Universidade Federal de Uberlândia
Universidade Aberta do Brasil
Centro de Educação a Distância

Universidade Federal de Uberlândia
Licenciatura Plena em Matemática - PARFOR

Introdução à Análise

Mario Henrique de Castro

2016

Mario Henrique de Castro

Introdução à Análise

Castro, Mario Henrique

Introdução à Análise/ Mario Henrique de Castro. Uberlândia, MG : UFU, 2016
135p.

Licenciatura em Matemática

1. Introdução à Análise

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Dilma Vana Rousseff

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Aloizio Mercadante

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA/CAPES
Jean Marc Georges Mutzig

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - UFU
REITOR
Elmiro Santos Resende

VICE-REITOR
Eduardo Nunes Guimarães

CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
DIRETORA E REPRESENTANTE UAB/UFU
Maria Teresa Menezes Freitas

SUPLENTE UAB/UFU
José Benedito de Almeida Júnior

FACULDADE DE MATEMÁTICA -FAMAT - UFU
DIRETOR
Marcio Colombo Fenille

COORDENADOR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - PARFOR
Rogério de Melo Costa Pinto

COORDENAÇÃO DE TUTORIA
Janser Moura Pereira

EQUIPE DO CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DA UFU - CEaD/UFU

ASSESSORA DA DIRETORIA
Sarah Mendonça de Araújo

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR
Alberto Dumont Alves Oliveira
Dirceu Nogueira de Sales Duarte Júnior
Gustavo Bruno do Vale
João Victor da Silva Alves
Otaviano Ferreira Guimarães

SETOR DE FORMAÇÃO CONTINUADA
Marisa Pinheiro Mourão

REVISORAS
Carina Diniz Nascimento
Anna Patrícia Zakem China
Erika Michela Carlos

EQUIPE DE ESTAGIÁRIOS DO CEAD E DO CURSO DE MATEMÁTICA
Núbia Figueira Prado
Ueslei Ferreira Costa

Apresentação

Este material foi desenvolvido para ser utilizado no curso de Licenciatura em Matemática à distância - PARFOR, da Universidade Federal de Uberlândia.

O texto é uma tradução da referência [1], adaptada para o ensino à distância. Portanto, expressamos aqui nossa gratidão ao Prof. Lee Larson, da Universidade de Louisville, nos Estados Unidos, por liberar a cópia e adaptação de seu texto.

Sobre o autor

Olá,

meu nome é Mario Henrique de Castro e sou o autor deste material didático. Antes de começarmos esta disciplina, gostaria de me apresentar: terminei a graduação em Matemática na Universidade Estadual de Maringá, no Paraná, em 2004. No ano seguinte, ingressei no Mestrado em Matemática do Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da USP, na cidade paulista de São Carlos. Em 2007, no mesmo instituto, iniciei o curso de Doutorado em Matemática, que concluí em 2011. Sou professor adjunto nível 3 da Universidade Federal de Uberlândia e tenho experiência na área de Matemática, com ênfase em Análise Matemática, Análise Funcional, Análise Esférica e Teoria da Aproximação. Atualmente, estudo problemas envolvendo operadores integrais positivos e funções positivas definidas.

Prazer em conhecê-lo(a),
Mario Henrique de Castro

Sobre o curso

Prezada(o) aluna(o),

A Matemática avançou muito nos últimos quatro séculos, tanto teoricamente quanto em aplicações. Por isso, hoje em dia a Matemática é dividida em áreas e sub-áreas que se ramificam e se intersectam, de acordo com a necessidade e possibilidade. A parte da matemática que trata das aplicações é chamada de Matemática Aplicada, enquanto a parte que lida com o desenvolvimento teórico é chamada de Matemática Pura. A Matemática Pura pode ser dividida em três grandes áreas: Álgebra, Análise e Geometria\Topologia. Neste curso apresentamos os conceitos básicos da Análise, que é o ramo da matemática que lida com as desigualdades e limites (aproximações). O objetivo principal do curso é fazer com que você se familiarize com o rigor lógico-dedutivo necessário, por exemplo, para definir uma base sólida para o cálculo de uma variável.

Nos cursos de cálculo você aprendeu a utilizar várias ferramentas matemáticas, provavelmente sem receber garantias de que o que você aprendeu é verdade. Mas para usar ou ensinar a matemática de forma eficaz, você não pode simplesmente saber que algo é verdadeiro, você deve saber também porque algo é verdadeiro. Este curso mostra porque algumas das técnicas que você aprendeu nos cursos de cálculo funcionam efetivamente e dá a devida base teórica para que você possa compreender outras. Já ensinamos como utilizar as ferramentas do cálculo e agora queremos dar-lhe uma boa compreensão de conceitos dos números reais, funções reais de uma variável real, sequências e séries numéricas, limite e continuidade.

Se você ainda não entendeu nosso objetivo aqui, podemos usar uma analogia: você poderá ser um piloto de automóveis se aprender a dirigir, mas só será um *bom* piloto se conhecer minuciosamente a mecânica e o funcionamento da máquina. Analogamente, um professor do ensino fundamental e médio que não entende os fundamentos das teorias matemáticas estará condenado a repetir palavras como um papagaio e pode não ser capaz de responder corretamente a todas as perguntas dos alunos, o que pode desmotivá-los ou desiludi-los.

Começamos este curso com uma revisão da Teoria dos Conjuntos. Passamos por uma discussão sobre o conjunto dos números reais, onde o mais importante é a sua propriedade de completude, que é a base para tudo o que vem em seguida. Depois, tratamos da forma mais simples de limite − o limite de uma sequência numérica,− que nos dá base teórica para interpretar o significado de somas infinitas, também chamadas de séries numéricas. A seguir, passamos a estudar as propriedades dos subconjuntos da "reta real" e as funções reais de uma variável real, em particular no que diz respeito ao limite e continuidade dessas funções.

Mas antes de começarmos efetivamente o curso, vejamos uma diferença importante entre a Análise e a Álgebra. Obviamente, você já está acostumado com algumas técnicas algébricas utilizadas para determinar raízes de equações. Na Análise, geralmente usamos desigualdades.

Para ilustrar esta ideia, considere o seguinte enunciado: “*Seja x ser um número real. Se $0 \leq x < \varepsilon$ é verdade para todos os números reais $\varepsilon > 0$, então $x = 0$.*” Esta declaração dá a ideia geral do que fazemos em Análise. Se queremos mostrar que $x = 0$, nós mostramos que $0 \leq x < \varepsilon$, para todo ε real positivo.

Este curso está dividido em quatro módulos:

Módulo I. Conjuntos e Funções;
Módulo II. Os números reais;
Módulo III. Sequências e Séries numéricas;
Módulo IV. Limites e continuidade de funções de uma variável.

O tempo de cada módulo é variável e está dividido da seguinte forma:

- **Módulo I.** De 04/03 até 04/04;
- **Módulo II.** De 01/04 até 25/04;
- **Módulo III.** De 29/04 até 23/05;
- **Módulo IV.** De 20/05 até 13/06;

O texto básico da disciplina é contemplado com exercícios estrategicamente posicionados, de tal forma que o conteúdo previamente estudado fique bem assimilado em seus conceitos mais básicos.

Exercícios resolvidos, desafios e atividades no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) serão outros elementos de importância no entendimento dos conceitos a serem aprendidos.

Quanto à metodologia, o curso seguirá com a seguinte base: estudo da teoria no livro texto, com o treino através dos exercícios nele contidos, e atividades que serão passadas dentro do período de vigência do cada módulo. Estas atividades farão parte do processo de avaliação, assim como as avaliações presenciais.

Quanto ao sistema de avaliação, serão distribuídos 100 pontos: 60 pontos por meio das avaliações presenciais escritas e 40 pontos nas atividades a serem realizadas através do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

Quanto ao cronograma, descrito a seguir, as 90 horas do curso são distribuídos nos módulos de acordo com o calendário dos cursos do CEaD-UFU, considerando 6 horas de atividades de estudo da teoria por semana. Recomendamos que para cada hora de estudo em teoria, você reserve pelo menos duas horas de estudo resolvendo exercícios. Esse esquema tem por finalidade assegurar um treino mínimo nos módulos.

Desejo a você, caro(a) aluno(a), um ótimo curso, e torço para atingir com sucesso os objetivos da disciplina.

Grande abraço,
Mario Henrique de Castro

Informações

No decorrer da leitura, você vai se deparar com alguns ícones que foram desenvolvidos para guiar seu estudo.

Cronograma

Módulo 1	Atividades	Avaliações
1^a aula - Conjuntos (04/03/2016 a 14/03/2016)	• Vídeo-aula 0: apresentação do professor, da disciplina, do programa e do sistema de avaliação; • Leitura do material didático; • Leituras complementares; • Video-aula 1: Conjuntos; • Fórum de dúvidas;	• Participação no fórum de dúvidas; • Atividade avaliativa 1;
2^a aula - Funções (11/03/2016 a 21/03/2016)	• Leitura do material didático; • Video-aula 2: Funções; • Fórum de dúvidas; • Web-conferência 1.	• Participação no fórum de dúvidas; • Atividade avaliativa 2; • Participação na Web-conferência 1.
3^a aula - Cardinalidade (18/03/2016 a 04/04/2016)	• Leitura do material didático; • Video-aula 3: Cardinalidade; • Fórum de dúvidas; • Web-conferência 2.	• Participação no fórum de dúvidas; • Atividade avaliativa 3; • Participação na Web-conferência 2.

Módulo 2	Atividades	Avaliações
4^a aula - Os axiomas de corpo e de ordem (01/04/2016 a 11/04/2016)	• Leitura do material didático; • Video-aula 4: Os axiomas de corpo e de ordem; • Fórum de dúvidas;	• Participação no fórum de dúvidas;
5^a aula - O axioma do completamento (08/04/2016 a 18/04/2016)	• Leitura do material didático; • Video-aula 5: O axioma do completamento; • Fórum de dúvidas; • Web-conferência 3.	• Participação no fórum de dúvidas; • Participação na Web-conferência 3.
6^a aula - Consequências dos axiomas (15/04/2016 a 25/04/2016)	• Leitura do material didático; • Video-aula 6: Consequências dos axiomas; • Fórum de dúvidas; • Web-conferência 4	• Participação no fórum de dúvidas; • Participação na Web-conferência 4.

Módulo 3	Atividades	Avaliações
7^a aula - Sequências numéricas (29/04/2016 - 09/05/2016)	• Leitura do material didático; • Video-aula 7: Sequências numéricas; • Fórum de dúvidas;	• Participação no fórum de dúvidas; • Atividade avaliativa 4.
8^a aula - Subsequências (06/05/2016 a 16/05/2016)	• Leitura do material didático; • Video-aula 8: Subsequências e o Teorema de Bolzano Weierstrass; • Fórum de dúvidas; • Web-conferência 5.	• Participação no fórum de dúvidas; • Participação na Web-conferência 5; • Atividade avaliativa 5.
9^a aula - Séries numéricas (13/05/2016 a 23/05/2016)	• Leitura do material didático; • Video-aula 9: Séries numéricas; • Fórum de dúvidas;	• Participação no fórum de dúvidas; • Atividade avaliativa 6

Módulo 4	Atividades	Avaliações
10^a aula - Topologia da reta real (20/05/2016 - 30/05/2016)	• Leitura do material didático; • Video-aula 10: Topologia da reta real; • Fórum de dúvidas; • Web-conferência 6.	• Participação no fórum de dúvidas; • Participação na Web-conferência 6; • Atividade avaliativa 7.
11^a aula - Limites de funções (27/05/2016 a 06/06/2016)	• Leitura do material didático; • Video-aula 11: Limites de funções; • Fórum de dúvidas;	• Participação no fórum de dúvidas; • Atividade avaliativa 8.
12^a aula - Continuidade (03/06/2016 a 13/06/2016)	• Leitura do material didático; • Video-aula 12: Continuidade; • Fórum de dúvidas; • Web-conferência 7.	• Participação no fórum de dúvidas; • Participação na Web-conferência 7; • Atividade avaliativa 9.

Anotações

Sumário

Módulo 1
Conjuntos e Funções

Neste módulo, você vai relembrar propriedades básicas de dois conceitos fundamentais da Matemática:

- Conjuntos; e
- Funções.

Começamos nosso curso introduzindo a linguagem de Conjuntos que deverá ser utilizada de forma sistemática nas próximas semanas. Como toda a matemática contemporânea é apresentada e discutida com esta linguagem, esperamos que você já tenha alguma familiaridade com o tópico. Porém, não exigiremos conhecimento prévio algum deste assunto.

Muitos estudiosos acreditam que toda a Matemática pode ser vista como um encontro perfeito entre a Lógica e a Teoria do Conjuntos. Devido a este fato, qualquer apresentação cuidadosa de ideias matemáticas fundamentais deve ser concebida na linguagem de lógica e de conjuntos. Neste capítulo, definiremos o conteúdo necessário desta linguagem para permitir a apresentação das ideias básicas da Análise Matemática.

A seguir, usaremos a linguagem de conjuntos para introduzir o conceito de relação, que leva ao estudo das funções. Com certeza você já ouviu falar de funções, mas considerando seu papel de extrema importância na Análise, retomaremos seu estudo aqui. A primeira aplicação que faremos com funções será generalizar a noção de quantidade de elementos de conjuntos, que chamaremos de cardinalidade. Finalizaremos este módulo mostrando como comparar quantidades infinitas de elementos em conjuntos diferentes.

1^a aula
(04/03/2016 - 14/03/2016)
Conjuntos

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Adquirir a habilidade de interpretar a linguagem da Teoria de Conjuntos;
- Compreender o conceito de conjunto e as operações com conjuntos;
- Compreender os conceitos de produto cartesiano e de relações entre conjuntos.

ATIVIDADE - LEITURA COMPLEMENTAR

Antes de começar a ler o texto deste livro, pedimos que leia atentamente aos seguintes textos disponibilizados no AVA - Ambiente Virtual de Aprendizagem, como leitura complementar:

- Motivação histórica para o desenvolvimento e estudo da Análise Matemática;
- Preliminares de Lógica.

1.1 Teoria dos Conjuntos

A Teoria dos Conjuntos é por si só um assunto amplo e complicado. Não há tempo hábil neste curso para abordar partes que não estejam entre as mais simples da teoria. Logo, estudaremos apenas alguns tópicos do que é frequentemente denominada *Teoria Ingênua de Conjuntos*[1]. Começamos com algumas definições:

Definição 1.1.1. Um *conjunto* é uma coleção de objetos chamados de *elementos*. Em geral,

- conjuntos são denotados por letras maiúsculas do nosso alfabeto: $A, B, C, \dots$;

[1] Na matemática abstrata, a teoria ingênua dos conjuntos foi o primeiro desenvolvimento da teoria dos conjuntos, que foi mais tarde remodelada cuidadosamente como a teoria axiomática dos conjuntos.

- elementos de um conjunto são representados por letras minúsculas: $a, b, c, \ldots$;

Se a é um elemento do conjunto A, dizemos que *a pertence a A* e escrevemos $a \in A$; se a não é um elemento do conjunto A, então dizemos que *a não pertence a A* e denotamos $a \notin A$. Se todos os elementos de um conjunto A pertencem a um conjunto B, dizemos que A é um subconjunto de B, ou que A está contido em B, e denotamos $A \subset B$ ou $B \supset A$.

PARE E PENSE: Um conjunto pode conter qualquer tipo ou quantidade de elementos. Até mesmo conjuntos podem ser elementos de um outro diferente conjunto. Porém, estamos interessados aqui em conjuntos cujos elementos são números reais ou funções. Em particular, note que se A é um conjunto, então sempre se tem $A \subset A$.

Definição 1.1.2. Dois conjuntos A e B são iguais se possuem os mesmos elementos. Neste caso, escrevemos $A = B$.

PARE E PENSE: Não é difícil ver quer

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A. \tag{1.1}$$

Estabelecer que estas duas contenções são verdadeiras é a forma mais comum de se provar que dois conjuntos são iguais.

Definição 1.1.3. Se $A \subset B$ e $A \neq B$, ou seja, todos os elementos de A estão em B mas existe algum elemento de B que não pertence a A, dizemos que A é um subconjunto próprio de B. Quando isto ocorre, podemos denotar $A \subsetneq B$.

Existem várias formas de se descrever um conjunto. Por exemplo, podemos descrever conjuntos simples usando palavras da seguinte forma: "*P é o conjunto de todos os presidentes do Brasil depois de 1990*". Entretanto, não é conveniente descrever conjuntos complicados desta maneira. Outra forma é listar os elementos do conjunto entre chaves, separando-os por vírgulas, como segue:

$$P = \{Collor, Itamar, FHC, Lula, Dilma\}.$$

Porém, se o conjunto tiver muitos elementos, esta representação pode não ser muito prática ou pode até mesmo ser impossível. Por isso, a forma mais comum de se representar um conjunto é identificar seus elementos por alguma propriedade que somente eles possuem:

$$P = \{p : p \text{ é um dos presidentes do Brasil após 1990}\}.$$

Outros exemplos de conjuntos são os seguintes:

- $A = \{n : n$ é um número primo$\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$;
- $S = \{n^2 : n$ é um inteiro$\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$.

Assumiremos a existência de vários conjuntos. O *conjunto vazio*, denotado por $\emptyset$, que é o conjunto que não contém elemento algum;

- o conjunto dos *números naturais* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- o conjunto dos *números inteiros* $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
- o conjunto dos *números inteiros não negativos* $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$;

É fácil ver que

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}.$$

Proposição 1.1.4. $\emptyset \subset A$, qualquer que seja o conjunto não vazio A.

Demonstração. De fato, suponha por absurdo que $\emptyset \not\subset A$, para algum conjunto A. Então, deve existir algum elemento de $\emptyset$ que não pertence a A, o que é um absurdo visto que $\emptyset$ não possui elemento algum. □

Definição 1.1.5. Dado qualquer conjunto A, o conjunto das partes de A é a coleção de todos os subconjuntos de A

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}.$$

Exemplo 1.1.6. O conjunto das partes de $\{a, b\}$ é $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

PARE E PENSE: Qualquer que seja o conjunto A, é sempre verdade que

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A) \quad \text{e} \quad A \in \mathcal{P}(A).$$

Além disso, se $a \in A$, então não é verdade que $a \in \mathcal{P}(A)$, mas sim que $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Você consegue entender o por quê disso?

Exemplo 1.1.7. Um exemplo divertido é $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Não confunda $\emptyset$ com $\{\emptyset\}$, pois $\emptyset$ não possui elementos, enquanto $\{\emptyset\}$ possui um elemento. Além disso, temos também

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$$

e após continuar este procedimento por n vezes, para algum $n \in \mathbb{N}$, obtemos um conjunto do tipo $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\cdots\mathcal{P}(\emptyset)\cdots))$ com muitos elementos. De fato, se A é um conjunto com $k \in \mathbb{N}$ elementos, então $\mathcal{P}(A)$ possui 2^k elementos (isto pode ser provado por indução). Logo, por exemplo, o conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))))$ obtido após cinco iterações terá $2^{2^{2^2}} = 65.536$ elementos.

Desafio!

Exercício 1.1.8. Se A é um conjunto com 3 elementos, quantos elementos tem $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?

1.2 Álgebra dos conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos. Existem quatro operações binárias comuns usadas sobre conjuntos.[2]

Definição 1.2.1. A *união* entre A e B é o conjunto que contém todos os elementos de A e de B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

A *interseção* é o conjunto dos elementos que pertencem a A e a B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

A diferença entre A e B é o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B:

$$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

A diferença simétrica entre A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a um dos conjuntos, mas não pertencem aos dois conjuntos:

$$A \Delta B = \{x : x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\} = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

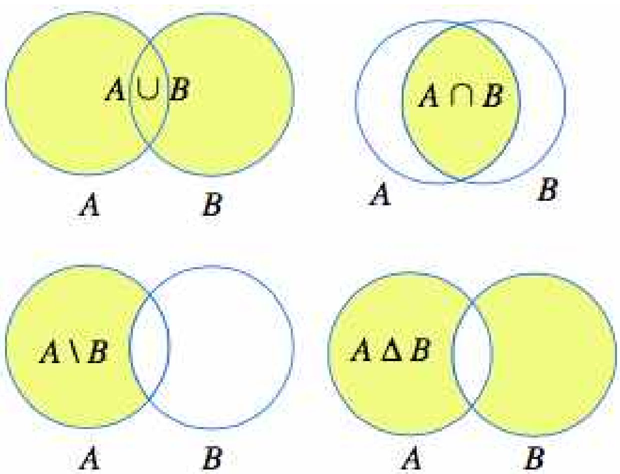

FIGURA 1.1: Diagramas de Venn das quatro operações com conjuntos. Os resultados das operações estão em amarelo.

[2]A seguir, usaremos algumas notações de Lógica. O símbolo $\vee$ significa a *disjunção não exclusiva* “ou". O símbolo $\wedge$ representa a *conjunção* “e".

Exercício resolvido 1.2.2. Mostre que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Solução 1.2.3. De acordo com (1.1), para provar a relação do enunciado você deve mostrar as seguintes inclusões:

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.2}$$

e

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C. \tag{1.3}$$

Você pode começar mostrando (1.2), i.e.[3], que se $x \in (A \cup B) \cap C$, então $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. De fato, se $x \in (A \cup B) \cap C$, então $x \in (A \cup B)$ e $x \in C$. Desta forma, segue uma das possibilidades:

(i) $x \in A$ e $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C$; ou

(ii) $x \in B$ e $x \in C \Rightarrow x \in B \cap C$.

Logo, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, o que garante a veracidade de (1.2).

Para finalizar a solução, você precisa provar (1.3), ou seja, que se $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, então $x \in (A \cup B) \cap C$. De fato,

$$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \Rightarrow \underbrace{x \in (A \cap C)}_{(\star)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x \in (B \cap C)}_{(\star\star)}.$$

No caso $(\star)$, temos que $x \in A$ e $x \in C$. Como $x \in A$, então $x \in A \cup B$ e, portanto, $x \in A \cup B$ e $x \in C$. Segue que $x \in (A \cup B) \cap C$. No caso $(\star\star)$, temos que $x \in B$ e $x \in C$. Como $x \in B$, então $x \in A \cup B$ e, portanto, $x \in A \cup B$ e $x \in C$. Novamente, obtemos $x \in (A \cup B) \cap C$. Isto prova (1.3) e conclui a solução.

Desafio!

Exercício 1.2.4. Prove que $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
Sugestão: Para provar a dupla inclusão, você pode mostrar primeiro que $A \cap B \subset A$ e depois $A \subset A \cup B$.

Exercício 1.2.5. Prove que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Sugestão: Siga as ideias do Exercício resolvido 1.2.2.

Exercício 1.2.6. Prove que se A e B são conjuntos, então

(i) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;

(ii) $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Sugestão: Use o fato de que $Y \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow Y \subset X$.

[3] i.e. é uma abreviação para a expressão em latim *id est*, que significa "isto é".

PARE E PENSE: Uma outra operação comum entre conjuntos é a *complementação*. O *complemento* de um conjunto A é frequentemente (e erroneamente) descrito como o conjunto de todos os elementos que não estão em A. Mas sem muito esforço podemos nos convencer de que esta não é uma definição precisa, pois a coleção dos elementos que não estão em A não é uma coleção que pode ser precisamente compreendida. Para que o complemento de um conjunto tenha sentido lógico, devemos estabelecer um conjunto universo U que contenha todos os elementos em questão. Assim, podemos definir:

Definição 1.2.7. O complemento de um conjunto $A \subset U$ é o conjunto

$$A^c = U \backslash A = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Em geral, o conjunto universo U é evidente pelo contexto.

Exemplo 1.2.8. Sejam $A = \{1, 3\}$ e $B = \{1, 3, 4, 8\}$. Então,

$$B \backslash A = \{4, 8\}.$$

Com estas quatro operações podemos desenvolver uma extensa álgebra para a manipulação de conjuntos que, juntamente com a lógica formal, é parte da *Álgebra Booliana* [4]. Os próximos resultados nos dão algumas importantes propriedades desta álgebra.

Teorema 1.2.9. Sejam A,B e C conjuntos.

a) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;

b) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

Demonstração. (a) Vamos demonstrar esta propriedade com uma sequência de equivalências.[5]

$$\begin{aligned} x \in A \backslash (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \\ &\iff x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\iff x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C). \end{aligned}$$

[4]Em Álgebra abstrata, Álgebras boolianas (ou Álgebras de Boole) são estruturas algébricas que "captam as propriedades essenciais" dos operadores lógicos e de conjuntos, ou ainda oferecem uma estrutura para se lidar com "afirmações", são assim denominadas em homenagem ao matemático George Boole.

[5]O símbolo lógico $\iff$ significa "se, e somente se". Se P e Q são quaisquer afirmações, então "$P \iff Q$" tem o mesmo significado que "P implica Q" e "Q implica P".

(b) Como no item (a), temos

$$\begin{aligned} x \in A \backslash (B \cap C) &\iff x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \\ &\iff x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\iff x \in (A \backslash B) \cup (A \backslash C). \end{aligned}$$

□

O teorema anterior é uma versão de um grupo de equações de conjuntos frequentemente chamadas de "*Leis de DeMorgan*". Uma forma mais usual de se estabelecer as Leis de DeMorgan é dada a seguir, no Corolário 1.2.10, que é uma consequência imediata do Teorema 1.2.9.

Corolário 1.2.10. *(Leis de DeMorgan)* Sejam A e B conjuntos.

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Desafio!

Exercício 1.2.11. Prove que $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Exercício 1.2.12. Prove que $B \backslash A = B \cap A^c$.
Sugestão: Use (1.1).

1.3 Conjuntos indexados

Frequentemente há a necessidade de lidarmos com grandes coleções de conjuntos. Por exemplo, poderíamos ter uma sequência de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ onde cada conjunto A_n está associado a um número natural n. Em geral, definimos um conjunto Γ de índices e assumimos que para cada $\lambda \in \Gamma$, existe um conjunto A_λ. O conjunto $\{A_\lambda : \lambda \in \Gamma\}$ é então uma *coleção de conjuntos indexada por* Γ. Neste caso, Γ é chamado de *conjunto indexador* da coleção.

Exemplo 1.3.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = \{k \in \mathbb{Z} : k^2 \leq n\}$. Então,

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = A_3 = \{-1, 0, 1\} \\ &A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ &\vdots \\ &A_{50} = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}. \end{aligned}$$

Duas das operações binárias básicas de conjuntos podem ser estendidas para coleções indexadas. Em particular, usando a notação do parágrafo anterior, podemos escrever

$$\bigcup_{\lambda \in \Gamma} A_\lambda = \{x : x \in A_\lambda, \text{ para algum } \lambda \in \Gamma\}$$

e

$$\bigcap_{\lambda \in \Gamma} A_\lambda = \{x : x \in A_\lambda, \text{ para todo } \lambda \in \Gamma\}.$$

As leis de DeMorgan também podem ser generalizadas neste sentido.

Teorema 1.3.2. Seja A um conjunto e $\{B_\lambda : \lambda \in \Gamma\}$ uma coleção indexada de conjuntos. Então,

$$A \backslash \bigcup_{\lambda \in \Gamma} B_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Gamma} (A \backslash B_\lambda)$$

e

$$A \backslash \bigcap_{\lambda \in \Gamma} B_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} (A \backslash B_\lambda).$$

1.4 Produto cartesiano

A ordem na qual listamos os elementos de um conjunto não é importante. Por exemplo,

$$\{a, l, v, o\} = \{o, v, a, l\}.$$

Se a ordem na qual n itens são listados importa, então chamamos tal lista de *n-upla*. Mas não se confunda, uma n-upla não é um conjunto. Denotamos uma n-upla encerrando a lista ordenada entre parênteses. Por exemplo, se x_1, x_2, x_3, x_4 são quatro itens, então a 4-upla (x_1, x_2, x_3, x_4) é diferente da 4-upla (x_2, x_1, x_3, x_4).

SAIBA MAIS: Devido ao seu uso frequente

- 2-uplas são chamadas de *pares ordenados* e
- 3-uplas são chamadas de *triplas ordenadas*.

Definição 1.4.1. O *produto cartesiano* de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados formados por elementos de A e de B da seguinte forma:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo 1.4.2. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$, então

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

e

$$B \times A = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}.$$

Um forma muito útil para melhor visualizar o produto cartesiano de dois conjuntos é usar uma tabela. O produto cartesiano $A \times B$ do exemplo anterior pode ser listado mais facilmente a partir da tabela

	1	2
a	(a,1)	(a,2)
b	(b,1)	(b,2)
c	(c,1)	(c,2)

Desafio!

Exercício 1.4.3. Determine o produto cartesiano entre os conjuntos $A = \{0, 2, 7\}$ e $B = \{1, 5\}$.

É claro que o plano cartesiano que você conheceu no curso de Geometria Analítica é nada mais que uma aplicação desta ideia.

A definição de produto cartesiano pode ser estendida para mais do que dois conjuntos.

Definição 1.4.4. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos, então

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

é um conjunto de n-uplas. Isto às vezes é abreviado da seguinte forma:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

Exemplo 1.4.5. O produto cartesiano de $A = \{a, b, c, \}$, $B = \{c, d\}$ e $C = \{e\}$ é o conjunto

$$A \times B \times C = \{(a, c, e), (a, d, e), (b, c, e), (b, d, e), (c, c, e), (c, d, e)\}.$$

Exemplo 1.4.6. O espaço euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ é o produto cartesiano de $\mathbb{R}$ n vezes. E.g. [6], $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

[6] e.g. é uma abreviação da expressão em latim *exampli gratia*, que significa "por exemplo".

1.5 Relações

Definição 1.5.1. Se A e B são dois conjuntos não vazios, todo conjunto $R \subset A \times B$ é chamado de *relação de A em B*. Se $(a, b) \in R$, podemos escrever aRb. Neste caso, também definimos o *domínio* de R por

$$dom(R) = \{a \in A : (a, b) \in R\}$$

e a *imagem* de R por

$$im(R) = \{b \in B : (a, b) \in R\}.$$

Exemplo 1.5.2. Os conjuntos $R_1 = \{(a, c, e), (a, d, e)\}$ e $R_2 = \{(b, c, e), (b, d, e), (c, c, e)\}$, bem como qualquer outro conjunto $R \in \mathcal{P}(A \times B \times C)$, são relações de

$$A \times B \times C = \{(a, c, e), (a, d, e), (b, c, e), (b, d, e), (c, c, e), (c, d, e)\}.$$

No caso especial em que $R \subset A \times A$, para algum conjunto A, existe uma terminologia adicional. Dizemos que

- R é *simétrica* quando $aRb \iff bRa$;
- R é *reflexiva* quando aRa sempre que $a \in A$;
- R é *transitiva* quando $aRb \wedge bRc \implies aRc$;
- R é *antissimétrica* quando $aRb \wedge bRa \implies a = b$;
- R é uma *relação de equivalência* quando R é simétrica, reflexiva e transitiva;

Exemplo 1.5.3. A relação $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por "$aRb \iff a < b$" é transitiva, mas não é simétrica nem reflexiva.

Exemplo 1.5.4. A relação $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por "$aRb \iff a^2 = b^2$" é uma relação de equivalência. É evidente que "$aRb \iff a = b \vee a = -b$".

Exemplo 1.5.5. A relação $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por "$aRb \iff a \leq b$" é reflexiva, transitiva e antissimétrica, mas não é simétrica.

AVA

ATIVIDADE AVALIATIVA 1:

Exercício 1.5.6. Note que devido à importância da ordem nas n-uplas, em geral, $A \times B \neq B \times A$. Dê um exemplo mostrando esta desigualdade e prove que

$$A \times B = B \times A \iff A = B.$$

Sugestão: use a equivalência (1.1).

2^a aula
(11/03/2016 - 21/03/2016)
Funções

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender o conceito de função;
- Compreender o conceito de composição de funções;
- Compreender os conceitos de injetividade e sobrejetividade de funções.

1.6 Funções

SAIBA MAIS: A palavra função foi introduzida pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em 1673, para designar qualquer , das variáveis geométricas associadas com uma determinada curva.

Definição 1.6.1. Dados dois conjuntos não vazios A e B, dizemos que uma relação $R \subset A \times B$ é uma *função* se

$$aRb_1 \wedge aRb_2 \Longrightarrow b_1 = b_2.$$

Neste caso, é comum denotar $R = f$. Se $f \subset A \times B$ é uma função e $dom(f) = A$, então denotamos $f : A \to B$ e escrevemos $b = f(a)$ ao invés de aRb. (Veja a Figura 1.2)

Exemplo 1.6.2. Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ por $f(n) = n^2$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ por $g(n) = n^2$. Neste caso, $im(f) = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ e $im(g) = im(f) \cup \{0\}$. Observe que apesar de f e g serem definidas pela mesma fórmula, elas na verdade são funções diferentes, com domínios e imagens distintas.

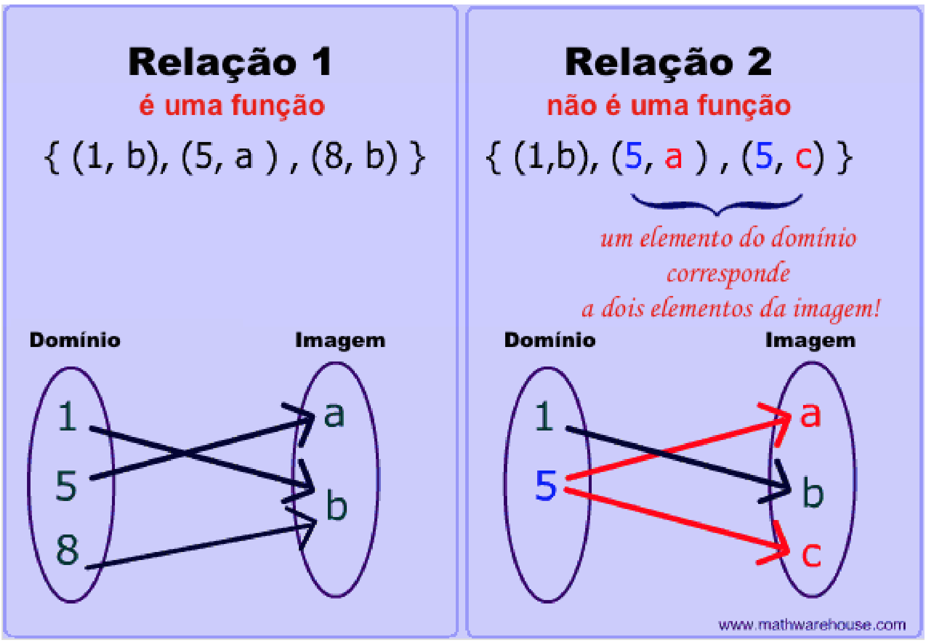

FIGURA 1.2: Uma função é uma relação onde cada elemento do domínio corresponde a um único elemento da imagem.
Fonte: www.mathwarehouse.com

PARE E PENSE: Se $f : A \to B$ é um função, a interpretação intuitiva usual é ver f como uma regra que associa cada elemento de A com um único elemento de B. Isto não significa que cada elemento de B seja associado a um único elemento de A. Também não implica que cada elemento de B esteja necessariamente associado a algum elemento de A, o que nos mostra que B pode ser diferente de $im(f)$. Neste caso dizemos que B é um contradomínio de f.

Definição 1.6.3. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções. A *função composta* de g com f é a função $g \circ f : A \to C$ definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

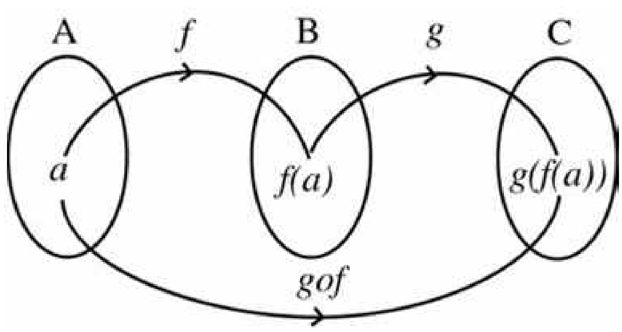

FIGURA 1.3: Diagrama de função composta $g \circ f : A \to C$

Exemplo 1.6.4. Para as funções do exemplo anterior, $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n^2) = (n^2)^2 = n^4$ está bem definida (faz sentido), enquanto que $f \circ g$ não está definida em $n = 0$.

Exemplo 1.6.5. Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas por $f(n) = n + 1$ e $g(n) = n^2 - 2$. Então, $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ está bem definida e

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = (n + 1)^2 - 2 = n^2 + 2n + 1 - 2 = n^2 + 2n - 1.$$

PARE E PENSE: Para que a função composta $g \circ f$ seja bem definida é necessário que

$$im(f) \subset dom(g).$$

Existem vários tipos importantes de funções. A seguir definimos alguns.

Definição 1.6.6. Uma função $f : A \to B$ é uma *função constante*, se $im(f)$ possui um único elemento; i.e., existe $b \in B$ tal que $f(a) = b$, qualquer que seja $a \in A$. Dizemos que f é *sobrejetiva* ou *sobrejetora* se $im(f) = B$.

SAIBA MAIS: Em um certo sentido, funções constantes e sobrejetoras podem ser vistas como extremos opostos. Uma função constante tem a menor imagem possível, enquanto que uma função sobrejetora tem a maior imagem possível. Mas é claro, se B é um conjunto com um único elemento, então $f : A \to B$ pode ser constante e sobrejetora.

Definição 1.6.7. Uma função $f : A \to B$ é *injetiva* ou *injetora* quando

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$$

ou, equivalentemente, quando

$$a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b).$$

Observe que se $f : A \to B$ é injetora, então cada elemento de $im(f)$ está associado a um único elemento de A. Veja uma ilustração disso na Figura 1.4.

Exemplo 1.6.8. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. A função $f : A \to B$, definida por

$$f(1) = 4, \ f(2) = 1, \ f(3) = 2, \ f(4) = 1,$$

não é injetora, pois $f(2) = 1 = f(4)$, mas $2 \neq 4$. Também não é sobrejetora, pois $3 \in B$ e não existe $x \in A$ tal que $f(x) = 3$. Mas observe que a mesma f definida de A em $\{1, 2, 4\}$ é sobrejetora.

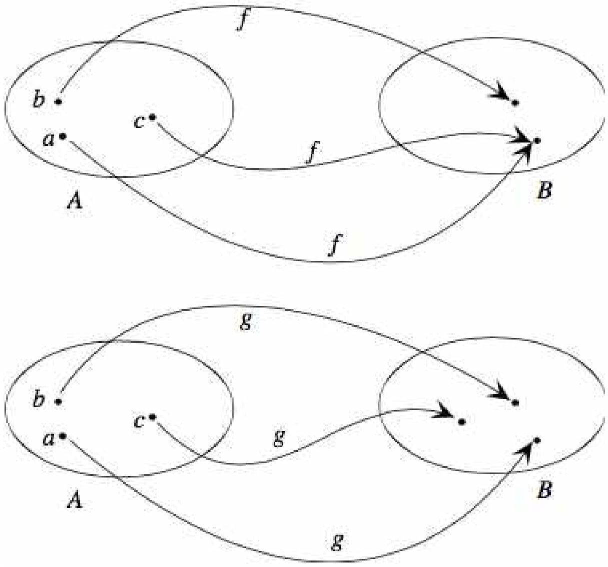

FIGURA 1.4: Os diagramas mostram duas funções $f, g : A \to B$. A função g é injetora, mas a função f não é, pois $f(a) = f(c)$.

Exemplo 1.6.9. A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n^2 + 1$ é injetora, mas não é sobrejetora.

De fato, se $m, n \in \mathbb{N}$ são diferentes ($m \neq n$), então $m - n \neq 0$. Além disso, obviamente $m + n \neq 0$, pois m e n são positivos. Logo,

$$f(m) - f(n) = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n) \neq 0,$$

o que implica que f é injetora.

Por outro lado, note que $1 \in \mathbb{N}$, mas não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 1$, pois

$$f(n) = n^2 + 1 \geq 2 > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.6.10. Uma função $f : A \to B$ é *bijetiva* ou *bijetora* se é injetora e sobrejetora. Também é comum chamar f, neste caso, de *bijeção*

SAIBA MAIS: Uma função bijetora $f : A \to B$ pode ser vista como uma regra de correspondência que associa cada elemento de A com um único elemento de B e vice-versa, cada elemento de B com um único elemento de A. Isto é como emparelhar os elementos de A com os elementos de B e isto nos mostra que A e B devem ter a mesma quantidade de elementos.

Exemplo 1.6.11. Considere novamente os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. A função $g : A \to B$, definida por

$$g(1) = 4,\ g(2) = 1,\ g(3) = 2,\ g(4) = 3,$$

é injetora e sobrejetora. Portanto é bijetora.

Desafio!

Exercício 1.6.12. Sejam $A : \{1, 2, 3, \}$ e $B = \{3, 5, 6, 9\}$

(i) Dê um exemplo de função $f : A \to B$ que seja injetora.

(ii) É possível definir uma função $g : A \to B$ que seja sobrejetora?

(iii) É possível definir uma função $h : A \to B$ que seja bijetora?

Exercício 1.6.13. Quantas funções injetoras existem de $\{1, 2, 3\}$ em $\{1, 2, 3\}$?

Exercício 1.6.14. A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = 2n$ é bijetora? Por quê?

Exercício 1.6.15. Mostre que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ definida por $f(n) = n - 1$ é bijetora.

Exercício 1.6.16. Mostre que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n^2$ é injetora. Ela é sobrejetora?

PARE E PENSE: Na verdade, dados dois conjuntos não vazios A e B, não importa quantos elementos tenham, eles terão a mesma quantidade de elementos se, e somente se, existir uma bijeção (uma função bijetora) entre eles.

Os próximos resultados nos mostram que esta propriedade de contar a quantidade de elementos funciona de uma forma bem familiar. As demonstrações são simples e serão deixadas como exercício.

Desafio!

Exercício 1.6.17. Demonstre o seguinte teorema:

Teorema 1.6.18. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são bijeções, então $g \circ f : A \to C$ é uma bijeção.

Definição 1.6.19. Se $f : A \to B$, $C \subset A$ e $D \subset B$, dizemos que a *imagem de C por f* é o conjunto $f(C) = \{f(a) : a \in C\}$. A *imagem inversa de D por f* é o conjunto $f^{-1}(D) = \{a : f(a) \in D\}$.

Definição 1.6.20. Se $f : A \to B$ é uma bijeção, a *inversa* de f é a função $f^{-1} : B \to A$ com a propriedade de que $(f^{-1} \circ f)(a) = a$, para tod $a \in A$ e $(f \circ f^{-1})(b) = b$, para todo $b \in B$.

Exemplo 1.6.21. Para a função do Exemplo 1.6.8 tem-se $f(A) = \{1, 2, 4\}$ e $f^{-1}(B) = A$. Para a função do Exemplo 1.6.11 tem-se, por exemplo $g(\{1, 2\}) = \{1, 4\}$ e $g^{-1}(\{3, 4\}) = \{1, 4\}$.

Desafio!

Exercício 1.6.22. Considerando a função g do Exemplo 1.6.11, determine:

a) $g(\{2,3\})$, $g(\{1,3\})$ e $g(\{2,4\})$.

b) $g^{-1}(\{2,3\})$, $g^{-1}(\{1,3\})$ e $g^{-1}(\{2,4\})$.

PARE E PENSE: Existe um ambiguidade entre o significado de f^{-1} dados nas definições 1.6.19 e 1.6.20. A primeira é uma operação sobre os subconjuntos de A e B, enquanto que a segunda é uma função que relaciona os elementos de B e A. Em geral, o contexto em que se trabalha deixa claro qual é o significado usado.

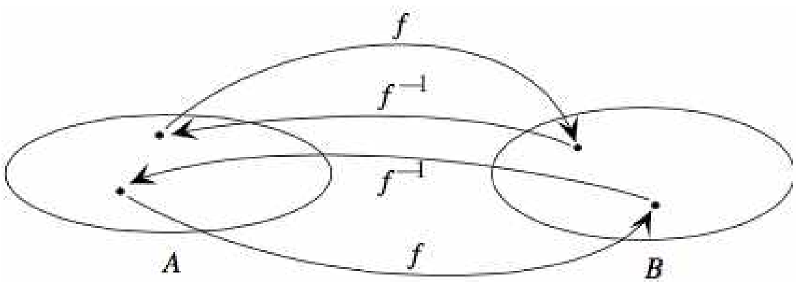

FIGURA 1.5: Esta é uma forma de visualizar uma função e sua inversa. A função f faz algo com os elementos de A e sua inversa f^{-1} desfaz.

SAIBA MAIS: As Definições 1.6.10 e 1.6.19 trabalham juntas da seguinte forma: suponhamos que $f : A \to B$ é bijetora e $b \in B$. O fato de f ser sobrejetora garante que $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$. Como f é injetora, então $f^{-1}(\{b\})$ contém um único elemento, digamos a, que satisfaz $f(a) = b$. Neste sentido, podemos ver que f^{-1} é uma regra que associa cada elemento de B a um, e somente um, elemento de A; i.e., f^{-1} é uma função com domínio B e imagem A.

Exemplo 1.6.23. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $B = 2\mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais pares). Se $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ é dada por $f(n) = 2n$ e $g : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é dada por $g(n) = n/2$, então f é bijetora e $g = f^{-1}$

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n/2) = 2(n/2) = n \quad \text{e} \quad (g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n) = (2n)/2 = n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. É claro que $f = g^{-1}$, também!

Exemplo 1.6.24. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} (n-1)/2 & \text{,se } n \text{ é ímpar} \\ -n/2 & \text{,se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Não é difícil ver que f é bijetora e

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{,se } n \geq 0 \\ -2n & \text{,se } n < 0. \end{cases}$$

Dado um conjunto não vazio A, é óbvio que existe uma bijeção $f : A \to A$ (a função identidade) e, se $g : A \to B$ é bijetora, então $g^{-1} : B \to A$ também é. Combinando estas observações com o Teorema 1.6.18 obtemos os seguintes resultados.

Desafio!

Exercício 1.6.25. Determine uma função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $f^{-1} = 1/f$.

Exercício 1.6.26. Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ funções tais que $(f \circ g)(x) = x, \forall x \in A$, e $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in B$, mostre que $f^{-1} = g$.

Exercício 1.6.27. Se $f : A \to B$ é injetora, então existe $C \subset B$ tal que $f : A \to C$ é uma bijeção.

Exercício 1.6.28. Demonstre o seguinte teorema:

Teorema 1.6.29. Seja S uma coleção de conjuntos. A relação sobre S definida por

$$A \sim B \iff \exists \text{ uma bijeção } f : A \to B$$

é uma relação de equivalência.

Sugestão: Você pode fazer isto mostrando que a relação do enunciado é reflexiva, simétrica e transitiva.

1.7 O Teorema de Schröder-Bernstein

O seguinte teorema é uma poderosa ferramenta em Teoria de Conjuntos. Ele mostra que uma afirmação aparentemente e intuitivamente óbvia pode às vezes ser difícil de ser verificada. Você vai usá-lo na próxima seção.

Teorema 1.7.1. (Schröder-Bernstein[7]) Sejam A e B conjuntos não vazios. Se existirem funções injetoras $f : A \to B$ e $g : B \to A$, então deverá existir uma bijeção $h : A \to B$.

[7]Este resultado é frequentemente chamado de Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein ou Teorema de Cantor-Bernstein, apesar do fato de que aparentemente o primeiro a demonstrá-lo foi Richard Dedekind.

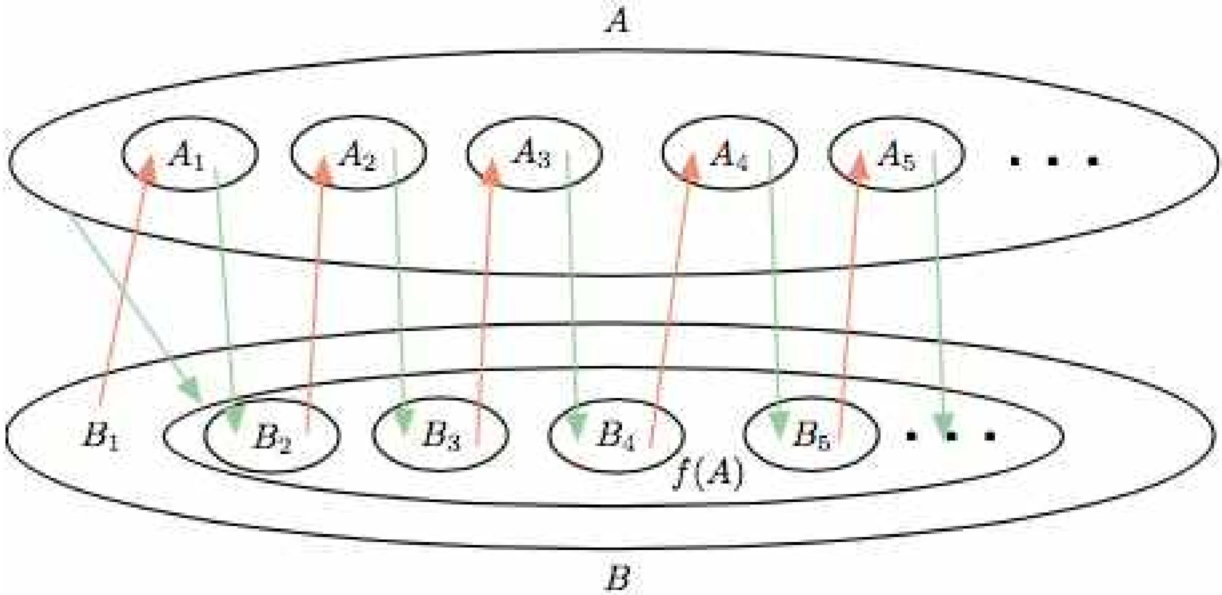

FIGURA 1.6: Representação gráfica dos primeiros passos da demonstração do Teorema 1.7.1.

Demonstração. Sejam $B_1 = B \backslash f(A)$ e $A_1 = g(B_1)$. Agora definimos $B_2 = f(A_1)$ e $A_2 = g(B_2)$. Continuando com este processo, podemos definir $A_k = g(B_k)$ e $B_{k+1} = f(A_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Usamos estes conjuntos para definir $\tilde{A} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ e $h : A \to B$ tais que

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{, se } x \in \tilde{A} \\ f(x) & \text{, se } x \in A \backslash \tilde{A}. \end{cases}$$

Devemos mostrar que h está bem definida (i.e., que é mesmo uma função), é injetora e sobrejetora.

Boa definição. Seja $x \in A$. Se $x \in A \backslash \tilde{A}$, então é claro que $h(x) = f(x)$ está definido. Por outro lado, se $x \in \tilde{A}$, então $x \in A_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Como $x \in A_k = g(B_k)$, vemos que $h(x) = g^{-1}(x)$ está bem definido. Logo, h está bem definida, ou seja, h é realmente uma função.

Injetividade. Sejam $x, y \in A$, com $x \neq y$. Se $x, y \in \tilde{A}$ ou se $x, y \in A \backslash \tilde{A}$, então as hipóteses de que f e g são injetoras, respectivamente, implicam que $h(x) \neq h(y)$. O caso restante ocorre se $x \in \tilde{A}$ e $y \in A \backslash \tilde{A}$. Suponhamos que $x \in A_k$ e $h(x) = h(y)$. Se $k = 1$, então $h(x) = g^{-1}(x) \in B_1$ e $h(y) = f(y) \in f(A) = B \backslash B_1$. Isto é claramente incompatível com a hipótese de que $h(x) = h(y)$. Agora suponhamos $k > 1$. Então existe $x_1 \in B_1$ tal que

$$x = \underbrace{(g \circ f \circ g \circ \cdots \circ f \circ g)}_{(k-1)\ f's \text{ e } k\ g's}(x_1).$$

Isto implica que

$$f(y) = h(y) = h(x) = g^{-1}(x) = \underbrace{(f \circ g \circ \cdots \circ f \circ g)}_{(k-1)\ f'\,s \text{ e } (k-1)\ g's}(x_1) = f(\underbrace{(g \circ f \circ g \circ \cdots \circ f \circ g)}_{(k-1)\ f'\,s \text{ e } (k-1)\ g's}(x_1))$$

e portanto,

$$y = \underbrace{(g \circ f \circ g \circ \cdots \circ f \circ g)}_{(k-2)\ f's \text{ e } (k-1)\ g's}(x_1) \in A_{k-1} \subset \tilde{A}.$$

Esta contradição mostra que $h(x) \neq h(y)$. Assim concluímos que h é injetora.

Sobrejetividade. Seja $y \in B$. Se $y \in B_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Como $B_k = g^{-1}(A_k) = h(A_k)$, então $y \in h(A)$. Se $y \notin B_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $y \in f(A)$, pois, em particular, $y \notin B_1 = B \backslash f(A)$ e $g(y) \notin \tilde{A}$, de modo que $y = f(x) = h(x)$, para algum $x \in A$. Portanto, h é sobrejetora. □

O Teorema de Schröder-Bernstein tem muitas consequências e aplicações. À primeira vista, algumas parecem um pouco contra-intuitiva, como o próximo corolário.

Corolário 1.7.2. Existe uma bijeção $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, podemos provar esta afirmação encontrando duas funções injetoras $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

De fato, se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é dada por $f(n) = (n, 1)$, então f é claramente injetora. Por outro lado, consideremos $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g((a, b)) = 2^a 3^b$. A unicidade da fatoração de qualquer número natural em produto de primos garante que g é injetora. □

Desafio!

Exercício 1.7.3. Demonstre que as aplicações do Corolário 1.7.2 são realmente injetoras.

Sugestão: Você pode fazer isto usando a Definição 1.6.7, i.e., mostrando que

$$g((a, b)) = g((c, d)) \Rightarrow (a, b) = (c, d).$$

Exercício 1.7.4. Encontre uma bijeção $f : [0, 1] \to (0, 1)$.

Exercício 1.7.5. Sejam $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ e $g : (0, \infty) \to [0, \infty)$ dadas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x$, respectivamente. Qual bijeção $h : [0, \infty) \to (0, \infty)$ pode ser obtida a partir da demonstração do Teorema de Bernstein-Schröder?

Exercício 1.7.6. Usando a notação do Teorema de Bernstein-Schröder e considerando $A = B = \mathbb{Z}$, $f(n) = g(n) = 2n$, determine a função h.

ATIVIDADE AVALIATIVA 2:

Exercício 1.7.7. Usando a notação do Teorema de Bernstein-Schröder, com $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$ e

$$g(n) = \begin{cases} 1 - 3n & \text{, se } n \leq 0 \\ 3n - 1 & \text{, se } n > 0, \end{cases}$$

determine $h(6)$ e $h(7)$.

Sugestão: veja a demonstração do teorema.

3^a aula
(18/03/2016 - 04/04/2016)
Cardinalidade

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender o conceito de cardinalidade de conjuntos;
- Compreender os conceitos de conjuntos finitos, enumeráveis e não enumeráveis;
- Saber provar que os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros são enumeráveis.

1.8 Cardinalidade - conjuntos finitos, enumeráveis e não enumeráveis

Há uma maneira de usar conjuntos e funções para formalizar e generalizar a forma de contar a quantidade de determinados objetos. Por exemplo, suponha que você precise contar quantos elementos existem no conjunto $\{a, b, c\}$. A maneira natural de se fazer isso é apontar para cada elemento em sequência e dizer: "$1, 2, 3$". Mas o que está realmente acontecendo? Neste instante, você está definindo uma bijeção entre os conjuntos $\{a, b, c\}$ e $\{1, 2, 3\}$. Esta ideia pode ser generalizada.

Definição 1.8.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, dizemos que o conjunto $\overline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ é um *segmento inicial* de $\mathbb{N}$. O *segmento inicial trivial* é o conjunto $\overline{0} = \emptyset$. Dizemos que um conjunto S tem *cardinalidade* n se existir uma bijeção $f : S \to \overline{n}$. Neste caso, denotamos $\text{card}(S) = |S| = n$ e dizemos que S é um conjunto *finito*. Quando um conjunto não é finito, dizemos que é *infinito*

As cardinalidades definidas desta forma são chamadas de *números cardinais finitos*. Elas correspondem aos números que usamos diariamente para contar. O próximo teorema mostra que os números cardinais estão bem definidos, i.e., não dependem de uma bijeção específica f do conjunto em algum segmento inicial de $\mathbb{N}$.

Teorema 1.8.2. Sejam $f : A \to B$ uma bijeção, $a \in A$ e $b \in B$. Então, existe uma bijeção de A em B que associa a com b.

Demonstração. Suponha que $f(a) = b'$. Como f é sobrejetora, existe $a' \in A$ tal que $f(a') = b$. Defina $g : A \to B$ por

$$g(x) = \begin{cases} b & \text{, se } x = a \\ b' & \text{, se } x = a' \\ f(x) & \text{, se } x \neq a \text{ e } x \neq a'. \end{cases}$$

É fácil ver que g é bijetora. □

O próximo resultado ajuda a comparar as várias cardinalidades finitas.

Teorema 1.8.3. Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

Demonstração. Provamos primeiro um caso particular. Suponhamos que A é finito e $a \in A$, e vamos provar que $A\backslash\{a\}$ é finito. De fato, como A é finito, então existe $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : \overline{n} \to A$. De acordo com o Teorema 1.8.2, podemos assumir que $f(n) = a$. Se $n = 1$, então a é o único elemento de A e $A\backslash\{a\} = \emptyset$. Se $n > 1$, então a restrição de f a $\overline{n-1}$ é uma bijeção sobre $A\backslash\{a\}$, o que mostra que $A\backslash\{a\}$ tem $n - 1$ elementos.

O caso geral se prova por indução sobre a quantidade n de elementos de A. Ele é evidente quando $A = \emptyset$ ou $n = 1$. Suponha por indução que o teorema seja verdadeiro para conjuntos com $n-1$ elementos e sejam A um conjunto com n elementos e $B \subset A$. Se $B = A$, não há o que provar. Se $B \subsetneq A$, então existe $a \in A$ tal que $a \notin B$. Assim vemos que, na verdade, $B \subset A\backslash\{a\}$ e, pelo caso particular provado anteriormente, $A\backslash\{a\}$ tem $n - 1$ elementos. Segue da hipótese de indução que B é finito. □

Como consequência, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1.8.4. Sejam A e B dois conjuntos e $f : A \to B$ uma função.

(i) Se f é injetora e B é finito, então A é finito.

(ii) Se f é sobrejetora e A é finito, então B é finito.

Demonstração. O item (i) segue do Exercício 1.6.27. Com relação ao item (ii), se f é sobrejetora, então $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$, para todo $b \in B$. Se, a cada $b \in B$ associarmos um único elemento $a = g(b)$ de $f^{-1}(\{b\})$, estaremos definindo uma função $g : B \to A$ injetora, por construção. Segue do Teorema 1.8.3 anterior que B é finito. □

O Teorema 1.8.3 assegura que se A é finito e $B \subset A$, então B também deve ser finito e, mais ainda, card$(B) \leq$ card(A). O item (i) do Corolário 1.8.4 diz como a ideia pode ser generalizada para conjuntos infinitos.

Definição 1.8.5. Sejam A e B dois conjuntos. Se existir uma função injetora $f : A \to B$, diremos que card$(A) \leq$ card(B).

Exemplo 1.8.6. Observe que $f : \{a, b, c, d\} \to \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma\}$ definida por

$$f(a) = \alpha, f(b) = \beta, f(c) = \gamma, f(d) = \delta$$

é injetora. Além disso, é fácil ver que card$(\{a, b, c, d\}) = 4 < 5 =$ card$(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma\})$.

Por outro lado, não existe uma função $g : \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma\} \to \{a, b, c, d\}$ que seja injetora. De fato, porque se existisse, o Teorema de Schröder-Bernstein garantiria a existência de uma bijeção entre os conjuntos, o que claramente não é verdade.

Desafio!

Exercício 1.8.7. Demonstre o seguinte teorema.

Teorema 1.8.8. Dados dois conjuntos finitos A e B, existe uma bijeção $f : A \to B$ se, e somente se, card$(A) =$ card(B).

Sugestão: Use a Definição 1.8.5, o Teorema de Schröder-Bernstein e a antissimetria da relação "$\leq$".

PARE E PENSE: O ponto principal aqui, é claro, é que card$(A) =$ card(B) significa que A e B têm a mesma quantidade de elementos e card$(A) <$ card(B) significa que A tem menos elementos que B. Esta compreensão intuitiva tem algumas consequências surpreendentes quando os conjuntos envolvidos não têm cardinalidade finita.

Desafio!

Exercício 1.8.9. Seja $A = \{-1, 2, 0, 6\}$. Dê um exemplo de uma função injetiva do conjunto A nele mesmo. Observe que esta função é sobrejetora.

Independentemente da função injetiva que você tenha considerado no exercício anterior, ela sempre será, necessariamente, sobrejetora. Isto é uma consequência da seguinte proposição.

Proposição 1.8.10. Se A é um conjunto finito, então toda função injetora $f : A \to A$ é também sobrejetora.

Demonstração. Vamos demonstrar a proposição por indução sobre a cardinalidade de A. Se card$(A) = 1$, a proposição é verdadeira, pois se A tem apenas um elemento, digamos $A = \{a\}$, então a única função $f : A \to A$ é a função identidade $f(a) = a$, que é claramente injetora e sobrejetora.

Suponha por indução que a proposição seja verdadeira para conjuntos com n elementos. Sejam A um conjunto com $n + 1$ elementos e $f : A \to A$ uma função injetora. Se f não for sobrejetora, então deve existir $a \in A$ tal que $a \notin f(A)$. Segue que o conjunto $B = A\backslash\{a\}$ tem n elementos e a função $g : B \to B$ definida por $g(b) = f(b)$, para todo $b \in B$, é injetora (por quê?). Logo, por indução, g é sobrejetora. Agora, como $a \notin f(A)$, então $f(a) \neq a$ e obtemos que $f(a) \in B$. Mas, por outro lado, como g é sobrejetora, então existe $b \in B$ tal que $g(b) = f(a)$, o que contradiz o fato de f ser injetora, porque implica que $f(b) = g(b) = f(a)$. Portanto f é sobrejetora. $\square$

SAIBA MAIS: Se $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}\backslash\{1\}$, então $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_1$ definida por $\varphi(n) = n+1$ é um bijeção de $\mathbb{N}$ sobre seu subconjunto próprio $\mathbb{N}_1 = \{2, 3, 4, \dots\}$. Mais geralmente, fixando $p \in \mathbb{N}$, podemos considerar $\mathbb{N}_p = \{p+1, p+2, p+3, \dots\}$ e definir a bijeção $\varphi(n) = n+p$ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}_p$. Fenômenos desse tipo já tinham sido observados por Galileu, que foi o primeiro a notar que "há tantos números pares quanto números naturais", ao mostrar que se $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$ é o conjunto dos pares positivos, então a função $\phi : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ definida por $\phi(n) = 2n$ é bijetora. Evidentemente, se $I = \{1, 3, 5, \dots\}$ é o conjunto dos números ímpares positivos, então $\psi : \mathbb{N} \to I$ definidia por $\psi(n) = 2n - 1$ também é uma bijeção. Nestes dois últimos exemplos, $\mathbb{N}\backslash 2\mathbb{N} = I$ e $\mathbb{N}\backslash I = 2\mathbb{N}$ são infinitos, enquanto que $\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_p$ é finito.

Definição 1.8.11.

- Um conjunto A tem *cardinalidade infinita* se existir uma função injetora $f : \mathbb{N} \to A$. É comum denotar card$(\mathbb{N}) = \aleph_0$.[8]
- Dizemos que A é um conjunto *enumerável* se A é finito ou se existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to A$.

Temos, pois, que se A é enumerável, então card$(A) \leq \aleph_0$.

Teorema 1.8.12. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é enumerável.

Demonstração. De fato, isto segue imediatamente da definição, pois a função $f(n) = n$ é uma função bijetora de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. $\square$

Corolário 1.8.13. O conjunto $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, dos números inteiros não negativos, é enumerável.

Demonstração. Com efeito, pois a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+$, dada por $f(n) = n - 1$, é uma função bijetora de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}_+$. $\square$

Corolário 1.8.14. O conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros, é enumerável.

Demonstração. Basta observar que a função $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$, definida por

$$f(n) = \begin{cases} (n+1)/2 & \text{, se } n \text{ é ímpar} \\ -n/2 & \text{, se } n \text{ é par,} \end{cases}$$

é uma bijeção e compor com a função do corolário anterior. Isto garante que $\mathbb{Z}$ é enumerável, ou em linguagem simbólica matemática, card$(\mathbb{Z}) =$ card$(\mathbb{N}) = \aleph_0$. $\square$

[8] O símbolo $\aleph$ é uma letra do alfabeto hebraico chamada de "*aleph*" e $\aleph_0$ é chamado de *aleph zero*.

Para demonstrar o próximo resultado, você precisa se lembrar do "*Princípio da Boa Ordenação*", que diz que "todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento".

Teorema 1.8.15. Se $A \subset \mathbb{N}$, então A é enumerável.

Demonstração. Se A é finito, então A é enumerável por definição. Se $A \subset \mathbb{N}$ é infinito, então A e qualquer subconjunto infinito de A do qual retirarmos uma quantidade finita de elementos continuará sendo infinito (e não vazio). Pelo princípio da boa ordenação, podemos supor que

- a_1 é o menor elemento de A;
- a_2 é o menor elemento de $A_1 = A \backslash \{a_1\}$;
- a_3 é o menor elemento de $A_2 = A \backslash \{a_1, a_2\}$;

$\vdots$

- a_n é o menor elemento de $A_{n-1} = A \backslash \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$.

Procedendo desta forma, vemos que a função $f : \mathbb{N} \to A$ definida por $f(n) = a_n$ é injetora (por quê?). Para mostrar que f é sobrejetora, basta mostrar que $f(\mathbb{N}) = A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Para provar isto, suponha que exista $a \in A$, tal que $a \notin A_n$, para todo n. Então, $a > a_n$, para todo n, ou seja, a é maior que todos os elementos de um conjunto infinito de números naturais, o que é impossível. $\square$

Desafio!

Exercício 1.8.16. Demonstre as seguintes consequências do Teorema 1.8.15

Corolário 1.8.17. Se $B \subset \mathbb{N}$ e $g : A \to B$ é uma bijeção, então A é enumerável.

Corolário 1.8.18. Se B é enumerável e $f : A \to B$ é injetora, então A é enumerável.

Corolário 1.8.19. Todo subconjunto de um conjunto enumerável é também enumerável.

Corolário 1.8.20. Se A é enumerável e $f : A \to B$ é sobrejetora, então B é enumerável.

A demonstração do próximo teorema é deixada como Atividade Avaliativa.

Teorema 1.8.21. Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Então,

a) $A \times B$ é enumerável;

b) $A \cup B$ é enumerável.

ATIVIDADE AVALIATIVA 3:
Demonstre os seguintes exercícios no AVA.

Exercício 1.8.22. Demonstre o teorema anterior.

Sugestão: Use o Corolário 1.7.2 para provar o item (a). Para provar o item (b), use a Definição 1.8.5, i.e., mostre que existe uma função injetora de A em $A \cup B$.

Exercício 1.8.23. Mostre que os seguintes conjuntos são enumeráveis:

a) O conjunto dos inteiros não positivos $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$;

b) O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{m/n : m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}\}$.

PARE E PENSE:
Você já deve ter observado que

$$\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{Z}_+) = \text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \cdots .$$

Uma pergunta lógica a se fazer agora é se todos os conjuntos devem ter cardinalidade finita ou ser enumerável. A resposta é dada trocando-se S por $\mathbb{N}$ no próximo teorema.

Teorema 1.8.24. Seja S um conjunto. Então, card$(S) <$ card$(\mathcal{P}(S))$.

Demonstração. Observando que card$(\emptyset) = 0 < 1 =$ card$(\mathcal{P}(\emptyset))$, vemos que o teorema é verdadeiro para $S = \emptyset$.

Suponhamos $S \neq \emptyset$. Como $\{a\} \in \mathcal{P}(S)$, para todo $a \in S$, então segue que card$(S) \leq$ card$(\mathcal{P}(S))$. (por que?)

Assim, concluiremos a demonstração se provarmos que não existe uma função sobrejetora $f : S \to \mathcal{P}(S)$. Para mostrar isso, suponhamos por contradição que existe tal função f e vamos definir o conjunto $T = \{x \in S : x \notin f(x)\}$ (isto faz sentido, pois $f(x) \in \mathcal{P}(S)$ é um conjunto). Como f é sobrejetora, então existe $t \in S$ tal que $f(t) = T$.

Vejamos o que ocorre nos casos: $t \in T$ e $t \notin T$. Se $t \in T = f(t)$, então a definição de T implica que $t \notin T$, uma contradição. Por outro lado, se $t \notin T = f(t)$, então a definição de T implica que $t \in T$, outra contradição.

Estas contradições nos levam a concluir que não existe função sobrejetora de S em $\mathcal{P}(S)$. $\square$

Corolário 1.8.25. O conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é não enumerável.

O Teorema 1.8.24 nos leva a definir.

Definição 1.8.26. Dizemos que um conjunto S é infinito não enumerável, ou simplesmente não enumerável, se $\aleph_0 <$ card(S).

Exemplo 1.8.27. O Teorema 1.8.24 implica que $\aleph_0 <$ card$(P(\mathbb{N}))$, logo $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é não enumerável. De fato, o mesmo argumento garante que

$$\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) < \cdots .$$

Portanto, existe uma quantidade infinita de cardinalidades infinitas.

SAIBA MAIS: Em 1874, Georg Cantor provou que a cardinalidade do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais satisfaz card$(\mathbb{R}) =$ card$(P(\mathbb{N}))$, i.e., card$(\mathbb{R}) > \aleph_0$. (O Teorema 2.5.3 a seguir, no Módulo 2, é uma versão deste resultado.) Isto nos leva naturalmente a perguntar se existem conjuntos S tais que $\aleph_0 <$ card$(S) <$ card$(\mathbb{R})$. Cantor passou muitos anos tentando responder esta questão, mas não obteve sucesso. Sua hipótese de que não existem tais conjuntos ficou famosa e passou a ser chamada de "*hipótese do continuum*".

A importância da hipótese do continuum foi ressaltada por David Hilbert no Congresso Internacional de Matemáticos[a] de 1900, em Paris, quando este o colocou em primeiro lugar em sua famosa lista dos 23 mais importantes problemas matemáticos não resolvidos até então. Kurt Gödel provou em 1940 que a hipótese do continuum não pode ser refutada usando-se a Teoria dos Conjuntos padrão, mas ele não provou se era verdadeira. Em 1963, Paul Cohen provou que a hipótese do continuum na verdade não pode ser demonstrada como um teorema na Teoria dos Conjuntos padrão.

Então, a hipótese do continuum é uma afirmação com a estranha propriedade de ser falsa e verdadeira na estrutura da Teoria de Conjuntos comum. Isto significa que no desenvolvimento axiomático padrão da Teoria dos Conjuntos, a hipótese do continuum, ou uma negação adequada dela, pode ser tomada como um axioma adicional sem causar qualquer contradição. A terminologia técnica para isto é que a hipótese do continuum é independente dos axiomas da Teoria dos Conjuntos.

As demonstrações desses teoremas são extremamente difíceis de se entender. Áreas inteiras da Matemática foram criadas e desenvolvidas com o objetivo de tornar suas provas possíveis. Mesmo nos dias atuais, existem algumas questões filosóficas girando em torno deles.

[a]Este evento científico ocorre a cada quatro anos e é onde são divulgados os nomes dos vencedores da medalha Fields, a maior condecoração matemática que existe.

Módulo 2
Os números reais

Este módulo trata do que podemos chamar de “*regras do jogo*”: os axiomas dos números reais. Estes axiomas implicam em todas as propriedades dos números reais e, em um certo sentido, garantem que qualquer outro conjunto que os satisfaça possa ser identificado com o conjunto dos números reais.

Os axiomas são apresentados aqui como regras sem justificativa. Mas existem outras abordagens que podem ser utilizadas para construir o conjunto do números reais. Uma outra abordagem consiste em começar com os axiomas de Peano – os axiomas dos números naturais – construindo os inteiros, os racionais e finalmente obtendo os reais a partir de uma sequência de “completamentos”. Também é possível começar com os axiomas da Teoria dos Conjuntos, obtendo os axiomas de Peano como teoremas e usando-os para demonstrar nossos axiomas e teoremas. Mas não importa como isto é feito, sempre haverá alguns axiomas na base da estrutura da teoria e as regras dos números reais serão sempre as mesmas, independentemente de seus axiomas ou teoremas.

Escolhemos esta abordagem, começando um pouco adiante, porque as outras rapidamente transformam-se em um longo e tedioso labirinto de exercícios técnicos sem muita conexão com a Análise.

4^a aula (01/04/2016 - 11/04/2016) Os axiomas de corpo e de ordem

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender o conceito de corpo;
- Compreender o conceito de ordem;
- Compreender o conceito de unicidade.

2.1 Os axiomas de corpo

Estes primeiros nove axiomas são chamados de *axiomas de corpo*. Eles fornecem as propriedades algébricas dos números reais.

Definição 2.1.1. Um *corpo* é um conjunto não vazio $\mathbb{F}$ munido de duas operações binárias: uma multiplicação $\times : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ e uma adição (soma) $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$,[1] que satisfazem as seguintes propriedades:

A1. (Associatividade da adição) $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{F}$;

A2. (Comutatividade da adição) $a+b = b+a$, $\forall a, b \in \mathbb{F}$;

A3. (Existência de elemento neutro aditivo) $\exists \bar{0} \in \mathbb{F}$, tal que $a+\bar{0} = \bar{0}+a = a$, $\forall a \in \mathbb{F}$;

A4. (Existência do inverso aditivo) Para cada $a \in \mathbb{F}$, $\exists -a \in \mathbb{F}$, tal que $a+(-a) = -a+a = \bar{0}$;

M1. (Associatividade da multiplicação) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{F}$;

M2. (Comutatividade da multiplicação) $a \times b = b \times a$, $\forall a, b \in \mathbb{F}$;

M3. (Existência de elemento neutro multiplicativo) $\exists \bar{1} \in \mathbb{F}$, tal que $a \times \bar{1} = \bar{1} \times a = a$, $\forall a \in \mathbb{F}$;

M4. (Existência do inverso multiplicativo) Para cada $a \in \mathbb{F}$, $\exists a^{-1} \in \mathbb{F}$, tal que $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = \bar{1}$;

[1] Dado qualquer conjunto A, uma função $f : A \times A \to A$ é chamada de *operação binária*. Em outras palavras, uma função binária é nada mais que uma função com dois argumentos.
Usaremos aqui as notações padrão: $+(a,b) = a+b$ e $\times(a,b) = a \times b$.

D. (Distributividade) $(a+b)\times c = (a\times c)+(b\times c)$, $\forall a,b,c\in\mathbb{F}$.

Denotamos o corpo $\mathbb{F}$ munido de tais operações por $(\mathbb{F},+,\times)$.

Embora estes axiomas pareçam conter todas as propriedades dos números reais que costumamos usar, eles ainda não são suficientes para caracterizá-los. Eles apenas definem as regras aritméticas. Existem outros corpos além do corpo dos números reais e seu estudo toma uma boa parte dos cursos de Álgebra Abstrata.

PARE E PENSE: Denotamos os elementos neutros da soma e da multiplicação por $\overline{0}$ (leia *zero-barra*) e $\overline{1}$ (*um-barra*), respectivamente, porque há uma infinidade de conjuntos com estas propriedades. Você não deve pensar que $\overline{0}$ é o número zero. Na verdade, zero é um caso particular de elemento neutro aditivo, assim como o número 1 é um caso particular de elemento neutro multiplicativo. As operações $+$ e $\times$ também não coincidem sempre com as operações com as quais estamos acostumados.

Desafio!

Exercício 2.1.2. Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são corpos? Por quê?

Exemplo 2.1.3. Da álgebra elementar sabemos que o conjunto $\mathbb{Q}=\{p/q : p\in\mathbb{Z}\wedge q\in\mathbb{N}\}$ dos números racionais forma um corpo quando munido das operações anteriores soma e multiplicação usuais. Por exemplo, em $(\mathbb{Q},+,\times)$ temos $\overline{0}=0$ e $\overline{1}=1$. Mas mostraremos no Teorema 2.3.1 que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, ou seja, $\mathbb{Q}$ não contém todos os números reais.

Exemplo 2.1.4. O conjunto $\mathbb{F}=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$ munido das operações definidas por

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

é um corpo. É fácil checar que os axiomas de corpo são satisfeitos. Este corpo é chamado de $\mathbb{Z}_3$ e seus elementos não são números, mas sim classes de equivalências obtidas a partir do algoritmo da divisão.

Os teoremas a seguir contêm algumas propriedade úteis de corpos e são apresentados aqui como exemplos de como os axiomas são utilizados. Desenvolvimentos mais completos podem ser encontrados em quaisquer textos elementares de estruturas algébricas.

Teorema 2.1.5. Os elementos neutros aditivo e multiplicativo de um corpo $(\mathbb{F},+,\times)$ são únicos.

Demonstração. Sejam $\overline{0}_1$ e $\overline{0}_2$ elementos neutros aditivos do corpo $(\mathbb{F},+,\times)$. Então,

$$a+\overline{0}_1=\overline{0}_1+a=a, \quad \forall a \in \mathbb{F},$$

e

$$a+\overline{0}_2=\overline{0}_2+a=a, \quad \forall a \in \mathbb{F}.$$

Trocando a por $\overline{0}_2$ na primeira igualdade e a por $\overline{0}_1$ na segunda, obtemos

$$\overline{0}_1=\overline{0}_1+\overline{0}_2=\overline{0}_2+\overline{0}_1=\overline{0}_2.$$

A demonstração da unicidade do elemento neutro é idêntica e é deixada como exercício. □

Teorema 2.1.6. Os inversos aditivo e multiplicativo de um corpo $(\mathbb{F},+,\times)$ são únicos.

Demonstração. Sejam $(\mathbb{F},+,\times)$ um corpo e $a \in \mathbb{F}$, tal que $a \neq \overline{0}$. Suponhamos que b e c são inversos multiplicativos de a. Então segue dos axiomas M1 e M3 que

$$b=b\times\overline{1}=b\times(a\times c)=(b\times a)\times c=\overline{1}\times c=c,$$

o que mostra que $b=c=a^{-1}$ e isto significa que o inverso multiplicativo de a é único.

A demonstração da unicidade do inverso aditivo de qualquer elemento $a \in \mathbb{Z}$ é praticamente igual, com a diferença de que $\overline{0}$ também possui um inverso que é ele mesmo. □

Observação 2.1.7. O inverso aditivo costuma ser chamado de *elemento oposto* ou *simétrico*.

Desafio!

Demonstrações de unicidade costumam ser feitas sempre com o mesmo argumento lógico: suponha que existam dois elementos com a propriedade em questão e mostre que estes elementos são iguais. Sabendo disso e tendo as demonstrações dos dois últimos teoremas como exemplos, resolva os seguintes exercícios.

Exercício 2.1.8. Demonstre que o inverso aditivo de um corpo $(\mathbb{F},+,\times)$ é único.

Exercício 2.1.9. Demonstre que existe um único elemento neutro multiplicativo em um corpo $(\mathbb{F},+,\times)$.

Exercício 2.1.10. Demonstre que existe um único oposto para cada $a \in \mathbb{F}$.

Existem muitas outras propriedades de corpos que poderiam ser demonstradas aqui, mas elas correspondem às propriedades usuais dos números reais aprendidas em cursos iniciais de Álgebra e, portanto, serão omitidas.

Daqui em diante adotaremos a notação algébrica padrão para a multiplicação e adição, i.e., escreveremos:

- ab ao invés de $a \times b$, $\forall a, b \in (\mathbb{F}, +, \times)$;
- a/b ao invés de $a \times b^{-1}$, $\forall a, b \in (\mathbb{F}, +, \times)$, com $b \neq 0$;
- $a - b$ ao invés de $a + (-b)$, $\forall a, b \in (\mathbb{F}, +, \times)$.

Também está liberado o uso de outras propriedades simples de corpos aprendidas no curso de Álgebra elementar.

2.2 Os axiomas de ordem

Os axiomas desta seção fornecem uma ordenação e propriedades métricas para o conjunto dos números reais. Em um certo sentido, os axiomas a seguir adicionam uma geometria a um corpo.

Definição 2.2.1. Dizemos que um corpo $(\mathbb{F}, +, \times)$ é *ordenado* se existe $P \subset \mathbb{F}$ tal que seus elementos satisfazem as seguintes regras, conhecidas como *axiomas de ordem*:

O1. $a, b \in P \Longrightarrow a + b \in P$;

O2. $a \in \mathbb{F} \Longrightarrow a \in P \vee -a \in P \vee a = \overline{0}$.

O conjunto P é chamado de conjunto dos *elementos positivos* de $\mathbb{F}$. Usando o axioma *O2* vemos que $\mathbb{F}$ está dividido em três subconjuntos disjuntos: P, $\{\overline{0}\}$ e $\{-x : x \in P\}$. O último deste é, como esperado, o conjunto dos *elementos negativos* de $\mathbb{F}$.

A seguir, introduzimos uma notação familiar para a ordenação dos elementos de $\mathbb{F}$.

Notação 2.2.2. Escrevemos:

- $a < b$ ou $b > a$, sempre que $b - a \in P$;
- $a \leq b$ ou $b \geq a$, sempre que $b - a \in P$ ou $a = b$.

PARE E PENSE: Observe que

$$a > \overline{0} \Longleftrightarrow a = a + \overline{0} \in P \quad \text{e} \quad a < \overline{0} \Longleftrightarrow -a = \overline{0} - a \in P.$$

Logo, $a > \overline{0}$ e $a < \overline{0}$ correspondem, respectivamente, às nossas noções usuais de positivo e negativo.

Nosso objetivo é englobar todas as propriedades dos números reais com os axiomas. Os axiomas de ordem eliminam a consideração de muitos corpos. Por exemplo, o corpo $\mathbb{Z}_3$ do Exemplo 2.1.4 não é um corpo ordenado. Por outro lado, fatos algébricos elementares ou o diagrama da Figura 2.1 a seguir mostram que o corpo $(\mathbb{Q}, +, \times)$ dos números racionais é ordenado. Mas você já viu (falta provar) que existem números reais que não são racionais, e.g. $\sqrt{2}$. Portanto, os onze axiomas apresentados até agora ainda não são suficientes para "capturar" todas as propriedades dos números reais.

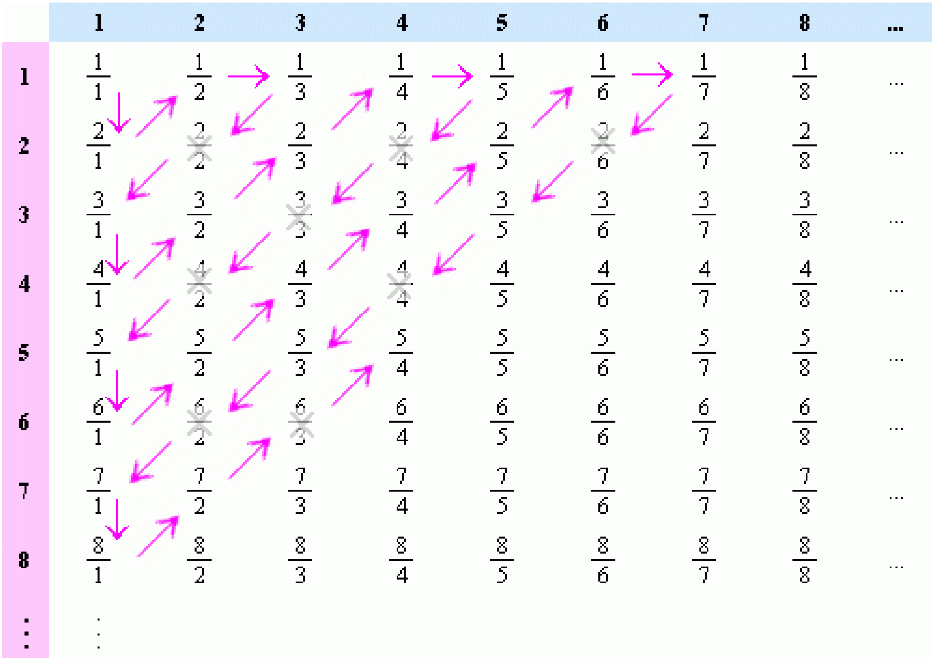

FIGURA 2.1: Este diagrama mostra uma forma de se ordenar os números racionais. Mas observe que esta não é a mesma ordenação dos números reais.
Fonte: www.homeschoolmath.net/

A seguir, você verá algumas propriedades dos corpos ordenados. No próximo enunciado e adiante, dado um elemento a de um corpo ordenado $\mathbb{F}$, denotamos $a^0 = 1$ e

$$a^n = \underbrace{aaa \cdots aa}_{n \text{ vezes}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.2.3. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo ordenado e $a \in \mathbb{F}$. Então,

$$a \neq 0 \Longleftrightarrow a^2 > \overline{0}.$$

Demonstração. $(\Longrightarrow)$ Se $a > \overline{0}$, então segue do Axioma *O1* que $a^2 = aa > \overline{0}$. Se $a < \overline{0}$, então $-a > \overline{0}$ pelo Axioma *O2* e vemos que $a^2 = 1a^2 = (-1)(-1)a^2 = (-a)^2 > \overline{0}$, pela primeira parte da demonstração.

$(\Longleftarrow)$ Isto é óbvio, visto que $\overline{0}^2 = \overline{0}$. $\square$

Desafio!

Exercício 2.2.4. Dado um corpo ordenado $\mathbb{F}$, prove que:

a) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2, \quad \forall a, b \in P$;

b) $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}, \quad \forall a, b \in P$.

Sugestão: $(x - y)^2 = (x - y)(x + y)$.

Exercício 2.2.5. Prove que se a e b são elementos de um corpo $\mathbb{F}$, então

$$(-a)b = -(ab) = a(-b).$$

Sugestão: Use o fato de que $-a = (-\overline{1})a$ e os axiomas da multiplicação.

Teorema 2.2.6. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo ordenado e $a, b, c \in \mathbb{F}$. Então,

a) $a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c$;

b) $a < b \wedge b < c \Longrightarrow a < c$;

c) $a < b \wedge c > \overline{0} \Longrightarrow ac < bc$;

d) $a < b \wedge c < \overline{0} \Longrightarrow ac > bc$.

Demonstração. (a) $a < b \Longleftrightarrow b - a \in P \Longleftrightarrow b - a = (b + c) - (c + a) \in P \Longleftrightarrow a + c < b + c$.
(b) Temos por hipótese que $b - a$, $c - b \in P$, e usando o fato de que P é fechado para a adição, vemos que $c - a = c + 0 - a = c + (-b + b) - a = (c - b) + (b - a) \in P$. Portanto, $c > a$.
(c) Como $b - a \in P$ e $c \in P$ e P é fechado para a multiplicação, então segue do axioma *D* que $bc - ac = (b - a)c \in P$ e, portanto, $ac < bc$.
(d) Por hipótese, temos que $b - a, -c \in P$. Assim, segue da parte (c) e do último desafio que $ac > bc$. $\square$

O próximo teorema é conhecido como a regra dos “dois de três”.

Teorema 2.2.7. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo ordenado e $a, b, c \in \mathbb{F}$. Se $ab = c$ e quaisquer dois elementos de a, b ou c são positivos, então o terceiro também é positivo.

Demonstração. Se $a > \overline{0}$ e $b > \overline{0}$, então o axioma *O1* implica que $c > \overline{0}$. Agora, consideremos $a > \overline{0}$ e $c > \overline{0}$ e, por absurdo, suponhamos que $b \leq \overline{0}$. Neste caso, segue do axioma *O2* que

$$\overline{0} \leq a(-b) = -(ab) = -c < \overline{0},$$

o que é impossível. $\square$

Desafio!

Exercício 2.2.8. Demonstre o seguinte resultado.

Corolário 2.2.9. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo ordenado e $a \in \mathbb{F}$.

(i) $\overline{1} > \overline{0}$;

(ii) Se $a > \overline{0}$, então $a^{-1} > \overline{0}$;

(ii) Se $a < \overline{0}$, então $a^{-1} < \overline{0}$.

Sugestão: Para resolver o item (a), escreva $\overline{1}a = a$; Depois escreva $aa^{-1} = \overline{1}$ e use o item (a) para provar os itens (b) e (c).

Exercício 2.2.10. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo ordenado e $a, b, c, d \in \mathbb{F}$. Prove que

$$a < b \quad \text{e} \quad c < d \Longrightarrow a + c < b + d.$$

PARE E PENSE: Suponhamos que $a > \overline{0}$. Como $\overline{1}a = a$, o Teorema 2.2.7 implica que $\overline{1} > \overline{0}$. Aplicando o Teorema 2.2.6, vemos que $\overline{1}+\overline{1} > \overline{1} > \overline{0}$ e um argumento indutivo, ou seja, uma demonstração por indução, mostra que podemos encontrar uma cópia de $\mathbb{N}$ "embutida" em qualquer corpo ordenado. Da mesma forma, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ também têm cópias únicas em qualquer corpo ordenado.

Notação 2.2.11. Você pode usar a notação padrão para intervalos sobre qualquer corpo ordenado $\mathbb{F}$. São as seguintes:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{F} : a < x < b\}$;
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{F} : a \leq x < b\}$;
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{F} : a < x \leq b\}$;
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{F} : a \leq x \leq b\}$;
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{F} : a < x\}$;
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{F} : a \leq x\}$;
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{F} : x < b\}$;
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{F} : x \leq b\}$;
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{F}$.

Também é útil começar a visualizar os elementos de um corpo ordenado qualquer $\mathbb{F}$ como pontos sobre uma reta. Por exemplo, na Figura 2.2 estão representados os gráficos lineares dos seguintes intervalos:

a) $[-4, 7] = \{x \in \mathbb{F} : -4 \leq x \leq 7\}$;

b) $(2, 5) = \{x \in \mathbb{F} : 2 < x < 5\}$;

c) $[1, 3) = \{x \in \mathbb{F} : 1 \leq x < 3\}$;

d) $(-\infty, -1] = \{x \in \mathbb{F} : x \leq -1\}$;

e) $(7, \infty) = \{x \in \mathbb{F} : 7 < x\}$.

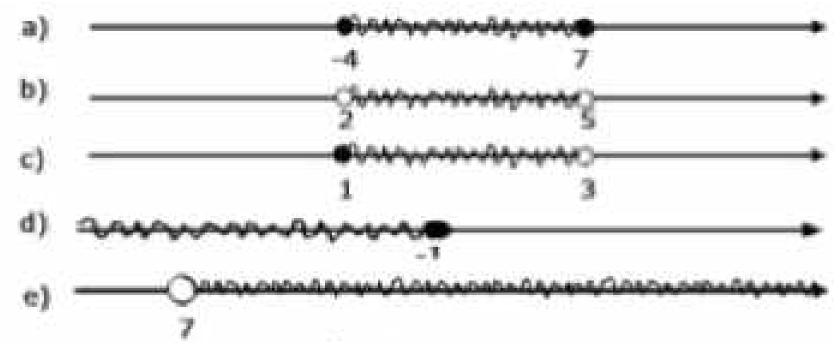

FIGURA 2.2: Fonte: http://pt.slideshare.net/shscremin/conjuntos-e-intervalos

5^a aula
(08/04/2016 - 18/04/2016)
O axioma do completamento

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender os conceitos de cotas inferior e superior;
- Compreender os conceitos de ínfimo e supremo;
- Compreender o axioma do completamento.

2.3 O axioma do completamento

Todos os axiomas vistos até agora são consequências óbvias da Álgebra elementar. O que não está claro ainda é que eles não são suficientes para caracterizar o conjunto dos números reais. Como $\mathbb{Q}$ satisfaz todos eles, o seguinte teorema mostra que o objetivo ainda não foi alcançado .

Teorema 2.3.1. Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2, ou simbolicamente,

$$\alpha^2 = 2 \Longrightarrow \alpha \notin \mathbb{Q}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar esta afirmação com um argumento de contradição, assumindo nossa hipótese e negando a tese. Suponhamos que $\alpha \in \mathbb{Q}$ e $\alpha^2 = 2$. Então, existem $m, n \in \mathbb{N}$ relativamente primos (sem fatores comuns) tais que $\alpha = m/n$. Por hipótese,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \alpha^2 = 2 \Longrightarrow m^2 = 2n^2, \tag{2.1}$$

o que mostra que m^2 é par. Como o quadrado de um número inteiro ímpar é sempre ímpar, então segue que m deve ser par, i.e., $m = 2r$, para algum $r \in \mathbb{N}$. Substituindo isto em (2.1), vemos que

$$(2r)^2 = m^2 = 2n^2 \Longrightarrow 2r^2 = n^2,$$

o que implica que n também é par. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2k = n$, o que contradiz o fato de m e n serem relativamente primos. Portanto, não existe tal α em $\mathbb{Q}$. $\square$

Desafio!

Exercício 2.3.2. Prove que a equação $x^2 = 3$ não tem solução racional.

Exercício 2.3.3. O Teorema 2.3.1 mostrou que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Use este fato para provar que $-\sqrt{2}$ e $1+\sqrt{2}$ também não são racionais .

PARE E PENSE: Você sabe que $\sqrt{2}$ é um número real e, portanto, percebe que está faltando adicionar alguma ideia ao conjunto de axiomas apresentados para concluir a caracterização do conjunto dos números reais. Esta ideia é a noção de "completamento". O axioma do completamento é mais complicado de se entender do que os axiomas anteriores e serão necessárias algumas definições prévias para estabelecê-lo.

Definição 2.3.4. Um subconjunto A de um corpo ordenado $\mathbb{F}$ é

- *limitado superiormente*, se existir $M \in \mathbb{F}$ tal que $M \geq x$, para todo $x \in A$. Neste caso, dizemos que M é uma *cota superior de* A;

- *limitado inferiormente*, se existir $M \in \mathbb{F}$ tal que $M \leq x$, para todo $x \in A$. Neste caso, dizemos que M é chamado de *cota inferior de* A;

- Se $A \in \mathbb{F}$ é limitado inferiormente e superiormente, dizemos que A é um conjunto *limitado*, ou simplesmente que A é limitado.

PARE E PENSE: Não há exigência alguma de que as cotas superiores ou inferiores de um conjunto A pertençam a A. Elas até podem pertencer, mas tipicamente não pertencem. Por exemplo, se $A = (-\infty, 0)$, então qualquer elemento de $[0, \infty)$ é uma cota superior de A, mas nenhum elemento de $[0, \infty)$ pertence a A. Por outro lado, se $B = (-\infty, 0]$, então $[0, \infty)$ também contém todos as cotas superiores de B, mas neste caso 0 é uma cota superior que pertence ao conjunto.

SAIBA MAIS: Um caso extremo nessa discussão é o $\emptyset$ quando considerado como um subconjunto de um corpo ordenado $\mathbb{F}$. Neste caso, um argumento de vacuidade mostra que todo elemento de $\mathbb{F}$ é cota superior e inferior de $\emptyset$ ao mesmo tempo, mas obviamente nenhum deles pertence a $\emptyset$.
Além disso, nem todos os subconjuntos de $\mathbb{F}$ possuem cota superior ou inferior. Por exemplo, $(-\infty, 0)$ não é limitado inferiormente, enquanto que $[0, \infty)$ não é limitado superiormente. O conjunto dos inteiros $\mathbb{Z} \subset \mathbb{F}$ não possui cota superior nem cota inferior.

Se M é uma cota superior de um conjunto A, então todo $x \geq M$ também é cota superior de A. A consideração dos exemplos que acabamos de ver nos leva a suspeitar que dentre as cotas superiores de um conjunto, deve existir uma menor que todas as outras e, analogamente, dentre todas as cotas inferiores de um conjunto, deve existir uma maior que todas as outras. Por exemplo, 2 e 7 são, respectivamente, a maior cota inferior e a menor cota superior do conjunto $[2, 7)$. Esta é a ideia básica do completamento.

Desafio!

Exercício 2.3.5. Considerando o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

a) Encontre uma cota superior para $A = \{5, 6, \ldots, 10\}$.

b) Encontre uma cota superior para $A = \{1/5, 7/6, 22/7, 41/10\}$.

c) Dê um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{Q}$ que não possui cota superior.

d) Dê um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{Q}$ que não possui cota inferior.

Definição 2.3.6. Seja A um subconjunto de um corpo ordenado $\mathbb{F}$.

- Se A é limitado superiormente, dizemos que $s \in \mathbb{F}$ é o *supremo de A* se s for a menor cota superior de A, ou seja, se

  a) s é uma cota superior de A; e

  b) se α é qualquer outra cota superior de A, então $s \leq \alpha$.

  Neste caso, denotamos $s = \sup A$.

- Se A é limitado inferiormente, dizemos que $t \in \mathbb{F}$ é o *ínfimo de A* se t for a maior cota inferior de A, ou seja, se

  a) t é uma cota inferior de A; e

  b) se α é qualquer outra cota inferior de A, então $t \geq \alpha$.

Neste caso, denotamos $t = \inf A$.

Teorema 2.3.7. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo ordenado e $A \subset \mathbb{F}$ um subconjunto não vazio. Se A tem um supremo, então este supremo é único.

Demonstração. Suponha que s_1 e s_2 são supremos de A. Então, por um lado temos que s_1 é supremo e s_2 é uma cota superior de A, o que implica que $s_1 \leq s_2$. Por outro lado, s_2 é supremo e s_1 é cota superior de A e vemos que $s_2 \leq s_1$. Portanto, $s_1 = s_2$. $\square$

Desafio!

Exercício 2.3.8. Demonstre o seguinte resultado.

Teorema 2.3.9. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo ordenado e $A \subset \mathbb{F}$ um subconjunto não vazio. Se A tem um ínfimo, então este ínfimo é único.

Sugestão: Siga as ideias da demonstração do teorema anterior.

SAIBA MAIS: É comum assumir que $\inf \emptyset = -\infty$ e $\sup \emptyset = \infty$. Mas note que $-\infty$ e ∞ não são elementos de $\mathbb{F}$. Isto é só uma notação que representa o fato de que qualquer elemento de $\mathbb{F}$ é cota inferior ou cota superior de $\emptyset$.

Teorema 2.3.10. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo ordenado, $A \subset \mathbb{F}$ e $\alpha \in \mathbb{F}$.

a) $$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} (\alpha, \infty) \cap A = \emptyset & \text{e} \\ (\alpha - \varepsilon, \alpha] \cap A \neq \emptyset \quad , & \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$$

b) $$\alpha = \inf A \iff \begin{cases} (-\infty, \alpha) \cap A = \emptyset & \text{e} \\ [\alpha, \alpha + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad , & \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Demonstração. Vamos demonstrar o item (a) usando um argumento de contradição. A demonstração do item (b) é semelhante e, portanto, você pode resolver facilmente como exercício seguindo as ideias usadas aqui. (Veja a Figura 2.3)

(a) ($\Longrightarrow$) Se $(\alpha, \infty) \cap A \neq \emptyset$, então $\exists x \in A$ tal que $\alpha < x$. Mas isto contradiz o fato de $\alpha = \sup A$. Agora, se existir $\varepsilon > 0$ tal que $(\alpha - \varepsilon, \alpha] \cap A = \emptyset$, então $\alpha - \varepsilon/2$ é uma cota superior de A menor que α, o que contraria novamente o fato de $\alpha = \sup A$.

($\Longleftarrow$) A hipótese $(\alpha, \infty) \cap A = \emptyset$ implica que $\sup A \leq \alpha$. Mas neste caso, se $\sup A < \alpha$, então existe $x \in (\sup A, \alpha) \cap A$, o que é uma contradição, pois $\sup A \geq x$, para todo $x \in A$. Portanto, $\alpha = \sup A$. $\square$

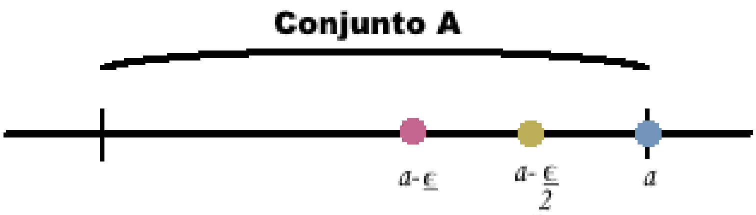

FIGURA 2.3: Representação gráfica da demonstração do item (a) do Teorema 2.3.10.

PARE E PENSE: Você poderia estar se perguntando por que os intervalos no teorema anterior são $(\alpha-\varepsilon,\alpha]$ e $[\alpha,\alpha+\varepsilon)$ ao invés de $(\alpha-\varepsilon,\alpha)$ e $(\alpha,\alpha+\varepsilon)$, respectivamente. Mas, basta considerar o caso $A=\{\alpha\}$ para ver que o teorema não seria verdadeiro se considerássemos os intervalos abertos. Entretanto, quando $\sup A\notin A$ ou $\inf A\notin A$, os intervalos podem ser abertos, como mostra o próximo corolário.

Corolário 2.3.11. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo ordenado e $A\subset\mathbb{F}$ não vazio.

a) Se A é limitado superiormente e $\alpha=\sup A\notin A$, então $(\alpha-\varepsilon,\alpha)\cap A$ é infinito, para todo $\varepsilon>0$;

b) Se A é limitado inferiormente e $\beta=\inf A\notin A$, então $(\beta,\beta+\varepsilon)\cap A$ é infinito, para todo $\varepsilon>0$.

Demonstração. (a) Seja $\varepsilon>0$. De acordo com o Teorema 2.3.10, existe $x_1\in(\alpha-\varepsilon,\alpha]\cap A$. Mas, por hipótese $\alpha\notin A$, ou seja, $x_1<\alpha$. Da mesma forma, considerando $\varepsilon/2>0$ encontramos $x_2\in(\alpha-\varepsilon/2,\alpha]\cap A$. Continuando sucessivamente, vemos que para cada $n\in\mathbb{N}$ deve existir $x_n\in(\alpha-\varepsilon/n,\alpha]\cap A$. Logo, $x_n\in A$, $\forall n\in\mathbb{N}$ e

$$x_n\in(\alpha-\varepsilon/n,\alpha]\subset(\alpha-\varepsilon/(n-1),\alpha]\subset\cdots\subset(\alpha-\varepsilon/2,\alpha]\subset(\alpha-\varepsilon,\alpha],\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

O conjunto $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ é infinito e está contido em $(\alpha-\varepsilon,\alpha)\cap A$ e isto conclui a demonstração.
(b) A demonstração deste item é similar à do item (a), portanto deixamos como exercício. $\square$

PARE E PENSE: O Teorema 2.3.1 mostra que o conjunto $A=\{x : x^2<2\}$ não possui supremo em $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$. (se possuísse, existiria $\alpha\in\mathbb{Q}$ tal que $\alpha^2=2$.) De certa forma, isto significa que se dispusermos os elementos de $\mathbb{Q}$ sobre uma reta, resguardando a ordem usual dos números reais, haverá um buraco no lugar onde este supremo deveria estar. Mas podemos evitar estes buracos se usarmos um último axioma.

Desafio!

Exercício 2.3.12. Prove que se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, então

$$\sup\, A = \inf\{x : x \text{ é uma cota superior para } A\}.$$

Exercício 2.3.13. Prove que se α é uma cota superior de A e $\alpha \in A$, então $\alpha = \sup\, A$.

Exercício 2.3.14. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados superiormente. Prove que o conjunto $A + B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$ é limitado superiormente e, além disso, que $\sup\,(A + B) = \sup\, A + \sup\, B$.

Exercício 2.3.15. Se $A \subset \mathbb{Z}$ é limitado inferiormente, então A possui pelo menos um elemento.

Definição 2.3.16. (Axioma do completamento) Dizemos que um corpo ordenado $\mathbb{F}$ é *completo*, se todo subconjunto não vazio e limitado superiormente possuir supremo.

Daqui em diante, assumimos a existência de um corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, chamado de conjunto dos *números reais*.

SAIBA MAIS: Na Teoria Ingênua do Conjuntos pode ser provado que se $(\mathbb{F}_1, +, \times)$ e $(\mathbb{F}_2, \oplus, \otimes)$ são corpos ordenados completos, então existe uma bijeção $i : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ tal que

- $i(a + b) = i(a) \oplus i(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{F}_1;$
- $i(a \times b) = i(a) \otimes i(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{F}_1;$
- $a < b$ em $\mathbb{F}_1 \iff i(a) < i(b)$ em $\mathbb{F}_2$.

Tal função i é chamada de *isomorfismo de ordem* e sua existência mostra que, na verdade, todos os corpos ordenados completos podem ser considerados o mesmo corpo. Em outras palavras, $\mathbb{R}$ é essencialmente único.

Toda afirmação sobre limitantes superiores tem uma afirmação equivalente para limitantes inferiores.

Corolário 2.3.17. Todo subconjunto não vazio limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ possui ínfimo.

Demonstração. Um resumo da demonstração é o seguinte: seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente. Então, o conjunto $-A = \{-x : x \in A\}$ é não vazio e limitado superiormente. Como $\mathbb{R}$ é completo, então existe $\alpha = \sup(-A)$. É possível provar que $\beta = -\alpha = \inf A$, concluindo a demonstração. $\square$

Desafio!

Exercício 2.3.18. Determine o ínfimo e o supremo dos seguintes conjuntos.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;

d) $D = \{1\} \cup (2, 3] \cup (4, 10)$;

e) $E = \{n/(n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$;

Exercício 2.3.19. Prove que se $0 \leq x < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, então $x = 0$.

Na próxima aula deste módulo mostraremos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = 2$. Isto mostrará que $\mathbb{R}$ não possui a deficiência (os buracos) de $\mathbb{Q}$. Mas antes vejamos algumas consequências do Axioma do Completamento.

6^a aula (15/04/2016 - 25/04/2016) Consequências dos axiomas

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender as diferenças entre o corpo dos racionais e o corpo dos reais;
- Aprender as propriedades da função módulo;
- Compreender o conceito de métrica;
- Compreender a noção de distância usual sobre $\mathbb{R}$;

2.4 Consequências do Axioma do Completamento

A propriedade do completamento é o que separa a Análise da Geometria e da Álgebra. Na Análise Matemática são necessários argumentos de aproximação, de infinito (muito grande) e de infinitésimo (muito pequeno), e visualizações mais dinâmicas que as utilizadas em Álgebra e Geometria clássica. O restante deste curso está amplamente ligado à aplicações da noção de completamento.

Teorema 2.4.1. (Princípio de Arquimedes) Se $a \in \mathbb{R}$, então existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $a < n_a$.

Demonstração. Suponha por contradição que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a é uma cota superior de $\mathbb{N}$ e o axioma do completamento garante que existe $\beta = \sup \mathbb{N}$. Segue do Teorema 2.3.10 que $(\beta - 1, \beta] \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$, ou seja, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \in (\beta - 1, \beta] \Longrightarrow \beta - 1 < m \Longrightarrow \beta < m + 1 \in \mathbb{N},$$

o que é uma contradição. $\square$

Os resultados a seguir são variações desta ideia.

Corolário 2.4.2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a > 0$. Então,

a) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $an > b$;

b) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < a$;

c) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < a < n$.

Demonstração. Para provar (a), basta usar o Teorema 2.4.1 para encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > b/a$. O item (b) segue de (a) considerando $b = 1$.
O Teorema 2.4.1 garante que $A = \{n \in \mathbb{N} : n > a\}$ é não vazio. Recordando que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo n, segue que $n-1 < a < n$. $\square$

Corolário 2.4.3. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, então $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ e $I \cap \mathbb{Q}^c \neq \emptyset$.

Definição 2.4.4. Se $A \subset \mathbb{R}$ intersecta todos os intervalos de $\mathbb{R}$, dizemos que A é *denso* em $\mathbb{R}$.

O corolário anterior diz que os conjuntos dos números racionais e dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$.

2.5 Comparações entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Nada do que vimos até agora garante que $\mathbb{Q}$ é diferente de $\mathbb{R}$. No Teorema 2.3.1 vimos que a equação $x^2 = 2$ não tem solução em $\mathbb{Q}$. O próximo teorema mostra que a equação tem solução em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{Q}$ tem uma cópia dentro de $\mathbb{R}$, segue que $\mathbb{R}$ é "maior" do que $\mathbb{Q}$, i.e., $\mathbb{Q}$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.5.1. Existe $a \in \mathbb{R}$ positivo tal que $a^2 = 2$.

Demonstração. Seja $A = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 < 2\}$. Como $1 \in A$, então $A \neq \emptyset$. Se $x \geq 2$, então segue do item (c) do Teorema 2.2.6 que $x^2 \geq 4 > 2$, o que implica que $x \notin A$. Isto mostra que $A \subset (-\infty, 2]$ e, portanto, A é limitado superiormente. O axioma do completamento diz que existe $\alpha = \sup A$. Vamos mostrar que $\alpha^2 = 2$.

De fato, suponha primeiro que $\alpha^2 < 2$. Como α é positivo, segue então que $(2-\alpha^2)/(2\alpha+1) > 0$. De acordo com o item (b) do Corolário 2.4.2, existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1} \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{2\alpha+1}{n} < 2-\alpha^2.$$

Mas isto implica que

$$\begin{aligned} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 &= \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= \alpha^2 + \frac{1}{n}\left(2\alpha + \frac{1}{n}\right) \\ &< \alpha^2 + \frac{2\alpha+1}{n} \\ &< \alpha^2 + (2-\alpha^2) \\ &= 2, \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de que $\alpha = \sup A$.

Agora, suponha que $\alpha^2 > 2$. Neste caso, $\alpha^2 - 2 > 0$ e segue novamente do item (b) do Corolário 2.4.2 que existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha} \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{2\alpha}{n} < \alpha^2 - 2.$$

Mas isto leva a

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 &= \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &> \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} \\ &> \alpha^2 - (\alpha^2 - 2) \\ &= 2, \end{aligned}$$

que outra vez contradiz o fato de que $\alpha = \sup A$.

Portanto, $\alpha^2 = 2$. $\square$

PARE E PENSE: Os Teoremas 2.3.1 e 2.5.1 nos mostram que $\mathbb{Q}$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, mas existem elementos de $\mathbb{R}$ que não pertencem a $\mathbb{Q}$. Isto nos leva a questionar: "quantos elementos $\mathbb{R}$ tem a mais que $\mathbb{Q}$?"; ou em outras palavras, qual a relação entre card$(\mathbb{R})$ e card$(\mathbb{Q})$?

Os próximos teoremas respondem esta questão.

Teorema 2.5.2. O conjunto dos números racionais é infinito enumerável, i.e., card$(\mathbb{Q}) = \aleph_0$.

Demonstração. Primeiro, observe que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, logo $\aleph_0 =$ card$(\mathbb{N}) \leq$ card$(\mathbb{Q})$. Por outro lado, todo $q \in \mathbb{Q}$ tem um única representação fracionária reduzida $q = m(q)/n(q)$, onde $m(q) \in \mathbb{Z}$ e $n(q) \in \mathbb{N}$. Isto garante a existência de uma função injetora $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ definida por $f(q) = (m(q), n(q))$. Assim, obtemos também que card$(\mathbb{Q}) \leq$ card$(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) = \aleph_0$.

Portanto, card$(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. $\square$

Em 1874, Georg Cantor provou que $\mathbb{R}$ não é enumerável. O teorema a seguir corresponde ao seu famoso "argumento diagonal" de 1891.

Teorema 2.5.3. card$(\mathbb{R}) > \aleph_0$.

Demonstração. Vamos provar que card$([0,1]) > \aleph_0$. Suponha por contradição que card$([0,1]) < \aleph_0$. Como $[0,1]$ é infinito, então deve ser enumerável, ou seja, deve existir uma função bijetora $\alpha : \mathbb{N} \to [0,1]$. Segue que

$$[0,1] = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Cada $x \in [0,1]$ pode ser escrito na forma decimal

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{10^n}, \quad \text{onde} \quad x(n) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Esta representação decimal não é necessariamente única. E.g.,

$$\frac{1}{2} = \begin{cases} \dfrac{5}{10} = \dfrac{5}{10} + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{0}{10^n} & \text{ou} \\[2ex] \dfrac{4}{10} + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 0,4 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \cdots = 0,4999\ldots & . \end{cases}$$

Neste caso, é possível escolher $x(n)$ constante igual a 9 ou 0, a partir de um certo $n_0 \in \mathbb{N}$. Sempre que esta escolha for possível, optaremos por finalizar a representação com uma sequência de noves. Com esta decisão, a representação decimal de x torna-se única e podemos escrever e enumerar os elementos de $[0,1]$ da seguinte forma[2]:

$$\begin{array}{lcccccc}
\alpha_1 = 0, & \underline{\alpha_1(1)} & \alpha_1(2) & \alpha_1(3) & \alpha_1(4) & \alpha_1(5) & \cdots \\
\alpha_2 = 0, & \alpha_2(1) & \underline{\alpha_2(2)} & \alpha_2(3) & \alpha_2(4) & \alpha_2(5) & \cdots \\
\alpha_3 = 0, & \alpha_3(1) & \alpha_3(2) & \underline{\alpha_3(3)} & \alpha_3(4) & \alpha_3(5) & \cdots \\
\alpha_4 = 0, & \alpha_4(1) & \alpha_4(2) & \alpha_4(3) & \underline{\alpha_4(4)} & \alpha_4(5) & \cdots \\
\alpha_5 = 0, & \alpha_5(1) & \alpha_5(2) & \alpha_5(3) & \alpha_5(4) & \underline{\alpha_5(5)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Agora definimos $z \in [0,1]$ escolhendo $z(n) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ tal que $z(n) \neq \alpha_n(n)$. Assim, temos

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(n)}{10^n}$$

e como $z \in [0,1]$, então deve existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $z = \alpha_N$. Mas isto é impossível, pois por construção z difere de α_N na N-ésima casa decimal.

Esta contradição mostra que card$(\mathbb{R}) > \aleph_0$. $\square$

Desafio!

Exercício 2.5.4. Prove que card$((0,1))$ = card$(\mathbb{R})$ e conclua que card$([0,1])$ = card$(\mathbb{R})$.

Sugestão: Considere as funções $f(x) = 1/(1+|x|)$ e $g(y) = 1/(1-|y|)$

[2] A demonstração do teorema 2.5.3 é chamada de "argumento diagonal" porque nela se constrói um novo número z utilizando os elementos da diagonal principal da tabela acima de modo que $z(n) \neq \alpha(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

SAIBA MAIS: Por volta da virada do século 19, estas então novas ideias sobre conjuntos infinitos eram muito controversas na Matemática. Isto porque estas ideias não eram intuitivas. Por exemplo, o conjunto dos números racionais é infinito enumerável, enquanto que o conjunto dos números irracionais é “tão infinito” que não pode ser contado. Mais ainda, entre quaisquer dois números racionais existe uma quantidade não enumerável de números irracionais. Parecia, na época, que existiam poucas ou demais lacunas (buracos) nos conjuntos para tornar isto possível. Tal situação aparentemente paradoxal é como um tapa na cara de nossa intuição, que foi desenvolvida com a ideia de conjuntos finitos.

Mas, isto nos faz pensar novamente na questão das cardinalidades e na Hipótese do Continuum do capítulo anterior. Em sua grande maioria, pessoas que trabalham com Análise Matemática assumem que a Hipótese do continuum é verdadeira. Esta hipótese e o Teorema 2.5.3 implicam que

$$A \subset \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \text{card}(A) \leq \aleph_0 \quad \text{ou} \quad \text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{R}) = \text{card}(P(\mathbb{N})).$$ [a]

Como $P(\mathbb{N})$ tem muito mais elementos que $\mathbb{N}$, qualquer subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ é considerado como sendo um conjunto menor, no sentido da cardinalidade, mesmo sendo infinito. Isto vai de encontro à intuição de muitos estudantes iniciantes que não estão acostumados a pensar no conjunto $\mathbb{Q}$ ou em qualquer outro conjunto infinito como menor. Mas acontece que isto pode ser um raciocínio muito útil, visto que a união de uma quantidade infinita enumerável de elementos de uma quantidade enumerável de conjuntos é ainda enumerável, e isto pode ser explorado de diversas formas.

[a] Como $\aleph_0$ é o menor cardinal infinito, usamos $\aleph_1$ para representar o menor cardinal não enumerável. Você também pode encontrar em outros textos a notação card$(\mathbb{R}) = c$, onde c é a letra c escrita no estilo alemão antigo, representando a “cardinalidade do Continuum”. Desta forma, assumindo a Hipótese do continuum, segue que $\aleph_0 < \aleph_1 = c$.

2.6 Propriedades métricas

Finalizamos o capítulo formalizando a noção de distância conhecida em $\mathbb{R}$. Os axiomas de ordem sobre um corpo $\mathbb{F}$ nos permitem introduzir uma noção de distância entre pontos de $\mathbb{F}$. Para fazer isto, começamos com a seguinte definição:

Definição 2.6.1. Seja $\mathbb{F}$ um corpo ordenado. A *função módulo* sobre $\mathbb{F}$ é a função $|\cdot| : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ definida por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, se } x \geq 0 \\ -x & \text{, se } x < 0. \end{cases}$$

Se $x \in \mathbb{F}$, então $|x|$ também é chamado de *valor absoluto de x*.

As principais propriedades do valor absoluto de um elemento de $\mathbb{F}$ estão contidas no seguinte teorema.

Teorema 2.6.2. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo ordenado e $x, y \in \mathbb{F}$. Então,

a) $|x| \geq 0$; e $|x| = 0 \iff x = 0$;

b) $|x| = |-x|$;

c) $-|x| \leq x \leq |x|$;

d) $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$;

e) $|x + y| \leq |x| + |y|$; (Desigualdade triangular)

Demonstração. (a) O fato de que $|x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{F}$, segue do axioma *O2*. Como $0 = -0$, então a segunda parte é óbvia.
(b) Consideramos dois casos: primeiro, se $x \geq 0$, então $-x \leq 0$. Assim, $|-x| = -(-x) = x = |x|$; segundo, se $x < 0$, então $-x > 0$ e $|x| = -x = |-x|$.
(c) Novamente, consideramos dois casos: primeiro, se $x \geq 0$, então $-|x| = -x \leq x = |x|$; segundo, se $x < 0$, então $-|x| = -(-x) = x \leq -x = |x|$.
(d) ($\Rightarrow$) Suponha que $|x| \leq y$. Multiplicando por -1, obtemos $-y \leq -|x|$. Segue destas duas inequações e do item (c) que

$$-y \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq y \quad \Longrightarrow -y \leq x \leq y.$$

($\Leftarrow$) Agora suponha que $-y \leq x \leq y$. Se $x \geq 0$, então $|x| = x$ e segue que $-y \leq |x| \leq y$. Se $x < 0$, então $|x| = -x$ e multiplicando a inequação da hipótese por -1, temos $-y \leq -x \leq y$. Logo, $-y \leq |x| \leq y$. Portanto, em todos os casos temos $|x| \leq y$.
(e) Considerando as inequações $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, segue do Exercício 2.2.10 que $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Portanto, $|x + y| \leq |x| + |y|$ pelo item (d). $\square$

PARE E PENSE: Se $a \in \mathbb{R}$, então $\sqrt{a^2} = |a|$.
De fato, note que $a^2 = |a|^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{|a|^2}$. Por outro lado, como $|a| \geq 0$, segue que $\sqrt{|a|^2} = |a|$. Portanto, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Desafio!

Exercício 2.6.3. Mostre que: $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Sugestão: Use a desigualdade triangular.

Exercício 2.6.4. Mostre que: $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow |\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Exercício 2.6.5. Mostre que para $x, a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, tem-se

$$|x - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Aprendemos nos cursos de Geometria Analítica e de Cálculo a interpretar $|x-y|$ como a distância entre dois números x e y. Esta noção pode ser generalizada para a distância entre dois elementos de outros conjuntos.

Definição 2.6.6. Uma *métrica* sobre um conjunto A é qualquer função $d : A \times A \to \mathbb{R}_+$ que satisfaz as seguintes propriedades.

a) Para todo $x, y \in A, \quad d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

b) Para todo $x, y \in A, \quad d(x, y) = d(y, x)$;

c) Para todo $x, y, z \in A, \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

A propriedade do item (c) é a conhecida "*desigualdade triangular*" e o par (A, d) é chamado de *espaço métrico*.

Uma métrica é então uma função que define uma distância entre dois elementos de um conjunto.

Exemplo 2.6.7. Sejam A qualquer conjunto não vazio e $d : A \times A \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{se } x \neq y \\ 0 & , \text{se } x = y. \end{cases}$$

Pode-se provar sem grande esforço que (A, d) é um espaço métrico sobre $\mathbb{R}$. Esta (mais simples) métrica é chamada de *métrica discreta* e, como visto, pode ser definida em qualquer conjunto. Mas ela é mais útil como exemplo do que como ferramenta em demonstrações.

Desafio!

Exercício 2.6.8. Demonstre o seguinte resultado.

Teorema 2.6.9. Se $\mathbb{F}$ é um corpo ordenado, então a função $d : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{R}_+$ definida por $d(x, y) = |x - y|$ é uma métrica sobre $\mathbb{F}$.

Sugestão: A demonstração segue da verificação das propriedades métricas com o uso dos itens (a), (b) e (e) do Teorema 2.6.2. Tente provar isto como exercício.

SAIBA MAIS: A métrica sobre $\mathbb{R}$ obtida a partir da função módulo é chamada de *métrica usual* de $\mathbb{F}$. Existem outras métricas definidas para se lidar com problemas específicos (pois tornam a resolução mais simples), mas nós não precisaremos delas neste curso.

Módulo 3
Sequências e Séries Numéricas

Neste módulo você vai rever os conceitos de sequências e séries numéricas já estudados nos cursos de cálculo. Porém, o foco é diferente. Nossa atenção agora aponta para a fundamentação teórica que garante a validade dos testes de convergência e divergência.

Em Matemática, o conceito de sequência tem significado similar ao uso comum da palavra, que é a de sucessão de objetos, mas recebe uma definição precisa. Formalmente falando, uma sequência é uma função cujo domínio é um conjunto contável totalmente ordenado. Define-se o tamanho de uma sequência pela quantidade de elementos que esta possui, podendo existir sequências infinitas ou finitas.

Intuitivamente, o conceito de série numérica equivale à soma de infinitos termos. Entretanto, você já viu que o conceito de infinito não é simples e pode levar a imaginar coisas que não existem. Por isso é importante abandonar a definição de soma infinita e estabelecer formalmente o significado de série numérica como uma sequência (como você verá adiante).

7^a aula
(29/04/2016 - 09/05/2016)
Sequências numéricas

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender o conceito de sequências numéricas;
- Compreender os conceitos de limitação, convergência e divergência de sequências;
- Compreender o conceito e as propriedades das sequências monótonas.

3.1 Propriedades básicas

Começamos com a seguinte definição.

Definição 3.1.1. Uma *sequência em* $\mathbb{R}$ é uma função

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = x_n. \end{aligned}$$

Ao invés de usar a notação usual de funções por meio da fórmula $f(n) = x_n$ que define seu n-ésimo termo, em geral representamos uma sequência por meio de sua imagem

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_n = (x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

ou simplesmente por seu n-ésimo termo x_n.

Exemplo 3.1.2. Os primeiros 3 elementos da sequência $x_n = 1 - 1/n$ são $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 2/3$.

Exemplo 3.1.3. Os primeiros 3 elementos da sequência $a_n = 2^n$ são $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$.

Desafio!

Exercício 3.1.4. (a) Qual é o quarto elemento da sequência do Exemplo 3.1.2?
(b) Qual é o quarto elemento da sequência do Exemplo 3.1.3?

Exemplo 3.1.5. Dados $a, r \in \mathbb{R}$, a *sequência geométrica de termo inicial a e razão r* é definida por

$$(ar^{n-1}) = (a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}, \ldots).$$

Desconsiderando os casos triviais, $a = 0$ e $r = 0$, uma sequência geométrica sempre pode ser reconhecida pela relação

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

No exemplo anterior temos uma sequência geométrica com termo inicial $a = 2$ e razão $r = 2$.

Exemplo 3.1.6. Dados $a, d \in \mathbb{R}$, a *sequência aritmética de termo inicial a e razão ou diferença comum d* é definida por

$$(a + (n-1)d)_n = (a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots, a+(n-1)d, \ldots).$$

Uma sequência aritmética sempre pode ser reconhecida pela relação

$$x_{n+1} - x_n = d, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

SAIBA MAIS: Os exemplos anteriores mostram que algumas sequências podem ser definidas sem a ajuda de fórmulas explícitas, apenas usando fórmulas de recorrência. Este é um método indutivo de definição em que termos sucessivos da sequência são obtidos a partir de termos anteriores. A mais famosa dentre estas é a *sequência de Fibonacci*, definida por

$$\begin{array}{ccl} 1 & \longmapsto & x_1 = 1 \\ 2 & \longmapsto & x_2 = 1 \\ n > 2 & \longmapsto & x_n = x_{n-2} + x_{n-1}. \end{array}$$

Assim, seus primeiros termos são $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$.

PARE E PENSE: Nem sempre é conveniente usar $\mathbb{N}$ como domínio de uma sequência, como descrito na Definição 3.1.1. Por exemplo, a sequência x_n começando com os termos $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ pode ser descrita por $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$. Escrita desta forma, é natural representar $x_n = 2^n$, com domínio $\mathbb{Z}_+$, ou seja, $x_n = (2^{n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Portanto, desde que existe uma substituição simples para a variável da fórmula, não há razão que nos impeça de trocar convenientemente o domínio da sequência para obter uma fórmula mais agradável para sua representação. Em geral, o domínio de uma sequência pode ser qualquer subconjunto do tipo $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq N\}$, para algum $N \in \mathbb{Z}$ fixo.

Definição 3.1.7. Uma sequência x_n é *limitada* se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado, i.e., se existir $M > 0$ tal que $|x_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Desafio!

Exercício 3.1.8. Use a mesma ideia para definir sequências limitadas superiormente e sequências limitadas inferiormente.

Note que a sequência do Exemplo 3.1.2 é limitada, mas a sequência do Exemplo 3.1.3 não é, embora seja limitada inferiormente.

Exemplo 3.1.9. A sequência $x_n = 1 - 1/n$ do Exemplo 3.1.2 é limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1 (na verdade, ela é uma uma sequência limitada se consideramos M como sendo qualquer número maior ou igual a 1). Mas, além disso, percebe-se intuitivamente que os elementos desta sequência aproximam-se cada vez mais de 1, na medida em que n cresce. Mas o que isto quer dizer? Se considerarmos um intervalo centrado em 1 com raio bem pequeno, digamos 10^{-7}, será possível determinar um número natural n_0 a partir do qual todos os $x_n's$ estarão no intervalo $(1 - 10^{-7}, 1 + 10^{-7})$. Isto é o mesmo que dizer que

$$1 - 10^{-7} < x_n < 1 + 10^{-7}, \quad \forall n > n_0,$$

ou ainda, que $|x_n - 1| < 10^{-7}$, para todo $n > n_0$.

Observe que, como

$$|x_n - 1| = |1 - \frac{1}{n} - 1| = \frac{1}{n} < \frac{2}{n+1},$$

então $n > 2 \times 10^7 - 1$ implica

$$\frac{2}{n+1} < 10^{-7} \Longrightarrow |x_n - 1| < 10^{-7}.$$

Em geral, dado um número positivo ε, não importa o quão pequeno ele seja, se n_0 for um natural satisfazendo $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$, então

$$|x_n - 1| < \varepsilon.$$

Isto motiva a seguinte definição.

Definição 3.1.10. Dizemos que uma sequência x_n *converge para* $L \in \mathbb{R}$, se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \Longrightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Neste caso, dizemos que L é o *limite* de x_n e denotamos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \quad \text{ou} \quad x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} L \quad \text{ou} \quad x_n \longrightarrow L.$$

Caso contrário, dizemos que x_n *diverge ou é divergente*.

Exemplo 3.1.11. A sequência $x_n = 1 - 1/n$ do Exemplo 3.1.2 converge para $L = 1$. De fato, dado ε, segue da teoria do capítulo anterior que existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \varepsilon$. Logo, se $n \geq N$, então

$$|x_n - 1| = \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Portanto, $x_n \longrightarrow 1$.

Exemplo 3.1.12. A sequência $x_n = 2^n$ do Exemplo 3.1.3 é divergente. Para verificar esta afirmação, suponhamos por contradição que $x_n \longrightarrow L$, para algum $L \in \mathbb{R}$. Desta forma, dado $\varepsilon = 1$, deve existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |2^n - L| < 1 \Longrightarrow -1 < L - 2^n < 1 \Longrightarrow L < 2^n + 1.$$

Mas por outro lado, $n + 1 > n \geq N$ e

$$x_{n+1} - L = 2^{n+1} - L > 2^{n+1} - (2^n + 1) = (2^{n+1} - 2^n) - 1 = 2^n(2 - 1) - 1 = 2^n - 1 \geq 1 = \varepsilon.$$

Isto viola a condição sobre N. Portanto, $x_n = 2^n$ diverge.

Desafio!

Exercício 3.1.13. Use a Definição 3.1.10 para provar que:

(a) $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$.

Exercício 3.1.14. Mostre que existe um natural n_0 tal que

$$\left|\frac{n+3}{n} - 1\right| < 10^{-9}, \forall n \geq n_0.$$

Exercício 3.1.15. A sequência $x_n = sen(n\pi)$ converge ou diverge?

Definição 3.1.16. • Uma sequência x_n *diverge para* ∞ se

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exists N = N(a) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \Longrightarrow x_n \geq a.$$

Neste caso, denotamos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{ou} \quad x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{ou} \quad x_n \longrightarrow \infty.$$

• Uma sequência x_n *diverge para* $-\infty$ se

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exists N = N(a) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \Longrightarrow x_n \leq a.$$

Neste caso, denotamos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{ou} \quad x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{ou} \quad x_n \longrightarrow -\infty.$$

PARE E PENSE: É um erro comum esquecer que $x_n \longrightarrow \infty$ na verdade significa que a sequência diverge de uma forma particular. Não se engane pela notação sugerindo o tratamento de ∞ como um número real.

Exemplo 3.1.17. É fácil provar que a sequência $x_n = 2^n$ diverge para ∞.

O próximo teorema garante a unicidade do limite de uma sequência (quando existir).

Teorema 3.1.18. O limite L de uma sequência convergente é único.

Demonstração. Suponha que L_1 e L_2 são limites de uma sequência convergente x_n. Pela Definição 3.1.10, dado $\varepsilon > 0$, existem números naturais N_1 e N_2 tais que

$$\begin{cases} |x_n - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2} & , \text{ se } n \geq N_1, \quad \text{e} \\ \\ |x_n - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} & , \text{ se } n \geq N_2. \end{cases}$$

Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Se $n \geq N$, então $n \geq N_1$, $n \geq N_2$ e segue da desigualdade triangular que

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - x_n + x_n - L_2| = |(L_1 - x_n) + (x_n - L_2)| \leq |L_1 - x_n| + |x_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como ε é um número positivo arbitrário, segue do Exercício 2.3.19 que $L_1 = L_2$, o que prova a unicidade. $\square$

Agora vejamos que se L é o limite de uma sequência x_n, então qualquer intervalo aberto contendo L contém quase todos os elementos de x_n.

Teorema 3.1.19. A sequência x_n converge para L se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{n : x_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\}$ é finito.

Demonstração. $(\Longrightarrow)$ Seja $\varepsilon > 0$ e suponha que $x_n \longrightarrow L$. De acordo com a Definição 3.1.10, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |x_n - L| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < x_n - L < \varepsilon \Longrightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon \Longrightarrow x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon),$$

ou seja, $\{x_n : n \geq N\} \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Então, podemos concluir que $\{n : x_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\}$ está contido no conjunto finito $\{1, 2, \ldots, N - 1\}$.

$(\Longleftarrow)$ Considere $\varepsilon > 0$. Por hipótese, o conjunto $\{n : x_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\}$ é finito, então defina $N = 1 + \max\{n : x_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\}$. Desta forma, se $n \geq N$, então $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Portanto, $x_n \longrightarrow L$. $\square$

A seguir, vamos mostrar que toda sequência x_n convergente é limitada, ou seja, a imagem $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Corolário 3.1.20. Se x_n converge, então x_n é limitada.

Demonstração. Suponha que $x_n \longrightarrow L$. Segue do teorema anterior que existe uma quantidade finita de termos da sequência, digamos $x_1, x_2, \ldots, x_N$, que não pertencem a $(L-1, L+1)$. Logo, a sequência x_n está contida no conjunto limitado $(L-1, L+1) \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. $\square$

SAIBA MAIS: A recíproca deste corolário não é verdadeira. Por exemplo, $x_n = (-1)^n$ é limitada, mas não é convergente. A principal utilidade do Corolário 3.1.20 é como um primeiro teste rápido para verificar se uma determinada sequência poderia convergir ou não. Costuma ser mais fácil verificar se uma sequência é limitada do que determinar se ela é convergente. O corolário nos diz, pela contrapositiva, que se uma sequência não é limitada, então ela é divergente.

Desafio!

Exercício 3.1.21. Prove que a sequência $x_n = n^2$ não é convergente.

Exercício 3.1.22. Demonstre o seguinte Lema.

Lema 3.1.23. Se $x_n \longrightarrow L$, então $|x_n| \longrightarrow |L|$.

O próximo teorema permite analisar sequências complicadas dividindo-as em combinações de sequências mais simples.

Teorema 3.1.24. Sejam x_n e y_n duas sequências com limites L e M, respectivamente. Então,

a) $x_n + y_n \longrightarrow L + M$;

b) $x_n y_n \longrightarrow LM$;

c) $x_n / y_n \longrightarrow L/M$, desde que $M \neq 0$ e $y_n \neq 0$, para todo n suficientemente grande.

Demonstração. (a) Por hipótese e pela Definição 3.1.10, dado $\varepsilon > 0$, existem números naturais N_1 e N_2 tais que

$$\begin{cases} |x_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2} & \text{, se } n \geq N_1, \quad \text{e} \\ \\ |y_n - M| < \dfrac{\varepsilon}{2} & \text{, se } n \geq N_2. \end{cases}$$

Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Se $n \geq N$, então $n \geq N_1$, $n \geq N_2$ e segue da desigualdade triangular que

$$|(x_n + y_n) - (L + M)| = |(x_n - L) + (y_n - M)| \leq |x_n - L| + |y_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $x_n + y_n \longrightarrow L + M$.

(b) Seja $\varepsilon > 0$. Pelo Corolário 3.1.20, x_n é limitada, o que implica que a sequência $|x_n|$ também é limitada e, portanto, existe $\alpha = \sup |x_n|$. Podemos então escolher números naturais N_1 e N_2 tais que

$$\begin{cases} |x_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2(|M|+1)} & \text{, se } n \geq N_1, \quad \text{e} \\ \\ |y_n - M| < \dfrac{\varepsilon}{2\alpha} & \text{, se } n \geq N_2. \end{cases}$$

Se $N = \max\{N_1, N_2\}$, então $n \geq N$ implica $n \geq N_1$ e $n \geq N_2$ e, novamente, segue da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - LM| &= |x_n y_n - x_n M + x_n M - LM| \\ &= |x_n(y_n - M) + M(x_n - L)| \\ &\leq |x_n(y_n - M)| + |M(x_n - L)| \\ &= |x_n||y_n - M| + |M||x_n - L| \\ &\leq \alpha|y_n - M| + |M||x_n - L| \\ &< \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha} + |M|\frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $x_n y_n \longrightarrow LM$.

(c) Primeiro observe que devido ao item (b), basta provarmos que $1/y_n \longrightarrow 1/M$ (pense nisso!). Além disso, o lema anterior diz que $y_n \longrightarrow M \Longrightarrow |y_n| \longrightarrow |M|$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < |M|/2$. Como no item (a), vemos que existem números naturais N_1 e N_2 tais que

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |y_n - M| < \frac{M^2\varepsilon}{2}$$

e

$$\begin{aligned} n \geq N_2 &\Longrightarrow ||y_n| - |M|| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow -\varepsilon < |y_n| - |M| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |M| - \varepsilon < |y_n| < |M| + \varepsilon \\ &\Longrightarrow |M| - \varepsilon < |y_n| \\ &\Longrightarrow \frac{|M|}{2} = |M| - \frac{|M|}{2} < |M| - \varepsilon < |y_n| \\ &\Longrightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|M|}. \end{aligned}$$

Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Se $n \geq N$, então $n \geq N_1$, $n \geq N_2$ e

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - y_n}{y_n M}\right| = |M - y_n|\frac{1}{|y_n|}\frac{1}{|M|} < \frac{M^2\varepsilon}{2}\frac{2}{|M|}\frac{1}{|M|} = \varepsilon.$$

Portanto, $1/y_n \longrightarrow 1/M$. □

Desafio!

Exercício 3.1.25. Nas condições do teorema anterior, prove que $x_n - y_n \longrightarrow L - M$.

PARE E PENSE: Se você não for cuidadoso(a), poderá entender demais no teorema anterior e tentar usar sua recíproca que não é verdadeira. Por exemplo, considere as sequências $x_n = (-1)^n$ e $y_n = -x_n$. Sua soma, $x_n + y_n = 0$, seu produto, $x_n y_n = -1$ e seu quociente, $x_n/y_n = -1$, todos convergem, mas as sequências originais x_n e y_n divergem.

SAIBA MAIS: Pode ser mais fácil provar que uma sequência converge comparando-a com uma sequência conhecida do que analisá-la diretamente. Por exemplo, pode-se ver facilmente que a sequência $x_n = \text{sen}^2 n/n^3$ converge para 0, pois é dominada pela sequência $1/n^3$, i.e.,

$$0 \leq \left|\frac{\text{sen}^2 n}{n^3}\right| = \frac{|\text{sen}^2 n|}{|n^3|} \leq \frac{1}{n^3}.$$

O seguinte teorema torna esta ideia mais precisa. Ele é chamado de Teorema do Sanduíche ou Teorema do Confronto.

Teorema 3.1.26. (Teorema do Sanduíche) Sejam x_n, y_n e z_n sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

a) Se $x_n \longrightarrow L$ e $z_n \longrightarrow L$, então $y_n \longrightarrow L$;

b) Se $y_n \longrightarrow \infty$, então $z_n \longrightarrow \infty$;

c) Se $y_n \longrightarrow -\infty$, então $x_n \longrightarrow -\infty$;

Demonstração. (a) Seja $\varepsilon > 0$. Como $x_n \longrightarrow L$, então existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_1 \Longrightarrow x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \Longrightarrow L - \varepsilon \leq x_n.$$

Como $z_n \longrightarrow L$, então existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_2 \Longrightarrow z_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \Longrightarrow z_n \leq L + \varepsilon.$$

Logo, se $n \geq N = \max = \{N_1, N_2\}$, então $n \geq N_1$ e $n \geq N_2$ e segue que

$$L - \varepsilon \leq x_n \leq y_n \leq z_n \leq L + \varepsilon,$$

ou seja, $|y_n - L| < \varepsilon$. Portanto, $y_n \longrightarrow L$.

(b) Queremos provar que $z_n \longrightarrow \infty$, isto é, que para qualquer $a \in \mathbb{R}$ deve existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \geq a$, sempre que $n \geq N$.

Então, seja $a \in \mathbb{R}$. Como por hipótese $y_n \longrightarrow \infty$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \geq a$, sempre que $n \geq N$. Mas também por hipótese, temos que $y_n \leq z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$n \geq N \Longrightarrow a \leq y_n \leq z_n,$$

o que significa que $z_n \longrightarrow \infty$.

(c) A demonstração é muito parecida com a do item (b), então deixamos como exercício. $\square$

Desafio!

Exercício 3.1.27. Demonstre o item (c) do teorema anterior.

Exercício 3.1.28. Sabendo que $1/n \longrightarrow 0$ e $n \longrightarrow \infty$, use o Teorema do Sanduíche para provar os seguintes limites.

(a) $\dfrac{\cos n}{n} \longrightarrow 0$;

(b) $n^2 + n \longrightarrow \infty$;

(c) $\dfrac{n+1}{n^2+2n+1} \longrightarrow 0$.

Exercício 3.1.29. Demonstre o seguinte corolário do Teorema do Confronto:

Corolário 3.1.30. Se (y_n) é limitada e $x_n \longrightarrow 0$, então $x_n y_n \longrightarrow 0$.

3.2 Sequências monótonas

PARE E PENSE: Um dos principais problemas em se usar a definição para provar a convergência de uma determinada sequência é que para isto deve se conhecer previamente o limite. (mesmo sem 100% de certeza, neste caso a demonstração serviria para comprovar um palpite.) Mas acabamos de ver que este é um trabalho árduo e meticuloso. Isto dá origem a um dos melhores casos do problema do “ovo e da galinha”, onde se questiona quem surgiu primeiro (a convergência ou o limite?). Se tivermos os dois, a convergência e o limite, podemos usar a Definição 3.1.10 para comprovar o fato. As perguntas que queremos responder agora são as seguintes:

- Como determinar o limite antes mesmo de saber se a sequência converge?
- Como determinar se uma sequência converge ou diverge? (claro, antes de se conhecer o limite.)

Sem surpreender, começamos com o caso mais simples.

Definição 3.2.1. Dizemos que uma sequência x_n é *crescente* se $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ela será *estritamente crescente* se $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que uma sequência x_n é *decrescente* se $x_{n+1} \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ela será *estritamente decrescente* se $x_{n+1} < x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Quando x_n é crescente ou decrescente dizemos que x_n é *monótona*.

SAIBA MAIS: Note os sinais de ordenação " $\leq$ " e " $\geq$ " nas definições de sequências crescentes e decrescentes, respectivamente. Muitos textos de cálculo usam as desigualdades estritas " $<$ " e " $>$ " pois elas parecem combinar melhor com a ideia de que algo está crescendo ou decrescendo. Mas, para nossos propósitos teóricos, as inequações (não estritas) são mais convenientes.

Teorema 3.2.2. Toda sequência crescente e limitada superiormente é convergente.

Demonstração. Suponha que x_n é uma sequência crescente e limitada superiormente. Sejam $\varepsilon > 0$ e $L = sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Vamos provar que $x_n \longrightarrow L$. De fato, pelo Teorema 2.3.10, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < x_N$, e claramente $x_n \leq L$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, o fato de x_n ser crescente implica que

$$\begin{aligned} n \geq N \quad &\Longrightarrow \quad L - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq L \\ &\Longrightarrow \quad L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon \\ &\Longrightarrow \quad -\varepsilon < x_n - L < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \quad |x_n - L| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $x_n \longrightarrow L$. $\square$

Corolário 3.2.3. Toda sequência decrescente e limitada inferiormente é convergente.

Demonstração. Se x_n é uma sequência decrescente e limitada inferiormente, então $y_n = -x_n$ é crescente e limitada superiormente (confira isto como exercício!). Segue do teorema anterior que $y_n \longrightarrow L$, para algum $L \in \mathbb{R}$. Portanto, (confira isto também!) $x_n \longrightarrow -L$. $\square$

Corolário 3.2.4. Toda sequência monótona e limitada é convergente.

SAIBA MAIS: A principal ideia na demonstração do Teorema 3.2.2 é a existência do supremo da imagem da sequência. Isto significa que o Axioma do Completamento implica no Teorema 3.2.2. De fato, não é difícil provar que a recíproca também é verdadeira, i.e., que o Teorema 3.2.2 também implica no Axioma do Completamento, mostrando que os dois são equivalentes. Devido a este fato, o Teorema 3.2.2 é frequentemente usado como Axioma de Completamento em $\mathbb{R}$ no lugar da propriedade do supremo que usamos anteriormente.

Exemplo 3.2.5. A sequência $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ é convergente.

Demonstração. Olhando para os primeiros termos da sequência, $e_1 = 2$, $e_2 = 2.25$, $e_3 = 2.37$, $e_4 = 2.44$, temos a sensação de que ela é crescente. Para provar que este é realmente o caso, fixamos $n \in \mathbb{N}$ e usamos o Teorema Binomial para expandir o produto como

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \tag{3.1}$$

e

$$e_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \tag{3.2}$$

□

Para $1 \le k \le n$, a k-ésima parcela de (3.1) satisfaz

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!n^k} \\
&= \frac{1}{k!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \\
&= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&< \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{k!}\frac{n+1-1}{n+1}\frac{n+1-2}{n+1}\cdots\frac{n+1-(k-1)}{n+1} \\
&= \frac{1}{k!}\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{n-k}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k)}{k!(n+1)^k} \\
&= \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k},
\end{aligned}$$

que é a k-ésima parcela de (3.2). Como (3.2) também tem uma parcela positiva a mais que (3.1), então segue que

$$e_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} = e_{n+1}.$$

Portanto e_n é crescente.

Agora, do seu curso de Teoria dos Números (ou Matemática Discreta), você deve se lembrar que $2^{k-1} \leq k!$, para todo $k \in \mathbb{N}$, o que implica que $1/k! \leq 1/2^{k-1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, temos

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} = \underbrace{\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1}\underbrace{\frac{n-2}{n}}_{<1}\cdots\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{<1}}_{\leq 1}\frac{1}{k!} < \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Lembrando da fórmula da soma de uma progressão geométrica e usando (3.1) novamente, vemos que

$$\begin{aligned} e_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &< 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}}_{<2} \\ &< 3, \end{aligned}$$

o que mostra que e_n é limitada.

Portanto, como e_n é crescente e limitada, o Teorema 3.2.2 garante que e_n é convergente e seu limite é o conhecido *número de Euler* $e \approx 2.71828$.

Teorema 3.2.6. Toda sequência monótona não limitada diverge para $-\infty$ ou ∞.

Demonstração. Suponha que x_n é crescente e não limitada. Se $a > 0$, então o fato de x_n não ser limitada garante que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N > a$. Como x_n é crescente, então

$$n \geq N \Longrightarrow a < x_N \leq x_n,$$

o que implica que $x_n \longrightarrow \infty$.

A prova do caso em que x_n decrescente e não limitada implica $x_n \longrightarrow -\infty$ é semelhante e deixamos como exercício. $\square$

ATIVIDADE AVALIATIVA 4:

Exercício 3.2.7. Mostre que se x_n é decrescente e não limitada, então $x_n \longrightarrow -\infty$.

8^a aula
(06/05/2016 - 16/05/2016)
Subsequências

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender o conceito de subsequências;
- Compreender o conceito de sequências de Cauchy;
- Compreender o conceito contração.

3.3 Subsequências e o Teorema de Bolzano-Weierstrass

Definição 3.3.1. Sejam $f(n) = x_n$ uma sequência e $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função estritamente crescente ($m < n \Rightarrow \sigma(m) < \sigma(n)$). A sequência $y_n = (f \circ \sigma)(n) = f(\sigma(n)) = x_{\sigma(n)}$ é chamada de *subsequência* de x_n.

É comum denotar uma subsequência de x_n por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, onde $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito, ou por $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

PARE E PENSE: Note que uma subsequência pode também ser vista como uma restrição de f a algum subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Mas a principal ideia aqui é que uma subsequência $x_{\sigma(n)}$ é uma nova sequência formada a partir de uma sequência já conhecida quando, possivelmente, se desconsidera alguns de seus elementos. Em outras palavras, todos os elementos de $x_{\sigma(n)}$ aparecem em x_n, na mesma ordem.

Exemplo 3.3.2. Sejam x_n uma sequência e $\sigma(n) = 3n$. Então, a subsequência $x_{\sigma(n)}$ contém o elementos $x_3, x_6, x_9, x_{12}, \ldots, x_{3n}, \ldots$, da sequência original $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots$.

Exemplo 3.3.3. Se $x_n = \text{sen}\,(n\pi/2)$, então algumas possíveis subsequências são:

- $y_n = x_{4n+1} \Longrightarrow y_n = \text{sen}\left(\dfrac{(4n+1)\pi}{2}\right) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $z_n = x_{2n} \Longrightarrow z_n = \text{sen}\left(\dfrac{2n\pi}{2}\right) = \text{sen}\,(n\pi) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

- $w_n = x_{n^2} \Longrightarrow w_n = \text{sen}\left(\dfrac{n^2\pi}{2}\right) = \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

Teorema 3.3.4. Uma sequência x_n converge para L se, e somente se, todas as suas subsequências convergem para L.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente, como na definição de subsequência. Não é difícil provar (por indução) que $\sigma(n) \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora suponha que $x_n \longrightarrow L$ e seja $y_n = x_{\sigma(n)}$. Se $\varepsilon > 0$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Mas segue da definição de subsequência e do parágrafo anterior que

$$\begin{aligned} n \geq N \quad &\Longrightarrow \quad y_n = x_{\sigma(n)} = x_m, \text{ para algum } m \geq n \geq N \\ &\Longrightarrow \quad y_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon). \end{aligned}$$

Portanto, $y_n \longrightarrow L$.

($\Longleftarrow$) Isto é óbvio, pois x_n é uma subsequência dela mesma. □

SAIBA MAIS: A principal utilidade deste teorema não é provar a convergência de sequências, mas sim provar quando elas divergem. Ele nos dá duas estratégias para fazer isto.

1. Encontrar duas subsequências convergindo para limites diferentes;
2. Encontrar uma subsequência divergente.

PARE E PENSE: Mesmo que a sequência original seja divergente, é possível que ela tenha alguma subsequência convergente. Por exemplo, considere a sequência divergente $x_n = (-1)^n$. Neste caso, existem as duas subsequências convergentes $x_{2n} = 1 \longrightarrow 1$ e $x_{2n+1} = -1 \longrightarrow -1$. (Verifique, como exercício, que toda sequência constante é convergente.)

Desafio!

Exercício 3.3.5. Determine as subsequências convergentes para as seguintes sequências.

(a) $3, 3, 3, 3, \ldots;$

(b) $1, 1/2, 1, 1/4, 1, 1/8, \ldots;$

(c) $0, 2, -1, 0, 3/2, -1, 0, 4/3, -1, 0, 5/4, -1, \ldots.$

Quais das sequências acima são convergentes e quais são divergentes? Por quê?

Teorema 3.3.6. Toda sequência possui uma subsequência monótona.

Demonstração. Sejam x_n uma sequência e $A = \{n \in \mathbb{N} : m > n \Longrightarrow x_m \geq x_n\}$. Há dois casos para considerarmos. Primeiro, suponha que A é infinito. Defina, por recorrência,

$$\begin{cases} \sigma(1) = \min A & \text{(o mínimo de } A \text{ existe , pois } A \subset \mathbb{N}.) \\ \sigma(n+1) = \min(A \backslash \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}) & \text{, se n>1.} \end{cases}$$

Por construção, temos que $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente e pela definição do conjunto A vemos que $x_{\sigma(n)}$ é uma subsequência crescente de x_n.

Agora, suponha que A é finito e defina $\sigma(1) = \max(A+1)$. Se $n > \max A$, então existe $m > \sigma(n)$ tal que $x_m \leq x_{\sigma(n)}$. Defina $\sigma(n+1) = m$. Isto define indutivamente uma função estritamente crescente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $x_{\sigma(n)}$ é uma subsequência decrescente de x_n. $\square$

PARE E PENSE: Se a sequência no teorema anterior for limitada, então a correspondente subsequência monótona também será limitada e, portanto, convergente pelo Corolário 3.2.4. Este raciocínio pode ser formalizado no seguinte teorema.

Teorema 3.3.7 (Bolzano-Weierstrass)**.** Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

3.4 Intervalos encaixados

Definição 3.4.1. Uma coleção de conjuntos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ é *encaixada* se $A_{n+1} \subset A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.4.2 (Intervalos encaixados)**.** Se $\{I_n = [a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção de intervalos fechados encaixados e $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$.

Demonstração. Primeiro, vamos provar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. De fato, como os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ são encaixados, então

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, b_{n+1}, b_n, \ldots, b_2, b_1.$$

Assim, vemos que a_n é uma sequência crescente limitada superiormente por b_1 e b_n é uma sequência decrescente limitada inferiormente por a_1. Aplicando o Teorema 3.2.2 e o Corolário 3.2.3, respectivamente, vemos que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $a_n \longrightarrow \alpha$ e $b_n \longrightarrow \beta$.

Afirmamos que $\alpha = \beta$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, use o fato de que os intervalos I_n encolhem a medida que n cresce para escolher um $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_N - a_N < \varepsilon$. A hipótese de encaixe implica que $a_N \leq a_n < b_n \leq b_N$, para todo $n \geq N$ e observando que $\alpha = \sup a_n$ e $\beta = \inf b_n$, obtemos

$$a_N \leq a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n \leq b_N \Longrightarrow |\beta - \alpha| \leq |b_N - a_N| < \varepsilon.$$

Portanto, $\alpha = \beta = x \in [a_n, b_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, vamos provar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ possui somente um elemento. Suponha que $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ e $\varepsilon > 0$. Escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_N - a_N < \varepsilon$. Então,

$$\{x, y\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset [a_N, b_N] \Longrightarrow |x - y| \leq |b_N - a_N| < \varepsilon,$$

o que implica que $x = y$. Portanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$. $\square$

Os próximos exemplos mostram que o teorema anterior só é verdadeiro quando os intervalos encaixados são fechados e limitados.

Exemplo 3.4.3. Se $I_n = (0, 1/n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então a coleção $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ é encaixada, mas $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Isto mostra que a hipótese dos intervalos serem fechados é necessária no teorema anterior.

Exemplo 3.4.4. Se $I_n = [n, \infty)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então novamente a coleção $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ é encaixada, mas $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Isto mostra que a hipótese dos intervalos serem limitados também. é necessária no teorema anterior. Mas neste caso, pode-se provar que se o comprimento dos intervalos não converge para 0, então a interseção é não vazia, mas perde-se a unicidade, i.e., existe mais de um elemento na interseção.

3.5 Sequências de Cauchy

Um dos problemas mais frequentes com que lidamos quando tentamos mostrar a convergência de uma sequência usando as técnicas vistas até agora é que precisamos conhecer o limite da sequência com antecedência. Este é o "problema do ovo e da galinha" mencionado anteriormente. Uma forma de driblar este dilema é utilizando as sequências de Cauchy[1] que definimos a seguir.

[1]Cauchy é um sobrenome francês pronunciado como "Cochí"

Definição 3.5.1. Dizemos que x_n é uma *sequência de Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

PARE E PENSE: Esta definição é um pouco mais sutil do que parece ser. Ela parece dizer que todos os termos da sequência, a partir de um determinado índice, estão próximos de algum ponto. Mas na verdade, ela simplesmente diz que, a partir de um determinado índice, os elementos da sequência estão suficientemente próximos de si, sem mencionar nada a respeito de um possível limite. O próximo teorema, conhecido como "critério de convergência de Cauchy" nos mostra porque esta definição nos ajuda com o problema do ovo e da galinha.

Teorema 3.5.2 (Critério de Cauchy)**.** Uma sequência é convergente se, e somente se, é de Cauchy.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que $x_n \longrightarrow L$ e considere $\varepsilon > 0$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon/2$, sempre que $n \geq N$. Logo,

$$m, n > N \Longrightarrow |x_m - x_n| = |x_m - L + L - x_n| \leq |x_m - L| + |L - x_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Isto mostra que x_n é uma sequência de Cauchy.

($\Longleftarrow$) Seja x_n uma sequência de Cauchy. Primeiro vamos mostrar que x_n é limitada. De fato, tomando $\varepsilon = 1$, podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < 1$, sempre que $m, n \geq N$. Neste caso,

$$n \geq N \Longrightarrow |x_n - x_N| < 1 \Longrightarrow x_N - 1 < x_n < x_N + 1 \Longrightarrow x_n \in (x_N - 1, x_N + 1)$$

e vemos que a sequência x_n é limitada porque está contida no conjunto limitado

$$(x_N - 1, x_N + 1) \cup \{x_n : 1 \leq n \leq N - 1\}.$$

Como x_n é limitada, segue do Teorema de Bolzano-Weierstrass que existe uma subsequência $x_{\sigma(n)}$ de x_n convergindo, digamos, para L. Vamos provar que x_n converge para L.

Seja $\varepsilon > 0$. Então, como x_n é uma sequência de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N_1 \Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon/2, \tag{3.3}$$

e como $x_{\sigma(n)} \longrightarrow L$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_2 \Longrightarrow |x_{\sigma(n)} - L| < \varepsilon/2. \tag{3.4}$$

Desta forma, podemos considerar $N = \max\{N_1, N_2\}$ para ver que $n \geq N$ implica $\sigma(n) \geq n$ e segue de (3.3) e (3.4) que

$$\begin{aligned} |x_n - L| &= |x_n - x_{\sigma(n)} + x_{\sigma(n)} - L| \\ &\leq |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - L| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $x_n \longrightarrow L$. $\square$

SAIBA MAIS: A convergência das sequências de Cauchy é uma outra condição equivalente ao axioma do completamento. De fato, textos mais avançados de Análise definem espaços completos como sendo os espaços cujas sequências de Cauchy convergem. Isto é conveniente, em geral, pois a definição de sequência de Cauchy só depende da métrica definida sobre o espaço e de nada mais de sua estrutura.

ATIVIDADE AVALIATIVA 5:

Exercício 3.5.3. Prove que se x_n é uma sequência convergente e y_n é uma sequência que satisfaz

$$|y_m - y_n| \leq |x_m - x_n|, \quad \forall m, n \in \mathbb{N},$$

então y_n converge.

Exercício 3.5.4. Prove que se x_n é uma sequência de Cauchy e y_n é uma subsequência de x_n que converge para L, então $x_n \longrightarrow L$.

A seguir damos um exemplo típico da utilidade das sequências de Cauchy.

Definição 3.5.5. Uma sequência x_n é uma *contração* se existe uma constante $c \in (0, 1)$ tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c\,|x_{n+1} - x_n|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

A constante c é chamada de *constante contrativa*.

Exemplo 3.5.6. Seja $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Há um truque bem legal para mostrar que esta sequência diverge. Primeiro, observe que s_n é estritamente crescente, pois s_{n+1} é a soma de s_n com o número positivo $1/(n+1)$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, veja que

$$\begin{aligned}
s_{2n-1} &= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \\
&= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{=\sum_{k=0}^{2^1-1} \frac{1}{2^1+k}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{=\sum_{k=0}^{2^2-1} \frac{1}{2^2+k}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{15}\right)}_{=\sum_{k=0}^{2^3-1} \frac{1}{2^3+k}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)}_{=\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{2^{n-1}+k}} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{2^1-1} \frac{1}{2^1+k} + \sum_{k=0}^{2^2-1} \frac{1}{2^2+k} + \sum_{k=0}^{2^3-1} \frac{1}{2^3+k} + \cdots + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{2^{n-1}+k} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{1}{2^j+k} \qquad \left(j \geq 1 \Longrightarrow 2^{j+1} > 2^j + 1 \Longrightarrow \frac{1}{2^j+1} > \frac{1}{2^{j+1}}\right) \\
&> 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{1}{2^{j+1}} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k=0}^{2^j-1} 1 = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^{j+1}} 2^j = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} 1 \\
&= 1 + \frac{n-1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{n}{2} \, (\longrightarrow \infty, \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Logo, o teste de comparação (Teorema 4.4.16-(b)) diz que a subsequência s_{2^n-1} é divergente. Portanto, o Teorema 3.3.4 garante que s_n diverge.

Por outro lado, é fácil ver que $|s_{n+1} - s_n| = 1/(n+1) \longrightarrow 0$ e, realmente, fixando m, obtemos $|s_{n+m} - s_n| \longrightarrow 0$, o que faz parecer que os termos estão se aproximando como na definição de sequências de Cauchy, o que não é verdade, porque estamos fixando m. Na verdade, s_n não é uma sequência de Cauchy, como mostra o próximo teorema.

Teorema 3.5.7. Toda contração é convergente.

Demonstração. A ideia aqui é mostrar que toda contração é uma sequência de Cauchy e concluir com o Teorema 3.5.2. Assim, suponha que x_n é uma contração e seja $c \in (0,1)$ sua constante contrativa. Primeiro, vamos mostrar por indução que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c^{n-1} |x_2 - x_1|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

De fato, para $n = 1$ temos

$$|x_2 - x_1| \leq \underbrace{c^0}_{=1} |x_2 - x_1|.$$

Agora, suponha que a afirmação vale para $n-1$, ou seja, que $|x_n - x_{n-1}| \leq c^{n-2} |x_2 - x_1|$. Então,

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - x_n| &\leq c\,|x_n - x_{n-1}| \\
&\leq c\,c^{n-2} |x_2 - x_1| \\
&\leq c^{n-1} |x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

Isto garante que a afirmação vale para n. Logo, por indução, a inequação vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para mostrar que a sequência x_n é de Cauchy, considere $\varepsilon > 0$. Se $n > m$, temos

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= |x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-2} - \cdots - x_{m+1} + x_{m+1} - x_m| \\
&\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\
&\leq c^{n-2}|x_2 - x_1| + c^{n-3}|x_2 - x_1| + \cdots + c^{m-1}|x_2 - x_1| \quad \text{(por (3.5))} \\
&= |x_2 - x_1|(c^{n-2} + c^{n-3} + \cdots + c^{m-1}) \\
&= |x_2 - x_1|\, c^{m-1}\frac{1 - c^{n-m}}{1-c} \quad \text{(soma da P.G.)} \\
&< |x_2 - x_1|\frac{c^{m-1}}{1-c} \quad (\text{pois } 1 - c^{n-m} < 1)
\end{aligned}$$

Como $c \in (0,1)$, então $c^n \longrightarrow 0$ e podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{c^{N-1}}{1-c}|x_2 - x_1| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Logo, se $n > m \geq N$, então

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq |x_2 - x_1|\frac{c^{m-1}}{1-c} \\
&\leq |x_2 - x_1|\frac{c^{N-1}}{1-c} \quad (\text{pois } m \geq N \Longrightarrow c^{m-1} \leq c^{N-1}) \\
&< \varepsilon. \quad \text{(por (3.6))}
\end{aligned}$$

Portanto, x_n é uma sequência de Cauchy e segue do Teorema 3.5.2 que x_n é convergente. □

Exemplo 3.5.8. Considerando $-1 < r < 1$, defina $s_n = \sum_{k=1}^{n} r^k$, para cada $n \in \mathbb{N}$. (com certeza você se lembra desta como sendo a sequência das somas parciais da série geométrica!) Se $r = 0$, então s_n é constante igual a 0 e, portanto, é convergente. Agora, se $r \neq 0$, temos, para todo $n \geq 1$,

$$\frac{|s_{n+1} - s_n|}{|s_n - s_{n-1}|} = \frac{|r^{n+1}|}{|r^n|} = \left|\frac{r^{n+1}}{r^n}\right| = |r| < 1,$$

o que mostra que s_n é uma contração. Portanto, s_n converge pelo teorema anterior.

No próximo exemplo, usaremos um método iterativo (de recorrência) para determinar o limite de uma sequência.

Exemplo 3.5.9. Considere a função $f(x) = 2 + 1/x$, definida em $\mathbb{R}^*$, e defina a sequência

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = f(a_{n-1}), \quad \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

É evidente que $a_n \geq 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e segue da definição de f, com algumas contas, que

$$\left|\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}}\right| = \left|\frac{f(f(a_{n-1})) - f(a_{n-1})}{f(a_{n-1}) - a_{n-1}}\right| = \frac{1}{1 + 2a_{n-1}} \overset{a_n \geq 2}{\leq} \frac{1}{5},$$

o que mostra que

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{5}|a_n - a_{n-1}|, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Logo, a_n é uma contração e segue do Teorema 3.5.7 que a_n converge para algum $L \geq 2$. Como $a_{n+1} = 2 + 1/a_n$, fazendo $n \longrightarrow \infty$ em ambos os lados da igualdade, vemos que $L = 1 + 1/L$, o que implica que $L = 1 + \sqrt{2}$.

SAIBA MAIS: No exemplo anterior, note que

$$f(L) = 2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\,\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = 2 + \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = 1 + \sqrt{2} = L,$$

ou resumidamente, $f(L) = L$. Quando isto ocorre, dizemos que L é um *ponto fixo* de f. Muitos métodos de aproximação para resolver equações envolvem tais técnicas iterativas que dependem de contrações para encontrar pontos fixos.

9^a aula
(13/05/2016 - 23/05/2016)
Séries numéricas

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender o conceito de séries numéricas;
- Compreender os conceitos de séries convergentes e divergentes;
- Aplicar corretamente os testes de divergência ou de convergência.

3.6 Séries Numéricas

Dada uma sequência x_n, parece natural perguntar sobre a soma de todos os seus valores. Se somente uma quantidade finita dos elementos de x_n é não nula, isto é trivial. (e não muito interessante!) Mas se x_n contém uma quantidade infinita de elementos não nulos, então a resposta é interessante, mas não é tão óbvia. De fato, pois contar uma quantidade infinita de termos é mesmo algo questionável.

Existem várias abordagens para responder esta questão, mas lidaremos aqui com a técnica mais comum apresentada nos textos sobre o assunto. Começamos com alguns exemplos afim de motivar e aguçar sua curiosidade a respeito do tema.

Exemplo 3.6.1. Em algum instante durante seus estudos na educação fundamental, você deve ter se deparado com as conhecidas dízimas periódicas.[2] Naquela ocasião, é bem provável (e mais recomendado!) que seu professor de Matemática tenha utilizado recursos algébricos básicos para interpretar o significado, por exemplo, da dízima $0,555\ldots$. O argumento é o seguinte:

$$x = 0,555\ldots \Longrightarrow 10x = 5,555\cdots = 5 + 0,555\cdots = 5 + x \Longrightarrow 9x = 5 \Longrightarrow x = \frac{5}{9}.$$

Mas agora você pode abordar este problema a partir de outro ponto de vista, associando a dízima com uma progressão geométrica infinita, da seguinte forma: (não tente entender a quarta

[2] *Dízimas periódicas* são números que quando escritos no sistema decimal, apresentam uma sequência infinita de algarismos decimais que, a partir de um certo algarismo, se repetem em grupos de um ou mais algarismos, ordenados sempre na mesma disposição que é chamada de *período* da dízima. E.g.,

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857} = 0,142857142857142857\ldots.$$

igualdade a seguir. Você entenderá no decorrer do módulo)

$$\begin{aligned}
0,555\cdots = 5 \times 0,111\ldots &= 5\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots\right)\\
&= 5\underbrace{\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots\right)}_{\text{Progressão geométrica}}\\
&= 5\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}-1\right) = 5\left(\frac{10}{9}-1\right) = \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

Você deve ter notado, no exemplo anterior, a "soma infinita"

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots$$

e, se for uma pessoa curiosa, deve estar se perguntando o que isto significa. Como pode alguém somar um número após o outro, e assim por diante, indefinidamente? Obviamente, este processo tomaria muito tempo, (uma eternidade, para ser mais preciso!) o que parece perturbador. Realmente, uma abordagem ingênua deste assunto pode levar a algumas conclusões que não condizem com a exatidão esperada da Matemática. Por exemplo, considere a possível necessidade de se somar todos os termos da sequência $x_n = (-1)^{n+1} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$. Se encararmos o desafio tentando somar da mesma forma que somamos uma quantidade finita de termos, teremos

$$S = 1-1+1-1+1-1+\cdots.$$

Mas observe que, por um lado, temos

$$S = 1-1+1-1+1-1+\cdots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0,$$

enquanto que, por outro lado, encontramos

$$S = 1-1+1-1+1-1+\cdots = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)+\cdots = 1-0-0-0-\cdots = 1.$$

Desta forma, chegamos ao absurdo de concluir que $0 = S = 1$.

PARE E PENSE: Está claro que há algo estranho "no reino das somas infinitas". O conceito de adição, da forma que aprendemos na escola quando crianças, é um processo idealizado para somar quantidades finitas de objetos. No caso de uma quantidade infinita, por mais que se some, sempre haverá uma quantidade infinita de parcelas restando para serem somadas.

3.7 O que é uma série?

A ideia por trás da soma de uma quantidade infinita de números é uma redução ao já conhecido conceito de sequência. Esta é uma típica abordagem matemática: reduzir ou associar uma questão a algo conhecido.

Definição 3.7.1. A *série* associada a uma sequência x_n é a soma infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + \cdots .$$

Dizemos que x_n é o *termo geral da série* e definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a *n-ésima soma parcial* por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

Se $s_n \longrightarrow S$, para algum $S \in \mathbb{R}$, dizemos que a série converge para S e denotamos

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S.$$

Caso contrário, se s_n não convergir, diremos que a série diverge ou que é divergente.

PARE E PENSE: A notação $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é, portanto, entendida como sendo a sequência das somas parciais da série de termo geral x_n. Quando não há ambiguidade, abreviamos a notação escrevendo somente $\sum x_n$. Também é comum dizer que o limite S é a soma da série. (mas não se esqueça como esta soma é feita!)

Vejamos o que ocorre com a série usada como exemplo anteriormente.

Exemplo 3.7.2. Se $x_n = (-1)^{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
s_1 &= x_1 = 1,\\
s_2 &= x_1 + x_2 = 1 - 1 = 0,\\
s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 = 1 - 1 + 1 = 1,\\
s_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

e no caso geral vemos que $s_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + 1}{2}$ não é convergente, pois oscila entre 1 e 0. Portanto, a série $\sum (-1)^{n+1}$ é divergente.

Agora, vejamos um exemplo de série convergente.

Exemplo 3.7.3 (Série Geométrica)**.** Sejam $c, r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. A sequência $x_n = c\,r^{n-1}$ dá origem à *série geométrica*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\,r^{n-1} = c + cr + cr^2 + cr^3 + \cdots .$$

O número r é chamado de *razão da série*.

Suponha que $c = 1$ e $r \neq 1$. Então,

$$\begin{aligned}
s_1 &= x_1 = 1, \\
s_2 &= x_1 + x_2 = 1 + r, \\
s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 = 1 + r + r^2, \\
s_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + r + r^2 + r^3, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

e vemos que $s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$ é a progressão geométrica de termo inicial 1 e razão r. Logo,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_n = \sum_{k=1}^{n} r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Assim, vemos que a convergência de uma série geométrica depende do valor de sua razão r. De fato, é fácil ver que

- Se $|r| \geq 1$, então a série geométrica diverge;
- Se $|r| < 1$, então a série geométrica converge para $1/(1-r)$, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}.$$

Mais geralmente, quando c é qualquer número real não nulo, (se $c = 0$, então a série converge, obviamente.) temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\,r^{n-1} = \frac{c}{1-r},$$

quando $|r| < 1$, mas diverge quando $|r| \geq 1$.

PARE E PENSE: Em alguns casos, o limite da série geométrica é bem intuitivo. Por exemplo, suponha que você está a 2 metros de uma parede e começa a andar em direção à parede de modo que, a cada passo, você percorre a metade do caminho restante. Não importa a quantidade (finita) de passos que dê, você nunca chegará à parede, mas uma grande quantidade (finita) de passos o deixará tão próximo da parede quanto se deseje. (Veja a Figura 3.1) Então, a distância total percorrida neste processo tem limite igual a 2 (metros). A distância total após n passos é a soma parcial da série geométrica com razão $r = 1/2$ e $c = 1$, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

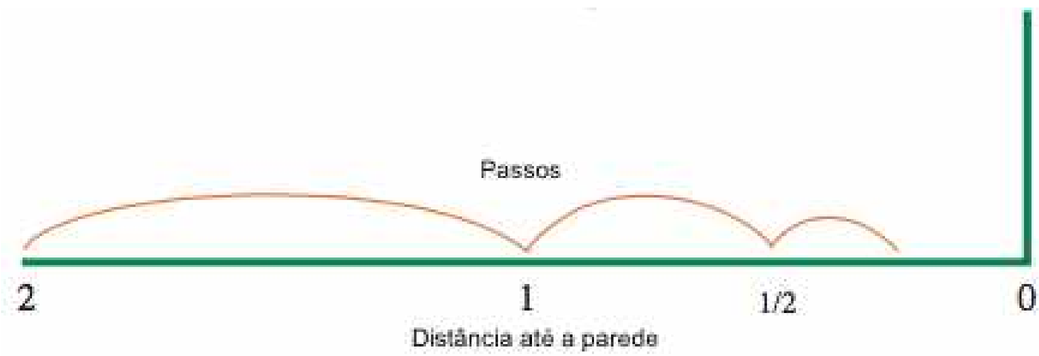

FIGURA 3.1: Passos em direção à parede.

Exemplo 3.7.4. A série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ é chamada de *série harmônica*. Já vimos, no Exemplo 3.5.6, que esta série é divergente.

PROCURE NA WEB: Você pode encontrar várias outras informações interessantes sobre as séries geométrica e harmônica na internet. Em particular, na página da Wikipedia que trata dos assuntos.
Acesse o sítio

https://pt.wikipedia.org/wiki/

e lá faça uma busca por "série harmonica" ou "série geométrica".

Exemplo 3.7.5. Vamos analisar o comportamento assintótico [3] da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}.$$

Os termos da sequência $x_n = 1/(n^2+n)$, $n \in \mathbb{N}$, podem ser decompostos em uma soma de frações parciais, isto é,

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Vamos provar por indução que a sequência s_n das somas parciais desta série satisfaz

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De fato, $s_1 = x_1 = 1/2 = 1 - 1/2$ e se, por hipótese de indução, $s_k = 1 - 1/(k+1)$, para todo $k < n$, então

$$s_n = s_{n-1} + x_n = 1 - \frac{1}{(n-1)+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

como queríamos. Agora é fácil ver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

SAIBA MAIS: A série do exemplo anterior é um exemplo do que se conhece como série telescópica, nome obtido aparentemente devido ao cancelamento dos termos do meio das somas parciais, causando o encurtamento da soma como acontece com um telescópio.

Definição 3.7.6. Seja a_n uma sequência. Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, com $x_n = a_n - a_{n-1}$, é *telescópica* se suas somas parciais podem ser escritas na seguinte forma: $s_n = a_1 - a_{n+1}$.

Note que, neste caso, a série converge se, e somente se, existe $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Desafio!

Exercício 3.7.7. Sabendo que $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n(n+1)} = 1 - 3\log 2.$$

Exercício 3.7.8. Prove que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+5)}{(n+2)(n+3)} = 1/2$

[3] Assintótico é um adjetivo masculino singular que significa “aquilo que está bastante próximo”. Assim, o comportamento assintótico de uma série, sequência ou função, significa que estes se aproximam suficientemente de algum objeto (número ou função).

O próximo teorema é uma consequência imediata das propriedades de sequências vistas no Teorema 3.1.24.

Teorema 3.7.9. Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ séries convergentes.

a) Se $c \in \mathbb{R}$, então $\sum c\, x_n = c \sum x_n$;

b) $\sum (x_n + y_n)$ converge e $\sum (x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$;

c) $x_n \longrightarrow 0$.

Demonstração. Sejam $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ e $Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$ as sequências das somas parciais de $\sum x_n$ e $\sum y_n$, respectivamente. Por hipótese, existem $L, M \in \mathbb{R}$ tais que $X_n \longrightarrow L$ e $Y_n \longrightarrow M$. Desta forma, segue do Teorema 3.1.24 que:

(a) $\sum_{k=1}^{n} c\, x_k = c \sum_{k=1}^{n} x_k = c\, X_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} c\, L$, para todo $c \in \mathbb{R}$;

(b) $\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k = X_n + Y_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} L + M$;

(c) Para $n > 1$, $x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k = X_n - X_{n-1} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} L - L = 0$.

$\square$

Observe que os itens (a) e (b) do teorema anterior mostram que o conjunto de todas a séries convergentes é fechado para combinações lineares.

O item (c) é muito útil, já que sua contrapositiva dá um excelente teste para identificar séries divergentes.

Corolário 3.7.10 (Teste de divergência)**.** Se $x_n \not\longrightarrow 0$, então $\sum x_n$ é divergente.

PARE E PENSE: O corolário anterior só serve para mostrar divergência, mas muitos estudantes cometem o erro de "entender demais" o seu enunciado. Preste atenção:

x_n convergir para zero não implica que a série seja convergente.

Basta lembrar da série harmônica.

3.8 Séries positivas

Vimos alguns exemplos de séries convergentes onde é possível determinar o limite, mas na grande maioria das vezes isto é extremamente difícil ou mesmo impossível. Em geral, ficamos satisfeitos quando determinamos se uma série converge ou não e, no caso de convergir, procuramos por algum valor que aproxime suficientemente seu limite. Por isso, o estudo de séries envolve o aprendizado de uma coleção de teoremas que ajudam a decidir se uma série converge, mas não dizem qual é o limite desta série. Você provavelmente se lembra deles do seu curso de cálculo. Eles são chamados de testes ou critérios de convergência. Existem diversos desses testes, mas demonstraremos aqui somente alguns dos mais conhecidos.

Como a convergência de séries é determinada pela convergência de suas somas parciais, então as séries mais fáceis de se estudar são aquelas com somas parciais bem comportadas. Séries com sequências monótonas de somas parciais certamente estão entre os exemplos mais simples.

Definição 3.8.1. Dizemos que $\sum x_n$ é uma *série positiva* se $x_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

PARE E PENSE: A vantagem das séries positivas é que suas sequências de somas parciais são não negativas e crescentes. Como uma sequência crescente converge se, e somente se, é limitada superiormente, então existe um critério bem simples para determinar se uma série positiva converge. Muitos outros testes de convergência de séries positivas dependem deste teste.

Teorema 3.8.2. Uma série positiva é convergente se, e somente se, a sequência de suas somas parciais é limitada.

Alguns dos testes de convergência mais básicos são os que envolvem algum tipo de comparação. Nestes testes, o comportamento de uma série é deduzido a partir do comportamento conhecido de outra série.

Teorema 3.8.3 (Teste da Comparação para Séries)**.** Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries positivas tais que $x_n \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Se $\sum y_n$ converge, então $\sum x_n$ converge;

b) Se $\sum x_n$ diverge, então $\sum y_n$ diverge;

Demonstração. Sejam X_n e Y_n as sequências das somas parciais de $\sum x_n$ e $\sum y_n$, respectivamente. Como as séries são positivas, então X_n e Y_n são crescentes. Além disso, por hipótese

$$X_n \leq Y_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Desta forma,
(a) Se $\sum y_n$ converge para algum $M \in \mathbb{R}$, então (3.7) implica que M é uma cota superior de X_n. Assim, o Teorema 3.2.2 garante que X_n é convergente, i.e., $\sum x_n$ é convergente.
(b) Demonstre este item como exercício. (dica: use o Teorema do sanduíche.) $\square$

PARE E PENSE: Embora o uso deste teste seja bem simples, existe um ponto fundamental: para usá-lo, antes você deve conhecer o comportamento de outras séries para poder compará-las. Por esta razão, um matemático prevenido sempre guarda alguns exemplos conhecidos de séries em sua “caixa de ferramentas”.

Exemplo 3.8.4. Já vimos que a série harmônica $\sum 1/n$ diverge para ∞ e sabemos que

$$0 < p \leq 1 \Longrightarrow n^p \leq n \Longrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, segue do Teorema 3.8.3 que a série $\sum 1/n^p$ diverge para ∞, sempre que $0 < p \leq 1$. Isto implica, por exemplo, que $\sum 1/\sqrt{n}$ é divergente.

Exemplo 3.8.5. Também segue do Teorema 3.8.3 que a série $\sum(\text{sen}^2 n/2^n)$ converge. De fato, pois

$$-1 \leq \text{sen}\, n \leq 1 \Longrightarrow \frac{\text{sen}^2 n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

e a série geométrica $\sum 1/2^n$ converge para 1.

O próximo teste não é tão simples, mas nos dará muitos exemplos para comparação.

Teorema 3.8.6 (Teste da condensação de Cauchy[4])**.** Se x_n é uma sequência não negativa decrescente, então

$$\sum x_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum 2^n x_{2^n} \text{ converge.}$$

Demonstração. Como x_n é decrescente, então

$$x_1 + \underbrace{x_2 + x_3}_{\leq 2x_2} + \underbrace{x_4 + x_5 + x_6 + x_7}_{\leq 4x_4} + \underbrace{x_8 + x_9 + \cdots + x_{15}}_{\leq 8x_8} + x_{16} + \cdots \tag{3.8}$$

e

$$\underbrace{x_1}_{\geq x_2} + \underbrace{x_2 + x_3}_{\geq 2x_4} + \underbrace{x_4 + x_5 + x_6 + x_7}_{\geq 4x_8} + \underbrace{x_8 + x_9 + \cdots + x_{15}}_{\geq 8x_{16}} + x_{16} + \cdots \tag{3.9}$$

e vemos que, para $1 \leq n \leq m$,

$$\sum_{n=2}^{2^{m+1}-1} x_n \leq \sum_{n=1}^{m} 2^n x_{2^n} \leq 2 \sum_{n=2}^{2^m-1} x_n.$$

Portanto, o teorema segue do teste de comparação. $\square$

[4] A série $\sum 2^n x_{2^n}$ é às vezes chamada de *série condensada* associada a $\sum x_n$.

Exemplo 3.8.7 (p-séries)**.** Para qualquer $p \in \mathbb{R}$ fixo, a série $\sum 1/n^p$ é chamada de *p-série*. O caso especial $p = 1$ é a série harmônica. Observe que

$$\sum 2^n\, x_{2^n} = \sum \frac{2^n}{(2^n)^p} = \sum (2^{1-p})^n$$

é uma série geométrica com razão 2^{1-p}, então ela converge somente se $2^{1-p} < 1$. Como $2^{1-p} < 1$ se, e somente se, $p > 1$, então segue do teste da condensação de Cauchy que a p-série converge quando $p > 1$ e diverge quando $p \leq 1$. (mas nós já sabíamos uma parte disso em função do Exemplo 3.8.4.)

SAIBA MAIS: As p-séries são usadas com muita frequência nos testes de comparação e têm papel fundamental em várias linhas avançadas de pesquisa da Matemática, como por exemplo Análise Harmônica e Teoria dos Números.

Teorema 3.8.8 (Teste da comparação no limite)**.** Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ séries positivas e $L \in (0, \infty)$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L.$$

Então, ambas convergem ou ambas divergem.

Demonstração. De fato, como $\lim_{n\to\infty} (x_n/y_n) = L \in (0, \infty)$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n \geq N \quad &\Longrightarrow \quad \left| \frac{x_n}{y_n} - L \right| < 1 \\ &\Longrightarrow \quad -1 < \frac{x_n}{y_n} - L < 1 \\ &\Longrightarrow \quad L - 1 < \frac{x_n}{y_n} < L + 1 \\ &\Longrightarrow \quad (L-1)y_n < x_n < (L+1)y_n. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue do teste da comparação para séries (Teorema 3.8.3). $\square$

Vejamos uma aplicação deste teste onde se faz a comparação do limite com uma série geométrica.

Exemplo 3.8.9. Para testar a convergência (ou não) da série $\sum 1/(2^n - n)$, consideramos as sequências

$$x_n = \frac{1}{2^n - n} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{2^n}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n - n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - n/2^n} = 1,$$

e $\sum 1/2^n$ converge (para 1), então segue do teste da comparação por limite que $\sum 1/(2^n - n)$ é convergente.

Desafio!

Exercício 3.8.10. Mostre se as séries a seguir convergem ou divergem.

$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ $\quad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ $\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ $\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ $\quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(sen\, 3n)^2}{2^n+n^2+1}$

$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^k}$ $\quad g)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ $\quad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}\log n}$ $\quad i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $\quad j)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

AVA

ATIVIDADE AVALIATIVA 6:

Exercício 3.8.11. Prove que se $\sum x_n$ é uma série convergente de termos positivos, então $\sum x_n^2$ é convergente.

Exercício 3.8.12. Prove que se $\sum x_n$ é uma série convergente de termos positivos e (y_n) é uma sequência limitada de termos positivos, então $\sum x_n y_n$ é convergente.

Exercício 3.8.13. Prove que se (x_n) e (y_n) são sequências de termos positivos tais que as séries $\sum x_n^2$ e $\sum y_n^2$ convergem, então $\sum x_n y_n$ converge.

Não há dúvidas de que as séries mais importantes são as séries geométricas. Alguns testes são basicamente comparações com séries geométricas.

Teorema 3.8.14. (Teste da Raiz) Seja $\sum x_n$ uma série positiva tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$. Então,

a) $L < 1 \Longrightarrow \sum x_n$ converge;

b) $L > 1 \Longrightarrow \sum x_n$ diverge.

Demonstração. (a) Suponha que $L < 1$, então existe $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $L + \varepsilon < 1$. Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$, então para este $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que (como visto na demonstração do teorema anterior)

$$n \geq N \Longrightarrow (L-\varepsilon)^n < x_n < (L+\varepsilon)^n.$$

Como $(L+\varepsilon)^n$ é o termo geral de uma série geométrica convergente (razão < 1), então $\sum x_n$ é convergente pelo teste da comparação (Teorema 3.8.3).
(b) A demonstração deste item é bem parecida com a do item (a). Suponha que $L > 1$, então existe $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $L-\varepsilon > 1$. Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$, então para este $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow (L-\varepsilon)^n < x_n < (L+\varepsilon)^n.$$

Como $(L-\varepsilon)^n$ é o termo geral de uma série geométrica divergente (razão > 1), então $\sum x_n$ é divergente, novamente, pelo teste da comparação (Teorema 3.8.3). $\square$

SAIBA MAIS: Só incluímos o item (b) no enunciado do teste da raiz por uma questão de plenitude. Em geral, não é mais fácil calcular o limite de uma raiz do que verificar, por inspeção, quando o termo geral de uma série não converge para zero (Veja o Corolário 3.7.10). Mas pior é o fato de o teste ser inconclusivo quando $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$. De fato, considere as p-séries $\sum 1/n$ e $\sum 1/n^2$. Já vimos que a primeira diverge, enquanto a segunda é convergente. Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2} = 1$, vemos que o teste é inconclusivo neste caso.

Exemplo 3.8.15. Sejam $a \in \mathbb{R}_+$ tomado arbitrariamente e considere a série $\sum n\,a^n$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,a^n} = a \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = a.$$

Logo, segue do teste da raiz que a série converge quando $a \in (0,1)$ e diverge quando $a \in (1,\infty)$. Obviamente, neste caso, a série diverge quando $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$.

O próximo teste é outra consequência do teste da comparação.

Teorema 3.8.16 (Teste da Razão)**.** Seja $\sum x_n$ uma série positiva tal que $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n = L$. Então,

a) $L < 1 \Longrightarrow \sum x_n$ converge;

b) $L > 1 \Longrightarrow \sum x_n$ diverge.

Demonstração. Por hipótese, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow (L-\varepsilon)x_n < x_{n+1} < (L+\varepsilon)x_n.$$

(a) Se $L < 1$, suponha que $L + \varepsilon < 1$. Desta forma, obtemos por indução que

$$x_{N+m} < x_N\,(L+\varepsilon)^m, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Segue, então, que

$$\begin{aligned} n > N \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{N} x_k + \sum_{k=N+1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{N} x_k + \sum_{k=1}^{n-N} x_{N+k} \\ &< \sum_{k=1}^{N} x_k + \sum_{k=1}^{n-N} x_N (L+\varepsilon)^k = \sum_{k=1}^{N} x_k + x_N \sum_{k=1}^{n-N} (L+\varepsilon)^k \\ &< \sum_{k=1}^{N} x_k + x_N \sum_{k=1}^{\infty} (L+\varepsilon)^k = \sum_{k=1}^{N} x_k + \frac{x_N (L+\varepsilon)^k}{1-(L+\varepsilon)}, \end{aligned}$$

o que mostra que as somas parciais de $\sum x_n$ são limitadas. Portanto, a série converge.
(b) Se $L > 1$, suponha $L - \varepsilon > 1$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow 1 < (L-\varepsilon) < \frac{x_{n+1}}{x_n} \Longrightarrow x_n < x_{n+1}.$$

Portanto, $x_n \not\longrightarrow 0$, o que implica que a série diverge. $\square$

Exemplo 3.8.17. Para todo $x \in \mathbb{R}$, a série $\sum |x^n|/n!$ converge. De fato, para $x = 0$ a convergência é óbvia. Para $x \neq 0$, temos

$$\frac{|x^{n+1}|/(n+1)!}{|x^n|/n!} = \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|^n|x|}{|x|^n}\frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{|x|}{(n+1)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

e o teste da razão garante a convergência da série.

SAIBA MAIS: Do ponto de vista prático, o teste da razão é mais fácil de ser aplicado do que o teste da raiz. Mas o teste da raiz na verdade "mais forte", ou mais abrangente, no sentido de que existem séries onde o teste da razão falha, mas o teste da raiz funciona. Por outro lado, pode-se provar que sempre que o teste da raiz funciona, então o teste da razão segue o mesmo resultado. (Não demonstraremos este resultado aqui pois para isto são necessárias ferramentas que não apresentamos previamente. Mas seu enunciado com demonstração pode ser encontrado em qualquer bom livro de Análise Real.)

Vejamos um exemplo comprovando a observação anterior.

Exemplo 3.8.18. Considere dois números reais positivos a e b tais que $a < b$ e defina a sequência x_n começando com $x_1 = a$ e multiplicando cada termo, alternadamente, por b ou por a, obtendo assim

$$x_2 = ab, \quad x_3 = a^2b, \quad x_4 = a^2b^2, \quad x_5 = a^3b^2, \ldots.$$

De forma geral, obtemos a sequência

$$x_n = \begin{cases} a^{(n+1)/2}b^{(n-1)/2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ a^{n/2}b^{n/2}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Assim, vemos que

$$n \text{ ímpar} \implies n+1 \text{ par e } \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{(n+1)/2}b^{(n+1)/2}}{a^{(n+1)/2}b^{(n-1)/2}} = b$$

e

$$n \text{ par} \implies n+1 \text{ ímpar e } \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{(n+2)/2}b^{n/2}}{a^{n/2}b^{n/2}} = a.$$

Encontramos, então, duas subsequências de $(x_{n+1}/x_n)_n$ convergindo para limites diferentes. Segue, pois, do Teorema 3.3.4 que não existe $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n)$. Logo, o teste da razão não se aplica para a série $\sum x_n$. Por outro lado,

$$n \text{ ímpar} \implies \sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{a^{(n+1)/2}b^{(n-1)/2}} = a^{(n+1)/2n}b^{(n-1)/2n} = a^{(1/2)+(1/2n)}b^{(1/2)-(1/2n)} = \sqrt{ab}\,\sqrt[2n]{\frac{a}{b}}$$

e

$$n \text{ par} \implies \sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{a^{n/2}b^{n/2}} = a^{n/2n}b^{n/2n} = a^{1/2}b^{1/2} = \sqrt{ab},$$

e concluímos que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab}$, de onde vemos que o teste da raiz se aplica. (desde, é claro, que $ab \neq 1$.)

Desafio!

Exercício 3.8.19. Mostre se as séries a seguir convergem ou divergem.

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} n^b\, a^n, \quad 0 < a < 1. \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^{n^2}} \qquad e)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 a^n}{2^{n^2}} \qquad f)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(sen\,3n)^2}{2^n+n^2+1} \qquad g)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^k}$$

Módulo 4
Limites e continuidade de funções

Neste último módulo você será apresentado(a) às propriedades topológicas dos conjuntos de números reais, além de revisar as noções de limite e continuidade de funções. Estes podem parecer assuntos sem conexão, mas as características topológicas do domínio de uma função têm importante influência nas suas propriedades.

Começamos apresentando algumas noções topológicas da reta real, definindo os conceitos de conjuntos fechados, abertos e compactos e de pontos de acumulação. Além disso, relacionamos estes novos conceitos com o conceito de sequências e de ínfimo e supremo.

A seguir definimos o conceito de limite de função em um ponto, mostramos suas propriedades, demonstramos o Teorema do Sanduíche e mostramos algumas aplicações.

Finalmente, definimos os conceitos de continuidade e descontinuidade de função em um ponto, apresentamos suas propriedades e relacionamos com conceitos anteriores.

10^a aula
(20/05/2016 - 30/05/2016)
Topologia da reta real

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender os conceitos de conjuntos abertos e fechados;
- Compreender os conceitos de pontos de acumulação e isolados de um conjunto;
- Compreender o conceito de vizinhança de um ponto;
- Entender o conceito de compacidade e sua caracterização sequencial;
- Compreender o Teorema dos intervalos encaixados para conjuntos compactos;
- Entender que o ínfimo e o supremo de um compacto existem e pertencem a ele.

4.1 Conjuntos abertos e fechados

Definição 4.1.1. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é *aberto* se para cada $x \in A$, existe $\varepsilon = \varepsilon(a) > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é *fechado* se $F^c = \mathbb{R} \backslash F$ é aberto.

PARE E PENSE: A ideia principal aqui é que para cada ponto de um conjunto aberto existe um espaço dentro do conjunto, em ambos os lados do ponto. Em outras palavras, cada ponto de um conjunto aberto deve estar a uma distância positiva (> 0) do complemento do conjunto.

Exemplo 4.1.2.

- É fácil ver que cada intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto, pois se $a < x < b$ e $\varepsilon = \min\{x-a, b-x\}$, então $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a, b)$.
- Semi-retas abertas também são conjuntos abertos. E.g., sejam $x \in (a, \infty)$ e $\varepsilon = x - a$. Então, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a, \infty)$.
- Um conjunto unitário $\{a\}$ é fechado. Para ver isto, suponha que $x \neq a$ e considere $\varepsilon = |x-a|$. Então, $a \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ e $\mathbb{R} \backslash \{a\}$ deve ser aberto. Segue da definição que $\{a\}$ é fechado.

- É claro que $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto. Consequentemente, $\emptyset = \mathbb{R}^c$ deve ser fechado.

PARE E PENSE: É um erro comum pensar que um conjunto deve ser aberto ou fechado, pois a maioria dos conjuntos não é aberto nem fechado. Por exemplo, para o conjunto $S = [a, b)$, onde $a < b$, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ não está contido em S e $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ não está contido em $\mathbb{R} \backslash S$.

O próximo teorema diz que interseções finitas de conjuntos abertos geram conjuntos abertos, enquanto que qualquer união de conjuntos abertos ainda é um conjunto aberto.

Teorema 4.1.3. (a) Se $\{A_\lambda : \lambda \in \Gamma\}$ é qualquer coleção de conjuntos abertos, então $\bigcup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda$ é aberto.

(b) Se $\{A_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ é uma coleção finita de conjuntos abertos, então $\bigcap_{k=1}^n A_k$ é aberto.

(c) Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são abertos.

Demonstração. **(a)** Se $x \in \bigcup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda$, então existe um índice $\lambda_x \in \Gamma$ tal que $x \in A_{\lambda_x}$. Como $x \in A_{\lambda_x}$ é aberto, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_{\lambda_x} \subset \bigcup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda$. Isto mostra que $\bigcup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda$ é aberto.
(b) Se $x \in \bigcap_{k=1}^n A_k$, então $x \in A_k$, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$. Mas para cada k existe $\varepsilon_k > 0$ tal que $(x - \varepsilon_k, x + \varepsilon_k) \subset A_k$. Se $\varepsilon = \min\{\varepsilon_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$, então $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_k$, para todo k, e Isto mostra que $x \in \bigcap_{k=1}^n A_k$ é aberto.
(c) $\emptyset$ é aberto por vacuidade e $\mathbb{R}$ é aberto pois, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, para todo $\varepsilon > 0$. □

A aplicação das leis de DeMorgan ao teorema anterior fornece imediatamente o seguinte resultado, que garante que uniões finitas de conjuntos fechados geram conjuntos fechados, enquanto que qualquer interseção de conjuntos fechados ainda é um conjunto fechado.

Corolário 4.1.4. (a) Se $\{F_\lambda : \lambda \in \Gamma\}$ é qualquer coleção de conjuntos fechados, então $\bigcap_{\lambda\in\Gamma} F_\lambda$ é fechado.

(b) Se $\{F_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ é uma coleção finita de conjuntos fechados, então $\bigcup_{k=1}^n F_k$ é fechado.

(c) Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são fechados.

PARE E PENSE: Surpreendentemente, $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são abertos e fechados ao mesmo tempo. Mas eles são os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ com esta "dupla personalidade", se considerarmos esta definição de conjuntos abertos. Entretanto, é possível definir conjuntos abertos de outras maneiras e de forma que outros conjuntos, além de $\emptyset$ e $\mathbb{R}$, possam ser abertos e fechados ao mesmo tempo. (explicamos isto a seguir)

Desafio!

Exercício 4.1.5. Mesmo sendo muito fácil, tente escrever a demonstração do corolário anterior. Isto é bom para treinar e melhorar a escrita.

Exercício 4.1.6. Mostre que qualquer conjunto finito de números reais é fechado.

A interseção arbitrária de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto. De fato, o próximo exercício dá um exemplo dessa afirmação.

Exercício 4.1.7. Mostre que $\cap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n)$ não é um conjunto aberto.

Analogamente ao que acontece com os conjuntos abertos, a união arbitrária de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado. O próximo exercício dá um exemplo dessa afirmação.

Exercício 4.1.8. Mostre que $\cup_{n=1}^{\infty}[0, 1-1/n]$ não é um conjunto fechado.

Exercício 4.1.9. Mostre que o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é um conjunto fechado.

Exercício 4.1.10. Dê um exemplo de dois conjuntos que não são abertos, tais que sua união é um conjunto aberto.

SAIBA MAIS: O Teorema 4.1.3 fornece um ponto de partida para uma área fundamental da Matemática, chamada de *Topologia*. As propriedades dos conjuntos abertos motivam a seguinte definição.

Definição. *Seja X um conjunto qualquer, não necessariamente um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(X)$ é uma topologia sobre X se*

(i) $\emptyset$ e X pertencem a $\mathcal{T}$;

(ii) Uniões arbitrárias de elementos de $\mathcal{T}$ são elementos de $\mathcal{T}$;

(iii) Interseções finitas de elementos de $\mathcal{T}$ são elementos de $\mathcal{T}$.

O par $(X, \mathcal{T})$ é chamado de *espaço topológico*. Os elementos de $\mathcal{T}$ são os abertos do espaço topológico. Os conjuntos fechados do espaço topológico são aqueles cujos complementos são abertos.
Se $\mathcal{O} = \{A \subset \mathbb{R} : A$ é aberto$\}$, então o Teorema 4.1.3 mostra que $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ é um espaço topológico chamado de topologia padrão de $\mathbb{R}$. A topologia padrão é a mais usada, mas existem várias outras topologias possíveis sobre $\mathbb{R}$.

4.2 Pontos de acumulação e fechos

Você provavelmente já percebeu, mas não custa enfatizar: sempre que falamos em "*número*" neste texto, sem qualquer explicação adicional, entendemos que se trata de um número real. Como os números reais são representados por pontos de uma reta, é comum usar a palavra "*ponto*" ao invés de "*número*". Desta forma, "*ponto* x" significa "*número* x".

Definição 4.2.1. Um número $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação* de um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap S \backslash \{a\} \neq \emptyset.$$

O conjunto derivado de S é o conjunto S' de todos os pontos de acumulação de S, i.e.,

$$S' = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é um ponto de acumulação de } S\}.$$

Se $a \in S \backslash S'$, dizemos que a é um *ponto isolado* de S.

Exemplo 4.2.2.
- Se $S = (0, 1]$, então S não tem pontos isolados e $S' = [0, 1]$.
- Se $T = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, então $T' = \{0\}$ e todos os pontos de T são isolados.

Teorema 4.2.3. Um ponto a é ponto de acumulação de um conjunto S se e somente se existe uma sequência $\{x_n\} \subset S \backslash \{a\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que $a \in S'$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (a-1/n, a+1/n)$ contém algum elemento x_n de S que é diferente de a. Ora, desta maneira obtemos uma sequência $\{x_n\} \subset S \backslash \{a\}$ tal que $0 \leq |x_n - a| < 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $x_n \to a$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $\{x_n\}$ é uma sequência de elementos de $S \backslash \{a\}$ que converge para a. Se $\varepsilon > 0$, segue da definição de convergência de sequências que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow x_n \in S \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \backslash \{a\}.$$

Isto mostra que $S \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \backslash \{a\} \neq \emptyset$ e que a deve ser um ponto de acumulação de S $\square$

PARE E PENSE: Observe que os pontos de acumulação de um conjunto S não precisam pertencer a S, mas os pontos isolados de S devem pertencer a S. Em um certo sentido, pontos de acumulação e pontos isolados de um conjunto S são definições opostas. As definições podem ser re-estabelecidas da seguinte forma:

- a é um ponto de acumulação de $S \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad S \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \backslash \{\, a\} \neq \emptyset$
- a é um ponto isolado de $S \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \quad S \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \backslash \{\, a\} = \emptyset$

Existe uma terminologia capaz de simplificar os enunciados dos resultados anteriores. Se $a \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$ é um conjuntos aberto contendo a, então dizemos que A é uma vizinhança de a.

Definição 4.2.4. Sejam $\varepsilon > 0$ e $a \in \mathbb{R}$. O intervalo aberto $V_\varepsilon = V_{\varepsilon,a} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ é chamado de ε-vizinhança de a.

Com esta nova nomenclatura chegamos ao seguinte enunciado.

Corolário 4.2.5. Seja $S \subset \mathbb{R}$.

(i) a é um ponto de acumulação de S se e somente se toda vizinhança de a contém infinitos elementos de S;

(ii) a é um ponto isolado de S se e somente se existe vizinhança de a contendo uma quantidade finita de elementos de S.

Desafio!

Exercício 4.2.6. Quando todos os pontos de um conjunto são isolados, dizemos que tal conjunto é *discreto*. Dê dois exemplos de conjuntos discretos.

Exercício 4.2.7. O conjunto $\mathbb{N}$ tem pontos de acumulação? Quais são os pontos isolados de $\mathbb{N}$?

Exercício 4.2.8. Mostre que 0 é o único ponto de acumulação de

$$A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}.$$

Exercício 4.2.9. Quais são os pontos de acumulação dos intervalos $(-1,4)$, $(-1,4]$, $[-1,4)$ e $[-1,4]$? Há pontos isolados nestes conjuntos?

O próximo teorema é uma generalização do Teorema 3.3.7. Ele diz que todo conjunto limitado e infinito tem pelo menos um ponto de acumulação.

Teorema 4.2.10. [Bolzano-Weierstrass] Se $S \subset \mathbb{R}$ é limitado e infinito, então $S' \neq \emptyset$.

Demonstração. Para realizar esta demonstração, introduzimos a seguinte notação: se $I = [a,b]$ é um intervalo fechado, denotamos sua metade esquerda por $I^E := [a, (a+b)/2]$ e sua metade direita por $I^D := [(a+b)/2, b]$.

Suponhamos que S é limitado e infinito. Como S é limitado, então existe um intervalo fechado $I_1 = [-a, a]$ contendo S. Como S é infinito, então pelo menos um dos dois conjuntos $I_1^E \cap S$ ou $I_1^D \cap S$ é infinito. Seja I_2 o tal conjunto infinito, $I_1^E \cap S$ ou $I_1^D \cap S$. Logo, $I_2^E \cap S$ ou $I_2^D \cap S$ é infinito e denotamos por I_3 a metade de I_2 que é infinita, ou seja, $I_3 = I_2^E \cap S$ ou $I_3 = I_2^D \cap S$. Continuando esta construção, obteremos uma sequência de intervalos fechados não vazios I_n, $n \in \mathbb{N}$, tais que para cada n, $I_n \cap S$ é infinito e

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots .$$

Segue do Teorema 3.4.2 (dos intervalos encaixados) que existe $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Para verificar que x_0 é ponto de acumulação de S, note que o comprimento de cada I_n é igual a $a/2^{n-2}$. Se $\varepsilon > a/2^{n-2}$, então $x_0 \in I_n \subset V_{\varepsilon,a}$. Como $I_n \cap S$ é infinito, então $S \cap V_{\varepsilon,a} \backslash \{x_0\} \neq \emptyset$. Portanto, x_0 é ponto de acumulação de S. $\square$

No próximo teorema caracterizamos os conjuntos fechados. Ele diz que os conjuntos fechados são aqueles que contêm todos os seus pontos de acumulação.

Teorema 4.2.11. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se e somente se $F' \subset F$.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que F é fechado e $a \in F'$. Se $a \notin F$, então F^c é uma vizinhança de a que não intersecta F. Ora, mas isto contradiz o fato de a ser ponto de acumulação de F. Portanto, $a \in F$.

($\Longleftarrow$) Vamos provar que F^c é aberto. Suponhamos que $F' \subset F$. Logo, se $a \in F^c$, então $a \notin F$ e, consequentemente, a não é ponto de acumulação de F. Desta forma, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$V_{\varepsilon,a} \cap F = \emptyset \Longrightarrow V_{\varepsilon,a} \subset F^c.$$

Isto implica que F^c é aberto e assim concluímos que F é fechado □

Definição 4.2.12. O fecho de um conjunto S é o conjunto $\overline{S} = S \cup S'$.

PARE E PENSE: Para o conjunto $S = (0, 1]$ do Exemplo 4.2.2, temos $\overline{S} = [0, 1] = S'$. Por outro lado, para o conjunto $T = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ do mesmo exemplo, vemos que $\overline{T} = T \cup \{0\}$. Note que o Teorema 4.2.11 garante que o fecho de um conjunto é um conjunto fechado. Uma maneira eficiente de ver isto é observando que o fecho de um conjunto S é o menor conjunto fechado que contém S (ou a interseção de todos os fechados contendo S).

Desafio!

Exercício 4.2.13. Dê dois exemplos de conjuntos que são iguais a seus fechos.

Exercício 4.2.14. Quais são os fechos dos intervalos $(-1, 4)$, $(0, 4]$, $[1, 6)$ e $[-3, 0]$?

Exercício 4.2.15. Qual é o fecho de $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}$.

A seguir, generalizamos o Teorema dos intervalos encaixados (Teorema 3.4.2).

Corolário 4.2.16. Se $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção encaixada de conjuntos não vazios, fechados e limitados, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Demonstração. Como cada F_n é não vazio, podemos construir uma sequência $\{x_n\}$ satisfazendo $x_n \in F_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots,$$

vemos que $\{x_n\} \subset F_1$. A limitação de F_1 implica que $\{x_n\}$ é uma sequência limitada, então segue do Teorema de Bolzano-Weierstrass que $\{x_n\}$ tem uma subsequência $\{y_n\}$ convergindo para um ponto a.

Para concluir a demonstração, devemos mostrar que a pertence a todos os F_n. De fato, fixemos $n_0 \in \mathbb{N}$. Como $\{y_n\}$ é uma subsequência de $\{x_n\}$ e $x_{n_0} \in F_{n_0}$, segue da hipótese de encaixamento que $y_n \in F_{n_0}$, para todo $n \geq n_0$. Usando o fato de que $y_n \to a$, vemos que $a \in F'_{n_0} = F_{n_0}$. Como n_0 foi tomado arbitrariamente, segue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. □

4.3 Conjuntos compactos

Nesta seção você conhecerá um pouco de uma das classes mais importantes de subconjuntos da reta real: os conjuntos compactos. O conceito de compacidade é uma extensão topológica das ideias de finitude e limitação. O início do estudo das propriedades dos conjuntos compactos se deu no final do século XIX, através dos esforços dos matemáticos Émile Borel e Henri Lebesgue e suas observações acerca de intervalos fechados e limitados da reta real.

Definição 4.3.1. Dizemos que um conjunto fechado e limitado $K \subset \mathbb{R}$ é chamado de *compacto*

PARE E PENSE: Conjuntos finitos e intervalos fechados e limitados são os exemplos mais simples de conjuntos compactos. Entretanto,

- Um intervalo aberto (a, b) é limitado, mas não é fechado. Logo, não é compacto;
- O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado, mas não é limitado. Portanto, não é compacto.

O próximo teorema dá uma das várias equivalências dos conjuntos compactos.

Teorema 4.3.2. Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se e somente se toda sequência de pontos em K possui uma subsequência que converge para um ponto de K.

Demonstração. $(\Longrightarrow)$ Suponhamos que $K \subset \mathbb{R}$ seja compacto e $\{x_n\} \subset K$ seja uma sequência. Como K é limitado, então $\{x_n\}$ também deve ser limitada e segue do Teorema de Bolzano-Weierstrass que $\{x_n\}$ possui uma subsequência $\{y_n\}$ convergindo, digamos para L. Assim, temos $L \in K' = K$, pois K é fechado.
$(\Longleftarrow)$ Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que toda sequência de pontos de K possui subsequência convergindo para um ponto de K.

- Se K não fosse limitado, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existiria $x_n \in K$ tal que $|x_n| > n$. A sequência $\{x_n\}$ obtida desta forma não possuiria subsequência limitada, logo não teria subsequência convergente. Portanto, K é limitado.

- Se K não fosse fechado, então existiria $a \in K'$ tal que $a \notin K$. O Teorema 4.2.3 garantiria a existência de uma sequência $\{x_n\} \subset K$ tal que $x_n \to a$. É claro que nenhuma subsequência de $\{x_n\}$ vai convergir para algum elemento de K, pois todas convergem para a, que não pertence a K.

$\square$

SAIBA MAIS:

Definição 4.3.3. O maior elemento de um conjunto $X \in \mathbb{R}$ é chamado de elemento *máximo de X* e denotado por $\max X$, enquanto que o menor elemento de X é chamado de *mínimo de X* e é denotado por $\min X$.

Observação 4.3.4. Seja K um conjunto compacto em $\mathbb{R}$. Como K é limitado, então existem $a = \inf K$ e $b = \sup K$. Logo, $a, b \in K' = K$, pois K é fechado. Assim, temos que a é o elemento mínimo de K e b é o elemento máximo de K.
Segue deste raciocício que se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, então existem $a, b \in K$ tais que

$$a \leq x \leq b, \quad \forall x \in K.$$

Desafio!

Exercício 4.3.5. O conjunto $\mathbb{Z} \cap [0, 10]$ é compacto? Justifique sua resposta.

Exercício 4.3.6. O conjunto $\mathbb{Q}$ é compacto? Justifique sua resposta.

Exercício 4.3.7. O conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ é compacto? Justifique sua resposta.

ATIVIDADE AVALIATIVA 7:

Exercício 4.3.8. Prove que se F é fechado e K é compacto, então $F \cap K$ é compacto.

11^a aula (27/05/2016 - 06/06/2016) Limites de funções

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender o conceito de limite de funções e suas propriedades;
- Provar limites usando a definição;
- Aplicar o Teorema do Sanduíche;
- Compreender o conceito de limites laterais.

Em [5], Ávila diz que, historicamente, o conceito de limite surgiu depois do conceito de derivada, a partir da necessidade de calcular limites de razões de incrementos (os quocientes de Newton) que, em geral, são do tipo $0/0$. Percebe-se então que os exemplos mais interessantes de limites envolvem situações compreensíveis somente para quem já está familiarizado com um conjunto considerável de funções. Isto começa a acontecer nos cursos de cálculo, onde os primeiros exemplos interessantes apresentados são os limites de $sen\, x/x$ e $(1 - \cos x)/x$, quando x tende a 0.

Recorde que quando estudamos limite, estamos interessados em identificar o comportamento de uma função $f(x)$ em uma vizinhança de um ponto de acumulação do domínio de f, ponto este que pode nem pertencer ao domínio. Por exemplo, $x = 0$ não está no domínio de $f(x) = sen\, x/x$, mas esta função está definida em todos os outros números reais e isto nos leva a questionar o que ocorre com os valores $f(x)$ para x bem próximo de 0.

4.4 Limites

Definição 4.4.1. Sejam $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D'$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o *limite de $f(x)$ quando x tende a a*, se para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ tal que

$$x \in D \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Quando isto acontece, denotamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

PARE E PENSE: Observe atentamente que o limite de $f(x)$ em um ponto a é determinado exclusivamente pelos valores de f nos pontos próximos de a que são diferentes de a. De fato, a é um ponto de acumulação de D e pode nem pertencer ao domínio D de f.
Note também que o valor de δ pode depender do valor de ε e do ponto a. Isto significa que o valor de δ para cada ponto $a \in D'$ pode variar quando o valor de ε variar.

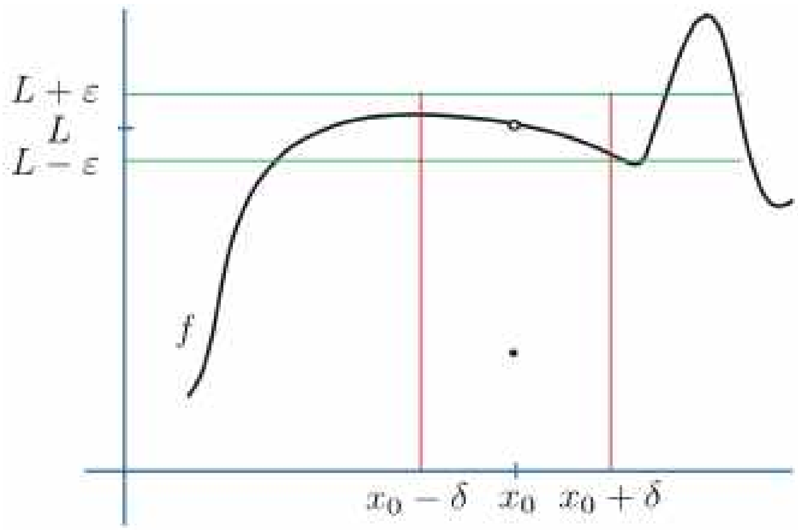

FIGURA 4.1: A figura mostra uma maneira de se pensar no limite de $f(x)$ quando $x \to x_0$. Observe que se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, então o gráfico de f deve estar contido no retângulo $(x_0-\delta, x_0+\delta) \times (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, exceto possivelmente o ponto $(x_0, f(x_0))$.

A definição de limite pode ser reescrita da seguinte forma: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \cap V_{\delta,a} \backslash \{a\} \Longrightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.4.2. Se $f(x) = c$ é uma função constante de $a \in \mathbb{R}$, então quaisquer que sejam os números positivos ε e δ,

$$x \in \mathbb{R} \cap V_{\delta,a} \backslash \{a\} \Longrightarrow |f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Isto mostra que que o limite de uma função constante existe em todos os pontos de seu domínio e o valor deste limite é o valor da função.

Exemplo 4.4.3. Sejam $f(x) = x$, $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon = \delta > 0$. Então,

$$x \in \mathbb{R} \cap V_{\delta,a} \backslash \{a\} \Longrightarrow |f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Isto mostra que a função identidade tem limite em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e seu limite é justamente o valor da função no ponto.

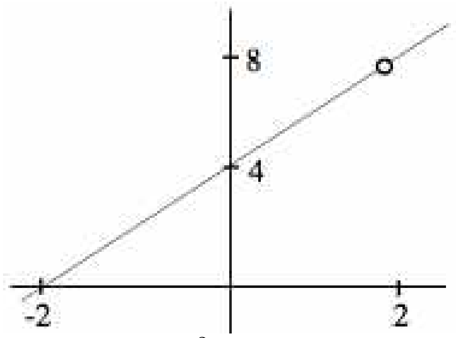

FIGURA 4.2: A função $f(x) = (2x^2 - 8)/(x - 2)$, do Exemplo 4.4.4. Note que o gráfico é uma reta com um buraco.

Exemplo 4.4.4. Seja $f(x) = \frac{2x^2-8}{x-2}$. Neste caso, o domínio de f é o conjunto $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Afirmamos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 8$. Para ver isto, tome $\varepsilon > 0$ e escolha $\delta \in (0, \varepsilon/2)$, o que implica que $2\delta < \varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 8| &= \left|\frac{2x^2-8}{x-2} - 8\right| \left(= \left|\frac{2(x^2-4)}{x-2} - 8\right| = \left|\frac{2(x+2)(x-2)}{x-2} - 8\right|\right) \\ &= |2(x+2) - 8| \\ &= 2|x-2| < 2\delta < \varepsilon \end{aligned}$$

Exemplo 4.4.5. Seja $f(x) = \sqrt{x+1}$. Então, o domínio de f é o conjunto $D = [-1, \infty)$. Afirmamos que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta \in (0, \varepsilon^2)$. Isto implica, obviamente, que $0 < \sqrt{\delta} < \varepsilon$. Desta forma, se $x \in D \cap V_{\delta,-1}\backslash\{-1\}$, então

$$0 < |x - (-1)| < \delta \Longrightarrow 0 < x - (-1) = x + 1 < \delta,$$

e isto implica que

$$|f(x) - 0| = \sqrt{x+1} < \sqrt{\delta} < \varepsilon.$$

Exemplo 4.4.6. Se $f(x) = \frac{|x|}{x}$, então o domínio f é $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Aqui temos que $0 \in D'$, mas não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. (Veja a Figura 4.3). De fato, suponha que existe $L = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, tome $\varepsilon = 1$ e $\delta > 0$. Se $L \geq 0$ e $-\delta < x < 0$, então

$$f(x) = -1 < L - \varepsilon.$$

Se $L < 0$ e $0 < x < \delta$, então

$$f(x) = 1 > L + \varepsilon.$$

Estas desigualdades mostram que quaisquer que sejam $L \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, sempre existirá um x com $0 < |x| < \delta$ tal que $|f(x) - L| > \varepsilon$.

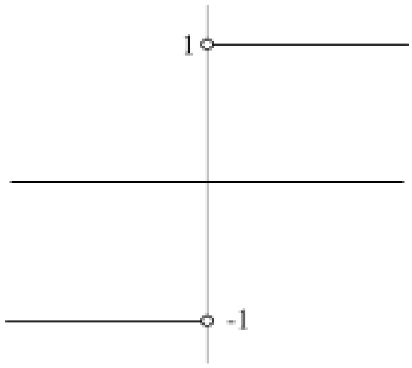

FIGURA 4.3: Esta figura mostra o gáfico da função $f(x) = |x|/x$, do Exemplo 4.4.6.

Desafio!

Exercício 4.4.7. Demonstre o seguinte teorema.

Teorema 4.4.8. Se existir, o limite de uma função será único.

Exercício 4.4.9. Prove, usando a Definição 4.4.1, que $\lim_{x\to 2}(3x+5) = 11$.

Exercício 4.4.10. Prove, usando a Definição 4.4.1, que $\lim_{x\to x_0}(ax+b) = ax_0 + b$, quaisquer que sejam $x_0, a, b \in \mathbb{R}$.

Exercício 4.4.11. Prove, usando a Definição 4.4.1, que $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

PARE E PENSE: Em muitas ocasiões você pode precisar utilizar a não existência do limite de uma função como hipótese para demonstrar algo. Por isso é bom saber que se $f: D \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in D'$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L$ significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, existe $x \in V_{\delta,a} \cap D\backslash\{a\}$ tal que $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Você deve ter percebido que existe uma óbvia semelhança entre as definições de limite de funções e de limite de sequências. O teorema a seguir explicita esta semelhança e dá uma outra forma de provar fatos sobre funções.

Teorema 4.4.12. Sejam $f: D \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D'$. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ se e somente se para toda sequência $\{x_n\} \subset D\backslash\{a\}$ tal que $x_n \to a$, tem-se $f(x_n) \to L$.

Demonstração. $(\Longrightarrow)$ Suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\{x_n\} \subset D\backslash\{a\}$ é tal que $x_n \to a$. Seja ε. Existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $x \in V_{\delta,a}\backslash\{a\}$. Como $x_n \to a$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow x_n \in V_{\delta,a} \Longrightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon.$$

Portanto, $f(x_n) \to L$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora por contradição que para toda sequência $\{x_n\} \subset D\backslash\{a\}$ tal que $x_n \to a$, tem-se $f(x_n) \to L$, mas $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que cada $\delta > 0$ possui uma vizinhança $x \in V_{\delta,a} \cap D\backslash\{a\}$ tal que $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, deve existir $x_n \in V_{1/n,a} \cap D\backslash\{a\}$ tal que $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Como $x_n \to a$, chegamos a uma contradição. Portanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. $\square$

SAIBA MAIS: O teorema anterior é frequentemente usado para demonstrar que um limite **não** existe. Suponha que você queira mostrar que não existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Existem duas estratégias:

- encontrar um sequência $\{x_n\} \subset D\backslash\{a\}$ tal que $x_n \to a$ e $\{f(x_n)\}$ não tem limite;
- encontrar duas sequências $\{x_n\}, \{y_n\} \subset D\backslash\{a\}$ tais que $x_n \to a$ e $y_n \to a$, mas $\{f(x_n)\}$ e $\{f(y_n)\}$ têm limites diferentes.

Em ambos os casos, o Teorema 4.4.12 anterior mostra que não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Por exemplo, para provar a não existência do limite do Exemplo 4.4.6, você poderia ter escolhido a sequência $x_n = (-1)^n/n$ e verificado que $f(x_n)$ oscila entre -1 e 1. Ou poderia ter escolhido as sequências $y_n = 1/n$ e $z_n = -1/n$ e verificado que $f(y_n) \to 1$, enquanto $f(z_n) \to -1$. (veja a Figura 4.3)

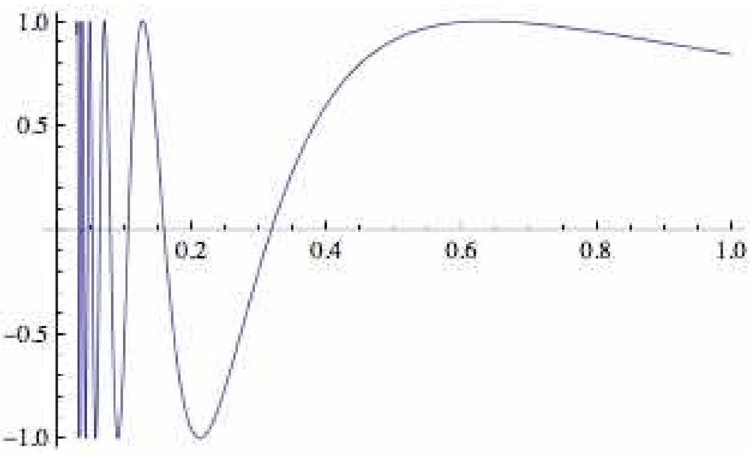

FIGURA 4.4: Esta figura mostra na cor azul o gráfico de $f(x) = \text{sen}(1/x)$, do Exemplo 4.4.13. Note que há uma quantidade infinita de oscilações em qualquer intervalo aberto contendo 0.

Exemplo 4.4.13. O domínio da função $f(x) = \text{sen}(1/x)$ é o conjunto $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e, obviamente, $0 \in D'$. As sequências $a_n = \frac{1}{n\pi}$ e $b_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ estão contidas em D e ambas decrescem para zero ($a_n \to 0$ e $b_n \to 0$). Além disso, $f(a_n) = 0$ e $f(b_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema 4.4.12 que não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. (veja a Figura 4.4)

Desafio!

Exercício 4.4.14. Use o Teorema 4.4.12 para mostrar que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ não existe.

Exercício 4.4.15. Dê um exemplo de uma função f tal que não exista $\lim_{x\to 0} f(x)$, mas tal que exista $\lim_{x\to 0} |f(x)|$

Outra ferramenta muito útil para calcular limites de funções é a versão do Teorema do Sanduíche obtida com a ajuda do Teorema 4.4.12.

Teorema 4.4.16. Suponha que f, g e h são funções definidas em D com

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in D.$$

Se $a \in D'$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ qualquer sequência em $D\backslash\{a\}$ tal que $x_n \to a$. Segue do Teorema 4.4.12 que $f(x_n) \to L$ e $h(x_n) \to L$. Como,

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então o Teorema do Sanduíche para sequências garante que $g(x_n) \to L$. Uma outra aplicação do Teorema 4.4.12 mostra que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$. $\square$

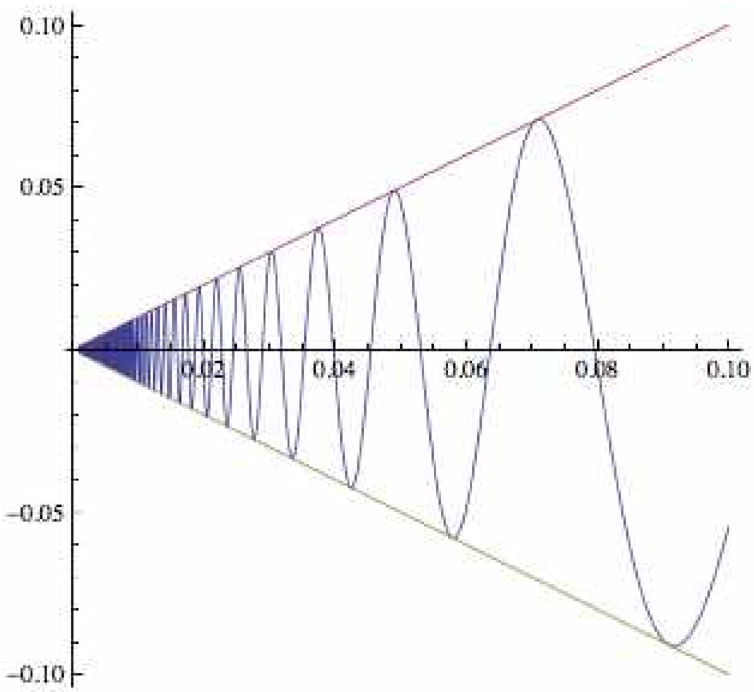

FIGURA 4.5: Esta figura mostra na cor azul o gráfico de $f(x) = x\,\text{sen}(1/x)$, do Exemplo 4.4.17. As retas limitantes nas cores roxa e amarela são os gráficos de $y = x$ e $y = -x$, respectivamente. Note que há uma quantidade infinita de oscilações em qualquer intervalo aberto contendo 0.

Exemplo 4.4.17. Se $f(x) = x\,\text{sen}(1/x)$, então o domínio de f é o conjunto $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $0 \in D'$. Como

$$-1 \leq \text{sen}(1/x) \leq 1, \quad \forall x \neq 0,$$

multiplicando por x, obtemos

$$-x \leq x\,\text{sen}(1/x) \leq x, \quad \forall x \neq 0.$$

Além disso, $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} (-x) = 0$. Segue do Teorema do Sanduíche que

$$\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}(1/x) = 0.$$

Desafio!

Exercício 4.4.18. Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2\, sen\,(1/x)$. Depois, use o Teorema 4.4.16 para mostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

ATIVIDADE AVALIATIVA 8:

AVA

Exercício 4.4.19. Demonstre o seguinte corolário do Teorema do Sanduíche.

Corolário 4.4.20. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $g(x)$ é uma função limitada, então $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

Exercício 4.4.21. Use o corolário anterior para verificar os limites do Exemplo 4.4.17 e do Exercício 4.4.18

Como já deveria ser esperado, o limite de funções tem propriedades algébricas semelhantes às propriedades do limite de sequências. É o que mostra o próximo teorema.

Teorema 4.4.22. Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in D'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então

(i) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$;

(ii) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = L - M$;

(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = LM$;

(iv) $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda L, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

(v) $\lim\limits_{x\to a} 1/f(x) = 1/L$, se $L \neq 0$.

Demonstração. Suponha que $\{x_n\}$ é uma sequência de elementos de $D \backslash \{a\}$ convergindo para a. Então, o Teorema 4.4.12 implica que $f(x_n) \to L$ e $g(x_n) \to M$. Assim, os itens (i)-(v) seguem imediatamente do Teorema 3.1.24. □

Exemplo 4.4.23. Seja $f(x) = 3x + 2$. Se $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 3$ e $g_3(x) = 2$, então obtemos $f(x) = g_2(x)g_1(x) + g_3(x)$. Segue dos Exemplos 4.4.3 e 4.4.2 que

$$\lim_{x\to a} g_1(x) = a, \quad \lim_{x\to a} g_2(x) = 3, \quad \lim_{x\to a} g_3(x) = 2.$$

Desta forma, os itens (i) e (iv) do Teorema 4.4.22 garantem que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g_2(x) \lim_{x\to a} g_1(x) + \lim_{x\to a} g_3(x) = 3a + 2.$$

PARE E PENSE: Observe que o valor do limite encontrado no último exemplo é igual a $f(a)$. Para ser mais preciso, encontramos

$$\lim_{x\to a} f(x) = 3a + 2 = f(a).$$

Da mesma forma, pode ser provado que para toda função racional (razão de polinômios) $f(x) = p_1(x)/p_2(x)$, vale

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

sempre que existir $f(a)$, ou seja, sempre que $a \in D$.

4.5 Limites laterais

Definição 4.5.1. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ um função e a um ponto de acumulação de $(-\infty, a) \cap D$. Dizemos que f tem *limite lateral pela esquerda de a* se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $f((a - \delta, a) \cap D)) \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Neste caso, denotamos $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

Definição 4.5.2. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ um função e a um ponto de acumulação de $(a, \infty) \cap D$. Dizemos que f tem *limite lateral pela direita de a* se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $f((a, a + \delta) \cap D)) \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Neste caso, denotamos $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

SAIBA MAIS: Ambos os limites definidos nesta seção são chamados de *limites laterais de f em a*. Quando eles são diferentes, diz-se que o gráfico da função f "dá um salto" em a. É o que ocorre no Exemplo 4.4.6, onde $f(x) = |x|/x$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. (veja a Figura 4.3)

Desafio!

Como no Teorema 4.4.12, os limites laterais também podem ser reformulados em termos de sequências.

Teorema 4.5.3. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função.

(i) Seja a um ponto de acumulação do conjunto $(-\infty, a) \cap D$. Então, $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ se e somente se para toda sequência $\{x_n\} \subset (-\infty, a) \cap D$ tal que $x_n \to a$, tem-se $f(x_n) \to L$.

(i) Seja a um ponto de acumulação do conjunto $(a, \infty) \cap D$. Então, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ se e somente se para toda sequência $\{x_n\} \subset (a, \infty) \cap D$ tal que $x_n \to a$, tem-se $f(x_n) \to L$.

Demonstração. A demonstração é semelhante à demonstração do Teorema 4.4.12 e portanto será deixada para que você a escreva. □

O próximo teorema diz que uma função tem limite L em um ponto a se e somente se ambos os limites laterais de f em a existirem e se forem iguais.

Teorema 4.5.4. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ um função e $a \in D$. Então,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Demonstração. A demonstração é deixada como exercício. Tente resolver. □

Teorema 4.5.5. Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é uma função monótona (crescente ou decrescente), então existem os limites laterais de f em todos os pontos de (a, b).

Demonstração. Para ser mais específico, suponha que f é crescente em (a, b) e $x_0 \in (a, b)$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $L = \sup\{f(x) : a < x < b\}$. De acordo com o Corolário 2.3.11, deve existir $x \in (a, x_0)$ tal que $L - \varepsilon < f(x) \leq L$. Defina $\delta = x_0 - x$. Se $y \in (x_0 - \delta, x_0)$, então

$$L - \varepsilon < f(x) \leq f(y) \leq L.$$

Isto prova que $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

A demonstração de que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ é semelhante e portanto é deixada como exercício para você praticar.

Para demonstrar o caso em que f é decrescente, considere $-f$ ao invés de f. $\square$

Desafio!

Exercício 4.5.6. Demonstre o teorema anterior para o caso em que f é decrescente.

Exercício 4.5.7. Suponha que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$ e que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in (0, \delta)$. Prove que $L \geq 0$.

Exercício 4.5.8. Suponha que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$ e que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq 0$, para todo $x \in (0, \delta)$. Prove que $L \leq 0$.

Exercício 4.5.9. Suponha que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = L$ e que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in (-\delta, 0)$. Prove que $L \geq 0$.

Exercício 4.5.10. Suponha que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = L$ e que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq 0$, para todo $x \in (-\delta, 0)$. Prove que $L \leq 0$.

12^a aula
(03/06/2016 - 13/06/2016)
Continuidade

Objetivos específicos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender o conceito de continuidade, suas propriedades e consequências;
- Compreender o conceito e os tipos de descontinuidade;
- Compreender o Teorema dos valores extremos.

4.6 Continuidade

Definição 4.6.1. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ um função e $a \in D$. Dizemos que f é *contínua em a* se para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ tal que

$$x \in D \quad \text{e} \quad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Neste caso, dizemos que a é um *ponto de continuidade de f*. Caso contrário, dizemos que a é um *ponto de descontinuidade de f* ou que f é *descontínua em a*.

O próximo teorema apresenta várias formas de entendimento desta definição. Não há necessidade de provar este teorema. Apenas tente entender cada equivalência.

Teorema 4.6.2. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ um função e $a \in D$. As seguintes afirmações são equivalentes.

(i) f é contínua em a;

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D \Longrightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon);$$

(iii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(V_{\delta,a} \cap D) \subset V_{\varepsilon,f(a)}$.

Exemplo 4.6.3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-8}{x-2} & \text{, se } x \neq 2 \\ 8 & \text{, se } x = 2, \end{cases}$$

é contínua em 2, como garante o Exemplo 4.4.4.

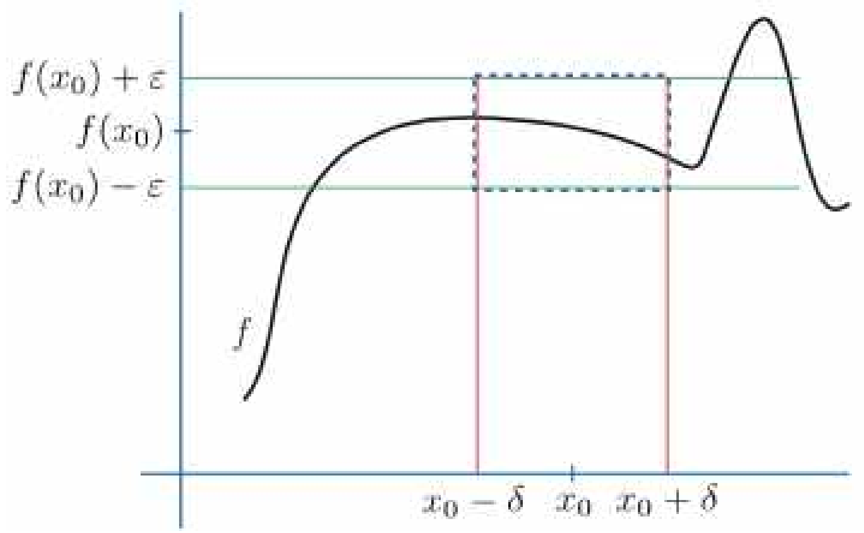

FIGURA 4.6: A figura mostra uma maneira de se pensar na continuidade de $f(x)$ em um ponto x_0 de seu domínio. Note que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que, para pontos suficientemente próximos de x_0, o gráfico de f está dentro do retângulo $(x_0-\delta, x_0+\delta)\times(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$.

PARE E PENSE: Existe uma sutil diferença entre o tratamento do domínio da função nas definições de limite e de continuidade. Na definição de limite, o "ponto alvo" a deve ser necessariamente um ponto de acumulação do domínio, mas não precisa, na verdade, pertencer ao domínio. Já na definição de continuidade, o "ponto alvo" a deve pertencer ao domínio.
O próximo exemplo mostra uma consequência desta diferença.

Exemplo 4.6.4. Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer, então todos os pontos de $\mathbb{Z}$ são pontos de continuidade de f. Para ver isto, considere $n_0 \in \mathbb{Z}$, ε e $\delta = 1$. Se $x \in \mathbb{Z}$, com $|x - n_0| < \delta$, então $x = n_0$. Segue que $|f(x) - f(n_0)| = 0 < \varepsilon$. Portanto, f é contínua em n_0.

Este exemplo motiva o enunciado do seguinte teorema.

Teorema 4.6.5. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ um função e $a \in D$.

(i) Se $a \in D'$, então f é contínua em a se e somente se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$;

(ii) Se a é ponto isolado de D, então f é contínua em a.

Demonstração. Começamos provando o item (ii), que é mais fácil. Suponha que a é um ponto isolado do domínio D de f. Então existe $\delta > 0$ tal que $V_{\delta,a} \cap D = \{a\}$. Logo, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, a definição de continuidade será satisfeita com este δ, pois

$$x \in D \quad \text{e} \quad x \in V_{\delta,a} \Longrightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon.$$

Agora, com relação ao item (i), temos: $(\Longrightarrow)$ A definição de continuidade diz que f é contínua em a se e somente se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D \Longrightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

A definição de limite diz que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ se e somente se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D \backslash \{a\} \Longrightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

Comparando as duas definições, concluímos que se f é contínua em a, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
$(\Longleftarrow)$ Reciprocamente, suponhamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ e tomemos $\varepsilon > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$, de acordo com a definição de limite. Se $x \in V_{\delta,a} \cap D \backslash \{a\}$, então $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Segue que se $x = a$, então

$$f(x) - f(a) = f(a) - f(a) = 0 < \varepsilon.$$

Portanto, quando $x \in V_{\delta,a} \cap D$, então $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, e vemos que f é contínua em a. □

Exemplo 4.6.6. Segue do Exemplo 4.4.2 e do Teorema 4.6.5 que uma função constante $f(x) = c$ qualquer é sempre contínua em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo 4.6.7. Analogamente, o Exemplo 4.4.3 e o Teorema 4.6.5 garante a continuidade da função identidade $f(x) = x$ em todos os pontos de seu domínio.

Corolário 4.6.8. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ um função e $a \in D$. Então, f é contínua em a se e somente se $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$, para toda sequência $\{x_n\} \subset D$ tal que $x_n \to a$.

Demonstração. Uma combinação dos Teoremas 4.6.5 e 4.4.12 garante a veracidade do enunciado. □

PARE E PENSE: Os quatro exemplos anteriores mostram funções contínuas em todos os pontos de seus respectivos domínios. Mas a função do Exemplo 4.6.3 torna-se descontínua em um único ponto de seu domínio após uma delicada modificação. O que você deve observar é que para $k \neq 8$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-8}{x-2} & , \text{ se } x \neq 2 \\ k & , \text{ se } x = 2, \end{cases}$$

é contínua em todos os pontos de seu domínio, menos em 2. A razão disto é que apesar de existir $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 8$, ele é diferente de $f(2) = k$.

O próximo exemplo apresenta uma função que não é contínua em ponto algum.

Exemplo 4.6.9. A *função de Dirichlet*, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{ se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

é descontínua em todos os pontos de seu domínio. De fato, se $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = 1$ e existe uma sequência de números irracionais convergindo para x. se $y \notin \mathbb{Q}$, então $f(y) = 0$ e existe uma sequência de números racionais convergindo para y. Portanto a afirmação segue do Corolário 4.6.8.

Desafio!

Exercício 4.6.10. Dê um exemplo de uma função f que não seja contínua em ponto algum, mas tal que $|f|$ seja contínua em todos os pontos de seu domínio.

A seguir apresentamos uma função definida em $\mathbb{R}$ que é contínua somente no pontos irracionais.

Exemplo 4.6.11. Como $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, então ele pode ser representado por uma sequência da seguinte forma: $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Defina

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & , \text{ se } x = q_n \\ 0 & , \text{ se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = q_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = 1/n > 0$. Além disso, existe uma sequência $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x$ e $f(x_n) = 0 \not\to f(x) = 1/n$. Logo, f é descontínua em todos os pontos de $\mathbb{Q}$.

Por outro lado, tomando $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$. Escolha $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $1/N < \varepsilon$ e defina $\delta = \min\{|x - q_n| : 1 \leq n \leq N\}$. Se $|x - y| < \delta$, então há dois casos a serem considerados:

- $y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \Longrightarrow |f(y) - f(x)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$;

- Se $y \in \mathbb{Q}$, então a escolha de δ implica que $y = q_n$, para algum $n > N$. Neste caso,

$$|f(y) - f(x)| = f(y) = f(q_n) = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em x.

SAIBA MAIS: Existe um resultado topológico conhecido como Teorema da categoria de Baire, sobre o qual não trataremos neste texto, mas que garante que não existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua somente nos pontos de $\mathbb{Q}$. As demonstrações do teorema e da não existência de tal função nos levariam para muito além do que queremos tratar neste curso, mas fica a informação sobre o assunto.

ATIVIDADE AVALIATIVA 9:

Exercício 4.6.12. Prove que se f é contínua em a e (x_n) é uma sequência de pontos do domínio de f tal que $x_n \to a$, então $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

O próximo teorema é uma consequência quase que imediata do Teorema 4.4.22. Sua demonstração é deixada como exercício.

Desafio!

Exercício 4.6.13. Demonstre o seguinte teorema.

Teorema 4.6.14. Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em um ponto $x \in D$. Então,

(i) $f + g$ é contínua em x;

(ii) $f - g$ é contínua em x;

(iii) fg é contínua em x;

(iv) λf é contínua em x, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$;

(v) f/g é contínua em x, desde que $g(x) \neq 0$.

Corolário 4.6.15. Se f é uma função racional, i.e., é razão de dois polinômios, então f é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Demonstração. Isto é consequência dos Exemplos 4.6.6 e 4.6.7 e do item (v) Teorema 4.6.14. $\square$

O próximo teorema mostra que a composição de funções contínuas é também uma função contínua.

Teorema 4.6.16. Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(D_f) \subset D_g$. Se f é contínua em $a \in D_f$ e g é contínua em $b = f(a) \in D_g$, então $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ é contínua em a.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como g é contínua em b, então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$y \in D_g \quad \text{e} \quad |y - b| < \delta_1 \Longrightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Agora, para este $\delta_1 > 0$, como f é contínua em a, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_f \quad \text{e} \quad |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1. \tag{4.2}$$

Segue de (4.1) e (4.2) que

$$\begin{aligned} x \in D_f \quad \text{e} \quad |x - a| < \delta_2 \quad &\Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \delta_1 \\ &\Longrightarrow \quad |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $g \circ f$ é contínua em a. □

4.7 Continuidade lateral e tipos de descontinuidade

Definição 4.7.1. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ um função e $a \in D$. Dizemos que f é *contínua em a pela esquerda* se para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ tal que

$$x \in (a - \delta, a] \cap D \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Dizemos que f é *contínua em a pela direita* se para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ tal que

$$x \in [a, a + \delta) \cap D \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemplo 4.7.2. A *função piso* $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\},$$

é contínua pela direita em todos os números inteiros, mas não é contínua pela esquerda em nenhum ponto de $\mathbb{Z}$.

Por outro lado, a *função teto* $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\},$$

é contínua pela esquerda em todos os números inteiros, mas não é contínua pela direita em nenhum ponto de $\mathbb{Z}$.

O próximo teorema relaciona continuidade com continuidade lateral. A demonstração é simples e, portanto, é deixada como exercício.

Desafio!

Exercício 4.7.3. Demonstre o resultado a seguir.

Teorema 4.7.4. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in D$ se e somente se é contínua pela direita e pela esquerda de a.

PARE E PENSE: Note que:

- f é contínua em a pela esquerda $\iff \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$;
- f é contínua em a pela direita $\iff \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

De acordo com o Teorema 4.5.5, qualquer função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monótona tem limites laterais em cada ponto de (a, b). Para que f seja contínua em algum ponto $c \in (a, b)$, deve-se ter

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x).$$

Se uma das igualdades acima for violada, a função não será contínua, conforme diz o Teorema 4.7.4.

O Teorema 4.5.4 relaciona a existência do limite de uma função em um ponto com a existência dos limites laterais da função. Resumidamente, ele diz que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Assim, vemos que o limite de uma função pode não existir por duas causas diferentes:

- a não existência de um dos (ou dos dois) limites laterais;
- a existência, mas com diferença, dos limites laterais

Isto nos diz que existem basicamente dois tipos de pontos de descontinuidade para uma função.

Definição 4.7.5. Dizemos que $f : D \to \mathbb{R}$ tem uma descontinuidade removível em $a \in D$, se os limites laterais de f em a existem e são iguais, mas

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a).$$

Dizemos que $f : D \to \mathbb{R}$ tem uma descontinuidade essencial em $a \in D$, se algum dos limites laterais de f em a não existir, ou se ambos existirem, mas

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x).$$

O termo removível da definição anterior significa que a função pode ser transformada em uma função contínua no ponto em questão se ela for redefinida de forma conveniente neste ponto.

Exemplo 4.7.6. A função $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, não é contínua em $x = 2$, porque 2 não pertence ao domínio de f. Mas como $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, podemos incluir 2 ao domínio de f, definindo $f(2) = 4$, e assim obtemos uma nova função

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, se } x \neq 2 \\ 4 & \text{, se } x = 2, \end{cases}$$

que é contínua em 2 e coincide com f nos pontos diferentes de 2.

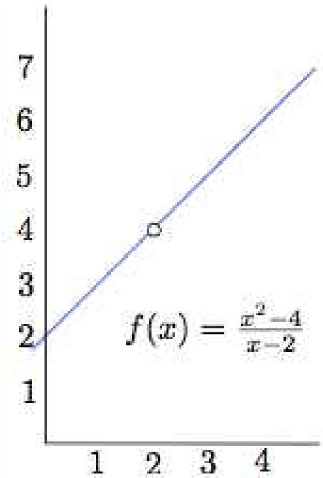

FIGURA 4.7: A figura mostra o gráfico da função $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$, do Exemplo 4.7.6. Observe que o gráfico é uma reta com um buraco no ponto $(2, 4)$. A função $g(x)$ do exemplo remove a descontinuidade tampando o buraco.

Exemplo 4.7.7. A função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0, \end{cases}$$

tem uma descontinuidade essencial em $x = 0$.

O próximo teorema mostra que uma função monótona será contínua em "quase todos os pontos" do seu domínio.

Teorema 4.7.8. se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é monótona, então o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é no máximo enumerável.

Demonstração. Segue do Teorema 4.5.5 que f só pode ter descontinuidades essenciais com ambos os limites existindo.

De fato, suponhamos, por exemplo, que f é crescente e que x_0 e y_0 são pontos de descontinuidade de f, tais que $x_0 < y_0$. Então,

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) < \lim_{x\to x_0^+} f(x) \leq \lim_{x\to y_0^-} f(x) < \lim_{x\to y_0^+} f(x).$$

Isto implica que para cada par (x_0, y_0) pontos de descontinuidade de f, existem intervalos abertos disjuntos

$$I_{x_0} = \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) \, , \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right) \quad \text{e} \quad I_{y_0} = \left(\lim_{x \to y_0^-} f(x) \, , \lim_{x \to y_0^+} f(x) \right) ,$$

tais que $x_0 \in I_{x_0}$ e $y_0 \in I_{y_0}$. Para cada ponto de descontinuidade x, escolha $q_x \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$. Isto define uma função injetora do conjunto das descontinuidades de f em $\mathbb{Q}$. Portanto, f tem no máximo uma quantidade enumerável de descontinuidades. $\square$

Desafio!

Exercício 4.7.9. Determine o tipo de descontinuidade das seguintes funções nos pontos indicados.

(a) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$, no ponto $x = 1$;

(b) $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, no ponto $x = 3$.

Justifique suas respostas.

4.8 Propriedades das funções contínuas

Nesta última seção, analisamos algumas propriedades que as funções possuem quando são contínuas em todos os pontos de seu domínio.

Definição 4.8.1. Dizemos que $f : D \to \mathbb{R}$ é *contínua em $A \subset D$* se f é contínua em todos os pontos de A. Quando f é contínua em todos os pontos de seu domínio D, dizemos simplesmente que f é *contínua*.

PARE E PENSE: Em um certo sentido, a "continuidade em um ponto" pode ser vista como uma propriedade métrica da função no ponto (uma propriedade local), pois ela mede distâncias relativas entre pontos do domínio e da imagem. Já a "continuidade em um conjunto" está mais para um propriedade topológica (global) que associa propriedades do domínio com propriedades da imagem da função.

Começamos mostrando que funções contínuas levam conjuntos compactos em conjuntos compactos.

Teorema 4.8.2. Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua em K, então $f(K)$ é compacto.

Demonstração. Vamos provar que toda sequência de pontos de $f(K)$ possui uma subsequência que converge para algum ponto de $f(K)$. Seja $\{y_n\} \subset f(K)$. Pela definição de imagem de função, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como K é compacto e $\{x_n\} \subset K$, então $\{x_n\}$ possui uma subsequência $\{x_{n_j}\}$ que converge para algum $a \in K$, i.e., $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = a$. Obviamente, $\{f(x_{n_j})\}$ é uma subsequência de $\{y_n\}$ e como f é contínua em K, segue do Corolário 4.6.8 que $\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(a) \in f(K)$. Portanto $f(K)$ é compacto. □

Este teorema tem algumas consequências muito interessantes e relevantes. A primeira é conhecida como "Teorema de Weierstrass" ou "Teorema dos valores extremos".

Corolário 4.8.3 (Teorema dos valores extremos)**.** Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua em K, então existem $x_0, x_1 \in K$ tais que

$$f(x_0) \le f(x) \le f(x_1), \quad \forall x \in K.$$

Demonstração. Segue doTeorema 4.8.2 que $f(K)$ é compacto, e portanto, fechado e limitado. A condição de limitação implica que existem $\inf f(K)$ e $\sup f(K)$. Lembre-se que $\inf f(K)$ e $\sup f(K)$ são pontos de acumulação de $f(K)$, que é fechado, então $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Logo, existem $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) = \inf f(K)$ e $f(x_1) = \sup f(K)$. Portanto,

$$f(x_0) = \inf f(K) \le f(x) \le \sup f(K) = f(x_1), \quad \forall x \in K.$$

□

SAIBA MAIS: O Teorema de Weierstrass é importante porque muitos problemas em Matemática e nas suas aplicações se resumem à procura por pontos de um conjunto X onde uma certa função real $f : X \to \mathbb{R}$ assume seu valor máximo ou seu valor mínimo. Mas antes de tentar resolver um desses problemas, é necessário saber se tais pontos existem realmente (procurar por algo que não existe pode se tornar uma tarefa frustrante!).

Vejamos que todas as hipóteses do Teorema dos valores extremos são realmente necessárias.

Exemplo 4.8.4. A função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é contínua, mas o domínio $(0,1)$ não é compacto (pois não é fechado). Note que $f((0,1)) = (0,1)$ é limitado, mas $\inf(0,1) = 0 \notin (0,1)$ e $\sup(0,1) = 1 \notin (0,1)$. Isto mostra que a hipótese de fechamento do domínio é necessária para a validade do teorema.

Exemplo 4.8.5. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1/(1+x^2)$ é contínua, mas seu domínio não é compacto (por quê?). Note que $0 < g(x) \le 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\inf g(\mathbb{R}) = 0 \notin g(\mathbb{R})$, isto mostra que o conjunto não contém valor mínimo. Isto mostra que a hipótese de limitação do domínio é necessária para a validade do teorema.

Referências Bibliográficas

[1] L. Larson; *Introduction to Real Analysis*.
Publicado online em: http://www.math.louisville.edu/~lee/RealAnalysis/

[2] P.C. Lima; *Fundamentos de Análise I*. UFMG - Ed. à Distância, 2013. Publicado online em: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_Analise_I.pdf

[3] P.C. Lima; *Fundamentos de Análise II*. UFMG - Ed. à Distância, 2013. Publicado online em: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_Analise_II.pdf

[4] E.L. Lima; *Análise Real - volume 1, Funções de Uma Variável Real*. IMPA, Rio de Janeiro, 10^a ed, 2009.

[5] G. Ávila; *Análise Matemática para Licenciatura*. Editora Edgard Blücher Ltda, 1^a ed, 2002.