Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática a Distância

Introdução ao Cálculo

Mirian Fernandes Carvalho Araújo

Segunda Edição
Revista e Atualizada

UFU

2017

1ª edição 2013
2ª edição 2017

Araújo, Mirian Fernandes Carvalho

Introdução ao Cálculo / Mirian Fernandes Carvalho Araújo. - 2ª ed. - Uberlândia, MG : UFU, 2017 54p.

Licenciatura em Matemática.

ISBN: 978.85.99765.31-9

1. Mirian Fernandes Carvalho Araújo.

Edição
Centro de Educação a Distância
Comissão Editorial - CEAD/UFU

Diagramação
Equipe CEAD/UFU

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Michel Miguel Elias Temer

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
José Mendonça Bezerra Filho

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA/CAPES
Carlos Cezar Modernel Lenuzza

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - UFU
REITOR
Valder Steffen Júnior

VICE-REITOR
Orlando César Mantese

CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
DIRETORA E COORDENADORA UAB/UFU
Maria Teresa Menezes Freitas

SUPLENTE UAB/UFU
Aléxia Pádua Franco

FACULDADE DE MÁTEMÁTICA – FAMAT – UFU
DIRETOR
Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille

COORDENADORA DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA – PARFOR
Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco

ASSESSORA DA DIRETORIA
Sarah Mendonça de Araújo

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR
Alberto Dumont Alves Oliveira
Darcius Ferreira Lisboa Oliveira
Dirceu Nogueira de Sales Duarte Jr.
Gustavo Bruno do Vale
Otaviano Ferreira Guimarães

SUMÁRIO

FIGURAS

CRONOGRAMA

1ª Semana 2ª Semana	3ª Semana	4ª Semana 5ª Semana	6ª Semana 7ª Semana	8ª Semana
Módulo 1 O conjunto dos números reais	**Módulo 2** Relações recursivas	**Módulo 3** Funções	**Módulo 4** Noções de lógica	**Módulo 5** Proposta de Ensino
15 horas	7 horas	15 horas	15 horas	8 horas

AGENDA

MÓDULO	CARGA-HORÁRIA	ATIVIDADES
01	15 HORAS	1) Fórum de discussão dia 15/04 no AVA: o que me lembro dos números reais? 2) Leitura do texto de apoio (apostila): O conjunto dos números reais. 3) Lista de exercício disponibilizada no AVA dia 15/04/2012. 4) Web-conferências com os alunos nos dias: 17/04/2012 e 24/04/2012 das 19 às 21h.
02	07 HORAS	1) Leitura do texto de apoio (apostila): Relações recursivas. 2) Lista de exercício disponibilizada no AVA dia 29/04/2012. 3) Web-conferências com os alunos nos dias: 02/05/2012 das 19 às 21h.
03	15 HORAS	1) Leitura do texto de apoio (apostila): Funções 2) Lista de exercício disponibilizada no AVA dia 06/05/2012. 3) Web-conferências com os alunos nos dias: 08/05/2012 e 15/05/2012 das 19 às 21h.
04	15 HORAS	1) Leitura do texto de apoio (apostila): Noções de lógica. 2) Lista de exercício disponibilizada no AVA dia 20/05/2012. 3) Web-conferências com os alunos nos dias: 22/05/2012 e 29/05/2012 das 19 às 21h.

05	08 HORAS	1) Elaboração, pelo aluno, de uma proposta de ensino abordando um dos temas estudados. 2) Fórum de discussão dia 03/06/2012 no AVA sobre a proposta.

As listas de exercícios que serão disponibilizadas no AVA, nas datas citadas acima, deverão serem entregues em datas que também serão apresentadas no AVA para que os tutores possam corrigir.

Desejo ao aluno um ótimo curso e torço para atingir com sucesso os objetivos da disciplina.

Bons estudos!

Mirian

PRA COMEÇO DE CONVERSA

Seja bem-vindo!

Este material de Introdução ao Cálculo foi elaborado para estudantes de Matemática, seja sua participação presencial, em sala de aula, ou à distância, interagindo com o computador. O único requisito para a aprendizagem deste material é boa vontade de adquirir novos conhecimentos e persistência na solução dos exercícios.

Sabemos que em todo livro de Matemática é imprescindível não colocar as demonstrações de teoremas importantes. Este material não seria diferente e, por isso, não desanime ao encontrar-se com alguns deles. Muitas vezes, as demonstrações seguem um caminho muito técnico, porém o autor tem pensado nisso e de alguma forma facilitará o entendimento.

Este material está divido em quatro capítulos, que iniciam com o estudo do conjunto dos números reais, seguido das relações recursivas, funções e, finalmente, noções de lógica.

Bons estudos!

Mirian Fernandes Carvalho Araújo

MÓDULO 1-
O conjunto dos números reais

Você já parou para pensar o que é o conjunto dos números reais?

Vamos lá?

1.1 - O conjunto R dos números reais: definição, operação e relação de ordem

Antes de qualquer coisa, recordemos três noções primitivas, ou seja, são aceitas sem definição.

Definição: Um *conjunto* é uma coleção de objetos definidos de forma precisa. A notação usada para descrever um conjunto são letras maiúsculas do alfabeto.

Exemplos:

A. O conjunto dos meses do primeiro semestre.

B. O conjunto de frutas em uma geladeira.

X. O conjunto de jóias de uma rainha.

Definição: Cada objeto que participa da formação de um conjunto é chamado *elemento*. Assim, pelos exemplos anteriores, têm-se os elementos:

Exemplos:

A. Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, Maio, Junho.

B. Uva, morango, laranja, pera, maçã.

X. Anel, pulseira, broche, brinco.

Definição: Um elemento x de um conjunto A é representado por $x \in A$ e lê-se: x pertence a A. Essa notação deve-se ao matemático italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932).

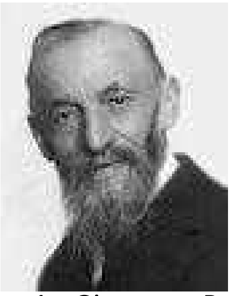


Figura 1 - Giuseppe Peano

Passemos agora à construção do conjunto dos Números Reais denotado por **R**.

O **sistema numérico real** é formado por elementos de um conjunto chamado de **números reais** e duas operações bem conhecidas, **adição e multiplicação**, denotadas por + e $\cdot$, respectivamente.

Sejam *a* e *b* dois elementos do conjunto **R**, a soma de *a* e *b* é representada por a + b e o produto por $a \cdot b$ (ou ab). A **subtração** é resultante da adição, ou seja, $a + (-b) = a - b$ em que $-b$ representa o negativo de *b*.

A **divisão** é resultante da multiplicação, ou seja, $a \cdot b^{-1} = a \div b, \quad b \neq 0$ em que b^{-1} representa o inverso de *b*, de forma que $b \cdot b^{-1} = 1$.

Todo o sistema numérico real pode ser descrito por meio de **axiomas**.

A palavra axioma é utilizada para indicar uma expressão formal que seja verdadeira sem a necessidade de prová-la.

A partir dos axiomas é possível deduzir as propriedades dos números reais que resultam as operações algébricas de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Os **teoremas** são consequências lógicas resultantes dos axiomas que, ao contrário de um axioma, deve ser demonstrado ou provado a sua veracidade. Um teorema é composto de uma hipótese e uma conclusão. Ele será válido ao provarmos que a conclusão é uma consequência de se admitir a hipótese como verdadeira.

Um número real pode ser positivo, negativo ou zero e qualquer número real pode ser classificado como *racional* ou *irracional*. Um **número racional** é da forma a/b, sendo que *a* e *b* são números inteiros e $b \neq 0$. Os números racionais são:

- os inteiros (positivos, negativos e zero):

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

- as frações positivas e negativas, como, exemplo:

$$\frac{5}{6} \qquad -\frac{1}{12} \qquad \frac{72}{4}$$

- os decimais finitos positivos e negativos, como, por exemplo:

$$1{,}84 = \frac{184}{100} \qquad -0{,}00921 = -\frac{921}{100000}$$

- os decimais infinitos com repetição periódica, como, por exemplo:

$$0{,}333\ldots = \frac{1}{3} \qquad -0{,}549549549\ldots = -\frac{61}{111}$$

Um **número irracional** não pode ser expresso da forma a/b, não apresenta repetição periódica e é infinito.

Exemplos:

$\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$ $\qquad$ $sen\ 1 = 0{,}017452\ldots$

Um conjunto *A* é *finito* se *A* for vazio ou se houver uma correspondência biunívoca (entre dois conjuntos) entre *A* e um segmento inicial do conjunto dos números inteiros positivos $\{1, 2, 3, \ldots\}$

Um conjunto que não é finito diz-se *infinito*.

Vamos relembrar os conjuntos numéricos?

a. Conjunto dos números naturais denotado pela letra ***N***:

1. $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

b. Conjunto dos números inteiros denotado pela letra ***Z***:

$;\boldsymbol{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$

c. Conjunto dos números racionais denotado pela letra ***Q***, que como visto acima, seus elementos são da forma a/b, sendo que *a* e *b* são números inteiros e $b \neq 0$.

d. Conjunto dos números irracionais denotado pela letra ***I***, que são os números que não podem ser expressos da forma a/b.

e. Conjunto dos números reais denotado pela letra ***R***, que compreendem todos os números racionais e irracionais.

3. $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

f. Conjunto dos números complexos denotado pela letra ***C***, que corresponde a todos os números da forma $a + bi$, $a, b \in \boldsymbol{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

O conjunto dos números reais ***R*** apresenta uma relação de ordem denotada pelos símbolos $<$ (lê-se “é menor que”) e $>$ (lê-se “é maior que”).

Definição: Se $a, b \in \boldsymbol{R}$,

i. $a < b$ se e somente se $b - a$ for positivo;

ii. $a > b$ se e somente se $a - b$ for positivo.

Exemplo:

α. $3 < 5$ pois $5 - 3 = 2$ e 2 é positivo;

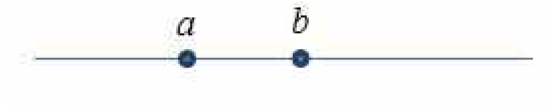
β. $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ pois $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ e $\frac{1}{12}$ é positivo.

Teorema 1:

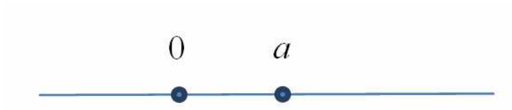
ι. $a > 0$ se e somente se a for positivo;

ιι. $a < 0$ se e somente se a for negativo.

Sejam $a, b \in \boldsymbol{R}$, se escrevermos que $a < b$ estamos nos referindo que a está localizado à esquerda de b na reta numerada.



Daí, segue que se $a > 0$, ou seja, a é positivo, geometricamente a está marcado à direita de 0.



Esta relação de ordem satisfaz aos axiomas de ordem:

ι. **Tricotomia**

Se $a, b \in \boldsymbol{R}$, somente uma das afirmações é verdadeira: $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$

ιι. **Translação**

Se $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, e se $a < b$ então $a + c < b + c$.

ιιι. **Positividade**

Se $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, e se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$.

ιϖ. **Transitividade**

Se $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, e se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

Exemplo:

α. $2 < 7$ então $2 + 4 < 7 + 4$, ou seja, $6 < 11$ (Translação).

β. $5 < 6$ então $2 \cdot 5 < 2 \cdot 6$, ou seja, $10 < 12$ (Positividade).

χ. $4 < 5$ e $5 < 9$ então $4 < 9$ (Transitividade).

1.2 Intervalos

Sejam $a, b, \in \boldsymbol{R}$ com $a < b$.

Definição: **Intervalo aberto** é o conjunto de todos os números de origem a e de extremidade b, denotado por (a, b) ou $]a, b[$. Simbolicamente, temos:

$$(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} | a < x < b\} \quad .$$

Definição: **Intervalo fechado** é o conjunto de todos os números de origem a e de extremidade b, denotado por $[a, b]$. Simbolicamente, temos:

.
$$[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x \leq b\}$$

Definição: **Intervalo semiaberto à direita** é o conjunto de todos os números do intervalo aberto (a, b) adicionado à origem a, denotado por $[a, b)$. Simbolicamente, temos:

$$[a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x < b\}.$$

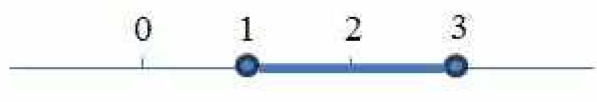
Definição: **Intervalo semiaberto à esquerda** é o conjunto de todos os números do intervalo aberto (a, b) adicionado à extremidade b, denotado por $(a, b]$. Simbolicamente, temos:

$$(a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} | a < x \leq b\}$$

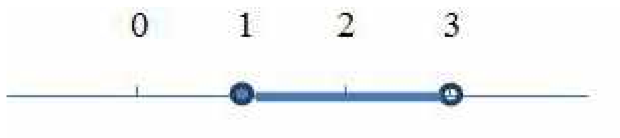
Exemplo:

a. $(1,3) = \{x \in \boldsymbol{R} | 1 < x < 3\}$

b. $[1,3] = \{x \in \boldsymbol{R} | 1 \leq x \leq 3\}$



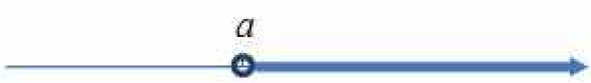
c. $[1,3) = \{x \in \boldsymbol{R} | 1 \leq x < 3\}$



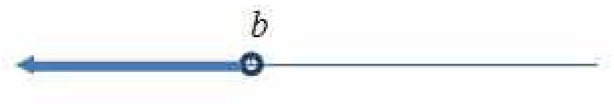
d. $(1,3] = \{x \in \boldsymbol{R} | 1 < x \leq 3\}$

Podemos ter, também, intervalos que tendem ao infinito, denotado por ∞. São definidos por:

- $(a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} | x > a\}$

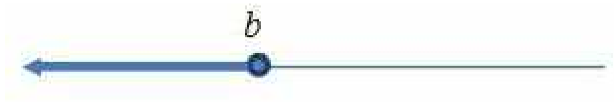


- $(-\infty, b) = \{x \in \boldsymbol{R} | x < b\}$

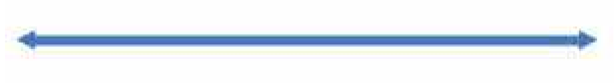


- $[a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} | x \geq a\}$

- $(-\infty, b) = \{x \in \boldsymbol{R} | x \leq b\}$



- $(-\infty, +\infty) = \boldsymbol{R}$



1.3 Desigualdades

Sempre, ao afirmar que $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ e $a \geq b$, estamos nos referindo a uma **desigualdade**.

Da relação de ordem dos números reais, decorrem os teoremas a seguir.

Teorema 2:

i. Se $a > 0$ e $b > 0$ então $a + b > 0$.
ii. Se $a > 0$ e $b > 0$ então $ab > 0$.

Teorema 3: Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$.

1.4 Valor absoluto

O **valor absoluto** ou **módulo** de um número x, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

a. $|4| = 4$;

b. $|-6| = -(-6) = 6$;

c. $|2 - 47| = |-45| = -(-45) = 45$.

Observe que o valor absoluto de um número é um número positivo ou zero.

Geometricamente, o valor absoluto de um número x é sua distância até o ponto 0.

Teorema 4: $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$, em que $a > 0$.

Prova: Como $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$, segue que o conjunto solução da desigualdade $|x| \leq a$ é a união dos conjuntos

$$\{x \in \boldsymbol{R} | x < a \ e \ x \geq 0\} \text{ e } \{x \in \boldsymbol{R} | -x < a \ e \ x < 0\}$$

Observe que o primeiro conjunto é equivalente a $\{x \in \boldsymbol{R} | 0 \leq x < a\}$, e o segundo é equivalente a $\{x \in \boldsymbol{R} | -a < x < 0\}$ pois $-x < a$ é equivalente a $x > -a$. Assim, o conjunto solução de $|x| < a$ é:

$$\{x \in \boldsymbol{R} | 0 \leq x < a\} \cup \{x \in \boldsymbol{R} | -a < x < 0\} \leftrightarrow \{x \in \boldsymbol{R} | -a < x < a\}.$$

Comparando a desigualdade no enunciado do teorema com o conjunto solução acima, concluímos que .

$$|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$$

O símbolo ■, que significa "como queríamos demostrar", é utilizado sempre no fim de uma prova ou demonstração matemática de um teorema ou corolário comprovando a sua veracidade. Corolário é uma consequência de um teorema.

Corolário 1: $|x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$**, em que** $a > 0$**.**

Teorema 5: $|x| > a \leftrightarrow x > a \text{ ou } x < -a$, em que $a > 0$.

Prova: Como $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$, segue que o conjunto solução da desigualdade $|x| \geq a$ é a união dos conjuntos

$$\{x \in \boldsymbol{R} | x > a \ e \ x \geq 0\} \text{ e } \{x \in \boldsymbol{R} | -x > a \ e \ x < 0\}.$$

Observe que o primeiro conjunto é equivalente a $\{x \in \boldsymbol{R} | x > a\}$, e o segundo é equivalente a $\{x \in \boldsymbol{R} | x < -a\}$, pois $-x > a$ é equivalente a $x < -a$. Assim, o conjunto-solução de $|x| < a$ é:

$$\{x \in \boldsymbol{R} | x > a\} \cup \{x \in \boldsymbol{R} | x < -a\}$$

Comparando a desigualdade no enunciado do teorema com o conjunto solução acima, concluímos que. $|x| > a \leftrightarrow x > a \text{ ou } x < -a$.

Corolário 2: $|x| \geq a \leftrightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$, em que $a > 0$.

Exemplo:

a. Resolva a equação $|2x + 1| = -5$

Esta equação será satisfeita se $2x + 1 = 5$ ou $2x + 1 = -5$.

Assim, $2x + 1 = 5 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$ ou $x = -3$.

b. Encontre o conjunto-solução da inequação $|x - 2| > 6$.

A equação dada é equivalente a $x - 2 > 6$ ou $x - 2 < -6$. A inequação será satisfeita se qualquer uma das desigualdades acima for satisfeita.

Assim, $x - 2 > 6 \rightarrow x > 8$ ou $x - 2 < -6 \rightarrow x < -3$.

Logo, todo número nos intervalos $(8, +\infty)$ e $(-\infty, -4)$ é uma solução. Portanto o conjunto-solução da inequação é $(-\infty, -4) \cup (8, +\infty)$.

c. Encontre todos os valores de x para os quais $\sqrt{x^2 + 7x + 12}$ é real.

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

$\sqrt{(x + 3)(x + 4)}$ é real quando $(x + 3)(x + 4) \geq 0$.

A inequação estará satisfeita quando ambos os fatores forem não negativos ou quando forem não positivos, ou seja, $x + 3 \geq 0$ e $x + 4 \geq 0$, ou se $x + 3 \leq 0$ e $x + 4 \leq 0$. Vamos considerar dois casos:

Caso 1: $x + 3 \geq 0$ e $x + 4 \geq 0$.

Da resolução obtemos $x \geq -3$ e $x \geq -4$. Ambas as desigualdades estarão satisfeitas para $x \geq -3$, ou seja, o intervalo $[-3, +\infty)$ é o conjunto solução.

Caso 2: $x + 3 \leq 0$ e $x + 4 \leq 0$.

Obtemos $x \leq -3$ e $x \leq -4$. Ambas as desigualdades estarão satisfeitas para $x \leq -4$, ou seja, o intervalo $(-\infty, -4]$ é o conjunto solução.

Combinando os dois conjuntos soluções dos Casos 1 e 2, temos $(-\infty, -4] \cup [-3, +\infty)$.

Teorema 6: Se $a, b \in \boldsymbol{R}$, então $|ab| = |a| \cdot |b|$.

Prova: $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|$.

Teorema 7: Se $a, b \in \boldsymbol{R}$, e $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Prova: $\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$.

1.5 Desigualdade triangular

Teorema 8: Se $a, b \in \boldsymbol{R}$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Prova: da definição de valor absoluto, temos que $a = |a|$ ou $a = -|a|$, assim $-|a| \leq a \leq |a|$. Da mesma forma, $-|b| \leq b \leq |b|$. Dessas duas desigualdades e do teorema 3,
$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$.

Logo, do corolário 1 segue que $|a + b| \leq |a| + |b|$.

$\blacksquare$

Do teorema acima, seguem dois corolários importantes.

Corolário 3: Se $a, b \in \boldsymbol{R}$, então $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Prova: $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$.

Corolário 4: Se $a, b \in \boldsymbol{R}$, então $|a| - |b| \leq |a - b|$.

Prova: $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$. Assim, subtraindo $|b|$ de ambos os membros da desigualdade, temos $|a| - |b| \leq |a - b|$.

1.6 Equações e Inequações

As equações algébricas envolvem uma incógnita x que está sujeita a operações algébricas como: adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação.

Exemplo:

a. $2x + 6 = 0$;

b. $x^2 - 7x - 6 = 0$;

c. $x^5 + 3x + 16 = 0.$

A forma canônica de uma equação algébrica é definida como

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n = 0,\ n \in \boldsymbol{N} \text{ e } n > 0.$$

Os valores que acompanham a incógnita x são chamados de **coeficientes** da equação.

O **grau** de uma equação é definido pelo maior expoente da incógnita x e o coeficiente desse expoente é definido como **coeficiente do termo dominante**. Por exemplo, a equação $2x + 6 = 0$ é de grau 1 pois o maior expoente de x é 1 e o coeficiente do termo dominante é 2.

As equações mais conhecidas são do primeiro e segundo grau. A equação do primeiro grau é dada por $ax + b = 0$, com $a, b \in \boldsymbol{R}$ e a equação do segundo grau, também conhecida como equação quadrática, é dada por $ax^2 + bx = c = 0.$

Estas equações podem ser incompletas quando $b = 0$ ou $c = 0$ ou $b = c = 0$. Na equação incompleta o coeficiente a é diferente de zero.

Para solucionarmos uma equação do primeiro grau, basta isolarmos a incógnita x do lado esquerdo da igualdade, de forma a obter o seu valor do lado direito da igualdade. Lembrando que o valor obtido para a incógnita x é chamado de **raiz** da equação.

Exemplo:

α. $2x - 8 = 0 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{2} \rightarrow x = 4.$

β. $12x + 248 = 0 \rightarrow 12x = -248 \rightarrow x = -\frac{248}{12} \rightarrow x = -\frac{62}{3}.$

Já na solução de uma equação do segundo grau utilizamos a fórmula quadrática de *Bhaskara* para encontrar as duas raízes da incógnita x. A fórmula é dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

em que $b^2 - 4ac$ é chamado de **discriminante** e é representado pela letra maiúscula delta do alfabeto grego (Δ).

Exemplo:

Encontre as raízes da equação $x^2 - 6x + 8 = 0.$

Aplicando a fórmula de *Bhaskara* temos:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

Assim, as raízes são $x' = \frac{6+2}{2} = 4$ e $x'' = \frac{6-2}{2} = 2$.

No cálculo do discriminante podemos descobrir como serão as raízes reais, ou seja:

Se $\Delta < 0$ não existem raízes reais;
Se $\Delta = 0$ existem duas raízes reais e iguais;
Se $\Delta > 0$ existem duas raízes reais e desiguais.

Vimos no item 1.3 que se $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ e $a \geq b$, temos desigualdades. A **inequação** envolve uma desigualdade entre duas expressões algébricas.

A solução de uma inequação do primeiro grau é obtida da mesma forma que uma equação algébrica. O que diferencia o resultado é se tivermos que multiplicar o 1º membro da equação por um número negativo; o sentido do sinal será invertido.

Exemplo:

a. $-2x + 7 > 0 \ \rightarrow \ -2x > -7 \ \rightarrow 2x < 7 \ \rightarrow x < \frac{7}{2}$.

b. $4x - 5 < 5x + 2 \rightarrow 4x - 5x < 2 + 5 \ \rightarrow \ -x < 7 \ \rightarrow x > -7$.

c. $\frac{3-x}{2x-1} > 0$

Para que a inequação acima seja maior que zero, temos que analisar duas situações:

$$\begin{cases} 3 - x < 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 3 - x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

Da 1ª situação acima em que ambas as inequações são negativas, obtemos:

$$3 - x < 0 \rightarrow -x < -3 \rightarrow x > 3 \text{ e } 2x - 1 < 0 \rightarrow x < \frac{1}{2}$$

O conjunto solução é a intercessão entre as duas desigualdades, que será o conjunto vazio ($\emptyset$), ou seja, não existe número maior que 3 e menor que ½ simultaneamente.

Da 2ª situação em que ambas são positivas, obtemos:

$$3 - x > 0 \rightarrow x < 3 \text{ e } 2x - 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2}$$

O conjunto solução é $\frac{1}{2} < x < 3$.

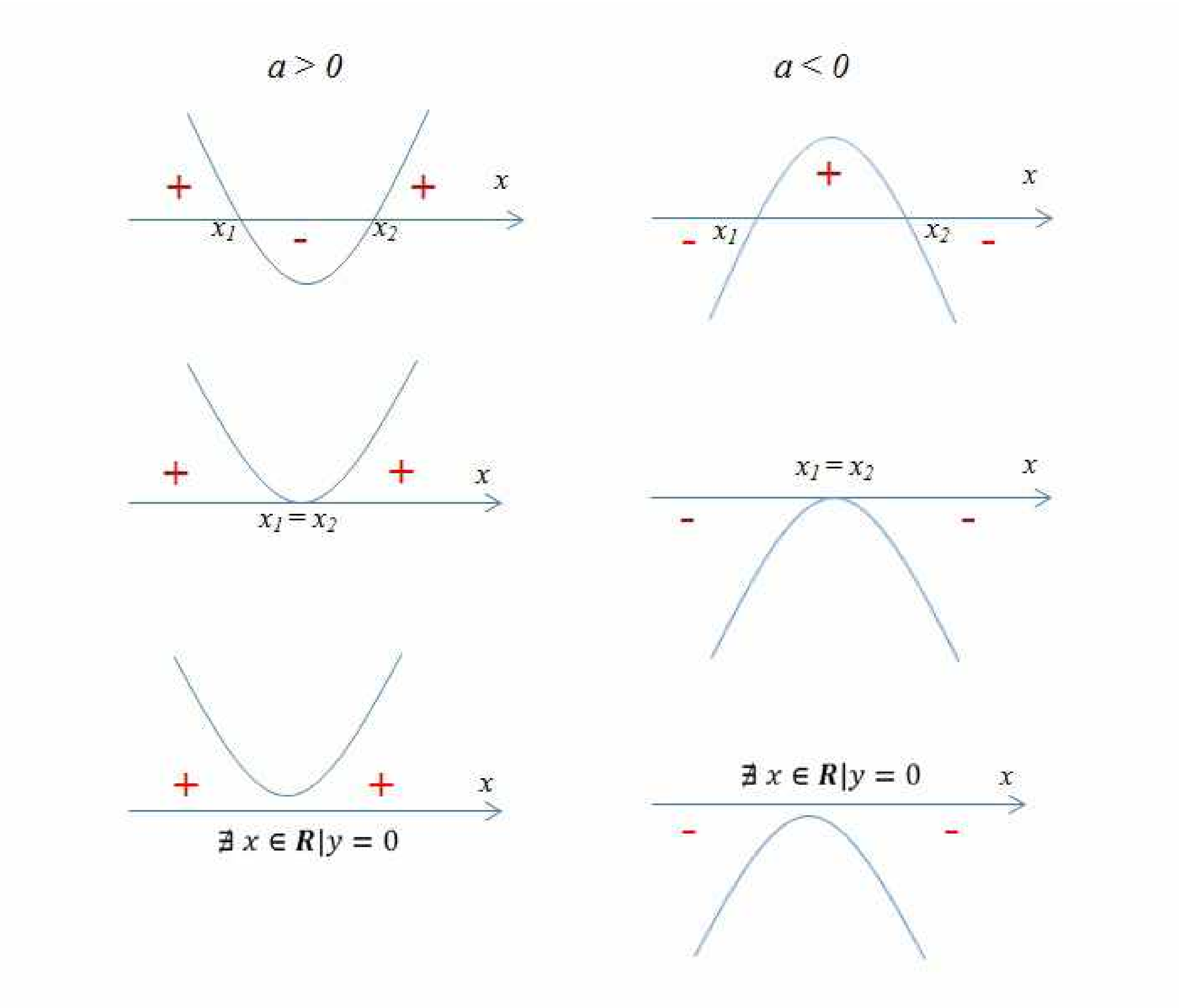
Portanto, $\frac{3-x}{2x-1} > 0$ quando $\frac{1}{2} < x < 3$.

As inequações de segundo grau são resolvidas através do estudo do sinal da função com a utilização de três passos básicos:

1.Igualar a equação do segundo grau à zero;

2.Marcar no eixo x (se existir) as raízes da equação;

3.Estudar o sinal da função correspondente, mediante as situações:



MÓDULO 2 - Relações recursivas

2.1 Conceito e modelagem de situações problema

Sem ao menos perceber, vemos em revistas, jornais ou outros meios de comunicação, relações entre dois conjuntos ou entre duas grandezas variáveis. Uma relação só acontece quando os elementos de dois conjuntos são emparelhados. Para ficar mais claro, podemos associar o conjunto de alunos que assistem aulas regularmente e o conjunto das notas de uma prova feita pelos alunos. As relações são visualizadas por meio de tabelas ou gráficos.

Podemos associar cada ponto da reta a exatamente um número real, ou seja, os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais. Basta definirmos um sistema de coordenadas na reta: escolhemos a origem no ponto zero, fixamos uma unidade de medida (centímetros, metros, etc.) e a coordenada de cada ponto x da reta será determinada pela medida do segmento $\overline{0x}$.

Os gráficos não estão presentes somente em jornais ou meios de comunicação, mas também em exames laboratoriais, nos rótulos de alimentos, na composição química de cosméticos, enfim em diversos lugares. Para interpretarmos esses gráficos, é preciso conhecer os conceitos de **plano cartesiano**, assim chamado em homenagem ao matemático e filósofo francês, *René Descartes*.

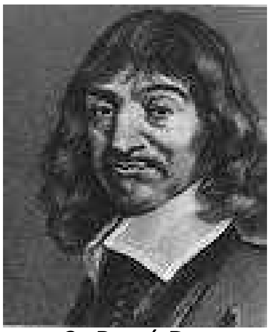


Figura 2: René Descartes

O plano cartesiano é constituído por dois eixos x e y perpendiculares entre si que se cruzam na origem, ou seja, no ponto zero. O eixo horizontal, denominado x, é o eixo das abscissas e o eixo vertical, denominado y, é o eixo das ordenadas. Cada par de números representa a posição de um ponto no plano. O eixo x é positivo do lado direito e, consequentemente, negativo do lado esquerdo, e o eixo y é positivo para cima e negativo para baixo. O plano fica dividido em quatro regiões denominadas de quadrantes, representados na figura 3 (quadrantes I, II, III e IV):

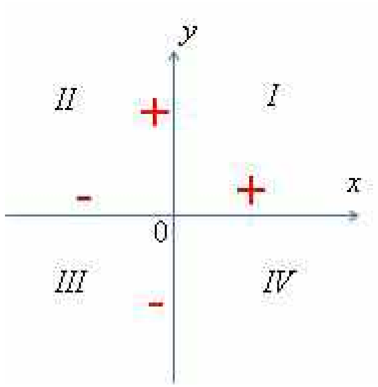


Figura 3: Quadrantes do plano cartesiano

2.2 Par ordenado e Plano Cartesiano

Par é todo conjunto formado por dois elementos em que a ordem dos elementos não produz um novo par. Assim, $(2,3)$ representa um par e $(2,3) = (3,2)$. P**ar ordenado** é todo conjunto formado por dois elementos em que a ordem dos mesmos é importante. Neste caso, $(2,3) \neq (3,2)$. O primeiro elemento do par ordenado refere-se ao ponto no eixo x e o segundo elemento refere-se ao ponto no eixo y. Estes elementos são chamados **coordenadas**.

Dois pares ordenados são iguais se, e somente se, os primeiros e segundos elementos são iguais, respectivamente. Simbolicamente temos,

$$(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c \;\text{ e }\; b = d.$$

A cada ponto P do plano está associado um par de números (x,y), que como já vimos, são as coordenadas do ponto. Assim, o ponto P é denotado por $P(x,y)$ como na figura abaixo.

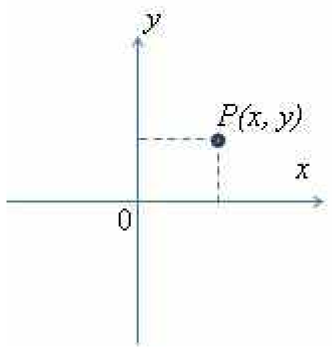


Figura 4: Ponto P de coordenanadas x e y

Teorema: Entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x,y) de números reais existe uma correspondência biunívoca.

Portanto, o plano cartesiano (ou plano coordenado) é denotado pelo símbolo $\boldsymbol{R^2}$, sendo formado pelo conjunto de todos os pares ordenados de números reais.

2.3 Produto Cartesiano

Definição: Sejam *A* e *B* dois conjuntos não vazios. Denominamos **produto cartesiano** de A por B o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos pares ordenados (x,y) em que o primeiro elemento pertence a *A* e o segundo elemento pertence a *B*. Simbolicamente,

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A \;\text{ e }\; y \in B\}.$$

O símbolo $A \times B$ lê-se A cartesiano *B*.

Se *A* ou *B* for o conjunto vazio, definimos o produto cartesiano de *A* por *B* como sendo o conjunto vazio.

$$A \times \emptyset = \emptyset \qquad \emptyset \times B = \emptyset \qquad \emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

Exemplo

a. Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5\}$ temos que

$A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$ e

$B \times A = \{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1)(5,2),(5,3)\}.$

b. Se $A = \{1, 3\}$ então o conjunto

$$A \times A = A^2 = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}.$$

c. Se $A = \{x \in \boldsymbol{R} \mid 2 \leq x < 4\}$ e $B = \{3\}$ então temos que

$$A \times B = \{(x,3) / x \in A\}$$

Observações:

1. Se $A \neq B$ então $A \times B \neq B \times A$, como no exemplo da letra a dado acima.
2. Se *A* e *B* são conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente, então $A \times B$ é um conjunto finito com $m \cdot n$ elementos.
3. Se *A* ou *B* for infinito e nenhum deles for vazio então $A \times B$ é um conjunto infinito.

Atividade 1

Represente no plano cartesiano o produto cartesiano das letras a, b e c do exemplo acima.

2.4 Relação Binária

Antes de definirmos o que é uma relação binária, vamos pensar numa situação hipotética em que podemos aplicar o conceito de produto cartesiano, sem a utilização de pares ordenados de números reais. Pense na situação....

Mais um ano letivo está findando e como sempre, vem com ele a formatura do 1º ano do nível fundamental. A sala da professora Ana está eufórica com todos os preparativos e os incansáveis ensaios de entrada para o grande dia. No dia da formatura a professora Ana disse à turma que a entrada se daria aos pares de alunos, sendo que a entrada das meninas seria pelo lado direito e de meninos pelo lado esquerdo do corredor central. A professora Ana tem quinze alunas e onze alunos. Vamos imaginar todas as possibilidades de pares de alunos, independentemente da ordem. Esse conjunto formado de todos os pares ordenados de alunos poderia ser reconhecido como um produto cartesiano $A \times B$, em que A seria o conjunto de alunas e B o conjunto de alunos da professora Ana.
Como havia mais meninas, a professora Ana precisou escolher alguns pares formados de menino e menina, para entrar primeiro na formatura e os últimos pares a entrar seriam formados de meninas. Para agrupar os pares de menina com menino, designou-se que a menina e o menino tivessem a mesma altura, ou seja, ficou estabelecida uma relação binária, formada pelo par de menina com menino que entrariam no dia da formatura.

Definição: Dados dois conjuntos A e B, uma **relação binária de *A* em *B*** é todo subconjunto Â de $A \times B$. Simbolicamente,

$$\Re \text{é uma relação binária de } A \text{ em } B \leftrightarrow \mathcal{R} \subset A \times B.$$

Se, eventualmente, os conjuntos A e B forem iguais, todo subconjunto Â de $A \times A$ é denominado **relação binária em *A***. Simbolicamente,

$$\Re \text{é uma relação binária em } A \leftrightarrow \mathcal{R} \subset A \times A.$$

Exemplo

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$, encontre os elementos de $A \times B$ das relações abaixo sabendo que $x \in A$ e $y \in B$:

a. $\Re = \{(x,y) | x < y\}$.

Assim, $\Re = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$.

b. $\Re = \{(x,y) | y = x + 1\}$.

Assim, $\Re = \{(1, 2), (3, 4)\}$.

Se o par (x, y) pertence à relação $\Re$, podemos escrever $x \, \Re \, y$ e lê-se x erre y. Simbolicamente,

$$(x, y) \in \Re \leftrightarrow x \, \Re \, y.$$

As relações são definidas sobre os conjuntos reais, mas nem sempre uma relação está definida em **R**. Para evitar isso, é preciso definir o conjunto domínio e imagem de uma relação $\Re$.

Seja $\Re$ uma relação de A em B, denotado por $\Re: A \rightarrow B$, em que A e B são subconjuntos de $\Re$:

Definição: **Domínio** de $\Re$ é o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencente a $\Re$. Simbolicamente,

$$x \in D \leftrightarrow \exists \, y, y \in B \mid (x, y) \in \Re \, .$$

Definição: **Imagem** de $\Re$ é o conjunto *Im* de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a $\Re$ Simbolicamente,

$$y \in Im \leftrightarrow \exists \, x, x \in A \mid (x, y) \in \Re.$$

Das definições acima, temos que $D \subset A$ e $Im \subset B$.

Exemplo:

a. Se $A = \{0, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ encontre o domínio e a imagem da relação:

$$\Re = \{(x, y) \in A \times B \mid y \text{ é múltiplo de } x\}.$$

Temos que $\Re = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)\}$. Assim, o seu domínio $D = \{2, 3, 4\}$ e sua imagem $Im = \{2, 3, 4, 6\}$

b. Se $A = \{-2, 0, 1, 3, 4\}$ e $B = \{-4, -3, 0, 1, 6, 7, 8\}$ encontre o domínio e a imagem da relação:

$$\Re = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}.$$

Temos que $\Re$ ={ (-2,-4), (0,0), (3,6), (4,8) } . Assim, o seu domínio é $D =$ {-2, 0, 3, 4} e sua imagem $Im =$ {-4, 0, 6, 8}. ·

Definição: Seja $\Re$ uma relação binária de *A* em *B*. Denominamos **relação inversa de** $\Re$ ao conjunto

$$\Re^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \,|\, (x, y) \in \boldsymbol{R}\}.$$

Decorre da definição acima que

$$(y, x) \in \Re^{-1} \leftrightarrow (x, y) \in \boldsymbol{R}.$$

Ou podemos dizer simplesmente que $\Re^{-1}$ é o conjunto dos pares ordenados obtidos a partir dos pares ordenados de $\Re$ invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

Exemplo

a. Defina os elementos de $\Re = \{(x,y) \in A \times B \mid x < y\}$ e $\Re^{-1}$ sabendo que $A = \{-1, 0, 3, 6\}$ e $B = \{-2, 5, 7\}$.

Temos que $\Re$ = { (-1,-2), (-1,5), (-1,7), (0,2), (0,5), (0,7), (3,-2), (3,5), (3,7), (6,-2), (6,5), (6,7) }

Assim $\Re^{-1}$ = { (-2,-1), (5,-1), (7,-1), (2,0), (5,0), (7,0), (-2,3), (5,3), (7,3), (-2,6), (5,6), (7,6) }

As relações binárias possuem quatro propriedades, a saber: reflexiva, simétrica, transitiva e antissimétrica. Passemos às definições...

Seja $\Re$ uma relação binária no conjunto *A*.

1. Reflexiva $\Re$ é uma relação **reflexiva** se, e somente se, todo elemento x pertencente a *A* se relaciona consigo mesmo. Simbolicamente,

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \,\Re\, x)$$

2. Simétrica: $\Re$ é uma relação **simétrica** se, e somente se, quando x se relaciona com y, necessariamente y também se relaciona com x, segundo $\Re$. Simbolicamente,

$$(\forall x, y \in A)(x \mathfrak{R} y \rightarrow x \mathfrak{R} y)$$

3. Transitiva: $\mathfrak{R}$ é uma relação **transitiva** se, e somente se, quando x se relaciona com y e y se relaciona com z, segue que x se relaciona com z. Simbolicamente,

$$(\forall x, y, z \in \boldsymbol{R})(x \mathfrak{R} y \wedge y \mathfrak{R} z \rightarrow x \mathfrak{R} z)$$

4. Antissimétrica: $\mathfrak{R}$ é uma relação **antissimétrica** se, e somente se, se $(x, y) \in \mathfrak{R}$ e $(y, x) \in \mathfrak{R}$, então $x = y$. Pode-se dizer também, que se x e y são elementos distintos do conjunto *A*, então x não se relaciona com y ou y não tem relação com x. Simbolicamente,

$$(\forall x, y \in A)(x \mathfrak{R} y \wedge y \mathfrak{R} x = y)$$

Para finalizar nosso capítulo, vamos destacar os tipos de relações que existem sobre um conjunto *A*.

Definição: $\mathfrak{R}$ é denominada uma **relação de equivalência** sobre o conjunto *A* não vazio, se, e somente se, $\mathfrak{R}$ for reflexıva, simétrica e transitiva.

Definição: $\mathfrak{R}$ é denominada uma **relação de ordem** sobre o conjunto *A* não vazio, se, e somente se, $\mathfrak{R}$ for reflexiva, antissimétrica e transitiva.

MÓDULO 3 - Funções

3.1 Conceito e principais elementos: domínio, contra-domínio, imagem direta e imagem inversa.

No nosso cotidiano, o valor de uma determinada quantidade depende do valor de outra quantidade. Por exemplo, o salário de um professor de universidade particular depende do número de horas de aulas ministradas; a perda ou ganho de peso depende do número de horas gastas em exercícios físicos; a produção de uma fábrica de chocolates depende do número de máquinas em funcionamento, entre outros. Essa relação existente entre as quantidades é comumente chamada de **função**.

O estudo de função é muito importante e útil na análise e interpretação de fenômenos de diversas naturezas, bem como, na descrição de regularidades.

Vamos restringir o nosso estudo de funções somente aos números reais.

Pensemos numa função como uma correspondência de um conjunto X de números reais x a um conjunto Y de números reais y, em que o número y é único para um valor específico de x.

Uma função pode ser expressa de diversas maneiras: por uma tabela, por uma lei que rege a relação, por uma equação ou por um gráfico.

Mas você pode pensar... Qual é a definição formal de função?

Definição: Sejam A e B dois conjuntos. Uma **função** f é um conjunto de pares ordenados (x, y) em que cada elemento $x \in A$ corresponde um único elemento $y \in B$.

Se f for uma função, então o **gráfico** de f será o conjunto dos pontos (x, y) em $\boldsymbol{R}^2$ para os quais (x, y) é um par ordenado de f.

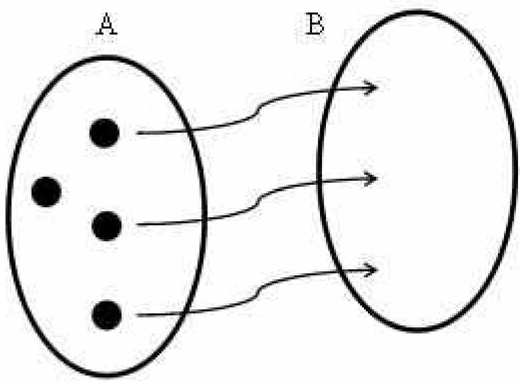
A notação usada para uma função é dada por $f: A \to B$.

Com a definição acima é fácil reconhecer uma função $f: A \to B$.

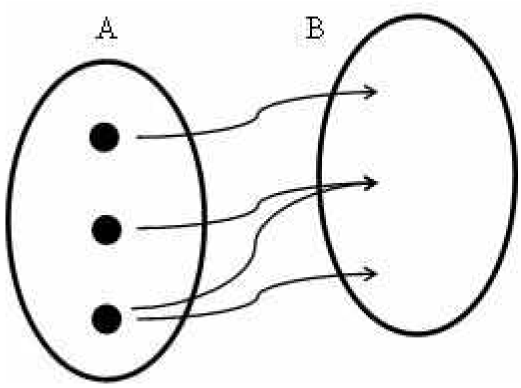
1. Todo elemento $x \in A$ deve ter pelo menos um par $(x, y) \in f$.
2. Todo elemento $x \in A$ deve ter somente um par $(x, y) \in f$.

Vejamos o que não é função pelo diagrama de flechas:

1. Se existir $x \in A$ do qual não esteja partindo nenhuma flecha para o conjunto B.



2. Se existir $x \in A$ do qual esteja partindo duas ou mais flechas para o conjunto B.



Em uma função $f: A \to B$, o conjunto A é denominado **domínio** da função e o conjunto B é o **contradomínio**.

Definição: O **domínio** de uma função $f: A \to B$ é o conjunto D_f dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Simbolicamente,

$$D_f = \{x \in A: \exists\ y \in B \text{ tal que } (x, y) \in f\}.$$

Decorre da definição acima que $D_f = A$.

Para se obter o domínio de uma função f, basta encontrar seu campo de variação que é o conjunto de todos os valores possíveis de y, que pode também ser denotado por $f(x)$, quando x varia em todo o domínio.

Há alguns exemplos que podemos visualizar facilmente seu domínio. Veja:

a) $f(x) = \sqrt{x + 6}$

Sabemos que $\sqrt{x + 6}$ só existe em **R** se $x + 6 \geq 0$, ou seja, $x \geq -6$. Portanto, $D_f = \{x \in \boldsymbol{R} | x \geq -6\}$.

b) $f(x) = \frac{3}{x-3}$

Sabemos que o denominador não pode ser nulo (não existe divisão por zero), assim $x - 3 \neq 0$, ou seja, $x \neq 3$. Portanto, $D_f = \{x \in \boldsymbol{R} | x \neq 3\}$ ou $D_f = \boldsymbol{R} - \{3\}$.

c) $f(x) = \log\,(2x - 6)$

Sabemos que o logaritmando é sempre positivo. Assim $2x - 6 > 0$, ou seja, $x > 3$. Portanto, $D_f = \{x \in \boldsymbol{R} | x > 3\}$.

Definição: O **contradomínio** de uma função $f: A \to B$ é o conjunto CD_f de todos os elementos do conjunto B. Simbolicamente,

$$CD_f = B.$$

Definição: A **imagem direta**, ou simplesmente **imagem** de uma função $f: A \to B$ é o conjunto $Im(f)$ dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Simbolicamente,

$$Im(f) = \{y \in B: \exists\ x \in A \text{ tal que } (x, y) \in f\}.$$

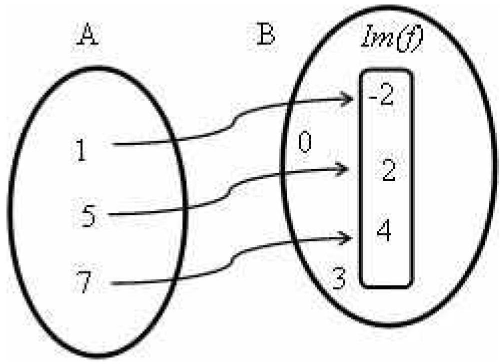
Decorre da definição que $Im(f) \subset B$.

Exemplo

Determine o domínio e imagem da função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x - 3$, sabendo que $A = \{1,5,7\}$ e $B = \{-2,0,2,3,4\}$.

Para encontrarmos a solução, basta substituirmos os valores de A na lei f:

$$f(1) = 1 - 3 = -2; \qquad f(5) = 5 - 3 = 2; \qquad f(7) = 7 - 3 = 4.$$



Assim, $D_f = \{1,5,7\} = A$ e $Im(f) = \{-2,2,4\} \subset B$, como mostra o diagrama acima.

Vejamos mais uma definição importante.

Definição: A **imagem inversa** de um conjunto $C \subset B$ de uma função $f: A \to B$ é definida por $f^{-1}(C) = \{x \in A: y \in C\}$.

3.2 Operações com funções: soma, produto, composição e inversa.

Veremos a seguir que é possível realizarmos operações com funções. Observe que originarão novas funções a partir de outras funções dadas, utilizando as operações soma, subtração, multiplicação e divisão. Essas novas funções são denominadas **soma**, **diferença**, **produto** e **quociente**.

Definição: Sejam duas funções f e g, a sua **soma**, denotada por $f + g$, é a função definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Definição: Sejam duas funções f e g, a sua **diferença**, denotada por $f - g$, é a função definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

Definição: Sejam duas funções f e g, o seu **produto**, denotado por $f \cdot g$, é a função definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Definição: Sejam duas funções f e g, o seu **quociente**, denotado por f/g, é a função definida por

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Em todas as definições acima, o domínio da função resultante são os valores de x pertencentes aos domínios de f e g, apenas com uma condição a mais para o quociente em que os valores de x são excluídos quando $g(x) = 0$.

Há ainda outra operação com funções em que podemos compor duas funções.

Definição: Sejam duas funções f e g, a **função composta**, denotada por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

e o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f.

Encontrar uma função composta $f \circ g$ é simples. Primeiramente aplicamos a função g a x e, por último, a função f a $g(x)$.

Exemplo:

Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 1$. Assim $f \circ g$ é dado por

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$
$$(f \circ g)(x) = f(x - 1)$$
$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x - 1}$$

O domínio de g é $(-\infty, +\infty)$ e o domínio de f é $[0 - \infty, +\infty)$. Portanto, o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os número reais, em que $x - 1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$.

Definição: A **inversa** de uma função $f: A \rightarrow B$, denotada por $f^{-1}: B \rightarrow A$, é definida por

$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A | (x, y) \in f\}.$$

Na função inversa, tem-se que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$$

em que Id é a função identidade de A em A.

Para encontrar a função inversa, devemos seguir os seguintes passos:

1. Isolar x na sentença $y = f(x)$;

2. Como a letra x geralmente é o símbolo da variável independente troca-se x por y e y por x.

Exemplo:

Seja $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, com $x \neq 3$, encontre a função inversa de $f(x)$.

Temos que $y = \frac{x+2}{x-3}$. Vamos isolar x na igualdade:

$$y = \frac{x+2}{x-3} \Rightarrow y(x-3) = x+2 \Rightarrow yx - 3y = x+2 \Rightarrow yx - x = 3y+2 \Rightarrow x(y-1) = 3y+2 \Rightarrow x = \frac{3y+2}{y-1}$$

Trocando x por y e y por x, obtemos:

$y = \frac{3x+2}{x-1}$, ou seja, $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}$.

3.3 Sistemas de coordenadas e gráfico de uma função.

Caro aluno, já vimos no capítulo 2 o conceito de plano cartesiano que origina o sistema de coordenadas x e y.

Plotar o gráfico de uma função f é basicamente representar no plano cartesiano todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in D_f$ e $y = f(x)$ por meio da lei ou sentença matemática que define a função. O gráfico nos possibilita a visualização do comportamento da função.

Exemplo:

Represente a função $f(x) = x + 2$ em um gráfico

Observe que a função está definida no conjunto dos reais, ou seja, $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$. Vamos atribuir valores do domínio a x e encontrar os correspondentes valores de y.

x	y
-1	1
0	2
2	4

Agora, identificamos os pontos no plano cartesiano.

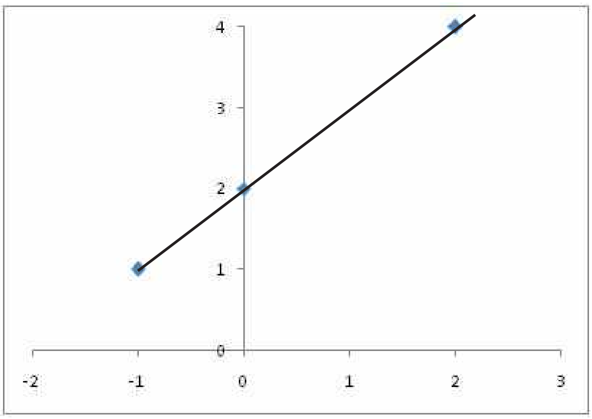


Figura 5: Gráfico da função $f(x) =$ x+2

3.4 Funções pares, ímpares, crescentes, decrescentes e periódicas

Há conceitos importantes quanto ao comportamento de uma função. Vejamos:

Definição: Seja uma função $f: A \to B$, dizemos que f é **par** se, para todo valor de x no domínio de f, tem-se que $f(-x) = f(x)$.

Definição: Seja uma função $f: A \to B$, dizemos que f é **ímpar** se, para todo valor de x no domínio de f, tem-se que $f(-x) = -f(x)$.

Exemplo:

a. Verifique que $f(x) = x^2$ é uma função par.

Tem-se que $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$, mostrando que f é par. Observe o gráfico da função:

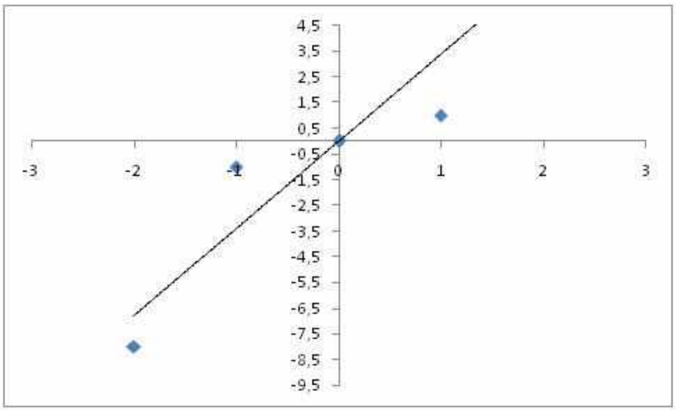


Figura 6: Gráfico da função $f(x) = x^2$

Note que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo vertical ou eixo y e, neste caso, elementos simétricos possuem a mesma imagem. Ou seja, os elementos 1 e -1, por exemplo, são simétricos e possuem a imagem 1.

b. Verifique que $f(x) = x^3$ é uma função ímpar.

Tem-se que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, mostrando que f é ímpar. Observe o gráfico da função:

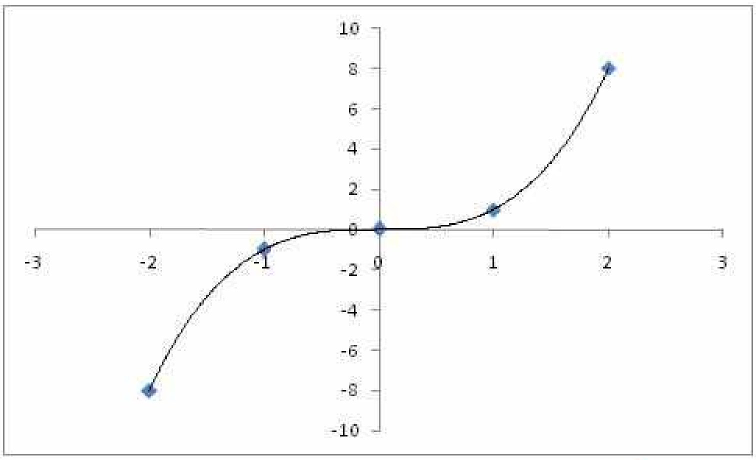


Figura 7: Gráfico da função $f(x) = x^3$

Note que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem e, neste caso, elementos simétricos possuem imagens simétricas. Ou seja, os elementos 1 e -1, por exemplo, são simétricos e possuem imagens 1 e -1, respectivamente.

Quando uma função não é par nem ímpar, dizemos que é uma **função sem paridade**.

Definição: : Seja uma função $f\colon A \to B$, dizemos que f é **crescente** no conjunto $A_1 \subset A$ se, e somente se, para dois valores quaisquer $x_1, x_2 \in A_1$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$. Simbolicamente,

$$\forall\, x_1, x_2 \in A_1, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Definição: Seja uma função $f\colon A \to B$, dizemos que f é **decrescente** no conjunto se, e somente se, para dois valores quaisquer $x_1, x_2 \in A_1$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$. Simbolicamente,

$$\forall\, x_1, x_2 \in A_1, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Exemplo:

a. Verifique que $f(x) = x + 1$ é uma função crescente.

Sejam $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ tal que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Observe no gráfico de f que na medida em que os valores de x crescem, suas respectivas imagens também crescem.

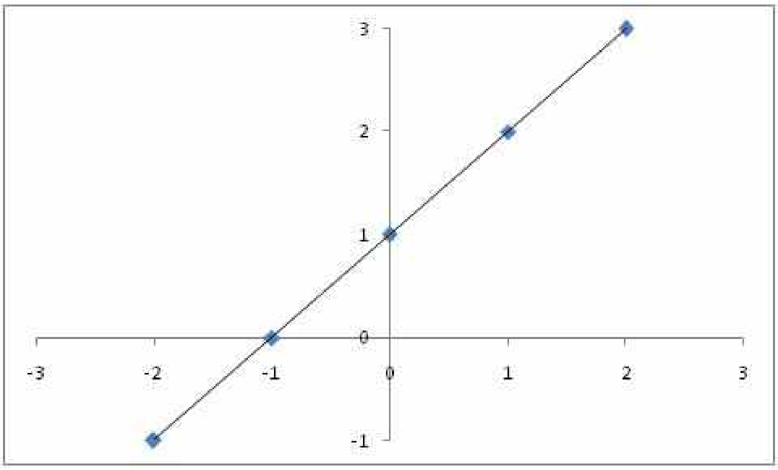


Figura 8 : Gráfico da função $f(x) = x + 1$

b. Verifique que $f(x) = -x + 1$ é uma função crescente.

Sejam $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ tal que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 1 > -x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Observe no gráfico de f que na medida em que os valores de x crescem, suas respectivas imagens decrescem.

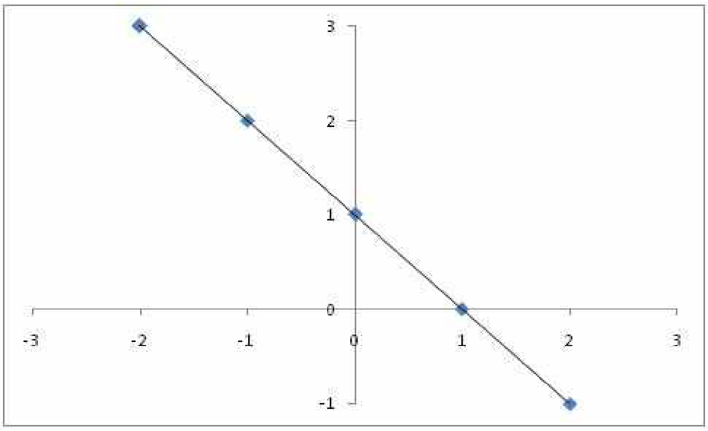


Figura 9 : Gráfico da função $f(x) = -x + 1$

Podemos encontrar funções que oscilam seu gráfico entre as orientações crescente e decrescente. Estas funções são chamadas periódicas.

Definição: Seja uma função $f: A \to B$. Dizemos que f é **periódica** quando seus valores se repetem para determinados valores de x, ou seja, para cada período determinado pelos valores de x, obtêm-se valores repetidos para a função.

Exemplo:

A função $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z}$ com $f(x) = (-1)^x$ é periódica.

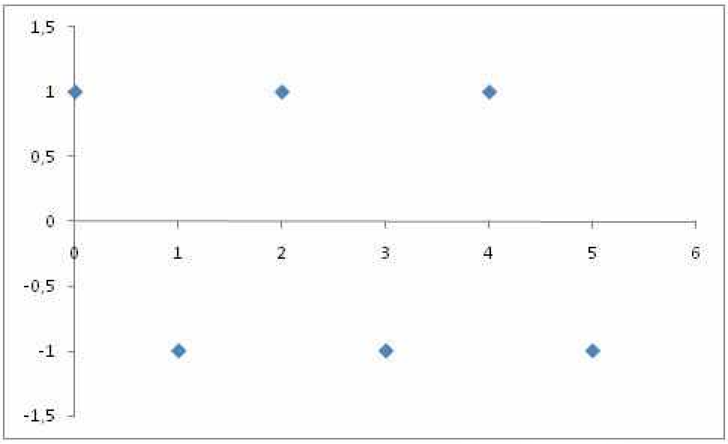


Figura 10 : Gráfico da função $f(x): (-1)^x$

3.5 Algumas funções especiais: polinomiais, racional, potência, maior inteiro, escada, trigonométricas (e suas inversas).

Vejamos a seguir alguns tipos específicos de funções...

Definição: Uma função f definida por

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$
em que $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são números reais ($a_n \neq 0$) e n for um inteiro não-negativo, é chamada **função polinomial** de grau n.

Temos que o domínio da função polinomial é $\boldsymbol{R}$ e o contradomínio também é $\boldsymbol{R}$, sendo sua imagem dependente de f.
Uma função polinomial pode ser chamada também de **polinômio**.

Exemplo:

A função $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 7x - 9$ é uma função polinomial de grau 4.

Definição: Uma função f definida por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

em que $Q(x) \neq 0$, é chamada **função racional**, ou seja, $f(x)$ é uma função expressa pela razão de dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$.

Temos que o domínio de uma função racional são todos os números reais tais que $Q(x) \neq 0 Q(x) \neq 0$.

O gráfico de uma função racional pode apresentar interrupções ou descontinuidades nos pontos em que o denominador é igual a zero. E também, a função racional pode não estar definida para determinados valores de x.

Definição: Uma função f definida por

$$f(x) = x^n$$

em que n é uma constante, é chamada **função potência**.

Temos que o domínio da função polinomial é $\boldsymbol{R}$ e o contradomínio também é $\boldsymbol{R}$, sendo sua imagem dependente de f.

A forma geral do gráfico de uma função potência depende de f ser par ou ímpar.

Definição: Uma função $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ é chamada **função maior inteiro** quando a cada elemento de $x \in \boldsymbol{R}$ é associado o elemento $[\![x]\!]$ que é o maior inteiro, que é menor ou igual a x. Simbolicamente,

$$[\![x]\!] = n, \text{ se } n \leq x < n + 1.$$

A imagem da função maior inteiro é o conjunto dos inteiros, ou seja, $Im(f) = \boldsymbol{Z}$.

Exemplo

a. $[\![4]\!] = 4$;
b. $[\![4{,}8]\!] = 4$;
c. $[\![\pi]\!] = 3$;
d. $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$.

As **funções trigonométricas** são funções angulares muito importantes. São elas: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.

Definição: A função f definida por

$$f(x) = sen(x)$$

é chamada **função seno**.

Temos que $D_f = \boldsymbol{R}$, $CD_f = \boldsymbol{R}$ e $Im(f) = [-1{,}1]$. Sua interseção ocorre quando $x = n\pi, n \in \boldsymbol{Z}$.

Definição: A função f definida por

$$f(x) = cos(x)$$

é chamada **função cosseno**.

Temos que $D_f = \boldsymbol{R}$, $CD_f = \boldsymbol{R}$ e $Im(f) = [-1,1]$. Sua interseção ocorre quando $x = n\pi + \pi/2, n \in \boldsymbol{Z}$.

Definição: A função f definida por

$$f(x) = tg(x)$$

é chamada **função tangente**.

Temos que $D_f = \boldsymbol{R} \,|\left\{x \in \boldsymbol{R}: x = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$, $CD_f = \boldsymbol{R}$ e $Im(f) = \boldsymbol{R}$. Sua interseção ocorre quando $x = n\pi, n \in \boldsymbol{Z}$.

Definição: A função f definida por

$$f(x) = cotg(x)$$

é chamada **função cotangente**.

Temos que $D_f = \boldsymbol{R} \,|\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: x = n\pi, n \in \boldsymbol{Z}\}$, $CD_f = \boldsymbol{R}$ e $Im(f) = \boldsymbol{R}$. Sua interseção ocorre quando $x = n\pi + \pi/2, n \in \boldsymbol{Z}$.

Definição: A função f definida por

$$f(x) = sec(x)$$

é chamada **função secante**.

Temos que $D_f = \boldsymbol{R} \,|\left\{x \in \boldsymbol{R}: x = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$, $CD_f = \boldsymbol{R}$ e $Im(f) = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$, sendo que não ocorre interseção com o eixo x.

Definição: A função f definida por

$$f(x) = cossec(x)$$

é chamada **função cossecante**.

Temos que $D_f = \boldsymbol{R} \,|\{x \in \boldsymbol{R}: x = n\pi, n \in \boldsymbol{Z}\}$, $CD_f = \boldsymbol{R}$ e $Im(f) = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$, sendo que não ocorre interseção com o eixo x.

As funções trigonométricas são **periódicas**, e por isso não podem ser inversíveis em seu domínio. Mas para algumas delas podemos considerar uma restrição no domínio, a fim de obter uma função inversível.

Definição: Seja a função $f(x) = sen(x)$ com domínio $[-\pi/2, \pi/2]$ e imagem $[-1,1]$. A função inversa de f é denominada **arco seno** definida por $f^{-1}: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ denotada por

$f^{-1}(x) = arcsen(x)$.

Definição: Seja a função $f(x) = cos(x)$ com domínio $[0, \pi]$ e imagem $[-1,1]$. A função inversa de f é denominada **arco cosseno** definida por $f^{-1}: [-1,1] \to [0, \pi]$ denotada por

$f^{-1}(x) = arccos(x)$.

Definição: Seja a função $f(x) = tg(x)$ com domínio $[-\pi/2, \pi/2]$ e imagem $\boldsymbol{R}$. A função inversa de f é denominada **arco tangente** definida por $f^{-1}: \boldsymbol{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ denotada por

$f^{-1}(x) = arctg(x)$.

Definição: Seja a função $f(x) = cotg(x)$ com domínio $[0, \pi]$ e imagem $\boldsymbol{R}$. A função inversa de f é denominada **arco cotangente** definida por $f^{-1}: \boldsymbol{R} \to [0, \pi]$ denotada por

$f^{-1}(x) = arccotg(x)$.

3.6 Modelagem de situações-problema via funções.

Vamos ver algumas aplicações de funções para a compreensão de fenômenos e resolução de problemas do nosso cotidiano.

1. O preço de uma corrida de táxi, em geral, é constituído de uma parte fixa, chamada bandeirada, e de uma parte variável, que depende do número de quilômetros rodados. Em uma cidade X a bandeirada é R$ 10,00 e o preço do quilômetro rodado é R$ 0,50.

    a. Determine a função que representa o preço da corrida.

    b. Se alguém pegar um táxi no centro da cidade e se deslocar para sua casa, situada a 8 km de distância, quanto pagará pela corrida?

Solução:

a. Vamos definir as variáveis da seguinte forma: $P =$ preço da corrida; $a =$ preço do quilômetro rodado; $b =$ bandeirada; $x =$ número de quilômetros rodados.

O preço da corrida é a soma da parte fixa e da parte variável. Assim:

$P(x) = b + ax = 10 + 0{,}50x.$

b. Basta substituir $x = 8$ na função obtida:

$P(8) = 10 + 0{,}50 \cdot 8 = 14$

Portanto, o preço da corrida será R$ 14,00.

2. Um avião com 120 lugares é fretado para uma excursão. A companhia exige de cada passageiro R$ 900,00 mais uma taxa de R$ 10,00 para cada lugar vago. Qual o número de passageiros que torna máxima a receita da companhia?

Solução:

Dados e Variáveis:

- Capacidade do avião: 120 lugares
- Número de passageiros: x
- Preço por passageiro: Fixa ® 900,00 e Variável ® $10(120-x)$
- Receita da companhia: R

Assim, temos a função $R = 900x + 10(120-x)x = 2100x - 10x^2$

.

Observe que como a função quadrática tem concavidade voltada para baixo (coeficiente de x^2x^2 é negativo), basta encontrar as coordenadas do vértice da parábola que corresponderá ao seu ponto máximo:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2100}{2\cdot(-10)} = 105$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(2100)^2-4(-10)(0)}{4\cdot(-10)} = 110250$$

Portanto, $(x_v, y_v) = (105{,}110250)$.

O número de passageiros que torna máxima a receita da companhia é $x = 105$.

3. Analisar equilíbrio sob a ótica do mercado implica a definição de um conjunto de variáveis que se inter-relacionam, ajustadas umas às outras envolvidas em um modelo matemático.

Para discutir este tipo de modelo precisamos observar o comportamento das variáveis escolhidas e as propriedades das funções que definem o modelo.

É importante deixar claro que o equilíbrio perde a relevância se outras variáveis são incluídas no modelo, pois a ideia básica é que estamos diante da inexistência de mudanças.

Por exemplo, supunha as seguintes variáveis:

Q_d = quantidade procurada de uma mercadoria (Demanda);

Qs = quantidade ofertada de mercadoria (Oferta);

p = preço

A suposição que alicerça o equilíbrio é que o excesso de demanda é zero ou

$$Qd - Qs = 0$$

Supondo que as curvas de oferta e demanda são funções lineares é possível escrever

$$Qd = Qs$$

$$Qd = a - bp, \quad a, b > 0$$

$$Qs = -c + dp, \quad c, d > 0$$

Os parâmetros *a*, *b*, *c* e *d* são definidos em função do mercado.

Do ponto de vista do gráfico, o equilíbrio do mercado representa a interseção entre duas curvas (no caso linear entre duas retas). Algebricamente estamos diante da resolução de um sistema de equações:

Supondo que :

$$Qd = 15 - 2p$$

$$Qs = -3 + 3p$$

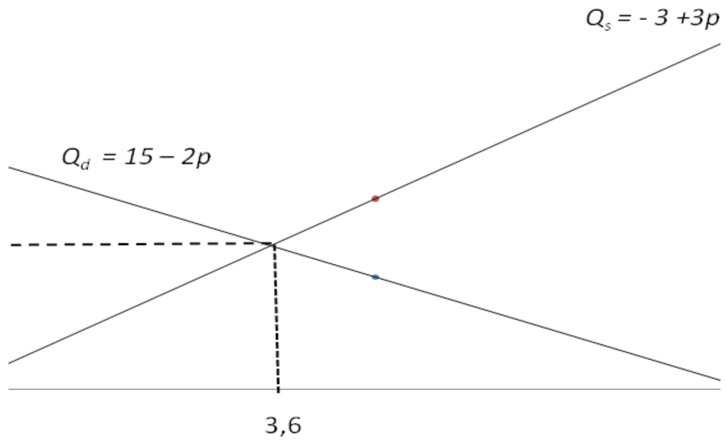
Fazendo $Qd = Qs$, temos que:

$$15 - 2p = -3 + 3p$$

$$5p = 18$$

$$p = 3,6.$$

Assim o ponto de equilíbrio do mercado ocorre, quando o preço for igual 3,6 (p = 3,6).



4. Em uma empresa, a depreciação de um certo equipamento no decorrer do tempo, é feita pelo método da reta. Cada equipamento tem uma estimativa de vida útil e o valor contábil descresce a uma taxa constante de tal forma que ao término da vida útil podemos ter uma zero ou um valor residual denotado por r.

Vamos considerar que:

y: é o valor contábil ;

I: é o valor do investimento na compra do equipamento;

T: é a vida útil;

t: é o tempo;

Temos que $y = f(t)$ é uma função do primeiro grau tal que

$$f(t) = at + b,$$

sendo que $f(0) = I$ e $f(T) = 0$ ou $f(T) = r$.

Supondo inicialmente o valor residual nulo, temos:

$$f(0) = a.0 + b = I$$

$$f(T) = a.T + b = 0$$

Assim, tem-se que

$$b = I$$

$$a = \frac{-I}{T}$$

e portanto,

$$f(t) = \frac{-I}{T}t + I$$

que é uma função do primeiro grau descrescente.

Quando $r \neq 0$ podemos escrever

$$f(0) = a.0 + b = I$$

$$f(T) = a.T + b = r$$

Assim, tem-se que

$$b = I$$

$$a = \frac{r - I}{T}$$

e portanto,

$$f(t) = \frac{r - I}{T}t + I$$

que é uma função do primeiro grau descrescente muito usada para analisar a depreciação de equipamentos

Podemos observar que esta função só tem significado para o domínio $t \in [0,T]$.

Para exemplificar, vamos supor que um *notebook* foi comprado por R$ 4.200,00 e a estimativa de vida útil é de 5 anos. Supondo um valor residual de R$ 800,00, qual é o valor contábil ao termino de 3 anos?

$$f(0) = 4200$$

$$f(5) = 800$$

Assim,

$$f(t) = -680t + 4200.$$

Logo, o valor contábil ao término de 3 anos é $f(3) = 2160$, ou seja, o valor contábil do *notebook* após 3 anos é R$ 2.160,00.

MÓDULO 4 - Noções de lógica

Caro aluno,

Até hoje você deve se perguntar o que realmente é lógica. É tão comum ouvir em uma conversa descontraída alguém responder "é lógico", e ao dizer isso significa que a pessoa está afirmando uma verdade a partir de um acontecimento, ou seja, tem argumentos suficientes para fazer a afirmação.

Para se entender melhor a lógica, é preciso um contato maior com a Matemática, pois só assim terá maior entendimento ao visualizar a solução de um problema.

Pode-se dizer de maneira bem simplificada que lógica é o estudo de métodos e princípios que nos permite distinguir argumentos corretos e incorretos.

Vamos entender alguns conceitos importantes que serão usados no nosso estudo da Lógica.

Na nossa língua falada e escrita, sempre está presente uma **proposição** ou **sentença** que exprime um pensamento de sentido completo.

Exemplo:

a. O animal de estimação é um cachorro.

b. Alexandre é vendedor e estudante.

c. Só vou ao circo se e somente se conseguir dinheiro.

d. Onde você estuda?

Mas na lógica, as proposições que usamos são restritas a determinada classe. Aqui, as proposições são **declarativas afirmativas** de sentido verdadeiro ou falso, um excluindo o outro.

Sendo a proposição verdadeira ou falsa, tem-se o **princípio do terceiro excluído** ou **lógica bivalente**, ou seja, toda proposição apresenta um e apenas um dos valores lógicos V (verdadeiro) ou F (falso).

Assim, pelos exemplos acima, apenas a letra d não se trata de uma proposição declarativa, e sim, interrogativa. Vale lembrar que as proposições exclamativas e imperativas também não são utilizadas na lógica matemática.

As proposições podem ser simples e compostas.

Definição: Uma proposição **simples** ou **atômica** é aquela que constitui o núcleo da linguagem. Em outras palavras, não há outra proposição integrante em si mesma.

Comumente, os autores denotam as proposições por letras minúsculas do alfabeto chamadas **letras proposicionais**.
Exemplo:

a. p: João lavou o rosto.

b. q: Todo retângulo tem 4 ângulos.

c. s: O sol é uma estrela.

Definição: Uma proposição **composta** ou **molecular** é aquela que combina duas ou mais proposições.

As proposições compostas são denotadas pelas letras maiúsculas do alfabeto, também chamadas **letras proposicionais**.

Exemplo:

a. p: João lavou o rosto e Pedro cortou o braço.

b. q: Se Paulo trabalha, então, ele pode ir ao circo.

A proposição composta nada mais é que uma combinação de proposições simples. E para a união entre as proposições simples, usamos sentenças matemáticas chamadas **conectivos**.

4.1 Sentenças matemáticas: conectivos.

A partir de proposições dadas podemos construir novas proposições utilizando **conectivos** como “não”, “e”, “ou”, “se ... então”, “se e somente se”. Vejamos como utilizarmos adequadamente cada um deles.

4.1.1 Negação (~)

A partir de uma proposição p qualquer, podemos sempre obter outra proposição que é a **negação** de p, denotada por $\sim p$ e lê-se: não p. Assim, quando p for verdadeira, $\sim p$ será falsa ou vice-versa.

De forma simplificada, basta colocar o “não” antes do verbo da proposição.

Exemplo:

p: João é careca.

$\sim p$: João não é careca.

4.1.2 Conjunção (^)

Ao utilizarmos o conectivo “e” entre duas proposições p e q, temos uma nova proposição chamada **conjunção** denotada por $p \wedge q$ e lê-se: p e q. A conjunção $p \wedge q$ só será verdadeira quando ambas as proposições p e q forem verdadeiras. Se ao menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

Exemplo:

$p \wedge q$: João é careca e alto.

4.1.3 Disjunção (˅)

Ao utilizarmos o conectivo “ou” entre duas proposições p e q, temos uma nova proposição chamada **disjunção** denotada por $p \vee q$ e lê-se: p ou q. A disjunção $p \vee q$ será verdadeira se ao menos uma das proposições p ou q for verdadeira. Se p ou q são ambas falsas, então $p \vee q$ é falsa.

Exemplo:

$p \vee q$: João é careca ou alto.

4.1.4 Disjunção exclusiva (˅˅)

Existem dois sentidos para o conectivo “ou”. Observe as proposições:

p: João é careca ou alto.

q: João é mineiro ou paulista.

Na proposição p indica que pelo menos uma das duas proposições “João é careca”, “João é alto” é verdadeira, podendo ser ambas verdadeiras “João é careca e alto”. Entretanto, na proposição q apenas uma das proposições “João é mineiro”, “João é paulista” pode ser verdadeira.

Na proposição p dizemos que “ou” é *inclusivo* e na proposição q dizemos que “ou” é *exclusivo*. Quando o “ou” é inclusivo, temos uma disjunção inclusiva, ou simplesmente disjunção (item 4.1.3). Quando o “ou” é exclusivo, temos uma disjunção exclusiva.

Portanto, ao utilizarmos o conectivo “ou” exclusivo entre duas proposições p e q, temos uma nova proposição chamada **disjunção exclusiva** denotada por $p \veebar q$ e lê-se: ou p ou q. A disjunção exclusiva $p \veebar q$ será verdadeira quando p for verdadeira ou q for verdadeira. Se ambas são verdadeiras ou ambas são falsas, a proposição será falsa.

4.1.5 Condicional (→)

Ao utilizarmos o conectivo condicional “se... então” entre duas proposições p e q, temos uma nova proposição chamada **condicional** denotada por $p \to q$ e lê-se: se p então q. A condicional $p \to q$ só não será verdadeira quando p for verdadeira e q for falsa.

Exemplo:

$p \to q$: Se João é careca, então, ele não usa pente.

Quando $p \to q$ for verdadeira, afirmamos que p é condição **suficiente** para que ocorra q, e q é condição **necessária** para que ocorra p.

4.1.6 Bicondicional (↔)

Ao utilizarmos o conectivo bicondicional “... se e somente se...” entre duas proposições p e q, temos uma nova proposição chamada **bicondicional** denotada por $p \leftrightarrow q$ e lê-se: p se e somente se q. A bicondicional $p \leftrightarrow q$ será verdadeira se as duas proposições p e q tiverem o mesmo valor lógico, ou seja, ambas forem verdadeiras ou ambas forem falsas.

Exemplo:

$p \leftrightarrow q$ João é careca se e somente se seu pai é careca.

Quando $p \leftrightarrow q$ for verdadeira, dizemos que p é condição **necessária e suficiente** para que ocorra q, e q é condição **necessária e suficiente** para que ocorra p.

A bicondicional pode ser escrita como uma conjunção de duas condicionais. Simbolicamente: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$, em que $\equiv$ é o símbolo para equivalência.

4.2 Tabelas verdade.

Observamos que a cada proposição está associado um, e somente um dos valores, verdadeiro ou falso. Podemos associar estes valores às proposições compostas obtidas com o uso dos conectivos. Essa associação origina uma tabela verdade.

Tabela verdade é uma tabela que apresenta todos os possíveis valores lógicos de uma proposição composta, já sendo conhecidos os valores das proposições simples que a constituem.

Vejamos a seguir, as tabelas verdade para os conectivos vistos no item anterior, para, a partir deles, construirmos tabelas verdades para proposições compostas.

4.2.1 Negação

Temos que: $\sim p$ é verdade (falsa) se e somente se p é falsa (verdadeira).

p	$\sim p$
V	F
F	V

4.2.2 Conjunção

Uma conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se e somente se p e q são verdadeiras.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

4.2.3 Disjunção

Uma disjunção $p \vee q$ é falsa se e somente se p e q são falsas.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4.2.4 Disjunção exclusiva

Uma disjunção exclusiva $p \veebar q$ é verdadeira quando p for verdadeira ou q for verdadeira.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4.2.5 Condicional

Uma condicional $p \rightarrow q$ é falsa se e somente se p é verdadeira e q é falsa.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

4.2.6 Bicondicional

Uma bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira se e somente se p e q são verdadeiras ou se p e q são falsas.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

4.2.7 Tabela verdade de uma fórmula qualquer

Podemos combinar proposições simples com os conectivos lógicos $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ para construir proposições compostas.

Observe o exemplo:

$$[(p \vee q) \rightarrow \sim p) \rightarrow (q \vee p)$$

Para conhecer o valor lógico da proposição resultante, temos que construir a tabela verdade das operações lógicas.

Existe uma hierarquia para os conectivos ao resolver a proposição. Assim para resolver a proposição acima temos que obedecer à hierarquia abaixo:

1. $\sim$: negação;
2. $\wedge$: conjunção; $\vee$: disjunção;
3. $\rightarrow$: condicional;
4. $\leftrightarrow$: bicondicional.

Quanto aos sinais de agrupamentos, procedemos de acordo com a mesma regra da álgebra: parêntesis, colchetes e chaves, quando houver os três.

É fácil saber quantas linhas serão utilizadas numa tabela verdade.Basta calcular , em que é o número de proposições simples envolvidas na proposição composta.

Mas vamos solucionar nossa proposição e colocar em prática o que aprendemos até aqui!

$$[(p \vee q) \rightarrow \sim p)] \rightarrow (q \vee p)$$

Observe que temos duas proposições simples envolvidas, uma dentro dos colchetes e a segunda dentro dos parêntesis. Assim teremos linhas:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \rightarrow \sim p$	$(q \vee p)$	$[(p \vee q) \rightarrow \sim p)] \rightarrow (q \vee p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F

Depois da teoria, a prática se torna mais simples!

Agora é com você...

Atividade 2

Encontre a tabela verdade das proposições abaixo:

a. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$

b. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow \{\sim[\sim p \wedge (r \vee s)]\}$

c. $[(p \vee\vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [q \rightarrow (p \wedge r)]$

4.2.8 Proposições Tautológicas, contra válidas e indeterminadas

As fórmulas proposicionais podem apresentar casos específicos para a tabela verdade.

Definição: **Tautologia** é toda proposição em que a última coluna da tabela verdade é composta pelo valor lógico verdadeiro (V). São também conhecidas por **proposições tautológicas** ou **proposições logicamente verdadeiras**.

Exemplo

1. $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$ é uma proposição tautológica pois

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$q \vee p$	$(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

2. $p \rightarrow (p \vee q)$ é uma proposição tautológica pois

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Definição: **Contradição** é toda proposição em que a última coluna da tabela verdade é composta pelo valor lógico falso (F). São também conhecidas **por proposições contra válidas** ou **proposições logicamente falsas**.

Exemplo

1. $p \wedge \sim p$ é uma proposição contra válida pois

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
V	F	F
F	V	F
F	V	F

Definição: **Contingência** ou **Indeterminada** é toda proposição em que a última coluna da tabela verdade é composta pelos valores lógicos verdadeiro (V) e falso (F), cada uma, pelo menos, uma vez. São também conhecidas por proposições **contingentes** ou **proposições indeterminadas**.

Exemplo

1. $p \wedge \sim q$ é uma proposição indeterminada pois

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

4.3 Relações de implicação e de equivalência

Passemos agora a compreender duas relações dentro da lógica matemática.

4.3.1 Relação de Implicação

Definição: Sejam duas proposições compostas P e Q, podemos afirmar que "P implica Q", se e somente se, $P \rightarrow Q$ for uma proposição tautológica.

De maneira mais simples, podemos dizer que p implica q se não ocorre F na coluna de $P \rightarrow Q$, ou seja, não acontece P e Q com valores simultâneos, respectivamente, V e F.
Exemplo:

Prove a implicação $p \Rightarrow (q \rightarrow q \wedge p)$

p	q	$q \wedge p$	$q \rightarrow q \wedge p$	$p \rightarrow (q \rightarrow q \wedge p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

A notação para indicar que P implica Q é $P \Rightarrow Q$.
CUIDADO!

Os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ são diferentes, pois o primeiro se relaciona a uma operação lógica, enquanto que o segundo refere-se a uma relação entre proposições.

4.3.1.1 Propriedades da implicação

a. Reflexiva: Qualquer que seja P, $P \Rightarrow P$.

b. Transitiva: quaisquer que sejam P, Q, R se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$, então $P \Rightarrow R$.

4.3.2 Relação de Equivalência

Definição: Sejam duas proposições compostas P e Q, podemos afirmar que "P é equivalente a Q", se e somente se, $P \leftrightarrow Q$ for uma proposição tautológica.

Simplificadamente, podemos afirmar que P é equivalente a Q se não ocorre valor lógico falso (F) na coluna de $P \leftrightarrow Q$.

Exemplo:

Prove a equivalência $p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q)$	$(p \wedge q)$	$p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

A notação para indicar que P é equivalente a Q é $P \Leftrightarrow Q$.

CUIDADO!

Os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são diferentes, pois o primeiro se relaciona a uma operação lógica, enquanto que o segundo refere-se a uma relação bicondicional que é tautológica.

4.3.2.1 Propriedades da equivalência

a. **Reflexiva:** qualquer que seja P, $P \Leftrightarrow P$.

b. **Simétrica:** quaisquer que sejam P e Q, se $P \Leftrightarrow Q$, então vale $Q \Leftrightarrow P$.

c. **Transitiva:** quaisquer que sejam $P, Q,$ e R se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$, então $P \Leftrightarrow R$.

4.4 Teoremas e proposições: tipos de demonstração.

O Processo Lógico de raciocínio pode ser classificado em indutivo, ou dedutivo.

O método indutivo utiliza parte de hipóteses particulares para chegar a teses mais gerais. Entretanto, o método não é recomendável para a Matemática, pois não podemos provar uma afirmação apenas para um caso particular. Por exemplo, dizer que Ana e Maria foram advertidas sobre o mal comportamento em sala de aula não é suficiente para afirmar que todos os alunos da sala foram advertidos sobre o mal comportamento.

O método dedutivo utiliza parte de hipóteses em que, pelo menos, uma é geral para se chegar a teses particulares. Por exemplo, dizer que todos os funcionários públicos tiveram reajuste salarial, é suficiente para afirmar que a Caixa Econômica Federal reajustou o salário de seus funcionários.

Em resumo, vemos que qualquer afirmação deve ser provada, ou seja, as proposições devem ser demonstradas. Vamos apresentar os tipos de demonstrações mais utilizadas:

- Demonstração pelo método **direto**: parte de uma ou mais afirmações verdadeiras que denominamos hipóteses, e utilizando uma sequência de afirmações verdadeiras (definições, teoremas já vistos), chega-se à demonstração da hipótese que denominamos **tese**.

- Demonstração pelo método **indireto** ou **por absurdo**: esta demonstração é baseada entre uma condicional e sua contrarrecíproca. Com parte da negação da tese e utilizando sequência de afirmações verdadeiras, chega-se à negação da hipótese. Como a hipótese é a nossa verdade, dizemos que é um **absurdo**.

- Demonstração por um **contraexemplo**: podemos usar um contraexemplo para mostrar que uma proposição é falsa, ou seja, mostrar um caso que está de acordo com a proposição mas não é suficiente para validar a mesma.

REFERÊNCIAS

ALENCAR F. E. *Teoria Elementar dos Conjuntos.* Livraria Nobel, São Paulo, 1976.

CASTRUCCI, B. *Introdução à Lógica Matemática*. Livraria Nobel, São Paulo, Brasil, 1979.

FIGUEIREDO, V. L. X.; MELLO, M. P.; SANTOS, S. A. *Cálculo com aplicações:* atividades computacionais e projetos. Campinas, São Paulo: UNICAMP/IMECC, 2005.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar.* volume 1, 7ª Edição, Editora Atual, São Paulo, 2007.

IEZZI, G., DOLCE, O. E MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar.* volume 2, 7ª Edição, Editora Atual, São Paulo, 2007.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. (2 vols.). 3ª Edição, Editora Harbra, São Paulo, 1994.