



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA**



**NOVA ABORDAGEM PARA PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO DE  
CURTO PRAZO COM REPRESENTAÇÃO CONTÍNUA DO TEMPO**

**Érica Victor de Faria**

**Uberlândia – MG**

**2018**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA**



**NOVA ABORDAGEM PARA PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO DE  
CURTO PRAZO COM REPRESENTAÇÃO CONTÍNUA DO TEMPO**

Érica Victor de Faria

Orientadores: Valéria Viana Murata

Sergio Mauro da Silva Neiro

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

**Uberlândia – MG**

**2018**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

F224n  
2018 Faria, Érica Victor de, 1993-  
Nova abordagem para problema de programação da produção de  
curto prazo com representação contínua do tempo / Érica Victor de Faria.  
- 2018.

110 f. : il.

Orientadora: Valéria Viana Murata.

Coorientador: Sergio Mauro da Silva Neiro.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.238>

Inclui bibliografia.

1. Engenharia química - Teses. 2. Administração da produção -  
Modelos matemáticos - Teses. I. Murata, Valéria Viana. II. Neiro, Sergio  
Mauro da Silva. III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Química. IV. Título.

---

CDU: 66.0

Maria Salete de Freitas Pinheiro – CRB6/1262

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA QUÍMICA, EM 20 DE FEVEREIRO DE 2018.

BANCA EXAMINADORA:



---

Prof. Dra. Valéria Viana Murata  
Orientadora PPGEQ/UFU

**Participou por videoconferência**

---

Prof. Dr. Sergio Mauro da Silva Neiro  
Orientador PPGEQ/UFU



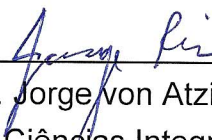
---

Prof. Dr. Luís Cláudio Oliveira Lopes  
PPGEQ/UFU

**Participou por videoconferência**

---

Dra. Maria Cristina Alves Carvalho  
Especialista em Otimização, Planejamento, Análise de  
Negócios e Produtividade



---

Prof. Dr. Jorge von Atzingen dos Reis  
Faculdade de Ciências Integradas do Pontal/UFU

Dedico este trabalho a meus pais  
pelo amor e incentivo em todos os momentos.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço a Deus por me guiar ao longo de toda a minha vida, por me ter permitido chegar até onde estou e por ter colocado pessoas tão especiais em meu caminho.

Aos meus pais, Roseni e José Ulisses, que com amor sempre me incentivarem a seguir com os estudos, meu infinito agradecimento. Sem vocês eu não teria chegado até aqui. Aos meus irmãos, Rafael e Pedro, pelo carinho.

Ao meu namorado e melhor amigo Virgílio, pelo amor, companheirismo e apoio. Obrigado por sempre estar presente.

Aos meus orientadores, Valéria Viana Murata e Sergio Mauro da Silva Neiro, expresso minha gratidão por aceitarem me orientar. Agradeço pelo apoio, confiança, ensinamentos e prontidão em me atender, foram imprescindíveis para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

Aos professores membros da banca examinadora, Luís Cláudio Oliveira Lopes, Humberto Molinar Henrique, Jorge von Atzingen dos Reis e Maria Cristina Alves Carvalho pelas valiosas contribuições para a melhoria desta dissertação.

A todos os amigos que estiveram comigo nessa jornada, em especial àqueles com os quais compartilhei os primeiros meses do Mestrado, agradeço pela amizade, tornando os momentos de estudo mais leves e divertidos: Ana Carolina, Anderson, Anna Clara, Carla, Flávia, Lidiane, Marlon, Rodolfo, Stella e Viviane. E a minhas queridas amigas Ana, Bruna, Fernanda e Thais agradeço pelo apoio, amizade e carinho, tornando as viagens e estadia em Uberlândia sempre mais alegres.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade concedida.

Aos professores da Faculdade de Engenharia Química.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

Meus mais sinceros agradecimentos.

*“Tudo o que fizerdes,  
fazei-o de todo o coração.”  
(Colossenses 3.23)*

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>i</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>v</b>
<b>RESUMO.....</b>	<b>vii</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>viii</b>
<b>CAPÍTULO 1 - Introdução .....</b>	<b>9</b>
<b>CAPÍTULO 2 - Revisão Bibliográfica .....</b>	<b>13</b>
2.1. Conceitos Gerais .....	13
2.2. Modelos de Programação da Produção.....	18
<b>CAPÍTULO 3 - Desenvolvimento dos Modelos Matemáticos.....</b>	<b>24</b>
3.1. Modelo para operação em batelada com armazenamento intermediário ilimitado .....	27
3.2. Modelo para operação em batelada com armazenamento intermediário finito .....	31
3.3. Modelo para operação contínua com armazenamento intermediário ilimitado .....	32
3.4. Modelo para operação contínua com armazenamento intermediário finito.....	34
3.5. Restrições de ajuste .....	36
3.6. Modelo para operação contínua e em batelada com armazenamento intermediário finito .....	38
3.7. Descrição dos estudos de casos .....	40
3.7.1. Estudo de caso 1: Planta com operação em batelada sem compartilhamento entre unidades .....	41
3.7.2. Estudo de caso 2: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores.....	41
3.7.3. Estudo de caso 3: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores e do aquecedor .....	42
3.7.4. Estudo de caso 4 : Planta com operação contínua .....	45



3.7.5. Estudo de caso 5: Planta de fertilizantes fosfatados .....	48
3.8. Métricas de desempenho.....	53
<b>CAPÍTULO 4 - Resultados e Discussões.....</b>	<b>55</b>
4.1. Resultados dos estudos de casos para operação em batelada com armazenamento intermediário ilimitado .....	55
4.1.1. Estudo de caso 1 UIS: Planta com operação em batelada sem compartilhamento entre unidades .....	56
4.1.2. Estudo de caso 2 UIS: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores.....	61
4.1.3. Estudo de caso 3 UIS: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores e do aquecedor .....	64
4.2. Resultados dos estudos de casos para operação em batelada com armazenamento intermediário finito.....	68
4.2.1. Estudo de caso 1 FIS: Planta com operação em batelada sem compartilhamento entre unidades .....	68
4.2.2. Estudo de caso 2 FIS: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores.....	74
4.2.3. Estudo de caso 3 FIS: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores e do aquecedor .....	78
4.3. Resultados do estudo de caso para operação contínua com armazenamento intermediário ilimitado.....	84
4.4. Resultados do estudo de caso para operação contínua com armazenamento intermediário finito .....	88
4.5. Resultados para o estudo de caso de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados .....	93
<b>CAPÍTULO 5 - Conclusões e Sugestões.....</b>	<b>95</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>97</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1– Hierarquia de decisões em uma empresa. Fonte: Adaptado de Harjunkoski et al. (2014). .....	9
Figura 1.2 – Representação esquemática das tomadas de decisão envolvidas em um problema de programação da produção. ....	10
Figura 2.1 – Processamento de inventário em processos em batelada e contínuo. Fonte: Adaptado de Harjunkoski et al. (2014). .....	14
Figura 2.2 – Classificação dos processos de produção sequenciais. Fonte: Harjunkoski et al. (2014). .....	15
Figura 2.3 – Exemplo de representação STN. Fonte: Pinto et al. (2003). .....	16
Figura 2.4 – Exemplo de representação RTN. Fonte: Pinto et al. (2003). .....	16
Figura 2.5 – Exemplo de grade de tempo global. Fonte: Harjunkoski et al. (2014). ..	21
Figura 2.6 – Exemplo de grade de tempo específica à unidade. Fonte: Harjunkoski et al. (2014). .....	21
Figura 3.1 – Grade de tempo específica a unidade com representação implícita. ....	26
Figura 3.2 – Grade de tempo específica a unidade com representação explícita proposta neste trabalho.....	26
Figura 3.3– Melhora da relaxação LP devido às restrições de ajuste. Fonte: Adaptado de Maravelias e Grossmann (2003). .....	37
Figura 3.4 – Representação em rede estado-tarefa para o estudo de caso 1. Fonte: Shaik et al. (2006). .....	41
Figura 3.5 – Representação em rede estado-tarefa para o estudo de caso 2. Fonte: Shaik et al. (2006). .....	42
Figura 3.6 – Representação em rede estado-tarefa para o estudo de caso 3. Fonte: Shaik et al. (2006). .....	42
Figura 3.7 – Representação STN do estudo de caso 4. Fonte: Shaik e Floudas (2007). .....	46

---

Figura 3.8 – Diagrama de blocos de um processo de produção de fertilizantes fosfatados. Fonte: Fonseca et al. (2018).....	49
Figura 3.9 – Representação STN de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados. Fonte: Adaptado de Fonseca et al. (2018).....	51
Figura 4.1 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=8h) UIS: modelo proposto. ....	57
Figura 4.2 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=8h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).....	57
Figura 4.3 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 1 (H=12h) UIS: modelo proposto. ....	58
Figura 4.4 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=12h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).....	59
Figura 4.5 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 1 (H=16h) UIS: modelo proposto. ....	60
Figura 4.6 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 1 (H=16h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).....	60
Figura 4.7 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 2 (H=8h) UIS: modelo proposto. ....	62
Figura 4.8 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 2 (H=8h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).....	62
Figura 4.9 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=12h) UIS: modelo proposto. ....	63
Figura 4.10 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=12h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).....	64
Figura 4.11 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=8h) UIS: modelo proposto. ....	65
Figura 4.12 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 3 (H=8h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).....	66
Figura 4.13 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=12h) UIS: modelo proposto. ....	67

Figura 4.14 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 3 (H=12h) UIS: modelo Shaik et al. (2006). .....	67
Figura 4.15 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 1 (H=8h) FIS: modelo Shaik et al. (2006) e proposto neste trabalho. ....	70
Figura 4.16 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=12h) FIS: modelo proposto. ....	71
Figura 4.17 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=12h) FIS: modelo Shaik et al. (2006). .....	72
Figura 4.18 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=16h) FIS: modelo proposto. ....	73
Figura 4.19 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=16h) FIS: modelo Shaik et al. (2006). .....	73
Figura 4.20 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=8h) FIS: modelo proposto. ....	75
Figura 4.21 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=8h) FIS: modelo Shaik et al. (2006). .....	75
Figura 4.22 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=12h) FIS: modelo proposto. ....	77
Figura 4.23 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=12h) FIS: modelo Shaik et al. (2006). .....	77
Figura 4.24 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=8h) FIS: modelo proposto. ....	79
Figura 4.25 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=8h) FIS: Floudas et al. (2006). ....	80
Figura 4.26 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=12h) FIS: modelo proposto. ....	82
Figura 4.27 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=12h) FIS: modelo Floudas et al. (2006). .....	83
Figura 4.28 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 UIS: modelo proposto. ....	85

---

Figura 4.29 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 UIS: modelo proposto com restrições de ajuste. ....	86
Figura 4.30 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 UIS: modelo Shaik e Floudas (2007).....	87
Figura 4.31 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 FIS: modelo proposto. ....	90
Figura 4.32 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 FIS: modelo proposto com restrições de ajuste. ....	91
Figura 4.33 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 FIS: modelo Shaik e Floudas (2007).....	92
Figura 4.34 – Gráfico de Gantt para estudo de caso de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados.....	94

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Dados de inventário inicial e valor dos estados para estudos de casos para operação em batelada. Fonte: Shaik et al. (2006). .....	43
Tabela 3.2 – Dados de Coeficientes de tempo de processamento e capacidade das unidades para estudos de casos com operação em batelada. Fonte: Shaik et al. (2006). .....	44
Tabela 3.3 – Dados de capacidade de armazenagem para os estudos de casos FIS com operação em batelada. Fonte: Shaik et al. (2006). .....	45
Tabela 3.4 – Taxas de produção para estudo de caso 4. Fonte: Shaik e Floudas (2007). .....	47
Tabela 3.5 – Dados dos estados para estudo de caso 4. Fonte: Shaik e Floudas (2007). .....	48
Tabela 3.6 – Dados de capacidade e tempo de cura para as tarefas em batelada. Fonte: Fonseca et al. (2018). .....	50
Tabela 3.7 – Dados de capacidade dos tanques de armazenagem dedicada. Fonte: Fonseca et al. (2018). .....	51
Tabela 3.8 – Taxa de processamento das operações contínuas. Fonte: Fonseca et al. (2018). .....	52
Tabela 3.9 – Inventário inicial de estados intermediários. Fonte: Fonseca et al. (2018). .....	53
Tabela 3.10 – Margem de contribuição dos produtos finais. Fonte: Fonseca et al. (2018). .....	53
Tabela 4.1 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H= 8h) UIS. ....	56
Tabela 4.2 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H=12h) UIS. ....	58
Tabela 4.3 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H=16h) UIS. ....	59
Tabela 4.4 – Resultados da implementação do estudo de caso 2 (H=8h) UIS. ....	61
Tabela 4.5 – Resultados da implementação do estudo de caso 2 (H=12h) UIS. ....	63

---

Tabela 4.6 – Resultados da implementação do estudo de caso 3 (H=8h) UIS. ....	65
Tabela 4.7 – Resultados da implementação do estudo de caso 3 (H=12h) UIS. ....	66
Tabela 4.8 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H=8h) FIS.....	69
Tabela 4.9 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H=12h) FIS.....	70
Tabela 4.10 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H=16h) FIS.....	72
Tabela 4.11 – Resultados da implementação do estudo de caso 2 (H=8h) FIS.....	74
Tabela 4.12 – Resultados da implementação do estudo de caso 2 (H=12h) FIS.....	76
Tabela 4.13 – Resultados da implementação do estudo de caso 3 (H=8h) FIS.....	78
Tabela 4.14 – Resultados da implementação do estudo de caso 3 (H=12h) FIS.....	81
Tabela 4.15 – Resultados da implementação do estudo de caso 4 UIS. ....	84
Tabela 4.16 – Resultados da implementação do estudo de caso 4 FIS.....	89
Tabela 4.17 – Resultados da implementação do estudo de caso de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados. ....	93

---

## RESUMO

---

Neste trabalho são propostos modelos matemáticos para a programação da produção com representação contínua no tempo, que utilizam uma grade de tempo específica à unidade, construída utilizando como referência o tempo do ponto de evento. Dessa forma, diferente dos modelos tradicionais em que é necessário analisar as variáveis de tempo das tarefas ativadas, não é necessário explorar a solução para resolver a grade. Posto isto, inicialmente são propostos dois modelos de programação da produção, específicos para processos em batelada e para processos contínuos. Os modelos são aplicados na solução de problemas de referência apresentados por Shaik et al. (2006) e Shaik e Floudas (2007), considerando o compartilhamento de unidades e armazenamentos intermediários finitos (FIS) e ilimitados (UIS), resultando em 8 estudos de caso resolvidos no software GAMS versão 24.4.6 pelo método *Branch and Cut*. Para todos os casos resolvidos foi obtida a solução ótima e considerando parâmetros como o número de eventos, o número de restrições, o número de variáveis e o tempo de processamento computacional, os modelos propostos apresentaram bom desempenho. Com isso, um novo modelo aplicável a processos em batelada e contínuos foi desenvolvido e aplicado na programação da produção de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados considerando um horizonte de tempo de 30 dias de produção. Neste caso, mesmo não obtendo a solução ótima do problema, todas as restrições impostas pelo modelo foram respeitadas e a capacidade de armazenamento da planta não foi ultrapassada.

Palavras-chave: Programação da produção, Grade de tempo específica à unidade, GAMS, Representação contínua do tempo, Processos em batelada e contínuo



---

## ABSTRACT

---

This paper presents a new continuous-time mathematical formulation for short-term scheduling using an explicit representation of the unit-specific time grid, which is constructed using the time point of the event as a reference. Therefore, unlike the traditional models in which it is necessary to analyze the time variables of the activated tasks, it is not necessary to explore the solution to solve the time grid. Initially two scheduling models are proposed specifically for batch processes and continuous processes. The models are applied in the solution of reference problems presented by Shaik et al. (2006) and Shaik and Floudas (2007), considering unit sharing and finite intermediate storage (FIS) and unlimited (UIS), resulting in 8 case studies solved in GAMS software version 24.4.6 by the Branch and Cut method. The optimal solution was reached for all cases and taking in account the number of events, constraints and variables and computational processing time, the proposed models presented good performance. Thus, a new model for batch and continuous processes was developed and applied in the production schedule of a generic plant of phosphate fertilizers considering a time horizon of 30 days of production. In this case, despite not obtaining the ideal solution of the problem, all constraints imposed by the model were attended and the storage capacity of the plant was not exceeded.

Keywords: Scheduling, Unit-specific time grid, GAMS, Continuous-time representation, Batch and continuous processes.

---

# CAPÍTULO 1

## Introdução

---

Todas as atividades presentes no processo produtivo de uma empresa são coordenadas pelo gerenciamento da produção, no qual as decisões de planejamento estratégico e operacional e de programação da produção estão intimamente relacionadas conforme apresentado na Figura 1.1.

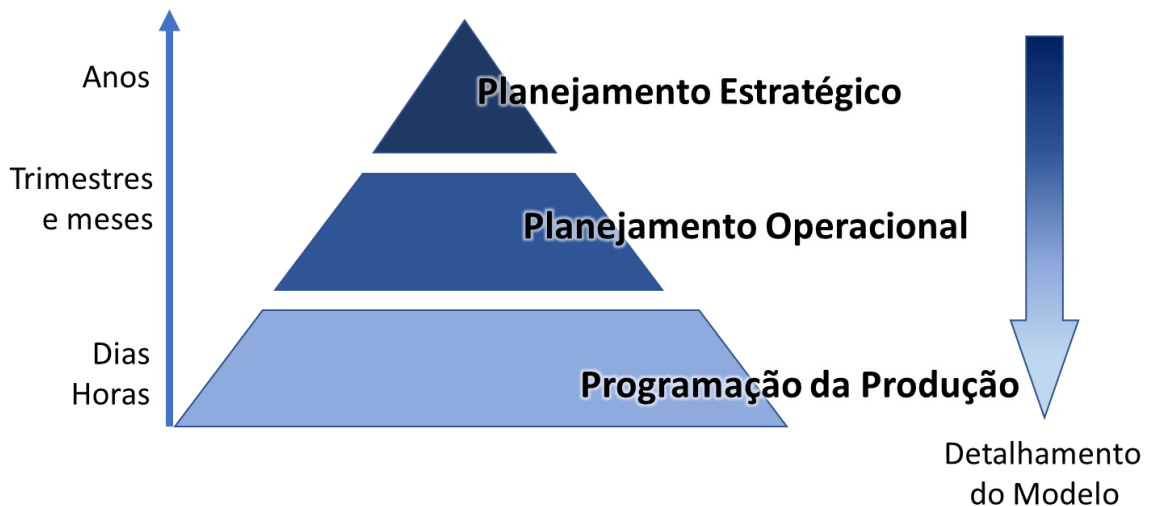


Figura 1.1– Hierarquia de decisões em uma empresa. Fonte: Adaptado de Harjunkoski et al. (2014).

O planejamento estratégico está relacionado ao mais alto nível de tomada de decisões e apresenta um horizonte de longo prazo definido em anos. É responsável por formular o Plano de Produção, onde são definidas as metas globais da empresa e as políticas adequadas para atingi-las (SEVERO, 2007). Além disso, utiliza informações dos equipamentos e das unidades disponíveis, visando alocar a produção às plantas, balancear a capacidade entre plantas e adequar os recursos produtivos à demanda futura a fim de otimizar a movimentação de materiais (SOARES, 2009).

O planejamento operacional apresenta um horizonte avaliado de trimestres a meses e é responsável pela alocação dos recursos disponíveis entre os diversos centros de produção, a fim de cumprir os objetivos determinados no planejamento estratégico, levando em conta os custos envolvidos. Neste nível, devem ser tomadas as decisões de médio prazo que afetam a área de produção avaliando as matérias-primas e equipamentos disponíveis, bem como a quantidade estabelecida de produção dos produtos finais conforme a previsão da demanda (MORO; PINTO, 2004).

Aumentando o nível de detalhamento, a programação da produção trata das decisões do dia-a-dia, tendo como função executar os planos definidos anteriormente, ou seja, realiza uma programação detalhada da produção, definindo como, onde, por quem e com quais recursos será executada. Neste nível, o horizonte é de curto prazo (dias e semanas). Este processo de tomada de decisão pode ser aplicado à otimização de um ou mais objetivos, através da alocação de recursos na execução de tarefas em determinados períodos de tempo (RODAMMER; WHITE, 1988; PINEDO, 2008). Portanto a programação da produção consiste em lidar com decisões de alocação, temporização e sequenciamento, de forma a otimizar uma função objetivo estabelecida (BELLMAN et al. 1982), como ilustrado na Figura 1.2.

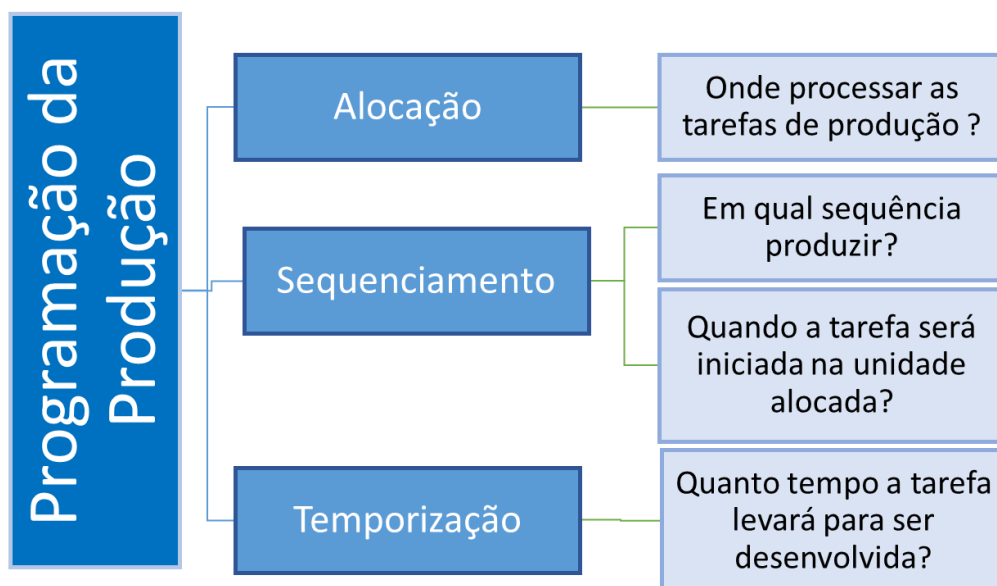


Figura 1.2 – Representação esquemática das tomadas de decisão envolvidas em um problema de programação da produção.

A programação da produção é amplamente explorada devido à grande quantidade de variáveis e restrições associadas a um processo produtivo. É uma das etapas mais desafiadoras no gerenciamento da produção devido às decisões discretas envolvidas e à natureza combinatória dos problemas. Com o aumento do número de atividades envolvidas no processo produtivo, o número de programações possíveis aumenta consideravelmente (SLACK et al., 2002).

Em muitos casos, a programação de produção ainda é realizada manualmente no ambiente industrial, podendo resultar em uma alocação ineficiente de recursos e violação dos níveis de armazenagem disponíveis. Com base nisso, modelos de programação da produção têm sido reportados na literatura considerando diferentes formas de representação do tempo, de eventos, de modos de operação e de políticas de armazenagem, visando melhorar o desempenho computacional e ao mesmo tempo atender a todas as restrições impostas pelos problemas.

Devido à limitação relacionada à escolha da duração dos intervalos de tempo para modelos discretos, a representação contínua tem sido objeto crescente de pesquisas por possibilitar a obtenção de soluções mais precisas e eficientes através da flexibilização dos intervalos de tempo. Em relação à representação dos pontos de evento, a grade de tempo específica à unidade apresenta melhor desempenho devido à alocação individual dos pontos de evento para cada unidade de processamento.

Desta forma, o objetivo geral dessa dissertação é propor modelos matemáticos de programação da produção de curto prazo, empregando representação contínua do tempo e com representação explícita da grade de tempo específica a unidade.

Os objetivos específicos são:

- avaliar o desempenho dos modelos matemáticos para processos em batelada com armazenamento intermediário ilimitado (UIS) e finito (FIS);
- avaliar o desempenho dos modelos matemáticos para processos contínuos com armazenamento intermediário ilimitado (UIS) e finito (FIS);
- avaliar o desempenho do modelo matemático para processos com tarefas contínuas e em batelada.

O Capítulo 2 apresenta conceitos gerais sobre a programação da produção e uma revisão da literatura sobre o desenvolvimento de modelos matemáticos com

representação contínua do tempo. O Capítulo 3 apresenta os modelos matemáticos propostos para processos em batelada, contínuos e com tarefas contínuas e em batelada, com representação explícita da grade de tempo específica a unidade e considerando as formulações aplicáveis a políticas de armazenamento intermediário ilimitado e finito. Para fins de melhor compreensão dos modelos desenvolvidos, os estudos de casos utilizados para a validação dos modelos são apresentados no mesmo capítulo para: processos em batelada com armazenamento intermediário finito e ilimitado, sem e com compartilhamento de unidades; processo contínuo; processo com tarefas contínuas e em batelada. O Capítulo 4 é dedicado à apresentação, análise e discussão dos resultados obtidos para os nove estudos de casos resolvidos. O Capítulo 5 apresenta as conclusões obtidas e as sugestões para trabalhos futuros.

---

## CAPÍTULO 2

### Revisão Bibliográfica

---

Neste capítulo são apresentadas as características dos problemas e dos modelos matemáticos de programação da produção e são destacados os trabalhos que tratam do desenvolvimento de modelos com representação contínua no tempo e com grade de tempo específica à unidade.

#### 2.1. Conceitos Gerais

##### **Modo de operação das tarefas de processamento**

O primeiro aspecto a avaliar ao caracterizar um processo para a aplicação da programação da produção é a natureza das tarefas. Segundo Harjunkoski et al. (2014), a maioria das decisões são iguais para processos operando de forma contínua ou em batelada, como decisões de atribuição de tarefas às unidades. As principais diferenças entre os dois tipos de processos são a natureza das restrições de tempos de processamento, a capacidade e a forma como estes processos afetam os níveis de inventário. Uma das principais diferenças entre programação da produção de processos em batelada e contínuos é a manipulação dos tempos de processamento. Em plantas em batelada, os tempos de processamento são tipicamente corrigidos e conhecidos *a priori* e a quantidade de produção depende da capacidade da unidade de lote. Em plantas contínuas, os tempos de processamento são função das taxas de processamento dependentes da unidade e da demanda final do produto (SHAIK; FLOUDAS, 2007). Em relação à capacidade, no processamento em batelada cada unidade de produção apresenta um limite na quantidade de material a ser processado. O tempo de processamento pode ser fixo ou depender do tamanho do lote. Desta forma, a programação deste problema envolve a alocação de várias bateladas com tempos de processamento especificados.

Por outro lado, as restrições de capacidade para processamento contínuo referem-se às taxas de processamento, que podem ser fixas ou variáveis. Isso implica

que as restrições de capacidade não alteram o número de lotes, ou seja, uma determinada demanda pode ser satisfeita executando um único lote longo (campanha) ou múltiplos lotes curtos (FLOUDAS; LIN, 2004).

A Figura 2.1 evidencia a diferença entre o processamento em batelada e o contínuo em relação ao inventário.

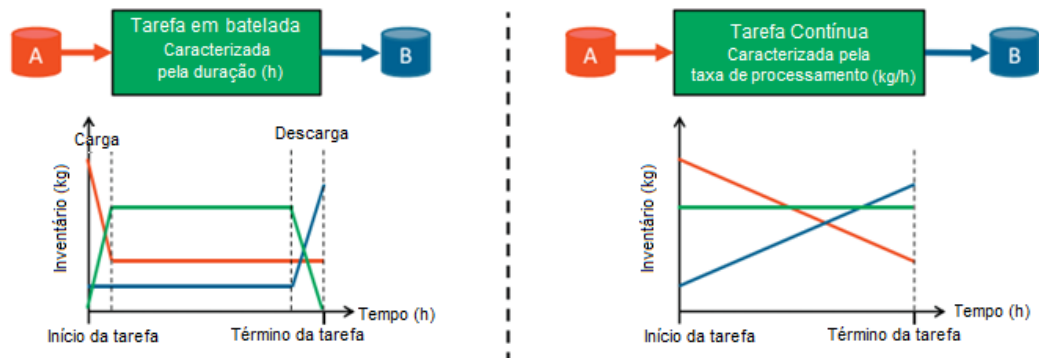


Figura 2.1 – Processamento de inventário em processos em batelada e contínuo.  
Fonte: Adaptado de Harjunkoski et al. (2014).

Para processos em batelada as variações materiais ocorrem em pontos de tempo especificados, ou seja, o estado A é consumido no início da tarefa e o estado B é produzido ao término desta. Em contrapartida, os processos contínuos levam ao acúmulo e depleção de estoque ao longo da execução de uma tarefa, sendo que o estado A é consumido e o estado B é produzido de forma contínua durante o curso da tarefa de acordo com a taxa de processamento (FLOUDAS; LIN, 2004).

Além disso, esta característica leva à diferenciação nas restrições de sequenciamento, visto que para processos contínuos o estado B pode ser consumido à taxa que é produzido, e para processos em batelada este só é disponibilizado ao término da tarefa (HARJUNKOSKI et al. 2014).

### Configuração do processo produtivo

A configuração do processo produtivo e suas implicações topológicas exercem significativa influência sobre a complexidade do problema. Desta forma, de acordo com complexidade das sequências de produção, os problemas podem ser classificados em sequenciais ou em rede. Diz-se sequencial uma instalação cuja identidade do lote deve ser preservada, ou seja, produtos diferentes seguem a mesma sequência de processamento. Desta forma, em processos sequenciais um lote não

pode ser misturado com outros, nem dividido em múltiplos lotes. Para este tipo de processo, os lotes são usados para representar a produção e, portanto, não é necessário considerar os saldos de massa explicitamente (FLOUDAS; LIN, 2004). Os processos sequenciais ainda podem ser divididos em único estágio, multiestágios e multipropósito, como exemplificado na Figura 2.2.

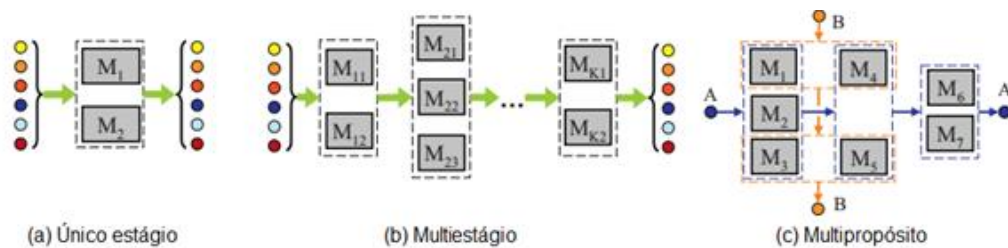


Figura 2.2 – Classificação dos processos de produção sequenciais. Fonte: Harjunkoski et al. (2014).

Para instalações em único estágio cada lote deve ser processado exatamente em uma unidade, podendo apresentar unidades paralelas. Em instalações multiestágios todos os lotes devem ser processados na mesma sequência de etapas e em apenas uma unidade para cada estágio. Este ambiente de produção é também chamado de *flowshop* e é caracterizado pela presença de dois ou mais estágios de processamento. As instalações multipropósito, também conhecidas como *jobshop*, são caracterizadas por um ambiente com múltiplos estágios onde as unidades são apropriadas para realizar diferentes tarefas - e dessa forma diferentes produtos passam por diferentes sequências específicas.

Por outro lado, os processos em rede representam o arranjo mais complexo e são caracterizados pela possibilidade de mistura ou de divisão de correntes. Neste caso, vários lotes podem compor a entrada de uma unidade ou a saída de um lote pode ser dividida para compor a entrada de várias unidades (HARJUNKOSKI et al., 2014). Nestes diagramas os processos são descritos por tarefas, simbolizados por retângulos, e estados, simbolizados por círculos.

Esta representação pode ser realizada em duas formas diferentes: a representação em rede estado-tarefa (*state-task network* - STN) e a rede recurso-tarefa (*resource-task network* - RTN). As Figuras 2.3 e 2.4 apresentam o mesmo processo representado em STN e RTN, respectivamente. O processo descrito apresenta as tarefas de armazenamento de material (Ta1, Ta2 e Ta3), que acontecem



nas unidades de armazenagem (V1, V2 e V3), tarefas de processamento (T1 e T2), que acontece na unidade de reação (R1), e os estados materiais (S1, S2, S3, S1a, S2a e S3a).

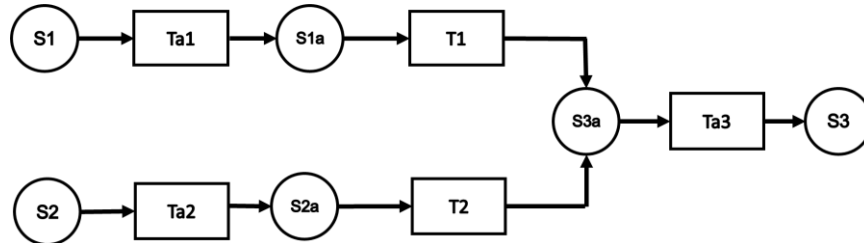


Figura 2.3 – Exemplo de representação STN. Fonte: Pinto et al. (2003).

A representação STN foi formulada por Kondili et al. (1993), e aborda apenas a modelagem da receita do processo. Estes são representados como uma coleção de diferentes estados que são transformados por tarefas realizadas em unidades. Assim, podem existir quatro entidades separadas: tarefas, estados, unidades e utilidades. As informações sobre unidades de processamento e utilidades não são especificadas no diagrama (PINTO et al., 2003). Pode-se observar na Figura 2.3 a presença de 6 estados e 5 tarefas.

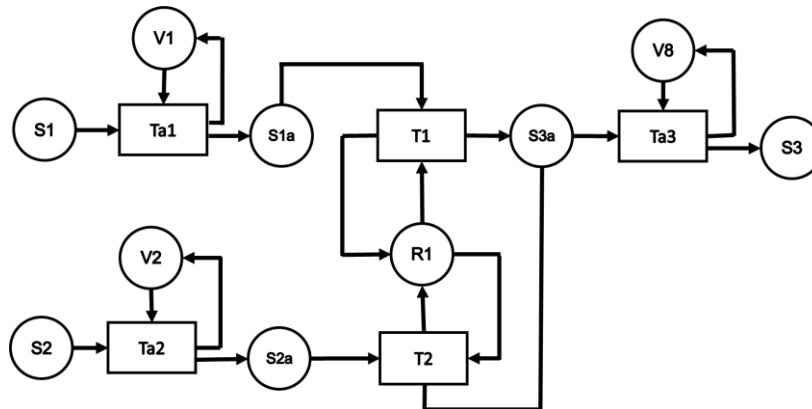


Figura 2.4 – Exemplo de representação RTN. Fonte: Pinto et al. (2003).

A representação RTN, formulada por Pantelides (1994), é uma representação unificada, onde estados materiais e unidades de produção são tratadas como recursos produzidos e consumidos por tarefas (HARJUNKOSKI et al., 2014). A partir da Figura 2.4 é possível observar que a representação RTN apresenta 10 recursos (6 estados materiais e 4 unidades de processamento) e 5 tarefas. Por evidenciar os recursos necessários para a operação, os diagramas RTN são de leitura mais complexa, no entanto, este tratamento unificado dos recursos compreende ao modelo menos conjuntos de restrições.

## Políticas de armazenamento intermediário

De acordo com Floudas e Lin (2004) existem quatro categorias principais de políticas de armazenamento intermediário:

- Armazenamento intermediário finito (FIS) corresponde ao caso mais geral, em que há tanques de armazenagem para estados intermediários com capacidade finita de armazenagem. Para este cenário há a necessidade de atribuir ao modelo restrições para níveis de inventário.
- Armazenamento intermediário ilimitado (UIS) é considerado quando a disponibilidade de tanques de armazenagem para estados intermediários é excedente ao necessário, ou seja, qualquer quantidade produzida poderá ser armazenada. Esta consideração apresenta como vantagem a simplificação do modelo matemático, visto que dispensa a modelagem dos níveis de inventário.
- Sem armazenamento intermediário (NIS), neste caso não há disponibilidade de tanques de armazenagem para estados intermediários, mas é possível que estes estados sejam mantidos na própria unidade de processamento após a conclusão da tarefa até a transferência para a próxima unidade.
- Sem espera: neste cenário é necessário que os estados intermediários sejam consumidos imediatamente após sua produção. Para este fim é necessária a incorporação de restrições específicas de temporização.

Ademais, outras características da armazenagem de intermediários devem ser contempladas na formulação do modelo. É preciso avaliar se a armazenagem é realizada em tanques dedicados ou na própria unidade produtiva, se os tanques de armazenagem podem ser compartilhados ou são exclusivos para cada estado (MENDEZ et al. 2006).

### Transição entre tarefas (*Changeover*)

Ao utilizar a mesma unidade para diferentes tarefas, habitualmente, é necessário englobar no modelo a existência de um tempo de transição. Este parâmetro compreende o tempo associado à limpeza, e/ou mudanças nas configurações de operação da unidade, por motivos de segurança ou qualidade. Para

tanto, segundo Floudas e Lin (2004) existem três tipos principais de transição entre tarefas a serem contempladas:

- dependente da sequência: este é o caso mais comum, em que o requisito depende da unidade e das tarefas envolvidas. Este caso deve ser contemplado nas restrições de sequenciamento;
- dependente da hora ou da frequência: pode ser necessária uma mudança ou pausa, após uma certa quantidade de tempo ou um certo número de lotes;
- nenhum: é o caso mais simples em questões de modelo, nenhuma troca é necessária entre duas tarefas em uma unidade.

Tendo explanado as principais características a serem consideradas na definição do problema de programação da produção, são apresentados a seguir aspectos relevantes para a formulação dos modelos de programação da produção: função objetivo, representação do domínio do tempo e representação de eventos simultaneamente com a revisão bibliográfica sobre o desenvolvimento de modelos matemáticos com representação contínua do tempo.

## 2.2. Modelos de Programação da Produção

### Função Objetivo

As funções objetivo compõe as decisões a serem otimizadas na programação da produção, exemplos típicos de objetivos gerais destes problemas abrangem:

- maximização do lucro: de acordo com a disponibilidade de unidades produtivas, recursos e demais restrições estabelecidas ao problema. O objetivo é encontrar o sequenciamento das atividades que gere o maior valor do lucro total, em um horizonte de tempo especificado;
- minimização de *makespan*: visa encontrar o sequenciamento das atividades com o menor tempo de conclusão de todo o processo, dada uma demanda pré-estabelecida;
- minimização de precocidade, atraso ou custos: visa encontrar o sequenciamento das atividades que gere o maior rendimento, com menor custo em um horizonte de tempo especificado.

## Representação do domínio do tempo

Os modelos de programação da produção dividem o horizonte de tempo da programação em um número fixo de intervalos de tempo para a alocação das unidades. A divisão do horizonte de tempo em intervalos uniformes de duração predefinida caracteriza a representação discreta do tempo. Por outro lado, para a representação contínua do tempo a duração destes intervalos é variável.

Os primeiros modelos de programação da produção desenvolvidos foram baseados na representação discreta do horizonte de tempo. Dentre eles, os trabalhos de Kondili et al. (1993), Pantelides (1994) e Zentner et al. (1994) são voltados à representação de processos químicos empregando a representação discreta do horizonte de tempo. Essa forma de representação do tempo permite que eventos, como o início ou término de tarefas, ocorram somente nos limites desses intervalos, o que reduz a complexidade do problema e torna a estrutura do modelo mais simples e fácil de resolver (SUNDARAMOORTHY; MARAVELIAS, 2011).

No entanto, a escolha da duração de cada intervalo de tempo pode ser a principal limitação de modelos discretos. Devido à natureza contínua do tempo, a discretização é apenas uma aproximação da realidade, e um modelo exato só é obtido quando o intervalo de tempo escolhido é capaz de reproduzir a duração de todas as tarefas realizadas. Deste modo, optar por aumentar a duração dos intervalos de tempo resulta em uma simplificação do problema original, gerando uma solução subótima. Sendo assim, o ideal é que a duração dos intervalos seja igual ao máximo divisor comum dos tempos de processamento de todas as tarefas, o que pode levar a um grande número de intervalos de tempo (MARAVELIAS; SUNG, 2009).

Além disso, em modelos que apresentam algumas tarefas de longa duração e outras de curta, a discretização do horizonte de tempo pode levar a um aumento desnecessário do tamanho total do problema matemático resultante, uma vez que as variáveis de decisão e restrições do modelo são expressas para cada ponto de evento.

Para abordar essas limitações, modelos baseados na representação contínua do tempo atraíram uma grande atenção dos pesquisadores e proporcionam o desenvolvimento de abordagens de modelagem e solução mais precisas e eficientes, devido à flexibilidade dos intervalos de tempo. Os modelos de tempo contínuo têm a vantagem de serem precisos e mais sensíveis a pequenas mudanças nas durações das tarefas e, portanto, podem ser considerados mais apropriados para a integração

com decisões de controle de nível inferior. Além disso, formulações de representação contínua do tempo requerem menos intervalos de tempo para representar o horizonte de tempo (FLOUDAS; LIN, 2004). Tal fato tem uma grande influência na qualidade da solução e no esforço computacional, por levar a formulações substancialmente menores.

A quantidade de pontos de evento necessária para encontrar a solução ideal global do problema não é conhecida *a priori*. Para superar esta questão, é utilizado um procedimento iterativo padrão, em que se aumenta continuamente o número de pontos de evento resolvendo o problema de otimização, enquanto são observadas melhorias na função objetivo (MÉNDEZ et al., 2006). No entanto, segundo Liu e Karimi (2007), isso deve ser classificado como uma abordagem heurística, uma vez que incrementos adicionais no número de slots podem levar a melhorias adicionais.

Dessa forma, a representação contínua do horizonte de tempo leva a soluções mais precisas e de menor esforço computacional, principalmente ao lidar com plantas que operam tarefas de tempo de execução distintos. Contudo a principal inconveniência da representação contínua é apresentar uma formulação significativamente mais complexa, devido à inserção de restrições para a determinação do posicionamento dos intervalos de tempo (HARJUNKOSKI et al., 2014).

### **Representação da grade de tempo**

Além da representação do tempo, é necessário definir a organização de eventos da programação da produção ao longo do tempo, a essa organização dá-se o nome de grade de tempo. Com base na representação de tempo utilizada, a grade de tempo pode ser definida globalmente ou por unidade (SHAIK; FLOUDAS, 2007).

Os modelos de grade de tempo global são mais gerais, enquanto modelos de grades de tempo específicas à unidade se tornam computacionalmente mais eficientes devido à possibilidade de alocação individualizada dos pontos de evento em cada unidade de processamento (HARJUNKOSKI et al., 2014). Nas Figuras 2.5 e 2.6 são apresentados exemplos de grades de tempo global e específica à unidade.

Como pode ser observado na Figura 2.5 os modelos baseados em grade de tempo global, usam um conjunto de eventos comuns em todas as unidades. Os modelos de Castro et al. (2001), Maravelias e Grossmann (2003) e Castro et al. (2004) empregam essa representação de eventos.

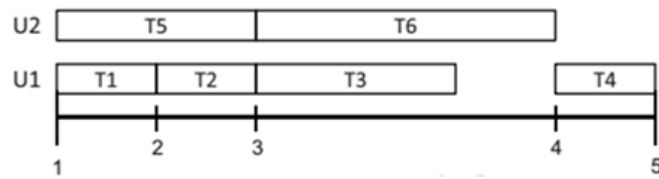


Figura 2.5 – Exemplo de grade de tempo global. Fonte: Harjunoski et al. (2014).

Por outro lado, para os modelos baseados em grade de tempo específica a unidade, conforme observado na Figura 2.6, os eventos são definidos em uma base individual, permitindo que tarefas possam ser alocadas ao mesmo ponto de evento em unidades e momentos diferentes.

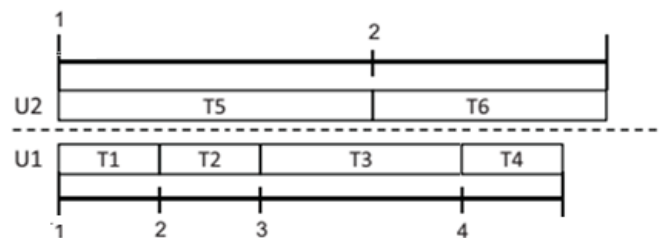


Figura 2.6 – Exemplo de grade de tempo específica à unidade. Fonte: Harjunoski et al. (2014).

Contudo, o desempenho do modelo de grade de tempo global é severamente comprometido pela necessidade de alguma tarefa específica se estender por um grande intervalo. Nesse caso, o desempenho é melhorado ao empregar grades de tempo específicas à unidade, pois diminui o número de pontos de eventos necessários e, conseqüentemente, pode resultar em uma grande diminuição no esforço computacional (IERAPETRITOU; FLOUDAS, 1998a).

Durante as últimas décadas, numerosas formulações foram propostas na literatura com base na representação contínua do tempo, e grade de tempo específica à unidade, devido às suas vantagens estabelecidas em relação às representações discretas e representação global da grade de tempo (SHAIK; FLOUDAS, 2007). Em 1998, Ierapetritou e Floudas (1998a) propuseram a representação da grade de tempo específica à unidade, através de dois modelos de programação da produção de curto prazo para processos em batelada (IERAPETRITOU; FLOUDAS, 1998a) e contínuos (IERAPETRITOU; FLOUDAS, 1998b) baseado em STN, representação contínua do tempo. Outra inovação deste modelo foi o conceito de desacoplamento de eventos de tarefas e eventos de unidades. Os autores criaram variáveis de alocação separadas

para lidar com a alocação das tarefas e unidades de processamento. Tal simplificação viabilizou o uso de um menor número de pontos de evento. Esse modelo é consolidado até hoje, como demonstrado nos estudos comparativos realizados por Shaik et al. (2006).

Com o objetivo de ampliar a formulação desenvolvida para plantas em batelada e semi-contínuas, Ierapetritou et al. (1999) realizaram modificações nos modelos anteriores a fim de atender múltiplos prazos de entrega intermediários, especificados ao longo do horizonte de programação. De acordo com os resultados obtidos, esta abordagem proporcionou soluções mais eficientes aos problemas.

Giannelos e Georgiadis (2002a, 2002b) propuseram formulação baseada em grade de tempo específica à unidade para programação de curto prazo de processos em batelada e contínuos usando a representação STN. Esse modelo é semelhante ao Ierapetritou e Floudas (1998a, 1998b), tendo como inovação a inclusão de tempos de folga para as unidades, o que resulta no relaxamento as durações de tarefas. Além disso, várias restrições do tipo big-M foram eliminadas implicitamente e a formulação depende de uma grade de tempo de baixa resolução pois apenas os tempos finais de execução da tarefa são utilizados. Para atender aos requisitos de armazenagem, os autores optaram por fixar os tempos de início e término das tarefas que produzem e consomem o mesmo estado. Essa imposição acabou por uniformizar a escala, transformando a sua representação em uma grade de tempo global. Além disso, Shaik e Floudas (2007) constataram que essa abordagem é bastante restritiva, levando a soluções subótimas em casos em que não há armazenamento.

Uma formulação contínua baseada em intervalos de tempo (*slots*) foi proposta por Sundaramoorthy e Karimi (2005) para plantas multipropósito de operação em batelada, em que o horizonte de tempo é dividido em vários intervalos com diferentes comprimentos. Essa formulação parte de uma representação realizada por diagramas de bloco e emprega tarefas de armazenagem para modelar a mistura e divisão de correntes. Além disso, uma tarefa adicional é definida para modelar os períodos de inatividade das unidades e para ocupar intervalos de tempo redundantes. Essa consideração possibilita que uma tarefa termine antes do *slot* de tempo. Devido a isto, a proposta se assemelha à grade de tempo global.

Em 2007, Shaik e Floudas apresentaram melhorias ao modelo de Ierapetritou e Floudas (1998a e 1998b) para programação a curto prazo de processos contínuos usando tempo contínuo com representação STN e grade de tempo específica à

unidade. Como diferencial principal, tal modelo compreende os casos com transição de tarefas dependentes da sequência e responde precisamente a todas as políticas de armazenagem (finita, ilimitada e sem armazenamento).

Outra questão importante, levantada por Floudas e Lin (2004) e Shaik e Floudas (2008), refere-se ao tamanho e complexidade dos problemas abordados nos artigos de programação da produção. Segundo os autores, as pesquisas devem se concentrar no desenvolvimento de modelos matemáticos que sejam eficientes para aplicação que envolvam processos em batelada e contínuos. Visando a resolução de problemas de programação da produção de maior complexidade, Janak e Floudas (2008) apresentam uma metodologia para eliminar o *gap* de integração de resolução de problemas de programação da produção de curto prazo e alta complexidade. Essa metodologia consiste em 4 passos: analisar o diagrama STN do processo, para detectar limitações práticas do problema em questão; incluir restrições de ajuste e de contorno, a fim de limitar ao máximo o intervalo que contém a solução viável; resolver problemas de suporte de contorno; e por fim aplicar a técnica de reformulação-linearização. Essa técnica consiste em um processo iterativo sujeito ao modelo de programação da produção original, sem as restrições de sequenciamento e temporização. A cada iteração a nova função objetivo é alterada para minimizar ou maximizar uma soma de variáveis diferentes. A partir desta metodologia uma variedade de problemas apresentados na literatura pode ser abordada de forma eficiente.

Portanto, a literatura recente mostra que as formulações contínuas com grades de tempo específicas a unidades requerem menos pontos de eventos em comparação aos modelos que empregam grade de tempo global. Entretanto, é possível constatar que todas as formulações consultadas constroem a grade de tempo específica a unidade de maneira implícita, ou seja, é necessário explorar a solução encontrada e analisar as variáveis de tempos de início e término das tarefas que foram ativas. Assim a proposta de uma grade de tempo específica à unidade com representação explícita é uma contribuição deste trabalho.



---

## CAPÍTULO 3

### Desenvolvimento dos Modelos Matemáticos

---

Este capítulo apresenta uma descrição detalhada dos modelos propostos e dos estudos de casos abordados. Inicialmente é considerada a programação da produção de plantas operando apenas em batelada, com armazenamento intermediário ilimitado (UIS) e finito (FIS). Seguido pelo modelo para plantas operando apenas com tarefas contínuas, UIS e FIS e formulação para plantas com tarefas contínuas e em batelada.

A descrição da notação dos conjuntos, parâmetros e variáveis utilizados na formulação dos modelos é apresentada a seguir. Todas as variáveis contínuas assumem apenas valores positivos.

---

#### Índices

---

$i$	Tarefas
$j$	Unidades (processamento e armazenamento)
$n$	Intervalos de tempo
$s$	Estados (matéria-prima, intermediários ou produtos finais)

---

#### Conjuntos

---

$I$	Tarefas
$J$	Unidades (processamento e armazenamento)
$N$	Intervalos de tempo no horizonte de tempo
$S$	Estados (matéria-prima, intermediários ou produtos finais)

---

#### Subconjuntos

---

$I_j$	Tarefas $i$ capazes de serem desenvolvidas na unidade $j$
$I_{js}$	Tarefas $i$ de armazenagem desenvolvidas em tanques específicos ( $J_s$ )
$I_{jarm}$	Tarefas $i$ de armazenagem desenvolvidas em unidades de processamento ( $J_{arm}$ )
$In_s$	Estados $s$ que são consumidos pela tarefa $i$
$Out_s$	Estados $s$ que são produzidos como saída pela tarefa $i$
$J_s$	Unidades $j$ que realizam a armazenagem de produtos intermediários
$J_{arm}$	Unidades $j$ que desenvolvem tarefas de armazenagem nas baias

$S_b$	Estados intermediários $s$ produzidos por tarefas em batelada
$S_c$	Estados intermediários $s$ produzidos por tarefas contínuas
$S_i$	Estados $s$ que correspondem a produtos intermediários
$S_p$	Estados $s$ que correspondem a produtos finais
$S_r$	Estados $s$ que correspondem a matérias-primas

---

**Parâmetros**


---

$\alpha_{i,j}$	Termo constante do tempo de processamento da tarefa em batelada $i$ na unidade $j$ em unidades horárias
$\beta_{i,j}$	Termo variável do tempo de processamento da tarefa em batelada $i$ na unidade $j$ em unidades horárias
$\rho_{i,s^C}$	Fator de consumo do estado $s$ pela tarefa $i$
$\rho_{i,s^P}$	Fator de produção do estado $s$ pela tarefa $i$
$B_{i,j}^{Max}$	Capacidade máxima da batelada $i$ na unidade $j$
$B_{i,j}^{Min}$	Capacidade mínima da batelada $i$ na unidade $j$
$Dem_{sp}^{Min}$	Demanda mínima do produto final $sp$ no período de tempo $n$
$H$	Horizonte de tempo
$N$	Último ponto de evento
$Price_s$	Margem de contribuição de cada produto final $s$
$R_{i,j}^{Max}$	Carga máxima horária da tarefa $i$ na unidade $j$
$R_{i,j}^{Min}$	Carga mínima horária da tarefa $i$ na unidade $j$
$St_s^{Max}$	Capacidade máxima de armazenagem do estado intermediário $s$
$St_{in_s}$	Inventário inicial do estado intermediário $si$

---

**Variáveis contínuas**


---

$\theta_{j,n}$	Variável de folga que corresponde ao tempo de inatividade no ponto de evento $n$ na unidade $j$
$B_{i,j,n}$	Quantidade de material processado pela tarefa $i$ na unidade $j$ no ponto de evento $n$
$Dem_s$	Quantidade do produto final $s$ usado para satisfazer a demanda
$D_{i,j,n}$	Duração da tarefa $i$ iniciada no ponto de evento $n$ na unidade $j$
$DO_j$	Janela de tempo correspondente ao tempo decorrido entre o início do horizonte de tempo e o primeiro ponto do evento ( $n1$ ) para a unidade $j$
$ST_{s,n}$	Quantidade do estado $s$ em inventário no ponto de evento $n$
$STO_{s,n}$	Quantidade de matéria-prima $s$ consumida no ponto de evento $n$

$T_{j,n}$	Tempo em que o ponto de evento $n$ é posicionado na unidade $j$
$z$	Valor da função objetivo

**Variáveis discretas**

$W_{i,j,n}$	Indica se a tarefa $i$ começou a ser processada na unidade $j$ no ponto de evento $n$ , $W_{i,j,n}=1$ , caso contrário $W_{i,j,n}=0$
-------------	--

De forma geral os modelos de programação da produção clássicos compõem a grade de tempo específica à unidade de maneira implícita, como mostrado na Figura 3.1. Em vista disso, para resolver a grade é necessário explorar a solução encontrada e analisar as variáveis de tempo inicial e final das tarefas que foram ativas.

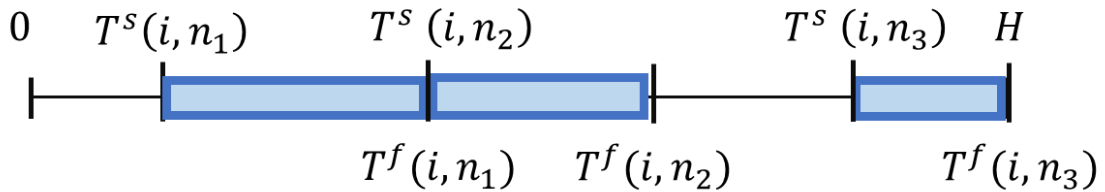


Figura 3.1 – Grade de tempo específica à unidade com representação implícita.

Como contribuição, a proposta apresentada neste trabalho estabelece a representação explícita da grade de tempo específica à unidade. Dessa maneira, para compor a grade de tempo é utilizado como referência o tempo do ponto de evento, variável explícita na solução do modelo. A Figura 3.2 apresenta a proposta da nova estrutura de grade de tempo baseada em ponto de evento e unidade adotada no presente trabalho.

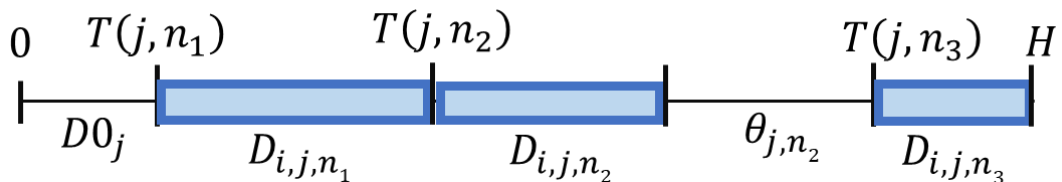


Figura 3.2 – Grade de tempo específica à unidade com representação explícita proposta neste trabalho.

Dessa forma, a grade de tempo com representação explícita é composta pelo tempo dos pontos de evento  $T_{j,n}$ , que marca o início de uma tarefa; duração das tarefas ativas na unidade  $D_{i,j,n}$  e termos de folga  $\theta_{j,n}$  e  $D0_j$ . Tal representação é descrita pelas restrições apresentadas nas próximas seções.

### 3.1. Modelo para operação em batelada com armazenamento intermediário ilimitado

Inicialmente, é considerado o caso de programação da produção de plantas operando apenas em batelada, com armazenamento intermediário ilimitado (UIS). Essa consideração implica em um modelo simplificado visto que não é necessário modelar explicitamente as tarefas de armazenamento. Assim, a formulação é composta apenas por tarefas de processamento.

O objetivo abordado em todos os casos é a maximização da produção em termos da margem de contribuição, avaliada de acordo com a venda de produtos. A função objetivo pertinente a cada caso é apresentada pela Equação (3.1). A Equação (3.2) garante que a quantidade produzida de cada estado  $s$  seja maior que a demanda mínima requerida.

$$z = \sum_s price_s Dem_s \quad (3.1)$$

$$Dem_s \geq Dem_s^{min} \quad \forall s \in S_p \quad (3.2)$$

As restrições de alocação asseguram que a cada momento uma única tarefa seja executada em cada unidade de processamento.  $W_{i,j,n}$  Indica se a tarefa  $i$  começou a ser processada na unidade  $j$  no ponto de evento  $n$ ,  $W_{i,j,n}=1$ , caso contrário  $W_{i,j,n}=0$ . De acordo com a Equação (3.3), o somatório de todas as variáveis  $W_{i,j,n}$  naquele período de tempo deve ser no máximo 1. Contudo, a unidade de processamento é bloqueada para a realização de qualquer outra tarefa neste ponto de evento.

$$\sum_{i \in I_{i,j}} W_{i,j,n} \leq 1, \quad \forall j \in J, n \in N \quad (3.3)$$

As restrições de capacidade impõem limitações à carga de processamento. De acordo com a Equação (3.4) quando a tarefa  $i$  é executada na unidade  $j$  durante o ponto de evento  $n$ , a quantidade de material a ser processado ( $B_{i,j,n}$ ) deve estar entre os limites de carga máxima e mínima permitidos quando essa tarefa está ativa na unidade.

$$W_{i,j,n}B_{i,j}^{min} \leq B_{i,j,n} \leq W_{i,j,n}B_{i,j}^{max} \quad \forall i \in I_j, B_{i,j}^{min} > 0, B_{i,j}^{max} > 0, n \in N \quad (3.4)$$

A Equação (3.5) apresenta o cálculo de duração das tarefas de processamento  $i$  em batelada. Essa duração apresenta uma forma linear consistindo em um termo fixo e um termo variável. O termo variável expressa a dependência do processamento da tarefa  $i$  na unidade  $j$  com a quantidade de material em processamento naquele ponto de evento  $B_{i,j,n}$ . No caso de não haver alocação, ou seja,  $w_{i,j,n}=0$ , o segundo termo da equação também se torna zero devido às restrições de capacidade, Equação (3.3).

$$D_{i,j,n} = \alpha_{i,j}W_{i,j,n} + \beta_{i,j}B_{i,j,n} \quad \forall i \in I, j \in I_j, n \in N \quad (3.5)$$

A seguir é descrita uma série de restrições que garantem o sequenciamento dos pontos de evento e tarefas nas unidades. Essas fornecem as conexões entre o tempo inicial de cada ponto de evento e as variáveis de alocação  $w_{i,j,n}$ .

As Equações (3.6) e (3.7) apresentam, respectivamente, o tempo de posicionamento do primeiro e demais pontos de evento para cada unidade. A Equação (3.6) determina que a janela de tempo decorrido entre o início do horizonte de tempo e o primeiro ponto do evento,  $D0_j$ , é uma variável de decisão da otimização.

A Equação (3.7) é apresentada na forma de uma igualdade e determina que o tempo de posicionamento dos demais pontos de evento é igual à janela de tempo inicial somado à duração de todas as tarefas e tempos de inatividade alocados à unidade até o ponto de evento anterior. Com isso, essa restrição também realiza o sequenciamento de tarefas que são processadas na mesma unidade, pois indica que o início de uma tarefa no ponto de evento atual deve ser maior ou igual que o tempo de duração das demais tarefas realizadas até o ponto de evento anterior.

$$T_{j,n} = D0_j \quad \forall j \in J, n = 1 \quad (3.6)$$

$$T_{j,n} = D0_j + \sum_{n' < n} \left( \sum_{i \in I_j} (D_{i,j,n'}) + \theta_{j,n'} \right) \quad \forall j \in J, n > 1 \quad (3.7)$$

O tempo de inatividade é uma variável utilizada para expressar a grade de tempo (Eq. 3.7) na forma de igualdade e conferir ao modelo folga onde posicionar os pontos de evento. Esse termo pode ser calculado para cada unidade pelas Equações (3.8a) e (3.8b). É definido pela diferença entre o início do próximo ponto de evento e término da tarefa alocada ao ponto de evento atual, ou, para o último ponto de evento, é a diferença entre o horizonte de tempo  $H$  e término da tarefa alocada ao ponto de evento atual.

$$\theta_{j,n} = T_{j,n+1} - \left( T_{j,n} + \sum_{i \in I_j} D_{i,j,n} \right) \quad \forall j \in J, n > 1 \quad (3.8a)$$

$$\theta_{j,n} = H - \left( T_{j,n} + \sum_{i \in I_j} D_{i,j,n} \right) \quad \forall j \in J, n = N \quad (3.8b)$$

A Equação (3.9) garante que as tarefas iniciadas no último ponto de evento terminem até o limite do horizonte de tempo,  $H$ .

$$T_{j,n} + \sum_{i \in I_j} D_{i,j,n} \leq H \quad \forall j \in J, n = N \quad (3.9)$$

A Equação (3.10) realiza o sequenciamento das tarefas sendo processadas em unidades diferentes. Sendo  $i$  uma tarefa que produz o estado  $s$  e  $i'$  uma tarefa que consome o mesmo estado  $s$ , essa restrição só é ativada quando a tarefa de produção é alocada ao ponto de evento  $n$  e a tarefa de consumo é alocada ao ponto de evento  $n'$ , posterior a  $n$ . Sendo assim, a tarefa de consumo não deve ser iniciada antes da tarefa de produção de um estado. Essa é uma restrição do tipo *big-M*. Se qualquer uma das tarefas não estiver ativa, a restrição é relaxada e adequadamente satisfeita.

$$T_{j',n'} \geq T_{j,n} + D_{i,j,n} - H(2 - w_{i,j,n} - w_{i',j',n'}) \quad \forall i \in I_j, i' \in I_{j'}, j \neq j', i \in Out_s, i' \in In_s, s \in S_i, n' > n \quad (3.10)$$

A seguir são apresentadas as restrições de balanço material. Na Equação (3.11), a quantidade de matéria-prima, quando necessária, está relacionada aos valores consumidos no ponto de evento  $n$  correspondente.

$$STO_{s,n} = \sum_{i \in In_s} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^c B_{i,j,n} \quad \forall s \in S_r, n \in N \quad (3.11)$$

Para os estados intermediários, o balanço material é escrito pela Equação (3.12). O primeiro termo no lado direito indica o inventário inicial de intermediários disponível, válida apenas para o primeiro ponto de evento. Para os demais, essa quantidade é inserida juntamente ao segundo termo da equação, que corresponde ao total armazenado até o ponto de evento anterior ( $n-1$ ). O terceiro termo representa a quantidade de estado  $s$  produzida pela tarefa alocada no ponto de evento anterior ( $n-1$ ), que é disponibilizada para consumo no ponto de evento  $n$ . A quantidade total pode ser consumida por uma tarefa de processamento, indicada pelo quarto termo, ou ser armazenada no ponto de evento  $n$  como indicado pelo termo à esquerda.

$$ST_{s,n} = STin_s|_{n=1} + ST_{s,n-1}|_{n>1} + \sum_{i \in Out_s} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^p B_{i,j,n-1} - \sum_{i \in In_s} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^c B_{i,j,n} \quad (3.12)$$

$$\forall s \in S_i, n \in N$$

O balanço material para os produtos finais é dado pela Equação (3.13), a produção total do estado  $s$  é limitada por um valor mínimo especificado pela demanda dos produtos finais, Equação (3.2). Não havendo armazenamento de produtos finais, ou seja,  $ST_{s,n} = 0$ , toda a produção é atribuída à variável de demanda,  $Dem_s$ .

$$ST_{s,n} = STin_s|_{n=1} + ST_{s,n-1}|_{n>1} + \sum_{i \in Out_s} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^p B_{i,j,n} - Dem_s \quad \forall s \in S_p, n \in N \quad (3.13)$$

A consideração de uma política de armazenagem de intermediários ilimitada pode muitas vezes violar a capacidade de armazenagem. Para fins de comparação, na seção a seguir é apresentado o modelo para tarefas em batelada com política de armazenagem intermediário finito, em que são incorporadas restrições de armazenagem ao modelo apresentado nesta seção.

### 3.2. Modelo para operação em batelada com armazenamento intermediário finito

Este é um caso geral onde o armazenamento intermediário finito está disponível para cada estado intermediário. Para lidar com isso, são introduzidas tarefas e unidades separadas para a atividade de armazenamento. São necessárias restrições adicionais para relacionar o tempo de tarefas de armazenamento entre si com as tarefas de processamento.

Exposto isto, para o modelo para programação da produção de plantas em batelada com armazenagem de intermediários finita são mantidas todas as equações descritas para o modelo anterior exceto o balanço de massa para estados intermediários, que é substituído pela Equação (3.14). Além disso, são adicionadas a esse modelo as seguintes restrições de sequenciamento para tarefas de armazenagem.

Este balanço de massa é uma adaptação da Equação (3.12) em que também é contabilizada a quantidade de material sendo retirado dos tanques de armazenagem no ponto de evento anterior ( $n-1$ ) e sendo armazenado no ponto de evento atual ( $n$ ).

$$\begin{aligned}
 ST_{s,n} = ST_{in_s}|_{n=1} + ST_{s,n-1}|_{n>1} + \sum_{\substack{i \in Out_s \\ i \notin I_s}} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^p B_{i,j,n-1} + \sum_{\substack{i \in Out_s \\ i \in I_s}} \sum_{j \in I_j} B_{i,j,n-1} + \\
 - \sum_{\substack{i \in In_s \\ i \notin I_s}} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^c B_{i,j,n} - \sum_{\substack{i \in In_s \\ i \in I_s}} \sum_{j \in I_j} B_{i,j,n} \quad \forall s \in S_i, n
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

As grades de tempo para as tarefas de armazenagem realizadas em tanques dedicados são compostas através das Equações (3.15) - (3.19), e a duração de cada tarefa é definida na etapa de pós-processamento. Como essas unidades são específicas ao armazenagem, a duração da armazenagem está relacionada as tarefas de produção e consumo dos estados armazenados. Sendo assim, não é necessária a aplicação da Equação 3.7, pois isso geraria um aumento no tamanho do modelo e uma relaxação ruim.

As Equações (3.15) - (3.19) realizam o sequenciamento entre as tarefas de armazenagem em tanques dedicados e de processamento.



$$T_{j',n+1} \geq T_{j,n} + D_{i,j,n} - H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n+1}) \quad (3.15)$$

$$\forall i \in I_j, i' \in I_{j'}, j \notin J_s, j' \in J_s, i \in Out_s, i' \in In_s, s \in S_i, n < N$$

$$T_{j',n+1} \leq T_{j,n} + D_{i,j,n} + H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n+1}) \quad (3.16)$$

$$\forall i \in I_j, i' \in I_{j'}, j \notin J_s, j' \in J_s, i \in Out_s, i' \in In_s, s \in S_i, n < N$$

$$T_{j',n} \geq T_{j,n} - H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n}) \quad (3.17)$$

$$\forall i \in I_j, i' \in I_{j'}, j \in J_s, j' \notin J_s, i \in Out_s, i' \in In_s, s \in S_i, n \in N$$

$$T_{j',n} \leq T_{j,n} + H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n}) \quad (3.18)$$

$$\forall i \in I_j, i' \in I_{j'}, j \in J_s, j' \notin J_s, i \in Out_s, i' \in In_s, s \in S_i, n \in N$$

As Equações (3.15) - (3.18) definem que os pontos de evento das tarefas de armazenagem devem estar associados com o término da tarefa de produção e início da tarefa de consumo do estado armazenado. Assim, pontos de evento associados à armazenagem são alocados ao final das tarefas de produção do estado  $s$  e ao início das tarefas que consomem  $s$ . Essas restrições são satisfeitas quando ambas as tarefas de processamento e armazenagem estiverem ativas em pontos de evento consecutivos.

A Equação (3.19) realiza o sequenciamento dos pontos de evento das tarefas de armazenagem alocadas ao mesmo tanque.

$$T_{j,n+1} \geq T_{j,n} \quad \forall j \in J_s, n < N \quad (3.19)$$

Na seção a seguir são detalhadas as restrições que compõe o modelo para programação da produção de uma planta composta apenas por tarefas contínuas, explanando a principais diferenças entre esses modelos.

### 3.3. Modelo para operação contínua com armazenamento intermediário ilimitado

Diferenças na forma de processamento de tarefas contínuas em relação às bateladas requerem uma abordagem diferente do problema de programação da produção. De forma geral, a principal diferença está no fato que quando se tem tarefas

em batelada as alocações ocorrem em pontos de evento sucessivos, ou seja, uma tarefa que produz um estado deve ser terminada antes que uma tarefa que consome aquele estado seja inicializada. Já no caso envolvendo unidades operando de forma contínua, tarefas de produção e de consumo de um mesmo estado são alocadas simultaneamente. A fim de capturar este aspecto, restrições de duração, sequenciamento e balanço de massa devem ser modificados.

Para tanto, o modelo formulado mantém a função objetivo, (Eq. 3.1), restrições de demanda (Eq. 3.2), alocação (Eq. 3.3), sequenciamento (Eq. 3.6 – 3.8), e balanços de massa para matérias-primas e produtos finais (Eq. 3.11 e 3.13), discutidas nas seções anteriores. As demais restrições são descritas a seguir.

Para o processamento contínuo não há como estimar a duração de uma tarefa como era feito no processo em batelada pela Equação (3.5). Para este caso a duração da tarefa depende do volume a ser processado,  $B_{i,j,n}$ , e da taxa de produção, como é determinada pela Equação (3.21). No entanto, se uma tarefa não for alocada à unidade  $j$  no ponto de evento  $n$ , sua duração e o volume processado serão nulos pelas Equações (3.20) e (3.21), respectivamente.

$$D_{i,j,n} \leq W_{i,j,n}H \quad \forall i \in I, j \in I_j, n \in N \quad (3.20)$$

$$D_{i,j,n}R_{i,j}^{min} \leq B_{i,j,n} \leq D_{i,j,n}R_{i,j}^{max} \quad \forall i \in I, j \in I_j, n \in N \quad (3.21)$$

Diferente das operações em batelada, em que o sequenciamento de tarefas diferentes envolvendo o mesmo estado era feito em pontos de evento consecutivos, para tarefas contínuas essa comparação é realizada no mesmo ponto de evento, pois o processamento das operações contínuas acontece de forma intermitente.

A Equação (3.22) expressa que o tempo de início da tarefa de consumo do estado  $s$  deve ser maior ou igual ao da tarefa de produção do mesmo estado, no mesmo ponto de evento. Desta forma ambas podem iniciar simultaneamente, ou, a tarefa de consumo pode ter início em qualquer tempo após a produção, devido à consideração de armazenagem de intermediários ilimitada.

$$T_{j',n} \geq T_{j,n} - H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n}) \quad \forall s, i \in I_j, i' \in I_{j'}, j \neq j', i \in Out_s, i' \in In_s, s \in S_i, n \in N \quad (3.22)$$

Complementando a anterior, a Equação (3.23) determina que o término da tarefa de consumo deve ser posterior ou igual ao da tarefa de produção.

$$T_{j',n} + D_{i',j',n} \geq T_{j,n} + D_{i,j,n} - H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n}) \quad (3.23)$$

$$\forall i \in I_j, j \neq j' \neq js, i' \in I_{j'}, i \in Out_s, i' \in In_s, s \in S_i, n \in N$$

As restrições de sequenciamento são descritas apenas para as tarefas de processamento. Não é necessária a modelagem das tarefas de armazenamento em casos onde há apenas processos contínuos com estados UIS, pois não há o problema da comparação de tarefas ocorrendo em pontos de evento diferentes, como visto para o processamento em batelada. Neste caso todas as decisões ocorrem no mesmo ponto de evento.

O balanço de massa para intermediários assemelha-se à Equação (3.12), no entanto para estados cujas tarefas de produção e consumo operam de forma contínua, estas podem ocorrer simultaneamente, ou seja, no mesmo ponto de evento. Sendo assim, a quantidade do estado  $s$  presente no ponto de evento  $n$  é dada pela soma do inventário inicial, total armazenado até o ponto de evento anterior ( $n-1$ ) e a quantidade de estado  $s$  produzida e consumida no ponto de evento atual,  $n$ , como expresso na Equação (3.24).

$$ST_{s,n} = STin_s|_{n=1} + ST_{s,n-1}|_{n>1} + \sum_{i \in Out_s} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^p B_{i,j,n} - \sum_{i \in In_s} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^c B_{i,j,n} \quad (3.24)$$

$$\forall s \in S_i, n \in N$$

Na próxima seção são apresentadas as restrições complementares para a composição do modelo de programação da produção para processos contínuos com armazenamento intermediário finito.

### 3.4. Modelo para operação contínua com armazenamento intermediário finito

Para essa abordagem os tanques de armazenamento são modelados como unidades de processamento adicionais. O modelo para programação da produção de plantas contínuas com armazenagem de intermediários finita é composto pelas restrições de função objetivo (Eq. 3.1), de demanda (Eq. 3.2), de alocação (Eq. 3.3), de capacidade para tarefas de armazenagem (Eq. 3.4), de capacidade para tarefas

contínuas (Eq. 3.20), de duração (Eq. 3.21), de sequenciamento (Eq. 3.6 – 3.8, 3.22 e 3.23), e balanço de massa para matérias-primas e produtos finais (Eq. 3.11 e 3.13), discutidas nas seções anteriores, além das restrições a seguir de sequenciamento e balanço material para intermediários.

Como restrições de capacidade para tarefas de processamento permanecem iguais, para as tarefas de armazenamento a quantidade de material que pode ser armazenada é limitada pela capacidade disponível da unidade correspondente, assim como visto para tarefas em batelada. Então a Equação 3.4 é adotada para limitar a capacidade das unidades de armazenamento.

Devido à presença de tarefas de armazenagem, o estado intermediário produzido no ponto de evento  $n$  pode ir diretamente para a tarefa de produção se não houver armazenamento intermediário disponível ou ignorando a sua existência. Para garantir a viabilidade do balanço da capacidade do inventário, os tempos de início e de término das tarefas de processamento, que produz e consome o estado  $s$ , precisa ser o mesmo se ambas as tarefas estiverem ativas no mesmo ponto de evento. Para este propósito, adotam-se as Equações (3.25) e (3.26) em complemento às Equações (3.22) e (3.23), discutidas na seção anterior.

$$T_{j',n} \leq T_{j,n} + H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n})$$

$$\forall s, i \in I_j, i' \in I_{j'}, i \in Out_s, i' \in In_s, s \in S_i, n \in N \quad (3.25)$$

$$T_{j',n} + D_{i',j',n} \leq T_{j,n} + D_{i,j,n} + H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n})$$

$$\forall i \in I_j, j \notin J_s, i' \in I_{j'}, j' \notin J_s, i \in Out_s, i' \in In_s, s \in S_i, n \in N \quad (3.26)$$

As Equações (3.27) e (3.28) são semelhantes às restrições adotadas para processos em batelada. No entanto, para tarefas contínuas o armazenamento ocorre simultaneamente à produção do estado intermediário. Assim, quando as duas tarefas estiverem ativas, o tempo de início deve ser igual.

$$T_{j',n} \geq T_{j,n} - H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n}) \quad (3.27)$$

$$\forall j \notin J_s, i \in I_j, j' \in J_s, i \in Out_s, i' \in In_s, i' \in I_{j'}, s \in S_i, n \in N$$

$$T_{j',n} \leq T_{j,n} + H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n}) \quad (3.28)$$

$$\forall j \notin J_s, i \in I_j, j' \in J_s, i \in Out_s, i' \in In_s, i' \in I_{j'}, s \in S_i, n \in N$$

O balanço de massa para estados intermediários discutido na seção anterior é acrescido de termos que contabilizam a quantidade de material sendo retirado dos tanques de armazenagem no ponto de evento anterior ( $n-1$ ) e sendo armazenado no ponto de evento atual ( $n$ ), resultando na Equação (3.29).

$$\begin{aligned}
 ST_{s,n} = ST_{in_s}|_{n=1} + ST_{s,n-1}|_{n>1} + \sum_{\substack{i \in Out_s \\ i \notin I_s}} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^p B_{i,j,n} + \sum_{\substack{i \in Out_s \\ i \in I_s}} \sum_{j \in I_j} B_{i,j,n-1} + \\
 - \sum_{\substack{i \in In_s \\ i \notin I_s}} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^c B_{i,j,n} - \sum_{\substack{i \in In_s \\ i \in I_s}} \sum_{j \in I_j} B_{i,j,n} \quad \forall s \in S, n \in N
 \end{aligned} \quad (3.29)$$

### 3.5. Restrições de ajuste

Devido a modelagem das tarefas e tanques de armazenagem observa-se um aumento considerável do número de variáveis. Tal fato pode levar a uma solução pobre do problema relaxado. Por isso, para melhorar o desempenho computacional, optou-se por adicionar restrições de ajuste que eliminam algumas regiões de busca impraticáveis. Com isso a faixa de abrangência do problema relaxado é reduzida apenas àquela que resulta em soluções viáveis, tornando mais justo o problema LP.

A Equação (3.7), além de realizar a alocação dos pontos de evento, funciona como uma restrição de ajuste. Ela expressa que a soma da duração de todas as tarefas até o ponto de evento  $n$ , não deve ultrapassar o instante de tempo que representa o posicionamento do ponto de evento  $n$  em uma determinada unidade  $j$ . Quando o modelo relaxado é resolvido, se várias tarefas tiverem sua variável de alocação,  $w_{i,j,n}$ , diferentes de zero, seus valores não se distanciarão muito de zero. Quanto mais tarefas estiverem ativas no modelo relaxado, menores serão os valores de  $w_{i,j,n}$  e, conseqüentemente, de  $B_{i,j,n}$  pela restrição de capacidade.

Em adição, são aplicadas as Equações (3.30) e (3.31). Essas restrições são baseadas no trabalho de Maravelias e Grossmann (2003), no entanto, devido à adição da variável de folga são apresentadas na forma de igualdades.

$$D0_j + \sum_n \left( \sum_{i \in I_j} (D_{i,j,n}) + \theta_{j,n} \right) = H \quad \forall j \notin J_s, n \in N \quad (3.30)$$

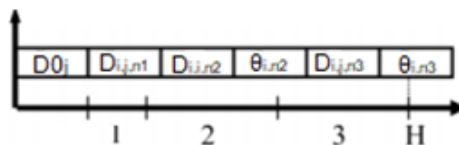
$$\sum_{n' \geq n} \left( \sum_{i \in I_j} (D_{i,j,n'}) + \theta_{j,n'} \right) = H - T_{j,n} \quad \forall j \notin J_S, n \in N \quad (3.31)$$

De acordo com a Equação (3.30), é desenvolvida para cada unidade  $j$  uma igualdade que garante que a soma dos tempos de processamento e de inatividade de todas as tarefas alocadas na unidade não exceda o horizonte temporal.

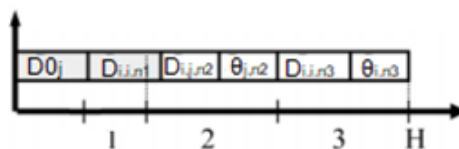
A Equação (3.31) limita a soma dos tempos de processamento de todas as tarefas alocadas à unidade  $j$  após o ponto de evento  $n$ , a ser inferior ao tempo restante  $(H - T_{j,n})$ . Com isso, complementa a Equação (3.7) para que as durações não ultrapassem os pontos de evento de cada unidade.

A Figura 3.3 exemplifica a contribuição dessas restrições na relaxação LP de um problema de programação da produção. A Figura 3.3a exemplifica um horizonte de tempo relaxado. Na Figura 3.3b a região de solução viável do problema é limitada ao horizonte de tempo de acordo com a contribuição da Equação (3.30) na relaxação LP, e na Figura 3.3c é possível observar que devido à combinação das Restrições (3.7) e (3.31) a soma das durações não ultrapassa os pontos de evento de cada unidade.

**(a) Modelo com restrições de ajuste**



**(b) Modelo com adição da Equação 3.30**



**(c) Modelo com adição das Equações 3.30 e 3.31**

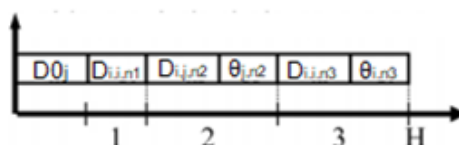


Figura 3.3– Melhora da relaxação LP devido às restrições de ajuste. Fonte: Adaptado de Maravelias e Grossmann (2003).

Desenvolvidas as formulações para programação da produção para operação em batelada e operação contínua, a próxima seção apresenta a formulação proposta para problemas de programação da produção com operação mista.

### 3.6. Modelo para operação contínua e em batelada com armazenamento intermediário finito

O modelo apresentado nesta seção é a fusão dos dois modelos apresentados anteriormente, a fim de atender a problemas de programação da produção de plantas com operação mista, ou seja, tarefas em batelada e tarefas contínuas, onde o armazenamento intermediário finito está disponível para cada estado intermediário.

Este modelo é composto pela função objetivo (Eq. 3.1), pelas restrições de demanda (Eq. 3.2), alocação (Eq. 3.3), capacidade de tarefas em batelada e contínuas (Eq. 3.4 e 3.20), duração para tarefas em batelada e contínuas ( Eq. 3.5 e 3.21), sequenciamento para pontos de evento (Eq. 3.6, 3.7, 3.8), para estados produzidos por tarefas em batelada (Eq. 3.15 - 3.19), e para estados produzidos por tarefas contínuas (Eq. 3.22, 3.23, 3.25 - 3.28); balanço material para matérias-primas e produtos finais (Eq. 3.11 e 3.13) e as restrições de ajuste (Eq. 3.30 e 3.31) discutidas nas seções anteriores.

Uma característica deste modelo é a capacidade de lidar com unidades que podem realizar tarefas de processamento e armazenamento simultaneamente. Restrições novas são apenas introduzidas para lidar com a representação das tarefas de cura que ocorrem em equipamentos específicos (baias), pois podem alocar tarefas de processamento (cura) e tarefas de armazenagem dos estados que foram processados na unidade.

Após a realização da tarefa de processamento de um estado  $s$ , este pode ser consumido pela tarefa de processamento seguinte, em outra unidade, ou por uma tarefa de armazenamento, na mesma unidade de processamento, ou as duas tarefas podem acontecer simultaneamente, como indicado pela Equação (3.32).

$$W_{i,j,n} \leq \sum_{i' \in In_s} \sum_{j' \in I_{j'}} W_{i',j',n+1} \quad \forall i \in Out_s, i \in I_b, j \in I_j, s \in S_b, n < N \quad (3.32)$$

A Equação (3.33) garante que, caso haja a alocação de uma tarefa de armazenamento no ponto de evento  $n+1$ , realizada na mesma unidade, esta não pode

alocar um termo de folga, pois a armazenagem deve ser iniciada imediatamente após a produção. Caso contrário a restrição é relaxada e adequadamente satisfeita.

$$\theta_{j,n} \leq H \cdot (1 - W_{i',j,n+1}) \quad \forall i' \in I_{arm}, j \in I_j, n < N \quad (3.33)$$

A Equação (3.34) evita a transferência de um estado  $s$  entre as várias unidades em que pode ser armazenado. Esta indica que a quantidade armazenada no ponto de evento  $n$  deve ser menor ou igual à quantidade armazenada no ponto de evento anterior ( $n-1$ ).

$$B_{i,j,n} \leq \sum_{i' \in Out_s} B_{i',j,n-1} \quad \forall s \in S_b, i \in Out_s, i' \in I_{arm}, j \in I_j, n \in N \quad (3.34)$$

As Equações (3.35) a (3.38) realizam o sequenciamento entre tarefas de processamento e tarefas de armazenagem que podem acontecer em unidades de produção. A equação (3.35) complementa a equação (3.36) para que a tarefa de consumo do estado  $s$  seja iniciada simultaneamente à tarefa de armazenagem correspondente. Da mesma forma devem ser finalizadas no mesmo instante de tempo, de acordo com as equações(3.37) e (3.38).

$$T_{j',n} \geq T_{j,n} - H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n}) \quad (3.35)$$

$$\forall s \in S_b, i \in Out_s, i' \in In_s, i \in I_{arm}, i' \notin I_{arm}, j \in I_j, j' \in I_{j'}, n \in N$$

$$T_{j',n} \leq T_{j,n} + H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n}) \quad (3.36)$$

$$\forall s \in S_b, i \in Out_s, i' \in In_s, i \in I_{arm}, i' \notin I_{arm}, j \in I_j, j' \in I_{j'}, n \in N$$

$$T_{j',n} + D_{i',j',n} \geq T_{j,n} + D_{i,j,n} - H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n}) \quad (3.37)$$

$$\forall s \in S_b, i \in Out_s, i' \in In_s, i \in I_{arm}, i' \notin I_{arm}, j \in I_j, j' \in I_{j'}, n \in N$$

$$T_{j',n} + D_{i',j',n} \leq T_{j,n} + D_{i,j,n} + H(2 - W_{i,j,n} - W_{i',j',n}) \quad (3.38)$$

$$\forall s \in S_b, i \in Out_s, i' \in In_s, i \in I_{arm}, i' \notin I_{arm}, j \in I_j, j' \in I_{j'}, n \in N$$



Para o balanço de massa de materiais intermediários são necessárias duas restrições, uma para estados produzidos por tarefas em batelada (Eq. 3.39) e outra para estados produzidos por tarefas contínuas (Eq. 3.40), devido às peculiaridades já descritas nas Equações (3.19) e (3.29).

$$\begin{aligned}
 ST_{s,n} = & ST_{in_s}|_{n=1} + ST_{s,n-1}|_{n>1} + \sum_{\substack{i \in Out_s \\ i \notin I_s \\ i \in I_{arm}}} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^p B_{i,j,n-1} + \sum_{\substack{i \in Out_s \\ i \in I_s}} \sum_{j \in I_j} B_{i,j,n-1} + \\
 & + \sum_{\substack{i \in Out_s \\ i \in I_{arm}}} \sum_{j \in I_j} B_{i,j,n-1} - \sum_{\substack{i \in In_s \\ i \notin I_s \\ i \in I_{arm}}} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^c B_{i,j,n} - \sum_{\substack{i \in In_s \\ i \in I_s}} \sum_{j \in I_j} B_{i,j,n} - \sum_{\substack{i \in In_s \\ i \in I_{arm}}} \sum_{j \in I_j} B_{i,j,n} \quad (3.39) \\
 & \forall n \in N, s \in S_b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ST_{s,n} = & ST_{in_s}|_{n=1} + ST_{s,n-1}|_{n>1} + \sum_{\substack{i \in Out_s \\ i \notin I_s \\ i \in I_{arm}}} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^p B_{i,j,n} + \sum_{\substack{i \in Out_s \\ i \in I_s}} \sum_{j \in I_j} B_{i,j,n-1} + \\
 & - \sum_{\substack{i \in In_s \\ i \notin I_s \\ i \in I_{arm}}} \sum_{j \in I_j} \rho_{i,s}^c B_{i,j,n} - \sum_{\substack{i \in In_s \\ i \in I_s}} \sum_{j \in I_j} B_{i,j,n} \quad (3.40) \\
 & \forall n \in N, s \in S_c
 \end{aligned}$$

Realizada a apresentação dos modelos formulados neste trabalho, na seção a seguir são descritos os estudos de casos empregados na sua validação.

### 3.7. Descrição dos estudos de casos

Nesta seção, são apresentados os estudos de casos aplicados na demonstração da formulação proposta. Foram selecionados três casos envolvendo plantas de operação em batelada e um caso para contínua, além de um estudo de caso envolvendo uma planta com operação mista. A fim de fazer uma comparação entre política de inventário UIS e FIS primeiramente é considerada a armazenagem ilimitada para os estados intermediários dos estudos de casos 1 – 4, para a abordagem FIS é posteriormente apresentada a capacidade de armazenagem de cada tanque dedicado.

### 3.7.1. Estudo de caso 1: Planta com operação em batelada sem compartilhamento entre unidades

O primeiro estudo de caso é abordado de forma simples por Sundaramoorthy e Karimi (2005) e envolve uma planta em operação em batelada multipropósito que requer uma matéria-prima e produz dois estados intermediários e um produto final. O processo é composto por três tarefas sequenciais, onde a primeira tarefa pode ser processada em duas unidades ( $j1$  e  $j2$ ), a segunda tarefa apenas em uma unidade ( $j3$ ) e a terceira tarefa em duas unidades ( $j4$  e  $j5$ ). A Figura 3.4 mostra o STN para o estudo de caso descrito, demais dados pertinentes ao problema estão dispostos nas Tabelas 3.1 e 3.2.



Figura 3.4 – Representação em rede estado-tarefa para o estudo de caso 1. Fonte: Shaik et al. (2006).

### 3.7.2. Estudo de caso 2: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores

Este é um exemplo padrão para programação de curto prazo de plantas de lote multipropósito e foi estudado de forma abrangente por vários autores. Dois produtos diferentes são produzidos através de cinco tarefas de processamento: aquecimento, reações 1, 2 e 3 e separação, como mostrado na representação STN da planta na Figura 3.5 e Tabelas 3.1 e 3.2.

Este caso envolve a alimentação de três matérias-primas, a formação de quatro estados intermediários e dois produtos finais. Além disso, este estudo de caso lida com compartilhamento de unidades, visto que a planta possui dois reatores que são compartilhados para a realização das reações 1, 2 e 3.

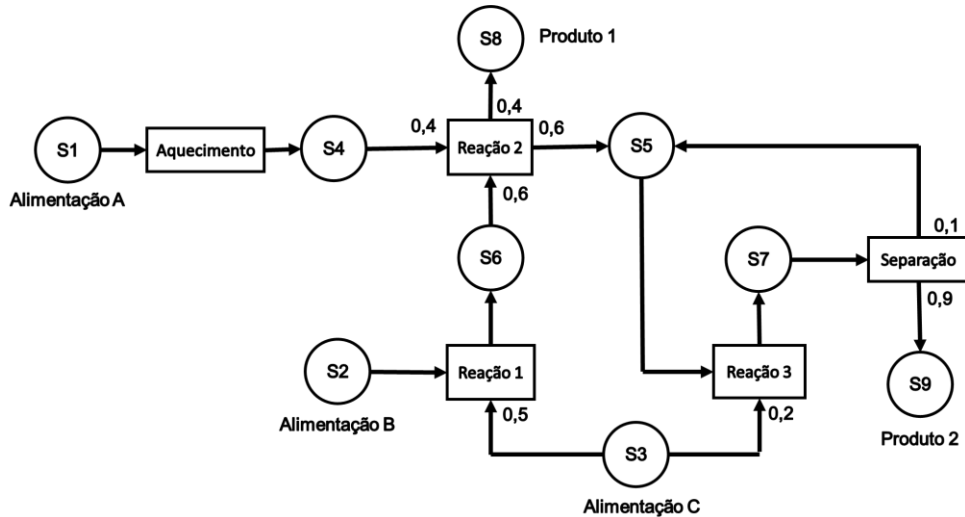


Figura 3.5 – Representação em rede estado-tarefa para o estudo de caso 2. Fonte: Shaik et al. (2006).

### 3.7.3. Estudo de caso 3: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores e do aquecedor

Este é um estudo de caso relativamente complexo de Sundaramoorthy e Karimi (2005) envolvendo 7 tarefas que podem ser realizadas em 6 unidades envolvendo 13 estados. O STN para este estudo de caso é mostrado na Figura 3.6.

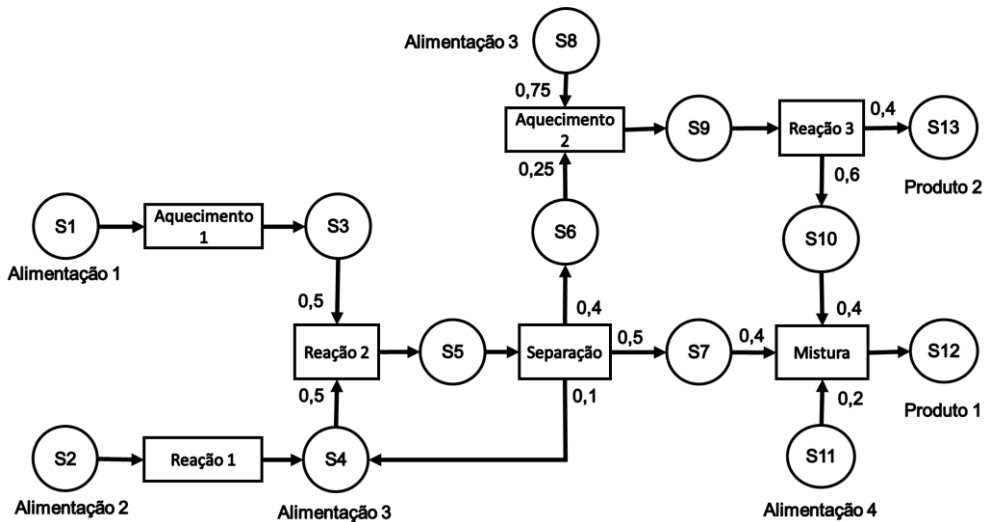


Figura 3.6 – Representação em rede estado-tarefa para o estudo de caso 3. Fonte: Shaik et al. (2006).

Este caso conta com quatro alimentações de matéria-prima, sete estados intermediários e 2 produtos. Observa-se através da representação STN e dos dados apresentados nas Tabelas 3.1 e 3.2 que este problema envolve o compartilhamento

de unidades. Há um aquecedor para realizar duas tarefas de aquecimento e dois reatores compartilhados para três reações. Estas são características comuns de uma planta multipropósito de operação em batelada. Além disso, alguns dos intermediários têm níveis de inventário inicial diferentes de zero.

Os dados inerentes aos estados, níveis iniciais de inventário e valor de cada estado para os três estudos de casos são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Dados de inventário inicial e valor dos estados para estudos de casos para operação em batelada. Fonte: Shaik et al. (2006).

Estado	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Inventário inicial (um)	Valor (\$/um)	Inventário inicial (um)	Valor (\$/um)	Inventário inicial (um)	Valor (\$/um)
S1	Disp.	0	Disp.	0	Disp.	0
S2	0	0	Disp.	0	Disp.	0
S3	0	0	Disp.	0	0	0
S4	0	5	0	0	0	0
S5			0	0	0	0
S6			0	0	50	0
S7			0	0	50	0
S8			0	10	Disp.	0
S9			0	10	0	0
S10					0	0
S11					Disp.	0
S12					0	5
S13					0	5

Os dados pertinentes de coeficientes constantes ( $\alpha_{ij}$ ) e lineares ( $\beta_{ij}$ ) para os tempos de processamento das diferentes tarefas (i), as unidades adequadas (j) e capacidade mínima ( $B_{ij}^{min}$ ) e máxima ( $B_{ij}^{max}$ ) para os três estudos de casos considerados são apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Dados de Coeficientes de tempo de processamento e capacidade das unidades para estudos de casos com operação em batelada. Fonte: Shaik et al. (2006).

Tarefa (i)	Unidade (j)	$\alpha_{ij}$	$\beta_{ij}$	$B_{ij}^{\min}(\text{um})$	$B_{ij}^{\max}(\text{um})$
Caso 1					
Tarefa 1	Unidade 1	1,333	0,01333	-	100
Tarefa 1	Unidade 2	1,333	0,01333	-	150
Tarefa 2	Unidade 3	1,000	0,00500	-	200
Tarefa 3	Unidade 4	0,667	0,00445	-	150
Tarefa 3	Unidade 5	0,667	0,00445	-	150
Caso 2					
Aquecimento	Aquecedor	0,667	0,00667	-	100
Reação 1	Reator 1	1,334	0,02664	-	50
Reação 1	Reator 2	1,334	0,01665	-	80
Reação 2	Reator 1	1,334	0,02664	-	50
Reação 2	Reator 2	1,334	0,01665	-	80
Reação 3	Reator 1	0,667	0,01332	-	50
Reação 3	Reator 2	0,667	0,00832	-	80
Separação	Separador	1,3342	0,00666	-	200
Caso 3					
Aquecimento 1	Aquecedor	0,667	0,00667	-	100
Aquecimento 2	Aquecedor	1,000	0,01000	-	100
Reação 1	Reator 1	1,333	0,01333	-	100
Reação 1	Reator 2	1,333	0,00889	-	150
Reação 2	Reator 1	0,667	0,00667	-	100
Reação 2	Reator 2	0,667	0,00445	-	150
Reação 3	Reator 1	1,333	0,01330	-	100
Reação 3	Reator 2	1,333	0,00889	-	150
Separação	Separador	2,000	0,00667	-	300
Mistura	Misturador 1	1,333	0,00667	20	200
Mistura	Misturador 2	1,333	0,00667	20	200

De acordo com as formulações propostas, os estudos de caso apresentados são abordados de duas formas:

- Para a aplicação ao modelo UIS assume-se capacidade de armazenamento ilimitada para todos os estados intermediários.
- Para a aplicação ao modelo FIS são adicionados tanques de armazenagem dedicados aos conforme relacionado na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Dados de capacidade de armazenagem para os estudos de casos FIS com operação em batelada. Fonte: Shaik et al. (2006).

Estado	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Unidade	Capacidade (t)	Unidade	Capacidade (t)	Unidade	Capacidade (t)
S3	Tanque 1	200			Tanque 1	100
S4	Tanque 2	250	Tanque 1	100	Tanque 2	100
S5			Tanque 2	200	Tanque 3	300
S6			Tanque 3	150	Tanque 4	150
S7			Tanque 4	200	Tanque 5	150
S9					Tanque 6	150
S10					Tanque 7	150

#### 3.7.4. Estudo de caso 4 : Planta com operação contínua

O próximo estudo de caso trata-se de uma planta de fabricação de bens de consumo amplamente estudado por vários autores (IERAPETRITOU; FLOUDAS, 1998b; GIANNELLOS; GEORGIADIS, 2002b; MENDEZ; CERDA, 2002; CASTRO et al., 2004). A planta segue uma sequência de tarefas de produção comum para todos os produtos: mistura, armazenagem e embalagem. A representação STN da planta é mostrada na Figura 3.7, juntamente com a adequação da unidade para cada tarefa.

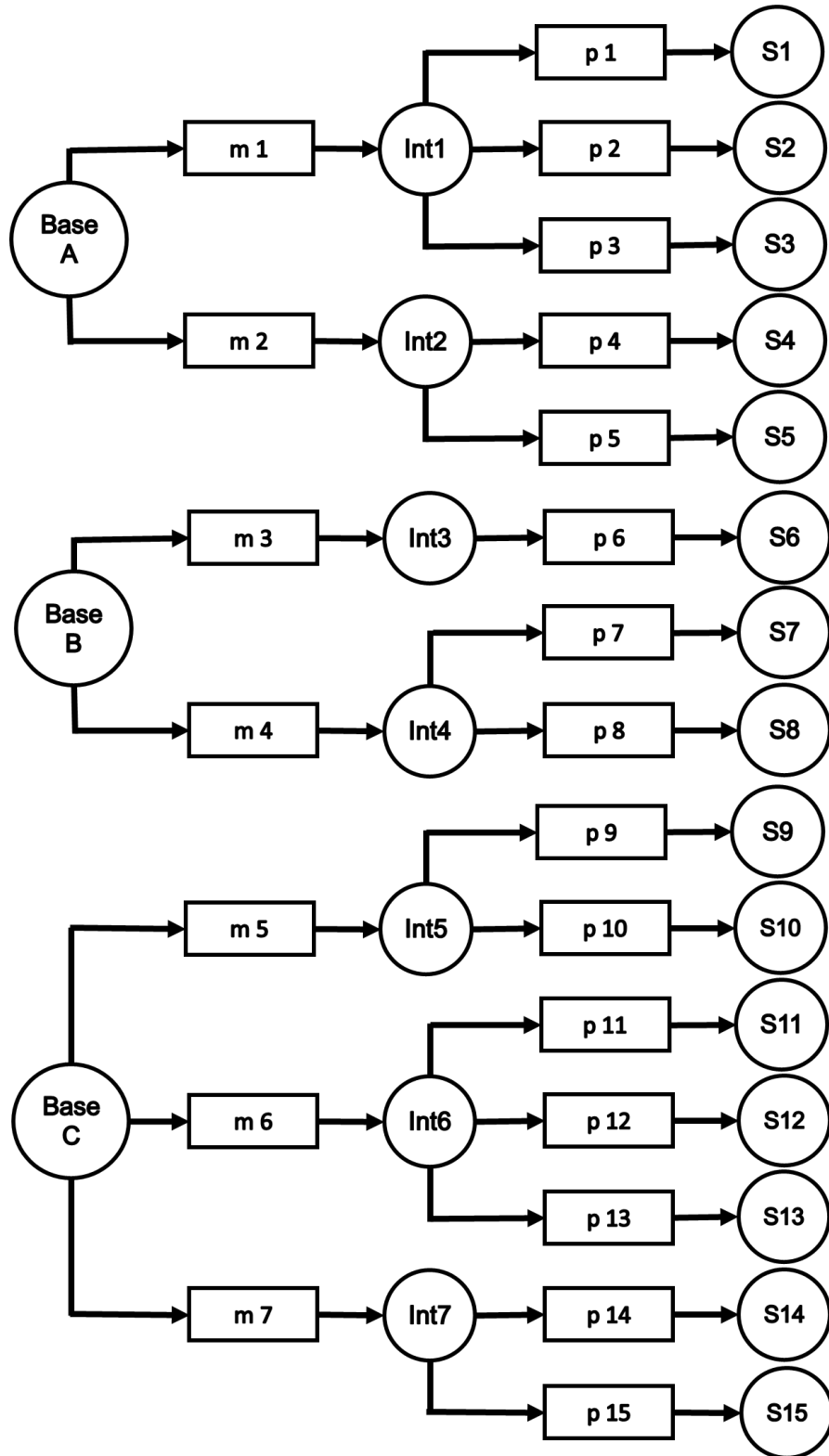


Figura 3.7 – Representação STN do estudo de caso 4. Fonte: Shaik e Floudas (2007).

O processo conta com três estados de matéria-prima, disponíveis conforme necessário, que são transformados em sete estados intermediários (Int1-Int7) através de tarefas específicas de mistura. A unidade de mistura conta com três misturadores

paralelos operando em modo contínuo. Os estados intermediários podem ser armazenados em sete tanques de armazenamento dedicados (tanques 1-7) ou embalados diretamente em cinco linhas de embalagem contínuas, através de 15 tarefas de embalagem (p1-p15), produzindo assim 15 produtos finais (S1-S15). Os misturadores e linhas de produção são unidades compartilhadas conforme indicado na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Taxas de produção para estudo de caso 4. Fonte: Shaik e Floudas (2007).

Tarefa (i)	Unidade (j)	$R_i^{\max}(\text{t/h})$	Tarefa (i)	Unidade (j)	$R_i^{\max}(\text{t/h})$
m1	Misturador A	17	p1	Linha 3	5,5714
m2	Misturador A	17	p2	Linha 1	5,8333
m3	Misturador B	17	p3	Linha 2	2,7083
m3	Misturador C	17	p4	Linha 1	5,8333
m4	Misturador B	17	p5	Linha 2	2,7083
m4	Misturador C	17	p6	Linha 3	5,5714
m5	Misturador B	12,24	p7	Linha 4	2,2410
m5	Misturador C	12,24	p8	Linha 1	5,8333
m6	Misturador B	12,24	p9	Linha 2	2,7083
m6	Misturador C	12,24	p10	Linha 5	5,3571
m7	Misturador B	12,24	p11	Linha 5	5,3571
m7	Misturador C	12,24	p12	Linha 4	3,3333
			p13	Linha 4	2,2410
			p14	Linha 2	2,7083
			p15	Linha 4	3,3333

Para a abordagem UIS do problema considera-se ilimitada a capacidade de armazenagem dos tanques 1 – 7, e para a abordagem FIS é adotada capacidade de 60 t. Demais dados pertinentes a resolução do problema: inventário inicial, armazenagem intermediária, especificações de demanda mínima e máxima e os preços dos produtos finais são expostos na Tabela 3.5.



Tabela 3.5 – Dados dos estados para estudo de caso 4. Fonte: Shaik e Floudas (2007).

Estado (s)	$St_s^0$	$D_s^{Min}$	$D_s^{Max}$	$Valor_s$
Base A, B, C	$\infty$			
Int1-Int7				
S1		220	270	1
S2		251	300	1
S3		116	240	1
S4		15	25	1
S5		7	20	1
S6		47	60	1
S7		8,5	10	1
S8		144	200	1
S9		42,5	60	1
S10		114,5	150	1
S11		53	80	1
S12		2,5	5	1
S13		16,5	25	1
S14		13,5	18	1
S15		17,5	25	1

### 3.7.5. Estudo de caso 5: Planta de fertilizantes fosfatados

Esta seção aborda a descrição do estudo de caso proposto por Fonseca et al. (2018), que se trata de um problema de programação da produção de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados. Neste trabalho não é considerado tempo de transição entre tarefas diferentes sendo executadas na mesma unidade, diferente do proposto por Fonseca (2013).

Nesta planta são desenvolvidas tarefas em batelada e contínuas. Além disso, o problema abrange diferentes políticas de armazenagem intermediária (UIS, NIS, FIS e ZW) e compartilhamento de unidades de produção. Todas as características citadas elevam o grau combinatório da modelagem matemática do problema, tornando-o de

elevada complexidade. A Figura 3.8 ilustra o diagrama de blocos do processo de produção de fertilizantes fosfatados considerado no estudo de caso.

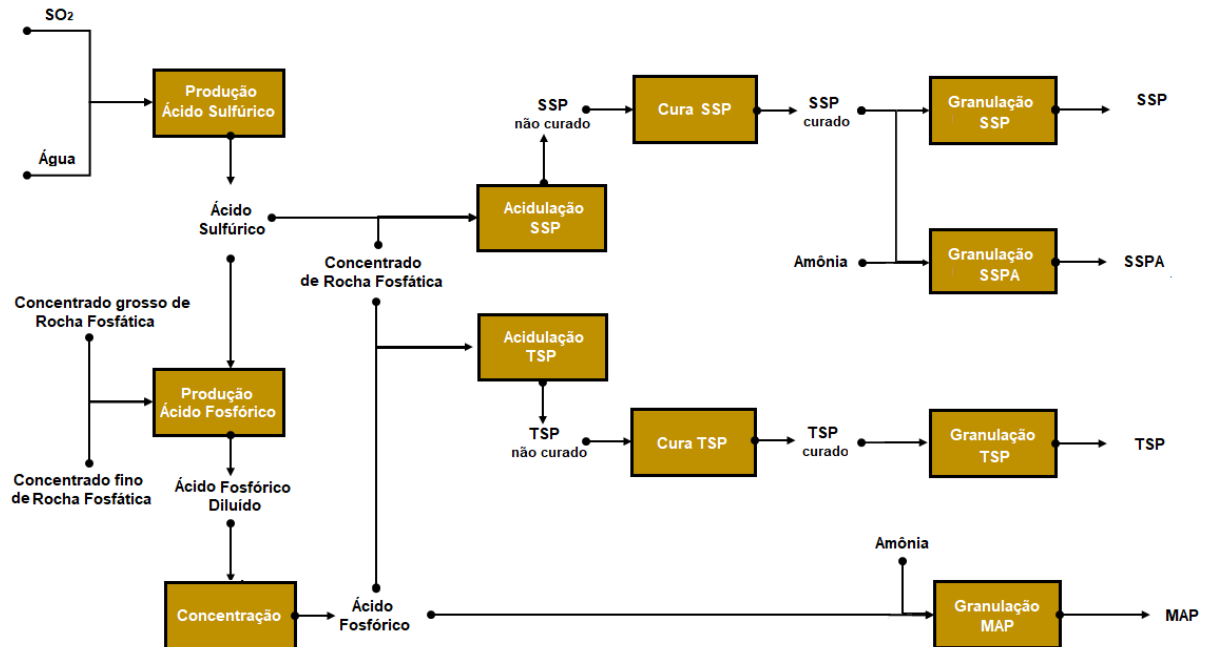


Figura 3.8 – Diagrama de blocos de um processo de produção de fertilizantes fosfatados. Fonte: Fonseca et al. (2018).

Para este estudo de caso foram adotados os seguintes produtos: Superfosfato Simples (SSP), Superfosfato Simples Amoniado (SSPA), Superfosfato Triplo (TSP) e Fosfato Monomamônio (MAP), conforme os aspectos comerciais considerados por Fonseca (2013).

Os subprodutos intermediários SSP e TSP são produzidos na tarefa de acidulação. Para estas tarefas uma única unidade está disponível. Esta deve ser configurada conforme a tarefa a ser executada, sendo assim SSP e TSP não podem ser produzidos simultaneamente e a programação da produção deve indicar uma alocação eficiente, para evitar trocas frequentes de produtos nesta unidade.

Após a acidulação, os produtos intermediários seguem para a etapa de cura em armazéns dedicados. Cada armazém conta com cinco baias. O armazém 1 é dedicado à cura de SSP com um tempo de cura de 5 dias, enquanto ao armazém 2 é atribuído à cura de TSP, com um tempo de cura de 6 dias. Essa atividade representa uma das particularidades deste processo, devido aos longos tempos de processamento.

Passado o tempo da cura, os estados devem permanecer armazenados nas baias até serem transferidos para unidades de granulação. Dessa forma podem ser realizadas tarefas de armazenamento nas baias, e não apenas em tanques dedicados, como visto nos estudos de casos anteriores, sendo o armazém 1 dedicado a SSP e o armazém 2 dedicado a TSP. Os dados de capacidade e tempo de cura nas baias são apresentados na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 – Dados de capacidade e tempo de cura para as tarefas em batelada.  
Fonte: Fonseca et al. (2018).

Armazém	Baia	Tempo de cura (h)	Capacidade mínima (t)	Capacidade máxima (t)
Armazém 1	1	120	3000	7000
	2	120	3000	7000
	3	120	3000	7000
	4	120	3000	7000
	5	120	3000	7000
Armazém 2	1	144	3000	9000
	2	144	3000	9000
	3	144	3000	9000
	4	144	3000	9000
	5	144	3000	9000

Nas unidades de granulação acontece a conversão de estados intermediários em produtos finais. A planta possui três unidades de granulação, com dimensões diferentes, capazes de produzir qualquer um dos quatro produtos finais. No entanto, a mudança entre produtos diferentes requer a reconfiguração do equipamento.

Quanto às políticas de armazenagem, assume-se capacidade de armazenamento infinita para matérias-primas e produtos finais. Ácido sulfúrico e ácido fosfórico são armazenados em tanques dedicados de capacidade limitada (FIS). Os estados intermediários SSP e TSP devem permanecer nas baias de cura até seu consumo, sendo assim classificados como sem espera (ZW). Não são considerados recursos de armazenagem para os demais estados (NIS). Os dados de capacidade de armazenagem para os estados FIS são apresentados na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 – Dados de capacidade dos tanques de armazenagem dedicada. Fonte: Fonseca et al. (2018).

Tanque	Capacidade mínima (t)	Capacidade máxima (t)
Tanque H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	0	18000
Tanque H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub> - MAP	0	2000
Tanque H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub> - TSP	0	2000

Descrito o processo, a representação em rede estado tarefa da planta de fertilizantes fosfatados é descrita na Figura 3.9.

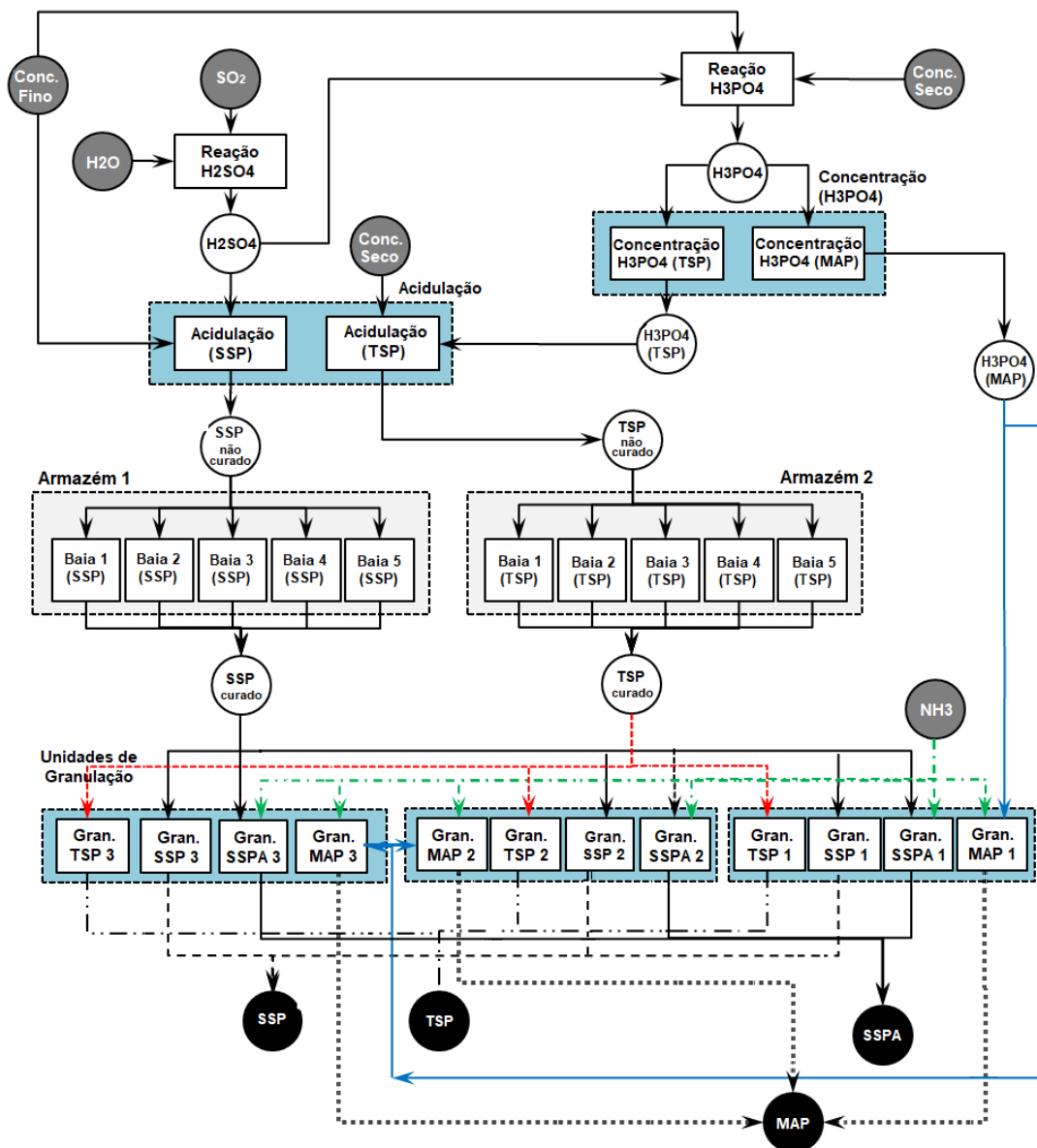


Figura 3.9 – Representação STN de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados. Fonte: Adaptado de Fonseca et al. (2018)

Nesta representação as unidades compartilhadas são indicadas por retângulos coloridos (correspondentes a unidades de concentração de fósforo, unidades de acidulação e unidades de granulação 1, 2 e 3) e dentro deles são representadas as tarefas passíveis a estas unidades, retângulos brancos. Os retângulos em cinza indicam as baias que compõe cada armazém. Além disso, as cores dos círculos, cinza, branco e preto, diferem os estados em matérias-primas, intermediários e produtos finais respectivamente.

Dados de taxa de processamento das operações contínuas são apresentados na Tabela 3.8.

Tabela 3.8 – Taxa de processamento das operações contínuas. Fonte: Fonseca et al. (2018).

Tarefa	Unidade	Taxa de processamento (t/h)
Produção de ácido sulfúrico	Planta de ácido sulfúrico	1500
Produção de ácido fosfórico	Reator de ácido fosfórico	800
Concentração de ácido fosfórico para MAP	Evaporador	800
Concentração de ácido fosfórico para TSP		700
Acidulação SSP	Unidade de Acidulação	1200
Acidulação TSP		1200
Granulação de MAP	Granulação – Unidade 1	800
Granulação de SSP		900
Granulação de SSPA		1400
Granulação de TSP		1300
Granulação de MAP	Granulação – Unidade 2	1200
Granulação de SSP		900
Granulação de SSPA		700
Granulação de TSP		900
Granulação de MAP	Granulação – Unidade 3	1200
Granulação de SSP		600
Granulação de SSPA		700
Granulação de TSP		800

A Tabela 3.9 apresenta a quantidade, em toneladas, de cada estado intermediário que se encontra em inventário ao início da programação.

Tabela 3.9 – Inventário inicial de estados intermediários. Fonte: Fonseca et al. (2018).

<b>Estado (s)</b>	<b>Quantidade (t)</b>
Ácido sulfúrico	40.000
Ácido fosfórico para TSP	1.000
Ácido fosfórico para MAP	2.000
SSP curado	7.000
TSP curado	9.000

Dados de valor de receita por tonelada de produto final considerados neste estudo de caso podem ser consultados na Tabela 3.10.

Tabela 3.10 – Margem de contribuição dos produtos finais. Fonte: Fonseca et al. (2018).

<b>Produto</b>	<b>Receita (US\$ t<sup>-1</sup>)</b>
SSP	200
SSPA	230
TSP	300
MAP	250

### 3.8. Métricas de desempenho

Expostos os estudos de casos de referência tratados, no capítulo a seguir é abordada a solução destes para os modelos formulados neste trabalho em comparação com modelos renomados da literatura, Shaik et al. (2006) para processos de operação em batelada e Shaik e Floudas (2007) para processos de operação contínua. Estes modelos são avaliados para diferentes horizontes de tempo de cada problema com respeito a função objetivo de maximização da receita.

A fim de possibilitar uma comparação precisa dos resultados, todos os casos são implementados no mesmo computador, para os modelos propostos e modelos de referência, (Processador intel core i5-4200U) no *software* GAMS 24.4.6 e resolvidos pelo *solver* CPLEX através do método matemático *Branch and Cut*. É adotado como critério de parada um *gap* de 0% para todos os casos.

Como métrica de desempenho é adotada a comparação das estatísticas de modelo. Estes são comparados em relação ao tempo computacional (CPU segundos) no mesmo computador, valor da função objetivo para o problema relaxado (RMILP) e ótima global (MILP), número total de variáveis binárias e contínuas, restrições, número de elementos diferentes de zero na matriz de coeficientes resultante e o número total de nós explorados para atingir a gap integral. De acordo com a relação entre a função objetivo RMILP e MILP pode-se observar a relaxação do modelo, quanto mais próximas menor o número de iterações necessárias para a resolução do problema, portanto é um modelo mais justo.

Além disso, por se tratar de modelos com representação de tempo contínua deve-se determinar o número ótimo de pontos de eventos. Este é determinado para cada caso pela abordagem aditiva. A cada iteração aumenta-se sucessivamente em 1 o número de pontos de evento, até que não haja incremento na função objetivo. Em cada caso, cálculos adicionais são realizados em pontos de evento superiores para garantir a otimização global (MOURET et al, 2011).

---

## **CAPÍTULO 4**

### **Resultados e Discussões**

---

Este capítulo apresenta os resultados da implementação no *software* GAMS dos modelos matemáticos propostos para a programação da produção de processos em batelada e processos contínuos para políticas de armazenagem UIS e FIS, descritos no capítulo anterior. Para processos em batelada o modelo proposto é comparado ao Shaik et al. (2006) através da avaliação de três estudos de casos de diferentes complexidades. A modelagem para processos contínuos é avaliada em comparação ao modelo de Shaik e Floudas (2007), através de um estudo de caso industrial. Estes trabalhos foram utilizados como referência para as discussões realizadas neste capítulo. Além disso são apresentados os resultados computacionais da implementação do modelo proposto ao estudo de caso de uma planta de fertilizantes fosfatados.

#### **4.1. Resultados dos estudos de casos para operação em batelada com armazenamento intermediário ilimitado**

Esta seção apresenta os resultados da implementação do modelo matemático para programação da produção de processos em batelada com armazenamento intermediário ilimitado. O desempenho do modelo proposto é averiguado através da comparação dos resultados com um modelo conceituado na literatura, proposto por Shaik et al. (2006), através da implementação de três estudos de casos, com diferentes complexidades e horizontes de tempo.



#### 4.1.1. Estudo de caso 1 UIS: Planta com operação em batelada sem compartilhamento entre unidades

Para a resolução do primeiro estudo de caso foram adotados 3 horizontes de tempo 8, 12 e 16 horas de processamento, respectivamente. A tabela 4.1 apresenta os resultados do estudo de caso 1 FIS com horizonte de tempo de 8 horas.

Tabela 4.1 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H= 8h) UIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
3	0,062	1000	1000	5	73	85	235	4	0
	<b>**0,062</b>	1000	1000	5	48	56	145	4	0
4	<b>0,078</b>	<b>2000</b>	<b>1840,17</b>	<b>10</b>	<b>102</b>	<b>126</b>	<b>393</b>	<b>64</b>	<b>0</b>
	<b>**0,093</b>	<b>2000</b>	<b>1840,17</b>	<b>10</b>	<b>67</b>	<b>79</b>	<b>213</b>	<b>29</b>	<b>0</b>
5	0,188	2000	1840,17	15	131	171	581	867	0
	<b>**0,187</b>	2000	1840,17	15	86	102	281	141	0

\*\*Shaik et al. (2006)

O número ótimo de pontos de evento foi determinado através da abordagem aditiva, como pode-se observar na Tabela 4.1. Os resultados que apresentam a solução ótima empregando menos pontos de evento estão destacados em negrito.

No primeiro cenário, para horizonte de tempo com duração de 8 horas, ambos os modelos encontraram a solução ótima com 4 pontos de evento. Em relação ao tempo computacional ambos funcionam igualmente bem, mesmo considerando que o modelo de Shaik et al. (2006) apresenta melhores estatísticas de modelo, visto que gera menos restrições, variáveis contínuas e elementos diferente de zero na matriz de coeficientes resultantes.

Com isto, devido a maior proporção do modelo proposto em relação ao de Shaik et al. (2006), e maior número de iterações necessárias, é possível inferir que este viabiliza uma solução mais rápida do problema LP em cada iteração, sendo os tempos de resposta semelhantes. Ainda, de acordo com os gráficos de Gantt (Figuras 4.1 e 4.2) os dois modelos obtiveram a mesma alocação das tarefas para este estudo de caso.

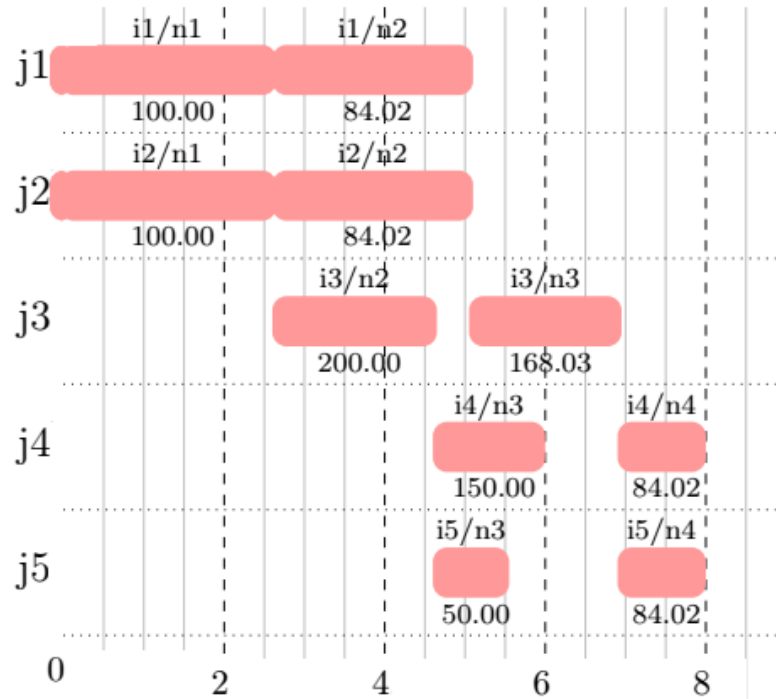


Figura 4.1 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=8h) UIS: modelo proposto.

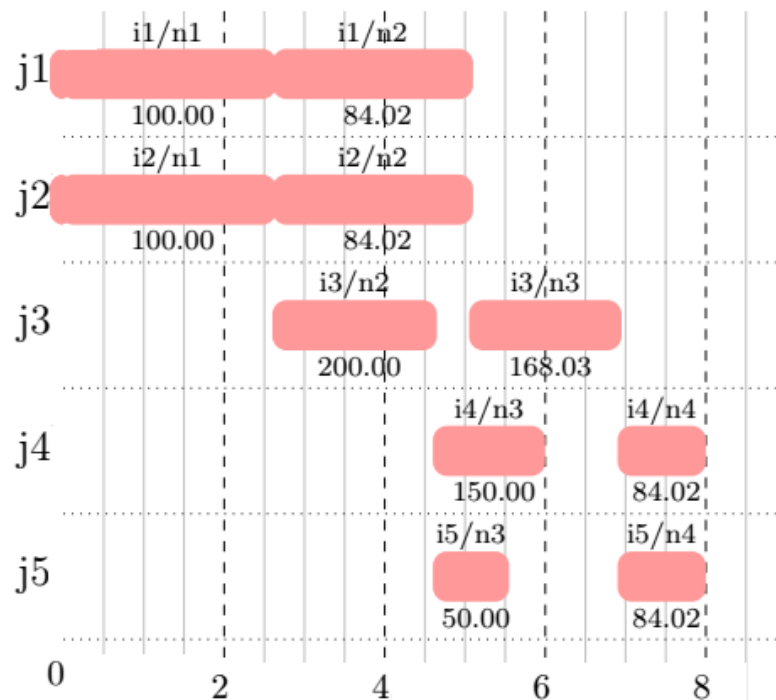


Figura 4.2 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=8h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).

Os resultados da implementação do estudo de caso 1 para horizonte de tempo de 12 horas, encontram-se na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H=12h) UIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
4	0,063	2000	2000	10	102	126	393	32	0
	**0,079	2000	2000	10	67	79	213	11	0
5	0,094	3000	3000	15	131	171	581	57	0
	**0,109	3000	3000	15	86	102	281	20	0
6	<b>0,203</b>	<b>4000</b>	<b>3463,62</b>	<b>20</b>	<b>160</b>	<b>220</b>	<b>799</b>	<b>171</b>	<b>0</b>
	<b>**0,203</b>	<b>4000</b>	<b>3463,62</b>	<b>20</b>	<b>105</b>	<b>125</b>	<b>349</b>	<b>116</b>	<b>0</b>
7	0,422	4951	3463,62	25	189	273	1047	775	950
	**0,344	4937,33	3463,62	25	124	148	417	261	0

\*\*Shaik et al. (2006)

Nesse caso, ambos modelos encontraram solução ótima com 6 pontos de evento. Apesar do modelo proposto apresentar maior número de variáveis e restrições, o tempo computacional requerido foi semelhante. Os gráficos de Gantt para este estudo de caso são apresentados nas Figuras 4.3 e 4.4.

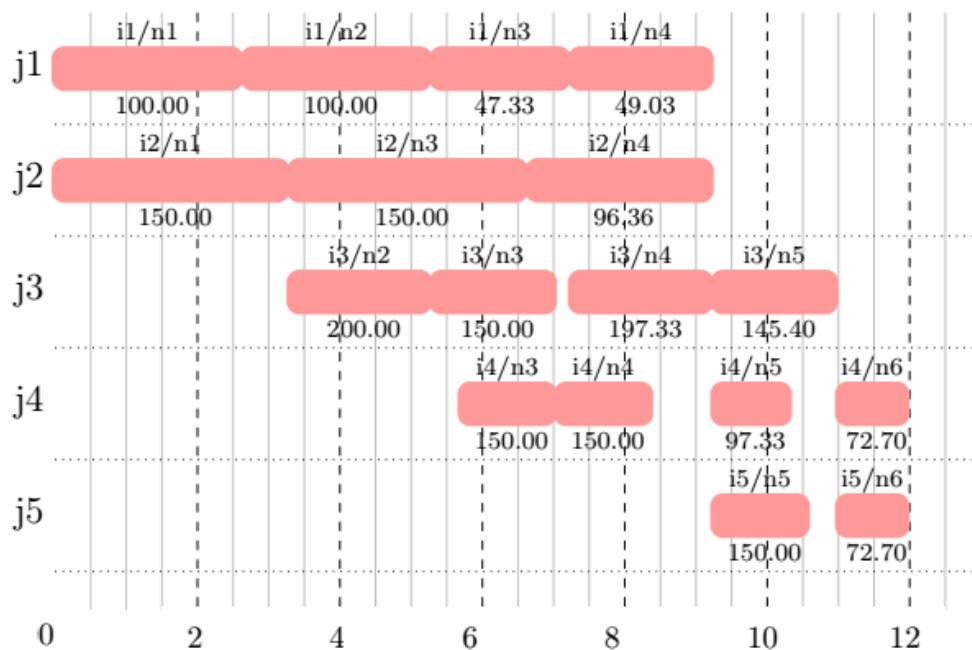


Figura 4.3 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 1 (H=12h) UIS: modelo proposto.

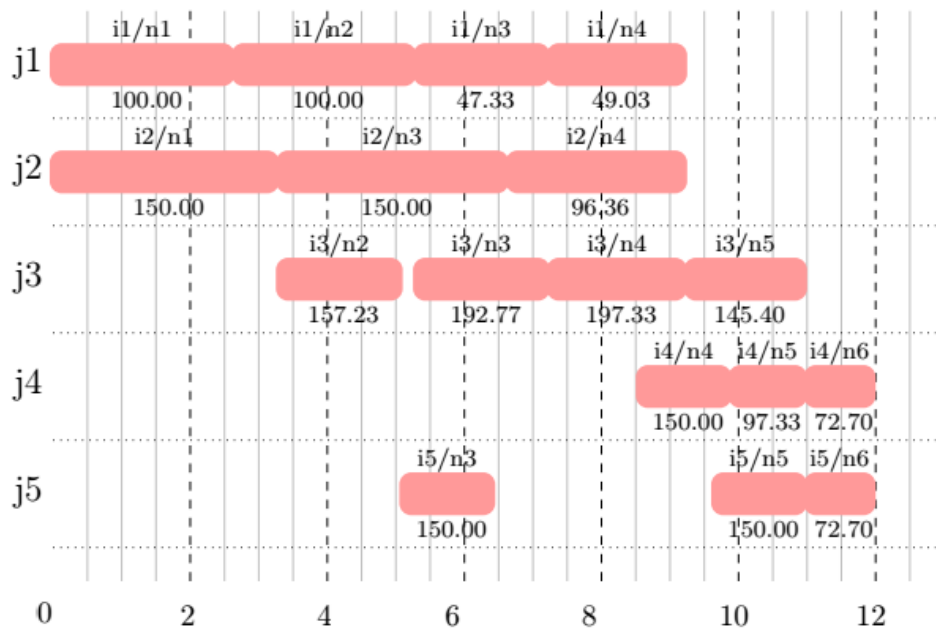


Figura 4.4 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=12h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).

Na Figura 4.5, é possível observar que devido à não limitação da armazenagem são há um acúmulo do estado intermediário S3 antes de se iniciar a tarefa 4 e 5 nas unidades *j4* e *j5*.

Para o horizonte de tempo de 16 horas os resultados são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H=16h) UIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
7	0,187	5000	5000	25	189	273	1047	127	0
	**0,047	5000	5000	25	124	148	417	55	0
8	0,325	6000	5015,54	30	218	330	1325	1632	167
	**0,328	6000	5015,54	30	143	171	485	235	0
9	<b>1,037</b>	<b>6601,65</b>	<b>5038,05</b>	<b>35</b>	<b>247</b>	<b>391</b>	<b>1633</b>	<b>82698</b>	<b>10717</b>
	<b>**0,797</b>	<b>6601,65</b>	<b>5038,05</b>	<b>35</b>	<b>162</b>	<b>194</b>	<b>553</b>	<b>17659</b>	<b>2966</b>
10	10,72	6601,65	5038,05	40	276	456	1971	366243	61154
	<b>**5,013</b>	6601,65	5038,05	40	181	217	621	219995	36330

\*\*Shaik et al. (2006)

Para este caso pode-se observar que os modelos também apresentaram tempo de resposta semelhante. Nas Figura 4.5 e 4.6 pode-se observar os gráficos de Gantt para os modelos abordados.

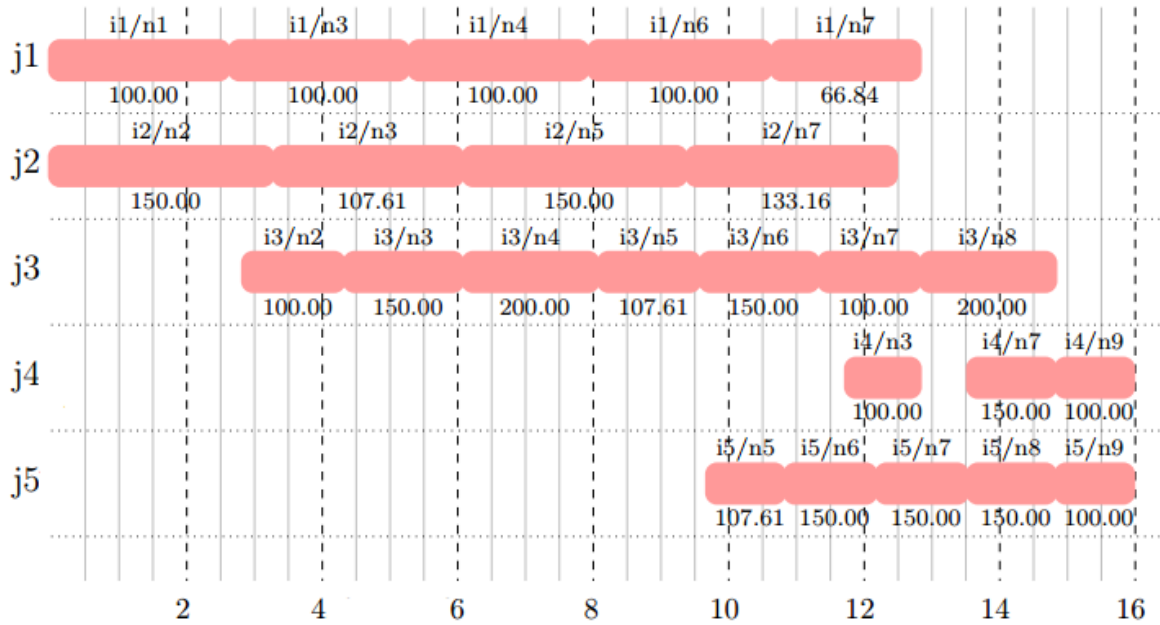


Figura 4.5 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 1 (H=16h) UIS: modelo proposto.

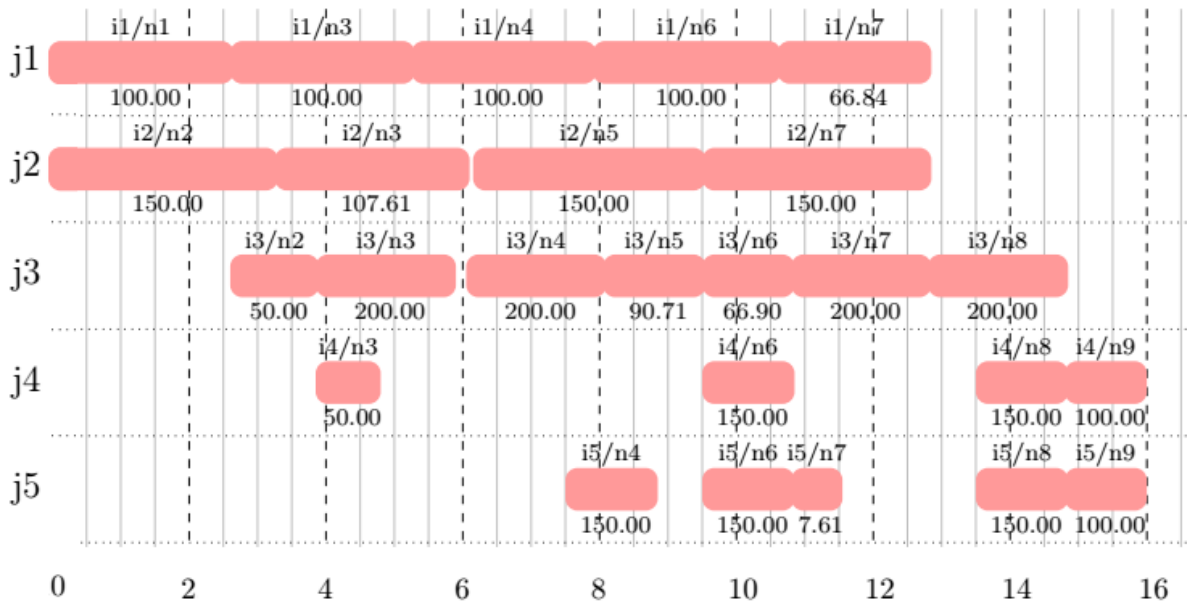


Figura 4.6 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 1 (H=16h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).

Assim como no caso anterior, na Figura 4.5, é possível observar que devido ausência de restrições para garantir a limitação da armazenagem há um grande

acúmulo do estado intermediário S3, 557,61 *um*, antes de se iniciar a tarefa 4 e 5 nas unidades *j4* e *j5*. Contudo esta abordagem geraria violações no caso de haver armazenagem finita, não sendo viável para aplicação no estudo de caso proposto. Tal fato pode ser compensado com uma abordagem de armazenagem intermediária finita.

#### 4.1.2. Estudo de caso 2 UIS: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores

Para o estudo de caso 2 adotou-se dois horizontes de tempo, 8 e 12 horas. As implementações do estudo de caso 2 com horizonte de tempo de 8 horas para o modelo proposto neste trabalho e para o modelo de Shaik et al (2006), resultaram conforme apresentado na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Resultados da implementação do estudo de caso 2 (H=8h) UIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
3	0,078	975	866,67	10	106	146	461	32	0
	**0,046	975	866,67	10	86	128	381	0	0
4	<b>0,127</b>	<b>1730,87</b>	<b>1498,57</b>	<b>18</b>	<b>147</b>	<b>225</b>	<b>799</b>	<b>99</b>	<b>0</b>
	<b>**0,125</b>	<b>1812,12</b>	<b>1498,57</b>	<b>18</b>	<b>119</b>	<b>179</b>	<b>563</b>	<b>125</b>	<b>0</b>
5	0,359	2123,32	1498,57	26	188	318	1219	2821	352
	**0,484	2305,34	1498,57	26	152	230	747	3304	564

\*\*Shaik et al. (2006)

No primeiro cenário, para horizonte de tempo com duração de 8 horas, ambos os modelos encontraram a solução ótima com 4 pontos de evento. Pode-se observar que o modelo de Shaik et al. (2006) apresentou melhores estatísticas de modelo, menos restrições, variáveis contínuas e elementos diferente de zero. No entanto o modelo proposto neste trabalho resultou em um tempo de resposta semelhante. Tal fato deve-se à solução relaxada encontrada ser mais próxima da solução ótima, resultando em menor número de nós na árvore de busca, e menor número de iterações para resolução do problema. Os gráficos de Gantt para este cenário são apresentados nas Figuras 4.7 e 4.8.

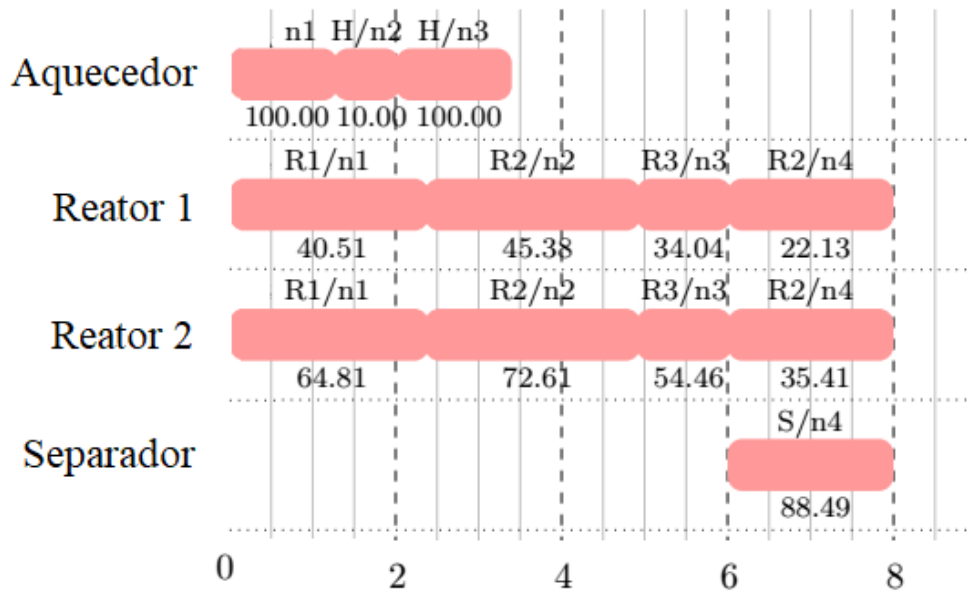


Figura 4.7 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 2 (H=8h) UIS: modelo proposto.

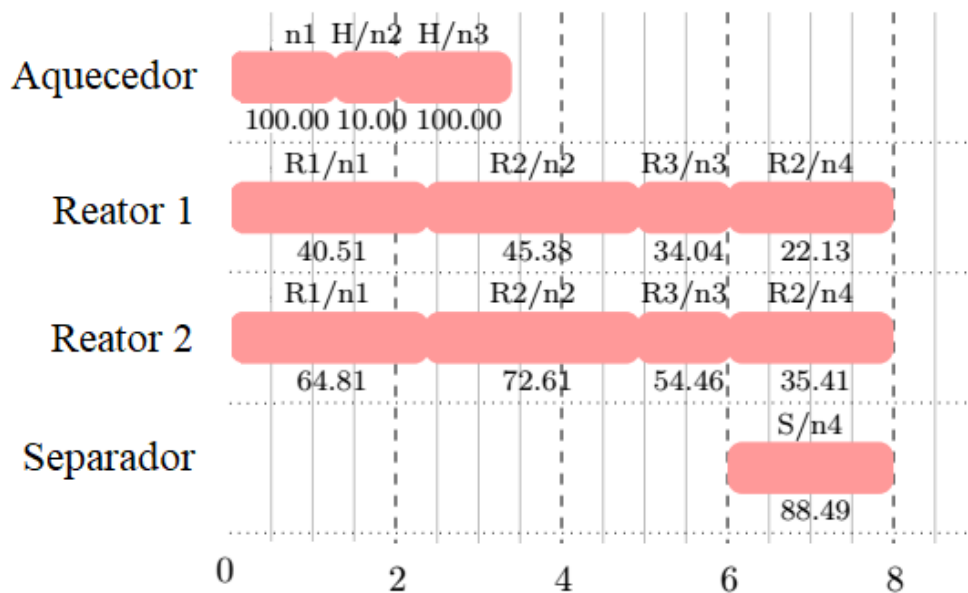


Figura 4.8 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 2 (H=8h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).

Os resultados de programação da produção do estudo de caso 2 para horizonte de tempo de 12h, para modelo proposto neste trabalho e para o modelo de Shaik et al (2006), são apresentados na Tabela 4.5.

Neste caso a solução ótima foi encontrada com 7 pontos de evento para os dois modelos testados. Para um horizonte de tempo de 12 horas, o modelo proposto também resultou em uma solução do problema relaxado mais justa, sendo assim, a

solução relaxada é mais próxima da solução ótima resultando em menor número de iterações. Além disso este caso foi resolvido com um menor tempo computacional e menor número de iterações.

Tabela 4.5 – Resultados da implementação do estudo de caso 2 (H=12h) UIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
5	0,094	2541,91	2410	26	188	318	1219	98	0
	**0,172	2541,91	2410	26	152	230	747	94	0
6	0,406	3076,62	2646,79	34	229	425	1721	4367	482
	**0,391	3190,53	2646,79	34	185	281	931	3304	419
7	<b>3,000</b>	<b>3301</b>	<b>2658,52</b>	<b>42</b>	<b>270</b>	<b>546</b>	<b>2305</b>	<b>101508</b>	<b>13133</b>
	<b>**4,266</b>	<b>3788,31</b>	<b>2658,52</b>	<b>42</b>	<b>218</b>	<b>332</b>	<b>1115</b>	<b>166759</b>	<b>14440</b>
8	24,688	3350	2658,52	50	311	681	2971	807368	807338
	**23,282	4297,92	2658,52	50	251	383	1299	885151	77620

\*\*Shaik et al. (2006)

Os gráficos de Gantt para este cenário são apresentados nas Figuras 4.9 e 4.10.

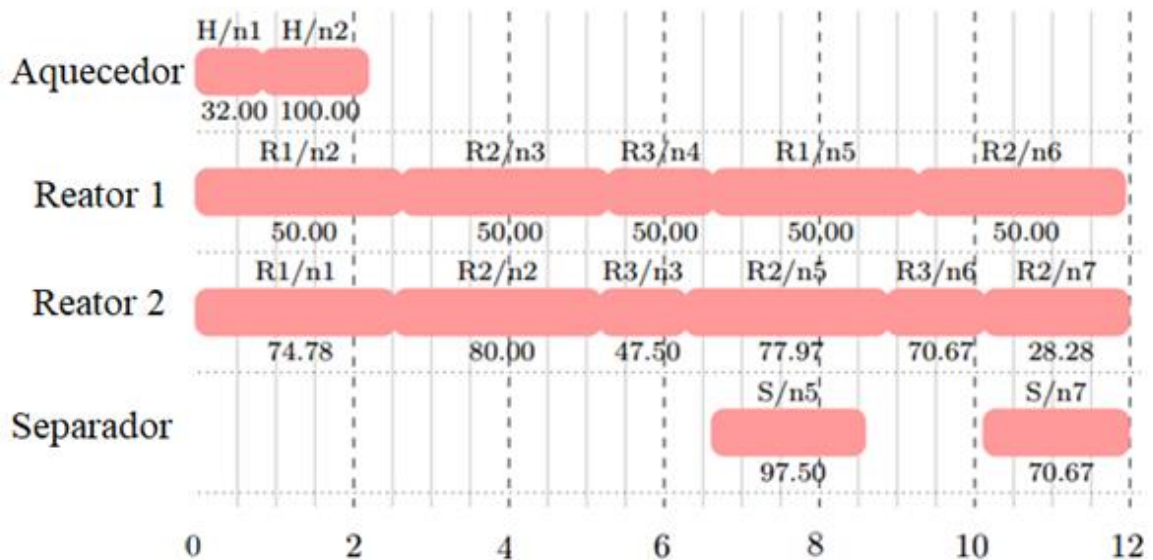


Figura 4.9 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=12h) UIS: modelo proposto.



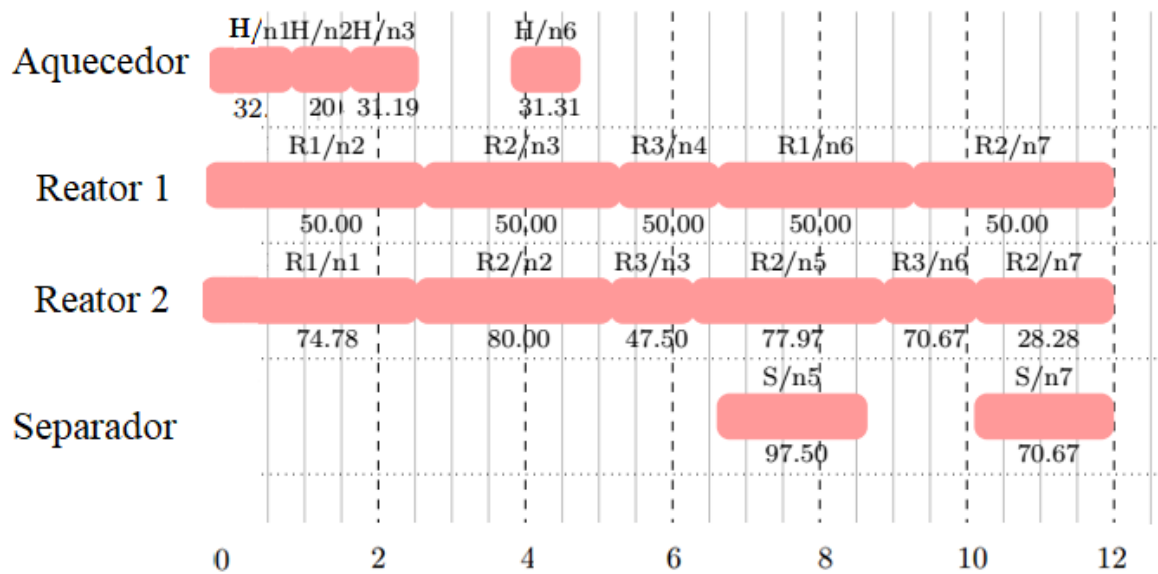


Figura 4.10 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=12h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).

Ao observar as Figuras 4.9 e 4.10 nota-se que na unidade 1 são alocadas tarefas de aquecimento do estado A sequenciais logo no início do horizonte de tempo. No entanto, o estado A aquecido só é consumido pela reação 2 (R2) posteriormente, dessa forma é armazenada uma grande quantidade deste estado antes do consumo, tal fato pode gerar violações de armazenamento.

#### 4.1.3. Estudo de caso 3 UIS: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores e do aquecedor

Para o terceiro estudo de caso também foram adotados horizonte de tempo de 8 e 12 horas. As implementações deste estudo de caso com horizonte de tempo de 8 horas, para o modelo proposto neste trabalho e para o modelo de Shaik et al (2006), resultaram conforme apresentado na Tabela 4.6.

Como pode ser visto na tabela, ambos os modelos encontraram a solução ótima com 5 pontos de evento. Pode-se observar que o modelo de referência apresentou melhores estatísticas de modelo em geral. No entanto ambos resultaram em um tempo de resposta semelhante. Devido à relaxação inicial a solução do problema relaxado foi encontrada mais rápido, mas a resolução do problema LP necessitou de um maior número de iterações devido ao maior número de variáveis contínuas no modelo.

Tabela 4.6 – Resultados da implementação do estudo de caso 3 (H=8h) UIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
3	0,031	1025	1025	8	144	201	592	8	0
	**0,078	1025	1025	8	114	176	493	1	0
4	0,078	1571,87	1150	19	202	313	1049	76	0
	**0,219	1571,87	1150	19	160	250	749	49	0
5	<b>0,281</b>	<b>2100</b>	<b>1583,44</b>	<b>30</b>	<b>260</b>	<b>442</b>	<b>1618</b>	<b>5102</b>	<b>732</b>
	<b>**0,297</b>	<b>2100</b>	<b>1583,44</b>	<b>30</b>	<b>206</b>	<b>322</b>	<b>1005</b>	<b>3008</b>	<b>456</b>
6	3,078	2750	1583,44	41	318	590	2299	102723	15232
	**1,719	2750	1583,44	41	252	394	1261	51406	6407

\*\*Shaik et al. (2006)

As Figuras 4.11 e 4.12 apresentam os gráficos de Gantt para este caso.

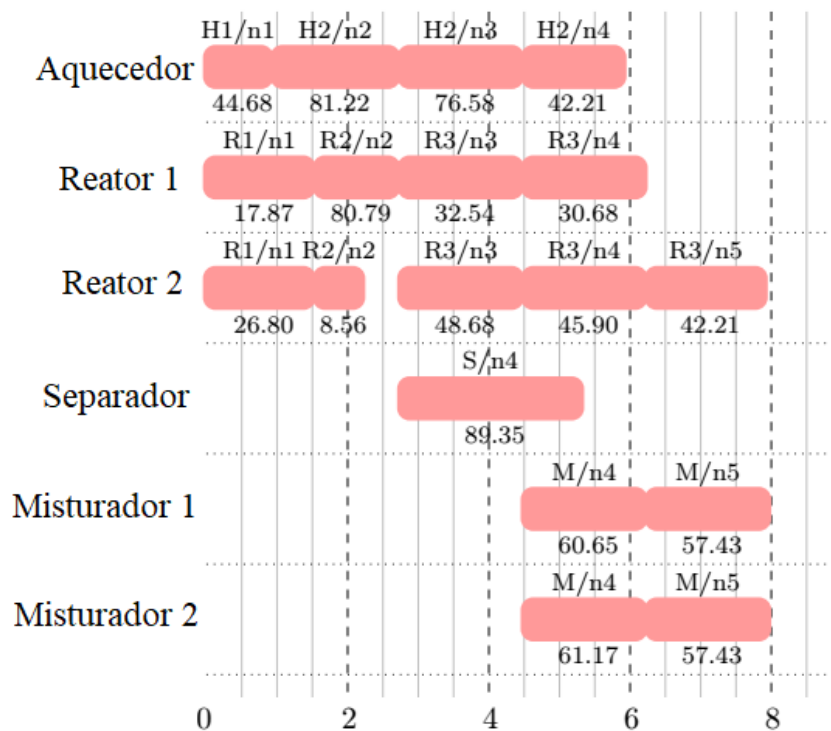


Figura 4.11 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=8h) UIS: modelo proposto.

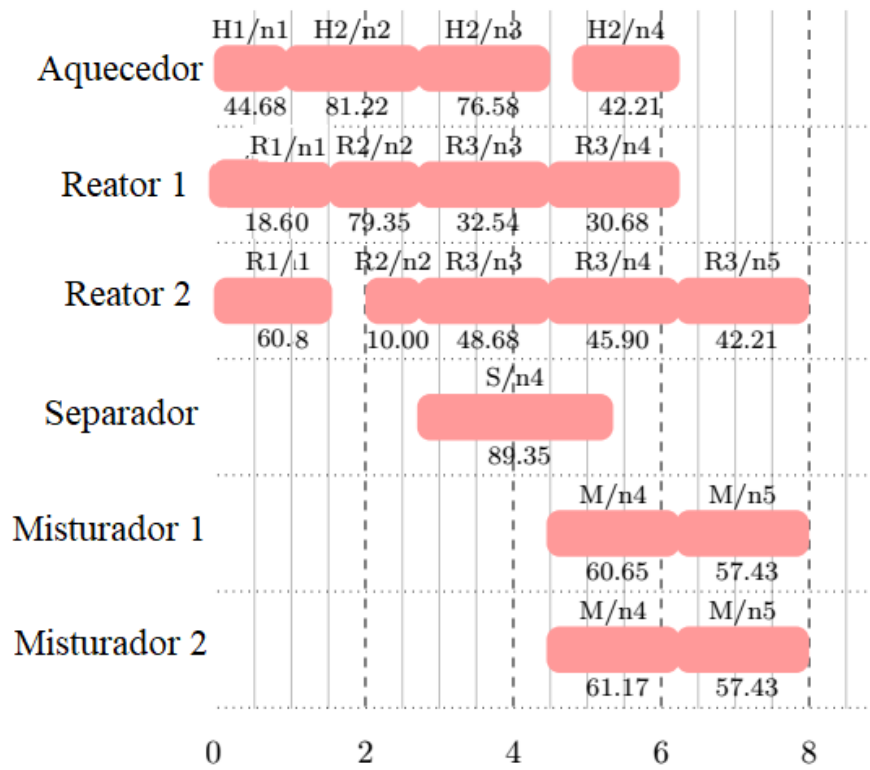


Figura 4.12 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 3 (H=8h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).

Para o estudo de caso 3 com horizonte de 12 horas os resultados para os modelos estudados são apresentados na tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Resultados da implementação do estudo de caso 3 (H=12h) UIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
5	0,093	2100	2100	30	260	442	1618	77	0
	**0,078	2100	2100	30	260	322	1005	58	0
6	0,299	2871,88	2675	41	318	590	2299	210	0
	**0,235	2871,88	2675	41	252	394	1261	198	0
7	<b>0,531</b>	<b>3465,63</b>	<b>3041,26</b>	<b>52</b>	<b>376</b>	<b>757</b>	<b>3092</b>	<b>12168</b>	<b>1082</b>
	<b>**0,766</b>	<b>3465,63</b>	<b>3041,26</b>	<b>52</b>	<b>298</b>	<b>466</b>	<b>1517</b>	<b>10143</b>	<b>835</b>
8	3,797	3988,41	3041,26	63	434	943	3997	76940	5315
	<b>**1,172</b>	3988,41	3041,26	63	344	538	1773	31266	1752

\*\*Shaik et al. (2006)

Os gráficos de Gantt para o estudo de caso 3 com horizonte de tempo de 12 horas são exibidos nas Figuras 4.13 e 4.14.

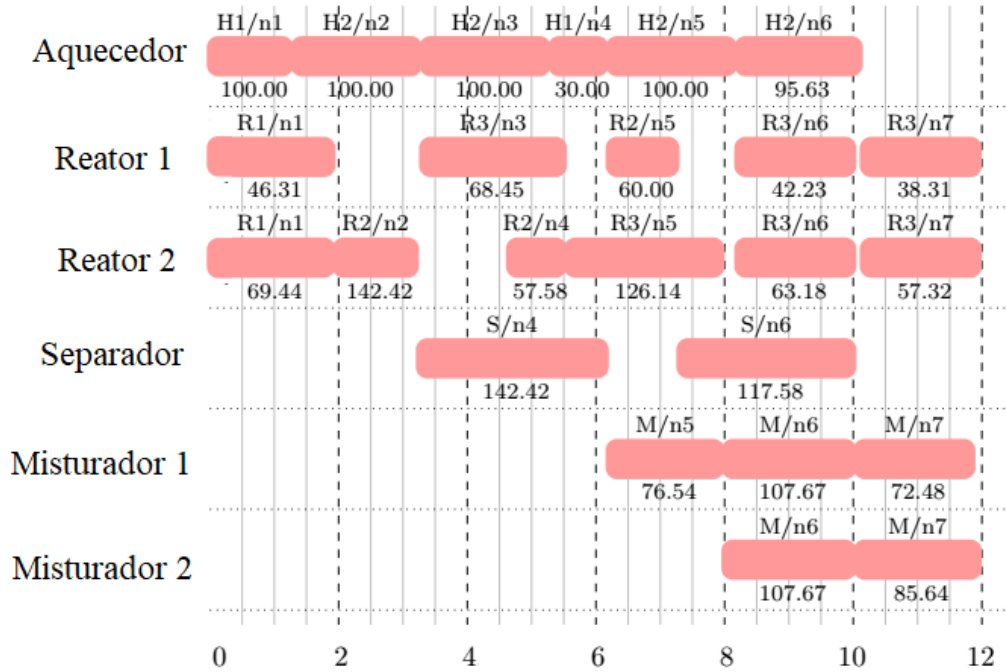


Figura 4.13 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=12h) UIS: modelo proposto.

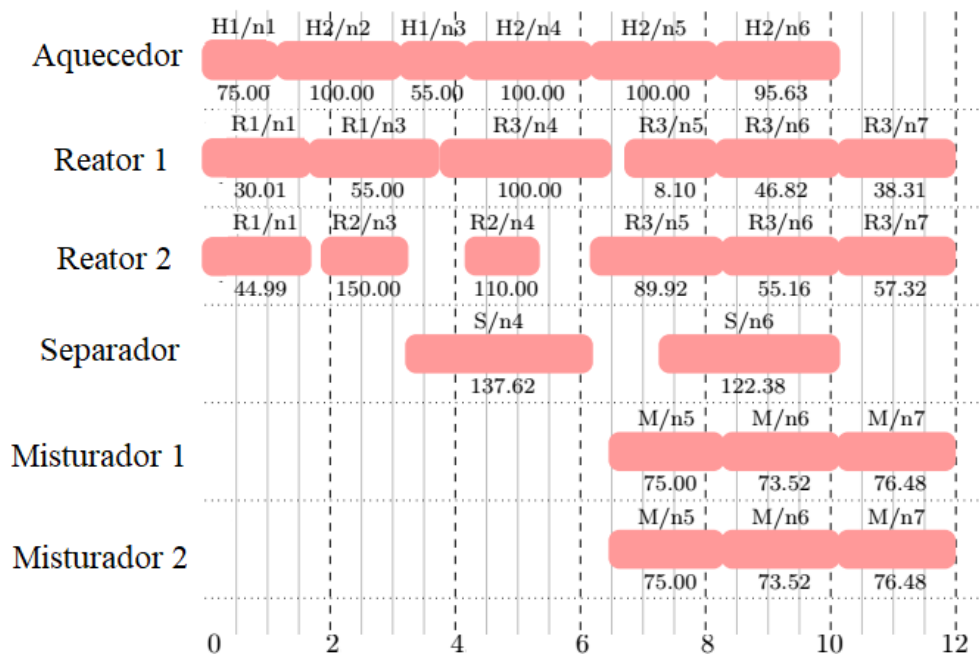


Figura 4.14 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 3 (H=12h) UIS: modelo Shaik et al. (2006).

Para este cenário ambos os modelos encontraram a solução ótima com 7 pontos de evento. O modelo proposto mostrou-se computacionalmente mais eficiente, enquanto o modelo de Shaik et al. (2006) apresentou melhores estatísticas de problema.

Os resultados apresentados levam em consideração a política de inventário de armazenagem de intermediários ilimitada, no entanto, para uma situação real, recurso de armazenagem geralmente não estão disponíveis ilimitadamente. Essas considerações podem muitas vezes violar a capacidade de armazenagem, como visto nas Figuras 4.5 e 4.9.

Tendo isso em vista, incorporou-se ao modelo restrições de armazenagem, adicionando uma tarefa e tanque de armazenagem para cada estado intermediário.

## **4.2. Resultados dos estudos de casos para operação em batelada com armazenamento intermediário finito**

Esta seção apresenta os resultados da implementação do modelo matemático para programação da produção de processos em batelada com armazenamento intermediário finito. A fim de avaliar ao impacto da adição das restrições 3.30 e 3.31 ao modelo, são apresentados os resultados da implementação do modelo para operação em batelada com armazenamento intermediário finito descrito com e sem a adição das restrições de ajuste.

Além disso é realizada uma discussão acerca de seu desempenho através da comparação com o modelo proposto por Shaik et al. (2006), acrescido das restrições de sequenciamento de tarefas de armazenagem 3.14 – 3.19.

### **4.2.1. Estudo de caso 1 FIS: Planta com operação em batelada sem compartilhamento entre unidades**

As implementações do estudo de caso 1 para o modelo proposto neste trabalho e para o modelo de Shaik et al. (2006), resultaram conforme as Tabelas 4.8, 4.9 e 4.10.

Para o estudo de caso 1 com intervalo de tempo de 8 horas, pode-se observar ambos os modelos encontram a solução ótima com 4 pontos de evento, assim como para a abordagem UIS.

Tabela 4.8 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H=8h) FIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
3	*0,031	1000	1000	11	85	166	470	9	0
	0,125	1000	1000	11	85	146	390	11	0
	**0,109	1000	1000	11	96	147	345	12	0
4	<b>*0,094</b>	<b>2000</b>	<b>1840,17</b>	<b>18</b>	<b>118</b>	<b>235</b>	<b>747</b>	<b>96</b>	<b>0</b>
	<b>0,188</b>	<b>2000</b>	<b>1840,17</b>	<b>18</b>	<b>118</b>	<b>210</b>	<b>617</b>	<b>116</b>	<b>0</b>
	<b>**0,187</b>	<b>2000</b>	<b>1840,17</b>	<b>18</b>	<b>131</b>	<b>209</b>	<b>511</b>	<b>42</b>	<b>0</b>
5	*0,282	2000	1840,17	25	151	308	1064	1829	180
	0,344	2000	1840,17	25	151	278	874	905	130
	**0,250	2000	1840,17	25	166	271	677	170	0

\*Modelo com restrições de ajuste

\*\*Shaik et al. (2006)

O modelo de Shaik et al. (2006) apresenta melhores estatísticas de modelo, no entanto, o modelo proposto apresenta menor tempo computacional. Ao acrescentar as restrições de ajuste observa-se uma melhora na relaxação, mas devido ao aumento do número de variáveis são necessárias mais iterações para a resolução do problema LP. Ainda assim, o tempo computacional é favorecido com a adição destas restrições.

Para o estudo de caso 1 com horizonte de tempo de 8 horas, foi observada a mesma alocação para os dois modelos. O gráfico de Gantt resultante para ambos os modelos é expresso na Figura 4.15.

De acordo com a análise do gráfico de Gantt observa-se que para este caso simples, com horizonte de tempo de 8 horas não foi necessário o uso de tanques de armazenagem, e o gráfico de Gantt resultou na mesma alocação para todos os modelos testados.

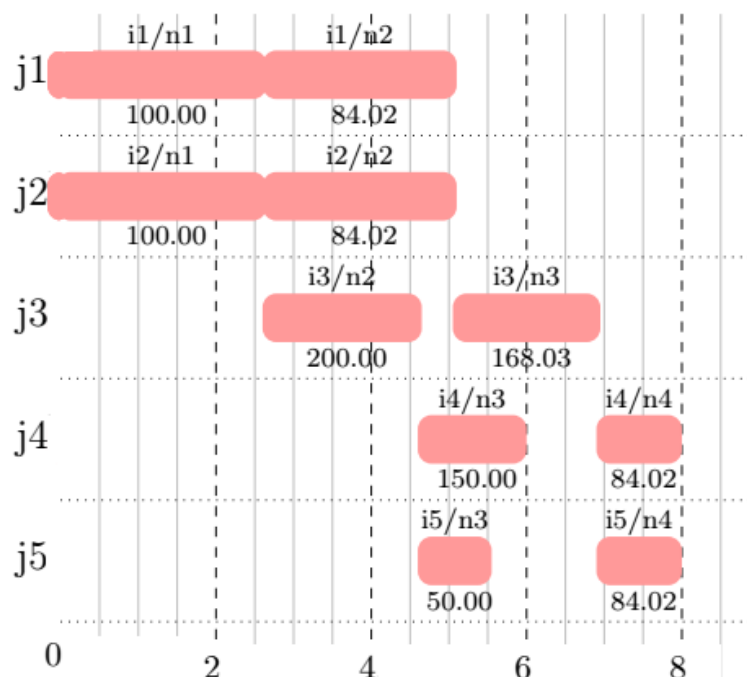


Figura 4.15 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 1 (H=8h) FIS: modelo Shaik et al. (2006) e proposto neste trabalho.

Para um horizonte de tempo de 12 horas e armazenagem de intermediários finita, os resultados da implementação são apresentados na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H=12h) FIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
	*0,265	4000	3340,53	32	184	385	1421	262	0
6	0,312	4000	3340,53	32	184	350	1161	704	73
	**0,219	4000	3301,62	32	201	333	843	160	0
	<b>*0,578</b>	<b>4951,20</b>	<b>3463,62</b>	<b>39</b>	<b>217</b>	<b>466</b>	<b>1818</b>	<b>13496</b>	<b>1146</b>
<b>7</b>	<b>0,719</b>	<b>4951,20</b>	<b>3463,62</b>	<b>39</b>	<b>217</b>	<b>426</b>	<b>1478</b>	<b>16887</b>	<b>1449</b>
	**0,615	4937,30	3352,49	39	236	395	1009	8771	827
	*5,157	4951,20	3463,62	46	250	551	2255	138170	12506
<b>8</b>	2,969	4951,20	3463,62	46	250	506	1825	114664	9218
	<b>**0,875</b>	<b>4951,20</b>	<b>3463,62</b>	<b>46</b>	<b>271</b>	<b>457</b>	<b>1175</b>	<b>33689</b>	<b>3350</b>
9	**3,875	4951,20	3463,62	53	306	519	1341	247149	18461

\*Modelo com restrições de ajuste

\*\*Shaik et al. (2006)

De acordo com a tabela, o modelo proposto encontra a solução ótima com 7 pontos de evento, enquanto o modelo de Shaik et al. (2006) necessita de um ponto de evento a mais para encontrar a mesma solução. Além disso, esse modelo apresenta melhores estatísticas de modelo em geral, devido ao menor número de pontos de decisão requeridos.

O modelo com a inclusão das restrições de ajuste demonstrou menor número de iterações e tempo computacional, mesmo gerando maior número de variáveis totais e equações, reforçando a melhor relaxação oferecida.

Os gráficos de Gantt para este estudo de caso são dispostos nas Figuras 4.16 e 4.17. As tarefas de armazenagem são representadas na cor verde.

Em relação aos gráficos apresentados, observa-se que o modelo proposto gerou uma alocação mais eficiente visto que empregou menos recursos de armazenagem.

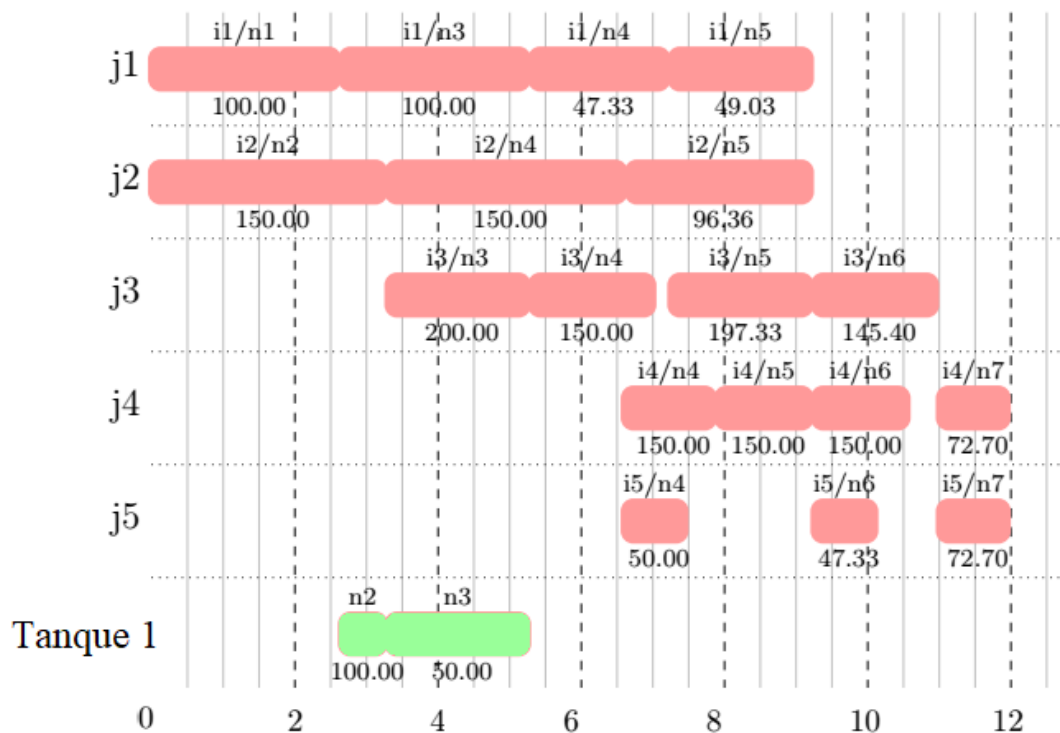


Figura 4.16 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=12h) FIS: modelo proposto.



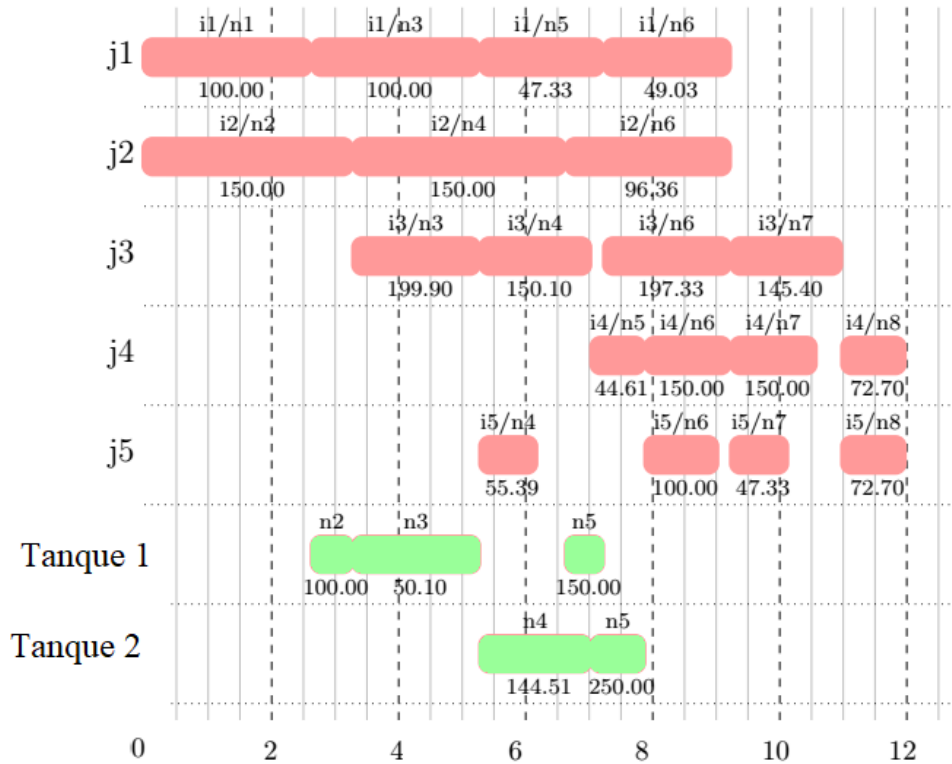


Figura 4.17 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=12h) FIS: modelo Shaik et al. (2006).

Para um horizonte de tempo de 16 horas e armazenagem de intermediários finita, os resultados são apresentados na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Resultados da implementação do estudo de caso 1 (H=16h) FIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
*	5,031	6601,65	5006,60	53	283	640	2732	138622	11985
9	4,343	6601,65	5006,60	53	283	590	2202	149179	10316
**	1,187	6601,65	4960,83	53	306	519	1341	49903	3413
<b>*</b>	<b>37,734</b>	<b>6601,65</b>	<b>5038,05</b>	<b>60</b>	<b>316</b>	<b>733</b>	<b>3249</b>	<b>1276343</b>	<b>102548</b>
<b>10</b>	<b>19,516</b>	<b>6601,65</b>	<b>5038,05</b>	<b>60</b>	<b>316</b>	<b>678</b>	<b>2609</b>	<b>960404</b>	<b>81912</b>
**	7,328	6601,65	5000	60	341	581	1507	519616	28992
*	349,39	6601,65	5038,05	67	349	830	3806	10879292	786534
<b>11</b>	<b>221,98</b>	<b>6601,65</b>	<b>5038,05</b>	<b>67</b>	<b>349</b>	<b>770</b>	<b>3046</b>	<b>8292433</b>	<b>8292379</b>
<b>**</b>	<b>34,421</b>	<b>6601,65</b>	<b>5038,05</b>	<b>67</b>	<b>376</b>	<b>643</b>	<b>1673</b>	<b>2814922</b>	<b>144706</b>
12	**132,96	6601,65	5038,05	74	411	705	1839	9900910	628568

\*Modelo com restrições de ajuste

\*\*Shaik et al. (2006)

Os gráficos de Gantt para este estudo de caso são dispostos nas Figuras 4.18 e 4.19.

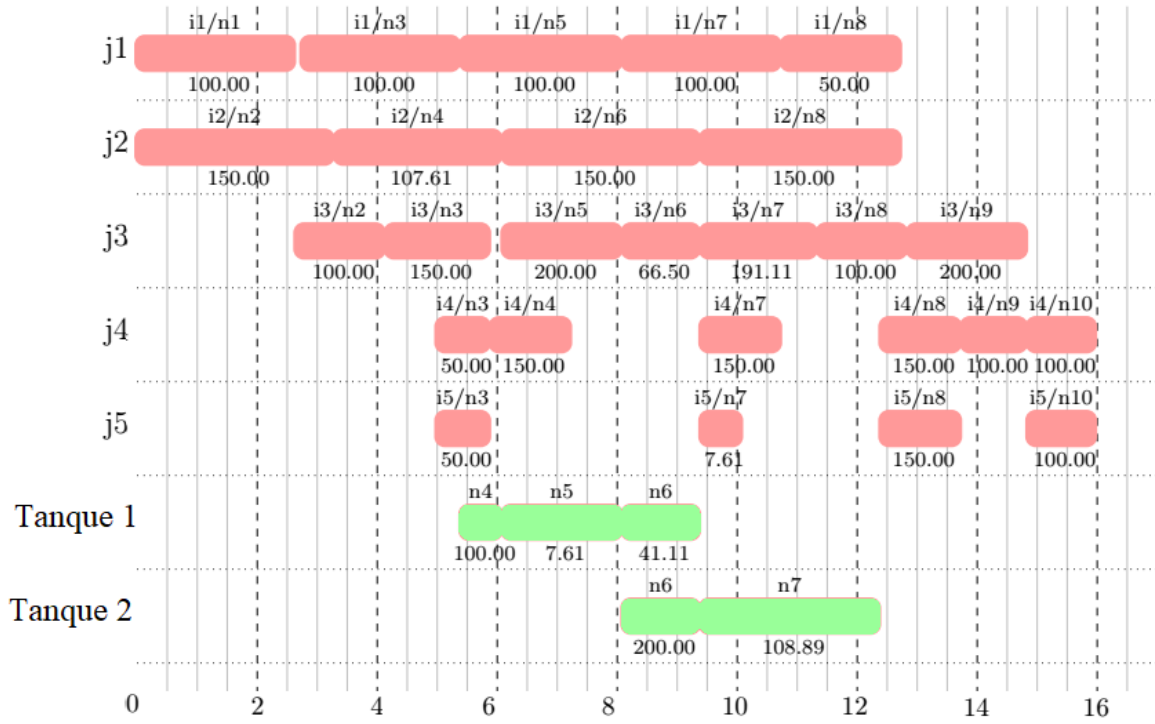


Figura 4.18 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=16h) FIS: modelo proposto.

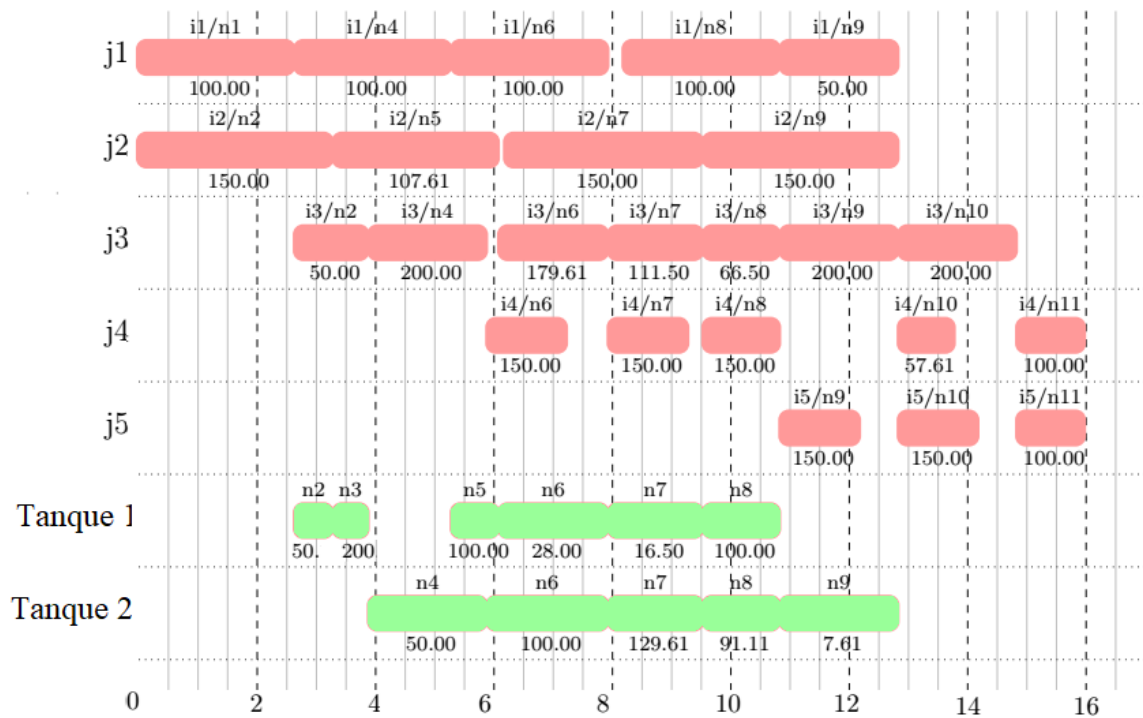


Figura 4.19 – Gráfico de Gantt para o estudo de caso 1 (H=16h) FIS: modelo Shaik et al. (2006).

Ao abordar este mesmo estudo de caso com uma política de armazenamento intermediário ilimitada, Figura 4.5, observou-se que havia um acúmulo de estado intermediário S3. Com a aplicação da abordagem FIS pode-se observar a mudança desse comportamento, Figura 4.18, sendo que a alocação da tarefa 3 nas unidades j4 e j5 encontra-se dispersa, dessa forma dispensando o uso excessivo do tanque de armazenagem.

#### 4.2.2. Estudo de caso 2 FIS: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores

Os resultados das implementações do estudo de caso 2 para horizonte de 8 horas para o modelo proposto neste trabalho e para o modelo de Shaik et al. (2006), são apresentados na Tabela 4.11.

Tabela 4.11 – Resultados da implementação do estudo de caso 2 (H=8h) FIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
*	0,130	975	866,67	22	130	280	873	43	0
3	0,140	975	866,67	22	130	264	773	42	0
**	0,078	975	866,67	22	194	332	855	46	0
*	<b>0,109</b>	<b>1730,80</b>	<b>1498,57</b>	<b>34</b>	<b>179</b>	<b>401</b>	<b>1377</b>	<b>99</b>	<b>0</b>
<b>4</b>	<b>0,172</b>	<b>1730,80</b>	<b>1498,57</b>	<b>34</b>	<b>179</b>	<b>381</b>	<b>1217</b>	<b>89</b>	<b>0</b>
**	<b>0,266</b>	<b>1812,10</b>	<b>1498,57</b>	<b>34</b>	<b>263</b>	<b>472</b>	<b>1269</b>	<b>144</b>	<b>0</b>
*	0,656	2123,33	1498,57	46	228	532	1957	3932	404
5	0,391	2123,33	1498,57	46	228	508	1725	4075	444
**	0,437	2305,33	1498,57	46	332	612	1688	4652	525

\*Modelo com restrições de ajuste

\*\*Shaik et al. (2006)

No primeiro cenário, considerado um horizonte de tempo de 8 horas, ambos os modelos exigem 4 pontos de evento, e o modelo proposto foi mais eficiente em relação às estatísticas de tempo computacional e problema. Ainda é possível inferir que a adoção das restrições de ajuste resultou em uma melhor relaxação do problema, reduzindo o tempo computacional.

As Figuras 4.20 e 4.21 apresentam os gráficos de Gantt para o estudo de caso 2 com horizonte de tempo de 8 horas.

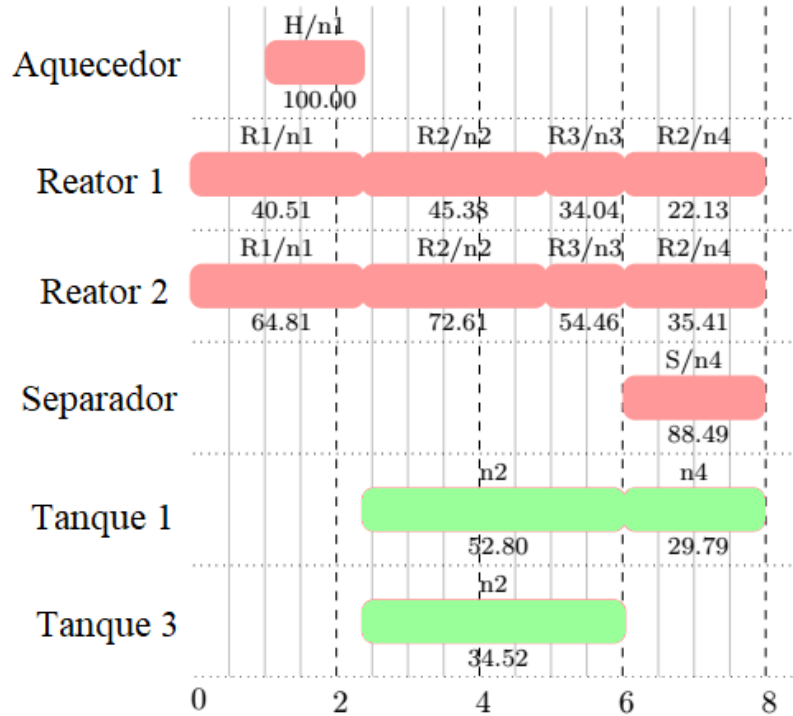


Figura 4.20 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=8h) FIS: modelo proposto.

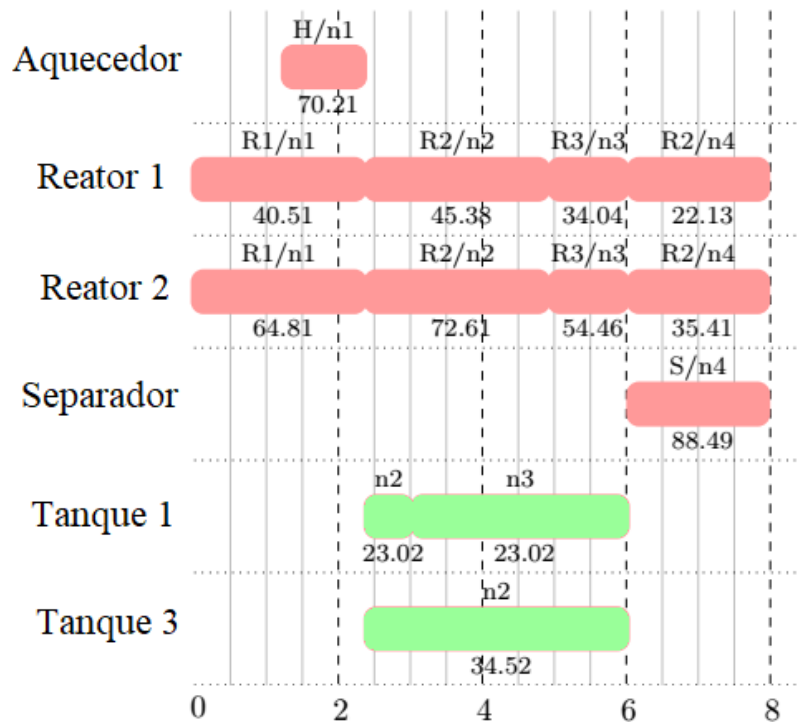


Figura 4.21 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=8h) FIS: modelo Shaik et al. (2006).

Para o segundo cenário, estudo de caso 2 para horizonte de tempo de 12 horas, os resultados das simulações são apresentados na tabela 4.12.

Tabela 4.12 – Resultados da implementação do estudo de caso 2 (H=12h) FIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
	* 0,656	3076,60	2646,80	58	277	673	2611	4653	414
6	0,421	3076,60	2646,79	58	277	645	2295	5532	412
	** 0,422	3190,50	2566,44	58	401	752	2107	11228	916
	<b>* 4,296</b>	<b>3301</b>	<b>2658,52</b>	<b>70</b>	<b>326</b>	<b>824</b>	<b>3339</b>	<b>130860</b>	<b>11542</b>
<b>7</b>	<b>4,359</b>	<b>3301</b>	<b>2658,52</b>	<b>70</b>	<b>326</b>	<b>792</b>	<b>2927</b>	<b>159038</b>	<b>13650</b>
	** 4,719	3788,30	2639,04	70	470	892	2526	198083	13912
	* 50,844	3350,50	2658,52	82	375	985	4141	1486362	122009
<b>8</b>	38,531	3350,50	2658,52	82	375	949	3621	1547615	127988
	<b>**24,734</b>	<b>4297,90</b>	<b>2658,52</b>	<b>82</b>	<b>539</b>	<b>1032</b>	<b>3945</b>	<b>1387189</b>	<b>90967</b>
9	**260,04	4770,10	2658,52	94	608	1172	3364	11563104	622253

\*Modelo com restrições de ajuste

\*\*Shaik et al. (2006)

Para o horizonte de tempo de 12 horas, o modelo proposto requereu 7 pontos de evento enquanto o modelo de Shaik et al. (2006) encontrou a solução ótima com 8 pontos de evento. Dessa forma, o modelo proposto foi mais eficiente em termos de estatísticas de modelo, apresentando tempo de resposta semelhante ao de Shaik et al. (2006). Também foi observada melhora da relação através da adoção das restrições de ajuste, devido à menor quantidade de iterações necessárias.

Os gráficos de Gantt para o estudo de caso 2 com horizonte de tempo de 12 horas são apresentados pelas Figuras 4.22 e 4.23.

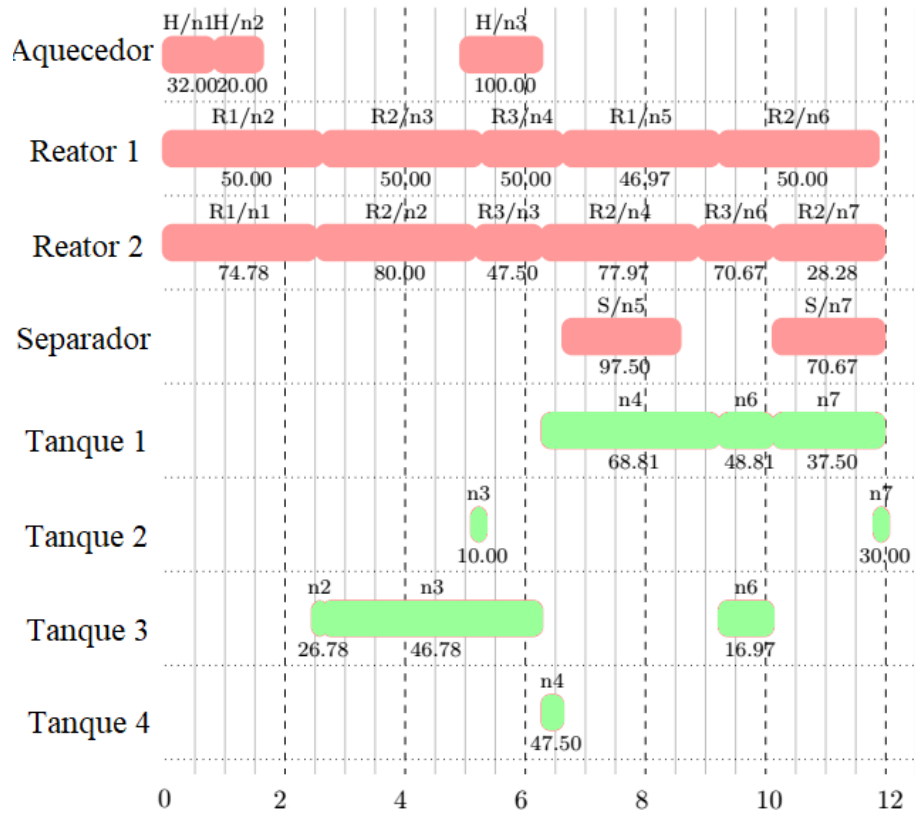


Figura 4.22 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=12h) FIS: modelo proposto.

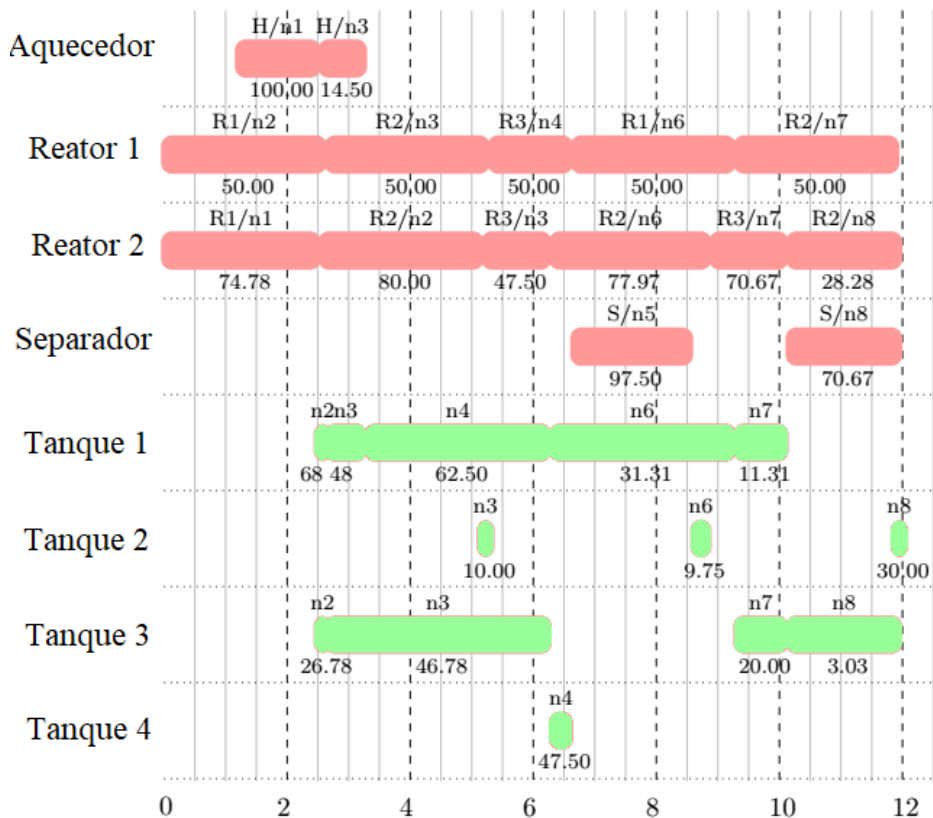


Figura 4.23 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 2 (H=12h) FIS: modelo Shaik et al. (2006).

É importante observar que para o estudo de caso 2 com horizonte de 12 horas e política UIS, Figuras 4.9 e 4.10, eram alocadas tarefas de aquecimento do estado A sequenciais na unidade 1, sendo que o estado A aquecido só seria consumido mais tarde. Ao adicionar as restrições de armazenagem ao modelo, este opta por realizar o terceiro aquecimento próximo ao consumo de A aquecido, reação 2, evitando o uso excessivo de armazenagem. Já na Figura 4.23 o modelo de Floudas et al. (2006) não apresenta este comportamento, sendo assim, o tanque 1 é usado em maior parte do tempo.

A seguir são reportados os resultados da resolução do estudo de caso 3.

#### 4.2.3. Estudo de caso 3 FIS: Planta com operação em batelada com compartilhamento dos reatores e do aquecedor

Os resultados das implementações do estudo de caso 3 para horizonte de 8 e 12 horas para o modelo proposto neste trabalho e para o modelo de Shaik et al. (2006), resultaram conforme apresentado nas Tabelas 4.13 e 4.14.

Tabela 4.13 – Resultados da implementação do estudo de caso 3 (H=8h) FIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
	* 0,172	1571,90	1150	47	258	614	2031	66	0
4	0,062	1571,90	1150	47	258	584	1805	97	0
	** 0,094	1571,90	1150	47	552	826	2057	96	0
	<b>* 0,469</b>	<b>2100</b>	<b>1583,44</b>	<b>65</b>	<b>330</b>	<b>819</b>	<b>2920</b>	<b>5018</b>	<b>617</b>
<b>5</b>	<b>0,390</b>	<b>2100</b>	<b>1583,44</b>	<b>65</b>	<b>330</b>	<b>783</b>	<b>2592</b>	<b>6998</b>	<b>731</b>
	** 0,453	2100	1549,60	65	696	1076	2755	4442	439
	* 8,234	2750,90	1583,44	83	402	1041	3928	174892	17125
<b>6</b>	6,032	2750,90	1583,44	83	402	999	3481	211298	21362
	<b>** 3,453</b>	<b>2859,40</b>	<b>1583,44</b>	<b>83</b>	<b>840</b>	<b>1326</b>	<b>3453</b>	<b>61430</b>	<b>5583</b>
7	* 17,719	3351,80	1583,44	101	984	1576	4151	934874	83120

\*Modelo com restrições de ajuste

\*\*Shaik et al. (2006)

De acordo com os dados tabelados, considerando um horizonte de tempo de 8 horas, o modelo de Shaik el al. (2006) exige 6 pontos de evento enquanto os modelos propostos necessitam de apenas 5. Dessa forma, o modelo proposto se mostra foi mais eficiente em relação às estatísticas de tempo computacional e problema para este estudo de caso. Assim como observado para os casos anteriores, com adição das restrições de ajuste o modelo necessitou de um menor número de iterações para a resolução do problema. No entanto para esse caso a inclusão das restrições resultou em um tempo de resposta maior devido ao aumento do número de restrições e variáveis contínuas.

As Figuras 4.24 e 4.25 apresentam os gráficos de Gantt para este estudo de caso.

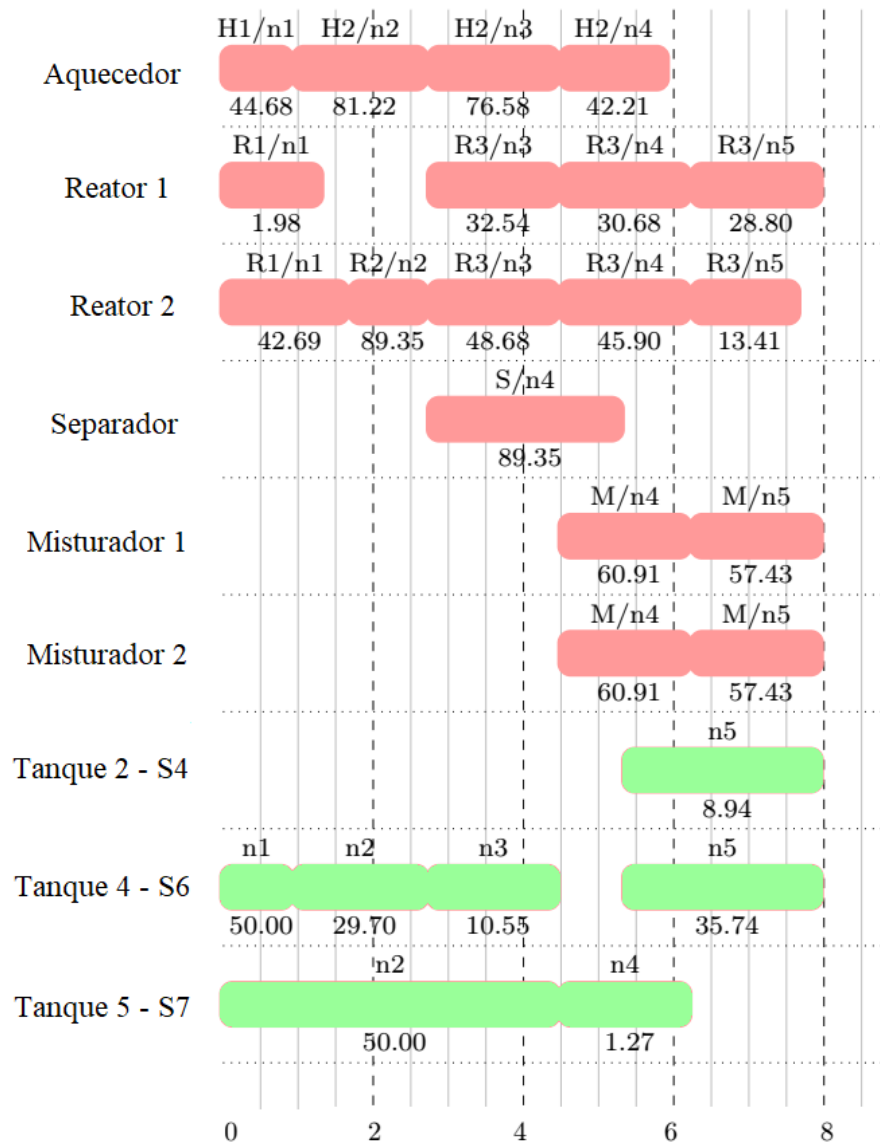


Figura 4.24 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=8h) FIS: modelo proposto.



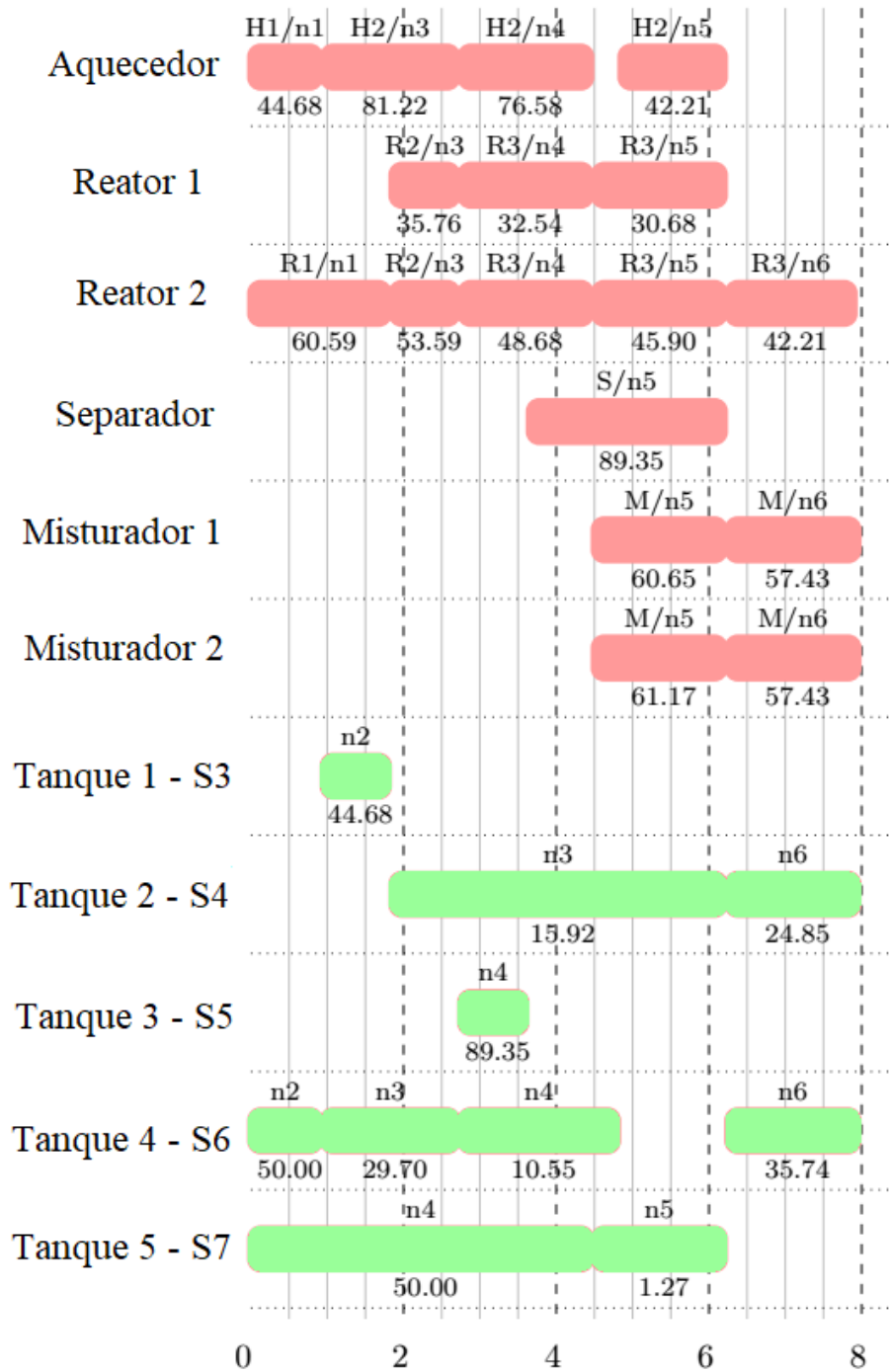


Figura 4.25 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=8h) FIS: Floudas et al. (2006).

Para o segundo cenário, com um horizonte de tempo de 12 horas os resultados da implementação do estudo de caso 3 para o modelo proposto com e sem a adição das restrições de ajuste e modelo de Shaik et al. (2006) são apresentados na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 – Resultados da implementação do estudo de caso 3 (H=12h) FIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
6	* 0,218	2871,90	2675	83	840	1326	3453	343	0
	0,297	2871,90	2675	83	402	999	3481	352	0
	** 0,218	2871,90	2675	83	840	1326	3453	343	0
7	* <b>1,031</b>	<b>3465,67</b>	<b>3041,26</b>	<b>101</b>	<b>474</b>	<b>1280</b>	<b>5055</b>	<b>16465</b>	<b>851</b>
	<b>2,156</b>	<b>3465,67</b>	<b>3041,26</b>	<b>101</b>	<b>474</b>	<b>1232</b>	<b>4472</b>	<b>76377</b>	<b>3968</b>
	** <b>1,437</b>	<b>3465,67</b>	<b>3041,26</b>	<b>101</b>	<b>984</b>	<b>1576</b>	<b>4151</b>	<b>13041</b>	<b>457</b>
8	* 1,797	4059,41	3041,26	119	1128	1826	4849	46348	1518
	6,500	3988,41	3041,26	119	546	1482	5565	137112	4496
	** 1,797	4059,41	3041,26	119	1128	1826	4849	46348	1518

\*Modelo com restrições de ajuste

\*\*Shaik et al. (2006)

Todos os modelos exigiram o mesmo número de pontos de evento para encontrar a solução ótima. E o modelo proposto com a adição das restrições de ajuste mesmo requerendo mais iterações apresentou melhor desempenho em relação ao tempo de resposta para este caso, sendo similar ao encontrado por Shaik et al. (2006).

Os gráficos de Gantt para este caso são apresentados nas Figuras 4.26 e 4.27.

Em relação à abordagem UIS, Figura 4.13, é possível observar que há a alocação mais espaçada da tarefa R2, que consome o estado A aquecido, de forma a evitar a alocação desta armazenagem ao tanque 1.

De acordo com os dados para os modelos com restrição de armazenamento finito de intermediários verifica-se que a abordagem eleva o esforço computacional requerido para encontrar a solução ótima. No entanto, como demonstrado para os estudos de casos 1 para H=16h e 2 para H=12h essa abordagem é necessária a fim de evitar violações na capacidade de armazenamento.

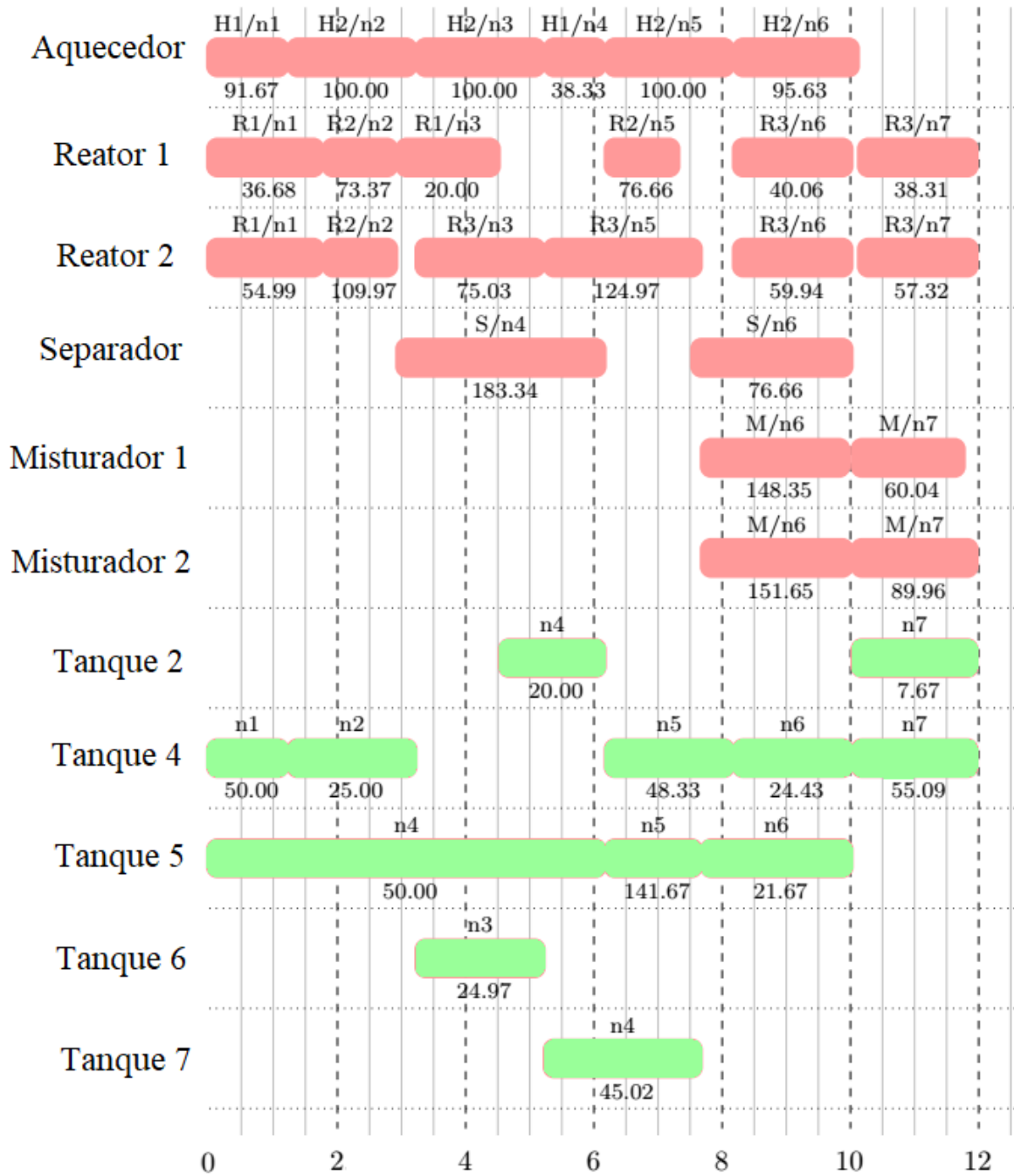


Figura 4.26 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=12h) FIS: modelo proposto.

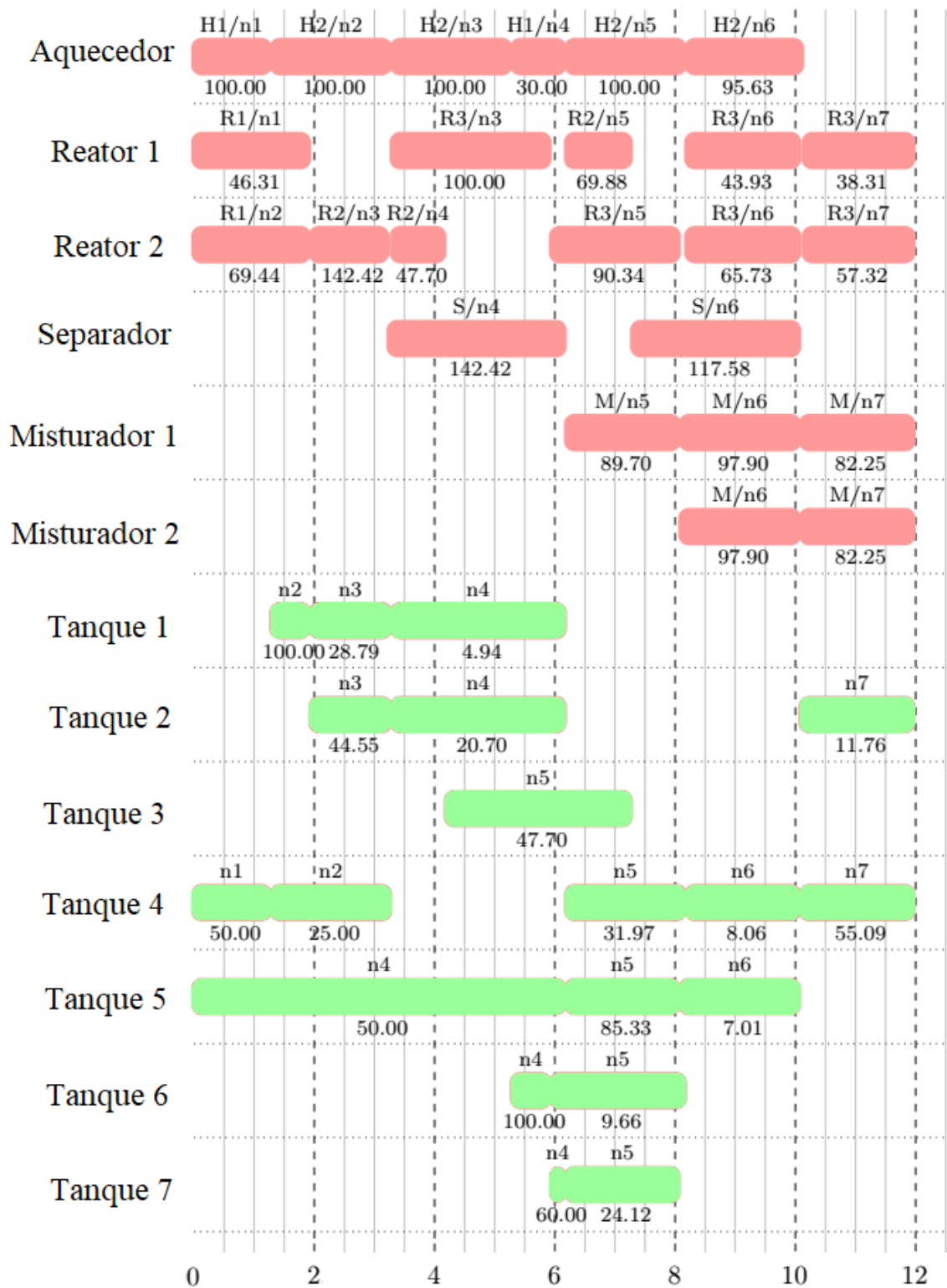


Figura 4.27 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 3 (H=12h) FIS: modelo Floudas et al. (2006).

Na seção a seguir são detalhadas os resultados e discussões acerca do modelo para operações contínuas.

### 4.3. Resultados do estudo de caso para operação contínua com armazenamento intermediário ilimitado

Esta seção apresenta os resultados da implementação do modelo matemático para programação da produção de processos em operação contínua com armazenamento intermediário ilimitado. A fim de avaliar o impacto das restrições de ajuste ao modelo, são apresentados os resultados da implementação do modelo descrito com e sem a adição das restrições de ajuste. Além disso, é realizada uma discussão acerca do desempenho do modelo proposto através da comparação dos resultados com o modelo proposto por Shaik e Floudas (2007). Os resultados da implementação dos modelos são mostrados na Tabela 4.15.

Tabela 4.15 – Resultados da implementação do estudo de caso 4 UIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
	<b>* 0,171</b>	<b>2724,22</b>	<b>2724,22</b>	<b>108</b>	<b>504</b>	<b>668</b>	<b>2912</b>	<b>284</b>	<b>0</b>
<b>4</b>	<b>0,265</b>	<b>2724,22</b>	<b>2724,22</b>	<b>108</b>	<b>504</b>	<b>628</b>	<b>2398</b>	<b>308</b>	<b>0</b>
	<b>** 0,406</b>	<b>2724,22</b>	<b>2724,22</b>	<b>108</b>	<b>548</b>	<b>1109</b>	<b>3730</b>	<b>1603</b>	<b>53</b>
	* 0,360	2724,22	2724,22	135	626	829	3815	394	0
5	0,273	2724,22	2724,22	135	626	781	3083	380	0
	** 0,860	2724,22	2724,22	135	681	1577	5.392	1539	50
	* 0,297	2724,22	2724,22	162	748	990	4788	421	0
6	0,297	2724,22	2724,22	162	748	934	3803	404	0
	** 0,985	2724,22	2724,22	162	814	2121	7358	4025	140

\*Modelo com restrições de ajuste

\*\*Shaik e Floudas (2007)

De acordo com os dados apresentados, ambos os modelos exigiram 4 pontos de evento para a resolução do estudo de caso 4, sendo que, para 3 pontos de evento nenhum dos modelos conseguiu encontrar uma solução viável. Ainda, o modelo proposto apresentou melhores estatísticas de problema e tempo.

Os gráficos de Gantt para a resolução do estudo de caso 4 pelos modelos propostos são apresentados nas Figuras 4.28, 4.29 e 4.30.

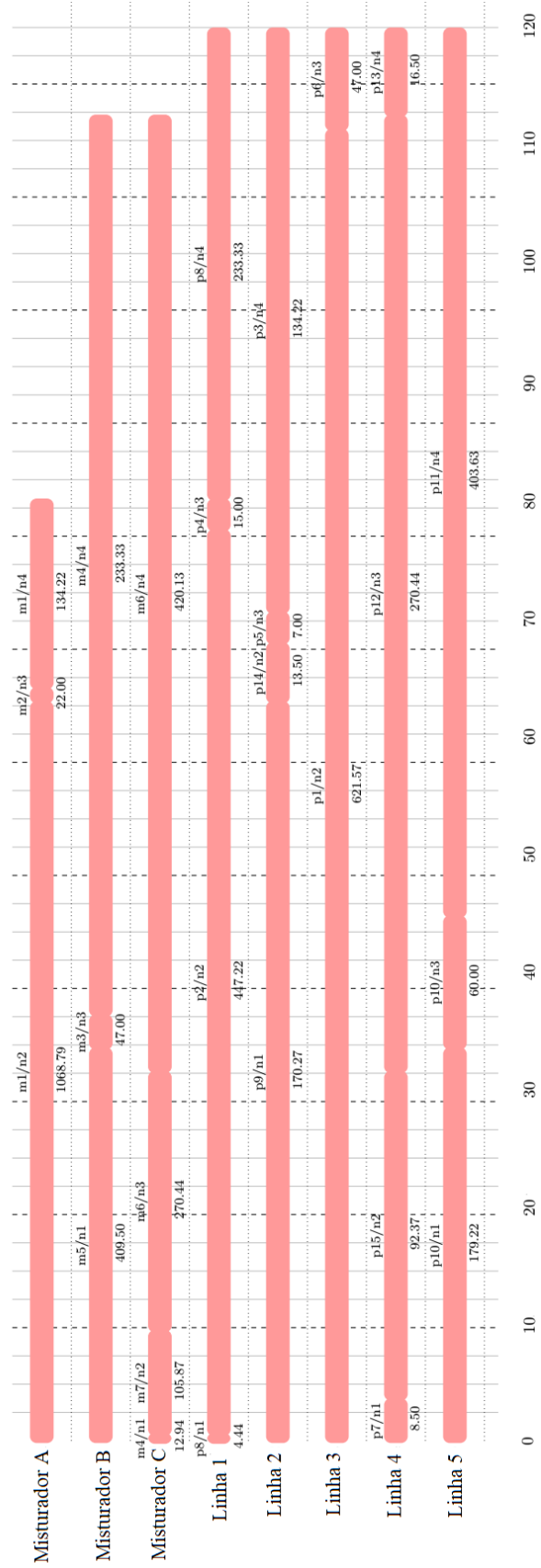


Figura 4.28 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 UIS: modelo proposto.

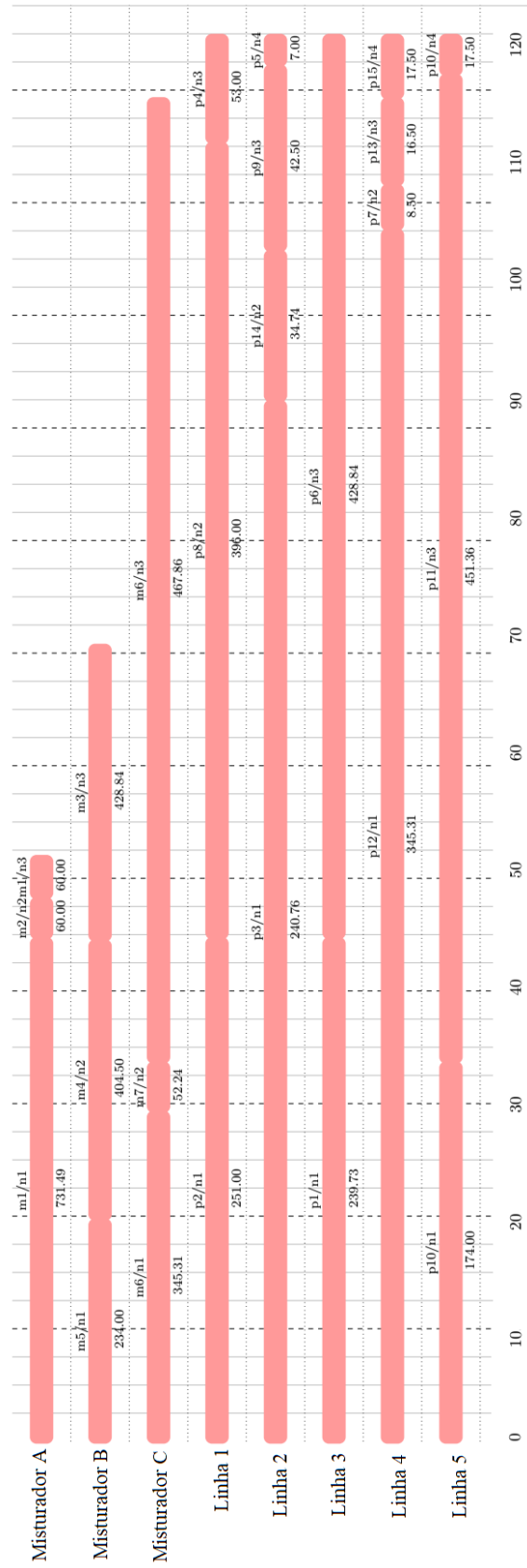


Figura 4.29 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 UIS: modelo proposto com restrições de ajuste.

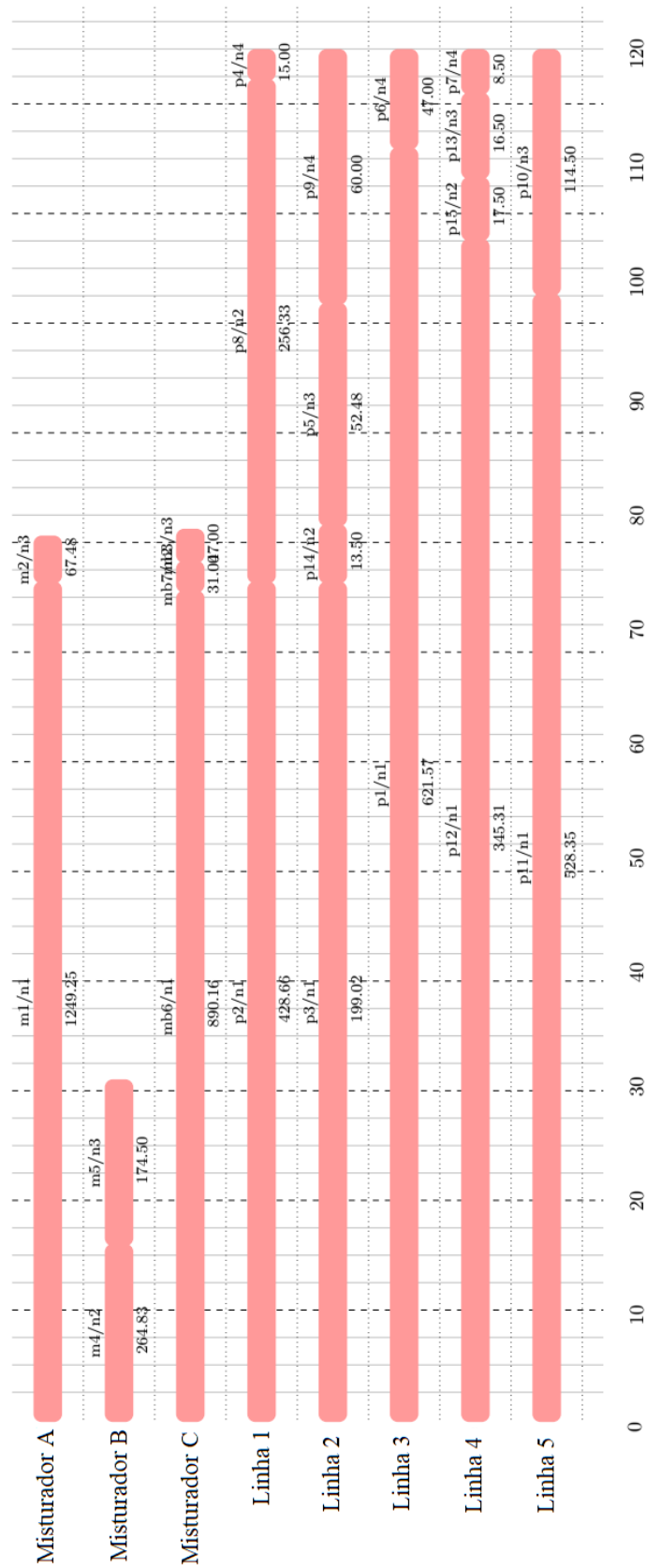


Figura 4.30 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 UIS: modelo Shaik e Floudas (2007).



Devido à ausência de restrições de capacidade de armazenagem, para o caso 4 UIS os misturadores operam a alta taxa, gerando altos valores de inventário dos estados intermediários. Pela análise dos gráficos de Gantt, observa-se que essa abordagem gera violações na capacidade de armazenagem para os estados intermediários 1,4,5 e 6 para o modelo proposto, Figura 4.28, para os intermediários 2,4,5 e 6 utilizando o modelo de Shaik e Floudas (2007), Figura 4.30. Empregando as restrições de ajuste ao modelo proposto, Figura 4.29, apenas o intermediário 4 apresenta restrições na capacidade de armazenagem. Evidenciando a necessidade de uma abordagem FIS para garantir o cumprimento das restrições de capacidade de armazenagem.

Na próxima seção são mostrados os resultados da aplicação deste modelo ao estudo de caso 4.

#### **4.4. Resultados do estudo de caso para operação contínua com armazenamento intermediário finito**

Esta seção apresenta os resultados da implementação do modelo matemático para programação da produção de processos em operação contínua com armazenamento intermediário finito. São apresentados os resultados da implementação do modelo descrito com e sem a adição das restrições de ajuste.

Também é realizada uma discussão acerca do desempenho do modelo proposto através da comparação dos resultados com o modelo de Shaik e Floudas (2007) com política de armazenagem FIS. Para esta comparação acrescentou-se a esse modelo as restrições de capacidade para tanques de armazenagem e sequenciamento 3.2 e 3.25 – 3.28. Os resultados da implementação do estudo para processos contínuos com política FIS são apresentados na Tabela 4.16.

Assim como para o caso anterior, para o estudo de caso 4 com restrição de armazenagem de intermediários finita ambos os modelos exigiram 4 pontos de evento para a resolução. Ainda, o modelo proposto apresentou melhores estatísticas de problema e tempo de resposta.

Tabela 4.16 – Resultados da implementação do estudo de caso 4 FIS.

N	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	Não zeros	Iterações	Nós
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas				
	<b>* 0,766</b>	<b>2724,22</b>	<b>2724,22</b>	<b>136</b>	<b>560</b>	<b>1396</b>	<b>5803</b>	<b>7988</b>	<b>259</b>
<b>4</b>	<b>1,672</b>	<b>2724,22</b>	<b>2724,22</b>	<b>136</b>	<b>560</b>	<b>1356</b>	<b>5289</b>	<b>41873</b>	<b>1274</b>
	<b>** 6,469</b>	<b>2724,22</b>	<b>2724,22</b>	<b>136</b>	<b>632</b>	<b>2154</b>	<b>7520</b>	<b>91300</b>	<b>1520</b>
	* 4,140	2724,22	2724,22	170	696	1758	7505	107668	3471
5	1,390	2724,22	2724,22	170	696	1710	6773	15325	417
	** 10,61	2724,22	2724,22	170	786	2981	10524	72547	1071
	* 2,703	2724,22	2724,22	204	204	2120	9277	31473	682
6	3,235	2724,22	2724,22	204	832	2064	8292	73518	1399
	** 10,42	2724,22	2724,22	204	940	3914	13952	76777	837

\*Modelo com restrições de ajuste

\*\*Shaik e Floudas (2007)

Os gráficos de Gantt para a resolução do estudo de caso 4 com armazenagem finita são apresentados nas Figuras 4.31, 4.32 e 4.33.

Ao realizar a comparação dos gráficos de Gantt para a abordagem UIS e FIS para plantas com operação contínua observa-se que devido às restrições de armazenamento impostas no segundo caso as tarefas alocadas aos misturadores encontram-se mais dispersas no horizonte temporal. Desta forma são eliminadas violações na capacidade de armazenagem dos tanques além de evitar o uso excessivo dos tanques.



Figura 4.31 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 FIS: modelo proposto.



Figura 4.32 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 FIS: modelo proposto com restrições de ajuste.



Figura 4.33 – Gráfico de Gantt para estudo de caso 4 FIS: modelo Shaik e Floudas (2007).

#### 4.5. Resultados para o estudo de caso de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados

Esta seção apresenta os resultados da implementação do modelo matemático para programação da produção de processos em operação contínua e em batelada com armazenamento intermediário finito ao estudo de caso de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados. Os resultados da implementação estão dispostos na Tabela 4.17 e no gráfico de Gantt, figura 4.34.

Tabela 4.17 – Resultados da implementação do estudo de caso de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados.

<i>n</i>	Tempo CPU (s)	Função Objetivo		Variáveis		Restrições totais	<i>gap</i> (%)
		RMILP	MILP	Binárias	Contínuas		
10	50.000	28447890,08	25623925,92	1220	2475	10656	4,5
13	50.000	28447890,08	26954666,67	1613	3243	14691	5,2
14	50.000	28447890,08	26954666,67	1744	3400	15853	5,2
<b>15</b>	<b>50.000</b>	<b>28447890,08</b>	<b>27471333,33</b>	<b>1875</b>	<b>3755</b>	<b>17015</b>	<b>3,4</b>
20	50.000	28447890,08	27471333,33	2530	5035	22825	3,4

Para este caso, adotou-se como critério de parada um tempo de processamento de 50000 s ou um *gap* de 0%. Sendo que para todos os cenários estudados não foi possível obter o *gap* integral.

De acordo com a análise da Tabela 4.17 a melhor solução para este estudo de caso é encontrada com 15 pontos de eventos, no entanto não há como afirmar que esta é a solução ótima do problema, devido ao *gap* encontrado ser diferente de 0. Ainda, dado ao alto número de variáveis e restrições a solução apresentou alto tempo de resposta, sendo assim inadequada para aplicação industrial. Este resultado pode ser atribuído ao alto número de restrições do tipo big-M adotadas no modelo proposto.

É importante salientar que através da análise do gráfico de Gantt é possível observar que as restrições foram integralmente atendidas e não houveram violações na capacidade de armazenamento. Contudo, a solução encontrada é válida uma vez que, de acordo com Leung (2004) admite-se encontrar uma solução subótima, desde que seja eficiente para problemas de programação da produção.

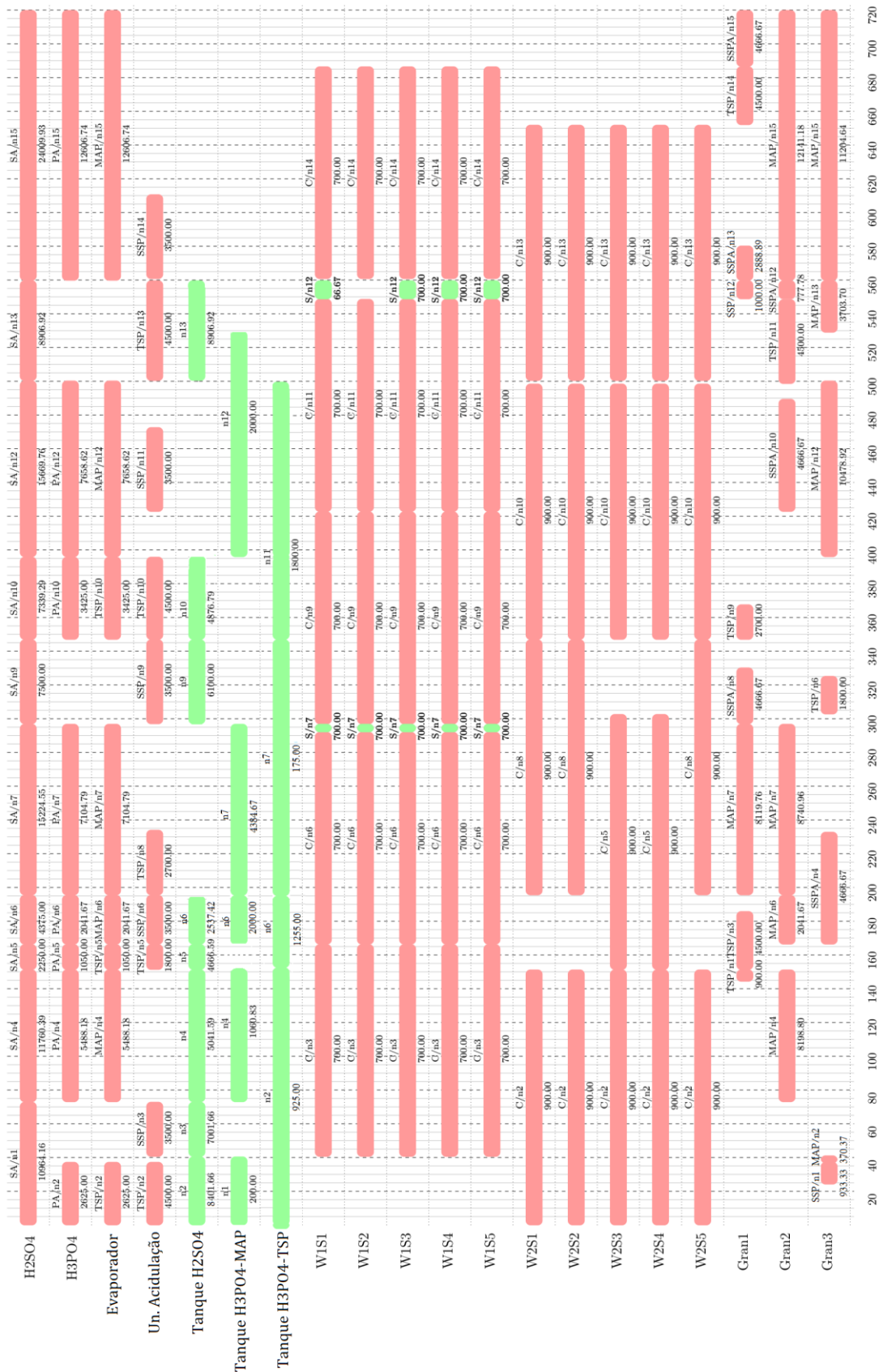


Figura 4.34 – Gráfico de Gantt para estudo de caso de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados.

---

## **CAPÍTULO 5**

### **Conclusões e Sugestões**

---

Este capítulo apresenta as conclusões obtidas nesse trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros.

Foi proposto neste trabalho uma abordagem explícita da grade de tempo específica a unidade para problemas de programação da produção com representação contínua do tempo.

Através de estudos de casos para problemas de programação da produção de plantas com operação em batelada é possível inferir que a grade de tempo proposta foi capaz de obter a solução ótima para todos os casos. Em geral as soluções apresentaram baixo tempo de resposta, semelhante ao modelo de referência, de Shaik et al. (2006), independente do maior número de restrições e variáveis. Além disso, o modelo proposto foi capaz de encontrar uma solução relaxada mais justa para o estudo de caso 2 em comparação ao modelo de referência, e também necessitou de menos pontos de evento para resolução dos estudos de casos 1, 2 e 3 com abordagem FIS.

Em relação à programação da produção de plantas com operação contínua, o modelo proposto também encontra a solução ótima para o estudo de caso abordado. Além disso, apresenta melhor tempo de resposta, em relação ao modelo de Shaik e Floudas (2007), e requer menor número de restrições e variáveis.

Foram propostos modelos para programação da produção de plantas com operação em batelada ou contínua adotando políticas de armazenamento UIS e FIS, com representação do tempo contínua. A partir dessa comparação é possível concluir que a formulação proposta considerando a capacidade de armazenamento finita apresenta tempos de resposta viáveis, mesmo gerando modelos de maior dimensão. Além disso, foi observado que a abordagem FIS tem como vantagem garantir a não violação da capacidade de armazenamento.



Para todos os casos estudados as representações observadas nos gráficos de Gantt confirmam que a grade de tempo proposta atende satisfatoriamente todas as restrições impostas.

Para a aplicação do modelo proposto ao estudo de caso de uma planta genérica de fertilizantes fosfatados, foi obtida uma solução subótima que exigiu um maior tempo de processamento computacional, devido ao grande porte deste problema e ao alto número de restrições e variáveis geradas.

Em relação a isto sugere-se para trabalhos futuros a reestruturação do modelo proposto para plantas de operação mista de modo a evitar o uso excessivo de restrições do tipo big-M, que corroboram para a relaxação pobre do modelo proposto. Ainda, a abordagem destes problemas através de heurísticas, outra proposta para a melhora do desempenho do modelo proposto

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

BELLMAN, R.; ESOGBUE, A. O.; NABESHIMA, I. *Mathematical Aspects Of Scheduling And Applications*. Pergamon Press. 1982.

CASTRO, P., BARBOSA-PÓVOA, A. P. F. D., MATOS, H. An improved RTN continuous-time formulation for the short-term scheduling of multipurpose batch plants. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 40, p. 2059–2068, 2001. <https://doi.org/10.1021/ie000683r>

CASTRO, P. M.; BARBOSA-POVOA, A. P.; MATOS, H. A.; NOVAIS, A. Q. Simple continuous-time formulation for short-term scheduling of batch and continuous processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 43, p. 105-118, 2004. <https://doi.org/10.1021/ie0302995>

FLOUDAS, C. A.; LIN, X. Continuous-time versus discrete-time approaches for scheduling of chemical processes: a review. *Computers & Chemical Engineering*, v.28, p. 2109 - 2129, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2004.05.002>

FONSECA, L. C. A. *Programação da produção de uma planta de fertilizantes fosfatados por meio da representação discreta do tempo*. 2013. 102 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) - UFU, Uberlândia, 2013.

FONSECA, L. C. A.; MURATA, V. V.; NEIRO, S. M. S. An MILP production Scheduling model for a phosphate fertilizer plant using the discrete time representation. *Journal of Applied Operational Research*, v.10, n.1, p.2-24, 2018.

GIANNELOS, N. F.; GEORGIADIS, M. C. A novel event-driven formulation for short-term scheduling of multipurpose continuous processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 41, p. 2431-2442, 2002. <https://doi.org/10.1021/ie0105573>

GIANNELOS, N. F.; GEORGIADIS, M. C. A simple new continuous-time formulation for short-term scheduling of multipurpose batch processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v.41, p.2178-2184, 2002. <https://doi.org/10.1021/ie010399f>

HARJUNKOSKI, I.; MARAVELIAS, C. T.; BONGERS, P.; CASTRO, P. M.; ENGELL, S.; GROSSMANN, I. E.; HOOKER, J.; MÉNDEZ, C.; SAND, G.; WASSICK, J. Scope for industrial applications of production scheduling models and solution methods. *Computers & Chemical Engineering*, v. 62, p. 161-193, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2013.12.001>

IERAPETRITOU, M. G.; FLOUDAS, C. A. Effective continuous-time formulation for short-term scheduling: 1. Multipurpose batch processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 37, p.4341 - 4359, 1998. <https://doi.org/10.1021/ie970927g>

IERAPETRITOU, M. G.; FLOUDAS, C. A. Effective continuous-time formulation for short-term scheduling: 2. Continuous and semi-continuous processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 37, p.4360 - 4378, 1998. <https://doi.org/10.1021/ie9709289>

IERAPETRITOU, M. G.; HENÉ, T. S.; FLOUDAS, C. A. Effective Continuous-Time Formulation for Short-Term Scheduling. 3. Multiple Intermediate Due Dates. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 38, p.3446 - 3461, 1999. <https://doi.org/10.1021/ie990108r>

JANAK, S. L.; FLOUDAS, C. A. Improving unit-specific event based continuous-time approaches for batch processes: Integrality gap and task splitting. *Computers & Chemical Engineering*, v. 32, p. 913–955, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2007.03.019>

KONDILI, E.; PANTELIDES, C. C.; SARGENT, R. W. H. A general algorithm for short-term scheduling of batch operations. Part 1. MELP formulation. *Computers & Chemical Engineering*, v. 17, p. 211 – 227, 1993. [https://doi.org/10.1016/0098-1354\(93\)80015-F](https://doi.org/10.1016/0098-1354(93)80015-F)

LEUNG, J. Y-T. Handbook of scheduling algorithms, models, and performance analysis. *Chapman & Hall/Crc*, 2004.

- LIU Y; KARIMI, I. A. Novel continuous-time formulations for scheduling multi-stage batch plants with identical parallel units. *Computers and Chemical Engineering*, v.31, p.1671-1693, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2007.02.001>
- MARAVELIAS, C. T.; GROSSMANN, I. E. New general continuous-time state-task network formulation for short-term scheduling of multipurpose batch plants. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 42, p. 3056-3074, 2003. <https://doi.org/10.1021/ie020923y>
- MARAVELIAS, C. T.; SUNG, C. Integration of production planning and scheduling: Overview, Challenges and Opportunities. *Computers & Chemical Engineering*, v.33, p. 1919-1930, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2009.06.007>
- MÉNDEZ, C. A.; CERDA, J. An efficient MILP continuous-time formulation for short-term scheduling of multiproduct continuous facilities. *Computers & Chemical Engineering*, v. 26, p. 687-695, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0098-1354\(01\)00789-X](https://doi.org/10.1016/S0098-1354(01)00789-X)
- MÉNDEZ, C.A.; GROSSMANN, I.E.; HARJUNKOSKI, I.; KABORÉ, P., A simultaneous optimization approach for off-line blending of oil-refinery operations, *Computers & Chemical Engineering*, v. 30, p. 614-634, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2005.11.004>
- MORO, L. F. L.; PINTO, J. M. Mixed-integer programming approach for short-term crude oil scheduling. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 43, p. 85-94, 2004. <https://doi.org/10.1021/ie030348d>
- MOURET, S.; GROSSMANN, I. E.; PESTIAUX, P. Time representations and mathematical models for process scheduling problems. *Computers and Chemical Engineering*, v. 35, p. 1038–1063, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2010.07.007>
- PANTELIDES, C. C. Unified frameworks for optimal process planning and scheduling. In D. W. T. Rip-pin, J. C. Hale, & J. Davis (Eds.), *Proceedings of the second international conference on foundations of computer-aided process operations. Colorado: Crested Butte*, p. 253–274, 1994.

- PINEDO, M. *Scheduling: Theory, algorithms, and systems* – 3ª ed., New Jersey, Prentice Hall. 2008.
- PINTO, J.M.; BARBOSA-POVOA, A. P. F. D.; NOVAIS, A. Q. Comparison between STN, m-STN and RTN for the Design of Multipurpose Batch Plants. *European Symposium on Computer Aided Process Engineering*, v. 13, p. 257-262, 2003. [https://doi.org/10.1016/S1570-7946\(03\)80124-4](https://doi.org/10.1016/S1570-7946(03)80124-4)
- RODAMMER, F. A. e WHITE, Jr. K. P. A Recent Survey of Production Scheduling. *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*. v. 18, n. 6, p. 841-851, 1988. <https://doi.org/10.1109/21.23085>
- SEVERO, L. S. *Aplicação de modelo de programação da produção na indústria de couros*. 2007. 102 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) - UFRS, Porto Alegre, 2007.
- SHAIK, M. A.; JANAK, S. L.; FLOUDAS, C. A. Continuous-time models for short-term scheduling of multipurpose batch plants: A comparative study. *Ind. Eng. Chem. Res.* v. 45, p. 6190-6209, 2006. <https://doi.org/10.1021/ie0601403>
- SHAIK, M. A.; FLOUDAS, C. A. Improved Unit-Specific Event-Based Continuous-Time Model for Short-Term Scheduling of Continuous Processes: Rigorous Treatment of Storage Requirements. *Ind. Eng. Chem. Res.* v. 46, p. 1764-1779, 2007. <https://doi.org/10.1021/ie060480o>
- SHAIK, M. A.; FLOUDAS, C. A. Unit-specific event-based continuous-time approach for short-term scheduling of batch plants using RTN framework. *Computers and Chemical Engineering*. v. 32, p. 260–274, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2007.05.007>
- SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R. *Administração da produção*. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- SOARES, A. A. *Modelagem geral para programação de misturas de derivados de petróleo*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação) - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2009.

SUNDARAMOORTHY, A.; KARIMI, I. A. A simpler better slot-based continuous-time formulation for short-term scheduling in multipurpose batch plants. *Chemical Engineering Science*, v. 60, p. 2679-2702, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2004.12.023>

SUNDARAMOORTHY, A.; MARAVELIAS, C. T. A General Framework for Process Scheduling. *Aiche Journal*. v.57, p.695-710, 2011. <https://doi.org/10.1002/aic.12300>

ZENTNER, M. G.; PENKY, J. F.; REKLAITIS, G. V.; GUPTA, J. N. D. Practical considerations in using model-based optimization for the scheduling and planning of batch/semicontinuous processes. *Journal of Process Control*, v. 4, p. 259 - 280, 1994. [https://doi.org/10.1016/0959-1524\(94\)80046-4](https://doi.org/10.1016/0959-1524(94)80046-4)