Universidade Federal de Uberlândia
Universidade Aberta do Brasil
Centro de Educação a Distância

Universidade Federal de Uberlândia
Licenciatura Plena em Matemática - PARFOR

Matemática Elementar

Juliano Gonçalves Oler

2012

Matemática Elementar

PROFESSOR
Juliano Gonçalves Oler

EQUIPE DO CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DA UFU - CEaD/UFU

ASSESSORA DA DIRETORIA
Sarah Mendonça de Araújo

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR
Alberto Dumont Alves Oliveira
Dirceu Nogueira de Sales Duarte Júnior
Fabiano Goulart
Gustavo Bruno do Vale
João Victor da Silva Alves
Otaviano Ferreira Guimarães

SETOR DE FORMAÇÃO CONTINUADA
Marisa Pinheiro Mourão

REVISORAS
Carina Diniz Nascimento
Anna Patrícia Zakem China
Erika Michela Carlos

ESTAGIÁRIOS
Ana Caroline Marques Costa
Antonio Mourão
Cristhian Zanforlin Lousa
Daniel Kenji Nishiyama
Heldson Luiz da Silva
Janaína Batista do Nascimento
Julian Degutis de Freitas Garcia
Thaína Aparecida Azevedo Tosta
Thamara Tofeti Lima

Sumário

Sobre o curso 7

Sobre o curso 9

Módulo 1 - Sistemas de Numeração 13

Alguns sistemas de Numeração . . . 14
Sistemas de Numeração Posicionais e não posicionais . . . 16
Troca de Sistemas de Numeração . . . 16
Mudança de base: caso geral . . . 17
Sistemas de Numeração: relação de ordem . . . 18
Sistemas de Numeração: Adição, Multiplicação e Divisão . . . 20
Critérios de divisibilidade . . . 29
Números racionais: operações e propriedades básicas . . . 33
Números decimais . . . 41
Operações com números decimais . . . 43
Dízimas periódicas e não periódicas . . . 46
Dízimas periódicas de período 1 . . . 47
Dízimas periódicas de período 2 . . . 48
Dízimas periódicas de período 3 . . . 49
Surgimento dos números reais . . . 50
Potênciação . . . 55
Radiciação . . . 65

Módulo 2 - Proporcionalidade e Porcentagem 71

Razão . . . 72
Proporção . . . 74
Grandezas Diretamente Proporcionais . . . 78
Grandezas Inversamente Proporcionais . . . 81
Porcentagem . . . 83

Módulo 3 - Equações do 1° e 2° grau 87

Propriedades dos números reais . . . 88
Equações do 1° grau . . . 89
Equações do 2° grau . . . 102
Inequações do 1° grau . . . 114
Intervalos . . . 117
Inequações do 1° grau . . . 117
Inequações do 2° grau . . . 121
Equações Biquadradas . . . 122

Módulo 4 - O Teorema de Pitágoras 127

Noções básicas sobre triângulos . . . 128
Enunciados do Teorema de Pitágoras . . . 128
Prova do Teorema de Pitágoras . . . 129
Prova 1: comparação por áreas . . . 129
Prova 2: semelhança de triângulos . . . 132
Prova 3: algébrica . . . 133
Recíproca do Teorema de Pitágoras: ternos pitagóricos . . . 136

Construção de triângulos retângulo: ternos pitagóricos 139
Construção De Ternos Pitagóricos: Fórmula De Euclides 141
Generalizações Do Teorema De Pitágoras 141
Primeira Generalização 141
Segunda Generalização 143
Módulo 5 - Áreas 147
Unidade de comprimento e Área 148
Área do Quadrado 148
Área do Retângulo 157
Área do Paralelogramo 160
Área do Triângulo 162
Área do Trapézio 164
Área do Círculo 166
Semelhança no círculo 166
O cálculo de π pelo método dos polígonos 168
Cálculo da área do círculo 171
Referências Bibliográficas 173

Sobre o curso

A Matemática é uma ciência que nasceu da necessidade que o homem tinha de resolver problemas, e vem se desenvolvendo e aprimorando ao longo dos tempos. Produz técnicas analíticas que são empregadas por engenheiros na criação, desenvolvimento e aprimoramento tecnológico de vários produtos. O mundo como o conhecemos hoje não seria possível sem a Matemática. Não teríamos carros, aviões, celulares, computadores, televisões, aparelhos médicos, etc. Dessa forma, essa nobre ciência é uma parte essencial das engrenagens que fazem a sociedade evoluir. Assim sendo, o profissional da área de Matemática é um elemento fundamental para o desenvolvimento tecnológico e portanto sócio-econômico de qualquer sociedade.

Nesse contexto, é de suma importância o processo de formação de profissionais que vão atuar na área de Matemática. Essa tarefa é desempenhada pelas instituições de ensino superior. O processo de formação em um curso superior de Matemática envolve a aquisição de vários conhecimentos. Para facilitar a assimilação destes, o curso é divido em várias disciplinas. Uma dessas displinas é a **Matemática Elementar**. Em essência, essa disciplina revisa conceitos elementares da matemática. De um modo geral, vomos estudar alguns sistemas de numeração, equacionar ploblemas e resolvê-los, recordaremos o enunciado do teorema de Pitágoras e calcularemos as áreas das figuras planas mais comuns: quadrado, retâgulo, triângulo, trapézio e círculo. A presente disciplina, para facilitar o entendimento, é dividida em cinco módulos:

- Sistemas de numeração;
- Proporcionalidade e porcentagem;
- Equação do 1° e do 2°;
- O teorema de Pitágoras;
- Áreas.

O tempo de cada módulo é de quinze dias. O texto básico da disciplina é contemplado com exercícios estrategicamente posicionados, de tal forma que o conteúdo previamente estudado fique bem assimilado em seus conceitos mais básicos.

Quanto a metodologia, o curso seguirá com a seguinte base: estudo da teoria do livro texto, com o treino através dos exercícios contido no mesmo, e atividades dentro do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) que serão passados para os alunos dentro do período de vigência do cada módulo, e que farão parte do processo de avaliação, assim como as provas presenciais.

Quanto ao sistema de avaliação, serão distribuídos 100 pontos, sendo 80 pontos provas escritas em modo presencial e 20 pontos nas atividades passadas pelo Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) , sendo 4 pontos por módulo.

Quanto ao cronograma, descrito mais adiante, as 75 horas do curso são distribuídos nos módulos de acordo com o número de semanas, considerando 4 horas de atividades de estudo da teoria por semana, sendo necessário considerar para cada hora de estudo em teoria pelo menos uma hora de estudo através de exercícios. Esse esquema tem por finalidade assegurar um treino mínimo nos módulos.

CRONOGRAMA

Módulos	Atividades	Avaliações
Sistemas de numeração (11/02/2013 a 24/02/2013)	Vídeo aula com apresentação do professor, da disciplina, do programa e do sistema de avaliação. Web-conferências com os alunos nas seguintes datas: 14/02/2013 e 21/02/2013 no horário de 20:00 às 21:30.	Duas listas de exercícios disponibilizadas no AVA, sendo uma no dia 16/02/2013 e outra no dia 23/02/2013.
Proporcionalidade e porcentagem (25/02/2013 a 03/03/2013)	Web-conferência com os alunos nas seguinte data: 28/02/2013 no horário de 20:00 às 21:30.	Uma lista de exercício disponibilizada no AVA no dia 02/03/2013.
Equação do 1° e 2° grau (04/03/2013 a 10/03/2013)	Web-conferência com os aluno na seguinte data: 07/03/2013 no horário de 20:00 às 21:30.	Uma lista de exercício disponibilizada no AVA no dia 09/03/2013.
O teorema de Pitágoras (11/03/2013 a 24/03/2013)	Web-conferências com os alunos nas seguintes datas: 14/03/2012 e 21/03/2012 no horário de 20:00 às 21:30.	Duas listas de exercícios disponibilizadas no AVA, sendo uma no dia 16/03/2013 e outra no dia 23/03/2013.
Áreas (25/03/2013 a 07/04/2013)	Web-conferências com os alunos nas seguintes datas: 28/03/2013 e 03/04/2013 no horário de 20:00 às 21:30.	Duas listas de exercícios disponibilizadas no AVA, sendo uma no dia 30/03/2013 e outra no dia 06/04/2013.

As listas de exercícios que serão disponibilizadas no AVA, nas datas citadas na tabela, deverão serem entregues em datas que também serão apresentadas no AVA para que os tutores possam corrigir. Desejamos ao caro aluno um ótimo curso, e torço para atingir com sucesso os objetivos da disciplina.

Informações

Prezado(a) aluno,

Ao longo deste guia impresso você encontrará alguns “ ícones” que lhe ajudará a identificar as atividades.

Fique atento ao significado de cada um deles, isso facilitará a sua leitura e seus estudos.

Destacamos alguns termos no texto do Guia cujos sentidos serão importantes para sua compreensão. Para permitir sua iniciativa e pesquisa não criamos um glossário, mas se houver dificuldade interaja no Fórum de Dúvidas.

Anotações

Módulo 1
Sistemas de Numeração

No término desta unidade o aluno estará familiarizado como os seguintes conceitos:

▷ Estrutura de um sistema de numeração;

▷ O que é um sistema de numeração posicional;

▷ Operações com números decimais e não decimais;

▷ Operações e propriedades básicas dos números racionais;

▷ Potenciação e radiciação.

Leitura Complementar

Prezado aluno, para melhor compreensão deste módulo leia paralelamente os seguintes textos:

1. Fomin, S. , *Sistemas de Numeração, Matemática: Aprendendo e Ensinando - Traduzido por Gelson Iezzi*, Ed. Atual, São Paulo, 1995.

2. Lima, E. L, *Logaritmos,* Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1996.

3. Jakubovic, J., Lellis, M. C. T., Imenes, L. M. P., *Frações e Números Decimais*, Coleção Pra Que Serve Matemática?, Ed. Atual, 2002.

4. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Calculo Volume 1*, Ed. LTC, 2001.

Alguns sistemas de Numeração

Na pizzaria do “Português” todos os itens do cardápio custam apenas 10 reais e não existe taxa de entrega. A característica do cardápio não favorece apenas o comprador, mas também todos os funcionários do estabelecimento.

Quando um cliente liga fazendo um pedido contendo doze unidades, o atendente imediatamente diz que o cliente terá de pagar 120 reais pelo seu pedido.

Agora, a realidade seria outra se o valor unitário da pizza fosse 17 reais. Claramente qualquer atendente necessitaria de uma calculadora para passar ao cliente o volor de um pedido composto por doze sabores de pizza.

As facilidades operacionais atribuídas aos números que são multiplos de 10 se devem ao fato de que em nosso dia a dia estamos sempre trabalhando como o sistema decimal de numeração. Nesse sistema todo número natural n é escrito na forma

$$n = d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + d_1 \cdot 10^1 + d_0,$$

com $d_k, d_{k-1}, \cdots d_1, d_0$ sendo um número tomado entre 0 e 9. Em outras palavras, n é sempre escrito como uma soma de unidades, dezenas, centenas, milhares, etc.

Definição 1 (Sistema de numeração). Um **sistema de numeração na base** b, é o sistema no qual todo número natural é representado através da soma finita de potências do número b, isto é, se n é um número natural, então:

$$n = c_k \cdot b^k + c_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + c_1 \cdot b^1 + c_0,$$

com c_k, c_{k-1}, c_1, c_0 sendo tomados entre 0 e $b - 1$.

Os coeficientes $c_k, c_{k-1}, \cdots, c_1, c_0$ são chamados de **algarismos**.

Observação. Se $n = c_k \cdot b^k + c_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + c_1 \cdot b^1 + c_0$, utilizamos usualmente a notação $(c_k c_{k-1} \cdots c_1 c_0)_b$ para representar que o número natural n é escrito na base b através dos algarismos $c_k, c_{k-1}, \cdots, c_1, c_0$.

Exemplo 1 (Sistema de numeração decimal). Inicialmente vamos estudar um pouco do sistema de númeração que rege o nosso dia a dia. “`O famoso`” sistema de numeração decimal. Veremos que no início tal sistema não era assim tão famoso.

Se perguntarmos a qualquer pessoa do seu convívio diário em que ano estamos, após um breve sorriso, receberá a resposta: 2012 é claro. Note que segundo a Definição (1), o número 2012 é composto por 2 unidades, 1 dezena, 0 centenas e 2 milhares, isto é,

$$\begin{aligned} 2012 &= 2000 + 10 + 2 = 2 \cdot 1000 + 1 \cdot 10 + 2 \\ &= 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1. \cdot 10^1 + 2 \\ &= (2012)_{10}. \end{aligned}$$

Observe que neste exemplo temos $b = 10$ e que os algarismos são dados por:

$$c_3 = 2, c_2 = 0, c_1 = 1, c_0 = 2.$$

Assim sendo, $(2012)_{10}$ é representado por 2012.

O sistema de numeração decimal tornou-se mundialmente popular pelo fato dos dedos das mãos terem sido as primeiras calculadoras ao alcance do homem. Nem sempre o sistema decimal foi o predominante. Em vários momentos da antiguidade os povos utilizavam o sistema duodecimal, isto é, base 12, na qual a unidade é também conhecida por "duzia". Esse sistema se deve ao fato dos dedos das mãos, exceto o polegar, serem compostos por 12 falanges. Com uma "`mãozinha do professor`", podemos visualizar esta "`poderosa maquina de somar`":

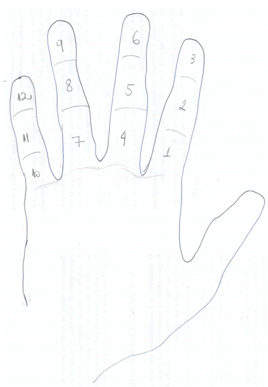


FIGURA 1.1: FONTE: mão do professor autor

Ainda hoje temos resquícios desse sistema. Por exemplo, os ovos são comercializados por dúzias, os jogos de xícaras e pratos sempre vêem com 6 ou doze unidades.

Exemplo 2 (Sistema de numeração binário)**.** Todo sistema de numeração no qual $b = 2$ é chamado binário. O sistema binário é o mais simples sistema que se pode trabalhar, uma vez que necessitamos apenas dos algarismos 0 e 1 para representar qualquer número natural. Nesse sistema 2 é a unidade. O sistema binário é importante para o nosso dia a dia pelo fato dos computadores trabalharem internamente utilizando esse sistema.

Sistemas de Numeração Posicionais e não posicionais

Considere um número natural n e vamos escrevê-lo num sistema de numeração ao qual adotaremos uma base qualquer b. Assim, temos:

$$n = c_k \cdot b^k + c_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + c_1 \cdot b + c_0, \tag{1.1}$$

o que se denota por:

$$n = (c_k c_{k-1} \cdots c_1 c_0)_b.$$

Note que na igualdade (1.1), a representatividade de cada algarismo depende da posição que ocupa. Por exemplo, no número 2012, o algarismo 2 aparece em duas posições distintas. Analisando da direita para a esquerda, num primeiro momento 2 representa duas unidades e num segundo 2 milhares.

Definição 2 (Sistemas de numeração posicionais e não posicionais)**.**

1. Sistemas de numeração nos quais a ordem dos algarismos é relevante são chamados de **posicionais**.

2. Se a ordem dos algarismos **não** é relevante, então o sistema é chamado de **não posicional.**

Exemplo 3 (Algarismos Romanos)**.** Os algarismos romanos são o exemplo mais conhecido de sistema de numeração não posicional. Neste sistema temos a seguinte simbologia:

$$\begin{aligned}
I &: \text{Um} \\
V &: \text{Cinco} \\
X &: \text{Dez} \\
L &: \text{Cinquenta} \\
C &: \text{Cem} \\
M &: \text{Mil}
\end{aligned}$$

Por exemplo, 2012 em algarismos romanos é escrito da forma

$$2012 = MMXII.$$

Note que, os algarismos M e I aparecem em posições distintas na representação do número 2012, mas sempre representando o mesmo valor.

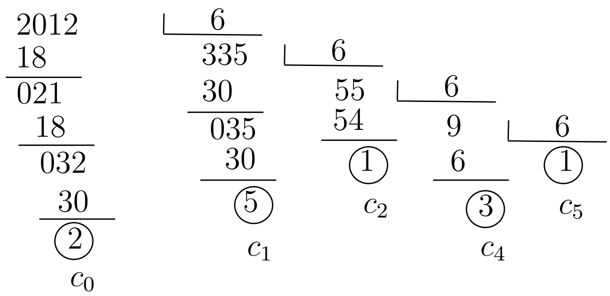
Troca de Sistemas de Numeração

Nesta seção, vamos aprender a representar um número real em qualquer sistema de numeração. Por exemplo, vamos converter o número 2012 do sistema decimal para o sistema senário, isto é, com base 6. Como estamos convertendo 2012 para o sistema senário devemos escrevê-lo na forma

$$2012 = c_k \cdot 6^k + c_{k-1} \cdot 6^{k-1} + \cdots + c_1 \cdot 6^1 + c_0.$$

Como determinamos os coeficientes $c_k, c_{k-1}, \cdots, c_1, c_0$?

Iniciamos o processo dividindo 2012 por 6. O resto dessa divisão será c_0. O próximo passo é dividir o quociente obtido no passo anterior novamente por 6. O resto obtido, será c_1. Repetimos esse processo até que o quociente seja menor que a base em questão (note que neste exemplo estamos trabalhando com a base 6). Observamos que o quociente menor que 6 será o último algarismo relevante. Esse processo é descrito pelo diagrama.



Assim sendo, o número 2012 na base 6 será o número

$$2012 = (13152)_6.$$

MUDANÇA DE BASE: CASO GERAL

Seja n um número no sistema decimal de numeração e considere b uma base qualquer diferente de 10. O nosso objetivo é representar n na base b, isto é, determinar coeficientes $c_k, c_{k-1}, \cdots c_1, c_0$ tais que

$$n = c_k b^k + c_{k-1} b^{k-1} + \cdots + c_1 b + c_0.$$

Método Prático. Dividindo n por b, vamos obter resto igual a c_0, uma vez que todas as demais parcelas que compõem o número b são divisíveis por b exceto a parcela c_0. Agora, considere q_0 o quociente obtido da divisão de n por b. Dividindo q_0 por b, o resto será c_1 e, obtemos, um novo quociente q_1. Dividindo q_2 por b o resto será c_2 e, temos, um novo quociente q_2. Repetimos esse processo até obtermos um $q_k < b$. Tal quociente será o último algarismo relevante.

Exemplo 4. Rescreva o número 2012 na base 2.

Solução. Seguindo o método prático, dividimos inicialmente 2012 por 2. Obtemos o quociente $q_0 = 1006$ e resto 0. Assim, $c_0 = 0$. Dividimos q_0 por 2 obtemos $q_1 = 503$ e resto 0. Assim, $c_1 = 0$. Dividindo q_2 por 2 obtemos $q_3 = 251$ e resto 1. Assim, $c_2 = 1$. Dividindo q_3 por 2 obtemos $q_4 = 125$ e resto 1. Assim, $c_3 = 1$. Dividindo q_4 por 2 obtemos $q_5 = 62$ e resto 1. Assim, $c_4 = 1$. Dividindo q_5 por 2 obtemos $q_6 = 31$ e resto 0. Assim, $c_5 = 0$. Dividindo q_6 por 2 obtemos $q_7 = 15$ e resto 1. Assim, $c_6 = 1$. Dividindo q_7 por 2 obtemos $q_8 = 7$ e resto 1. Assim, $c_7 = 1$. Dividindo q_8 por 2 obtemos $q_9 = 3$ e resto 1. Assim, $c_8 = 1$. Dividindo q_9 por 2 obtemos $q_{10} = 1$ e resto 1. Assim, $c_9 = 1$. Agora, como $q_{10} < 2$ o processo é finalizado e o último algarismo relevante é $c_{10} = 1$.

Portanto, o número 2012 na base 2 será representado por

$$(2012)_{10} = (11111011100)_2.$$

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Rescreva o número 2012 na base 3.

Resp. $2012 = (21112)_3$

Sistemas de Numeração: relação de ordem

No sistema decimal para sabermos quando um número é maior que outro basta analisarmos a quantidade de unidades, dezenas, milhares, etc. Por exemplo, o número 1211 é maior que o número 211, uma vez que 1211 possui uma milhar a mais que o número 211.

Se os números analisados apresentam a mesma quantidade de algarismos o processo é o mesmo. De fato, 201 é maior que 111, pois o número 201 possui uma centena a mais que o número 111.

Esta discussão estende-se naturalmente para números em diversas bases. O número $(111)_8$ é menor que o número $(121)_8$, já que o número $(121)_8$ apresenta um elemento a mais no segundo nível em comparação ao número $(111)_8$.

Só podemos comparar números com a mesma base?

TOME NOTA. Para compararmos números que se encontram em bases distintas, basta colocá-los na mesma base, utilizando o processo de mudança de base. Por simplicidade, sempre colocamos ambos os números na base 10 e depois comparamos.

Por exemplo, $(123)_3$ é menor que $(123)_5$. Observe que

$$(123)_4 = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 3 = 16 + 8 + 3 = 27$$

$$(123)_5 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 3 = 25 + 10 + 3 = 38$$

Dessa maneira, como 38 é maior que 27, concluímos que $(123)_3$ é menor que $(123)_5$.

Teste seu conhecimento. Qual a relação entre os números $(1000000)_2$ e $(1000)_4$?

Resp. São iguais.

Sistemas de Numeração: Adição, Multiplicação e Divisão

No sistema decimal ao somarmos dois números, por exemplo 2012 e 398, procedemos da seguinte forma: primeiramente a soma é realizada da direita para a esquerda somando unidade com unidade, dezena com dezena, milhar com milhar e assim por diante. Ao somarmos 8 com 2 obtemos o número 10 e, assim, fica o 0 e vai 1 para a casa das dezenas.

$$\begin{array}{lr} & 20\overset{1}{1}2 \\ + & 398 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Somando as dezenas, temos o número $9+1+\overset{\text{veio das unidades}}{1} = 11$ e, assim, fica o 1 e vai 1 para a casa das centenas.

$$\begin{array}{lr} & 2\overset{1}{0}\overset{1}{1}2 \\ + & 398 \\ \hline & 10 \end{array}$$

Somando as centenas, temos o número $3+0+\overset{\text{veio das unidades}}{1} = 4$ e, assim, fica o 4 e não vai nenhum algarismo para a casa das milhares.

$$\begin{array}{lr} & 2\overset{1}{0}\overset{1}{1}2 \\ + & 398 \\ \hline & 410 \end{array}$$

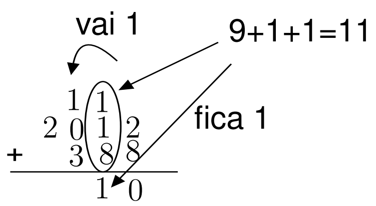
No próximo passo, baixamos o 2, uma vez que o número 398 possui 0 na casa das milhares.

$$\begin{array}{lr} & 2\overset{1}{0}\overset{1}{1}2 \\ + & 398 \\ \hline & 2410 \end{array}$$

vai 1

$$\begin{array}{lr} & 20\overset{1}{1}2 \\ + & 398 \\ \hline & 0 \end{array} \quad \longleftarrow \quad 8+2=10$$

fica 0



Pergunta. Como devemos entender as expressões "fica 0 e vai 1" e "fica 1 e vai 1"?

TOME NOTA. Na verdade não devemos dizer "fica zero e vai um" ou "fica o um e vai um". O correto seria dizer "fica zero unidades e vai uma dezena" e "fica uma unidade e vai uma dezena". Note que trocamos "`um`" por "`uma`" por se tratar de unidades, dezenas, centenas, etc.

Como estamos no sistema decimal, temos:

$$\begin{aligned} 2012 &= 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \\ 398 &= 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 8. \end{aligned}$$

Quando efetuamos a soma, inconscientemente estamos somando primeiramente os elementos que compõem o nível zero (unidades), depois os elementos do nível um (dezenas ou coeficientes de 10^1) e assim por diante, isto é:

$$\begin{array}{rr} & 2012 \\ + & 398 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rr} & 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \\ + & 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 8 \\ \hline \end{array}$$

Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} 2012 + 398 &= (2+0) \cdot 10^3 + (0+3) \cdot 10^2 + (1+9) \cdot 10^1 + (2+8) \\ &= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10^1 + 10, \end{aligned}$$

ou simplesmente:

$$2012 + 398 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10^1 + 10.$$

Após efetuarmos a soma, os coeficientes dos níveis zero e um deixaram de pertencer ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Como estamos trabalhando no sistema decimal, todos os coeficientes devem ser números entre 0 e 9 (veja Definição 1). Dividindo 10 por 10 (onde 10 é base em questão) obtemos como quociente 1 e resto 0, isto é:

$$\begin{aligned} 10 &= 1 \cdot 10 + 0 \\ &= 1 \cdot 10^1 + 0. \end{aligned}$$

Note que agora o número 10 passou a ser escrito como sendo a soma de um elemento do nível um com um elemento do nível zero.

Assim sendo,

$$2012 + 398 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 + 0,$$

o que implica que:

$$2012 + 398 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1.$$

Observe que o nível zero passou a ter 0 elementos e o nível um passou a ganhar mais um elemento dado por $1 \cdot 10^1$, isto é:

$$\begin{aligned} 2012 + 388 &= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 \\ &= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + (10 + 1) \cdot 10^1 \\ &= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 11 \cdot 10^1, \end{aligned}$$

justificando assim a expressão “`fica zero unidades e vai uma dezena`”.

Como o coeficiente do nível um é o número 11, que é maior que a base 10, dividimos 11 por 10 e escrevemos:

$$11 = 1 \cdot 10 + 1.$$

Seguindo o raciocínio anterior,

$$\begin{aligned} 2012 + 398 &= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 11 \cdot 10^1 \\ &= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10 + 1) \cdot 10^1 \\ &= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 \\ &= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1. \end{aligned}$$

Note que neste caso restou uma unidade no nível 1 e passamos a acrescentar uma unidade no nível 2, justificando a expressão “fica um e vai um”. Observe

$$2012 + 398 \;=\; 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1.$$

Ao somarmos os elementos do nível dois temos

$$\begin{aligned} 2012 + 398 &= 2 \cdot 10^3 + (3+1) \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 \\ &= 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 \end{aligned}$$

Logo:

$$2012 + 398 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 = 2410.$$

Observação. É claro que na prática **não** vamos calcular a soma através do processo descrito anteriormente. Tais esclarecimentos são válidos para entendermos como somar em sistemas não decimais, uma vez que, se a base for diferente de zero o processo de soma será o mesmo respeitando sempre a unidade do sistema de numeração em questão.

Exemplo 5. Como somamos os números $(1234)_5$, $(123)_5$ e $(12)_5$?

Solução. A soma sempre é realizada da direita para a esquerda respeitando os níveis e a base em questão. Ao somarmos os algarismos que compõem o primeiro nível dos três números obtemos:

$$2 + 3 + 4 = 9.$$

Dividindo 9 por 5, segue que:

$$9 = \underbrace{1}_{\text{quociente}} \cdot 3 + \underbrace{4}_{\text{resto}}$$

o que mostra que fica 4 e vai 1.

$$\begin{array}{lr} & (12\overset{1}{3}4)_5 \\ & (123)_5 \\ + & (12)_5 \\ \hline & (4)_5 \end{array}$$

Somando os algarismos do segundo nível:

$$1 + 2 + 3 + \overset{\text{veio do nível anterior}}{1} = 7.$$

Dividindo 7 por 5, segue que:

$$7 = \underbrace{1}_{\text{quociente}} \cdot 5 + \underbrace{2}_{\text{resto}}$$

o que mostra que fica 2 e vai 1.

$$\begin{array}{lr}
 & (1\,\overset{1}{2}\overset{1}{3}\,4)_5 \\
 & (123)_5 \\
+ & (12)_5 \\
\hline
 & (42)_5
\end{array}$$

Somando os algarismos do terceiro nível:

$$1 + 2 + \overset{\text{veio do nível anterior}}{1} = 4.$$

Como $4 < 5$ o algarismo do terceiro nível torna-se o próprio 4.

$$\begin{array}{lr}
 & (1\,\overset{1}{2}\overset{1}{3}\,4)_5 \\
 & (123)_5 \\
+ & (12)_5 \\
\hline
 & (424)_5
\end{array}$$

No último estágio temos como algarismo o 1.

$$\begin{array}{lr}
 & (1\,\overset{1}{2}\overset{1}{3}\,4)_5 \\
 & (123)_5 \\
+ & (12)_5 \\
\hline
 & (1424)_5
\end{array}$$

Logo, $(1234)_5 + (123)_5 + (1234)_5 = (1424)_5$.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Efetue a soma $(8765)_9$, $(765)_9$ e $(65)_9$.

Resp. $(10880)_9$.

Exemplo 6. Multiplique os números $(432)_6$ e $(32)_6$.

Solução. Assim como a soma, a multiplicação sempre é realizada da direita para a esquerda respeitando os níveis e a base em questão. Primeiramente multiplicamos todos os algarismos do número $(432)_6$ pelo algarismo do primeiro nível do número $(32)_6$.

Como $2 \cdot 2 = 4$ e $4 < 6$ temos que o 4 permanece e não vai número algum para o próximo nível.

$$\begin{array}{rr} & (432)_6 \\ \times & (32)_6 \\ \hline & (4)_6 \end{array}$$

Continuando, $2 \cdot 3 = 6$. Dividindo, 6 por 6, temos:

$$6 = \underbrace{1}_{\text{quociente}} \cdot 6 + \underbrace{0}_{\text{resto}},$$

o que mostra que fica 0 e vai 1 ao nível seguinte. Observe:

$$\begin{array}{rr} & (\overset{1}{4}\,32)_6 \\ \times & (32)_6 \\ \hline & (04)_6 \end{array}$$

Para o próximo nível, segue que:

$$2 \cdot 4 + \overset{\text{veio do nível anterior}}{1} = 9.$$

Dividindo, 9 por 6, obtemos:

$$9 = \underbrace{1}_{\text{quociente}} \cdot 6 + \underbrace{3}_{\text{resto}},$$

o que mostra que fica 3 e vai 1 ao nível posterior.

$$\begin{array}{rr} & (\overset{1}{4}\,32)_6 \\ \times & (32)_6 \\ \hline & (3104)_6 \end{array}$$

O próximo passo agora é multiplicamos todos os algarismos do número $(432)_6$ pelo algarismo do segundo nível do número $(32)_6$. Como $2 \cdot 3 = 6$, temos que, fica 0 e vai 1 para o próximo nível. Observe:

$$\begin{array}{rr} & (4\overset{1}{3}2)_6 \\ \times & (32)_6 \\ \hline & (3104)_6 \\ & (0)_6+ \end{array}$$

Continuando, $3 \cdot 3 + \overset{\text{veio do nível anterior}}{1} = 10$. Dividindo, 10 por 6, temos:

$$10 = \underbrace{1}_{\text{quociente}} \cdot 6 + \underbrace{4}_{\text{resto}},$$

o que mostra que fica 4 e vai 1 para o nível seguinte. Analise:

$$\begin{array}{rr} & (\overset{1}{4}\overset{1}{3}2)_6 \\ \times & (32)_6 \\ \hline & (3104)_6 \\ & (40)_6+ \end{array}$$

Para o próximo nível, segue que:

$$3 \cdot 4 + \overset{\text{veio do nível anterior}}{1} = 13.$$

Dividindo, 13 por 6, obtemos:

$$13 = \underbrace{2}_{\text{quociente}} \cdot 6 + \underbrace{1}_{\text{resto}},$$

o que mostra que fica 1 e vai 2 para o nível posterior. Veja:

$$\begin{array}{rr} & (\overset{1}{4}\overset{1}{3}2)_6 \\ \times & (32)_6 \\ \hline & (3104)_6 \\ & (2140)_6+ \\ \hline & (24504)_6 \end{array}$$

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Multiplique os números $(321)_4$ e $(21)_4$.

Resp. $(20001)_4$.

Exemplo 7. Qual o quociente da divisão de $(1577)_8$ por $(50)_8$?

Solução. Primeiramente vale recordar que os algarismos que compõem a escrita de um número na base 8 são $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ao dividirmos $(1577)_8$ por $(50)_8$ observamos que o primeiro algarismo do quociente é 2, isto é:

$$\begin{array}{c|c} (1577)_8 & (50)_8 \\ \cline{2-2} (120)_8 & (26)_8 \\ \cline{1-1} (37)_8 & \end{array}$$

Porque o primeiro número do quociente entre $(1577)_8$ e $(50)_8$ deve ser $(2)_8$? Não poderia ser $(3)_8$?

Se multiplicarmos $(3)_8$ por $(50)_8$, como $7 \cdot 0 = 0$ e $0 < 8$ temos que o 0 permanece e não vai número algum para o próximo nível. Observe:

$$\begin{array}{r} (50)_8 \\ \times \quad (3)_8 \\ \hline (0)_8 \end{array}$$

Continuando, $3 \cdot 5 = 15$. Dividindo, 15 por 8, temos:

$$15 = \underbrace{1}_{\text{quociente}} \cdot 8 + \underbrace{7}_{\text{resto}},$$

o que mostra que fica 7 e vai 1 para o nível seguinte. Analise

$$\begin{array}{rr} & \overset{1}{(}\ 50)_8 \\ \times & (3)_8 \\ \hline & (70)_8 \end{array}$$

Para finalizar a operação, baixamos o número 1. Veja:

$$\begin{array}{rr} & \overset{1}{(}\ 50)_8 \\ \times & (3)_8 \\ \hline & (170)_8 \end{array}$$

Como $(170)_8$ é maior que $(157)_8$ concluímos que o algarismo que inicia o quociente dever ser 2. Continuando a divisão, sendo $(37)_8$ menor que $(50)_8$, devemos baixar o algarismos 7 e considerar a divisão de $(377)_8$ por $(50)_8$, ou seja:

$$\begin{array}{r|l} (1577)_8 & (50)_8 \\ \cline{2-2} (120)_8 & (6)_8 \\ \cline{1-1} (377)_8 & \\ (360)_8 & \\ \cline{1-1} (17)_8 & \end{array}$$

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Divida o número $(100000000)_2$ pelo número $(10000)_2$.

Resp. $(0)_2$.

TOME NOTA. Prezado aluno, você deve estar pensando que somar, multiplicar e dividir quando a base não é decimal é uma tarefa árdua. Não se preocupado! Existe um atalho que pode evitar erros durante as operações que consiste em sempre converter os números envolvidos para base 10, realizar as operações no sistema decimal e depois converter novamente para a base inicial.

Por exemplo:

$$(1577)_8 = 1 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 7 = 895$$

$$(50)_8 = 5 \cdot 8 + 0 = 40.$$

Agora, dividindo 895 por 40, obtemos como quociente 22 e resto 15, ou seja:

$$895 = 40 \cdot 22 + 15.$$

Agora, convertento 22 e 15 para a base 8, segue que:

$$(22)_{10} = (26)_8 \text{ e } (15)_{10} = (17)_8.$$

Obtendo assim, o mesmo resultado do exemplo anterior.

Critérios de divisibilidade

No cotidiano, as ferramentas que ajudam a simplificar os cálculos são sempre um refrigério. Por exemplo, existem critérios práticos que nos auxiliam a decidir quando um número é divisível por 2, 3, 4, 5, etc. Neste texto vamos listar os critérios de divisibilidade envolvendo os números de 2 a 10.

Divisibilidade por 2

Um número é divisível por 2 se o número que compõem as unidades é divisivel por 2.

Exemplo 8. O número 2.345.678 é divisível por 2. De fato, o número 2.345.678 tem 8 unidades. Como 8 é divisível por 2 temos que 2.345.678 é divisível por 2. Por outro lado, também sabemos que o número 675 não é divisível por 2 uma vez que 5 não é divisível por 2.

Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 se a soma de seus algarismos é divisível por 3.

Exemplo 9. O número 3.345.678 é divisível por 3. De fato, $3+3+4+5+6+7+8 = 36$. Sendo 36 divisível por 3 obtemos que 3.345.678 é divisível por 3. Além disso, sabemos que o número 3.341 não é divisível por 3. Note que, $3+3+4+1=11$, no qual mostra que o número 3.341 não é divisível por 3.

Divisibilidade por 4

Um número é divisível por 4 se o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4.

Exemplo 10. O número 17.248 é divisível por 4. De fato, o número formado pelos dois primeiros algarismos de 17.248 é 48. Sendo 48 divisível por 4 concluímos que 17.248 é um número divisível por 4. Agora, o número 84.271 não é divisível por 4. Observe que o número formado pelos dois primeiros algarismos de 84.271 é 71 que não é divisível por 4.

Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 se o seu último algarismo é 0 (zero) ou 5.

Exemplo 11. O número 1075 é divisível por 5, pois termina com o algarismo 5. Agora, o número 214 não é divisível por 5 visto que seu último algarismo não é igual a 0 ou 5.

Divisibilidade por 6

Um número é divisível por 6 se é par e a soma de seus algarismos é divisível pelo número 3.

Exemplo 12. O número 4536 é divisível por 6, pois 4536 é par e a soma de seus algarismos $4+5+3+6=18$ é divisível por 3. Agora, 1581 não é divisível por 6 uma vez que a soma de seus algarismos $1+5+8+1=15$ é divisível por 3, mas 1581 não é par.

Divisibilidade por 7

Um número é divisível por 7 se o dobro do último algarismo, subtraído do número sem o último algarismo, resultar em um número divisível por 7.

Exemplo 13. O número 1078 é divisível por 7. De fato,

$$\begin{aligned}
\text{Número estudado sem o último algarismo} &: 107\\
\text{Último algarismo do número estudado} &: 8\\
\text{Dobro do último algarismo do número estudado} &: 16\\
107-16 &= 91.
\end{aligned}$$

Agora, claramente 91 é divisível por 7. Assim, concluímos que 1078 é divisível por 7.

Já o número 8700 não é divisível por 7. De fato,

$$\begin{aligned}
\text{Número estudado sem o último algarismo} &: \quad 870\\
\text{Último algarismo do número estudado} &: \quad 0\\
\text{Dobro do último algarismo do número estudado} &: \quad 0\\
870 - 0 &= \quad 870.
\end{aligned}$$

Agora, devemos decidir se 870 é divisível por 7. Para isso, aplicamos o teste novemente.

$$\begin{aligned}
\text{Número estudado sem o último algarismo} &: \quad 87\\
\text{Último algarismo do número estudado} &: \quad 0\\
\text{Dobro do último algarismo do número estudado} &: \quad 0\\
87 - 0 &= \quad 87.
\end{aligned}$$

Como 87 não é divisível por 7 temos que 870 também não será divisível por 7. Assim, concluímos que 7 não divide 8700.

Divisibilidade por 8

Um número é divisível por 8 se o número formado pelos seus três últimos algarismos é divisível por 8.

Exemplo 14. O número 361.024 é divisível por 8, pois 024 é divisível por 8. Agora, 361.124 não é divisível por 8 pois 124 não é divisível por 8.

Divisibilidade por 9

Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é um número divisível por 9.

Exemplo 15. O número 17415 é divisível por 9 já que $1 + 7 + 4 + 1 + 5 = 18$ que é divisível por 9. Agora, 7415 não é divisível por 9, pois $7 + 4 + 1 + 5 = 17$ que claramente não é divisível por 9.

Divisibilidade por 10

Um número é divisível por 10 se terminar com o algarismo 0 (zero).

Exemplo 16. O número 1.234.567.890 é divisível por 10, uma vez que termina em 0. Agora, o número 123.456.789 não é divisível por 10, pois não termina em 0.

Como verificar que tais critérios realmente funcionam?

Para provar a validade dos critérios listados acima vamos utilizar o que já aprendemos sobre sistemas de numeração. Por exemplo, vamos justificar nas próximas linhas o critério de divisibilidade por 8. Considere inicialmente um número qualquer N no sistema decimal de numeração. Aprendemos que N pode ser escrito na forma:

$$N = c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_4 10^4 + c_3 10^3 + c_2 10^2 + c_1 10 + c_0.$$

Claramente, os números 10^2 e 10 não são divisíveis por 8, pois:

$$\begin{aligned} 10^2 &= 1000 = 8 \cdot 12 + 4 \\ 10 &= 8 \cdot 1 + 2. \end{aligned}$$

Por outro lado, todos os números $10^k, 10^{k-1}, \cdots, 10^4, 10^3$ são divisíveis por 8, uma vez que:

$$\begin{aligned} 10^3 &= 1000 = 8 \cdot 125 \\ 10^4 &= 10000 = 8 \cdot 1250 = 8 \cdot 125 \cdot 10 \\ 10^5 &= 100000 = 8 \cdot 12500 = 8 \cdot 125 \cdot 10^2 \\ &\vdots \\ 10^k &= 8 \cdot 125 \cdot 10^{k-2}. \end{aligned}$$

Assim sendo, podemos reescrever o número N da seguinte forma:

$$\begin{aligned} N &= c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + c_4 \cdot 10^4 + c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0 \\ &= c_k \cdot 8 \cdot 125 \cdot 10^{k-2} + \cdots + c_4 \cdot 8 \cdot 125 \cdot 10 + c_3 \cdot 8 \cdot 125 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0 \\ &= \underbrace{8 \cdot \left(c_k \cdot 125 \cdot 10^{k-2} + \cdots + c_4 \cdot 125 \cdot 10 + c_3 \cdot 125\right)}_{\text{divisível por 8}} + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0. \end{aligned}$$

Dessa forma, para N ser divisível por 8 a parcela $c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$ deve também ser divisível por 8. Agora, a parcela $c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$ é o número formado pelos três primeiros algarismos de N.

Assim, verificamos o critério de divisibilidade por 8.

Teste seu conhecimento. Justifique o critério de divisibilidade por 3.

Resp. Repita o argumento anterior.

TOME NOTA. Os critérios de divisibilidade sitados nesta seção dependem intrisicamente do sistema de numeração decimal, isto é, se o sistema de numeração for diferente do decimal os critérios podem não ser verdadeiros. Por exemplo, o número 49 é escrito na base 9 por: $(54)_9$. Note que, a soma dos algarismos é $5 + 4 = 9$, mas 49 não é divisível por 3 nem por 9.

Números racionais: operações e propriedades básicas

O conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$, é o conjunto formado pelos números positivos juntamente com o zero.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$

O conjunto dos números inteiros, denotado por $\mathbb{Z}$, é o conjunto formado pelos números naturais juntamente com todos os números negativos.

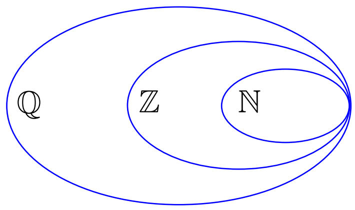
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\cdots, -5, -4, -3, -2, -1\} = \{\cdots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$

Definição 3. O conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, é o conjunto formado pelos números da forma $\dfrac{x}{y}$, com $x, y \in \mathbb{Z}$ e $y \neq 0$, ou seja:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{x}{y} \ : \ x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } y \neq 0\}.$$

TOME NOTA. Observe que, quando $y = 1$ obtemos todos os números inteiros, ou seja, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ e, consequentemente,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$



Considere os números naturais 14 e 30. Vamos denotar por $D(14)$ e $D(30)$ o conjunto formado por todos os números que dividem 14 e 30 respectivamemte. Note que 1, 2, 7 e 14 são todos os possíveis divisores de 14, isto é:

$$D(14) = \{1, 2, 7, 14\}.$$

Por outro lado, os números 1, 2, 3, 5, 16, 15 e 30 formam o conjunto dos divisores de 30, ou seja:

$$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 16, 15, 30\}.$$

Assim, podemos constatar que o maior número de divide 14 e 30 simultâneamente é o 2. Vamos agora, repetir o mesmo estudo com os números 11 e 91. Observe que:

$$D(11) = \{1, 11\} \text{ e } D(71) = \{1, 71\}.$$

Através dessa análise podemos definir:

Definição 4. Sejam x e y dois números inteiros.

1. O **máximo divisor comum** entre os números x e y, denotado por $\mathrm{mdc}(x, y)$, é definido como sendo o maior número que divide x e y simultâneamente;

2. Um número inteiro $x > 1$ é um **número primo** se seus únicos divisores positivos são 1 e x, ou seja, $D(x) = \{1, x\}$;

3. Dois números inteiros x e y são **primos entre si** se $\mathrm{mdc}(x, y) = 1$;

4. Um número racional $\dfrac{x}{y}$ é **irredutível** se x e y forem primos entre si;

5. Um inteiro x é **composto** se possui divisores distintos no inteiros 1 e x, ou seja, $(D(x) - \{1, x\}) \neq \emptyset$.

Exemplo 17. Os números

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

representam todos os números primos entre 0 e 100.

Por outro lado, os números 14 e 30 são compostos, visto que

$$(D(14) - \{1, 14\}) = \{2, 7\} \neq \emptyset;$$

$$(D(30) - \{1, 30\}) = \{2, 3, 5, 16, 15\} \neq \emptyset.$$

Todo número inteiro pode ser representado como produto de potências de números primos?

Sempre é possível, mas este resultado não será provado neste texto. Vejamos como a decomposição é construída através de um exemplo. Considere o número 67500. Iniciamos o processo utilizando os números primos em ordem crescente. Dessa forma, dividimos 67500 pelo primeiro primo maior que 1. Sendo 2 o número primo em questão, temos:

$$\begin{array}{r|l} 67500 & 2 \\ \hline 33750 & \end{array}$$

Como 33750 é um número divisível por 2, continuamos o processo utilizando novamente o número 2, isto é:

$$\begin{array}{r|l} 67500 & 2 \\ 33750 & 2 \\ \hline 16875 & \end{array}$$

Como 16875 não é divisível por 2 passamos para o próximo primo, que é o número 3. Agora, 16875 é divisível por 3. Dessa forma, continuamos o processo com o número 3. Veja:

$$\begin{array}{r|l} 67500 & 2 \\ 33750 & 2 \\ 16875 & 3 \\ \hline 5625 & \end{array}$$

Uma vez que, 5625 é divisível por 3, continuamos o processo utilizando o número 3. Observe:

$$
\begin{array}{l|l}
67500 & 2 \\
33750 & 2 \\
16875 & 3 \\
5625 & 3 \\
\hline
1875 &
\end{array}
$$

Repetindo novamente o processo com 3, segue que:

$$
\begin{array}{l|l}
67500 & 2 \\
33750 & 2 \\
16875 & 3 \\
5625 & 3 \\
1875 & 3 \\
\hline
625 &
\end{array}
$$

Note que, 625 não é divisível por 3, então seguimos o processo até o final com o número 5, ou seja:

$$
\begin{array}{l|l}
67500 & 2 \\
33750 & 2 \\
16875 & 3 \\
5625 & 3 \\
1875 & 3 \\
625 & 5 \\
125 & 5 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
\hline
1 & 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4
\end{array}
$$

Observe que o processo é interrompido quando obtemos como quociente o número 1. Além disso, concluímos que o número 67500 pode ser escrito como produto de potências de primos das seguinte forma:

$$67500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4.$$

Teste seu conhecimento. Escreva o número 984.150 através de potências de números primos.

Resp. $2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3$.

Definição 5. Considere $m, n > 1$ números naturais. O **mínimo multiplo comum** entre m e n, denotado por $\text{mmc}(m, n)$, é o menor número divisível por m e n.

Exemplo 18. O menor número divisível por 2 e 5 é o 10, isto é, $\text{mmc}(2, 5) = 10$. Se considerarmos os números 3 e 9 teremos $\text{mmc}(3, 9) = 9$.

Determinar o mínimo multiplo comum entre dois números pequenos é uma tarefa muito fácil. Se os números analisados forem grandes, como procedemos?

Na prática, para calcularmos o mínimo multiplo comum decompomos simultâneamente os números analisados em potências de primos. O número procurado será o produto de todas as potências de primos obtidas através da decomposição.

Vejamos como isso funciona atravé de um exemplo. Considere os números 35 e 81. Vamos determinar $\text{mmc}(35, 81)$. Iniciamos o processo utilizando 2. Como 2 não divide os números 35 e

81 passamos para o próximo primo. Sendo 3 o próximo primo, obtemos:

$$\begin{array}{c|l} 35, 81 & 3 \\ \hline 35, 27 & \end{array}$$

uma vez que 35 não é divisível por 3, permanecendo inalterado e realizamos a divisão de 81 por 3. Como na segunda linha ainda existe um número que é divisível por 3, continuamos o processo utilizando o primo 3. Veja:

$$\begin{array}{c|l} 35,\ 81 & 3 \\ 35, 27 & 3 \\ 35, 9 & 3 \\ 35, 3 & 3 \\ \hline 35, 1 & \end{array}$$

Como a linha resultante não apresenta mais números divisíveis por 3, continuamos o processo com o próximo primo. Observe

$$\begin{array}{c|l} 35,\ 81 & 3 \\ 35, 27 & 3 \\ 35, 9 & 3 \\ 35, 3 & 3 \\ 35, 1 & 5 \\ \hline 7, 1 & \end{array}$$

Não existe mais números divisíveis por 5, o próximo primo será o 7. Note:

$$\begin{array}{c|l} 35,\ 81 & 3 \\ 35, 27 & 3 \\ 35, 9 & 3 \\ 35, 3 & 3 \\ 35, 1 & 5 \\ 7, 1 & 7 \\ \hline 1, 1 & 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \end{array}$$

O processo é finalizado sempre que obtemos uma linha com todos os quocientes iguais a 1. Claramente este processo pode ser aplicado a uma quantidade finita de números. Assim, mmc$(35, 81) = 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 2835$.

Teste seu conhecimento. Determine $\text{mmc}(27, 100)$.

Resp. $\text{mmc}(27, 100) = 2700$.

Definição 6. Sejam $\frac{x_1}{y_1}$ e $\frac{x_2}{y_2}$ dois números racionais. Definimos as **operações de soma**, **produto** e **quociente** usuais em $\mathbb{Q}$ pelas operações:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} &= \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1 y_2} \\
\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} &= \frac{x_1 \cdot x_2}{y_1 \cdot y_2} \\
\frac{x_1}{y_1} \div \frac{x_2}{y_2} &= \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{y_2}{x_2}.
\end{aligned}$$

As operações que associam o par de números racionais $\frac{x_1}{y_1}$ e $\frac{x_2}{y_2}$ à soma, produto e ao quociente definidos anteriormente, como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\
\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right) &\longmapsto \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\
\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right) &\longmapsto \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\
\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right) &\longmapsto \frac{x_1}{y_1} \div \frac{x_2}{y_2},
\end{aligned}$$

são chamadas de **adição**, **multiplicação** e **divisão**.

Exemplo 19. Efetue a soma $\frac{3}{25} + \frac{5}{14}$.

Solução. Na prática sempre utilizamos o mínimo multiplo comum para realizar a soma de dois números racionais. Iniciamos calculando $\text{mmc}(14, 25)$. De fato:

$$\begin{array}{c|l} 14,\ 25 & 2 \\ 7, 25 & 5 \\ 7, 5 & 5 \\ 7, 1 & 7 \\ \hline 1, 1 & 2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 350. \end{array}$$

O resultado final terá por denominador $\text{mmc}(14, 25)$, isto é:

$$\frac{3}{25} + \frac{5}{14} = \frac{?}{350}.$$

Para determinarmos o numerador da fração resultante, utilizaremos as frações $\dfrac{3}{25}$ e $\dfrac{5}{14}$. Dividimos 350 por 25 e o resultado multiplicamos por 3, isto é, $350 \div 25 = 14$ e calculamos $14 \cdot 3 = 42$. Reflita:

$$\frac{3}{25} + \frac{5}{14} = \frac{42+?}{350}.$$

O mesmo argumento será repetido para a fração $\dfrac{5}{14}$, isto é, $350 \div 14 = 25$ e $25 \cdot 5 = 125$. Assim sendo, concluímos:

$$\frac{3}{25} + \frac{5}{14} = \frac{42 + 125}{350} = \frac{167}{350}.$$

Exemplo 20. Efetue as operações: $\dfrac{3}{25} \cdot \dfrac{5}{14}$ e $\dfrac{3}{25} \div \dfrac{5}{14}$.

Solução. Pela Definição, temos que:

$$\frac{3}{25} \cdot \frac{5}{14} = \frac{3 \cdot 5}{25 \cdot 14} = \frac{15}{350}.$$

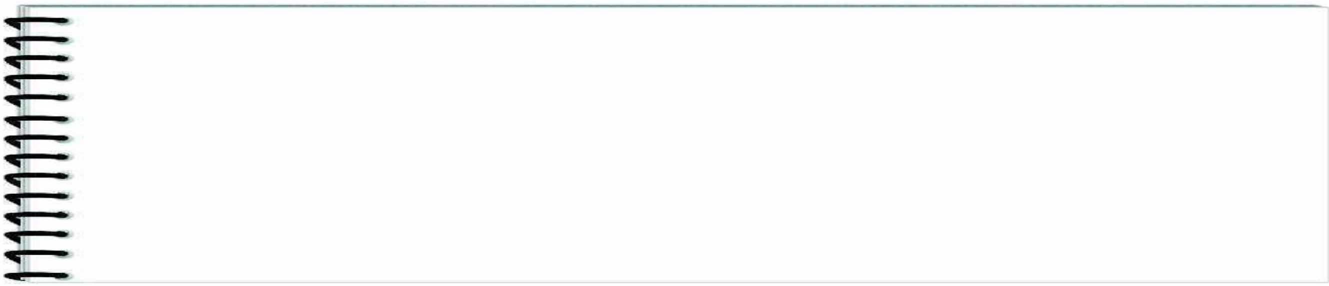
Por outro lado,

$$\frac{3}{25} \div \frac{5}{14} = \frac{3}{25} \cdot \frac{14}{5} = \frac{3 \cdot 14}{25 \cdot 5} = \frac{48}{125}.$$

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Efetue as operações: $\dfrac{3}{7} + \dfrac{5}{8}, \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{5}{8}$ e $\dfrac{3}{7} \div \dfrac{5}{8}$.

Resp. $\dfrac{59}{56}, \dfrac{24}{35}$ e $\dfrac{15}{56}$, respectivamente.



Pergunta. Agora que já sabemos somar e multiplicar em $\mathbb{Q}$, como decidir se um número racional é positivo, negativo ou zero?

A resposta é dada pela definição:

Definição 7. Seja $\dfrac{x}{y}$ um número racional.

1. $\dfrac{x}{y}$ é **positivo** se, e somente se, o produto entre os números inteiros x e y for positivo, isto é, $x \cdot y \in \mathbb{N}$;
2. $\dfrac{x}{y}$ é **estritamente positivo** se, e somente se, $x \cdot y \in \mathbb{N} - \{0\}$;
3. $\dfrac{x}{y}$ é **zero** se, e somente se, $x = 0$;
4. $\dfrac{x}{y}$ é **negativo** se, e somente se, o produto entre os números inteiros x e y for negativo, ou seja, $x \cdot y \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$.

Exemplo 21. Os números $-\dfrac{10}{3}$ e $\dfrac{112}{45}$ são estritamente negativo e positivo, respectivamente. Note que:

$$(-10) \cdot 3 = -30 \text{ (estritamente negativo) } ;$$

$$(112) \cdot 45 = 5040 \text{ (estritamente positivo) } .$$

Números decimais

Nesta seção vamos estudar os números decimais, explorando suas propriedades, operações e aplicações. Tal conceito é usados em vários momentos do nosso cotidiano. Por exemplo, a milha é uma unidade usada para medir distâncias. Existe até uma prova do automobilismo internacional em sua homenagem: “ `As 500 milhas de Idianápolis` ”.

Uma milha equivale a cerca de 1,6 quilômetro. Dessa forma, esta tradicional prova de automobilismo tem seu percurso total estimado em 800 km. O número $1,6$ anteriormente cidado, é um exemplo de número decimal ou fração decimal.

Definição 8. 1. Todo número da forma

$$a, d_1 d_2 \cdots d_n$$

é chamado de **número decimal**;

2. O número a à direita da vírgula é chamado **parte inteira**;

3. O número $d_1 d_2 \cdots d_n$ é chamado **parte decimal**;

4. Os números $d_1,\ d_2, \cdots, d_n$ à esquerda da vírgula são chamados **digítos da parte decimal**;

5. O natural n é o **número de digítos** da parte decimal.

Observação. Todo número decimal sempre é escrito como sendo a soma da parte real com a parte decimal, ou seja, se $N = a, d_1 d_2 \cdots d_n$, então temos a decomposição:

$$N = a, d_1 d_2 \cdots d_n = a + 0, d_1 d_2 \cdots d_n.$$

Exemplo 22. São exemplos de números decimais:

1. Note que: $0,5 \Rightarrow a = 0$ e $d_1 = 5$. Além disso, 5 é chamado de parte decimal;

2. Note que: $123,123 \Rightarrow a = 123$ e $d_1 = 1,\ d_2 = 2,\ d_3 = 3$. Além disso, 123 é chamado de parte decimal.

Por outro lado, observe que:

$$\begin{cases} 0,5 & = \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10}; \\ \\ 123,123 & = \dfrac{123123}{100} = \dfrac{123123}{10^2}. \end{cases}$$

TOME NOTA. Todo número decimal pode ser escrito através de uma fração decimal, isto é:

$$a, d_1 d_2 \cdots d_n = \frac{a d_1 d_2 \cdots d_n}{10^{n-1}}.$$

Considere o número $123, 123$ e vamos continuar nossos estudos. O número $123, 123$ possui parte inteira e decimal dadas respectivamente por 123 e 123 respectivamente, ou seja,

$$123, 123 = 123 + 0, 123.$$

Recorde que

$$\begin{cases} 123 & = & 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3; \\ \\ 0, 123 & = & 1 \cdot \dfrac{1}{10} + 2 \cdot \dfrac{1}{10^2} + 3 \cdot \dfrac{1}{10^3} = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}. \end{cases}$$

Dessa forma, podemos reescrever o número $123, 123$ na forma

$$123, 123 \quad = \quad 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}.$$

TOME NOTA. A parte decimal de todo número da forma $N = a, d_1 d_2 \cdots d_n$ pode ser escrita em função de potências negativas na base 10. Veja:

$$0, d_1 d_2 \cdots d_n = d_1 \cdot 10^{-1} + \cdot d_2 \cdot 10^{-2} + \cdot + d_n \cdot 10^{-n}.$$

OPERAÇÕES COM NÚMEROS DECIMAIS

As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão realizadas com números inteiros, diferem das operações realizadas com números decimais através da presença da vírgula.

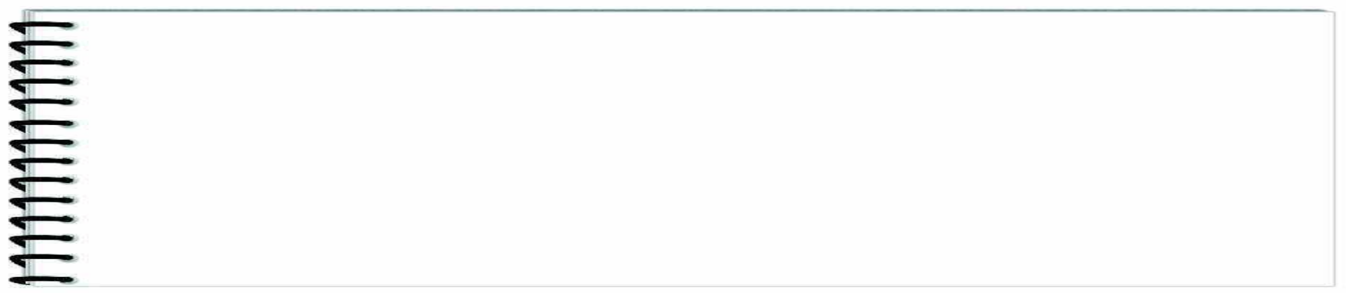
Exemplo 23. Efetue a adição entre os números $1, 234$, $12, 340$ e $123, 40$.

Solução. A adição entre números decimais é realizada posicionando as parcelas através da vírguala, isto é, somamos sempre parte inteira com parte inteira e parte decimal com a parte decimal. Veja:

$$\begin{array}{rrcl} & 1 & , & 234 \\ & 12 & , & 340 \\ + & 123 & , & 400 \\ \hline & 136 & , & 974 \end{array}$$

Teste seu conhecimento. Qual o valor da soma $987,456 + 9874,56 + 98745,6$.

Resp. 109607,616.



Exemplo 24. Efetue a subtração entre os números $1,234$ e $12,340$.

Solução. A subtração entre números decimais é realizada posicionando as parcelas através da vírguala, isto é, subtraímos sempre parte inteira com parte inteira e parte decimal com parte decimal. Veja:

$$\begin{array}{rrcl} & 12 & , & 3\cancel{4}^{3}10 \\ - & 1 & , & 234 \\ \hline & 11 & , & 106 \end{array}$$

Teste seu conhecimento. Calcule o valor da diferença $987,456 - 9874,56$.

Resp. -8887,104.

Exemplo 25. Multiplique os números $4,32$ e $3,2$.

Solução. Para multiplicar números decimais realizamos a operação como se fossem números inteiros. Não levando em conta a vírgula. Concluída a operação, contamos o número de casas decimais de todas as parcelas e colocamos a vírgula, a partir da direita do resultado final. Por exemplo, o produto final entre os números $4,32$ e $3,2$ terá 3 casas decimais. Duas do número $4,32$ e uma de $3,2$. Veja:

$$\begin{array}{lr}
 & \overset{1}{4},\overset{1}{3}\,2 \\
\times & 3,2 \\
\hline
 & 3104 \\
 & 2140+ \\
\hline
 & 24,504
\end{array}$$

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Calcule o valor do produto $9,456 \cdot 9,8$.

Resp. 92,6688.

Exemplo 26. Efetue a divisão de $10,5$ e $0,75$.

Solução. Para dividirmos dois números decimais igualamos primeiro, o número de casas decimais do dividendo e do divisor. Esse processo é realizado acrescentando zeros à direita do número que tiver menos casas decimais. Para finalizar, as vírgulas são retiradas e efetuamos a divisão. Como $0,75$ possui duas casas decimais, acrescentamos zero ao número $10,5$, isto é:

$$\begin{array}{l|l} 10\cancel{,}50 & \underline{0\cancel{,}75} \\ 300 & 14 \\ 0 & \end{array}$$

Dessa forma, ao dividirmos $10,5$ por $0,75$, obtemos o quociente 14 e resto 0.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Calcule o valor da divisão $1,024 \div 6,4$.

Resp. 0,16.

Dízimas periódicas e não periódicas

Observe todos os exemplos e definições que estudamos até o momento apresentavam parte decimal finita.

Existem números reais com representação decimal infinita?

O número π é o número real mais famoso cuja representação decimal não é finita. Vamos representar π com vinte casas decimais:

$$\pi \cong 3,14159265358979323846 \cdots .$$

Por outro lado, o número $\dfrac{10}{3}$ também possui um representação decimal infinita. Veja:

$$\frac{10}{3} = 0,33333333\cdots.$$

Existe uma relação entre os números reais π e $\dfrac{10}{3}$?

Definição 9. Todo número real com parte decimal infinita e periódica é chamado de **dízima periódica**. Se a parte decimal for infinita e não periódica o número é chamado de **dízima não periódica**.

TOME NOTA. Toda dízima periódica é um número racional. Por outro lado, dízimas não periódicas estão associadas aos números irracionais.

Dízimas periódicas de período 1

Considere $N = 0,999999999\cdots$. Nosso objetivo é transformar N num número racional. Multiplicando N por 10, obtemos:

$$10 \cdot N = 9,999999999\cdots.$$

Recorde que:

$$9,999999999\cdots = 9 + 0,999999999.$$

Dessa forma, temos:

$$9,999999999\cdots = 9 + N,$$

o que mostra que:

$$10 \cdot N = 9 + N$$

$$\Downarrow$$

$$10 \cdot N - N = 9$$

$$\Downarrow$$

$$9 \cdot N = 9$$

$$\Downarrow$$

$$N = 1.$$

Portanto, 1 é o número racional associado a dízima periódica $0,9999999999\cdots$.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Determine o número racional que representa a dízima periódica $0,777777777\cdots$.

Resp. $\dfrac{7}{9}$.

Dízimas periódicas de período 2

Considere $N = 2,81818181818181\cdots$. Nosso objetivo é transformar N num número racional. Note que:

$$N = 2,81818181818181\cdots = 2 + 0,81818181818181\cdots.$$

Considerando $D = 0,81818181818181\cdots$ e multiplicando D por 100, obtemos:

$$100 \cdot D = 81,818181818181\cdots.$$

Recorde que:

$$81,818181818181\cdots = 81 + 0,818181818181818181.$$

Dessa forma, temos:

$$81,818181818181\cdots = 81 + D,$$

o que mostra que:

$$100 \cdot D = 81 + D$$

$$\Downarrow$$

$$100 \cdot D - D = 81$$

$$\Downarrow$$

$$99 \cdot D = 81$$

$$\Downarrow$$

$$D = \frac{81}{99}.$$

Para concluir, efetuamos:

$$N = 2 + \frac{81}{99} = \frac{198 + 81}{99} = \frac{279}{99}.$$

Portanto, $\frac{279}{99}$ é o número racional associado a dízima periódica $2,818181818181 \cdots$.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Determine o número racional que representa a dízima periódica $4,13131313 \cdots$.

Resp. $\frac{409}{99}$.

DÍZIMAS PERIÓDICAS DE PERÍODO 3

Considere $N = 0,817817817817817817817 \cdots$. Nosso objetivo é transformar N num número racional. Multiplicando N por 1000, obtemos:

$$1000 \cdot N = 817,817817817817817817 \cdots .$$

Recorde que:

$$817,817817817817817817 \cdots = 817 + 0,817817817817817817817817817.$$

Dessa forma, temos:

$$817,817817817817817817 \cdots = 817 + N,$$

o que mostra que:

$$1000 \cdot N = 817 + N$$

$$\Downarrow$$

$$1000 \cdot N - N = 817$$

$$\Downarrow$$

$$999 \cdot N = 817$$

$$\Downarrow$$

$$N = \frac{817}{999}.$$

Portanto, $\frac{817}{999}$ é o número racional associado a dízima periódica $0,817817817817817817\cdots$.

Teste seu conhecimento. Determine o número racional que representa a dízima periódica $0,432432432\cdots$.

Resp. $\frac{432}{999}$.

TOME NOTA.

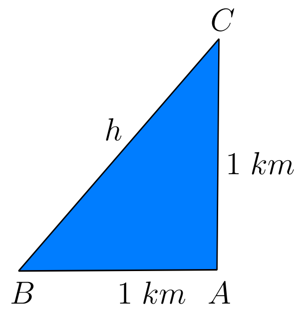
1. Todo número decimal finito corresponde a uma fração decimal;
2. Toda dízima infinita com período 9 corresponde a uma fração decimal.
3. Toda dízima infinita e periódica cujo período não é 9 corresponde a uma fração que não é decimal.

Surgimento dos números reais

Na seção anterior vimos que números como o π não podem ser representado através de uma fração. Assim sendo, faz sentido o questionamento:

Todos os números que conhecemos são racionais?

José herdou de seu Pai uma propriedade triângular como mostra a figura abaixo.



Pelo fato da escritura ser muito antiga foi possível apenas verificar que a propriedade é um triângulo isósceles cujos lados iguais medem 1km. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$h^2 = 1^2 + 1^2,$$

o que implica que:

$$h^2 = 2.$$

Pergunta. Existe um número racional $\frac{a}{b}$, tal que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$?

Antes de respondermos esta pergunta necessitamos saber quando um número inteiro é par ou impar.

Definição 10. Seja a um número inteiro.

1. Dizemos que a é um **número impar** se $a = 2s + 1$, com s sendo um número inteiro;

2. Dizemos que a é um **número par** se $a = 2t$, com t sendo um número inteiro.

Por exemplo, sabemos que 9 é um número ímpar e que 10 é um número par. Assim,

$$9 = 2 \cdot 4 + 1 \text{ e } 10 = 2 \cdot 5.$$

Observe que no primeiro exemplo $s = 4$ e no segundo $t = 5$.

Lema 1. Seja a um número inteiro. Se a é um número impar, então a^2 também será um número impar.

Demonstração. Temos que mostrar que:

$$a^2 = 2s_0 + 1,$$

para algum $s_0 \in \mathbb{Z}$.

De fato, sendo a um número ímpar, segue que existe um $s \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$a = 2s + 1.$$

Dessa forma,

$$a^2 = (2s+1)^2 = (2s+1) \cdot (2s+1) = 4s^2 + 4s + 1 = 2 \cdot (2s^2 + 2s) + 1,$$

o que implica que:

$$a^2 = 2 \cdot (2s^2 + 2s) + 1.$$

Basta tomar, $s_0 = 2s^2 + 2s$. ■

Lema 2. Seja a um número inteiro. Se a^2 é um número par, então a também será um número par.

Demonstração. A prova deste Lema será feita por contradição. Não se esqueça que por hipótese temos que a^2 é par. Essa informação será valiosa no decorrer da prova.

Suponha que a seja um número ímpar. Segue do Lema (1) que:

$$a^2 \text{ é um número ímpar }.$$

Essa última afirmação contradiz a hipótese de a^2 ser par. A contradição surgiu ao considerarmos que a é um número ímpar.

Portanto, se a^2 é par então a também será um número par. ■

Prezado aluno, agora estamos prontos para responder se existe um número racional $\frac{a}{b}$, tal que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$? Suponha, por absurdo, que exista um número racional irredutível $\frac{x}{y}$, tal que:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2,$$

Assim, obtemos:

$$2=\left(\frac{x}{y}\right)^2=\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)=\left(\frac{x\cdot x}{y\cdot y}\right)=\frac{x^2}{y^2}.$$

o que implica que:

$$2=\frac{x^2}{y^2}.$$

Dessa forma,

$$2=\frac{x^2}{y^2}\Rightarrow x^2=2y^2.$$

Como y é um número inteiro e o quadrado de todo número inteiro é um número inteiro temos da definição (10) que:

$$x^2 \text{ é um número par.}$$

Aplicando o Lema (2), obtemos:

$$x \text{ é um número par.}$$

Sendo x um número par aplicando novamente à Definição (10), segue:

$$x=2t_1, \text{ com } t_1\in\mathbb{Z}.$$

Agora, se $x^2=2y^2$ e $x=2t$, então:

$$x^2=2y^2\Rightarrow(2t)^2=2y^2\Rightarrow 4t^2=2y^2\Rightarrow y^2=\frac{4t^2}{2}\Rightarrow y^2=2t^2,$$

o que mostra que:

$$y^2 \text{ é um número par.}$$

Aplicando o Lema (2), obtemos:

$$y \text{ é um número par.}$$

Sendo y um número par, aplicando novamente a definição (10), segue que:

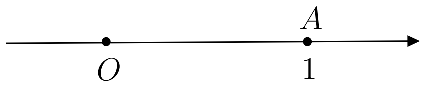
$$y=2t_2, \text{ com } t_2\in\mathbb{Z}.$$

Uma vez que, $x=2t_1$ e $y=2t_2$ temos que 2 divide x e y. Logo, concluímos que $mdc(x,y)\not=1$. O que é uma contradição, visto que inicialmente $\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}$ com $mdc(x,y)=1$. A contradição surgiu ao considerarmos a existência de um número racional satisfazendo a igualdade $h^2=2$.

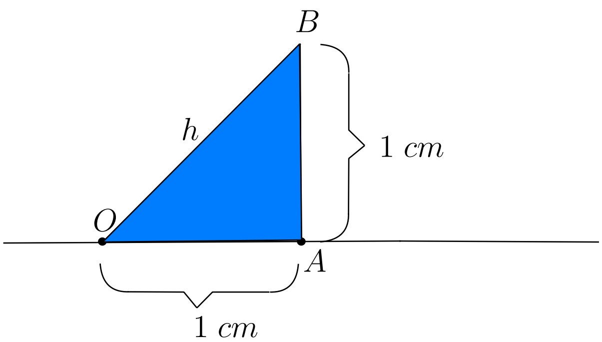
Portanto, não existe um número racional solução da equação $h^2=2$.

Pergunta. Existe um número que seja solução da equação $h^2 = 2$?

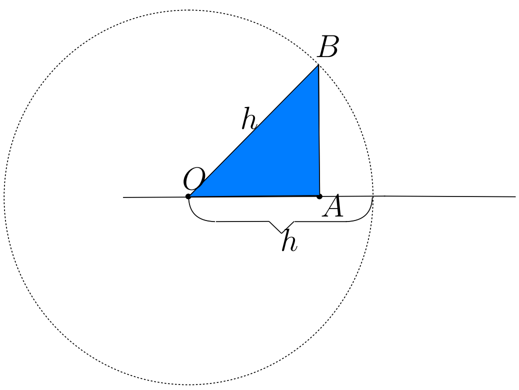
A resposta é sim. Vamos construir um ponto da reta que seja solução de $h^2 = 2$. Sobre a reta marque o seguimento de comprimento 1 a partir da origem.



Com o seguimento de OA construímos o triângulo OAB como mostra a figura.



Observe que h é a hipotenusa do triângulo OAB e pelo Teorema de pitágoras temos $h^2 = 2$. A projeção de h sob a reta será a intersecção da circunferência de raio h com a reta.



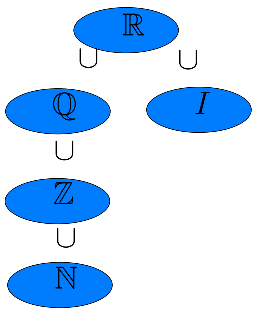
Como acabamos de ver, existem números que não são racionais. Tais números serão chamados de irracionais e denotados por I.

Definição 11. 1. Um número é **irracional** se não pode ser escrito na forma $\dfrac{x}{y}$, com $x, y \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$;

2. O **conjunto dos números reais**, denotado por $\mathbb{R}$, é o conjunto formado pelos números racionais e irracionais, isto é,

$$\mathbb{R} = \{x \ : \ x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in I\} = \mathbb{Q} \cup I.$$

Pelo estudo que realizamos até o momento, obtemos as inclusões:



Potênciação

João e sua esposa Marli são apaixonados por provas de rali. Dentre os muitos acessórios necessários para se realizar um boa prova, creio que a bússola mereça destaque.

No útimo final de semana, ao participarem de um prova regional, João e Marli tiveram que superar um obstáculo extra. A bússola do casal apontava apenas para quatro direções: norte, sul, leste e oeste.

Por simplicidade, os pontos do percurso no qual os competidores devem utilizar a bússola para não se perderem será chamado de "`Ponto Chave`", denotado por "`PC`". Assim, se o percurso possuir um PC, temos a configuração:

$$\text{PC 1:} \begin{cases} \text{Norte} \\ \text{Sul} \\ \text{Leste} \\ \text{Oeste} \end{cases}$$

Agora, se o percurso apresentar dois pontos chave, então a configuração será:

$$
\text{PC 1:}\begin{cases}
\text{Norte} \quad \text{PC 2:}\begin{cases}\text{Norte}\\ \text{Sul}\\ \text{Leste}\\ \text{Oeste}\end{cases}\\
\text{Sul} \quad \text{PC 2:}\begin{cases}\text{Norte}\\ \text{Sul}\\ \text{Leste}\\ \text{Oeste}\end{cases}\\
\text{Leste} \quad \text{PC 2:}\begin{cases}\text{Norte}\\ \text{Sul}\\ \text{Leste}\\ \text{Oeste}\end{cases}\\
\text{Oeste} \quad \text{PC 2:}\begin{cases}\text{Norte}\\ \text{Sul}\\ \text{Leste}\\ \text{Oeste}\end{cases}
\end{cases}
$$

Realizando uma análise rápida, observamos que se o percurso apresentar um "PC" temos apenas quatro posibilidades para seguir. Se existir dois pontos chave, temos $4 \cdot 4 = 16$ possibilidades para prosseguir. Uma vez que, para cada caminho anteriormente tomado, temos agora mais quatro possibilidades. Agora, se o caminho a percorrer apresentar 10 "PC", teremos:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1.048.576 \text{ possibilidades .}$$

Existe um forma prática para representarmos o produto de 10 fatores iguais ao número 4?

A resposta será dada pela próxima definição.

Definição 12. Seja b um número real e considere n um número natural. A **potência** b^n é definida como sendo o produto

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{vezes}}.$$

Os números b e n são chamados de **base** e **expoente** da potência b^n, respectivamente.

Observação. As seguintes afirmações seguem diretamente da Definição(12):

1. $0^n = 0$;
2. Se $b \neq 0$, então b^n é sempre um número não nulo;
3. $b^1 = b$.

Exemplo 27. Utilizando a Definição(12) podemos reescrever o produto $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ na forma simplificada 4^{10}. Note que, neste caso, temos a base $b = 4$ e o expoente $n = 10$.

Exemplo 28. Qual número é representado pela potência 2^{10}?

Solução. Pela Definição (12), temos que: $2^{10} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{10 \text{ vezes}} = 1024.$

Teste seu conhecimento. Determine o valor das potências: 2^{11}, 3^4 e 10^{10}.

Resp. 4096, 81 e 10.000.000.000 respectivamente.

Se por algum motivo os organizadores do rali resolvessem multiplicar o número de trajetos existentes em um percurso com um PC com o número de de trajetos existente em um percurso com dois PC, teríamos que realizar a operação $4 \cdot 4^2$?

Propriedade 1 (Propriedade Fundamental)**.** Seja b um número real e considere m, n dois números naturais. Então:

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n},$$

ou seja, preserva-se a base e soma-se os expoentes.

Demonstração. A prova deste Lema é consequência direta da Definição(12). Note que:

$$\begin{aligned} b^m &= \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{m\text{vezes}} \\ b^n &= \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n\text{vezes}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} b^m \cdot b^n &= (\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{m\text{vezes}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n\text{vezes}}) \\ &= \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{m\text{vezes}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n\text{vezes}} \\ &= \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{(m+n)\text{vezes}} \\ &= b^{m+n}. \end{aligned}$$

■

Observação. Segue diretamente da Propriedade Fundamental as seguintes afirmações:

1. A propriedade é válida para um produto finito de potências, isto é:

$$b^{n_1} \cdot b^{n_2} \cdots b^{n_k} = b^{n_1+n_2+\cdots+n_k}$$

   Por exemplo, $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{1+2+3+4} = 2^{10} = 1024$.

2. Considerando o produto de s fatores iguais a b^n, segue que:

$$\underbrace{b^n \cdot b^n \cdots b^n}_{s \text{ fatores}} = (b^n)^s = b^{s \cdot n}.$$

   Por exemplo, $5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 5^{3+3+3+3} = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$.

Exemplo 29. Calcule $4 \cdot 4^2$.

Solução. Pela Propriedade (1), temos que $4 \cdot 4^2 = 4^3 = 64$.

Exemplo 30. Efetue o produto $16 \cdot 2^5$.

Solução. Observe que $16 = 2^4$. Assim,

$$16 \cdot 2^5 = 2^4 \cdot 2^5.$$

Logo, aplicando a Propriedade Fundamental, obtemos:

$$16 \cdot 2^5 = 2^9 = 512.$$

Teste seu conhecimento. Expresse o produto $9 \cdot 81 \cdot 729$ através de potências.

Resp. 3^{12}.

Aprendemos que para efetuar o produto de duas potências de mesma base preservamos a base e somamos os expoentes. Agora, se os expoentes forem os mesmos e as bases distintas, preservamos os expoentes e somamos as bases?

O raciocínio não está correto. A resposta certa é dada pela próximo propriedade.

Propriedade 2. Seja n um número natural e considere a, b dois números reais. Então:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n,$$

ou seja, preserva-se o expoente e multiplica-se as bases.

Demonstração. Como:

$$\begin{aligned} a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{vezes}} \\ b^n &= \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n\text{vezes}}, \end{aligned}$$

temos que:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{vezes}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n\text{vezes}}) \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{vezes}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n\text{vezes}}. \end{aligned}$$

Agora, como o produto de dois números reais é associativo, obtemos:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{vezes}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n\text{vezes}} \\ &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots (a \cdot b)}_{n\text{vezes}} \\ &= (a \cdot b)^n. \end{aligned}$$

■

Exemplo 31. Efetue o produto $2^6 \cdot 4^3 \cdot 3^3$.

Solução. Note que $4^3 = (2 \cdot 2)^3$. Aplicando a Propriedade (2), segue que:

$$4^3 = (2 \cdot 2)^3 = 2^3 \cdot 2^3.$$

Assim, temos:

$$2^6 \cdot 4^3 \cdot 3^3 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 4^3 \cdot 3^3.$$

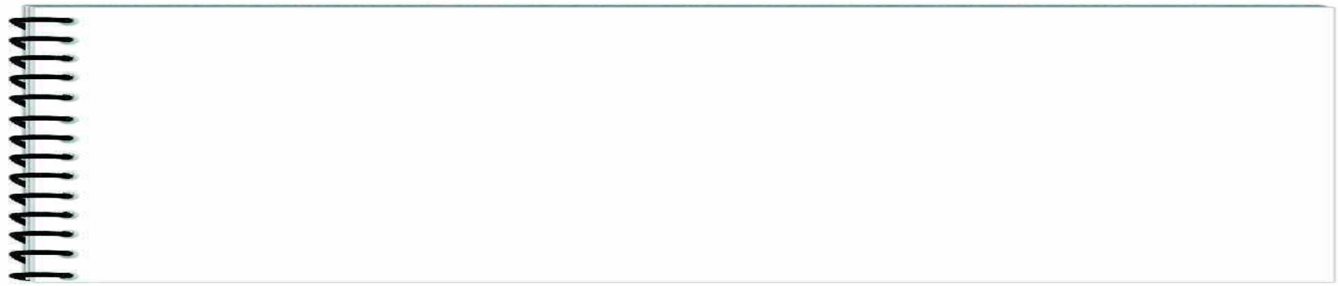
Aplicando novamente a Propriedade (2), concluímos que:

$$2^6 \cdot 4^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3)^3 = 48^3 = 110.592.$$

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Determine o valor do produto $4^5 \cdot 16^3 \cdot 2^{12}$.

Resp. 2^{34}.



Se $n = 0$, então qual o valor da potência b^0?

Propriedade 3. Seja b um número real não nulo e considere $n = 0$. Então:

$$b^0 = 1,$$

ou seja, todo número elevado a zero é um.

Demonstração. Sendo b um número real não nulo, obtemos da Observação (1), que b^n é não nulo, para todo n. Segue do Lema (1) que:

$$b^0 \cdot b^n = b^{(0+n)} = b^n,$$

o que implica que:

$$b^0 \cdot b^n = b^n$$

$$\Downarrow$$

$$b^0 = \frac{b^n}{b^n}$$

$$\Downarrow$$

$$b^0 = 1.$$

■

Exemplo 32. Aplicando a Propriedade (3), obtemos:

$$1000^0 = 1; \quad \pi^0 = 1 \text{ e } \quad (\sqrt{2})^0 = 1.$$

Porque na Propriedade (3) a base deve ser um número real não nulo?

Note que se a base é zero, então teríamos a seguinte potência 0^0. A potência 0^0 é uma indeterminação, isto é, é um expressão não definida.

Para maiores detalhes, sobre o estudo da potência 0^0 veja a Revista do Professor de Matemática, número 76, páginas 8-11.

Até o momento, estudamos potências com bases nulas e não nulas considerando sempre expoentes naturais.

É possível estender o conceito de potência de forma a estudarmos expoentes negativos, isto é, calcularmos potências da forma b^{-n}?

Respondemos esta pergunta, enuciando a seguinte Propriedade:

Propriedade 4. Seja b um número real não nulo e considere n um número natural. Então:

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n},$$

isto é, toda potência de expoente negativo torna-se um fração irredutível.

Demonstração. Aplicando a Propriedade (1), temos:

$$b^{-n} \cdot b^n = b^{-n+n} = b^0. \tag{1.2}$$

Por outro lado, segue da Propriedade (3) que:

$$b^0 = 1. \tag{1.3}$$

Agora, de (1.2) e (1.3), obtemos:

$$b^{-n} \cdot b^{n} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$b^{-n} = \frac{1}{b^{n}}.$$

■

Exemplo 33. Determine o valor das expressões: $2^{(-1)}$, $\dfrac{3^{(-2)}}{9^{(-1)}}$.

Solução. Note que, pela Propriedade (4):

$$2^{(-1)} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Por outro lado,

$$\frac{3^{(-2)}}{9^{(-1)}} = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}} = \frac{1 \cdot 9}{1 \cdot 9} = \frac{9}{9} = 1.$$

Teste seu conhecimento. Determine o valor das expressões: $\left(\dfrac{3}{9}\right)^{-2}$, $\left(\dfrac{1-2^{-1}}{3^2+3^{-2}}\right)^{(-1)}$.

Resp. 9 e $18,2$.

É possível realizar a divisão de duas potências de mesma base?

Propriedade 5. Sejam m, n dois números inteiros e considere b um número real. Então:

$$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m},$$

ou seja, preservamos a base e subtraímos os expoentes.

Demonstração. Note que:

$$b^{n-m} = b^{n+(-m)},$$

uma vez que $n + (-m) = n - m$.

Aplicando o Propriedade (1) a potência $b^{n+(-m)}$, obtemos:

$$b^{n+(-m)} = b^n \cdot b^{-m}. \tag{1.4}$$

Aplicando a Propriedade (4) a potência b^{-m}, temos:

$$b^{-m} = \frac{1}{b^m}. \tag{1.5}$$

Segue de (1.4) e (1.5) que:

$$b^{n-m} = b^n \cdot \frac{1}{b^m}$$

$$\Downarrow$$

$$b^{n-m} = \frac{b^n}{b^m}.$$

■

Exemplo 34. Simplifique a expressão $\dfrac{2^2 \cdot 3^2}{6^3}$.

Solução. Segue da Propriedade (2) que:

$$2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2.$$

Dessa forma:

$$\frac{2^2 \cdot 3^2}{6^3} = \frac{6^2}{6^3}.$$

Aplicando a Propriedade (5), segue:

$$\frac{2^2 \cdot 3^2}{6^3} = 6^{2-3} = 6^{-1}.$$

Concluímos a simplificação aplicando a Proprieade (5):

$$\frac{2^2 \cdot 3^2}{6^3} = \frac{1}{6}.$$

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Simplifique a expressão $\left(\dfrac{3^2 \cdot 4^2}{12^3}\right)^{-1}$.

Resp. 12.

Radiciação

Já sabemos calcular potências com expoente positivos e negativos.

A mesma definição pode ser aplicada quando o expoente em questão é um número racional?

Antes de respondermos esta pergunta enunciaremos a definição:

Definição 13. Seja b um número real positivo e considere $n \leq 1$ um número natural. Dizemos que a é a **raiz n-ésima** de b, denotada por $\sqrt[n]{b}$, se a n-ésima potência de a é igual a b, isto é:

$$a^n = b \Longleftrightarrow \sqrt[n]{b} = a.$$

Notação. Segue da Definição (13) a seguinte nomenclatura:

1. a é chamado **raiz n-ésima** de b;
2. b é chamado **radicando**;
3. n é chamado **índice** da raiz;

4. Se $n = 2$, então o número $\sqrt[2]{b}$, ou simplismente, $\sqrt{b}$ é chamado de **raiz quadrada** do número real b. Agora, se $n = 3$ então $\sqrt[3]{b}$ é chamado de **raiz cúbica** de b.

Observação. Observe que cada número real b possui um única raiz n-ésima.

De fato, se $b = a = 0$ a igualdade sempre é válida. Suponha que os números $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$ sejam raízes n-ésimas de $b \neq 0$. Segue da Definição (13) que:

$$a_1{}^n = b \text{ e } a_2{}^n = b.$$

Dessa forma, obtemos:

$$a_1{}^n = a_2{}^n$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a_1{}^n}{a_2{}^n} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n = 1.$$

Agora, sendo $n \geq 1$ faz sentido considerarmos o número racional $\dfrac{1}{n}$ como expoente, ou seja:

$$\left[\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n\right]^{1/n} = 1^{1/n} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\cancel{n}\cdot(1/\cancel{n})} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^1 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 = a_2,$$

provando assim, a unicidade da raiz.

Porque na definição (13) estamos considerando b um número real positivo?

Vamos analisar um simples exemplo. Suponha que a seja a raiz quadrada de -4, ou seja, $\sqrt{-4} = a$. Segue da Definição (13) que:

$$a^2 = -4.$$

Mas a igualdade anterior não pode ocorrer uma vez que um número real positivo a^2 $(a^2 > 0)$ não pode ser igual a um número negativo. A incoerência surge ao considerarmos que existe um número real cujo quadrado seja -4.

Este argumento estende-se de forma natural a todo índice n par e radicando negativo, devido as propriedade de potênciação. Problema semelhante não ocorre se n for um número ímpar. Considerando $a^3 = -8$, obtemos $a = -2$, visto que:

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot (-2) = -8.$$

TOME NOTA. Não existe raiz n-ésima de radicandos negativos quando o índice n for um número par. Assim, podemos reescrever o enunciado da Definição (13) da seguinte forma: seja b um número real e considere $n \geq 1$ um número natural. Dizemos, que a é a raiz n-ésima de b, denotada por $\sqrt[n]{b}$, se a n-ésima potência de a é igual a b, isto é,

$$a^n = b \Longleftrightarrow \sqrt[n]{b} = a, \text{ sempre que } \begin{cases} a \geq 0, \; b \geq 0, \; n \text{ par} \\ \text{ou} \\ a < 0, \; b < 0, \; n \text{ impar} \end{cases}$$

Agora, estamos prontos para definir potências no qual o expoente é um número racional.

Lema 3. Se b um número real e $\dfrac{p}{q}$ um número racional com $q > 0$, então,

$$b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p}.$$

Em particular, temos:

$$b^{1/q} = \sqrt[q]{b}.$$

Demonstração. Note que, utilizando a Observação (1), item 2, obtemos:

$$(b^{p/q})^q = b^{(p/q)\cdot q} = b^{(p\cdot \cancel{q})/\cancel{q}} = b^p.$$

Como $(b^{p/q})^q = b^p$, temos que a q-ésima potência de $b^{p/q}$ é o número b^p, o que implica pela Definição (13) que:

$$b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p}.$$

$\blacksquare$

TOME NOTA. A raiz n-ésima de um número real b é simplesmente uma potência com expoente racional $\dfrac{1}{n}$. Dessa forma, as propriedades da radiciação são obtidas de forma direta das propriedades já estudadas de potenciação.

Propriedade 6. Sejam a e b números reais positivos e considere p, q, m e n números naturais não nulos. Então são válidas as propriedades.

1. $\sqrt[n]{0} = 0$;
2. $\sqrt[\frac{q}{m}]{a^{\frac{p}{n}}} = \sqrt[q]{p}$;
3. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n\cdot p]{a}$;
4. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
5. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
6. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$;
7. $\left(\sqrt[q]{a^p}\right) \cdot \left(\sqrt[n]{b^m}\right) = \sqrt[\mathrm{mmc}(q,n)]{a^{n\cdot p} \cdot b^{m\cdot q}}$.

Demonstração. Mostraremos apenas o item 7. Os demais seguem diretamente das propriedades das potências estudadas anteriormente. Pelo Lema (3), observe que:

$$\sqrt[\mathrm{mmc}(q,n)]{a^{n\cdot p} \cdot b^{m\cdot q}} = \left(a^{n\cdot p} \cdot b^{m\cdot q}\right)^{\frac{1}{\mathrm{mmc}(q,n)}}.$$

Aplicando a Propriedade (2):

$$\sqrt[\mathrm{mmc}(q,n)]{a^{n\cdot p} \cdot b^{m\cdot q}} = \left(a^{n\cdot p}\right)^{\frac{1}{\mathrm{mmc}(q,n)}} \cdot \left(b^{m\cdot q}\right)^{\frac{1}{\mathrm{mmc}(q,n)}}.$$

Segue da observação (1), item 2:

$$\sqrt[\mathrm{mmc}(q,n)]{a^{n\cdot p} \cdot b^{m\cdot q}} = a^{\frac{n\cdot p}{\mathrm{mmc}(q,n)}} \cdot b^{\frac{m\cdot q}{\mathrm{mmc}(q,n)}}.$$

Como $\mathrm{mmc}(q,n) = q \cdot n$, tem-se:

$$\sqrt[\mathrm{mmc}(q,n)]{a^{n\cdot p} \cdot b^{m\cdot q}} = a^{\frac{\cancel{n}\cdot p}{q\cdot \cancel{n}}} \cdot b^{\frac{m\cdot \cancel{q}}{\cancel{q}\cdot n}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[q]{a^p}\right) \cdot \left(\sqrt[n]{b^m}\right).$$

■

Exemplo 35. Se $\sqrt{x} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$, então determine o valor da expressão $x + \dfrac{1}{x}$.

Solução. Como $x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, segue que:

$$3 = \sqrt{x} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$3 = \sqrt{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Elevando a última igualdade ao quadrado, obtemos:

$$3^2 = \left[\sqrt{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$\Downarrow$$

$$9 = (\sqrt{x})^2 + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

Sendo:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}},$$

segue que:

$$9 = (x^{\frac{1}{2}})^2 + 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}\cdot 2}$$

$$\Downarrow$$

$$9 = x^{\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}} + 2 \cdot x^0 + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$9 = x^1 + 2 \cdot x^0 + \left(\frac{1}{x}\right)^1.$$

Recordando que $x^0 = 1$, concluímos que:

$$9 = x + 2 \cdot 1 + \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$9 - 2 = x + \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$7 = x + \frac{1}{x}.$$

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Se $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$, então determine o valor da expressão x^2+x^{-2}.

Resp. 63.

Módulo 2
Proporcionalidade e Porcentagem

No término desta unidade o aluno entusiasmado estará familiarizado como os seguintes conceitos:

- ▷ Grandezas proporcionais;
- ▷ Divisão em partes proporcionais;
- ▷ Grandezas proporcionais a várias outras;
- ▷ Grandezas direta ou inversamente proporcionais a várias outras;
- ▷ Porcentagem.

Leitura Complementar

Prezado aluno, para melhor compreensão deste módulo leia paralelamente os seguintes textos:

1. Iezzi, G., Egenszajn, D., Hazzan, S. *Fundamentos de matemática elementar - Matemática Comercial, Financeira e Estatística*, Ed. Atual, Vol. 11, 2004.
2. Carvalho, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C. e Wagner, E. , *Temas e Problemas Elementares*, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

Razão

Dentre os muitos significados que podemos encontrar nos dicionários da palavra razão, uma se destaca:

> "Razão é a relação existente entre grandezas da mesma espécie".

Pergunta. O leitor seria capaz de formalizar o conceito de razão matematicamente?

Vejamos como tal conceito surge em nosso cotidiano. Após investir R$ 100 milhões a mais, o COB (Comitê Olímpico Brasileiro) teve como retorno só duas medalhas a mais do que em Pequim: 17. O governo esperava entre 18 e 23. O país ficou em 22º lugar, e os EUA voltaram a liderar o *ranking*. "Queríamos mais", disse Marcus Freire, do COB. A Lei Piva repassou R$ 331 milhões para preparar atletas para Londres.

A diferença de R$ 100 milhões a mais não representa o real aumento nos investimentos. Dividindo o valor dos investimentos nas olimpíadas de 2012 pelos investimentos referentes às olimpíadas de 2008, obtemos:

$$\frac{\text{Investimentos 2012}}{\text{Investimentos 2008}} = \frac{331\text{milhões}}{231\text{milhões}} \simeq 1,44 \qquad (2.1)$$

Note que através dos cálculos obtidos em (3.27) podemos dizer aproximadamente que os investimentos de 2012 superam em uma vez e meia os investimentos de 2008.

Definição 14. Sejam x e y dois números, tais que $y \neq 0$. Definimos a razão entre x e y como sendo o quociente $\dfrac{x}{y}$.

Exemplo 36. O seu Alfredo sempre foi conhecido em sua cidade por colecionar relógios raros. Seu compadre Adão, ao visitá-lo, observou que dois exemplares apresentavam horários distintos da hora local. O relógio preto marcava duas horas. Já o relógio verde marcava zero horas e quarenta e cinco minutos. Quase instantaneamente Adão perguntou: Alfredo qual a razão entre a hora marcada no relógio verde e a hora marcada no relógio preto em minutos?

Solução. Note que

1 hora	=	60 minutos
2 horas	=	120 minutos

Dessa forma, a razão entre a hora marcada no relógio verde e a hora marcada no relógio preto em minutos é dada pelo quociente

$$\frac{120 \text{ minutos}}{45 \text{ minutos}} = \frac{8}{3}.$$

Exemplo 37. Uma pessoa comprou uma ação e a vendeu um mês depois pela metade do preço que pagou na compra.

a) Qual a razão entre o preço de venda e de compra?

b) Qual a razão entre a diferença dos preços de venda e o preço de compra?

Solução. a) Como não sabemos o valor inicial da ação, consideraremos tal valor como sendo x. Dessa forma, temos que o preço de venda será $\frac{x}{2}$, isto é,

Preço de Compra	=	x
Preço de Venda	=	$\frac{x}{2}$

Logo, a razão procurada é dada por:

$$\frac{\text{Preço de Venda}}{\text{Preço de Compra}} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2 \cdot x} = \frac{1}{2}.$$

b) Observe que a diferença dos preços de venda e compra é dado por:

$$\text{Preço de Venda} - \text{Preço de Compra} = \frac{x}{2} - x = -\frac{x}{2}.$$

Assim, temos a seguinte razão:

$$\frac{\text{Preço de Venda} - \text{Preço de Compra}}{\text{Preço de Compra}} = \frac{-\frac{x}{2}}{x} = -\frac{x}{2 \cdot x} = -\frac{1}{2}.$$

Atividades
Texto Básico

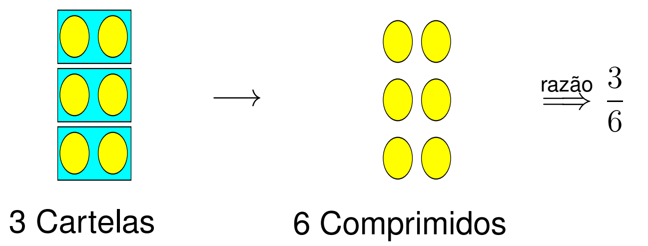
Teste seu conhecimento. A razão entre dois números é $\frac{5}{2}$. Qual a razão entre metade do maior e dobro do menor?

Resp. $\frac{5}{8}$.

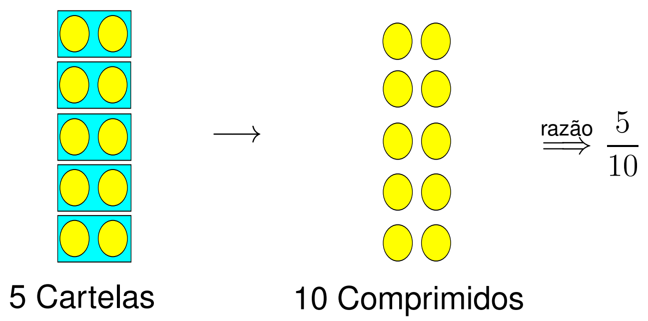
Proporção

Certo medicamento é vendido em cartelas contendo apenas dois comprimidos. A razão entre o número de cartelas e o número de comprimidos é representada pelo quociente $\frac{1}{2}$ como mostra a figura abaixo.

Se o paciente apresentar a enfermidade do tipo A, será necessario consumir três cartelas do medicamento para reestabelecer sua saúde.



Agora, se a enfermidade em questão é a tipo B, o paciente precisará de cinco cartelas para ficar curado.



PARE

O que as razões $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{10}$ têm em comum?

Note que, simplificando a razão $\frac{3}{6}$ por 3 e simplificando a razão $\frac{5}{10}$ por 5 obtemos:

$$\frac{3}{6} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot \cancel{3}}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

e,

$$\frac{5}{10} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{1 \cdot \cancel{5}}{2 \cdot \cancel{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Assim sendo,

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}.$$

Existe um critério para determinarmos quando duas razões são iguais ou sempre temos que encontrar um digíto simplificador?

Retomando o exemplo anterior, podemos observar que:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \text{ uma vez que } 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3;$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}, \text{ uma vez que } 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5;$$

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10}, \text{ uma vez que } 3 \cdot 10 = 6 \cdot 5.$$

Esta última análise sugere a seguinte definição:

Definição 15. Dizemos que duas razões $\frac{x}{y}$ e $\frac{s}{t}$, com $y \neq 0$, $t \neq 0$ são proporcionais ou simplesmente iguais se $x.t = y.s$

Exemplo 38. Determine o valor de x de modo que as razões sejam proporcionais.

a) $\frac{1}{5}, \frac{3x}{8}$; b) $\frac{3x-1}{4}, \frac{2}{5}$; c) $\frac{x}{2+\frac{1}{4}}, \frac{\frac{1}{5}}{3-\frac{2}{3}}$.

Solução. a) Pela definição temos que as razões $\frac{1}{5}$ e $\frac{3x}{8}$ são proporcionais, isto é, $\frac{1}{5} = \frac{3x}{8}$ quando

$$5 \cdot (3x) = 1 \cdot 8.$$

Resolvendo a equação na variável x, temos:

$$\begin{array}{rcl} 5\cdot(3x) & = & 1\cdot 8 \\ & \Downarrow & \\ 15x & = & 8 \\ & \Downarrow & \\ x & = & \dfrac{8}{15}. \end{array}$$

b) As razões $\dfrac{3x-1}{4}$ e $\dfrac{2}{5}$ são proporcionais, isto é, $\dfrac{3x-1}{4}=\dfrac{2}{5}$ quando

$$5\cdot(3x-1)=4\cdot 2.$$

Resolvendo a equação na variável x, segue que

$$\begin{array}{rcl} 5\cdot(3x-1) & = & 4\cdot 2 \\ & \Downarrow & \\ 15x-5 & = & 8 \\ & \Downarrow & \\ 15x & = & 8+5 \\ & \Downarrow & \\ 15x & = & 13 \\ & \Downarrow & \\ x & = & \dfrac{13}{15} \end{array}$$

c) As razões $\dfrac{x}{2+\dfrac{1}{4}}$ e $\dfrac{\dfrac{1}{5}}{3-\dfrac{2}{3}}$ são proporcionais, isto é, $\dfrac{x}{2+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\dfrac{1}{5}}{3-\dfrac{2}{3}}$ quando

$$\left(2+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}=x\cdot\left(3-\frac{2}{5}\right).$$

Resolvendo a equação na variável x, tem-se:

$$\begin{array}{rcl}
\left(2+\dfrac{1}{4}\right)\cdot\dfrac{1}{5} & = & x\cdot\left(3-\dfrac{2}{5}\right) \\
& \Downarrow & \\
\left(\dfrac{8+1}{4}\right)\cdot\dfrac{1}{5} & = & x\cdot\left(\dfrac{15-2}{5}\right) \\
& \Downarrow & \\
\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{1}{5} & = & x\cdot\dfrac{13}{5} \\
& \Downarrow & \\
\dfrac{9}{20} & = & \dfrac{13x}{5},
\end{array}$$

o que implica que:

$$\begin{array}{rcl}
(13x)\cdot 20 & = & 9\cdot 5 \\
& \Downarrow & \\
260x & = & 45 \\
& \Downarrow & \\
x & = & \dfrac{45}{260}
\end{array}$$

Simplificando a o valor de x por 5 obtemos:

$$x=\frac{45}{260}=\frac{5\cdot 9}{5\cdot 52}=\frac{\cancel{5}\cdot 9}{\cancel{5}\cdot 52}=\frac{9}{52}.$$

Exemplo 39. Quanto vale $\dfrac{5}{6}$ de 420?

Solução. Para determinarmos $\dfrac{5}{6}$ de 420 devemos dividir 420 em seis partes iguais e tomarmos cinco dessas partes. De fato, ao dividirmos 420 por 6 obtemos que cada parte equivale a 70 unidades da 420 iniciais. Agora, considerando 5 dessas partes, temos $5\cdot 70=350$. Portanto, $\dfrac{5}{6}$ de 420 é 350.

Observe que determinar $\dfrac{5}{6}$ de 420 é o mesmo que realizar a operação:

$$\frac{5}{6}\text{ de }420=\frac{5}{6}\cdot 420=\frac{5\cdot 420}{6}=\frac{2100}{6}=350.$$

TOME NOTA. Para calcular a razão $\frac{x}{y}$ de um determinado valor V de forma simples, basta realizar a seguinte operação:

$$\frac{x}{y} \text{ de } V = \frac{x}{y} \cdot V.$$

Teste seu conhecimento. Dois sócios resolvem repartir seu lucro de R$ 81.000,00 na razão de $\frac{2}{3}$. Quanto recebeu cada um?

Resp. Os sócios receberam $R\$27.000,00$ e $R\$54.000,00$.

Grandezas Diretamente Proporcionais

Um determinado profissional liberal recebe R$ 30,00 por hora trabalhada. Se representarmos por h o número de horas trabalhadas e S a renda salárial obtda no final de cada mês temos seguinte diagrama:

h	1 hora	2 horas	3 horas	4 horas	$\cdots$
S	R$ 30,00	R$ 60,00	R$ 90,00	R$ 120,00	$\cdots$

Observe que à medida que o número de horas trabalhadas aumenta o valor da renda salárial mensal também aumenta. Considerando a razão entre a renda salárial e o número de horas trabalhadas obtemos sempre um valor constante igual a 30, como mostra o quadro abaixo.

h	1 hora	2 horas	3 horas	4 horas	$\cdots$
S	R$ 30,00	R$ 60,00	R$ 90,00	R$ 120,00	$\cdots$
$\frac{S}{h}$	$\frac{30}{1}$=30	$\frac{60}{2}$=30	$\frac{90}{3}$=30	$\frac{120}{4}$= 30	$\cdots$

Analogamente, considerando a razão entre as horas trabalhadas e a renda salárial obtida teremos sempre um valor constante igual a $\frac{1}{30}$ como mostra o próximo quadro.

h	1 hora	2 horas	3 horas	4 horas	$\cdots$
S	R$ 30,00	R$ 60,00	R$ 90,00	R$ 120,00	$\cdots$
$\frac{h}{S}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{60}=\frac{1}{30}$	$\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$	$\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$	$\cdots$

Definição 16. Dizemos que duas grandezas x e y, com $x, y \neq 0$ são **diretamente proporcionais** se exite uma constante K, não nula, tal que:

$$\frac{y}{x} = K \text{ ou, equivalentemente, } x = K.y.$$

Note que neste contexto, também temos $\frac{1}{k}x = y$

Exemplo 40. Na tabela abaixo as grandezas x e y são diretamente proporcionais. Obtenha os valores de m e p.

x	4	m	7
y	2	7	p

Solução. Como as grandezas x e y são diretamente proporcionais segue a definição que existe uma constante K não nula tal que $\frac{y}{x} = K$ para todos os valores de x e y representados na tabela, ou seja,

$$\frac{4}{2} = K \quad (2.2)$$

$$\frac{m}{7} = K \quad (2.3)$$

$$\frac{7}{p} = K \quad (2.4)$$

Pela igualdade 3.28 temos que:

$$\frac{4}{2} = K \Rightarrow K = 2 \quad (2.5)$$

Agora combinando as igualdades (3) e (3.28) segue que:

$$\frac{m}{7} = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{7}.$$

Analogamente, combinando as igualdades (4) e (3.28) obtemos:

$$\frac{7}{p} = 2 \Rightarrow 7 = 2.p \Rightarrow p = \frac{7}{2}.$$

Portanto, os valores de m e p que completam a tabela são $\frac{2}{7}$ e $\frac{7}{2}$ respectivamente.

Exemplo 41. A renda de um profissional liberal é diretamente proporcional ao número de horas trabalhadas. Se ele trabalha 20 horas sua renda é R$ 600,00. Qual será sua renda se ele trabalhar 65 horas?

Solução. Considerando h o número de horas trabalhadas e R a renda, para simplificarmos a solução vamos representar os dados do exercício na tabela:

h	20 horas	65 horas
R	R\$ 600,00	x

Agora, como as grandezas R e h são diretamente proporcionais temos que existe uma constante K, não nula, tal que $\dfrac{R}{h} = K$ para todos os valores de R e h representados pela tabela. Assim,

$$\frac{600}{20} = K \text{ e } \frac{x}{65} = K.$$

Sendo $\dfrac{600}{20} = K$ temos que $K = 30$. Substituindo o valor de K na outra igualdade segue que:

$$\frac{x}{65} = 30 \Rightarrow x = 65 \cdot 30 \Rightarrow x = 1950.$$

Portanto, se o profissinal liberal trabalhar 65 horas receberá a renda de $R\$1950,00$.

Exemplo 42. Duas grandezas x e y são diretamente proporcionais. Quando $x = 4$, temos $y = 20$. Qual o valor de x para $y = 18$.

Solução. Resumimos o problema no quadro:

x	4	?
y	20	18

Considerando que as grandezas são diretamente proporcionais, segue que existe K não nulo tal que

$$\frac{20}{4} = K \text{ e } \frac{18}{x} = K.$$

Como $\dfrac{20}{4} = K$, concluímos que $K = 5$. Substituindo na segunda equação temos:

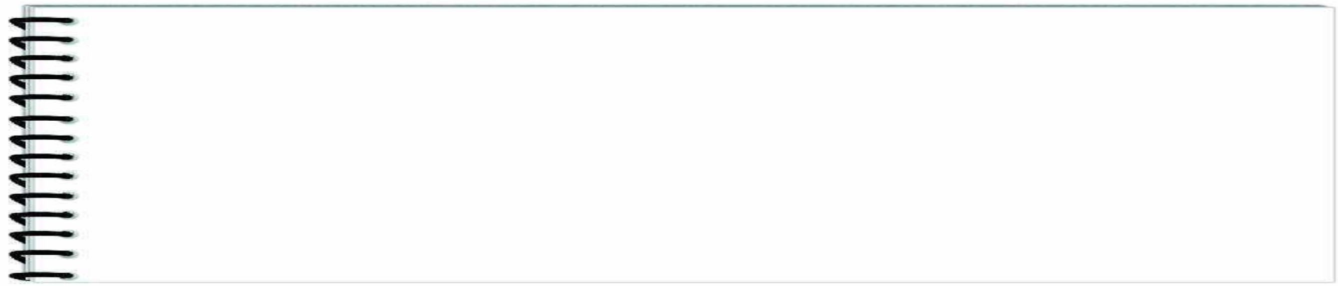
$$\frac{18}{x} = 5 \Rightarrow 18 = 5x \Rightarrow x = \frac{18}{5} = 3,6.$$

Portanto, quando $y = 18$ temos que $x = 3,6$.

ATB
Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. A grandeza y é diretamente proporcional ao quadrado de x. Quando $x = 4$, temos $y = 10$. Qual o valor de y para $x = 5$?

Resp. $\dfrac{125}{8}$



Grandezas Inversamente Proporcionais

Uma determinada empresa possui R$ 2048,00 para dividir entre as instituições de caridade da cidade onde está localizada. Se a cidade possuir 4 instituições de caridade cada uma receberá R$ 512,00. Se a cidade possuir 8 instituições de caridade cada uma receberá R$ 256,00. Observe a tabela.

Instituições	4	8	16	32
Doação	R$ 512,00	R$ 256,00	R$ 128,00	R$ 64,00

Observe que á medida que o número de instituições de caridade aumenta, o valor da doação recebido por cada entidade diminui. Além disso, se fizermos o quociente entre as doações recebidas e o número de instituições de caridade obtemos:

$$\frac{512}{4} = 128; \qquad \frac{256}{8} = 32; \qquad \frac{128}{16} = 8 \qquad \text{e} \qquad \frac{64}{32} = 2.$$

Note que, ao contrário do contexto envolvendo grandezas diretamente proporcionais, o quociente entre as duas grandezas que compõem o exemplo acima não nos dá uma constante não nula.

Pergunta. O que ocorre se efetuarmos o produto entre as grandezas?

$$512 \cdot 4 = 2048; \qquad 256 \cdot 8 = 2048; \qquad 128 \cdot 16 = 2048 \qquad \text{e} \qquad 64 \cdot 32 = 2048.$$

Definição 17. Dizemos que duas grandezas x e y, com $x, y \neq 0$ são **inversamente proporcionais** se exite uma constante K, não nula, tal que:

$$x.y = K \text{ ou, equivalentemente, } y = \frac{1}{x}K.$$

Exemplo 43. Na tabela abaixo as grandezas x e y são inversamente proporcionais. Obtenha os valores de s e t.

x	s	2	8
y	4	5	t

Solução. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais existe uma constante K não nula tal que $y \cdot x = K$ para todos os valores de x e y representados na tabela, ou seja,

$$s \cdot 4 = K \tag{2.6}$$

$$2 \cdot 5 = K \tag{2.7}$$

$$8 \cdot t = K \tag{2.8}$$

Pela igualdade (3.28) temos que:

$$2 \cdot 5 = K \Rightarrow K = 10 \tag{2.9}$$

Agora, combinando as igualdades (6) e (2.9) obtemos:

$$s \cdot 4 = 10 \Rightarrow s = \frac{10}{4} \Rightarrow s = \frac{5}{2}.$$

Analogamente, combinando as igualdades (3) e (3.28) segue:

$$8 \cdot t = 10 \Rightarrow q = \frac{10}{8} \Rightarrow t = \frac{5}{4}.$$

Portanto, os valores de s e t que completam a tabela são $\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{4}$ respectivamente.

Exemplo 44. Um escritório leva 60 horas para ser pintado por 4 pintores. Se o número de horas trabalhadas para pintar o escritório for inversamente porporcional ao número de pintores, em quantas horas 5 pintores pintarão o escritório.

Solução. Considerando h o número de horas trabalhadas e P o número de pintores necessários para realizar o serviço, para simplificarmos a solução vamos representar os dados do exercício na tabela:

h	60 horas	?
P	4 pintores	5 pintores

Agora, como as grandezas P e h são inversamente proporcionais temos que existe uma constante K, não nula, tal que $R \cdot h = K$ para todos os valores de P e h representados pela tabela. Assim,

$$60 \cdot 4 = K \text{ e } x \cdot 5 = K.$$

Sendo $60 \cdot 4 = K$ temos que $K = 240$. Substituindo o valor de K na outra igualdade segue que

$$x \cdot 5 = 240 \Rightarrow x = \frac{240}{5} = \frac{48 \cdot 5}{5} = \frac{48 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5}} \Rightarrow x = 48.$$

Portanto, com 5 pintores trabalhando a pintura do escritório será realizada em 48 horas.

Teste seu conhecimento. Duas grandezas x e y são inversamente proporcionais. Quando $x = 3$, temos $y = 20$. Qual o valor de x para $y = 18$?

Resp. $\frac{10}{3}$.

Porcentagem

O conceito de **percentagem** ou **porcentagem**, representada pelo símbolo %, é um conceito básico e importante dentro da Matemática do cotidiano. Do latim *per centum*, significando "por cento", "a cada centena", ou seja, o símbolo % significa partes em 100. A expressão $x\%$ é chamada **taxa percentual** e representa a **razão percentual**;

$$x\% = \frac{x}{100} = 0,0x.$$

Observe os seguintes exemplos:

$$1\% = \frac{1}{100}; \qquad 18\% = \frac{18}{100}; \qquad 53\% = \frac{53}{100}; \qquad 99\% = \frac{99}{100}$$

Exemplo 45. Quanto é 27,5% de R\$ 45,00?

Solução. Observando que 27,5% é uma razão de base 100, isto é,

$$27,5\% = \frac{27,5}{100}.$$

Na pratica calcular 27,5% de R\$ 45,00 é o mesmo que calcular a proporção da razão $\frac{27,5}{100}$ em R\$ 45,00. Como vimos na seção anterior para realizar este calculo basta multiplicar R\$ 45,00 pela razão $\frac{27,5}{100}$

$$27,5\% \text{ de } R\$\,45,00 \Rightarrow \frac{27,5}{100} \cdot 45 = 0,275 \cdot 45 = 12,375.$$

Portanto, 27,5% de R$ 45,00 é R$ 12,375.

Exemplo 46. Quanto é 100% de R$ 45,00?

Solução. Note que,

$$100\% = \frac{100}{100} = 1.$$

Assim,

$$100\% \text{ de } R\$ 45,00 \Rightarrow 1 \cdot 45 = 45.$$

Portanto, 100% de R$ 45,00 é R$ 45,00.

Exemplo 47. Quanto é 127,5% de R$ 45,00?

Solução. Note que,

$$127,5\% = \frac{127,5}{100} = 1,275.$$

Assim,

$$127,5\% \text{ de } R\$ 45,00 \Rightarrow 1,275 \cdot 45 = 57,375.$$

Portanto, 127,5% de R$ 45,00 é R$ 57,375 .

Exemplo 48. A razão $\frac{13}{5}$ equivale a qual porcentagem?

Solução. Na verdade, precisamos resolver a seguinte equação:

$$\frac{13}{5} = x\%, \text{ isto é, } \frac{13}{5} = \frac{x}{100}.$$

Resolvendo a equação obtemos:

$$\frac{13}{5} = \frac{x}{100} \Rightarrow 5 \cdot x = 13 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{1300}{5} \Rightarrow x = 26$$

Portanto, a razão $\frac{13}{5}$ equivale a 26%.

Exemplo 49. Quanto é 10% de 20% de 40% de 80%?

Solução. A solução é dada pelo produto de todas porcentagens na forma de razão percentual, isto é,

$$\begin{gathered}
10\% \text{ de } 20\% \text{ de } 40\% \text{ de } 80\% \\
\Downarrow \\
\frac{10}{100} \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{80}{100} \\
\Downarrow \\
\frac{10 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 80}{100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100} \\
\Downarrow \\
\frac{64\cancel{0000}}{10000\cancel{0000}} \\
\Downarrow \\
\frac{64}{10000}.
\end{gathered}$$

Agora, transformando a razão $\dfrac{64}{10000}$ em porcentagem temos:

$$\frac{64}{10000} = \frac{x}{100} \Rightarrow x \cdot 10000 = 64 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{64 \cdot 1\cancel{0}\cancel{0}}{100\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{64}{100} \Rightarrow x = 64\%$$

Portanto, 10% de 20% de 40% de 80% é 64%.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Se 8 % de um número é igual a 30 % quanto é 40% deste número?

Resp. 150.

Módulo 3
Equações do 1° e 2° grau

No término desta unidade o aluno empenhado estará familiarizado com os conceitos:

- ▷ Estrutura do conjunto dos números reais;
- ▷ Equações do primeiro grau;
- ▷ Inequações do primeiro grau e sua representação gráfica;
- ▷ Equação do segundo grau: completando quadrados;
- ▷ Inequações do segundo grau e sua representação gráfica.

Leitura Complementar

Prezado aluno, para melhor compreensão deste módulo leia paralelamente os seguintes textos:

1. Demana, F. D., Waits, B. K., Foley, G. D., Kennedy, D., *Pré-cáculo*, Ed. Pearson, São Paulo, 2009.
2. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Calculo Volume 1*, Ed. LTC, 2001.
3. Carvalho, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C. e Wagner, E. , *A matemática do ensino médio*, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.
4. Lima, E. L, *Análise Real Volume 1: Funçães de Uma Variável*, Coleção Matemática Universitária, IMPA,Rio de Janeiro, 1996.

No módulo, `Sistemas de Numeração`, apenas detectamos a existência dos números reais, mas não exploramos seus predicados. Neste módulo, mostraremos que as equações e inequações do 1° e 2° grau são obtidas através do estudo dos "`Axiomas`" que estruturam o conjunto dos números reais. Tais propriedades são exploradas na próxima seção.

Propriedades dos números reais

No conjunto dos números reais definimos a **operação de adição** que associa o par de números reais x, y à soma $x + y$,

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

e a **operação de multiplicação** que associa o par de números reais x, y ao produto $x \cdot y$,

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array}$$

Nos estudos matemáticos, um **Axioma** é uma hipótese inicial da qual outros enunciados são logicamente deduzidos. Diferentemente de teoremas, Axiomas não podem ser demonstrados, porque básicamente eles são as hipóteses iniciais.

Agora que já sabemos o que é um axioma, representando por (A) as propriedades relacionadas com a adição, por (M) as propriedades relacionadas com multiplicação e por (D) a propriedade que relaciona as duas operações. Podemos observar que as operações definidas anteriormente em $\mathbb{R}$ satisfazem os seguintes axiomas:

$(A1)$ - Associativa: para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos $x + (y + z) = (x + y) + z$.

$(A2)$ - Comutativa: para todo $x, y \in \mathbb{R}$, temos $x + y = y + x$.

$(A3)$ - Existência do elemento neutro aditivo: para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um único elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$.

$(A4)$ - Existência do inverso aditivo: para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um único elemento $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.

$(M1)$ - Associativa: para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos $x.(y.z) = (x.y).z$.

$(M2)$ - Comutativa: para todo $x, y \in \mathbb{R}$, temos $x.y = y.x$.

$(M3)$ - Existência do elemento neutro multiplicativo: para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um único elemento $1 \in \mathbb{R}$ tal que $x.1 = x$.

$(M4)$ - Existência do inverso multiplicativo: para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe um único elemento $x^{-1} = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = x.\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{x}{x}\right) = 1$.

(D) - Distributiva: para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos:

$$x.(y + z) = xy + xz.$$

Utilizando os axiomas $(A1 - A4)$, $(M1 - M4)$ e D podemos provar todas as operações matemáticas básicas utilizadadas em nosso dia a dia. Por exemplo, podemos explicar o que significa expressões como "`passar dividindo`", "`passar para o outro lado com o sinal invertido`", etc.

Observação. Nas Propriedades $(A4)$ e $(M4)$ efetuamos as operações pela direita,

$$x + (-x) = 0 \text{ e } x \cdot x^{-1} = 1,$$

mas devido a comutatividade da adição e multiplicação temos também verdadeiras as sentenças efetuadas pela esquerda

$$(-x) + x = 0 \text{ e } x^{-1} \cdot x = 1.$$

Observação. Nas Propriedades $(A4)$ e $(M4)$ efetuamos as operações pela direita,

$$x + (-x) = 0 \text{ e } x \cdot x^{-1} = 1,$$

mas devido a comutatividade da adição e multiplicação temos também verdadeiras as sentenças efetuadas pela esquerda

$$(-x) + x = 0 \text{ e } x^{-1} \cdot x = 1.$$

No conjunto dos números reais definimos a operação de **subtração**, $x - y$, que associa o par de números reais x, y a soma $x + (-y)$,

$$\begin{array}{rccc} - : & \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

e a operação de **divisão**, $\dfrac{x}{y}$ com $x \neq 0$, que associa o par de números reais x, y ao quociente $x \cdot y^{-1}$,

$$\begin{array}{rccc} \div : & \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \dfrac{x}{y}. \end{array}$$

Equações do 1° grau

Equação é uma forma de resolver problemas cotidianos nos quais surgem valores a serem determinados quando se tem uma igualdade. A palavra "`equação`" vem do latim "`equatione`", que quer dizer igualar. A origem primeira da palavra "`equação`" vem do árabe "`adala`", que significa "`ser igual a`", de novo a ideia de igualdade.

Por serem desconhecidos, esses valores são representados por letras. Por isso na língua portuguesa existe uma expressão muito usada: "o x da questão". Ela é utilizada quando temos um problema dentro de uma determinada situação. Matematicamente dizemos que esse x é o valor que não se conhece. Em países como China e Alemanha é por tradição introduzir um assunto matemático através de um problema real.

Por exemplo, no país dos sonhos todo cidadão pode ser considerado aposentado quando a soma da sua idade ao se aposentar com o número de anos trabalhados for igual a 55, isto é,

$$\text{idade } + \text{ anos trabalhados } = 55.$$

Pergunta. Com que idade se aposentaria um cidadão que teve seu inicio de trabalho com 21 anos?

Usaremos uma letra qualquer, por exemplo x, para representar a idade na época da aposentadoria. Assim sendo, temos que o número de anos trabalhados por este cidadão é de $(x - 21)$ anos , uma vez que o trabalhador possuia 21 anos no início da jornada de trabalho.

Utilizando a formula da aposentadoria, temos:

$$x + (x - 21) = 55,$$

o que implica que:

$$2x - 76 = 0.$$

Definição 18.

1. Uma **equação do primeiro grau** ou **linear** na variável x em $\mathbb{R}$ é toda igualdade do tipo
$$ax + b = 0,$$
com $a, b, x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

2. A letra x é chamada de **incógnita** da equação (a palavra incógnita significa “desconhecida”).

3. A parcela que se encontra à esquerda do sinal de igual é chamada de **primeiro membro** e a parcela que está a direita é chamada de **segundo membro**.

4. Os números que compõem o primeiro e o segundo membro de uma equação do primeiro grau são chamados **elementos**.

5. **Conjunto Universo**, denotado por U, é o conjunto de todos os valores que a variável x pode assumir.

6. **Conjunto verdade** ou **solução**, denotado por V ou S, é o conjunto dos valores de U, que tornam verdadeira a equação.

Observação. A equação $ax + b = 0$ é chamada equação do primeiro grau pelo fato da potência que acompanaha a variável x ser 1, isto é, $x = x^1$. Futuramente, veremos equações cujo grau será 2, ou seja, a incógnata x estará elevada ao quadrado, x^2. Neste texto, quando não mencionado, o conjunto universo será sempre o conjunto dos números reais, isto é, $U = \mathbb{R}$. Além disso, vale ressaltar que o conjunto solução está sempre contido no conjunto universo, ou seja, $S \subset U$.

Todos os alunos já ouviram de muitos professores que para resolver a equação $2x - 76 = 0$ basta seguir os passos:

1. Passe o número vinte que está no primeiro membro para o segundo membro da equação com o sinal oposto para obter a igualdade

$$2x = 55 + 21. \tag{3.1}$$

2. Passe o número 2 que está multiplicando a incógnita x no primeiro membro para o lado direito da igualdade dividindo todo o segundo membro, isto é,

$$x = \frac{55 + 21}{2}.$$

   Assim, o número $x = 38$ é solução da equação $2x - 21 = 55$, isto é, $S = \{38\}$.

Neste texto, vamos explicar cada passo anteriormente executado. O passo 1 é explicado através da Propriedade $(A4)$ dos números reais. Quando se diz que o número -21 passou para o membro da direita da equação de primeiro grau com o sinal oposto, na verdade estamos utilizando o fato de que -21 é um número real e que pela Propriedade $(A4)$ apresenta um elemento oposto 21 ao qual está sendo somado a ambos os lados da igualdade 3.1, isto é,

$$2x - 21 = 55$$

$$\Downarrow$$

$$(2x - 21) + 21 = 55 + 21$$

$$\Downarrow$$

$$2x \underbrace{-21 + 21}_{=0} = 55 + 21$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{2x+0}_{0 \text{ é elemento neutro da adição}} = 55+21$$

$$\Downarrow$$

$$2x = 55+21$$

$$\Downarrow$$

$$2x = 76. \tag{3.2}$$

O passo 2 é explicado através da Propriedade $M(4)$ dos números reais. Quando se diz que o número 2 passou para o membro da direita da equação dividindo, na verdade estamos utilizando o fato de que 2 é um número real e que pela Propriedade $(M4)$ apresenta um elemento inverso $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ ao qual está sendo multiplicado a ambos os lados da igualdade 3.2, isto é,

$$2x = 76$$

$$\Downarrow$$

$$2^{-1} \cdot (2x) = 2^{-1} \cdot (76)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot (2x) = \frac{1}{2} \cdot (76)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{76}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 38.$$

Prezado aluno, agora sabemos explicar todos passos que nos levam à solução de uma equação do primeiro grau. Na prática, por simplicidade, procedemos de forma direta, isto é,

$$2x - 21 = 55$$

$$\Downarrow$$

$$2x = 55+21$$

$$\Downarrow$$

$$2x = 76$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{76}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 38.$$

Teorema 1 (Solução geral de uma equação do primeiro grau)**.** Seja

$$ax + b = 0, \tag{3.3}$$

com $a, b, x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ uma equação do primeiro grau na variável x em $\mathbb{R}$. Então o conjunto solução da equação (3.3) é $S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

Demonstração. Somando $-b$ a ambos os lados da equação (3.3), obtemos:

$$ax = -b. \tag{3.4}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.4) por $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ segue que:

$$\left(\frac{1}{a}\right) \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot (-b)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{a}x = -\frac{b}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

■

PARE PP

Porque no Teorema (1) o número real a deve ser diferente de zero?

Note que se $a = 0$, então a solução da equação (3.4) será dada por $b = 0$. Por outro lado, se $a = b = 0$ então a equação (3.4) possui "`infinitas soluções`". Esta última afirmação é justificada pela questão.

Porque o produto de qualquer número real por zero sempre resulta em zero?

Intuitivamente é muito fácil entender que quando multiplicamos um número por zero obtemos como resultado exatamente zero. Por exemplo, se aplicarmos zero reais em qualquer banco, no final de um ano vou resgatar zero de rendimentos. Através desse raciocínio muito exemplos podem ser construídos. A resposta para esta pergunta será dada utilizando os axiomas $(A1)$, $(A2)$, $(M4)$ e D.

Lema 4. O produto de qualquer número real com o elemento neutro da adição é sempre igual a zero, isto é, se $x \in \mathbb{R}$ e 0 é o elemento neutro da adição, então

$$x \cdot 0 = 0.$$

Demonstração. Para provarmos este resultado, estudaremos a soma:

$$x \cdot 0 + x.$$

Como 1 é o elemento neutro do produto (Axioma $(M4)$) temos:

$$x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + 1 \cdot x. \tag{3.5}$$

Utilizando a Axioma (D) no segundo membro da igualdade (3.5), obtemos:

$$x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + 1 \cdot x = x \cdot (0 + 1). \tag{3.6}$$

Como 0 é o elemento neutro da adição,

$$0 + 1 = 1.$$

Assim, da igualdade (3.6) tem-se:

$$x \cdot 0 + x = x \cdot 1.$$

Segue da Observação (3) que 1 é o elemento neutro da multiplicação tanto pela direita como pela esquerda, ou seja,

$$1 \cdot x = x.$$

Aplicando este fato à igualdade (3.6), segue que:

$$x \cdot 0 + x = x. \tag{3.7}$$

Agora, somando $-x$ a igualdade (3.7), temos:

$$(x \cdot 0 + x) + (-x) = x + (-x). \tag{3.8}$$

Aplicando os Axiomas $(A1)$ e $(A4)$ ao lado esquerdo e direito respectivamente da igualdade (3.8)

$$x \cdot 0 + (x + (-x)) = 0.$$

Como $(x + (-x)) = 0$ (Propriedade $(A4)$), concluímos que:

$$x \cdot 0 = 0.$$

■

TOME NOTA. Como o produto de todo número real por zero é igual a zero e o conjunto dos números reais é infinito, temos que a equação,

$$0 \cdot x = 0,$$

possui infinitas soluções. Neste caso, temos $U = \mathbb{R}$ como conjunto universo.

Outra questão que causa muitos problemas aos estudantes é efetuar o produto de números reais com sinais opostos. Na verdade, estamos falando das "`regrinhas`":

- "Sinais opostos, subtrai";
- "Sinais iguais, soma".

Vamos justificar as "`regrinhas`" através dos Axiomas $(A1)$, $(A3)$, $(A4)$ e (D).

Lema 5. O produto de dois números reais com sinais diferente gera um número negativo e o produto de dois números reais com mesmo sinal resulta em um número positivo, isto é,

1. $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$;
2. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Demonstração. Provaremos inicialmente o item 1. Para provarmos este resultado, estudaremos a soma:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y. \tag{3.9}$$

Aplicando o Axioma (D), a soma (3.9), tem-se:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot (-y + y). \tag{3.10}$$

Utilizando o Axioma $(A3)$ no lado direito da igualdade (3.10):

$$-y + y = 0.$$

Assim a igualdade (3.10) pode ser reescrita por:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot 0.$$

O Lema (4) nos diz que:

$$x \cdot 0 = 0.$$

Dessa forma, de (3.10), segue que:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = 0. \tag{3.11}$$

Como o produto de dois números reais é um número real segue do Axioma $(A3)$ que existe $-(x \cdot y) \in \mathbb{R}$, tal que:

$$(x \cdot y) + (-(x \cdot y)) = 0.$$

Assim sendo, somando $-(x \cdot y)$ a ambos os lados da igualdade (3.11), obtemos:

$$(x \cdot (-y) + x \cdot y) + (-(x \cdot y)) = 0 + (-(x \cdot y)). \tag{3.12}$$

Aplicando a associativa da adição (Axioma $(A1)$) ao lado esquerdo da igualdade (3.12):

$$x \cdot (-y) + ((x \cdot y) + (-(x \cdot y)). \tag{3.13}$$

Aplicando o Axioma $(A4)$ ao lado direito da igualdade (3.13):

$$0 + (-(x \cdot y)) = -(x \cdot y). \tag{3.14}$$

Assim sendo, reescrevemos a igualdade (3.14) por:

$$x \cdot (-y) + ((x \cdot y) + (-(x \cdot y)) = -(x \cdot y).$$

Pela Axioma $(A3)$, temos:

$$((x \cdot y) + (-(x \cdot y)) = 0,$$

o que implica que:

$$x \cdot (-y) + 0 = -(x \cdot y).$$

Agora, como 0 é o elemento neutro da adição, segue que:

$$x \cdot (-y) = -(x \cdot y),$$

o que finaliza a prova do item 1.

Vamos agora provar o item 2. Para provarmos este item estudaremos a soma:

$$(-x) \cdot (-y) + (-(x \cdot y)).$$

Pelo item 1, temos que $-(x \cdot y) = x \cdot (-y)$ o que implica que:

$$(-x) \cdot (-y) + (-(x \cdot y)) = (-x) \cdot (-y) + x \cdot (-y). \tag{3.15}$$

Aplicando a Propriedade (D) no lado direito da igualdade (3.15), tem-se:

$$(-x) \cdot (-y) + (-(x \cdot y)) = ((-x) + x) \cdot (-y).$$

Sendo $(-x)$ o elemento oposto de x, obtemos:

$$(-x) \cdot (-y) + (-(x \cdot y)) = 0 \cdot (-y).$$

Segue do Lema (4) que $0 \cdot (-y) = 0$ o que implica que:

$$(-x) \cdot (-y) + (-(x \cdot y)) = 0. \tag{3.16}$$

Somando em ambos os lados da igualdade (3.16) o número real $x \cdot y$, tem-se:

$$(-x) \cdot (-y) + (-(x \cdot y)) + x \cdot y = x \cdot y.$$

Como $-(x \cdot y)$ é o elemento oposto do número real $x \cdot y$, temos:

$$(-x) \cdot (-y) + 0 = x \cdot y.$$

Visto que 0 é o elemento neutro da adição, concluímos:

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

■

Observação. Como consequência imediata do Lema (5), temos para todo número real x,

$$-(-x) = x, \quad -(+x) = -x, \quad +(-x) = -x.$$

Exemplo 50. Determine a solução da equação:

$$2(3 - 4x) - 5(2x + 3) = x - 17. \tag{3.17}$$

Solução. Primeiramente vamos simplificar o membro esquerdo da equação. Note que, aplicando a distributiva, tem-se:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 - 4x) &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4x) = 6 - 8x \\ 5 \cdot (2x + 3) &= 5 \cdot 2x + 5 \cdot 3 = 10x + 15. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2(3 - 4x) - 5(2x + 3) &= 6 - 8x - (10x + 15) \\ &= 6 - 8x - 10x - 15 \\ &= -18x - 9. \end{aligned}$$

Após a simplificação, a equação inicial foi reduzida à igualdade

$$-18x - 9 = x - 17,$$

cuja a solução é descrita como segue:

$$-18x - 9 = x - 17.$$

$$\Downarrow$$

$$-18x - x = 9 - 17.$$

$$\Downarrow$$

$$-19x = -8.$$

$$\Downarrow$$

$$19x = \frac{-8}{-19} = \frac{8}{19}.$$

Logo, o cojunto solução é dado por $S = \left\{\frac{8}{19}\right\}$.

Para saber se a solução está correta basta substituir o valor $\frac{8}{19}$ na equação (3.17) e ver se a igualdade se verifica, isto é, substituindo $\frac{8}{19}$ no membro da esquerda temos:

$$-18 \cdot \left(\frac{8}{19}\right) - 9 = -\frac{144}{19} - 9 = \frac{-144 + 19 \cdot (-9)}{19} = \frac{-144 - 171}{19} = -\frac{315}{19}$$

substituindo $\frac{8}{19}$ no membro da direita, obtemos:

$$\frac{8}{19} - 17 = \frac{8 + 19 \cdot (-17)}{19} = \frac{8 - 323}{19} = \frac{-315}{19}.$$

Portanto, como ambos os membros da equação são iguais temos que o conjunto solução está correto.

Exemplo 51. Resolva a equação do primeiro grau:

$$\sqrt{5}x - 5 = 0. \tag{3.18}$$

Solução. Note que:

$$\sqrt{5}x - 5 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{5}x = 5$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{5}}.$$

Simplificando a solução,

$$\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \frac{\cdot\sqrt{5}}{\cdot\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5 \cdot 5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\cancel{5} \cdot \sqrt{5}}{\cancel{5}} = \sqrt{5}.$$

Assim, o conjunto solução é dado por $S = \{\sqrt{5}\}$.

Para saber se a solução está correta basta substituir o valor $\sqrt{5}$ na equação (3.18) e ver se a igualdade se verifica, isto é, substituindo $\sqrt{5}$ no membro da esquerda, temos:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 5 = \sqrt{5 \cdot 5} - 5 = \sqrt{25} - 5 = 5 - 5 = 0.$$

Portanto, como ambos os membros da equação são iguais temos que o conjunto solução está correto.

Exemplo 52. Determine o conjunto verdade da equação:

$$\frac{t+5}{8} - \frac{t-2}{2} = \frac{1}{3}. \tag{3.19}$$

Solução. Primeiramente vamos simplificar o membro esquerdo da equação. Note que, aplicando a Propriedade Distributiva, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{t+5}{8} &= \frac{t}{8}+\frac{5}{8}\\ \frac{t-2}{2} &= \frac{t}{2}-\frac{2}{2}=\frac{t}{2}-1.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{t+5}{8}-\frac{t-2}{2} &= \frac{t}{8}+\frac{5}{8}-\left(\frac{t}{2}-1\right)\\ &= \frac{t}{8}-\frac{t}{2}+\frac{5}{8}+1\\ &= \frac{t-4t}{8}+\frac{5+(8\cdot 1)}{8}\\ &= -\frac{3t}{8}+\frac{5+8}{8}\\ &= -\frac{3t}{8}+\frac{13}{8}\\ &= \left(-\frac{3}{8}\right)\cdot t+\frac{13}{8}.\end{aligned}$$

Após a simplificação, a equação inicial foi reduzida à igualdade,

$$\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot t+\frac{13}{8}=\frac{1}{3},$$

cuja solução é descrita como segue:

$$\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot t+\frac{13}{8}=\frac{1}{3}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot t=\frac{1}{3}-\frac{13}{8}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot t=\frac{8-(3\cdot 13)}{24}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot t=\frac{8-39}{24}$$
$$\Downarrow$$

$$\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot t = -\frac{31}{24}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot t = -\frac{31}{24}$$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{-\frac{31}{24}}{-\frac{3}{8}} = \frac{31}{24}\cdot\frac{8}{3} = \frac{31\cdot 8}{24\cdot 3} = \frac{31\cdot 1}{3\cdot 3} = \frac{31}{9}.$$

Logo, o cojunto solução é dado por $S = \left\{\frac{31}{9}\right\}$.

Para saber se a solução está correta basta substituir o valor $\frac{31}{9}$ na equação 3.19 e ver se a igualdade se verifica, isto é, substituindo $\frac{31}{9}$ no membro da esquerda temos:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{31}{9}+\frac{13}{8} &= -\frac{3\cdot 31}{8\cdot 9}+\frac{13}{8} = -\frac{93}{72}+\frac{13}{8} \\
&= \frac{-93+(9\cdot 13)}{72} = \frac{-93+117}{72} \\
&= \frac{24}{72} = \frac{\cancel{8}\cdot\cancel{3}}{\cancel{8}\cdot\cancel{3}\cdot 3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Portanto, como ambos os membros da equação são iguais temos que o conjunto solução está correto.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Determine o conjunto verdade da equação:

$$\frac{3z+7}{5}+\frac{z-1}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

Resp. $-\frac{3}{23}$.

Equações do 2° grau

Não é de hoje que a telefonia celular vem crescendo a passos largos. A mais nova atração são os celulares “Smartphone”. Por exemplo, se um “Smartphone” possui uma tela retangular cuja área mede 16 mm^2 e, além disso, tem de largura uma vez e meia a sua altura, então qual seria as as dimensões desta tela?

Caro aluno, não se assuste! A solução deste problema é muito simples. Se considerarmos altura da tela do “Smartphone” de x, temos que $1,5x$ será a sua largura. Sabemos que a área de uma figura retangular é calculada multiplicando-se a medida da sua largura, pela medida da sua altura, temos:

$$x \cdot (1,5x) = 16.$$

que pode ser expressada como:

$$1,5x^2 - 16 = 0. \tag{3.20}$$

A equação (3.20) é chamada de equação do segundo grau. Abaixo daremos mais detalhes sobre esta equação.

Definição 19. Uma **equação quadrática em** x é uma equação com duas variáveis x, uma com grau 1 e outra com grau 2. Matemáticamente falando é toda equação do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{3.21}$$

com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Observação. Se $a = 0$, então a equação 3.21 torna-se uma equação do primeiro grau.

Exemplo 53. São exemplos de equações do 2° grau:

$$x^2 - x = 0, \qquad 2x^2 - 3 = 0, \qquad 4x^2 - 8x + 3 = 0.$$

Como calcular as soluções de uma equação de grau 2?

Primeiramente começaremos a responder esta pergunta resolvendo uma equação do 2°, com $a = 1$, $b = 0$ e $c = -y^2$, ou seja, uma igualdade do tipo:

$$x^2 - y^2 = 0. \tag{3.22}$$

Antes de resolvermos a equação (3.22) precisamos entender o que ocorre quando o produto de dois números reais é igual a zero. Veja o Lema abaixo:

Lema 6. Se o produto de dois números reais é zero, então um dos dois números tem que ser zero, isto é,

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Demonstração. Existem duas forma de se provar este resultado. A primeira é considerar $x \neq 0$ e mostrarmos que $y = 0$. A segunda é considerarmos $y \neq 0$ e verificarmos que $x = 0$.

Apenas por conveniência vamos supor que $y \neq 0$ e provar que $x = 0$. De fato, como $x \neq 0$ segue do Axioma $(M4)$ que existe y^{-1}, tal que:

$$y \cdot y^{-1} = 1.$$

Multiplicando a igualdade $x \cdot y = 0$ pela esquerda por y^{-1}, temos:

$$(x \cdot y) \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1}. \tag{3.23}$$

Aplicando o Lema 4 à direita da igualdade (3.23), obtemos:

$$0 \cdot y^{-1} = 0. \tag{3.24}$$

Utilizando o Axioma $(M1)$ à direita da igualdade (3.24), tem-se:

$$x \cdot (y \cdot y^{-1}) = 0. \tag{3.25}$$

Agora, aplicando o Axioma $(M3)$ à direita da igualdade (3.25), segue que:

$$y \cdot y^{-1} = 1,$$

o que implica:

$$x \cdot 1 = 0.$$

Sendo $x \cdot 1 = x$ pelo Axioma $(M4)$, concluímos que:

$$x = 0.$$

■

Utilizando o Lema (6), a solução da equação (3.22) será dada pelo próximo lema.

Lema 7. Se dois números reais têm quadrados iguais, isto é, $x^2 = y^2$, então $x = \pm y$.

Demonstração. Somando $-y^2$ a ambos os membros da igualdade $x^2 = y^2$, segue que:

$$x^2 + (-y^2) = y^2 + (-y^2).$$

Sendo $-y^2$ o elemento oposto de y^2 temos:

$$x^2 + (-y^2) = 0.$$

Segue da observação 3 que:

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Note que,

$$(x + y) \cdot (x - y) = x \cdot x - x \cdot y + y \cdot x - y \cdot y$$

$$\Downarrow$$

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - x \cdot y + y \cdot x - y^2.$$

Como vale a comutativa da multiplicação, isto é, $x \cdot y = y \cdot x$, obtemos:

$$-x \cdot y + y \cdot x = 0,$$

o que implica que:

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2. \tag{3.26}$$

Da igualdade 3.26, obtemos:

$$(x + y) \cdot (x - y) = 0.$$

Aplicando o Lema 4, segue que:

$$x + y = 0 \text{ ou } x - y = 0,$$

o que mostra:

$$x = -y \text{ ou } x = y.$$

■

TOME NOTA. O conjunto solução para uma equação do 2° do tipo $x^2 - y^2 = 0$ é dado por $S = \{-y, y\}$. Por exemplo, o conjuto solução da equação $x^2 - 144 = 0$ é $S = \{-12, 12\}$. Visto que a equação $x^2 - 144 = 0$ pode ser reescrita na forma $x^2 - 12^2 = 0$.

O que ocorre se na equação (3.22) a constante c for tomada positiva, isto é, se a equação a ser resolvida for $x^2 + y^2 = 0$?

A resposta para esta pergunta não é tão simples. Necessitamos explorar mais o conjunto dos números reais. Assim sendo, o conjunto dos números reais pode ser decomposto em três subconjuntos:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-.$$

O subconjunto $\mathbb{R}^+$ é chamado **conjunto dos números reais positivos**, e satisfaz as seguintes propriedades:

RP1: A soma e o produto de dois números reais positivos são números positivos, isto é,

$$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+ \text{ e } x \cdot y \in \mathbb{R}^+.$$

RP2: Se x pertence a $\mathbb{R}$ somente uma das três alternativas pode acontecer:

$$\text{ou } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } x = 0 \text{ ou } -x \in \mathbb{R}^+.$$

O subbconjunto $\mathbb{R}^-$ é chamado **conjunto dos números reais negativos** e é formado pelos números $-x$, sendo $x \in \mathbb{R}^+$.

O quadrado de qualquer número real não nulo é um número positivo?

Utilizando os Axiomas relacionados aos números reais positivos, observamos que o conjunto solução da equação $x^2 + y^2 = 0$ é obtido através da seguinte frase:

"`Todo número não nulo elevado ao quadrado é positivo`".

No próximo Lema vamos mostrar que tal frase é verdadeira.

Lema 8. Todo número real não nulo ao quadrado é um número real positivo. Matematicamente falando, temos:

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0 \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração. Sendo x um número real temos pela Propriedade $RP1$ que:

$$\text{ou } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } x = 0 \text{ ou } -x \in \mathbb{R}^+.$$

Como por hipótese $x \neq 0$ nos restam as seguintes possibilidades:

$$\text{ou } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } -x \in \mathbb{R}^+.$$

Se $x \in \mathbb{R}^+$, então pela Propriedade $PR1$, temos que $x \cdot x \in \mathbb{R}^+$. Agora, como $x^2 = x \cdot x$, concluímos que $x^2 \in \mathbb{R}^+$. Por outro lado, se $x \in \mathbb{R}^-$, então $-x \in \mathbb{R}^+$. Novamente pela Propriedade $RP1$, temos que $(-x) \cdot (-x) \in \mathbb{R}^+$. Como $x^2 = (-x) \cdot (-x)$ segue da Observação 3, concluímos que $x^2 \in \mathbb{R}^+$. ■

TOME NOTA. Através do Lema (8) concluímos que o conjunto solução da equação $x^2 + y^2 = 0$ é $S = \{\emptyset\}$(conjunto vazio). Uma vez que não existe nenhum número real cujo quadrado é um número real negativo.

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2.$$

O método que vamos utilizar é conhecido por "Método de completar quadrados".

Exemplo 54. Determine as soluções da equação $x^2 - x = 0$.

Demonstração. Utilizando processo de fatoração:

$$0 = x^2 - x = x \cdot (x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$0 = x \cdot (x-1)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Logo, o conjunto solução $S = \{0, 1\}$. ■

Exemplo 55. Resolva a equação do segundo grau $2x^2 - 3 = 0$.

Demonstração. Multiplicando a equação por $\frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{1}{2} \cdot (2x^2 - 3) = \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - \frac{3}{2} = 0.$$

Observando que $\frac{3}{2} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$, tem-se:

$$0 = x^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x - \sqrt{\frac{3}{2}} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Logo, temos $S = \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right\}$. ■

Teste seu conhecimento. Resolva a equação do segundo grau $2x^2 - 7x^2 + 3 = -3x^2$.

Resp. $S = \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right\}$.

Seguindo nosso estudo, um quadrado perfeito em matemática é um número inteiro não negativo que pode ser expresso como o quadrado de um outro número inteiro. Por exemplo, números 1, 25, 100 e 289 são quadrados perfeitos, uma vez que:

$$1 = 1^2, \quad 25 = 5^2, \quad 100 = 10^2, \quad 289 = 17^2.$$

Teorema 2 (Soluções de Equações do 2° grau: caso geral)**.** Considere a equação do 2° grau, $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Então,

1. Seja $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta \geq 0$, então as soluções de $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Se $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ são as soluções de $ax^2 + bx + c = 0$, então temos as relações:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Antes de provarmos o Teorema gostaria de fazer algumas observações.

Observação.

1. Se $\Delta < 0$, então não existe solução para $ax^2 + bx + c = 0$. Uma vez que nosso conjunto universo é $\mathbb{R}$ e $\sqrt{\Delta}$ com $\Delta < 0$ não é um número real. Números dessa forma são chamados de complexos, mas isso é um nova discusão que não será tratada neste texto.

2. Se $\Delta = 0$, então a $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas soluções idênticas, dadas por $-\dfrac{b}{2a}$. De fato, como as raízes são dadas por $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ se $\Delta = 0$ temos $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

3. O número de soluções de $ax^2 + bx + c = 0$ varia de acordo com o sinal do Δ, isto é, se $\Delta > 0$ temos duas soluções distintas, $x_1 \neq x_2$. Se $\Delta = 0$ temos duas soluções idênticas, $x_1 = x_2$. Se $\Delta < 0$ não temos solução.

4. Se $a = 0$, então a equação 3.21 torna-se uma equação do primeiro grau.

Agora já estamos prontos para provar o Teorema 2.

Demonstração. Primeiramente provaremos o item (1). Multiplicando ambos os lados da equação $ax^2 + bx + c = 0$ por $\dfrac{1}{a}$ temos:

$$\frac{1}{a} \cdot (ax^2 + bx + c) = \frac{1}{a} \cdot 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Downarrow$$

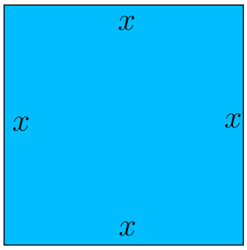
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \tag{3.27}$$

Nosso objetivo é completar o quadrado na equação (3.27), isto é, determinar um número D ao qual a expressão $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ possa ser escrita na forma $x^2 + (2D)x + D^2$. Como

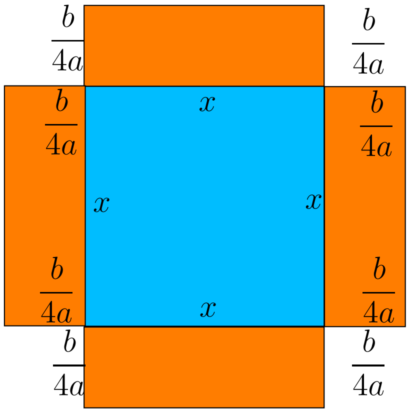
$$\begin{aligned} (x+D)^2 &= (x+D)\cdot(x+D) = x \cdot x + x \cdot D + D \cdot x + D \cdot D \\ &= x^2 + 2 \cdot D \cdot x + D^2, \end{aligned}$$

a expressão completar quadrado se justifica pelo fato do número D ser encontrado através da construção de um quadrado de lado $x + D$.

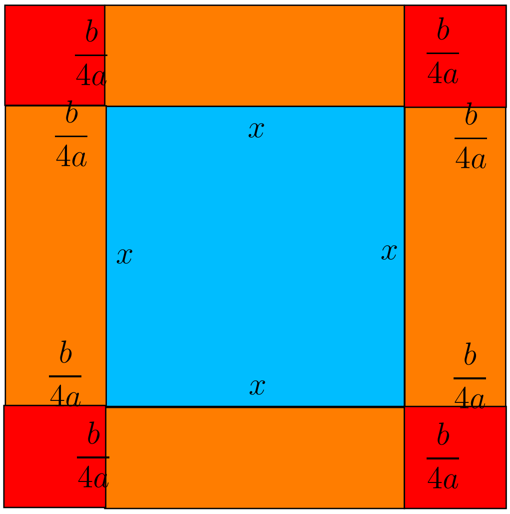
Inicialmente construimos um quadrado de lado x.



Note que a área do quadrado é x^2. Assim, surge o primeiro termo da nossa equação. A partir do quadrado de lado x construimos quatro retângulos de lados x e $\frac{b}{4a}$.



Completamos a figura com quatro quadrados de lados $\frac{b}{4a}$.



Computando a área do quadrado azul, dos quatro retângulos laranja e dos quatro quadrados vermelhos, temos a área do quadrado maior, isto é:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{b}{4a} + 4 \cdot \frac{b}{4a} \cdot \frac{b}{4a}$$

$$\Downarrow$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + \cancel{4} \cdot x \cdot \frac{b}{\cancel{4}a} + \cancel{4} \cdot \frac{b}{\cancel{4}a} \cdot \frac{b}{4a}$$

$$\Downarrow$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2 = x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}$$
$$\Downarrow$$
$$(x+\frac{b}{2a})^2 = x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \tag{3.28}$$

Logo, concluímos que $D=\dfrac{b}{2a}$.

Agora, somando e subtraindo $\dfrac{b^2}{4a^2}$ à igualdade 3.27, segue que:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}_{(x+\frac{b}{2a})^2}+\underbrace{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}_{-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}=0$$
$$\Downarrow$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=0,$$
$$\Downarrow$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0.$$

Considerando $\Delta=b^2-4ac$, temos que:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0.$$

Sendo $\dfrac{\Delta}{4a^2}=\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, segue que:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0.$$

Observando que:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

obtemos:

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]=0$$

$$\overset{Lema\,(6)}{\Downarrow}$$

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]=0 \text{ ou } \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Downarrow$$

$$x=-+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Vamos agora provar o item (2). Se $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, então:

$$\begin{aligned}
x_1+x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}+\cancel{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}+-\frac{b}{2a}-\cancel{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\\
&= \cancel{2}\cdot\left(-\frac{b}{\cancel{2}a}\right)=-\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
x_1\cdot x_2 &= \left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\
&= \underbrace{\left(-\frac{b}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)}_{\frac{b^2}{4a^2}}+\cancel{\left(-\frac{b}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}+\cancel{\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)}+\underbrace{\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}_{-\frac{\Delta}{4a^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^2}{4a^2}-\frac{\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2}=\frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a}\cdot a}\\
&= \frac{c}{a}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 56. Resolva a equação $4x^2-8x+3=0$ utilizando o Teorema 2.

Demonstração. **Solução 1.**

Da equação $4x^2 - 8x + 3 = 0$, temos:

$$a = 4, \qquad b = -8, \qquad c = 3.$$

Pelo Teorema 2 sabemos que as soluções são dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = \frac{8+4}{8} \text{ ou } x_2 = \frac{8-4}{8}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = \frac{12}{8} \text{ ou } x_2 = \frac{4}{8}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = \frac{12}{8} = \frac{\cancel{4} \cdot 3}{\cancel{4} \cdot 2} \text{ ou } x_2 = \frac{4}{8} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 2}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \text{ ou } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Solução 2.

Uma outra forma de resolver uma equação do segundo grau é utilizar o item 2 do Teorema (2). Assim sendo,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-8)}{4} = 2 \\ \\ x_1 \cdot x_2 &= \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 2 \\ \\ x_1 \cdot x_2 &= \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Da primeira igualdade temos $x_1 = 2 - x_2$. Substituindo na segunda igualdade temos:

$$\frac{3}{4} = (2 - x_2) \cdot x_2 \Rightarrow -x_2^2$$

■

Teste seu conhecimento. Resolva a equação $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$ utilizando a fórmula de Baskara.

Resp. $V = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$.

Inequações do 1° e 2° grau

As inequações do 1° e 2° grau surgem quando estudamos as "`relações de ordem`" no conjunto dos números reais. Caro aluno, neste momento você deve estar se perguntando o que é uma relação de ordem. Não fique preocupado, pois este conceito será introduzido nas próximas linhas.

Utilizando as Propriedades $RP1$ e $RP2$ podemos definir uma relação de ordem em $\mathbb{R}$, isto é, uma forma de comparar dois números reais.

Definição 20. Considere x e y dois números reais.

1. Dizemos que x **é menor que** y ou equivalentemente y **é maior que** x, denotado respectivamente por $x < y$ e $y > x$, se $y - x \in \mathbb{R}^+$.
2. Dizemos que x **é um número real positivo**, denotado por $x > 0$, se $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Dizemos que x **é um número real negativo**, denotado por $x < 0$, se $x \in \mathbb{R}^-$, ou seja, $-x \in \mathbb{R}^+$.

As seguintes propriedades descrevem toda a organização dos números reais.

Lema 9. Considere x, y e z três números reais. Temos as seguintes propriedades:

O1: - **Transitiva:** se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.

O2: - **Tricotomia:** acontece apenas um dos casos $x < y$ ou $x = y$ ou $y < x$.

O3: - **Monotocidade da adição:** se $x < y$, então para todo $z \in \mathbb{R}$, temos $x + z < y + z$.

$O4$: - **Monotocidade da multiplicação:** se $x < y$, então para todo $z > 0$, temos $x \cdot z < y \cdot z$. Além disso, se $z < 0$, temos $x \cdot z > y \cdot z$.

Demonstração. Provaremos inicialmente a transitividade. Note que:

$$x < y \Rightarrow y - x \in \mathbb{R}^+ (\text{definição 20})$$

$$y < z \Rightarrow z - y \in \mathbb{R}^+ (\text{definição 20}).$$

Sendo $y - x, z - y \in \mathbb{R}^+$ temos pela Propriedade $RP1$ que:

$$(y - x) + (z - y) \in \mathbb{R}^+.$$

Agora,

$$(y - x) + (z - y) = y - x + z - y = y - y + z - x = 0 + z - x = z - x.$$

Como $(y - x) + (z - y) = z - x$ e $(y - x) + (z - y) \in \mathbb{R}^+$, segue que:

$$z - x \in \mathbb{R}^+,$$

o que implica pela definição (20) que

$$x < z.$$

Aqui provaremos a tricotomia. Como $x, y \in \mathbb{R}$ temos também que $y - x \in \mathbb{R}$. Agora, pela Propriedade $RP2$, temos:

$$y - x \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } y - x = 0 \text{ ou } y - x \in \mathbb{R}^-.$$

Observe que:

$$y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow y < x,$$

$$y - x = 0 \Rightarrow x = y.$$

Como $y - x \in \mathbb{R}^-$ temos que $-(y - x) \in \mathbb{R}^+$ o que implica que:

$$-(y - x) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -y + x \in \mathbb{R}^+.$$

Assim, $x - y \in \mathbb{R}^+$ e concluímos que $x < y$.

Agora provaremos a monotocidade da adição. Se $x < y$, então segue da Propriedade $RP1$

que $y - x \in \mathbb{R}^+$. Por outro lado, podemos escrever $y - x$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y - x &= y - x + 0 \\ &= y - x + (z - z) \\ &= y + z - x - z \\ &= y + z - (x + z) \end{aligned}$$

Como $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $y - x = (y + z) - (z + x)$, temos que:

$$(y + z) - (z + x) \in \mathbb{R}^+,$$

o que implica que:

$$(y + z) < (z + x).$$

Para concluir, provaremos agora a monotocidade da multiplicação. Note que se $x < y$ e $z > 0$ então,

$$y - x \in \mathbb{R}^+ \text{ e } z \in \mathbb{R}^+.$$

Assim, temos:

$$(y - x) \cdot z \in \mathbb{R}^+,$$

o que implica que:

$$y \cdot z - x \cdot z \in \mathbb{R}^+,$$

Logo, pela Propriedade $RP1$, segue que:

$$y \cdot z < x \cdot z.$$

Agora, se $x < y$ e $z < 0$, então,

$$y - x \in \mathbb{R}^+ \text{ e } -z \in \mathbb{R}^+.$$

Assim, temos:

$$(y - x) \cdot (-z) \in \mathbb{R}^+,$$

o que implica que:

$$y \cdot (-z) - x \cdot (-z) \in \mathbb{R}^+,$$

$$\Downarrow$$

$$-(y \cdot z) - x \cdot z \in \mathbb{R}^+,$$

$$x \cdot z < y \cdot z$$

■

INTERVALOS

Os **intervalos** são subconjuntos dos números reais, definidos por:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ - Intervalo Fechado}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ - Intervalo Aberto}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

$$[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Inequações do 1° grau

O conjunto dos números reais é rico em propriedades. Por exemplo, se a, b e x são números reais e $a \neq 0$, temos que $ax + b$ também é um número real. Assim, pela Propriedade $RP2$ obtemos:

$$ax + b = 0, \text{ ou } ax + b < 0, \text{ ou } ax + b > 0.$$

Quando a primeira situação acontece temos uma equação do primeiro grau em x, amplamente estudada na seção anterior. As duas outras situações são traduzidas pela definição:

Definição 21. Uma **inequação do** 1° **grau** ou **linear** em x é uma desigualdade do tipo:

1. $ax + b < 0$;

2. $ax + b > 0$,

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolvermos uma inequação do 1° grau utilizaremos as propriedades da relação de ordem $<$ estudadas anteriormente.

Exemplo 57. Determine o conjunto solução de inequação $2x - 1 < 4x + 3$.

Solução. Pela Propriedade $O3$ do Lema 9, somando 1 a ambos os lados da inequação, a desigualdade não se altera, isto é,

$$2x \underbrace{-1 + 1}_{=0} < 4x + \underbrace{3 + 1}_{=4}$$

$$\Downarrow$$

$$2x < 4x + 4. \tag{3.29}$$

Repetindo o processo, mas agora somando $-4x$ a ambos os lados da desigualdade (3.29), segue que:

$$2x + (-4x) < \underbrace{4x + (-4x)}_{=0} + 4.$$

$$\Downarrow$$

$$-2x < 4. \tag{3.30}$$

Agora, pelo Lema 9 como -2 é um número negativo temos que $(-2^{-1}) = -\dfrac{1}{2}$ também um número negativo. Assim, ao multiplicarmos a desigualdade 3.30 por (-2^{-1}) segue da Propriedade $(O4)$ do Lema (9) que a desigualdade se inverte, isto é:

$$-2x < 4.$$

$$\Downarrow$$

$$(-2^{-1}) \cdot (-2x) > (-2^{-1}) \cdot 4.$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2} \cdot (-2)}_{=1} x > -\frac{1}{2} \cdot 4.$$

$$\Downarrow$$

$$x > -\frac{4}{2}.$$

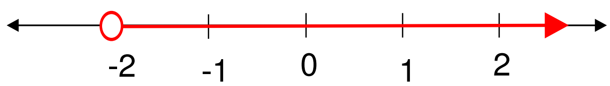
$$\Downarrow$$

$$x > -2.$$

Portanto, o conjunto solução desta inequação é o intervalo infinito:

$$S =]-2, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \; : \; x > -2\}$$

representado geométricamente por:



A bola aberta significa que o -2 não faz parte da solução da inequação.

Exemplo 58. Resolva a inequação $\dfrac{5x+7}{4} \leq -3$ e represente graficamente o conjunto solução.

Solução. Quando multiplicamos uma inequação por um número positivo a desigualdade não se altera:

$$4 \cdot \left(\frac{5x+7}{4}\right) \leq 4 \cdot (-3)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cancel{4} \cdot (5x+7)}{\cancel{4}} \leq -12$$

$$\Downarrow$$

$$5x + 7 \leq -12. \tag{3.31}$$

Somando -7 a ambos os membros da inequação 3.31 a desigualdade não se altera:

$$5x + \underbrace{7-7}_{=0} \leq \underbrace{-12-7}_{=-19}.$$

$$\Downarrow$$

$$5x \leq -19.$$

Multiplicando a inequação 3.31 por $\frac{1}{5}$ a desigualdade não se altera:

$$\frac{1}{5} \cdot (5x) \leq \frac{1}{5} \cdot (-19).$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} \leq -\frac{19}{5}.$$

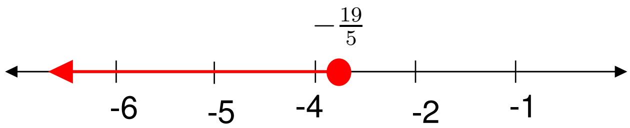
$$\Downarrow$$

$$x \leq -\frac{19}{5}.$$

Portanto, o conjunto solução desta inequação é o intervalo infinito:

$$S =]-\infty, -\frac{19}{5}] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq -\frac{19}{5}\}$$

representado geométricamente por:



A bola fechada significa que o $-\frac{19}{5}$ faz parte da solução da inequação.

Exemplo 59. Resolva a inequação $4 \geq \frac{4y-5}{3} > -2$ e represente graficamente o conjunto verdade.

Solução. Quando multiplicamos uma inequação por um número positivo a desigualdade não se altera:

$$3 \cdot 4 \geq 3 \cdot \left(\frac{4y-5}{3} \right) > 3 \cdot (-2)$$
$$\Downarrow$$
$$12 \geq \frac{\cancel{3} \cdot (4y-5)}{\cancel{3}} > -6$$
$$\Downarrow$$

$$12 \geq (4y-5) > -6 \tag{3.32}$$

Somando 5 a ambos os membros da inequação 3.32 a desigualdade não se altera:

$$\underbrace{12+5}_{=17} \geq 4y \underbrace{-5+5}_{=0} > \underbrace{5-6}_{=-1}$$

$$\Downarrow$$

$$17 \geq 4y > -1. \tag{3.33}$$

Multiplicando a inequação 3.33 por $\frac{1}{4}$ a desigualdade não se altera:

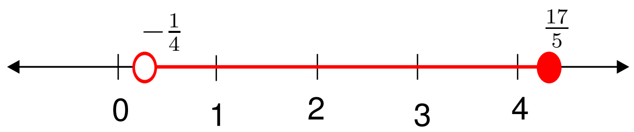
$$\frac{1}{4} \cdot 17 \geq \frac{1}{4} \cdot (4y) > \frac{1}{4} \cdot (-1)$$

$$\Downarrow$$
$$\frac{17}{4} \geq \frac{\cancel{4}y}{\cancel{4}} > -\frac{1}{4}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{17}{4} \geq y > -\frac{1}{4}.$$

Portanto, o conjunto verdade desta inequação é o intervalo limitado:

$$S =]-\frac{1}{4}, \frac{17}{4}] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -\frac{1}{4} < x \leq \frac{17}{4}\}$$

representado geométricamente por:



A bola fechada significa que o $\frac{17}{5}$ faz parte da solução da inequação e a bola aberta representa que $-\frac{1}{4}$ não pertence ao conjunto verdade.

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Resolva a inequação $\frac{2x-1}{2} < \frac{x-3}{3}$ e represente graficamente o conjunto verdade.

Resp. $S =]\infty, -\frac{3}{4}] = \{x \in \mathbb{R} \ : < x < -\frac{3}{4}\}$.

Inequações do 2° grau

Definição 22. Uma **inequação do** 2° **grau em** x é uma desigualdade do tipo:

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c > 0, \tag{3.34}$$

com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Exemplo 60. Resolva a inequação $x^2 - x < 0$.

Solução. Como $x^2 - x = x(x-1)$, obtemos:

$$x^2 - x < 0 \Longleftrightarrow x(x-1) < 0.$$

Agora, quando o produto de dois números reais é negativo? Este fato ocorre se:

$$(x < 0 \text{ e } x - 1 > 0) \quad \text{ou} \quad (x > 0 \text{ e } x - 1 < 0).$$

Se $(x < 0 \text{ e } x - 1 > 0)$, então $(x < 0 \text{ e } x > 1)$. Note que:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < 0 \text{ e } x > 1\} = \{\varnothing\}.$$

Por outro lado, se $(x > 0 \text{ e } x - 1 < 0)$, então $(x > 0 \text{ e } x < 1)$. Observe que:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \text{ e } x < 1\} =]0, 1[.$$

Logo, $S = S_1 \cup S_2 = \{\varnothing\} \cup]0, 1[=]0, 1[$.

Teste seu conhecimento. Resolva a inequação $x^2 - 2x + \frac{3}{4} > 0$.

Resp. $V = (\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$.

Equações Biquadradas

Definição 23. Uma **equação biquadrada em** x é uma equação com duas variáveis x, uma com grau 4 e outra com grau 2, ou seja, é toda equação do tipo:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \tag{3.35}$$

com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Observação. Se $a = 0$, então a equação (3.21) torna-se uma equação do segundo grau da forma:

$$bx^2 + c = 0,$$

cuja solução é dada pelo Teorema (2).

Podemos aplicar a fórmula de Baskara para resolver uma equação biquadrada?

Não podemos aplicar a fórmula de Baskara diretamente a uma equação biquadrada. Na verdade, para determinar o conjunto solução de tais equações é preciso transformá-las em uma equação do segundo grau.

Solução de uma equação biquadrada

Através da substituição $y = x^2$ reduzimos uma equação biquadrada para um equação do segundo grau. Depois utilizarmos o método de Baskara para obtermos as raízes. De fato, como $x^4 = (x^2)^2$, segue que:

$$0 = a(x^2)^2 + bx^2 + c \overset{y=x^2}{=} ay^2 + by + c.$$

Após a substituição $y = x^2$, obtemos a equação do segundo grau:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Agora, aplicando o Teorema (2), temos as soluções:

$$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Agora, para obtermos as soluções da equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$, temos que resolver duas novas equações do segundo grau dadas por:

$$x^2 = y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{3.36}$$

e

$$x^2 = y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{3.37}$$

Aplicando novamente o Teorema (2), obtemos que as soluções das equações (3.36) e (3.37) são dadas por:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}, x_2 = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}, x_3 = \sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \text{ e } x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}.$$

Assim, concluímos que o conjunto solução da equação biquadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ é dado por:

$$S = \left\{ \sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}, -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}, \sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}, -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \right\}.$$

Exemplo 61. Encontre o conjunto solução da equação biquadrada $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Solução. Primeiramamente, fazemos a substituição $y = x^2$ para obtermos uma equação quadrática na variável y. Veja abaixo:

$$0 = x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = y^2 - 5y + 4$$

$$\Downarrow$$

$$0 = y^2 - 5y + 4.$$

Vamos agora, encontrar as soluções da equação $0 = y^2 - 5y + 4$. Como,

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \\
&= 25 - 16 \\
&= 9,
\end{aligned}$$

seque do Teorema (2) que:

$$x^2 = y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \tag{3.38}$$

e

$$x^2 = y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1. \tag{3.39}$$

Aplicando novamente o Teorema (2), obtemos que as soluções das equações (3.38) e (3.39) são dadas por:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{9}}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-5 + \sqrt{9}}{2}} = -\sqrt{4} = -2$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-5 - \sqrt{9}}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

e

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-5 - \sqrt{9}}{2}} = -\sqrt{1} = -1$$

Assim, concluímos que o conjunto solução da equação biquadrada $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ é dado por:

$$S = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Determine o conjunto solução da equação biquadrada $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

Resp. $S = \{-4, -3, 3, 4\}$.

Módulo 4
O Teorema de Pitágoras

No término desta unidade o aluno estudioso estará familiarizado como os seguintes conceitos:

▷ Enunciado e algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras;

▷ Reciproca do Teorema de Pitágoras: ternos pitagóricos;

▷ Generalizações do Teorema de Pitágoras.

Leitura Complementar

Prezado aluno, para melhor compreensão deste módulo leia paralelamente os seguintes textos:

1. Rich, B., Schmidt P. A., *Geometria*, Coleção Schaum, Ed. Bookman, 3^a Edição, 2000.
2. Barbosa, J. L. M., *Geometria euclidiana plana*, Sociedade Brasileira de Matemática.
3. Carvalho, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C. e Wagner, E. , *A matemática do ensino médio*, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

Noções básicas sobre triângulos

Considere o triângulo retângulo ABC (ângulo de 90° em B) de lados a, b e c dado pela figura:

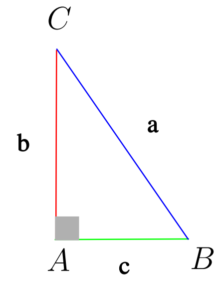


FIGURA 4.1: Triângulo retâgulo

Chamamos de **hipotenusa** o lado oposto ao ângulo reto. Os lados que formam o ângulo reto são chamados **catetos**.

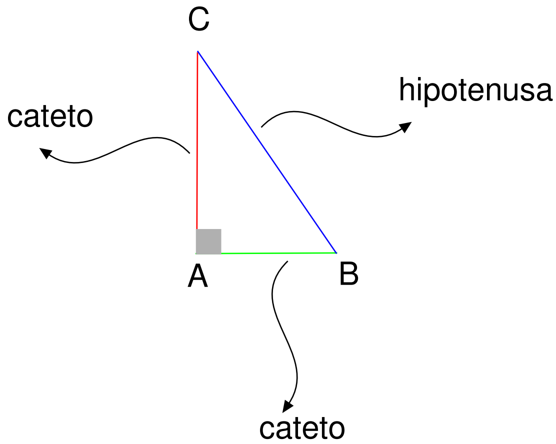


FIGURA 4.2: Hipotenusa e Catetos

Enunciados do Teorema de Pitágoras

Enunciado 1: relacionando comprimentos. Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Enunciado 2: relacionando áreas. Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa, é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos.

Traduzindo o enunciado 2 através da figura 4.3, obtemos que a área do quadrado azul é sempre igual a soma das áreas dos quadrados vermelho e verde.

Ambos os enunciados são descritos matemáticamente da seguinte forma:

Teorema de Pitágoras. Considere ABC um triângulo retângulo. Se b é a medida de hipotenusa e se a e c são as medidas dos catetos , então:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

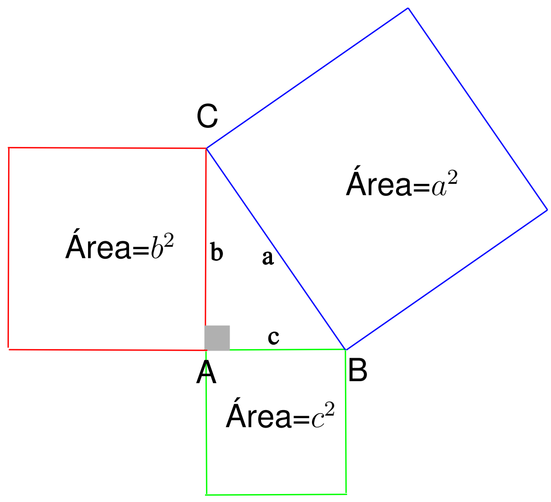
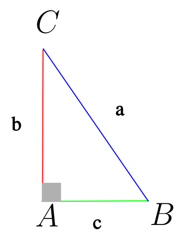


FIGURA 4.3: Teorema de Pitágoras

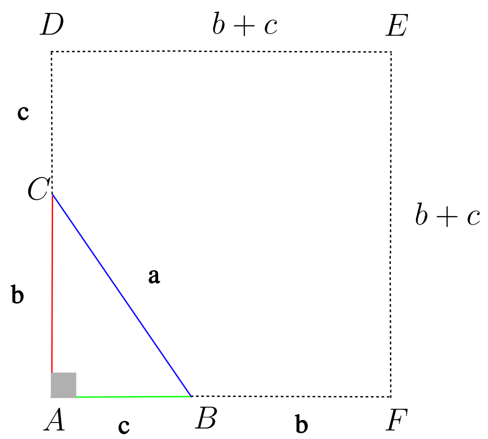
Prova do Teorema de Pitágoras

PROVA 1: COMPARAÇÃO POR ÁREAS

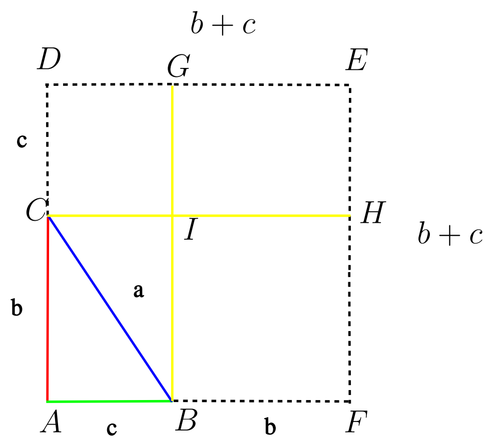
Considere o triângulo retângulo ABC de lados a, b e c dado pela figura:



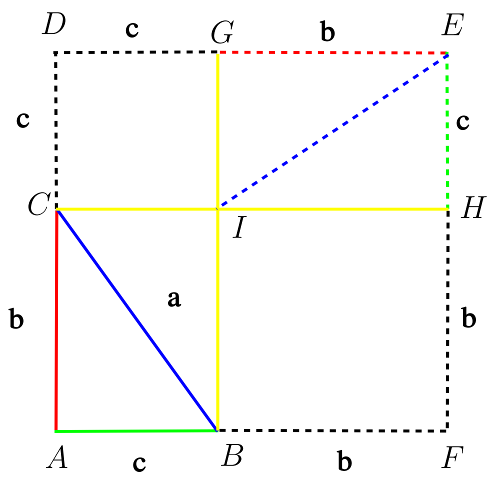
Utilizando a figura acima podemos construir um quadrado AFED de lado $b + c$ da seguinte forma: soma-se ao lado AC do triângulo ABC de comprimento b, a quantidade c (onde c é o comprimento do lado AB do triângulo ABC), obtendo a figura:



Traçando pelo ponto B um seguimento paralelo ao lado AD e traçando pelo ponto C outro seguimento paralelo ao lado AF do quadrado obtemos os retângulos $IHEG$ e $ABIC$ como mostra a figura:



Dividindo o retângulo $IHEG$ em dois triângulos retângulos pela diagonal, tem-se três triângulos retângulos GIH, HEI e IBC semelhantes ao triângulo inicial ABC.



Note que:

$$\begin{aligned}
\text{Área do triângulo } ABC &= \frac{c \cdot b}{2} \\
\text{Área do triângulo } GIE &= \frac{c \cdot b}{2} \\
\text{Área do triângulo } HEI &= \frac{c \cdot b}{2} \\
\text{Área do triângulo } IBC &= \frac{c \cdot b}{2}.
\end{aligned}$$

Somando a área dos quatro triângulos retângulos, segue:

$$S = \frac{c \cdot b}{2} + \frac{c \cdot b}{2} + \frac{c \cdot b}{2} + \frac{c \cdot b}{2} = \frac{4 \cdot c \cdot b}{2} = 2 \cdot c \cdot b.$$

A área do quadrado AFRD contruído a partir do triângulo ABC é dada por:

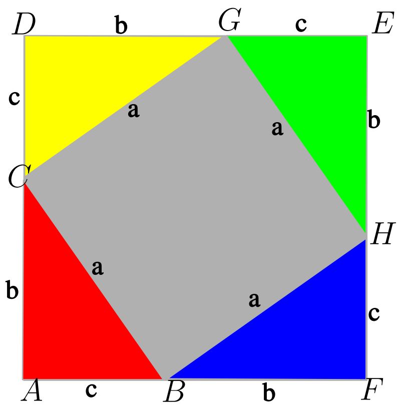
$$\begin{aligned} \text{Área do quadrado } AFED &= (b+c)\cdot(b+c) = b^2+bc+cb+c^2 \\ &= b^2+2ac+c^2. \end{aligned}$$

Algebricamente, subtraindo a área dos quatro triângulos retângulos do quadrado AFRD tem-se:

$$A_1 = \text{Área do quadrado } AFED - S = (b^2+2ac+c^2) - 2ac = b^2+c^2. \quad (4.1)$$

Observação. Assim, podemos concluír que dado um quadrado de lado $b+c$ se retirarmos desse quadrado quatro triângulos retângulos de mesma área $\frac{bc}{2}$ obtemos uma figura geométrica cuja área será b^2+c^2.

Por outro lado, geométricamente, ao retirarmos do quadrado AFED quatro triângulos retângulos ABC FHB, EGH, e DCG, obtemos a figura:



A área da figura resultante é a área de um quadrado de lado a, isto é,

$$A_2 = \text{Área}(\square AFED) - \text{Área}(4\Delta \text{ retângulo }) = \text{Área}(\square BHGC) = a^2. \quad (4.2)$$

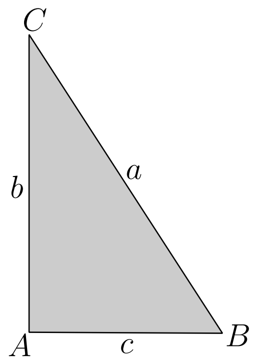
Agora, segue da Observação (4) que $A_1 = A_2$, ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

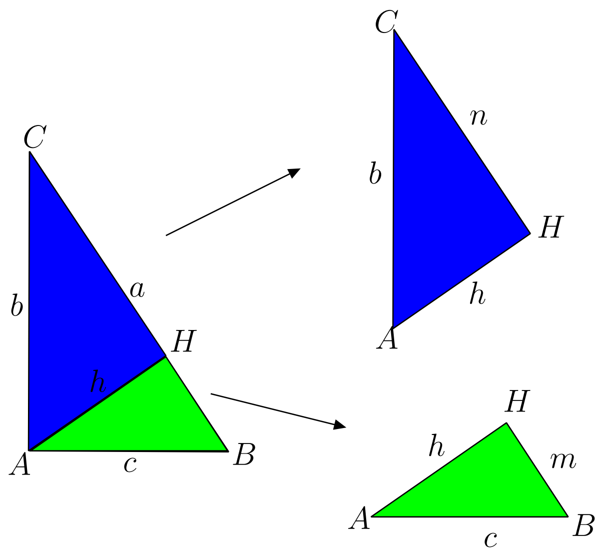
concluindo assim, a primeira prova do Teorema de Pitágoras.

Prova 2: semelhança de triângulos

Partimos inicialmente de um triângulo retângulo ΔABC de lados a, b e c.



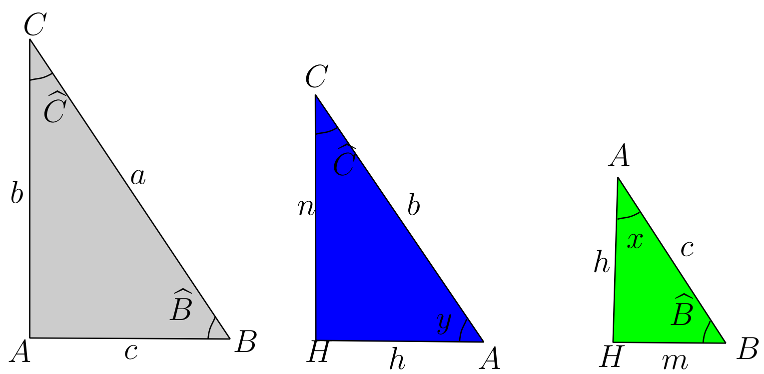
Traçamos um segmento que parte do ângulo A e chega até o lado BC do triângulo ΔABC através do ponto H e, observamos, o surgimento de dois novos triângulos:



Note que o seguimento AC de comprimento a foi dividido em dois outros segmentos, BH e HC de tamanhos m e n respectivamente, isto é,

$$a = m + n.$$

Objetivo: Mostrar que os triângulos ΔHBA, ΔHAC são semelhantes ao triângulo ΔABC.



Os triângulos HAC e ABC são semelhantes, pois ambos têm um ângulo reto, compartilham o mesmo ângulo $\widehat{B}$ e, além disso, o terceiro ângulo é o mesmo em ambos os triângulos

$$\left\{\begin{array}{lcl} \widehat{B}+\widehat{C}+90^\circ & = & 180^\circ \\ \widehat{C}+90^\circ+y & = & 180^\circ \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \widehat{B}+\widehat{C} & = & 90^\circ \\ \widehat{C}+y & = & 90^\circ \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} \widehat{B}+\widehat{C} & = & 90^\circ \\ \widehat{C} & = & 90^\circ - y \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\widehat{B}+(90^\circ - y) = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B} = -90^\circ + y + 90^\circ \Rightarrow \widehat{B} = y.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, mostramos que o triângulo HBA também é semelhante ao triângulo ABC.

Como os triângulos são semelhantes temos as seguintes igualdades:

$$\frac{b}{n} = \frac{a}{b} \text{ e } \frac{c}{m} = \frac{a}{c}$$

o que implica que:

$$na = b^2 \text{ e } ma = c^2.$$

Assim,

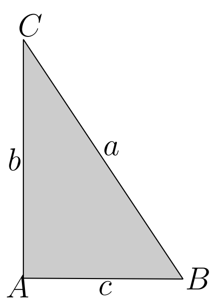
$$b^2 + c^2 = na + ma = (m+n)a.$$

Agora, como $m + n = a$, temos que:

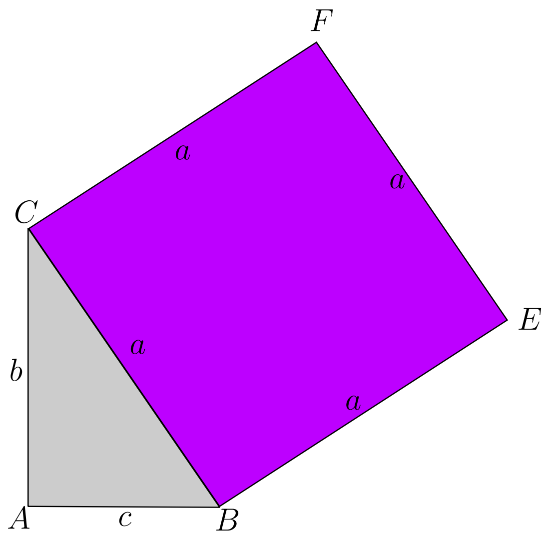
$$b^2 + c^2 = (m+n)a = aa = a^2.$$

PROVA 3: ALGÉBRICA

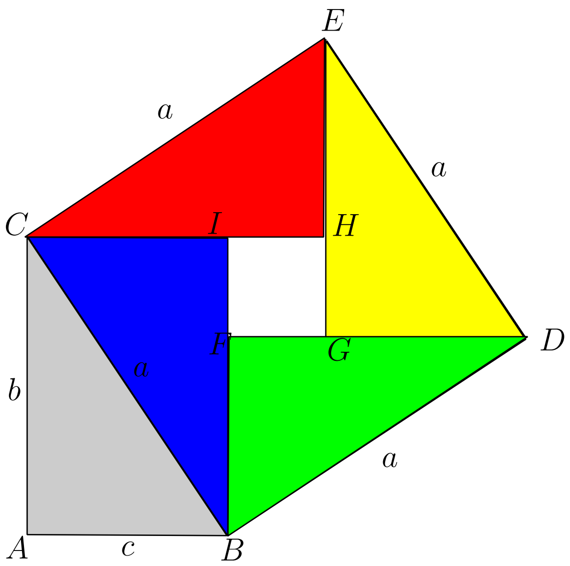
Partimos inicialmente de um triângulo retângulo ΔABC de lados a, b e c.



Sob a hipotenusa do triângulo ΔABC construímos um quadrado de lado a.



O próximo passo agora é encaixar dentro do quadrado $\Box BEFC$ o maior número possível de triângulos ΔABC.



Dessa forma, a área do quadrado $\Box BEFC$ está relacionada com a área dos triângulos ΔFDB, ΔGED, ΔHCE e ΔIBC e a área do quadradro $\Box FGHI$. Note que o lado CH do triângulo ΔHCE é a soma dos seguimentos CI e IH. Como CI mede c e o seguimento CH mede b temos que o seguimento IH mede $b - c$. Assim sendo, concluímos que o lado do quadrado $\Box FGHI$ mede $b - c$.

Sendo as áreas dos triângulos todas iguais a $\dfrac{bc}{2}$, segue que

$$\text{Área}(\Box BEFC) = 4\left(\frac{bc}{2}\right) + (b-c)(b-c)$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = 2bc + b^2 - bc - cb + c^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2$$

$$\Downarrow$$
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Exemplo 62. Num triângulo retângulo de cateto 24 cm, a diferença entre a hipotenusa e o segundo cateto é de 12 cm. Determine a medida dos lados.

Solução. Considerando h e c a hipotenusa e o cateto desconhecidos, obtemos:

$$h - c = 12.$$

Dessa forma,

$$h = 12 + c.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, segue que:

$$h^2 = 24^2 + c^2.$$

Como $h = 12 + c$, temos a igualdade:

$$(12+c)^2 = 8^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad 144 + 24c + c^2 = 576 + c^2 \quad \Rightarrow \quad 144 + 24c + \cancel{c^2} = 576 + \cancel{c^2} \quad \Rightarrow$$

$$144 + 24c = 576 \quad \Rightarrow 24c = 432 \quad \Rightarrow c = \frac{432}{24} \quad \Rightarrow c = 18.$$

Portanto, os lados do triângulo são 30 cm, 24 cm e 18 cm.

Atividades Texto Básico

Teste seu conhecimento. A diagonal de um quadrado mede 8 cm. Qual é seu perímetro?

Resp. 8 cm.

Recíproca do Teorema de Pitágoras: ternos pitagóricos

Na seção anterior, mostramos de três formas diferentes que dado um triângulo retângulo ABC com AB=c, BC=a, CA=b e $\widehat{A} = 90°$, então o quadrado da hipotenusa é sempre igual à soma dos quadrados dos catetos, isto é, $a^2 = b^2 + c^2$.

Nesta seção, nosso objetivo é responder à seguinte questão:

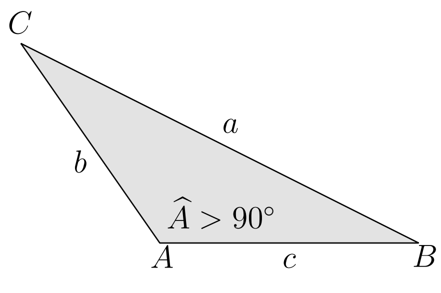
> Se a, b e c são números reais positivos satisfazendo a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, então existe um triângulo retângulo ABC, com AB=c, BC=a, CA=b e $\widehat{A} = 90°$?

A prova deste resultado será feita por contradição, isto é, vamos supor que se a, b e c são números reais positivos satisfazendo a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, então **não** existe um triângulo retângulo ABC, com AB=c, BC=a, CA=b e $\widehat{A} = 90°$ e chegaremos a uma contradição.

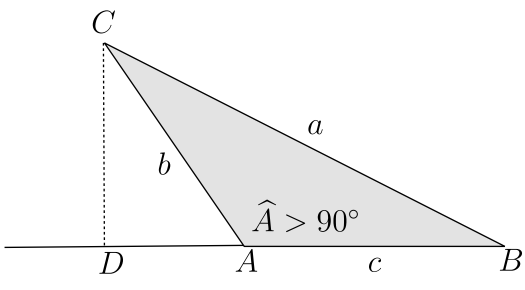
Suponha por contradição que existam números reais positivos a, b e c satisfazendo a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$ e considere existência de um triângulo ABC, com AB=c, BC=a, CA=b e $\widehat{A} \neq 90°$. Sendo $\widehat{A} \neq 90°$ temos duas possibilidades: ou $\widehat{A} > 90°$ ou $\widehat{A} < 90°$.

Caso: $a^2 = b^2 + c^2$,AB=c, BC=a, CA=b e $\widehat{A} > 90°$.

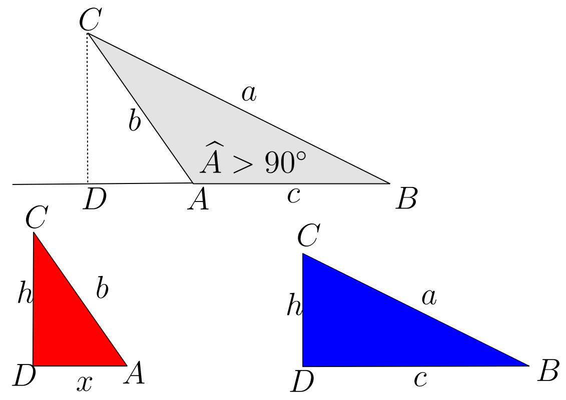
Se $\widehat{A} > 90°$, então o triângulo ABC, com AB=c, BC=a, CA=b será representado pela figura abaixo.



Note que a projeção do vértice C cai fora do segmento AB como mostra a figura



Considerando $AD = x$ e $CD = h$ obtemos dois novos triângulos retângulos DAC e DBC.



Como DAC e DBC são triângulos retângulo temos:

$$\begin{cases} b^2 &= h^2 + x^2 \\ a^2 &= h^2 + (x+c)^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 &= h^2 + x^2 \\ a^2 &= h^2 + x^2 + 2xc + c^2. \end{cases}$$

Combinando as duas equações obtemos

$$a^2 = \overbrace{h^2 + x^2}^{=b^2} + 2xc + c^2 = b^2 + 2xc + c^2.$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = b^2 + 2xc + c^2.$$

Agora, como $2xc > 0$ (comprimentos dos lados de um triângulo), segue que:

$$a^2 = b^2 + 2xc + c^2 > b^2 + c^2$$

$$\Downarrow$$

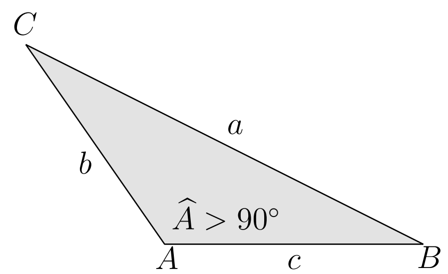
$$a^2 > b^2 + c^2$$

o que é uma contradição uma vez que por hipótese temos que $a^2 = b^2 + c^2$.

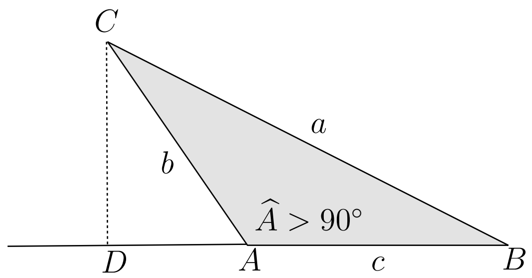
Observe que a contradição surgiu ao considerarmos $\widehat{A} > 90°$. Assim, concluímos que $\widehat{A} = 90°$ e, portanto, a existência do triângulo retângulo está garantida.

Caso: $a^2 = b^2 + c^2$,AB=c, BC=a, CA=b e $\widehat{A} < 90°$.

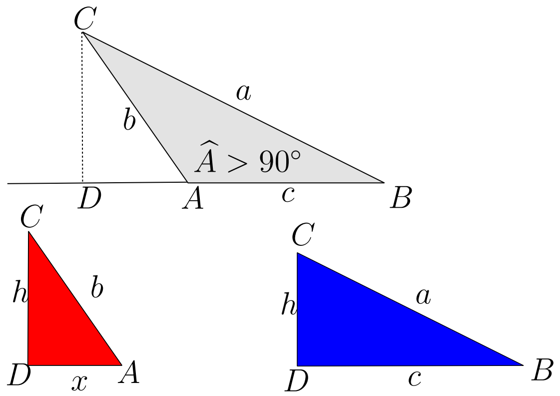
Se $\widehat{A} < 90°$, então o triângulo ABC, com AB=c, BC=a, CA=b será representado pela figura abaixo.



Note que a projeção do vértice C cai fora do segmento AB como mostra a figura.



Considerando $AD = x$ e $CD = h$ obtemos dois novos triângulos retângulos DAC e DBC.



Como DAC e DBC são triângulos retângulo temos:

$$\begin{cases} b^2 &= h^2 + x^2 \\ a^2 &= h^2 + (x+c)^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 &= h^2 + x^2 \\ a^2 &= h^2 + x^2 + 2xc + c^2. \end{cases}$$

Combinando as duas equações obtemos:

$$a^2 = \overbrace{h^2 + x^2}^{=b^2} + 2xc + c^2 = b^2 + 2xc + c^2.$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = b^2 + 2xc + c^2.$$

Agora, como $2xc > 0$ pois são comprimentos dos lados de um triângulo segue que

$$a^2 = b^2 + 2xc + c^2 > b^2 + c^2$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 > b^2 + c^2$$

o que é uma contradição uma vez que por hipótese temos que $a^2 = b^2 + c^2$.

Observe que a contradição surgiu ao considerarmos $\widehat{A} > 90°$. Assim, concluímos que $\widehat{A} = 90°$ e, portanto, a existência do triângulo retângulo está garantida.

Construção de triângulos retângulo: ternos pitagóricos

Nesta seção, dados três números reais positivos a, b e c estudaremos em que condições a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$ é satisfeita, isto é, quando a, b e c geram um triângulo retângulo. Para este fim, necessitamos de alguns conceitos básicos que fundamentam tal estudo.

Definição 24. Sejam a, b e c números inteiros positivos satisfazendo $a > b$ e $a > c$. Dizemos que a terna (a, b, c) é um terno pitagórico se:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Exemplo 63. As ternas $(21, 28, 35)$ e $(372, 925, 977)$ são ternos pitágoricos. De fato,

$$21^2 + 28^2 = 441 + 784 = 1225 = 35^2$$

$$372^2 + 925^2 = 138.384 + 855.625 = 994009 = 997^2$$

Observação. O triângulo de lados 372, 925, 977 é o triângulo retângulo de maior perímetro que tem lados menores que 1000.

Definição 25. Considere o terno pitagórico (a, b, c). Dizemos que (a, b, c) é um terno pitagórico primitivo se $\text{mdc}(b, c) = 1$.

Exemplo 64. A terna $(21, 28, 35)$ não representa um terno pitagórico primitivo. Note que, se representarmos por $D(21)$, $D(28)$ os divisores de 21 e 28 respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} D(21) &= \{1, 3, 7, 21\} \\ D(28) &= \{1, 2, 4, 7, 28\}. \end{aligned}$$

Assim, $\text{mdc}(21, 28) = 7$ e, portanto, segue da definição 25 que a terna não é primitiva. Já a terna $(33, 56, 65)$ é um terno pitagórico uma vez que sendo:

$$\begin{aligned} D(33) &= \{1, 3, 11, 33\} \\ D(56) &= \{1, 2, 4, 7, 8, 28, 56\} \end{aligned}$$

obtemos $\text{mdc}(33, 56) = 1$.

Observação. O terno pitagórico $(21, 28, 35)$ foi obtido da terna $(3, 4, 5)$ multiplicando cada um dos elementos por 7. Observe que a terna $(3, 4, 5)$ é um terno pitagórico primitivo.

Proposição 1. Se (a, b, c) é um terno pitagórico primitivo e k é um inteiro positivo, então (ka, kb, kc) é um terno pitagórico, mas não primitivo.

Demonstração. Primeiramente mostraremos que (ka, kb, kc) é um terno pitagórico. De fato,

$$(kb)^2 + (kc)^2 = k^2b^2 + k^2c^2 = k^2(b^2 + c^2).$$

Agora, como (a, b, c) é um terno pitagórico primitivo temos:

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Assim, segue que:

$$(kb)^2 + (kc)^2 = k^2(b^2 + c^2) = k^2a^2 = (ka)^2.$$

Logo, $(kb)^2 + (kc)^2 = (ka)^2$ e, portanto, (ka, kb, kc) é um terno pitagórico.

Resta provarmos, que (ka, kb, kc) não é primitivo. Note que os números kb e kc apresentam além do 1 o k como divisores. Assim, $\mathrm{mdc}(kb, kc) \neq 1$.

Portanto, (ka, kb, kc) não pode ser um terno pitagórico primitivo. ■

ATB Atividades Texto Básico

Teste seu conhecimento. As ternas $(11, 13, 15)$ e $(33, 26, 30)$ são ternos primitivos.

Resp. A primeira terna é um terno pitagórico primitivo, mas a segunda não.

Construção De Ternos Pitagóricos: Fórmula De Euclides

Teorema 3. Se m e n são números inteiros positivos tais que $m > n$, então o terno (a, b, c), com:

$$\begin{aligned} a &= m^2 + n^2 \\ b &= m^2 - n^2 \\ c &= 2mn \end{aligned}$$

é um terno pitagórico.

Demonstração. Note que:

$$b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^4 - 2m^2n^2 + n^4) + (4m^2n^2) = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$

Por outro lado,

$$a^2 = (m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4.$$

O que mostra que:

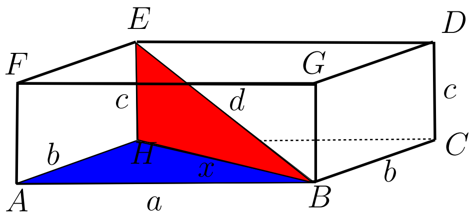
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

∎

Generalizações Do Teorema De Pitágoras

Primeira Generalização

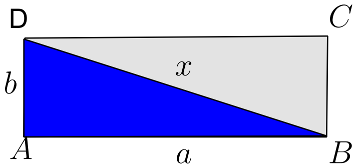
O Teorema de Pitágoras pode ser estendido ao espaço de três dimensões, considerando um bloco retangular cuja base é um retângulo de medidas a e b, altura c e diagonal de comprimento d como mostra a figura:



Neste contexto temos a seguinte relação:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

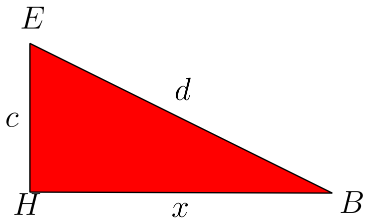
Demonstração. Observe que na base do bloco encontra-se um retângulo ABCH cujo lado maior é b, lado menor a e a diagonal é x.



Do triâgulo ABD temos:

$$x^2 = a^2 + b^2.$$

Por outro lado, no plano vertical temos o triângulo retângulo HBE como mostra a figura:



Assim, obtemos:

$$d^2 = x^2 + c^2.$$

Combinando as duas igualdades segue que:

$$d^2 = x^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

■

Exemplo 65. Determina o comprimento da diagonal de um paralelepípedo cujas dimensões são 12 cm, 6 cm e 8 cm.

Solução. Sendo as dimensões do paralelepípedo 12 cm, 6 cm e 8 cm, note que:

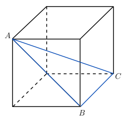
$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ &= 12^2 + 6^2 + 8^2 \\ &= 144 + 36 + 64 \\ &= 244. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$d^2 = 244 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{244} \quad \Rightarrow \quad d \cong 15,6.$$

Portanto, o comprimento da diagonal de um paralelepípedo cujas dimensões são 12 cm, 6 cm e 8 cm é $15,6$ cm.

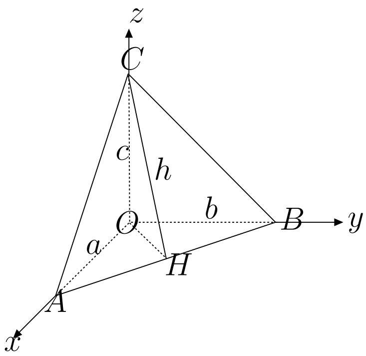
Teste seu conhecimento. A aresta do cubo da figura mede 4 cm de comprimento. Calcula o perímetro do triângulo ABC.



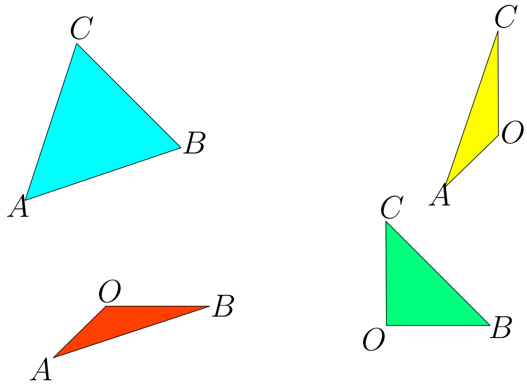
Resp. $\cong 16,6\text{cm}$.

Segunda Generalização

No plano xyz considere o tetraedro $OABC$ dado pela figura:



Decompondo o tetraedro nos triângulos ABC, OAB, OBC e OCA obtemos:



Condiderando a área do triângulo ABC igual a S, a do triângulo OAB igual a S_1, a do triângulo OBC igual a S_2 e a do triângulo OCA igual a S_3 temos a seguinte versão do Teorema de Pitágoras

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Demonstração. Note que as áreas dos quatro triângulos são dadas por:

$$S = \frac{AB \cdot h}{2}, \quad S_1 = \frac{a \cdot b}{2}, \quad S_2 = \frac{b \cdot c}{2}, \quad S_3 = \frac{a \cdot c}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &= \left(\frac{a \cdot b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b \cdot c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a \cdot c}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a^2 \cdot b^2}{4}\right) + \left(\frac{b^2 \cdot c^2}{4}\right) + \left(\frac{a^2 \cdot c^2}{4}\right) \\ &= \frac{a^2 \cdot b^2 + b^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot c^2}{4} \\ &= \frac{a^2 \cdot b^2 + c^2 \cdot (b^2 + a^2)}{4}. \end{aligned}$$

Segue do triângulo OAB que:

$$AB^2 = a^2 + b^2.$$

Dessa forma,

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{a^2 \cdot b^2 + c^2 \cdot AB^2}{4}.$$

Recorde que em um triângulo retângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura a ela relativa. Portanto, no triâgulo retângulo OAB:

$$a \cdot b = AB \cdot x.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &= \frac{AB^2 \cdot x^2 + c^2 \cdot AB^2}{4} \\ &= \frac{AB^2 \cdot (x^2 + c^2)}{4}. \end{aligned}$$

Do triângulo OHC segue que:

$$x^2 + c^2 = h^2.$$

Portanto,

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad = \quad \frac{AB^2 \cdot h^2}{4} = \left(\frac{AB \cdot h}{2}\right)^2 = S^2$$

■

Módulo 5
Áreas

No término desta unidade o aluno pesistente estará familiarizado com os conceitos:

▷ Unidade de área;

▷ Área do retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio;

▷ Área do círculo;

▷ Cáculo do π pelo método dos polígonos.

Leitura Complementar

Prezado aluno, para melhor compreensão deste módulo leia paralelamente os seguintes textos:

1. Rich, B., Schmidt P. A., *Geometria*, Coleção Schaum, Ed. Bookman, 3^a Edição, 2000.

2. Carvalho, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C. e Wagner, E. , *Temas e Problemas Elementares*, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

3. Lima, E. L, *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

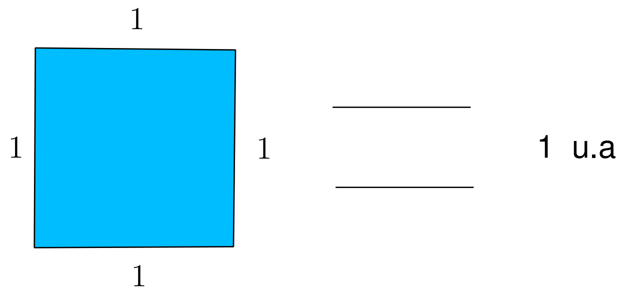
4. Lima, E. L, *Áreas e Volume*, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1985.

Unidade de Comprimento de Área

As unidades de comprimeto mais usadas são quilômetro (km), hectômetro (hm), decâmetro (dam), metro (m), decímetro (dm), centímetro (cm) e milímetro (mm). A unidade de medida de comprimento adotada pelo Sistema Internacional é o **metro**. Na tabela abaixo são estabelecidos alguns critérios de conversão.

km	dm	dam	m	dm	cm	mm
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

Quando não houver necessidade de explicitar uma unidade de comprimento será utilizada a notação $1\ u.c$, para descrever uma unidade de comprimento. Convencionaremos como unidade de área padrão o quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. O quadrado representado na figura abaixo é chamado **quadrado unitário**.



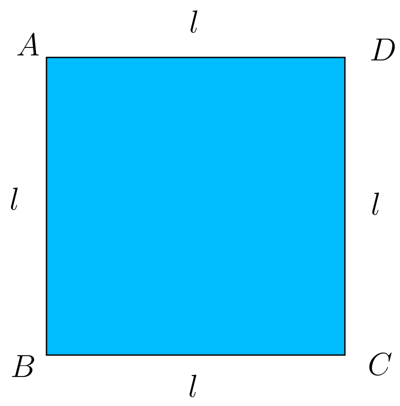
Assim, observamos que uma unidade de área é representada por uma unidade de comprimento ao quadrado, isto é,

$$1\ u.a = 1\ (u.c)^2.$$

Por exemplo, se o lado do quadrado for medido em decímetro, hectômetro ou até mesmo milímetro teremos um quadrado unitário de área $1\ cm^2$, $1\ hm^2$ e $1\ mm^2$ respectivamemte.

Área do Quadrado

Considere o quadrado $ABCD$ de lado l, como mostra a figura.



Então, a área do quadrado $ABCD$ é dada por:

$$\text{Área}(ABCD) = l \cdot l = l^2.$$

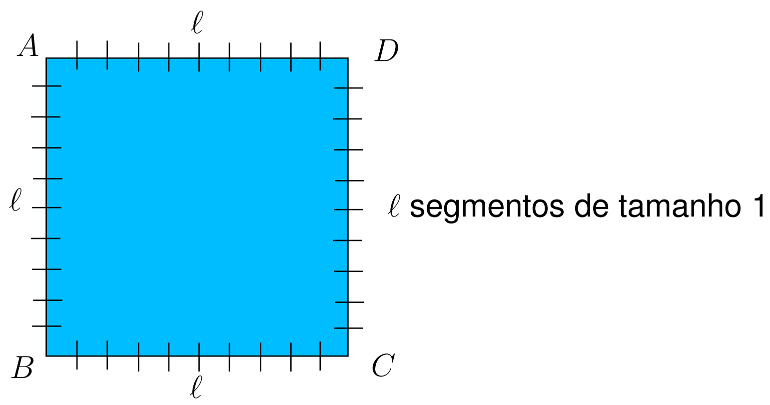
Prova. A prova deste resultado será dividida em quatro casos.

Caso 1: $\ell \in \mathbb{N}$.

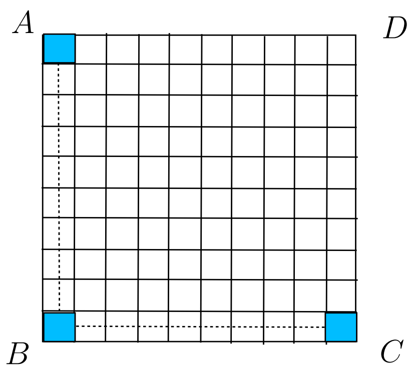
Sendo ℓ um número inteiro, obtemos:

$$\ell \;=\; \ell.1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\ell - vezes}.$$

Assim, podemos decompor os lados AB, BC, CD e DA em l segmentos de comprimento 1.



Traçando paralelas horizontais e verticais em cada seguimento marcado sobre os lados do quadrado, teremos a figura inicial fracionada em vários quadrados unitários.

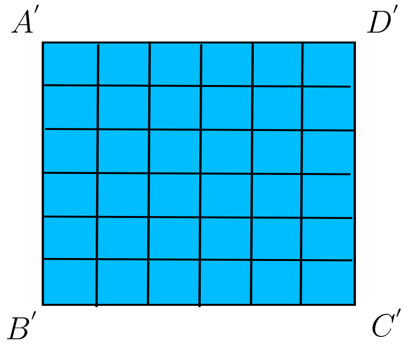


l quadrados unitários

Assim, para computar a área do quadrado $ABCD$ necessitamos contabilizar o número de quadrados unitários utilizados para preencher o quadrado de lado ℓ.

Como determinamos o número de quadrados unitários que estão preenchendo o quadrado $ABCD$ de lado ℓ?

Vamos responder esta pergunta através de um exemplo concreto. Considere o quadrado de lado $\ell = 6\ u.c$. Repetindo o processo descrito anteriormente obtemos:



6 quadrados unitários

Assim, temos 36 quadrados unitários preenchendo o quadrado $A'B'C'D'$. Note que, sendo 6 o lado do quadrado, o número de quadrados unitários obtidos é expresso através da relação $6 \cdot 6$, ou seja, o lado do quadrado $A'B'C'D'$ elevado ao quadrado.

Respondendo a pergunta, o número de quadrados unitários que estão preenchendo o quadrado $ABCD$ de lado ℓ será dado pela relação:

$$\ell \cdot \ell = \ell^2.$$

Dessa forma, representando por U cada quadrado unitário utilizado para preencher o quadrado $ABCD$ temos:

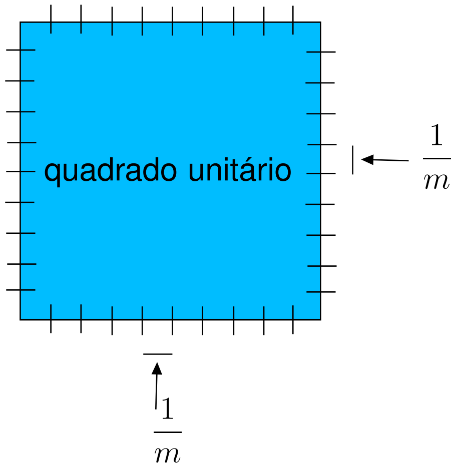
$$\begin{aligned}
\text{Área}(ABCD) &= \text{Soma das áreas dos quadrados unitários} \\
&\quad \text{ que o preenche} \\
&= \ell^2 \cdot \text{Área}(U) \\
&= = \ell^2 \cdot 1 \\
&= = \ell^2.
\end{aligned}$$

Caso 2: $\ell = \dfrac{1}{m}$, com $m \in \mathbb{Z}$.

Como os lados do quadrado não são números inteiros, não podemos utilizar a mesma estratégia adotada no caso 1.

Qual estratégia adotar para calcular a área do quadrado neste caso?

Como os lados do quadrado não podem ser fracionados via retas paralelas, a estratégia é dividirmos o lado do quadrado unitário em m segmentos de mesmo tamanho.



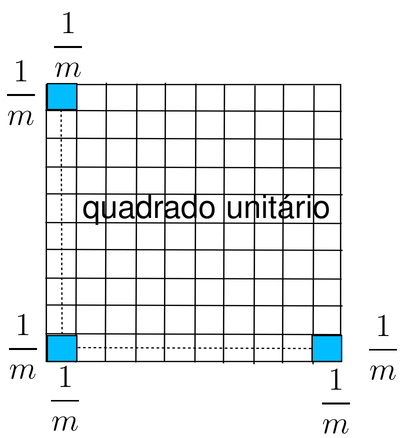
Como o lado do quadrado unitário é 1 e sendo m um número inteiro, obtemos:

$$1 = \underbrace{\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}}_{m-vezes},$$

uma vez que:

$$\underbrace{\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}}_{m-vezes} = \frac{\overbrace{1 + \cdots + 1}^{m-vezes}}{m} = \frac{m}{m} = 1.$$

Traçando paralelas horizontais e verticais em cada seguimento marcado sobre os lados do quadrado unitário, teremos o quadrado unitário dividido em vários quadrados de lado $\frac{1}{m}$.



Observe que os quadrados que preenchem o quadrado unitário U são exatamente quadrados $ABCD$ que queremos computar a área.

Assim, para computar a área do quadrado $ABCD$ necessitamos contabilizar o número de quadrados de lado $\frac{1}{m}$ utilizados para preencher o quadrado unitário. Como vimos na prova do caso 1, o número de quadrados de lado $\frac{1}{m}$ é dado pela relação

$$m \cdot m = m^2,$$

sendo m o número de seguimento de tamanho $\dfrac{1}{m}$ necessário para formar o lado do quadrado unitário.

Dessa forma, a área do quadrado de lado $\dfrac{1}{m}$ é dada pela relação:

$$\text{Área}(U) \quad = \quad m^2 \cdot \text{Área}(ABCD)$$

Como Área$(U) = 1$ temos que:

$$1 \quad = \quad m^2 \cdot \text{Área}(ABCD)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Área}(ABCD) \quad = \quad \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m}$$

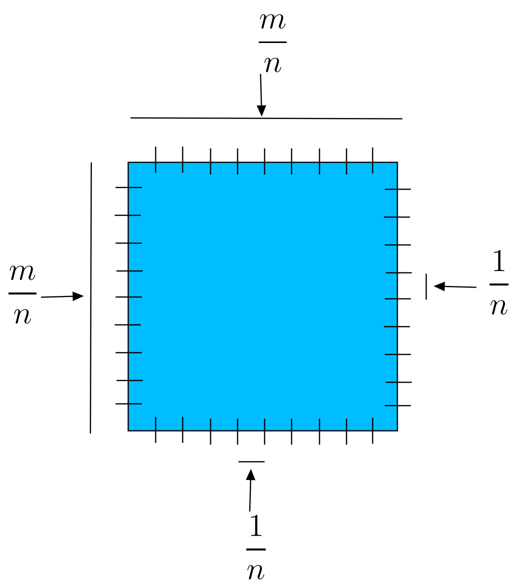
Agora, recordando que $\ell = \dfrac{1}{m}$ obtemos:

$$\text{Área}(ABCD) \quad = \quad \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m} = \ell \cdot \ell = \ell^2.$$

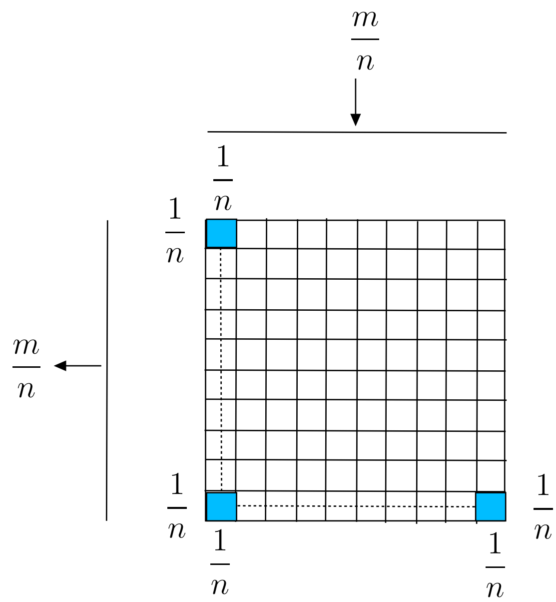
Caso 3: $\ell = \dfrac{n}{m}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$.

Como m é um número inteiro, podemos dividir o lado do quadrado $ABCD$ em m partes de tamanho $\dfrac{1}{n}$, isto é,

$$\ell = \frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m-\text{vezes}}.$$



Assim, traçando paralelas horizontais e verticais em cada seguimento marcado sobre os lados do quadrado $ABCD$, teremos um quadrado dividido em m quadrados de lado $\dfrac{1}{n}$.



Dessa forma, a área do quadrado de lado $ABCD$ é dada pela soma as áreas de todos os quadrados de lado $\frac{1}{n}$ que o preenchem. Como a área de tais pelo caso 2 é $\frac{1}{n^2}$ e existem m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$, este fato é expresso pela relação:

$$\text{Área}(ABCD) \quad = \quad m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \ell^2.$$

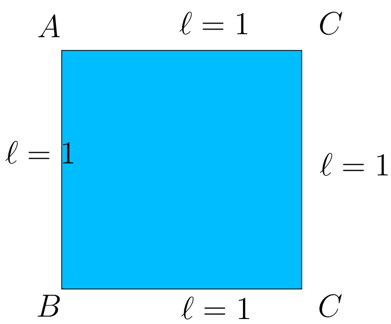
Caso 4: $\ell \in \mathbb{I}$ (conjunto dos números irracionais).

Após estudarmos os casos 1, 2 e 3, podemos concluir que todo quadrado $ABCD$ de lado $\ell \in \mathbb{Q}$ tem área expressa pela igualdade:

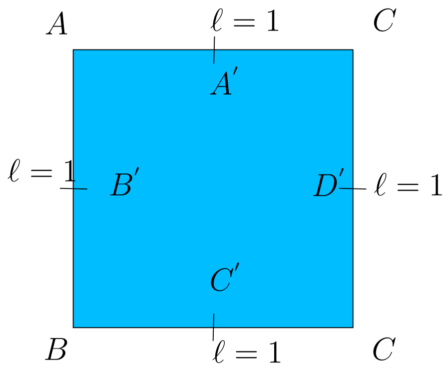
$$\text{Área}(ABCD) = \ell^2.$$

O que ocorre com a expressão da área se ℓ for um número irracional? Ou seja, existem quadrados com lados irracionais?

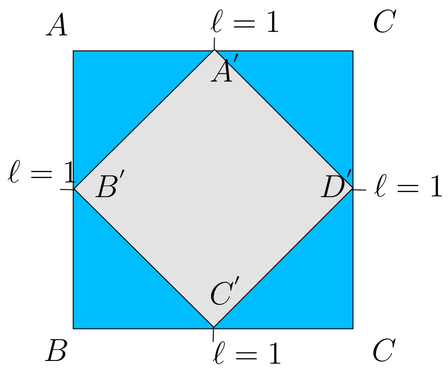
Utilizando um quadrado unitário vamos construir um quadrado cujo lado é um número irracional. Começamos por construir um quadrado unitário qualquer.



O segundo passo é dividir cada lado do quadrado unitário em dois segmentos de mesmo comprimento.

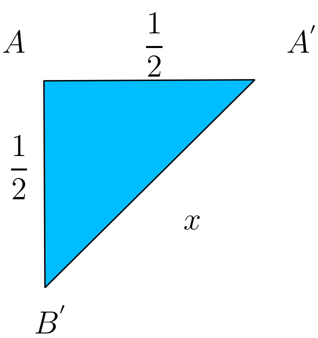


O terceiro passo é construir os seguimentos $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ e $D'A'$ formando um quadrado $A'B'C'D'$ interior ao quadrado $ABCD$.



Pergunta. Qual o comprimento do lado do quadrado $A'B'C'D'$?

Para determinarmos o lado do quadrado $A'B'C'D'$ basta encontrarmos o valor da hipotenusa do triâgnulo $AA'B'$ cujos lados $AB' = AA' = \frac{1}{2}$, uma vez que foram construidos dividindo ao meio o lado do quadrado unitário $ABCD$.



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $AA'B'$ obtemos:

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mostremos que a formula para a área do quadrado ainda é válida se o lado do quadrado for $\ell \in \mathbb{I}$, isto é,

$$\text{Área}(ABCD) = \ell^2, \text{ com } \ell \in \mathbb{I}.$$

Suponha que Área$(ABCD) < \ell^2$. Considere r um número racional inferior a ℓ, prorém, suficientemente próximo de ℓ para que se tenha:

$$\text{Área}(ABCD) < r^2 < \ell^2.$$

Porque o número r existe?

Como estamos considerando Área$(ABCD) < \ell^2$, extraindo a raiz de ambos os lados temos que:

$$\sqrt{\text{Área}(ABCD)} < \ell.$$

Como $\ell - \sqrt{\text{Área}(ABCD)} > 0$ existe um número natural n talque

$$0 < \frac{1}{n} < \ell - \sqrt{\text{Área}(ABCD)}.$$

Os números da forma $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ dividem o conjunto dos números reais em intervalos de comprimento $\frac{1}{n}$. Sendo $\frac{1}{n}$ menor que o comprimento do $\ell - \sqrt{\text{Área}(ABCD)}$ do intervalo $(\sqrt{\text{Área}(ABCD)}, \ell)$ alguns dos números $\frac{m}{n}$ devem cair dentro de $(\sqrt{\text{Área}(ABCD)}, \ell)$. Basta escolher r como sendo um dos números da forma $\frac{m}{n}$ que caem em $(\sqrt{\text{Área}(ABCD)}, \ell)$.

Agora, como $\sqrt{\text{Área}(ABCD)} < r < \ell$ elevando os termos da desigualdade ao quadrado, obtemos:

$$\text{Área}(ABCD) < r^2 < \ell^2.$$

Cosidere um quadrado $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ de lado r contido no quadrado $ABCD$. Sendo r um número racional, segue do caso 3 que a expressão para a área do quadrado $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ é dada por:

$$\text{Área}(A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}) = r \cdot r = r^2.$$

Como o quadrado $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ está contido no quadrado ABCD temos que:

$$\text{Área}(A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}) < \text{Área}(ABCD).$$

Assim sendo,

$$r^2 = \text{Área}(A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}) < \text{Área}(ABCD).$$

$$\Downarrow$$

$$r^2 < \text{Área}(ABCD).$$

Logo, temos uma contradição uma vez que $\text{Área}(ABCD) < r^2 < \ell^2$. A contradição surgiu ao considerarmos $\text{Área}(ABCD) < \ell^2$.

Por outro lado, cosidere $\ell^2 < \text{Área}(ABCD)$. Considere r um número racional superior a ℓ, porém, suficientemente próximo de ℓ para que se tenha:

$$\ell^2 < r^2 < \text{Área}(ABCD).$$

Agora, cosidere um quadrado $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ de lado r contendo o quadrado $ABCD$. Como r um número racional segue do caso 3 que a expressão para a área do quadrado $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ é dada por:

$$\text{Área}(A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}) = r \cdot r = r^2.$$

Recordando que o quadrado $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ contém o quadrado ABCD temos:

$$\text{Área}(A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}) > \text{Área}(ABCD).$$

Assim sendo,

$$r^2 = \text{Área}(A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}) > \text{Área}(ABCD).$$

$$\Downarrow$$

$$r^2 > \text{Área}(ABCD).$$

Logo, temos uma contradição, uma vez que $\ell^2 < r^2 < \text{Área}(ABCD)$. A contradição surgiu ao considerarmos Área$(ABCD) > \ell^2$.

Portanto, como a Área$(ABCD)$ não pode ser menor que ℓ^2 e nem maior que ℓ^2, então devemos ter:

$$\text{Área}(ABCD) = \ell^2, \text{ para todo } \ell \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 66. Um quadrado tem 121 m^2 de área. Qual a medida do lado?

Solução. Como a área do quadrado é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} A = \ell^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 121 = \ell^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{121} = \ell \\ &\Longleftrightarrow \quad 11 = \ell. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que o lado do quadramo é 11 m.

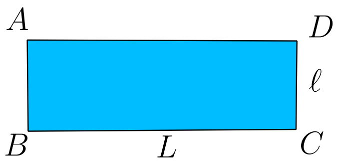
Atividades
Texto Básico

Teste seu conhecimento. Qual o valor da área de um quadrado de diagonal 12 cm.

Resp. 144 m^2.

Área do Retângulo

Considere $ABCD$ um retângulo cujo lado menor é ℓ e o lado maior é L, como mostra a figura:



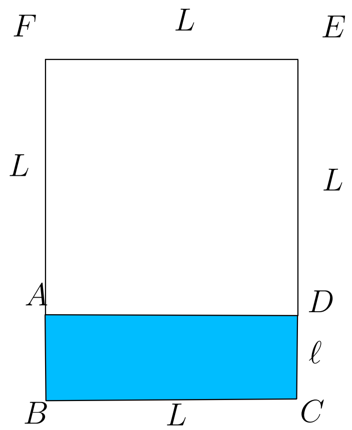
Então, a área do retântulo $ABCD$ é lado maior multiplicado pelo lado menor, isto é,

$$\text{Área}(ABCD) = \ell \cdot L.$$

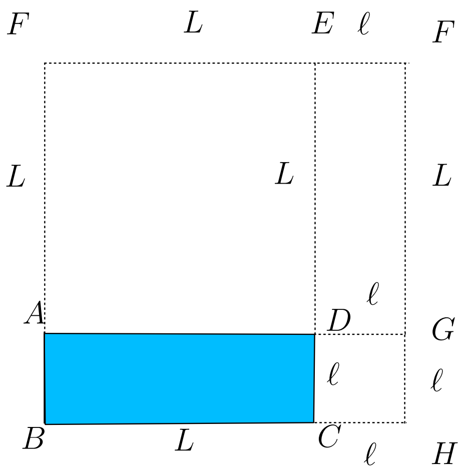
Para provar este resultado vamos utilizar a expressão da área do quadrado que já sabemos calcular, pela seção anterior. Dessa forma, precisamos relacionar a área do retângulo com a área de um quadrado.

Como relacionamos a área de um retângulo com a área de um quadrado?

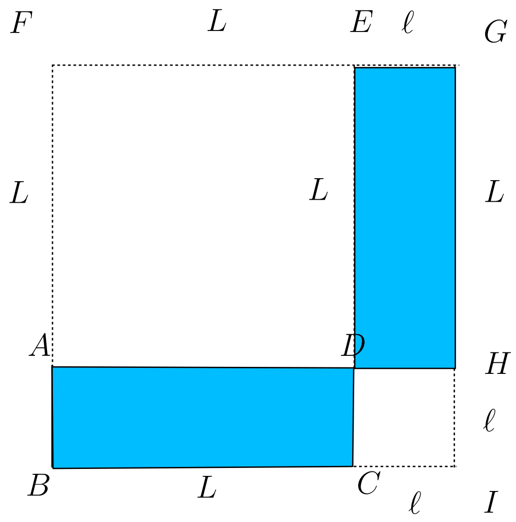
Primeiramente, acrescentamos sobre o lado menor do retângulo $ABDC$ um seguimento de comprimento L.



O próximo passo agora é acrescentar ao lado maior do retângulo $ABDC$ um seguimento de comprimento ℓ.



Observe que o retângulo $EDGI$ é o retângulo $ABCD$ na vertical.



Assim sendo, temos que a área do quadrado $FBHI$ é igual à soma das áreas dos quadrados $FADE$ e $DCHG$ mais duas vezes a área do retângulo $ABCD$, isto é,

$$\text{Área}(FBHI) = \text{Área}(FADE) + \text{Área}(DCHG) + 2 \cdot \text{Área}(EDGF).$$

Como:

$$\begin{array}{rcl} \text{Área}(FBHI) & = & (L+\ell)^2 \\ \text{Área}(FADE) & = & (L)^2 \\ \text{Área}(DCHG) & = & (\ell)^2, \end{array}$$

temos que:

$$(L+\ell)^2 = (L)^2 + (\ell)^2 + 2 \cdot \text{Área}(EDGF)$$

$$\Downarrow$$

$$L^2 + 2L\ell + \ell^2 = (L)^2 + (\ell)^2 + 2 \cdot \text{Área}(EDGF)$$

$$\Downarrow$$

$$L^2 + 2L\ell + \ell^2 - (L)^2 - (\ell)^2 = 2 \cdot \text{Área}(EDGF)$$

$$\Downarrow$$

$$2L\ell = 2 \cdot \text{Área}(EDGF)$$

$$\Downarrow$$

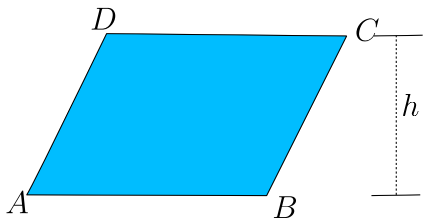
$$\frac{2L\ell}{2} = \text{Área}(EDGF)$$

$$\Downarrow$$

$$L\ell = \text{Área}(EDGF).$$

Área do Paralelogramo

Considere um paralelogramo $ABCD$ cuja base $AB = \ell$ e altura h como mostra a figura:



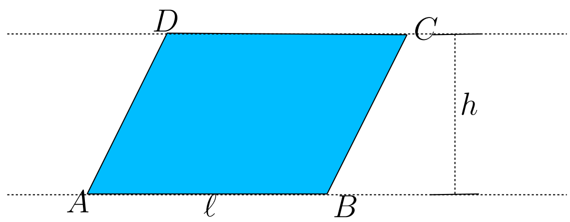
Então, a área do paralelogramo $ABCD$ é o produto da base AB pela altura h, isto é,

$$\text{Área}(ABCD) = \ell \cdot h.$$

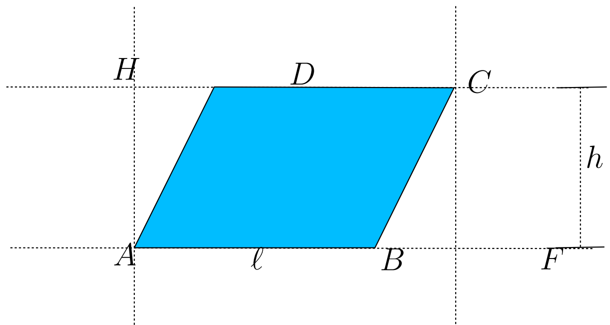
Para provar este resultado vamos utilizar a expressão da área do retângulo que já sabemos calcular, pela seção anterior. Dessa forma, precisamos relacionar a área do paralelogramo com a área de um retângulo.

Como relacionamos a área de um paralelogramo com a área de um retângulo?

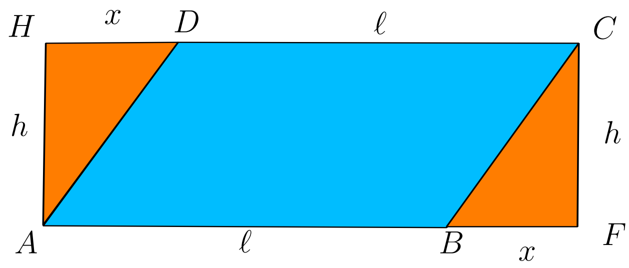
Primeiramente, traçamos duas paralelas horizontais aos lados AB e DC do paralelogramo $ABDC$.



O próximo passo, é traçar duas retas paralelas verticais aos pontos A e C do paralelogramo $ABDC$. Observe que as retas paralelas horizontais e verticais se cruzam nos pontos E e F.



Como resultado final da construção, obtemos que o paralelogramo $ABCD$ está contido dentro do retângulo $HAFC$. Além disso, notamos a presença de dois triângulos retângulos cujos lados $HD = BF = x$ e $HA = CF = h$.



Assim sendo, temos que a área do retângulo $HAFC$ é igual à soma das áreas dos triângulos HAD e FCD somado com a área do paralelogramo $ABCD$, isto é,

$$\text{Área}(HAFC) = \text{Área}(HAD) + \text{Área}(FCD) + \text{Área}(ABCD).$$

Como o lado maior do retângulo $(HAFC)$ é $x + \ell$ e o lado menor é h e a base e altura dos triângulos são respectivamente x e h, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Área}(HAFC) &= (x+\ell)\cdot h \\ \text{Área}(HAD) &= \frac{x\cdot h}{2} \\ \text{Área}(FCD) &= \frac{x\cdot h}{2}, \end{aligned}$$

temos que:

$$(x+\ell)\cdot h = \frac{x\cdot h}{2} + \frac{x\cdot h}{2} + \text{Área}(EDGF)$$

$$\Downarrow$$

$$x\cdot h + \ell\cdot h = \frac{2x\cdot h}{2} + \text{Área}(EDGF)$$

$$\Downarrow$$

$$x\cdot h + \ell\cdot h = x\cdot h + \text{Área}(EDGF)$$

$$\Downarrow$$

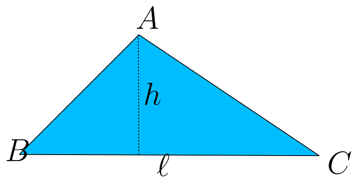
$$x\cdot h + \ell\cdot h - x\cdot h = \text{Área}(EDGF)$$

$$\Downarrow$$

$$\ell\cdot h = \text{Área}(EDGF).$$

Área do Triângulo

Considere um triângulo ABC cuja base $AB = \ell$ e algura h como mostra a figura:



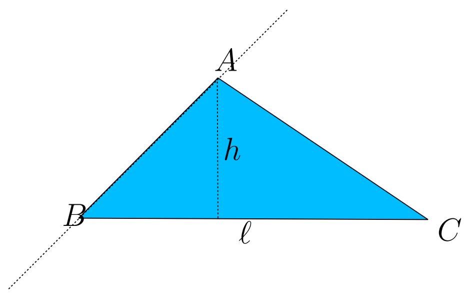
Então, a área do triângulo ABC é o produto da base AB pela altura h dividido por 2, isto é,

$$\text{Área}(ABC) = \frac{\ell \cdot h}{2}.$$

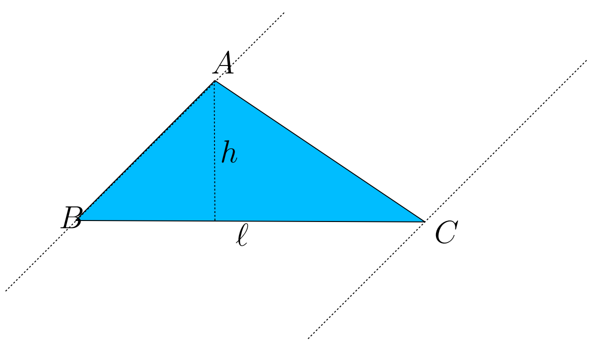
Para provar este resultado vamos utilizar a expressão da área do paralelogramo que já sabemos calcular, pela seção anterior. Dessa forma, precisamos relacionar a área do triângulo ABC com a área de um paralelogramo.

Como relacionamos a área de um triângulo com a área de um retângulo?

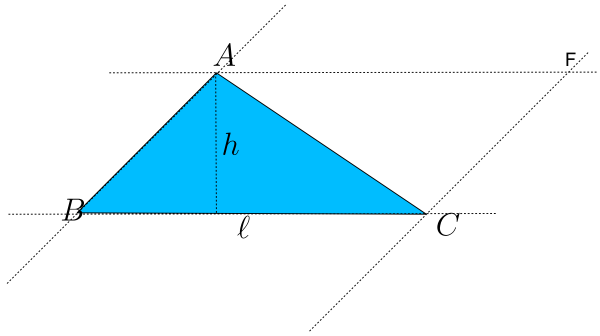
Primeiramente, traçamos uma paralela horizontal pelo lado BA do triângulo ABC.



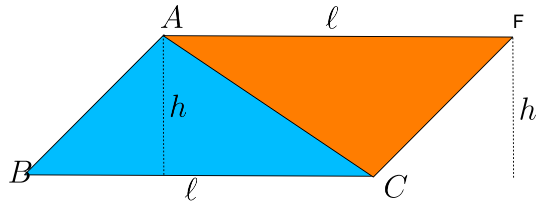
Agora, deslocamos a paralela que passa pelo lado AB, preservando a inclinação até o ponto C do triângulo ABC.



O próximo passo agora, é traçar uma reta paralela ao lado BC do triângulo ABC e desloca-lá até o ponto A de modo a interceptar a reta paralela que se encontra sob o ponto C, no ponto F.



Como resultado final da construção, obtemos que o triângulo ABC está contido no paralelogramo $ABCF$. Sendo $ABCF$ um paralelogramo observamos que $AF = BC = \ell$.



Assim sendo, temos que a área do paralelogramo $ABCF$ é igual à soma das áreas dos triângulos ABC e CFA, isto é,

$$\text{Área}(ABCF) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(CFA).$$

Como a base do paralelogramo $(ABCF)$ é ℓ e possui autura h, obtemos:

$$\ell \cdot h = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(CFA).$$

Por outro lado, note que o triângulo ABC ocupa dentro do paralelogramo $ABCF$ a mesma área que o triângulo CFA. Assim sendo, temos que:

$$\ell \cdot h = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(CFA) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(ABC)$$

$$\Downarrow$$

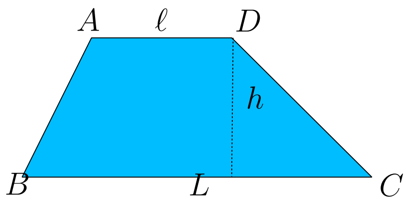
$$\ell \cdot h = 2 \cdot \text{Área}(ABC).$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\ell \cdot h}{2} = \text{Área}(ABC).$$

ÁREA DO TRAPÉZIO

Considere um trapézio $ABCD$ cuja base maior é $BC = L$, a base menor é $AD = \ell$ e possui algura h como mostra a figura:



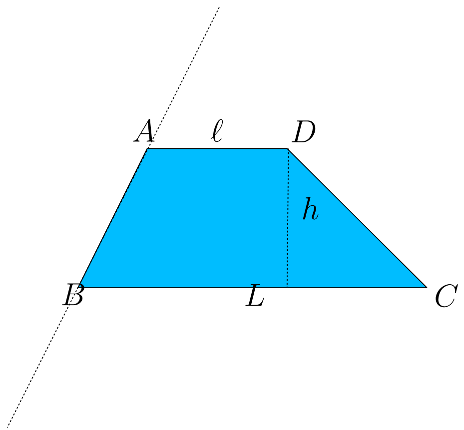
Então, a área do trapézio $ABCD$ é soma da base maior BC com a base menor AD multiplicado pela AB pela altura h dividido por 2, isto é,

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{(L+\ell)\cdot h}{2}.$$

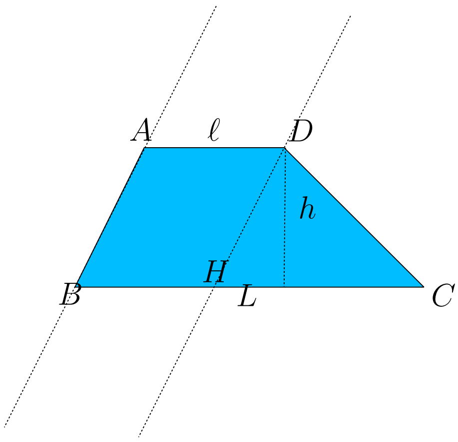
Para provar este resultado vamos utilizar as expressões das áreas do paralelogramo e do triângulo que já sabemos calcular, pelas seções anteriores. Dessa forma, precisamos relacionar a área do trapézio ABC com a área de um paralelogramo e de um triângulo.

Como relacionamos a área de um trapézio com as áreas de um paralelogramo e de um triângulo?

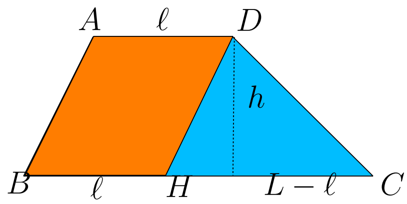
Primeiramente, traçamos uma paralela horizontal pelo lado BA do trapézio ABC.



Agora, deslocamos a paralela que passa pelo lado AB, preservando a inclinação, até o ponto C do triângulo ABC.



Como resultado final da construção, obtemos que o trapézio $ABCD$ contém o paralelogramo $ABHD$ e também contém o triângulo HCD.



Assim sendo, temos que a área do trapézio $ABCD$ é obtida somando a área do paralelogramo $ABHD$ com a área do triângulo DHC, isto é,

$$\text{Área}(ABCF) = \text{Área}(ABHD) + \text{Área}(DHC).$$

Como a base do paralelogramo $(ABHD)$ é ℓ, a base do triângulo DHC é $L - \ell$ e ambas as figuras possui altura h, obtemos:

$$\text{Área}(ABCF) = \text{Área}(ABHD) + \text{Área}(DHC)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Área}(ABCF) = \ell \cdot h + \frac{(L - \ell) \cdot h}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Área}(ABCF) = \ell \cdot h + \frac{L \cdot h - \ell \cdot h}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Área}(ABCF) = \ell \cdot h - \frac{\ell \cdot h}{2} + \frac{L \cdot h}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Área}(ABCF) = \frac{2(\ell \cdot h) - \ell \cdot h}{2} + \frac{L \cdot h}{2}$$

$$\Downarrow$$

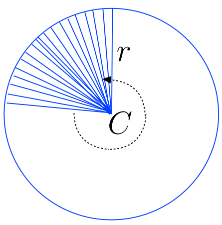
$$\text{Área}(ABCF) = \frac{\ell \cdot h}{2} + \frac{L \cdot h}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Área}(ABCF) = \frac{\ell \cdot h + L \cdot h}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Área}(ABCF) = \frac{(\ell + L) \cdot h}{2}.$$

Área do Círculo

Caro aluno, ao longo dos seus estudos creio que as expressões "`círculo`" e "`circunferência`" sempre foram motivos de grande confusões. Recorde que teve momentos em que ora você considerava "`círculo=circunferência`" e ora considerava "`círculo≠circunferência`". Tentaremos esclarecer as diferenças nesta seção.

Definição 26. Seja P um ponto do plano e considere r um número real positivo.

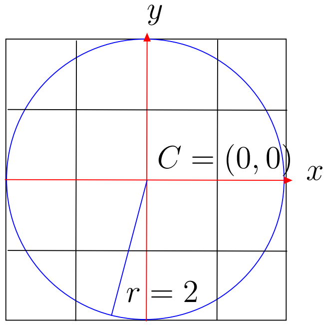
1. Um **círculo de centro** C **e raio** r é definido como sendo o conjunto de todos os seguimentos de reta de comprimento r, traçados no plano cuja origem é o ponto C.
2. O conjunto do plano que distam exatamente r do centro C é chamado de **circunferência**.



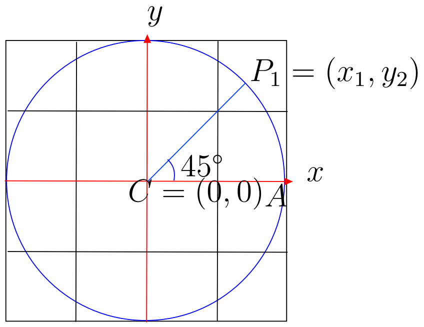
Claramente existem seguimentos menores que r, mas tais seguimentos sempre estão contidos nos respectivos segmentos de tamanho r.

Semelhança no círculo

Considere uma circunferência C_1 de centro $C = (0, 0)$ de raio 2 no plano xy.

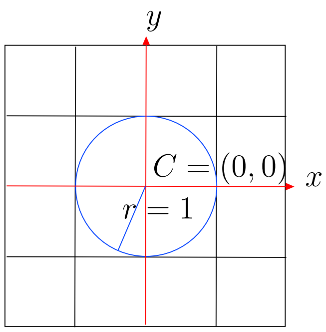


Vamos marcar, um ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ sob a circunferência C_1 de modo que os seguimentos CP_1 estabeleça com o eixo x um ângulo de $45°$.

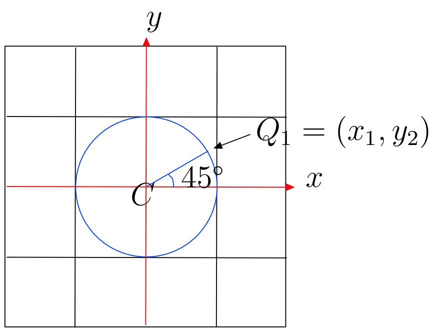


Não é necessário sabermos as coordenadas do ponto P_1 para determinarmos o comprimento do segmento CP_1A. Como P_1 está sob a circunferência de raio 2 temos que o comprimento do segmento CP_1 é 2.

Apliquemos o mesmo processo a uma circunferência C_2 de centro $C = (0, 0)$ e raio 1.



Vamos marcar agora um ponto $Q_1 = (x_1, y_1)$ sob a circunferência C_2 de modo que o seguimento CQ_1 estabeleça com o eixo x um ângulo de $45°$.



Analogamente ao caso anterior como Q_1 está sob a circunferência de raio 1 temos que o comprimento do segmento CQ_1 é 1.

Assim,

$$\frac{\text{compr}(CP_1)}{\text{compr}(CQ_1)} = \frac{2}{1}.$$

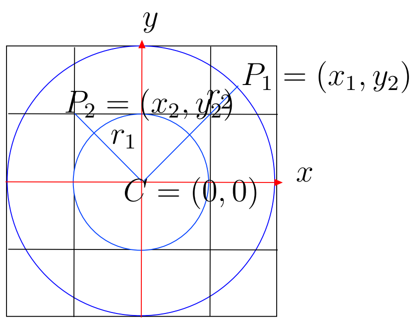
Observe que a razão entre um segmento do círculo C_1 e um segmento do círculo C_2 é a razão entre os raios r_1 e r_2. Isso nos mostra que todo segmento no círculo C_1 é obtido de um segmento do círculo C_2 multiplicado por 2.

A relação observada entre os círculos C_1 e C_2 sempre ocorre?

A resposta para a pergunta é o seguinte Teorema:

Teorema 4. Sejam C_1 e C_2 dois círculos no plano de raios r_1 e r_2 respectivamente. Então os círculos C_1 e C_2 são figuras semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre os raios.

Demonstração. Por simplicidade podemos supor que os círculos C_1 e C_2 tem o mesmo centro $C = (0, 0)$.



Se CP_1 e CP_2 são segmentos dos círculos C_1 e C_2 respectivamente, então CP_1 mede r_1 e CP_2 mede r_2. Dessa forma,

$$\frac{\text{compr}(CP_1)}{\text{compr}(CQ_1)} = \frac{r_1}{r_2}.$$

■

O CÁLCULO DE π PELO MÉTODO DOS POLÍGONOS

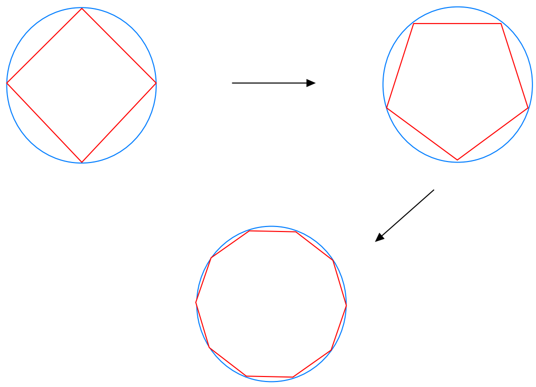
O número π desperta fascínio dos matemáticos desde os tempos mais antigos. No velho testamento, mais precisamente, no livro de primeiro a Reis capítulo sete, versículo 23, o π aparece na descrição do templo de Salomão. Para mais detalhes veja, Temas e problemas elementares, página 105. O número π é definido como segue:

Definição 27. Seja uma circunferência de raio r e comprimento C. O número π é definido como sendo a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, ou seja,

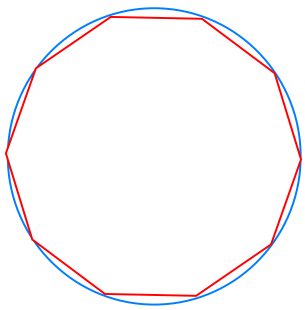
$$\pi = \frac{C}{2r}.$$

Como r é conhecido para estimarmos um valor para π necessitamos de uma aproximação do comprimento da circunferência. Sempre é possível estimarmos o comprimento de uma circunferência?

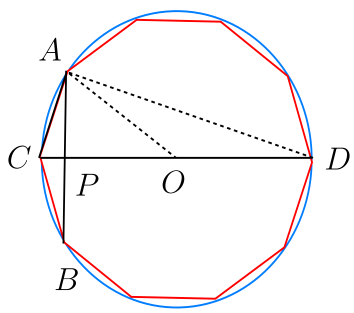
Esse processo sempre é possível e vamos utilizar polígonos regulares inscritos na circunferência para uma boa aproximação.



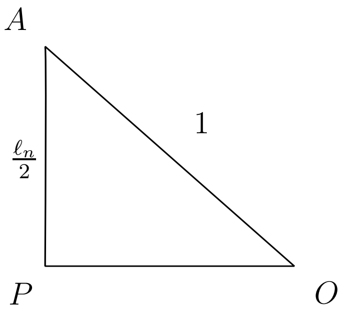
Considere um polígono de n lados inscrito numa circunferência de raio 1.



Tomando $\ell_n = AB$ como sendo o lado do polígono e considerando C o ponto médio do arco AB, então AC será o lado de um polígono regular inscrito de $2n$ lados, isto é, $\ell_{2n} = AC$.



Sendo $AB = \ell_n$ e C o ponto médio do arco AB obtemos o triângulo retângulo APO



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo APO, obtemos:

$$\left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 + OP^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\ell_n^2}{4} + OP^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$OP^2 = 1 - \frac{\ell_n^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$OP^2 = \frac{4 - \ell_n^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$OP = \sqrt{\frac{4 - \ell_n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - \ell_n^2}.$$

Agora, pela costrução, temos:

$$CP + OP = 1 \Rightarrow CP = 1 - OP = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - \ell_n^2}$$

$$\Downarrow$$

$$CP = \frac{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}{2}.$$

Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras ao triângulo ACP, segue que:

$$CA^2 = CP^2 + AP^2 \Rightarrow \ell_{2n}^2 = \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}{4}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\ell_{2n}^2 = \frac{\ell_n^2}{4} + \frac{4 - 4\sqrt{4 - \ell_n^2} + 4 - \ell^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\ell_{2n}^2 = \frac{\cancel{\ell_n^2}}{\cancel{4}} + \frac{4 - 4\sqrt{4-\ell_n^2} + 4}{4} - \frac{\cancel{\ell_n^2}}{\cancel{4}}$$

$$\Downarrow$$

$$\ell_{2n}^2 = \frac{8 - 4\sqrt{4-\ell_n^2}}{4} = \frac{\cancel{4}(2 - \sqrt{4-\ell_n^2})}{\cancel{4}}$$

$$\Downarrow$$

$$\ell_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4-\ell_n^2}}.$$

Note que a expressão de ℓ_{2n} nos permite calcular o lado de um polígono regular de $2n$ lados inscrito em uma circunferência de raio 1 em função do lado do polígono regular de n lados inscrito. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}
\ell_4 &= \sqrt{2} \text{ (lado de um quadro inscrito em um circunferência de raio 1)}; \\
\ell_8 &= \sqrt{2-\sqrt{2}}; \\
\ell_{16} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}; \\
&\vdots \\
\ell_{2^{n+1}} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}.
\end{aligned}$$

Logo, o polígono de 2^{n+1} lados possui perímetro igual a $2^{n+1} \cdot \ell_{2^{n+1}}$ que tende a 2π a medida que n cresce, ou seja,

$$\begin{aligned}
2\pi &\cong 2^{n+1} \cdot \ell_{2^{n+1}} \\
&\cong 2^{n+1} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}
\end{aligned}$$

o que implica que

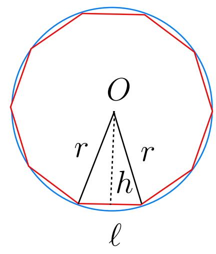
$$\begin{aligned}
\pi &\cong \frac{2^{n+1} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}}{2} \cong \frac{2^n \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}}{\cancel{2}} \\
&\cong 2^n \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi \cong 2^n \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$$

CÁLCULO DA ÁREA DO CÍRCULO

Para calcularmos a área de uma circunferência de raio r utilizaremos novamente um polígono regular inscrito como número de lados suficientemente grande, dividido em triângulos isósceles todos com vértice no centro da circunferência.



A área do polígono inscrito de n lados será dada por:

$$A_n = n \cdot \left(\frac{\ell \cdot h}{2} \right) = \frac{n \cdot \ell \cdot h}{2}.$$

Observe que $p_n = n \cdot \ell$ é o perímetro do polígono inscrito. Assim sendo, reescrevemos a fórmula da área da seguinte forma:

$$A_n = \frac{p_n \cdot h}{2}.$$

A medida que n torna-se suficientemente grande, p_n se aproxima do comprimento da circunferência e h tende para o raio, ou seja, a área do círculo é dada por:

$$A = \frac{\cancel{2}\pi r \cdot r}{\cancel{2}} = \pi \cdot r^2.$$

Referências Bibliográficas

[1] Barbosa, J. L. M.: *Geometria Euclidiana Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática.

[2] Carvalho, P. C. P., Lima E. L. Morgado A. C. e Wagner E.: *A Matemática do Ensino Médio*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1997.

[3] Carvalho, P. C. P., Lima E. L. Morgado A. C. e Wagner E.: *Temas e Problemas Elementares*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

[4] Demana, F. D., Waits B. K. Foley G. D. Kennedy D.: *Pré-cáculo*. Ed. Pearson, São Paulo, 2009.

[5] Fomin, S.: *Sistemas de Numeração*. Matemática: Aprendendo e Ensinando - Traduzido por Genson Iezzi. Ed. Atual, São Paulo, 1995.

[6] Guidorizzi, H. L.: *Um Curso de Calculo Volume 1*. Ed. LTC, 2001.

[7] Iezzi, G., Egenszajn D. Hazzan S.: *Fundamentos de Matemática Elementar - Matemática Comercial, Financeira e Estatística*. Vol. 11. Ed. Atual, 2004.

[8] Jakubovic, J., Lellis M. C. T. Imenes L. M. P.: *Frações e Números Decimais*. Coleção Pra Que Serve Matemática. Ed. Atual, 2002.

[9] Lima, E. L: *Áreas e Volume*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1985.

[10] Lima, E. L: *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

[11] Lima, E. L: *Análise Real Volume 1: Funções de Uma Variável*. Coleção Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro, 1996.

[12] Lima, E. L: *Logaritmos*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1996.

[13] RPM: *Revista do Professor de Metamática*. n°76, 2011.