitações explicitadas pelos casos de congruência.

Já na aprendizagem superordenada (ou subordinante) existem ideias já estabelecidas (a1, a2, a3) que passam a ser reconhecidas como exemplos mais específicos da ideia nova mais geral A. Esta ideia supraordenada A é definida por um novo conjunto de atributos de critérios que abrangem as ideias subordinadas anteriores. A aprendizagem subordinante ocorre no decurso do raciocínio indutivo, quando se organiza o material apresentado de forma indutiva e se dá a síntese de ideias componentes. As atividades de construção de dois triângulos no GeoGebra utilizando as medidas dos três lados e a consequente generalização do caso LLL de congruência é um exemplo de trabalho que se propõe com vistas à aprendizagem superordenada. Nessa situação, a generalização ocorre num processo indutivo e a ideia supraordenada (caso de congruência) é definida por atributos de critérios que abrangem as ideias subordinadas anteriores.

Por fim, na aprendizagem combinatória a ideia nova A relaciona-se com as ideias já existentes B, C e D, porém não é mais inclusiva nem mais específica que B, C, e D, ou seja, não existe uma relação hierárquica entre ela. Assim, considera-se, neste caso, que a ideia nova A possui alguns atributos de critério em comum com as ideias preexistentes, sendo possível que a nova incorporação de novos conceitos no mesmo nível hierárquico possa culminar na necessidade de diferenciá-los ou integrá-los dentro de um novo conceito mais geral. A aprendizagem dos vários casos de congruência trabalhados na sequência didática é um exemplo da aprendizagem combinatória, já que não existe hierarquia entre os casos. Evidentemente, houve a necessidade de diferenciar os casos de congruência e de integrá-los dentro de um novo conceito mais geral: congruência de triângulos. A confecção do quebra-cabeça e a realização da tarefa de identificação dos pares de triângulos congruentes seguidas do respectivo caso mostra a intenção de fazer o aluno integrar os significados dentro do novo conceito aprendido.

Convém ressaltar que as estratégias de ensino utilizadas na sequência didática aqui analisada diferem da metodologia comumente presente nos livros didáticos: nestes, os casos de congruência de triângulos são apresentados sob a forma de uma proposição substantiva ou que não apresenta problemas, que o aprendiz necessita de compreender e lembrar; tal maneira produz a chamada aprendizagem por recepção, conforme Ausubel (2000). Já na aprendizagem por descoberta o aprendiz deve, em primeiro lugar, descobrir este conteúdo, criando proposições que representem soluções para os problemas suscitados, ou passos sucessivos para a resolução dos mesmos. Apesar dessa diferenciação, o autor considera que a aprendizagem por recepção e a aprendizagem pela descoberta fazem parte de um contínuo.

Apesar de, na sequência didática aqui analisada, o conteúdo não ter sido dado de início – pois se esperava que o aluno organizasse e generalizasse suas ideias para só então ser apresentadas as definições dos conceitos e as proposições finais – considera-se que a mesma tinha características de uma proposta de aprendizagem significativa por recepção verbal. Esta é, necessariamente, um processo ativo, que exige ação e reflexão do aprendiz e que é facilitada pela organização cuidadosa dos conteúdos e das experiências de ensino e ainda pela linguagem utilizada nos materiais e nas orientações feitas pelo professor.

Neste contexto, chama-se a atenção para a linguagem empregada nos diálogos provocados no decorrer das atividades, ora para mobilizar conhecimentos prévios, ora para encaminhar descobertas e formalizar definições. Ausubel (2000) salienta que a forma adequada do uso da linguagem durante as atividades de ensino – seja por recepção seja por descoberta – aumenta a manipulação de conceitos e proposições através das propriedades representacionais das palavras, desempenhado um papel integral e operativo (processual) no raciocínio e não meramente um papel comunicativo.

Pode-se exemplificar o papel integral e operativo da linguagem mostrando o episódio em que o professor direcionou a descoberta da congruência (por construção) entre os lados correspondentes nos dois triângulos (Quadro 3).

Quadro 3. Descrição do episódio analisado e os diálogos produzidos

Com a ferramenta "Polígono" selecionada realizou-se a construção do triângulo $\Delta A'B'C'$. Solicitou-se aos alunos que, por meio da utilização da ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" medissem os lados dos dois triângulos e verificassem a congruência com relação aos lados correspondentes. Neste momento foram realizadas algumas perguntas aos alunos para que os mesmos percebessem que os lados correspondentes dos triângulos eram congruentes por construção. *Professor: a medida do lado $\overline{AB}$ no triângulo ΔABC é a mesma medida de qual lado no triângulo $\Delta A'B'C'$?* *Alunos: igual à medida do lado $\overline{A'B'}$.* *Professor: então podemos dizer que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são congruentes?* *Alunos: sim!* *Professor: por que será que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, lados do triângulo ΔABC também são congruentes à $\overline{A'C'}$ e $\overline{B'C'}$? Sendo estes lados correspondentes à $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ no triângulo $\Delta A'B'C'$? Como conseguimos construir lados correspondentes congruentes? Vocês se lembram?* *Alunos: é porque utilizamos a ferramenta compasso?* *Professor: exatamente! Os lados correspondentes dos dois triângulos são congruentes por construção, ou seja, da forma que utilizamos a ferramenta compasso na reta auxiliar, realizando medições no primeiro triângulo, fizemos com que os lados correspondentes fossem congruentes, ou seja, de mesma medida. Entenderam?* *Alunos: agora sim, professor!*

Note-se que o professor encaminha o diálogo de maneira a levar o aluno a perceber a congruência entre os segmentos. Para Ausubel (2000), a percepção desempenha um importante papel na aprendizagem verbal significativa, alegando que uma determinada operação intelectual pode envolver, de início, um conteúdo imediato de consciência (percepção). Dependendo da complexidade da tarefa, esta passa a envolver processos intelectuais (cognição) mais complexos e diferidos, geralmente expressos por meio de expressões verbais. Evidentemente, há a necessidade de domínio do vocabulário empregado (no exemplo, "congruentes", “correspondentes”, “ferramenta compasso” etc.) e da capacidade de relacionar as proposições às ideias relevantes ancoradas na estrutura cognitiva.

Em sua teoria Ausubel (2000) destaca que não se podem analisar separadamente as características do material e as condições dos sujeitos aprendizes, pois uma condição para que a aprendizagem seja significativa é a motivação no empenho do esforço deliberado e intencional para a compreensão.

No contexto da sequência didática pode-se perceber, em vários momentos, a pré-disposição dos alunos em participarem das atividades propostas. Nas primeiras atividades – que foram aplicadas no ambiente rotineiro de sala de aula – foram utilizados os *slides* para facilitar a observação das figuras geométricas planas para posterior análise de propriedades e generalização das condições necessárias para a congruência de polígonos. A apresentação de figuras coloridas e a movimentação das mesmas parecem ter motivado os alunos para empenharem esforço cognitivo na busca de relações, facilitando, assim, a atribuição de significados. A Figura 13 apresenta exemplos de registros dos alunos relatando sobre as aulas.

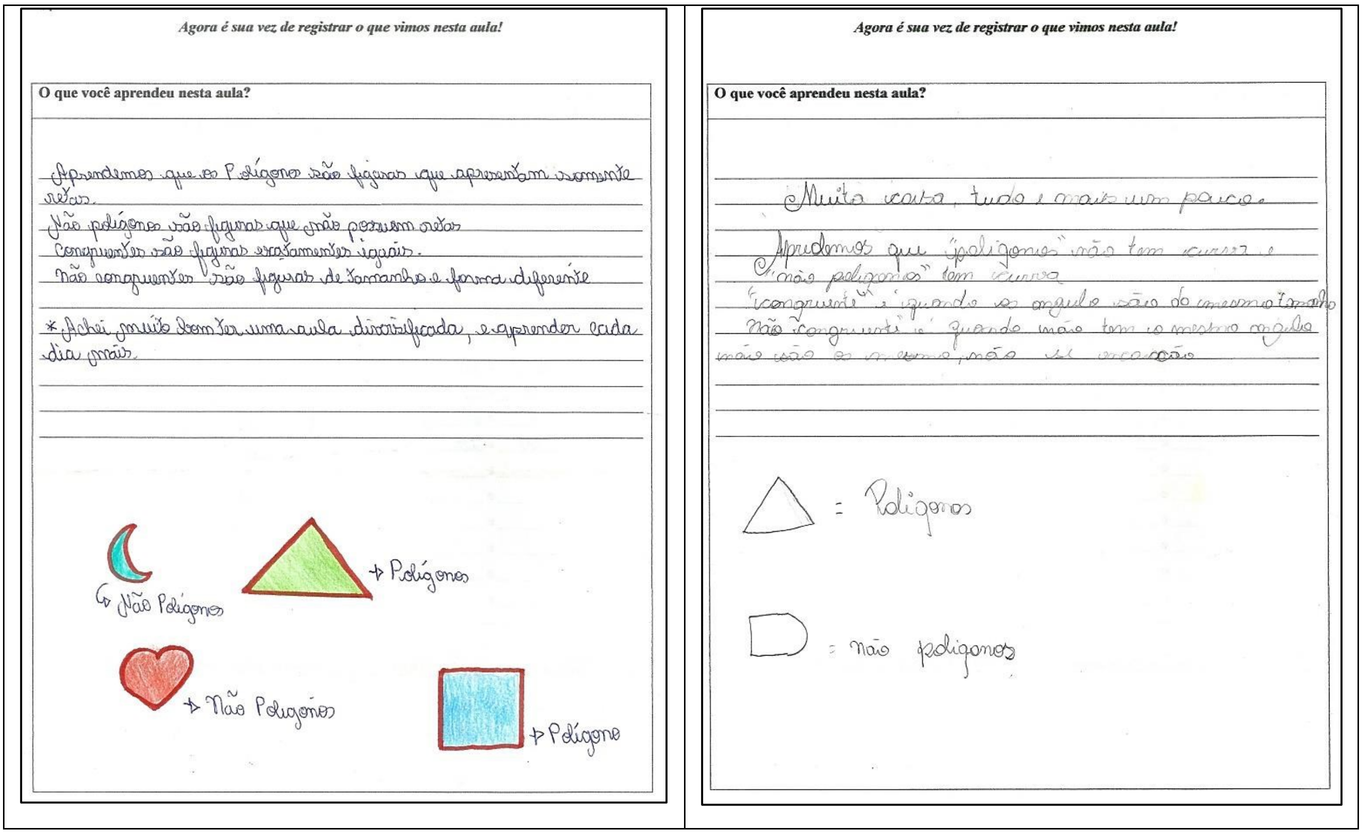


Figura 34. Registros de alunos relatando sobre as aulas
Fonte: arquivo pessoal do autor

Nas atividades propostas realizadas no laboratório de informática, da maneira em que foram propostas, foi possível perceber a curiosidade dos alunos em obter a construção final dos polígonos, bem como a utilização de ferramentas de edição como mudança de fontes, cores dos objetos (pontos, segmentos, polígonos, etc.) utilizando-se da criatividade ao término das atividades. Segundo Rocha et al (2008) citado por Barros, Mognon e Kato (2012), o uso do GeoGebra pode auxiliar ainda na concentração e motivação dos alunos. A Figura 14 mostra exemplos em que os alunos utilizaram ferramentas de edição na execução final das atividades propostas.

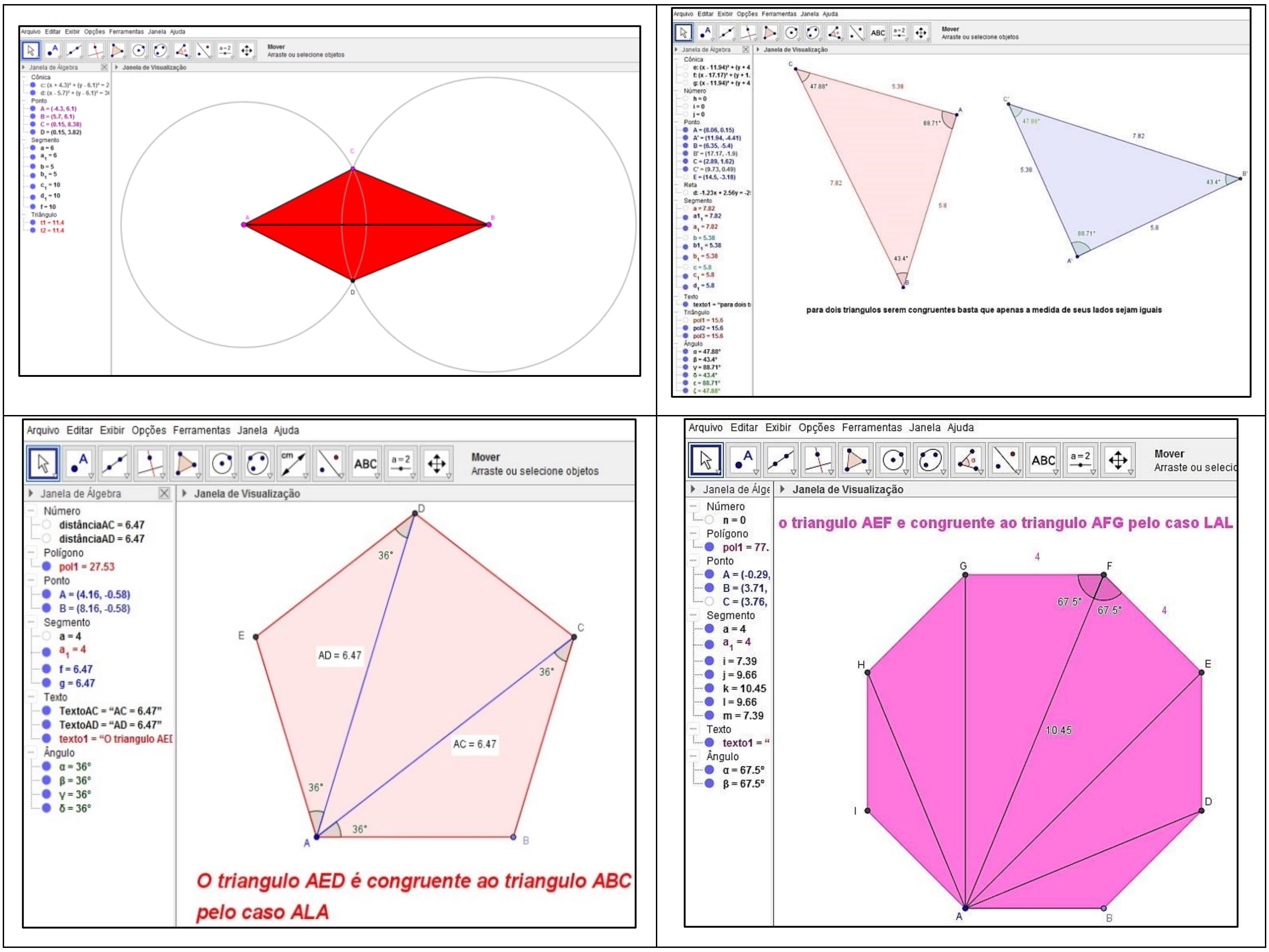


Figura 35. Edições dos alunos no GeoGebra em diferentes atividades
Fonte: arquivo pessoal do autor

Ainda segundo Barros, Mognon e Kato (2012) que apresentam um estudo sobre o uso do GeoGebra nas aulas de matemática com base na Teoria da Aprendizagem Significativa, o *software* GeoGebra pode ser utilizado nas aulas de matemática também como um organizador prévio dos conteúdos a serem trabalhados, pois permite melhor visualizar o significado dos conceitos, auxiliando no processo de aprendizagem significativa. Em concordância com estas reflexões, Cyrino e Baldini (2012) afirmam que a utilização do GeoGebra como recurso nas aulas de matemática pode condicionar a criação de um ambiente favorável à construção de conceitos e ideias matemáticas.

Assim, a disposição da maioria dos alunos em realizar as atividades – observada ao longo da sequência, tanto na sala de aula como no laboratório – é um indicativo do empenho do esforço deliberado e intencional para a compreensão.

4.2 Os níveis de formação conceitual e as habilidades geométricas

Um dos objetivos elencados neste trabalho foi evidenciar níveis do pensamento geométrico e habilidades geométricas nas atividades constantes da sequência didática. Com base nos pressupostos de Van Hiele (1986) e de Hoffer (1981), tentou-se identificar os níveis de formação conceitual requeridos pelas atividades e também a maneira como os encaminhamentos e os diálogos promovidos pelo professor objetivavam o avanço nesta hierarquia conceitual e o desenvolvimento de habilidades geométricas.

A primeira atividade da sequência teve por objetivo revisar e/ou obter uma definição formal de polígono a partir da análise de propriedades de figuras geométricas planas fechadas. Quando os alunos foram solicitados a observar as figuras do *slide 1* (Figura 1-a) e a preencher o primeiro quadro da ficha de registros (Figura 1-b), anotando os números dos polígonos e os dos não polígonos, foi possível verificar que alguns alunos tinham dúvidas com relação a esta classificação. Neste sentido, pareceriam se encontrar no Nível 1 (Visualização) definido por Van Hiele, ou seja, percebiam as figuras apresentadas em sua totalidade, mas pareciam não ver componentes ou atributos: não conseguiam, portanto, diferenciar os polígonos dos não polígonos.

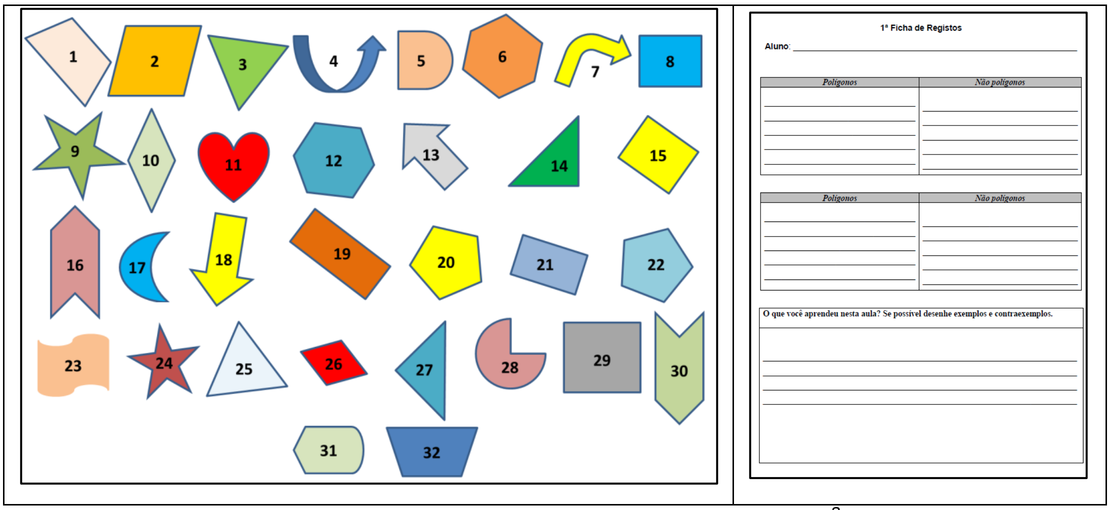
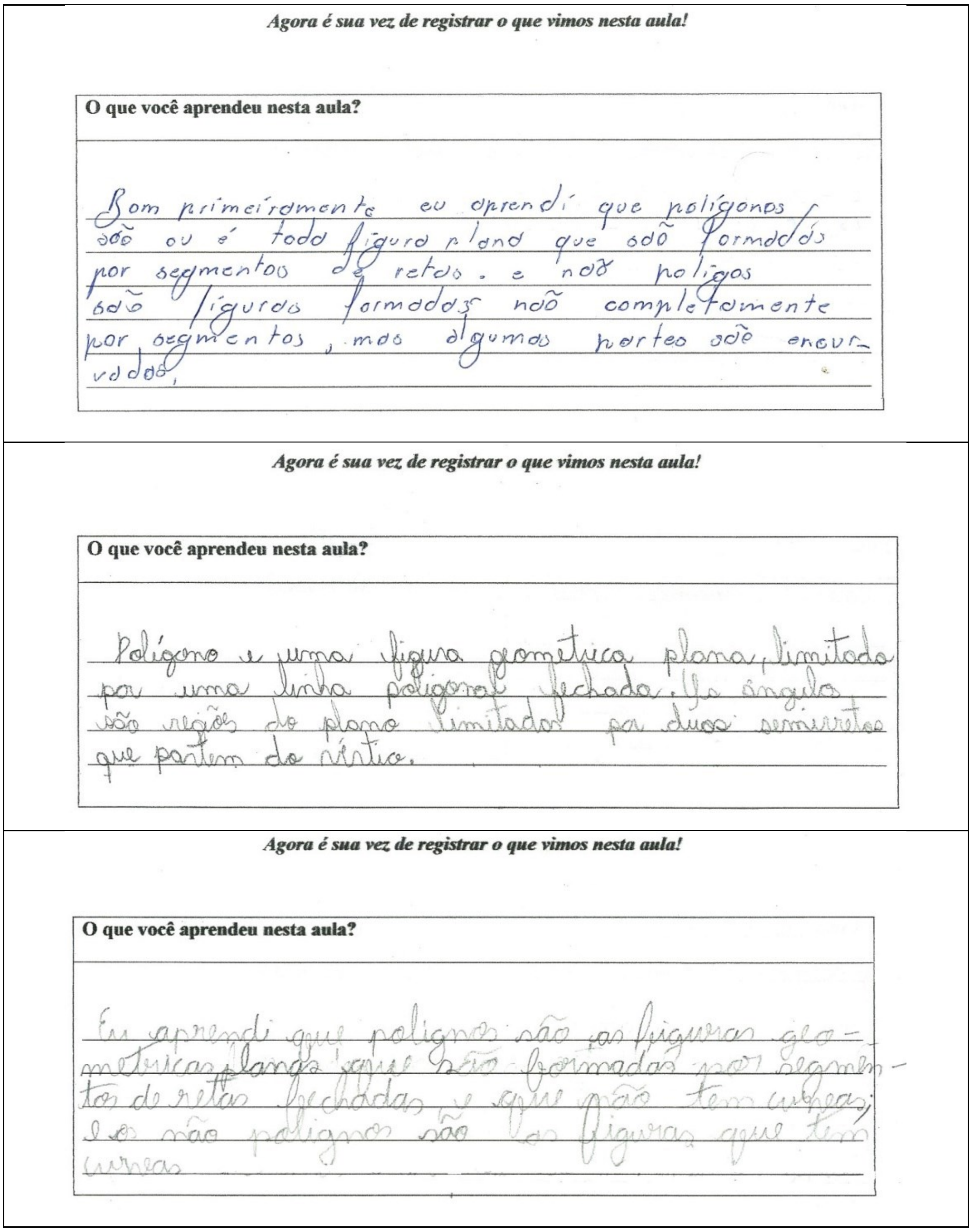


Figura 36. (a) *Slide* 1 contendo figuras geométricas planas e (b) 1ª Ficha de registros
Fonte: arquivo pessoal do autor

As perguntas feitas pelo professor: "*A figura 1 é uma linha fechada?*"; "*a figura número 1 é formada apenas por segmentos de reta simples, ou seja, que não se cruzam ou possuem linhas curvas?*" – *em* que eram recordados os atributos definidores de polígonos – requeriam o Nível 2 de formação conceitual. Neste nível, chamado de análise por Van Hiele (1986), o aluno deve ser capaz de descobrir e generalizar propriedades, descrever as partes que formam uma figura e enunciar suas propriedades, embora de maneira informal.

Ao final da atividade, pode-se observar que os alunos, ao serem indagados pelo professor se: "*a figura número 4 é polígono?*", passaram a demonstrar um provável avanço ao generalizar propriedades e obter os conjuntos de polígonos e não polígonos por meio de componentes ou atributos definidores: por exemplo, afirmaram que a figura 4 não poderia ser classificada como polígono *"porque ela possui curvas"*.

A Figura 2 mostra a definição de polígonos realizada por alguns alunos na ficha de registros. Dentre as habilidades definidas por Hoffer (1981), pode-se dizer que, ao descrever o conceito de polígono por meio de seus atributos definidores, vários alunos valiam-se de habilidade verbal em nível de análise, pois conseguiam descrever acuradamente as propriedades da figura.


Agora é sua vez de registrar o que vimos nesta aula!

O que você aprendeu nesta aula?

Bom primeiramente eu aprendi que polígonos são ou é toda figura plana que são formadas por segmentos de retas. e não poligos são figuras formadas não completamente por segmentos, mas algumas partes são encurvadas,

Agora é sua vez de registrar o que vimos nesta aula!

O que você aprendeu nesta aula?

Polígono é uma figura geometrica plana, limitada por uma linha poligonal fechada. Os ângulos são regiões do plano limitado por duas semirretas que partem do vértice.

Agora é sua vez de registrar o que vimos nesta aula!

O que você aprendeu nesta aula?

Eu aprendi que polignos são as figuras geo-metricas planas que são formadas por segmen-tos de retas fechadas, e que não tem curvas; e os não polignos são as figuras que tem curvas

Figura 37. Definição de polígonos realizada por alguns alunos na ficha de registros
Fonte: arquivo pessoal do autor

Ao fazer desenhos para indicar a diferença entre polígonos e não polígonos, os alunos utilizavam, dentre as habilidades geométricas destacadas por Hoffer (1981), a habilidade de desenho: em alguns casos as figuras eram feitas à mão livre; em outros, valiam-se da régua. Relacionando esta habilidade com os níveis propostos por Van Hiele (1986), parece que alguns desenhos foram elaborados em Nível 1, onde o aluno faz apenas esquemas para representar as figuras (verifica-se isso principalmente nos desenhos de não polígonos que eram muito semelhantes aos que foram apresentados no slide). Em outros desenhos, o aluno parecia traduzir numa figura a informação verbal dada, usando algumas propriedades para desenhar polígonos e não polígonos, até mesmo diferentes dos apresentados no *slide*. A Figura 3 mostra alguns desenhos que os alunos fizeram nas fichas de registros.

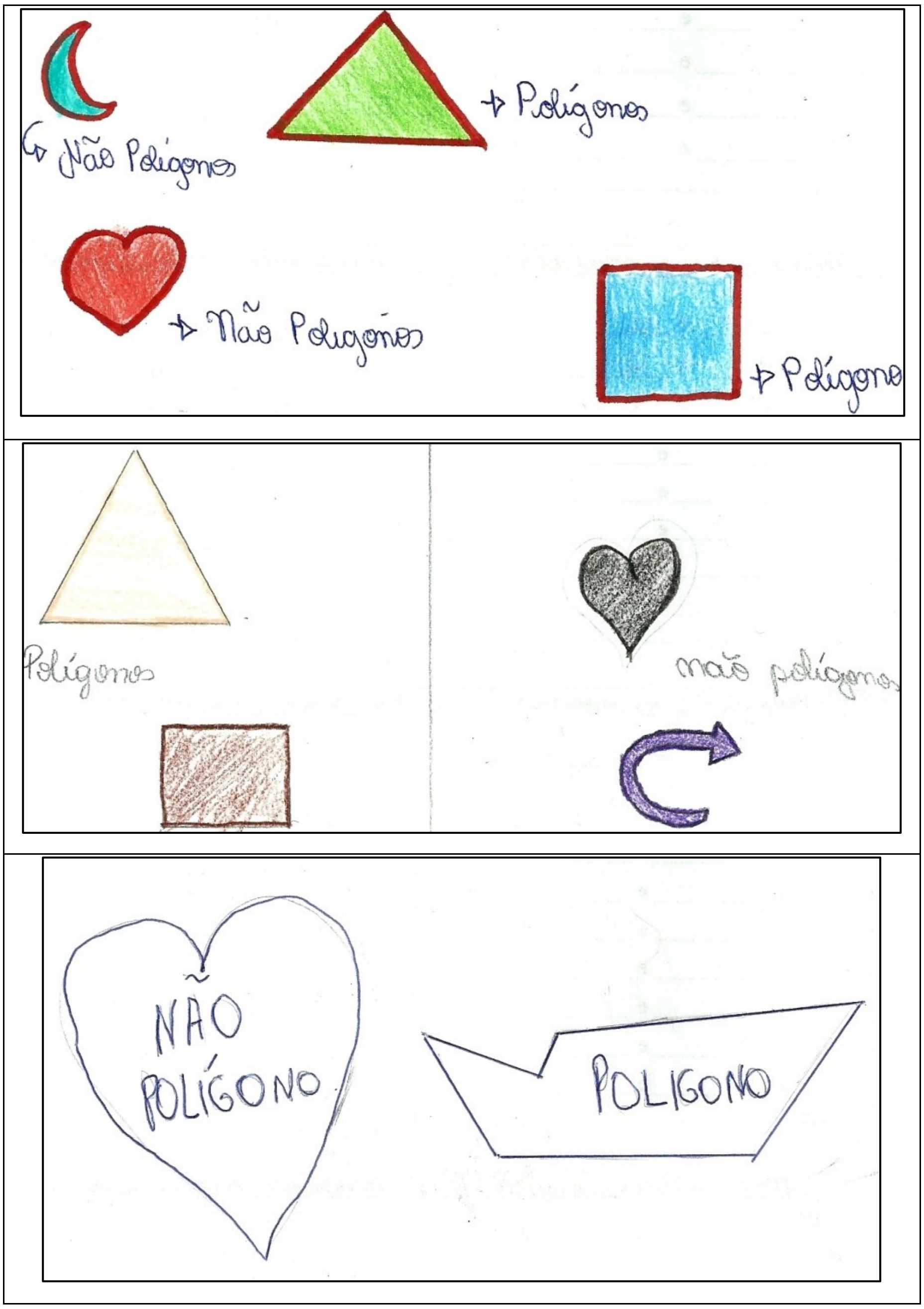


Figura 38. Desenhos dos alunos nas fichas de registros
Fonte: arquivo pessoal do autor

A segunda atividade tinha como objetivo identificar, em um conjunto de polígonos (Figura 4-a), os pares de polígonos congruentes. Os alunos deveriam separar os pares de polígonos “iguais” e os pares de polígonos “parecidos” registrando os resultados na ficha de registros (Figura 4-b). Nas justificativas para o grupo de "parecidos" esperava-se que os alunos apontassem os atributos de classificação – o que levaria a obter as condições necessárias e suficientes para a congruência de polígonos.

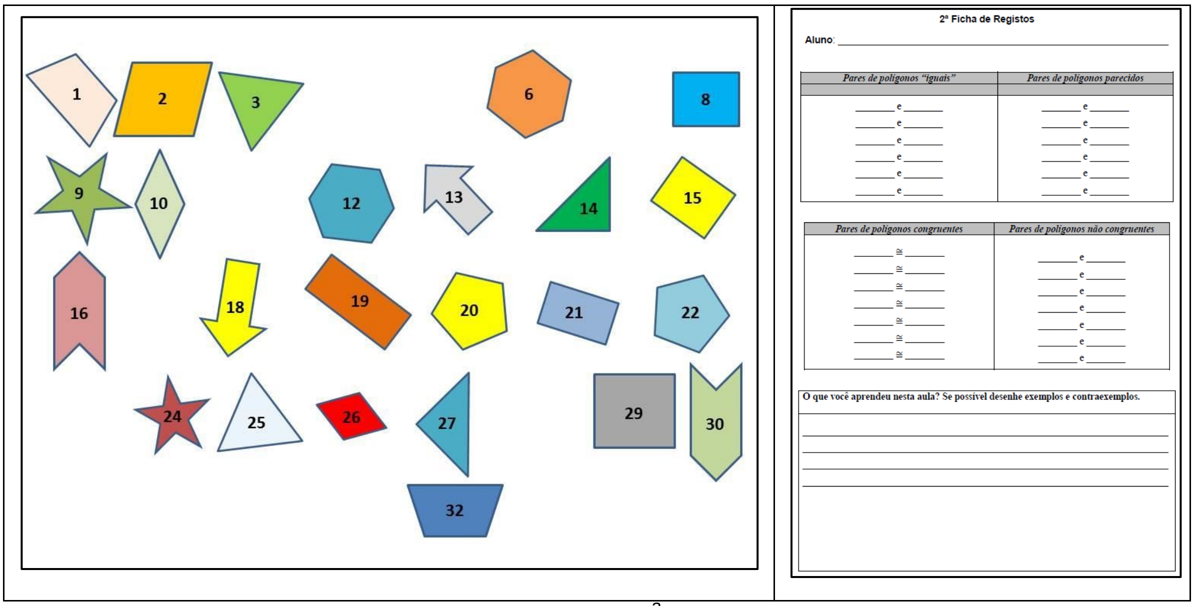


Figura 39. (a) *Slide* 3 e (b) 2ª Ficha de registros
Fonte: arquivo pessoal do autor

Apesar de a tarefa ter sido planejada para ser realizada individualmente, o professor provocou uma discussão acerca das respostas dadas pelos alunos. No diálogo estabelecido entre dois alunos – quando um dizia que "*o polígono 2 é igual ao 29, porém o polígono 2 só está inclinado.*" e, por outro lado, era confrontado por um colega ao enfatizar que *"pra ser igual tem que ser igual mesmo! Não pode estar inclinado!"* – verifica-se o entendimento de uma condição necessária para a congruência de polígonos. Apesar de a argumentação basear-se em nível perceptual, o aluno demonstra entender a necessidade de os polígonos analisados possuírem ângulos correspondentes congruentes – e não apenas lados congruentes.

Nesta etapa, foi possível observar, por meio de palavras e de movimentos com a mão e a cabeça, que os alunos pareciam realizar rotações mentais com as figuras, tentando sobrepor os pares que, intuitivamente, consideravam congruentes. Essas manipulações mentais devem ter ajudado a focar a atenção nas propriedades ou componentes das figuras – como a posição dos vértices e as medidas de lados e ângulos correspondentes. Desta forma, puderam obter a classificação dos pares de polígonos congruentes e não congruentes somente por meio da observação das figuras constantes no *slide*.

Neste sentido, os alunos que realizaram estas rotações e sobreposições valeram-se da habilidade visual que, segundo Hoffer (1981), está ligada à capacidade de interpretar informações a partir de figuras e de formar e manipular imagens mentais. Com essa habilidade, o sujeito poderia reconhecer figuras diferentes de um desenho, estabelecer propriedades comuns de diferentes tipos de figuras e até deduzir informações a partir de uma figura.

Assim, a habilidade visual foi requerida para a execução da tarefa. Entretanto, no planejamento da atividade já se imaginava que alguns teriam dúvidas com relação à classificação solicitada, já que situações envolvendo manipulação mental de figuras nem sempre são fornecidas aos alunos nas aulas de geometria[10]. Dessa forma, também foram apresentados alguns pares de polígonos impressos em um papel mais rígido (Figura 5) para que verificassem a congruência ou não entre os pares por meio de material manipulável.

Considera-se que a atividade realizada tenha requerido a habilidade visual no Nível 3 (Ordenação ou dedução informal) de Van Hiele. Neste nível, o sujeito reconhece inter-relações e propriedades comuns entre diferentes tipos de figuras. Em outras palavras, almejou-se um trabalho em que os alunos tentassem estabelecer relações entre os lados correspondentes e os ângulos correspondentes, observando e concluindo como as partes (lados e ângulos) formariam o todo (pares de polígonos congruentes).

[10] Segundo Viana (2000) a percepção é tema de vários estudos que tratam da habilidade visual, no entanto, neles seu significado nem sempre é o mesmo. Utilizando a definição de Roth (1986) citado em Eysenk&Keane (1994), a autora pondera que o termo percepção diz respeito ao processo de transformar e interpretar a informação adquirida do meio ambiente através dos órgãos sensoriais. Neste sentido, na percepção visual, é estudado na psicologia cognitiva o reconhecimento de padrões, que envolve a identificação de estímulos bidimensionais e tridimensionais do meio ambiente.

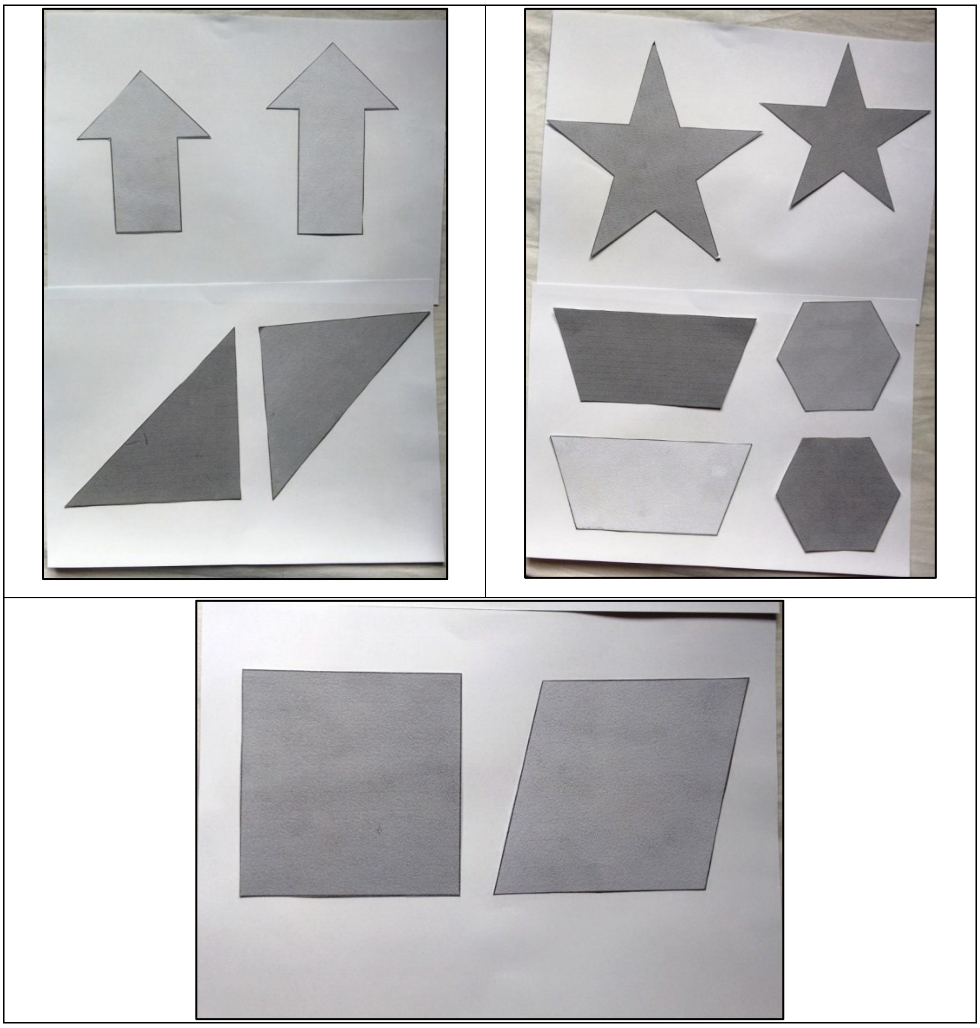


Figura 40. Material manipulável em papel cartão utilizado na segunda atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

Dando sequência à atividade, o professor simulou por meio de *slides* animados – que permitiam a rotação das figuras para sobreposição – a verificação da congruência dos polígonos de forma que os alunos pudessem visualizar tanto a congruência com relação aos lados, quanto com relação aos ângulos correspondentes.

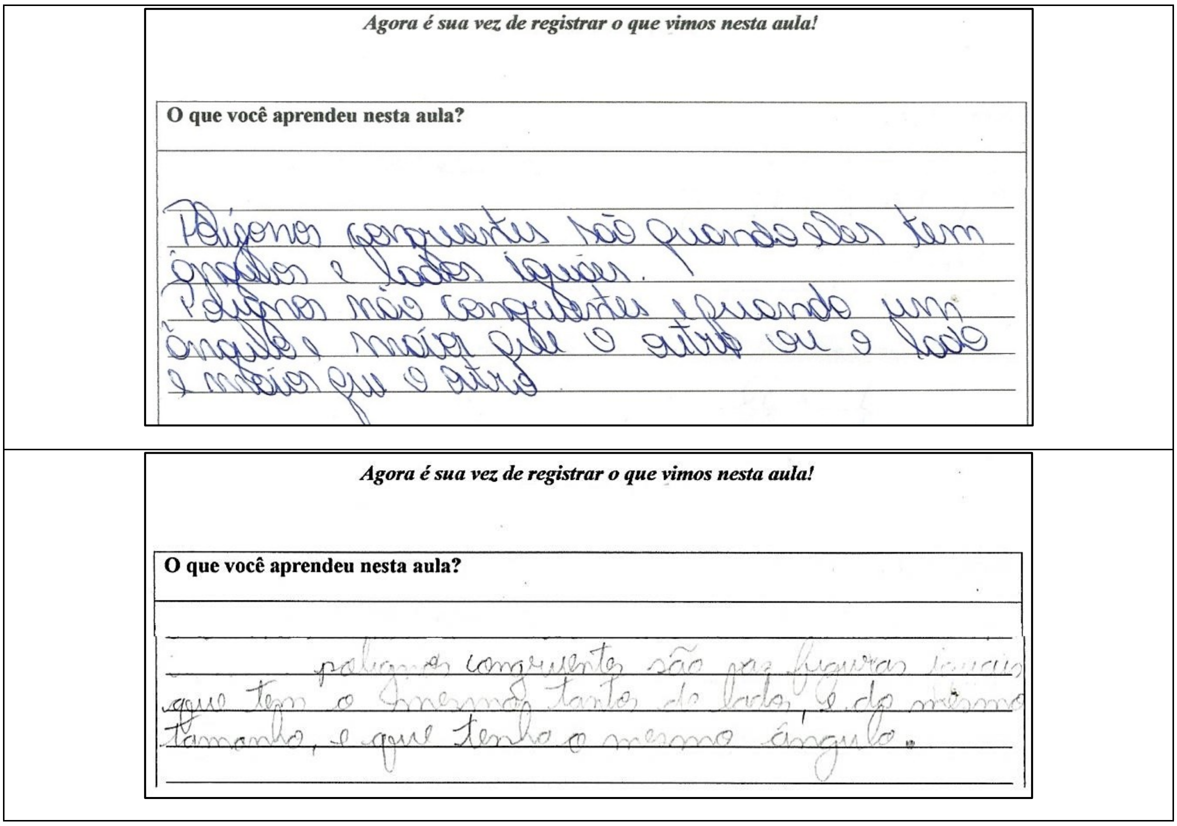
Observe-se que o professor busca relacionar as ideias dos alunos. Por exemplo, pergunta se "*O polígono número 6 é 'igual' ou 'parecido' com o polígono número 12?"* e, ao obter uma resposta positiva de *"igual!"*, salienta a necessidade da condição referente aos lados: *"[...] houve sobreposição entre eles [...] os lados correspondentes nos dois polígonos são congruentes, isto é, têm a mesma medida".* Na sequência, enfatiza que a condição não é suficiente ao dizer *"[...] será que só isto basta?"*. Toma, então o contraexemplo dos polígonos 2 e 29 e, por meio dos slides animados, salienta que "[...] *os lados do polígono 29 formam, dois a dois, ângulos de*

90 graus. Já os lados correspondentes no polígono 2 não formam ângulos de 90 graus dois a dois." Na conclusão, argumenta juntamente com os alunos que *"a congruência com relação aos lados correspondentes é uma condição necessária para que dois polígonos sejam congruentes. Entretanto, observando os polígonos 2 e 29 [...] que não é uma condição suficiente. Vejamos que ainda 'dependemos' das medidas dos ângulos correspondentes".*

Nota-se que, inicialmente, o professor utiliza as expressões "é parecido" e "é igual" para diferenciar os pares de polígonos que satisfaziam uma condição e as duas condições de congruência, respectivamente. Uma das propriedades do modelo de Van Hiele é a adequada utilização da linguagem nas atividades: se o aluno estiver em um nível e o professor utilizar linguagem pertinente a um nível superior, aquele não será capaz de acompanhar os processos que estarão sendo empregados, portanto poderá não ocorrer a aprendizagem no nível desejado.

Assim, esperava-se que os diálogos estabelecidos pudessem contribuir para certo avanço na habilidade lógica num nível mais formal – segundo a teoria, neste nível os sujeitos, além de serem capazes de compreender o significado das definições precisas em geometria e também as condições necessárias e suficientes para uma afirmação, são convidados a obter conclusões baseados em informações dadas. No contexto da sequência didática, almejava-se que os alunos compreendessem as condições necessárias e suficientes para a congruência de polígonos.

Para finalizar a atividade foi solicitado que escrevessem suas conclusões na 2ª Ficha de Registros. Como não houve interferência do professor no preenchimento da ficha, percebe-se que houve certo avanço no nível de pensamento geométrico. Os alunos pareciam atender a algumas das características apontadas por Hoffer (1991) para a habilidade lógica no Nível 3: dar definições matematicamente corretas, compreendendo o papel das definições e dos requisitos de uma definição correta e também os passos sucessivos individuais de um raciocínio lógico formal, apesar de não compreenderem a estrutura de uma demonstração. Nota-se que a escrita dos alunos tende a ser um pouco mais específica que a linguagem oral utilizada nos diálogos: substituem "polígonos iguais" por "polígonos congruentes", apesar de ainda não apresentarem a terminologia adequada.


Agora é sua vez de registrar o que vimos nesta aula!

O que você aprendeu nesta aula?

Polígonos congruentes são quando eles tem ângulos e lados iguais.
Polígonos não congruentes é quando um ângulo é maior que o outro ou o lado é maior que o outro

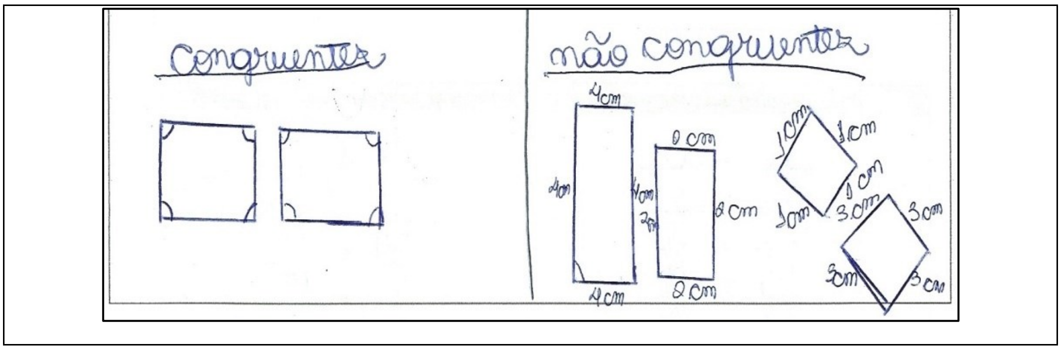
Agora é sua vez de registrar o que vimos nesta aula!

O que você aprendeu nesta aula?

polígonos congruentes são as figuras iguais que tem o mesmo tanto de lado, e do mesmo tamanho, e que tenha o mesmo ângulo.

Figura 41. Definição de polígonos congruentes realizada por alguns alunos na ficha de registros
Fonte: arquivo pessoal do autor

Outros alunos utilizaram desenhos (Figura 7) para mostrar seu entendimento acerca de polígonos congruentes (note-se que alguns não conseguem escrever “congruentes” corretamente). Apesar de os desenhos terem sido feitos apenas com régua, parecem demonstrar a capacidade de relacionar os elementos dos polígonos (lados e ângulos com as medidas rotuladas) de modo a formar os pares congruentes e os não congruentes.



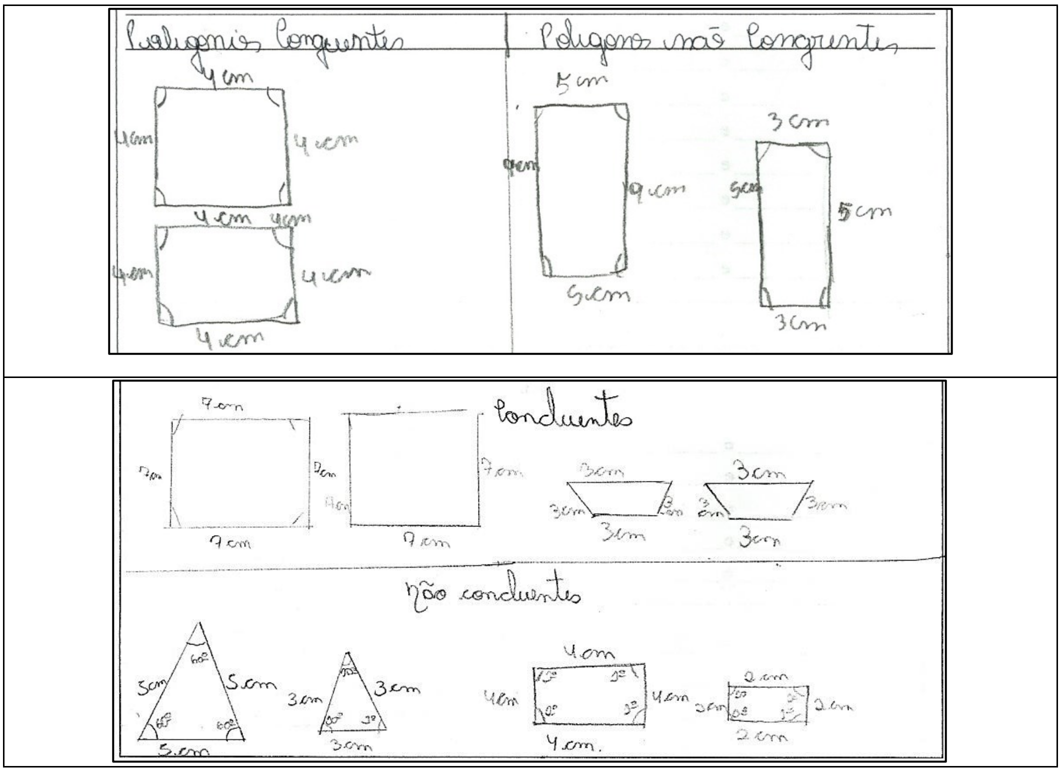


Figura 42. Desenhos de polígonos congruentes de alguns alunos na ficha de registros
Fonte: arquivo pessoal do autor

A partir da terceira atividade foram realizadas várias construções no ambiente do *software* GeoGebra. Neste sentido, pretende-se analisar também como o *software* pode promover o avanço nos níveis e no desenvolvimento das habilidades.

Na terceira atividade, ao propor que os alunos, por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, obtivessem um procedimento prático para construir triângulos, objetivou-se desenvolver as habilidades de desenho que, segundo Hoffer (1981), preparam os alunos para aprender, mais tarde, relações geométricas mais complexas.

Assim, planejou-se explorar a construção de triângulos utilizando as ferramentas régua e compasso, uma vez que este procedimento parece facilitar a identificação de propriedades importantes relativas a lugares geométricos. Por exemplo, cita-se a construção que permitiu verificar que o conjunto de pontos equidistantes $4\,cm$ de A e o conjunto de pontos equidistantes $5\,cm$ de B eram, respectivamente, a circunferência de centro em A e raio $4\,cm$ e a de centro em B e raio $5\,cm$ (Figura 8).

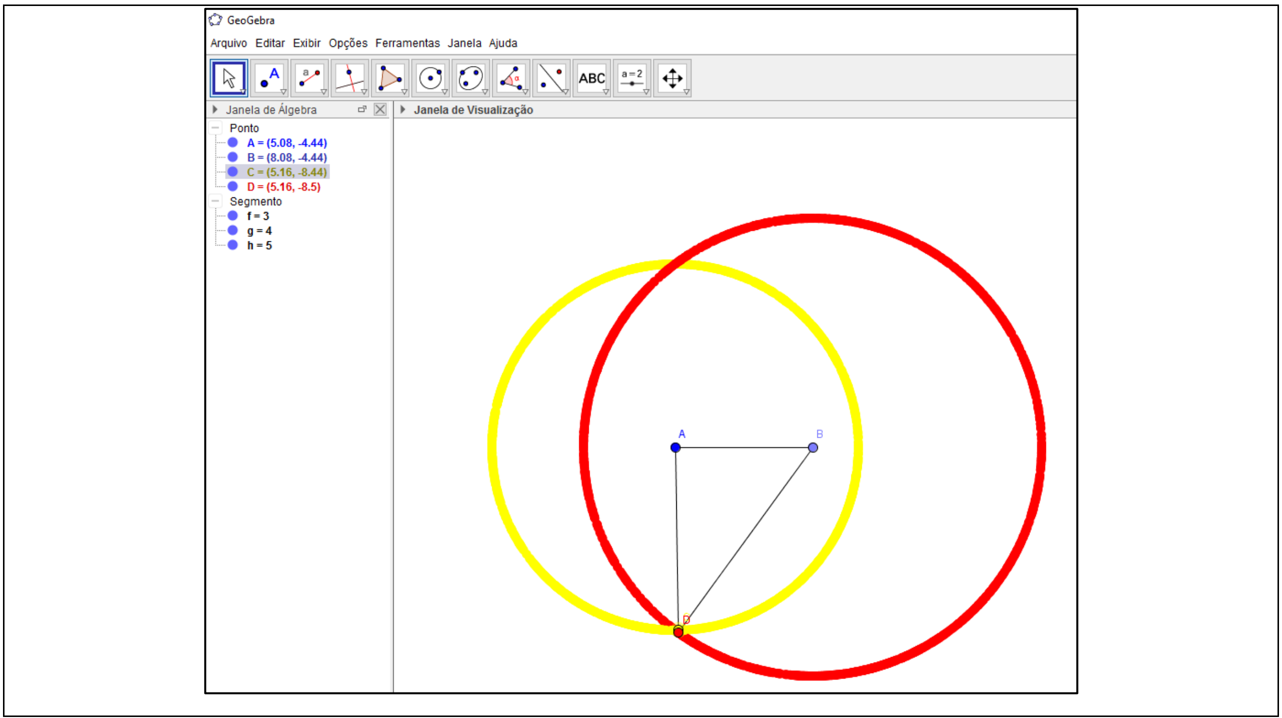


Figura 43. Construção da atividade na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Os alunos puderam verificar que cada um dos pontos de intersecção dessas circunferências (*C* e *D*) poderia ser o vértice que "fechava" o triângulo, formando, então o ΔABC e o ΔABD. Além do nível de análise exigido para esta construção – em que os elementos lados e vértices são identificados – é possível considerar certo avanço para o Nível 3, considerando que os alunos passam a utilizar a relação entre propriedades de uma figura (circunferência) para a construção de outra (triângulo).

No contexto da sequência didática, considerou-se importante o aluno compreender a condição de existência de triângulos. Assim, um dos objetivos da quarta atividade era concluir, por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, qual era essa condição. Notou-se que, mesmo após o trabalho com os diferentes níveis nas atividades anteriores, alguns alunos pareciam ainda se encontrar no primeiro nível com relação aos triângulos, já que não estabeleciam a condição de existência a partir das medidas dos lados. Ao serem indagados se seria *"[...] possível construir triângulos com quaisquer medidas para seus lados?"* alguns alunos responderam *"eu acredito que sim professor!"*.

Quando o professor indagou os alunos se era *"[...] possível obter dois pontos de intersecção (C e D) entre a circunferência com centro no ponto A e raio 4 cm e a circunferência com centro no ponto B e raio 5 cm a fim de formar o triângulo ∆ABC e* *o triângulo △ABD?”* e obteve como resposta *“não professor! Não há intersecção entre as circunferências!”; “porque a circunferência com centro em A é menor que a circunferência com centro em B; ela teria que ser maior ou do mesmo tamanho para que tivéssemos a intersecção”,* o mesmo propõe uma análise do procedimento gráfico já efetuado (Figura 9) e uma conclusão lógica que deveria ser expressa em palavras, o que caracterizaria a habilidade verbal dos alunos no nível 3. Nesse nível, Hoffer (1981) pondera que o aluno, além de descrever acuradamente várias propriedades de figuras, consegue formular sentenças mostrando relações entre elas.

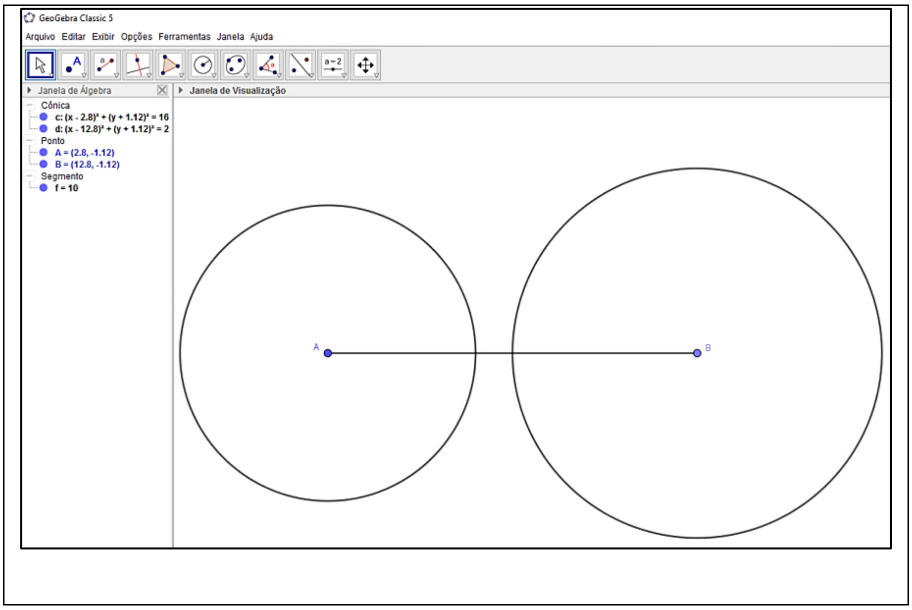


Figura 44. Primeira construção da atividade 4 na tela do GeoGebra
Fonte: arquivo pessoal do autor

Após realizarem várias construções por meio do *software* – cujo objetivo era verificar exemplos e contraexemplos – encaminhou-se para o final da atividade quando foi solicitado que os alunos registrassem uma conclusão para a existência de triângulos utilizando-se da ferramenta de texto no *software* GeoGebra. Verificou-se como os alunos reconheceram os argumentos válidos e não válidos e generalizaram as conclusões, ressaltando o uso da habilidade lógica. A Figura 10 mostra as conclusões dos alunos.

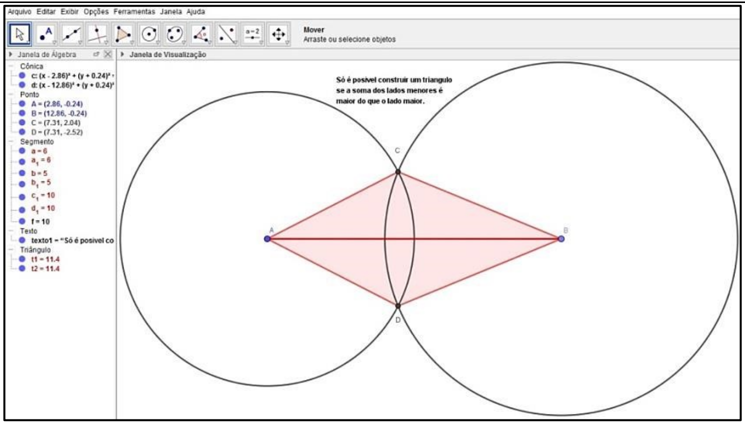
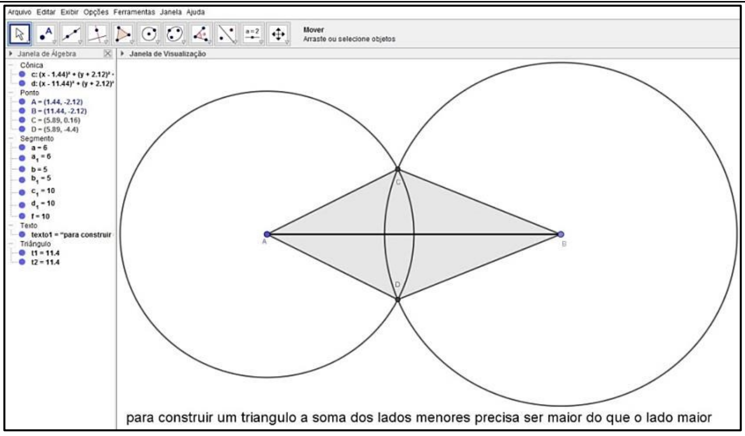
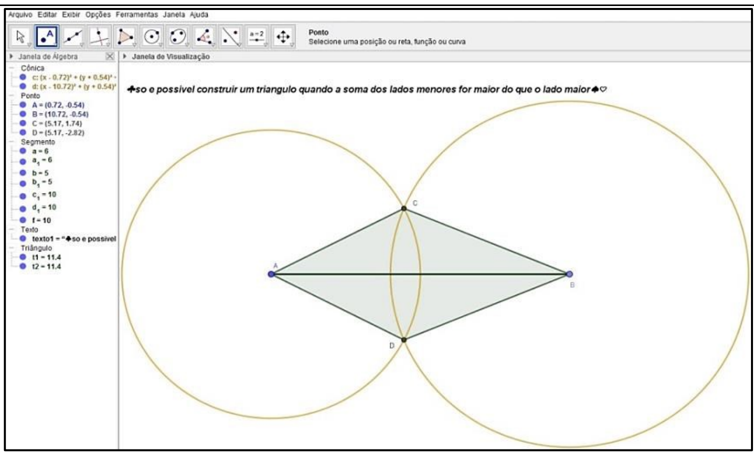
	*“Só é possível construir um triângulo se a soma dos lados menores é maior do que o lado maior”*
	*“para construir um triângulo a soma dos lados menores precisa ser maior do que o lado maior”*
	*“só é possível construir um triângulo quando a soma dos lados menores for maior que o lado maior”.*

Figura 45. Conclusões dos alunos registradas no *software* GeoGebra ao final da quarta atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

Avança-se, assim, para a análise da quinta atividade da sequência. Esta teve como objetivo identificar, por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, que uma condição necessária e suficiente para que dois triângulos sejam congruentes é possuírem lados correspondentes congruentes (caso LLL).

A primeira etapa da construção solicitada aos alunos era, por meio da ferramenta “Polígono” no GeoGebra, construir um triângulo ΔABC de lados com medidas quaisquer. Novamente, buscou-se um trabalho de maneira a desenvolver a habilidade de desenho em um nível de análise, uma vez que, no momento da construção – mesmo utilizando tal ferramenta – poderiam ser observados os componentes que formam um triângulo: os três segmentos de reta e os vértices.

Na sequência, ao solicitar que os alunos reproduzissem, por exemplo, a medida do segmento $\overline{AC}$ na reta auxiliar, selecionando a ferramenta “Compasso”, o professor enfatiza a importância da utilização de instrumentos de desenho, embora estivessem no ambiente do GeoGebra. Os instrumentos de construção geométrica como régua e compasso ajudam, segundo Hoffer (1981), a preparar os alunos para o entendimento dos postulados e das propriedades de figuras.

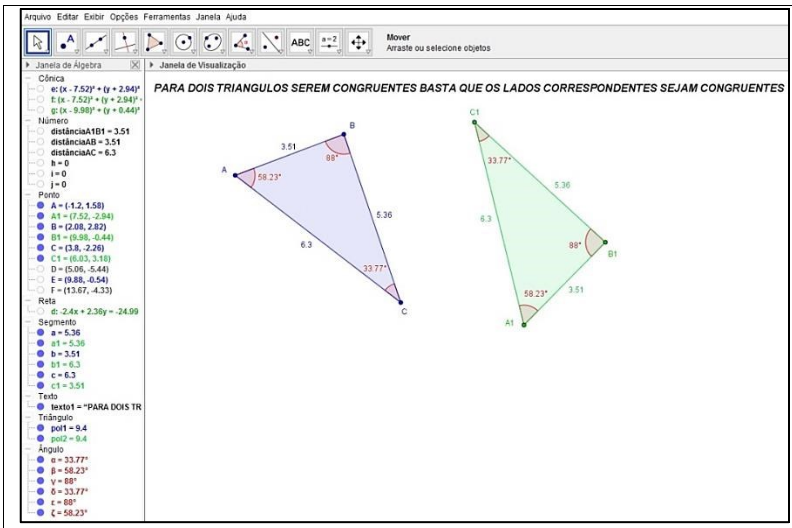
Já os diálogos promovidos pelo professor: “*pessoal, ao clicarmos no ponto A, C e por último no ponto A’ o que GeoGebra construiu?”; “alguém sabe me dizer a medida do raio dessa circunferência?”,* sugerem um trabalho com habilidade verbal em nível de análise: ao se referir às circunferências, o professor salienta propriedades e/ou componentes importantes como centro e raio.

Pode-se observar que, no decorrer das atividades de laboratório, a todo o momento o professor indaga os alunos; por exemplo, ao perguntar: “*Alguém sabe me dizer qual nome dado para esse ponto de encontro de dois segmentos (lados) em um polígono qualquer?”,* obtém como resposta *“[...] vértice”,* o que demonstra a preocupação em descrever acuradamente as propriedades de uma figura e a definição de palavras precisa e concisamente (Hoffer, 1991).

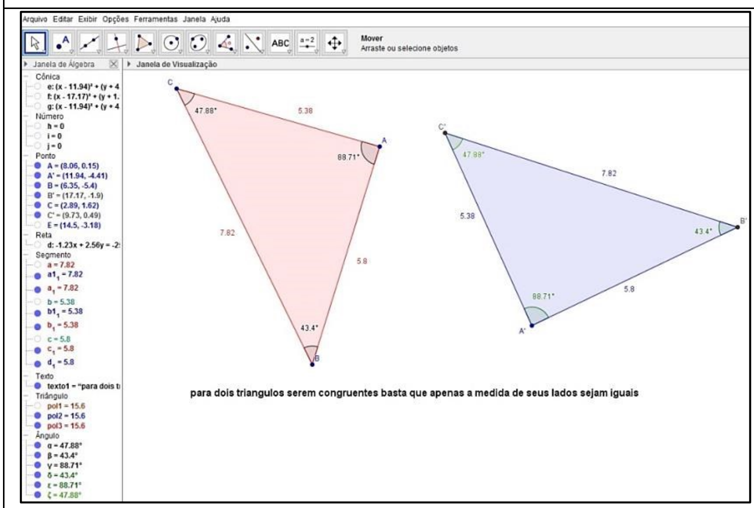
Ainda na quinta atividade, ao solicitar que os alunos reproduzissem uma rotação do triângulo ΔABC com relação ao segmento $\overline{A'C'}$, volta a explorar a habilidade visual em nível de análise, em que é observada a rotação com relação ao segmento $\overline{A'C'}$.

Ao indagar os alunos, com o objetivo de que eles percebessem que, no segundo triângulo, apesar de o triângulo $\Delta A'B'C'$ estar em rotação com relação ao segmento $\overline{A'C'}$, os lados correspondentes ao triângulo ΔABC eram congruentes por construção, enfatizou-se a habilidade lógica em Nível 1 (reconhecimento) – em que o aluno percebe que há diferenças e semelhanças entre figuras e entende a conservação da forma de figuras em posições diferentes. Mas, ao instruir os alunos a movimentar (aumentar ou diminuir) os lados de um dos triângulos, percebendo que os ângulos correspondentes dos dois triângulos também se alteravam – formando outras representações de triângulos congruentes –, o professor requer a habilidade visual dos alunos em nível de análise, fazendo com que eles percebessem tanto a congruência quanto as propriedades dos triângulos em diferentes representações.

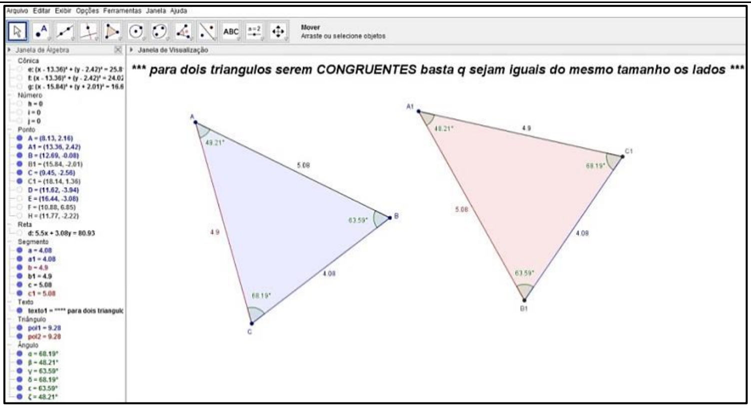
Ao solicitar que os alunos registrassem suas conclusões enfatizando que uma condição necessária e suficiente para que dois triângulos sejam congruentes é possuir lados correspondentes congruentes, trabalha-se com a habilidade lógica em nível de ordenação (Nível 3). O aluno deveria entender que, nos triângulos, a condição de possuir os lados correspondentes congruentes difere nos polígonos em geral: nestes, ela é apenas necessária; naqueles, ela já é suficiente. A Figura 11 apresenta os registros dos alunos ao final da atividade no *software* GeoGebra.



"Para dois triângulos serem congruentes basta que os lados correspondentes sejam congruentes"



"para dois triângulos serem congruentes basta que apenas a medida de seus lados sejam iguais"



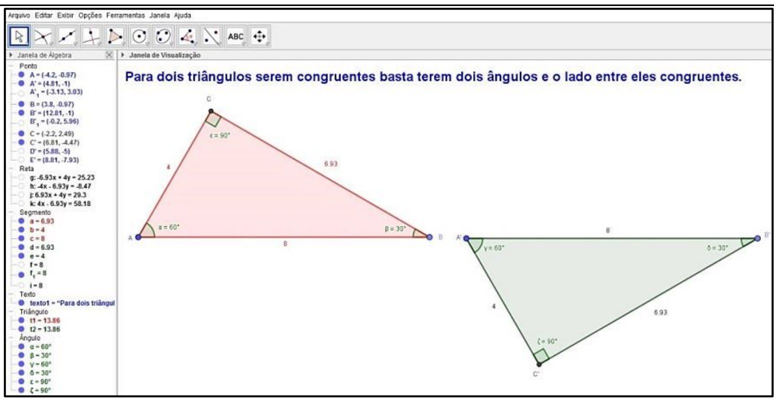
"para dois triângulos serem congruentes basta que sejam iguais do mesmo tamanho os lados"

Figura 46. Conclusões dos alunos registradas no *software* GeoGebra ao final da quinta atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

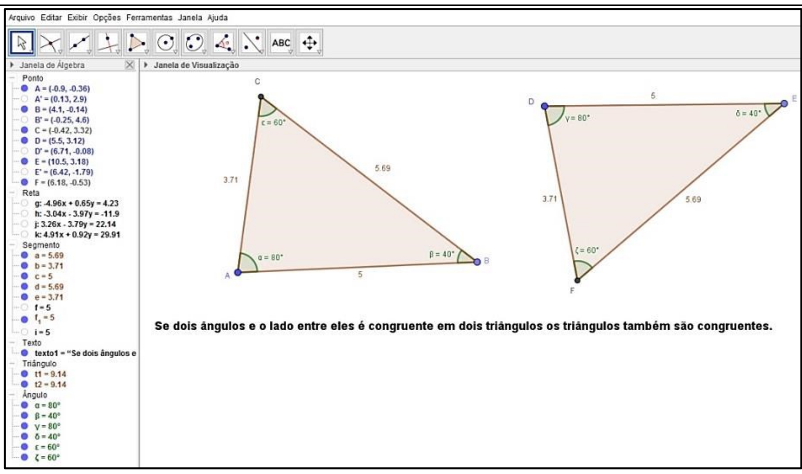
Para avançar na sexta atividade – cujo objetivo era identificar por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, outra condição necessária e suficiente para dois triângulos serem congruentes: ter dois ângulos correspondentes congruentes assim como o lado compreendido entre estes ângulos (caso ALA) – o professor recorda a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos. Por meio dos diálogos, o professor estimula os alunos a descrever verbalmente esta propriedade, o que caracteriza o nível de análise, já que, de acordo com Van Hiele (1986), neste nível os alunos são capazes de descrever características das figuras por meio da análise de propriedades. O mesmo nível de raciocínio geométrico é exigido na construção inicial com a utilização do *software* GeoGebra, sendo utilizados os componentes dos triângulos como ângulos, vértices e lados. Além disso, a utilização das ferramentas "Compasso" (simulando o compasso manual), "Ângulo com Amplitude Fixa" (simulando o transferidor) e "Reta" (simulando a régua) no ambiente do GeoGebra, nos remete a habilidade de desenho definida por Hoffer (1981). Podemos considerar o desenvolvimento da mesma também em nível de análise, pois os alunos verificaram, por meio das construções, como as partes formavam o todo.

Nesta construção, como os ângulos são definidos com amplitude fixa, não foi possível movimentar (aumentar ou diminuir) os lados de um dos triângulos, formando outras representações. Entretanto, como foi livre a escolha inicial do ângulo com amplitude fixa, o professor referia-se às diferentes construções dos colegas para que os alunos percebessem este caso de congruência em diferentes representações.

Ao final da atividade, em um trabalho com a habilidade lógica em nível de ordenação, os alunos são solicitados a registrar suas conclusões com relação a esta segunda condição necessária e suficiente para a congruência de triângulos: ter dois ângulos correspondentes congruentes assim como o lado compreendido entre estes ângulos (caso ALA). A Figura 12 apresenta os registros dos alunos no *software* ao final da atividade.



"Para dois triângulos serem congruentes basta terem dois ângulos e o lado entre eles congruentes"

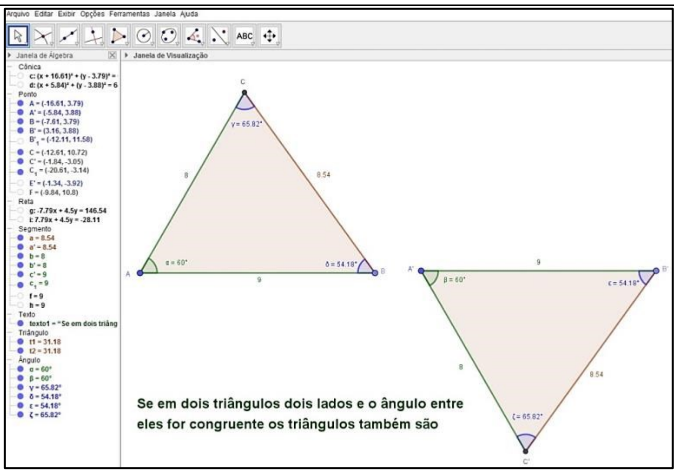


"*Se dois ângulos e o lado entre eles é congruente em dois triângulos os triângulos também são congruentes"*

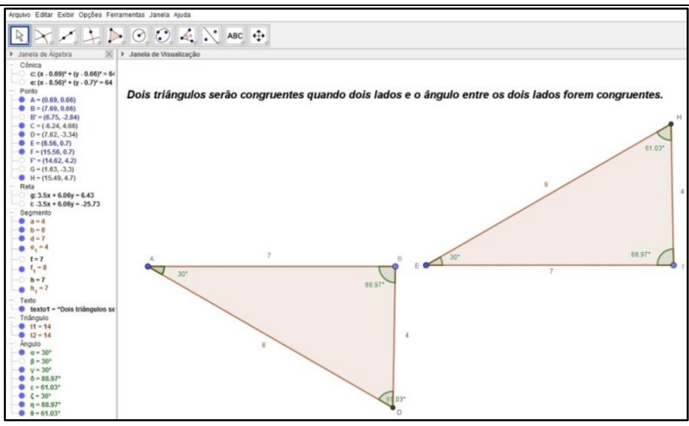
Figura 47. Conclusões dos alunos registradas no GeoGebra ao final da sexta atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

Análises semelhantes podem ser feitas na sétima atividade que teve como objetivo levar os alunos a identificar mais um caso de congruência (caso LAL), ou seja, ter, respectivamente, congruentes dois de seus lados e também o ângulo formado por esses lados. Para tanto, utilizou-se uma sequência de passos parecida com a da sexta atividade: os alunos construíram inicialmente dois segmentos formando um ângulo de amplitude fixa; obtiveram então o terceiro lado do primeiro triângulo. Posteriormente realizaram procedimento semelhante para a construção do segundo triângulo, mediram os dois triângulos e registraram suas conclusões no *software*.

Pode-se avaliar que, quando os alunos desenhavam uma figura geométrica na tela do computador, estavam utilizando a habilidade gráfica e quando descreviam as propriedades obtidas por meio destas construções valiam-se das habilidades lógica e verbal, todas em nível de análise. Já as conclusões indicavam o pensamento lógico em nível de ordenação, uma vez que, fundamentados nas construções e diálogos realizados, os alunos deveriam descrever, com suas próprias palavras, a condição necessária e suficiente para a congruência de triângulos em cada caso. A Figura 13 mostra exemplos das conclusões dos alunos ao final da sétima atividade da sequência.



“Se em dois triângulos dois lados e o ângulo entre eles for congruente os triângulos também são”



“Dois triângulos serão congruentes quando dois lados e o ângulo entre os dois lados forem congruentes”.

Figura 48. Conclusões dos alunos registradas no GeoGebra ao final da sétima atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

Na teoria escrita por Hoffer (1981), dentre as cinco habilidades em geometria definidas pelo autor encontra-se a habilidade de aplicações. Baseando-se na

Modelagem Matemática como a ideia de descrever fenômenos matematicamente, o autor sugere não só um trabalho em geometria aplicado a fenômenos físicos, mas também aplicado na própria geometria. Por exemplo, identificar qual é a área do maior retângulo que pode ser inscrito num triângulo dado, seria um exemplo de aplicação de retângulos nos triângulos.

Neste sentido, pode-se considerar que a oitava atividade da proposta – que teve como objetivo avaliar o estabelecimento dos três casos de congruência de triângulos identificando-os ao traçar em polígonos regulares as diagonais por um vértice – como um exemplo de trabalho com a habilidade de aplicação dos casos congruência de triângulos nos polígonos regulares. Objetivava-se trabalhar no nível de ordenação (Nível 3). Segundo Hoffer (1981) neste nível o aluno é capaz de entender o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos. No contexto da atividade, os casos de congruência, que fizeram parte de um processo de formação conceitual, foram relacionados com os polígonos regulares (modelo) apresentando relações entre os dois objetos.

Além da habilidade de aplicação considera-se que a oitava atividade também explorava a habilidade de desenho, já que o próprio processo de construção exigia que os alunos analisassem e relacionassem propriedades como, por exemplo, a quantidade de diagonais por um vértice de acordo com quantidade de lados e também os ângulos internos dos polígonos regulares. Esperava-se que a identificação dos casos de congruência dos triângulos obtidos a partir do traçado das diagonais requeresse a habilidade lógica em nível de ordenação, já que, nesse nível, os objetos de análise não são as figuras e sim as afirmações que relacionam propriedades. A Figura 14 apresenta exemplos das produções dos alunos nesta atividade final.

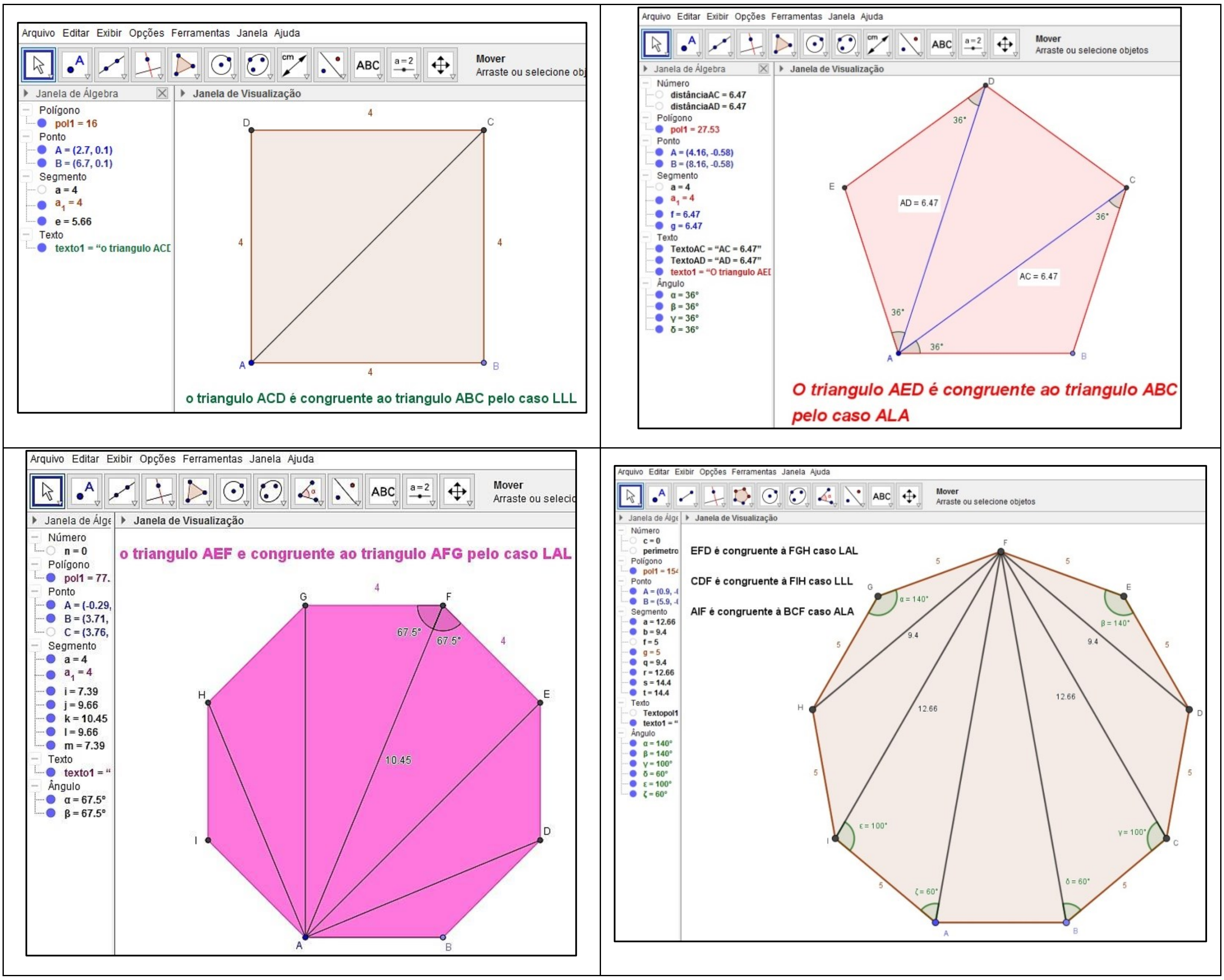


Figura 49. Produções dos no GeoGebra ao final da oitava atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

Nota-se, na descrição dos alunos, a identificação dos triângulos a partir dos vértices (por exemplo, EFD), a utilização das palavras “congruentes” e “caso” e a simbologia adequada (LLL, LAL etc.). De acordo com Van Hiele (1981), cada nível de pensamento geométrico exige símbolos linguísticos próprios e também sistemas próprios de relações que ligam esses símbolos. Os registros dos alunos mostram algumas características do nível de ordenação, em que as palavras e os símbolos são utilizados de maneira precisa e concisamente e as sentenças são formuladas de modo a mostrar relações entre propriedades das figuras. Convém acrescentar que vários alunos utilizaram as ferramentas do *software* para medir os lados e os ângulos dos pares de triângulos a serem examinados para, então, adequar o caso de congruência; em outras situações, o caso de congruência foi identificado a partir de deduções decorrentes do próprio conceito de polígono regular (polígono com lados e ângulos congruentes). Esses dois procedimentos parecem ilustrar a transição do nível de análise para o de dedução informal.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomando a pergunta norteadora deste trabalho:

Como uma proposta de ensino na forma de uma sequência didática direcionada a alunos do oitavo ano do ensino fundamental pode contribuir para a aprendizagem do conceito de congruência, em especial dos casos de congruência de triângulos?

A descrição das atividades, dos encaminhamentos seguidos, dos diálogos estabelecidos e das produções dos alunos acrescida do aprofundamento no estudo teórico e os dados advindos da literatura embasaram a análise aqui exposta que merece ser sintetizada e também matizada com as nossas perspectivas, enquanto professor pesquisador.

A análise realizada mostrou diferentes formas empregadas na sequência didática para a mobilização dos conhecimentos prévios dos alunos. Neste sentido, destaca-se a importância do papel do professor como organizador e articulador dos diálogos promovidos durante a aplicação da sequência. Sem dúvidas, a nossa experiência de docência nos estágios supervisionados da licenciatura, no projeto PIBID e como professor efetivo da rede estadual e municipal de ensino deve ter favorecido o emprego de estratégias para a articulação entre as ideias novas e aquelas existentes na estrutura cognitiva dos alunos – condição necessária para a atribuição de significados.

O trabalho com atributos definidores demonstrou um caminho para identificar quais os conhecimentos prévios deveriam ser mobilizados. Portanto, em concordância com as ideias de Proença e Pirola (2009) e Pirola et al. (2004) consideramos que a discussão dos atributos definidores a partir de exemplos e não exemplos pôde contribuir para a aquisição de conceitos, bem como para a inclusão de classes, relações subordinadas e supra ordenadas com vistas ao avanço dos níveis de formação conceitual estabelecidos por Van Hiele (1986).

Consideramos importante a nossa opção de planejar atividades segundo uma organização lógica, tendo por base uma hierarquia conceitual para facilitar o processo de diferenciação progressiva ao partir do conjunto de figuras geométricas planas, perpassando pela aprendizagem de congruência de polígonos até a situação mais particular de congruência de triângulos, em que as proposições referentes aos casos de congruência são especificadas. Dessa forma, pudemos considerar que a sequência didática buscou alcançar os princípios de diferenciação progressiva e reconciliação integradora das ideias com vistas à assimilaçãos do conceito de congruência de triângulos e das proposições referentes aos casos de congruência.

Entretanto, concordamos com as ideias Ausubel (2000), ao enfatizar que a aprendizagem significativa não é sinônima de aprendizagem de material significativo, ou seja, o material de aprendizagem pode ser considerado apenas *potencialmente significativo*. Portanto, não poderíamos analisar separadamente as características do material e as condições dos sujeitos aprendizes, pois uma condição para que a aprendizagem seja significativa é a motivação no empenho do esforço deliberado e intencional para a compreensão.

Neste sentido, a análise das fichas de registro dos alunos, bem como as produções realizadas pelos mesmos no ambiente do *software* GeoGebra evidenciam a pré-disposição dos alunos em participarem das atividades. As atividades propostas com a utilização de *slides* apresentando figuras coloridas e a movimentação das mesmas também buscou motivar os alunos para empenharem esforço cognitivo na busca de relações, facilitando, assim, a atribuição de significados.

A forma em que as atividades foram propostas – em que o conteúdo era exposto verbalmente, mas eram também proporcionadas situações de investigação anteriores às definições dos conceitos – pareceu ter motivado os alunos e despertada a sua curiosidade. Além disso, o trabalho com a criatividade dos alunos por meio de ferramentas de edições no *software* GeoGebra parece ter contribuído para a formação de atitudes mais positivas em relação à geometria – o que pode ter favorecido os mecanismos da aprendizagem significativa.

Neste sentido, concordamos com as ideias de Cyrino e Baldini (2012) ao afirmarem que a utilização do GeoGebra como recurso nas aulas de matemática pode condicionar a criação de um ambiente favorável à construção de conceitos e ideias matemáticas. Concordamos também com a afirmativa de que, cabe ao professor, ao propor as atividades, a exploração do caráter dinâmico do *software*, almejando favorecer o processo de investigação matemática pelos alunos. Ressaltamos a importância dos diálogos estabelecidos durante todo o processo em que se objetivou a exposição e confrontamento das ideias dos alunos com vistas à formalização dos conceitos e proposições. Acrescentamos que tínhamos a experiência enquanto professor de informática e isso favoreceu a exposição das ferramentas do *software* e o acompanhamento dos procedimentos empregados pelos alunos.

Em complemento, concordamos ainda com as ideias presentes em Valente (1999), ao afirmar que não é suficiente instrumentalizar o professor com mais uma ferramenta: há necessidade de discussões nos cursos de formação (inicial e continuada) que promovam reflexões e análises sobre o uso desta ferramenta na concepção da aprendizagem significativa, considerando os conhecimentos prévios dos alunos e os aspectos históricos e sociais da evolução desse novo conhecimento.

Portanto, a partir da análise tanto do material – que demostrou possuir uma organização lógica e hierárquica dos conceitos – bem como do mecanismo de aprendizagem significativa presente nas formas empregadas para a mobilização dos conhecimentos prévios dos alunos, nas produções realizadas pelos mesmos, na criatividade nas edições no GeoGebra e na curiosidade das descobertas guiadas, é possível obter indicativos de que foram satisfeitas as condições para a aprendizagem significativa dos casos de congruência de triângulos.

A presente investigação demonstra a necessidade de se adequar os níveis de pensamento geométrico, já que, conforme Van Hiele (1986), se o professor utilizar linguagem ou propuser atividades adequadas a um nível superior, o aluno não será capaz de acompanhar os processos desencadeados, portanto poderá não ocorrer a aprendizagem no nível desejado. Conhecer essa teoria permitiu o nosso planejamento das atividades e, principalmente, o direcionamento das perguntas e o estabelecimento dos diálogos na sala de aula.

Apesar disso, consideramos que o entendimento das condições necessárias e suficientes para a congruência de triângulos é de natureza complexa, assim como apontado por Leung et al. (2014) e Patkin & Plaksin (2011). Nesse sentido, uma sugestão a ser feita é incluir, na sequência didática, mais atividades que incluam os não exemplos, ou seja, que promovam discussões acerca de casos hipotéticos de congruência. Uma situação possível seria fazer os alunos investigar se AAA (ângulo, ângulo, ângulo) ou LLA (dois lados e um ângulo não formado por estes lados) seriam condições necessárias e suficientes para a congruência de triângulos.

O trabalho aqui apresentado nos remete ainda um repensar sobre a importância das atividades no sentido do desenvolvimento das habilidades geométricas, intimamente relacionadas à formação de conceitos geométricos. Estas habilidades estão constantemente em interlocução com os conceitos, podendo ser utilizadas para ativar os conhecimentos prévios, resgatar a experiência de nossos alunos e favorecer a atribuição de sentidos para o aprendizado. Além disso, a incorporação das novas tecnologias, preservando as identidades culturais de nossos alunos, parece ter proporcionado, além do interesse pelas aulas, um processo de relação com o saber escolar e a experiência dos estudantes.

Cabe ressaltar, em concordância com Viana (2000) que, dependendo da dimensão dada ao ensino de geometria algumas habilidades podem se desenvolver mais que outras. Neste sentido, concebemos a geometria não apenas como o estudo da visualização, do desenho e da construção de figuras, ou como aplicação no mundo real, físico, mas também como exemplo de um sistema matemático dedutivo em que a lógica e a linguagem se configuram como elementos importantes para a aprendizagem deste conteúdo. Em concordância com as ideias de Hoffer (1981), acreditamos que o ensino de geometria no Ensino Fundamental e Médio deveria proporcionar, em suas diversas instâncias, oportunidades para que todas as habilidades fossem desenvolvidas pelos alunos. Na sequência didática apresentada, considera-se que estas foram, ainda que forma limitada, contempladas nas atividades. Ressalta-se, evidentemente, a necessidade de continuidade desse tipo trabalho para o ensino de outros conteúdos.

Neste sentido, cabe evidenciar o papel do *software* GeoGebra para o desenvolvimento das habilidade geométricas. Apesar de as construções por meio de *softwares* não terem sido previstas por Hoffer (1981), pudemos observar que seu uso possibilitou ao aluno enxergar as diferentes variações de uma construção geométrica, além de inferir propriedades e chegar a generalizações, em concordância com Borba (2010). Portanto, podemos concluir que houve indícios de avanços com relação aos níveis de pensamento geométrico dos alunos quanto ao conceito de congruência, especialmente quanto ao entendimento das condições necessárias e suficientes para os casos de congruência de triângulos. Podemos considerar também que a forma em que as atividades foram propostas, os encaminhamentos durante a aplicação e os diálogos promovidos contribuíram para o entendimento dos objetivos propostos na sequência.

Cabe salientar que o trabalho com alunos no ambiente do laboratório pode ser considerado como um desafio, principalmente ao se tratar da realidade das escolas públicas do país. Neste sentido, algumas variáveis devem ser consideradas como: a quantidade de computadores disponíveis de acordo com a quantidade de alunos; espaço para a movimentação do professor para instruções individuais; habilidade com o *software* bem como com os possíveis problemas técnicos, etc. No nosso caso, várias adequações foram necessárias e, apesar de ter sido uma tarefa desafiadora, a motivação dos alunos, a expectativa deles para iniciar as aulas, bem como o estabelecimento de confiança e respeito nas relações professor-aluno e aluno-aluno foram elementos que tornaram a experiência bastante satisfatória e motivadora.

Por ser o GeoGebra um *software* dinâmico e de fácil utilização acredita-se que o processo de familiarização dos alunos com as ferramentas e comandos, pôde facilmente ocorrer no decorrer das atividades propostas nesta sequência.

Neste contexto, avaliamos que o uso das novas tecnologias em sala de aula torna-se cada vez mais emergente. Ao longo de nossa trajetória, especialmente no processo de formação e também no decorrer deste trabalho, podemos perceber que, as Tecnologias da Informação e Comunicação, por estarem em constante desenvolvimento, têm influenciado mudanças de comportamento na sociedade, principalmente em nossos alunos. Portanto, acreditamos que o professor, ao agregar em suas aulas atividades que promovam o contato com estas ferramentas em prol do conhecimento, mostra aos alunos que a matemática também faz parte deste movimento, podendo assim motivá-los ainda mais a dar sentido ao processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Acreditamos ainda que o trabalho com a formação conceitual em geometria deve ser, evidentemente, realizado de maneira gradual, explorando a vivência dos alunos e suas intuições, de modo a evidenciar um processo construtivo. Neste contexto, o modelo de Van Hiele composto pelos níveis de pensamento geométrico e pelas fases do aprendizado não é um manual de regras, porém merece destaque por ter-se originado da própria vivência dos autores e fundamentado nestas concepções.

As facetas deste trabalho puderam ainda nos mostrar que os alunos permeiam constantemente entre os diferentes níveis de formação conceitual em geometria apresentados por Van Hiele, indo de acordo com nossa concepção sobre o conhecimento, pois o compreendemos como algo não estático e muito menos pré-definido.

Evidentemente, as limitações do trabalho não permitem afirmar se houve, de fato, aprendizagem significativa, nem avanço considerável nas habilidades ou no nível de raciocínio de todos os alunos. A continuidade desse tipo de trabalho permitiria o estabelecimento de outras relações e possíveis conclusões acerca da retenção do conceito de congruência e da aplicação deste conhecimento na solução de problemas e no entendimento de outros tópicos da geometria. De qualquer forma, esperamos não ter negligenciado o ensino da geometria nem proposto um trabalho inconsistente, pois isto seria negar o papel da geometria no currículo escolar: possibilitar aos alunos o desenvolvimento de um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vivem, conforme indicam os PCN (BRASIL, 1998).

Outro ponto a considerar refere-se às ações de planejamento. As constantes reflexões realizadas durante a elaboração, descrição e análise deste trabalho e as advindas do processo de formação continuada do autor, bem como as experiências em atividades complementares, pesquisas desenvolvidas, discussões e debates acerca de temas como a formação conceitual, habilidades geométricas e o uso das novas tecnologias, motivaram também um repensar sobre a importância do planejamento, do trabalho com sequências didáticas e sobre a importância de buscar o conhecimento da realidade, para transformá-la, visando à melhoria das práticas pedagógicas.

Consideramos que ao elaborar, aplicar e analisar a presente proposta no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional – entendeu-se melhor as características da chamada pesquisa do professor, conforme declaram André (2006), Carneiro (2008) entre outros, e também os objetivos específicos do programa: pensar a formação de professores como processo contínuo, que subsidia o desenvolvimento de uma visão ampla e crítica em relação ao Ensino de Ciências e Matemática. Assim, avaliamos que a experiência obtida com a realização deste trabalho contribuiu enormemente para a nossa formação continuada.

Finalmente, espera-se que o produto educacional gerado – composto pela sequência didática acompanhada de orientações aos professores e material de apoio – alcance outros professores e contribua tanto para o processo de ensino e aprendizagem de geometria em sala de aula, quanto para outras pesquisas no âmbito da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. J. A “revisão da bibliografia” em teses e dissertações: meus tipos inesquecíveis. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 81, p. 53-60, 1992.

ANDRÉ, M.(Org.). **O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores**. 5. ed. Campinas: Papirus, 2006.

AQUINO, G. K. S.; ALVES, L. P. L. **A importância da aprendizagem significativa**: uma introdução de area e volume em prismas. 69 f. (Trabalho de conclusão de curso) – Fundação Universidade Federal do Amapá, 2015.

AUSUBEL, D.P**. The acquisition and retention of knowledge**: a cognitive view. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. < https://doi.org/10.1007/978-94-015-9454-7>

BARROS, M. C.; MOGNON, A.; KATO, L. A. Aprendizagem significativa de conceitos matemáticos: um estudo sobre o uso do GeoGebra como um organizador prévio. In: **Anais**... 1ª. CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, São Paulo: São Paulo, 2011. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/download/8391/7215. Acesso em: 15 de agosto de 2017.

BORBA, M. C. *Softwares* e internet na sala de aula de matemática. In: **Anais**... X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Bahia: Salvador, 2010. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF>. Acesso em: 16 de agosto de 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental)**.** Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. **Parecer CNE/CP 9/2001**. Conselho Nacional de Educação. Brasília: Distrito Federal, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf>. Acesso em 20 de setembro de 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Portaria Normativa/MEC n° 17, de 28 de dezembro de 2009**. Brasília: MEC, 2009. Disponível em: <http://www.ipt.br/download.php?filename=444-Portaria_Normativa_n_17.pdf>. Acesso em 06 de maio de 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Conselho Nacional de Secretaria de Educação. Brasília: Distrito Federal, 2017. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. Acesso em 3 de fevereiro de 2018.

CARNEIRO, V.C. Contribuições para a Formação do Professor de Matemática Pesquisador nos Mestrados Profissionalizantes na Área de Ensino. **Bolema,** Rio Claro (SP), Ano 21, n. 29, p. 199-222, 2008.

COLL, C. Introdução. In: COLL, C.; POZO, J. I; SARABIA, B.; VALLS, E. **Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes.** Tradução de Beatriz Affonso Neves.Porto Alegre: Artes Médica, 1998. p. 9-16.

CROWLEY, M. L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). Aprendendo e Ensinando Geometria. Tradução de Hygino H. Domingos. São Paulo: Atual, 1994. p. 1-20.

CYRINO; M. C. C. C.; BALDINI, L. A. F. O *Software* GeoGebra na Formação de Professores de Matemática – Uma Visão a Partir de Dissertações e Teses. **Revista Paranaense de Educação Matemática,** Campo Mourão, Pr, v. 1, n. 1, p. 42 a 62, 2012.

DOBARRO, V. R., & BRITO, M. R. F. (2010). Atitude e crença de autoeficácia: Relação com o desempenho. **Educação Matemática em Revista** (São Paulo), 12, 199-220.

DOLCE, O. & POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar** – Volume 09. São Paulo: Atual, 1993.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (Fascículo I). Tradução de Lênio F. Levy e Marisa R.A. Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

EDWARDS, J. ; JONES, K. Linking geometry and algebra with GeoGebra, **Mathematics Teaching**, 194, p. 28 – 30, 2006.

FAGUNDES, T. B. Os conceitos de professor pesquisador e professor reflexivo: perspectivas do trabalho docente. **Revista Brasileira de Educação,** Rio de Janeiro, v. 21, n. 65, p.281-298, 2016.

FAZENDA, I. A formação do professor-pesquisador – 30 anos de pesquisa. **Revista E-Curriculum,** São Paulo, v. 1, n. 1, 2005. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/curriculum/article/viewFile/3111/2051>. Acesso em: 08 agosto de 2017.

FIORENTINI, D. & LORENZARO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

GOMES, S. C. Ensino de Trigonometria numa Abordagem Histórica: um produto educacional. **Bolema**, v. 27, n. 46, p. 563-577, Rio Claro (SP), 2013.

HAMAZAKI, A. C. O ensino da geometria sob a ótica dos Van Hiele**.** In: **Anais**... VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM). Recife – PE, 2004.

HOFFER, A. **Mathematics Teacher**, v.74, n.1, p.11-18, jan. 1981.

HOHENWARTER, M.; JONES, K. BSRLM. Geometry Working Group: ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. **Proceedings** of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27, (3),126-131, 2007.

INOUE, R. K. M. **O processo de formação do conceito de quadriláteros, envolvendo alunos de uma 6ª série do Ensino Fundamental**. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Vale do Itajaí, 2004.

JAIME A.P; GUTIÉRREZ,A (1990). Una Propuesta de Fundamentacion para la Enseñanza de la Geometria: el Modelo Teórico de Van Hiele in LINARES,S.C.(edit.).**Teoria y Práctica en Educacion Matemática**. Ediciones Alfar, Sevilha.

KLAUSMEIER,H.J; GOODWIN, W.(1977). **Manual de Psicologia Educacional**, Tradução de Maria Célia T.A . de Abreu, São Paulo: Harper & Row do Brasil Ltda.

LEIVAS, J. P. L.; FOGAÇA, L. S. Registros de representação semiótica e geometria dinâmica para o ensino de congruências de figuras geométricas planas. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 10, n. 3, p. 81-100, set./dez., 2017.

LEUNG, K. C. I.; DING, L.; LEUNG, A. Y. L.; WONG, N. Y**. Prospective Teachers' Competency in Teaching how to Compare Geometric Figures**: The Concept of Congruent Triangles as an Example. Korean Society of Mathematical Education. V.18, n. 3, p.171-185, 2014. Disponível em: <http://koreascience.or.kr/article/ArticleFullRecord.jsp?cn=SHGHEN_2014_v18n3_171>. Acesso em: 25 de janeiro de 2017.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S.. Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o ensino de Geometria Euclidiana. **Informática na Educação**: teoria e prática. Porto Alegre, v. 16, n. 1, p. 149-160, jan./jun. 2013.

LÜDKE, M. A complexa relação entre o professor e a pesquisa. In: ANDRÉ, M. (Org.). **O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores**. Campinas: Papirus, p. 27-54, 2001a.

_________. O professor, seu saber e sua pesquisa. **Educação e Sociedade**, v. 22, n. 74, p. 77-96, 2001b. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/es/v22n74/a06v2274.pdf>. Acesso em: 08 de março de 2017.

MALHEIROS, A. P. S. Pesquisas em Modelagem Matemática e Diferentes Tendências em Educação e em Educação Matemática**. Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p.861-882, 2012. Disponível em: <http://www.redalyc.org/pdf/2912/29122 6275006.pdf>. Acesso em 25 de janeiro de 2016.

MEIER, M.; GRAVINA, M. A. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. Conferência Latino Americana de GeoGebra, 1. São Paulo, 2012, São Paulo, SP. **Anais...**, p. 250 – 264, 2012.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Conteúdo Básico Comum**: CBC Matemática. Ensinos Fundamental e Médio. Minas Gerais: Belo Horizonte, 2007. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7B4DA513B4-3453-4B47-A322-13CD37811A9C%7D_Matem%C3%A1tica%20final.pdf>. Acesso em: 10 de agosto de 2017.

MONICA, G. D. Instrução programada. **Revista de Administração de Empresas**. Rio de Janeiro, v. 17, n. 3, p. 53-63, maio/jun., 1977.

MORACO, A. S. C.T. **Um estudo sobre os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do ensino médio**. 107f. Mestrado (Dissertação em Educação para Ciências). Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2006.

MORAN, M. FRANCO, V. S. Registros Figurais em Geometria: influências na apreensão operatória e na pesquisa heurística de figuras. Perspectivas da Educação Matemática – UFMS – v. 7, n. 13, 2014, p. 124 – 137. Disponível em: <http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/494>. Acesso em: 12 de março de 2017.

OLIVEIRA, S. A. C. K. **Relação com o saber matemático de alunos em risco de fracasso escolar**. 2008. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da UFMG, Belo Horizonte, 2008.

OLIVEIRA, G. P.; ARAUJO, P. B. Uma abordagem para o ensino de lugares geométricos com o GeoGebra. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 209-222, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p209> Acesso em: 25 de janeiro de 2017.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da provinha Brasil. **Revista Educação Matemática em Pesquisa**. São Paulo, v. 16, n. 4, pp. 1147-1168, 2014. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/22016/pdf>. Acesso em 22 de julho de 2017.

PATKIN, D. & PLAKSIN, O. Congruent Triangles Sufficient and Insufficient Conditions Suggested Milestones for Inquiry and Discussion. **Korean Society of Mathematical Education**, v.15, n. 4, p.327-340, 2011.

PEREIRA, T. L. M. **O uso do *software* GeoGebra em uma escola pública**: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012.

PIROLA, N. A.; CARVALHO, A. M. C.; NASCIMENTO, H. L.; MIRIANI, J. M.; MONGER, W. Um estudo sobre a formação do conceito de triângulo e paralelogramo em alunos do ensino fundamental: uma análise sobre os atributos definidores e exemplos e não-exemplos. In: **Anais...** VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Pernambuco: Recife, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/CC13767112817.pdf>. Acesso em 15 de janeiro de 2017.

POZO, J. I. Aprendizagem e o Ensino de Fatos e Conceitos In: COLL, C; POZO, J. I; SARABIA; VALLS, E. **Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes**. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998, p. 17-71.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígono. **Zetetiké**, Campinas, v. 17, n. 31, jan/jun.2009.

REZI, V. **Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

RODRIGUES, S. S. A. **A teoria de Van Hiele aplicada aos triângulos**: uma sequência didática para o 8º ano do Ensino Fundamental. 129 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2015.

SANTOS, L. C. **Mudanças na Prática Docente**: Um Desafio da Formação Continuada de Professores Polivalentes para Ensinar Matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SILVA, L.R.; BOIAGO, C.E.P.; VIANA, O.A. Formação conceitual em geometria: uma sequência didática proposta nas ações do PIBID. In**: Anais...** III Encontro Mineiro sobre Investigação na Escola. Ituiutaba, FACIP/UFU. 2012.

SILVA, M. R.; MIRANDA, J.A.; VIANA, O. A. Modelagem Matemática no ensino de Geometria Plana. In: **Anais...** IV Encontro Mineiro sobre Investigação na Escola, 2013, Ituiutaba, MG. IV Encontro Mineiro sobre Investigação na Escola, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA. **Resolução Nº 05/2013, do Conselho de Pesquisa e Pós-Graduação**. Minas Gerais: Uberlândia, 2013. Disponível em: <http://www.ppgecm.ufu.br/sites/ppgecm.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Pep0513.pdf>. Acesso em: 12 de março de 2017.

USISKIN Z. (1994). Resolvendo os dilemas da geometria escolar. **In LINDQUIST.M.M. e SHULTE A . A .(org.) Aprendendo e ensinando geometria**. trad.de Hygino H .Domingos - São Paulo: Atual.

VALENTE, J. A. (Org.). **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

VAN HIELE, P. **Structure and Insight - a theory of mathematics education.** Orlando: Academic Press, 1986.

VIANA, O. A.; BOIAGO, C.E.P. Registros de representação semiótica em atividades de desenho geométrico no GeoGebra. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v.10, n. 1, p. 162-182, 2015a. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2015v10n1p162>.

VIANA, O.A. BOIAGO, C.E.P. Modelagem matemática no GeoGebra: uma análise a partir dos registros de representação semiótica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 6, n. 3, p. 23-37, 2015b.

VIANA, O. A. **O Conhecimento Geométrico de Alunos do CEFAM Sobre Figuras Espaciais**: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. 230 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, 2000.

____________. Conhecimentos prévios e organização de material potencialmente significativo para a aprendizagem da geometria espacial**. Ciência e Cognição**, v. 16, p.15-36, 2011.

___________.O subprojeto Matemática Pontal e as sequencias didáticas conceituais In: **Interface entre teoria e prática na formação docente**: reflexões sobre experiências no Pibid.1 ed. São Carlos, SP : Pedro & João Editores, v.1, p.71-90, 2015c.

____________. Avaliação dos desenhos de planificação de figuras geométricas no ensino básico. **Estudos em Avaliação Educacional**. São Paulo, v. 26, n. 63, p. 838-871, 2015d.

VILLIERS, de M. Algumas reflexões sobre a teoria de van Hiele. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 400-431, 2010.

ZABALA, A. **A prática educativa.** Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZACARIAS, S. M. Z. **A Matemática e o Fracasso Escolar**: Medo, Mito ou Realidade. 2008. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Oeste Paulista, Presidente Prudente, 2008.

ZEICHNER, K. M. **Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico.** In: GERALDI, M.; FIORENTINI, DÁRIO & PEREIRA, E. M. (orgs.) Cartografia do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a). Campinas, Mercado de Letras ABL, 1998. pp. 207-236**.**

APÊNDICES

APÊNDICE A: 1ª Ficha de Registos

Aluno: ____

Polígonos	*Não polígonos*
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________

Polígonos	*Não polígonos*
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________

O que você aprendeu nesta aula? Se possível desenhe exemplos e contraexemplos.
____
____
____
____

APÊNDICE B: 2ª Ficha de Registos

Aluno: ____

Pares de polígonos "iguais"	***Pares de polígonos diferentes***
________ e ________	________ e ________
________ e ________	________ e ________
________ e ________	________ e ________
________ e ________	________ e ________
________ e ________	________ e ________
________ e ________	________ e ________
________ e ________	________ e ________
________ e ________	________ e ________
________ e ________	________ e ________
________ e ________	________ e ________

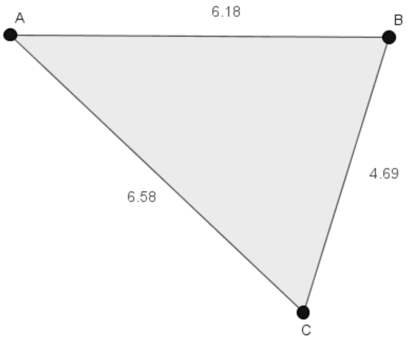
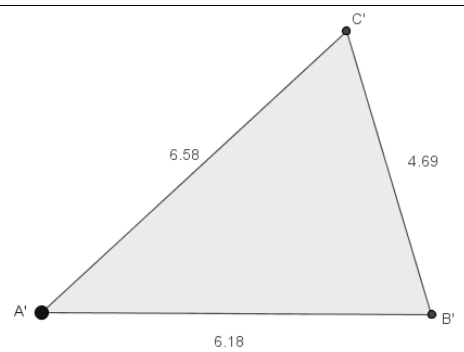
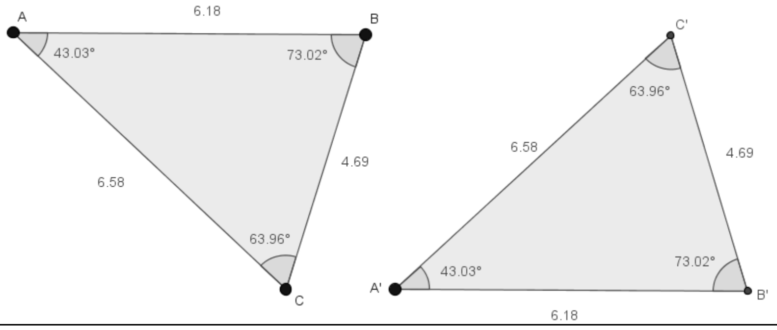
Pares de polígonos congruentes	***Pares de polígonos não congruentes***
________ ≅ ________	________ e ________
________ ≅ ________	________ e ________
________ ≅ ________	________ e ________
________ ≅ ________	________ e ________
________ ≅ ________	________ e ________
________ ≅ ________	________ e ________
________ ≅ ________	________ e ________
________ ≅ ________	________ e ________
________ ≅ ________	

O que você aprendeu nesta aula? Se possível desenhe exemplos e contraexemplos.

APÊNDICE C: 3ª Ficha de Registos

Aluno: ____

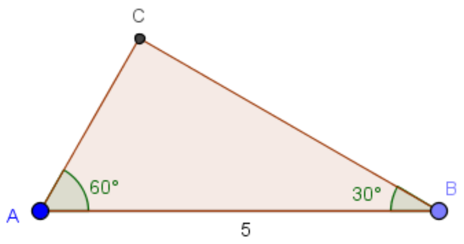
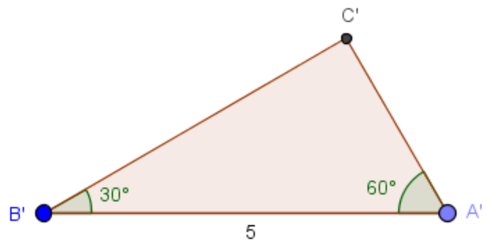
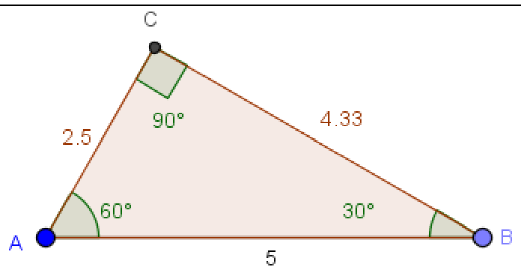
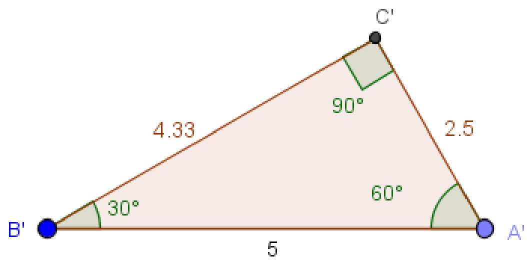
Primeiro caso de congruência de triângulos (LLL)

<table>
<tr><td>Dados: três lados do ΔABC.</td><td>Construímos o $\Delta A'B'C'$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Medindo os ângulos do ΔABC e do $\Delta A'B'C'$, obtemos:</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Portanto,
____
____
____
____
____</td></tr>
</table>

APÊNDICE D: 4ª Ficha de Registos

Aluno: ____

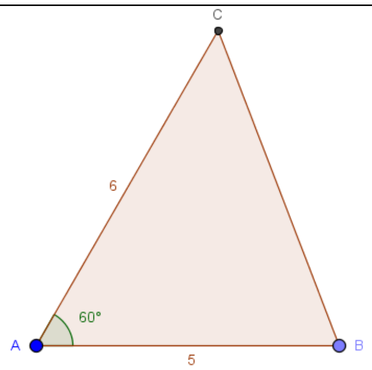
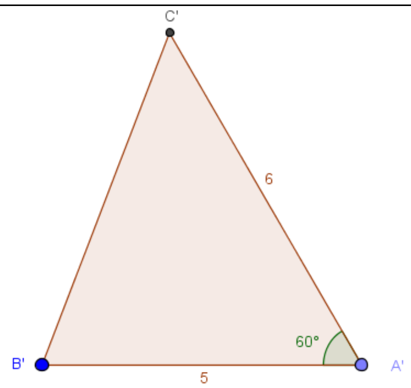
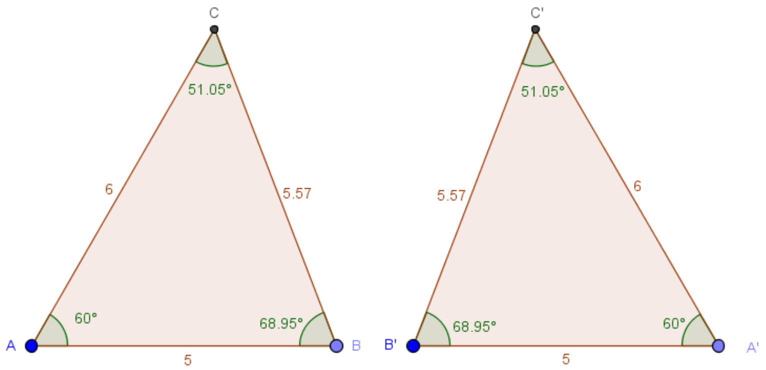
Segundo caso de congruência de triângulos (ALA)

<table>
<tr><td>Dados: dois ângulos do ΔABC e o lado compreendido entre eles.</td><td>Construímos o $\Delta A'B'C'$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Medindo os lados e os ângulos do ΔABC e do $\Delta A'B'C'$, obtemos:</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Portanto,
____
____
____
____
____</td></tr>
</table>

APÊNDICE E: 5ª Ficha de Registos

Aluno: ____

Terceiro caso de congruência de triângulos (LAL)

<table>
<tr><td>Dados: dois lados do ΔABC e o ângulo formado por eles.</td><td>Construímos o $\Delta A'B'C'$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Medindo os lados e os demais ângulos do ΔABC e do $\Delta A'B'C'$, obtemos:</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Portanto,
____
____
____
____
____</td></tr>
</table>