Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Licenciatura em Matemática

Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos

Paulo Victor Santana

Uberlândia-MG
2019

Paulo Victor Santana

Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Elisa Regina dos Santos

Uberlândia-MG
2019

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Coordenação do Curso de Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Uberlândia, 12 de julho de 2019

BANCA EXAMINADORA

Elisa Regina dos Santos.

Elisa Regina dos Santos

Lúcia Resende Pereira

Lúcia Resende Pereira Bonfim

Sônia Sarita Berrios Yana

Uberlândia-MG

2019

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer as pessoas para as quais dedico este trabalho, meus pais, Marcelo José Santana e Maria Heleni Gomide Santana. Muito obrigado por acreditarem em mim! Todo apoio e suporte que deram durante estes quase 5 anos de graduação foram essenciais para minha caminhada até aqui. Sem vocês nada disso seria possível e mais do que isso, agradeço também pela criação e educação que vocês me deram, possibilitando eu me tornar a pessoa que sou hoje. E gostaria de agradecer também a Ana Beatriz, por ser uma ótima irmã e uma amiga que sempre posso contar.

Agradeço a minha orientadora Elisa Regina por ter aceitado o desafio de realizarmos este trabalho em um curto espaço de tempo, e também por toda paciência, dedicação e ensinamentos tanto como minha orientadora, quanto como tutora do grupo PET.

Agradeço a todos professores da FAMAT que contribuíram de alguma forma para minha formação. Um agradecimento especial aos professores: Arlindo Júnior, Cícero Carvalho, Dylene Agda, Elisa Regina, Fábio Bertoloto e Rafael Figueiredo as conversas que tivemos e os conselhos que me deram foram essenciais para direcionar meu caminho dentro da Matemática. Além disso, considero vocês excelentes profissionais e os levo como exemplos para a minha carreira profissional.

Agradeço os meus amigos, Dino, Japa, Luís, Luísa, Gabi, Arthur, Fellipe, João Paulo, Gabriel, Fernado, Alef, Elis, Bruno, André, Christopher, Kauane, Gisele, Leo, Ana e todos integrantes do grupo PET. Muito obrigado por todo apoio, conselhos, conversas e estudos em grupo, tudo isso foi de grande importância para meu percurso na graduação. Agradeço também aos meus amigos Caio, Rodrigo, Léo, Carol, Igor e Tiago, pois aprendi muito com vocês no meu tempo em Coimbra.

Agradeço a todos professores da Universidade de Coimbra que contribuíram de alguma forma para a minha formação. Um agradecimento especial para a professora Fátima Leite que me ajudou muito durante toda minha estadia em Portugal.

Agradeço a minha namorada Byhanka por todo apoio, incentivo e ajuda durante a realização deste trabalho. Tudo isso foi de suma importância para a realização do mesmo.

Agradeço a CAPES, pela oportunidade de participar do Programa de Licenciaturas Internacionais.

E por último, agradeço a todos que me ajudaram de alguma forma na minha caminhada até aqui, meu sincero, MUITO OBRIGADO!!

"Idéias e somente idéias podem iluminar a escuridão."

Ludwig von Mises

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar o Teorema Espectral para operadores compactos autoadjuntos em espaços de Hilbert. No segundo capítulo, apresentaremos algumas definições, exemplos e resultados relevantes na Análise Funcional e importantes para a compreensão dos Capítulos 3 e 4. No terceiro capítulo, traremos um estudo dos famosos espaços de Hilbert. E no quarto e último capítulo, falaremos sobre operadores lineares compactos e/ou autoadjuntos, e apresentaremos o teorema que dá nome a este trabalho.

Palavras-chave: Análise Funcional, Teorema Espectral, Espaços de Hilbert, Operadores Compactos, Operadores Autoadjuntos..

Abstract

The primary purpose of this work is to present the Spectral Theorem for compact self-adjoint operators on Hilbert spaces. In the second chapter, we will introduce some relevant definitions, examples, and results in Functional Analysis, which are important for the understanding of Chapters 3 and 4. In the third chapter, we will present a study about the famous Hilbert spaces, while in the fourth and last chapter we will talk about compact and/or self-adjoint operators, and present the theorem that names this work.

Keywords: Functional Analysis, Spectral Theorem, Hilbert spaces, Compact Operators, Self-adjoint Operators..

Sumário

1. Introdução

A Análise Funcional, a grosso modo, é o ramo da Matemática que trata do estudo de espaços de dimensão infinita e também dos operadores lineares contínuos entre tais espaços, podendo ser vista até mesmo como sendo uma generalização natural da Álgebra Linear Clássica. Segundo [1], essa é uma área fascinante, com aplicações em vários outros ramos da Matemática, como por exemplo a Análise Não Linear, a Teoria de Controle, a Otimização, as EDP's e a moderna Teoria dos Espaços de Banach.

Durante o estudo aqui exposto, passamos por alguns dos principais teoremas da Análise Funcional, como por exemplo o Teorema de Hahn-Banach e o Teorema da Representação de Riesz. O Teorema de Hahn-Banach trata das extensões de funcionais lineares, definidos em subespaços vetoriais, que preservam certas propriedades. De acordo com [7], os matemáticos Riesz e Helly, em 1911 e 1912 respectivamente, obtiveram os primeiros teoremas de extensão de funcionais em alguns espaços de funções. O primeiro resultado para o caso real foi obtido por Hahn em 1927 e, de forma mais geral, por Banach em 1929. A versão complexa foi publicada em 1938 por Bohnenblust e Sobczyk. Já o Teorema da Representação de Riesz nos diz que para todo funcional linear contínuo ϕ sobre um espaço de Hilbert E, existe um vetor y_0 em E tal que $\phi(x)$ para qualquer vetor x em E é o produto interno de x com y_0. Tal teorema foi provado em 1907 por Riesz, e independentemente, por Frechet.

Dentre os vários espaços de dimensão infinita estudados em Análise Funcional, temos uma classe especial de espaços denominados por Espaços de Hilbert. Os espaços de Hilbert foram introduzidos por David Hilbert, o qual realizou um estudo desses no contexto de equações integrais. Neste trabalho, apresentaremos um estudo de conceitos e resultados da Análise Funcional que são necessários para investigar alguns tipos de operadores lineares em tais espaços.

Na Álgebra Linear, temos contato com diversas versões do Teorema Espectral, as quais são fundamentais pois garantem a existência de uma base ortonormal de autovetores para alguns tipos de operadores, o que facilita o trabalho com tais operadores. Entretanto, trabalhamos apenas com espaços de dimensão finita. Segundo [2], o Teorema Espectral pode ser generalizado para operadores sobre espaços de dimensão infinita, tornando-se uma poderosa ferramenta, muito utilizada na análise, em EDP's, bem como na mecânica quântica. Enquanto o caso finito já era conhecido, o caso para dimensões infinitas foi obtido por David Hilbert, por volta de 1909, quando os espaços de Banach e Hilbert foram formalizados. A partir desse momento, e nos 30 a 40 anos que se seguiram, em junção com o rápido desenvolvimento da mecânica quântica, a pesquisa nessa área foi ampliada. Muitos dos resultados sobre espaços de Hilbert são devidos a matemáticos como o próprio Hilbert (que também começou a trabalhar em física depois de 1912), John von Neumann e Hermann Weyl, bem como físicos, para os quais os espaços de Hilbert desempenharam um papel central.

2. Conceitos e Resultados Básicos em Análise Funcional

Neste capítulo apresentaremos definições e resultados importantes para a compreensão do objetivo final do trabalho. Separamos o capítulo em quatro seções: Espaços Normados, Espaços ℓ_p e ℓ_∞, Operadores Lineares Contínuos e os Teoremas de Hahn-Banach. Utilizamos aqui as referências [3], [4], [5] e [6].

2.1 Espaços Normados

Fixemos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 2.1.1. *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma* ***norma*** *em E é uma função*

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

(i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in E$.

A desigualdade (iii) é chamada de ***desigualdade triangular****. Um espaço vetorial E munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado* ***espaço vetorial normado*** *ou simplesmente* ***espaço normado****.*

Definição 2.1.2. *Seja X um conjunto não vazio. Uma* ***métrica*** *ou* ***distância*** *em X é uma função*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$;

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todos $x, y, z \in X$.

O par (X, d) é chamado ***espaço métrico****.*

É fácil ver que todo espaço normado X é um espaço métrico com a **métrica natural**, definida por:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Definição 2.1.3. *Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico (M, d).*

(i) Dizemos que (x_n) ***converge*** *para $x \in M$ se $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Neste caso (x_n) é dita* ***convergente*** *e escrevemos $x = \lim x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ou $x_n \longrightarrow x$. Caso contrário, dizemos que (x_n) é* ***divergente****.*

(ii) A sequência (x_n) é uma ***sequência de Cauchy*** *se $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$.*

(iii) O espaço métrico (M, d) é dito ***completo*** *se toda sequência de Cauchy em M convergir para um elemento de M.*

Proposição 2.1.1. *Toda sequência convergente de um espaço métrico é de Cauchy.*

Demonstração. Sejam M um espaço métrico e (x_n) uma sequência convergente em M, com $x_n \longrightarrow x$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy. □

Definição 2.1.4. *Um conjunto F é dito* ***fechado*** *em um espaço métrico M se $M - F$ é aberto.*

Definição 2.1.5. *Um espaço normado E é dito um* ***espaço de Banach*** *se é completo em relação a métrica natural.*

Exemplo 2.1.1. *Os espaços normados $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ são espaços de Banach.*

Exemplo 2.1.2. *Seja X um conjunto não vazio. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita* ***limitada*** *se existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in X$. Considere o seguinte conjunto*

$$B(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ é limitada}\}.$$

Tal conjunto é um espaço vetorial com as operações usuais de funções e se torna um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Mostraremos que $\|\cdot\|_\infty$ é de fato uma norma:

(i) $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \geq 0$ *e* $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$

(ii) $\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(x)| : x \in X\} = |\lambda| \sup\{|f(x)| : x \in X\} = |\lambda| \|f\|_\infty.$

(iii)
$$\begin{aligned}\|\mathrm{f}+\mathrm{g}\|_\infty = \sup\{|\mathrm{f(x)}+\mathrm{g(x)}| : \mathrm{x} \in \mathrm{X}\} &\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in X\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\} \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

Agora, provaremos que $B(X)$ é Banach. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $B(X)$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in X. \tag{2.1}$$

Assim, $(f_n(x))$ é de Cauchy para todo $x \in X$. Como $\mathbb{K}$ é completo, $(f_n(x))$ é convergente para todo $x \in X$. Definamos $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Mostremos que $f \in B(X)$ e que $f_n \longrightarrow f$. Temos que dado $\varepsilon = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_1 \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < 1.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, obtemos

$$n \geq n_1 \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq 1.$$

Em particular,

$$|f(x) - f_{n_1}(x)| \leq 1.$$

Como f_{n_1} é limitada, existe $C > 0$ tal que $|f_{n_1}(x)| \leq C$ para todo $x \in X$. Daí,

$$|f(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + 1 \leq C + 1, \forall x \in X,$$

ou seja, $f \in B(X)$. Agora, fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.1) segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in X \Longrightarrow \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Logo, $f_n \longrightarrow f$.

Proposição 2.1.2. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então F é um espaço de Banach com a norma induzida de E se, e só se, F é fechado em E.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha F um espaço de Banach e tome (x_n) em F tal que $x_n \longrightarrow x$, com $x \in E$. Então (x_n) é de Cauchy em F, e portanto converge, pois F é completo. Assim, existe $y \in F$ tal que $x_n \longrightarrow y$. Pela unicidade do limite, temos que $x = y$. Logo F é fechado.

$(\Leftarrow)$ Suponha agora F fechado em E e seja (x_n) uma sequência de Cauchy em F. Então (x_n) é uma sequência de Cauchy em E. Daí, como E é um espaço de Banach, existe $x \in E$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como F é fechado, temos que $x \in F$. Logo, F é um espaço de Banach. □

Exemplo 2.1.3. *Seja $C[a,b]$ o conjunto das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{K}$. Este é um subespaço do espaço de Banach $B[a,b]$, e portanto um espaço normado com a seguinte norma:*

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup\{|f(x)\,|: x \in [a,b]\} \\ &= \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Além disso, $C[a,b]$ é um espaço de Banach. De fato, pela Proposição 2.1.2, basta mostrar que $C[a,b]$ é fechado. Para tanto, observe que se $f_n \longrightarrow f$ em $C[a,b]$ então (f_n) converge uniformemente para f. Logo, f é contínua.

Lema 2.1.1. *Seja $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço normado E. Então existe uma constante $c > 0$, que depende do conjunto B, tal que*

$$\|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + \cdots + |a_n|)$$

para quaisquer escalares $a_1, \dots, a_n$.

Demonstração. Em $\mathbb{R}^n$, duas normas quaisquer $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ são equivalentes, isto é, existe $c > 0$ tal que $\|x\|_a \leq c\|x\|_b$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Este resultado também é válido para $\mathbb{C}^n$.

Mostraremos a seguir que $\|(a_1, \dots, a_n)\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\right\|$ é uma norma em $\mathbb{K}^n$.

(i) Seja $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Então

$$\|(a_1, \dots, a_n)\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\right\| \geq 0, \text{ e } \left\|\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\right\| = 0 \Leftrightarrow a_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, n,$$

pois B é linearmente independente.

(ii) Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Então

$$\begin{aligned} \|\lambda(a_1, \dots, a_n)\| = \|(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda a_jx_j\right\| = \left\|\lambda\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\right\| &= |\lambda| \left\|\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\right\| \\ &= |\lambda|\|(a_1, \dots, a_n)\|. \end{aligned}$$

(iii) Sejam $(a_1, \dots, a_n),\ (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. Temos que

$$\begin{aligned} \|(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)\| = \|(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)\| &= \left\|\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)x_j\right\| \\ &= \left\|\sum_{j=1}^{n}(a_jx_j + b_jx_j)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} a_jx_j + \sum_{j=1}^{n} b_jx_j\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{n} b_jx_j\right\| = \|(a_1, \dots, a_n)\| + \|(b_1, \dots, b_n)\|. \end{aligned}$$

Logo, $\|(a_1,\ldots,a_n)\| = \|\sum_{j=1}^n a_j x_j\|$ é uma norma em $\mathbb{K}^n$.

Note que $\|(a_1,\ldots,a_n)\|_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^n |a_j|$ também é uma norma em $\mathbb{K}^n$. Portanto estas duas normas são equivalentes, ou seja, existe $c>0$ que satisfaz o resultado. □

Teorema 2.1.1. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Consequentemente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado E é fechado em E.*

Demonstração. Sejam E um espaço normado de dimensão n e $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ uma base normalizada de E. Dada uma sequência de Cauchy (x_k) em E, para cada $k\in\mathbb{N}$ existem únicos escalares $a_1^k,\ldots,a_n^k$ tais que $x_k = a_1^k\beta_1+\cdots+a_n^k\beta_n$. Dado $\varepsilon>0$, podemos tomar $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $k,m\geq n_0$ implica $\|x_k-x_m\|<c\varepsilon$, onde c é a constante do lema anterior para o conjunto linearmente independente $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$. Segue então que

$$\sum_{j=1}^n |a_j^k - a_j^m| \leq \frac{1}{c}\left\|\sum_{j=1}^n (a_j^k - a_j^m)\beta_j\right\| = \frac{1}{c}\|x_k - x_m\| < \varepsilon,$$

sempre que $k,m\geq n_0$. Assim, para cada $j=1,\ldots,n$, a sequência de escalares $(a_j^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy, e portanto convergente. Seja $b_j = \lim\limits_{k\to\infty} a_j^k$, $j=1,\ldots,n$. Nesse caso, temos que $\lim\limits_{k\to\infty}\displaystyle\sum_{j=1}^n |a_j^k - b_j| = 0$. Definindo $x = b_1\beta_1+\cdots+b_n\beta_n$ temos $x\in E$ e

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k - x\| = \lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^n (a_j^k - b_j)\beta_j\right\| \leq \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^n |a_j^k - b_j| = 0,$$

provando que $x_k\longrightarrow x$ e completando a demonstração de que E é um espaço de Banach. A segunda afirmação segue da primeira e da Proposição 2.1.2. □

Veremos a seguir que existem espaços normados de dimensão infinita que não são completos.

Exemplo 2.1.4. *Denotamos por c_0 o conjunto de todas as sequências em $\mathbb{K}$ que convergem para zero, ou seja,*

$$c_0 = \{(a_k) : a_k\in\mathbb{K} \textit{ para todo } k\in\mathbb{N} \textit{ e } a_k\longrightarrow 0\}.$$

É claro que c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências. E a expressão

$$\|(a_k)\|_\infty = \sup\{|a_k| : k\in\mathbb{N}\}$$

torna c_0 um espaço normado. Mostremos que c_0 é um espaço de Banach.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em c_0. Digamos que $x_n = (a_n^{(k)})_{k=1}^\infty$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Para cada $j\in\mathbb{N}$, a desigualdade

$$|a_n^{(j)} - a_m^{(j)}| \leq \sup\{|a_n^{(k)} - a_m^{(k)}| : k\in\mathbb{N}\} = \|x_n - x_m\|_\infty$$

deixa claro que a sequência de escalares $(a_n^{(j)})_{n=1}^{\infty}$ *é de Cauchy em* $\mathbb{K}$*, e portanto convergente. Digamos* $a_n^{(j)} \longrightarrow a_j$ *quando* $n \longrightarrow \infty$*. Chamando* $x = (a_j)$*, mostraremos que* $x \in c_0$ *e que* $x_n \longrightarrow x$*. Dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon,$$

e daí,

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow |a_n^{(j)} - a_m^{(j)}| < \varepsilon, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ *na equação acima, obtemos*

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Longrightarrow |a_n^{(j)} - a_j| \leq \varepsilon, \ \forall j \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow |a_{n_0}^{(j)} - a_j| \leq \varepsilon, \ \forall j \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow |a_j| \leq \varepsilon + |a_{n_0}^{(j)}|, \ \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como $(a_{n_0}^{(j)})_{j=1}^{\infty} \in c_0$*, existe* $j_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_{n_0}^{(j)}| < \varepsilon$ *para* $j \geq j_0$*. Daí,*

$$|a_j| \leq 2\varepsilon \text{ para } j \geq j_0.$$

Logo, $a_j \longrightarrow 0$*, ou seja,* $x \in c_0$*. Por outro lado, da Equação 2.2 segue que*

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x\|_\infty \leq \varepsilon.$$

E portanto, $x_n \longrightarrow x$*.*

Exemplo 2.1.5. *Denotemos agora por* c_{00} *o subespaço de* c_0 *formado pelas sequências eventualmente nulas, isto é,*

$$c_{00} = \{(a_k) \in c_0 : \text{ existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0 \text{ para todo } k \geq k_0\}.$$

Vejamos que c_{00} *não é completo. Considere os seguintes vetores de* c_{00}*:*

$$x_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right), \dots, x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right), \dots$$

É claro que (x_n) *é uma sequência em* c_{00}*. Tomando* $x = \left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty} \in c_0$*, observe que* $\|x_n - x\|_\infty = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$*. Logo,* $x_n \longrightarrow x$ *em* c_0*. Como* $x \notin c_{00}$*, resulta que* c_{00} *é um subespaço não fechado de* c_0*. Assim, pela Proposição 2.1.2 temos que* c_{00} *não é um espaço de Banach.*

2.2 Espaços ℓ_p e ℓ_∞

Para cada número real $p \geq 1$, definimos

$$\ell_p = \left\{ (a_j) : a_j \in \mathbb{K} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\}.$$

Consideraremos em ℓ_p a seguinte norma

$$\|(a_j)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mostraremos agora que ℓ_p é um espaço normado e um espaço de Banach.

Lema 2.2.1. *Sejam $a, b, \alpha, \beta > 0$ com $\alpha + \beta = 1$. Então,*

$$a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

Demonstração. Para cada $0 < \alpha < 1$, considere a seguinte função, $f = f_\alpha : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t^\alpha - \alpha t$. Observe que, como $0 < \alpha < 1$, temos $f'(t) > 0$ se $0 < t < 1$, e $f'(t) < 0$ se $t > 1$. Logo, f atinge o máximo em $t = 1$. Daí, $t^\alpha - \alpha t \leq 1 - \alpha$, para quaisquer $t \in (0, \infty)$. Fazendo $t = \dfrac{a}{b}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha - \alpha \left(\frac{a}{b}\right) \leq 1 - \alpha \Longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha &\leq \alpha \left(\frac{a}{b}\right) + \beta \\ &\Longrightarrow a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha a + \beta b. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.2.1 (Desigualdade de Hölder para somas). *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q > 1$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então*

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Fazendo $\alpha = \dfrac{1}{p}$, $\beta = \dfrac{1}{q}$, $a = \dfrac{|a_k|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p}$ e $b = \dfrac{|b_k|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q}$. Pelo lema anterior, obtemos:

$$\left(\frac{|a_k|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|b_k|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|a_k|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_k|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q} \right).$$

Daí,

$$\frac{|a_k|}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|b_k|}{\left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|a_k|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_k|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q} \right)$$

para cada $k = 1, \ldots, n$. Somando as desigualdades para $k = 1, \ldots, n$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=1}^{n}|a_jb_j|}{(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q)^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{1}{p}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p}{\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q}{\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q}\right)\\
&= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.
\end{aligned}
$$

Assim, podemos concluir que

$$
\sum_{j=1}^{n}|a_jb_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
$$

□

Proposição 2.2.2 (Desigualdade de Minkowski para somas)**.** *Para $p \geq 1$, temos*

$$
\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}
$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$.

Demonstração. Se $p=1$, a desigualdade segue da desigualdade triangular do valor absoluto. Suponhamos agora $p>1$. Temos que

$$
\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p=\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{p-1}|a_j+b_j| \leq \sum_{j=1}^{n}|a_j||a_j+b_j|^{p-1}+\sum_{j=1}^{n}|b_j||a_j+b_j|^{p-1}.
$$

Se $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, então $pq=p+q$, ou seja, $(p-1)q=p$. Daí, pela Desigualdade de Hölder para somas, temos

$$
\sum_{j=1}^{n}|a_j||a_j+b_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}
$$

e

$$
\sum_{j=1}^{n}|b_j||a_j+b_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}.
$$

Logo, temos

$$
\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].
$$

Como $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, obtemos

$$
\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
$$

□

Não é difícil verificar que o espaço ℓ_p é um espaço vetorial com as operações usais de sequências. Mostraremos a seguir que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em ℓ_p. Para isso, considere $x = (a_j),\ y = (b_j) \in \ell_p$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

(i) $\|x\|_p = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} |a_j\|^p \right\|^{\frac{1}{p}} \geq 0$ e $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p = 0 \Leftrightarrow |a_j| = 0,\ \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = 0.$

(ii) $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|^p \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|^p \|x\|_p.$

(iii) Pela Desigualdade de Minkowski para somas, temos que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Logo, $\|\cdot\|_p$ é uma norma em ℓ_p e portanto $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço normado.

Teorema 2.2.1. *Se $1 \leq p < \infty$, então ℓ_p é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em ℓ_p. Digamos $x_n = \left(a_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, a desigualdade

$$|a_n^{(j)} - a_m^{(j)}| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_n^{(j)} - a_m^{(j)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x_n - x_m\|_p$$

mostra que a sequência $\left(a_n^{(j)}\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, e portanto convergente. Seja $a_j = \lim_{n\to\infty} a_n^{(j)}$. Denote $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$. Mostraremos que $x \in \ell_p$ e que $x_n \longrightarrow x$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon.$$

Daí,

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{k} |a_n^{(j)} - a_m^{(j)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{k} |a_n^{(j)} - a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,\ \forall k \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_n^{(j)} - a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, $x_n - x \in \ell_p$ e $x_n - x \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Logo, $x = x_n - (x_n - x) \in \ell_p$ e $x_n \longrightarrow x$ em ℓ_p. Portanto, ℓ_p é espaço de Banach. □

Para $p = \infty$, definiremos ℓ_∞ como o espaço das sequências limitadas de escalares, ou seja,

$$\ell_\infty = \left\{ (a_j) : a_j \in \mathbb{K} \text{ e } \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty \right\}.$$

Podemos observar que ℓ_∞ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências. Além disso, não é difícil mostrar que

$$\|(a_j)\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}$$

define uma norma em ℓ_∞.

Teorema 2.2.2. *ℓ_∞ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em ℓ_∞. Digamos $x_n = \left(a_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, a desigualdade

$$|a_n^{(j)} - a_m^{(j)}| \leq \|x_n - x_m\|_\infty = \sup\{|a_n^{(j)} - a_m^{(j)}| : j \in \mathbb{N}\}$$

mostra que a sequência $\left(a_n^{(j)}\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, e portanto convergente. Seja $a_j = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(j)}$. Denote $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$. Mostraremos que $x \in \ell_\infty$ e que $x_n \longrightarrow x$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n, m \geq n_0 &\Longrightarrow \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |a_n^{(j)} - a_m^{(j)}| < \varepsilon, \ \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, obtemos

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n^{(j)} - a_j| \leq \varepsilon, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Assim, $x_n - x \in \ell_\infty$ e $x_n - x \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Logo, $x = x_n - (x_n - x) \in \ell_\infty$ e $x_n \longrightarrow x$ em ℓ_∞. Portanto, ℓ_∞ é espaço de Banach. □

2.3 Operadores Lineares Contínuos

Definição 2.3.1. *Sejam M e N espaços métricos. Dizemos que uma função $f\colon M \longrightarrow N$ é **contínua no ponto** $a \in M$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Dizemos que f é **contínua** se f for contínua em todos os pontos de M.*

Definição 2.3.2. *Sejam M e N espaços métricos e $f\colon M \longrightarrow N$ uma função.*

*(i) Dizemos que f é **lipschitziana** se existe $L > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$ para todos $x, y \in M$.*

*(ii) Dizemos que f é **uniformemente contínua** se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

É fácil provar que a validade das seguintes implicações para funções entre espaços métricos:

$$\text{lipschitziana} \implies \text{uniformemente contínua} \implies \text{contínua} \implies \text{contínua em um ponto}$$

Entretanto as implicações inversas são falsas em geral. De fato, observe os exemplos a seguir.

Exemplo 2.3.1. *Tome $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, onde $f(x) = \sqrt{x}$. Vejamos que f é uniformemente contínua e não lipschitziana.*

Provemos primeiramente que f é uniformemente contínua. Observe que

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq x &\implies \sqrt{y} \leq \sqrt{x} \\ &\implies 2y \leq 2\sqrt{xy} \\ &\implies x + y - 2\sqrt{xy} \leq x + y - 2y = x - y \\ &\implies (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq x - y. \end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Tome $\delta = \varepsilon^2$. Então

$$|x - y| < \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Mostremos agora que f não é lipschitziana. Suponhamos que vale o contrário, então existe $L > 0$ tal que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|, \ \forall x, y \in [0, \infty).$$

Tome $y = 0$ e $x > 0$. Da desigualdade acima,segue que

$$\sqrt{x} \leq Lx$$

$$\implies \frac{1}{L} \leq \sqrt{x}.$$

Absurdo, pois $x > 0$ é qualquer.

Exemplo 2.3.2. *Tome $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $g(x) = x^2$. Sabemos que g é contínua, porém g não é uniformemente contínua. De fato, suponha que g seja uniformemente contínua. Então, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} |x - y| < \delta &\implies |x^2 - y^2| < 1 \\ &\implies |(x + y)(x - y)| < 1. \end{aligned}$$

Em particular, dado $k > 0$, tomando $x = k + \frac{\delta}{2}$ e $y = k$, temos $|x - y| < \delta$. Segue então que

$$\begin{aligned} |(x+y)(x-y)| < 1 &\Longrightarrow \left(2k + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} < 1 \\ &\Longrightarrow 2k + \frac{\delta}{2} < \frac{2}{\delta} \\ &\Longrightarrow 2k < \frac{2}{\delta} - \frac{\delta}{2} \\ &\Longrightarrow k < \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{4}. \end{aligned}$$

Absurdo, pois $k > 0$ é qualquer.

Exemplo 2.3.3. *Tome $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ 1 & se\ x \geq 0. \end{cases}$$

É fácil ver que h é contínua em $x = 1$, mas não é contínua.

Provaremos a seguir que tais conceitos são equivalentes no caso de operadores lineares entre espaços normados.

Definição 2.3.3. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Uma função $T : E \longrightarrow F$ é dita um **operador linear contínuo** se T é linear, isto é*

(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$, para quaisquer $x, y \in E$;

(ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, para quaisquer $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;

e contínua no sentido de espaços métricos, isto é, dados $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ implica $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$.

Teorema 2.3.1. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \longrightarrow F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) T é lipschitziano;

(b) T é uniformemente contínuo;

(c) T é contínuo;

(d) T é contínuo em algum ponto de E;

(e) T é contínuo na origem;

(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$;

(g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in E$.

Demonstração. As implicações $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$ são válidas pois todo espaço normado é um espaço métrico.
$(d) \Rightarrow (e)$: Suponhamos T contínuo em um ponto $x_0 \in E$ e seja $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in E \quad e \quad \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon.$$

Tome $x \in E$ tal que $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$. Então $\|(x + x_0) - x_0\| = \|x\| < \delta$. Portanto

$$\|T(x) - T(0)\| = \|T(x) - 0\| = \|T(x)\| = \|T(x) + T(x_0) - T(x_0)\| = \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \varepsilon.$$

Assim, T é contínuo na origem.
$(e) \Rightarrow (f)$: Como T é contínuo na origem, existe $\delta > 0$ tal que $||T(x)|| < 1$ sempre que $||x|| < \delta$. Se $||x|| \leq 1$, temos $\left\|\frac{\delta x}{2}\right\| < \delta$, e então, $\frac{\delta}{2}||T(x)|| = \left\|T\left(\frac{\delta}{2}x\right)\right\| < 1$. Isso prova que

$$\sup\{||T(x)|| : x \in E \text{ e } ||x|| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty.$$

$(f) \Rightarrow (g)$: Para $x \in E$, $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\},$$

e portanto $\|T(x)\| \leq \sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\}\|x\|$, para todo $x \neq 0$. Tomando

$$C = \sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\}$$

obtemos $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \neq 0$. Como essa desigualdade é trivialmente verificada para $x = 0$, o resultado fica provado.
$(g) \Rightarrow (a)$: Dados $x, y \in E$, temos que

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq C\|x - y\|,$$

e portanto T é lipschitziano com a constante C. □

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F será denotado por $L(E, F)$. Observe que $L(E, F)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de funções. Quando F for $\mathbb{K}$, escreveremos E' no lugar de $L(E, \mathbb{K})$ e chamaremos E' de **dual de** E. Os elementos de E' são chamados **funcionais lineares contínuos**.

Proposição 2.3.1. *Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Então a igualdade*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma em $L(E, F)$.

Demonstração. Sejam $T, G \in L(E, F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos:

(i) $\|T\| = \sup\{|T(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \geq 0$ e $\|T\| = \sup\{|T(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} = 0 \Leftrightarrow T \equiv 0$.

(ii) $\|\lambda T\| = \sup\{|\lambda T(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} = |\lambda| \sup\{|T(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} = |\lambda|\|T\|$.

(iii)
$$\begin{aligned}\|\mathrm{T} + \mathrm{G}\| &= \sup\{|T(x) + G(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|T(x)| + |G(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|T(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} + \sup\{|G(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} = \|T\| + \|G\|.\end{aligned}$$

□

Proposição 2.3.2. *Sejam E e F espaços normados e $T \in L(E,F)$. Então*

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\} \\ &= \inf\{c > 0 : \|T(x)\| \leq c\|x\|, \forall x \in E\}.\end{aligned}$$

Demonstração. Lembremos que $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$. Vamos dividir a demonstração em casos:

(i) Vamos provar que $B = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| = 1\} = \|T\|$. Claro que $\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| = 1\} \subseteq \{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$. Portanto, $B \leq \|T\|$. Agora, se $x \neq 0$, $x \in E$, com $z = \frac{x}{\|x\|}$, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T(z)\| \leq B.$$

Disso, se $\|x\| \leq 1$, então $\|T(x)\| \leq B\|x\| \leq B$. Ou ainda, $\|T\| \leq B$. Segue que $B = \|T\|$.

(ii) Vamos mostrar que $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| = 1\} = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E \text{ e } x \neq 0\right\}$. Mas, esse fato segue diretamente da igualdade de conjuntos:

$$\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| = 1\} = \left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E \text{ e } x \neq 0\right\}.$$

(iii) É claro que

$$\inf\{c > 0 : \|T(x)\| \leq c\|x\|, \forall x \in E\} = \inf\left\{c > 0 : \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq c, \forall x \in E \text{ e } x \neq 0\right\}.$$

É visível no ínfimo da direita que estamos procurando a menor das cotas superiores para

$$\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E \text{ e } x \neq 0\right\}.$$

Por definição, segue diretamente que

$$\inf\{c > 0 : \|T(x)\| \leq c\|x\|, \forall x \in E\} = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E \text{ e } x \neq 0\right\}.$$

□

2.4 Teoremas de Hahn-Banach

Para enunciar o Teorema de Hahn-Banach, vamos utilizar a seguinte definição.

Definição 2.4.1. *Sejam E um espaço vetorial e $p\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação que para todos $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ satisfaz as seguintes condições*

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$.

Neste caso, dizemos que p é uma ***função sublinear***.

Lema 2.4.1. *Seja E_0 um subespaço próprio do espaço vetorial real E, isto é, $E_0 \neq \{0\}$ e $E_0 \neq E$. Sejam $x_0 \in E \setminus E_0$ e $E_1 = E_0 \oplus [x_0]$. Se f é um funcional linear em E_0 e p uma função sublinear sobre E tal que*

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in E_0,$$

então f pode ser estendido a um funcional linear $F : E_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$F(x) \leq p(x), \forall x \in E_1.$$

Demonstração. Como $f(x) \leq p(x)$ em E_0, dados $x_1, x_2 \in E_0$ temos

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \leq p(x_1 - x_2) = p(x_1 + x_0 - x_2 - x_0) \leq p(x_1 + x_0) + p(-x_2 - x_0).$$

Logo,

$$-p(-x_2 - x_0) - f(x_2) \leq p(x_1 + x_0) - f(x_1). \tag{2.3}$$

Fixando arbitrariamente x_1 em E_0, temos que o conjunto de número reais

$$\{-p(-x_2 - x_0) - f(x_2) : x_2 \in E_0\}$$

é limitado superiormente, logo tem supremo. Seja então

$$a = \sup\{-p(-x_2 - x_0) - f(x_2) : x_2 \in E_0\}.$$

De forma análoga, podemos garantir a existência de

$$b = \inf\{p(x_1 + x_0) - f(x_1) : x_1 \in E_0\}.$$

De (2.3) temos que $a \leq b$. Assim existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c \leq b$. Se $a = b$, então c é o valor comum. Em particular, para todo $y \in E_0$ vale que

$$-p(-y - x_0) - f(y) \leq c \leq p(y + x_0) - f(y), \tag{2.4}$$

sendo que utilizaremos essa desigualdade logo abaixo.

Dado $x \in E_1$, existe $y \in E_0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = y + \lambda x_0.$$

Podemos definir

$$F : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$F(x) = F(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda c,$$

a qual está bem definida devido à unicidade da representação de x. Além disso, é fácil ver que F é um funcional linear sobre E_1. Assim, resta mostrar que $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E_1$. Para isso, tomemos $x = y + \lambda x_0 \in E_1$. Consideremos três casos:

(i) $\lambda = 0$.

Neste caso,

$$F(x) = F(y + 0x_0) = f(y) \leq p(y) = p(x).$$

(ii) $\lambda > 0$.

De (2.4), trocando y por $\dfrac{y}{\lambda}$ temos

$$c \leq p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right).$$

Multiplicando por λ obtemos

$$\lambda c \leq \lambda p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) - \lambda f\left(\frac{y}{\lambda}\right).$$

Então,

$$\lambda f\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \lambda c \leq \lambda p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right).$$

Assim,

$$f(y) + \lambda c \leq p(y + \lambda x_0).$$

Logo, $F(x) \leq p(y + \lambda x_0) = p(x)$.

(iii) $\lambda < 0$.

Novamente de (2.4), trocando y por $\dfrac{y}{\lambda}$ temos

$$-p\left(-\frac{y}{\lambda} - x_0\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \leq c.$$

Multiplicando por λ temos,

$$-\lambda p\left(-\frac{y}{\lambda} - x_0\right) - \lambda f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \geq \lambda c.$$

Logo,

$$p(y + \lambda x_0) \geq \lambda c + f(y).$$

Assim, $p(x) \geq F(x)$.

$\square$

Para provar os Teoremas de Hahn-Banach faremos uso do Lema de Zorn, o qual enunciaremos a seguir.

Lema 2.4.2 (Lema de Zorn)**.** *Todo conjunto parcialmente ordenado, não-vazio, e no qual todo subconjunto totalmente ordenado tem cota superior, tem elemento maximal.*

Teorema 2.4.1 (Teorema de Hahn-Banach - versão real)**.** *Sejam E um espaço vetorial normado real, E_0 um subespaço próprio de E, p uma função sublinear sobre E e f_0 um funcional linear sobre E_0 tal que*

$$f_0(x) \leq p(x), \forall x \in E_0. \tag{2.5}$$

Então f_0 pode ser estendido a um funcional linear $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) \leq p(x), \forall x \in E. \tag{2.6}$$

Demonstração. Seja G o conjunto de todos os funcionais lineares $\overline{f}$ que estendem f_0 e tais que

$$\overline{f}(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in D(\overline{f}) \subset E.$$

Temos $G \neq \emptyset$, pois $f_0 \in G$. Definimos em G a seguinte relação:

"Dados $\overline{f}_1, \overline{f}_2 \in G$, dizemos que $\overline{f}_1 < \overline{f}_2$ se $\overline{f}_2$ estende $\overline{f}_1$."

Vamos verificar que a relação é uma relação de ordem parcial. De fato,

i) Reflexiva: $\overline{f}_1 < \overline{f}_1$, pois $D(\overline{f}_1) \subset D(\overline{f}_1)$ e $\overline{f}_1|_{D(\overline{f}_1)} = \overline{f}_1$.

ii) Antissimétrica: Se $\overline{f}_1 < \overline{f}_2$ e $\overline{f}_2 < \overline{f}_1$, temos $D(\overline{f}_1) \subset D(\overline{f}_2)$ e $\overline{f}_2|_{D(\overline{f}_1)} = \overline{f}_1$, assim como $D(\overline{f}_2) \subset D(\overline{f}_1)$ e $\overline{f}_1|_{D(\overline{f}_2)} = \overline{f}_2$. Logo, $\overline{f}_1 \equiv \overline{f}_2$.

iii) Transitiva: Se $\overline{f}_1 < \overline{f}_2$ e $\overline{f}_2 < \overline{f}_3$, segue que $D(\overline{f}_1) \subset D(\overline{f}_2)$, $\overline{f}_2|_{D(\overline{f}_1)} = \overline{f}_1$, $D(\overline{f}_2) \subset D(\overline{f}_3)$ e $\overline{f}_3|_{D(\overline{f}_2)} = \overline{f}_2$. Então $D(\overline{f}_1) \subset D(\overline{f}_3)$ e $\overline{f}_3|_{D(\overline{f}_1) \subset D(\overline{f}_2)} = \overline{f}_2|_{D(\overline{f}_1)} = \overline{f}_1$. Logo, $\overline{f}_1 < \overline{f}_3$.

Assim, G é parcialmente ordenado.

Provaremos agora que todo subconjunto totalmente ordenado de G possui cota superior. Considere $T = \{\overline{f}_\alpha\}$ um subconjunto de G totalmente ordenado. Mostremos que existe uma cota superior de $\overline{f}$ de T. Para isso, considere a aplicação $\overline{f}$ com domínio $D(\overline{f}) = \bigcup_\alpha D(\overline{f}_\alpha)$. Observe que se $x \in D(\overline{f}) = \bigcup_\alpha D(\overline{f}_\alpha)$, existe algum α tal que $x \in D(\overline{f}_\alpha)$. Neste caso, definiremos $\overline{f}(x) = \overline{f}_\alpha(x)$.

Vejamos que $D(\overline{f})$ é um subespaço vetorial de E:

(i) Se $x \in \bigcup_\alpha D(\overline{f}_\alpha)$, existe α tal que $x \in D(\overline{f}_\alpha)$. Como $D(\overline{f}_\alpha)$ é um subespaço vetorial, então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda x \in D(\overline{f}_\alpha) \subset \bigcup_\alpha D(\overline{f}_\alpha)$.

(ii) Se $x, y \in \bigcup_\alpha D(\overline{f}_\alpha)$, então para algum α_1 e para algum α_2, temos $x \in D(\overline{f}_{\alpha_1})$ e $y \in D(\overline{f}_{\alpha_2})$. Como T é totalmente ordenado, então $D(\overline{f}_{\alpha_1}) \subset D(\overline{f}_{\alpha_2})$ ou $D(\overline{f}_{\alpha_2}) \subset D(\overline{f}_{\alpha_1})$. Assim, $x, y \in D(\overline{f}_{\alpha_1})$ ou $x, y \in D(\overline{f}_{\alpha_2})$. Segue diretamente que $x + y \in \bigcup_\alpha D(\overline{f}_\alpha)$.

Vejamos que $\overline{f}$ está bem definida. Suponha $x \in D(\overline{f}_\alpha)$ e $x \in D(\overline{f}_\beta)$. Pela definição de $\overline{f}$ temos que $\overline{f}(x) = \overline{f}_\alpha(x)$ e $\overline{f}(x) = \overline{f}_\beta(x)$. Mas T é totalmente ordenado, portanto $D(\overline{f}_\alpha) \subset D(\overline{f}_\beta)$ ou $D(\overline{f}_\beta) \subset D(\overline{f}_\alpha)$, o que implica $\overline{f}_\alpha(x) = \overline{f}(x) = \overline{f}_\beta(x)$.

É claro que $\overline{f}$ é linear, estende f_0 e é tal que $\overline{f}(x) \leq p(x)$, para todo $x \in D(\overline{f})$, ou seja, $\overline{f}$ é cota superior de T em G. Assim G é indutivamente ordenado, ou seja, toda cadeia (subconjunto totalmente ordenado) admite cota superior. Pelo Lema de Zorn, existe $F \in G$ tal que F é elemento maximal de G. Isto implica em F estender f_0 com a propriedade $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(F)$.

Para completar a prova, mostraremos que $D(F) = E$. Suponha que $D(F) \subsetneq E$. Então existe $x_1 \in E$ tal que $x_1 \notin D(F)$. Pelo Lema 2.4.1, F pode ser estendido a outro funcional linear $\tilde{f}$ que, por sua vez, estende f_0 e é tal que $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, para todo $x \in D(F) \oplus [x_1]$. Assim, $\tilde{f} \in G$ e estende F. Neste caso, F não seria elemento maximal de G, contradizendo o fato obtido de que F é elemento maximal de G. Logo, $D(F) = E$ e F é a função procurada. □

O Teorema de Hahn-Banach pode ser generalizado para o caso de espaços vetoriais complexos. Neste caso, utilizamos a seguinte proposição.

Proposição 2.4.1. *Sejam $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear real e $p\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função sublinear. Então*

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in E \Leftrightarrow |f(x)| \leq p(x), \forall x \in E.$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) É imediata, pois $f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in E$.
($\Rightarrow$) Se $|f(x)| = f(x)$, terminamos. Caso $|f(x)| = -f(x)$, temos $|f(x)| = -f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x)$, pois p é sublinear. □

Teorema 2.4.2 (Teorema de Hahn-Banach - versão geral)**.** *Sejam E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$, E_0 um subespaço próprio de E, p uma função sublinear sobre E e f_0 um funcional linear sobre E_0 tal que*

$$|f_0(x)| \leq p(x), \forall x \in E_0. \tag{2.7}$$

Então f_0 pode ser estendido a um funcional linear $F : E \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$|F(x)| \leq p(x), \forall x \in E. \tag{2.8}$$

Demonstração. Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, temos pela Proposição 2.4.1 que

$$f_0(x) \leq p(x), \ \forall x \in E_0.$$

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach (caso real), f_0 pode ser estendido a um funcional linear $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) \leq p(x), \ \forall x \in E,$$

que implica $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$, pela Proposição 2.4.1.

Consideraremos agora o caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sejam $f : E_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função sublinear tal que

$$|f(x)| \leq p(x), \forall x \in E_0.$$

Considere $g(x) = f_1(x) = Ref(x)$ e $f_2(x) = Imf(x)$ para todo $x \in E_0$. Observe que

$$f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix) \text{ e } f(ix) = if(x) = if_1(x) - f_2(x).$$

Logo $f_2(x) = -f_1(ix)$. Assim, podemos escrever f da seguinte forma:

$$f(x) = g(x) - ig(ix).$$

Além disso,

$$g(x) \leq |g(x)| \leq |f(x)| \leq p(x).$$

Pelo Teorema 2.4.1, existe $G : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linear tal que G estende g e $G(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Considere $F : E \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $F(x) = G(x) - iG(ix)$. Mostraremos que F é linear, estende f e $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Para mostrar que F é linear, considere $x, y \in E$ e $a + bi \in \mathbb{C}$. Então:

$$\begin{aligned} F(x+y) = G(x+y) - iG(i(x+y)) &= G(x) + G(y) - i(G(ix) + G(iy)) \\ &= G(x) - iG(ix) + G(y) - iG(iy) \\ &= F(x) + F(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F((a+bi)x) &= G(ax + bix) - iG(iax - bx) \\ &= aG(x) + bG(ix) - i(aG(ix) - bG(x)) \\ &= aG(x) + bG(ix) - iaG(ix) + ibG(x) \\ &= (a+bi)(G(x) - iG(ix)) = (a+bi)F(x). \end{aligned}$$

Agora, para mostrar que F estende f, considere $x \in E_0$. Então:

$$F(x) = G(x) - iG(ix) = g(x) - ig(ix) = f(x).$$

Por fim, provemos que $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$. De fato, $F(x) = |F(x)|e^{i\theta}$ e $|F(x)| =$

$\dfrac{F(x)}{e^{i\theta}} = F(e^{-i\theta}x)$. Daí,

$$|F(x)| = F(e^{-i\theta}x) = G(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x),$$

como queríamos. $\square$

3. Espaços de Hilbert

Apresentaremos aqui, alguns conceitos como o de produto interno e o de espaços de Hilbert, bem como resultados importantes sobre tais espaços. Utilizamos para a construção deste capítulo as referências [4] e [6].

3.1 Espaços com Produto Interno

Definição 3.1.1. *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Um* ***produto interno*** *em E é uma aplicação*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}, \ (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, *para todos* $x, y, z \in E$;

(ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, *para todos* $x, y \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$;

(iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, *para todos* $x, y \in E$;

(iv) Se $x \neq 0$, *então* $\langle x, x \rangle > 0$.

O par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado ***espaço com produto interno****.*

Sejam E um espaço com produto interno, $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. É fácil mostrar que:

(a) $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$;

(b) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(c) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;

(d) $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$;

(e) Se $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ para todo $x \in E$, então $y = z$.

Teorema 3.1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja E um espaço com produto interno. Então*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \ \forall x, y \in E.$$

Demonstração. Se $x = 0$ ou $y = 0$, o resultado é claramente válido. Suponhamos então $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Denotemos $a = \langle y, y\rangle$ e $b = \langle x, y\rangle$. Então,

$$a\bar{b}\langle x, y\rangle = \langle y, y\rangle\bar{b}b = |b|^2\langle y, y\rangle$$

é um número real positivo. Note que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle ax - by, ax - by\rangle \\
&= a\bar{a}\langle x, x\rangle - b\bar{a}\langle y, x\rangle - a\bar{b}\langle x, y\rangle + b\bar{b}\langle y, y\rangle \\
&= a^2\langle x, x\rangle - 2Re(a\bar{b}\langle x, y\rangle) + |b|^2\langle y, y\rangle \\
&= a^2\langle x, x\rangle - 2|b|^2\langle y, y\rangle + |b|^2\langle y, y\rangle \\
&= a^2\langle x, x\rangle - |b|^2\langle y, y\rangle \\
&= \langle y, y\rangle(\langle y, y\rangle\langle x, x\rangle - |\langle x, y\rangle|^2).
\end{aligned}$$

Como $\langle y, y\rangle > 0$, segue que

$$\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 \geq 0,$$

o que prova a desigualdade desejada. □

Corolário 3.1.1. *Seja E um espaço com produto interno. A função*

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}, \ \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

é uma norma em E.

Demonstração. Os itens (i) e (ii) da definição de norma vêm das propriedades do produto interno. Mostremos então a desigualdade triangular. Sejam $x, y \in E$. Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Definição 3.1.2. *Dizemos que um espaço E com produto interno é um* ***espaço de Hilbert*** *se esse é completo com a norma induzida pelo produto interno. Assim, todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach.*

Exemplo 3.1.1. *O espaço $\mathbb{K}^n$ com a norma euclidiana, denotado por $\mathbb{K}^n_2$, é um espaço de*

Hilbert com o seguinte produto interno:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i},$$

onde $x = (a_1, \ldots, a_n)$ *e* $y = (b_1, \ldots, b_n)$.

Exemplo 3.1.2. ℓ_2 *é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{b_i},$$

onde $x = (a_i)$ *e* $y = (b_i) \in \ell_2$.

Definição 3.1.3. *Seja* E *um espaço com produto interno. Dizemos que* $x, y \in E$ *são ortogonais, e escrevemos* $x \perp y$, *se* $\langle x, y \rangle = 0$.

Proposição 3.1.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *Seja* E *um espaço com produto interno e sejam* $x, y \in E$, *com* $x \perp y$. *Então*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demonstração. Sejam E um espaço com produto interno e $x, y \in E$ ortogonais. Daí,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Proposição 3.1.2 (Lei do Paralelogramo)**.** *Seja* E *um espaço com produto interno. Então*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \ \forall x, y \in E.$$

Demonstração. Temos que

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

e

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Somando as desigualdades acima, obtemos o resultado procurado. □

3.2 Projeções Ortogonais

Teorema 3.2.1. *Sejam* E *um espaço de Hilbert e* M *um subespaço fechado de* E. *Então para cada* $x \in E$ *existe um único* $p \in M$ *tal que*

$$\|x - p\| = d(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos provar a existência de p. Seja $d = d(x, M)$. Pela definição do ínfimo, existe $(p_n) \subset M$ tal que

$$\|x - p_n\| < d + \frac{1}{n} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Pela Lei do Paralelogramo, temos que

$$\|2x - p_m - p_n\|^2 + \|p_n - p_m\|^2 = 2\|x - p_m\|^2 + 2\|x - p_n\|^2.$$

E daí,

$$\begin{aligned}
\|p_n - p_m\|^2 &= 2\|x - p_m\|^2 + 2\|x - p_n\|^2 - 4\left\|x - \left(\frac{p_m + p_n}{2}\right)\right\|^2 \\
&< 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \\
&< \frac{4d}{m} + \frac{2}{m^2} + \frac{4d}{n} + \frac{2}{n^2}.
\end{aligned}$$

Logo (p_n) é de Cauchy em E. Como E é completo e M é fechado em E, concluímos que (p_n) converge para algum ponto $p \in M$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (3.1), obtemos que $\|x - p\| \leq d$ e portanto $\|x - p\| = d$, como queríamos.

Provaremos agora a unicidade de p. Suponhamos que exista $q \in M$ tal que $\|x - q\| = d$, com $q \neq p$. Pela Lei do Paralelogramo, temos que

$$\|2x - p - q\|^2 + \|q - p\|^2 = 2\|x - p\|^2 + 2\|x - q\|^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|q - p\|^2 &= 2\|x - p\|^2 + 2\|x - q\|^2 - 4\left\|x - \frac{p + q}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.
\end{aligned}$$

Logo $p = q$. □

Definição 3.2.1. *Sejam E um espaço com produto interno e S um subconjunto de E. Denotaremos por $S^\perp$ o seguinte conjunto:*

$$S^\perp = \{y \in E : y \perp x \ \forall x \in S\}.$$

É fácil verificar que $S^\perp$ é sempre um subespaço fechado de E. De fato, seja $(y_n) \subset S^\perp$ e $(y_n) \longrightarrow y \in E$. Dado $x \in S$, temos

$$0 = \langle y_n, x \rangle \longrightarrow \langle y, x \rangle,$$

pois podemos ver o produto interno como sendo um operador linear contínuo na primeira entrada. Daí, $\langle y, x\rangle = 0$. Como $x \in S$ é qualquer, segue que $y \in S^{\perp}$.

Teorema 3.2.2. *Sejam E um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de E. Então:*

(i) Dado $x \in E$, x admite uma única decomposição da forma

$$x = p + q, \text{ com } p \in M \text{ e } q \in M^{\perp}.$$

Além disso, $\|x - p\| = d(x, M)$ e $\|x - q\| = d(x, M^{\perp})$.

(ii) Se definirmos $P : E \longrightarrow E$, onde $P(x) = p$, e $Q : E \longrightarrow E$, com $Q(x) = q$ para todo $x \in E$, então $P, Q \in L(E, E)$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ e $Q \circ P = P \circ Q = 0$.

Demonstração. (i) Dado $x \in E$, seja p o único elemento de M tal que $\|x - p\| = d(x, M)$ e seja $q = x - p$. Provaremos que $q \in M^{\perp}$ e que $\|x - q\| = d(x, M^{\perp})$.

Para mostrar que $q \in M^{\perp}$, considere $y \in M$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos que

$$\|q\| = \|x - p\| \leq \|x - p - \lambda y\| = \|q - \lambda y\|.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|q\|^2 \leq \|q - \lambda y\|^2 &= \langle q - \lambda y, q - \lambda y\rangle \\ &= \langle q, q\rangle - \lambda\langle y, q\rangle - \overline{\lambda}\langle q, y\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle \\ &= \|q\|^2 - 2Re(\lambda\langle y, q\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2 \\ &\Longrightarrow 2Re(\lambda\langle y, q\rangle) \leq |\lambda|^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Escrevamos $\langle y, q\rangle = |\langle y, q\rangle|e^{i\theta}$. Então, fazendo $\lambda = te^{-i\theta}$ com $t \in \mathbb{R}$, segue que

$$2t|\langle y, q\rangle| \leq t^2\|y\|^2, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$2|\langle y, q\rangle| \leq t\|y\|^2, \forall t > 0. \tag{3.2}$$

Fazendo $t \longrightarrow 0$ em (3.2), segue que $\langle y, q\rangle = 0$, e portanto $q \in M^{\perp}$.

Para mostrar que $\|x - q\| = d(x, M^{\perp})$, tome $z \in M^{\perp}$. Como $x = p + q$, segue que

$$x - z = p + (q - z), \text{ com } p \in M \text{ e } q - z \in M^{\perp}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 = \|p\|^2 + \|q - z\|^2 \geq \|p\|^2 = \|x - q\|^2 \\ \Longrightarrow \|x - q\| \leq \|x - z\|. \end{aligned}$$

E portanto $d(x, M^{\perp}) = \inf\{\|x - z\| : z \in M^{\perp}\} = \|x - q\|$.

Suponhamos agora que

$$x = p_1 + q_1 \text{ com } p_1 \in M \text{ e } q_1 \in M^\perp.$$

Como $x = p+q$, segue que $p-p_1 = q_1-q \in M \cap M^\perp$, então $\langle p-p_1, p-p_1\rangle = \langle q_1-q, q_1-q\rangle = 0$. E portanto $p = p_1$ e $q = q_1$, como queríamos.

(ii) Segue da unicidade da decomposição do item acima que as aplicações P e Q são lineares.

Seja $x \in E$. Temos que

$$x = P(x) + Q(x), \text{ com } P(x) \in M \text{ e } Q(x) \in M^\perp.$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2, \forall x \in E.$$

Daí, $\|P(x)\| \leq \|x\|$ e $\|Q(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$. Logo, $P, Q \in L(E,E)$. Escrevamos

$$P(x) = P(x) + 0 \in M + M^\perp.$$

Da unicidade da decomposição, segue que

$$P(P(x)) = P(x) \text{ e } Q(P(x)) = 0.$$

De maneira análoga, temos que

$$P(Q(x)) = 0 \text{ e } Q(Q(x)) = Q(x),$$

como queríamos provar. □

Teorema 3.2.3 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Sejam E um espaço de Hilbert e $\phi \in E'$. Então existe um único $y_0 \in E$ tal que*

$$\phi(x) = \langle x, y_0\rangle \textit{ para todo } x \in E.$$

Demonstração. Primeiro mostraremos a existência de y_0. Se $\phi \equiv 0$, basta tomar $y_0 = 0$. Consideraremos agora o caso em que ϕ é não nulo. Seja

$$M = \phi^{-1}(0) = \{x \in E : \phi(x) = 0\}.$$

Como ϕ é linear e não nulo, temos que M é um subespaço próprio de E. Além disso, como ϕ é contínuo e $M = \phi^{-1}(\{0\})$, temos que M é fechado. Já que $\phi \neq 0$, existe $x_0 \in M^\perp$ tal que $\phi(x_0) \neq 0$, e daí, tomando $x_1 = \dfrac{x_0}{\phi(x_0)}$ temos $\phi(x_1) = 1$. Então cada $x \in E$ admite decomposição da forma

$$x = (x - \phi(x)x_1) + \phi(x)x_1, \text{ com } x - \phi(x)x_1 \in M \text{ e } \phi(x)x_1 \in M^\perp. \tag{3.3}$$

Em particular, se $x \in M^\perp$, temos $(x-\phi(x)x_1) \in M \cap M^\perp = \{0\}$, assim $x = \phi(x)x_1$. E portanto $M^\perp = [x_1]$.

Procuramos $y_0 \in E$ tal que $\phi(x) = \langle x, y_0 \rangle$ para todo $x \in E$. Note que y_0 pode ser escrito da forma $y_0 = p_0 + q_0$ com $p_0 \in M$ e $q_0 \in M^\perp$. Em particular, devemos ter

$$0 = \phi(p_0) = \langle p_0, y_0 \rangle = \langle p_0, p_0 \rangle + \langle p_0, q_0 \rangle = \langle p_0, p_0 \rangle.$$

Logo $p_0 = 0$, e portanto $y_0 = q_0 \in M^\perp$. Escrevamos $y_0 = \lambda x_1$, onde λ vai ser escolhido de modo que

$$\phi(x_1) = \langle x_1, y_0 \rangle,$$

ou seja,

$$1 = \phi(x_1) = \langle x_1, \lambda x_1 \rangle = \overline{\lambda} \|x_1\|^2.$$

Assim, basta tomar $\lambda = \|x_1\|^{-2}$. De (3.3) segue que

$$\langle x, y_0 \rangle = \phi(x) \langle x_1, y_0 \rangle = \phi(x)\phi(x_1) = \phi(x),$$

e portanto y_0 verifica $\phi(x) = \langle x, y_0 \rangle$ para todo $x \in E$.

Para provar a unicidade, suponhamos que exista $y_1 \in E$ tal que

$$\phi(x) = \langle x, y_1 \rangle, \forall x \in E.$$

Assim, $\langle x, y_0 \rangle = \langle x, y_1 \rangle$ para todo $x \in E$, ou seja, $\langle x, y_0 - y_1 \rangle = 0$ para todo $x \in E$. Em particular, $\langle y_0 - y_1, y_0 - y_1 \rangle = 0$, e portanto $y_0 = y_1$. □

3.3 Conjuntos Ortonormais em Espaços de Hilbert

Definição 3.3.1. *Seja E um espaço com produto interno. Um conjunto $S \subset E$ é dito **ortonormal** se dados $x, y \in S$ tem-se $\langle x, y \rangle = 0$ se $x \neq y$ e $\langle x, y \rangle = 1$ se $x = y$. Um conjunto ortonormal $S \subset E$ é dito **conjunto ortonormal completo** se $S^\perp = \{0\}$.*

Proposição 3.3.1. *Todo conjunto ortonormal em E é linearmente independente.*

Demonstração. Sejam E um espaço com produto interno, $S \subset E$ um conjunto ortonormal e $x_1, \ldots, x_n \in S$ tal que

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

Então

$$0 = \langle 0, 0\rangle = \langle \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\rangle = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2.$$

Logo,

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Portanto S é linearmente independente. □

Proposição 3.3.2. *Sejam E um espaço com produto interno e $S \subset E$ um conjunto ortonormal. Então S é completo se, e somente se, é maximal entre os conjuntos ortonormais de E. Isto é, S não está contido em nenhum outro conjunto ortonormal.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que exista $A \subset E$ ortonormal tal que $S \subsetneq A$. Daí, existe $y \neq 0$ em $A \backslash S$. Note que $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $x \in S$. Logo $y \in S^{\perp}$ e portanto S não é completo.
($\Leftarrow$) Seja S um conjunto ortornormal em E. Suponhamos que $S^{\perp} \neq \{0\}$. Então, existe $x_0 \in S^{\perp}$ com $x_0 \neq 0$, isto é, $\langle x_0, y\rangle = 0$ para todo $y \in S$. Tome $A = S \cup \left\{\dfrac{x_0}{\|x_0\|}\right\}$. Note que A é ortonormal e $S \subset A$. Portanto S não é maximal. □

Proposição 3.3.3. *Se S é um conjunto ortornormal em E tal que o subespaço $[S]$ gerado por S é denso em E, então S é completo.*

Demonstração. Seja S um conjunto ortonormal em E tal que $[S]$ é denso em E. Mostremos que S é completo, isto é, que $S^{\perp} = \{0\}$. Suponhamos por absurdo que existe $x \in S^{\perp}$ com $x \neq 0$. Então, $\|x\| \neq 0$. Como $[S]$ é denso em E, existe $y = a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n$ com $y_i \in S$ e

$$\|x - y\| < \|x\|.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &> \|x - y\|^2 \\
&= \langle x - y, x - y\rangle \\
&= \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i \langle x, y_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \langle y_i, x\rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|y\|^2 < 0,$$

o que é uma contradição. □

Exemplo 3.3.1. *É fácil verificar que os vetores unitários*

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

formam um conjunto ortonormal completo em $\mathbb{K}_2^n$.

Exemplo 3.3.2. *É fácil verificar que a sequência de vetores unitários*

$$e_1 = (1, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), e_3 = (0, 0, 1, \dots), \dots$$

formam um conjunto ortonormal completo em ℓ_2.

Proposição 3.3.4 (Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt)**.** *Sejam* E *um espaço com produto interno e* $(x_n)_{n=1}^N$ *uma sequência finita ou infinita de vetores linearmente independentes em* E*. Então existe uma sequência ortonormal* $(y_n)_{n=1}^N$ *em* E *tal que*

$$[x_1, \dots, x_n] = [y_1, \dots, y_n]$$

para cada $n \leq N$.

Demonstração. Primeiramente definimos $y_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ e escrevemos $v_2 = x_2 - \langle x_2, y_1 \rangle y_1$. Observe que $y_2 \in [y_1]^\perp$, pois

$$\langle y_2, y_1 \rangle = \langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_2, y_1 \rangle \langle y_1, y_1 \rangle = 0.$$

Definimos então $y_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|}$. Daí, $[y_1, y_2] \subseteq [x_1, x_2]$, mas como ambos tem dimensão 2, temos que $[x_1, x_2] = [y_1, y_2]$. Prosseguindo por indução, suponhamos que tenhamos $y_1, \dots, y_n$ ortonormais tais que

$$[x_1, \dots, x_n] = [y_1, \dots, y_n].$$

Note que $y_j \neq 0$ para todo j, pois (x_n) é uma sequência de vetores linearmente independentes. Escrevamos

$$v_{n+1} = x_{n+1} - \langle x_{n+1}, y_1 \rangle y_1 - \cdots - \langle x_{n+1}, y_n \rangle y_n.$$

Não é difícil ver que $v_{n+1} \in [y_1, \dots, y_n]^\perp$. Definindo $y_{n+1} = \dfrac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|}$ temos que $y_1, \dots, y_{n+1}$ são ortonormais e

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = [y_1, \dots, y_{n+1}].$$

□

Corolário 3.3.1. *Seja* E *um espaço com produto interno de dimensão finita* n*. Então existe em* E *um conjunto ortonormal completo formado por* n *vetores.*

Corolário 3.3.2. *Seja* E *um espaço com produto interno. Se* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *é um conjunto ortonormal em* E*, então* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *é uma base do subespaço* $[x_1, \dots, x_n]$.

Definição 3.3.2. *Dizemos que um espaço métrico* M *é* ***separável****, se* M *contém um subconjunto enumerável e denso em* M.

Corolário 3.3.3. *Seja* E *um espaço de Hilbert separável. Então existe em* E *um conjunto ortonormal completo enumerável.*

Demonstração. Como E é separável, existe $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em E. Podemos extrair de D uma base B para $[D]$. Suponha que B seja finita, digamos $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Neste caso, como $[D]$ também é denso em E e subespaços de dimensão finita de espaços completos são fechados, temos

$$E = \overline{[D]} = [D] = [v_1, \ldots, v_n].$$

Mas isto não pode ocorrer pois $\dim E = \infty$. Logo, B é infinita. Mas $B \subseteq D$ e D é enumerável, assim B é enumerável, digamos $B = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pela Proposição 3.3.4, existe um conjunto ortonormal $S = (y_n)$ em E tal que $[S] = [v_n : n \in \mathbb{N}]$. Assim,

$$\overline{[S]} = \overline{[v_n : n \in \mathbb{N}]} = \overline{[D]} = E.$$

Logo, pela Proposição 3.3.3, segue o resultado. □

Proposição 3.3.5. *Seja E um espaço com produto interno. Então todo conjunto ortonormal em E está contido em algum conjunto ortonormal completo.*

Demonstração. Sejam S_0 um conjunto ortonormal em E e P a família de todos os conjuntos ortonormais em E que contêm S_0. Note que P é um conjunto parcialmente ordenado por inclusão de conjuntos. Seja $(S_i)_{i\in I}$ uma cadeia em P. Então é fácil ver que $\bigcup\limits_{i\in I} S_i$ é um conjunto ortonormal em E, e claramente contém S_i para todo $i \in I$. Isto prova que cada cadeia em P admite cota superior. Logo, pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal S em P. Pela Proposição 3.3.2, segue que S é um conjunto ortonormal completo em E que contém S_0. □

3.4 Conjuntos Ortonormais Completos em Espaços de Hilbert

Proposição 3.4.1. *Sejam E um espaço com produto interno, M um subespaço de E com dimensão finita n, $\{x_1, \cdots, x_n\}$ um conjunto ortonormal em M, e $x \in E$. Então:*

(i) $\displaystyle\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j \right\| = d(x, M).$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$

Demonstração. (i) Pelo Teorema 3.2.2, podemos escrever

$$x = p + q, \text{ com } p \in M \text{ e } q \in M^\perp. \tag{3.4}$$

Além disso, $\|x - p\| = d(x, M)$. Como $\{x_1, \cdots, x_n\}$ é uma base de M, podemos escrever $p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$. Como $x - p = q \in M^\perp$, temos que

$$0 = \langle x - p, x_k \rangle = \langle x, x_k \rangle - \langle p, x_k \rangle = \langle x, x_k \rangle - \alpha_k,$$

que implica $\alpha_k = \langle x, x_k \rangle$ para $k = 1, \ldots, n$. Logo

$$p = \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j. \tag{3.5}$$

(ii) De (3.4), (3.5) e do Teorema de Pitágoras, segue que

$$\|x\|^2 = \|p\|^2 + \|q\|^2 \geq \|p\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, x_j \rangle|^2.$$

$\square$

Proposição 3.4.2 (Desigualdade de Bessel)**.** *Sejam E um espaço com produto interno, $(x_i)_{i\in I}$ um conjunto ortonormal em E, e $x \in E$. Então o conjunto*

$$I_x = \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$$

é enumerável e

$$\sum_{i \in I_x} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demonstração. Observe que

$$I_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k,$$

onde $J_k = \{i \in I : |\langle x, x_i \rangle| > \frac{1}{k}\}$. Da proposição anterior, segue que J_k é finito. De fato, se J é um subconjunto finito de J_k, segue da proposição anterior que

$$\|x\|^2 \geq \sum_{j \in J} |\langle x, x_j \rangle|^2 > \sum_{j \in J} \frac{1}{k^2} = \frac{|J|}{k^2},$$

e daí $|J| < k^2\|x\|^2$. Segue então que $|J_k| \leq k^2\|x\|^2$ para cada k, e portanto I_x é enumerável.

Escrevamos $(x_i)_{i\in I_x}$ como uma sequência $y_1, y_2, \ldots$. Pela proposição anterior,

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle x, y_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

para cada n. Logo

$$\sum_{i \in I_x} |\langle x, x_i \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, y_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

$\square$

Proposição 3.4.3. *Sejam E um espaço de Hilbert, $(x_i)_{i\in I}$ um conjunto ortonormal em E, e $x \in E$. Então a série*

$$\sum_{i \in I_x} \langle x, x_i \rangle x_i$$

é incondicionalmente convergente. Isto é, a série converge e sua soma independe da ordem escolhida em I_x.

Demonstração. Pela proposição anterior, o conjunto I_x é enumerável. Sejam (y_j) uma ordenação de $(x_i)_{i\in I_x}$ e

$$s_m = \sum_{j=1}^{m} \langle x, y_j\rangle y_j$$

para cada m. Se $n < m$, segue do Teorema de Pitágoras que

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \langle x, y_j\rangle y_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |\langle x, y_j\rangle|^2.$$

Observe que $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, y_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Logo,

$$\sum_{j=n+1}^{m} |\langle x, y_j\rangle|^2 \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Segue que (s_m) é uma sequência de Cauchy em E, e portanto converge para algum $s \in E$.

Para provar que a soma da série independe da ordenação escolhida, considere (z_k) uma outra ordenação de $(x_i)_{i\in I_x}$ e seja

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, z_k\rangle z_k \text{ para cada } n.$$

De maneira análoga, podemos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, z_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \text{ para cada } n,$$

e portanto a sequência (t_n) converge para algum $t \in E$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos achar $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$m \geq m_0 \Longrightarrow \sum_{j=m+1}^{\infty} |\langle x, y_j\rangle|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ e } \|s - s_m\| \leq \varepsilon$$

e

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, z_k\rangle|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ e } \|t - t_n\| \leq \varepsilon.$$

Fixemos $m \geq m_0$ e seja $n \geq n_0$ tal que $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset \{z_1, \ldots, z_n\}$. Então

$$t_n - s_m = \sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle y_j,$$

onde $J \subset \mathbb{N}\backslash\{1, \ldots, m\}$. Segue que

$$\|t_n - s_m\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle x, y_j\rangle|^2 \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |\langle x, y_j\rangle|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Logo

$$\|t - s\| \le \|t - t_n\| + \|t_n - s_m\| + \|s_m - s\| \le 3\varepsilon,$$

e como $\varepsilon > 0$ é qualquer, concluímos que $t = s$. □

Teorema 3.4.1. *Sejam E um espaço de Hilbert e $S = (x_i)_{i \in I}$ um conjunto ortonormal em E. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) O subespaço $[S]$ é denso em E;

(ii) S é completo;

(iii) $x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i$, para todo $x \in E$;

(iv) $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_i \rangle}$, para todos $x, y \in E$;

(v) $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$, para todo $x \in E$.

Demonstração. A implicação $(i) \Rightarrow (ii)$ segue da Proposição 3.3.3 e as implicações $(iii) \Rightarrow (iv)$ e $(iv) \Rightarrow (v)$ são facilmente verificadas.

Provaremos então que $(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(v) \Rightarrow (i)$. Dado $x \in E$, sejam

$$p = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i \text{ e } q = x - p.$$

Pela proposição anterior, p está bem definido. E como

$$\langle q, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle - \langle p, x_j \rangle = 0$$

para todo $j \in I$, temos que $q \in S^\perp$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Suponhamos que S é completo, ou seja, $S^\perp = \{0\}$. Segue que $q = 0$, e portanto $x = p = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i$.
$(v) \Rightarrow (i)$: Seja $M = \overline{[S]}$. Então $p \in M$ e $q \in M^\perp$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|x\|^2 = \|p\|^2 + \|q\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 + \|q\|^2.$$

Segue de (v) que $\|q\| = 0$, e portanto $x = p \in M$. Logo $E = M = \overline{[S]}$. □

Teorema 3.4.2 (Teorema de Riesz-Fisher)**.** *Todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo a ℓ_2.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.3.3, existe em E uma sequência ortonormal completa (x_n). Pelo teorema anterior, temos que

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2, \forall x \in E. \tag{3.6}$$

Considere a aplicação

$$T : E \longrightarrow \ell_2, \; x \longmapsto (\langle x, x_n \rangle)_{n=1}^{\infty}.$$

Observe que T é linear, devido as propriedades do produto interno. Além disso, segue de (3.6) que T é uma isometria. Para completar a demonstração, provemos que T é sobrejetora. Dado $y_n \in \ell_2$, seja $x = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \in E$. Para mostrar que x está bem definido, seja $s_n = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j$ para cada n. Então para $m < n$ temos que

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} y_j x_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |y_j|^2 \longrightarrow 0$$

quando $m, n \longrightarrow \infty$, pois $\sum_{j=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$. Portanto (s_n) é uma sequência de Cauchy em E. Assim, x está bem definido e $\langle x, x_j \rangle = y_j$ para cada j. Logo $(y_n) = T(x)$, como queríamos mostrar. $\square$

4. Operadores Compactos Autoadjuntos

Apresentaremos a seguir o teorema que dá nome a este trabalho, mas antes introduziremos algumas informações sobre operadores compactos e sobre operadores autoadjuntos. Utilizamos neste capítulo as referências [4] e [6].

4.1 Operadores Compactos em Espaços de Banach

Definição 4.1.1. *Seja E um espaço normado.*

(i) Chamaremos de ***bola unitária fechada de*** *E o seguinte conjunto*

$$\overline{B_E} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

(ii) Chamaremos de ***esfera unitária de*** *E o seguinte conjunto*

$$S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Lembre que um subconjunto K de um espaço métrico é dito compacto, se toda sequência formada por elementos de K admite subsequência convergente em K.

Definição 4.1.2. *Sejam E e F espaços de Banach, e $T \in L(E, F)$.*

(i) Diremos que T tem ***posto finito*** *se o subespaço $T(E)$ tem dimensão finita. Denotaremos por $L_f(E, F)$ o subespaço dos operadores de posto finito de E em F.*

(ii) Diremos que T é ***compacto*** *se $T(\overline{B_E})$ é relativamente compacto em F. Denotaremos por $L_K(E, F)$ o espaço dos operadores compactos de E em F.*

Proposição 4.1.1. *Todo operador de posto finito é compacto.*

Demonstração. Seja $T : E \longrightarrow F$ de posto finito. Então

$$T = \phi_1 \otimes y_1 + \cdots + \phi_n \otimes y_n,$$

onde $\phi_i \in E'$, $y_i \in E$ e $\phi_i \otimes y_i(x) = \phi_i(x)y_i$ para todo $x \in E$. Considere (x_j) em $\overline{B_E}$. Para $i = 1, \ldots, n$, $(\phi_i(x_j))$ é uma sequência limitada em $\mathbb{K}$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $(\phi_i(x_j))$ admite subsequência convergente para cada i. Logo, existe uma subsequência (x_{j_k}) tal que $(\phi_i(x_{j_k}))$ é convergente para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, $(T(x_{j_k}))$ é convergente. Assim, T é compacto. □

Proposição 4.1.2. *Sejam E e F espaços de Banach. Então $L_K(E, F)$ é um subespaço fechado de $L(E, F)$.*

Demonstração. Seja (T_n) uma sequência em $L_K(E, F)$ que converge para um operador $T \in L(E, F)$. Para provar que T é compacto, mostraremos que toda sequência em $T(\overline{B_E})$ admite subsequência convergente.

Seja (x_j) uma sequência em $\overline{B_E}$. Como T_1 é compacto, (x_j) admite subsequência $(x_j^1)_{j=1}^\infty$ tal que $(T_1(x_j^1))_{j=1}^\infty$ é convergente. Como T_2 é compacto, $(x_j^1)_{j=1}^\infty$ admite subsequência $(x_j^2)_{j=1}^\infty$ tal que $(T_2(x_j^2))_{j=1}^\infty$ é convergente. Procedendo de maneira indutiva, podemos obter para cada $i \in \mathbb{N}$, uma subsequência $(x_j^i)_{j=1}^\infty$ de $(x_j^{i-1})_{j=1}^\infty$ tal que $(T_i(x_j^i))_{j=1}^\infty$ converge. Seja (z_n) a sequência diagonal $(x_j^j)_{j=1}^\infty$. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$, $(z_j)_{j=i}^\infty$ é uma subsequência de $(x_j^i)_{j=i}^\infty$. Segue daí que $(T_i(z_j))_{j=1}^\infty$ é convergente para cada $i \in \mathbb{N}$. Provaremos que $(T(z_j))_{j=1}^\infty$ converge. Dado $\varepsilon > 0$, existe i tal que $\|T_i - T\| < \varepsilon$. Fixado i, existe j_0 tal que

$$j, k \geq j_0 \Longrightarrow \|T_i(z_j) - T_i(z_k)\| < \varepsilon.$$

Daí,

$$\|T(z_j) - T(z_k)\| \leq \|T(z_j) - T_i(z_j)\| + \|T_i(z_j) - T_i(z_k)\| + \|T_i(z_k) - T(z_k)\| \leq 3\varepsilon$$

para quaisquer $j, k \geq j_0$. Logo $(T(z_j))_{j=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em F, e portanto convergente. □

4.2 Operadores Autoadjuntos em Espaços de Hilbert

Nesta seção, E e F denotarão espaços de Hilbert.

Proposição 4.2.1. *Dado $T \in L(E, F)$, existe um único $T^* \in L(F, E)$ tal que*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle, \ \textit{para todos } x \in E, y \in F. \tag{4.1}$$

*Além disso, tem-se que $\|T^*\| = \|T\|$. O operador T^* é chamado **adjunto** de T.*

Demonstração. Fixemos $y \in F$. Então o funcional de E em $\mathbb{K}$, dado por $x \longmapsto \langle T(x), y\rangle$ é linear, contínuo e tem norma menor ou igual a $\|T\|\|y\|$ pelo Teorema 3.1.1. Pelo Teorema da

Representação de Riesz, existe um único $y^* \in E$ tal que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, y^*\rangle \text{ para todo } x \in E$$

e $\|y^*\| \leq \|T\|\|y\|$. Definamos $T^* : F \longrightarrow E$ por $T^*(y) = y^*$, para cada $y \in F$. Note que, dados $y_1, y_2 \in F$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$T^*(y_1 + \alpha y_2) = y_1^* + \alpha y_2^* = T^*(y_1) + \alpha T^*(y_2),$$

pois

$$\langle T(x), y_1 + \alpha y_2\rangle = \langle T(x), y_1\rangle + \overline{\alpha}\langle T(x), y_2\rangle = \langle x, y_1^*\rangle + \overline{\alpha}\langle x, y_2^*\rangle = \langle x, y_1^* + \alpha y_2^*\rangle.$$

Além disso, temos que

$$\|T^*(y)\| = \|y^*\| \leq \|T\|\|y\|.$$

Logo T^* é contínuo e $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Para provar a unicidade de T^*, suponhamos que exista $S \in L(F, E)$ tal que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, S(y)\rangle, \text{ para todos } x \in E \text{ e } y \in F.$$

Daí, para todos $x \in E$ e $y \in F$ temos

$$\langle x, S(y)\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \Longrightarrow \langle x, S(y) - T^*(y)\rangle = 0 \Longrightarrow S(y) = T^*(y).$$

Logo, $S = T^*$.

O mesmo raciocínio mostra a existência de um único operador $T^{**} \in L(E, F)$ tal que

$$\langle T^*(y), x\rangle = \langle y, T^{**}(x)\rangle \text{ para todos } y \in F,\ x \in E, \tag{4.2}$$

com $\|T^{**}\| \leq \|T^*\|$. De (4.1) e (4.2) temos que $T^{**} = T$, e portanto $\|T\| = \|T^*\|$. □

Definição 4.2.1. *Dizemos que um operador $T \in L(E, E)$ é* ***autoadjunto*** *se $T = T^*$. Isto é,*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle, \text{ para todos } x, y \in E.$$

Proposição 4.2.2. *Seja $T \in L(E, E)$ um operador autoadjunto. Então*

$$\|T\| = \sup\{|\langle T(x), x\rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Demonstração. Seja $C = \sup\{|\langle T(x), x\rangle| : \|x\| = 1\}$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que

$$|\langle T(x), x\rangle| \leq \|T(x)\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|^2 = \|T\|, \text{ para todo } x \in E \text{ com } \|x\| = 1.$$

Logo, $C \leq \|T\|$. Provaremos agora que $\|T\| \leq C$. Se $T(s) = 0$ para todo $s \in S_E$, então $T \equiv 0$, e o resultado é válido. Então, seja $s \in S_E$ tal que $T(s) \neq 0$, e sejam

$$x = \|T(s)\|^{\frac{1}{2}} s \text{ e } y = \|T(s)\|^{-\frac{1}{2}} T(s).$$

Então

$$\|x\|^2 = \|T(s)\| \|s\|^2 = \|T(s)\| = \|T(s)\|^{-1} \|T(s)\|^2 = \|y\|^2$$

e

$$\langle T(x), y \rangle = \langle \|T(s)\|^{\frac{1}{2}} T(s), \|T(s)\|^{-\frac{1}{2}} T(s) \rangle = \|T(s)\|^2 = \langle \|T(s)\|^{-\frac{1}{2}} T(T(s)), \|T(s)\|^{\frac{1}{2}} s \rangle = \langle T(y), x \rangle,$$

pois T é autoadjunto. Sejam $u = x + y$ e $v = x - y$. Então

$$\langle T(u), u \rangle = \langle T(x), x \rangle + \langle T(x), y \rangle + \langle T(y), x \rangle + \langle T(y), y \rangle$$

e

$$\langle T(v), v \rangle = \langle T(x), x \rangle - \langle T(x), y \rangle - \langle T(y), x \rangle + \langle T(y), y \rangle.$$

Segue que

$$\langle T(u), u \rangle - \langle T(v), v \rangle = 2\langle T(x), y \rangle + 2\langle T(y), x \rangle = 4\|T(s)\|^2.$$

Por outro lado, pela definição de C e pela Lei do Paralelogramo,

$$\begin{aligned} \langle T(u), u \rangle - \langle T(v), v \rangle \leq |\langle T(u), u \rangle| + |\langle T(v), v \rangle| &\leq C\|u\|^2 + C\|v\|^2 \\ &= C(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) \\ &= 2C(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4C\|T(s)\|. \end{aligned}$$

Segue que $4\|T(s)\|^2 \leq 4C\|T(s)\|$, e portanto $\|T\| \leq C$. □

Se $T \in L(E, E)$ é autoadjunto, é claro que $\langle T(x), x \rangle = \langle x, T(x) \rangle = \overline{\langle T(x), x \rangle}$. Assim, $\langle T(x), x \rangle$ é real para cada $x \in E$. Sejam $m_T = \inf\{\langle T(x), x \rangle : \|x\| = 1\}$ e $M_T = \sup\{\langle T(x), x \rangle : \|x\| = 1\}$.

Corolário 4.2.1. *Seja $T \in L(E, E)$ um operador autoadjunto. Então*

$$\|T\| = \max\{M_T, -m_T\}.$$

Demonstração. Observe que se $\|x\| = 1$, então

$$|\langle T(x), x \rangle| \leq \|T(x)\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\|.$$

Logo,

$$-\|T\| \leq \langle T(x), x \rangle \leq \|T\|, \text{ para todo } x \in E \text{ com } \|x\| = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&-\|T\| \leq m_T \text{ e } M_T \leq \|T\| \\
&\Longrightarrow -m_T \leq \|T\| \text{ e } M_T \leq \|T\| \\
&\Longrightarrow \max\{-m_T, M_T\} \leq \|T\|.
\end{aligned}$$

Como $\|T\| = \sup\{\langle |T(x), x\rangle| : \|x\| = 1\}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in S_E$ tal que

$$\|T\| - \varepsilon \leq |\langle T(x), x\rangle| \leq \max\{-m_T, M_T\},$$

já que $\langle T(x), x\rangle \leq M_T$ e $m_T \leq \langle T(x), x\rangle$. Sendo ε arbitrário, obtemos $\|T\| \leq \max\{-m_T, M_T\}$. □

Dado $T \in L(E, E)$, se λ é um autovalor de T, denotaremos por E_λ o subespaço

$$E_\lambda = \{x \in E : T(x) = \lambda x\}.$$

Proposição 4.2.3. *Seja $T \in L(E, E)$ um operador autoadjunto. Então:*

(i) Se λ é um autovalor de T, então λ é real e $m_T \leq \lambda \leq M_T$.

(ii) Se λ e μ são autovalores distintos de T, então os subespaços E_λ e E_μ são ortogonais entre si.

Demonstração. (i) Suponhamos que $T(x) = \lambda x$, com $\|x\| = 1$. Então

$$\langle T(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda.$$

Logo λ é real e $m_T \leq \lambda \leq M_T$.

(ii) Suponhamos $T(x) = \lambda x$ e $T(y) = \mu y$. Então

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Logo, como $\lambda \neq \mu$, temos que $\langle x, y\rangle = 0$. □

4.3 O Teorema Espectral

Proposição 4.3.1. *Sejam E um espaço de Hilbert e $T \in L(E, E)$ um operador compacto autoadjunto não nulo. Então $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é um autovalor de T, e existe um autovetor $x \in S_E$ correspondente tal que $|\langle T(x), x\rangle| = \|T\|$.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.2.1, existe uma sequência $(x_n) \subset S_E$ tal que $\langle T(x_n), x_n\rangle \longrightarrow \lambda$, onde $\lambda = \|T\|$ ou $\lambda = -\|T\|$. Note que

$$\begin{aligned} 0 \leq \|T(x_n) - \lambda x_n\|^2 &= \langle T(x_n) - \lambda x_n, T(x_n) - \lambda x_n \rangle \\ &= \|T(x_n)\|^2 - \lambda \langle T(x_n), x_n \rangle - \lambda \langle x_n, T(x_n) \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 - 2\lambda \langle T(x_n), x_n \rangle + \lambda^2. \end{aligned}$$

Como $\|T\|^2 - 2\lambda\langle T(x_n), x_n\rangle + \lambda^2 \longrightarrow 0$, segue que $T(x_n) - \lambda x_n \longrightarrow 0$. Como T é compacto, a sequência $(T(x_n))$ admite subsequência convergente. Sem perda de generalidade, podemos supor que $(T(x_n))$ converge para um $y \in E$. Como $T(x_n) - \lambda x_n \longrightarrow 0$, segue que $\lambda x_n \longrightarrow y$. Em particular, como $\lambda \neq 0$, temos que $x_n \longrightarrow x$, onde $x = \dfrac{y}{\lambda}$. Além disso, como $\|x_n\| = 1$ para todo n, segue que $\|x\| = 1$. Por um lado, $T(x_n) \longrightarrow y = \lambda x$. Por outro, $T(x_n) \longrightarrow T(x)$. Logo $T(x) = \lambda x$, e portanto λ é autovalor de T. Finalmente, como $|\langle T(x_n), x_n\rangle| \longrightarrow \|T\|$, temos que $|\langle T(x), x\rangle| = \|T\|$, como queríamos. $\square$

Teorema 4.3.1 (Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos em Espaços de Hilbert)**.** *Sejam E um espaço de Hilbert e $T \in L(E, E)$ um operador compacto autoadjunto não nulo. Então existe uma sequência finita ou infinita (λ_n) de autovalores, e uma sequência correspondente (x_n) de autovetores, tal que T admite uma representação da forma*

$$T(x) = \sum \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n = \sum \langle T(x), x_n\rangle x_n \tag{4.3}$$

para todo $x \in E$. Além disso, a sequência (x_n) é ortonormal e se a sequência (λ_n) é infinita então $\lambda_n \longrightarrow 0$.

Demonstração. Aplicando a proposição anterior, obtemos $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $x_1 \in E$ com $\|x_1\| = 1$, tais que

$$T(x_1) = \lambda_1 x_1 \text{ e } |\lambda_1| = \|T\|.$$

Seja $E_1 = [x_1]$ o subespaço gerado por x_1. Note que o subespaço $E_1^\perp$ é invariante por T, ou seja, $T(E_1^\perp) \subseteq E_1^\perp$. De fato, para cada $x \in E_1^\perp$ tem-se que

$$\langle T(x), x_1\rangle = \langle x, T(x_1)\rangle = \langle x, \lambda_1 x_1\rangle = \lambda_1\langle x, x_1\rangle = 0.$$

Se a restrição $T|_{E_1^\perp}$ é identicamente nula, paramos o processo nesse ponto. Caso contrário, aplicando a proposição anterior à $T|_{E_1^\perp}$, obtemos $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in E_1^\perp$ com $\|x_2\| = 1$, tais que

$$T(x_2) = \lambda_2 x_2 \text{ e } |\lambda_2| = \|T|_{E_1^\perp}\|.$$

Procedendo por indução, obtemos uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ com $\lambda_n \neq 0$ e uma sequência $(x_n) \subset E$ com $\|x_n\| = 1$, tais que

$$T(x_n) = \lambda_n x_n, \quad x_n \in E_{n-1}^\perp, \quad |\lambda_n| = \|T|_{E_{n-1}^\perp}\| \text{ para } n \geq 2,$$

onde $E_n = [x_1, \ldots, x_n]$ para cada $n \geq 1$. É claro que a sequência $(|\lambda_n|)$ é não crescente e a sequência (x_n) é ortonormal. Antes de prosseguir, mostraremos que $\lambda_n \longrightarrow 0$ quando a sequência (λ_n) é infinita.

Suponhamos que a sequência (λ_n) seja infinita e não convirja para 0. Como $(|\lambda_n|)$ é não crescente, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ para todo n. Como T é compacto, a sequência $(T(x_n))$ admite subsequência convergente. Além disso, como $T(x_n) = \lambda_n x_n$ e $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ para todo n, segue que (x_n) admite uma subsequência convergente, pois

$$x_n = \frac{T(x_n)}{\lambda_n}$$

onde $(T(x_n))$ admite subsequência convergente e $\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$ também admite subsequência convergente já que $\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Mas isso é um absurdo, pois sendo (x_n) ortonormal, temos que $\|x_n - x_m\|^2 = 2$ sempre que $n \neq m$. Logo, $\lambda_n \longrightarrow 0$ quando (λ_n) é infinita.

Para completar a prova, consideraremos o caso em que $T|_{E_n^\perp}$ é zero para algum n. Cada $x \in E$ pode ser escrito na forma

$$x = y_n + z_n \text{ com } y_n \in E_n,\ z_n \in E_n^\perp,$$

e portanto

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j + z_n.$$

Como $T|_{E_n^\perp} = 0$, segue que

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle T(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle \lambda_j x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle x, \lambda_j x_j \rangle x_j = \sum_{j=1}^{n} \langle x, T(x_j) \rangle x_j = \sum_{j=1}^{n} \langle T(x), x_j \rangle x_j. \end{aligned}$$

Isto prova a representação (4.3) quando $T|_{E_n^\perp} = 0$ para algum n. Suponhamos agora que $T|_{E_n^\perp} \neq 0$ para todo n. Como no caso anterior, escrevemos

$$x = y_n + z_n \text{ com } y_n \in E_n,\ z_n \in E_n^\perp.$$

Como $|\lambda_{n+1}| = \|T|_{E_n^\perp}\|$, segue que

$$\|T(z_n)\| \leq \|T|_{E_n^\perp}\| \|z_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\| \longrightarrow 0.$$

Daí,

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(y_n) + T(z_n) = \lim_{n\to\infty} T(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle T(x_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, T(x_j) \rangle x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle T(x), x_j \rangle x_j,$$

finalizando a demonstração. □

Corolário 4.3.1. *Sejam E um espaço de Hilbert e $T \in L(E, E)$ um operador compacto autoadjunto não nulo. Todo autovalor $\lambda \neq 0$ de T aparece na sequência (λ_n) do teorema anterior. O subespaço de autovetores correspondentes E_λ tem dimensão finita e a dimensão de E_λ coincide com o número de vezes que λ aparece na sequência (λ_n).*

Demonstração. Suponhamos que exista um autovalor $\lambda \neq 0$ de T que não apareça na sequência (λ_n). Seja x um autovetor correspondente, $x \neq 0$. Neste caso $\langle x, x_n \rangle = 0$ para todo n, e segue de (4.3) que $T(x) = 0$. Absurdo, pois $T(x) = \lambda x \neq 0$.

Suponhamos agora que um autovalor $\lambda \neq 0$ apareça p vezes na sequência (λ_n). Neste caso o subespaço E_λ contém um subconjunto ortonormal formado por p vetores $x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}$, e daí $\dim E_\lambda \geq p$. Suponhamos que $\dim E_\lambda > p$. Então existe $x \in E_\lambda$, com $x \neq 0$ e $\langle x, x_{n_j} \rangle = 0$ para $j = 1, \ldots, p$. Daí $\langle x, x_n \rangle = 0$ para todo n, e obtemos de novo de (4.3) que $T(x) = 0$, que é um absurdo. Logo, $\dim E_\lambda = p$. □

Referências Bibliográficas

[1] Barroso, C. S.: *Análise Funcional: Uma introdução.* Notas de aula utilizadas no curso de Análise Funcional, IMPA, 2009.

[2] Ben-Artzi, J.: *The Spectral Theorem*, 2008. http://twixar.me/BXF1, acessado em 20/06/2019.

[3] Costa, A. R. D.: *Teorema de Hahn-Banach.* Monografia de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Santa Catarina, 2014.

[4] Geraldo, B., Pellegrino, D. e Teixeira, E.: *Fundamentos de Análise Funcional.* SBM, 2ª ed., 2015.

[5] Lima, E. L.: *Espaços Métricos.* IMPA, 2003.

[6] Mujica, J.: *Notas de Análise Funcional.* UNICAMP, 2003.

[7] Souza, E. C.: *O Teorema de Hahn-Banach e Aplicações.* Monografia de Especialização, Universidade Estadual da Paraíba, 2011.