

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

ÍTALO AUGUSTO MAGALHÃES DE ÁVILA

**MODELAGEM FÍSICA MATEMÁTICA E
COMPUTACIONAL DE ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS
INCOMPRESSÍVEIS E LAMINARES EM MEIOS POROSOS**

**UBERLÂNDIA
2019**

ÍTALO AUGUSTO MAGALHÃES DE ÁVILA

**MODELAGEM FÍSICA MATEMÁTICA E
COMPUTACIONAL DE ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS
INCOMPRESSÍVEIS E LAMINARES EM MEIOS POROSOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
Graduação de Engenharia Mecânica como requi-
sito parcial à obtenção do título de bacharel em
Engenharia Mecânica.

Aluno: Ítalo Augusto Magalhães de Ávila

Prof. orientador: Aristeu da Silveira Neto

UBERLÂNDIA

2019

“Um único sonho é mais poderoso
que mil realidades”. J.R.R. Tolkien.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que incessantemente me sustenta e conduz.

Aos meus avós, Paulo e Eny, que fizeram mais do que pensei ser possível para que meus sonhos se realizassem. Por seus sacrifícios e pelo amor incondicional, sou eternamente grato.

Aos meus tios, Adriana e Wagner, pela confiança que em mim depositaram. Sem seu apoio esta empreitada certamente não seria possível.

À minha mãe, Ana Paula, e à minha irmã, Geovanna, por todo cuidado e carinho.

À meu pai, Rogério, e minha madrasta, Carol, pela atenção e pelos conselhos.

À Aliny, pelo companheirismo, cuidado e suporte em todos os momentos.

Ao Renato, pelos valiosos conselhos e pela amizade.

Ao Eng. Gabriel Machado, pelo companheirismo no desenvolvimento deste trabalho.

Aos demais familiares e amigos que fizeram parte de minha história.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto e Mestre Hélio Ribeiro Neto, pela paciência, dedicação e pelo auxílio no desenvolvimento deste trabalho e no meu crescimento profissional.

Ao Prof. Dr. João Marcelo Vedovoto pela coorientação nos projetos de pesquisa.

Aos técnicos do laboratório, Luismar Lopes, Bruno Louzada e Ana Luisa, pelo apoio e pelos serviços prestados ao longo de todo o período.

Aos colegas do laboratório pela troca de conhecimento e colaboração.

À Petrobrás pelo apoio financeiro e material.

Resumo

No presente trabalho, é apresentada a modelagem física, matemática e computacional de escoamentos laminares, incompressíveis e não-isotérmicos de fluidos newtonianos por meios porosos em regime transiente. As equações são resolvidas em um domínio bidimensional euleriano cartesiano fixo pelo método de diferenças finitas. Emprega-se a metodologia do passo fracionado para o acoplamento pressão-velocidade. Rotinas computacionais são desenvolvidas e simulações são conduzidas a fim de validar os códigos produzidos e de analisar a influência de características do meio poroso sobre o escoamento. A partir dos resultados computacionais obtidos, constata-se que a modelagem desenvolvida está em concordância com aquelas encontradas na literatura.

Palavras-chave: Mecânica dos Fluidos Computacional, Meios Porosos, Diferenças Finitas.

Abstract

In the present work, the physical, mathematical and computational modeling of laminar, incompressible and non-isothermal flows of Newtonian fluids through isotropic porous media in transient regime is presented. The equations are solved in a fixed two-dimensional Eulerian and Cartesian domain through the finite difference method. The fractioned step methodology is employed for the pressure-velocity coupling. Computational routines are implemented and simulations are conducted in order to validate the developed codes and to analyze the influence of characteristics of the porous medium over the flow. The computational results are in agreement with those encountered in the literature.

Keywords: Computational Fluid Dynamics, Porous Media, Finite Difference Method.

Lista de Figuras

1.1	Princípio da média volumétrica aplicado a um meio poroso.	15
3.1	Representação gráfica das forças que atuam sobre uma célula euleriana. . .	22
3.2	Escalas micro e macroscópica para a média volumétrica em meios porosos.	23
3.3	Representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso da cavidade acionada por esteira.	24
3.4	Representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso da cavidade aquecida de maneiras diferentes nas paredes verticais.	24
3.5	Representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso do cilindro poroso fixo a jusante de um degrau.	25
3.6	Representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso do cilindro poroso fixo em um canal.	26
5.1	Representação gráfica da malha computacional.	42
6.1	Linhas de corrente obtidas no presente trabalho para: (a) $Re = 100$, (b) $Re = 400$, (c) $Re = 1000$ e (d) $Re = 3200$	49
6.2	Linhas de corrente apresentadas no trabalho de Ghia <i>et al.</i> (1982) para: (a) $Re = 100$, (b) $Re = 400$, (c) $Re = 1000$ e (d) $Re = 3200$	49
6.3	Resultados computacionais para o caso da cavidade com $Re = 100$	49
6.4	Resultados computacionais para o caso da cavidade com $Re = 400$	50
6.5	Resultados computacionais para o caso da cavidade com $Re = 1000$	50
6.6	Resultados computacionais para o caso da cavidade com $Re = 3200$	51
6.7	Iso-contornos de temperatura obtidos no presente trabalho para: (a) $Ra = 10^4$, (b) $Ra = 10^5$ e (c) $Ra = 10^6$	52
6.8	Iso-contornos de temperatura apresentados no trabalho de Gangawane <i>et al.</i> (2015) para: (a) $Ra = 10^4$, (b) $Ra = 10^5$ e (c) $Ra = 10^6$	52
6.9	Número de Nusselt calculado localmente para o presente trabalho e para o trabalho de Gangawane <i>et al.</i> (2015) para $Pr = 0,71$ e Ra de: (a) 10^4 , (b) 10^5 e (c) 10^6	52
6.10	Linhas de corrente sobre o módulo da velocidade em vista ampliada para o escoamento bidimensional sobre um canal com $Re = 100$	54

6.11	Linhas de corrente sobre o módulo da velocidade em vista ampliada para o escoamento bidimensional sobre um canal com $Re = 389$	54
6.12	Perfis de velocidade para o escoamento bidimensional sobre um canal para $Re = 100$	54
6.13	Perfis de velocidade para o escoamento bidimensional sobre um canal para $Re = 389$	55
6.14	Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $Re = 10$ e $Da = 10^{-4}$	56
6.15	Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $Re = 10$ e $Da = 10^{-3}$	56
6.16	Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $Re = 10$ e $Da = 10^{-2}$	57
6.17	Linhas de corrente sobre o absoluto da velocidade para $Re = 10$: (a) $Da = 10^{-4}$, (b) $Da = 10^{-3}$ e (c) $Da = 10^{-2}$	57
6.18	Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $\varepsilon = 0,99$ $Da = 10^4$ e $Re = 100$	58
6.19	Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $\varepsilon = 0,99$ $Da = 10^4$ e $Re = 400$	58
6.20	Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $\varepsilon = 0,99$ $Da = 10^4$ e $Re = 1000$	59
6.21	Iso-contornos de temperatura para a convecção natural em uma cavidade quadrada obtidos em $t = 20$ minutos para $\lambda = 1$, $Pr = 0,71$, $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,9$: (a) $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (b) $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (c) $Da = 1 \cdot 10^{-3}$, (d) $Da = 3 \cdot 10^{-3}$	60
6.22	Iso-contornos de temperatura para a convecção natural em uma cavidade quadrada segundo Lauriat and Prasad (1989) para $\lambda = 1$, $Pr = 0,71$, $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,9$: (a) $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (b) $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (c) $Da = 1 \cdot 10^{-3}$, (d) $Da = 3 \cdot 10^{-3}$	60
6.23	Linhas de corrente para a convecção natural em uma cavidade quadrada obtidos em $t = 20$ minutos para $\lambda = 1$, $Pr = 0,71$, $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,9$: (a) $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (b) $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (c) $Da = 1 \cdot 10^{-3}$, (d) $Da = 3 \cdot 10^{-3}$	61
6.24	Linhas de corrente para a convecção natural em uma cavidade quadrada segundo Lauriat and Prasad (1989) para $\lambda = 1$, $Pr = 0,71$, $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,9$: (a) $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (b) $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (c) $Da = 1 \cdot 10^{-3}$, (d) $Da = 3 \cdot 10^{-3}$	61
6.25	Linhas de corrente sobre a magnitude da velocidade para o escoamento sobre um obstáculo posicionado a jusante de um degrau em $t = 10$ s para $Re = 100$, $\varepsilon = 10^{-1}$: (a) $Da = 10^{-4}$, (b) $Da = 10^{-3}$, (c) $Da = 10^{-2}$, (d) $Da = 10^{-1}$	63

6.26	Linhas de corrente sobre a magnitude da velocidade para o escoamento sobre um obstáculo posicionado a jusante de um degrau em $t = 10$ s para $Re = 100$, $Da = 10^{-2}$: (a) $\varepsilon = 0,1$, (b) $\varepsilon = 0,2$, (c) $\varepsilon = 0,5$, (d) $\varepsilon = 0,9$.	64
6.27	Comprimento de recolamento para o escoamento sobre um obstáculo de diferentes valores de porosidade e permeabilidade posicionado a jusante de um degrau.	65
6.28	Perfis de velocidade a jusante do degrau com $\varepsilon = 10^{-1}$, $Re = 100$ e diferentes valores do número de Darcy.	65
6.29	Perfis de velocidade a jusante do degrau com $Da = 10^{-2}$, $Re = 100$ e diferentes valores de porosidade.	65
6.30	Linhas de corrente para o escoamento com $Re = 30$ sobre: (a) um cilindro poroso ($\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 10^{-7}$) e (b) um cilindro maciço (Breuer <i>et al.</i> , 2000).	67
6.31	Vista ampliada do campo escalar de vorticidade para o escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada em $t = 30$ s para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$	70
6.32	Campo de pressão para o escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada em $t = 30$ s para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$	71
6.33	Campo de temperatura para o escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada em $t = 30$ s para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$	72
6.34	Coefficientes de arrasto e sustentação para um cilindro poroso de base quadrada para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$	73
6.35	Linhas de corrente em vista ampliada para um cilindro poroso de base quadrada em $t = 30$ s para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$	74
6.36	Iso-contornos de temperatura em vista ampliada para um cilindro poroso de base quadrada em $t = 30$ s para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$	74
6.37	Número de Strouhal para o sinal do escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$	75

6.38	Função do incremento temporal para a simulação do escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$	76
6.39	Número de iterações por incremento temporal para o escoamento sobre um cilindro poroso.	77

Lista de Tabelas

6.1	Número de Nusselt médio na parede fria para diferentes valores do número de Rayleigh.	53
6.2	Número de Nusselt médio na parede fria de uma cavidade porosa para diferentes valores do número de Rayleigh.	61
6.3	Número de Strouhal para diferentes valores de porosidade e do número de Darcy.	69
6.4	Número de Strouhal para cilindros maciços.	69

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
2.1	Escoamentos por meios porosos	16
2.2	Metodologia da média volumétrica	17
2.3	Modelagens computacionais	18
3	MODELO FÍSICO	21
3.1	Escoamentos monofásicos	21
3.2	Escala macroscópica	21
3.3	Escoamentos por meios porosos	22
3.4	Domínios e condições de contorno	23
3.4.1	Cavidade acionada por esteira (LDC)	23
3.4.2	Cavidade aquecida de maneiras diferentes (DHC)	24
3.4.3	Escoamento sobre um degrau (BFS)	25
3.4.4	Geometria imersa em um canal	25
3.5	Condição inicial	26
3.6	Caracterização do escoamento	26
3.6.1	Caracterização dinâmica	26
3.6.2	Caracterização térmica	27
3.6.3	Caracterização do meio poroso	28
4	MODELO MATEMÁTICO DIFERENCIAL	30
4.1	Campo de aceleração	30
4.2	Equação diferencial do balanço de massa	31
4.3	Equação diferencial da quantidade de movimento linear	31
4.4	Equação diferencial da energia térmica	35
4.5	Aproximação de Boussinesq	38
4.6	Modelo diferencial para escoamentos por meios porosos	39
5	MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL	41
5.1	Malha computacional	41

5.2	Modelo numérico	42
5.2.1	Componentes de velocidade	44
5.2.2	Campo de temperatura	45
5.2.3	Oscilações numéricas e condições de convergência	46
5.3	Solução de Sistemas Lineares	46
5.4	Modelo computacional	47
6	RESULTADOS	48
6.1	Cavidade acionada por esteira	48
6.2	Cavidade aquecida de maneiras diferentes	50
6.3	Escoamento sobre um degrau	53
6.4	Cavidade porosa acionada por esteira	55
6.5	Cavidade porosa aquecida de maneiras diferentes	59
6.6	Escoamento sobre um obstáculo poroso a jusante de um degrau	61
6.7	Escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada	66
6.8	Convergência do método numérico	77
7	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	78
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A mecânica dos fluidos é o ramo da Engenharia Mecânica no qual se desenvolve o estudo dos fluidos em movimento ou em repouso. Uma fração desse estudo envolve os escoamentos em meios porosos, que serão definidos de forma simplificada para o presente trabalho como meios bifásicos, com uma das fases no estado sólido, não sujeita a deformação e possivelmente móvel. A metodologia aplicada nessa classe de problemas é fundamentada em duas vertentes, a teoria e a experimentação material.

No caso da teoria, modelos físico e matemático são desenvolvidos a fim de descrever as dinâmicas do caso material através de uma abordagem integro-diferencial. Escoamentos de fluidos são regidos pelas leis da mecânica e podem ser descritos por leis fundamentais, extensamente trabalhadas no meio teórico. O método experimental, por sua vez, baseia-se na reprodução material dos problemas através da montagem de bancadas de experimentação, na sua devida instrumentação e no tratamento estatístico das informações obtidas.

Alguns problemas tratam de fenômenos que podem apresentar um grande número de graus de liberdade e até mesmo um caráter estocástico intrínseco, características que inviabilizam a solução matemática analítica do problema. Nesses casos, pode-se utilizar de métodos empíricos, que estão usualmente associados a um grande consumo de recursos financeiros e materiais e de tempo. Uma alternativa ao seu emprego é a implementação de métodos numéricos ao modelo diferencial e sua aplicação em rotinas computacionais. O modelo numérico-computacional, se devidamente implementado, é capaz de fornecer soluções aproximadas de problemas complexos, permitindo a análise da resposta de um sistema em função de dado conjunto de parâmetros.

A simulação computacional é uma ferramenta de emprego crescente, que não se limita ao domínio da engenharia, sendo ampliada para aplicações em diversos setores da ciência contemporânea. Já é possível modelar simulações para campos aerodinâmicos, biológicos, meteorológicos e até financeiros. Tal recurso é extremamente útil para a compreensão de fenômenos complexos, de variadas amplitudes no domínio temporal e para a economia de recursos. Apesar da sua flexibilidade em relação às condições físicas e aplicações, vale lembrar que a metodologia computacional não substitui a experimental, mas a complementa.

Escoamentos em meios porosos são presentes em numerosas aplicações de engenharia e sua modelagem é um problema de razoável complexidade. Sua dinâmica pode ser aplicada no estudo de temas relacionados a absorção, troca iônica, destilação, sistemas de arrefecimento de grãos, leitos empacotados, trocadores de energia térmica, extração de petróleo, dentre outros. Sua modelagem computacional trata-se de uma atividade multidisciplinar, uma vez que envolve a mecânica dos fluidos, matemática pura e aplicada, engenharia de software, ciência da computação e outros.

A dinâmica em escoamentos por meios porosos é geralmente modelada de acordo com a lei de Darcy, que descreve um fluxo mássico de fluido através de um meio permeável de partículas livres. Tal modelo, no entanto, despreza os efeitos temporais e não prevê a influência de termos advectivos não-lineares sobre a quantidade de movimento. Logo, trata-se de uma condição simplificada de escoamentos a baixas velocidades (*creeping flow condition*), conveniente ao estudo do fluxo por filtros, principal objetivo do trabalho de Darcy.

No modelo supracitado, a continuidade na velocidade e nos esforços nas interfaces é também desconsiderada. O modelo de Brinkman relaciona a transformação viscosa à quantidade de movimento, garantindo a continuidade da velocidade na superfície do corpo poroso. A soma dos efeitos viscosos à lei de Darcy permite o cálculo de forças e torques em partículas porosas em movimento, como demonstrado por Jones (1978).

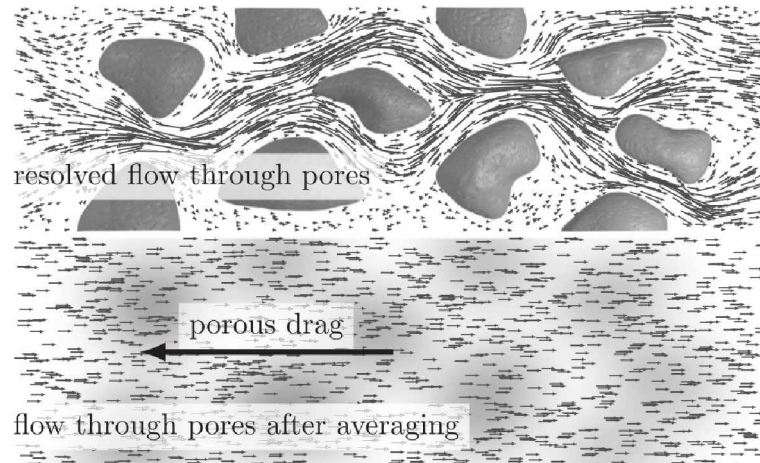
O principal efeito do meio poroso sobre o fluido é o arrasto adicional, que pode ser descrito em função de efeitos difusivos e advectivos. O modelo de Darcy-Brinkman trata dos efeitos difusivos, ou viscosos, e é pertinente para escoamentos com baixa proporção de efeitos advectivos, ou inerciais ($Re < 10$). Problemas modernos de engenharia, no entanto, requerem a modelagem dos fenômenos de transporte em meios porosos para maiores velocidades. A fim de modelar matematicamente os efeitos inerciais, trabalhos experimentais foram conduzidos por Forchheimer, que comprovou a necessidade de uma correção não-linear à lei de Darcy.

O transporte de energia térmica em meios porosos, por sua vez, é modelado segundo a média volumétrica das propriedades físicas das fases sólida e fluida, como apresentado por Vafai (2005). Deve-se considerar os efeitos da condução, presente nas duas fases, e os efeitos advectivos, que nesse trabalho ocorre apenas na fase fluida (modela-se um meio poroso cuja fase sólida é estática).

Ainda, a solução de escoamentos não isotérmicos requer a modelagem da força de empuxo, uma vez que a massa específica de dada substância é função, dentre outros parâmetros, de sua temperatura. Visando a economia de recursos computacionais, o empuxo é modelado de acordo com a aproximação de Boussinesq, que se fundamenta no princípio de que as variações na massa específica do fluido são sutis em função das temperaturas impostas. A variação na propriedade pode então ser negligenciada em todos os termos que não o gravitacional sem grandes prejuízos à modelagem.

É importante destacar que os modelos empregados no presente trabalho objetivam prever, por meio da metodologia da média volumétrica, as propriedades gerais e macroscópicas do escoamento por meios porosos. Tal modelo não é indicado para os casos em que são relevantes as informações nas escalas dos poros.

Figura 1.1: Princípio da média volumétrica aplicado a um meio poroso.



Fonte: Mobner and Radespiel (2015)

No presente trabalho objetiva-se a modelagem física, matemática, numérica e computacional de escoamentos laminares, incompressíveis e não-isotérmicos de fluidos newtonianos por meios porosos em regime transiente. Rotinas computacionais são desenvolvidas e simulações são conduzidas a fim de validar o código e de analisar a influência de características do meio poroso sobre o escoamento. As equações são resolvidas em um domínio bidimensional euleriano cartesiano fixo pelo método de diferenças finitas. Emprega-se a metodologia do passo fracionado para o acoplamento pressão-velocidade.

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, apresenta-se revisão da literatura acerca da temática e da metodologia adotada para o presente trabalho. Os temas abordados tratam da modelagem matemática, numérica e computacional de escoamentos laminares e incompressíveis de fluidos newtonianos por meios porosos.

2.1 Escoamentos por meios porosos

A modelagem de escoamentos por meios porosos é formalmente introduzida ao meio acadêmico através do trabalho de Darcy (1856), que apresenta observações e resultados para o fluxo de uma série de fluidos por filtros de areia. O modelo matemático proposto por Darcy relaciona a perda de carga, consequente da interação entre as fases fluida e sólida, à viscosidade do fluido e à permeabilidade do meio. Embora tal modelo já destacasse a influência da geometria e do arranjo das partículas sólidas, a caracterização geométrica do meio, bem como uma estimativa matemática precisa para a permeabilidade, não são definidas pelo francês.

Desde o século XX o estudo de escoamentos por meios porosos, em especial de fluidos lineares, vem recebendo crescente destaque na pesquisa científica. As propriedades e características da fase sólida e sua tradução para o domínio matemático são extensamente trabalhadas em estudos experimentais. Nesse sentido, destaca-se Ergun (1952), que apresenta, em seu trabalho com colunas empacotadas, um ajuste experimental para a estimativa da permeabilidade que é empregado até os dias atuais com certo sucesso.

Simultaneamente aos avanços nos estudos empíricos, algum esforço foi também direcionado ao desenvolvimento de metodologias teóricas com o fim de modelar matematicamente escoamentos por meios porosos. Os trabalhos pioneiros partem de Hubbert (1957), que descreve uma solução em regime permanente para baixos números de Reynolds limitada a meios isotrópicos e domínios unidimensionais, e Whitaker (1964), que apresenta um desenvolvimento teórico mais robusto para a lei de Darcy.

A limitada faixa de escoamentos que pode ser adequadamente modelada pela lei de

Darcy motivou estudos empíricos de escoamentos a elevados números de Reynolds. Destes, destaca-se o trabalho de Forchheimer (1901). Em seu estudo, um ajuste experimental é proposto a fim de compensar os efeitos de natureza inercial negligenciados na lei de Darcy. Um termo proporcional à energia cinética do sistema, corrigido pela permeabilidade e por fatores geométricos, é acrescentado à formulação canônica de Darcy. O modelo resultante é empregado em grande parte dos trabalhos subsequentes com algum sucesso na predição dos problemas estudados. A validade e consistência de tal modelo é ainda avaliada em trabalhos recentes como os apresentados por Peszynska *et al.* (2010) e Jambhekar (2011).

É conveniente ressaltar que a modelagem de escoamentos por meios porosos é ainda complementada por Brinkman (1947), que apresenta a influência das forças devido aos efeitos viscosos, relevantes principalmente para a continuidade dos esforços nas interfaces. A formulação integro-diferencial em mecânica dos fluidos, no entanto, já prevê tal influência. Sob essa perspectiva, é suficiente que se empregue apenas o modelo de Darcy-Forchheimer.

Apesar da consolidação da metodologia supracitada e do sucesso obtido em modelagens computacionais até a presente data, estudos mais detalhados, conduzidos nas últimas décadas, indicam que as técnicas regentes não incorporam os efeitos da camada limite para valores intermediários do número de Reynolds. Destaca-se o trabalho de Hsu *et al.* (1990), no qual um termo ajustado experimentalmente é somado ao de Darcy-Forchheimer para a modelagem da resistência ao movimento, imposta em função do meio poroso. Tal termo é proporcional a dada potência da velocidade local e à fatores geométricos, que são de difícil determinação. Por essa razão, a contribuição será negligenciada no desenvolvimento matemático do presente trabalho.

A modelagem do transporte de energia térmica em meios porosos é extensamente trabalhada no meio teórico em função de sua grande aplicabilidade em processos industriais que envolvem rejeição de cargas térmicas e transferência de espécies. As propriedades físicas do meio são estimadas através da razão volumétrica das fases que o constituem, como apresentado por Vafai (2005). São alguns exemplos de produções que tratam do assunto, segundo as metodologias de diferenças-finitas e de Lattice Boltzmann, os trabalhos de Hsu *et al.* (1990), Chen *et al.* (2017), Kasaeian *et al.* (2017), Gancarczyk *et al.* (2018), Torabi *et al.* (2019) e Xu *et al.* (2019).

A aproximação de Boussinesq aplicada à meios porosos, visando a modelagem dos efeitos gravitacionais associados aos gradientes de temperatura, é apresentada em trabalhos como Kelihher *et al.* (2011) e Vu *et al.* (2018).

2.2 Metodologia da média volumétrica

Uma importante ferramenta para o desenvolvimento da modelagem integro-diferencial para meios porosos é a metodologia da média volumétrica, que pode ser empregada na derivação de equações contínuas em sistemas multifásicos. Isso significa que equações que

descrevem fenômenos de interesse em uma das fases do sistema podem ser ajustadas para produzir relações que são válidas para todo o domínio. Nozad *et al.* (1985) apresentam essa metodologia no estudo de meios porosos, usando informações nas escalas das partículas porosas para obtenção de médias volumétricas de derivadas locais que são válidas para qualquer região do domínio.

Bear *et al.* (1990) apresentam o balanço macroscópico de massa, da quantidade de movimento linear e da energia térmica para as fases componentes do sistema. Para meios porosos, apresenta-se a definição das equações com as quais são modelados os esforços cisalhantes, os termos difusivos e advectivos e as simplificações dos termos não dominantes. A título de curiosidade (considerando os fins do presente trabalho), em regimes turbulentos, as variações espaciais são acompanhadas de oscilações no domínio temporal, o que introduz a necessidade de efetuar uma média temporal associada à metodologia da média espacial-volumétrica. Numerosos trabalhos são dedicados à avaliação da ordem de aplicação das médias até a definição da dupla decomposição, apresentada por Pedras *et al.* (1998), que define a equivalência entre as diferentes ordens de derivação.

Através da metodologia da média volumétrica, é possível introduzir às equações diferenciais da quantidade de movimento linear e da energia os efeitos da fase sólida sobre o escoamento, como evidenciado nos trabalhos de Mobner and Radespiel (2015) e Wang *et al.* (2015). O presente trabalho objetiva modelar os efeitos macroscópicos de uma fase sólida estática e uniformemente distribuída pela estrutura porosa, de forma que os principais efeitos sobre a quantidade de movimento e sobre o transporte de energia térmica são o arrasto adicional e a tortuosidade térmica.

2.3 Modelagens computacionais

Nessa seção serão apresentados trabalhos canônicos de modelagens numérico-computacionais relacionados à mecânica dos fluidos clássica e à modelagem de escoamentos em meios porosos. É conveniente, em função da temática do trabalho, tratar de produções que apresentem regimes laminares de escoamentos incompressíveis em domínios bidimensionais.

Um dos problemas clássicos da mecânica dos fluidos é o caso da cavidade acionada por esteira (*Lid Driven Cavity* ou LDC). A modelagem bidimensional do problema é desenvolvida por Ghia *et al.* (1982). Seu trabalho, que apresenta um método de alta ordem para solução de escoamentos à elevados números de Reynolds, é frequentemente usado como referência para a validação de modelagens computacionais. Posteriormente, a modelagem dos efeitos térmicos é incorporada ao problema, como exemplificado pelo trabalho de Santos *et al.* (2013).

O mesmo problema é resolvido, também à título de validação, para uma cavidade preenchida por uma estrutura porosa isotrópica. Assim como Ghia, Guo and Zhao (2002) apresentam os perfis das componentes de velocidade para diferentes números de Reynolds

e Darcy. A comparação entre os resultados possibilita a validação da modelagem do transporte de quantidade de movimento linear em meios porosos.

Outro caso canônico é o da cavidade aquecida de maneiras diferentes nas paredes verticais (*Differentially Heated Cavity* ou DHC). Tal problema trata da modelagem da convecção natural e, portanto, está intimamente ligado à modelagem dos fenômenos de transporte de massa e de energia térmica. Este caso é observado na literatura com certa frequência, como indicado pelos trabalhos de Davis (1983), Markatos and Pericleous (1984), Agrawal *et al.* (2000) e Gangawane *et al.* (2015).

Sabendo que as principais aplicações de estruturas porosas estão relacionadas ao aumento da eficiência no transporte de energia térmica, é natural que a solução de casos como o DHC sejam exaustivamente trabalhados para meios porosos. Tal fato é evidenciado pelos trabalhos de Lauriat and Prasad (1987), Goyeau and Songbe (1996), Baytas and Pop (1998), Khanafer *et al.* (2003), Mohamad and Saeid (2004), Seta *et al.* (2006), Nazari and Sheikhzadeh (2013), Habbachi *et al.* (2017), Liu and He (2017), Ng and Su (2019) e Kefayati (2019).

Escoamentos sobre geometrias maciças imersas em canais constituem outra classe de problemas de interesse no ramo da mecânica dos fluidos. Grande parte das aplicações industriais estão relacionadas à interação fluido-estrutura e o assunto tem recebido grande atenção nas últimas décadas. Embora a aplicabilidade de modelagens bidimensionais seja limitada nesse setor, alguns trabalhos, como o de Breuer *et al.* (2000), ainda tratam do escoamento bidimensional sobre uma geometria fixa em um canal. Estudos semelhantes para geometrias porosas podem ser encontrados nos trabalhos de Fransson *et al.* (2004), Babu and Narasimhan (2010), Dhinakaran and Ponmozhi (2011), Mahdhaoui *et al.* (2017), Naito *et al.* (2018) e Anirudh and Dhinarakan (2018).

Alguns estudos são voltados à modelagem e análise de problemas não isotérmicos com múltiplas geometrias porosas em domínios bidimensionais, visando a otimização de equipamentos como os trocadores de energia térmica. O aumento substancial da área de contato com o fluido proporciona significativos ganhos em eficiência. Resultados computacionais são apresentados nos trabalhos de Chu *et al.* (2019) e Luo and Xu (2019). Problemas envolvendo o escoamento sobre e através de estruturas porosas mais complexas, como hélices de turbinas e bordas de fuga de aeronaves, são modeladas nos trabalhos de Frackowiak *et al.* (2019) e Mobner and Radespiel (2017). A porosidade desses componentes confere significativas melhorias no sistema de arrefecimento e na acústica dos equipamentos sem comprometer sua integridade mecânica.

O caso do escoamento sobre um degrau (*Backward-Facing Step* ou BFS) é também extensamente estudado na mecânica dos fluidos visando a avaliação de escoamentos com separação, recirculação e recolamento, características presentes em numerosas aplicações em engenharia. Resultados computacionais deste problema podem ser encontrados nos trabalhos de Biswas *et al.* (2004), Erturk (2008) e Kopera *et al.* (2014). Diversos estudos

experimentais são também conduzidos, dos quais destaca-se o trabalho de Armaly *et al.* (1983), que será tomado como referência para a modelagem proposta no presente trabalho.

Alguns estudos são dedicados à análise da influência de obstáculos à jusante de degraus sobre as características do escoamento. As regiões de recolamento, por promoverem a mistura de parcelas mais e menos energéticas, afetam significativamente os mecanismos de transferência térmica. Nesse sentido, a introdução de geometrias, sob determinadas condições e regimes de operação, pode ser empregada a fim de compensar em parte os entraves ao transporte de energia devido a assimetria dos campos de pressão e temperatura. O tema é apresentado nos trabalhos de Chen *et al.* (2006), Selimefendigil and Oztop (2014), Chatterjee *et al.* (2015) e Filho (2018). Ao conhecimento dos autores, não são encontrados na literatura, até a presente data, resultados para obstáculos porosos (que serão apresentados no presente trabalho).

Capítulo 3

MODELO FÍSICO

A primeira etapa do desenvolvimento do trabalho consiste na análise física do problema material, a fim de se determinar as variáveis de interesse e propor suposições e hipóteses simplificadoras que viabilizem sua modelagem matemática. Para os fins do presente trabalho, é possível modelar o fluido como newtoniano e o escoamento como incompressível. As propriedades físicas da fase sólida, que será considerada indeformável e estática, são modeladas como homogêneas e isotrópicas pelo domínio.

3.1 Escoamentos monofásicos

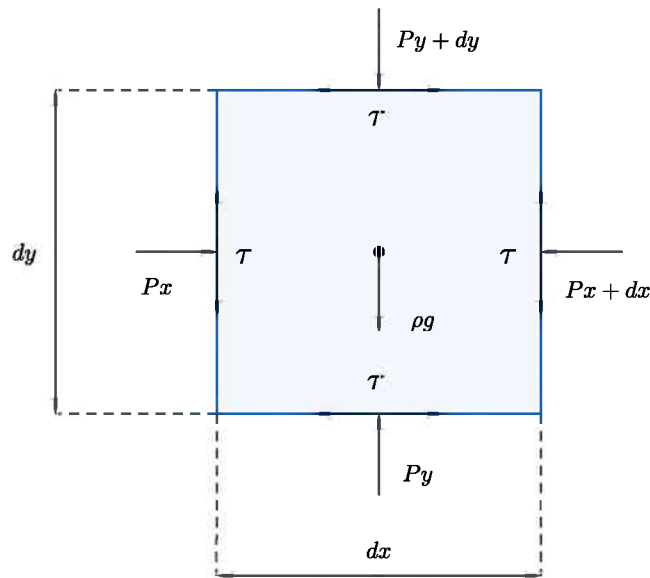
Em escoamentos monofásicos, consideram-se forças devido a pressão, efeitos viscosos, campo gravitacional e efeitos térmicos. Uma representação gráfica dos esforços externos que atuam sobre uma célula euleriana, ou elemento diferencial de fluido, para o caso bidimensional é apresentada na Figura (3.1). É importante salientar que as tensões de cisalhamento na realidade material apresentam, além das componentes coincidentes com a face, componentes ortogonais à fronteira, que não foram incluídas na ilustração para que sua clareza não seja comprometida.

O campo de temperatura atua sobre a massa específica, e a diferença no valor de tal propriedade para dada porção de fluido em relação ao volume adjacente configura uma força, função do gradiente térmico, associada ao campo gravitacional. O campo de temperatura tem influência também sobre propriedades como a capacidade térmica e a viscosidade dinâmica do fluido, mas as alterações em tais parâmetros são sutis e serão desconsideradas para os fins deste trabalho.

3.2 Escala macroscópica

É conveniente definir a escala macroscópica, que estabelece a resolução da metodologia diferencial a ser desenvolvida no próximo capítulo. A escala microscópica apresenta resolução de ordem inferior à das partículas sólidas, de forma que os seus incrementos são

Figura 3.1: Representação gráfica das forças que atuam sobre uma célula euleriana.



Fonte: Autoria própria

de ordem expressivamente menor do que a do comprimento característico dessas partículas e, simultaneamente, maior do que a escala molecular. Os incrementos macroscópicos, por sua vez, são de ordem superior à do comprimento característico das partículas porosas, mas substancialmente inferior à do domínio.

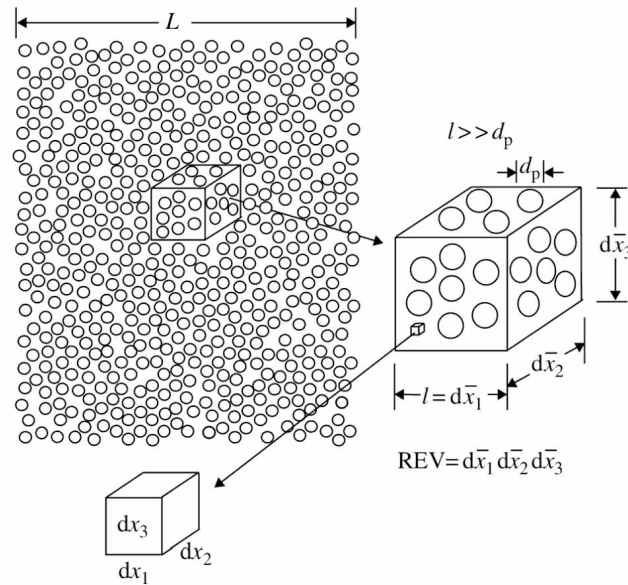
Nesse contexto, considerando a Fig.(3.2), supõe-se que $d_p \gg dx_i \gg l_m$, onde d_p representa o comprimento característicos das partículas sólidas, dx_i representa o incremento espacial na escala microscópica e l_m representa a escala molecular. Através de tal desigualdade, qualifica-se a hipótese do contínuo para a escala microscópica. Aplicando a metodologia da média volumétrica às expressões que modelam o escoamento na escala microscópica, obtém-se as relações empregadas na modelagem macroscópica.

3.3 Escoamentos por meios porosos

Sobre uma célula macroscópica, tratando-se agora de escoamentos por meios bifásicos, atuam as forças indicadas na Fig.(3.1), além de uma força de contato, ou de arrasto, função de parâmetros como porosidade, permeabilidade e velocidade local, que representa a resistência que a fase sólida impõe ao movimento do fluido.

Segundo a perspectiva macroscópica, a fase sólida ainda introduz distorções nas propriedades físicas relacionadas ao transporte de energia térmica. No interior de estruturas porosas é possível, por meio de uma média volumétrica, estimar as propriedades físicas gerais para dado volume diferencial. Propriedades como condutividade e capacidade térmicas de uma matriz porosa são estimadas de acordo com tal metodologia. É conveniente ressaltar que a solução do campo de temperatura, em consequência da média volumétrica, deve

Figura 3.2: Escalas micro e macroscópica para a média volumétrica em meios porosos.



Fonte: Vafai (2005)

assumir o equilíbrio térmico entre as fases.

A hipótese de uma fase sólida inerte introduz ainda efeitos de tortuosidade térmica, que estão relacionados à participação das fases nos termos advectivos e difusivos do transporte de energia térmica. No presente trabalho, modela-se o transporte por mecanismos difusivos (condução) nas duas fases e por mecanismos advectivos apenas na fase fluida, uma vez que a fase sólida é estática. Os efeitos conjuntos destes mecanismos (convecção), corrigidos por propriedades físicas assimétricas, resulta na tortuosidade térmica, que será observada em alguns resultados apresentados neste trabalho.

3.4 Domínios e condições de contorno

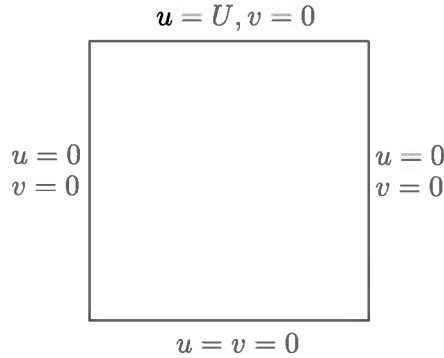
No presente trabalho serão desenvolvidas e apresentadas as modelagens dos problemas canônicos citados no capítulo anterior. Nesta seção, explora-se os domínios computacionais e as condições de contorno para cada caso.

3.4.1 Cavity acionada por esteira (LDC)

Objetiva-se modelar o escoamento em uma cavidade quadrada cuja parede superior é móvel e apresenta velocidade uniforme. Para este problema, impõe-se às componentes de velocidade a condição de contorno de primeiro tipo (Dirichlet). Todas as componentes nos limites do domínio, com exceção da componente horizontal da parede superior, devem ser fixadas com valor nulo. Os efeitos térmicos e gravitacionais são desconsiderados. Uma representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso da cavidade

acionada por esteira é apresentada na Fig.(3.3).

Figura 3.3: Representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso da cavidade acionada por esteira.

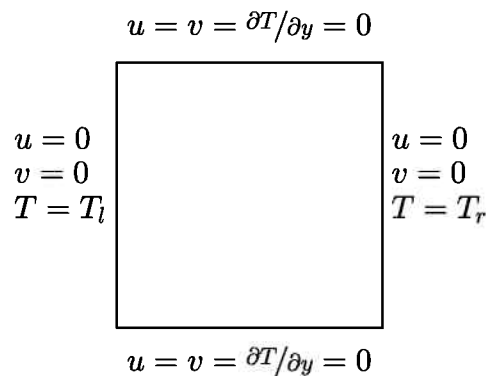


Fonte: Autoria própria

3.4.2 Cavidade aquecida de maneiras diferentes (DHC)

Modela-se o escoamento em uma cavidade quadrada cujas paredes horizontais estão isoladas termicamente e as verticais apresentam temperaturas fixas e diferentes. O gradiente de temperatura promove a configuração de uma célula convectiva sustentada por forças devido o campo gravitacional. Para este problema, impõe-se a condição de velocidade nula para os limites do domínio, a condição de temperatura fixa para as paredes verticais e a condição de segundo tipo (Neumann) para a temperatura nas paredes horizontais. Os efeitos de transformação viscosa são desconsiderados. Uma representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso da cavidade aquecida de maneiras diferentes é apresentada na Fig.(3.4).

Figura 3.4: Representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso da cavidade aquecida de maneiras diferentes nas paredes verticais.

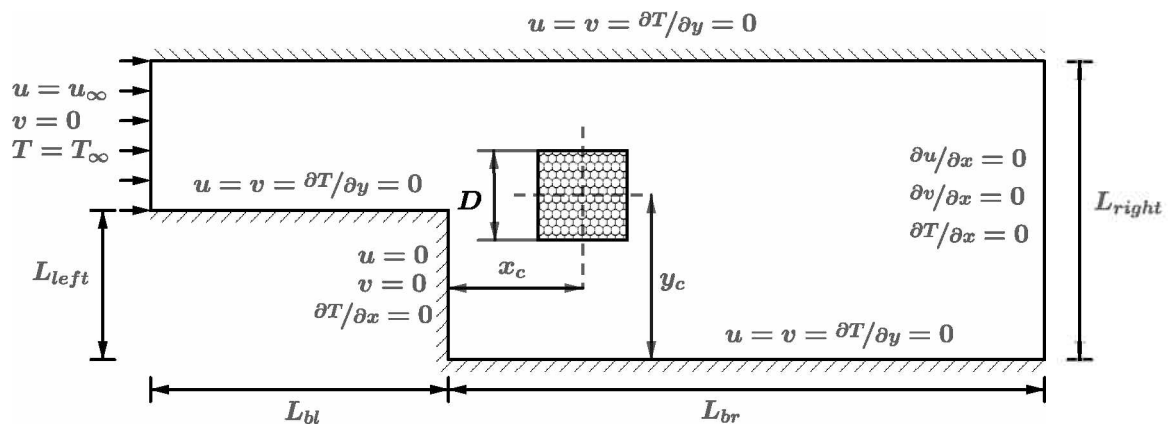


Fonte: Autoria própria

3.4.3 Escoamento sobre um degrau (BFS)

Modela-se o escoamento isotérmico sobre um canal com variação de seção. Um perfil de velocidade uniforme é imposto na entrada, enquanto para a saída impõe-se as condições de Neumann para as componentes de velocidade e Dirichlet para a pressão. Além desta primeira configuração, é conveniente ainda modelar o escoamento sobre um obstáculo poroso fixo posicionado a jusante de um degrau. Uma representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso do escoamento sobre um degrau com um obstáculo poroso cartesiano é apresentada na Fig.(3.5).

Figura 3.5: Representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso do cilindro poroso fixo a jusante de um degrau.

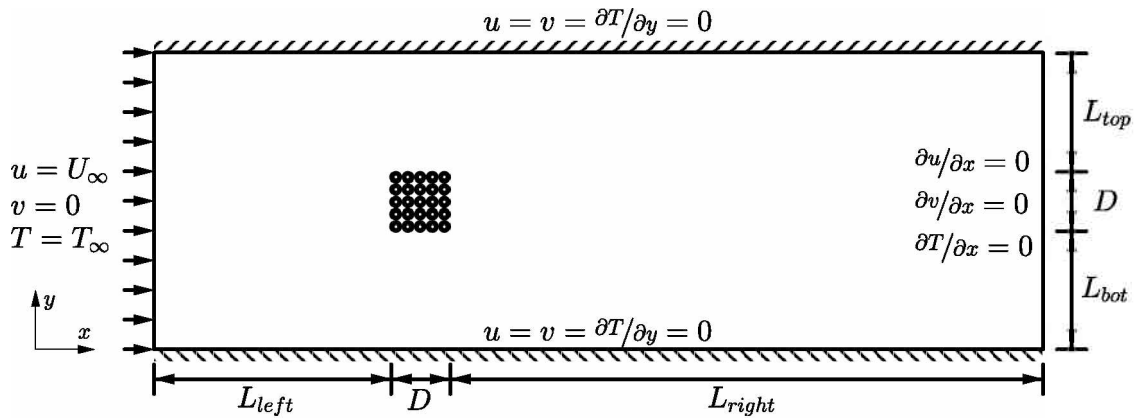


Fonte: Autoria própria

3.4.4 Geometria imersa em um canal

Objetiva-se modelar o escoamento em um canal com condição de não deslizamento (admite-se a condição de Dirichlet para as componentes de velocidade nas paredes) no qual se fixa uma geometria porosa cartesiana. De forma análoga ao último caso, um perfil de velocidade uniforme é imposto na entrada, enquanto na saída as condições de Neumann e Dirichlet são impostas às componentes de velocidade e à pressão, respectivamente. Considera-se um campo gravitacional nulo (ou normal ao plano). Um termo fonte é imposto para a temperatura da fração sólida na matriz porosa e a função de transformação viscosa não é negligenciada para este caso. É importante notar que, uma vez que o campo gravitacional não atua no plano do escoamento, não observa-se a influência dos efeitos térmicos sobre a quantidade de movimento linear. Uma representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso do canal com uma geometria imersa fixa é apresentada na Fig.(3.6).

Figura 3.6: Representação gráfica do domínio e das condições de contorno para o caso do cilindro poroso fixo em um canal.



Fonte: Autoria própria

3.5 Condição inicial

Admite-se, para todos os problemas desenvolvidos neste trabalho, condição inicial de repouso e equilíbrio térmico.

3.6 Caracterização do escoamento

A caracterização do problema é fundamental uma vez que, escoamentos de diferentes fluidos, a díspares velocidades no interior ou sobre geometrias com distintas dimensões características podem apresentar comportamentos semelhantes. A equivalência das condições de operação pode ser deduzida ao relacionar as proporções entre os mecanismos de transporte envolvidos no escoamento. Nesta seção, os parâmetros adimensionais que caracterizam os escoamentos e as fases que compõem o sistema, bem como sua formulação matemática, são apresentados.

3.6.1 Caracterização dinâmica

A dinâmica dos escoamentos é geralmente caracterizada pelo número de Reynolds (Re), que pode ser calculado através da Eq.(3.1).

$$Re = \frac{VL}{\nu}, \quad (3.1)$$

onde V representa a velocidade, imposta em uma parede ou na entrada de um canal, L representa o comprimento característico e ν representa a viscosidade cinemática do fluido, relação entre sua viscosidade dinâmica (μ) e massa específica (ρ). O adimensional

de Reynolds pode ser interpretado como a razão entre os efeitos advectivos e os efeitos difusivos.

Acerca da dinâmica de problemas com geometrias imersas, destacam-se os coeficientes de arrasto (C_d) e sustentação (C_l), calculados através das Eqs.(3.2) e (3.3). Tais adimensionais relacionam os fatores geométricos do obstáculo às forças que este exerce sobre o fluido nas direções horizontal e vertical, respectivamente. Além de uma valiosa ferramenta de validação, estes são parâmetros de grande relevância para projetos aerodinâmicos.

$$C_d = \frac{2F_x}{\rho V^2 A_f}, \quad (3.2)$$

$$C_l = \frac{2F_y}{\rho V^2 A_f}, \quad (3.3)$$

onde F_x e F_y são as forças resultantes nas direções horizontal e vertical, respectivamente, e A_f é a projeção da área do corpo na direção do escoamento. Para um cilindro de base quadrada, a projeção da área equivale à sua dimensão característica ($A_f = L$).

Para problemas periódicos, é ainda possível caracterizar o escoamento em função de uma frequência adimensional, denominada número de Strouhal (St). Tal parâmetro é determinado de acordo com a seguinte equação:

$$St = \frac{fL}{V}, \quad (3.4)$$

onde f representa a frequência do sinal.

3.6.2 Caracterização térmica

A caracterização dos fenômenos térmicos é relacionada a uma ampla combinação de parâmetros. Para os fins do presente trabalho, é conveniente destacar os adimensionais de Prandtl (Pr), Rayleigh (Ra) e Nusselt (Nu).

O número de Prandtl é definido pela razão entre a difusividade da quantidade de movimento linear e a difusividade térmica, e pode ser calculado pela seguinte equação:

$$Pr = \frac{\mu C}{k}, \quad (3.5)$$

onde C representa a capacidade térmica do meio e k a sua condutividade térmica.

O número de Rayleigh é função da razão entre os efeitos gravitacionais e os efeitos viscosos e do número de Prandtl. Tal adimensional é calculado através da equação:

$$Ra = \frac{\mathbf{g}\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu\alpha}, \quad (3.6)$$

onde \mathbf{g} representa o campo gravitacional, β representa o coeficiente de expansão térmica, T_s a temperatura de uma superfície de referência e T_∞ a temperatura de referência.

O número de Nusselt, por sua vez, representa a proporção de mecanismos difusivos e advectivos no transporte de energia térmica. Para baixos valores de Nusselt, observa-se predominância da condução térmica, enquanto maiores valores expressam a predominância da advecção. Este adimensional é definido matematicamente de acordo com a seguinte equação:

$$Nu = \frac{L}{\Delta T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (3.7)$$

onde T representa o campo escalar de temperatura e ΔT representa a diferença entre temperaturas de referência.

3.6.3 Caracterização do meio poroso

O meio poroso pode ser definido em função de propriedades como porosidade (ε), permeabilidade (K), razão de condutividade (λ) e número de Darcy (Da).

A porosidade é definida como a razão entre o volume ocupado pelo fluido (ϑ_f) e o volume total da estrutura porosa (ϑ_t). Para um meio poroso homogêneo e isotrópico, tal propriedade é válida tanto para uma célula na escala macroscópica, quanto para a estrutura em sua escala material.

$$\varepsilon = \frac{\vartheta_f}{\vartheta_t}. \quad (3.8)$$

A permeabilidade pode ser interpretada como a permissividade do meio ao movimento do fluido. A estimativa matemática de tal propriedade, segundo Ergun (1952), é função da porosidade, do comprimento característico das partículas sólidas e de um fator ajustado experimentalmente (a), como indicado na Eq.(3.9). É conveniente ressaltar os ajustes experimentais propostos por Ergun, que serão empregados também para o termo de Forchheimer (F), apresentado na Eq.(3.10). Nestes, a assume o valor de 150 e b assume o valor de 1,75.

$$K = \frac{\varepsilon^3 d_p^2}{a(1 - \varepsilon)^2}. \quad (3.9)$$

$$F = \frac{b}{\sqrt{a\varepsilon^3}}, \quad (3.10)$$

A razão de condutividade expressa a relação entre a condutividade efetiva do meio poroso e a condutividade do fluido, como indicado à seguir:

$$\lambda = \frac{k_m}{k_f}, \quad (3.11)$$

onde os subscritos f e m se referem às propriedades do fluido e do meio poroso, respectivamente.

Finalmente, o número de Darcy relaciona a permeabilidade do meio ao seu comprimento característico em dada direção (K_i , L_i). Tal parâmetro pode apresentar caráter anisotrópico, mesmo em um meio homogêneo e isotrópico, se a estrutura porosa é assimétrica.

$$Da_i = \frac{K_i}{L_i^2}. \quad (3.12)$$

Capítulo 4

MODELO MATEMÁTICO DIFERENCIAL

A representação simbólica do problema físico, segundo as hipóteses assumidas, é feita por meio da modelagem matemática, para o fim de avaliar quantitativamente propriedades de interesse. A sua elaboração, se conduzida de maneira criteriosa, deve proporcionar respostas condizentes com a realidade material.

O desenvolvimento diferencial requer a hipótese do contínuo. Para que as propriedades físicas do fluido sejam constantes, deve-se determinar um volume-limite (elemento diferencial) que seja pequeno o suficiente para eliminar as incertezas de caráter macroscópico e, simultaneamente, grande o suficiente para eliminar as de caráter microscópico. A variação das propriedades nas escalas definidas no capítulo anterior é suave e conveniente à hipótese do contínuo. Admite-se, portanto, a metodologia diferencial, que será fundamentada no balanço de massa e energia e no emprego da segunda lei de Newton em um sistema fluido infinitesimal.

4.1 Campo de aceleração

A segunda lei de Newton, aplicada ao sistema fluido infinitesimal, requer a definição do campo vetorial de aceleração. Um campo de velocidade experimenta uma aceleração, ou taxa de variação, que é função dos domínios temporal e espacial. No presente trabalho, trata-se de um espaço bidimensional, sobre o qual a aceleração é dada como indicado à seguir:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right), \quad (4.1)$$

onde \mathbf{V} representa o vetor de velocidade, \mathbf{u} sua componente horizontal e \mathbf{v} a sua componente vertical.

A derivada temporal total (aceleração total), apresentada do lado esquerdo da Eq.(4.1), equivale à soma dos efeitos da aceleração local (taxa de variação no domínio temporal) e

da aceleração advectiva (taxa de variação no domínio espacial).

4.2 Equação diferencial do balanço de massa

Considera-se um volume de controle cartesiano fixo de dimensões (dx, dy, dz) . Infere-se que a massa deste elemento é descrita em função da soma dos efeitos locais e de transporte (fluxo) sobre tal propriedade. Empregando o Teorema do Transporte de Reynolds (TTR) para o balanço de massa no volume diferencial, chega-se à seguinte expressão:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\vartheta + \sum_i (\rho_i \mathbf{A}_i \mathbf{V}_i)_{saida} - \sum_i (\rho_i \mathbf{A}_i \mathbf{V}_i)_{entrada} = 0, \quad (4.2)$$

onde ϑ representa o volume do elemento diferencial e \mathbf{A}_i representa um vetor de direção normal à da componente de velocidade e de módulo equivalente à projeção da área do elemento em tal direção.

O primeiro termo do lado esquerdo da Eq.(4.2) expressa a influência dos efeitos locais, enquanto os termos remanescentes correspondem aos efeitos de fluxo. Para elementos de arestas muito reduzidas, aproxima-se do caso de um elemento diferencial, que permite a seguinte simplificação:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\vartheta \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz. \quad (4.3)$$

Estendendo essa aproximação aos termos de fluxo, obtém-se a equação diferencial do balanço mássico de um volume de controle infinitesimal.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (4.4)$$

Para o escoamento incompressível (que implica em uma taxa de variação desprezível para a massa específica) em um espaço bidimensional, no qual a profundidade (dz) é desprezada, define-se a equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 0. \quad (4.5)$$

A Eq.(4.5) garante que o balanço de massa, em um elemento infinitesimal, seja respeitado.

4.3 Equação diferencial da quantidade de movimento linear

As forças externas, atuantes sobre o volume de controle cartesiano fixo definido na seção anterior, originam uma variação na quantidade de movimento, que pode ser descrita

segundo o TTR como indicado abaixo:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \mathbf{V} \rho d\vartheta \right) + \sum (\dot{m}_i \mathbf{V})_{saída} - \sum (\dot{m}_i \mathbf{V})_{entrada}, \quad (4.6)$$

onde $\sum \mathbf{F}$ representa a resultante das forças externas e \dot{m} representa o fluxo mássico.

A integral de volume na Eq.(4.6) é tratada de forma análoga àquela da equação (4.3), aproximando-se de um termo diferencial. Assim como proposto para o balanço mássico, desenvolve-se o cálculo em detrimento de uma das três dimensões espaciais (dz):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{V} \rho d\vartheta) \approx \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) dx dy. \quad (4.7)$$

Tal porção, somada ao fluxo líquido de quantidade de movimento, resulta em uma relação entre as forças externas e a aceleração total, conseqüente de sua ação, sobre uma partícula que ocupa o volume de controle.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{V}) \right] + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \right). \quad (4.8)$$

O primeiro termo do lado direito da equação equivale a equação da continuidade (4.5), que pode ser aproximado à zero para um escoamento incompressível, e o termo remanescente representa a aceleração total da massa que ocupa instantaneamente o volume de controle:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}. \quad (4.9)$$

Assim, é possível reescrever a equação (4.8) da seguinte maneira:

$$\sum \mathbf{F} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dx dy. \quad (4.10)$$

Observa-se que o somatório de forças externas atuantes sobre um elemento diferencial equivale ao produto da massa ($\rho dx dy$) pela aceleração ($\frac{d\mathbf{V}}{dt}$), como já proposto pela mecânica clássica. É possível, ainda, descrever a resultante das forças em função do ‘volume’ do elemento (que, para o caso bidimensional, corresponde à área, produto de dx por dy), como indicado na equação (4.11). Uma vez definida a resultante sobre o elemento diferencial, parte-se para o tratamento das forças externas citadas no modelo físico.

$$\frac{\sum \mathbf{F}}{d\vartheta} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt}. \quad (4.11)$$

A força gravitacional atua sobre toda a massa do sistema de maneira uniforme, sua modelagem diferencial para um domínio bidimensional faz uso da definição da equação

(4.10) e do campo gravitacional:

$$d\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g} dx dy. \quad (4.12)$$

A direção de $d\mathbf{F}_g$ é definida pela direção do campo vetorial gravitacional (\mathbf{g}). É conveniente descrever a força em função do volume do elemento, como indicado à seguir:

$$\frac{d\mathbf{F}_g}{d\vartheta} = \rho \mathbf{g}. \quad (4.13)$$

Forças devido os efeitos viscosos são de caráter superficial, ou seja, resultam de tensões sobre as superfícies do volume de controle. Essas tensões são o produto, por sua vez, do movimento relativo entre as partículas de fluido.

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{vmatrix}. \quad (4.14)$$

A Eq.(4.14) apresenta o tensor de tensões para um domínio bidimensional. Os efeitos líquidos são obtidos pela diferença entre as tensões atuantes em cada par de superfícies, indicadas na figura (3.1). As equações abaixo apresentam os valores de forças percebidas pelo volume de controle nas direções x e y , respectivamente.

$$d\mathbf{F}_{vis,x} = \tau_{xx} dx dy - \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) dx dy \cdot \hat{\mathbf{i}} + \tau_{yx} dx dy - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dx dy \cdot \hat{\mathbf{i}}, \quad (4.15)$$

$$d\mathbf{F}_{vis,y} = \tau_{yy} dx dy - \left(\tau_{yy} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) dx dy \cdot \hat{\mathbf{j}} + \tau_{xy} dx dy - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dx dy \cdot \hat{\mathbf{j}}. \quad (4.16)$$

Os símbolos $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ representam versores que assumem as direções dos eixos horizontal e vertical, respectivamente, em relação ao referencial inercial. Somando os termos do lado direito das equações (4.15) e (4.16), tem-se:

$$d\mathbf{F}_{vis,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dx dy \cdot \hat{\mathbf{i}}, \quad (4.17)$$

$$d\mathbf{F}_{vis,y} = \left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dx dy \cdot \hat{\mathbf{j}}. \quad (4.18)$$

A força de superfície líquida atuando sobre o elemento diferencial pode também ser descrita

em função de seu volume:

$$\frac{d\mathbf{F}_{vis,x}}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} \right) \cdot \hat{\mathbf{i}}, \quad (4.19)$$

$$\frac{d\mathbf{F}_{vis,y}}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} \right) \cdot \hat{\mathbf{j}}. \quad (4.20)$$

Observa-se que o vetor $(d\mathbf{F}_{vis}/d\vartheta)$ possui como componentes na direções x e y os valores correspondentes às equações (4.19) e (4.20), respectivamente. É possível reescrever o valor de $d\mathbf{F}_{vis}$ através da definição de divergente:

$$\frac{d\mathbf{F}_{vis}}{d\vartheta} = \nabla \tau_{ij}, \quad (4.21)$$

de forma que

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}}. \quad (4.22)$$

As forças devido a pressão também são forças de superfície. Assim, a sua influência sobre o volume de controle é modelada pela soma dos seus efeitos ao longo da fronteira. Considerando o diagrama dado em (3.1), nota-se que uma variação de pressão ao longo de dada direção resulta em uma força que pode ser calculada pelas Eqs. (4.23) e (4.24).

$$d\mathbf{F}_{p,x} = \left[p_x - \left(p_x + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] dx dy \cdot \hat{\mathbf{i}} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy \cdot \hat{\mathbf{i}}, \quad (4.23)$$

$$d\mathbf{F}_{p,y} = \left[p_y - \left(p_y + \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] dx dy \cdot \hat{\mathbf{j}} = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy \cdot \hat{\mathbf{j}}. \quad (4.24)$$

É também possível descrever a força específica devido ao campo de pressão utilizando a definição de divergente, apresentada na equação (4.22).

$$\frac{d\mathbf{F}_p}{d\vartheta} = -\nabla p. \quad (4.25)$$

Substituindo as equações (4.13), (4.21) e (4.25) na equação (4.11), tem-se a equação diferencial da quantidade de movimento linear para um elemento fluido infinitesimal:

$$\frac{\sum \mathbf{F}}{d\vartheta} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \tau_{ij}. \quad (4.26)$$

Para fluidos newtonianos, a taxa de deformação é diretamente proporcional ao gradiente de velocidade. A tensão de cisalhamento pode ser calculada através dessa propriedade,

corrigindo o gradiente pelo coeficiente de viscosidade dinâmica (White, 2011).

$$\tau = \mu \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i}. \quad (4.27)$$

Fazendo uso dessa propriedade de fluidos lineares para reescrever o último termo do lado direito da equação diferencial da quantidade de movimento linear, chega-se à equação de Navier-Stokes na sua forma vetorial:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (4.28)$$

Esta é uma equação diferencial parcial de segunda ordem que modela escoamentos incompressíveis em regime transiente para fluidos lineares.

4.4 Equação diferencial da energia térmica

As equação diferencial da quantidade de movimento, apresentada na Eq.(4.28), modela a dinâmica de escoamentos em detrimento dos efeitos térmicos. Para que estes sejam inseridos à modelagem, de acordo com a proposta do presente trabalho, deve-se resolver ainda o campo de temperatura, que é afetado por fenômenos difusivos e advectivos.

A equação integral da energia para um volume de controle é apresentada à seguir:

$$\dot{Q} - \dot{W}e - \dot{W}v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int e \rho d\vartheta \right) + \int \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA, \quad (4.29)$$

onde \dot{Q} representa o fluxo térmico, $\dot{W}e$ representa o trabalho de eixo (imposto por uma fonte externa), $\dot{W}v$ representa o trabalho devido as tensões de cisalhamento, e representa a energia contida no volume de controle e \mathbf{n} é um versor de direção normal à fronteira do elemento de área infinitesimal.

Para o presente trabalho, negligencia-se os efeitos da radiação, considerando apenas o fenômeno da condução pelas fronteiras do sistema. A condução, ou difusão térmica, é modelada segundo a lei de Fourier:

$$q = -k \nabla T, \quad (4.30)$$

onde T representa o campo escalar de temperatura. Considerando o volume de controle indicado na figura (3.1), um fluxo térmico na direção x é descrito segundo a relação abaixo:

$$\dot{Q}_x = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) dy - q_x dy. \quad (4.31)$$

Os termos do lado direito representam os fluxos pelas faces verticais do elemento. O processo é reproduzido também para o fluxo na direção y , pelas faces horizontais. Somando

os efeitos de entrada e saída de energia térmica pelas fronteiras, obtém-se a equação de transferência de energia térmica por condução para o elemento diferencial:

$$\frac{\dot{Q}_x}{d\vartheta} = \nabla(k\nabla T). \quad (4.32)$$

Voltando à equação (4.29), considera-se o trabalho de eixo nulo para o volume de controle estabelecido ($\dot{W}_e = 0$). O trabalho devido as forças viscosas (\dot{W}_v), por sua vez, é modelado pelo produto da velocidade por sua componente de tensão e pela dimensão da fronteira. Para as faces verticais, tem-se

$$\dot{W}_{vx} = \left(w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) dy - w_x dy = \frac{\partial w_x}{\partial x} dy, \quad (4.33)$$

onde

$$w_x = -(\mathbf{u}\tau_{xx} + \mathbf{v}\tau_{xy}). \quad (4.34)$$

O procedimento descrito acima é reproduzido para as faces horizontais e a soma das componentes pelo domínio resulta na equação da taxa líquida de trabalho devido os efeitos viscosos.

$$\frac{\dot{W}_v}{d\vartheta} = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}\tau_{xx} + \mathbf{v}\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}\tau_{yx} + \mathbf{v}\tau_{yy}) \right]. \quad (4.35)$$

É possível ainda reescrever a equação (4.35) usando a definição de divergente, como indicado à seguir:

$$\frac{\dot{W}_v}{d\vartheta} = -\nabla \cdot \mathbf{V}\tau_{ij}. \quad (4.36)$$

Na literatura é comum a divisão do termo apresentado acima em duas parcelas. Uma deve indicar o trabalho em função da taxa de variação das tensões no plano, enquanto a outra deve descrever a transformação viscosa, que expressa a fração da energia de movimento que será transformada, em função de efeitos viscosos, em energia térmica.

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}\tau_{ij}) = \mathbf{V}(\nabla\tau_{ij}) + \Phi. \quad (4.37)$$

Na Eq.(4.37), a primeira parcela do lado direito representa a taxa de variação dos esforços nos planos de ação das tensões e Φ representa a função de transformação viscosa. Em um escoamento bidimensional, para um fluido linear e incompressível, a função de

transformação viscosa é modelada da seguinte maneira:

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (4.38)$$

Desenvolvendo o lado direito da equação (4.29), que corresponde ao teorema do transporte de Reynolds para a energia em um elemento infinitesimal, sabe-se que a alteração da energia e seu fluxo pelas fronteiras é descrito de acordo com a relação abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho d\vartheta \right) + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = \left(\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \mathbf{V} \right). \quad (4.39)$$

Substituindo as equações (4.32), (4.37) e (4.39) na equação (4.29), obtém-se:

$$\left(\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \mathbf{V} \right) = \nabla (k \nabla T) + \mathbf{V} (\nabla \tau_{ij}) + \Phi. \quad (4.40)$$

A energia contida no volume infinitesimal equivale à soma das energias interna (u), cinética e potencial gravitacional:

$$\left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \mathbf{V}^2 + \rho g \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \mathbf{V} \right) = \nabla (k \nabla T) + \mathbf{V} (\nabla \tau_{ij}) + \Phi. \quad (4.41)$$

Com o fim de simplificar a expressão, deduz-se desta o produto da equação da quantidade de movimento linear pela velocidade, dado abaixo:

$$\rho \frac{d}{dt} (\mathbf{V}^2) = \rho g \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla p + \mathbf{V} \nabla \tau_{ij}. \quad (4.42)$$

É importante notar que, para a equação (4.41), o termo que carrega o campo gravitacional diz respeito a energia potencial, e portanto a velocidade associada a tal termo deve ser referenciada ao sistema de coordenadas inercial ($\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}$). Já na equação (4.42), esse termo se relaciona ao campo de pressão, que é função da coluna de fluido sobre o ponto. Sua posição, portanto, deve ser referenciada em relação ao nível de fluido ($Ly - y$), de forma que sua derivada corresponde ao inverso daquela obtida para a energia potencial gravitacional ($\dot{\mathbf{r}}' = -\mathbf{V}$).

A soma das equações (4.41) e (4.42) suprime as parcelas das energias cinética e gravitacional, o produto do Laplaciano da pressão pela velocidade e o divergente do tensor de tensões.

$$\rho \frac{du}{dt} + p (\nabla \mathbf{V}) = \nabla (k \nabla T) + \Phi. \quad (4.43)$$

É possível ainda simplificar a equação ao considerar que as propriedades físicas são aproximadamente constantes para as variações térmicas a serem modeladas, como proposto

no capítulo anterior. Essa suposição permite expressar a energia interna como o produto da capacidade térmica pela temperatura. Assim, para escoamentos incompressíveis, tem-se:

$$\rho C \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi, \quad (4.44)$$

onde

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (4.45)$$

4.5 Aproximação de Boussinesq

Até então, o desenvolvimento teórico do problema trata do campo de velocidade de forma independente do campo de temperatura. Isto é, os efeitos da velocidade são carregados para o campo de temperatura, mas os efeitos térmicos não são observados no campo de velocidade, já que não há nenhum termo que relaciona o campo térmico a uma variação da quantidade de movimento linear na equação (4.28).

É importante lembrar que, como apresentado no modelo físico, a aproximação de Boussinesq se fundamenta na hipótese de que as variações da massa específica do fluido (devido o gradiente térmico) são sutis e podem ser negligenciadas para todos os termos, que não o da força gravitacional, sem grandes prejuízos à modelagem.

Esta metodologia é recorrente na solução de escoamentos não-isotérmicos já que apresenta um baixo custo computacional e é capaz de modelar satisfatoriamente fenômenos térmicos para variações suaves na massa específica.

Considera-se um valor de referência para a massa específica (ρ_o). Gradientes térmicos introduzem variações ($\Delta\rho$), que podem ser definidas da seguinte forma:

$$\Delta\rho = \rho - \rho_o, \quad (4.46)$$

de maneira que a força de empuxo é dada pela relação:

$$\mathbf{F}_T = (\rho_o + \Delta\rho) \mathbf{g}. \quad (4.47)$$

É possível avaliar a força de empuxo através da variação da temperatura em torno da temperatura de referência (T_o) ao corrigir sua diferença pelo coeficiente de expansão térmica (β), de forma que a força de empuxo é reescrita como segue:

$$\mathbf{F}_T = \rho_o \beta (T - T_o) \mathbf{g}. \quad (4.48)$$

Finalmente, ao unir os efeitos do empuxo àqueles já explicitados na dedução das equações de Navier-Stokes, tem-se a equação vetorial da quantidade de movimento linear

para um volume infinitesimal segundo a aproximação de Boussinesq:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho\beta(T - T_o)\mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (4.49)$$

Para gases ideais, a constante de expansão térmica equivale ao inverso da temperatura de referência, propriedade que é estendida à modelagem proposta neste trabalho.

4.6 Modelo diferencial para escoamentos por meios porosos

A modelagem macroscópica de Darcy-Forchheimer para escoamentos por meios porosos propõe a incorporação de um termo fonte, apresentado na Eq.(4.50), à equação diferencial da quantidade de movimento linear. A expressão pode ser interpretada, portanto, como o arrasto, ou resistência ao transporte da quantidade de movimento linear, em função da interação do fluido com as partículas sólidas.

$$-\nabla P_p = \frac{\mu \mathbf{V}}{K} + \frac{F \rho |\mathbf{V}| \mathbf{V}}{\sqrt{K}}, \quad (4.50)$$

onde ∇P_p é a queda de pressão devido a interação com o meio poroso. O segundo termo do lado direito da equação, que corresponde ao termo de Forchheimer, apresentará maiores impactos sobre a quantidade de movimento linear para maiores números de Reynolds locais, enquanto o primeiro, que corresponde à lei de Darcy, terá maior representatividade para menores valores do adimensional. Este termo fonte, portanto, associa às baixas velocidades a correção linear, relacionada aos esforços viscosos, e às altas velocidades a correção não linear, relacionada aos efeitos inerciais.

Para a modelagem dos fenômenos térmicos, a equação diferencial da energia térmica deve modelar os efeitos difusivos, que ocorrem para as fases sólida e fluida, e os efeitos advectivos, que serão estendidos apenas à fase fluida. As propriedades físicas do meio poroso podem ser estimadas através de uma média volumétrica, função da porosidade (ε), como apresentado por Vafai (2005). A título de exemplo, são apresentadas as Eqs. (4.51) e (4.52), usadas para estimar a capacidade térmica e a condutividade térmica do meio.

$$(\rho C)_m = \varepsilon (\rho C)_f + (1 - \varepsilon) (\rho C)_s, \quad (4.51)$$

$$k_m = \varepsilon k_f + (1 - \varepsilon) k_s, \quad (4.52)$$

onde os subscritos f , s e m se referem às propriedades do fluido, sólido e do meio poroso, respectivamente.

As equações da continuidade, da quantidade de movimento linear e da energia para

escoamentos através de um meio poroso isotrópico são apresentadas abaixo:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{V}) = 0, \quad (4.53)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} \beta (T - T_o) + \frac{\nu}{\varepsilon} \nabla^2 \mathbf{V} - \frac{\nu}{K} \mathbf{V} - \frac{F |\mathbf{V}| \mathbf{V}}{\sqrt{K}}, \quad (4.54)$$

$$(\rho C)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C)_f \mathbf{V} \cdot \nabla T = k_m \nabla^2 T + \Phi. \quad (4.55)$$

É importante ressaltar que, para uma porosidade constante nos domínios temporal e espacial, a Eq.(4.53) assume a forma da Eq.(4.5), apresentada na seção 4.2. O conjunto de equações apresentado é empregado na modelagem de escoamentos laminares, incompressíveis e não isotérmicos de fluidos newtonianos através de estruturas porosas homogêneas em regime transiente.

Para a modelagem de escoamentos por regiões não porosas, a resistência ao movimento, prevista pela correção de Darcy-Forchheimer, e os efeitos da tortuosidade térmica são suprimidos, e as Eqs. (4.54) e (4.55) são reduzidas às clássicas equações diferenciais da quantidade de movimento linear e da energia, apresentadas nas Eqs. (4.56) e (4.57).

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} \beta (T - T_o) + \nu \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (4.56)$$

$$(\rho C)_f \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C)_f \mathbf{V} \cdot \nabla T = k_f \nabla^2 T + \Phi. \quad (4.57)$$

Capítulo 5

MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL

Uma vez desenvolvido o modelo matemático diferencial, parte-se para a solução do sistema de equações definido pelas equações da continuidade, da quantidade de movimento linear e da energia. A sua solução matemática-analítica, no entanto, só é possível para condições de pequena complexidade, incapazes de representar satisfatoriamente os fenômenos materiais. A solução de casos mais complexos, com maiores graus de liberdade, requerem a utilização de métodos numéricos, que fornecem soluções aproximadas das equações diferenciais.

5.1 Malha computacional

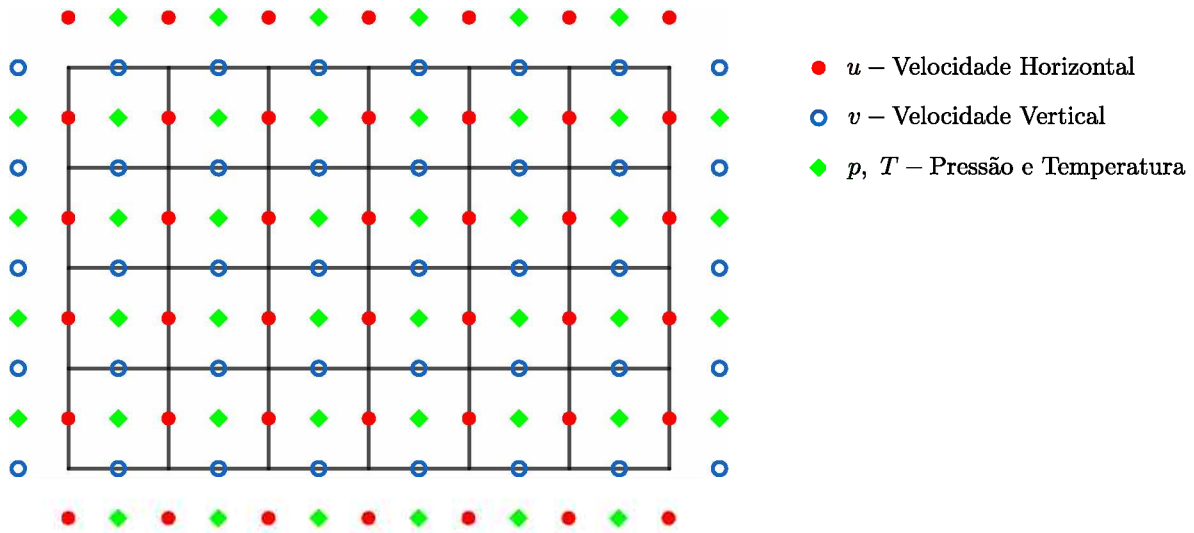
O método numérico se fundamenta na discretização de um problema contínuo e na sua solução através do uso de métodos de convergência. Ou seja, baseia-se na tradução de um problema que possui um conjunto infinito de informações para um conjunto finito, e na solução do sistema de equações através de iterações pelo método numérico.

Os domínios computacionais, descritos no modelo físico, consistem de geometrias Cartesianas. Estes serão discretizados uniformemente nas direções x e y . São confeccionadas três malhas deslocadas entre si de meio passo espacial, de forma que o centro das células eulerianas são coincidentes com a malha de pressão e temperatura, as faces verticais são coincidentes com a malha de velocidade horizontal (u) e as faces horizontais são coincidentes com a malha de velocidade vertical (v). Uma representação gráfica da discretização espacial é apresentada na Fig.(5.1). Ainda, a ilustração apresenta células fantasmas, localizadas nas regiões adjacentes às fronteiras do domínio, que serão empregadas para a definição de condições de contorno sobre limites não coincidentes.

Para uma discretização uniforme, uma função de um espaço bidimensional pode ser descrita da seguinte forma:

$$\mathcal{M} = \{(t^N, x_I, y_J); t^N = N\Delta t, x_I = I\Delta x, y_J = J\Delta y, \\ N = 0, 1, \dots, t_F, I = 0, 1, \dots, L_x, J = 0, 1, \dots, L_y\} \quad (5.1)$$

Figura 5.1: Representação gráfica da malha computacional.



Fonte: Autoria própria

5.2 Modelo numérico

As equações diferenciais parciais que modelam os problemas propostos apresentam, no domínio espacial, termos advectivos, de primeira ordem, e termos difusivos, de segunda ordem. Para a discretização dos termos de carácter advectivo, utiliza-se a expansão em série de Taylor em torno do ponto (x, y, t) , fazendo um incremento e um decremento em cada direção. O processo é indicado abaixo para a componente horizontal da velocidade na direção x :

$$u(x + \Delta x, y, t) = u(x, y, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (5.2)$$

$$u(x - \Delta x, y, t) = u(x, y, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (5.3)$$

Subtraindo a equação (5.3) de (5.2), obtém-se a relação indicada a seguir:

$$u(x + \Delta x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t) = 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{2\Delta x^5}{5!} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \dots \quad (5.4)$$

Isolando a derivada de primeira ordem, obtém-se a formulação de diferenças centradas (*Central Difference Scheme* ou *CDS*):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t)}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\Delta x^4}{5!} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - \dots, \quad (5.5)$$

a qual pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t)}{2\Delta x} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta x^{2(n-1)}}{(2n-1)!} \frac{\partial^{(2n-1)} u}{\partial x^{(2n-1)}}, \quad (5.6)$$

onde o somatório representa o erro numérico do processo de discretização do *CDS*.

Para a discretização dos termos difusivos, emprega-se uma metodologia semelhante àquela usada para os termos advectivos, expandindo a componente da velocidade em torno de (x, y, t) com um incremento e um decremento no domínio espacial. Esse procedimento retorna às equações (5.2) e (5.3), que dessa vez serão somadas:

$$u(x + \Delta x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t) = 2u(x, y, t) + \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2\Delta x^6}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \dots \quad (5.7)$$

Isolando a derivada de ordem menor, tem-se o método de diferenças finitas para a segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} - \frac{2\Delta x^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{2\Delta x^4}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \dots, \quad (5.8)$$

que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^{2n}}{2(n+1)!} \frac{\partial^{2(n+1)} u}{\partial x^{2(n+1)}}, \quad (5.9)$$

onde o somatório, novamente, representa o erro numérico do processo de discretização.

A discretização no domínio temporal se dá através da expansão em série de Taylor, empregada na obtenção da Eq.(5.2), para a derivada de primeira ordem. Expandindo a função em torno do ponto (x, y, t) e isolando o termo de ordem menor, obtém-se a Eq.(5.10).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{\Delta t} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta t^{(n-1)}}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}, \quad (5.10)$$

Infere-se, através da análise das Eq.s (5.6), (5.9) e (5.10), que o processo de discretização empregado no presente trabalho apresenta um erro de primeira ordem no domínio temporal ($\mathcal{O}(\Delta t)$) e de segunda ordem no domínio espacial ($\mathcal{O}(\Delta x^2)$). A metodologia apresentada nesta seção, para o campo vetorial da componente horizontal da velocidade, é empregada na solução numérica dos demais campos vetoriais e escalares, que serão apresentados a seguir.

5.2.1 Componentes de velocidade

Essa parte do trabalho é dedicada ao processo de discretização das equações diferenciais das componentes da quantidade de movimento linear segundo a metodologia apresentada nesta seção. As Eq.s (4.54) e (4.56) podem ser traduzidas para o domínio discreto na forma de uma única equação. Para tanto, faz-se uso de duas matrizes coincidentes das componentes horizontal e vertical da velocidade. As matrizes são usadas simplesmente para separar regiões porosas e não porosas. Seu conteúdo, que será binário, não possui significado físico.

A fim de simplificar a escrita e o raciocínio, pode-se interpretar as matrizes como funções delta de Kronecker (δ). As matrizes que marcam o meio poroso e multiplicam os termos relacionados à correspondente modelagem, devem apresentar valores unitários em regiões contempladas pela estrutura porosa e valores nulos fora de tal estrutura. As matrizes que marcam regiões não porosas são preenchidas com valores complementares.

Os valores modificados das componentes horizontal e vertical da velocidade (\hat{u} e \hat{v} , respectivamente) podem então ser estimados pelo método numérico através das Eq.s (5.11) e (5.12).

$$\begin{aligned} \hat{u}_{I,J} = & -(\varepsilon \delta_p + \delta_f) \Delta t \beta \left[\frac{T_{I-1,J}^N + T_{I,J}^N}{2T_o} - 1 \right] g_x - (\varepsilon \delta_p + \delta_f) \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{I,J}^N - p_{I-1,J}^N}{\Delta x} - \\ & \frac{\Delta t}{\varepsilon \delta_p + \delta_f} u_{I,J}^N \frac{u_{I+1,J}^N - u_{I-1,J}^N}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{\varepsilon \delta_p + \delta_f} v_{I,J}^N \frac{u_{I,J+1}^N - u_{I,J-1}^N}{2\Delta x} - \varepsilon \delta_p \frac{F|V_{I,J}^N|u_{I,J}^N}{\sqrt{K}} + \\ & \frac{\Delta t \mu}{\rho} \frac{u_{I+1,J}^N - 2u_{I,J}^N + u_{I-1,J}^N}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \mu}{\rho} \frac{u_{I,J+1}^N - 2u_{I,J}^N + u_{I,J-1}^N}{\Delta y^2} - \varepsilon \delta_p \frac{\mu}{\rho K} u_{I,J}^N + u_{I,J}^N, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_{I,J} = & -(\varepsilon \delta_p + \delta_f) \Delta t \beta \left[\frac{T_{I,J-1}^N + T_{I,J}^N}{2T_o} - 1 \right] g_y - (\varepsilon \delta_p + \delta_f) \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{I,J}^N - p_{I,J-1}^N}{\Delta y} - \\ & \frac{\Delta t}{\varepsilon \delta_p + \delta_f} v_{I,J}^N \frac{v_{I,J+1}^N - v_{I,J-1}^N}{2\Delta y} - \frac{\Delta t}{\varepsilon \delta_p + \delta_f} u_{I,J}^N \frac{v_{I+1,J}^N - v_{I-1,J}^N}{2\Delta x} - \varepsilon \delta_p \frac{F|V_{I,J}^N|v_{I,J}^N}{\sqrt{K}} + \\ & \frac{\Delta t \mu}{\rho} \frac{v_{I+1,J}^N - 2v_{I,J}^N + v_{I-1,J}^N}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \mu}{\rho} \frac{v_{I,J+1}^N - 2v_{I,J}^N + v_{I,J-1}^N}{\Delta y^2} - \varepsilon \delta_p \frac{\mu}{\rho K} v_{I,J}^N + v_{I,J}^N, \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde δ_p e δ_f são as funções delta de Kronecker usadas para marcar regiões porosas e não porosas, respectivamente.

A metodologia do passo fracionado para o acoplamento pressão-velocidade propõe que os campos no próximo passo temporal sejam calculados, a partir dos campos modificados, através da correção do campo escalar de pressão. A correção de pressão (p^o) é calculada, como indicado na Eq.(5.13), a partir da equação da continuidade. As componentes modi-

ficadas são corrigidas pela correção de pressão, como indicado nas Eq.s (5.14) e (5.15). O campo de pressão é atualizado a cada passo temporal como indicado na Eq.(5.16).

$$\nabla^2 p^o = \frac{\rho_f}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{V} \approx \frac{\rho_f}{\Delta t} \left[\frac{\hat{u}_{I+1,J} - \hat{u}_{I,J}}{\Delta x} + \frac{\hat{v}_{I,J+1} - \hat{v}_{I,J}}{\Delta y} \right], \quad (5.13)$$

$$u_{I,J}^{N+1} = \hat{u}_{I,J} - \frac{\Delta t}{\rho_f} \left[\frac{p_{I,J}^o - p_{I-1,J}^o}{\Delta x} \right], \quad (5.14)$$

$$v_{I,J}^{N+1} = \hat{v}_{I,J} - \frac{\Delta t}{\rho_f} \left[\frac{p_{I,J}^o - p_{I,J-1}^o}{\Delta y} \right], \quad (5.15)$$

$$p_{I,J} = p_{I,J} + p_{I,J}^o. \quad (5.16)$$

5.2.2 Campo de temperatura

As Eq.s (4.55) e (4.57), que modelam o transporte de energia térmica, também podem ser reescritas em uma única forma discreta, como indicado na Eq.(5.17). Para tanto, duas novas matrizes binárias e coincidentes com o campo de temperatura são confeccionadas.

$$\begin{aligned} T_{I,J}^{N+1} = \Delta t (\delta_f \alpha_f + \delta_p \alpha_m) & \left[\frac{T_{I+1,J}^N - 2T_{I,J}^N + T_{I-1,J}^N}{\Delta x^2} + \frac{T_{I,J+1}^N - 2T_{I,J}^N + T_{I,J-1}^N}{\Delta y^2} \right] - \\ & \frac{\Delta t (\rho C)_f}{\delta_f (\rho C)_f + \delta_p (\rho C)_m} \left[\tilde{u}_{I,J}^N \frac{T_{I+1,J}^N - T_{I-1,J}^N}{2\Delta x} - \tilde{v}_{I,J}^N \frac{T_{I,J+1}^N - T_{I,J-1}^N}{2\Delta x} \right] + \\ & \delta_p \Delta t \frac{(\varepsilon) \dot{q}_f + (1 - \varepsilon) \dot{q}_s}{(\rho C)_m} + \delta_f \Delta t \frac{\dot{q}_f}{(\rho C)_f} + \frac{\Phi_{I,J}^N}{\delta_p (\rho C)_m + \delta_f (\rho C)_f} + T_{I,J}^N, \quad (5.17) \end{aligned}$$

onde \dot{q} é um termo fonte para a temperatura (função de transformação de energia térmica) e os parâmetros \tilde{u} e \tilde{v} representam os valores das componentes de velocidade interpolados (coincidentes com a matriz de temperatura). A função de transformação viscosa em sua forma discreta ($\Phi_{I,J}^N$) é calculada segundo a expressão abaixo:

$$\begin{aligned} \Phi_{I,J}^N = 2\mu & \left[\frac{u_{I+1,J}^N - u_{I,J}^N}{\Delta x} \right]^2 + 2\mu \left[\frac{v_{I,J+1}^N - v_{I,J}^N}{\Delta y} \right]^2 + \\ & \mu \left[\frac{u_{I,J+1}^N + u_{I+1,J+1}^N - u_{I,J-1}^N - u_{I+1,J-1}^N}{4\Delta y} + \frac{v_{I+1,J}^N + v_{I+1,J+1}^N - v_{I-1,J}^N - v_{I-1,J+1}^N}{4\Delta x} \right]^2. \quad (5.18) \end{aligned}$$

5.2.3 Oscilações numéricas e condições de convergência

Acerca da modelagem numérica, é importante atentar-se às condições de convergência para a combinação dos métodos numéricos utilizados. Para garantir a convergência do sistema sem oscilações significativas no campo de velocidade é necessário limitar a malha em função do número de Reynolds calculado localmente (Re_L):

$$Re_L = \frac{\rho V \Delta x}{\mu}. \quad (5.19)$$

A redução do número de divisões espaciais (aumento do valor de Δx) resulta não apenas em uma perda de precisão, mas pode também introduzir oscilações numéricas (se $Re_L > 2$), que não são físicas, mas simplesmente consequentes do processo de discretização.

Uma relação semelhante deve ser respeitada para reduzir as oscilações numéricas sobre o campo de temperatura. Recomenda-se baixos valores do número de Péclet calculado localmente (Pe_L). Idealmente esse valor é menor do que aquele empregado no presente trabalho ($Pe_L < 2$). Tal valor não será referência para as simulações a serem conduzidas em função da consequente elevação do custo computacional, fator relevante uma vez que os códigos produzidos não foram paralelizados.

$$Pe_L = \frac{V \Delta x}{\alpha}. \quad (5.20)$$

A relação entre os incrementos espaciais e temporal também deve ser avaliada, como proposto por Courant *et al.* (1967). A metodologia numérica empregada no desenvolvimento deste trabalho é explícita e o sistema resultante é condicionalmente estável. Para que a convergência do método seja garantida, a constante de CFL deve ser, para problemas bidimensionais, menor que a quarta parte da proporção entre os incrementos espacial e temporal corrigidos pela viscosidade cinemática do fluido.

5.3 Solução de Sistemas Lineares

Com a conclusão do processo de discretização, define-se a metodologia para a solução dos sistemas lineares resultantes. No presente trabalho, são empregados os métodos de Gauss-Seidel e dos Gradientes Conjugados. Considerando os fins deste trabalho, o desenvolvimento matemático de tais metodologias não será detalhado.

O método de Gauss-Seidel fornece, para alguns casos específicos, respostas mais rápidas, com um menor número de iterações por incremento temporal. Observou-se no desenvolvimento do trabalho, no entanto, que tal método é sujeito à grandes oscilações no número de iterações para casos em que ocorrem variações significativas nas propriedades físicas do

domínio. Assim, o método é custoso e inconveniente à solução de casos com geometrias imersas.

No que diz respeito à convergência, o método dos Gradientes Conjugados apresenta resultados consistentes para todos os casos. O número de iterações por incremento temporal é reduzido lentamente, em contraste ao método de Gauss-Seidel, mas não está sujeito à oscilações significativas. De forma geral, conclui-se que o método dos Gradientes Conjugados é o mais apropriado, dentre os trabalhados, para a solução dos casos propostos.

5.4 Modelo computacional

A conclusão da modelagem numérica possibilita a implementação de rotinas computacionais. O código é desenvolvido em FORTRAN90, linguagem de programação utilizada no MFSim, código desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Computacional da Universidade Federal de Uberlândia. Em trabalhos futuros, a modelagem aqui apresentada para escoamentos por meios porosos será reproduzida no código do laboratório.

A rotina é confeccionada de modo a permitir a fácil configuração dos casos a serem simulados por dois arquivos externos. O primeiro deve conter especificações sobre a geometria do domínio e das estruturas porosas e o número de divisões em cada direção. O segundo deve conter as especificações das condições de contorno (valor imposto para componentes da velocidade, temperatura ou fluxo térmico) para cada fronteira.

Capítulo 6

RESULTADOS

Neste capítulo são expostos os resultados computacionais para os problemas propostos. As simulações são conduzidas com o fim de validar o código implementado e de avaliar a influência de parâmetros do meio poroso, como porosidade e permeabilidade, sobre as características do escoamento.

6.1 Cavidade acionada por esteira

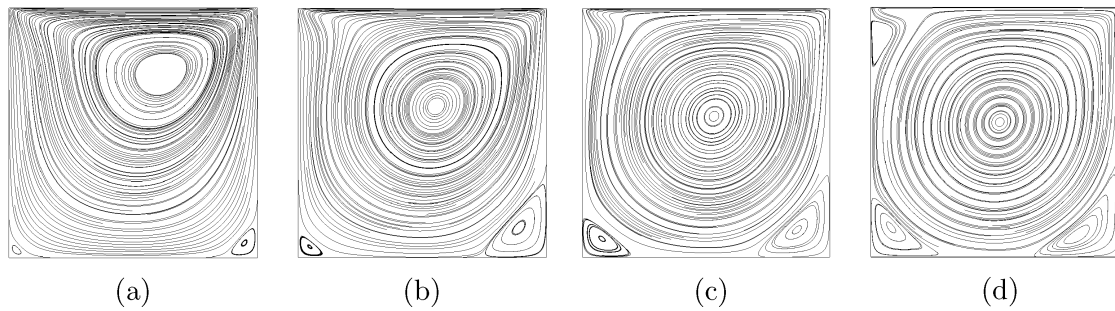
Objetiva-se modelar o escoamento bidimensional, laminar e incompressível em uma cavidade de tampa deslizante que apresenta velocidade constante e uniforme. As condições de contorno para este caso são apresentadas no diagrama da Fig.(3.3). As simulações são conduzidas para valores do número de Reynolds de 100, 400, 1000 e 3200. Os resultados do presente trabalho, em $t = 120$ segundos, são confrontados com os resultados em regime permanente apresentados no trabalho de Ghia *et al.* (1982).

Para este caso, define-se um domínio computacional quadrado de aresta de 1 m , composto de 120 células em cada direção, número de divisões que configura um incremento espacial de aproximadamente 8,33 mm . O incremento temporal é fixo e equivale a $6,95 \cdot 10^{-6}$ s , ou 6,95 μs , valor significativamente menor do que o indicado pela condição de CFL . Incrementos dessa magnitude não são limitantes para este primeiro caso uma vez que sua solução converge para um arranjo permanente, associado à baixos números de iterações pelo método de Gauss-Seidel.

A comparação entre os resultados computacionais obtidos no presente trabalho e os resultados de referência é apresentada a seguir.

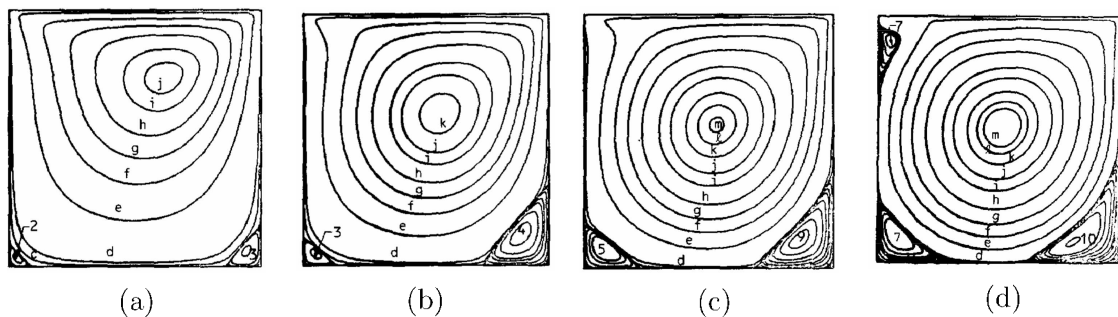
Observa-se, através da análise das Figs.(6.1) e (6.2), que as linhas de corrente e os comprimentos de recirculação obtidos estão de acordo com a referência. A fim de complementar essa primeira análise, de caráter qualitativo, comparam-se ainda os perfis de velocidade, apresentados a seguir.

Figura 6.1: Linhas de corrente obtidas no presente trabalho para: (a) $Re = 100$, (b) $Re = 400$, (c) $Re = 1000$ e (d) $Re = 3200$.



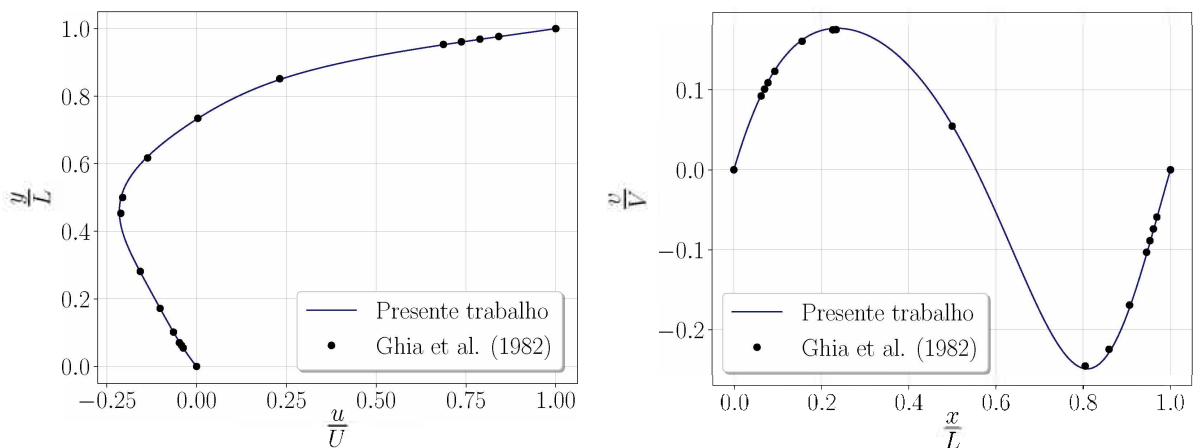
Fonte: Autoria própria

Figura 6.2: Linhas de corrente apresentadas no trabalho de Ghia *et al.* (1982) para: (a) $Re = 100$, (b) $Re = 400$, (c) $Re = 1000$ e (d) $Re = 3200$.



Fonte: Autoria própria

Figura 6.3: Resultados computacionais para o caso da cavidade com $Re = 100$.



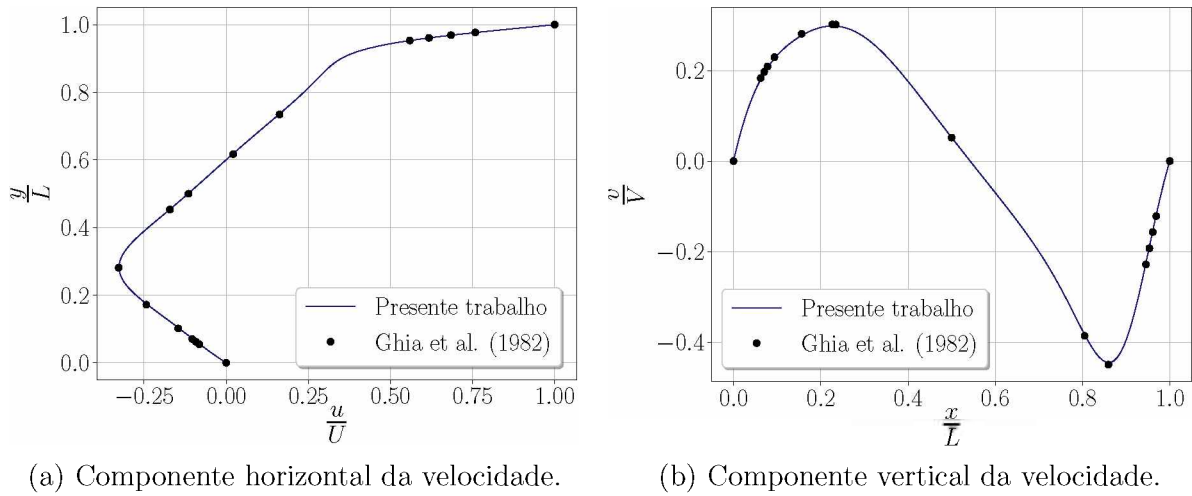
(a) Componente horizontal da velocidade.

(b) Componente vertical da velocidade.

Fonte: Autoria própria

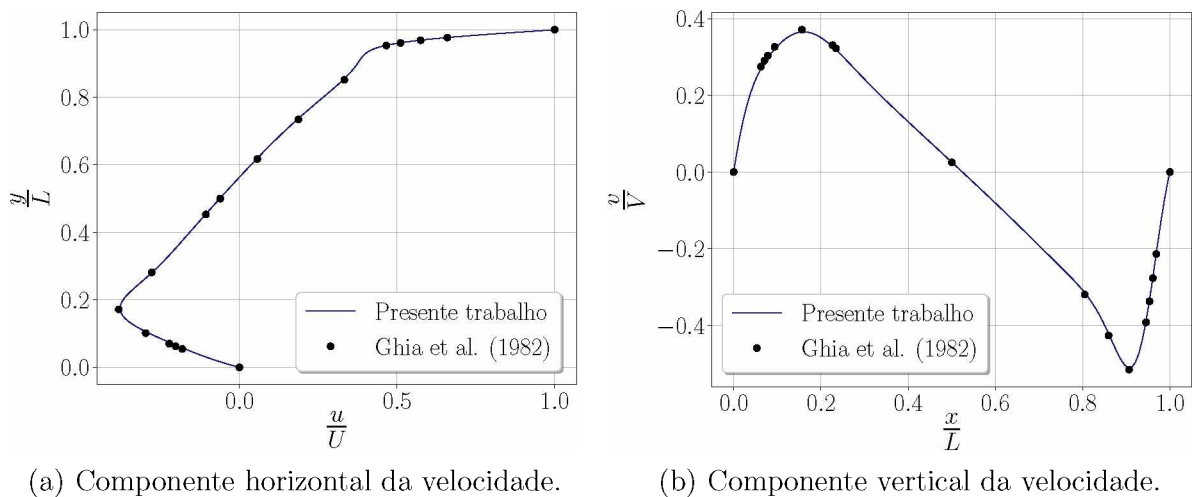
Os perfis de velocidade são obtidos por meio de sondas posicionadas sobre uma linha de simetria da cavidade. A linha que contém as sondas deve ser normal à direção da componente de velocidade a ser armazenada.

Figura 6.4: Resultados computacionais para o caso da cavidade com $Re = 400$.



Fonte: Autoria própria

Figura 6.5: Resultados computacionais para o caso da cavidade com $Re = 1000$.



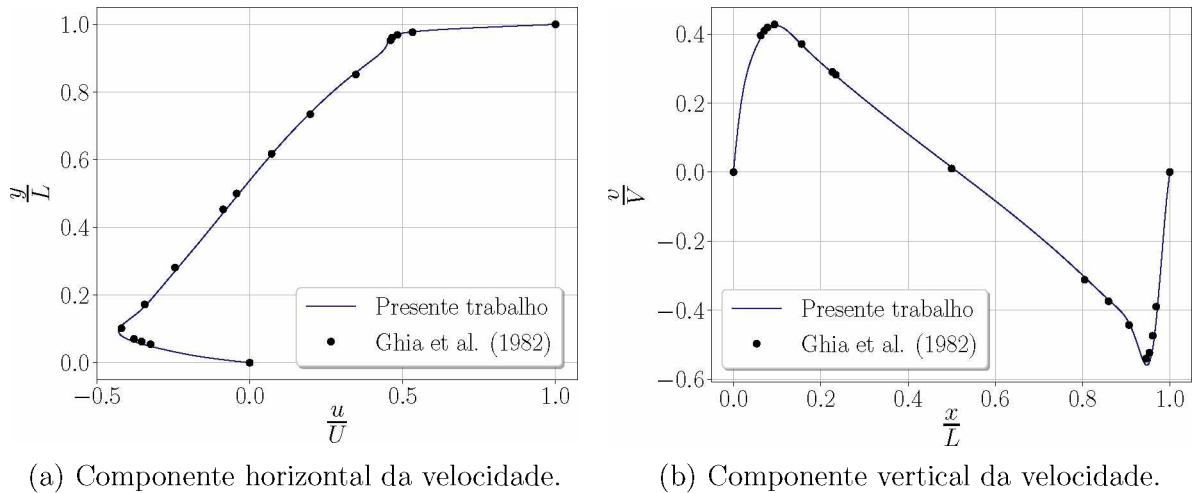
Fonte: Autoria própria

Observa-se que os resultados computacionais obtidos no presente trabalho estão de acordo com aqueles apresentados por Ghia *et al.* (1982). Os incrementos espaciais e temporal empregados foram suficientes para capturar com apreciável exatidão o transporte da quantidade de movimento linear, como evidenciado pela proximidade, entre os resultados, nos pontos de máximo e mínimo.

6.2 Cavidade aquecida de maneiras diferentes

Objetiva-se modelar o escoamento bidimensional, laminar e incompressível em uma cavidade de paredes estáticas submetida a um gradiente de temperatura. As condições

Figura 6.6: Resultados computacionais para o caso da cavidade com $Re = 3200$.



Fonte: Autoria própria

de contorno para este caso são apresentadas no diagrama da Fig.(3.4). As simulações são conduzidas para valores do número de Rayleigh de 10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6 . Os resultados do presente trabalho, em $t = 120$ segundos, são confrontados com os resultados em regime permanente apresentados no trabalho de Gangawane *et al.* (2015).

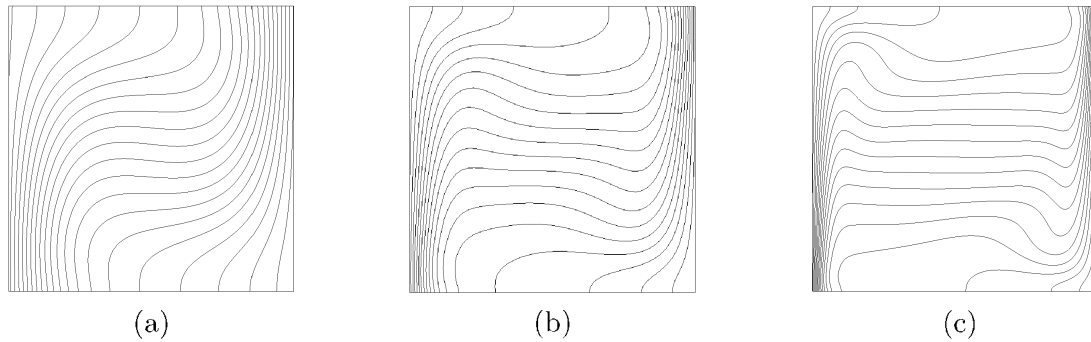
Para este caso, define-se um domínio computacional quadrado de aresta de $0,5\text{ m}$, composto de 100 células em cada direção, número de divisões que configura um incremento espacial de $5,0\text{ mm}$. O incremento temporal é fixo e equivale a $2,5\ \mu\text{s}$, grandeza que, analogamente àquela empregada para o caso da cavidade acionada por esteira, é significativamente menor do que a indicada pela condição de CFL . Justifica-se a sua dimensão em função da homogeneidade das propriedades físicas pelo domínio que, associada ao transporte suave da quantidade de movimento por fenômenos térmicos, resulta em um baixo número de iterações por incremento temporal pelo método de Gauss-Seidel.

A comparação entre os resultados computacionais obtidos no presente trabalho e os resultados de referência é apresentada a seguir. Observa-se, através da análise das Figs.(6.7) e (6.8), que os iso-contornos de temperatura obtidos estão em concordância com os apresentados na referência. Para o fim de comparar quantitativamente as soluções, conduz-se ainda uma comparação dos valores do número de Nusselt (valores médios e calculados localmente) na parede fria.

A Fig.(6.9) apresenta os valores locais do número de Nusselt calculados sobre a parede fria. Nota-se que os valores obtidos no presente trabalho se aproximam aos da referência para maiores números de Rayleigh. A razão pela qual o maior desvio entre os resultados associa-se ao menor valor do adimensional pode residir no fato de que o trabalho conduzido por Gangawane *et al.* (2015) se fundamenta no método de Lattice Boltzmann, enquanto o presente trabalho se fundamenta no método de diferenças finitas.

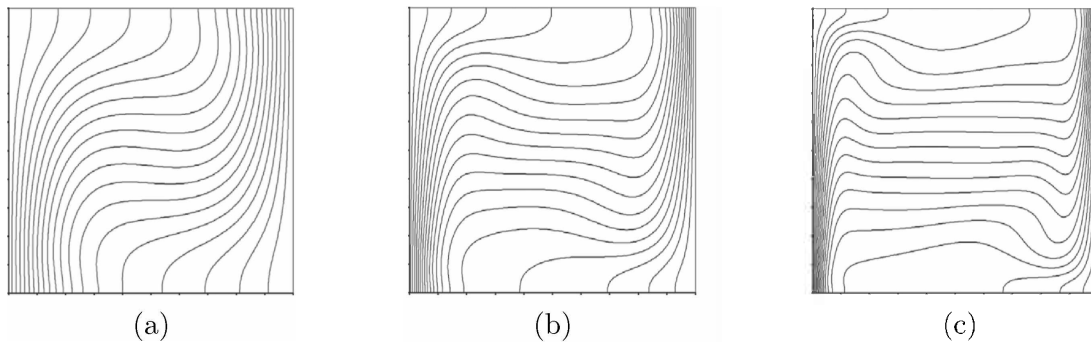
A Tabela (6.1) é elaborada a fim de comparar os valores médios do número de Nusselt

Figura 6.7: Iso-contornos de temperatura obtidos no presente trabalho para: (a) $Ra = 10^4$, (b) $Ra = 10^5$ e (c) $Ra = 10^6$.



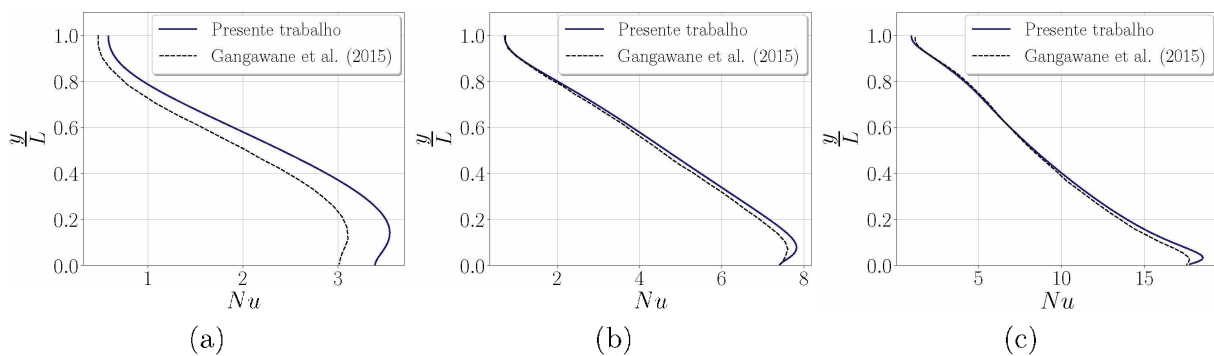
Fonte: Autoria própria

Figura 6.8: Iso-contornos de temperatura apresentados no trabalho de Gangawane *et al.* (2015) para: (a) $Ra = 10^4$, (b) $Ra = 10^5$ e (c) $Ra = 10^6$.



Fonte: Autoria própria

Figura 6.9: Número de Nusselt calculado localmente para o presente trabalho e para o trabalho de Gangawane *et al.* (2015) para $Pr = 0,71$ e Ra de: (a) 10^4 , (b) 10^5 e (c) 10^6 .



Fonte: Autoria própria

com os trabalhos de Davis (1983), Padilla *et al.* (2013), Gangawane *et al.* (2015) e Duarte (2017).

Os trabalhos de Duarte e Padilla tratam da modelagem tridimensional da convecção natural em uma cavidade cúbica. É possível observar que a introdução da dimensão remanescente não proporciona alterações significativas para o cálculo do número de Nusselt

Tabela 6.1: Número de Nusselt médio na parede fria para diferentes valores do número de Rayleigh.

	$Ra = 10^3$	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$	$Ra = 10^6$
Presente trabalho	1,118	2,248	4,542	8,966
Gangawane <i>et al.</i> (2015)	-	2,257	4,570	8,816
Davis (1983)	1,118	2,243	4,519	8,800
Duarte (2017)	1,072	2,090	4,390	8,901
Padilla <i>et al.</i> (2013)	1,072	2,068	4,427	8,865

nas arestas (ou paredes) para os regimes de operação simulados. O fato de as informações serem armazenadas sobre a linha de simetria, posição mais distante possível das paredes do cubo, também contribui para as pequenas discordâncias entre os resultados.

6.3 escoamento sobre um degrau

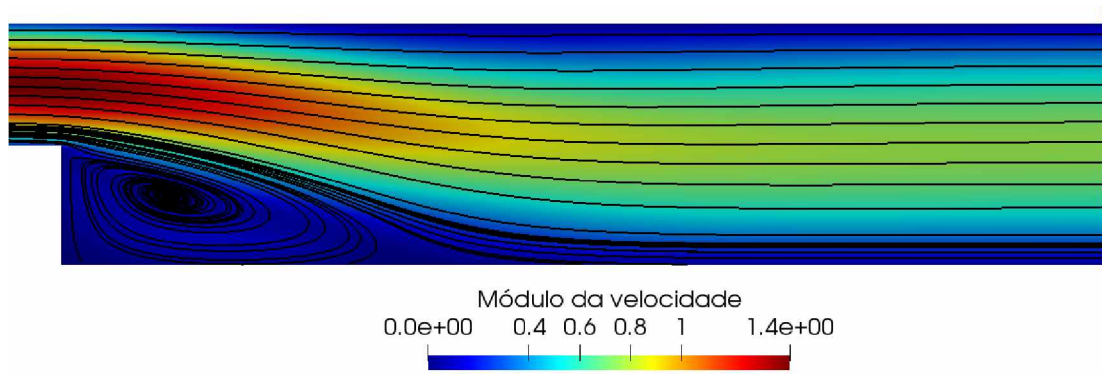
Objetiva-se modelar o escoamento bidimensional, laminar e incompressível sobre um canal que apresenta uma brusca variação de seção. As condições de contorno para este caso são apresentadas no diagrama da Fig.(3.5), onde L representa dada dimensão do domínio em função da altura do degrau ($h = L_{left}$), de forma que $L_{bl} = 20 h$, $L_{br} = 52 h$ e $L_{right} = 2 h$. As simulações são conduzidas para valores do número de Reynolds de 100 e 389. Efeitos gravitacionais são desconsiderados. Os resultados do presente trabalho, em $t = 10$ segundos, são confrontados com os resultados em regime permanente apresentados no trabalho experimental conduzido por Armaly *et al.* (1983).

Define-se um incremento espacial uniforme de 5 *mm* e um incremento temporal fixo de 10^{-4} *s*. Sondas são posicionadas sobre determinadas seções transversais do canal para captura do valor da componente horizontal da velocidade. Os comprimentos de recolamento também são avaliados. Os resultados computacionais obtidos no presente trabalho e os resultados de referência são apresentados a seguir.

As Figs.(6.10) e (6.11) apresentam as linhas de corrente do escoamento sobre um degrau para os casos simulados. Para valores do número de Reynolds de 100 e 389, obtém-se comprimentos de recolamento de 2,69 h e 8,11 h , respectivamente. Tais valores estão próximos daqueles apresentados pela referência, de 2,60 h e 8,20 h .

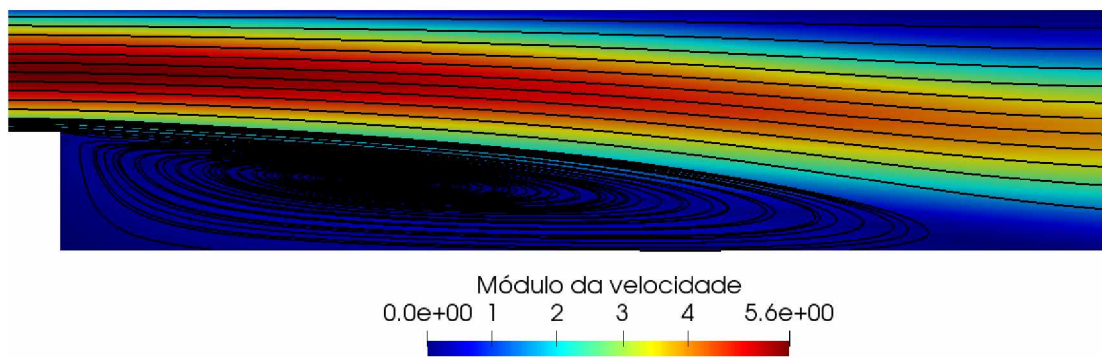
Percebe-se, através da análise das Figs.(6.12) e (6.13), que os perfis de velocidade obtidos para os dois regimes de operação estão em concordância com aqueles apresentados por Armaly *et al.* (1983). É possível afirmar, portanto, que os incrementos espaciais e temporal empregados foram suficientes para capturar com apreciável exatidão o transporte de quantidade de movimento linear.

Figura 6.10: Linhas de corrente sobre o módulo da velocidade em vista ampliada para o escoamento bidimensional sobre um canal com $Re = 100$.



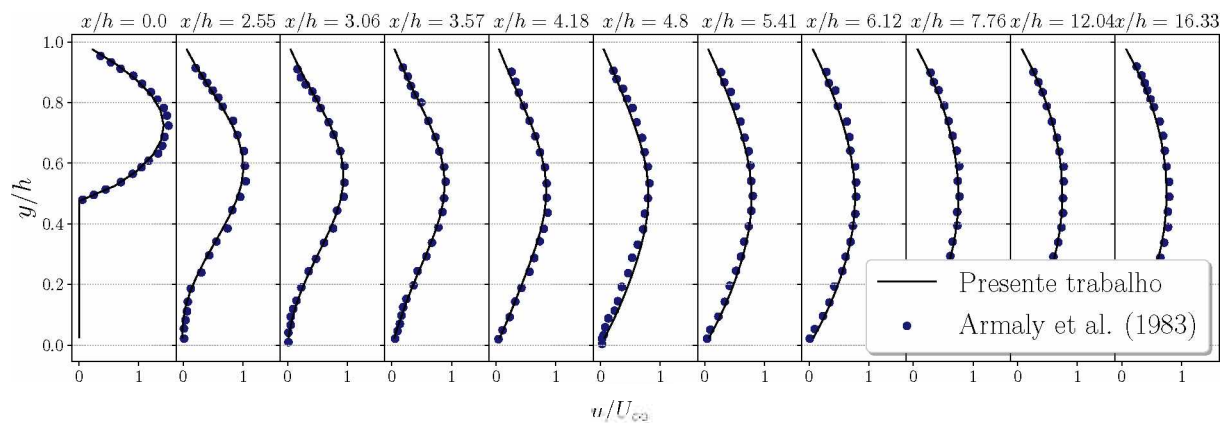
Fonte: Autoria própria

Figura 6.11: Linhas de corrente sobre o módulo da velocidade em vista ampliada para o escoamento bidimensional sobre um canal com $Re = 389$.



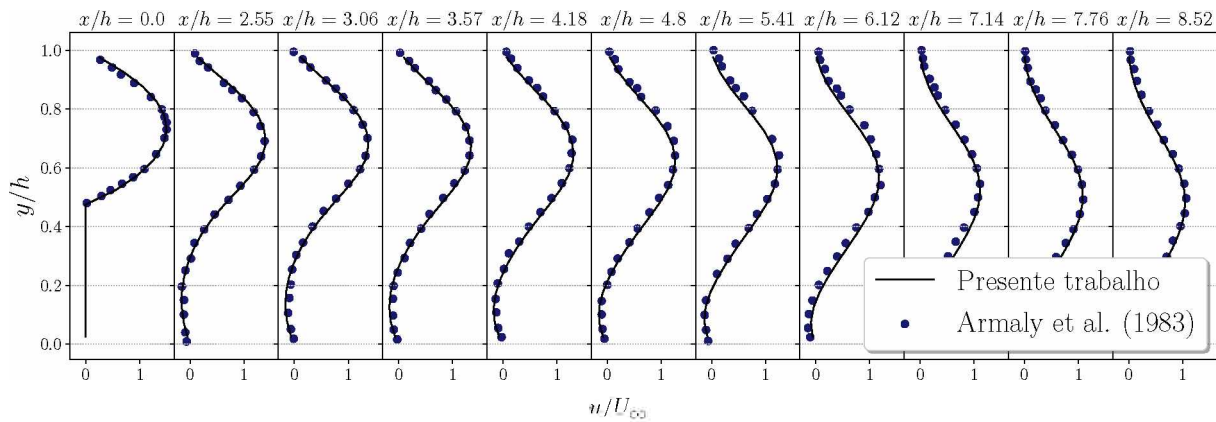
Fonte: Autoria própria

Figura 6.12: Perfis de velocidade para o escoamento bidimensional sobre um canal para $Re = 100$.



Fonte: Autoria própria

Figura 6.13: Perfis de velocidade para o escoamento bidimensional sobre um canal para $Re = 389$.



Fonte: Autoria própria

6.4 Cavidade porosa acionada por esteira

Objetiva-se modelar o escoamento bidimensional, laminar e incompressível em uma cavidade porosa de tampa deslizante que apresenta velocidade constante e uniforme. As condições de contorno para este caso são idênticas àsquelas do caso não poroso, apresentadas no diagrama da Fig.(3.3). As simulações são conduzidas para valores do número de Darcy de 10^{-4} , 10^{-3} e 10^{-2} e um número de Reynolds de 10. Os resultados do presente trabalho, em $t = 80$ segundos, são confrontados com os resultados em regime permanente apresentados no trabalho de Guo and Zhao (2002).

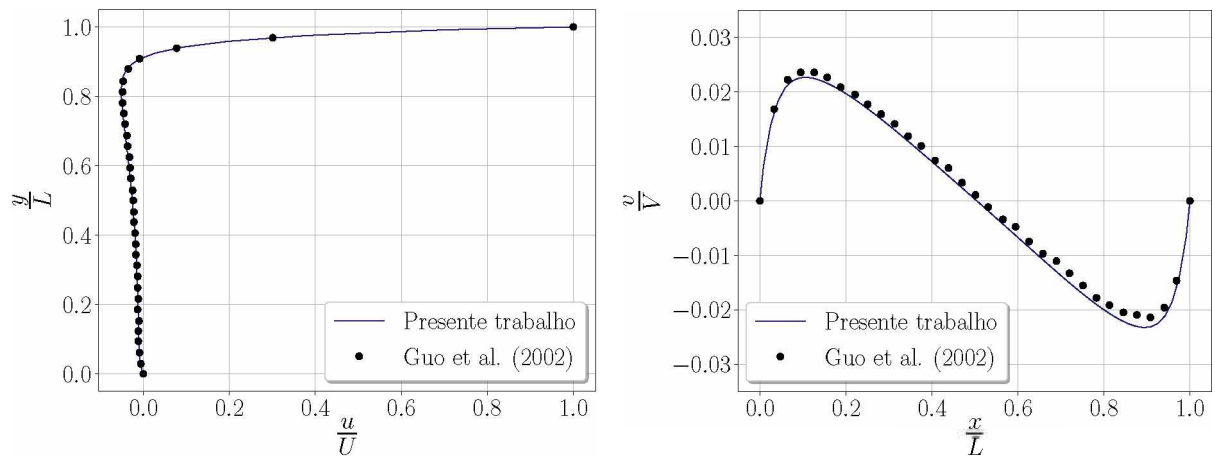
Inicialmente, define-se um domínio computacional quadrado de aresta de $0,25\text{ m}$, composto de 50 células em cada direção, número de divisões que configura um incremento espacial de 5 mm . O incremento temporal é fixo e equivale a $2,5\text{ }\mu\text{s}$. Os resultados computacionais obtidos no presente trabalho e os resultados de referência são apresentados a seguir.

Observa-se, das Figs.(6.14), (6.15) e (6.16), que apresentam os perfis de velocidade sobre as seções de simetria da cavidade, que o número de Darcy está diretamente relacionado à resistência que o meio poroso oferecerá ao transporte de quantidade de movimento linear. Este comportamento é também evidenciado pela análise da Fig.(6.17), que apresenta as linhas de corrente sobrepostas ao domínio, colorido pelo valor absoluto da velocidade.

Os resultados computacionais obtidos no presente trabalho estão de acordo com aqueles apresentados por Guo and Zhao (2002). Os incrementos espaciais e temporal empregados, como no caso da cavidade não porosa, foram suficientes para capturar com apreciável exatidão o transporte de quantidade de movimento linear.

O modelo para escoamentos por meios porosos deve aproximar-se daquele empregado para um caso monofásico quando o meio é caracterizado por altos valores de porosidade e

Figura 6.14: Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $Re = 10$ e $Da = 10^{-4}$.

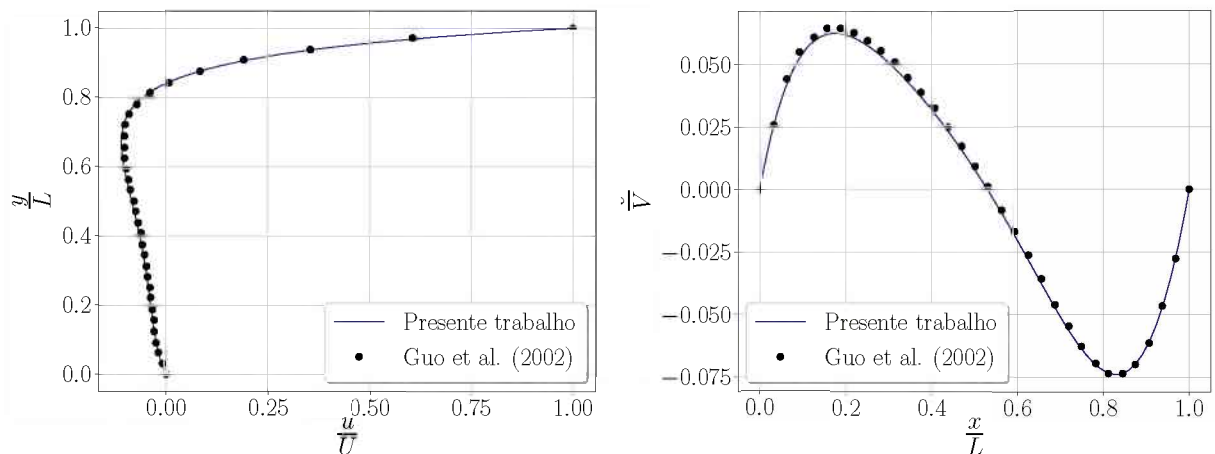


(a) Componente horizontal da velocidade

(b) Componente vertical da velocidade

Fonte: Autoria própria

Figura 6.15: Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $Re = 10$ e $Da = 10^{-3}$.



(a) Componente horizontal da velocidade

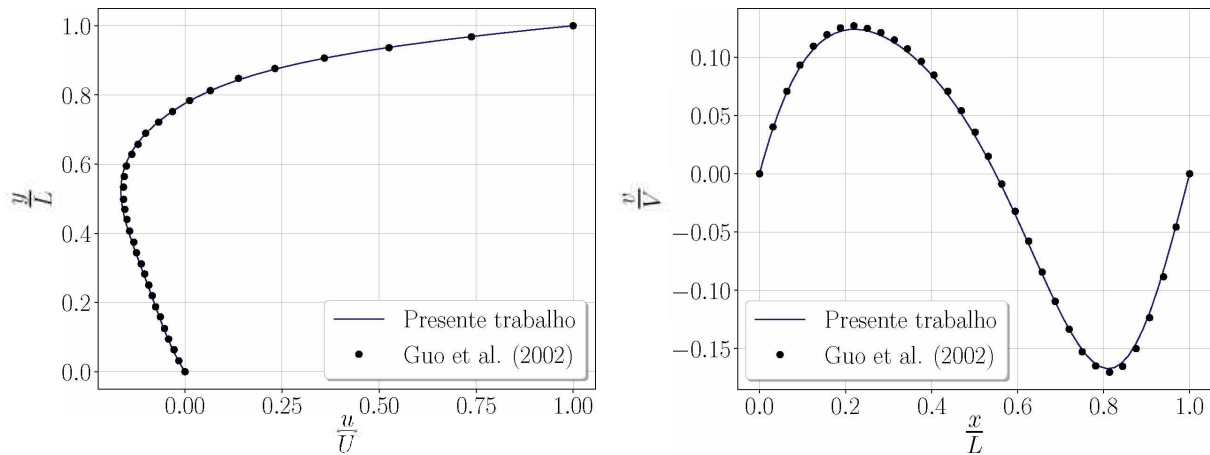
(b) Componente vertical da velocidade

Fonte: Autoria própria

permeabilidade. De fato, ao considerar um valor unitário para a porosidade e um elevado valor para a permeabilidade, observa-se que a Eq.(4.54) é reduzida à Eq.(4.56). Neste sentido, novas simulações são conduzidas com a finalidade de demonstrar a equivalência entre as modelagens.

Modela-se o escoamento bidimensional, laminar e incompressível em uma cavidade porosa, composta predominantemente de fluido ($\varepsilon = 0,99$). As simulações são conduzidas para valores do número de Reynolds de 100, 400 e 1000 e um número de Darcy de 10^4 . Os

Figura 6.16: Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $Re = 10$ e $Da = 10^{-2}$.

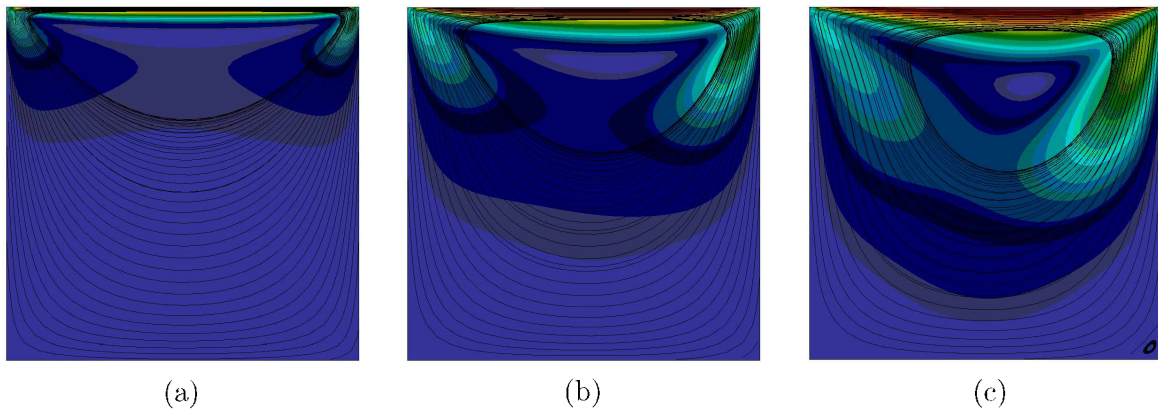


(a) Componente horizontal da velocidade

(b) Componente vertical da velocidade

Fonte: Autoria própria

Figura 6.17: Linhas de corrente sobre o absoluto da velocidade para $Re = 10$: (a) $Da = 10^{-4}$, (b) $Da = 10^{-3}$ e (c) $Da = 10^{-2}$.



(a)

(b)

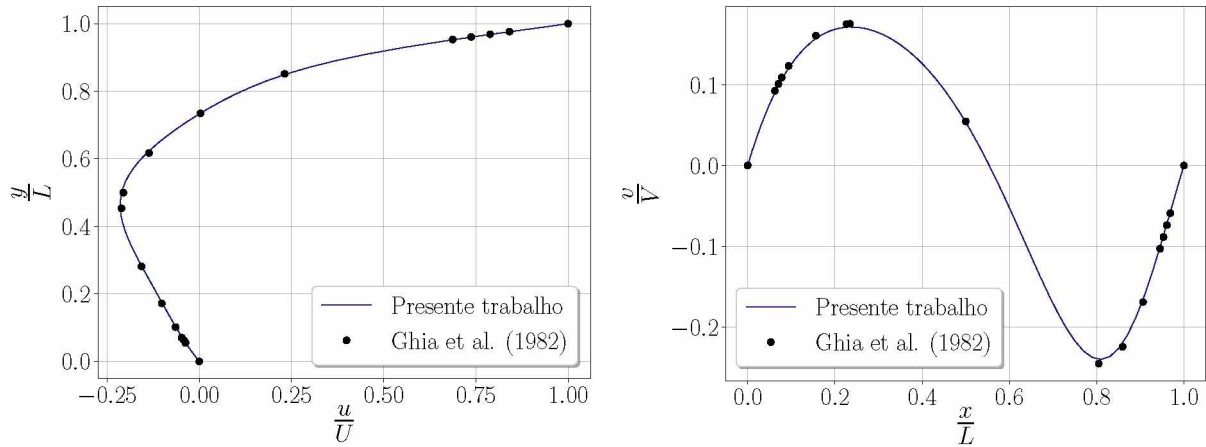
(c)

Fonte: Autoria própria

resultados do presente trabalho, em $t = 80$ segundos, são confrontados com os resultados em regime permanente apresentados no trabalho de Ghia *et al.* (1982), utilizados para a validação do caso não poroso.

Os resultados obtidos para um meio poroso composto preponderantemente por fluido estão em concordância com aqueles esperados para um meio monofásico, o que indica um bom fechamento entre os modelos. É conveniente ressaltar que as ligeiras deviações entre as respostas estão associadas à pequena fração da fase sólida imposta à modelagem deste caso. A convergência do método numérico é claramente afetada pela combinação dos valores impostos à porosidade e ao adimensional de Darcy. Logo, certo cuidado deve ser dedicado para configurações próximas àquelas de um meio monofásico e de uma estrutura

Figura 6.18: Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $\varepsilon = 0,99$, $Da = 10^4$ e $Re = 100$.

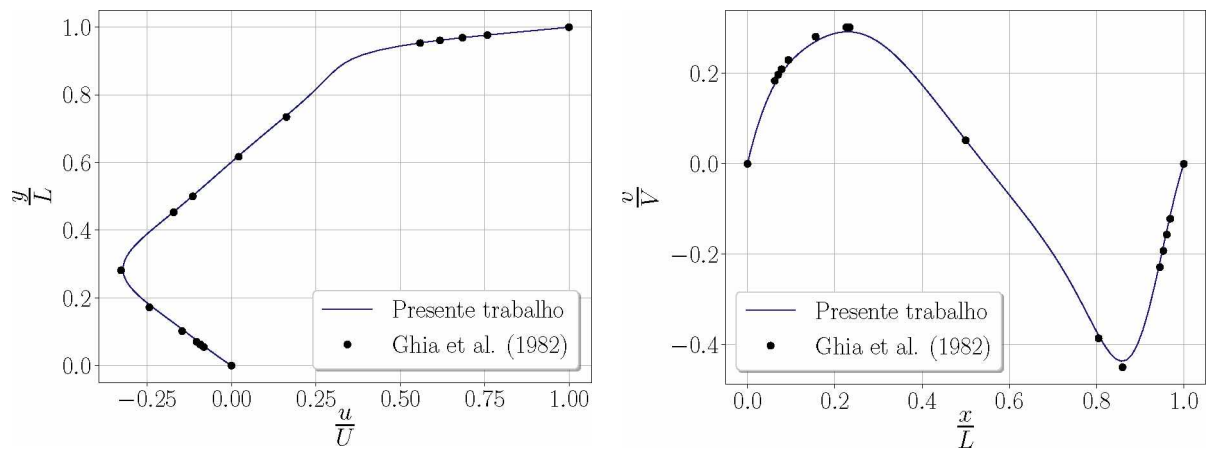


(a) Componente horizontal da velocidade

(b) Componente vertical da velocidade

Fonte: Autoria própria

Figura 6.19: Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $\varepsilon = 0,99$, $Da = 10^4$ e $Re = 400$.



(a) Componente horizontal da velocidade

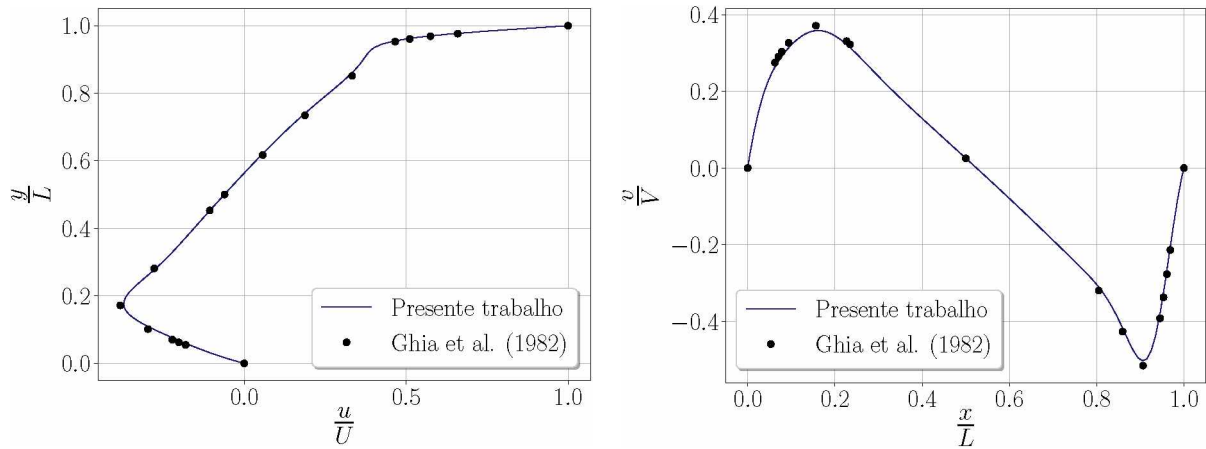
(b) Componente vertical da velocidade

Fonte: Autoria própria

maciça.

Os valores críticos de porosidade e permeabilidade são função da metodologia numérica e, ao conhecimento dos autores, o assunto não é trabalhado de forma direta para escoamentos por meios porosos. A experimentação virtual, conduzida durante a execução do presente trabalho, no entanto, indica que a convergência do modelo implementado é garantida para valores de porosidade contidos no intervalo fechado de $[0,6 \cdot 10^{-2}, 99,97 \cdot 10^{-2}]$ para números de Darcy contidos em $[10^{-7}, 10^5]$.

Figura 6.20: Resultados computacionais para o caso da cavidade porosa com $\varepsilon = 0,99$, $Da = 10^4$ e $Re = 1000$.



(a) Componente horizontal da velocidade

(b) Componente vertical da velocidade

Fonte: Autoria própria

6.5 Cavidade porosa aquecida de maneiras diferentes

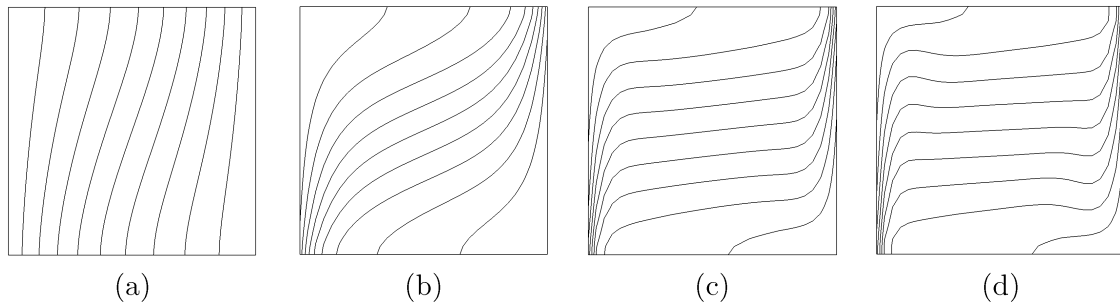
Objetiva-se modelar o escoamento bidimensional, laminar e incompressível em uma cavidade porosa de paredes estáticas submetida a um gradiente de temperatura. As condições de contorno para este caso são idênticas àquelas impostas para o caso não poroso, apresentadas no diagrama da Fig.(3.4). A razão de aspecto e a razão de condutividade assumem valores unitários. As simulações são conduzidas para valores do número de Darcy de 10^{-5} , 10^{-4} , 10^{-3} e $3 \cdot 10^{-3}$ e um número de Rayleigh fixo de 10^6 . O meio poroso é homogêneo e composto predominantemente por fluido ($\varepsilon = 0,9$). A solução transiente em $t = 20$ minutos físicos é comparada aos resultados em regime permanente apresentados no trabalho de Lauriat and Prasad (1989).

Para este caso, define-se um domínio computacional quadrado de aresta de $0,32\text{ m}$, composto de 32 células em cada direção, número de divisões que configura um incremento espacial de $1,0\text{ cm}$. O incremento temporal é fixo e equivale a $10,0\ \mu\text{s}$. Os resultados computacionais obtidos no presente trabalho e os resultados de referência são apresentados a seguir.

Os iso-contornos de temperatura obtidos estão de acordo com a literatura. A influência do número de Darcy sobre o campo de temperatura, como observado nas Figs.(6.21) e (6.22), está diretamente relacionada à advecção de energia térmica. O aumento na permeabilidade reduz a resistência que a fase sólida impõe ao movimento do fluido, que será responsável por transportar energia térmica de forma mais eficiente que a condução térmica do meio.

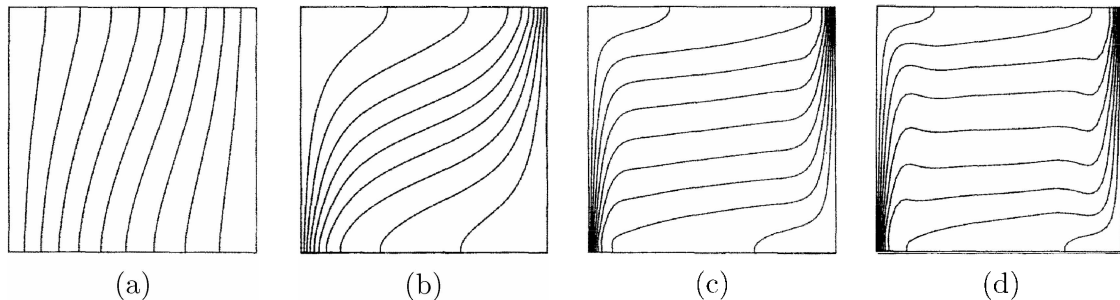
Nota-se, através da análise dos iso-contornos, os efeitos da tortuosidade térmica, co-

Figura 6.21: Iso-contornos de temperatura para a convecção natural em uma cavidade quadrada obtidos em $t = 20$ minutos para $\lambda = 1$, $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0.9$: (a) $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (b) $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (c) $Da = 1 \cdot 10^{-3}$, (d) $Da = 3 \cdot 10^{-3}$.



Fonte: Autoria própria

Figura 6.22: Iso-contornos de temperatura para a convecção natural em uma cavidade quadrada segundo Lauriat and Prasad (1989) para $\lambda = 1$, $Pr = 0,71$, $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,9$: (a) $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (b) $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (c) $Da = 1 \cdot 10^{-3}$, (d) $Da = 3 \cdot 10^{-3}$.



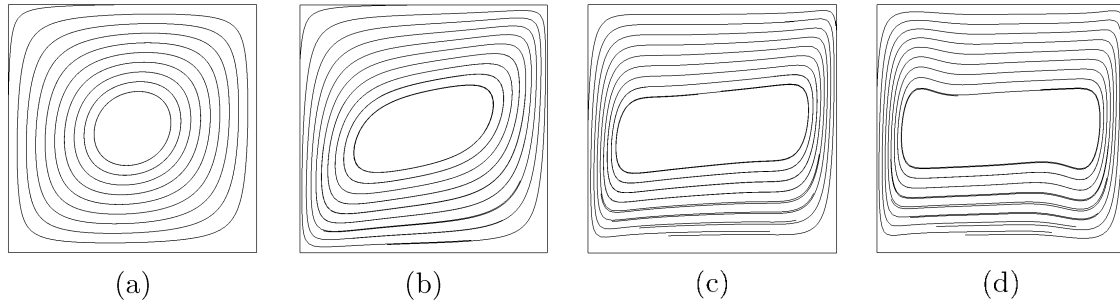
Fonte: Autoria própria

mentada em capítulos anteriores. Observa-se um estiramento das curvas sobre a diagonal da cavidade, em contraste aos resultados apresentados na Fig.(6.7). Tal fato se deve à desproporção das propriedades físicas do meio que se relacionam aos mecanismos condutivo e advectivo do transporte de energia.

As linhas de corrente para os dois trabalhos, apresentadas nas Figs.(6.23) e (6.24) também estão em concordância. É possível observar a influência do número de Darcy sobre os efeitos advectivos também por meio da análise deste pós processamento. Os menores valores de permeabilidade conferem aos escoamentos características similares àquelas obtidas em células de convecção para um meio monofásico à baixos números de Rayleigh, nas quais imperam os efeitos da condução térmica.

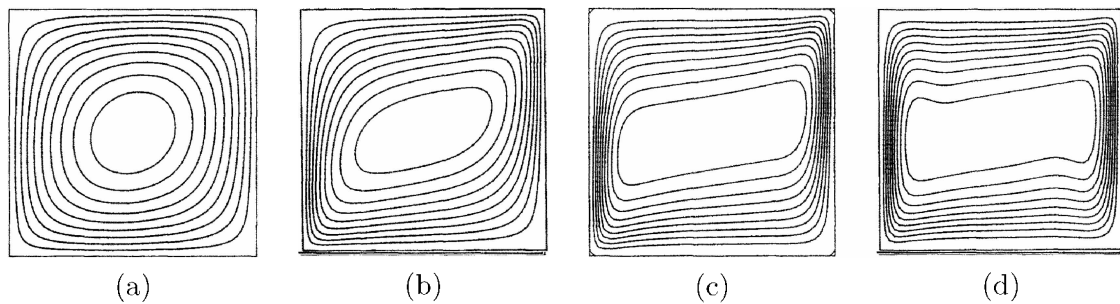
Ainda, a fim de fornecer uma comparação de caráter quantitativo entre os trabalhos, confecciona-se a Tabela (6.2), que apresenta os valores médios para os números de Nusselt na parede fria da cavidade. Modelam-se casos semelhantes aos apresentados anteriormente, para diferentes valores do número de Rayleigh e um número de Darcy fixo de 10^{-4} . Os resultados estão, mais uma vez, de acordo com aqueles encontrados na literatura.

Figura 6.23: Linhas de corrente para a convecção natural em uma cavidade quadrada obtidos em $t = 20$ minutos para $\lambda = 1$, $Pr = 0,71$, $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,9$: (a) $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (b) $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (c) $Da = 1 \cdot 10^{-3}$, (d) $Da = 3 \cdot 10^{-3}$.



Fonte: Autoria própria

Figura 6.24: Linhas de corrente para a convecção natural em uma cavidade quadrada segundo Lauriat and Prasad (1989) para $\lambda = 1$, $Pr = 0,71$, $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,9$: (a) $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (b) $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (c) $Da = 1 \cdot 10^{-3}$, (d) $Da = 3 \cdot 10^{-3}$.



Fonte: Autoria própria

Tabela 6.2: Número de Nusselt médio na parede fria de uma cavidade porosa para diferentes valores do número de Rayleigh.

	$Ra = 10^6$	$Ra = 10^7$	$Ra = 10^8$
Presente trabalho	1,07	3,14	12,59
Lauriat <i>et al.</i> (1989)	1,07	3,02	12,42

6.6 Escoamento sobre um obstáculo poroso a jusante de um degrau

Objetiva-se modelar o escoamento bidimensional, laminar e incompressível sobre e através de um cilindro poroso de base quadrada fixo a jusante de um degrau. As condições de contorno para este caso são apresentadas no diagrama da Fig.(3.5), onde D representa o comprimento característico do cilindro e L representa dada dimensão do domínio em função da altura do degrau ($h = L_{left}$), de forma que $L_{bl} = 20 h$, $L_{br} = 52 h$ e $L_{right} = 2 h$. A posição do corpo poroso é fixa em $x_c = 2 D$ e $y_c = h$. Simulações são conduzidas para um campo gravitacional nulo. Os casos são configurados com o fim de avaliar separadamente

a influência da porosidade e do número de Darcy sobre as características do escoamento.

Para um meio de porosidade fixa, os maiores valores do número de Darcy (e os maiores valores de permeabilidade) estão associados às partículas de dimensões características mais significativas. A relação matemática entre os parâmetros é observada na Eq.(3.9). A interpretação física dessa característica reside no fato de que, para dado volume de particulado, tanto a área de projeção, quanto a área de contato superficial, são proporcionais ao número de partículas. Tal condição implica no aumento das forças que devem atuar sobre o fluido devido efeitos inerciais e viscosos, que se relacionam diretamente às áreas de projeção e de contato superficial.

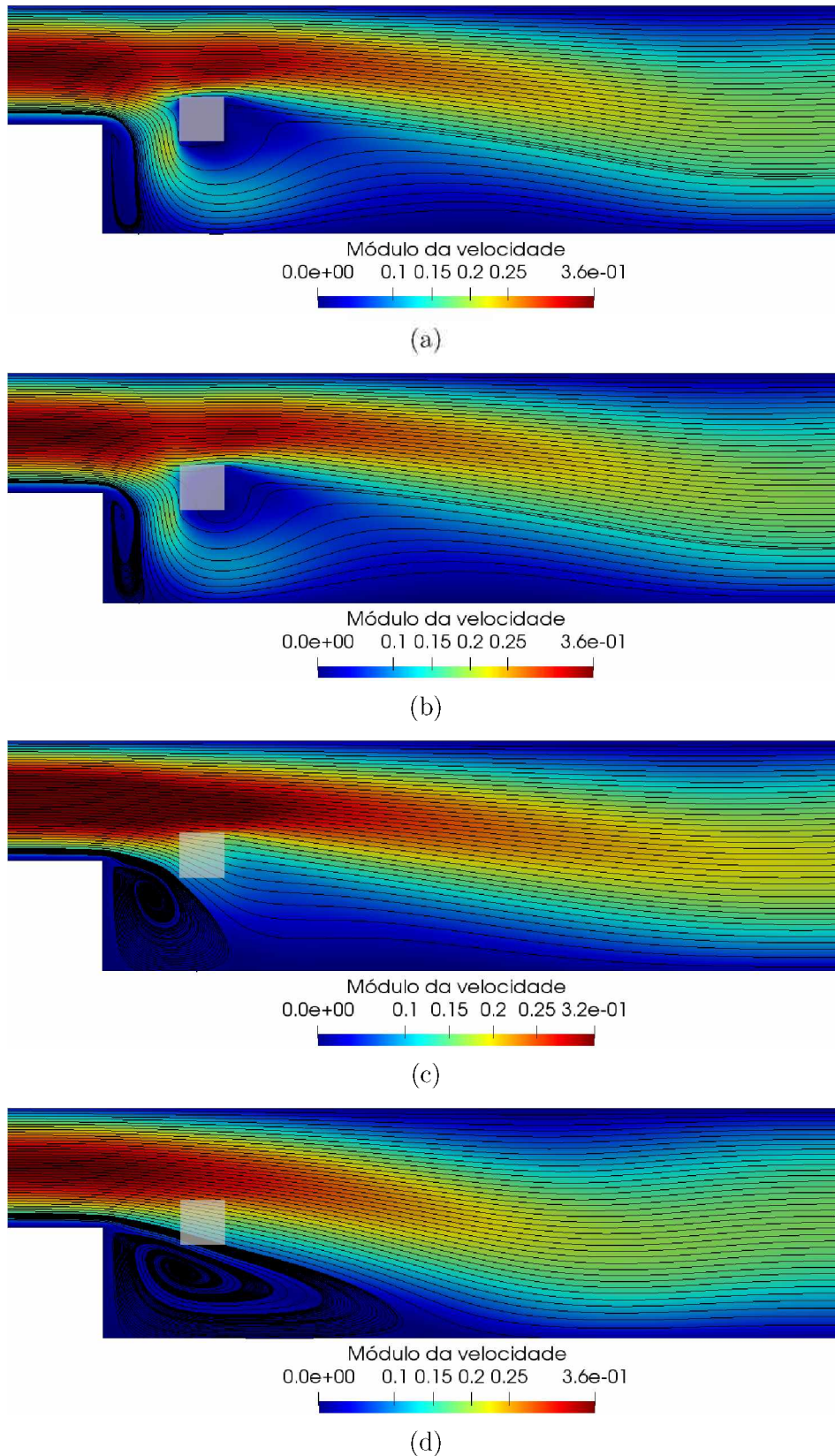
Diferentes valores de porosidade, associados à um valor fixo do número de Darcy, entretanto, se relacionam simultaneamente com diferentes proporções volumétricas e dimensões características. Para dado número de Darcy, aumentos na proporção volumétrica de fluido devem ser acompanhados de reduções no comprimento característico e um conseqüente aumento no número de partículas que compõem o meio poroso. A redução da porosidade é intuitivamente associada à redução da resistência que o meio exerce ao movimento do fluido por suas fronteiras e no seu interior. No entanto, o aumento no número de partículas está, como susodito, associado a um aumento das forças devido efeitos inerciais e viscosos.

Espera-se, de acordo com as considerações expostas, que, dos dois parâmetros, o número de Darcy seja mais influente sobre as características do escoamento. Para avaliar a validade da argumentação, são conduzidas, para o número de Darcy de 10^{-2} , simulações para os valores de porosidade de 0,1, 0,2, 0,5 e 0,9. Para um meio de porosidade fixa de 0,1, são conduzidas simulações para valores do número de Darcy de 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} e 10^{-1} . É conveniente ressaltar que a dimensão característica para o cálculo do adimensional de Reynolds para este caso não corresponde à aresta do cilindro, mas à dimensão L_{right} do canal.

Define-se um incremento espacial uniforme, de aproximadamente 6,67 mm, e um incremento temporal fixo, de 10^{-4} s. As linhas de corrente, traçadas sobre a magnitude de velocidade, são apresentadas nas Figs.(6.25) e (6.26). Os comprimentos de recolamento para as diferentes configurações do caso são apresentados na Fig.(6.27). Ainda, sondas são posicionadas ao longo de seções transversais do canal a fim de avaliar as alterações sobre os perfis de velocidade em função da variação independente dos parâmetros. Os perfis de velocidade obtidos são apresentados nas Figs.(6.28) e (6.29).

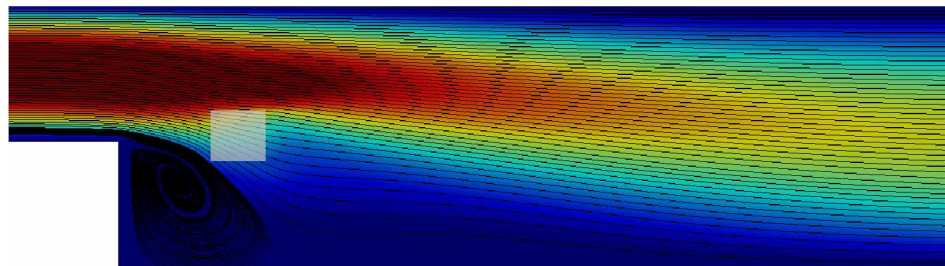
Pela análise dos resultados, é possível verificar que, de fato, o comprimento de recolamento é alterado de maneira mais significativa em função do número de Darcy. É interessante observar que, para os casos simulados, o aumento da porosidade proporcionou uma redução no comprimento de recolamento. Entende-se que, para o número de Darcy imposto, os efeitos inerciais e viscosos, ampliados em função do aumento da porosidade e do conseqüente aumento do número de partículas, é mais significativo sobre o transporte da quantidade de movimento do que a alteração da fração volumétrica das fases.

Figura 6.25: Linhas de corrente sobre a magnitude da velocidade para o escoamento sobre um obstáculo posicionado a jusante de um degrau em $t = 10$ s para $Re = 100$, $\varepsilon = 10^{-1}$: (a) $Da = 10^{-4}$, (b) $Da = 10^{-3}$, (c) $Da = 10^{-2}$, (d) $Da = 10^{-1}$.



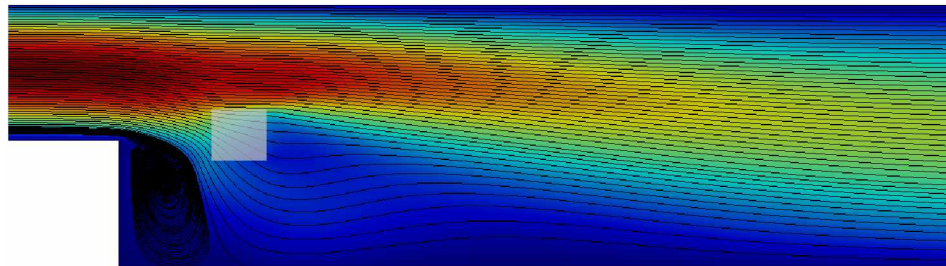
Fonte: Autoria própria

Figura 6.26: Linhas de corrente sobre a magnitude da velocidade para o escoamento sobre um obstáculo posicionado a jusante de um degrau em $t = 10$ s para $Re = 100$, $Da = 10^{-2}$: (a) $\varepsilon = 0,1$, (b) $\varepsilon = 0,2$, (c) $\varepsilon = 0,5$, (d) $\varepsilon = 0,9$.



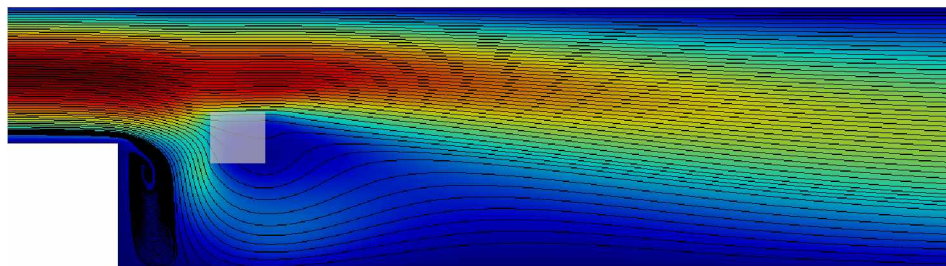
Módulo da velocidade
2.6e-02 0.1 0.15 0.2 0.25 3.1e-01

(a)



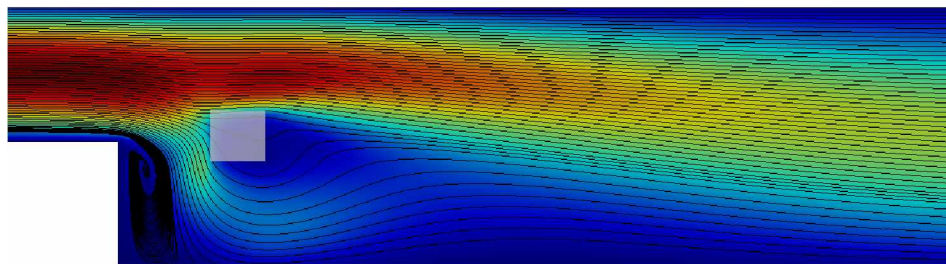
Módulo da velocidade
0.0e+00 0.1 0.15 0.2 0.25 3.6e-01

(b)



Módulo da velocidade
0.0e+00 0.1 0.15 0.2 0.25 3.6e-01

(c)

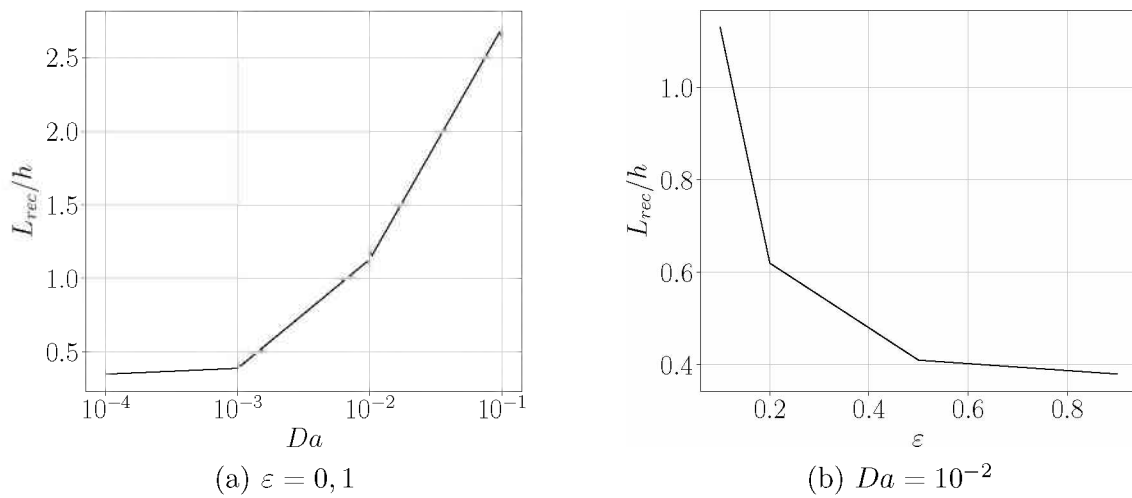


Módulo da velocidade
0.0e+00 0.1 0.15 0.2 0.25 3.6e-01

(d)

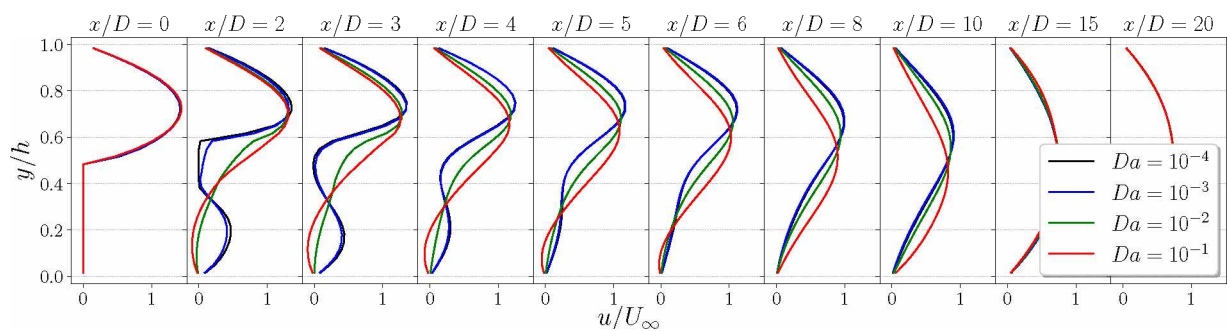
Fonte: Autoria própria

Figura 6.27: Comprimento de recolamento para o escoamento sobre um obstáculo de diferentes valores de porosidade e permeabilidade posicionado a jusante de um degrau.



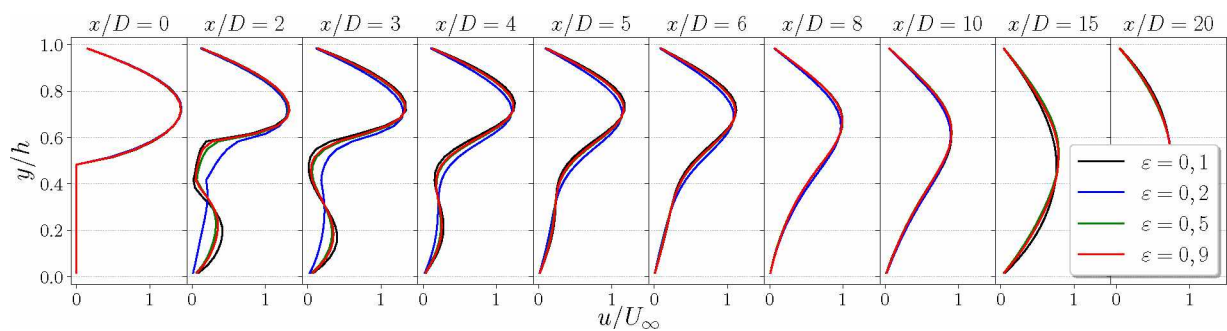
Fonte: Autoria própria

Figura 6.28: Perfis de velocidade a jusante do degrau com $\varepsilon = 10^{-1}$, $Re = 100$ e diferentes valores do número de Darcy.



Fonte: Autoria própria

Figura 6.29: Perfis de velocidade a jusante do degrau com $Da = 10^{-2}$, $Re = 100$ e diferentes valores de porosidade.



Fonte: Autoria própria

6.7 Escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada

Objetiva-se modelar o escoamento bidimensional, laminar e incompressível sobre e através de um cilindro poroso de base quadrada fixo em um canal. As condições de contorno para este caso são apresentadas no diagrama da Fig.(3.6), onde D representa o comprimento característico do cilindro e L representa dada dimensão do domínio ($L_{top} = L_{bot} = 12D$, $L_{left} = 10D$ e $L_{right} = 40D$). Simulações são conduzidas para um campo gravitacional nulo, ou normal ao plano do escoamento, e diferentes combinações dos valores de porosidade e permeabilidade para a estrutura porosa. Os resultados computacionais obtidos no presente trabalho são confrontados com aqueles apresentados por Breuer *et al.* (2000) e Babu and Narasimhan (2010).

Este problema, em contraste aos anteriores, apresenta um significativo custo computacional. A fim de reduzir o tempo de processamento, propõe-se uma função de ajuste para o incremento temporal. Para tanto, considera-se a condição de convergência para o método explícito, apresentada na Eq.(6.1), onde Γ representa a difusividade de certa informação e Λ a sua taxa de advecção.

$$\Delta t \leq \frac{\max(\Delta x^2, \Delta y^2)}{4\Gamma \left(1 + \left(\frac{\Lambda \max(\Delta x, \Delta y)}{4\Gamma} \right)^2 \right)}. \quad (6.1)$$

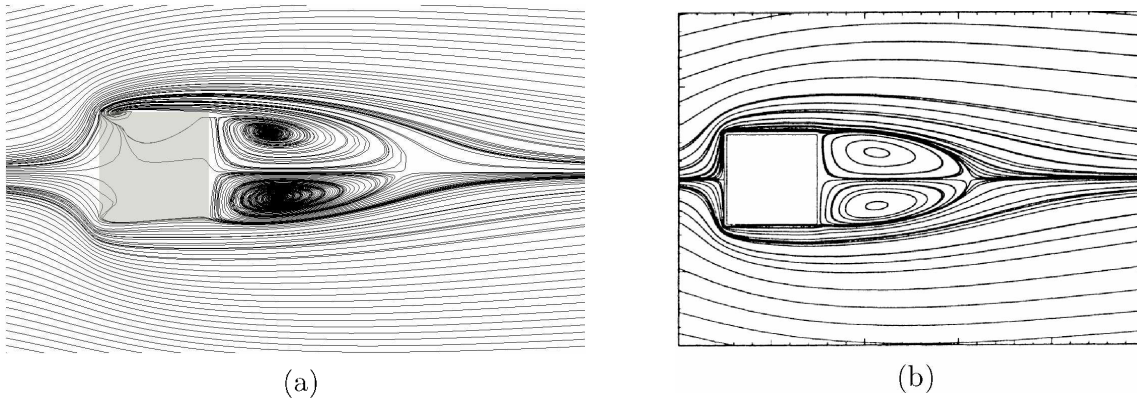
Para o caso em que a informação transportada é a quantidade de movimento linear, a difusividade é definida como a viscosidade cinemática do fluido, e a taxa de advecção corresponde à sua máxima velocidade. Substituindo tais valores na Eq.(6.1), obtém-se a função de ajuste para o incremento temporal que será empregada nas simulações apresentadas nesta seção.

Nota-se que o incremento temporal é sensível aos incrementos espaciais, à viscosidade cinemática do fluido e à sua velocidade máxima. Para os fins deste trabalho, os incrementos espaciais, bem como a viscosidade cinemática do fluido, são constantes no tempo e no espaço. Assim, a função deverá responder apenas às flutuações na velocidade, de modo que os menores incrementos no domínio temporal estão associados aos passos que apresentam os maiores valores de velocidade.

Como comentado na seção 6.4, é conveniente avaliar o fechamento do modelo para configurações próximas àquelas de estruturas monofásicas. Neste sentido, a primeira configuração do problema é efetuada de forma a comparar o comprimento de bolha obtido no presente trabalho, para uma estrutura com baixos valores de porosidade e permeabilidade, aos resultados para um cilindro maciço. Define-se um incremento espacial uniforme de $6,25 \text{ mm}$. Os resultados para $Re = 30$ são apresentados na Fig. (6.30).

O comprimento de bolha é definido como a distância entre o centro do obstáculo e

Figura 6.30: Linhas de corrente para o escoamento com $Re = 30$ sobre: (a) um cilindro poroso ($\varepsilon = 10^{-2}, Da = 10^{-7}$) e (b) um cilindro maciço (Breuer *et al.*, 2000).



Fonte: Autoria própria

o ponto de estagnação mais próximo, não coincidente à sua superfície. Para o presente trabalho, segundo as configurações supracitadas, obtém-se um comprimento de $2,25D$, valor próximo daquele encontrado no trabalho de Breuer *et al.* (2000), de $2,18D$ (deviação de 3,2% entre os resultados), para um cilindro maciço.

Conduz-se ainda simulações para um valor do adimensional de Reynolds de 100 e diferentes valores de porosidade e permeabilidade, a fim de avaliar a influência de tais parâmetros sobre as características do escoamento. Mantém-se o incremento espacial uniforme definido para o último caso.

Impõe-se uma função de transformação térmica para a fase sólida de $5 \cdot 10^9 W/m^2$. O termo fonte é conveniente à análise da influência das características do meio poroso sobre os mecanismos de transporte de energia. Ainda, como o campo gravitacional não atua sobre o plano do escoamento, a variação na temperatura do fluido não introduz distorções no transporte de quantidade de movimento linear em relação ao caso isotérmico. A energia térmica, neste caso, pode ser usada como um traçador para o fluido que entra em contato com a estrutura porosa. Assim, apesar dos mecanismos difusivos que, para os fins de um traçador, são indesejáveis, é possível, por meio do campo de temperatura, visualizar a trajetória de uma partícula que entra em contato com o meio poroso.

Os campos escalares de vorticidade, pressão e temperatura são apresentados nas Figs.(6.31), (6.32) e (6.33), respectivamente. Em tais figuras, é possível observar a formação de esteiras de Von Karman a jusante do corpo. Tais esteiras surgem em função de instabilidades que, para a experimentação virtual, são de caráter numérico. O conjunto de equações que modelam a mecânica dos fluidos constitui um sistema dinâmico instável que, para determinadas proporções entre efeitos viscosos e inerciais, pode chegar a um regime turbulento. É conveniente ressaltar que as esteiras não caracterizam um regime turbulento, mas simplesmente instável. Ainda, a turbulência requer efeitos tridimensionais, não presentes neste trabalho.

Em trabalhos experimentais, as instabilidades são de caráter randômico e podem estar associadas à desalinhamentos nas bancadas, imperfeições geométricas do corpo ou do canal, vibrações transportadas pela estrutura, dentre inúmeros outros fatores.

Da Fig.(6.31), percebe-se que o aumento no valor de parâmetros como porosidade e permeabilidade resulta em uma redução no valor da vorticidade e um ligeiro alongamento da esteira. A justificativa para essa relação se fundamenta no fato de que o aumento de tais parâmetros amplia o transporte de fluido e, conseqüentemente, de quantidade de movimento linear através do corpo.

O aumento do transporte através do cilindro deve alongar as estruturas formadas a jusante, aumentando seu comprimento de onda e reduzindo sua frequência. Espera-se ainda que a propagação das instabilidades seja dificultada e a formação das esteiras, conseqüentemente, retardada, até que dada combinação dos valores de porosidade e permeabilidade venham a inibir sua formação.

Observa-se, na Fig.(6.32), que as regiões com maiores módulos de vorticidade estão associadas à regiões de baixa pressão. O desprendimento de vórtices e a formação dessas regiões promovem as oscilações observadas nos coeficientes de arrasto (C_d) e sustentação (C_l), calculados segundo as Eqs.(3.2) e (3.3), respectivamente, e apresentados na Fig.(6.34).

Os coeficientes são função das forças devido os efeitos viscosos, que podem ser calculadas de forma direta na interface, e devido o campo de pressão, que deve ser extrapolado (não coincidente com a interface). Para o presente trabalho, emprega-se um polinômio interpolador de Lagrange de quinta ordem. Espera-se que o aumento na permeabilidade do meio proporcione menores coeficientes de arrasto e menores amplitudes para o coeficiente de sustentação, uma vez as forças de contato com o corpo devem ser reduzidas com o aumento do parâmetro.

Contudo, observa-se da Fig.(6.34) que o coeficiente de arrasto aumenta junto à permeabilidade. Não é possível afirmar se essa é uma resposta física, que se justifica na formação de gradientes de pressão no interior da estrutura porosa, ou se é uma falha da metodologia para o cálculo das forças que atuam sobre a interface. Em trabalhos futuros, maior clareza sobre a questão provavelmente é alcançada se o cálculo dos coeficientes for conduzido via Teorema do Transporte de Reynolds.

Percebe-se na Fig.(6.33) a influência dos parâmetros supracitados sobre o transporte de energia térmica. Para maiores valores de porosidade e permeabilidade, obtém-se um significativo aumento no transporte de energia por advecção, evidente principalmente ao comparar as Figs.(6.33c) e (6.33d). Como esperado, o perfil de temperatura para os casos de menores permeabilidades se assemelham àqueles encontrados para obstáculos maciços, nos quais imperam os efeitos da condução térmica.

As Figs.(6.35) e (6.36) apresentam vistas ampliadas para linhas de corrente e isocontornos de temperatura para os diferentes casos simulados. Nessas figuras é possível perceber com maior nível de detalhe a influência das características do meio poroso sobre

o escoamento.

Conduz-se ainda, para as configurações simuladas, uma análise da emissão de vórtices por meio da frequência adimensional (St), calculada através da Eq.(3.4). Para tanto, emprega-se uma sonda de aquisição de dados, posicionada sobre a linha de simetria horizontal do canal, a uma distância de $10D$ do obstáculo. A sonda captura o sinal da componente vertical de velocidade. O sinal deve então ser tratado via Transformada de Fourier, a fim de identificar as frequências que o compõem. O período de aquisição é definido como o intervalo fechado de $t = [20, 60]$ segundos. Os resultados são apresentados na Fig.(6.37) e os valores das frequências de emissão são compilados na Tabela (6.3).

Tabela 6.3: Número de Strouhal para diferentes valores de porosidade e do número de Darcy.

ε	Da	St
0,01	10^{-6}	0,153744
0,05	10^{-5}	0,151212
0,10	10^{-4}	0,146217
0,15	10^{-3}	0,144945

Percebe-se que, de fato, menores valores de porosidade e permeabilidade estão associados à sinais de menores comprimentos de onda e maiores frequências. Também de acordo com o previsto no início desta seção, observa-se na Fig.(6.34) que o aumento desses dois parâmetros estão associados a um atraso na formação de esteiras.

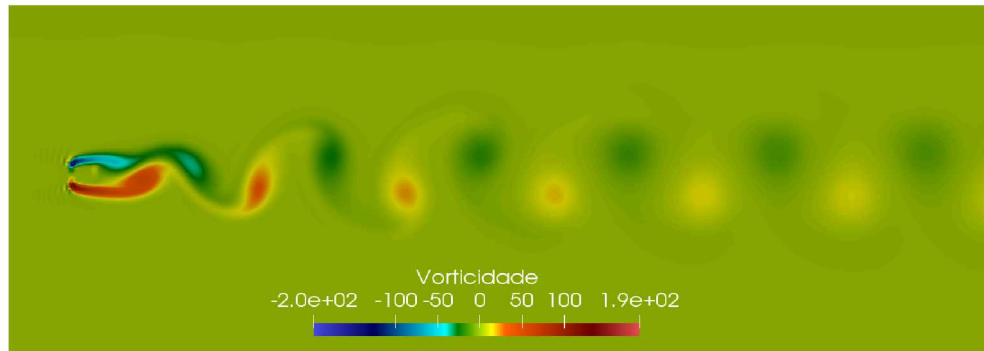
Ainda, na Tabela (6.4), compara-se o valor do número de Strouhal do escoamento sobre uma estrutura porosa com insignificantes valores de porosidade e permeabilidade com os valores encontrados na literatura para cilindros maciços. Os resultados do presente trabalho, para $\varepsilon = 10^{-2}$ e $Da = 10^{-6}$, são confrontados com aqueles apresentados por Robichaux *et al.* (1999), Sharma and Eswaran (2004) e Sahu *et al.* (2009).

Tabela 6.4: Número de Strouhal para cilindros maciços.

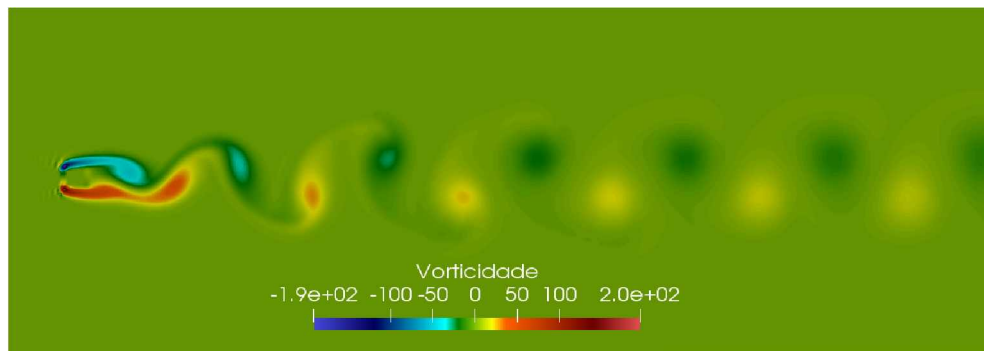
	St
Presente trabalho	0,1537
Robichaux <i>et al.</i> (1999)	0,1540
Sharma and Eswaran (2004)	0,1488
Sahu <i>et al.</i> (2009)	0,1486

Finalmente, a função do incremento temporal, introduzida na Eq.(6.1), é apresentada na Fig.(6.38). Percebe-se que as curvas apresentam um comportamento similar àquele observado nas curvas dos coeficientes de arrasto.

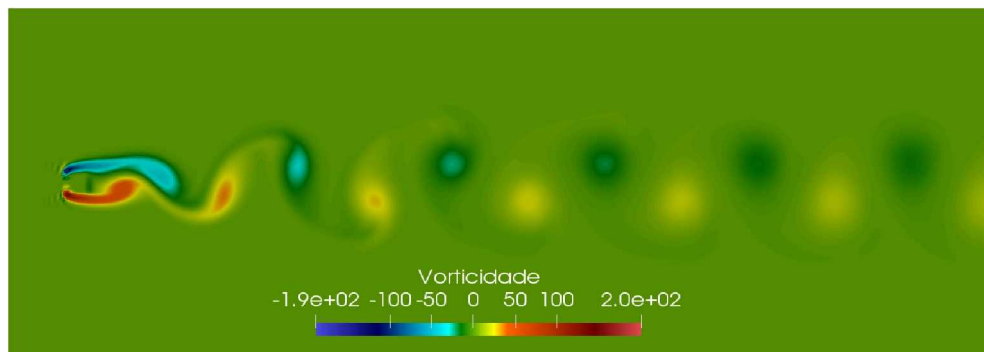
Figura 6.31: Vista ampliada do campo escalar de vorticidade para o escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada em $t = 30$ s para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1$, $5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$.



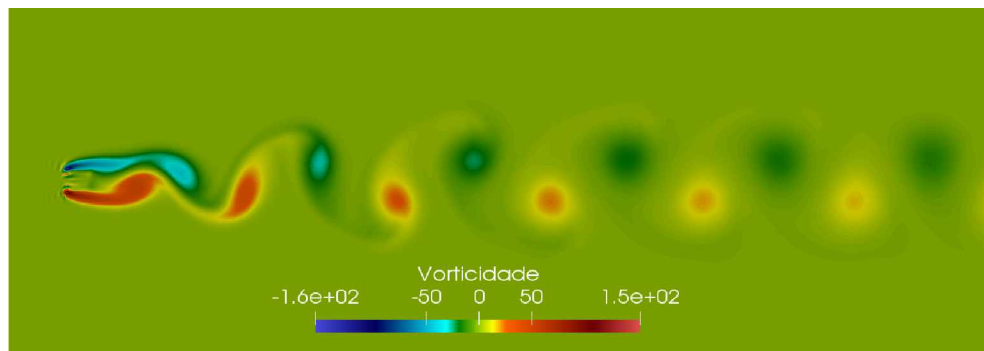
(a)



(b)



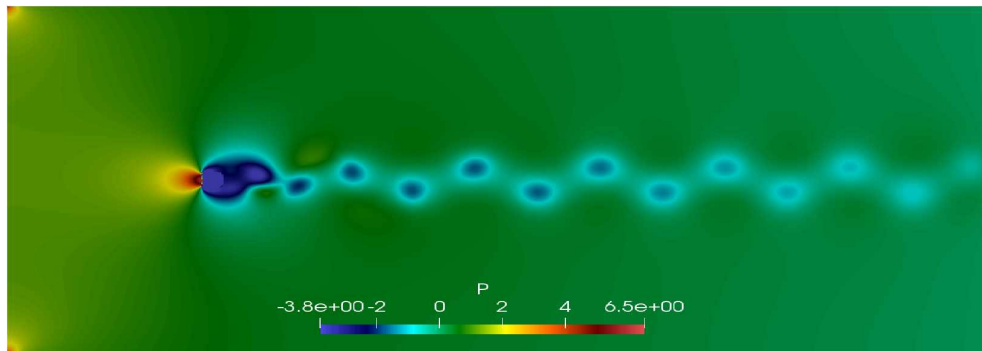
(c)



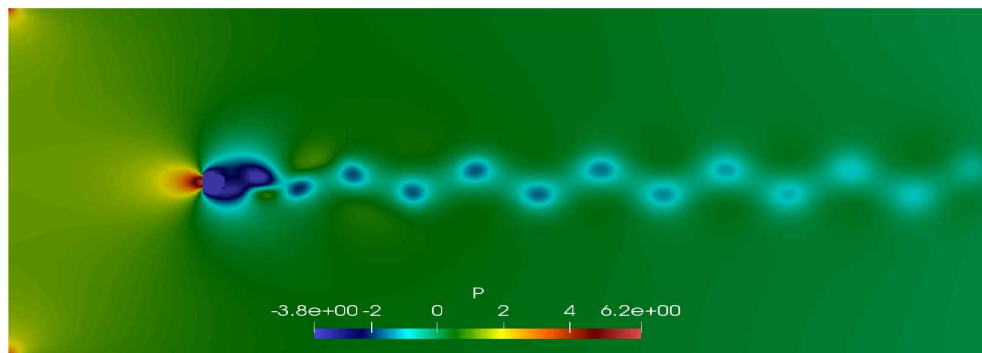
(d)

Fonte: Autoria própria

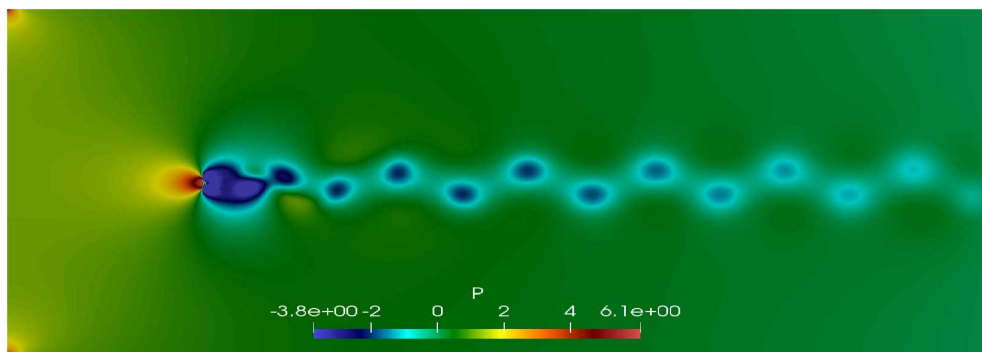
Figura 6.32: Campo de pressão para o escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada em $t = 30$ s para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1, 5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$.



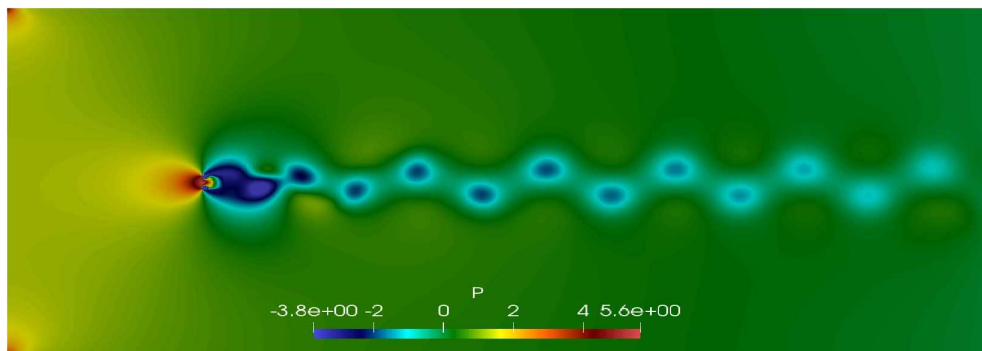
(a)



(b)



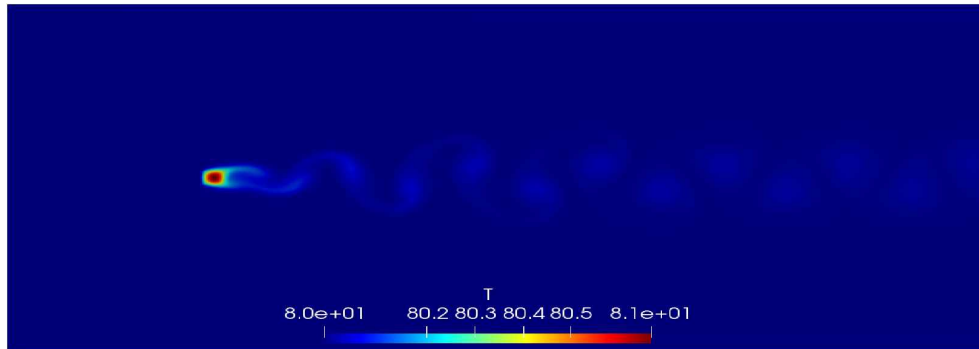
(c)



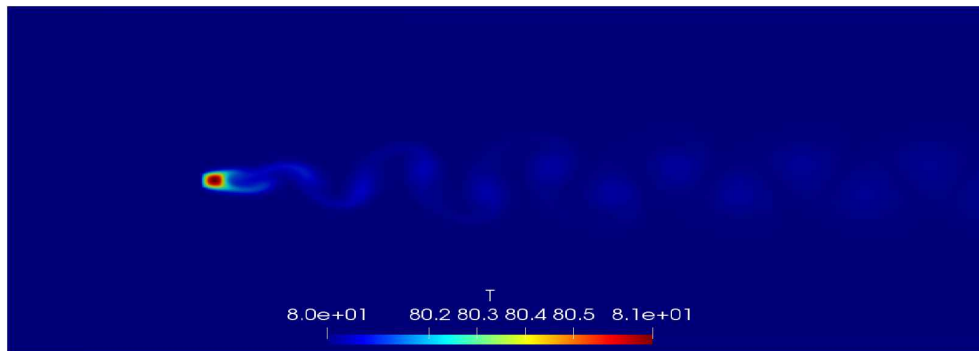
(d)

Fonte: Autoria própria

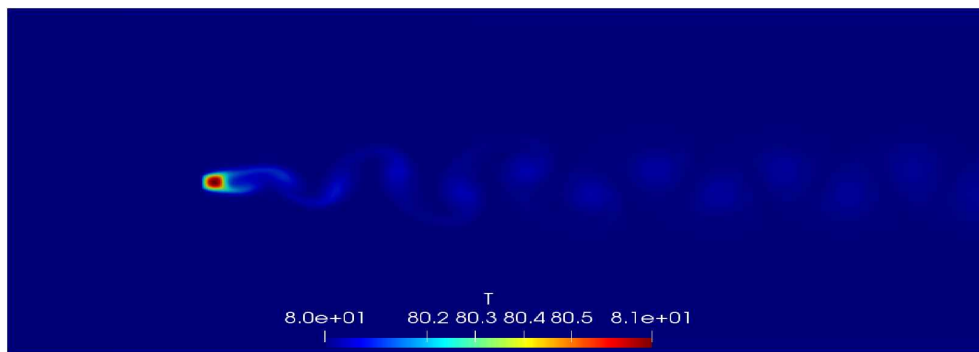
Figura 6.33: Campo de temperatura para o escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada em $t = 30$ s para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$.



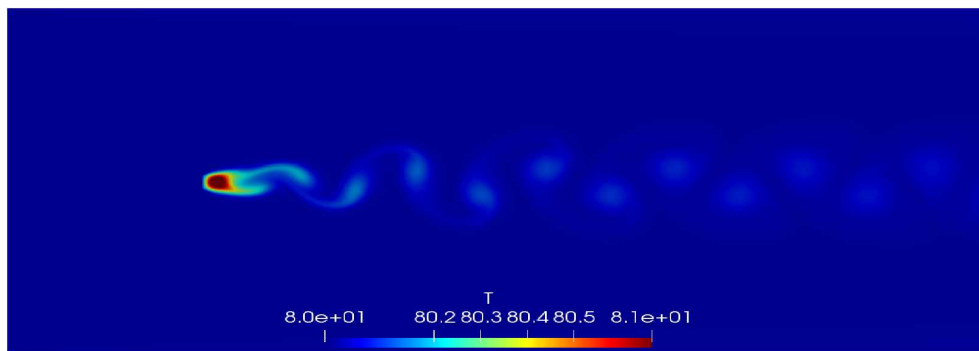
(a)



(b)



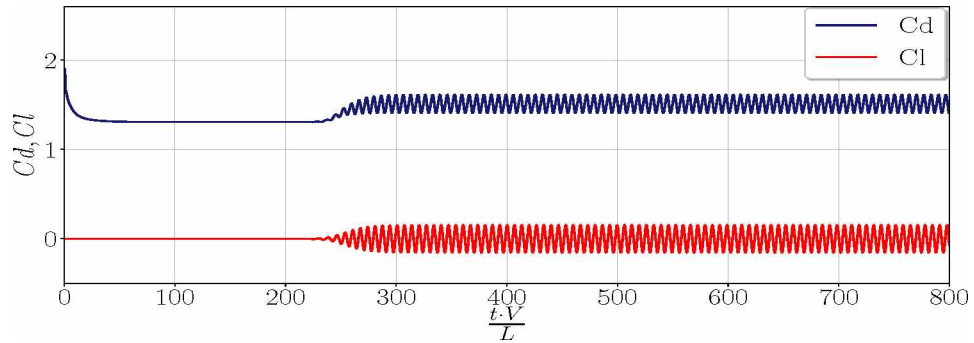
(c)



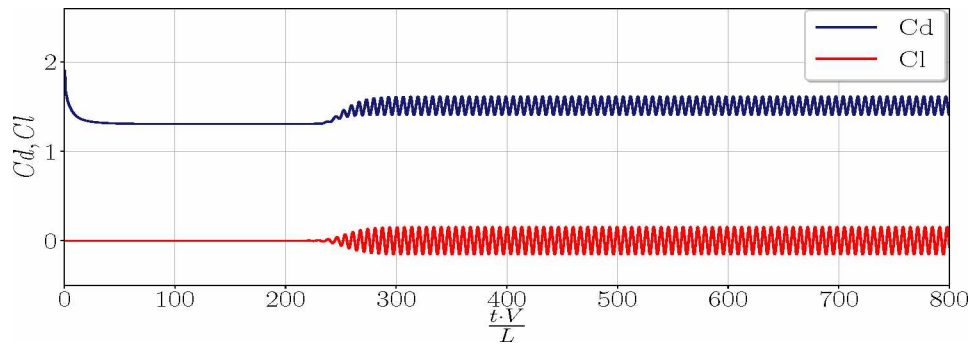
(d)

Fonte: Autoria própria

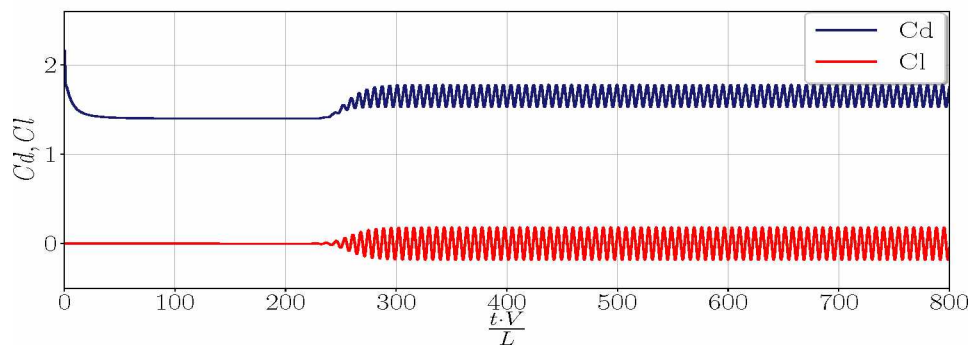
Figura 6.34: Coeficientes de arrasto e sustentação para um cilindro poroso de base quadrada para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$.



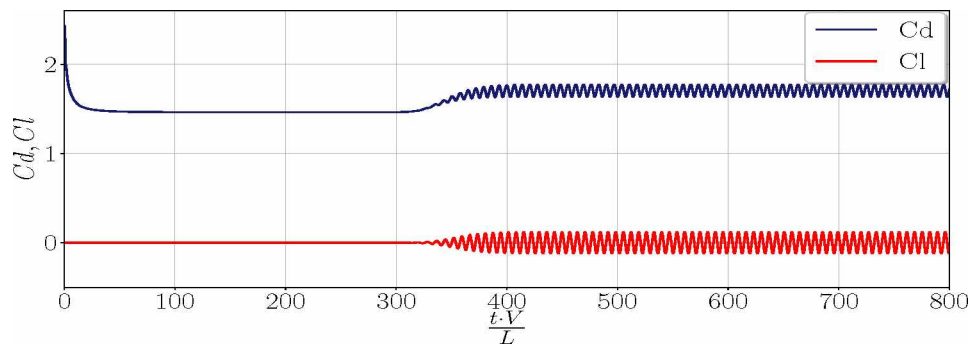
(a)



(b)



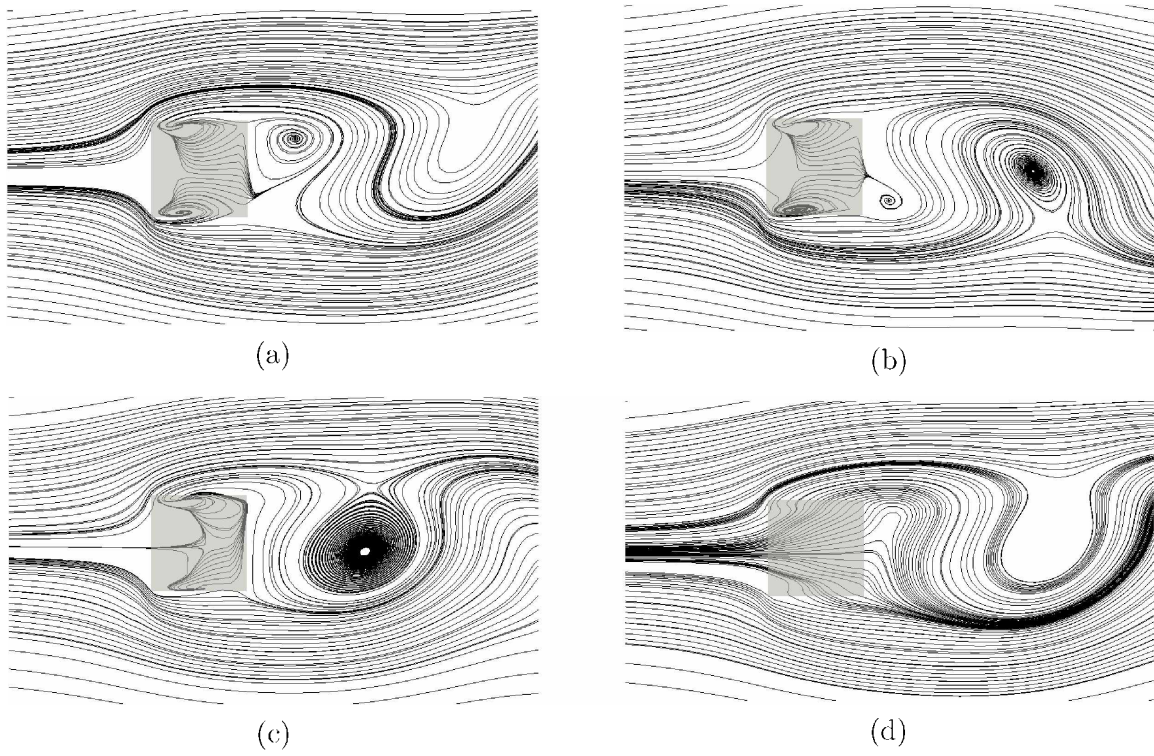
(c)



(d)

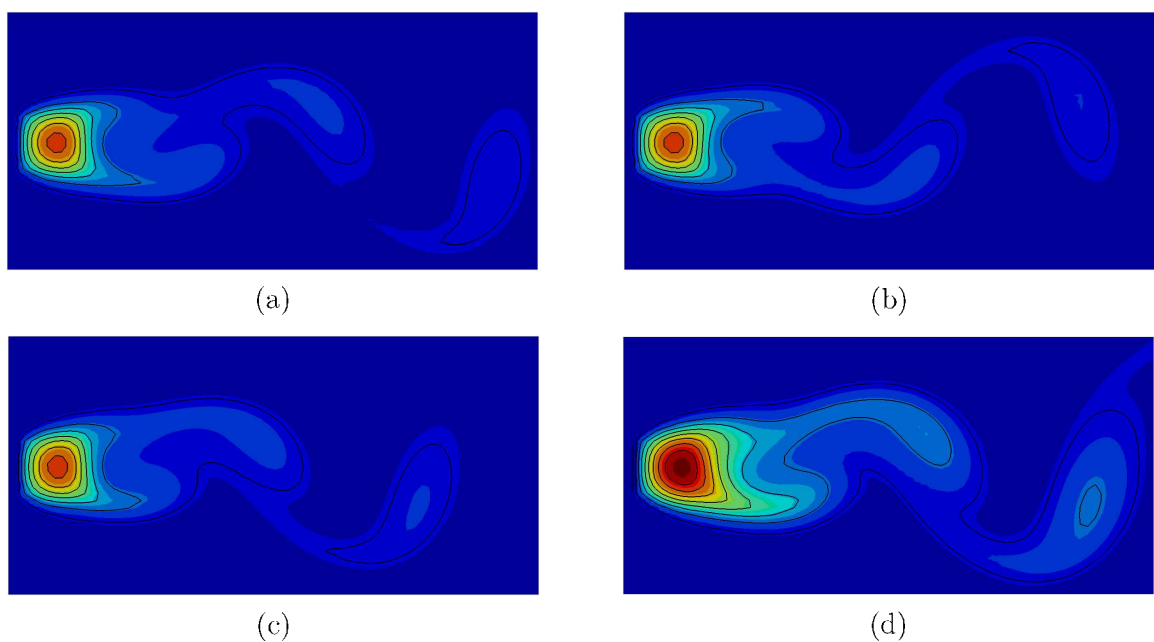
Fonte: Autoria própria

Figura 6.35: Linhas de corrente em vista ampliada para um cilindro poroso de base quadrada em $t = 30 s$ para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$.



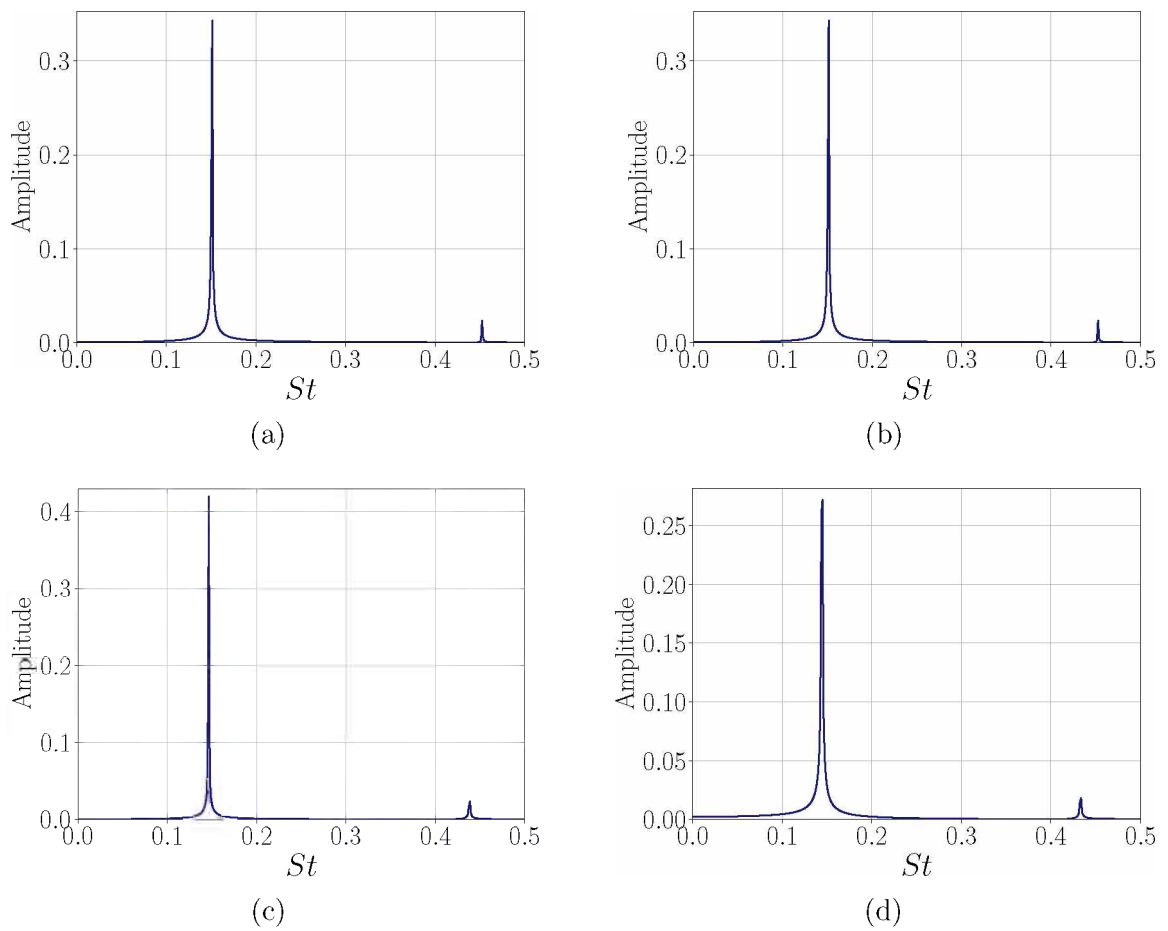
Fonte: Autoria própria

Figura 6.36: Iso-contornos de temperatura em vista ampliada para um cilindro poroso de base quadrada em $t = 30 s$ para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$.



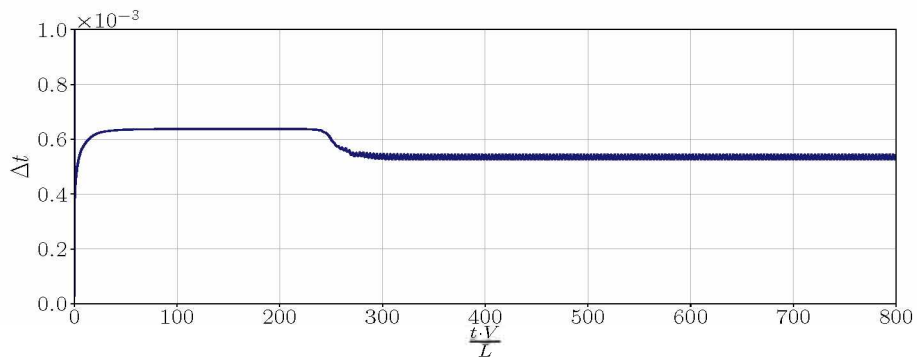
Fonte: Autoria própria

Figura 6.37: Número de Strouhal para o sinal do escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1, 5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$.

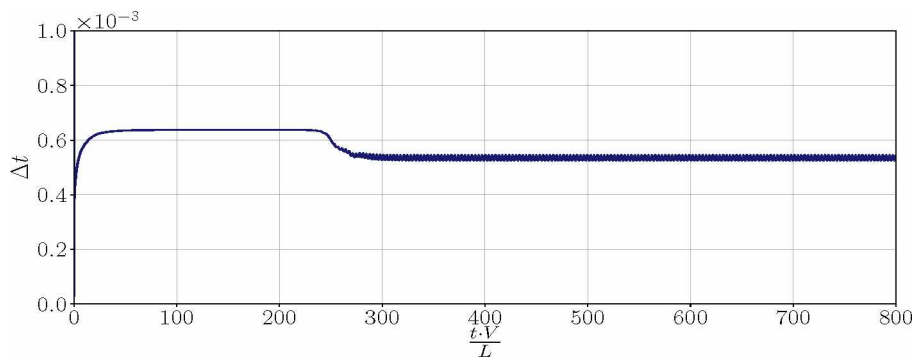


Fonte: Autoria própria

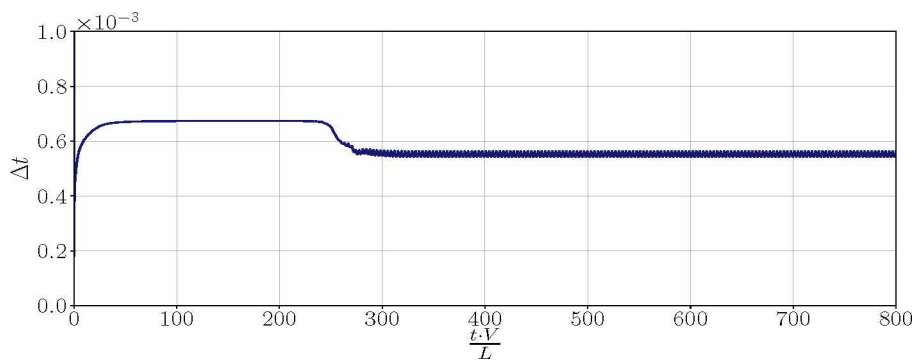
Figura 6.38: Função do incremento temporal para a simulação do escoamento sobre um cilindro poroso de base quadrada para $Re = 10^2$: (a) $\varepsilon = 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-6}$, (b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $Da = 1 \cdot 10^{-5}$, (c) $\varepsilon = 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-4}$, (d) $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-1}$, $Da = 1 \cdot 10^{-3}$.



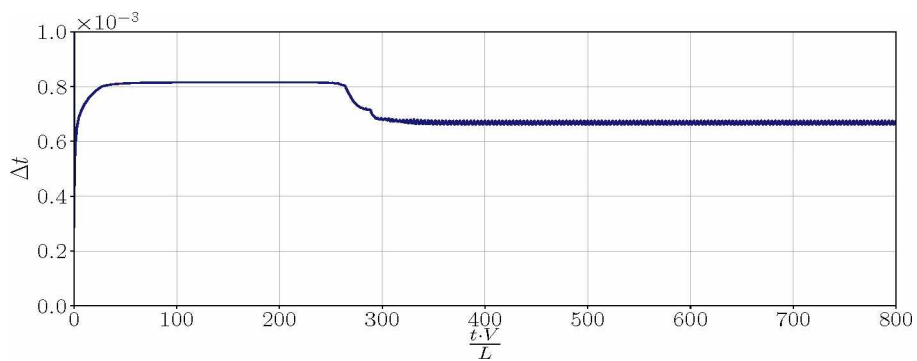
(a)



(b)



(c)



(d)

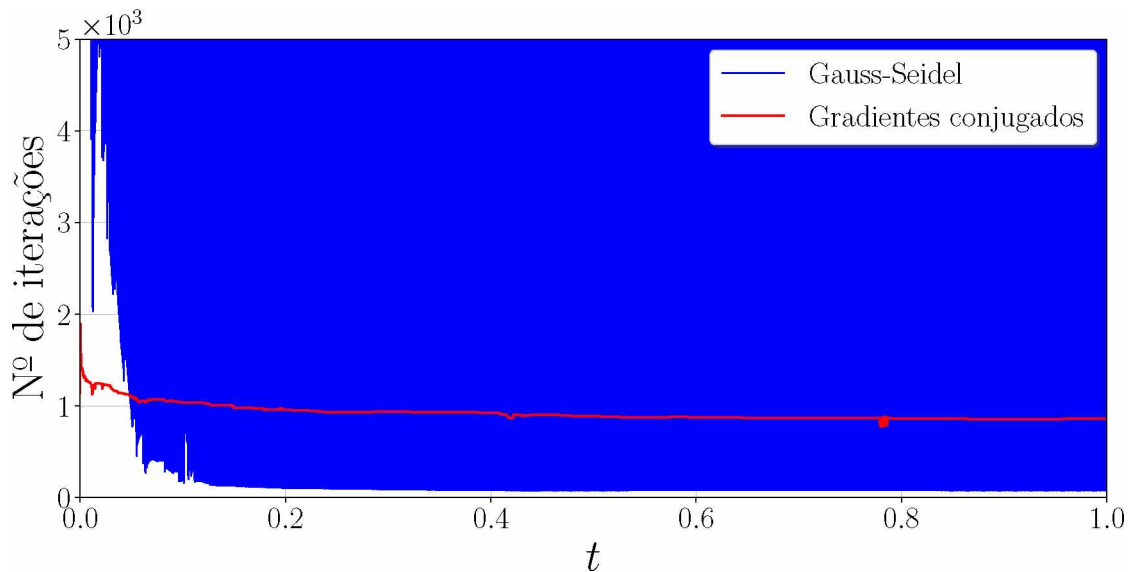
Fonte: Autoria própria

6.8 Convergência do método numérico

Nesta última seção, é avaliada a convergência dos métodos empregados na solução dos sistemas lineares para a implementação numérico-computacional desenvolvida. A análise é conduzida para a modelagem do escoamento sobre um cilindro de base quadrada poroso fixo em um canal, que, dos casos trabalhados, é aquele que apresenta maior custo computacional.

Para investigações dessa natureza, é comum que se avalie o número de iterações necessário à convergência do sistema linear para dada tolerância. Neste sentido, o caso de um obstáculo poroso com $\varepsilon = 10^{-1}$ e $Da = 10^{-6}$, trabalhado na seção anterior, é resolvido para uma tolerância de 10^{-12} . A função do número de iterações por incremento temporal pelo tempo físico de simulação, para as duas metodologias desenvolvidas, é apresentada na Fig.(6.39), na qual percebe-se a significativa diferença no comportamento do parâmetro para as metodologias de Gauss-Seidel e dos Gradientes Conjugados.

Figura 6.39: Número de iterações por incremento temporal para o escoamento sobre um cilindro poroso.



Fonte: Autoria própria

Acerca do tempo de processamento, estima-se que o método dos Gradientes Conjugados seja aproximadamente 30 vezes mais eficiente do que o método de Gauss-Seidel. É seguro afirmar que, se a maior fração da área em azul se situasse abaixo da curva em vermelho, o método de Gauss-Seidel apresentaria um menor custo computacional em relação ao método dos Gradientes Conjugados.

A natureza numérica das oscilações é desconhecida, mas uma possível justificativa é apresentada na seção 5.3.

Capítulo 7

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

No presente trabalho, é apresentada a modelagem física, matemática, numérica e computacional de escoamentos laminares, incompressíveis e não-isotérmicos de fluidos newtonianos por meios porosos em regime transiente. Rotinas computacionais são desenvolvidas e simulações são conduzidas a fim de validar o código e de analisar a influência de características do meio poroso sobre o escoamento. As equações são resolvidas em um domínio bidimensional euleriano cartesiano fixo pelo método de diferenças finitas. Emprega-se a metodologia do passo fracionado para o acoplamento pressão-velocidade.

A partir dos resultados computacionais obtidos, constata-se que a modelagem desenvolvida está em concordância com aquelas encontradas na literatura. A validação do modelo permite a configuração de problemas mais robustos e de maior aplicabilidade.

Apresenta-se ainda uma breve análise de convergência para as metodologias numéricas desenvolvidas. Observou-se notável disparidade na velocidade de processamento entre as técnicas empregadas. Evidencia-se, por meio do estudo, a importância da seleção consciente de metodologias numéricas convenientes às modelagens propostas.

Em trabalhos futuros, a modelagem pode ser estendida para escoamentos tridimensionais por meios porosos anisotrópicos, cuja fase sólida é móvel e deformável. É interessante ainda a implementação de modelos de turbulência para meios porosos e de técnicas que permitam interação entre fronteiras porosas e maciças. A execução de algumas dessas atividades estão atualmente em curso para o código em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Computacional da Universidade Federal de Uberlândia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agrawal, L., Mandal, J.C. and Marathe, A.G., 2000. “Computations of incompressible flows with natural convection using pseudocompressibility approach”. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 30, No. 1, pp. 607–620.
- Anirudh, K. and Dhinarakan, S., 2018. “On the onset of vortex shedding past a two-dimensional porous square cylinder”. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 179, No. 1, pp. 200–214.
- Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C.F. and Schonung, B., 1983. “Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow”. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 127, No. 1, pp. 473–496.
- Babu, V. and Narasimhan, A., 2010. “Investigation of vortex shedding behind a porous square cylinder using lattice boltzmann method”. *Physics of Fluids*, Vol. 22, No. 053605, pp. 1–8.
- Baytas, A.C. and Pop, I., 1998. “Free convection in oblique enclosures filled with a porous medium”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, No. 1, pp. 1047–1057.
- Bear, Bachmat and Jacob, Y., 1990. *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media*. Springer Netherlands, Netherlands, 1st edition.
- Biswas, G., Breuer, M. and Durst, F., 2004. “Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate reynolds numbers”. *American Society of Mechanical Engineering*, Vol. 126, No. 1, pp. 362–374.
- Breuer, M., Bernsdorf, J., Zeiser, T. and Durst, F., 2000. “Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-boltzmann and finite-volume”. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 21, No. 1, pp. 186–196.
- Brinkman, H.C., 1947. “A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles”. *Applied Sciences Resources*, Vol. A1, No. 1, pp. 27–34.

-
- Chatterjee, D., Sengupta, A., Debnath, N. and De, S., 2015. “Influence of an adiabatic square cylinder on hydrodynamic and thermal characteristics in two-dimensional backward-facing step channel”. *Heat Transfer Research*, Vol. 46, No. 1, pp. 63–89.
- Chen, C.K., Yen, T.S. and Yang, Y.T., 2006. “Lattice boltzmann method simulation of a cylinder in the backward-facing step flow with the field synergy principle”. *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 45, No. 1, pp. 982–989.
- Chen, S., Yang, B. and Zheng, C., 2017. “A lattice boltzmann model for heat transfer in porous media”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 111, No. 1, pp. 1019–1022.
- Chu, X., Yang, G., Pandey, S. and Weigand, B., 2019. “Direct numerical simulation of convective heat transfer in porous media”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 133, No. 1, pp. 11–20.
- Courant, R., Friederichs, K. and Lewy, H., 1967. “On the partial difference equations of mathematical physics”. *IBM Journal of Research and Development*, Vol. 11, No. 2, pp. 215–234.
- Darcy, H., 1856. *Fontaines Publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris, 1st edition.
- Davis, G.V., 1983. “Natural convection of air in a square cavity a bench mark numerical solution”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 3, No. 1, pp. 249–264.
- Dhinakaran, S. and Ponmozhi, J., 2011. “Heat transfer from a permeable square cylinder to a flowing fluid”. *Energy Conversion and Management*, Vol. 52, No. 1, pp. 2170–2182.
- Duarte, B.A.F., 2017. “Phase change modeling for non-isothermal flows: A mathematical, numerical and computational model for pure substances”.
- Ergun, S., 1952. “Fluid flow through packed columns”. *Chemical Engineering Progress*, Vol. 48, No. 1, pp. 89–94.
- Erturk, E., 2008. “Numerical solutions of 2-d steady incompressible flow over a backward-facing step, part i: High reynolds number solutions”. *Computers & Fluids*, Vol. 37, No. 1, pp. 633–655.
- Filho, D.L.M., 2018. “Estudo numérico do escoamento sobre um degrau com a presença de um obstáculo de seção retangular”.
- Forchheimer, P., 1901. “Wasserbewegung durch boden”. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieur*, Vol. 45, No. 1.

-
- Frackowiak, A., Wolfersdorf, J.V. and Cialkowski, M., 2019. "Optimization of cooling of gas turbine blades with channels filled with porous material". *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 136, No. 1, pp. 370–378.
- Fransson, J.H.M., Konieczny, P. and Alfredsson, P.H., 2004. "Flow around a porous cylinder subject to continuous suction or blowing". *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 19, No. 1, pp. 1031–1048.
- Gancarczyk, A., Iwaniszyn, M., Piatek, M., Sinderka, K., Korpys, M., Jodlowski, P.J., Lojewska, J. and Kolodziej, A., 2018. "Interfacial heat and momentum transfer relation for porous media". *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 132, No. 1, pp. 42–51.
- Gangawane, K.M., Bharti, R.P. and Kumar, S., 2015. "Two-dimensional lattice boltzmann simulation of natural convection in differentially heated square cavity: Effect of prandtl and rayleigh numbers". *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 93, No. 1, pp. 766–780.
- Ghia, U., Ghia, N. and Shin, C.T., 1982. "High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method". *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, No. 1, pp. 387–411.
- Goyeau, B. and Songbe, J.P., 1996. "Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the darcy-brinkman formulation". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, No. 7, pp. 1363–1378.
- Guo, Z. and Zhao, T.S., 2002. "Lattice boltzmann model for incompressible flows through porous media". *Physical Review*, Vol. 66, No. 036304, pp. 1–9.
- Habbachi, F., Oueslati, F.S., Bennacer, R., Ganaoui, M. and Elcafsi, A., 2017. "Three-dimensional simulation of natural convection in cubic cavity partially filled with porous media". *Energy Procedia*, Vol. 139, No. 1, pp. 617–623.
- Hsu, Cheng and Vafai, K., 1990. "Thermal dispersion in a porous medium". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, pp. 1587–1597. doi:0017-9310/90.
- Hubbert, M.K., 1957. "Darcy's law and the field equations of the flow of underground fluids". *Hydrological Sciences Journal*, Vol. 2, No. 1, pp. 23–59.
- Jambhekar, V.A., 2011. "Computational methods for fluid dynamics".
- Kasaeian, A., Daneshazarian, R., Mahian, O., Kolsi, L., Chamkha, A., Wongwises, S. and Pop, I., 2017. "Nanofluid flow and heat transfer in porous media: A review of the latest developments". *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 107, No. 1, pp. 778–791.

-
- Kefayati, G.H.R., 2019. “Lattice boltzmann method for natural convection of a bingham fluid in a porous cavity”. *Physica A*, Vol. 521, No. 1, pp. 146–172.
- Kelihher, J.P., Temam, R. and Wang, X., 2011. “Boundary layer associated with the darcy–brinkman–boussinesq model for convection in porous media”. *Physica D*, Vol. 240, No. 1, pp. 619–628.
- Khanafer, K., Vafai, K. and Lightstone, M., 2003. “Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 1, pp. 3639–3653.
- Kopera, M.A., Kerr, R.M., Blackburn, H.M. and D, 2014. “Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step”. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 1, No. 1, pp. 1–24.
- Lauriat, G. and Prasad, V., 1987. “Natural convection in a vertical porous cavity: a numerical study for brinkman-extended darcy formulation”. *American Society of Mechanical Engineers*, Vol. 109, No. 1, pp. 688–696.
- Lauriat, G. and Prasad, V., 1989. “Non-darcian effects on natural convection in a vertical porous enclosure”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, No. 11, pp. 2135–2148.
- Liu, Q. and He, Y.L., 2017. “Lattice boltzmann simulations of convection heat transfer in porous media”. *Physica A*, Vol. 46, No. 1, pp. 742–753.
- Luo, Z. and Xu, H., 2019. “Numerical simulation of heat and mass transfer through microporous media with lattice boltzmann method”. *Thermal Science and Engineering Progress*, Vol. 9, No. 1, pp. 44–51.
- Mahdhaoui, H., Chesneau, X. and Laatar, A.H., 2017. “Numerical simulation of flow through a porous square cylinder”. *Energy Procedia*, Vol. 139, No. 1, pp. 785–790.
- Markatos, N.C. and Pericleous, K.A., 1984. “Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 27, No. 5, pp. 755–772.
- Mobner, M. and Radespiel, R., 2015. “Modelling of turbulent flow over porous media using a volume averaging approach and a reynolds stress model”. *Computers and Fluids*, Vol. 108, No. 1, pp. 25–42.
- Mobner, M. and Radespiel, R., 2017. “Flow simulations over porous media – comparisons with experiments”. *Computers and Fluids*, Vol. 154, No. 1, pp. 358–370.

-
- Mohamad, A.A. and Saeid, N.H., 2004. “Natural convection in a porous cavity with spatial sidewall temperature variation”. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 15, No. 6, pp. 555–566.
- Naito, H., Fukagata, K. and Obi, S., 2018. “Modification of flow around a circular cylinder using porous media”. *Department of Mechanical Engineering*, Vol. 1, No. 1, pp. 1–6.
- Nazari, S. and Sheikhzadeh, G.A., 2013. “Numerical study of natural convection in a square cavity filled with a porous medium saturated with nanofluid”. *Transport Phenomena in Nano and Micro Scales*, Vol. 1, No. 6, pp. 138–146.
- Ng, T. and Su, Y., 2019. “Non-dimensional lattice boltzmann simulations on pore scale double diffusive natural convection in an enclosure filled with random porous media”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 134, No. 1, pp. 521–538.
- Nozad, S., Carbonell, R.G. and Whitaker, S., 1985. “Heat conduction in multiphase systems. i: theory and experiments for two-phase systems”. *Chemical Engineering Sciences*, Vol. 40, No. 1, pp. 843–855.
- Padilla, E., Lourenco, M. and Neto, A.S., 2013. “Natural convection inside cubical cavities: numerical solutions with two boundary conditions”. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 35, No. 1, pp. 275–283.
- Pedras, M.H.J., Lemos, M.J.S. and Vafai, K., 1998. “Results for macroscopic turbulence modeling for porous media”. *7th Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences*, Vol. 2, No. 1, pp. 1272–1277.
- Peszynska, M., Trykozko, A. and Sobieski, W., 2010. “Forchheimer law in computational and experimental studies of flows through porous media at porescale and mesoscale”. *Mathematical Sciences and Applications*, Vol. 32, No. 1, pp. 463–482.
- Robichaux, J., Balachandar, S. and Vanka, S.P., 1999. “Three-dimensional floquet instability of the wake of square cylinder”. *Physics of Fluids*, Vol. 11, No. 1, pp. 560–578.
- Sahu, A.K., Chhabra, R.P. and Eswaran, V., 2009. “Two-dimensional unsteady laminar flow of a power law fluid across a square cylinder”. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 160, No. 1, pp. 157–167.
- Santos, E.D., Petry, A.P., Rocha, L.A.O. and França, F.H.R., 2013. “Numerical study of forced convection lid-driven cavity flows using les”. *Journal of Energy and Power Engineering*, Vol. 7, No. 1, pp. 1669–1680.
- Selimefendigil, F. and Oztop, H.F., 2014. “Control of laminar pulsating flow and heat transfer in backward-facing step by using a square obstacle”. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 136, No. 081701, pp. 1–11.

-
- Seta, T., Takegoshi, E. and Okui, K., 2006. "Lattice boltzmann simulation of natural convection in porous media". *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 72, No. 1, pp. 195–200.
- Sharma, A. and Eswaran, V., 2004. "Heat and fluid flow across a square cylinder in the two-dimensional laminar flow regime". *Numerical Heat Transfer*, Vol. 45, No. 1, pp. 247–269.
- Torabi, M., Torabi, M., Eftekhari, M. and Peterson, G.P., 2019. "Fluid flow, heat transfer and entropy generation analyses of turbulent forced convection through isotropic porous media using rans models". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 132, No. 1, pp. 443–461.
- Vafai, K., 2005. *Handbook of Porous Media*. Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, 2nd edition.
- Vu, V.N., Lee, C. and Jung, T.H., 2018. "Extended boussinesq equations for waves in porous media". *Coastal Engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 85–97.
- Wang, L., Wang, L.P., Guo, Z. and Mi, J., 2015. "Volume-averaged macroscopic equation for fluid flow in moving porous media". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 82, No. 1, pp. 357–368.
- Whitaker, S., 1964. "The equations of motion in porous media". *Chemical Engineering Science*, Vol. 21, No. 1, pp. 291–300.
- White, F.M., 2011. *Fluid Mechanics*. McGraw Hill, 6th edition.
- Xu, H.J., Xing, Z.B., Wang, F.Q. and Cheng, Z.M., 2019. "Review on heat conduction, heat convection, thermal radiation and phase change heat transfer of nanofluids in porous media: Fundamentals and applications". *Chemical Engineering Science*, Vol. 195, No. 1, pp. 462–483.