

Modelagem fuzzy da relação alométrica entre peso e comprimento da espécie de peixe *Plagioscion squamosissimus*

Letícia Rocha Facury Schwetter

Instituto de Ciências Agrárias, Universidade Federal de Uberlândia.

Ana Maria Amarillo Bertone

Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia.

Resumo

Como parte de um projeto para iniciar uma estudante de Engenharia Ambiental no mundo científico de pesquisadores avançados, o objetivo deste estudo é modelar a relação alométrica entre peso e comprimento da espécie *Plagioscion squamosissimus*, um peixe que habita a região do Cerrado brasileiro, comumente conhecido como corvina. Esse peixe, entre outras espécies, é o motivo do projeto de pesquisa “Peixe Vivo”, lançado por uma empresa brasileira, cujos dados são a fonte para esta pesquisa. A motivação para se utilizar a teoria dos conjuntos fuzzy deriva do fato de que, quando o objetivo é determinar a curva que define a relação alométrica do peixe, o caminho entre a medição de peso e comprimento até a simulação do modelo ser alcançada é cheio de imprecisões. Para resolver este problema e tornar a modelagem mais consistente com a realidade, utiliza-se uma importante ferramenta da teoria fuzzy: o Princípio da Extensão de Zadeh. Desta forma, uma pertinência à relação alométrica determinística é incorporada, inserindo as variações que realmente ocorrem nos dados reais e no decorrer do processo de modelagem. Como ferramenta computacional, utiliza-se o software livre GeoGebra, que fornece uma maneira simples de desenvolver o modelo e, simultaneamente, sua interpretação gráfica.

Palavras-chave: Relação alométrica peso-comprimento; Teoria Fuzzy; Princípio de Extensão de Zadeh; GeoGebra.

1. Introdução

Este estudo teve início em um programa de iniciação científica promovido pela FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) com o objetivo de construir um modelo matemático que interpretasse os aspectos qualitativos e quantitativos de espécies de peixes do Cerrado. A modelagem incluiria desde a coleta de dados até a proposta computacional. Como resultado desta pesquisa, houve a participação em vários eventos científicos locais, sendo apresentados os seguintes trabalhos: “Uma abordagem analítica para a construção no GeoGebra da Extensão de Zadeh de funções contínuas não monotônicas” na XVII Semana da Matemática (2017); “Modelagem fuzzy da relação alométrica de peso e comprimento da espécie *Plagioscion squamosissimus* - Corvina do Cerrado” na VII Mostra de Iniciação Científica da FAMAT (2018) e “Modelagem de peso-idade baseada em parâmetros alométricos aplicada a dados da raça de gado zebuína” na XVIII Semana da Matemática (2018). Além disso, houve a publicação em uma revista internacional qualificada como A2 pela CAPES na área interdisciplinar, intitulada “*International Journal for Innovation Education and Research*”.

O Cerrado sofre continuamente a ação antrópica sob a forma de exploração dos recursos naturais, devastação de florestas, poluição, fragmentação, dentre outros. A ictiofauna é igualmente afetada de várias maneiras, como, por exemplo, através da degradação da qualidade ou diminuição de quantidade de água, causados por elevadas cargas de material em suspensão e o assoreamento dos corpos hídricos.

A variedade de formas e tamanhos tem um papel fundamental na habilidade dos organismos conseguirem habitar locais extremamente diferentes. Provavelmente, o tamanho é a característica de maior importância de um organismo, e basicamente determina seu estilo de vida (BARTHOLOMEW, 1981).

De acordo com Nikolskii (1969), o crescimento é o aspecto quantitativo do desenvolvimento, e o conhecimento de suas características constitui importante informação sobre a dinâmica de uma população de peixes, pois o crescimento influi indiretamente na época de maturação gonadal, na reprodução, além de refletir, ainda, no efeito da predação.

A alometria é a parte da Biologia que estuda as relações de escala para parâmetros morfológicos, fisiológicos ou ecológicos. Conforme coloca Nomura (1962), a relação peso-comprimento é uma maneira fácil e rápida de descrever o crescimento, sem levar em conta a

idade do peixe. A mesma tem sido usada para converter comprimento em peso, conhecendo-se o comprimento, ou vice e versa.

Segundo Bassanezi (2002), a modelagem é uma estratégia de ensino e aprendizagem capaz de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos com a intenção de resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Este estudo pretende modelar a relação alométrica entre peso e comprimento da espécie de peixe *Plagioscion squamosissimus*, comumente conhecida como corvina.

Este trabalho visa, também, a expansão e criação de medidas mais efetivas para a conservação da ictiofauna nas bacias hidrográficas onde estão instaladas usinas hidrelétricas da empresa brasileira CEMIG – Companhia Energética de Minas Gerais, favorecendo as comunidades que utilizam os recursos hídricos como fator de desenvolvimento. Para esta pesquisa, um conjunto de dados coletados pelo projeto Peixe Vivo, lançado pela empresa CEMIG, em 2007, foi gentilmente cedido para a modelagem desta proposta.

Em uma inicial, mas minuciosa, pesquisa bibliográfica, foi observado que o estudo de como são adquiridas as formas características dos peixes que habitam a região do Cerrado não tem sido explorado na literatura, nem mesmo em termos de preservação, exploração econômica ou como meio de lazer esportivo.

Destaca-se que, no banco de dados mundial sobre espécies de peixes *FishBase* (Froese & Pauly, 2019), tentou-se encontrar valores já registrados para a espécie em estudo. A Figura 1 mostra o que se sabe sobre a corvina. Como se pode observar, os registros sobre comprimento são incompletos e não há muitas informações de estudos morfométricos desta espécie.

O exposto justifica e também objetiva este trabalho, como um ponto de partida para estudos interdisciplinares das espécies que habitam os rios da região de Minas Gerais. É importante ressaltar que a espécie *Plagioscion squamosissimus* possui importância econômica e ambiental para a região. Ela é uma espécie natural da bacia Amazônica, tendo sido inserida no rio Paranaíba para incentivar a pesca profissional, além de ser uma espécie que se alimenta de outros peixes e de camarões. Os peixes com hábitos alimentares carnívoros aumentam a estabilidade do ecossistema aquático, já que atuam no ajuste da abundância de espécies de presas e sua presença denota uma relativa estabilidade do ambiente (POPOVA, 1978).

Plagioscion squamosissimus (Heckel, 1840)
South American silver croaker

Carregue seu(sua) [Fotos e vídeos](#)
[Pictures](#) | [Imagem do Google](#)



Plagioscion squamosissimus
Picture by Casatti, L.

Adicionar sua observação em [Fish Watcher](#)
[Native range](#) | [All suitable habitat](#)



This map was computer-generated and has not yet been reviewed.
Plagioscion squamosissimus AquaMaps Data sources: GBIF OBIS

Classificação / Names

[Nomes comuns](#) | [Sinônimos](#) | [Catalog of Fishes \(gen., sp.\)](#) | [ITIS](#) | [CoL](#) | [WoRMS](#) | [Cloffa](#)

Actinopterygii (peixes com raios nas barbatanas) > **Perciformes** (Perch-likes) > **Sciaenidae** (Drums or croakers)
Etymology: *Plagioscion*: Greek, plagios = oblique + Greek, skiaina, skion = barbel, red mullet (Ref. 45335).

Environment: milieu / climate zone / depth range / distribution range

[Ecologia](#)

; Água doce bentopelágico; potamódromo (Ref. 51243). Tropical; 22°C - 27°C (Ref. 12468)

Distribuição

[Países](#) | [Áreas da FAO](#) | [Ecossistemas](#) | [Ocorrências](#) | [Point map](#) | [Introduções](#) | [Faunafri](#)

South America: Amazon, Orinoco, Paraná, Paraguay, and São Francisco River basins and rivers fo Guianas.

Comprimento de primeira maturação / Tamanho / Peso / Idade

Maturity: L_m 20.7 range ? - ? cm

Max length : 80.0 cm TL macho/indeterminado; (Ref. 36888); peso máx. publicado: 4.5 kg (Ref. 40637)

Figura 1: O registro no banco de dados *FishBase* sobre o *Plagioscion squamosissimus*. (Fonte: www.fishbase.org)

A motivação de se utilizar a teoria dos conjuntos fuzzy vem do fato de que, quando objetiva-se determinar a curva que define a relação alométrica do peixe, o caminho entre a medida coletada de peso - comprimento até se alcançar a simulação do modelo está repleto de imprecisões. Para tentar solucionar este problema e tornar a modelagem mais condizente com a realidade, utiliza-se uma ferramenta importante da teoria fuzzy: o Princípio de Extensão de Zadeh. Dessa forma, se incorpora um grau de pertinência à relação alométrica determinística, inserindo, assim, as variações que de fato ocorrem nos dados reais e no decorrer do processo da modelagem.

Para as simulações da modelagem fuzzy, utilizou-se o software GeoGebra, cuja geometria dinâmica resolve, de forma simples e elegante, a obtenção da curva da relação alométrica determinística, através das suas ferramentas estatísticas, em uma primeira instância. A seguir, com a codificação das curvas paramétricas das funções de pertinência dependendo do comprimento, se constrói a superfície fuzzy da relação alométrica da corvina.

2. Teoria Matemática

2.1 Teoria Fuzzy

A teoria dos conjuntos fuzzy, formalizada por Zadeh (1965), tem sido amplamente desenvolvida, influenciando muitos campos de aplicação. Uma das ferramentas mais importantes desta teoria é o princípio de extensão de Zadeh, que permite definir novos conjuntos fuzzy a partir de um conjunto fuzzy e uma função dados. Um conjunto fuzzy é o gráfico de uma função μ_A , chamada de função de pertinência do conjunto fuzzy A (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2005). Seja f função real contínua, com $U \subset \mathbb{R}$ seu domínio e A um conjunto fuzzy definido em U , pode-se definir um novo conjunto fuzzy através da função f e o conjunto fuzzy A , denotado por $\hat{f}(A)$, cujo suporte é o conjunto imagem $f(U)$ e a função de pertinência é definida como

$$\mu_{\hat{f}(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in f(U), \text{ e } 0 \text{ caso contrário.} \quad (1)$$

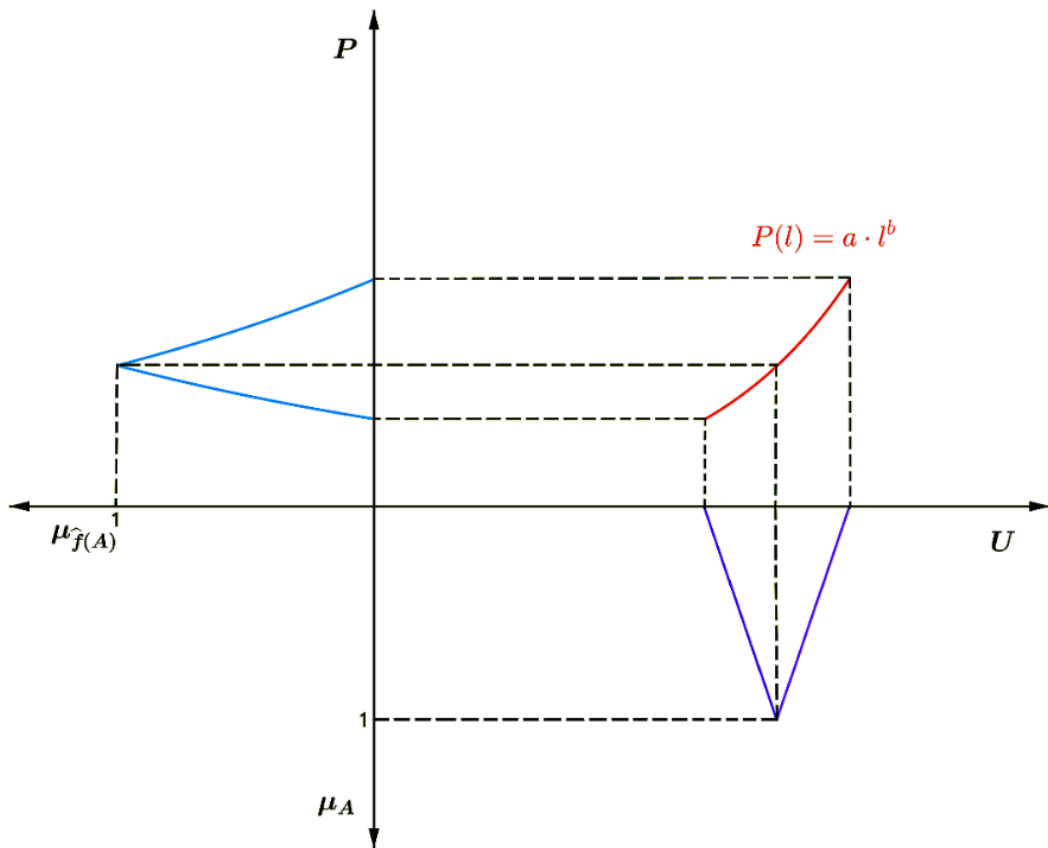


Figura 2. A função de pertinência da extensão de Zadeh, $\mu_{\hat{f}(A)}$, do conjunto fuzzy A . (Fonte: Autoras, 2018)

Através da definição (1), pode-se construir também uma função \hat{f} do conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, dos conjuntos fuzzy com suporte em \mathbb{R} e imagem em \mathbb{R} que faz corresponder a A o conjunto $\hat{f}(A)$, conhecida como a função extensão de Zadeh de f . Em geral, construir a função extensão \hat{f} é uma tarefa complexa, exceto quando f é monótona, como é o caso deste estudo, pois a partir da definição (1), tem-se

$$\mu_{\hat{f}(A)}(y) = \mu_A(f^{-1}(y)). \quad (2)$$

2.2 Relação Alométrica Peso-Comprimento

Matematicamente, o chamado princípio da alometria (BASSANEZI, 2002) é representado pela seguinte equação:

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = b \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}, \quad (3)$$

sendo $x(t)$ e $y(t)$ as medidas dos órgãos ou partes distintas de um mesmo indivíduo num determinado instante t , valores positivos diferentes de zero. Além disso, b é a taxa de proporcionalidade do crescimento relativo (coeficiente de alometria). Ao integrar ambos os membros da Equação (3), tem-se

$$\int \frac{1}{x} dx = b \int \frac{1}{y} dy, \text{ que equivale a } \ln(x) = b \ln(y) + \ln(a), \quad (4)$$

sendo $\ln(a)$ uma constante e $a > 0$. Portanto, de (4), tem-se que

$$\ln(x) = \ln(ay^b),$$

ou equivalente à equação

$$x = ay^b.$$

Utilizando esta conclusão com o peso P e o comprimento l do animal, obtêm-se a relação a seguir:

$$P(l) = al^b, \quad (5)$$

a qual representa a relação alométrica peso-comprimento.

3. Metodologia

Para esta pesquisa, foram utilizados 99 dados de peso e comprimento da espécie *Plagioscion squamosissimus*, conhecida como corvina. Estes dados foram coletados pela equipe do projeto Peixe Vivo, da CEMIG – Companhia Energética de Minas Gerais, que tem como objetivo efetuar medidas morfométricas de peixes que habitam usinas hidrelétricas da região do cerrado brasileiro. Neste estudo, utilizou-se informações morfométricas definidas em laboratório após tratamento com formol, e ressalta-se que tais peixes foram coletados no Rio Araguari e no Rio Paranaíba, localizados no estado de Minas Gerais.

A partir dos dados obtidos da fonte Peixe Vivo, foi realizado um ajuste de curva no software GeoGebra através de suas ferramentas de análise bivariada. O GeoGebra é um software livre, criado pelo professor Markus Hohenwarter que, com sua matemática dinâmica, reúne geometria, álgebra, cálculo avançado e ferramentas de estatística, como a análise bivariada. Criado em 2001, foi desenvolvido com o propósito de fornecer uma ferramenta de ensino dedicada para professores de todos os níveis de ensino, sendo também um auxílio de educação computacional para alunos. Funciona em vários sistemas operacionais, incluindo a Microsoft Windows e a Apple Mac, e foi codificado usando Java e HTML5 e a licença GPL General Public.

A relação alométrica determinística do peso-comprimento da corvina, resultado da análise bivariada com o coeficiente de correlação de ajuste de 92.26%, é dada por

$$P(l) = 2.4637 \cdot 10^{-6} \cdot l^{3.28}, \quad (6)$$

em que l é o comprimento do peixe e $P(l)$ o peso em função de seu comprimento. O valor obtido $b = 3.28$ não pode ser considerado uma medida exata, pois as medidas estão sujeitas a muitos fatores bióticos e abióticos que podem interferir no seu valor. Assim, definiu-se o parâmetro b da relação alométrica por meio de um conjunto fuzzy triangular, por critério das autoras, sendo este $\hat{b} = [3.00; 3.28; 3.56]$, no qual o valor 3.28 tem pertinência máxima 1. Considerando $a = 2.4637 \cdot 10^{-6}$ da equação (5), a função de pertinência $\mu_A(b)$ é dada por

$$\mu_A(b) = 0, \text{ se } b < 3.00,$$

$$\mu_A(b) = \frac{b}{0.28} - \frac{3}{0.28}, \text{ se } 3.00 \leq b \leq 3.28, \quad (7)$$

$$\mu_A(b) = -\frac{b}{0.28} + \frac{3.56}{0.28}, \text{ se } 3.28 \leq b \leq 3.56,$$

$$\mu_A(b) = 0, \text{ se } b > 3.56.$$

Calculando a seguir a inversa da função paramétrica $f_l(b) = a \cdot l^b$, em que l é um valor fixado no intervalo $[l_i, l_f]$, $l_i > 0$, em que l_i e l_f representam o comprimento inicial e final da corvina, respectivamente, obtêm-se a expressão

$$f_l^{-1}(b) = \frac{\ln(b) - \ln(a)}{\ln(l)}. \quad (8)$$

Assim, utilizando a Equação (2), é possível codificar no GeoGebra a expressão da função de pertinência da extensão de Zadeh de A, dada por

$$\mu_{\hat{f}(A)}(b) = 0, \text{ se } b < 3.00,$$

$$\mu_{\hat{f}(A)}(b) = \frac{1}{0.28} \cdot \left(\frac{\ln(b) - \ln(a)}{\ln(l)} \right) - \frac{3}{0.28}, \text{ se } 3.00 \leq b \leq 3.28, \quad (9)$$

$$\mu_{\hat{f}(A)}(b) = -\frac{1}{0.28} \cdot \left(\frac{\ln(b) - \ln(a)}{\ln(l)} \right) + \frac{3.56}{0.28}, \text{ se } 3.28 \leq b \leq 3.56,$$

$$\mu_{\hat{f}(A)}(b) = 0, \text{ se } b > 3.56.$$

A simulação da construção do modelo fuzzy para a relação alométrica (2) é realizada considerando o valor de l como um controle deslizante, ferramenta pré-construída do software GeoGebra, que facilita a construção da dinâmica da Figura 4 da seção de resultados. Isso porque o uso do controle deslizante possibilita causar variações em objetos, seja manualmente ou automaticamente, podendo também assumir a função de uma variável. Tal variável pode estar associada a um objeto matemático, o que permite a transição contínua entre estados intermediários do objeto estudado. Além disso, a possibilidade de variar objetos garante o dinamismo nas representações e a manipulação de conceitos antes abstratos, como coloca Friske et al. (2016).

4. Resultados

O resultado do ajuste de curvas dos dados do Peixe Vivo é mostrado na Figura 3. A representação da extensão de Zadeh do conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$, pela função $f_l(b)$ para o valor fixo de l , é mostrada na Figura 2.

A partir da obtenção da relação alométrica determinística, são utilizadas as fórmulas (7) e (8) para construir as funções de pertinência correspondentes com o comando “curva paramétrica” no GeoGebra, como mostram a seguintes codificações:

$$j(b) = (-(\ln(b) / \ln(l) - \ln(2.4637 * 10^{\{-6\}}) / \ln(l))) / 0.28 + 3.56 / 0.28;$$

$$u = 2.4637 * 10^{\{-6\}} l^{3.28};$$

$$v = 2.4637 * 10^{\{-6\}} l^{3.56};$$

$$\text{Curva}(l, t, j(t), t, u, v),$$

sendo t a variável de parametrização da curva.

A variável l é considerada como um controle deslizante para obter a dinâmica mostrada na Figura 5: cada curva paramétrica de cor azul na Figura 5 representa a extensão de Zadeh do conjunto fuzzy \hat{b} correspondente ao valor l . Assim, o eixo z representa as pertinências dos pontos do plano xoy . O eixo x representa o comprimento l e o eixo y corresponde ao peso $P(l)$.

O ambiente do GeoGebra é mostrado na Figura 4. Os dados do Peixe Vivo são mostrados na planilha à direita. Os elementos da relação alométrica fuzzy são mostrados na janela de álgebra do GeoGebra, e a construção da superfície fuzzy representando as associações

da relação alométrica ao longo do comprimento é mostrada na janela de visualização do GeoGebra.

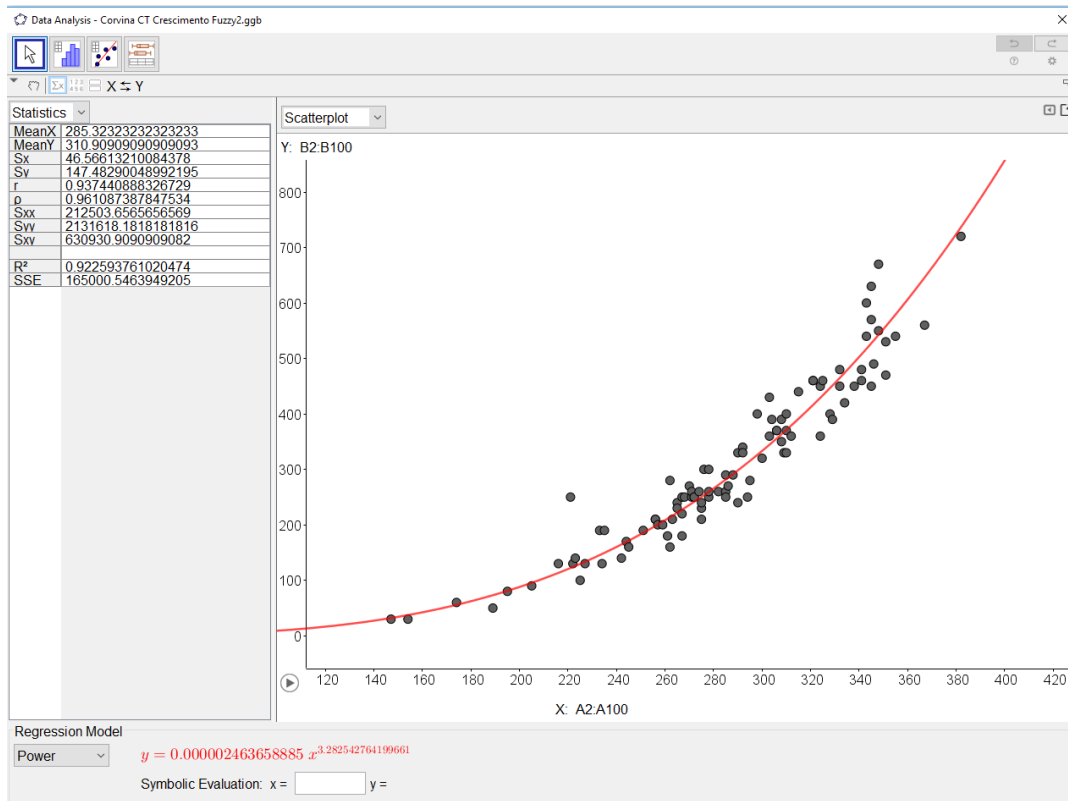


Figura 3: Análise bivariada dos dados do Peixe Vivo para obtenção da Equação (2) no GeoGebra. (Fonte: Autoras, 2018).

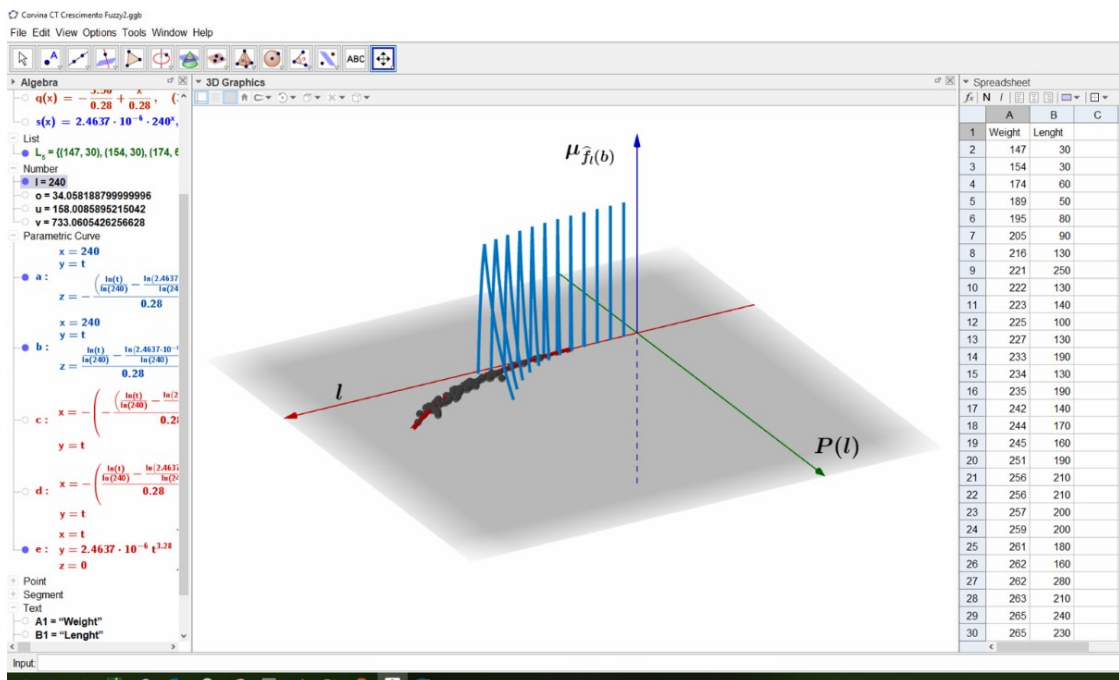


Figura 4: O ambiente das simulações no GeoGebra. (Fonte: Autoras, 2018).

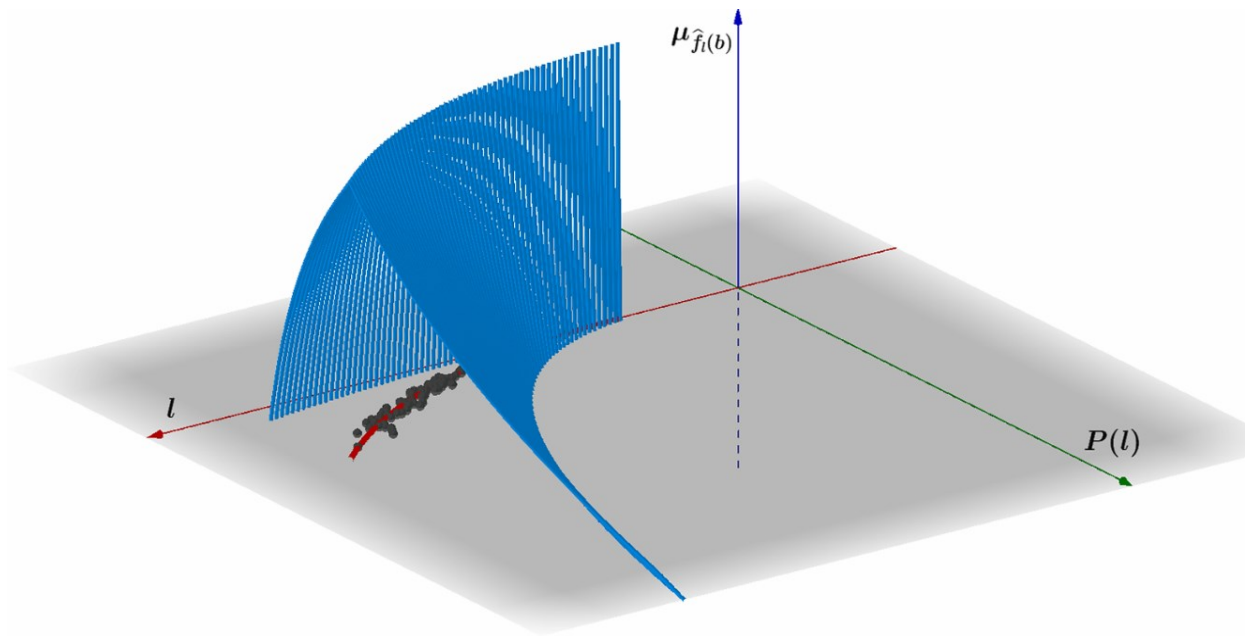


Figura 5: A superfície alométrica fuzzy obtida após o refinamento da escala do controle deslizante. (Fonte: Autoras, 2018).

A curva determinística é mostrada no plano lP juntamente com os dados. A superfície azul representa as associações do modelo alométrico fuzzy obtido em cada valor de l pelo princípio de extensão Zadeh. Além disso, foi criada uma simulação dinâmica da superfície alométrica.

5. Conclusão

A modelagem fuzzy da relação alométrica de peso e comprimento da espécie de peixe *Plagioscion squamosissimus* (corvina do Cerrado) foi feita através de dados cedidos pelo projeto da CEMIG, Peixe Vivo, e da utilização do software GeoGebra como ferramenta computacional, utilizando o parâmetro b da relação alométrica determinística como um conjunto fuzzy. Ressalta-se que há a possibilidade de realizar este estudo, também, definindo o parâmetro a como um conjunto fuzzy. Esta determinação foi feita a critério das autoras.

Além disso, a modelagem estima, com graus de pertinência, os valores correspondentes à relação alométrica de peso-comprimento do modelo determinístico, obtido por um ajuste de curvas no mesmo software. Isso permite inserir as variações que de fato ocorrem nos dados reais e no decorrer do processo de modelagem, imprimindo maior confiabilidade à solução obtida.

6. Agradecimentos

A pesquisa contou com o apoio da Universidade Federal de Uberlândia e da FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, por meio de recursos financeiros e incentivo à pesquisa.

Referências Bibliográficas

- BARTHOLOMEW, G. A., A matter of size: An examination of endothermy in insects and terrestrial vertebrates, *Insect thermoregulation*, edited by B. Heinrich, New York, 1981, pp. 45–78.
- BASSANEZI, R. C., **Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia**, Ed. Contexto, São Paulo, 2002.
- GeoGebra. Version 5.0. [S.l.]: Markus Hohenwarter, 2018.
- FRISKE, Andréia Luisa et al. **Minicurso de GeoGebra**. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2016. 65 p.
- FROESE, R., PAULY D. Editors. **FishBase**. World Wide Web electronic publication. Disponível em: <http://www.fishbase.org>. Acesso em: 5 de junho de 2019.
- JAFELICE, R. S. M, BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C., **Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações**, SBMAC Notas em Matemática Aplicada, 2005.
- NIKOLSKII, G. V. Theory of fish population dynamics. **Endinburgh: Oliver e Boyd**. p. 323. 1969.
- NOMURA, H. **Length-weight tables of some fish species from southern Brazil**. Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1962, 2:1-84.
- POPOVA, O.A. The role of predaceous fish in ecosystems. **In Ecology of freshwater fish production** (S.D. Gerking, ed.). Blackwell Scientific, Oxford, 1978, p. 215-249.
- ZADEH, L. A., Fuzzy sets, **In formation and Control**, 1965, pp. 338-353.