



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

UMA CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE DE SISTEMAS DE
ATERRAMENTO EM MEIOS HORIZONTALMENTE ESTRATIFICADOS

ROONEY RIBEIRO ALBUQUERQUE COELHO

UBERLÂNDIA
2019

Rooney Ribeiro Albuquerque Coelho

**Uma Contribuição à Análise de Sistemas de
Aterramento em Meios Horizontalmente
Estratificados**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Engenharia Elétrica

Orientador: Luciano Coutinho Gomes

Coorientador: Luciano Martins Neto

Uberlândia

2019

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C672 2019	<p>Coelho, Rooney Ribeiro Albuquerque, 1989- UMA CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE DE SISTEMAS DE ATERRAMENTO EM MEIOS HORIZONTALMENTE ESTRATIFICADOS [recurso eletrônico] / Rooney Ribeiro Albuquerque Coelho. - 2019.</p> <p>Orientador: Luciano Coutinho Gomes. Coorientador: Luciano Martins Neto. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Elétrica. Modo de acesso: Internet. Disponível em: http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2045 Inclui bibliografia. Inclui ilustrações.</p> <p>1. Engenharia elétrica. I. Coutinho Gomes, Luciano , 1972- , (Orient.). II. Martins Neto, Luciano, 1948-, (Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título. CDU: 621.3</p>
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

Rooney Ribeiro Albuquerque Coelho

**Uma Contribuição à Análise de Sistemas de
Aterramento em Meios Horizontalmente
Estratificados**

Data da defesa: 14/06/2019

BANCA EXAMINADORA:

Luciano Coutinho Gomes – Orientador	(UFU)
Luciano Martins Neto – Coorientador	(UFU)
Geraldo Caixeta Guimarães – Examinador interno	(UFU)
José Roberto Cardoso – Examinador externo	(USP)
Daniel Pereira de Carvalho – Examinador interno	(UFU)
Ricardo Silva Thé Pontes – Examinador externo	(UFC)

Dedico esta Tese de Doutorado

Aos meus mestres:

Professor Dr. Luciano Martins Neto

Professor Dr. Ricardo Silva Thé Pontes

Professora M.^a Maria das Graças Santos Rufino Pontes

Minha família:

Kamylla Albuquerque e Davi A. Coelho

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, por ter me concedido o dom da vida e sabedoria para concluir mais esta etapa, me fazendo viver diariamente a sua misericórdia e amor, e por não me permitir esquecer jamais o grande versículo: “Todas as coisas cooperam para o bem daqueles que amam a Deus”.

À minha família amada, Kamylla Albuquerque e Davi A. Coelho por ter me dado suporte emocional durante a escrita desta tese. As muitas noites em claro sabendo que estavam sempre ao meu lado e a compreensão nos momentos de ausência. Filho, espero que possa me perdoar todas as vezes que você chorou e eu não pude estar perto para acolhê-lo; Amor, muito obrigado por ser a coluna de sustentação da nossa pequena grande família, me perdoe ainda pelas fraldas não trocadas durante a escrita desta tese. Amo muito vocês!

Agradeço aos meus pais, Mario e Joana, por ser inspiração para minha vida até os dias atuais. Obrigado pelas noites de estudo, vivência em família e me fazer compreender a importância do exemplo na educação dos filhos desde pequenos.

Ao professor Dr. Ricardo Silva Thé Pontes pela orientação, liderança, amizade, confiança e dedicação nesta longa caminhada. À professora *M.^a* Maria das Graças Santos Rufino Pontes, que me acompanhou durante os anos de graduação, e com certeza, por ter sido a grande responsável pela minha escolha de seguir a carreira acadêmica. Ambos os professores citados são exemplo tanto para minha vida profissional e pessoal.

Ao professor Dr. Luciano Martins Neto pela orientação, confiança e acolhida desde a minha chegada em Uberlândia.

Ao professor PhD Antônio Eduardo Costa Pereira pelos esclarecimentos prestados ao decorrer de meses sobre assuntos relativos a área de computação, tal como o auxílio na redação do artigo publicado nesta tese.

Ao professor PhD José Roberto Camacho pelo grande conhecimento transmitido nas disciplinas de Estudo Orientado e Métodos Numéricos, que foram bastante úteis para

o desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Vernon Sipple pelas aulas de inglês e auxílio na redação do artigo publicado nesta tese.

Aos colegas de laboratório pelo companheirismo e conhecimento compartilhado durante toda a minha pesquisa.

Aos professores doutores Daniel Pereira de Carvalho, Ricardo Silva Thé Pontes e Luciano Martins Neto pelas valiosas contribuições para o aperfeiçoamento desta tese na ocasião da qualificação.

Aos professores doutores Luciano Coutinho Gomes, Geraldo Caixeta Guimarães, José Roberto Cardoso, Daniel Pereira de Carvalho, Luciano Martins Neto e Ricardo Silva Thé Pontes pelas valiosas contribuições na ocasião da defesa.

Ao professor Dr. Afonso Bernardino de Almeida Junior por voluntariamente ter contribuído para a melhoria deste trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFU pela oportunidade de crescimento profissional e aprendizado.

À CAPES por ter concedido suporte financeiro a esta pesquisa durante esse longo período.

Aos colegas da UFTM pelo conhecimento compartilhado e a acolhida no ambiente em que pude adquirir experiência de sala de aula.

Os meus agradecimentos se estendem também a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram com a realização desta tese de doutorado.

Porque Dele, por Ele e para Ele, são todas as coisas; Glória pois a Ele eternamente.

Amém.

ROMANOS 11:36

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal desenvolver um equacionamento para o cálculo do potencial elétrico em solos heterogêneos. O equacionamento desenvolvido é aplicado no estudo de sistemas de aterramento para problemas de condução de correntes de curto-circuito à frequência industrial. Inicialmente se propõe um modelo para sistemas de aterramento em solo homogêneo, calculando-se potencial elétrico, campo elétrico e resistência de aterramento, adota-se então a condição de equipotencialidade para os eletrodos e determina-se a distribuição de correntes no sistema. O modelo de solo homogêneo é utilizado como base de cálculo para o solo heterogêneo. Para o modelo proposto, aplicam-se as condições de contorno na interface entre materiais distintos e assume-se o potencial elétrico nulo a uma distância infinita da fonte. Para o cálculo da função potencial no solo heterogêneo é necessário a solução de uma integral envolvendo polinômios de Bessel. Para tal, duas soluções são propostas. A primeira solução proposta é feita para um ponto genérico e é baseada em uma fórmula de quadratura de integração para funções altamente oscilatórias envolvendo polinômios de Bessel. A segunda solução proposta é limitada a pontos na superfície do solo e é baseada na identidade de Lipschitz, onde expandem-se as funções características do solo heterogêneo em séries de Chebyshev para aplicação dessa identidade matemática. Todo o equacionamento desenvolvido é inicialmente feito para uma fonte pontual de corrente e em seguida é generalizado para uma trajetória linear no espaço tridimensional. A representação das coordenadas de cada condutor no espaço é feita propositalmente da mesma forma que nos aplicativos de desenho (CAD) disponíveis, assim permitindo a leitura de arquivos de CAD para a simulação de configurações de sistemas de aterramento genéricas. Os resultados de resistência e distribuição de potenciais na superfície para diversas configurações são comparados com valores de referência, experimentais, analíticos e numéricos, disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Aterramento Elétrico. Solo heterogêneo. Integração numérica. Funções de Bessel. Polinômios de Chebyshev. Simulação computacional.

Abstract

The main aim of this work is to develop an equation for the calculation of electric potential in heterogeneous soils. The proposed equation is applied in the study of grounding systems for short-circuit current conduction problems at industrial frequency. Initially, a model for grounding systems in homogeneous soil is proposed, calculating electric potential, electric field and grounding resistance. The equipotentiality condition for the electrodes is then adopted and the system current distribution is determined. The homogeneous soil model is used as the calculation basis for the heterogeneous soil. For the proposed heterogeneous soil model, it is applied the boundary conditions at the interface among different materials and the electric potential is assumed to be zero at an infinite distance from the source. As for the calculation of the potential function in the heterogeneous soil it is necessary the solution of an integral involving Bessel polynomials. For so, two solutions are proposed. The first one is made for a generic point and is rooted on an integration quadrature formula for highly oscillatory functions involving Bessel polynomials. The second solution proposed is limited to points located on the soil surface and is based on the Lipschitz identity, where the characteristic heterogeneous soil functions are expanded into Chebyshev series, for the application of such mathematical identity. All the equation developed is initially made for a point current source and then generalized for a linear trajectory in the three-dimensional space. The representation of the coordinates for each conductor in the space is purposely made the same way as in the drawing software (CAD) available, thus allowing the reading of CAD files for the simulation of generic grounding system configuration. The results of resistance and distribution of potentials on the surface for various configurations are compared with experimental, analytical and numerical reference values available in the literature.

Keywords: Electric grounding. Heterogeneous soil. Numerical integration. Bessel functions. Chebyshev polynomials. Computational simulation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Situações típicas de choque elétrico em subestações.	24
Figura 2 – Fonte de corrente I à distância d de uma interface entre dois meios condutivos semi-infinitos. A fonte está imersa em um meio de condutividade σ_1 , sendo o meio oposto à interface com condutividade σ_2	36
Figura 3 – Interface entre condutores	37
Figura 4 – Aplicação da Eq. 3.22 no plano rz . O solo é representado pelo meio σ_1 e o ar é representado pelo meio $\sigma_2 = 0$, o eixo z tem orientação para baixo. A figura ilustra as linhas equipotenciais geradas pela fonte I imersa no solo a uma dada profundidade.	39
Figura 5 – Representação da fonte de corrente e de sua imagem no espaço. Note que a superfície do solo atua tal qual um espelho para a fonte de corrente, gerando uma fonte imagem.	40
Figura 6 – Representação da fonte de corrente e de sua imagem no espaço. Note que a superfície do solo atua tal qual um espelho para a fonte de corrente, gerando uma fonte imagem.	41
Figura 7 – Linhas equipotenciais	43
Figura 8 – Acoplamento resistivo	44
Figura 9 – Ilustração da metodologia de cálculo para as resistências próprias e mútuas.	45
Figura 10 – Potencial elétrico gerado por uma associação de hastes	47
Figura 11 – Aproximação de um arco por segmento de retas interligados.	48
Figura 12 – Aterramento em anel.	49
Figura 13 – Campo elétrico \vec{E} (ou \mathbf{E}) e seu módulo na superfície do solo.	51
Figura 14 – Tensão de toque na superfície do solo.	52
Figura 15 – Tensão de passo.	53
Figura 16 – Tensão de passo.	55

Figura 17 – Fonte de corrente I imersa em uma camada de um solo horizontalmente estratificado.	60
Figura 18 – Funções características para diferentes valores de z_0	71
Figura 19 – Linhas equipotenciais para diferentes valores de z_0	75
Figura 20 – Potencial de superfície para diferentes valores de z_0	76
Figura 21 – Funções características para diferentes valores de z_0 em um solo específico.	79
Figura 22 – Parametrização de um condutor retilíneo em solo heterogêneo.	84
Figura 23 – Linhas equipotenciais para diferentes profundidades de um condutor horizontal.	88
Figura 24 – Modelo para cálculo da densidade de corrente em uma haste	91
Figura 25 – Segundo modelo para cálculo da densidade de corrente em uma haste	92
Figura 26 – Densidade de corrente.	94
Figura 27 – Densidade de corrente.	95
Figura 28 – Densidade de corrente.	97
Figura 29 – Linhas equipotenciais para diferentes profundidades de um condutor vertical.	99
Figura 30 – Potencial elétrico de um sistema de aterramento composto por três hastes interligadas.	103
Figura 31 – Magnitude do campo elétrico $\ \mathbf{E}\ $ em uma malha de aterramento imersa em solo heterogêneo.	105
Figura 32 – Comparativo entre solo heterogêneo e homogêneo.	106
Figura 33 – Modelo do solo em camadas horizontais.	108
Figura 34 – Método de Wenner.	111
Figura 35 – Análise de $k_1(\lambda)$	112
Figura 36 – Função $k_1(E)$ para $0 \leq E \leq 1$	113
Figura 37 – Escolha adequada de n	117
Figura 38 – Análise de $\rho_a(a)$	118
Figura 39 – Análise de $\rho_a(a)$	121
Figura 40 – Influência de uma camada de brita no sistema de aterramento.	123
Figura 41 – Análise paramétrica da resistência de aterramento de uma haste em solos de duas camadas.	125
Figura 42 – Potencial elétrico em um perfil do solo gerado por uma haste de aterramento.	126
Figura 43 – Potencial elétrico na diagonal de uma malha de aterramento.	128
Figura 44 – Ilustração de uma malha de aterramento utilizada nos estudos de caso.	130
Figura 45 – Potencial elétrico na linha de medição, como apresentado na Fig. 44a.	131
Figura 46 – Potencial elétrico na linha de medição, como apresentado na Fig. 44c.	131
Figura 47 – Potencial de superfície para o eletrodo de Vujevic e Kurtovic	133

Figura 48 – Potencial ao longo de uma linha de medição do ponto central da malha até uma distância afastada de 20 m para o eletrodo de Vujević e Kurtović ().	134
Figura 49 – Subestação Barberá: Potencial de superfície.	136
Figura 50 – Subestação Balaídos II: Potencial de superfície.	137
Figura 51 – Subestação Santiago II: Potencial de superfície.	138
Figura 52 – Subestação Santiago II: tensão de toque.	139
Figura 53 – Subestação Santiago II: tensão de passo.	139
Figura 54 – Interpolação por polinômio de Chebyshev.	155

Lista de tabelas

Tabela 1	– Dez primeiras raízes de $J_0(\pi x)$	73
Tabela 2	– Tempo em segundos para diferentes quantidades N de pontos.	82
Tabela 3	– Modelo da corrente uniforme dentro da camada.	94
Tabela 4	– Modelo da corrente uniforme dentro da camada.	96
Tabela 5	– Comparativo de erro para as medições.	120
Tabela 6	– Modelo do solo estratificado.	120
Tabela 7	– Comparativo entre o valores de Raggi (2009) e os calculados para a resistência de aterramento de uma malha em um solo de três camadas.	127
Tabela 8	– Comparativo entre o valores da simulação usando o MEF de Silva (2006), com os dados experimentais de Bourg, Sacepe e Debu (1995) e a abordagem proposta.	129

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AG	Algoritmos genéticos
BEM	Método dos Elementos de Contorno
BFGS	Algoritmo de otimização Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
CAD	Desenho Assistido por Computador
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CPU	Unidade de Processamento Central
DXF	Drawing Exchange Format
ED	Evolução Diferencial
ENDESA	Concessionária de Energia
Eq.	Equação
Fig.	Figura
GNU	Sistema operacional tipo Unix
GPR	Ground Potential Rise (Aumento de potencial de terra)
GROUND-3D	Aplicativo de simulação de sistemas de aterramento
GSL	Gnu Scientific Library
Gauss-Kronrod	Método de integração numérica adaptativo
Gauss-Legendre	Método de integração numérica não adaptativo

GetDP	Solucionador para o Método dos Elementos Finitos
GnuPlot	Aplicativo gráfico da GNU
Gmsh	Gerador de malhas para o Método dos Elementos Finitos
IEC	international Electrotechnical Comission
IEEE	Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos
ImageJ	Aplicativo para medição de imagens
LMAGLIB	Biblioteca numérica da USP
LRC	Lightning Research Center
LibreCAD	Aplicativo de desenho
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MIC	Método das Imagens Complexas
Matplotlib	Biblioteca Gráfica do Python
NBR	Norma Brasileira Regulamentadora
OpenMP	Open Multi-Processing: interface para programação multi-processo
Python	Linguagem de programação
RAM	Memória de Acesso Aleatório
Tab.	Tabela
TOTBEM	Aplicativo para simulação de sistemas de aterramento baseado no Método dos Elementos de Contorno
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFTM	Universidade Federal do Triângulo Mineiro
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
USP	Universidade de São Paulo

Lista de símbolos

∇	Operador diferencial nabla
E_{passo}	Tensão de passo
E_{toque}	Tensão de toque
E_{m}	Tensão de malha
\mathbf{E}	Vetor campo elétrico
$d\mathbf{l}$	Elemento diferencial de comprimento vetorial
\mathbf{J}	Vetor densidade de corrente
$d\mathbf{S}$	Elemento diferencial de área vetorial
σ	Condutividade elétrica
I	Corrente elétrica
V	Potencial elétrico
$\mathcal{R}, \theta, \phi$	Variáveis do sistema de coordenadas esféricas
\mathbf{r}	Vetor posição
\mathbf{a}	Vetor unitário
x, y, z	Variáveis do sistema cartesiano
\mathbf{r}_0	Vetor posição inicial
d	Distância; espessura de uma camada do solo
u	Parâmetro utilizado para integração

s	Parâmetro utilizado para integração
a, b, c, d	variáveis para uma fonte real; limites de integração
a	Espaçamento entre as sondas no método de Wenner
d	espessura de uma única camada do solo
A, B	Subescrito para condutores
a', b', c'	Variáveis para uma fonte imagem
ρ	Resistividade elétrica
r_c	Raio do condutor
L	Comprimento do condutor
Ψ, Φ	Funções auxiliares utilizadas para simplificar a notação
R	Resistência de aterramento
r, ϕ, z	Variáveis do sistema de coordenadas cilíndricas
r_0, ϕ_0, z_0	Posição inicial no sistema de coordenadas cilíndricas
f	Uma função de r utilizada no método de separação de variáveis; função qualquer
g	Uma função de z utilizada no método de separação de variáveis
λ	Constante de proporcionalidade
c_1, c_2, c_3, c_4	Constantes numéricas
J_0	Função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero
J_1	Função de Bessel de primeiro tipo e ordem um
Y_0	Função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero
\mathcal{F}, \mathcal{G}	Funções características do solo heterogêneo que dependem da camada da fonte “i” e da camada do ponto de cálculo “j”
i, j, k, l	Índices
i	Corrente elétrica dentro de uma camada do solo no modelo de distribuição uniforme
k, K	Função característica do solo heterogêneo para o algoritmo de Sunde

μ	Índice de reflexão generalizado
H	Espessura acumulada das camadas
P	Ponto qualquer
N	Quantidade de camadas do solo heterogêneo
$\mathbf{\Lambda}$	Matriz utilizada para a obtenção das funções características do solo
Λ	Bloco da matriz $\mathbf{\Lambda}$
\mathbf{x}	Vetor resposta de $\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{S}$
\mathbf{S}	Vetor que depende da localização da fonte de corrente
δ	Função delta de Kronecker
ψ	Função auxiliar
h	Passo da fórmula de integração
ξ	Uma raiz de $J_1(\pi x)$; zeros do polinômio de Chebyshev
ω	Peso associado utilizado na fórmula de integração
t	Variável real; parâmetro de integração
T	Polinômio de Chebyshev
T^*	Polinômio de Chebyshev deslocado
n	Grau do polinômio de Chebyshev
c	Coefficiente do polinômio de Chebyshev
E	Mudança de variável para $e^{-\lambda}$
A	Matriz de coeficientes do polinômio de Chebyshev
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	Termos para a decomposição das funções características do solo em polinômios de Chebyshev
α, β	Variáveis
$\boldsymbol{\beta}$	Vetor de parâmetros
ε	Erro
ρ_a, ρ_{aT}	Resistividade aparente do solo
ρ_{aE}	Resistividade aparente experimental

Sumário

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Introdução	23
1.2	Conceitos de aterramentos elétricos	24
1.3	Motivação	27
1.4	Objetivos	27
1.5	Organização do trabalho	28
2	ESTADO DA ARTE	30
2.1	Simulação de sistemas de aterramento	30
2.2	Estratificação do solo em camadas horizontais	32
3	ATERRAMENTO EM SOLO HOMOGÊNEO	34
3.1	Introdução	34
3.2	Regime eletrocinético	34
3.3	Equacionamento	35
3.3.1	Método das imagens para a interface de meios condutivos	36
3.3.2	Aplicação do método das imagens ao solo	38
3.4	Modelo de um condutor	40
3.5	Resistência de aterramento e acoplamento resistivo	43
3.5.1	Comparativo para a resistência de aterramento de um condutor vertical com a fórmula de Sunde	45
3.5.2	Sistemas com múltiplos condutores	45

3.6	Segmentos de arco	47
3.7	Cálculo do campo elétrico	49
3.7.1	Campo elétrico gerado por uma associação de condutores	51
3.8	Tensões de toque e de passo	52
3.9	Cálculo de potenciais em uma trajetória específica	54
3.10	Considerações sobre desenho do sistema de aterramento	55
4	FONTE PONTUAL DE CORRENTE EM SOLO HETERO- GÊNEO	57
4.1	Introdução	57
4.2	Equacionamento generalizado	57
4.2.1	Parcela da fonte de corrente	58
4.2.2	Solução genérica da equação de Laplace	58
4.2.3	Aplicação no solo heterogêneo	59
4.3	Condições de contorno	61
4.3.1	Aplicação da <i>Condição de Contorno 1</i>	62
4.3.2	Aplicação da <i>Condição de Contorno 2</i>	63
4.3.3	Aplicação da <i>Condição de Contorno 3</i>	64
4.3.4	Aplicação da <i>Condição de Contorno 4</i>	65
4.4	Obtenção das funções características \mathcal{F}_{ij} e \mathcal{G}_{ij}	66
4.4.1	<i>Exemplo: modelo de três camadas</i>	69
4.4.2	<i>Exemplo: modelo de cinco camadas</i>	70
4.4.3	Representação gráfica das funções características	71
4.5	Solução da integral na função potencial	72
4.5.1	Fórmula de quadratura para integrais envolvendo polinômios de Bessel	72
4.5.2	Solução da função potencial pela fórmula de quadratura	74
4.6	Cálculo do potencial elétrico através da série de Chebyshev	77
4.6.1	Mudança de variável para intervalo fechado	77
4.6.2	Decomposição em série de Chebyshev	80
5	ATERRAMENTOS EM SOLO HETEROGÊNEO	83

5.1	Potencial elétrico gerado por um condutor de aterramento . . .	83
5.2	Condutor horizontal - Ponto qualquer do solo	84
5.3	Condutor horizontal - Potencial de superfície	89
5.4	Potencial elétrico de condutor que atravessa camadas	90
5.4.1	Corrente uniforme dentro de uma camada do solo	90
5.4.2	Corrente não uniforme	92
5.4.3	Comparativo entre os modelos	93
5.4.4	Condutor vertical - Função potencial	98
5.4.5	Condutor vertical - Potencial de superfície	100
5.5	Resistência de aterramento e acoplamento resistivo	101
5.6	Cálculo do campo elétrico	104
5.7	Considerações sobre aterramentos em solo heterogêneo	106
6	MODELAGEM ELÉTRICA DO SOLO	108
6.1	Introdução	108
6.2	Cálculo da função potencial	109
6.2.1	Aplicação da função potencial ao método de Wenner	110
6.2.2	Mudança de variável para λ	112
6.3	Solução da Equação 6.15 pela série de Chebyshev	114
6.3.1	Equacionamento	114
6.3.2	Escolha do grau ótimo para o polinômio	116
6.3.3	Considerações	117
6.4	Problema inverso	119
6.4.1	Estratificação do solo	119
7	APLICAÇÕES E RESULTADOS	122
7.1	Introdução	122
7.2	Influência do revestimento superficial	123
7.3	Modelo de Takahashi e Kawase	125
7.4	Simulador do LRC (Lightning Research Center)	127
7.5	Método dos Elementos Finitos	129

7.6	Eletrodo de Vujević e Kurtović	133
7.7	Sistemas de aterramento de larga escala	135
8	CONCLUSÃO	141
	REFERÊNCIAS	146

ANEXOS 153

ANEXO A	–	POLINÔMIOS DE CHEBYSHEV	154
A.1		Equacionamento para o Polinômio de Chebyshev	156
A.2		Polinômio de Chebyshev deslocado	157

Introdução

1.1 Introdução

O estudo de aterramentos elétricos é essencial em engenharia elétrica, sua importância engloba servir como referência para o sistema elétrico de potência e sistemas eletrônicos, garantir a segurança de animais e seres humanos, além de prevenir danos as instalações elétricas.

O sistema de aterramento atua em condições de falta como na falta de isolamento entre parte do enrolamento e a carcaça de máquinas elétricas e também na condução de correntes de sequência zero em situações de curto-circuito monofásico. Pode-se dizer que sistemas de aterramento também atuam permanentemente em sistemas elétricos de potência, não apenas em sistemas de eletrificação rural, onde o aterramento atua como o condutor neutro de um sistema monofásico, mas também em sistemas trifásicos, em especial sistemas de distribuição de energia, visto à frequência da ocorrência de desequilíbrios de carga. Essas situações são denominadas de aterramento elétrico em “regime permanente” em relação a variação temporal da corrente de surto.

Sistemas de aterramento também são responsáveis por dissipar correntes transitórias provenientes de descargas atmosféricas e manobras de chaveamento. Situações desse tipo são denominadas de aterramento elétrico em “regime transitório” no que se refere a variação temporal da corrente de surto.

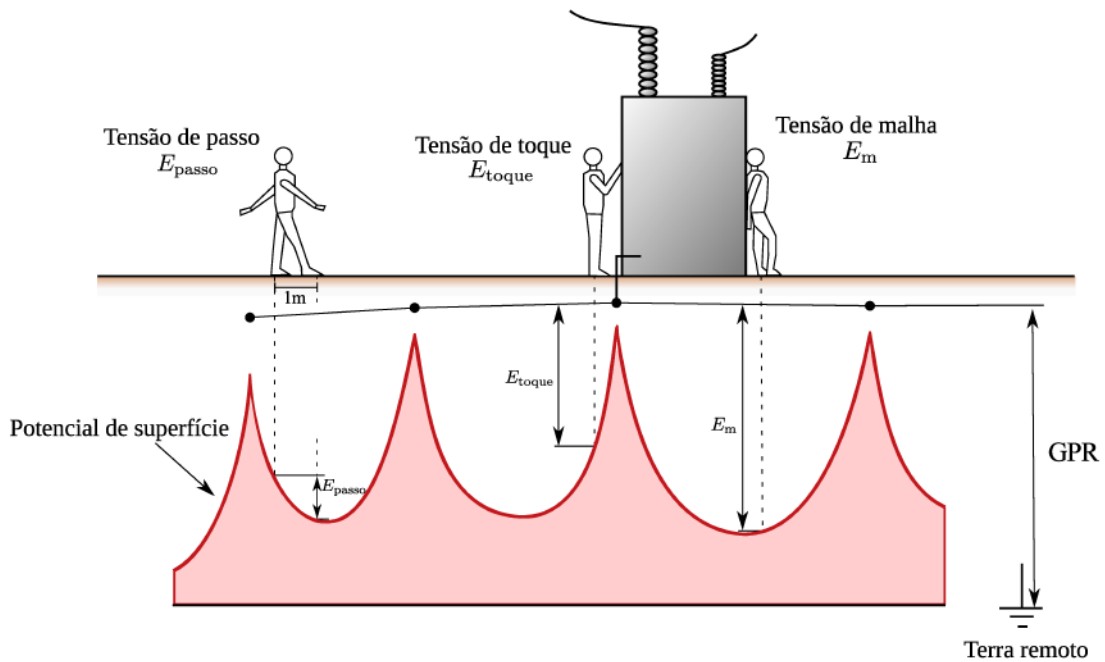
Uma etapa fundamental para o projeto de sistemas de aterramento é conhecer o comportamento eletromagnético do solo onde tal sistema será instalado. Para tal, se faz necessário a realização de ensaios de campo, em especial o de prospecção geoeletrica de Wenner. A interpretação dos ensaios de campo fornece ao projetista as características do solo, sendo necessário para tal o uso de métodos de otimização. A devida interpretação das leituras do solo é uma etapa de fundamental importância, a qual não sendo devidamente realizada gera erros que se refletem diretamente no projeto do sistema de aterramento.

1.2 Conceitos de aterramentos elétricos

Um sistema de aterramento tem o objetivo de conduzir e dissipar correntes elétricas para o solo, sob condições normais ou de falta, de tal forma que a passagem dessas correntes não excedam os limites de operação de equipamentos elétricos e a continuidade do serviço de concessionárias de energia, tal como garantir a segurança de pessoas na vizinhança de instalações com o intuito de evitar choques elétricos (ROCA, 2018).

Dentre os trabalhos publicados a respeito dos efeitos da passagem de uma corrente elétrica no corpo humano, dentre métodos experimentais e simulações computacionais, os seguintes são notáveis (Dalziel, 1946; Dalziel, 1953; Dalziel; Lee, 1969; Dalziel, 1972; Dawalibi; Southey; Baishiki, 1990; Freschi; Mitolo, 2017). De acordo com Roca (2018), as principais causas de morte devido à passagem de uma corrente elétrica no corpo humano são a fibrilação ventricular, parada respiratória ou asfixia. Atualmente, as normas internacionais IEC TS 60479-1 (2016) e IEC TS 60479-2 (2017) são um guia a respeito dos efeitos dos choques elétricos.

Figura 1 – Situações típicas de choque elétrico em subestações.



Fonte: adaptado de Roca (2018).

Durante uma condição de curto-circuito, duas situações principais de choque elétrico envolvendo uma pessoa e instalações de aterramento podem acontecer, o choque devido a tensão de passo e a tensão de toque. A Figura 1 ilustra as situações onde uma pessoa estaria sujeita a esses choques elétricos. A tensão de passo de acordo com a norma ABNT NBR 15751 é a diferença de potencial entre dois pontos na superfície do solo separados pela distância de 1m, a qual se considera o passo de uma pessoa. A norma IEEE 80 ainda complementa essa definição afirmando que não há contato dos pés desta pessoa

com nenhum objeto aterrado. Já a tensão de toque, de acordo com a norma ABNT NBR 15751, é a diferença de potencial entre um objeto metálico aterrado ou não e um ponto da superfície do solo separado por uma distância horizontal equivalente ao alcance normal do braço de uma pessoa, que é convencionada em um metro. Já a norma IEEE 80 define a tensão de toque como a diferença de potencial entre um ponto onde uma pessoa está ao mesmo tempo em que há contato dessa pessoa com uma estrutura aterrada. Note que a norma IEEE, a despeito da norma ABNT, não impõe a distância de um metro separando os pés de uma pessoa e o local de contato com a estrutura aterrada. Pode-se afirmar então que a norma NBR é mais conservadora que a norma IEEE nesse aspecto. A tensão entre a máxima elevação de potencial em um sistema de aterramento e um ponto infinitamente distante (terra remoto) é chamado de GPR (*Ground Potential Rise* ou Aumento de Potencial de Terra), sendo a máxima diferença entre um potencial no nível do solo e o GPR chamada de tensão de malha. O choque elétrico ao qual a pessoa estaria submetida depende da tensão a qual esta está submetida, a resistência elétrica do seu próprio corpo e a resistência de contato. A resistência de contato é função dos equipamentos de proteção, como luvas e botas, como do material de revestimento superficial do solo. Os valores máximos de tensão admissíveis por um ser humano são calculados em normas como a IEEE Std 80 e a ABNT NBR 15751 (norma brasileira), sendo um sistema de aterramento projetado para operar abaixo dos valores máximos das tensões de passo e de toque, e assim garantir a segurança das pessoas próximas a esse sistema de aterramento.

Uma pessoa está submetida a tensões de passo em subestações, onde esta se mantém entre níveis controlados, estando os operadores da subestação devidamente equipados com botas isolantes, além do revestimento de pedra britada normalmente utilizada nesses locais. Todavia, os locais onde realmente a tensão de passo pode ser bastante elevada são áreas rurais. Por exemplo, um condutor energizado que está em contato com o solo conduzindo uma corrente de curto circuito provoca gradientes de potencial elevados no solo, bastante nocivo a uma pessoa ou animal que se encontra próximo ao local da falta, em especial por estes não utilizarem nenhum equipamento de segurança. Vale ressaltar que a frequência da corrente de curto-circuito da rede elétrica é muito nociva, mesmo com uma baixa intensidade, devido a seus efeitos no coração. Um raio ao atingir uma árvore também gera gradientes de potencial nas proximidades do local de incidência que são muito perigosos, em especial a segurança de animais no pasto. Note que para um raio causar fatalidades no campo este não precisa necessariamente atingir de forma direta uma pessoa ou animal, apenas a corrente que circula no solo já causa uma diferença de potencial bastante nociva à vida.

Adicionalmente, não é imprudência afirmar que a tensão de toque é muito mais perigosa que a tensão de passo, visto que a pessoa está em contato direto com uma estrutura aterrada. Estando a pessoa sujeita a tensão de toque em uma região protegida por uma malha de aterramento, essa tensão é atenuada devido à equalização de potencial

na superfície do solo gerada pela malha de aterramento, i.e., a diferença de potencial entre o potencial no nível do sistema de aterramento e na superfície do solo não é tão significativa. Todavia, quando a pessoa não está sobre o sistema de aterramento, há uma diferença de potencial muito considerável entre os pés da pessoa e o potencial no sistema de aterramento. Vale ressaltar o caso extremo onde a pessoa está em um local remoto, bem distante do sistema de aterramento, e está em contato com uma estrutura aterrada, assim a diferença de potencial se torna igual ao potencial da malha. O nome dessa situação é tensão transferida, a qual é extremamente perigosa. A tensão de toque também pode estar presente na zona rural. Por exemplo, caso um condutor energizado ou um raio incida em uma cerca de arame, a cerca atua como um condutor que transfere a tensão perigosa por uma longa extensão. Caso alguma pessoa ou animal encoste-se à cerca, esse está sujeito a uma tensão transferida. Vale ressaltar então a importância do devido aterramento de cercas em zonas rurais.

A resistência de aterramento é definida como a relação entre a diferença de potencial no sistema de aterramento e um ponto infinitamente distante e a corrente elétrica injetada no sistema de aterramento. Em outras palavras, a resistência de aterramento é a resistência vista pela corrente elétrica em seu percurso pelo solo. Para Tagg (1964) a resistência de aterramento é composta de três parcelas: A resistência do condutor que conecta o sistema de aterramento ao sistema de potência; A resistência de contato entre a superfície do sistema de aterramento e o solo e a resistência da superfície do solo circunvizinha ao aterramento, a qual está em contato direto com o aterramento. A resistência do condutor é calculada pela resistência elétrica de um condutor convencional, que é desprezível quando comparada à resistência de aterramento. A resistência de contato entre a haste e o solo também pode ser desprezada para solos com uma compactação adequada. Portanto, a parcela da resistência que caracteriza a resistência aterramento é basicamente a resistência do solo circunvizinho ao sistema de aterramento, esta é função do comportamento da resistividade elétrica do solo e da geometria do sistema de aterramento.

De acordo com He, Zeng e Zhang (2013) se a corrente de curto circuito está na frequência industrial, se tem uma resistência de aterramento à frequência industrial. Se a corrente de curto circuito é impulsiva, como a corrente proveniente de uma descarga atmosférica, se tem uma impedância de aterramento impulsiva, que é variante no tempo. A impedância impulsiva de aterramento é definida como a razão entre a tensão de pico e o valor de pico da corrente de surto no ponto onde a corrente impulsiva é injetada no sistema aterramento. O valor da impedância de surto difere da resistência de aterramento principalmente devido ao efeito da indutância dos condutores que formam o sistema de aterramento. Todavia, dependendo da magnitude dos efeitos do campo elétrico no solo, esse se torna não linear em relação a sua resistividade elétrica, efeito que também altera a impedância de surto.

1.3 Motivação

Projetistas geralmente utilizam para o dimensionamento de sistemas de aterramento normas, em nível nacional e internacional, que impõem (ou sugerem) critérios de projetos para os sistemas de aterramento; como é o caso da norma IEEE Std 80 (2000) e da norma brasileira NBR 15751 (2013). Este tipo de dimensionamento é realizado baseando-se no equacionamento apresentado nas normas já citadas, onde se pode observar uma grande variedade de equações para diversos tipos de sistemas de aterramento. Essas equações apresentam certas restrições, como serem modeladas apenas para solos homogêneos, apresentarem apenas formulações voltadas a geometrias simples e adotarem fatores de correção para a determinação dos potenciais existentes na subestação. A utilização deste tipo de equacionamento para a realização de projetos pode levar a erros grosseiros entre os valores obtidos de resistência de aterramento e potenciais de superfície e os valores existentes.

Uma forma alternativa e mais precisa para o dimensionamento de sistemas de aterramento é a utilização de métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF), possibilitando a utilização de geometrias genéricas e solos heterogêneos. Todavia, um problema associado ao MEF para aterramentos elétricos é o fato de se trabalhar com um meio semi-infinito, o solo, em contraste com condutores de espessura muito pequena, i.e., há um contraste de dimensões que dificulta a geração da malha de elementos finitos. Geometrias contendo contrastes de dimensões podem ser corrigidas com a utilização de elementos unidimensionais, desprezando-se assim a espessura dos condutores, todavia, é necessária a utilização de muitos elementos na discretização do domínio da solução. Em relação ao solo, que é semi-infinito, há técnicas de mapeamento do domínio que minimizam o erro devido ao truncamento do mesmo, porém, se faz necessário o cálculo de potenciais em um volume de solo que não interessa para a resposta final (*e.g.*, interessa-se basicamente nos valores de potencial na superfície do solo).

1.4 Objetivos

Esta tese tem como objetivo desenvolver um sistema computacional para simulação e projetos sistemas de aterramento em solos heterogêneos de forma eficiente do ponto de vista computacional e com a máxima precisão na obtenção dos resultados. Para isso é proposto um equacionamento para sistemas de aterramento em solos heterogêneos. Como resultado do equacionamento desenvolvido é possível calcular a resistência de aterramento, potenciais de superfície e tensões de passo e de toque em solos heterogêneos. Com o intuito de facilitar o desenho de sistemas de aterramento complexos, esta tese também fez todo o equacionamento parametrizando os condutores de forma que as coordenadas possam ser lidas diretamente de um arquivo gerados por aplicativos de desenho. O aplicativo

desenvolvido nesta tese faz a interpretação de arquivos de desenho, facilitando assim o modelo de sistemas com geometrias genéricas. Com a metodologia proposta neste trabalho é possível calcular o potencial elétrico apenas em uma região de interesse do problema, reduzindo assim o tempo de processamento necessário para a obtenção da solução final. Este trabalho também apresenta um equacionamento bastante eficiente para a obtenção dos parâmetros do solo heterogêneo através de medição, sendo esses parâmetros utilizados na simulação de sistemas de aterramento mais realistas. Para esta tese se desenvolveu um aplicativo próprio, somente com linguagens não comerciais, não necessitando assim a aquisição de licenças para o seu funcionamento, utilizou-se também técnicas avançadas de programação como computação paralela, junto com bibliotecas de cálculo numérico extremamente eficientes.

1.5 Organização do trabalho

O Capítulo 1 desta tese introduz sistemas de aterramento, tal como conceitos de aterramentos necessários para os demais capítulos desta tese.

O Capítulo 2 apresenta o estado da arte para simulações de sistemas de aterramento e também para a estratificação do solo em camadas horizontais.

O Capítulo 3 apresenta a dedução de um equacionamento para aterramentos em solo homogêneo. O equacionamento deduzido neste capítulo é genérico, o que possibilita a solução de cabos e hastes em uma posição qualquer do solo. O capítulo também apresenta o cálculo da resistência de aterramento própria e mútua entre condutores, utilizado para a associação de condutores de aterramento como em malhas de aterramento.

O Capítulo 4 apresenta o modelo para uma fonte pontual de corrente imersa em um solo com múltiplas camadas. A fonte de corrente pode estar em qualquer camada do solo e o ponto de cálculo também pode estar em qualquer região do espaço. São apresentadas duas soluções para o potencial elétrico, uma para um ponto qualquer do solo e outra mais eficiente do ponto de vista computacional que é restrita à superfície do solo.

O Capítulo 5 introduz o equacionamento desenvolvido no Capítulo 4 para o modelo de sistemas de aterramento apresentado no Capítulo 3. Faz-se uma modelagem específica para condutores horizontais, que não atravessam as camadas do solo, e para condutores verticais, que atravessam as camadas do solo.

O Capítulo 6 apresenta o modelo do solo em multiplas camadas horizontais para pontos restritos à superfície do solo. O capítulo apresenta a solução da função característica do solo heterogêneo, que é feita através da série de Chebyshev. O capítulo também apresenta a formulação do problema inverso para a obtenção dos parâmetros do solo através de ensaios de campo.

O Capítulo 7 apresenta alguns estudos de caso com exemplos de aplicação do aplicativo desenvolvido nesta tese. Foram analisados diversos problemas extraídos na literatura como forma de validação da metodologia proposta, tal como medições de desempenho do aplicativo desenvolvido.

O Capítulo 8 faz um resumo do que se fez nesta tese e também apresenta as conclusões obtidas.

O Anexo A explica como decompor uma função através dos polinômios de Chebyshev.

Estado da Arte

2.1 Simulação de sistemas de aterramento

O estudo de sistemas de aterramento tem como base os trabalhos clássicos de Sunde (1968) e Tagg (1964). O trabalho de Tagg engloba sistemas de aterramento em solo homogêneo, tal como a associação de condutores utilizando fatores de associação e tabelas, e aterramentos em duas camadas para casos simples. O trabalho de Sunde, cuja primeira edição é ainda mais antiga que o trabalho de Tagg, desenvolve fórmulas analíticas para aterramentos em solos homogêneos, apresenta o equacionamento para o potencial elétrico gerado por uma fonte pontual para um solo de múltiplas camadas horizontais, tal como o estudo de transitórios em aterramentos elétricos através de um modelo de linhas de transmissão. Os trabalhos de Sunde e Tagg são sem sombra de dúvidas as maiores referências em aterramentos elétricos, sendo a base para as normas internacionais vigentes (IEEE Std 80, 2000; IEEE Std 81, 2012) e também para as normas brasileiras (NBR 15749, 2009; NBR 7117, 2012; NBR 15751, 2013).

Inicialmente, os trabalhos sobre aterramentos elétricos estavam mais focados em métodos analíticos para o cálculo da resistência de aterramento de diversos arranjos de sistemas de aterramento em solo uniforme, como é o trabalho de Dwight (1936). Após esse trabalho outros foram propostos para o cálculo de resistências de aterramento, como é o de Schwarz (1954), que propõe fórmulas analíticas para o cálculo da resistência de uma malha de aterramento em solos uniformes. Outros artigos foram publicados para encontrar um equacionamento para malhas de aterramento, como o de Sverak (1984), porém, sempre tratavam-se de aperfeiçoamentos das equações analíticas simplificadas por fatores de ajuste semi-empíricos. O trabalho de Nahman e Salamon (1988) em seguida possibilitou o cálculo da resistência de malhas de aterramento em solos de duas camadas, modelo que foi baseado no proposto inicialmente por Dawalibi e Mukhedkar (1977) para solos uniformes.

A outra grande preocupação dos engenheiros foi o estudo da segurança de sistemas de aterramento, como o trabalho de Sverak et al. (1981), onde se realizou o desenvolvimento de equações para estabelecer os limites de segurança admissíveis para as tensões de passo e de toque baseados em estudos experimentais. Os trabalhos citados para o cálculo da resistência de malhas de aterramento e para critérios de segurança serviram como base para a elaboração da norma IEE Std. 80 para projetos de sistemas de aterramento.

No entanto, as fórmulas analíticas e empíricas mencionadas são inadequadas para projetar sistemas de aterramento reais e enterrados em solos de multicamadas. Um trabalho que foi um grande marco para a simulação computacional foi o de Heppe (1979), o qual na contramão dos artigos publicados apresentou um método de simulação computacional para sistemas de aterramento fundamentado na equipotencialização dos condutores em regime estacionário. O método de Heppe apresenta equações analíticas para o cálculo da resistência mútua entre condutores considerando-os paralelos ou perpendiculares entre si, assim sendo possível calcular a resistência de aterramento, e também uma fórmula para o cálculo das tensões de passo e de toque. Devido às limitações de processamento da época do artigo esse não utiliza integração numérica, mas sim opta por diversas equações analíticas bastante extensas. O livro de Meliopoulos (1988) apresenta o equacionamento de Heppe aplicado a projetos de sistemas de aterramento, não se limitando apenas ao equacionamento simplificado apresentado nas normas.

Nos anos 90 programas de computador mais avançados para a análise de sistemas de aterramento apareceram (Dawalibi; Donoso, 1993; Melipoulos et al., 1993). Estes programas permitiram que se calculasse não somente a resistência de aterramento e distribuições de correntes, mas também as tensões de passo e de toque, distribuições de potenciais em perfis bidimensionais do solo e as tensões de superfície, que podiam ser plotados em duas ou três dimensões. As metodologias utilizadas por esses programas foram aplicáveis a sistemas de aterramento simples ou complexos, enterrados em solos uniformes ou de duas camadas.

Também na década de 90, pesquisadores começaram a estudar e desenvolver novas técnicas baseadas em métodos numéricos, tais abordagens baseiam-se principalmente em técnicas como o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno e adaptações do Método das Matrizes de Heppe. Um grande avanço para a simulação de sistemas de aterramento foi o aplicativo GROUND-3D de Cardoso (1993), inicialmente apresentado em Cardoso e Oliveira (1992). O referido aplicativo possibilita a simulação de malhas genéricas em solos heterogêneos através do método dos elementos finitos, esse foi um dos primeiros trabalhos que aplica o MEF à problemas de aterramentos elétricos, tal como o trabalho de Trlep, Hamler e Hribernik (1998). Com relação ao Método dos Elementos de Contorno se tem como referência o trabalho de Ezponda (1995). O trabalho de Pereira Filho (1999) faz simulações de sistemas de aterramento genéricos, que são

realizadas utilizando um método de equipotencialidade similar ao de Heppe, tal como o de Vujević e Kurtović (), contudo, o autor apresenta um equacionamento mais claro e o estende à solos heterogêneos através do método das imagens complexas. Avanços em abordagens como o Método dos Elementos Finitos (SILVA, 2006; Silva et al., 2011; Martinho; Silva, 2015) e o Método dos Elementos de Contorno (Colominas; Navarrina; Casteleiro, 2007; COLOMINAS et al., 2013; ROCA, 2018) para aterramentos elétricos estão em avanço até nos dias atuais.

2.2 Estratificação do solo em camadas horizontais

Até este ponto já se falou sobre a simulação de sistemas de aterramento, todavia, para um projeto de sistemas de aterramento adequado também é necessária a determinação dos parâmetros do solo através de ensaios, que é o problema da estratificação do solo. Diversos métodos já foram apresentados para a estratificação do solo, inicialmente Dawalibi e Blattner (1984) utilizaram o método do gradiente descendente para o ajuste automático dos parâmetros do solo em um modelo de duas camadas horizontais. O artigo citado também introduziu um equacionamento para o cálculo analítico do gradiente da função de resistividade aparente do solo. O artigo de Takahashi e Kawase (1990) apresenta uma metodologia para a obtenção dos parâmetros do solo para uma quantidade qualquer de camadas ajustando curvas padrões, uma metodologia que tem como base o uso de pontos de inflexão da curva de resistividade do solo. O trabalho de Alamo (1993) faz um estudo comparativo entre diversos métodos de otimização para o modelo de duas camadas, apresentando indicadores de performance para cada algoritmo.

O artigo de Yang, Yuan e Zong (2001) ajusta os parâmetros de um solo de três camadas utilizando otimização não linear, todavia, para o modelo da função característica do solo os autores truncam a integral imprópria da função característica do solo a um valor pré-determinado, o que pode gerar falsos positivos no algoritmo de otimização devido ao modelo do solo simplificado, falsos positivos ocorrem quando o algoritmo de otimização trata uma solução que é imprecisa devido a um erro teórico como uma boa solução para o problema.

O trabalho de Zhang et al. (2005) aplica o método das imagens complexas de Chow, Yang e Srivastava (1992) para a estratificação multicamadas. Esse método decompõe o Kernel da integral na função característica do solo por uma série exponencial, sendo assim possível solucionar a integral imprópria. Ademais, os autores desse artigo também apresentam um equacionamento para o gradiente da função característica do solo baseado na decomposição realizada, o qual é aplicado no algoritmo Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) para a obtenção dos parâmetros do solo. O artigo também apresenta um método empírico para a obtenção da estimativa inicial para a solução, que é necessária

para o algoritmo BFGS.

O artigo de Gonos e Stathopoulos (2005) aplica Algoritmos Genéticos (AG), uma meta-heurística de otimização, para a determinação dos parâmetros do solo de múltiplas camadas. O trabalho de Calixto et al. (2010) também utiliza AG, porém, também otimiza a quantidade de camadas do modelo. Esse trabalho utiliza um polinômio de grau 40 para decompor a função característica do solo heterogêneo em uma série de potências, assim solucionando a integral imprópria. Os autores Pereira, Soares e Neto (2016) utilizam uma abordagem similar à de Calixto et al. (2010) para a solução da função de resistividade aparente teórica, porém utilizam a Evolução Diferencial (ED) para o algoritmo de otimização.

Aterramento em solo homogêneo

3.1 Introdução

Este capítulo propõe um equacionamento para cálculos de aterramentos em solo homogêneo. O equacionamento que se apresentará considera um modelo de condutor que forma um segmento de reta, sendo qualquer geometria composta pela associação de segmentos de reta. Encontrar-se-á a distribuição da corrente que sai dos condutores através da solução de um sistema linear, o “Método das Matrizes”, conforme sugerido por Heppe (1979), onde considera-se os efeitos dos acoplamentos resistivos entre condutores. O potencial elétrico será calculado pela superposição do potencial gerado por cada condutor individual, respeitando-se a parcela de corrente encontrada pela solução do sistema linear.

3.2 Regime eletrocinético

Os sistemas de aterramento em “regime permanente” (*e.g.*, cálculo de curto circuito, desequilíbrio de carga) respeitam o regime eletrocinético, então para se iniciar o estudo de sistemas de aterramento, fala-se inicialmente sobre a eletrocinética.

A eletrostática é o estudo do campo elétrico em uma situação muito específica já que todas as grandezas envolvidas são invariantes no tempo. Todavia, há um estudo do campo elétrico chamado eletroquase estática, onde se assume o problema com grandezas variáveis no tempo como eletrostático. Para Cardoso (2010) a aproximação quase estática pode ser utilizada somente quando a intensidade da corrente elétrica for tal que as forças produzidas pelo campo magnético sejam bem menores que as forças eletrostáticas calculadas pela lei de Coulomb.

Pode se considerar a eletrocinética como um estudo semelhante ao eletrostático, porém, enquanto a eletrostática estuda os efeitos do campo elétrico nos dielétricos, a eletrocinética estuda seus efeitos nos condutores. A diferença essencial reside no fato de que a presença do campo elétrico em meios condutores está associada a um movimento

de cargas elétricas, i.e., à presença da corrente elétrica.

O fenômeno da eletrocinética, de acordo com Cardoso (2010), para um contorno fechado C , é governado pela primeira equação de Maxwell, sendo \mathbf{E} o vetor campo elétrico e $d\mathbf{l}$ um elemento diferencial de comprimento

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{ou} \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (3.1)$$

e, para um contorno fechado Σ , pela equação da continuidade, sendo \mathbf{J} o vetor densidade de corrente e $d\mathbf{S}$ um elemento diferencial de área

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{ou} \quad \oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.2)$$

A definição de potencial elétrico V , para um contorno C , é extraída da primeira equação de Maxwell

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad \text{ou} \quad V = -\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.3)$$

e a relação construtiva denominada Lei de Ohm, para um meio de condutividade elétrica σ , é dada por

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.4)$$

Utilizar-se-ão as equações apresentadas para a formulação do equacionamento que descreve sistemas de aterramento.

3.3 Equacionamento

Um solo dito homogêneo é na verdade um meio heterogêneo, sendo os meios compostos respectivamente por ar e solo. Para a solução do problema no meio heterogêneo inicia-se o estudo para um meio homogêneo, infinito em todas as direções, e calcula-se o potencial elétrico gerado por uma fonte pontual de corrente.

Tome o regime eletrocinético, assuma fonte pontual de corrente I na origem de um meio infinito de condutividade elétrica σ , adotando a simetria esférica, obtém-se com a aplicação da equação da continuidade

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} - I = 0 \Rightarrow I = J \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \mathcal{R}^2 \sin \theta \, d\theta d\phi = J 4\pi \mathcal{R}^2, \quad (3.5)$$

onde \mathbf{J} é o vetor densidade de corrente, $d\mathbf{S}$ um diferencial de área e \mathcal{R} o raio centrado na fonte pontual que liga o ponto de cálculo. Ao se aplicar a lei de Ohm para o campo elétrico \mathbf{E} , junto a definição de potencial elétrico, representado por V , chega-se à seguinte equação para o potencial elétrico

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad V = -\int_{\infty}^{\mathcal{R}} \mathbf{E} \cdot d\mathcal{R} \quad \therefore \quad V = \frac{I}{4\pi\sigma\mathcal{R}}. \quad (3.6)$$

Ao se descolar a fonte de corrente da origem do sistema de coordenadas e aplicar a notação vetorial para a posição pode-se escrever a equação do potencial como

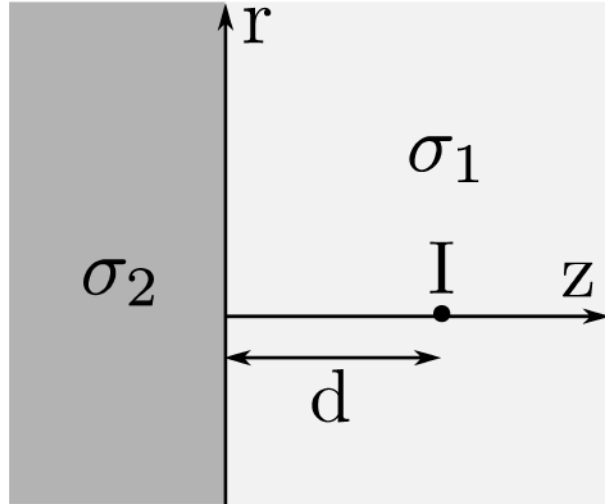
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.7)$$

onde \mathbf{r} representa um ponto qualquer de cálculo e \mathbf{r}_0 a posição da fonte de corrente deslocada da origem, i.e., os vetores são respectivamente $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

3.3.1 Método das imagens para a interface de meios condutivos

O método das imagens é utilizado em estudos de cargas eletrostáticas na proximidade de uma superfície aterrada. Nesta seção o método das imagens será formulado para a interface entre dois meios condutores através do modelo eletrocinético para a corrente elétrica. O problema consiste em descobrir qual a relação entre uma fonte imagem e a fonte original, sendo possível formular a resposta para um meio heterogêneo *cf.* Fig. 2.

Figura 2 – Fonte de corrente I à distância d de uma interface entre dois meios condutivos semi-infinitos. A fonte está imersa em um meio de condutividade σ_1 , sendo o meio oposto à interface com condutividade σ_2 .

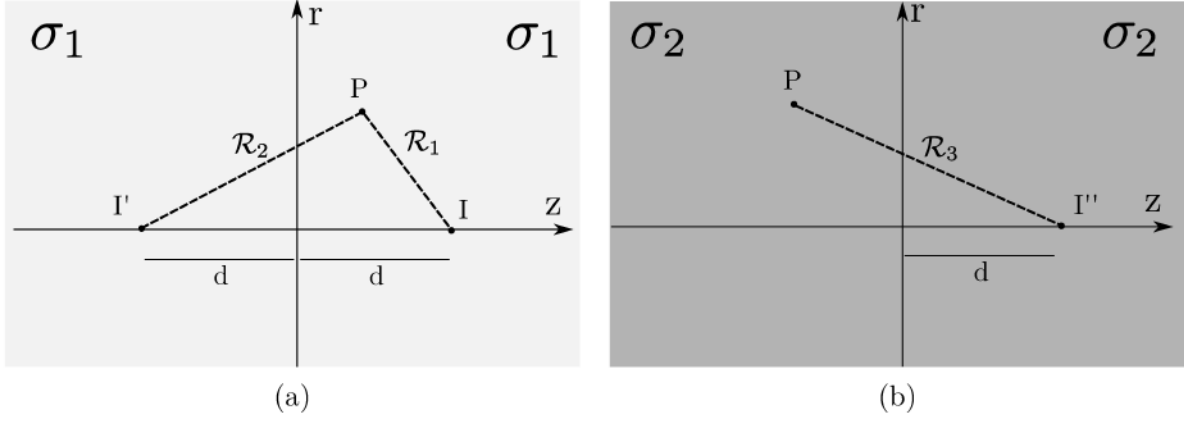


Fonte: adaptado de Jackson (1999).

Para ilustrar o método das imagens considere um fonte pontual I em um meio semi-infinito de condutividade σ_1 a uma distância d da interface que separa esse meio de um meio semi-infinito de condutividade σ_2 . Para Lacava (2016) o potencial no semi-espço $z > 0$ é calculado assumindo todo o espaço com condutividade σ_1 e adicionado uma fonte imagem I' posicionada no eixo z a uma distância $-d$. Já para o potencial no semi-espço de condutividade σ_2 uma fonte imagem I'' é posicionada em $z = d$, também considerando um meio homogêneo de condutividade σ_2 .

Para $z > 0$ temos então a solução obtida através da equação de Poisson, com a solução para a fonte I sendo a solução particular e para a fonte imagem I' a solução da equação homogênea, que é a equação de Laplace.

Figura 3 – Correntes imagem para uma fonte pontual de corrente I em frente a um plano separando dois meios condutores. (a) Para o campo no semiespaço $z > 0$ a corrente imagem I' é localizada em $z = -d$ no espaço do condutor σ_1 ; (b) para o campo em $z < 0$ somente uma corrente imagem I'' em $z = d$ no espaço condutor σ_2 .



Fonte: adaptado de Lacava (2016).

Ilustra-se o método de cálculo da função potencial nos meios 1 e 2 através da Fig. 3, onde a Fig. 3a representa a solução para o meio 1 e a Fig. 3b a solução para o meio 2. O potencial elétrico em um ponto P no meio 1 é dado por

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{I}{\mathcal{R}_1} + \frac{I'}{\mathcal{R}_2} \right), \quad z > 0 \quad (3.8)$$

com \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 dados por

$$\mathcal{R}_1 = [(z-d)^2 + r^2]^{1/2}, \quad \mathcal{R}_2 = [(z+d)^2 + r^2]^{1/2}. \quad (3.9)$$

A componente do campo elétrico em z no meio 1 é

$$\mathbf{E}_z^{(1)} = -\frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{I(z-d)}{\mathcal{R}_1^3} + \frac{I'(z+d)}{\mathcal{R}_2^3} \right] \quad (3.10)$$

e a componente do campo elétrico em r no meio 1 é

$$\mathbf{E}_r^{(1)} = -\frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{Ir}{\mathcal{R}_1^3} + \frac{I'r}{\mathcal{R}_2^3} \right]. \quad (3.11)$$

Já o potencial elétrico em um ponto P no meio 2 é calculado conforme a Fig. 3b. De acordo com Jackson (1999), como não há fontes nessa região o potencial elétrico é calculado pela equação de Laplace, sendo a região 2 submetida à influência de uma fonte equivalente I'' na posição da fonte real.

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \left(\frac{I''}{\mathcal{R}_3} \right), \quad z < 0 \quad (3.12)$$

com \mathcal{R}_3 dado por

$$\mathcal{R}_3 = [(z-d)^2 + r^2]^{1/2}. \quad (3.13)$$

A componente do campo elétrico em z no meio 2 é

$$\mathbf{E}_z^{(2)} = -\frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \frac{I''(z-d)}{\mathcal{R}_3^3} \quad (3.14)$$

e a componente do campo elétrico em r no meio 2 é

$$\mathbf{E}_r^{(2)} = -\frac{\partial V_2}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \frac{I''r}{\mathcal{R}_3^3}. \quad (3.15)$$

De acordo com Cardoso (2010), ao se decompor o vetor densidade de corrente \mathbf{J} em componentes normais e tangenciais à superfície da interface, como não há acúmulo superficial de cargas na fronteira entre os meios 1 e 2, a condição de contorno para a interface entre os dois meios é

$$\mathbf{J}_n^{(1)} - \mathbf{J}_n^{(2)} = -\frac{d\rho_s}{dt} \quad \therefore \quad \mathbf{J}_n^{(1)} = \mathbf{J}_n^{(2)} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{J}_t^{(1)}}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{J}_t^{(2)}}{\sigma_2}, \quad (3.16)$$

sendo \mathbf{J}_n a componente normal e \mathbf{J}_t a componente tangencial do vetor densidade de corrente. Para o problema exposto, a componente normal está na direção z e a componente tangencial em r . Aplicando $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, as condições de interface equivalem a

$$\sigma_1 E_z^{(1)} = \sigma_2 E_z^{(2)} \quad \text{e} \quad E_r^{(1)} = E_r^{(2)}. \quad (3.17)$$

Na interface temos que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}$ e que $z = 0$. A partir das equações 3.10 e 3.14 é possível obtermos

$$\sigma_1 \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{-Id + I'd}{\mathcal{R}^3} \right] = \sigma_2 \frac{1}{4\pi\sigma_2} \left[\frac{-I''d}{\mathcal{R}^3} \right] \quad \therefore \quad I - I' = I'' \quad (3.18)$$

e a partir das equações 3.11 e 3.15

$$\frac{1}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{Ir + I'r}{\mathcal{R}^3} \right) = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \left(\frac{I''r}{\mathcal{R}^3} \right) \quad \therefore \quad \frac{I + I'}{\sigma_1} = \frac{I''}{\sigma_2} \quad (3.19)$$

Da solução do sistema linear envolvendo as equações 3.18 e 3.19 é possível obter as imagens I' e I'' , assim sendo possível calcular o potencial elétrico e o campo elétrico nos meios 1 e 2 pela simples substituição das fontes imagem em suas respectivas equações.

$$I' = -\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \right) I \quad \text{e} \quad I'' = \left(\frac{2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) I \quad (3.20)$$

3.3.2 Aplicação do método das imagens ao solo

Para o caso do solo homogêneo temos um meio semi-infinito, onde há uma interface entre o ar e o solo em $z = 0$. Considerando-se o ar como um isolante perfeito, podemos encontrar o potencial elétrico no solo ao corrigir essa heterogeneidade pelo método das imagens.

Considerando o ar como o meio 2 e a fonte de corrente imersa no meio 1 da Fig. 2 temos que $\sigma_2 = 0$ para um dado σ_1 finito. Os valores das fontes imagem são dados por

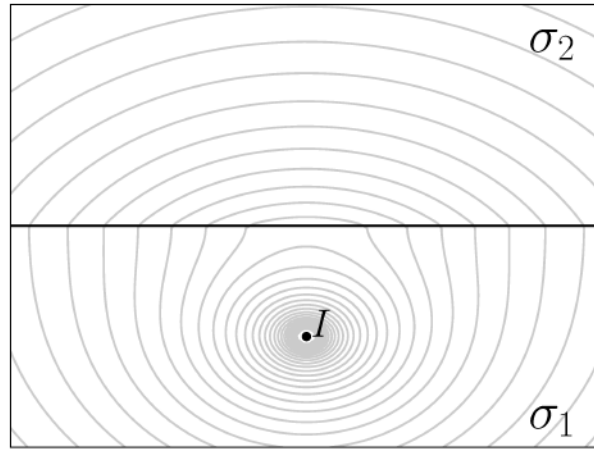
$$I' = I \quad I'' = 0, \quad (3.21)$$

assim o potencial no solo, que é o meio 1, e no ar, que é o meio 2, são dados por

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{I}{\mathcal{R}_1} + \frac{I}{\mathcal{R}_2} \right), \quad V_2 = \frac{I}{2\pi\sigma_1\mathcal{R}_3} \quad (3.22)$$

Note que na região delimitada pelo ar há potencial não nulo. Para o regime eletrocinético, desprezando as correntes de deslocamento, podemos fazer uma analogia com os terminais de uma tomada, há uma diferença de potencial entre eles, porém o ar possui uma resistividade elétrica tamanha que não há corrente de condução pelo ar. (Não rompendo o limite de isolamento do ar, onde o mesmo se torna condutor)

Figura 4 – Aplicação da Eq. 3.22 no plano rz . O solo é representado pelo meio σ_1 e o ar é representado pelo meio $\sigma_2 = 0$, o eixo z tem orientação para baixo. A figura ilustra as linhas equipotenciais geradas pela fonte I imersa no solo a uma dada profundidade.



Fonte: elaboração própria.

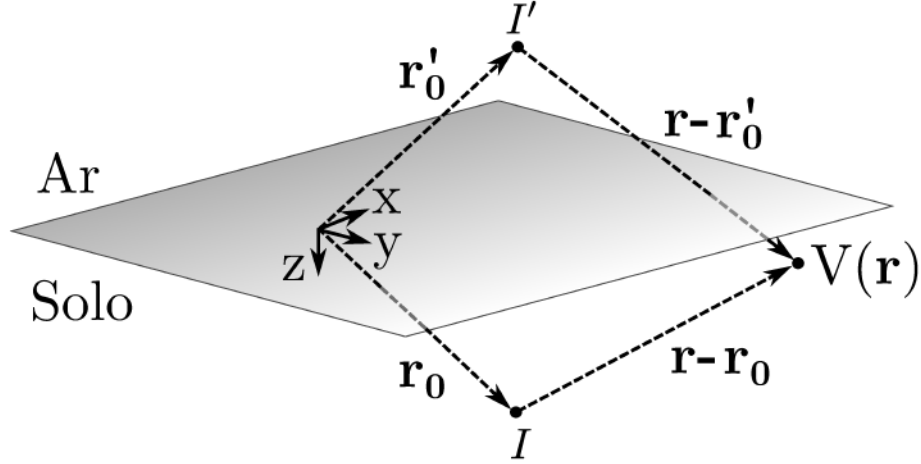
Com a análise da Fig. 4 é possível analisar o comportamento do potencial elétrico gerado pela fonte I na região que representa o solo, de resistividade σ_1 , e na região que representa o ar, de condutividade σ_2 nula. Note que as linhas equipotenciais se fecham no ar. Utilizar-se-á neste capítulo somente a solução para o solo, não para a região que representa o ar. Em suma, para eliminar o efeito da heterogeneidade gerada pelo domínio de ar, basta utilizar a Eq. 3.22 no domínio 1, onde a fonte está imersa.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho I}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0|} \right) \quad (3.23)$$

com

$$\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle, \quad \mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle, \quad \mathbf{r}'_0 = \langle x_0, y_0, -z_0 \rangle. \quad (3.24)$$

Figura 5 – Representação da fonte de corrente e de sua imagem no espaço. Note que a superfície do solo atua tal qual um espelho para a fonte de corrente, gerando uma fonte imagem.



Fonte: elaboração própria.

Note que \mathbf{r}'_0 representa a coordenada de \mathbf{r}_0 espelhada, proveniente da aplicação do método das imagens.

A forma de cálculo de uma fonte pontual em solo homogêneo, onde temos uma meio semi-infinito delimitado pelo solo e outro também semi-infinito delimitado pelo ar é ilustrado *cf.* Fig. 5.

3.4 Modelo de um condutor

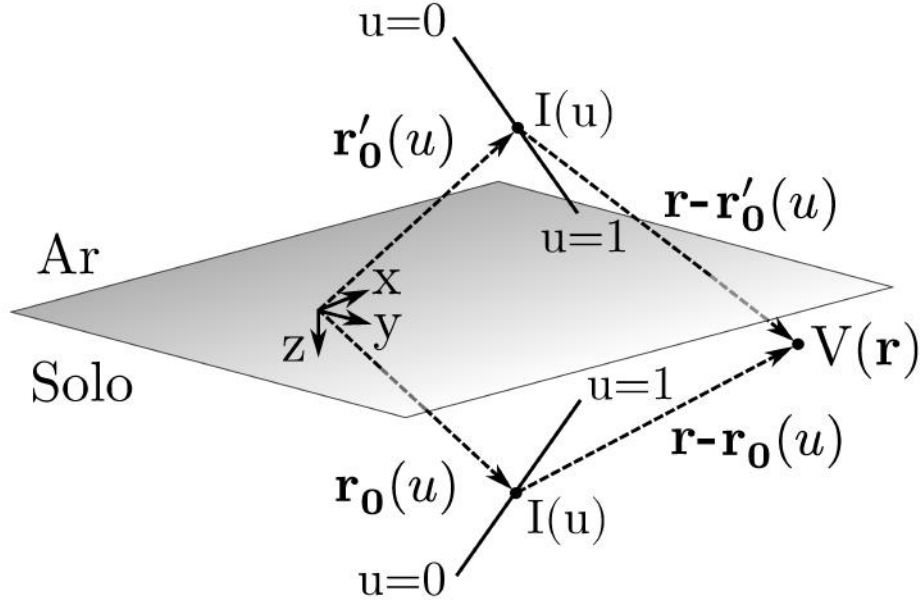
Para o modelo de um condutor imerso em um solo uniforme, precisa-se inicialmente localizá-lo no espaço. Para tal, esse trabalho se baseia nas coordenadas das extremidades do condutor no sistema cartesiano, toma-se (x_1, y_1, z_1) como o início do condutor e (x_2, y_2, z_2) como o fim do condutor. Por conseguinte, tomando a superfície do solo no plano xy em $z = 0$, aplica-se o método das imagens já deduzido e pode-se calcular o potencial em qualquer ponto do solo.

Para a dedução da função potencial de um condutor utiliza-se o conceito de integral de linha para um campo escalar do cálculo vetorial, a função a ser integrada é função potencial gerada por uma fonte pontual e a trajetória adotada é um segmento de reta representando o condutor.

Para calcular-se o efeito de uma distribuição de corrente em uma trajetória, utilizam-se conceitos do cálculo vetorial, em particular a integral de linha (LEITHOLD, 1994). A integral de linha de um campo escalar f , função de um vetor \mathbf{r} , para uma trajetória parametrizada em u que varia entre u_0 e u_f , é definida por

$$\int_c f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{u_0}^{u_f} f(\mathbf{r}(u)) \left\| \frac{d}{du} \mathbf{r}(u) \right\| du. \quad (3.25)$$

Figura 6 – Representação da fonte de corrente e de sua imagem no espaço. Note que a superfície do solo atua tal qual um espelho para a fonte de corrente, gerando uma fonte imagem.



Fonte: elaboração própria.

O potencial elétrico gerado pela distribuição de corrente de um condutor é então calculado pela aplicação da integral de linha para a fonte de corrente na trajetória do condutor.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{4\pi} \int_c I(u) \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(u)\|} + \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0(u)\|} \right) \left\| \frac{d}{du} \mathbf{r}_0(u) \right\| du \quad (3.26)$$

De acordo com Sunde (1968) adota-se a corrente como uniformemente distribuída por unidade de comprimento do condutor, i.e., $I(u) = I/L$. Parametrizando a posição da fonte de corrente em $\mathbf{r}_0(u)$ e variando u por toda a extensão de um segmento de reta, i.e., para $u \in [0, 1]$.

$$\mathbf{r}_0(u) = \langle (1-u)x_1 + u x_2, \quad (1-u)y_1 + u y_2, \quad (1-u)z_1 + u z_2 \rangle \quad (3.27)$$

o valor da derivada de $\mathbf{r}_0(u)$ é

$$\frac{d}{du} \mathbf{r}_0 = \langle x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1 \rangle, \quad (3.28)$$

cujo módulo resulta em

$$\left\| \frac{d}{du} \mathbf{r}_0 \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = L. \quad (3.29)$$

Temos que a solução da seguinte integral indefinida é

$$\int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2au + b + 2\sqrt{a(u^2 + bu + c)} \right| + \text{constante}. \quad (3.30)$$

Demonstração. A referência Leithold (1994) apresenta a seguinte fórmula

$$\int \frac{ds}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}} = \ln |s + \sqrt{s^2 + \alpha^2}| + \text{constante}, \quad (3.31)$$

portanto a integral da Eq. 3.30 é solucionada ao “completar o quadrado” no radicando e realizando a mudança de variável $s = 2au + b \therefore ds = 2a du$.

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} &= \int \frac{2\sqrt{a} du}{\sqrt{(2au + b)^2 + (4ac - b^2)}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2au + b + 2\sqrt{a(au^2 + bu + c)} \right| + \text{constante} \end{aligned}$$

■

Portanto a solução da Eq. 3.30 para a variável da integração $u \in [0, 1]$ é dada por

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2a + b + 2\sqrt{a(a + b + c)} \right| - \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| b + 2\sqrt{ac} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2a + b + 2\sqrt{a(a + b + c)}}{b + 2\sqrt{ac}} \right| \end{aligned} \quad (3.32)$$

Definindo a constante a e as funções $b(x, y, z)$ e $c(x, y, z)$ do condutor real como

$$\begin{aligned} a &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = L^2 \\ b(x, y, z) &= 2(z_1 - z)(z_2 - z_1) + 2(y_1 - y)(y_2 - y_1) + 2(x_1 - x)(x_2 - x_1) \\ c(x, y, z) &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

e definindo a constante a' e as funções $b'(x, y, z)$ e $c'(x, y, z)$ do condutor imagem como

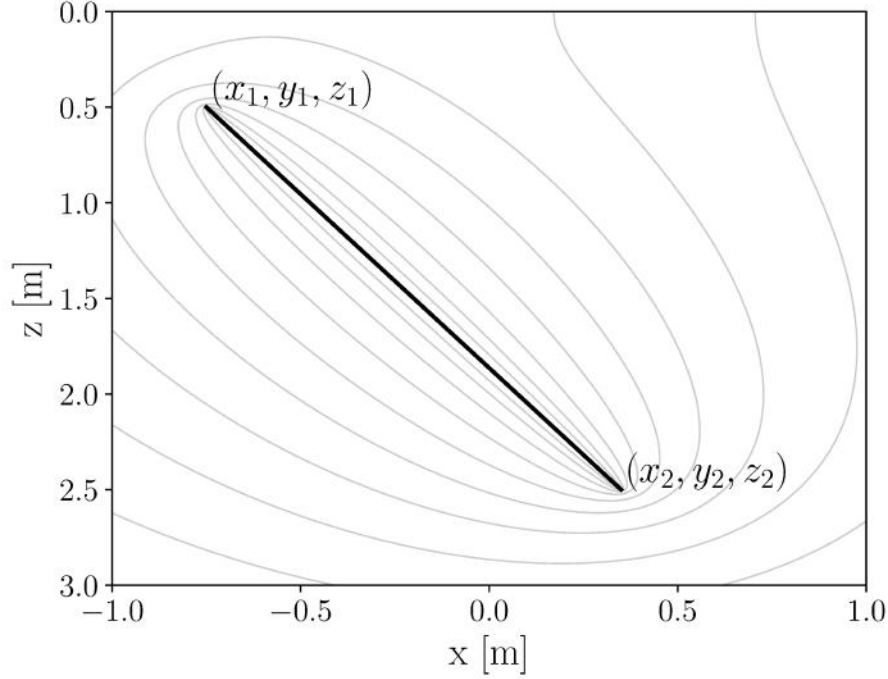
$$\begin{aligned} a' &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2 = L^2 \\ b'(x, y, z) &= 2(-z_1 - z)(z_1 - z_2) + 2(y_1 - y)(y_2 - y_1) + 2(x_1 - x)(x_2 - x_1) \\ c'(x, y, z) &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Finalmente, escreve-se através da Eq. 3.35 a função potencial de um condutor genérico imerso em um solo homogêneo em qualquer ponto \mathbf{r} no solo como

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho I}{4\pi L} \left(\ln \left| \frac{2a + b + 2\sqrt{a(a + b + c)}}{b + 2\sqrt{ac}} \right| + \ln \left| \frac{2a' + b' + 2\sqrt{a'(a' + b' + c')}}{b' + 2\sqrt{a'c'}} \right| \right) \quad (3.35)$$

A Fig. 7 ilustra a aplicação da Eq. 3.35 considerando um condutor posicionado em coordenadas genéricas do solo. Note que o posicionamento do condutor não precisa ser simétrico à origem do sistema de coordenadas.

Figura 7 – Linhas equipotenciais geradas por um condutor posicionado por uma reta entre os pontos $(x_1, y_1, z_1) = (-0.75, 0, 0.5)$ e $(x_2, y_2, z_2) = (0.35, 0, 2.5)$. A figura está posicionada em $y = 0$ e ilustra uma seção transversal no plano xz . Observe o efeito do condutor imagem nas linhas equipotenciais.



Fonte: elaboração própria.

3.5 Resistência de aterramento e acoplamento resistivo entre condutores

Nomeando o segmento de reta que liga os pontos (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) como A e o segmento de reta que liga os pontos (x_3, y_3, z_3) a (x_4, y_4, z_4) como B , pode-se então determinar a resistência mútua entre os segmentos pela elevação de potencial gerada por um condutor a outro condutor. Sendo A o condutor ativo, que está gerando a elevação de potencial no condutor passivo B . A elevação de potencial em B gerada por A é determinada pelo valor médio da elevação de potencial em B .

$$V_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b V(s) ds \quad \therefore \quad R_{AB} = \frac{V_{med}^{(AB)}}{I_A} = \frac{1}{1-0} \int_0^1 \frac{V_A(\mathbf{r}_B(s))}{I_A} ds \quad (3.36)$$

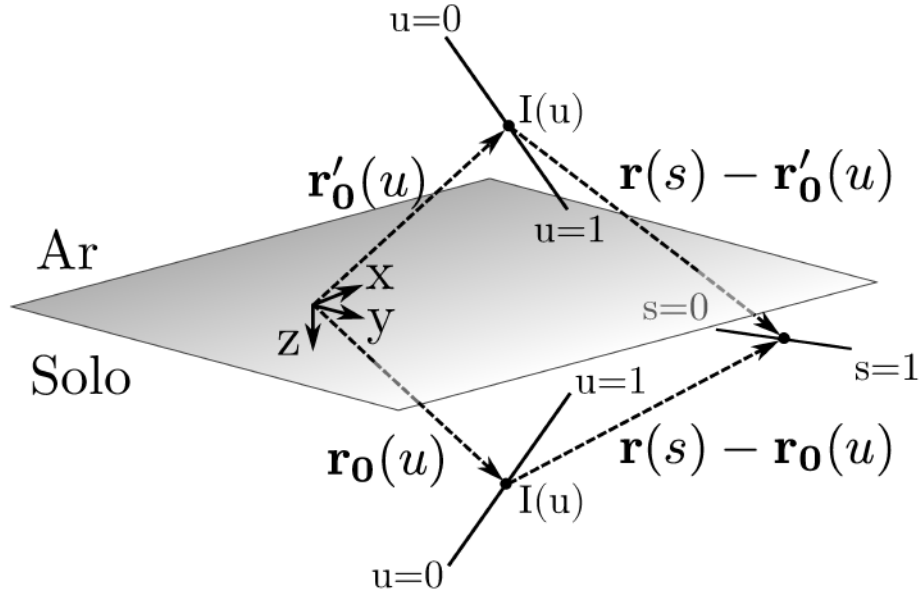
Define-se então a resistência mútua entre os condutores A e B como

$$R_{AB} = \frac{\rho}{4\pi L} \int_0^1 \left(\ln \left| \frac{2a + b(s) + 2\sqrt{a(a+b(s)+c(s))}}{b(s) + 2\sqrt{ac(s)}} \right| + \ln \left| \frac{2a' + b'(s) + 2\sqrt{a'(a'+b'(s)+c'(s))}}{b'(s) + 2\sqrt{a'c'(s)}} \right| \right) ds. \quad (3.37)$$

O vetor \mathbf{r} é o local onde o potencial do condutor é calculado, parametrizado para s , se escreve esse potencial como

$$\mathbf{r}(s) = \langle (1-s)x_3 + s x_4, (1-s)y_3 + s y_4, (1-s)z_3 + s z_4 \rangle \quad (3.38)$$

Figura 8 – Acoplamento resistivo. A figura ilustra a elevação de potencial gerada por um condutor parametrizado em u a outro condutor parametrizado em s . O condutor parametrizado por s representa a parametrização dos pontos de cálculo do potencial gerado por um condutor.



Fonte: elaboração própria.

A resistência mútua, ou acoplamento resistivo, é definido pela Eq. 3.37. Já a resistência própria do condutor é definida pela mesma equação, porém a trajetória do segmento B é paralela a A , distante do raio do condutor. A utilização do segmento B com as mesmas coordenadas do segmento A provocará divisões por zero. Escreve-se então as coordenadas do segmento B na superfície externa do condutor como

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 + r_c \frac{y_2 - y_1}{L} & x_4 &= x_2 + r_c \frac{y_2 - y_1}{L} \\ y_3 &= y_1 + r_c \frac{z_2 - z_1}{L} & y_4 &= y_2 + r_c \frac{z_2 - z_1}{L} \\ z_3 &= z_1 + r_c \frac{x_2 - x_1}{L} & z_4 &= z_2 + r_c \frac{x_2 - x_1}{L}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

observe que o deslocamento de B em relação a A com esse modelo proposto é

$$\sqrt{\left(r_c \frac{y_2 - y_1}{L}\right)^2 + \left(r_c \frac{z_2 - z_1}{L}\right)^2 + \left(r_c \frac{x_2 - x_1}{L}\right)^2} = r_c, \quad (3.40)$$

que é o raio do condutor, *i.e.*, a trajetória B está deslocada da trajetória A pelo raio do condutor.

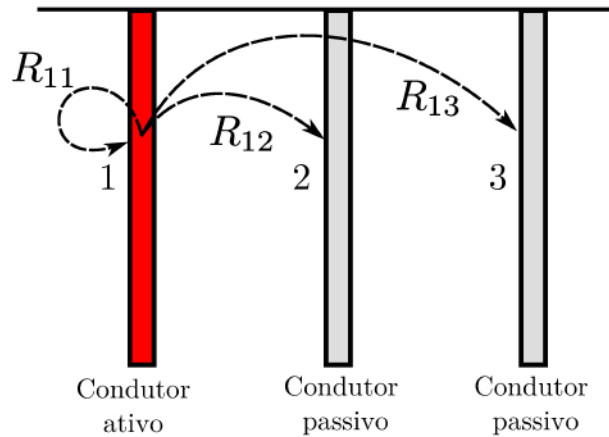
3.5.1 Comparativo para a resistência de aterramento de um condutor vertical com a fórmula de Sunde

A resistência de um condutor é dada pela Eq. 3.37 onde B é uma trajetória paralela à A a uma distância igual ao raio do condutor. Como comparativo da precisão da equação proposta, ilustra-se o caso simples de uma haste vertical posicionada entre as coordenadas (0,0,0) e (0,0,3), assim sendo possível aplicar a fórmula de Sunde (1968), onde o condutor necessita estar posicionado na superfície do solo. A fórmula de Sunde é dada pela Eq. 3.41.

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \left(\ln \left[\frac{2L}{r_c} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r_c}{2L} \right)^2} \right) \right] + \frac{r_c}{2L} - \sqrt{1 + \left(\frac{r_c}{2L} \right)^2} \right) \quad (3.41)$$

Supondo o caso ilustrativo de uma haste de 3 m de comprimento e $\frac{3}{4}$ " (19,05 mm) de diâmetro imersa em um solo uniforme de 100 $\Omega.m$. A resistência de aterramento calculada pela Eq. 3.41 resulta em 32,5755 Ω , já a resistência de aterramento calculada pela fórmula proposta difere da fórmula de Sunde por apenas 10^{-9} Ω . Todavia, a fórmula proposta é aplicável a qualquer condutor linear, tanto vertical como horizontal ou inclinado, e também a uma profundidade qualquer da superfície do solo.

Figura 9 – Ilustração da metodologia de cálculo para as resistências próprias e mútuas. Tomando de forma consecutiva cada condutor do sistema como ativo, calcula-se a sua resistência própria e a resistência mútua nos demais condutores.



Fonte: elaboração própria.

3.5.2 Sistemas com múltiplos condutores

Quando há mais de um condutor no sistema o potencial elétrico é calculado pela superposição do potencial de cada condutor isolado. Todavia, a corrente elétrica que sai do condutor não é dividida igualmente entre os condutores, mas sim encontrada pela solução de um sistema de equações lineares. Tome o exemplo da associação de hastes da Fig. 9, suponha o cálculo do acoplamento entre condutores. O condutor 1 da figura sendo ativo provoca uma elevação de potencial por unidade de corrente nele mesmo, que

caracteriza a resistência própria do condutor R_{11} . O condutor 1 também causará uma elevação de potencial por unidade de corrente nos condutores 2 e 3, caracterizando nas resistências mútuas R_{12} e R_{13} .

Ao tomar o condutor 2 como condutor ativo, esse também terá sua resistência própria R_{22} e resistências mútuas entre os condutores R_{21} e R_{23} , e assim por diante. Com base nesse raciocínio é possível obter a parcela da corrente injetada I_{cc} em cada condutor através da solução de um sistema linear, o chamado “Método das Matrizes” de Heppe (1979). Sendo os condutores interligados, esses possuem o mesmo potencial elétrico V_0 , assim utilizando a notação matricial expandida apresentada em Pereira Filho (1999), escreve-se o sistema linear como

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & -1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & -1 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & -1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -I_{cc} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Com a resistência de aterramento equivalente do sistema calculada simplesmente como

$$R_{eq} = \frac{V_0}{I_{cc}}. \quad (3.43)$$

Como forma de ilustração considere o sistema de aterramento composto por três condutores verticais de 3 m de comprimento e $\frac{3}{4}$ '' de diâmetro imerso em um solo uniforme de resistividade elétrica $100 \, \Omega.m$, cuja separação entre as hastes é de 2 m. A matriz de resistência expandida é então calculada aplicando a Eq. 3.37 para as resistências próprias e mútuas entre os condutores.

$$\begin{bmatrix} 32,58 & 5,82 & 3,50 & -1 \\ 5,82 & 32,58 & 5,82 & -1 \\ 3,50 & 5,82 & 32,58 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{cc} \end{bmatrix}$$

para uma corrente injetada de 1A, a resposta obtida para esse sistema linear é

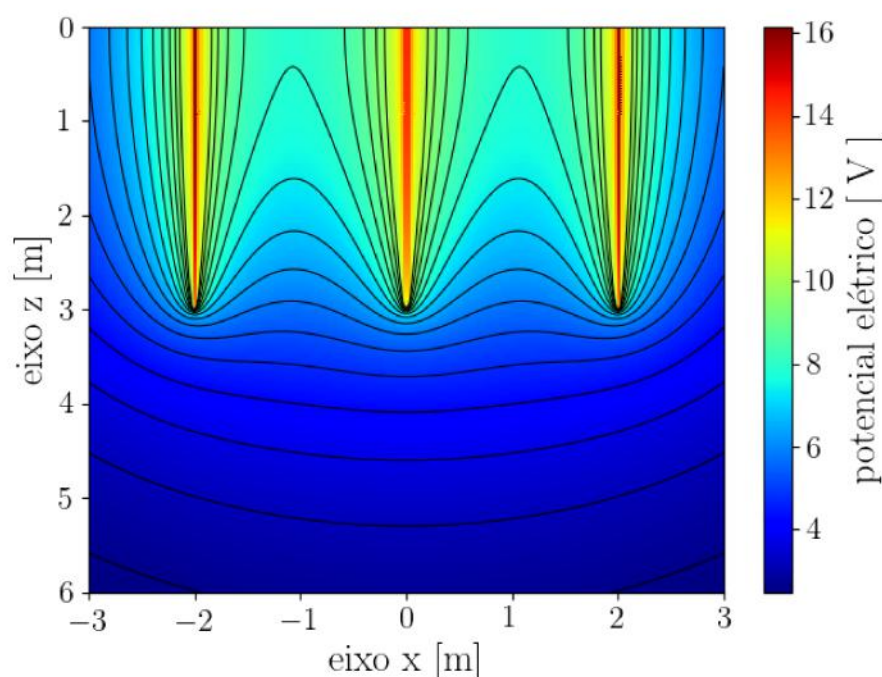
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3433 \\ 0,3134 \\ 0,3433 \\ 14,2089 \end{bmatrix}.$$

Note que a haste 2, que está no centro, sofre um maior efeito das outras hastes devido a sua disposição geométrica, assim possuindo uma maior resistência e por conseguinte uma menor parcela corrente fluindo dela para o solo. A resistência de aterramento para esse

sistema é de $14,21 \, \Omega$, um valor maior do que $10,86 \, \Omega$, que seria a associação em paralelo das três resistências de aterramento individuais de cada haste.

O acréscimo do valor da resistência em comparação a uma associação simples de hastes em paralelo é devido às resistências mútuas entre as hastes, esse valor é minimizado ao se aumentar a distância entre as hastes e tende ao paralelismo simples para distâncias suficientemente grandes. O potencial elétrico do sistema é calculado pela superposição da Eq. 3.35 para a distribuição de corrente calculada e é mostrado na Fig. 10.

Figura 10 – Potencial elétrico gerado por uma associação de hastes alinhadas de 3 m de comprimento, $\frac{3}{4}$ " de diâmetro e espaçadas de 2 m. A corrente I_{cc} injetada é de 1 A e a resistividade elétrica do solo é de $100 \, \Omega.m$.



Fonte: elaboração própria.

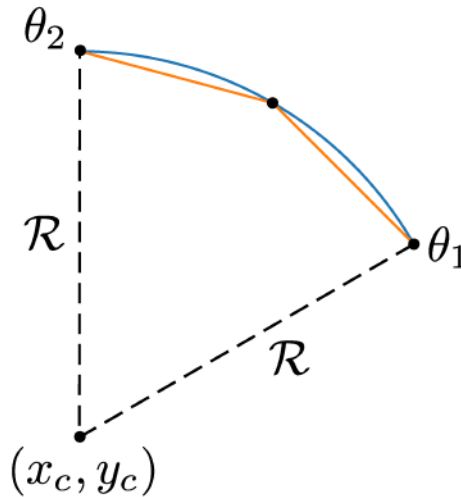
A referência Tagg (1964) apresenta famílias de curvas para diversas associações de hastes de diversos diâmetros, onde a resistência de aterramento equivalente é calculada por um fator de redução entre a resistência própria de uma haste e a associação de hastes. É de se surpreender que estas curvas ainda sejam tão utilizadas em projetos de engenharia atualmente, mais de 50 anos após a publicação do livro de Tagg, visto que recursos computacionais podem ser utilizados para evitar tais aproximações.

3.6 Segmentos de arco

É muito comum em sistemas de aterramento a utilização de cantos arredondados ou cabos que formam círculos. Para o cálculo do potencial elétrico gerado por um condutor nesse formato se faz necessário reformular o equacionamento deduzido para uma traje-

tória circular, tal como a resistência mútua entre condutores que formam segmentos de reta e arcos e vice-versa. Embora não seja complicada a dedução desse equacionamento, optou-se por discretizar arcos em segmentos de reta, assim possibilitando aproveitar o equacionamento já deduzido.

Figura 11 – Aproximação de um arco por segmento de retas interligados. O arco é parte de uma circunferência de raio \mathcal{R} , com origem no ponto (x_c, y_c) e delimitado por θ_1 e θ_2 . Assume-se o segmento de reta no plano xy para um dado z predeterminado.



Fonte: elaboração própria.

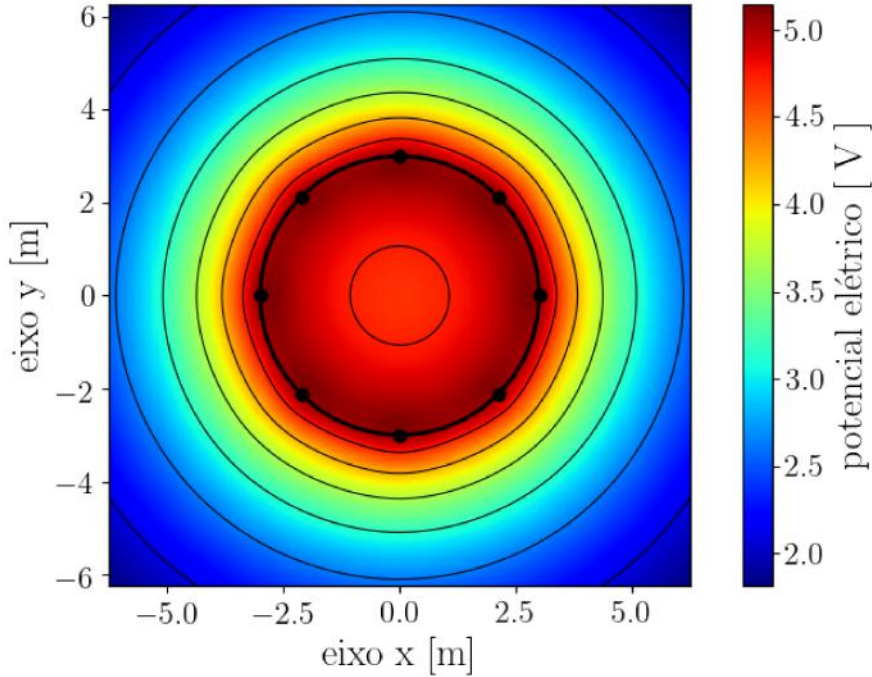
A Fig. 11 ilustra a aproximação de um arco por segmentos de reta, a quantidade de segmentos adotada é genérica, sendo a discretização mais precisa com o aumento dos segmentos de reta que descrevem o arco. Define-se o arco pela localização do centro da circunferência localizada no ponto (x_c, y_c) , de raio \mathcal{R} e delimitada entre os ângulos θ_1 e θ_2 , essa aproximação serve somente para o condutor no plano xy , visto que no ponto de vista prático é demasiadamente suficiente.

Para abordar a aplicação da abordagem proposta, a Fig. 12 ilustra um exemplo de aterramento em anel usado em torres de telefonia, postes de distribuição de energia. O aterramento ilustrado é composto por um condutor em anel com 3 m de diâmetro a uma profundidade de 0,5 m da superfície do solo. O aterramento também possui 8 hastes de aterramento de 3 m, também a uma profundidade de 0,5 m, espalhadas uniformemente em torno do diâmetro do anel. Considerando um solo uniforme de resistividade $100 \Omega.m$ e uma corrente injetada de 1 A, obtém-se uma resistência de aterramento de $7,64 \Omega$. O cálculo realizado para os arcos que formam o anel é realizado considerando-os associações de segmentos de reta. No exemplo ilustrado cada arco é decomposto em 10 segmentos de reta, note que o resultado da discretização realizada é imperceptível.

Ao se trabalhar com solos heterogêneos, é importante ressaltar que a abordagem até aqui apresentada possui grandes vantagens em relação a de Heppe (1979), também adotada em Meliopoulos (1988), pois possui um equacionamento mais simples, possibilita

a inclusão de hastes de aterramento e também segmentos de arco, o que é impraticável nestes trabalhos.

Figura 12 – Aterramento em anel. As hastes de aterramento são representadas por pontos pretos e o cabo pela linha preta espessa. O potencial calculado está na superfície do solo e é ilustrado junto a linhas equipotenciais. Os cabos que formam arcos são discretizados em segmentos de reta, note que a discretização dos arcos é imperceptível.



Fonte: elaboração própria.

3.7 Cálculo do campo elétrico

Aborda-se nesta seção o cálculo do campo elétrico em qualquer lugar do espaço gerado por um condutor linear, tal como o cálculo do campo elétrico para uma configuração de múltiplos condutores. Uma forma de se obter este resultado é através da integral de linha na trajetória do condutor do campo elétrico gerado por uma fonte pontual. Todavia, já se deduziu o potencial elétrico gerado pelo condutor, sendo o campo elétrico então calculado a partir do potencial elétrico gerado pelo condutor.

A equação que descreve o potencial elétrico, já deduzida previamente, é dada por

$$V = \frac{\rho I}{4\pi L} \left(\ln \left| \frac{2a + b + \sqrt{a(a + b + c)}}{b + 2\sqrt{ac}} \right| + \ln \left| \frac{2a' + b' + \sqrt{a'(a' + b' + c')}}{b' + 2\sqrt{a'c'}} \right| \right),$$

sabendo-se que a definição de campo elétrico é

$$\mathbf{E} = -\nabla V,$$

inicia-se a dedução tomando as funções Ψ e Ψ' de x, y, z como

$$\Psi = 2a + b + \sqrt{a(a + b + c)} \quad \text{e} \quad \Psi' = 2a' + b' + \sqrt{a'(a' + b' + c')}, \quad (3.44)$$

e as funções Φ e Φ' de x, y, z como

$$\Phi = b + 2\sqrt{ac} \quad \text{e} \quad \Phi' = b' + 2\sqrt{a'c'}, \quad (3.45)$$

calcula-se seus respectivos gradientes por

$$\nabla\Psi = \nabla b + \frac{a\nabla b + a\nabla c}{\sqrt{a(a + b + c)}}, \quad \nabla\Psi' = \nabla b' + \frac{a'\nabla b' + a'\nabla c'}{\sqrt{a'(a' + b' + c')}}, \quad (3.46)$$

tal como

$$\nabla\Phi = \nabla b + \frac{a\nabla c}{\sqrt{ac}}, \quad \nabla\Phi' = \nabla b' + \frac{a'\nabla c'}{\sqrt{a'c'}}. \quad (3.47)$$

A função b de x, y, z já foi previamente definida *cf.* Eq. 3.33. Sendo $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ e \mathbf{a}_z vetores unitários nas direções x, y e z respectivamente, o gradiente da função b é então

$$\nabla b = 2(x_1 - x_2) \mathbf{a}_x + 2(y_1 - y_2) \mathbf{a}_y + 2(z_1 - z_2) \mathbf{a}_z, \quad (3.48)$$

tal como a função b' de x, y, z já foi previamente definida *cf.* Eq. 3.34 e seu gradiente é

$$\nabla b' = 2(x_1 - x_2) \mathbf{a}_x + 2(y_1 - y_2) \mathbf{a}_y + 2(-z_1 + z_2) \mathbf{a}_z. \quad (3.49)$$

De forma análoga, a função c de x, y, z já foi previamente definida *cf.* Eq. 3.33 e seu gradiente é

$$\nabla c = 2(x - x_1) \mathbf{a}_x + 2(y - y_1) \mathbf{a}_y + 2(z - z_1) \mathbf{a}_z, \quad (3.50)$$

tal como a função c' de x, y, z já foi previamente definida *cf.* Eq. 3.34 e seu gradiente é

$$\nabla c' = 2(x - x_1) \mathbf{a}_x + 2(y - y_1) \mathbf{a}_y + 2(z + z_1) \mathbf{a}_z. \quad (3.51)$$

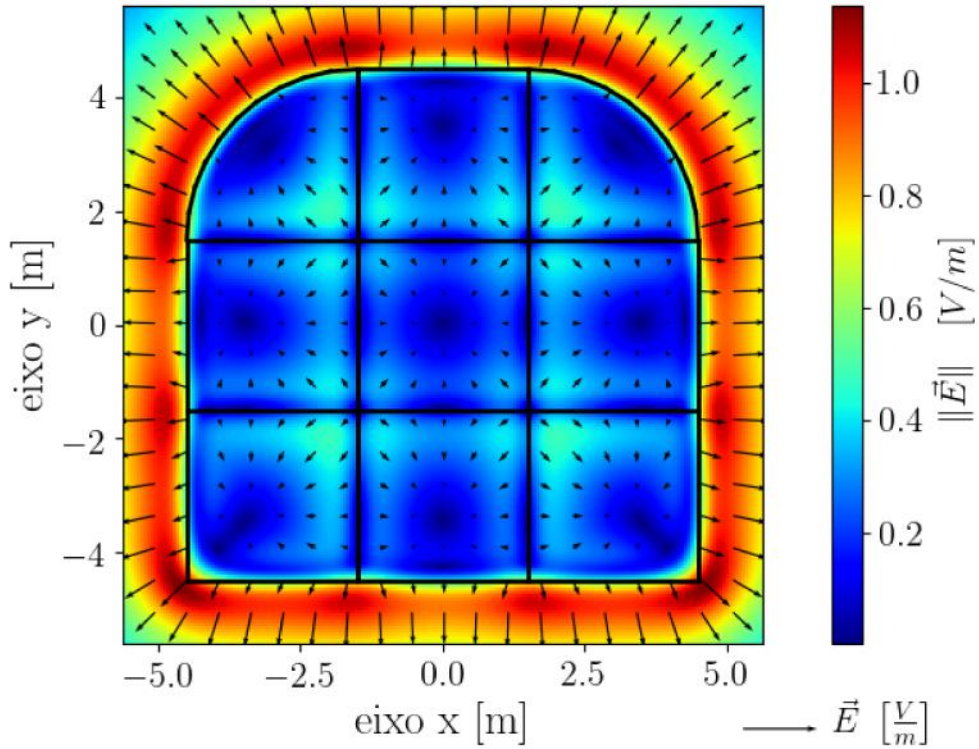
Defini-se pois o campo elétrico gerado por um condutor linear como

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\rho I}{4\pi L} \left(\frac{b + 2\sqrt{ac}}{2a + b + \sqrt{a(a + b + c)}} \frac{\nabla\Psi \Phi - \Psi \nabla\Phi}{\Phi^2} + \frac{b' + 2\sqrt{a'c'}}{2a' + b' + \sqrt{a'(a' + b' + c')}} \frac{\nabla\Psi' \Phi' - \Psi' \nabla\Phi'}{\Phi'^2} \right), \quad (3.52)$$

sendo o módulo do gradiente definido em função de suas componentes em x, y e z , respectivamente

$$\|\mathbf{E}\| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}. \quad (3.53)$$

Figura 13 – Campo elétrico \vec{E} (ou \mathbf{E}) e seu módulo na superfície do solo. O sistema de aterramento está localizado a meio metro da superfície do solo, sendo injetada uma corrente de 1A, e possui um lado com cantos arredondados. Note que o efeito do arredondamento dos condutores suaviza o campo elétrico na região externa à malha.



Fonte: elaboração própria.

3.7.1 Campo elétrico gerado por uma associação de condutores

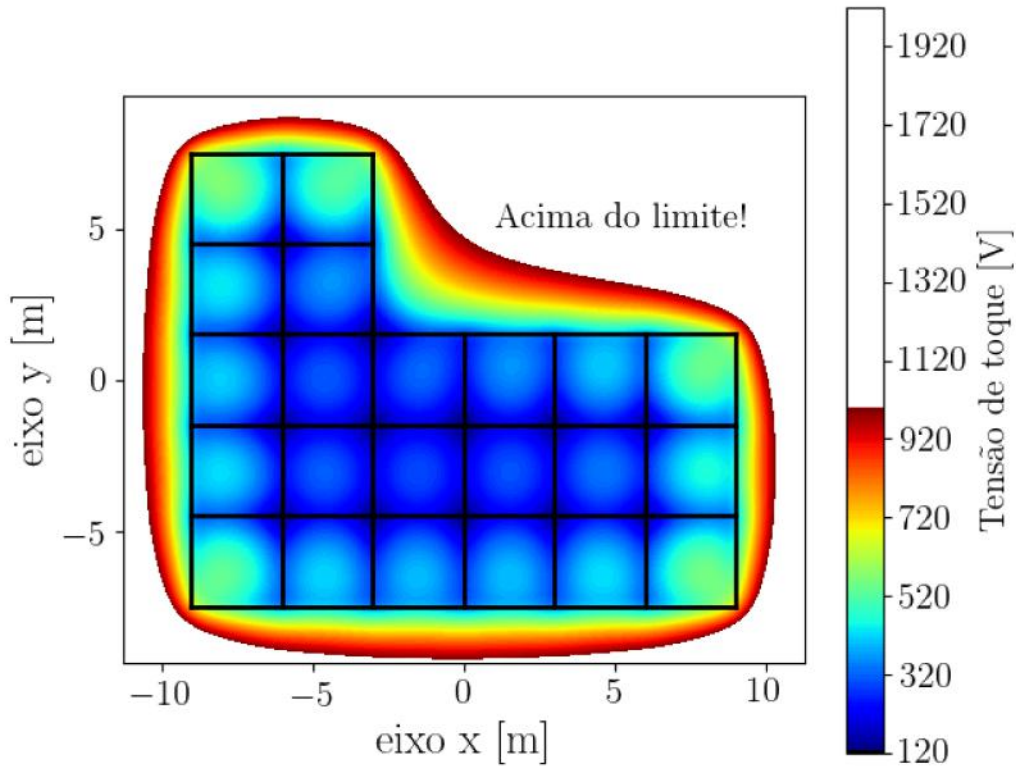
O campo elétrico gerado por uma associação de condutores é calculado pela soma vetorial do campo elétrico gerado por cada condutor individual, respeitando a corrente calculada fluindo de cada condutor pela equação matricial. Obtém-se a Fig. 13 para um sistema de aterramento hipotético pela soma vetorial do campo elétrico de cada condutor. O sistema de aterramento da figura é gerado por um reticulado de condutores com 3 m de quadrícula, possuindo três quadrículas em ambas as direções, vertical e horizontal. A malha de aterramento está a uma profundidade de meio metro da superfície do solo, sendo injetada uma corrente de 1 A em um solo uniforme de resistividade $100 \Omega.m$.

Vale ressaltar que a componente \mathbf{E}_z do campo elétrico \mathbf{E} na superfície do solo é nula, não poderia ser diferente pois na dedução do método das imagens que se fez na seção 3.3.1 essa é uma das condições de contorno. Note que a inclusão de cantos arredondados para o cálculo não é um fator limitante visto que o equacionamento que se desenvolveu é genérico.

3.8 Tensões de toque e de passo

Esta seção aborda o cálculo das tensões de toque e de passo sobre um ponto de vista computacional, sendo assim possível mapear essas grandezas em toda a superfície do solo. Com o mapeamento das tensões de toque e de passo em todos os pontos da superfície do solo é possível readequar o projeto do sistema de aterramento localmente, corrigindo locais com valores de tensão perigosos em uma determinada área, tal como realizar medidas paliativas como isolar determinada área da circulação de pessoas.

Figura 14 – Tensão de toque na superfície do solo. O mapa de cores utilizado na figura está ajustado assumindo uma tensão de toque limite (*e.g.*, 1000 V). Note que para essa tensão limite há uma região protegida pela malha, sendo as regiões onde essa tensão está acima do limite representada pela cor branca.



Fonte: elaboração própria.

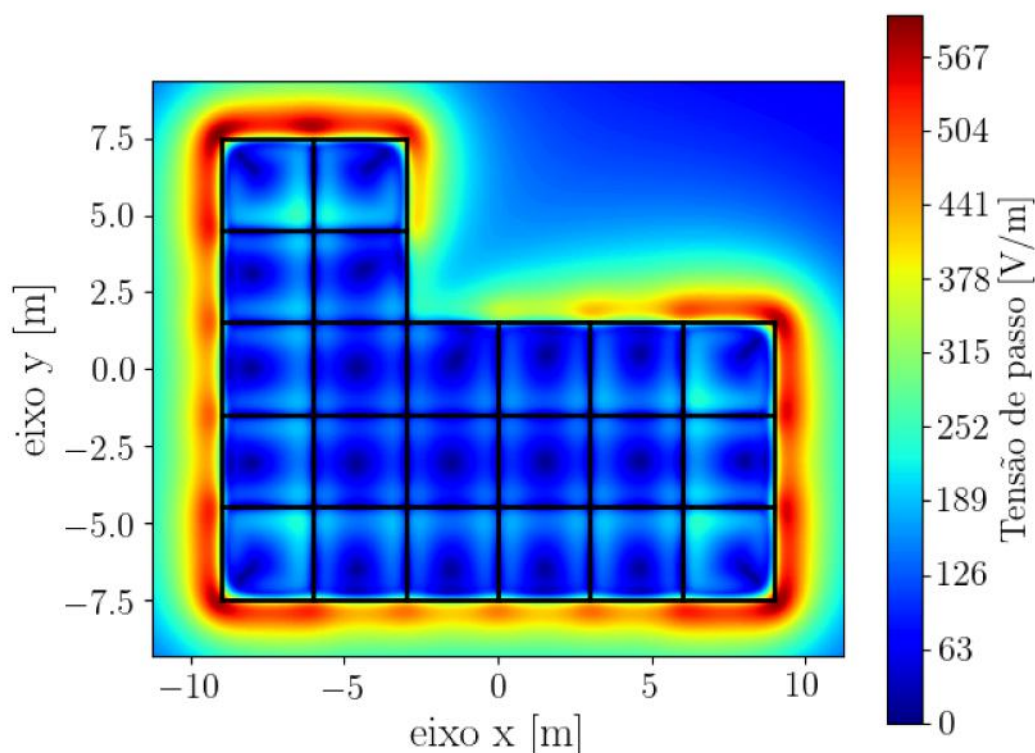
Para o cálculo da tensão de toque é necessário saber o potencial que a malha está submetida quando percorrida por uma corrente elétrica. A máxima elevação de potencial no sistema de aterramento é calculada pelo produto da resistência de aterramento e a corrente injetada no sistema, *cf.* Eq. 14. Na literatura é comum se referenciar a essa elevação de potencial como GPR (do inglês *Ground Potential Rise* ou Aumento de Potencial de Terra) também chamada de potencial de malha. A tensão de toque é definida como a diferença de potencial a um metro de distância entre o potencial no nível da malha e o de um ponto na superfície do solo, que para todos os pontos da superfície do solo calcula-se por

$$GPR = R_{eq} I_{cc}, \quad E_{toque} = GPR - V(x, y, 0). \quad (3.54)$$

Vale ressaltar que do ponto de vista prático, a tensão de toque ocorre quando há contato com alguma carcaça aterrada e uma pessoa no instante da falta ou circulação de corrente de sequência zero no sistema de potência.

Tome como exemplo um sistema de aterramento composto por uma malha com 3 m de quadrícula, possuindo seis quadrículas na posição horizontal e três quadrículas na direção vertical, somado de uma sub-malha com duas quadrículas nas posições vertical e horizontal, assim formando uma malha em “L”. O cálculo das tensões de superfície então se faz para essa malha de exemplo para um solo homogêneo de resistividade elétrica $100 \Omega.m$ e uma corrente elétrica de 1000 A injetada no sistema.

Figura 15 – Tensão de passo. A tensão de passo é calculada pela Eq. 3.55. Note que a tensão de passo na periferia da malha é maior, principalmente em pontos afastados do centro da malha.



Fonte: elaboração própria.

A Fig. 14 ilustra a tensão de toque do sistema de aterramento tomado como exemplo, é considerado uma tensão limite de 1000 V para exemplificar a área protegida pela malha de aterramento. Note que para esse exemplo hipotético a malha protege sua região interna e uma pequena parte de sua região externa. Ademais, regiões distantes do centro da malha de aterramento estão vulneráveis, pois a diferença de potencial entre o potencial na malha e um ponto distante de seu centro é muito grande, esse tipo de contato é chamado de tensão de transferência. Não é possível proteger de forma efetiva uma região distante da malha da tensão de toque, a forma mais eficaz é evitando o contato da pessoa com algo aterrado.

A tensão de passo é definida como a diferença de potencial entre dois pontos na superfície do solo a uma distância de um metro. Para mapear a tensão de passo na superfície do solo, de acordo com Heppe (1979), se tem

$$E_{\text{passo}} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} \quad z = 0 \quad (3.55)$$

Note que desde que a componente em z do campo elétrico na superfície do solo é nula a tensão de passo é numericamente igual ao módulo do campo elétrico na superfície do solo.

A Fig. 15 ilustra a tensão de passo gerada por uma malha de aterramento na superfície do solo em todos os pontos da superfície do solo. A malha em forma de “L” está enterrada a meio metro da superfície de um solo homogêneo de $100 \, \Omega.m$, sendo injetada uma corrente de 1000 A no sistema de aterramento. Note que na periferia da malha, em especial em pontos distantes do centro da malha, a tensão de passo é mais intensa.

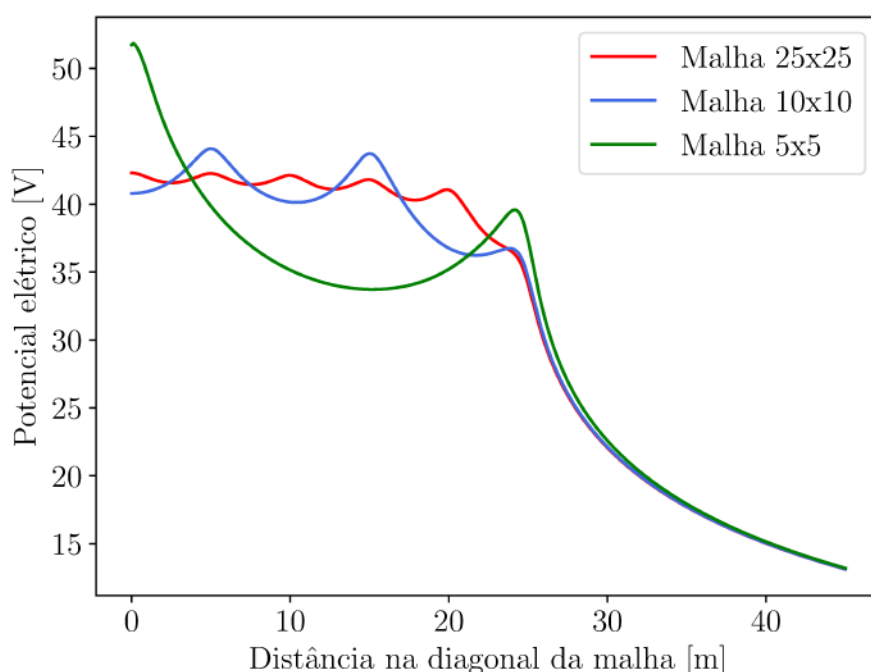
3.9 Cálculo de potenciais em uma trajetória específica

A abordagem apresentada nesta tese possibilita o cálculo do potencial elétrico somente nas coordenadas desejadas. Métodos numéricos como o método dos elementos finitos necessitam calcular o potencial elétrico em uma região fechada, no caso de simulações de sistemas de aterramento o espaço tridimensional, para se determinar a solução do problema. Em estudos de sistemas de aterramento geralmente a região de interesse é a superfície do solo aos arredores da malha. Com o método abordado neste trabalho, uma vez determinada a distribuição de correntes nos eletrodos de aterramento, a solução em coordenadas específicas é possível, um exemplo disso é o cálculo do potencial elétrico na diagonal da malha. Muitos métodos numéricos necessitariam calcular o potencial elétrico em todo o volume que delimita o solo para depois apresentar a solução do potencial na diagonal da malha de aterramento. Uma vez que o solo é um meio semi-infinito também se deve adotar alguma forma de reduzir o erro devido ao truncamento da solução, o que não ocorre na abordagem desta tese uma vez que as equações para o potencial elétrico já são feitas para esse meio semi-infinito.

A Fig. 16 é resultado do estudo de caso de Brenna et al. (2018) feito com o aplicativo desenvolvido nesta tese. Essa figura mostra a distribuição de potencial na superfície do solo calculado ao longo da semi-diagonal de uma malha de aterramento para três diferentes espaçamentos de quadrículas. As malhas estudadas possuem o mesmo tamanho em todos os casos, que é de 50m x 50m e estão enterradas a um metro da

superfície do solo. Todavia, há um espaçamento diferente para as suas quadrículas, que são 5 m x 5 m, 25 m x 25 m e 25 m x 25 m. A corrente injetada é de 10 A e o solo é uniforme com resistividade de $500 \Omega.m$. É possível notar que quadrículas menos espaçadas resultam em um potencial de superfície mais uniforme, que por consequência reduzem as tensões de passo e de toque no sistema de aterramento estudado.

Figura 16 – Tensão de passo. A tensão de passo é calculada pela Eq. 3.55. Note que a tensão de passo na periferia da malha é maior, principalmente em pontos afastados do centro da malha.



Fonte: adaptado de Brenna et al. (2018)

A variação de parâmetros como o tamanho da quadrícula da malha de aterramento, que é um dos critérios de projeto a serem sugeridos é interessante uma vez que é possível escolher as dimensões da malha de forma a atender as especificações de segurança e até mesmo economia de recursos financeiros. Por exemplo, em áreas urbanas poder escolher uma área mínima, que atenda os requisitos de segurança, para uma subestação é essencial devido ao custo do metro quadrado dos terrenos, sem contar o custo com material elétrico que pode ser reduzido e a facilidade de execução do projeto que se pode obter com geometrias mais simples.

3.10 Considerações sobre desenho do sistema de aterramento

Este capítulo apresentou diversas ilustrações de simulações de sistemas de aterramento. Note que a complexidade dos desenhos aumenta no decorrer do capítulo, tornando

árdua a tarefa de digitar manualmente as coordenadas (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) que localizam cada condutor no espaço. Para o desenho dos sistemas de aterramento, que abrangem geometrias que incluem quadrículas desiguais, arcos e associações de cabos e hastes de aterramento, o autor desta tese desenvolveu um programa para interpretar arquivos de CAD (Desenho Assistido por Computador). Os desenhos são lidos no formato de código aberto DXF. Estes desenhos foram gerados através do programa também livre LibreCAD, todavia, demais programas de CAD como o autoCAD também exportam essa extensão. Assim é possível interpretar geometrias de aterramento genéricas e de alta complexidade, tornando a abordagem apresentada nesse capítulo aplicável a problemas reais de engenharia elétrica.

Fonte pontual de corrente em solo heterogêneo

4.1 Introdução

Inicia-se o estudo de aterramentos em solos heterogêneos a partir do cálculo da função potencial de uma fonte pontual de corrente. De forma análoga à feita para o solo homogêneo, adaptar-se-á essa função para as configurações de aterramentos reais, como cabos e hastes. Esse capítulo soluciona a função potencial em solos heterogêneos para a fonte pontual de corrente, para tal é necessário a solução de um sistema de equações para a obtenção das funções características do solo heterogêneo, utiliza-se um método de quadratura para a integração numérica em profundidades genéricas e a série de Chebyshev para a solução da função potencial na superfície do solo. Note que o procedimento para a solução da integral imprópria para a superfície do solo é análoga à realizada para a estratificação do solo, contudo resolve-se um sistema de equações ao invés de uma única equação para o modelo do solo. A função potencial varia de camada para camada, todavia essa respeita as condições de contorno impostas para o modelo do meio heterogêneo.

4.2 Equacionamento generalizado

Calcula-se a função potencial elétrico para o solo heterogêneo a partir da solução da equação de Poisson. Para todos os pontos, exceto o referente à localização da fonte de corrente, a solução é obtida pela equação de Laplace. Para a camada onde a fonte está localizada a função potencial da fonte pontual também deve ser levada em consideração, já para as camadas onde não há fonte de corrente resolve-se apenas a equação de Laplace.

4.2.1 Parcela da fonte de corrente

Usa-se a simetria cilíndrica para o solo estratificado em camadas horizontais visto que o potencial elétrico varia apenas com a distância radial r e a profundidade z . A parcela do potencial elétrico proveniente da contribuição da fonte de corrente, para uma fonte de corrente I imersa em solo de resistividade elétrica ρ , já foi deduzida no estudo de solos homogêneos. A fonte de corrente está localizada nas coordenadas (r_0, z_0) , situada na camada i do solo heterogêneo. A parcela da fonte para a equação de Poisson é calculada para a camada onde a fonte está localizada através da Eq. 4.1. Nota-se que para o cálculo da parcela da fonte considera-se o solo como uniforme e infinito em todas as direções, essa parcela é usada para a função potencial na região dentro da camada onde a fonte de corrente está imersa.

$$V(r, z) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad (4.1)$$

4.2.2 Solução genérica da equação de Laplace

Para todos os pontos da solução, exceto onde a fonte de corrente está localizada, o potencial elétrico é calculado pela equação de Laplace. Pelo fato da simetria axial optou-se trabalhar com a simetria cilíndrica. A Eq. 4.2 é a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas com a simetria axial.

$$\frac{\partial^2 V(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 V(r, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2)$$

A solução dessa equação é obtida pelo método da separação de variáveis, onde se assume que o potencial elétrico é dado pela multiplicação de uma função somente de r e outra função somente de z .

$$V(r, z) = f(r) g(z) \quad (4.3)$$

Substituindo a Eq. 4.3 na Eq. 4.2 chega-se à Eq. 4.4.

$$\frac{1}{f(r)} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{rf(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{g(z)} \frac{d^2 g(z)}{dz^2} = 0 \quad (4.4)$$

Através de uma constante de proporcionalidade λ é possível solucionar a Eq. 4.4 pelo sistema de equações composto pelas equações 4.5 e 4.6.

$$\frac{1}{f(r)} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{rf(r)} \frac{df(r)}{dr} = -\lambda^2 \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{g(z)} \frac{d^2 g(z)}{dz^2} = \lambda^2 \quad \therefore \quad \frac{d^2 g(z)}{dz^2} - \lambda^2 g(z) = 0 \quad (4.6)$$

A Eq. 4.5 é uma equação diferencial ordinária cuja solução é obtida através das raízes do polinômio característico. A solução da Eq. 4.5 é dada pela Eq. 4.7, sendo c_1 e c_2

constantes numéricas para cada valor de λ , *i.e.*, pode-se pensar em funções de λ para uma solução mais geral.

$$g(z) = c_1(\lambda) e^{-\lambda z} + c_2(\lambda) e^{+\lambda z} \quad (4.7)$$

De acordo com Bassalo e Cattani (2011), a Eq. 4.5 é a equação diferencial de Bessel, cuja solução é dada pela Eq. 4.8 para duas constantes numéricas c_3 e c_4 . Devido à simetria axial da solução, as funções de Bessel de primeiro e segundo tipo são de ordem zero. Os valores de c_3 e c_4 dependem da ordem das funções de Bessel, por conseguinte são constantes numéricas visto que a ordem das funções de Bessel é fixa para esse caso.

$$f(z) = c_3 J_0(\lambda z) + c_4 Y_0(\lambda z) \quad (4.8)$$

Substitui-se as equações 4.7 e 4.8 na Eq. 4.3, obtendo-se uma solução para o potencial elétrico.

$$V(z, z) = \left(c_1(\lambda) e^{-\lambda z} + c_2(\lambda) e^{+\lambda z} \right) \left(c_3 J_0(\lambda z) + c_4 Y_0(\lambda z) \right) \quad (4.9)$$

De acordo com Sunde (1968), o potencial elétrico no modelo do solo deve permanecer finito para $z = 0$, exceto na localização de uma fonte de corrente. Como a função de Bessel do segundo tipo $Y_0(\lambda z)$ apresenta uma singularidade em $z = 0$, a mesma não é aplicável a este problema. Visto que essa função não é compatível com a solução física, então o valor de c_4 deve ser nulo.

Como cada valor de λ representa uma solução para a equação de Laplace em um intervalo contínuo, pelo princípio da superposição, a soma de cada solução também satisfaz a equação. Tomando $\mathcal{F}(\lambda) = c_1(\lambda) c_3$ e $\mathcal{G}(\lambda) = c_2(\lambda) c_3$, a solução genérica para o potencial elétrico é então obtida pela Eq. 4.10 a seguir.

$$V(z, z) = \int_0^\infty \left(\mathcal{F}(\lambda) e^{-\lambda z} + \mathcal{G}(\lambda) e^{+\lambda z} \right) J_0(\lambda z) d\lambda \quad (4.10)$$

Essa equação representa a solução global, ou seja, a solução final será dessa forma. Note que ainda não foram aplicadas as condições de contorno para o solo heterogêneo e nem a influência da fonte pontual de corrente. Utilizar-se-á essas condições para a obtenção de $\mathcal{F}(\lambda)$ e $\mathcal{G}(\lambda)$, que são as funções características do solo.

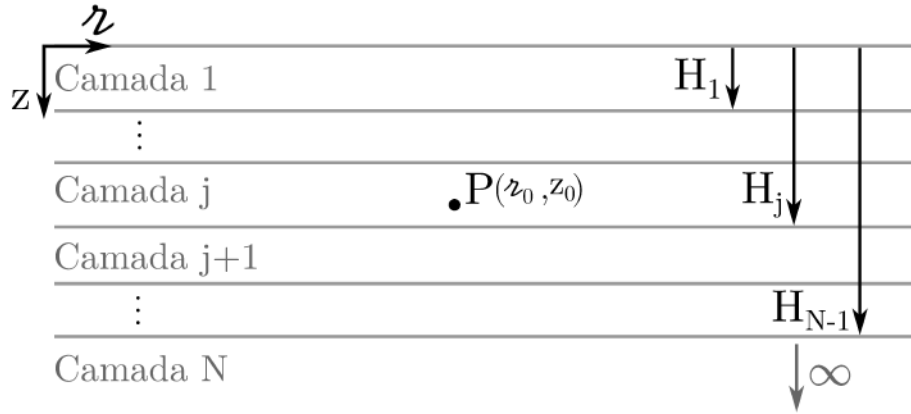
4.2.3 Aplicação no solo heterogêneo

Com o intuito de facilitar a aplicação das condições de contorno, reescreve-se a Eq. 4.10 de forma que em todas as camadas do solo as funções características tenham a mesma forma. Cada camada do solo possui suas próprias funções características $\mathcal{F}(\lambda)$ e $\mathcal{G}(\lambda)$, para a camada onde a fonte está localizada também se faz necessário somar a parcela da fonte na função potencial elétrico. Nesta seção realiza-se um tratamento matemático com o intuito de tornar a função potencial em cada camada no mesmo formato, mudando apenas o núcleo de integração, assim simplificando a aplicação das condições de contorno.

Utilizar-se-á doravante a notação V_{ij} , tal que i é o índice da camada onde a fonte pontual de corrente está localizada e j é o índice da camada onde o potencial elétrico é calculado (*cf.* Fig. 17) . Note que pode ocorrer da camada i ser igual a camada j caso a camada de cálculo da função potencial seja a mesma da fonte.

Para simplificar a notação, tanto para camadas que não possuem fonte de corrente para a camada da fonte, isolou-se a constante $\rho_i I / (4\pi)$ que aparece na parcela da fonte e aplicou-se à função de todas as camadas. Como já mencionado o intuito dessa operação é generalizar a equação para camadas com e sem fonte de corrente. Ao realizar-se esse artifício mudam-se apenas os valores calculados para as funções características do solo.

Figura 17 – Fonte de corrente I imersa em uma camada de um solo horizontalmente estratificado. A fonte está imersa em um meio de resistividade elétrica ρ_j , que faz fronteira com meios de resistividade elétrica ρ_{j-1} e ρ_{j+1} . A profundidade de uma cada camada j qualquer é representada por H_j .



Fonte: Elaboração própria.

Para generalizar a localização da fonte de corrente, muda-se a referência do eixo z para $z - z_0$, uma mudança de variável simples a qual não requer nenhum tratamento especial para a função original, visto que apenas um deslocamento da referência do sistema de coordenadas. Com essa mudança de referência adapta-se a Eq. 4.10 para tornar todas as funções potenciais das camadas equivalentes com exceção do núcleo do integrando, inclusive a camada onde a fonte de corrente está imersa.

Caso a camada j não contenha a fonte de corrente, o potencial elétrico é dado pela solução da equação de Laplace mostrada na Eq. 4.11. Reitera-se que a constante multiplicativa foi extraída das funções características com o intuito de uniformizar a representação da função potencial.

$$V_{ij} = \frac{\rho_i I}{4\pi} \int_0^\infty \left[\mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda z} \right] J_0(\lambda(z - z_0)) d\lambda \quad (4.11)$$

Caso a camada j contenha a fonte de corrente, o potencial elétrico é dado pela solução da equação de Poisson, *i.e.*, há a superposição do efeito da fonte de corrente na

camada da fonte. O cálculo do potencial elétrico então se dá por

$$V_{ij} = \frac{\rho_i I}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(z - z_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{\rho_i I}{4\pi} \int_0^\infty \left[\mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda z} \right] J_0(\lambda(z - z_0)) d\lambda, \quad (4.12)$$

que pode ser reescrita na Eq. 6.4 aplicando a integral de Lipschitz em sua forma inversa e agrupando os termos.

$$V_{ij} = \frac{\rho_i I}{4\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda|z-z_0|} + \mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda z} \right] J_0(\lambda(z - z_0)) d\lambda \quad (4.13)$$

Note que com os artifícios matemáticos aplicados, tanto a Eq. 4.11 e a Eq. 6.4 diferem somente no núcleo do integrando, *i.e.*, o termo que multiplica a função de Bessel no integrando. Para as aplicações das condições de contorno, onde há comparações entre os potenciais elétricos em camadas adjacentes, basta então comparar os diferentes núcleos do integrando e não a expressão inteira.

Como há funções características diversas para cada camada do solo, faz-se necessário montar um sistema de equações lineares para encontrar valores que satisfaçam as condições de contorno. Existem condições de contorno para representar a interface entre o ar e o solo, o potencial infinitamente distante e as condições de interface entre camadas adjacentes. Vale ressaltar que para o solo heterogêneo a condição de contorno é suficiente para representar a interface entre o ar e o solo, ou seja, não é necessário aplicar o método das imagens para a solução do problema, opta-se por fazer a representação da interface entre o ar e o solo através de uma condição de contorno de Neumann homogênea.

4.3 Condições de contorno

De acordo com Sunde (1968), as condições de contorno para o problema do solo estratificado em regime eletrocinético podem ser resumidas em:

- *Condição de contorno 1.* Componente normal do vetor densidade de corrente nulo na superfície do solo;

$$\left. \frac{\partial V_{i1}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (4.14)$$

- *Condição de contorno 2.* Continuidade do potencial elétrico na transição da camada j para a camada $j + 1$ com i sendo a camada da fonte de corrente;

$$V_{ij} \Big|_{z=H_j} = V_{i(j+1)} \Big|_{z=H_j} \quad (4.15)$$

- *Condição de contorno 3.* Continuidade da componente normal do vetor densidade de corrente na transição de camadas;

$$\frac{1}{\rho_j} \left. \frac{\partial V_{ij}}{\partial z} \right|_{z=H_j} = \frac{1}{\rho_{j+1}} \left. \frac{\partial V_{i(j+1)}}{\partial z} \right|_{z=H_j} \quad (4.16)$$

- *Condição de contorno 4.* Potencial elétrico nulo a uma profundidade que tende ao infinito.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} V_{iN} = 0 \quad (4.17)$$

4.3.1 Aplicação da *Condição de Contorno 1*

Para cada camada do solo há duas funções características, portanto necessita-se de criar um sistema de ordem $2N$, onde N é a quantidade de camadas do solo, para obter de forma unívoca todas essas funções características.

Inicia-se esse equacionamento ao aplicar-se a primeira condição de contorno, que é dada pela Eq. 4.14, aqui repetida por conveniência.

$$\left. \frac{\partial V_{i1}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

Caso a fonte esteja na primeira camada obtém-se uma resposta diferente desta em outra camada do solo. Portanto, aplica-se a condição de contorno para todos os casos possíveis.

- Fonte na primeira camada, *i.e.*, $i = 1$.

Para a fonte na primeira camada, manipulando apenas as funções de z , chega-se a equação

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left[e^{-\lambda|z-z_0|} + \mathcal{F}_{11}e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{11}e^{+\lambda z} \right] \right|_{z=0} = 0, \quad (4.18)$$

a qual aplicando a derivada parcial em z , obtém-se

$$\left. \frac{-\lambda(z-z_0)}{|z-z_0|} e^{-\lambda|z-z_0|} - \lambda e^{-\lambda z} \mathcal{F}_{11} + \lambda e^{+\lambda z} \mathcal{G}_{11} \right|_{z=0} = 0. \quad (4.19)$$

Substitui-se agora a variável z para seu ponto de cálculo, o qual representa a superfície do solo, obtendo-se

$$\frac{-\lambda(-z_0)}{|-z_0|} e^{-\lambda|-z_0|} - \lambda \mathcal{F}_{11} + \lambda \mathcal{G}_{11} = 0, \quad (4.20)$$

divide-se então a equação por λ , chegando-se à Eq. 4.21, visto que z_0 é um valor positivo.

$$\boxed{-\mathcal{F}_{11} + \mathcal{G}_{11} = e^{-\lambda z_0}} \quad (4.21)$$

- Demais casos, *i.e.*, $i \neq 1$.

Como não há a parcela da fonte a equação para este caso, a solução obtida é similar é da Eq. 4.21, todavia, sem a parcela da fonte.

$$\boxed{-\mathcal{F}_{11} + \mathcal{G}_{11} = 0} \quad (4.22)$$

Observe que a influência da fonte de corrente só altera o lado direito da equação, pode-se então separar as equações pela parte proveniente do sistema e da excitação, que são o lado esquerdo e o lado direito da igualdade consecutivamente.

4.3.2 Aplicação da *Condição de Contorno 2*

A segunda condição de contorno se refere a continuidade de potencial elétrico na transição de camadas. A Eq. 4.15 é aqui repetida por conveniência.

$$V_{ij} = V_{i(j+1)} \quad \text{para} \quad z = H_j \quad (4.23)$$

Para o modo como as equações foram organizadas a única parte que difere entre as equações são as funções de z do núcleo da integral. Note que a organização das equações facilita e muito a aplicação das condições de contorno.

Para a segunda condição de contorno há três possíveis casos: o primeiro quando a fonte está localizada na camada superior à interface; a segunda quando a fonte está na camada inferior à interface; a terceira quando não há fontes de corrente em nenhuma camada da interface. Faz-se necessário a aplicação da condição para cada caso específico. Note que caso a fonte esteja acima ou abaixo da interface a equação obtida pela aplicação da condição de contorno será distinta.

□ Fonte de corrente na camada j , que é a camada mais rasa da transição, *i.e.*, $i = j$.

$$e^{-\lambda|z-z_0|} + \mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda z} \Big|_{z=H_j} = \mathcal{F}_{i(j+1)} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{i(j+1)} e^{+\lambda z} \Big|_{z=H_j} \quad (4.24)$$

substituindo o ponto de cálculo, que é a coordenada de z referente à transição das camadas, tem-se

$$e^{-\lambda|H_j-z_0|} + \mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda H_j} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda H_j} = \mathcal{F}_{i(j+1)} e^{-\lambda H_j} + \mathcal{G}_{i(j+1)} e^{+\lambda H_j}, \quad (4.25)$$

organizando os termos obtém-se então a Eq. 4.26.

$$\boxed{\mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda H_j} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda H_j} - \mathcal{F}_{i(j+1)} e^{-\lambda H_j} - \mathcal{G}_{i(j+1)} e^{+\lambda H_j} = -e^{-\lambda|H_j-z_0|}} \quad (4.26)$$

□ Fonte de corrente na camada $j + 1$, que é a camada mais profunda da transição, *i.e.*, $i = j + 1$.

$$\mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda z} \Big|_{z=H_j} = e^{-\lambda|z-z_0|} + \mathcal{F}_{i(j+1)} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{i(j+1)} e^{+\lambda z} \Big|_{z=H_j} \quad (4.27)$$

A qual organizando-se os termos obtém-se a Eq. 4.28.

$$\boxed{\mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda H_j} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda H_j} - \mathcal{F}_{i(j+1)} e^{-\lambda H_j} - \mathcal{G}_{i(j+1)} e^{+\lambda H_j} = e^{-\lambda|H_j-z_0|}} \quad (4.28)$$

□ Não há fonte de corrente na camada j ou $j + 1$, ou seja, $i \neq j$ e $i \neq j + 1$.

Para este caso não há um termo referente à fonte, visto que não há uma fonte na camada superior ou inferior à transição de camadas. Obtém-se então a Eq. 4.29.

$$\boxed{\mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda H_j} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda H_j} - \mathcal{F}_{i(j+1)} e^{-\lambda H_j} - \mathcal{G}_{i(j+1)} e^{+\lambda H_j} = 0} \quad (4.29)$$

4.3.3 Aplicação da *Condição de Contorno 3*

A terceira condição de contorno é a continuidade da componente do vetor densidade de corrente normal à interface entre as camadas. A Eq. 4.16 é aqui repetida por conveniência.

$$\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial V_{ij}}{\partial z} \Big|_{z=H_j} = \frac{1}{\rho_{j+1}} \frac{\partial V_{i(j+1)}}{\partial z} \Big|_{z=H_j}$$

Dependendo da existência da fonte de corrente em uma das camadas da interface H_j , camada acima ou abaixo da interface, há diferenças na equação obtida pela condição de contorno. Portanto, faz-se necessário avaliar cada caso em particular, que são: fonte na camada acima da interface, fonte na camada abaixo da interface e nenhuma fonte nas camadas adjacentes à interface.

O equacionamento desenvolvido é realizado considerando-se apenas uma fonte de corrente, sistemas com mais de uma fonte de corrente são avaliados aplicando o teorema da superposição para o cálculo do potencial elétrico. Para o caso de sistemas com mais de uma fonte de corrente, calcula-se o efeito de cada fonte isolada e soma-se o potencial elétrico de cada solução independente para a obtenção da solução global.

□ Fonte de corrente na camada j , que é a camada mais rasa da transição, *i.e.*, $i = j$.

A aplicação da Eq. 4.16 quando a fonte de corrente está localizada na camada j resulta na equação

$$\frac{-\lambda(z - z_0) e^{-\lambda|z-z_0|}}{|z - z_0|} - \lambda e^{-\lambda z} \mathcal{F}_{ij} + \lambda e^{\lambda z} \mathcal{G}_{ij} \Big|_{z=H_j} = \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} \left(-\lambda e^{-\lambda z} \mathcal{F}_{i(j+1)} + \lambda e^{\lambda z} \mathcal{G}_{i(j+1)} \right) \Big|_{z=H_j}, \quad (4.30)$$

após a dividir por λ e substituir o ponto de cálculo das derivadas obtém-se

$$-e^{-\lambda H_j} \mathcal{F}_{ij} + e^{\lambda H_j} \mathcal{G}_{ij} = \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} \left(-\frac{H_j - z_0}{|H_j - z_0|} e^{-\lambda|H_j - z_0|} - e^{-\lambda H_j} \mathcal{F}_{i(j+1)} + e^{\lambda H_j} \mathcal{G}_{i(j+1)} \right), \quad (4.31)$$

onde após algumas manipulações algébricas chega-se à Eq. 4.32.

$$\boxed{-e^{-\lambda H_j} \mathcal{F}_{ij} + e^{\lambda H_j} \mathcal{G}_{ij} + \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} e^{-\lambda H_j} \mathcal{F}_{ij} - \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} e^{\lambda H_j} \mathcal{G}_{ij} = \frac{H_j - z_0}{|H_j - z_0|} e^{-\lambda|H_j - z_0|}} \quad (4.32)$$

□ Fonte de corrente na camada $j + 1$, que é a camada mais profunda da transição, *i.e.*, $i = j + 1$.

A aplicação da Eq. 4.16 quando a fonte de corrente está localizada na camada $j + 1$ resulta na equação

$$\left. -\lambda e^{-\lambda z} \mathcal{F}_{ij} + \lambda e^{\lambda z} \mathcal{G}_{ij} \right|_{z=H_j} = \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} \left(\frac{-\lambda(z - z_0) e^{-\lambda|z-z_0|}}{|z - z_0|} - \lambda e^{-\lambda z} \mathcal{F}_{i(j+1)} + \lambda e^{\lambda z} \mathcal{G}_{i(j+1)} \right) \Big|_{z=H_j}, \quad (4.33)$$

após a dividir por λ e substituir o ponto de cálculo das derivadas obtém-se

$$\left. -e^{-\lambda H_j} \mathcal{F}_{ij} + e^{\lambda H_j} \mathcal{G}_{ij} = \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} \left(-\frac{H_j - z_0}{|H_j - z_0|} e^{-\lambda|H_j - z_0|} - e^{-\lambda H_j} \mathcal{F}_{i(j+1)} + e^{\lambda H_j} \mathcal{G}_{i(j+1)} \right) \right|, \quad (4.34)$$

onde após algumas manipulações algébricas chega-se à Eq. 4.35.

$$\boxed{-e^{-\lambda H_j} \mathcal{F}_{ij} + e^{\lambda H_j} \mathcal{G}_{ij} + \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} e^{-\lambda H_j} \mathcal{F}_{i(j+1)} - \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} e^{\lambda H_j} \mathcal{G}_{i(j+1)} = -\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} \frac{H_j - z_0}{|H_j - z_0|} e^{-\lambda|H_j - z_0|}} \quad (4.35)$$

□ Não há fonte de corrente na camada j ou $j + 1$, ou seja, $i \neq j$ e $i \neq j + 1$.

Quando não há fonte de corrente na interface entre as camada j e $j + 1$ não haverá uma parcela referente à fonte, o que resulta na Eq. 4.36 para todas as situações onde não há fonte de corrente na interface entre as camadas.

$$\boxed{-e^{-\lambda H_j} \mathcal{F}_{ij} + e^{\lambda H_j} \mathcal{G}_{ij} + \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} e^{-\lambda H_j} \mathcal{F}_{ij} - \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} e^{\lambda H_j} \mathcal{G}_{ij} = 0} \quad (4.36)$$

4.3.4 Aplicação da *Condição de Contorno 4*

A quarta condição de contorno é a nulidade do potencial elétrico para profundidades que tendem ao infinito. A Eq. 4.17 é aqui repetida por conveniência.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} V_{iN} = 0$$

□ Fonte de corrente na camada N , *i.e.*, o índice $i = N$.

A aplicação da condição de contorno quando a fonte de corrente está na última camada,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(e^{-\lambda|z-z_0|} + \mathcal{F}_{NN} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{NN} e^{+\lambda z} \right) = 0, \quad (4.37)$$

resulta na Eq. 4.38 apresentada a seguir.

$$\boxed{\mathcal{G}_{NN} = 0} \quad (4.38)$$

□ Não há fonte de corrente na camada N , *i.e.*, o índice $i \neq N$.

A aplicação da condição de contorno quando a fonte de corrente não está na última camada,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\mathcal{F}_{iN} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{iN} e^{+\lambda z}) = 0, \quad (4.39)$$

resulta na Eq. 4.40, que é similar à equação do caso anterior.

$$\boxed{\mathcal{G}_{iN} = 0} \quad (4.40)$$

4.4 Obtenção das funções características \mathcal{F}_{ij} e \mathcal{G}_{ij}

As funções características F_{ij} e G_{ij} são obtidas de forma simultânea com a inserção de todas as condições de contorno na forma de um sistema de equações lineares. Define-se a matriz que contém o lado esquerdo das equações que formam as condições de contorno como $\mathbf{\Lambda}$, o vetor que representa o lado direito das equações é definido como \mathcal{S} e o vetor que contém as funções características como \mathbf{x} .

A Eq. 4.41, onde as posições vazias são todas iguais a zero, define a matriz $\mathbf{\Lambda}$, que corresponde ao lado esquerdo das equações obtidas nas condições de contorno. A matriz é formada por blocos matriciais, sendo uma matriz quadrada de ordem $2N$, sendo N a quantidade de camadas do solo estratificado.

$$\mathbf{\Lambda} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} \Lambda_0 & & & & \\ \Lambda_1 & & & & \\ \hline & \Lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \Lambda_j & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \Lambda_{N-2} \\ \hline & & & & & \Lambda_{N-1} \\ & & & & & \Lambda_N \end{array} \right], \quad (4.41)$$

sendo os blocos Λ_j para $0 < j < N$ definidos como

$$\Lambda_j = \begin{bmatrix} e^{-\lambda H_j} & e^{\lambda H_j} & -e^{-\lambda H_j} & -e^{\lambda H_j} \\ -e^{-\lambda H_j} & e^{\lambda H_j} & \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} e^{-\lambda H_j} & -\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} e^{\lambda H_j} \end{bmatrix},$$

e os blocos Λ_0 e Λ_N definidos como

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os blocos que formam a matriz $\mathbf{\Lambda}$ são Λ_0 , Λ_j e Λ_N . O bloco Λ_0 representa a aplicação da primeira condição de contorno na interface entre o ar e o solo. Já o bloco

do tipo Λ_j representa a aplicação da segunda e terceira condições de contorno, note que esse bloco tem duas linhas, uma para cada condição de contorno. O bloco do tipo Λ_N representa a aplicação da quarta condição de contorno, que é feita na última camada do solo.

Com exceção das transições de Λ_0 para Λ_1 e da transição de Λ_{N-1} para Λ_N , que são inseridas sob colunas coincidentes, todas as demais transições são inseridas com um deslocamento de duas colunas em relação à anterior. Note que independente da localização da fonte de corrente a matriz $\mathbf{\Lambda}$ permanece inalterada. Ademais, é importante ressaltar que para cada valor distinto de λ o sistema linear para a obtenção das funções características do solo deve ser solucionado novamente. A função potencial elétrico contém uma integração nessa variável em intervalo semi-infinito, necessitando assim de um tratamento apropriado para sua solução, e que necessite do mínimo de soluções do sistema de equações lineares possível.

O vetor de funções características \mathbf{x} , que representa a solução do sistema linear, e o vetor que representa a contribuição da fonte de corrente \mathcal{S} são mostrados a seguir na Eq. 4.42. A forma de \mathcal{S} depende da localização da fonte de corrente.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{i1} \\ \mathcal{G}_{i1} \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{ij} \\ \mathcal{G}_{ij} \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{iN} \\ \mathcal{G}_{iN} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S}^{(i=j+1)} = \begin{bmatrix} \vdots \\ e^{-\lambda|H_j-z_0|} \\ -\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} \frac{H_j-z_0}{|H_j-z_0|} e^{-\lambda|H_j-z_0|} \\ -e^{-\lambda|H_{j+1}-z_0|} \\ \frac{H_{j+1}-z_0}{|H_{j+1}-z_0|} e^{-\lambda|H_{j+1}-z_0|} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Note que a função \mathcal{S} ilustrada aqui corresponde à fonte imersa em uma camada intermediária, que não é a primeira ou a última. A construção de \mathcal{S} é função direta da posição da fonte de corrente e tem que ser analisada para cada caso específico.

Obtém-se as funções características pela solução do sistema de equações lineares da Eq. 4.43, que varia para cada valor de λ e cada valor de z_0 . Para cada mudança no valor de λ ou z_0 esse sistema deve ser solucionado novamente com os novos valores para as variáveis.

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{x} = \mathcal{S} \quad (4.43)$$

Neste trabalho optou-se por não buscar uma solução analítica para este sistema de equações lineares, e sim por solucioná-lo para cada valor distinto de λ ou z_0 . Uma desvantagem da abordagem escolhida é que não é possível calcular a função potencial de uma camada específica de forma isolada, ou seja, sem a obtenção das funções características das demais camadas do solo. Todavia, a obtenção de uma solução analítica para o referido

sistema é um pouco complexa, mesmo usando um programa de álgebra computacional, visto que o número de camadas é variável e a localização da fonte de corrente também é variável.

Utilizou-se uma biblioteca para a solução de sistemas lineares bastante eficiente¹, tal que mesmo solucionando o sistema diversas vezes o esforço computacional para essa etapa do programa é ínfimo, não justificando assim a busca por uma solução analítica para esse sistema de equações. Uma solução analítica resultante teria tantos termos em sua composição que o número de operações que a máquina faria provavelmente não seria muito menor que a solução do sistema de equações lineares, além da simplicidade de se programar computacionalmente um sistema de equações genérico em comparação a uma extensa solução analítica.

Como resultado da solução de 4.43, as funções características do solo para todas as camadas são obtidas, todavia se utilize apenas um par dessas soluções por camada de cálculo do potencial. Por exemplo, no caso da superfície do solo, que é sempre a primeira camada, o cálculo do potencial elétrico necessitará apenas dos dois primeiros termos da solução do sistema, sendo \mathcal{S} função da localização da fonte de corrente. Em casos de aplicação prática de engenharia elétrica, dificilmente é necessário a utilização de um solo com mais de cinco camadas, uma vez que para a obtenção da estratificação do solo não são utilizados grandes espaçamentos entre os eletrodos para as leituras do perfil de resistividade aparente em função da profundidade. A quantidade reduzida de camadas em aplicações práticas implica que o sistema linear a ser solucionado para a obtenção das funções características do solo, que tem ordem igual ao dobro da quantidade de camadas, não terá uma ordem elevada e como consequência não terá uma solução computacional dispendiosa.

Com o intuito de melhorar a compreensão do equacionamento que se deduziu nesta tese para o solo heterogêneo, mostra-se dois exemplos de montagem do sistema linear, para o caso de três camadas na seção 4.4.1 e de cinco camadas na seção 4.4.2. Mostra-se também a montagem do vetor \mathcal{S} nesses exemplos para todas as possibilidades de localização para a fonte de corrente. Note que a montagem desse sistema linear pode ser facilmente automatizada por um algoritmo computacional para uma quantidade genérica de camadas.

¹ *Gnu Scientific Library.*

4.4.1 Exemplo: modelo de três camadas

$${}^2\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ e^{-\lambda H_1} & e^{\lambda H_1} & -e^{-\lambda H_1} & -e^{\lambda H_1} & & & \\ -e^{-\lambda H_1} & e^{\lambda H_1} & \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-\lambda H_1} & -\frac{\rho_1}{\rho_2} e^{\lambda H_1} & & & \\ & & e^{-\lambda H_2} & e^{\lambda H_2} & -e^{-\lambda H_2} & -e^{\lambda H_2} & \\ & & -e^{-\lambda H_2} & e^{\lambda H_2} & \frac{\rho_2}{\rho_3} e^{-\lambda H_2} & -\frac{\rho_2}{\rho_3} e^{\lambda H_2} & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}^{(i=1)} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda z_0} \\ -e^{-\lambda|H_1-z_0|} \\ \frac{H_1-z_0}{|H_1-z_0|} e^{-\lambda|H_1-z_0|} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{S}^{(i=2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\lambda|H_1-z_0|} \\ -\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{H_1-z_0}{|H_1-z_0|} e^{-\lambda|H_1-z_0|} \\ -e^{-\lambda|H_2-z_0|} \\ \frac{H_2-z_0}{|H_2-z_0|} e^{-\lambda|H_2-z_0|} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{S}^{(i=3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-\lambda|H_2-z_0|} \\ -\frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{H_2-z_0}{|H_2-z_0|} e^{-\lambda|H_2-z_0|} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \left(\mathcal{F}_{i1} \quad \mathcal{G}_{i1} \quad \mathcal{F}_{i2} \quad \mathcal{G}_{i2} \quad \mathcal{F}_{i3} \quad \mathcal{G}_{i3} \right)^T$$

² As posições vazias em Λ são zeros.

4.4.2 Exemplo: modelo de cinco camadas

$${}^3\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & & & & \\ e^{-\lambda H_1} & e^{\lambda H_1} & -e^{-\lambda H_1} & -e^{\lambda H_1} & & & & & & \\ -e^{-\lambda H_1} & e^{\lambda H_1} & \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-\lambda H_1} & -\frac{\rho_1}{\rho_2} e^{\lambda H_1} & & & & & & \\ & & e^{-\lambda H_2} & e^{\lambda H_2} & -e^{-\lambda H_2} & -e^{\lambda H_2} & & & & \\ & & -e^{-\lambda H_2} & e^{\lambda H_2} & \frac{\rho_2}{\rho_3} e^{-\lambda H_2} & -\frac{\rho_2}{\rho_3} e^{\lambda H_2} & & & & \\ & & & e^{-\lambda H_3} & e^{\lambda H_3} & -e^{-\lambda H_3} & -e^{\lambda H_3} & & & \\ & & & -e^{-\lambda H_3} & e^{\lambda H_3} & \frac{\rho_3}{\rho_4} e^{-\lambda H_3} & -\frac{\rho_3}{\rho_4} e^{\lambda H_3} & & & \\ & & & & e^{-\lambda H_4} & e^{\lambda H_4} & -e^{-\lambda H_4} & -e^{\lambda H_4} & & \\ & & & & -e^{-\lambda H_4} & e^{\lambda H_4} & \frac{\rho_4}{\rho_5} e^{-\lambda H_4} & -\frac{\rho_4}{\rho_5} e^{\lambda H_4} & & \\ & & & & & & & & 1 & \end{bmatrix}$$

$${}^4S^1 = \begin{bmatrix} e^{-\lambda z_0} \\ -e^{-\lambda|H_1-z_0|} \\ \frac{H_1-z_0}{|H_1-z_0|} e^{-\lambda|H_1-z_0|} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\lambda|H_1-z_0|} \\ -\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{H_1-z_0}{|H_1-z_0|} e^{-\lambda|H_1-z_0|} \\ -e^{-\lambda|H_2-z_0|} \\ \frac{H_2-z_0}{|H_2-z_0|} e^{-\lambda|H_2-z_0|} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-\lambda|H_2-z_0|} \\ -\frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{H_2-z_0}{|H_2-z_0|} e^{-\lambda|H_2-z_0|} \\ -e^{-\lambda|H_3-z_0|} \\ \frac{H_3-z_0}{|H_3-z_0|} e^{-\lambda|H_3-z_0|} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-\lambda|H_3-z_0|} \\ -\frac{\rho_3}{\rho_4} \frac{H_3-z_0}{|H_3-z_0|} e^{-\lambda|H_3-z_0|} \\ -e^{-\lambda|H_4-z_0|} \\ \frac{H_4-z_0}{|H_4-z_0|} e^{-\lambda|H_4-z_0|} \\ 0 \end{bmatrix} \quad S^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-\lambda|H_4-z_0|} \\ -\frac{\rho_4}{\rho_5} \frac{H_4-z_0}{|H_4-z_0|} e^{-\lambda|H_4-z_0|} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{i1} & \mathcal{G}_{i1} & \mathcal{F}_{i2} & \mathcal{G}_{i2} & \mathcal{F}_{i3} & \mathcal{G}_{i3} & \mathcal{F}_{i4} & \mathcal{G}_{i4} & \mathcal{F}_{i5} & \mathcal{G}_{i5} \end{bmatrix}^T$$

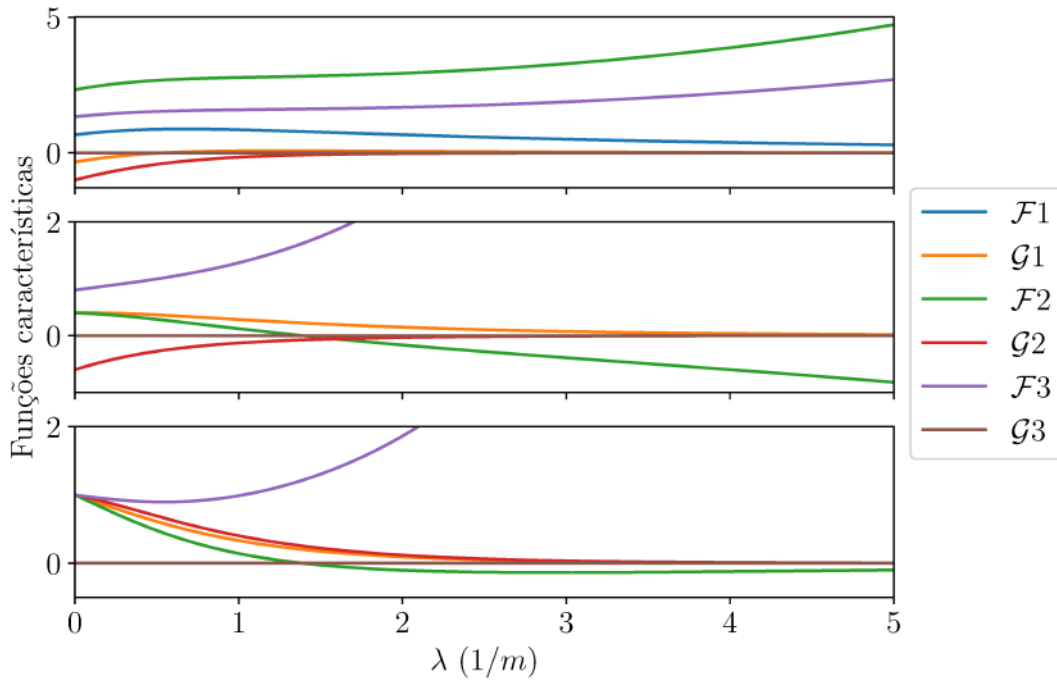
³ As posições vazias em Λ são zeros.

⁴ S^i vetor de soluções para a fonte na i -ésima camada.

4.4.3 Representação gráfica das funções características

A quantidade de funções características depende da quantidade de camadas do solo, sendo igual ao dobro de sua quantidade de camadas. Sobre o comportamento das funções características, esse depende da localização da fonte de corrente, como ilustrado na Fig. 18 para um solo hipotético de três camadas. Lembre-se que as funções características são utilizadas para representar o solo heterogêneo na função potencial como parte de seu integrando. É válido reiterar que para cada valor de λ distinto é necessário solucionar um novo sistema de equações lineares para a obtenção das funções características, da mesma forma que cada valor de z_0 também requer uma nova solução do referido sistema. Observe que o intervalo de λ é infinito e a Fig. 18 apenas mostra um intervalo truncado com o intuito de ilustrar o problema.

Figura 18 – Funções características para diferentes valores de z_0 . O limite horizontal do gráfico está truncado para λ , visto que esse varia de zero a infinito. Os valores de z_0 para o gráfico na ordem cima-baixo são respectivamente 0,25; 0,75 e 1,25. O solo analisado é de três camadas com $\rho_1 = 300 \, \Omega.m$, $\rho_2 = 500 \, \Omega.m$ e $\rho_3 = 200 \, \Omega.m$. As espessuras das camadas são $d_1 = 0,5 \, m$ e $d_2 = 0,5 \, m$.



Fonte: elaboração própria.

Observe que o valor de \mathcal{G}_{2N} é sempre nulo, independente da quantidade de camadas e da localização da fonte de corrente, isso devido à quarta condição de contorno aplicada (*cf.* seção 4.3.4). Ademais, observe que há um comportamento divergente em algumas funções características (em especial \mathcal{F}_3 na figura). Comportamentos divergentes de funções características são provenientes de fontes de corrente na camada da função característica ou em camadas adjacentes, sempre acontecendo em funções do tipo \mathcal{F} para essa situação.

4.5 Solução da integral na função potencial

Inicialmente, repete-se aqui por conveniência a equação para o cálculo da função potencial. A função potencial em um ponto qualquer do solo é calculada pela seguinte equação quando o ponto de cálculo é diferente da camada da fonte de corrente

$$V(z, z) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \int_0^\infty [\mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda z}] J_0(\lambda(z - z_0)) d\lambda,$$

ou igual a equação seguinte para o caso onde a camada de cálculo j é igual à camada i onde a fonte de corrente está imersa

$$V(z, z) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\lambda|z-z_0|} + \mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda z}] J_0(\lambda(z - z_0)) d\lambda.$$

Com o intuito de generalizar a equação, utilizar-se-á a função delta de Kronecker, onde i é a camada onde a fonte de corrente está imersa e j é a camada onde o potencial está sendo calculado. A Eq. 4.44 a seguir define a função delta de Kronecker.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.44)$$

A Eq. 4.45 representa então o potencial elétrico em qualquer camada do solo e com a fonte de corrente também em uma camada genérica do solo. O ponto de cálculo é (z, z) na camada j do solo, a fonte de corrente está localizada em (z_0, z_0) na camada i do solo, as funções \mathcal{F} e \mathcal{G} representam a aplicação das condições de contorno para a representação do solo heterogêneo.

$$V(z, z) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \int_0^\infty [\delta_{ij} e^{-\lambda|z-z_0|} + \mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda z}] J_0(\lambda(z - z_0)) d\lambda \quad (4.45)$$

4.5.1 Fórmula de quadratura para integrais envolvendo polinômios de Bessel

Para Lucas e Stone (1995), integrais na forma $I = \int_0^\infty f(x)J_0(x)dx$ possuem solução numérica através do método de dividir uma integral oscilante em seus zeros, formando uma sequência de somas parciais, junto de técnicas de extrapolação para acelerar a convergência da série (integrais desse tipo não podem ser solucionadas através de métodos elementares de integração numérica). Esse faz um comparativo entre diversas técnicas de extrapolação, buscando a convergência da série para uma quantidade mínima de termos. O trabalho de Ogata (2005) propõe uma fórmula para uma convergência exponencial da somatória com uma grande acurácia para o resultado da integral. A formulação proposta no referido trabalho foi adaptada pelo autor dessa tese para a solução da função potencial e obtiveram-se resultados bastante satisfatórios.

O trabalho de Ogata (2005) propõe uma fórmula de quadratura dupla exponencial para integrais do tipo transformada de Hankel $\int_0^\infty f(x)J_\nu(x)dx$, onde ν é a ordem

da função de Bessel. A motivação desse trabalho foi devido à dificuldade de integrar funções oscilatórias em um intervalo infinito. O autor citado se baseou no trabalho de Ooura e Mori (1999), o qual desenvolveu uma fórmula de quadratura para integrais do tipo transformada de Fourier $\int_0^\infty f(x) \sin(x) dx$, onde uma função $f(x)$ é transformada de tal maneira que os nós da quadratura se aproximem rapidamente dos zeros de $\sin(x)$, possibilitando assim a integral ser avaliada com um número reduzido de iterações.

$$\int_0^\infty f(x) J_0(x) dx \approx \pi \sum_{k=1}^{\infty} w_k f\left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k)\right) J_0\left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k)\right) \psi'(h\xi_k) \quad (4.46)$$

O valor de w_k é o k -ésimo peso associado, Y_0 é o polinômio de Bessel de segundo tipo e ordem zero, já J_1 é o polinômio de Bessel de primeiro tipo e ordem um. O passo h é um parâmetro a ser escolhido para garantir a convergência da série.

$$w_k = \frac{Y_0(\pi\xi_k)}{J_1(\pi\xi_k)} \quad (4.47)$$

O valor ξ_k representa o k -ésimo zero da função $J_0(\pi x)$ em ordem crescente, tal que $0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \dots$. Esses zeros são previamente calculados e armazenados como constantes. A Tab. 1 ilustra as dez primeiras raízes de $J_0(\pi x)$ com uma precisão limitada a quatro casas decimais, note que a diferença entre raízes consecutivas tende a um.

Tabela 1 – Dez primeiras raízes de $J_0(\pi x)$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ξ_k	0,7655	1,7571	2,7546	3,7534	4,7527	5,7522	6,7519	7,7516	8,7514	9,7513

Já a função auxiliar $\psi(t)$ é definida por

$$\psi(t) = t \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right), \quad (4.48)$$

portanto, calcula-se sua derivada $\psi'(t)$ conforme Eq. 4.49.

$$\psi'(t) = \frac{\pi t \cosh(t) + \sinh(\pi \sinh(t))}{1 + \cosh(\pi \sinh(t))} \quad (4.49)$$

A avaliação da somatória na Eq. 4.46 é realizada até que um novo termo de série seja maior que uma dada tolerância pré-especificada, assim é possível truncar a série e garantir uma precisão desejada para o valor calculado da integral. Os valores para as raízes ξ_k têm uma variação grande no começo e tendem a um. Portanto, em termos computacionais, após alguns termos é possível calcular com uma boa precisão todas as raízes apenas somando uma unidade ao termo anterior.

4.5.2 Solução da função potencial pela fórmula de quadratura

Nesta seção solucionamos a Eq. 4.45 utilizando o método de quadratura de Ogata (2005), para isso pode-se aplicar a integral de Lipschitz $\int_0^\infty e^{ax} J_0(bx) = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$ para o termo fonte com o intuito de simplificar o integrando, conforme a Eq. 4.50 a seguir.

$$V(z, z) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \int_0^\infty [\mathcal{F}_{ij} e^{-\lambda z} + \mathcal{G}_{ij} e^{+\lambda z}] J_0(\lambda(z - z_0)) d\lambda \right) \quad (4.50)$$

Lembre-se que a integral de Lipschitz é definida apenas para exponenciais negativas, todavia, a exponencial referente à fonte é sempre negativa. Note que a integral remanescente não está no mesmo formato da Eq. 4.46, sendo necessário realizar uma mudança de variável $u = \lambda(z - z_0)$ e por conseguinte $du = (z - z_0)d\lambda$ para assim se obter a forma padrão.

$$\int_0^\infty \frac{1}{z - z_0} \left[\mathcal{F}_{ij} e^{-u} e^{z/(z-z_0)} + \mathcal{G}_{ij} e^u e^{z/(z-z_0)} \right] J_0(u) du \quad (4.51)$$

Portanto, adota-se a função f do integrando de acordo com a Eq. 4.52 para se obter a forma padrão.

$$f(u) = \frac{1}{z - z_0} \left[\mathcal{F}_{ij} e^{-u} e^{z/(z-z_0)} + \mathcal{G}_{ij} e^u e^{z/(z-z_0)} \right] \quad (4.52)$$

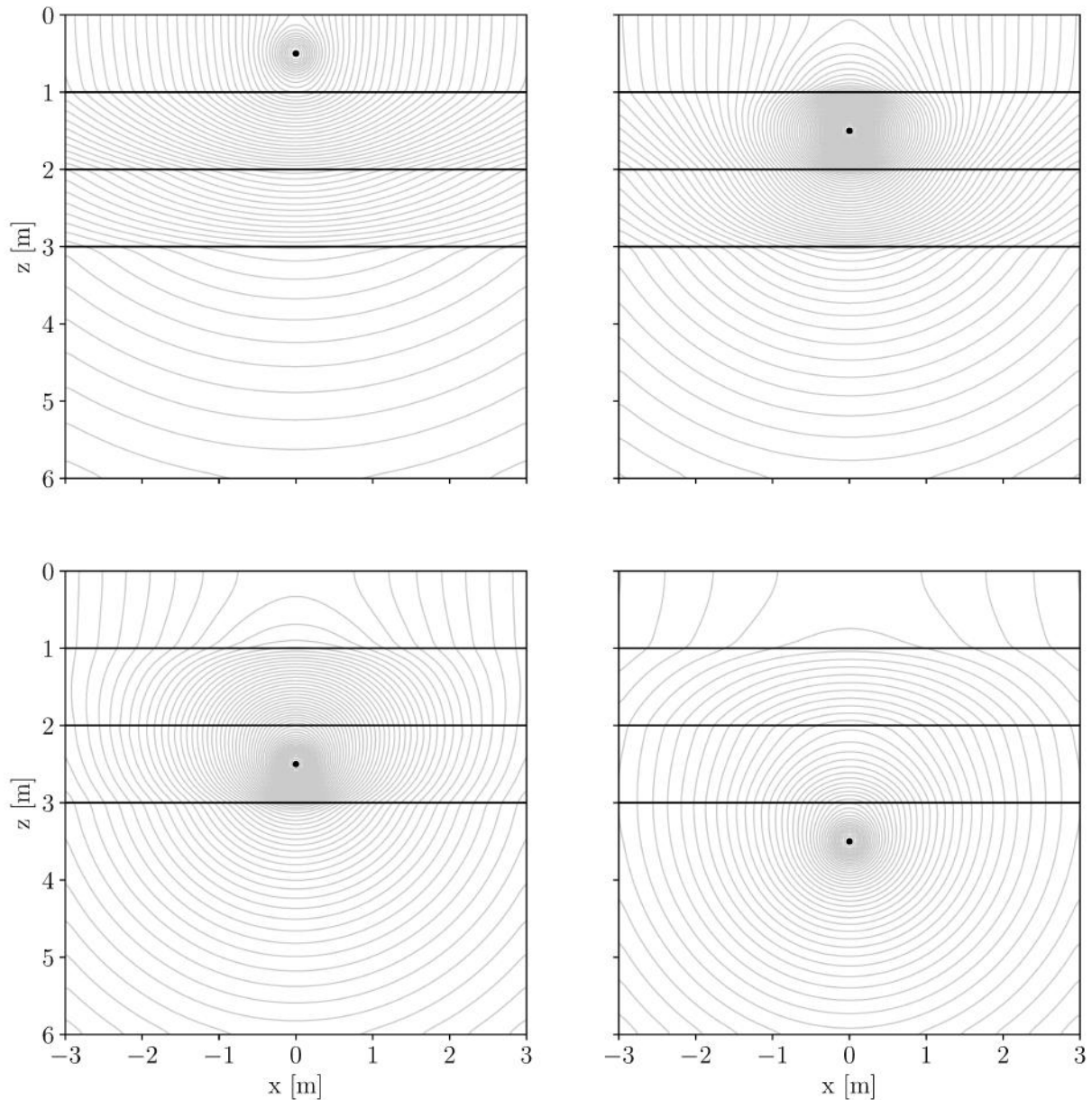
O potencial é então obtido através da Eq. 4.53, que é a equação para o potencial elétrico com a parcela da fonte solucionada analiticamente e a parcela do solo heterogêneo resolvido através da quadratura de Ogata (2005).

$$V(z, z) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left[\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \pi \sum_{k=1}^\infty w_k f\left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k)\right) J_0\left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k)\right) \psi'(h\xi_k) \right] \quad (4.53)$$

A Fig. 19 ilustra a avaliação da função potencial, linhas equipotenciais, em um solo de quatro camadas para diferentes localizações da fonte de corrente. Avaliou-se a Eq. 4.53 para cada ponto da figura, ou seja, é necessário resolver uma integração numérica para cada ponto. Não obstante a etapa de integração, é necessário avaliar um sistema de equações lineares para cada valor de λ (no caso u da mudança de variável) para a obtenção das funções características em cada ponto.

A utilização da linguagem C, que é bastante eficiente, junto de bibliotecas otimizadas para a solução de sistemas lineares viabilizou a solução da função potencial, embora seja pensado que a solução apresente um custo computacional elevado devido à natureza do problema. Para fins de demonstração, o tempo de processamento para avaliar 10^4 pontos no solo da Fig. 19, utilizados para a geração de uma superfície de potencial, leva em torno de 1,422 s de processamento sem a utilização de processamento paralelo. O valor do passo h adotado para a convergência da solução foi de 10^{-3} , esse valor foi ajustado por meio de testes e mostrou-se adequado para diferentes tipos de solo. O valor de h no artigo original é na ordem de 10^{-2} , isso porque as funções avaliadas nesse eram distintas da utilizada neste artigo.

Figura 19 – Linhas equipotenciais para diferentes valores de z_0 . Os valores de z_0 para as figuras na ordem cima-baixo e esquerda-direita são respectivamente 0,5; 1,5; 2,5 e 3,5 metros. O solo analisado é de quatro camadas com $\rho_1 = 100 \Omega.m$, $\rho_2 = 500 \Omega.m$, $\rho_3 = 200 \Omega.m$ e $\rho_4 = 50 \Omega.m$. As espessuras das camadas são $d_1 = 1 m$, $d_2 = 1 m$ e $d_3 = 1 m$. Devido à simetria axial, o potencial em três dimensões é apenas a revolução em torno do eixo da fonte pontual das superfícies calculadas.

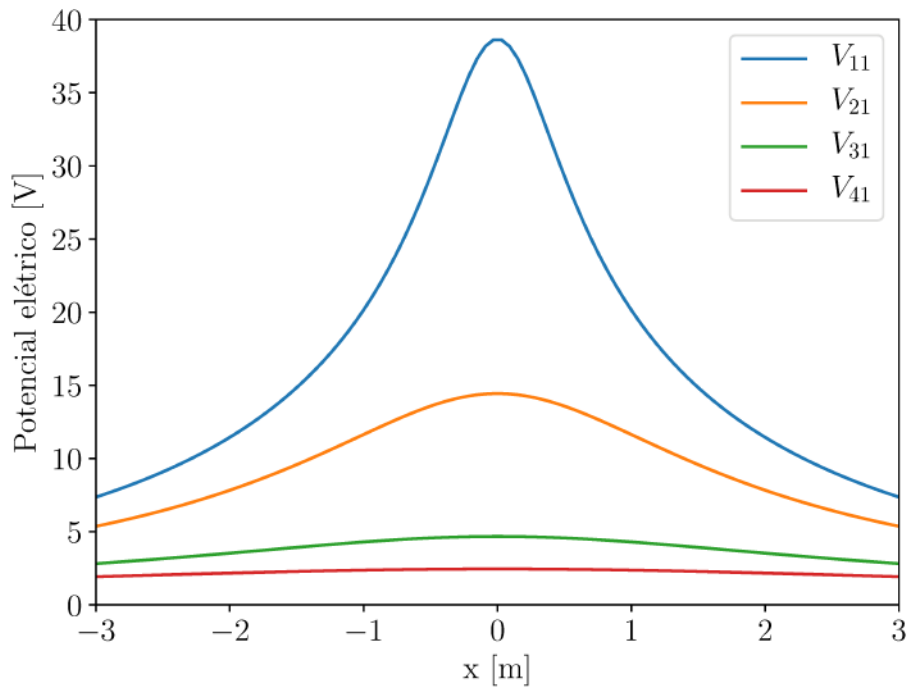


Fonte: elaboração própria.

Para o solo da Fig. 19 e com o passo utilizado, buscando uma tolerância de 10^{-6} , foram realizadas em média 36 iterações para o truncamento da somatória. Note que, para diferentes tipos de solo, a quantidade de iterações necessária para o truncamento da somatória varia, da mesma forma varia também o tempo de processamento. Por exemplo, a mesma equação em um solo uniforme necessita de 0,717 s de processamento para a mesma quantidade de pontos, com o mesmo passo e a mesma tolerância, necessitando

em média de 31 iterações para a tolerância especificada. Pode-se resumir o tempo de processamento para esse problema como função do esforço computacional para a solução do sistema linear e a quantidade de iterações necessárias para a integração. Outro fator que atrapalha a convergência da somatória é a diferença entre a distância radial do ponto de cálculo r e o deslocamento da fonte z_0 em relação ao eixo z .

Figura 20 – Potencial de superfície para diferentes valores de z_0 . O solo analisado é de quatro camadas com $\rho_1 = 100\Omega.m$, $\rho_2 = 500\Omega.m$, $\rho_3 = 200\Omega.m$ e $\rho_4 = 50\Omega.m$. As espessuras das camadas são $d_1 = 1m$, $d_2 = 1m$ e $d_3 = 1m$. Devido à simetria axial, o potencial em duas dimensões é apenas a revolução em torno do eixo da fonte pontual das curvas apresentadas.



Fonte: elaboração própria.

O cálculo do potencial elétrico para uma profundidade genérica é importante para, além de problemas envolvendo dutos metálicos enterrados, se determinarem a elevação de potencial em um condutor gerada por outro condutor, usada no cálculo da resistência mútua entre condutores. Todavia, é muito comum o cálculo do potencial elétrico na superfície do solo, que é usado para se determinar as tensões de passo e de toque. As curvas da Fig. 20 ilustram o potencial elétrico na superfície do solo para diferentes profundidades da fonte de corrente.

Note que a quantidade de pontos utilizada para a Fig. 20 é bem menor do que a utilizada na Fig. 19, o que reduz drasticamente o tempo de processamento. Ademais, para o potencial na superfície do solo não há termos de exponenciais positivas, o que possibilita a aplicação da integral de Lipschitz caso as funções características do solo possam ser decompostas em uma combinação linear de exponenciais, o que se apresentará a seguir nesta tese.

4.6 Cálculo do potencial elétrico através da série de Chebyshev

Após uma descrição da teoria dos polinômios de Chebyshev que se encontra no Anexo A desta tese, junto com sua aplicação na representação de funções, retoma-se o problema do cálculo do potencial elétrico gerado por uma fonte pontual de corrente em um solo heterogêneo.

A formulação de Ogata (2005), mesmo com uma convergência acelerada, exige um esforço computacional superior à solução a ser proposta nesta seção. Isso porque a função potencial é avaliada diversas vezes em problemas de aterramento elétrico, por isso propõe-se a decomposição das funções características em uma série de Chebyshev, possibilitando assim a obtenção dos coeficientes da decomposição que podem ser reaproveitados em cálculos subsequentes. Aproveitam-se os coeficientes da série sempre que a profundidade da fonte de corrente não varia, o que reduz bastante o esforço computacional visto que o cálculo do potencial elétrico reutiliza coeficientes já calculados previamente ao invés de realizar uma integração numérica independente para cada ponto.

Todavia, como a integral de Lipschitz só é válida para exponenciais negativas, a solução baseada na série de Chebyshev é restrita ao cálculo do potencial elétrico na superfície do solo, contudo a fonte de corrente pode estar localizada em qualquer camada do solo. Visto que uma etapa bastante dispendiosa é a representação gráfica do potencial de superfície, essa solução é bastante útil para aumentar a eficiência do programa.

4.6.1 Mudança de variável para intervalo fechado

Na seção 4.5.2 o termo referente à fonte de corrente foi removido do integrando. Tomando-se um caso particular da Eq. 4.50 para a superfície do solo apenas, chega-se à Eq. 4.54 a seguir.

$$V(z, 0) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_0^2}} + \int_0^\infty [\mathcal{F}_{i1} + \mathcal{G}_{i1}] J_0(\lambda(z - z_0)) d\lambda \right) \quad (4.54)$$

Para a solução da integral da Eq. 4.54 através da série de Chebyshev inicialmente é necessário mapear a variável λ em um intervalo coerente para a série, como feito previamente nesta tese para a estratificação do solo. Propõe-se então a mudança de variável mostrada na Eq. 4.55 com o intuito de trabalhar com um domínio fechado para a solução.

$$E = e^{-\lambda} \quad 0 < E \leq 1 \quad (4.55)$$

Com a solução agora definida no intervalo fechado $(0, 1]$ é necessário mudar sistema de equações $\Lambda \mathbf{x} = \mathcal{S}$ para essa nova variável. Essa mudança de variável torna possível

mapear as funções características do solo em séries de Chebyshev deslocadas. Note que com essa mudança de variável, quando λ tende ao infinito o valor de E se aproxima de zero e por isso esse valor não faz parte da solução para a variável E . Quando a variável E é igual a um o valor de λ é zero, assim fazendo parte da solução. Como mostrado na Eq. 4.56, o sistema de equações utilizado para encontrar as funções características do solo é então reescrito para a nova variável

$$\mathbf{\Lambda} = \left[\begin{array}{c|cc} \Lambda_0 & & \\ \Lambda_1 & & \\ \hline & \Lambda_2 & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_j & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_{N-2} \\ \hline & & & \Lambda_{N-1} \\ & & & \Lambda_N \end{array} \right], \quad (4.56)$$

sendo os blocos Λ_j em função de E para $0 < j < N$ definidos como

$$\Lambda_j = \begin{bmatrix} E^{H_j} & E^{-H_j} & -E^{H_j} & -E^{-H_j} \\ -E^{H_j} & E^{-H_j} & \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} E^{H_j} & -\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} E^{-H_j} \end{bmatrix},$$

já os blocos Λ_0 e Λ_N permanecem inalterados, também definidos para E como

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O vetor de funções características \mathbf{x} , que representa a solução do sistema linear, e o vetor que representa a contribuição da fonte de corrente \mathcal{S} são mostrados a seguir.

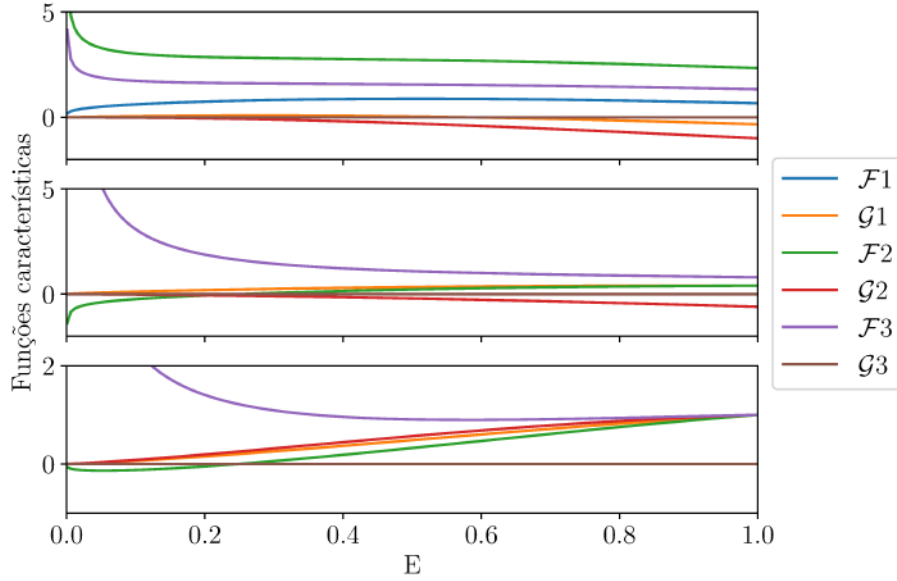
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{i1} \\ \mathcal{G}_{i1} \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{ij} \\ \mathcal{G}_{ij} \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{iN} \\ \mathcal{G}_{iN} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad {}^5\mathcal{S}^{(i=j+1)} = \begin{bmatrix} \vdots \\ E^{|H_j - z_0|} \\ -\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} \frac{H_j - z_0}{|H_j - z_0|} E^{|H_j - z_0|} \\ -E^{|H_{j+1} - z_0|} \\ \frac{H_{j+1} - z_0}{|H_{j+1} - z_0|} E^{|H_{j+1} - z_0|} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Note que a função \mathcal{S} ilustrada aqui corresponde à fonte imersa em uma camada intermediária, que não é a primeira ou a última. A construção de \mathcal{S} é função direta da posição da fonte de corrente e tem que ser analisada para cada caso específico. O equacionamento apresentado aqui é função de E ao invés de λ , todavia tem o mesmo significado físico.

⁵ Caso específico para ilustração, esses valores dependem da localização da fonte de corrente.

A Fig. 21 ilustra as funções características para um solo hipotético de três camadas, variando-se a localização da fonte de corrente. Note que a figura, comparando-se com a Fig. 18, apresenta um intervalo finito para o eixo horizontal devido a mudança de variável realizada. O gráfico para a mudança de variável representa a mesma função, todavia escalonada em um intervalo finito e invertida em relação ao eixo horizontal.

Figura 21 – Funções características para diferentes valores de z_0 em um solo específico.



Fonte: elaboração própria.

Como a mudança de variável realizada para as funções características basicamente faz um escalonamento da função em um intervalo finito, algumas funções características do tipo \mathcal{F} continuam a apresentar um comportamento divergente, mas agora para E iguais a zero que representa valores de λ tendendo ao infinito. Esse comportamento é indesejado para a decomposição dessas funções em séries de Chebyshev, todavia para a superfície do solo (\mathcal{F}_{i1}) não haverá esse problema devido à natureza das condições de contorno.

Com as funções características escalonadas para esse intervalo fechado é possível então aplicar uma decomposição em série de Chebyshev para cada função característica. Utiliza-se a série de Chebyshev deslocada visto que as funções características não estão no intervalo canônico para a série.

Como já mencionado, a integração numérica de funções envolvendo funções oscilatórias em intervalos infinitos requer o uso de técnicas não elementares para sua solução. A decomposição em série de Chebyshev tem o intuito de possibilitar o uso de um artifício matemático para a solução analítica de integrais envolvendo polinômios de Bessel, assim reduzindo bastante o esforço computacional para a integração. Note que mesmo obtendo-se todas as funções características através da solução do sistema linear, utiliza-se apenas as funções \mathcal{F}_{i1} e \mathcal{G}_{i1} para o cálculo do potencial elétrico na superfície do solo, visto que

um ponto em $z = 0$ sempre está na primeira camada do solo. Ademais, observe pela Fig. 21 que as funções \mathcal{F}_{i1} e \mathcal{G}_{i1} são suaves independente da localização da fonte de corrente.

4.6.2 Decomposição em série de Chebyshev

A decomposição de uma função $\Psi(E)$ qualquer em um intervalo fechado $0 \leq E \leq 1$ pela série de Chebyshev deslocada resume-se nas equações que se seguem. Apresenta-se novamente o equacionamento necessário para essa série com o intuito de o resumi-lo e contextualizá-lo para essa seção da tese. A expansão de uma função $\Psi(E)$ qualquer em uma série de Chebyshev deslocada de grau n é dada pela Eq. 4.58 a seguir, onde o apóstrofo na somatória significa que o primeiro termo da soma deve ser dividido por dois.

$$\Psi(E) \approx \sum_{k=0}^n c_k' T_k(x) \quad (4.58)$$

Onde os coeficientes da série são calculados como

$$c_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(\xi_k) \cos\left(j\pi \frac{k+1/2}{n}\right), \quad (4.59)$$

e as raízes ξ_k para o grau n calculadas por

$$\xi_k = \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{k+1/2}{n}\right) + \frac{1}{2}. \quad (4.60)$$

Já o polinômio de Chebyshev deslocado T_n , onde n é o grau do polinômio, é calculado através da sua definição recursiva

$$T_n(x) = (4E - 2) T_{n-1}(E) - T_{n-2}(E) \quad n > 1, \quad (4.61)$$

com o valor de $T_0(E) = 1$ e o valor de $T_1(E) = 2E - 1$. O valor de $T_n(E)$ também pode ser calculado através de sua definição trigonométrica, todavia para o equacionamento proposto nesta tese utiliza-se para a solução da integral imprópria os termos da série de potências equivalente à expansão realizada.

Observe que com esse equacionamento é possível aproximar uma função através de uma amostragem em pontos já definidos através das raízes do polinômio para um intervalo contínuo. Com isso as funções características do solo heterogêneo, que necessitam da solução de um sistema linear para cada novo valor de E , podem ser representadas em um intervalo contínuo com um pequeno número de amostras calculadas nas raízes do polinômio de Chebyshev. Dessa maneira a solução de um sistema de equações lineares para cada valor de E não representa uma etapa dispendiosa em termos computacionais.

As funções características mapeadas em um intervalo contínuo ainda não tornam possível a solução da integral imprópria da função potencial elétrico. Todavia, pode-se aproveitar a característica de série de potências dos polinômios de Chebyshev T_n para a

aplicação da identidade de Lipshitz. Note que as funções características do solo são agora representadas através de coeficientes da expansão realizada para um determinado grau.

A expansão de uma função em série de Chebyshev pode ser representada como uma série de potências através da Eq. 4.62, onde A_{kj} é o k -ésimo coeficiente do polinômio de Chebyshev T_j quando representado em termos de uma série de potências.

$$\Psi(E) \approx \sum_{k=0}^n c_k \sum_{j=0}^k A_{kj} E^j \quad (4.62)$$

Esses coeficientes A_{kj} independem da função e podem ser armazenados na memória do computador como constantes numéricas, *i.e.*, são previamente calculados já que dependem apenas do grau da expansão realizada.

Aplica-se agora a Eq. 4.62 para a expansão das funções características do solo. Inicialmente, uma função característica do tipo \mathcal{F} para um ponto de cálculo na superfície do solo é então representada como

$$\mathcal{F}_{i1}(E) \approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n \sum_{q=0}^{n-1} \mathcal{F}_{i1}(\xi_q) \cos\left(k\pi \frac{q+1/2}{n}\right) \sum_{l=0}^k A_{kl} E^l. \quad (4.63)$$

Simplifica-se esse equacionamento através do termo \mathcal{A}_l , dado pela seguinte definição.

$$\mathcal{A}_l = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n \sum_{q=0}^{n-1} \mathcal{F}_{i1}(\xi_q) \cos\left(k\pi \frac{q+1/2}{n}\right) A_{kl} \quad (4.64)$$

Pode-se então representar a Eq. 4.63 em função do termo \mathcal{A}_l da Eq. 4.64 como

$$\mathcal{F}_{i1}(E) \approx \sum_{l=0}^n \mathcal{A}_l E^l. \quad (4.65)$$

Analogamente, decompõe-se uma função característica do tipo \mathcal{G} por

$$\mathcal{G}_{i1}(E) \approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n \sum_{q=0}^{n-1} \mathcal{G}_{i1}(\xi_q) \cos\left(k\pi \frac{q+1/2}{n}\right) \sum_{l=0}^k A_{kl} E^l. \quad (4.66)$$

Simplifica-se esse equacionamento através do termo \mathcal{B}_l , dado pela seguinte definição.

$$\mathcal{B}_l = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n \sum_{q=0}^{n-1} \mathcal{G}_{i1}(\xi_q) \cos\left(k\pi \frac{q+1/2}{n}\right) A_{kl}. \quad (4.67)$$

Pode-se então representar a Eq. 4.66 em função do termo \mathcal{B}_l da Eq. 4.67 como

$$\mathcal{G}_{i1}(E) \approx \sum_{l=0}^n \mathcal{B}_l E^l. \quad (4.68)$$

Aplicando agora a decomposição realizada para as funções \mathcal{F}_{i1} e \mathcal{G}_{i1} , reescreve-se a Eq. 4.54 em função da série de Chebyshev conforme a Eq. 4.69 a seguir.

$$V(z, 0) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_0^2}} + \int_0^\infty \left[\sum_{l=0}^n \mathcal{A}_l E^l + \sum_{l=0}^n \mathcal{B}_l E^l \right] J_0(\lambda(z - z_0)) d\lambda \right) \quad (4.69)$$

que pode ser simplificada como

$$V(z, 0) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_0^2}} + \int_0^\infty \left[\sum_{l=0}^n (\mathcal{A}_l + \mathcal{B}_l) E^l \right] J_0(\lambda(z - z_0)) d\lambda \right). \quad (4.70)$$

Muda-se então a variável E para λ , onde $E = e^{-\lambda}$, e obtém-se

$$V(z, 0) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_0^2}} + \int_0^\infty \left[\sum_{l=0}^n (\mathcal{A}_l + \mathcal{B}_l) e^{-\lambda l} \right] J_0(\lambda(z - z_0)) d\lambda \right). \quad (4.71)$$

Uma vez que a exponencial no integrando é sempre negativa, aplica-se a identidade de Lipschitz $\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$ e chega-se finalmente à Eq. 4.72, que representa o potencial elétrico gerado por uma fonte pontual de corrente a uma profundidade qualquer, calculada na superfície do solo. Adotou-se $\mathcal{C}_l = \mathcal{A}_l + \mathcal{B}_l$ para facilitar a notação.

$$V(z, 0) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_0^2}} + \sum_{l=0}^n \frac{\mathcal{C}_l}{\sqrt{(z - z_0)^2 + l^2}} \right) \quad (4.72)$$

Note que a equação tem parcelas bem definidas para a representação da fonte e o solo heterogêneo. Ademais, cada parcela da solução obtida tem a mesma forma, o que facilitará uma integração analítica para geometrias diferentes de pontos.

Para uma dada profundidade z_0 da fonte de corrente, uma vez calculados os termos da série é possível obter o potencial elétrico em qualquer ponto na superfície do solo para os mesmos coeficientes, característica bem interessante para aterramentos elétricos já que os condutores horizontais têm a mesma profundidade e, por conseguinte, compartilham dos mesmos termos da série de Chebyshev.

Tabela 2 – Tempo em segundos para diferentes quantidades N de pontos.

Eq. \ N	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵
4.53	0,030	0,255	2,725	24,89
4.72	0,003	0,008	0,054	0,602

A Tab. 2 ilustra a performance das duas formulações para o caso ilustrativo onde os dados são segundo a Fig. 20, a fonte de corrente está em $z_0 = 0,5 \text{ m}$ e o grau adotado para o polinômio de Chebyshev foi igual a vinte para esse exemplo. Note que a Eq. 4.72, apesar de ser mais eficiente que a Eq. 4.53, pode ser usada somente para o cálculo do potencial elétrico na superfície do solo. Como a etapa mais dispendiosa de uma simulação de sistemas de aterramento é o cálculo do potencial elétrico na superfície do solo, devido a quantidade de pontos necessária para a formação de figuras, a Eq. 4.72 é de grande utilidade para a redução do custo computacional da simulação, uma vez que o cálculo da função potencial é realizado repetidas vezes para a simulação de sistemas de aterramento.

Aterramentos em solo heterogêneo

5.1 Potencial elétrico gerado por um condutor de aterramento

Deduziu-se no Capítulo 4 uma equação para o potencial elétrico gerado por uma fonte pontual situada em uma camada i sobre um ponto situado em uma camada j de um solo heterogêneo, que é a Equação 4.53, aqui repetida por conveniência.

$$V(z, z) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left[\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} w_k f\left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k)\right) J_0\left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k)\right) \psi'(h\xi_k) \right],$$

onde a função $f(u)$ foi calculada como

$$f(u) = \frac{1}{z - z_0} \left[\mathcal{F}_{ij} e^{-u z/(z-z_0)} + \mathcal{G}_{ij} e^{u z/(z-z_0)} \right].$$

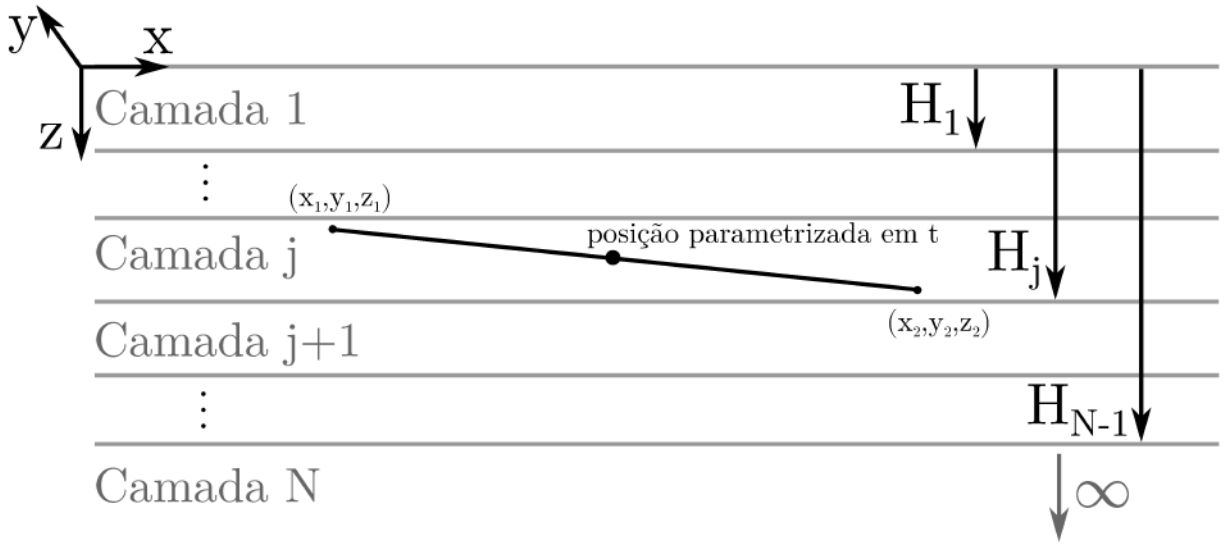
Essa é a forma genérica da equação, que não se limita à superfície do solo para o ponto de cálculo. As funções \mathcal{F}_{ij} e \mathcal{G}_{ij} , provenientes da aplicação das condições de contorno para o solo heterogêneo, ao se adotar uma parametrização para o condutor de aterramento dependem das coordenadas do sistema cartesiano, visto que há uma mudança no sistema de coordenadas de cilíndricas para cartesianas. No sistema de coordenadas cartesianas a variável de posição de cálculo z agora é uma função de x e y , a variável de localização da fonte z_0 se torna função de x_0 e y_0 . O valor de $z - z_0$ é então substituído por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ com a mudança realizada no sistema de coordenadas.

Tomando-se um ponto localizado a uma distância (x_0, y_0, z_0) da origem de um sistema de coordenadas cartesianas, a representação de um condutor retilíneo pode ser feita ao se parametrizar pontos entre a origem (x_1, y_1, z_1) e o final (x_2, y_2, z_2) desse condutor. Para cada valor de um parâmetro t , onde $0 \leq t \leq 1$ representa a localização no condutor (cf. a Eq. 5.1).

$$x_0 = (1 - t)x_1 + tx_2 \quad y_0 = (1 - t)y_1 + ty_2 \quad z_0 = (1 - t)z_1 + tz_2 \quad (5.1)$$

Há um problema a ser resolvido para o equacionamento do condutor retilíneo. Visto que as funções características do solo heterogêneo \mathcal{F}_{ij} e \mathcal{G}_{ij} se limitam à uma fonte situada em uma única camada e as funções características do solo também dependem da profundidade do ponto, é necessário fixar a profundidade do condutor (profundidade inicial igual à profundidade final), que será o modelo para cabos de aterramento. A Fig. 22 ilustra um condutor retilíneo situado entre os pontos (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) , criado por uma distribuição de pontos parametrizada na variável t , essa parametrização é necessária para se utilizar como base o equacionamento do potencial gerado por uma fonte pontual no cálculo do potencial gerado por uma distribuição linear dessas fontes.

Figura 22 – Parametrização de um condutor retilíneo em solo heterogêneo.



Fonte: elaboração própria.

5.2 Condutor horizontal - Ponto qualquer do solo

O modelo do condutor horizontal representa os cabos utilizados na construção de sistemas de aterramento (*e.g.*, malhas de aterramento, anéis de aterramento, cabos contrapeso de linhas de transmissão). O potencial gerado por um condutor horizontal pode ser calculado com uma distribuição de infinitas fontes de corrente pontuais ao longo de uma trajetória retilínea. Como já feito para o solo homogêneo, para se calcular o efeito de uma distribuição de corrente em uma trajetória, utilizam-se conceitos do cálculo vetorial, em particular a integral de linha. A trajetória que representa o cabo é parametrizada na variável t ao longo das coordenadas (x_1, y_1, z_0) e (x_2, y_2, z_0) . Para o cálculo do potencial gerado por um condutor horizontal a variável z_0 não é função do parâmetro t , visto que essa é invariante.

A integral de linha de um campo escalar ψ qualquer, função de um vetor \mathbf{r} , para uma trajetória parametrizada em t que varia entre t_0 e t_f , é definida por

$$\int_c \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_f} \psi(\mathbf{r}(t)) \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \right\| dt. \quad (5.2)$$

Para o equacionamento do potencial elétrico do condutor horizontal, inicialmente se reescreve a função $\psi(t)$ do potencial elétrico gerado pela fonte pontual de corrente em termos da distribuição de fontes pontuais parametrizadas no parâmetro t . Substitui-se o termo z_0 pela expressão $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ para a mudança do sistema de coordenadas. Essa mudança é realizada visto que não há mais simetria cilíndrica, assim reescreve-se a função em termos das variáveis x_0 e y_0 , que em notação vetorial é representada pela variável $\mathbf{r}_0(t) = \langle x_0(t), y_0(t), z_0 \rangle$. Já as coordenadas do ponto de cálculo são representadas por $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ em notação vetorial. O potencial elétrico proveniente da distribuição linear de fontes é calculado para um ponto \mathbf{r} específico do espaço é dado por

$$\int_c V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 = \int_0^1 V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{r}_0(t) \right\| dt, \quad (5.3)$$

onde

$$\mathbf{r}_0(t) = \langle (1 - t)x_1 + t x_2, \quad (1 - t)y_1 + t y_2, \quad z_0 \rangle. \quad (5.4)$$

Para o valor de $\mathbf{r}_0(t)$ parametrizado, o valor da sua derivada em relação ao parâmetro t é então calculada como

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_0 = \langle x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad 0 \rangle, \quad (5.5)$$

isso implica que o módulo da derivada é igual ao comprimento do segmento linear.

$$\left\| \frac{d}{dt} \mathbf{r}_0 \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = L \quad (5.6)$$

Sabendo-se que o termo $\sqrt{(x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 + (z - z_0)^2}$ da função potencial elétrico pode ser escrito de forma simplificada na notação vetorial como $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)\|$, a função potencial aplicada na integral de linha é

$$V(\mathbf{r}) = \int_0^1 \frac{\rho_i I(t)}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)\|} + H(t) \right) \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{r}_0(t) \right\| dt, \quad (5.7)$$

que ao substituir o módulo da derivada de $\mathbf{r}_0(t)$ da integral de linha se torna

$$V(\mathbf{r}) = \int_0^1 \frac{\rho_i I(t) L}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)\|} + H(t) \right) dt. \quad (5.8)$$

Note que o integrando foi dividido em duas parcelas distintas. A primeira parcela é proveniente da fonte pontual de corrente, ou parcela do solo homogêneo, que só existe se

a camada de calculo é igual a camada da fonte. A segunda parcela é referente ao solo heterogêneo, essa foi denominado como função $H(t)$, proveniente da fórmula de quadratura de integração.

$$H(t) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} w_k f\left(t, \frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k)\right) J_0\left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k)\right) \psi'(h\xi_k) \quad (5.9)$$

A função $f(t, u)$ da função $H(t)$ é reescrita em termos do parâmetro t , que foram postos na forma de um polinômio quadrático como

$$f(t, u) = \frac{\mathcal{F}_{ij}(t, u)e^{-u z/\sqrt{at^2+bt+c}} + \mathcal{G}_{ij}(t, u)e^{u z/\sqrt{at^2+bt+c}}}{\sqrt{at^2 + bt + c}}, \quad (5.10)$$

para os valores de a e das funções $b(x, y)$ e $c(x, y, z)$ definidos como

$$\begin{aligned} a &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = L^2 \\ b(x, y) &= 2 \left((y_1 - y)(y_2 - y_1) + (x_1 - x)(x_2 - x_1) \right) \\ c(x, y, z) &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_0 - z)^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Já as funções $\mathcal{F}_{ij}(t, u)$ e $\mathcal{G}_{ij}(t, u)$ são provenientes do modelo proposto para o solo heterogêneo, que respeitam as condições de contorno para o modelo físico do solo.

Visto que a integral do termo referente à parcela da fonte para o integrando já foi previamente deduzida na Eq. 3.30, temos que

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + bt + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2at + b + 2\sqrt{a(at^2 + bt + c)} \right| + \text{constante}, \quad (5.12)$$

O que implica que a solução da integral definida no parâmetro t é

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{at^2 + bt + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2a + b + 2\sqrt{a(a + b + c)}}{b + 2\sqrt{ac}} \right| \quad (5.13)$$

Como b e c na fórmula na verdade são funções do ponto de cálculo do potencial elétrico, denomina-se então a função $\Phi(x, y, z)$ como

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2a + b(x, y) + 2\sqrt{a(a + b(x, y) + c(x, y, z))}}{b + 2\sqrt{ac(x, y, z)}} \right|. \quad (5.14)$$

Essa função é o resultado da integral realizada para a função potencial da fonte de corrente. A função $f(t, u)$ da fórmula de quadratura, após a integração de $H(t)$ se torna a equação $F(u)$ que se segue

$$F(u) = \int_0^1 \frac{\mathcal{F}_{ij}(t, u)e^{-u z/\sqrt{at^2+bt+c}} + \mathcal{G}_{ij}(t, u)e^{u z/\sqrt{at^2+bt+c}}}{\sqrt{at^2 + bt + c}} dt. \quad (5.15)$$

Essa equação é resolvida numericamente, visto que o cálculo das funções $\mathcal{F}_{ij}(t, u)$ e $\mathcal{G}_{ij}(t, u)$ é obtido através da resolução de um sistema de equações lineares, não sendo deduzidos de

forma analítica nesta tese. A solução numérica da referida equação é resolvida de maneira simples através da quadratura de Gauss-Legendre para o intervalo não canônico $[0,1]$.

A solução numérica se resume a avaliar a função nas raízes de um polinômio e realizar a combinação linear desses valores com pesos associados, os pontos e os pesos associados são tabelados e não precisam ser recalculados a cada iteração. O cálculo dessa quadratura em cinco pontos se mostrou satisfatório, caso se precise de uma precisão maior para essa integral também se pode optar por algum algoritmo de quadratura adaptativa como o de Gauss-Kronrod. Os algoritmos utilizados para integração foram os da biblioteca *GNU Scientific Library* (GSL).

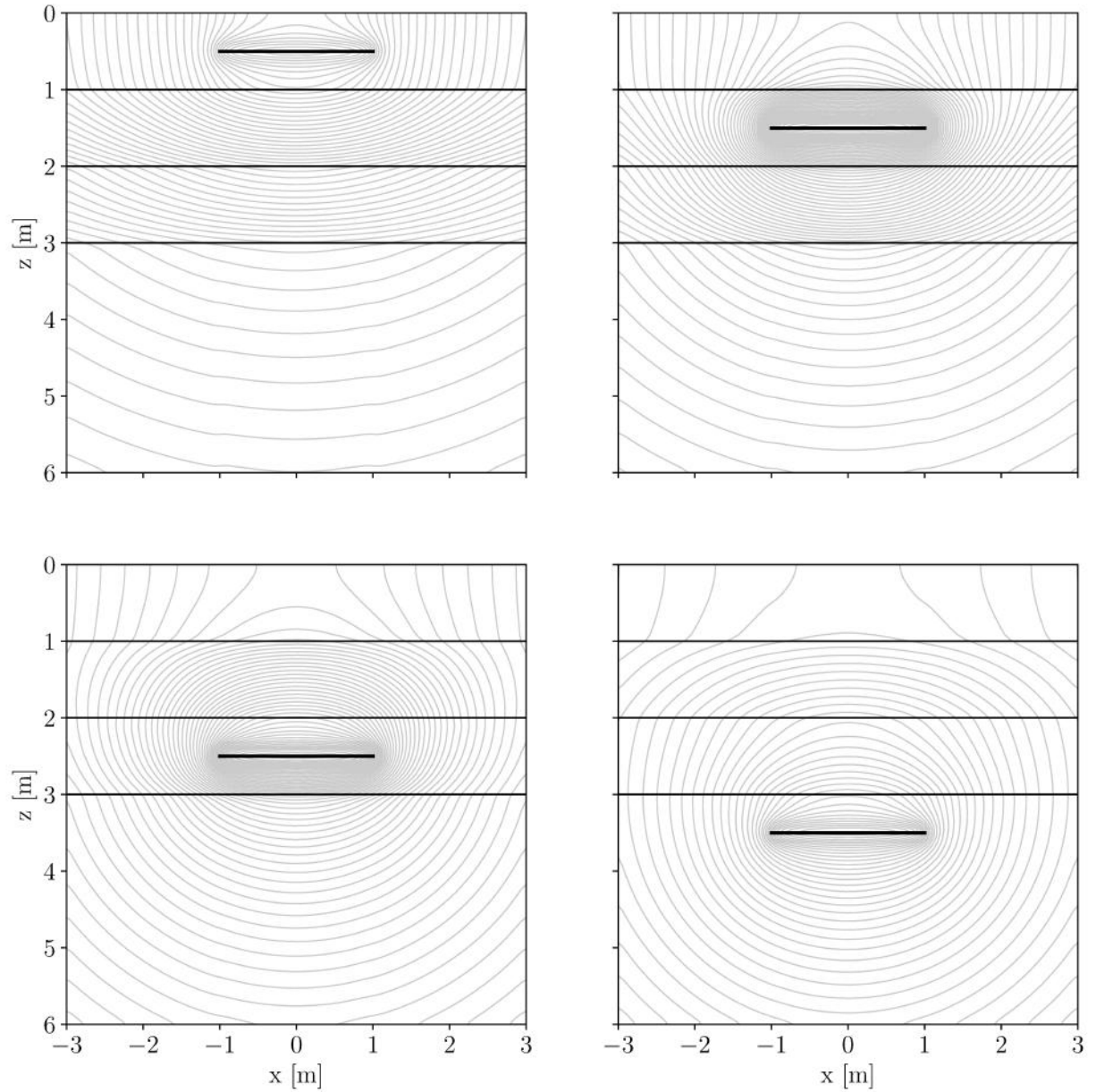
Assumindo a distribuição de corrente como uniformemente distribuída ao longo do segmento e com valor igual a I/L , ou seja, uniformemente distribuída por unidade de comprimento, se chega à Eq. 5.16. Essa equação calcula o potencial elétrico em uma camada j gerado por um condutor horizontal imerso em uma camada i de um solo heterogêneo.

$$V(x, y, z) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left[\Phi(x, y, z) \delta_{ij} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} w_k F\left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k)\right) J_0\left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k)\right) \psi'(h\xi_k) \right] \quad (5.16)$$

A Figura 23 ilustra as linhas equipotenciais geradas por um condutor horizontal em um solo de quatro camadas variando sua profundidade. Cada imagem representa o condutor em uma camada distinta do solo. Note que a solução apresentada, como no caso da fonte pontual, respeita o modelo físico das condições de contorno impostas para as transições de camadas. A primeira camada do solo possui linhas tal como espelhadas devido ao efeito da interface entre o ar e o solo. Não há descontinuidades nas linhas equipotenciais na transição de camadas, somente mudanças na inclinação devido ao efeito das diferentes resistividades. O potencial elétrico na última camada do solo decai em função da distância entre o ponto calculado e o condutor, ilustrando o efeito da condição de contorno imposta.

A equação desenvolvida nesta seção calcula o potencial elétrico em qualquer ponto do solo, todavia em determinadas situações somente o potencial na superfície do solo é necessário. O potencial elétrico calculado para um ponto fora da superfície do solo é importante na determinação do potencial elétrico gerado em um condutor proveniente de outro condutor, também para se calcular o potencial elétrico em um duto metálico gerado por um sistema de aterramento próximo. O potencial elétrico em um ponto na superfície do solo é importante para o mapeamento do potencial e cálculo das tensões de passo e de toque a qual uma pessoa estaria submetida na circulação de corrente elétrica no sistema de aterramento. Já foi apresentado previamente nesta tese o equacionamento para o potencial elétrico gerado por uma fonte de corrente em uma camada qualquer do solo, porém com pontos de cálculo somente na superfície do solo, para tal foram utilizados os polinômios de Chebyshev nas funções características do solo heterogêneo.

Figura 23 – Linhas equipotenciais para diferentes profundidades de um condutor horizontal. As profundidades para as figuras na ordem cima-baixo e esquerda-direita são respectivamente 0,5; 1,5; 2,5 e 3,5 metros. O solo analisado é de quatro camadas com $\rho_1 = 100\Omega.m$, $\rho_2 = 500\Omega.m$, $\rho_3 = 200\Omega.m$ e $\rho_4 = 50\Omega.m$. As espessuras das camadas são $d_1 = 1m$, $d_2 = 1m$ e $d_3 = 1m$. Devido à simetria axial, o potencial em três dimensões é apenas a revolução em torno do eixo da fonte pontual das superfícies calculadas.



Fonte: elaboração própria.

5.3 Condutor horizontal - Potencial de superfície

Já se deduziu nesta tese a equação para a função potencial elétrico de uma fonte de corrente em uma camada qualquer de um solo heterogêneo com ponto de cálculo na superfície do solo. Essa equação é aplicável para o cálculo do potencial elétrico na superfície do solo e grandezas como a tensão de passo e a tensão de toque. O motivo da utilização dessa equação ao invés da equação genérica é o fato desta possuir um esforço computacional menor para o cálculo. Visto que a geração de imagens é uma etapa onde se exige uma grande quantidade de iterações, há uma grande redução no tempo de processamento ao se utilizar uma equação otimizada para o cálculo do potencial de superfície.

A equação para o cálculo do potencial de superfície, que foi previamente deduzida nesta tese como a Eq. 4.72 é aqui reapresentada por conveniência.

$$V(z, 0) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_0^2}} + \sum_{l=0}^n \frac{\mathcal{C}_l}{\sqrt{(z - z_0)^2 + l^2}} \right)$$

Ao se aplicar nessa equação o conceito de integral de linha para o potencial gerado por um segmento linear, também assumindo a corrente como uniformemente distribuída no condutor por unidade de comprimento e já substituindo o módulo da derivada, temos que

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int_0^1 \frac{\rho_i I(t)}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} + \sum_{l=0}^n \frac{\mathcal{C}_l}{\sqrt{(z - z_0(t))^2 + l^2}} \right) \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{r}_0(t) \right\| dt. \quad (5.17)$$

As constantes \mathcal{C}_l representam a decomposição das funções características do solo heterogêneo \mathcal{F}_{ij} e \mathcal{G}_{ij} em uma série de Chebyshev. Como a profundidade de todos os condutores horizontais em um sistema de aterramento é constante, já que os valores de \mathcal{C}_l dependem somente das características do solo e da profundidade de fonte pontual, a decomposição em série de Chebyshev só precisa ser feita uma única vez para todos os condutores horizontais do sistema de aterramento. O potencial de superfície para o segmento linear é então calculado pela equação

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \int_0^1 \left(\frac{\delta_{ij}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} + \sum_{l=0}^n \frac{\mathcal{C}_l}{\sqrt{(z - z_0(t))^2 + l^2}} \right) dt, \quad (5.18)$$

visto que \mathcal{C}_l independe do parâmetro t e a primeira parcela do integrando é a parcela de solo homogêneo já previamente deduzida, se obtém então a equação

$$V(x, y, z) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left(\Phi(x, y, 0) \delta_{ij} + \sum_{l=0}^n \mathcal{C}_l \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(z - z_0(t))^2 + l^2}} dt \right), \quad (5.19)$$

cujas integrais remanescentes (parcela do solo heterogêneo) é do mesmo tipo da integral da parcela do solo homogêneo. Se adapta então a função $\Phi(x, y, z)$ para o novo integrando,

assim obtendo-se a função $\Phi'(x, y, z)$. Com esse generalização é possível obter a Eq. 5.20, que é uma equação de baixo custo computacional para o cálculo do potencial elétrico de superfície gerado por um condutor horizontal.

$$V(x, y, 0) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left(\Phi(x, y, 0) \delta_{ij} + \sum_{l=0}^n \mathcal{C}_l \Phi'(l, x, y) \right), \quad (5.20)$$

onde

$$\Phi'(l, x, y) = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2a + b(x, y) + 2\sqrt{a(a + b(x, y) + d(l, x, y))}}{b + 2\sqrt{a d(l, x, y)}} \right|, \quad (5.21)$$

e a variável e funções auxiliares são

$$\begin{aligned} a &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = L^2 \\ b(x, y) &= 2 \left((y_1 - y)(y_2 - y_1) + (x_1 - x)(x_2 - x_1) \right) \\ d(l, x, y) &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + l^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.4 Potencial elétrico de condutor que atravessa camadas

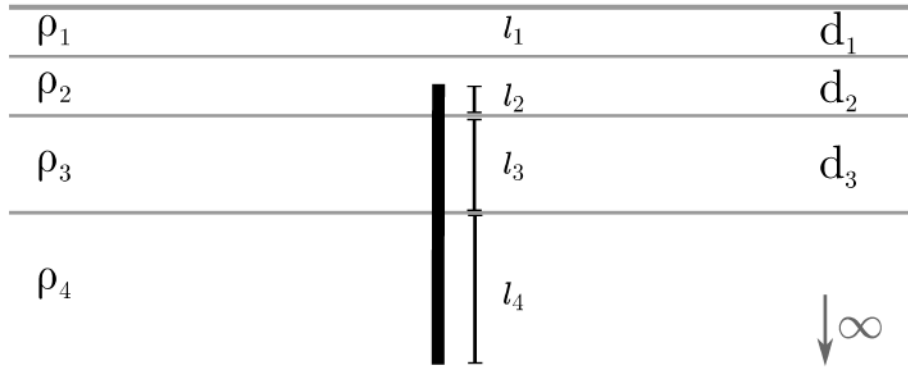
Para um condutor que não atravessa as camadas do solo heterogêneo se utilizou uma distribuição uniforme para a corrente que flui do condutor para o solo. Isso foi utilizado para o modelo dos condutores horizontais. Já para o modelo das hastes de aterramento essa distribuição uniforme não pode ser adotada, visto que há uma discrepância entre a distribuição da corrente ao longo das camadas que é proporcional à resistividade e espessuras das camadas. Todavia, há um fato que é de suma importância para se desenvolver o modelo de um condutor que atravessa as camadas, o potencial elétrico em toda a extensão do condutor é uniforme.

5.4.1 Corrente uniforme dentro de uma camada do solo

Esta seção do capítulo irá introduzir um modelo de hastes de aterramento, um condutor que quase sempre atravessa as camadas do solo. Devido à mudança na resistividade do solo que circunda a haste, não é mais possível assumir que a corrente flui para o solo de maneira uniforme por todo o comprimento da haste. Todavia, é uma consideração razoável assumir que a densidade de corrente é inversamente proporcional à resistividade das camadas do solo, *i.e.* a distribuição da corrente em cada camada é uniforme. Tagg (1964) introduziu esse modelo para duas camadas, sendo esse generalizado por Takahashi e Kawase (1991). Esta tese irá aplicar o modelo adotado pelos referidos autores considerando elementos de comprimento efetivos l_m em cada camada ao invés

da própria espessura da camada e o comprimento da haste no equacionamento, a alteração no modelo foi feita porque o autor desta tese acredita que isso torna mais simples a representação computacional.

Figura 24 – Modelo para cálculo da densidade de corrente em uma haste. Para este caso da imagem, temos que $l_1 = 0$ visto que não há comprimento efetivo da haste na primeira camada do solo, l_2 tem um comprimento efetivo menor que a espessura da segunda camada, l_3 tem o comprimento efetivo igual à espessura d_3 e l_4 é igual ao comprimento da haste menos a soma dos demais comprimentos efetivos.



Fonte: elaboração própria.

Sendo I a corrente injetada na haste, i_m a densidade de corrente, l_m o comprimento efetivo de uma haste em uma camada e ρ_m a resistividade de uma camada, todos para uma camada genérica m do solo, é possível obter o seguinte sistema de equações.

$$i_1 \rho_1 = i_2 \rho_2 = \dots = i_m \rho_m = \dots i_N \rho_N \quad (5.23)$$

$$i_1 l_1 + i_2 l_2 + \dots + i_m l_m + \dots i_N l_N = I \quad (5.24)$$

Escreve-se todas as correntes em função de i_m na Eq. 5.23 e a substitui na Eq. 5.24,

$$i_1 = i_m \frac{\rho_m}{\rho_1} \quad i_2 = i_m \frac{\rho_m}{\rho_2} \quad \dots \quad i_N = i_m \frac{\rho_m}{\rho_N} \quad (5.25)$$

$$i_m \frac{\rho_m}{\rho_1} l_1 + i_m \frac{\rho_m}{\rho_2} l_2 + \dots + i_m l_m + \dots i_m \frac{\rho_m}{\rho_N} l_N = I \quad (5.26)$$

$$i_m \rho_m \sum_{k=1}^N \frac{l_k}{\rho_k} = I \quad (5.27)$$

Assim é possível obter uma equação para calcular a densidade de corrente i_m em uma camada m qualquer do solo, que é apresentada pela Equação 5.28.

$$i_m = \frac{I}{\rho_m \sum_{k=1}^N \frac{l_k}{\rho_k}} \quad (5.28)$$

A Figura 24 ilustra como o comprimento efetivo da haste em cada camada é calculado, quando a haste não pertence a uma determinada camada esse comprimento efetivo é

nulo. O autor desta tese optou por trabalhar com o comprimento efetivo da haste em uma determinada camada, assim não é necessário representar a espessura das camadas e o comprimento da haste no equacionamento.

Note que para o modelo representado pela Figura 24 a corrente que flui da haste para o solo é uniforme em cada camada, na seção seguinte apresentar-se-á uma modelagem assumindo essa corrente como uma função não uniforme, em seguida comparar-se-ão os dois modelos.

5.4.2 Corrente não uniforme

O modelo apresentado em Martins Neto (1998) não considera a corrente como uniforme dentro da camada, mas sim como função da profundidade. Para isso, esse modelo utiliza um sistema de equações lineares, considerando a haste de aterramento como um conjunto de pontos distribuídos na superfície da haste. A Figura 25 apresenta o modelo para o cálculo da distribuição de correntes, a haste é segmentada e cada segmento da mesma é representado por uma fonte pontual de corrente na superfície da haste (*i.e.*, distante de um raio r do centro da haste). Como a haste, mesmo em um solo heterogêneo, está equipotencializada, ou seja, todos os pontos possuem o mesmo potencial elétrico, é possível então resolver um sistema de equações lineares para encontrar a corrente de cada fonte pontual que satisfaz essa condição.

Figura 25 – Segundo modelo para cálculo da densidade de corrente em uma haste. Toma-se uma haste como segmentos, representadas por fontes de corrente na superfície da haste, resolve-se então um sistema de equações lineares pela interferência de cada ponto i em um ponto j . O resultado do sistema linear, que admite a condição de equipotencialidade, fornece a distribuição de corrente para o solo ao longo da haste.



Fonte: elaboração própria.

Esta tese aplicará o equacionamento que se desenvolveu para o solo heterogêneo no modelo de Martins Neto (1998) para se encontrar a distribuição de correntes em uma haste de aterramento, para tal representar-se-á a haste como uma distribuição de fontes pontuais de corrente. Cada fonte que compõe a haste tem sua posição e corrente definidas, assim o potencial da haste de aterramento será simplesmente a soma da contribuição de cada fonte pontual. Para o sistema de equações lineares utilizou-se a notação apresentada por Pereira Filho (1999) para se incluir a corrente do condutor diretamente no sistema. Tomando como R_{ij} a relação entre a tensão e a corrente proveniente de uma fonte pontual i em outra fonte pontual j , é possível montar um sistema de equações lineares (vide Eq. 5.29), onde se injeta uma corrente I_{haste} e se calcula a corrente em cada fonte pontual i_k , tal como o potencial V_0 da haste de aterramento.

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & & -1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & & -1 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & & -1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -I_{\text{haste}} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

A notação de Pereira Filho (1999) foi originalmente desenvolvida para se encontrar a distribuição de correntes em uma associação de condutores em um sistema de aterramento, mas é perfeitamente aplicável à associação de fontes pontuais para a representação da haste, basta substituir a equação do condutor pela equação da fonte pontual e a corrente do sistema pela corrente injetada no condutor. A solução da Eq. 5.29 nos fornece como a corrente I_{haste} é dividida, tal que a soma das correntes das fontes pontuais é igual à corrente injetada na haste. Também se pode calcular a resistência de aterramento da haste pela relação entre o potencial V_0 da haste e a corrente I_{haste} injetada.

5.4.3 Comparativo entre os modelos

Nesta seção do capítulo um comparativo entre os dois métodos para a obtenção da distribuição de correntes na haste é realizada com o intuito de se mostrar o método mais adequado a ser adotado no modelo final da haste de aterramento.

Inicialmente, toma-se como exemplo um sistema de aterramento composto por uma haste de 3 m de profundidade, enterrada entre a superfície do solo e uma distância de 3 m, com diâmetro (adotado para o método não uniforme) de 3/4". Injeta-se uma corrente total igual a 1 A na haste. O solo adotado neste primeiro exemplo é heterogêneo, de duas camadas, com resistividades de $\rho_1 = 100 \, \Omega.m$, $\rho_2 = 150 \, \Omega.m$, e a espessura da primeira camada de $d_1 = 1 \, m$.

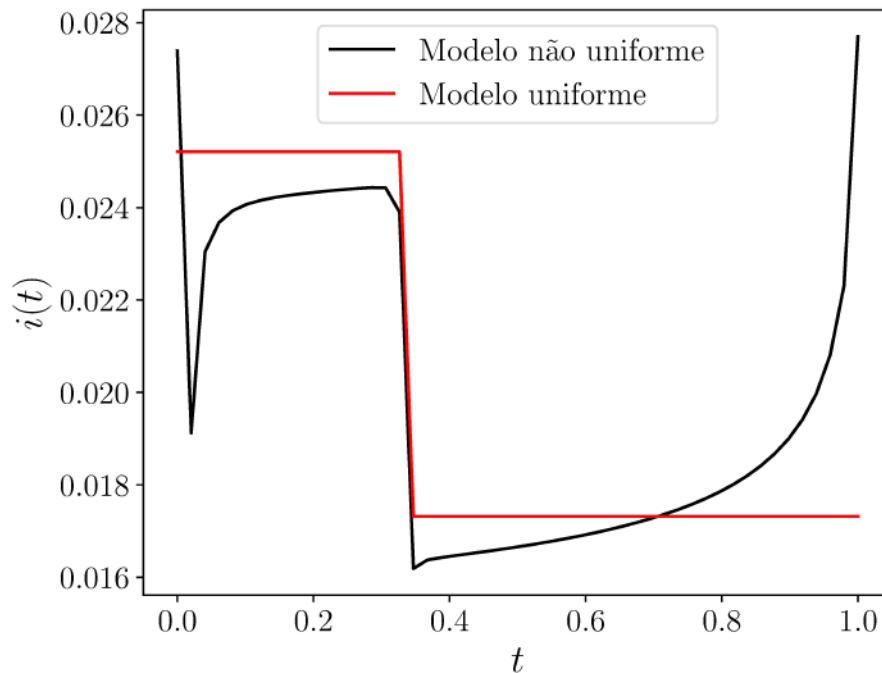
Tabela 3 – Modelo da corrente uniforme dentro da camada. Solo heterogêneo utilizado para o cálculo: $\rho_1 = 100 \Omega.m$, $\rho_2 = 150 \Omega.m$, $d_1=1 m$. Haste localizada entre 0 e 3 m de profundidade.

m	l_m	i_m	I_m
1	1,00	0,428571	0,428571
2	2,00	0,285714	0,571429

Fonte: elaboração própria.

O resultado da aplicação do método da corrente uniforme dentro da camada é mostrado na Tabela 3, onde, para uma camada m , o comprimento útil da haste na camada é l_m , a densidade linear de corrente na camada é i_m e I_m é a corrente total no comprimento útil da haste dentro da camada. Note que a soma das correntes I_m é igual à corrente injetada na haste.

Figura 26 – Densidade de corrente $i(t)$ parametrizada em t . O modelo não uniforme foi segmentado em cinquenta pontos.



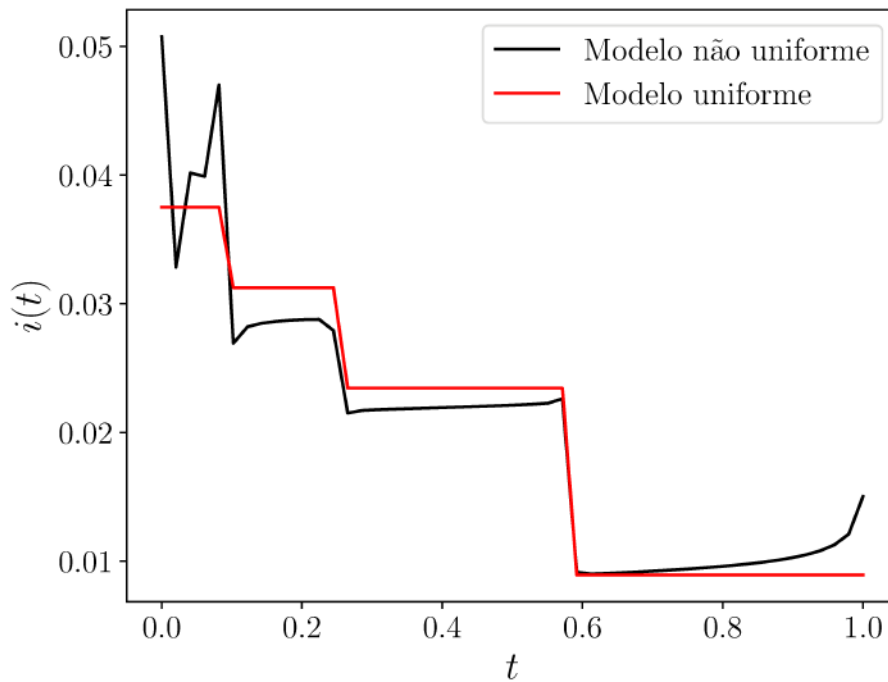
Fonte: elaboração própria.

Para o método da corrente não uniforme, a corrente não pode ser mais representada por um único valor dentro de uma camada, mas sim como uma função da profundidade. Para tal, soluciona-se um sistema de equações lineares onde uma condição equipotencial é imposta. A Figura 26 ilustra de forma gráfica a distribuição de correntes em uma haste de aterramento, parametrizada em t , onde a soma das correntes i é igual à corrente total na haste. Para o modelo da figura, a haste foi segmentada em 50 fontes de corrente, sendo o perfil equipotencial obtido para as duas camadas do solo. É possível observar uma discrepância nos valores da corrente antes e depois da transição das camadas. A Figura 26

também mostra um comparativo com o método uniforme, nesse caso adotou-se que todas as fontes de correntes que representam a haste possuem uma corrente uniformemente distribuída dentro da camada (*i.e.*, I_m dividido pela quantidade de segmentos).

Ao se analisar a Figura 26 é possível observar que o modelo uniforme toma um único valor para representar a corrente dentro da camada, tal como um valor médio, já o modelo não uniforme trata a distribuição de correntes de forma mais precisa. A soma das correntes de todas as fontes pontuais para o modelo não uniforme é de 0,408429 A para a primeira camada e de 0,59157 A para a segunda camada. Em contrapartida, o modelo uniforme trata essas correntes como 0,428571 A para a primeira camada e 0,571429 A para a segunda camada. É possível concluir que mesmo não representando de forma precisa as características da distribuição de correntes, principalmente no início e final da haste, os dois modelos possuem valores totais próximos para as correntes na haste dentro da mesma camada.

Figura 27 – Densidade de corrente $i(t)$ parametrizada em t . O modelo não uniforme foi segmentado em cinquenta pontos.



Fonte: elaboração própria.

Agora se toma como exemplo um solo heterogêneo mais complexo, composto por quatro camadas horizontais de resistividades $\rho_1 = 100 \Omega.m$, $\rho_2 = 150 \Omega.m$, $\rho_3 = 200 \Omega.m$ e $\rho_4 = 500 \Omega.m$, e com espessuras $d_1=0,25 m$, $d_2=0,5 m$ e $d_3=1 m$. Para o modelo uniforme cada fonte de corrente tem o mesmo valor para a corrente dentro da mesma camada, se utilizou então para a comparação a corrente total dividida pela quantidade de pontos.

Tabela 4 – Modelo da corrente uniforme dentro da camada. Solo heterogêneo utilizado para o cálculo: $\rho_1 = 100 \Omega.m$, $\rho_2 = 150 \Omega.m$, $\rho_3 = 200 \Omega.m$, $\rho_4 = 500 \Omega.m$, $d_1 = 0,25 \text{ m}$, $d_2 = 0,5 \text{ m}$, $d_3 = 1 \text{ m}$. Haste localizada entre 0 e 3 m de profundidade.

m	l_m	i_m	I_m
1	0,25	0,750	0,1875
2	0,50	0,500	0,2500
3	1,00	0,375	0,3750
4	1,25	0,150	0,1875

Fonte: elaboração própria.

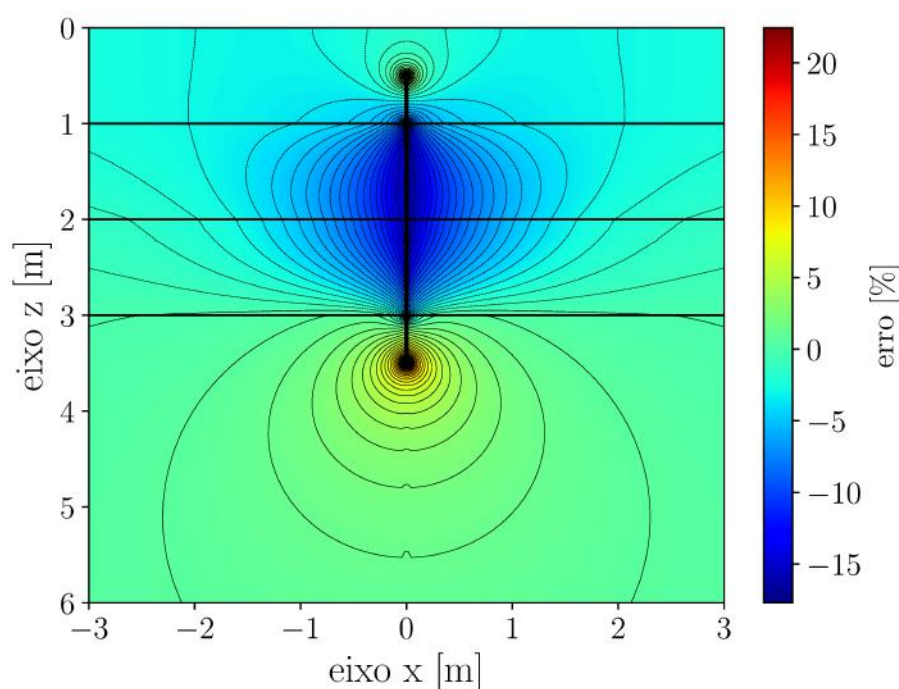
Também se utilizou o mesmo sistema de aterramento, composto por uma haste de 3 m de profundidade, enterrada entre a superfície do solo e uma distância de 3 m, com diâmetro de 3/4", com uma corrente total injetada igual a 1 A. O resultado da aplicação do método da corrente uniforme dentro da camada é mostrado na Tabela 4. Da mesma forma que no exemplo anterior, a soma das correntes em uma mesma camada é igual à corrente injetada na haste. A Figura 27 ilustra de forma gráfica a distribuição de correntes em uma haste de aterramento para o método da distribuição não uniforme. Para o modelo da figura, a haste também foi segmentada em 50 fontes de corrente, sendo o perfil equipotencial obtido para as quatro camadas do solo. Como no exemplo anterior, é possível observar uma discrepância nos valores da corrente antes e depois da transição das camadas.

A Figura 27 também mostra um comparativo com o método uniforme, tal como no exemplo anterior. A soma das correntes de todas as fontes pontuais para o modelo não uniforme é de 0,210652 A para a primeira camada, 0,226445 A para a segunda camada, 0,351746 A para a terceira camada e de 0,211157 A para a quarta camada. Em contrapartida, o modelo uniforme trata essas correntes como 0,1875 A para a primeira camada, 0,25 A para a segunda camada, 0,375 A para a terceira camada e 0,1875 A para a quarta camada. É possível concluir que o modelo uniforme não consegue representar de forma precisa as características da distribuição de correntes, principalmente no início e final da haste, os dois modelos possuem discrepâncias consideráveis para as correntes totais em cada camada.

A Figura 28 ilustra o erro percentual entre o potencial elétrico gerado por uma haste de 3 m, enterrada a uma distância de 0,5 m da superfície de um solo heterogêneo de quatro camadas com $\rho_1 = 100\Omega.m$, $\rho_2 = 500\Omega.m$, $\rho_3 = 200\Omega.m$ e $\rho_4 = 50\Omega.m$ e com espessuras das camadas $d_1 = 1 \text{ m}$, $d_2 = 1 \text{ m}$ e $d_3 = 1 \text{ m}$. Optou-se por ilustrar um mapa de cores para o erro visto que o comparativo entre o potencial gerado pelos dois métodos não é tão discrepante, todavia com a análise do erro é possível observar onde a diferença entre os dois métodos é mais discrepante, que é no entorno da haste, o potencial para os

dois métodos é equivalente para pontos de cálculo distantes das imediações da haste. Uma vez que a resistência de aterramento da haste é calculada a partir da integral do potencial elétrico nas imediações da haste, essa grandeza apresenta certa discrepância entre os dois modelos para a representação da distribuição de correntes. Para esse exemplo o modelo não uniforme apresenta uma resistência de aterramento de $35,0380 \, \Omega$ e o modelo uniforme um valor de $38,3488 \, \Omega$, note que essa diferença é explicada devido às discrepâncias entre o potencial elétrico nas imediações da haste nos dois modelos. Conclui-se então que o potencial elétrico nos dois modelos é bem representado quando não se está nas imediações da haste, porém para pontos próximos da haste e para o próprio cálculo da resistência de aterramento haverá um erro se o modelo adotado for o da corrente uniforme dentro da camada.

Figura 28 – Mapa de cores para o erro entre o potencial elétrico do método uniforme em comparação com o método não uniforme para a distribuição de correntes. As profundidades do topo da haste de $3 \, m$, segmentado em 50 fontes pontuais de corrente, enterrada a $0,5 \, m$ da superfície do solo. O solo analisado é de quatro camadas com $\rho_1 = 100 \, \Omega.m$, $\rho_2 = 500 \, \Omega.m$, $\rho_3 = 200 \, \Omega.m$ e $\rho_4 = 50 \, \Omega.m$. As espessuras das camadas são $d_1 = 1 \, m$, $d_2 = 1 \, m$ e $d_3 = 1 \, m$.



Fonte: elaboração própria.

O modelo de Takahashi e Kawase (1991) apresentou bons resultados quando testado com modelos simples do solo, porém as características da distribuição de corrente para solos mais complexos necessitou de uma função para a distribuição de corrente e não apenas valores únicos para cada camada. Uma função para a distribuição de correntes pode ser obtida com o modelo de Martins Neto (1998), onde uma distribuição de fontes pontuais é utilizada para representar uma haste de aterramento. Essa diferença se reflete na função potencial da haste nas imediações do condutor e no cálculo de sua resistência

de aterramento. Com o intuito de se representar os potenciais gerados pela haste de aterramento da forma mais precisa possível, em especial na primeira camada do solo, onde a distribuição de correntes na haste em nada se assemelha com uma distribuição uniforme, adotar-se-á de agora em diante o modelo não uniforme para a representação das hastes de aterramento.

5.4.4 Condutor vertical - Função potencial

O potencial elétrico gerado por uma fonte de pontual de corrente em solo heterogêneo já foi previamente deduzida nesta tese na Eq. 4.53 e é aqui repetida por conveniência.

$$V(z, z) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left[\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} w_k f \left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k) \right) J_0 \left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k) \right) \psi'(h\xi_k) \right]$$

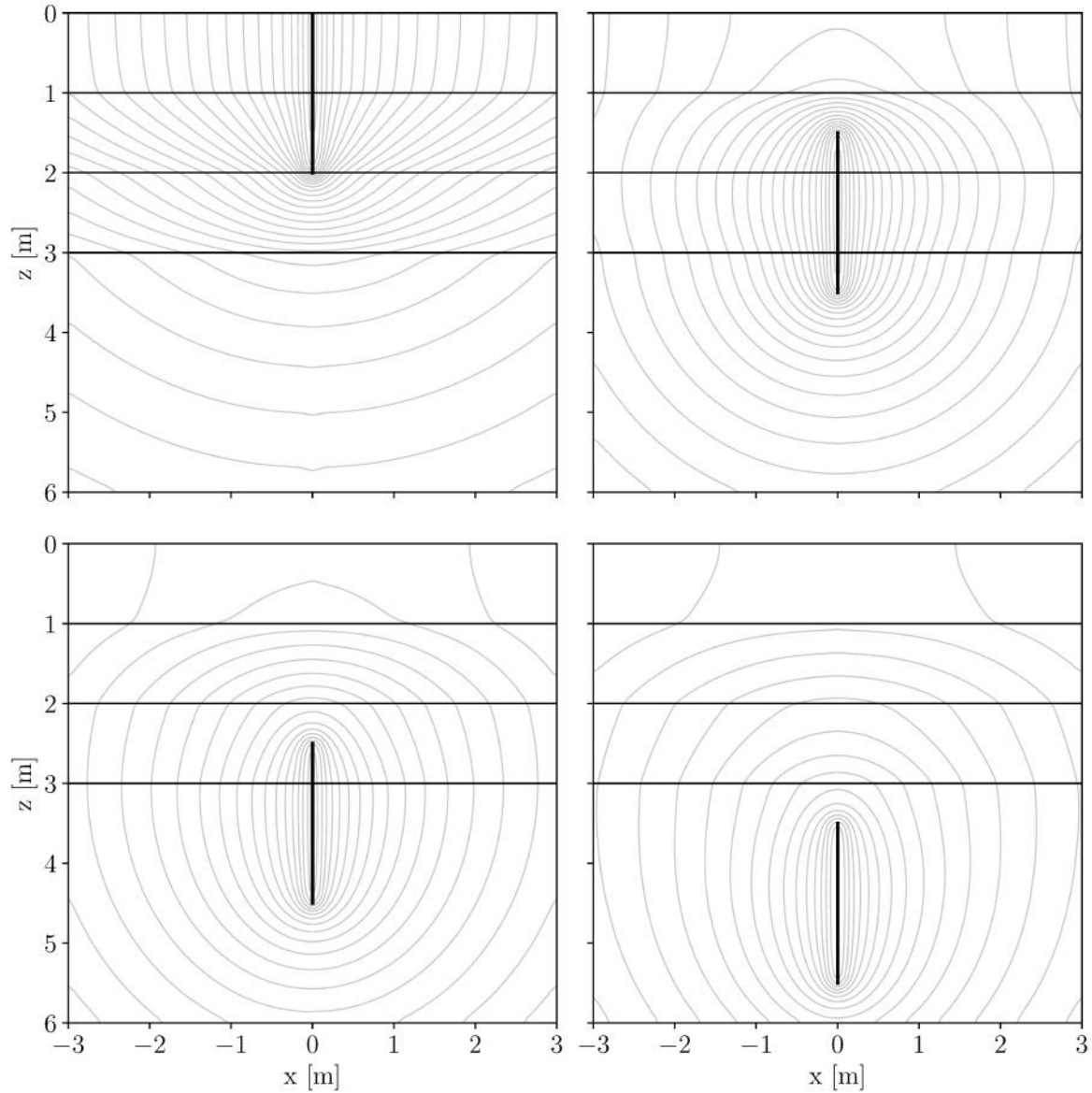
Uma vez que a haste de aterramento é modelada como uma associação de fontes de correntes, onde a haste é segmentada em M elementos e cada valor das correntes das fontes é calculadas através de um sistema de equações lineares para uma condição equipotencial, o potencial de uma haste de aterramento em uma coordenada \mathbf{r} no espaço é então dado pela seguinte equação,

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^M \frac{\rho_{im} I_m}{4\pi} \left[\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + (z - z_{0m})^2}} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} w_k f_m \left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k) \right) J_0 \left(\frac{\pi}{h} \psi(h\xi_k) \right) \psi'(h\xi_k) \right], \quad (5.30)$$

onde ρ_{im} é a resistividade da camada i , I_m é o valor da corrente, z_{0m} é a profundidade e f_m a função característica do solo heterogêneo, todos relacionados à m -ésima fonte pontual de corrente. Uma vez solucionado o sistema de equações lineares da Eq. 5.29, onde é calculada a influência de cada fonte de corrente que compõem o condutor, ou resistências mútuas, a função potencial da haste é calculada de forma simples como a soma do potencial elétrico de várias fontes de correntes.

A Figura 29 ilustra as linhas equipotenciais geradas por um condutor vertical em um solo de quatro camadas variando sua profundidade. Cada imagem representa o condutor em uma camada distinta do solo. Note que a solução apresentada, como no caso da fonte pontual, respeita o modelo físico das condições de contorno impostas para as transições de camadas. A primeira camada do solo possui linhas tal como espelhadas devido ao efeito da interface entre o ar e o solo. Tal como no modelo proposto para o condutor horizontal, não há descontinuidades nas linhas equipotenciais na transição de camadas, somente mudanças na inclinação devido ao efeito das diferentes resistividades. O potencial elétrico na última camada do solo decai em função da distância entre o ponto calculado e o condutor, ilustrando o efeito da condição de contorno imposta.

Figura 29 – Linhas equipotenciais para diferentes profundidades de um condutor vertical. As profundidades do topo da haste de 2 m, segmentado em 50 fontes pontuais de corrente, para as figuras na ordem cima-baixo e esquerda-direita são respectivamente 0; 1,5; 2,5 e 3,5 metros. O solo analisado é de quatro camadas com $\rho_1 = 100 \Omega.m$, $\rho_2 = 500 \Omega.m$, $\rho_3 = 200 \Omega.m$ e $\rho_4 = 50 \Omega.m$. As espessuras das camadas são $d_1 = 1 m$, $d_2 = 1 m$ e $d_3 = 1 m$. Devido à simetria axial, o potencial em três dimensões é apenas a revolução em torno do eixo da haste das superfícies calculadas.



Fonte: elaboração própria.

Note que a discretização realizada para a representação do condutor vertical é imperceptível dependendo da quantidade de fontes de corrente utilizadas para a representação do condutor vertical. A adoção do modelo não uniforme para o cálculo da distribuição de correntes na haste também é de fundamental importância para a precisão dos resultados, visto que o modelo uniforme faz uma simplificação que usa apenas um valor para a magnitude do fluxo corrente na haste por camada do solo heterogêneo, o que não é verdade, principalmente para a primeira e última camada onde a haste está imersa. De acordo com as Figuras 26 e 27 é possível observar o comportamento peculiar da distribuição de correntes para a primeira e última camadas onde a haste está imersa, o que nem mesmo se assemelha a uma distribuição homogênea.

O cálculo do potencial elétrico gerado por uma haste de aterramento para profundidades diferentes da superfície do solo é importante para se determinar a influência entre condutores em um sistema de aterramento. Todavia, a Eq. 5.30 pode ser simplificada para se calcular o potencial gerado pela haste na superfície de um solo heterogêneo, reduzindo assim o esforço computacional necessário para essa tarefa.

5.4.5 Condutor vertical - Potencial de superfície

Já se deduziu nesta tese a equação para a função potencial elétrico de uma fonte de corrente em uma camada qualquer de um solo heterogêneo com ponto de cálculo na superfície do solo. Como no condutor horizontal, o motivo da utilização dessa equação ao invés da equação genérica é o fato desta possuir um esforço computacional menor para o cálculo. Visto que a geração de imagens é uma etapa onde se exige uma grande quantidade de iterações, há uma grande redução no tempo de processamento ao se utilizar uma equação otimizada para o cálculo do potencial de superfície.

A equação para o cálculo do potencial de superfície já previamente deduzida é aqui reapresentada por conveniência.

$$V(z, 0) = \frac{\rho_i I}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_0^2}} + \sum_{l=0}^n \frac{\mathcal{C}_l}{\sqrt{(z - z_0)^2 + l^2}} \right)$$

As constantes \mathcal{C}_l representam a decomposição das funções características do solo heterogêneo \mathcal{F}_{ij} e \mathcal{G}_{ij} em uma série de Chebyshev. Como \mathcal{C}_l é função da profundidade z_0 da fonte pontual, é necessário realizar uma decomposição em série de Chebyshev para cada segmento m da haste, tendo-se assim uma matriz de coeficientes \mathcal{C}_{ml} para a série. Uma vez que, geralmente, em um sistema de aterramento todas as hastes possuem o mesmo comprimento e profundidade, os coeficientes \mathcal{C}_{ml} necessitam ser calculados apenas

uma vez e podem ser reutilizados para todas as hastes.

$$V(z, 0) = \sum_{m=1}^M \frac{\rho_{im} I_m}{4\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_{0m}^2}} + \sum_{l=0}^n \frac{C_{ml}}{\sqrt{(z - z_0)^2 + l^2}} \right) \quad (5.31)$$

Visto que o condutor vertical é representado como uma associação de fonte de correntes, soma-se o efeito de cada fonte de corrente no cálculo do potencial elétrico, tal que a Eq. 5.31 fornece o potencial elétrico na superfície do solo gerado por um condutor vertical enterrado a qualquer profundidade de um solo heterogêneo.

5.5 Resistência de aterramento e acoplamento resistivo entre condutores

A resistência de aterramento é calculada da mesma maneira que na seção 3.5. A distribuição de correntes nos eletrodos gera uma elevação de potencial no solo e também interage com os demais eletrodos do sistema. A razão entre a elevação de potencial gerada em um eletrodo pela passagem de corrente no próprio eletrodo é chamada de resistência própria do condutor. Quando a passagem de corrente em um eletrodo gera uma elevação de potencial em um eletrodo na sua vizinhança, a razão entre essa elevação de potencial e a corrente injetada é denominada resistência mútua entre condutores. A forma de cálculo da resistência mútua entre condutores é feita da mesma maneira que na subseção 3.5.2. A diferença entre a forma de cálculo da resistência de aterramento entre condutores imersos em solo heterogêneo e o solo homogêneo é que a função potencial é calculada de forma distinta. A função potencial utilizada no solo homogêneo é a Eq. 3.35 para cabos e hastes. Já para o solo heterogêneo, utiliza-se a Eq. 5.30 para hastes e a Eq. 5.16 para os cabos.

Ao tomar o condutor i como condutor ativo e um condutor j como passivo é possível construir um sistema de equações lineares para a interação entre condutores, no caso de $i = j$ tem-se a resistência própria do condutor e nos demais casos a resistência mútua entre condutores. Cada eletrodo irá possuir uma parcela da corrente injetada que flui do sistema de aterramento para o solo. Como todos os eletrodos possuem o mesmo potencial, uma vez que estão interligados, é possível encontrar a parcela de corrente que flui por cada eletrodo através da Eq. 3.42, aqui repetida por conveniência.

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & & -1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & & -1 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & & -1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -I_{cc} \end{bmatrix}$$

No solo homogêneo há uma simetria para a interação entre condutores, tal que $R_i = R_j$, o que não acontece no solo heterogêneo se os condutores não pertencerem à mesma camada do solo. Para o programa desenvolvido nesta tese, monta-se a matriz primeiramente pelos cabos e em seguida as hastes, isso vem da forma de obtenção das coordenadas no arquivo do desenho da malha.

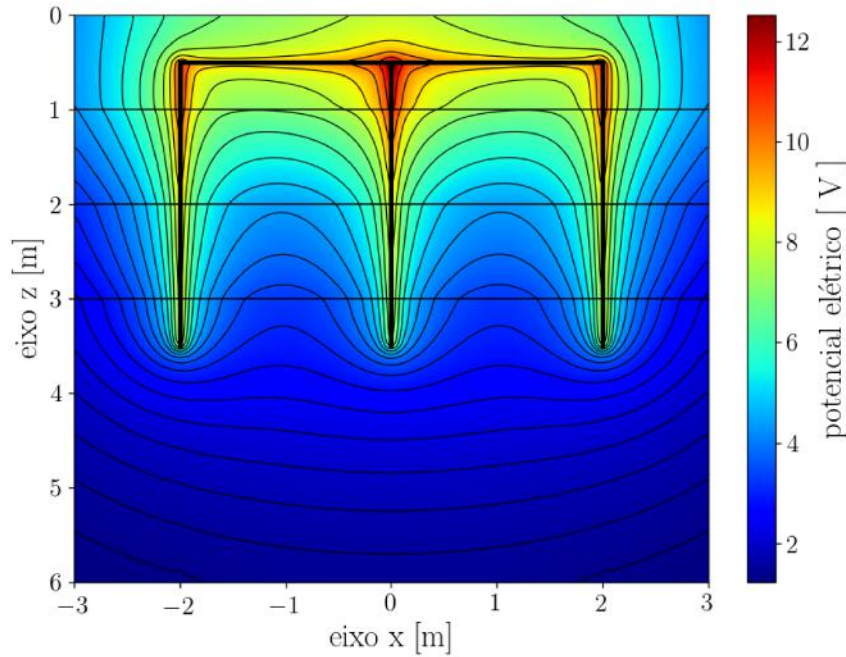
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}
 \begin{array}{c} R_m \text{ Cabos} \\ R_p \text{ Cabos} \\ \text{Simétrico} \end{array} & \begin{array}{c} R_m \\ \text{Hastes-Cabos} \end{array} \\
 \begin{array}{c} R_m \\ \text{Cabos-Hastes} \end{array} & \begin{array}{c} R_m \text{ Hastes} \\ R_p \text{ Hastes} \\ \text{Simétrico} \end{array}
 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

A parcela da Eq. 3.42 em um sistema composto para cabos e hastes imersos em um solo heterogêneo é ilustrado conforme Eq. 5.32, onde R_p é a resistência própria do condutor e R_m é a resistência mútua entre condutores. Uma vez que geralmente todos os cabos que formam o sistema de aterramento estão na mesma profundidade (até mesmo por questões práticas de execução do projeto), haverá uma simetria para a resistência mútua entre os cabos do sistema. Considerando-se também todas as hastes de aterramento de mesmo comprimento, o que é bastante comum em projetos de sistemas de aterramento uma vez que se trabalha com hastes de tamanho e diâmetro comerciais, é possível afirmar que a resistência mútua entre hastes é simétrica e também que a resistência de aterramento própria é a mesma para todas as hastes do sistema. Em termos computacionais, calcula-se metade da interação entre cabos e se espelha o resultado, calcula-se também metade da interação entre hastes e se espelha o resultado. Ademais, para as hastes calcula-se apenas a resistência de aterramento de uma única haste e se replica o resultado na diagonal da matriz. A interação entre cabos e hastes não é simétrica, sendo necessário o cálculo de todos os elementos da matriz nessa região.

A interação entre cabos e hastes não é simétrica, sendo necessário o cálculo de todos os elementos da matriz nessa região. O uso da simetria não é obrigatório, mas reduz o tempo total da solução, devido a cálculos desnecessários. Como cada elemento da matriz é obtido por uma integração numérica a utilização da simetria é importante quando se tem sistemas de aterramento composto por uma grande quantidade de condutores, como é o caso das malhas de aterramento de subestações. Caso a simetria não seja utilizada, obtêm-se regiões simétricas, ou quase simétricas, dependendo da precisão da integração numérica utilizada. O software desenvolvido nesta tese utiliza um método mais preciso

para o cálculo da resistência própria de cada condutor, devido à relevância destes no resultado final, uma vez que estão na diagonal principal da matriz, que é a quadratura adaptativa de Gauss-Kronrod. Para o cálculo da resistência mútua entre condutores utiliza-se o método de quadratura de Gauss-Legendre com apenas cinco raízes, que é um cálculo bem rápido, porém menos preciso que o de Gauss-Kronrod e que se mostrou suficiente para representar o acoplamento resistivo entre os condutores.

Figura 30 – Potencial elétrico de um sistema de aterramento composto por três hastes interligadas, imerso em um solo heterogêneo de quatro camadas.



Fonte: elaboração própria.

Como exemplo demonstrativo, tome o sistema de aterramento da Fig. 30, que é composto por três hastes de 3 m de comprimento e 3/4" de diâmetro, separados por uma distância de 2 m e enterrados a 0,5 m da superfície de um solo de quatro camadas com $\rho_1 = 100 \Omega.m$, $\rho_2 = 500 \Omega.m$, $\rho_3 = 200 \Omega.m$ e $\rho_4 = 50 \Omega.m$ e espessuras das camadas iguais a $d_1 = 1 m$, $d_2 = 1m$ e $d_3 = 1 m$. Essas hastes são ligadas por um cabo horizontal, de diâmetro igual ao das hastes, o cabo é segmentado em dois e a matriz de resistências resultante sem a aplicação da simetria é

$$\begin{bmatrix} 54,04 & 13,25 & 8,58 & 8,67 & 4,01 & -1 \\ 13,25 & 54,04 & 8,67 & 4,03 & 8,58 & -1 \\ 8,78 & 8,59 & 35,04 & 4,06 & 4,03 & -1 \\ 8,59 & 3,66 & 4,03 & 35,04 & 2,20 & -1 \\ 3,68 & 8,78 & 4,06 & 2,21 & 35,04 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{cc} \end{bmatrix}$$

para uma corrente injetada de 1 A, a resposta obtida para esse sistema linear é

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1032 \\ 0,1032 \\ 0,2425 \\ 0,2760 \\ 0,2751 \\ 12,5199 \end{bmatrix}.$$

Note que é possível observar blocos simétricos na matriz de resistências e que algum elemento não simétrico em algum desses blocos é devido a algum erro na precisão da integração numérica utilizada. Como a corrente injetada no sistema é de 1 A, a resistência de aterramento é igual ao potencial nos condutores do sistema obtido no vetor solução do sistema linear. A ordem dos condutores no desenho depende da sequência que foram desenhados no software de CAD, nesse caso foram obtidos através de um arquivo DXF gerado no software livre LibreCAD. Primeiro se obtém todos os cabos na ordem em que foram desenhados e em seguida todas as hastes na ordem em que foram desenhadas. Para a matriz de resistências do exemplo apresentado, primeiro se desenhou a haste central, logo após a da esquerda e depois a da direita. Por isso que a corrente I_3 é menor que I_4 e I_5 , pois representa a haste central, cuja corrente menor.

5.6 Cálculo do campo elétrico

Com o intuito de reduzir o esforço computacional, uma vez que a o potencial elétrico para o solo heterogêneo não é calculado de maneira tão simples como no caso do solo homogêneo, calcula-se o campo elétrico a partir da matriz de potencial elétrico usando o Método das Diferenças Finitas. O Método das Diferenças Finitas é um método numérico para a solução de equações diferenciais onde, aplicando o conceito da definição de derivadas por limite, podemos aproximar qualquer equação diferencial por sua respectiva equação de diferenças (SADIKU, 2009).

A equação que define o campo elétrico (com componente \mathbf{a}_z nula) é

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y\right). \quad (5.33)$$

Representando as derivadas parciais do potencial elétrico como equações de diferenças

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_{(i+1),j} - V_{(i-1),j}}{2\Delta x} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{V_{i,(j+1)} - V_{i,(j-1)}}{2\Delta y}. \quad (5.34)$$

O campo elétrico representado por diferenças finitas é

$$\mathbf{E} = -\frac{V_{(i+1),j} - V_{(i-1),j}}{2\Delta x}\mathbf{a}_x - \frac{V_{i,(j+1)} - V_{i,(j-1)}}{2\Delta y}\mathbf{a}_y, \quad (5.35)$$

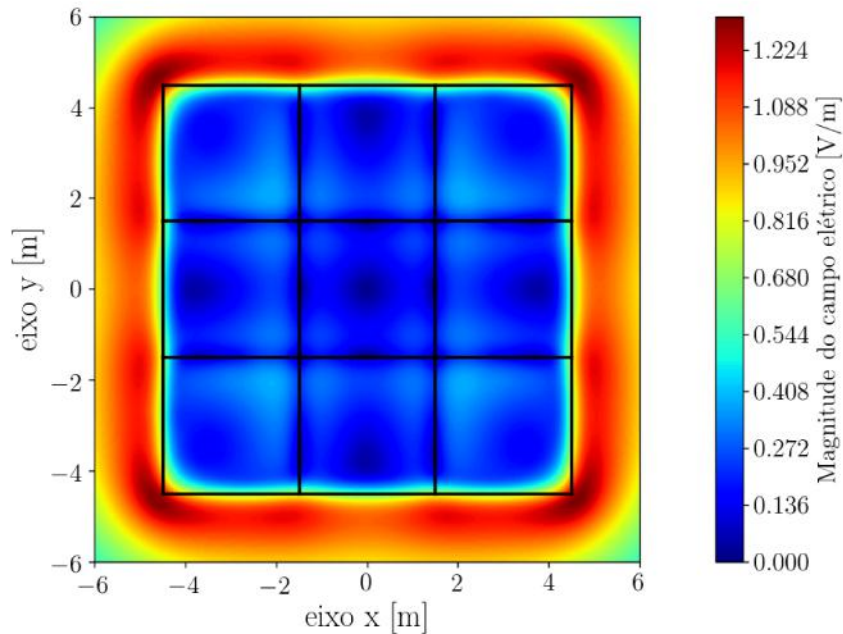
e sua magnitude é então calculada como

$$\|\mathbf{E}\| = \sqrt{\left(\frac{V_{(i+1),j} - V_{(i-1),j}}{2\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{V_{i,(j+1)} - V_{i,(j-1)}}{2\Delta y}\right)^2}. \quad (5.36)$$

Uma vez que já se obteve a matriz de potencial V previamente, a matriz de campo elétrico é obtida através dos elementos da linha i e coluna j dessa matriz. A Eq. 5.35 foi obtida a partir das diferenças finitas centrais, para o cálculo do campo elétrico nas extremidades da solução basta adaptar a fórmula para uma equação de diferenças finitas progressivas ou regressivas, ou até mesmo não incluir esses pontos na solução.

Note que a solução para o campo elétrico é baseada na solução final para o potencial, que representa a superposição do potencial de todos os condutores do sistema. Não é necessário realizar a soma vetorial do campo elétrico de cada condutor no sistema, pois se faz uma análise apenas da matriz de potencial em sua forma final para essa solução.

Figura 31 – Magnitude do campo elétrico $\|\mathbf{E}\|$ em uma malha de aterramento em solo heterogêneo.



Fonte: elaboração própria.

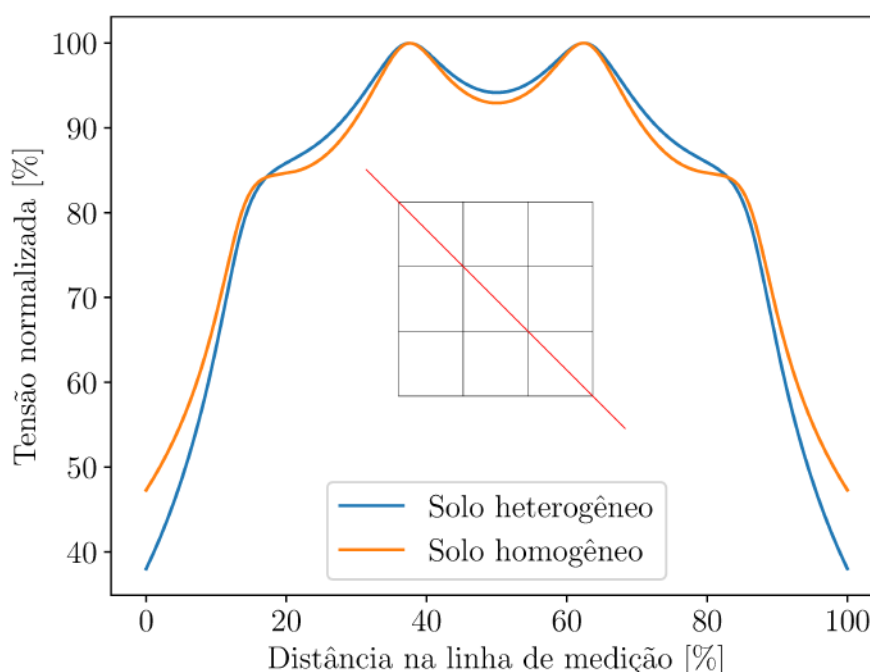
A Figura 31 mostra o resultado do cálculo do módulo do campo elétrico em uma malha de aterramento de 9 x 9 m, composta por quadriculas de 1 x 1 m de lado. A malha está enterrada a 0,5 m da superfície do solo e está imersa em um solo de quatro camadas com $\rho_1 = 100 \, \Omega.m$, $\rho_2 = 500 \, \Omega.m$, $\rho_3 = 200 \, \Omega.m$ e $\rho_4 = 50 \, \Omega.m$. As espessuras das camadas são $d_1 = 1 \, m$, $d_2 = 1 \, m$ e $d_3 = 1 \, m$. Note que o módulo do campo elétrico foi obtido a partir da matriz de potencial, utilizando o método das diferenças finitas. A resistência de aterramento para esse sistema é de $5,77655 \, \Omega$. O cálculo da magnitude do campo elétrico é importante uma vez que esta é numericamente igual ao potencial de passo na superfície da malha.

5.7 Considerações sobre aterramentos em solo heterogêneo

Como é possível observar, o estudo de aterramentos elétricos em solo heterogêneo é bastante parecido com o caso de solo homogêneos. A forma de cálculo da resistência de aterramento e a distribuição de correntes nos eletrodos diferem apenas na função potencial utilizada. Grandezas utilizadas em projetos de sistemas de aterramento como a tensão de toque e a tensão de passo também são idênticas, dadas pelas Equações 3.54 e 3.55 respectivamente.

Apesar das semelhanças que se tem entre o solo heterogêneo e o solo homogêneo, ambos diferem e muito nos resultados. Uma prática bastante errada é a associação de camadas para se obter um “solo homogêneo equivalente”. Uma forma bem grosseira de se obter uma equivalência desse tipo é dizer que o solo homogêneo equivalente é obtido através do valor médio da resistividade das camadas. Tomemos como exemplo a malha de aterramento da Fig. 31, a resistência de aterramento obtida através do “solo homogêneo equivalente” seria de $10,3394 \, \Omega$ em contrapartida com os $5,77655 \, \Omega$ calculados através do modelo de solo heterogêneo, que representa um erro de aproximadamente 79%.

Figura 32 – Comparativo entre solo heterogêneo e homogêneo.



Fonte: elaboração própria.

Mesmo que se deduza um método mais sofisticado para a obtenção de um solo homogêneo equivalente, que obtenha o mesmo valor de resistência de aterramento, haverá um erro implícito, visto que os potenciais de superfície não podem ser ajustados de forma linear. Tome agora o exemplo da Fig. 32, onde se apresenta o potencial elétrico na

diagonal da malha do sistema de aterramento da Fig. 31. Apresenta-se nessa figura a tensão ao longo da diagonal de forma normalizada (dividida pelo seu valor máximo), tanto para o solo heterogêneo como para o solo “homogêneo equivalente”. Nota-se que mesmo que ambos possuísem o mesmo valor de resistência elétrica, os potenciais de superfície seriam distintos, o que geraria um erro no cálculo das tensões de passo e de toque. Esse tipo de erro é o mesmo que ocorre para o posicionamento da sonda de potencial em um ensaio de resistência de aterramento. É prática comum posicionar a sonda de potencial a uma posição igual a 61,8% da distância entre o sistema de aterramento ensaiado e o sistema de retorno de corrente, mesmo sem encontrar um patamar de tensão previamente. Essa distância de 61,8% só é válida para o solo homogêneo, que na prática dificilmente é encontrado, e é erroneamente utilizada em solos heterogêneos.

Como apresentado nesta seção do capítulo, o modelo de solo heterogêneo é de fato necessário, o que leva a se questionar qualquer procedimento de cálculo baseado em fórmulas semi-empíricas ou baseadas em solos homogêneos. Uma análise mais precisa se faz necessário para estudos de sistemas de aterramento no caso de solos heterogêneos, o que geralmente empregará recursos computacionais para este fim.

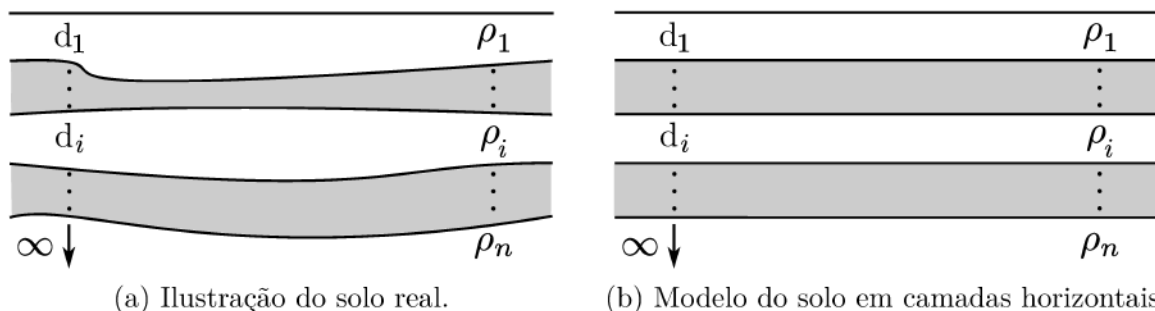
Modelagem elétrica do solo

6.1 Introdução

Um projeto de um sistema de aterramento elétrico depende, em parte, do modelo que representa o comportamento elétrico do solo a ser utilizado. É prática comum utilizar a modelagem que estratifica o solo em camadas homogêneas, onde, geralmente, cada uma é também uniforme quanto sua resistividade elétrica (*cf.* Fig. 33). Métodos experimentais como o de Wenner e Schlumberger procuram estabelecer uma relação entre tensões e correntes medidas na superfície do solo com a referida modelagem. Desta forma são determinados, por exemplo, no caso de camadas horizontais, suas resistividades e espessuras.

Evidentemente, considerar o solo como formado por camadas horizontais e homogêneas é apenas uma aproximação do solo real, sendo importante o conhecimento do erro envolvido na aproximação realizada. Ademais, existe uma parcela de erro que pode ser considerado de cunho teórico, proveniente de todo o tratamento matemático necessário para transformar as tensões e correntes medidas experimentalmente na superfície do solo nos valores de resistividade e espessura de cada camada.

Figura 33 – Modelo do solo em camadas horizontais. O solo real é composto de camadas irregulares, já o modelo adotado utiliza camadas de resistividade ρ homogêneas para cada espessura d .



Fonte: elaboração própria.

Desta forma, separa-se em duas parcelas o erro total que se comete ao estratificar o solo em camadas: a primeira parcela provém do tratamento matemático que se dá ao longo de todo o processo; a segunda parcela, considerada com erro prático, se traduz no quanto o modelo do solo em camadas homogêneas e horizontais se aproxima do solo real. Este trabalho tem como objetivo minimizar o erro que se realiza nesse tratamento matemático.

6.2 Cálculo da função potencial

A solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas representa a função Potencial elétrico para o solo heterogêneo, que é utilizada para a obtenção dos parâmetros do solo através de ensaios de campo. Esta é dada pela Eq. 6.1.

$$V(r, z) = \int_0^\infty [f(\lambda)e^{-\lambda z} + g(\lambda)e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (6.1)$$

O resultado dessa equação pode ser obtido pela Eq. 4.72, porém Sunde (1968) desenvolveu um algoritmo para este caso específico de fonte de corrente e ponto da cálculo na superfície do solo, chamado de algoritmo de Sunde, que será utilizado nesta seção da tese por ter uma solução mais simples e eficiente do ponto de vista computacional. A obtenção das funções características $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ da Eq. 6.1 é realizada conforme Sunde (1968). As condições de contorno necessárias para o modelo do solo heterogêneo são mostradas na Eq. 6.2. Essas equações descrevem as condições de contorno para o solo, onde se soma também a contribuição da fonte de corrente para a obtenção da solução final.

$$\begin{aligned} V_i &= V_{i+1} \\ \left. \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial V_i}{\partial z} \right|_{z=H_i} &= \left. \frac{1}{\rho_{i+1}} \frac{\partial V_{i+1}}{\partial z} \right|_{z=H_i} \\ \left. \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial V_i}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} V_N &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde H_i é definido como a profundidade da interface de uma camada com a outra, *i.e.*,

$$H_i = \sum_{j=1}^i d_j \quad (6.3)$$

A função Potencial elétrico de uma fonte pontual localizada na origem do sistema de coordenadas cilíndricas é definida por

$$V(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty k_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (6.4)$$

onde $k_1(\lambda)$ representa a função característica do solo heterogêneo, esta, para uma quantidade arbitrária de camadas, foi deduzida por indução em Sunde (1968) e é definida

como

$$\begin{aligned}
 k_{N-1} &= \frac{1 - \mu_{N-1}e^{-2\lambda d_{N-1}}}{1 + \mu_{N-1}e^{-2\lambda d_{N-1}}} & \mu_{N-1} &= \frac{\rho_{N-1} - \rho_N}{\rho_{N-1} + \rho_N} \\
 &\vdots & &\vdots \\
 k_i &= \frac{1 - \mu_i e^{-2\lambda d_i}}{1 + \mu_i e^{-2\lambda d_i}} & \mu_i &= \frac{\rho_i - \rho_{i+1}k_{i+1}}{\rho_i + \rho_{i+1}k_{i+1}} \\
 &\vdots & &\vdots \\
 k_1 &= \frac{1 - \mu_1 e^{-2\lambda d_1}}{1 + \mu_1 e^{-2\lambda d_1}} & \mu_1 &= \frac{\rho_1 - \rho_2 k_2}{\rho_1 + \rho_2 k_2},
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

que pode ser escrita de forma compacta como

$$k_i = \frac{1 - \mu_i e^{-2\lambda d_i}}{1 + \mu_i e^{-2\lambda d_i}} \quad \mu_i = \frac{\rho_i - \rho_{i+1}k_{i+1}}{\rho_i + \rho_{i+1}k_{i+1}}, \quad 1 \leq i < N. \tag{6.6}$$

É bastante recorrente na literatura o uso da notação de Takahashi e Kawase (1990) para a função característica do solo heterogêneo. É válido mencionar que ambas as notações geram o mesmo resultado, todavia, o autor deste trabalho optou utilizar a função característica como apresentada em Sunde (1968) por sua notação simples e direta.

6.2.1 Aplicação da função potencial ao método de Wenner

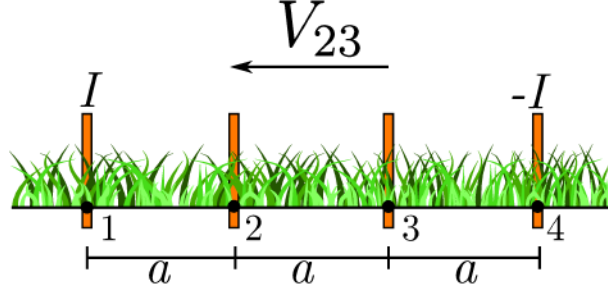
O método de Wenner é um método de prospecção geoeletrica bastante utilizado na engenharia elétrica. Este método é utilizado para a obtenção do perfil de resistividade do solo. Utiliza-se os dados obtidos pelo ensaio de Wenner para determinar a resistividade aparente ρ_a para cada espaçamento a do arranjo de eletrodos, conforme ilustra a Fig. 34.

Para o arranjo de eletrodos 1 a 4 da Fig. 34 uma corrente elétrica de magnitude I é imposta entre eletrodos 1 e 4, o que acarreta em uma diferença de potencial entre os eletrodos 2 e 3 do arranjo. A razão entre a diferença de potencial V_{23} e a corrente injetada é utilizada para a determinação da resistividade aparente em um determinado espaçamento a entre os eletrodos.

Com o conhecimento do procedimento adotado neste ensaio é possível equacionar o valor da diferença de potencial lida no ensaio. O equacionamento da Eq. 6.7 corresponde à aplicação da Eq. 6.4 ao ensaio de Wenner.

$$\begin{aligned}
 V_2(a) &= \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty k_1(\lambda) J_0(\lambda a) d\lambda - \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty k_1(\lambda) J_0(2\lambda a) d\lambda \\
 V_3(a) &= \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty k_1(\lambda) J_0(2\lambda a) d\lambda - \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty k_1(\lambda) J_0(\lambda a) d\lambda \\
 V_{23}(a) &= V_2(a) - V_3(a) = \frac{\rho_1 I}{\pi} \int_0^\infty k_1(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Figura 34 – Método de Wenner. O método consiste em mapear o solo variando o espaçamento a entre as hastes auxiliares. Impõe-se uma corrente em um circuito fechado formado entre as hastes externas (1,4) e lê-se a diferença de potencial entre as duas hastes centrais (2,3).



Fonte: elaboração própria.

Contudo, busca-se com este ensaio o valor da resistividade aparente. Para tanto, aplica-se a relação entre a diferença de potencial V_{23} e a corrente injetada dada pela Equação 6.8 (SUNDE, 1968).

$$\rho_a = 2\pi a \frac{V_{23}}{I} \quad (6.8)$$

Aplicando a Eq. 6.7 à Eq. 6.8 obtém-se

$$\rho_a(a) = 2\rho_1 a \int_0^\infty k_1(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \quad (6.9)$$

que é a função de resistividade aparente do solo em função do espaçamento entre os eletrodos para o ensaio de Wenner.

Com a análise da Figura 35 é possível observar que a função $k_1(\lambda)$ tende a 1 a medida que λ cresce, isto é verdade independente dos parâmetros do solo, *i.e.*, resistividade das camadas, espessura das camadas. Devido a este comportamento da função, adotou-se utilizar a função $K(\lambda)$, tal que

$$K(\lambda) = k_1(\lambda) - 1. \quad (6.10)$$

Esta função tende a zero à medida que o valor de λ cresce. A Eq. 6.9 pode ser reescrita em relação à $K(\lambda)$ como

$$\rho_a = 2\rho_1 a \int_0^\infty [1 + K(\lambda)] [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda. \quad (6.11)$$

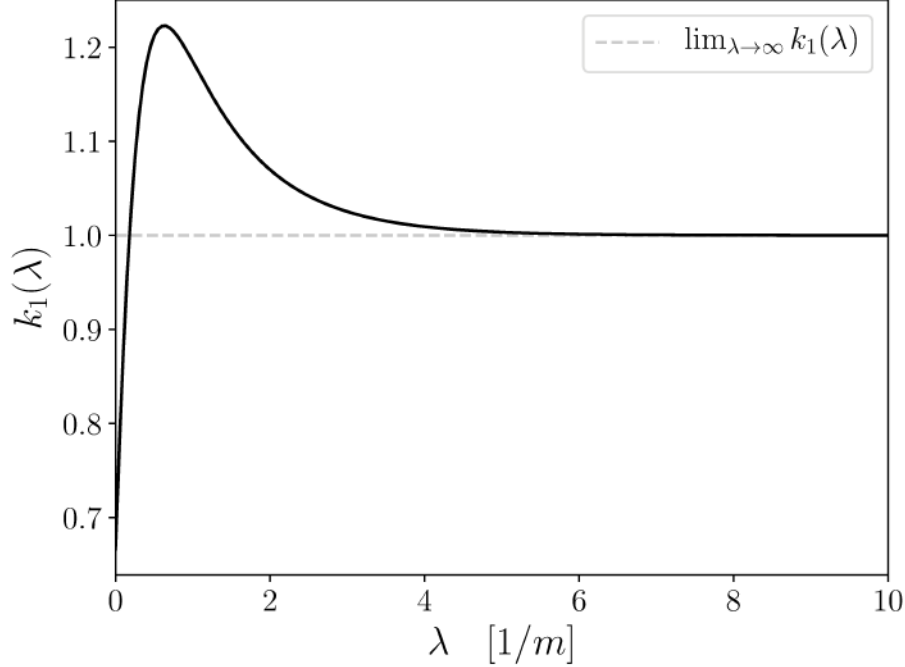
Uma identidade matemática essencial para o estudo de aterramentos elétrico é a integral de Lipschitz, esta é definida como

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\alpha} J_0(\lambda\beta) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \alpha > 0. \quad (6.12)$$

De acordo com Bowman (1958), para $\alpha \rightarrow 0$ e $\beta > 0$, tem-se

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\beta) d\lambda = \frac{1}{\beta}. \quad (6.13)$$

Figura 35 – Análise de $k_1(\lambda)$. Os valores dos parâmetros do solo são $\rho_1 = 300 \Omega.m$, $\rho_2 = 500 \Omega.m$, $\rho_3 = 200 \Omega.m$, $d_1 = 0.5m$, $d_2 = 1.5m$. Note que $k_1(\lambda)$ tende a 1. É válido mencionar que apenas um trecho do gráfico está sendo ilustrado, este estende-se em λ *ad infinitum*.



Fonte: elaboração própria.

Note que é possível aplicar a Eq. 6.13 à Eq. 6.11, o que resulta em

$$\rho_a = 2\rho_1 a \left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} + \int_0^\infty K(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \right\}, \quad (6.14)$$

que após algumas manipulações algébricas torna-se

$$\rho_a(a) = \rho_1 \left\{ 1 + 2a \int_0^\infty K(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \right\} \quad a \neq 0. \quad (6.15)$$

6.2.2 Mudança de variável para λ

A mudança de variável é um método extremamente poderoso para a solução de integrais não só analiticamente, mas também numericamente. Uma mudança de variável pode melhorar consideravelmente a precisão da integração de passo fixo para funções com variações rápidas em regiões específicas do domínio de integração. Ademais, esta técnica permite avaliar integrais que, de outra forma, seriam impossíveis, como funções com singularidades no domínio de integração ou sobre domínios infinitos (ARIAS, 2004).

Este trabalho irá adotar a seguinte mudança de variável

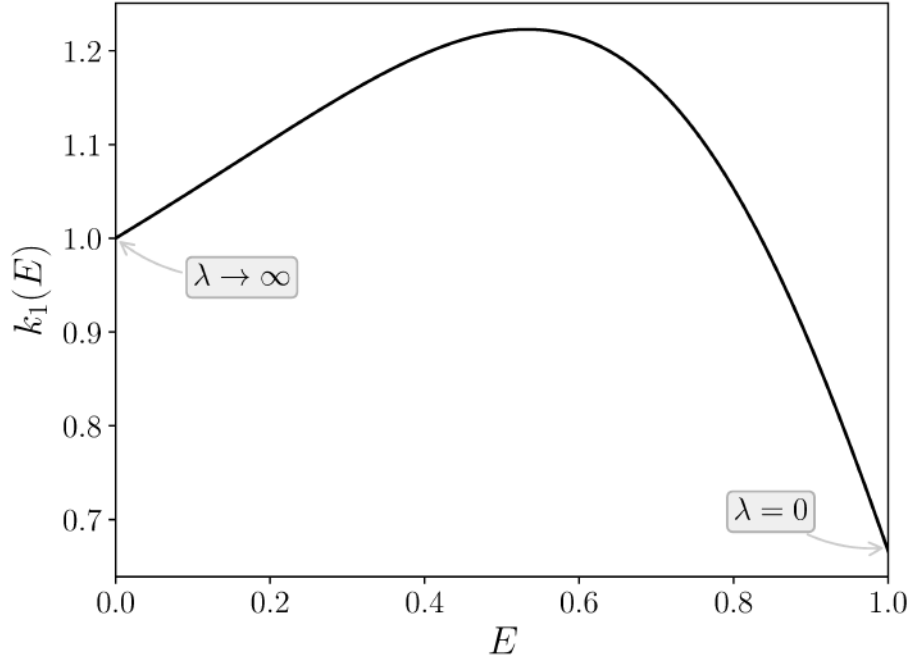
$$E = e^{-2\lambda d_1}, \quad (6.16)$$

na função $k_1(\lambda)$ da Eq. 6.5. Esta mudança de variável foi proposta por Martins Neto (1998). Note que $E \in [0, 1]$, para a variável $\lambda \in [0, \infty)$. Este intervalo finito será de suma importância para a solução da Eq. 6.15 proposta adiante neste trabalho.

Pode-se generalizar a Eq. 6.16 de acordo com a Equação 6.17.

$$E^{\delta_i} = e^{-2\lambda d_i}. \quad (6.17)$$

Figura 36 – Função $k_1(E)$ para $E \in [0, 1]$. Os parâmetros do solo utilizados para o gráfico são os mesmos da Fig. 35. Observe que foi possível mapear uma função de domínio aberto à fechado. Note que, para os dados parâmetros, a função é suave e gera os mesmos resultados do domínio aberto.



Fonte: elaboração própria.

Ao aplicar a Eq. 6.17 na Eq. 6.5, chega-se à Eq. 6.18.

$$\begin{aligned} k_{N-1} &= \frac{1 - \mu_{N-1} E^{\delta_{N-1}}}{1 + \mu_{N-1} E^{\delta_{N-1}}} & \mu_{N-1} &= \frac{\rho_{N-1} - \rho_N}{\rho_{N-1} + \rho_N} \\ &\vdots & &\vdots \\ k_i &= \frac{1 - \mu_i E^{\delta_i}}{1 + \mu_i E^{\delta_i}} & \mu_i &= \frac{\rho_i - \rho_{i+1} k_{i+1}}{\rho_i + \rho_{i+1} k_{i+1}} \\ &\vdots & &\vdots \\ k_1 &= \frac{1 - \mu_1 E^{\delta_1}}{1 + \mu_1 E^{\delta_1}} & \mu_1 &= \frac{\rho_1 - \rho_2 k_2}{\rho_1 + \rho_2 k_2}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

que, novamente, pode ser escrita na forma compacta como

$$k_i = \frac{1 - \mu_i E^{\delta_i}}{1 + \mu_i E^{\delta_i}} \quad \mu_i = \frac{\rho_i - \rho_{i+1} k_{i+1}}{\rho_i + \rho_{i+1} k_{i+1}}, \quad 1 \leq i < N. \quad (6.19)$$

Analogamente, a função K definida na seção anterior é representada por

$$K(E) = 1 - k_1(E). \quad (6.20)$$

Utilizar-se-á a função $K(E)$ *a posteriori* neste capítulo, *cf.* Seção 6.3.1 desta tese.

O intervalo fechado para a função k_1 é mais conveniente para a implementação computacional. A análise da Fig. 36 ilustra de forma clara o resultado do mapeamento de λ à E da função k_1 .

6.3 Solução da Equação 6.15 pela série de Chebyshev

A Seção 6.2.1 deste capítulo equaciona a função que define a resistividade aparente do solo para o ensaio de Wenner (*cf.* Eq. 6.15). Todavia, esta equação possui uma solução complexa por integração numérica, visto que além de ser imprópria, esta possui um comportamento altamente oscilatório. Como forma de contornar este problema, o autor deste trabalho fará uso de integral de Lipschitz (*cf.* Eq. 6.12) para a solução desta equação.

6.3.1 Equacionamento

Chega-se a solução da função de resistividade aparente para solos heterogêneos seguindo as seguintes etapas. Inicialmente, partindo da Eq. 6.15

$$\rho_a(a) = \rho_1 \left\{ 1 + 2a \int_0^\infty K(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \right\} \quad (6.21)$$

utiliza-se da mudança de variável λ para E , conforme a Eq. 6.17, possibilitando assim o uso da função característica da Eq. 6.18. Aplica-se a série de Chebyshev deslocada para $K(E)$ (visto que $E \in [0, 1]$) truncando-a em um determinado grau n .

$$K(E) \approx \sum_{k=0}^n c_k T_k^*(E) \quad (6.22)$$

Da seção A.2 é sabido de $T^*(E)$ pode ser escrito como a seguinte série de potências

$$T_n^*(E) = \sum_{j=0}^n A_j E^j, \quad (6.23)$$

onde os termos A_j são obtidos, *e.g.*,

$$\begin{aligned} T_0^*(E) &= 1 \\ T_1^*(E) &= -1 + 2E \\ T_2^*(E) &= 1 - 8E + 8E^2 \\ T_3^*(E) &= -1 + 18E - 48E^2 + 32E^3 \\ T_4^*(E) &= 1 - 32E + 160E^2 - 256E^3 + 128E^4 \\ T_5^*(E) &= -1 + 50E - 400E^2 + 1120E^3 - 1280E^4 + 512E^5 \\ T_6^*(E) &= 1 - 72E + 840E^2 - 3584E^3 + 6912E^4 - 6144E^5 + 2048E^6. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Vale ressaltar que os valores desses coeficientes são constantes, *i.e.*, independem da função a ser decomposta. Em termos computacionais, armazenam-se esses valores na memória, economizando recursos de processamento.

Da série de Chebyshev escreve-se a decomposição da função $K(E)$, onde a notação com o símbolo ' na somatória significa que o termo $k = 0$ é dividido por dois, como

$$K(E) \approx \sum_{k=0}^n{}' c_k \sum_{j=0}^k A_{kj} E^j, \quad (6.25)$$

mudando a variável, agora de E para λ , obtém-se a seguinte decomposição

$$K(\lambda) \approx \sum_{k=0}^n{}' c_k \sum_{j=0}^k A_{kj} e^{-2\lambda d_1 j}. \quad (6.26)$$

para

$$c_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} K(\xi_i) \cos \left(k\pi \frac{i+1/2}{n} \right). \quad (6.27)$$

Substituindo a Eq. 6.26 na Eq. 6.21,

$$\rho_a(a) = \rho_1 \left\{ 1 + 2a \int_0^\infty \sum_{k=0}^n{}' c_k \sum_{j=0}^k A_{kj} e^{-2\lambda d_1 j} [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \right\}, \quad (6.28)$$

e após algumas manipulações algébricas simples,

$$\rho_a(a) = \rho_1 \left\{ 1 + 2a \sum_{k=0}^n{}' c_k \sum_{j=0}^k A_{kj} \int_0^\infty e^{-2\lambda d_1 j} [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \right\}, \quad (6.29)$$

é possível aplicar a integral de Lipschitz, solucionando a integral imprópria

$$\rho_a(a) = \rho_1 \left\{ 1 + 2a \sum_{k=0}^n{}' c_k \sum_{j=0}^k A_{kj} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + (2d_1 j)^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2 + (2d_1 j)^2}} \right] \right\}. \quad (6.30)$$

A Eq. 6.30 pode ser reorganizada como

$$\rho_a(a) = \rho_1 \left\{ 1 + 2a \sum_{k=0}^n{}' c_k \sum_{j=0}^k A_{kj} \frac{\sqrt{d_1^2 j^2 + a^2} - \frac{1}{2}\sqrt{4d_1^2 j^2 + a^2}}{\sqrt{d_1^2 j^2 + a^2} \sqrt{4d_1^2 j^2 + a^2}} \right\}, \quad (6.31)$$

ou ainda,

$$\rho_a(a) = \rho_1 \left\{ 1 + 2a \sum_{k=0}^n{}' c_k \sum_{j=0}^k A_{kj} \frac{\alpha_j - \beta_j/2}{\alpha_j \beta_j} \right\}, \quad (6.32)$$

sendo

$$\alpha_j = \sqrt{d_1^2 j^2 + a^2} \quad \beta_j = \sqrt{4d_1^2 j^2 + a^2}.$$

6.3.2 Escolha do grau ótimo para o polinômio

O grau n mais adequado para a solução da Eq. 6.32 é função direta dos parâmetros do solo. A partir de um grau adequado, os coeficientes c_k da série de Chebyshev decaem exponencialmente com o acréscimo de termos sobressalentes à série. Em contrapartida, os valores de $T_k^*(E)$ do polinômio de Chebyshev deslocado crescem em magnitude.

Para a escolha do grau mais adequado para o polinômio, o autor deste trabalho utiliza como base para o cálculo o erro no truncamento da série. De acordo com Amparo, Segura e Temme (2007), visto que os coeficientes c_k decaem exponencialmente em magnitude a uma taxa rápida o suficiente, o erro cometido ao expandir uma função em série de Chebyshev após n termos, *i.e.*,

$$\varepsilon_n(E) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k T_k^*(E), \quad (6.33)$$

é aproximadamente dado por

$$\varepsilon_n(E) \approx c_{n+1} T_{n+1}^*(E), \quad (6.34)$$

sendo c_k dado pela Eq. A.12 e $T_{n+1}(E)$ um polinômio descrito por uma série de potências segundo a Eq. A.10. Calcula-se então o erro total dado pelo truncamento da série em um grau n por

$$\varepsilon_{\text{tot}} \approx \int_0^1 c_{n+1} T_{n+1}^*(E) \, dE, \quad (6.35)$$

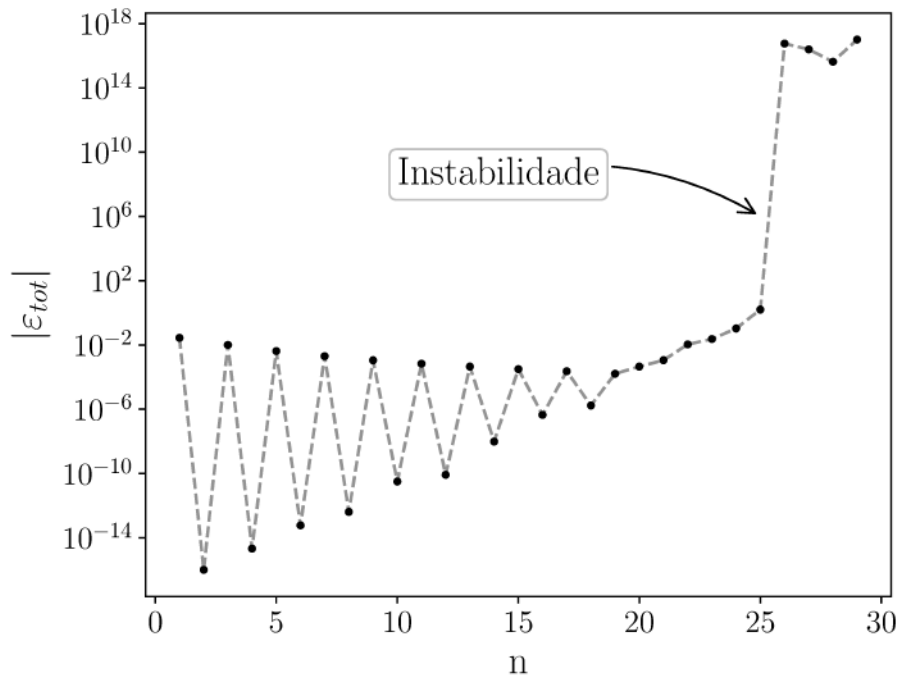
cuja solução é

$$\varepsilon_{\text{tot}} \approx \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n K(\xi_k) \cos\left(k\pi \frac{k+1/2}{n+1}\right) \sum_{i=0}^{n+1} \frac{A_{ki}}{i+1}. \quad (6.36)$$

Teoricamente a adição de termos à série tenderia a somente reduzir o erro na aproximação da função, todavia, isto não ocorre devido à precisão finita que temos para representar as variáveis no computador. Como se desenvolveu da Eq. 6.36 para uma queda exponencial dos coeficientes, se pode aplicar a equação somente a partir de certo grau na série, *i.e.*, aplica-se a equação somente quando seu valor possui pequenas variações entre termos consecutivos da série. A escolha do grau pode ser feita por um critério de tolerância, diminuindo-se a quantidade de termos da série ou por um critério de convergência, escolhendo-se o grau máximo onde não ocorra instabilidade numérica (*cf.* Fig. 37). Para o critério de tolerância, se observa o valor do erro em função do grau, escolhe-se o valor de n mínimo para um ε_{tot} estabilizado entre termos consecutivos da série. Já para o critério de convergência, se observa o valor do erro em função do grau, escolhe-se o valor de n máximo para um ε_{tot} estabilizado entre termos consecutivos da série e antes que ocorra instabilidade numérica. Note que existe uma faixa de valores n aptos, escolhe-se o menor grau estável para minimizar a quantidade de termos da série ou escolhe-se o maior

grau estável para melhorar a precisão do cálculo. Para o exemplo da Fig. 37, qualquer valor entre 19 e 25 é apto, de acordo com a abordagem aqui proposta. Não obstante, podem existir funções cuja expansão em série de Chebyshev apresenta um decremento muito lento no erro em função do acréscimo de termos, não possibilitando que se representem com a precisão computacional que se possui atualmente.

Figura 37 – Escolha adequada de n . Os parâmetros do solo são de acordo com os da Fig. 35. Observe que, para esses parâmetros do solo, da transição do grau 25 para o 26 há uma instabilidade numérica. Por conseguinte, não se escolhe então graus acima de 25 para a expansão dessa função.



Fonte: elaboração própria.

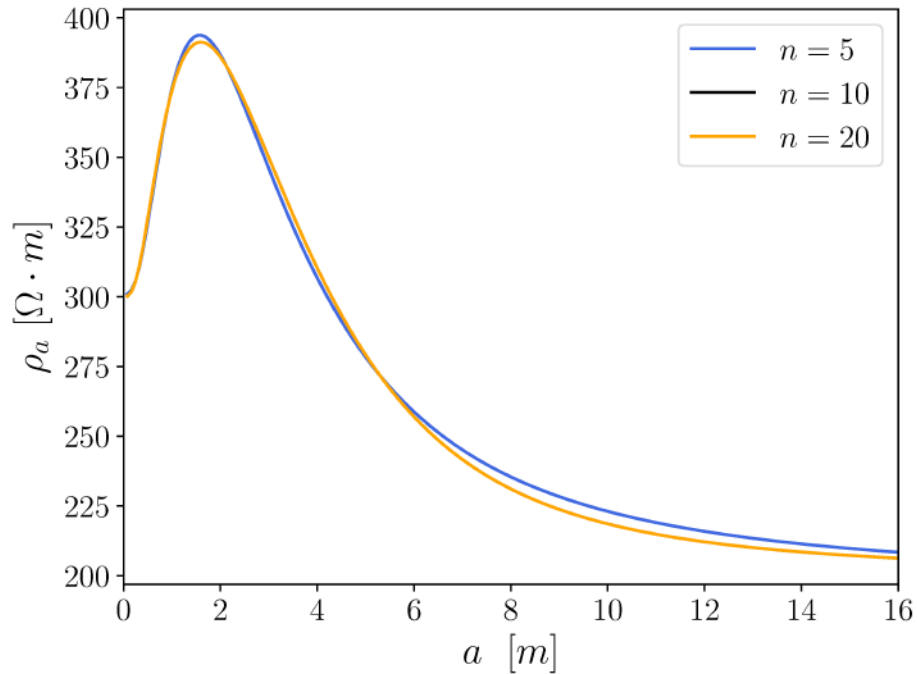
6.3.3 Considerações

O problema da estratificação do solo é de fato recorrente na literatura. Todavia é muito usual o uso de séries de potência com muitos termos e não otimamente espaçados, o que pode ocasionar em instabilidade numérica para alguns tipos de solo devido a sistemas mal condicionados. Outro aspecto que se pode levar em consideração é a utilização de recursos computacionais. Os trabalhos de Calixto (2012) e Martins Neto (1998) utilizam um polinômio de grau 40 para o cálculo da resistividade teórica, sendo esse um parâmetro heurístico. Os coeficientes deste polinômio são encontrados com a solução de um sistema de equações lineares. Já o trabalho de Pereira (2016) utiliza-se de um sistema de equações sobredeterminado para a obtenção dos coeficientes, também para o grau 40, porém, testando a função com o intuito de conferir a estabilidade da decomposição realizada.

Outra abordagem bastante utilizada para a solução da Eq. 6.15 é o Método das Imagens Complexas (MIC) de Chow, Yang e Srivastava (1992). Este método consiste em

decompor a função característica do solo como uma combinação linear de exponenciais. O trabalho de Zhang et al. (2005) utiliza esse método. Uma desvantagem do MIC é que este não realiza o mapeamento do domínio infinito à finito, necessitando truncar o domínio infinito a um valor especificado. Pode-se também afirmar que o MIC não é tão eficiente quanto o método aqui proposto pelo fato deste necessitar de algoritmos dispendiosos (*e.g.*, Mínimos Quadrados Linear Complexo, Cálculo de raízes Complexas) a medida que o método proposto utiliza apenas operações aritméticas, pois há termos constantes previamente calculados e armazenados na memória.

Figura 38 – Análise de $\rho_a(a)$. Os parâmetros do solo são de acordo com os da Fig. 35. Note que o valor do grau do polinômio n é variado, porém, o resultado final de $\rho_a(a)$ é semelhante, *i.e.*, economia de termos na série de potências.



Fonte: elaboração própria.

A abordagem aqui apresentada não necessita da solução de dispendiosos sistemas lineares, além de possuir pontos otimamente espaçados para a decomposição da função característica do solo. Observe a Fig. 38, note que a abordagem mostrada neste capítulo consegue representar a função de resistividade aparente com poucos termos. A economia na série de potências não só aumenta estabilidade da solução obtida, como diminui drasticamente o esforço computacional necessário para seu cálculo. Observe que a solução encontrada na figura mesmo com poucos termos já é satisfatória, em contrapartida a escolha de um grau muito alto causa instabilidade numérica (*cf.* Fig. 37).

6.4 Problema inverso

O equacionamento descrito até este ponto parte do pressuposto que se conhecem os parâmetros de resistividade e espessura das camadas. Porém, em problemas reais de medição da resistividade elétrica do solo precisa-se obter a resistividade e espessura das camadas a partir de valores medidos de tensão e corrente (dos quais indiretamente obtém-se a resistividade aparente). De acordo com Calixto (2012) chama-se a etapa referente a obter a resistividade elétrica a partir dos parâmetros do solo de problema direto. Ademais, chama-se a etapa referente a obter os parâmetros do solo a partir de valores de resistividade aparente de problema inverso.

Tomando um vetor β contendo os parâmetros do solo a serem ajustados

$$\beta = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N, \dots, d_1, d_2, \dots, d_{N-1}], \quad (6.37)$$

busca-se obter

$$\min_{\beta} \|\rho_{aE} - \rho_{aT}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m |\rho_{aE}(a_i) - \rho_{aT}(a_i, \beta)|^2} \quad (6.38)$$

O valor de β que minimiza essa equação é definido como erro mínimo quadrático e minimiza a norma euclidiana entre os pontos ensaiados e a função ajustada. A solução da Eq. 6.38 pode ser obtida a partir de métodos de otimização, amplamente discutidos na literatura. Inicialmente, pode-se citar o trabalho de Martins Neto (1998), que utiliza o método gráfico Yokogawa com refinamentos por tentativa e erro. Já o trabalho de Zhang et al. (2005) utiliza o método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) para realizar o processo de otimização. O trabalho de Calixto (2012) utiliza Algoritmos Genéticos (AG) para esse fim. Já o trabalho de Coelho (2015) utiliza Otimização por enxame de partículas (PSO) como algoritmo de otimização. Finalmente, o trabalho de Pereira (2016) utiliza a Evolução Diferencial (ED) para o processo de otimização.

Vale ressaltar que a solução do problema aqui mencionado está em constante progresso, inspirada pelos avanços nos algoritmos de otimização, em especial as meta-heurísticas. Todavia, uma abordagem testada e aprovada pelo autor deste trabalho é a Evolução Diferencial.

6.4.1 Estratificação do solo

A estratificação do solo consiste na solução do problema inverso para os dados do ensaio de Wenner, *i.e.*, resistividade aparente para cada espaçamento entre eletrodos ensaiado. Considere um exemplo ilustrativo, tome os dados de medição conforme as duas primeiras colunas da Tab. 5, os dados lidos no ensaio de Wenner correspondem aos valores de resistividade ρ_{aE} para cada espaçamento entre eletrodos a_E , logo a estratificação do

solo é obtida com a minimização do erro entre esses valores e os calculados com a ajuste dos parâmetros do solo pela Eq. 6.32.

Observe que a Tab. 5 apresenta os valores de resistividade aparente teórica ρ_{aT} variando a quantidade de camadas N , logo têm-se os resultados da otimização variando o modelo de uma a quatro camadas. Note que o erro entre a resistividade aparente medida e a calculada decresce com o incremento da quantidade de camadas do modelo.

Tabela 5 – Dados experimentais e erro absoluto para várias estratificações.

ensaio		$N = 1$		$N = 2$		$N = 3$		$N = 4$	
a_E (m)	ρ_{aE} ($\Omega.m$)	ρ_{aT} ($\Omega.m$)	erro (%)	ρ_{aT} ($\Omega.m$)	erro (%)	ρ_{aT} ($\Omega.m$)	erro (%)	ρ_{aT} ($\Omega.m$)	erro (%)
0.5	3094	3356.43	8.48	4172.99	34.87	3123.59	0.96	3150.30	1.82
1	3713	3357.43	9.60	4171.49	12.35	3628.36	2.28	3563.86	4.02
2	4360	3358.43	23.02	4159.79	4.59	4491.21	3.01	4504.45	3.31
4	5152	3359.43	34.85	4075.88	20.89	4993.91	3.07	5066.31	1.66
8	4021	3360.43	16.53	3615.07	10.10	4163.94	3.55	4112.18	2.27
16	2211	3361.43	51.81	2296.41	3.86	2098.49	5.09	2184.93	1.18
32	944	3362.43	255.55	1017.76	7.81	999.91	5.92	940.72	0.35

Fonte: elaboração própria.

Apresentam-se os resultados da estratificação para os diversos modelos adotados conforme a Tab. 6, onde ajustaram-se esses parâmetros no algoritmo de otimização. O autor deste trabalho utiliza a Evolução Diferencial (ED) como algoritmo de otimização. A ED é um algoritmo de busca estocástica originada nos mecanismos de seleção natural, esse algoritmo foi apresentado por Storn e Price (1995) e tem cada vez mais se destacando por sua velocidade e acurácia. Esse algoritmo apresenta uma boa capacidade de escapar de ótimos locais, visto que trabalha com uma população de parâmetros, que simultaneamente buscam a solução em diversas regiões do espaço de busca.

Tabela 6 – Modelo do solo estratificado para várias estratificações.

índice i	$N = 1$		$N = 2$		$N = 3$		$N = 4$	
	ρ_i ($\Omega.m$)	d_i (m)	ρ_i ($\Omega.m$)	d_i (m)	ρ_i ($\Omega.m$)	d_i (m)	ρ_i ($\Omega.m$)	d_i (m)
1	3356.43	∞	4173.21	10.67	2962.87	0.76	3048.33	1.02
2			655.42	∞	6043.18	6.21	8172.40	2.09
3					829.35	∞	3509.47	7.13
4							657.11	∞

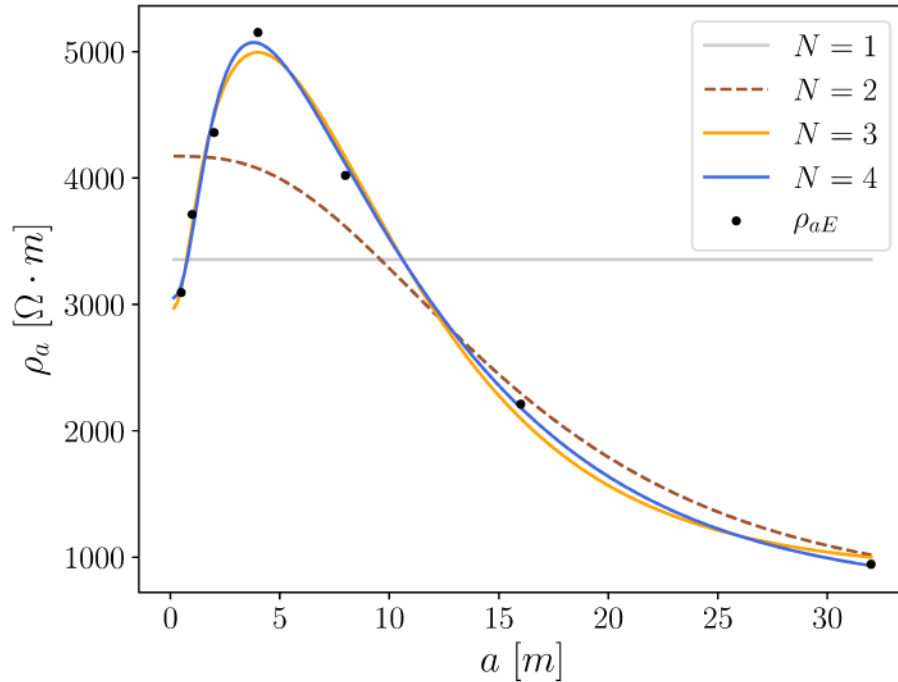
Fonte: elaboração própria.

O algoritmo ED possui as seguintes características: é bastante efetivo para solucionar problemas com uma função objetivo onde há descontinuidades, já que não necessita

de informação a respeito das derivadas da função; o algoritmo também realiza otimização local, visto que uma população convergente gera diferenciais que se tornam infinitesimais; a ED também não necessita de grandes populações para a convergência da solução, aumentando a performance do algoritmo em relação a outras meta-heurísticas como Algoritmos Genéticos. Uma explanação mais detalhada sobre a ED está fora do escopo deste trabalho¹.

Ao avaliarmos os valores da Tab. 6 para diversos valores de espaçamento entre eletrodos a , tal qual um espaçamento contínuo, chega-se ao resultado da Fig. 39. Observa-se que à medida que se aumenta a quantidade de camadas N , a curva de resistividade aparente possui mais liberdade para ajustar-se aos valores experimentais $\rho_{aE}(a_E)$, logo busca-se um grau suficiente para um erro tolerável.

Figura 39 – Resultado da estratificação para diversos valores de N .



Fonte: elaboração própria.

É de suma importância enfatizar que estratificações cujas medidas mais superficiais possuem alto erro não são admissíveis. De fato, consideram-se mais importantes as medidas superficiais, pois influenciam diretamente nos valores das camadas onde o sistema de aterramento está em contato direto.

¹ O leitor pode buscar mais informações *cf.* Pereira (2016)

Aplicações e Resultados

7.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se a aplicação do método proposto a sistemas de aterramento para os quais se conhece a solução, seja analítica, seja experimental, ou como forma de comparação com outros aplicativos propostos na literatura, a fim de confrontar os resultados. Muitos exemplos simulam sistemas de aterramento reais, onde o projeto foi utilizado como entrada para o aplicativo desenvolvido. O aplicativo da tese foi totalmente desenvolvido através de ferramentas de domínio público.

Todas as simulações foram realizadas em um computador Intel® Core™ i7-3610QM CPU @ 2.30GHz x8 com 16 GB de memória RAM. O aplicativo desenvolvido nesta tese foi escrito em linguagem C e utiliza processamento paralelo para o máximo de aproveitamento dos recursos computacionais. Para o processamento paralelo utilizou-se a biblioteca OpenMP. Para os algoritmos de solução de sistemas de equações lineares através da fatoração LU¹, integração numérica de Gauss-Legendre e Gauss-Kronrod utilizou-se a biblioteca Gnu Scientific Library (GSL). O algoritmo de integração numérica de quadratura para polinômios de Bessel foi escrito pelo autor desta tese, uma vez que por ser muito específico, não se encontra em bibliotecas numéricas. O algoritmo para a decomposição de funções em série de Chebyshev, tal como a otimização de uma função objetivo através da Evolução Diferencial, também foram escritos pelo próprio autor, uma vez que estes foram aperfeiçoados para o problema em questão quando comparado com algoritmos generalistas disponíveis em bibliotecas numéricas. Para a geração de gráficos utilizou-se a biblioteca Matplotlib da linguagem Python com o intuito de gerar figuras de melhor qualidade, embora o aplicativo desenvolvido gere figuras utilizando o GNU plot. Desenvolveu-se os desenhos CAD na extensão DXF a partir do aplicativo LibreCAD, os desenhos nesta extensão são interpretados pelo aplicativo proposto para assim localizar

¹ Optou-se por fatoração LU pois o método de Cholesky, embora mais eficiente, só poderia ser aplicado ao solo homogêneo, isso por questões da simetria da matriz.

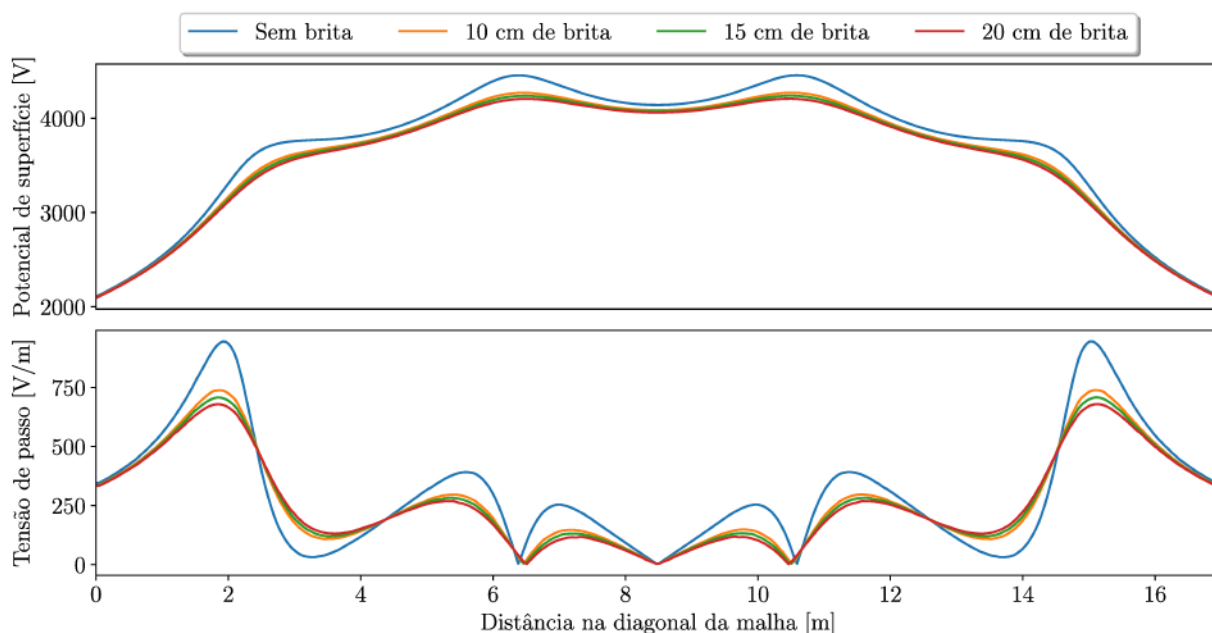
os eletrodos que compõe o sistema de aterramento.

Para a extração de dados de trabalhos de terceiros, tal como gráficos e desenhos de malhas de aterramento utilizou-se o aplicativo imageJ, uma ferramenta em Java para a medição de distâncias, localização de pontos, cálculo de áreas, entre outras aplicações, em imagens. Essa ferramenta é a mesma utilizada em aplicações biomédicas como a medição de parâmetros de imagens obtidas por microscópios em laboratórios. Utilizou-se este recurso para comparar os resultados obtidos nesta tese com resultados publicados por outros pesquisadores, com o máximo de precisão na extração desses resultados.

7.2 Influência do revestimento superficial

Nesta seção do capítulo se propõe uma análise do efeito do material de revestimento superficial em uma malha de aterramento. Como o aplicativo desenvolvido é genérico, diversas simulações e estudos podem ser realizados ao utilizá-lo, um caso específico é analisar o comportamento do potencial de superfície (em relação ao um ponto distante), tensão de toque e de passo na superfície do solo sem um revestimento superficial e com diferentes espessuras de revestimento superficial.

Figura 40 – Influência de uma camada de brita no sistema de aterramento.



Fonte: elaboração própria.

O sistema simulado é uma malha com 3 x 3 m de quadrícula, composta por 3 x 3 quadrículas, imersa em um solo homogêneo de $100 \Omega.m$ a qual é injetada uma corrente de 1 kA. Para esse mesmo sistema de aterramento adiciona-se uma camada de revestimento superficial de brita, com resistividade $\rho_s = 10 k\Omega.m$ e espessura variando para os valores de 10, 15 e 20 cm. A resistividade da brita depende da umidade e varia de 3000 a

$7 \times 10^6 \Omega.m$ (IEEE Std 80, 2000), escolheu-se um valor intermediário como forma de ilustração do problema, os valores que seriam obtidos para o solo estudado, mesmo com a brita úmida, seriam equivalentes devido ao contraste das resistividades das camadas.

O objetivo deste estudo é mostrar a influência da brita na resistência de aterramento e nos potenciais de superfície (como consequência na tensão de toque) e tensão de passo. Inicialmente analisa-se a influência da brita na resistência de aterramento. A resistência de aterramento calculada para o solo sem a camada de brita é de $4,86559 \Omega$; para o solo adicionado de uma cada de 10 cm de brita é $4,86489 \Omega$; já para o solo adicionado de uma cada de 15 cm de brita é $4,86454 \Omega$; finalmente, para o solo adicionado de uma cada de 20 cm de brita é $4,8642 \Omega$. Conclui-se então que a brita não influencia na resistência de aterramento do sistema.

Como se pode observar pela análise da Fig. 40, a adição da camada de brita tem influência nos potenciais de superfície, não apenas no seu valor, mas em sua forma, ou seja, a adição da brita tem um efeito de uniformização no potencial de superfície. A redução do potencial de superfície máximo, em comparação ao solo se brita, foi de 4,15% para a camada de 10 cm, 4,88% para a camada de 15 cm e 5,59% para a camada de 20 cm. A redução da tensão de toque é a mesma que a redução do potencial de superfície, note que houve apenas uma pequena redução para essas grandezas quando comparados com o solo sem brita. Já a tensão de passo máxima, que é função do gradiente de potencial na superfície do solo, tem o seu valor bastante reduzido com a inserção da camada de brita. Em comparação ao solo se brita, houve uma redução de 21,83% para a camada de 10 cm de brita, uma redução de 25,07% para a camada de 15 cm e de 28,10% para a camada de 20 cm em comparação ao solo sem brita.

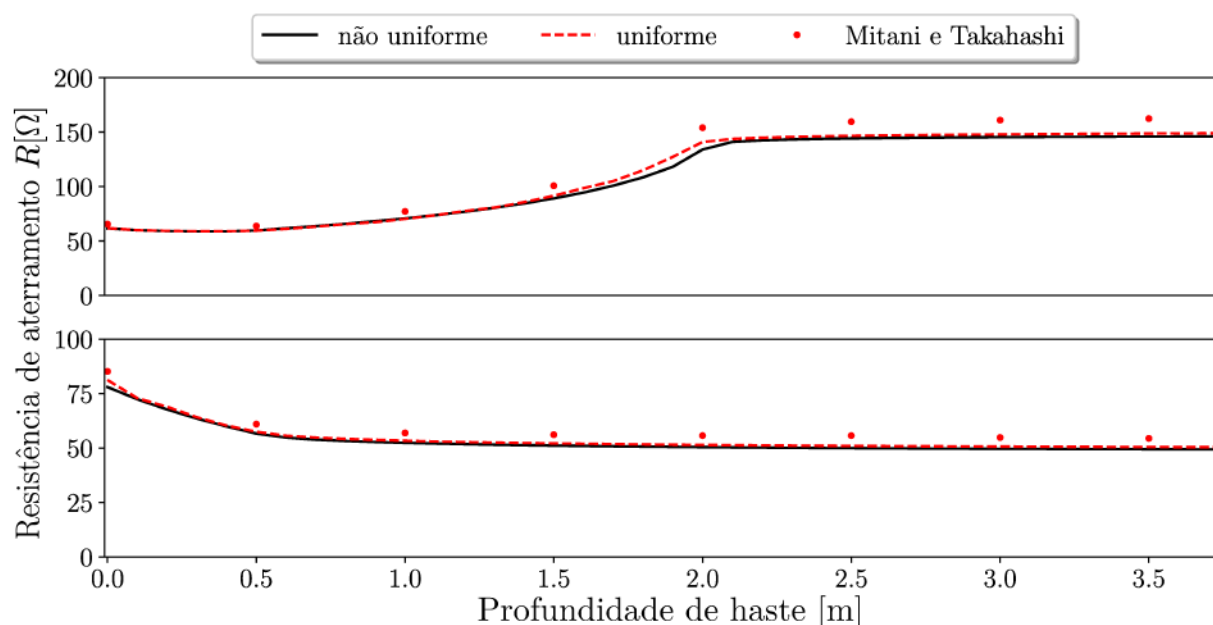
Sabe-se que uma camada de revestimento superficial de alta resistividade aumenta a resistência de contato entre o solo e os pés de uma pessoa, diminuindo a corrente de choque e assim aumentando as tensões de toque e de passo admissíveis. Todavia, com o estudo aqui apresentado é possível observar outra característica da adição dessa camada superficial, que é a uniformização do potencial de superfície, o que reduz as tensões de passo na região da malha. Vale ressaltar que o estudo realizado seria bastante difícil de realizar utilizando um método numérico como o Método das Diferenças Finitas ou o Método dos Elementos Finitos devido ao contraste de dimensões entre o solo semi-infinito e uma camada de pequena espessura como a brita, o que resultaria em um desenho com muitos nós para a obtenção da solução. Ademais, o aplicativo proposto calculou a solução apenas nos pontos de interesse, que representam uma linha de medição na diagonal da malha, o que também não é possível com grande parte dos métodos numéricos.

7.3 Modelo de Takahashi e Kawase

O trabalho de Tagg (1964) desenvolveu modelo de cálculo para hastes de aterramento em um solo de duas camadas, estudo feito adotando a corrente no segmento da haste como uniforme dentro de uma camada. Com o intuito de aprimorar esse modelo, Takahashi e Kawase (1991) generalizaram esse modelo para um solo multicamadas e realizaram um estudo paramétrico de hastes profundas em solos com uma grande discrepância entre a resistividade das camadas, obtendo assim uma família de curvas padrões para as hastes. Esse artigo valida seu equacionamento ao comparar o cálculo da resistência de uma haste em um solo de duas camadas com a equação de Tagg (1964), que é um caso específico do solo multicamadas.

Já o trabalho de Mitani e Takahashi (2000) aplica o equacionamento desenvolvido no artigo original para a obtenção do potencial de superfície de uma haste em um solo de duas camadas, este artigo também ilustra um exemplo do efeito de uma resistividade alta em cada camada de um solo de duas camadas. Nesta seção do capítulo é feito um estudo paramétrico da resistência de aterramento de uma haste ao variar a sua profundidade, tal como realizado em Mitani e Takahashi (2000), comparando assim a solução obtida nesta tese com o modelo de Takahashi e Kawase (1991).

Figura 41 – Análise paramétrica da resistência de aterramento de uma haste em solos de duas camadas.

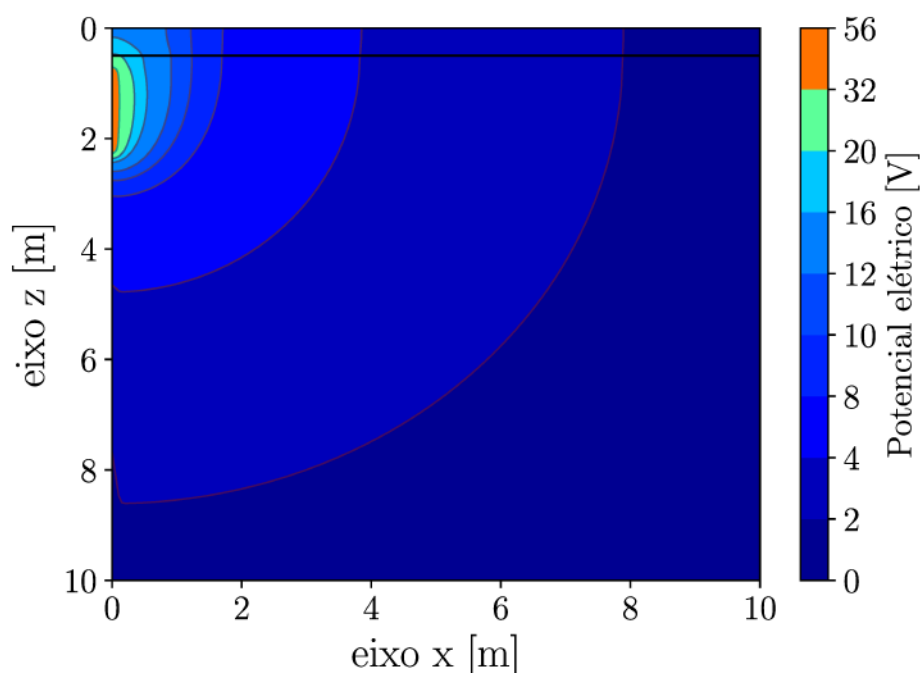


Fonte: adaptado de Mitani e Takahashi (2000).

Uma haste de 1,5 m de comprimento e 7 mm de raio é enterrada em um solo de duas camadas. Dois estudos são realizados e os resultados são apresentados conforme a Fig. 41. A primeira figura de cima para baixo mostra a resistência de aterramento ao se variar a profundidade do topo da haste da superfície do solo até a profundidade

de 3,5 m. O solo estudado nesse primeiro caso tem a resistividade da primeira camada igual a $100 \Omega.m$, com profundidade de 2 m, e a resistividade da segunda camada é igual a $300 \Omega.m$. Já o solo no segundo caso (segunda figura de cima para baixo) tem a resistividade da primeira camada igual a $10 k\Omega.m$, com profundidade de 0,5 m, e a resistividade da segunda camada é igual a $100 \Omega.m$. Os resultados obtidos com o aplicativo desenvolvido nesta tese, conforme apresentados na Fig. 41, foram obtidos com os dois modelos para a distribuição da corrente que flui da haste para o solo apresentados na Seção 5.4 desta tese, o uniforme e o não uniforme. Os resultados de Mitani e Takahashi (2000), que utiliza o modelo uniforme para a distribuição da corrente, são comparado com a solução obtida nesta tese. A Fig. 42 é a replicação do resultado obtido em Mitani e Takahashi (2000) com o aplicativo proposto nesta tese, o perfil de potencial é gerado por uma haste de 1,5 m e 7 mm de raio, a uma profundidade de 0,75 m no solo do segundo estudo de caso (camada superior de alta resistividade), sendo injetado 1 A no sistema de aterramento. Os resultados obtidos condizem com os do artigo analisado, como esperado.

Figura 42 – Potencial elétrico em um perfil do solo gerado por uma haste de aterramento.



Fonte: adaptado de Mitani e Takahashi (2000).

A maior discrepância entre os resultados obtidos nesta tese e os de Mitani e Takahashi (2000), utilizando o modelo de corrente uniforme, foram em torno de 8% para o primeiro estudo de caso e de 5% para o segundo estudo de caso. Algumas considerações podem ser realizadas sobre os resultados obtidos. Em primeiro lugar o modelo não uniforme, que é mais preciso, apresentou uma leve discrepância em relação ao modelo uniforme, em especial para o primeiro estudo de caso. O artigo analisado utiliza um método analítico para a integração, que além de se limitar a uma haste única em um solo de duas camadas, apresenta uma grande quantidade de termos a serem avaliados. O aplicativo

desenvolvido nesta tese, além de calcular a resistência de uma haste em um solo de múltiplas camadas, utiliza um método de integração numérica adaptativo, que faz subdivisões recursivas do domínio de integração conforme a necessidade, sendo a precisão da integração no domínio avaliada por uma métrica de erro, o método da quadratura adaptativa de Gauss-Kronrod, uma maneira extremamente eficiente e precisa de se realizar integrações numéricas.

7.4 Simulador do LRC (Lightning Research Center)

Esta seção do capítulo compara os resultados obtidos com o aplicativo desenvolvido nesta tese e alguns resultados do aplicativo de simulação de sistemas de aterramento do laboratório LRC da UFMG. Para tal, utiliza-se os resultados apresentados em Raggi (2009) para solos de três camadas hipotéticos. Um dos objetivos de Raggi (2009) com as simulações desenvolvidas foi encontrar um modelo de duas camadas equivalente para solos de três camadas. Utiliza-se aqui para comparação apenas os resultados obtidos por essa autora para o solo de três camadas.

Tabela 7 – Comparativo entre o valores de Raggi (2009) e os calculados para a resistência de aterramento de uma malha em um solo de três camadas.

Caso	ρ_1 [$\Omega.m$]	ρ_2 [$\Omega.m$]	ρ_3 [$\Omega.m$]	d_1 [m]	d_2 [m]	R_{icp} [Ω]	R_{calc} [Ω]	ΔR [%]
1	500	2500	1000	2,5	5	37,92	37,92	-0,01
2	500	2500	7500	2,5	5	66,39	65,50	-1,35
3	500	100	250	2,5	5	13,53	13,53	-0,03
4	500	100	50	2,5	5	11,37	11,46	0,80
5	500	2500	100	2,5	5	29,01	29,14	0,44
6	500	100	2500	2,5	5	19,33	18,97	-1,90
7	500	2500	1000	5	10	32,32	32,36	0,12
8	500	2500	7500	5	10	47,55	46,57	-2,11
9	500	100	250	5	10	16,10	16,07	-0,16
10	500	100	50	5	10	14,97	14,96	-0,03
11	500	2500	100	5	10	27,62	27,75	0,45
12	500	100	2500	5	10	19,30	18,87	-2,30

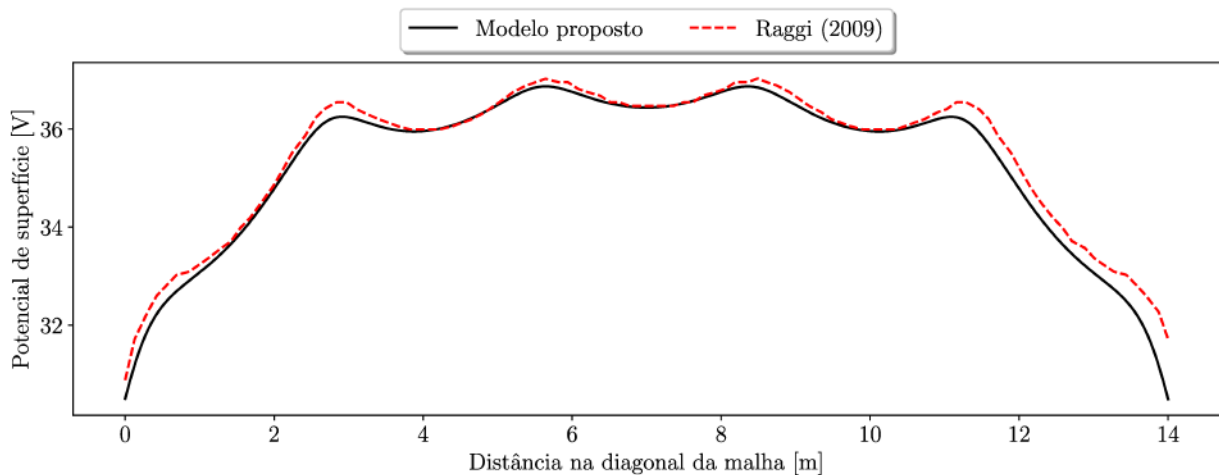
Fonte: adaptado de Raggi (2009).

O trabalho de Raggi (2009) utiliza o método das imagens complexas, baseado no trabalho de Pereira Filho (1999), para o cálculo da função potencial de um eletrodo de aterramento. Em contrapartida, esta tese apresenta um método de integração numérica para a obtenção da função potencial, não expandindo a função característica do solo em uma somatória de exponenciais. A comparação dos resultados obtidos através de vários parâmetros do solo é apresentada na Tab. 7, onde calcula-se a resistência de aterramento de uma malha quadrada com 10 m de lado, composta por quadriculas de 2 m x 2 m,

condutores de 5 mm de raio e enterrada a uma distância de 0,4 m da superfície do solo. Os valores da autora citada são ilustrados na coluna R_{icp} (Imagens Complexas) e a coluna R_{calc} apresenta os valores obtidos no aplicativo desenvolvido nesta tese.

Sobre os resultados obtidos nesta tese em comparação com o trabalho original, nota-se que os valores são praticamente coincidentes. A diferença percentual entre os valores obtidos nesta tese em comparação com Raggi (2009) são mostrados na coluna ΔR da Tab. 7. Os casos que obtiveram o maior desvio nos resultados foram na ordem de 2%, o que é um desvio mínimo. Todavia, os casos onde o desvio foi maior foram justamente onde houve uma maior discrepância no valor da resistividade de camadas adjacentes. A autora não especificou a quantidade de imagens complexas utilizadas para modelar cada solo estudado, nem se foi um parâmetro fixo ou variável. Ao longo do desenvolvimento desta tese, em especial em Coelho, Pereira e Neto (2018), apresentou-se um estudo sobre a escolha da quantidade de termos na representação da função característica do solo em uma somatória de exponenciais. A escolha subdimensionada da quantidade de termos resulta em um resultado impreciso para o potencial, já a escolha superdimensionada da quantidade de termos pode causar instabilidade numérica devido à precisão finita das variáveis no computador. A decomposição da função característica do solo em uma série de exponenciais nesta tese foi utilizada somente para o cálculo de potenciais na superfície do solo (o que contempla a estratificação do solo), para as demais profundidades, como no cálculo da resistência de aterramento, utilizou-se um método de integração numérica baseado nas raízes do polinômio de Bessel, o qual tem um critério de parada, necessitando de menos iterações para modelos de solos simples e mais iterações para modelos complexos.

Figura 43 – Potencial elétrico na diagonal de uma malha de aterramento.



Fonte: adaptado de Raggi (2009).

Também se realizou uma simulação para os potenciais de superfície da malha simulada, conforme a Fig. 43, que ilustra o estudo de caso 1 da Tab. 7. O trabalho de Raggi (2009) apresenta o cálculo do potencial elétrico na diagonal da malha de aterramento, sendo que os resultados obtidos com o aplicativo desta tese e do trabalho em questão

muito similares, o que era esperado devido à proximidade dos resultados obtidos no cálculo da resistência (a equação utilizada para o cálculo do potencial é utilizada no cálculo da resistência). Todavia, os resultados de simulação apresentados por Raggi (2009) para esse primeiro estudo de caso têm uma leve assimetria, o que não era esperado para uma malha de aterramento totalmente simétrica.

7.5 Método dos Elementos Finitos

Esta seção do capítulo analisa os resultados obtidos em Silva (2006), que utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a solução de problemas de aterramentos elétricos. A aplicação do MEF necessita da discretização do domínio de estudo em subdomínios, respeitando as interfaces entre regiões a materiais distintos. Quando o domínio ou parte dele apresenta contrastes muito grandes entre uma dimensão e as demais, a quantidade de elementos e, portanto, a ordem do sistema de equações pode inviabilizar o custo computacional da solução. Esse contraste de dimensões é o caso dos aterramentos elétricos. Para contornar este problema, Cardoso (1993) propôs a representação dos eletrodos como segmentos de reta, cuja área se degeneraria em um nó da malha de elementos finitos, viabilizando assim a solução de problemas de aterramentos elétricos através do MEF, essa é a abordagem utilizada por Silva (2006) em seu trabalho, cujos resultados serão comparados com a abordagem proposta nesta tese.

Como já apresentado pelo autor desta tese em Coelho e Pontes (2014), o MEF apresenta bons resultados quando comparados com fórmulas analíticas, em especial para estudos de arranjos de hastes de aterramento. Com o intuito de se realizar um comparativo do aplicativo desenvolvido com os resultados de uma simulação utilizando o MEF, tomase como exemplo um estudo de caso extraído de Silva (2006), com os dados experimentais de Bourg, Sacepe e Debu (1995). Considera-se um sistema de aterramento composto por uma haste profunda de 32 m de comprimento e 4 mm de raio, imersa em um solo homogêneo de $450 \Omega.m$. A Tab. 8 mostra os resultados obtidos para a resistência elétrica dessa haste profunda. A diferença entre a resposta obtida pelo aplicativo desenvolvido, utilizando o equacionamento para a solução genérica de solos heterogêneos, tanto para o cálculo do potencial, como para o cálculo da resistência de aterramento, foi na ordem de $10^{-9} \%$, o que é uma solução exata para os padrões de engenharia.

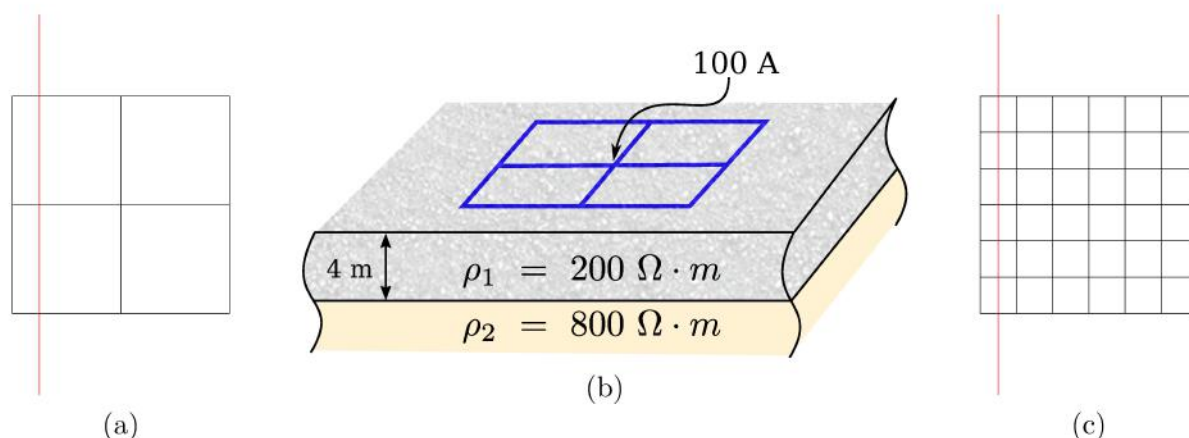
Tabela 8 – Comparativo entre o valores da simulação usando o MEF de Silva (2006), com os dados experimentais de Bourg, Sacepe e Debu (1995) e a abordagem proposta.

Analítico	MEF	Proposto	Experimental
20,98 Ω	21,42 Ω	20,98 Ω	21 Ω

Fonte: adaptado de Silva (2006).

Como segundo estudo de caso, toma-se agora um estudo de malhas de aterramento enterradas em um solo de duas camadas, tal como ilustra a Fig. 44b. Os próximos exemplos analisados correspondem a malhas quadradas de 16 m x 16 m, enterradas a 0,6 m de profundidade em um solo estratificado em duas camadas: a primeira com 4 m de profundidade e $\rho_1 = 200 \Omega \cdot m$ e a segunda de $\rho_2 = 800 \Omega \cdot m$. As malhas são compostas de eletrodos de cobre de diâmetro 0,1 m formando um reticulado. Uma corrente de 100 A é injetada na malha. Os exemplos foram extraídos de Silva (2006), com dados experimentais de Dawalibi e Mukhedkar (1975) para a elevação de potencial na superfície do solo nessas configurações estudadas.

Figura 44 – As malhas de aterramento simuladas têm de 16 x 16 m, sendo o potencial traçado ao longo de uma linha de medição ilustrada junto aos desenhos. (a) Malha formada por quadrículas de 4 x 4 quadrículas. (b) Ilustração de uma malha de aterramento utilizada nos estudos de caso. (c) Malha formada por quadrículas de 36 x 36 quadrículas.

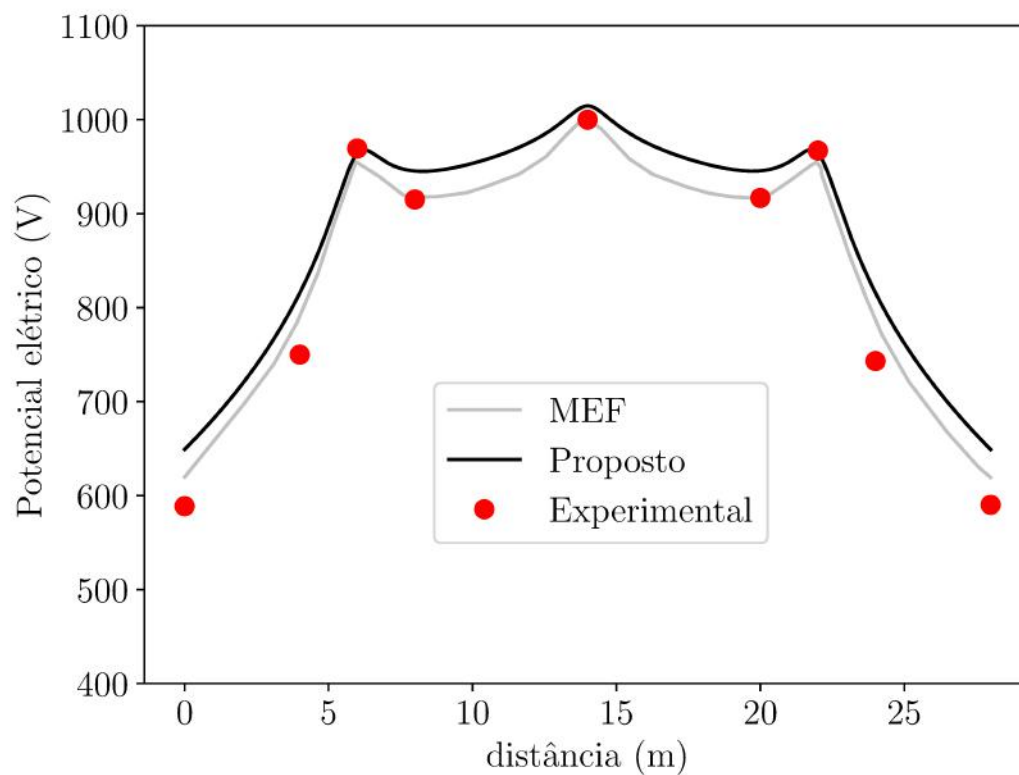


Fonte: adaptado de Silva (2006).

As Figuras 44a e 44c ilustram o desenho das configurações simuladas, a linha de medição do potencial de superfície é destacada. Esses desenhos são parâmetros de entrada do aplicativo desenvolvido, sendo desenhados em um aplicativo de CAD e exportados na extensão DXF, o sistema de aterramento e a linha de medição são desenhados em camadas distintas, assim que o aplicativo faz a distinção entre os eletrodos de aterramento e a linha de medição do potencial de superfície.

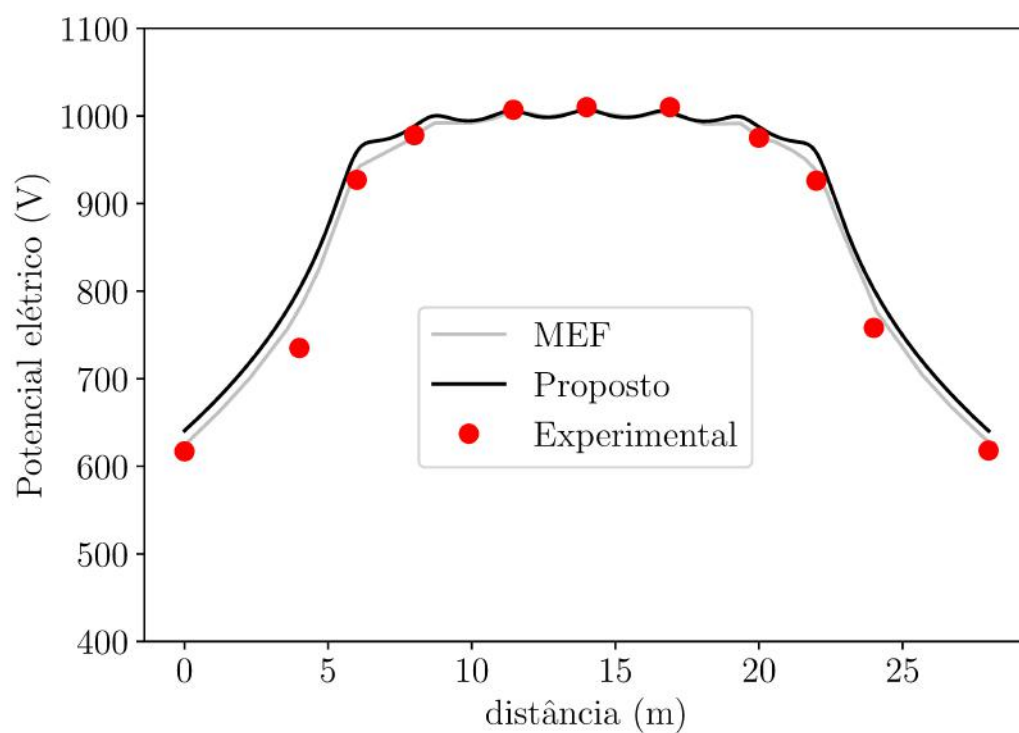
Os resultados de simulação para as duas configurações de aterramento estudadas são apresentadas na Figura 45 para o sistema da Fig. 44a e Figura 46 para o sistema da Fig. 44c. É feita uma comparação entre os resultados do aplicativo proposto, a solução utilizando o MEF de Silva (2006) e os resultados experimentais de Dawalibi e Mukhedkar (1975). Note que todos os resultados analisados estão de acordo, o que mais uma vez destaca a precisão dos resultados obtidos com o aplicativo proposto, agora tomando como referência o pacote de simulação LMAGLIB da USP, que é baseado no solucionador para elementos finitos GetDP e Gmesh para a discretização do domínio.

Figura 45 – Potencial elétrico na linha de medição, como apresentado na Fig. 44a.



Fonte: adaptado de Silva (2006).

Figura 46 – Potencial elétrico na linha de medição, como apresentado na Fig. 44c.



Fonte: adaptado de Silva (2006).

Algumas considerações podem ser realizadas a respeito dos resultados obtidos, a resistência de aterramento calculada para a malha da Fig. 44a foi de $10,6836 \Omega$ e para a Fig. 44c foi de $10,2822 \Omega$, os dados de resistência de aterramento em ambos os trabalhos utilizados como referência não foram divulgados. Os estudos de caso foram simulados assumindo um único valor para a corrente em cada eletrodo horizontal, o que pode ter afetado a precisão para o caso da Fig. 44a, onde o espaçamento entre os eletrodos é muito grande, o que não aconteceu para o caso da Fig. 44c, uma vez que o espaçamento entre os eletrodos é mais condizente com malhas de aterramentos utilizadas na prática.

O MEF é de grande utilidade para a solução de problemas genéricos e com geometrias complexas. Todavia, a simulação de sistemas de aterramentos utilizando o MEF, mesmo quando feita tomando elementos unidimensionais na representação dos eletrodos, necessita de uma quantidade muito grande de elementos para a discretização do domínio, e como consequência a solução de um dispendioso sistema de equações lineares. Para o estudo realizado, Silva (2006) calculou o potencial elétrico em diversos pontos de um espaço tridimensional, mesmo necessitando somente do potencial ao longo de uma trajetória específica na superfície do solo. O aplicativo desenvolvido, que é específico para problemas de aterramentos elétricos, independe de uma discretização do domínio para sua solução, o que permite o cálculo do potencial elétrico somente nos pontos desejados, reduzindo assim cálculos desnecessários. Outra vantagem de se utilizar o aplicativo proposto em relação ao MEF é que não se faz necessário um truncamento do domínio semi-infinito (solo), que pode ser feito aplicando condições específicas com o intuito de se diminuir esse erro de truncamento. O aplicativo proposto foi baseado em equações analíticas, que já tomam o solo como um meio semi-infinito sem a necessidade de truncá-lo para a solução.

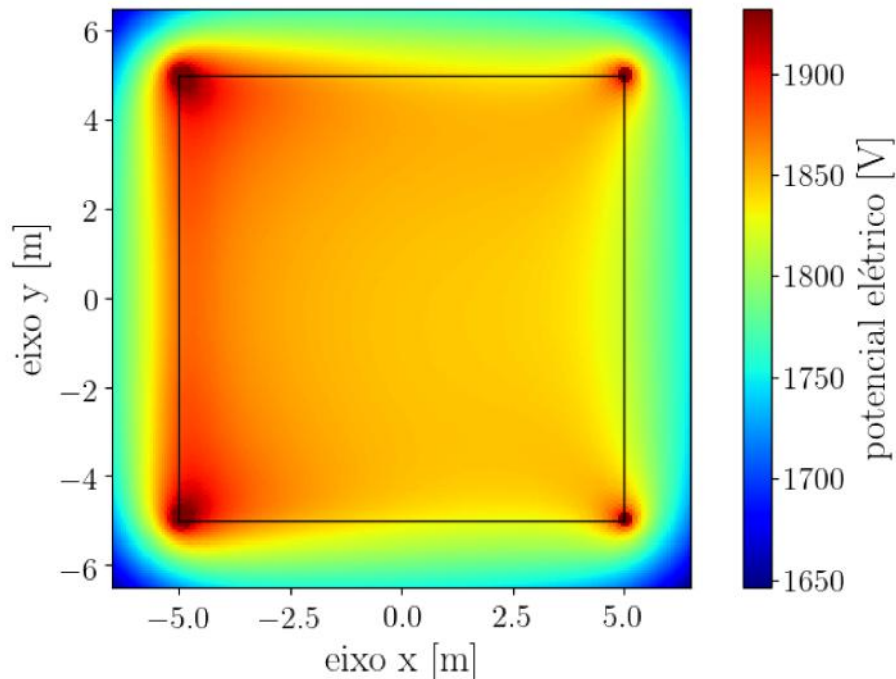
Outra dificuldade que se tem ao utilizar o MEF para problemas de aterramentos elétricos é a modelagem do solo em camadas. Embora esse método permita o desenho de camadas genéricas, não necessariamente verticais ou horizontais, quando a espessura de uma camada é muito fina em comparação com as demais, essa necessita de um acréscimo muito grande de elementos na discretização da região. Note que na Fig. 44b, a primeira camada do solo é de 4 m, o que não é um problema para o MEF. Agora, tome os exemplos de estratificação apresentados no Capítulo 6 desta tese, em muitos casos encontramos camadas intermediárias com menos de meio metro de espessura, e isso é algo comum na prática, sem contar a camada de revestimento superficial de alguns centímetros que pode ser adicionada (lembre-se que a última camada do solo estratificado é sempre infinita, ou seja, haverá um contraste de dimensões). O aplicativo proposto permite a inserção de camadas horizontais com contrastes de espessuras para o modelo do solo heterogêneo, o que é uma grande vantagem para se modelar sistemas de aterramentos com dados reais de estratificações do solo e até mesmo levar em consideração os efeitos da camada de revestimento superficial.

7.6 Eletrodo de Vujević e Kurtović

O trabalho de Vujević e Kurtović () propõe um método para a simulação de sistemas de aterramento onde cada função característica do solo heterogêneo é aproximada pela combinação linear de 15 exponenciais. Tomando como base a notação para o equacionamento desta tese, o trabalho citado faz com que $\mathcal{F}_{ij}(\lambda) \approx \sum_{i=1}^{15} \alpha_i \exp(-\lambda/\beta_i)$ e $\mathcal{G}_{ij}(\lambda) \approx \sum_{i=1}^{15} \gamma_i \exp(-\lambda\delta_i)$, onde α , β , γ e δ são obtidos por mínimos quadrados através de uma amostragem das funções características do solo heterogêneo. Vujević e Kurtović () garantem que os expoentes β_i e δ_i são sempre positivos (caso contrário a integral de Lipschitz não poderia ser utilizada).

Já o trabalho de Pereira Filho e Cardoso (2001), que é uma extensão de Pereira Filho (1999), utiliza como forma de solução da função potencial o método das imagens complexas. O método também consiste em aproximar as funções características do solo heterogêneo em uma combinação linear de exponenciais, agora chamados de polos e resíduos, porém os coeficientes agora obtidos estão no universo dos números complexos. O trabalho citado utiliza um algoritmo de decomposição baseado em autovalores e autovetores de tal forma que se determina uma quantidade adequada de imagens complexas para o cálculo da função potencial.

Figura 47 – Potencial de superfície para o eletrodo de Vujevic e Kurtovic



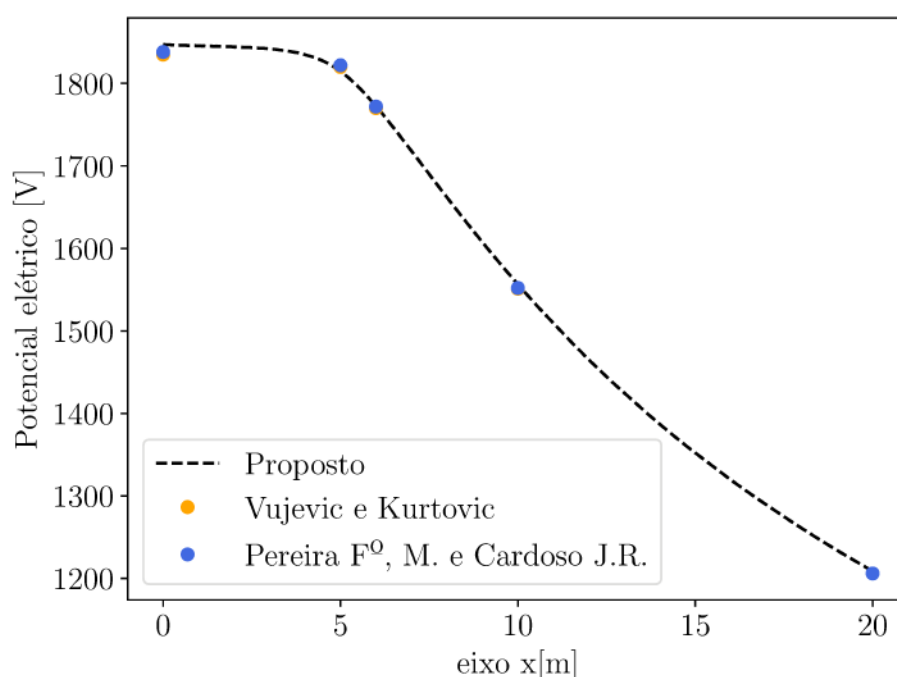
Fonte: adaptado de Pereira Filho e Cardoso (2001).

Toma-se agora um estudo de caso de um sistema de aterramento em três dimensões proposto por Vujević e Kurtović () em um solo estratificado de três camadas horizontais. Esse sistema de aterramento é uma malha quadrada de 10 m de lado com uma haste profunda de 20 m em cada vértice, a profundidade do cabo esquerdo é de 0,5 m e a do

cabo direito é de 1,5 m (note que a malha está inclinada), o diâmetro do cabo e da haste são de 11 mm, sendo injetada uma corrente de 1 kA no sistema de aterramento. O solo é estratificado em três camadas, sendo a primeira camada com resistividade $10 \Omega.m$ e espessura 2 m, a segunda camada com resistividade $100 \Omega.m$ e espessura 10 m e a terceira camada é infinita com resistividade igual a $500 \Omega.m$.

A Figura 47 é uma replicação da simulação de Pereira Filho e Cardoso (2001) para o potencial de superfície, todavia utiliza-se o aplicativo proposto nesta tese. Os resultados estão em excelente concordância, o que fica evidente quando se utiliza os pontos em uma linha de medição tal como Vujević e Kurtović () e Pereira Filho e Cardoso (2001) fizeram, apresentando esses valores em tabelas. A Figura 48 evidencia a plena concordância entre os valores obtidos pelo aplicativo proposto, os de Pereira Filho e Cardoso (2001) e os de Vujević e Kurtović (), todos obtidos com técnicas distintas para a cálculo da função potencial de um solo multicamadas.

Figura 48 – Potencial ao longo de uma linha de medição do ponto central da malha até uma distância afastada de 20 m para o eletrodo de Vujević e Kurtović ().



Fonte: elaboração própria.

Vujević e Kurtović () também apresentam o resultado obtido para a distribuição da corrente que flui das hastes profundas para o solo, sendo o resultado obtido concordante com o modelo não uniforme para a distribuição da corrente utilizado nesta tese, onde pode se observar uma concentração maior desse fluxo de corrente na extremidade da haste. O modelo não uniforme utilizado nesta tese assume que a corrente não é constante ao longo da haste e nem ao longo dos segmentos da haste em cada camada do solo heterogêneo, como proposto por Tagg (1964) e Takahashi e Kawase (1991).

7.7 Sistemas de aterramento de larga escala

A tese de doutorado de Ezponda (1995), a qual foi premiada pelo grupo ENDESA por sua inovação no projeto de subestações, foi a base para o desenvolvimento do aplicativo TOTBEM do Grupo de Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade da Coruña, Espanha. O trabalho citado propõe uma formulação para o problema de aterramentos elétricos à frequência industrial utilizando o Método dos elementos de Contorno (BEM), a qual é baseada na aplicação do teorema de Green e no método das imagens para a fonte pontual em um meio de duas camadas. Da mesma forma do procedimento apresentado nesta tese, a formulação utilizando o BEM possibilita o cálculo do potencial elétrico somente em uma região de interesse, que geralmente é a superfície do solo, não necessitando a determinação do potencial elétrico em todo o domínio da solução. Esta seção do capítulo é dedicada a estudos de caso de sistemas de aterramento de subestações reais e de larga escala, onde os resultados obtidos pelo aplicativo TOTBEM, extraídos de diversas publicações, serão comparados com os obtidos através do aplicativo desenvolvido nesta tese.

Simulações de sistemas de aterramento em larga escala envolvem uma quantidade muito grande de eletrodos, os quais se devem determinar a corrente, mesmo adotando um eletrodo como um segmento de reta de corrente uniforme ao invés de pontos discretos ao longo de uma reta. Esse cálculo é realizado através de um sistema de equações lineares, onde se assume a condição de equipotencialidade. Como mostra a Seção 3.5.2 desta tese, para a obtenção da distribuição de correntes nos eletrodos é necessário a solução de um sistema de equações lineares onde cada termo da matriz de resistências é composto do resultado de uma integração numérica que, mesmo ao se adotar a simetria em parte da matriz de resistências, a sua determinação se torna uma etapa dispendiosa. A solução do sistema de equações lineares também é dificultada devido à ordem do sistema, todavia a montagem da matriz de resistências é mais difícil do que a própria solução do sistema. Para sistemas de larga escala a etapa de obtenção das correntes nos eletrodos é mais dispendiosa que a obtenção da distribuição bidimensional do potencial elétrico no solo, que é a etapa que toma mais tempo para o caso de um sistema com poucos eletrodos.

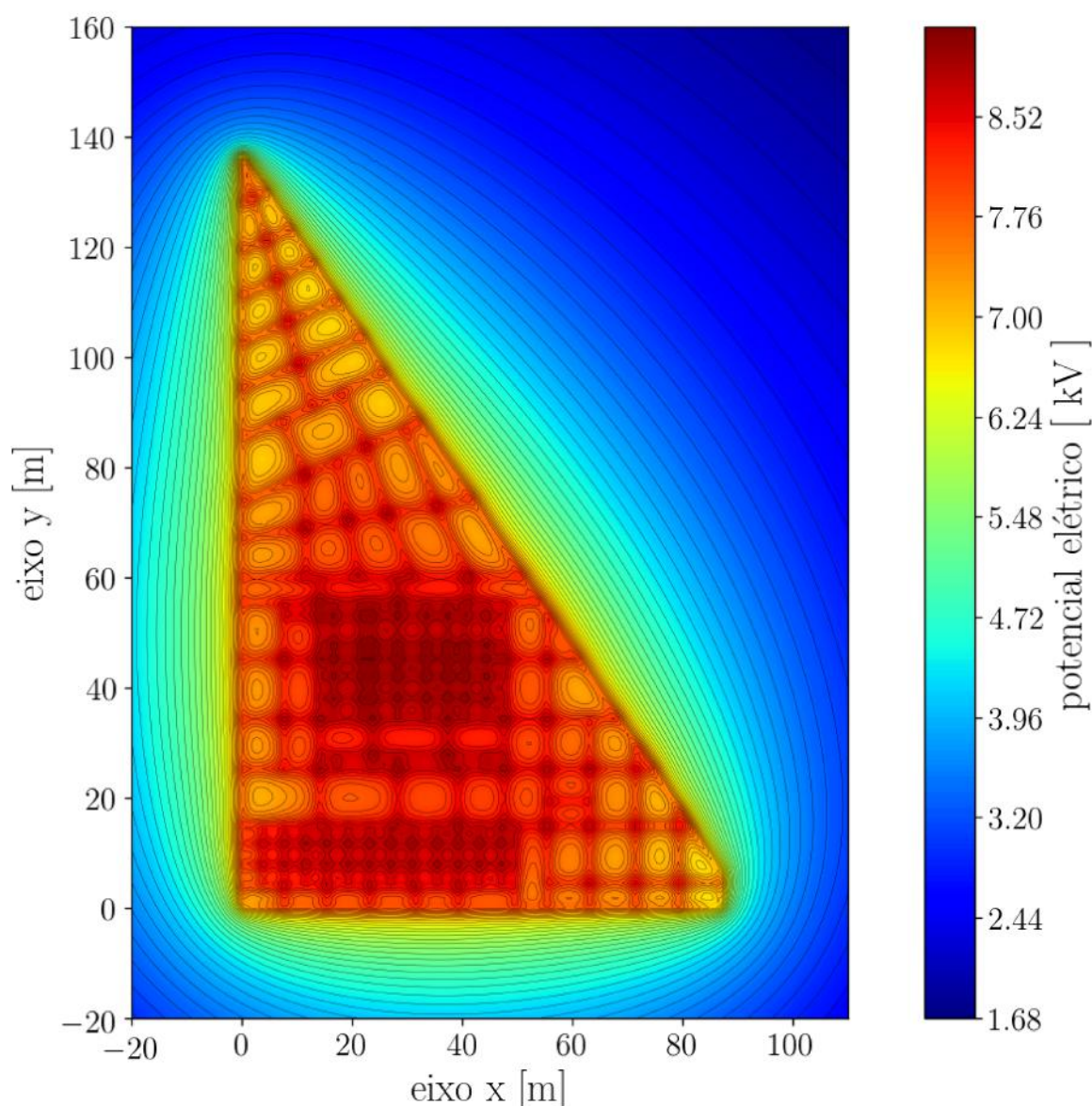
Como primeiro estudo de caso apresenta-se o aterramento da subestação Barberá, que se localiza próximo da cidade de Barcelona na Espanha. O sistema de aterramento é composto por 408 eletrodos horizontais de 12,85 mm de diâmetro, enterrados a uma profundidade de 0,8 m, cobrindo uma área de 6500 m². A primeira camada do solo tem resistividade 200 $\Omega.m$ e espessura 1,2 m, a segunda camada do solo tem resistividade 60 $\Omega.m$. A corrente injetada no sistema é de 25,88 kA.

Este estudo de caso² foi extraído de Colominas et al. (1998), sendo os valores

² A mesma subestação também se encontra em Colominas, Navarrina e Casteleiro (2007).

do potencial de superfície bidimensionais comparados com Colominas et al. (2012). A resistência de aterramento calculada com o aplicativo desenvolvido nesta tese foi de $0,395 \Omega$, já o resultado obtido por Colominas et al. (1998) foi de $0,386 \Omega$. O tempo de simulação para esse sistema de aterramento foi de 4' 24" utilizando a modelagem de solo heterogêneo para uma quantidade arbitrária de camadas, o que poderia ser drasticamente reduzido ao se utilizar o equacionamento para o potencial elétrico específico para o solo de duas camadas, que tem solução simples e bastante difundida na literatura (SUNDE, 1968).

Figura 49 – Subestação Barberá: Potencial de superfície.



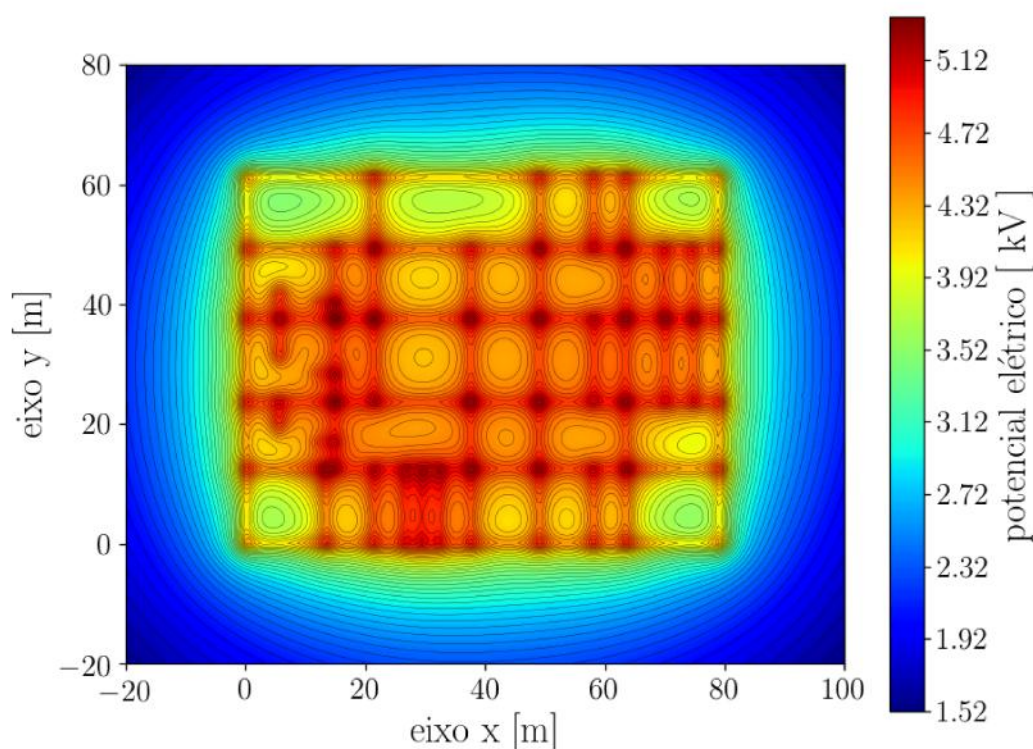
Fonte: adaptado de Colominas et al. (2012).

A Figura 49 ilustra o potencial elétrico na superfície do solo para este primeiro estudo de caso. Para a geração da figura foram calculados 400 pontos igualmente espaçados, sendo os pontos intermediários interpolados na geração da imagem pela biblioteca gráfica utilizada (Matplotlib da linguagem Python). A figura mostra o potencial elétrico

em escala de cores junto com linhas equipotenciais traçadas em preto. Em Colominas et al. (2012) também é apresentada uma figura equivalente, os resultados para o potencial elétrico calculado e também para o comportamento das linhas equipotenciais estão em plena concordância.

O segundo estudo de caso, também extraído de Colominas et al. (1998), é o do sistema de aterramento da subestação Balaídos II, localizada próximo da cidade de Vigo na Espanha. Este sistema de aterramento é composto por 107 eletrodos horizontais e 67 hastes de aterramento de 2,5 m de comprimento e 7 mm de raio, ambos enterrados a 0,8 m da superfície do solo, cobrindo uma área de 4800 m². A primeira camada do solo tem resistividade 200 $\Omega.m$ e espessura 1,2 m, a segunda camada do solo tem resistividade 60 $\Omega.m$. A corrente injetada no sistema é de 21,14 kA.

Figura 50 – Subestação Balaídos II: Potencial de superfície.

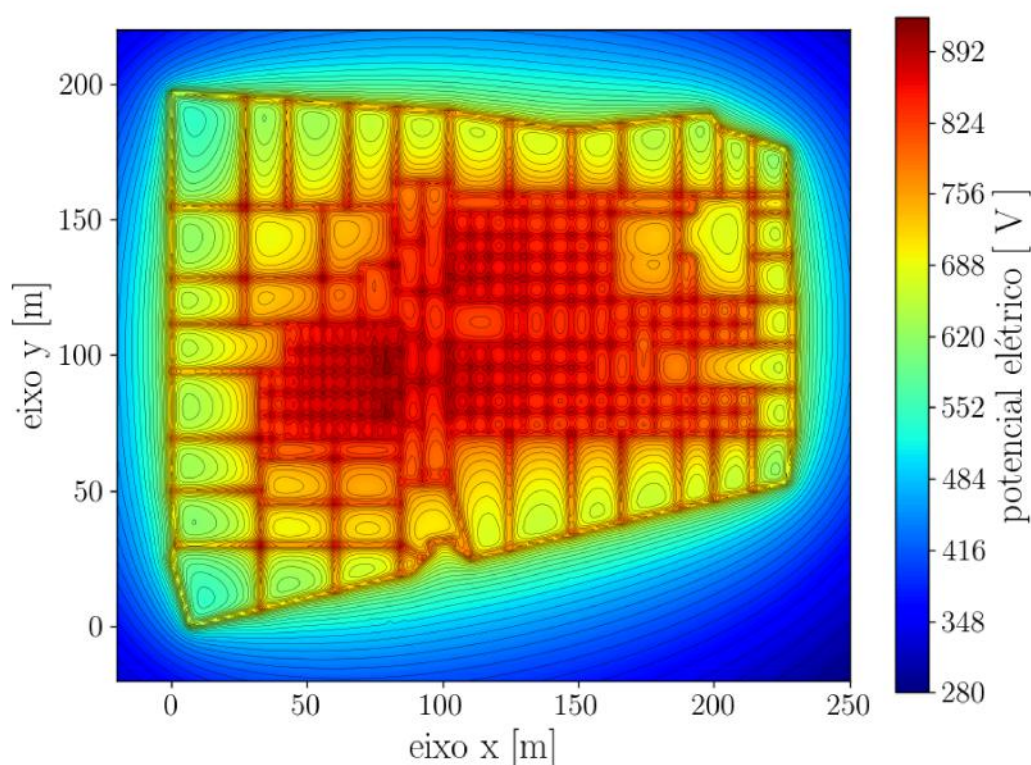


Fonte: adaptado de Colominas et al. (1998).

A resistência de aterramento calculada com o aplicativo desenvolvido nesta tese para cada haste dividida em 10 segmentos foi de 0,477 Ω , já o resultado obtido por Colominas et al. (1998) foi de 0,473 Ω . O tempo de simulação para esse sistema de aterramento foi de 2' 5" utilizando a modelagem de solo heterogêneo para uma quantidade arbitrária de camadas. A Figura 50 ilustra o potencial de superfície e as linhas equipotenciais, também para 400 pontos na superfície do solo, nesse sistema de aterramento. O trabalho original calcula apenas o potencial em uma linha de medição, todavia os valores estão em concordância com os da figura.

Como terceiro estudo de caso³ foi extraído de Colominas, Navarrina e Casteleiro (2002) simula-se a subestação Santiago II, localizada próxima à cidade de Santiago de Compostela na Espanha. Este sistema de aterramento é composto por 532 eletrodos horizontais e 24 hastes de aterramento de 4 m de comprimento e 7,5 mm de raio, ambos enterrados a 0,75 m da superfície do solo, cobrindo uma área de 44.850 m². A primeira camada do solo tem resistividade 200 $\Omega.m$ e espessura 1,2 m, a segunda camada do solo tem resistividade 60 $\Omega.m$. A corrente injetada no sistema é de 5,61 kA.

Figura 51 – Subestação Santiago II: Potencial de superfície.

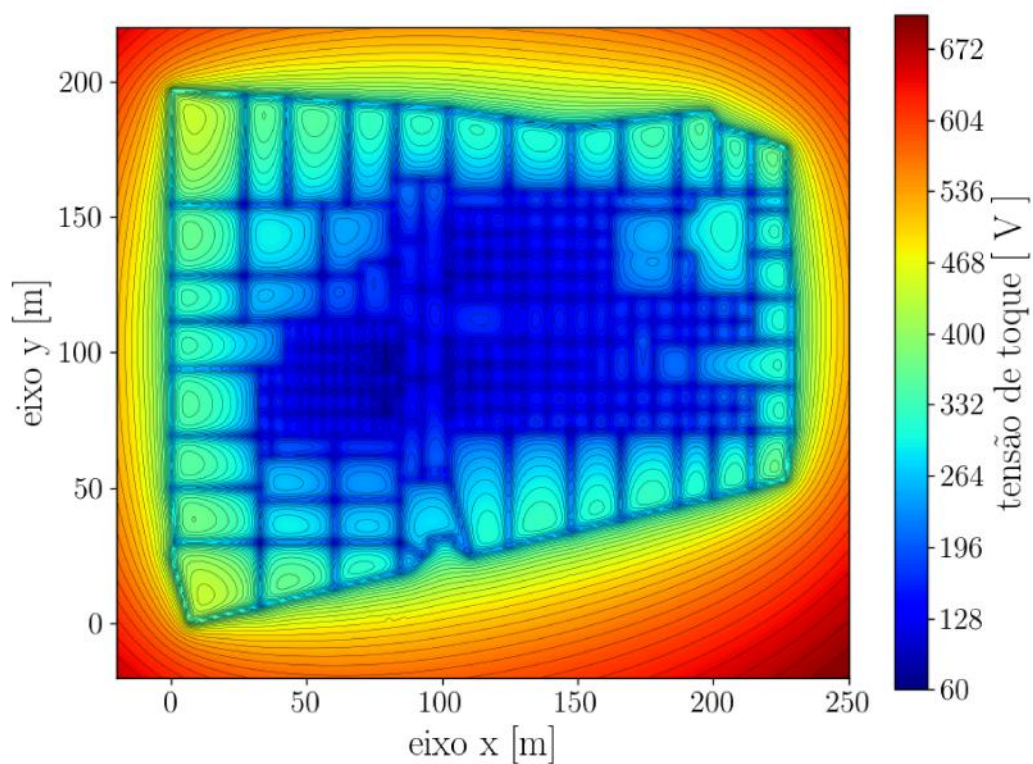


Fonte: adaptado de Colominas, Navarrina e Casteleiro (2002).

A resistência de aterramento calculada com o aplicativo desenvolvido nesta tese para cada haste dividida em 10 segmentos foi de 0,176 Ω , já o resultado obtido por Colominas, Navarrina e Casteleiro (2002) foi de 0,178 Ω . O tempo de simulação para esse sistema de aterramento foi de 13' 22" utilizando a modelagem de solo heterogêneo para uma quantidade arbitrária de camadas. A Figura 51 ilustra o potencial de superfície e as linhas equipotenciais, também para 400 pontos na superfície do solo, nesse sistema de aterramento. Em Colominas, Navarrina e Casteleiro (2002) também é apresentada uma figura equivalente, os resultados para o potencial elétrico calculado e também para o comportamento das linhas equipotenciais estão em plena concordância. Para este estudo de caso ilustra-se também a tensão de toque (*cf.* Fig. 52) e a tensão de passo (*cf.* Fig. 53) calculadas com o aplicativo proposto, note que é possível mapear essas grandezas em toda a superfície do solo, localizando o local exato de uma provável readequação.

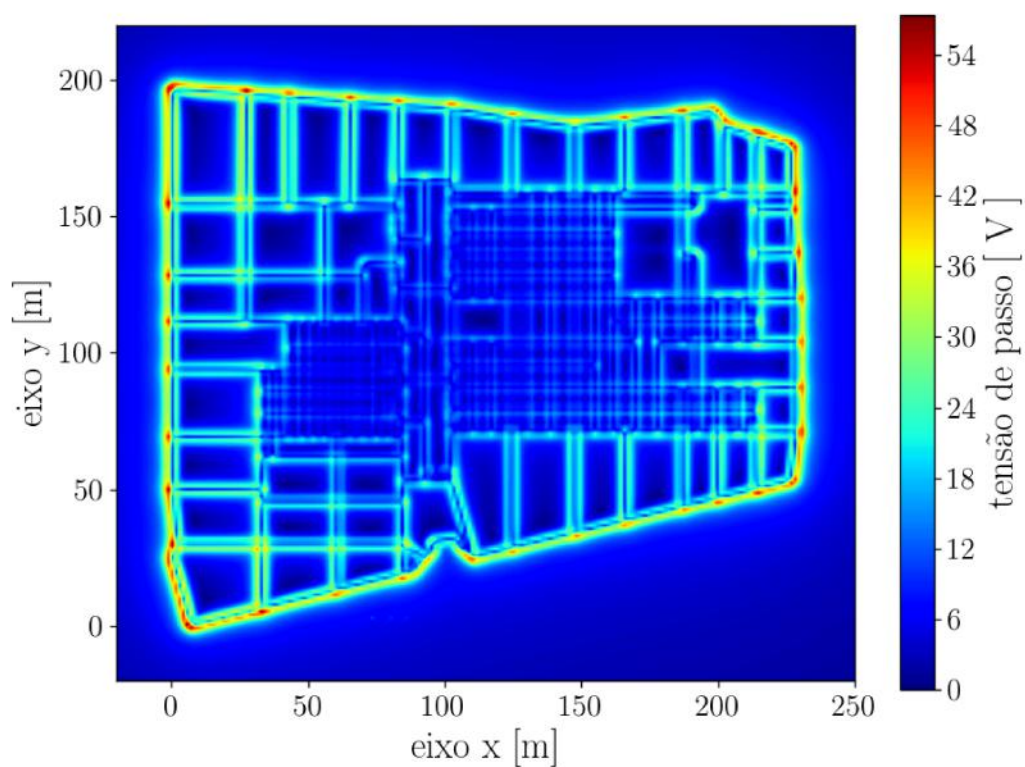
³ Esta subestação também se encontra em Colominas, Navarrina e Casteleiro (2005).

Figura 52 – Subestação Santiago II: tensão de toque.



Fonte: adaptado de Colominas, Navarrina e Casteleiro (2002).

Figura 53 – Subestação Santiago II: tensão de passo.



Fonte: adaptado de Colominas, Navarrina e Casteleiro (2002).

Através dessa seção do capítulo é possível concluir que o aplicativo desenvolvido nesta tese também é capaz de simular sistemas de aterramento de grande porte em um tempo bastante razoável. Pelo tamanho dos sistemas de aterramento simulados, em especial o terceiro estudo de caso, uma simulação utilizando o Método dos Elementos Finitos ou o Método das Diferenças finitas, que necessitam o cálculo do potencial em todos os pontos do domínio, necessitaria de um esforço computacional extremamente maior do que os obtidos com o aplicativo proposto, provavelmente na escala de horas de simulação ao invés de minutos. Em comparação ao aplicativo TOTBEM, que utiliza o Método dos Elementos de Contorno, o aplicativo proposto tem uma vantagem muito grande que é a possibilidade de se trabalhar com mais de duas camadas para o solo heterogêneo. Note também que a interpretação de arquivos de CAD tornou possível a simulação de projetos reais de sistemas de aterramento, com geometrias bastante complexas, que seriam inviáveis de ser desenhadas coordenada por coordenada.

A adequação da função potencial para o caso específico de duas camadas também reduziria drasticamente o tempo de simulação, todavia optou-se por apresentar o tempo de simulação para o modelo genérico, que se pode tomar como base para o esforço computacional necessário na simulação de grandes sistemas de aterramento em solos com mais de duas camadas.

Os resultados obtidos para as tensões de passo e de toque em todos os pontos da superfície do solo permitem ao projetista realizar uma readequação do projeto somente no local onde uma grandeza exceder os limites de segurança. Por exemplo, um local dentro da subestação com circulação de pessoas que possui tensão de passo ou tensão de toque além do limite tolerável pode ser asfaltada ou coberta de brita, aumentando-se assim o valor limite admissível naquele local específico. Com o aplicativo proposto é possível calcular os efeitos da camada de revestimento superficial, mesmo que esta seja muito fina, o que é impraticável ao se utilizar a grande maioria das soluções propostas na literatura.

Conclusão

Neste trabalho se desenvolveu inicialmente um modelo de sistemas de aterramento em solos homogêneos, para tal, se partiu do modelo físico para uma fonte pontual de corrente em um meio infinito. A interface entre o ar e o solo foi removida através da aplicação do método das imagens, onde o potencial em qualquer ponto do solo homogêneo é calculado pela superposição dos efeitos de uma fonte real e uma fonte imagem. Após se determinar uma equação para uma fonte pontual, aplica-se o conceito de integral de linha para se determinar o potencial elétrico gerado por uma distribuição linear de comprimento finito de fontes de correntes ao longo de uma trajetória com densidade de corrente uniforme por unidade de comprimento.

A resistência de aterramento é definida como a relação entre a elevação de potencial em um eletrodo e a corrente elétrica injetada nesse eletrodo. Quando o eletrodo onde a elevação de potencial é calculada for o próprio eletrodo que gerou esse potencial, se tem a resistência própria do eletrodo, caso a elevação de potencial seja calculada em um condutor vizinho, tem-se a resistência mútua de aterramento. O cálculo das resistências próprias e mútuas é utilizado para a determinação da distribuição de correntes no sistema, onde um sistema de equações é solucionado adotando-se uma condição equipotencial para o sistema de aterramento. Uma vez apresentada a forma de cálculo da resistência de aterramento, confrontou-se o resultado obtido com a fórmula analítica de Sunde, obtendo-se um valor exato para a resistência de aterramento de um condutor, sendo esse localizado no espaço pelas coordenadas cartesianas do início e fim do segmento que representa o condutor. Uma vez determinada a distribuição de correntes em cada eletrodo é possível calcular o potencial elétrico em qualquer ponto do solo pela superposição do potencial elétrico gerado por cada elemento do sistema de aterramento individualmente.

Mostrou-se que utilizando a fórmula do potencial elétrico desenvolvida para segmentos lineares, é possível discretizar qualquer trajetória curvilínea em segmentos de reta, assim utiliza-se a mesma equação para condutores retilíneos e segmentos de arco. Apresentou-se também o procedimento de cálculo das tensões de passo e de toque em

qualquer ponto da superfície do solo. Em seguida desenvolveu-se uma equação para o cálculo do campo elétrico gerado por um condutor isolado e também por todo o sistema de aterramento. Todo o equacionamento desenvolvido nesta tese leva em consideração a forma padrão de interpretação das coordenadas de segmentos de reta em arquivos de CAD, possibilitando assim a leitura de arquivos com geometrias complexas de aterramentos sem a necessidade de escrever a localização de cada segmento manualmente por suas coordenadas.

Desenvolveu-se em seguida um equacionamento para uma fonte pontual de corrente imersa em um solo heterogêneo, onde se leva em consideração as condições de interface entre meios diferentes e a condição de potencial nulo a uma distância infinita da fonte, que são as condições de contorno do problema. As funções característica do solo são obtidas através de um sistema de equações lineares, estas são utilizadas para o cálculo do potencial elétrico de uma fonte pontual situada em qualquer camada de um solo heterogêneo e sendo o ponto de cálculo localizado também em uma camada genérica. Uma vez obtidas as funções características do solo é necessário solucionar uma integral imprópria altamente oscilatória envolvendo polinômios de Bessel. Apresenta-se então uma fórmula de quadratura para a solução dessa integral, adaptada para a equação em questão, e se propõe uma forma de cálculo baseada em polinômios de Chebyshev para o potencial na superfície do solo, que tem um menor custo computacional que a fórmula de quadratura de integração.

Após a determinação do potencial elétrico gerado por uma fonte pontual de corrente, aplica-se o mesmo conceito utilizado para aterramentos em solo homogêneo, onde se determina o potencial elétrico gerado por uma distribuição linear de correntes em um comprimento finito do condutor e com densidade de corrente uniforme, esse foi o modelo utilizado para o condutor horizontal, que não atravessa as camadas do solo. O potencial elétrico gerado por esse condutor é calculado para a fórmula de quadratura de integração, que é aplicada para um ponto de cálculo qualquer do solo, e para a fórmula baseada em polinômios de Chebyshev, que é restrita a um ponto de cálculo na superfície do solo. Em seguida se fez um modelo de um condutor que atravessa camadas, como uma haste de aterramento. Para a haste de aterramento se apresentou dois modelos possíveis para a obtenção da distribuição de correntes ao longo do eletrodo, a uniforme dentro da camada do solo e a não uniforme. Fez-se um comparativo entre os dois modelos e optou-se por utilizar o modelo não uniforme, uma vez que é um modelo mais preciso para se representar a haste de aterramento.

A haste de aterramento é modelada como uma distribuição de fontes pontuais ao longo de uma trajetória, que representam os segmentos de uma haste, cada segmento tem um valor de corrente específico e gera um potencial que é função da profundidade do segmento e das camadas do solo. O potencial elétrico gerado pela haste é então calculado

pela superposição dos potenciais gerados por cada segmento. Apresentou-se também uma solução baseada em polinômios de Chebyshev para a haste, onde se fez a decomposição das funções características de cada segmento da haste, o cálculo do potencial para essa solução é restrito a pontos na superfície do solo. A resistência de aterramento para o modelo de solo heterogêneo é análoga a do solo homogêneo, alterando apenas a função utilizada para a determinação do potencial elétrico do condutor em questão. Para o modelo de solo heterogêneo optou-se por calcular o campo elétrico a partir da solução já calculada para o potencial de superfície, que é uma solução por diferenças finitas, onde os gradientes são representados por equações de diferenças.

Apresentou-se em seguida o procedimento para a obtenção do modelo do solo estratificado em camadas horizontais. Esta é uma etapa importante quando se pretende simular sistemas de aterramentos reais, uma vez que é necessária a determinação dos parâmetros do solo onde o sistema de aterramento será instalado. A equação utilizada para o potencial elétrico na a estratificação do solo poderia ser a mesma desenvolvida para a fonte pontual de corrente em solo heterogêneo, todavia utilizou-se o algoritmo de Sunde, que representa a solução do sistema linear proposto nesta tese para o caso específico da fonte de corrente na superfície do solo e o ponto de cálculo também na superfície do solo.

A função potencial obtida pelo algoritmo de Sunde é aplicada no método de Wenner, onde quatro sondas são utilizadas com o intuito de se fazer uma leitura da resistividade aparente do solo a uma profundidade igual ao espaçamento das sondas. Obtém-se assim uma função de resistividade aparente teórica. Aplicou-se em seguida uma mudança de variável na função característica do solo, o que permitiu a expansão dessa função em uma série de Chebyshev. Uma vez que a função característica do solo é decomposta em uma combinação linear de exponenciais, se aplicar a identidade de Lipschitz para a solução da integral da função resistividade aparente teórica. O grau do polinômio é escolhido de maneira ótima, já que este varia em função dos parâmetros do solo, com o intuito de se obter a melhor precisão possível na representação da curva de resistividade aparente teórica, não gerando assim erros na estratificação do solo devido a um modelo matemático impreciso. Mostra-se brevemente como aplicar o equacionamento para a resistividade aparente teórica na estratificação do solo através de um método de otimização.

A estratificação do solo é obtida quando o erro entre os valores de resistividades aparentes experimentais e calculados é mínimo, esta tese utilizou para este fim um algoritmo de Evolução Diferencial desenvolvido pelo próprio autor. Finalmente, alguns resultados de estratificação do solo são apresentados para se mostrar a eficiência estratificação realizada utilizando a função de resistividade aparente teórica proposta nesta tese, que é determinada a partir da expansão da função característica do solo heterogêneo em uma série de Chebyshev.

Como exemplo de aplicação do software desenvolvido nesta tese diversos estudos

de caso são apresentados. Inicialmente se fez um estudo da influência da camada de revestimento superficial no comportamento do potencial elétrico na superfície do solo. Notou-se com esse estudo que além de aumentar a resistência de contato entre a superfície do solo e os pés de uma pessoa, a camada de revestimento superficial diminui um pouco o potencial elétrico na superfície do solo e também suaviza essa curva, o que tem um efeito considerável na redução da tensão de passo. Em seguida se faz um estudo de caso para o modelo de hastes imersas em solos de múltiplas camadas de Takahashi e Kawase, o qual utiliza o modelo uniforme para a distribuição de correntes no eletrodo vertical dentro de cada camada do solo estratificado em múltiplas camadas.

Notou-se que houve uma discreta variação dos resultados quando se adota o modelo uniforme e não uniforme para a haste de aterramento, todavia os resultados foram bastante próximos. Como próximo estudo de caso se analisou um modelo baseado em imagens complexas em solos de três camadas, onde a maioria dos resultados apresentaram erros mínimos, que se tornaram mais significativos conforme o solo apresentou uma discrepância maior entre os valores da resistividade de camadas adjacentes. Como próximo estudo de caso, o software proposto nesta tese foi validado com um modelo de elementos finitos para duas configurações distintas de malhas de aterramentos em solos heterogêneos, esses resultados também foram confrontados com dados experimentais encontrados na literatura. Em seguida analisou-se uma configuração complexa de um sistema de aterramento que possui hastes profundas e uma quadrícula única e inclinada em relação à superfície do solo.

O resultado obtido para o potencial elétrico na superfície do solo nesse sistema de aterramento estudado é confrontado com os valores apresentados no trabalho original e também com um terceiro autor que utiliza um software de simulação de sistemas de aterramento bastante consolidado, que é baseado no método das imagens complexas. Finalmente, analisaram-se sistemas de aterramentos de subestações reais em solos heterogêneos, onde para cada estudo de caso foi apresentado além dos resultados de simulação, o tempo total de simulação. O software proposto nesta tese permitiu a simulação de sistemas de aterramento de larga escala em um tempo de processamento bastante razoável.

É possível concluir que, para estudos de sistemas de aterramento a solução através do software proposto é bastante eficiente, principalmente ao se comparar com métodos numéricos como o MEF e o MDF, que necessitam do cálculo da função potencial em todos os pontos do domínio. Como em problemas de sistemas de aterramento geralmente se está interessado na solução para pontos na superfície do solo, o software proposto se sobressai, pois torna possível a determinação dos potenciais elétricos somente em uma região específica da solução. O software proposto não apresenta problemas devido ao contraste de dimensões entre os elementos do sistema de aterramento como o raio dos eletrodos na ordem de milímetros e o solo semi-infinito. Por não necessitar de uma discretização de

todo o domínio da solução, o software proposto também é capaz de simular sistemas de aterramento a partir de resultados reais de estratificações do solo, onde se pode ter um contraste muito grande entre as espessuras das camadas, que necessitariam de uma discretização do solo com muitos elementos, tornando assim a solução bastante dispendiosa. A solução com o software proposto também não necessita do truncamento do domínio para a solução, uma vez que as condições de contorno impostas para a determinação do potencial elétrico da fonte pontual de corrente já adotam o solo como um meio semi-infinito. Uma vez que a quantidade de pontos a serem calculados é drasticamente reduzida, o tempo total de simulação também é drasticamente reduzido quando comparado a uma solução através de métodos como o MEF, isso porque o método proposto não necessita de uma malha para a discretização da solução.

Ao se comparar o software proposto com outros disponíveis na literatura, é possível observar que a grande maioria das soluções propostas para aterramentos elétricos é feita para solos uniformes ou estratificados em duas camadas. O software proposto, além de ser desenvolvido para uma quantidade genérica de camadas, também busca uma precisão máxima para os resultados obtidos. Recursos de programação como computação paralela e bibliotecas numéricas de alto desempenho são utilizados. Ademais, o software desenvolvido utiliza um método de quadratura adaptativa para o cálculo da resistência de aterramento, além de utilizar uma quadratura de integração baseada em polinômios de Bessel na determinação da função potencial em um ponto qualquer e em polinômios de Chebyshev (com grau ótimo) para potenciais na superfície do solo, tudo isso buscando o máximo de precisão e com o mínimo esforço computacional possível. Além de todas as vantagens supracitadas, o software proposto permite a leitura da configuração a ser simulada através de um arquivo de CAD e faz o modelo do solo estratificado baseado nas medições de campo, assim tornando a simulação do sistema de aterramento bem realista.

Publicou-se o seguinte artigo com os resultados do Capítulo 6 desta tese:

*Coelho, R. R. A.; Pereira, A. E. C.; Neto, L. M. A high-performance multilayer earth parameter estimation rooted in chebyshev polynomials. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 33, n. 3, p. 1054–1061, June 2018. ISSN 0885-8977.*

Referências

ALAMO, J. L. del. A comparison among eight different techniques to achieve an optimum estimation of electrical grounding parameters in two-layered earth. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 8, n. 4, p. 1890–1899, Oct 1993. ISSN 0885-8977. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/61.248299>.

AMPARO, G.; SEGURA, J.; TEMME, N. M. **Numerical Methods for Special Functions**. 1. ed. University City Science Center, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. ISBN 978-0898716344.

ARIAS, T. A. **Notes on numerical integration of functions**. Ithaca, New York: Cornell University, Department of Physics, 2004. <http://muchomas.lassp.cornell.edu/P480/Notes/integ/integ.pdf>. [Online; acessado dia 3 de Junho de 2017].

BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. **Elementos de Física Matemática**. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2011. v. 2. ISBN 9788578610906.

Bourg, S.; Sacepe, B.; Debu, T. Deep earth electrodes in highly resistive ground: frequency behaviour. In: **Proceedings of International Symposium on Electromagnetic Compatibility**. [s.n.], 1995. p. 584–589. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/ISEMC.1995.523625>.

BOWMAN, F. **Introduction to Bessel Functions**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1958. ISBN 9780486604626.

Brenna, M. et al. Particular grounding systems analysis using fem models. In: **2018 18th International Conference on Harmonics and Quality of Power (ICHQP)**. [s.n.], 2018. p. 1–6. ISSN 2164-0610. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/ICHQP.2018.8378860>.

CALIXTO, W. et al. Parameters estimation of a horizontal multilayer soil using genetic algorithm. **Power Delivery, IEEE Transactions on**, v. 25, n. 3, p. 1250–1257, July 2010. ISSN 0885-8977. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TPWRD.2010.2040845>.

CALIXTO, W. P. **Métodos matemático e computacional aplicados a prospecção geolétrica com estratificação tridimensional**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Elétrica &

Universidade de Coimbra, Instituto de Sistemas e Robótica, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14291>.

CARDOSO, J. R. **Ground-3d uma contribuição à análise dos sistemas de aterramento pelo método dos elementos finitos**. São Paulo: Universidade de São Paulo (USP), Escola politécnica, 1993. Tese (Livre Docência). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.11606/T.3.2017.tde-01082017-143115>.

_____. **Engenharia eletromagnética**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. ISBN 9788535235258.

CARDOSO, J. R.; OLIVEIRA, J. C. M. B. Ground-3d: A fem cad/cae system for ground systems analysis. In: **Digest of the Fifth Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation**. Harvey Mudd College, Claremont, California-USA, 91711: IEEE, 1992. p. MP52–MP52. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/CEFC.1992.720669>.

CHOW, Y. L.; YANG, J. J.; SRIVASTAVA, K. D. Complex images of a ground electrode in layered soils. **Journal of Applied Physics**, v. 71, n. 2, p. 569–574, 1992. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1063/1.350407>.

COELHO, R. R. A. **Aplicação do método dos elementos finitos como auxílio ao projeto e ao comissionamento de sistemas de aterramento elétrico**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Elétrica, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/12858>.

Coelho, R. R. A.; Pereira, A. E. C.; Neto, L. M. A high-performance multilayer earth parameter estimation rooted in chebyshev polynomials. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 33, n. 3, p. 1054–1061, June 2018. ISSN 0885-8977. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TPWRD.2017.2664738>.

COELHO, R. R. A.; PONTES, R. S. T. An algorithm for rodbed ground resistance calculation with fem validation. In: **Industrial Informatics (INDIN), 2014 12th IEEE International Conference on**. Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brazil: [s.n.], 2014. p. 452–456. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/INDIN.2014.6945555>.

COLOMINAS, I. et al. A bem formulation for computational design of grounding systems in stratified soils. **COMPUTATIONAL MECHANICS: New Trends and Applications S. Idelsohn, E. Oñate and E. Dvorkin (Eds.) CIMNE, Barcelona, Spain, 1998**. Disponível em: <http://dx.doi.org/2183/354>.

Colominas, I.; Navarrina, F.; Casteleiro, M. A numerical formulation for grounding analysis in stratified soils. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 17, n. 2, p. 587–595, April 2002. ISSN 0885-8977. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/61.997943>.

_____. Analysis of transferred earth potentials in grounding systems: a bem numerical approach. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 20, n. 1, p. 339–345, Jan 2005. ISSN 0885-8977. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TPWRD.2004.835035>.

_____. Numerical simulation of transferred potentials in earthing grids considering layered soil models. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 22, n. 3, p. 1514–1522, July 2007. ISSN 0885-8977. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TPWRD.2007.899282>.

COLOMINAS, I. et al. A numerical simulation tool for multilayer grounding analysis integrated in an open-source cad interface. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 45, n. 1, p. 353 – 361, 2013. ISSN 0142-0615. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijepes.2012.08.079>.

_____. Advanced computer methods for grounding analysis. In: **Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science**. ISSN: 2078-0958. San Francisco, USA: WCECS, 2012.

Dalziel, C. F. Dangerous electric currents. **Electrical Engineering**, v. 65, n. 12, p. 1123–1124, Dec 1946. ISSN 0095-9197. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/EE.1946.6440045>.

_____. A study of the hazards of impulse currents [includes discussion]. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems**, v. 72, n. 5, p. 1032–1043, Oct 1953. ISSN 0097-2460. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/AIEEPAS.1953.4498738>.

_____. Electric shock hazard. **IEEE Spectrum**, v. 9, n. 2, p. 41–50, Feb 1972. ISSN 0018-9235. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/MSPEC.1972.5218692>.

Dalziel, C. F.; Lee, W. R. Lethal electric currents. **IEEE Spectrum**, v. 6, n. 2, p. 44–50, Feb 1969. ISSN 0018-9235. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/MSPEC.1969.5213962>.

DAWALIBI, F.; BLATTNER, C. J. Earth resistivity measurement interpretation techniques. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-103, n. 2, p. 374–382, Feb 1984. ISSN 0018-9510. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TPAS.1984.318254>.

Dawalibi, F.; Mukhedkar, D. Optimum design of substation grounding in a two layer earth structure: Part i: comparison between theoretical and experimental results. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. 94, n. 2, p. 262–266, March 1975. ISSN 0018-9510. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/T-PAS.1975.31850>.

_____. Resistance calculation of interconnected grounding electrodes. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. 96, n. 1, p. 59–65, Jan 1977. ISSN 0018-9510. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/T-PAS.1977.32307>.

Dawalibi, F. P.; Donoso, F. Integrated analysis software for grounding, emf, and emi. **IEEE Computer Applications in Power**, v. 6, n. 2, p. 19–24, April 1993. ISSN 0895-0156. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/67.207467>.

Dawalibi, F. P.; Southey, R. D.; Baishiki, R. S. Validity of conventional approaches for calculating body currents resulting from electric shocks. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 5, n. 2, p. 613–626, April 1990. ISSN 0885-8977. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/61.53063>.

Dwight, H. B. Calculation of resistances to ground. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, v. 55, n. 12, p. 1319–1328, Dec 1936. ISSN 0096-3860. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/T-AIEE.1936.5057209>.

EZPONDA, I. C. **Cálculo y diseño asistido por ordenador de tomas de tierra en instalaciones eléctricas: una formulación numérica basada en el método integral de elementos de contorno**. Tese (Doutorado) — Universidade da Coruña. Departamento de Métodos Matemáticos e de Representación, 1995. Disponível em: <http://dx.doi.org/2183/803>.

Freschi, F.; Mitolo, M. Currents passing through the human body: The numerical viewpoint. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 53, n. 2, p. 826–832, March 2017. ISSN 0093-9994. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TIA.2016.2626265>.

GONOS, I.; STATHOPULOS, I. Estimation of multilayer soil parameters using genetic algorithms. **Power Delivery, IEEE Transactions on**, v. 20, n. 1, p. 100–106, Jan 2005. ISSN 0885-8977. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TPWRD.2004.836833>.

HE, J.; ZENG, R.; ZHANG, B. **Methodology and Technology for Power System Grounding**. 1. ed. Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, China: John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2013. ISBN 9781118255001.

HEATH, M. T. **Scientific Computing: An introductory Survey**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 2002. ISBN 9780072399103.

HEPPE, A. Computation of potential at surface above an energized grid or other electrode, allowing for non-uniform current distribution. **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, PAS-98, n. 6, p. 1978–1989, Nov 1979. ISSN 0018-9510. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TPAS.1979.319377>.

IEC TS 60479-1. Effects of current on human beings and livestock - part 1: General aspects. international electrotechnical comission. **IEC TS 60479-1**, 2016.

IEC TS 60479-2. Effects of current on human beings and livestock - part 2: Special aspects. international electrotechnical comission. **IEC TS 60479-2**, 2017.

IEEE Std 80. Ieee guide for safety in ac substation grounding. **IEEE Std 80-2000**, p. i–192, 2000. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/IEEESTD.2000.91902>.

IEEE Std 81. Ieee guide for measuring earth resistivity, ground impedance, and earth surface potentials of a grounding system. **IEEE Std 81-2012 (Revision of IEEE Std 81-1983)**, p. 1–86, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/IEEESTD.2012.6392181>.

JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 3. ed. New York, NY: Wiley, 1999. ISBN 9780471309321.

LACAVA, F. **Classical Electrodynamics: From Image Charges to the Photon Mass and Magnetic Monopoles**. 1. ed. Università degli studi di Roma “La Sapienza”, Rome, Italy: Springer International Publishing, 2016. (Undergraduate Lecture Notes in Physics). ISBN 978-3-319-39474-9.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica** : 3. ed.. ed. São Paulo :: Harbra,, 1994. Obra em 2 volumes. ISBN 9788529400945.

LUCAS, S.; STONE, H. Evaluating infinite integrals involving Bessel functions of arbitrary order. **J. Comput. Appl. Math.**, Elsevier BV, v. 64, n. 3, p. 217–231, dez. 1995. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0377-0427\(95\)00142-5](http://dx.doi.org/10.1016/0377-0427(95)00142-5)>.

Martinho, L. B.; Silva, V. C. Effects of external currents and soil heterogeneities on an approximate boundary condition for the 3-d finite element analysis of subsurface conductive coupling problems. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 51, n. 3, p. 1–4, March 2015. ISSN 0018-9464. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2014.2347354>>.

Martins Neto, L. **Curso em mídia de aterramentos elétricos**. Uberlândia, MG: Universidade Federal de Uberlândia, 1998.

MELIOPOULIS, A. **Power System Grounding and Transients: An Introduction**. 1. ed. New York: Taylor & Francis, 1988. (Electrical and Computer Engineering). ISBN 9780824779085.

Melipoulos, A. P. S. et al. An advanced computer model for grounding system analysis. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 8, n. 1, p. 13–23, Jan 1993. ISSN 0885-8977. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/61.180314>>.

MITANI, M.; TAKAHASHI, T. Theoretical analysis of grounding resistance for the rod buried into the multilayered earth. In: **2000 Power Engineering Society Summer Meeting (Cat. No.00CH37134)**. Seattle, WA, USA: IEEE, 2000. v. 1, p. 145–150 vol. 1. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/PESS.2000.867426>>.

Nahman, J.; Salamon, D. A practical method for the interpretation of earth resistivity data obtained from driven rod tests. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 3, n. 4, p. 1375–1379, Oct 1988. ISSN 0885-8977. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/61.193934>>.

NBR 15749. **Medição de resistência de aterramento e de potenciais na superfície do solo em sistemas de aterramento**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), ICS 17.220.20; 29.080.01, 2009. 1-49 p.

NBR 15751. **Sistemas de aterramento de subestações - Requisitos**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), ICS 17.220.20;29.080.10, 2013. 1-47 p.

NBR 7117. **Medição da resistividade e determinação da estratificação do solo**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), ICS 13.260;17.220.20;29.240.20, 2012. 1-64 p.

OGATA, H. A numerical integration formula based on the bessel functions. **Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences**, v. 41, n. 4, p. 949–970, 2005. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2977/prims/1145474602>>.

OOURA, T.; MORI, M. A robust double exponential formula for fourier-type integrals. **Journal of computational and applied mathematics**, Elsevier, v. 112, n. 1, p. 229–241, 1999. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427\(99\)00223-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427(99)00223-X)>.

Pereira Filho, M. L. **Aplicação do método das imagens complexas ao cálculo de malhas de aterramento em solos com estratificação horizontal**. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo- USP, 1999. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.11606/D.3.1999.tde-30112004-171403>.

Pereira Filho, M. L.; CARDOSO, J. R. Avaliação de desempenho de malhas de terra usando imagens complexas: uma nova abordagem. **Controle e Automação**, v. 12, p. 215–223, 2001.

PEREIRA, W. R. **Estratificação de solos em camadas horizontais utilizando evolução diferencial**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Elétrica & Universidade de Coimbra, Instituto de Sistemas e Robótica, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/17816>.

PEREIRA, W. R.; SOARES, M. G.; NETO, L. M. Horizontal multilayer soil parameter estimation through differential evolution. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 31, n. 2, p. 622–629, April 2016. ISSN 0885-8977. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TPWRD.2015.2475637>.

PRESS, W. H. et al. **Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing**. 3. ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780521880688.

RAGGI, L. M. de R. **Projeto de malhas de aterramento: contribuição ao cômputo da estratificação do solo**. Dissertação (Mestrado) — UFMG, 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/1843/BUOS-8CUEJG>.

ROCA, R. G. **A general formulation for computational design of grounding systems in underground electrical substations**. Tese (Doutorado) — Programa de doctorado en Ingenieria Civil: Universidade da Coruña, Espanha, Feberero 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/2183/20691>.

SADIKU, M. **Numerical Techniques in Electromagnetics with MATLAB, Third Edition**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2009. ISBN 9781420063097.

Schwarz, S. J. Analytical expressions for the resistance of grounding systems [includes discussion]. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems**, v. 73, n. 2, p. 1011–1016, Jan 1954. ISSN 0097-2460. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/AIEEPAS.1954.4498923>.

SILVA, V. C. **Método de elementos finitos aplicado à solução de problemas de aterramento elétrico**. São Paulo: Universidade de São Paulo (USP), Escola politécnica, 2006. Tese (Livre Docência). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.11606/T.3.2007.tde-07022007-144705>.

Silva, V. C. et al. Efficient modeling of thin wires in a lossy medium by finite elements applied to grounding systems. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 47, n. 5, p. 966–969, May 2011. ISSN 0018-9464. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2010.2074188>.

STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces, international computer science

institute, berkeley. **Berkeley, CA**, 1995. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1023/A:1008202821328>>.

SUNDE, E. D. **Earth conduction effects in transmission systems**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1968. (Bell Telephone Laboratories series). ISBN 68-12908.

SVERAK, J. Simplified analysis of electrical gradients above a ground grid-i how good is the present ieee method? (a special report for wg 78.1). **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, PAS-103, n. 1, p. 7–25, Jan 1984. ISSN 0018-9510. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TPAS.1984.318567>>.

Sverak, J. G. et al. Safe substation grounding-part i. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-100, n. 9, p. 4281–4290, Sep. 1981. ISSN 0018-9510. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TPAS.1981.316934>>.

TAGG, G. F. **Earth resistances**. 1. ed. Tower House, Southampton street, London: Whitefriars Press Ltd., 1964. With 195 illustrations.

TAKAHASHI, T.; KAWASE, T. Analysis of apparent resistivity in a multi-layer earth structure. **Power Delivery, IEEE Transactions on**, v. 5, n. 2, p. 604–612, Apr 1990. ISSN 0885-8977. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/61.53062>>.

_____. Calculation of earth resistance for a deep-driven rod in a multi-layer earth structure. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 6, n. 2, p. 608–614, April 1991. ISSN 0885-8977. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/61.131118>>.

Trlep, M.; Hamler, A.; Hribernik, B. The analysis of complex grounding systems by fem. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 34, n. 5, p. 2521–2524, Sep. 1998. ISSN 0018-9464. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/20.717581>>.

VUJEVIĆ, S.; KURTOVIĆ, M. Numerical analysis of earthing grids buried in horizontally stratified multilayer earth. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 41, n. 7, p. 1297–1319. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19980415\)41:7<1297::AID-NME338>3.0.CO;2-Z](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19980415)41:7<1297::AID-NME338>3.0.CO;2-Z)>.

YANG, H.; YUAN, J.; ZONG, W. Determination of three-layer earth model from wenner four-probe test data. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 37, n. 5, p. 3684–3687, Sep 2001. ISSN 0018-9464. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/20.952690>>.

ZHANG, B. et al. Parameter estimation of horizontal multilayer earth by complex image method. **Power Delivery, IEEE Transactions on**, v. 20, n. 2, p. 1394–1401, April 2005. ISSN 0885-8977. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TPWRD.2004.834673>>.

Anexos

Polinômios de Chebyshev

Este anexo da tese dedica-se a uma breve explicação ao leitor sobre os polinômios de Chebyshev. A série de Chebyshev é utilizada no restante da tese para uma forma de cálculo eficiente dos potenciais de superfície.

Os Polinômios de Chebyshev formam uma classe especial de polinômios destinados a aproximar outras funções, sendo amplamente utilizados em muitas áreas da análise numérica (PRESS et al., 2007). A interpolação de Chebyshev pode ser interpretada como uma aproximação da série de Chebyshev. A incorporação de termos sobressalentes à série ocasiona um decaimento abrupto no erro da aproximação de uma função, sendo assim necessários poucos termos para uma discretização bastante precisa. A velocidade de decaimento do erro em função dos seus coeficientes depende das propriedades de continuidade e diferenciabilidade da função a ser expandida. Quanto mais regular a função, menos termos sobressalentes serão necessários para uma boa aproximação. O gráfico da Fig. 54 ilustra a função¹ $\text{sinc}(x)$ e o comparativo da sua interpolação utilizando polinômios de Chebyshev (pontos otimamente amostrados) e Lagrange (pontos igualmente amostrados).

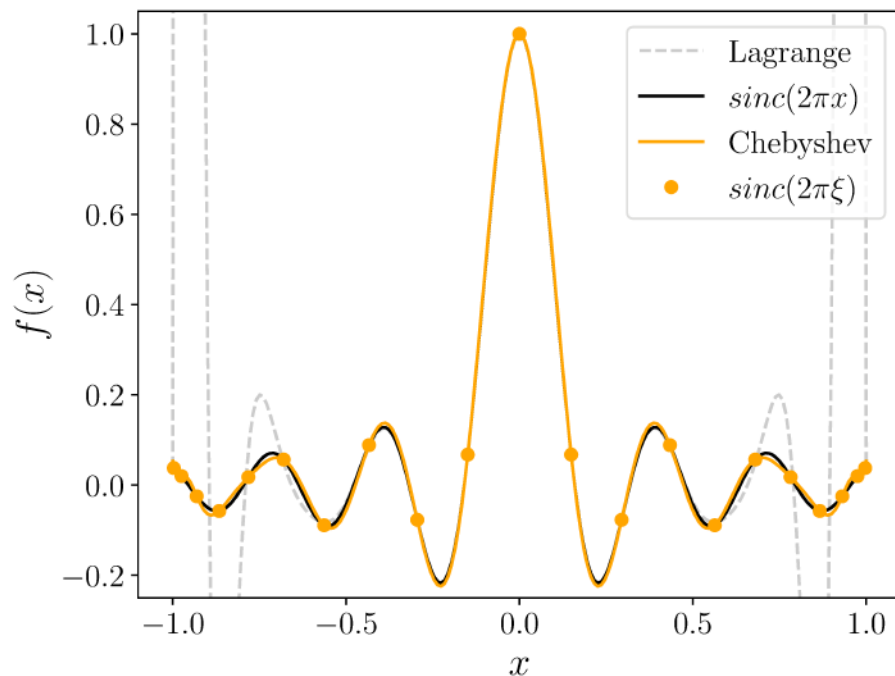
Com o mesmo grau n para uma expansão polinomial, atingimos uma melhor precisão ao utilizarmos a série de Chebyshev quando comparada à outra técnica de decomposição polinomial, com a vantagem de não precisarmos escolher os pontos onde a função será avaliada, esses são fornecidos por uma expressão matemática. Seus coeficientes também são calculados por uma expressão analítica, não sendo necessária a resolução de dispendiosos sistemas lineares. Além de todas as vantagens já mencionadas, a implementação computacional da expansão por polinômios de Chebyshev é bastante simples.

Um problema na interpolação polinomial é a utilização de um polinômio de grau elevado. Para Heath (2002), os coeficientes do polinômio podem ser deficientemente determinados devido a um mal condicionamento de um sistema linear a ser resolvido. Além dessas propriedades computacionais indesejadas o uso de uma ordem elevada também

¹ $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$

causa inconsistências de cunho teórico, causando oscilações que podem tornar bastante discrepantes a diferença entre a curva interpolada dos dados mapeados. O fenômeno de Runge, que é observado na função mostrada na Figura 54, é um exemplo incontestável de que a utilização de polinômios de grau elevado, especialmente para pontos igualmente amostrados, não conseguem interpolar de forma genérica todas as funções matemáticas. A função mostrada nessa figura quando interpolada com pontos igualmente amostrados gera uma instabilidade no polinômio interpolante, com oscilações bastante bruscas que aumentam proporcionalmente com seu grau.

Figura 54 – Aproximação da função $\text{sinc}(x)$ através de um polinômio de Chebyshev de grau 20. A interpolação desta função se torna instável através de métodos convencionais de interpolação (e.g., Polinômios de Lagrange). O erro para esta interpolação ainda diminui com o incremento do grau utilizado.



Fonte: elaboração própria.

Como a amostragem uniforme de pontos para a interpolação polinomial resulta em resultados insatisfatórios, uma forma elegante de realizar essa interpolação é utilizando os pontos, ou raízes, de Chebyshev no intervalo $[-1, 1]$ ou através de uma transformação de domínio para um intervalo arbitrário. A utilização desses pontos distribui o erro da interpolação de maneira mais uniforme. Além da utilização dos pontos de Chebyshev, a utilização de sua série para a interpolação polinomial é bastante conveniente, necessitando-se de poucos termos da série para uma boa aproximação e minimizando a instabilidade numérica. Para Amparo, Segura e Temme (2007) a utilização da série de Chebyshev para interpolação proporciona uma melhor aproximação para a série truncada (com a mesma quantidade de termos) em relação à outras técnicas, ou seja, uma “economia na série de potências”.

A.1 Equacionamento para o Polinômio de Chebyshev

O Polinômio de Chebyshev canônico é descrito para um dado grau n , sendo denominado $T_n(x)$ e é dado pela Eq. A.1,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad (\text{A.1})$$

ou ainda,

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta). \quad (\text{A.2})$$

Ao aplicarmos de forma sucessiva as seguintes identidades trigonométricas à Eq. A.1.

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad (\text{A.3})$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad (\text{A.4})$$

$$\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) \quad (\text{A.5})$$

Obtém-se a forma explícita² de $T_n(x)$, que é dada pela Eq. A.6. Note que o polinômio de Chebyshev é determinado de forma recursiva, *i.e.*, obedecendo uma fórmula de recursão.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

\vdots

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \quad (\text{A.6})$$

O polinômio T_n possui n zeros no intervalo $[-1, 1]$, estes são localizados nos pontos dados pela Eq. A.7.

$$\xi_k = \cos\left(\pi \frac{k + 1/2}{n}\right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (\text{A.7})$$

² Obtenção de $T_n(x)$ na sua forma explícita.

$$\cos 0\theta = 1$$

$$\cos 1\theta = \cos 1\theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

\vdots

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

Observe que ao se adotar $x = \cos \theta$ é possível obter o polinômio T_n como uma série de potências, também chamado de forma explícita de T_n .

Por sua definição e pela relação de ortogonalidade discreta, se $f(x)$ é uma função arbitrária no intervalo $[-1, 1]$, sendo n a quantidade de coeficientes de c_j , os coeficientes da série então são determinados pela Eq. A.8.

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) T_j(\xi_k) & j = 0, \dots, n-1 \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left[\cos \left(\pi \frac{k+1/2}{n} \right) \right] \cos \left(j\pi \frac{k+1/2}{n} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A aproximação desta função por uma série de Chebyshev é dada pela Eq. A.9 e é exata para os valores de x iguais aos n zeros de $T_n(x)$.

$$f(x) \approx \left[\sum_{k=0}^n c_k T_k(x) \right] - \frac{c_0}{2} \quad (\text{A.9})$$

A generalização da Eq. A.8 pode ser feita para um intervalo genérico ao invés através de mudanças de variável. Dessa forma, aplicam-se os polinômios de Chebyshev para aproximar uma função em qualquer intervalo.

A.2 Polinômio de Chebyshev deslocado

O polinômio de Chebyshev deslocado (em inglês *shifted Chebyshev polynomial*) é uma variação do polinômio de Chebyshev para o intervalo $[0, 1]$. Esta mudança é obtida substituindo a variável x da Eq. A.6 por $2x - 1$. O leitor pode observar que x varia de $[-1, 1]$, de forma análoga a expressão $2x - 1$ no intervalo $[0, 1]$ também varia de $[-1, 1]$. O polinômio de Chebyshev deslocado dar-se-á por

$$\begin{aligned} T_0^*(x) &= 1 \\ T_1^*(x) &= 2x - 1 \\ T_2^*(x) &= 8x^2 - 8x + 1 \\ T_3^*(x) &= 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1 \\ T_4^*(x) &= 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1 \\ &\vdots \\ T_{n+1}^*(x) &= 2(2x - 1) T_n^*(x) - T_{n-1}^*(x) \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

sendo as suas raízes calculadas por

$$\xi_k = \frac{1}{2} \cos \left(\pi \frac{k+1/2}{n} \right) + \frac{1}{2} \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (\text{A.11})$$

e sendo os seus coeficientes para esta mudança de variável

$$c_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cos \left(j\pi \frac{k+1/2}{n} \right) \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (\text{A.12})$$