

KASSANDRA ELENA INOÑAN ALFARO

Aplicações da Extensão de Zadeh na Dinâmica do
HIV com Retardo Fuzzy sob Tratamento
Antirretroviral



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2019

KASSANDRA ELENA INOÑAN ALFARO

Aplicações da Extensão de Zadeh na Dinâmica do HIV com Retardo Fuzzy sob Tratamento Antirretroviral

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais e Análise Numérica.

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

UBERLÂNDIA - MG
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

A385a Alfaro, Kassandra Elena Inoñan, 1993-
2019 Aplicações da Extensão de Zadeh na dinâmica do HIV com retardo
fuzzy sob tratamento antirretroviral [recurso eletrônico] / Kassandra
Elena Inoñan Alfaro. - 2019.

Orientadora: Rosana Sueli da Motta Jafelice.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2019.369>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Matemática. 2. Biomatemática. 3. HIV (Vírus). 4. Conjuntos difusos. I. Jafelice, Rosana Sueli da Motta, 1964- (Orient.) II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Maria Salete de Freitas Pinheiro - CRB6/1262



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 FACULDADE DE MATEMÁTICA
 PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
 Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Kassandra Elena Inoñan Alfaro.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11712MAT005.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Equações Diferenciais e Análise Numérica.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Aplicações da Extensão de Zadeh na Dinâmica do HIV com Retardo Fuzzy sob Tratamento Antirretroviral.

ORIENTADOR(A): Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 26 de Fevereiro de 2019, às 14hs, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice
 UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros
 Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. César Guilherme de Almeida
 UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia-MG, 26 de Fevereiro de 2019.

Dedicatória

Dedico este trabalho a meus pais, Carmen e Pedro, que fizeram o possível e o impossível para que eu esteja aqui nesse momento.

Agradecimentos

Agradeço:

- Em primeiro lugar, a Deus, pela força e valentia durante toda esta caminhada.
- Aos meus pais, Carmen e Pedro, e a meus irmãos, Pedro e Alonso, pelo amor e apoio incondicional.
- À minha família em geral, por sempre estar ao meu lado me apoiando.
- A meu namorado, Luis, pelo amor e apoio em todos os momentos que esteve presente.
- À minha orientadora Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice, por ter aceitado me orientar durante meu mestrado, por sua dedicação, pela paciência, por seus conselhos e por seus conhecimentos transmitidos durante este período de mestrado.
- À professora Dra. Ana Maria Amarillo Bertone pelo apoio e pelos conhecimentos compartilhados durante a realização deste trabalho, que durante esta trajetória, por alguns meses, eu poderia denominar minha orientadora.
- Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da FAMAT/UFU, pela oportunidade de ser parte deste programa. Aos professores que me ensinaram durante o mestrado: Dr. Marcio Colombo, Dr. Jean Venato, Dr. Mario Henrique, Dra. Rosana Jafelice, Dr. Luis Renato e Dr. Geraldo Botelho pelos ensinamentos enriquecedores e conhecimento adquirido.
- Aos meus amigos do mestrado que fizeram parte de minha vida durante esta etapa: Daniel, Fidel, Ivan, Gabriel, Luis A., Luis M., Rejiane, Telmo.
- Aos meus amigos Nhatali, Eduard, Javier, Josimar, Sirlene e Eduarda que fizeram a minha estadia em Uberlândia a melhor, e por serem os amigos que foram ficando e se transformaram na minha segunda família.
- À CAPES pela bolsa de mestrado concedida.

INOÑAN, A. K. E. *Aplicações da Extensão de Zadeh na Dinâmica do HIV com Retardo Fuzzy sob Tratamento Antirretroviral*. 2019. 66p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Os modelos matemáticos para fenômenos biológicos são geralmente carregados de incertezas. Um modo de determinar soluções destes modelos matemáticos, incluindo estas incertezas, é pelo princípio de extensão de Zadeh que faz parte da teoria dos conjuntos fuzzy. Neste contexto, o objetivo geral deste trabalho é apresentar aplicações do princípio de extensão de Zadeh unidimensional e bidimensional para dois modelos matemáticos que simulam a dinâmica do HIV com retardo sob tratamento antirretroviral em indivíduos soropositivos. Estas aplicações são apresentadas através das soluções fuzzy dos modelos propostos da dinâmica do HIV, em que o retardo e a taxa de mortalidade do vírus são considerados como números fuzzy. No primeiro modelo, considera-se o retardo e a taxa de mortalidade do vírus como números fuzzy correlacionados via uma função injetora e monótona, o que facilita a obtenção de uma solução fuzzy do modelo apresentado pois torna o princípio da extensão de Zadeh bidimensional em um tipo unidimensional. A função que correlaciona os parâmetros fuzzy é estimada de duas formas: a primeira é obtida através do método de inferência de Mamdani e a segunda através do método de inferência de Takagi-Sugeno, o que motivou um estudo comparativo das soluções em termos do erro absoluto. No outro modelo é obtida, numericamente, uma solução fuzzy através de um algoritmo, desenvolvido neste trabalho, considerando no modelo o retardo e a taxa de mortalidade do vírus como números fuzzy triangulares não fazendo uso de uma função que os correlacione.

Palavras-chave: Dinâmica do HIV. Retardo. Princípio de Extensão de Zadeh Unidimensional. Princípio de Extensão de Zadeh Bidimensional. Número Fuzzy f -Correlacionados.

INOÑAN, A. K. E. *Zadeh's Extension Applications in HIV Dynamics with Fuzzy Delay under Antiretroviral Treatment*. 2019. 66p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

Mathematical models as applied to biological phenomena are usually involved with uncertainties. One way of determining solutions of such mathematical models, including their uncertainties, is by applying the Zadeh's extension principle, which is part of the fuzzy set theory. In this context, the general objective of this research is to present applications of the one-dimensional and two-dimensional Zadeh's extension principle on two mathematical models that simulate the dynamics of HIV antiretroviral treatment, with delay, in seropositive individuals. These applications are presented through fuzzy solutions of the proposed models of HIV dynamics, in which the delay and death rate of the virus are considered as fuzzy numbers. In the first model, the delay and the mortality rate of the virus are considered as fuzzy numbers correlated through an injective and monotonous function which facilitates the attainment of a fuzzy solution of the presented model, since it turns the two-dimensional Zadeh's extension principle into an one-dimensional type. The function that correlates the fuzzy parameters is estimated by two different methods, the first is Mamdani inference method and the second is Takagi-Sugeno inference method, which motivated a comparative study of the solutions in terms of the absolute error. In the other model, a numerical fuzzy solution is obtained through an algorithm developed in this work, considering in the model as triangular fuzzy numbers, the delay and the mortality rate of the virus that do not use a function that correlates them.

Keywords: HIV Dynamics. Delay. One-dimensional Zadeh's Extension Principle. Two-dimensional Zadeh's Extension Principle. f -Correlated Fuzzy Numbers. .

Lista de Figuras

1.1	Conjunto fuzzy A .	5
1.2	Funções de pertinência para o conjunto fuzzy A dos números próximos de 2.	6
1.3	Representação das operações dos conjuntos fuzzy através das funções de pertinência.	7
1.4	Função de pertinência do conjunto fuzzy A .	10
1.5	Número fuzzy triangular.	11
1.6	Número fuzzy trapezoidal.	12
1.7	Número fuzzy em forma de sino.	13
1.8	Função semicontínua superiormente no ponto $x_0 = 1$.	14
1.9	Número fuzzy A .	15
1.10	Conjunto $\hat{f}(A)$.	16
1.11	Produto cartesiano fuzzy de A e B .	17
1.12	Variável linguística.	21
1.13	Sistema baseado em regras fuzzy.	22
1.14	Método de inferência de Mamdani com composição max - min.	23
1.15	Método de inferência de Takagi-Sugeno.	24
1.16	Funções de pertinência da quantidade de bom material (M).	25
1.17	Funções de pertinência da qualidade de fabricação (F).	26
1.18	Funções de pertinência da qualidade de um notebook.	26
1.19	Método de Mamdani para a qualidade de um notebook.	27
2.1	Números fuzzy completamente correlacionados.	30
2.2	A e B f -correlacionados.	31
2.3	A e B f -correlacionados.	33
2.4	Função de pertinência do princípio de Extensão de Zadeh do par (A, B) , conjuntos fuzzy da Figura 2.3, utilizando a função composta $F \circ \phi$ sendo f -correlacionados.	34
3.1	Estrutura do HIV [33].	37
3.2	Representação do momento de reprodução do HIV [8].	37
3.3	Esquema da história natural da infecção do HIV [11], [34], [37] e [19].	38
3.4	Curvas determinísticas da equação (3.13) para $\tau = 0.08$ ($u = 2$), $\tau = 0.5$ ($u = 3$) e $\tau = 1$ ($u = 9$).	41
3.5	Funções de pertinência do retardo (τ).	42
3.6	Funções de pertinência da taxa de mortalidade do vírus (u).	42
3.7	Ajuste de curva da taxa de mortalidade do vírus.	43
3.8	Número Fuzzy Γ .	43
3.9	Γ e U números fuzzy u -correlacionados.	44
3.10	Solução fuzzy da equação (3.8) para a carga viral, para t variando de 0 a 2 dias, com Γ e U números fuzzy u -correlacionados.	45
3.11	Funções de pertinência do retardo (τ) alto e baixo.	46
3.12	Taxa de mortalidade do vírus u em função do retardo τ .	47

3.13	Γ e U números fuzzy u -correlacionados.	48
3.14	Solução fuzzy da equação (3.8) para a carga viral, para t variando de 0 a 2 dias, com Γ e U números fuzzy u -correlacionados.	49
3.15	50
4.1	Taxas de infecção $\beta(t)$ em função do tempo obtido com o autômato celular para as três entradas.	54
4.2	Diagrama de dispersão das taxas de infecção ajustados em função do tempo para as três entradas.	54
4.3	Solução numérica do sistema não linear (4.2).	56
4.4	Soluções numéricas do sistema não linear (4.2) para diferentes valores do retardo τ no intervalo $[0.08, 1]$	56
4.5	Produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$	57
4.6	Produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$ e α -níveis.	58
4.7	Solução fuzzy do sistema (4.2) com os parâmetros fuzzy triangulares τ e u	59
4.8	Solução fuzzy do sistema sem retardo (4.1) com o parâmetro fuzzy triangular u	60
4.9	Comparação das soluções fuzzy dos sistemas (4.1) e (4.2).	61

Lista de Tabelas

1.1	Cidades e graus de radiação UV.	5
1.2	As funções de pertinência da união, intersecção dos conjuntos A e B (colunas 4 e 5 respectivamente) e na coluna 6 a função de pertinência do complemento de A	8
1.3	Regras fuzzy.	25
4.1	Entradas para o SBRF usado na simulação.	53
4.2	Saídas do SBRF e entradas do AC usada na simulação.	53

Lista de Símbolos

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathcal{U}	Conjunto universo.
$\{0, 1\}$	Conjunto contendo os elementos 0 e 1.
\mathcal{X}_A	Função característica do conjunto A .
μ_A	Função de pertinência do conjunto fuzzy A .
$[0, 1]$	Intervalo fechado com extremos. 0 e 1
$\mu_{A \cup B}$	Função de pertinência da união de conjuntos fuzzy A e B .
$\mu_{A \cap B}$	Função de pertinência da interseção de conjuntos fuzzy A e B .
$\mu_{A'}$	Função de pertinência do complemento do conjunto fuzzy A .
$[A]^\alpha$	α -nível do conjunto fuzzy A .
$[A]^0$	Nível zero do conjunto fuzzy A .
$\text{supp}(A)$	Suporte do conjunto fuzzy A .
$\overline{\text{supp}(A)}$	Fecho do suporte do conjunto fuzzy A .
(a, b, c)	Número fuzzy triangular com vértices a , b e c .
$\mu_{A \times B}$	Função de pertinência do produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy A e B .

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
Lista de Símbolos	xii
Introdução	1
1 Teoria dos Conjuntos Fuzzy	4
1.1 Conjuntos Fuzzy	4
1.2 Operações com Conjuntos Fuzzy	6
1.3 Normas Triangulares	8
1.4 α -Níveis de um Conjunto Fuzzy	9
1.5 Tipos Especiais de Conjuntos Fuzzy	10
1.6 Números Fuzzy	11
1.7 O Princípio de Extensão de Zadeh	15
1.8 Operações Aritméticas com Números Fuzzy	19
1.9 Variáveis Linguísticas	21
1.10 Sistema Baseado em Regras Fuzzy	21
2 Números Fuzzy f-Correlacionados	28
2.1 Distribuição de Possibilidade Conjunta	28
2.2 Números Fuzzy Completamente Correlacionados	29
2.3 Números Fuzzy f -Correlacionados	30
3 Dinâmica do HIV com Retardo sob Tratamento Antirretroviral com Dois Parâmetros Fuzzy Correlacionados	35
3.1 Preliminares	35
3.2 HIV	36
3.3 Modelo da Dinâmica do HIV com Retardo	39
3.4 Tratamento Antirretroviral com Inibidores da Protease	40
3.5 Método de Inferência de Mamdani	41
3.6 Método de Inferência de Takagi-Sugeno	45
3.7 Comparação dos Métodos de Inferência no Modelo Estudado através do Erro Absoluto	49

4	Dinâmica do HIV com Retardo sob Tratamento Antirretroviral com Dois Parâmetros Fuzzy	51
4.1	Modelo da Dinâmica do HIV com Retardo	51
4.2	Autômato Celular	52
4.3	Taxa de Infecção em Função do Tempo	53
4.4	Parâmetros da Equação Diferencial da Dinâmica do HIV com Retardo	55
4.5	Solução Fuzzy do Modelo da Dinâmica do HIV com Retardo	57
4.5.1	Simulação Numérica (Algoritmo)	58
4.5.2	Resultado	59
4.6	Solução Fuzzy da Dinâmica do HIV sem Retardo	60
4.7	Comparação entre os dois Modelos do HIV	60
5	Conclusões	62
	Referências Bibliográficas	64

Introdução

A biomatemática é uma interface entre a biologia e a matemática que aplica técnicas matemáticas ao estudo de processos biológicos. Fundamenta-se através de uma variedade de modelos matemáticos, alguns descritos por sistemas de equações diferenciais que contêm parâmetros incertos devido aos fenômenos biológicos estudados [23].

Uma metodologia que vem sendo utilizada para quantificar e caracterizar incertezas é baseada na teoria de conjuntos fuzzy, ferramenta matemática que está sendo aplicada em muitos contextos. Esta teoria foi proposta por Zadeh em 1965 [43] com o objetivo de fornecer um método de obtenção e manipulação de informações imprecisas que são típicas do pensamento e raciocínio humano. Nas últimas décadas, a teoria de conjuntos fuzzy tem demonstrado ter grande capacidade de propor soluções de aplicações em problemas da biomatemática, em particular, tem contribuído com respostas consistentes e significativas na modelagem matemática de fenômenos incertos. No entanto, Adlassing [1], Sanchez [38] e Sanchez e Bartolin [39] foram uns dos primeiros a estudar aplicações desta teoria em biomatemática, no diagnóstico médico.

Em 1975, Zadeh apresentou uma conceito importante da teoria dos conjuntos fuzzy, a saber, o princípio de extensão (veja [44]-[46]), também chamada "princípio de extensão de Zadeh", que consiste em obter conjuntos fuzzy a partir de um conjunto fuzzy dado e uma função definida entre seus universos. Em 1978, Zadeh introduziu em [47] o conceito de distribuição de possibilidade, em que conjuntos fuzzy podem ser descritos por um conjunto fuzzy multidimensional, surgindo então o conceito de números fuzzy completamente correlacionados. Em 2004, Fullér et al. [18] introduziram o conceito de números fuzzy completamente correlacionados através de uma distribuição de possibilidade conjunta, conceito também estudado por outros autores, por exemplo, Simões [41] em 2017. Cabral et al. [9], em 2015, introduziram o novo conceito de correlação de números fuzzy através de uma função monótona injetora que ainda faz uso de uma distribuição de possibilidade conjunta.

Em 1978, Nguyen [28] apresentou uma propriedade do princípio de extensão de Zadeh bidimensional que facilita a aplicação do princípio de extensão de Zadeh de um par ordenado de conjuntos fuzzy através de uma função, explorando a continuidade dessa função e utilizando os α -níveis do par ordenado. Neste trabalho, esta propriedade é aplicada com o objetivo de obter resultados para parâmetros incertos interpretados como números fuzzy não necessariamente correlacionados via uma função.

Alguns trabalhos relacionados com as técnicas utilizadas neste estudo, envolvendo as equações diferenciais com parâmetros fuzzy e que aplicam a extensão de Zadeh, são: Oberguggenberger e Pittschmann [32], Jafelice R. S. M. [19], Vega C. N. [42], Bertone et al. [7], Almeida et al. [3], Barros L. C. et al. [5] e outros.

Com respeito ao vírus da imunodeficiência humana (HIV), motivação da modelagens propostos neste estudo, é um retrovírus, isto é, um vírus contendo ácido ribonucleico (RNA) que se replica em uma célula hospedeira. No interior do HIV encontram-se, juntamente com o RNA, três proteínas importantes para o processo de replicação: Transcriptase Reversa, Integrase e Protease. Quando o vírus atinge a corrente sanguínea, este ataca principalmente os linfócitos T do tipo CD4+, que são células que fazem parte do sistema imunológico. Os medicamentos desenvolvidos para interromper a ação do HIV são conhecidos como antirretrovirais. O trata-

mento antirretroviral funciona através da inibição das três proteínas do HIV. Estes inibidores impedem que as partículas de vírus livres infectem os linfócitos CD4+ retardando a replicação viral e permitindo que o organismo reaja naturalmente. Na infecção pelo HIV, o tratamento antirretroviral resulta em um declínio do vírus livre em várias fases distintas [25]. Inicialmente, a carga viral plasmática permanece em níveis de pré-tratamento aproximadamente quase estacionários na escala de tempo de semanas no estágio assintomático da infecção. Essa fase, que dura de 0 a 1 dia, é chamada de fase inicial quase estacionária. Esta fase inicial é seguida por uma fase de transição de 1 ou 2 dias, que é explicada pela combinação de efeitos do retardo farmacológicos e intracelulares que causam a redução das partículas de vírus livre e o declínio das células infectadas. Outra fase observada é o rápido declínio do vírus, que dura de 2 a 7 dias. Finalmente, o declínio diminui e os níveis de vírus podem até aumentar novamente [15].

Nas últimas décadas, a teoria dos conjuntos fuzzy tem contribuído significativamente para a modelagem matemática de fenômenos incertos, como no caso da infecção pelo HIV. Os modelos de dinâmica do HIV descritos pelas equações diferenciais com retardo são mais realísticos do que aqueles sem retardo, pois modelam o que ocorreu no intervalo anterior da produção do HIV no início do tratamento. A dinâmica do HIV também está sujeita a fenômenos incertos, como a resistência aos medicamentos e o fato de que a meia vida das células infectadas varia muito entre os diferentes indivíduos soropositivos.

Este trabalho tem como objetivo principal aplicar a extensão de Zadeh unidimensional e bidimensional para um modelo da dinâmica do HIV com retardo sob tratamento antirretroviral. Inicialmente foi aplicado o princípio de extensão de Zadeh bidimensional para um sistema de equações diferenciais ordinárias [16]. Primeiramente, determinamos duas soluções fuzzy de uma equação diferencial com retardo que simula o declínio da carga viral em indivíduos soropositivos sob tratamento antirretroviral. A taxa de infecção das células não infectadas do linfócito T do tipo CD4+ é zero. Além disso, o retardo e a taxa de mortalidade do vírus foram considerados como números fuzzy correlacionados via uma função monótona injetora. Esta correlação foi obtida de duas formas: pelos métodos de inferência de Mamdani e Takagi-Sugeno como Jafelice et al. [20]. Finalmente, determinamos uma solução fuzzy de um sistema de equações diferenciais com retardo que simula a dinâmica do HIV sob tratamento antirretroviral, para um indivíduo soropositivo, com taxa de infecção diferente de zero. Os parâmetros do sistema foram obtidos pelo autômato celular, uma outra ferramenta computacional importante na obtenção de soluções de modelos com características incertas. Foi desenvolvido um algoritmo no software Matlab, através do aplicativo *dde23*, para determinar uma solução fuzzy do sistema, considerando o retardo e a taxa de mortalidade do vírus como números fuzzy triangulares não fazendo uso de uma função que os correlacione.

Em vista do exposto, o objetivo básico deste trabalho é estudar modelos da Biomatemática que utilizam equações diferenciais, no estudo das dinâmicas do HIV no contexto da teoria fuzzy. Para isto, no Capítulo 1 são introduzidos os principais conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy, incluindo o dos números fuzzy, que dão o alicerce teórico para os parâmetros incertos da modelagem.

Por outro lado, sendo o conceito de números fuzzy f -correlacionados importante na obtenção de soluções fuzzy dos modelos propostos, sua definição e propriedades são particularmente explanadas no Capítulo 2.

Os Capítulos 3 e 4 são dedicados às aplicações das teorias estudadas nas distintas dinâmicas do HIV. Mais detalhadamente, no Capítulo 3 são obtidas duas soluções fuzzy para o modelo do declínio da carga viral em indivíduos soropositivos sob tratamento antirretroviral. Considerando-se o retardo e a taxa de mortalidade do vírus como números fuzzy correlacionados via uma função monótona injetora. A diferença entre as duas soluções é a técnica de inferência fuzzy utilizada, com o objetivo de obter a função que correlaciona os parâmetros fuzzy. Como consequência, um estudo comparativo entre as soluções determinística e as duas soluções fuzzy

é desenvolvido, baseado na medida de comparação do erro absoluto. No Capítulo 4, um sistema de equações diferenciais com retardo que simula a dinâmica do HIV em indivíduos soropositivos sob tratamento antirretroviral é apresentado. Destacando, como diferencial do sistema apresentado no Capítulo 3, o fato de que a modelagem passa a ser mais realista uma vez que a taxa de infecção é diferente de zero. Esta característica da modelagem inspirou a utilização da técnica computacional do autômata celular, que também é explanada neste capítulo. Outra diferença a salientar é que o retardo e a taxa de mortalidade do vírus são números fuzzy que não faz uso de uma função que os correlaciona. Assim, o princípio de extensão de Zadeh bidimensional constitui o embasamento teórico da abordagem da solução numérica obtida através de um algoritmo implementado neste estudo.

Encerramos nosso trabalho no Capítulo 5 apresentando algumas conclusões, produto dos resultados obtidos, e algumas sugestões para futuros trabalhos.

Kassandra Elena Inoñan Alfaro
Uberlândia-MG, 26 de Janeiro de 2019.

Capítulo 1

Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Quando nos deparamos com situações do tipo “esse carro é muito rápido?” ou “hoje faz muito frio?”, respostas como “sim” ou “não” nem sempre representam o que queremos expressar. De certo modo, “rápido” e “frio” podem implicar subjetividade, no sentido que não sabemos definir precisamente o que exatamente é fazer frio ou ser rápido. Quando trabalhamos com conjuntos fuzzy, tal imprecisão é associada com uma função, que chamamos de função de pertinência e, deste modo, conseguimos quantificar de forma precisa o quanto é fazer “muito frio” ou ser “muito rápido”, expressando com um grau de pertinência entre 0 e 1. No caso de verdadeiro ou falso têm-se que o grau de pertinência de falso seria zero e o grau de pertinência de verdadeiro seria 1. Dessa forma, o conceito de conjunto fuzzy foi inicialmente introduzido por Zadeh em um artigo publicado em 1965, [44]. Conjunto fuzzy é usado para representar matematicamente a imprecisão ou a incerteza nas formulações dos modelos matemáticos.

No capítulo 1, são apresentados conceitos e ferramentas básicas dos conjuntos fuzzy, que são necessários para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho.

Na próxima seção a definição de conjuntos fuzzy e alguns exemplos são apresentados.

1.1 Conjuntos Fuzzy

Para obter a formalização matemática de um conjunto fuzzy, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função característica, cuja definição é dada a seguir

Definição 1.1. *Sejam \mathcal{U} um conjunto não vazio e A um subconjunto clássico de \mathcal{U} . A função característica de A é dada por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Assim, como um conjunto clássico é determinado pela sua função característica, um conjunto fuzzy é determinado pela sua função de pertinência.

Definição 1.2. *Um conjunto fuzzy A do universo \mathcal{U} é caracterizado por uma função de pertinência*

$$\mu_A : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1].$$

Esta função é chamada de função de pertinência do conjunto fuzzy A . O valor $\mu_A(x)$ da função é interpretado como o grau com que o elemento x está contido no conjunto fuzzy A , ou seja, $\mu_A(x) = 0$ indica a não pertinência do x à A , e o $\mu_A(x) = 1$ indica pertinência total ao conjunto A .

Um conjunto fuzzy também pode ser representado por um conjunto clássico de pares ordenados:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in \mathcal{U}\}.$$

Observação 1.1. Nos conjuntos fuzzy, cada elemento do conjunto tem um grau de pertinência associado, representado por um número entre 0 e 1.

Exemplo 1.1. As cinco cidades que tem maior radiação ultravioleta (UV) no Perú, são: Cerro de Pasco, Puno, Huancavelica, Cusco e Huancayo [2]. Nem todas as cidades têm o mesmo grau de radiação UV, pois algumas cidades têm um grau maior de radiação UV e outras têm menor radiação UV, este grau de radiação UV varia entre os valores 0 e 1 (ver Tabela 1.1).

Cidades	grau de radiação UV
Cerro de Pasco	1
Puno	0.94
Huancavelica	0.90
Cusco	0.87
Huancayo	0.83

Tabela 1.1: Cidades e graus de radiação UV.

Isto motiva à definir o conjunto fuzzy A das cidades de maior radiação do Perú como sendo

$$A = \{(Cerro\ de\ Pasco, 1), (Puno, 0.94), (Huancavelica, 0.9), (Cusco, 0.87), (Huancayo, 0.83)\},$$

o que associa os elementos do conjunto das cidades com o grau de pertinência (grau de radiação UV). Note que A é um conjunto fuzzy discreto, isto é, com um número finito de pares ordenados.

Exemplo 1.2. Consideremos o tempo de trabalho (em anos) dos funcionários de uma empresa de transporte de acordo com seu desempenho em uma empresa. Se o funcionário tem menos tempo de trabalho na empresa de transporte, espera-se um desempenho menor. Agora, se o funcionário tem um tempo de trabalho entre 15 até 30 anos, a expectativa é que o seu desempenho seja melhor. Mas, se o funcionário tem muito tempo de trabalho seu desempenho começa a diminuir de acordo com o tempo de trabalho na empresa, pois, o funcionário começa a envelhecer. Assim, podemos definir o conjunto fuzzy A da relação tempo-desempenho representado pela função de pertinência $\mu_A(x)$ ilustrada na Figura 1.1.

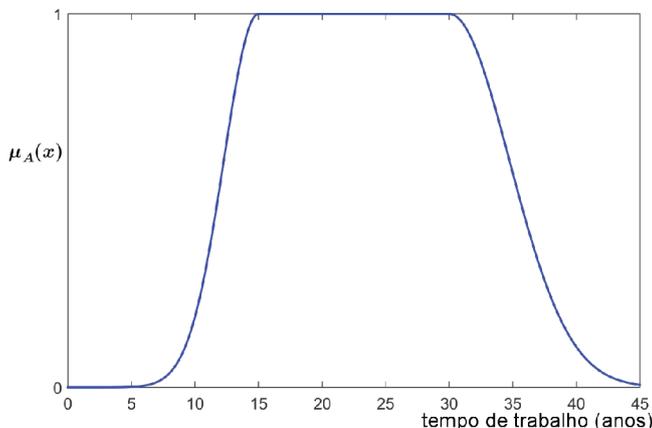


Figura 1.1: Conjunto fuzzy A .

Note que, neste caso, o conjunto A é o gráfico de uma função de pertinência contínua.

Exemplo 1.3 ([40]). Consideramos o conjunto fuzzy A dos números reais próximos de 2. Podemos caracterizar uma função de pertinência de A por $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, que associa cada x real ao valor de proximidade ao ponto 2, de diferentes maneiras. Assim, apresentamos expressões analíticas das funções de pertinência $\mu_{1_A}, \mu_{2_A}, \mu_{3_A}$ e μ_{4_A} , respectivamente.

$$\mu_{1_A}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$\mu_{2_A}(x) = \frac{1}{1 + 8(x - 2)^2};$$

$$\mu_{3_A}(x) = e^{-|5(x-2)|};$$

$$\mu_{4_A}(x) = \begin{cases} \frac{1 + \cos(2\pi(x - 2))}{2} & \text{se } 1.5 \leq x \leq 2.5 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, vejamos os respectivos gráficos das funções de pertinência $\mu_{1_A}, \mu_{2_A}, \mu_{3_A}$ e μ_{4_A} que estão representadas na Figura 1.2, nos itens (a), (b), (c) e (d), respectivamente.

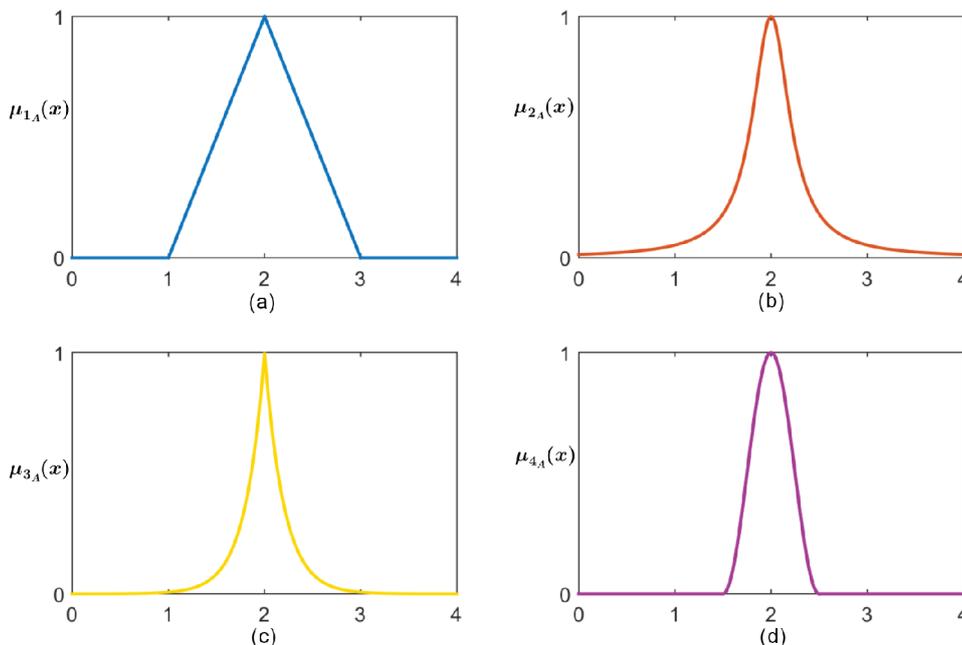


Figura 1.2: Funções de pertinência para o conjunto fuzzy A dos números próximos de 2.

Como podemos observar, qualquer uma das funções de pertinência dadas anteriormente podem ser uma representante do conjunto A dos números reais próximos de 2. Porém, o que deve ser notado é que cada uma dessas funções produz conjuntos fuzzy distintos. Assim, a escolha da função de pertinência a ser utilizada depende do problema a ser estudado e do especialista na área.

Na seção a seguir, estenderemos as operações de união, interseção e complemento dos conjuntos clássicos aos conjuntos fuzzy.

1.2 Operações com Conjuntos Fuzzy

Definimos as operações entre conjuntos clássicos (união, intersecção, complemento) para os conjuntos fuzzy, via a função característica.

$$\begin{aligned}
 A \cup B &= \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}, \\
 A \cap B &= \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ e } x \in B\}, \\
 A' &= \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}
 \end{aligned}$$

têm, respectivamente, as funções características, para todo $x \in \mathcal{U}$:

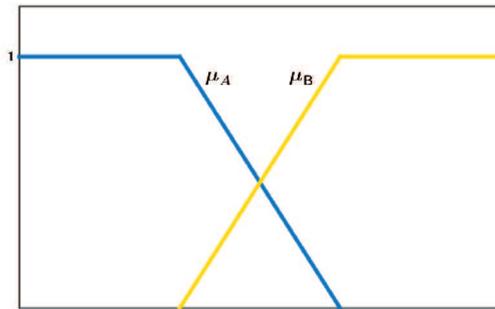
$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}_{A \cup B}(x) &= \max\{\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x)\} \\
 \mathcal{X}_{A \cap B}(x) &= \min\{\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x)\} \\
 \mathcal{X}_{A'}(x) &= 1 - \mathcal{X}_A(x).
 \end{aligned}$$

Assim, como na teoria clássica dos conjuntos, na teoria dos conjuntos fuzzy existem operações como união, intersecção e complemento. A seguir, as definições dessas operações são dadas.

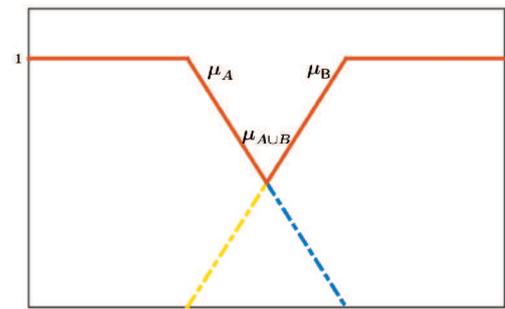
Definição 1.3 ([6]). *Sejam A e B dois conjuntos fuzzy (Figura 1.3 (a)), com funções de pertinência μ_A e μ_B , respectivamente. As funções de pertinência que representam os conjuntos fuzzy união (Figura 1.3 (b)), intersecção (Figura 1.3 (c)) e complemento (Figura 1.3 (d)) dos conjuntos fuzzy A e B , para todo $x \in \mathcal{U}$, são dadas por*

$$\begin{aligned}
 \mu_{A \cup B}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
 \mu_{A \cap B}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
 \mu_{A'}(x) &= 1 - \mu_A(x),
 \end{aligned}$$

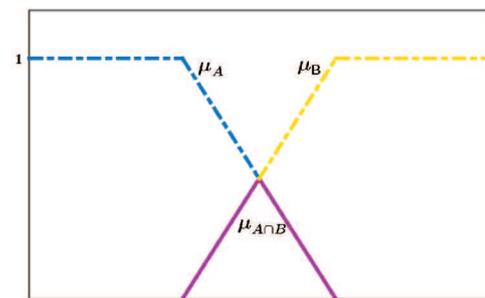
respectivamente, em que 1 é a função constante.



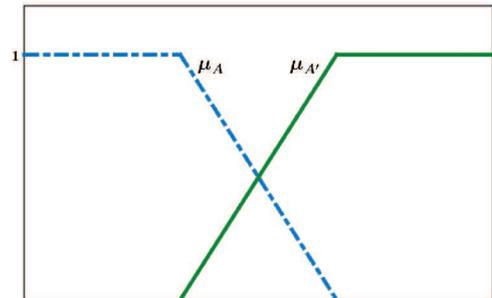
(a) Conjuntos fuzzy A e B .



(b) Conjunto fuzzy $A \cup B$ em cor marrom.



(c) Conjunto fuzzy $A \cap B$ em cor roxa.



(d) Conj. fuzzy complementar A' em cor verde.

Figura 1.3: Representação das operações dos conjuntos fuzzy através das funções de pertinência.

Particularmente, se A e B forem conjuntos clássicos, então as funções características das respectivas operações, acima definidas, satisfazem estas igualdades, mostrando a coerência destas definições. Por exemplo, se A é um conjunto de \mathcal{U} , então a função característica de seu complementar é tal que $\mathcal{X}_{A'}(x) = 0$ se $\mathcal{X}_A(x) = 1$ (i.e. $x \in A$) e $\mathcal{X}_{A'}(x) = 1$ se $\mathcal{X}_A(x) = 0$ (i.e. $x \notin A$). Neste caso, ou $x \in A$ ou $x \notin A$. Na teoria fuzzy não temos necessariamente essa dicotomia, nem sempre é verdade que $A \cap A' = \emptyset$ assim como não é verdade que $A \cup A' = \mathcal{U}$. O exemplo a seguir ilustra tais fatos.

Exemplo 1.4. *Suponha que o conjunto universo \mathcal{U} seja composto por cinco projetos em uma empresa, identificados por 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente. Sejam A e B os conjuntos fuzzy que representam os quatro projetos com os fundos financeiros e o risco dos projetos. A Tabela 1.2 ilustra, através das suas funções de pertinência (colunas 4, 5 e 6, respectivamente da Tabela 1.2), a união, intersecção dos conjuntos A e B e o complemento de A .*

Projeto	grau de fundos (μ_A)	grau de risco (μ_B)	$\mu_{A \cup B}$	$\mu_{A \cap B}$	$\mu_{A'}$	$\mu_{A \cap A'}$
1	0.2	0.85	0.85	0.2	0.8	0.2
2	0.4	0.7	0.7	0.4	0.6	0.4
3	0.5	0.55	0.55	0.5	0.5	0.5
4	0.7	0.35	0.7	0.35	0.3	0.3
5	0.9	0.2	0.9	0.2	0.1	0.1

Tabela 1.2: As funções de pertinência da união, intersecção dos conjuntos A e B (colunas 4 e 5 respectivamente) e na coluna 6 a função de pertinência do complemento de A .

Na coluna $\mu_{A \cap A'}$, o valor 0.5 indica que o projeto 3 está tanto no grupo de fundos razoável como dos fundos não razoável. Como dissemos antes, este é um fato inadmissível na teoria clássica de conjuntos na qual temos a lei do terceiro excluído ($A \cap A' = \emptyset$), pois, $A \cap A' \neq \emptyset$.

1.3 Normas Triangulares

As normas triangulares generalizam os operadores união e intersecção. Formalmente, temos as seguintes definições:

Definição 1.4 ([31]). *Uma co-norma triangular (s -norma) é uma operação binária $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, denotada por $s(x, y) = xsy$, satisfazendo as seguintes condições:*

- *Comutatividade:* $xsy = ysx$;
- *Associatividade:* $xs(ysz) = (xsy)sz$;
- *Monotonicidade:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $xsw \leq ysz$;
- *Condições de fronteira:* $xs0 = x$ e $xs1 = 1$.

Exemplo 1.5. *A seguir, exibimos alguns exemplos de s -norma.*

1. **União Padrão:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xsy = \max(x, y)$;
2. **Soma Algébrica:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xsy = x + y - xy$;
3. **Soma Limitada:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xsy = \min(1, x + y)$;

4. **União Drástica:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com

$$xsy = \begin{cases} x & \text{se } y = 0 \\ y & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 1.5 ([31]). Uma norma triangular (*t-norma*) é uma operação binária $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, denotada por $t(x, y) = xty$, satisfazendo as seguintes condições:

- *Comutatividade:* $xty = ytx$;
- *Associatividade:* $xt(ytz) = (xty)tz$;
- *Monotonicidade:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $xw \leq yz$;
- *Condições de fronteira:* $0tx = 0$ e $1tx = x$.

Exemplo 1.6. A seguir, exibimos alguns exemplos de *t-norma*.

1. **Intersecção Padrão:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xty = \min(x, y)$;
2. **Produto Algébrico:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xty = xy$;
3. **Diferença Limitada:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xty = \max(0, x + y - 1)$;
4. **Intersecção Drástica:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com

$$xty = \begin{cases} x & \text{se } y = 1 \\ y & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Na seção a seguir é definido o conceito de α -níveis, crucial para determinar um conjunto fuzzy.

1.4 α -Níveis de um Conjunto Fuzzy

Um dos conceitos mais importantes envolvendo conjuntos fuzzy é o conceito de α -nível, dado a seguir.

Definição 1.6 ([31]). Sejam A um conjunto fuzzy e $\alpha \in [0, 1]$. Definimos como α -nível de A ao subconjunto de \mathcal{U} definido por

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Definição 1.7 ([31]). O suporte de um conjunto fuzzy A são todos os elementos de \mathcal{U} que têm grau de pertinência diferente de zero em A e denota-se por

$$\text{supp}(A) = \{x \in \mathcal{U} \mid \mu_A(x) > 0\}. \quad (1.1)$$

Visto isso o nível zero de um conjunto fuzzy A é definido da seguinte forma.

Definição 1.8 ([10]). O nível zero de um conjunto fuzzy A do universo \mathcal{U} , em que \mathcal{U} é um espaço topológico, é o fecho topológico do suporte de A , isto é,

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}. \quad (1.2)$$

Exemplo 1.7. Consideremos $\mathcal{U} = [0, 10]$ e o conjunto fuzzy A , cuja função de pertinência é $\mu_A(x) = \frac{x}{x+1}$, que é um ramo de hipérbole (ver Figura 1.4).

Neste caso temos que:

- os α -níveis do conjunto fuzzy A são

$$[A]^\alpha = \left[\frac{\alpha}{1-\alpha}, 10 \right], \text{ para } 0 < \alpha \leq \frac{10}{11}$$

$$[A]^\alpha = \emptyset, \text{ para } \frac{10}{11} < \alpha \leq 1.$$

- o suporte do conjunto fuzzy A é

$$\text{supp}(A) = [0, 10] = \mathcal{U}$$

- o nível zero do conjunto fuzzy A é

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)} = \text{supp}(A) = \mathcal{U}.$$

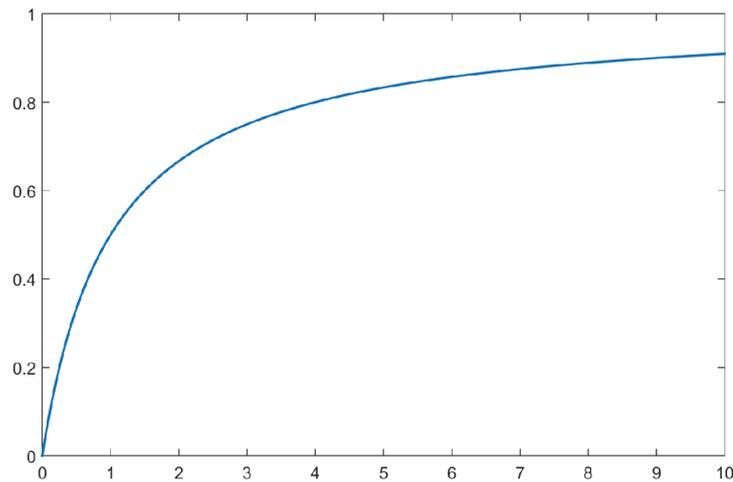


Figura 1.4: Função de pertinência do conjunto fuzzy A .

1.5 Tipos Especiais de Conjuntos Fuzzy

Nesta seção definiremos alguns tipos especiais de conjuntos fuzzy que serão de utilidade em nosso trabalho.

O grau de pertinência varia no intervalo fechado $[0, 1]$, mas não é necessário obter o grau de pertinência igual a 1, portanto a seguinte definição é um tipo de conjuntos fuzzy, pois sua função de pertinência atinge a seu valor máximo de verdade.

Definição 1.9 ([10]). Um conjunto fuzzy A do universo \mathcal{U} é chamado **normal**, se existe $x_0 \in \mathcal{U}$ tal que $\mu_A(x_0) = 1$.

Exemplo 1.8. O gráfico da função característica é um conjunto fuzzy.

Definição 1.10 ([10]). Um conjunto fuzzy A do universo \mathcal{U} é chamado **convexo** se o conjunto dos α -níveis é um conjunto convexo [22], para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo 1.9. O conjunto fuzzy A dado no Exemplo 1.7 é convexo, pois seus α -níveis são convexas.

1.6 Números Fuzzy

Assim como nos conjuntos clássicos, também na teoria dos conjuntos fuzzy temos como objetivo operações com números fuzzy. A diferença é que se pretende calcular quantidades em certo sentido imprecisas. Por isto, nesta seção abordaremos conjuntos fuzzy cujo universo são os números reais e cujas funções de pertinência satisfazem algumas condições adicionais. Tais conjuntos fuzzy são chamados de números fuzzy.

Definição 1.11 ([6]). *Um conjunto fuzzy A é chamado número fuzzy quando o conjunto universo, onde A está definido, é o conjunto dos números reais e satisfaz as seguintes condições*

1. A é normal;
2. $[A]^\alpha$ é um intervalo fechado para todo $\alpha \in (0, 1]$;
3. o suporte de A é limitado.

Os números fuzzy utilizados na modelagem matemática são aqueles cujas funções de pertinência associadas são as triangulares, trapezoidais e os números fuzzy em forma de sino.

Exemplo 1.10 ([6]). *Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ \frac{-x+c}{c-b} & \text{se } b < x \leq c \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $a \neq b$.

O gráfico desta função de pertinência forma com o eixo x um triângulo, tendo como base o intervalo $[a, c]$ e, o vértice no ponto $(b, 1)$. Deste modo, os números reais a , b e c definem o número fuzzy triangular A que será denotado pela terna ordenada (a, b, c) , Figura 1.5.

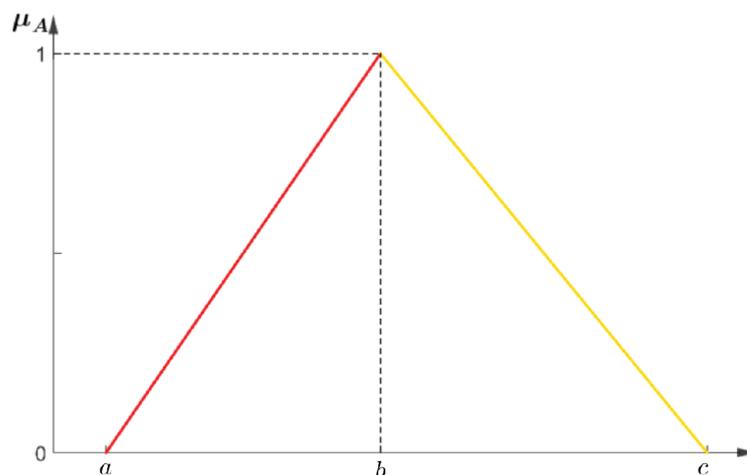


Figura 1.5: Número fuzzy triangular.

Os α -níveis do número fuzzy triangular têm a seguinte forma simplificada

$$[(b-a)\alpha + a, (b-c)\alpha + c], \quad (1.3)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Note que um número fuzzy triangular não precisa ser simétrico.

Exemplo 1.11 ([6]). Um número fuzzy A é dito trapezoidal se o gráfico de sua função de pertinência tem a forma de um trapézio (ver Figura 1.6), é dada por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x \leq d \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $a \neq b$.

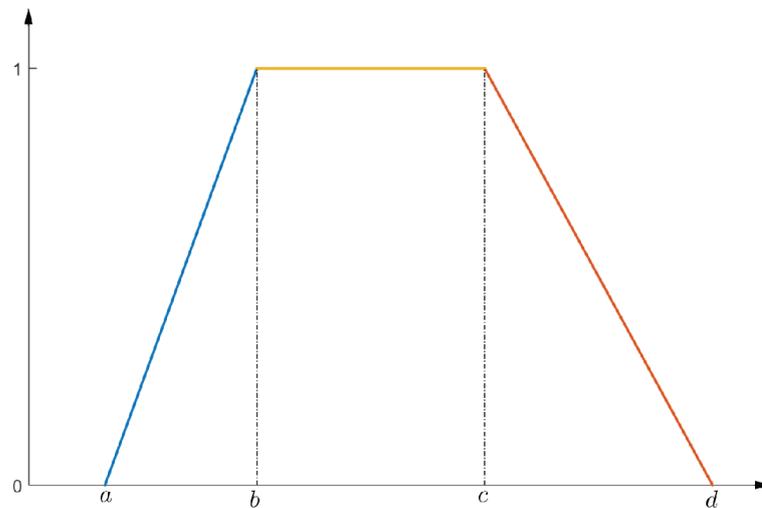


Figura 1.6: Número fuzzy trapezoidal.

Os α -níveis do número fuzzy trapezoidal são os intervalos

$$[(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d] \quad (1.4)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo 1.12 ([6]). Um número fuzzy tem forma de sino se a função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real. A seguinte função de pertinência tem estas propriedades para u , a e δ (ver Figura 1.7).

$$\mu_A(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2} & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

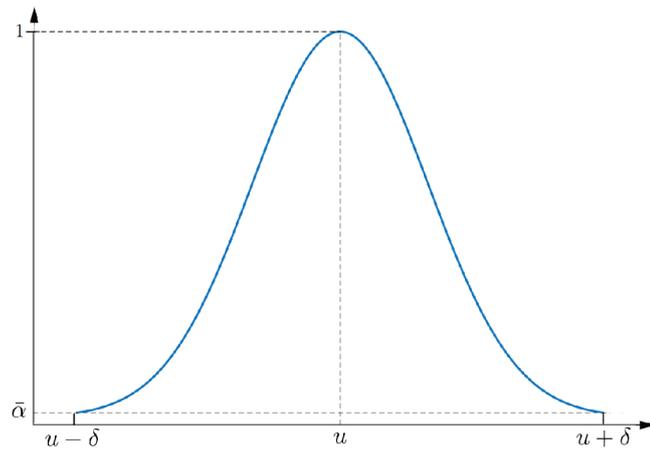


Figura 1.7: Número fuzzy em forma de sino.

Para determinar os α -níveis do número fuzzy em forma de sino, fazemos $\mu_A(x) \geq \alpha$. Então, para $\alpha \geq \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2}$, temos $e^{-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2} \geq \alpha$. Aplicando a função $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, obtemos que

$$\left(\frac{x-u}{a}\right)^2 \geq -\ln \alpha$$

Assim,

$$(x-u)^2 \geq a^2 \ln \frac{1}{\alpha},$$

pelas propriedades da função logarítmica, tem-se

$$(x-u)^2 \geq \ln \frac{1}{\alpha^{a^2}}, \quad (1.5)$$

e para $\alpha < \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2}$, temos o intervalo fechado $[u - \delta, u + \delta]$.

Assim, os α -níveis do número fuzzy em forma de sino são os intervalos

$$\begin{cases} \left[u - \sqrt{\ln \left(\frac{1}{\alpha^{a^2}} \right)}, u + \sqrt{\ln \left(\frac{1}{\alpha^{a^2}} \right)} \right] & \text{se } \alpha \geq \bar{\alpha} \\ [u - \delta, u + \delta] & \text{se } \alpha < \bar{\alpha}, \end{cases} \quad (1.6)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A seguir apresentamos o conceito de função semicontínua superiormente.

Definição 1.12 ([12]). Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita semicontínua superiormente (scs) em $x_0 \in E$ se, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > f(x_0)$, existe uma vizinhança V de x_0 em X tal que para todo $x \in V$ tem-se $a > f(x)$.

Exemplo 1.13. Consideremos a seguinte função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ver Figura 1.8) definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ -(x-2)^2 + 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

então f é semicontínua superiormente no ponto $x_0 = 1$.

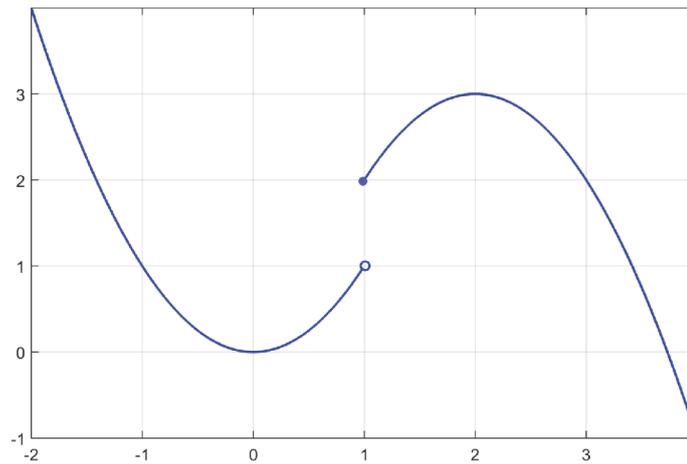


Figura 1.8: Função semicontínua superiormente no ponto $x_0 = 1$.

A seguinte proposição é uma consequência da Definição 1.11.

Proposição 1.1 ([29]). *Temos que:*

(a) *Os conjuntos unitários clássicos $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$ são números fuzzy.*

De fato: função de pertinência é a sua função característica do conjunto $\{x\}$.

(b) *Um número fuzzy é um conjunto fuzzy convexo.*

De fato: os α -níveis de um número fuzzy são intervalos fechados que são conjuntos topologicamente convexos.

(c) *A função de pertinência de um número fuzzy é semicontínua superiormente.*

De fato: a função de pertinência de um número fuzzy A é semicontínua superiormente, pois todos os seus α -níveis $[A]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, são intervalos fechados.

(d) *Se A é um número fuzzy com $\mu_A(r) = 1$, então μ_A é não-decrescente em $(-\infty, r]$ e não-crescente em $[r, \infty)$.*

De fato: se $\mu_A(r) = 1$ e $x < y < r$. Então, como A é convexo, pois A é um número fuzzy, e $\mu_A(y) < \mu_A(r)$, temos que $\mu_A(x) \leq \mu_A(y)$. Deste modo, A é monótona crescente em $(-\infty, r]$. Da mesma forma, μ_A é monótona decrescente no intervalo $[r, \infty)$.

Mostramos um exemplo utilizando a Proposição 1.1.

Exemplo 1.14. *Consideremos ao conjunto fuzzy A (ver Figura 1.9) cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } 0.5 \leq x < 0.75 \\ x & \text{se } 0.75 \leq x \leq 1 \\ 3 - 2x & \text{se } 1 < x \leq 1.5. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os α -níveis de A são

$$[A]^\alpha = \left[\frac{\alpha + 1}{2}, \frac{3 - \alpha}{2} \right], \text{ para } 0 \leq \alpha < 0.5$$

$$[A]^\alpha = \left[0.75, \frac{3 - \alpha}{2} \right], \text{ para } 0.5 \leq \alpha \leq 0.75$$

$$[A]^\alpha = \left[\alpha, \frac{3 - \alpha}{2} \right], \text{ para } 0.75 \leq \alpha \leq 1.$$

O suporte de A é

$$\text{supp}(A) = [0.5, 1.5]. \quad (1.7)$$

O conjunto fuzzy A é um número fuzzy, pois, é normal, os α -níveis de A são intervalos fechados e o suporte de A é limitado. Assim, pela Proposição 1.1, segue que a função de pertinência μ_A é semicontínua superiormente.

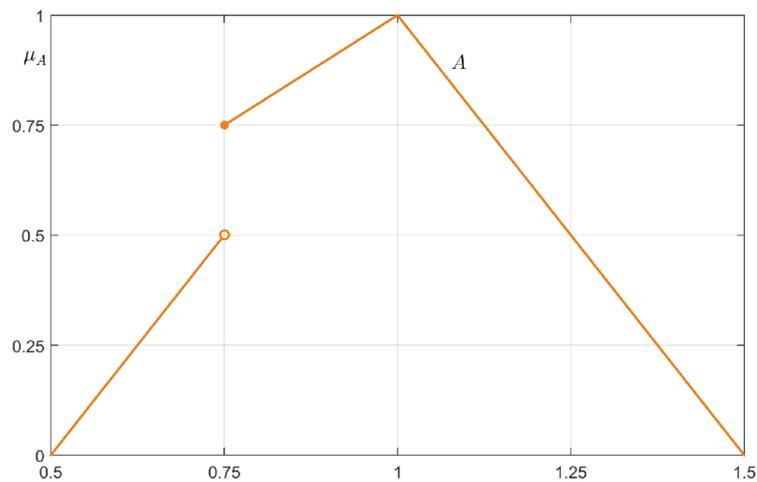


Figura 1.9: Número fuzzy A .

Na próxima seção definiremos o Princípio de Extensão de Zadeh, que é uma das ferramentas mais importantes na teoria de conjuntos fuzzy, pois é estudado e aplicado com sucesso em muitos problemas matemáticos.

1.7 O Princípio de Extensão de Zadeh

O princípio de extensão de Zadeh é uma ferramenta que tem como objetivo obter um novo conjunto fuzzy a partir de um conjunto fuzzy dado e uma função entre seus respectivos universos. Nesta seção definiremos os conceitos de extensão de Zadeh unidimensional e bidimensional.

Definição 1.13 ([20]). (*Princípio de extensão de Zadeh unidimensional*) Sejam $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Z}$ uma função e A um conjunto fuzzy de \mathcal{U} . O princípio de extensão de Zadeh do conjunto A através de f é um conjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ de \mathcal{Z} , cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(z) = \sup_{x \in f^{-1}(z)} \mu_A(x), \quad (1.8)$$

em que $f^{-1}(z) = \{x : f(x) = z\}$.

Observação 1.2. Se A é um conjunto fuzzy de \mathcal{U} , com função de pertinência μ_A e se f é injetora, então a função de pertinência de $\widehat{f}(A)$ é dada por

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(z) = \sup_{\{x:f(x)=z\}} \mu_A(x) = \sup_{\{x \in f^{-1}(z)\}} \mu_A(x) = \mu_A(f^{-1}(z)).$$

O seguinte resultado tem um papel importante em nosso trabalho.

Teorema 1.1 ([6]). Sejam $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Z}$ uma função contínua e A um conjunto fuzzy de \mathcal{U} , com α -níveis compactos e não vazios. Então, para todo $\alpha \in [0, 1]$ tem-se

$$[\widehat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha). \quad (1.9)$$

Este resultado indica que os α -níveis do conjunto fuzzy, obtido pela princípio de extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α -níveis do conjunto fuzzy.

Exemplo 1.15. Considere o conjunto fuzzy A de números reais cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_A(x) = 2x - x^2, \text{ para } x \in [0, 2]$$

Os α -níveis de A são os intervalos

$$[A]^\alpha = [1 - \sqrt{1 - \alpha}, 1 + \sqrt{1 - \alpha}].$$

Consideremos a função real $f(x) = x^3$ para $x \geq 0$. Como f é polinomial então f é contínua. Assim, pelo Teorema 1.1, temos

$$\begin{aligned} f([A]^\alpha) &= [f(1 - \sqrt{1 - \alpha}), f(1 + \sqrt{1 - \alpha})] \\ &= [(1 - \sqrt{1 - \alpha})^3, (1 + \sqrt{1 - \alpha})^3] \\ &= [\widehat{f}(A)]^\alpha. \end{aligned}$$

Calculando $[\widehat{f}(A)]^\alpha$ para $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ e para $\alpha = 0.5$, teremos $[\widehat{f}(A)]^0 = [0, 2]$, $[\widehat{f}(A)]^1 = \{1\}$ e $[\widehat{f}(A)]^{0.5} = [0.29, 1.71]$.

A Figura 1.10 ilustra o princípio de extensão de Zadeh para $f(x)$, que é dado pelo conjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$.

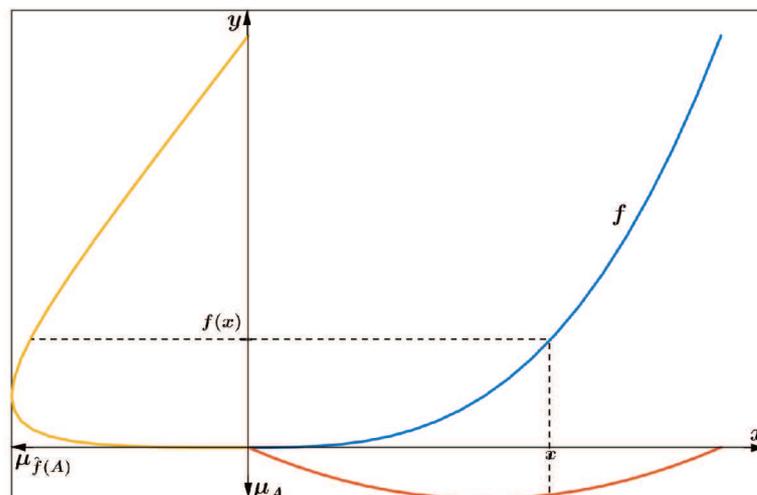


Figura 1.10: Conjunto $\widehat{f}(A)$.

Definição 1.14 ([20]). (*Princípio de extensão de Zadeh bidimensional*) Sejam A , B conjuntos fuzzy com função de pertinência $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ e $\mu_B : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, respectivamente, e $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A extensão de Zadeh de (A, B) através de F é o conjunto fuzzy cuja função de pertinência vem dada por

$$\mu_{\widehat{F}(A,B)}(z) = \sup_{(x,y)} [\min(\mu_A(x), \mu_B(y))], \text{ em que } z = F(x, y).$$

Definição 1.15 ([6]). (*Produto Cartesiano Fuzzy*) O produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy A e B no universo \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 , respectivamente, é um conjunto fuzzy cuja função de pertinência

$$\mu_{A \times B} : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow [0, 1],$$

esta definida por $\mu_{A \times B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$.

Observe que na Figura 1.11, os triângulos de cores amarelo e roxo representam aos números fuzzy triangulares A e B , respectivamente, e a pirâmide de cor azul representa o produto cartesiano fuzzy $A \times B$, as linhas de cor vermelho no plano xy representa os α -níveis dos números fuzzy A e B , respectivamente, o quadrado de cor vermelho no plano xy representa o α -nível do conjunto fuzzy $A \times B$. Além disso, note que $[A \times B]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

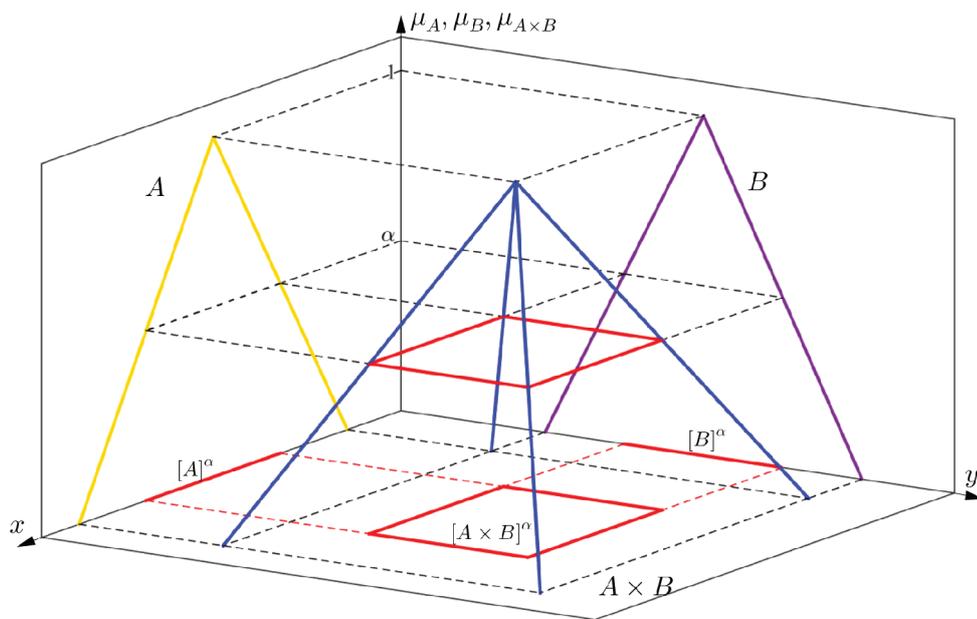


Figura 1.11: Produto cartesiano fuzzy de A e B .

Observação 1.3. O princípio de extensão de Zadeh bidimensional pode ser representada, usando a definição do produto cartesiano fuzzy, por

$$\mu_{\widehat{F}(A,B)}(z) = \sup_{(x,y)} [\mu_{A \times B}(x, y)], \text{ em que } z = F(x, y). \quad (1.10)$$

O seguinte resultado tem um papel importante neste trabalho, no capítulo 4.

Teorema 1.2 ([28]). Seja $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e A, B números fuzzy. Então

$$[\widehat{\mathcal{F}}(A, B)]^\alpha = \mathcal{F}([A]^\alpha \times [B]^\alpha), \quad (1.11)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, em que $[A]^\alpha$ e $[B]^\alpha$ representam os α -níveis dos números fuzzy A e B , respectivamente.

Demonstração. Antes de iniciar a demonstração devemos observar que $\mathcal{F}^{-1}(z) \cap [A]^0 \times [B]^0$ é um conjunto compacto, pois \mathcal{F} é uma função contínua, daí $\mathcal{F}^{-1}(z)$ é um conjunto fechado e com isto, $\mathcal{F}^{-1}(z) \cap [A]^0 \times [B]^0$ é um conjunto fechado no compacto $[A]^0 \times [B]^0$, portanto, compacto.

Mostremos que $\mathcal{F}([A]^\alpha \times [B]^\alpha) \subseteq [\widehat{\mathcal{F}}(A, B)]^\alpha$.

Seja $z \in \mathcal{F}([A]^\alpha \times [B]^\alpha)$, existem $\hat{x} \in [A]^\alpha$ e $\hat{y} \in [B]^\alpha$ tais que $\mathcal{F}(x, y) = z$, daí

$$\mu_A(\hat{x}) \geq \alpha \text{ e } \mu_B(\hat{y}) \geq \alpha.$$

Então, devemos ter que

$$\min(\mu_A(\hat{x}), \mu_B(\hat{y})) \geq \alpha, \text{ com } (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{F}^{-1}(z).$$

Assim, considerando o supremo sobre os elementos $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{F}^{-1}(z)$, obtemos que

$$\mu_{\widehat{\mathcal{F}}(A, B)}(z) = \sup_{\{(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}(z)\}} [\min(\mu_A(x), \mu_B(y))] \geq \min(\mu_A(\hat{x}), \mu_B(\hat{y})) \geq \alpha,$$

ou seja, $z \in [\widehat{\mathcal{F}}(A, B)]^\alpha$.

Mostremos que $[\widehat{\mathcal{F}}(A, B)]^\alpha \subseteq \mathcal{F}([A]^\alpha \times [B]^\alpha)$.

Suponha que $\alpha > 0$ e seja $z \in [\widehat{\mathcal{F}}(A, B)]^\alpha$, com isto

$$\mu_{\widehat{\mathcal{F}}(A, B)}(z) = \sup_{\{(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}(z)\}} [\min(\mu_A(x), \mu_B(y))] = \sup_{\{(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}(z)\}} \mu_{A \times B}(x, y) \geq \alpha,$$

isto significa que, existe $(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}(z)$ com $\mu_{A \times B}(x, y) > 0$, daí $\mathcal{F}^{-1}(z) \cap [A]^0 \times [B]^0 \neq \emptyset$.

Assim,

$$\mu_{\widehat{\mathcal{F}}(A, B)}(z) = \sup_{\{(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}(z)\}} \mu_{A \times B}(x, y) = \sup_{\{(x, y) \in (\mathcal{F}^{-1}(z) \cap [A]^0 \times [B]^0)\}} \mu_{A \times B}(x, y).$$

Pelo item (c) da Proposição 1.1 segue que μ_A e μ_B são semicontínua superiormente, com isto $\mu_{A \times B}$ é semicontínua superiormente e como $\mathcal{F}^{-1}(z) \cap [A]^0 \times [B]^0$ é compacto obtemos $(x_0, y_0) \in \mathcal{F}^{-1}(z) \cap [A]^0 \times [B]^0$ tal que

$$\mu_{\widehat{\mathcal{F}}(A, B)}(z) = \sup_{\{(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}(z)\}} \mu_{A \times B}(x, y) = \mu_{A \times B}(x_0, y_0) \geq \alpha,$$

isto é equivalente a escrever que $\mathcal{F}(x_0, y_0) = (z)$, com $x_0 \in [A]^\alpha$ e $y_0 \in [B]^\alpha$ e, como consequência, temos $z \in \mathcal{F}([A]^\alpha \times [B]^\alpha)$.

Suponha $\alpha = 0$ e seja $z \in [\widehat{\mathcal{F}}(A, B)]^0$, com isto

$$\mu_{\widehat{\mathcal{F}}(A, B)}(z) = \sup_{\{(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}(z)\}} [\min(\mu_A(x), \mu_B(y))] > 0,$$

o que significa que, existe $(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}(z)$ tal que $\min([\mu_A(x), \mu_B(y)]) > 0$. Então,

$$\mu_A(x) > 0 \text{ e } \mu_B(y) > 0, \text{ com } (x, y) \in \mathcal{F}^{-1}(z).$$

Isto equivalente a escrever que $\mathcal{F}(x_0, y_0) = (z)$, com $x_0 \in [A]^0$ e $y_0 \in [B]^0$ e, como consequência, temos $z \in \mathcal{F}([A]^0 \times [B]^0)$.

Portanto, $[\widehat{\mathcal{F}}(A, B)]^\alpha \subseteq \mathcal{F}([A]^\alpha \times [B]^\alpha)$, para cada $\alpha \in [0, 1]$.

□

Este resultado indica que os α -níveis do conjunto fuzzy dado pelo produto cartesiano fuzzy, obtido pela princípio de extensão de Zadeh bidimensional, coincidem com as imagens do produto cartesiano clássico dos α -níveis de A e B .

Na seguinte seção apresentaremos as operações aritméticas para números fuzzy.

1.8 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

Assim como existem operações aritméticas entre números reais, também existem operações aritméticas entre números fuzzy que são: soma, diferença, multiplicação e divisão entre números fuzzy. Também temos a multiplicação de um número fuzzy por um número real. A seguir, as definições dessas operações aritméticas são dadas.

Definição 1.16 ([6]). *Sejam A e B dois números fuzzy, e λ um número real.*

(a) *A soma de A e B é o número fuzzy $A + B$, cuja função de pertinência é*

$$\mu_{(A+B)}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)}\{\min[\mu_A(x), \mu_B(y)]\} & \text{se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \phi(z) = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) : x + y = z\}$.

(b) *A diferença de A e B é o número fuzzy $A - B$, cuja função de pertinência é*

$$\mu_{(A-B)}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)}\{\min[\mu_A(x), \mu_B(y)]\} & \text{se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \phi(z) = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) : x - y = z\}$.

(c) *A multiplicação de A por B é o número fuzzy $A.B$, cuja função de pertinência é*

$$\mu_{(A.B)}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)}\{\min[\mu_A(x), \mu_B(y)]\} & \text{se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \phi(z) = 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) : x.y = z\}$.

(d) *A divisão de A por B é o número fuzzy A/B , cuja função de pertinência é*

$$\mu_{(A/B)}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)}\{\min[\mu_A(x), \mu_B(y)]\} & \text{se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \phi(z) = 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) : x/y = z\}$.

A seguinte definição relaciona um número real com um número fuzzy.

(e) *A multiplicação de λ por A é o número fuzzy λA , cuja função de pertinência é*

$$\mu_{(\lambda A)}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)}\{\min[\mu_A(x), \mu_B(y)]\} & \text{se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \phi(z) = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) : \lambda x = z\}$.

Uma maneira alternativa e mais prática de se fazer estas operações é por meio dos α -níveis dos conjuntos fuzzy envolvidos, de acordo com a Proposição 1.2.

Proposição 1.2 ([6]). *Sejam A e B números fuzzy com α -níveis dados, respectivamente, por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) *A soma entre A e B é o número fuzzy $A + B$ cujos α -níveis são*

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha].$$

(b) *A diferença entre A e B é o número fuzzy $A - B$ cujos α -níveis são*

$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha].$$

(c) *A multiplicação de A por B é o número fuzzy $A \cdot B$ cujos α -níveis são*

$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [\min P, \max P],$$

em que $P = \{a_1^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_1^\alpha \cdot b_2^\alpha, a_2^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_2^\alpha \cdot b_2^\alpha\}$.

(d) *A divisão entre A por B , se $0 \notin \text{supp}(B)$, é o número fuzzy A/B cujos α -níveis são*

$$\left[\frac{A}{B} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot \left[\frac{1}{b_1^\alpha}, \frac{1}{b_2^\alpha} \right].$$

(e) *A multiplicação de λ por A é o número fuzzy λA cujos α -níveis são*

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda [A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha] & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.16 ([6]). *Considere os números fuzzy triangulares A e B que indicam, respectivamente, aproximadamente 3 e aproximadamente 4, dados por*

$$A = (2; 3; 4) \text{ e } B = (3; 4; 5).$$

Os resultados para cada uma das operações aritméticas entre números fuzzy são mostrados a seguir.

Primeiro, observemos que, de acordo com a expressão (1.3), tem-se

$$[A]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha] \text{ e } [B]^\alpha = [\alpha + 3, 5 - \alpha],$$

então pela Proposição 1.2, obtemos

$$(a) [A + B]^\alpha = [2\alpha + 5, 9 - 2\alpha].$$

$$(b) [A - B]^\alpha = [2\alpha - 3, 1 - 2\alpha].$$

(c) $[A \cdot B]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha] \cdot [\alpha + 3, 5 - \alpha] = [\min P, \max P]$, *em que*

$$P = \{(\alpha + 2)(\alpha + 3), (\alpha + 2)(5 - \alpha), (4 - \alpha)(\alpha + 3), (4 - \alpha)(5 - \alpha)\}.$$

Então, $\min P = (\alpha + 2)(\alpha + 3)$ e $\max P = (4 - \alpha)(5 - \alpha)$. Assim,

$$[A \cdot B]^\alpha = [(\alpha + 2)(\alpha + 3), (4 - \alpha)(5 - \alpha)].$$

(d) $\left[\frac{A}{B} \right]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha] \cdot \left[\frac{1}{\alpha + 3}, \frac{1}{5 - \alpha} \right] = [\min P, \max P]$, *em que*

$$P = \{(\alpha + 2)/(\alpha + 3), (\alpha + 2)/(5 - \alpha), (4 - \alpha)/(\alpha + 3), (4 - \alpha)/(5 - \alpha)\}.$$

Então, $\min P = (\alpha + 2)/(5 - \alpha)$ e $\max P = (4 - \alpha)/(\alpha + 3)$. Assim,

$$\left[\frac{A}{B} \right]^\alpha = [(\alpha + 2)/(5 - \alpha), (4 - \alpha)/(\alpha + 3)].$$

$$(e) [3A]^\alpha = 3[A]^\alpha = [3\alpha + 6, 12 - 3\alpha].$$

Outro conceito muito utilizado na teoria de conjuntos fuzzy são as variáveis linguísticas, definidas na seção a seguir.

1.9 Variáveis Linguísticas

As variáveis linguísticas são usadas para expressar conceitos e conhecimentos na comunicação humana, e em muitas áreas essas são a forma mais importante (mas não única) de quantificar os dados ou informações. Por exemplo, dizemos que o “Dia está muito quente”, “O ônibus estava lotado”, “Tal pessoa é magra”, entre outros. Todos estes termos possuem um significado que transmitem informação.

Definição 1.17 ([24]). *Uma variável linguística é uma variável cujo valor é expresso qualitativamente por um termo linguístico (que fornece um conceito à variável) e quantitativamente pela sua função de pertinência. A variável linguística é composta, portanto, por uma variável simbólica e por um valor numérico.*

Exemplo 1.17. *Consideremos a variável linguística velocidade, que toma valores no universo $\mathcal{U} = [0, 100]$, e assumimos os seguintes termos linguísticos: baixa, média e alta. Estes valores são descritos por intermédio de conjuntos fuzzy (ver Figura 1.12).*

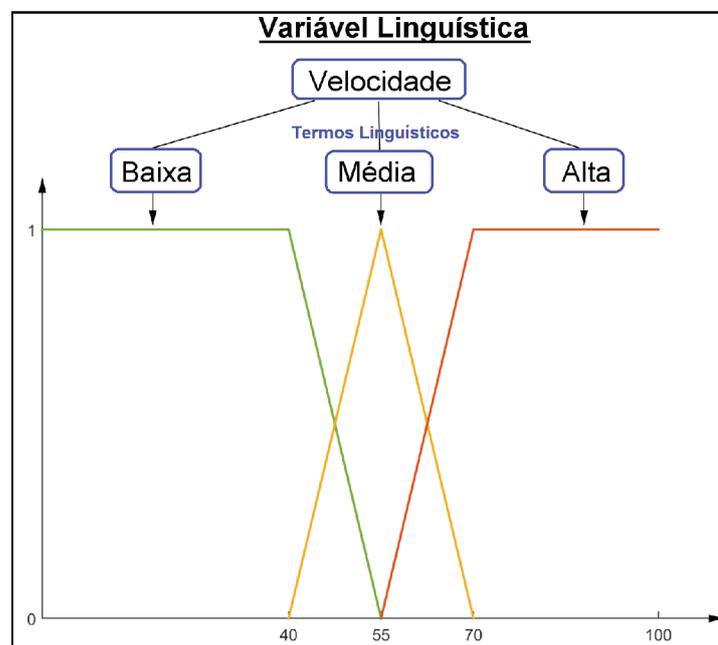


Figura 1.12: Variável linguística.

É importante notar que a variável linguística é expressa em termos de uma variável que denota a sua medida com respeito a uma unidade de medida pré-estabelecida. No Exemplo 1.17, a velocidade é medida em quilômetros por hora.

1.10 Sistema Baseado em Regras Fuzzy

Em nosso dia-a-dia, ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas. Cada indivíduo funciona como uma “caixa preta”: recebe informações que são interpretadas segundo seus parâmetros e então decide qual atitude tomar. O controle e a execução de tarefas devem seguir uma sequência de “ordens” linguísticas, traduzidas por um conjunto de regras capazes de serem decodificadas pelo controlador. A partir dessas regras obtém-se um sistema para produzir saídas para cada entrada fuzzy, conhecido como sistema baseado em regras fuzzy [6], [27].

Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) contém quatro componentes: um processador de entrada que realiza a fuzzificação dos dados, uma coleção de regras fuzzy chamada base de regras, uma máquina de inferência e um processador de saída que fornece um vetor como saída. Estes componentes estão conectados conforme indica a Figura 1.13.

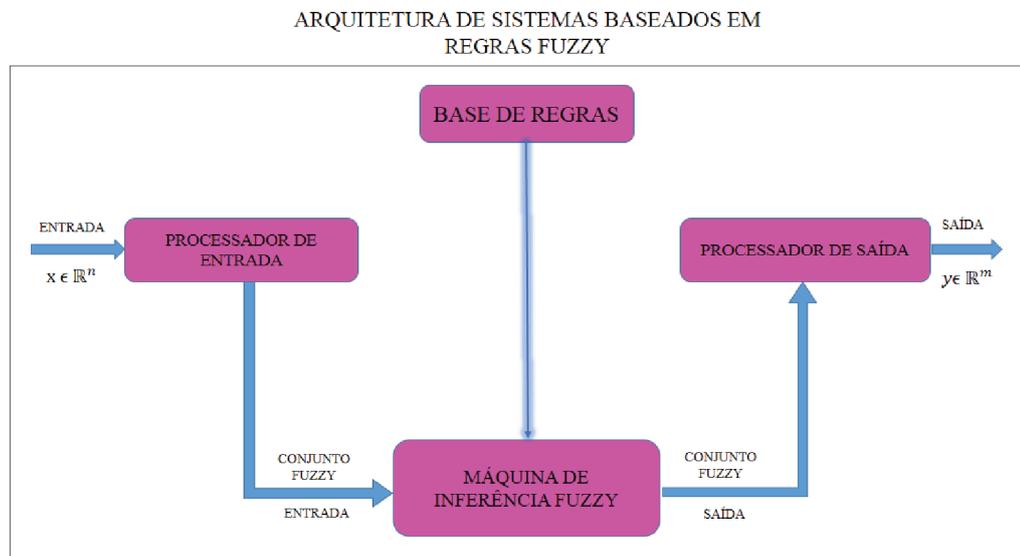


Figura 1.13: Sistema baseado em regras fuzzy.

1. Processador de Entrada (Fuzzificação)

Neste componente as entradas do sistema são modeladas em conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios. A atuação de um especialista na área do fenômeno a ser modelado é de fundamental importância para colaborar na construção das funções de pertinência para a descrição das entradas.

2. Base de Regras

Este componente, juntamente com máquina de Inferência Fuzzy, podem se considerado o ponto de maior importância dos sistemas baseados em regras fuzzy. É composto por uma coleção de proposições fuzzy na forma "Se... então ...". Cada uma destas proposições pode ser descrita linguisticamente de acordo com o conhecimento de um especialista. Por exemplo, se a velocidade de um carro é alta então o risco de acidente é alto. A base de regras descreve relações entre as variáveis linguísticas, para serem utilizadas na máquina de inferência fuzzy que descreveremos a seguir.

3. Máquina de Inferência Fuzzy

Este componente é de fundamental importância para o sucesso do sistema fuzzy, já que fornece a saída a partir de cada entrada fuzzy e estabelece uma relação definida pela base de regras.

Em nosso trabalho usamos dois métodos que serão introduzidos a seguir. Por simplicidade, somente modelos de regras com duas entradas e uma saída serão ilustradas.

- **Método de Inferência de Mamdani:** Uma regra: Se (antecedente) então (consequente) é definida pelo produto cartesiano fuzzy dos conjuntos que compõem o antecedente e o consequente da regra. O método de Mamdani agrega as regras através do operador lógico OU que adota a t -norma, é modelado pelo operador máximo

e, em cada regra, o operador lógico E que adota a s -norma é modelado pelo operador mínimo. Veja as regras a seguir:

Regra 1: Se $(x \text{ é } A_1 \text{ e } y \text{ é } B_1)$ então $(z \text{ é } C_1)$.

Regra 2: Se $(x \text{ é } A_2 \text{ e } y \text{ é } B_2)$ então $(z \text{ é } C_2)$.

A Figura 1.14, ilustra como uma saída real z de um sistema de inferência do tipo Mamdani é gerada a partir das entradas x e y reais e a regra de composição $\max - \min$.

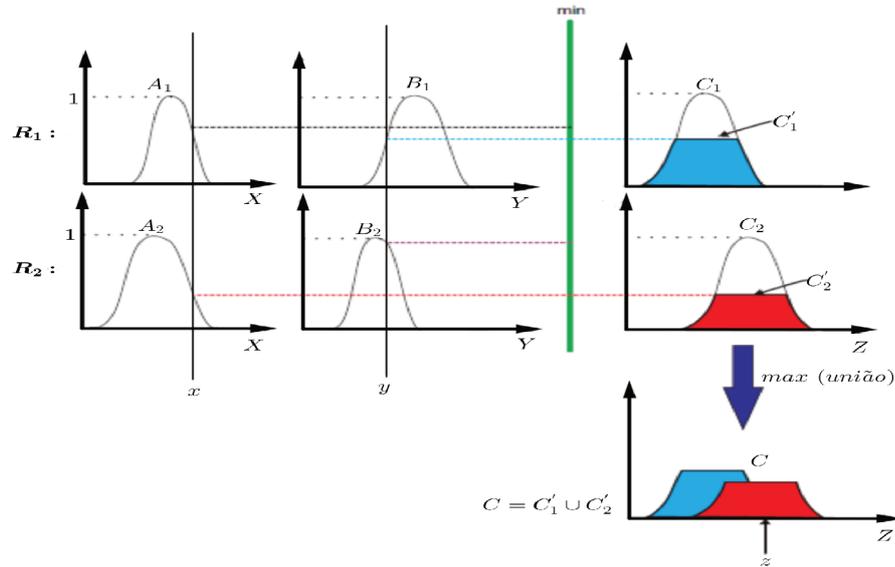


Figura 1.14: Método de inferência de Mamdani com composição $\max - \min$.

A saída $z \in \mathbb{R}$ é obtida pela defuzzificação do conjunto fuzzy de saída $C = C'_1 \cup C'_2$ da Figura 1.14.

- **Método de Inferência de Takagi-Sugeno:** Neste caso, o consequente de cada regra é uma função das variáveis de entrada. Por exemplo, podemos supor que a função mapeia a entrada e saída para cada regra é uma combinação linear das entradas, isto é, $z = px + qxy + r$. Veja as regras a seguir:

Regra 1: Se $(x \text{ é } A_1 \text{ e } y \text{ é } B_1)$ então $(z = f_1(x, y))$.

Regra 2: Se $(x \text{ é } A_2 \text{ e } y \text{ é } B_2)$ então $(z = f_2(x, y))$.

A Figura 1.15, ilustra como uma saída z de um sistema do método de Takagi-Sugeno é gerada a partir das entradas reais x e y . Esta saída do sistema é obtida pela média ponderada (procedimento de defuzzificação) das saídas de cada regra, usando-se o grau de ativação destas regras como ponderação.

No caso em que $p = q = z$, então $z = r$ (conjunto unitário fuzzy), os modelos de Mamdani e de Takagi-Sugeno produzem os mesmos valores de saída, porque a defuzzificação do método de Mamdani, pelo centro de gravidade, é igual à média ponderada no método de Takagi-Sugeno. Como z_1 e z_2 são conjuntos fuzzy unitários então w_1 e w_2 são os graus de pertinência de z_1 e z_2 , respectivamente.

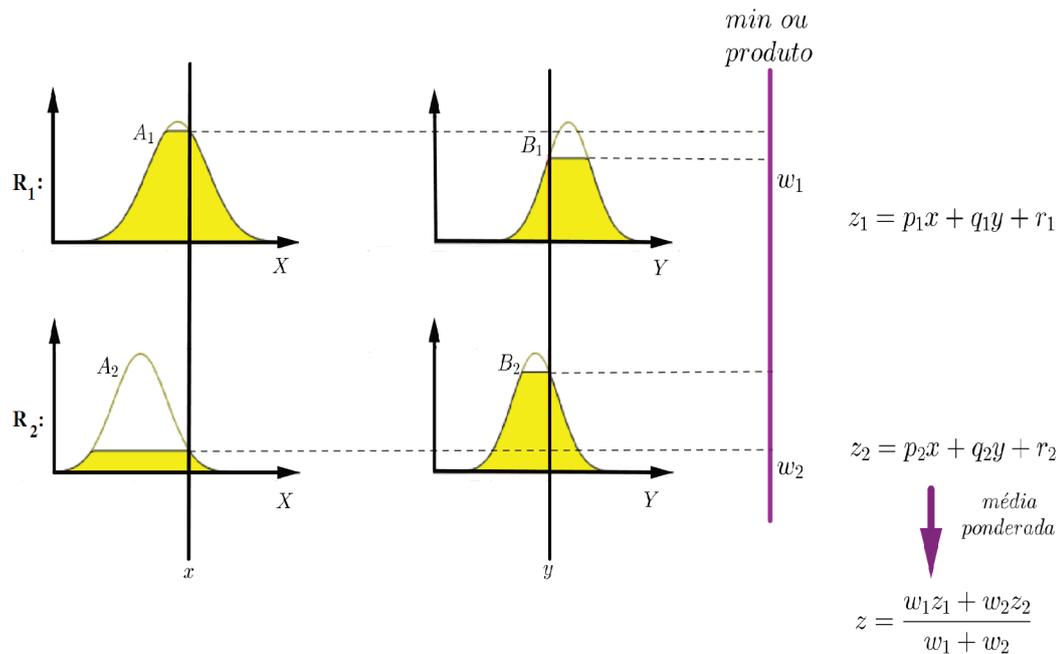


Figura 1.15: Método de inferência de Takagi-Sugeno.

4. Processador de Saída (Defuzzificação)

Na teoria dos conjuntos fuzzy pode-se dizer que a defuzzificação é um processo de se representar um número real por um conjunto fuzzy. Assim, devemos escolher um método para defuzzificar a saída e obter um número real que a represente. A seguir, relacionamos o método mais comum de defuzzificação.

- Centro de gravidade

Este método de defuzzificação é semelhante à média ponderada para distribuição de dados, com a diferença que os pesos são os valores $C(z_i)$ que indicam o grau de compatibilidade do valor z_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy C .

* Para um domínio discreto, tem-se

$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^n z_i \mu_C(z_i)}{\sum_{i=0}^n \mu_C(z_i)}. \quad (1.17)$$

* Para um domínio contínuo, tem-se

$$G(C) = \frac{\int_R z \mu_C(z) dz}{\int_R \mu_C(z) dz} \quad (1.18)$$

em que, R é a região de integração e $z, z_i \in C$.

O seguinte exemplo apresenta uma aplicação do SBRF:

Exemplo 1.18. *O objetivo deste exemplo é analisar a qualidade de um notebook abordando dois aspectos: o material e a fabricação do notebook.*

Dados os valores de quantidade de bom material na fabricação (porcentagem) e da qualidade de fabricação (escala), tem-se como resultado a qualidade de um notebook.

Neste exemplo, as variáveis linguísticas são:

- *Quantidade de bom material (%), e termos linguísticos: inadequada, média e adequada. As funções de pertinência são mostradas na Figura 1.16.*

- *Qualidade de fabricação (escala) com domínio $[0, 10]$ e termos linguísticos: baixo, média e alta. As funções de pertinência são mostradas na Figura 1.17.*
- *O domínio da variável de saída “qualidade de um notebook” é $[0, 1]$ e com termos linguísticos: muito defeituosa, defeituosa e boa. As funções de pertinência são mostradas na Figura 1.18.*

A Tabela 1.3 apresenta as regras fuzzy para modelar a qualidade de um notebook em função da quantidade de bom material para a fabricação M (porcentagem) e a qualidade de fabricação F (escala).

Material (M) \ Fabricação (F)	inadequada	média	adequada
baixa	muito defeituosa	defeituosa	defeituosa
média	muito defeituosa	defeituosa	boa
alta	muito defeituosa	boa	boa

Tabela 1.3: Regras fuzzy.

A seguir apresentamos, as funções de pertinências das variáveis linguísticas:

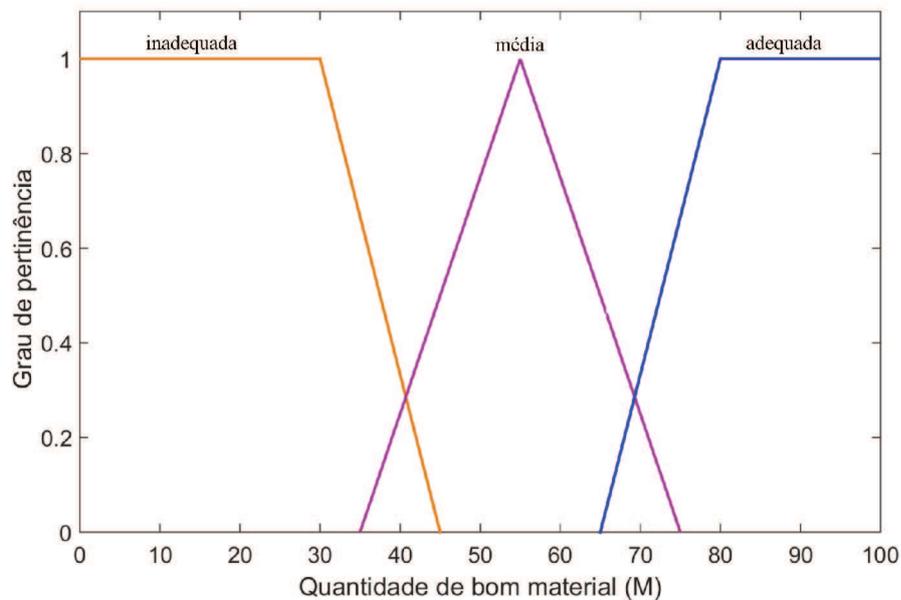


Figura 1.16: Funções de pertinência da quantidade de bom material (M).

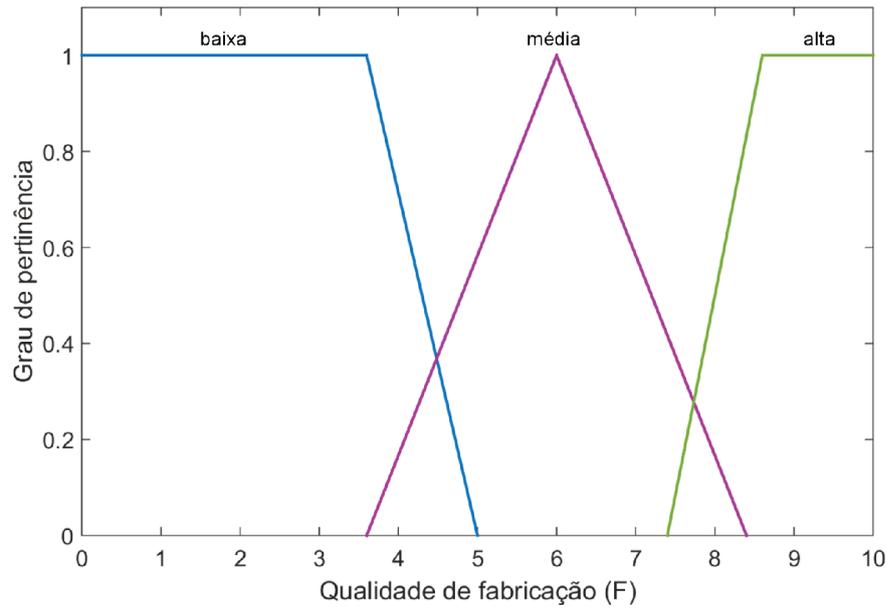


Figura 1.17: Funções de pertinência da qualidade de fabricação (F).

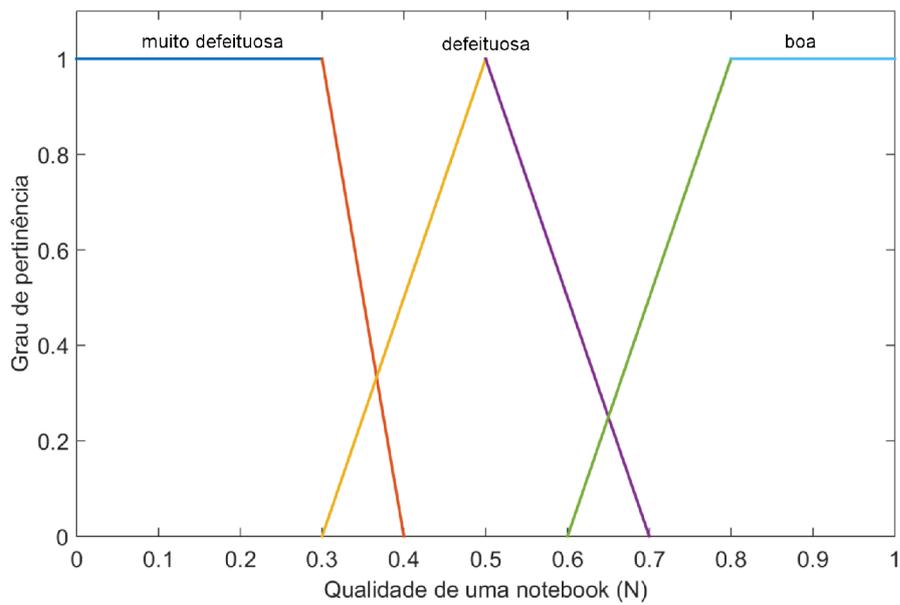


Figura 1.18: Funções de pertinência da qualidade de um notebook.

Se tivermos um notebook com quantidade de bom material na fabricação de 70% e qualidade de fabricação 8 então, pela construção do SBRF, o a qualidade do notebook é 0.718(ver Figura 1.19).

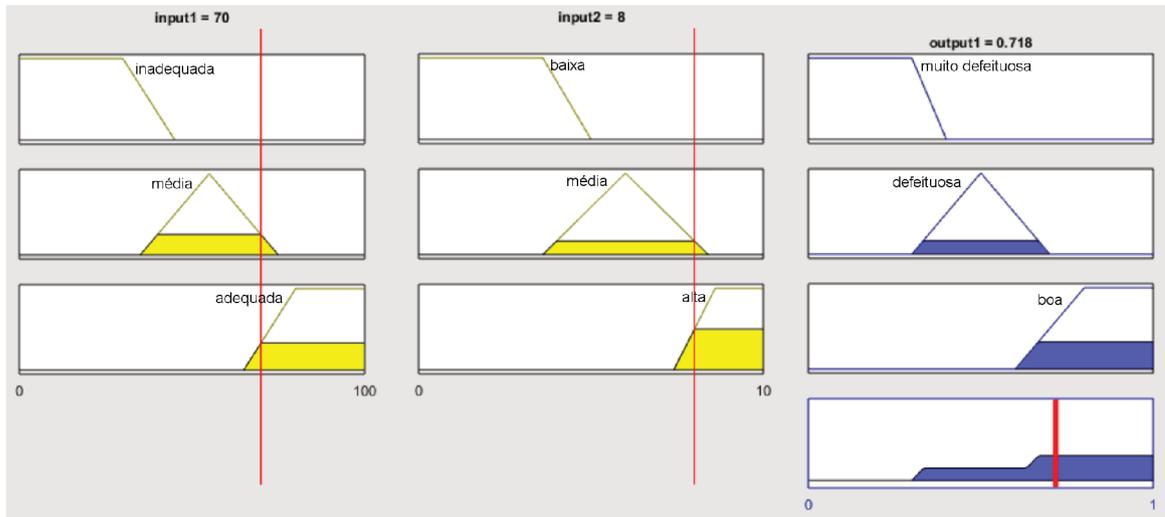


Figura 1.19: Método de Mamdani para a qualidade de um notebook.

Através do SBRF construído podemos obter a qualidade de um notebook para qualquer variação da quantidade de bom material no intervalo $[0, 100]$ e qualidade de fabricação do notebook no intervalo $[0, 10]$.

No Capítulo 2, apresentamos a definição de números fuzzy correlacionados.

Capítulo 2

Números Fuzzy f -Correlacionados

Neste capítulo estudamos o conceito de números fuzzy f -correlacionados, em que f é uma função injetora e monótona, e algumas de suas propriedades. Notemos que a definição de números fuzzy f -correlacionados generaliza o conceito de números fuzzy completamente correlacionados segundo [18], que enunciaremos na seção 2.3, partindo da definição de distribuição de possibilidade.

2.1 Distribuição de Possibilidade Conjunta

Definição 2.1 ([18]). *Uma distribuição de possibilidade n -dimensional é um conjunto fuzzy normal C em \mathbb{R}^n com suporte limitado.*

A seguir, consideramos a distribuição de possibilidade relacionada aos números fuzzy, pois, nos permite definir números fuzzy f -correlacionados.

Definição 2.2 ([18]). *O conjunto fuzzy C é chamado de uma distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy A_i , $i = 1, \dots, n$, se sua função de pertinência $\mu_C : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ satisfaz a relação*

$$\max_{x_j \in \mathbb{R}, j \neq i} \mu_C(x_1, \dots, x_n) = \mu_{A_i}(x_i), \quad (2.1)$$

para todo $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

Além disso, A_i é chamado a i -ésima possibilidade de distribuição marginal de C , e a projeção de C no i -ésimo eixo é igual a A_i para $i = 1, \dots, n$.

Para melhor entendimento da Definição 2.2, vejamos o exemplo a seguir, para $n = 2$.

Exemplo 2.1 ([18]). *Se C denota a distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy A e B , então μ_C satisfaz as relações*

$$\max_y \mu_C(x_1, y) = \mu_A(x_1), \quad \max_x \mu_C(x, x_2) = \mu_B(x_2),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Observação 2.1 ([18]). *Se C é a distribuição de possibilidade dos números fuzzy A_i , $i = 1, \dots, n$. Então*

$$\mu_C(x_1, \dots, x_n) \leq \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}$$

e

$$[C]^\alpha \subseteq [A_1]^\alpha \times \dots \times [A_n]^\alpha,$$

para todos $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in [0, 1]$.

2.2 Números Fuzzy Completamente Correlacionados

Definição 2.3 ([18]). *Os números fuzzy A e B são considerados completamente correlacionados, se existirem $q, r \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, de tal forma que sua distribuição de possibilidade conjunta C seja definida por*

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) = \mu_B(y) \cdot \mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y), \quad (2.2)$$

em que $\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}$ representa a função característica da reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | qx + r = y\}$.

Neste caso temos que

- os α -níveis da distribuição de possibilidade conjunta C dos números fuzzy A e B é

$$[C]^\alpha = \{(x, qx + r) \in \mathbb{R}^2 | x = (1 - \lambda)a_1^\alpha + \lambda a_2^\alpha, \lambda \in [0, 1]\}, \quad (2.3)$$

em que $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = q[A]^\alpha + r$, para cada $\alpha \in [0, 1]$,

- $\mu_B(y) = \mu_A\left(\frac{y-r}{q}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Observamos que $g(y) = \frac{y-r}{q}$ é a inversa da função afim $y = qx + r$.

Exemplo 2.2. *Os números fuzzy A e B , cujas funções de pertinência estão dadas por*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 1.5 \\ 4 - 2x & \text{se } 1.5 < x \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \frac{y - 1.5}{0.5} & \text{se } 1.5 \leq y \leq 2 \\ \frac{2.5 - y}{0.5} & \text{se } 2 < y \leq 2.5 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

são completamente correlacionados. Para ver isto tomamos como distribuição de possibilidade conjunta de A e B ao conjunto fuzzy C com função de pertinência $\mu_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mathcal{X}_{\{x+0.5=y\}}(x, y) = \mu_B(y) \cdot \mathcal{X}_{\{x+0.5=y\}}(x, y).$$

Neste caso, $q = 1$ e $r = 0.5$. Assim,

- os α -níveis de A são $[A]^\alpha = \left[\frac{\alpha + 2}{2}, \frac{4 - \alpha}{2}\right]$,
- os α -níveis de B são $[B]^\alpha = [0.5\alpha + 1.5, 2.5 - 0.5\alpha] = [A]^\alpha + 0.5$,
- os α -níveis de C são $[C]^\alpha = \left\{ (x, x + 0.5) \in \mathbb{R}^2 | x = (1 - \lambda) \left(\frac{\alpha + 2}{2}\right) + \lambda \left(\frac{4 - \alpha}{2}\right) \right\}$.

Na Figura 2.1 observe-se que os triângulos de cores verde e roxa, respectivamente, representam aos números fuzzy A e B que estão completamente correlacionados e cuja distribuição de possibilidade conjunta C está dada pelo triângulo de cor marrom. Além disso, pode-se observar que os α -níveis dos números fuzzy A , B e da distribuição de possibilidade conjunta C são intervalos de \mathbb{R}^2 representados em vermelho e a linha de cor azul é a reta $y = x + 0.5$.

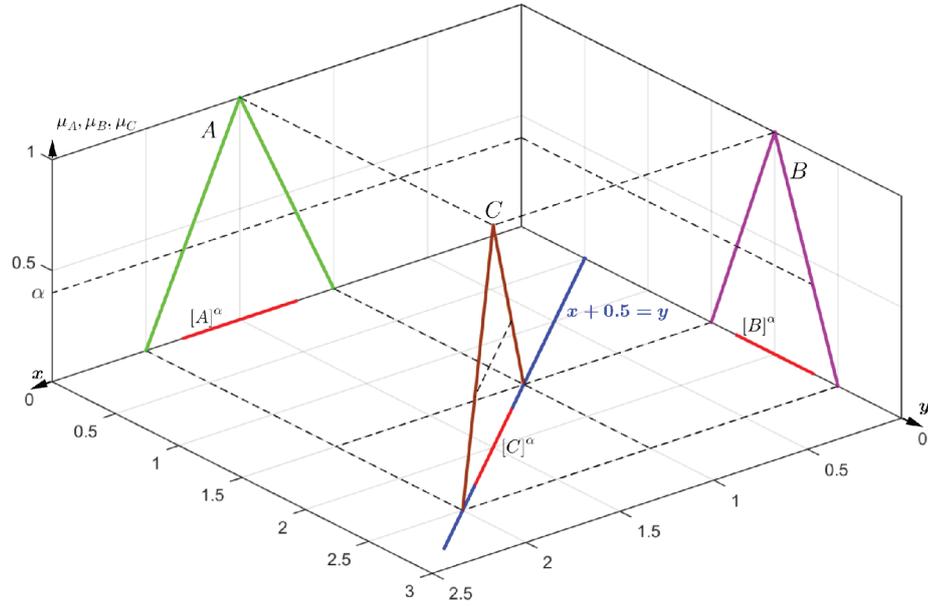


Figura 2.1: Números fuzzy completamente correlacionados.

Definição 2.4 ([18]). *Os números fuzzy A e B são ditos completamente positivamente (negativamente) correlacionados, se q é positivo (negativo).*

Exemplo 2.3. *No Exemplo 2.2, os números fuzzy A e B são completamente positivamente correlacionados, pois, $q = 1$ é positivo.*

2.3 Números Fuzzy f -Correlacionados

Nesta seção mostramos a definição de números fuzzy f -correlacionados e alguns exemplos.

Definição 2.5 ([9]). *Sejam $f: X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, uma função monótona injetora e A , B números fuzzy. Diz-se que A e B estão correlacionados via a função f ou f -correlacionados, se a distribuição de possibilidade conjunta C é dada por*

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x)\mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x, y) = \mu_B(y)\mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x, y), \quad (2.4)$$

em que

$$\mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = f(x) \\ 0 & \text{se } y \neq f(x). \end{cases}$$

Neste caso temos que $\mu_B(y) = \mu_A(f^{-1}(y))$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.4. *Seja A um número fuzzy triangular cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{se } 1 \leq x \leq 1.5 \\ 2(2-x) & \text{se } 1.5 < x \leq 2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x > 0$. Como a função f é estritamente decrescente segue que f é injetora e monótona. Assim, a inversa da função f é $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$.

Seja B o número fuzzy cuja função de pertinência é dada por $\mu_B(y) = \mu_A(f^{-1}(y))$, isto é,

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 2 \left(2 - \frac{1}{y}\right) & \text{se } \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{2}{3} \\ 2 \left(\frac{1}{y} - 1\right) & \text{se } \frac{2}{3} < y \leq 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Portanto, os números fuzzy A e B são f -correlacionados, cuja distribuição de possibilidade conjunta C tem a seguinte função de pertinência

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x) \mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x, y).$$

A Figura 2.2 ilustra os números fuzzy A e B f -correlacionados, nas cores amarela e roxa, respectivamente, com distribuição de possibilidade conjunta C na cor azul e a função f de cor verde. Além disso, pode-se observar que o grau de pertinência do ponto x é preservado através da função f .

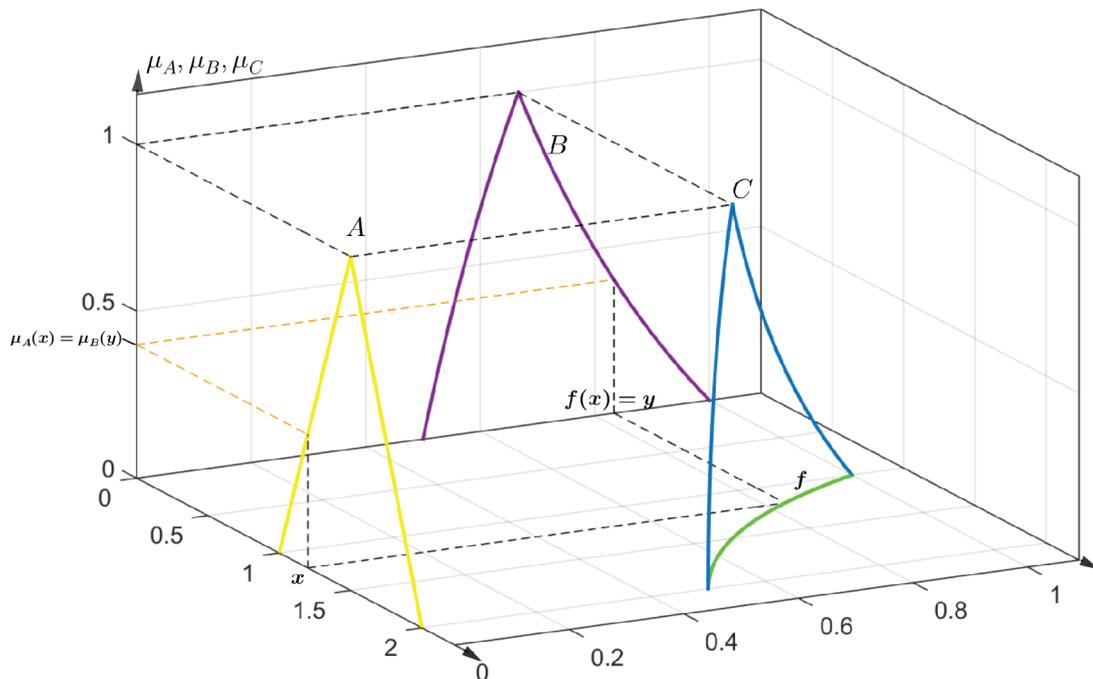


Figura 2.2: A e B f -correlacionados.

O resultado a seguir apresenta uma relação importante entre os α -níveis dos números fuzzy f -correlacionados, baseado em informações de [9].

Teorema 2.1. *Sejam A, B números fuzzy f -correlacionados com a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então, para cada $\alpha \in [0, 1]$ tem-se*

$$[B]^\alpha = f([A]^\alpha). \quad (2.7)$$

Demonstração. Do fato que A e B são f -correlacionados, temos que $\mu_B(y) = \mu_A(f^{-1}(y))$ e $y = f(x)$. Vamos dividir a demonstração em dois casos $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$.

Para $\alpha > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
[B]^\alpha &= \{y \in \mathbb{R} : \mu_B(y) \geq \alpha\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \mu_A(f^{-1}(y)) \geq \alpha\} \\
&= \{f(x) \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\} \\
&= f(\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\}) \\
&= f([A]^\alpha).
\end{aligned}$$

Para $\alpha = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
[B]^0 &= \overline{\text{supp}(B)} \\
&= \overline{\{y \in \mathbb{R} : \mu_B(y) > 0\}} \\
&= \overline{\{y \in \mathbb{R} : \mu_A(f^{-1}(y)) > 0\}} \\
&= \overline{\{f(x) \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}} \\
&= \overline{f(\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\})}
\end{aligned}$$

Pela hipótese f é contínua e A é um número fuzzy temos

$$\begin{aligned}
[B]^0 &= f(\overline{\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}}) \\
&= f(\overline{\text{supp}(A)}) \\
&= f([A]^0).
\end{aligned}$$

□

Neste caso temos que os α -níveis da distribuição de possibilidade conjunta C dos números fuzzy A e B é

$$[C]^\alpha = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (1 - \lambda)a_1^\alpha + \lambda a_2^\alpha, \lambda \in [0, 1]\}.$$

em que $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = f([A]^\alpha)$, para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo 2.5. *Seja A um número fuzzy trapezoidal cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_A(y) = \begin{cases} \frac{x - 0.5}{0.5} & \text{se } 0.5 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 3 - x & \text{se } 2 < x \leq 3. \end{cases} \quad (2.8)$$

Os α -níveis do número fuzzy A são os intervalos

$$[A]^\alpha = [0.5\alpha + 0.5, 3 - \alpha]. \quad (2.9)$$

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Note que f é uma função injetora e monótona com inversa $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Como f é uma função estritamente crescente tem-se que f é contínua.

Seja B o número fuzzy com função de pertinência é $\mu_B(y) = \mu_A(f^{-1}(y))$, isto é,

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y} - 0.5}{0.5} & \text{se } 0.25 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 4 \\ 3 - \sqrt{y} & \text{se } 4 < y \leq 9. \end{cases} \quad (2.10)$$

Assim, A e B são números fuzzy f -correlacionados (ver Figura 2.3).

Como f é uma função contínua, pelo Teorema 2.1, temos que os α -níveis do número fuzzy B são:

$$\begin{aligned} [B]^\alpha &= f([A]^\alpha) \\ &= f([0.5\alpha + 0.5, 3 - \alpha]) \\ &= \left[\frac{\sqrt{0.5\alpha + 0.5}}{0.5}, 3 - \sqrt{3 - \alpha} \right], \text{ para } \alpha \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Além disso, os α -níveis da distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy A e B são

$$[C]^\alpha = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (1 - \lambda)(0.5\alpha + 0.5) + \lambda(3 - \alpha), \lambda \in [0, 1]\}.$$

Na Figura 2.3 observe-se que os trapézios de cores roxa e verde representam os números fuzzy A e B , respectivamente, que estão f -correlacionados. Além disso, os α -níveis dos números fuzzy A e B são intervalos de \mathbb{R}^2 , no cor vermelho.

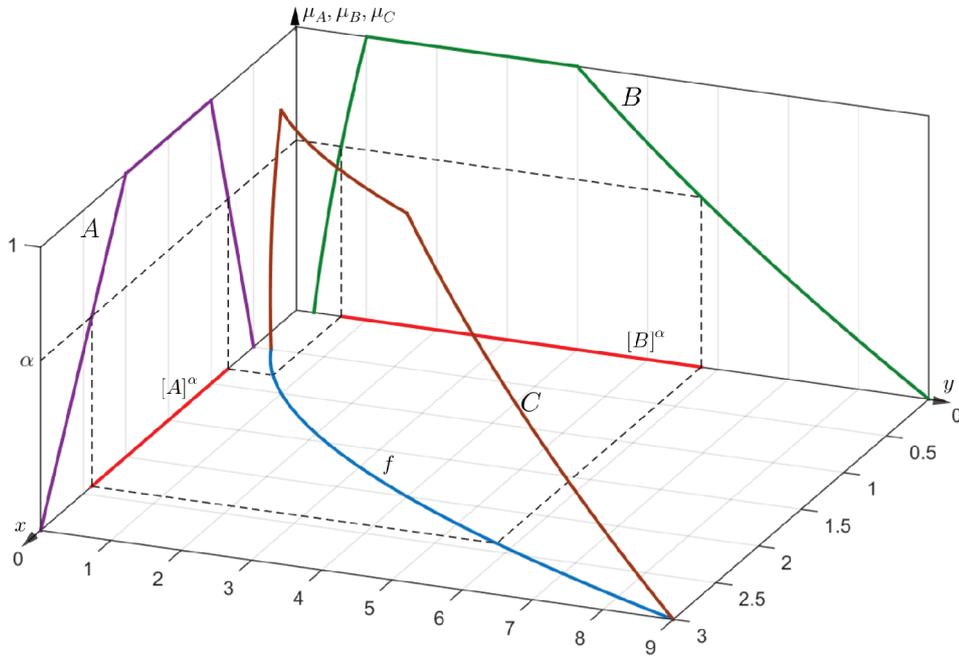


Figura 2.3: A e B f -correlacionados.

O seguinte resultado é de muita importância para o desenvolvimento do capítulo 3, baseado nas informações de [21].

Proposição 2.1. Se A, B são números fuzzy f -correlacionados e $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, então a extensão de Zadeh de (A, B) através de F é o conjunto fuzzy $\widehat{F}(A, B)$ cuja função de pertinência satisfaz

$$\mu_{\widehat{F}(A, B)}(z) = \mu_{\widehat{F \circ \phi}(A)}(z), \text{ em que } \phi(x) = (x, f(x)).$$

Demonstração. ([17]). Do fato que A e B estão f -correlacionados, temos que $y = f(x)$ e $\mu_B(y) = \mu_A(f^{-1}(y))$. Assim

$$\mu_{\widehat{F}(A, B)}(z) = \sup_{(x, y)} [\min(\mu_A(x), \mu_B(y))], \text{ em que } z = F(x, f(x)),$$

segundo [22], temos

$$\mu_{\widehat{F}(A,B)}(z) = \sup_{(x,y)} \left[\frac{\mu_A(x) + \mu_A(f^{-1}(y)) - |\mu_A(x) - \mu_A(f^{-1}(y))|}{2} \right]$$

e pela injetividade de f , segue que:

$$\mu_{\widehat{F}(A,B)}(z) = \sup_{(x,f(x))} \mu_A(x).$$

Dada a função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, com $\phi(x) = (x, f(x))$, tem-se

$$\mu_{\widehat{F}(A,B)}(z) = \mu_{\widehat{F \circ \phi}(A)}(z), \text{ com } F \circ \phi(x) = z.$$

□

Este resultado mostra que a extensão de Zadeh bivariável de dois números fuzzy correlacionados (A, B) , torna-se a extensão de Zadeh de uma variável do número fuzzy A , através de uma função composta bem definida. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.6. Consideremos os números fuzzy f -correlacionados do Exemplo 2.5. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = e^{-2x+\sqrt{y}}$. A extensão de Zadeh do par de números fuzzy (A, B) , sendo f -correlacionados, é dada pela função de pertinência

$$\mu_{\widehat{F}(A,B)}(z) = \mu_{\widehat{F \circ \phi}(A)}(z), \text{ em que } \phi(x) = (x, x^2).$$

Além disso, a função $F \circ \phi(x) = F(\phi(x)) = F(x, x^2) = e^{-x}$.

A Figura 2.4 apresenta o princípio de extensão de Zadeh do par de números fuzzy (A, B) , sendo f -correlacionados via a função $F(x, y) = e^{-2x+\sqrt{y}}$ que coincide com o o princípio de extensão de Zadeh do número fuzzy A via a função $F \circ \phi(x) = e^{-x}$.

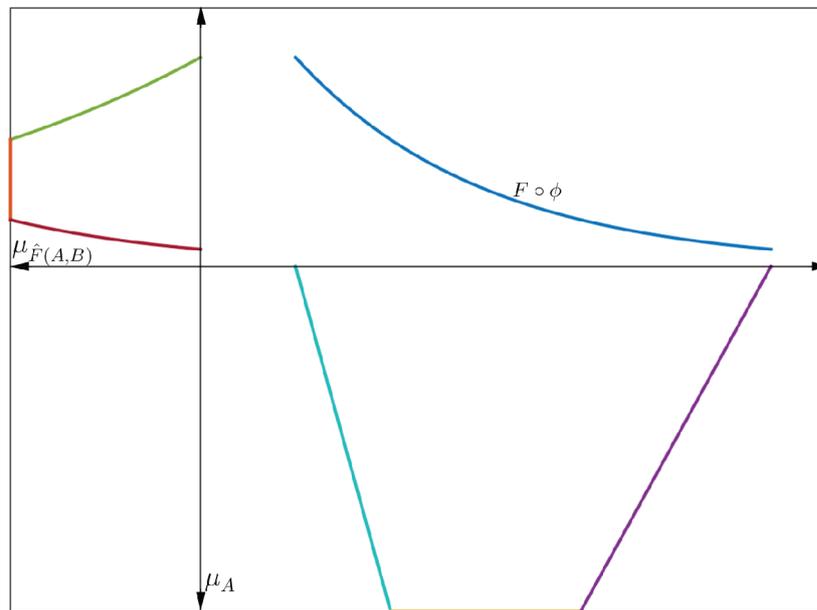


Figura 2.4: Função de pertinência do princípio de Extensão de Zadeh do par (A, B) , conjuntos fuzzy da Figura 2.3, utilizando a função composta $F \circ \phi$ sendo f -correlacionados.

Observação 2.2. Consideremos A e B dois conjuntos fuzzy, o princípio de extensão de Zadeh do par (A, B) através de uma função f injetora e monótona é equivalente à definição de números fuzzy f -correlacionados se A e B são números fuzzy.

No Capítulo 3, introduzimos um modelo da dinâmica do HIV com retardo sob tratamento antirretroviral e uma solução fuzzy para a carga viral.

Capítulo 3

Dinâmica do HIV com Retardo sob Tratamento Antirretroviral com Dois Parâmetros Fuzzy Correlacionados

Neste capítulo estudamos duas soluções fuzzy de uma equação diferencial, que simula o declínio da carga viral em indivíduos HIV positivos sob tratamento antirretroviral, proveniente de um sistema de equações diferenciais com retardo. Considera-se dois parâmetros do sistema como números fuzzy correlacionados através de uma função, sendo um deles o retardo, que surge das incertezas dos dados in vitro, e o outro a taxa de mortalidade do vírus, incerto devido aos fenômenos biológicos estudados. Os métodos de inferência de Mamdani e Takagi-Sugeno são implementados para determinar que os números fuzzy sejam correlacionados através de uma função [20]. Assim, as soluções fuzzy que originalmente seriam obtidas usando o princípio de extensão de Zadeh bidimensional, podem ser obtidas pelo princípio de extensão de Zadeh unidimensional. Para facilitar a obtenção da solução determinística do modelo proposto, considera-se a taxa de células infectadas do linfócito T do tipo CD4+ pelo vírus igual a zero.

3.1 Preliminares

Nesta seção expomos um resumo sobre as equações diferenciais com retardo.

Definição 3.1 ([4]). *Um espaço normado E é chamado de espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.*

Definição 3.2 ([14]). *Sejam $h \geq 0$ um número real e $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ o espaço de Banach de funções vetoriais contínuas do intervalo $[-h, 0]$ em \mathbb{R}^n com norma $\|\phi\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$, em que $\phi \in C$.*

Sejam $A \geq 0$ e $x \in C([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, para cada $0 \leq t_0 \leq t \leq t_0 + A$, definimos x_t como um elemento de C , dado por:

$$\begin{aligned} x_t : [-h, 0] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \theta &\mapsto x_t(\theta) = x(t + \theta). \end{aligned}$$

Se D é um subespaço de $\mathbb{R} \times C$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função e “ $\dot{\cdot}$ ” representa a derivada à direita, dizemos que a relação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t(\theta)) \tag{3.1}$$

é uma equação diferencial com retardo em D . A função x é uma solução da equação (3.1) em $[t_0 - h, t_0 + A]$, se existem $A \geq 0$, $t_0 \geq 0$ tal que $x \in C([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, com $(t, x_t) \in D$ e $x(t)$ satisfaz a equação (3.1) para $t \in [t_0, t_0 + A]$.

Observação 3.1. Quando $h = 0$, uma equação diferencial com retardo se reduz a uma equação diferencial ordinária.

A seguir, apresentamos um lema que será utilizado no Capítulo 4.

Lema 3.1 ([14]). Se $x \in C([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, então x_t é uma função contínua no intervalo $[t_0, t_0 + A]$.

Demonstração. De fato, como x é contínua no intervalo $[t_0 - h, t_0 + A]$, segue que, x é uniformemente contínua [22]. Logo, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $t, \tau \in [t_0 - h, t_0 + A]$ e $|t - \tau| < \delta$, então $|x(t) - x(\tau)| < \epsilon$.

Assim, para $t \in [t_0, t_0 + A]$, com $|t - \tau| < \delta$ temos que

$$|x(t + \theta) - x(\tau + \theta)| < \epsilon/2, \text{ para todo } \theta \in [-h, 0]. \quad (3.2)$$

Por outro lado,

$$\|x_t - x_\tau\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |x_t(\theta) - x_\tau(\theta)|. \quad (3.3)$$

Das equações (3.2) e (3.3), tem-se

$$\|x_t - x_\tau\| \leq \sup_{-h \leq \theta \leq 0} \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \quad (3.4)$$

Portanto, $x_t \in C([t_0, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$. □

Na seguinte seção mostramos o conceito do HIV.

3.2 HIV

Vírus de Imunodeficiência Humana (HIV) é um retrovírus esférico, isto é, um vírus contendo ácido ribonucleico (RNA) que se replica em uma célula hospedeira. De acordo com [25], no interior do HIV encontram-se, juntamente com o RNA, três proteínas importantes para o processo de replicação: Transcriptase Reversa, Integrase e Protease. Ataca o sistema imunológico, responsável por defender o organismo de doenças. As células mais atingidas são os linfócitos T do tipo CD4+, que é um tipo de célula que faz parte do sistema imunológico. O HIV altera o DNA dessa célula e faz cópias de si mesmo. Depois de se multiplicar, rompe os linfócitos em busca de outros para continuar a infecção.

A Figura 3.1, mostra a estrutura do HIV. Este vírus encapsulado tem um envelope proteico, constituído por duas glicoproteínas (gp) principais: uma maior, a gp120, que forma botões na superfície, e outra menor, a gp41; que juntas formam o conjunto gp160. Dentre deste envelope proteico, o vírus possui uma cápsula interna, formada pela proteína p17. No interior desta cápsula interna, existe uma membrana formada pela proteína p24 que envolve o material genético, o RNA. Nesta cápsula interna, encontra-se junto com o RNA, três proteínas importantes: Transcriptase Reversa, Integrase e Protease [33].

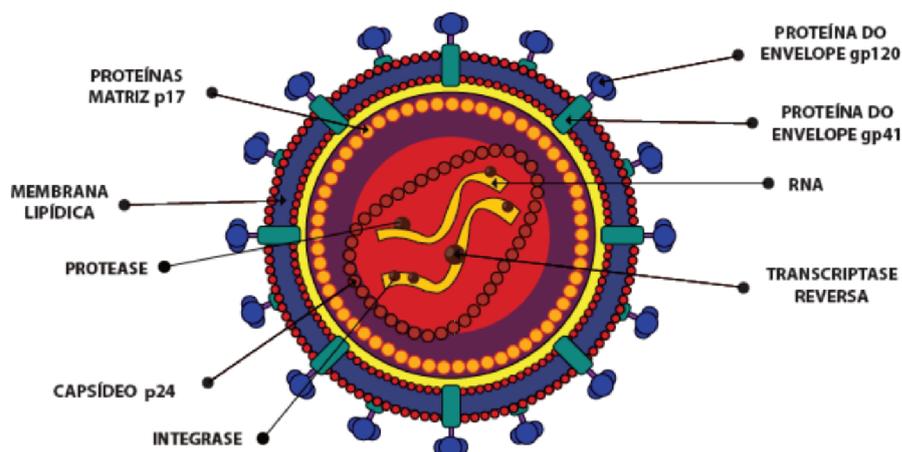


Figura 3.1: Estrutura do HIV [33].

A Figura 3.2 apresenta uma ilustração esquemática do HIV no momento de sua reprodução. Pode-se observar como o HIV ataca o linfócito T do tipo CD4+, isto é, as proteínas do HIV se acoplam ao linfócito T do tipo CD4+. Logo, o HIV faz cópias de seu próprio material genético e aloja a cópia de seus genes no DNA da célula hospedeira. Quando essa célula começa a se reproduzir, partes do vírus também são reproduzidas. Finalmente, as partes do vírus se unem perto da parede celular originando um novo vírus HIV [8].

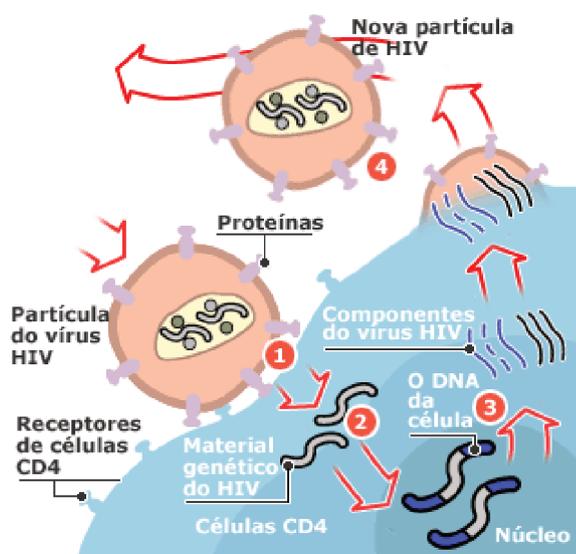


Figura 3.2: Representação do momento de reprodução do HIV [8].

Aspectos Clínicos

A infecção pelo HIV pode ser dividida em quatro fases clínicas:

1. Infecção aguda

A infecção aguda, também chamada de síndrome da infecção retroviral aguda ou infecção primária, ocorre em cerca de 50% a 90% dos pacientes. A história natural da infecção aguda caracteriza-se por viremia elevada, com resposta imune intensa. Durante o pico de viremia, ocorre diminuição rápida dos linfócitos T CD4+, que posteriormente aumentam,

mas geralmente não retornam aos níveis prévios à infecção. Os sintomas duram, em média, 14 dias. Os sintomas mais frequentes associados à síndrome viral aguda causada pelo HIV são febre, fadiga, cefaleia, faringite, diarreia, vômito e outras. Após a fase aguda, ocorre a estabilização da viremia em níveis variáveis, definidos pela velocidade da replicação viral.

2. Fase assintomática

Na infecção precoce pelo HIV, também conhecida como fase assintomática, a manifestação clínica é mínima ou inexistente. Nesta fase a história familiar, hábitos de vida, como também uma avaliação do perfil emocional e psicossocial do paciente, seu nível de entendimento e orientação sobre a doença são extremamente importantes. Vários exames laboratoriais periódicos são recomendados.

3. Fase sintomática inicial

Nesta fase, várias doenças podem ocorrer devido à infecção do HIV, tendo como consequência a imunossupressão, como por exemplo: sudorese noturna, fadiga, emagrecimento, diarreia, sinusopatias, candidíase oral, herpes simples, herpes zoster e outras.

4. AIDS (Doenças oportunistas)

A Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS) foi reconhecida em meados de 1981, nos EUA, como uma nova doença que compromete o sistema imunológico. É uma síndrome proveniente de um processo de imunodeficiência decorrente de infecção pelo HIV. As doenças oportunistas associadas à AIDS são várias, podendo ser causadas por vírus, bactérias, protozoários, fungos e certas neoplasias. As doenças oportunistas mais comuns associadas à AIDS são pneumonias, candidíase, herpes simples, toxoplasmose, sarcoma da Kaposi e outras.

A Figura 3.3 mostra o tempo de percurso da infecção do HIV em um adulto infectado, em que podemos observar que o tempo médio de infecção da AIDS é 10 anos, sem tratamento com antirretrovirais.

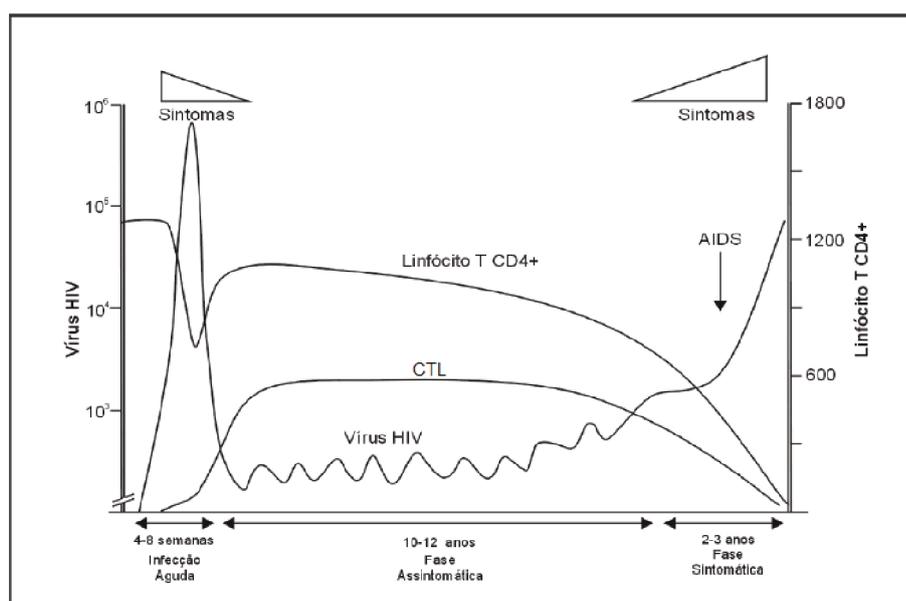


Figura 3.3: Esquema da história natural da infecção do HIV [11], [34], [37] e [19].

3.3 Modelo da Dinâmica do HIV com Retardo

Nesta seção introduzimos um modelo da dinâmica do HIV com retardo, que é apresentado por Herz et al. [15], que incorporando tratamento antirretroviral, contém três variáveis dependentes do tempo que representam:

- $x(t)$ é a população de células não infectadas do linfócito T do tipo CD4+;
- $y(t)$ é a população de células infectadas do linfócito T do tipo CD4+ que produzem o vírus;
- $v(t)$ é a carga viral ou partículas de vírus livre,

cujas taxas de mortalidade são d , a e u , respectivamente. O modelo supõe que as células não infectadas são continuamente produzidas pelo corpo humano a um influxo constante λ . Células não infectadas e vírus livres produzem células infectadas a uma taxa de $\beta(t)$. As células infectadas produzem partículas de vírus livres a uma taxa de $k(t)$. O sistema de equações diferenciais é dado por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda - dx - \beta(t)xv \\ \frac{dy}{dt} &= \beta(t)xv - ay \\ \frac{dv}{dt} &= k(t)y - uv.\end{aligned}\tag{3.5}$$

O modelo não contém um retardo intracelular de tempo entre a infecção da célula do linfócito T do tipo CD4+ e a produção de novas partículas de vírus. Para incorporar a fase intracelular do ciclo de vida do vírus, Herz et al. [15] assumem que o atraso da produção do vírus é dado por um retardo τ , antes da infecção de uma célula. Isto implica que as células produzidas pelo vírus no tempo t são dadas pela densidade de células que foram recentemente infectadas no tempo $t - \tau$ e estão ainda vivas no instante t . Também assume-se a taxa de morte \tilde{a} para as células infectadas mas que ainda não produziam vírus e a probabilidade de sobrevivência no tempo $t - \tau$ para o tempo t é $e^{-\tilde{a}\tau}$. Assim, o modelo pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - dx - \beta(t)xv\tag{3.6}$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta(t - \tau)x(t - \tau)v(t - \tau)e^{-\tilde{a}\tau} - ay\tag{3.7}$$

$$\frac{dv}{dt} = k(t)y - uv.\tag{3.8}$$

A equação (3.7) é uma equação diferencial com retardo τ . Em geral, as soluções analíticas para este tipo de equações são difíceis de serem obtidas. Para o problema em questão, a população de células não infectadas $x(t)$, células produtoras de vírus infectado $y(t)$ e vírus livre $v(t)$ estão em um estado constante ou estável antes do começo do tratamento. Isto facilita a análise matemática na busca de soluções analíticas simples. O estado de equilíbrio não trivial é dado por:

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{au}{\beta k}e^{\tilde{a}\tau} \\ y_0 &= \frac{\lambda}{a}e^{\tilde{a}\tau} - \frac{du}{\beta k} \\ v_0 &= \frac{ky_0}{u},\end{aligned}\tag{3.9}$$

com β e k consideradas como taxas constantes de pré-tratamento.

Na seção a seguir introduzimos, no modelo proposto neste capítulo, o tratamento antirretroviral do HIV com inibidores de protease e a solução determinística da carga viral.

3.4 Tratamento Antirretroviral com Inibidores da Protease

Herz et. al. [15] introduzem no modelo o tratamento antirretroviral com inibidores de protease que, no HIV, bloqueiam a produção de novos vírus infecciosos v_I , a partir de células infectadas, permitindo somente gerar vírus não infectado no modelo. Isto significa que $\beta(t)$ é fortemente reduzido. O vírus infeccioso v_I , entretanto, não é produzido para $t > 0$ e decai de acordo com $\frac{dv_I(t)}{dt} = -uv_I(t)$. As equações (3.6) e (3.7) permanecem válidas se substituirmos v por v_I . Assim,

$$\frac{dv(t)}{dt} = -uv(t). \quad (3.10)$$

Para simplificar, considera-se que o tratamento é 100% eficiente, isto é, que a taxa de infecção das células não infectadas CD4+ pelo vírus, $\beta(t)$, é zero para um tempo $t > 0$. As células infectadas e carga viral não são novamente afetadas por tempos menores do que o intervalo de tempo τ , isto é,

$$x(t) = x_0, y(t) = y_0, v(t) = v_0, \text{ para } 0 < t \leq \tau.$$

Herz et al. [15] assumem que a população de células não infectadas permanece constante, $x(t) = x_0$ para uma escala temporal em consideração. Da equação (3.10), o declínio exponencial é

$$v_I(t) = v_0 e^{-u(t-\tau)}. \quad (3.11)$$

A equação (3.7), para $t > \tau$, é dada por:

$$\frac{dy}{dt} = \beta x_0 v_I e^{-\hat{a}\tau} - ay. \quad (3.12)$$

Assim, a solução da equação (3.12) é dada por $y(t) = y_0$, para $0 < t < \tau$ e

$$y(t) = \frac{y_0}{a-u} [ae^{-u(t-\tau)} - ue^{-a(t-\tau)}], \text{ para } t > \tau. \quad (3.13)$$

A seguir, determinamos a solução para a equação (3.8). Para isso, primeiro substituímos $y(t)$ (3.13), na equação (3.8) obtendo

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ky_0}{a-u} (ae^{-u(t-\tau)} - ue^{-a(t-\tau)}) - uv(t), \text{ para } t > \tau. \quad (3.14)$$

Resolvendo a equação (3.14) e substituindo ky_0 por $v_0 u$ (dada na equação (3.9)), temos

$$v(t) = v_0 e^{-u(t-\tau)} + \frac{uv_0}{a-u} \left\{ \frac{u}{a-u} [e^{-a(t-\tau)} - e^{-u(t-\tau)}] + a(t-\tau)e^{-u(t-\tau)} \right\}, \text{ para } t > \tau. \quad (3.15)$$

Assim, a evolução do vírus livre no tempo, ou seja, a solução da equação (3.8), é dada por $v(t) = v_0$, para $0 < t \leq \tau$ e

$$v(t) = v_0 e^{-u(t-\tau)} + \frac{uv_0}{a-u} \left\{ \frac{u}{a-u} [e^{-a(t-\tau)} - e^{-u(t-\tau)}] + a(t-\tau)e^{-u(t-\tau)} \right\}, \text{ para } t > \tau. \quad (3.16)$$

A seguir apresentamos os métodos de inferência fuzzy de Mamdani e Takagi-Sugeno, adotando um SBRF, que são obtidos por Jafelice et al. [20]. Os SBRF fornecem expressões matemáticas que relacionam o retardo e a taxa de mortalidade do vírus, que serão detalhadas nas seções 3.5 e 3.6.

3.5 Método de Inferência de Mamdani

Nesta seção determinamos a relação do retardo e a taxa de mortalidade do vírus, através de uma função, utilizando o método de inferência de Mamdani e, em seguida, uma solução fuzzy da carga viral via a extensão de Zadeh unidimensional.

Herz et al. [15] apresentam as seguintes relações entre a taxa de mortalidade do vírus e o retardo (ver Figura (3.4)):

- $u = 2/\text{dia}$ com $\tau = 0.08(\text{aprox.}2h)$ dia;
- $u = 3/\text{dia}$ com $\tau = 0.5(12h)$ dia;
- $u = 9/\text{dia}$ com $\tau = 1(24h)$ dia.

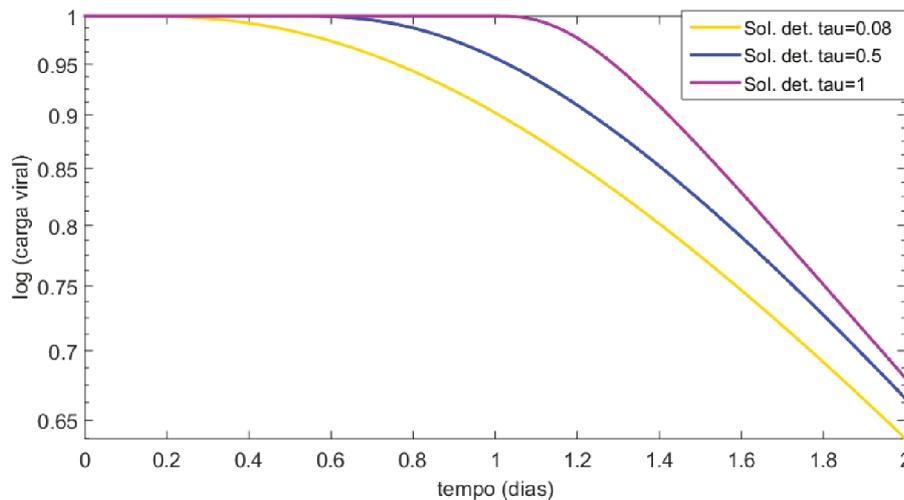


Figura 3.4: Curvas determinísticas da equação (3.13) para $\tau = 0.08$ ($u = 2$), $\tau = 0.5$ ($u = 3$) e $\tau = 1$ ($u = 9$).

O SBRF é construído tendo como variável de entrada o retardo intracelular τ e como variável de saída, a taxa de mortalidade do vírus u . Os termos linguísticos do retardo intracelular são baixo, médio, médio alto, alto e muito alto, e da taxa de mortalidade do vírus são baixo, médio, médio alto, alto e muito alto [20]. Adotou-se os domínios das funções de pertinência do retardo (τ) e a taxa de mortalidade do vírus (u) como intervalos que contém os valores mencionados por Herz et al. [15]. A base de regras que codifica a relação entre τ e u é dada por

- se τ é *baixo* então u é *baixo*;
- se τ é *médio* então u é *médio*;
- se τ é *médio alto* então u é *médio alto*;
- se τ é *alto* então u é *alto*;
- se τ é *muito alto* então u é *muito alto*.

As funções de pertinência para cada conjunto fuzzy das variáveis linguísticas para o retardo intracelular (τ) e a taxa de mortalidade do vírus (u) são mostradas nas Figuras 3.5 e 3.6.

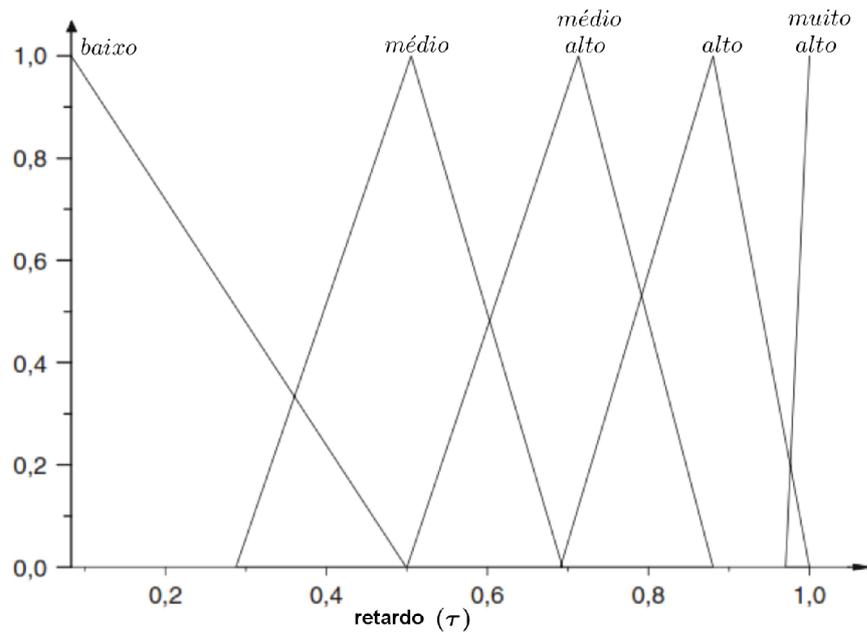


Figura 3.5: Funções de pertinência do retardo (τ).

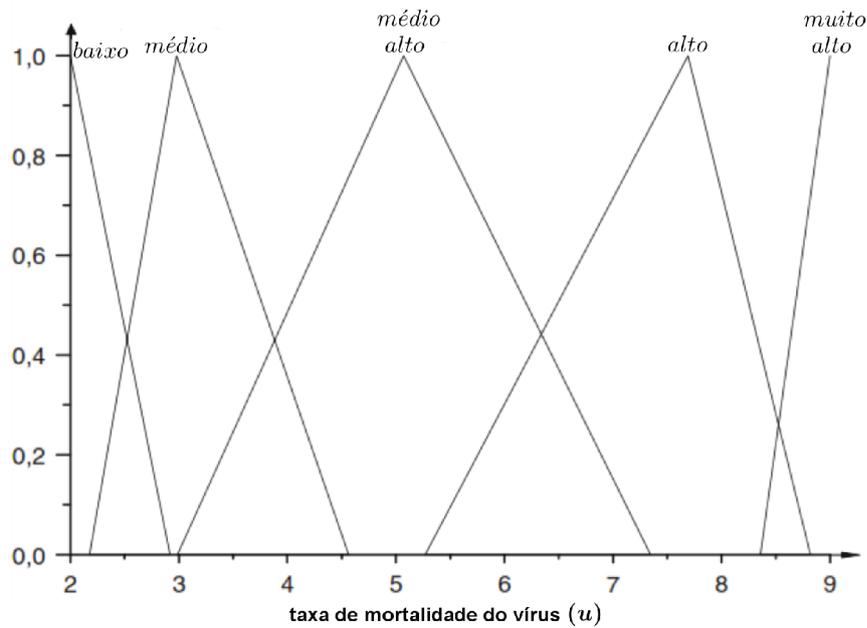


Figura 3.6: Funções de pertinência da taxa de mortalidade do vírus (u).

Os dados da taxa de mortalidade do vírus em função do retardo apresentados na Figura 3.7, foram obtidos a partir dos valores defuzzificados no intervalo $[0,08,1]$ por meio do SBRF proposto. Por meio do método de mínimos quadrados [36] obtém-se a curva da taxa de mortalidade do vírus em função do retardo, que é dado por:

$$u(\tau) = 1.67e^{1.63\tau}, \quad (3.17)$$

com coeficiente de determinação (R^2) [27] em relação aos dados do SBRF de 0.9873, que é apresentada na Figura 3.7. Note que a função u é estritamente crescente, portanto u é injetora e monótona. Assim, a inversa da função u é $u^{-1}(y) = \frac{1}{1.63} \ln\left(\frac{y}{1.67}\right)$, em que $y = u(\tau)$.

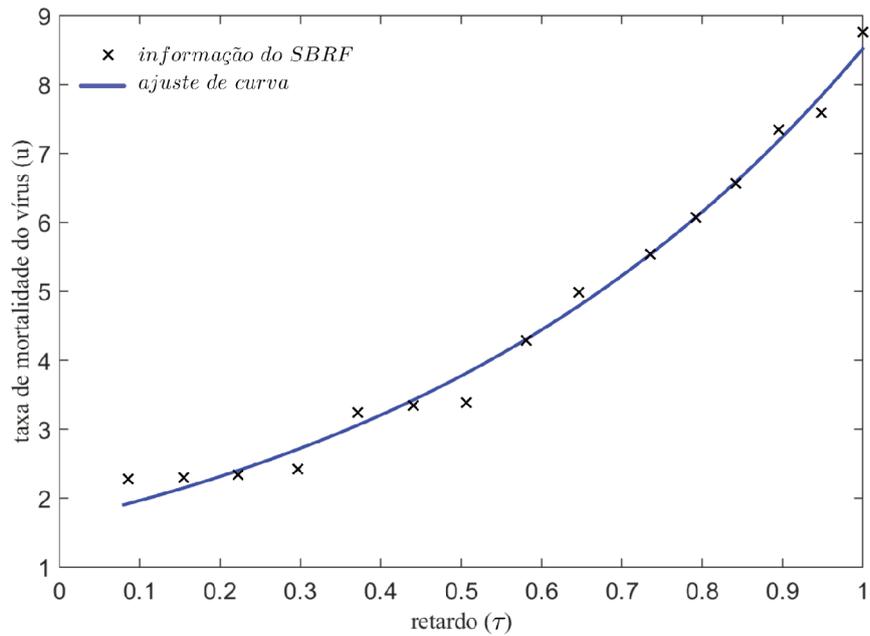


Figura 3.7: Ajuste de curva da taxa de mortalidade do vírus.

A seguir, determinamos uma solução fuzzy da dinâmica do HIV com retardo sob tratamento com inibidores da protease. Para isso, consideramos o retardo intracelular τ como um parâmetro fuzzy dado pelo número fuzzy triangular Γ (ver Figura 3.8), cujo suporte é $[0.08, 1]$ e função de pertinência é dada por

$$\mu_{\Gamma}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - 0.08}{0.42} & \text{se } 0.08 \leq \tau \leq 0.5 \\ 2(1 - \tau) & \text{se } 0.5 < \tau \leq 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

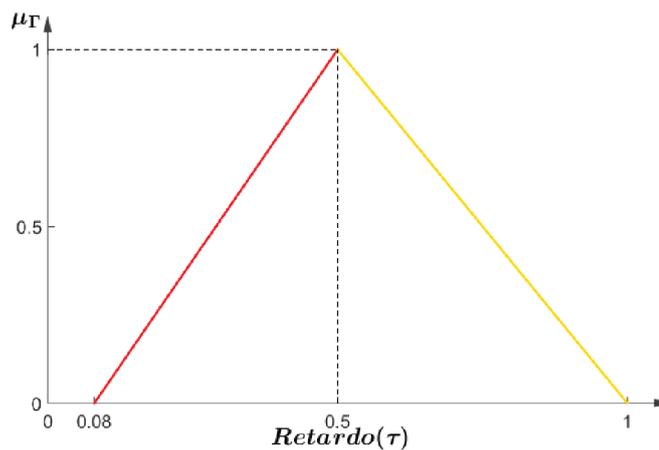


Figura 3.8: Número Fuzzy Γ .

Modelamos a taxa de mortalidade do vírus como um número fuzzy U cuja função de pertinência é dada por $\mu_U(y) = \mu_{\Gamma}(u^{-1}(y))$, em que $y = u(\tau)$, isto é,

$$\mu_U(y) = \begin{cases} \frac{\ln(y/1.67) - 13.04}{0.6846} & \text{se } u(0.08) \leq y \leq u(0.5) \\ 2 - \frac{2}{1.63} \ln(y/1.67) & \text{se } u(0.5) < y \leq u(1). \end{cases}$$

Assim, os números fuzzy Γ e U são u -correlacionados, cuja distribuição de possibilidade conjunta C de Γ e U tem a seguinte função de pertinência

$$\mu_C(\tau, u) = \mu_\Gamma(\tau) \mathcal{X}_{\{u=1.67e^{1.63\tau}\}}(\tau, u).$$

A Figura 3.9 ilustra os números fuzzy Γ e U u -correlacionados, com distribuição de possibilidade conjunta C , tendo como funções de pertinência, μ_Γ e μ_U , respectivamente.

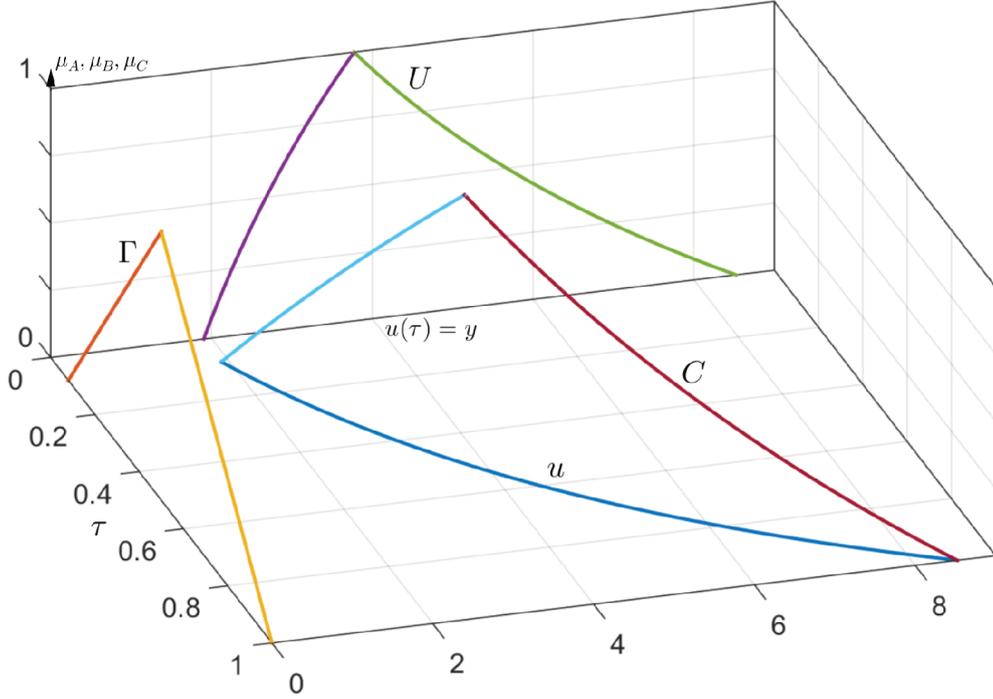


Figura 3.9: Γ e U números fuzzy u -correlacionados.

Fixando t na solução determinística (3.16), defina-se a função $v_t(\tau, u) = v(t; \tau; u)$ que é contínua. Para cada instante t , aplicando o princípio de extensão de Zadeh para a função $v_t(\tau, u)$. Pela Proposição 2.1 obtemos que

$$\mu_{\widehat{v}_t(\Gamma, U)}(z) = \mu_{\widehat{v}_t \circ \phi(\Gamma)}(z), \text{ em que } z = v_t \circ \phi(\tau) \text{ e } \phi(\tau) = (\tau, u(\tau)). \quad (3.19)$$

Assim, uma solução fuzzy da equação diferencial ordinária (3.8) é dada por:

$$v(t, \tau) = \begin{cases} v_0, & \text{para } 0 < t \leq \tau \\ v_0 e^{-u(\tau)(t-\tau)} + \frac{u(\tau)v_0}{a-u(\tau)} \left\{ \frac{u(\tau)}{a-u(\tau)} \left[e^{-a(t-\tau)} - e^{-u(\tau)(t-\tau)} \right] + a(t-\tau)e^{-u(\tau)(t-\tau)} \right\}, & \text{para } t \geq \tau. \end{cases} \quad (3.20)$$

que é contínua, para $\tau = 0.008$ que é o menor ponto do $\text{supp}(\Gamma)$ em que Γ é o número fuzzy (3.18).

Na Figura 3.10 é apresentado o gráfico da solução fuzzy da carga viral obtida através do método de Mamdani e pelo Teorema 1.1, com $v_0 = 1$. Observa-se que quando o tempo cresce a carga viral diminui. A região amarela é a que melhor representa o fenômeno biológico, por conter os graus de pertinência próximos de 1.

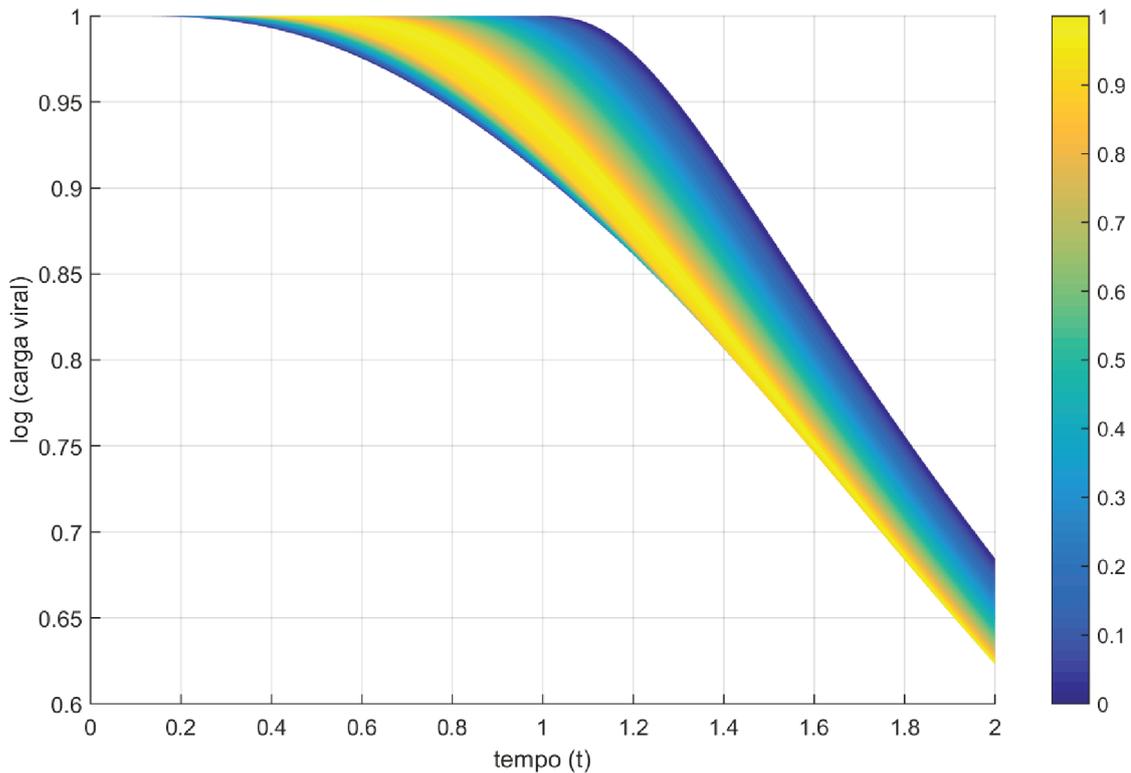


Figura 3.10: Solução fuzzy da equação (3.8) para a carga viral, para t variando de 0 a 2 dias, com Γ e U números fuzzy u -correlacionados.

3.6 Método de Inferência de Takagi-Sugeno

Nesta seção determinamos a correlação do retardo e a taxa de mortalidade do vírus, através de uma função, utilizando método de inferência de Takagi-Sugeno e, em segunda, uma solução fuzzy da carga viral via a extensão de Zadeh unidimensional.

Este método não utiliza o método de mínimos quadrados [36] para obter $u = u(\tau)$, como no caso do método de inferência de Mamdani, pois u é obtida como uma função definida por partes proveniente dos consequentes do sistema de inferência. O retardo intracelular (τ) é expressado como variável linguística com valores baixo e alto.

Partindo dos dados apresentados em Herz et. al. [15], Jafelice et al. [20] utilizam as seguintes funções lineares para os consequentes

- $u_1 = 2.38\tau + 1.8$, que passa pelos pares (0.08, 2) e (0.5, 3)
- $u_2 = 12\tau - 3$, que passa pelos pares (0.5, 3) e (1, 9).

Adotamos as seguintes base de regras

- se τ é *baixo* então $u_1 = 2.38\tau + 1.8$
- se τ é *alto* então $u_2 = 12\tau - 3$,

cujas funções de pertinência, μ_1 e μ_2 , para o retardo baixo e alto estão dadas por (3.21) e (3.22) (ver Figura 3.11), em que b é um parâmetro livre.

$$\mu_1(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \tau \leq b \\ \frac{1-\tau}{1-b} & \text{se } b \leq \tau \leq 1, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\mu_2(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \tau \leq b \\ \frac{1-\tau}{1-b} & \text{se } b < \tau \leq 1. \end{cases} \quad (3.22)$$

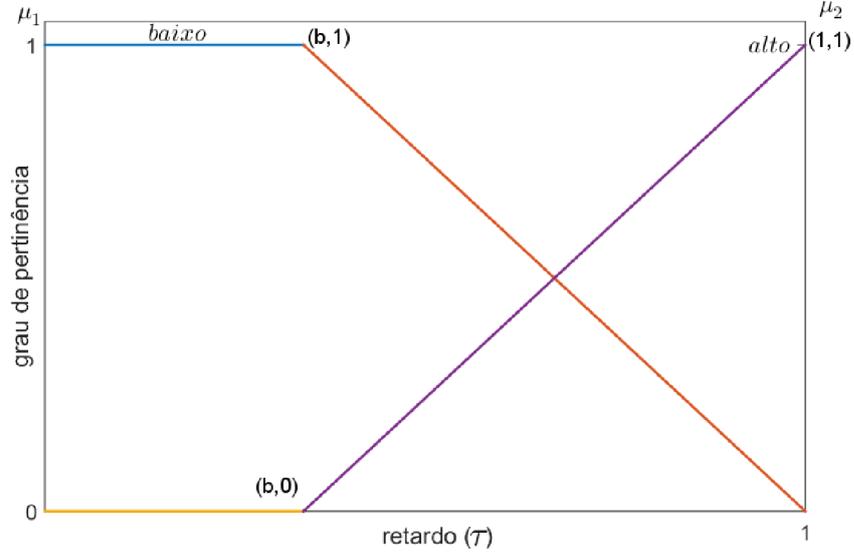


Figura 3.11: Funções de pertinência do retardo (τ) alto e baixo.

Assim, usando o método de inferência de Takagi-Sugeno, temos a saída u dada por

$$u = \frac{u_1\mu_1 + u_2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (3.23)$$

isto é,

$$u(\tau) = \begin{cases} 2.38\tau + 1.8 & \text{se } 0.08 \leq \tau \leq b \\ \frac{9.62\tau^2 - (2.42 + 12b)\tau + 1.8 + 3b}{1-b} & \text{se } b < \tau \leq 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

Observamos que u é uma parábola no intervalo $(b, 1]$. Como $\frac{9.62}{1-b} > 0$ ($1-b > 0$), a parábola tem concavidade positiva. Pelos dados estudados em Perelson et. al. [35], temos que u é crescente, logo, u é a parte crescente da parábola. Para determinar o valor de b , primeiro determinamos o vértice da parábola τ_v , isto é,

$$\tau_v = \frac{2.42 + 12b}{2 \cdot \frac{9.62}{1-b}} = \frac{6b + 1.21}{9.62}. \quad (3.25)$$

Como u é crescente, então

$$b \geq \tau_v. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.25) em (3.26), temos:

$$b \geq \frac{6b + 1.21}{9.62} \quad (3.27)$$

Então, $b \geq 0.335$. Logo, $b = 0.34$.

Portanto, a taxa de mortalidade do vírus u é escrita em função do retardo τ da seguinte forma

$$u(\tau) = \begin{cases} 2.38\tau + 1.8 & \text{se } 0.08 \leq \tau \leq 0.34 \\ 14.57\tau^2 - 9.86\tau + 4.27 & \text{se } 0.34 < \tau \leq 1. \end{cases} \quad (3.28)$$

A Figura 3.12 apresenta o gráfico da função $u(\tau)$ obtida com o método de inferência de Takagi-Sugeno.

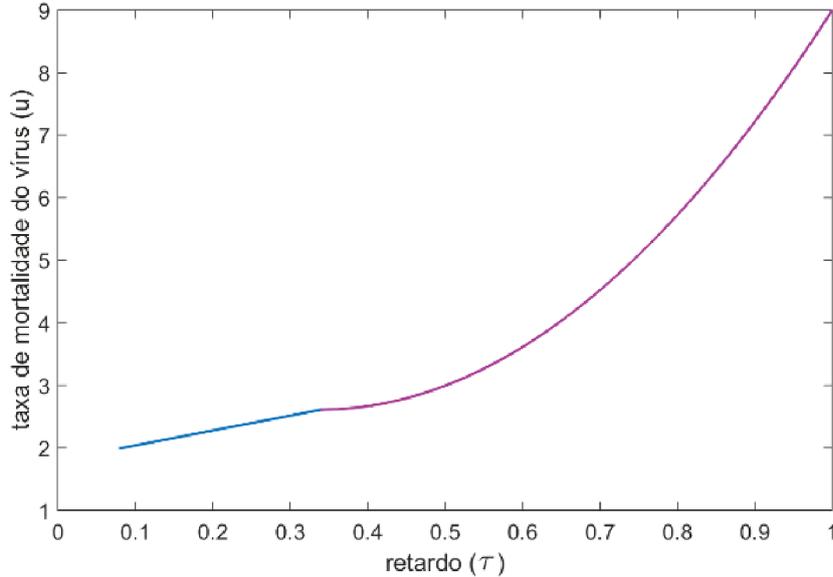


Figura 3.12: Taxa de mortalidade do vírus u em função do retardo τ

Por outro lado, consideramos o retardo como um número fuzzy triangular Γ cuja função de pertinência é

$$\mu_{\Gamma}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{0.42}(\tau - 0.08) & \text{se } 0.08 \leq \tau \leq 0.5 \\ 2(1 - \tau) & \text{se } 0.5 < \tau \leq 1. \end{cases} \quad (3.29)$$

A taxa de mortalidade do vírus é modelada como um número fuzzy U cuja função de pertinência está dada por $\mu_U(y) = \mu_{\Gamma}(u^{-1}(y))$, em que u^{-1} é a inversa de u e $y = u(\tau)$, isto é

$$\mu_U(y) = \begin{cases} y - 2 & \text{se } 2 \leq y \leq 2.61 \\ 2.38 \left(\sqrt{\frac{y - 2.61}{14.57}} + 0.26 \right) & \text{se } 2.61 < y \leq 3 \\ 1.32 - 2\sqrt{\frac{y - 2.61}{14.57}} & \text{se } 3 < y \leq 9. \end{cases} \quad (3.30)$$

Os números fuzzy Γ e U são u -correlacionados, cuja distribuição de possibilidade conjunta C tem a seguinte função de pertinência

$$\mu_C(\tau, u) = \mu_{\Gamma}(\tau) \mathcal{X}_{\{u=u(\tau)\}}(\tau, u).$$

A Figura 3.13 ilustra aos números fuzzy Γ e U u -correlacionados, com distribuição de possibilidade conjunta C , tendo como funções de pertinência, μ_Γ e μ_U , respectivamente.

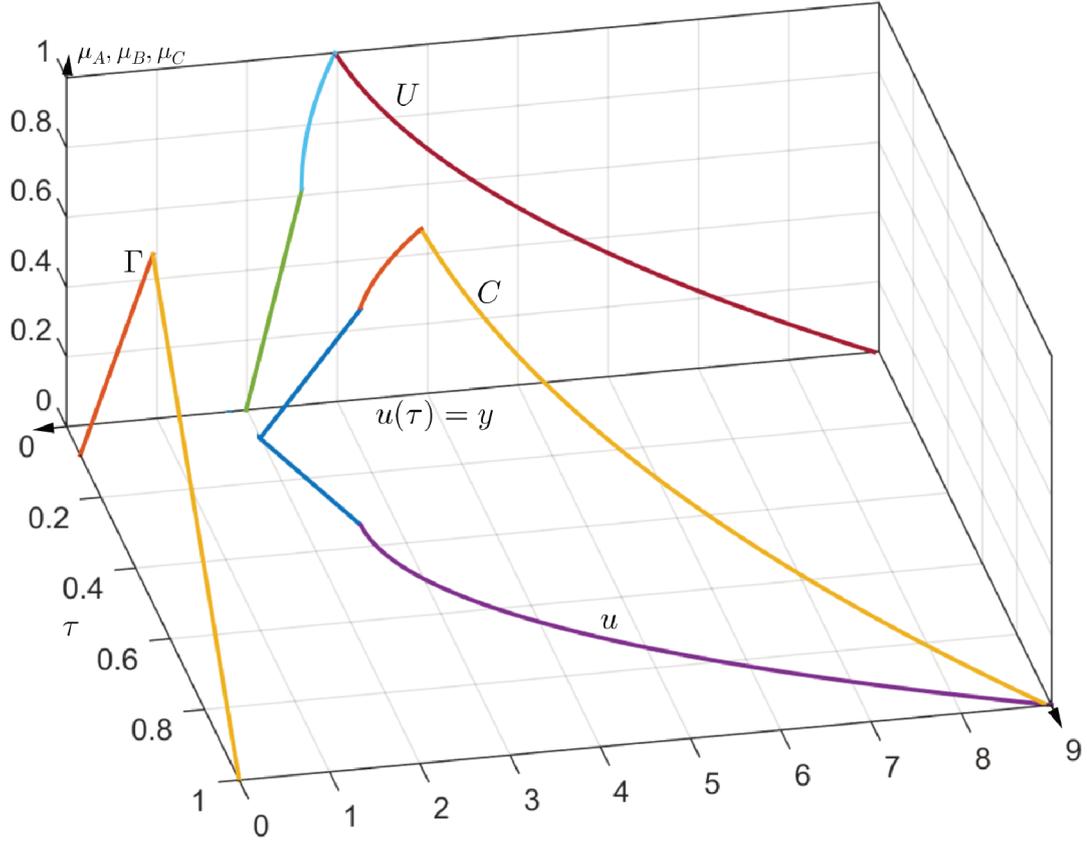


Figura 3.13: Γ e U números fuzzy u -correlacionados.

Fixando t na solução determinística (3.16), defina-se a função $v_t(\tau, u) = v(t; \tau; u)$ que é contínua. Para cada instante t , aplicando o princípio de extensão de Zadeh bidimensional para a função $v_t(\tau, u)$, pela Proposição 2.1 obtemos que

$$\mu_{\widehat{v}_t(\Gamma, U)}(z) = \mu_{\widehat{v}_t \circ \phi(\Gamma)}(z), \text{ em que } z = v_t \circ \phi(\tau). \quad (3.31)$$

Assim, uma solução fuzzy da equação diferencial ordinária (3.8) é dada por:

$$v(t, \tau) = \begin{cases} v_0, & \text{para } 0 < t \leq \tau \\ v_0 e^{-u(\tau)(t-\tau)} + \frac{u(\tau)v_0}{a-u(\tau)} \left\{ \frac{u(\tau)}{a-u(\tau)} \left[e^{-a(t-\tau)} - e^{-u(\tau)(t-\tau)} \right] + a(t-\tau) e^{-u(\tau)(t-\tau)} \right\}, & \text{para } t \geq \tau. \end{cases} \quad (3.32)$$

que é contínua.

A Figura 3.14 apresenta o gráfico da solução fuzzy da carga viral obtida através do método de Takagi-Sugeno e pelo Teorema 1.1, com $v_0 = 1$. Pode-se observar que quando o tempo cresce a carga viral diminui. A região amarela é a que melhor representa o fenômeno biológico, por conter os graus de pertinência próximos de 1.

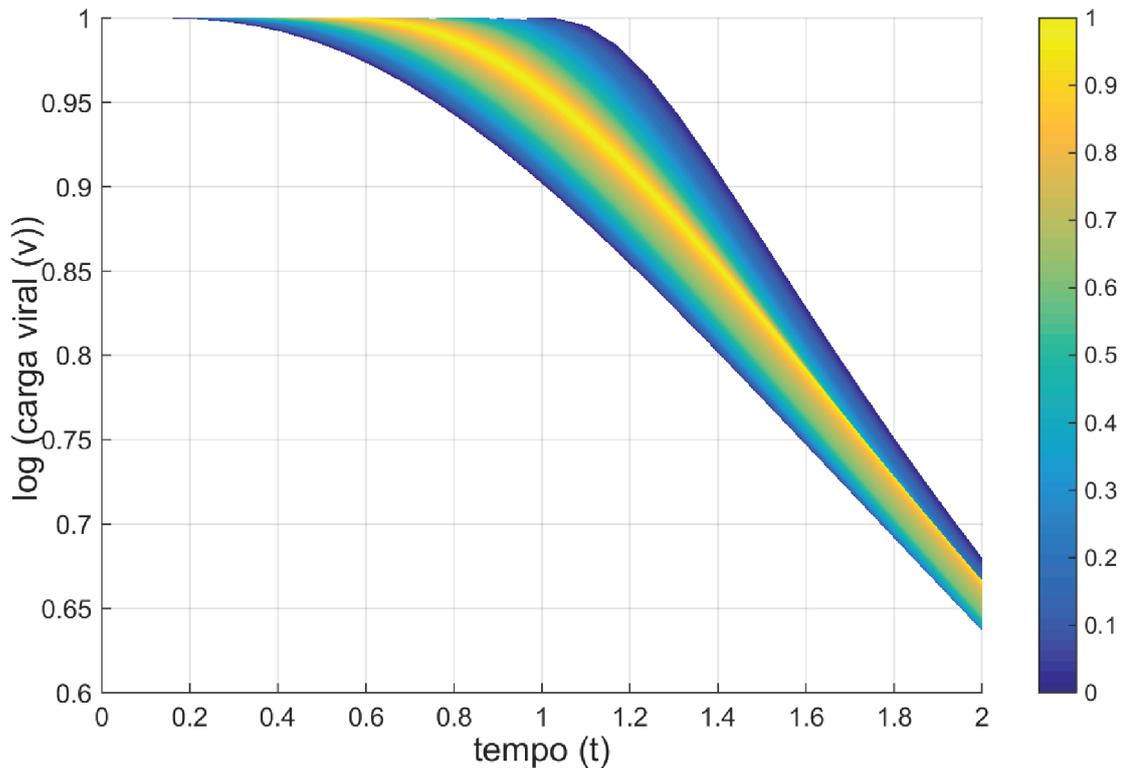


Figura 3.14: Solução fuzzy da equação (3.8) para a carga viral, para t variando de 0 a 2 dias, com Γ e U números fuzzy u -correlacionados.

Na seção 3.7 a seguir introduzimos uma comparação das curvas preferidas (curvas de grau de pertinência um) das soluções fuzzy mostradas nas Figuras 3.10 e 3.14, respectivamente, com a solução determinística de Herz et al [15], utilizando como uma medida de comparação o máximo dos erros absolutos em cada instante.

3.7 Comparação dos Métodos de Inferência no Modelo Estudado através do Erro Absoluto

Definição 3.3 ([36]). *Seja X um número com valor exato e x o valor aproximado de X . O erro absoluto de X é definido pelo módulo da diferença entre o valor exato e o valor aproximado, isto é,*

$$|X - x|. \quad (3.33)$$

Assim, ao comparar as curvas preferidas obtidas pelos métodos de inferência de Mamdani e de Takagi-Sugeno, com a curva determinística de Herz et al. ($\tau = 0.5$), em cada instante t (ver Figura 3.15), obtemos que

- no método de inferência de Takagi-Sugeno o máximo erro absoluto é igual a 0.0012,
- no método de inferência de Mamdani o máximo erro absoluto é igual a 0.0415.

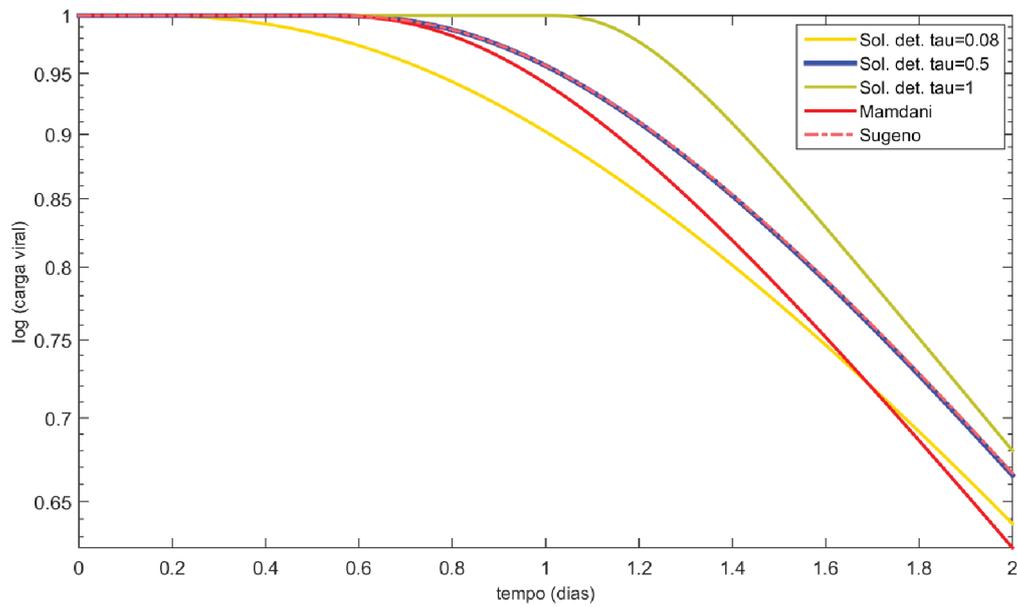


Figura 3.15

Notemos que como o método de inferência de Mamdani requer a utilização do método dos mínimos quadrados [36] para determinar a taxa de mortalidade do vírus em função do retardo, seu erro absoluto é maior que o erro absoluto do método de inferência de Takagi-Sugeno, pois neste método não é necessário realizar um ajuste de curva.

No Capítulo 4 expomos uma solução fuzzy da dinâmica do HIV com retardo sob tratamento antirretroviral, obtido através da extensão de Zadeh bidimensional, com a taxa de infecção da célula não infectada do tipo CD4+ pelo vírus diferente de zero.

Capítulo 4

Dinâmica do HIV com Retardo sob Tratamento Antirretroviral com Dois Parâmetros Fuzzy

Neste capítulo estudamos novamente o modelo da dinâmica do HIV com retardo. Primeiro introduzimos um sistema de equações diferenciais ordinárias, que simula a dinâmica do HIV sem retardo. Em seguida, estudamos o modelo da dinâmica do HIV com retardo. A principal diferença do modelo apresentado no capítulo 3 com o modelo apresentado neste capítulo é que consideramos a taxa de infecção $\beta(t)$ diferente de zero, pois no modelo do capítulo 3 é considerada a taxa de infecção igual a zero com objetivo de simplificar o modelo. Em Jafelice et al. [21], a taxa de infecção do linfócito CD4+ pelo vírus HIV, que é um parâmetro difícil de ser obtido nas ciências médica e outros parâmetros do sistema de equações diferenciais com retardo, são obtidos por meio de um autômato celular [13]. Esse autômato celular representa artificialmente a corrente sanguínea de um indivíduo soropositivo de HIV. A taxa de infecção é obtida para três indivíduos soropositivos. Escolhemos uma das três taxas de infecção dos indivíduos soropositivos para determinar uma solução fuzzy do modelo da dinâmica do HIV com retardo usando o princípio de extensão de Zadeh bidimensional. Consideramos os parâmetros de retardo e a taxa de mortalidade do vírus como dois números fuzzy para os quais não é utilizada uma função que os correlacione. Para determinar esta solução fuzzy fazemos uso de um algoritmo, que é implementado no software Matlab com o pacote computacional dde23. Finalmente, fazemos uma comparação dos modelos da dinâmica do HIV.

Na seção a seguir, expomos o modelo da dinâmica do HIV com retardo dada por quatro variáveis dependendo do tempo.

4.1 Modelo da Dinâmica do HIV com Retardo

Nowak e Bangham apresentam em [30] um modelo da dinâmica do HIV que contém quatro variáveis dependendo do tempo t . Assim, consideramos o sistema (3.5) e a equação do linfócito T citotóxico (CTL); as variáveis são:

- $x(t)$ é a população de células não infectadas do linfócito T do tipo CD4+;
- $y(t)$ é a população de células infectadas do linfócito T do tipo CD4+ que produzem o vírus;
- $v(t)$ é a carga viral ou partículas do vírus livre;
- $z(t)$ é a magnitude do linfócitos T citotóxico (CTL),

cujas taxas de mortalidade são d , a , u e b , respectivamente. O valor p é a taxa de mortalidade das células infectadas causadas por CTL, e c é a taxa de proliferação do CTL em resposta do antígeno. O modelo supõe que as células não infectadas são continuamente produzidas pelo corpo humano a um influxo constante λ . Células não infectadas e vírus livres produzem células infectadas a uma taxa de $\beta(t)$. As células infectadas produzem partículas de vírus livres a uma taxa de $k(t)$. Assim, o sistema de equações diferenciais é dado por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda - dx - \beta(t)xv \\ \frac{dy}{dt} &= \beta(t)xv - ay - pyz \\ \frac{dv}{dt} &= k(t)y - uv \\ \frac{dz}{dt} &= cyz - bz.\end{aligned}\tag{4.1}$$

O modelo não contém um retardo intracelular de tempo entre a infecção da célula e a produção de novas partículas de vírus. Segundo o sistema (3.6) - (3.8), dado no capítulo 3, se adiciona o retardo intracelular τ ao modelo (4.1). Além disso, assume-se a taxa de morte \tilde{a} para as células infectadas mas que ainda não produzem vírus e $e^{-\tilde{a}\tau}$ como a probabilidade de sobrevivência no tempo $t - \tau$ para o tempo t . Assim, o modelo (4.1) pode ser rescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda - dx - \beta(t)xv \\ \frac{dy}{dt} &= \beta(t - \tau)x(t - \tau)v(t - \tau)e^{-\tilde{a}\tau} - ay - pyz \\ \frac{dv}{dt} &= k(t)y - uv \\ \frac{dz}{dt} &= cyz - bz.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Na seção a seguir, exibimos o autômato celular que representa computacionalmente a corrente sanguínea dos HIV soropositivos.

4.2 Autômato Celular

O autômato celular (AC), estudado por Jafelice et al. [21], representa computacionalmente a corrente sanguínea de um indivíduo soropositivo, sob tratamento antirretroviral, onde vivem artificialmente células não infectadas e infectadas do linfócito T do tipo CD4+, partículas de vírus livres e os linfócito T citotóxico (CTL). O linfócito T do tipo CD4+ é o principal linfócito que o vírus ataca ao atingir a corrente sanguínea.

No sistema (4.2) os parâmetros e os valores da taxa de infecção são obtidas a partir do autômato celular [21]. Para isso, o modelo AC utiliza a saída do SBRF para a simulação. As variáveis de entrada do SBRF são a adesão ao tratamento e a potência da medicação. Os seguintes valores linguísticos atribuídos às variáveis linguísticas são muito baixos, baixos, médios, altos e muito altos. Para adesão ao tratamento, o intervalo $[0, 1]$ é definido onde 0 significa nenhuma e 1 total da adesão. Também, define-se o intervalo de potência medicação como $[0.8, 0.9]$. As variáveis de saída são a porcentagem de linfócitos CD4+ infectados e o período de replicação do vírus. Para a primeira saída, os termos linguísticos são muito baixo, baixo, médio, alto e muito alto, e para a segunda saída são muito rápido, rápido, médio, lento e muito lento. Para porcentagem de células CD4+ do HIV infectadas, o intervalo é $[0.1, 1]$ e para o período de replicação do vírus é $[5, 16]$. A base de regras fuzzy é construída com base

no conhecimento médico especializado, utilizando o método de inferência Mamdani junto com o método de defuzzificação do centro de gravidade [21].

A simulação é realizada utilizando os valores de adesão ao tratamento e potência da medicação dos três indivíduos soropositivos para o HIV mostrados na Tabela 4.1. Nesta tabela, os parâmetros da primeira, segunda e terceira colunas correspondem a indivíduos soropositivos submetidos a três níveis de potência e adesão à medicação [21]. Os valores de saída do SBRF são mostrados na Tabela 4.2. As primeiras linhas mostram a porcentagem dos linfócitos T CD4 + infectados e a segunda mostra o período de replicação do vírus para os valores de entrada da Tabela 3. A simulação é executada em um retângulo com 38×38 células com 101 iterações. A escolha do tamanho da grade celular é definida com base em várias execuções experimentais do AC, variando o número de iterações, bem como o número inicial de elementos (linfócitos CD4 + não infectados e infectados, partículas de vírus livres e CTL específicos de vírus) e todos os outros parâmetros AC necessários para as simulações.

	Primeira entrada	Segunda entrada	Terceira entrada
Adesão ao tratamento	0.8	0.85	0.9
Potência da medicação	0.1	0.6	1

Tabela 4.1: Entradas para o SBRF usado na simulação.

	Primeira saída-entrada	Segunda saída-entrada	Terceira saída-entrada
Porcentagem de linfócitos CD4+ infectados	0.85	0.55	0.1
Período de replicação do vírus	6.35	10.4	16

Tabela 4.2: Saídas do SBRF e entradas do AC usada na simulação.

4.3 Taxa de Infecção em Função do Tempo

Nesta seção expomos a taxa de infecção para três indivíduos soropositivos sob tratamento antirretroviral, obtidos por AC.

A taxa de infecção $\beta(t)$ é um parâmetro importante para o controle da AIDS em indivíduos soropositivos para o HIV. Em Jafelice et al. [21] é determinado para três indivíduos soropositivos. Esta taxa de infecção é determinada usando o quociente do número de linfócitos CD4+ infectados pelo produto de linfócitos CD4 + não infectados e o número de a variação do tempo, isso é,

$$\beta(t) = \frac{\text{linfócitos CD4+ infectados}}{\text{linfócitos CD4+ não infectados} \cdot \Delta t}, \quad (4.3)$$

$t = 1, \dots, 100$.

Como o resultado é obtido para cada iteração, a variação de tempo (Δt) é numericamente considerada como sendo 1. A Figura 4.1 apresenta o gráfico da taxa de infecção em função do tempo para os três valores de entrada. Observamos que o gráfico é decrescente, o que significa que a taxa de infecção dos linfócitos CD4+ pelo vírus diminui com o tempo. Com os valores obtidos (ver Figura 4.1), determinamos três expressões $\beta(t)$ representando a taxa de infecção em função do tempo t para três indivíduos. A Figura 4.2 representa o ajuste para os pontos discretos $\beta(t)$ (ver Figura 4.1), que foi obtida pelo método dos mínimos quadrados [36]. Assim, as expressões para $\beta(t)$ são

(i) para a primeira entrada

$$\beta(t) = 0.2703e^{-0.005t} + 0.2499; \quad (4.4)$$

(ii) para a segunda entrada

$$\beta(t) = 0.333e^{-0.005527t}; \quad (4.5)$$

(iii) para a terceira entrada

$$\beta(t) = 0.335e^{-0.008937t}. \quad (4.6)$$

Os coeficientes de determinação (R^2) [27] para os ajustes são, respectivamente, 0,3836, 0,6333 e 0,8809 para as expressões (4.4), (4.5) e (4.6).

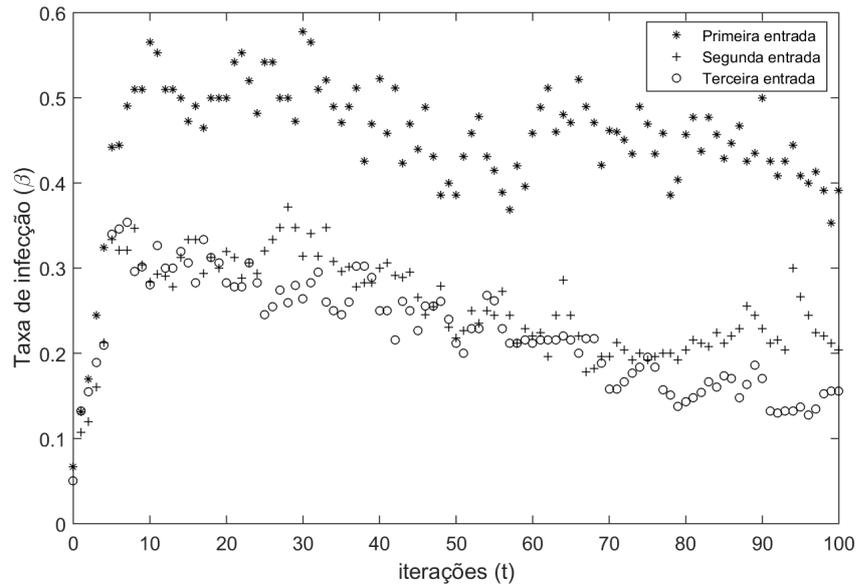


Figura 4.1: Taxas de infecção $\beta(t)$ em função do tempo obtido com o autômato celular para as três entradas.

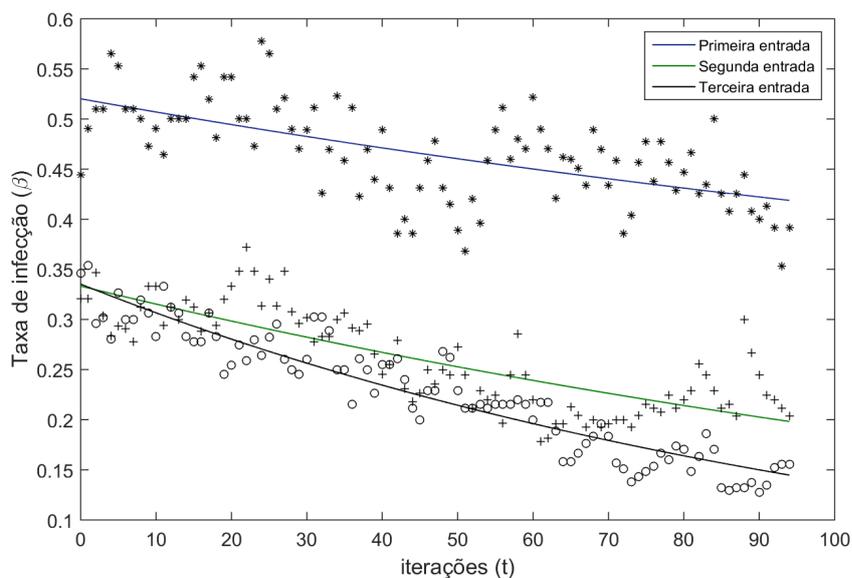


Figura 4.2: Diagrama de dispersão das taxas de infecção ajustados em função do tempo para as três entradas.

4.4 Parâmetros da Equação Diferencial da Dinâmica do HIV com Retardo

Nesta seção, descrevemos os outros parâmetros obtidos com o autômato celular para, logo, encontrar uma solução fuzzy do modelo com retardo (4.2) para um dos indivíduos mencionados.

Em Jafelice et al. [21] é considerado os parâmetros do sistema (4.2), isto é, as taxas, como

$$taxa = \frac{1}{tempo} \quad (4.7)$$

em que o tempo no autômato celular é o número de iterações. Os valores da taxa são

- $\lambda = 20$ é o influxo constante de células não infectadas produzidas no corpo humano, que são colocadas aleatoriamente em cada iteração na AC.
- $d = 1/4$ é a taxa de mortalidade de células não infectadas, pois no autômato celular o número de iterações estabelecido para morte de células não infectadas é de 4.
- $a = 1/5$ é a taxa de mortalidade de células infectadas, pois o número de iterações estabelecido para morte de células infectadas é de 5.
- $p = 0.4$ é a taxa de mortalidade de células infectadas devido ao encontro com os CTLs, porque nem todo encontro resulta em sucesso.
- $u = 1/2$ é a taxa de mortalidade das células do HIV, pois o número de iterações para a morte por HIV é 2.
- $c = 1/14$ é a taxa de proliferação dos CTLs, uma vez que o número de iterações para a proliferação do CTL é 14.
- $b = 1/15$ é a taxa de mortalidade do CTL, pois o número de iterações para morte dos CTLs é 15.

Além desses valores para os parâmetros, é encontrado a taxa \tilde{a} que é a taxa de mortalidade das células infectadas que ainda não produziram vírus. No autômato celular contamos todas as células infectadas que morreram e não produziram vírus em cada iteração e depois calculamos a média dos valores encontrados ($\tilde{a} = 0.0825$). O vetor $k(t)$, que representa a reprodução das células infectadas, foi obtido a partir do autômato celular, contando o número de células infectadas recentemente reproduzidas em cada iteração t .

Seja ϕ uma solução numérica do sistema (4.2). Para a solução numérica do sistema (4.2), representada na Figura 4.3, consideramos o ajuste (4.5) que representa o indivíduo soropositivo ao receber potência da medicação média e adesão ao tratamento médio, o retardo $\tau = 0.5$ e as taxas definidas anteriormente.

As condições iniciais são $x_0 = 0.99, y_0 = 0.01, v_0 = 0.1$ e $z_0 = 0.01$. O software Matlab foi utilizado para obter a solução numérica para o sistema (4.2) (ver Figura 4.3).

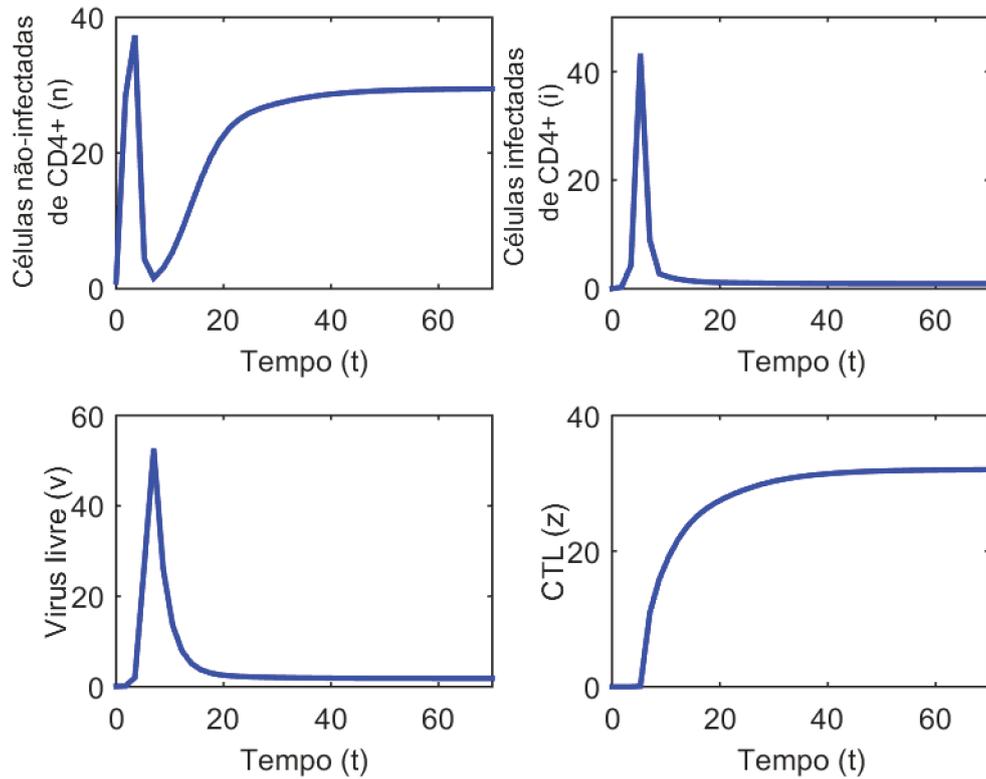


Figura 4.3: Solução numérica do sistema não linear (4.2).

Na Figura 4.4 exibimos soluções numéricas do sistema (4.2) para diferentes valores do retardo τ no intervalo $[0.08, 1]$, que foi dividido em 20 partes.

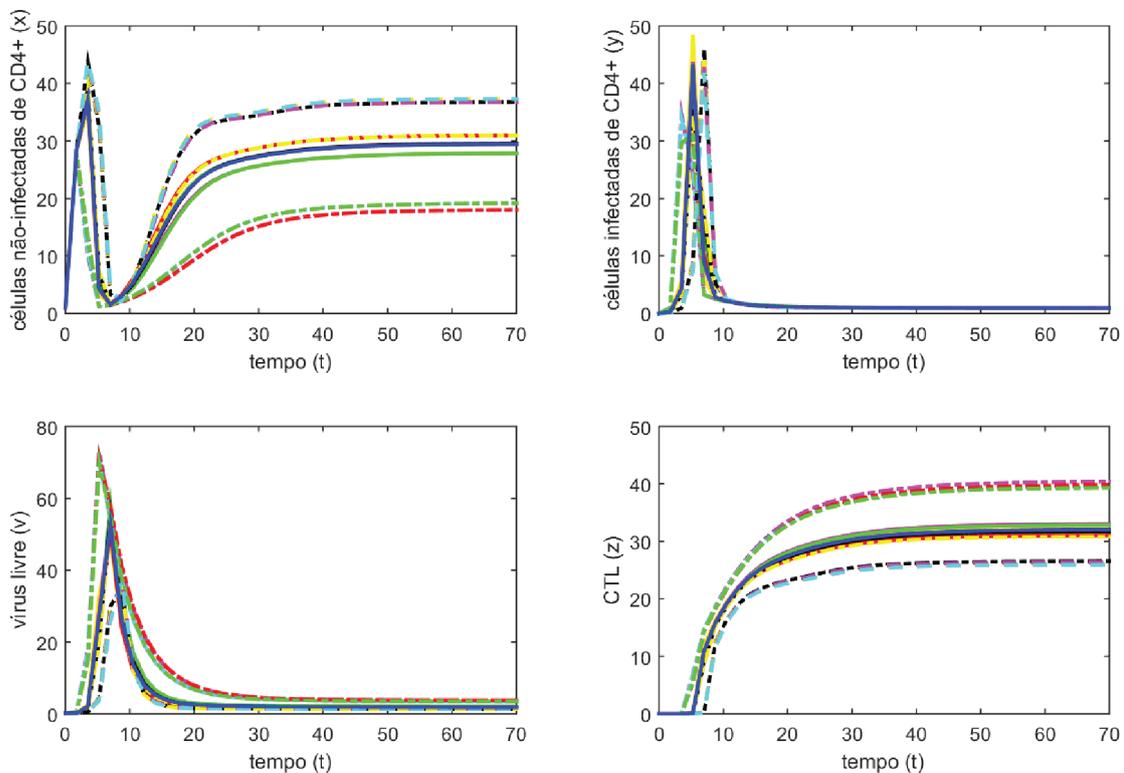


Figura 4.4: Soluções numéricas do sistema não linear (4.2) para diferentes valores do retardo τ no intervalo $[0.08, 1]$.

Observemos que os gráfico das soluções das quatro componentes aparentam ter um aspecto

de funções contínuas, pois o lado direito da igualdade do sistema (4.2) é composto por funções polinomiais e exponenciais.

Na seção a seguir, utilizamos o Princípio da Extensão de Zadeh bidimensional para obter uma solução fuzzy do sistema (4.2), considerando o retardo e a taxa de mortalidade do vírus como números fuzzy triangulares.

4.5 Solução Fuzzy do Modelo da Dinâmica do HIV com Retardo

Para determinar uma solução fuzzy consideramos o ajuste (4.5) que representa o indivíduo soropositivo ao receber potência da medicação média e adesão ao tratamento médio.

Primeiramente consideramos o retardo τ e a taxa de mortalidade do vírus u como números fuzzy triangulares $\Gamma = (0.08, 0.5, 1)$ e $U = (0.25, 0.5, 0.75)$, respectivamente. As funções de pertinência estão dadas, respectivamente, por

$$\mu_{\Gamma}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{0.42}(\tau - 0.08) & \text{se } 0.08 \leq \tau \leq 0.5 \\ 2(1 - \tau) & \text{se } 0.5 < \tau \leq 1. \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\mu_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{0.25}(u - 0.25) & \text{se } 0.25 \leq u \leq 0.5 \\ \frac{1}{0.25}(0.75 - u) & \text{se } 0.5 < u \leq 0.75. \end{cases} \quad (4.9)$$

Assim, o produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$ (ver Figura 4.5) de Γ e U é dado por

$$\mu_{\Gamma \times U}(\tau, u) = \min \{ \mu_{\Gamma}(\tau), \mu_U(u) \}. \quad (4.10)$$

Na Figura 4.5 exibimos os números fuzzy Γ e U e o produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$, usando a t -norma do mínimo.

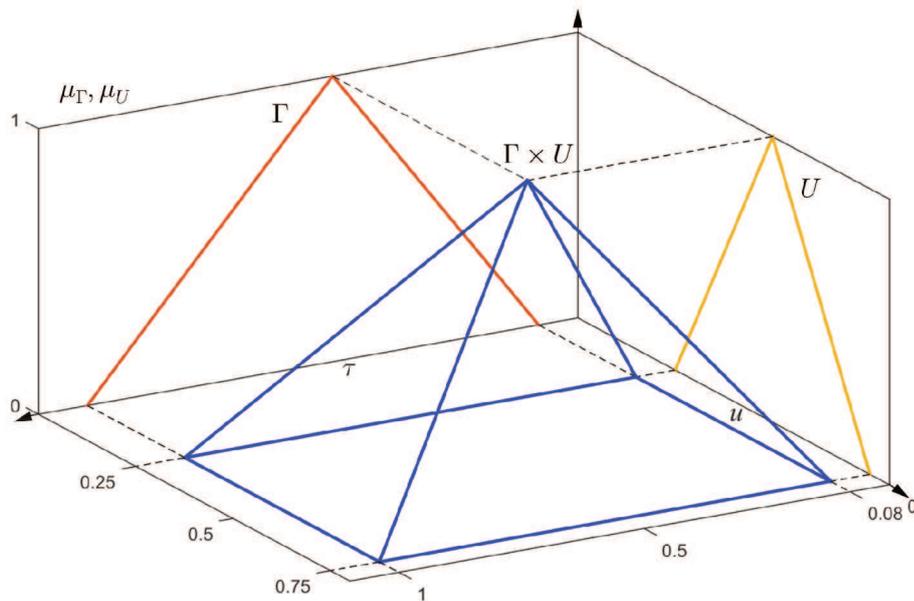


Figura 4.5: Produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$.

Logo, para determinar uma solução fuzzy do sistema (4.2), fixamos o tempo t e definimos a seguinte função

$$S_t(\tau, u) = \phi(t, \tau, u). \quad (4.11)$$

Como observamos que a solução do sistema (4.2) é contínua, pelo Lema 3.1 segue que a função S_t é contínua. A extensão de Zadeh de (Γ, U) via a função S_t é dada por

$$\mu_{\widehat{S}_t(\Gamma, U)}(z) = \sup_{(\tau, u)} [\mu_{\Gamma \times U}(\tau, u)], \text{ em que } z = S_t(\tau, u). \quad (4.12)$$

Para cada instante t , aplicando a extensão de Zadeh bidimensional para (Γ, U) e o Teorema 1.2, implementamos um algoritmo (ver subseção 4.5.1) para obter uma solução fuzzy do sistema (4.2).

4.5.1 Simulação Numérica (Algoritmo)

Nesta subseção, o algoritmo para determinar uma solução fuzzy do sistema (4.2) é mostrado.

Nas simulações numéricas e na fuzzificação, consideramos os números fuzzy triangulares mostrados na Figura 4.6. Na Figura 4.5, $\mu_{\Gamma \times U}$ é a função de pertinência associada ao produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$.

Com base no princípio de extensão de Zadeh bidimensional, Teorema 1.2 e Lema 3.1, desenvolvemos um programa computacional usando o software Matlab para obter uma solução fuzzy do sistema (4.2). O algoritmo desenvolvido é baseado no trabalho de Almeida et al. [3], que foi construído para o princípio de extensão de Zadeh unidimensional.

Na Figura 4.6, do lado esquerdo pode-se observar o produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$, os números fuzzy Γ e U , e os α -níveis de $\Gamma \times U$. No lado direito apresentamos os α -níveis de $\Gamma \times U$ no plano para poder visualizar a divisão feita no algoritmo.

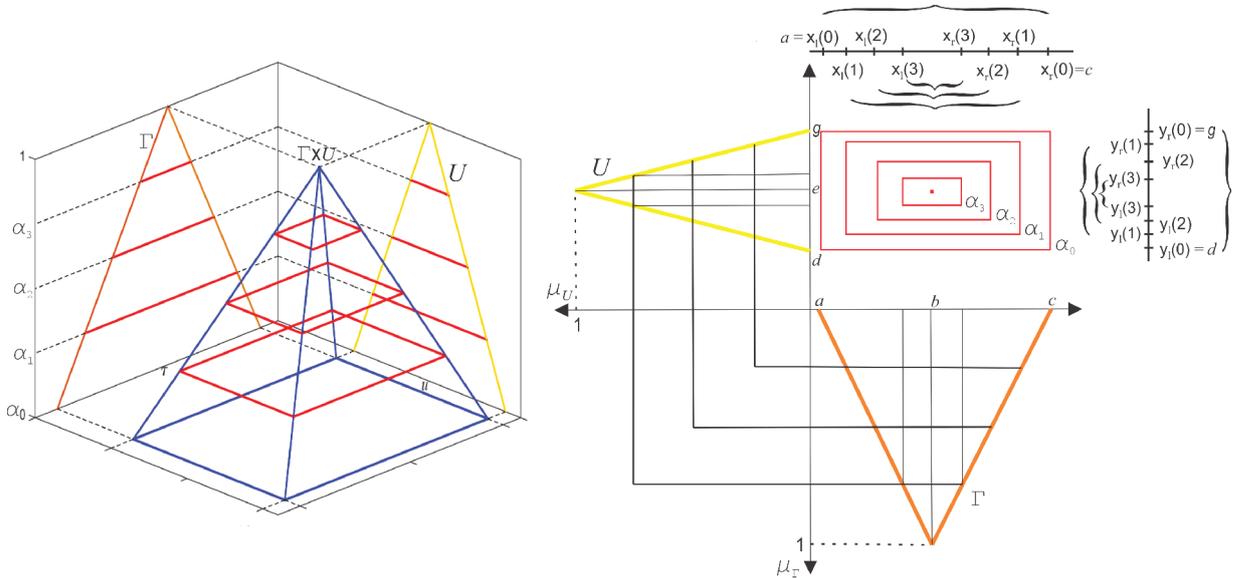


Figura 4.6: Produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$ e α -níveis.

O primeiro passo do algoritmo é ilustrado na Figura 4.6, que exibe uma função de pertinência referente ao produto cartesiano fuzzy $(\Gamma \times U)$ dos numero fuzzy Γ e U . O algoritmo é dado por:

- Para cada α_i , $0 \leq \alpha_i < 1$ é determinado dois intervalos $[x_l(i), x_r(i)]$ e $[y_l(i), y_r(i)]$.

- Começando com os intervalos centrais, consideramos uma partição para cada um dos intervalos $[x_l(i), x_r(i)]$ e $[y_l(i), y_r(i)]$ com pontos igualmente espaçados em que $i = n_\alpha - 1$, em que n_α é o número de α -níveis (ver Figura 4.6).
- A solução numérica do sistema (4.2) é obtida para cada ponto (τ, u) das partições mencionadas anteriormente $((\tau, u) \in [x_l(i), x_r(i)] \times [y_l(i), y_r(i)])$. Note que estamos obtendo valores para $S_t(\tau, u)$ (ver equação (4.11)), com $(\tau, u) \in [x_l(i), x_r(i)] \times [y_l(i), y_r(i)]$.
- O primeiro passo para a construção de uma função de pertinência para S_t é dado procurando os valores mínimos e máximos do conjunto discreto $\{S_t(\tau, u)\}$ (ver Teorema 1.2).
- Para cada $i = n_\alpha - 1, n_\alpha - 2, \dots, 1$, consideramos partições dos intervalos $[x_l(i-1), x_l(i)]$, $[x_r(i), x_r(i-1)]$, $[y_l(i-1), y_l(i)]$, $[y_r(i), y_r(i-1)]$. Usando a continuidade da função S_t (Lema (3.1)), os valores mínimos e máximos do conjunto discreto $\{S_t(\tau, u)\}$, $(\tau, u) \in [x_l(i-1), x_r(i-1)] \times [y_l(i-1), y_r(i-1)]$ são obtidos por comparação entre os valores mínimos e máximos do conjunto discreto: $\{S_t(\tau, u)^{(l)}\}$, $(\tau, u)^{(l)} \in [x_l(i-1), x_l(i)] \times [y_l(i-1), y_l(i)]$; $\{S_t(\tau, u)^{(c)}\}$, $(\tau, u)^{(c)} \in [x_l(i), x_r(i)] \times [y_l(i), y_r(i)]$, e $\{S_t(\tau, u)^{(r)}\}$, $(\tau, u)^{(r)} \in [x_r(i), x_r(i-1)] \times [y_r(i), y_r(i-1)]$.
- A construção de uma função de pertinência para S_t é concluída quando determinamos o valor $S_t(b, e)$, em que b e e são os pontos que tem grau de pertinência 1.

Na subseção a seguir exibimos o gráfico da solução fuzzy do sistema (4.2).

4.5.2 Resultado

Na Figura 4.7 é exposta a solução fuzzy do sistema (4.2) contendo suas quatro componentes através do princípio de extensão de Zadeh bidimensional. Pode-se observar que, à medida que o tempo passa, as células não infectadas e os CTL aumentam até estabilizar em torno de um número. Notamos também que a carga viral e as células infectadas diminuem drasticamente com o tempo, este comportamento está de acordo com a literatura. A região amarela é a que melhor representa o fenômeno biológico, por ter grau de pertinência próximo de 1.

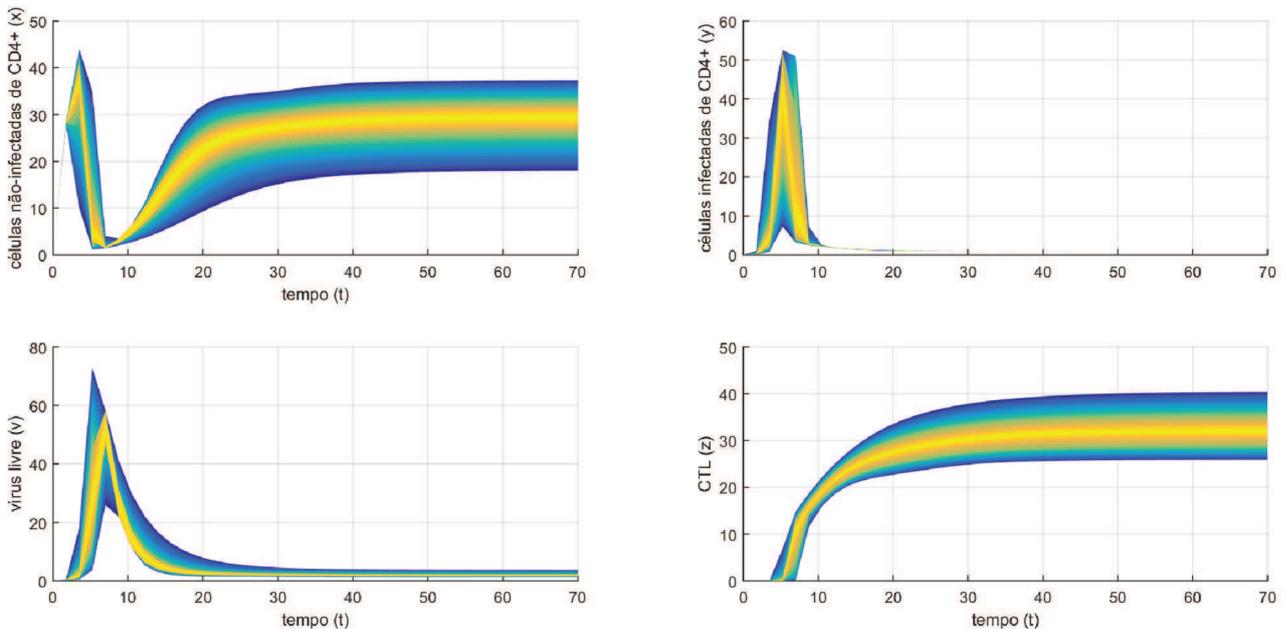


Figura 4.7: Solução fuzzy do sistema (4.2) com os parâmetros fuzzy triangulares τ e u .

Na seção a seguir, obtemos uma solução fuzzy do sistema de equações diferenciais ordinárias (4.1).

4.6 Solução Fuzzy da Dinâmica do HIV sem Retardo

Para observar como o retardo influencia a solução dos sistema (4.1) e (4.2), consideramos os mesmos parâmetros e taxas obtidas para o sistema de equações diferenciais com retardo (4.2) para o sistema de equações diferenciais ordinárias sem retardo (4.1). Além disso, utilizamos o ajuste (4.5) para a taxa de infecção $\beta(t)$ e as mesmas condições iniciais.

Consideramos a taxa de mortalidade do vírus como parâmetro fuzzy triangular $(0.25;0.5;0.75)$ e determinamos uma solução fuzzy do sistema (4.1). Para isso, primeiramente se reescreve o sistema (4.1) como $\dot{X}(t) = G(x(t), y(t), v(t), z(t), u)$, com a mesma condição inicial dado no sistema (4.2), $X_0 = (x_0, y_0, v_0, z_0)$ e aplicando o teorema de existência e unicidade, obtemos a única solução $\phi(t, u)$ em algum aberto que é contínua [14]. Logo, fixando t , definimos a função $\mathcal{F}^t(u) = \phi(t, u)$ que é contínua. Finalmente, pelo Teorema 1.1, determinamos uma solução fuzzy do sistema (4.1) (ver Figura 4.8).

Na Figura 4.8, mostra-se a solução fuzzy das quatro componentes do sistema (4.1). Além disso, a região de cor amarelo é a que melhor representa o fenômeno biológico, pois é onde a taxa de mortalidade do vírus u , que é um número fuzzy triangular, tem grau de pertinência próximo de 1.

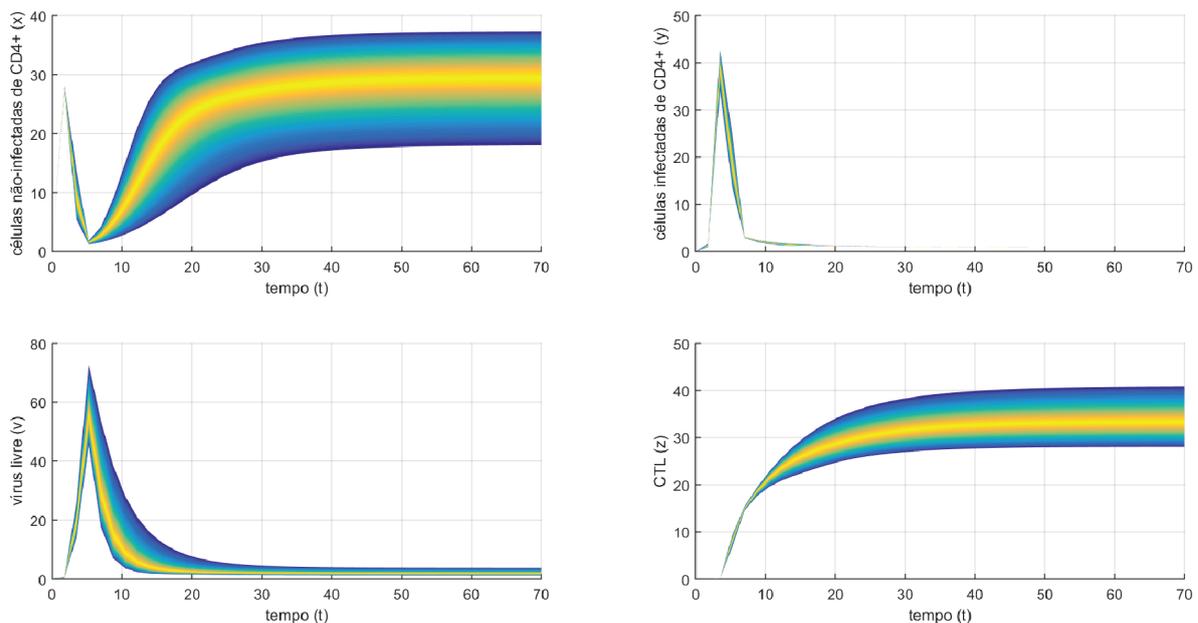


Figura 4.8: Solução fuzzy do sistema sem retardo (4.1) com o parâmetro fuzzy triangular u .

4.7 Comparação entre os dois Modelos do HIV

Nesta seção mostramos a comparação da solução fuzzy entre os modelos da dinâmica do HIV com retardo (4.2) e sem retardo (4.1).

Na Figura 4.9 observamos que, as células não infectados e infectados do linfócito T do tipo CD4+, as partículas de vírus livres e o CTL apresentam o mesmo comportamento das soluções do ambos sistemas com retardo (4.2) e sem retardo (4.1). O sistema (4.2) produz valores máximos e mínimos em tempos posteriores comparadas à solução do sistema (4.1).

Na solução fuzzy do sistema (4.1), as células não infectadas e infectadas do linfócito T do tipo CD4+ e o vírus livre, no início, assumem pontos de máximos menores do que a solução fuzzy do sistema (4.2). Finalmente, o CTL cresce previamente na solução do sistema (4.1) em comparação com a solução do sistema (4.2).

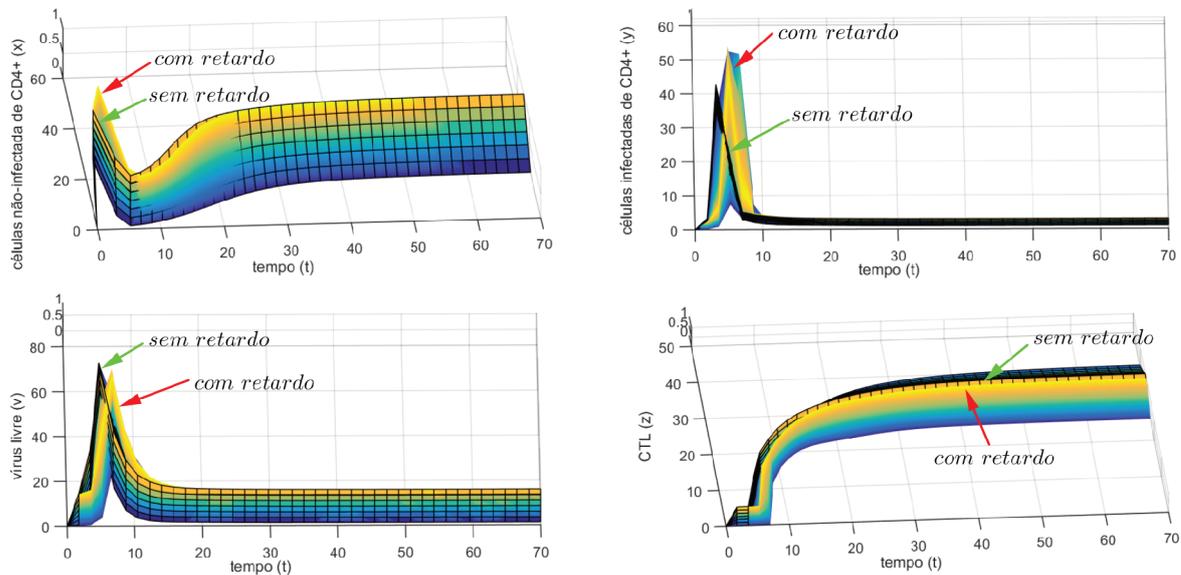


Figura 4.9: Comparação das soluções fuzzy dos sistemas (4.1) e (4.2).

Salientamos que os comportamentos das soluções fuzzy dos sistemas com retardo (4.2) e sem retardo (4.1) (ver Figuras 4.7 e 4.8) são qualitativamente similares a história natural da infecção do HIV (ver Figura 3.3), com a diferença que nestes modelos incluem o tratamento antirretroviral. De fato, a diferença é que os modelos (4.2) e (4.1) as células não infectadas do linfócito T do tipo CD4+ tendem a se estabilizarem a medida que o tempo passa, enquanto na história natural decresce; o HIV nos modelos (4.2) e (4.1) também se estabilizam com o tempo, contudo no histórico natural, aumenta quando o tempo passa.

No Capítulo 5 apresentamos as conclusões do trabalho desenvolvido.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho estudamos a capacidade de incorporar incertezas provenientes de dados in vitro em fenômenos biológicos, através da teoria fuzzy, com o princípio de extensão de Zadeh unidimensional e bidimensional. Em muitos casos, os parâmetros da equação são incertos. Essa incerteza tem sido tratada por meio de metodologias estatísticas. Mittler et al. [26] assumem que o retardo é caracterizado por uma distribuição de probabilidade, que surge das incertezas dos dados in vitro. A taxa de mortalidade do vírus é incerto devido aos fenômenos estudados. Assim, consideramos o retardo e a taxa de mortalidade do vírus como números fuzzy.

No capítulo 3, no modelo estudado, estes números fuzzy são considerados como números fuzzy correlacionados via uma função injetora e monótona. A correlação de dois números fuzzy, através de uma função, facilita a obtenção de uma solução fuzzy do modelo. Além disso, para facilitar a obtenção da solução determinística do modelo estudado consideramos que a taxa de infecção das células não infectadas do linfócito T do tipo CD4+ pelo vírus é zero. O comportamento da solução fuzzy do declínio do vírus com tratamento antirretroviral com inibidores da protease é similar ao da solução obtida no trabalho de Jafelice et. al. [20]. Além disso, comparamos as curvas determinísticas provenientes dos dados in vitro de Herz et al. [15] e as curvas preferidas, ou seja, curvas de grau de pertinência um, obtidas via o método de inferência de Mamdani e pelo método de Takagi-Sugeno, para determinar qual método fornece uma melhor solução fuzzy, utilizando como medida de comparação o erro absoluto.

No capítulo 4, determinamos uma solução fuzzy de uma equação diferencial com retardo que simula a dinâmica do HIV com quatro variáveis dependendo do tempo, através do Princípio de Extensão de Zadeh bidimensional, em que consideramos o retardo e a taxa de mortalidade como dois números fuzzy triangulares não fazendo uso de uma função que os correlacione. Para isso, desenvolvemos um algoritmo que permite determinar a solução fuzzy do modelo com retardo estudado neste capítulo através do Princípio de Extensão de Zadeh bidimensional. Podemos observar que este método de fuzzificação pode ser implementado computacionalmente com eficiência. A taxa de infecção das células não infectadas do linfócito T do tipo CD4+ pelo vírus é considerada diferente de zero. Além disso, para observar de que maneira o retardo influencia a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias que simula a dinâmica do HIV (4.1), fizemos uma comparação das soluções fuzzy dos sistemas sem retardo (4.1) e com retardo (4.2). Ressaltamos que nos modelos (4.1) e (4.2) incorporamos terapia antirretroviral, contudo as soluções fuzzy destes sistemas exibem comportamento qualitativo semelhante ao histórico natural do HIV sem tratamento, até a fase assintomática.

Assim, neste trabalho, exibimos dois enfoques da aplicação do Princípio de Extensão de Zadeh (unidimensional e bidimensional), para dois parâmetros fuzzy, que permitem a obtenção de uma solução fuzzy dos modelos estudados.

Como trabalhos futuros, existe a intenção de correlacionar por meio de uma função conveniente mais de dois parâmetros incertos de um sistema de equações diferenciais que possam ser representados por números fuzzy, para determinar uma solução fuzzy do sistema. Também, há a possibilidade de ampliar o algoritmo construído no capítulo 4 para mais variáveis. Além disso,

interpretando a incerteza do retardo e a taxa de mortalidade do vírus com parâmetros fuzzy do tipo 2, poderíamos construir um algoritmo similar ao proposto neste estudo para utilizar o princípio de extensão de Zadeh bidimensional para os conjuntos fuzzy do tipo 2.

Referências Bibliográficas

- [1] ADLASSNIG K. P. Fuzzy Set Theory in Medical Diagnosis. *Journals & Magazines*, v. 16, n. 2, p. 260 - 265, 1986. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1986.4308946>
- [2] AGENCIA PERUANA DE NOTICIAS: ANDINA. Radiación UV alcanza niveles extremos en 10 ciudades de la sierra y selva. Disponível em: <<https://andina.pe/agencia/noticia-radiacion-uv-alcanza-niveles-extremos-10-ciudades-de-sierra-y-selva-698766.aspx>>. Acesso em: 23 de março de 2019.
- [3] ALMEIDA, C. G.; BERTONE, A. M. A.; JAFELICE, R. M. Fuzzification of the miscible displacement model in heterogeneous porous media. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 463, n. 1, p. 242-267, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.03.015>
- [4] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. SBM, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2012.
- [5] BARROS, L. C.; ABREU, S. A. ; TONELLI, P. A. A Note on Asymptotic Smoothness of the Extensions of Zadeh. *Proyecciones (Antofagasta)*, Chile, v. 21, n. 2, p. 141-153, 2002. <http://dx.doi.org/10.4067/S0716-09172002000200003>
- [6] BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Grupo de Biomatemática, IMECC/UNICAMP, 3ª edição, Campinas 2015.
- [7] BERTONE, A. M. A. ; JAFELICE, R. S. M. ; BARROS, L. C. ; BASSANEZI, R. C.. On Fuzzy Solutions for Partial Differential Equations. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 219, p. 68-80, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.12.002>
- [8] British Broadcasting Corporation (Portuguese). Biologia do HIV. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/especial/1357_biologia_aids/page2.shtml. Acesso em: 23 de março de 2019.
- [9] CABRAL, V. M.; PRATA, R. A. C.; BARROS, L.C. f -correlated fuzzy numbers applied to HIV model with protease inhibitor therapy. *Mathware & Soft Computing*, Espanha, v. 22, n. 1, p. 46-51, 2015.
- [10] CANO Y. C. *Algumas contribuições na teoria fuzzy multívoca*. Tesis (Doutorado em Matemáticas) Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, Brasil, 2004.
- [11] COUTINHO, F. R.; BURATTINI, M.; MASSAD, E. Modelling the Natural History of HIV Infection in Individuals and its Epidemiological Implications. *Bulletin of Mathematical Biology*, v. 63: p. 1041-1062, 2001. <https://doi.org/10.1006/bulm.2001.0257>
- [12] DIEUDONNÉ, J. *Éléments d'analyse*. Gauthier Villar, 2ª edição, Paris, 1982.
- [13] ERMENTROUT, G. B.; EDELSTEIN, K. L. Cellular automata approaches to biological modeling. *Journal of Theoretical Biology*, v.160 ,n. 1, p.97-133, 1993. <https://doi.org/10.1006/jtbi.1993.1007>
- [14] HALE, J. K. *Theory of Functional Differential Equations*. Applied Mathematical Science, Springer-Verlag New York Inc., 3ª edição, USA, 1977. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2>
- [15] HERZ, A. V. M.; BONHOEFFER S.; ANDERSON R. M.; MAY R. M.; NOWAK M. A. Viral dynamics in vivo: Limitations on estimates of intracellular delay and virus decay. *In. Proc. Natl. Acad. Sci.*, USA, v.93, n. 14, p. 7247-7251, 1996. <https://doi.org/10.1073/pnas.93.14.7247>

- [16] INOÑAN, A. K.; JAFELICE, R. M.; BERTONE, A. M. A. Modelagem da Dinâmica do HIV sob Tratamento Antirretroviral com Princípio de Extensão de Zadeh Bivariável. XIII Encontro Científico de Pós-Graduandos do IMECC, 2018.
- [17] INOÑAN, A. K.; JAFELICE, R. M.; BERTONE, A. M. A. Números Fuzzy Correlacionados Aplicado à Dinâmica do HIV com Retardo sob Tratamento Antirretroviral. XVIII Semat e VIII Semest, 2018.
- [18] FULLÉR, R.; MAJLENDER, P. Additions of Completely Correlated Fuzzy Numbers. *Budapest*, Hungary, p. 535-539, 2004.
- [19] JAFELICE, R. M. Modelagem Fuzzy para Dinâmica de Transferência de Soropositivos para HIV em Doença Plenamente Manifesta. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2003.
- [20] JAFELICE, R. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. Study of the dynamics of HIV under treatment considering fuzzy delay. *Computational and Applied Mathematics*, v. 33, n. 1, p. 45-61, 2014. <https://doi.org/10.1007/s40314-013-0042-6>
- [21] JAFELICE, R. M.; SILVA, C. A. F.; BARROS, L. C.; BASSANEZI R. C. A. Fuzzy delay approach for HIV dynamics using a cellular automaton. *Journal of Applied Mathematics*, 2015. <https://doi.org/10.1155/2015/378753>
- [22] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. v. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1992.
- [23] LOMBARDERO, O. A. Un vistazo a la Biomatemática. *Números*, v. 86, p. 29-38, 2014.
- [24] MASSAD, E.; XAVIER, M. R.; PANSE S. P. S.; SIQUIERA O. N. R., *Métodos Quantitativos em Medicina*. Manole, 1ª edição, Brasil, 2004.
- [25] MINISTÉRIO DA SAÚDE. Disponível em: <http://www.aids.gov.br>. Acesso em: 23 de março de 2019.
- [26] MITTLER, J. E.; SULZER, B.; NEUMANN, A. U.; PERELSON, A. S. Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients. *Mathematical Biosciences*, v. 152, n. 2, p. 143-162, 1998. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(98\)10027-5](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(98)10027-5)
- [27] MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G. *Introduction to Linear Regression Analysis*. John Wiley and Sons, Inc. Publication, 4ª edição, New York, 1992.
- [28] NGUYEN, H. T. A note on the extension principle for fuzzy sets, *Journal Mathematical Analysis and Applications*, v. 64. n. 2, p. 369-380, 1978. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(78\)90045-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(78)90045-8)
- [29] NGUYEN, H. T.; WALKER E. A. *Fuzzy Logic*, Chapman & Hall/CRC, 2ª edição, 1996.
- [30] NOWAK, M. A.; BANGHAM, C. R. M. Population dynamics of immune responses to persistent viruses. *Science*, V. 272, N. 5258, p. 74-79, 1996. <https://doi.org/10.1126/science.272.5258.74>
- [31] PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. *An introduction to fuzzy sets: analysis and design*. MIT Press, Cambridge, 1998.
- [32] OBERGUGGENBERGER, M. e PITTSCHMAN, S. Differential equations with fuzzy parameters. *Math. and Computer Modelling of Dynamical Systems*, v. 5, p. 181-202, 1999. <https://doi.org/10.1076/mcmd.5.3.181.3683>
- [33] MINISTÉRIO DE SAÚDE. Disponível em: <http://bvsmis.saude.gov.br>. Acesso em: 23 de março de 2019.
- [34] PERELSON, A.; NELSON, P. Mathematical Analysis of HIV-1 Dynamics in Vivo. *SIAM Review*, v. 41. p.3-44, 1999.
- [35] PERELSON, A. S.; NEUMANN A. U., MARKOWITZ, M.; LEONARD, J. M. HIV-1 dynamics in vivo: virion clearance rate, infected cell life-span and viral generation time. *Science*, V. 271, n. 5255, p. 1582-1586, 1966. <https://doi.org/10.1126/science.271.5255.1582>
- [36] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Makron Books, 1996.

- [37] SAAG, M. Diagnóstico Laboratorial da AIDS Presente e Futuro, *In Sande, M. e P. A. Volberding, editors, Tratamento Clínico da AIDS*, p. 27-43, Revinter, 3^a edição, 1995.
- [38] SANCHEZ, E. Solutions in composite fuzzy relation equations: application to medical diagnosis in brouwerian logic. *In Fuzzy Automata and Decision Processes*, Amsterdam, p. 221-234, 1977.
- [39] SANCHEZ, E., BARTOLIN, R. Fuzzy inference and medical diagnosis, a case study. *Int. J. Biom. Fuzzy Systems Ass.*, v. 1, p. 4-21, 1990. https://doi.org/10.24466/bfsb.1.1.0_4.
- [40] SECCO, E. F. A. *Teoria de conjuntos fuzzy e aplicações*. Dissertação (Mestrado em Matemáticas). Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil, 2013.
- [41] SIMÕES, F. S. P. *Sobre equações diferenciais para processos fuzzy linearmente correlacionados: aplicações em dinâmica de população*. Dissertação (Mestrado em Matemáticas). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2017.
- [42] VEGA, C. N. *Aplicações da Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy do tipo 2*, Dissertação (Mestrado em Matemáticas). Faculdade de Matemática. Universidade Federal de Uberlândia, Brasil, 2014.
- [43] ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338-353, 1965. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- [44] ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information sciences*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 199-249, 1975.
- [45] ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-II. *Information sciences*, Elsevier, v. 8, n. 4, p. 301-357, 1975.
- [46] ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III. *Information sciences*, Elsevier, v. 9, n. 1, p. 43-80, 1975.
- [47] ZADEH, L. A. Fuzzy sets as a basics for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 3-28, 1978.