

B=0

1401J  
621:531.01  
M5281  
TES/MEU

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS ATRAVÉS DO MÉTODO  
DAS SÉRIES DE FOURIER - UM MÉTODO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Dissertação apresentada à Universidade Federal  
de Uberlândia por GILBERTO PECHOTO DE MELO  
como parte dos requisitos para obtenção do  
título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: prof. Valder Steffen Jr.,

Dr. Ing., Hab.

621:531.01 M5281 /TES/FU  
DIRBI/UFU 02800/92



1000015253

À Mariamélia e Laís

## MEUS AGRADECIMENTOS

-ao prof. Valder Steffen Júnior, pela orientação sempre disponível e pela grande amizade durante todo o curso.

-ao prof. Francisco Paulo Lépore Neto, pelo apoio no trabalho experimental e por sua participação da banca.

-aos professores José Roberto de França Arruda e José Manoel Fernandes pela participação da banca.

-aos amigos do DEEME, pelas atenções durante o período em que passei na U.F.U.

-à CAPES, pela bolsa PICD, recebida durante o curso.

-à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (UNESP) e ao Departamento de Engenharia Mecânica.

-à minha esposa Mariamélia e minha filha Laís, que muito me apoiaram para a realização deste trabalho.

# IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS ATRAVÉS DO MÉTODO DAS SÉRIES DE FOURIER - UM MÉTODO NO DOMÍNIO DO TEMPO

## SUMÁRIO

. LISTA DE FIGURAS	IX
. LISTA DE TABELAS	XII
. LISTA DE SÍMBOLOS	XIV
1. INTRODUÇÃO	1
2. O MÉTODO DAS SÉRIES DE FOURIER PARA IDENTIFICAÇÃO : UM MÉTODO NO DOMÍNIO DO TEMPO	7
2.1 - Introdução	7
2.2 - Matriz Operacional de Integração - séries de Fourier	7
2.3 - Sistemas com um grau de liberdade	11
2.3.1 - Formulação em termos do deslocamento	11
2.3.2 - Formulação em termos da velocidade	14
2.3.3 - Formulação em termos da aceleração	16
2.4 - Sistemas com vários graus de liberdade	18
3. PROGRAMA COMPUTACIONAL	24

4.	IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	29
4.1	- Introdução	29
4.2	- Sistemas com um grau de liberdade	30
4.2.1	- Sistema livre	30
4.2.2	- Sistema excitado harmonicamente	33
4.3	- Sistemas com vários graus de liberdade	39
4.3.1	- Sistema com dois graus de liberdade	39
4.3.2	- Sistema com três graus de liberdade	54
5.	IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE SISTEMAS MECÂNICOS DE UM A TRÊS GRAUS DE LIBERDADE - TÉCNICAS EXPERIMENTAIS	59
5.1	- Sistema com um grau de liberdade	59
5.1.1	- Modelo matemático	60
5.1.2	- Identificação da mesa vibratória	61
5.1.3	- Identificação através das séries de Fourier	65
5.2	- Sistema com dois graus de liberdade	68
5.2.1	- Modelo matemático	69
5.2.2	- Identificação da mesa vibratória	70
5.2.3	- Identificação através das séries de Fourier	77
5.3	- Sistema com três graus de liberdade	80
5.3.1	- Modelo matemático	81
5.3.2	- Identificação da mesa vibratória	86

5.3.3 - Identificação através das séries  
de Fourier

93

6. CONCLUSÕES

96

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

99

ANEXOS

104

Anexo I - Determinação do coeficiente de  
rigidez estática - 1 g.d.l.

105

Anexo II - A) Modos próprios - 2 g.d.l.

B) Fase - 2 g.d.l.

107

Anexo III - Resposta no tempo - 2 g.d.l.

110

Anexo IV - A) Função de transferência - 3 g.d.l

B) Função de coerência - 3 g.d.l

112

MELO, G. P.; Identificação de Sistemas Mecânicos Através do Método das Séries de Fourier - Um Método no Domínio do Tempo, U.F.U., Uberlândia 1992. 114p.

RESUMO:

Apresenta-se neste trabalho, um método para identificação de Sistemas Mecânicos com vários graus de liberdade operando no domínio do tempo. O método baseia-se na expansão das funções de excitação e de resposta do sistema em termos de séries de Fourier e na transformação das equações diferenciais do movimento em equações algébricas por meio de integrações sucessivas e da utilização de uma matriz operacional para integração das funções que formam aquelas séries. Desta forma, o método pode ser sumarizado em três etapas fundamentais:

- 1 - Expansão da excitação e da resposta em séries de Fourier.
- 2 - Integração das equações do movimento e emprego de uma matriz operacional para integração das séries de Fourier.
- 3 - Estimativa dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados.

Palavras-chaves: identificação de parâmetros, análise modal, técnica no domínio do tempo, séries de Fourier.

MELO, G. P.; Identification of Mechanical Systems by Fourier Series Method - A Time-Domain Method, U.F.U.,Uberlândia 1992.  
114p.

ABSTRACT:

A time-domain technique based on Fourier series is used in this work for the identification of parameters of mechanical systems with multi-degrees of freedom. The method is based on the orthogonality property of the Fourier series which enables the integration of the equations of motion. These equations are then converted to a linear algebraic model that is solved to obtain the unknown parameters. This way the method can be summarized as follows:

- 1 -expansion of the input and output signals in Fourier series
- 2 -integration of the equations of motion using an operational matrix to integrate the series
- 3 -the parameters are calculated through a least-square estimation method.

Keys-words: parameter identification, modal analysis, time-domain technique, Fourier series.



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA	DESCRIÇÃO	PÁGINA
3.1	Fluxograma do programa computacional para identificação	28
4.1	Sistema de um grau de liberdade	30
4.2	Identificação da força de excitação Sistema de um grau de liberdade	38
4.3	Sistema de dois graus de liberdade	40
4.4	Sêlo dinâmico	52
4.5	Sistema de três graus de liberdade	55
5.1	Mesa vibratória com um grau de liberdade	60
5.2	Modelo do Sistema de um grau de liberdade	60
5.3	Identificação da bancada - 1 g.d.l.	62
5.4	Função de Transferência - 1 g.d.l.	63
5.5	Função de coerência - 1 g.d.l.	64
5.6	Resposta no tempo - 1 g.d.l.	66
5.7	Esquema para aquisição do sinal - 1 g.d.l. Sistema livre	67

5.8	Mesa vibratória com dois graus de liberdade	69
5.9	Modelo do sistema com dois graus de liberdade	70
5.10	Identificação da bancada - 2 g.d.l.	71
5.11	Função de transferência - 2 g.d.l.	72
5.12	Função de coerência - 2 g.d.l.	73
5.13	Fator de amortecimento - 1. <sup>o</sup> modo (2 g.d.l.)	75
5.14	Fator de amortecimento - 2. <sup>o</sup> modo (2 g.d.l.)	76
5.15	Bancada para aquisição de sinal - 2 g.d.l. Sistema livre	77
5.16	Esquema para aquisição de sinal - 2 g.d.l. Excitado harmonicamente	79
5.17	Mesa vibratória com três graus de liberdade	81
5.18	Modelo do sistema com três graus de liberdade	82
5.19	Eixos de referência - 3 g.d.l.	82
5.20	Espectros de frequência - 3 g.d.l. Impacto no ponto I	88
5.21	Espectros de frequência - 3 g.d.l. Impacto no ponto E	89
5.22	Espectros de frequência - 3 g.d.l. Impacto no ponto A	90

5.23	Direções das vibrações - 3 g.d.l.	91
5.24	Esquema para aquisição de sinal - 3 g.d.l. Sistema livre	93

## LISTA DE TABELAS

TABELA	DESCRIÇÃO	PÁGINA
4.1	Valores teóricos e identificados ( r = 5 ) Sistema de 1 g.d.l. excitado	35
4.2	Valores teóricos e identificados ( r = 10 ) Sistema de 1.g.d.l. excitado	36
4.3	Valores teóricos e identificados ( r = 10 ) - 10% de ruído aleatório -Sistema de 1 g.d.l. excitado	37
4.4	Valores teóricos e identificados dos parâmetros modais ( r = 20 ) - Sistema de 2 g.d.l. livre	47
4.5	Valores teóricos e identificados dos parâmetros modais ( r = 20 ) - 10% de ruído aleatório Sistema de 2 g.d.l. livre	48
4.6	Valores teóricos e identificados dos parâmetros modais ( r = 20 ) - 10% de ruído aleatório Sistema de 2 g.d.l. excitado	50
4.7	Valores teóricos e identificados dos parâmetros modais ( r = 20 ) - Sêlo dinâmico	53
4.8	Valores teóricos e identificados dos parâmetros modais ( r = 20 ) - 10% de ruído aleatório Sistema de 3 g.d.l. livre	57

5.1	Valores experimentais e identificados dos parâmetros ( $r = 10$ ) - Mesa vibratória com 1 g.d.l. livre	68
5.2	Valores experimentais e identificados dos parâmetros modais ( $r = 20$ ) - Mesa vibratória com 2 g.d.l. livre	78
5.3	Valores experimentais e identificados dos parâmetros modais ( $r = 20$ ) - Mesa vibratória com 2 g.d.l. exc.	80
5.4	Valores teóricos e identificados dos parâmetros modais ( $r = 20$ ) - Mesa vibratória com 3 g.d.l. livre	95

## LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
[C]	Matriz de amortecimento (N.s/m)
Cc	Coefficiente de amortecimento crítico- 1 g.d.l. (N.s/m)
[H]	Matriz que contém os parâmetros de sistemas com N graus de liberdade
[I]	Matriz identidade
[I <sub>n</sub> ]	Matriz de Inércia
I <sub>x</sub> , I <sub>y</sub> , I <sub>z</sub>	Momentos de inércia em relação aos eixos X, Y e Z respectivamente
[J]	Matriz que contém as forças de excitação de sistemas com N graus de liberdade
[K]	Matriz de rigidez (N/m)
Ka	Coefficiente de rigidez - Mesa vibratória de 3 g.d.l.
Kt	Coefficiente de rigidez equivalente do movimento da mesa de 3 g.d.l. em torno de y
[M]	Matriz de massa (Kg)

N	Número de graus de liberdade do sistema
[P]	Matriz operacional de integração
S1,S2,S3	Sistemas de referência - 3 g.d.l.
T	Período de amostragem (s)
[Tf]	Matriz de transformação
TO	Energia cinética total
TR	Energia cinética de rotação
Tt	Energia cinética de translação
VO	Energia potencial
$a_1, a_0, b_0$	Coefficientes que representam os parâmetros físicos - 1 g.d.l.
b	Largura (m)
$d_1, d_0$	Coefficientes que representam as condições iniciais - 1 g.d.l.
h	Espessura (m)
r	Número de termos em seno e em cosseno retidos na série de Fourier
r2	Número total de termos retidos na série de Fourier - $r2 = (2 r + 1)$

$s_1$ e $s_2$	Raizes da equação característica - 1 g.d.l.
$z$	Coordenada generalizada para a mesa vibratória com três graus de liberdade
$\{\theta\}$	Vetor que contém os parâmetros e condições iniciais - 1 g.d.l.
$\{\phi(t)\}$	Vetor linearmente independente e ortogonal em um intervalo $[0, T]$
$\{\psi\}$	Vetor que contém todos os coeficientes da série de Fourier
$\Omega$	Frequência de excitação
$\alpha, \beta$	Coordenadas generalizadas para a mesa vibratória com três graus de liberdade
$\gamma_i$	Autovalores complexos
$\xi$	Fator de amortecimento
$l$	Comprimento (m)
$\mu^*$	Diferença de fase entre a excitação e a resposta - 1 g.d.l.
$\eta_i$	Autovetores complexos
$\omega_a$	Velocidade angular do centro de massa da mesa vibratória de 3 g.d.l.



$\omega_d$	Frequência natural amortecida para sistemas de um grau de liberdade
$\omega_n$	Frequência natural não amortecida para sistemas de um grau de liberdade
$\omega_{n1}, \omega_{n2}$	Frequências naturais para a mesa vibratória com dois graus de liberdade
$\omega_{nz}, \omega_{n\alpha}, \omega_{n\beta}$	Frequências naturais para a mesa vibratória com três graus de liberdade

# 1 - INTRODUÇÃO

A ciência tem dedicado especial atenção nos últimos anos á construção de modelos matemáticos capazes de representar o comportamento dinâmico dos mais variados tipos de sistemas. Paralelamente, constata-se o grande interesse científico que tem despertado a extração de dados associados aos fenômenos em observação, que sejam capazes de levar a um maior conhecimento dos próprios fenômenos, permitindo a identificação de características que os representem convenientemente dentro dos modelos estabelecidos.

Assim ocorre na grande área da dinâmica de sistemas mecânicos. Particularmente, no caso dos sistemas mecânicos vibratórios, tem-se que descrever matematicamente seu comportamento dinâmico, partindo de modelos físicos pré-estabelecidos. Desta forma, escreve-se as chamadas equações do movimento, com base nas leis básicas que regem os fenômenos envolvidos. A análise dinâmica, feita em seguida, depende da integração de tais equações, o que pode ser feito tanto por métodos analíticos como numéricos. Assim, passa-se a conhecer a resposta do sistema a diferentes tipos de excitação, sendo possível, daquilo que se aprendeu na análise, elaborar recomendações de projeto, penetrando-se dentro da engenharia propriamente dita. Entretanto, comumente, nas equações diferenciais representativas dos sistemas dinâmicos, alguns ou vários parâmetros são desconhecidos, geralmente pela impossibilidade ou inviabilidade de obtenção de seus valores através de medidas diretas das grandezas físicas que eles

representam dentro do modelo.

É dentro do contexto acima que recorre-se a técnicas de identificação ou de estimação de parâmetros, onde procura-se determinar os valores desconhecidos, pela manipulação dos sinais de entrada (excitação) e de saída (resposta) do sistema.

O tratamento e análise de sinais é algo de recente na engenharia. Seu desenvolvimento deu-se juntamente com o dos sensores e condicionadores de sinais e, mais recentemente, com os sistemas automáticos de aquisição de dados que modernamente, têm na microeletrônica e na informática sua base tecnológica.

A identificação de parâmetros foi estudada por Legendre em 1806 e Gauss em 1809 [2], sendo, dentro do conhecimento do autor, estes os primeiros trabalhos relacionados ao tema desta dissertação. Gauss, naquela época já utilizava o método dos mínimos quadrados, sendo, por esta razão reconhecido como o primeiro a utilizar esta importante ferramenta tanto utilizada em identificação.

Durante os últimos anos, vários métodos têm sido propostos para resolver problemas de identificação, embora nenhum deles possa ser considerado como sendo universalmente adequado a quaisquer situações. Deve-se também ressaltar que a identificação dos parâmetros estruturais dos sistemas mecânicos (massa, rigidez e amortecimento) é considerada tarefa bastante complexa [7], razão pela qual tem-se dado preferência aos métodos voltados para a identificação de parâmetros modais, seja no domínio do tempo, seja no domínio da frequência.

No domínio do tempo, os métodos mais conhecidos são os de Ibrahim, podendo-se citar o da referência [12], que utiliza uma técnica de respostas livres para determinar o modelo matemático de uma estrutura. Em outro trabalho, [13], a técnica desenvolvida é reformulada em termos das variáveis de estado do sistema. Finalmente, pode-se citar a referência [14], diferindo dos métodos citados anteriormente, pelo fato de que o modelo matemático ou equação diferencial da estrutura não são desenvolvidos; a resposta livre é utilizada diretamente em um processo computacional que leva à obtenção dos parâmetros.

Um dos problemas encontrados frequentemente nos métodos de identificação, é a presença de ruído na resposta do sistema, que às vezes deteriora o processo resultante. Tendo em vista solucionar este problema, vários métodos têm surgido nos últimos anos para tentar minimizar a influência do ruído na identificação, podendo-se citar Fritzen [9], que trabalha com o método da variável instrumental, concluindo que o mesmo apresenta menos sensibilidade ao ruído, quando comparado com o método dos mínimos quadrados. No trabalho de Hac e Spanos [10], foi utilizado um filtro de Kalman adaptativo para tentar eliminar os ruídos e perturbações. Os autores fazem a estimativa inicial dos parâmetros dos sistemas através do método de Ibrahim, sendo que os erros nos parâmetros são compensados durante a filtragem do sinal adicionando-se um pseudo-ruído ao sistema de equações. A intensidade do ruído é estimada baseando-se na discrepância entre a resposta medida e a estimada.

Um algoritmo importante surgido nos últimos para a

identificação de parâmetros foi o desenvolvido por Vold, Kundrat e Russel [26], onde trabalha-se com a Técnica da Polireferência no domínio do tempo, utilizando dois estágios. No primeiro, os valores dos amortecimentos e frequências naturais amortecidas são extraídos de dados no domínio do tempo através de simples ou múltiplas referências. Os coeficientes modais são então calculados em um segundo estágio. Embora o primeiro estágio utilize uma técnica no domínio do tempo, o cálculo dos coeficientes modais pode ser feito tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência.

Jezequel [15] apresentou três novos métodos para identificação modal. O primeiro utiliza uma extensão analítica da função de transferência, o segundo utiliza uma transformação integral baseada no teorema de Cauchy Weierstrauss e o último, uma ortogonalização pelo processo de Ritz-Galerkin, mostrando bons resultados mesmo quando se trabalha com valores muito altos de amortecimento.

Em anos recentes, tem-se desenvolvido vários métodos para a identificação de parâmetros de sistemas dinâmicos utilizando funções ortogonais. Os processos de identificação a partir destes tipos de funções começam com a construção de uma matriz operacional para a integração de vetores de bases ortogonais, o que permite a conversão de um conjunto de equações diferenciais em um conjunto de equações algébricas que é então resolvido para se obter os parâmetros desconhecidos. Desta forma, funções de Walsh [5], Block Pulse [16], Fourier [6] e polinomiais de Chebyshev [22], Jacobi [17], Legendre [4], Laguerre [11] e Hermite [20] têm sido utilizados para identificar parâmetros de sistemas.

O método proposto neste trabalho utiliza funções de Fourier e o autor considera que o mesmo opera no domínio do tempo, embora possua também características de métodos no domínio da frequência. Ele se baseia na expansão das funções de excitação e de resposta do sistema em coeficientes de séries de Fourier, que podem ser integradas facilmente usando propriedades de integração de funções ortogonais. É utilizado o método dos mínimos quadrados para a identificação dos parâmetros e das forças de excitação.

O método é aqui apresentado para sistemas com vários graus de liberdade, sendo feitas várias aplicações numéricas visando ilustrar sua utilização e eficácia. Finalmente, o método é aplicado a situações experimentais onde os sinais analógicos de entrada e de saída dos sistemas são processados.

A qualidade dos resultados obtidos, tanto via simulação computacional, como através de procedimentos experimentais, permite antever a grande potencialidade do método estudado.

Este trabalho está assim constituído:

-No capítulo 2, é apresentado o método das séries de Fourier para identificação de sistemas mecânicos. A formulação é desenvolvida inicialmente para sistemas com apenas um grau de liberdade, trabalhando com o sinal de saída do sistema associado tanto ao deslocamento, como à velocidade ou à aceleração. Posteriormente, o método é estendido para sistemas com vários graus de liberdade utilizando formulação de estado.

-No capítulo 3, é apresentado o fluxograma do programa computacional desenvolvido para a identificação de parâmetros

e forças de excitação de sistemas mecânicos, através do método das séries de Fourier. Descreve-se a entrada de todos os dados necessários para sua utilização e são comentadas todas as etapas da programação.

-No capítulo 4, são mostrados alguns exemplos envolvendo sistemas livres e excitados com um, dois e três graus de liberdade, a partir de sinais simulados da excitação e da resposta. São calculadas as diferenças relativas entre os valores "teóricos" e os identificados via séries de Fourier para mostrar a eficácia da metodologia desenvolvida.

-No capítulo 5, é feito um estudo de três modelos experimentais simples, com um, dois e três graus de liberdade. São desenvolvidos inicialmente os modelos matemáticos dos sistemas e as bancadas são identificadas em laboratório, através da excitação por impacto, onde os sistemas são analisados no domínio da frequência através de um analisador de sinais de dois canais. A seguir é feita a aquisição dos sinais no domínio do tempo (deslocamentos e forças de excitação) para posterior processamento em micro-computador do tipo PC-AT 286.

-No capítulo 6 são relacionados os comentários e as conclusões referentes a este trabalho.

## 2 - O MÉTODO DAS SÉRIES DE FOURIER PARA IDENTIFICAÇÃO : UM MÉTODO NO DOMÍNIO DO TEMPO

### 2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, é apresentado o método das séries de Fourier para a identificação de sistemas mecânicos. O método será desenvolvido inicialmente para sistemas com apenas um grau de liberdade, sendo posteriormente extendido para sistemas com vários graus de liberdade.

O método de identificação apresentado nesta dissertação pode ser sumarizado em três etapas fundamentais:

- 1) Expansão da excitação e da resposta em séries de Fourier.
- 2) Integração das equações do movimento e emprego de uma matriz operacional para integração das séries de Fourier.
- 3) Estimativa dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados.

### 2.2 - MATRIZ OPERACIONAL DE INTEGRAÇÃO - SÉRIES DE FOURIER

Seja  $\phi(t)$ , formada por funções linearmente independentes e ortogonais em um intervalo  $[0, T]$ :

$$\{\phi(t)\} = [\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_r(t), \phi_1^*(t), \dots, \phi_r^*(t)] \quad (2.1)$$

onde

$$\phi_n(t) = \cos(2n\pi t/T), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, r, \quad (2.2)$$



$$\phi_n^*(t) = \text{sen}(2n\pi t/T), \quad n = 1, 2, 3, \dots, r \quad (2.3)$$

e  $r$  o número de termos em seno e cosseno retidos na série de Fourier.

A função  $f(t)$  pode ser expandida como segue:

$$f(t) = a_0 \phi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \phi_n(t) + b_n \phi_n^*(t) \} \quad (2.4)$$

onde os coeficientes de Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/T \int_0^T f(t) dt \\ a_n &= 2/T \int_0^T f(t) \cos((2n\pi)t/T) dt, \quad n=1, 2, 3, \dots \\ b_n &= 2/T \int_0^T f(t) \text{sen}((2n\pi)t/T) dt, \quad n=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Se a equação (2.4) é truncada, retendo-se apenas  $r_2 = (2r+1)$  termos, tem-se:

$$f(t) = a_0 \phi_0(t) + \sum_{n=1}^r \{ a_n \phi_n(t) + b_n \phi_n^*(t) \} = \{ \Psi \}^T \{ \phi(t) \} \quad (2.6)$$

$$\text{onde } \{ \Psi \}_{1 \times r_2}^T = [ a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_r ] \quad (2.7)$$

Considera-se as seguintes integrais [22 ]:

$$\int_0^t \phi_0(\sigma) d\sigma = \int_0^t d\sigma = t \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_n(\sigma) d\sigma &= \int_0^t \cos((2n\pi)\sigma/T) d\sigma = \\ &= T/(2n\pi) \int_0^t d(\text{sen}((2n\pi)\sigma/T)) = T/(2n\pi) \text{sen}((2n\pi)t/T) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_n^*(\sigma) d\sigma &= \int_0^t \text{sen}((2n\pi)\sigma/T) d\sigma = \\ &= - T/(2n\pi) \int_0^t d(\cos((2n\pi)\sigma/T)) = T/(2n\pi) + \\ &- T/(2n\pi) \cos((2n\pi)t/T) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Das equações (2.9) e (2.10):

$$\int_0^t \phi_n(\sigma) d\sigma = T/(2n\pi) \phi_n^*(t) \quad n \geq 1 \quad (2.11)$$

$$\int_0^t \phi_n^*(\sigma) d\sigma = T/(2n\pi) \phi_0(t) - T/(2n\pi) \phi_n(t) \quad n \geq 1$$

Da equação (2.8), tem-se a série truncada:

$$\int_0^t \phi_0(\sigma) d\sigma = t \cong c_0 \phi_0(t) + \sum_{n=1}^r \{ c_n \phi_n(t) + d_n \phi_n^*(t) \} \quad (2.12)$$

sendo que os coeficientes  $c_n$  e  $d_n$  são calculados a partir das equações (2.5), conforme segue:

$$c_0 = T/2$$

$$c_n = 0, \quad n=1,2,3,\dots,r$$

$$d_n = -T/(n\pi), \quad n=1,2,3,\dots,r$$

Sumarizando os resultados acima, tem-se:

$$\int_0^t \phi_0(\sigma) d\sigma = [ T/2, 0, \dots, 0, -T/\pi, \dots, -T/(r\pi) ] \{ \phi(t) \}$$

$$\int_0^t \phi_n^*(\sigma) d\sigma = [ 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, T/(2n\pi), 0, \dots, 0 ] \{ \phi(t) \}$$

onde o termo  $T/(2n\pi)$  ocupa a  $(r+n+1)$ -ésima posição.

$$\int_0^t \phi_n^*(\sigma) d\sigma = [ T/(2n\pi), 0, \dots, 0, -T/2n\pi, 0, \dots, 0, \dots, 0 ] \{ \phi(t) \}$$

onde o termo  $-T/(2n\pi)$  ocupa a  $(n+1)$ -ésima posição.

(2.14)

Das equações (2.14) conclui-se que:

$$\boxed{\int_0^t \phi(\sigma) d\sigma \cong [P] \{ \phi(t) \}} \quad (2.15)$$

onde  $[P]_{r2 \times r2}$  é a matriz operacional de integração.

A matriz  $[P]$  é mostrada a seguir:

$$[P]_{r2 \times r2} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} T/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -T/\pi & -T/2\pi & \dots & -T/(r-1)\pi & -T/r\pi \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & T/2\pi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & T/2(r-1)\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & T/2r\pi \\ \hline T/2\pi & -T/2\pi & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ T/4\pi & 0 & -T/4\pi & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T/2r\pi & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

(2.16)

Compactando-se:

$$[P]_{r2 \times r2} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} T/2 & [0]_r & -T/\pi \{ \tilde{e} \}_r^T \\ \hline \{ 0 \} & [0]_{r \times r} & T/2\pi [\tilde{I}]_{r \times r} \\ \hline T/2\pi \{ \tilde{e} \}_r & -T/2\pi [\tilde{I}]_{r \times r} & [0]_{r \times r} \end{array} \right]$$

(2.17)

onde

$$\{ \tilde{e} \}_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \\ 1/r \end{bmatrix}, \quad [\tilde{I}]_{r \times r} = \begin{bmatrix} 1 & & [0] \\ & 1/2 & \\ & & 1/3 \\ [0] & & \ddots \\ & & & 1/r \end{bmatrix}$$

## 2.3 - SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

Dependendo da situação a ser considerada, pode-se desejar trabalhar com o sinal de saída do sistema associado tanto ao deslocamento, como à velocidade ou à aceleração. Assim, será demonstrado a seguir que é possível escrever as equações que levam à identificação do sistema, em termos das três grandezas cinemáticas acima mencionadas.

### 2.3.1 - FORMULAÇÃO EM TERMOS DO DESLOCAMENTO

O movimento de um sistema mecânico linear e invariante no tempo, com um grau de liberdade e amortecimento viscoso é representado pela equação diferencial:

$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = f(t)$ , onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são a massa, o amortecimento e a rigidez, respectivamente. Esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 f(t) \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

(2.18)

onde  $a_1 = 2\xi \omega_n$ ;  $a_0 = \omega_n^2$ ;  $b_0 = 1/M$ .

$\omega_n = \sqrt{K/M}$  é definida como sendo a frequência natural não amortecida e

$\xi = C/(2 \sqrt{KM})$  é o chamado fator de amortecimento.

Integrando-se duas vezes a equação (3.18) e fazendo  $t_0 = 0$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
 x(t) + a_1 \int_0^t x(\tau) d\tau + a_0 \int_0^t \int_0^t x(\tau) d\tau^2 = \\
 = b_0 \int_0^t \int_0^t f(\tau) d\tau^2 + d_1 t + d_0
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

onde o vetor

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix}$$

relaciona-se com as condições iniciais do problema, sendo que  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$  indicam o deslocamento e a velocidade no instante  $t = 0$ .

As funções  $x(t)$  e  $f(t)$  são agora aproximadas pelas séries de Fourier truncadas:

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^r ( x_n \cos(2\pi n t/T) + x_n^* \text{sen}(2\pi n t/T) = \{X\}^T \{\phi(t)\}$$

(2.20)

$$f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^r ( f_n \cos(2\pi n t/T) + f_n^* \text{sen}(2\pi n t/T) = \{F\}^T \{\phi(t)\}$$

(2.21)

onde

$$\{\phi(t)\}_{r2}^T = [1, \cos(2\pi t/T), \dots, \cos(2\pi r t/T), \text{sen}(2\pi t/T), \dots, \text{sen}(2\pi r t/T)] ,$$

$$\{X\}_{r2}^T = [ x_0, x_1, \dots, x_r, x_1^*, \dots, x_r^* ] \text{ e}$$

$$\{F\}_{r2}^T = [ f_0, f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^* ] .$$

A seguir, a propriedade integral do vetor  $\{\phi(t)\}$  das séries ortogonais [6] é aplicada à equação (2.19).

$$\int_0^t \dots \int_0^t \{\phi(\tau)\} (d\tau)^n = [P]^n \{\phi(t)\}$$

n vezes

(2.22)

A equação (2.19), portanto, pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \{X\}^T \{\phi(t)\} + a_1 \{X\}^T [P] \{\phi(t)\} + a_0 \{X\}^T [P]^2 \{\phi(t)\} = \\ = b_0 \{F\}^T [P]^2 \{\phi(t)\} + d_1 \{e\}^T [P] \{\phi(t)\} + d_0 \{e\}^T \{\phi(t)\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $\{e\}_{r2}^T = [1 \ 0 \ 0 \dots 0]$  e  $t$  foi expresso em sua forma expandida em séries de Fourier como:  $t = \{e\}^T [P] \{\phi(t)\}$ .

Rearranjando a equação (2.23), tem-se:

$$\begin{aligned} \{X\} = -a_1 [P]^T \{X\} - a_0 ([P]^2)^T \{X\} + b_0 ([P]^2)^T \{F\} + \\ + d_1 [P]^T \{e\} + d_0 \{e\} \end{aligned}$$

(2.24)

Esta equação pode ser utilizada para resolver dois problemas de identificação, a saber:

a) Identificação dos coeficientes  $a_0, a_1, b_0, d_0$  e  $d_1$ , que representam os valores dos parâmetros físicos e das condições iniciais;

b) Identificação da excitação  $\{F\}$  do sistema, caso sejam conhecidos os parâmetros físicos e as condições iniciais;

#### A - IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS FÍSICOS E DAS CONDIÇÕES INICIAIS

Para identificar os parâmetros físicos e as condições iniciais, a equação (2.24) é escrita como:

$$\{X\} = [Q] \{\theta\} \quad (2.25)$$

onde

$$[Q]_{r2 \times 5} = \begin{bmatrix} -[P]^T \{X\} & \vdots & -([P]^2)^T \{X\} & \vdots & ([P]^2)^T \{F\} & \vdots & [P]^T \{e\} & \vdots & \{e\} \end{bmatrix}$$

e

$$\{\theta\}_5^T = [ a_1 \quad a_0 \quad b_0 \quad d_1 \quad d_0 ]$$

A equação (2.25) representa um sistema de  $(2r+1)$  equações algébricas lineares com cinco incógnitas, englobando tanto os parâmetros físicos como as condições iniciais.

Para  $r \geq 2$ , uma estimativa pelo método dos mínimos quadrados [2] para o vetor  $\{\theta\}$  será:

$$\boxed{\{\theta\} = ([Q]^T [Q])^{-1} [Q]^T \{X\}} \quad (2.26)$$

## B - IDENTIFICAÇÃO DA EXCITAÇÃO DO SISTEMA

Para a identificação da excitação do sistema, a equação (2.24) pode ser reescrita como:

$$\boxed{\{F\}_{r2} = 1/b_0 \left\{ [(( [P]^2 )^T)^{-1} + a_1 ([P]^T)^{-1} + a_0 [I]] \{X\} + \right. \\ \left. -d_1 ([P]^T)^{-1} \{e\} - d_0 (( [P]^2 )^T)^{-1} \{e\} \right\}}$$

(2.27)

onde  $[I]_{r2 \times r2}$  é a matriz identidade.

### 2.3.2 - FORMULAÇÃO EM TERMOS DA VELOCIDADE

Integrando-se apenas uma vez a equação (2.18), ou seja,

fazendo aparecer a velocidade como saída do sistema, tem-se:

$$\dot{x}(t) + a_1 \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + a_0 \int_0^t \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau^2 = b_0 \int_0^t f(\tau) d\tau + - a_0 x(0) t + \dot{x}(0)$$

(2.28)

Fazendo-se as expansões:  $\dot{x}(t) = \{\dot{X}\}^T \{\phi(t)\}$  (2.29)

$$f(t) = \{F\}^T \{\phi(t)\}$$
 (2.30)

e utilizando a equação (2.22), a equação (2.28) torna-se:

$$\{\dot{X}\} + a_1 [P]^T \{\dot{X}\} + a_0 ([P]^2)^T \{\dot{X}\} = b_0 [P]^T \{F\} + - a_0 x(0) [P]^T \{e\} + \dot{x}(0) \{e\}$$

(2.31)

#### A - IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS FÍSICOS

Para identificar os parâmetros físicos, a equação (2.31) é escrita como:

$$\{\dot{X}^1\} = [Q] \{\theta\}$$
 (2.32)

onde

$$\{\dot{X}^1\} = \{\dot{X}\} - \dot{x}(0) \{e\},$$

$$[Q]_{r \times 3} = \left[ -[P]^T \{\dot{X}\} \quad \vdots \quad -([P]^2)^T \{\dot{X}\} \quad - x(0) [P]^T \{e\} \quad \vdots \quad [P]^T \{F\} \right]$$

e

$$\{\theta\}_3^T = [ a_1 \quad a_0 \quad b_0 ]$$

A equação (2.32) representa um sistema de  $(2r+1)$  equações algébricas lineares com três incógnitas, representando os



parâmetros físicos a serem determinados. Observa-se que, neste caso, necessita-se conhecer, a priori, as condições iniciais do problema.

Para  $r \geq 2$ , uma estimativa pelo método dos mínimos quadrados [2] para o vetor  $\{\theta\}$  será:

$$\{\theta\} = ([Q]^T [Q])^{-1} [Q]^T \{\dot{X}^1\} \quad (2.33)$$

## B - IDENTIFICAÇÃO DA EXCITAÇÃO DO SISTEMA

Da equação (2.31) tem-se, analogamente:

$$\{F\}_{r2} = 1/b_0 \left\{ [([P]^T)^{-1} + a_1 [I] + a_0 [P]^T] \{\dot{X}\} + \right. \\ \left. - \dot{x}(0) ([P]^T)^{-1} \{e\} + a_0 x(0) \{e\} \right\} \quad (2.34)$$

### 2.3.3 - FORMULAÇÃO EM TERMOS DA ACELERAÇÃO

Neste caso, parte-se diretamente da própria equação do movimento, onde a resposta do sistema é a aceleração. Tem-se então:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau + a_0 \int_0^t \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau^2 = b_0 f(t) + \\ -a_1 \dot{x}(0) - a_0 x(0) - a_0 \dot{x}(0) t$$

(2.35)

$$\text{Fazendo-se as expansões: } \ddot{x}(t) = \{\ddot{X}\} \{\phi(t)\} \quad (2.36)$$

$$f(t) = \{F\} \{\phi(t)\} \quad (2.37)$$

e utilizando a equação (2.22), a equação (2.35) torna-se:

$$\boxed{\begin{aligned} \{\ddot{X}\} + a_1 [P]^T \{\ddot{X}\} + a_0 ([P]^2)^T \{\ddot{X}\} &= b_0 \{F\} + \\ -a_1 \dot{x}(0) \{e\} - a_0 x(0) \{e\} - a_0 \dot{x}(0) [P]^T \{e\} \end{aligned}}$$

(2.38)

#### A - IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS FÍSICOS

Para identificar os parâmetros físicos, a equação (2.38) é escrita como:

$$\{\ddot{X}\} = [Q] \{\theta\} \quad (2.39)$$

onde

$$[Q]_{r \times 3} = \begin{bmatrix} -[P]^T \{\ddot{X}\} - \dot{x}(0) \{e\} & \vdots & -([P]^2)^T \{\ddot{X}\} - x(0) \{e\} + \\ & & -\dot{x}(0) [P]^T \{e\} & \vdots & \{F\} \end{bmatrix}$$

e

$$\{\theta\}_3^T = [ a_1 \quad a_0 \quad b_0 ]$$

A equação (2.39) representa também, como no caso anterior, um sistema de  $(2r+1)$  equações algébricas lineares com três incógnitas, representando os parâmetros físicos.

Para  $r \geq 2$ , uma estimativa pelo método dos mínimos quadrados [2] para o vetor  $\{\theta\}$  será:

$$\{\theta\} = ([Q]^T [Q])^{-1} [Q]^T \{\ddot{X}\} \quad (2.40)$$

## B - IDENTIFICAÇÃO DA EXCITAÇÃO DO SISTEMA

Da equação (2.38) tem-se, analogamente:

$$\{F\}_{r_2} = 1/b_0 \left\{ [[I] + a_1 [P]^T + a_0 ([P]^2)^T] \{\ddot{X}\} + \right. \\ \left. + [(a_1 \dot{x}(0) + a_0 x(0)) [I] + a_0 \dot{x}(0) [P]^T] \{e\} \right\} \quad (2.41)$$

## 2.4 - SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

O método apresentado inicialmente para sistemas de um grau de liberdade será agora estendido para sistemas mecânicos com vários graus de liberdade, cujo movimento pode ser representado pela equação matricial abaixo:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.42)$$

onde  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são respectivamente as matrizes de inércia, de amortecimento e de rigidez;

$\{x(t)\}^T = \{ x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \dots x_N(t) \}$  é o vetor dos deslocamentos

$\{f(t)\}^T = \{ f_1(t) \quad f_2(t) \quad f_3(t) \dots f_N(t) \}$  é o vetor das forças de excitação e

$N$  é o número de graus de liberdade do sistema.

A equação de movimento (2.42) pode ser rearranjada utilizando-se formulação de estado, como segue:

$$\begin{bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{\ddot{x}(t)\} \end{bmatrix}_{2N \times 1} + [A]_{2N \times 2N} \begin{bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{bmatrix}_{2N \times 1} = [B]_{2N \times N} \{f(t)\}_{N \times 1} \quad (2.43)$$

onde

$$[A]_{2N \times 2N} = \begin{bmatrix} [0]_{N \times N} & \vdots & [I]_{N \times N} \\ \dots & \vdots & \dots \\ [[M]^{-1}[K]]_{N \times N} & \vdots & [M]^{-1}[C]_{N \times N} \end{bmatrix} \quad e$$

$$[B]_{2N \times N} = \begin{bmatrix} [0]_{N \times N} \\ [M]^{-1} \end{bmatrix}$$

Integrando-se duas vezes a equação (2.43) tem-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \int_0^t \{x(\tau)\} d\tau \\ \{x(t)\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{x(0)\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{x(0)\} \\ \{\dot{x}(0)\} \end{bmatrix} t + \\ & + [A] \begin{bmatrix} \int_0^t \int_0^t \{x(\tau)\} d\tau^2 \\ \int_0^t \{x(\tau)\} d\tau \end{bmatrix} - [A] \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{x(0)\} \end{bmatrix} t = \\ & = [B] \left\{ \int_0^t \int_0^t \{f(\tau)\} d\tau^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Expandindo  $x_i(t)$  e  $f_i(t)$ ,  $i=1,N$  em séries de Fourier tem-se:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \langle X_i \rangle \langle \phi(t) \rangle \\ f_i(t) &= \langle F_i \rangle \langle \phi(t) \rangle, i=1,N \end{aligned} \quad (2.45)$$

Desta forma é possível escrever:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle_{N \times 1} &= [X]_{N \times r_2}^T \langle \phi(t) \rangle_{r_2 \times 1} \quad e \\ \langle f(t) \rangle_{N \times 1} &= [F]_{N \times r_2}^T \langle \phi(t) \rangle_{r_2 \times 1} \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde:

$$\begin{aligned} [X] &= \left[ \langle X_1 \rangle \quad \langle X_2 \rangle \quad \dots \quad \langle X_N \rangle \right] \quad e \\ [F] &= \left[ \langle F_1 \rangle \quad \langle F_2 \rangle \quad \dots \quad \langle F_N \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

Substituindo-se as equações (2.46) na equação (2.44),

tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c} \int_0^t [X]^T \langle \phi(\tau) \rangle d\tau \\ [X]^T \langle \phi(t) \rangle \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \langle x(0) \rangle t \\ \langle x(0) \rangle + \langle \dot{x}(0) \rangle t \end{array} \right] + \\ & + [A] \left[ \begin{array}{c} \int_0^t \int_0^t [X]^T \langle \phi(\tau) \rangle d\tau^2 \\ \int_0^t [X]^T \langle \phi(\tau) \rangle d\tau \end{array} \right] - [A] \left[ \begin{array}{c} \langle 0 \rangle \\ \langle x(0) \rangle \end{array} \right] t = \\ & = [B] \left\{ \int_0^t \int_0^t [F]^T \langle \phi(\tau) \rangle d\tau^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Utilizando-se novamente a equação (2.22) e escrevendo  $t = \langle e \rangle^T [P] \langle \phi(t) \rangle$  [21], obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [X]^T [P] \\ [X]^T \end{bmatrix}_{2N \times r2} - \begin{bmatrix} \{x(0)\} \{e\}^T [P] \\ \{x(0)\} \{e\}^T + \{\dot{x}(0)\} \{e\}^T [P] \end{bmatrix}_{2N \times r2} + \\
& + [A] \begin{bmatrix} [X]^T [P]^2 \\ [X]^T [P] \end{bmatrix}_{2N \times r2} - [A] \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{x(0)\} \end{bmatrix}_{2N \times r2} \{e\}^T [P] = \\
& = [B] [F]^T [P]_{N \times r2}^2
\end{aligned} \tag{2.49}$$

#### A - IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS

Da equação (2.49) tem-se:

$$[A] [D] - [B] [G] = [E] \tag{2.50}$$

onde

$$[D] = \begin{bmatrix} [X]^T [P]^2 \\ [X]^T [P] - \{x(0)\} \{e\}^T [P] \end{bmatrix}_{2N \times r2},$$

$$[G] = \begin{bmatrix} [F]^T [P]^2 \end{bmatrix}_{N \times r2} \quad e$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \{x(0)\} \{e\}^T - [X]^T [P] \\ \{x(0)\} \{e\}^T + \{\dot{x}(0)\} \{e\}^T [P] - [X]^T \end{bmatrix}_{2N \times r2}$$

Tem-se, portanto:

$$[J]^T [H]^T = [E]^T \quad (2.51)$$

onde

$$[H] = \begin{bmatrix} [A] & \vdots & -[B] \end{bmatrix}_{2N \times 3N} \quad (2.52)$$

e

$$[J] = \begin{bmatrix} [D] \\ [G] \end{bmatrix}_{3N \times r2} \quad (2.53)$$

Uma estimativa pelo método dos mínimos quadrados para a matriz  $[H]^T$  será:

$$\boxed{[H]^T = \left( [J] [J]^T \right)^{-1} [J] [E]^T} \quad (2.54)$$

## B - IDENTIFICAÇÃO DA EXCITAÇÃO DO SISTEMA

Para a identificação da excitação do sistema com vários graus de liberdade, basta determinar a matriz  $[J]$ , da equação (2.53). Portanto, utilizando a equação (2.51) e fazendo uma estimativa pelo método dos mínimos quadrados para a matriz  $[J]^T$ , tem-se:

$$[J]^T = ( [H] [H]^T )^{-1} [H] [E]^T$$

(2.55)



### 3 - PROGRAMA COMPUTACIONAL

O programa computacional desenvolvido para a identificação de sistemas mecânicos através das séries de Fourier, pode ser utilizado para sistemas lineares com vários graus de liberdade, excitados ou não. Tanto podem ser identificados os parâmetros como as forças de excitação. Neste último caso é necessário que sejam conhecidos os parâmetros do sistema e as condições iniciais do problema. A linguagem computacional utilizada neste programa foi o FORTRAN V.

A figura 3.1 mostra o fluxograma geral do programa computacional desenvolvido. Abaixo tem-se os esclarecimentos principais sobre os vários procedimentos envolvidos.

1 - Leitura de  $N$ ,  $T$ ,  $r$ ,  $NPT$  e  $Rep(I)$ ,  $I = 1, N$  onde

$N$  = número de graus de liberdade,

$T$  = período de amostragem,

$r$  = número de termos em seno e cosseno retidos na série  
de Fourier,

$NPT$  = número de pontos amostrados,

$Rep(I)$  = vetores de deslocamento com  $NPT$  pontos cada.

Obs. Os vetores deslocamento descritos no capítulo 4, para fins de simulação de sistemas com um, dois e três graus de liberdade são calculados da seguinte forma:

- A- Sistema de um grau de liberdade: a equação diferencial é resolvida analiticamente.
- B- Sistema de dois graus de liberdade com matrizes de rigidez e de amortecimento simétricas: gera-se os pontos dos deslocamentos  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , através de um programa computacional desenvolvido pelo Grupo de Dinâmica da U.F.U., através do qual obtém-se os valores exatos das respostas, fazendo-se uma integração analítica das equações.
- C- Sistema de dois graus de liberdade com matrizes de rigidez e de amortecimento não simétricas e sistemas de três graus de liberdade: os pontos são gerados através do método implícito de Runge-Kutta de quarta ordem.

## 2 - Subrotina Alear.for

Essa subrotina acrescenta ao sinal do deslocamento, um dado ruído aleatório, mediante as seguintes etapas:

- Calcula-se o valor RMS dos valores do sinal  $x(t)$  e determina-se  $NR = 10\% \text{ RMS}$ ;
- Gera-se vários números randômicos, sendo cada um deles associado a um dos elementos  $x(t)$ ;
- Multiplica-se NR pelos números randômicos gerados com média igual a zero (0.0) e desvio padrão igual a um (1.0).

- ## 3 - Para a determinação da força de excitação, deve-se conhecer inicialmente tanto os valores dos parâmetros como das condições iniciais e para a identificação apenas dos parâmetros do sistema livre, devem ser conhecidas somente

as condições iniciais.

4 - Leitura dos vetores das forças de excitação com NPT pontos para a identificação de parâmetros no caso dos sistemas excitados.

Obs. Na simulação, gera-se os valores das forças de excitação utilizando-se o mesmo intervalo de amostragem e o mesmo número de pontos dos vetores deslocamento.

5 - Subrotina harmon.for

Calcula os coeficientes das séries de Fourier associados aos sinais da resposta e da excitação do sistema.

6 - Subrotina Buildpt.for

Monta a matriz operacional de integração [P], desenvolvida anteriormente no capítulo 2.

7 - Subrotina Initial.for

Prepara as condições iniciais, transformando-as em vetores deslocamento  $(x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(N), 0, 0, \dots, (2r+1))$  e velocidade  $(\dot{x}_0(1), \dot{x}_0(2), \dots, \dot{x}_0(N), 0, 0, \dots, (2r+1))$ .

8 - Subrotina Buildmat.for

Constroi as matrizes auxiliares [D], [G] e [E] da equação (2.50).

9 - Subrotina Subf1.for

Calcula a força de excitação, determinando-se as matrizes [H], [E] e [D] da equação (2.51).

## 10- Subrotina Solve.for

Calcula a matriz teta  $[\theta]$ , fazendo-se a resolução através do método dos mínimos quadrados. Utiliza-se a subrotina Degelg.for, que resolve um sistema geral de equações lineares pelo método da eliminação de Gauss com pivotamento completo.

## 11- Subrotina Auto1.for

Constroi a matriz dinâmica  $[A]$  e resolve o problema de autovalores.

## 12- Subrotina Auto2.for

Calcula o modos próprios do sistema.

## FLUXOGRAMA

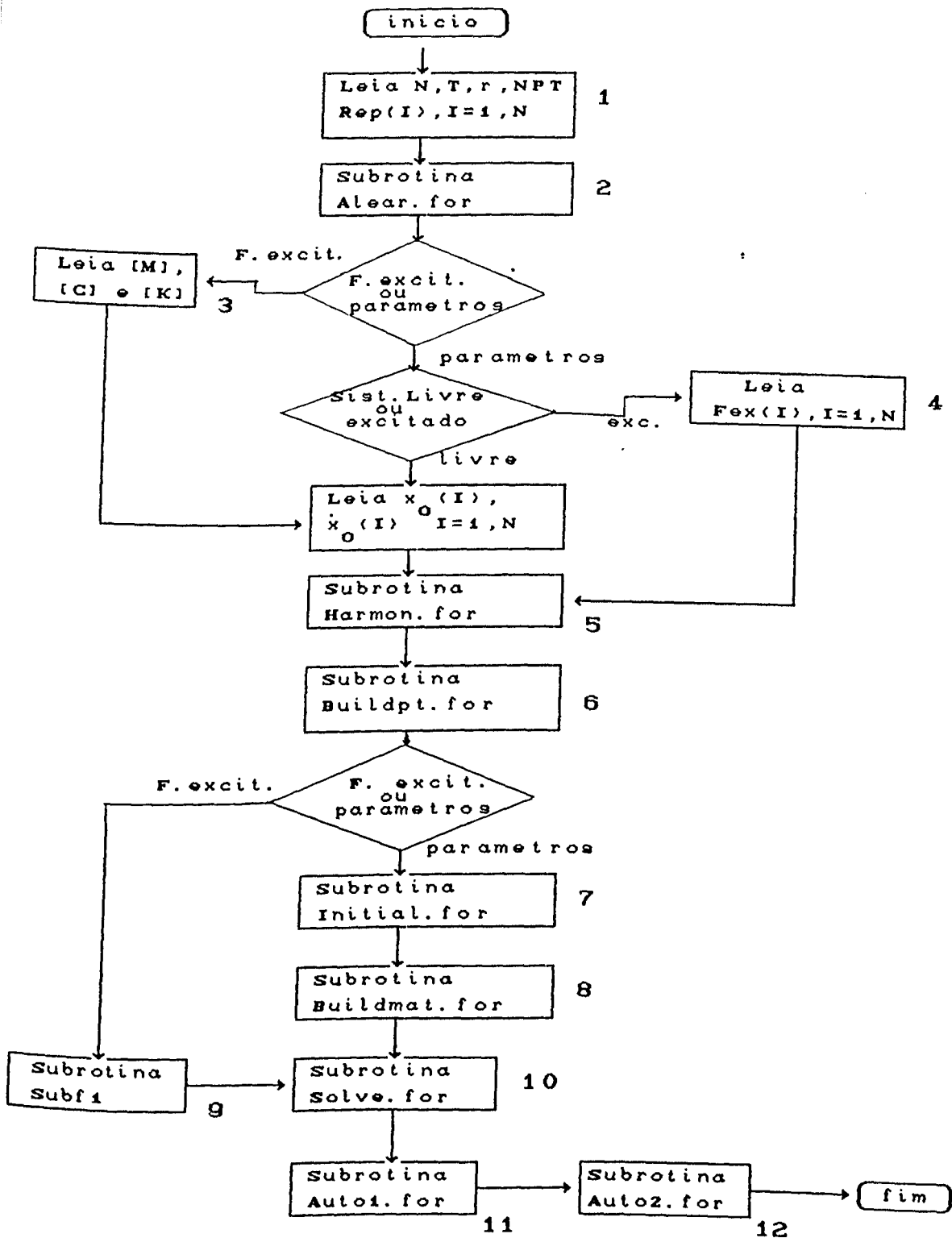


Figura 3.1 - Fluxograma do programa computacional para identificação

## 4 - IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos envolvendo sistemas livres e excitados com um, dois e três graus de liberdade, nos quais a identificação é feita a partir de sinais de excitação e de resposta obtidos através de simulação computacional.

### 4.1 - INTRODUÇÃO

O crescente avanço tecnológico verificado nas últimas décadas exige das máquinas e estruturas mecânicas, cada vez maiores capacidades de trabalho e velocidade de operação, tornando-se necessário, portanto, a nível de projeto, proceder detalhada análise dinâmica. Para isso, um modelo matemático é estabelecido e faz-se um estudo do comportamento dinâmico do sistema, envolvendo tanto o regime transitório como o regime permanente, resposta a diferentes tipos de excitação, estabilidade: nesta fase, são usados recursos de simulação computacional, sendo simples a alteração de parâmetros do modelo, com a finalidade de se observar sua influência sobre a resposta. Como se trata de projeto, pode-se incluir, numa etapa seguinte, a otimização do sistema como um todo, com vistas ao atendimento de alguma característica de desempenho requerida para o projeto final.

Desta forma, a ampla obtenção de resultados via simulação

computacional permite ao projetista escolher o elenco de soluções que melhor lhe convenha.

## 4.2 - SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

Para o sistema da figura 4.1, aplicando o princípio de d'Alembert tem-se a seguinte equação diferencial:

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = f(t) \quad (4.1)$$

onde :  $M$  = massa do sistema,

$K$  = rigidez do sistema,

$C$  = coeficiente de amortecimento viscoso e

$f(t)$  = força de excitação

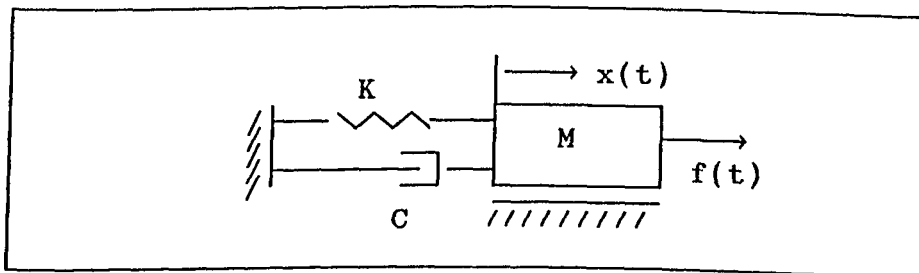


Figura 4.1 - Sistema de um grau de liberdade

A seguir é apresentado o desenvolvimento da equação diferencial (4.1), analisando-se separadamente o sistema livre e o sistema excitado harmonicamente.

### 4.2.1 - SISTEMA LIVRE

Para o sistema livre, a equação (4.1) transforma-se na seguinte equação diferencial:

$$\boxed{M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = 0} \quad (4.2)$$

A solução desta equação diferencial, ordinária, linear com coeficientes constantes, tem a seguinte forma exponencial:

$$x(t) = A e^{st} \quad (4.3)$$

onde A é uma constante.

Substituindo-se a equação (4.3) na equação (4.2) tem-se:

$$M s^2 + C s + K = 0 \quad (4.4)$$

que é sua equação característica com duas raízes,  $s_1$  e  $s_2$ :

$$s_{1,2} = 1/2 \left[ -C/M \pm \sqrt{(C/M)^2 - 4 K/M} \right] \quad (4.5)$$

Portanto, a solução da equação (4.2) pode ser escrita como:

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (4.6)$$

A equação (4.5), usando definições feitas no capítulo 2, pode ser reescrita como:

$$s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.7)$$

Analisando a equação (4.7), pode-se verificar três casos distintos:

CASO 1 :  $0 < \xi < 1$  - SISTEMA SUBAMORTECIDO

$$s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}, \text{ com } i = \sqrt{-1}$$

A equação (4.6) tem a seguinte solução:



$$x(t) = A_1 \exp[-\xi \omega_n t + i \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t] + \\ + A_2 \exp[-\xi \omega_n t - i \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t]$$

(4.8)

Pode-se também escrever a equação (4.8) da seguinte forma:

$$x(t) = A e^{-\xi \omega_n t} \text{sen} [\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \mu] \text{ ou} \\ x(t) = A e^{-\xi \omega_n t} \text{sen} [\omega_d t + \mu] \quad (4.9)$$

onde  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  é a frequência natural amortecida do sistema e,  $\mu$ , a fase. As constantes  $A$  e  $\mu$  são determinadas a partir das condições iniciais  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ , no instante inicial  $t=0$ .

#### CASO 2 : $\xi = 1$ - SISTEMA COM AMORTECIMENTO CRÍTICO

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

A equação (4.6) tem, neste caso, a seguinte solução:

$$x(t) = e^{-\omega_n t} (f_1 + f_2 t) \quad (4.10)$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são constantes.

#### CASO 3 : $\xi > 1$ - SISTEMA SUPERAMORTECIDO

Aqui, a solução da equação (4.6) é da seguinte forma:

$$x(t) = A_1 \exp[-\xi \omega_n t + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t] + \\ + A_2 \exp[-\xi \omega_n t - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t] \quad (4.11)$$

### 4.2.2 - SISTEMA EXCITADO HARMONICAMENTE

A solução geral da equação (4.1) é igual à soma da solução da equação homogênea (4.2) e de uma solução particular da equação (3.1).

Seja  $f(t) = F \sin \Omega t$  uma força de excitação harmônica, fazendo com que a equação do movimento torne-se:

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = F \sin \Omega t \quad (4.12)$$

onde  $F$  é a amplitude da força e  $\Omega$  a frequência de excitação.

Seja a seguinte solução para o regime permanente:

$$x(t) = X \sin(\Omega t - \mu^*) \quad (4.13)$$

onde  $\mu^*$  é a fase entre a excitação e a resposta.

Substituindo a equação (4.13) na equação (4.12) tem-se:

$$\sin \mu^* = C \Omega \cos \mu^* / (K - M \Omega^2) \quad (4.14)$$

e

$$\cos \mu^* = F(K - M \Omega^2) / X((K - M \Omega^2)^2 + C^2 \Omega^2) \quad (4.15)$$

Das equações (4.14) e (4.15) tem-se:

$$X = F / \sqrt{(K - M \Omega^2)^2 + C^2 \Omega^2} \quad (4.16)$$

Portanto, a solução geral de (4.12), com  $\xi < 1$  fica:

$$x(t) = A e^{-\xi \omega_n t} \sin [\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \epsilon] + (F / \sqrt{(K - M \Omega^2)^2 + C^2 \Omega^2}) \sin(\Omega t - \mu^*) \quad (4.17)$$

Chamando-se :  $a_1 = C/M$  ,  $a_0 = K/M$  ,  
 $b_0 = 1/M$  ,  $d_0 = x(0)$  e  
 $d_1 = a_1 x(0) + \dot{x}(0)$ , a equação (4.1)

resulta na seguinte forma:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 f(t) \quad (4.18)$$

Particularizando o sistema acima para o caso em que  $M = 10.0$  Kg,  $C = 40.0$  N s/m ,  $K = 1000.0$  N/m e  $f(t) = 50.0$  N tem-se a seguinte solução geral para a equação (4.1):

$$x(t) = e^{-2t} (-0.050 \cos(9.798 t) - 0.010 \sin(9.7898 t)) + 0.05 \quad (4.19)$$

Usando a equação acima, são gerados 1000 pontos da resposta temporal do sistema em um intervalo de amostragem de  $0.00 \leq t \leq 1.50$  segundos. Posteriormente, são calculados os termos de Fourier correspondentes.

São apresentados a seguir os resultados referentes ao sistema de um grau de liberdade excitado, acima descrito, para diferentes situações de interesse:

A - Identificação de parâmetros retendo cinco termos na expansão por série de Fourier - Tabela 4.1.

B - Identificação de parâmetros retendo dez termos na expansão por série de Fourier - Tabela 4.2.

C - Influência sobre os parâmetros identificados causada pela introdução de 10% de ruído aleatório sobre a resposta  $x(t)$  - Tabela 4.3.

D - Identificação da força de excitação - Figura 4.2,

onde são apresentados os resultados correspondendo a cinco e dez termos de Fourier retidos nas expansões.

Para cada situação é mostrada a diferença relativa entre os valores identificados e os valores teóricos "exatos".

TABELA 4.1 - VALORES TEÓRICOS E IDENTIFICADOS (  $r = 5$  )  
SISTEMA DE 1 G.D.L. EXCITADO

	VALORES TEÓRICOS	VALORES IDENTIFICADOS	DIFERENÇA RELATIVA ( % )
$a_1$	4.000	4.054	1.34
$a_0$	100.000	100.256	0.25
$b_0$	0.100	0.100	0.00
$d_0$ (m)	0.000	0.007	-
$d_1$ (m/s)	0.000	-0.001	-
M (Kg)	10.000	9.980	0.20
C (Ns/m)	40.000	40.455	1.13
K (N/m)	1000.000	1000.555	0.05
$\xi$	0.200	0.202	1.00
$\omega_n$ (rd/s)	10.000	10.013	0.12
$\omega_d$ (rd/s)	9.798	9.793	0.05

TABELA 4.2 - VALORES TEÓRICOS E IDENTIFICADOS

( r = 10 )

SISTEMA DE 1 G. D. L. EXCITADO

	VALORES TEÓRICOS	VALORES IDENTIFICADOS	DIFERENÇA RELATIVA ( % )
$a_1$	4.000	4.044	1.09
$a_0$	100.000	100.163	0.16
$b_0$	0.100	0.100	0.00
$d_{o(m)}$	0.000	0.004	-
$d_{(m/s)}$	0.000	-0.001	-
M (Kg)	10.000	9.990	0.10
C (Ns/m)	40.000	40.398	0.99
K (N/m)	1000.000	1000.628	0.06
$\xi$	0.200	0.202	1.00
$\omega_n$ (rd/s)	10.000	10.008	0.08
$\omega_d$ (rd/s)	9.798	9.801	0.03

As tabelas 4.1 e 4.2 permitem observar que, ao aumentar-se o número de termos retidos nas expansões por série de Fourier, diminui-se a diferença relativa dos parâmetros identificados.

TABELA 4.3 - VALORES TEÓRICOS E IDENTIFICADOS  
 (  $r = 10$  ) - 10 % DE RUIDO ALEATÓRIO  
 SISTEMA DE 1 G.D.L. EXCITADO

	VALORES TEÓRICOS	VALORES IDENTIFICADOS	DIFERENÇA RELATIVA (%)
$a_1$	4.000	4.026	0.64
$a_0$	100.000	100.583	0.58
$b_0$	0.100	0.105	5.00
$d_0$ (m)	0.000	0.050	-
$\dot{d}$ (m/s)	0.000	0.016	-
M (Kg)	10.000	9.569	4.30
C (Ns/m)	40.000	38.228	4.44
K (N/m)	1000.000	952.485	4.75
$\xi$	0.200	0.201	0.50
$\omega_n$ (rd/s)	10.000	10.029	0.29
$\omega_d$ (rd/s)	9.798	9.824	0.26

Observação:

O ruído aleatório introduzido no sinal da resposta é obtido da seguinte forma:

- 1) Calcula-se o valor RMS dos valores amostrados do sinal  $x(t)$  e determina-se  $NR = 10\% \text{ RMS}$ .
- 2) Gera-se N números randômicos, sendo cada um deles associado a um dos elementos de  $x(t)$ .
- 3) Multiplica-se NR pelos números randômicos gerados, com média igual zero (0.0) e desvio padrão igual a um (1.0).

Finalmente, o programa computacional desenvolvido é agora usado para a identificação da força de excitação atuante no sistema, supondo-se conhecidos a resposta  $x(t)$ , os parâmetros do sistema e as condições iniciais.

Para uma força teórica constante igual a 50 N, a figura (4.2) mostra a força identificada retendo cinco e dez termos na expansão da resposta em série de Fourier. Observa-se nas bordas do intervalo de amostragem, o aparecimento do fenômeno de Gibbs [6 ].

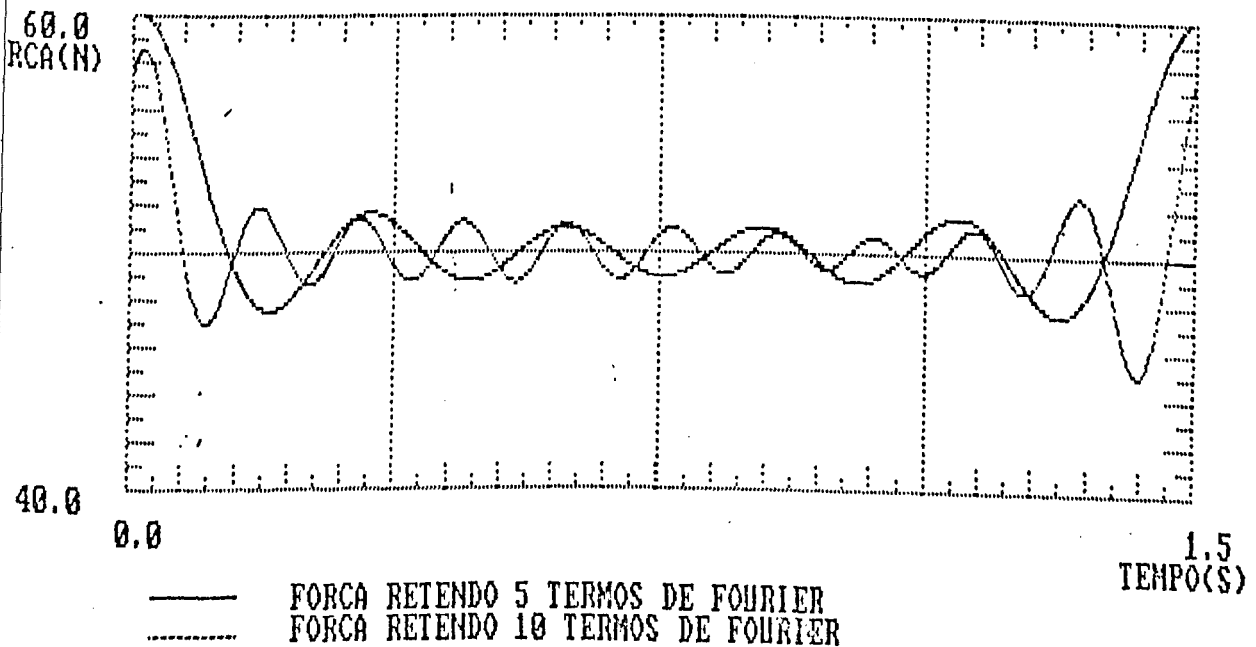


Figura 4.2 - Identificação da força de excitação

Sistema de um grau de liberdade

## 4.3 - SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

### 4.3.1 - SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Para o sistema da figura 4.3, aplicando-se o Princípio de d'Alembert obtém-se as equações do movimento para as massas  $M_1$  e  $M_2$ , que podem ser expressas pela equação matricial abaixo:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.20)$$

onde

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} C_1+C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2+C_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } [K] = \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2+K_3 \end{bmatrix}$$

que são as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez, respectivamente

e

$$\{x(t)\} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \{f(t)\} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

que são os vetores referentes à resposta e à excitação do sistema.



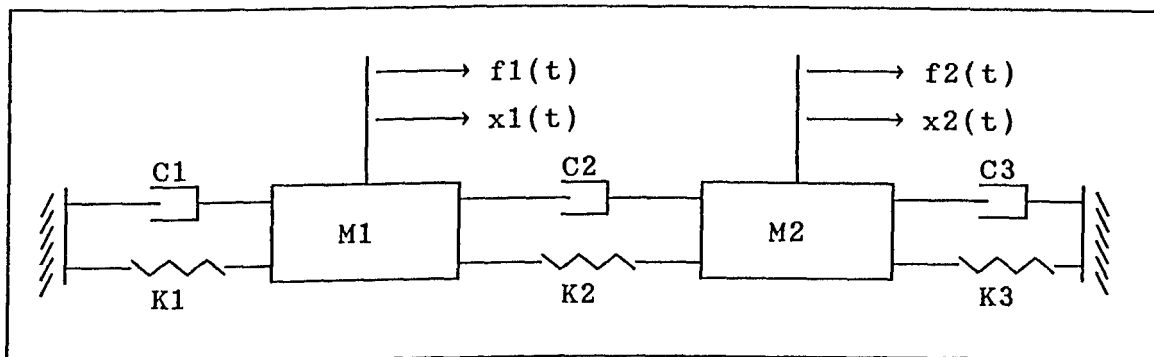


Figura 4.3 - Sistema de dois graus de liberdade

Para desacoplar as equações, transforma-se as equações diferenciais de segunda ordem em  $2n$  equações de primeira ordem.

Seja o vetor de estado:

$$\{y(t)\} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

o qual será utilizado para o desenvolvimento do sistema livre e excitado.

#### A - SISTEMA LIVRE

Para o sistema livre, em termos do vetor de estado tem-se a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{x}(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{x(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Chamando de:

$$[A1] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & M1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M2 \\ M1 & 0 & C1+C2 & -C2 \\ 0 & M2 & -C2 & C2+C3 \end{bmatrix} \quad e$$

$$[B1] = \begin{bmatrix} [-M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k1+k2 & -k2 \\ 0 & M2 & -k2 & k2+k3 \end{bmatrix}$$

tem-se, numa forma compacta:

$$[A1] \{\dot{y}(t)\} + [B1] \{y(t)\} = \{0\} \quad (4.23)$$

Premultiplicando-se (4.23) por  $[A1]^{-1}$  tem-se:

$$\{\dot{y}(t)\} + [A1]^{-1} [B1] \{y(t)\} = \{0\} \quad (4.24)$$

Calculando-se a matriz inversa de  $[A1]$  tem-se:

$$[A1]^{-1} = \begin{bmatrix} -(C1+C2)/M1 & C2/M1M2 & 1/M1 & 0 \\ C2/M1M2 & -(C2+C3)/M2^2 & 0 & 1/M2 \\ 1/M1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/M2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja  $[H1] = -[A1]^{-1} [B1]$ . Logo:

$$[H1] = \begin{bmatrix} -(C1+C2)/M1 & C2/M1 & -(K1+K2)/M1 & K2/M1 \\ C2/M2 & -(C2+C3)/M2 & K2/M2 & -(K2+K3)/M2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para a equação(4.24) adota-se a solução do tipo [25 ]:

$$\{y(t)\} = \{\eta\} e^{\gamma t} \quad (4.25)$$

onde  $\gamma$  é um número complexo e  $\{\eta\}$  um vetor modal com elementos complexos.

Sua derivada em relação ao tempo tem a seguinte forma:

$$\dot{\{y(t)\}} = \gamma \{n\} e^{\gamma t} \quad (4.26)$$

Substituindo as equações (4.25) e (4.26) na equação (4.24) :

$$\gamma \{n\} e^{\gamma t} - [H1] \{n\} e^{\gamma t} = \{0\}$$

Tem-se, portanto:

$$\boxed{(\gamma [I] - [H1]) \{n\} = \{0\}} \quad (4.27)$$

que é um problema de autovalores, onde:

$\gamma_i$  são os autovalores complexos e

$\{\eta_i\}$  são os autovetores complexos, sendo

que  $\gamma_i = a + ib$  ( $i = 1, 4$ ) e  $\{\eta_i\} = \left[ \{\eta_1\} \{\eta_2\} \{\eta_3\} \{\eta_4\} \right]$

Resolvendo a equação algébrica homogênea (4.27), encontra-se o vetor modal  $\{n\}$  :

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 (\gamma_1 (M_2 \gamma_1 + C_2 + C_3) + K_2 + K_3) \dots \dots \dots \gamma_4 (\gamma_4 (M_2 \gamma_4 + C_2 + C_3) + K_2 + K_3) \\ \gamma_1 (\gamma_1 C_2 + K_2) \dots \dots \dots \gamma_4 (\gamma_4 C_2 + K_2) \\ \gamma_1 (\gamma_1 M_2 - C_2 - C_3) + K_2 + K_3 \dots \dots \dots \gamma_4 (\gamma_4 M_2 - C_2 - C_3) + K_2 + K_3 \\ K_2 + \gamma_1 C_2 \dots \dots \dots K_2 + \gamma_4 C_2 \end{bmatrix}$$

Para os quatro autovalores distintos, observa-se as relações de ortogonalidade em relação às matrizes [A1] e [B1]:

$$[\eta]^T [A1] [\eta] = \begin{bmatrix} \diagdown A1 \diagup \end{bmatrix} \text{ e } [\eta]^T [B1] [\eta] = \begin{bmatrix} \diagdown B1 \diagup \end{bmatrix}$$

onde as matrizes [A1] e [B1] descritas acima são diagonais.

Fazendo a transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} \{y(t)\} &= [\eta] \{\delta\} ; \quad \{\dot{y}(t)\} = [\eta] \{\dot{\delta}\} \quad \text{tem-se :} \\ [A1] [\eta] \{\dot{\delta}\} + [B1] [\eta] \{\delta\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Premultiplicando a equação (4.28) por  $[\eta]^T$  tem-se:

$$[\eta]^T [A1] [\eta] \{\dot{\delta}\} + [\eta]^T [B1] [\eta] \{\delta\} = \{0\} \quad (4.29)$$

ou seja, o sistema fica desacoplado.

$$\left[ \begin{array}{c} \backslash A1 \backslash \\ \backslash B1 \backslash \end{array} \right] \{\dot{\delta}\} + \left[ \begin{array}{c} \backslash B1 \backslash \\ \backslash A1 \backslash \end{array} \right] \{\delta\} = \{0\} \quad (3.30)$$

Fazendo as transformações necessárias para as condições iniciais, pode-se escrever:

$$\{y(0)\} = [\eta] \{\delta(0)\}; \quad \{\dot{y}(0)\} = [\eta] \{\dot{\delta}(0)\}$$

de onde obtem-se:

$$\{\delta(0)\} = [\eta]^{-1} \{y(0)\} \quad \text{e} \quad \{\dot{\delta}(0)\} = [\eta]^{-1} \{\dot{y}(0)\}$$

$$\text{onde } \{\dot{y}(0)\} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(0) \\ \ddot{x}_2(0) \\ \ddot{x}_3(0) \\ \ddot{x}_4(0) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1(0) \\ \dot{\delta}_2(0) \\ \delta_1(0) \\ \delta_2(0) \end{bmatrix} = [\eta]^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Portanto, a resposta no domínio do tempo do sistema da figura (4.2) resulta:

$$\boxed{\{y(t)\} = [\eta] \{\delta(t)\}} \quad (4.31)$$

## B - SISTEMA EXCITADO

Neste caso, a equação a ser integrada é a (4.20) onde  $f(t)$  é diferente de zero.

Portanto, para o sistema excitado, em termos do vetor de estado tem-se a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{x}(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{x(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{f(t)\} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

De uma forma mais compacta, tem-se:

$$[A1] \{\dot{y}(t)\} + [B1] \{y(t)\} = \{E(t)\} \quad (4.33)$$

Seja o vetor de estado  $\{z(t)\}$  :

$\{y(t)\} = [\eta]\{z(t)\}$ , onde  $[\eta]$  é a matriz modal completa desenvolvida anteriormente para o sistema livre.

Rearranjando a equação (4.33) e premultiplicando por  $[\eta]^T$  tem-se o sistema desacoplado:

$$\begin{aligned} [\eta]^T [A1] [\eta] \{\dot{z}(t)\} + [\eta]^T [B1] [\eta] \{z(t)\} &= [\eta]^T \{E(t)\} = \\ &= \{N(t)\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} \backslash A1 \backslash \\ \backslash B1 \backslash \end{bmatrix} \{\dot{z}(t)\} + \begin{bmatrix} \backslash B1 \backslash \\ \backslash A1 \backslash \end{bmatrix} \{z(t)\} = [\eta]^T \{E(t)\} \quad (4.35)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} a_{11} \dot{z}_{t1}(t) + b_{11} z_{t1}(t) &= \eta_{11} E_1(t) \\ a_{22} \dot{z}_{t2}(t) + b_{22} z_{t2}(t) &= \eta_{21} E_2(t) \\ a_{33} \dot{z}_{t1}(t) + b_{33} z_{t1}(t) &= \eta_{31} E_3(t) \\ a_{44} \dot{z}_{t2}(t) + b_{44} z_{t2}(t) &= \eta_{41} E_4(t) \end{aligned}$$

Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{z}t_1(t) - \gamma_1 zt_1(t) &= 1/a_{11} N_1(t) , \quad zt_1(t) = 1/a_{11} \int_0^t e^{\gamma_1(t-\tau)} N_1(\tau) d\tau \\ \dot{z}t_2(t) - \gamma_2 zt_2(t) &= 1/a_{22} N_2(t) , \quad zt_2(t) = 1/a_{22} \int_0^t e^{\gamma_2(t-\tau)} N_2(\tau) d\tau \\ \dot{z}t_3(t) - \gamma_3 zt_3(t) &= 1/a_{33} N_3(t) , \quad zt_3(t) = 1/a_{33} \int_0^t e^{\gamma_3(t-\tau)} N_3(\tau) d\tau \\ \dot{z}t_4(t) - \gamma_4 zt_4(t) &= 1/a_{44} N_4(t) , \quad zt_4(t) = 1/a_{44} \int_0^t e^{\gamma_4(t-\tau)} N_4(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde  $zt_1(t)$ ,  $zt_2(t)$ ,  $zt_3(t)$  e  $zt_4(t)$  são as soluções particulares.

As condições iniciais para as coordenadas  $\{z(t)\}$  são dadas a partir de:

$$\begin{aligned} \{zt(t)\} &= [\eta]^{-1} \{y(t)\} = [\eta]^{-1} \{\dot{q}(t) \quad q(t)\}^T \\ \{zt(0)\} &= [\eta]^{-1} \{y(0)\} = [\eta]^{-1} \{\dot{q}(0) \quad q(0)\}^T \end{aligned}$$

Seja  $zt_{i_0}(t)$  a condição para o modo  $i$ . Portanto:

$$zt_i(t) = zt_{i_0}(t) e^{\gamma_i t}$$

Para  $i = 1, 4$  tem-se:

$$\begin{aligned} zt_1(t) &= zt_{1_0}(t) e^{\gamma_1 t} & zt_3(t) &= zt_{3_0}(t) e^{\gamma_3 t} \\ zt_2(t) &= zt_{2_0}(t) e^{\gamma_2 t} & zt_4(t) &= zt_{4_0}(t) e^{\gamma_4 t} \end{aligned} \quad (4.37)$$

que são as soluções da equação homogênea.

Portanto a solução completa da equação (4.33) tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = \{y(t)\} = [\eta] \{z_t(t)\} \quad (4.38)$$

### EXEMPLO 1 - SISTEMA LIVRE

Particulariza-se o sistema da figura 4.2 adotando-se os seguintes valores de parâmetros e condições iniciais:

$$M1 = 4.540 \text{ Kg} , M2 = 4.540 \text{ Kg}$$

$$C1 = 52.535 \text{ N s/m}, C2 = 35.024 \text{ N s/m}, C3 = 17.512 \text{ N s/m}$$

$$K1 = 1751.180 \text{ N/m}, K2 = 875.590 \text{ N/m}, K3 = 1751.180 \text{ N/m}$$

$$x1(0) = 0.025 \text{ m}, x2(0) = -0.075 \text{ m}$$

$$\dot{x}1(0) = 2.000 \text{ m/s}, \dot{x}2(0) = -2.000 \text{ m/s}$$

$$f1(t) = 0.000, f2(t) = 0.000$$

$$0.00 \leq t \leq 0.70 \text{ s (intervalo de amostragem)}$$

O procedimento a seguir é análogo ao descrito para o sistema com um grau de liberdade. Gera-se 1000 pontos das respostas  $x1(t)$  e  $x2(t)$  e calcula-se os termos de Fourier, truncando as séries em vinte termos, visto que a partir deste valor, os parâmetros identificados permaneciam inalterados.

São apresentados inicialmente os resultados referentes ao sistema de dois graus de liberdade livre, acima descrito, para duas situações:

a - Identificação dos parâmetros quando são retidos vinte termos nas expansões por séries de Fourier. Os resultados estão na tabela 4.4.

b - Identificação dos parâmetros quando são retidos vinte termos nas expansões e verificado a influência

causada pela introdução de 10% de ruído aleatório nas respostas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ . Os resultados estão na tabela 4.5.

Para cada situação é calculada a diferença relativa entre os valores identificados e os valores teóricos "exatos".

TABELA 4.4 - VALORES TEÓRICOS E IDENTIFICADOS DOS PARÂMETROS MODAIS (  $r = 20$  )  
SISTEMA DE 2 G.D.L. LIVRE

MODO	PARÂMETROS	VALORES TEÓRICOS	VALORES IDENTIFICADOS	DIFERENÇA RELATIVA (%)
1	$\omega_n$ (rd/s)	19.928	20.001	0.36
	$\omega_d$ (rd/s)	19.576	19.664	0.44
	$\xi$	0.187	0.183	2.13
	auto valores	$-3.725 \pm i19.576$	$-3.652 \pm i19.664$	0.36*
	modo próprio $y_2$ $y_1$	$1.157 - i0.347$	$1.152 - i0.326$	0.83*
2	$\omega_n$ (rd/s)	27.374	27.519	0.53
	$\omega_d$ (rd/s)	24.746	24.984	0.96
	$\xi$	0.428	0.419	2.10
	auto valores	$-11.704 \pm i24.716$	$-11.539 \pm i24.984$	0.53*
	modo próprio $y_2$ $y_1$	$-0.682 - i0.275$	$-0.699 - i0.265$	1.68*

\* - diferença na magnitude



Matrizes identificadas:

$$[M]^{-1} [C] = \begin{bmatrix} 18.843 & -7.408 \\ -7.639 & 11.540 \end{bmatrix},$$

$$[M]^{-1} [K] = \begin{bmatrix} 584.346 & -201.412 \\ -193.456 & 582.504 \end{bmatrix}$$

TABELA 4.5 - VALORES TEÓRICOS E IDENTIFICADOS DOS  
PARÂMETROS MODAIS (  $r = 20$  )  
-10 % DE RUÍDO ALEATÓRIO  
SISTEMA DE 2 G.D.L. LIVRE

MODO	PARÂMETROS	VALORES TEÓRICOS	VALORES IDENTIFICADOS	DIFERENÇA RELATIVA (%)
1	$\omega_n$ (rd/s)	19.928	20.000	0.36
	$\omega_d$ (rd/s)	19.576	19.664	0.44
	$\xi$	0.187	0.183	2.13
	auto valores	$-3.725 \pm i19.576$	$-3.652 \pm i19.664$	0.36*
	modo próprio $\frac{y_2}{y_1}$	$1.157 - i0.347$	$1.150 - i0.332$	1.12*
2	$\omega_n$ (rd/s)	27.374	27.520	0.53
	$\omega_d$ (rd/s)	24.746	24.984	0.96
	$\xi$	0.428	0.419	2.10
	auto valores	$-11.704 \pm i24.716$	$-11.538 \pm i24.984$	0.53*
	modo próprio $\frac{y_2}{y_1}$	$-0.682 - i0.275$	$-0.700 - i0.273$	2.08*

\* - diferença na magnitude

Matrizes identificadas:

$$[M]^{-1} [C] = \begin{bmatrix} 18.843 & -7.408 \\ -7.639 & 11.540 \end{bmatrix},$$

$$[M]^{-1} [K] = \begin{bmatrix} 584.346 & -201.412 \\ -193.456 & 582.504 \end{bmatrix}$$

Verifica-se aqui uma influência muito pequena nos parâmetros identificados, causada pela introdução de 10% de ruído aleatório nos sinais de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ .

#### EXEMPLO 2 - SISTEMA EXCITADO

Particulariza-se novamente o sistema da figura 4.2, sendo agora considerados os seguintes valores de parâmetros e condições iniciais:

$$M_1 = 5.000 \text{ Kg}, M_2 = 5.000 \text{ Kg}$$

$$C_1 = 60.000 \text{ N s/m}, C_2 = 30.000 \text{ N s/m}, C_3 = 20.000 \text{ N s/m}$$

$$K_1 = 1700.000 \text{ N/m}, K_2 = 800.000 \text{ N/m}, K_3 = 1700.000 \text{ N/m}$$

$$x_1(0) = 0.000 \text{ m}, x_2(0) = 0.000 \text{ m}$$

$$\dot{x}_1(0) = 0.000 \text{ m/s}, \dot{x}_2(0) = 0.000 \text{ m/s}$$

$$f_1(t) = 1000.000 \text{ sen } 50t \text{ [N]}, f_2(t) = 500 \text{ sen } 50t \text{ [N]}$$

$$0.00 \leq t \leq 0.70 \text{ s (intervalo de amostragem)}$$

A seguir são apresentados na tabela 4.6 os resultados dos valores identificados, retendo vinte termos na expansão por série de Fourier para o sistema excitado.

TABELA 4.6 - VALORES TEÓRICOS E IDENTIFICADOS DOS  
 PARÂMETROS MODAIS (  $r = 20$  )  
 - 10 % DE RUÍDO ALEATÓRIO  
 SISTEMA DE 2 G. D. L. EXCITADO

MODOS	PARÂMETROS	VALORES TEÓRICOS	VALORES IDENTIFICADOS	DIFERENÇA RELATIVA (%)
1	$\omega_n$ (rd/s)	18.834	18.884	0.26
	$\omega_d$ (rd/s)	18.433	18.491	0.31
	$\zeta$	0.205	0.204	0.49
	auto valores	$-3.864 \pm i18.433$	$-3.850 \pm i18.487$	0.26*
	modo próprio $\frac{y_2}{y_1}$	$0.816 - i0.328$	$0.838 - i0.361$	3.75*
2	$\omega_n$ (rd/s)	25.151	24.457	2.77
	$\omega_d$ (rd/s)	23.019	22.265	3.26
	$\zeta$	0.403	0.413	2.48
	auto valores	$-10.135 \pm i23.019$	$-10.109 \pm i22.265$	2.77*
	modo próprio $\frac{y_2}{y_1}$	$-0.745 - i0.410$	$-0.784 - i0.420$	4.58*

\* - diferença na magnitude

Matrizes identificadas:

$$[M]^{-1} [C] = \begin{bmatrix} 18.585 & -6.863 \\ -5.048 & 9.333 \end{bmatrix},$$

$$[M]^{-1} [K] = \begin{bmatrix} 478.850 & -142.715 \\ -158.631 & 492.535 \end{bmatrix}$$

Verifica-se, neste caso, que as diferenças percentuais são maiores do que aquelas que aparecem no caso sem excitação externa.

Observa-se ser possível diminuir esta diferença, pela alteração da excitação (adequando os valores da amplitude e da frequência). Entretanto, para os valores testados dentro deste trabalho, verificou-se que as diferenças acima mencionadas são sempre ligeiramente superiores àquelas correspondendo ao sistema livre.

#### EXEMPLO 4 : SELO DINÂMICO

O sistema da figura 4.4, estudado em [9 ], é representado pela seguinte equação diferencial:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.39)$$

onde

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{yy} & 0 \\ 0 & M_{zz} \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{yy} & -C_{yz} \\ C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix}$$

$$e \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{yy} & -K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\{x(t)\} = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad e \quad \{f(t)\} = \begin{bmatrix} f_y(t) \\ f_z(t) \end{bmatrix}$$

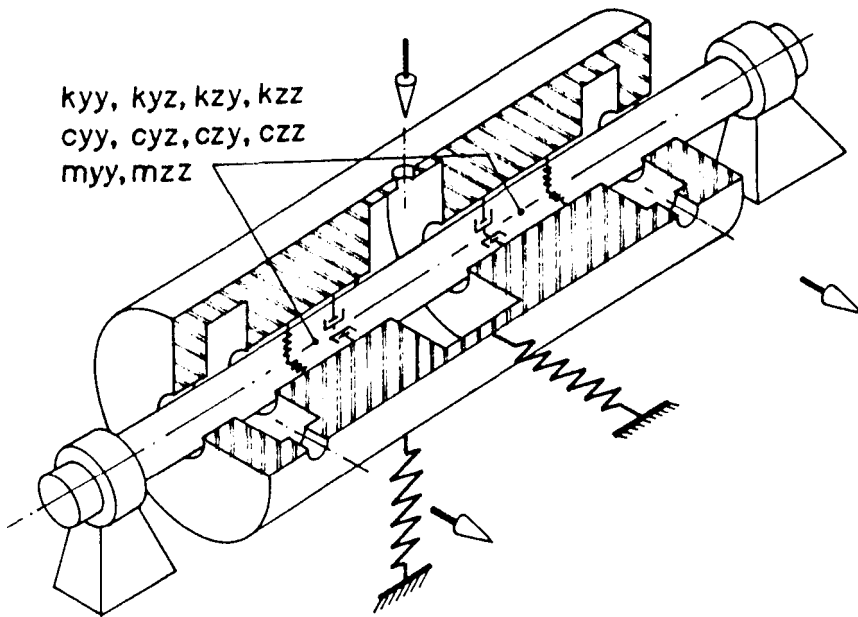


Figura 4.4 - Selo dinâmico

Particularizando para os mesmos valores de parâmetros e condições iniciais usados em [ 9 ], tem-se:

$$M_{yy} = 26.200 \text{ Kg}, M_{zz} = 26.200 \text{ Kg}$$

$$C_{yy} = 1124.000 \text{ N s/m}, C_{yz} = 720.000 \text{ N s/m}$$

$$C_{zy} = 720.000 \text{ N s/m}, C_{zz} = 1124.000 \text{ N s/m}$$

$$K_{yy} = 468430.000 \text{ N/m}, K_{yz} = 42811.000 \text{ N/m}$$

$$K_{zy} = 42811.000 \text{ N/m}, K_{zz} = 468430.000 \text{ N/m}$$

$$f_y(t) = 0.000, f_z(t) = 0.000$$

$$y(0) = 0.000, z(0) = 0.000, \dot{y}(0) = 1.000, \dot{z}(0) = 0.000$$

$$0.00 \leq t \leq 0.08 \text{ s (intervalo de amostragem)}$$

A seguir são apresentados na tabela 3.7 os resultados dos valores identificados, retendo vinte termos na expansão por série de Fourier, com respectivas diferenças em relação aos valores apresentados na referência citada.

TABELA 4.7 - VALORES TEÓRICOS E IDENTIFICADOS DOS  
 PARÂMETROS MODAIS (  $r = 20$  )  
 SÊLO DINÂMICO - 2 G.D.L.

MODO	PARÂMETROS	VALORES TEÓRICOS	VALORES IDENTIFICADOS	DIFERENÇA RELATIVA (%)
1	$\omega_n$ (rd/s)	121.689	120.418	1.04
	$\omega_d$ (rd/s)	119.012	118.010	0.84
	$\xi$	0.206	0.199	3.39
	auto valores	$-25.384 \pm i119.012$	$-23.966 \pm i118.010$	1.04*
	modo próprio $\frac{y_2}{y_1}$	$0.000 + i1.000$	$-0.061 + i1.017$	1.88*
2	$\omega_n$ (rd/s)	147.536	147.826	0.20
	$\omega_d$ (rd/s)	146.493	146.824	0.26
	$\xi$	0.119	0.116	2.52
	auto valores	$-17.516 \pm i146.493$	$-17.184 \pm i146.824$	0.20*
	modo próprio $\frac{y_2}{y_1}$	$0.000 - i1.000$	$0.039 - i1.038$	3.80*

\* - diferença na magnitude

Matrizes identificadas:

$$[M]^{-1} [C] = \begin{bmatrix} 40.342 & -26.728 \\ 30.935 & 41.957 \end{bmatrix},$$

$$[M]^{-1} [K] = \begin{bmatrix} 17895.610 & -1559.150 \\ 1394.189 & 17585.520 \end{bmatrix}$$

Com este exemplo, pode-se observar que o método apresenta também bons resultados para sistemas com matrizes de rigidez e amortecimento não simétricas, típicas dos mancais hidrodinâmicos.

### 4.3.2 - SISTEMA COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE

Para o sistema da figura 4.5, tem-se a seguinte equação

diferencial:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.5)$$

onde

$$[M] = \begin{bmatrix} M1 & 0 & 0 \\ 0 & M2 & 0 \\ 0 & 0 & M3 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} C1+C2 & -C2 & 0 \\ -C2 & C2+C3 & -C3 \\ 0 & -C3 & C3+C4 \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K1+K2 & -K2 & 0 \\ -K2 & K2+K3 & -K3 \\ 0 & -K3 & K3+K4 \end{bmatrix}$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix}, \quad \{\dot{x}(t)\} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}, \quad \{x(t)\} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$e \quad \{f(t)\} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}$$

O desenvolvimento do modelo para o sistema com três graus de liberdade é análogo ao de dois graus, detalhado anteriormente.

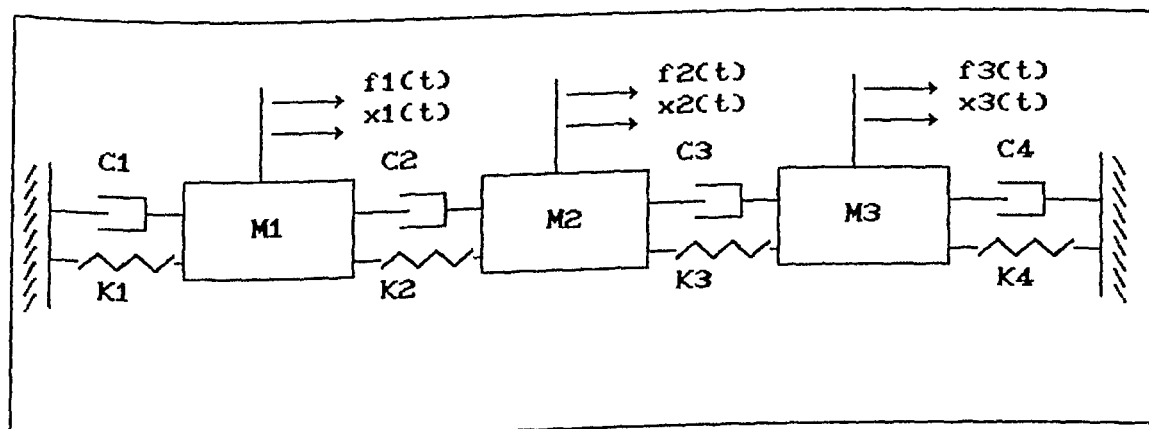


Figura 4.5 - Sistema de três graus de liberdade

### EXEMPLO

Particularizando o sistema da figura 4.5 para o caso em que os valores de parâmetros e condições iniciais são:

$$M1 = 5.000 \text{ Kg} , M2 = 5.000 \text{ Kg} , M3 = 5.000 \text{ Kg}$$

$$C1 = 20.000 \text{ N s/m}, C2 = 30.000 \text{ N s/m}, C3 = 40.000 \text{ N s/m}$$

$$C4 = 50.000 \text{ N s/m}$$

$$K1 = 600.000 \text{ N/m}, K2 = 500.000 \text{ N/m}, K3 = 400.000 \text{ N/m}$$

$$K4 = 400.000 \text{ N s/m}$$

$$x1(0) = 0.025 \text{ m}, x2(0) = -0.075 \text{ m}, x3(0) = 0.000$$

$$\dot{x}1(0) = 2.000 \text{ m/s}, \dot{x}2(0) = -2.000 \text{ m/s}, \dot{x}3(0) = 0.000$$

$$f1(t) = 0.000, f2(t) = 0.000, f3(t) = 0.000 \text{ e}$$

$$0 \leq t \leq 1.0 \text{ s (intervalo de amostragem),}$$

tem-se que o procedimento adotado é semelhante ao usado no caso de sistemas de dois graus de liberdade. Apenas, quanto à obtenção dos valores de  $x1(t)$ ,  $x2(t)$  e  $x3(t)$ , ao invés de se proceder uma integração analítica, foi utilizado um método



numérico/computacional, o de Runge-Kutta implícito de quarta ordem [19 ].

A seguir são apresentados na tabela 4.8, os resultados dos valores dos parâmetros identificados, retendo vinte termos na expansão por série de Fourier e introduzindo-se 10% de ruído aleatório na resposta do sistema.

TABELA 4.8 - VALORES TEÓRICOS E IDENTIFICADOS DOS  
 PARÂMETROS MODAIS (  $r = 20$  )  
 - 10 % DE RUÍDO ALEATÓRIO  
 SISTEMA DE 3 G.D.L. LIVRE

MODO	PARÂMETROS	VALORES TEÓRICOS	VALORES IDENTIFICADOS	DIFERENÇA RELATIVA (%)
1	$\omega_n$ (rd/s)	7.722	7.729	0.36
	$\omega_d$ (rd/s)	7.393	7.403	0.44
	$\xi$	0.288	0.287	0.35
	auto valores	-2.223 ± 17.395	-2.223 ± 17.401	0.36*
	modo próprio $y_1$	-0.464 + 10.278	-0.488 + 10.249	1.28*
	modo próprio $y_1$	-0.408 - 10.402	-0.421 - 10.413	2.96*
2	$\omega_n$ (rd/s)	15.447	15.751	1.96
	$\omega_d$ (rd/s)	10.196	9.926	2.64
	$\xi$	0.751	0.740	1.47
	auto valores	-11.608 ± 110.097	-10.911 ± 19.930	4.52*
	modo próprio $y_2$	0.612 + 10.137	0.631 + 10.109	2.10*
	modo próprio $y_2$	0.697 - 10.129	0.668 - 10.121	4.22*
3	$\omega_n$ (rd/s)	15.293	15.835	3.54
	$\omega_d$ (rd/s)	13.508	14.075	4.10
	$\xi$	0.469	0.477	1.71
	auto valores	-7.168 ± 113.508	-7.708 ± 113.775	3.22*
	modc. próprio $y_3$	-0.038 - 10.234	-0.034 - 10.225	4.10*
	modo próprio $y_3$	-0.592 + 10.296	-0.563 + 10.358	0.80

\* - diferença na magnitude

Matrizes identificadas:

$$[M]^{-1} [C] = \begin{bmatrix} 10.640 & -6.011 & -0.003 \\ -4.912 & 13.147 & -8.284 \\ -2.033 & -6.394 & 18.498 \end{bmatrix}$$

$$[M]^{-1} [K] = \begin{bmatrix} 221.549 & -102.770 & 0.475 \\ -94.964 & 176.067 & -83.043 \\ -7.408 & -73.028 & 163.688 \end{bmatrix}$$

## 5 - IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE SISTEMAS MECÂNICOS DE UM A TRÊS GRAUS DE LIBERDADE - TÉCNICAS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo faz-se o estudo de três modelos experimentais simples constituídos basicamente de mesas vibratórias de um, dois e três graus de liberdade. Inicialmente os modelos matemáticos são desenvolvidos. Em seguida, através de técnicas de análise modal experimental, os parâmetros são identificados a partir da determinação das funções de transferência, espectros de frequência e funções de coerência, após excitação por impacto, usando um analisador de sinais de dois canais. Finalmente, faz-se a aquisição dos sinais de excitação e de resposta no domínio do tempo, para futuro processamento em micro-computador do tipo PC-AT 286.

A proposta deste capítulo é mostrar a eficácia das rotinas computacionais desenvolvidas para a identificação de parâmetros de sistemas mecânicos, quando os dados são oriundos de situações concretas, tipicamente encontradas na engenharia mecânica.

### 5.1. SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE ( 1 G.D.L.)

O primeiro modelo experimental a ser estudado é o de uma mesa vibratória de um grau de liberdade com amortecimento viscoso (figura 5.1). As principais características da mesa vibratória são as seguintes:

Massa = 3.128 Kg, comprimento = 0.250m, largura = 0.250m

e espessura = 0.005 m, sendo construída de alumínio. As lâminas flexíveis que sustentam a placa vibratória tem as seguintes dimensões: comprimento = 0.073 m, largura = 0.022 m e espessura = 0.001 m e são construídas de aço inoxidável.

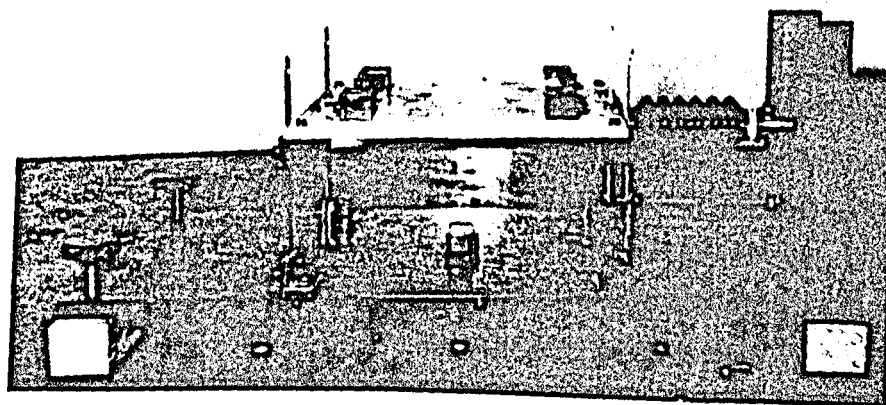


figura 5.1 - Mesa vibratória com um grau de liberdade

### 5.1.1 - MODELO MATEMÁTICO

A mesa vibratória de um grau de liberdade pode ser representada pelo modelo dado na figura 5.2, onde:

$C$  = coeficiente de amortecimento viscoso

$K_t$  = coeficiente de rigidez equivalente do sistema

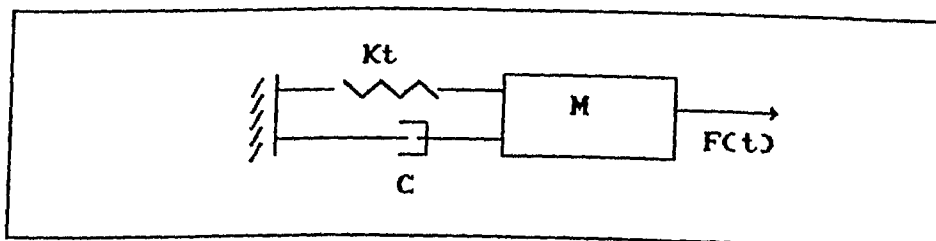


figura 5.2 - Modelo do sistema com um grau de liberdade

A equação do movimento do sistema é dada por:

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = f(t) \quad (5.1)$$

Considerando o sistema como sendo livre e subamortecido, a solução da equação (5.1) encontra-se no capítulo 4, equações (4.8) e (4.9).

## 5.1.2 - IDENTIFICAÇÃO DA MESA VIBRATÓRIA

Para o sistema de um grau de liberdade, com amortecimento viscoso, os parâmetros a serem determinados são:

- frequência natural ( $\omega_n$ );
- coeficiente de rigidez (K) e
- fator de amortecimento ( $\xi$ ).

É necessária, também, a obtenção das funções de transferência, de coerência e dos espectros de frequência.

### A - COEFICIENTE DE RIGIDEZ

O coeficiente de rigidez "dinâmico" será o adotado como sendo o coeficiente de rigidez equivalente da mesa vibratória de um grau de liberdade. Este valor é obtido a partir da determinação da frequência natural do sistema ( $\omega_n$ ) e da massa vibratória total (M).

Para fins apenas de referência, foi determinado também o valor do coeficiente de rigidez estático, conforme o Anexo I.

A figura (5.3) mostra a bancada montada para o cálculo da frequência natural. Os equipamentos utilizados para esta

montagem experimental foram os seguintes:

- Acelerômetro da mesa vibratória:  $1.88 \text{ pc/m/s}^2$
- Acelerômetro do martelo de impacto :  $1.03 \text{ pc/N}$
- Amplificadores de sinal
- Analisador de sinais de dois canais
- Plotter

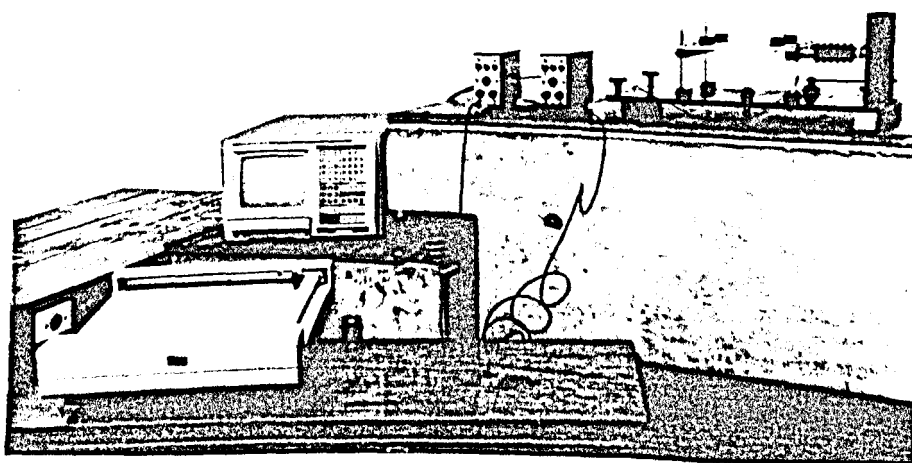
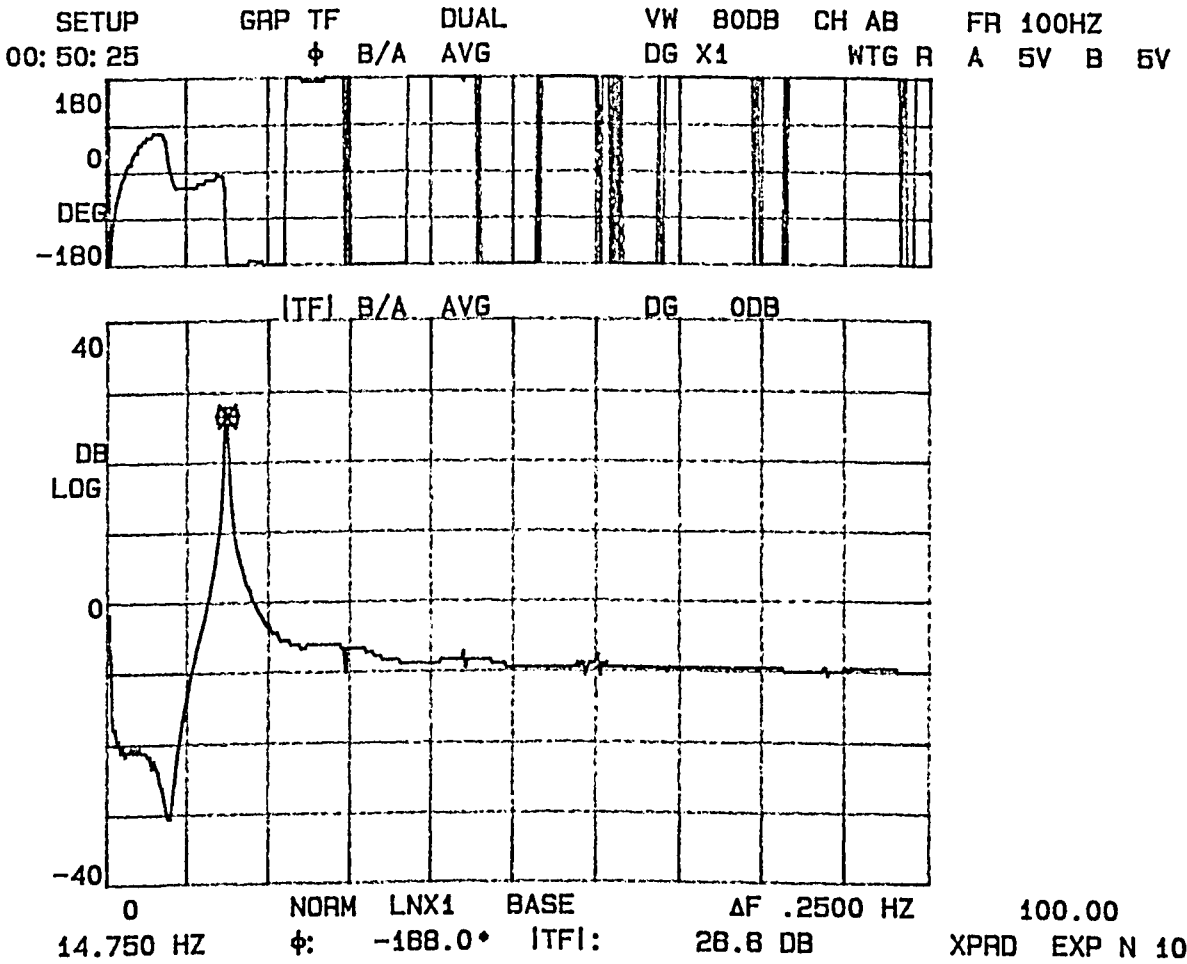


Figura 5.3 - Identificação da bancada - 1 g.d.l.

Após excitação por impacto, a resposta livre do sistema foi analisada no domínio da frequência. As figuras (5.4) e (5.5) mostram a função de transferência (módulo e fase) e a função de coerência resultantes deste ensaio. O valor da frequência natural é, portanto,  $\omega_n = 92.677 \text{ rad/s}$ , donde:

$$K = \omega_n^2 M = 26868.21 \text{ N/m.}$$

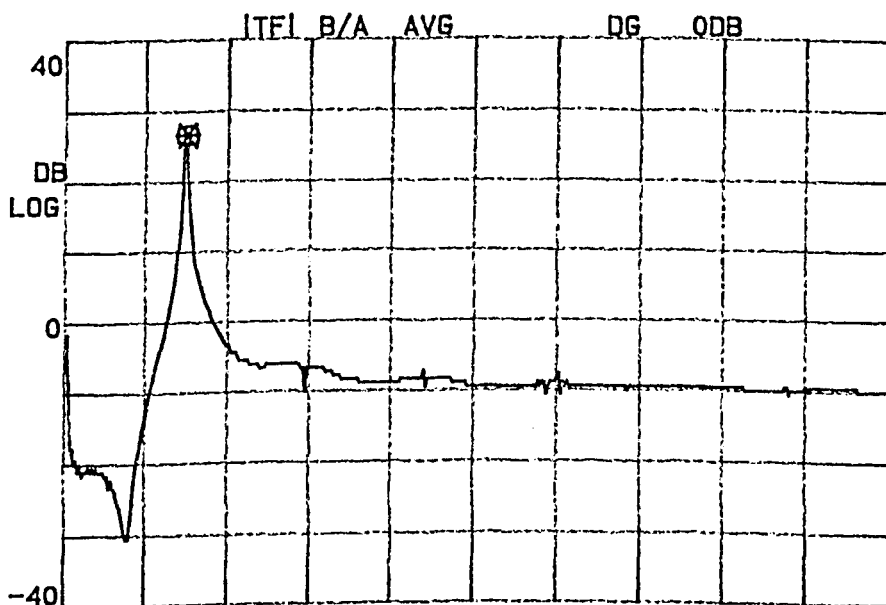
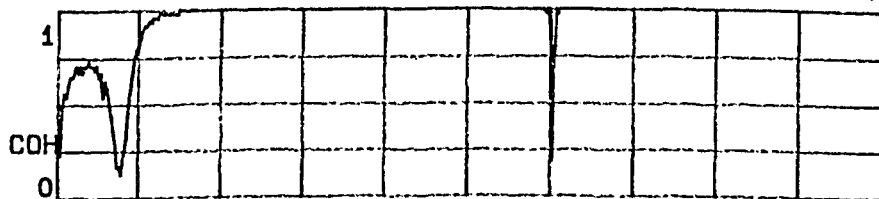


MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	---	---	---
1	14.750	-84.9	-22.3
2	---	---	---
3	---	---	---
4	---	---	---
5	---	---	---
6	---	---	---
7	---	---	---
8	---	---	---
9	---	---	---

Figura 5.4 - Função de Transferência - 1 g.d.l.



SETUP 00:58:07      GRP TF      DUAL      VW 80DB      CH AB      FR 100HZ  
                          COH B/A      AVG      DG X1      WTG R      A 5V B 5V



0      NORM      LNX1      BASE      ΔF .2500 HZ      100.00  
 14.750 HZ      COH:      .985      ITFI:      28.8 DB      XPRD EXP N 10

MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	---		
1	14.750	-84.9	-22.3
2	---		
3	---		
4	---		
5	---		
8	---		
7	---		
8	---		
8	---		

Figura 5.5 - Função de Coerência - 1 g.d.1.

B - FATOR DE AMORTECIMENTO ( $\xi$ )

Calcula-se o valor do fator de amortecimento, utilizando a técnica do decremento logarítmico [19]:

$$\xi = 1/2 \pi n_1 \ln(x_0/x_{n_1}) \quad (5.2)$$

onde

$n_1$  é o número de ciclos e

$x_0$ ,  $x_{n_1}$  são as magnitudes do primeiro e do  $n_1$ -ésimo ciclos.

A figura (5.6) mostra um registro do sinal da resposta em função do tempo, a partir da qual calcula-se  $\xi = 0.0185$ .

A frequência natural amortecida ( $\omega_d$ ) e o coeficiente de amortecimento (C) podem ser agora facilmente calculados:

$$\omega_d = 92.661 \text{ rad/s} \quad e \quad C = 10.707 \text{ N s/m}$$

## 5.1.3 - IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DAS SÉRIES DE FOURIER

O sinal representando a resposta do sistema de um grau de liberdade à excitação por impacto é enviado ao analisador espectral para, em seguida, ser levado via interface Hp-IB, a um micro-computador PC-AT 286, como mostra, esquematicamente, a figura (5.7). Neste procedimento são adquiridos 1024 pontos de  $x(t)$  (figura 5.6), que são processados numericamente utilizando-se as rotinas computacionais apresentadas no capítulo 3.

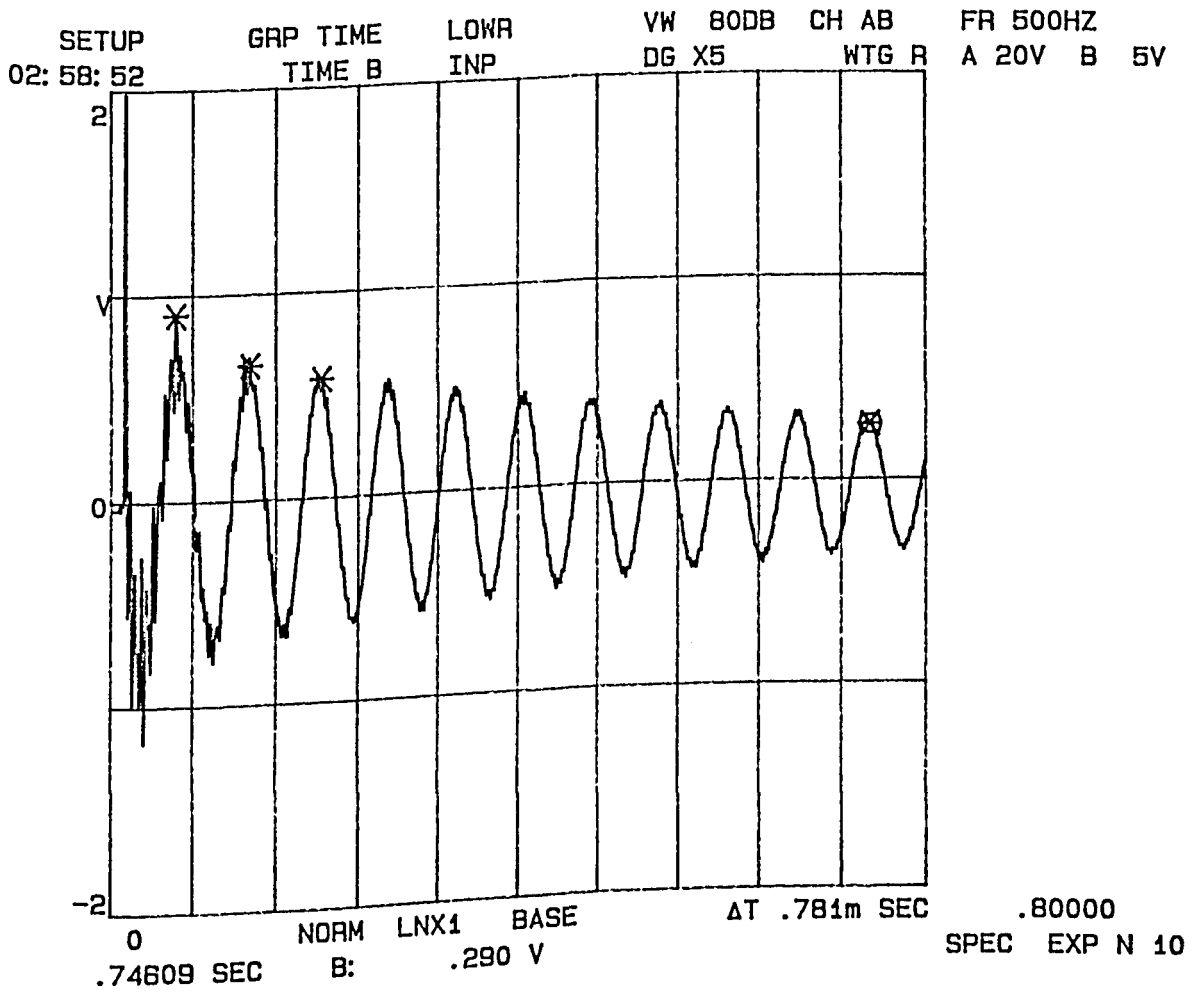


Figura 5.6. - Resposta no tempo - 1. g.d.1.

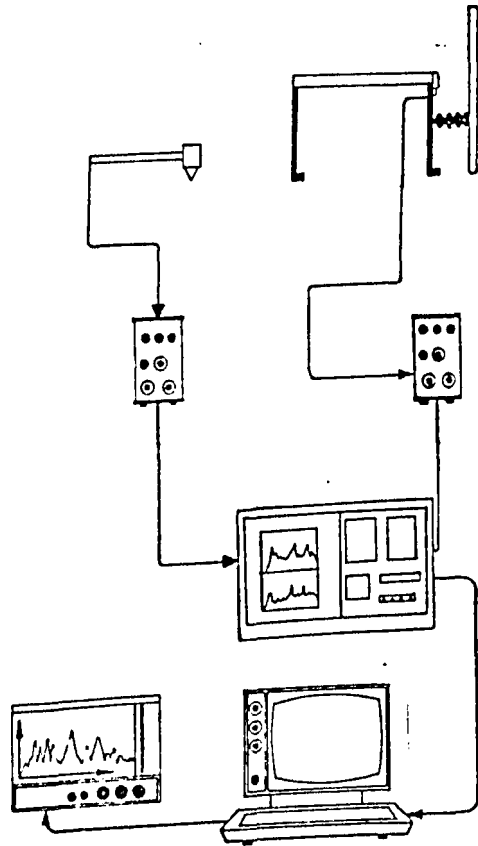


Figura 5.7 - Esquema para aquisição do sinal - 1 g.d.l.  
sistema livre

São apresentados na tabela 5.1, os resultados referentes à identificação dos parâmetros quando são retidos dez termos na expansão por série de Fourier, comparando os mesmos com aqueles obtidos através de outras técnicas experimentais.

TABELA 5.1 - VALORES EXPERIMENTAIS E IDENTIFICADOS DOS  
PARÂMETROS (  $r = 10$  )

MESA VIBRATORIA COM 1 G.D.L. LIVRE

	VALORES EXPERIMENTAIS	VALORES IDENTIFICADOS VIA SÉRIES DE FOURIER	DIFERENÇA RELATIVA ( % )
a1	3.430	3.564	3.91
a0	8589.580	8822.722	2.71
d0 (m)	0.000	0.000	-
d1 (m/s)	0.071	0.073	2.81
C (Ns/m)	10.730	11.148	3.89
K (N/m)	26868.250	27597.468	2.71
$\zeta$	0.019	0.019	0.00
$\omega_n$ (rd/s)	92.677	93.929	1.35
$\omega_d$ (rd/s)	92.645	93.895	1.35

## 5.2. - SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

O segundo modelo experimental a ser analisado é o de uma mesa vibratória de dois graus de liberdade com amortecimento viscoso, conforme ilustra a figura (5.8).

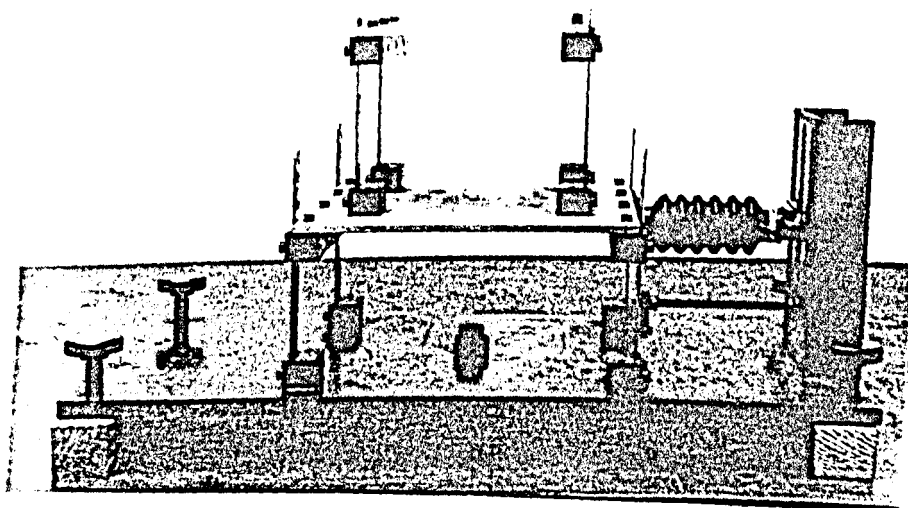


Figura 5.8 - Mesa vibratória com dois graus de liberdade

As principais características da mesa inferior como massa, comprimento, largura e espessura são as mesmas do sistema de um grau de liberdade analisado anteriormente.

Quanto à mesa superior tem-se:

Massa = 1.625 Kg, comprimento = 0.170m, largura = 0.170m e espessura = 0.005 m, sendo também construída de alumínio. As lâminas flexíveis que sustentam a placa vibratória tem as seguintes dimensões: comprimento = 0.091 m, largura = 0.022 m e espessura = 0.001 m e são construídas em aço inoxidável.

### 5.2.1 - MODELO MATEMÁTICO

O modelo da figura (5.9) representa a mesa vibratória de dois graus de liberdade com amortecimento viscoso, onde:

$C_1, C_2$  = coeficientes de amortecimento viscoso

$K_1, K_2$  = coeficientes de rigidez do sistema.

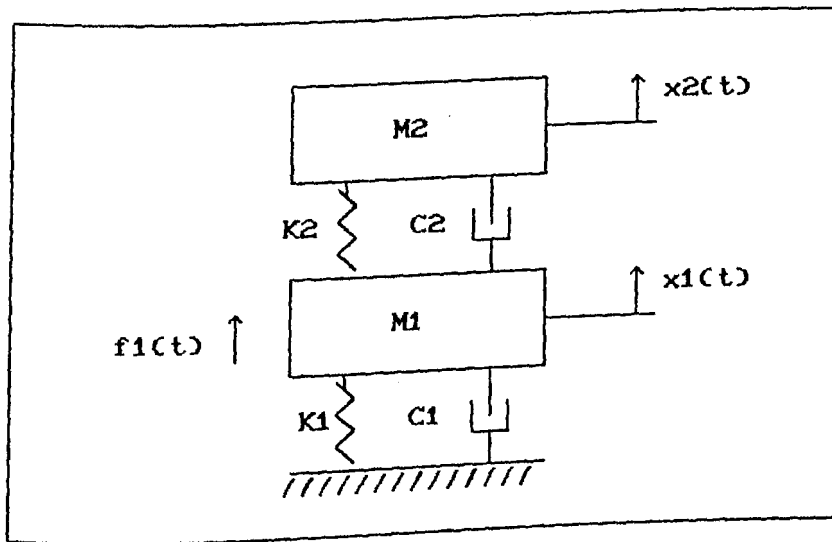


Figura 5.9 - Modelo do sistema com dois graus de liberdade

As equações diferenciais do movimento do sistema são:

$$\begin{aligned}
 M1 \ddot{x}_1(t) + (C1+C2) \dot{x}_1(t) - C2 \dot{x}_2(t) + (K1+K2) x_1(t) - K2 x_2(t) &= f_1(t) \\
 M2 \ddot{x}_2(t) + C2 \dot{x}_2(t) - C2 \dot{x}_1(t) + K2 x_2(t) - K2 x_1(t) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

A solução deste sistema de equações encontra-se no capítulo 4, conforme as equações (4.31) e (4.39).

## 5.2.2 - IDENTIFICAÇÃO DA MESA VIBRATÓRIA

Para o sistema de dois graus de liberdade com amortecimento viscoso, os parâmetros modais necessários para a análise são: frequências naturais ( $\omega_{n1}$  e  $\omega_{n2}$ ), coeficientes de rigidez ( $K1$  e  $K2$ ), fatores de amortecimento ( $\xi_1$  e  $\xi_2$ ) e modos próprios. É necessária, também, a obtenção das funções de transferência, de coerência e dos espectros de frequência.

Para a determinação dos parâmetros modais, utilizou-se basicamente os mesmos equipamentos mencionados no estudo do sistema de um grau de liberdade, de acordo com a figura (5.10).

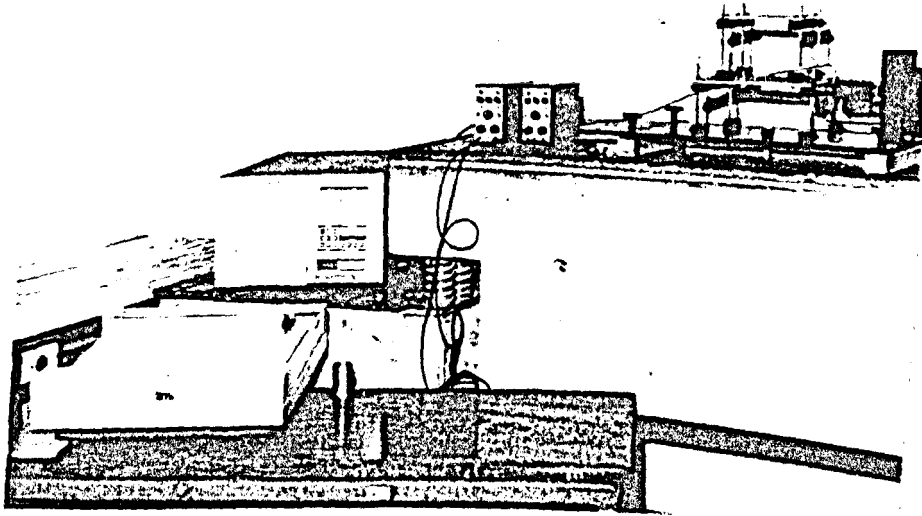


Figura 5.10 - Identificação da bancada - 2 g.d.l.

#### A - FREQUÊNCIAS NATURAIS

As figuras (5.11) e (5.12) mostram a função de transferência (módulo e fase) e a função de coerência, correspondentes à resposta do sistema acima, após excitação por impacto aplicado na mesa inferior. Este ensaio levou à determinação das frequências naturais:

$$\omega_n 1 = 64.40 \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \omega_n 2 = 133.52 \text{ rad/s}$$



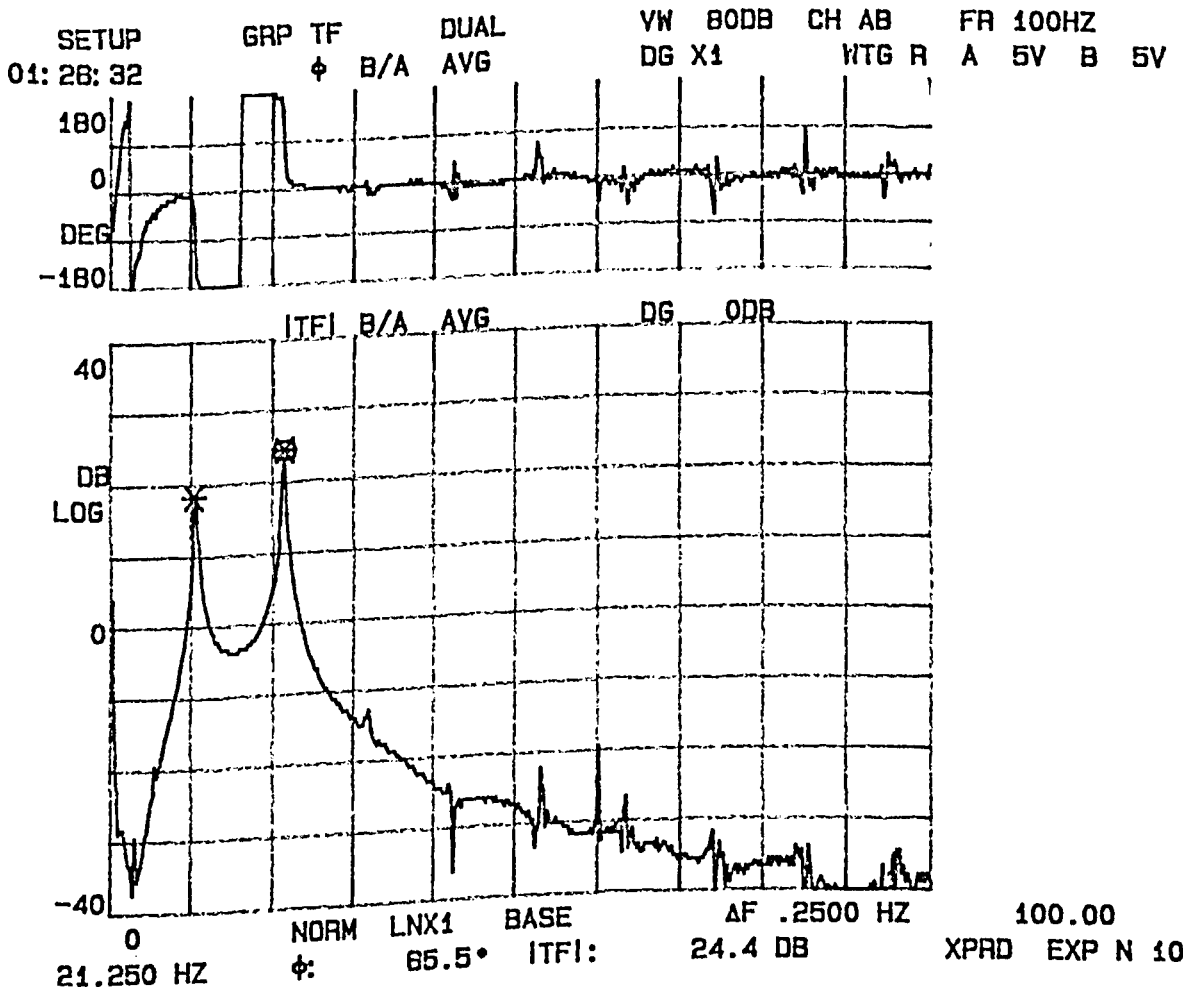
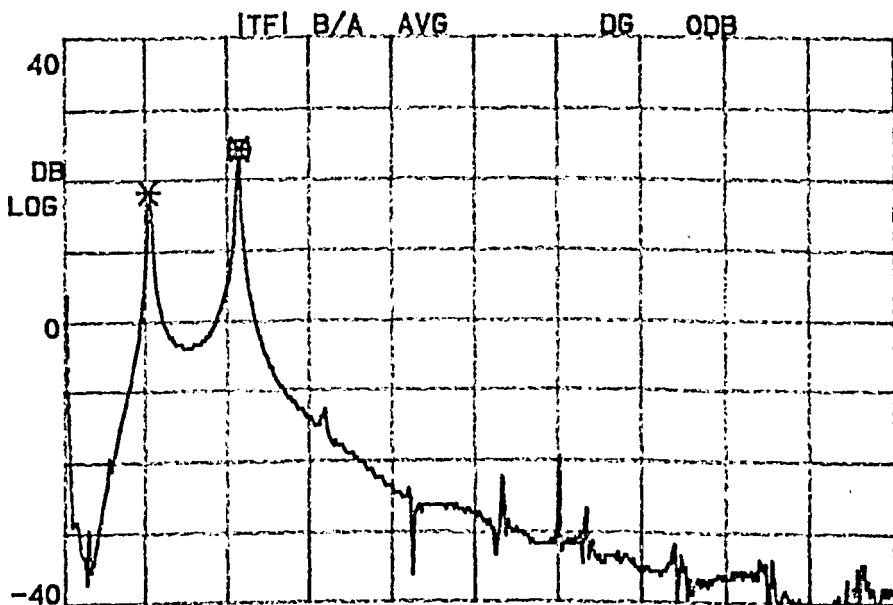
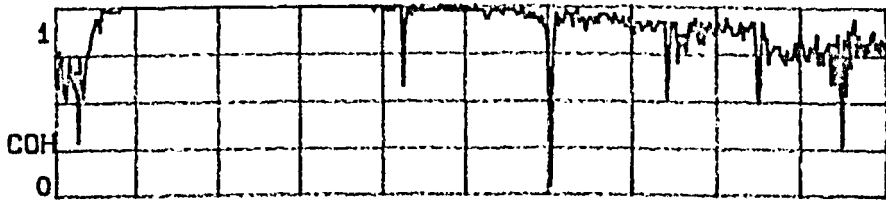


Figura 5.11 - Função de Transferência - 2 g.d.1

SETUP 01:32:58      GRP TF      DUAL      VV BODB CH AB      FR 100HZ  
                          COH B/A      AVG      DG X1      WTG R      A 5V B 5V



21.250 HZ      COH:      .997      BASE ITFI:      24.4 DB      ΔF .2500 HZ      100.00  
 XPRD EXP N 10

MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	---	---	---
1	10.250	-58.3	-38.5
2	21.250	-58.3	-34.0
3	---	---	---
4	---	---	---
5	---	---	---
6	---	---	---
7	---	---	---
8	---	---	---
8	---	---	---

Figura 5.12 - Função de Coerência - 2. g.d.1.

## B - COEFICIENTES DE RIGIDEZ

Os coeficientes de rigidez das mesas superior e inferior foram obtidos a partir da determinação das frequências naturais de cada mesa separadamente e do valor das massas vibratórias correspondentes. Tem-se, portanto:

$$K_1 = 26868.21 \text{ N/m} \quad \text{e} \quad K_2 = 14434.97 \text{ N/m}$$

## C - FATORES DE AMORTECIMENTO MODAIS

Os fatores de amortecimento modais são obtidos através da largura de banda em torno da ressonância, definida como sendo o intervalo de frequência entre lados opostos do pico num nível correspondendo a uma queda de 3 dB do valor máximo.

Através da equação [19]:

$$\Delta\omega_j / \omega_j \approx 2 \xi_j \quad (5.4)$$

onde:  $\Delta\omega_j$  = intervalo de frequência para o modo j,

$\omega_j$  = frequência natural no modo j e

$\xi_j$  = fator de amortecimento no modo j.

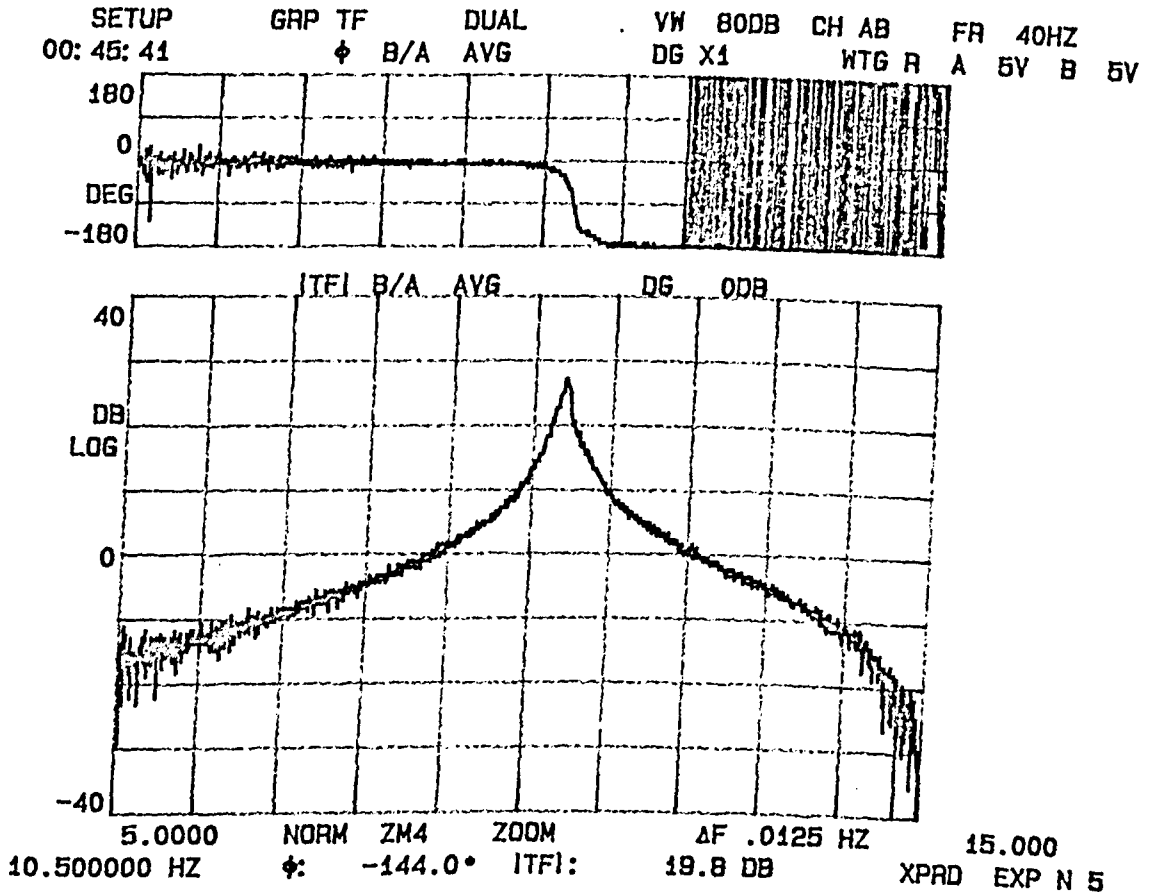
Assim, das figuras (5.13) e (5.14) tem-se:

$$\xi_1 \approx 0.0152 \quad \text{e} \quad \xi_2 \approx 0.0135$$

## D - MODOS DE VIBRAR

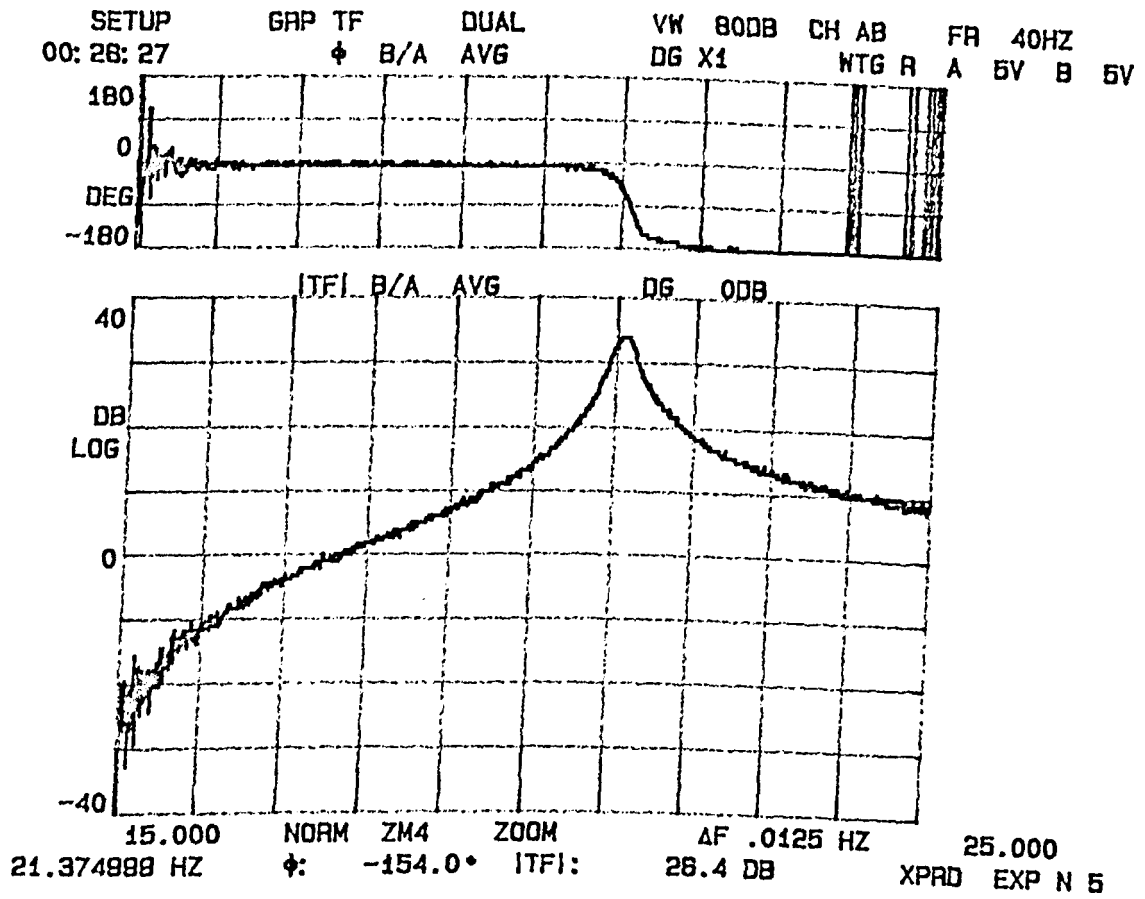
Os modos próprios do sistema de dois graus de liberdade são obtidos a partir das informações do movimento relativo das mesas superior e inferior e da fase. No Anexo II pode-se encontrar maiores detalhes envolvendo esta questão.

Os resultados aqui obtidos são os seguintes:



MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	---		
1	10.187500	-30.0	19.8
2	10.250000	-40.2	22.7
3	10.500000	-144.0	19.8
4	---		
5	---		
8	---		
7	---		
8	---		
8	---		

Figura 5.13 - Fator de Amortecimento - 1º modo (2 g.d.l.)



MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	---		
1	20.787502	-22.5	28.7
2	21.250000	-145.0	29.8
3	21.382501	-152.0	28.8
4	---		
5	---		
6	---		
7	---		
8	---		
9	---		

Figura 5.14 - Fator de Amortecimento - 2º modo (2 g.d.1)

Modo 1 -  $y_2/y_1 = 1.842$ , fase =  $0^\circ$

Modo 2 -  $y_2/y_1 = 0.961$ , fase =  $180^\circ$

onde  $y_2/y_1$  é a relação de amplitudes.

### 5.2.3 - IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DAS SÉRIES DE FOURIER

Para a mesa vibratória de dois graus de liberdade com amortecimento viscoso, o processo de identificação foi realizado tanto para o sistema livre (A), como para o sistema excitado harmonicamente (B).

#### A - SISTEMA LIVRE

Para a aquisição dos sinais dos deslocamentos  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  do sistema acima, utilizou-se os mesmos equipamentos anteriormente mencionados, como mostra a figura (5.15).

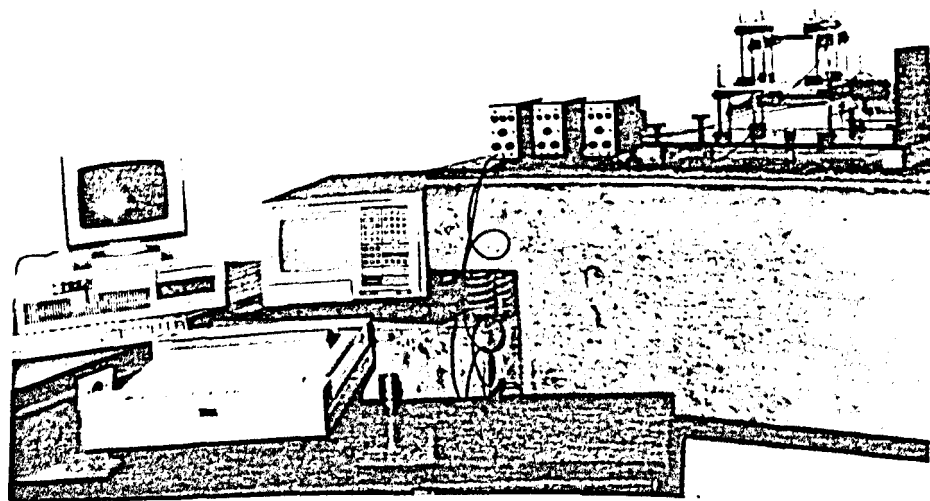


Figura 5.15 - Bancada para aquisição de sinal - 2 g.d.l.

sistema livre

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE FÍSICA

Foram adquiridos 1024 pontos para  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , conforme apresentado no Anexo III.

Na tabela 4.2 são apresentados os resultados referentes à identificação dos parâmetros modais, retendo vinte termos nas expansões por séries de Fourier.

TABELA 5.2 - VALORES EXPERIMENTAIS E IDENTIFICADOS DOS PARÂMETROS MODAIS (  $r = 20$  )  
MESA VIBRATORIA COM 2 G.D.L. LIVRE

MODO	PARÂMETROS	VALORES EXPERIMENTAIS	VALORES IDENTIFICADOS (FOURIER)	DIFERENÇA RELATIVA ( % )
1	$\omega_n$ (rd/s)	64.402	63.787	0.95
	$\omega_d$ (rd/s)	64.394	63.777	0.95
	$\zeta$	0.015	0.016	6.67
	auto valores	$-0.966 \pm i64.394$	$-1.137 \pm i63.774$	0.96*
	modo próprio $\frac{y_2}{y_1}$	1.840 $\angle 0^\circ$	1.964 $\angle 0.1^\circ$	6.73*
2	$\omega_n$ (rd/s)	133.517	135.318	1.34
	$\omega_d$ (rd/s)	133.506	135.311	1.35
	$\zeta$	0.013	0.012	7.69
	auto valores	$-1.735 \pm i133.517$	$-1.363 \pm i135.308$	1.33
	modo próprio $\frac{y_2}{y_1}$	0.961 $\angle 180^\circ$	0.979 $\angle 181.3^\circ$	1.87*

\* - diferença na magnitude

## B - SISTEMA EXCITADO HARMONICAMENTE

Neste caso, além dos sinais de resposta, foi necessário adquirir-se, também, o sinal da força de excitação senoidal  $f_1(t)$  aplicada na mesa inferior.

Além dos equipamentos já mencionados, foram utilizados os seguintes: controlador de excitação, amplificador de potência e excitador eletrodinâmico.

A força harmônica mencionada, usada neste ensaio, é  $f_1(t) = 40.0 \text{ sen } (25\pi)t \text{ [N]}$ .

A figura (5.16) mostra um esquema da montagem utilizada:

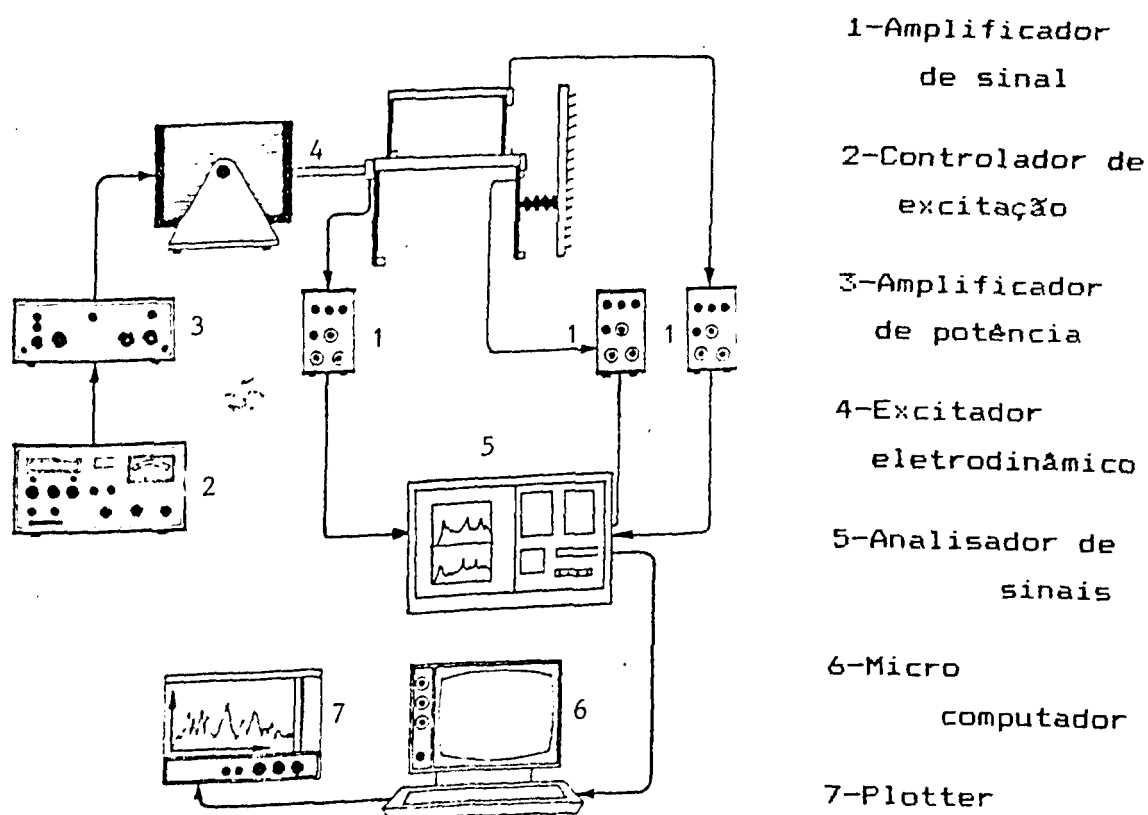


Figura 5.16 - Esquema para aquisição de sinal - 2 g.d.l. excitado harmonicamente

Na tabela 5.3 são apresentados os resultados referentes à identificação dos parâmetros modais retendo vinte termos nas expansões por séries de Fourier.



TABELA 5.3 - VALORES EXPERIMENTAIS E IDENTIFICADOS DOS  
 PARÂMETROS MODAIS (  $r = 20$  )  
 MESA VIBRATÓRIA COM 2 G.D.L. EXCITADA

MODO	PARÂMETROS	VALORES EXPERIMENTAIS	VALORES IDENTIFICADOS (FOURIER)	DIFERENÇA RELATIVA (%)
1	$\omega_n$ (rd/s)	64.402	63.604	1.23
	$\omega_d$ (rd/s)	64.394	63.567	1.28
	$\xi$	0.015	0.014	6.67
	auto valores	$-0.966 \pm 64.394$	$-0.917 \pm 63.598$	1.23
	modo próprio $\frac{y_2}{y_1}$	1.840 $\lfloor 0^\circ$	1.954 $\lfloor 0.1^\circ$	9.19*
2	$\omega_n$ (rd/s)	133.517	132.626	0.67
	$\omega_d$ (rd/s)	133.506	132.618	0.66
	$\xi$	0.013	0.012	7.69
	auto valores	$-1.735 \pm 133.517$	$-1.456 \pm 132.619$	0.67
	modo próprio $\frac{y_2}{y_1}$	0.691 $\lfloor 180^\circ$	0.767 $\lfloor 181.6^\circ$	10.99

\* - diferença na magnitude

Obs. Excitou-se o sistema com a frequência de 78,540 rad/s, que está entre as duas frequências naturais do mesmo e muito próxima de uma delas, conseguindo-se assim analisar os dois modos próprios.

### 5.3 - SISTEMA COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE

Finalmente, o sistema experimental a ser analisado é o de uma mesa vibratória com três graus de liberdade " sem amortecimento " (figura 5.17), usada frequentemente para ilustrar, em laboratório, movimentos simultâneos de translação e de rotação.

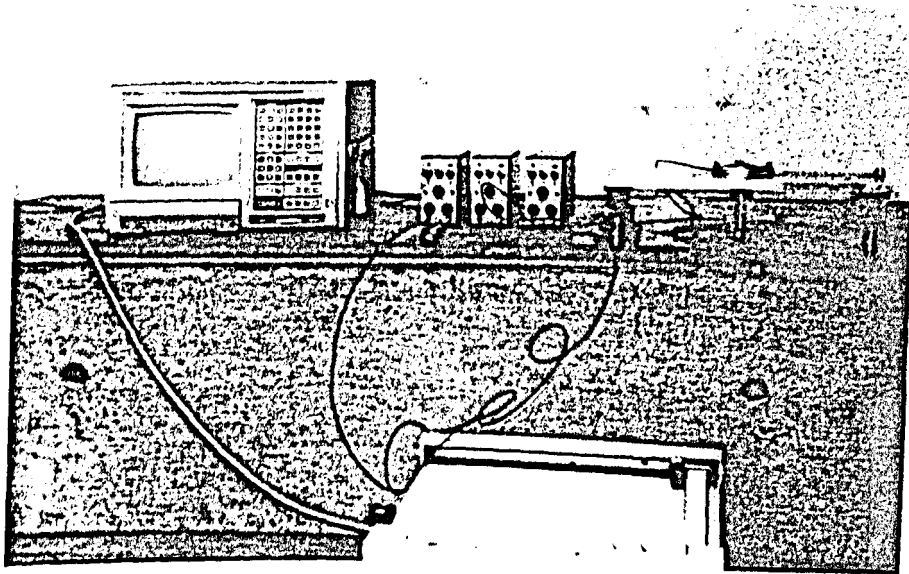


Figura 5.17 - Mesa vibratória com três graus de liberdade

As características principais do sistema são:

$M = 7.166 \text{ Kg}$ ,  $l = 0.492 \text{ m}$ ,  $b = 0.25 \text{ m}$  e  $h = 0.017 \text{ m}$

onde  $M$  é a massa,  $l$ ,  $b$  e  $h$  são, respectivamente, o comprimento, a largura e a espessura da mesa.

### 5.3.2 - MODELO MATEMÁTICO

A figura 5.18 representa o modelo com três graus de liberdade, representativo do sistema acima, onde:

$M$  = massa

$K$ ,  $K_a$  = coeficientes de rigidez do sistema

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $z$  = coordenadas generalizadas do sistema.

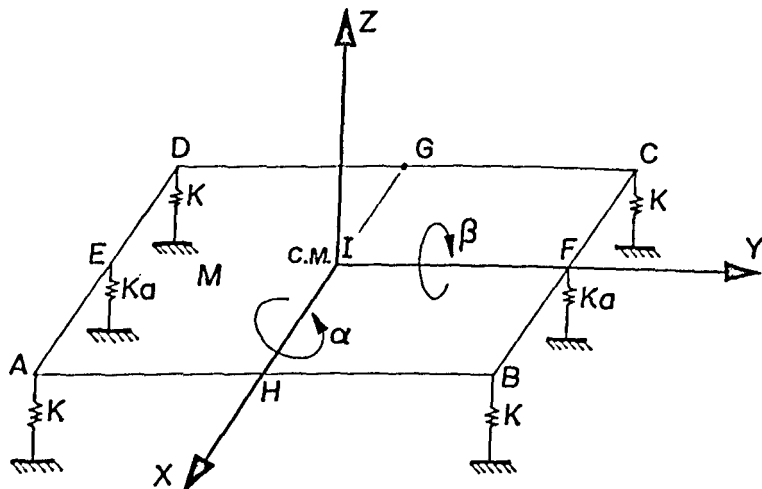


Figura 5.18 - Modelo do sistema com três graus de liberdade

Na figura (5.19) pode-se observar o referencial inercial [X Y Z], o referencial fixo ao corpo [x<sub>3</sub> y<sub>3</sub> z<sub>3</sub>] e os demais referenciais intermediários.

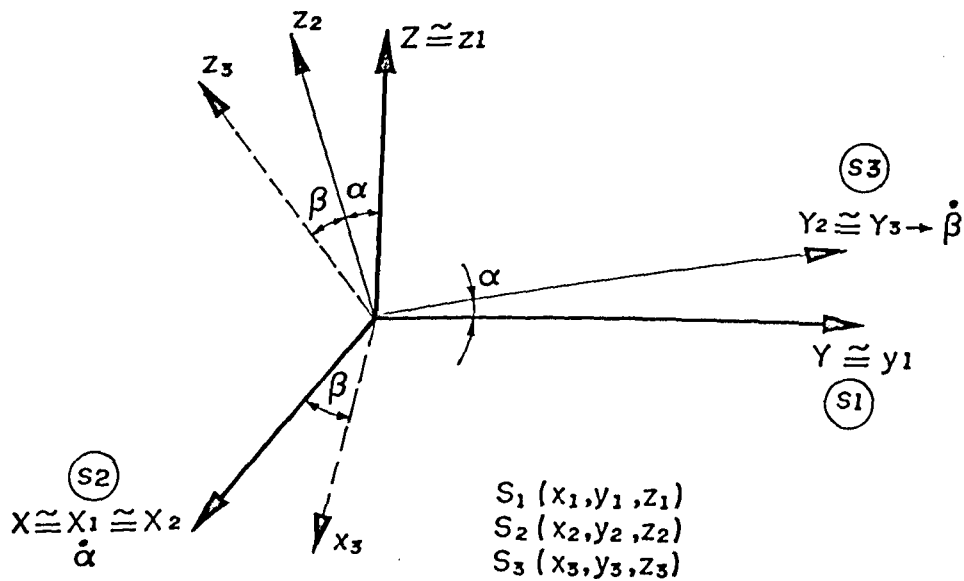


Figura 5.19 - Eixos de referência - 3 g.d.l.

Será apresentada a seguir a sequência de procedimentos adotados com o objetivo de se obter as equações diferenciais representativas da dinâmica do sistema em estudo.

#### A - MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO

Para passar do referencial S1 ao referencial S3 da figura

(5.18) faz-se:

$${}^{S1}[Tf]^{S3} = {}^{S1}[Tf]^{S2} {}^{S2}[Tf]^{S3} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \text{sen}\beta \\ \text{sen}\alpha\text{sen}\beta & \text{coss}\alpha & -\text{sen}\alpha\text{coss}\beta \\ -\text{sen}\beta\text{coss}\alpha & \text{sen}\alpha & \text{coss}\alpha\text{coss}\beta \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

onde

$${}^{S2}[Tf]^{S1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{coss}\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0 & -\text{sen}\alpha & \text{coss}\alpha \end{bmatrix} \text{ e } {}^{S3}[Tf]^{S2} = \begin{bmatrix} \text{coss}\beta & 0 & -\text{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\beta & 0 & \text{coss}\beta \end{bmatrix}$$

#### B - VELOCIDADE ANGULAR

A velocidade angular do centro de massa da mesa, escrita

no referencial S3 é dada por:

$${}^{S3}\{\omega_a\} = {}^{S3}[Tf]^{S1} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + {}^{S3}[Tf]^{S2} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{coss}\beta \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \text{sen}\beta \end{bmatrix}$$

(5.6)

C - MATRIZ DE INÉRCIA ( $I_n$ )

Como o referencial S3 tem suas direções coincidentes com aquelas dos eixos principais de inércia, tem-se que:

$${}^{S3}[I_n] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

## D - ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

Para a energia cinética de rotação (TR) do sistema de três graus de liberdade, tem-se a seguinte expressão [18] :

$$TR = 1/2 \ {}^{S3}\{\omega a\}^T [I_n] \ {}^{S3}\{\omega a\} \quad (5.8)$$

Substituindo as equações (5.6) e (5.7) na equação (5.8),

tem-se:

$$TR = 1/2 (I_x \cos^2 \beta \dot{\alpha} + I_y \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha} \sin^2 \beta I_z) \quad (5.9)$$

## E - ENERGIA CINÉTICA DE TRANSLAÇÃO

Para a energia cinética de translação do sistema (TT), tem-se a equação [18] :

$$TT = 1/2 M \dot{z}^2 \quad (5.10)$$

onde  $\dot{z}$  é a velocidade do centro de massa.

#### F - ENERGIA CINÉTICA TOTAL (TO)

Somando as energias cinéticas de rotação e translação, dadas pelas equações (5.9) e (5.10), tem-se:

$$TO = 1/2 [ I_x \cos^2 \beta \dot{\alpha} + I_y \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha} \sin^2 \beta I_z ] + 1/2 M \dot{z}^2 \quad (5.11)$$

#### G - ENERGIA POTENCIAL (VO)

Levando em consideração as deformações elásticas das molas que compõem a sustentação da mesa, calcula-se a energia potencial de deformação como sendo:

$$\begin{aligned} VO = K/2 [ & (-b \sin \beta \cos \alpha - l \sin \alpha - z)^2 + (-b \sin \beta \cos \alpha + l \sin \alpha - z)^2 + \\ & + (b \sin \beta \cos \alpha + l \sin \alpha - z)^2 + (b \sin \beta \cos \alpha - l \sin \alpha - z)^2 + \\ & + Ka/2 [ (-l \sin \alpha - z)^2 + (l \sin \alpha - z)^2 ] \end{aligned} \quad (5.12)$$

#### H - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Usando a equação de Lagrange, obtém-se as equações do movimento:

$$\begin{array}{l}
 I_x \ddot{\alpha} + (4K + 2Ka) \ell^2 \alpha = 0 \\
 I_y \ddot{\beta} + 4Kb^2 \beta = 0 \\
 M \ddot{z} + (4K + 2Ka) z = 0
 \end{array} \tag{5.13}$$

Matricialmente tem-se:

$$\begin{bmatrix} M/3(\ell^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & M/3(b^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (4K + 2Ka)\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4Kb^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4K + 2Ka \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Nas equações acima pode-se observar que trata-se de um sistema tendo seus movimentos totalmente desacoplados.

### 5.3.2 - IDENTIFICAÇÃO DA MESA VIBRATÓRIA

Para o sistema de três graus de liberdade sem amortecimento, deseja-se obter os seguintes parâmetros: frequências naturais ( $\omega_{nz}$ ,  $\omega_{n\alpha}$  e  $\omega_{n\beta}$ ), coeficientes de rigidez ( $K$  e  $Ka$ ) e modos próprios. São determinadas preliminarmente as funções de transferência e de coerência, além dos espectros de frequência.

## A - FREQUÊNCIAS NATURAIS

Será feita uma descrição sucinta do procedimento adotado com vistas à determinação das frequências naturais do sistema. A figura (5.18), anteriormente mostrada, é usada aqui para que se possa visualizar as posições a serem mencionadas.

1 - Impacto aplicado no ponto I; acelerômetros fixados nos pontos F e H.

Obtém-se os espectros de frequência correspondentes à resposta medida pelos acelerômetros, conforme a figura (5.20), onde apenas uma frequência natural é identificada (175.929 rad/s). Tal frequência corresponde às vibrações verticais do sistema, segundo a direção Z.

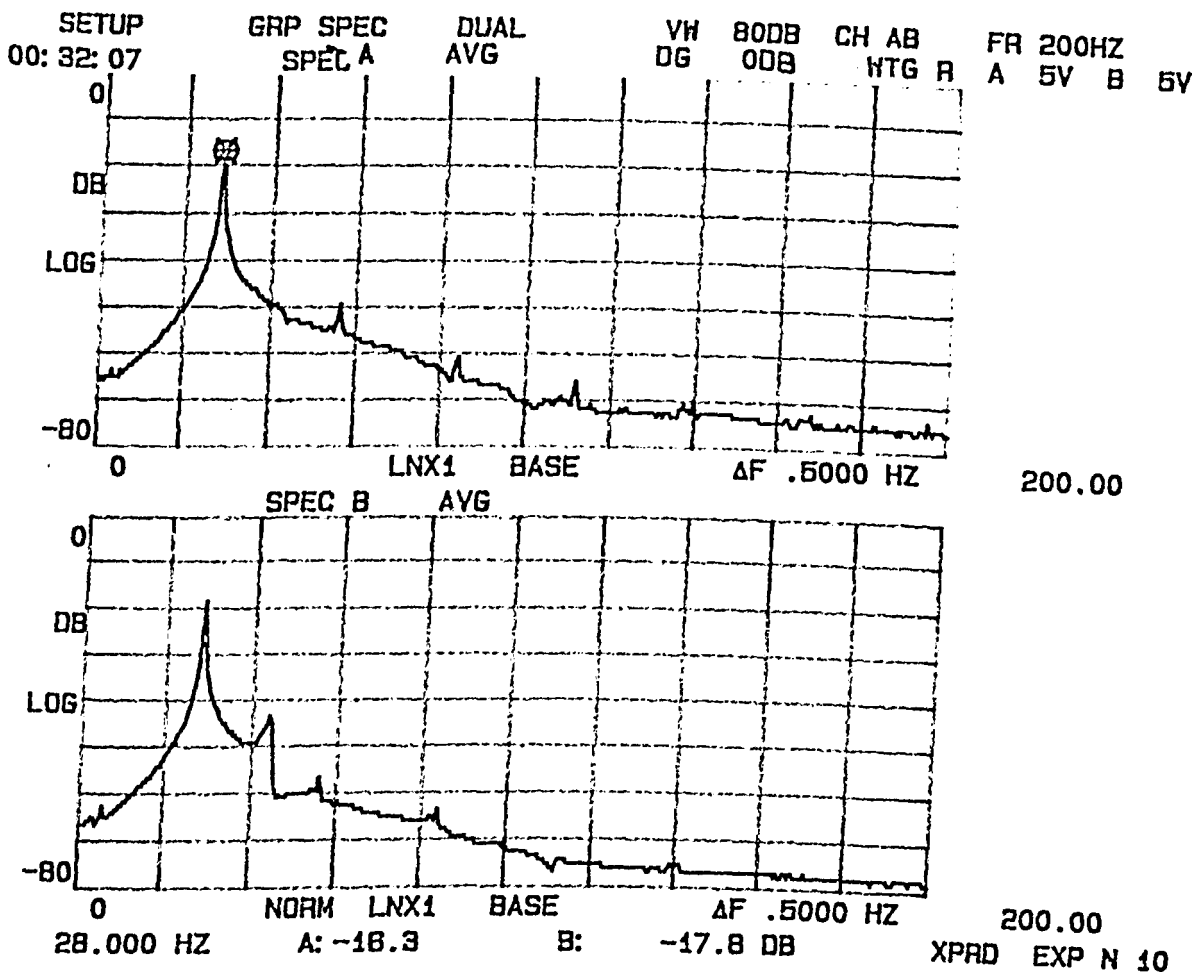
2 - Impacto aplicado no ponto E; acelerômetros fixados nos pontos F e H.

Obtém-se novamente os espectros de frequência, figura (5.21), onde duas frequências naturais podem ser identificadas (175.929 rad/s e 273.318 rad/s). Tais frequências correspondem, respectivamente, às vibrações na direção de Z e na direção em torno de X.

3 - Impacto aplicado no ponto A; acelerômetros fixados nos pontos F e H.

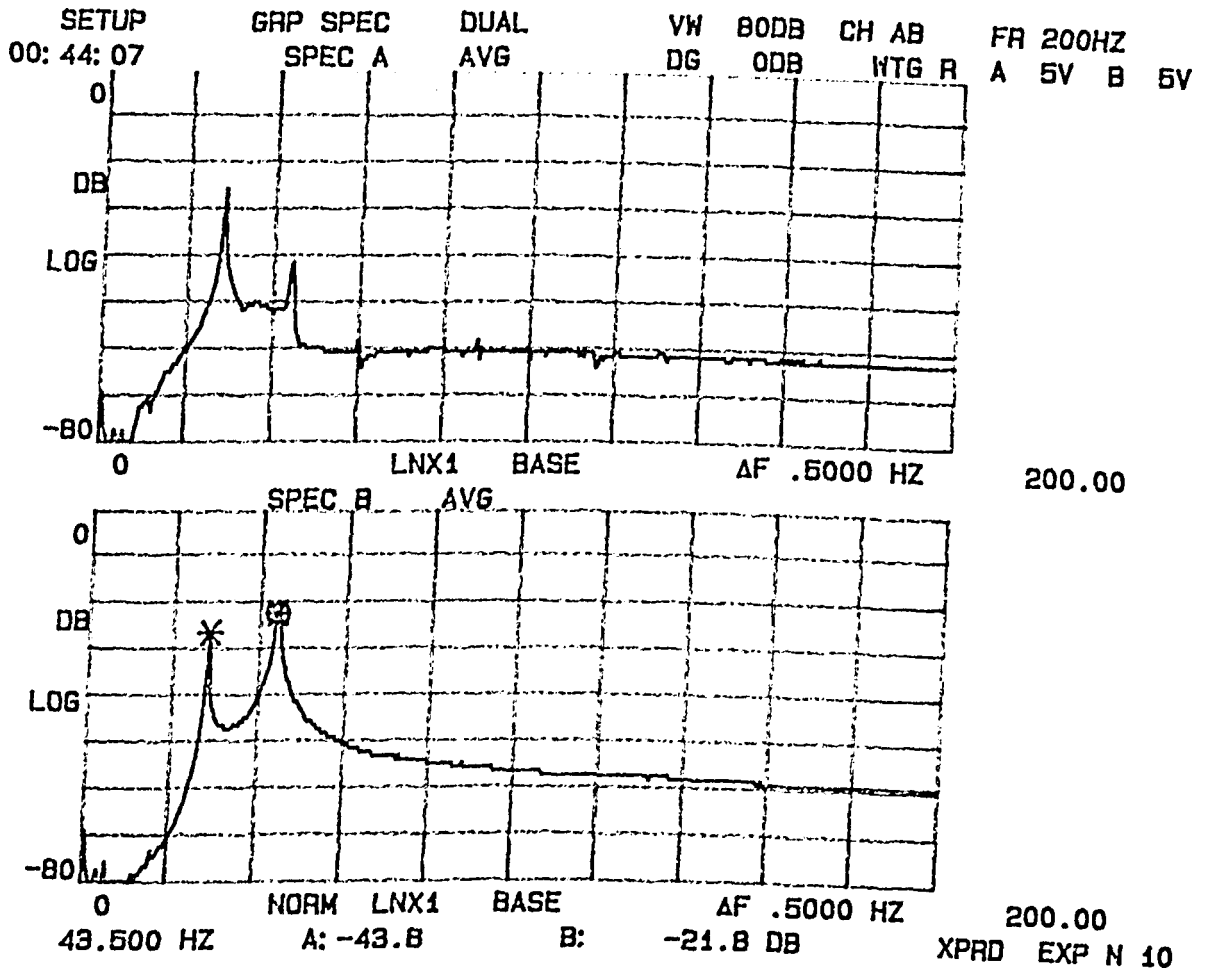
São obtidos os espectros de frequência, conforme ilustra a figura (5.22), sendo agora possível identificar-se três frequências naturais do sistema:





MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	---		
1	28.000	-18.3	-17.8
2	---		
3	---		
4	---		
5	---		
6	---		
7	---		
8	---		
9	---		

Figura 5.20 - Espectos de Frequência - 3 g.d.1  
Impacto no Ponto I



MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	----		
1	28.000	-25.3	-28.5
2	43.500	-43.8	-21.8
3	----		
4	----		
5	----		
6	----		
7	----		
8	----		
9	----		

Figura 5.21 - Espectros de Frequência - 3 g.d.1  
 Impacto no Ponto E

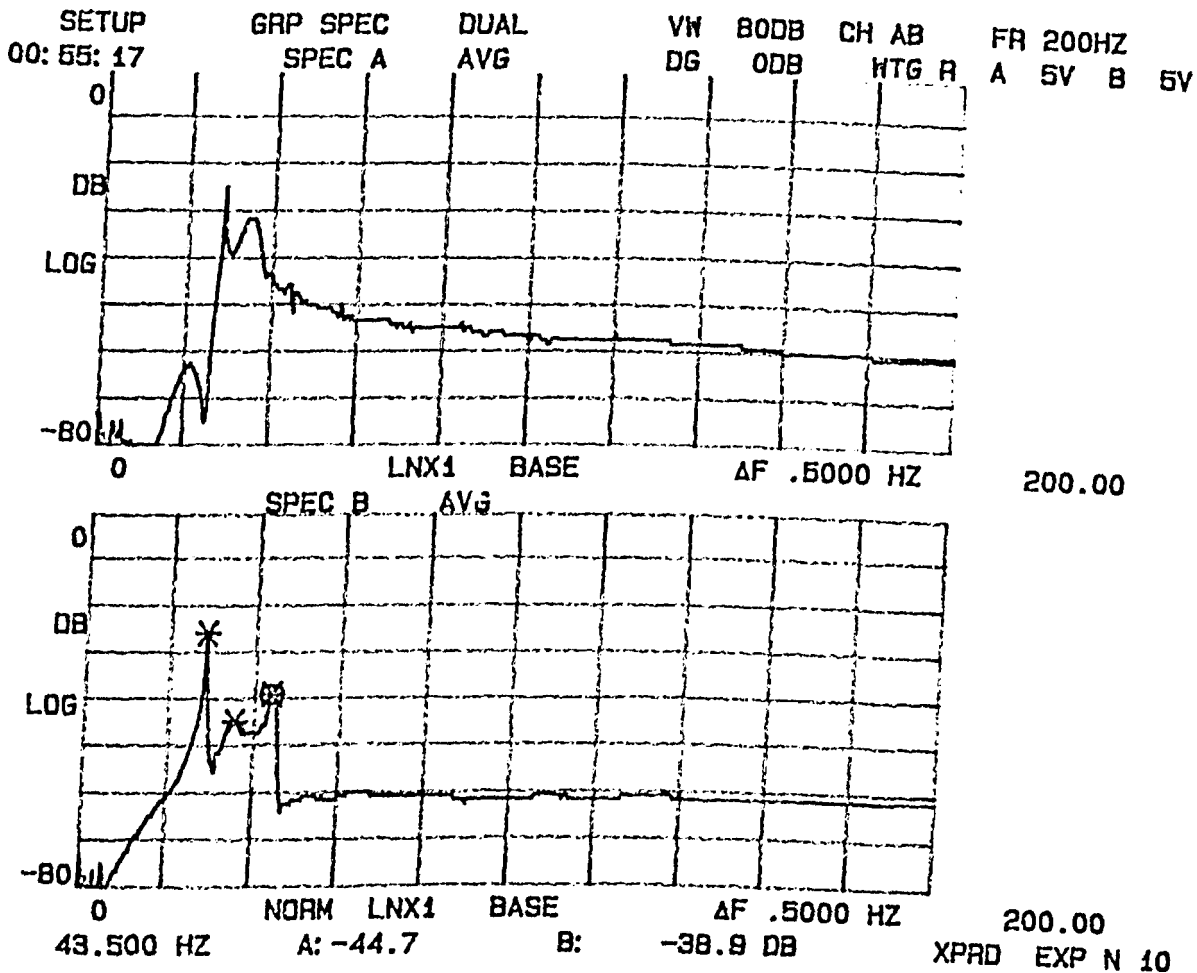


Figura 5.22 - Espectos de Frequência - 3 g.d.1  
 Impacto no Ponto A

175.929 rad/s, 273.318rad/s e 219.911 rad/s. Tais frequências correspondem às vibrações nas direções de Z, em torno de X e em torno de Y, respectivamente, conforme mostra a figura (5.23).

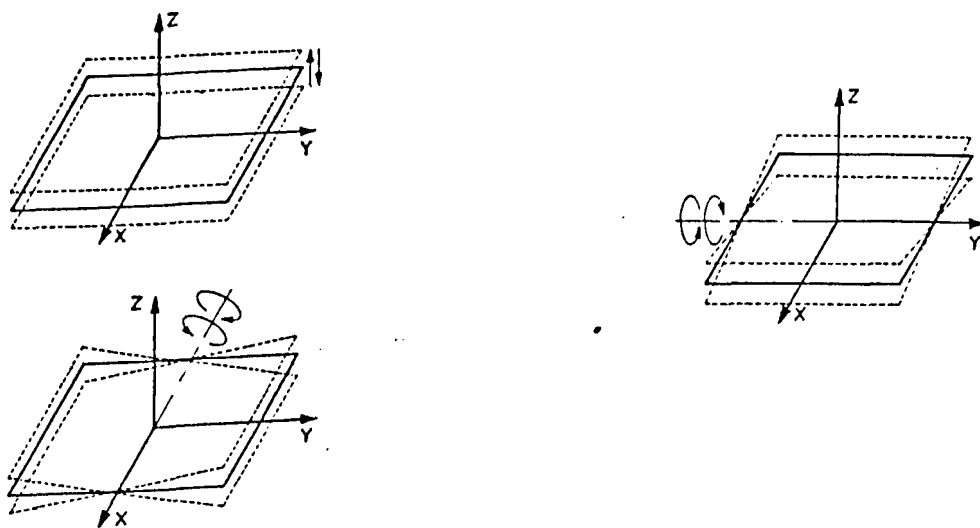


Figura 5.23 - Direções das vibrações - 3 g.d.l.

No Anexo IV podem ser analisadas as curvas que correspondem às funções de transferência e de coerência relacionadas aos ensaios acima descritos.

#### B - COEFICIENTES DE RIGIDEZ K E $K_a$

Os coeficientes de rigidez K e  $K_a$  mostrados na figura (5.18) aparecem nas equações do movimento (5.13), necessitando portanto, serem conhecidos para que seja possível estudar o comportamento dinâmico do sistema a partir de seu modelo matemático.

A montagem das molas em paralelo, leva ao cálculo da rigidez equivalente:

$$K_{\text{equ.}} = 4K + 2K_a \quad (5.15)$$

Partindo-se do valor de  $\omega_{nz}$  identificado (175.929 rad/s) e do valor conhecido da massa vibratória (7.166 Kg), tem-se:

$$K_{\text{equ.}} = 221797.48 \text{ N/m}$$

Foi também calculado o coeficiente de rigidez que corresponde às vibrações da mesa em torno do eixo Y. Usando a expressão da energia de deformação das molas, tem-se:

$$4 K (b \alpha)^2 = K_t \alpha^2 \quad (5.16)$$

Utilizando o valor de  $\omega_{n\alpha}$  identificado ( 273.318 rad/s ) e o valor do momento de inércia  $I_y$  , tem-se:

$$\omega_{n\alpha}^2 = K_t / I_y \quad (5.17)$$

onde  $K_t$  é um coeficiente de rigidez equivalente do movimento da mesa em torno do eixo Y.

Finalmente, das equações (5.15), (5.16) e (5.17) tem-se:

$$K = 29012.37 \text{ N/m} \quad \text{e} \quad K_a = 52874.00 \text{ N/m}$$

Conhecendo-se todos os coeficientes que aparecem nas equações do movimento (5.13), estas podem ser integradas, obtendo-se os valores "teóricos" dos parâmetros modais, os quais serão utilizados para futura comparação com aqueles obtidos através do método das séries de Fourier.

### 4.3.3 - IDENTIFICAÇÃO ATRAVÉS DAS SÉRIES DE FOURIER

Para a aquisição dos sinais correspondentes a  $z(t)$ ,  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  do sistema em estudo, utilizou-se os mesmos equipamentos já mencionados, como mostra o esquema de montagem na figura (5.24).

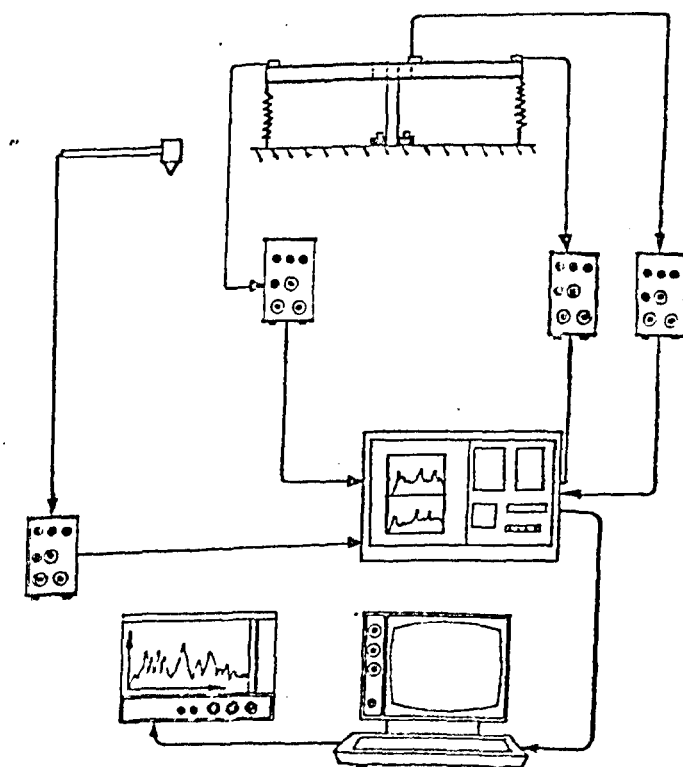


Figura 5.24 - Esquema para aquisição de sinal - 3 g.d.l  
Sistema livre

Semelhantemente ao que foi feito nos casos anteriores, foram adquiridos 1024 pontos dos sinais de resposta dos acelerômetros posicionados em D, G e F (figura 5.18), produzidos pelo impacto aplicado no ponto A. Observando a geometria do sistema, conclui-se que:

$$\begin{aligned}
 x_D(t) &= z(t) + \ell/2 \alpha(t) + b/2 \beta(t) \\
 x_G(t) &= z(t) + b/2 \beta(t) \\
 x_F(t) &= z(t) + \ell/2 \alpha(t)
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

Portanto, manipulando os sinais adquiridos, tem-se:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= x_G(t) + x_F(t) - x_D(t) \\
 \alpha(t) &= 2(x_D(t) - x_G(t))/\ell \\
 \beta(t) &= 2(x_D(t) - x_F(t))/b
 \end{aligned}
 \tag{5.19}$$

Com os valores de  $z(t)$ ,  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$ , o processo de identificação é realizado, sendo que foram retidos vinte termos nas expansões por séries de Fourier.

Na tabela 5.4 tem-se tanto os resultados ditos teóricos como aqueles oriundos da identificação através do método que objetiva esta dissertação.

TABELA 5.4 - VALORES TEÓRICOS E IDENTIFICADOS DOS  
 PARÂMETROS MODAIS (  $r = 20$  )  
 MESA VIBRATORIA COM 3 G. D. L. LIVRE-

MODDO	PARÂMETROS	VALORES TEÓRICOS	VALORES IDENTIFICADOS (FOURIER)	DIFERENÇA RELATIVA ( % )
1	$\omega_n$ (rd/s)	175.899	174.671	0.69
	$\omega_d$ (rd/s)	175.899	174.656	0.71
	$\zeta$	0.000	0.001	-
	auto valores	0.000 $\pm$ 175.899	-0.160 $\pm$ 174.620	0.72*
	modo $y_1$ próprio $y_1$	1.000 + 10.000	1.000 - 10.000	-
	modo $y_2$ próprio $y_1$	0.000 + 10.000	0.037 + 10.017	-
	modo $y_3$ próprio $y_1$	0.000 + 10.000	-0.032 - 10.053	-
2	$\omega_n$ (rd/s)	219.908	221.058	0.52
	$\omega_d$ (rd/s)	219.908	221.059	0.52
	$\zeta$	0.000	0.002	-
	auto valores	0.000 $\pm$ 219.908	-0.650 $\pm$ 221.060	0.52*
	modo $y_1$ próprio $y_3$	0.000 + 10.000	-0.001 + 10.004	-
	modo $y_2$ próprio $y_3$	0.000 + 10.000	0.009 - 10.008	-
	modo $y_3$ próprio $y_3$	1.000 + 10.000	1.000 + 10.000	-
3	$\omega_n$ (rd/s)	304.481	290.339	4.64
	$\omega_d$ (rd/s)	304.481	290.338	4.64
	$\zeta$	0.000	0.003	-
	auto valores	0.000 $\pm$ 304.481	-0.092 $\pm$ 290.340	4.64*
	modo $y_1$ próprio $y_2$	0.000 + 10.000	-0.020 + 10.006	-
	modo $y_2$ próprio $y_2$	1.000 + 10.000	1.000 - 10.000	-
	modo $y_3$ próprio $y_2$	0.000 + 10.000	-0.039 - 10.064	-

\* - diferença na magnitude



## 6 - CONCLUSÕES

Foi apresentado neste trabalho um método no domínio do tempo para identificação de sistemas mecânicos com vários graus de liberdade, utilizando-se das expansões por série de Fourier dos sinais de excitação e de resposta do sistema.

Para um grau de liberdade, a formulação foi desenvolvida de forma a considerar o sinal de saída do sistema associado tanto ao deslocamento, como à velocidade ou à aceleração. Para vários graus de liberdade, o sinal de saída utilizado na formulação é o do deslocamento, podendo entretanto serem as expressões facilmente adaptadas para as outras grandezas cinemáticas citadas.

Foi desenvolvida, também, a formulação para a identificação das forças de excitação, sendo necessário, neste caso, conhecer-se previamente os parâmetros e as condições iniciais do problema.

A simulação computacional permitiu observar melhora nos resultados quando é aumentado o número de termos retidos nas expansões por séries de Fourier. Quanto ao ruído aleatório introduzido, em muitas situações sua influência sobre os parâmetros identificados é mínima, o que permite dizer que o método é pouco sensível ao ruído.

A simulação computacional permitiu também verificar que, em geral, parâmetros identificados a partir da resposta livre são ligeiramente melhores (quando comparados aos seus valores exatos) do que aqueles obtidos a partir das expansões por série de Fourier dos sinais de excitação e da resposta do

sistema. Entretanto, no caso dos sistemas excitados harmonicamente, tais erros podem ser minimizados, adequando-se os valores da amplitude e da frequência da excitação.

A identificação com base na resposta forçada pode ser conduzida considerando-se forças excitadoras de vários tipos (harmônica, periódica, aperiódica).

Cabe salientar que mesmo nos casos em que as matrizes de rigidez e de amortecimento sejam não simétricas, como ocorre tipicamente nos mancais e selos hidrodinâmicos, o método mostrou-se eficiente.

Do ponto de vista numérico-computacional, o método apresentado é bastante atrativo, tanto pela simplicidade de sua programação como pela rapidez na execução das rotinas, mesmo usando um micro-computador do tipo PC/AT 286. A única inversão necessária na rotina envolve matrizes de tamanho  $2N \times 2N$  ou  $3N \times 3N$ , para o caso da identificação dar-se através da resposta livre ou da resposta à excitação do sistema, respectivamente, onde  $N$  é o número de graus de liberdade.

Foram realizados experimentos com o objetivo de validar o método proposto. Em cada caso estudado, a bancada de testes foi primeiramente modelada matematicamente e identificada usando técnicas de análise modal experimental através de métodos convencionais no domínio da frequência, para só então fazer-se a análise modal aplicando o método das séries de Fourier. Os resultados experimentais obtidos, permitem deduzir que as técnicas implementadas mostram-se promissoras.

O trabalho como um todo, permitiu ao seu autor familiarizar-se com um conjunto de ferramentas indispensáveis para o dinamicista: a aplicação das leis físicas que levam à

obtenção dos modelos físicos e matemáticos, a análise do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos, o estudo de problemas inversos, o uso de métodos computacionais e a experimentação.

Fica para trabalhos futuros a extensão da metodologia proposta para a identificação de sistemas com muitos graus de liberdade, na esperança de que, com poucos sensores, seja possível identificar os parâmetros modais correspondentes aos primeiros modos próprios de interesse. Também deixou-se para a continuidade desta dissertação o tratamento de problemas giroscópicos.

## 7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - ALI, E.J.; Analyse et Identification du Comportement Dynamique de Rotors. Thèse de Docteur de L'Université de Franche-COMTE. Besançon, 1989. 140p.
- 2 - BECK, J.V. and ARNOLD, K.J.; Parameter Estimation in Engineering and Science. New York, John Wiley & Sons, 1976. 501p.
- 3 - BRAUN, S.G. and RAM, Y.M.; Structural Parameter Identification in the Frequency Domain: The use of Overdetermined Systems, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 109: 120-123, 1987.
- 4 - CHANG, R.Y. and WANG, M.L.; Parameter Identification via Shifted Legendre Polynomials, Int. J. Systems Sci., 13: 1125-1135, 1982.
- 5 - CHEN, C.F. and HSIAC, C.H.; Time Domain Synthesis via Walsh Functions, Proc. IEEE, 122: 565-570, 1975.
- 6 - CHUN, H.Y.; System Identification via Fourier Series, International Journal of Systems Science, 18: 1191-1194, 1987.
- 7 - EWINS, D.J.; Modal Testing, Letchworth, England, Research Studies Press, 1985. 267p.

- 8 - FRANÇA ARRUDA, J.R.; Étude du Comportement Dynamique des Systèmes mécaniques par l'Analyse des Signaux Vibratoires- Application à la Surveillance Vibratoire des Machines tournantes. Thèse de Docteur Ingénieur - Université Pierre et Marie Curie. Paris, 1979. 150p.
- 9 - FRITZEN C.P.; Identification of Mass, Damping and Stiffness Matrices of Mechanical Systems, The Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 108:9-16, 1986.
- 10 - HAC, A. and SPANOS, P.D.; Time Domain Method for Parameter System Identification, Journal of Vibration and Acoustics, 112: 281-287, 1990.
- 11 - HWANG, C. and SHIH, Y.P.; Parameter identification via Laguerre Polynomials, International Journal of Systems Science, 13: 209-217, 1982.
- 12 - IBRAHIM, S.R. and MIKULCIK, E.C.; A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Response, The Shock and Vibration Bulletin, 47: 183-198, 1977.
- 13 - IBRAHIM, S.R. and MIKULCIK, E.C.; A Time Domain Modal Vibration Test Technique, The Shock and Vibration Bulletin, 43: 21-37, 1973.

- 14 - IBRAHIM, S.R. and MIKULCIK, E.C.; The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses, The Shock and Vibration Bulletin, 46: 187-196, 1976.
- 15 - JEZEQUEL, L.; Three New Methods of Modal Identification, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 108: 17-25, 1986.
- 16 - JIANG, Z.H. and SCHANFELBERGER, W.; A New Algorithm for Single-Input-Single-Output System Identification via Block Pulse Functions, International Journal of Systems Science, 16: 1559-1571, 1985.
- 17 - LIN, C.C. and SHIH, Y.P.; System Analysis, Parameter Estimation and Optimal Regulator Design of Linear Systems via Jacobi Series, Int. J. Control, 42: 221-224, 1985.
- 18 - MEIROVITCH, L.; Methods of Analytical Dynamics, New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1979. 525p.
- 19 - NEULAND, D.E.; Mechanical Vibration Analysis and Computation New York, Longman Scientific & Technical, 1989. 583p.
- 20 - PARASKEVOPOULOS, P.N. and KERKERIS, G.T.H.; Hermite Series Approach to System Identification, Analysis and Optimal Control, Proc. 6<sup>th</sup> Int. Symp. on Methods and Appl. of Measurement and Control, Acta Press, Canada, 1: 146-149, 1983.

- 21 - PARASKEVOPOULOS,P.N., SPARIS,P.D. and MOURDOUTSOS,S.G.; The Fourier Series Operational Matrix of Integration, International Journal of Systems Science, 16: 171-176, 1985.
- 22 - PARASKEVOPOULOS,P.N.; Chebychev Series Approach to System Identification, Analysis and Optimal Control, Journal of the Franklin Institute, 316: 135-157, 1983.
- 23 - RIUL,J.A.; Estudo Teórico e Experimental de Mancais Hidrodinâmicos Cilíndricos. Tese de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia M.G. 1988. 97p.
- 24 - STEFFEN JR. V. and RADE, D.A.; An Identification Method of Multi-Degree-of-Freedom Systems Based on Fourier Series, The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, p.271-278, oct.1991.
- 25 - TSE, F.S., MORSE, I.E. and HINKLE,T.H.; Mechanical Vibrations Theory and Applications, Second Ed., Allyn and Balon, Inc., 1978. 482p.
- 26 - VOLD,H., KUNDRAT,J., KOCKLIN,G.T. and RUSSELL,R.; A Multi-Input Modal Estimation Algorithm for Mini-Computers,S.A.E. Paper 820194, 10pp.,1982.

- 27 - WANG,Z. and FANG,T.; A Time-Domain Method for Identifying Modal Parameters, Journal of Applied Mechanics, 53: 28-32, 1986.



ANEXOS

ANEXO I

DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE RIGIDEZ ESTÁTICO

## DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE RIGIDEZ ESTÁTICO

Para a determinação do coeficiente de rigidez estático utiliza-se os seguintes equipamentos (figura 1)

- Relógio comparador
- Célula de carga (0-5Kgf)
  - curva de calibração:  $F(N) = 0.0493 * V(mV) - 9.696$
  - desvio máximo: 4.349 mV
  - histerese: 4.00 mV
  - sensibilidade estática: 20.287 mV/N
- Condicionador de sinal
- Multímetro digital

O valor obtido, através do processo de regressão linear, foi de  $K = 27399.65 \text{ N/m}$ , com coeficiente de correlação de 0.999.

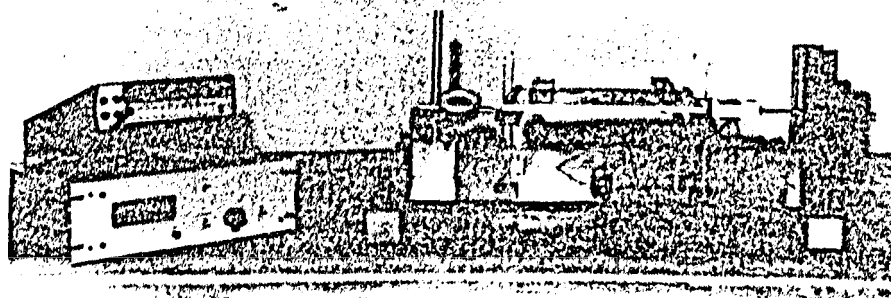
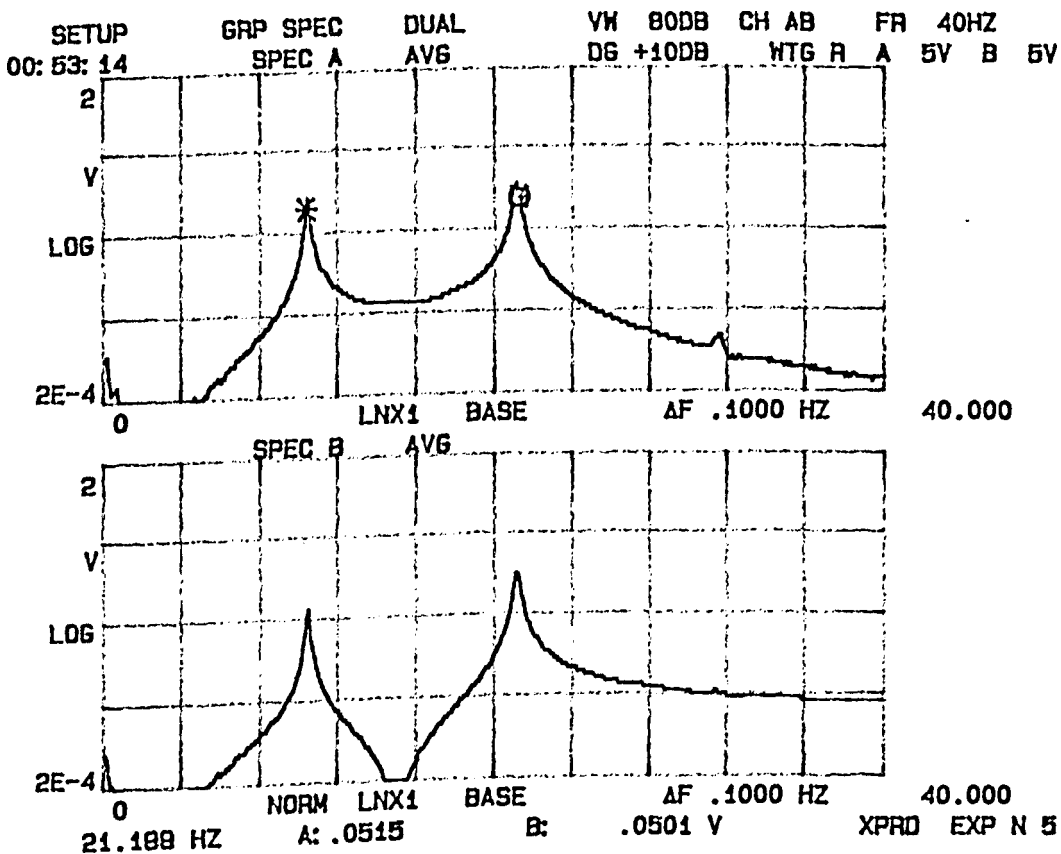


figura 1 - Bancada para o cálculo do coeficiente de rigidez estático

ANEXO II

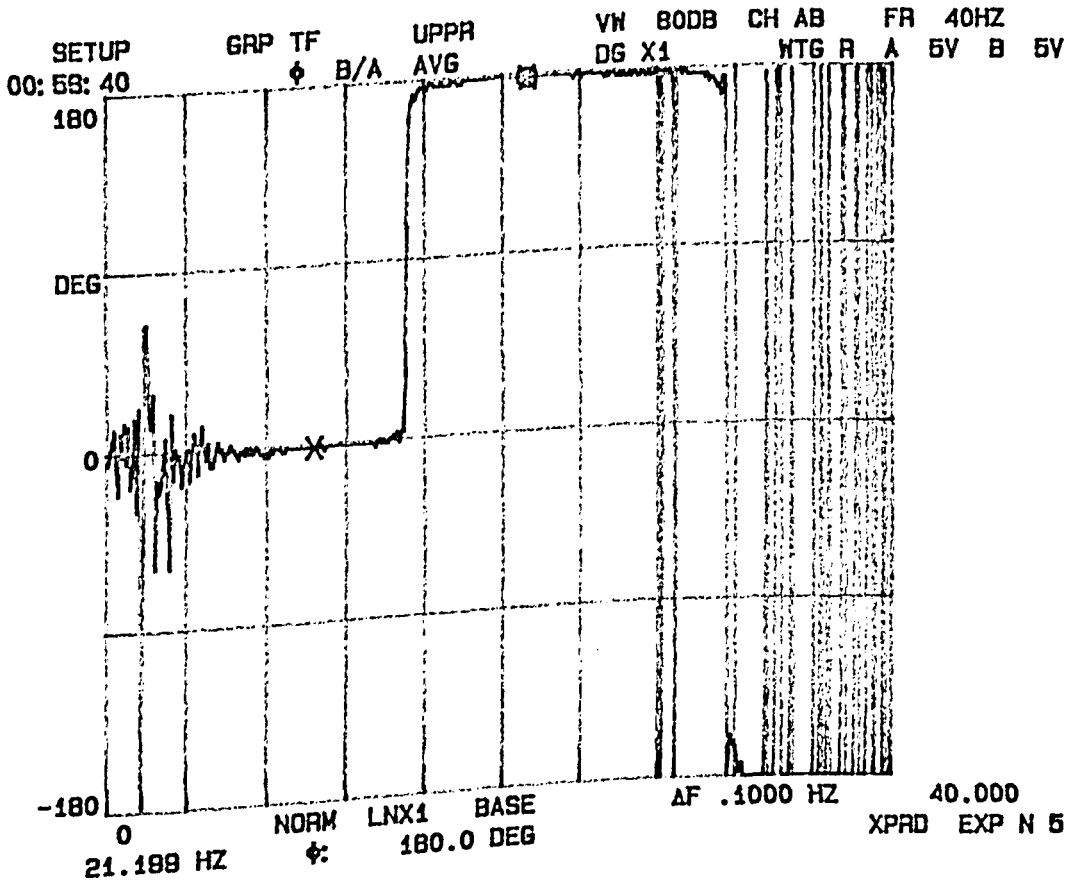
A - MODOS PRÓPRIOS - 2 G.D.L.

B - FASE - 2 G.D.L.



MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	---		
1	10.300	.0253	.0488
2	21.188	.0803	.0580
3	---		
4	---		
5	---		
8	---		
7	---		
8	---		
9	---		

A - Modos Próprios - 2 g.d.1

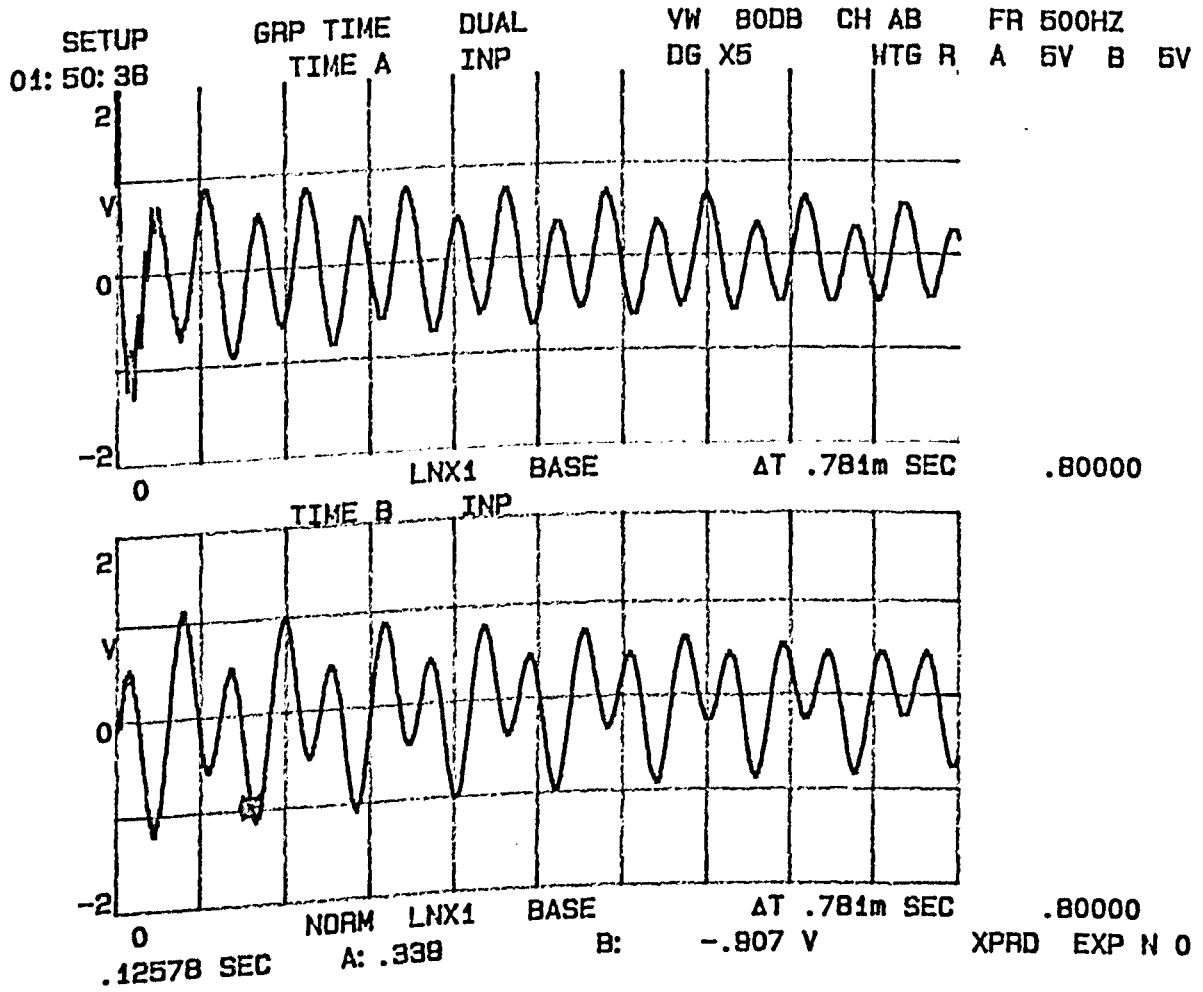


MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	---		
1	10.300	.0253	.0488
2	21.188	.0803	.0580
3	---		
4	---		
5	---		
6	---		
7	---		
8	---		
9	---		

B - Fase - 2 g.d.1

ANEXO III

RESPOSTA NO TEMPO - 2 G.D.L.



MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	---	---	---
1	---	---	---
2	---	---	---
3	---	---	---
4	---	---	---
5	---	---	---
6	---	---	---
7	---	---	---
8	---	---	---
9	---	---	---

Resposta no Tempo - 2 g.d.1

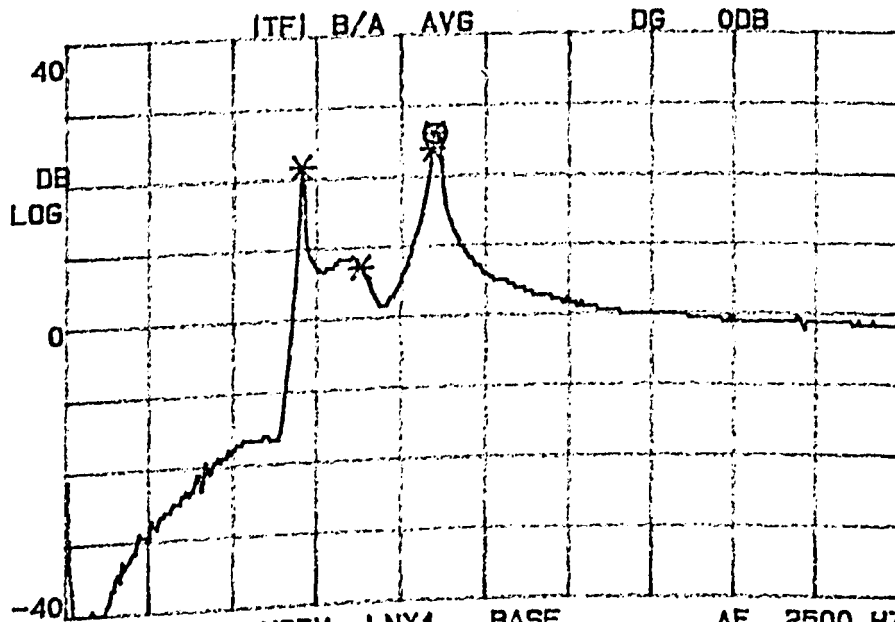
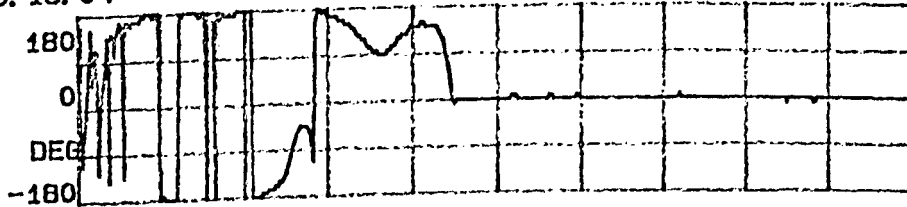


ANEXO IV

A - FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA - 3 G.D.L.

B - FUNÇÃO DE COERÊNCIA - 3 G.D.L.

SETUP 00: 13: 04      GRP TF      DUAL      VN 80DB CH AB      FR 100HZ  
                           φ B/A      AVG      DG X2      WTG R      A 5V B 5V

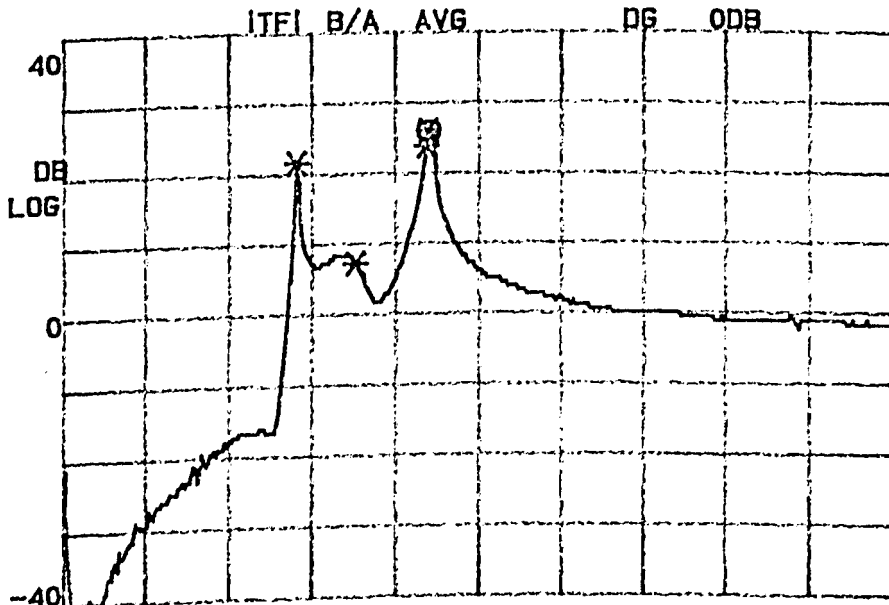
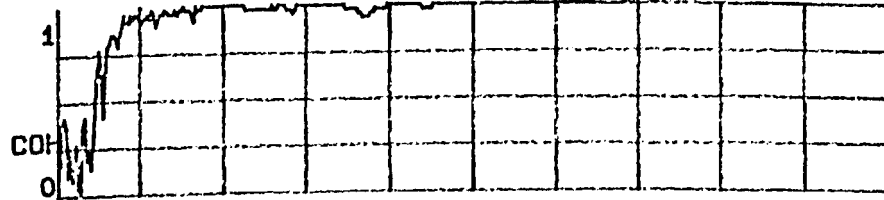


(ITF) B/A AVG      DG 0DB  
 43.750 HZ      0      NORM      LNX1      BASE      ΔF .2500 HZ      100.00  
                           φ:      85.1°      ITFI:      25.8 DB      XPRD EXP N 10

MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	---	---	---
1	28.000	.878	21.4
2	35.000	.875	7.5
3	43.500	.885	24.0
4	---	---	---
5	---	---	---
6	---	---	---
7	---	---	---
8	---	---	---
9	---	---	---

A - Função de Transferência - 3 g.d.1

SETUP 00:08:50      GRP TF COH B/A      DUAL AVG      VW 80DB DG X2      CH AB WTG R      FR 100HZ A 5V B 5V



0 43.750 HZ      NORM COH:      LNX1 .878      BASE ITFI:      ΔF .2500 HZ      25.8 DB      100.00 XPRD      EXP N 10

MARK	LIST X	Y (U)	Y (L)
0	---	---	---
1	28.000	.878	21.4
2	35.000	.875	7.5
3	43.500	.885	24.0
4	---	---	---
5	---	---	---
6	---	---	---
7	---	---	---
8	---	---	---
9	---	---	---

B - Função de Coerência - 3 g.d.1