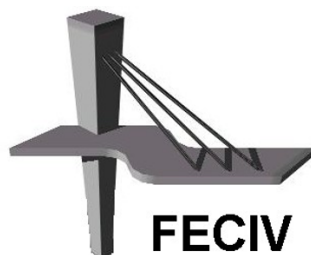


Dissertação DE MESTRADO

**DEFORMABILIDADE AO MOMENTO FLETOR
DE LIGAÇÕES VIGA-PILAR MONOLÍTICAS E
PRÉ-MOLDADAS COM ARMADURA DE
CONTINUIDADE EM EDIFÍCIOS DE CONCRETO**

ALEXANDRE GONTIJO TSUTAKE

UBERLÂNDIA, 27 DE MAIO DE 2019



FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



Alexandre Gontijo Tsutake

**DEFORMABILIDADE AO MOMENTO FLETOR DE
LIGAÇÕES VIGA-PILAR MONOLÍTICAS E PRÉ-
MOLDADAS COM ARMADURA DE CONTINUIDADE EM
EDIFÍCIOS DE CONCRETO**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Civil da
Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos
para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Civil**.

Orientador: Prof. Dr. Gerson Moacyr Sisniegas Alva

Uberlândia, 27 de maio de 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

T882d Tsutake, Alexandre Gontijo, 1991-
2019 Deformabilidade ao momento fletor de ligações viga-pilar
monolíticas e pré-moldadas com armadura de continuidade em edifícios
de concreto [recurso eletrônico] / Alexandre Gontijo Tsutake. - 2019.

Orientador: Gerson Moacyr Sisniegas Alva.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2019.46>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Engenharia civil. 2. Análise estrutural (Engenharia). 3. Estruturas
de concreto. 4. Vigas. 5. Concreto armado - Estruturas. 6. Construção.
I. Alva, Gerson Moacyr Sisniegas, 1975-, (Orient.). II. Universidade
Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Civil. III. Título.

CDU: 624



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

ATA DE DEFESA

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Civil				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 240, PPGE				
Data:	27 de maio de 2019	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	11:00
Matrícula do Discente:	11712ECV001				
Nome do Discente:	Alexandre Gontijo Tsutake				
Título do Trabalho:	Deformabilidade ao momento fletor de ligações viga-pilar monolíticas e pré-moldadas com armadura de continuidade em edifícios de concreto				
Área de concentração:	Estruturas e Construção Civil				
Linha de pesquisa:	Estruturas				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Interação alvenaria-estrutura e deformabilidade de ligações na análise estrutural de edifícios				

Reuniu-se na Sala de Projeções Prof. Celso Franco de Gouvêa, bloco 1Y, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, assim composta: Professores Doutores: Maria Cristina Vidigal de Lima – FECIV/UFU, Marcela Novischi Kataoka – EESC/USP e Gerson Moacyr Sisniegas Alva - FECIV/UFU orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Gerson Moacyr Sisniegas Alva, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Gerson Moacyr Sisniegas Alva, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/05/2019, às 13:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maria Cristina Vidigal de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 28/05/2019, às 10:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcela Novischi Kataoka, Usuário Externo**, em 28/05/2019, às 10:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0,
informando o código verificador **1278171** e o código CRC **410413B3**.

AGRADECIMENTOS

Aos meu pais, Pedro e Maria Eugênia, pelo apoio, compreensão e incentivo.

Ao professor Gerson, pela sua paciência, dedicação, amizade e pela indispensável orientação no decorrer deste trabalho.

Aos demais professores da FECIV pelos valiosos ensinamentos que me foram transmitidos durante o curso de pós-graduação.

À minha irmã, Daniela, pelo apoio e amizade.

Aos meus amigos e também aos meus colegas de pós-graduação pelo apoio e os momentos de descontração.

Aos funcionários da FECIV pela eficiência nos serviços prestados.

À CAPES, pelo apoio financeiro concedido.

A todos que não foram mencionados, mas contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

TSUTAKE, A. G. **Deformabilidade ao momento fletor de ligações viga-pilar monolíticas e pré-moldadas com armadura de continuidade em edifícios de concreto**. 2019. 143 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, 2019.

RESUMO

Por simplificação de cálculo, no projeto de estruturas reticuladas de concreto, ainda é comum considerar as ligações viga-pilar monolíticas como perfeitamente rígidas e para as ligações viga-pilar pré-moldadas é comum a escolha de vínculos perfeitamente articulados. Com o avanço da tecnologia e com a facilidade e precisão que os programas de cálculo estrutural vêm oferecendo, a utilização de modelos analíticos que representam o comportamento da estrutura de forma mais fiel possível tem se tornado uma necessidade para os projetistas. A consideração da deformabilidade à rotação por momento fletor pode ser feita por modelos analíticos. Entretanto, para que se possa confiar nos resultados apresentados por qualquer modelo analítico, é necessária a comprovação com resultados experimentais. Este trabalho tem como objetivo a aplicação de modelos analíticos para a consideração da deformabilidade à flexão em ligações viga-pilar monolíticas e de concreto pré-moldado. Apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre o tema com alguns modelos analíticos e alguns estudos experimentais. Foram feitas comparações entre os resultados de um modelo analítico recentemente proposto para ligações viga-pilar de extremidade monolíticas e resultados experimentais disponíveis na literatura especializada. Propõe-se neste trabalho uma extensão ao modelo estudado para que este possa ser utilizado em ligações viga-pilares internos. O novo modelo analítico foi verificado com resultados experimentais de ligações pré-moldadas. Com o auxílio do programa computacional ANSYS, foram realizadas simulações numéricas não-lineares com a aplicação dos modelos analíticos citados obtendo-se inclusive resultados do tipo de força-deslocamento. Os resultados indicam um bom desempenho dos modelos analíticos abordados e também da metodologia empregada.

Palavras-chave: Deformabilidade de ligações, Ligações viga-pilar, Ligações semirrígidas, Análise estrutural.

TSUTAKE, A. G. **Bending deformability of monolithic and precast beam-to-column connections with continuity reinforcement in concrete buildings**. 2019. 143 p. MSc Dissertation, College of Civil Engineering, Federal University of Uberlandia, 2019.

ABSTRACT

For simplified calculation, in the design of reticulated concrete structures, it is still common to consider the monolithic beam-to-column connections as perfectly rigid and for precast beam-to-column connections the bond is usually chosen as pinned. With the advancement of technology and with the ease and precision that structural design programs have been offering, the use of analytical models that represent the behavior of the structure as accurately as possible has become a necessity for designers. The consideration of the rotation deformability by bending moment can be done by analytical models. However, to be able to rely on the results presented by any analytical model, it is necessary its validation with experimental result. This work aims to apply analytical models for the consideration of flexural deformability in monolithic and precast concrete beam-to-column connections. A literature review on the subject with some analytical models and some experimental studies is presented. Comparisons are made between a recently proposed analytical model for monolithic beam-to-column connections and experimental results available in the specialized literature. An extension to the studied model is proposed in this paper so that it can be used in internal columns. The new analytical model is verified with experimental results of precast connections. With the aid of the ANSYS software, non-linear numerical simulations were performed applying the analytical models cited, obtaining also results of force-displacement kind. The results indicate a good performance of the models covered, as well as the methodology used.

Keywords: Connections deformability, Beam-to-column connections, Semirrigid connections, Structural analysis.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	Generalidades.....	1
1.2	Objetivos.....	6
1.3	Justificativa	6
1.4	Metodologia	7
1.5	Estrutura do trabalho.....	7
2	Revisão bibliográfica	9
2.1	Deformabilidade ao momento fletor.....	9
2.1.1	Considerações gerais	9
2.1.2	Classificação das ligações	12
2.2	Modelos analíticos de ligações semirrígidas.....	14
2.2.1	ABNT NBR 9062:2017	15
2.2.2	Ferreira, El Debs e Elliott (2003)	17
2.2.3	Alva e El Debs (2013)	21
2.2.4	El Debs, Miotto e El Debs (2010)	27
2.3	Estudos experimentais de ligações viga-pilar	34
2.3.1	Alva (2004).....	35
2.3.2	Lee, Wight e Hanson (1977).....	42
2.3.3	Kataoka (2007)	47
2.3.4	Lacerda (2016).....	55
2.3.5	Miotto (2002).....	68
3	Não-linearidade física via relações momento-curvatura	77
3.1	Considerações gerais.....	77
3.2	Diagrama momento-normal-curvatura apresentado por Alva (2017).....	79
3.2.1	Caso 1: $\epsilon_{cc} \leq \epsilon_{c2}$ e $x \leq h$	85
3.2.2	Caso 2: $\epsilon_{cc} > \epsilon_{c2}$ e $x \leq h$	86
3.2.3	Caso 3: $\epsilon_{cc} \leq \epsilon_{c2}$ e $x > h$	87
3.2.4	Caso 4: $\epsilon_{cc} > \epsilon_{c2}$ e $x > h$	87

3.2.5	Tension Stiffening	88
3.2.6	Algoritmo de geração dos pontos dos diagramas momento-curvatura	89
3.3	Relação momento-curvatura com o modelo de Branson (1965)	90
4	Simulações numéricas com o modelo de alva e el debs (2013).....	92
4.1	Introdução	92
4.2	Metodologia empregada nas comparações	92
4.3	Ligações monolíticas de Alva (2004)	96
4.3.1	Curva momento-rotação relativa entre viga e pilar	96
4.3.2	Diagramas momento-curvatura	99
4.3.3	Calibração da rigidez dos trechos rígidos.....	104
4.3.4	Modelagem numérica	105
4.3.5	Discussão dos resultados	109
4.4	Ligações monolíticas de Lee, Wight e Hanson (1977).....	109
4.4.1	Curva momento-rotação relativa entre viga e pilar	110
4.4.2	Diagramas momento-curvatura	111
4.4.3	Calibração da rigidez dos trechos rígidos.....	114
4.4.4	Modelagem numérica	115
4.4.5	Discussão dos resultados	118
5	Modelo analítico proposto para ligações viga-pilar de extremidade	120
5.1	Introdução	120
5.2	Dedução do modelo analítico proposto	120
5.2.1	Mecanismo A.....	120
5.2.2	Mecanismo B.....	124
5.2.3	Rotação total	124
5.3	Validação do modelo proposto: ligação de Miotto (2002)	125
5.3.1	Curva momento-rotação relativa entre viga e pilar	125
5.3.2	Discussão dos resultados	127
5.4	Validação do modelo proposto: ligações de Lacerda (2016).....	127
5.4.1	Curva momento-rotação relativa entre viga e pilar	127
5.4.2	Discussão dos resultados	130
5.5	Validação do modelo proposto: ligação de Kataoka (2007).....	130
5.5.1	Curva momento-rotação relativa entre viga e pilar	130

5.5.2	Diagrama momento-curvatura	134
5.5.3	Calibração da rigidez dos trechos rígidos	134
5.5.4	Modelagem numérica	135
5.5.5	Discussão dos resultados	136
6	Conclusões	137
	Referências	140

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

No projeto de estruturas de concreto é usual considerar a ligação monolítica entre viga e pilar como perfeitamente rígida e que a resistência seja governada pelos elementos a serem conectados e não pela ligação. Isto facilita o cálculo estrutural, pois quaisquer efeitos das ligações são negligenciados. Nas estruturas monolíticas, como os elementos são moldados em conjunto, geralmente não há necessidade de maiores preocupações com as ligações por parte dos projetistas.

As ligações começaram a ganhar destaque nas construções de estruturas metálicas, onde as peças são fabricadas em um ambiente industrializado e depois são transportadas e montadas no local final da obra. Assim as peças têm que ser unidas, e para isso vários modelos de ligações são utilizados. Alguns destes modelos são considerados rígidos, ou seja, que transmitiam todo o momento fletor entre as peças, e outros são considerados rotulados, que não transmitiam momento fletor entre as peças. Porém, muitas destas ligações não apresentam o comportamento perfeitamente rígido, nem perfeitamente rotulado, assim, o termo ligações semirrígidas começou a aparecer nos estudos de ligações de estruturas metálicas por volta de 1930.

As ligações semirrígidas possuem um comportamento intermediário entre as ligações rotuladas e as ligações rígidas. Estas conseguem transmitir uma parte da flexão entre os elementos. Segundo Mota (2009) as ligações semirrígidas podem ser utilizadas quando se busca melhorar o desempenho de uma viga diminuindo assim sua flecha e momento positivo.

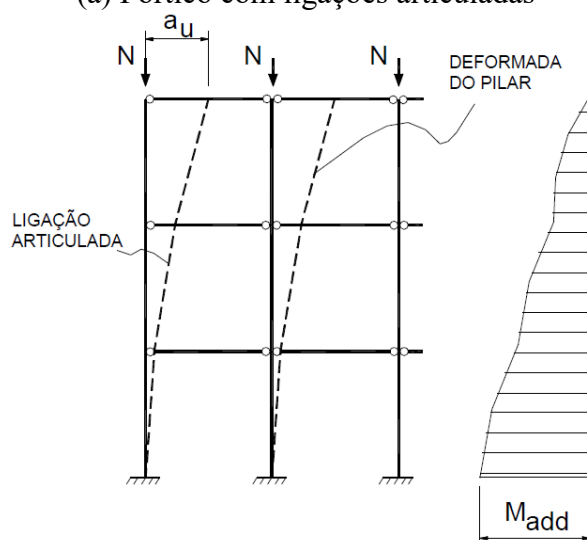
Podem ser utilizadas também para reduzir a esbeltez de um pilar, ou no caso mais comum, melhorar a estabilidade global da estrutura e reduzir os efeitos de segunda ordem, e com isso construir estruturas com um maior número de pavimentos.

O efeito da rigidez da ligação entre elementos de uma estrutura na sua estabilidade global e no cálculo dos efeitos de segunda ordem é significativo. Quando submetidas a esforços horizontais, as estruturas isostáticas sofrem maiores deslocamentos do que estruturas hiperestáticas, logo geram efeitos de segunda ordem mais elevados. O vento é uma das ações importantes a ser considerada no dimensionamento de uma estrutura de múltiplos pavimentos.

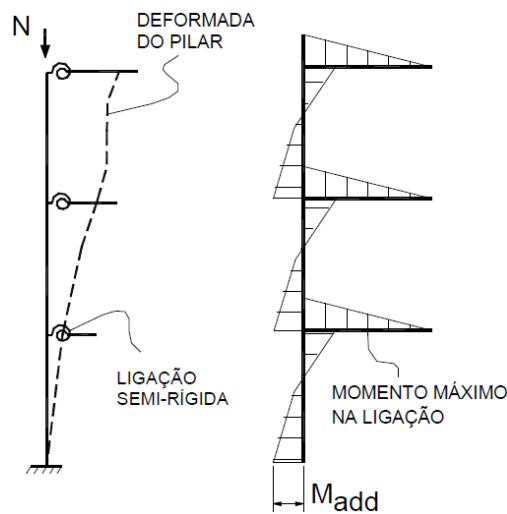
Segundo Ferreira (1999) a rigidez de uma ligação viga-pilar influi na estabilidade de pilares contínuos, como ilustrado na Figura 1. A consideração de ligações semirrígidas modifica os efeitos de segunda ordem.

Figura 1 - Influência da deformabilidade da ligação na estabilidade da estrutura

(a) Pórtico com ligações articuladas



(b) Pórtico com ligações semirrígidas



Fonte: Adaptado de Ferreira (1999)

De acordo com Elliott (2000), a influência da rigidez da ligação viga-pilar na estabilidade global de uma estrutura chega a ser de 5 a 10 vezes maior que a da rigidez dos elementos em si.

Atualmente com a incessável busca por construções mais seguras, com menor relação custo-benefício, aliados aos avanços tecnológicos que possibilitaram a utilização de programas de cálculo estrutural, a consideração dos efeitos da deformabilidade das ligações, mesmo em estruturas de concreto com ligações monolíticas, tem se tornado cada vez mais relevante.

Outro tipo de construção que se beneficia muito com os estudos da rigidez das ligações são as pré-moldadas. O concreto pré-moldado vem ganhando cada vez mais espaço no mercado. Devido ao seu elevado grau de industrialização, controle de qualidade e agilidade na montagem, os pré-moldados oferecem uma boa solução especialmente para obras com grandes vãos, com elementos modulares, ou investimentos que necessitam um retorno rápido. A pré-moldagem também facilita a criação de peças com geometrias diferenciadas, como arcos, e ainda evita gastos com cimbramento.

A maior desvantagem da utilização de pré-moldados é a necessidade de fazer ligação entre os elementos. Em estruturas de concreto moldado in loco os elementos, vigas, pilares e laje, são moldados em conjunto, criando assim uma ligação monolítica rígida, capaz de distribuir momentos fletores entre as peças. Os elementos pré-moldados, semelhante as estruturas

metálicas, são concretados em lugares diferentes de sua posição final, o que obriga projetistas a criarem soluções para a sua junção.

Segundo El Debs, Miotto e El Debs (2010), a solução mais adotada para o cálculo estrutural é considerar as ligações como sendo perfeitamente rotuladas; assim os elementos não transmitem momento fletores entre si. A vantagem dessas ligações é a simplicidade e rapidez com que são executadas. Porém, como não há redistribuição de momento, as peças ficam sujeitas a grandes tensões, tornando-se assim mais robustas, o que pode levar a uma inviabilidade econômica. Além disso os pilares trabalham como elementos em balanço, sendo responsáveis pela estabilidade global da estrutura. Consequentemente a medida que a construção cresce em altura, crescem também os momentos atuantes no pilar. Com isso esta ligação é mais adequada para construções de pequena altura.

O que pode ser feito para tornar a utilização de pré-moldados em edifícios de múltiplos pavimentos mais viável é a utilização de ligações que transmitem momentos fletores. Para isso é necessário garantir a continuidade entre os componentes, concreto e aço. No entanto, soluções que tentam criar ligações que imitam o comportamento do concreto moldado *in loco* consomem tempo e podem requerer o uso de cimbramento reduzindo assim as vantagens inerentes do concreto pré-moldado (EL DEBS, MIOTTO, EL DEBS, 2010; MARIN, 2009).

De acordo com Ferreira, El Debs e Elliott (2002), várias investigações experimentais confirmam que muitas das ligações típicas utilizadas se comportam de maneira semirrígida, melhorando o desempenho da estrutura. Porém ainda é difícil determinar o valor de sua rigidez, por ser uma região com comportamento complexo, sendo muitas vezes necessário realizar ensaios laboratoriais. Estes ensaios, além de gerar um custo financeiro, são aplicáveis somente à ligação analisada, sendo incapaz de realizar previsões quanto ao comportamento semirrígido de ligações similares. Com isso os projetistas tendem a ignorar o comportamento semirrígido, subestimando o desempenho das estruturas, principalmente para múltiplos pavimentos.

Elliott et al. (1998) acredita que, dentre todos os métodos de construção de múltiplos pavimentos, a estrutura pré-moldada é a menos compreendida. A falta de informação quanto

ao comportamento da estrutura pré-moldada, em particular sua estabilidade e rigidez, gera uma certa falta de confiança entre projetistas.

No presente trabalho são apresentados alguns modelos analíticos, encontrados na literatura especializada, para considerar a deformabilidade ao momento fletor de ligações viga-pilar de concreto monolíticas e pré-moldadas. São apresentados alguns ensaios experimentais disponíveis na literatura especializada de ligações viga-pilar monolíticas e pré-moldadas. Utilizando resultados de ensaios experimentais de ligações viga-pilar de extremidade monolíticas é feita a verificação do modelo analítico proposto por Alva e El Debs (2013) por meio de simulações numéricas. Propõe-se neste trabalho uma extensão do modelo de Alva e El Debs (2013) para que este possa ser utilizado em ligações viga-pilar interno. Por fim, o modelo proposto é verificado com os resultados experimentais de ligações viga-pilar pré-moldadas encontradas na literatura especializada.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é trazer contribuições sobre consideração da deformabilidade à flexão das ligações viga-pilar (monolíticas e com elementos pré-moldados) por meio de modelos analíticos, visando a representação mais fiel na análise estrutural do comportamento de edifícios de concreto armado em estrutura reticulada de múltiplos andares.

Entre os objetivos específicos estão:

- a) Avaliar a precisão do modelo analítico proposto por Alva e El Debs (2013) para a consideração da deformabilidade ao momento fletor em ligações viga-pilar de extremidade monolíticas, por meio de comparações com resultados experimentais adicionais aos apresentados em Alva e El Debs (2013);
- b) Propor uma extensão do modelo de Alva e El Debs (2013) para englobar as ligações viga-pilar interno, incluindo as ligações viga-pilar pré-moldadas com armadura de continuidade negativa;
- c) Avaliar a precisão do modelo proposto com resultados experimentais encontrados na literatura especializada;
- d) Demonstrar a realização de análises não-lineares em estruturas reticuladas de edifícios de concreto armado que considerem a deformabilidade ao momento fletor de ligações viga-pilar via emprego de modelos analíticos e que considerem a não-linearidade física dos elementos estruturais via emprego de relações momento-curvatura.

1.3 JUSTIFICATIVA

Com o avanço da tecnologia e com a facilidade e precisão que os programas de cálculo estrutural vêm oferecendo, a utilização de modelos analíticos que representam o comportamento da estrutura de forma mais fiel possível tem se tornado uma necessidade para os projetistas. Existem atualmente na bibliografia especializada modelos analíticos de cálculo para ligações de concreto monolítico e para algumas tipologias de ligações de estruturas pré-moldadas. Estes modelos são simples, geralmente utilizam apenas as características físicas e geométricas da ligação, e podem ser facilmente implementados em programas de cálculo estrutural. Entretanto, para que se possa confiar nos resultados

apresentados por esses modelos, é necessária a sua validação com resultados experimentais. Além disso, há necessidade que projetistas estruturais conheçam e apliquem tais modelos nos programas de cálculo estrutural, de tal forma que possam avaliar os efeitos da consideração da deformabilidade das ligações e, no caso das estruturas de concreto pré-moldado, possam tomar decisões sobre o tipo de ligação a ser executada (articulada ou semirrígida), obtendo com maior precisão os esforços solicitantes nos elementos estruturais.

1.4 METODOLOGIA

Para atingir os objetivos desse trabalho foi estabelecida a seguinte metodologia:

- a) Revisão bibliográfica sobre o tema, com foco nos efeitos dos mecanismos de deformação responsáveis pela deformabilidade ao momento fletor sobre o comportamento da ligação, nos modelos analíticos para obtenção das curvas momento-rotação relativa viga-pilar e nos trabalhos experimentais em ligações viga-pilar, tanto para ligações monolíticas como para ligações pré-moldadas;
- b) Estudo do modelo analítico de Alva e El Debs (2013) e dedução do modelo analítico proposto a ser estendido para ligações viga-pilar interno (tanto monolíticas quanto pré-moldadas)
- c) Escolha das ligações monolíticas e pré-moldadas da bibliografia especializada, com extração dos resultados experimentais de interesse;
- d) Simulações numéricas das ligações viga-pilar escolhidas da bibliografia especializada, com comparações entre os resultados teóricos e os experimentais.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

No **Capítulo 1** é feita uma breve introdução ao tema da pesquisa e também são apresentados os objetivos e a justificativa e metodologia do presente trabalho.

No **Capítulo 2** é apresentada a revisão bibliográfica acerca da deformabilidade ao momento fletor de ligações viga-pilar. Esta conta com a fundamentação teórica, os modelos analíticos e por último os trabalhos experimentais pertinentes, encontrados na literatura.

O **Capítulo 3** é dedicado à consideração da não-linearidade física via relações momento-curvatura, sendo estas utilizadas na formulação dos modelos analíticos que consideram a deformabilidade ao momento fletor.

No **Capítulo 4** é demonstrada a metodologia utilizada para verificar os modelos analíticos estudados, e é feita a verificação do modelo analítico de Alva e El Debs (2013) com resultados experimentais retirados da literatura específica.

No **Capítulo 5** é proposto uma extensão do modelo analítico de Alva e El Debs (2013) e são apresentadas as verificações do modelo analítico proposto com resultados experimentais retirados da literatura específica.

No **Capítulo 6** são apresentadas as considerações finais e as conclusões.

CAPÍTULO 2

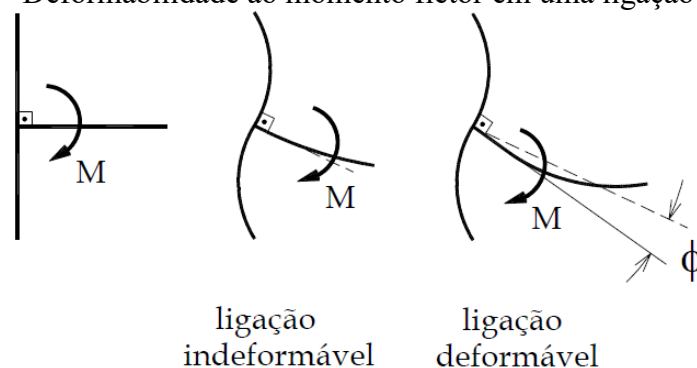
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 DEFORMABILIDADE AO MOMENTO FLETOR

2.1.1 Considerações gerais

Dá-se o nome semirrígida (à rotação por flexão) a uma ligação que permite giros relativos entre os elementos conectados e que possui um comportamento intermediário entre ligação rotulada (giro relativo livre) e uma ligação rígida (giro relativo nulo). A deformabilidade de uma ligação consiste no deslocamento relativo entre os elementos da ligação, causado por um esforço unitário atuante na direção desse deslocamento. No caso de uma ligação viga-pilar, a deformabilidade ao momento fletor da ligação está associada à rotação relativa da viga em relação à forma indeformada do nó, como mostra a Figura 2.

Figura 2 - Deformabilidade ao momento fletor em uma ligação viga-pilar



Fonte: Miotto (2002)

A deformabilidade de uma ligação é o inverso de sua rigidez. Baseado na definição da Figura 2, estes parâmetros são definidos pelas Equações (1) e (2) respectivamente.

$$D_m = \frac{\phi}{M} \quad (1)$$

$$R_m = \frac{M}{\phi} \quad (2)$$

Nas quais:

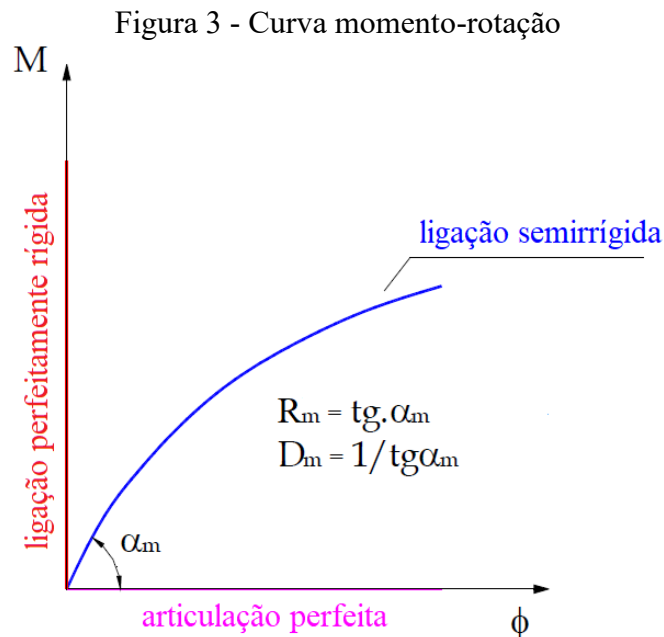
D_m é a deformabilidade ao momento fletor da ligação;

R_m é a rigidez ao momento fletor da ligação;

ϕ é a rotação da ligação;

M é o momento fletor atuante na ligação.

De acordo com Miotto (2002), a maneira mais utilizada para representar a deformabilidade de uma ligação semirrígida é através do gráfico momento-rotação. Na Figura 3 estão representados os diagramas momento-rotação de uma ligação perfeitamente rígida, perfeitamente articulada e semirrígida.

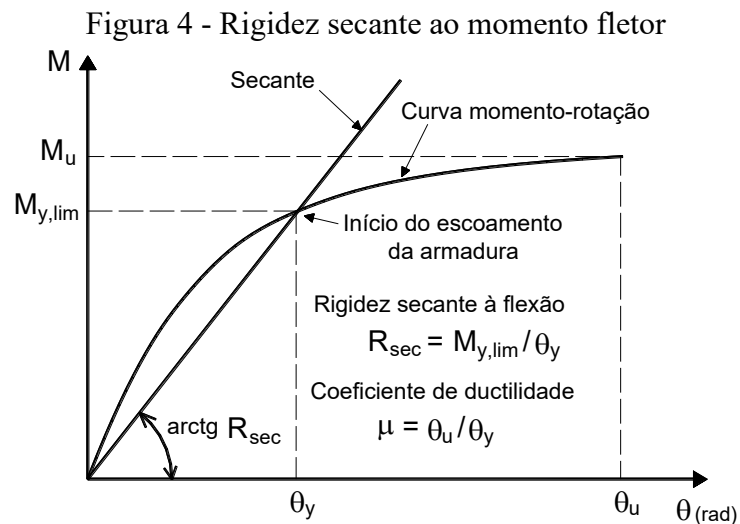


Fonte: Adaptado de Miotto (2002)

Ferreira, El Debs e Elliott (2002), visando facilitar a análise da rigidez das ligações propuseram uma simplificação para o valor de R , através de uma aproximação linear. Sendo M_{CR} o momento resistente da ligação no limite do escoamento da armadura tracionada e ϕ_c a rotação total na extremidade da viga devido ao M_{CR} , define-se a rigidez secante da ligação

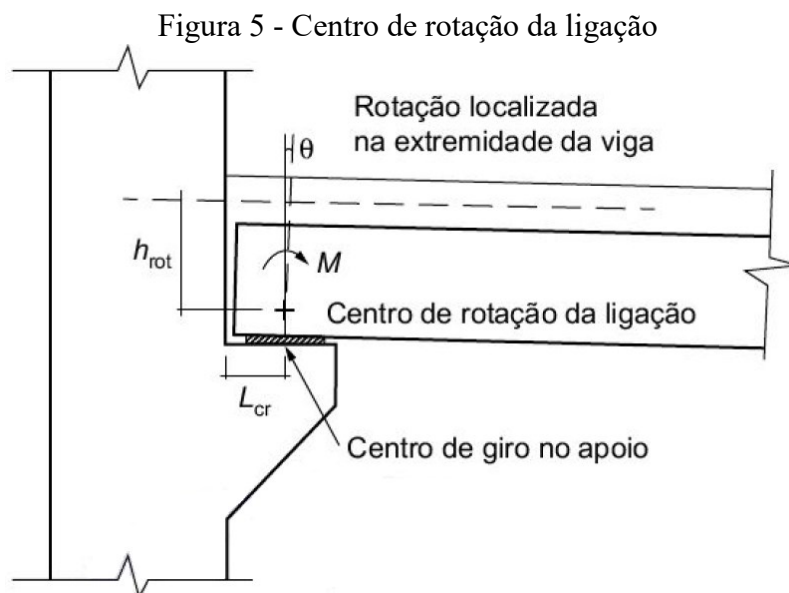
R_{sec} através da Equação (3). Esse mesmo conceito é empregado na ABNT NBR 9062:2017 para considerar simplificada o comportamento não linear das ligações, como observado na Figura 4.

$$R_{sec} = M_{CR} / \phi_c \quad (3)$$



Fonte: Adaptado da ABNT NBR 9062:2017

Segundo a ABNT NBR 9062:2017, a rotação localizada na região da ligação na extremidade da viga deve ser medida no centro de giro no apoio, conforme a Figura 5.



Fonte: ABNT NBR 9062:2017

2.1.2 Classificação das ligações

Segundo Alva, Ferreira e El Debs (2009), utilizando curvas de momento-rotação relativa viga-pilar é possível obter parâmetros para a avaliação da rigidez da ligação e, conseqüentemente, para a análise estrutural. O fator de restrição α_R utilizado pela ABNT NBR 9062:2017 (Equação (4)) e o coeficiente de engastamento parcial (M_E/M_{ENG}) sugerido por Ferreira (1999) conforme Equação (5) para força uniformemente distribuída na viga são exemplos desses parâmetros.

$$\alpha_R = \frac{1}{1 + \frac{3(EI)_{sec}}{R_{sec}L_{ef}}} \quad (4)$$

$$\frac{M_E}{M_{ENG}} = \frac{3\alpha_R}{2 + \alpha_R} \quad (5)$$

Nas quais:

R_{sec} é a rigidez secante ao momento fletor da ligação viga-pilar;

L_{ef} é o vão efetivo entre os apoios;

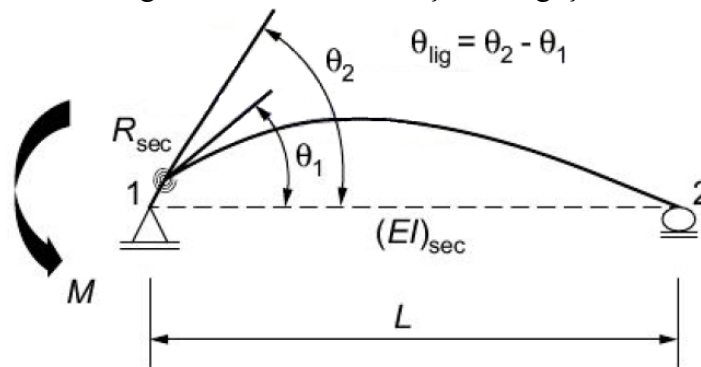
$(EI)_{sec}$ é a rigidez secante da viga;

M_E é o momento fletor mobilizado na extremidade da viga;

M_{ENG} é o momento de engastamento perfeito.

O fator de restrição é definido como a relação entre a rotação θ_1 da extremidade da viga e a rotação combinada θ_2 da viga e da ligação (Figura 6). A dedução desta relação pode ser vista na Equação (6).

Figura 6 - Fator de restrição da ligação



Fonte: ABNT NBR 9062:2017

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\frac{M \cdot L_{ef}}{3EI_{sec}}}{\frac{M \cdot L_{ef}}{3EI_{sec}} + \frac{M}{R_{sec}}} = \frac{1}{1 + \frac{3EI_{sec}}{R_{sec} \cdot L_{ef}}} = \alpha_R \quad (6)$$

A ABNT NBR 9062:2006 classificava as ligações quanto à rigidez aos momentos flexores em estruturas de concreto pré-moldado conforme a Tabela 1. A versão mais recente da norma, ABNT NBR 9062:2017 mantém a mesma classificação para o fator de restrição, porém a rigidez secante mínima necessária para que se possa considerar uma ligação como rígida passou a ser $R_{sec} > 17(EI)_{sec}/L_{ef}$. Este valor de rigidez conduz a um fator de restrição igual a 0,85.

Tabela 1 - Classificação das ligações pré-moldadas

Tipo de ligação	Fator de restrição (α_r)	Rigidez à flexão secante (R_{sec})
Articulada	$\alpha_r < 0,15$	$R_{sec} < \frac{0,5(EI)_{sec}}{L_{ef}}$
Semirrígida	$0,15 \leq \alpha_r \leq 0,85$	$\frac{0,5(EI)_{sec}}{L_{ef}} \leq R_{sec} \leq \frac{20(EI)_{sec}}{L_{ef}}$
Rígida	$\alpha_r > 0,85$	$R_{sec} > \frac{20(EI)_{sec}}{L_{ef}}$

Fonte: ABNT NBR 9062:2006

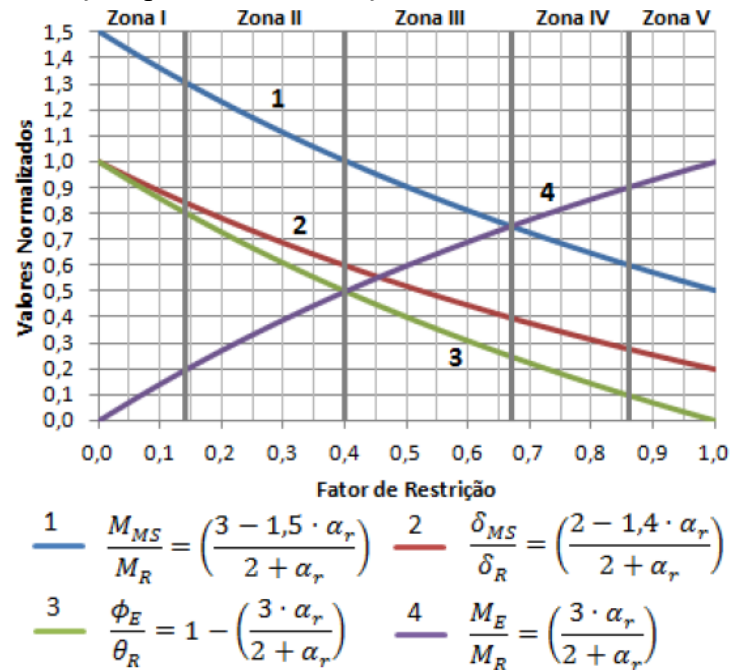
Com o intuito de criar uma classificação mais detalhada para a rigidez das ligações, Ferreira, El Debs e Elliott (2002), utilizando o fator restrição, encontraram relações importantes para o momento, flecha e rotação de vigas, apresentados na Figura 7. Na Tabela 2 são mostradas as relações de cada curva. Por fim, na Tabela 3 apresenta-se a classificação proposta. Em Ferreira et al. (2005) pode-se encontrar uma simulação numérica que demonstra a necessidade desta classificação.

Tabela 2 - Parâmetros das relações para o fator de restrição

Curva	Parâmetros
1	M_{MS} Momento modificado no meio do vão devido à ligação semirrígida
	M_R Momento de engastamento no apoio da viga bi engastada
2	δ_{MS} Flecha efetiva no meio do vão devido à ligação semirrígida
	δ_R Flecha no meio do vão da viga bi apoiada
3	ϕ_E Rotação efetiva na extremidade da viga devido à ligação semirrígida
	θ_R Rotação livre na extremidade da viga bi apoiada
4	M_E Momento modificado na extremidade da viga devido a ligação semirrígida
	M_R Momento de engastamento no apoio da viga bi engastada

Fonte: Adaptado de Costa (2015)

Figura 7 - Relações para o fator restrição - Ferreira, El Debs e Elliott (2002)



Fonte: Costa (2015)

Tabela 3 - Classificação das ligações proposta por Ferreira, El Debs e Elliott (2002)

Fator de Restrição (α_r)	Engastamento parcial (M_E/M_R)	Zona	Classificação
$0 \leq \alpha_r < 0,14$	$0 \leq M_E/M_R < 0,2$	I	Articulada
$0,14 \leq \alpha_r < 0,4$	$0,2 \leq M_E/M_R < 0,5$	II	Semirrígida com baixa resistência à flexão
$0,4 \leq \alpha_r < 0,67$	$0,5 \leq M_E/M_R < 0,75$	III	Semirrígida com média resistência à flexão
$0,67 \leq \alpha_r < 0,86$	$0,75 \leq M_E/M_R < 0,9$	IV	Semirrígida com alta resistência à flexão
$0,86 \leq \alpha_r < 1$	$0,9 \leq M_E/M_R < 1$	V	Rígida

Fonte: Adaptado de Ferreira et al. (2005)

2.2 MODELOS ANALÍTICOS DE LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

Como foi visto na seção 2.1, o diagrama de momento-rotação relativa viga-pilar é utilizado para a consideração os efeitos da deformabilidade da ligação. Na literatura especializada são encontrados métodos analíticos para criação deste diagrama. Dentre estes, quatro são apresentados neste trabalho. Além dos modelos descritos nesta seção, também se destacam os de Paultre et al. (1989), Sezen e Setzler (2008) e de Kwak e Kim (2010).

2.2.1 ABNT NBR 9062:2017

A ABNT NBR 9062:2017 recomenda uma expressão para o cálculo da rigidez secante à flexão negativa em ligações viga-pilar de seção composta com solidarização local, com armadura de continuidade que passam por meio de bainhas corrugadas no pilar preenchidas com graute ou por meio e luvas inseridas no pilar. De acordo com a referida norma, as rotações deste tipo de ligação são decorrentes de mecanismos de deformação que ocorrem na interface viga-pilar e na zona de transição na extremidade da viga, chamada de região da ligação, a qual compreende o trecho entre face do pilar e centro de giro no apoio da viga. Assim, considerando o limite do valor da tensão na armadura de continuidade igual a $\sigma_s \leq f_{yk}$, a rigidez secante para a relação momento-rotação pode ser calculada pela Equação (7).

$$R_{sec} = k \frac{A_s E_s d^2}{L_{ed}} \quad (7)$$

onde:

k é o coeficiente de ajustamento da rigidez secante (conforme Figura 8);

L_{ed} é o comprimento efetivo de deformação por alongamento da armadura de continuidade (conforme Figura 8);

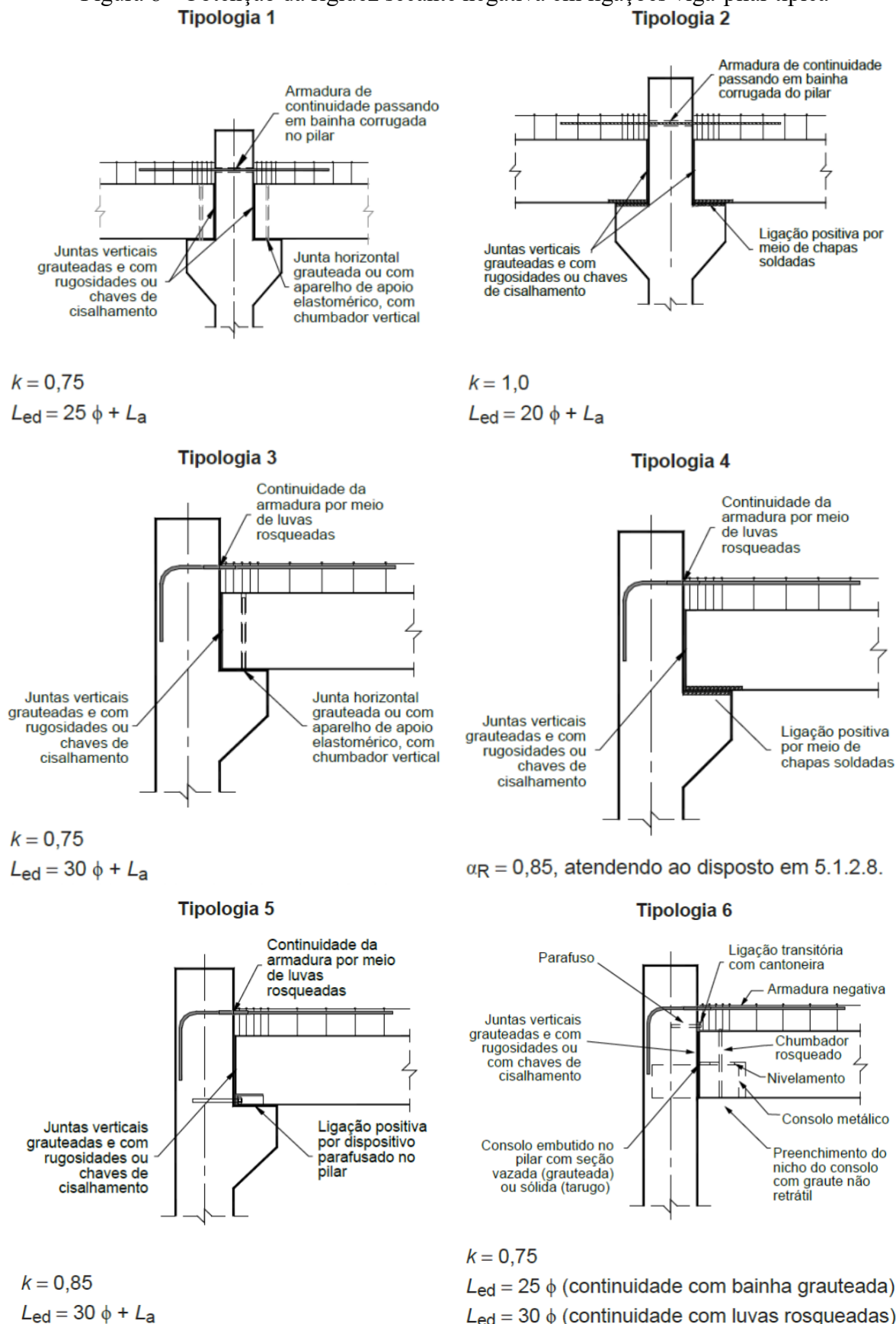
d é a altura útil da seção resistente na ligação negativa;

E_s é o módulo de elasticidade do aço;

A_s é a área de armadura de continuidade negativa.

Na Figura 8 estão algumas referências para o valor de L_{ed} e k de algumas ligações típicas. Para outras tipologias de ligações, a ABNT NBR 9062:2017 recomenda que o valor da rigidez secante seja validado experimentalmente.

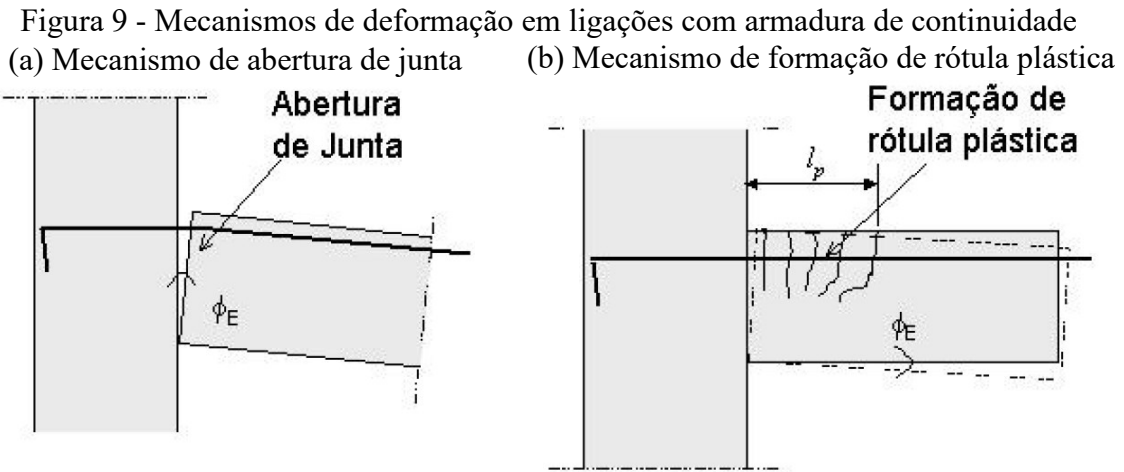
Figura 8 - Obtenção da rigidez secante negativa em ligações viga-pilar típica



Fonte: ABNT NBR 9062:2017

2.2.2 Ferreira, El Debs e Elliott (2003)

De acordo com Ferreira, El Debs e Elliott (2003) a ligação é definida como uma região de distúrbio na extremidade da viga com concentração de deformações inelásticas. Nesta região a rigidez da ligação é reduzida e a curvatura é descontínua e pode ser considerada constante, segundo um mecanismo de rótula plástica. Os dois mecanismos que podem ocorrer em ligações viga-pilar com armadura de continuidade são: a abertura de uma única junta, que deverá ocorrer em ligações com taxas de armadura muito pequenas (Figura 9a); a formação de rótula plástica (Figura 9b). Em geral, este último mecanismo é predominante nas ligações resistentes à flexão.



Fonte: Ferreira, El Debs e Elliott (2003)

No modelo proposto por Ferreira, El Debs e Elliott (2003) a rotação relativa viga-pilar é resultado da soma do mecanismo de deformação por alongamento das barras de continuidade, no trecho embutido no pilar, com o mecanismo de deformação por flexão da região da ligação. A expressão sugerida pelos autores simula o comportamento não linear da relação momento-rotação até a primeira plastificação da ligação. Neste ponto, utilizando o momento resistente da ligação e a rotação relativa viga-pilar, ambos no início do escoamento, é possível obter a rigidez secante da ligação. A partir destas hipóteses, chega-se à Equação (8) para se obter a rigidez secante à flexão negativa para ligações com armadura de continuidade.

$$R_{sec} = \frac{M_{CR}}{\phi_c} = \left[\frac{l_e}{0,9E_s A_s d^2} + \frac{l_p}{E_{cs} I_{II}} \right]^{-1} \quad (8)$$

Na qual:

- l_e é o comprimento de embutimento das barras dentro do pilar;
- l_p é o comprimento da região da ligação;
- d é a altura efetiva na extremidade da viga;
- f_y é a tensão de escoamento das barras da armadura de continuidade;
- E_s é o módulo de elasticidade do aço;
- E_{cs} é o módulo de deformação secante do concreto;
- I_{II} é o momento de inércia da seção homogeneizada no Estádio II (fissurada).

O momento resistente da ligação no limite do escoamento pode ser estimado pela Equação (9):

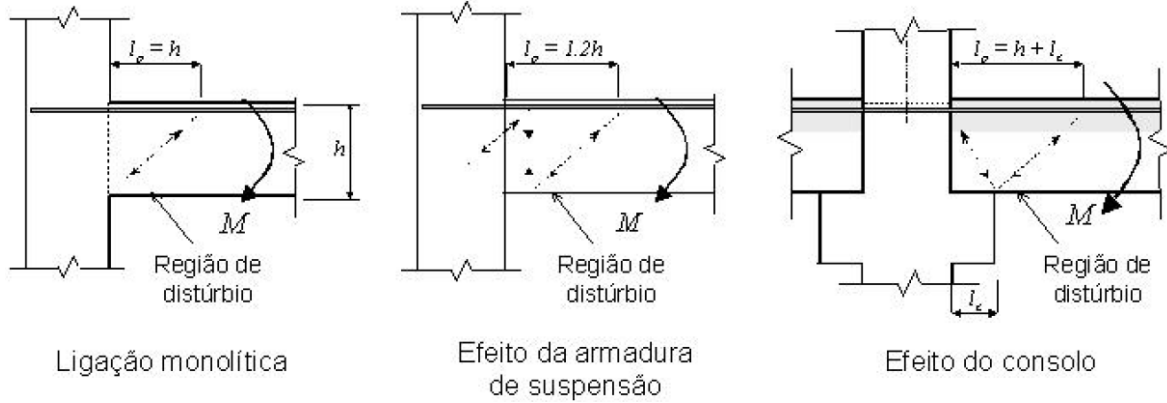
$$M_{CR} = M_y = 0,9A_s f_{yk} d \quad (9)$$

A rotação relativa viga-pilar, medida na região da ligação, devido ao momento M_{RC} é obtido pela Equação (10):

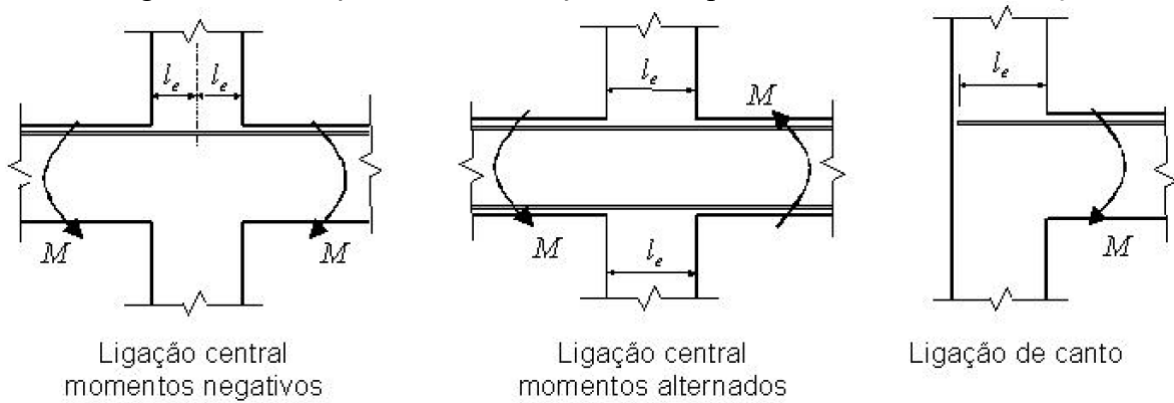
$$\phi_c = \left(\frac{1}{r}\right)_{II} \cdot l_p + \frac{f_{yk}}{E_s d} \cdot l_e = \frac{M_{CR}}{E_{cs} I_{II}} \cdot l_p + \frac{f_{yk}}{E_s d} \cdot l_e \quad (10)$$

Na Equação (10), $(1/r)_{II}$ é a curvatura da viga no Estádio II. O comprimento l_p depende da altura da viga, do caminho das forças internas na extremidade da viga (Figura 10) e da posição do centro de rotação na ligação. Em ligações pré-moldadas típicas o comprimento l_p pode ser obtido pelo comprimento do consolo somado a altura útil da viga na sua extremidade sobre o apoio. Já o comprimento l_e , depende do tipo de ligação nos pilares. Ligações com pilares centrais e duas ligações, tendem a ser mais rígidas que ligações com pilares de canto e apenas uma ligação. Também se nota que ligações com pilares centrais com momentos negativos nas vigas em ambos os lados tendem a ser mais rígidas do que ligações com momentos reversos (Figura 11).

Figura 10 - Regiões de distúrbio na extremidade de ligações viga-pilar



Fonte: Ferreira, El Debs e Elliott (2003)

Figura 11 - Variações na consideração do comprimento de embutimento l_e 

Fonte: Ferreira, El Debs e Elliott (2003)

De acordo com Ferreira, El Debs e Elliott (2003) a Equação (10) é uma solução particular para o início do escoamento das barras de continuidade. Para a determinação da relação momento-rotação relativa viga-pilar até o início de escoamento das armaduras da viga ($M_y > M$), os autores propõem o seguinte modelo analítico, conforme Equação (11):

$$\theta = \left[\left(\frac{M}{E_{cs} I_{eq}} \right) L_p + \left(\frac{\sigma_s}{E_s d} \right) L_e \right] \cdot \left(\frac{M}{M_y} \right)^{0.5} \quad (11)$$

onde:

M_y é o momento de início de escoamento das barras longitudinais tracionadas da viga;

L_p é o comprimento da região da ligação, associado à altura da seção da viga;

L_e é o comprimento de embutimento, ou o comprimento de ancoragem existente;

d é a altura útil da viga;

E_s é o módulo de elasticidade do aço;

E_{cs} é o módulo de deformação secante do concreto;

I_{eq} é o momento de inércia equivalente da viga, determinado pela Equação (75) com $m = 3$;

σ_s é a tensão na armadura tracionada da viga, a qual pode ser obtida pela Equação (12).

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s z_{eq}} \quad (12)$$

Na qual:

A_s é a área da armadura de tração da viga;

z_{eq} é o braço de alavanca entre as resultantes de tração e compressão, determinado pela Equação (13).

$$z_{eq} = d - \frac{1}{3} \left[x_I \cdot \left[1 - \left(\frac{M}{M_y} \right)^{0.5} \right] + x_{II} \cdot \left(\frac{M}{M_y} \right)^{0.5} \right] \quad (13)$$

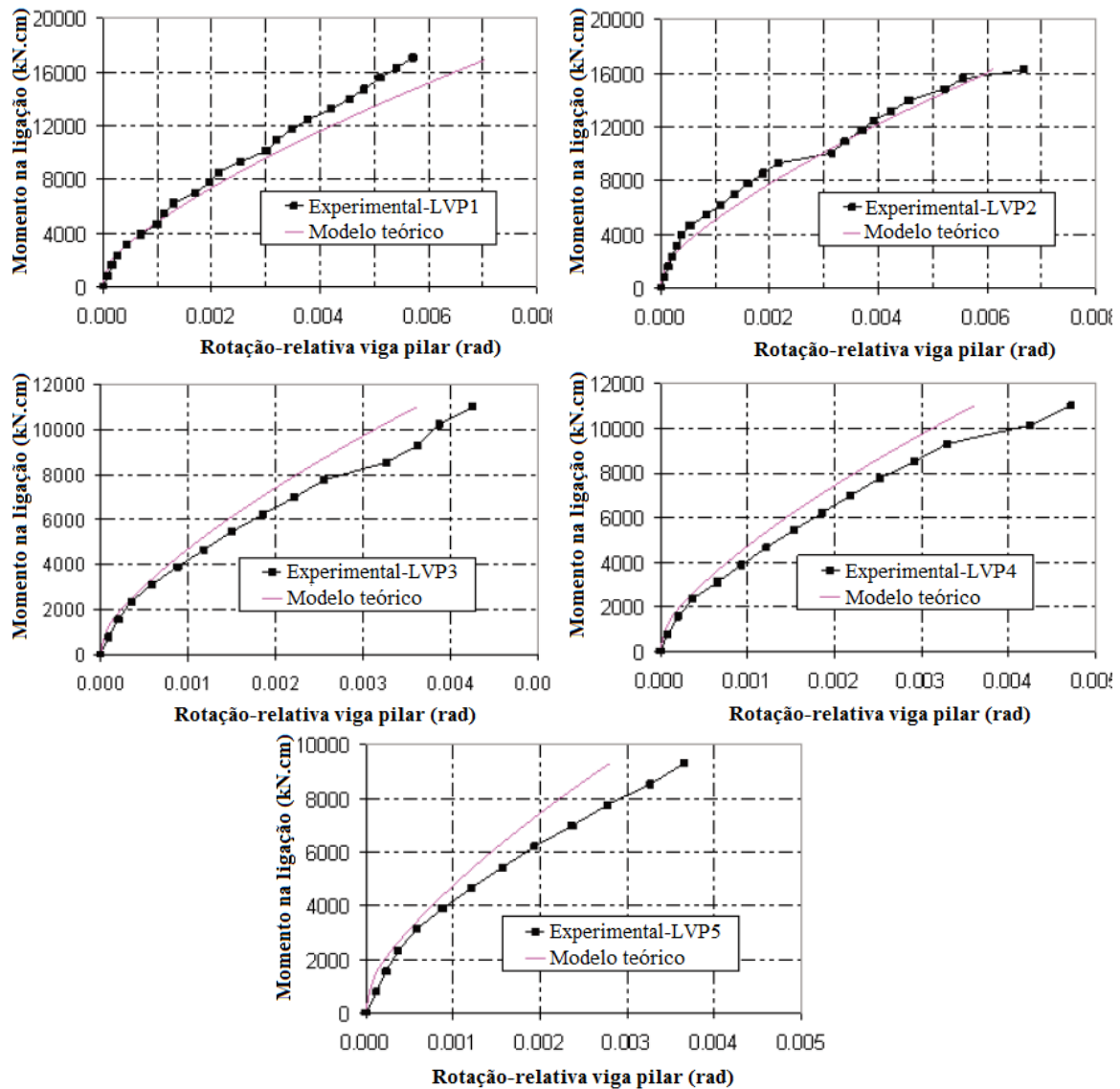
sendo:

x_I é a altura da linha neutra no Estádio I;

x_{II} é a altura da linha neutra no Estádio II.

Em Alva, Ferreira e El Debs (2009) foi feita uma comparação entre os resultados obtidos com o modelo analítico de Ferreira, El Debs e Elliott (2003) com os dados experimentais das cinco ligações monolíticas ensaiadas por Alva (2004) (mais detalhes podem ser vistos no item 2.3.1). Os resultados das curvas obtidas nos ensaios e os resultados do modelo analítico podem ser vistos na Figura 12. Alva, Ferreira e El Debs (2009) chegaram à conclusão que o modelo analítico de Ferreira, El Debs e Elliott (2003) mostrou bom potencial para o cálculo da curva momento-rotação também para ligações viga-pilar monolíticas.

Figura 12- Curvas momento-rotação: experimental vs. modelo analítico



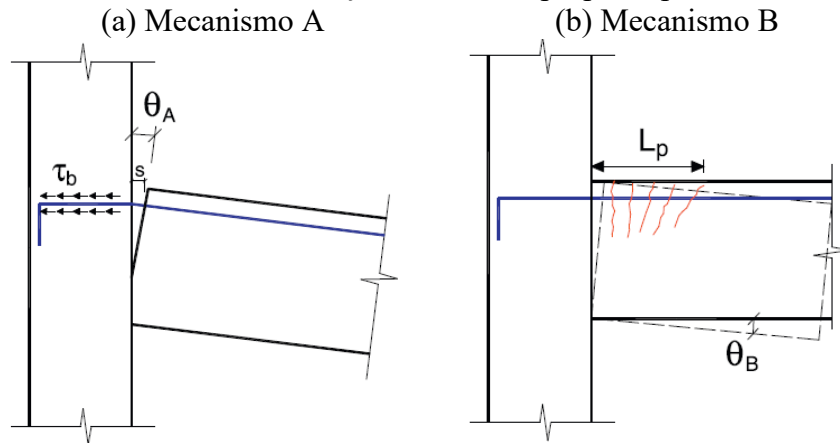
Fonte: Adaptado de Alva, Ferreira e El Debs (2009).

2.2.3 Alva e El Debs (2013)

Alva e El Debs (2013) propuseram um modelo teórico que é capaz de representar o comportamento do deslizamento das armaduras sem a necessidade de parâmetros provenientes de ensaios experimentais e que pode ser facilmente implementado em programas de cálculos estruturais. Este modelo contempla os mesmos dois mecanismos de deformações assumidos responsáveis pelas rotações entre a viga e o pilar, conforme Ferreira, El Debs e Elliott (2003) e por Alva, Ferreira e El Debs (2009), ilustrados na Figura 13:

- Mecanismo A: Rotações relativas provocadas pelo deslizamento das barras da armadura tracionada no interior do pilar;
- Mecanismo B: Rotações relativas provocadas pelo efeito cumulativo dos deslizamentos causados pela fissuração do concreto na extremidade da viga em um comprimento L_p (aproximadamente igual à altura útil da viga).

Figura 13 - Mecanismos de deformação do modelo proposto por Alva e El Debs (2013)



Fonte: Alva e El Debs (2013)

Portanto, a rotação relativa total entre a viga e o pilar é a soma das rotações causadas pelos dois mecanismos, como representado pela Equação (14).

$$\theta = \theta_A + \theta_B \quad (14)$$

onde:

θ_A é a rotação relativa causada pelo Mecanismo A;

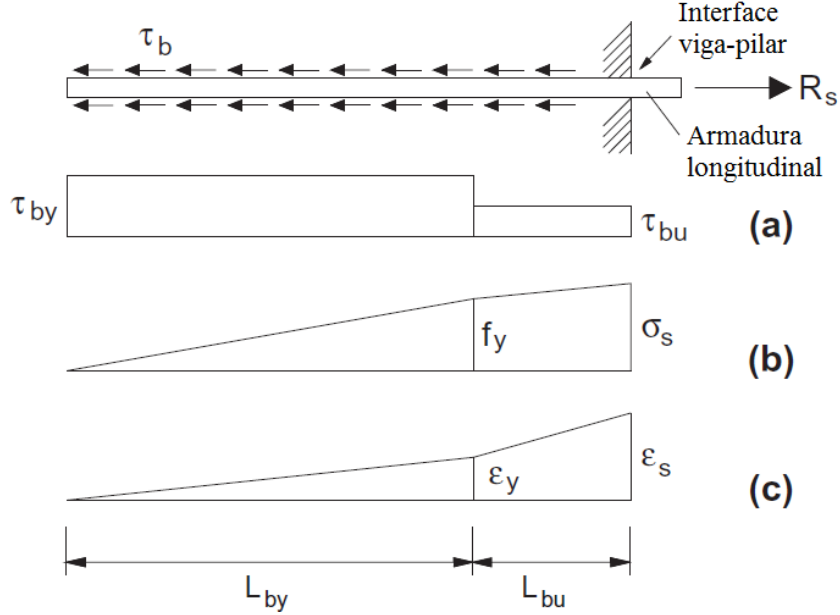
θ_B é a rotação relativa causada pelo Mecanismo B.

A contribuição do Mecanismo A é calculado através do modelo proposto por Sezen e Moehle (2003). Neste modelo, os autores assumem uma distribuição das tensões de aderência e das tensões e deformações normais na barra conforme indicados na Figura 14. A distribuição das tensões de aderência é dividida em duas partes: τ_{by} para a fase elástica ($\varepsilon_s \leq \varepsilon_y$) e τ_{bu} para a fase inelástica ($\varepsilon_s > \varepsilon_y$). Os valores sugeridos pelos autores são $\tau_{by} = 1,0\sqrt{f_c}$ e $\tau_{bu} = 0,5\sqrt{f_c}$, sendo f_c a resistência do concreto à compressão em MPa. O deslizamento da barra s

é igual a diferença entre a deformação da barra de aço (ε_s) e a deformação do concreto (ε_c), conforme a Equação (15).

$$s = \int_0^x (\varepsilon_s - \varepsilon_c) dx \quad (15)$$

Figura 14 - Modelo do Mecanismo A; (a) distribuição das tensões de aderência; (b) distribuição das tensões normais; (c) distribuição das deformações normais



Fonte: Adaptado de Alva e El Debs (2013)

Ignorando as deformações do concreto devido a seu valor relativamente baixo, com o desenvolvimento da Equação (15) e com a aplicação das equações de equilíbrio, Sezen e Moehle (2003) obtiveram as Equações (16) e (17) para o cálculo do deslizamento decorrente do Mecanismo A.

Para a fase elástica ($\varepsilon_s \leq \varepsilon_y$):

$$s = \frac{\varepsilon_y \cdot \sigma_y \cdot \emptyset}{8 \cdot \tau_{by}} \quad (16)$$

Para a fase inelástica ($\varepsilon_s > \varepsilon_y$):

$$s = \frac{\varepsilon_y \cdot f_y \cdot \emptyset}{8 \cdot \tau_{by}} + \frac{(\varepsilon_y + \varepsilon_s) \cdot \emptyset \cdot (\sigma_s - f_y)}{8 \cdot \tau_{bu}} \quad (17)$$

onde:

f_y é a tensão de escoamento do aço;
 \emptyset é o diâmetro das barras de aço
 σ_s é a tensão axial na barra de aço.

A rotação relativa na barra pode ser calculada então pela Equação (18).

$$\theta_A = \frac{s}{d - x} \quad (18)$$

onde:

d é a altura útil da viga;
 x é a altura da linha neutra da viga.

Na fase elástica, Alva e El Debs (2013) sugerem a utilização da altura da linha neutra correspondente à seção fissurada, uma vez que essa altura sofre pouca variação no Estádio II. Na fase inelástica, os referidos autores recomendam a utilização da altura da linha neutra correspondente ao momento último da viga, pois nessa fase há uma rápida estabilização do valor de x após o escoamento das armaduras no Estádio III.

Como mencionado anteriormente, a rotação associada ao Mecanismo B é causada pelos deslizamentos da barra induzidos pela fissuração do concreto na extremidade da viga. Alva e El Debs (2013) assumem que estas fissuras estejam igualmente espaçadas de s_R dentro do comprimento L_p e que a abertura de cada fissura w_i seja igual o dobro do deslizamento da barra s_i na posição da fissura, conforme ilustrado na Figura 15. Assim, a rotação total no comprimento L_p produzida por um número de fissuras n é dada pela Equação (19).

$$\theta_B = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{d - x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{0,5 \cdot w_i}{d - x_i} \quad (19)$$

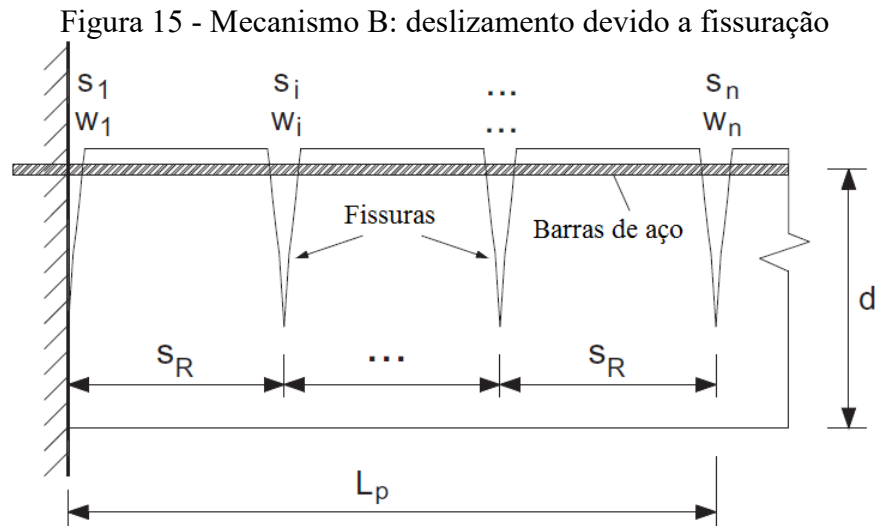
Assumindo que a diferença entre os valores de w_i ao longo de L_p sofram pequenas variações, obtém-se um único valor (constante) para a abertura das fissuras, calculada com a Equação (20) encontrada no Eurocode 2 (2004):

$$w = s_R \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad (20)$$

onde:

s_R é o espaçamento entre fissuras;

$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$ é a diferença entre a deformação média do aço e do concreto.



Fonte: Adaptado de Alva e El Debs (2013)

O valor de s_R na Equação (20) pode ser obtido com a expressão contida no Eurocode 2 (2004), conforme a Equação (21).

$$s_{r,m\acute{a}x} = k_3 c + \frac{k_1 k_2 k_4 \emptyset}{\rho_{p,eff}} \quad (21)$$

Na qual:

\emptyset é o diâmetro das barras (caso haja mais de um diâmetro na seção, é necessário utilizar o diâmetro equivalente através da média ponderada dos diâmetros);

c é o cobrimento de concreto;

k_1 é um coeficiente que leva em consideração as propriedades de aderência da armadura: 0,8 para armadura nervuradas e 1,6 para armaduras lisas;

k_2 é o coeficiente que leva em consideração a distribuição de deformações: 0,5 para flexão e 1,0 para tração pura;

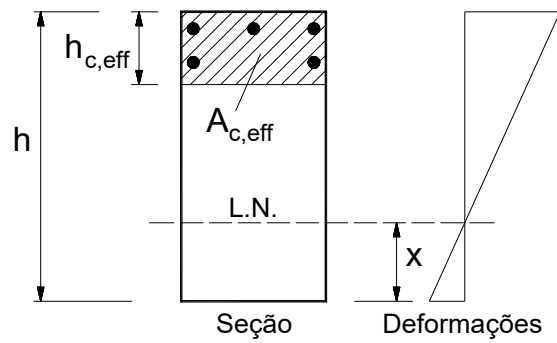
$\rho_{p,eff}$ é a taxa de armadura efetiva calculada pela Equação (22);

Para k_3 e k_4 a norma europeia recomenda, respectivamente, os valores 3,4 e 0,425. Neste trabalho foram utilizados os valores sugeridos pelo Eurocode 2 (2004).

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} \quad (22)$$

onde $A_{c,eff}$ é a área efetiva (envolvimento) de concreto protegida pela armadura de continuidade em uma altura $h_{c,eff}$, onde $h_{c,eff}$ é o menor valor entre $2,5(h - d)$, $(h - x)/3$ ou $h/2$, conforme ilustrado na Figura 16.

Figura 16 - Definição da área efetiva ($A_{c,eff}$)



Fonte: Adaptado de Eurocode (2004)

Novamente, desprezando-se a deformação do concreto e utilizando as Equações (19) e (20), Alva e El Debs (2013) propuseram a Equação (23) para a obtenção da rotação relativa associada ao Mecanismo B.

$$\theta_B = 0,5 \cdot (L_p + s_R) \cdot \left(\frac{\varepsilon_s}{d - x} \right) \quad (23)$$

Assim, rescrevendo as Equações (16), (17) e (23) e separando as constantes das variáveis obtiveram-se as Equações (24), (25) e (27).

Para a fase elástica ($\varepsilon_s \leq \varepsilon_y$):

$$\theta_A = C_1 \cdot M^2 \quad (24)$$

Para a fase inelástica ($\varepsilon_s > \varepsilon_y$):

$$\theta_A = C_1 \cdot M_y^2 \quad (25)$$

onde:

M é o momento aplicado na ligação;

M_y é o momento de início de escoamento da armadura tracionada da viga;

C_1 é a constante relacionada ao Mecanismo A, dada pela Equação (26).

$$C_1 = \frac{\emptyset}{8 \cdot E_s \cdot \tau_{by} \cdot (d - x) \cdot A_s^2 z^2} \quad (26)$$

E_s é o modulo de elasticidade do aço;

A_s é a área da armadura de tração da viga;

z é a distância entre as resultantes de tração e de compressão da viga.

$$\theta_B = C_2 \cdot \left(\frac{1}{r}\right) \quad (27)$$

onde:

$(1/r)$ é a curvatura da seção da viga;

C_2 é a constante relacionada ao Mecanismo B dado pela Equação (28).

$$C_2 = 0,5 \cdot (L_p + s_R) \quad (28)$$

Assim, é possível escrever a equação da rotação relativa total na fase elástica e inelástica como indicado nas Equações (29) e (30).

Fase elástica: $M \leq M_y$

$$\theta = C_1 \cdot M^2 + C_2 \cdot \left(\frac{1}{r}\right) \quad (29)$$

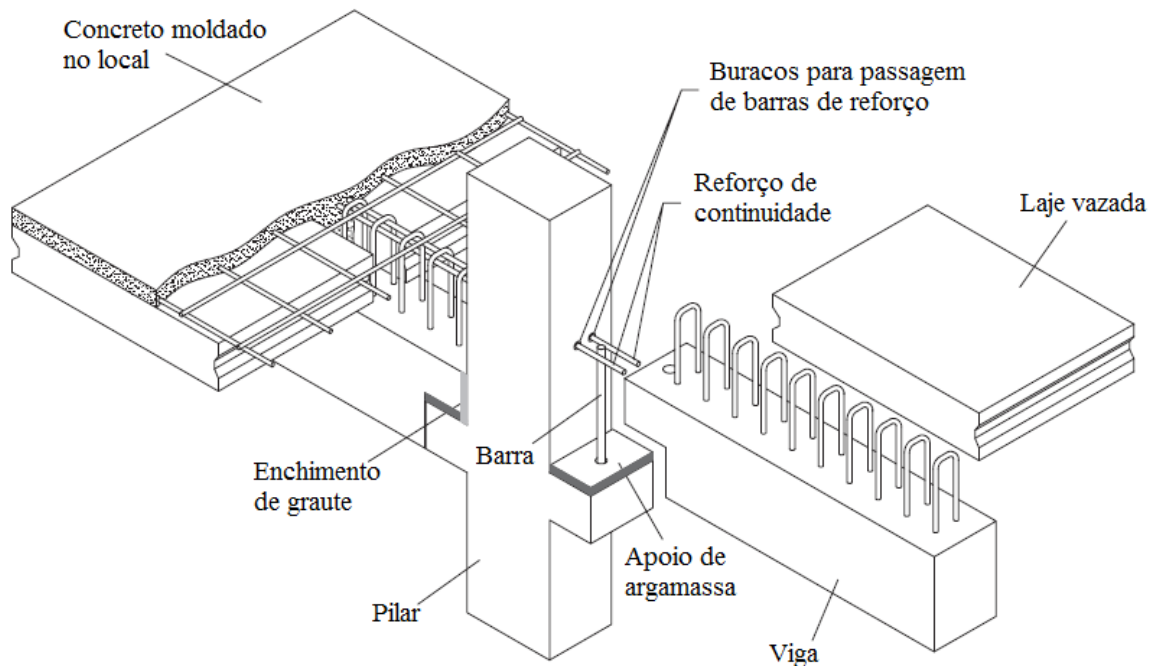
Fase inelástica: $M_y < M \leq M_u$

$$\theta = C_1 \cdot M_y^2 + C_2 \cdot \left(\frac{1}{r}\right) \quad (30)$$

2.2.4 El Debs, Miotto e El Debs (2010)

El Debs, Miotto e El Debs (2010) propuseram um modelo analítico para representar a deformabilidade de ligações pré-moldadas com tipologia indicada Figura 17. O estudo experimental completo desta ligação pode ser encontrado em Miotto (2002).

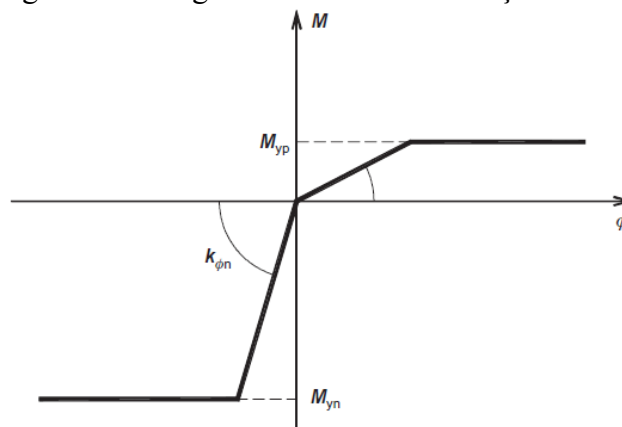
Figura 17 - Ligação Semirrígida estudada por El Debs, Miotto e El Debs (2010)



Fonte: Traduzido e adaptado de El Debs, Miotto e El Debs (2010)

O modelo de El Debs, Miotto e El Debs (2010) consiste de uma simplificação da curva momento-rotação com a utilização de um diagrama bilinear, conforme a Figura 18. No diagrama proposto são representadas as rigidezes ao momento positivo e negativo da ligação, que, nem sempre são iguais, especialmente em ligações pré-moldadas. É importante lembrar que, as ligações de edifícios de múltiplos pavimentos submetidos a ações horizontais podem estar sujeitas a inversão de momentos, sendo muitas vezes necessária a verificação do seu desempenho sob momentos positivos e negativos.

Figura 18 - Diagrama de momento-rotação bilinear



Fonte: El Debs, Miotto e El Debs (2010)

Para calcular o momento de início de escoamento (momentos negativos) El Debs, Miotto e El Debs (2010) fizeram as equações de equilíbrio da ligação conforme a Figura 19. A solução foi determinada com o equilíbrio das forças verticais, horizontais e de momentos em relação ao ponto C , que está alinhado com a força de reação da almofada de apoio R_{cu} . Supondo $R_s = A_s f_y$ e $R_g = y_{cn} f_{cg} b_w$, o momento de início de escoamento é dado pela Equação (31).

$$M_{yn} = A_s f_y z_n \quad (31)$$

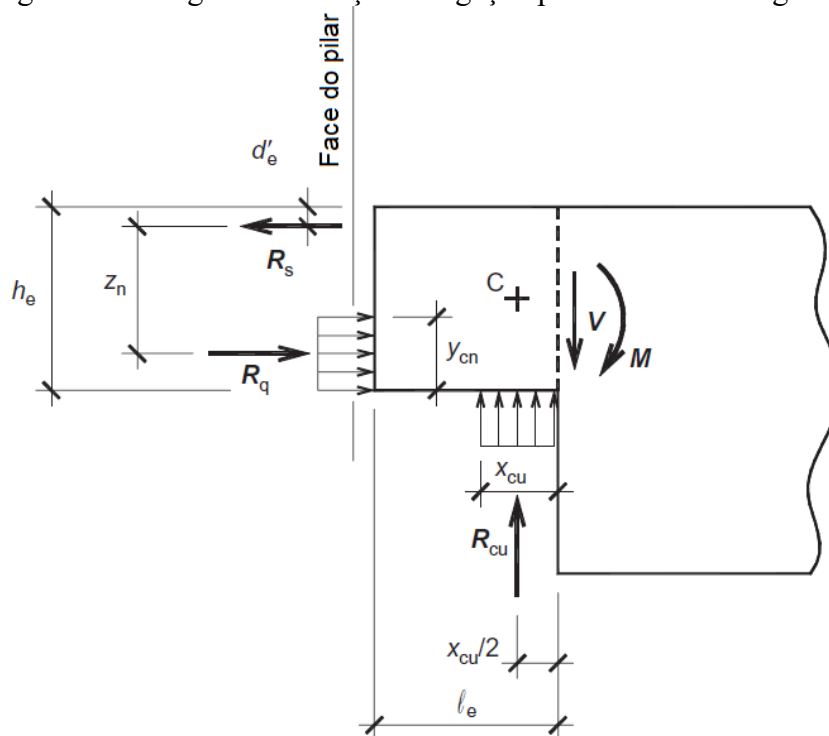
com

$$z_n = h_e - d'_e - \frac{y_{cn}}{2} \quad (32)$$

e

$$y_{cn} = \frac{A_s f_y}{f_{cg} b_w} \quad (33)$$

Figura 19 - Diagrama de forças na ligação para momentos negativos



Fonte: Adaptado de El Debs, Miotto e El Debs (2010)

onde:

A_s é a área de armadura de continuidade;

f_y é a tensão de escoamento da armadura de continuidade;

h_e é a altura da seção da viga (dente Gerber);

- d'_e é a distância da armadura de continuidade até a face superior da viga;
 y_{cn} é a altura da zona comprimida da seção da viga (dente Gerber);
 f_{cg} é a resistência à compressão do graute;
 b_w é a largura da seção da viga;
 x_{cu} é o comprimento da zona comprimida na almofada de apoio da viga;
 l_e é o comprimento do consolo.

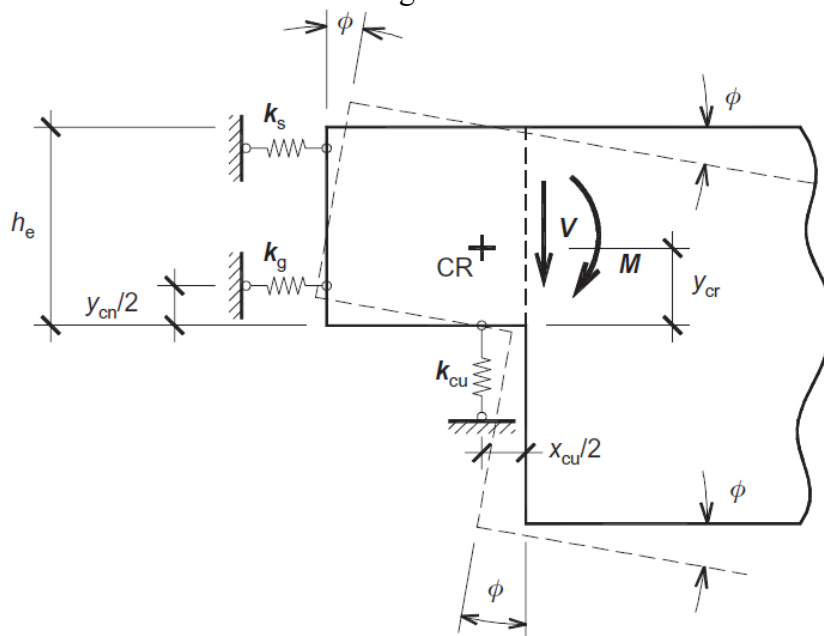
De acordo com El Debs, Miotto e El Debs (2010), o valor de x_{cu} depende da rigidez da almofada de apoio. Se esta for muito deformável seu valor tende a assumir o comprimento total do consolo da viga. Se for assumido um diagrama triangular de compressão na almofada de apoio, o valor de x_{cu} será de $2 l_e/3$.

Segundo El Debs, Miotto e El Debs (2010), a deformabilidade da ligação é causada por:

- (a) deformação causada por uma fissura principal na interface viga-pilar no lado tracionado;
- (b) deformação do graute no lado comprimido;
- (c) deformação da almofada de apoio.

A Figura 20 ilustra a posição deformada da viga e as componentes responsáveis pela deformação citadas anteriormente, com as respectivas rigidezes, a saber: (a) armadura (k_s); (b) graute da ligação (k_g); (c) almofada de apoio (k_{cu}).

Figura 20 - Posição deformada da viga e componentes de deformação para momento negativo



Fonte: El Debs, Miotto e El Debs (2010)

Os autores então encontraram a posição do centro de rotação CR , que coincide com o ponto C , através da Equação (34):

$$y_{cr} = \frac{k_s(h_e - d'_e) + k_g(y_{cn}/2)}{k_s + k_g} \quad (34)$$

A rigidez da armadura de continuidade é dada por:

$$k_s = \frac{\sigma_s A_s}{w_y} \quad (35)$$

onde:

w_y é a abertura da fissura principal quando a armadura de continuidade atinge o início de escoamento, obtida com a Equação (36) apresentada em Miotto (2002)

$$w_y = 2 \left[\frac{(1 + \alpha_w) s_1^{\alpha_w} \emptyset}{8(1 + \alpha_e \rho_{s,eff}) \tau_{max} E_s} \frac{\sigma_s^2}{\tau_{max} E_s} \right]^{1/1+\alpha_w} + \frac{\sigma_s}{E_s} 4\emptyset \quad (36)$$

com

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{c,top}} \quad (37)$$

$$\tau_{max} = 2,5 \sqrt{f_{c,top}} \quad (38)$$

$\rho_{s,eff}$ é a taxa de armadura efetiva encontrada pela Equação (22)

σ_s é a tensão na armadura de continuidade;

\emptyset é o diâmetro médio das barras da armadura de continuidade, em mm;

E_s é o módulo de elasticidade do aço (em MPa);

$E_{c,top}$ é o módulo de elasticidade da capa de concreto;

$f_{c,top}$ é a resistência à compressão da capa de concreto (em MPa);

α_w é igual a 0,4;

s_1 é igual a 1,0 mm.

A rigidez da junta cheia de graute é dada pela Equação (39):

$$k_g = \frac{y_{cn} b_w}{D_{gj}} \quad (39)$$

onde:

b_w é a largura da viga;

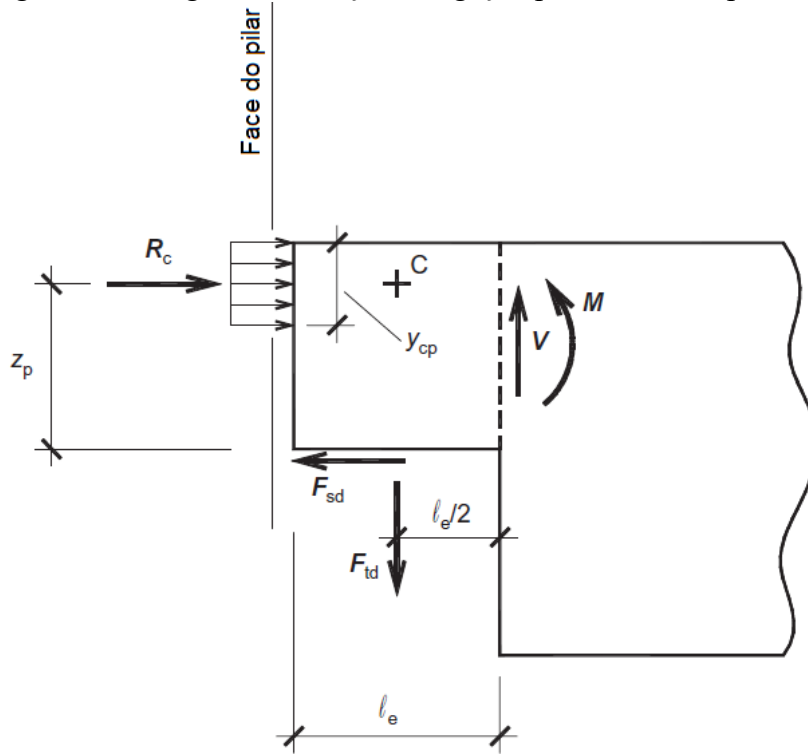
D_{gj} é a deformabilidade do graute da junta em termos de tensão.

Com o equilíbrio de momentos em relação ao centro de rotação, os autores chegaram na Equação (40) para o cálculo da rigidez secante da ligação frente aos momentos negativos.

$$R_{sec,n} = \left[k_s (h_e - y_{cr} - d'_e)^2 + k_g \left(y_{cr} - \frac{y_{cn}}{2} \right)^2 \right] \quad (40)$$

Para encontrar o momento de início de escoamento referente aos momentos positivos, El Debs, Miotto e El Debs (2010) se basearam na Figura 21. Fazendo o equilíbrio das forças no ponto C, que corresponde a posição do chumbador, os autores chegaram na Equação (41).

Figura 21 - Diagrama de forças na ligação para momento positivos



Fonte: Adaptado de El Debs, Miotto e El Debs (2010)

$$M_{yp} = F_{sd} z_p \quad (41)$$

com

$$z_p = h_e - \frac{y_{cp}}{2} \quad (42)$$

com

$$y_{cp} = \frac{F_{sd}}{f_{cc,max} b_f} \quad (43)$$

e

$$F_{sd} = k \emptyset_d^2 \sqrt{f_{yd} f_{cc,max}} \quad (44)$$

Nas quais:

y_{cp} é a altura da zona comprimida na extremidade da seção da viga (dente Gerber);

b_f é a largura colaborante da viga;

k é uma constante determinada por ensaios ou encontrada na literatura técnica; (CEB–FIP, 1991);

\emptyset_d é o diâmetro do chumbador;

f_{yd} é a tensão de escoamento do chumbador;

$f_{cc,max}$ é o maior valor entre a resistência a compressão do concreto e a resistência a compressão do graute em contato com o chumbador.

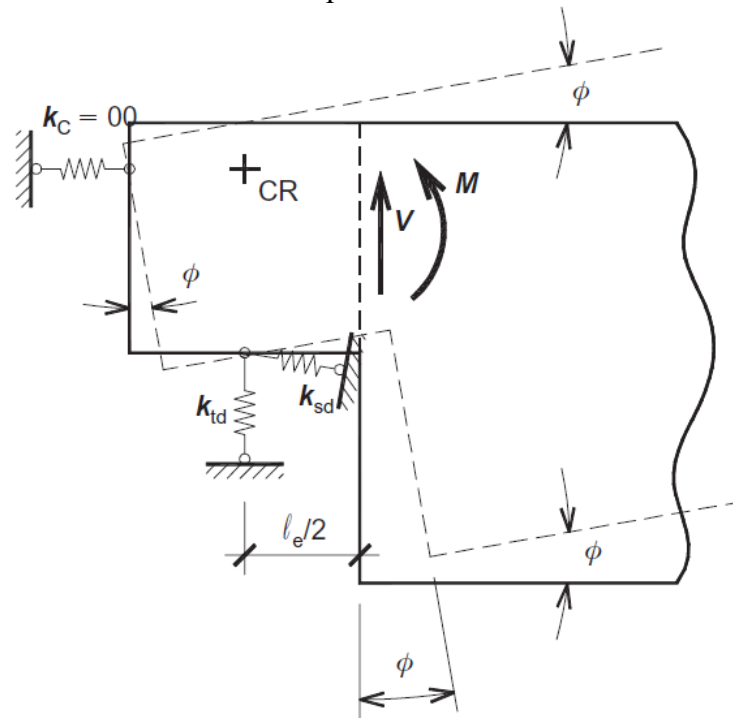
A Figura 22 ilustra a posição deformada da viga e os mecanismos de deformação com as respectivas rigidezes: (a) concreto comprimido (k_c); (b) tração no chumbador (k_{td}); (c) cisalhamento no chumbador (k_{sd}).

Quando k_c tende ao infinito, o centro de rotação CR é alinhado, o que define sua posição. Neste caso CR também coincide com o ponto C usado para calcular o momento de plastificação.

Assim, considerando o equilíbrio dos momentos referidos ao centro de rotação CR , El Debs, Miotto e El Debs (2010) chegaram na Equação (45) para a determinação da rigidez secante da ligação aos momentos fletores positivos.

$$R_{sec,p} = k_{sd} \left(h_e - \frac{y_{cp}}{2} \right)^2 \quad (45)$$

Figura 22 - Posição deformada da viga e componentes de deformação para momento positivo



Fonte: El Debs, Miotto e El Debs (2010)

onde a rigidez associada ao cisalhamento do chumbador é dada pela Equação (46):

$$k_{sd} = \frac{F_{sd}}{a_{vy}} \quad (46)$$

a_{vy} é o deslocamento transversal do chumbador quando a força máxima é atingida.

2.3 ESTUDOS EXPERIMENTAIS DE LIGAÇÕES VIGA-PILAR

Nesta seção serão apresentadas algumas investigações experimentais de ligações viga-pilar encontradas na literatura nacional e internacional. Foram selecionados trabalhos que investigaram ligações monolíticas e ligações pré-moldadas capazes de transmitir momentos fletores e que apresentassem resultados do tipo momento-rotação relativa e/ou resultados do tipo força-deslocamento. Os resultados experimentais desses trabalhos foram utilizados para a verificação da precisão dos modelos analíticos que consideram a deformabilidade das ligações. Os trabalhos selecionados foram os de Alva (2004), Lee, Wight e Hanson (1977), Miotto (2002), Kataoka (2007) e Lacerda (2016), totalizando 10 ligações empregadas para o confronto entre resultados numéricos e experimentais. Por esta razão, esses trabalhos são mais detalhados nesta seção (2.4.1 a 2.4.5). Evidentemente, além dos experimentos descritos

nesta seção, na bibliografia especializada destacam-se os de Ferreira (1999), Baldissera (2006), Hadade (2016), Shafaei et al. (2014), Paultre et al. (1989), Megget (1974), Paulay e Scarpas (1981), Haach (2005), Breccolotti et al. (2016), Yuksel et al. (2015), Im, Park e Eom (2013), Görgün (1997).

2.3.1 Alva (2004)

Para estudar o comportamento de nós de pórtico de ligações monolíticas viga-pilar de concreto armado submetidos a ações cíclicas, Alva (2004) realizou um trabalho experimental onde cinco modelos físicos de ligação viga-pilar foram ensaiados. Os protótipos foram construídos de modo a representar ligações viga-pilar de extremidade em edifícios de múltiplos pavimentos. Todos foram construídos com as mesmas dimensões, mesma armadura longitudinal e mesma armadura transversal nos elementos. As únicas variáveis foram o número de estribos na região da ligação e a forma que o carregamento foi aplicado.

O autor construiu os modelos com pilar retangular de 20 x 30 cm e com vigas de 20 x 40 cm, sem laje. A Tabela 4 contém as principais informações sobre as armaduras utilizadas. Destaca-se que as barras intermediárias correspondem às barras longitudinais da segunda camada do pilar. O autor fez essa distinção para levar em conta a contribuição dessas barras na resistência aos esforços cortantes no nó de pórtico. O detalhamento dos modelos pode ser visto da Figura 23 a Figura 26.

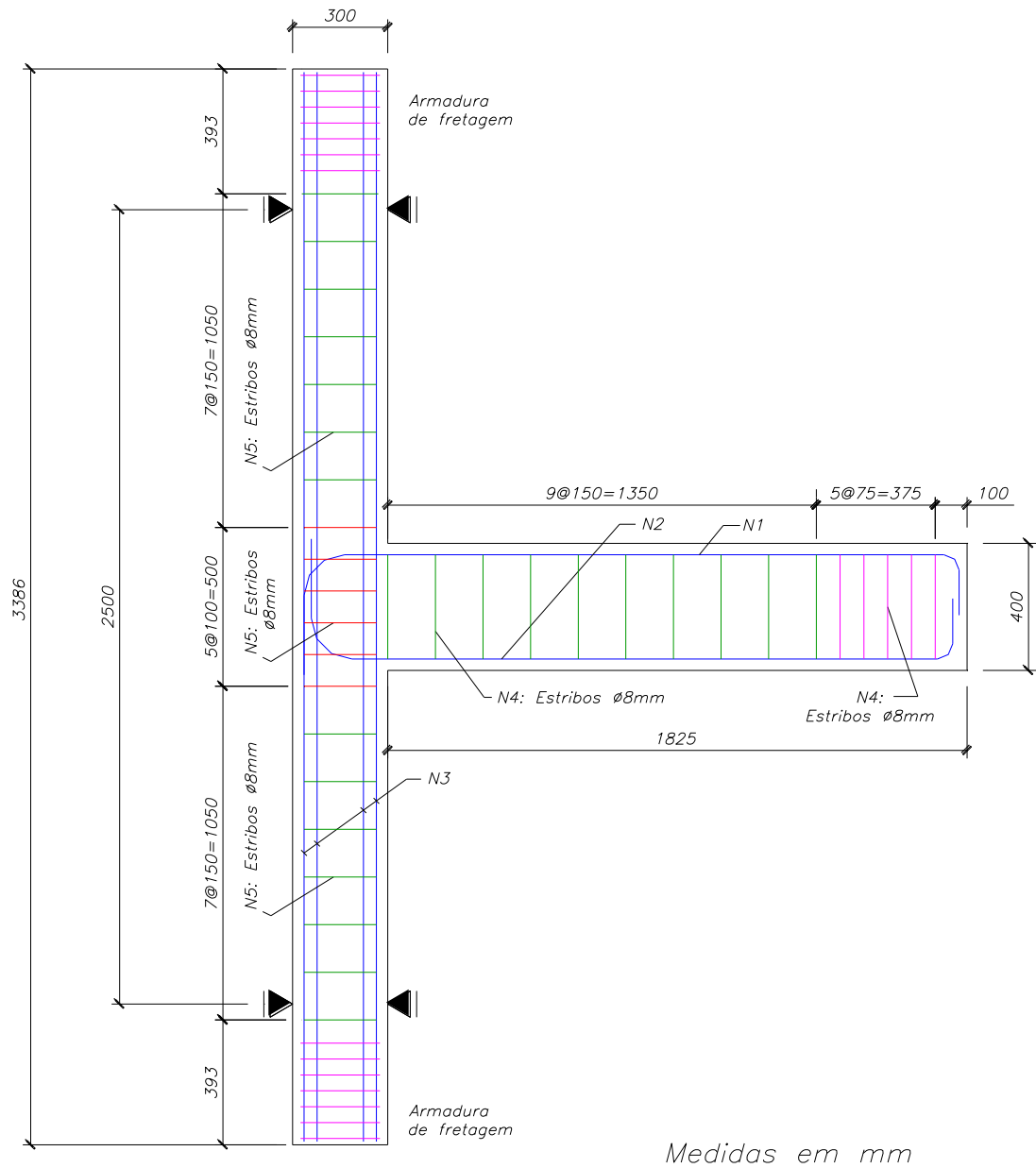
Tabela 4 - Armadura dispostas na ligação monolíticas de Alva (2004)

Modelo	Viga		Pilar		Nó de Pórtico	
	Armadura longitudinal	Armadura transversal	Armadura longitudinal	Armadura transversal	Estribos horizontais	Estribos verticais*
LVP1	4Ø16; 4Ø16	Ø 8 c/150	6Ø16+4Ø16	Ø 8 c/150	4Ø8	4Ø16
LVP2	4Ø16; 4Ø16	Ø 8 c/150	6Ø16+4Ø16	Ø 8 c/150	2Ø8	4Ø16
LVP3	4Ø16; 4Ø16	Ø 8 c/150	6Ø16+4Ø16	Ø 8 c/150	4Ø8	4Ø16
LVP4	4Ø16; 4Ø16	Ø 8 c/150	6Ø16+4Ø16	Ø 8 c/150	2Ø8	4Ø16
LVP5	4Ø16; 4Ø16	Ø 8 c/150	6Ø16+4Ø16	Ø 8 c/150	4Ø8	4Ø16

(*): Barras longitudinais intermediárias do pilar

Fonte: Adaptado de Alva (2004)

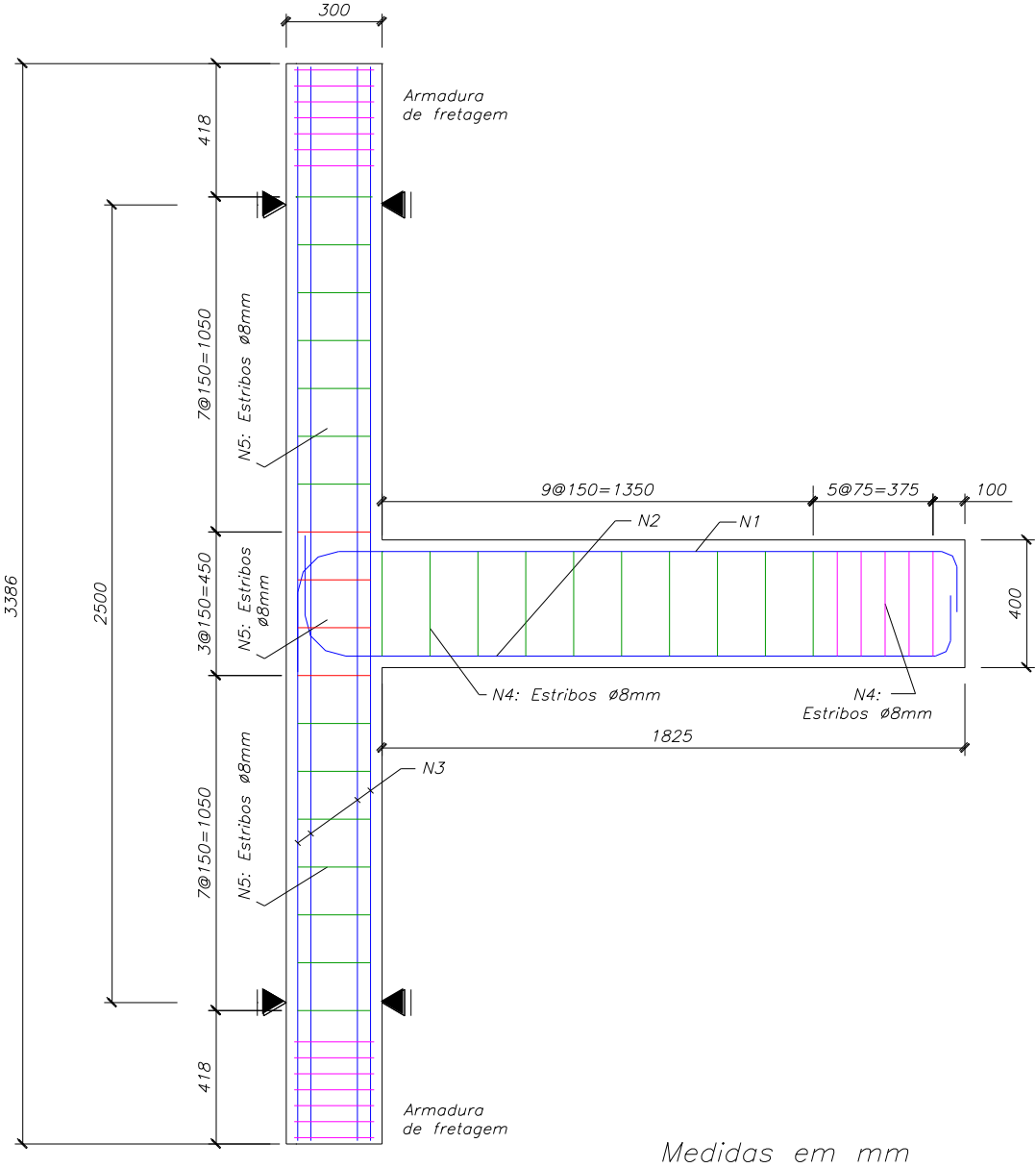
Figura 23 - Detalhamento da ligação LVP1



Medidas em mm

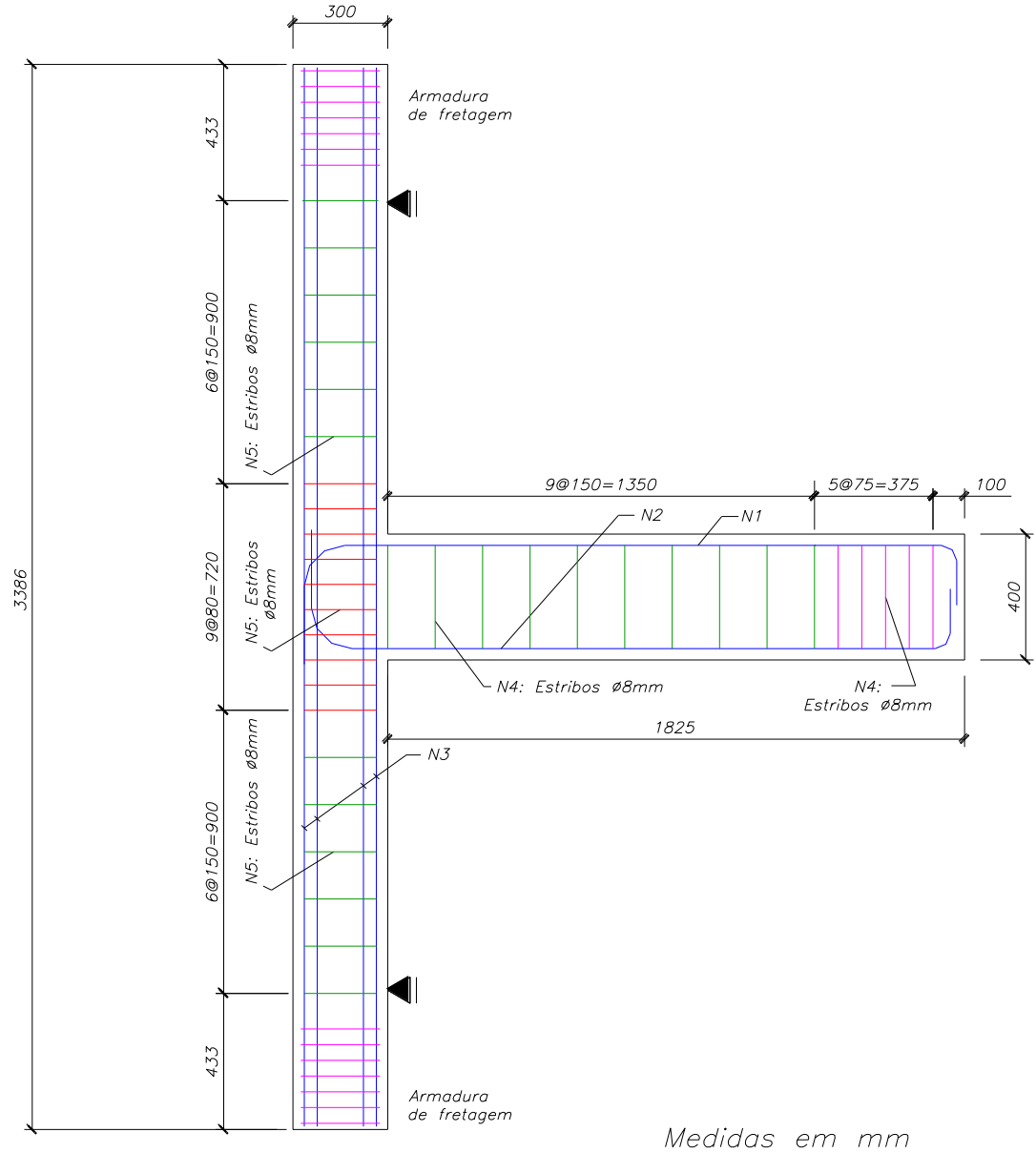
Fonte: Alva (2004)

Figura 24 - Detalhamento das ligações LVP2 e LVP4



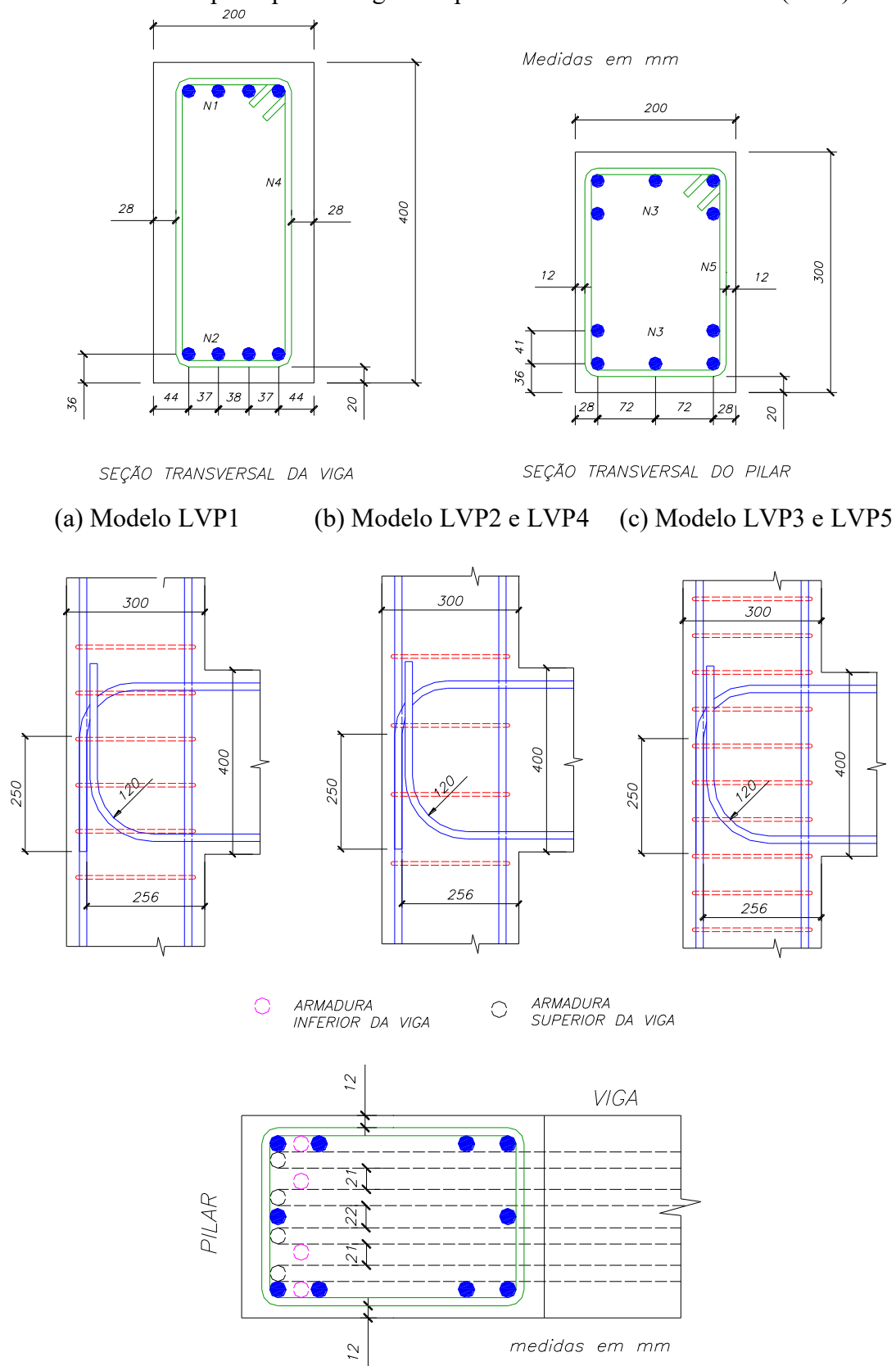
Fonte: Alva (2004)

Figura 25 - Detalhamento das ligações LVP3 e LVP5



Fonte: Alva (2004)

Figura 26 - Detalhe das seções transversais dos elementos viga e pilar, dos nós de pórtico e das armaduras principais da viga e do pilar no interior do nó de Alva (2004)



Fonte: Alva (2004)

As propriedades mecânicas obtidas nos ensaios podem ser vistas na Tabela 5. A Tabela 6 contém os valores obtidos nos ensaios de caracterização dos aços das armaduras.

Tabela 5 - Propriedades mecânicas do concreto obtidas nos ensaios de Alva (2004)

Modelo	f_c (MPa)	E_{cs} (MPa)	E_{ci} (MPa)	$f_{t,diam}$ (MPa)
LVP1	40,43	27.902	31.712	2,87
LVP2	44,18	29.579	33.603	3,30
LVP3	23,89	25.093	28.315	1,95
LVP4	24,62	25.235	28.467	2,08
LVP5	25,91	25.487	28.736	2,20

f_c é a resistência a compressão do concreto;

E_{cs} é o módulo de elasticidade secante do concreto;

E_{ci} é o módulo de elasticidade inicial do concreto;

$f_{t,diam}$ é a resistência a tração do concreto obtido por compressão diametral.

Fonte: Adaptado de Alva (2004)

Alva (2004) iniciou o ensaio com a aplicação uma força normal constante no pilar, para simular as ações gravitacionais, e logo após foram aplicadas forças concentradas alternadas (com inversão de sinal) na extremidade da viga. A Figura 27 mostra o esquema do ensaio e a convenção de sinais da força aplicada.

Tabela 6 - Propriedades mecânicas do aço das armaduras de Alva (2004)

Modelo	Diâmetro da barra (mm)	E_s (MPa)	f_y (MPa)	f_u (MPa)
LVP1	8	211.000	610	727
	16	181.700	630	738
LVP2 à LVP5	8	212.400	602	692
	16	213.000	594	703

E_s é o módulo de elasticidade do aço;

f_y é a tensão de escoamento do aço;

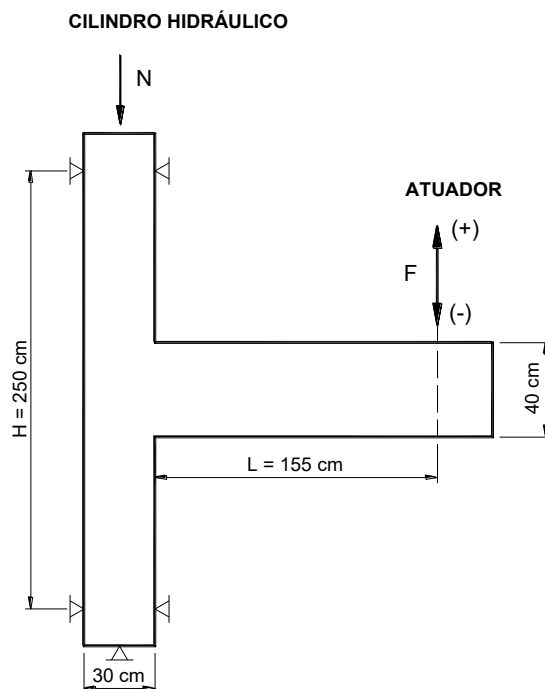
f_u é a tensão de ruptura do aço.

Fonte: Adaptado de Alva (2004)

A força normal de compressão constante aplicada no topo dos pilares nos modelos LVP1 e LVP2 foi de 360 kN, nas outras ligações foi de 240 kN, devido a menor resistência a compressão do concreto. Após a aplicação desta força, o autor iniciou a Etapa 1, comum a todos os modelos. Nesta etapa foi feita a aplicação de carregamentos crescentes e com

inversão de sinal na extremidade da viga, com picos máximos e mínimos de ± 10 kN; ± 20 kN; ± 30 kN; ± 40 kN; ± 50 kN e ± 60 kN, totalizando 6 ciclos.

Figura 27 - Esquema de aplicação do carregamento na ligação

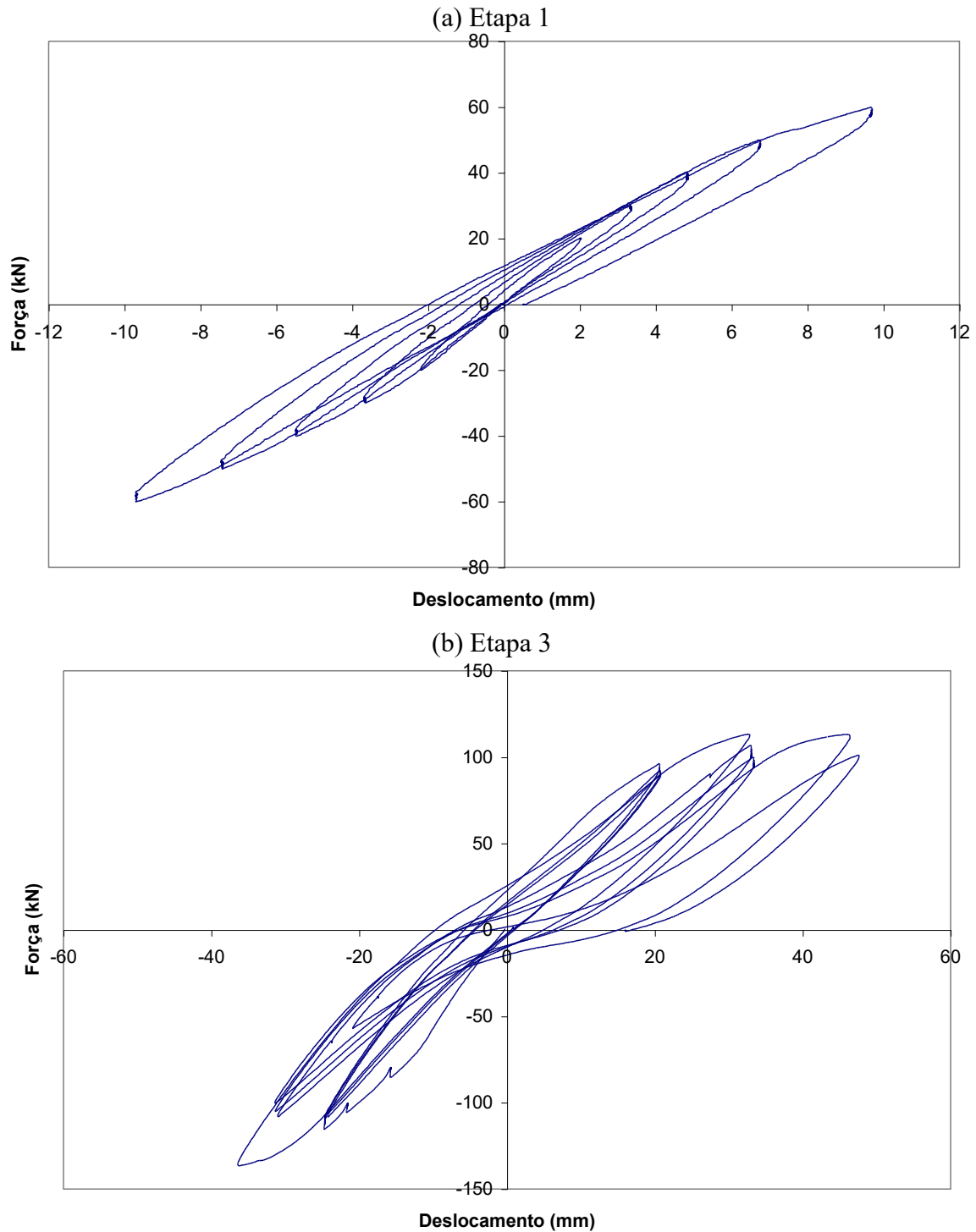


Fonte: Alva (2004)

Nos modelos LVP1 e LVP2, a Etapa 2 caracterizou-se na aplicação de carregamento com inversão de sinal de amplitude constante. Na Etapa 3 desses dois modelos, aplicou-se por fim carregamentos que simularam sismos de moderada intensidade. Maiores detalhes da aplicação do carregamento podem ser encontrados em Alva (2004).

Na Etapa 2 dos modelos LVP3 e LVP4 foram aplicados carregamentos com inversão de sinal com 3 ciclos de amplitude ± 70 kN, 3 ciclos de amplitude ± 80 kN, 3 ciclos de ± 90 kN, assim por diante, até que ocorresse a ruína da ligação ou queda brusca de sua resistência. Como a ruptura nessas ligações ocorreu pelo nó de pórtico, antes do início de escoamento das armaduras de flexão da viga, decidiu-se não empregar os resultados dessa etapa nas simulações numéricas deste trabalho. Assim, foram consideradas para as ligações LVP3 e LVP4 apenas os resultados da Etapa 1. Para demonstrar a resposta das ligações frente aos carregamentos aplicados, apresenta-se na Figura 28 a curva força-deslocamento na extremidade da viga.

Figura 28 - Curva força-deslocamento experimental na extremidade da viga: Ligação LVP1



Fonte: Alva (2004)

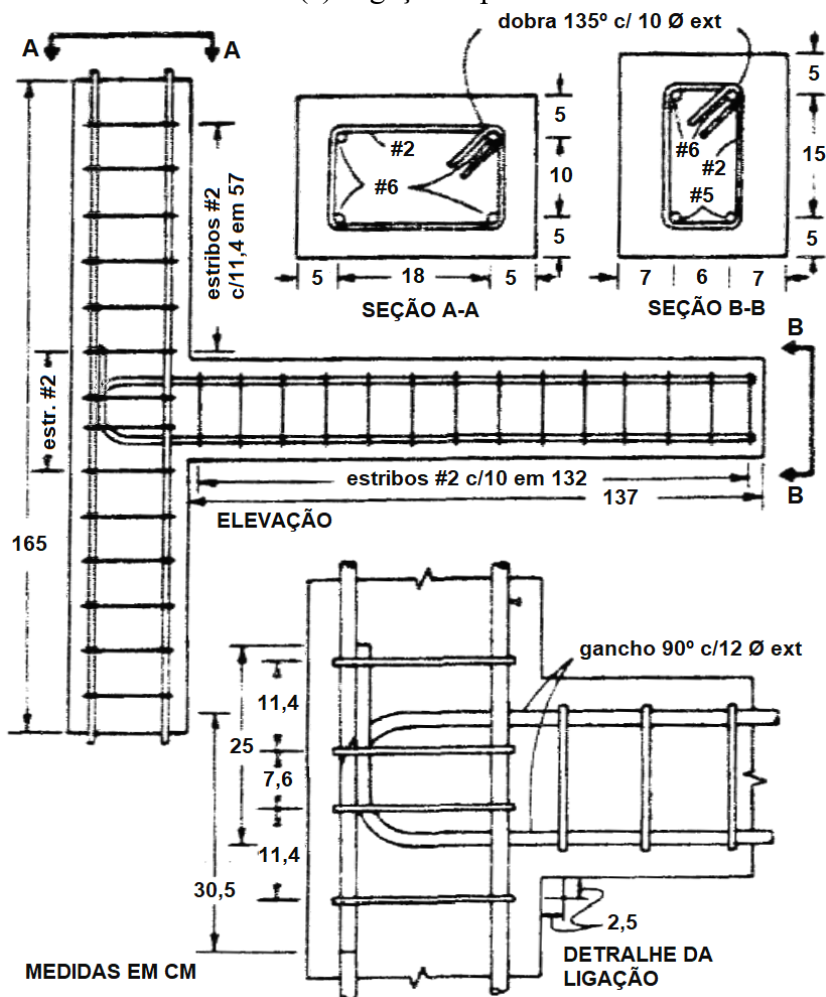
2.3.2 Lee, Wight e Hanson (1977)

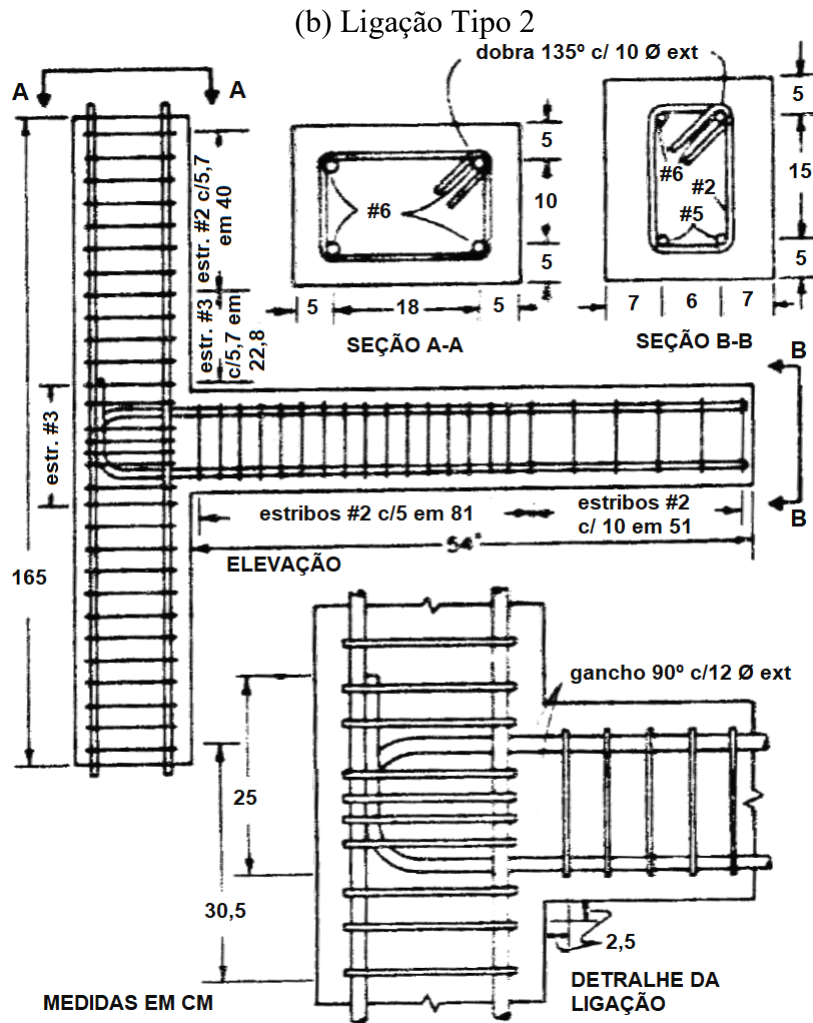
Visando estudar o comportamento de ligações viga-pilar Lee, Wight e Hanson (1977) fizeram um ensaio com 6 modelos (protótipos) de ligações viga-pilar de extremidade

monolíticas. As variáveis escolhidas para os ensaios foram a quantidade de armadura transversal, a magnitude da força axial aplicada no pilar e a intensidade do carregamento sísmico da viga. Assim os autores denominaram dois tipos modelos de ligação para serem ensaiadas: a Tipo 1 e a Tipo 2. Para cada tipo de ligação foram construídos três modelos (protótipos). A principal diferença entre estes dois modelos é a quantidade de armadura transversal na ligação, na viga e no pilar. Os detalhamentos dos modelos de ligação são representados na Figura 29.

A resistência à compressão do concreto utilizado na confecção dos protótipos foi de 27,6 MPa. A tensão de escoamento da armadura longitudinal do pilar foi de 414 MPa, e da armadura longitudinal da viga e de todas as armaduras transversais foi de 276 MPa. Para a armadura transversal, as barras lisas #2 e as barras nervuradas #3 possuíam tensão de escoamento de 273 MPa e 389 MPa, respectivamente.

Figura 29 – Detalhamento dos espécimes de Lee, Wight e Hanson (1977)
(a) Ligação Tipo 1

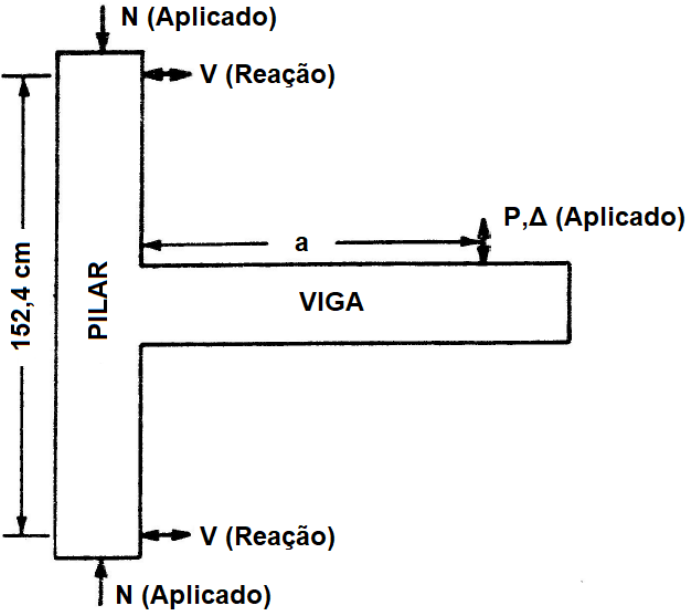




Fonte: Adaptado de Lee, Wight e Hanson (1977)

Os modelos foram ensaiados na posição horizontal. Próximo às extremidades do pilar foram colocados apoios que permitem rotação, para simular os pontos de inflexão. Depois que a força axial foi aplicada no pilar, foi iniciado o carregamento da viga. A Figura 30 mostra um esquema da ensaio, com as posições das forças e das reações.

Figura 30 - Localização das forças aplicadas e das reações de Lee, Wight e Hanson (1977)



Fonte: Adaptado de Lee, Wight e Hanson (1977)

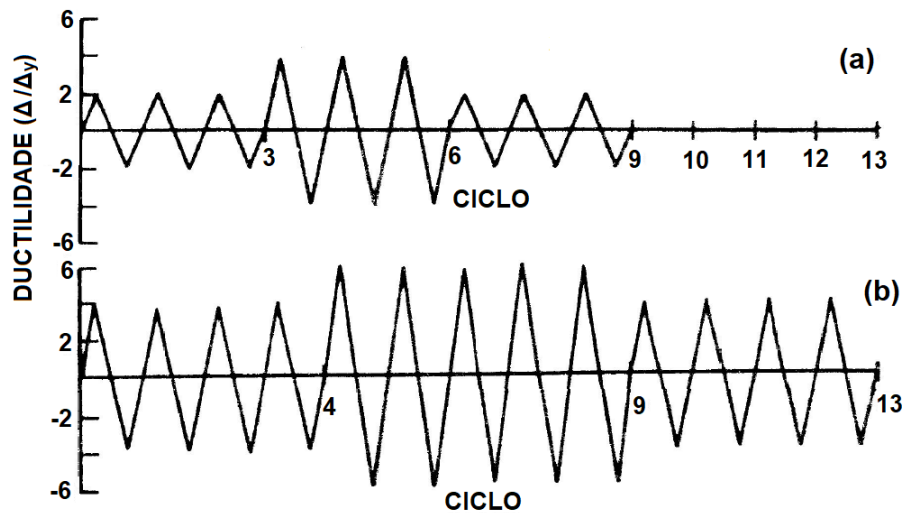
Lee, Wight e Hanson (1977) usaram dois padrões de deslocamentos impostos na extremidade da viga para simular um sismo moderado e um sismo severo (Figura 31). A Tabela 7 contém um resumo do tipo de ligação, tipo de carregamento e padrão de deslocamento imposto para cada protótipo ensaiado.

Tabela 7 - Parâmetros de carregamento de Lee, Wight e Hanson (1977)

Protótipo	Tipo de ligação	Tipo de sismo	Força axial do pilar (kN)	Ponto de aplicação da força, <i>a</i> (cm)
Specimen 1	2	Moderado	178	118
Specimen 2	2	Severo	178	118
Specimen 3	1	Moderado	178	118
Specimen 4	1	Severo	178	118
Specimen 5	2	Severo	0	105
Specimen 6	1	Severo	0	105

Fonte: Adaptado de Lee, Wight e Hanson (1977)

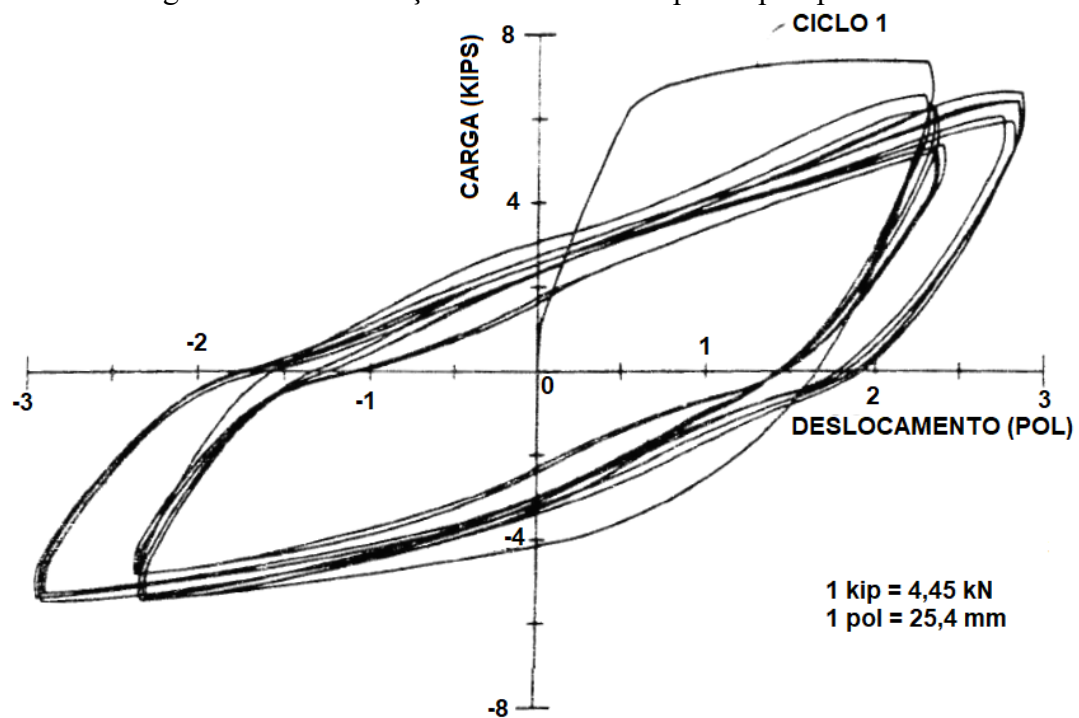
Figura 31 - Padrões de deslocamento da ponta da viga de Lee, Wight e Hanson (1977):
(a) Sismo moderado; (b) Sismo severo



Fonte: Adaptado de Lee, Wight e Hanson (1977)

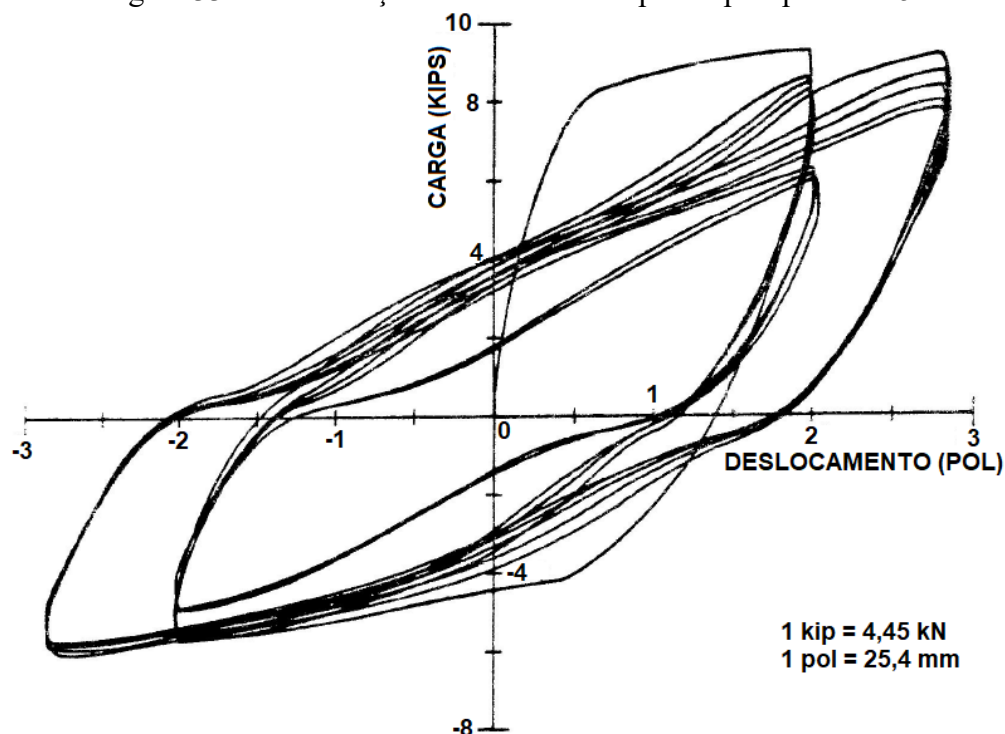
A Figura 32 e a Figura 33a e b contém a curva força-deslocamento na extremidade da viga para os protótipos Specimen 2 e Specimen 5.

Figura 32 - Curva força-deslocamento do protótipo Specimen 2



Fonte: Adaptado de Lee, Wight e Hanson (1977)

Figura 33 - Curva força-deslocamento do protótipo Specimen 5



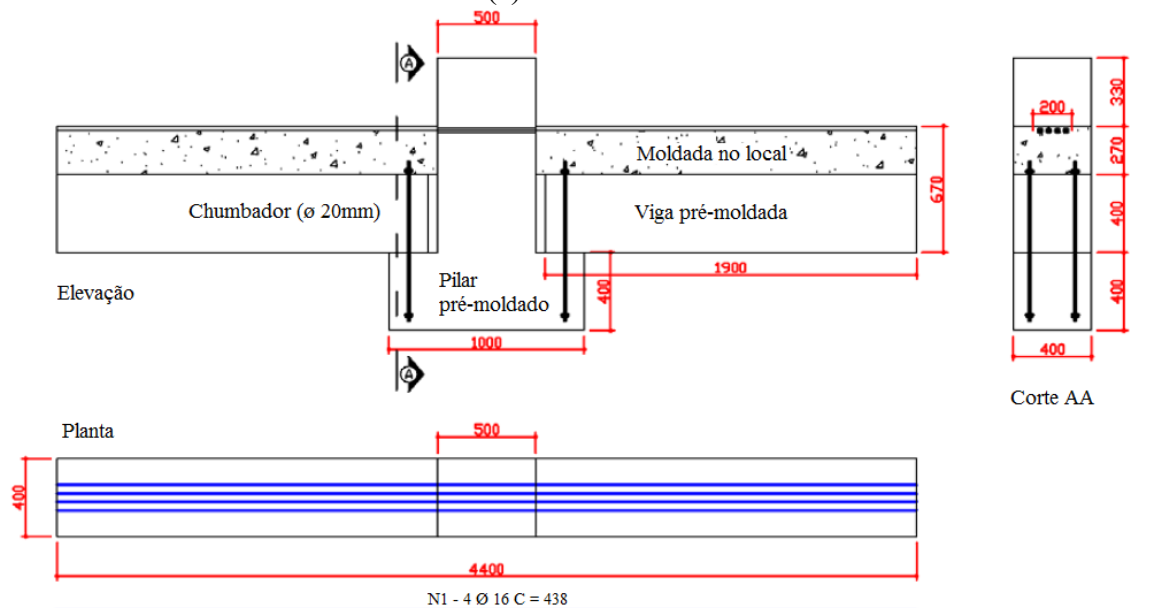
Fonte: Adaptado de Lee, Wight e Hanson (1977)

2.3.3 Kataoka (2007)

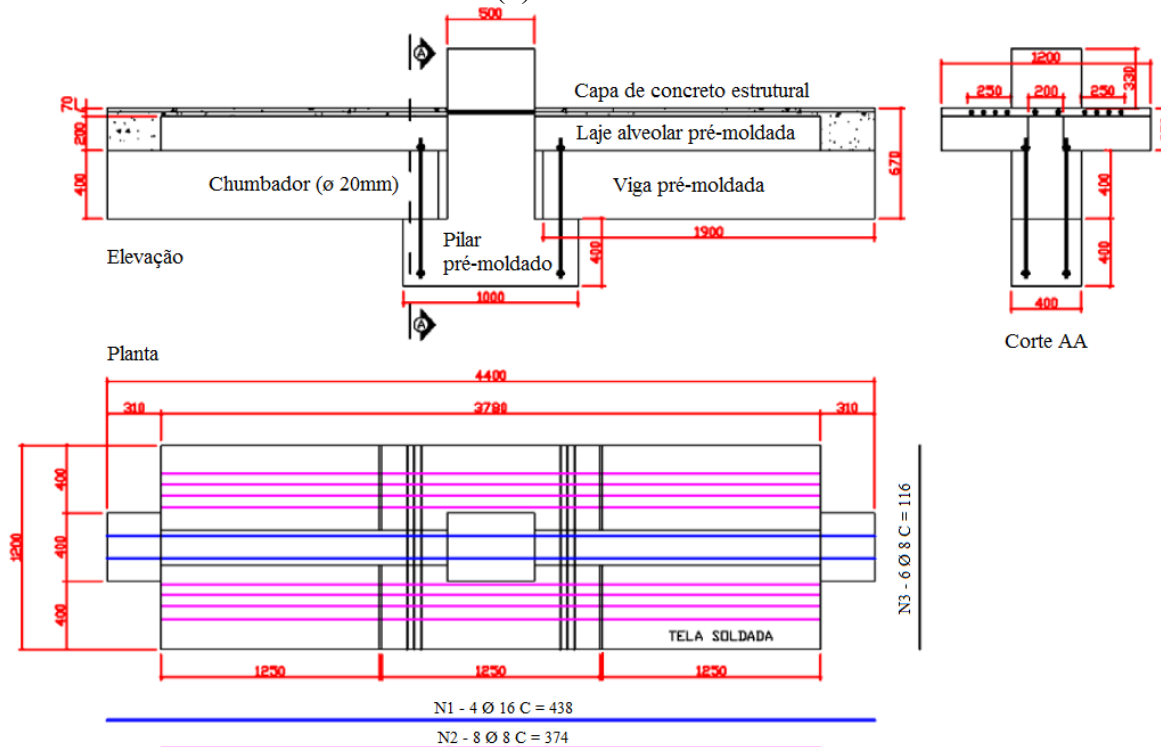
Para melhor analisar a interação entre a viga e o pilar em ligações pré-moldadas com armadura de continuidade negativa, Kataoka (2007) ensaiou dois protótipos em formato cruciforme, constituídos por duas vigas em balanço apoiadas em um pilar central. O primeiro protótipo, chamado de Modelo 1, não possuía laje e as barras da armadura negativa de continuidade foram colocadas passando dentro do pilar. No segundo protótipo, chamado de Modelo 2, foi colocada laje alveolar sobre a viga e as barras da armadura de continuidade foram colocadas atravessando o pilar e também passando nas laterais acima da laje. Maiores detalhes dos protótipos podem ser vistos na Figura 34.

As vigas tinham uma seção transversal pré-moldada de 400 x 400 mm, com posterior colocação de 200 mm de altura de concreto moldado no local para futura solidarização com a capa de concreto e a armadura negativa. Os pilares possuíam uma seção de 500 x 400 mm e 1400 mm de altura, com consolo de seção transversal de 400 x 250 mm e dois chumbadores de 20 mm de diâmetro. O detalhamento das armaduras das vigas, consolos e pilares podem ser vistos nas Figura 35, Figura 36 e Figura 37 respectivamente.

Figura 34 - Detalhes dos protótipos testados
(a) Modelo 1



(b) Modelo 2

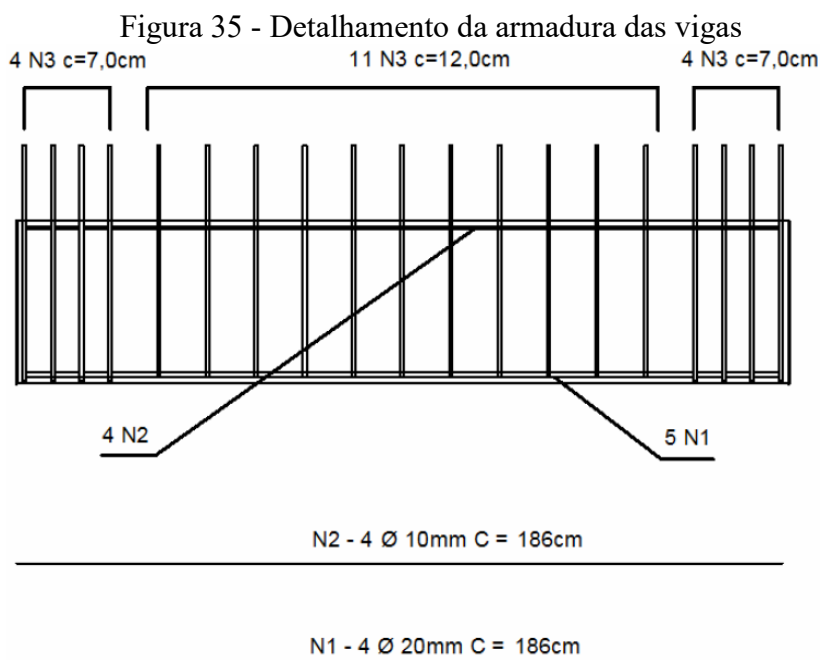


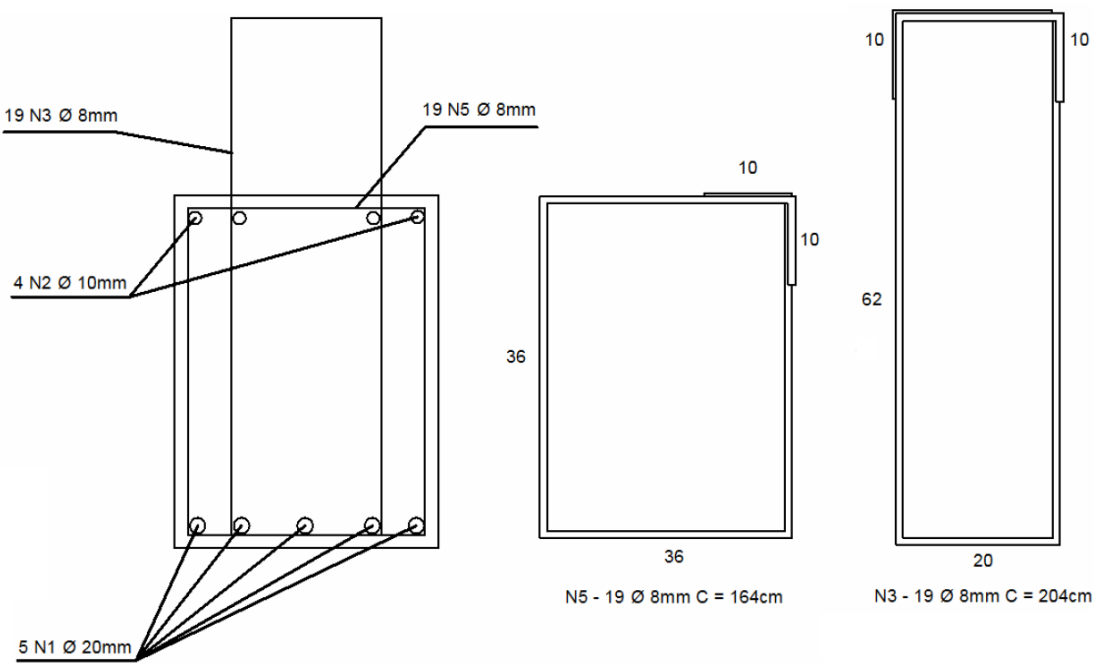
Fonte: Adaptado de Kataoka (2007)

As lajes utilizadas no Modelo 2 são do tipo alveolar com 400 mm de balanço e 200 mm de espessura, onde foram adicionados uma capa de concreto moldado no local de 70 mm. As dimensões das lajes podem ser vistas na Figura 38. As barras longitudinais do Modelo 2 situadas na laje foram colocadas em uma faixa de 250 mm a partir da face do pilar.

A área de aço utilizada para a armadura de continuidade foi de 804 mm². No Modelo 1, 100% da armadura de continuidade passava por dentro do pilar. No Modelo 2, 50% da armadura de continuidade passava dentro do pilar e 50% passava nas laterais acima das lajes alveolares. Além da armadura de continuidade negativa, a capa de concreto da laje também possuía uma malha de aço de fios de 4,5 mm de diâmetro com espaçamento de 100 mm.

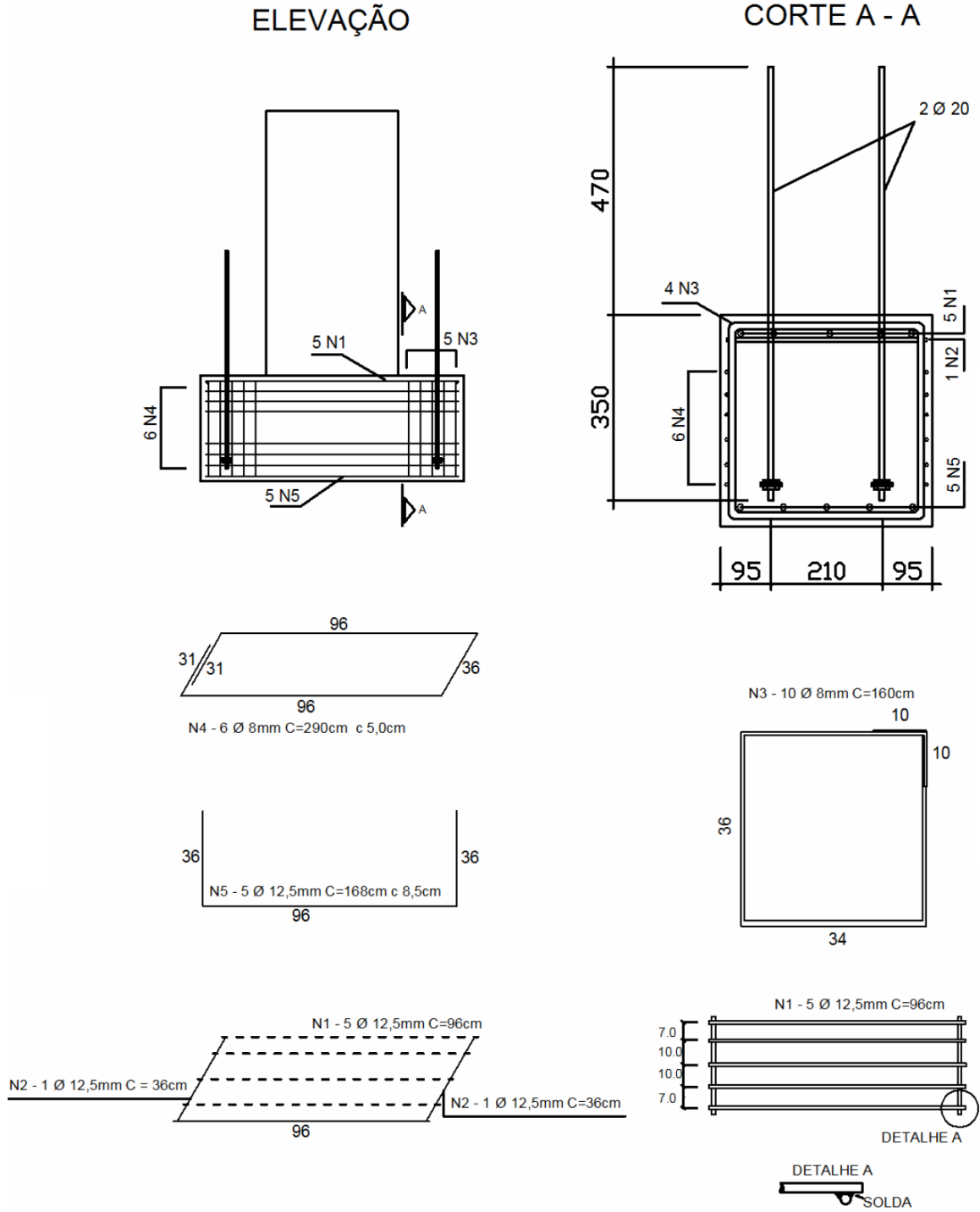
O concreto moldado no local atingiu um valor de resistência à compressão média de 25,7 MPa. Já o concreto utilizado na confecção das peças pré-moldadas atingiu um valor de 40 MPa, com módulo de elasticidade de 30.270 MPa. O graute utilizado apresentou uma resistência à compressão média de 40 MPa no dia do ensaio.





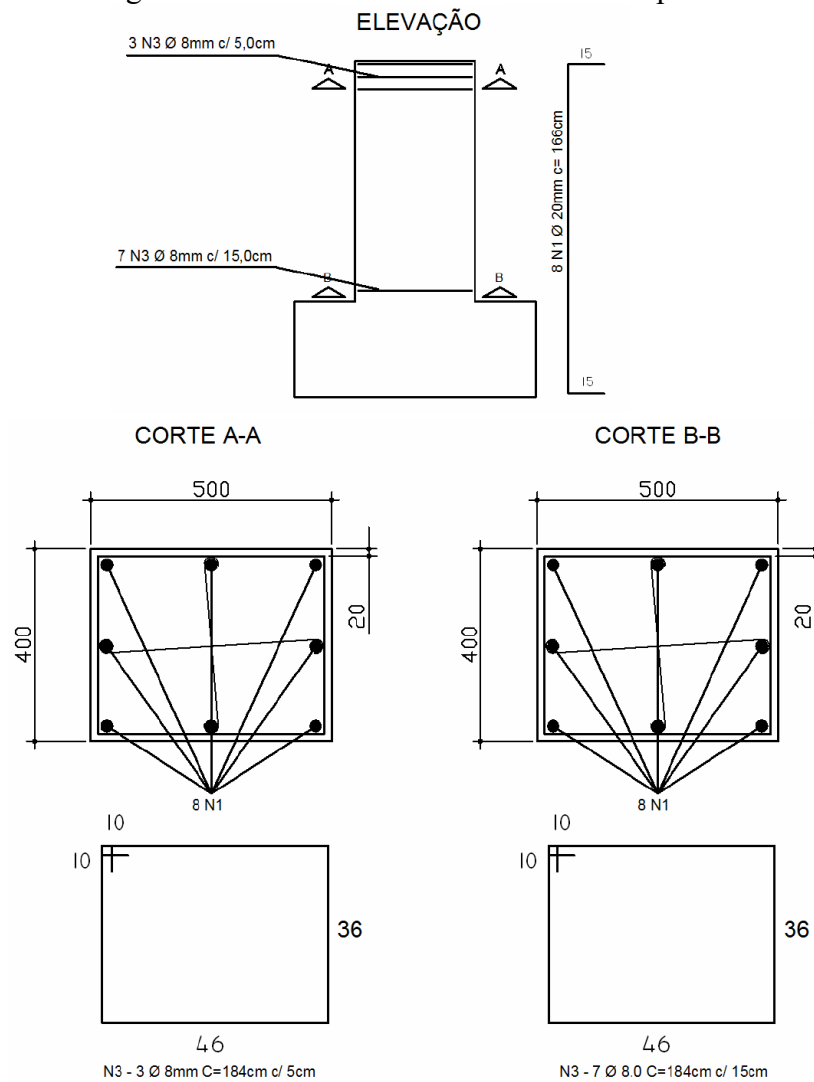
Fonte: Kataoka (2007)

Figura 36 - Detalhes da armadura dos consolos



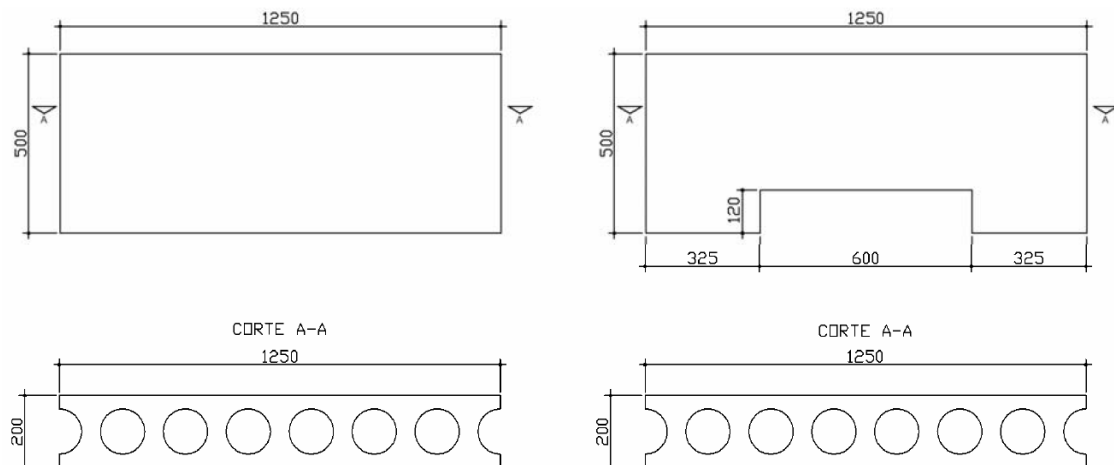
Fonte: Kataoka (2007)

Figura 37 - Detalhamento da armadura dos pilares



Fonte: Kataoka (2007)

Figura 38 - Dimensões dos segmentos de laje alveolar utilizados na construção do Modelo 2



Fonte: Kataoka (2007)

O ensaio procedeu com um carregamento monotônico, sendo o carregamento foi aplicado nas extremidades das vigas. A distância do ponto de aplicação do carregamento e até o centro de giro da ligação foi de 170 cm. Durante todo o ensaio foi aplicada uma força de 170 kN no topo do pilar para simular o carregamento proveniente dos pavimentos superiores. Foram utilizados três pórticos de reação para o ensaio. A configuração final do esquema de ensaio pode ser visto na Figura 39.

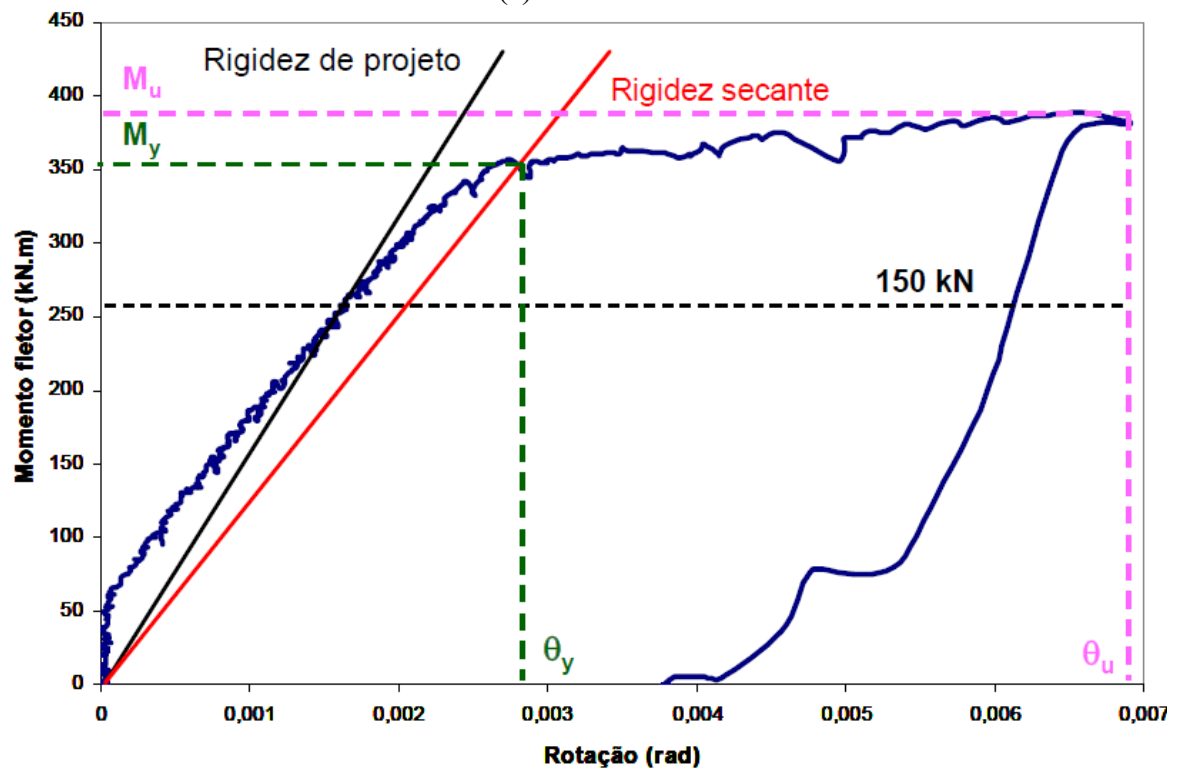
Figura 39 - Configuração final do esquema de ensaio



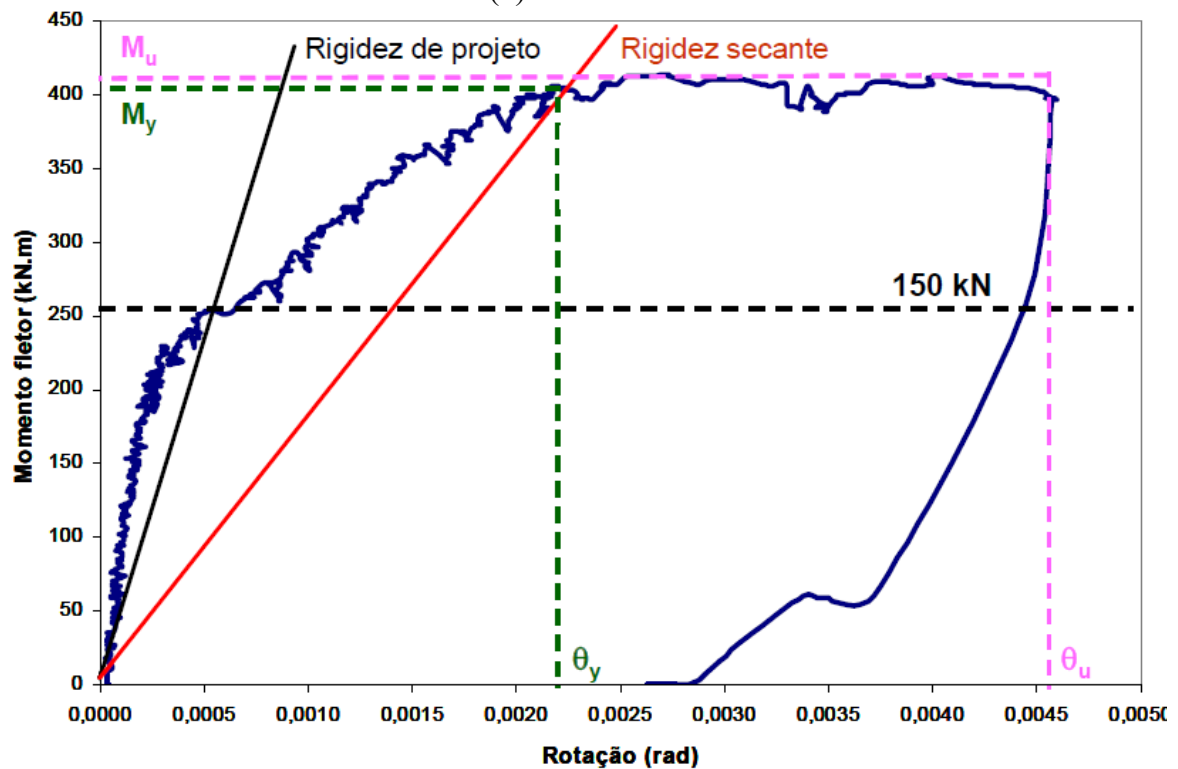
Fonte: Kataoka (2007)

Os resultados obtidos por Kataoka (2007) em relação às curvas momento-rotação das ligações podem ser observados na Figura 40. A força máxima prevista de projeto foi de 150 kN.

Figura 40 - Curvas momento-rotação relativa com indicação das rigidezes secantes
(a) Modelo 1



(b) Modelo 2

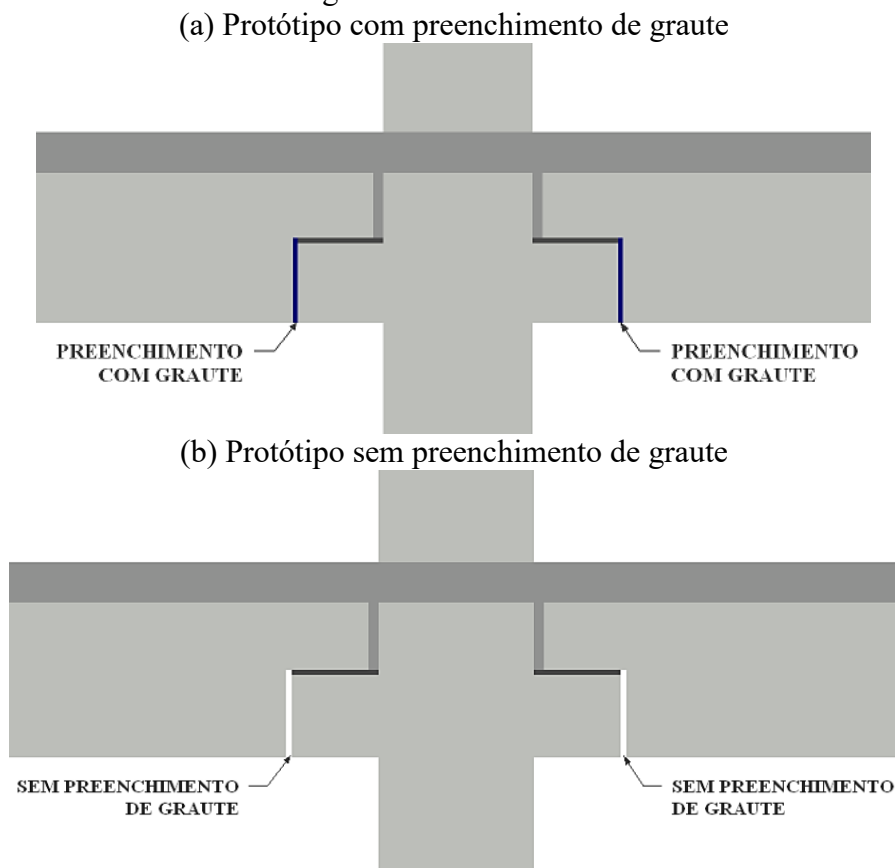


Fonte: Kataoka (2007)

2.3.4 Lacerda (2016)

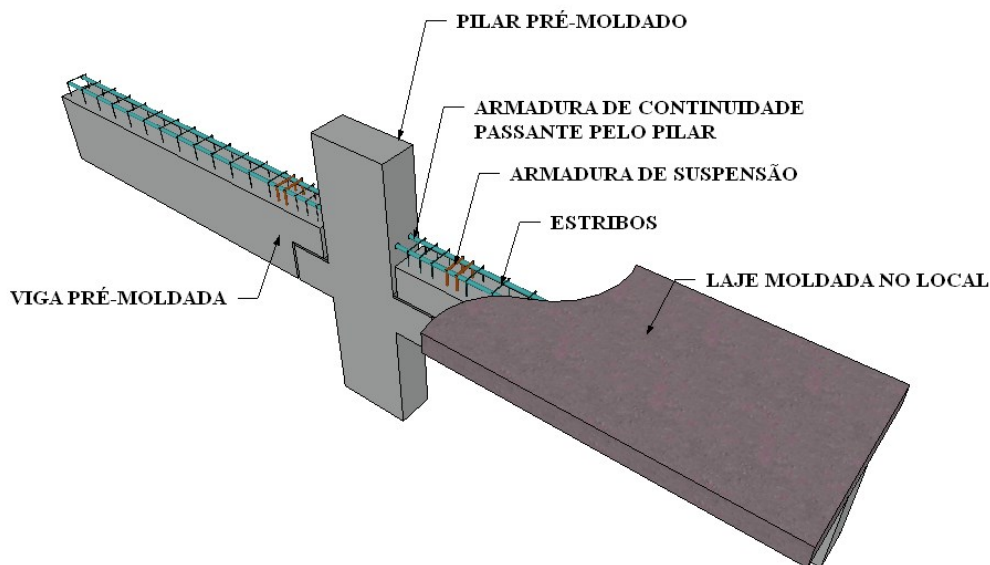
Lacerda (2016) realizou uma investigação experimental de ligações viga-pilar pré-moldados submetidas a momentos fletores negativos com armadura de continuidade, sendo a extremidade da viga (dente Gerber) apoiada em consolo e fixa por meio de chumbador. Foram analisados a influência de duas variáveis: i) o preenchimento ou não com graute na interface vertical entre o consolo e a viga, como ilustrado na Figura 41 e; ii) a posição da armadura de continuidade, passante somente pelo pilar ou somente pela laje, como ilustrado na Figura 42.

Figura 41 - Preenchimento de graute na interface vertical entre o consolo e a viga

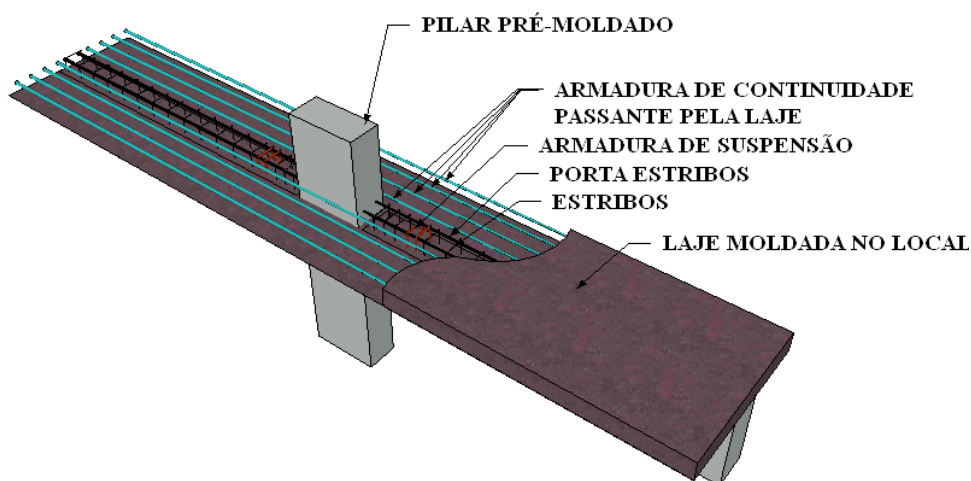


Fonte: Lacerda (2016)

Figura 42 - Posição das armaduras de continuidade
(a) Armadura de continuidade passante somente pelo pilar



(b) Armadura de continuidade passante somente pela laje



Fonte: Lacerda (2016)

A autora analisou quatro tipologias de ligação, das quais foram criados dois protótipos para cada, totalizando 8 ligações ensaiadas. A nomenclatura empregada para cada tipologia consta na Tabela 8. Todos os protótipos possuíam as mesmas dimensões, sendo cada um composto por um pilar pré-moldado e duas vigas pré-moldadas, as quais foram apoiadas em balanço sobre almofada de graute em consolo de concreto com presença de chumbador. Os protótipos também apresentam laje maciça de concreto moldada no local, preenchimento de graute na interface entre o pilar e a viga, armadura de continuidade e o preenchimento ou não de graute na interface vertical entre o consolo e a viga. As características geométricas dos protótipos e o detalhamento dos chumbadores estão indicados na Figura 43 e na Figura

45 respectivamente. O detalhamento dos pilares, do consolo, das vigas e das lajes estão indicados na Figura 44 à Figura 49.

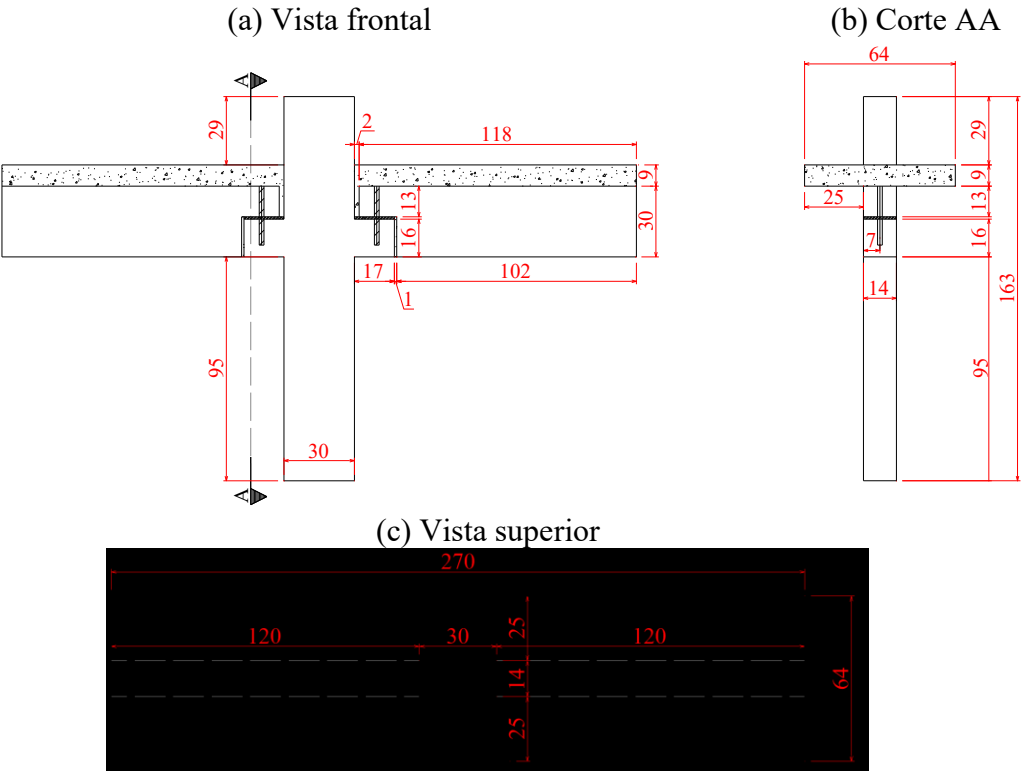
Tabela 8 - Resumo das características dos protótipos ensaiados por Lacerda (2016)

Protótipo	Variáveis		Quantidade
	Armadura de continuidade	Preenchimento com graute	
LS	Laje	Sem	2
LC	Laje	Com	2
PS	Pilar	Sem	2
PC	Pilar	Com	2

LS - Protótipo com armadura de continuidade na Laje Sem preenchimento de graute.
LC - Protótipo com armadura de continuidade na Laje Com preenchimento de graute.
PS - Protótipo com armadura de continuidade no Pilar Sem preenchimento de graute.
PC - Protótipo com armadura de continuidade no Pilar Com preenchimento de graute.

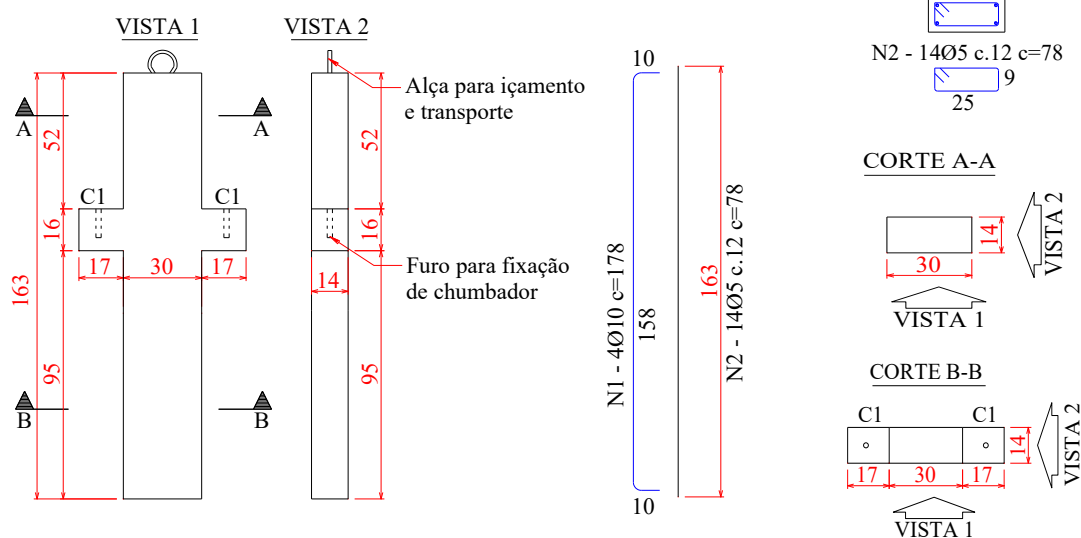
Fonte: Lacerda (2016)

Figura 43 - Características geométricas dos protótipos (medidas em cm)

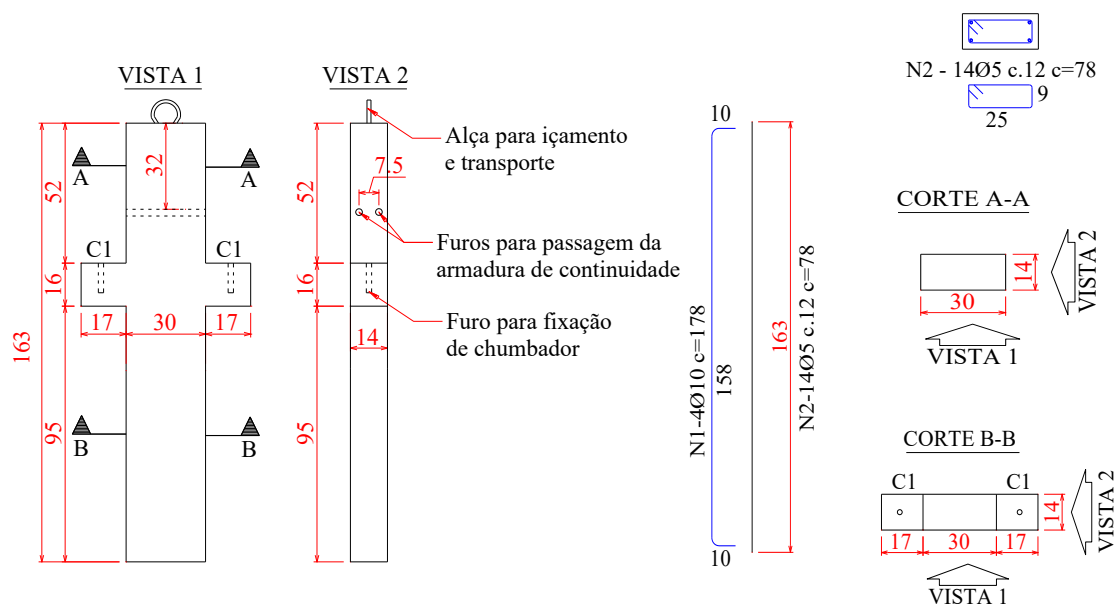


Fonte: Lacerda (2016)

Figura 44 - Detalhamento dos pilares dos protótipos (medidas de comprimento em cm)
(a) Protótipos LS e LC

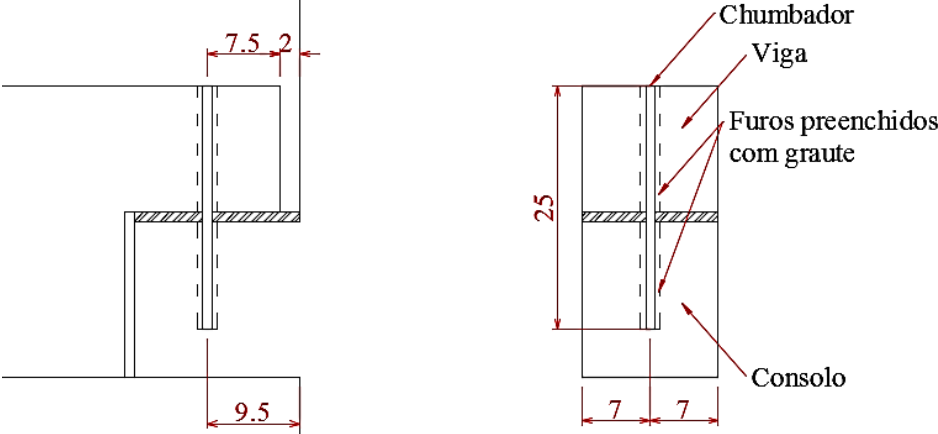


(b) Protótipos PS e PC



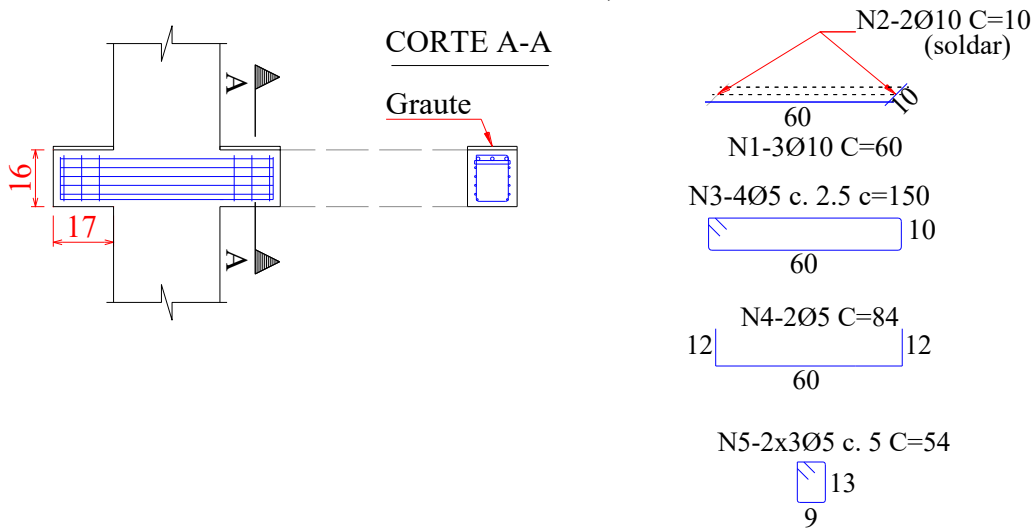
Fonte: Lacerda (2016)

Figura 45 - Detalhes do posicionamento do chumbador (medidas em cm)

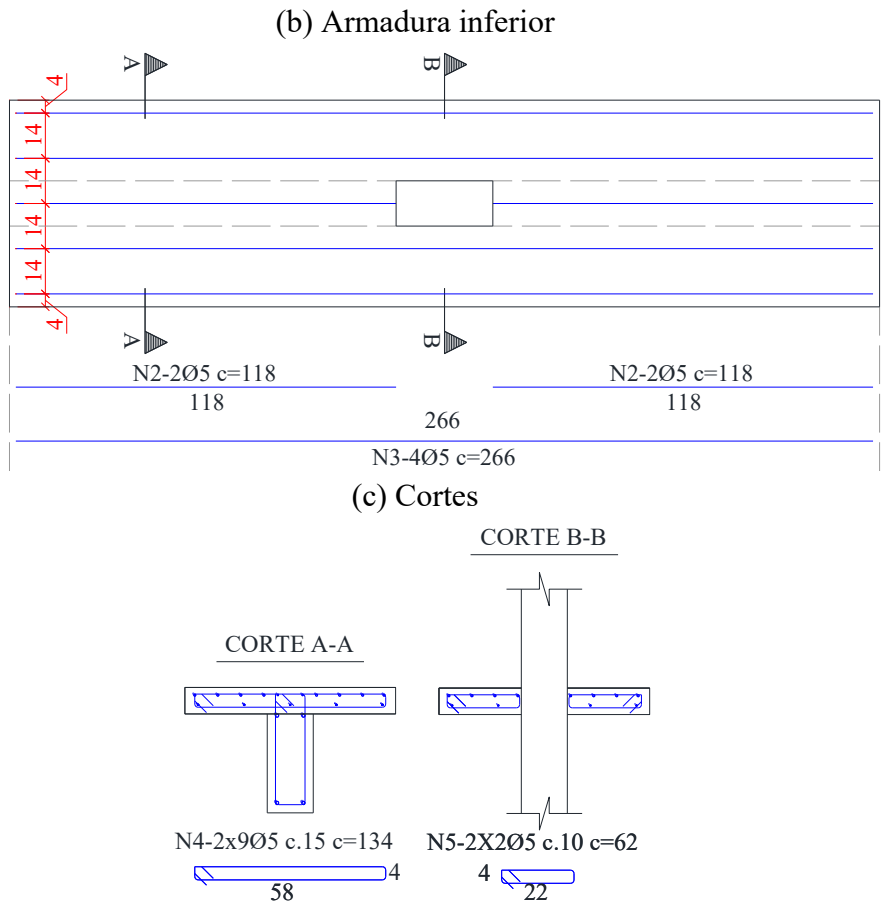


Fonte: Lacerda (2016)

Figura 46 - Detalhamento dos consolos de todos os protótipos (medidas de comprimento em cm)

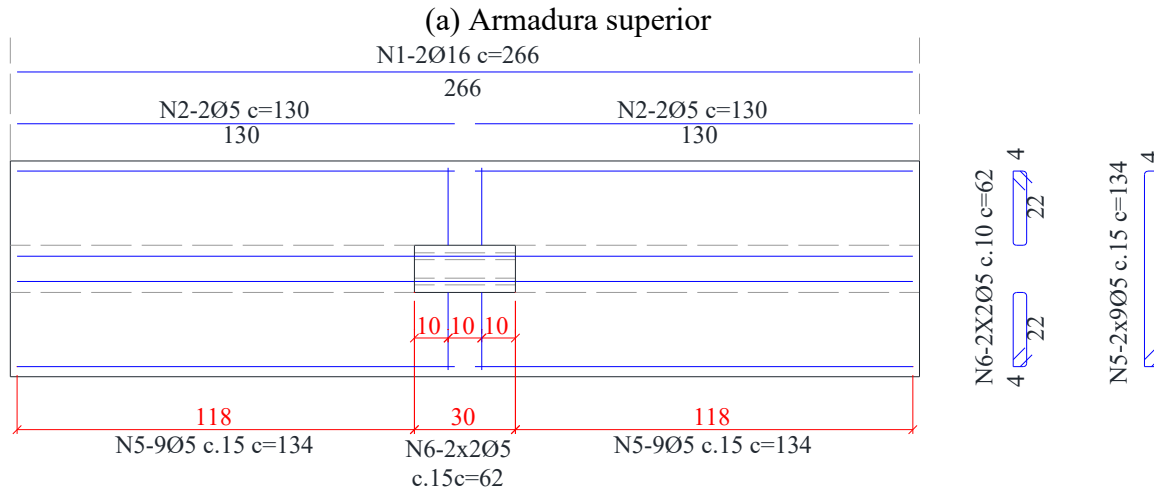


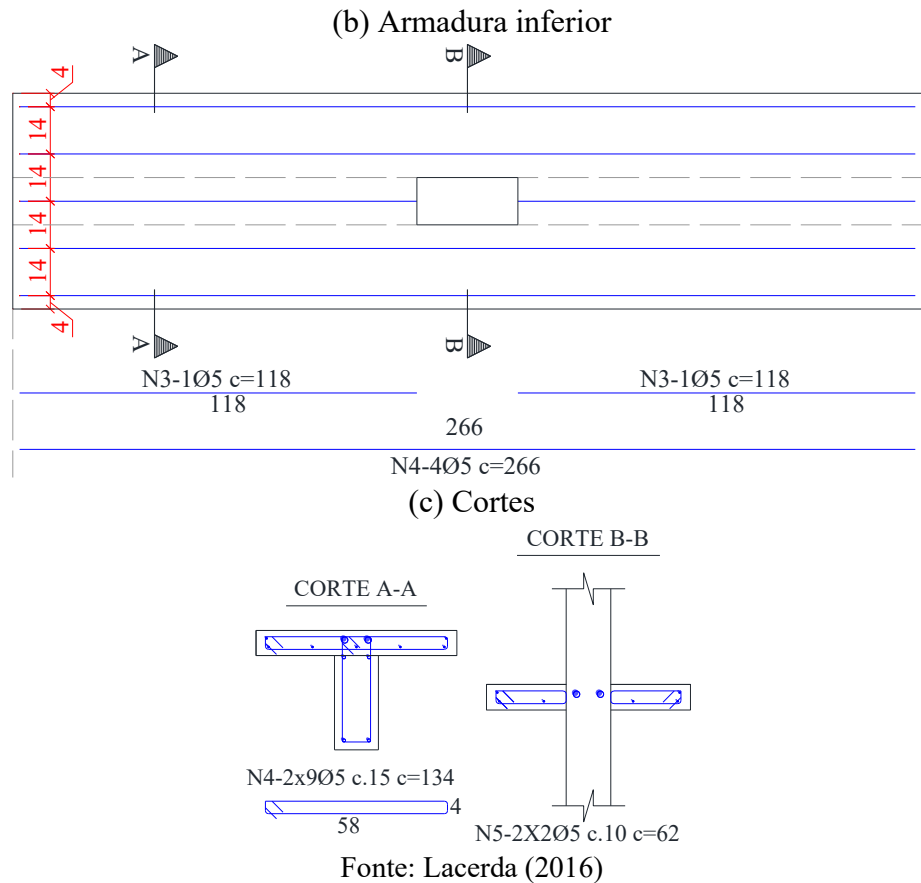
Fonte: Lacerda (2016)



Fonte: Lacerda (2016)

Figura 49 - Detalhamento da laje dos protótipos PC e PS (medidas de comprimento em cm)





O aço utilizado para as armaduras de continuidade foi o CA-50. A área total de armadura de continuidade utilizada em cada protótipo foi de 4,02 cm², conforme Tabela 9. Essa armadura foi solidarizada juntamente com a concretagem da laje de 9 cm de espessura, provendo a resistência à flexão negativa para a ligação.

Tabela 9 - Descrição da armadura de continuidade utilizada

Protótipo	Posição de armadura de continuidade	Armadura de continuidade
LS	Laje	8 Ø 8 mm
LC	Laje	8 Ø 8 mm
PS	Pilar	2 Ø 16 mm
PC	Pilar	2 Ø 16 mm

Fonte: Lacerda (2016)

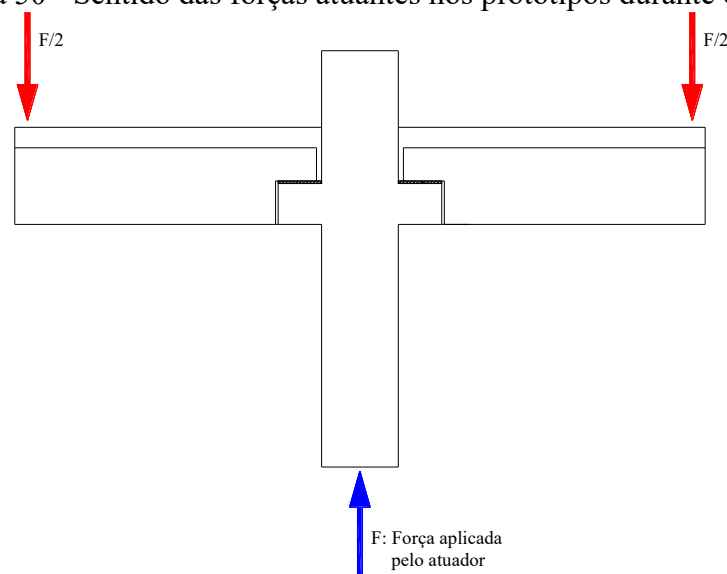
Nos consolos e nas vigas foram deixados furos para fixação dos chumbadores. Após a colocação dos mesmos, os furos foram preenchidos com graute. Os chumbadores foram de aço CA 60, tendo diâmetro de 9,5 mm e comprimento de 25 cm. Foi especificado graute auto

adensável com retração compensada, e com resistência à compressão similar à do concreto dos elementos pré-moldados (40 MPa).

Foram feitos ensaios para a caracterização dos materiais. Sobre o concreto, os resultados foram: resistência à compressão de aproximadamente de 48 MPa para os pilares e para as vigas e de aproximadamente 35 MPa para as lajes. A resistência à compressão do graute foi próxima de 50 MPa. Por fim a tensão de escoamento e tensão de ruptura do aço das armaduras de continuidade foram de 600 MPa e 730 MPa respectivamente. (Lacerda et al., 2018)

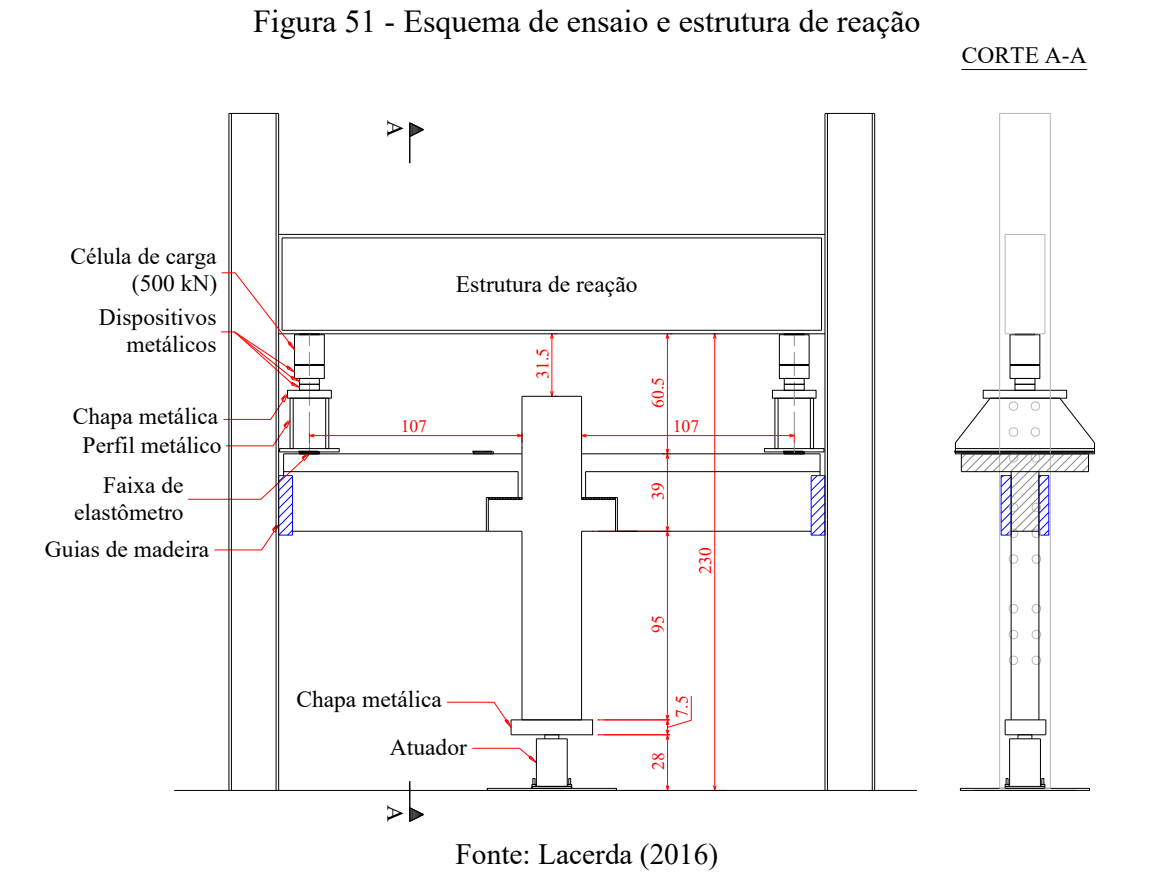
No ensaio foi utilizado um atuador que aplicou uma força crescente F para cima, na base pilar, gerando momentos negativos nas vigas. Consequentemente, cada viga foi sujeita a $F/2$ causada pelo pórtico de reação (Figura 50).

Figura 50 - Sentido das forças atuantes nos protótipos durante o ensaio



Fonte: Lacerda (2016)

O esquema de ensaio e a estrutura de reação utilizados por Lacerda (2016) são ilustrados na Figura 51.



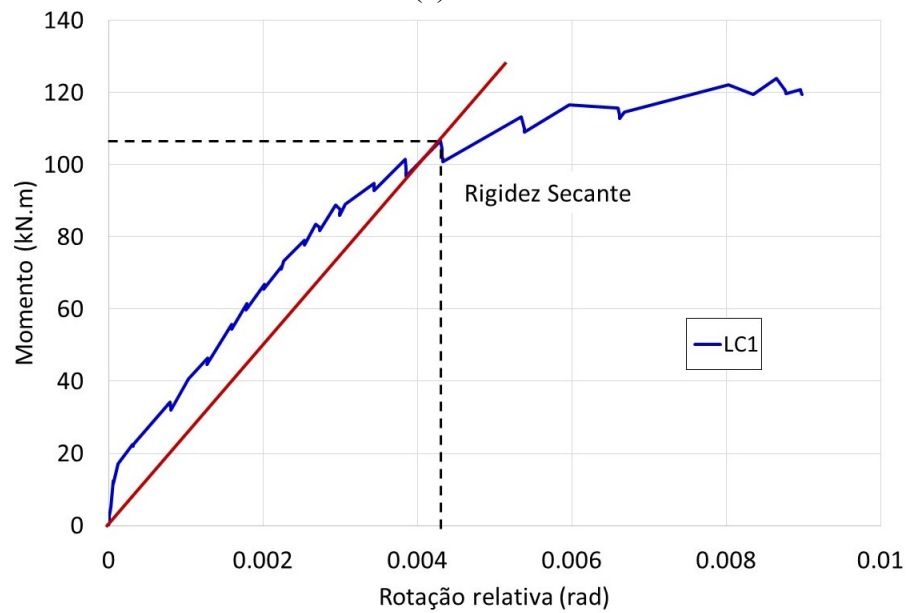
A partir dos dados obtidos no ensaio obtiveram-se as curvas momento rotação de cada protótipo (Figura 52 a Figura 55). A autora ainda determinou as rigidezes secantes para cada modelo, cujos valores estão na Tabela 10, juntamente com os momento de início de escoamento e suas respectivas rotações relativas.

Tabela 10 - Obtenção experimental da rigidez secante ao momento fletor das ligações

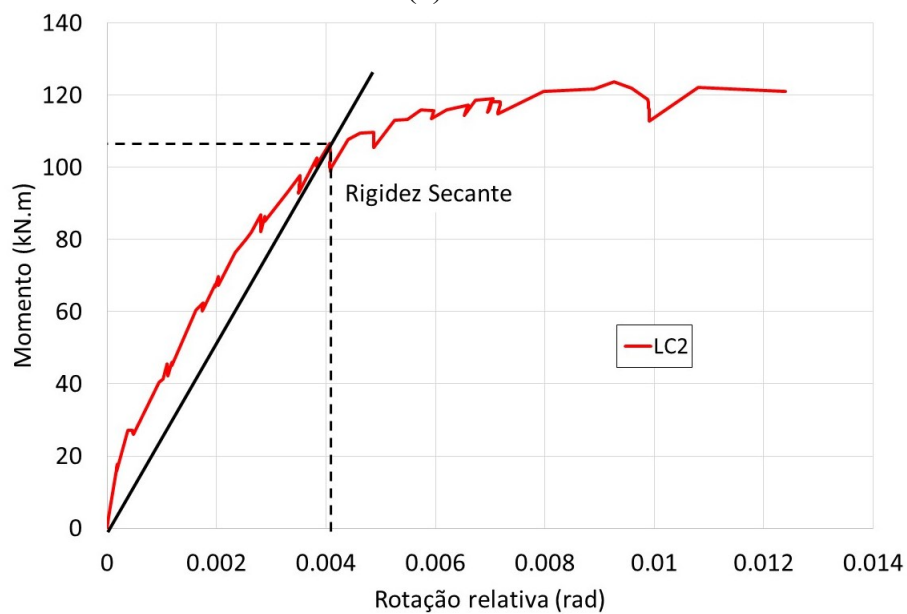
Ligação	M_y (kN.m)	θ_y (rad)	Rigidez secante (kN.m/rad)	Rigidez secante média (kN.m/rad)
LC1	106,65	0,0042969	24820	25525
LC2	106,62	0,0040647	26231	
LS1	55,517	0,017937	3095	3956
LS2	73,102	0,015178	4816	
PC1	105,51	0,0032868	32101	32256
PC2	110,99	0,0034244	32412	
PS1	72,957	0,013449	5425	6823
PS2	74,269	0,0090347	8220	

Fonte: Lacerda (2016)

Figura 52 - Curva momento-rotação: protótipos LC1 e LC2
(a) LC1



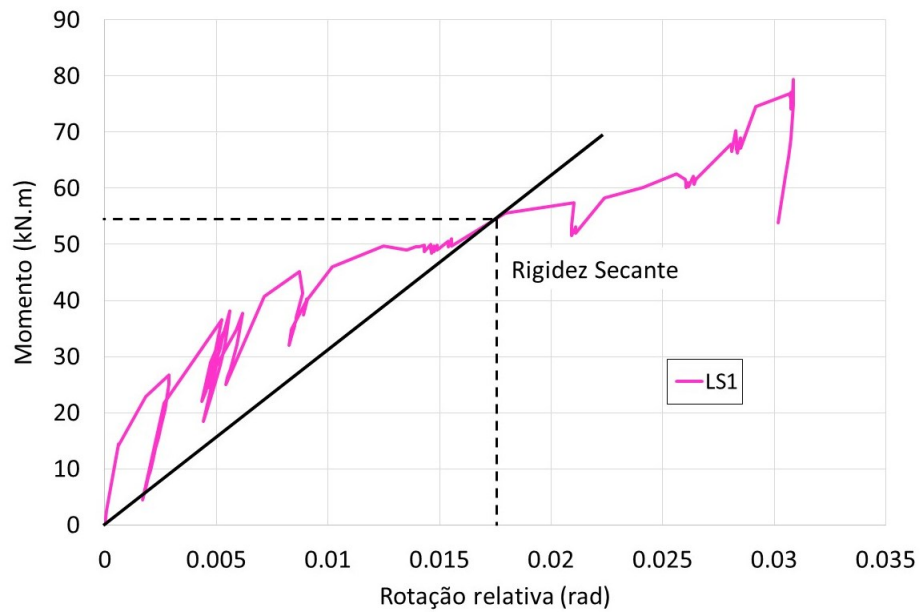
(b) LC2



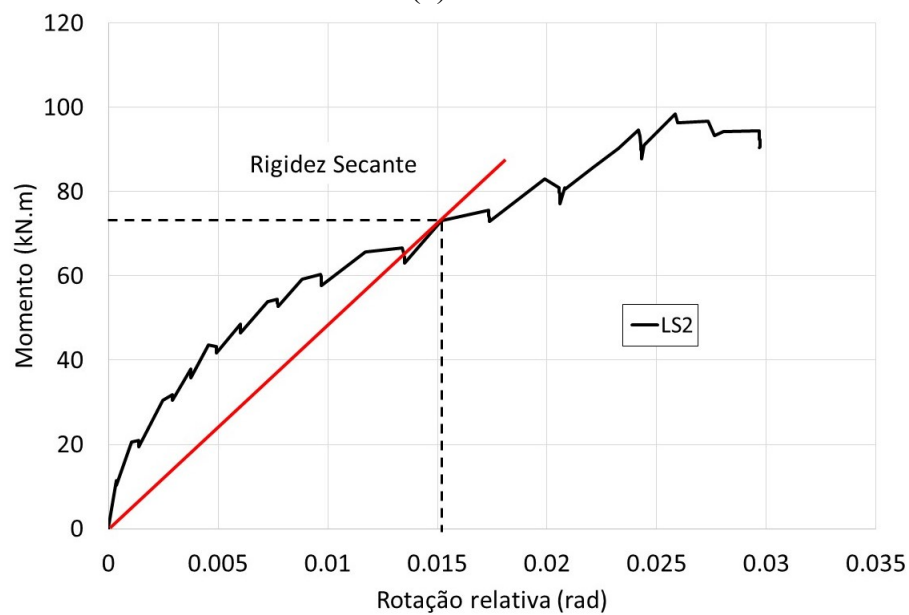
Fonte: Lacerda (2016)

Figura 53 - Curva momento-rotação: protótipos LS1 e LS2

(a) LS1

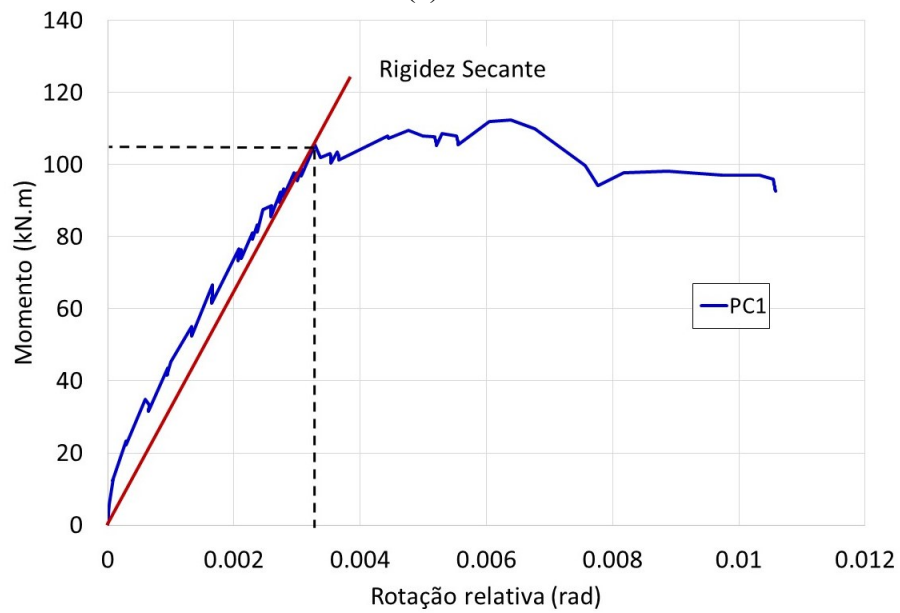


(b) LS2

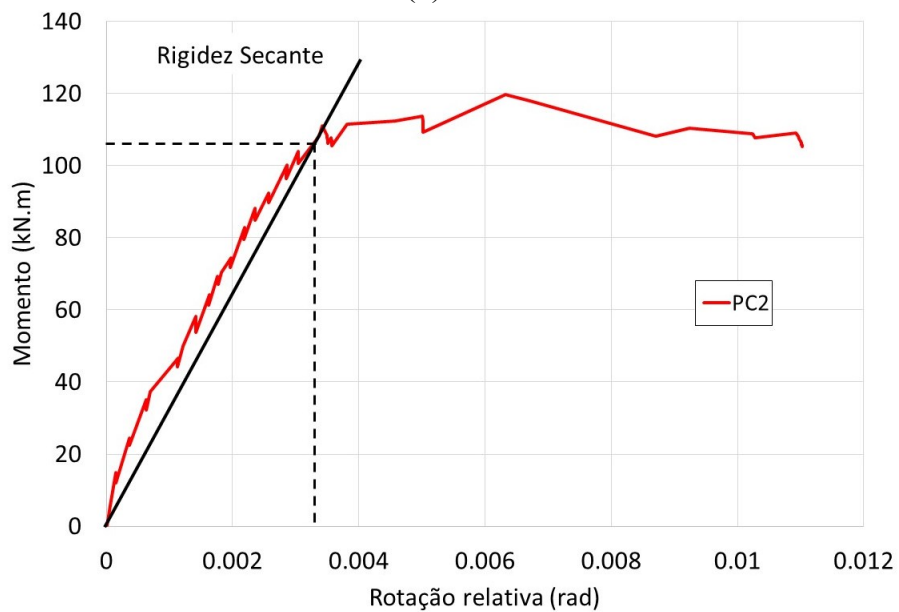


Fonte: Lacerda (2016)

Figura 54 - Curva momento-rotação: protótipos PC1 e PC2
(a) PC1

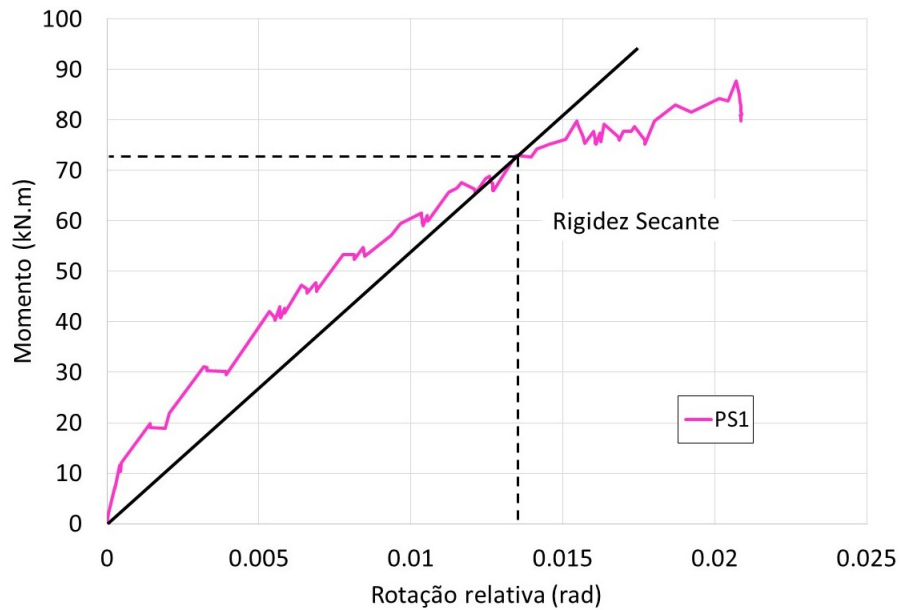


(b) PC2

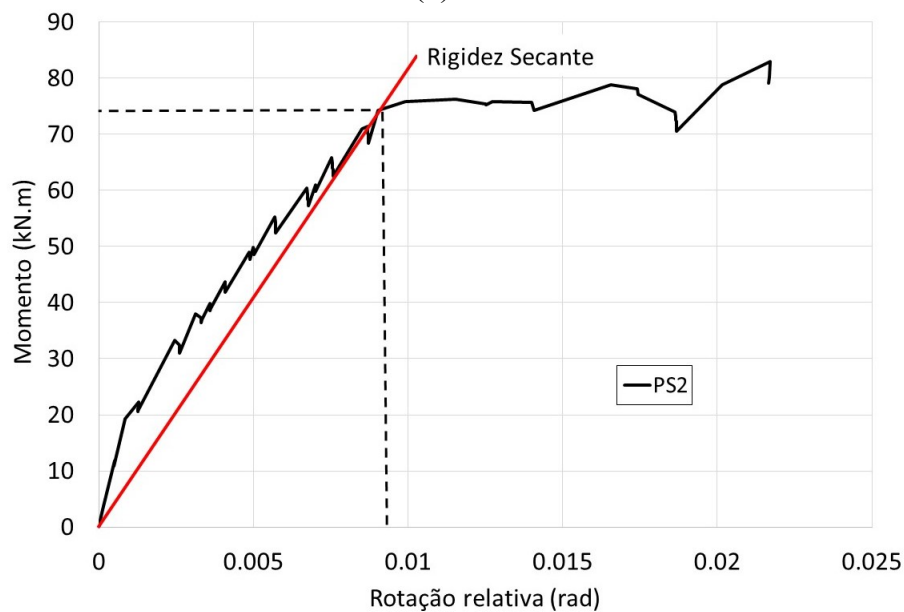


Fonte: Lacerda (2016)

Figura 55 - Curva momento-rotação: protótipos PS1 e PS2
(a) PS1



(b) PS2



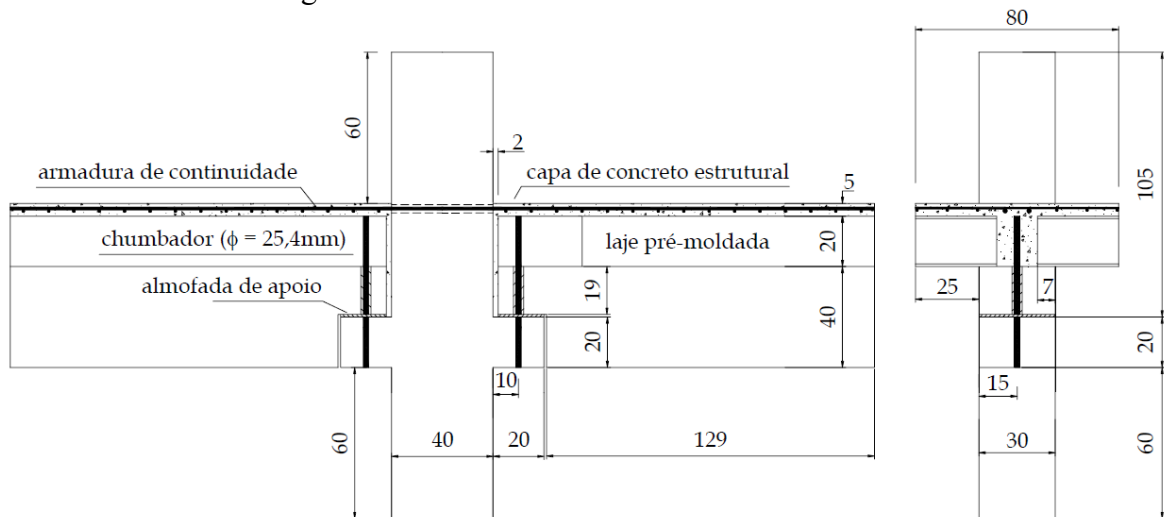
Fonte: Lacerda (2016)

2.3.5 Miotto (2002)

Com intuito de estudar o comportamento de uma ligação viga-pilar pré-moldada com armadura de continuidade, Miotto (2002) realizou ensaios em dois modelos, denominados pela autora como Modelo 2.1 e Modelo 2.2. A diferença entre eles é a continuidade da armadura que passa ao redor do pilar e da capa de concreto. O modelo 2.1, que conta com a continuidade da armadura e da capa de concreto, foi utilizado para simular uma ligação viga-

pilar intermediário, enquanto que o modelo 2.2, sem continuidade da capa de concreto, foi utilizado para simular duas ligações viga-pilar de extremidade. As características geométricas dos modelos estão apresentadas na Figura 56. As diferenças entre os modelos podem ser vistas na Figura 57.

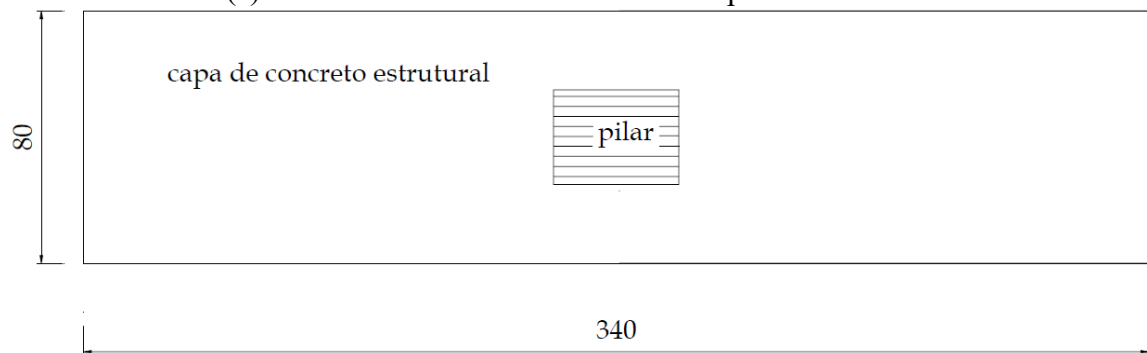
Figura 56 - Características dos Modelos 2.1 e 2.2



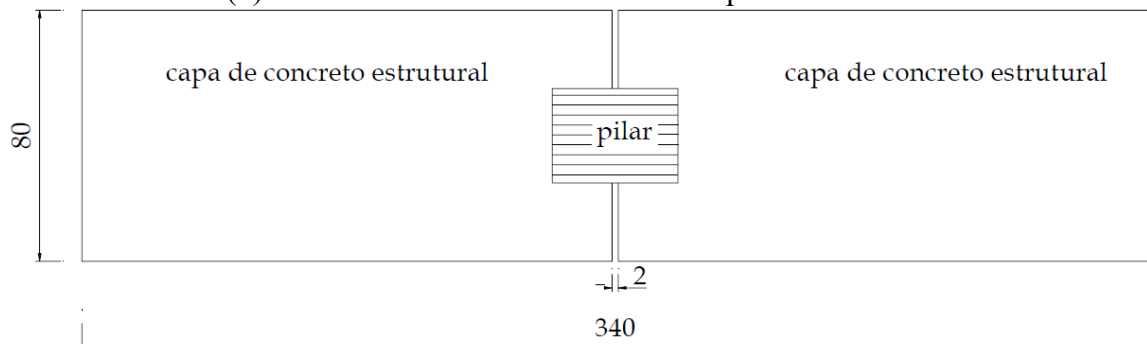
Fonte: Miotto (2002)

Figura 57 - Vista superior dos Modelos 2.1 e 2.2

(a) Modelo 2.1 com continuidade da capa de concreto



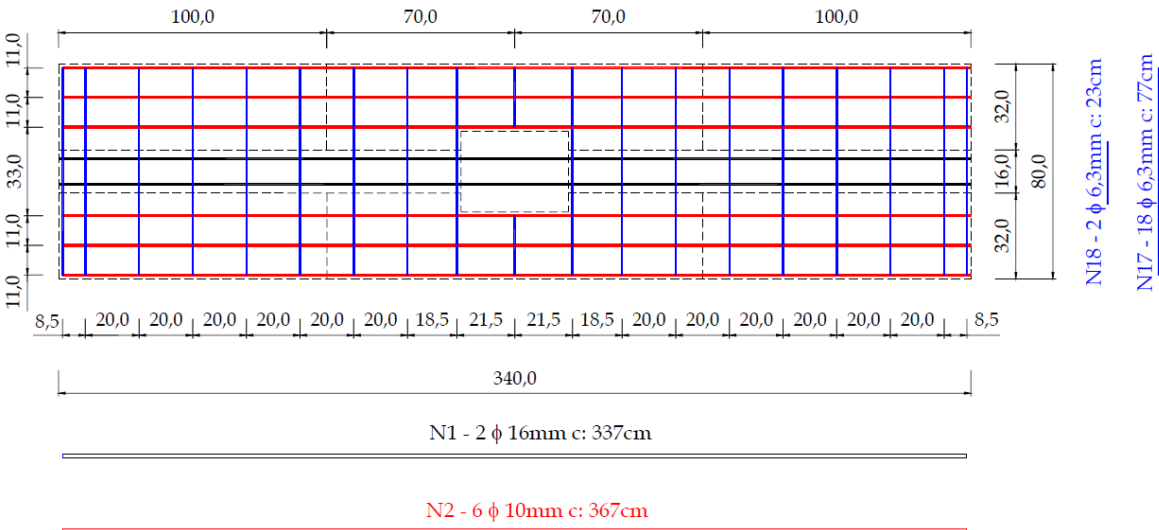
(b) Modelo 2.2 sem continuidade da capa de concreto



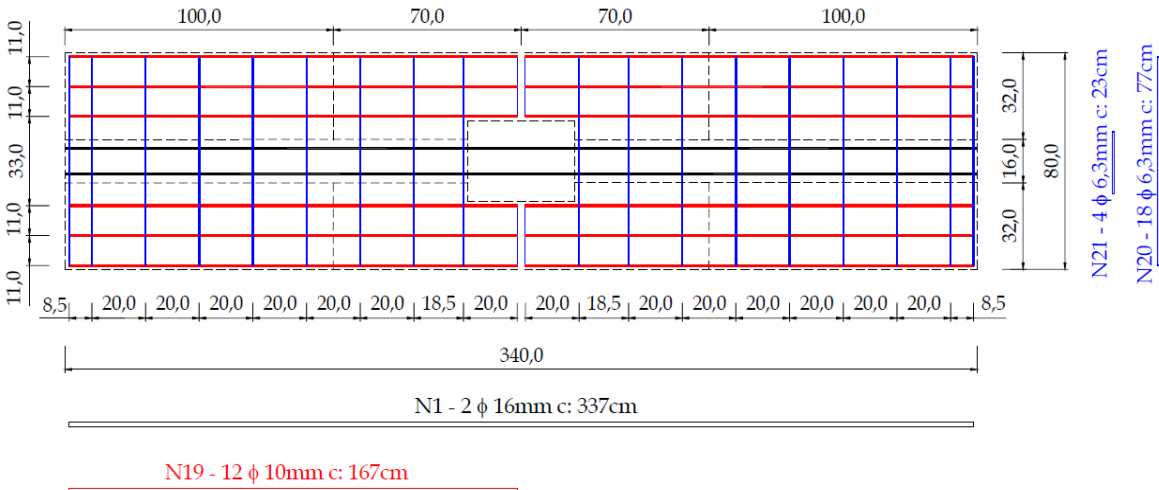
Fonte: Miotto (2002)

O aço utilizado na confecção das armaduras foi o CA 50. A armadura de continuidade foi distribuída da seguinte forma: 50% das barras atravessando o pilar (2Ø de 16mm) e 50% na forma de malha distribuída na capa de concreto (6Ø de 10mm com 3 para cada lado). No Modelo 2.2, as barras externas não são contínuas, pois não existe continuidade da capa de concreto. O detalhamento das armaduras da capa de concreto, das vigas e dos pilares dos Modelos 2.1 e 2.2 são indicados na Figura 58, Figura 59 e Figura 60, respectivamente.

Figura 58 - Distribuição da armadura da capa de concreto
(a) Modelo 2.1

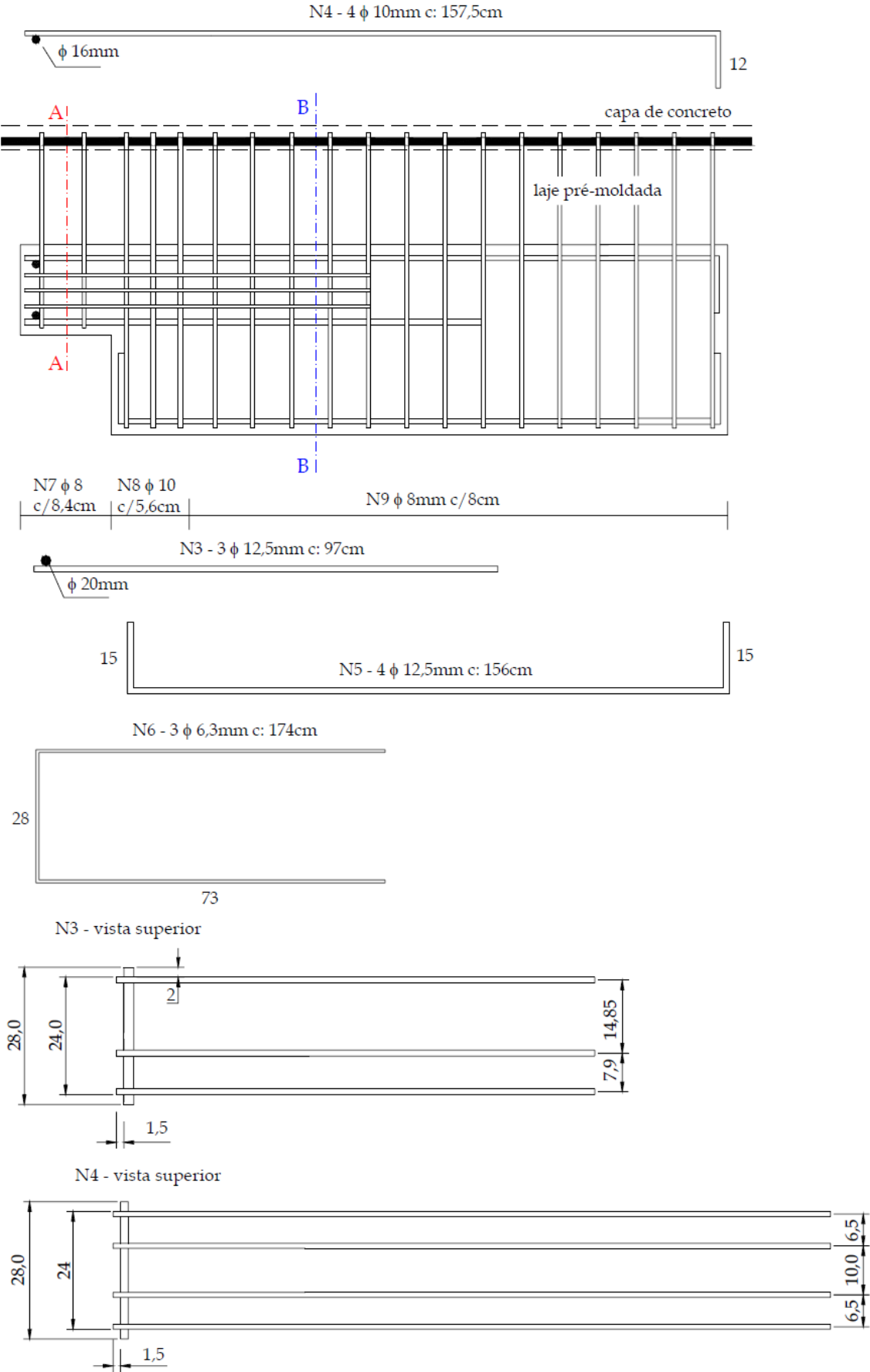


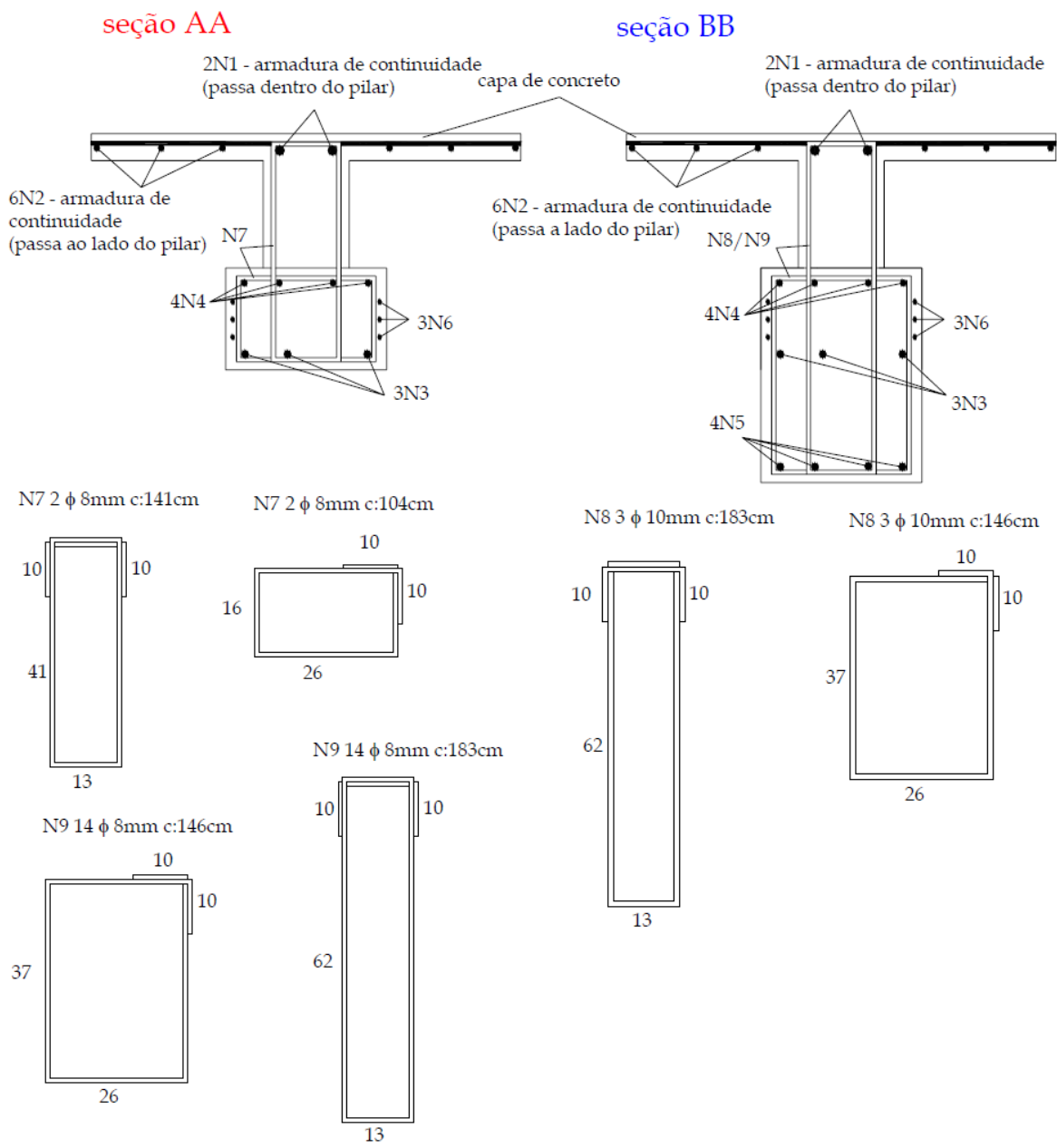
(b) Modelo 2.2



Fonte: Miotto (2002)

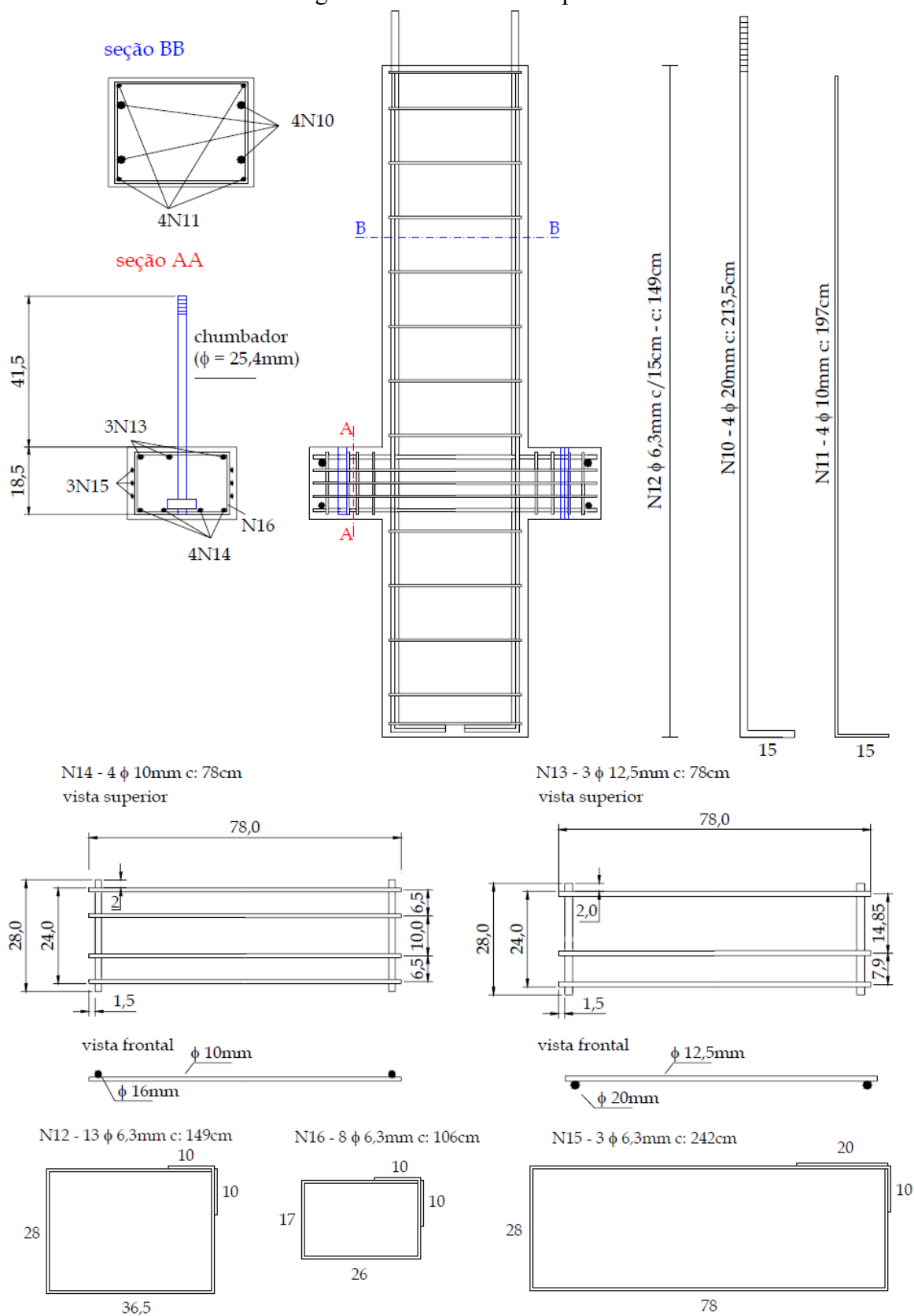
Figura 59 - Armadura das vigas





Fonte: Miotto (2002)

Figura 60 - Armadura dos pilares



Fonte: Miotto (2002)

Para a confecção das vigas e do pilar, a autora utilizou concreto usinado. Já para a capa de concreto foi utilizado concreto moldado no local. Para a caracterização dos concretos foram realizados os ensaios de compressão e de tração diametral. A Tabela 11 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 11 - Propriedades mecânicas dos concretos

Propriedades físicas	Modelo 2.1		Modelo 2.2	
	Concreto usinado	Concreto da capa	Concreto usinado	Concreto da capa
f_c (MPa)	49,0	33,2	49,5	28,5
f_t (MPa)	3,2	2,9	3,9	2,5
E_c (GPa)	32,8	31,6	36,3	24,8

f_c é a resistência à compressão do concreto

f_t é a resistência à tração do concreto por compressão diametral

E_c é módulo de elasticidade do concreto

Fonte: Adaptado de Miotto (2002)

As principais características mecânicas dos grautes utilizados para o preenchimento dos furos das vigas (graute 1) onde se encaixaram os chumbadores, dos furos dos pilares (graute 2) por onde passou a armadura de continuidade, dos espaços entre as vigas e o pilar (graute 1) e entre as lajes e o pilar (graute 3) estão contidas na Tabela 12.

Tabela 12 - Propriedades mecânicas dos grautes

Propriedades físicas	Modelo 2.1			Modelo 2.2		
	Graute 1	Graute 2	Graute 3	Graute 1	Graute 2	Graute 3
f_c (MPa)	25,4	33,2	52,6	59,5	53,4	59,4
f_t (MPa)	2,5	3,9	4,7	3,2	2,8	4,5
E_c (GPa)	4,9	7,1	13,4	14,2	11,8	14,9

f_c é a resistência à compressão do concreto

f_t é a resistência à tração do concreto por compressão diametral

E_c é módulo de elasticidade do concreto

Fonte: Adaptado de Miotto (2002)

Os resultados de caracterização das barras de aço das armaduras estão apresentados na Tabela 13.

Tabela 13 - Propriedades mecânicas do aço dos Modelos 2.1 e 2.2

Diâmetro	f_y (MPa)	f_u (MPa)
10mm	576	683
12,5mm	611	705
16mm	589	764

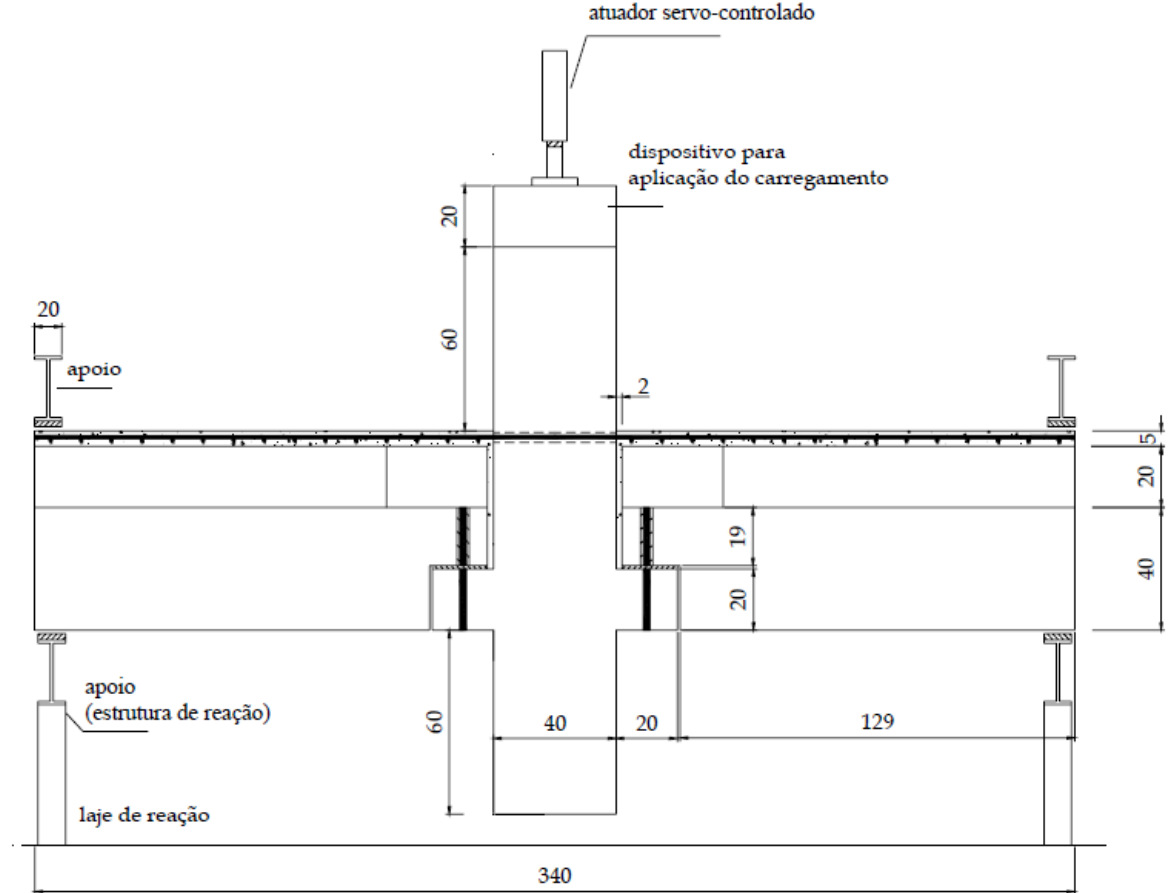
f_y é a resistência de escoamento do aço
 f_u é a resistência de ruptura do aço

Fonte: Adaptado de Miotto (2002)

O ensaio foi por meio de um atuador servo-controlado com capacidade de 500kN para aplicar o carregamento, que foi alternado, de curta duração e com controle de deslocamentos. As vigas foram apoiadas nas extremidades e o carregamento foi aplicado no topo do pilar, gerando assim momentos fletores nas ligações. O esquema do ensaio pode ser visualizado na Figura 61.

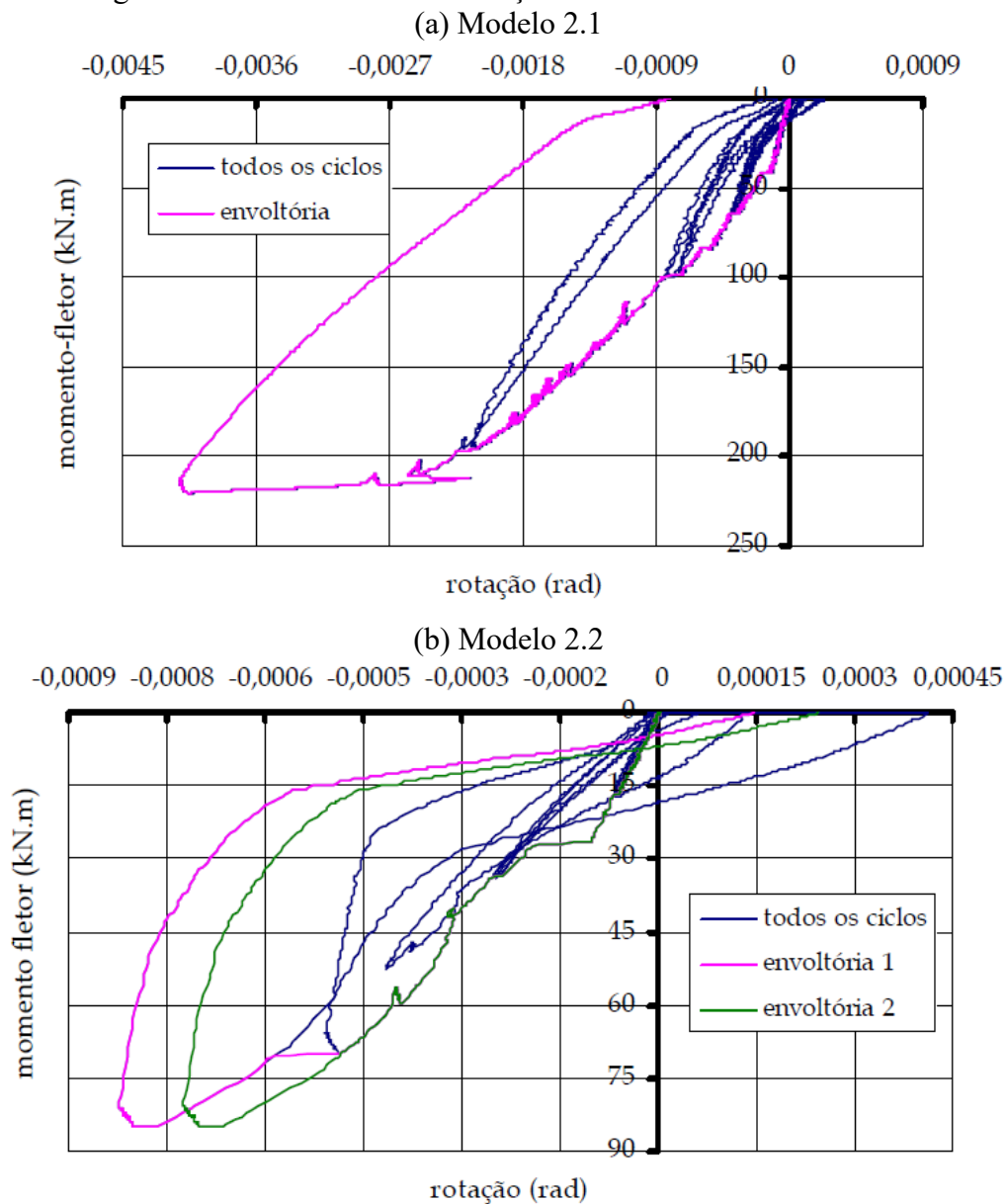
As curvas momento-rotação relativa obtidas por Miotto (2002) para os Modelos 2.1 e 2.2 estão apresentadas na Figura 62.

Figura 61 - Esquema dos ensaios dos Modelos 2.1 e 2.2



Fonte: Miotto (2002)

Figura 62 - Curvas momento-rotação relativa dos Modelos 2.1 e 2.2



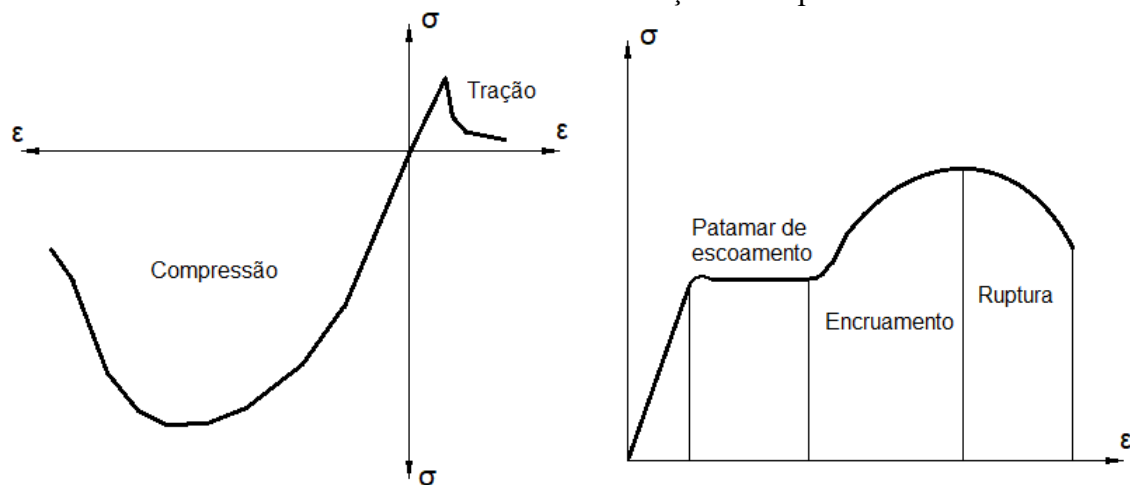
CAPÍTULO 3

NÃO-LINEARIDADE FÍSICA VIA RELAÇÕES MOMENTO-CURVATURA

3.1 Considerações gerais

Na análise estrutural de edifícios é comum considerar o comportamento dos materiais, conforme a lei de Hooke. Entretanto, os materiais constituintes do concreto armado apresentam comportamento não-linear, como mostra a Figura 63, devido à fissuração do concreto e plastificação do concreto e do aço da armadura, além do deslizamento relativo entre o concreto e as barras de aço.

Figura 63 - Curvas de comportamento uniaxial dos materiais aço e concreto
(a) Comportamento uniaxial típico do concreto
(b) Comportamento uniaxial típico de aços com patamar de escoamento

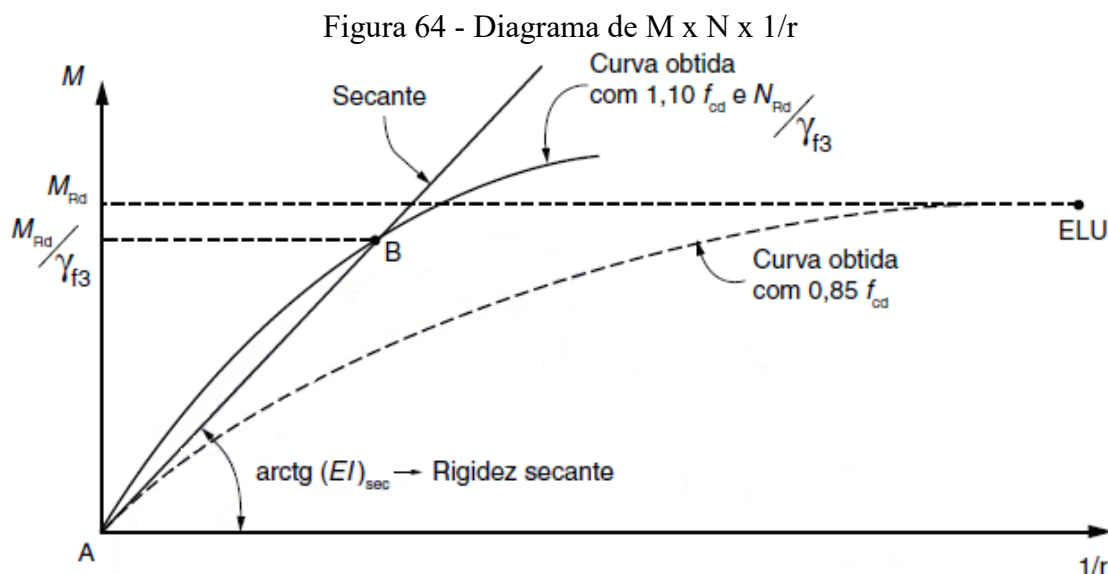


Fonte: O Autor

A avaliação da não linearidade física pode ser feita de modo aproximado (por meio de reduções globais de inércia em análises lineares) ou por meio de análise não-linear. A ABNT NBR 6118:2014 sugere multiplicar o valor da rigidez à flexão (ou as inércias) das seções brutas de concreto armado por:

- 0,3 para lajes;
- 0,4 para vigas com área de armadura de flexão tracionada diferente da área de armadura comprimida;
- 0,5 para vigas com a mesma área de armadura de flexão tracionada e comprimida;
- 0,8 para pilares.

Para análises não-lineares, podem ser empregados elementos finitos bi ou tridimensionais para contemplar com mais precisão o comportamento do concreto. Todavia esta forma de modelagem é bastante complexa e não muito atrativa em projetos de estruturas inteiras de edifícios. Logo, segundo Marin e El Debs (2016), para a consideração do efeito da não linearidade do material, o método mais utilizado é por meio de relações momento-normal-curvatura ($M \times N \times 1/r$), conforme ilustrado na Figura 64. Este método, que também é recomendado pela ABNT NBR 6118:2014, considera de forma consistente a influência da força normal e da área e arranjo da armadura, além de possibilitar a consideração da fluência. Os diagramas momento-normal-curvatura são obtidos a partir das equações de equilíbrio e de compatibilidade de deformações na seção, empregando-se as hipóteses usuais de seções armadas. Na Figura 64 observam-se duas curvas, a de $1,10 f_{cd}$ e a de $0,85 f_{cd}$. A primeira curva ($1,10 f_{cd}$) é traçada para a obtenção da rigidez secante do elemento. A segunda curva é utilizada para definir a capacidade resistente da seção no Estado Limite Último (ELU).



Fonte: ABNT NBR 6118:2014

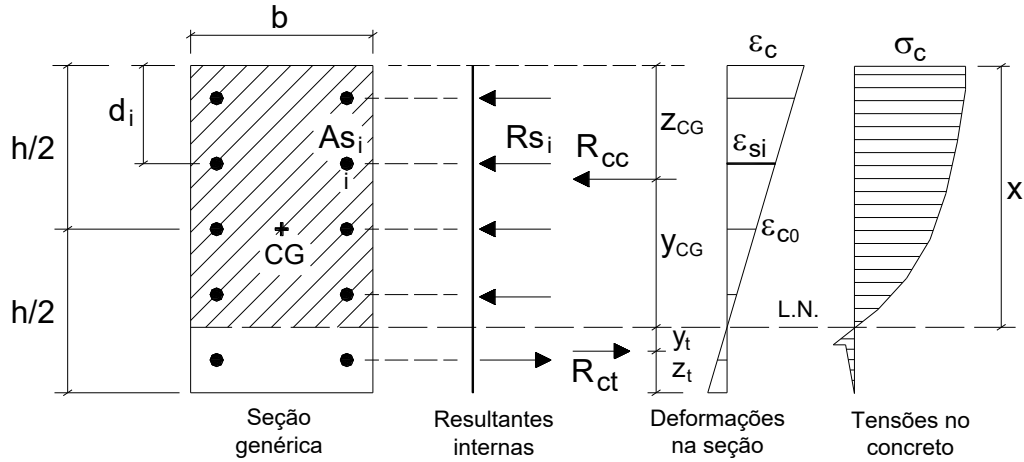
3.2 Diagrama momento-normal-curvatura apresentado por Alva (2017)

Alva (2017) apresentou a dedução do cálculo analítico do diagrama momento-normal-curvatura para seções retangulares de concreto armado submetidas à flexão normal composta, utilizando a integração das tensões nos materiais e as equações de equilíbrio e de compatibilidade de deformações na seção. Nesta seção, apresenta-se a formulação analítica para a construção deste diagrama momento-curvatura aplicáveis para concretos de resistência até C50. Para concretos entre C55 e C90, a formulação analítica pode ser encontrada em Alva (2017).

Para a compreensão do problema da flexão normal composta em seções retangulares e da formulação analítica envolvida, apresenta-se na Figura 65 uma seção retangular genérica, com armaduras longitudinais conhecidas (ou pré-definidas). A Figura 65 também contém esquemas representativos das deformações da seção, das resultantes internas, das tensões no concreto e das resultantes internas nas armaduras longitudinais.

Para haver equilíbrio de forças na horizontal, a força normal solicitante N_{sd} deve ser igual ao somatório das forças resistentes internas do concreto e das armaduras de acordo com a Equação (47).

Figura 65 - Seção retangular genérica – deformações, tensões no concreto e resultantes internas



Fonte: Alva (2017)

$$N_{Sd} = R_{cc} + \sum A_{si} \cdot \sigma_{si} - R_{ct} \quad (47)$$

Na qual:

R_{cc} é a resultante das tensões de compressão no concreto;

R_{ct} é a resultante das tensões de tração no concreto;

A_{si} é a área da barra i (ou da camada i) da armadura longitudinal;

σ_{si} é a tensão na barra i (ou da camada i) da armadura longitudinal (sinal positivo para compressão).

O momento mobilizado pelas forças internas da seção em relação ao centro gravidade da seção bruta de concreto pode ser calculado pela Equação (48):

$$M = R_{cc} \cdot \left(\frac{h}{2} - z_{CG} \right) + \sum A_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot \left(\frac{h}{2} - d_i \right) + R_{ct} \cdot \left(\frac{h}{2} - z_t \right) \quad (48)$$

Na qual:

h é altura da seção;

d_i é a distância da fibra mais comprimida da seção à barra i (ou camada i) da armadura longitudinal;

z_{CG} é a distância da fibra mais comprimida da seção à resultante das tensões de compressão do concreto R_{cc} . Conforme a Figura 65, essa distância é obtida por:

$$z_{CG} = x - y_{CG} \quad (49)$$

Na qual:

x é a profundidade da linha neutra (L.N.);

y_{CG} é a distância da linha neutra ao centroide da curva das tensões do concreto comprimido ao longo da altura da seção. Esta distância define o ponto de aplicação da resultante R_{cc} . Da mesma forma, as distâncias y_t e z_t definem a posição da resultante de tração R_{ct} .

A formulação da flexão normal composta recai nos casos de deformações apresentados nas seções 3.2.1 a 3.2.4 . Para verificar o caso no qual se encontra a seção, obter as tensões nas armaduras longitudinais e gerar os pontos do diagrama momento-curvatura, recorre-se à compatibilidade de deformações, conforme a Equação (50).

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{cc}}{x} = \frac{\varepsilon_{c0}}{x - h/2} = \frac{\varepsilon_{si}}{x - d_i} \quad (\text{sinal positivo para compressão}) \quad (50)$$

Na qual

$1/r$ é a curvatura da seção;

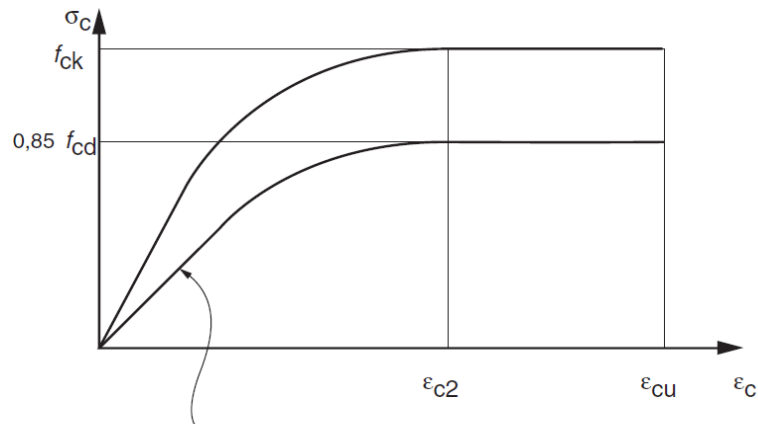
ε_{cc} é a deformação na fibra mais comprimida do concreto;

ε_{c0} é a deformação na fibra que passa pelo centro de gravidade da seção bruta;

ε_{si} é a deformação na barra i (ou camada i) da armadura longitudinal.

Os modelos constitutivos para o concreto comprimido e para o aço das armaduras passivas segundo a ABNT NBR 6118:2014 são ilustrados na Figura 66 e Figura 67 respectivamente.

Figura 66 - Diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto comprimido – ABNT NBR 6118:2014



$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right]$$

Para $f_{ck} \leq 50$ MPa: $n=2$
 Para $f_{ck} > 50$ MPa:
 $n = 1,4 + 23,4 [(90 - f_{ck})/100]^4$

Fonte: ABNT NBR 6118:2014

Na qual:

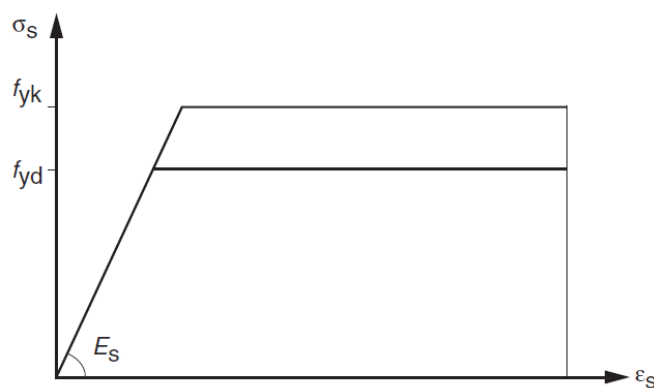
f_{ck} é a resistência à compressão característica do concreto;

f_{cd} é a resistência à compressão de cálculo do concreto;

ϵ_{c2} é a deformação de início de plastificação do concreto (igual à 2‰ para concretos até C50);

ϵ_{cu} é a deformação última (ruptura) do concreto (igual à 3,5‰ para concretos até C50).

Figura 67 - Diagrama tensão-deformação idealizado armaduras passivas – ABNT NBR 6118:2014



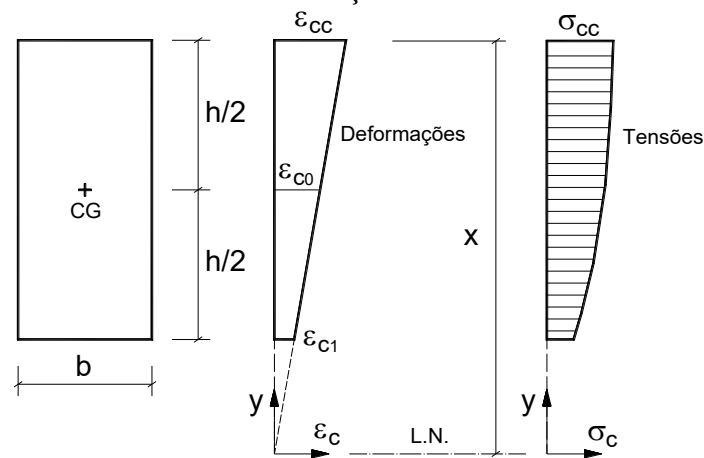
Fonte: ABNT NBR 6118:2014

Para a geração de um ponto da curva momento curvatura, define-se o valor da curvatura e estima-se um valor ϵ_{c0} (que pode ser feito a partir da força normal solicitante no primeiro

ponto da curva) e inicia-se um processo iterativo até que ocorra o equilíbrio de forças na seção. O algoritmo de solução detalhado é apresentado na seção 3.2.6.

Para a dedução das expressões analíticas do cálculo da resultante de compressão no concreto R_{cc} e de sua posição em relação à linha neutra y_{CG} , utiliza-se a Equação (51), a qual expressa a proporcionalidade entre a deformação e a ordenada y , (Figura 68), consequência da hipótese de manutenção das seções planas.

Figura 68 - Esquema geral das deformações e tensões no concreto ao longo da altura da seção



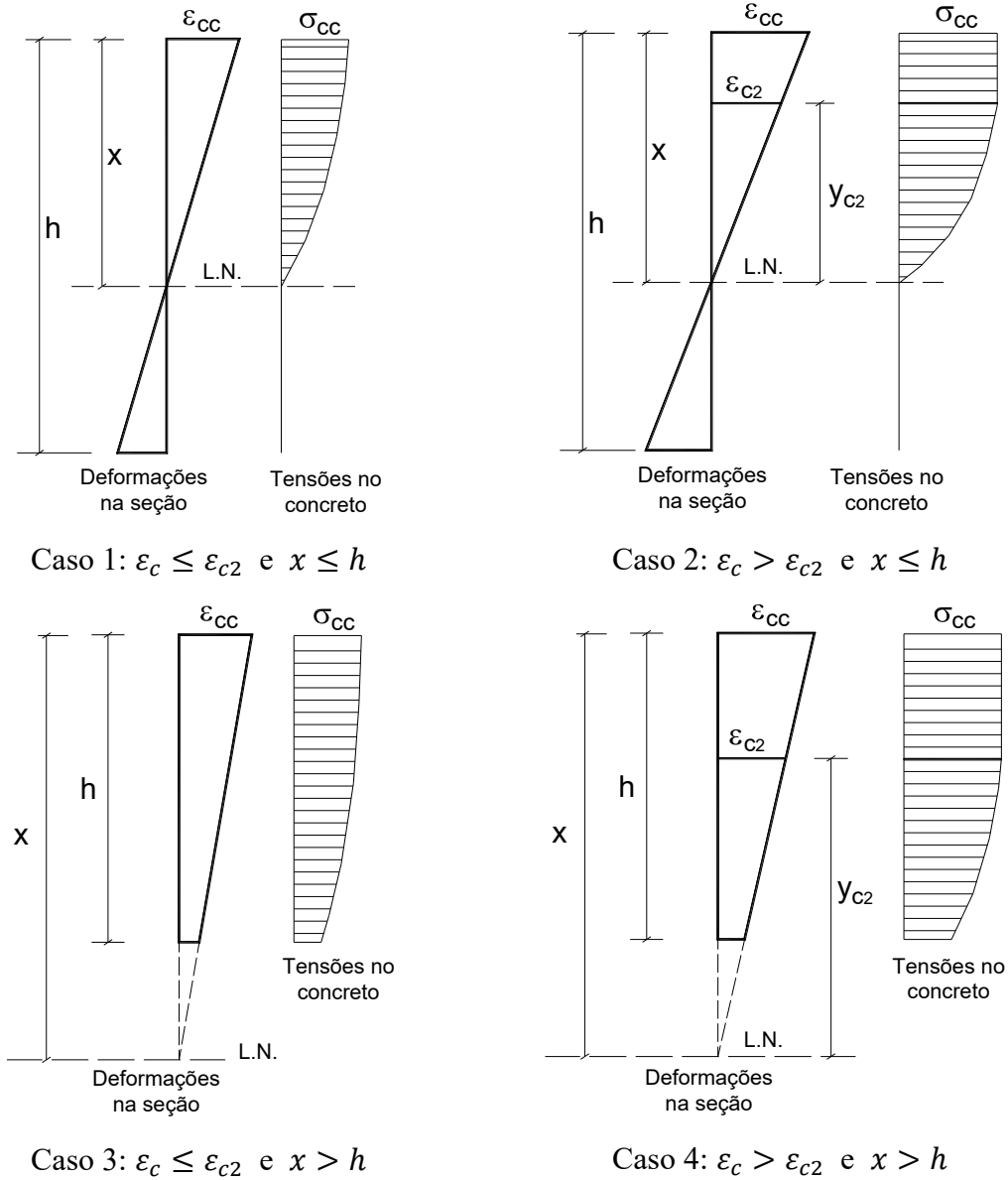
Fonte: Alva (2017)

$$\varepsilon_c = k \cdot y \quad (51)$$

onde k é a constante que relaciona a deformação no concreto e a ordenada y . Neste caso, essa grandeza representa a curvatura da seção.

Nos itens 3.2.1 a 3.2.4 são apresentadas as expressões analíticas para o cálculo da resultante de compressão do concreto R_{cc} e de sua posição em relação à linha neutra y_{CG} para concretos C20 à C50. Em função do valor assumido pela fibra mais comprimida do concreto ε_{cc} e do valor da profundidade da linha neutra x , definem-se os 4 casos possíveis da flexão normal composta, conforme ilustrado na Figura 69.

Figura 69 - Casos possíveis da flexão normal composta em seções armadas



Fonte: Alva (2017)

Neste trabalho, os valores de deformações no concreto são expressos em unidades por mil, em razão dos valores assumidos por ε_{c2} e pelo expoente n da função parabólica da curva tensão-deformação para concretos até C50. Desta forma, os valores de y_{c2} - ordenada correspondente à deformação ε_{c2} conforme a Figura 69, são calculados por:

$$y_{c2} = \frac{\varepsilon_{c2}}{k} = \frac{2}{k} \quad (\varepsilon_{c2} \text{ em unidades por mil}) \quad (52)$$

3.2.1 Caso 1: $\varepsilon_{cc} \leq \varepsilon_{c2}$ e $x \leq h$

Neste caso, a linha neutra passa pela seção e o concreto ainda não atinge a sua tensão máxima (resistente). A resultante R_{cc} é calculada a partir da integração das tensões de compressão na área comprimida de concreto:

$$R_{cc} = \int_0^x \sigma_c \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_0^x \sigma_c \cdot dy \quad (53)$$

Na qual:

b é a largura da seção (constante para seção retangular);

σ_c é a tensão de compressão do concreto em função da altura x . Neste caso, o diagrama de tensões assume o formato parabólico conforme a Figura 66.

A posição da resultante R_{cc} na seção é definida com o cálculo de y_{CG} , expressa por:

$$y_{CG} = \frac{\int_0^x \sigma_c \cdot b \cdot y \cdot dy}{\int_0^x \sigma_c \cdot b \cdot dy} = \frac{b \cdot \int_0^x \sigma_c \cdot y \cdot dy}{R_{cc}} \quad (54)$$

Substituindo na integral da Equação (53) a expressão analítica da parábola que descreve a tensão de compressão do concreto, chega-se a:

$$R_{cc} = b \cdot \int_0^x 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{2} \right)^2 \right] \cdot dy \quad (55)$$

A partir da Equação (51), pode-se reescrever R_{cc} em função da ordenada y :

$$R_{cc} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \int_0^x \left[1 - \left(1 - \frac{k \cdot y}{2} \right)^2 \right] \cdot dy \quad (56)$$

Calculando-se a integral expressa na Equação (56), chega-se a:

$$R_{cc} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot k \cdot \left(\frac{x^2}{2} + \frac{k \cdot x^3}{12} \right) \quad (57)$$

No numerador da Equação (54), coloca-se a expressão analítica da curva parabólica da tensão de compressão do concreto para o cálculo da integral:

$$y_{CG} = \frac{b \cdot \int_0^x 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{2}\right)^2\right] \cdot y \cdot dy}{R_{cc}} \quad (58)$$

A partir da Equação (51), pode-se reescrever y_{CG} em função da ordenada y :

$$y_{CG} = \frac{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \int_0^x \left[1 - \left(1 - \frac{k \cdot y}{2}\right)^2\right] \cdot y \cdot dy}{R_{cc}} \quad (59)$$

Resolvendo a integral do numerador da Equação (59) tem-se:

$$y_{CG} = \frac{16 \cdot x^3 - 3 \cdot k \cdot x^4}{24 \cdot x^2 - 4 \cdot k \cdot x^3} \quad (60)$$

3.2.2 Caso 2: $\varepsilon_{cc} > \varepsilon_{c2}$ e $x \leq h$

A resultante R_{cc} e a sua posição na seção por y_{CG} são calculadas a partir da integração das tensões de compressão do concreto em dois trechos: na região onde as tensões assumem distribuição parabólica e na região onde as tensões assumem valor constante e igual a $0,85 \cdot f_{cd}$ (Figura 69).

$$R_{cc} = \int_0^{y_{c2}} \sigma_c \cdot b \cdot dy + \int_{y_{c2}}^x 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot dy \quad (61)$$

$$\begin{aligned} y_{CG} &= \frac{\int_0^{y_{c2}} \sigma_c \cdot b \cdot y \cdot dy + \int_{y_{c2}}^x 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot y \cdot dy}{\int_0^{y_{c2}} \sigma_c \cdot b \cdot dy + \int_{y_{c2}}^x \sigma_c \cdot b \cdot dy} \\ &= \frac{b \cdot \int_0^{y_{c2}} \sigma_c \cdot y \cdot dy + 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \int_{y_{c2}}^x y \cdot dy}{R_{cc}} \end{aligned} \quad (62)$$

O cálculo das integrais das Equações (61) e (62) fornecem as expressões para R_{cc} e y_{CG} :

$$R_{cc} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \left(k \cdot \frac{y_{c2}^2}{2} - k^2 \cdot \frac{y_{c2}^3}{12} + x - y_{c2} \right) \quad (63)$$

Substituindo na Equação (62) a função parabólica que descreve a tensão de compressão do concreto σ_c e utilizando Equação (51) que relaciona ε_c e y , chega-se a:

$$y_{CG} = \frac{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b}{R_{cc}} \left(\frac{k \cdot y_{c2}^3}{3} - \frac{k^2 \cdot y_{c2}^4}{16} + \frac{k \cdot x^2}{2} - \frac{k \cdot y_{c2}^2}{2} \right) \quad (64)$$

3.2.3 Caso 3: $\varepsilon_{cc} \leq \varepsilon_{c2}$ e $x > h$

Neste caso, a seção encontra-se toda comprimida e o concreto ainda não atinge a sua tensão máxima (resistente). As integrais utilizadas para o cálculo de R_{cc} e y_{CG} devem ser calculadas dentro no intervalo de ordenadas y que abrangem a seção, conforme as Equações (65) e (66).

$$R_{cc} = \int_{x-h}^x \sigma_c \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_{x-h}^x \sigma_c \cdot dy \quad (65)$$

$$y_{CG} = \frac{\int_{x-h}^x \sigma_c \cdot b \cdot y \cdot dy}{\int_{x-h}^x \sigma_c \cdot b \cdot dy} = \frac{b \cdot \int_{x-h}^x \sigma_c \cdot y \cdot dy}{R_{cc}} \quad (66)$$

O cálculo das integrais das Equações (65) e (66) fornecem as expressões para R_{cc} e y_{CG} :

$$R_{cc} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot k \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{(x-h)^2}{2} - \frac{k \cdot x^3}{12} + \frac{k \cdot (x-h)^3}{12} \right] \quad (67)$$

$$y_{CG} = \frac{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot k \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x-h)^3}{3} - \frac{k \cdot x^4}{16} + \frac{k \cdot (x-h)^4}{16} \right]}{R_{cc}} \quad (68)$$

3.2.4 Caso 4: $\varepsilon_{cc} > \varepsilon_{c2}$ e $x > h$

Da mesma forma que no caso 2, R_{cc} e y_{CG} são calculadas a partir da integração das tensões de compressão do concreto em dois trechos: no trecho parabólico e no trecho de tensão constante. O intervalo completo de integração compreende toda a altura da seção.

$$R_{cc} = \int_{x-h}^{y_{c2}} \sigma_c \cdot b \cdot dy + \int_{y_{c2}}^x b \cdot \sigma_c \cdot dy = b \cdot \left(\int_{x-h}^{y_{c2}} \sigma_c \cdot dy + 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \int_{y_{c2}}^x \sigma_c \cdot dy \right) \quad (69)$$

$$\begin{aligned}
 y_{CG} &= \frac{\int_{x-h}^{y_{c2}} \sigma_c \cdot b \cdot y \cdot dy + \int_{y_{c2}}^x b \cdot \sigma_c \cdot y \cdot dy}{\int_{x-h}^{y_{c2}} \sigma_c \cdot b \cdot dy + \int_{y_{c2}}^x b \cdot \sigma_c \cdot dy} \\
 &= \frac{b \cdot \left(\int_{x-h}^{y_{c2}} \sigma_c \cdot y \cdot dy + \int_{y_{c2}}^x \sigma_c \cdot y \cdot dy \right)}{R_{cc}}
 \end{aligned} \quad (70)$$

O cálculo das integrais das Equações (69) e (70) fornecem as expressões para R_{cc} e y_{CG} :

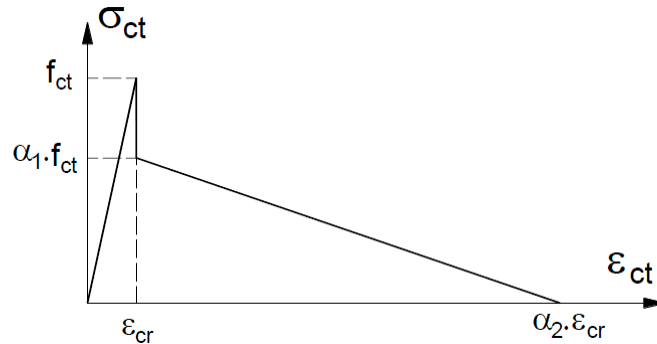
$$\begin{aligned}
 R_{cc} &= 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \\
 &\cdot \left[\frac{k \cdot y_{c2}^2}{2} - \frac{k \cdot (x-h)^2}{2} - \frac{k^2 \cdot y_{c2}^3}{12} + \frac{k^2 \cdot (x-h)^3}{12} + x - y_{c2} \right]
 \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned}
 y_{CG} &= \frac{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b}{R_{cc}} \left[\frac{k \cdot y_{c2}^3}{3} - \frac{k \cdot (x-h)^3}{3} - \frac{k^2 \cdot y_{c2}^4}{16} + \frac{k^2 \cdot (x-h)^4}{16} + \frac{x^2}{2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{y_{c2}^2}{2} \right]
 \end{aligned} \quad (72)$$

3.2.5 Tension Stiffening

Em elementos submetidos à flexão simples, a contribuição da resistência do concreto tracionado entre fissuras (*tension stiffening*) torna-se importante, especialmente para o comportamento pós-fissuração no Estádio II. Para a consideração do *tension stiffening*, empregou-se o modelo de Torres, López-Almansa e Bozzo (2004), o qual assume uma curva tensão-deformação do concreto tracionado conforme indicado na Figura 70.

Figura 70 - Relação de tensão deformação equivalente para concreto tracionado



Fonte: Torres, López-Almansa e Bozzo (2004)

Na Figura 70:

f_{ct} é a resistência à tração do concreto (valor de pico);

ε_{cr} é a deformação correspondente à tensão máxima de tração (pico);

α_1 e α_2 são os coeficientes que definem o modelo de *tension stiffening*, os quais são obtidos com as Equações (73) e (74):

$$\alpha_1 = 0,4 \cdot \left(1 - \frac{N}{A \cdot f_{ct}}\right) \geq 0 \quad (73)$$

$$\alpha_2 = 20,3 - 15,1 \cdot \frac{d}{h} + \frac{1,31}{\alpha_e \cdot \rho} - \frac{1,06}{\alpha_e \cdot \rho} \cdot \frac{d}{h} \quad (74)$$

Na qual:

N é a força normal de compressão (sinal positivo para compressão);

A é a área da seção transversal;

d é a altura útil da seção transversal;

h é a altura total da seção transversal;

α_e é a razão entre o módulo de elasticidade do aço e do concreto;

ρ é a taxa de armadura de tração em relação à altura útil da seção.

No caso de ocorrência de tensões de tração na seção, calculam-se os valores α_1 e α_2 e, por meio das equações de equilíbrio e de compatibilidade na seção, calculam-se o valor da resultante de tração no concreto R_{ct} e a posição em que a mesma se encontra (com as distâncias y_t e z_t , conforme a Figura 65).

3.2.6 Algoritmo de geração dos pontos dos diagramas momento-curvatura

De forma simplificada, apresenta-se o algoritmo de solução para a geração de cada ponto do diagrama momento curvatura implementado em rotina computacional em linguagem FORTRAN por Alva (2017):

(1) Definir o valor da curvatura $1/r$

(2) Estimar inicialmente o valor $\varepsilon_{c0} = \frac{N_{sd}}{E_{ct} \cdot (bh)}$

(3) Processo iterativo: Enquanto $\text{ErroN} > \text{Tolerância}$

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0} + 1/r \cdot \left(\frac{h}{2}\right)$$

$$x = \frac{\varepsilon_{cc}}{1/r}$$

$$k = \frac{\varepsilon_{cc}}{x}$$

Identificar do caso da flexão normal composta a partir de ε_{cc} e x

Calcular R_{cc} , y_{CG} , z_{CG}

Calcular R_{ct} , y_t , z_t

Calcular as deformações nas armaduras (Equação (57)) e as tensões nas mesmas

$$\text{Calcular } M = R_{cc} \cdot \left(\frac{h}{2} - z_{CG}\right) + \sum A_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot \left(\frac{h}{2} - d_i\right) + R_{ct} \cdot \left(\frac{h}{2} - z_t\right)$$

$$\text{Calcular } N = R_{cc} + \sum A_{si} \cdot \sigma_{si} - R_{ct}$$

$$\text{Calcular } \Delta\varepsilon_{c0} = \frac{N_{sd} - N}{E_{ci} \cdot (bh)}$$

$$\text{Recalcular } \varepsilon_{c0} = \varepsilon_{c0} + \Delta\varepsilon_{c0}$$

$$\text{Calcular } \text{Erro}N = \frac{|N_{sd} - N|}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

Voltar ao passo (3) e verificar encerramento do processo iterativo

No algoritmo apresentado, ErroN está associado ao erro relativo em termos da força normal. A Tolerância deve ser definida: valores em torno de 0,001 (0,1%) são suficientes para alcançar boa precisão.

3.3 Relação momento-curvatura com o modelo de Branson (1965)

Alternativamente ao cálculo das curvaturas por meio de equações de equilíbrio e de compatibilidade na seção, em vigas de concreto armado pode-se utilizar o modelo de Branson (1965) para o cálculo da rigidez à flexão equivalente no Estádio II, conforme a Equação (75). A rigidez à flexão equivalente proposta por Branson (1965) considera os efeitos da fissuração do concreto e o efeito *tension stiffening*.

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M}\right)^m \cdot I_I + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^m\right] \cdot I_{II} \quad (75)$$

onde:

M_r é o momento de fissuração;

M é o momento atuante na seção;

I_I é o momento de inércia da seção da viga no Estádio I (seção homogeneizada);

I_{II} é o momento de inércia da seção da viga no Estádio II (seção homogeneizada);

m é um coeficiente cujo valor é de 3 para todo o elemento e 4 para seções individuais.

Dessa forma, o diagrama momento-curvatura pode ser construído pelo ponto de início de fissuração, pelo ponto de momento último (resistente) – ambos obtidos com o cálculo usual de seções armadas – e pelo trecho correspondente ao Estádio II, sendo neste as curvaturas obtidas pela Equação (76).

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{eq} = \frac{M}{E_c I_{eq}} \quad (76)$$

Para o cálculo do momento de inércia equivalente I_{eq} , a ABNT NBR 6118:2014 recomenda a utilização seção bruta de concreto no Estádio I, ou seja, $I_I = I_c$.

CAPÍTULO 4

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS COM O MODELO DE ALVA E EL DEBS (2013)

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas simulações numéricas com o modelo analítico proposto por Alva e El Debs (2013) para a consideração da deformabilidade ao momento fletor de ligações monolíticas viga-pilar de extremidade. Para o confronto com os resultados teóricos, foram utilizados os resultados experimentais das ligações monolíticas de Alva (2004) - LVP1, LVP2, LVP3 e LVP4 - e os resultados experimentais de Lee, Wight e Hanson (1977) - Specimen 2 e Specimen 5. Diversas comparações adicionais de resultados não apresentadas em Alva e El Debs (2013) foram realizadas neste trabalho.

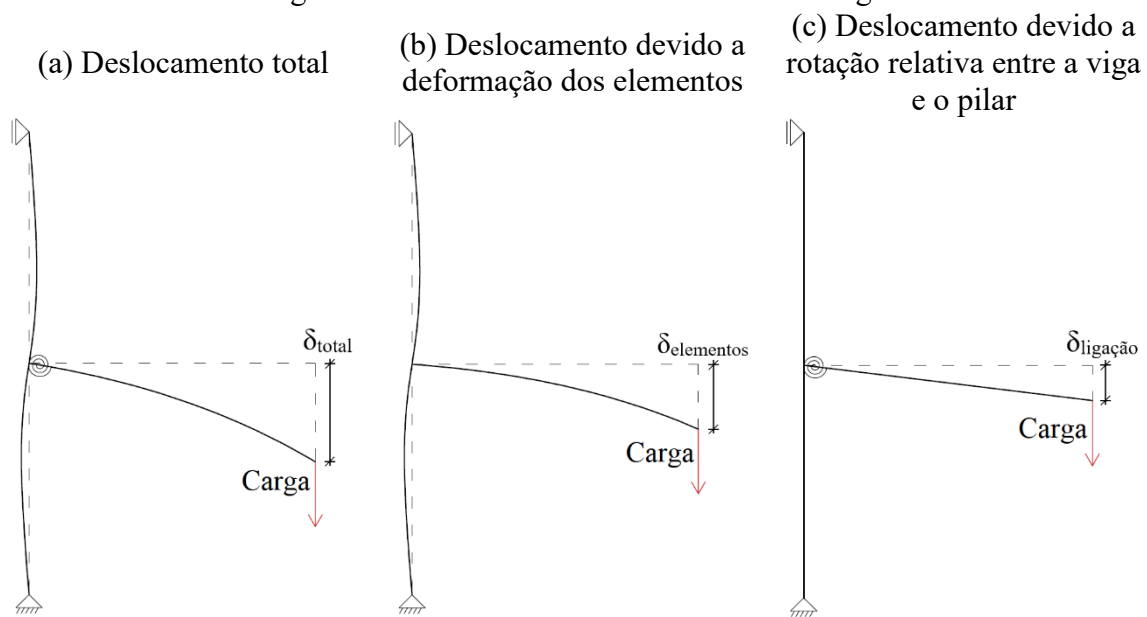
4.2 METODOLOGIA EMPREGADA NAS COMPARAÇÕES

Um objetivo de destaque deste trabalho é verificar a eficácia dos modelos analíticos em prever a rigidez de ligações viga-pilar de concreto. Para isso é necessário comparar os resultados obtidos pelas formulações analíticas com resultados experimentais. O ideal é que tal comparação seja feita com os resultados experimentais de rotação relativa entre a viga e o pilar. Deste modo, a curva gerada pelo modelo analítico pode ser comparada diretamente com a curva encontrada no ensaio experimental. Porém, resultados experimentais desse tipo nem sempre estão disponíveis na literatura. Dessa forma, uma alternativa para a aferição dos modelos analíticos consiste na comparação de curvas do tipo força-deslocamento no ponto de aplicação da força.

Para que se possa utilizar estes resultados, considera-se que o deslocamento no ponto de aplicação da força seja decorrente da deformação dos elementos viga e pilar (considerando a ligação viga-pilar como perfeitamente rígida) somados ao deslocamento de corpo rígido proveniente da rotação relativa entre a viga e o pilar, conforme indicados Equação (77) e na Figura 71.

$$\delta_{total} = \delta_{elementos} + \delta_{ligação} \quad (77)$$

Figura 71 - Deslocamentos considerados na viga



Fonte: O autor

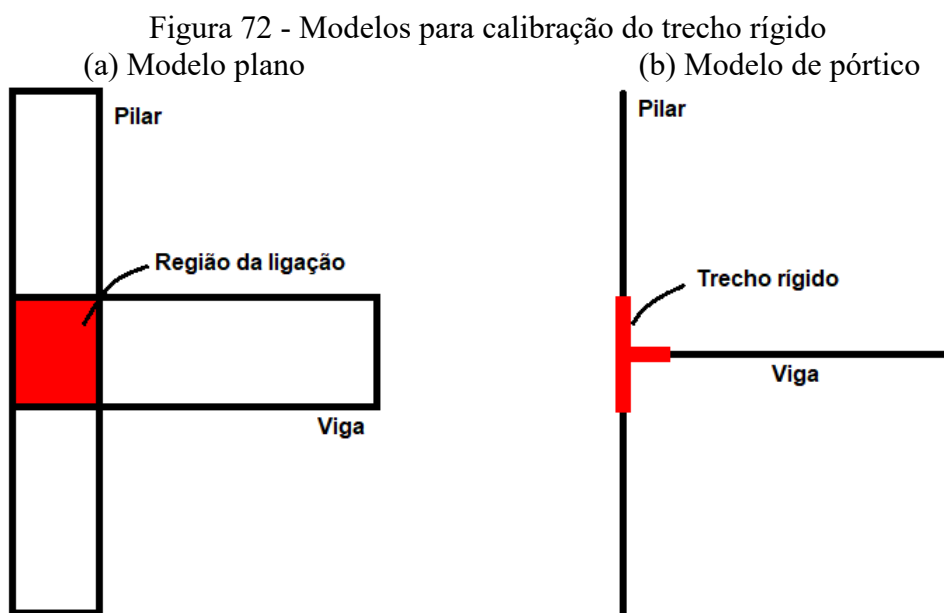
Visando simular o deslocamento devido à deformação dos elementos de forma precisa, considerou-se a não linearidade física dos elementos por meio de relações momento-curvatura para vigas e pilares. Para os pilares, as relações momento-curvatura foram obtidas com o auxílio de rotina de cálculo feita na linguagem FORTRAN baseadas nas formulações apresentadas no Capítulo 3, conforme Alva (2017).

Para as vigas, além da possibilidade de utilização da referida rotina computacional, as relações momento-curvatura podem ser obtidas com a expressão de Branson aplicável ao Estádio II (Equações (75) e (76)). Neste caso, o diagrama momento curvatura possui três trechos distintos: o primeiro trecho (Estádio I) começa com o momento nulo e segue até o momento de início de fissuração: $0 \leq M \leq M_r$; o segundo trecho (Estádio II) começa com o momento de início de fissuração até o momento de plastificação $M_r < M < M_y$ aplicando-

se a expressão de Branson (1965); o terceiro trecho (Estádio III) começa com o momento de plastificação até o momento último: $M_y < M < M_u$. O terceiro trecho pode ser simplificado como linear; logo apenas os pontos iniciais e finais são suficientes para seu traçado.

Para a simulação numérica no programa ANSYS (APDL), é necessário informar os pontos das curvas momento-curvatura da viga e do pilar e os pontos da curva momento-rotação da ligação. As vigas e os pilares foram modelados como elementos de pórtico, como mostra a Figura 72b. Para levar em conta as dimensões dos nós na região de interseção dos elementos, foram criados trechos rígidos, conforme a Figura 72b.

A obtenção (calibragem) da rigidez dos trechos rígidos foi realizada com o auxílio de resultados de modelos planos (MEF) adequadamente discretizados que empregaram elementos finitos de estado plano de tensões. O critério de calibragem da rigidez dos trechos rígidos foi a igualdade de deslocamentos no ponto de aplicação da força entre o modelo de pórtico e o modelo plano (MEF).

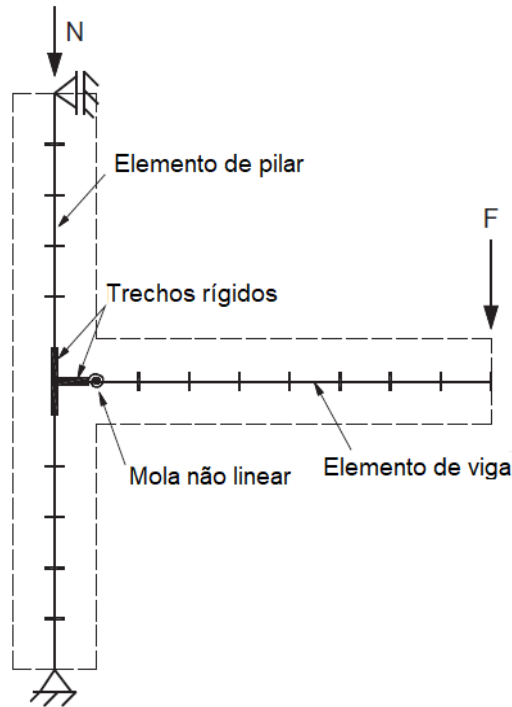


Fonte: O autor

A deformabilidade das ligações ao momento fletor foram simuladas pelo elemento de mola não linear COMBIN39. Essa mola foi posicionada na interseção entre o trecho rígido e a viga. As vigas e pilares foram modelados com elementos BEAM188. Como o elemento BEAM188 é elemento finito de pórtico espacial, a não linearidade física foi considerada apenas para as rotações/momentos no plano das ligações. Para resolver o sistema não linear

de equações escolheu-se o procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson, com critério de convergência baseado em forças e momentos. A Figura 73 mostra um esquema do modelo numérico.

Figura 73 - Esquema do modelo numérico



Fonte: Adaptado de Alva e El Debs (2013)

Quando não se possui dados experimentais de curvas momento-rotação, é possível obter as rotações experimentais de forma indireta, a partir das curvas experimentais força-deslocamento conforme a Equação (78), a partir do conceito apresentado na Equação (77):

$$\theta_{exp} = \frac{\delta_{total,exp} - \delta_{total,rígida}}{L} \quad (78)$$

onde:

$\delta_{total,exp}$ é o deslocamento vertical no ponto de aplicação da força obtido experimentalmente;

$\delta_{total,rígida}$ é o deslocamento vertical no ponto de aplicação da força obtido na simulação numérica (ANSYS) assumindo a ligação perfeitamente rígida;

L é a distância do ponto de aplicação da força na viga à face do pilar (no caso de ligações monolíticas) ou ao centro de rotação da ligação (no caso de ligações pré-moldadas)

4.3 LIGAÇÕES MONOLÍTICAS DE ALVA (2004)

Nesta seção é feita a comparação do modelo analítico de Alva e El Debs (2013) com os resultados experimentais de Alva (2004). No trabalho de Alva (2004) foram encontrados resultados do tipo momento-rotação relativa e do tipo força-deslocamento. A comparação com o primeiro tipo de resultados foi apresentada em Alva e El Debs (2013). No entanto, neste trabalho, a fim de avaliar a aplicação do modelo de Alva e El Debs (2013) em conjunto com relações momento-curvatura para análises globais, foram comparadas também as curvas experimentais e teóricas do tipo força-deslocamento.

4.3.1 Curva momento-rotação relativa entre viga e pilar

Para obter o curva de momento-rotação relativa com o modelo de Alva e El Debs (2013), foram calculados os valores das constantes C_1 e C_2 das vigas de cada ligação. Os parâmetros utilizados estão apresentados na Tabela 14. A curvatura $1/r$ foi calculada para cada valor de momento fletor atuante, com o emprego da expressão de Branson (1965). As curvas momento-rotação encontradas para cada ligação, juntamente com as obtidas dos ensaios experimentais, estão indicadas na Figura 74.

Tabela 14 - Parâmetros de entrada para a construção das curvas momento-rotação das ligações de Alva (2004)

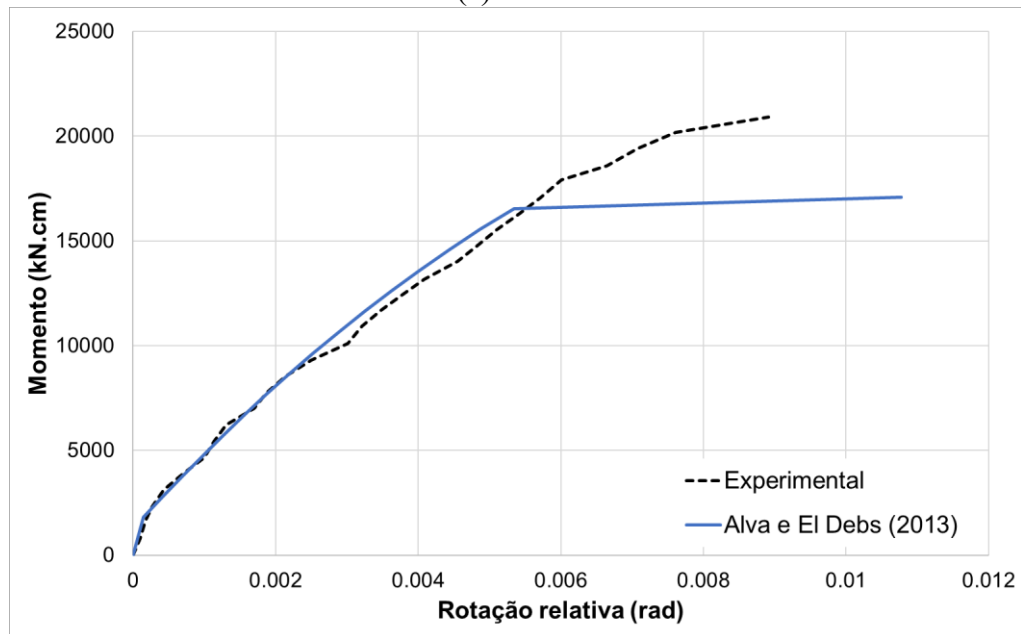
Parâmetros	Ligação			
	LVP1	LVP2	LVP3	LVP4
L_p (cm)	36,4	36,4	36,4	36,4
f_c (kN/cm ²)	40,43	44,18	23,89	24,62
E_s (kN/cm ²)	21000	21000	21000	21000
A_s (cm ²)	8,04	8,04	8,04	8,04
f_y (kN/cm ²)	63	59,4	59,4	59,4
d (cm)	36,4	36,4	36,4	36,4
x_{II} (cm)	10,642	10,444	11,003	10,984
z_{II} (cm)	32,646	32,767	32,184	32,208
\emptyset (mm)	16	16	16	16
c (cm)	2	2	2	2
k_1	0,8	0,8	0,8	0,8
k_2	0,5	0,5	0,5	0,5
k_3	3,4	3,4	3,4	3,4
k_4	0,425	0,425	0,425	0,425

(Continua)

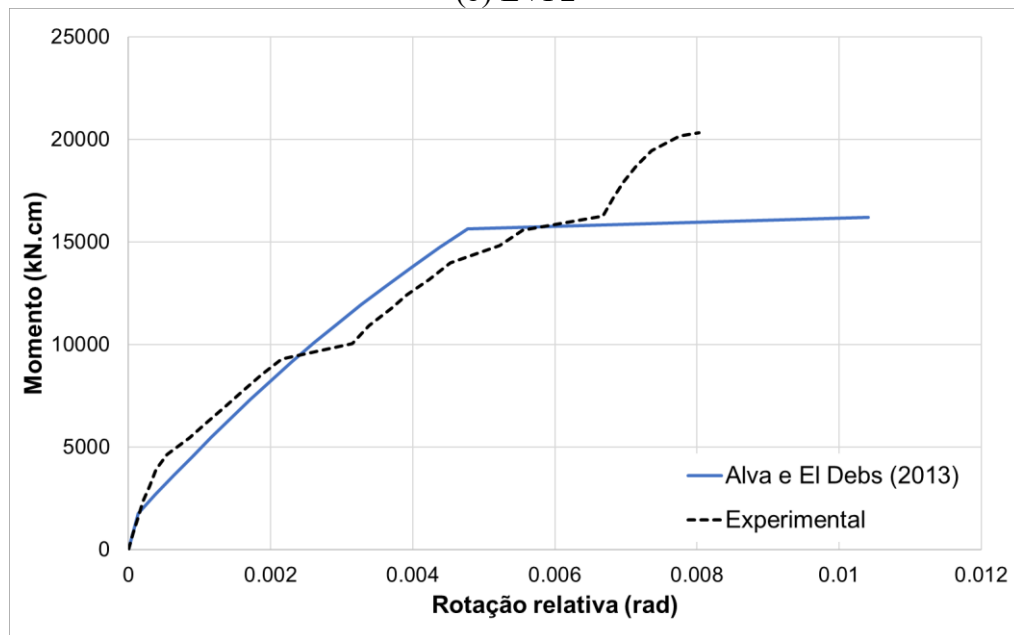
Tabela 14 - Parâmetros de entrada para a construção das curvas momento-rotação das ligações de Alva (2004) (Continuação)

Parâmetros	Ligação			
	LVP1	LVP2	LVP3	LVP4
$h_{c,ef}$ (cm)	9	9	9	9
$A_{c,eff}$ (cm ²)	180	180	180	180
$\rho_{c,eff}$	0,0447	0,0447	0,0447	0,0447
$s_{R,max}$ (mm)	128,896	128,896	128,896	128,896
τ_{by} (MPa)	6,358	6,647	4,888	4,962
C_1 ((kN.cm) ⁻²)	$8,441 \times 10^{-12}$	$9,954 \times 10^{-12}$	$1,146 \times 10^{-11}$	$1,126 \times 10^{-11}$
C_2 (cm)	24,645	24,645	24,645	24,645

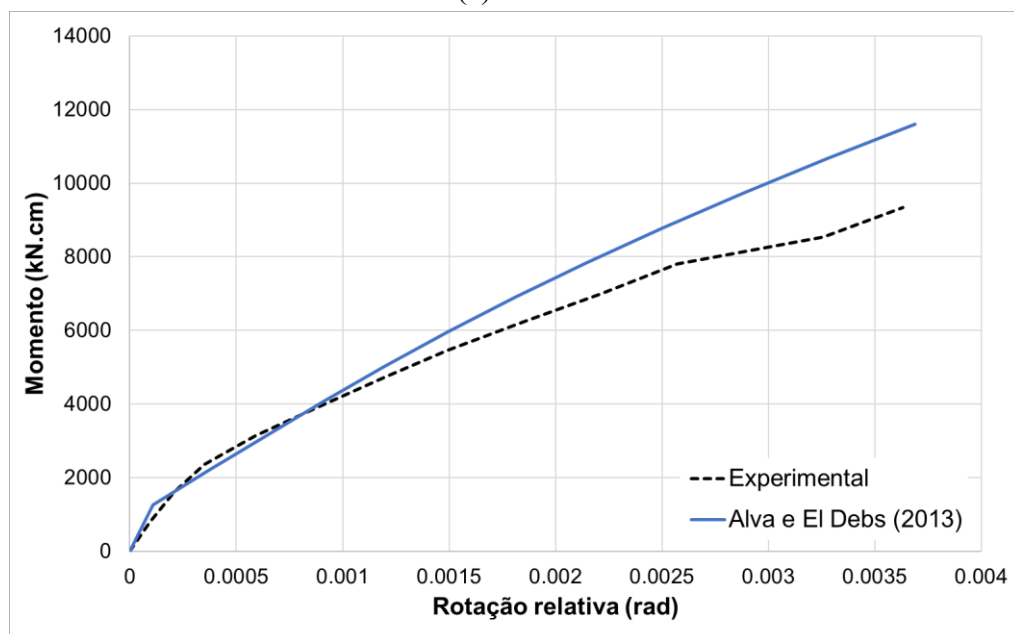
Fonte: O autor

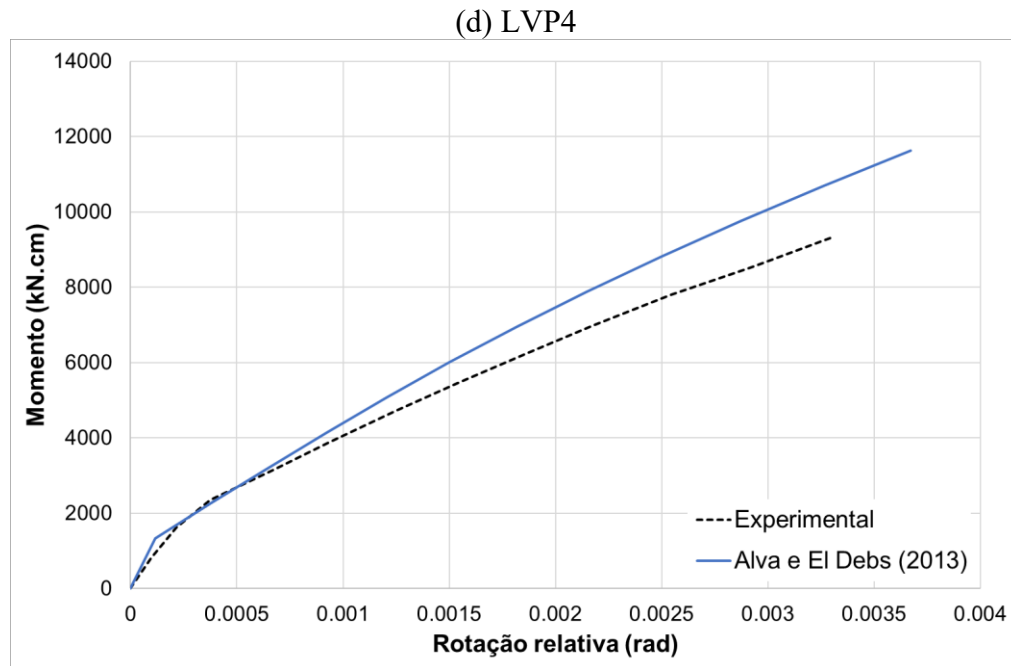
Figura 74 - Curvas de momento-rotação das ligações de Alva (2004)
(a) LVP1

(b) LVP2



(c) LVP3





4.3.2 Diagramas momento-curvatura

Para o traçado do diagrama de momento-curvatura das vigas foram calculados os três pontos notáveis que delimitam os Estádios I, II e III: o momento de início de fissuração (M_r), o momento de início de escoamento (M_y) e o momento ultimo (M_u). Juntos com esses valores também foram calculados os momentos de inércia à flexão nos Estádios I e II para serem usados na expressão de Branson (1965). Os parâmetros utilizados no traçado dos diagramas estão apresentados na Tabela 15.

Tabela 15 - Parâmetros para obtenção dos diagramas momento-curvatura: vigas das ligações de Alva (2004)

Parâmetros	Ligações			
	LVP1	LVP2	LVP3	LVP4
M_r (kN.cm)	1800	2000	1080	1200
M_y (kN.cm)	16536	15649	15370	15382
M_u (kN.cm)	17098	15649	15914	15926
I_I (cm ⁴)	139217	137372	142861	142657
I_{II} (cm ⁴)	51184	48725	55968	55703
m	4	4	4	4
E_c (kN/cm ²)	2790	2958	2509	2524

Fonte: O autor

Quanto ao momento de início de fissuração, a princípio seu valor foi calculado de acordo com a recomendação da ABNT NBR 6118:2014. Todavia, após encontradas as curvas pelo modelo de Branson (1965), estas foram comparadas às curvas momento-curvatura geradas pela rotina computacional de Alva (2017), a qual utiliza o modelo de Torres, López-Almansa e Bozzo (2004) para a consideração do *tension stiffening*. Como notaram-se diferenças de valores entre os dois procedimentos (vide Tabela 16), optou-se por utilizar o momento de início de fissuração gerado pela rotina computacional.

Tabela 16 - Momento de início de fissuração encontrados

Parâmetros	Ligação			
	LVP1	LVP2	LVP3	LVP4
M_r (kN.cm) (NBR 6118)	2066	2376	1404	1498
M_r (kN.cm) (Alva, 2017)	1800	2000	1080	1200

Fonte: O autor

Para a obtenção do diagrama momento-curvatura dos pilares utilizando a rotina de cálculo de Alva (2017) é necessário fornecer suas características geométricas e mecânicas. Também é preciso informar a força normal aplicada N , os coeficientes α_1 e α_2 que consideram o efeito *tension stiffening*, o incremento de curvatura $\Delta(1/r)$ e um critério de convergência *toler* para encerramento dos cálculos. As características geométricas dos pilares das ligações de Alva (2004) podem ser encontradas na seção 2.3.1 deste trabalho. Os demais parâmetros estão descritos na Tabela 17.

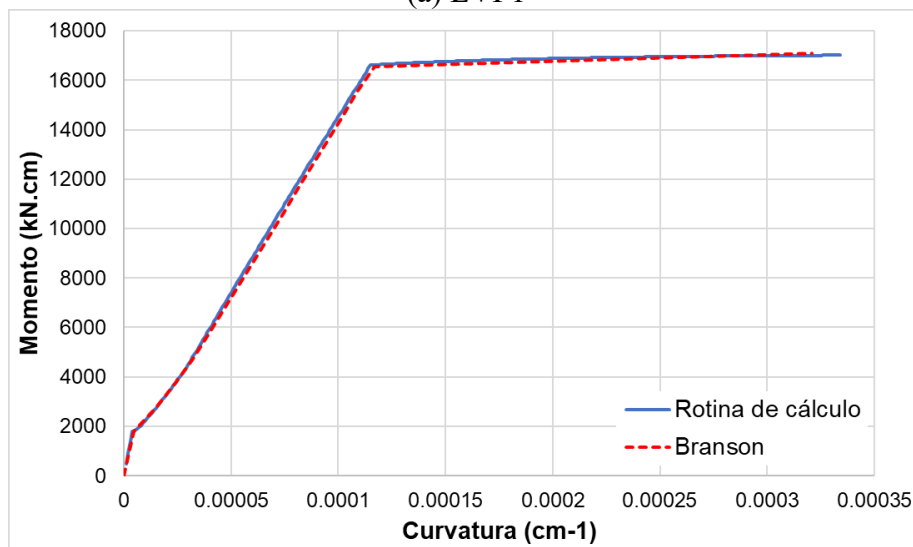
Tabela 17 - Parâmetros para obtenção dos diagramas momento-curvatura: pilares das ligações de Alva (2004)

Parâmetros	Ligação			
	LVP1	LVP2	LVP3	LVP4
f_c (kN/cm ²)	4,519	4,938	2,670	2,752
f_{ct} (kN/cm ²)	0,2583	0,297	0,1755	0,1872
E_{ci} (kN/cm ²)	3171,2	3360,3	2831,5	2846,7
f_y (kN/cm ²)	63,0	59,4	59,4	59,4
E_s (kN/cm ²)	21000	21000	21000	21000
N (kN)	360	360	240	240
$\Delta(1/r)$ (1/cm)	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001
α_1	0	0	0	0
α_2	10,686295	10,857519	10,399493	10,413991
<i>toler</i> (%)	0,1	0,1	0,1	0,1

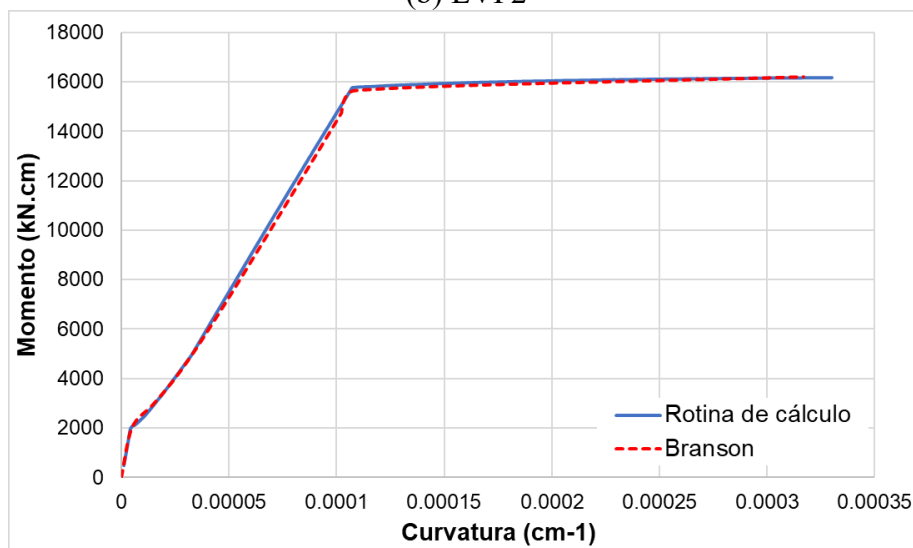
Fonte: O autor

Os diagramas de momento-curvatura das vigas e dos pilares estão representados nas Figura 75 e Figura 76 respectivamente. Para as vigas, foram plotadas duas curvas: a obtida com o emprego de expressão de Branson (1965) no Estádio II e a obtida com o emprego da rotina computacional de Alva (2017). Os resultados indicaram que os dois procedimentos conduzem curvas muito próximas, com diferenças pouco relevantes.

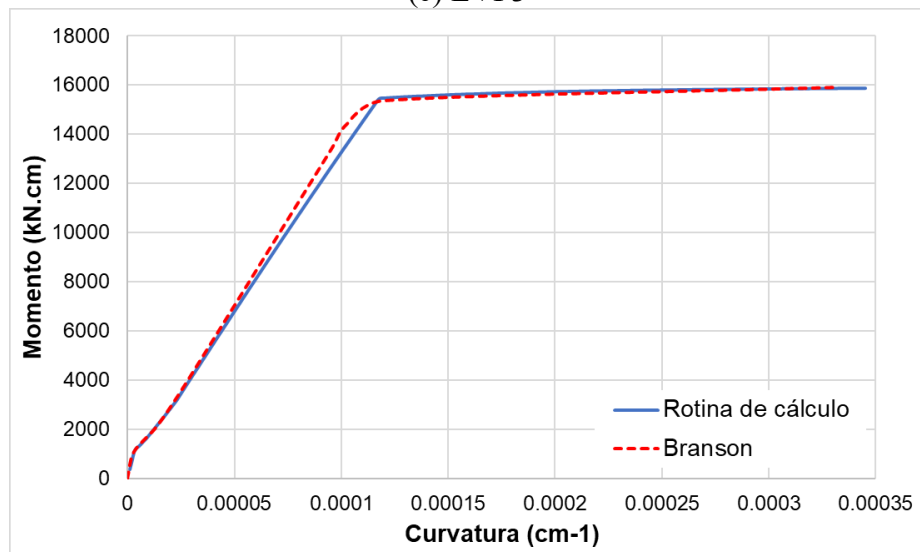
Figura 75 - Diagrama $M \times (1/r)$ das vigas das ligações de Alva (2004)
(a) LVP1



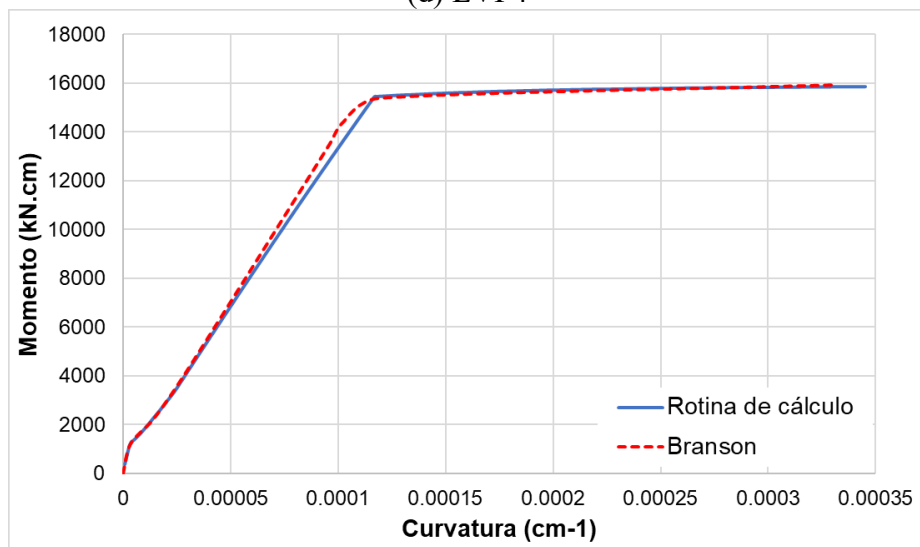
(b) LVP2



(c) LVP3

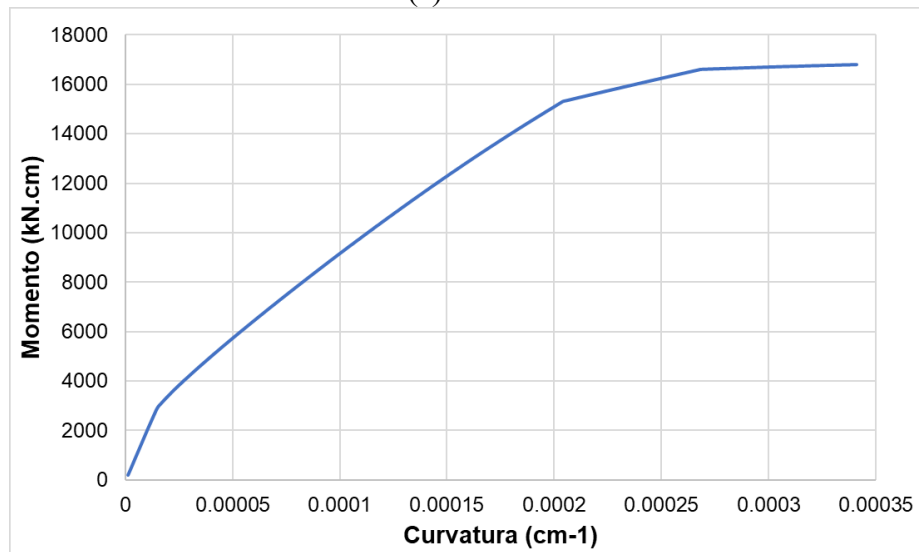


(d) LVP4

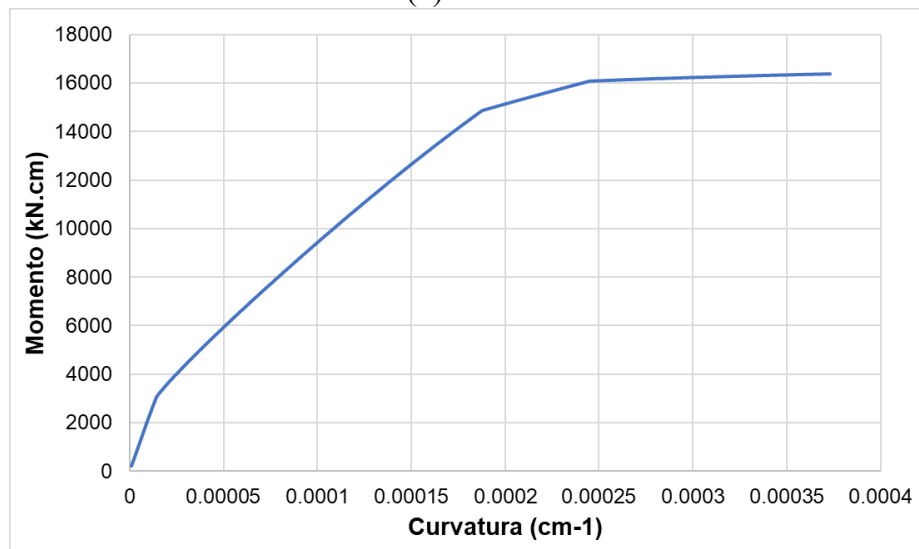


Fonte: O autor

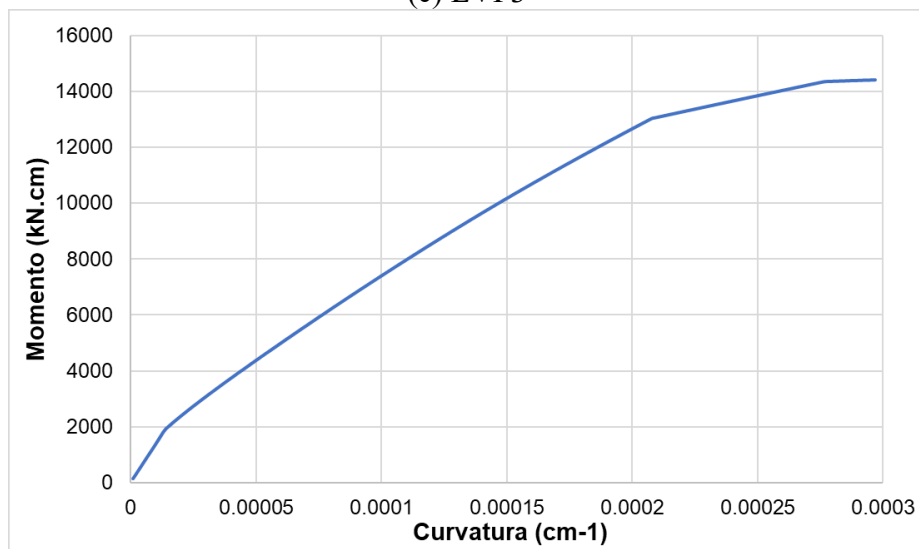
Figura 76 - Diagrama $M \times N \times (1/r)$ dos pilares das ligações de Alva (2004)
(a) LVP1

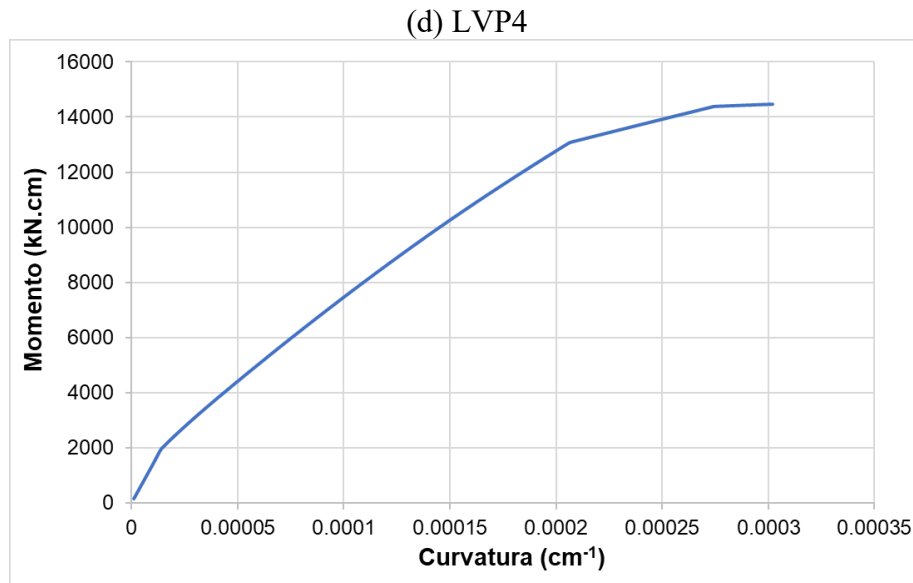


(b) LVP2



(c) LVP3





Fonte: O autor

4.3.3 Calibração da rigidez dos trechos rígidos

A calibração do trecho rígido neste trabalho refere-se à obtenção correta das propriedades da seção (área e momento de inércia) do trecho rígido na modelagem das ligações com elementos de pórtico. Dessa forma, para a calibração do trecho rígido foram feitos dois modelos numéricos: um com elementos finitos de estado plano de tensões e um com elementos de barras no programa ANSYS. O primeiro passo foi escolher a malha a ser utilizada no modelo com elemento finitos planos. Realizou-se uma análise de convergência de malha em regime elástico-linear, testando-se três malhas diferentes: de 2,5 cm, de 5 cm e de 10 cm. Nesta verificação das malhas apenas a ligação LVP1 é apresentada (Figura 77).

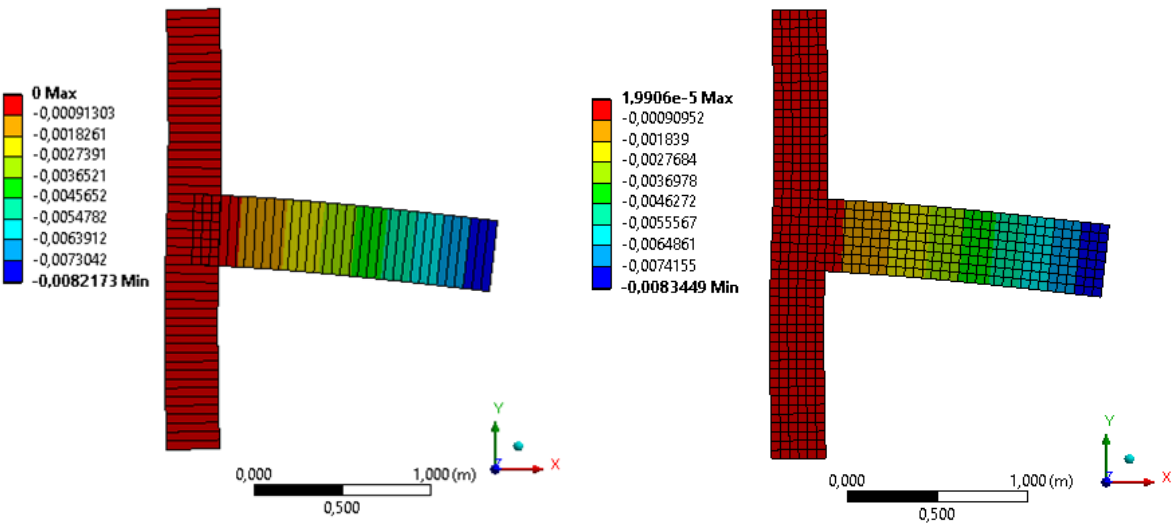
Os resultados de deslocamentos na extremidade da viga com o uso das três malhas estão contidos na Tabela 18. Após verificar os resultados das malhas, optou-se por utilizar a de 2,5 cm para conseguir maior precisão.

Tabela 18 - Deslocamentos para as diferentes malhas no modelo com elementos finitos

Malha (cm)	Deslocamento na viga (cm)
10	-0,8141394
5	-0,8344948
2,5	-0,8468411

Fonte: O autor

Figura 77 - Deslocamento verticais dos modelos da ligação LVP1 feito no ANSYS
(a) Modelo elemento de barras (m) (b) Modelo com elementos finitos planos (m)



Fonte: O autor

Para cada ligação de Alva (2004) foi feita a calibração da rigidez dos trechos rígidos. A princípio, sem a consideração do trecho rígido nos modelos de barras, obteve-se uma diferença de deslocamentos de cerca de 15% em relação aos modelos MEF de elementos finitos planos. Para corrigir esta diferença, as alturas da seção transversal dos elementos do trecho rígido foram aumentadas em cerca de 20%, o que equivale a um aumento de 73% de rigidez. Os resultados estão representados na Tabela 19.

Tabela 19 - Calibração da rigidez dos trechos rígidos

Ligação	Deslocamentos		Erro	Aumento na altura da seção	Deslocamento com trecho rígido	Erro
	MEF	Pórtico s/trecho rígido				
LVP1	-0,844927	-0,972461	15,09%	21%	-0,844985	0,01%
LVP2	-0,797379	-0,917736	15,09%	21%	-0,797433	0,01%
LVP3	-0,933884	-1,0803	15,68%	22%	-0,933258	-0,07%
LVP4	-0,928897	-1,07453	15,68%	22%	-0,928275	-0,07%

Todos os deslocamentos estão em centímetros.
O aumento da altura foi o mesmo para o trecho do pilar e da viga.

Fonte: O autor

4.3.4 Modelagem numérica

Nas análises não-lineares com os modelos de pórtico empregou-se o elemento BEAM188 para a simulação dos pilares, das vigas e dos trechos rígidos. Estes elementos foram criados com seção *Non Linear Generalized*, considerando-se a não-linearidade física via relações

momento-curvatura, exceto para os trechos rígidos, cujo comportamento frente a momentos fletores foi assumido como linear.

Para a modelagem da deformabilidade à flexão das ligações, empregou-se o elemento finito COMBIN39. Três elementos de mola não linear foram criados, sendo estes localizados no ponto de interseção do trecho rígido com a viga. Um destes foi lançado como mola rotacional, na qual foram inseridos os pontos da curva momento-rotação do modelo analítico de Alva e El Debs (2013). Os outros dois elementos foram lançados como molas translacionais (vertical e horizontal) indeformáveis (elevada rigidez) para garantir a continuidade da viga. A Figura 78 exemplifica o lançamento dos pontos da curva momento-rotação relativa no ANSYS (APDL) para a ligação LVP1, associados à mola rotacional não-linear.

Figura 78 - Lançamento dos pontos da momento-rotação relativa no ANSYS (APDL) (unidades rad \\\ kN.cm)

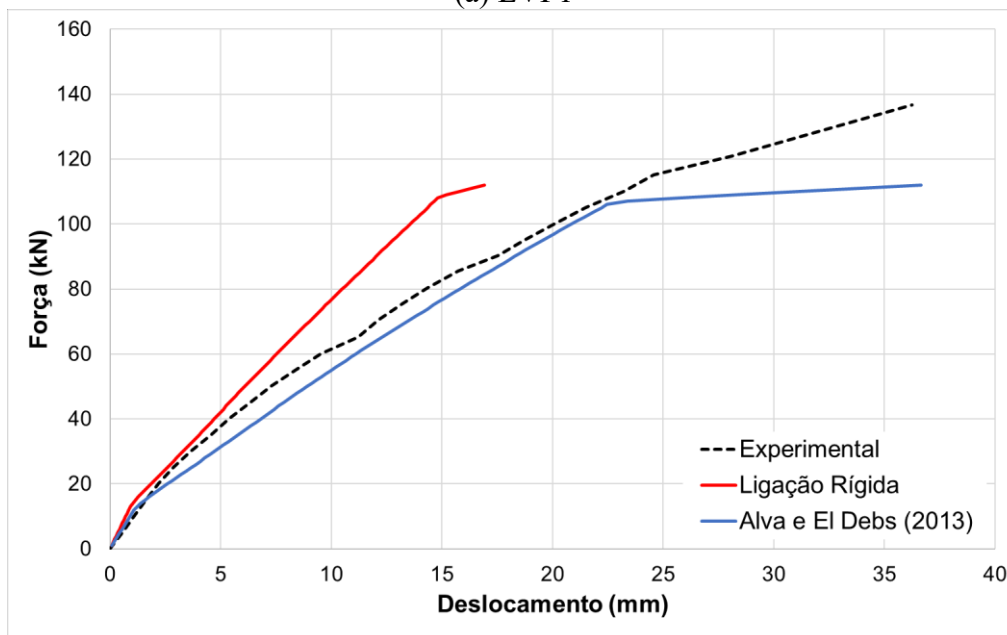
Displacement-force curve data	D	F
Data set 1	0	0
Data set 2	0.0001415	1800
Data set 3	0.0003929	2782
Data set 4	0.0006665	3765
Data set 5	0.0009392	4747
Data set 6	0.0012158	5730
Data set 7	0.0015013	6712
Data set 8	0.0017989	7694
Data set 9	0.0021101	8677
Data set 10	0.002436	9659
Data set 11	0.002777	10642
Data set 12	0.0031336	11624
Data set 13	0.003506	12606
Data set 14	0.0038942	13589
Data set 15	0.0042984	14571
Data set 16	0.0047188	15553
Data set 17	0.0051882	16536
Data set 18	0.0103299	17098
Data set 19	0	0

Fonte: O autor

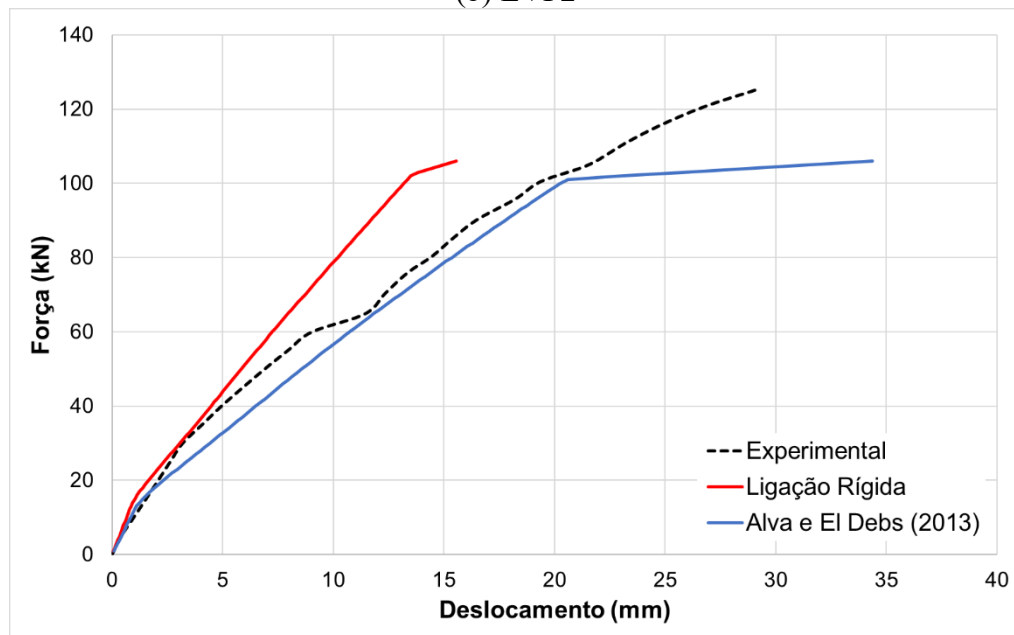
Para a estratégia de solução do sistema não linear, empregou-se o Método de Newton-Raphson, sendo aplicadas na extremidade da viga forças em incrementos iguais de 1,0 kN. Como critério de convergência, empregou-se uma tolerância de 0,1% em forças e deslocamentos.

A Figura 79 contém os resultados de força-deslocamento na extremidade da viga fornecidos pela modelagem numérica e os resultados obtidos experimentalmente. Para fins de comparação, também foi feita a simulação dos modelos com a hipótese de ligações perfeitamente rígidas. As comparações na Figura 79 indicam notável melhora dos resultados das simulações numéricas quando se considera a deformabilidade das ligações.

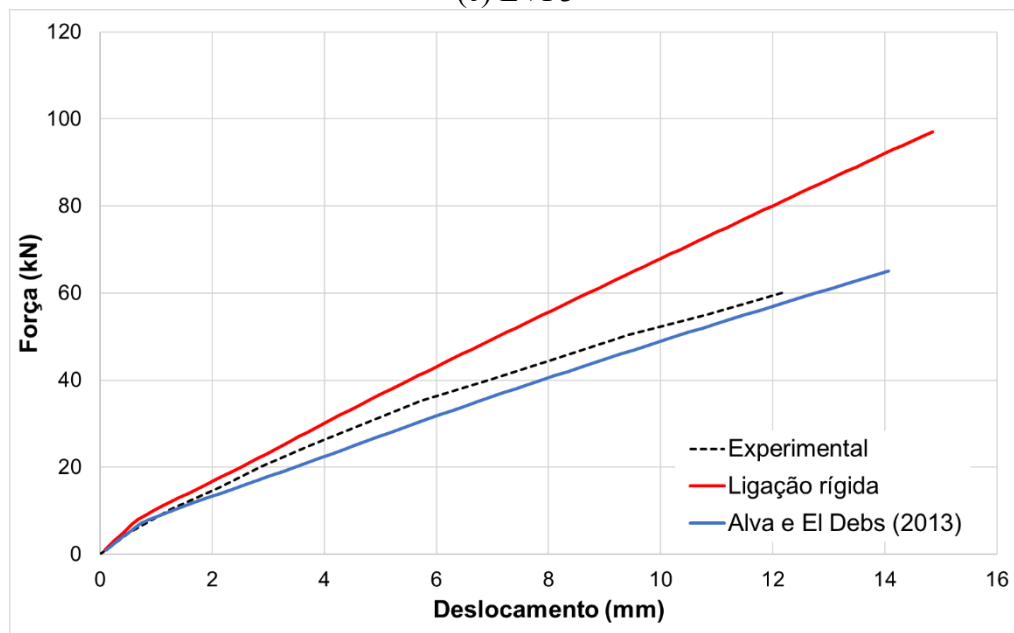
Figura 79 - Curvas força-deslocamento das ligações de Alva (2004)
(a) LVP1

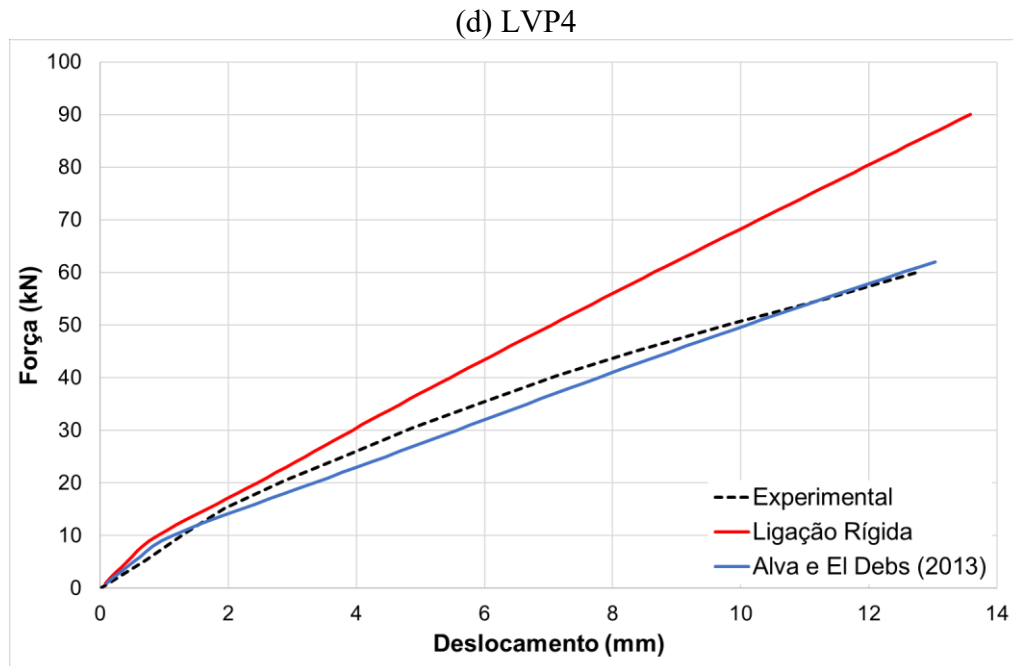


(b) LVP2



(c) LVP3





Fonte: O autor

4.3.5 Discussão dos resultados

Analisando as curvas momento-rotação relativa teóricas e as experimentais, é possível perceber que o modelo analítico de Alva e El Debs (2013) consegue reproduzir satisfatoriamente os efeitos da deformabilidade da ligação viga-pilar por momentos fletores. Os resultados do tipo força-deslocamento das simulações numéricas também ficaram próximos aos resultados experimentais e mostraram uma melhora significativa quando comparados aos resultados numéricos considerando ligações perfeitamente rígidas.

4.4 LIGAÇÕES MONOLÍTICAS DE LEE, WIGHT E HANSON (1977)

Nesta seção é feita a comparação do modelo analítico de Alva e El Debs (2013) com os resultados experimentais de Lee, Wight e Hanson (1977) (Specimen 2 e Specimen 5), apresentados na seção 2.3.2 deste trabalho. Os resultados experimentais disponíveis são do tipo força-deslocamento; assim foram realizadas simulações numéricas com modelos de pórticos para encontrar a curva força-deslocamento teórica. Curvas momento-rotação relativa experimentais obtidas de forma indireta, a partir dos deslocamentos experimentais, também são comparadas com as curvas teóricas momento-rotação relativa do modelo analítico de Alva e El Debs (2013).

As simulações numéricas realizadas para estas ligações seguiram o mesmo procedimento utilizado nas ligações de Alva (2004)

4.4.1 Curva momento-rotação relativa entre viga e pilar

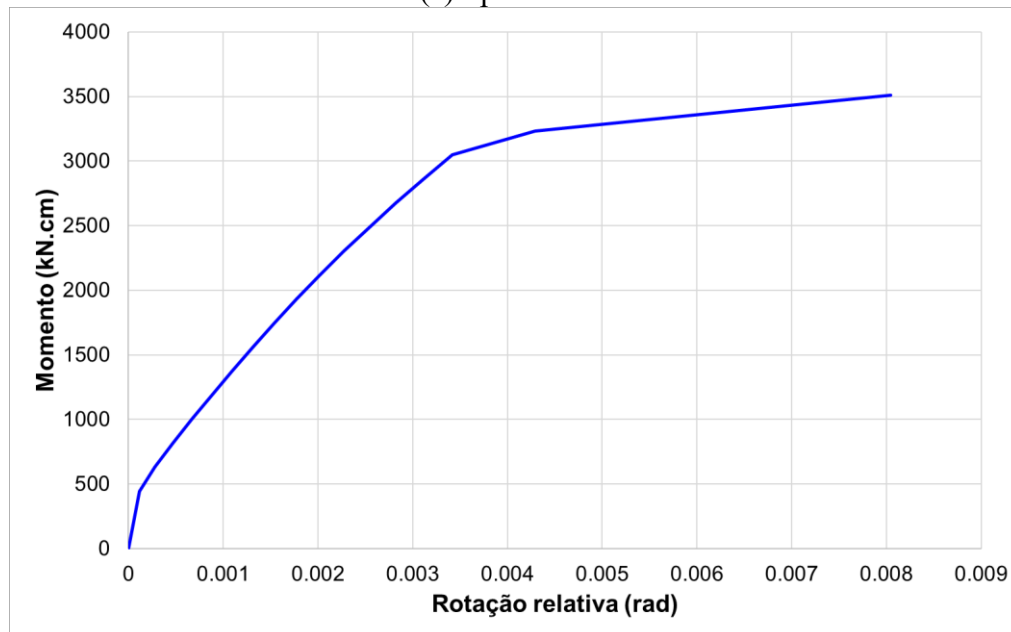
As curvas momento-rotação relativa para as ligações Specimen 2 e Specimen 5 obtidas com o modelo de Alva e El Debs (2013) estão indicadas na Figura 80. Os parâmetros utilizados estão dispostos na Tabela 20. Utilizou-se a expressão de Branson (1965) para o cálculo das curvaturas no Estádio II.

Tabela 20 - Parâmetros de entrada para a construção das curvas momento-rotação das ligações de Lee, Wight e Hanson (1977)

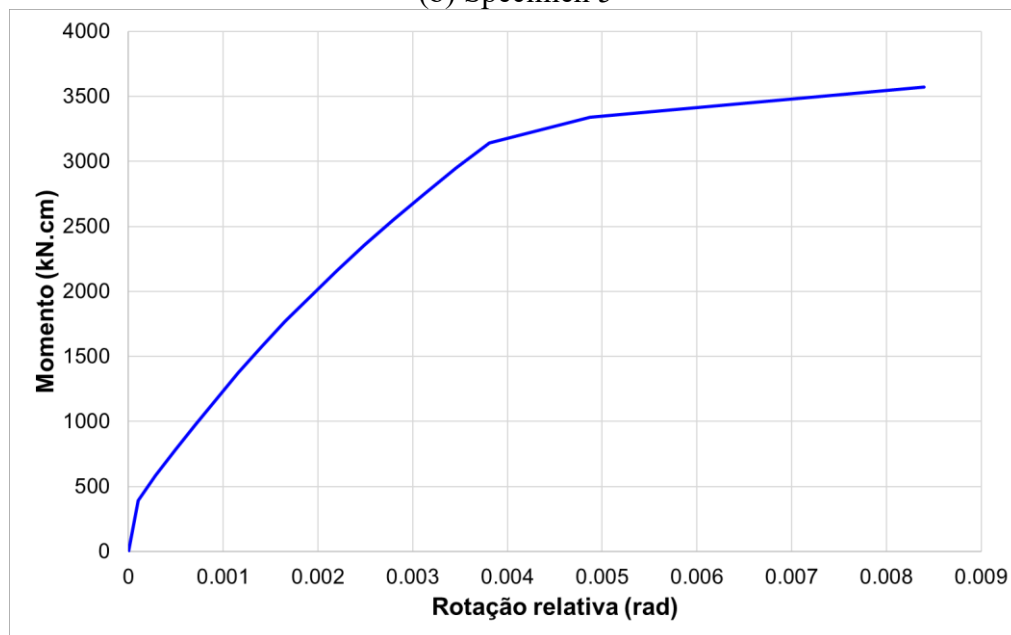
Parâmetros	Ligação	
	Specimen 2	Specimen 5
L_p (cm)	20,0	20,0
f_c (kN/cm ²)	2,90	2,48
E_s (kN/cm ²)	21000	21000
A_s (cm ²)	5,70	5,70
f_y (kN.cm ²)	33,51	35,09
d (cm)	20,0	20,0
x_{II} (cm)	6,753	6,961
z_{II} (cm)	16,923	16,703
\emptyset (mm)	19,05	19,05
c (cm)	3,4	3,4
k_1	0,8	0,8
k_2	0,5	0,5
k_3	3,4	3,4
k_4	0,425	0,425
$h_{c,ef}$ (cm)	6,08	6,01
$A_{c,eff}$ (cm ²)	121,65	120,26
$\rho_{c,eff}$	0,0469	0,0474
$s_{R,max}$ (mm)	184,714	183,927
τ_{by} (MPa)	5,385	4,980
C_1 ((kN.cm) ⁻²)	1,708x10 ⁻¹⁰	1,927x10 ⁻¹⁰
C_2 (cm)	19,236	19,196

Fonte: O autor

Figura 80 - Curvas teóricas momento-rotação das ligações de Lee, Wight e Hanson (1977)
(a) Specimen 2



(b) Specimen 5



Fonte: O autor

4.4.2 Diagramas momento-curvatura

O diagrama de momento-curvatura das vigas foi traçado com a utilização da expressão de Branson (1965) no Estádio II e com o cálculo dos momentos de início de fissuração (M_r), de início de escoamento (M_y) e do momento último (M_u), além dos momentos de inércia

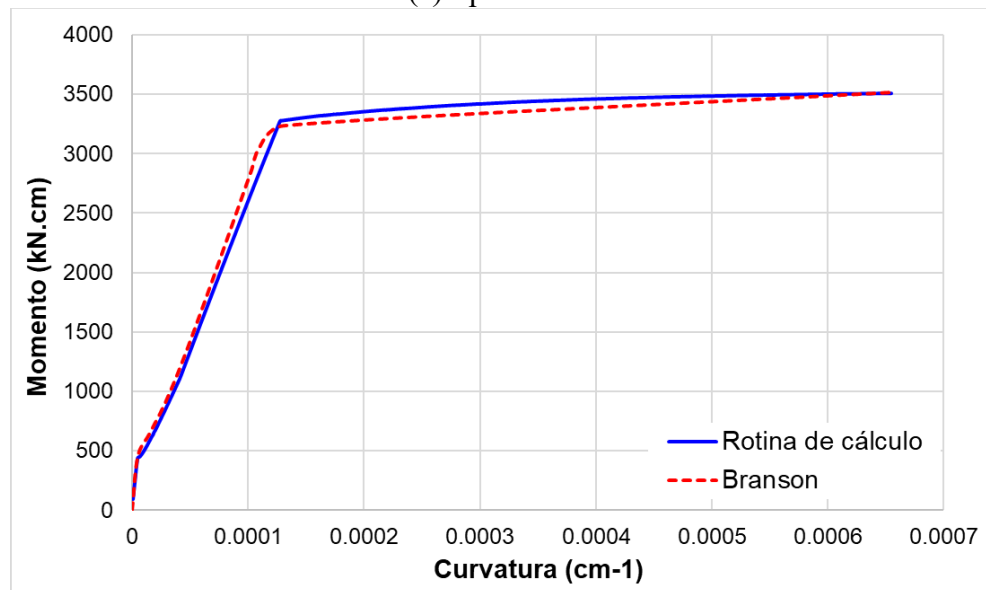
nos Estádios I e II. Os parâmetros utilizados para o traçado dos diagramas estão contidos na Tabela 21. Os diagramas momento-curvatura das vigas estão indicados na Figura 81.

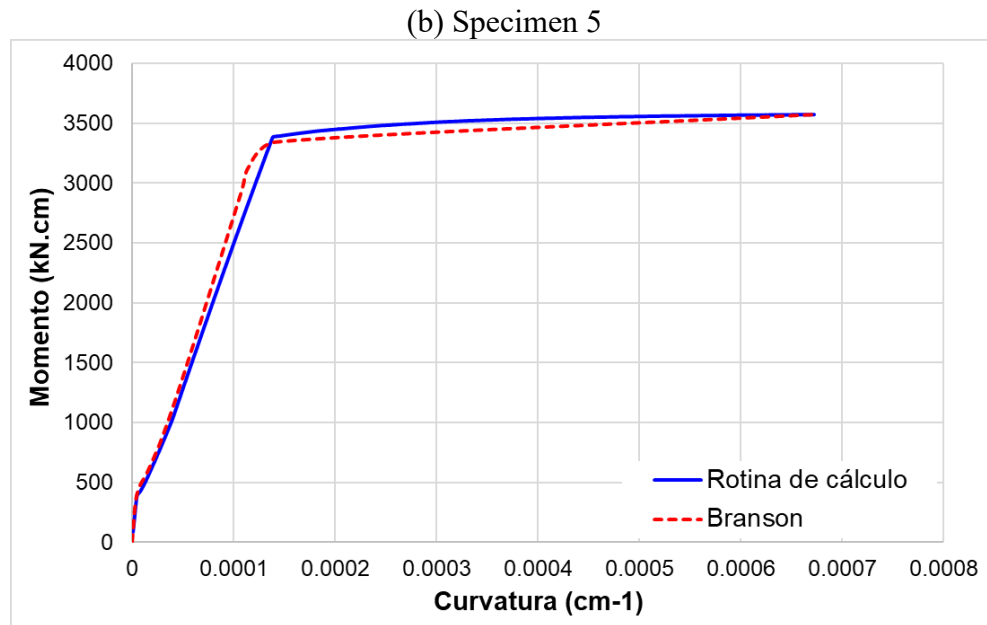
Tabela 21 - Parâmetros para a obtenção dos diagramas momento-curvatura: vigas das ligações de Lee, Wight e Hanson (1977)

Parâmetros	Ligação	
	Specimen 2	Specimen 5
M_r (kN.cm)	445	390
M_y (kN.cm)	3232,43	3340,79
M_u (kN.cm)	3512,69	3570,01
I_I (cm ⁴)	29642	29981
I_{II} (cm ⁴)	8787	9414
m	4	4
E_c (kN/cm ²)	3157,4	2884,7

Fonte: O autor

Figura 81 - Diagrama $M \times (1/r)$ das vigas de Lee, Wight e Hanson (1977)
(a) Specimen 2





Fonte: O autor

Os diagramas momento-normal-curvatura dos pilares foram gerados com o auxílio da rotina computacional de Alva (2017). Os parâmetros de entrada para a geração desses diagramas estão indicados na Tabela 22. As características geométricas dos pilares de Lee, Wight e Hanson (1977) podem ser encontradas na seção 2.3.2 deste trabalho.

Tabela 22 - Parâmetros para obtenção dos diagramas momento-curvatura: pilares das ligações de Lee, Wight e Hanson (1977)

Parâmetros	Ligação	
	Specimen 2	Specimen 5
f_c (kN/cm ²)	3,241	2,772
f_{ct} (kN/cm ²)	0,198	0,179
E_{ci} (kN/cm ²)	3618,8	3346,5
f_y (kN/cm ²)	53,78	53,78
E_s (kN/cm ²)	21000	21000
N (kN)	178	0
$\Delta(1/r)$ (1/cm)	0,000001	0,000001
α_1	0	0
α_2	13,22659	12,76623
<i>toler</i> (%)	0,1	0,1

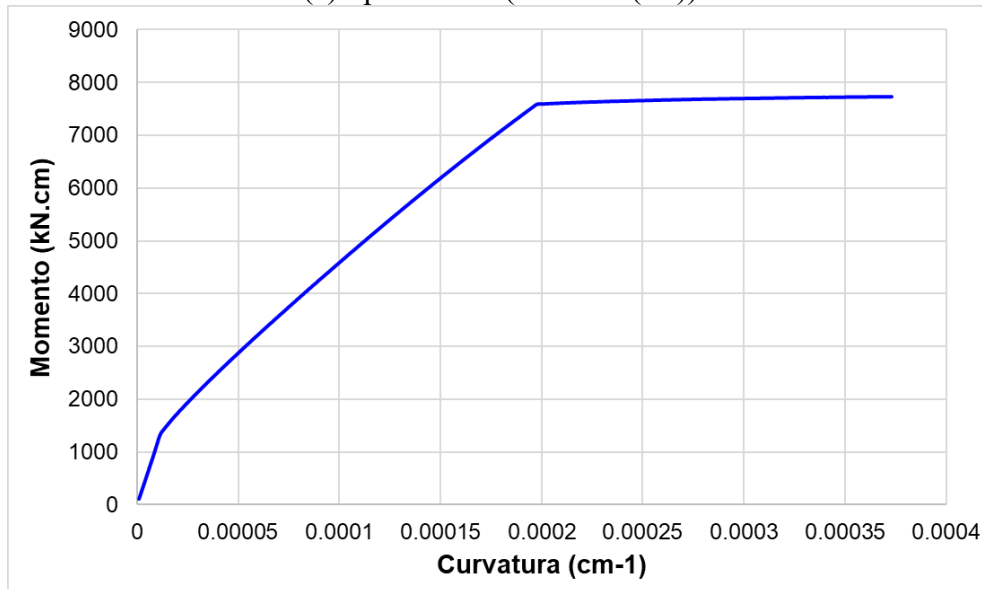
Fonte: O autor

Os diagramas de momento-normal-curvatura dos pilares estão representados na Figura 82. Como no pilar do Specimen 5 não foi aplicado força de compressão, foi possível construir,

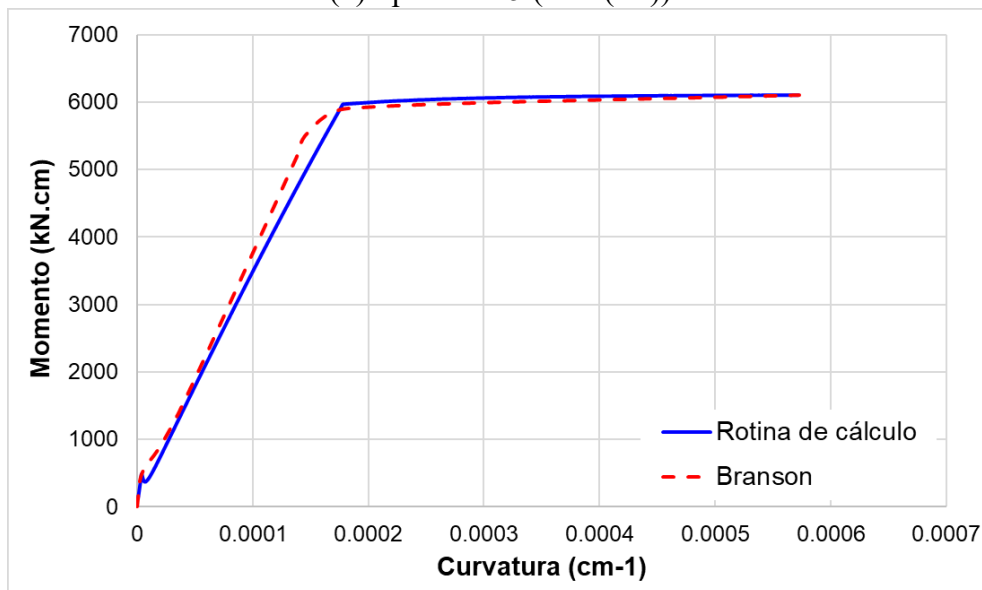
para fins comparativos, o diagrama momento-curvatura com o emprego da expressão de Branson (1965) para esta ligação.

Figura 82 - Diagrama momento-curvatura dos pilares de Lee, Wight e Hanson (1977)

(a) Specimen 2 ($M \times N \times (1/r)$)



(b) Specimen 5 ($M \times (1/r)$)



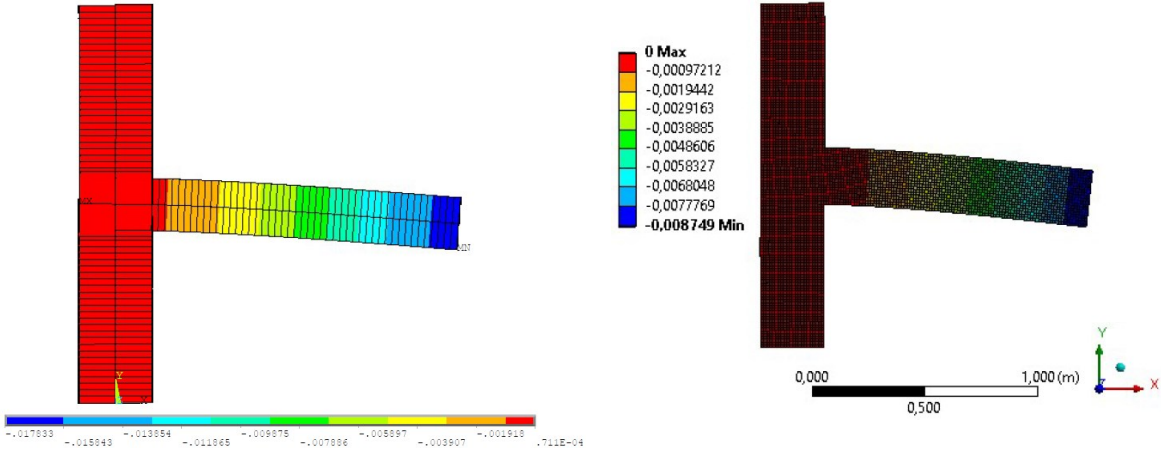
Fonte: O autor

4.4.3 Calibração da rigidez dos trechos rígidos

A calibração do trecho rígido foi feita no programa ANSYS (APDL) de modo semelhante à realizada nas simulações numéricas de Alva (2004). Após a análise de convergência de malha, foi escolhido 1,25 cm para as dimensões dos elementos finitos de estado plano de

tensões. A Figura 83 ilustra as modelagens empregadas para a calibração dos trechos rígidos da ligação Specimen 2.

Figura 83 - Deslocamento verticais dos modelos da ligação Specimen 2 feito no ANSYS
(a) Modelo com elementos de barras (cm) (b) Modelo com elementos finitos planos (m)



Fonte: O autor

Os resultados referentes à calibração da rigidez dos trechos rígidos estão resumidos na Tabela 23.

Tabela 23 - Calibração da rigidez dos trechos rígidos - Lee, Wight e Hanson (1977)

Ligação	Deslocamentos		Erro	Aumento na altura	Deslocamento com trecho rígido	Erro
	MEF	Pórtico s/trecho rígido				
2	-0,8749	-1,01697	16,24%	24%	-0,877365	0,28%
5	-0,69938	-0,829571	18,62%	25%	-0,700392	0,14%

Todos os deslocamentos estão em centímetros.

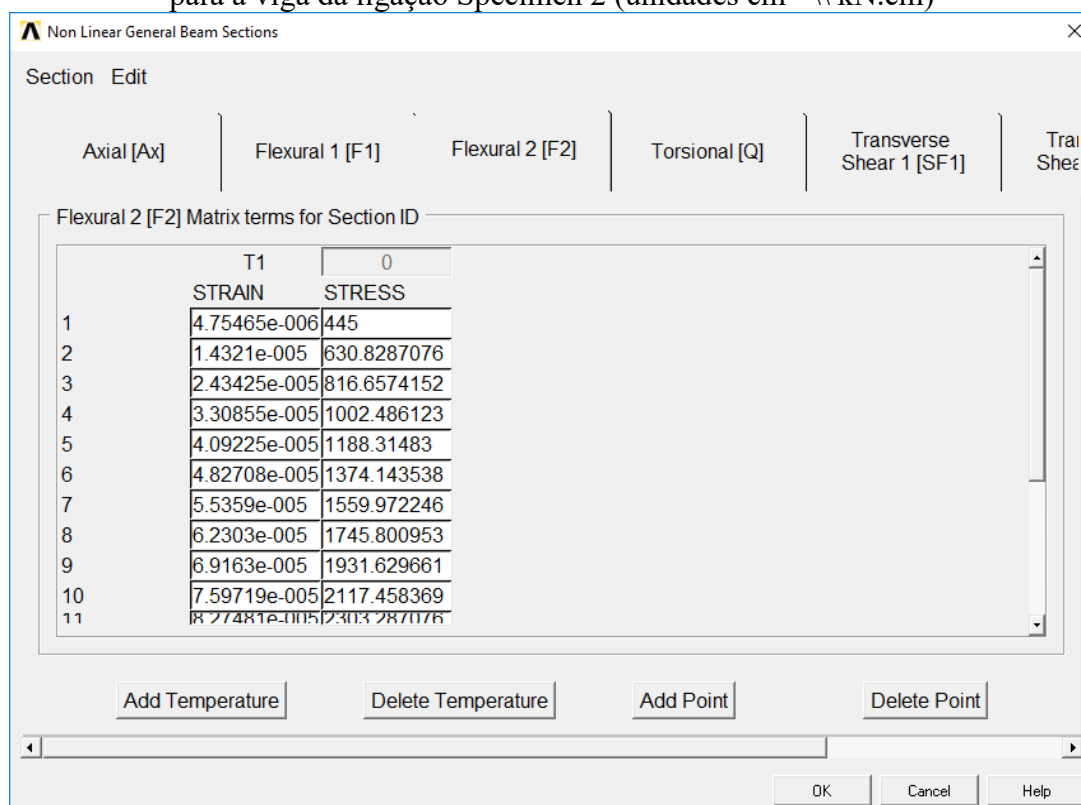
O aumento da altura foi o mesmo para o trecho do pilar e da viga.

Fonte: O autor

4.4.4 Modelagem numérica

A modelagem foi feita de modo semelhante aos modelos de Alva (2004). Foi utilizado o elemento BEAM188 para vigas, pilares e trechos rígidos com seção *Non Linear Generalized*, informando-se os pontos dos diagramas momento-curvatura nos elementos de vigas e pilares. Para os trechos rígidos assumiu-se comportamento linear. A Figura 84 exemplifica o lançamento dos pontos do diagrama de momento-curvatura na seção *Non Linear Generalized* no programa ANSYS (APDL) para a viga da ligação Specimen 2.

Figura 84 - Lançamento dos pontos do diagrama momento-curvatura no ANSYS (APDL): para a viga da ligação Specimen 2 (unidades $\text{cm}^{-1} \backslash \text{kN.cm}$)



Fonte: O autor

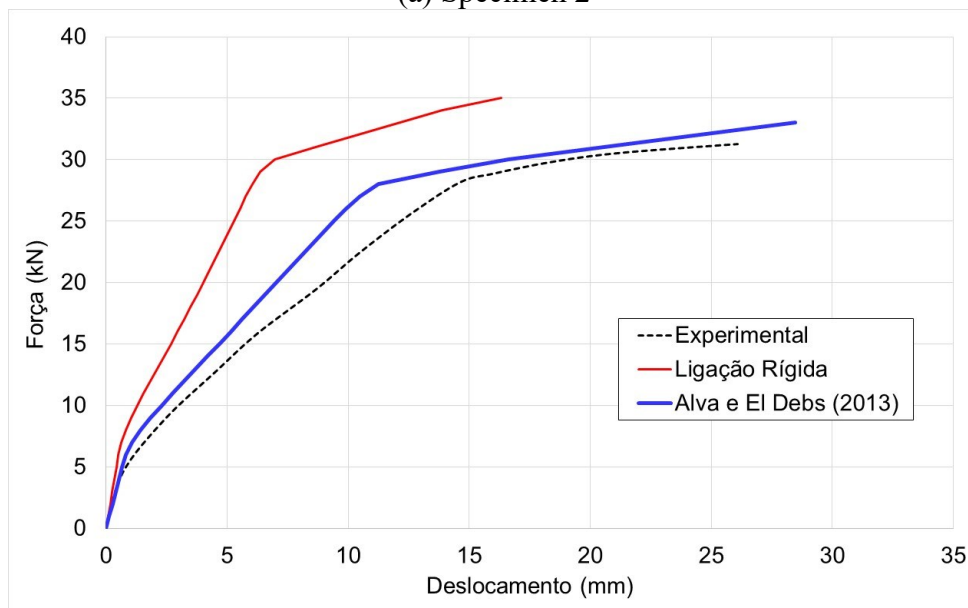
Para simular a deformabilidade das ligações, três elementos COMBIN39 foram criados, sendo estes localizados no ponto de interseção do trecho rígido com a viga. Um destes foi lançado como mola não-linear rotacional com os pontos da curva momento-rotação relativa obtidos a partir do modelo analítico de Alva e El Debs (2013). Os outros dois elementos foram lançados como molas translacionais, (vertical e horizontal) indeformáveis (elevada rigidez) para garantir a continuidade da viga.

Para a estratégia de solução do sistema não linear, empregou-se o Método de Newton-Raphson, sendo aplicadas na extremidade da viga incrementos iguais de 1,0 kN. Como critério de convergência, empregou-se uma tolerância de 0,1% em forças e deslocamentos.

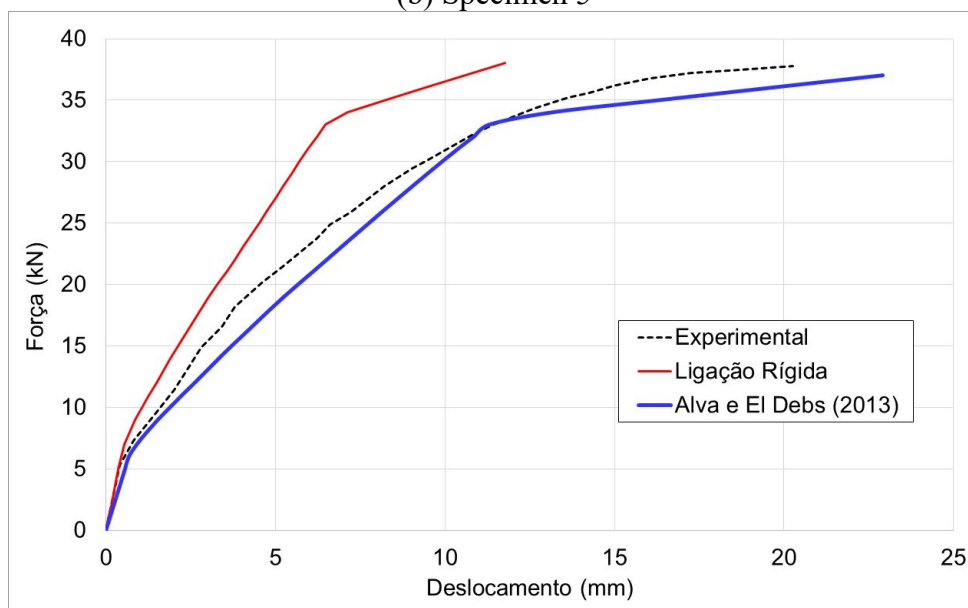
A Figura 85 contém os resultados de força-deslocamento na extremidade da viga fornecidos pela modelagem numérica e os resultados obtidos experimentalmente. Para fins de comparação, também são apresentados os resultados da modelagem numérica admitindo-se ligação perfeitamente rígida.

Figura 85 - Curvas força-deslocamento das ligações de Lee, Wight e Hanson (1977)

(a) Specimen 2



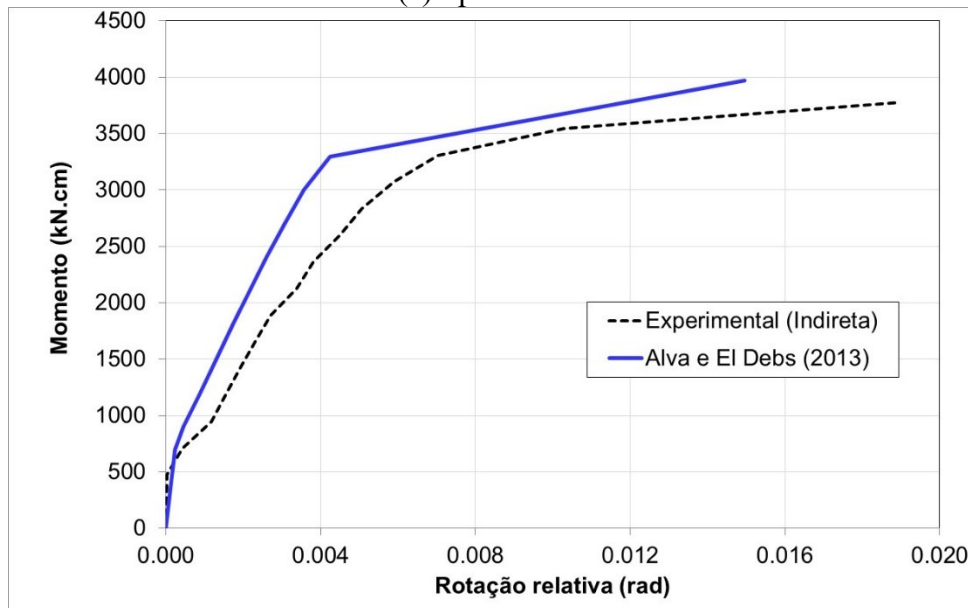
(b) Specimen 5



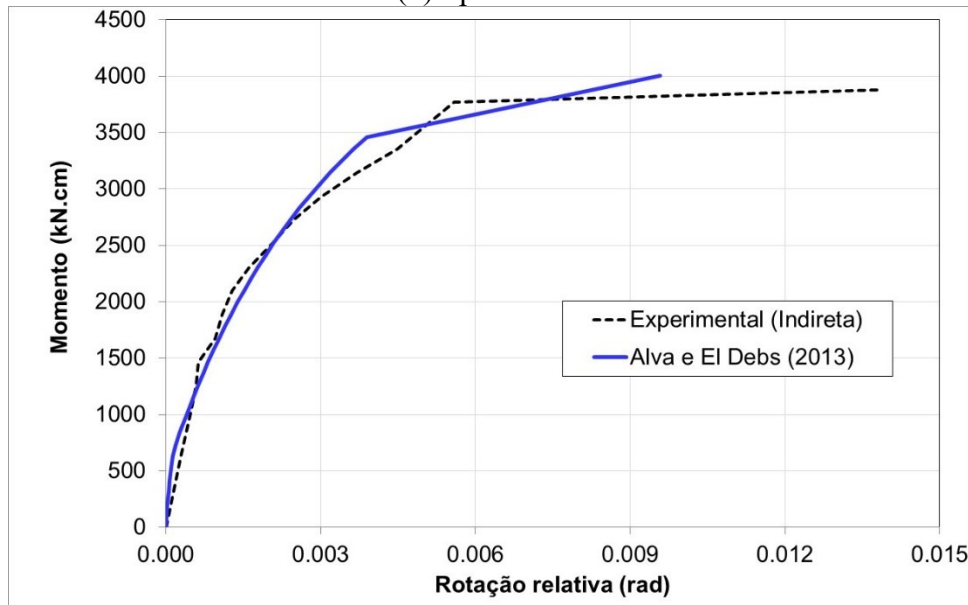
Fonte: O autor

Com os resultados experimentais do tipo força-deslocamento puderam ser calculadas as rotações relativas experimentais de forma indireta (conforme sugerido na seção 4.2). As curvas momento-rotação teóricas e experimentais (obtidas de forma indireta) estão apresentadas na Figura 86.

Figura 86 - Curvas momento-rotação das ligações de Lee, Wight e Hanson (1977)
(a) Specimen 2



(b) Specimen 5



4.4.5 Discussão dos resultados

A comparação entre as curvas teóricas e experimentais do tipo força-deslocamento indicaram novamente o bom desempenho do modelo analítico de Alva e El Debs (2013) na consideração da deformabilidade ao momento fletor das ligações e também a importância de se considerar tal deformabilidade para uma simulação numérica mais precisa. Além disso, os resultados do tipo momento-rotação relativa obtidos de forma indireta ficaram próximos aos estimados pelo modelo analítico. Isso demonstra que a metodologia utilizada para

aproveitar os resultados do tipo força-deslocamento experimentais na análise da deformabilidade de ligações é viável.

CAPÍTULO 5

MODELO ANALÍTICO PROPOSTO PARA LIGAÇÕES VIGA-PILAR DE EXTREMIDADE

5.1 INTRODUÇÃO

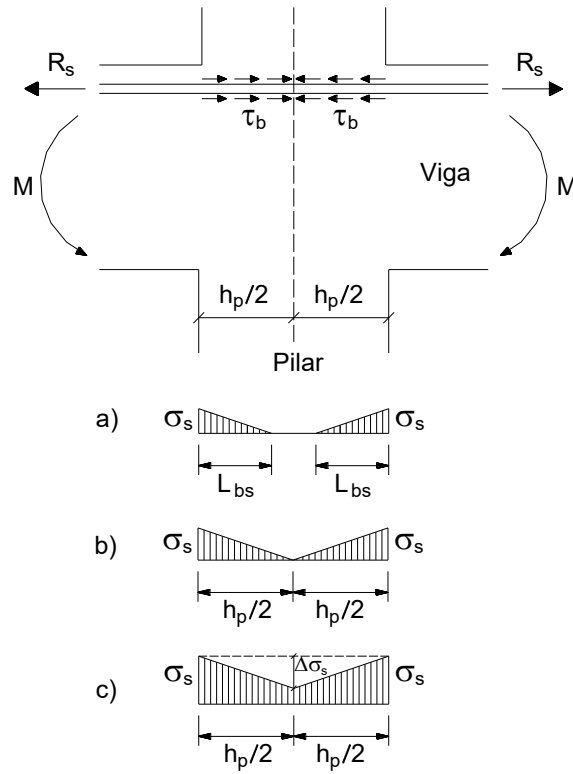
Neste capítulo apresenta-se uma proposta de modelo analítico aplicável a ligações viga-pilar interno. O modelo proposto é na realidade uma extensão o modelo de Alva e El Debs (2013) para ligações viga-pilar de extremidade. O modelo proposto pode ser aplicado em ligações pré-moldadas que possuam os mesmos mecanismos de deformação considerados por Alva e El Debs (2013). Nesse sentido, foi realizada uma validação do modelo proposto com os resultados experimentais das ligações pré-moldadas de Miotto (2002) (Modelo 2.1), de Lacerda (2016) (PC1 e PC2) e de Kataoka (2007) (Modelo 1). Todas as ligações utilizadas foram descritas no capítulo 2.

5.2 DEDUÇÃO DO MODELO ANALÍTICO PROPOSTO

5.2.1 Mecanismo A

A Figura 87 contém um esquema da distribuição das tensões normais da armadura da viga no interior do nó de pórtico na fase elástica (antes do início do escoamento).

Figura 87 - Desenvolvimento das tensões normais na armadura: fase elástica



Fonte: O autor

O comprimento de transmissão L_{bs} – no qual ocorre a transferência das tensões normais da barra de aço para o concreto por aderência – pode ser calculado por:

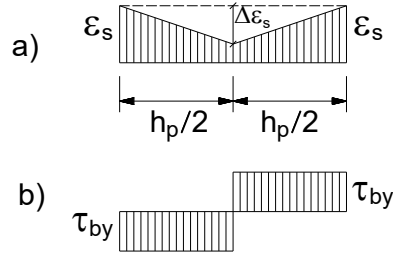
$$L_{bs} = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{\sigma_s}{\tau_{by}} \quad (79)$$

Conforme ilustrado na Figura 87a e Figura 87b, o comprimento de transmissão L_{bs} cresce proporcionalmente com a tensão normal na barra de aço até atingir o valor máximo de $h_p/2$, que corresponde à metade da dimensão do apoio do pilar. A partir desse valor, as tensões normais podem continuar a aumentar; porém o comprimento de transmissão mantém-se constante e igual a $h_p/2$, conforme ilustra a Figura 87c.

As expressões para o cálculo do deslizamento e da rotação relativa quando $L_{bs} < h_p/2$ são as mesmas que as apresentadas no modelo de Alva e El Debs (2013) para as ligações viga-pilar de extremidade.

Na fase elástica, quando L_{bs} se mantém constante com o aumento das tensões normais, o deslizamento é obtido por meio da integração das deformações normais ilustradas na Figura 88:

Figura 88 - Deformações normais na armadura e tensões de aderência: fase elástica



Fonte: O autor

$$s = \int_0^{h_p/2} \varepsilon_s dx = \frac{\varepsilon_y \cdot h_p}{2} - \frac{\Delta \varepsilon_s}{2} \cdot \frac{h_p}{2} \quad (80)$$

Sabendo que

$$\tau_b = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{d\sigma_s}{dx} \quad (81)$$

pode-se chegar a:

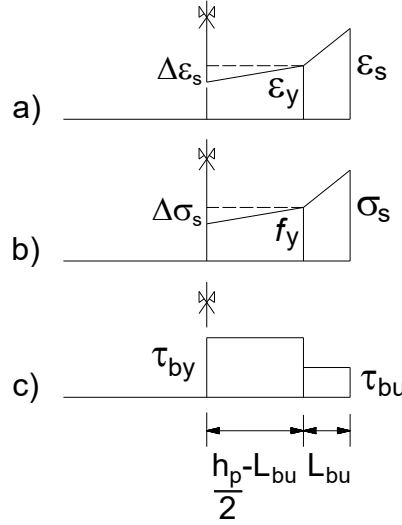
$$\begin{aligned} \Delta \sigma_s &= \frac{2 \cdot \tau_{by} \cdot h_p}{\phi} \\ \Delta \varepsilon_s &= \frac{2 \cdot \tau_{by} \cdot h_p}{E_s \cdot \phi} \end{aligned} \quad (82)$$

Substituindo a deformação $\Delta \varepsilon_s$ expressa em (82) na Equação (80), obtém-se:

$$s = \frac{\varepsilon_y \cdot h_p}{2} - \frac{\tau_{by} \cdot h_p^2}{2 \cdot E_s \cdot \phi} \quad (83)$$

Na fase inelástica para valores de L_{bs} constantes, o deslizamento é obtido por meio da integração das deformações normais indicadas na Figura 89:

Figura 89 - Tensões/deformações normais na armadura e tensões de aderência: fase inelástica



Fonte: O autor

$$s = \int_0^{h_p/2} \varepsilon_s dx = \varepsilon_y \cdot \left(\frac{h_p}{2} - L_{bu} \right) - \frac{1}{2} \cdot \Delta \varepsilon_s \cdot \left(\frac{h_p}{2} - L_{bu} \right) + \frac{(\varepsilon_y + \varepsilon_s)}{2} \cdot L_{bu} \quad (84)$$

De forma análoga à apresentada na Equação (82), tem-se que:

$$\Delta \varepsilon_s = \frac{4 \cdot \tau_{by}}{E_s \cdot \phi} \cdot \left(\frac{h_p}{2} - L_{bu} \right) \quad (85)$$

O comprimento L_{bu} do trecho inelástico indicado na Figura 89 pode ser calculado por:

$$L_{bu} = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{(\sigma_s - f_y)}{\tau_{bu}} \quad (86)$$

Substituindo a deformação $\Delta \varepsilon_s$ e o comprimento L_{bu} expressos em (85) e (86) na Equação (84), obtém-se:

$$s = \varepsilon_y \cdot \left(\frac{h_p}{2} - L_{bu} \right) - \frac{2 \cdot \tau_{by}}{E_s \cdot \phi} \cdot \left(\frac{h_p}{2} - L_{bu} \right)^2 + \frac{(\varepsilon_y + \varepsilon_s)}{8} \cdot \frac{\phi \cdot (\sigma_s - f_y)}{\tau_{bu}} \quad (87)$$

Para correlacionar os momentos fletores atuantes com as tensões e deformações nas armaduras, podem ser utilizadas as seguintes relações:

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s \cdot z} \quad (88)$$

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (\text{fase elástica apenas}) \quad (89)$$

Substituindo (88) e (89) nas Equações (83) e (87), chega-se a expressão analítica para o cálculo da rotação relativa associada ao Mecanismo A, conforme Tabela 24.

Tabela 24 - Formulação analítica do cálculo das rotações referentes ao Mecanismo A

Comprimento de transmissão	Fase Elástica ($0 < M \leq M_y$)	Fase Inelástica ($M_y < M \leq M_u$)
$L_{bs} < h_p/2$	$\theta_A = C_1 \cdot M^2$ $C_1 = \frac{\phi}{8 \cdot E_s \cdot \tau_{by} \cdot (d - x) \cdot A_s^2 \cdot z^2}$	$\theta_A = C_1 \cdot M_y^2$ $C_1 = \frac{\phi}{8 \cdot E_s \cdot \tau_{by} \cdot (d - x) \cdot A_s^2 \cdot z^2}$
$L_{bs} = h_p/2$	$\theta_A = C_1 \cdot M + K$ $C_1 = \frac{h_p}{2 \cdot E_s \cdot A_s \cdot z \cdot (d - x)}$ $K = -\frac{\tau_{by} \cdot h_p^2}{2 \cdot E_s \cdot \phi \cdot (d - x)}$	$\theta_A = C_1 \cdot M_y + K$ $C_1 = \frac{h_p/2 - L_{bu}}{E_s \cdot A_s \cdot z \cdot (d - x)}$ $K = -\frac{2 \cdot \tau_{by} \cdot (h_p/2 - L_{bu})^2}{E_s \cdot \phi \cdot (d - x)}$

Fonte: O autor

5.2.2 Mecanismo B

A formulação analítica para o cálculo das rotações decorrentes do Mecanismo B é a mesma apresentada em Alva e El Debs (2013) para ligações viga-pilar de extremidade, uma vez que este mecanismo ocorrer fora da região do nó de pórtico. Dessa forma, a parcela de rotação relativa viga-pilar desse mecanismo é obtida por:

$$\theta_B = C_2 \cdot \left(\frac{1}{r}\right) \quad (90)$$

$$C_2 = 0,5 \cdot (L_p + s_R) \quad (91)$$

5.2.3 Rotação total

A rotação relativa total entre viga e pilar considerando os dois mecanismos de deformação é dada por:

$$\theta = \theta_A + \theta_B \quad (92)$$

5.3 VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO: LIGAÇÃO DE MIOTTO (2002)

Nesta seção é feita a comparação de resultados fornecidos pelo modelo analítico proposto com os resultados experimentais do modelo 2.1 de Miotto (2002), apresentado na seção 2.3.5 deste trabalho. Os resultados experimentais disponíveis são do tipo momento-rotação relativa. Assim o modelo analítico pôde ser verificado diretamente, sem a necessidade de modelagem numérica global com elementos de pórtico.

5.3.1 Curva momento-rotação relativa entre viga e pilar

O modelo 2.1 de Miotto (2002) se trata de uma ligação viga-pilar pré-moldada, com o pilar interno atravessado pela armadura de continuidade da viga. No modelo analítico proposto, a constante C_2 é a mesma da apresentada em Alva e El Debs (2013). Já a constante C_1 depende do comprimento de transmissão L_{bs} ; assim é preciso fazer o seu cálculo para os possíveis cenários descritos na Tabela 24. Os parâmetros necessários para o cálculo das constantes podem ser encontrados na Tabela 25.

Tabela 25 - Parâmetros para a obtenção da curva momento-rotação: ligação de Miotto (2002)

Parâmetro	Modelo 2.1	Parâmetro	Modelo 2.1
L_p (cm)	10,0	c (cm)	2,596
f_c (kN/cm ²)	3,32	k_1	0,8
h_p (cm)	40,0	k_2	0,5
E_s (kN/cm ²)	20000	k_3	3,4
A_s (cm ²)	8,734	k_4	0,425
d (cm)	41,8	$h_{c,ef}$ (cm)	8,0
x_{II} (cm)	14,723	$A_{c,eff}$ (cm ²)	448,0
x_u (cm)	1,008	$\rho_{c,eff}$	0,0196
z_{II} (cm)	37,691	$s_{R,max}$ (mm)	193,69
z_{III} (cm)	38,246	τ_{by} (MPa)	5,385
\emptyset (mm)	12,09		

Fonte: O autor

Para haver coerência com os resultados experimentais, o comprimento L_p empregado no modelo analítico foi tomado como sendo a distância da face do pilar até a posição onde foram fixados os relógios comparadores. A seção da viga utilizada nos cálculos engloba apenas o dente Gerber da viga. Não há transmissão de esforços entre o trecho inferior vertical

da viga e o consolo do pilar, pois há um espaço entre as peças. Para o cálculo das propriedades da seção da viga (altura da linha neutra, momento de inércia, braço de alavanca) e dos momentos de fissuração, de início de escoamento e do momento último foram utilizadas as características mecânicas (resistência à compressão e módulo de elasticidade) do graute adicionado entre o dente Gerber da viga e o pilar, pois é nessa região que ocorre a transmissão de esforços de compressão para o pilar. As constantes calculadas para cada caso estão contidas na Tabela 26.

Tabela 26 - Constantes da curva momento-rotação da ligação de Miotto (2002)

Parâmetros		Modelo 2.1
C_1 ((kN.cm) ⁻¹)	Fase elástica: $L_{bs} < h_p/2$	$4,469 \times 10^{-12}$
C_1 ((kN.cm) ⁻¹)	Fase elástica: $L_{bs} = h_p/2$	$1,122 \times 10^{-7}$
C_1 ((kN.cm) ⁻¹)	Fase inelástica: $L_{bs} < h_p/2$	$4,469 \times 10^{-12}$
C_1 ((kN.cm) ⁻¹)	Fase inelástica: $L_{bs} = h_p/2$	$6,969 \times 10^{-8}$
K (rad)	Fase elástica: $L_{bs} = h_p/2$	$7,04 \times 10^{-4}$
K (rad)	Fase inelástica: $L_{bs} = h_p/2$	$4,21 \times 10^{-4}$
C_2 (cm)		14,684

Fonte: O autor

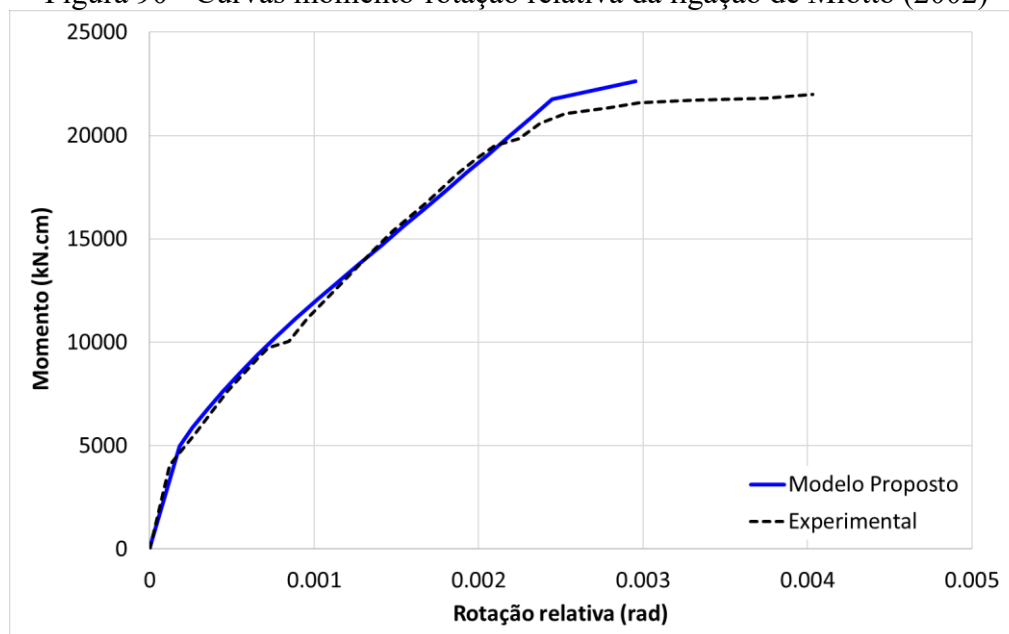
Para a geração dos diagramas momento-curvatura novamente foi utilizada a expressão de Branson (1965) no Estádio II. Os parâmetros necessários para a construção dos diagramas momento-curvatura estão indicados na Tabela 27. A comparação entre curva momento-rotação obtida com o modelo proposto e a curva experimental é indicada na Figura 90.

Tabela 27 - Parâmetros para a obtenção do diagrama momento-curvatura: viga da ligação de Miotto (2002)

Parâmetro	Modelo 2.1	Parâmetro	Modelo 2.1
M_r (kN.cm)	4983	x_l (cm)	24,87
M_y (kN.cm)	22626	I_l (cm ⁴)	320280
$(1/r)_y$ (cm ⁻¹)	$7,615 \times 10^{-5}$	I_{ll} (cm ⁴)	137843
M_u (kN.cm)	26490	m	4
$(1/r)_u$ (cm ⁻¹)	$2,451 \times 10^{-4}$	E_c (kN/cm ²)	3200
f_y (kN/cm ²)	58,33		

Fonte: O autor

Figura 90 - Curvas momento-rotação relativa da ligação de Miotto (2002)



Fonte: O autor

5.3.2 Discussão dos resultados

A comparação dos resultados teóricos com os resultados experimentais de Miotto (2002) indicou o bom potencial do modelo analítico proposto para ligações viga-pilar interno, em particular para as ligações pré-moldadas.

5.4 VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO: LIGAÇÕES DE LACERDA (2016)

Nesta seção é feita a comparação de resultados fornecidos pelo modelo analítico proposto com os resultados experimentais dos protótipos PC1 e PC2 de Lacerda (2016), apresentado na seção 2.3.4 deste trabalho. Foram comparados apenas os resultados do tipo momento-rotação, embora resultados experimentais do tipo força-deslocamento também sejam encontrados Lacerda (2016).

5.4.1 Curva momento-rotação relativa entre viga e pilar

As ligações viga-pilar PC1 e PC2 de Lacerda (2016) são semelhantes com a ligação de Miotto (2002). A principal diferença é que nas ligações PC1 e PC2 de Lacerda (2016) foi adicionado graute na interface vertical entre viga e consolo do pilar. Por consequência a seção inteira da viga foi utilizada nos cálculos das propriedades relacionadas à deformabilidade ao momento fletor e à construção dos diagramas momento-curvatura.

O comprimento L_p novamente foi tomado da face do pilar até a posição onde foram fixados os transdutores de deslocamentos usados para a obtenção da rotação relativa. Na Tabela 28 se encontram os parâmetros necessários para o cálculo das constantes do modelo analítico proposto, as quais estão apresentadas na Tabela 29. Os modelos PC1 e PC2 são idênticos; logo nas tabelas mencionadas há apenas um valor para cada parâmetro.

Tabela 28 - Parâmetros para a obtenção da curva momento-rotação: ligações de Lacerda (2016)

Parâmetro	PC1 e PC2	Parâmetro	PC1 e PC2
L_p (cm)	18,0	c (cm)	2,5
f_c (kN/cm ²)	3,5	k_1	0,8
h_p (cm)	30,0	k_2	0,5
E_s (kN/cm ²)	21000	k_3	3,4
A_s (cm ²)	4,805	k_4	0,425
d (cm)	35,52	$h_{c,ef}$ (cm)	8,7
x_{II} (cm)	9,976	$A_{c,eff}$ (cm ²)	556,8
x_u (cm)	5,645	$\rho_{c,eff}$	0,0086
z_{II} (cm)	31,80	$s_{R,max}$ (mm)	316,848
z_{III} (cm)	33,26	τ_{by} (MPa)	5,916
\emptyset (mm)	11,77		

Fonte: O autor

Tabela 29 - Constantes da curva momento-rotação da ligação de Lacerda (2016)

Parâmetros	PC1 e PC2
C_1 ((kN.cm) ⁻¹) Fase elástica: $L_{bs} < h_p/2$	$1,986 \times 10^{-11}$
C_1 ((kN.cm) ⁻¹) Fase elástica: $L_{bs} = h_p/2$	$1,830 \times 10^{-7}$
C_1 ((kN.cm) ⁻¹) Fase inelástica: $L_{bs} < h_p/2$	$1,986 \times 10^{-11}$
C_1 ((kN.cm) ⁻¹) Fase inelástica: $L_{bs} = h_p/2$	$9,330 \times 10^{-8}$
K (rad) Fase elástica: $L_{bs} = h_p/2$	$4,22 \times 10^{-4}$
K (rad) Fase inelástica: $L_{bs} = h_p/2$	$1,40 \times 10^{-4}$
C_2 (cm)	24,842

Fonte: O autor

Com o emprego da expressão de Branson (1965) no Estádio II, foram gerados os pontos do diagrama momento-curvatura da viga. Os momentos de fissuração, de início de escoamento

e o momento último foram obtidos com o cálculo usual de seções armadas. Os parâmetros necessários para a construção completa do diagrama estão apresentados na Tabela 30.

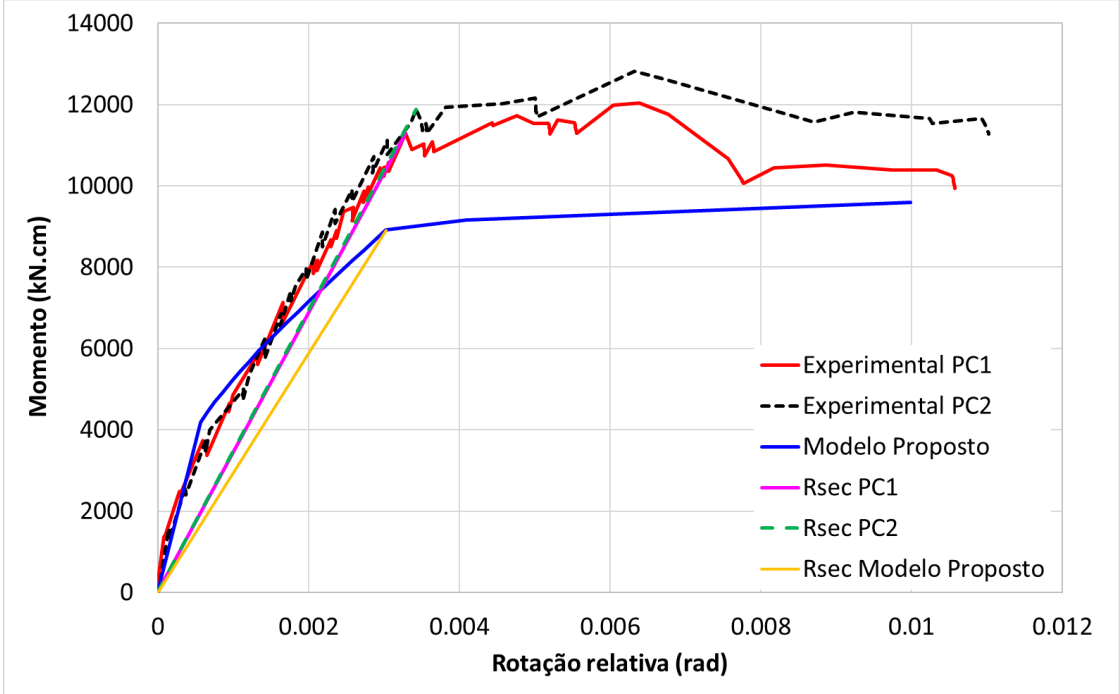
Tabela 30 - Parâmetros para a obtenção dos diagramas momento-curvatura: vigas das ligações de Lacerda (2016)

Parâmetros	PC1 e PC2	Parâmetros	PC1 e PC2
M_r (kN.cm)	4190	x_l (cm)	26,277
M_y (kN.cm)	9167	I_l (cm ⁴)	127748
$(1/r)_y$ (cm ⁻¹)	1,142x10 ⁻⁴	I_{II} (cm ⁴)	21946
M_u (kN.cm)	9589	m	4
$(1/r)_u$ (cm ⁻¹)	3,347x10 ⁻⁴	E_c (kN.cm ²)	3700
f_y (kN/cm ²)	60,00		

Fonte: O autor

A comparação das curvas momento-rotação teóricas e experimentais pode ser vista na Figura 91. A partir dessas curvas foram calculadas as rigidezes secantes, cujos valores encontram-se na Tabela 31.

Figura 91 - Curvas momento-rotação relativa da ligação de Lacerda (2016)



Fonte: O autor

Tabela 31 - Rigidezes secantes dos modelos de Lacerda (2016)

Modelo	Rigidez Secante (kN.m/rad)
Experimental PC1	34348
Experimental PC2	34679
Modelo Proposto (PC1 e PC2)	29439

Fonte: O autor

5.4.2 Discussão dos resultados

Embora os momentos resistentes da ligação obtidos nos ensaios tenham sido maiores que os momentos resistentes teóricos, o modelo analítico proposto conduziu a resultado bastante satisfatório para a rigidez secante (diferença de 17% em relação à rigidez experimental). Este fato sugere que o modelo proposto pode ser usado em análises lineares simplificadas que empregam a rigidez secante da ligação.

5.5 VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO: LIGAÇÃO DE KATAOKA (2007)

Nesta seção é feita a comparação de resultados fornecidos pelo modelo analítico proposto com os resultados experimentais do Modelo 1 de Kataoka (2007), apresentado na seção 2.3.3 deste trabalho. Estão disponíveis resultados experimentais tanto do tipo força-deslocamento quanto do tipo momento-rotação relativa, sendo realizadas neste trabalho comparações com os dois tipos de curvas.

5.5.1 Curva momento-rotação relativa entre viga e pilar

Como nas verificações anteriores, o comprimento L_p foi tomado da face do pilar até a posição onde foram fixados os transdutores de deslocamentos usados para a obtenção da rotação relativa. Na Tabela 32 se encontram os parâmetros necessários para o cálculo das constantes do modelo analítico. Na Tabela 28 encontram-se os valores dessas constantes.

Tabela 32 - Parâmetros para a obtenção da curva momento-rotação: ligação de Kataoka (2007)

Parâmetros	Modelo 1	Parâmetros	Modelo 1
L_p (cm)	15,0	c (cm)	2,0
f_c (kN/cm ²)	2,57	k_1	0,8
h_p (cm)	50,0	k_2	0,5
E_s (kN/cm ²)	21000	k_3	3,4
A_s (cm ²)	8,04	k_4	0,425
d (cm)	63,4	$h_{c,ef}$ (cm)	9,0
x_{II} (cm)	10,527	$A_{c,eff}$ (cm ²)	360,0
x_u (cm)	3,662	$\rho_{c,eff}$	0,0223
z_{II} (cm)	59,799	$s_{R,max}$ (mm)	189,791
z_{III} (cm)	62,187	τ_{by} (MPa)	5,070
\emptyset (mm)	16		

Fonte: O autor

Tabela 33 - Constantes da curva momento-rotação da ligação de Kataoka (2007)

Parâmetros	Modelo 1
C_1 ((kN.cm) ⁻¹) Fase elástica: $L_{bs} < h_p/2$	$1,537 \times 10^{-12}$
C_1 ((kN.cm) ⁻¹) Fase elástica: $L_{bs} = h_p/2$	$4,683 \times 10^{-8}$
C_1 ((kN.cm) ⁻¹) Fase inelástica: $L_{bs} < h_p/2$	$1,537 \times 10^{-12}$
C_1 ((kN.cm) ⁻¹) Fase inelástica: $L_{bs} = h_p/2$	$3,402 \times 10^{-8}$
K (rad) Fase elástica: $L_{bs} = h_p/2$	$3,567 \times 10^{-4}$
K (rad) Fase inelástica: $L_{bs} = h_p/2$	$2,3 \times 10^{-4}$
C_2 (cm)	16,990

Fonte: O autor

Como a viga do Modelo 1 possuía formato retangular, empregou-se a rotina computacional de Alva (2017) para a geração dos pontos do diagrama momento-curvatura, para efeito de comparação com o procedimento de construção desse diagrama quando se emprega a expressão de Branson (1965) no Estádio II. Os parâmetros que definem os diagramas construídos com expressão de Branson (1965) e com a rotina computacional de Alva (2017) estão indicados na Tabela 34 e Tabela 35, respectivamente.

Tabela 34 - Parâmetros para a obtenção dos diagramas momento-curvatura empregando a expressão de Branson (1965): viga da ligação de Kataoka (2007)

Parâmetros	Modelo 1	Parâmetros	Modelo 1
M_r (kN.cm)	7604	x_I (cm)	32,949
M_y (kN.cm)	29857	I_I (cm ⁴)	1147670
$(1/r)_y$ (cm ⁻¹)	$8,600 \times 10^{-5}$	I_{II} (cm ⁴)	176416
M_u (kN.cm)	30164	m	4
$(1/r)_u$ (cm ⁻¹)	$1,750 \times 10^{-4}$	E_c (kN.cm ²)	3027
f_y (kN/cm ²)	50		

Fonte: O autor

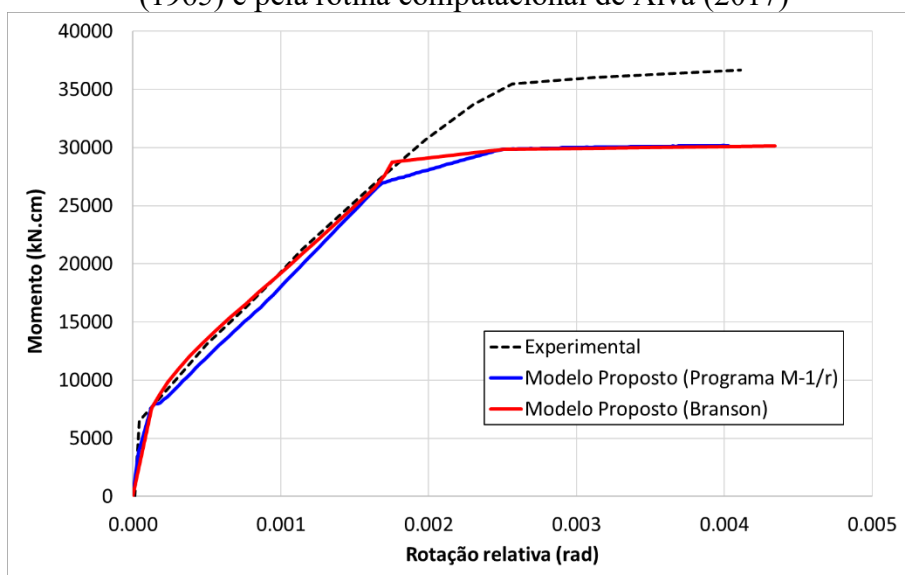
Tabela 35 - Parâmetros para a obtenção dos diagramas momento-curvatura empregando a rotina computacional de Alva (2017): viga da ligação de Kataoka (2007)

Parâmetro	Modelo 1	Parâmetro	Modelo 1
f_c (kN/cm ²)	4,471	N (kN)	0
f_{ct} (kN/cm ²)	0,230	$\Delta(1/r)$ (1/cm)	0,000001
E_{ci} (kN/cm ²)	3027	α_1	0,4
f_y (kN/cm ²)	50	α_2	19,967
E_s (kN/cm ²)	21000	$toler$ (%)	0,1

Fonte: O autor

Na Figura 92 podem ser conferidas as curvas momento-curvatura geradas pelos dois procedimentos utilizados. Pode-se notar que as duas curvas ficaram bem próximas. Nas comparações com os resultados experimentais, optou-se por utilizar a curva gerada pela rotina computacional.

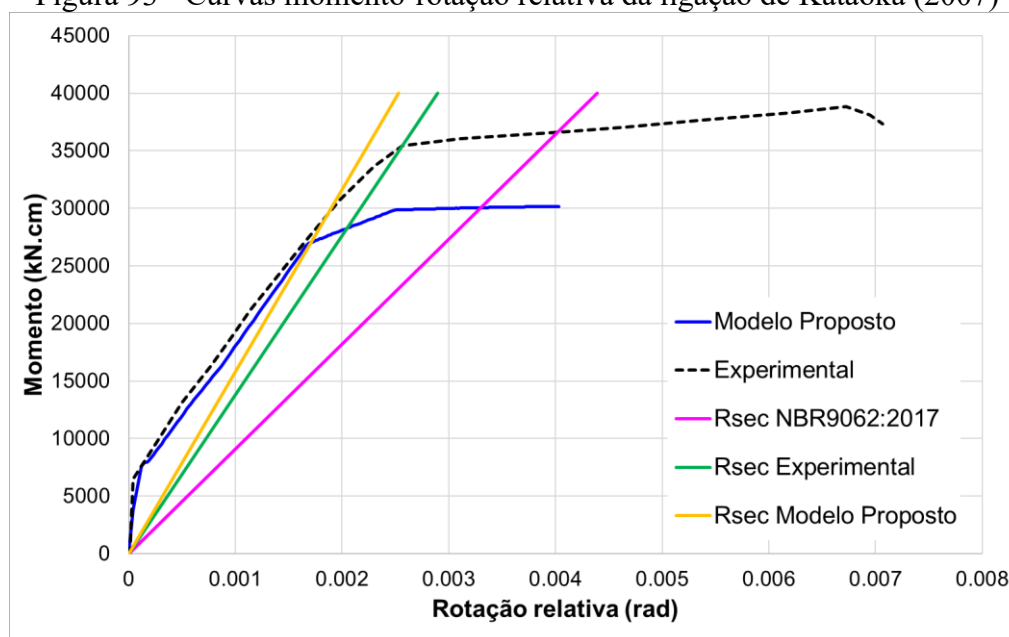
Figura 92 - Comparação entre as curvas geradas com o emprego da expressão de Branson (1965) e pela rotina computacional de Alva (2017)



Fonte: O autor

A comparação entre as curvas momento-rotação teórica e experimental pode ser vista na Figura 93. A partir dessas curvas foram calculadas as rigidezes secantes experimental e teórica. Também foi feito o cálculo da rigidez secante de acordo com o modelo sugerido pela ABNT NBR9062:2017 (apresentado na seção 2.2.1), admitindo-se Tipologia 1 conforme a referida norma. Os valores obtidos para a rigidez secante das ligações estão indicados na Tabela 36.

Figura 93 - Curvas momento-rotação relativa da ligação de Kataoka (2007)



Fonte: O autor

Tabela 36 - Rigidezes secantes do Modelo1: Ligação de Kataoka (2007)

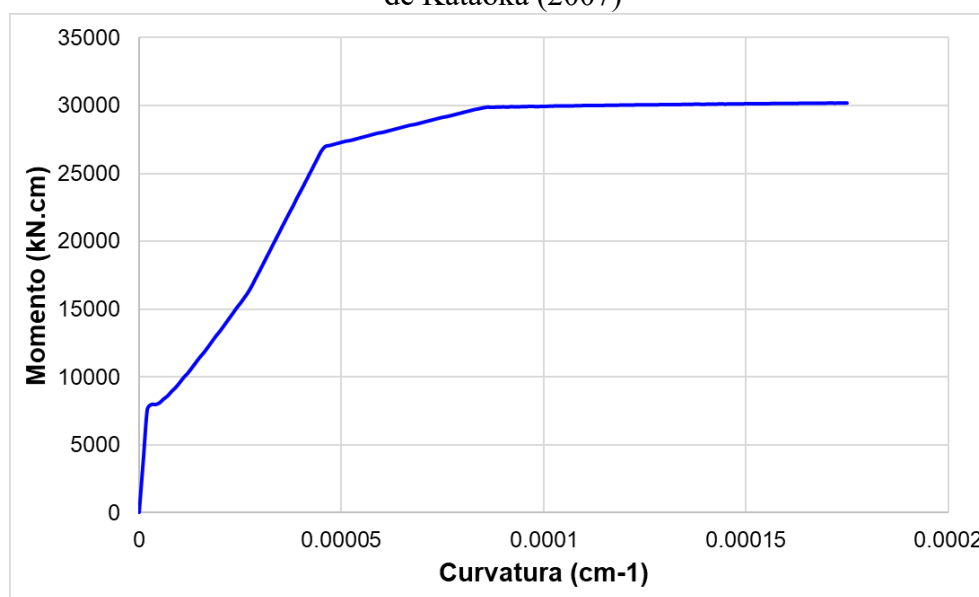
Modelo	Rigidez Secante (kN.m/rad)
Experimental	138145
Modelo Proposto	158283
NBR 9062:2017	91119

Fonte: O autor

5.5.2 Diagrama momento-curvatura

Na análise numérica com a modelo de pórticos para simular a ligação não foi necessária criar a geração do diagrama momento-curvatura do pilar, uma vez que a ligação é simétrica, ou seja, o pilar não esteve submetido à flexão. Para as vigas, o diagrama momento-curvatura foi a mesma da utilizada no modelo analítico proposto para a curva momento-rotação relativa da ligação (Figura 94).

Figura 94 - Curva momento-curvatura das vigas empregadas nas análises globais: Ligação de Kataoka (2007)



Fonte: O autor

5.5.3 Calibração da rigidez dos trechos rígidos

A calibração da rigidez dos trechos rígidos foi feita de modo similar às simulações apresentadas nas ligações de Alva (2004) e nas ligações de Lee, Wight e Hanson (1977).

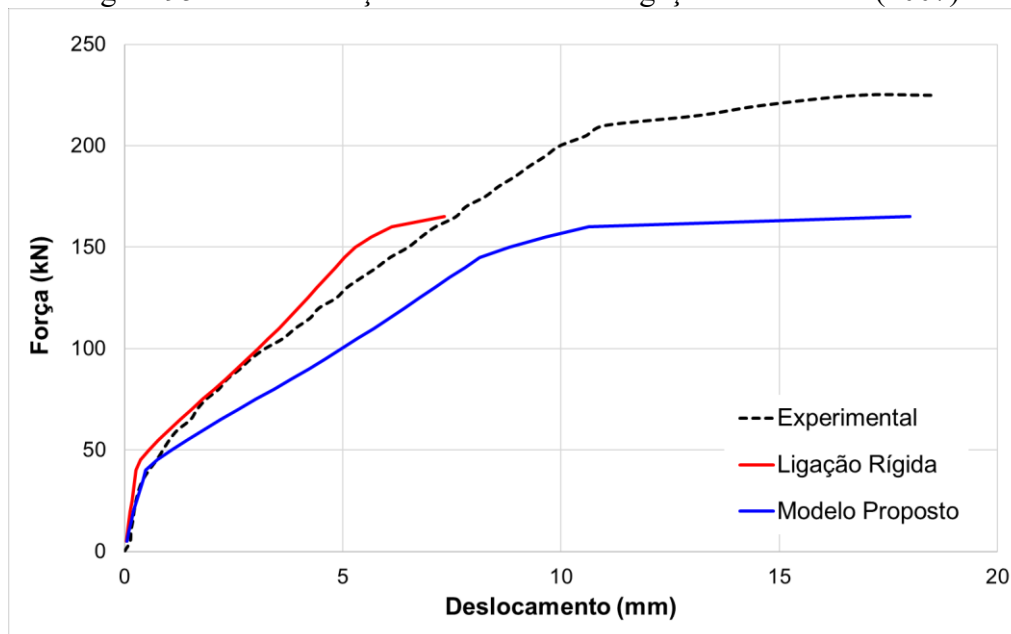
5.5.4 Modelagem numérica

Da forma idêntica à realizada nas simulações numéricas com as ligações de Alva (2004) e de Lee, Wight e Hanson (1977), foi utilizado o elemento BEAM188 para a representação dos elementos de viga, pilar e trechos rígidos, sendo os mesmos definidos com seção *Non Linear Generalized* com a inclusão dos pontos do diagrama momento-curvatura da viga. Também foram empregados elementos COMBIN39 para a criação de molas não-lineares que simularam a deformabilidade à flexão da ligação com o modelo analítico proposto.

Empregou-se o Método de Newton-Raphson para a solução do sistema não linear, sendo aplicados na extremidade da viga incrementos iguais de 1,0 kN. Como critério de convergência, empregou-se uma tolerância de 0,1% em forças e deslocamentos.

A Figura 95 contém as curvas força-deslocamento na extremidade da viga fornecidos pela modelagem numérica e os resultados obtidos experimentalmente. Para fins de comparação, também são apresentados os resultados da modelagem admitindo-se ligação perfeitamente rígida.

Figura 95 - Curvas força-deslocamento da ligação de Kataoka (2007)



Fonte: O autor

5.5.5 Discussão dos resultados

A curva momento-rotação relativa fornecida pelo modelo analítico proposto aproximou-se bastante da curva experimental até o início do escoamento das armaduras de flexão. Semelhante ao que ocorreu nas ligações de Lacerda (2016), o momento resistente experimental foi maior que o momento resistente teórico obtido com o cálculo usual de seções armadas.

O modelo analítico proposto forneceu um valor de rigidez secante próximo ao valor experimental (diferença de 14% maior; mais rígido). Além disso, o modelo analítico proposto conduziu a um resultado melhor que a expressão da ABNT NBR9062:2017 em termos de obtenção da rigidez secante da ligação.

A rigidez observada nos resultados do tipo força-deslocamento com a consideração da deformabilidade da ligação foi menor do que a esperada. Isso pode ter ocorrido devido à diferença de rigidez, não capturada na calibração dos trechos rígidos, entre o modelo experimental (tridimensional) e o modelo teórico de pórtico, sendo este consideravelmente mais flexível que o modelo experimental.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Este trabalho destinou-se ao estudo da deformabilidade ao momento fletor de ligações viga-pilar de concreto armado monolíticas e pré-moldadas com armadura de continuidade, dando-se ênfase na avaliação de modelos analíticos que simulem o comportamento momento-rotação relativa.

A eficácia do modelo de Alva e El Debs (2013) foi verificada com os resultados experimentais de seis ligações monolíticas encontradas na literatura. Foi proposto neste trabalho um novo modelo analítico, que consiste numa extensão do modelo de Alva e El Debs (2013) para aplicação em ligações viga-pilar interno. O modelo proposto foi validado com os resultados experimentais de quatro ligações pré-moldadas da literatura.

Também fez parte dos objetivos do trabalho apresentar uma metodologia de simulação numérica para o aproveitamento de resultados experimentais do tipo força-deslocamento na obtenção indireta de rotações relativas viga-pilar.

Tendo em vista os resultados obtidos, as seguintes conclusões podem ser destacadas:

- a) As simulações numéricas comprovaram que levar em conta a deformabilidade das ligações ao momento fletor conduz a resultados significativamente melhores que a hipótese de ligações perfeitamente rígidas, mesmo em se tratando de ligações monolíticas.

- b) A combinação entre o emprego de modelos analíticos para a consideração da deformabilidade à flexão das ligações e o emprego das relações momento-curvatura para a consideração da não-linearidade física dos elementos estruturais mostrou-se adequada para aplicações em análises não-lineares de pórtico de concreto armado.
- c) Todos os resultados das comparações entre o modelo analítico de Alva e El Debs (2013) e os ensaios experimentais de ligações monolíticas apontam que o modelo consegue simular a deformabilidade ao momento fletor de ligações viga-pilar de extremidade monolíticas de forma bastante satisfatória;
- d) Todos os resultados das comparações de curvas momento-rotação relativa do modelo analítico proposto com os ensaios experimentais de ligações pré-moldadas indicam a adequabilidade do modelo proposto para a simulação de tais ligações;
- e) Os resultados indicaram que o modelo analítico proposto para ligações viga-pilar interno consegue simular a deformabilidade de ligações pré-moldadas com armadura de continuidade negativa. Os valores da rigidez secante obtidas com modelo analítico proposto foram próximos dos valores experimentais para as ligações analisadas neste trabalho;
- f) A metodologia utilizada com o aproveitamento de resultados experimentais do tipo força-deslocamento para a obtenção indireta das rotações relativas de ligações se mostrou bastante eficaz.

Por fim, acredita-se que o presente trabalho atingiu o seu objetivo de trazer contribuições sobre a consideração da deformabilidade ao momento fletor das ligações viga-pilar de concreto armado monolíticas e pré-moldadas com armadura de continuidade, dando-se ênfase aos modelos analíticos. Estes modelos por serem simples, permitem fácil compreensão do projetista e fácil implementação em softwares de cálculo estrutural.

O modelo analítico sugerido por Alva e El Debs (2013), permite modelar a deformabilidade a flexão de ligações viga-pilar externo de concreto. A formulação sugerida neste trabalho faz uma extensão deste modelo para que este também possa ser utilizado em pilares internos. Assim possibilita a sua utilização no cálculo de estruturas de concreto usuais, podendo ser implementado em programas computacionais.

Como sugestão para pesquisas futuras está o desenvolvimento de modelos analíticos com as devidas validações em novas tipologias de ligações viga-pilar de concreto pré-moldado, especialmente para as tipologias abordadas pela ABNT NBR 9062:2017. Outra sugestão para pesquisas futuras está na verificação do modelo de Alva e El Debs (2013) em ligações viga-pilar de extremidade pré-moldadas, o que não foi feito neste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALVA, G.M.S. **Estudo teórico-experimental do comportamento de nós de pórtico de concreto armado submetidos a ações cíclicas**. 218 p. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

ALVA, G.M.S. **Formulação analítica para a determinação de diagramas momento-curvatura em seções de concreto armado retangulares submetidas à flexão normal composta**. In: 59º Congresso Brasileiro do Concreto, 2017, Bento Gonçalves, p.1-16, 2017.

ALVA, G. M. S.; FERREIRA, M. A.; EL DEBS, A. L. H. C. Partially restrained beam-column connections in reinforced concrete structures. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, [s.l.], v. 2, n. 4, p.356-379, 2009.
<https://doi.org/10.1590/S1983-41952009000400004>

ALVA, G.M.S.; EL DEBS, A. L. H. C. Moment–rotation relationship of RC beam-column connections: Experimental tests and analytical model. **Engineering Structures**, [s.l.], v. 56, p.1427-1438, 2013.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.07.016>

ANSYS Release 17.1 Documentation (2016)

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9062: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2006.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9062: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2017.

BALDISSERA, A. **Estudo experimental de uma ligação viga-pilar de concreto pré-moldado parcialmente resistente a momento fletor**. 149 p. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

BRANSON, D. E. **Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams**. HPR Rep. nº 7, Part 1, Alabama Highway Dept./US Bureau of Public Roads, 93 p., 1965.

BRECCOLOTTI, M.; GENTILE, S.; TOMMASINI, M.; MATERAZZI, A. L.;

BONFIGLI, M. F.; PASQUALINI, B.; COLONE, V.; GIANESINI, M. Beam-column joints in continuous RC frames: Comparison between cast-in-situ and precast solutions. **Engineering Structures**, [s.l.], v. 127, p.129-144, 2016.

<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.08.018>

CEB-FIP, CEBFIP. model code 1990. **Comite Euro-International Du Beton**, Paris, p. 87-109, 1991.

COSTA, R. R. R. **Otimização do comportamento de sistemas estruturais pré-moldados de concreto com ligações viga-pilar deformáveis à flexão**. 105 p. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

EL DEBS, M. K.; MIOTTO, A. M.; EL DEBS, A. L. H. C. Analysis of a semi-rigid connection for precast concrete. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings**, [s.l.], v. 163, n. 1, p.41-51, 2010.

<https://doi.org/10.1680/stbu.2009.163.1.41>

ELLIOTT, K. S.; DAVIES, G.; GORGUN, H.; ADLPARVAR, M. R. The stability of precast concrete skeletal structures. **PCI journal**, [s.l.], v. 43, n. 2, p. 42-61, 1998.

ELLIOTT, K. S. Research and development in precast concrete framed structures. **Progress in Structural Engineering and Materials**, [s.l.], v. 2, n. 4, p. 405-428, 2000.

<https://doi.org/10.1002/pse.65>

EUROCODE 2: Design of Concrete Structures - Part 1: General Rules and Rules for Building. **Brussels: European committee for standardization**, 2004.

FERREIRA, M. A. **Deformabilidade de ligações viga-pilar de concreto pré-moldado**. 232 p. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

FERREIRA, M. A.; EL DEBS, M. K.; ELLIOTT, K. S. **Modelo teórico para projeto de ligações semi-rígidas em estruturas de concreto pré-moldado**. In: 44º Congresso Brasileiro de Concreto, 2002.

FERREIRA, M. A.; EL DEBS, M. K.; ELLIOTT, K.S. **Determinação analítica da relação momento-rotação em ligações viga-pilar de estruturas pré-moldadas de concreto**. In: Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, 5., 2003, São Paulo. Anais... São Paulo, 2003.

FERREIRA, M.; ARAÚJO, D. D. L.; JEREMIAS JR, A. C.; CATOIA, B.; KATAOKA, M. N. **Estabilidade global de estruturas pré-moldadas: efeito das ligações semi-rígidas**. In: 1º Encontro Nacional De Pesquisa-Projeto-Produção Em Concreto Pré-Moldado, 2005, São Carlos, p.1-11, 2005.

GÖRGÜN, H. **Semi-rigid behaviour of connections in precast concrete structures**. 526 p. PhD Thesis, University of Nottingham, 1997.

HAACH, V. G. **Análise teórico-experimental da influência da força normal em nós de pórtico externos de concreto armado.** 159 p. Dissertação (Mestrado), - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

HADADE, M. A. S. **Comportamento de ligações viga-pilar típicas com continuidade de armadura negativa em estruturas pré-fabricadas.** 243 p. Tese (Doutorado) - Curso de Construção Civil, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016.

IM, H. J.; PARK, H. G.; EOM, T. S. Cyclic Loading Test for Reinforced-Concrete-Emulated Beam-Column Connection of Precast Concrete Moment Frame. **ACI Structural Journal**, v. 110, n. 1, 2013.
<https://doi.org/10.14359/51684335>

KATAOKA, M. N. **Estudo da continuidade em ligações viga-pilar em estruturas pré-moldadas de concreto.** 113 p. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

KATAOKA, M. N.; FERREIRA, M. A.; EL DEBS, A. L. H. C. A study on the behavior of beam-column connections in precast concrete structures: experimental analysis. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, [s.l.], v. 5, n. 6, p.848-873, 2012.
<https://doi.org/10.1590/S1983-41952012000600008>

KWAK, H. G.; KIM, S. P. Simplified monotonic moment–curvature relation considering fixed-end rotation and axial force effect. **Engineering Structures**, [s.l.], v. 32, n. 1, p.69-79, 2010.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.08.017>

LACERDA, M. M. S. **Análise da influência do grauteamento e da posição das armaduras na ligação viga-pilar em estruturas de concreto pré-moldado.** 171 p. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016.

LACERDA, M. M. S.; SILVA, T. J. D.; ALVA, G. M. S.; LIMA, M. C. V. Influence of the vertical grouting in the interface between corbel and beam in beam-to-column connections of precast concrete structures – An experimental analysis. **Engineering Structures**, [s.l.], v. 172, p.201-213, 2018.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.05.113>

LEE, L. N.; WIGHT, J. K.; HANSON, R.D. RC beam-column joints under large load reversals. **Journal of the Structural Division**, v.103, n.12, p.2337-2350, 1977.

MARIN, M. C.; EL DEBS, M. K. **Análise do limite do número de pavimentos em estruturas usuais de múltiplos pavimentos em concreto pré-moldado.** In: 2º Encontro Nacional De Pesquisa-Projeto-Produção Em Concreto Pré-Moldado, 2009, São Carlos, p.1-11, 2009.

MARIN, M. C.; EL DEBS, M. K. Análise da estabilidade global de estruturas em concreto pré-moldado de múltiplos pavimentos considerando as ligações semirrígidas. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 16, n. 66, p.49-68, 2016.

MEGGET, L. M. Cyclic behaviour of exterior reinforced concrete beam-column joints. **Bulletin of New Zealand National Society for Earthquake Engineering**, v. 7, n. 1, p. 22-47, 1974.

MIOTTO, A. M. **Ligações viga-pilar de estruturas de concreto pré-moldado: análise com ênfase na deformabilidade ao momento fletor**. 2002. 263 f. Tese (Doutorado) Curso de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, 2002

MOTA, J. E. **Avaliação numérica da eficiência de uma ligação viga-pilar semi-rígida em estruturas de concreto pré-moldado**. In: 2º encontro nacional de pesquisa-projeto-produção em concreto pré-moldado, 2009, São Carlos, p.1-13, 2009.

PAULTRE, P.; CASTELE, D.; RATTRAY, S.; MITCHELL, D. Seismic response of reinforced concrete frame subassemblages - a Canadian code perspective. **Canadian Journal of Civil Engineering**, [s.l.], v. 16, n. 5, p.627-649, out. 1989.
<https://doi.org/10.1139/l89-097>

PAULAY, T.; SCARPAS, A. The behaviour of exterior beam-column joints. **Bulletin of New Zealand National Society for Earthquake Engineering**, v. 14, n. 3, p. 131-144, 1981.

SEZEN, H.; MOEHLE, J. P. Bond-slip behavior of reinforced concrete members. In: **Proceedings of Fib Symposium on Concrete Structures in Seismic Regions**. 2003.

SEZEN, H.; SETZLER, E. J. Reinforcement slip in reinforced concrete columns. **ACI Structural Journal**, v. 105, n. 3, p. 280, 2008.
<https://doi.org/10.14359/19787>

SHAFAEI, J.; ZAREIAN, M. S.; HOSSEINI, A.; MAREFAT, M. S. Effects of joint flexibility on lateral response of reinforced concrete frames. **Engineering Structures**, [s.l.], v. 81, p.412-431, 2014.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.09.046>

TORRES, L.; LÓPEZ-ALMANSA, F.; BOZZO, L. M. Tension-Stiffening Model for Cracked Flexural Concrete Members. **Journal of Structural Engineering**, [s.l.], v. 130, n. 8, p.1242-1251, 2004.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2004\)130:8\(1242\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2004)130:8(1242))

YUKSEL, E.; KARADOĞAN, H. F.; BAL, I. E.; ILKI, A.; BAL, A.; INCI, P. Seismic behavior of two exterior beam-column connections made of normal-strength concrete developed for precast construction. **Engineering Structures**, [s.l.], v. 99, p.157-172, 2015.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.04.044>