



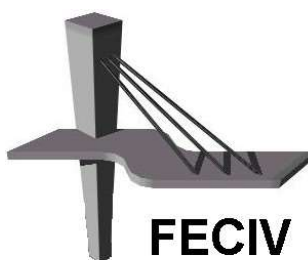
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Dissertação DE MESTRADO

**ESTUDO ANALÍTICO DO TOMBAMENTO DE  
VIGAS PRÉ-MOLDADAS SOBRE ALMOFADAS  
DE APOIO**

**MARINA FERNANDES ALVARENGA OLIVEIRA**

**UBERLÂNDIA, 22 DE ABRIL DE 2019.**



**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**



**Marina Fernandes Alvarenga Oliveira**

## **ESTUDO ANALÍTICO DO TOMBAMENTO DE VIGAS PRÉ-MOLDADAS SOBRE ALMOFADAS DE APOIO**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Civil**.

**Orientadora: Profa. Dra. Maria Cristina Vidigal de Lima**

**Co-orientador: Dr. Pablo Augusto Krah**

Uberlândia, 22 de abril de 2019.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

O48e  
2019      Oliveira, Marina Fernandes Alvarenga, 1993-  
             Estudo analítico do tombamento de vigas pré-moldadas sobre  
             almofadas de apoio [recurso eletrônico] / Marina Fernandes Alvarenga  
             Oliveira. - 2019.

             Orientadora: Maria Cristina Vidigal de Lima.  
             Coorientador: Pablo Augusto Krah. l.  
             Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.  
             Modo de acesso: Internet.  
             Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2019.21>  
             Inclui bibliografia.  
             Inclui ilustrações.

             1. Engenharia civil. 2. Vigas de concreto. 3. Estabilidade estrutural.  
4. Metodo parametrico. I. Lima, Maria Cristina Vidigal de, 1970-,  
(Orient.). II. Krah. l, Pablo Augusto, 1988-, (Coorient.). III. Universidade  
Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Civil. IV. Título.

CDU: 624



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

### ATA DE DEFESA

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Civil				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, PPGE - 238				
Data:	22 de abril de 2019	Hora de início:	[09:15]	Hora de encerramento:	[12:00]
Matrícula do Discente:	11712ECV006				
Nome do Discente:	Marina Fernandes Alvarenga Oliveira				
Título do Trabalho:	Estudo analítico do tombamento de vigas pré-moldadas sobre almofadas de apoio				
Área de concentração:	Estruturas e Construção Civil				
Linha de pesquisa:	Estrutura				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Estudo analítico e numérico do comportamento de vigas pré-moldadas de concreto durante as fases transitórias considerando o efeito das imperfeições geométricas				

Reuniu-se na Sala de Projeções Prof. Celso Franco de Gouvêa, bloco 1Y, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, assim composta: Professores Doutores: Mounir Khalil El Debs – EESC/USP, Gerson Moacyr Sisniegas Alva – FECIV/UFU e Maria Cristina Vidigal de Lima - FECIV/UFU orientadora da candidata.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dr.<sup>a</sup> Maria Cristina Vidigal de Lima, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

[A]provado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Maria Cristina Vidigal de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/04/2019, às 08:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).





Documento assinado eletronicamente por **Gerson Moacyr Sisnegas Alva, Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/04/2019, às 08:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **MOUNIR KHALIL EL DEBS, Usuário Externo**, em 23/04/2019, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1119656** e o código CRC **7AEF157C**.

---

# AGRADECIMENTOS

---

Aos meus pais, Antônio Augusto e Neli, por sempre terem me dado toda estrutura física e emocional que eu precisava. Às minhas irmãs Janaina, Rafaela e Lorena pelo carinho e exemplo.

Ao meu marido Gilberto, pelo amor, cuidado e dedicação. Por estar ao meu lado quando eu mais precisava e não me deixar desistir. E acima de tudo, obrigada por me fazer feliz!

À Maria Cristina e ao Pablo, pela imensa ajuda e por dividirem comigo tanto conhecimento. À Maria Cristina agradeço ainda a prestatividade, o apoio, a paciência e a compreensão durante essa caminhada até aqui.

E a todos aqueles que direto ou indiretamente contribuíram para minha formação e realização deste trabalho, meu muito obrigada!

OLIVEIRA, M. F. A. Estudo analítico do tombamento de vigas pré-moldadas sobre almofadas de apoio. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, 2019.

## RESUMO

---

A montagem de vigas pré-moldadas protendidas de concreto longas e esbeltas merece estudo e atenção, devido aos riscos de instabilidade lateral. Tanto na fase de içamento como após o posicionamento na estrutura, esses elementos estruturais, com baixa rigidez à flexão lateral, exigem dos projetistas análises que garantam a segurança do manuseio. Portanto, esse trabalho visa propor um modelo analítico para análise paramétrica de vigas já posicionadas em seu local definitivo, quando as ligações ainda não foram efetivadas, considerando a geometria da seção transversal, características físicas dos materiais bem como imperfeições geométricas. São propostas soluções analíticas não lineares para determinar a carga de tombamento de vigas pré-moldadas sobre aparelhos de apoio de elastômeros. Um modelo numérico desenvolvido no programa computacional ANSYS é utilizado para comparação com os resultados analíticos. Por fim, é feita uma análise paramétrica para verificar o comportamento da estrutura em função da variabilidade de parâmetros específicos como a excentricidade inicial, a rotação inicial da viga, a resistência do concreto, as dimensões do aparelho de apoio, a força de protensão e a seção transversal da viga. Os resultados mostram que as equações propostas permitem caracterizar o comportamento não linear pós pico da viga e considerar tanto a excentricidade quanto a rotação inicial. A análise paramétrica evidenciou a grande influência das propriedades geométricas da viga, como seção transversal, excentricidade e rotação inicial, dentre outros parâmetros, na estabilidade ao tombamento da viga. Tanto a rigidez a rotação do apoio como a da seção transversal foram os fatores de maior influência na carga crítica de tombamento. A contraflecha devido a força de protensão isoladamente resultou em uma diminuição insignificante da carga crítica. Para os casos analisados, quanto a carga crítica de tombamento, observa-se redução média de até 7% devido a presença de excentricidade inicial e 9% devido a consideração de rotação inicial, entre 42% a 62% devido a diminuição da rigidez a rotação do apoio, de 33% e 41% devido a redução do comprimento da mesa superior da viga, de 29% e 48% para as seções BT-63 e BT-72, respectivamente, em comparação a BT-54, devido ao aumento da altura da viga. Quanto ao ângulo crítico de tombamento, as análises mostram que a excentricidade inicial e a rotação inicial provocam aumentos significativos em seus valores, atingindo um aumento de 52% para os valores analisados de excentricidade inicial e de 47% para os valores de rotação inicial. O ângulo de início de fissuração é sensível às variações das propriedades da seção transversal da viga. Desta forma, constata-se que a rigidez à flexão lateral é o principal parâmetro que governa a fissuração da viga. Finalmente, a forma da seção transversal e a quantificação das imperfeições geométricas, como excentricidade e rotação inicial, são de suma importância para as análises de tombamento.

**Palavras-chave:** Estabilidade lateral. Vigas pré-moldadas. Estudo analítico. Apoios elastoméricos.

# ABSTRACT

---

The handling of long and slender precast prestressed concrete beams deserves study and attention due to the risks of lateral instability. During the lifting phase and after positioning the beam in the structure, these structural elements, which have low lateral flexural stiffness, require verification of the safety for handling by the designers. Therefore, this work aims to propose an analytical model for parametric analysis of beams already positioned in their definitive location, when the connections have not yet been made, considering the geometry of the cross-section, physical characteristics of the materials as well as geometric imperfections. Nonlinear analytical solutions are proposed to determine the loading of precast beams on elastomeric support devices. It is worth mentioning that no analytical formulation available in the literature that considers the initial rotation of the beam as an imperfection in the study of equilibrium. A numerical model developed in the ANSYS software program is used for comparison with the analytical results. Finally, a parametric analysis is performed to verify the behavior of the structure as a function of the variability of specific parameters such as initial eccentricity, initial beam rotation, concrete strength, dimensions of the bearing pads, the prestressing force and cross-section of the beam. The results show that the proposed equations allow to characterize the non-linear behavior after the peak of the beam and to consider both the eccentricity and the initial rotation. The parametric analysis evidenced the significant influence of the geometric properties of the beam, such as cross-section, eccentricity, and initial rotation, among other parameters, on the stability of the beam. The rotational stiffness of the support and the section stiffness were the factors of most significant influence on the rollover load. The camber due to the prestressing force resulted in an insignificant decrease in the critical load. For the analyzed cases, the rollover load had an average reduction up to 7% due to the presence of initial eccentricity and 9% due to the consideration of initial rotation, an average reduction between 42% and 62% due to the decrease in the rotational stiffness of the support, 33% and 41% due to the reduction of the beam top flange length, 29% and 48% for the increase in section height for the beams BT-63 and BT-72 compared to the BT-54, respectively. Regarding the critical rollover angle, the analyses show that the initial eccentricity and the initial rotation cause significant increases in their values, reaching an increase of 52% for the analyzed values of initial eccentricity and 47% for the values of initial rotation. The cracking angle is sensitive to variations in beam cross-sectional properties. In this way, lateral stiffness is the main parameter that governs the cracking of the beam. Finally, the shape of the cross-section and the quantification of geometric imperfections, such as eccentricity and initial rotation, are of paramount importance for stability analyzes.

**Keywords:** Lateral stability. Precast beams. Analytical study, Elastomeric bearing pads.

# SUMÁRIO

---

## CAPÍTULO 1

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>1.1 Considerações iniciais .....</b>	<b>11</b>
<b>1.2 Objetivos .....</b>	<b>12</b>
<b>1.3 Justificativa .....</b>	<b>13</b>
<b>1.4 Organização do trabalho .....</b>	<b>15</b>

## CAPÍTULO 2

<b>ESTADO DA ARTE .....</b>	<b>17</b>
<b>2.1 Considerações iniciais .....</b>	<b>17</b>
<b>2.2 Estudos analíticos .....</b>	<b>18</b>
<b>2.3 Estudos experimentais .....</b>	<b>25</b>
<b>2.4 Estudos numéricos .....</b>	<b>33</b>

## CAPÍTULO 3

<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>43</b>
<b>3.1 Soluções analíticas não-lineares da instabilidade lateral de vigas pré-moldadas sobre almofadas de apoio .....</b>	<b>43</b>
3.1.1 O método de Rayleigh-Ritz .....	45
3.1.2 Aplicação do Método de Rayleigh-Ritz ao problema de instabilidade lateral de vigas pré-moldadas sobre almofadas de apoio.....	46
<b>3.2 Análise do problema de instabilidade pelo Método dos Elementos Finitos..</b>	<b>49</b>
<b>3.3 Desenvolvimento de algoritmo e análise paramétrica das soluções analíticas .....</b>	<b>50</b>

## **CAPÍTULO 4**

<b>PROPOSTAS ANALÍTICAS .....</b>	<b>57</b>
<b>4.1 Desenvolvimento do equacionamento de carga crítica .....</b>	<b>57</b>
4.1.1 Viga perfeitamente reta.....	57
4.1.2 Viga com excentricidade inicial .....	60
4.1.3 Viga com excentricidade e rotação inicial .....	61
4.1.4 Contraflecha de protensão sem excentricidade lateral e sem rotação inicial .....	62
4.1.5 Estudo de Caso .....	65
<b>4.2 Determinação do início da fissuração.....</b>	<b>68</b>
<b>4.3 Cálculo da rotação crítica.....</b>	<b>69</b>
4.3.1 Verificação do efeito de <i>lift-off</i> .....	72

## **CAPÍTULO 5**

<b>ANÁLISE DE RESULTADOS.....</b>	<b>74</b>
<b>5.1 Considerações Iniciais.....</b>	<b>74</b>
<b>5.2 Resultados analíticos .....</b>	<b>75</b>
5.2.1 Análise linear .....	75
5.2.2 Análise não linear .....	77
<b>5.3 Resultados numéricos .....</b>	<b>83</b>
5.3.1 Modelagem numérica no ANSYS .....	83
5.3.2 Comparação entre resultados da solução analítica com o modelo numérico .....	85

## **CAPÍTULO 6**

<b>ANÁLISE PARAMÉTRICA DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS NÃO-LINEARES ..</b>	<b>91</b>
<b>6.1 Parâmetros da análise.....</b>	<b>91</b>
<b>6.2 Resultado dos dados base .....</b>	<b>92</b>
<b>6.3 Excentricidade inicial .....</b>	<b>96</b>
<b>6.4 Rotação inicial .....</b>	<b>100</b>
<b>6.5 Resistência do concreto.....</b>	<b>103</b>
<b>6.6 Força de protensão.....</b>	<b>107</b>

<b>6.7 Rigidez do aparelho de apoio .....</b>	<b>107</b>
<b>6.8 Seção transversal da viga .....</b>	<b>113</b>
<b>6.9 Resumo dos resultados.....</b>	<b>125</b>

## **CAPÍTULO 7**

<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>129</b>
<b>7.1 Conclusão .....</b>	<b>129</b>
<b>7.2 Recomendações para trabalhos futuros.....</b>	<b>133</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>134</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

---

### 1.1 Considerações iniciais

Vigas pré-moldadas e protendidas de concreto são elementos muito utilizados nos mais diversos tipos de sistemas construtivos. Tais elementos são encontrados com vãos cada vez maiores, seções transversais esbeltas e com melhor rendimento mecânico, em virtude do avanço da tecnologia com concretos mais resistentes, processos de fabricação mais precisos e eficazes.

Durante a montagem de uma estrutura pré-moldada é comum que seus elementos fiquem em situações provisórias até a finalização da montagem. No caso das vigas de pontes ou viadutos, isso acontece durante o transporte, içamento e depois de posicionadas quando ainda não há a laje ou outro elemento estrutural de contraventamento, os quais diminuiriam significativamente a chance de colapso por instabilidade lateral. Nessas etapas a viga encontra-se usualmente biapoiada, sem que todos os seus movimentos estejam restritos e sujeita a ações que podem interferir em sua estabilidade, com grande possibilidade de apresentar falha por tombamento com giro de corpo rígido, acompanhado de deformações e tensões críticas.

O termo tombamento tem sido usualmente empregado na literatura para caracterizar o colapso com giro de corpo rígido da viga. O tombamento é caracterizado pelo giro de corpo rígido da viga, com a presença de deslocamento lateral por flexão da viga e deslocamento e giro livre nos apoios. Já a instabilidade lateral com torção é caracterizada pela giro por torção da viga e deslocamento lateral por flexão. Alguns fatores influenciam diretamente na



estabilidade lateral das vigas pré-moldadas, como o comprimento da viga, a geometria da seção transversal, a existência de excentricidade lateral inicial, as características das vinculações, como rigidez e esconsidade, além de possíveis ações laterais como, por exemplo, o vento.

Este trabalho destina-se a estudar o problema da estabilidade lateral de vigas durante a montagem da estrutura sobre apoios elastoméricos, no caso o policloropreno (neoprene), usualmente na condição biapoiada, por meio de abordagem analítica e numérica. O desenvolvimento de uma equação para fins de avaliação da segurança nesta fase do manuseio visa estimar os limites de segurança considerando as variáveis: excentricidade lateral inicial, giro inicial, rigidez da almofada de apoio e intensidade da força de protensão.

## 1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é propor um equacionamento e analisar a segurança ao tombamento lateral de vigas pré-moldadas longas e esbeltas, na fase transitória de montagem sobre almofadas de apoio de elastômero. Os objetivos específicos podem ser agrupados como seguem:

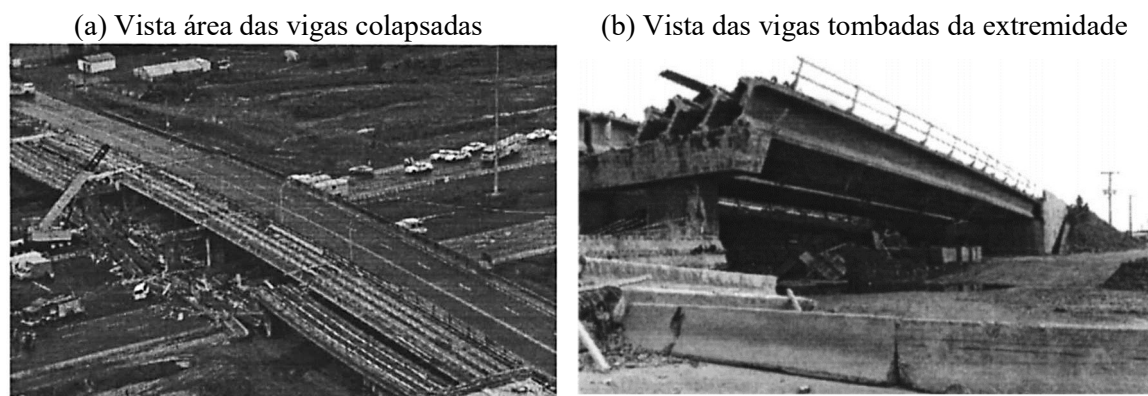
- Propor uma solução analítica para determinar a carga de tombamento com giro de corpo rígido da viga, em função de condições de imperfeição da viga como excentricidade e rotação inicial;
- Analisar a carga crítica para o início da fissuração da viga devido aos esforços adicionais de tração gerados durante o tombamento;
- Definir o ângulo crítico para o início da perda de contato entre a almofada de apoio e a viga;
- Comparar os resultados das soluções analíticas com formulações propostas na literatura e com modelo numérico aplicado;
- Verificar a influência da excentricidade lateral inicial, das características do concreto, da seção transversal da viga, da rigidez da almofada e da força de protensão em simulações analíticas paramétricas.

### 1.3 Justificativa

Com o advento de vigas cada vez mais longas e esbeltas, vários registros de acidentes são apresentados na literatura técnica, durante o manuseio e transporte, devido principalmente a problemas de instabilidade lateral. Uma viga pode se tornar instável lateralmente devido às imperfeições geradas durante a produção, tais como a excentricidade lateral, pontos de içamento excêntricos ao eixo central da viga ou diferença de temperatura entre as faces da viga (IMPER E LASZLO, 1987).

Em junho de 2000, a ponte *Souvenir Boulevard*, em construção na cidade de Laval no Canadá, cuja superestrutura é composta de vigas pré-moldadas e protendidas AASHTO tipo V apresentou colapso. A ponte seria executada em quatro vãos, sendo 38,5 m de comprimento nas extremidade e 33,5 m nos dois vãos centrais. A Figura 1 mostra a vista das vigas colapsadas. Em análise foi constatado que a causa do acidente foram as condições inadequadas dos apoios, submetendo as vigas a uma condição de equilíbrio instável (TREMBLAY; MITCHELL, 2006).

Figura 1 – Vista das vigas colapsadas da ponte Souvenir Boulevard (Canadá)



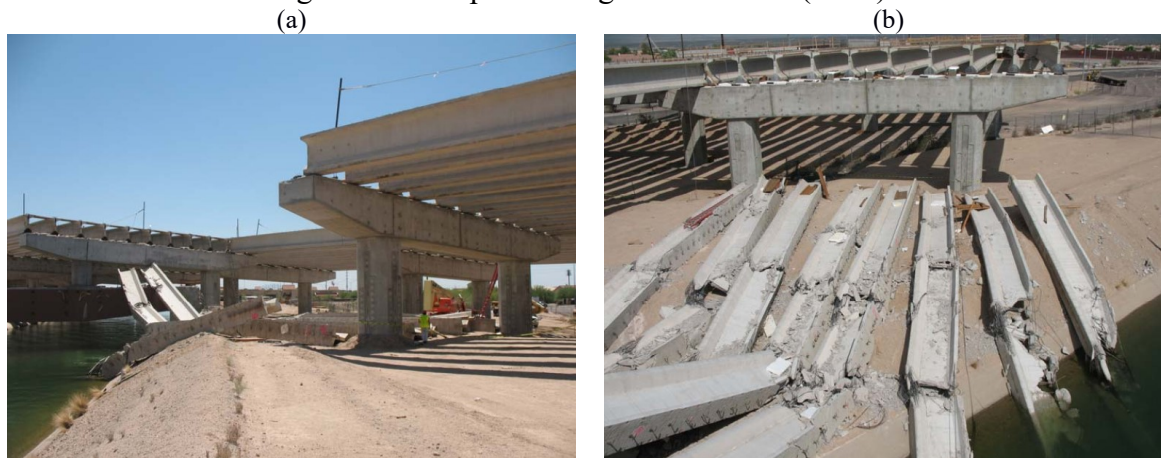
Fonte: Adaptado de Tremblay e Mitchell (2006)

Em 2007, ocorreu o colapso de nove das onze vigas pré-moldadas e protendidas, pertencentes a construção da *Red Mountain Freeway* no Arizona, Estados Unidos. Tratam-se de vigas de seção transversal AASHTO Tipo V Modificado com 35 m de comprimento, 1,6 m de altura, espaçadas de 2,45 m (Figura 2) e apoiadas sobre elastômeros. No momento da queda não havia nenhum contraventamento lateral (OESTERLE et al., 2007).

A Figura 2 mostra imagens das vigas após a queda. Segundo os autores, a instabilidade lateral levou uma viga ao colapso causando a queda das oito demais vigas devido a um efeito dominó. Assim, o tombamento dessa viga foi causado por uma combinação crítica de diversos fatores incluindo excentricidade lateral inicial e no apoio, deformação devido a variação termal e inclinação do apoio nas direções longitudinais e transversais, além da presença de vento. Os autores também destacaram que a inexistência de um contraventamento lateral contribuiu para o colapso, por isso, recomendam o travamento das vigas logo após seu posicionamento para prevenção de ruínas futuras de mesma natureza.

Bairán e Cladera (2014) analisaram o colapso de uma viga de concreto pré-moldado de seção Y, de 24,9 m de vão, e 1,05 m de altura, na construção de uma cobertura de um ginásio de esportes. A cobertura consistia em uma série de vigas pré-moldadas simplesmente apoiadas nas extremidades em almofadas de neoprene. Durante a montagem, uma das vigas tombou, levando à um colapso parcial da estrutura.

Figura 2 – Colapso das vigas no Arizona (EUA)



Fonte: Oesterle et al. (2007)

Segundo a análise realizada por Bairán e Cladera (2014), a possível causa do colapso da viga foi a falta de resistência à rotação da almofada de apoio, o que produziu efeitos de segunda ordem significativos durante o processo de montagem. A rigidez reduzida é atribuída a erros na concepção de projeto e tolerâncias de construção como o posicionamento da almofada de apoio na direção indevida ou a um erro no dimensionamento da mesma.

Bairán e Cladera (2014) ainda constataram que as almofadas de neoprene foram dispostas de tal modo que a menor dimensão (150 mm) coincidiu com a direção transversal da viga e

a dimensão longa (220 mm) estava na direção longitudinal. Este arranjo tornou o sistema mais suscetível à instabilidade e reduziu a capacidade de resistência a rotação longitudinal da viga simplesmente apoiada. Os autores observaram que a flexibilidade do apoio produz efeitos de segunda ordem consideráveis ao ponto de causar o colapso da viga.

No Brasil, a queda de uma viga de 90 t e 25 m de comprimento do monotrilho do metrô em São Paulo, em 2014, ocorreu após o posicionamento em seu local definitivo. No quilômetro 608 da BR 050, em 2014, próximo da cidade de Uberlândia (MG), três vigas já posicionadas tombaram durante a colocação de uma quarta viga no viaduto.

Ressalta-se, finalmente, a importância de se entender e promover a segurança ao tombamento de vigas durante a montagem, uma vez que a utilização de vínculos provisórios capazes de evitar a tendência de giro de corpo rígido também exigem investigação estrutural apropriada.

## 1.4 Organização do trabalho

O sumário estruturado deste trabalho pode ser apresentado como segue:

- O *Capítulo 1* apresenta uma breve introdução ao tema, os objetivos e justificativa do trabalho;
- O *Capítulo 2* traz a revisão bibliográfica de pesquisas importantes relacionadas a abordagem deste trabalho, bem como metodologias e principais parâmetros associados ao problema da instabilidade lateral;
- No *Capítulo 3* são apresentadas as metodologias utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho;
- No *Capítulo 4* são apresentadas as soluções analíticas não lineares para determinação da carga crítica de tombamento desenvolvidas para análise da instabilidade de vigas pré-moldadas. Além de soluções para determinação do início da fissuração da viga e do início da perda de contato entre a viga e o aparelho de apoio.
- No *Capítulo 5* são apresentados os resultados de comparação entre as soluções analíticas propostas e outras soluções da literatura, além de comparação com resultados numéricos;

- No *Capítulo 6* é feita uma análise paramétrica com base nas soluções propostas no Capítulo 4;
- Por fim, no *Capítulo 7* é apresentada a conclusão do trabalho.

---

# CAPÍTULO 2

## ESTADO DA ARTE

---

### 2.1 Considerações iniciais

São apresentados neste capítulo, um breve estado da arte de trabalhos importantes que tratam do problema da instabilidade lateral para a situação foco desta pesquisa. Esses trabalhos estão divididos em estudos analíticas e numéricos do problema, além de trabalhos experimentais de vigas pré-moldadas sobre aparelhos de apoio de neoprene.

Aparelho de elastômero ou almofada de apoio de neoprene é um bloco de elastômero vulcanizado que pode ser reforçado por uma ou mais chapas de aço (aparelho laminado) ou não (aparelho de elastômero simples). O aparelho laminado, também chamado de fretado ou cintado, é um elastômero reforçado internamente com uma ou mais chapas de aço, quimicamente aderidas durante a vulcanização.

O aparelho de apoio fretado, devido sua economia, durabilidade e fácil utilização é um dos principais tipos de apoios utilizados em pontes de concreto armado. Existem equações empíricas para o cálculo da rigidez à compressão desses aparelhos de apoio, porém seus resultados diferem significativamente dos resultados experimentais. O método dos elementos finitos tem se mostrado confiável na quantificação da rigidez do elastômero, porém ainda há uma inexperiência na área para modelagem de materiais incompressíveis como o elastômero (HARPER; CONSOLAZIO, 2013).

Com o avanço da tecnologia de protensão, juntamente com a melhoria dos materiais, como o concreto de alto desempenho, estruturas pré-moldadas ganharam destaque, pois as vigas

se tornaram muito mais eficientes estruturalmente, vencendo vãos cada vez maiores, porém com seções cada vez mais esbeltas. Atualmente, o comprimento das vigas é limitado principalmente por restrições do transporte e o peso máximo suportado pelo equipamento de montagem (IMPER e LASZLO, 1987).

## 2.2 Estudos analíticos

Mast (1993) realizou um estudo de vigas sobre apoios elásticos, como o transporte sobre o caminhão ou sobre almofadas de apoio (Figura 3). A equação de equilíbrio de momentos analisada é apresentada na Equação (1). Em tal condição, o fator de segurança ao tombamento da viga, no regime elástico, deve ser calculado de acordo com a Equação (2). O ângulo de rotação no apoio de equilíbrio da viga é dado pela Equação (3). A Equação (4) define o deslocamento teórico ( $\bar{z}_0$ ), que corresponde a flecha teórica do elemento se todo o peso próprio da viga fosse aplicado lateralmente.

$$W (\bar{z}_0 \sin\theta \cos\theta + e_i + y \sin\theta) = K_\theta (\theta - \alpha) \quad (1)$$

$$FS = \frac{r (\theta - \alpha)}{\bar{z}_0 \theta + e_i + y \theta} \quad (2)$$

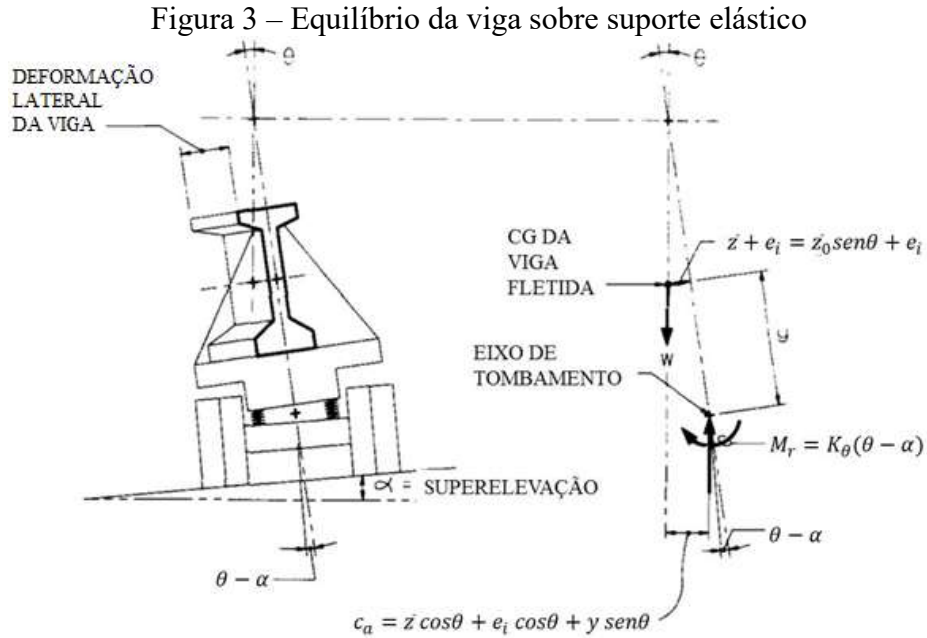
$$\theta = \frac{\alpha r + e_i}{r - y - \bar{z}_0} \quad (3)$$

$$\bar{z}_0 = \frac{w L^4}{120 E_c I_y} \quad (4)$$

sendo:  $r$  é a relação entre a constante de resistência elástica do apoio à rotação  $K_\theta$  e o peso próprio da viga  $W$ ;  $y$  é a distância entre o centro de gravidade da seção e o eixo de rotação; e  $\alpha$  é a superelevação do apoio;  $\theta$  é o ângulo de rotação do apoio;  $e_i$  é a excentricidade inicial da viga;  $w$  é o peso próprio da viga por unidade de comprimento;  $L$  é o comprimento total da viga;  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto e  $I_y$  é o momento de inércia da viga em relação ao eixo vertical  $Y$ .

Além do fator de segurança ao tombamento, Mast (1993) propõe um fator de segurança à ruptura ( $FS'$ ) para a viga sobre apoios deformáveis (Equação (5)), sendo recomendado que o valor do coeficiente de segurança à fissuração ( $FS$ ) deve ser maior do que 1,0 e o coeficiente de segurança à ruptura ( $FS'$ ) maior que 1,5.

$$FS' = \frac{r (\theta'_{max} - \alpha)}{\bar{z}'_0 \theta'_{max} + e_i + y \theta'_{max}} \quad (5)$$



Fonte: Adaptado de Mast (1993)

Burgoyne e Stratford (2001) estudaram a instabilidade lateral de vigas longas e protendidas sobre apoios flexíveis. Os autores propõem uma condição de equilíbrio semelhante a proposta por Mast (1993) na Equação (1), porém, não consideram a excentricidade inicial da viga, nem a superelevação do apoio. Desta forma, utilizando a mesma notação do trabalho do Mast (1993), a equação de equilíbrio proposta por Burgoyne e Stratford (2001) é apresentada na Equação (6).

$$w L (\bar{z}_0 \text{sen} \theta \cos \theta + y \text{sen} \theta) = 2 \theta K_\theta \quad (6)$$

Com isso, Burgoyne e Stratford (2001) apresentam a Equação (7) para determinar o peso próprio crítico da viga  $((wL)_{cr})$ , que causaria o tombamento de uma viga sem imperfeições. Com esse parâmetro é possível definir uma margem de segurança para o tombamento da viga, sendo a razão entre o peso próprio crítico e o peso próprio real.

$$(wL)_{cr}^2 \frac{L^3}{120 E_c I_y} + (wL)_{cr} y - 2 K_\theta = 0 \quad (7)$$

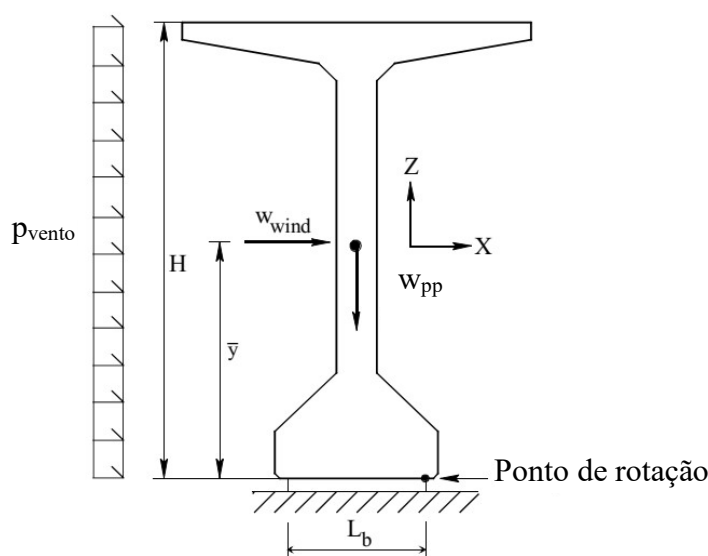


Para consideração da imperfeição inicial da viga, Burgoyne e Stratford (2001) utilizam a Equação (8) proposta por Southwell (1932, apud Burgoyne e Stratford, 2001) que relaciona o deslocamento final da viga ( $u$ ), com a excentricidade inicial ( $e_i$ ), o peso próprio da viga ( $w$ ) e o peso próprio crítico ao tombamento da viga ( $w_{cr}$ ).

$$u = \frac{e_i}{1 - \frac{w}{w_{cr}}} \quad (8)$$

Consolazio e Hamilton (2007) realizaram estudos experimentais, analíticos e numéricos de vigas sobre apoio de elastômeros. Utilizaram uma equação para a validação dos modelos de análise da viga sobre grandes deslocamentos e desenvolveram uma equação simplificada e semi-empírica para estimar a capacidade de carga por flambagem de uma viga. Considerando o ponto de tombamento da viga como a extremidade da almofada de apoio (Figura 4), por uma equação de equilíbrio de momento, os autores determinaram a força de vento crítico para tombamento de uma viga rígida.

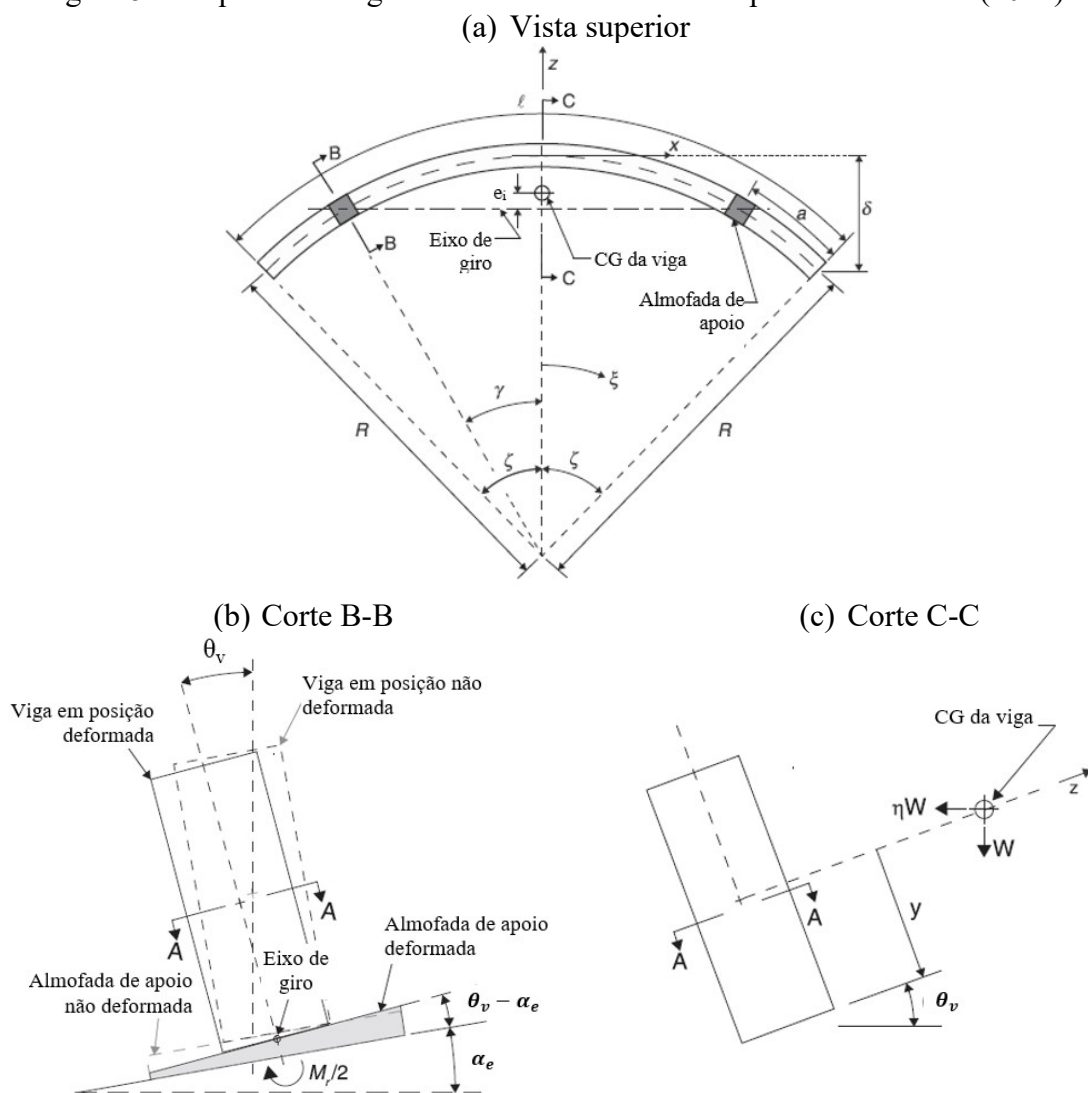
Figura 4 – Esquema de solicitações no equilíbrio



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007).

Plaut e Moen (2014) analisaram o efeito da instabilidade lateral em uma viga apoiada sobre apoios de elastômeros, com excentricidade inicial e sob efeito do peso próprio e do vento. A Figura 5 apresenta o esquema adotado pelos autores e as indicações das variáveis adotadas. Assim como Mast (1993) e Burgoyne e Stratford (2001), Plaut e Moen (2014) apresentam equações de equilíbrio para a viga sobre apoios de elastômeros.

Figura 5 – Esquema da viga curva e variáveis adotadas por Plaut e Moen (2014)



Fonte: Adaptado de Plaut e Moen (2014).

Lee *et al.* (2017) estudaram o tombamento de vigas pré-moldadas de concreto sujeitas à ações de vento. Utilizando como base a teoria apresentada por Burgoyne e Stratford (2001) e a Equação (6). A equação proposta é válida considerando a situação de equilíbrio para uma viga sobre apoios deformáveis, perfeitamente reta, sem superelevação no apoio, sujeita as cargas distribuídas de peso próprio ( $w$ ) e vento ( $F_w$ ).

Lee (2017) propõe uma equação analítica para determinação da carga crítica de estabilidade lateral baseado na equação proposta por Burgoyne e Stratford (2001). Como diferencial, Lee (2017) propõe o acréscimo de um termo à equação anterior, que considera a torção lateral da viga. A equação proposta por Lee (2017) com a simplificação para ângulos pequenos é apresentada na Equação (9).

$$(w L) \left[ y \theta + \frac{w \theta L^4}{120 E I_y} + y \theta_t^{avg} \right] = 2 \theta K_\theta \quad (9)$$

Na qual:  $w$  é o peso da viga por unidade de comprimento,  $L$  é o comprimento da viga,  $y$  é a distância entre o eixo de rotação e o centro de gravidade da viga,  $\theta$  é o ângulo de giro da viga no apoio (rad),  $E$  é o módulo de elasticidade da viga,  $I_y$  é o momento de inércia da viga,  $\theta_t^{avg}$  é o ângulo médio devido à torção da viga (rad) e  $K_\theta$  é a rigidez à torção do apoio elastomérico.

Para o cálculo da rigidez a torção do apoio, Lee (2017) utiliza a Equação (10), sendo função do módulo de elasticidade da almofada de apoio ( $E_s$ ), da altura total das camadas elastoméricas ( $h_b$ ) e do momento de inércia do eixo paralelo ao eixo longitudinal da viga ( $I_b$ ).

$$K_\theta = \frac{E_s I_b}{h_b} \quad (10)$$

O ângulo de torção da viga ( $\theta_t$ ) pode ser expressa em função de sua posição na viga ( $x$ ) e do ângulo máximo devido à torção ( $\theta_t^{mid}$ ) que ocorre no meio do vão da viga, de acordo com a Equação (11). Assim, o ângulo médio devido a torção pode ser calculado de acordo com a Equação (12). O valor de  $\theta_t^{mid}$  pode ser obtido como a diferença entre o ângulo medido no apoio da viga e o ângulo total no meio do vão da viga (LEE, 2017).

$$\theta_t(x) = \theta_t^{mid} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (11)$$

$$\theta_t^{avg} = \left(\frac{1}{L}\right) \left( \int_0^L \theta_t(x) dx \right) = \frac{2 \theta_t^{mid}}{\pi} \quad (12)$$

O ângulo máximo no meio do vão devido a torção da viga tende a diminuir com o aumento da excentricidade lateral inicial. Todavia, a variação de seu valor é mínima entre os valores de  $L/1000$  e  $L/250$ . Além disso, esse mesmo ângulo tende a diminuir com o aumento da esbeltes da seção transversal da viga. Com esta análise foi proposta a Equação (13) que relaciona o ângulo máximo no meio do vão devido à torção com a esbeltes da seção transversal, sendo constante até a excentricidade inicial de  $L/250$ , e variando linearmente em função dessa deformação para valores maiores que  $L/250$ . A equação proposta foi comparada

à resultados obtidos pela análise numérica pelo método dos elementos finitos, obtendo resultados com aproximação bastante satisfatória (LEE, 2017).

$$\theta_t^{mid} = \begin{cases} \left( 2,4 \exp^{-0,1 \frac{h}{d_w}} \right) \theta_s^{cr}, & \delta_0 \leq L/250 \\ \left( 2,4 \exp^{-0,1 \frac{h}{d_w}} \right) \theta_s^{cr} - \frac{3}{100} \left( \delta_0 - \frac{L}{250} \right) \theta_s^{cr}, & \delta_0 > L/250 \end{cases} \quad (13)$$

Na qual,  $\theta_t^{mid}$  é o ângulo de rotação máximo no meio do vão da viga devido à torção (rad),  $h$  é a altura da seção transversal da viga,  $d_w$  é a espessura da alma da viga,  $\theta_s^{cr}$  é o ângulo de rotação crítico no apoio (rad) e  $\delta_0$  é a deformação lateral inicial da viga.

Com isso, Lee (2017) propõe a Equação (14) para o cálculo da carga crítica de estabilidade lateral para uma viga pré-moldada perfeitamente reta sobre apoios elastoméricos. Na Tabela 1, Lee (2017) compara os valores obtidos de carga crítica para viga sobre apoios elastoméricos, em análise numérica pelo método dos elementos finitos, pela equação proposta por Burgoyne e Stratford (2001) e por sua equação, nesta tabela  $w_{sw}$  representa o valor do peso próprio da viga. A equação proposta por Lee (2017) apresentou resultados mais próximos dos resultados da análise numérica que os obtidos pela equação proposta por Burgoyne e Stratford (2001), por considerar o efeito da torção da viga.

$$(w_{cr}^0 L) \left[ y + \frac{w_{cr}^0 L^4}{120 E I_y} + y \left( 2,4 \exp^{-0,1 \frac{h}{d_w}} \right) \right] = 2 K_\theta \quad (14)$$

Tabela 1 – Carga crítica para vigas perfeitamente retas sobre apoios elásticos

Vigas	Análise Numérica	Burgoyne e Stratford (2001)	Lee (2017)
BT-54	13,0 $w_{sw}$	15,4 $w_{sw}$	14,0 $w_{sw}$
BT-63	12,3 $w_{sw}$	13,9 $w_{sw}$	12,4 $w_{sw}$
BT-72	11,7 $w_{sw}$	12,6 $w_{sw}$	11,1 $w_{sw}$

Fonte: Adaptado de Lee (2017)

Para a consideração do efeito da imperfeição inicial, Lee (2017) define um fator de redução ( $C_r$ ) que deve ser multiplicado à carga crítica de uma viga perfeitamente reta ( $w_{cr}^0$ ) calculado pela Equação (14). Esse fator de redução é dado pela Equação (15).

$$C_r = \exp \left( -150 \frac{\delta_0}{L} \right) \quad (15)$$

Lee (2017) apresenta uma adaptação da Equação (8) de Southwell (1993, apud Burgoyne e Stratford, 2001) para o cálculo do deslocamento lateral crítica da viga no meio do vão ( $u_m^{cr}$ ), tal equação é expressa na Equação (16).

$$u_m^{cr} = \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{w_{cr}}{w_{cr}^0}\right)^{1,5}} \quad (16)$$

Krahl, Carrazedo e El Debs (2017) estudaram numérica e analiticamente a estabilidade ao tombamento de vigas pré-moldadas de concreto sobre aparelhos de apoio de elastômeros. Para solução analítica os autores citam os equacionamentos de Flint (1951) e Lebellet (1959) (apud Krahl, Carrazedo e El Debs (2017)). Além disso, os autores adaptaram a equação proposta por Burgoyne e Stratford (2001) para considerar além do peso próprio uma carga concentrada  $P$  no meio do vão.

Krahl, Carrazedo e El Debs (2018) utilizando o método de Rayleigh-Ritz propuseram uma equação para cálculo da carga crítica concentrada no meio do vão que causa a instabilidade lateral de uma viga pré-moldada sobre almofadas de apoio. Para situações onde atua apenas o peso próprio na viga, ou seja, considera-se apenas uma carga uniformemente distribuída, foi proposta a Equação (17) para o cálculo do valor crítico desta carga.

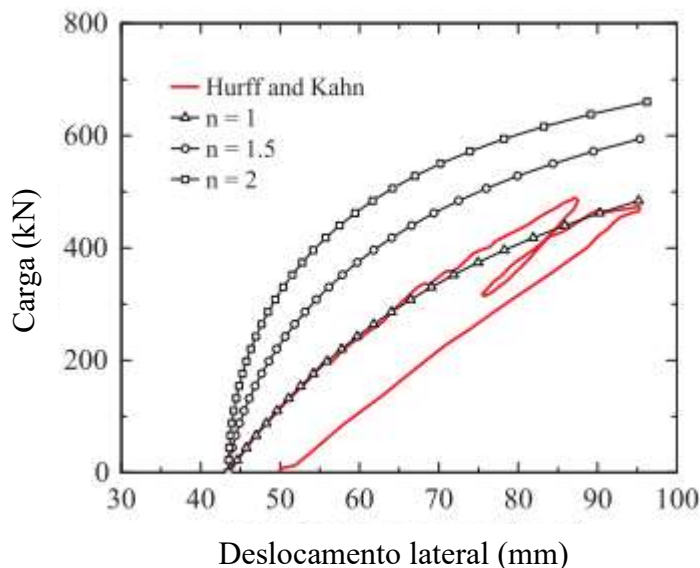
$$q_{cr} = \frac{24 \pm \sqrt{185 E I_y k_\theta l^3 + 3600 y_b^2 (E I_y)^2 - 60 y_b E I_y}}{37 l^4} \quad (17)$$

Nesta equação  $q_{cr}$  é a carga crítica uniformemente distribuída,  $l$  é o comprimento total do vão,  $E I_y$  é a rigidez à flexão lateral,  $y_b$  é a altura do centro de gravidade,  $k_\theta$  é a rigidez a rotação do apoio.

Os autores também fizeram uma análise comparativa entre a equação proposta e os resultados experimentais de Hurff e Kahn (2012). Para consideração da excentricidade inicial e verificar o comportamento da equação em relação ao deslocamento horizontal foi calibrado o coeficiente  $n$  da equação do Southwell (1932) (Equação (18)). Como pode ser observado na Figura 6 o valor de  $n$  para qual os resultados analíticos foram os mais próximos dos resultados experimentais foi para  $n$  igual a 1. (KRAHL, CARRAZEDO e EL DEBS, 2018)

$$P_{lim} = P_{cr} \sqrt[n]{1 - \frac{e_i}{e_{lim}}} \quad (18)$$

Figura 6 – Comparação entre resultados experimentais e resultados analíticos



Fonte: Krah, Carrazedo e El Debs (2018)

Além disso Krah, Carrazedo e El Debs (2018) fizeram um teste de confiabilidade utilizando Monte Carlo, para verificar a segurança ao tombamento de vigas sujeitas apenas ao carregamento de peso próprio.

## 2.3 Estudos experimentais

Além das formulações propostas, Mast (1993) realizou um experimento em escala real para verificar os estudos analíticos por ele realizado (Figura 7). Em seu estudo analítico a viga estudada deveria apresentar fissuração a partir de um ângulo de tombamento de 15°, porém na análise experimental não foi possível observar fissuras na viga quando ela foi submetida a tal rotação. No experimento, também foi analisada a influência da colocação de contraventamentos na viga, esse contraventamento consiste em cabos pré-tensionados que são parcialmente tensionados contra os apoios em cada extremidade da viga e contra um sistema de travamento metálico no meio da viga. Com o travamento observou-se uma redução de 7% no deslocamento lateral da viga submetida ao tombamento de 15°, quando comparado à situação sem o contraventamento, o que o autor julgou como pouco efetivo.

Mast (1993) levou a viga à ruptura, nessa situação a viga apresentou um ângulo de tombamento de  $32^\circ$ . O autor observou que o deslocamento por torção correspondeu a aproximadamente 4% do deslocamento total da viga quando submetida à rotação de  $32^\circ$ .

Por fim, o autor ressalta a importância da determinação do coeficiente de rigidez à torção ( $K_\theta$ ) do sistema de apoio, tanto do veículo de transporte quanto da almofada elastomérica. A atuação de vento sobre a viga afeta diretamente a instabilidade lateral, atentando para o uso de apoios que restringem o deslocamento lateral da viga assim que é posicionada na estrutura. O posicionamento da viga com balanços nas extremidades é extremamente favorável para estabilidade lateral da viga durante o içamento, não apresentando uma grande influência quando a viga está sob apoios deformáveis (MAST, 1993).

Figura 7 – Imagens do estudo experimental realizado por Mast (1993).



Fonte: Mast (1993)

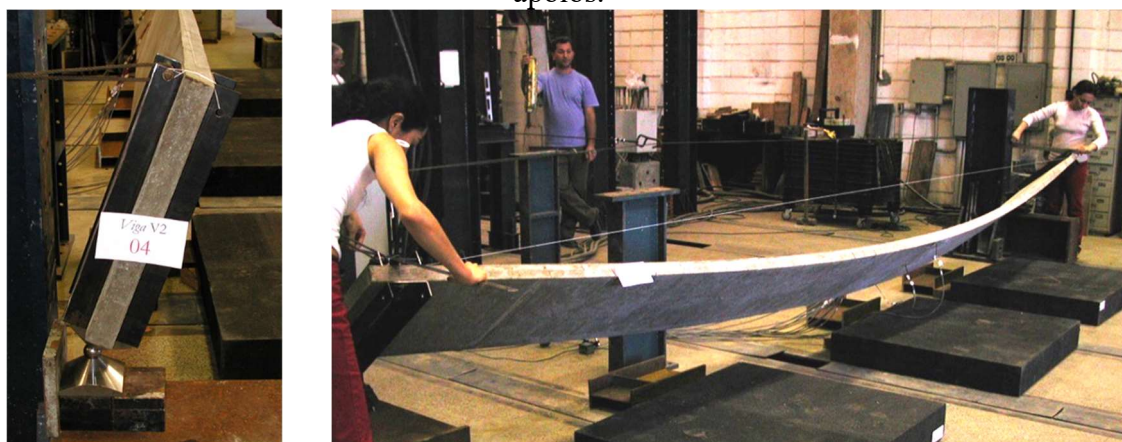
Duas vigas longas e esbeltas de concreto armado, em escala reduzida, foram moldadas e ensaiadas por Lima (2002) sob tombamento lateral gradual e ação única do peso-próprio (Figura 8), a fim de investigar os efeitos combinados dos esforços atuantes, bem como entender a resposta estrutural para as vinculações consideradas.

Por se tratar de um problema tridimensional com grandes deslocamentos, a medida dos deslocamentos foi feita por meio de Estações Totais para pontos pré-definidos ao longo da viga. A seção transversal do meio do vão foi instrumentada para medida de deformações no concreto e na armadura. Os resultados experimentais mostram que a imposição de giros nos apoios permite observar o comportamento global da viga, durante o tombamento gradual,

levando-se em conta o aumento das deformações, desde a fissuração (Figura 9) até o escoamento das armaduras.

Os resultados experimentais mostram que a torção é de fato muito pequena e que a flexão lateral é predominante em virtude da baixa rigidez lateral das vigas esbeltas, indicando um comportamento de giro de corpo rígido. Além disso, até 15 graus de inclinação nos apoios, os elementos de concreto tracionados não atingiram a resistência à tração.

Figura 8 - Acompanhamento do ângulo imposto pelas medidas de deslocamentos nos apoios.



Fonte: Lima (2002)

Figura 9 - Fissuração da viga com inclinação imposta de 29,42° nos apoios



Fonte: Lima (2002)

Consolazio e Hamilton (2007) estudaram a estabilidade de vigas sobre apoios elastoméricos. Para obtenção de dados mais precisos sobre as propriedades físicas e mecânicas dos aparelhos de apoio, foram realizados testes experimentais. O teste de compressão foi feito em duas etapas: uma de compressão elástica a curto prazo e outra para determinar a fluência



a longo prazo. Os resultados obtidos experimentalmente foram utilizados nos modelos de análise não linear pelo método dos elementos finitos.

Hurff (2010) realizou um estudo experimental e analítico para analisar os fenômenos de flambagem lateral com torção e tombamento de vigas pré-moldadas de concreto armado, com ênfase na influência da imperfeição lateral inicial, nas características das almofadas elastoméricas e na rigidez a rotação do apoio. A primeira etapa do programa experimental consistiu no ensaio de seis vigas pré-moldadas protendidas, de seção retangular, com 9,75 m de comprimento, 102 mm de largura e 1016 mm de altura, com variação na força de protensão e na excentricidade de aplicação dos cabos. Também foi ensaiada uma viga PCI BT-54 de 30,5 m de comprimento. Análises elásticas e não lineares foram realizadas considerando várias vigas retangulares e uma PCI BT-72 com variação na imperfeição inicial.

De acordo com Hurff (2010), um experimento foi realizado na viga PCI BT 54 para verificar o efeito da radiação solar no deslocamento lateral da viga. Considerando a viga com uma pequena imperfeição inicial, esta foi posicionada de modo que seu lado convexo ficasse voltado ao leste, recebendo diretamente os raios solares. Desta forma, os efeitos da imperfeição inicial seriam amplificados. O objetivo era obter as tensões térmicas na viga, medições da radiação solar, do vento, dos deslocamentos e curvatura.

Foram observados um aumento no deslocamento lateral entre 10 a 15 mm. Os autores compararam esses resultados com a tolerância máxima para o deslocamento lateral de uma viga permitida pelo *PCI Bridge Design Manual* (2003), que é de 1/8 in (3,2 mm) por 10 ft (3 m), para essa viga corresponde a um valor de 1,2625 in (32 mm). Portanto, o aumento devido a radiação solar corresponde de 31% a 48% do valor máximo permitido, não podendo, desta forma, ser negligenciado. Entretanto, não houve rotação significativa na viga, de forma que o deslocamento da mesa superior e inferior foram o mesmo (HURFF, 2010).

Segundo Hurff (2010), o uso de aparelhos de apoio de neoprene adicionam novas variáveis ao problema, como a rigidez à compressão, rotação e transversal das almofadas. Os resultados das vigas sobre as almofadas mostraram que o protensão não restringiu a flambagem lateral da viga. As vigas flambaram após a fissuração por flexão ocorrer, isso

com uma carga muito menor que a carga elástica de flambagem lateral com torção lateral prevista. Além disso as imperfeições iniciais diminuíram a carga inelástica de flambagem lateral com torção devido a rotação do eixo neutro, tensões adicionais e a rotação progressiva, o que causou uma maior componente de flexão sobre o eixo de menor inércia (HURFF, 2010).

Hurff e Kahn (2012) realizaram análises experimentais em uma viga PCI BT-54 de 30 m de comprimento sobre uma almofada de apoio de elastômero reforçada com quatro chapas de aço. No meio do vão foi aplicada uma força concentrada vertical com um simulador de carga gravitacional, que não oferecia resistência a deformações laterais e de torção. A Figura 10 mostra imagem do aparato experimental utilizado.

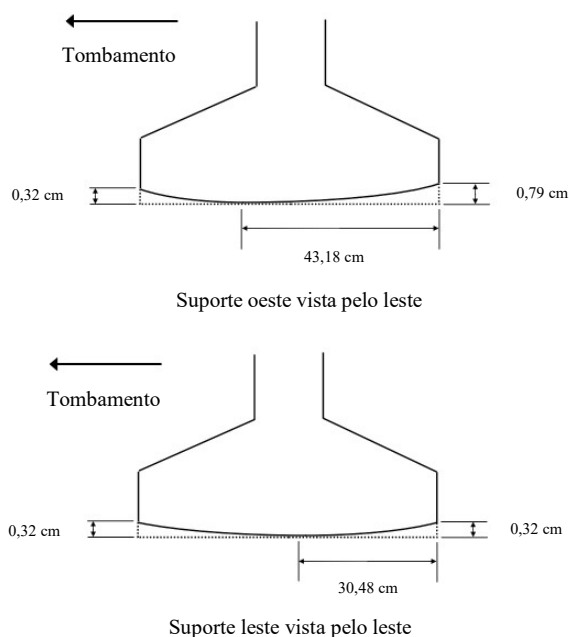
Quando a viga PCI BT-54 foi testada pela primeira vez com o apoio inclinado, a carga foi interrompida a 129 kN, porque a rotação final observada foi substancialmente maior do que o previsto. Aos 129 kN, esperava-se que a rotação final fosse da ordem de 0,00072 rad; no entanto, a rotação final medida foi 0,0042 rad (seis vezes maior que o esperado). Constatou-se, posteriormente, o desnivelamento na mesa inferior da viga, responsável pelo aumento da rotação (Figura 11).

Figura 10 – Configuração experimental da estabilidade ao tombamento da viga PCI BT-54



Fonte: Hurff e Kahn (2012)

Figura 11 – Vista do perfil mostrando a falta de planicidade do apoio da mesa inferior



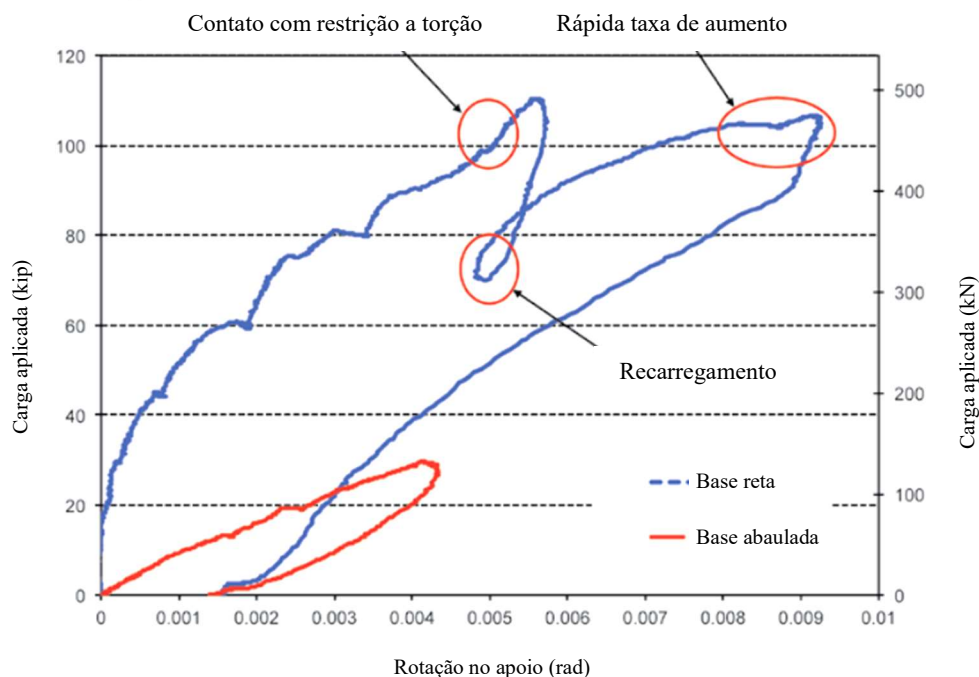
Fonte: Adaptado de Hurff e Kahn (2012)

A Figura 12 permite observar os resultados do primeiro e segundo carregamento, sendo o primeiro com a base abaulada e o segundo com a base reta. Com uma mesa inferior de fundo plano, a rotação final de aproximadamente 445 kN foi equivalente à rotação final de 129 kN para o experimento com mesa inferior de fundo arredondado. Portanto, garantir uma mesa inferior plana nos apoios é importante para fornecer resistência ao tombamento. Os estudos analisados mostraram que mais da metade da rotação no meio do vão foi devida à rotação de corpo rígido em oposição à deformação elástica, e que os apoios finais inicialmente inclinados alteraram significativamente o comportamento da viga e reduziram o fator de segurança contra a estabilidade ao tombamento (HURFF e KAHN, 2012).

Hurff e Kahn (2012) concluíram que as imperfeições iniciais de deslocamento lateral e rotação no apoio são muito significantes para a estabilidade da viga, ampliando a possibilidade de tombamento quanto maiores as imperfeições. A teoria de Mast (1993) previu bem a carga de tombamento da viga, porém os autores recomendam o ensaio experimental dos aparelhos de apoio, para desta forma determinar corretamente a rigidez a rotação real das almofadas considerando uma carga igual ao peso próprio da viga. Além disso, quanto maior o comprimento da almofada mais estável o sistema, sendo aconselhável que a almofada tenha dimensão o mais próximo possível da base da mesa inferior da viga. A presença de irregularidades no fundo da mesa inferior afeta altamente a estabilidade da

viga, sendo recomendado artifícios para garantir a planura dessa superfície. Os autores recomendam o aumento da largura da mesa inferior da viga para aumentar seu fator de estabilidade ao tombamento, pois assim aumenta-se a inércia lateral da viga e possibilita o uso de almofadas de apoio de maior dimensão. E por fim recomendam o travamento lateral das vigas nos apoios o mais rápido possível após serem içadas e devidamente posicionadas.

Figura 12 – Comparação entre o carregamento com a base reta e com abaulamento da base



Fonte: Adaptado de Hurff e Kahn (2012)

Consolazio, Hamilton e Beery (2012) realizaram estudos experimentais para verificar o comportamento de vigas pré-moldadas sobre almofadas de apoio. Segundo os autores as inclinações e a esconsidade da almofada reduzem significativamente a rigidez à rotação do aparelho de apoio, reduzindo desta forma a capacidade da viga de suportar a flambagem e o tombamento quando submetido a gravidade e ao vento. De forma experimental foi obtida a rigidez à rotação da almofada de apoio em função de seu ângulo de inclinação e de esconsidade.

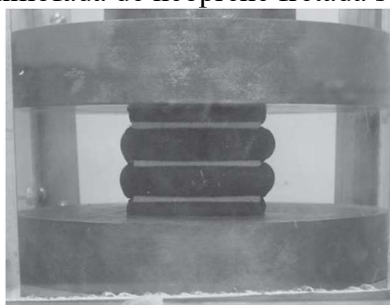
Os modelos analíticos (elementos finitos) foram desenvolvidos e validados com os resultados dos testes experimentais. As capacidades analíticas de flambagem foram encontradas diferindo dos resultados dos testes experimentais em não mais de 15% em uma faixa de condições de suporte ideal. Com base neste nível favorável de concordância, as

técnicas analíticas de modelagem e análise empregadas foram consideradas adequadas para uso no desenvolvimento de recomendações de contraventamento para vigas de concreto de longos vãos sobre aparelhos de apoio de elastômero (CONSOLAZIO; HAMILTON; BEERY; 2012).

Harper e Consolazio (2013) analisaram o comportamento de aparelhos de apoio elastoméricos fretados retangulares, fazendo uma análise numérica e experimental para determinação das rigidezes a compressão e a rotação do sistema. Segundo os autores, elastômeros como o neoprene apresentam um comportamento incompressível, com coeficiente de Poisson maior que 0,49. De forma que, quando sujeitos à compressão uniaxial, o material se expande lateralmente, preservando seu volume. Nos aparelhos laminados as placas metálicas restringem o movimento do elastômero na interface de forma que as camadas de neoprene abaulam lateralmente quando sujeitas a compressão, como observado na Figura 13. Tal restrição faz com que a resistência à compressão do aparelho de apoio fretado seja maior do que a da almofada simples.

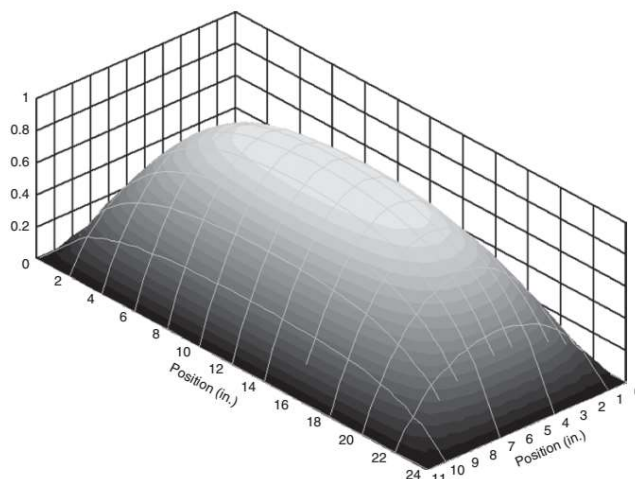
A rigidez a compressão da almofada elastomérica em cada ponto é função da sua distância ao centro da almofada. Isso porque quanto mais próximo ao centro da almofada há uma maior quantidade de material a ser deslocado lateralmente, dificultando o movimento. Por outro lado, o material das extremidades está menos confinado, resultando em menor a rigidez à compressão. Este efeito de confinamento pode ser visualizado pelas reações e apoio ilustradas na Figura 14, obtidas pelo modelo numérico desenvolvido com base nos resultados experimentais. Como cada ponto da almofada é comprimido verticalmente por força uniforme, a distribuição da força de reação é proporcional à rigidez local.

Figura 13 – Almofada de neoprene fretada sob compressão



Fonte: Harper e Consolazio (2013)

Figura 14 – Distribuição das reações de apoio em almofada sob compressão uniforme



Fonte: Harper e Consolazio (2013).

Quando o aparelho de apoio sofre uma rotação, a superfície superior torna-se inclinada em relação à superfície inferior. Devido ao peso próprio da viga, toda a almofada está em contato com a viga, e a rigidez a rotação do aparelho de apoio é linear. Entretanto, se o ângulo de rotação aumenta suficientemente, a viga se desprenderá parcialmente da almofada, de modo que a rigidez a rotação do apoio tem comportamento não linear (HARPER; CONSOLAZIO, 2013). Esse efeito é denominado na literatura internacional de *lift off*.

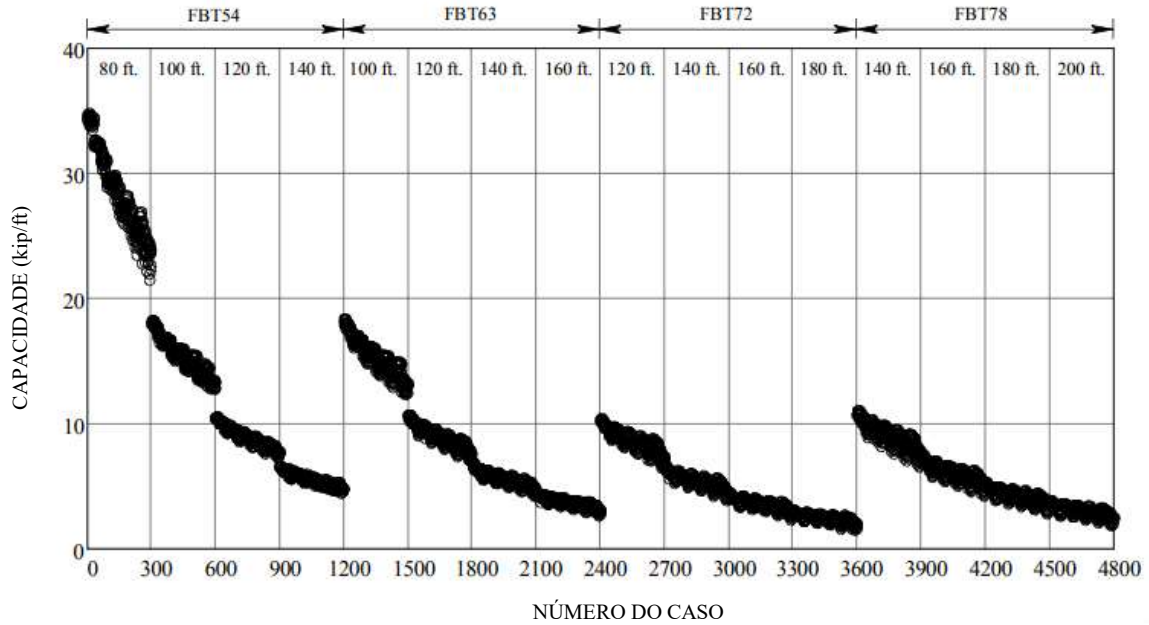
## 2.4 Estudos numéricos

Em análise numérica, Consolazio e Hamilton (2007) analisaram vigas com seções transversais do tipo FBT54, FBT63, FBT72 e FBT78; com vãos variando de 80 ft a 200 ft; com ângulos de escuridade de 0°, 15°, 30°, 45° e 60°; ângulo de inclinação de 0,00 e 0,05 rad; excentricidade da viga de 0,5, 1,5 e 2,5 in; incluindo ou negligenciando o abaulamento da viga; e com travamentos de 0 a 10.000 kip/in. Resultando em 4800 casos analisados, os resultados de capacidade de carga dos casos analisados são apresentados na Figura 15.

Consolazio e Hamilton (2007) concluíram que a capacidade de carga a flambagem da viga não é altamente sensível ao seu abaulamento, promovendo aumento ou redução na ordem de 5%. A escuridade e a inclinação no apoio chegam a gerar reduções na capacidade de carga em cerca de 30%. Já a redução devido ao aumento da excentricidade lateral atinge valores

de 25%. Para os casos onde não há travamento lateral, a capacidade de carga chegou a 20% de redução.

Figura 15 – Capacidade de carga dos casos analisados por Consolazio e Hamilton (2007)



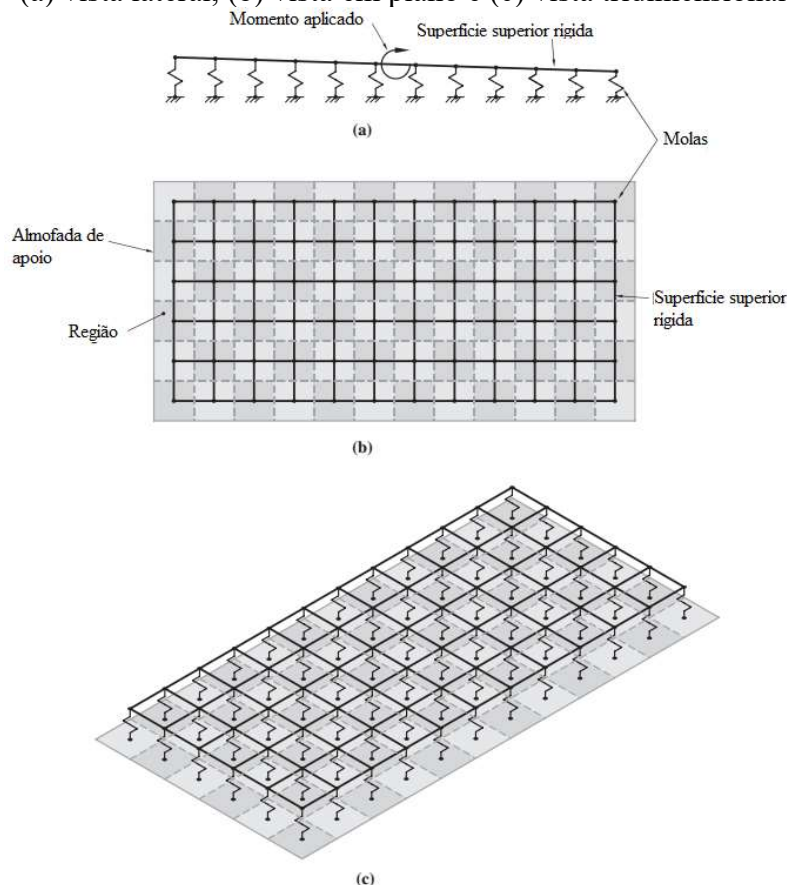
Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007).

Com base em seus estudos experimentais, para a estimativa da rigidez a rotação do aparelho de apoio, Harper e Consolazio (2013) sugeriram o uso do modelo de grelha simplificado, que divide a almofada em regiões retangulares discretas e modela cada região com uma mola que representa a contribuição da rigidez dessa região. São utilizadas molas sujeitas apenas a compressão para permitir que a viga se desprenda da almofada. Os nós superiores das molas estão ligados entre si em um corpo rígido que representa a superfície superior da almofada. A rigidez de cada mola ( $k_{spring}$ ) é obtida pela Equação (19) em função da área correspondente aquela mola na almofada ( $A_{region}$ ), a rigidez a compressão total da almofada ( $k_{pad}$ ), a área total da almofada ( $A_{pad}$ ) e a posição normalizada da mola em relação ao centro da almofada ( $x'$  e  $y'$ ), sendo que o centro possui coordenadas (0,0) e as extremidades os valores de 1 e -1 (HARPER; CONSOLAZIO, 2013).

$$k_{spring}(x',y') = A_{region} \left( \frac{k_{pad}}{A_{pad}} \right) (1-(x')^2) (1-(y')^2) \quad (19)$$

A Figura 16 ilustra o modelo simplificado de grelha utilizado para determinação da rigidez à rotação do aparelho de apoio fretado.

Figura 16 – Modelo de grelha simplificado de uma almofada de apoio  
(a) vista lateral, (b) vista em plano e (c) vista tridimensional



Fonte: Traduzido de Harper e Consolazio (2013).

Cardoso (2017) realizou um estudo de vigas pré-moldadas sobre almofadas de apoio de elastômero avaliando a influência de variáveis como as imperfeições iniciais, resistência característica do concreto, atuação ou não do vento e a rigidez à compressão da almofada. A autora validou o modelo apresentado por Harper e Consolazio (2013) para as almofadas A e B cujas propriedades são listadas na Tabela 2. Utilizando modelos com 72 molas, que trabalham apenas a compressão, em uma grelha  $6 \times 12$ , para a compatibilização dos resultados, foi verificado a necessidade de aplicação de um fator de correção de 2,2115 que multiplica da Equação (19), para ambas as almofadas.



Tabela 2 – Propriedades das almofadas estudadas por Cardoso (2017)

CARACTERÍSTICAS	ALMOFADA	
	A	B
Comprimento, $L$ (m)	0,60	0,60
Largura, $W$ (m)	0,28	0,36
Espessura, $H$ (m)	0,048	0,065
Quantidade de chapas de aço	3	4
Rigidez à compressão, (kN/cm)	10991	12515

Fonte: Adaptado de Cardoso (2017)

Para análise das variáveis a serem consideradas, Cardoso (2017) utilizou modelos com a viga I AASHTO Tipo IV de aproximadamente 32 m, sobre as almofadas A e B. Observou-se os seguintes valores de excentricidade inicial:  $L/3200$ ,  $L/1067$ ,  $L/970$ ,  $L/640$ ,  $L/485$ ,  $L/356$ ,  $L/237$  e  $L/178$ , sendo  $L$  o comprimento da viga. Foram analisados três valores de resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ): 27,5; 45 e 90 MPa.

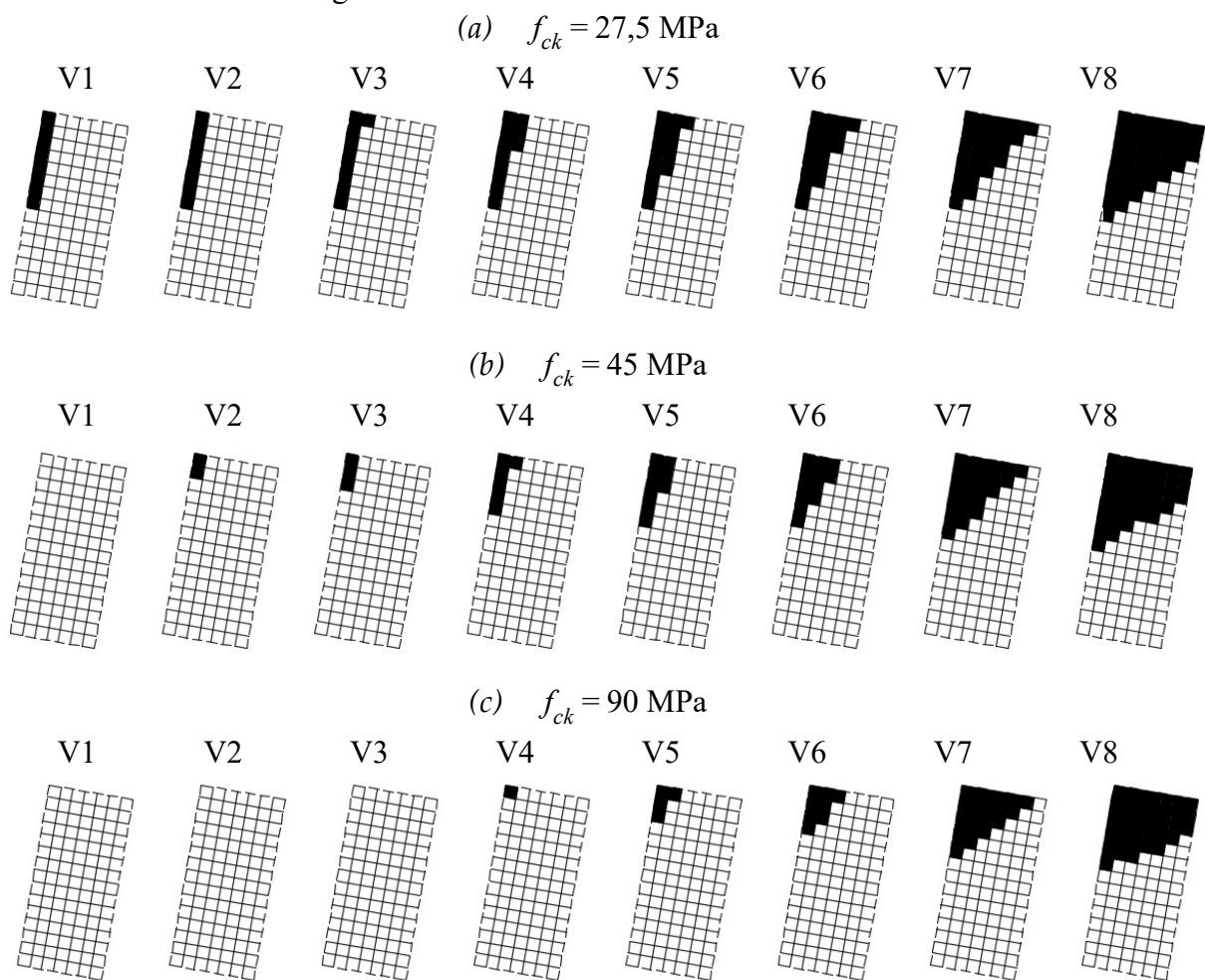
Para simular o efeito exclusivo de compressão nas molas do modelo simplificado das almofadas, foi feita uma análise estática considerando a não linearidade geométrica. Dessa análise, foram obtidas as reações de apoio nas molas para cada uma das oito vigas analisadas, para cada um dos três  $f_{ck}$  avaliados e para cada almofada considerada. Na Figura 17 a área hachurada representa a região em que não há reação de apoio, ou seja, a perda de contato entre a viga e a almofada. Nota-se ainda o deslocamento da reação de apoio vertical na almofada elastomérica, saindo da região central, devendo ser analisados os efeitos decorrentes desta ação (CARDOSO, 2017).

Das análises realizadas com a viga *AASHTO Tipo IV* sobre as almofadas de dimensões padronizadas A e B, Cardoso (2017) concluiu que:

- Na análise não linear geométrica, o aumento da resistência característica do concreto e, consequentemente, da rigidez da viga, levou a menores deslocamentos e a menores áreas de perda de contato entre a viga e a almofada.
- Os deslocamentos obtidos com análise não linear geométrica e física foram superiores aos obtidos somente com análise não linear geométrica.
- A consideração da atuação do vento mostrou ser uma condição muito mais desfavorável em termos de perda de contato entre a viga e a almofada, quando comparada com apenas o carregamento do peso próprio, uma vez que altera a posição da reação de apoio no elastômero para satisfazer o equilíbrio.

- É imprescindível certificar-se que a área comprimida da almofada, reduzida da região com descolamento da viga (*lift off*), é capaz de atender ao seu limite máximo de compressão;
- A rigidez ao giro da almofada decresceu à medida que a excentricidade da viga aumentou, ou seja, na medida em que maiores momentos fletores passaram a atuar nas duas direções do aparelho de apoio. A presença de imperfeições geométricas iniciais gera um ângulo de esconsidade que interfere na rigidez ao giro da almofada.

Figura 17 – Perda de contato na almofada A



Fonte: Cardoso (2017).

Lee *et al.* (2017) realizaram uma simulação numérica com elemento finito de viga, casca e sólido para representar o problema da instabilidade lateral de uma viga sobre apoios elásticos, concluindo que a simplificação com elementos de viga é satisfatória. A força de protensão é admitida de tal forma que a contra-flecha por ela gerada é igual ao deslocamento

vertical gerado pelo peso próprio da viga. O módulo de elasticidade da almofada de apoio elastomérica é assumido com comportamento bilinear, apresentado um valor de 140 MPa até o valor de deformação de 0,03, e de 180 MPa acima desse valor. A almofada é modelada utilizando uma série de molas não lineares, que trabalham apenas à compressão. A rigidez vertical total da almofada ( $k_v$ ) é calculada de acordo com a Equação (20), em função do módulo de elasticidade da almofada ( $E_s$ ), da área da almofada ( $A$ ) e da altura total das camadas elastoméricas ( $h_{rt}$ ). Para cada mola atribui-se uma rigidez específica em função da rigidez total da almofada e da localização da mola na almofada (LEE, et al., 2017).

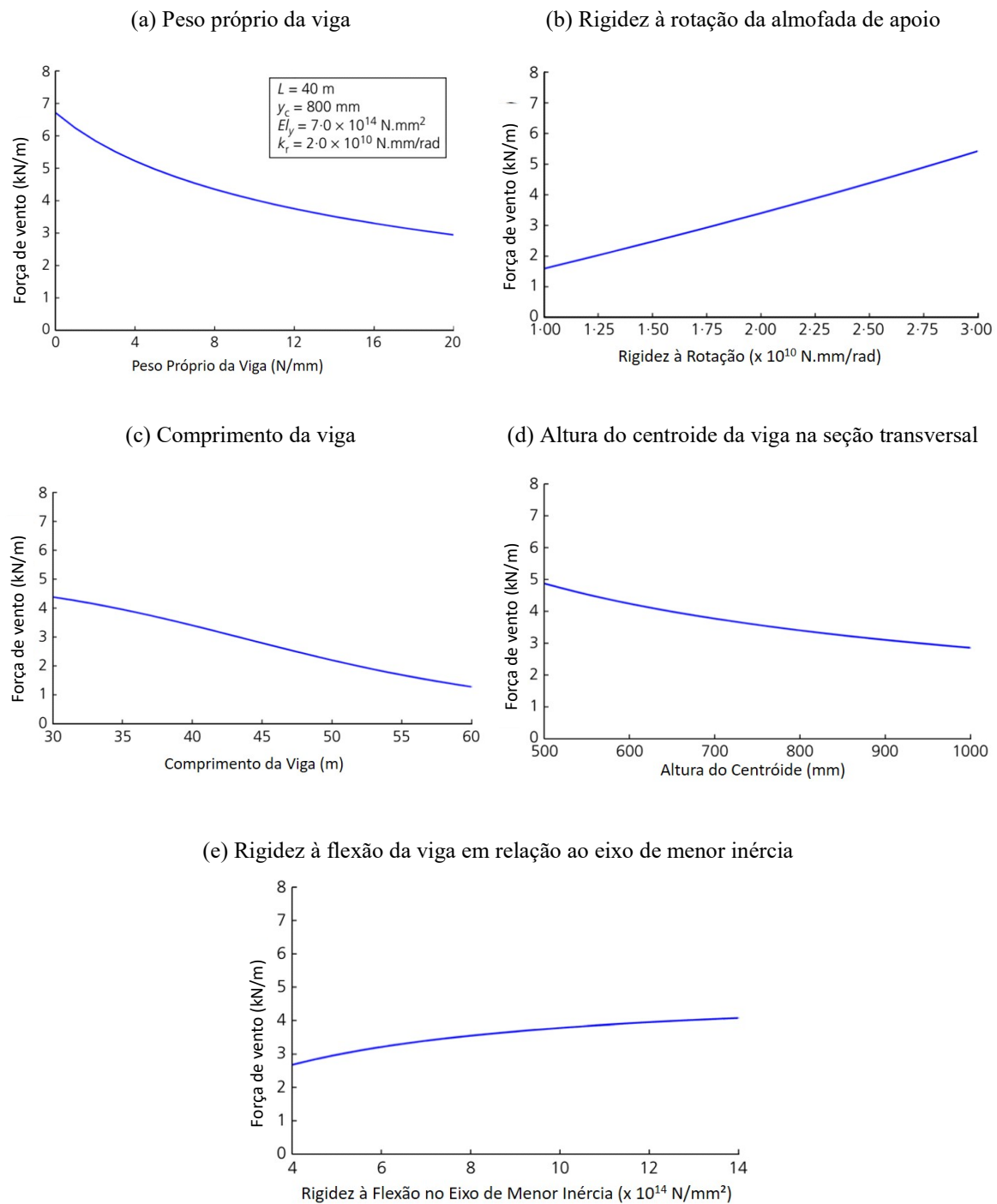
$$k_v = \frac{E_s A}{h_{rt}} \quad (20)$$

Para analisar a instabilidade por tombamento de vigas pré-moldadas de concreto de seção I, Lee *et al.* (2017) observaram a deformação lateral da vigas e o ângulo de rotação das vigas no meio do vão e nos apoios. Os autores também estudaram a relação entre os momentos de inércia dos dois eixos principais, a constante de torção e o comprimento da viga, com a força crítica do vento e o ângulo de rotação no apoio.

Lee *et al.* (2017) constataram que a força crítica do vento e o ângulo de rotação no apoio são fortemente influenciados pelo comprimento da viga e dependem das propriedades da seção transversal. Com o aumento do vão, a força crítica de vento diminui e o ângulo de rotação no apoio aumenta, sendo a relação entre esses fatores praticamente linear, uma vez que a força crítica do vento diminui aproximadamente 1,2 kN/m e o ângulo de rotação aumenta aproximadamente 0,001 rad, a cada aumento de 10 m no comprimento da viga.

Lee *et al.* (2017) apresentam gráficos que relacionam a força crítica do vento com diversos parâmetros da viga, tais como: peso próprio, rigidez à rotação, comprimento da viga, altura do centróide e rigidez à flexão (Figura 18). Os autores concluem que o ângulo de rotação crítico no apoio pode ser considerado igual a 0,001 rad por 10 m de comprimento da viga, servindo de parâmetro para análise da estabilidade ao tombamento de vigas sobre almofadas de apoio.

Figura 18 – Variação da força crítica de vento em função do:



Fonte: Adaptado de Lee *et al.* (2017).

Lee (2017) analisou a influência da excentricidade lateral na estabilidade de vigas pré-moldadas sobre apoios elastoméricos. O autor realizou uma análise numérica pelo método dos elementos finitos, com um elemento finito de viga, seguindo o mesmo método proposto em Lee *et al.* (2017). Foram analisadas vigas de seção padrão *AASHTO bulb-tees*, BT-54,

BT-63 e BT-72, com comprimento de 30 m, concreto com resistência a compressão de 48 MPa de resistência e 31000 MPa de módulo de elasticidade. As dimensões da almofada de elastômero são: 500 mm de comprimento, 250 mm de largura e 60 mm de altura. A rigidez vertical da almofada foi obtida conforme a Equação (20), considerando comportamento bilinear para o módulo de elasticidade.

Na análise numérica, Lee (2017) relacionou o peso crítico da viga com o deslocamento vertical, o deslocamento lateral, a rotação no apoio e a rotação no meio do vão da viga. Foram analisadas quatro excentricidades laterais iniciais, nos valores de  $L/1000$ ,  $L/500$ ,  $L/250$  e  $L/125$ , sendo  $L$  o comprimento da viga. Para o deslocamento vertical observou-se uma variação linear em relação ao peso da viga, apresentando o mesmo comportamento independente da imperfeição lateral inicial da viga. Nas demais análises o comportamento é quase linear na fase inicial de aplicação de carga, gerando em seguida uma curva acentuada até atingir uma carga crítica, com aumento excessivo do deslocamento lateral e das rotações sem acréscimo de carga. Observou-se que quanto maior a excentricidade lateral inicial, menor a carga crítica suportada pela viga e que, quanto maior a altura da viga, permanecendo constante as demais dimensões, menor é a carga crítica suportada. Para todas as deformações laterais iniciais consideradas a relação entre a esbeltes da seção da viga e a carga crítica apresentaram aproximadamente a mesma inclinação.

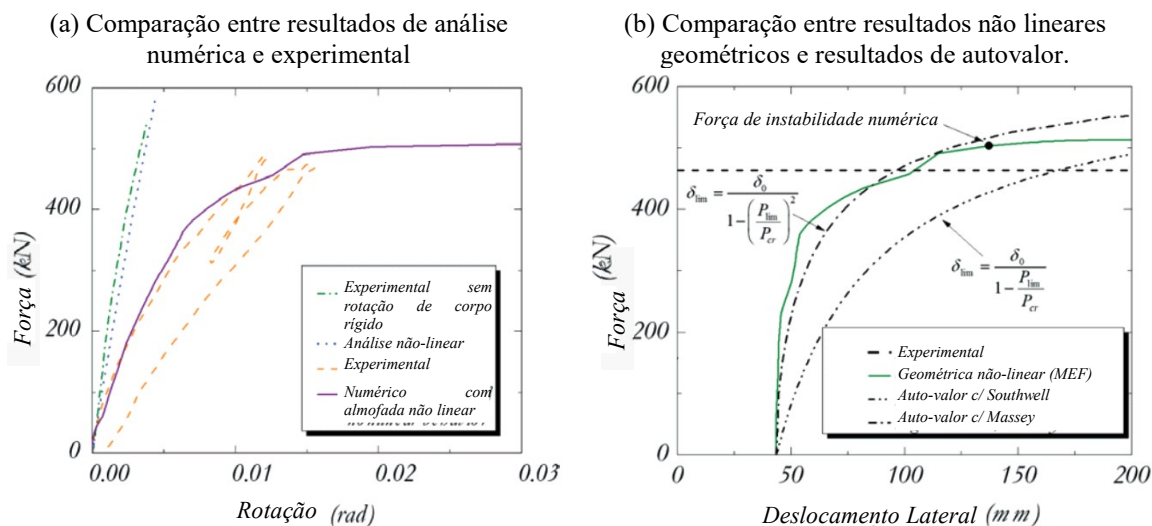
O resultado experimental da viga padrão AASHTO-PCI BT-54, experimentalmente testado por Hurff e Kahn (2012) é usado como referência para comparar os modelos numéricos e analíticos no trabalho de Krah, Carrazedo e El Debs (2017). No modelo numérico os autores consideram um deslocamento vertical no meio do vão da viga de 110,7 mm, tal deslocamento é feito para considerar o efeito da protensão na viga. Para consideração da imperfeição inicial, foi adotado um deslocamento horizontal correspondente ao primeiro modo de flambagem da viga, considerando as extremidades restritas a deslocamento vertical e horizontal e a rotação longitudinal. No experimento, a viga é sujeita inicialmente ao seu peso próprio e, em seguida, a uma força vertical gradativa e concentrada no meio do vão.

Em primeira análise, os autores determinaram a rigidez secante da almofada. Para isso, em um modelo da almofada isolada aplicaram uma força de compressão correspondente a metade do peso próprio da viga. Em seguida, foi aplicado um momento gradativo registrando

o comportamento não linear de momento-rotação. Para representar a esconsidade entre a viga e a almofada foi observada também a resposta da rotação da almofada ( $22,5^\circ$  e  $45^\circ$ ), concluindo que a rigidez diminui quanto maior a esconsidade da almofada. Por fim, como ponto de resposta do momento para rotação de  $0,02$  rad foi determinada a rigidez secante da almofada associada à instabilidade da viga (KRAHL; CARRAZEDO; EL DEBS, 2017).

A Figura 19 ilustra os resultados obtidos por Krahrl, Carrazedo e El Debs (2017) nas análises numéricas em comparação com o resultado experimental de Hurff e Kahn (2012). Com isso é possível observar que o modelo não linear se aproximou bastante dos resultados experimentais, assim como o autovalor com a utilização de Massey. O resultado de carga crítica experimental foi comparado com o valor encontrado pelo modelo geométrico de análise não linear, pela análise de autovalor, pela solução de flambagem clássica, e pelas equações de Flint (1951), Lebel (1959) e pela equação proposta pelos autores. Em comparação com os resultados experimentais, o modelo geométrico apresentou melhor aproximação com diferença de  $8,7\%$  do valor experimental, seguida pela análise de autovalor e pela solução de Flint (1951).

Figura 19 – Comparação entre os resultados experimentais e numéricos



Krahrl, Carrazedo e El Debs (2017) também compararam suas análises numéricas com os valores experimentais de Consolazio *et al* (2012). Nesta comparação, observou-se os valores obtidos para a almofada alinhada e para almofada com esconsidade de  $45^\circ$ . Para a almofada alinhada o autovalor apresentou diferença de  $36,6\%$  do valor experimental enquanto que

com a esconsidade de  $45^\circ$  a diferença reduziu para 22,8%. A solução clássica e de Flint não apresentaram solução para a almofada esconsa.

Krahl, Carrazedo e El Debs (2017) fizeram uma análise paramétrica com a viga PCI BT-54 para analisar a influência de fatores como a imperfeição inicial, módulo de elasticidade, largura do flange superior, esconsidade da almofada e comprimento da viga, na estabilidade do sistema. A seguir são apresentados alguns dos aspectos analisados pelos autores:

- Para as imperfeições iniciais de 43,5 mm, 65 mm e 95 mm, como esperado, a carga crítica diminui com o aumento da excentricidade, a aproximação entre o modelo geométrico e de autovalor foi bastante satisfatório (diferença de 2,5% a 15,5%);
- Para as esconsidade de  $22,5^\circ$  e  $45^\circ$ , quanto maior a inclinação menor a carga crítica, o autovalor se aproximou bastante do valor obtido com a almofada alinhada, distanciando o resultado quanto maior a inclinação;
- Para os módulos de elasticidade analisados (30, 40 e 50,0 GPa) notou-se um pequeno aumento na carga crítica (cerca de 7,6% de 40 GPa para 50 GPa);
- A largura da mesa superior também foi objeto de análise (106,7 cm, 61 cm e 15,2 cm). Com a redução da largura ocorre uma diminuição significativa na carga crítica de estabilidade. Para essa comparação os resultados de autovalor se aproximaram bastante do modelo geométrico com diferença máxima de 5,0%.

# CAPÍTULO 3

## METODOLOGIA

---

### 3.1 Soluções analíticas não-lineares da instabilidade lateral de vigas pré-moldadas sobre almofadas de apoio

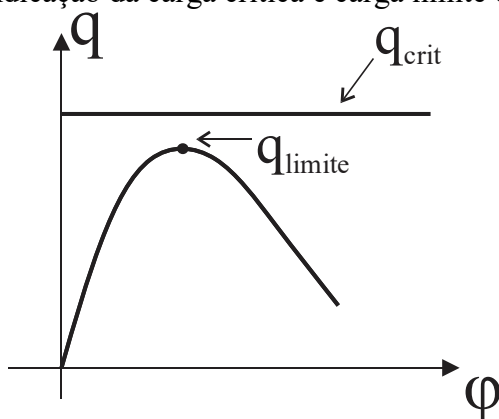
Nesta seção é apresentada a base teórica para o desenvolvimento das soluções analíticas propostas para o problema de instabilidade lateral de vigas pré-moldadas sobre aparelhos de apoio de elastômeros.

As soluções são desenvolvidas visando a obtenção de um valor de carga distribuída limite que, uma vez aplicada sobre uma viga pré-moldada apoiada sobre almofadas, causa o tombamento. O desenvolvimento das equações utiliza o método de Rayleigh-Ritz que se baseia no princípio da energia potencial estacionária.

A carga máxima das relações carregamento e ângulo de rotação de corpo rígido, para o problema linear, ou seja, viga perfeitamente reta, é a carga crítica ( $q_{crit}$ ). Quando consideramos a carga máxima de uma solução não linear, denominamos esse valor de carga limite ( $q_{limite}$ ) para o tombamento da viga em determinada condição (Figura 20).



Figura 20 – Indicação da carga crítica e carga limite de instabilidade

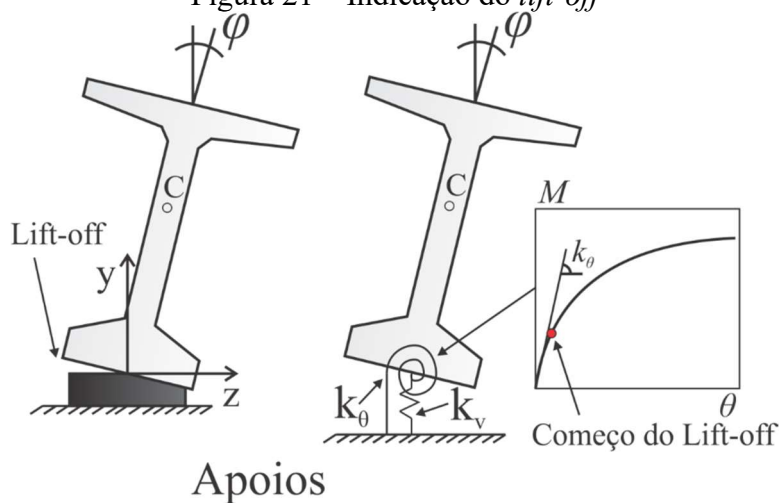


Fonte: Autor (2019)

São apresentados neste trabalho o equacionamento de cargas para as seguintes situações de vigas sobre aparelhos de apoio:

- Viga perfeitamente reta;
- Viga com excentricidade lateral inicial;
- Viga com excentricidade e rotação inicial;
- Viga com contraflecha devido a força de protensão.

Além das equações para determinação da carga crítica de tombamento da viga, outras duas situações de instabilidade lateral são estudadas: o *lift-off*, ou seja, a perda de contato entre a viga e aparelho de apoio, e o início da fissuração da viga.

Figura 21 – Indicação do *lift-off*

Apoios

Fonte: Autor (2019)

Para *lift-off* é definida uma solução analítica que determina o ângulo crítico de rotação de corpo rígido da viga para o qual inicia a perda de contato entre o aparelho de apoio e a viga.

Para avaliar o início da fissuração da viga, é apresentado o cálculo da tensão de tração em um ponto crítico de análise da viga durante o tombamento da mesma. O início da fissuração é considerado neste trabalho quando a tensão supera a resistência a tração do concreto.

### 3.1.1 O método de Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz baseia-se no princípio da energia potencial estacionária e é aplicável tanto em estruturas em regime linear como não linear, estaticamente determinadas ou não. No entanto, para sistemas mais complexos, outros métodos são mais práticos e eficientes, como o método dos elementos finitos.

De acordo com Timoshenko e Gere (1984), o método da energia potencial se aplica bem na análise aproximada de estruturas para as quais é difícil encontrar uma solução exata. Assim, quando se utiliza o método da energia potencial, é necessário expressar a energia de deformação  $U$  em função dos deslocamentos nodais dos elementos estruturais, assim como, o trabalho das forças externas  $V$ , multiplicando-se o carregamento atuante pelo deslocamento que este provoca. A soma destas duas parcelas representa a energia total do sistema.

Vale observar que em problemas nos quais o número de deslocamentos nodais desconhecidos é pequeno, é relativamente fácil obter expressões para a energia de deformação. Entretanto, em problemas com grande número de graus de liberdade, é razoável admitir uma configuração deformada, que depende de parâmetros desconhecidos de deslocamentos.

A energia potencial pode então ser calculada com base nesta configuração assumida, o que significa que esta energia será expressa como função dos parâmetros desconhecidos dos deslocamentos.

De acordo com o princípio da energia potencial estacionária, os deslocamentos devem resultar em um valor estacionário à energia potencial. Portanto, é possível usar derivadas parciais da energia potencial em relação a cada um dos parâmetros de deslocamento e igualar estas derivadas a zero. Esse procedimento leva a um conjunto de equações simultâneas, contendo os parâmetros de deslocamento como quantidades desconhecidas. Assim, o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Uma vez conhecidos os parâmetros dos deslocamentos, as equações podem ser resolvidas para estes, obtendo-se por fim, a relação entre forças aplicadas à estrutura e os deslocamentos resultantes, ou seja, as equações de equilíbrio.

Como requisito mínimo, a função de forma deve ser escolhida de modo a satisfazer as condições geométricas de contorno da estrutura. Vale observar que quanto maior o número de parâmetros de deslocamentos para definir a aproximação, mais exata será a forma de deslocamento aproximada sob muitas condições. Normalmente, quanto maior o número de parâmetros usados, maior o número de equações simultâneas que deverão ser resolvidas.

### **3.1.2 Aplicação do Método de Rayleigh-Ritz ao problema de instabilidade lateral de vigas pré-moldadas sobre almofadas de apoio.**

O problema do estudo do equilíbrio em análise não linear de vigas pré-moldadas apoiadas em aparelhos de apoio é desenvolvido neste trabalho por meio do método de Rayleigh-Ritz. Este método permite obter a solução analítica não linear de forma fechada para problemas estruturais. Para isso, é necessário determinar a função apropriada que represente a geometria do elemento estrutural na instabilidade em função de graus de liberdade ( $\alpha_i$ ).

Energia mecânica é, resumidamente, a capacidade de um corpo produzir trabalho. Também podemos interpretá-la como a energia que pode ser transferida por meio de uma força. A energia mecânica total de um sistema é a soma da energia cinética, relacionada ao movimento de um corpo, com a energia potencial, relacionada ao armazenamento podendo ser gravitacional ou elástica. Neste caso de estudo o funcional total de energia será composto pelas energias internas do sistema e pelos trabalhos realizados pelas forças externas atuantes.

Para isso deve-se determinar uma função apropriada que representa a configuração geométrica da estrutura na instabilidade com uma combinação linear de graus de liberdade  $\alpha_i$ . Essa função é utilizada na equação da energia funcional total  $\Pi$ , que consiste no somatório das energias internas  $U$  e dos trabalhos realizados pelas forças externas atuantes no sistema  $V$ .

A determinação da configuração de equilíbrio do sistema parte do princípio da energia potencial total estacionária apresentada na Equação (21) e sistema de equações não-lineares apresentado na Equação (22). Dependendo das aproximações adotadas para deslocamentos e rotação, e com a linearização do problema para pequenos deslocamentos (solução linear), o sistema pode resultar em mais de uma raiz, sendo a carga crítica o menor dos valores positivos obtidos como raízes. No entanto, se o problema não for linearizado, a solução pode representar a relação não linear entre carga e deslocamentos.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

$$a_{ij} \alpha_j = 0 , \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

A energia interna total do sistema é apresentada na Equação (23), incluindo a energia de rotação dos aparelhos de apoio. Considerando que a instabilidade lateral de vigas pré-moldadas ocorre principalmente devido a combinação de deslocamentos laterais de flexão e rotação de corpo rígido. Neste trabalho, as deformações de torção são desconsideradas devido as evidências experimentais já mencionadas, de forma que a energia interna correspondente a torção de St. Venant ( $GJ$ ) e devido ao empenamento ( $EI_\omega$ ) serão canceladas no funcional de energia do sistema.

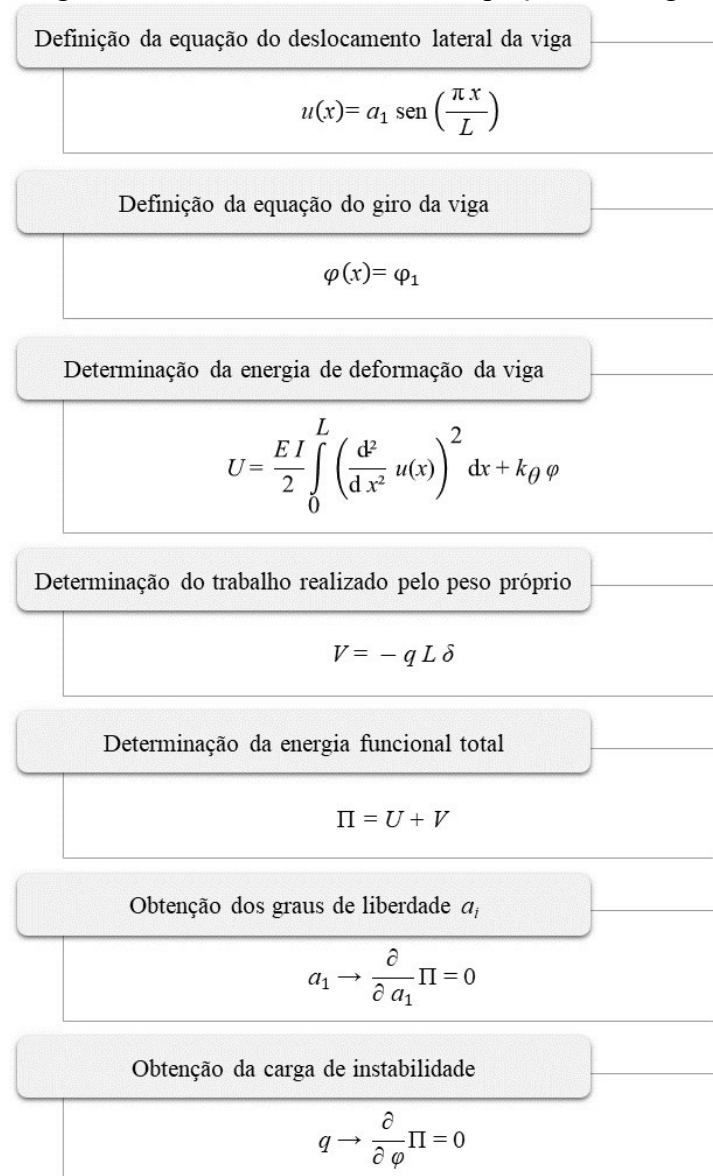
$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ EI_y u'^2 + GJ \varphi'^2 + EI_\omega \varphi''^2 \right\} dx + k_\theta \varphi^2 \quad (23)$$

Onde  $EI_y$ ,  $GJ$ ,  $EI_\omega$  são a rigidez a flexão lateral, torção de St. Venant e de empenamento. As duas últimas rigidezes são canceladas no funcional devido ao giro por torção  $\varphi$  ser assumido como constante (giro de corpo rígido). O parâmetro  $k_\theta$  representa a rigidez

rotacional dos aparelhos de apoio. Soluções aproximadas são necessárias para resolver o problema. As rotações são consideradas constantes ao longo do intervalo com um valor  $\varphi$ .

O desenvolvimento das equações a seguir descritas neste trabalho é realizado no programa computacional *Maple versão 18* seguindo o fluxograma apresentado na Figura 22.

Figura 22 – Fluxograma do desenvolvimento das equações de carga crítica não linear



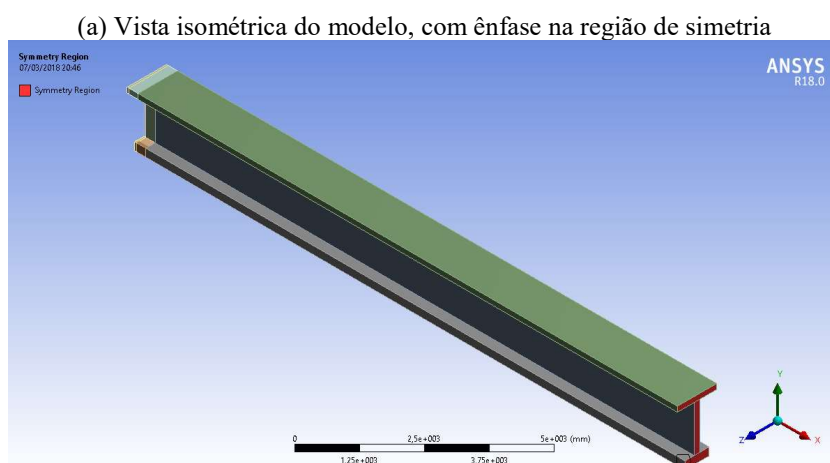
Fonte: Autor (2019)

### 3.2 Análise do problema de instabilidade pelo Método dos Elementos Finitos

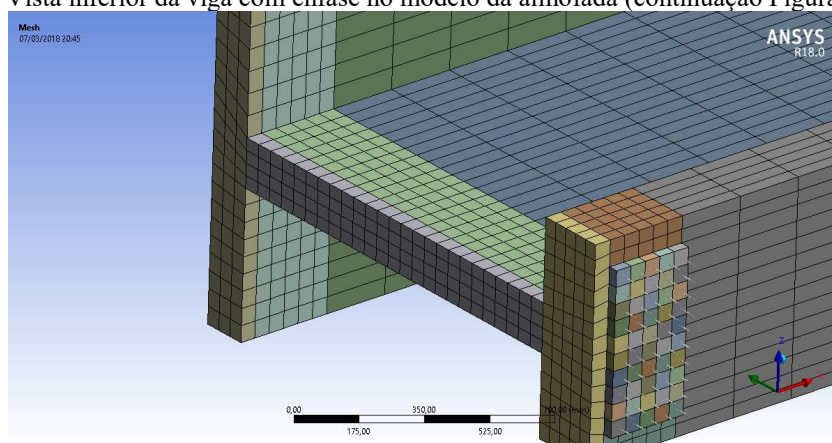
Com o objetivo de analisar numericamente o comportamento de vigas sobre essas almofadas de apoio, foram feitos modelos de análise numérica no programa computacional ANSYS plataforma Workbench. Trata-se de uma viga pré-moldada modelada em elemento sólido, do tipo *SOLID*, apoiada sobre almofada de apoio que é simulada por um conjunto de elementos sólidos rígidos, também do tipo *SOLID*, apoiados sobre molas, que são elementos de contato do tipo *spring body ground*, baseado no modelo de Harper e Consolazio (2013). As molas são simuladas com rigidez constante e igual em todas as molas. A Figura 23 mostra o esquema do modelo estudado considerando a simplificação devido a simetria.

Foram utilizados dados de vigas e almofadas de apoio já apresentadas na literatura, com o objetivo de validação do modelo por meio de comparação de resultado. O modelo desenvolvido visa a comparação com o trabalho de Lee (2017). Para isso foi modelada uma viga de seção simplificada da BT-63, com 30 m de comprimento, sobre uma almofada de apoio de  $500 \times 250 \times 60$  mm. São analisados quatro valores para as excentricidades laterais iniciais:  $L/1000$ ,  $L/500$ ,  $L/250$  e  $L/125$ , sendo  $L$  o comprimento da viga.

Figura 23 – Modelo da viga sólida sobre a almofada de apoio



(b) Vista inferior da viga com ênfase no modelo da almofada (continuação Figura 23)



Fonte: Autor (2019)

A almofada possui dimensões de  $500 \times 250 \times 60 \text{ mm}^3$ , tendo sido modelada com elementos sólidos rígidos apoiados sobre molas com 60 mm de altura. Todas as molas do modelo da almofada têm rigidez a compressão constante e igual a 9583 N/mm, em um total de 50 molas.

Neste modelo, a viga é solicitada apenas pelo peso próprio. Para definição da carga limite, o carregamento foi aplicado por meio de incremento de carga. Para cada incremento realizado são obtidos os valores máximos de deslocamento vertical e horizontal, além da rotação no meio do vão e no apoio.

### 3.3 Desenvolvimento de algoritmo e análise paramétrica das soluções analíticas

A análise paramétrica é desenvolvida baseada na simulação de Monte Carlo para verificar o comportamento das soluções analíticas para as cargas críticas obtidas. A simulação de Monte Carlo é um método de confiabilidade que pode ser utilizado para estimar a probabilidade de falha de estruturas. O método se baseia em uma grande quantidade de amostragens aleatórias para avaliar a variabilidade dos parâmetros associados ao modelo na resposta mecânica da estrutura. Este procedimento é desenvolvido por meio de programação computacional utilizando a linguagem *Python*.

Para obter a amostragem aleatória massiva, para cada parâmetro analisado, são realizadas 100 mil simulações. Em cada uma das simulações é atribuído um valor aleatório para as

seguintes variáveis: excentricidade lateral inicial, módulo de elasticidade do concreto, rigidez a rotação do apoio e valor da força de protensão. Esses parâmetros só não são variáveis quando são o parâmetro foco da análise.

Os valores aleatórios são obtidos da seguinte forma: a excentricidade lateral inicial e o módulo de elasticidade são adotados aleatoriamente de acordo com uma distribuição normal cuja média é o valor de entrada padrão. O coeficiente de variação é de 0,61 para a excentricidade inicial (Cojocar, 2012) e 0,15 para o módulo de elasticidade (JCSS, 2000). Para considerar o efeito da perda de contato e de possível curvatura da base inferior da viga no contato com a almofada de apoio, é considerada a variação da rigidez a rotação do aparelho de apoio aleatoriamente de 25% a 100% do valor total da rigidez estabelecida como valor padrão de entrada. Por fim, considera-se ainda uma perda média de 25% do valor total da força de protensão, com um coeficiente de variação de distribuição normal de 5%. Os valores de dado padrão do problema foram atribuídos com base na viga ensaiada por Hurff e Kahn (2012).

Apesar deste trabalho considerar a perda média de 25% no valor total da força de protensão, valores menores de perda poderiam ser considerados, uma vez que 25% corresponde a aproximadamente a perda total da protensão da viga. Como o estado analisado é durante a montagem da estrutura, a viga possui pouca idade, dessa forma a perda da força de protensão pode ser, em geral, inferior aos 25% considerados.

A rigidez a rotação do aparelho de apoio é calculada pela Equação (24) e a contraflecha gerada na viga devido a força de protensão é dada pela Equação (25). A rigidez axial do aparelho de apoio (Equação (26)) é calculada segundo a proposta de Yazdani et al. (2000).

$$k_{\theta} = \frac{k_v L_a^2}{12} \quad (24)$$

$$\delta_0 = \frac{F e_p l^2}{8 E I_x} \quad (25)$$

$$k_v = \frac{E_{pad} L_a W_a}{H_a} \quad (26)$$

Sendo:

$$E_{pad} = 6 \cdot G_{pad} \cdot S^2$$



$$S = \frac{(n_i \cdot h_i \cdot S1) + (n_e \cdot h_e \cdot S2)}{(n_i \cdot h_i) + (n_e \cdot h_e)}$$

$$S1 = \frac{L_a \cdot W_a}{2 \cdot h_i \cdot (L_a + W_a)}$$

$$S2 = \frac{L_a \cdot W_a}{2 \cdot h_e \cdot (L_a + W_a)}$$

$k_v$  a rigidez a compressão da almofada

$L_a$ ,  $W_a$  e  $H_a$  as dimensões da almofada

$E_{pad}$  o módulo de elasticidade da almofada

$G_{pad}$  o módulo de cisalhamento da almofada

$n_i$  e  $n_e$  o número de camadas internas e externas da almofada, respectivamente,

$h_i$  e  $h_e$  a altura das camadas internas e externas da almofada, respectivamente

$F$  a força de protensão

$e_p$  a excentricidade de aplicação da força de protensão

$l$  o comprimento da viga

$E$  o módulo de elasticidade da viga

$I_x$  o momento de inércia da viga em relação ao eixo de maior inércia

A precisão do ângulo de rotação de corpo rígido das análises é de 0,001 rad. A partir do módulo de elasticidade é determinado o valor do  $f_{ck}$  e  $f_t$  do concreto da viga de acordo com as formulações da ABNT NBR 6118:2014.

A curva de tensão na seção transversal depende de dois parâmetros, a carga atuante e o ângulo de rotação. Os valores de carga atuante são obtidos pela formulação da carga para viga com deslocamento e rotação inicial. Com a definição da curva de tensão é verificado o valor de tensão mais próximo  $f_t$ , a carga e o ângulo correspondentes a esse ponto são os valores críticos para início da fissuração da viga

A estrutura do algoritmo desenvolvido e programado está dividido a seguir em 5 partes como ilustra a Figura 24.

Figura 24 – Estrutura do algoritmo das análises paramétricas



Fonte: Autor (2019)

O algoritmo desenvolvido no Python pode ser dividido em 05 partes da seguinte forma:

Na **PARTE 1** são definidas as funções para obtenção das cargas críticas, sendo:

- **FUNÇÃO 01:** Viga perfeitamente reta - Linear
  - *Dado de entrada na função:* Nenhum
  - *Cálculo:* Carga crítica linear da viga perfeitamente reta
  - *Retorno:* Valor único da carga crítica calculada
- **FUNÇÃO 02:** Viga perfeitamente reta – Não linear
  - *Dado de entrada na função:* Vetor com os valores dos ângulos de rotação a serem analisados
  - *Cálculo:* Carga não linear da viga perfeitamente reta
  - *Retorno:* Vetor com o resultado da carga calculada para cada ângulo do vetor de entrada
- **FUNÇÃO 03:** Viga perfeitamente com excentricidade inicial
  - *Dado de entrada na função:* Vetor com os valores dos ângulos de rotação a serem analisados
  - *Cálculo:* Carga não linear da viga com excentricidade inicial
  - *Retorno:* Vetor com o resultado da carga calculada para cada ângulo do vetor de entrada
- **FUNÇÃO 04:** Viga perfeitamente com excentricidade e rotação inicial
  - *Dado de entrada na função:* Vetor com os valores dos ângulos de rotação a serem analisados
  - *Cálculo:* Carga não linear da viga com excentricidade e rotação inicial
  - *Retorno:* Vetor com o resultado da carga calculada para cada ângulo do vetor de entrada
- **FUNÇÃO 05:** Viga perfeitamente com contraflecha devido a protensão
  - *Dado de entrada na função:* Vetor com os valores dos ângulos de rotação a serem analisados
  - *Cálculo:* Carga não linear da viga com contraflecha devido a protensão

- *Retorno:* Vetor com o resultado da carga calculada para cada ângulo do vetor de entrada
- **FUNÇÃO 06:** Tensão de tração
  - *Dado de entrada na função:*
    - Vetor com os valores dos ângulos de rotação a serem analisados
    - Vetor com os valores de carga a ser considerado, correspondendo aos respectivos ângulos do vetor anterior
  - *Cálculo:* Tensão de tração máxima para cada ângulo e carga de entrada.
  - *Retorno:* Vetor com o resultado de tensão máxima calculada para cada ângulo e carga

A **PARTE 2** contém a definição e cálculo das variáveis relacionadas a viga em estudo, tais como, por exemplo:

- **DADOS DE ENTRADA** (Exemplo utilizado – Seção I padrão PCI BT-54):
  - Seção transversal: Seção I padrão PCI BT-54
    - Momento de Inércia em relação ao eixo X (**I<sub>x</sub>**): 0,1116 m<sup>4</sup>
    - Momento de Inércia em relação ao eixo Y (**I<sub>y</sub>**): 0,0155 m<sup>4</sup>
    - Altura da viga (**h**): 1,372 m
    - Altura do centro de gravidade (**y**): 0,703 m
    - Largura da mesa superior (**bf**): 1,067 m
    - Área da seção transversal (**A**): 0,425642 m<sup>2</sup>
  - Comprimento da viga (**L**): 30,5 m
  - Módulo de elasticidade (**E**): 30820 MPa
  - Almofada de apoio:
    - Dimensões: **La**: 0,61 m; **Wa**: 0,36 m; **Ha**: 0,073 m
    - 4 chapas de aço
    - 3 camadas internas (**ni**) de elastômero de 15 mm cada (**hi**)
    - 2 camadas externas (**ne**) de elastômero de 7,5 mm cada (**he**)
  - Módulo de elasticidade ao cisalhamento (**G<sub>pad</sub>**): 670 kPa
  - Força de protensão (**F<sub>p</sub>**): 7818,8 kN com excentricidade (**ep**) de 0,6323 m
  - Ângulo de rotação inicial (**ang\_i**): 0,5° (0,008727 rad)
- **VARIÁVEIS CALCULADAS**
  - Peso próprio da viga (**w**):  $25 \times A$  [kN/m]
  - Excentricidade lateral inicial (**ei**):  $L/1000$
  - Rigidez a rotação do apoio (**k**)
  - Ângulo da perda de contato entre a viga e o aparelho de apoio

A **PARTE 3** consiste na definição do parâmetro de análise (**PA**) e das variáveis aleatórias (**VA**):

- Verificação se um parâmetro aleatório será aleatório ou constante.
  - Se **VA = PA** então **VA** é constante e igual ao valor de **PA**, se não:

- **VA = Módulo de elasticidade**
  - Gera um vetor com 100 mil valores aleatórios de Módulos de Elasticidade.
  - *Regra:*
    - Média: Valor definido na Parte 02
    - Distribuição normal
    - Coeficiente de variação: 0,15
- **VA = Excentricidade inicial**
  - Gera um vetor com 100 mil valores aleatórios de Excentricidade Inicial.
  - *Regra:*
    - Média: Valor definido na Parte 02
    - Distribuição normal
    - Coeficiente de variação: 0,61
- **VA = Força de protensão**
  - Gera um vetor com 100 mil valores aleatórios de Força de Protensão.
  - *Regra:*
    - Média: 75% do valor definido na Parte 02
    - Distribuição normal
    - Coeficiente de variação: 0,05
- **VA = Rigidez a rotação do apoio**
  - Gera um vetor com 100 mil valores aleatórios de Rigidez a Rotação do Apoio.
  - *Regra:*
    - Base: Valor calculado na Parte 02
    - Valores aleatórios entre 25% a 100% do valor Base.

A **PARTE 4** consiste na estrutura de repetição que calculará as curvas das 6 funções definidas na Parte 1 para os 100 mil valores aleatórios e definirá os respectivos pontos máximos de cada curva.

- Define um vetor com os ângulos para a análise (**V\_Ang**). Precisão utilizada foi um acréscimo de 0,001 rad a cada ângulo.
- Inicia a estrutura de repetição: 100 mil vezes.
  - Atribui para **E**, **ei**, **F** e **k** os respectivos valores dos vetores aleatórios de acordo com a posição da estrutura de repetição.
  - Calcula o valor da contraflecha devido a força de protensão.
  - Chama a **Função 01** e armazena seu valor.
  - Chama as **Funções de 02 a 05** passando como entrada o vetor **V\_Ang**.
  - Calcula o valor máximo obtido para cada uma dessas funções e o ângulo correspondente a cada um, armazenando esses valores.
  - Chama a **Função 06** passando como entrada o vetor **V\_Ang** e o vetor resultante da **Função 04**.
  - Armazena a carga e o ângulo cujo valor resultante da **Função 06** seja o mais próximo possível da resistência a tração do concreto.
  - Analisa e contabiliza o valor máximo da **Função 04** para o histograma.

- Finaliza a estrutura de repetição

Na **PARTE 5** são calculados e apresentados os resultados finais da análise

- Calcula as médias para cada uma das situações de cargas e ângulos críticos.
- Cria arquivo (com extensão csv) com todos os valores armazenados.
- Cria os gráficos com os resultados de carga e ângulo crítico e carga por número de simulações.
- Fim do algoritmo.

A análise paramétrica realizada visa verificar o comportamento da viga com a variação de alguns parâmetros específicos (Tabela 3).

Tabela 3 – Parâmetros da análise paramétrica

PARÂMETRO DE ANÁLISE	VALOR ANALISADO			
Excentricidade inicial	L/1000	L/500	L/250	L/125
Rotação inicial	0,5°	1,5°	3,0°	
Resistência do concreto	50 MPa	75 MPa	100 MPa	
Força de protensão	7818,8 kN	17818,8 kN	27818,8 kN	
Dimensão do aparelho de apoio	610 × 360 × 73 mm <sup>3</sup>	610 × 360 × 98 mm <sup>3</sup>	610 × 360 × 123 mm <sup>3</sup>	
Seção transversal da viga	BT-54	BT-63	BT-72	

Fonte: Autor (2019)

Vale ressaltar que para cada uma das três seções transversais da viga considerada nas análises deste trabalho, são consideradas três situações para o comprimento da mesa superior da viga, sendo:

- 100% do valor padrão;
- 50% do valor padrão;
- igual a espessura da alma (situação de T invertida).

---

# CAPÍTULO 4

## PROPOSTAS ANALÍTICAS

---

### 4.1 Desenvolvimento do equacionamento de carga crítica

O desenvolvimento das soluções analíticas está dividido nas seguintes etapas: a primeira considerando que as vigas analisadas são perfeitamente retas, a segunda considera uma excentricidade inicial (deslocamento lateral) na viga, a terceira considera além da excentricidade inicial uma rotação de corpo rígido inicial e a última etapa considera o efeito de uma contraflecha vertical no meio do vão da viga causada pela força de protensão.

#### 4.1.1 Viga perfeitamente reta

A viga é inicialmente considerada perfeitamente reta, sem imperfeição, apoiada nas extremidades por aparelhos de apoio de elastômero, sujeita apenas ao peso próprio. Na condição de instabilidade, a viga apresenta deslocamento lateral e vertical devido a flexão, além de rotação de corpo rígido.

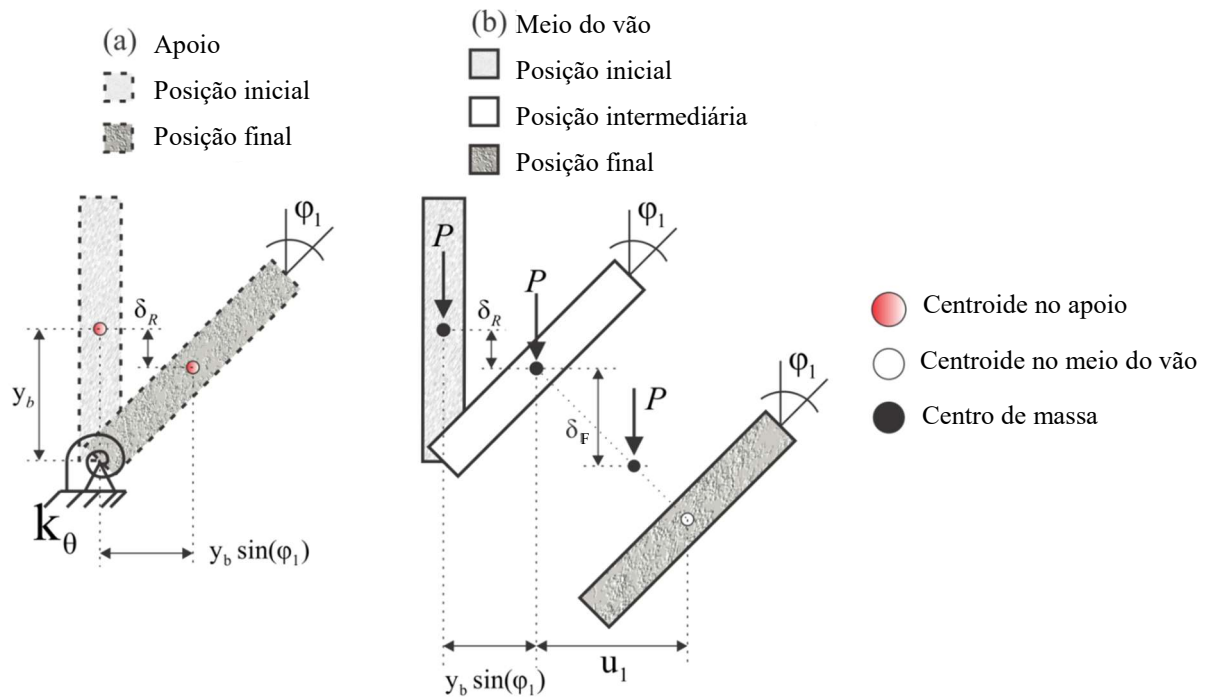
A função trigonométrica generalizada, apresentada na Equação (27) representa os deslocamentos laterais devido a flexão, sendo  $\ell$  é o comprimento da viga e  $a_1$  é uma variável generalizada representando o valor máximo de  $u_1$ , que é o deslocamento lateral da viga. No caso de  $n = 1$ , que representa o primeiro modo de flambagem para a instabilidade de tombamento, a constante  $a_1$  é o valor máximo de deslocamento lateral no meio do vão, e a curva é uma onda senoidal única. Outros modos de flambagem podem ser escolhidos para

valores mais altos de  $n$ . Além disso, a Equação (27) satisfaz as condições de contorno essenciais da viga.

$$u_1(x) = a_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (27)$$

O trabalho realizado durante o tombamento é dado pelo produto do deslocamento vertical das cargas aplicadas no elemento estrutural. A Figura 25 apresenta a configuração deslocada da viga devido a ação da resultante do peso próprio atuando no centro de massa durante o tombamento da viga admitida perfeitamente reta. A Figura 25 (a) representa a situação no apoio e a Figura 25 (b) a situação no meio do vão. A posição intermediária indicada na figura corresponde a posição da viga após a rotação de corpo rígido e antes da ocorrência da deformação por flexão lateral.

Figura 25 – Trajetória da resultante do peso próprio durante o tombamento



Fonte: Autor (2019)

O termo  $\delta_R$  corresponde ao movimento vertical do centro de massa devido a rotação de corpo rígido da viga, e pode ser determinado pela Equação (28), onde  $y_b$  é a distância entre o centroide da viga e o eixo de rotação localizado no aparelho de apoio. A flexão lateral

desloca ainda mais o centro de massa durante a rotação, e o deslocamento vertical deste ponto pode ser determinado pela Equação (29).

$$\delta_R = 2y_b \sin^2\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \quad (28)$$

$$\delta_F = \frac{\tan(\varphi_1)}{\ell} \int_0^\ell u_1 dx \quad (29)$$

Desta forma, a energia potencial devido a atuação do peso próprio na viga pode ser calculada pela Equação (30):

$$V = -P(\delta_R + \delta_F) \quad (30)$$

Com a minimizando a energia funcional total  $\Pi$  obtêm-se a situação de equilíbrio do sistema. A Equação (31) representa a equação de equilíbrio não linear geométrica de vigas sobre elastômeros.

$$q\ell \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \frac{8q\ell^4}{\pi^6 EI_y} [\tan(\varphi_1)^3 + \tan(\varphi_1)] \right\} = 2\varphi_1 k_\theta \quad (31)$$

Onde  $q\ell$  é a resultante da carga distribuída aplicada no centroide,  $EI_y$  é a rigidez a flexão lateral,  $\ell$  é o comprimento da viga, e  $k_\theta$  é a rigidez a rotação do aparelho de apoio.

A linearização da Equação (31), onde  $\sin(\varphi) \approx \tan(\varphi) \approx \varphi$  e  $\cos(\varphi) \approx 1$ , resulta no ponto de bifurcação ou crítica da carga de tombamento  $q_{crit}$  para uma viga perfeitamente reta, Equação (32).

$$q_{crit} = \frac{-\pi^6 y_b EI_y \pm \sqrt{y_b^2 \pi^{12} (EI_y)^2 + 64 \pi^6 \ell^3 k_\theta EI_y}}{16\ell^4} \quad (32)$$

O menor valor positivo obtido a partir dessa equação representa a carga crítica de tombamento. Observa-se que a Equação (32) é independente da rotação de corpo rígido  $\varphi_1$ , o que significa que este é o ponto de bifurcação que separa as trajetórias de equilíbrio pré e pós-flambagem. Assim, até o ponto de bifurcação de equilíbrio, a viga é mantida em sua

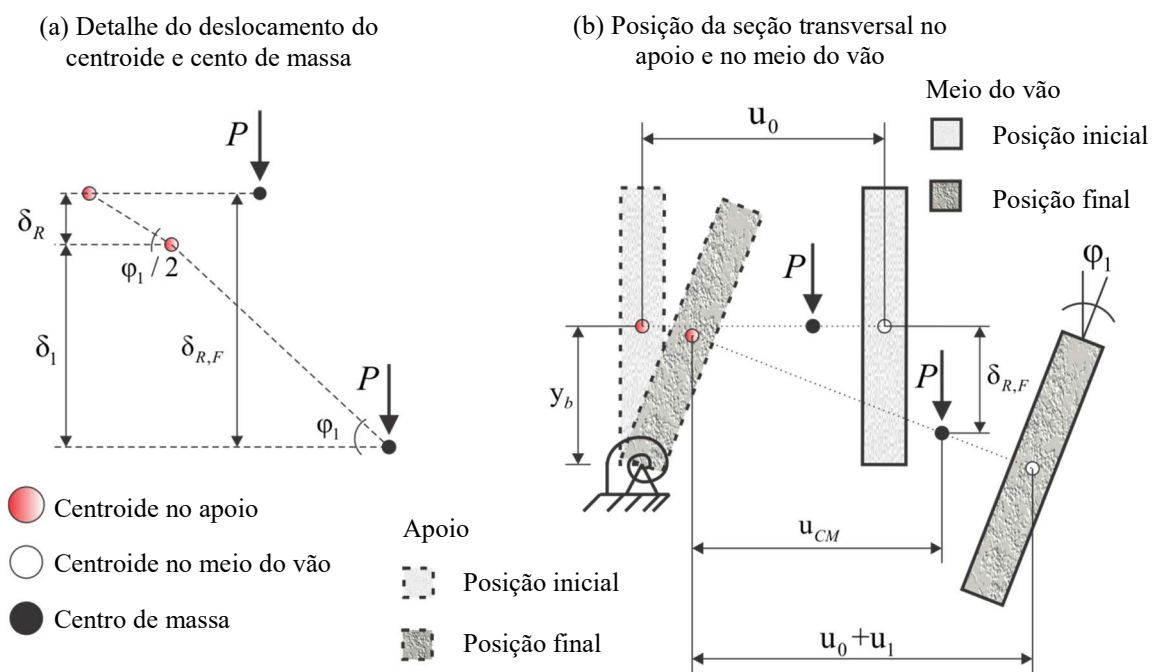


configuração indeformada (carga aplicada é menor do que  $q_{crit}$ ). Quando a carga crítica é alcançada, o equilíbrio torna-se instável na configuração inicial, resultando na rotação da viga. A Equação (31) permite descrever a trajetória não-linear no trecho pós-flambagem.

#### 4.1.2 Viga com excentricidade inicial

O primeiro parâmetro a ser considerado no problema da instabilidade lateral é a presença de excentricidade lateral inicial, designada por  $u_0$  (Figura 26).

Figura 26 – Condição de equilíbrio para viga com excentricidade inicial



Fonte: Autor (2019)

O problema continua sendo uma combinação de rotação do corpo rígido e flexão lateral, porém, neste caso, a configuração inicial  $u_0(x)$  tem influência significativa no equilíbrio. Assim, o deslocamento causado pelo peso próprio depende do deslocamento lateral inicial da viga. A forma generalizada para a imperfeição inicial da viga pode ser tomada como uma senóide com um valor máximo  $\lambda_0$  no meio do vão (Equação (33)). O valor máximo  $\lambda_0$  pode ser conhecido, a priori, ou adotado entre limites aceitáveis. O valor do ângulo  $\phi_1/2$  é obtido geometricamente.

Assim, o deslocamento causado pela carga  $P$  pode ser calculado de acordo com a Equação (34), de acordo com a Figura 26. O trabalho realizado pelo peso próprio é dado pela Equação (35).

$$u_0(x) = \lambda_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (33)$$

$$\delta_1 = \frac{\tan(\varphi_1)}{\ell} \int_0^\ell (u_0 + u_1) dx \quad (34)$$

$$V = -P(\delta_1 + \delta_R) \quad (35)$$

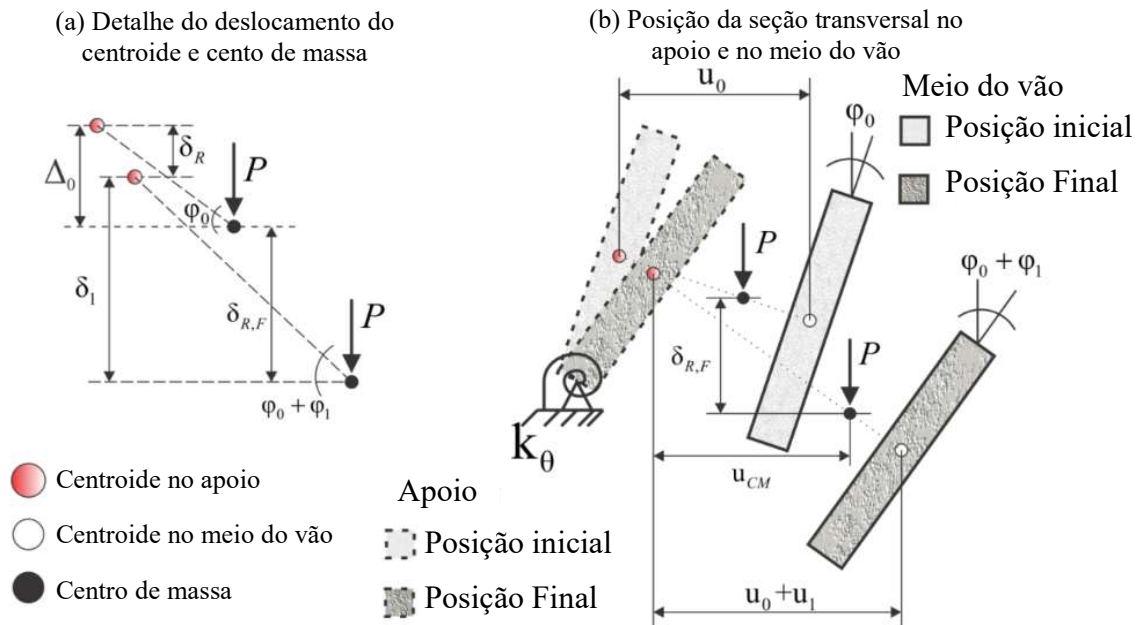
Com a minimização da equação da energia funcional total, obtém-se a equação de equilíbrio não linear dada na Equação (36):

$$q\ell \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \left[ \frac{8q\ell^4 \tan(\varphi_1)}{\pi^6 EI_y} + \frac{2\lambda_0}{\pi} \right] [1 + \tan^2(\varphi_1)] \right\} = 2\varphi_1 k_\theta \quad (36)$$

#### 4.1.3 Viga com excentricidade e rotação inicial

O comportamento das vigas com a presença de excentricidade inicial ( $u_0$ ) e rotação inicial ( $\varphi_0$ ) pode ser esquematizado segundo a Figura 27.

Figura 27 – Esquema do tombamento de uma viga com excentricidade e rotação inicial



Fonte: Autor (2019)

Deste esquema é possível observar que o deslocamento total  $\delta_{R,F}$  é uma combinação de três partes, o somatório de  $\delta_R$  com  $\delta_1$ , subtraído o valor de  $\delta_0$ . Sendo que  $\delta_R$  corresponde ao movimento vertical do centro de massa devido a rotação de corpo rígido da viga,  $\delta_1$  é a distância entre o centroide nos suportes e o centro de massa na posição final e  $\delta_0$  representa a distância entre o centroide nos suportes e o centro de massa da viga na posição inicial. O deslocamento generalizado  $u_0$  representa o deslocamento lateral inicial da viga. O cálculo desses deslocamentos e do trabalho realizado pela resultante do peso próprio é apresentado nas equações a seguir:

$$\Delta_0 = \frac{\tan(\varphi_0)}{\ell} \int_0^\ell u_0 dx \quad (37)$$

$$\delta_1 = \frac{\tan(\varphi_0 + \varphi_1)}{\ell} \int_0^\ell (u_0 + u_1) dx \quad (38)$$

$$V = -P (\delta_1 + \delta_R - \Delta_0) \quad (39)$$

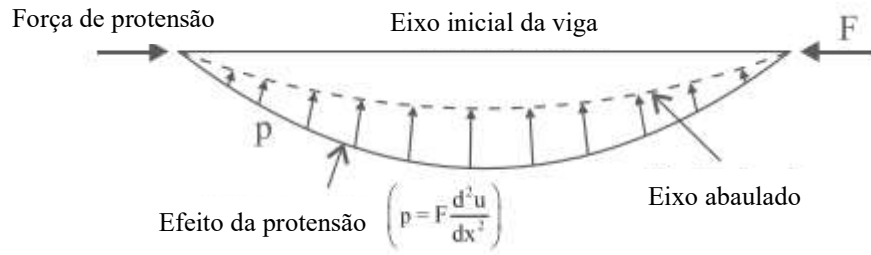
Com a minimização da equação funcional de energia, a equação de equilíbrio obtida é apresentada na Equação (40).

$$q\ell \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \left[ \frac{8q\ell^4 \tan(\varphi_0 + \varphi_1)}{\pi^6 EI_y} + \frac{2\lambda_0}{\pi} \right] \left[ 1 + \tan^2(\varphi_0 + \varphi_1) \right] \right\} = 2\varphi_1 k_\theta \quad (40)$$

#### 4.1.4 Contraflecha de protensão sem excentricidade lateral e sem rotação inicial

A força de protensão não atua diretamente na estabilidade lateral de uma viga, uma vez que a energia total correspondente tanto da força de protensão como das reações do cabo de protensão atuando sobre o elemento resultam em um valor nulo (Equação (41)). Assim, as forças são auto equilibradas, e o equilíbrio resultante não é influenciado pela protensão. Assim como mostrado por Krah, Carrazedo e El Debs (2018) na Figura 28.

Figura 28 – Visão superior de uma viga protendida com deformação lateral inicial



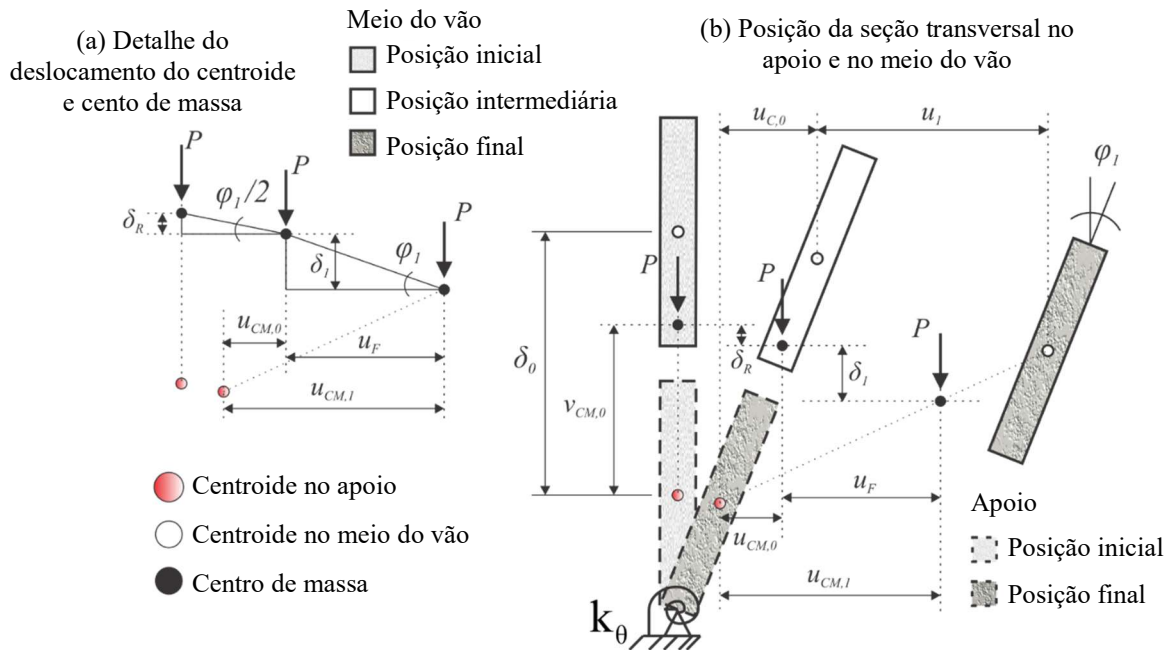
Fonte: Krah, Carrazedo e El Debs (2018)

$$\Pi_p = \int_0^l \frac{F u u''}{2} dx - \frac{F}{2} \int_0^l u'^2 dx \quad (41)$$

Com a presença da protensão no problema de instabilidade, a contraflecha desloca o centro de massa da viga para cima, tornando-o dependente desta variável adicional. Para a consideração desse efeito é utilizada uma função trigonométrica, sendo  $\delta_0$  o máximo valor no meio vão, previamente conhecido (Equação (42)). A Figura 29 apresenta o esquema dos deslocamentos e rotações da viga nessa situação.

$$\delta(x) = \delta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (42)$$

Figura 29 - Esquema do tombamento de uma viga com contraflecha de protensão



Fonte: Autor (2019)

A rotação de corpo rígido gera deslocamento vertical descendente  $\delta_R$  dado por

$$\delta_R = 2(y_b + v_{CM,0}) \sin^2\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \quad (43)$$

onde  $v_{CM,0}$  representa a posição do centro de gravidade da viga antes da rotação e pode ser determinado usando a Equação (44).

$$v_{CM,0} = \frac{\int_0^\ell \delta(x) dx}{\ell} \quad (44)$$

Considerando inicialmente a rotação de corpo rígido, a componente horizontal da  $v_{CM,0}$  (seção transversal com linhas tracejadas ilustrada na Figura 29) é expressa como:

$$u_{CM,0} = v_{CM,0} \sin(\varphi_1) \quad (45)$$

A função que representa a projeção horizontal da contraflecha de protensão após a rotação de corpo rígido é definida como  $u_{1,R0}(x)$  e é obtida por  $\delta(x)\sin(\varphi_1)$ . Após a flexão lateral, a posição deslocada do centro da massa da viga no tombamento é:

$$u_{CM,1} = \int_0^\ell \frac{[u_1(x) + u_{1,R0}(x)]}{\ell} dx \quad (46)$$

Subtraindo a Equação (45) da Equação (46) obtém-se a componente horizontal da redução na carga  $\delta_I$  devido a flexão lateral, chamado de  $u_F$  na Equação (47)

$$u_F = u_{CM,1} - u_{CM,0} \quad (47)$$

Desta forma,  $\delta_I$  pode ser calculado por:

$$\delta_I = u_F \tan(\varphi_1) \quad (48)$$

Assim, o trabalho total realizado pela carga aplicada pode ser determinado com a definição do deslocamento vertical total (Equação (49))

$$V = -P(\delta_R + \delta_I) = -q\ell(\delta_R + \delta_I) \quad (49)$$

As energias de deformação correspondentes às molas de rotação do aparelho de apoio e da flexão lateral da viga são a mesmas das situações anteriores. Ao minimizar a equação da energia funcional total obtém-se a equação de equilíbrio final (Equação (50)).

$$q\ell \left\{ 2 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \left(y_b + \frac{2\delta_0}{\pi}\right) + \frac{8q\ell^4}{\pi^6 EI_y} \left[ \tan(\varphi_1)^3 + \tan(\varphi_1) \right] \right\} = 2k_\theta \varphi_1 \quad (50)$$

A Equação (50) representa a relação não linear entre a carga aplicada  $q$  e a rotação da viga  $\varphi_1$  dependente da contraflecha de protensão  $\delta_0$ .

#### 4.1.5 Estudo de Caso

A Figura 30 apresenta o resumo das equações para cálculo da carga crítica de tombamento de vigas pré-moldadas com rotação de corpo rígido desenvolvidas.

A fim de avaliar a resposta do equacionamento apresentado dado pela carga aplicada e o ângulo de tombamento de corpo rígido, é desenvolvido a seguir um estudo de caso para a viga de seção transversal I padrão PCI BT-54, cujas características físicas e geométricas são:

- Momento de Inércia em relação ao eixo Y,  $I_y = 0,0155 \text{ m}^4$ ;
- Altura do centro de gravidade,  $y_b = 0,703 \text{ m}$ ;
- Comprimento da viga,  $l = 30,5 \text{ m}$ ;
- Módulo de elasticidade,  $E = 30820 \text{ MPa}$ ;
- Rigidez a rotação da almofada de apoio,  $k_\theta = 33,4 \text{ MN/m.rad}$ ;
- Excentricidade lateral inicial,  $\lambda_0 = L/1000$ ;
- Ângulo de rotação inicial,  $\varphi_0 = 0,5^\circ (0,008727 \text{ rad})$ ;
- Força de protensão  $F = 7818,8 \text{ kN}$ , resultando em contraflecha de 16,72 cm.

O valor da carga crítica para a viga admitida perfeitamente reta é igual a 358,38 kN/m. A Figura 31 apresenta os resultados obtidos segundo as equações não lineares em função do ângulo de tombamento de corpo rígido da viga. As curvas são determinadas atribuindo valores ao ângulo de giro da viga ( $\varphi_1$ ) e calculando o valor da carga ( $q$ ). Observa-se que com a consideração das imperfeições da viga, há uma diminuição no valor da carga crítica, ou seja, o valor máximo de carga para uma determinada curva. Como era de se esperar, quanto mais imperfeições são consideradas maior é o ângulo de giro de corpo rígido correspondente a carga crítica.

Figura 30 – Resumo das equações desenvolvidas

Equação (31)

Viga perfeitamente reta – Não linear

$$q\ell \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \frac{8q\ell^4}{\pi^6 EI_y} \left[ \tan(\varphi_1)^3 + \tan(\varphi_1) \right] \right\} = 2\varphi_1 k_\theta$$

Equação (32)

Viga perfeitamente reta – Linear

$$q_{crit} = \frac{-\pi^6 y_b EI_y \pm \sqrt{y_b^2 \pi^{12} (EI_y)^2 + 64 \pi^6 \ell^3 k_\theta EI_y}}{16 \ell^4}$$

Equação (36)

Viga com excentricidade inicial

$$q\ell \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \left[ \frac{8q\ell^4 \tan(\varphi_1)}{\pi^6 EI_y} + \frac{2\lambda_0}{\pi} \right] \left[ 1 + \tan^2(\varphi_1) \right] \right\} = 2\varphi_1 k_\theta$$

Equação (40)

Viga com excentricidade e rotação inicial

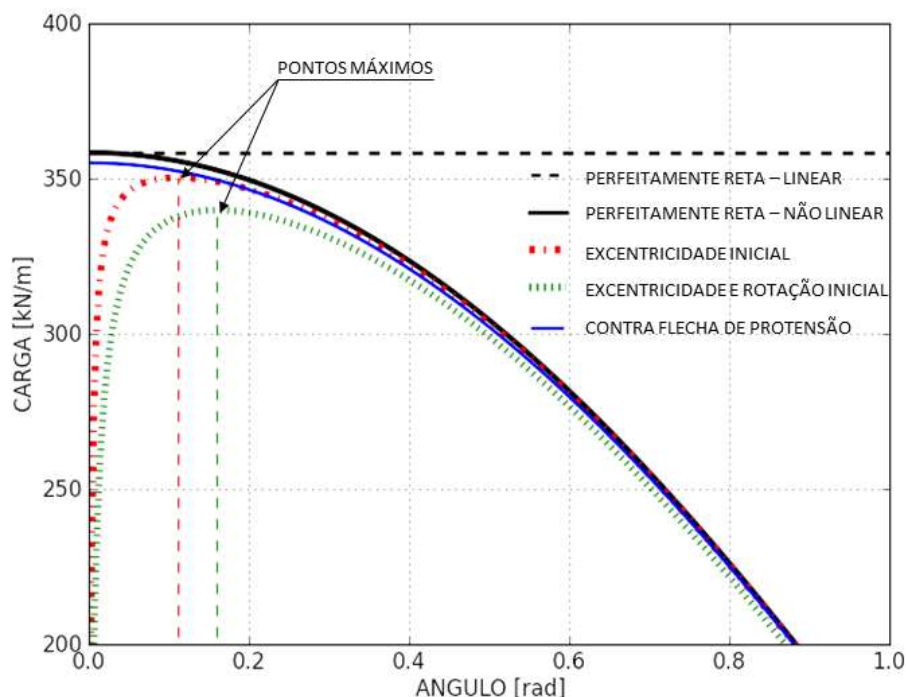
$$q\ell \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \left[ \frac{8q\ell^4 \tan(\varphi_0 + \varphi_1)}{\pi^6 EI_y} + \frac{2\lambda_0}{\pi} \right] \left[ 1 + \tan^2(\varphi_0 + \varphi_1) \right] \right\} = 2\varphi_1 k_\theta$$

Equação (50)

Viga com contra flecha de protensão

$$q\ell \left\{ 2 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \left( y_b + \frac{2\delta_0}{\pi} \right) + \frac{8q\ell^4}{\pi^6 EI_y} \left[ \tan(\varphi_1)^3 + \tan(\varphi_1) \right] \right\} = 2k_\theta \varphi_1$$

Fonte: Autor (2019)

Figura 31 – Carga  $\times$  Ângulo de tombamento de corpo rígido

Fonte: Autor (2019)

Vale ressaltar que apenas para equação linear para a viga perfeitamente reta foi feita a simplificação para ângulos pequenos, nas demais equações não foi feita essa simplificação. É possível observar, pela Figura 31, que para um ângulo de tombamento de até aproximadamente 0,05 radianos, a resposta linear e não linear para a viga perfeitamente reta são bastante próximas, porém para ângulos maiores as soluções se tornam discrepantes.

Para os dados considerados, a carga crítica da viga perfeitamente reta foi de 358,38 kN/m. Quando considerada a contraflecha devido a protensão, a carga máxima obtida é de 355,08 kN/m, o que corresponde a uma redução inferior a 1%.

Para equação não linear que considera o deslocamento lateral inicial da viga, a carga máxima é de 350,28 kN/m para um ângulo de rotação de 0,11 radianos. Então, para o valor de excentricidade inicial  $L/1000$ , valor de tolerância aceito pela ABNT NBR 9062:2017, a redução na carga de tombamento é pouco maior que 2% da carga da viga perfeitamente reta.

Por último, quando considera a excentricidade inicial de  $L/1000$  e uma rotação inicial de  $0,5^\circ$  (0,008727 rad), a carga máxima obtida é de 339,87 kN/m para o ângulo de rotação de



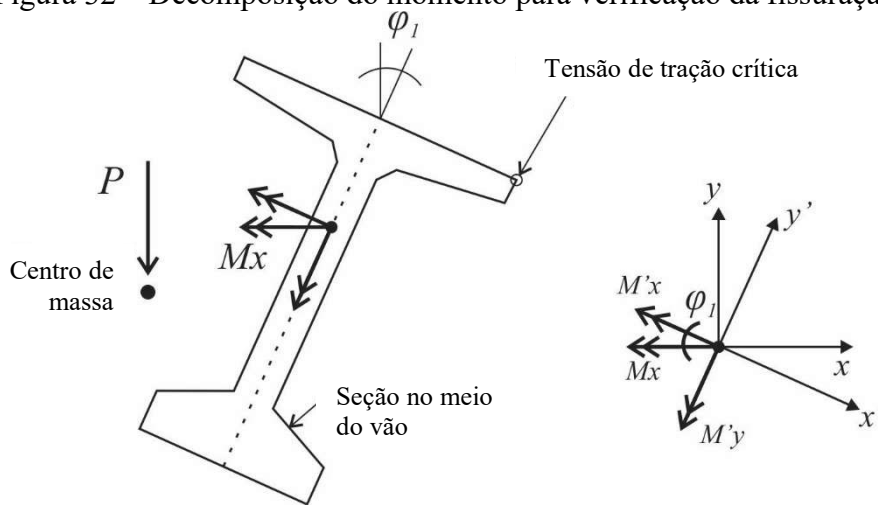
0,16 radianos. Em comparação ao resultado com apenas a excentricidade inicial, a rotação provoca uma redução na carga de aproximadamente 3%. E em relação a viga perfeitamente reta, as duas imperfeições provocam uma redução na carga superior a 5%.

## 4.2 Determinação do início da fissuração

De acordo com Mast (1989), a fissuração do concreto pode ser admitida como um estado limite na estabilidade lateral de vigas.

Embora entenda-se que a protensão não influencia no tombamento da viga, as tensões desenvolvidas devido à protensão devem ser contabilizadas para verificar possíveis fissurações. Assim, a tensão de tração crítica  $\sigma_{t,crit}$  é determinada na seção no meio do vão para cada ângulo de rotação  $\varphi_l$  ( Figura 32).

Figura 32 – Decomposição do momento para verificação da fissuração



Fonte: Autor (2019)

A flexibilidade dos apoios durante o tombamento permite desconsiderar os efeitos torcionais. A Equação (51) apresenta a expressão geral para determinar as tensões na seção transversal no meio do vão. As tensões de compressão são admitidas negativas e os momentos fletores são designados segundo a regra da mão-direita, sendo  $F$  a força de protensão,  $A$  a área de seção,  $e$  a excentricidade de protensão,  $M'_x$  e  $M'_y$  são os componentes do momento causados pela carga vertical distribuída,  $x'$  e  $y'$  são as coordenadas do ponto de

interesse no eixo girado,  $I'_x$  e  $I'_y$  são os momentos de inércia correspondente também ao eixo girado, e  $M_x$  é o momento devido ao peso próprio do feixe.

$$\sigma = -\frac{F}{A} + \frac{F e y'}{I'_x} - \frac{M'_x y'}{I'_x} + \frac{M'_y x'}{I'_y}$$

$$M'_x = M_x \cos(\varphi_l)$$

$$M'_y = M_x \sin(\varphi_l)$$
(51)

As equações não lineares de carga crítica determinada nas seções anteriores permite determinar o momento resultante  $M_x$  e seus componentes  $M'_x$  e  $M'_y$  atuando no meio do vão para cada valor de  $\varphi_l$  e carga correspondente  $q$ . Em seguida, as tensões podem ser calculadas segundo a Equação (51), e a carga crítica de fissuração  $q_{cr}$  pode ser obtida quando  $\sigma$  atinge a resistência à tração de concreto  $f_t$ . Essa, por sua vez, pode ser estimada de acordo com a ABNT NBR 6118:2014 como  $f_t = 0,3 f_{ck}^{2/3}$ , sendo  $f_{ck}$  a resistência característica a compressão do concreto.

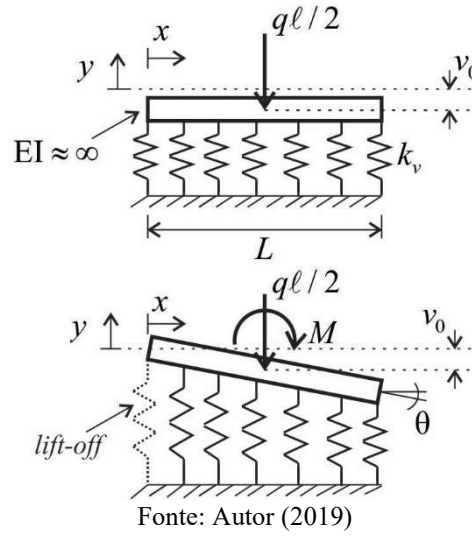
### 4.3 Cálculo da rotação crítica

Durante o tombamento da viga, há uma fase em que a superfície inferior da viga começa a perder o contato com a almofada de apoio, efeito este chamado de *lift-off*. A partir deste ponto, a relação momento versus rotação no contato entre a viga e o apoio torna-se não linear, e a rigidez rotacional diminui rapidamente (Consolazio e Hamilton 2012; Krahel et al. 2018).

Admite-se neste trabalho que o início do levantamento da viga em relação à almofada de apoio é um estado limite.

Quando a viga pré-moldada está apoiada sobre as almofadas de apoio, metade do peso próprio ( $q\ell/2$ ) comprime o elastômero uniformemente. À medida que a viga gira, o momento de tombamento  $M$  passa a comprimir mais uma parte da almofada, aliviando o lado oposto, como apresentado na Figura 33, podendo ocorrer o deslocamento entre a viga e almofada.

Figura 33 – Perda de contato entre a viga e o aparelho de apoio



O problema apresentado na Figura 33 pode ser resolvido considerando o sistema de viga-almofada como uma viga rígida em uma base elástica. O sistema é primeiramente comprimido devido à ação do peso próprio da viga e, posteriormente, gradualmente girado devido ao tombamento.

A condição limite adotada para consideração do efeito de *lift-off* ocorre quando a mola menos comprimida tem deslocamento nulo, ou seja, não apresenta mais força de compressão. Considerando que a redução inicial causada pelo peso próprio é um deslocamento do corpo rígido  $v_0$ , a aproximação para os deslocamentos do sistema pode ser descrita como uma equação linear, onde  $a_1$  e  $b_1$  são constantes a serem determinadas pela minimização do problema, sendo:

$$v(x) = a_1 x + b_1 \quad (52)$$

O método Rayleigh-Ritz é usado novamente para determinar  $a_1$ , bem como a relação entre o momento e a rotação da almofada. A solução permite obter a rotação para a inclinação crítica da almofada. A energia de deformação da base elástica é definida como:

$$U = \int_0^L \frac{k_v}{2} v(x)^2 dx \quad (53)$$

O trabalho realizado pelo momento aplicado e a carga vertical é dado por:

$$V = Mv'(x = L/2) + Pv(x = L/2) \quad (54)$$

A solução encontrada para  $a_I$  corresponde à rotação de corpo rígido da viga, devido à aproximação adotada para os deslocamentos generalizados, conforme a Equação (55)

$$\theta = \frac{12M}{k_v L^2} \quad (55)$$

Vale lembrar que o valor crítico de  $\theta$  é aquele para o qual a rotação é tal que a mola da extremidade tem deslocamento nulo, sem força atuante, por apresentar comportamento exclusivo de compressão.

Nesta situação, o momento aplicado é  $Pl/6$ . Assim, substituindo  $Pl/6$  para o momento na Equação (55), a rotação crítica pode ser determinada para o problema da estabilidade lateral das vigas. A rigidez rotacional pode ser determinada analiticamente pela relação  $M/\theta$ , sendo que a rigidez axial  $k_v$  pode ser determinada como proposto por Yazdani *et al.* (2000) na Equação (57), ou experimentalmente.

$$k_\theta = \frac{k_v L^2}{12} \quad (56)$$

$$k_v = \frac{E_{pad} A_{pad}}{H} \quad (57)$$

Onde  $E_{pad}$  é o módulo de compressão da almofada,  $H$  é a altura total do elastômero excluindo as chapas de aço, e  $A_{pad}$  é a área da almofada que é  $WL$ .  $W$  é a dimensão horizontal da almofada paralela ao eixo das vigas e  $L$  é a dimensão transversal.

O valor de  $E_{pad}$  pode ser determinado pela Equação (58), sendo  $G_{pad}$  o módulo de cisalhamento do elastômero e  $S$  o fator de forma global da almofada (Equação (59)).

$$E_{pad} = 6G_{pad} S^2 \quad (58)$$

$$S = \frac{n_i h_i S_i + n_e h_e S_e}{n_i h_i + n_e h_e}$$

$$S_i = \frac{LW}{2h_i(L+W)}; S_e = \frac{LW}{2h_e(L+W)} \quad (59)$$

Onde  $n_i$  e  $n_e$ ,  $h_i$  e  $h_e$ ,  $S_i$  e  $S_e$  são respectivamente o número de camadas internas e externas do neoprene, a altura interna e externa das camadas do neoprene e os fatores internos e externos da forma.

Para a almofada de apoio considerada por Hurff e Kahn (2012), de dimensões  $L = 610$  mm,  $W = 360$  mm e  $H = 73$  mm, de 3 ( $n_i = 3$ ) camadas internas, sendo a espessura da camada interna  $h_i = 15$  mm e da camada externa  $h_e = 7,5$  mm ( $n_e = 2$ ), módulo de cisalhamento do elastômero de 0,67 MPa, aplicando as Equações (55) a (59), a rotação crítica é de 0,0004939 rad.

Para comparação, a rigidez rotacional determinada de acordo com Yazdani *et al.* (2000) é utilizado

$$k_\theta = \frac{E_{pad} I_{pad}}{H} \quad (60)$$

Onde  $I_{pad}$  é o do momento de inércia da face da almofada em contato com a viga. A rigidez rotacional calculada com esta metodologia resulta nos mesmos valores das proposições analíticas de Yazdani *et al.* (2000) que é de 33366 kNm/rad. A metodologia proposta apresenta a vantagem de calcular a rotação crítica que é valiosa para a análise de instabilidade de tombamento.

#### 4.3.1 Verificação do efeito de *lift-off*

Para verificar se a viga está sujeita ou não a perda de contato com o aparelho de apoio (efeito de *lift-off*) é sugerido o seguinte procedimento:

(1) Cálculo da rotação crítica para o início do *lift off* (Equação (55)):

$$\theta = \frac{12M}{k_v L^2}$$

(2) Essa rotação é assumida como a rotação da viga:  $\theta = \varphi_l$

(3) Com  $\varphi_l$  na equação da carga crítica para viga com deslocamento inicial, determina-se a carga necessária para o *lift-off*, considerando a não linearidade geométrica;

$$q\ell \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi_l}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_l}{2}\right) + \left[ \frac{8q\ell^4 \tan(\varphi_l)}{\pi^6 EI_y} + \frac{2\lambda_0}{\pi} \right] \left[ 1 + \tan^2(\varphi_l) \right] \right\} = 2\varphi_l k_\theta$$

(4) Compara-se esta carga com a carga do peso próprio:  $q_{lift-off} > q_{pp}$

Se essa equação for verdadeira, o aparelho de apoio adotado é adequado para suportar a viga analisada. Caso contrário, outro aparelho deve ser considerado.

No caso de projeto, pode-se inserir um coeficiente de majoração ao peso próprio e de minoração à mola e a rigidez a flexão lateral, a fim de criar um fator de segurança mais conservador.

Para a viga do estudo de caso apresentado na Seção 4.1.5 deste trabalho, considerando 100 mil valores aleatórios para o Módulo de Elasticidade e para a Excentricidade Inicial, em função de uma distribuição normal com coeficiente de variação de 0,15 e 0,61, respectivamente, obtém-se os resultados que são discutidos a seguir.

O ângulo da perda de contato é de  $4,94 \cdot 10^{-4}$  radianos, com peso próprio de 10,64 kN/m e rigidez a rotação no apoio de 33,4 MN/rad.m. Para a variação da excentricidade lateral inicial (L/1000, L/500, L/250 e L/125), considerada como valor médio para definição dos valores aleatórios, tem-se as probabilidades de falha indicadas na Tabela 4. Observa-se que o fenômeno de *lift-off* pode ocorrer com frequência razoável, principalmente para situações com excentricidade inicial elevada (L/250 e L/125).

Tabela 4 – Resultados do estudo de caso para verificação do *lift-off*

Excentricidade	Quantidade de simulações em que $q_{lift-off} < q_{pp}$ (Casos com <i>lift-off</i> )	Probabilidade de falha
L/1000	0	0,00%
L/500	444	0,44%
L/250	30746	30,75%
L/125	71693	71,69%

Fonte: Autor (2019)

# CAPÍTULO 5

## ANÁLISE DE RESULTADOS

### 5.1 Considerações Iniciais

São comparados, neste capítulo, os valores de carga crítica obtidos neste trabalho com os resultados analíticos segundo Mast (1993), Burgoyne e Stratford (2001), Lee (2017) e Krah, Carrazedo e El Debs (2018), conforme equações apresentadas na Tabela 5.

Os resultados numéricos obtidos por Lee (2017) são comparados com o modelo numérico desenvolvido neste trabalho no programa computacional ANSYS plataforma Workbench 18.0. Finalmente, são analisadas as respostas numéricas e analíticas, observando as limitações de cada formulação.

Tabela 5 – Equações da literatura técnica para estimativa da carga crítica de instabilidade lateral

Mast (1993)	$w l (\bar{z}_0 \theta + e_i + y \theta) = K_\theta (\theta - \alpha)$	Equação (1)
Burgoyne e Stratford (2001)	$(wL)_{cr}^2 \frac{L^3}{120 E I_y} + (wL)_{cr} y - 2 K_\theta = 0$	Equação (7)
Lee (2017)	$(w_{cr}^0 L) \left[ y + \frac{w_{cr}^0 L^4}{120 E I_y} + y \left( 2,4 \exp^{-0,1 \frac{h}{d_w}} \right) \right] = 2 K_\theta$	Equação (14)
	$C_r = \exp \left( -150 \frac{\delta_0}{L} \right) \rightarrow w_{cr} = w_{cr}^0 \cdot C_r$	Equação (15)
Krah, Carrazedo e El Debs (2018)	$q_{cr} = \frac{24 \pm \sqrt{185 E I_y K_\theta L^3 + 3600 y_b^2 (E I_y)^2 - 60 y_b E I_y}}{37 L^4}$	Equação (17)

Fonte: Autor (2019)

Os valores das cargas críticas são analisados para soluções lineares e não lineares, sendo que, para essas últimas é utilizada a formulação de Southwell (1932) (Equação (18)), para  $n$  igual a 1 e  $n$  igual a 2, em conjunto com as equações apresentadas na Tabela 5.

Como exemplo, é utilizada a viga analisada numericamente por Lee (2017), de seção transversal I padrão PCI BT-63, cujas características físicas e geométricas estão condensadas na Tabela 6.

Tabela 6 – Propriedades da viga PCI BT-63 analisada

Momento de Inércia em relação ao eixo X	0,1634 m <sup>4</sup>
Momento de Inércia em relação ao eixo Y	0,0156 m <sup>4</sup>
Altura da viga	1,600 m
Altura do centro de gravidade	0,817 m
Largura da mesa superior	1,067 m
Área da seção transversal	0,460618 m <sup>2</sup>
Comprimento da viga	30,0 m
Módulo de elasticidade	31000 MPa

Fonte: Autor (2019)

A almofada de apoio considerada nas análises a seguir tem as dimensões de  $50 \times 25 \times 6$  cm<sup>3</sup>, sendo composta por 5 camadas de elastômero divididas por 4 chapas de aço, as 3 camadas internas possuem 6 mm de altura cada, enquanto as duas camadas externas possuem 12 mm de altura cada, e módulo de elasticidade de cisalhamento de 700 kPa. A rigidez a rotação dada pela Equação (56) é de 17,9 MNm/rad.

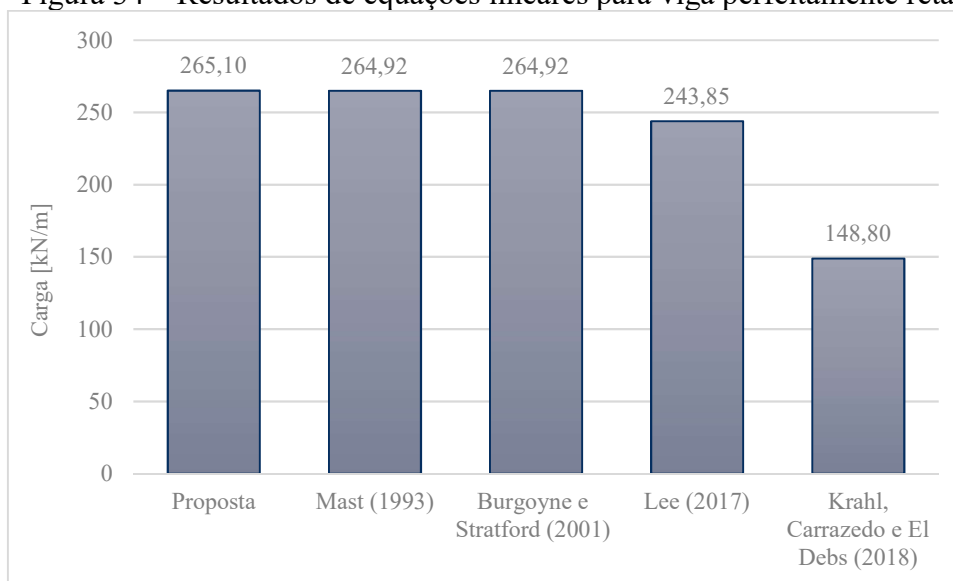
## 5.2 Resultados analíticos

### 5.2.1 Análise linear

Considerando a equação linear para a viga perfeitamente reta proposta (Equação (32)) e as equações da Tabela 5, obtém-se os resultados apresentados na Figura 34.



Figura 34 – Resultados de equações lineares para viga perfeitamente reta



Fonte: Autor (2019)

Observa-se que o menor valor obtido é de 148,80 kN/m (Krah, Carrazedo e El Debs (2018)) e o maior valor é 265,10 kN/m obtido pela Equação (32) proposta nesse trabalho.

Como esperado, as equações de Mast (1993) Burgoyne e Stratford (2001) resultaram em um mesmo valor, uma vez que foi feita uma análise linear que não considera excentricidade inicial nem superelevação do apoio, e ambos são baseados na metodologia de equilíbrio de momentos. Vale ressaltar a grande proximidade entre os valores obtidos pela equação proposta e a equação do Burgoyne e Stratford (2001). A formulação atual linearizada e a proposta de Burgoyne e Stratford (2001) têm as mesmas hipóteses cinemáticas, giro de corpo rígido combinado com flexão lateral. As metodologias para resolver o problema são diferentes, a primeira pela energia e a segunda pelo equilíbrio de forças. No entanto, as soluções devem ser muito próximas de acordo com Timoshenko e Gere (1984), sendo a diferença devido as simplificações intrínsecas no método.

Quanto às equações de Burgoyne e Stratford (2001) e Lee (2017), a presença do fator que considera o efeito de torção admitido por Lee (2017), diminui a carga crítica em aproximadamente 16%. Caso este termo seja desconsiderado  $y \left( 2,4 \exp^{-0,1 \frac{h}{d_w}} \right)$ , o resultado obtido é o mesmo da equação do Burgoyne e Stratford (2001).

Por fim, tanto a equação proposta neste trabalho quanto a equação de Krah1, Carrazedo e El Debs (2018) tratam de uma solução analítica para o problema por meio do método de Rayleigh-Ritz. Porém entre esses dois trabalhos, o trabalho das forças externas foi calculado de maneiras distintas. Krah1, Carrazedo e El Debs (2018) consideraram o trabalho realizado pelas forças verticais associado ao giro que estas causam relativo ao eixo de giro nos apoios. Portanto, o trabalho realizado seria o momento causado pela excentricidade da força multiplicado pelo giro de corpo rígido. Já o presente modelo, equação (32), considera que o trabalho realizado seja a força vertical multiplicada pelo deslocamento vertical correspondente, resultante de uma combinação de giro de corpo rígido e flexão lateral. As duas metodologias não resultam na mesma solução.

### 5.2.2 Análise não linear

A equação não-linear proposta é comparada às soluções analíticas apresentadas na Tabela 5, com uma aproximação simplificada para o problema não-linear. Para isso é aplicada a Equação (18) de Southwell (1932) em cada uma das equações da Tabela 5, a fim de obter o deslocamento lateral para cada valor de carga aplicada.

$$P_{lim} = P_{cr} \sqrt[n]{1 - \frac{e_i}{e_{lim}}} \quad \text{Equação (18)}$$

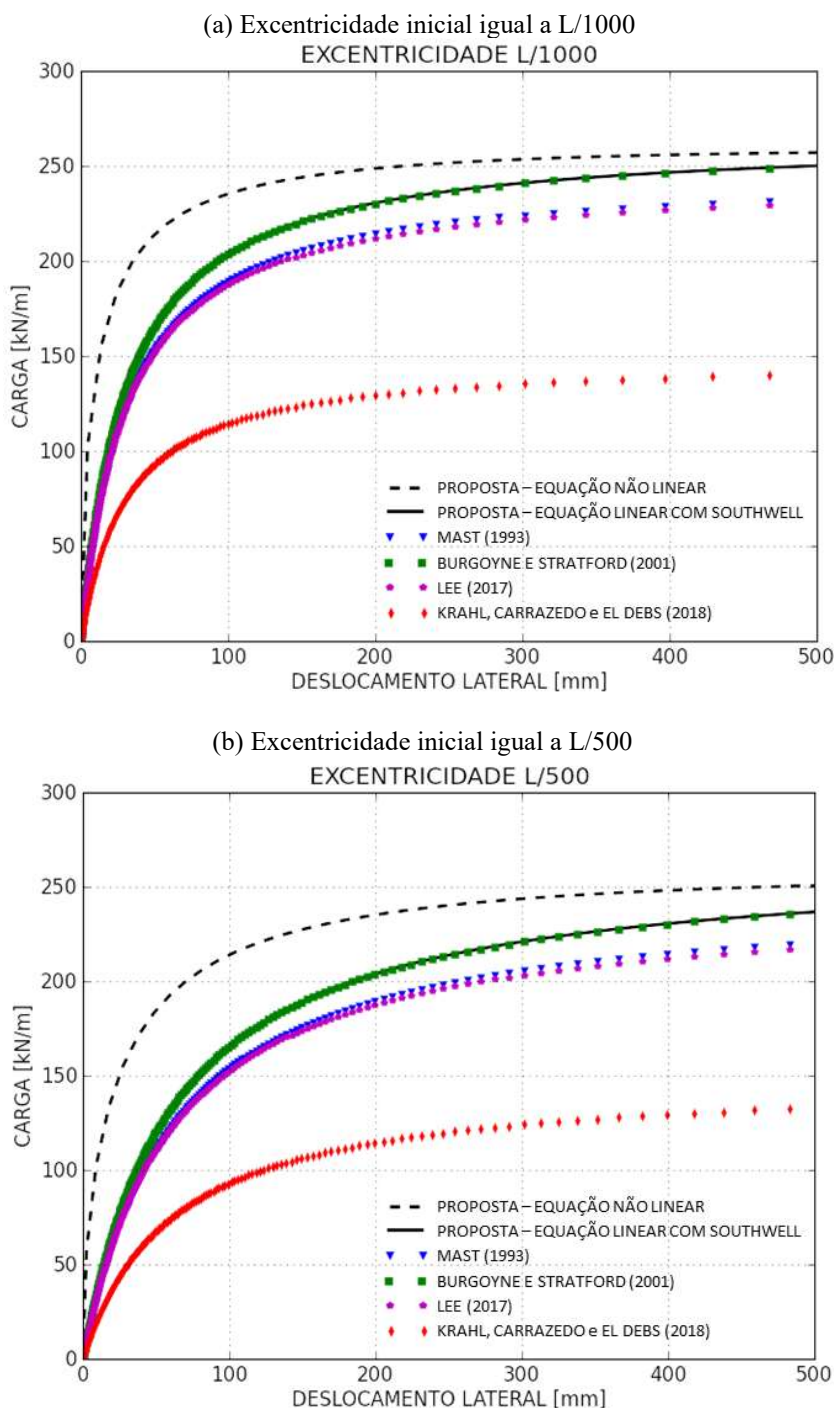
Nessa aplicação  $P_{cr}$  corresponde a carga crítica das equações lineares,  $e_i$  é a excentricidade inicial,  $P_{lim}$  é a carga aplicada e  $e_{lim}$  o deslocamento lateral ocorrido. A Equação (18) é analisada para dois valores de  $n$ , ou seja, igual a 1 e igual a 2. Os resultados são comparados com a resposta não linear dada pela Equação (36) proposta para a viga com excentricidade inicial.

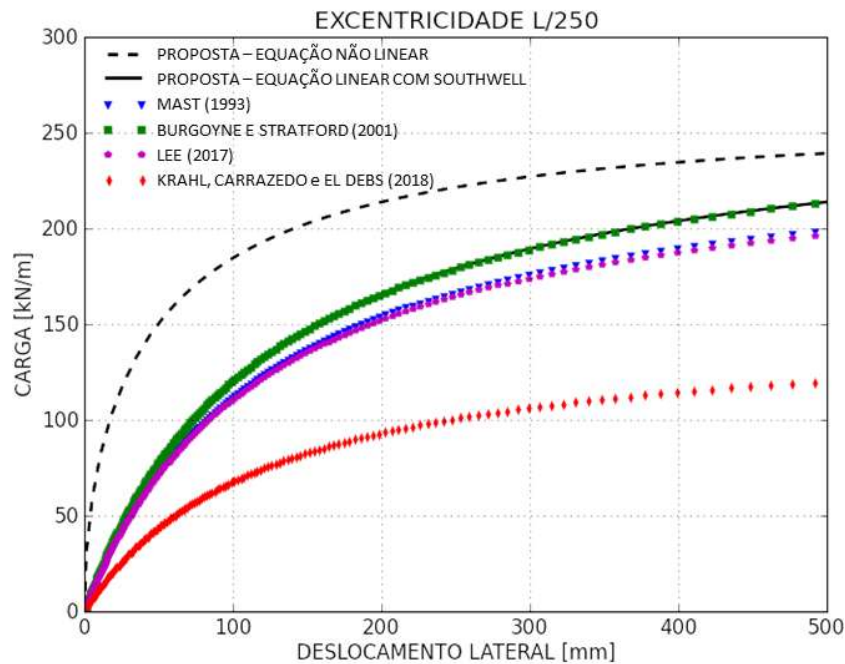
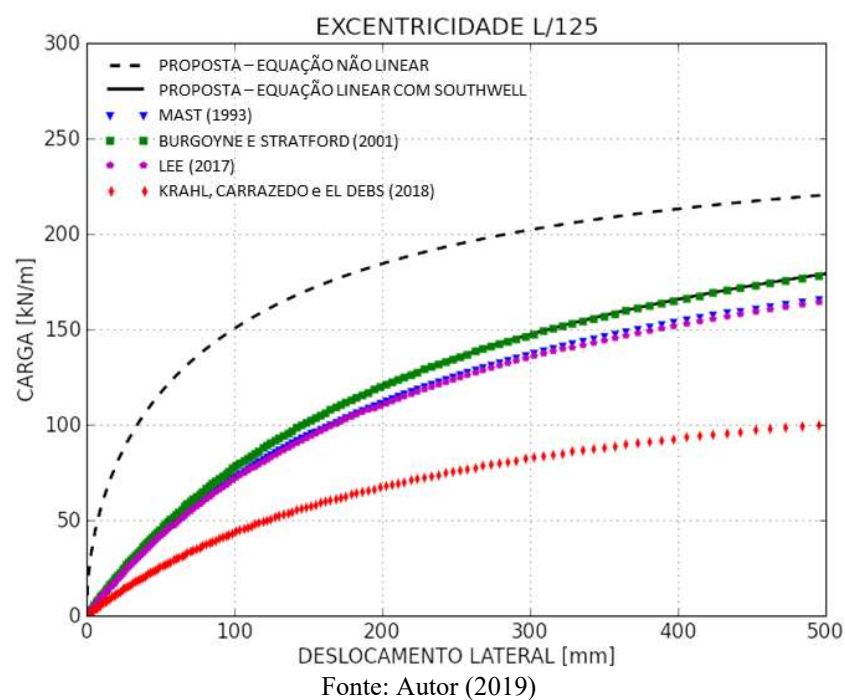
Na utilização da Equação (36), o acréscimo de deslocamento lateral foi calculado pela Equação (61). Esta equação é a solução para os deslocamentos do problema não-linear, obtida pela resolução final da Equação (27), considerando  $x$  igual a  $L/2$ .

$$u(x) = \frac{4 q L^4 \tan \varphi}{E I_y \pi^5} \sin \frac{\pi}{2} \quad (61)$$

A Figura 35 (a-d) mostra as curvas dadas pelas soluções analíticas não lineares utilizando Equação (18) para  $n$  igual a 1, e excentricidade de  $L/1000$ ,  $L/500$ ,  $L/250$  e  $L/125$ , respectivamente. O mesmo procedimento é feito na Figura 36 (a-d), porém, com  $n$  igual a 2. A curva tracejada contém a resposta não linear da Equação (36).

Figura 35 – Soluções analíticas não lineares utilizando a Equação (18) com  $n$  igual a 1



(c) Excentricidade inicial igual a  $L/250$ (d) Excentricidade inicial igual a  $L/125$ 

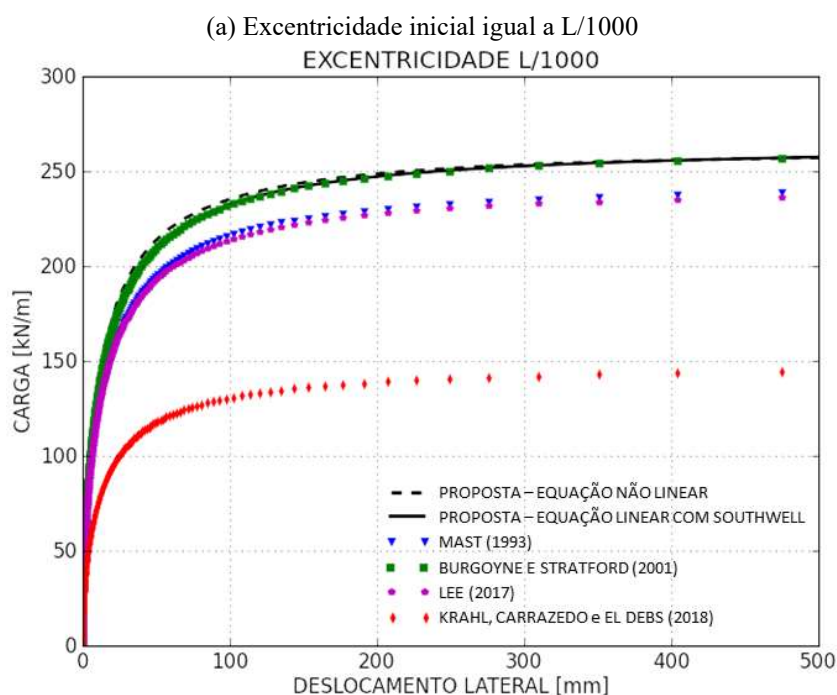
A proposta não linear difere das propostas lineares com a aplicação da equação do Southwell (1932) (Equação (18)) para  $n$  igual a 1, principalmente no início da curva. Para uma pequena excentricidade inicial, as curvas entre a proposta não linear e a proposta linear com Southwell (1932) tendem a ficar bem próximas. Quanto maior a excentricidade inicial,

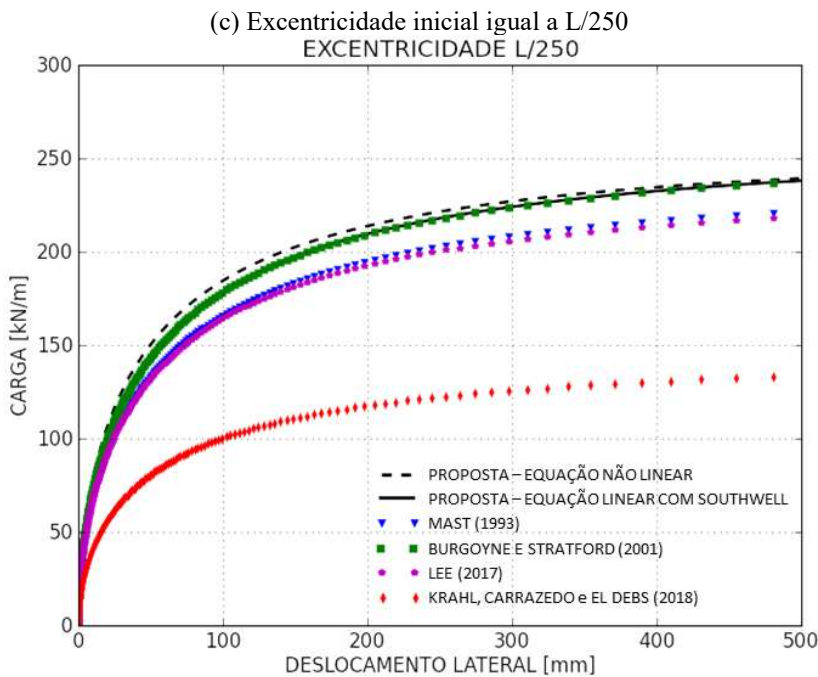
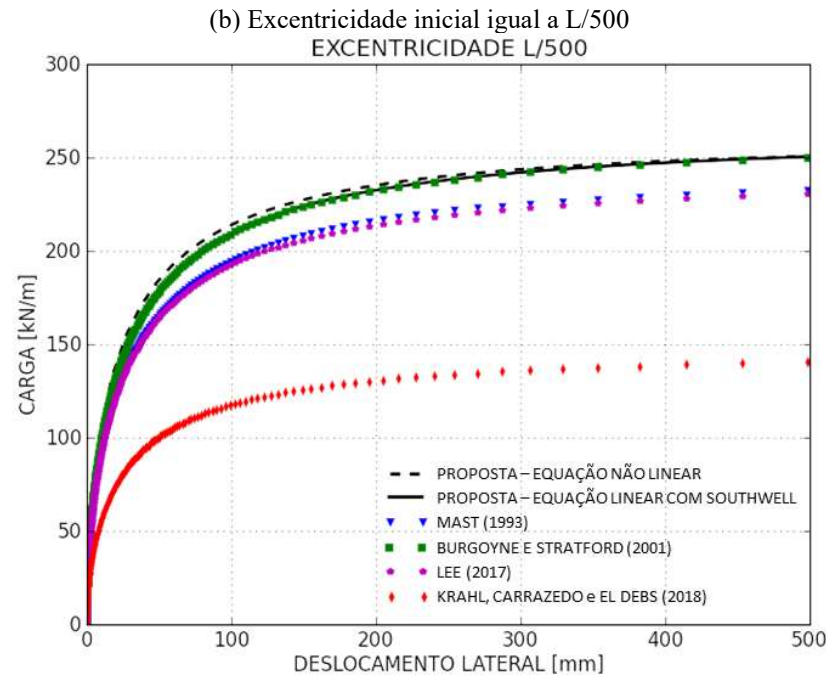
maior a diferença entre as curvas. Pela equação de Southwell (1932) com  $n$  igual a 1 a resposta do deslocamento lateral é mais sensível a aplicação de força. Na solução não linear proposta essa resposta é mais lenta, de forma que grandes deslocamentos acontecem quando a carga aplicada é mais próxima da carga crítica. Observa-se também que devido aos resultados da equação linear proposta e da equação do Burgoyne e Stratford (2001) serem bastante próximos, essas curvas ficaram praticamente coincidentes.

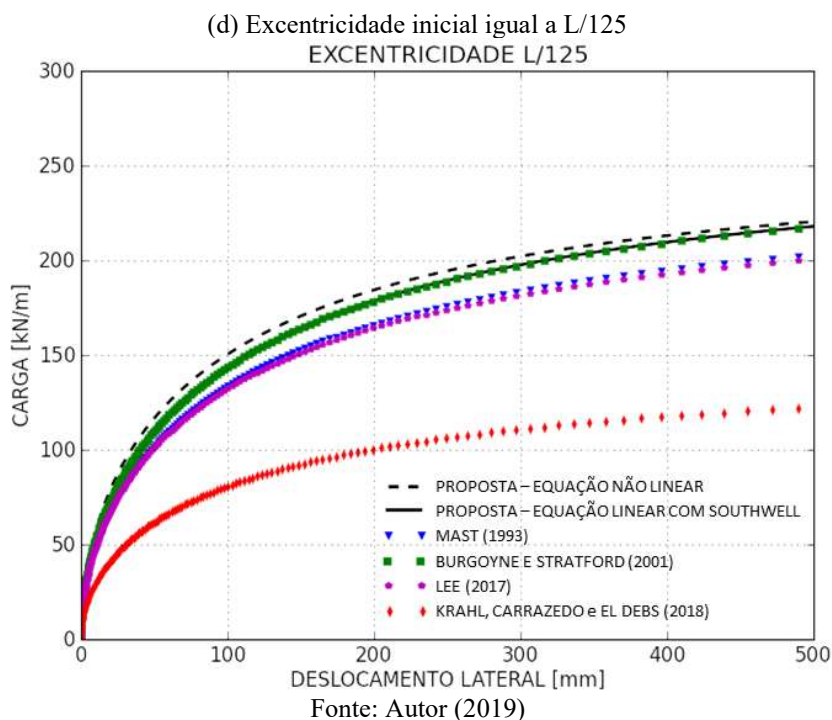
Entretanto, com a consideração da excentricidade inicial, a equação de Mast (1993) difere da equação do Burgoyne e Stratford (2001), apresentando um valor ligeiramente inferior. É interessante observar que com a aplicação da equação de Southwell (1932) no resultado de Mast (1993) o gráfico deste ficou mais próximo aos valores da equação do Lee (2017) do que do Burgoyne e Stratford (2001).

Como a equação linear proposta tem a mesma base teórica que a equação não linear, esperasse que ao utilizar a equação linear e uma aproximação para o problema não linear (equação de Southwell (1932)) o resultado seria próximo a solução analítica não linear. Devido a grande diferença encontrada, entende-se que a equação de Southwell (1932)) para  $n = 1$  não representa adequadamente o problema não linear.

Figura 36 – Soluções analíticas não lineares utilizando a Equação (18) com  $n$  igual a 2



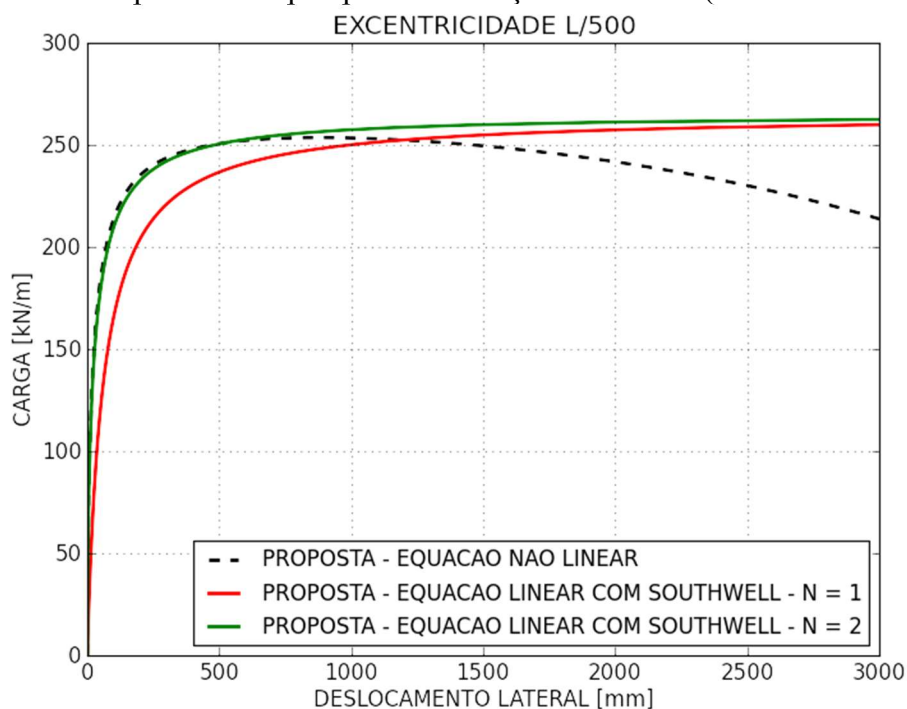




Quando utilizada a Equação (18) com  $n$  igual a 2, na equação da proposta linear o resultado obtido foi bastante próximo ao resultado a equação não linear. Observa-se que em todas as situações analisadas a resposta dos deslocamentos laterais da viga em função da carga aplicada foram muito similares. Portanto, a equação simplificada de Southwell representa melhor o comportamento não linear de vigas sobre aparelhos de apoio quando  $n=2$ . Nota-se uma variação nos valores de carga aplicada de acordo com as equações utilizadas, o que é esperado, pois essa variação se deve aos valores de carga máxima obtido em cada equação linear.

Apesar dos resultados próximos entre a equação linear com a aplicação da Equação (18) para  $n$  igual a 2 e o resultado não linear, a equação não linear proposta possui a vantagem de apresentar resultados pós pico, o que não é possível de verificar com a equação de Southwell. Esse comportamento pode ser observado na Figura 37.



Figura 37 – Comportamento pós-pico das soluções analíticas (excentricidade  $L/500$ )

Fonte: Autor (2019)

## 5.3 Resultados numéricos

### 5.3.1 Modelagem numérica no ANSYS

O modelo numérico desenvolvido neste trabalho no programa ANSYS é comparado neste trabalho com o modelo numérico apresentado por Lee (2017) para a viga PCI BT-63 de 30 m de comprimento, cujas informações estão apresentadas na Tabela 6, para as excentricidades de  $L/1000$ ,  $L/500$ ,  $L/250$  e  $L/125$ .

Nos gráficos da Figura 38, as linhas contínuas representam os resultados obtidos por Lee (2017) e as linhas com marcadores representam os resultados do modelo do Ansys desenvolvido neste trabalho. Os resultados apresentados estão em função da carga aplicada dividida pelo peso próprio da viga.

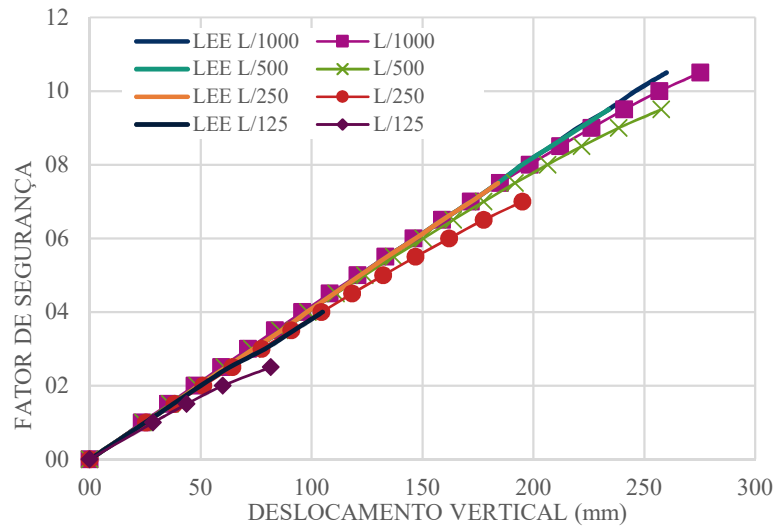
A Figura 38 (a) ilustra a relação entre a carga aplicada dividida peso próprio da viga e o deslocamento vertical no meio do vão da viga, a Figura 38 (b) os resultados de acréscimo de



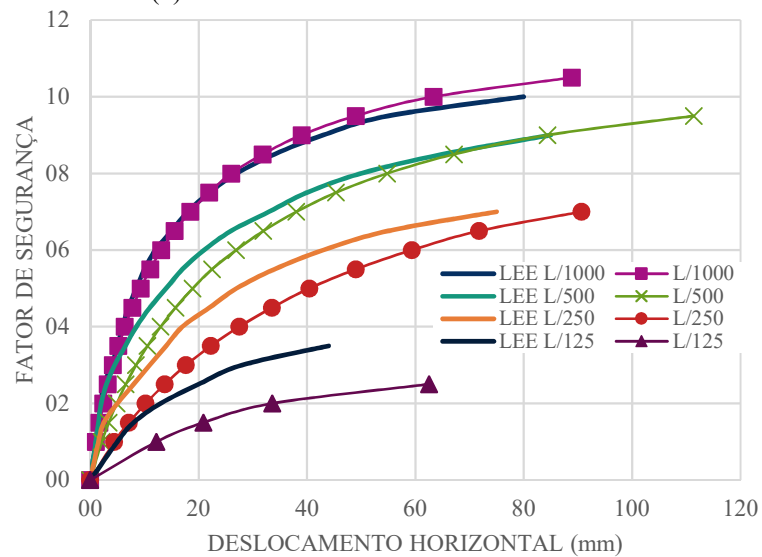
deslocamento lateral no meio do vão, a Figura 38 (c) os resultados de rotação da viga nos apoios e a Figura 38 (d) os resultados de rotação da viga no meio do vão.

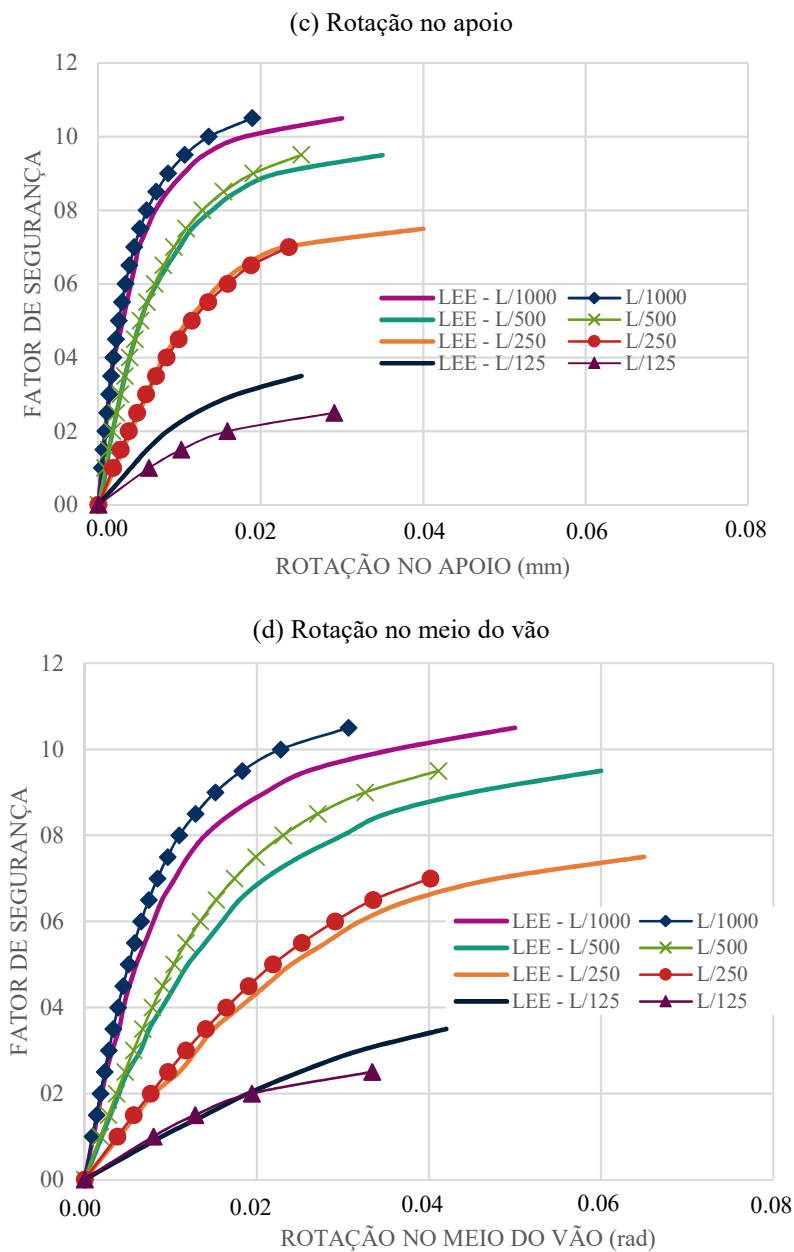
Figura 38 – Resposta numérica da viga PCI BT-63

(a) Deslocamento vertical no meio do vão



(b) Deslocamento horizontal no meio do vão





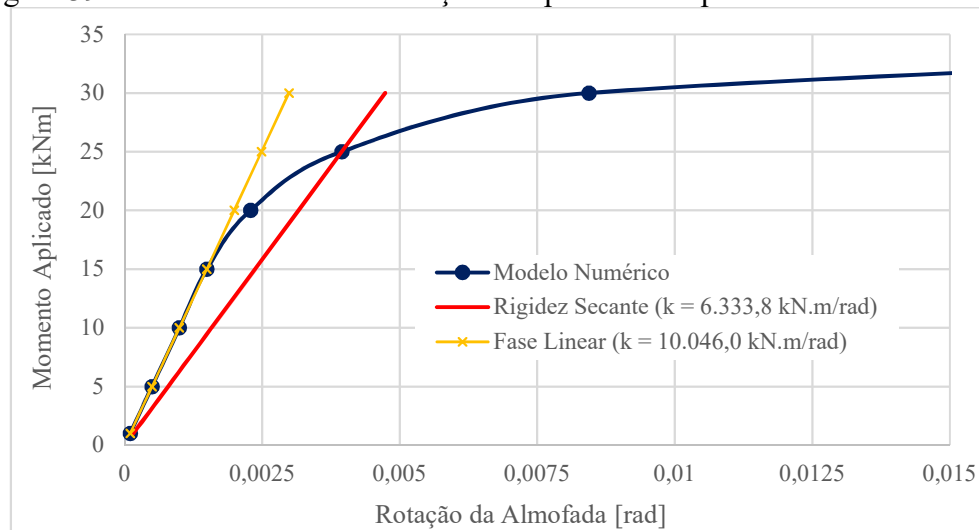
É possível observar que os resultados encontrados são bastante próximos aos de Lee (2017), principalmente para os casos de pequena excentricidade.

### 5.3.2 Comparação entre resultados da solução analítica com o modelo numérico

Um fator de grande influência nos resultados analíticos é a rigidez a rotação do apoio. Assim, a fim de quantificar este fator, é apresentado inicialmente um estudo desenvolvido no programa computacional Ansys para verificar o comportamento da almofada de apoio.

Utilizando a proposta de comportamento estrutural da almofada apresentada no Capítulo 3, seção 3.2, é aplicada uma força vertical de compressão correspondente a metade do peso próprio da viga. Em seguida, considera-se a atuação de um momento fletor variável, a fim de observar a resposta à rotação do aparelho de apoio (Figura 39). Nota-se um comportamento linear até um momento aproximado de 15 kNm, o que representa uma rigidez a rotação inicial em torno de 10.046 kNm/rad.

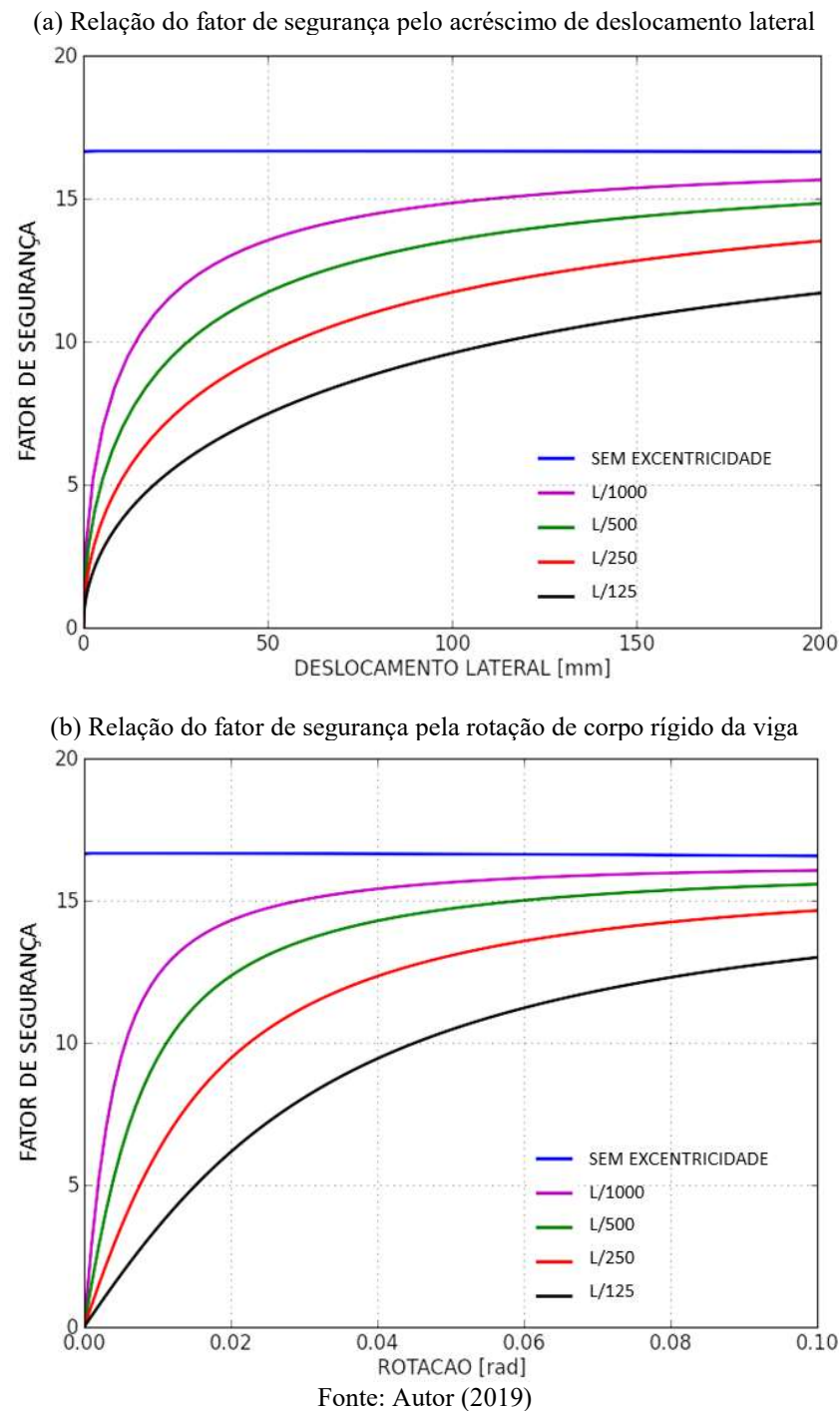
Figura 39 – Curva Momento  $\times$  Rotação do aparelho de apoio em análise numérica



Fonte: Autor (2019)

Considerando a fase linear, a relação do fator de segurança por acréscimo de deslocamento lateral obtido no modelo analítico utilizando as Equações (36) e (61) é apresentado na Figura 40 (a) e a relação do fator de segurança com a rotação de corpo rígido da viga é mostrado na Figura 40 (b).

Figura 40 – Relação do fator de segurança com o deslocamento lateral e rotação de corpo rígido obtido pelas soluções analíticas considerando a fase linear

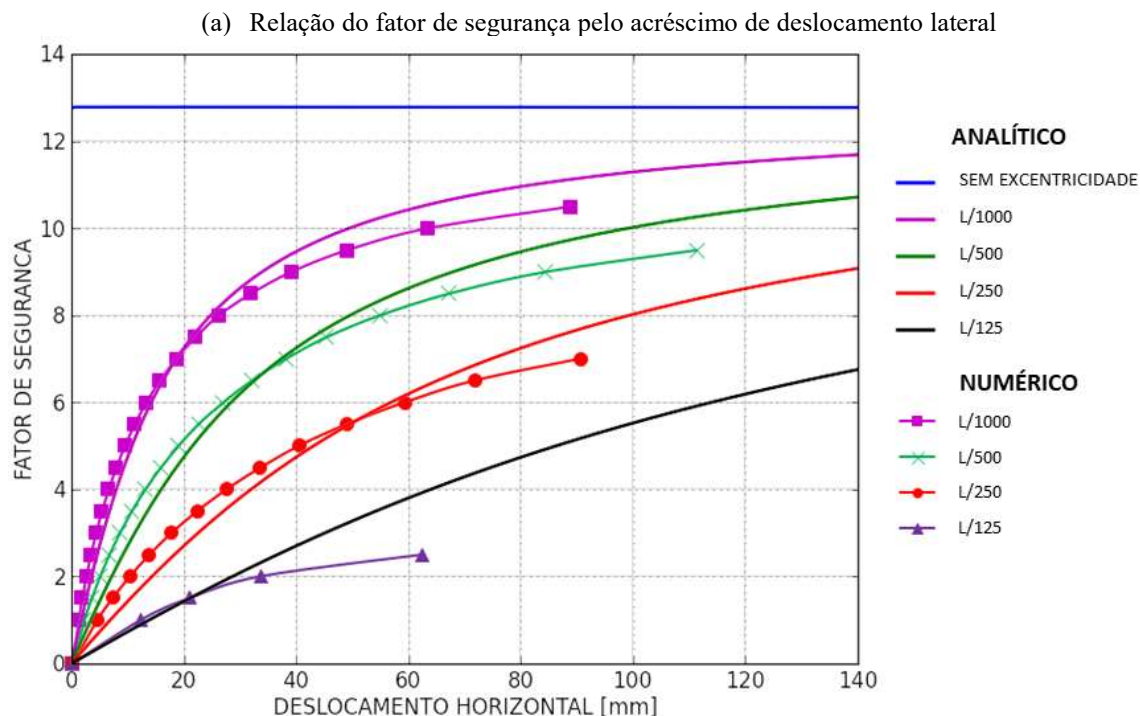


No modelo do Ansys o fator de segurança máximo obtido, considerando os quatro valores de excentricidade inicial, foi inferior a 12,0. Na solução analítica os valores obtidos para o fator de segurança máximo foram superiores ao do modelo desenvolvido no Ansys. Além disso a resposta de deslocamento lateral é inferior para os valores de carga iniciais, ou seja,

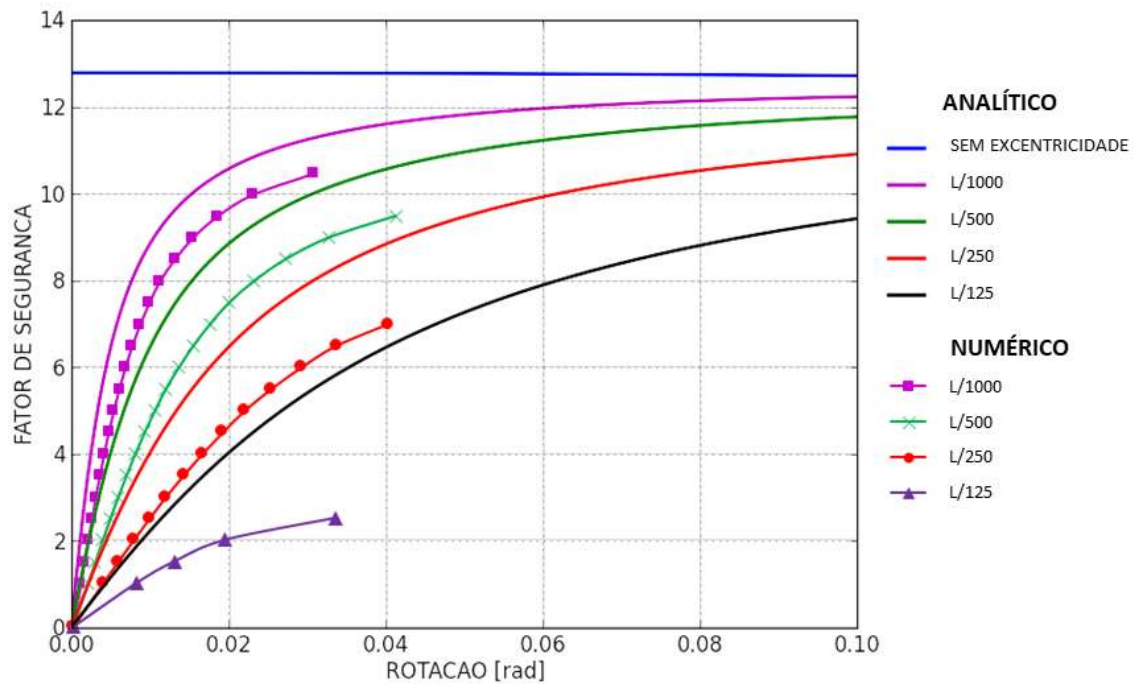
para uma mesma carga o deslocamento lateral da análise analítica é menor que obtido no programa Ansys.

Uma solução proposta por Krahll, Carrazedo e El Debs (2018) é a utilização da rigidez secante obtida no modelo numérico nos estudos analíticos. Considerando a rigidez secante apresentada na Figura 39, que corresponde a rigidez a rotação lateral do aparelho de apoio quando submetido a um momento de tombamento de 25 kNm, o valor obtido para a rigidez a rotação do aparelho de apoio é de 6.333,8 kNm/rad. Foram simulados outros dois valores de rigidez secante: 8.740,6 kNm/rad, correspondente ao momento de 20 kNm e 3.555,5 kN/m, momento de 30 kNm, o valor de 6.333,8 kNm/rad foi escolhido por apresentar maior aproximação dos resultados analíticos. A Figura 41 apresenta a comparação entre os resultados analíticos de acréscimo de deslocamento lateral e rotação de corpo rígido considerando a rigidez a rotação secante, com os resultados utilizando Ansys.

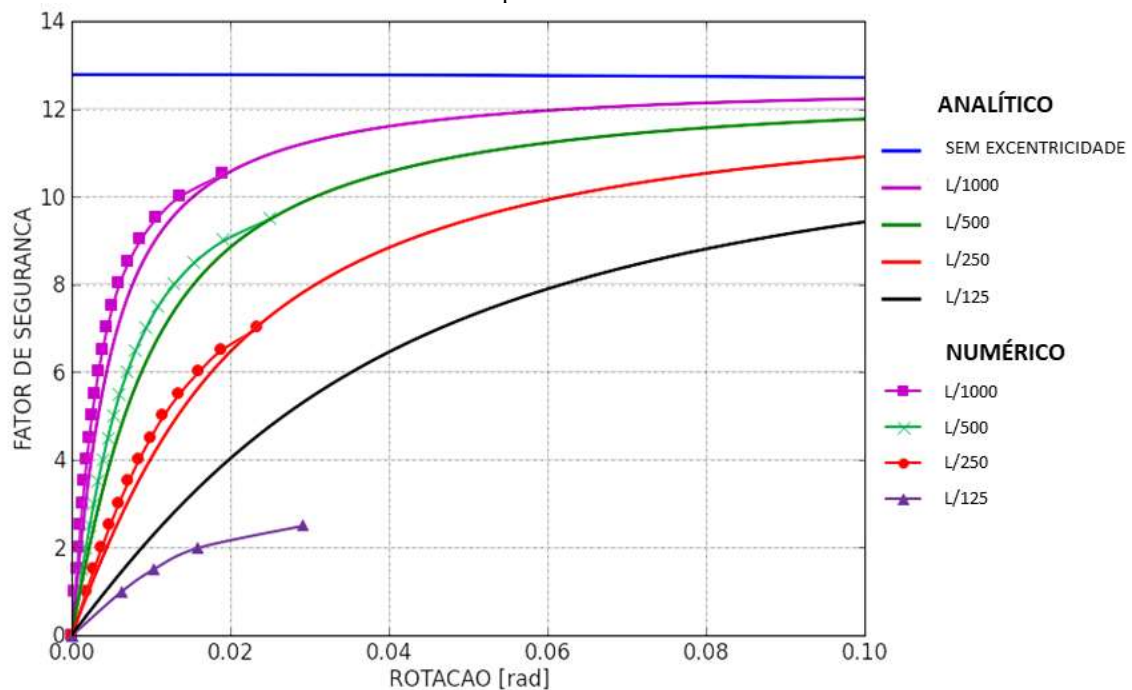
Figura 41 – Comparação entre os resultados analíticos considerando a rigidez secante e os resultados numéricos



(b) Relação do fator de segurança pela rotação de corpo rígido da viga da análise analítica e a rotação no meio do vão na análise numérica



(c) Relação do fator de segurança pela rotação de corpo rígido da viga da análise analítica e a rotação no apoio na análise numérica



Fonte: Autor (2019)

Utilizando o valor de rigidez a rotação secante em vez da rigidez a rotação no estágio linear, os resultados analíticos obtidos foram mais próximos dos resultados obtidos no Ansys. A rotação de corpo rígido do resultado analítico é menor que a rotação no meio do vão do

resultado obtido no Ansys, e pouco maior que a rotação no apoio (Ansys). Isso pode ser causado pela torção lateral da viga, que é desconsiderada no modelo analítico, de forma que na solução analítica a rotação da viga é considerada de maneira simplificada pela rotação de corpo rígido. Quando a excentricidade inicial possui valor elevado ( $L/125$ ), o modelo analítico apresenta maiores discrepâncias comparando os resultados obtidos no Ansys do que nos casos de pequenas excentricidades iniciais.

Uma causa muito provável para as diferenças entre os resultados obtidos para o deslocamento é o efeito de *lift-off* na almofada, causando um comportamento não linear do aparelho de apoio. O *lift-off* é considerado numericamente pelo modelo de elemento rígido sobre molas, desconsiderando a contribuição das molas tracionadas.

A partir desta análise fica evidente a importância da correta definição da rigidez a rotação do apoio. Na Seção 5.2 é utilizada a rigidez a rotação calculada pela Equação (56), resultando em 17,9 MNm/rad. Porém, o valor de rigidez utilizado para aproximação com o modelo numérico é de 6,3 MNm/rad, o que corresponde a 35,3% do valor calculado.

---

# CAPÍTULO 6

## ANÁLISE PARAMÉTRICA DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS NÃO-LINEARES

---

### 6.1 Parâmetros da análise

Neste capítulo é apresentada uma análise paramétrica utilizando-se do algoritmo desenvolvido e apresentado no Capítulo 3, com base nas soluções analíticas desenvolvidas. Os parâmetros analisados foram apresentados na Tabela 3. Serão analisados a influência da excentricidade inicial, rotação inicial, resistência do concreto, força de protensão, dimensões do aparelho de apoio e seção transversal da viga.

Para cada parâmetro analisado é feita uma amostragem com 100 mil simulações, onde são variados aleatoriamente os valores de excentricidade inicial, módulo de elasticidade do concreto, rigidez a rotação do apoio e a força de protensão.

A seguir são apresentados os resultados dessas simulações paramétricas. Inicialmente são apresentados os resultados para a viga BT-54, sendo estes os dados utilizados como base para o desenvolvimento deste estudo. Os resultados das 100 mil simulações são apresentados em gráficos de nuvem de pontos, onde cada ponto representa o resultado de uma simulação. Também é apresentado um histograma para caracterizar em intervalos pré-definidos a quantidade de simulações que apresentaram resultado dentro deste intervalo. Esta apresentação é feita para todos os parâmetros descritos na Tabela 3 apresentada no Capítulo 3.



## 6.2 Resultado dos dados base

Os dados de base e a metodologia utilizada para análise estão apresentados no Capítulo 3, na Seção 3.3, referente a viga BT-54. Em resumo, as propriedades da viga são mostradas na Tabela 7, para força de protensão de 7818,8 kN com excentricidade de 0,6323 m.

O aparelho de apoio possui dimensões de  $61 \times 36 \times 7,3 \text{ cm}^3$  composto por: 4 chapas de aço, 3 camadas internas de elastômero de 15 mm cada e 2 camadas externas de elastômero de 7,5 mm cada. Para o cálculo da rigidez a rotação é utilizado o módulo de elasticidade ao cisalhamento do aparelho de apoio de 670 kPa, o que resultou em uma rigidez a rotação de 33.366,66 kNm/rad. A rotação inicial da viga é de  $0,5^\circ$  e a excentricidade inicial de  $L/1000$ .

Tabela 7 – Propriedades da viga PCI BT-54 da análise paramétrica

Momento de Inércia em relação ao eixo X	0,1116 m <sup>4</sup>
Momento de Inércia em relação ao eixo Y	0,0155 m <sup>4</sup>
Altura da viga	1,372 m
Altura do centro de gravidade	0,703 m
Largura da mesa superior	1,067 m
Área da seção transversal	0,425642 m <sup>2</sup>
Comprimento da viga	30,5 m
Módulo de elasticidade	30820 MPa

Fonte: Autor (2019)

Para esses dados, em valores absolutos, desconsiderando qualquer variação, são obtidos os resultados contidos na Tabela 8.

Tabela 8 – Resultados obtidos com os dados base da viga PCI BT-54 sem variação

Análise	Carga máxima	Ângulo crítico
Viga perfeitamente reta	358,38 kN	-
Viga com contraflecha de protensão	355,08 kN	-
Viga com deslocamento inicial	350,28 kN	0,11028 rad
Viga com deslocamento inicial e rotação inicial	339,87 kN	0,16041 rad
Início da fissuração	339,85 kN	0,16642 rad

Fonte: Autor (2019)

A Figura 42 apresenta os resultados obtidos na análise inicial, utilizando os dados de base e variando os quatro parâmetros, excentricidade inicial, força de protensão, módulo de elasticidade e rigidez do apoio, aleatoriamente conforme descritos na metodologia. A excentricidade inicial e o módulo de elasticidade são variáveis consideradas por uma

distribuição normal com coeficiente de variação de 0,61 e 0,15, respectivamente; a rigidez a rotação do aparelho de apoio é considerada variando aleatoriamente entre 25% a 100% do valor total da rigidez inicial e a força de protensão com perda média de 25% e em função de uma distribuição normal com coeficiente de variação 5%. Os valores médios obtidos considerando um total de 100 mil simulações aleatórias estão apresentados na Tabela 9.

Tabela 9 – Resultado médio obtido na análise das 100 mil simulações.

Análise	Carga máxima	Ângulo crítico
Viga perfeitamente reta	273,01 kN	-
Viga com contraflecha de protensão	270,59 kN	-
Viga com deslocamento inicial	265,71 kN	0,11986 rad
Viga com deslocamento inicial e rotação inicial	258,49 kN	0,16545 rad
Início da fissuração	258,40 kN	0,16642 rad

Fonte: Autor (2019)

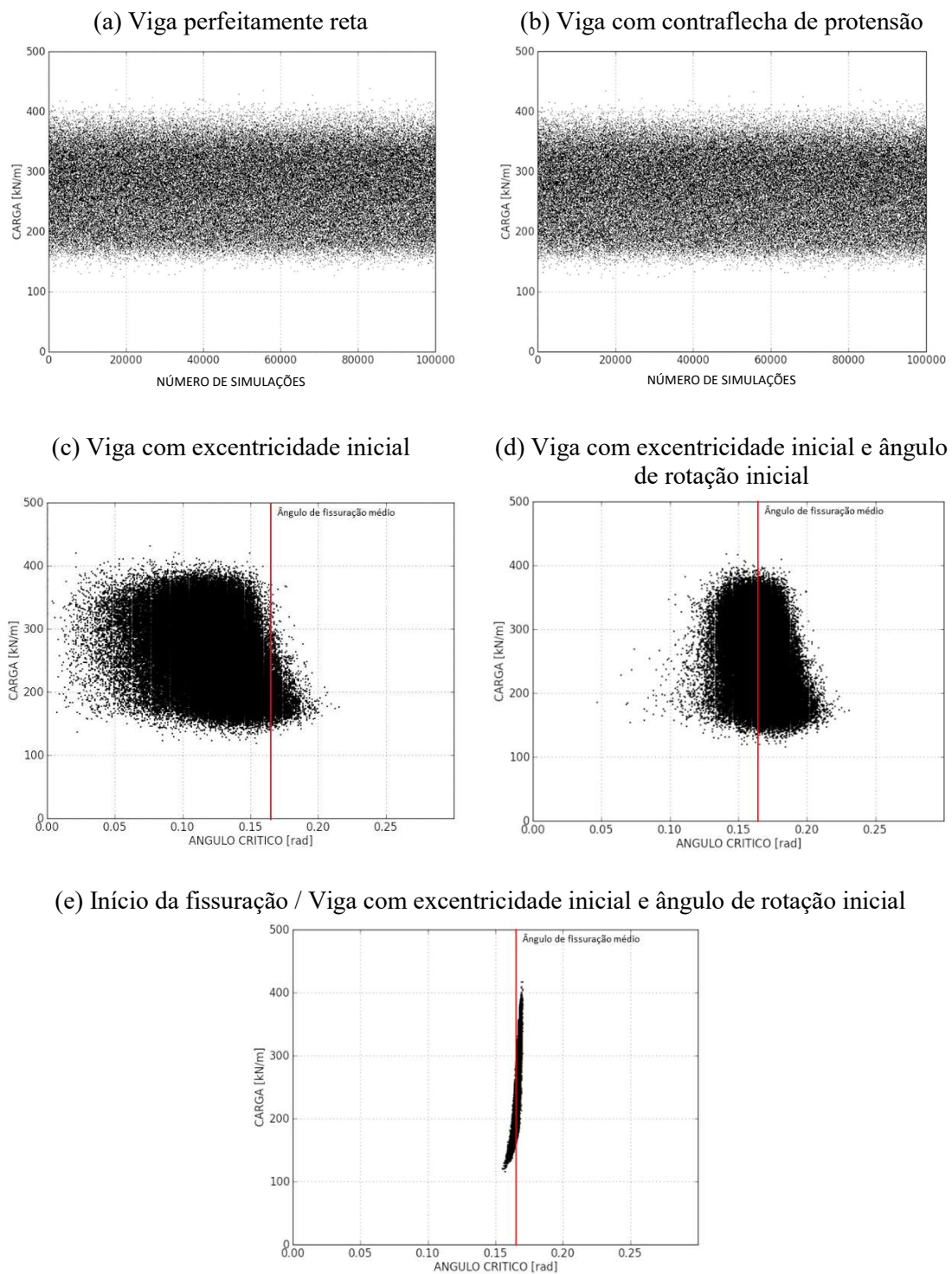
É importante observar que a carga máxima média das 100 mil simulações é cerca de 24% inferior a carga máxima absoluta. Isso se deve principalmente a variabilidade da rigidez do apoio, uma vez que ela é considerada sempre com valor igual ou inferior ao valor base, podendo chegar a 25% do valor inicial. Tal consideração é feita com o objetivo simplificado de considerar erros na fabricação do elastômero e principalmente o efeito do *lift-off* para análise de confiabilidade. Além disso, indica a importância da análise de confiabilidade uma vez que a carga máxima média das simulações é menor que a carga máxima absoluta.

A carga de fissuração obtida nas análises é, em geral, próxima ao valor da carga de pico, indicando que é uma hipótese plausível considerar o modelo analítico pra determinar a carga de tombamento sem considerar a fissuração.

Na Figura 42 (a) cada ponto ilustrado representa a carga máxima obtida em cada simulação na Equação (32) que considera a viga perfeitamente reta. Na Figura 42 (b) utiliza-se a Equação (49) da viga com contraflecha de protensão. Na Figura 42 (c) e (d) cada ponto representa o valor de carga máxima e o respectivo ângulo de tombamento ( $\varphi_1$ ), para cada uma das 100 mil simulações, para a Equação (36) que considera apenas o deslocamento inicial e para Equação (40) que considera a excentricidade e a rotação inicial respectivamente. A carga do início de fissuração da viga está simulada na Figura 42 (e). O histograma da Figura 43 considera os resultados da Equação (40) apresentado na Figura 42 (d), esses valores são colocados de forma a representar a quantidades de simulações que

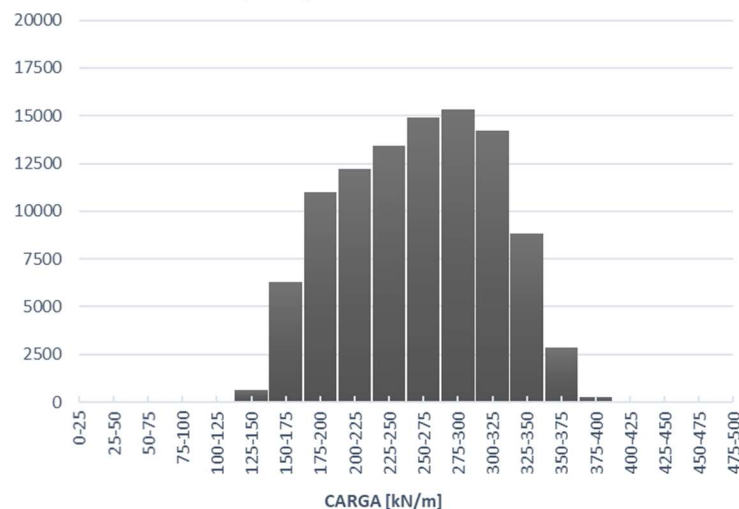
apresentaram o valor de carga máxima em um intervalo definido, de forma que o eixo x representa os intervalos de carga máxima considerados e o eixo y a quantidade de simulações que resultaram em carga máxima neste intervalo.

Figura 42 – Viga PCI BT-54



Fonte: Autor (2019)

Figura 43 – Histograma: carga máxima da viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial pela quantidade de simulações



Fonte: Autor (2019)

Segundo as distribuições estatísticas assumidas para os parâmetros do modelo, as cargas máximas obtidas nas equações variam, em maior parte, entre 150 a 350 kN/m, valor muito superior ao peso próprio da viga de 10,64 kN/m. A redução na carga máxima da viga com contraflecha de protensão para a viga perfeitamente reta foi em média inferior a 1%. Para a presença de excentricidade inicial a redução é de aproximadamente 2,5%, e com excentricidade e rotação inicial, a redução média na carga máxima é superior a 5%.

É interessante observar que se as imperfeições forem da ordem de excentricidade inicial de  $L/1000$ , rotação inicial de  $0,5^\circ$  e contraflecha de aproximadamente 63 cm, para a viga BT-54 de 30,5 m de comprimento, a redução da carga de tombamento não é significativa. Para o caso mais crítico, a redução foi da ordem de 5 %. Então pode ser recomendado, para essas características de viga, como tolerância construtiva uma imperfeição de  $L/1000$ , o que corresponde a recomendação do PCI (2003) e da ABNT NBR 9062:2017.

O ângulo crítico apresentado nos gráficos corresponde ao ângulo  $\phi_1$  dos equacionamentos no valor da carga máxima. A variação do ângulo crítico para a presença de excentricidade inicial é maior do que quando se leva em conta também, além da excentricidade, a rotação inicial. Quando as duas imperfeições são consideradas o ângulo crítico é maior e concentra-se os valores de 0,15 e 0,20 radianos.

Quanto a carga crítica de início de fissuração da viga, embora varie muito em magnitude, a variação do ângulo crítico é muito pequena, com média em 0,166 radianos. Com isso, vale ressaltar, como apresentado na Figura 42 (d), que diversas simulações apresentaram carga máxima com ângulo crítico superior ao ângulo de fissuração. Nesses casos, deve ser considerado como carga crítica de instabilidade a carga de início de fissuração, pois essa tende a ocorrer primeiro nestes casos.

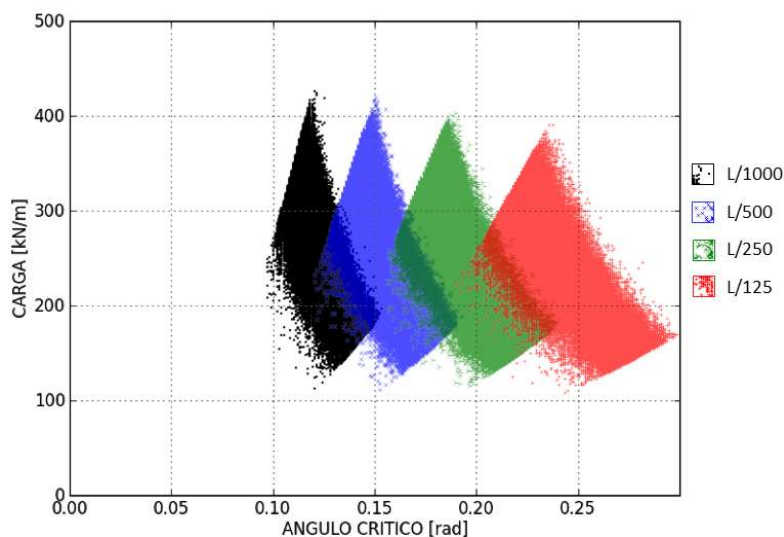
### 6.3 Excentricidade inicial

O primeiro parâmetro analisado refere-se à influência da excentricidade lateral inicial da viga na estabilidade lateral. Para isso são considerados os valores de  $L/1000$ ,  $L/500$ ,  $L/250$  e  $L/125$ , sendo  $L$  o comprimento da viga. Para verificar especificamente o comportamento deste parâmetro, nesta análise a excentricidade é mantida constante igual ao valor analisado, não sendo atribuídos valores aleatórios para este parâmetro como nas outras análises. A Figura 44 ilustra os resultados desta análise.

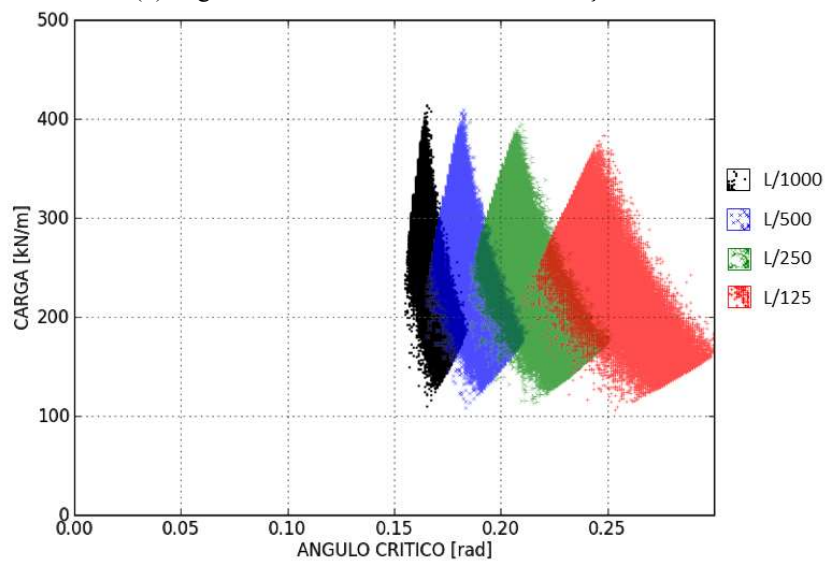
Nas formulações cuja excentricidade inicial é considerada, esta variável reduz a carga máxima com aumento do ângulo de rotação crítico. Na carga crítica de fissuração, o ângulo crítico é praticamente o mesmo para os quatro valores observados, com média geral de 0,166 radianos. A carga média de fissuração para a excentricidade  $L/1000$  é de 258,22 kN/m, para  $L/500$  é de 255,56 kN/m, para  $L/250$  é de 248,97 kN/m e de 236,28 kN/m para  $L/125$ .

Figura 44 – Análise da influência da excentricidade lateral inicial

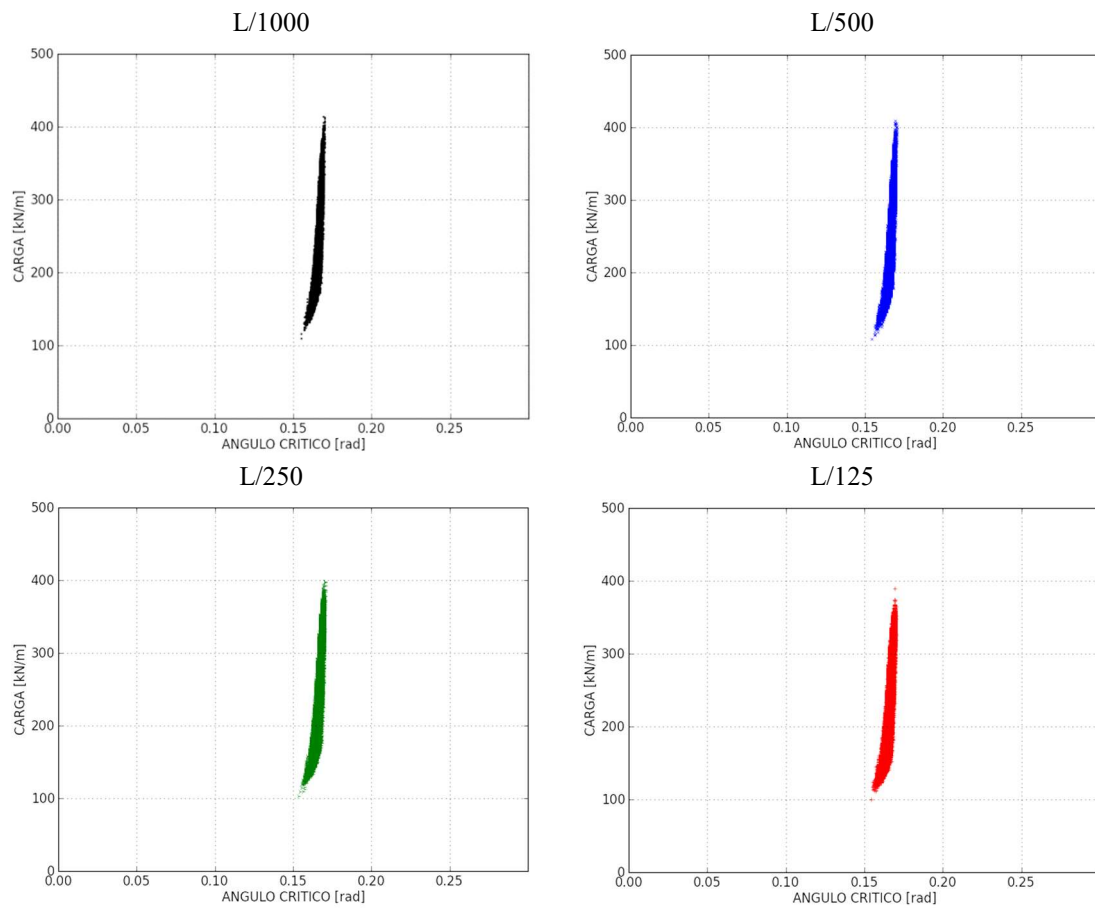
(a) Vigas com excentricidade inicial



(b) Vigas com excentricidade inicial e rotação inicial



(c) Início da fissuração / Viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial



Fonte: Autor (2019)

Figura 45 – Histograma da análise da influência da excentricidade lateral inicial: carga máxima da viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial pela quantidade de simulações

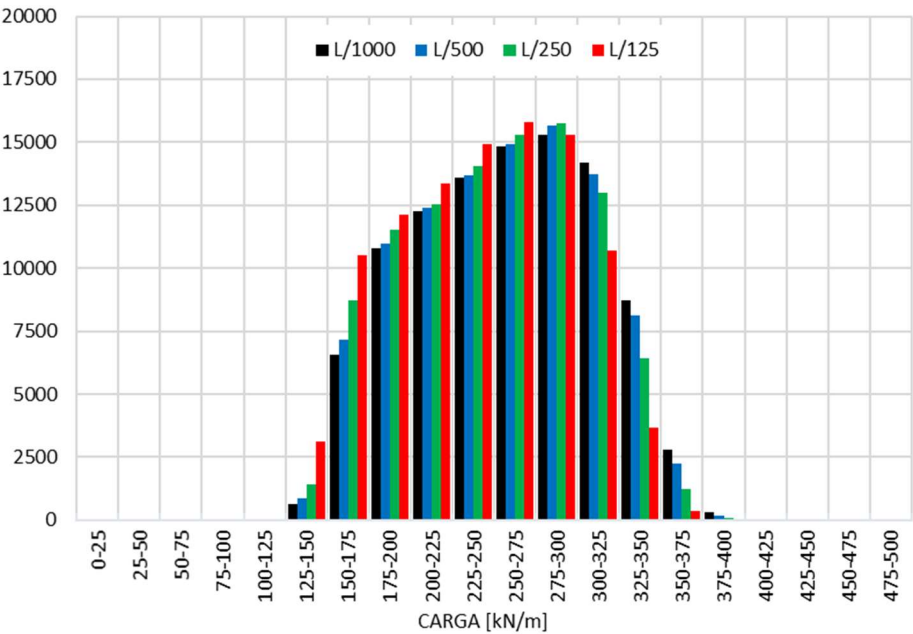
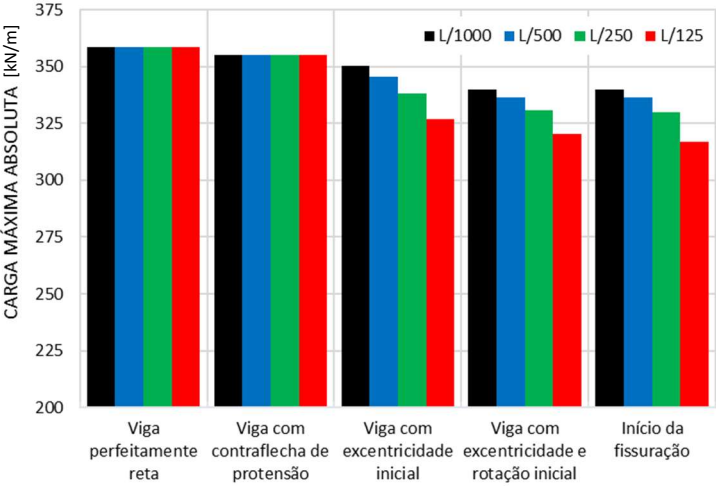
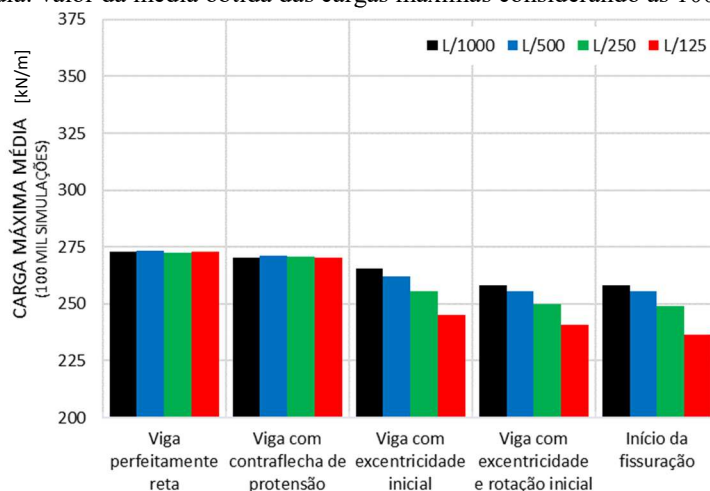


Figura 46 – Carga máxima obtida na análise da influência da excentricidade lateral inicial

(a) Carga absoluta: valor máximo da equação com os dados iniciais sem variação



(b) Carga média: valor da média obtida das cargas máximas considerando as 100 mil simulações



Fonte: Autor (2019)

De maneira semelhante à Figura 42, na Figura 44(a) e (b) cada ponto representa o valor de carga máxima e o respectivo ângulo de tombamento, para cada uma das 100 mil simulações, para a Equação (36) que considera apenas o deslocamento inicial e para Equação (40) que considera a excentricidade e a rotação inicial respectivamente. O mesmo é feito considerando a carga do início de fissuração da viga, Figura 44(c). O histograma da Figura 45 considera os resultados apresentados na Figura 44(b), esses valores são colocados de forma a representar a quantidades de simulações que apresentaram o valor de carga máxima em um intervalo definido, de forma que o eixo x representa os intervalos de carga máxima considerados e o eixo y a quantidade de simulações que resultaram em carga máxima neste intervalo. A Figura 46 representa os valores obtidos em cada uma das equações, os valores de carga máxima absoluta são os valores obtidos sem nenhuma variação de parâmetro, utilizando os dados de base, já a carga máxima média é o valor médio obtido por cada equação considerando as 100 mil simulações.

Para a equação que considera tanto a excentricidade quanto a rotação inicial, utilizando como base a excentricidade inicial de  $L/1000$  quando aumentando esse valor pra  $L/500$  a carga crítica média sofreu uma redução de aproximadamente 1% enquanto o ângulo crítico médio aumentou em quase 11%; para  $L/250$  a redução foi de 3% na carga e aumento de 27% no ângulo e, para  $L/125$ , a redução foi de quase 7% na carga para um aumento de 57% no ângulo. Isso significa que a excentricidade aumenta significativamente a propensão para o *lift-off*.



Considerando que o valor da excentricidade foi dobrando, a relação foi a seguinte:

- L/1000 para L/500
  - Carga: -1%
  - Ângulo: +11%
- L/500 para L/250
  - Carga: -2%
  - Ângulo: +13%
- L/250 para L/125
  - Carga: -4%
  - Ângulo: +18%

Com esses dados é possível observar que o aumento da excentricidade inicial provoca uma redução na carga crítica de tombamento, e tal redução é acompanhada por um aumento na rotação crítica. Em comparação entre as cargas máximas absolutas e as cargas médias das 100 mil simulações a redução foi de aproximadamente 25%. Porém, considerando o início da fissuração, apesar da carga crítica do início da fissuração ser menor, o ângulo de fissuração apresenta valores muito próximos entre si.

Tendo em vista o ângulo médio para o início da fissuração igual a 0,166 radianos, é importante observar que o ângulo crítico de tombamento é, na maior parte dos casos, superior a este valor, principalmente quando se considera a excentricidade e rotação inicial (Figura 44 b). Desta forma, a carga crítica da viga é caracterizada pelo início da fissuração, e esta é menor que a carga crítica de tombamento da viga.

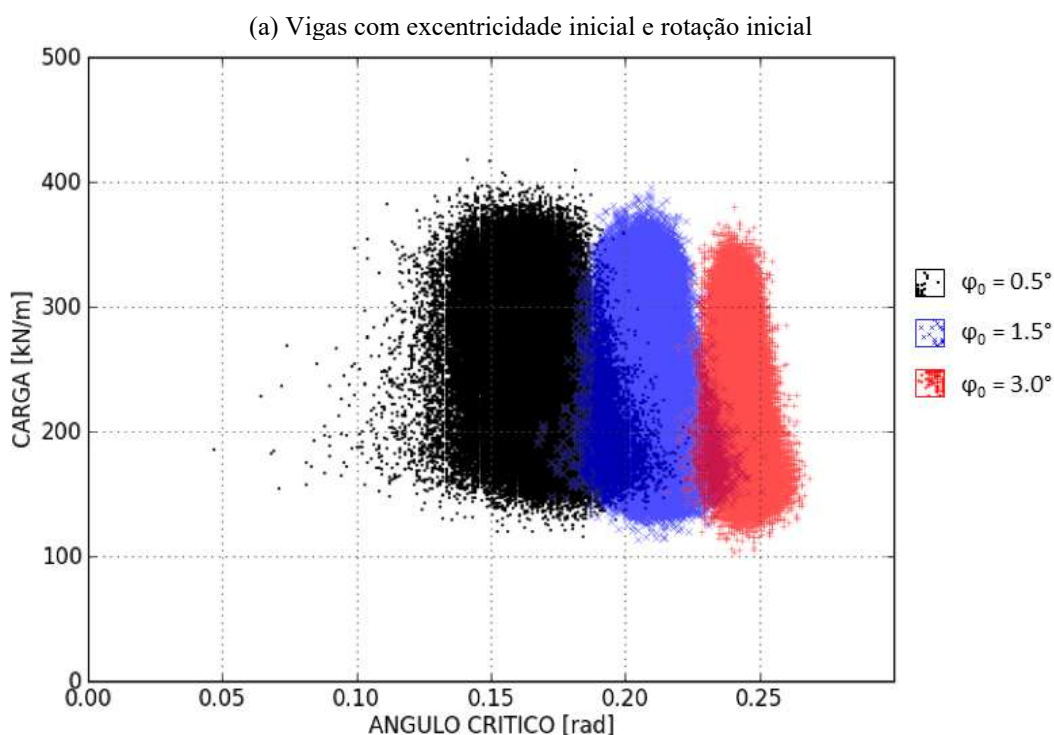
## 6.4 Rotação inicial

Outro parâmetro de imperfeição inicial da viga de suma importância para a instabilidade lateral da mesma é a rotação inicial de corpo rígido. A fim de observar a influência desta variável, três valores de ângulos foram adotados, tais como 0,5° (0,008727 rad), 1,5° (0,02618 rad) e 3° (0,05236 rad). As Figura 47, 48 e 49 apresentam os resultados desta análise.

Na equação que consideram o efeito rotação inicial de corpo rígido da viga, a variação desta rotação, provoca uma diminuição do valor da carga máxima com um aumento do ângulo de rotação crítico. Em comparação entre as cargas máximas absolutas e as cargas médias das 100 mil simulações a redução foi de aproximadamente 25%. Na carga crítica de fissuração, o ângulo crítico foi praticamente o mesmo para os três valores observados, com média geral de 0,166 radianos.

Além disso, para um ângulo de rotação inicial menor há uma maior variação no ângulo crítico, já para o ângulo maior, os resultados ficaram mais concentrados próximos ao ângulo médio de 0,24 radianos. Assim como nos casos anteriores, o ângulo crítico de tombamento é superior ao ângulo médio do início de fissuração, assim a carga crítica da viga é caracterizada pelo início da fissuração, e esta é menor que a carga crítica de tombamento da viga.

Figura 47 –Análise da influência da rotação inicial



(b) Início da fissuração / Viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial

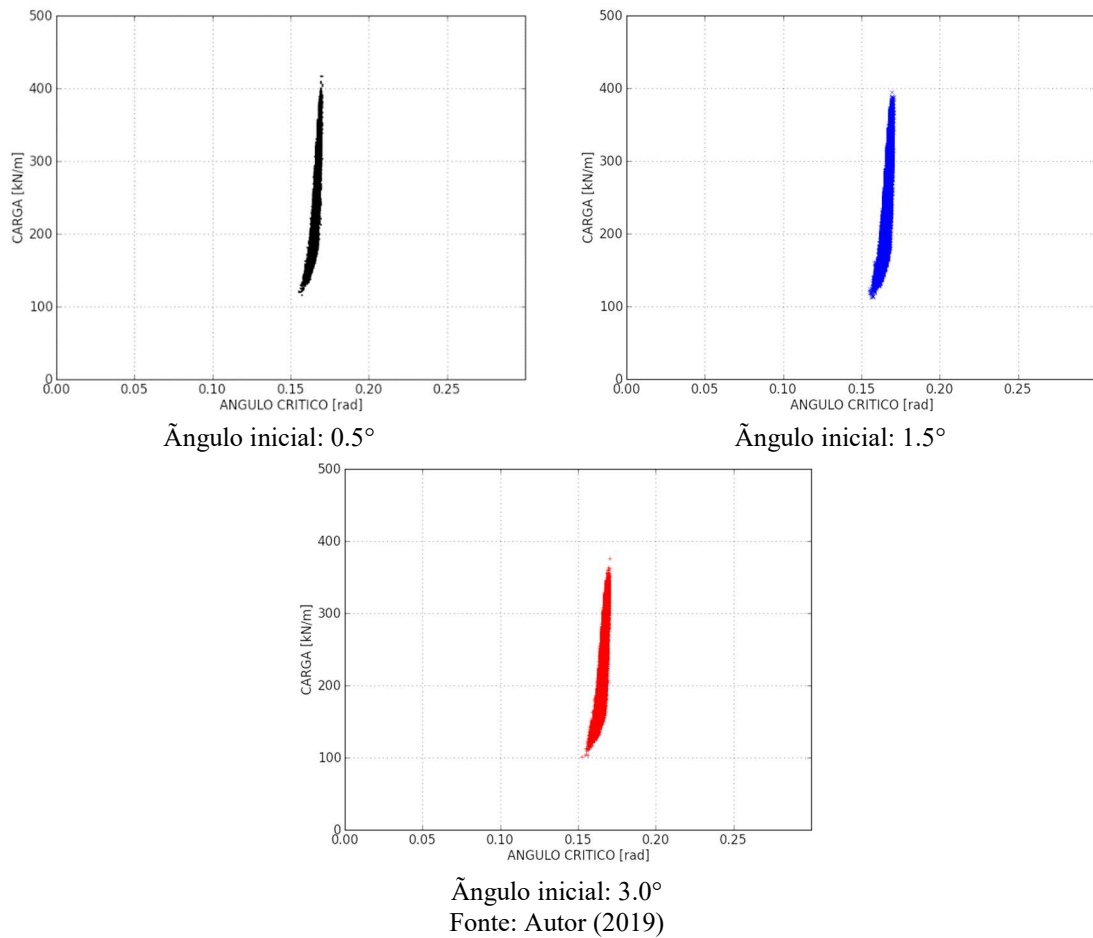


Figura 48 – Histograma da análise da influência da rotação inicial: carga máxima da viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial pela quantidade de simulações

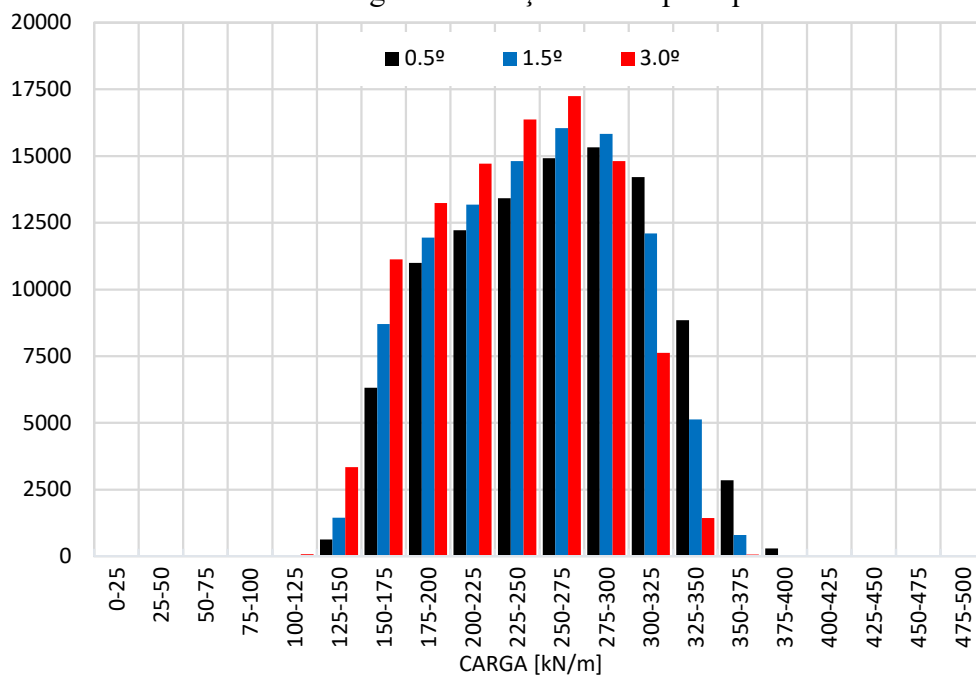
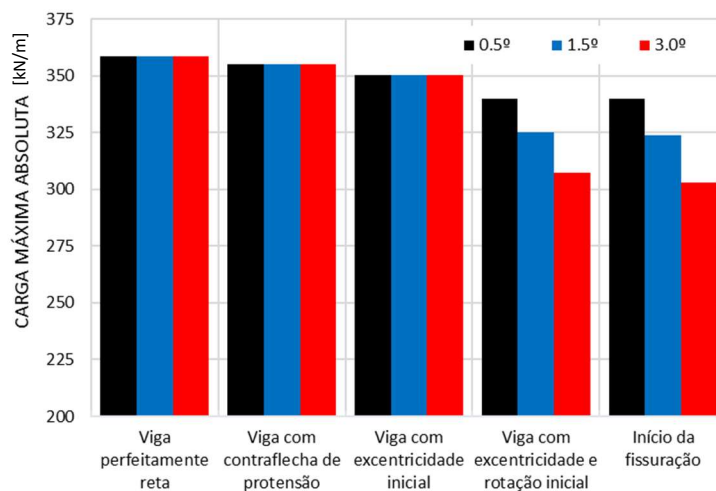
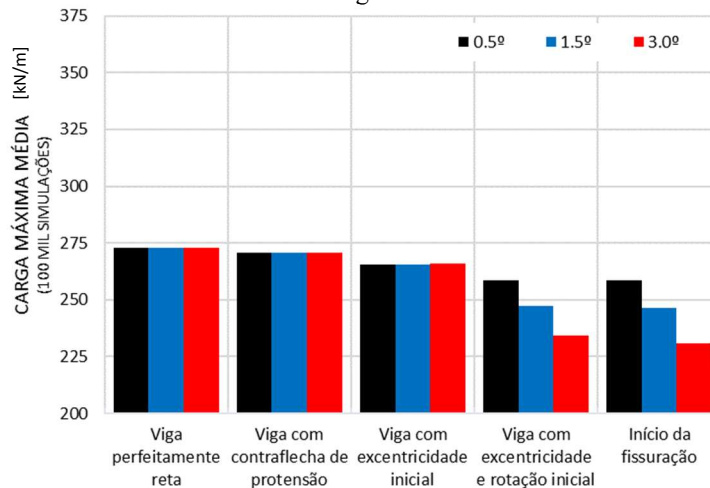


Figura 49 – Carga máxima obtida na análise da influência da rotação inicial

(a) Carga absoluta: valor máximo da equação com os dados iniciais sem variação



(b) Carga média: valor da média obtida das cargas máximas considerando as 100 mil simulações



Fonte: Autor (2019)

## 6.5 Resistência do concreto

Para a análise da influência da resistência do concreto, são atribuídos três valores de resistência a compressão do concreto ( $f_{ck}$ ), sendo: 50 MPa ( $E = 39597.98$  MPa), 75 MPa ( $E = 48497.42$  MPa) e 100 MPa ( $E = 56000.00$  MPa). Para essa análise, o módulo de elasticidade é mantido constante, não sendo atribuído valores aleatórios para este parâmetro como nas outras análises. As Figuras 50, 51 e 52 apresentam os resultados desta análise.

Figura 50 – Análise da influência da resistência do concreto

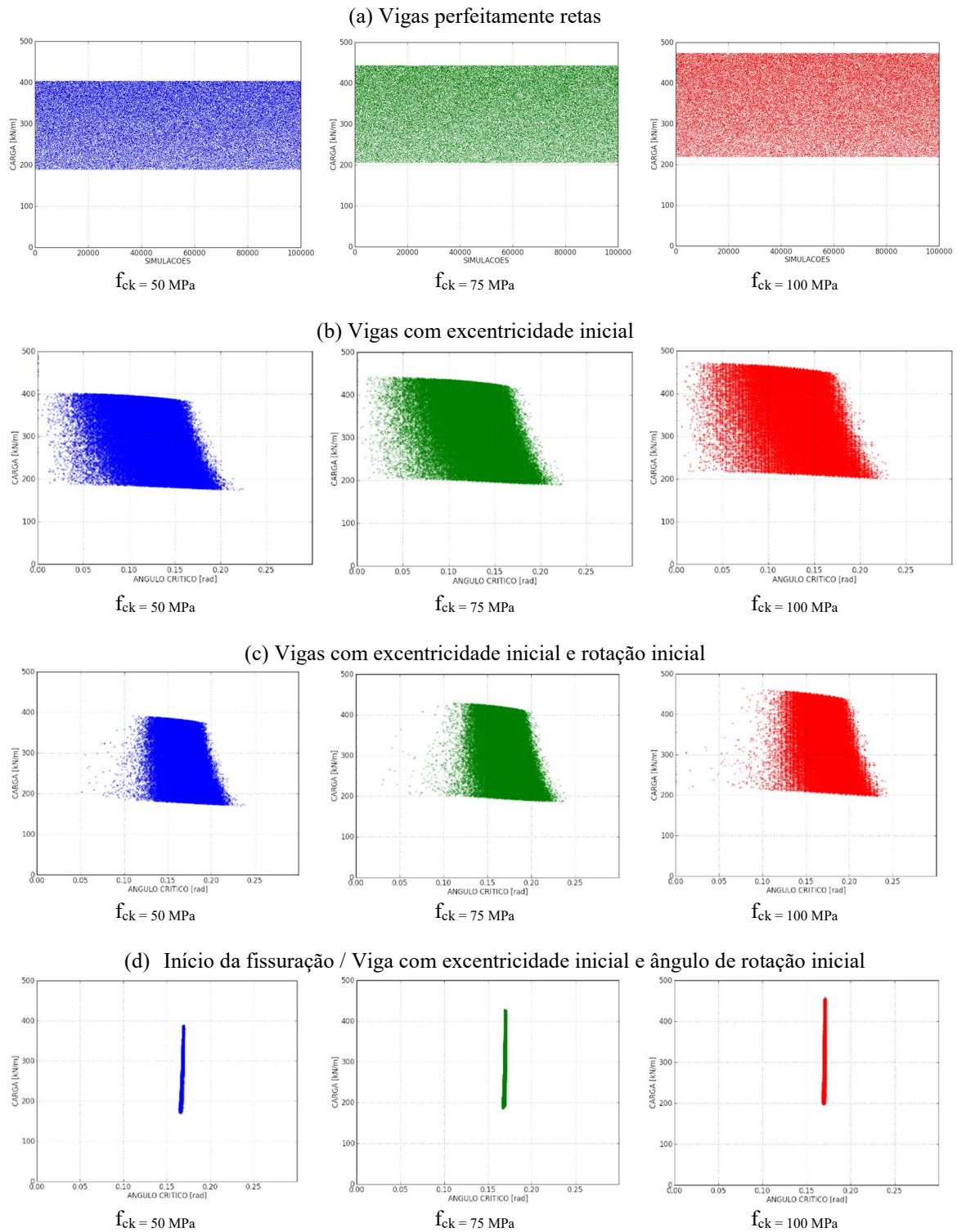
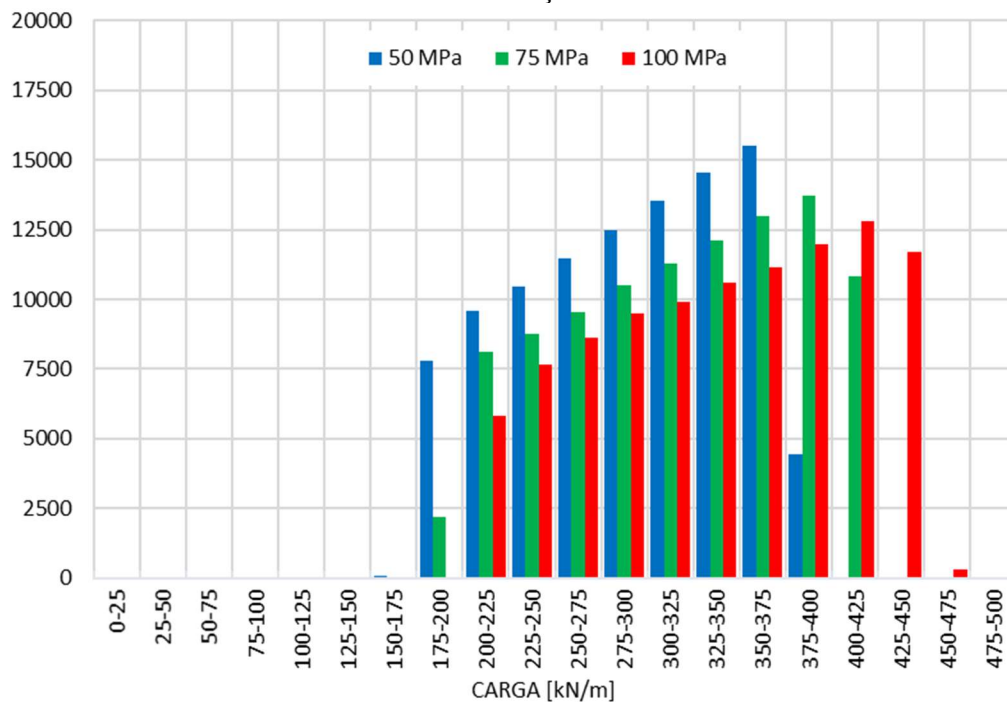


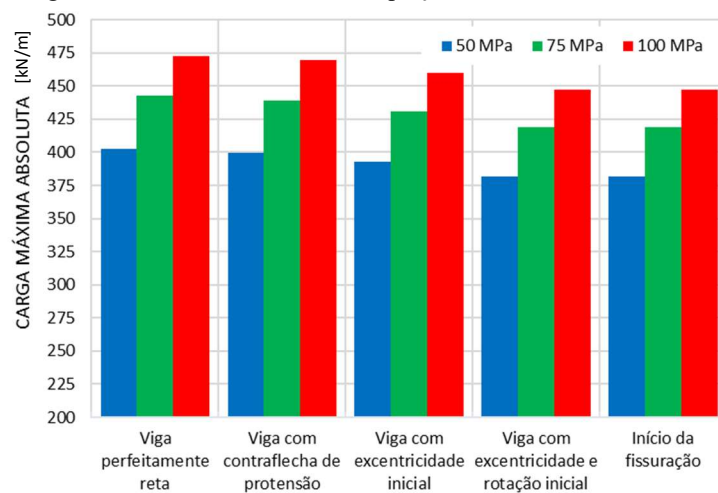
Figura 51 – Histograma da análise da influência da resistência do concreto: carga máxima da viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial pela quantidade de simulações



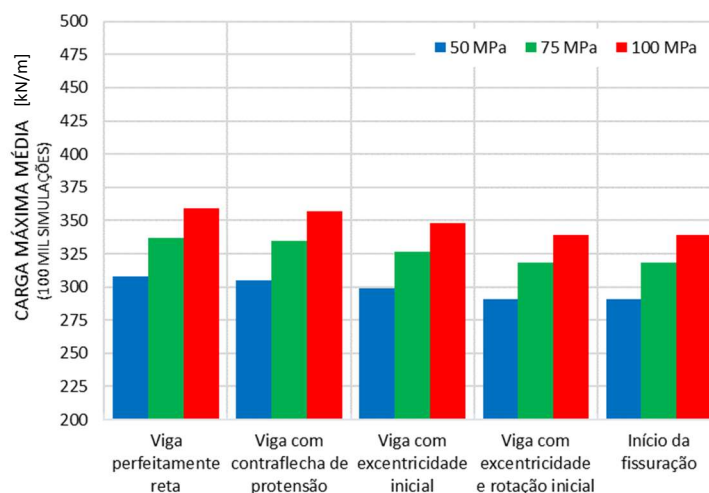
Fonte: Autor (2019)

Figura 52 – Carga máxima obtida na análise da influência da resistência do concreto

(a) Carga absoluta: valor máximo da equação com os dados iniciais sem variação



(b) Carga média: valor da média obtida das cargas máximas considerando as 100 mil simulações



Fonte: Autor (2019)

Nesta análise fica evidente a grande influência do módulo de elasticidade do concreto utilizado na viga na estabilidade lateral da mesma. O módulo de elasticidade pode ser diretamente relacionado a resistência a compressão do concreto. Quanto maior a resistência do concreto mais estável é o sistema, de forma que há aumento da carga crítica. Considerando a viga com excentricidade e rotação inicial, a carga crítica média passou de 290,97 kN/m,  $f_{ck}$  de 50 MPa, para 318,44 kN/m e 339,38 kN/m, com  $f_{ck}$  de 75 e 100 MPa, respectivamente. Caracteriza-se assim, um aumento de 9,4% na carga quando comparado o  $f_{ck}$  de 50 MPa e 75 MPa, de 6,6% do  $f_{ck}$  de 75 MPa e 100 MPa e de 16,6% do  $f_{ck}$  de 50 MPa para 100 MPa.

Apesar do aumento da carga crítica, a variação dos ângulos críticos correspondentes foi muito pequena. Com isso, conclui-se que a resistência do concreto utilizado na viga influencia diretamente na carga suportada por ela, porém o ângulo crítico de tombamento, e de início da fissuração é pouco influenciado, apesar do aumento consequente da resistência a tração do concreto. Para o  $f_{ck}$  de 50 MPa a carga crítica média de fissuração é de 290,85 kN/m com ângulo de 0,168 rad, para  $f_{ck}$  de 75 MPa a carga é 318,29 kN/m com ângulo de 0,169 rad e para 100 MPa a carga é de 339,19 kN/m e ângulo de 0,170 rad. Para a comparação entre as cargas máximas absolutas e as cargas médias das 100 mil simulações a redução foi de aproximadamente 25%.

## 6.6 Força de protensão

Para verificar a influência da força de protensão, esse parâmetro é considerado constante na análise e igual a 75% do valor inicial atribuído, para representar a perda da força de protensão em relação a força inicialmente aplicada. Para as análises, partiu-se do valor inicial padrão de 7818,8 kN, considerando ainda dois valores subsequentes (adição de 10 MN) iguais a 17818,8 kN e 27818,8 kN respectivamente. As contraflechas de protensão calculadas são respectivamente 12,5 cm, 28,6 cm e 44,6 cm.

Apesar deste trabalho considerar a perda média de 25% no valor total da força de protensão, valores menores de perda podem ser considerados, uma vez que 25% corresponde a aproximadamente a perda total da protensão da viga. Como o estado analisado é durante a montagem da estrutura, a viga possui pouca idade, dessa forma a perda da força de protensão pode ser inferior aos 25% considerados.

Na Equação (49) que considera a contraflecha devido a força de protensão, são obtidos os seguintes valores absolutos de carga crítica: 355,08 kN/m, 350,90 kN/m e 346,79 kN/m. Em valores médios, considerando as 100 mil simulações para cada um dos valores de contraflecha analisados, a carga crítica média é de 273 kN/m, valor igual para os três casos.

Para os aumentos lineares de 10 MN na força de protensão, a redução na carga crítica para valores absolutos apresenta redução aproximadamente linear de 1,17%. Porém quando é analisado o montante das 100 mil simulações com valores aleatórios para excentricidade inicial, módulo de elasticidade e rigidez do apoio, a diferença dos resultados ficou imperceptível.

## 6.7 Rigidez do aparelho de apoio

A rigidez do aparelho de apoio apresenta uma enorme influência na estabilidade lateral das vigas. Para considerar a grande variabilidade e influência deste parâmetro nas demais análises é considerada uma variação de 25% a 100% do valor inicial calculado para a almofada. Porém, neste tópico, a rigidez da almofada foi mantida constante. Na primeira

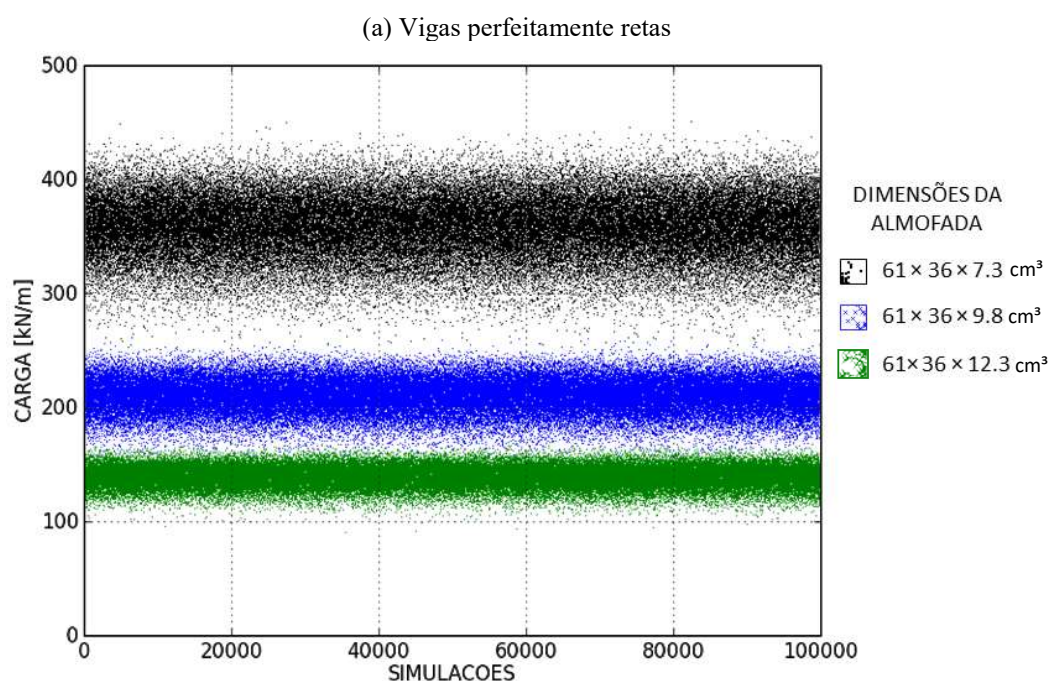


análise são consideradas as dimensões iniciais do aparelho de apoio de  $610 \times 360 \times 73$  mm, com 3 chapas de aço, 3 camadas internas de elastômero de 15 mm cada e 2 camadas externas de elastômero de 7,5 mm cada. A rigidez a rotação calculada é igual a 33,4 MN/m.rad.

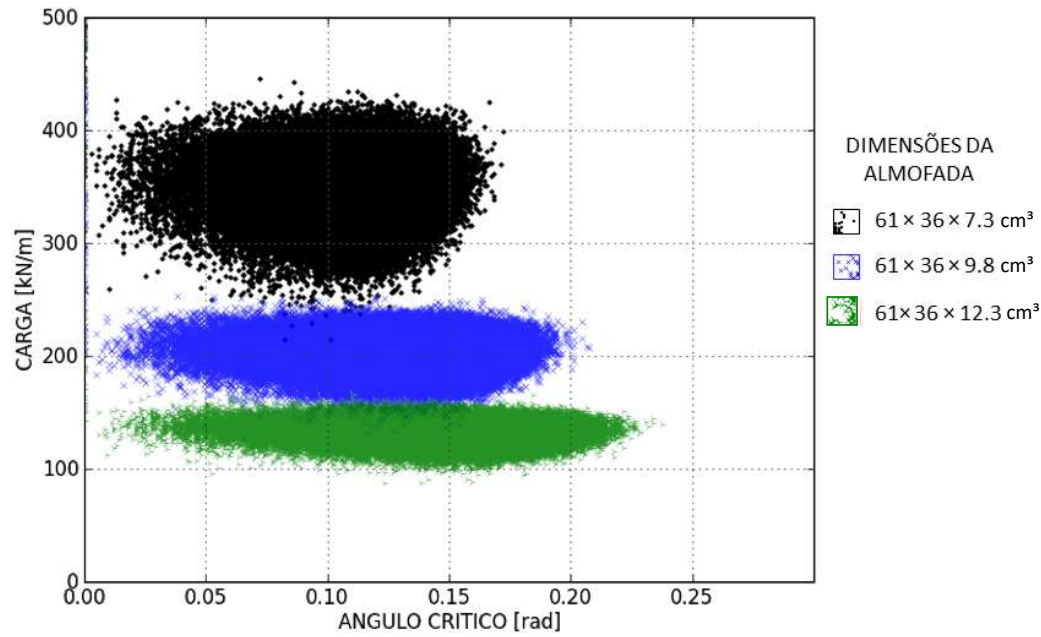
Na segunda análise é considerado um aumento de 5 mm em cada camada do elastômero resultando em um aparelho de  $610 \times 360 \times 98$  mm e rigidez de 12,4 MN/m.rad (37,1% da rigidez inicial). Na terceira análise o aumento considerado é de 10 mm em cada camada, resultando em dimensões de  $610 \times 360 \times 123$  mm e rigidez de 5,9 MN/m.rad correspondendo a 17,7% da rigidez inicialmente analisada. Finalmente, na última análise considera-se a rigidez do aparelho de apoio igual a cinco vezes o valor inicial, resultando em 16,7 MN/m.rad.

Para essas análises a rigidez a rotação da almofada é mantida constante igual ao valor analisado, não sendo atribuído valores aleatórios para este parâmetro como nas outras análises. As Figura 53, 54 e 55 representam os resultados desta análise.

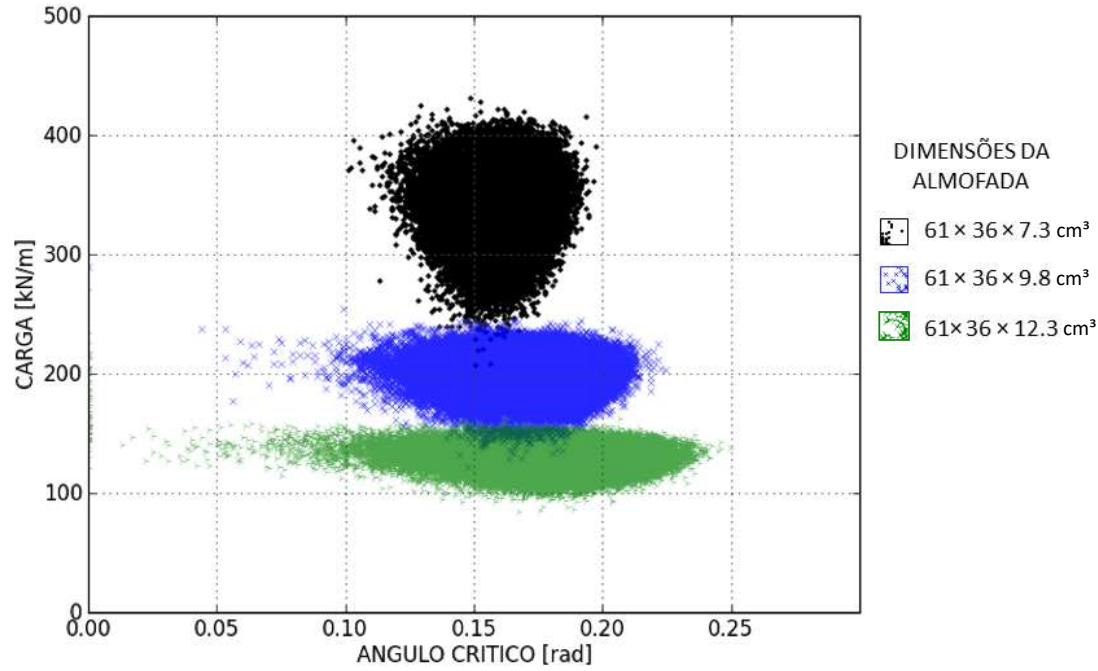
Figura 53 – Análise da influência da rigidez do aparelho de apoio

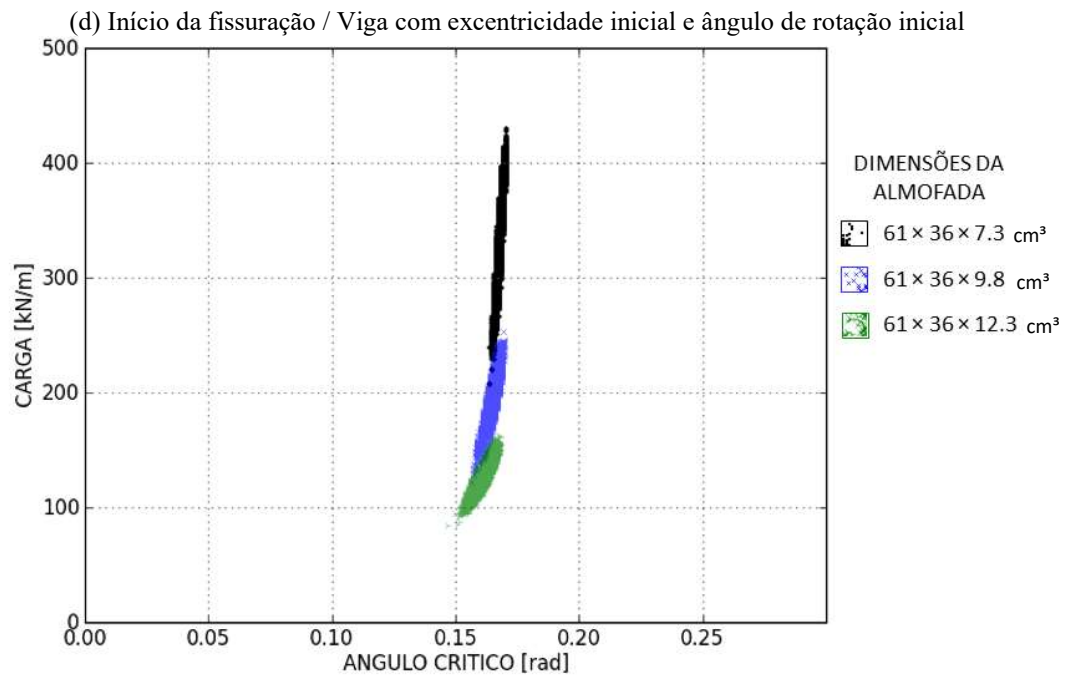


(b) Vigas com excentricidade inicial

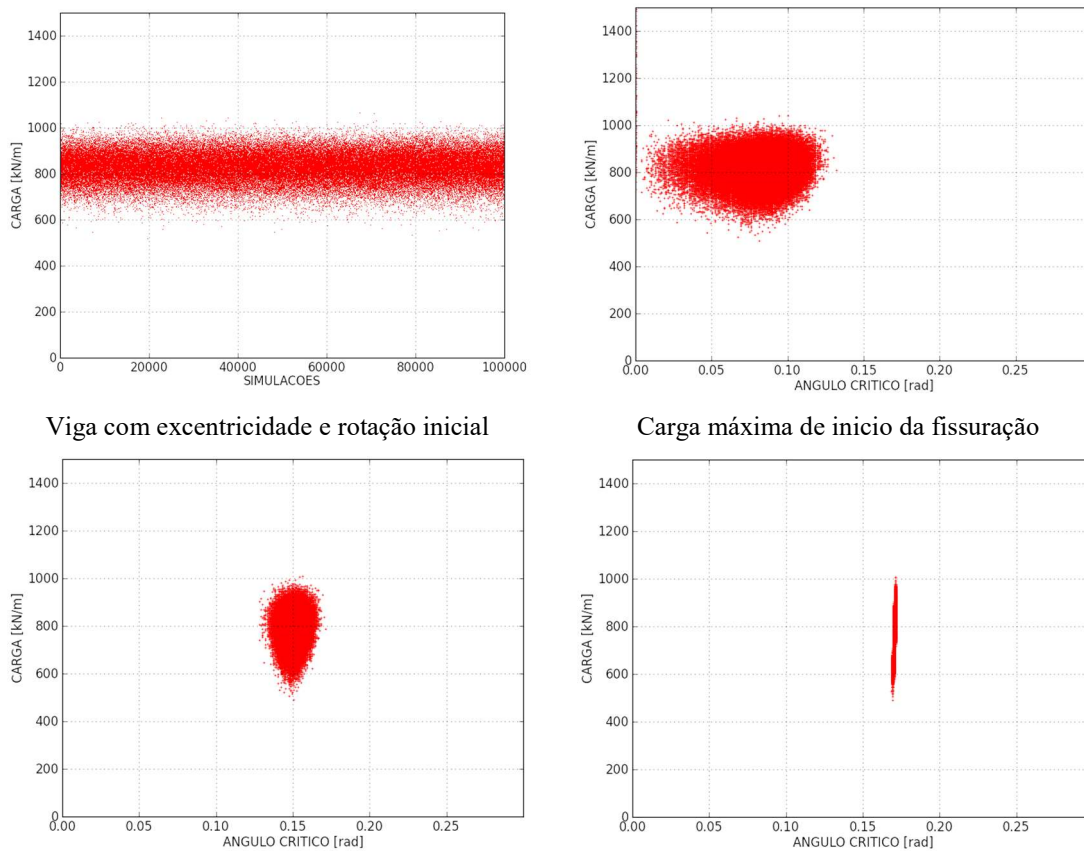


(c) Vigas com excentricidade inicial e rotação inicial



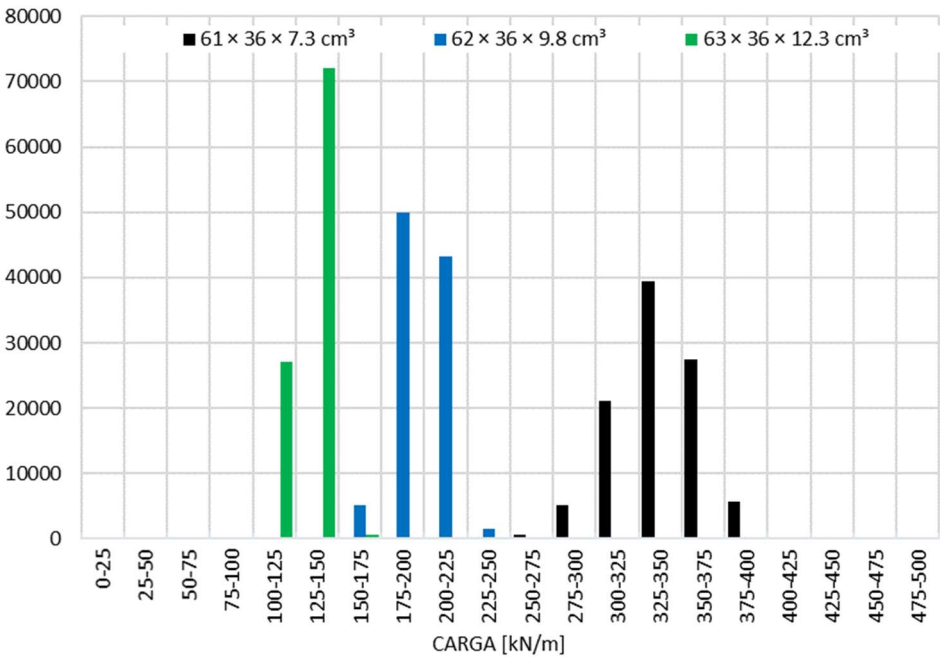


(e) Resultado das análises considerando a rigidez do aparelho de apoio igual a 5x a rigidez inicial  
 Viga perfeitamente reta                      Viga com excentricidade inicial



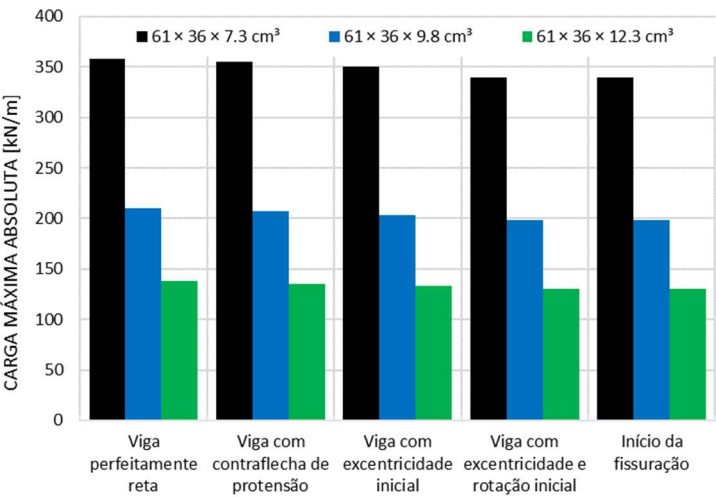
Fonte: Autor (2019)

Figura 54 – Histograma da análise da influência da rigidez do aparelho de apoio: carga máxima da viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial pela quantidade de simulações

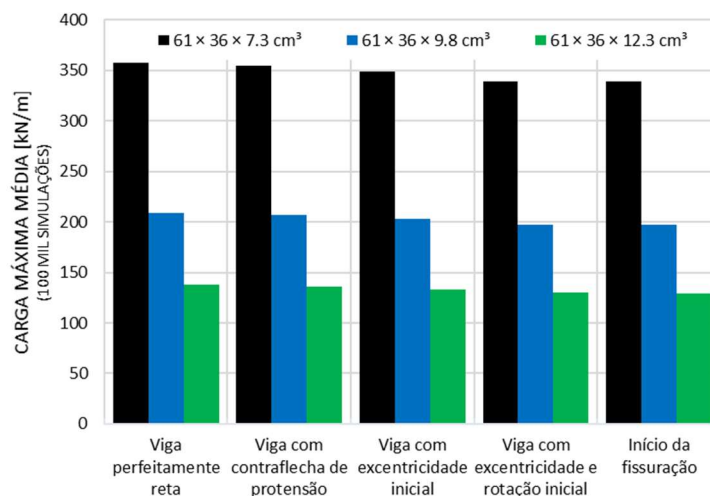


Fonte: Autor (2019)

Figura 55 – Carga máxima obtida na análise da influência da rigidez do aparelho de apoio  
(a) Carga absoluta: valor máximo da equação com os dados iniciais sem variação



(b) Carga média: valor da média obtida das cargas máximas considerando as 100 mil simulações



Fonte: Autor (2019)

A rigidez a rotação do aparelho de apoio apresenta grande influência na estabilidade lateral das vigas pré-moldadas sobre elastômeros. Com o aumento da rigidez, além do aumento da carga crítica há uma grande variação no ângulo crítico de tombamento. Considerando a rigidez a rotação como um parâmetro fixo, ocorre uma menor variação nos valores de carga crítica.

Com a diminuição da rigidez da viga houve um aumento do ângulo de tombamento da viga, sem que houvesse um aumento significativo no ângulo de fissuração. Desta forma, em algumas situações a instabilidade será caracterizada pelo início da fissuração da viga, com carga crítica inferior a carga de tombamento.

Para a Equação (36) que considera apenas o deslocamento inicial, quanto mais rígido é o aparelho de apoio os resultados tendem a um ângulo crítico menor. Isto significa que o aumento da rigidez diminui as chances da viga fissurar antes do tombamento. Já para Equação (40) que considera tanto a excentricidade quanto a rotação inicial, a tendência é que os valores de ângulo crítico sejam cada vez mais próximos ao valor de 0,15 radianos.

Apesar da grande variação nos valores de carga, quanto ao início da fissuração, mantém-se a tendência já observada nas análises anteriores, do ângulo crítico com valores próximos a 0,16 radianos, o que ocorreu nos quatro casos observados.

Em comparação entre as cargas máximas absolutas e as cargas médias das 100 mil simulações a variação foi de aproximadamente 0,3%. Como nessa simulação a rigidez a rotação se manteve constante, essa pequena variação indica que a variabilidade de cerca de 25% apresentada nas simulações de confiabilidade das análises anteriores é devido a variabilidade aplicada a rigidez do apoio.

Para as alterações nas propriedades do aparelho de apoio, o ângulo crítico de rotação de corpo rígido da viga para início do *lift-off* também se modificou, apresentando os resultados apresentado na Tabela 10.

Tabela 10 – Ângulo da perda de contato em função das dimensões do aparelho de apoio

Dimensão da almofada (cm)	Ângulo do início da perda de contato (rad)
$61 \times 36 \times 7,3$	0,000494
$61 \times 36 \times 9,8$	0,001332
$61 \times 36 \times 12,3$	0,002800

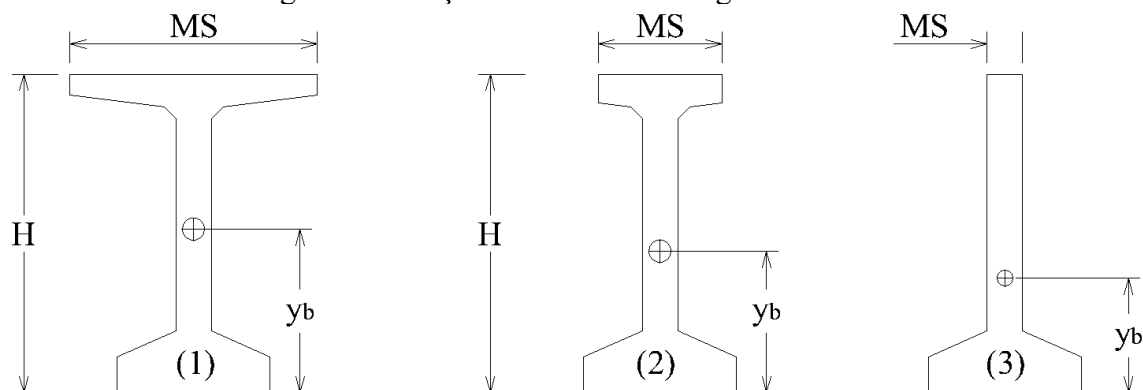
O resultado condiz com o valor esperado, uma vez que o ângulo crítico (Equação (55)) é inversamente proporcional a rigidez do aparelho de apoio.

## 6.8 Seção transversal da viga

Em relação a seção transversal da viga foram realizadas duas análises. Na primeira, a seção transversal e o vão da viga são modificados, mantendo a relação entre a altura da viga e o vão livre proporcional. Assim, são analisadas as seções BT-54, BT-63 e BT-72 com os comprimentos de 30,50 m, 35,00 m e 40,00 m, respectivamente.

Na segunda análise analisa-se a influência da esbeltez e do momento de inércia lateral, modificando a largura da mesa superior da viga. São consideradas as mesas superiores com 100% do valor atribuído pelo PCI, 50% deste valor e de forma que a mesa superior tenha a largura igual a espessura da alma. Tal situação é inspirada nas vigas com seção M-10, Y-8 e SY-6 analisadas por Stratford e Burgoyne (1999), que possuem dimensão da mesa superior reduzidas ou inexistentes. A Figura 56 e Tabela 11 mostram as propriedades das vigas estudadas.

Figura 56 – Seção transversal das vigas analisadas



Fonte: Autor (2019)

Tabela 11 – Propriedades das vigas da série PCI-BT

		BT-54			BT-63			BT-72		
		(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
Momento de inércia em relação ao eixo Y	$I_y$ [m <sup>4</sup> ]	0,01550	0,00649	0,00486	0,01560	0,00656	0,00493	0,01570	0,00663	0,00499
Momento de inércia em relação ao eixo X	$I_x$ [m <sup>4</sup> ]	0,11157	0,08687	0,05690	0,16340	0,12907	0,08817	0,22739	0,18188	0,12856
Comprimento da viga	$L$ [m]	30,50	30,50	30,50	35,00	35,00	35,00	40,00	40,00	40,00
Altura do centro de gravidade	$y_b$ [m]	0,703	0,609	0,492	0,817	0,715	0,591	0,931	0,822	0,693
Altura da viga	$H$ [m]	1,372	1,372	1,372	1,600	1,600	1,600	1,829	1,829	1,829
Largura da mesa superior	$MS$ [m]	1,067	0,5335	0,153	1,067	0,5335	0,153	1,067	0,5335	0,153
Área da seção transversal	$A$ [m <sup>2</sup> ]	0,42564	0,36922	0,31579	0,46062	0,4042	0,35076	0,49566	0,43924	0,3858
Esbeltes		31,08	78,33	414,15	37,55	94,61	500,25	44,87	113,05	597,78

Fonte: Autor (2019)

As Figura 57, 58 e 59 apresentam os gráficos obtidos nas simulações com a viga BT-54 com as três dimensões de mesa superior descritas anteriormente. As Figura 60, 61 e 62 apresentam os resultados das simulações com a viga BT-63 e as Figura 63, 64 e 65 com a viga BT-72.

As Figura 66, 67 e 68 apresentam a comparação entre os resultados obtidos com as seções transversais da BT-54, BT-63 e BT-72 com os valores de mesa superior completas.



Figura 57 – Resultados da análise das vigas BT-54

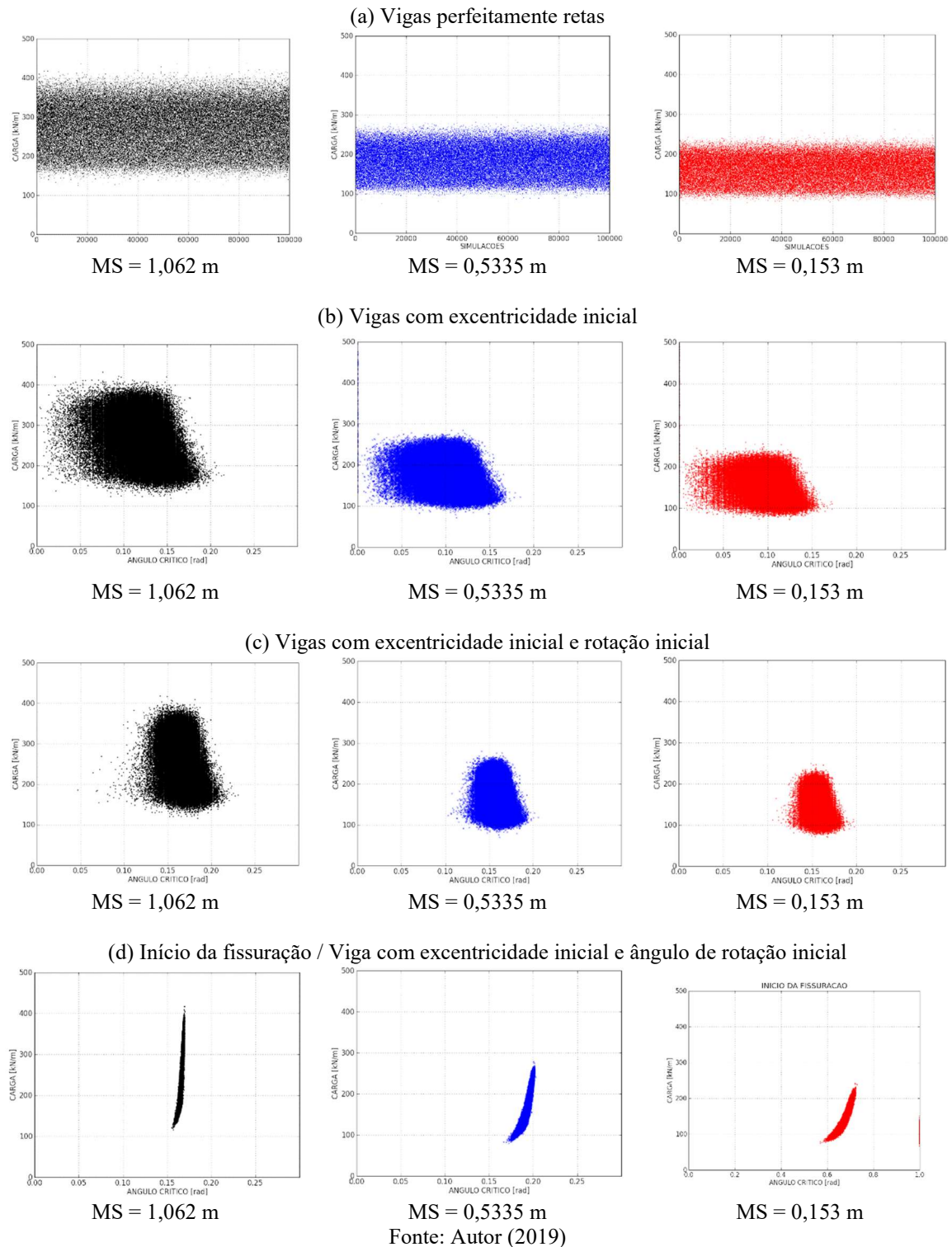
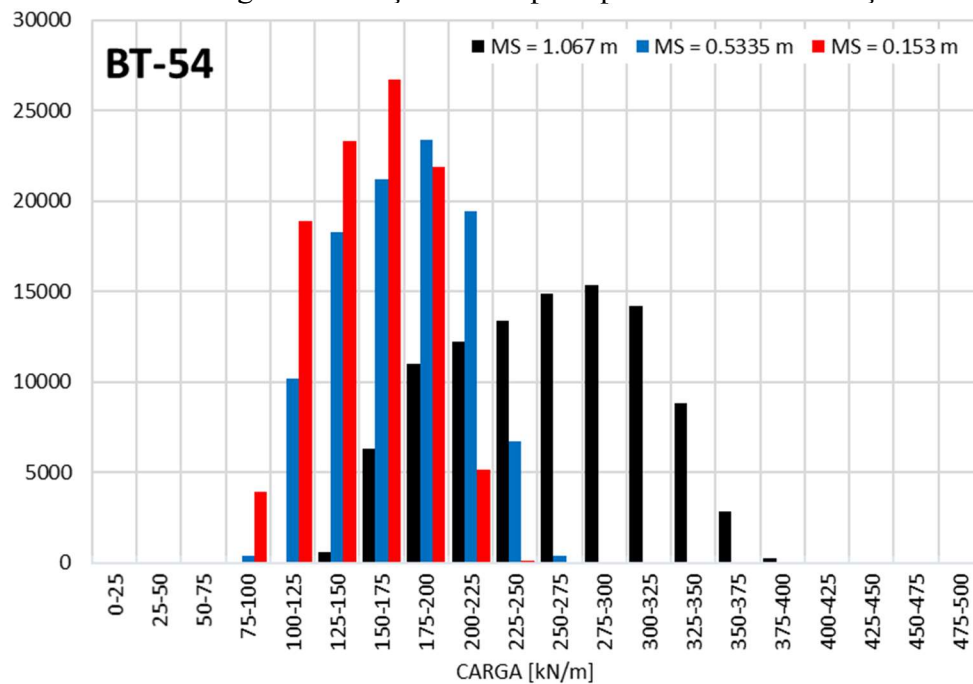




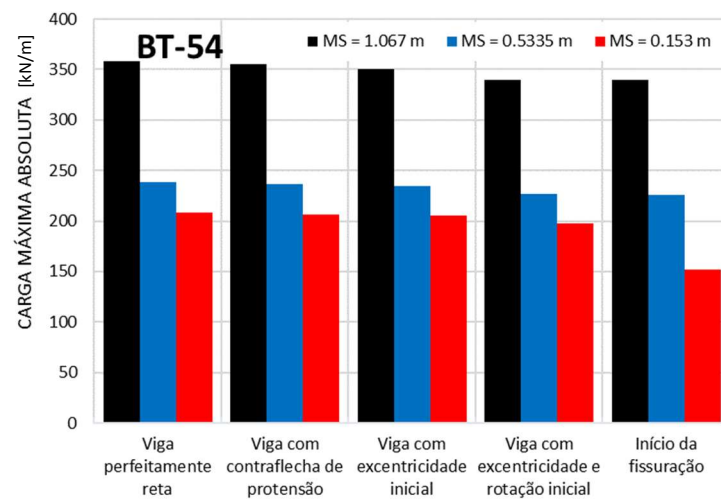
Figura 58 – Histograma análise da viga BT-54: carga máxima da viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial pela quantidade de simulações



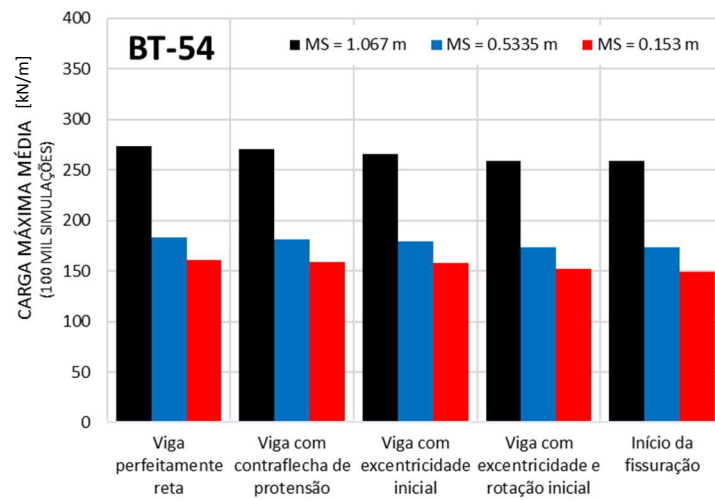
Fonte: Autor (2019)

Figura 59 – Carga máxima obtida na análise da viga BT-54

(a) Carga absoluta: valor máximo da equação com os dados iniciais sem variação



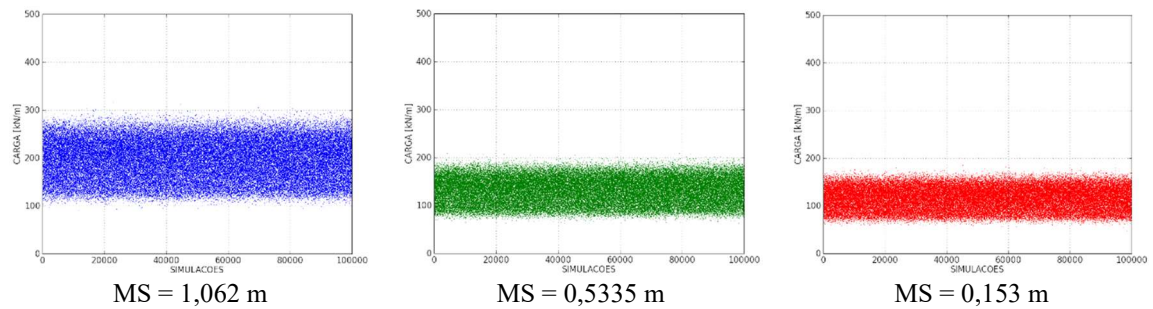
(b) Carga média: valor da média obtida das cargas máximas considerando as 100 mil simulações



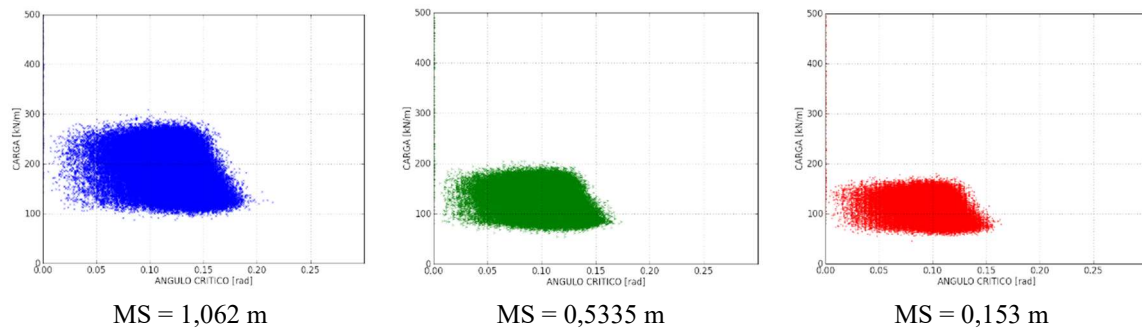
Fonte: Autor (2019)

Figura 60 – Resultados da análise das vigas BT-63

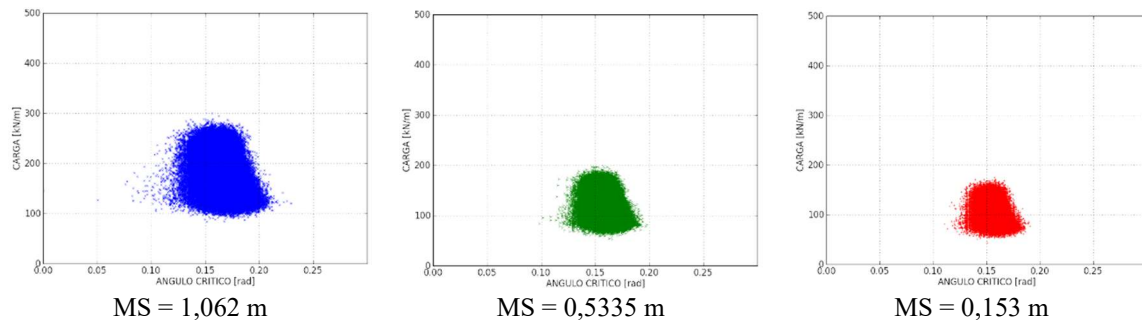
(a) Vigas perfeitamente retas



(b) Vigas com excentricidade inicial



(c) Vigas com excentricidade inicial e rotação inicial



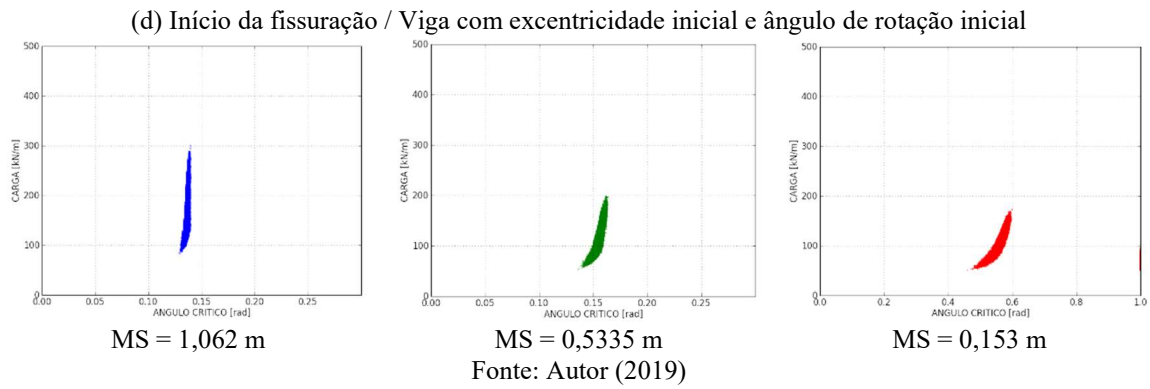
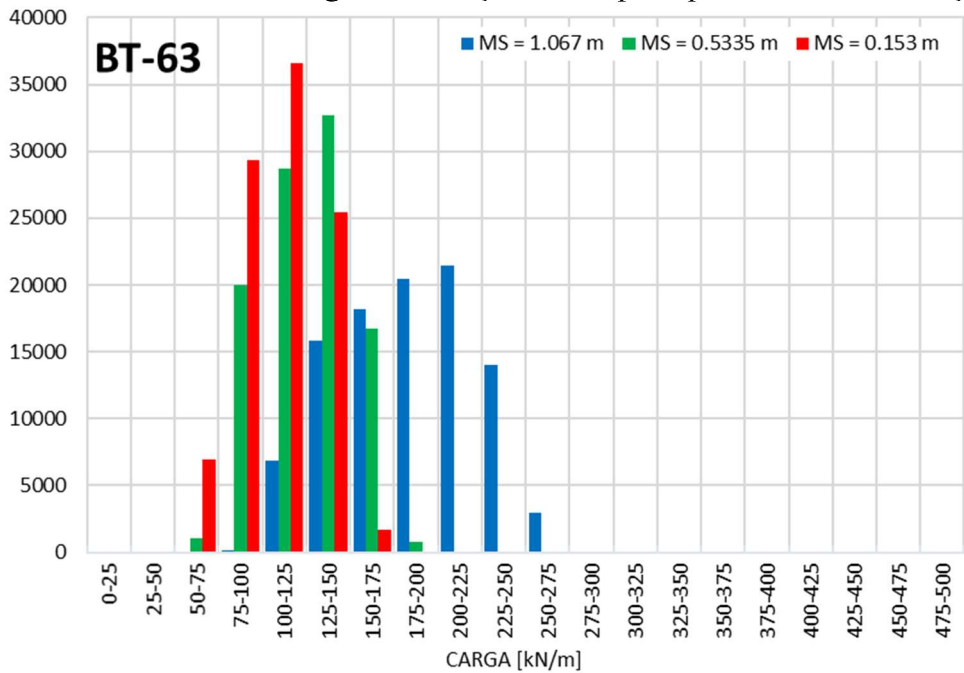


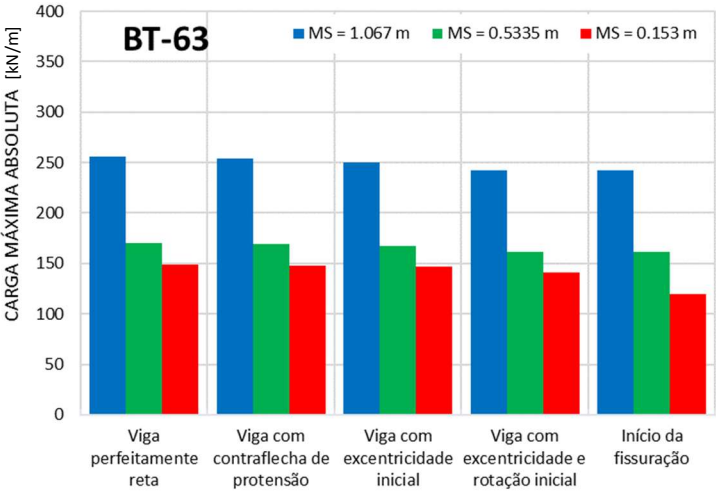
Figura 61 – Histograma da análise da viga BT-63: carga máxima da viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial pela quantidade de simulações



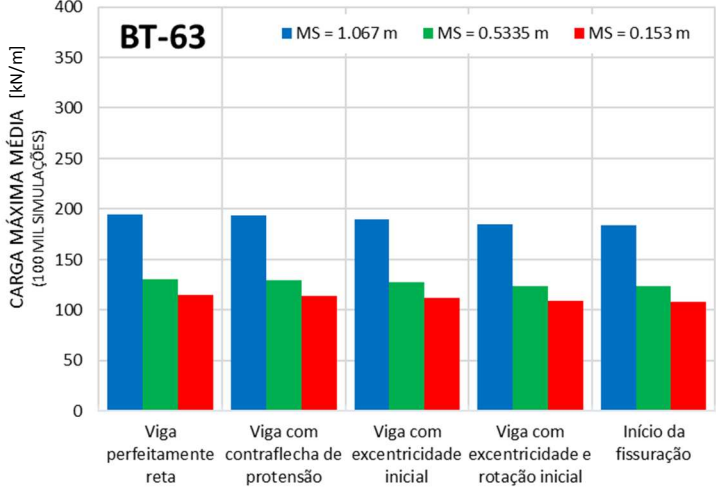
Fonte: Autor (2019)

Figura 62 – Carga máxima obtida na análise da viga BT-63

(a) Carga absoluta: valor máximo da equação com os dados iniciais sem variação



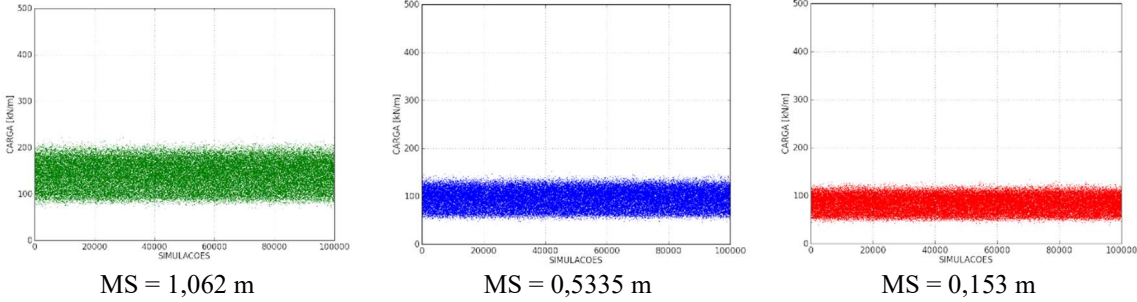
(b) Carga média: valor da média obtida das cargas máximas considerando as 100 mil simulações



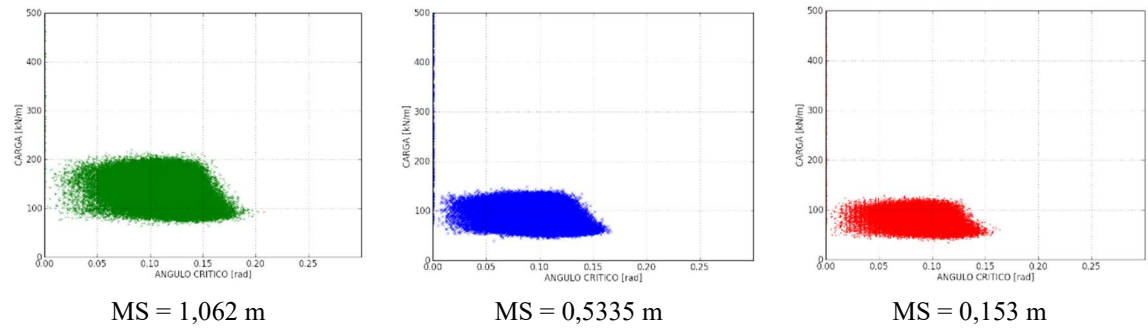
Fonte: Autor (2019)

Figura 63 – Resultados da análise das vigas BT-72

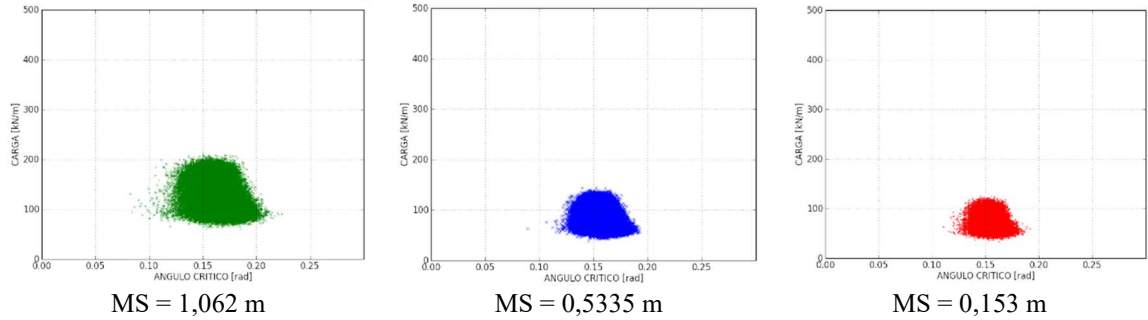
(a) Vigas perfeitamente retas



(b) Vigas com excentricidade inicial



(c) Vigas com excentricidade inicial e rotação inicial



(d) Início da fissuração / Viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial

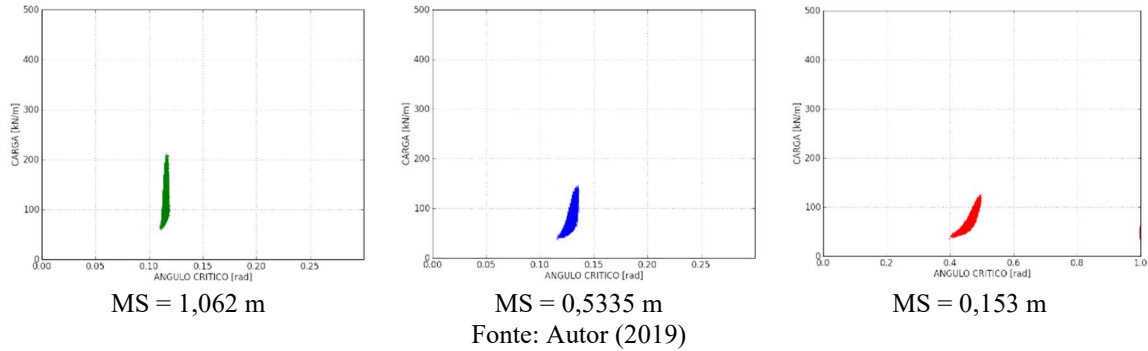
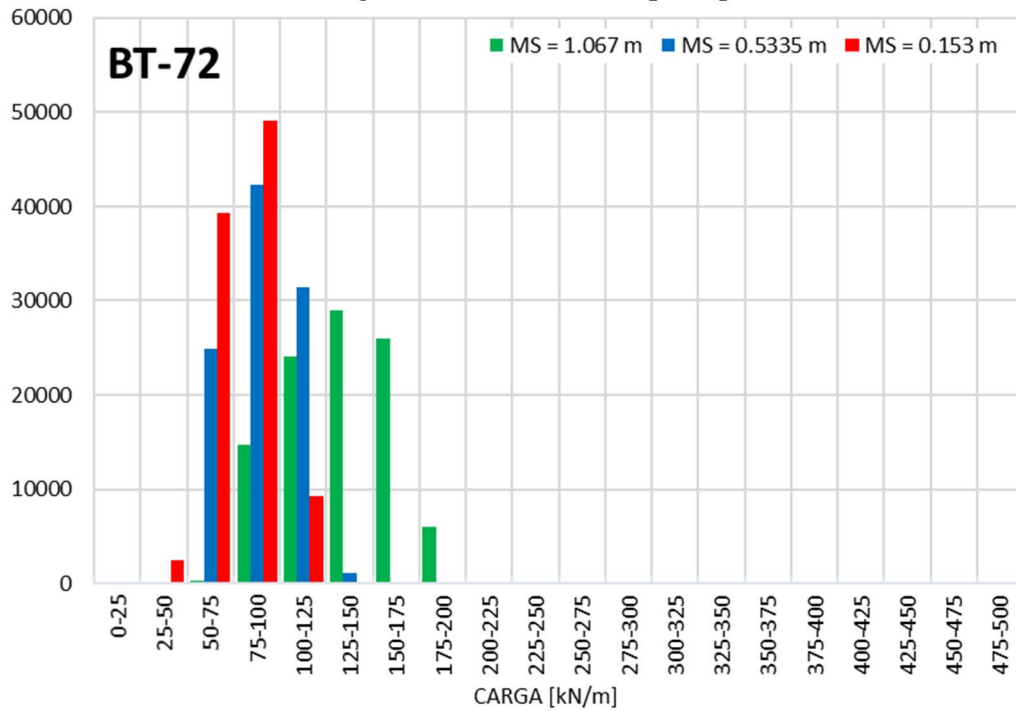


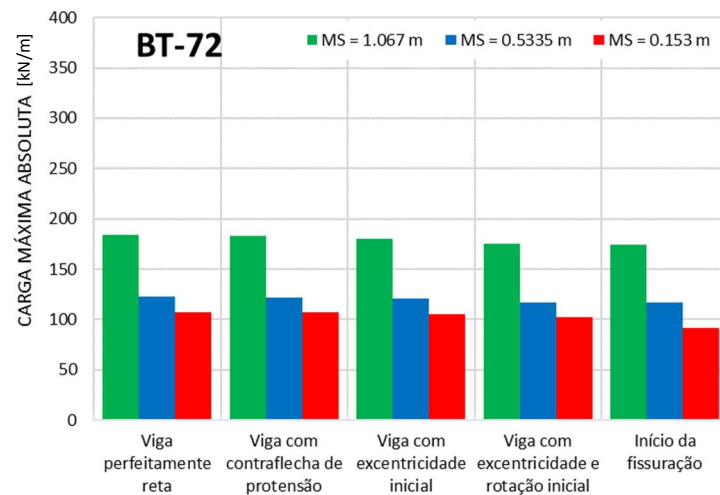
Figura 64 – Histograma da análise da viga BT-72: carga máxima da viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial pela quantidade de simulações



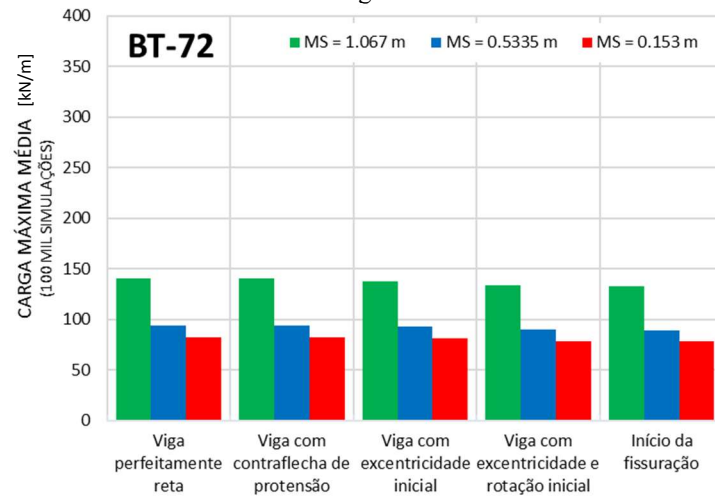
Fonte: Autor (2019)

Figura 65 – Carga máxima obtida na análise da viga BT-72

(a) Carga absoluta: valor máximo da equação com os dados iniciais sem variação



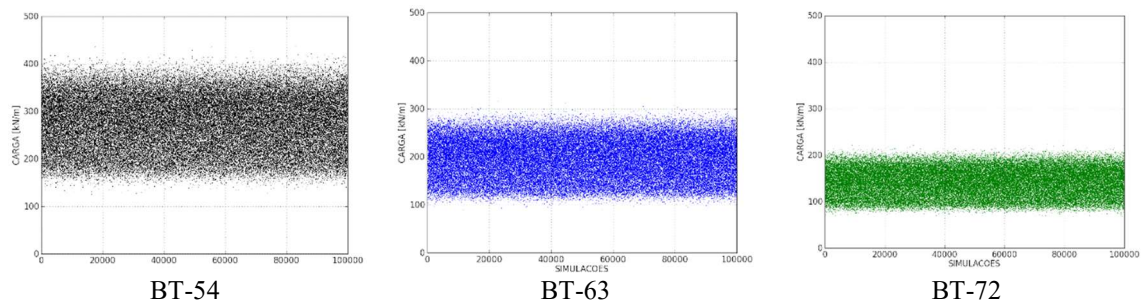
(b) Carga média: valor da média obtida das cargas máximas considerando as 100 mil simulações



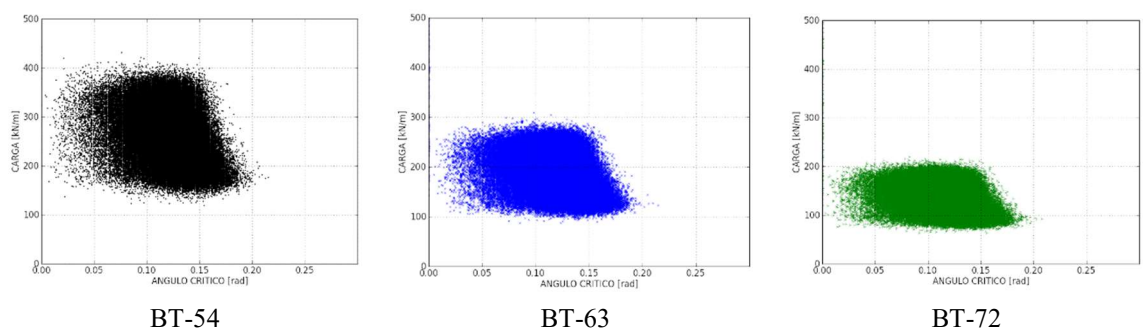
Fonte: Autor (2019)

Figura 66 – Vigas BT-54, BT-63 e BT-72 com mesa superior completa

(a) Vigas perfeitamente retas



(b) Vigas com excentricidade inicial



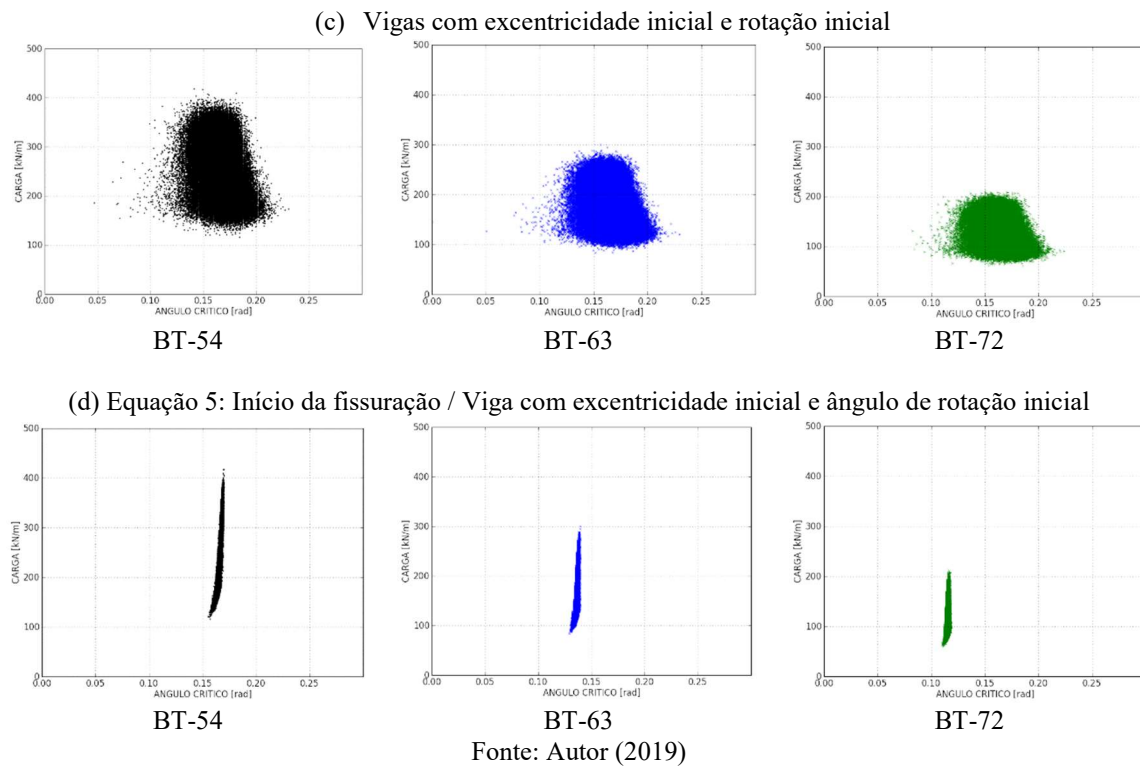


Figura 67 – Histograma das vigas BT-54, BT-63 e BT-72: carga máxima da viga com excentricidade inicial e ângulo de rotação inicial pela quantidade de simulações

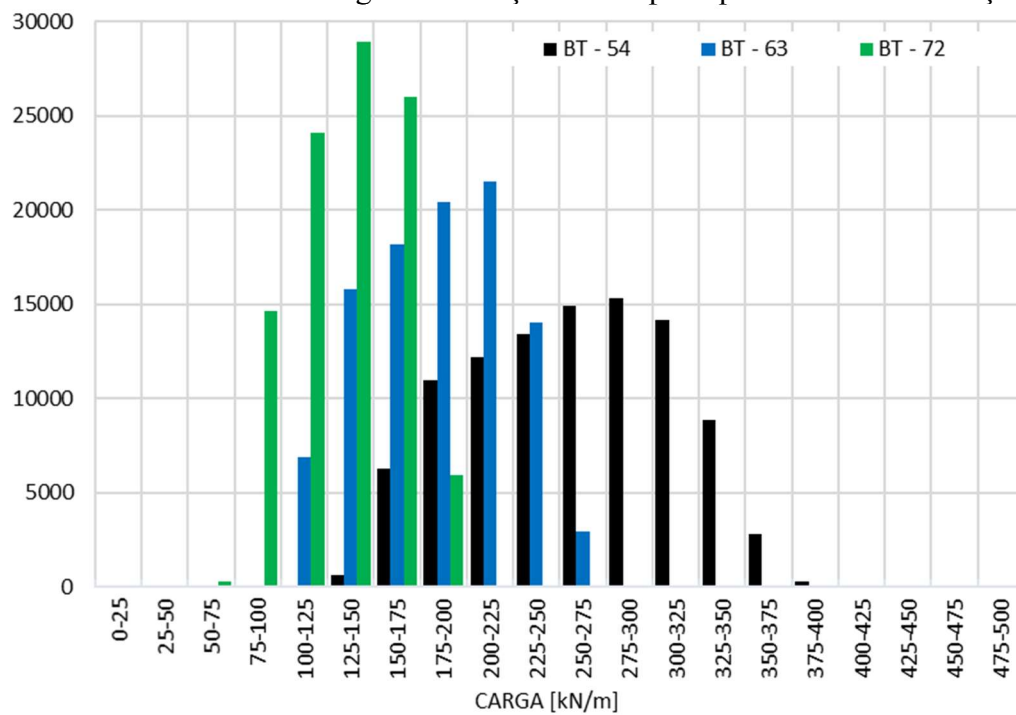
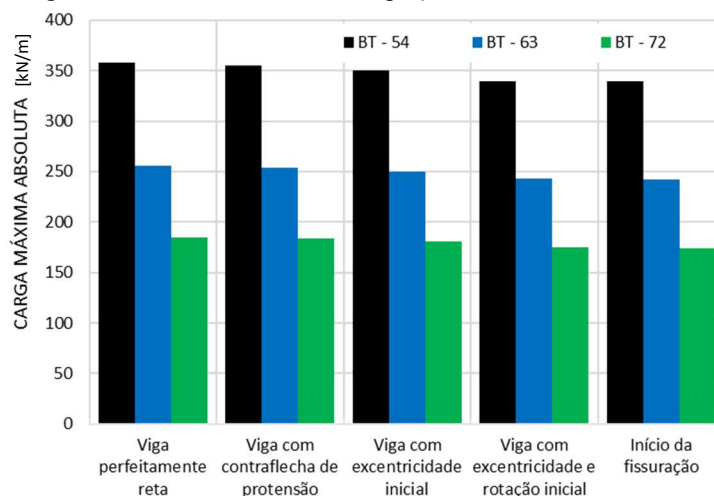


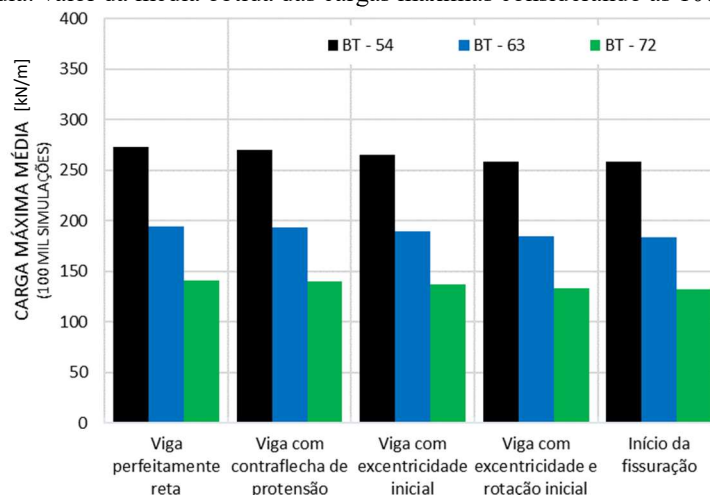


Figura 68 – Carga máxima obtida das análises das vigas das vigas BT-54, BT-63 e BT72

(a) Carga absoluta: valor máximo da equação com os dados iniciais sem variação



(b) Carga média: valor da média obtida das cargas máximas considerando as 100 mil simulações



Fonte: Autor (2019)

A partir dos resultados obtidos é possível observar que as propriedades da seção transversal é fato de extrema importância na estabilidade lateral de vigas pré-moldadas. Quando analisada a influência da mesa superior da viga, de forma a modificar a esbeltez e o momento de inércia da mesma, além da significativa redução nos valores de carga crítica é possível observar a grande influência no estado de início da fissuração, pois nesta situação, além da modificação da carga crítica há uma modificação no ângulo crítico do início de fissuração, o que não foi significativo nas demais análises. De forma que, quanto menor a mesa superior, maior o ângulo do início de fissuração.

O mesmo ocorre quando analisam-se as três seções transversais distintas, apesar das três vigas apresentarem momento de inércia em relação ao eixo Y semelhantes: quanto maior a altura da viga, menor é a carga crítica, isso ocorre devido ao fato do centro de massa ser mais alto o que torna o braço de alavanca para o tombamento maior, sendo necessário uma carga menor para que ocorra o tombamento da mesma. Além da diminuição da carga crítica, as vigas mais altas apresentam um ângulo do início de fissuração menor do que as vigas de menor altura, apesar da largura da mesa superior ser a mesma.

## 6.9 Resumo dos resultados

Na Tabela 12 são apresentados os valores obtidos nas análises realizadas, o valor denominado absoluto corresponde ao valor obtido pelas fórmulas considerando os dados iniciais, e a média é o valor médio obtido considerando as 100 mil simulações. A redução no valor da carga crítica média em relação carga absoluta é de aproximadamente 24%, exceto para as simulações onde a rigidez a rotação do apoio é mantida constante, nessa situação a diferença é inferior a 1%. Por isso, essa considerável redução se deve principalmente a variabilidade aplicada ao valor da rigidez do apoio.

Nessa análise foi possível observar que, há redução da carga crítica com:

- Aumento da excentricidade inicial da viga;
- Aumento da rotação inicial da viga;
- Diminuição da resistência do concreto;
- Aumento da contraflecha devido a força de protensão;
- Diminuição da rigidez a rotação do aparelho de apoio;
- Diminuição da largura da mesa superior e consequente diminuição do momento de inércia lateral da viga;
- Aumento da altura da seção transversal da viga.

Assim, considerando a equação com excentricidade e rotação inicial, é possível fazer as observações listadas a seguir.

Em relação a excentricidade inicial de  $L/1000$  o aumento dessa excentricidade para os valores de  $L/500$ ,  $L/250$  e  $L/125$  provoca uma redução na carga crítica média de aproximadamente 1%, 3% e 7%, respectivamente. Com relação ao ângulo de rotação crítico de tombamento houve um aumento de 11%; 28% e 52%, respectivamente.

O aumento da rotação inicial para  $1,0^\circ$  e  $3,0^\circ$  em relação ao valor base de  $0,5^\circ$ , provoca uma redução de 4% e 9% na carga crítica média de tombamento, além de um aumento no ângulo médio de tombamento na ordem de 27% e 47%, respectivamente.

Considerando a resistência a compressão do concreto de 50 MPa, 75 MPa e 100 MPa, houve um aumento na carga crítica média de tombamento de 9% e 17%, respectivamente, em relação ao primeiro valor. Já a variação do ângulo de tombamento é pequena, inferior a um aumento de 3% para a resistência de 100 MPa

Para a análise da rigidez a rotação do apoio, foram considerados elastômeros com altura de 73 mm, 98 mm e 123 mm, o que resultou nas rigidezes a rotação de: 33,4 MNm/rad, 12,4 MNm/rad e 5,9 MNm/rad, respectivamente. A redução da carga crítica média de tombamento é da ordem de 42% e 62%, para a redução na rigidez a rotação do apoio de 63% e 82%, respectivamente. Já o aumento do ângulo de tombamento médio é inferior a 3%, para os casos analisados.

Para as três seções transversais analisadas, quando há uma redução de 50% na largura da mesa superior, ocorre uma redução na carga crítica de tombamento na ordem de 33%, acompanhada de uma redução no ângulo crítico de tombamento de aproximadamente 4%. Quando o comprimento da mesa superior se iguala a espessura da alma, em relação a seção original, há redução na ordem de 41% da carga crítica média de tombamento, e de 6% no ângulo crítico de tombamento.

Considerando as seções BT-54, BT-63 e BT-72, o aumento da altura das vigas resulta em uma redução na carga crítica de aproximadamente 29% e 48%, respectivamente, em relação a primeira seção. Porém o ângulo crítico de tombamento apresenta uma redução aproximada de 1% para os casos analisados.

Considerando apenas a contraflecha devido a protensão, para os valores de força de 7818,8 kN, 17818,8 kN e 27818,8 kN, respectivamente, observa-se uma redução inferior a 2,5% para os valores de carga crítica absolutos e insignificante para os valores médios.

Nas análises desenvolvidas, observa-se que o ângulo de fissuração apenas é efetivamente influenciado pelas propriedades da seção transversal da viga, de modo que para a viga BT-54 com a mesa superior de 1,067 m, independente da variação dos demais parâmetros, o ângulo crítico de início da fissuração da viga é de aproximadamente 0,16 radianos. Isso pode ser explicado levando-se em conta que a posição do centro de gravidade da viga, os momentos de inércia e demais propriedades relacionadas a seção transversal da viga apresentam maior influência para o início da fissuração que o valor da carga aplicada em si.

Quando há a redução de 50% da largura da mesa superior da viga, há um aumento no ângulo crítico do início de fissuração da ordem de 15%. Quando o comprimento da mesa superior se iguala a espessura da alma, o aumento no ângulo do início da fissuração é superior a 300% em relação ao ângulo da seção completa.

Comparando a BT-54, BT-63 e BT-74, com o aumento da altura da viga há uma redução no ângulo de início de fissuração. A redução é da ordem de 18% para BT-63 e de 31% para BT-72 quando comparadas a BT-54.

Além disso, em algumas situações, o ângulo crítico de tombamento é superior ao ângulo médio do início de fissuração, o que indica que a viga tende a fissurar antes de tombar. Ou seja, para determinados parâmetros o caso crítico de instabilidade seria o início da fissuração da viga, e não o tombamento propriamente dito.

Tabela 12 – Resumo dos valores obtidos nas análises realizadas

Variável analisada		Viga perfeitamente reta	Viga com contraflecha de protensão	Viga com excentricidade inicial		Viga com excentricidade e rotação inicial		Início da fissuração	
		q [kN/m]	q [kN/m]	$\phi$ [rad]	q [kN/m]	$\phi$ [rad]	q [kN/m]	$\phi$ [rad]	q [kN/m]
BASE	Absoluto	358.38	355.08	0.11028	350.28	0.16041	339.87	0.16642	339.85
	Média	273.01	270.58	0.11986	265.71	0.16545	258.49	0.16642	258.40
EXCENTRICIDADE INICIAL	L/1000	Absoluto	358.38	355.08	0.11028	350.28	0.16041	339.87	339.85
		Média	272.85	270.42	0.12214	265.67	0.16653	258.24	258.22
	L/500	Absoluto	358.38	355.08	0.13936	345.58	0.17544	336.53	336.47
		Média	273.50	271.08	0.15333	262.15	0.18441	255.74	255.56
	L/250	Absoluto	358.38	355.08	0.17444	338.22	0.19850	330.59	329.79
		Média	272.33	270.91	0.19236	255.49	0.21218	250.13	248.97
	L/125	Absoluto	358.38	355.08	0.21855	326.77	0.23359	320.50	316.87
		Média	272.92	270.50	0.24060	245.03	0.25184	240.66	236.28
	ANGULO DE ROTAÇÃO INICIAL	0.5°	Absoluto	358.38	355.08	0.11028	350.28	0.16041	339.87
			Média	273.01	270.58	0.11986	265.71	0.16545	258.49
		1.5°	Absoluto	358.38	355.08	0.11028	350.28	0.20552	324.93
			Média	273.01	270.59	0.12007	265.69	0.20880	247.43
		3.0°	Absoluto	358.38	355.08	0.11028	350.28	0.23960	307.30
			Média	273.06	270.64	0.11984	265.84	0.24217	234.35
Fck	50 MPa	Absoluto	402.92	399.65	0.11530	393.07	0.16341	381.75	381.73
		Média	307.64	305.25	0.12573	298.89	0.16831	290.97	290.85
	75 MPa	Absoluto	442.63	439.38	0.12031	431.10	0.16542	419.01	419.00
		Média	337.01	334.64	0.13057	326.77	0.17085	318.44	318.29
	100 MPa	Absoluto	472.93	469.70	0.12332	460.04	0.16642	447.40	447.40
		Média	359.44	357.09	0.13432	347.97	0.17287	339.38	339.19
FORÇA DE PROTENSÃO	7818.8 kN	Absoluto	358.38	355.08	0.11028	350.28	0.16041	339.87	339.85
		Média	273.28	273.28	0.12003	265.96	0.16549	258.74	0.17490
	17818.8 kN	Absoluto	358.38	350.91	0.11028	350.28	0.16041	339.87	0.15540
		Média	273.06	273.06	0.12001	265.74	0.16552	258.53	0.17490
	27818.8 kN	Absoluto	358.38	346.79	0.11028	350.28	0.16041	339.87	0.14537
		Média	273.13	273.13	0.12011	265.91	0.16555	258.59	0.17490
RIGIDEZ DA ALMOFADA	61 × 36 × 7.3	Absoluto	358.38	355.08	0.11028	350.28	0.16041	339.87	339.85
		Média	357.30	354.82	0.10847	349.17	0.16008	338.92	0.16795
	61 × 36 × 9.8	Absoluto	209.96	206.81	0.13234	203.50	0.17143	198.23	0.16141
		Média	209.30	206.93	0.13003	202.83	0.17043	197.70	0.16502
	61 × 36 × 12.3	Absoluto	138.47	135.48	0.15239	133.16	0.18447	130.15	0.15640
		Média	138.07	135.83	0.14960	132.76	0.18141	129.91	0.16546
	5 × K <sub>0</sub>	Absoluto	828.91	825.48	0.08322	817.74	0.15038	789.45	0.16943
		Média	826.48	823.91	0.08199	815.26	0.15062	787.17	0.17074
BT - 54	MS = 1.067 m	Absoluto	358.38	355.08	0.11028	350.28	0.16041	339.87	0.16642
		Média	273.01	270.58	0.11986	265.71	0.16545	258.49	0.16642
	MS = 0.5335 m	Absoluto	238.20	236.37	0.09525	234.11	0.15439	226.44	0.19299
		Média	182.76	181.40	0.10238	179.05	0.15764	173.51	0.19406
	MS = 0.153 m	Absoluto	208.24	206.13	0.09023	204.98	0.15239	198.05	0.64913
		Média	160.43	158.86	0.09704	157.40	0.15554	152.38	0.70312
BT - 63	MS = 1.067 m	Absoluto	255.67	253.95	0.10828	250.13	0.15941	242.59	0.13535
		Média	194.76	193.49	0.11728	189.81	0.16422	184.50	0.13641
	MS = 0.5335 m	Absoluto	169.98	169.04	0.09224	167.18	0.15339	161.65	0.15540
		Média	130.55	129.85	0.10021	127.98	0.15680	123.99	0.15584
	MS = 0.153 m	Absoluto	148.70	147.66	0.08823	146.47	0.15239	141.48	0.54386
		Média	114.56	113.77	0.09499	112.53	0.15481	108.86	0.57636
BT - 72	MS = 1.067 m	Absoluto	184.38	183.42	0.10527	180.54	0.15840	175.02	0.11530
		Média	140.87	140.16	0.11450	137.42	0.16290	133.52	0.11529
	MS = 0.5335 m	Absoluto	122.59	122.07	0.09124	120.65	0.15339	116.61	0.13034
		Média	94.24	93.85	0.09814	92.49	0.15600	89.54	0.12999
	MS = 0.153 m	Absoluto	107.32	106.76	0.08622	105.76	0.15139	102.13	0.45865
		Média	82.68	82.26	0.09310	81.29	0.15413	78.60	0.47403

Fonte: Autor (2019)

---

# CAPÍTULO 7

## CONCLUSÃO

---

### 7.1 Conclusão

O desenvolvimento deste trabalho se justifica pelos diversos registros de acidentes relacionados a instabilidade de vigas pré-moldadas sobre aparelhos de apoio, causando o tombamento e colapso das mesmas. Esse trabalho foi realizado com o objetivo de desenvolver uma forma analítica que permita analisar a segurança ao tombamento de vigas pré-moldadas em sua fase de montagem, quando está simplesmente apoiada sobre elastômeros, enquanto as demais ligações não foram ainda efetivadas no período de montagem.

São apresentadas equações que possibilitam a definição do comportamento não linear de vigas sobre aparelhos de apoio. Desta forma, é possível obter o instante do início do *lift-off*, da fissuração e da carga máxima suportada pela viga antes de tombar. Para o desenvolvimento dessas equações são considerados quatro casos: a viga perfeitamente reta, a viga com excentricidade inicial, a viga com excentricidade e rotação inicial e a viga com contraflecha de protensão sem excentricidade e sem rotação.

Os resultados mostram que o ângulo crítico do *lift-off* é o menor dentre os ângulos críticos encontrados, evidenciando que sua verificação é de suma importância. Os ângulos determinados nos estudos de caso mostram que o fenômeno ocorre para giros muito menores que o de fissuração ou de tombamento, dando indícios de que o *lift-off* pode ocorrer para níveis de carregamento da ordem do peso próprio.

No estudo de caso realizado no Capítulo 4 e nas análises paramétricas do Capítulo 6 são encontrados valores de carga crítica muito superiores ao peso próprio da viga analisada. Porém, na verificação do *lift-off* da Seção 4.3.1, observa-se que o ângulo da perda de contato é muito pequeno, o que resulta em uma probabilidade alta de levantamento da borda tracionada superior a 30% para excentricidade inicial de  $L/250$  e superior a 70% para excentricidade inicial de  $L/125$ .

Em comparação com os resultados analíticos da literatura, a equação linear proposta para cálculo da carga crítica para a viga perfeitamente reta, apresentou um resultado muito próximo a média, considerando todas as equações analisadas.

A equação não linear que considera a excentricidade inicial, apresentou resultados próximos aos resultados obtidos pela utilização da equação linear em conjunto com a equação de Southwell (1932) utilizando o fator  $n$  igual a 2. Observa-se ainda a vantagem da equação não linear proposta neste trabalho permitir obter o comportamento pós-pico da viga. Além disso, é um avanço o fato da formulação possibilitar a consideração tanto do deslocamento quanto do giro da viga, o que não ocorre nas demais formulações da literatura.

O modelo numérico desenvolvido no programa computacional ANSYS é comparado com os resultados numéricos do Lee (2017), mostrando que os resultados obtidos são bastante próximos.

Nota-se que, para os resultados analíticos obtidos e os resultados do modelo numérico, uma melhor estimativa da rigidez a rotação da almofada é imprescindível. Quando a rigidez a rotação foi calculada pelas equações usuais, ou obtida pelo modelo numérico considerando a fase linear, os resultados de carga em função do deslocamento, pelas soluções analíticas, são muito superiores ao do modelo numérico. Entretanto, conhecer melhor o valor da rigidez a rotação resulta em valores muito próximos entre as soluções analítica e numérica. Uma solução para melhor aproximação entre os resultados foi utilizar o valor da rigidez do apoio igual a rigidez secante do modelo do Ansys.

Na análise paramétrica fica evidente a redução da carga crítica de tombamento de vigas pré-moldadas com:

- Aumento da excentricidade inicial da viga;
- Aumento da rotação inicial da viga;
- Diminuição da resistência do concreto;
- Aumento da contraflecha devido a força de protensão;
- Diminuição da rigidez a rotação do aparelho de apoio;
- Diminuição da largura da mesa superior e consequente diminuição do momento de inércia lateral da viga;
- Aumento da altura da seção transversal da viga.

Nesta análise paramétrica, constatou-se que a variabilidade aplicada para o valor da rigidez a rotação, resultou em uma redução média de 24% entre o valor de carga absoluta obtido e o valor de carga médio das 100 mil simulações. Portanto, uma boa estimativa desta rigidez é muito importante na resposta estrutural ao tombamento.

A contraflecha devido a força de protensão isoladamente resultou em uma redução da carga crítica insignificante em valores médios e inferior a 2,5% em valores absolutos. A presença de excentricidade inicial causou redução na carga máxima média de tombamento de até 7% e a rotação inicial de até 9% para os valores analisados.

O aumento da resistência a compressão do concreto apresentou um aumento na carga de tombamento na ordem de 9% e 17% para os valores de 75 MPa e 100 MPa, respectivamente, quando comparados aos valores de 50 MPa.

Tanto a rigidez a rotação do apoio como a seção transversal foram os fatores de maior influência na carga crítica de tombamento. A diminuição da rigidez a rotação do apoio resultou em redução média de 42% a 62% para os valores analisados. Já a redução da mesa superior da viga reduziu em 33% a carga de tombamento quando a redução da mesa foi de 50% e em 41% quando a mesa superior se igualou a espessura da alma. O aumento da altura da viga reduziu a carga de tombamento em 29% e 48% para as seções BT-63 e BT-72, respectivamente, em comparação a BT-54.

Em relação ao ângulo crítico de tombamento, a excentricidade inicial e a rotação inicial provocam aumentos significativos em seus valores, atingindo um aumento de 52% para os



valores analisados de excentricidade inicial e de 47% para os valores de rotação inicial. Para os demais parâmetros analisados, o ângulo crítico médio de tombamento teve variação inferior a 10%.

Nesta análise também é possível verificar que a carga de início da fissuração é bem próxima a carga crítica de tombamento da viga. Entretanto, o ângulo de início de fissuração se mantém muito próximo a 0,16 rad para todas as análises em que a seção transversal da viga PCI BT-54 tem mesa superior igual a 1,067 m de largura. Porém, tal ângulo é altamente sensível às variações das propriedades da seção transversal da viga. Desta forma, constata-se que a rigidez à flexão lateral é o principal parâmetro que governa a fissuração da viga.

Quando há a diminuição da largura da mesa superior da viga, o ângulo do início de fissuração é aproximadamente 15% superior ao ângulo obtido para o caso da da seção transversal completa, quando a largura da mesa superior é igual a 50% do valor original. O aumento desse ângulo é superior a 300% quando o comprimento da mesa superior possui a mesma espessura da alma da viga.

Entretanto, comparando vigas com mesmo momento de inércia lateral, mas com alturas diferenciadas, quanto maior a altura menor é o ângulo do início da fissuração. Essa redução é da ordem de 18% para BT-63 e de 31% para BT-72 quando comparadas a BT-54.

Conclui-se que para a viga PCI BT-54 com mesa superior igual a 1,067 m de largura, com as mesmas condições de apoio e comprimento, o ângulo de início de fissuração é aproximadamente 0,16 radianos, não sendo praticamente influenciado nas análises pelas imperfeições da viga. É importante ressaltar que em alguns casos o ângulo crítico de tombamento foi superior ao ângulo de fissuração, nestes casos o que caracteriza a instabilidade da viga é o início da fissuração, de forma que a carga crítica é menor que a carga máxima para o tombamento.

Finalmente, é evidente a importância da análise da segurança de vigas pré-moldadas quanto a instabilidade lateral na fase de montagem da estrutura. A estabilidade das vigas é altamente dependente das propriedades físicas e geométricas da viga e do aparelho de apoio, sendo as imperfeições geométricas da viga fatores de grande influência na sua condição de segurança.

A rigidez a rotação do apoio se mostrou crucial para estabilidade lateral da viga, assim como a seção transversal e as imperfeições geométricas, excentricidade e rotação iniciais, são de suma importância nessa verificação. Assim, tanto as características geométricas da seção transversal como o conhecimento e quantificação das imperfeições geométricas, como excentricidade e rotação iniciais, são de suma importância para as análises de tombamento.

## 7.2 Recomendações para trabalhos futuros

Neste trabalho ficou evidente a importância da definição adequada da rigidez a rotação do apoio. Além disso, a verificação do *lift-off* é crucial para o correto dimensionamento do aparelho de apoio e para segurança da viga na fase de montagem.

Desta forma, sugere-se como recomendação para trabalhos futuros a definição de uma solução analítica que considere os efeitos da perda de contato do aparelho de apoio, bem como propor equações para verificação do *lift-off* que considerem o comportamento não linear do elastômero. Além disso, faz-se importante desenvolver fórmulas para definição da rigidez a rotação do apoio de forma que as respostas das soluções analíticas, numéricas e experimentais se aproximem melhor.

Outro estudo sugerido é o desenvolvimento de equações que considerem a fissuração da viga no cálculo da carga máxima de instabilidade.

---

## REFERÊNCIAS

---

BAIRÁN, J. M.; CLADERA, A. Collapse of a precast concrete beam for a light roof. Importance of elastomeric bearing pads in the element's stability. *Engineering Failure Analysis*, v. 39, p. 188-199, Apr. 2014.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.02.001>

BURGOYNE, C. J.; STRATFORD, T. J. Lateral instability of long-span prestressed concrete beams on flexible bearings. *The Structural Engineer*, v. 79, n. 6, p. 23-26, Mar. 2001.

CARDOSO, M. T. S. A. Instabilidade lateral de vigas pré-moldadas sobre apoios elastoméricos considerando o efeito das imperfeições geométricas. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, FECIV, Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia. 2017.

COJOCARU, R. Lifting Analysis of Precast Prestressed Concrete Beams. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, VA, p. 86. 2012.

CONSOLAZIO, G. R.; HAMILTON, H. R. Lateral bracing of long-span Florida bulb-tee girders. University of Florida, Department of Civil & Coastal Engineering. Florida, p. 91. 2007.

CONSOLAZIO, G. R.; HAMILTON, H. R.; BEERY, M. S. Experimental validation of bracing recommendations for long-span concrete girders. University of Florida, Civil and Coastal Engineering. Flórida. 2012.

HARPER, Z. S.; CONSOLAZIO, G. R. Calculation method for quantifying axial and roll stiffnesses of rectangular steel-reinforced elastomeric bridge bearing pads. *Journal of the Transportation Research Board*, n. 2331, p. 3-13, 2013.  
<https://doi.org/10.3141/2331-01>

HURFF, J. B. Stability of precast prestressed concrete bridge girders considering imperfections and thermal effects. Georgia Institute of Technology. Georgia, EUA, p. 446. 2010. (Tese).

HURFF, J. B.; KAHN, L. F. Rollover stability of precast, prestressed concrete bridge girders with flexible bearings. *PCI Journal*, v. 57, n. 4, p. 96-107, 2012.

<https://doi.org/10.15554/pcij.09012012.96.107>

IMPER, R. R.; LASZLO, G. Handling and shipping of long span bridge beams. *PCI Journal*, v. 32, n. 6, p. 86-101, nov.-dec. 1987.  
<https://doi.org/10.15554/pcij.11011987.86.101>

JCSS - JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY. Probabilistic Model Code Part 3: Resistance Models, Concrete Properties. [S.l.]. 2000.

KRAHL, P. A.; CARRAZEDO, R.; EL DEBS, M. K. Rollover stability of precast concrete beams supported by elastomeric bearing pads. *IBRACON de Estruturas e Materiais*, São Paulo, v. 20, n. 6, p. 1192-1204, Novembro 2017.  
<https://doi.org/10.1590/s1983-41952017000600005>

KRAHL, P. A.; CARRAZEDO, R.; EL DEBS, M. K. Analytical solutions for rollover instability of concrete beams on elastomeric bearing pads. *Engeneering Structures*, v. 174, p. 154-164, 2018.  
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.07.041>

LEE, J. H. Evaluation of the lateral stability of precast beams on an elastic bearing support with a consideration of the inicial sweep. *Engineering Structures*, v. 143, n. 1, p. 101-112, 2017.  
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.04.006>

LEE, J. H. et al. Rollover instability of precast girders subjected to wind load. *Magazine of Concrete Research*, v. 69, n. 2, p. 68-83, 2017.  
<https://doi.org/10.1680/jmacr.16.00187>

LEE, J. H.; KALKAN, I. Analysis of thermal environmental effects on precast, prestressed concrete bridge girders: temperature differentials and thermal deformations. *Advances in Structural Engineering*, v. 15, n. 3, p. 447-459, 2012.  
<https://doi.org/10.1260/1369-4332.15.3.447>

LIMA, M. C. V. D. Instabilidade lateral de vigas pré-moldadas em regime de serviço e durante a fase transitória. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Paulo. 1995.

LIMA, M. C. V. D. Contribuição ao estudo da instabilidade lateral de vigas pré-moldadas. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos. 2002.

MAST, R. F. Lateral stability of long prestressed concrete beams - Part 1. *PCI Journal*, v. 34, n. 1, jan.-feb. 1989.  
<https://doi.org/10.15554/pcij.01011989.34.53>

MAST, R. F. Lateral stability of long prestressed concrete beams - Part 2. *PCI Journal*, v. 38, n. 1, jan.-feb. 1993.  
<https://doi.org/10.15554/pcij.01011993.70.88>

OESTERLE, R. G. et al. Investigation of red mountain freeway bridge girder collapse. Arizona Department of Transportation, Bridge Group. Skokie, Illinois, p. 67. nov. 2007. (CTL Group Project No. 262291).

PCI - PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. PCI Bridge Design Manual. Chicago, USA. 2003.

PLAUT, R. H.; MOEN, C. D. Stability of unbraced concrete beams on bearing pads including wind loading. *Journal of Structural Engineering*, v. 69, p. 246-254, jun. 2014. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.03.024>

SOUTHWELL, R. V. On the analysis of experimental observations in problems of elastic stability. *Proc. Roy. Soc., London*, v. 135, p. 601-616, 1932. <https://doi.org/10.1098/rspa.1932.0055>

STRATFORD, T. J.; BURGOYNE, C. J. Lateral stability of long precast concrete beams. *Proceedings of The Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings*, v. 134, n. 2, p. 169-180, Jan 1999. <https://doi.org/10.1680/istbu.1999.31383>

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. *Mecânica dos Sólidos*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., v. 1 e 2, 1984.

TREMBLAY, R.; MITCHELL, D. Collapse during Construction of a Precast Girder Bridge. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, v. 20, n. 2, p. 113-125, may. 2006. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0887-3828\(2006\)20:2\(113\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0887-3828(2006)20:2(113))

YAZDANI, N.; EDDY, S.; CAI, C. S. Effect of bearing pads on precast prestressed concrete bridges. *Journal of Bridge Engineering*, v. 5, p. 224-232, 2000. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2000\)5:3\(224\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2000)5:3(224))