

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Lucas Portes Leal Ferreira

**Propagação e atenuação de ondas
Longitudinais em Estruturas Periódicas**

Uberlândia

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Lucas Portes Leal Ferreira

**Propagação e atenuação de ondas Longitudinais em
Estruturas Periódicas**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, como requisito exigido parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Aeronáutica.

Orientador: Prof. Dr. Tobias Souza Morais

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica

Uberlândia

2019

Lucas Portes Leal Ferreira

Propagação e atenuação de ondas Longitudinais em Estruturas Periódicas

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, como requisito exigido parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Aeronáutica.

Trabalho aprovado. Uberlândia, 10 de Julho de 2019:

Prof. Dr. Tobias Souza Morais
Orientador

Prof. Dr. Alexandre Zuquete Guarato

Prof. Ms. Giuliano Gardolinski
Venson

Uberlândia
2019

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que por meio de seu filho, Jesus Cristo, me possibilitou o acesso à imerecida graça que me dá a salvação.

Agradeço na sequência aos meus pais, Anderson e Daniela, que são os pilares de minhas conquistas e de meu aprendizado.

Agradeço aos meus irmãos, Nathalia e Renato, que sempre completam a alegria em nossos momentos de união. E também aos meus avós, Anízio, Hélia e Ester, pelo exemplo claro de mansidão.

Gostaria também de agradecer aos meus amigos e companheiros de jornada na Universidade, Renato Falconi e Vitor Cunha, sem os quais o fardo seria mais pesado e a caminhada menos divertida.

Gostaria de agradecer ao Professor e Orientador Tobias que se demonstrou um amigo e suporte em momentos difíceis.

E por fim, gostaria de agradecer a toda banca composta por professores que admiro verdadeiramente por desempenharem os seus papéis com amor e dedicação.

Agradeço a Deus por essa experiência ter sido vivida com cada um de vocês. Obrigado.

“ Se o SENHOR não edificar a casa, em vão trabalham os que a edificam; se o SENHOR não guardar a cidade, em vão vigia a sentinela. Inútil vos será levantar de madrugada, repousar tarde, comer o pão que penosamente granjeastes; aos seus amados ele o dá enquanto dormem.” Salmos 127:1-2

Resumo

Os meios de lidar com diversos problemas advindos da propagação de ondas, normalmente, se resumem em analisar a propagação dessas em determinadas estruturas que sejam capazes de atenuar os efeitos causadas por tal propagação. Esses efeitos são, principalmente, ruído e vibração.

Nesse contexto, não muito distante do atual momento, foi proposta a aplicação de estruturas periódicas para a solução de tais problemas, uma vez que a mesma se demonstrou simples de se analisar e com resultados proeminentes e animadores para o futuro da área. Isso graças ao fato de que há relacionamento do efeito da propagação das ondas mecânicas (sejam elas longitudinais ou transversais) em meios periódicos com o Teorema de Floch-Bloch.

Assim, na sequência de cálculos é possível notar que com o uso do Teorema citado as matrizes de Rigidez e Massa se simplificam em uma matriz chamada Matriz de Transferência, a qual faz uma análise por vetores de estado simplificando a análise, acelerando o processamento dos dados e facilitando a produção da própria estrutura.

E por fim, o trabalho apresenta como conclusão métodos de alocação de *Band Gap*, regiões bem determinadas de atenuação, com diversas variações nas geometria e características físicas de uma Estrutura Periódica. E isso com auxílio dos artifícios de simplificação dos procedimentos de cálculo e análise possibilitados pela utilização do Método da Matriz de Transferência juntamente com o Teorema de Floquet Bloch.

Palavras-chave: periódico, Floquet, Bloch, Estruturas periódicas, ondas, Longitudinais

Lista de ilustrações

Figura 1 – Função em Resposta Frequência de uma Turbina Eólica.	12
Figura 2 – Formação de uma estrutura periódica a partir da repetição sucessiva de células unitárias.	14
Figura 3 – Célula Discreta com Duas Massas Iguais e um Ressonador.	14
Figura 4 – Propagação de ondas Longitudinais em uma Estrutura com seções transversais diferentes.	24
Figura 5 – Divisões de uma estrutura periódica para sua análise.	25
Figura 6 – Célula discreta com Duas Massas Iguais e um Ressonador.	28
Figura 7 – Avaliação da FRF e Coeficientes de dispersão de uma Estrutura com 10 células compostas pela estrutura do item.	29
Figura 8 – Célula com uma massa e um ressonador.	30
Figura 9 – Avaliação da FRF e Coeficientes de dispersão de uma Estrutura com 10 células compostas pela estrutura do item.	31
Figura 10 – Célula com duas massas diferentes. Fonte: (CUNHA et al., 2017).	31
Figura 11 – Avaliação da FRF e Coeficientes de dispersão de uma Estrutura com 10 células compostas pela estrutura do item.	32
Figura 12 – Estrutura Contínua.	33
Figura 13 – Avaliação da FRF e Coeficientes de dispersão de uma Estrutura com 10 células compostas pela estrutura do item.	33
Figura 14 – Avaliação das alterações na FRF e Coeficientes de dispersão gerados pela variação do módulo de Elasticidade.	34
Figura 15 – Avaliação dos efeitos que a variação do módulo de Elasticidade podem gerar na Transição e Reflexão da onda.	35
Figura 16 – Avaliação dos efeitos que a variação do módulo de Elasticidade podem gerar no deslocamento incidente na estrutura e o resultante da extremidade direita.	35
Figura 17 – Avaliação das alterações na FRF e Coeficientes de dispersão gerados pela variação da Densidade.	36
Figura 18 – Avaliação dos efeitos que a variação da Densidade pode gerar na Transição e Reflexão da onda.	36
Figura 19 – Avaliação dos efeitos que a variação da Densidade pode gerar no deslocamento incidente na estrutura e o resultante da extremidade direita.	37
Figura 20 – Avaliação das alterações na FRF e Coeficientes de dispersão gerados pela variação da área de seção transversal.	37
Figura 21 – Avaliação dos efeitos que a variação da área de seção transversal podem gerar na Transição e Reflexão da onda.	38

Figura 22 – Avaliação dos efeitos que a variação da área de seção transversal podem gerar no deslocamento incidente na estrutura e o resultante da extremidade direita.	38
Figura 23 – Avaliação das alterações na FRF e Coeficientes de dispersão gerados pela variação do comprimento da célula.	39
Figura 24 – Avaliação dos efeitos que a variação do módulo do comprimento da célula podem gerar na Transição e Reflexão da onda.	39
Figura 25 – Avaliação dos efeitos que a variação do comprimento da célula podem gerar no deslocamento incidente na estrutura e o resultante da extremidade direita.	39
Figura 26 – Avaliação das alterações na FRF e Coeficientes de dispersão gerados pela variação do número de células.	40
Figura 27 – Avaliação dos efeitos que a variação do número de células podem gerar na Transição e Reflexão da onda.	40
Figura 28 – Avaliação dos efeitos que a variação do número de células podem gerar no deslocamento incidente na estrutura e o resultante da extremidade direita.	40
Figura 29 – Comparação entre os modelos Contínuo e Discreto, obtidos pela Matriz de Transferência e um modelo de elementos finitos obtido pela Matriz de Rigidez.	43

Lista de tabelas

Tabela 1 – Relação de massas e rigidezes da Célula com duas Massas Diferentes e um Ressonador.	28
Tabela 2 – Duas Massas e um Ressonador	29
Tabela 3 – Relação de massas e rigidezes da Célula com uma Massa e um Ressonador.	30
Tabela 4 – Add caption	30
Tabela 5 – Relação de massas e rigidezes da Célula com duas Massas Diferentes e um Ressonador.	32
Tabela 6 – Relação de massas e rigidezes da Célula com duas Massas Diferentes e um Ressonador.	32
Tabela 7 – Propriedades da estrutura utilizada para validação.	43

Lista de abreviaturas e siglas

TMM	Método da Matriz de Transferência
M	Matriz de massa
K	Matriz de rigidez
w	Frequência
k	Número de onda
t	Tempo
T_{global}	Matriz de Transferência Global
T_{cell}	Matriz de Transferência da Célula

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Objetivos	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	Estrutura periódica	14
2.2	Solução da equação da Onda	15
2.3	Método da matriz de Transferência	16
2.3.1	Matriz de Transferência para um Sistema Discreto	17
2.3.2	Matriz de Transferência para sistema contínuo (ROD)	19
2.4	Teorema de Floquet	21
2.5	O diagrama de dispersão, segundo Floquet e a Análise da Matriz de Transferência	22
2.6	Análise da Transmissão, Reflexão e Incidência das ondas Longitudinais	23
3	AVALIAÇÕES NUMÉRICAS	28
3.1	Estrutura Discreta	28
3.1.1	Célula com duas Massas Iguais e um Ressonador	28
3.1.2	Célula com uma Massa e um Ressonador	29
3.1.3	Célula com duas Massas Diferentes	30
3.2	Estrutura Contínua	32
3.3	Resultados	33
3.3.1	Varição do Módulo de Elasticidade dos elementos da célula	34
3.3.2	Varição da Densidade dos elementos da célula	35
3.3.3	Varição da Área de Seção transversal dos elementos da célula	36
3.3.4	Varição do comprimento dos elementos da célula	37
3.3.5	Varição do número de células	37
4	CONCLUSÃO	41
	REFERÊNCIAS	42
	APÊNDICE A – VALIDAÇÃO DO MODELO DISCRETO E CONTÍNUO	43

1 Introdução

A propagação de ruído e vibrações em estruturas, em suas mais variadas formas, está diretamente relacionada à propagação da onda nesse meio. Portanto, a utilização de materiais específicos para a solução de tais problemas se trata de uma necessidade presente ao longo da maior parte da história da engenharia, afinal, toda estrutura mecânica é composta de massa e rigidez. Portanto, quando mal projetada para o desempenho de uma determinada função, ela apresenta desgastes desnecessários causados por oscilações não desejadas da mesma.

Assim, parte-se do pressuposto que é desejável um bom projeto estrutural dinâmico para a preservação da vida útil da estrutura e da boa operação da mesma. E para isso uma solução possível é o uso de Estruturas Periódicas, uma vez que a configuração das mesmas permite uma atenuação significativa em uma região de frequências bem determinadas, conhecida como *Band Gap*. O mesmo pode ser provocado pela presença de um ressonador na estrutura. Esse projeto estrutural, portanto deve promover atenuações em bandas de frequências escolhidas visando uma solução estratégica para a particularidade de cada situação.

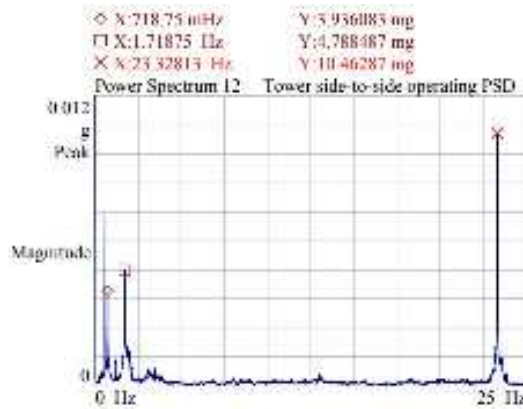
Uma situação no ramo aeronáutico estudada por [Howlett et al. \(1977\)](#) foi a propagação de ondas provenientes da caixa de engrenagens no interior da cabine de helicópteros. E assim concluiu-se que existia uma necessidade de se resolver o problema. E a partir de então, como abordado por [Santos \(2018\)](#), a situação foi analisada por [Szefi \(2003\)](#) e para resolução do problema foi aplicada a estratégia da periodicidade.

Outra situação em que a aplicação de uma estrutura periódica poderia ser útil é na atenuação de um sistema com múltiplas frequências de excitação, como por exemplo o de uma turbina eólica (Figura 1). Nota-se, que existe a necessidade não de atenuar toda a banda exposta na Figura 1, mas sim duas resgões pontuais, uma próxima $4Hz$ e outra próxima aos $25Hz$. Logo, tem-se definido os locais necessário a se promover um Band Gap.

Para esse caso, por exemplo, é conveniente o uso de uma estrutura periódica com um ressonador e duas massas, de modo que a alocação de um *band gap* alternativo ao da estrutura é possível graças a presença do mesmo. Uma estrutura discreta e periódica será abordada no presente trabalho mais adiante e pode ser exemplificada pelas Figuras 7 e 8.

Apesar de ser uma solução eficiente a proposição do modelo de uma estrutura periódica não é uma tarefa complexa de se realizar utilizando os métodos da Matriz de Transferência e do Teorema de Floquet-Bloch. Ambos aportes matemáticos são ferramentas muito utilizadas para a descrição de sistemas que apresentam uma repetibilidade em

Figura 1 – Função em Resposta Frequência de uma Turbina Eólica.



Fonte: (OSGOOD, 2001).

domínios físicos e matemáticos.

O conhecido Método da Matriz de Transferência (TMM) é uma solução que visa reduzir o custo computacional e facilitar a análise de problemas. E o Teorema de Floquet-Bloch é uma solução voltada para a análise de sistemas periódicos que ao ser associado ao TMM apresenta uma solução eficiente e capaz de descrever com qualidade as atenuações, Band Gaps, presentes no comportamento dinâmico das estruturas periódicas.

Segundo, Farzbod e Leamy (2011), o teorema de Floquet-Bloch, foi inicialmente proposto por Bloch para o estudo do comportamento de elétrons em cristais com o uso da Equação 1.1.

$$\left[-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V(r)\right]\psi_k(r) = E_k\psi_k(r). \quad (1.1)$$

O primeiro Termo é conhecido como Termo cinético do Hamiltoniano sendo, \hbar a Constante Planck dividida por 2π e m a massa da partícula e ∇^2 as segundas derivadas parciais em relação a cada eixo. $V(r)$ compreende o termo Potencial, descrevendo um campo externo que age na partícula. Já do lado direito há um E , que é um vetor com os autovalores, no caso relacionado à energia aplicada na função de onda. E por fim, ψ irá compreender toda informação do sistema quântico.

De modo que ao aplicar o teorema de Floquet-Bloch, obtém-se a Equação 1.2:

$$\psi_k(r+p) = e^{<iK_{e,p}>} \psi_k(r). \quad (1.2)$$

Essa solução, portanto, foi adaptada ao comportamento de estruturas periódicas e pode ser reescrita e associada à uma Matriz de Transferência que descreve a estrutura. Essa solução desonvolvida, presente no trabalho de Farzbod e Leamy (2011), pode ser comparada à associada ao comportamento de Elétrons em Cristais e assim notar uma

real similaridade (Equação 1.3).

$$(-w^2M + K)T_v(q) = (-w^2M + K)e^{ik,V}(q) \quad (1.3)$$

Onde M é uma matriz de massa, T_v a matriz de transferência, w a frequência, k o número de onda, V o vetor coordenadas (o qual pode ser uma combinação das três coordenadas (x,y,z) ou apenas uma, como será abordado nesse trabalho), $i = \sqrt{-1}$ e q o vetor de estados.

Esse desenvolvimento é possível graças à periodicidade existente na campo físico estrutural da estrutura periódica. Ou seja, enquanto a periodicidade associada ao comportamento dos elétrons é notada segundo o parâmetro frequência, a periodicidade nas Estruturas Periódicas se dá segundo seu design ou suas propriedades que se repetem ao longo de seu campo físico.

Desse modo, é importante a compreensão da propagação das ondas através das estruturas para que seja possível um design eficiente voltado para a solução de um dado problema.

1.1 Objetivos

Sendo assim, os objetivos do presente trabalho são os seguintes:

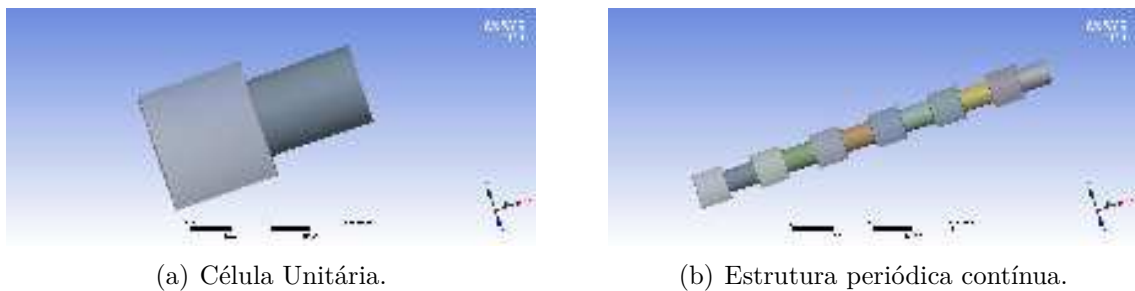
- Apresentar o que é uma estrutura periódica;
- Solução da equação de propagação de uma onda Longitudinal;
- Explicar o Método da Matriz de transferência;
- Apresentar as equações que relacionam o TMM com o teorema de Floquet-Bloch;
- Avaliar os efeitos da variação das propriedades de uma estrutura periódica em sua capacidade de atenuar uma onda longitudinal incidente.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Estrutura periódica

Uma estrutura periódica é aquela formada pela repetição sucessiva de células base compostas por um ou mais segmentos

Figura 2 – Formação de uma estrutura periódica a partir da repetição sucessiva de células unitárias.

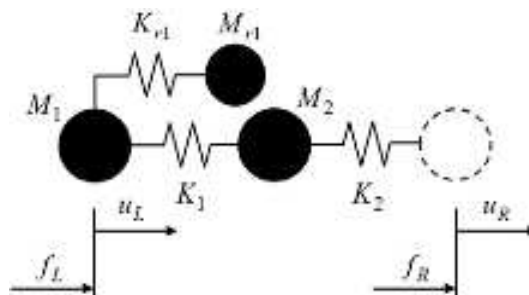


Fonte: Próprio Autor.

Em um sistema contínuo variações repetidas das áreas de dois ou mais segmentos de uma célula podem indicar uma periodicidade (Figuras 2), assim como a variação das propriedades de material dos quais os mesmos são feitos.

Para um sistema discreto a estrutura da célula pode ser representada da seguinte maneira:

Figura 3 – Célula Discreta com Duas Massas Iguais e um Ressonador.



Fonte: (CUNHA et al., 2017).

2.2 Solução da equação da Onda

A equação da onda longitudinal em um meio contínuo é bem conhecida e apresenta a seguinte formulação

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Em que c é a velocidade de propagação da onda no meio, w a frequência de excitação. Pelo método de separação de variáveis, levando em conta a solução harmônica, pode-se dizer que:

$$u(x,t) = u(x)e^{j\omega t} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 (u(x)e^{j\omega t})}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (u(x)e^{j\omega t})}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

$$u''(x) + \frac{w^2}{c^2}u(x) = 0 \quad (2.4)$$

Assim, surge a reação com o número de onda, k , que possui a seguinte forma:

$$k^2 = \frac{w^2}{c^2} \quad (2.5)$$

Portanto, pode-se dizer:

$$u''(x) + k^2u(x) = 0 \quad (2.6)$$

Desse modo, tem-se para análise uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Para sua resolução diz-se que:

$$u(x) = \mu \quad (2.7)$$

E,

$$u(x)'' = \mu^2 \quad (2.8)$$

Assim o problema se reduz à seguinte equação de segundo grau:

$$\mu^2 + k^2\mu = 0 \quad (2.9)$$

Cuja as raízes serão notoriamente complexas conjugadas e nesse caso a forma da solução será a seguinte:

$$u(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad (2.10)$$

Em que α é a parte real das raízes, logo, $\alpha = 0$, e, β é a parte imaginária, logo $\beta = k$. Assim, substituindo esses valores na equação 2.10, tem-se:

$$u(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) \quad (2.11)$$

Após manipulações com as identidades trigonométricas, na qual foi desprezado a parte imaginária, pode-se chegar à seguinte expressão para $u(x)$:

$$u(x) = C_1 e^{jkx} + C_1 e^{-jkx} \quad (2.12)$$

Assim, substituindo a Equação 2.12 na Equação 2.2, é obtida a seguinte proposta de solução para a equação da onda:

$$u(x,t) = C_1 (e^{jkx} + e^{-jkx}) e^{j\omega t} \quad (2.13)$$

Em que C_1 denota uma amplitude de onda que se desloca para a direita, segundo e^{jkx} , e para a esquerda, segundo e^{-jkx} .

2.3 Método da matriz de Transferência

A Matriz de Transferência, demonstrada por T , é aquela que relaciona as variáveis de estado da saída (Deslocamento u_2 , Força F_2) com as da entrada (Deslocamento u_1 , Força F_1) de um sistema dinâmico periódico. Por meio dela é possível utilizar apenas uma célula da estrutura periódica para a caracterização de toda estrutura. Ou seja, as características de uma única célula poderá indicar por meio de sua Matriz de Transferência várias características do comportamento dinâmico de um sistema periódico.

Dentre tais características do sistema pode-se estudar: o posicionamento do *Band Gap* requerido; a taxa de atenuação de vibração na extremidade da estrutura; a Função de Resposta e Frequência (FRF); e as constantes de propagação do sistema.

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ F_2 \end{Bmatrix}_{x=l} = T \begin{Bmatrix} u_1 \\ F_1 \end{Bmatrix}_{x=0} \quad (2.14)$$

Onde:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1R} \\ F_{1R} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

E,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1L} \\ F_{1L} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

De modo que as variáveis com subíndice R se referem à posição à direita de uma célula e com subíndice L à posição à esquerda da mesma célula.

2.3.1 Matriz de Transferência para um Sistema Discreto

Para análise dinâmica de um sistema discreto usa-se a Equação do Movimento na seguinte forma:

$$M\ddot{Q} + KQ = F \quad (2.17)$$

Onde M é a matriz de massa, K a matriz de rigidez, Q o vetor de deslocamento, \ddot{Q} a segunda derivada no tempo dos deslocamentos, logo implica na aceleração, e F o vetor de forças.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{ri} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_L \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_R \\ \ddot{u}_{ri} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_{ri} & -K_1 & 0 & -K_{ri} \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 & 0 \\ -K_{ri} & 0 & 0 & K_{ri} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L \\ u_2 \\ u_R \\ u_{ri} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_2 \\ F_R \\ F_{ri} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Adotando para a equação de movimento a solução harmônica tem-se:

$$\begin{cases} \tilde{u} = ue^{j\omega t} \\ \tilde{F} = Fe^{j\omega t} \end{cases} \quad (2.19)$$

Assim, substituindo a Equação 2.19 na 2.18:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + K_1 + K_{ri} & -K_1 & 0 & -K_{ri} \\ -K_1 & -\omega^2 m_2 + K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 & 0 \\ -K_{ri} & 0 & 0 & -\omega^2 m_{ri} + K_{ri} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_R \\ \tilde{u}_{ri} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_L \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_R \\ \tilde{F}_{ri} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Para facilitar o tratamento das equações serão feitas as seguintes considerações:

$$\begin{cases} A = -\omega^2 m_1 + K_1 + K_{ri} \\ B = -\omega^2 m_2 + K_1 + K_2 \\ C = -\omega^2 m_{ri} + K_{ri} \end{cases} \quad (2.21)$$

Dessa forma, transformando a equação 2.20 em um sistema linear com as substituições propostas pelas equações 2.21, tem-se :

$$\begin{cases} A\tilde{u}_L - K_1\tilde{u}_2 - K_{ri} + 0 + \tilde{u}_{ri} = \tilde{F}_L \\ -K_1\tilde{u}_L + B\tilde{u}_2 - K_2\tilde{u}_R + 0 = 0 \\ 0 - K_2\tilde{u}_2 + K_2\tilde{u}_2 + 0 + 0 = \tilde{F}_R \\ -K_{ri}\tilde{u}_L + 0 + 0 + C\tilde{u}_{ri} = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Assim, para descobrir os vetores de estado da entrada e saída é necessário isolar as variáveis u_2 e u_{ri} e substituí-las no sistema de modo a simplificá-lo. Então:

$$\begin{cases} \tilde{u}_2 = \frac{K_1\tilde{u}_L + K_2\tilde{u}_R}{B} \\ \tilde{u}_{ri} = \frac{K_{ri}\tilde{u}_L}{C} \end{cases} \quad (2.23)$$

Logo, pode-se afirmar:

$$\begin{cases} A\tilde{u}_L - \frac{K_1^2\tilde{u}_L}{B} - \frac{K_1K_2\tilde{u}_R}{B} - \frac{K_{ri}^2\tilde{u}_L}{C} - \tilde{F}_L = 0 \\ \frac{K_1K_2\tilde{u}_L}{B} + \frac{K_2^2\tilde{u}_R}{B} - K_2\tilde{u}_R + \tilde{F}_R = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Por fim, para facilitar os cálculos serão utilizadas duas matrizes, L e R , provenientes das equações 2.24 de modo que:

$$T = R^{-1}L \quad (2.25)$$

Sabendo que as equações 2.24 podem ser expressas da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} A - \frac{K_1^2}{B} - \frac{K_{ri}^2}{C} & -1 \\ \frac{K_1 K_2}{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{F}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{K_1 K_2}{B} & 0 \\ -K_2 + \frac{K_2^2}{B} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_R \\ \tilde{F}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Sendo:

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{K_1 K_2}{B} & 0 \\ -K_2 + \frac{K_2^2}{B} & -1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

E,

$$L = \begin{bmatrix} A - \frac{K_1^2}{B} - \frac{K_{ri}^2}{C} & -1 \\ \frac{K_1 K_2}{B} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Assim, para encontrar a Matriz de Transferência, T para o sistema com duas massas diferentes e um ressonador basta substituir as equações 2.27 e 2.28 na equação 2.25.

2.3.2 Matriz de Transferência para sistema contínuo (ROD)

Para um sistema contínuo a maneira mais simples de se obter a Matriz de Transferência é considerando solução geral da equação de movimento para cada segmento da célula, como visto na equação 2.11 $u(x,t) = A \cos(x_i k_i) + B \sin(x_i k_i)$, e suas derivadas, para a obtenção da força, $f(x) = ES(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$. Dessa forma, é necessário analisar tais equações para as seguintes posições: $x = 0$ e $x = l$, em que l é o comprimento do segmento da célula. Logo:

- $x = l$

$$\begin{cases} u(l,t) = A \cos(l_i k_i) + B \sin(l_i k_i), \\ f(l,t) = -AZ_i \sin(k_i l_i) + BZ_i \cos(l_i K_i) \end{cases} \quad (2.29)$$

- $x = 0$

$$\begin{cases} u(0,t) = A \\ f(0,t) = BZ_i \end{cases} \quad (2.30)$$

Mas é simples notar que para cada célula as seguintes afirmações são verdadeiras:

$$\begin{cases} u(0,t) = u_L \\ f(0,t) = F_L \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\begin{cases} u(l,t) = u_R \\ f(l,t) = F_R \end{cases} \quad (2.32)$$

Assim, tendo os valores de deslocamento e forças iniciais (à esquerda) e finais (à direita) em cada segmento, é possível fazer a seguinte afirmação:

$$\begin{Bmatrix} A \cos(l_i k_i) + B \sin(l_i k_i) \\ -AZ_i \sin(k_i l_i) + BZ_i \cos(l_i k_i) \end{Bmatrix} = T_i \begin{Bmatrix} A \\ BZ_i \end{Bmatrix}. \quad (2.33)$$

Logo:

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos(k_i l_i) & \frac{\sin(k_i l_i)}{Z_i} \\ -Z_i \sin(k_i l_i) & \cos(k_i l_i) \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Onde, $Z_i = \omega S_i \sqrt{E_i \rho_i}$ e é a impedância do segmento, $c_i = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i}}$ e indica a velocidade da propagação da onda no segmento e $k_i = \frac{\omega}{c_i}$ e corresponde ao número de onda do segmento.

Em que os parâmetros com sub índice i são parâmetros de cada segmento da célula, ou seja, l_i é o comprimento do i -ésimo segmento da célula. E assim, T_i é a matriz de transferência de cada segmento. Logo se a célula escolhida possui n segmentos sua Matriz de Transferência da célula será:

$$T_{cell} = (T_i)(T_{i+1})(T_{i+2}) \dots (T_{n-1})(T_n) \quad (2.35)$$

Assim, já conhecida a abordagem da matriz de Transferência Global é necessário abordar sua importância. A mesma é fundamental para encontrar a Função de Resposta em Frequência da estrutura, uma vez que representa a sequência de transferências dos efeitos da propagação da onda de uma célula a outra até percorrer toda estrutura, diferentemente da célula unitária, que apesar de ter sua importância para a análise da dispersão, não consegue apresentar o comportamento dinâmico da estrutura como um todo. No presente fim de capítulo, porém, não será tratada a importância da Matriz de Transferência referente à célula, pois a mesma será discutida na próxima seção.

Portanto, é válido lembrar que a Função de Resposta em Frequência avalia a resposta de algum grau de liberdade da estrutura em função de uma força aplicada em outro grau liberdade. Porém, o uso da Matriz de Transferência é eficiente para tratar de entradas na primeira célula e saída na última.

Logo, tratando dos efeitos dinâmicos e a necessidade dessa avaliação de toda estrutura é necessário, a partir da Matriz de Transferência Global, que se encontre uma matriz que não represente mais o comportamento em estados, mas sim em perspectiva dos vetores provenientes da solução harmônica, ou seja, não mais sobre a forma:

$$\begin{Bmatrix} u_{out} \\ F_{out} \end{Bmatrix} = T_{global} \begin{Bmatrix} u_{in} \\ F_{in} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

, mas sim :

$$\begin{Bmatrix} u_{in} \\ u_{out} \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} F_{in} \\ F_{out} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Sendo que a matriz D pode ser obtida, segundo [Cunha et al. \(2017\)](#) (em sua Equação 2.10), da seguinte maneira:

$$D = \begin{bmatrix} -T_{21}^{-1}T_{22} & T_{21}^{-1} \\ T_{12} - T_{11}T_{21}^{-1}T_{22} & T_{11}T_{21}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Em que D é conhecida como matriz de flexibilidade dinâmica e os T_{ij} são os elementos da Matriz T_{Global} .

2.4 Teorema de Floquet

O teorema de Floquet, também conhecido como Teorema de Floquet-Bloch, foi desenvolvido para a análise do comportamento de elétrons em cristais sólidos. Inicialmente Floquet propôs tal análise para sistemas com uma dimensão e, em seguida, Bloch estendeu tal proposição para mais dimensões. A partir de então o teorema é utilizado para solução de problemas relacionados à propagação de ondas em diversas áreas da física e engenharia.

Assim, segundo o Teorema de Floquet-Bloch

$$A(x + l) = \lambda A(x) \quad (2.39)$$

Em que A pode se uma matriz ou um vetor de estado que se repete periodicamente e λ é chamado de multiplicador de Floquet e é dado por:

$$\lambda = e^{\mu x} \quad (2.40)$$

Em que μ é a constante de propagação e é dada por:

$$\mu = \delta + i\varepsilon \quad (2.41)$$

Na sequência ficará claro que quando a constante de fase ε admitir valores diferentes de zero existirão bandas de atenuação da onda, uma vez que a mesma adota caminhos alternativos, ou melhor, a mesma se dispersa no meio em que se propaga.

2.5 O diagrama de dispersão, segundo Floquet e a Análise da Matriz de Transferência

Agora, conhecidos os conceitos essenciais sobre a Matriz de Transferência e Teorema de Floquet-Bloch é possível relacionar ambos de modo a dispor as características mais importantes da estrutura. Uma vez que com a Matriz de Transferência é possível avaliar o estado (deslocamento e força, causados pela onda) na entrada e saída de uma célula e com coeficiente de dispersão é possível identificar o local band gaps, ou seja, as bandas de frequência em que há dispersão da onda.

Assim, para possibilitar tal relacionamento deve-se lembrar que para a estrutura periódica é válida a seguinte afirmação:

$$X_l^{n+1} = X_r = X_l^n + l \quad (2.42)$$

Pelo exposto nas equações 2.63, 2.64, 2.51 e 2.52 pode-se dizer que:

$$q_l^n = Ae^{j(\omega t - kx_l^n)} \quad (2.43)$$

Onde, A é uma constante que engloba as variáveis que não interessam para a análise em questão e q_l^n é o vetor de estado.

É possível também fazer a seguinte alusão com base no que foi visto pela equação 2.36:

$$q_r = Tq_l \quad (2.44)$$

Sendo q_r o vetor de estados na posição à direita da célula, q_l o vetor de estados na posição à esquerda da célula e T a matriz de transferência. Por outro lado, sabe-se também, com base nas equações 2.42 e 2.44, que:

$$q_r = Ae^{j(\omega t - kx_l^{n+1})} = Ae^{j(\omega t - kx_l^n)} e^{-jkl} \quad (2.45)$$

Mas,

$$Ae^{j(\omega t - kx_l^n)} = q_l \quad (2.46)$$

Logo,

$$q_r = q_l e^{-jkl} \quad (2.47)$$

Dessa forma, encontra-se o problema clássico de autovalor, ao comparar as equações 2.44 e 2.47. De modo que os autovalores da Matriz de Transferência T se relacionam com o número de onda k , e portanto com os coeficientes de dispersão do expoente.

$$Tq_l = e^{-jkl} q_l = e^{\mu l} q_l \quad (2.48)$$

Ou seja, os coeficientes de dispersão são obtidos a partir dos autovalores da Matriz T , λ , e são dados por:

$$\mu = j l \ln(\lambda) \quad (2.49)$$

Onde $j = \sqrt{-1}$. E também vale lembrar que o problema de autovalor nada mais é que encontrar os autovalores mediante:

$$\text{Det}(T - I\lambda) = 0 \quad (2.50)$$

2.6 Análise da Transmissão, Reflexão e Incidência das ondas Longitudinais

Utilizando a solução da equação da onda, apresentada pela equação 2.13, podemos dizer que a propagação de uma onda longitudinal em uma viga de seção circular se dá em duas direções e apresenta a seguinte formulação:

$$u_1(x,t) = A_i e^{-jk_1 x} e^{j\omega t} + A_r e^{jk_1 x} e^{j\omega t} = A_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + A_r e^{j(\omega t + k_1 x)} \quad (2.51)$$

$$u_2(x,t) = A_t e^{-jk_2 x} e^{j\omega t} = A_t e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad (2.52)$$

Em que A_i é a amplitude da onda incidente, A_r a amplitude da onda refletida e A_t a amplitude da onda transmitida.

Figura 4 – Propagação de ondas Longitudinais em uma Estrutura com seções transversais diferentes.

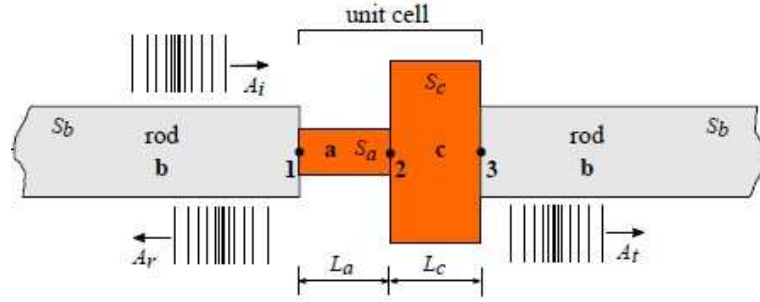


Figura elaborada por Santos (2018).

A partir de então se defini a taxa de transmissão e a taxa de reflexão como sendo:

$$C_{transmissão} = \frac{A_t}{A_i} \quad (2.53)$$

$$C_{reflexão} = \frac{A_r}{A_i} \quad (2.54)$$

Nota-se, portanto, que quando $x = 0$ os deslocamentos $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ são iguais. E assim é possível deduzir que a soma da amplitude incidente e refletida é igual à amplitude da onda transmitida para o próximo segmento.

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) \quad (2.55)$$

$$A_i e^{j\omega t} + A_r e^{j\omega t} = A_t e^{j\omega t} \quad (2.56)$$

Ou seja,

$$A_i + A_r = A_t \quad (2.57)$$

Para calcular as tensões nos segmentos 1 e 2, com a Lei de Hooke, é necessário conhecer $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial u_2}{\partial x}$.

Sendo assim

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} = -A_i j k_1 e^{j(\omega t - k_1 x)} + A_r j k_1 e^{j(\omega t + k_1 x)} \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} = -A_t j k_2 e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad (2.59)$$

Como a análise está sendo feita para a posição $x = 0$, faz-se necessário a substituição nas equações 2.58 e 2.59. Assim tem-se o cálculo de tensão:

$$\sigma_1 = E_1(-A_i j k_1 e^{j\omega t} + A_r j k_1 e^{j\omega t}) \quad (2.60)$$

$$\sigma_2 = E_2(-A_t j k_2 e^{j\omega t}) \quad (2.61)$$

Também é de conhecimento que:

$$F = \sigma S \quad (2.62)$$

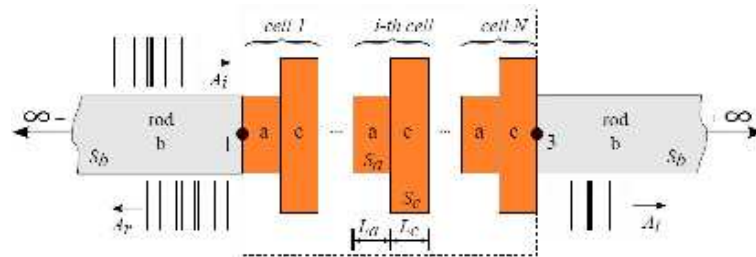
Onde, F é a força aplicada no ponto $x = x_i$, em que x_i é qualquer posição menor que o comprimento da viga (l), e S é a área do viga no mesmo local. Sendo assim, substituindo as equações 2.60 e 2.61, na equação 2.62, tem-se a equação da força em 1 e 2.

$$F_1(x,t) = S_1 E_1(-A_i j k_1 e^{j\omega t} + A_r j k_1 e^{j\omega t}) \quad (2.63)$$

$$F_2(x,t) = -S_2 E_2 A_t j k_2 e^{j\omega t} \quad (2.64)$$

Como é possível notar, foi feita na seção anterior uma análise da propagação da onda no meio periódico com o uso do multiplicador de Floquet (Equação 2.40). Isso é fundamental para o entendimento da sequência de cálculos, uma vez que será utilizada essa notação e a abordada no presente capítulo

Figura 5 – Divisões de uma estrutura periódica para sua análise.



Fonte: (SANTOS, 2018).

Para o seguinte desenvolvimento serão utilizadas as seguintes notações:

$$h(w) = \begin{Bmatrix} u \\ F \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

$$a(w) = \begin{Bmatrix} A_l \\ A_r \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

$$H(w) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ jkES & -jkES \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$T(w) = \begin{bmatrix} e^{jkl} & 0 \\ 0 & e^{-jkES} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Onde u é uma variável de deslocamento, F é a uma variável de Força, A_l e A_r são as amplitudes à esquerda e à direita abordadas anteriormente no presente capítulo, $j = \sqrt{-1}$, k número de onda, E módulo de elasticidade e S área. As matrizes $h(w)$, $H(w)$ e $a(w)$ são, respectivamente, o Vetor de Estados, a Matriz de Transformação e o Vetor de amplitudes:

$$h(w) = H(w)a(w) \quad (2.69)$$

E também,

$$a_R = T a_L \quad (2.70)$$

Onde R e L fazem menção aos vetores do lado direito e esquerdo da estrutura, ou célula, em análise.

E para a avaliação da variação da amplitude da onda incidente utiliza-se uma Matriz de Transferência concebida de maneira não trivial, mas demonstrada por [Santos \(2018\)](#). Segundo o mesmo pode-se afirmar que:

$$a_{out} = G a_{in} \quad (2.71)$$

Sendo que para análise de uma estrutura a_{in} se refere ao estado na entrada e a_{out} ao estado na saída, desse modo que é simples notar que:

$$a_{in} = \begin{Bmatrix} 0 \\ A_i \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

$$a_{out} = \begin{Bmatrix} A_r \\ A_t \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

Em que, também como abordado por Santos (2018):

$$G = -\gamma^{-1}\eta. \quad (2.74)$$

Sendo:

$$\gamma = [(-H_G)_1|(H)_2] \quad (2.75)$$

$$\eta = [(H)_1|(H_G)_2] \quad (2.76)$$

Onde:

$$H_G = T_{global}H \quad (2.77)$$

Sendo que a Matriz de Transferência Global, T_{Global} , foi apresentada pela equação 2.35. Então, com tais definições se estipula a Matriz G_{2x2} .

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Agora, relacionando as equações 2.54, 2.53 e 2.78:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ A_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_r \\ A_t \end{Bmatrix}. \quad (2.79)$$

nota-se que:

$$C_{transmissao} = G_{22} \quad (2.80)$$

$$C_{transmissao} = G_{12} \quad (2.81)$$

3 Avaliações Numéricas

3.1 Estrutura Discreta

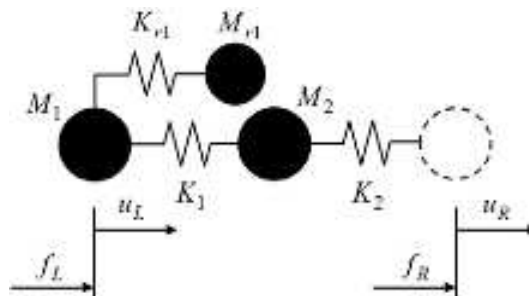
As avaliações a serem feitas acerca da estrutura discreta se dão mediante a existência de ressonadores ou não, a possível diferença entre as massas e ao número de células presentes na estrutura em análise. O último caso será abordado na seguinte seção referente às Estruturas contínuas.

Assim, para a obtenção da Função de Resposta em Frequência e do Diagrama de dispersão faz-se necessário o cálculo das matrizes de transferência, como abordado para a obtenção das equações 2.68 e 2.27, em cada um dos casos citados abaixo com uso das Equações 2.50 e 2.38.

3.1.1 Célula com duas Massas Iguais e um Ressonador

Iniciando pela Célula com duas Massas Iguais e um Ressonador, cujas equações similares já foram abordadas anteriormente (Equações 2.27 e 2.68) e com uso da Equação 2.25 é possível a obtenção do diagrama de dispersão e da FRF.

Figura 6 – Célula iscreta com Duas Massas Iguais e um Ressonador.



Fonte: (CUNHA et al., 2017).

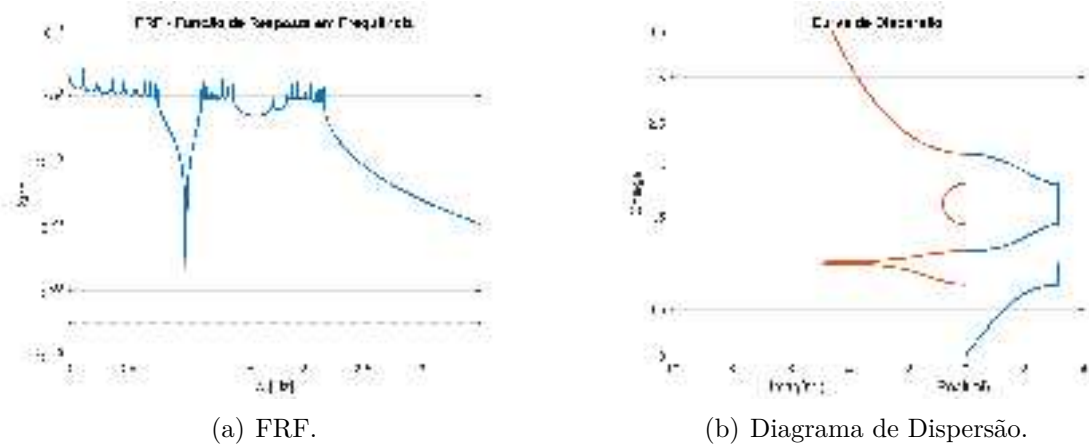
Assim, para o modelo visualizado na Figura 6, adotou-se as seguintes configurações adimensionais para Massa e Rigidez:

Tabela 1 – Relação de massas e rigidezes da Célula com duas Massas Diferentes e um Ressonador.

M_1	1
M_2	1
M_{ri}	1
K_1	1
K_2	1
K_{ri}	1

Desse modo foi possível analisar teoricamente o comportamento pra estrutura composta por essa característica de célula.

Figura 7 – Avaliação da FRF e Coeficientes de dispersão de uma Estrutura com 10 células compostas pela estrutura do item.



Fonte: Próprio Autor.

Nota-se ao observar a Figura 7 a presença de dois Band Gaps, sendo que um está próximo à frequência natural do ressonador, o que mostra, pela primeira vez no atual trabalho a possibilidade de se ajustar tal atenuação para uma frequência desejada.

Por fim, é possível calcular as frequências que representam as bordas do Band Gap, as quais se dão, como já mencionado, quando a parte imaginária do coeficiente de propagação é diferente de zero.

Tabela 2 – Duas Massas e um Ressonador

Bordas do Band Gap	0,7651	1,126	1,4141	1,8476	2,1751
---------------------------	--------	-------	--------	--------	--------

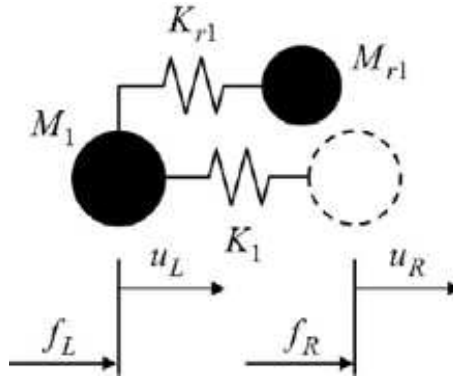
3.1.2 Célula com uma Massa e um Ressonador

Agora, de modo similar ao abordado anteriormente, avaliam-se a características da estrutura com $N = 10$ células com a configuração semelhante à exposta na Figura 8.

Para tanto, foi necessário encontrar as matrizes R e L da mesma para que a partir delas se encontrasse a Matriz de Transferência, assim como abordado pelas Equações 2.68 e 2.27. Onde:

$$L = \begin{bmatrix} A - \frac{K_{ri}^2}{B} & -1 \\ K_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Figura 8 – Célula com uma massa e um ressonador.



Fonte: (CUNHA et al., 2017).

$$R = \begin{bmatrix} -K_1 & 0 \\ -K_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Onde $A = -w^2m_1 + K_1 + K_{ri}$ e $B = -w^2m_{ri} + K_{ri}$. Desse modo a partir dessas matrizes, por meio da Equação 2.25, é possível encontrar a Matriz de Transferência para o caso.

Assim foram assumidas as seguintes propriedades de massa e rigidez na Tabela 3.

Tabela 3 – Relação de massas e rigidezes da Célula com uma Massa e um Ressonador.

M_1	1
M_{ri}	1
K_1	1
K_{ri}	1

Assim, é traçado o Gráfico de Dispersão e FRF para análise da estrutura.

Nesses caso, possível notar pela Figura 9 a presença de um band gap acentuado na região da frequência natural do ressonador.

Tabela 4 – Add caption

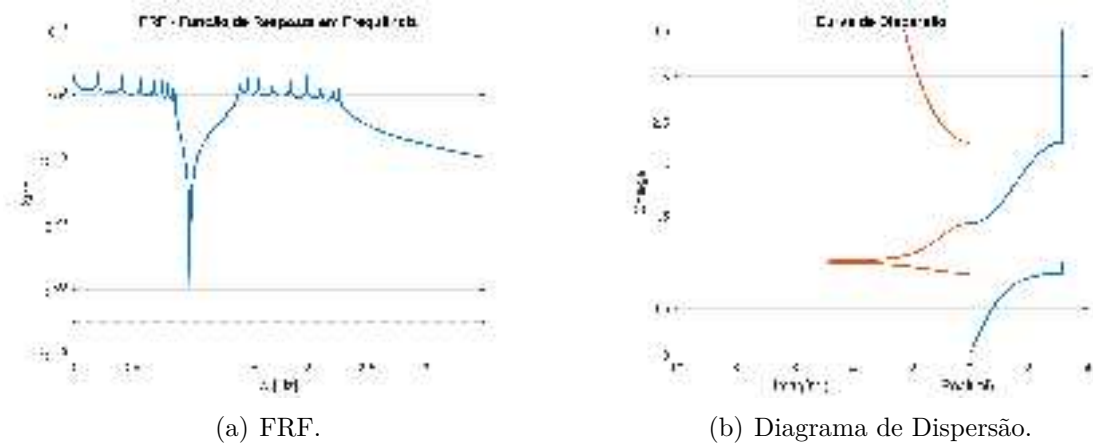
Uma massa e um ressonador

Bordas do Band Gap	0,8739	1,414	2,2881
---------------------------	--------	-------	--------

3.1.3 Célula com duas Massas Diferentes

A célula com duas massas diferentes é de grande importância para o atual trabalho, visto que a abordagem futura será voltada para uma estrutura contínua que será

Figura 9 – Avaliação da FRF e Coeficientes de dispersão de uma Estrutura com 10 células compostas pela estrutura do item.



Fonte: Próprio Autor.

discretizada conforme tal modelo. Apesar de não possuir ressonadores em sua composição, a mesma, repetida n vezes, pode representar também uma estrutura periódica, assim como exemplificado na Figura 2.

A discretização nesse caso pode ser observado abaixo, na Figura 10.

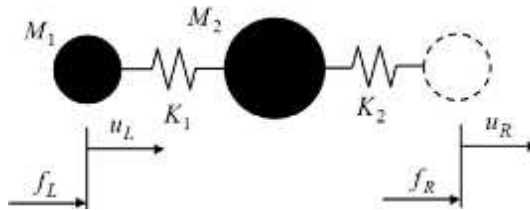


Figura 10 – Célula com duas massas diferentes. Fonte: (CUNHA et al., 2017).

Além disso, assim como abordado nas seções anteriores, é necessário o cálculo da Matriz de Transferência a partir das Equações 2.27 e 2.68.

$$L = \begin{bmatrix} A - \frac{K_1^2}{B} & -1 \\ \frac{K_1 K_2}{B} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{K_1 K_2}{B} & 0 \\ -K_2 - \frac{K_2^2}{B} & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Em que $A = -w^2 m_1 + K_1$ e $B = -w^2 m_2 + K_1 + K_2$ e as propriedades associadas à análise estão dispostas na Tabela 5.

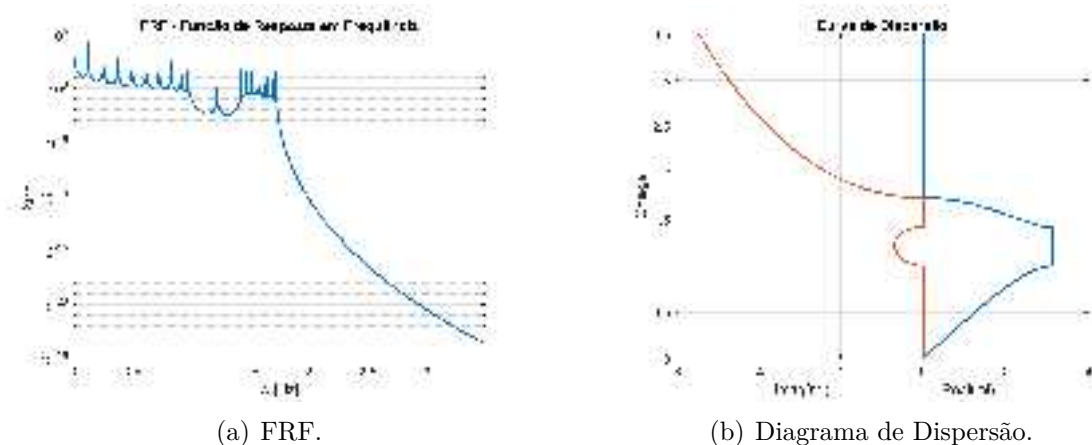
As propriedades usadas para a análise em questão foram dispostas na Tabela 5.

Tabela 5 – Relação de massas e rigidezes da Célula com duas Massas Diferentes e um Ressonador.

M_1	1
M_2	2
K_1	1
K_2	1

Desse modo ao substituir as Matrizes R e L nas Equação 2.25 e a partir da mesma encontrar a Matriz de Transferência Global foi possível traçar os Gráficos de dispersão e a FRF dispostos na Figura 11

Figura 11 – Avaliação da FRF e Coeficientes de dispersão de uma Estrutura com 10 células compostas pela estrutura do item.



(a) FRF.

(b) Diagrama de Dispersão.

Fonte: Próprio Autor.

E para o caso as Bordas do *Band Gap* foram as seguintes.

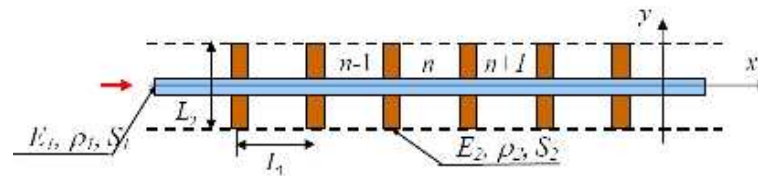
Tabela 6 – Relação de massas e rigidezes da Célula com duas Massas Diferentes e um Ressonador.

Duas Células Diferentes		
Bordas do Band Gap	0,9999	1,4141 1,7318

3.2 Estrutura Contínua

A Estrutura Contínua que será abordada no presente trabalho será a exemplificada pela Figura 2. Os modelos numéricos utilizados se basearam nas equações 3.2 e 2.40, principalmente. Não muito diferente da proposta abordada no estudo discreto, o estudo contínuo baseia-se na análise da Matriz de Transferência da estrutura proposta. Assim, à partir da mesma é possível obter as Funções de Resposta em Frequência, FRF, e as curvas de dispersão por meio do Multiplicador de Floquet.

Figura 12 – Estrutura Contínua.

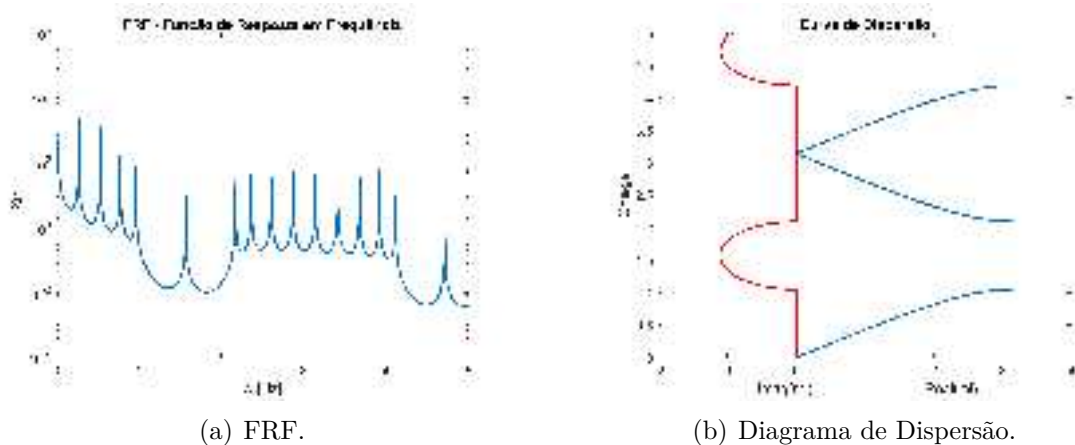


Fonte: (AYZENBERG-STEPANENKO et al.,)

Apesar de haver uma infinidade de designs para uma estrutura periódica contínua o atual trabalho abordou apenas uma, Figura 12.

Para a estrutura contínua são analisadas a Função de Resposta, obtida pela Matriz de Flexibilidade (Equação 2.38) em Frequência e a Curva de dispersão, obtida pela Equação 2.47 com os autovalores obtidos da Matriz de Transferência para estruturas contínuas 3.2. E as mesmas são dispostas nas imagens da Figura 13.

Figura 13 – Avaliação da FRF e Coeficientes de dispersão de uma Estrutura com 10 células compostas pela estrutura do item.



(a) FRF.

(b) Diagrama de Dispersão.

Fonte: Próprio Autor.

3.3 Resultados

Assim, validado o modelo numérico pela conformidade da FRF (Apêndice A) é plausível afirmar que o método da Matriz de Transferência é próprio para as análises qualitativas de Propagação abordadas no presente trabalho, as quais são, notoriamente, satisfatórias para a elaboração de um anteprojeto de uma estrutura periódica. Sendo elas:

- Análise das Funções de Resposta em Frequência, obtida com o termo G_{22} da Matriz de Flexibilidade obtida na Equação 2.38;

- Análise do Diagrama de Dispersão, obtido pelo multiplicado de Floquet, 2.40, advindo da Resolução do problema de autovalor, Equação 2.50 da Matriz de Transferência;
- Análise dos Coeficientes de Transmissão e Reflexão, obtidos com as Equações 2.53 e 2.54.

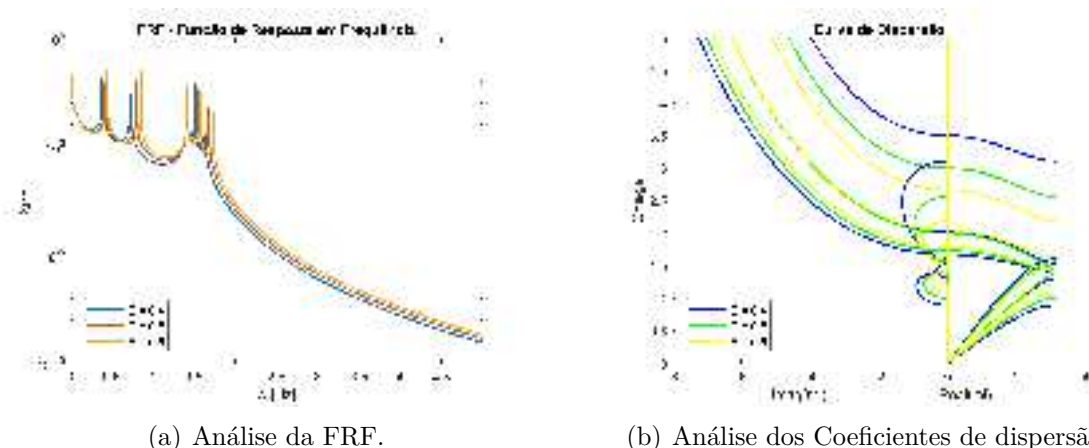
Sob tal sergurança, avalia-se variações de algumas propriedades que implicam diretamente na capacidade de propagação das ondas longitudinais incidentes na estrutura. Portanto, essa seção irá abordar os efeitos da variação de cada uma das propriedades relevantes para o design de um estrutura periódica.

Para todas as análises dispostas a seguir, com exceção da análise da variação do número de células, é utilizado um modelo com 3 células, com 10 mil pontos caracterizando a Matriz de Transferência para um intervalo de frequências entre $0Hz$ e $5Hz$. E para essa tarefa é utilizado o Software MATLAB.

3.3.1 Variação do Módulo de Elasticidade dos elementos da célula

Os resultados obtidos variando a diferença entre os Módulo de Elasticidade de cada elemento das células foram expostos nas Figuras 14 e 15. Os mesmos mostram que esse parâmetro é eficaz para a modificação do limite inferior da borda do bang gap associado à estrutura.

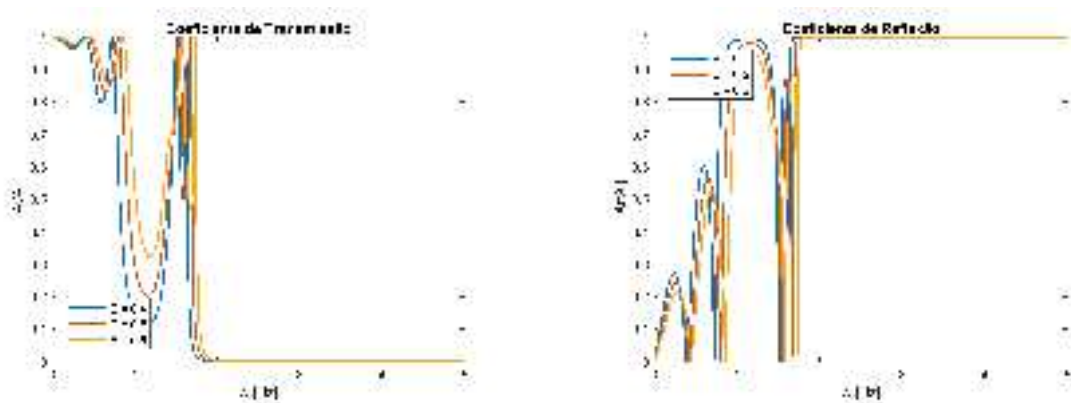
Figura 14 – Avaliação das alterações na FRF e Coeficientes de dispersão gerados pela variação do módulo de Elasticidade.



Fonte: Próprio Autor.

A capacidade de atenuação também apresenta mudanças significativas à medida que se aumenta a diferença $E = E_2/E_1$. O que mostra que a acentuação de um parâmetro responsável por caracterizar a periodicidade da estrutura acentua também sua capacidade de atenuar ondas longitudinais incidentes na mesma.

Figura 15 – Avaliação dos efeitos que a variação do módulo de Elasticidade podem gerar na Transição e Reflexão da onda.

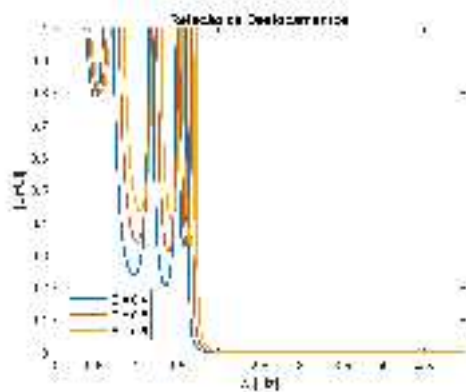


(a) Análise Coeficiente de Transição.

(b) Análise Coeficiente de Reflexão.

Fonte: Próprio Autor.

Figura 16 – Avaliação dos efeitos que a variação do módulo de Elasticidade podem gerar no deslocamento incidente na estrutura e o resultante da extremidade direita.



(a) Análise Coeficiente de Transição.

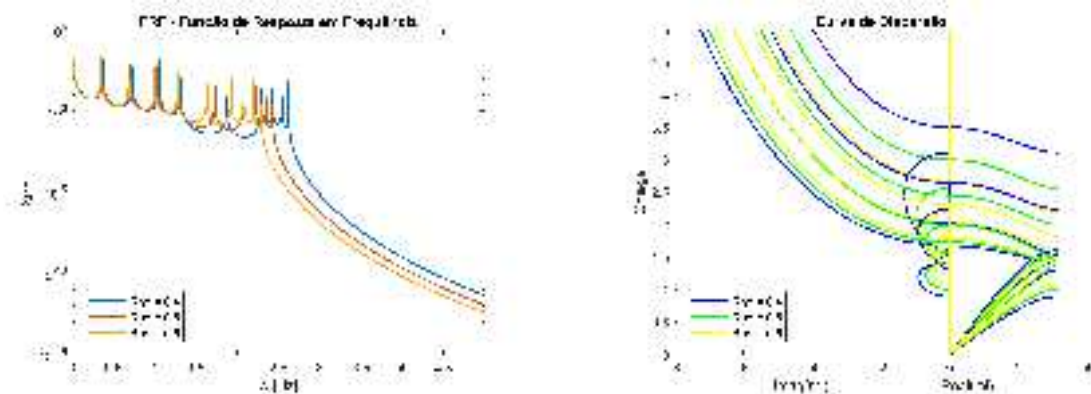
Fonte: Próprio Autor.

3.3.2 Variação da Densidade dos elementos da célula

Ao analisar as imagens dispostas na Figura 17, nota-se ao variar a relação entre as densidades de cada elemento da célula, ocorreu uma variação no limite superior das bordas do band gap. Ou seja, a densidade é um parâmetro de design apto a aumentar o tamanho da banda de atenuação com limite mínimo fixado em um dado valor.

Também quando são observadas as imagens dispostas na Figura 18, nota-se que a densidade é um parâmetro que influencia significativamente na capacidade de atenuar as Amplitudes incidentes na estrutura periódica. E ao comparar a capacidade de atenuação obtida pela variação das diferenças de densidade, $\rho = \rho_2/\rho_1$, com as obtidas pela variação das diferenças de Módulo de Elasticidade E observou-se uma clara similaridade no potencial máximo de atenuação.

Figura 17 – Avaliação das alterações na FRF e Coeficientes de dispersão gerados pela variação da Densidade.

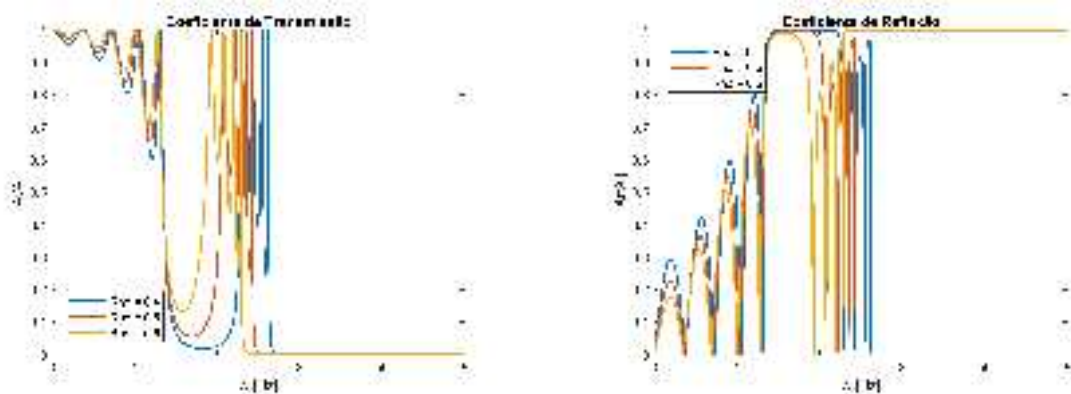


(a) Análise Coeficiente de Transição.

(b) Análise Coeficiente de Reflexão.

Fonte: Próprio Autor.

Figura 18 – Avaliação dos efeitos que a variação da Densidade pode gerar na Transição e Reflexão da onda.



(a) Análise Coeficiente de Transição.

(b) Análise Coeficiente de Reflexão.

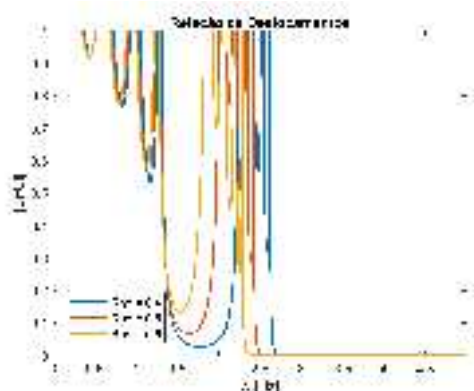
Fonte: Próprio Autor.

3.3.3 Variação da Área de Seção transversal dos elementos da célula

Já a variação entre as diferenças de seção transversal de cada elemento da célula, $A = A_1/A_2$, provoca uma redução ou expansão de ambas bordas do band gap, como se nota nas imagens da Figura 20.

Vide tal característica associada ao mútuo deslocamento das bandas com a variação da propriedade em estudo, nota -se, pelas Figuras 21 e 22, que o pico de atenuação ocorre sempre na mesma frequência, porém com máximo muito similar ao ocorrido com as outras variações estudadas.

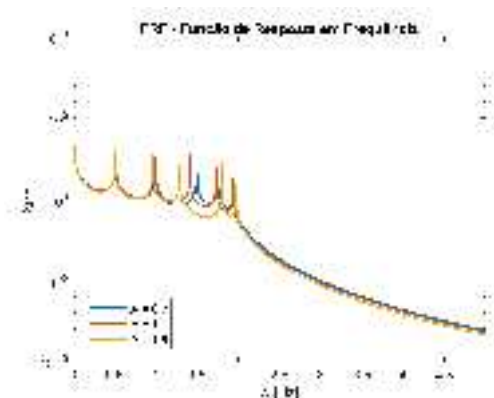
Figura 19 – Avaliação dos efeitos que a variação da Densidade pode gerar no deslocamento incidente na estrutura e o resultante da extremidade direita.



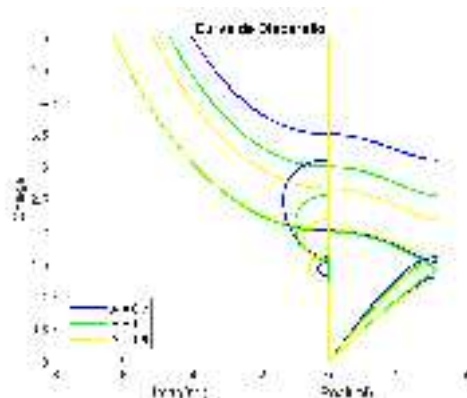
Fonte: Próprio Autor.

(a) Análise da relação de deslocamentos.

Figura 20 – Avaliação das alterações na FRF e Coeficientes de dispersão gerados pela variação da área de seção transversal.



(a) Análise Coeficiente de Transição.



(b) Análise Coeficiente de Reflexão.

Fonte: Próprio Autor.

3.3.4 Variação do comprimento dos elementos da célula

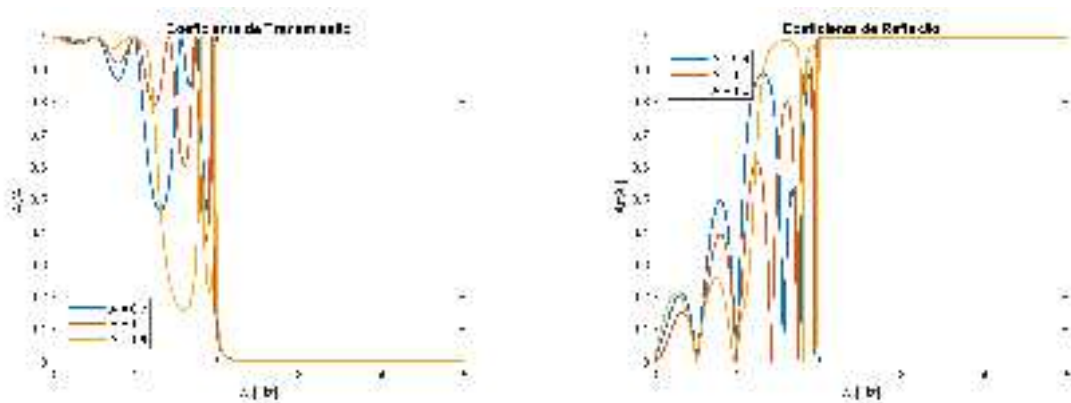
A variação das relações entre os comprimentos dos elementos das célula, $L = L_2/L_1$, exposta pelas Figuras 23 e 24, mostrou um mesmo comportamento visto com a variação da densidade.

3.3.5 Variação do número de células

A variação entre o número de células utilizadas para o design de uma estrutura periódica é um parâmetro muito interessante de se analisar, uma vez que mantém as bordas do *band gap* invariáveis mediante o aumento ou redução de tal parâmetro, como é possível notar pela Figura 26.

Por esse motivo é necessário analisar apenas uma célula para se escolher a propriedade de massa dos materiais utilizados para a confecção de uma determinada estrutura.

Figura 21 – Avaliação dos efeitos que a variação da área de seção transversal podem gerar na Transição e Reflexão da onda.

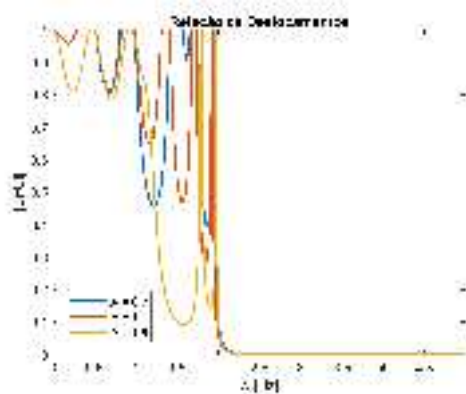


(a) Análise Coeficiente de Transição.

(b) Análise Coeficiente de Reflexão.

Fonte: Próprio Autor.

Figura 22 – Avaliação dos efeitos que a variação da área de seção transversal podem gerar no deslocamento incidente na estrutura e o resultante da extremidade direita.



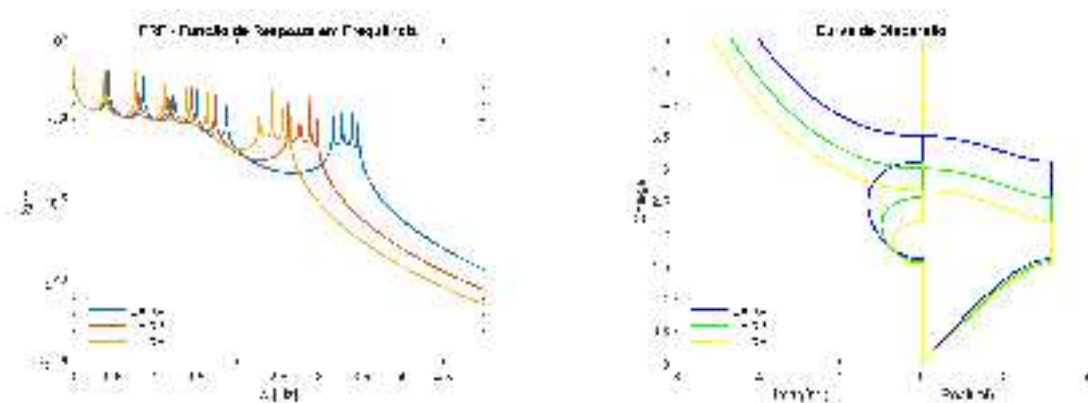
(a) Análise Coeficiente de Transição.

Fonte: Próprio Autor.

Isso, sob uma perspectiva computacional, é uma excelente economia.

E quanto à análise da capacidade de atenuação feita mediante à variação do número de células de uma estrutura, exposta nas Figuras 27 e 28, nota-se que o aumento do número de células aumenta também a capacidade de atenuação. É válido expor, por outro lado, que esse aumento acentua o efeito gerado pela variação dos outros parâmetros.

Figura 23 – Avaliação das alterações na FRF e Coeficientes de dispersão gerados pela variação do comprimento da célula.

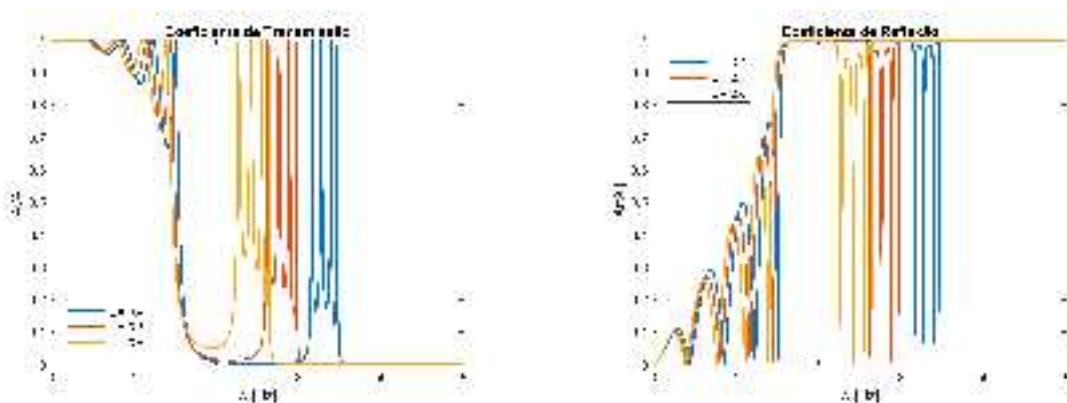


(a) Análise Coeficiente de Transição.

(b) Análise Coeficiente de Reflexão.

Fonte: Próprio Autor.

Figura 24 – Avaliação dos efeitos que a variação do módulo do comprimento da célula podem gerar na Transição e Reflexão da onda.

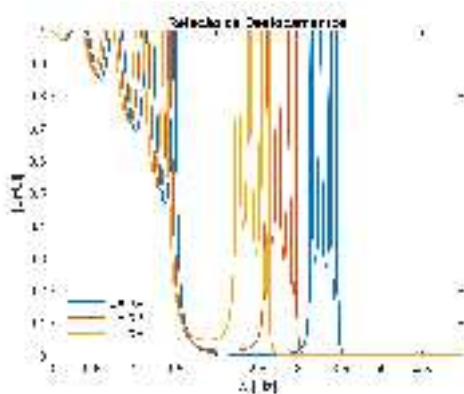


(a) Análise Coeficiente de Transição.

(b) Análise Coeficiente de Reflexão.

Fonte: Próprio Autor.

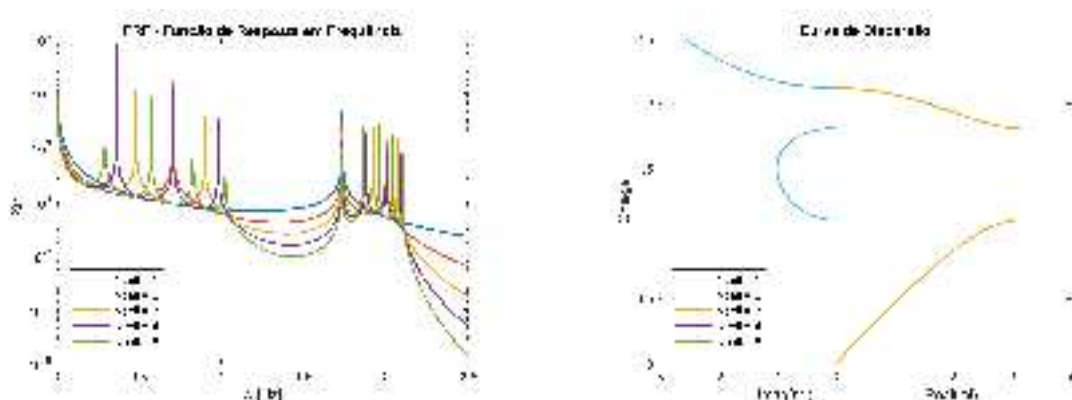
Figura 25 – Avaliação dos efeitos que a variação do comprimento da célula podem gerar no deslocamento incidente na estrutura e o resultante da extremidade direita.



(a) Análise Coeficiente de Transição.

Fonte: Próprio Autor.

Figura 26 – Avaliação das alterações na FRF e Coeficientes de dispersão gerados pela variação do número de células.

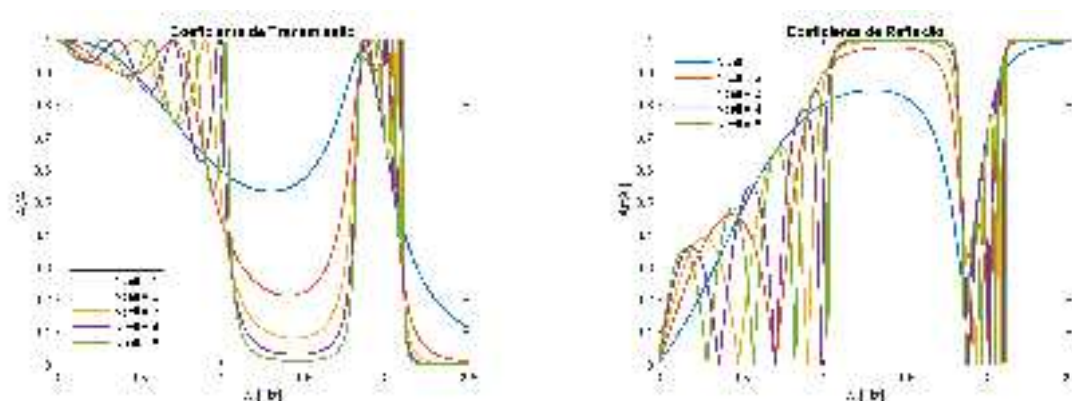


(a) Análise Coeficiente de Transição.

(b) Análise Coeficiente de Reflexão.

Fonte: Próprio Autor.

Figura 27 – Avaliação dos efeitos que a variação do número de células podem gerar na Transição e Reflexão da onda.

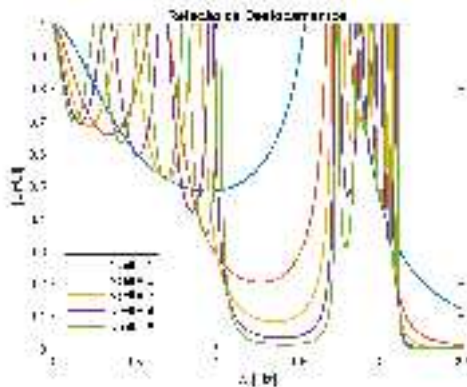


(a) Análise Coeficiente de Transição.

(b) Análise Coeficiente de Reflexão.

Fonte: Próprio Autor.

Figura 28 – Avaliação dos efeitos que a variação do número de células podem gerar no deslocamento incidente na estrutura e o resultante da extremidade direita.



(a) Análise Coeficiente de Transição.

Fonte: Próprio autor.

4 Conclusão

Neste trabalho pode ser notado, portanto, que as Estruturas Periódicas além de serem proeminentes nas soluções dos problemas advindos da propagação de ondas através das estruturas, como o ruído e a vibração, também são de simples estudo e proposição.

Isso é possível de ser notado por meio da compreensão e utilização do Método da Matriz de Transferência e do Teorema de Floquet Bloch. Afinal, como nota-se no presente trabalho, as complexidades oriundas da confecção de malha, tamanhos de matrizes e procedimentos de cálculos são facilmente substituídas pelos produtos obtidos da Matriz de Transferência, a qual caracteriza a estrutura periódica, e pelo coeficiente de dispersão da mesma matriz. Esses produtos são as curvas de dispersão, reflexão e transmissão, atenuação e Função de Resposta em Frequência .

E para essa compreensão os objetivos apresentados foram cumpridos. Isso pois, o procedimento de cálculos para obtenção da Matriz de Transferência apresenta como fundamento básico a equação da onda. Compreendendo isso é possível modelar a propagação de uma onda em função das propriedades da estrutura que se deseja confeccionar e então é possível estruturar a Matriz de Transferência. Conhecendo a Matriz de Transferência e o conceito de Floquet Bloch é possível, por fim, através dos autovalores daquela, obter os coeficientes de propagação dessa.

Com isso foi possível, ao variar as propriedades de uma estrutura proposta, ou modo como a onda se propaga nela e assim sua Matriz de transferência, verificar os efeitos nas curvas de dispersão, reflexão, transmissão, atenuação e Função de Resposta em Frequência. E dessa forma compreender os conceitos matemáticos fundamentais para se projetar e analisar uma Estrutura Periódica.

E sob tais perspectivas propõe-se as seguintes possibilidades de pesquisa e análises para trabalhos futuros:

- Proposição de uma estrutura que atenua bandas de frequências características de motores aeronáuticos com eixos coaxiais;
- Proposição de uma estrutura periódica contínua com ressonadores
- Proposição de uma estrutura periódica cuja periodicidade seja representada por PZT.

Referências

AYZENBERG-STEPANENKO, M. et al. Waves in periodic structures. Citado na página 33.

CUNHA, L. R. et al. Robust bandgaps for vibration control in periodic structures. Universidade Federal de Uberlândia, 2017. Citado 6 vezes nas páginas 6, 14, 21, 28, 30 e 31.

FARZBOD, F.; LEAMY, M. J. Analysis of bloch's method and the propagation technique in periodic structures. *Journal of vibration and acoustics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 133, n. 3, p. 031010, 2011. Citado na página 12.

HOWLETT, J. T. et al. Interior noise reduction in a large civil helicopter. 1977. Citado na página 11.

OSGOOD, R. *Dynamic characterization testing of wind turbines*. [S.l.], 2001. Citado na página 12.

SANTOS, R. B. An alternative approach to design periodic rods. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2018. Citado 5 vezes nas páginas 11, 24, 25, 26 e 27.

SZEFI, J. T. *Helicopter gearbox isolation using periodically layered fluidic isolators*. [S.l.: s.n.], 2003. Citado na página 11.

APÊNDICE A – Validação do Modelo Discreto e Contínuo

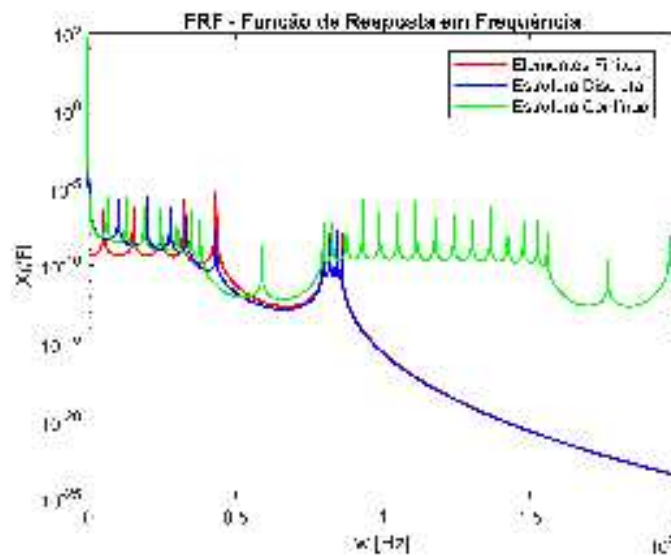
Para a validação utilizou-se o modelo de uma estrutura contínua com as seguintes configurações:

Tabela 7 – Propriedades da estrutura utilizada para validação.

Célula da Estrutura Periódica - Alumínio		
Propriedades	Elemento 1	Elemento 2
Área [m ²]	0.0015	0.0045
Densidade [kg/m ³]	2770	2770
Módulo de elasticidade [Pa]	7.1e10	7.1e10
Comprimento[m]	0,135	0,135

Utilizou-se um modelo de verificação de elementos finitos para avaliar se as Funções de Resposta em Frequência dos modelos propostos no trabalho estão condizentes com a realidade. E assim, o resultado obtido foi o seguinte:

Figura 29 – Comparação entre os modelos Contínuo e Discreto, obtidos pela Matriz de Transferência e um modelo de elementos finitos obtido pela Matriz de Rigidez.



Fonte: Próprio Autor.

Nota-se, portanto, que os modelos abordados por meio da matriz de transferência são válidos para outros estudos que partem do mesmo princípio.