

# **Efeitos coerentes em pontos quânticos semicondutores**

Vanbasten Fernandes Silva

TESE APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Augusto Miguel Alcalde Milla

Bolsista CAPES

Uberlândia, 26 de fevereiro de 2019

**Vanbasten Fernandes Silva**

**Efeitos coerentes em pontos quânticos semicondutores**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Física.

Orientador:  
Prof. Dr. Augusto Miguel Alcalde Milla

Uberlândia  
2019

---

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

S586e      Silva, Vanbasten Fernandes, 1991-  
2019      Efeitos coerentes em pontos quânticos semicondutores [recurso  
eletrônico] / Vanbasten Fernandes Silva. - 2019.

Orientador: Augusto Miguel Alcalde Milla.  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa  
de Pós-Graduação em Física.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2019.318>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Física. 2. Pontos quânticos. 3. Células fotoelétricas. I. Milla,  
Augusto Miguel Alcalde (Orient.) II. Universidade Federal de  
Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

---

CDU: 53

Maria Salete de Freitas Pinheiro - CRB6/1262

---



**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**



**VANBASTEN FERNANDES SILVA**

Tese apresentada a coordenação do  
Programa de Pós-graduação em física,  
do Instituto de Física da Universidade  
Federal de Uberlândia, para obtenção do  
título de Doutor em Física.

Uberlândia, 26 de Fevereiro de 2019.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Augusto Miguel Alcalde Mila  
Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Prof. Dr. Edson Vernek  
Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Prof. Dr. José de los Santos Guerra  
Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Prof. Dr. Halyne Silva Borges  
Instituto Federal de Goiás - IFG

Prof. Dr. Guilherme Azevedo Alves  
Universidade Federal do Triângulo Mineiro- UFTM

"Há milhões e milhões de anos que as flores produzem espinhos. Há milhões e milhões de anos que, apesar disso, os carneiros as comem. E não será importante procurar saber por que elas perdem tanto tempo produzindo espinhos inúteis ? Não terá importância a guerra dos carneiros e das flores ? Não será mais importante que as contas do tal sujeito ? E se eu, por minha vez, conheço uma flor única no mundo, que só existe no meu planeta, e que um belo dia um carneirinho pode destruir num só golpe, sem saber o que faz, isso não tem importância ?... Se alguém ama uma flor da qual só existe um exemplar em milhões e milhões de estrelas, isso basta para fazê-lo feliz quando a contempla. Ele pensa: Minha flor está lá, em algum lugar... Mas se o carneiro come a flor, para ele é como se todas as estrelas repentinamente se apagassesem! E isso não tem importância."

**Antoine De Saint-Exupéry - O Pequeno Príncipe**

---

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer imensamente à Doutora Gabriela Scalia Gervasio médica psiquiatra por seus esforços incansáveis em me resgatar da condição deplorável em que eu me encontrava. Fico muito grato por todo o apoio, pelo tratamento e principalmente pela humanidade que teve para comigo. No consultório dela eu encontrei o abrigo e a compreensão que o meio acadêmico não teve comigo. Se esse trabalho chegou a um fim o devo em grande parte a doutora Gabriela. Muito obrigado!

Gostaria de agradecer a todos os médicos que trataram de mim durante esse tempo, em especial ao Doutor Lucas Maradei, proctologista que me operou colocando fim a grande parte das fortes dores e desconfortos que estavam tornando minha vida insuportável. Muito obrigado!

Gostaria de agradecer à minha querida mãe, ao meu amado irmão e à minha namorada Camila por todo o apoio e compreensão que tiveram comigo principalmente nos piores momentos que foram muitos nos últimos anos. Esse trabalho é tão de vocês quanto meu e representa a conquista de um objetivo maior que culminará o mais breve possível em uma condição de vida melhor para nós. Ninguém merece mais colher estes louros do que nós. Obrigado!

Gostaria de agradecer a todos os meus caríssimos amigos conquistados ao longo desses 10 anos de UFU, se eu cheguei até aqui em grande parte a culpa é de vocês. Agradeço todo o apoio, todo o carinho, todo o respeito que tiveram e tem por mim. Agradeço os ombros amigos onde por incontáveis vezes eu estive, agradeço a preocupação que demonstraram para comigo nos períodos em que estive doente e que nos últimos anos não foram poucos. Obrigado meus queridos!

Por fim, gostaria de não agradecer aos que se esforçaram ao longo desses 10 anos em fazer da minha vida um inferno, me coagindo, me controlando, me podando, dificultando a minha existência ao invés de simplificá-la como era o papel deles. Gostaria de não agradecer à aqueles que debocharam das minhas dificuldades, da minha condição de saúde, dos meus questionamentos e dizer que fico imensamente feliz em terminar este trabalho!

# Resumo

No presente trabalho investigamos as propriedades físicas de sistemas quânticos de dois [1], três [2] e quatro [3] níveis formados por elétrons, excitons e trions utilizando o formalismo da matriz de densidade. A evolução unitária dos sistemas se dá com base na equação mestra de Liouville-von Neumann [4] e os efeitos de decoerência são incluídos de acordo com o formalismo de Lindblad [5]. Investigamos as propriedades ópticas [6] desses sistemas buscando condições favoráveis ao regime de transparência eletromagneticamente induzida [7]. Calculamos as fases geométricas associadas aos sistemas de dois e três níveis para estados puros e mistos segundo o formalismo definido por Pancharatnan [8]. No sistema de quatro níveis manipulamos pulsos gaussianos de prova e controle, provocando delays [9] temporais, chirps [10] e criando trens [11] de pulsos ultracurtos para induzir o acúmulo coerente de população e investigamos a propagação solitônica da luz no regime de transparência, associada ao fenômeno de memória quântica. Investigamos a eficiência de uma fotocélula de pontos quânticos acoplados por túnelamentos na presença de uma fonte externa de radiação dentro da aproximação Markoviana [12] para a interação entre sistema e reservatório.

**Palavras-chave:** pontos quânticos, transparência eletromagneticamente induzida, fase geométrica, fotocélulas, pulsos gaussianos.

# Abstract

In the present work we investigated the physical properties of quantum systems of two [1], three [2] and four [3] levels formed by electrons, excitons and trions using the formalism of the density matrix. The unitary evolution of the systems is based on the Liouville-von Neumann [4] master equation and the decoherence effects are included according to the Lindblad [5] formalism. We investigated the optical properties [6] of these systems, looking for favorable conditions to the regime of electromagnetically induced transparency [7]. We calculate the geometric phases associated with the two and three level systems for pure and mixed states according to the formalism defined by Pancharatnan [8]. In the four-level system we manipulate Gaussian pulses of test and control, provoking temporal delays [9], chirps [10] and creating ultra-short pulse trains [11] to induce coherent population accumulation and investigate the soliton propagation of light in the regime of transparency associated with the quantum memory phenomenon. We investigated the efficiency of a photocell of quantum dots coupled by tunnels in the presence of an external source of radiation within the Markovian [12] approximation for the interaction between system and reservoir.

**Keywords:** quantum dots, electromagnetically induced transparency, geometric phase, photocells, gaussian pulses.

# Sumário

<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Pontos Quânticos, interação radiação-matéria e regimes ópticos</b>	<b>4</b>
2.1 Um pouco de história . . . . .	4
2.2 PQs: Fabricação, características e aplicações . . . . .	7
2.3 Interação radiação-matéria . . . . .	10
2.4 Lasers: Um pouco de história . . . . .	14
2.5 Características e princípio de funcionamento . . . . .	15
2.6 Regimes ópticos em Pontos Quânticos . . . . .	18
2.6.1 CPT: armadilhamento coerente de população . . . . .	19
2.6.2 DAT: dubletos de Autler-Townes . . . . .	20
2.6.3 EIT: transparência eletromagneticamente induzida . . . . .	21
<b>3 Mecânica Quântica de sistemas abertos: estados puros e mistos</b>	<b>24</b>
3.1 Introdução . . . . .	24
3.2 Operador Densidade e Matriz Densidade . . . . .	24
3.3 Equações mestras . . . . .	27
3.4 Função de correlação e equação de Markov . . . . .	30
3.5 Entropia linear, estados puros e mistos . . . . .	33
<b>4 Os sistemas de 2, 3 e 4 níveis</b>	<b>34</b>
4.1 O sistema de dois níveis . . . . .	34
4.2 O sistema de três níveis . . . . .	42
4.3 O sistema de quatro níveis . . . . .	53
<b>5 Fases Geométricas em Pontos Quânticos</b>	<b>62</b>
5.1 Motivação . . . . .	62
5.2 Um pouco de história . . . . .	63
5.3 Teorema Adiabático . . . . .	65

---

5.4	Formulação Matemática . . . . .	66
5.5	Fase Geométrica de Pancharatnam . . . . .	70
5.6	Resultados . . . . .	72
5.6.1	Sistema de dois níveis: o qubit . . . . .	72
5.6.2	Sistema de três níveis: um possível qutrit . . . . .	84
5.6.3	Teoria de perturbação de Van Vleck . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Manipulação de Pulses Gaussianos em Pontos Quânticos</b>	<b>95</b>
6.1	Introdução . . . . .	95
6.2	Delay temporal entre pulsos . . . . .	96
6.3	Trens de pulsos . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Efeito Fotovoltaico em Pontos Quânticos</b>	<b>108</b>
7.1	Um pouco de história . . . . .	108
7.2	Princípio de funcionamento . . . . .	110
7.3	Fotocélulas de PQs . . . . .	111
7.4	Resultados . . . . .	117
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>120</b>
8.1	Perspectivas futuras . . . . .	121
<b>A</b>	<b>Conceitos fundamentais da Mecânica Quântica</b>	<b>122</b>
<b>B</b>	<b>Teoria de informação: Breve histórico e ideias fundamentais</b>	<b>127</b>
<b>C</b>	<b>Detalhes técnicos</b>	<b>136</b>
C.1	Aproximação de dipolo . . . . .	136
C.2	Hamiltonianos transformados . . . . .	137
C.2.1	Sistema de 3 níveis . . . . .	138
C.2.2	Sistema de 4 níveis . . . . .	139
<b>D</b>	<b>Pulse Chirp</b>	<b>141</b>
<b>E</b>	<b>Propagação de Pulses Gaussianos</b>	<b>144</b>
E.1	Aproximação da variação lenta da amplitude . . . . .	144
E.2	Ondas solitárias: Um pouco de história . . . . .	147
E.3	Pulses gaussianos em Pontos Quânticos . . . . .	148
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>153</b>

---

# Lista de Abreviaturas

- CPT - coherent population trapping  
CW - continuos wave  
DAT - dubletos de Autler-Townes  
DHS - double heterostructure semiconductor  
EIT - electromagnetically induced transparency  
HBT - heterostructure bipolar transistor  
LASER - light amplification by stimulated emission of radiation  
LOSER - light oscillations by stimulated emission of radiation  
MASER - microwaves amplification by stimulated emission of radiation  
MBE - molecular beam epitaxy  
MQ - mecânica quântica  
PQs - pontos quânticos  
REM - radiação eletromagnética  
RWA - rotating wave approximation  
TRM - tripletos de Mollow  
WGE - wide-gap emitter

# Lista de Figuras

2.1	Esquema da formação de PQs auto-organizados pelo processo de MBE. Figura de autoria própria. . . . .	8
2.2	Figura retirada do livro "Óptica moderna: fundamentos e aplicações - Sérgio Carlos Zílio". Fenômeno de dispersão anômala para o tratamento clássico da luz. a) modelo do oscilador harmônico, b) índice de refração, c) coeficiente de absorção. . . . .	12
2.3	Esquema representativo do fenômeno de emissão estimulada descrito por Einstein. Abaixo uma ilustração do laser de Rubi e ao lado Maiman posando pra foto com sua invenção. Figura de autoria própria. . . . .	17
2.4	Resultado recente da literatura acerca do aprisionamento coerente de população. Referência retirada de Journal of Applied Physics 119, 244502 (2016). . . . .	19
2.5	Resultado recente da literatura acerca do regime óptico dos dubletos de Autler-Townes. Referência retirada de arXiv:1506.08680. . . . .	20
2.6	Resultados recente da literatura acerca do fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida. Referência retirada de Scientific Reports volume 7, Article number: 7132 (2017). . . . .	22
4.1	Esquema ilustrativo de um sistema de dois níveis formado por um exciton. . . . .	34
4.2	Autovalores do Hamiltoniano em função de $\Delta$ para diferentes valores de $\Omega$ . a) $\Omega = 0$ , b) $\Omega = 2.5\mu eV$ , c) $\Omega = 5\mu eV$ , d) $\Omega = 10\mu eV$ . . . . .	35
4.3	Representação esquemática de um qubit na esfera de Bloch-Poincaré. . . . .	38
4.4	Populações em função do tempo para diferentes valores de $\Delta$ . Em todas as situações $\Gamma = 0$ e $\Omega = 5\mu eV$ . a) $\Delta = 0$ , b) $\Delta = \pm 2.5\mu eV$ , c) $\Delta = \pm 5\mu eV$ , d) $\Delta = \pm 10\mu eV$ . . . . .	39
4.5	Populações em função do tempo para diferentes valores de $\Delta$ . Em todas as situações $\Gamma = 1\mu eV$ e $\Omega = 5\mu eV$ . a) $\Delta = 0$ , b) $\Delta = \pm 2.5\mu eV$ , c) $\Delta = \pm 5\mu eV$ , d) $\Delta = \pm 10\mu eV$ . . . . .	39
4.6	a) Partes real e imaginária da susceptibilidade óptica, b) índice de refração, c) razão entre a velocidade de fase e a velocidade da luz, d) derivada do índice de refração, e) razão entre a velocidade de grupo e a velocidade da luz. Em todas as situações $\Gamma = 1\mu eV$ . . . . .	41

4.7	Esquema ilustrativo da molécula de PQs acoplados por tunelamento. O estado fundamental $ 0\rangle$ é representado pelo vácuo excitônico e os estados excitados $ 1\rangle$ e $ 2\rangle$ por diferentes configurações de excitons. . . . .	42
4.8	Autovalores do Hamiltoniano como função de $\delta_1$ na condição em que $\omega_{21} = 0$ . a) $\Omega = T_e = 0$ , b) $\Omega = 50\mu eV$ , $T_e = 0$ , c) $\Omega = 0$ , $T_e = 10\mu eV$ , d) $\Omega = 50\mu eV$ , $T_e = 10\mu eV$ . . . . .	44
4.9	Autovalores do Hamiltoniano como função de $\omega_{21}$ na condição em que $\delta_1 = 0$ . a) $\Omega = T_e = 0$ , b) $\Omega = 50\mu eV$ , $T_e = 0$ , c) $\Omega = 0$ , $T_e = 10\mu eV$ , d) $\Omega = 50\mu eV$ , $T_e = 10\mu eV$ . . . . .	45
4.10	Populações em função do tempo na condição em que $\delta_1 = \delta_2 = \omega_{21} = 0$ . a) $\Gamma_0^1 = 0$ , b) $\Gamma_0^1 = 5\mu eV$ , c) populações para tempos longos sob o efeito da decoerência. Em todas as situações $\Omega = 50\mu eV$ , $T_e = 10\mu eV$ . . . . .	46
4.11	Populações em função do tempo na condição em que $\delta_1 = \delta_2 = \omega_{21} = 0$ . a) $\Gamma_0^1 = 0$ , b) $\Gamma_0^1 = 5\mu eV$ , c) populações para tempos longos sob o efeito da decoerência. Em todas as situações $\Omega = 20\mu eV$ , $T_e = 20\mu eV$ . . . . .	47
4.12	Populações em função do tempo na condição em que $\delta_1 = \delta_2 = \omega_{21} = 0$ . a) $\Gamma_0^1 = 0$ , b) $\Gamma_0^1 = 5\mu eV$ , c) populações para tempos longos sob o efeito da decoerência. Em todas as situações $\Omega = 10\mu eV$ , $T_e = 20\mu eV$ . . . . .	48
4.13	Populações em função do tempo na condição em que $\delta_1 = 0$ , $\omega_{21} = \pm 50\mu eV$ . a) $\Gamma_0^1 = 0$ , b) $\Gamma_0^1 = 5\mu eV$ . Em todas as situações $\Omega = 50\mu eV$ , $T_e = 10\mu eV$ . . .	48
4.14	a) e b) mapa das partes real e imaginária do elemento óptico do sistema na condição em que $\omega_{21} = 0$ , c) corte para $T_e/\Gamma_0^1 = 0$ , d) corte para $T_e/\Gamma_0^1 = 0.5$ , e) corte para $T_e/\Gamma_0^1 = 2$ . . . . .	50
4.15	a) e b) mapa das partes real e imaginária do elemento óptico do sistema na condição em que $\omega_{21} = +5\mu eV$ , c) e d) mapa das partes real e imaginária do elemento óptico do sistema na condição em que $\omega_{21} = -5\mu eV$ . . . . .	52
4.16	Esquema ilustrativo do sistema de quatro níveis na configuração de Voigt para o campo magnético. Os estados $ 0\rangle$ e $ 1\rangle$ representam elétrons e os estados $ 2\rangle$ e $ 3\rangle$ representam trions. . . . .	53
4.17	Populações em função do tempo na condição em que $\delta_e = \delta_h = \Delta = 0$ . a) $\Omega_c = 50\mu eV$ , $\Omega_p = 10\mu eV$ , b) $\Omega_c = 20\mu eV$ , $\Omega_p = 20\mu eV$ , c) $\Omega_c = 0$ , $\Omega_p = 50\mu eV$ , d) $\Omega_c = 50\mu eV$ , $\Omega_p = 0$ . Em todas as situações $\Gamma_i^j = 0$ . . . . .	56
4.18	Populações em função do tempo na condição em que $\delta_e = \delta_h = \Delta = 0$ . a) $\Omega_c = 50\mu eV$ , $\Omega_p = 10\mu eV$ , b) $\Omega_c = 20\mu eV$ , $\Omega_p = 20\mu eV$ , c) $\Omega_c = 0$ , $\Omega_p = 50\mu eV$ , d) $\Omega_c = 50\mu eV$ , $\Omega_p = 0$ . Em todas as situações $\Gamma = 5\mu eV$ , $\gamma = 1\mu eV$ . . . . .	56
4.19	Populações em função do tempo na condição em que $\Delta = 0$ , $\delta_e = (g_e/g_h)\delta_h$ . a) $\delta_h = \pm 10\mu eV$ , b) $\delta_h = \pm 15\mu eV$ , c) $\delta_h = \pm 20\mu eV$ , d) $\delta_h = \pm 25\mu eV$ . Em todas as situações $\Gamma_i^j = 0$ . . . . .	57

4.20	Populações em função do tempo na condição em que $\delta_e = \delta_h = 0$ . a) $\Delta = \pm 5\mu eV$ , b) $\Delta = \pm 50\mu eV$ , c) $\Delta = \pm 100\mu eV$ , d) $\Delta = \pm 300\mu eV$ . Em todas as situações $\Gamma_i^j = 0$ .	58
4.21	a) e b) mapas das partes real e imaginária do elemento óptico, c) corte para $\Omega_c = 0$ , d) $\Omega_c = 0.1\Gamma$ , e) $\Omega_c = 0.12\Gamma$ , f) $\Omega_c = 0.2\Gamma$ , g) $\Omega_c = 0.4\Gamma$ , h) $\Omega_c = 0.5\Gamma$ , i) $\Omega_c = \Gamma$ , j) $\Omega_c = 2\Gamma$ , k) $\Omega_c = 10\Gamma$ , l) $\Omega_c = 20\Gamma$ , m) $\Omega_c = 40\Gamma$ , n) $\Omega_c = 80\Gamma$ . Em todas as situações $\Omega_p = 0.1\mu eV$ , $\Gamma = 5\mu eV$ e $\gamma = 1\mu eV$ .	59
4.22	a) Populações em função do tempo para o caso em que $\delta_h = 100\mu eV$ , $\delta_e = 0$ , b) e c) mapas das partes real e imaginária do elemento óptico na condição em que $\Delta = 0$ , d) e e) $\Delta = -5\mu eV$ , f) e g) $\Delta = +5\mu eV$ . Em todas as situações $\Omega_p = 0.1\mu eV$ , $\Gamma = 5\mu eV$ e $\gamma = 1\mu eV$ .	61
5.1	Gráfico do termo de fase geométrica analítico da equação (5.37). a) fase acumulada ao longo do tempo, b) fase limitada no intervalo $[-\pi, \pi]$ .	76
5.2	Mapas do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear em função do tempo e da taxa de decoerência para valores opostos de $\Delta$ . a), b), e), f) para $\theta = 0$ , i), j), m), n) para $\theta = \pi$ , c), d), g), h) para $\theta = \pi/2$ e k), l), o), p) para $P_1 = P_2 = 0.5$ .	78
5.3	Termos de fase total (curvas azuis), fase dinâmica (curvas vermelhas) e fases geométricas (curvas verdes) em função do tempo para a condição em que $\theta = 0$ . a) $\Delta = -2\mu eV$ , b) $\Delta = 2\mu eV$ , onde $\Gamma = 0$ . c) $\Delta = -2\mu eV$ , d) $\Delta = 2\mu eV$ , onde $\Gamma = 1\mu eV$ .	79
5.4	Mapas do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear em função do tempo e de $\Delta$ . a) e b) $\Omega = 2\mu eV$ , c) e d) $\Omega = 4\mu eV$ . e) e f) cortes dos mapas para diferentes valores de $\Omega$ e $\Delta$ . Em todas as situações $\Gamma = 1\mu eV$ .	80
5.5	Em a) e c) mapa do termo de fase total, em b) e d) o termo de fase dinâmica. a), b) $\theta = +\pi/2$ . c), d) $\theta = -\pi/2$ . Em e) e f) cortes dos termos de fase total (curvas azuis), dinâmica (curvas vermelhas) e geométricas (curvas verdes) para dessintonias opostas $\Delta = +2\mu eV$ (curvas tracejadas) e $\Delta = -2\mu eV$ (curvas cheias).	81
5.6	Em a), b), c) e d) os mapas do raio da esfera de Bloch-Poincaré em função do tempo e de $\Delta$ para ângulos opostos no equador da esfera $\theta = \pm\pi/2$ com $\Omega = 2\mu eV$ . e) e f) cortes para diversas condições de $\Delta$ e $\Omega$ .	82
5.7	Em a) e b) para $\Gamma = 0$ , temos os termos de fase total (curvas azuis), dinâmica (curvas vermelhas) e geométricas (curvas verdes) para valores opostos de $\Delta$ . Em c) e d) com $\Gamma = 1\mu eV$ temos os gráficos do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear para diversas condições de $\Delta$ e $\Omega$ . Em todas as situações estamos na condição em que $P_0 = 0.65$ e $P_1 = 0.35$ .	83

5.8 Em a) e c) mapas da fase total e em b) e d) da fase dinâmica para $\Gamma = 0$ e $\Gamma = 1\mu eV$ respectivamente na condição em que $\theta = 0$ com $\Omega = 4\mu eV$ . Em e) cortes da fase total e em f) cortes da fase dinâmica para diversos valores de $\Omega$ quando $\Gamma = 1\mu eV$ . . . . .	83
5.9 Em a) e b) mapas dos termos de fase total e dinâmica na condição em que $\delta_1 = 0$ para $\Omega = T_e/2$ , em c) e d) na condição em que $\Omega = 2T_e$ . Em e) e f) na condição em que $\omega_{21} = 0$ para $\Omega = T_e/2$ e em g) h) para $\Omega = 2T_e$ . Em todas as situações estamos em $\theta = \pi$ e $\Gamma = 0$ . . . . .	86
5.10 Cortes da Figura 5.9. Em a) e c) na condição em que $\omega_{21} = 0$ com $\Omega = T_e/2$ . Em b) e d) na condição em que $\delta_1 = 0$ com $\Omega = 2T_e$ . . . . .	87
5.11 No regime de acoplamento fraco $\Omega = T_e/2$ , em a) e b) os mapas do raio da esfera de Bloch-Poincaré em função do tempo na condição em que $\omega_{21} = 0$ e em c) e d) na condição em que $\delta_1 = 0$ . Em e), f), g) e h) os mapas no regime estacionário na condição nos regimes de acoplamento fraco $\Omega = T_e/2$ e forte $\Omega = 2T_e$ . . . . .	88
5.12 Cortes dos quadros e), f), g) e h) da Figura 5.11. Em a) e b) no regime de acoplamento fraco $\Omega = T_e/2$ e em c) e d) no regime de acoplamento forte $\Omega = 2T_e$ . Em todas as situações $\Gamma_0^1 = 1\mu eV$ . . . . .	89
5.13 Em a), b) e c) os mapas do termo de fase dinâmica em função de $\omega_{21}$ e $\delta_1$ para os regimes $\Omega = T_e/2$ , $\Omega = 2T_e$ e $\Omega = T_e$ respectivamente. Em d) e e) cortes para o regime de acoplamento fraco $\Omega = T_e/2$ para diferentes valores do campo elétrico $\omega_{21}$ . . . . .	89
5.14 Nos quadros a), b), c) e d) temos $\Gamma = 0$ . Em a) e b) os mapas da fase total e dinâmica em função de $\omega_{21}$ na condição em que $\delta_1 = 2.5\mu eV$ , em c) e d) em função de $\delta_1$ na condição em que $\omega_{21} = 2.5\mu eV$ . Nos quadros e), f), g) e h) as mesmas situações mas com $\Gamma = 1\mu eV$ . . . . .	92
5.15 Em a) e c) cortes da Figura 5.14 para $\Gamma = 0$ e $\Gamma = 1\mu eV$ respectivamente. As linhas cheias indicam $\omega_{21} = -2.4\mu eV$ e as linhas tracejadas $\omega_{21} = -2.5\mu eV$ . Em b) e d) o mesmo mas agora para cortes em $\delta_1$ . . . . .	93
5.16 Mapas do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear em função de $\omega_{21}$ e do tempo. Em a) e b) para a condição $\theta = 0$ com $\delta_1 = 2.5\mu eV$ . Em c) e d) para $\theta = \pi$ . Em e) e f) cortes para alguns valores de $\omega_{21}$ . Em todas as situações $\Gamma = 1\mu eV$ . . . . .	94
6.1 Nos quadros superiores o gráfico do laser de prova (curva vermelha) e de controle (curva azul), nos quadros do meio a parte real do elemento óptico e nos quadros inferiores a parte imaginária. Na coluna a) para $\Delta t = 0$ , na coluna b) para $\Delta t = 2$ ps, na coluna c) para $\Delta t = 4$ ps e na coluna d) para $\Delta t = 6$ ps. Em todas as situações $\Gamma = 5\mu eV$ e $\gamma = 1\mu eV$ e $\Delta = 0$ . . . . .	97

6.2	Nos quadros superiores o gráfico do laser de prova (curva vermelha) e de controle (curva azul), nos quadros do meio a parte real do elemento óptico e nos quadros inferiores a parte imaginária. Na coluna a) para $\Delta t = 8$ ps, na coluna b) para $\Delta t = 10$ ps, na coluna c) para $\Delta t = 20$ ps e na coluna d) para $\Delta t = 30$ ps. Em todas as situações $\Gamma = 5\mu eV$ e $\gamma = 1\mu eV$ e $\Delta = 0$ . . . . .	98
6.3	Em a) diferentes valores de intensidade do laser de prova para a intensidade do laser de controle fixa $\Omega_c = 2.5\mu eV$ . Em b) as mudanças na parte imaginária do elemento óptico para diferentes valores de $\Omega_p$ . Em c) diferentes larguras do pulso de prova e em d) as modificações que elas causam em $Im[\rho_{opt}]$ . Em todas as situações $\tau_0^p = 2$ ps, $\tau_0^c = \Delta t = 6$ ps. . . . .	98
6.4	Em a) e b) o comportamento das partes real e imaginária do elemento óptico associado ao laser de prova para diferentes larguras do laser de controle na condição $\Delta t = \tau_0^c$ , $\tau_0^p = \tau_0^c/2$ . . . . .	99
6.5	Em a) e b) os mapas das partes real e imaginária do elemento óptico na condição em que $\Delta t = \tau_0^c = 6$ ps, $\tau_0^p = 3$ ps. Em c) e d) temos a condição em que não existe delay temporal entre os pulsos $\Delta t = 0$ , $\tau_0^p = \tau_0^c = 5$ ps. Em todas as situações $\Omega_c = 2.5\mu eV$ . . . . .	100
6.6	Cortes da Figura 6.5 na condição em que $\Delta t = 0$ , $\tau_0^p = \tau_0^c$ . Em a) para $\Omega_p = 0.25\mu eV$ , em b) para $\Omega_p = 1\mu eV$ , em c) para $\Omega_p = 2\mu eV$ e em d) para $\Omega_p = 2.5\mu eV$ . Em todas as situações $\Omega_c = 2.5\mu eV$ . . . . .	100
6.7	Na condição em que $\Delta t = 0$ , $\tau_0^p = \tau_0^c/2$ . Em a) para $\Omega_p = 0.25\mu eV$ , em b) para $\Omega_p = 1\mu eV$ , em c) para $\Omega_p = 2\mu eV$ e em d) para $\Omega_p = 2.5\mu eV$ . Em todas as situações $\Omega_c = 2.5\mu eV$ e $\tau_0^c = 5$ ps. . . . .	101
6.8	Em a) e b) os mapas das partes real e imaginária do elemento óptico em função do delay entre os pulsos de prova e controle na condição em que $\tau_0^p = \tau_0^c = 5$ ps. Na coluna c) um corte para $\Delta t = 5$ ps dos mapas das partes a) e b) com $\Omega_p = \Omega_c = 0.1\mu eV$ . Em d) a condição em que $\Delta t = 5$ ps, $\tau_0^p = \tau_0^c/2$ . . . . .	102
6.9	Em a) e c) a condição em que $\Delta t = 5$ ps, $\tau_0^p = \tau_0^c$ . Em b) e d) a condição em que $\Delta t = 5$ ps, $\tau_0^p = \tau_0^c/2$ . Em todas as situações tomamos $\Omega_p = \Omega_c$ . . . . .	102
6.10	Esquema ilustrativo do aparato experimental para a geração de um trem de pulsos. . . . .	105
6.11	Evolução das propriedades ópticas com o aumento da quantidade de pulsos do trem. Em a) $\tau_0^c \approx 96$ ps, em b) $\tau_0^c \approx 24$ ps, em c) $\tau_0^c \approx 6$ ps e em d) $\tau_0^c \approx 1.5$ ps. . . . .	106
6.12	Em a) $\tau_0^c \approx 0.4$ ps e b) $\tau_0^c \approx 0.2$ ps. Nos quadros c), d) e), f), g) e h) as populações dos estados $ 0\rangle$ e $ 1\rangle$ com o aumento da quantidade de pulsos de controle no trem. . . . .	106

---

6.13 Evolução da coerência com a aplicação do laser de prova. Em a) temos um pulso de prova de $\tau_0^p \approx 7$ ps aplicado em diferentes momentos da dinâmica do sistema. Em b) o gráfico da evolução no tempo do termo da parte imaginária do termo de coerência em função do tempo para cada posição do pulso de prova na dinâmica. Em (c) e (d) os modos de corrigir a perda de coerência do sistema. Em todas as situações temos $N_p = 512$ com $\tau_0^c \approx 0.2$ ps. . . . .	107
7.1 Esquema ilustrativo da formação da zona de depleção em um material semi-condutor. . . . .	111
7.2 Esquema representativo de uma fotocélula de PQs acoplados por tunelamento em um sistema de quatro níveis ligado a contatos metálicos por um potencial $\Gamma$ . . . . .	112
7.3 Em a) corrente fotogerada como função da voltagem aplicada para diferentes valores do acoplamento coerente $\Omega$ . Em b) as curvas da potência da fotocélula em função da voltagem aplicada para a temperatura ambiente de $300K$ . . . . .	117
7.4 Termo de coerência associado à transição dos estados $ 1\rangle$ e $ 2\rangle$ como função da voltagem aplicada para diferentes valores do acoplamento $\Omega$ . . . . .	118
7.5 Em a) as curvas de fotocorrente para a intensidade de saturação $\Omega = 50\mu eV$ para diferentes temperaturas. Em b) as curvas de potência associadas. . . . .	119
D.1 Na condição em que $\Delta t = \tau_0^c, \tau_0^p = \tau_0^c/2$ . Em a) e c) as partes reais dos pulsos de controle para $\tau_0^c = 4$ ps e $\tau_0^c = 2$ ps na presença de diferentes fatores de chirp. Em b) e d) as partes imaginárias dos pulsos. Em e), f), g) e h) as partes real e imaginária do elemento óptico associado ao laser de prova para diferentes valores do fator de chirp. . . . .	143
E.1 Em a) campo elétrico de prova se propagando no espaço e no tempo. Em b) a componente de matéria $\rho_e$ associada à transição escura do sistema. Em c) e d) os gráficos da velocidade de grupo como função do tempo e da dessintonia $\delta_e$ , laser de controle modulado com um perfil tangente hiperbólico. Em e), f), g) e h) a mesma situação, mas agora para um laser de controle modulado como um trem de pulsos. . . . .	151
E.2 Comparativo da propagação na dessintonia ressonante e fora da ressonância. Em a) propagação solitônica da luz e em b) fora da ressonância propagação não solitônica. . . . .	152

# Capítulo 1

## Introdução

VEVEMOS a era da informação. Por todos os lados, tablets, celulares, computadores e toda sorte de dispositivos tornam nossas vidas mais práticas e eficientes. Praticamente todos os dispositivos usados atualmente na tecnologia de informação usam semicondutores [13] como matéria-prima, isto em grande parte, se deve aos seus altos desempenhos e baixos custos de produção. Entretanto, esse grande avanço dos dispositivos só foi possível após o amplo conhecimento das propriedades físicas das chamadas heteroestruturas semicondutoras [14], das quais se destacam os Pontos Quânticos (PQs) [15]. Os PQs são comumente chamados na literatura de átomos artificiais [16] e essa característica fascinante está diretamente ligada a uma propriedade física muito interessante chamada densidade de estados eletrônicos [17]. Essa propriedade, descreve o número de estados possíveis na banda de condução ou na banda de valência do material por unidades de energia e pelo volume que pode ser preenchido com elétrons. A questão fundamental é que existe uma clara dependência dessa densidade de estados com a energia e essa dependência muda de acordo com a dimensão do material.

No caso zero-dimensional, que corresponde aos PQs, em consequência de não haver movimento eletrônico, também não há um volume a ser ocupado no espaço recíproco e assim, cada estado quântico desse sistema pode ser ocupado somente por dois elétrons, do mesmo modo que acontece nos átomos de hidrogênio. A densidade de estados desses sistemas pode ser descrita por uma função delta e no caso mais realístico no qual nem todos os PQs sejam idênticos, teremos uma distribuição aleatória de energias possíveis na qual é razoável substituir a função delta por uma distribuição gaussiana, por exemplo. A utilização de sistemas de baixa dimensionalidade na fabricação de dispositivos eletrônicos e optoeletrônicos está diretamente ligada às características peculiares apresentadas por eles, como por exemplo essa densidade de estados semelhante à de átomos naturais. Quanto mais estreita for a distribuição de estados eletrônicos em energia, menor será a influência dos efeitos da temperatura neles e assim, a separação muito bem estabelecida entre os níveis permite uma grande seletividade em termos de energia e um maior controle desses dispositivos.

É possível obter muitas informações sobre átomos naturais e suas propriedades medindo as energias necessárias para ceder ou remover elétrons deles. Em átomos não reais [18] também é muito importante o conhecimento destas energias, mas neste caso, as informações podem ser conseguidas através da medida da corrente elétrica que atravessa os PQs. Esses dispositivos apresentam uma grande vantagem com respeito às outras propostas: poderem usufruir de toda a infraestrutura já disponível. É essa habilidade de controlar os estados quânticos que fez com que os PQs tivessem um papel importante no desenvolvimento científico e tecnológico, tornando-se objetos de amplo estudo, tanto em pesquisas de física básica como de engenharia.

Os métodos mais utilizados para a fabricação dessas heteroestruturas semicondutoras são a síntese química de nanocristais coloidais [19] e os chamados métodos epitaxiais, às vezes conjugados aos métodos litográficos. Usando o método epitaxial, é possível crescer camada por camada de semicondutores que podem ser de diferentes compostos e ter diferentes parâmetros de rede. Crescendo camadas de diferentes materiais é possível criar PQs onde os elétrons ficam aprisionados na direção de crescimento, criando assim um gás de elétrons bidimensional de alta qualidade [20], que com o auxílio de portões eletrostáticos criados por litografia, ficam confinados eletrostaticamente na direção lateral. Esse confinamento lateral também pode ser obtido nas imperfeições das monocamadas que formam o poço usando o método litográfico conjugado com técnicas de corrosão ou usando materiais com parâmetros de rede distintos o que gera uma tensão superficial capaz de provocar o aparecimento de ilhas nanométricas nas quais os portadores de carga ficam confinados nas três dimensões. Este método é conhecido como crescimento de PQs auto-organizados [21]. A grande flexibilidade em mudar o espectro de energia e a estrutura geométrica através da incidência de campos elétricos externos ou da manipulação estrutural, faz com que esses sistemas se tornem ambientes ideais para extensos estudos teóricos e experimentais de diversas propriedades físicas, como mecanismos de transporte de carga e spin e controle de propriedades ópticas. Existem diversas aplicações em inúmeras áreas da tecnologia, como por exemplo, a iluminação, a produção de displays, as fotocélulas, entre outros.

Toda a área da informação e da computação quântica se desenvolveu como um produto da combinação das teorias modernas da MQ e da teoria de informação, com o principal objetivo da aplicação dessas teorias na construção do computador quântico. Em tese, a capacidade desse computador em processar a informação comparada ao computador clássico é muitas vezes superior, o que por si só já garantiria sua potencial aplicação. Entretanto, existe uma desvantagem na computação quântica em relação ao processamento paralelo da informação. Em meios materiais os processos de computação quântica seguem uma regra de coerência. O processamento paralelo é uma forma de computação em que vários cálculos são realizados ao mesmo tempo, operando sob o princípio de que grandes problemas geralmente podem ser divididos em problemas menores, que então são resolvidos concorrentemente.

---

Em outras palavras, quando os estados quânticos perdem sua coerência a superioridade do computador quântico falha. Em condições reais é inevitável a interação do sistema físico com o ambiente, o que fatalmente causa a dissipação da energia, a perda de coerência e o aquecimento do sistema e afeta a qualidade e a eficiência do processamento dessa informação. Nesse contexto, as fases quânticas [22] tem sido promissoras candidatas para aplicações no processamento e manipulação da informação. Em suma, a fase geométrica é uma entidade física que está fortemente ligada à evolução no tempo dos parâmetros do espaço de parâmetros do Hamiltoniano do sistema e exibe real potencial para ser usada como uma porta lógica em sistemas de computação quântica. Essa fase adquirida pelo sistema durante a evolução dos parâmetros no tempo, carrega consigo uma contribuição que depende da geometria da trajetória executada pelos estados do sistema. Diversos estudos tem mostrado que a fase geométrica de Berry [23] está relacionada a estados puros ou que inicialmente eram puros e existe uma grande perspectiva de aplicação dessa fase na implementação de portas lógicas, o que requer o estudo detalhado de sistemas mais realísticos que estejam acoplados ao ambiente fraca ou fortemente por efeito da decoerência, fator que tem se mostrado importante para processos de computação quântica eficientes.

No presente trabalho concentraremos nossos esforços no estudo das propriedades físicas de sistemas quânticos de dois, três e quatro níveis, nos quais investigamos as propriedades da evolução temporal dos estados baseados no formalismo da matriz de densidade e na equação mestra de Liouville-von Neumann na forma de Lindblad, incluindo efeitos de decoerência associados aos canais de dephasing puro e de decaimento espontâneo. Os capítulos dessa tese estão divididos da seguinte forma: no capítulo 2, trazemos uma revisão detalhada dos pontos de vista histórico e conceitual sobre PQs, lasers, interação radiação-matéria e regimes ópticos. No capítulo 3, apresentamos os fundamentos teóricos mais gerais do presente trabalho desde a descrição do sistema físico do ponto de vista da MQ<sup>1</sup> baseados na construção dos estados a partir da definição da matriz de densidade, passando pelas equações mestras dentro da aproximação Markoviana, até os conceitos fundamentais da teoria de informação e computação quântica<sup>2</sup>. No capítulo 4 apresentamos a descrição dos sistemas quânticos de dois, três e quatro níveis, suas propriedades ópticas e da evolução de seus estados no tempo, na presença e na ausência dos efeitos de decoerência. No capítulo 5 executamos um estudo detalhado sobre as fases geométricas de Pancharatnam e Berry nos sistemas de dois e três níveis do ponto de vista analítico e numérico. No capítulo 6, nos dedicamos à manipulação de pulsos gaussianos de prova e controle na forma de trens de pulsos e pulsos com delay temporal para a obtenção do fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida no sistema de quatro níveis estudado. No capítulo 7 fazemos um breve estudo da eficiência de uma fotocélula de PQs acoplados por tunelamento, na presença de uma fonte externa de radiação coerente. Por fim, seguiremos com as conclusões do trabalho no capítulo 8.

---

<sup>1</sup>Informações mais detalhadas podem ser encontradas no apêndice A

<sup>2</sup>Informações mais detalhadas podem ser encontradas no apêndice B

---

## Capítulo 2

# Pontos Quânticos, interação radiação-matéria e regimes ópticos

### 2.1 Um pouco de história

No ano 2000 o prêmio nobel de física foi concedido aos físicos, Herbert Kroemer, Zhores Alferov e ao engenheiro Jack Clair Kilby pelo desenvolvimento das heteroestruturas semicondutoras e sua aplicação na construção de dispositivos eletrônicos [24]. Contudo, essa história começa muitos antes, por volta de 1947, durante o chamado mês milagroso entre 17 de novembro e 23 de dezembro, quando Brattain [25] e Bardeen realizaram experimentos para determinar o que estava impedindo o dispositivo de Shockley [26] de amplificar corrente. Eles substituíram o silício por germânio, o que resultou em uma amplificação cerca de trezentas e trinta vezes maior que antes mas notaram que isso funcionava apenas para correntes de baixa frequência, enquanto as linhas telefônicas por exemplo, precisariam lidar com as muitas frequências complicadas da voz humana. Em seguida, eles substituíram o líquido por uma camada de dióxido de germânio. Quando parte da camada de óxido foi lavada acidentalmente, Brattain continuou o experimento empurrando a ponta de ouro para dentro do germânio e eureka! Não só eles conseguiram uma grande amplificação como também poderiam fazê-la em todas as frequências.

Bardeen e Brattain alcançaram dois resultados especiais: a capacidade de obter uma grande amplificação em algumas frequências e uma pequena amplificação para todas as frequências. Seu objetivo agora era combinar os dois resultados. Os componentes essenciais do dispositivo até agora eram o germânio e dois contatos de ouro dispostos a frações de um milímetro de distância. Brattain colocou uma fita de ouro em torno de um triângulo de plástico e cortou-a através de um dos pontos. Quando a ponta do triângulo tocou o germânio, a corrente elétrica entrou através de um contato de ouro e aumentou à medida que se afastava do outro. Eles haviam feito o primeiro transistor de contato pontual.

Em 23 de dezembro, Shockley, Bardeen e Brattain apresentaram o seu pequeno triângulo de plástico aos poderosos do Bell Labs e então se tornou oficial: nascia a eletrônica como a conhecemos! Seguindo o embalo dos experimentos de Shockley, Bardeen e Brattain, no começo de 1948, após a perseguição stalinista, Kroemer foi para a Universidade de Gottingen, onde foi aceito depois de ser informalmente examinado por Becker, Leibfried, Pohl e Wolfgang. Kroemer iniciou seu doutorado sob a orientação de Fritz Sauter, que fora aluno de Johannes Sommerfeld. Foi na preparação de sua tese de doutorado que Kroemer teve os primeiros contatos com o que, posteriormente, ficaria conhecida como heteroestrutura semicondutora. Kroemer desenvolveu um estudo teórico sobre a natureza dos estados de superfície na interface entre dois diferentes potenciais periódicos. Esses estados, posteriormente conhecidos como bandas de compensação em heterojunções de semicondutores, representavam uma extensão das primeiras ideias apresentadas por Shockley em 1939 sobre estados em potenciais unidimensionais.

Na tese de doutorado defendida por Kroemer em 1952, analisando a estrutura de bandas de energia do átomo de Ge ele percebeu que se o campo elétrico fosse bastante forte, haveria um movimento de buracos da banda de valência provocando um efeito de carga espacial bastante forte que iria influenciar na característica corrente-voltagem do ponto de contato em diodos e transistores. Também percebeu que a velocidade de arraste dos elétrons diminuía com o aumento do campo elétrico, provocando com isso uma condutividade diferencial negativa [27]. Esse fato foi observado pelo físico japonês Leo Esaki em 1958, ao estudar o tunelamento em um diodo de junção p-n [28] de Ge.

Após concluir seu doutorado, Kroemer foi trabalhar em 1953 como físico teórico no pequeno grupo de pesquisas em semicondutores do laboratório central de telecomunicações do serviço postal alemão. Kroemer atacou o problema das limitações de frequência dos transistores de junção, cuja solução o levou ao primeiro contato com as heteroestruturas semicondutoras. Ainda em 1953, Kroemer mostrou que poderia acelerar o fluxo da minoria de portadores de carga do emissor para o coletor do transistor de junção incorporando um campo elétrico em sua base. Esse campo de arraste era conseguido com uma base formada de diferentes semicondutores com diferentes gaps de energia. Esse tipo teórico de transistor serviu como base para Kroemer participar na invenção do transistor de heteroestrutura bipolar, popularmente conhecido como transistor HBT [29], um dos motivos pelo qual recebeu o prêmio Nobel.

Em 1954, Kroemer foi trabalhar na Radio Corporation of America, em Princeton-New Jersey nos Estados Unidos, onde voltou a se envolver com as heteroestruturas semicondutoras. Contudo, sua primeira tentativa de construir um HBT de Ge-Si foi frustrada e dessa frustração resultaram dois fundamentais artigos teóricos publicados em 1957, que foram de fundamental importância para a invenção futura do HBT.

---

No primeiro deles ocorre a descrição do princípio fundamental de funcionamento das heteroestruturas semicondutoras, o conceito de campo quase-estático. Em sua pesquisa para o doutorado, Kroemer mostrou como variar espacial e continuamente a energia na banda de condução e na banda de valência em semicondutores heterogêneos. No primeiro trabalho de 1957, ele mostrou que essa variação espacial produzia o aparecimento de campos elétricos que atuam diferentemente nos elétrons da banda de condução e nos buracos da banda de valência. No segundo artigo ele apresenta um estudo mais detalhado sobre o precursor do HBT: o chamado transistor WGE (wide-gap emitter) [30]. Em março de 1963 quando estava trabalhando no vale do silício, Kroemer ouviu uma palestra de seu colega Miller sobre a impossibilidade de realizar em ambiente ambiente uma ação-laser na junção de uma heteroestrutura semicondutora [31] composta de elementos químicos das colunas III e IV da tabela periódica. Segundo Miller não havia condições de se conseguir a inversão de população necessária àquela ação-laser. Essa impossibilidade havia sido registrada em 1962 nos trabalhos de Hall, Fenner, Kingsley, Soltys e Carlson usando a junção de gálio e arsênio.

Ao ouvir a afirmação de Miller, Kroemer retrucou dizendo que se poderia obter a inversão referida usando uma heterojunção e assim preparou um artigo no qual desenvolveu essa ideia e o mandou para a Applied Physics Letters que o rejeitou. Kroemer então mandou o artigo para os Proceedings of the Institute of Electric and Electronic Engineers, que o aceitou e o publicou em 1963. Em 16 de agosto desse mesmo ano, Kroemer preparou um pedido de patente para o seu diodo-laser [32], o hoje conhecido laser DHS (double-heterostructure), patente essa que lhe foi concedida em 1967. Registra-se, entretanto, que uma patente similar havia sido solicitada na então União Soviética em 30 de março de 1963, pelos físicos russos Alferov e Kazarinov.

Na década de 1970, Kroemer voltou a trabalhar com as heteroestruturas semicondutoras e passou a estudar as propriedades de semicondutores bulk. Desse modo, isoladamente em 1975 com seu estudante de doutorado Frensky, Kroemer desenvolveu uma teoria baseada em pseudopotenciais que permitia conhecer semiquantitativamente as propriedades volumétricas dos semicondutores. Essa teoria foi melhorada e aprimorada por Harrison em 1977 e por Christensen em 1988. As tecnologias desenvolvidas para a construção do laser DHS permitiram o aprimoramento do transistor HBT no qual Kroemer teve grande participação. No final da década de 1970 ele retornou à pesquisa sobre esse tipo de transistor que iniciara em 1953.

Logo no começo da década de 1980, Kroemer realizou trabalhos importantes para a sua construção, como os publicados em 1982 e em 1983 [33], nos quais sugeriu o uso do composto ternário GaInP em substituição ao composto AlGaAs que apresentava muitos defeitos residuais, para ser combinado ao composto binário GaAs na construção dos dispositivos eletrônicos envolvendo as heteroestruturas, principalmente o HBT.

---

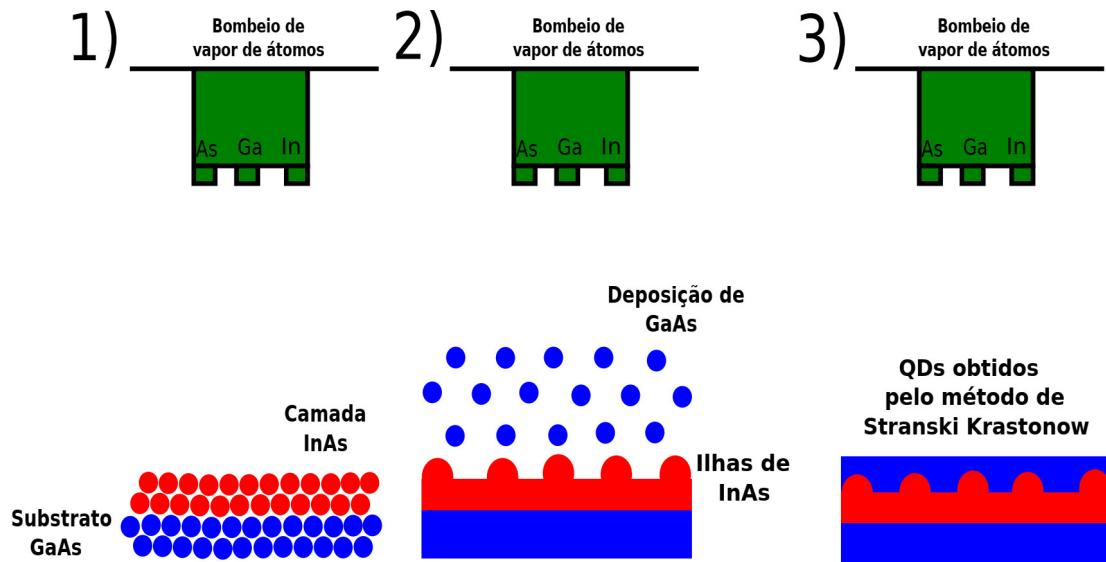
A primeira aparição do termo nanopartículas na literatura data de 1981 por Ekimov quando este descreveu a absorção óptica de pequenos cristais de CuCl em uma matriz vítrea. Os PQs são nanopartículas geralmente semicondutoras que possuem dimensões menores que o raio de Bohr do material que as constitui e esta condição de confinamento lhes confere características ópticas e eletrônicas distintas do material bulk e que são controláveis de acordo com o tamanho. A primeira menção a PQs em meio coloidal data de 1982 e foi feita por Brus, porém, o termo ponto quântico só foi cunhado em 1984. A grande vantagem dos PQs está no controle de suas propriedades ópticas através do controle exclusivamente de seu tamanho. Isso permitiu o desenvolvimento de materiais adaptáveis aos dispositivos em mente. Anteriormente, as propriedades ópticas eram definidas pelo band gap do material bulk e qualquer mudança nas mesmas exigia a troca do material, o que quimicamente é sempre mais complexo do que controlar seu tamanho. Na próxima seção analisamos detalhadamente os processos de fabricação dos diferentes tipos de PQs, de suas características fundamentais e de algumas de suas mais úteis aplicações.

## 2.2 PQs: Fabricação, características e aplicações

Com o desenvolvimento e aprimoramento das técnicas de fabricação de materiais como a epitaxia por feixe molecular [34] popularmente conhecida pela sigla MBE, tornou-se possível o crescimento de camadas monoatômicas individuais uma após outra, produzindo redes cristalinas e interfaces quase perfeitas. Usando estas técnicas e a tecnologia de crescimento de cristais desenvolvida nas décadas de 1980 e 1990, muitas outras novas estruturas foram produzidas, nas quais os efeitos de quantização são fundamentais. Talvez o maior exemplo disso sejam os PQs, estruturas nas quais os elétrons estão presos nas três direções espaciais e que devido a essa característica, muitas vezes são referenciados como átomos gigantes ou átomos artificiais. A produção e o desenvolvimento dos PQs está intimamente ligada à otimização de dispositivos eletrônicos já existentes, à fabricação de novos dispositivos e à miniaturização destes. Uma heteroestrutura é basicamente a junção de materiais semicondutores diferentes. Quando dois semicondutores de gaps diferentes A e B são unidos atomicamente como proporcionado pelo crescimento epitaxial por exemplo, provoca-se uma descontinuidade nas bandas de energia da estrutura resultante, a qual se comporta como um poço de potencial para o movimento de portadores na direção de crescimento da estrutura.

Na junção AB as partículas migram de um para outro material até que a condição de equilíbrio dada pela igualdade entre os potenciais químicos dos dois lados da junção seja alcançada, o que provoca o entortamento das bandas na região da interface. Quando as dimensões de um sistema são comparáveis ao comprimento de onda de De Broglie, o movimento dos portadores torna-se então quantizado, o que implica mudanças no espectro energético e nas propriedades dinâmicas desses portadores.

Se somente uma das direções é comparável ao comprimento de onda de De Broglie, diz-se então que o sistema comporta-se dinamicamente como um sistema bidimensional tal como os poços quânticos. Em contrapartida, se limitarmos o movimento das partículas ao longo de duas direções, serão obtidos sistemas unidimensionais como os fios quânticos e finalmente se levarmos o confinamento às três direções espaciais, teremos como resultado disso estruturas de dimensão zero [35] conhecidas como PQs. Para perceber esta situação é instrutivo comparar o comprimento de onda de De Broglie associado a um elétron e as dimensões características de um poço de potencial típico em uma heteroestrutura semicondutora. Por exemplo, no sistema InAs/GaAs o valor  $E = 0.9$  eV é um valor típico para o potencial dos elétrons e o comprimento de onda de De Broglie [36] associado a esse valor de energia é da ordem de 8 nm, que é um valor bastante razoável se comparado às dimensões típicas de poços [37] e PQs. Neste caso, podemos garantir que existe pelo menos um nível discreto a ser observado. Podemos construir uma estrutura ternária do tipo ABA, como pode ser visto na Figura 2.1, onde é muito fácil perceber que temos um poço quântico.



**Figura 2.1:** Esquema da formação de PQs auto-organizados pelo processo de MBE. Figura de autoria própria.

Talvez mais interessante que isso seja o fato de que as características deste poço podem ser controladas externamente: a profundidade do poço vai depender apenas dos valores da energia dos gaps dos semicondutores escolhidos para a junção. Obviamente, a largura do poço também pode ser variada manipulando o crescimento das camadas do material. Lembrando que as propriedades dos níveis eletrônicos permitidos num poço quântico dependem basicamente da geometria do poço, como largura e profundidade, temos então um versátil laboratório de MQ, onde podemos testar e comprovar diversos conceitos. Podemos descrever o comportamento de um elétron nesta estrutura usando a equação de Schrödinger. A presença de um poço quântico altera o espectro energético acessível aos elétrons dentro do

poço e agora somente alguns valores discretos de energia são permitidos. Para cada estado permitido os elétrons podem mover-se livremente nas direções x e y mas não na direção z, por exemplo. O movimento dos elétrons e a energia associada a ele tornaram-se quantizadas e o sistema comporta-se dinamicamente como um sistema bidimensional. Com base nessas considerações, para obter um potencial capaz de aprisionar os elétrons nas três direções espaciais ou em um PQ, se assim preferir, basta desenvolver um método que limite o movimento desses elétrons também nas direções x e y da estrutura ABA. A palavra ponto nos sugere uma quantidade muito pequena a ser ocupada no espaço mas apesar disso, um PQ pode possuir em sua estrutura milhões de átomos reais com suas centenas de milhões de elétrons associados. É um fato inegável que a maior parte dos elétrons está fortemente ligada aos átomos que formam a estrutura do PQ e que somente algumas centenas deles estão livres.

Para limitar o movimento dos elétrons no plano xy, são então construídas as chamadas mesas ou ilhas por meio de técnicas litográficas avançadas [38]. Neste processo uma máscara padrão é depositada sobre o semicondutor e em seguida o sistema máscara/semicondutor é submetido a uma solução química que gera a estrutura das mesas, formando caixas ou cilindros. Quando as dimensões desejadas para um dispositivo são pequenas, da ordem de 100 nm ou menos, usa-se um método litográfico por feixes eletrônicos. Tipicamente, as mesas têm uma dimensão lateral da ordem de 50 nm - 100 nm. Existe, entretanto, uma outra técnica de formação das ilhas através de um processo no qual os PQs constroem-se por si mesmos. Os chamados PQs auto-organizados de InAs inseridos em uma matriz de GaAs são um dos sistemas mais estudados atualmente, mas outros tipos também podem ser fabricados, como por exemplo, pontos de Ge inseridos em uma matriz de Si. Existem basicamente três modos de crescimento epitaxial possíveis quando os materiais usados têm parâmetros de rede diferentes: o modo Frank-van der Merwe, o modo Stranski Krastanow [39] e o modo Volmer-Weber [40]. No primeiro, o crescimento de um material sobre outro é feito camada por camada, enquanto que no último o sistema somente torna-se estável se houver a formação de ilhas ou a nucleação do mesmo. O segundo caso é um processo intermediário, no qual há a formação de algumas camadas completas até que seja obtida uma espessura crítica antes da formação dos PQs. A auto-organização dos átomos de In e As criando ilhas tridimensionais de InAs como por exemplo se processa no modo Stranski-Krastanow. Os materiais InAs e GaAs têm parâmetros de rede que diferem por aproximadamente 7% e ocorre que quando se cresce InAs sobre GaAs, intrinsecamente, aparece uma tensão na interface entre os dois materiais, o que resulta em uma força que age no sentido de casar localmente as redes, dando origem a ilhas tridimensionais de InAs. No entanto, para a construção de um dispositivo qualquer completa-se a estrutura com o crescimento de outra camada de GaAs sobre as ilhas de InAs, resultando em uma estrutura ternária do tipo ABA. Do ponto de vista da energia total do sistema a formação de ilhas pode ser associada à busca pela situação de equilíbrio com a minimização da energia total.

Em suma, os PQs auto-organizados são o resultado de forças originadas pela tentativa de crescimento de materiais com parâmetros de rede diferentes. Existem, entretanto, os chamados PQs metálicos formados por pequenas ilhas de alumínio ou ouro. O potencial mais adequado para descrever os PQs fabricados por métodos litográficos pode ser cilíndrico ou cúbico. Por outro lado, o potencial dos PQs auto-organizados pode ser tratado como hemisférico ou piramidal. Os PQs existem há muito mais tempo que outros materiais em nanotecnologia, como por exemplo, os nanotubos de carbono e o grafeno e muito mais pesquisa básica foi produzida sobre eles, tornando os dispositivos baseados em PQs realidades bem mais próximas do mercado, o que é evidenciado pelas disputas sobre patentes nessa área. A luminescência em PQs para a geração de luz sempre foi uma das aplicações mais importantes deles na eletrônica, mas foi necessário empenhar muito tempo e trabalho para resolver o problema de eficiência da emissão. Os níveis de energia gerados pelos defeitos são um problema. Um elétron excitado pode em lugar de relaxar emitindo um fóton com energia próxima do gap, decair via fônon para um estado de superfície no qual fica aprisionado por um longo período de tempo, acarretando perdas na eficiência de emissão por exemplo. Esse efeito indesejado pode ser corrigido através da passivação da superfície dos nanocristais crescendo uma pequena camada semicondutora de gap maior responsável por confinar os portadores no núcleo do nanocristal e exportar os defeitos para a casca com uma energia bem maior e geralmente inacessível para os elétrons. Outra opção seria criar uma capa promovendo as ligações de moléculas com radicais com átomos de enxofre que ligando-se aos átomos da superfície, formam uma fina camada de sulfeto. Em resumo, as dimensões reduzidas desses materiais lhes conferem propriedades especiais e também significam uma maior relação área/volume e um melhor custo benefício. Na próxima seção vamos falar um pouco da interação radiação-matéria fundamental na física desses dispositivos.

### 2.3 Interação radiação-matéria

No contexto da interação radiação-matéria [41], as probabilidades de interação e também de não interação entre a radiação eletromagnética (REM) e a matéria dependem tanto das características do meio material quanto das características da radiação ionizante. Em boa parte dos casos, a REM ionizante é tratada como um conjunto de partículas: os fôtons. A cada fóton com energia distinta corresponde um momento associado e dessa forma podem ocorrer colisões em que os fôtons transferem energia e momento para outras partículas. Dentro desse contexto existem diversos mecanismos de interação entre a radiação e a matéria, como por exemplo:

- Espalhamento coerente ou efeito Rayleigh [42], que corresponde à absorção e à reemissão da radiação pelo átomo, em uma direção diferente da de incidência.

- Efeito fotoelétrico [43], onde o fóton é absorvido pelo átomo e um elétron é liberado para se mover no material e a energia cinética adquirida por esse elétron é a diferença entre a energia do fóton e a energia de ligação do elétron ao átomo.
- Efeito Compton [44] ou espalhamento inelástico, que se trata do espalhamento de um fóton por um elétron livre do material onde há a transferência de parte da energia e do momento do fóton para o elétron e um fóton com a energia restante é espalhado em outra direção.

No âmbito da óptica, o comportamento da luz pode ser tratado de diversas formas. Em um tratamento puramente clássico consideramos que tanto a posição do elétron como o campo eletromagnético são variáveis clássicas, ou seja, tanto a luz quanto o elétron são tratados como corpúsculos. Em um modelo semiclássico, o átomo é considerado como um sistema quântico, apresentando níveis discretos de energia enquanto o campo elétrico continua sendo tratado como uma variável clássica. Por fim, em um modelo completamente quântico, quantiza-se o campo elétrico que assim como o átomo passa a ser tratado por uma variável quântica.

Do ponto de vista clássico [45], podemos considerar um meio dielétrico isotrópico, onde é sabido que os elétrons estão permanentemente ligados aos núcleos. Supomos que cada elétron desloca-se uma distância  $x$  da sua posição de equilíbrio. Neste caso haverá um dipolo elétrico induzido no átomo e se houverem  $N$  átomos por unidade de volume e todos tiverem o mesmo deslocamento na direção  $x$ , a polarização do meio será a soma da contribuição de todos os dipolos individuais.

Imaginemos então que o elétron de massa  $m$  esteja ligado harmonicamente ao núcleo de massa  $M$  através de uma mola de constante elástica  $K$ , assim como em um oscilador. A eliminação do dipolo permanente passará por tomar o elétron como distribuído sobre uma casca esférica concêntrica com o núcleo. Quando este oscilador é submetido a um campo eletromagnético, o campo elétrico age apenas sobre o elétron resultando num movimento oscilatório forçado e como  $M \gg m$ , o deslocamento do núcleo devido a este campo que oscila rapidamente é pequeno e poderá ser desprezado e essa é a chamada aproximação de Bohr-Oppenheimer [46]. Suponhamos ainda que este oscilador harmônico seja viscosamente amortecido e como estamos interessados na interação da luz com a matéria, vamos supor que o átomo esteja na presença de uma onda eletromagnética na qual o campo elétrico propaga-se na direção  $z$  e é linearmente polarizado na direção  $x$ , isto dará origem a um deslocamento em torno da posição de equilíbrio que é descrito pela segunda lei de Newton:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + mb \frac{dx}{dt} + Kx = -eE, \quad (2.1)$$

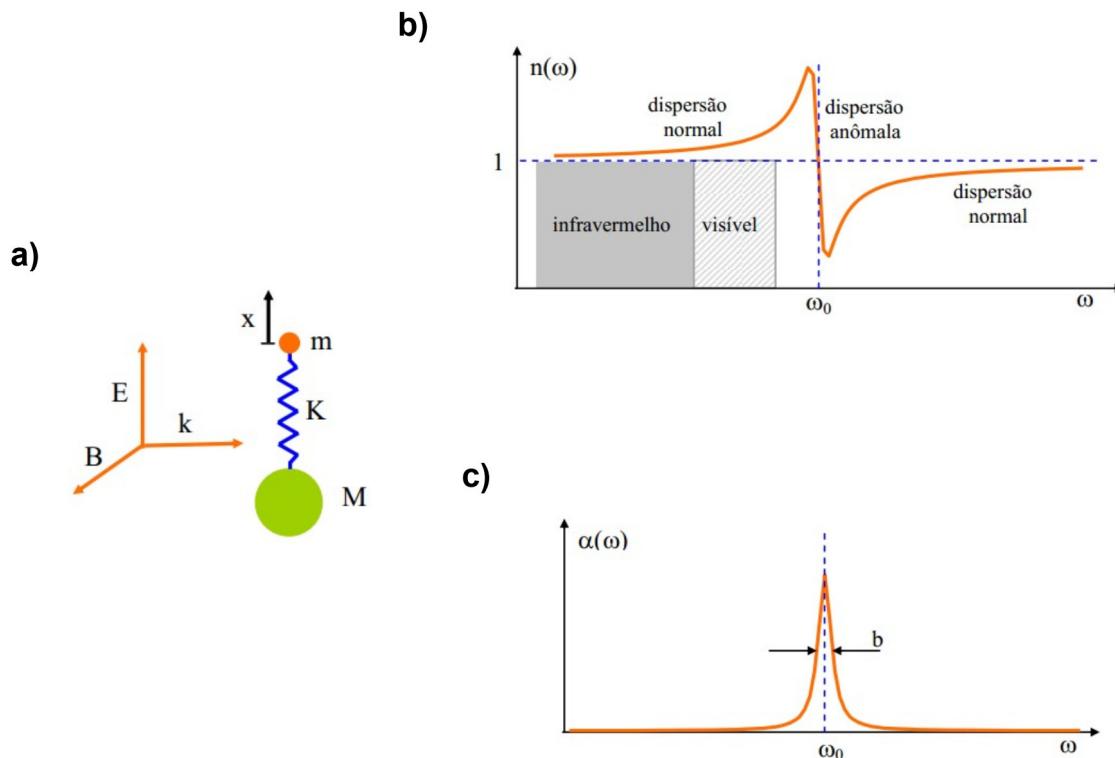
onde  $b$  é a constante de amortecimento. A solução desta equação diferencial é bem conhecida. No regime estacionário, supomos que  $x(t)$  tem um comportamento harmônico com a frequência  $\omega$  igual à do termo forçado e assim, podemos obter a polarização associada que nos leva à susceptibilidade do meio dada por:

$$P = \frac{Ne^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega b)} = \epsilon_0 \chi E. \quad (2.2)$$

De posse dessa polarização podemos obter uma expressão para a susceptibilidade do sistema e assim estabelecer uma dependência entre o índice de refração, o coeficiente de absorção e a susceptibilidade do meio, que por sua vez especificam como este responde ao campo elétrico da onda, como pode ser observado na Figura 2.2:

$$n(\omega) = 1 + \left( \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \right) \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega b)^2}, \quad (2.3)$$

$$\alpha(\omega) = \left( \frac{Ne^2}{mc\epsilon_0} \right) \frac{\omega^2 b}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega b)^2}. \quad (2.4)$$



**Figura 2.2:** Figura retirada do livro "Óptica moderna: fundamentos e aplicações - Sérgio Carlos Zilio". Fenômeno de dispersão anômala para o tratamento clássico da luz. a) modelo do oscilador harmônico, b) índice de refração, c) coeficiente de absorção.

Um fato interessante é a explícita dependência de  $n$  com a frequência da luz, fenômeno esse chamado de dispersão cromática. A consequência da dispersão cromática está ligada ao fato de que se tivermos um pulso de luz com uma distribuição espectral contendo várias frequências, as frequências menores caminharão sempre mais rapidamente que as frequências maiores e o pulso vai sofrer um alargamento ao se propagar o que não é um comportamento admirado na área das comunicações ópticas por exemplo. O alargamento dos pulsos impõe um limite à taxa de repetição máxima possível de se transmitir por uma fibra óptica. Nas regiões do espectro abaixo e acima da frequência natural do sistema teremos o que comumente se chama de regime de absorção normal onde o índice de refração aumenta com o aumento da frequência e nas proximidades de  $\omega_0$  uma região chamada de região de dispersão anômala [47] na qual o índice de refração diminui com o aumento da frequência e carrega consigo altos valores de absorção em torno de  $\omega_0$  como pode ser visto na Figura 2.2.

Do ponto de vista semiclássico e quântico o laser é uma fonte de luz especial. Ao contrário da luz solar e da luz incandescente que emitem radiação em todas as direções e de todo o espectro de comprimento de onda, a luz laser apresenta três características notáveis: É uma fonte de luz coerente, ou seja, as ondas estão em fase no tempo e no espaço e alinhadas entre si. É uma fonte de luz monocromática, ou seja, as ondas a princípio têm o mesmo comprimento de onda e é uma fonte de luz colimada, ou seja, as ondas têm a mesma direção, a luz é paralela, não divergente, estreita e concentrada.

Dessas três características talvez a coerência seja a mais interessante. A coerência é a medida da correlação entre as fases medidas em diferentes pontos de uma onda. Imagine dois barcos em um lago de águas calmas. Se jogarmos uma pedra no lago as ondas propagadas farão os barcos oscilarem. Os barcos estarão em fase se eles oscilarem ao mesmo tempo, ou mesmo que os barcos não estejam exatamente em fase, o movimento das duas oscilações vai possuir uma diferença de fase constante. Nesse caso dizemos que a fonte geradora das oscilações é perfeitamente coerente. Fontes pontuais sempre produzem ondas perfeitamente coerentes. Entretanto, imaginemos que ocorra uma tempestade. Cada pingo de chuva produzirá ondas totalmente diferentes, logo os barcos oscilarão aleatoriamente de modos distintos e assim dizemos que a fonte é incoerente. Além disso a coerência nos fornece informações sobre as outras duas características fundamentais da luz laser.

A coerência temporal é a medida da correlação da fase da onda luminosa em diferentes pontos na direção de propagação o que nos diz o quão monocromática é a fonte e a coerência espacial é a medida da correlação da fase da onda luminosa em diferentes pontos na direção transversal à direção de propagação e isso nos fornece a uniformidade da frente de onda, o que em outras palavras nos diz o quão colimada é essa fonte. Na próxima seção vamos conhecer um pouco do contexto histórico em que se deu a invenção do laser.

---

## 2.4 Lasers: Um pouco de história

Em 1916 Einstein em seus estudos na busca de uma nova formulação para a dedução da lei de Planck da radiação começou a desenhar os princípios teóricos que tornariam possível o desenvolvimento da tecnologia dos lasers e de toda a sua aplicação prática. Os estudos de Einstein demonstraram que as transições atômicas na presença de um campo de radiações ocorrem basicamente por três mecanismos: a absorção de energia, a emissão espontânea [48] e a emissão estimulada da radiação. Por muitos anos, triunfou o pensamento de que a emissão espontânea da luz fosse o processo dominante e que qualquer emissão estimulada seria sempre muito mais fraca. Somente após o final da segunda guerra mundial é que os esforços se voltaram para a busca de condições que possibilitassem a predominância da emissão estimulada. Na hipótese de Einstein, a emissão estimulada de luz seria explicada pela colisão de um elétron excitado com um fóton de mesma energia. Quando isto ocorresse, o elétron emitiria um fóton idêntico ao primeiro viajando na mesma direção e sincronizando sua onda com a do elétron que o estimulou, somando assim as suas magnitudes e aumentando a intensidade da luz emitida. Essa ideia é a base do funcionamento de um laser. No entanto a hipótese de Einstein foi considerada um tanto excêntrica e o evento de interação de um fóton com um elétron excitado considerado raro. Somente mais de uma década depois em 1928, Rudolph Landenburg confirmou a teoria de Einstein sobre a emissão estimulada de luz e ainda mais tarde em 1947 foi realizada a primeira demonstração prática da emissão estimulada por Willis Lamb e Retherford.

Em 1954 Charles Townes foi capaz de criar o primeiro aparelho baseado na emissão estimulada o qual chamou de MASER [49]. O termo maser na tradução direta representa algo como a amplificação magnética por emissão estimulada da radiação e este se tornou o precursor do laser. No dispositivo criado por Townes, o processo de emissão estimulada gerava um feixe coerente de micro-ondas e essa possibilidade começou a instigar na comunidade científica a busca por um maser óptico, ou seja, um dispositivo capaz de emitir um feixe coerente com frequência na região da luz visível. Em 1958 Townes e Schawlow propuseram um arranjo para o maser óptico com uma cavidade contendo o meio ativo e dois espelhos e em 1960 registraram a patente que anos mais tarde em 1964 rendeu a Townes o prêmio Nobel de Física sendo reconhecido formalmente como o inventor do laser. Entretanto, foi Theodore Maiman [50] em 1960, quem construiu o primeiro maser óptico. Maiman [51] sugeriu o nome LOSER que na tradução direta seria algo como oscilações de luz por emissão estimulada de radiação mas como loser significa perdedor em inglês, o nome foi trocado para LASER (amplificação da luz por emissão estimulada de radiação). O dispositivo de Maiman tinha como meio ativo um bastão de rubi sintético que emitia pulsos intensos de luz vermelha coerente em 694 nm em um feixe estreito e altamente concentrado, bastante típico das características mostradas pela maioria dos lasers atuais.

O bastão de rubi possuía as extremidades com superfícies espelhadas para refletir a luz e era envolvido por uma lâmpada flash helicoidal, sendo suficientemente pequeno para que coubesse na mão. Um fato curioso é que o fotógrafo designado pelo laboratório Hughes para divulgar a descoberta achou que o laser criado por Maiman era muito pequeno e o fez posar para fotos com um laser maior mas que não funcionava. Os lasers atualmente em uso possuem potências de que vão de menos de 1 mW até muitos kW de luz contínua e alguns produzem trilhões de watts em pulsos extremamente curtos. As áreas militar e de energia tem desenvolvido lasers que ocupam edifícios inteiros enquanto que o laser mais comum usa um dispositivo semicondutor que possui um tamanho típico de um grão de areia. Na próxima seção vamos ter uma visão um pouco mais profunda sobre os lasers.

## 2.5 Características e princípio de funcionamento

Existem muitos tipos diferentes de laser [52] mas todos eles compartilham um elemento crucial: cada um contém um material capaz de amplificar a radiação. Este material [53] é chamado de meio ativo ou meio de ganho porque a radiação literalmente ganha energia passando por ele. O princípio físico responsável por esta amplificação é a chamada emissão estimulada que foi descoberta por Einstein em 1916. Basicamente existem quatro elementos-chave para que um laser funcione a contento: deve existir uma coleção de átomos que seja capaz de amplificar um sinal luminoso passando através dele, esse material deve estar contido em uma cavidade [54] altamente refletiva que manterá a luz sendo amplificada e que será capaz de redirecionar a luz para que o meio a amplifique repetidas vezes. Nessa cavidade deve existir alguma forma pela qual seja possível reabastecer a energia do amplificador que está sendo convertida em energia luminosa e deve existir um modo de extrair na forma de um feixe pelo menos parte da luz armazenada na cavidade. Um laser bem projetado deve equilibrar cuidadosamente ganhos e perdas. Os lasers estão sujeitos às leis básicas da física e cada estágio da operação a partir da injeção de energia no amplificador é uma oportunidade para a perda de energia e ganho de entropia. O estrondoso sucesso dos masers e dos lasers só veio depois que os físicos aprenderam como os átomos poderiam ser operados eficientemente como motores termodinâmicos.

A luz laser está disponível em todas as frequências do espectro visível e também em boa parte das frequências fora dele e em uma ampla faixa a luz laser é digamos sintonizável, ou seja, alguns lasers têm a propriedade de emitir luz em qualquer comprimento de onda escolhido dentro de uma faixa de comprimentos de onda. O maior comprimento de onda da luz laser está compreendido no infravermelho distante entre 100 e 500  $\mu m$ . Dispositivos que produzem luz coerente [55] em comprimentos de onda muito mais longos, pelo princípio maser-laser, são geralmente considerados masers.

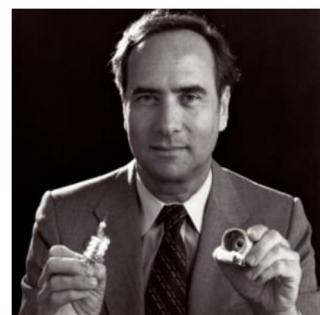
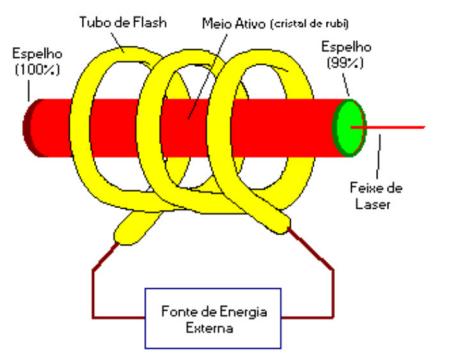
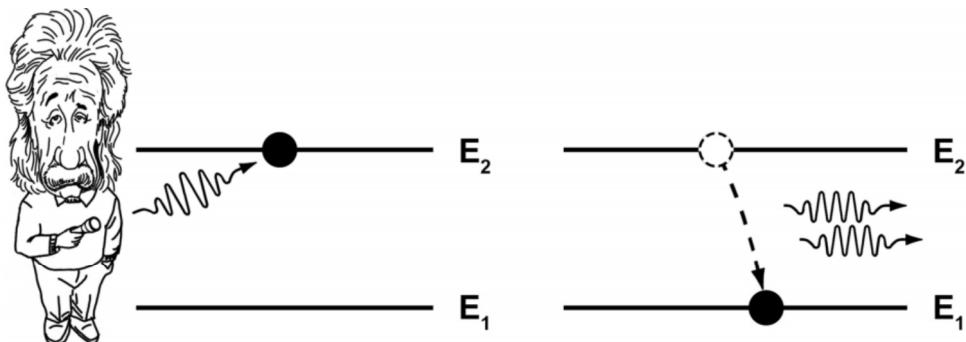
A saída de um laser pode consistir em frentes de onda planas quase ideais onde apenas o fenômeno de difração impõe um limite inferior na propagação angular desse feixe. É sabido que os lasers produzem cores muito puras, ou seja, frequências muito bem definidas e se eles pudessem produzir exatamente um comprimento de onda a luz do laser seria totalmente monocromática [56]. Entretanto, isso não é possível em princípio e por razões práticas. A existência de uma largura de banda finita  $\Delta_\nu$  significa que as diferentes frequências de um feixe de laser podem eventualmente ficar fora de fase. O tempo necessário para duas oscilações diferindo em frequência sairem de fase por um ciclo completo é, obviamente,  $1/\Delta_\nu$  e após este período de tempo os diferentes componentes de frequência no feixe podem começar a interferir destrutivamente e assim o feixe perde sua coerência. Em contraste a isso, a luz solar tem uma largura de banda próxima da sua frequência central em torno do amarelo  $\nu \approx 10^{14} \text{ Hz}$  e assim, para a luz do sol o tempo de coerência é tão curto que a luz solar [57] não pode ser considerada temporalmente coerente. No que diz respeito ao meio ativo dos lasers, os materiais que podem ser usados são os mais variados: gases [58], líquidos [59] e sólidos [60].

A origem dos fôtons da luz laser é na maioria das vezes em uma transição entre os estados discretos de energia superior e inferior no meio ativo e isso é independente do seu estado da matéria. Os lasers de He-Ne, ruby, CO<sub>2</sub> e corante são exemplos claros disso. No que diz respeito às cavidades, todas elas compartilham basicamente duas características que se complementam, são dispositivos lineares com um eixo óptico relativamente longo e os lados paralelos a este eixo podem estar abertos não estando envolvidos por material refletivo. Apesar de parecer óbvio, nem sempre é melhor projetar uma cavidade laser com a menor perda. No caso dos lasers de alta potência por exemplo, as vezes se usam espelhos que são deliberadamente projetados para desviar a luz da cavidade em vez de contê-la.

Pela descrição quântica [61] os elétrons nos átomos estão distribuídos em níveis discretos de energia. Se um átomo estiver num estado com energia maior que a do estado fundamental ele pode decair espontaneamente [62] para um nível de energia mais baixo sem qualquer estímulo externo, apenas pela conservação de energia e momento, e o que resulta desse processo é a liberação do excesso de energia, igual à diferença de energia entre os dois níveis, na forma de um fôton e esse é o mecanismo de emissão espontânea descrito na hipótese de Einstein. Entretanto, existe um tempo característico para a emissão espontânea que é igual ao tempo médio que os elétrons permanecem no estado excitado antes de decaírem para um nível de energia mais baixo espontaneamente e esse é um fator de extrema importância para a ocorrência da emissão estimulada. Se um átomo no estado excitado é iluminado por um fôton que tem a mesma energia da transição que ocorreria espontaneamente, o átomo pode ser estimulado a voltar ao estado de mais baixa energia e simultaneamente emitir um fôton com a mesma energia da transição e mesma direção do fôton incidente. Esse processo faz com que um único fôton ao interagir com um átomo excitado resulte na emissão de dois fôtons.

---

Na concepção ondulatória da luz os fótons provenientes da emissão estimulada terão a mesma frequência da luz incidente e estarão em fase com ela, resultando em uma amplificação da intensidade da luz original. Entretanto, conseguir a emissão estimulada não é tão simples quanto parece. Sob condições normais de equilíbrio termodinâmico, devido à tendência dos átomos e moléculas de decaírem espontaneamente para os níveis de mais baixa energia a população em cada nível diminui com o aumento de energia. Em outras palavras, todos os átomos ou moléculas estarão no estado fundamental para uma transição com energia correspondente ao comprimento de onda da luz visível. Assim, embora a luz emitida espontaneamente pudesse facilmente estimular a emissão de outro átomo excitado, tão poucos estão disponíveis que o fóton emitido encontrará primeiro um átomo no estado fundamental e será absorvido por ele, ou seja, é preciso criar meios para que ocorra uma inversão de populações e isto criará meios para que haja a emissão estimulada. Havendo mais átomos no estado excitado que no fundamental a emissão estimulada pode dominar resultando numa cascata de fótons. O primeiro fóton emitido estimulará a emissão de mais fótons, que estimularão a emissão de ainda mais fótons e assim por diante (como pode ser visto na Figura 2.3). A cascata [63] resultante cresce, produzindo a amplificação da luz emitida. Em contrapartida, se a inversão de população [64] termina, a emissão espontânea se tornará novamente o processo favorecido.



**Figura 2.3:** Esquema representativo do fenômeno de emissão estimulada descrito por Einstein. Abaixo uma ilustração do laser de Rubi e ao lado Maiman posando pra foto com sua invenção. Figura de autoria própria.

Resumidamente o princípio de funcionamento dos lasers passa por satisfazer três condições necessárias e suficientes: os átomos devem possuir níveis discretos de energia assim como nos garante a teoria atomística de Bohr [65] e a MQ, devem existir transições eletrônicas possíveis entre os níveis de energia do sistema e deve haver a possibilidade de induzir a inversão de população entre eles. A Figura 2.3 traz uma ilustração do princípio de funcionamento de um laser. A questão fundamental aqui é que no equilíbrio termodinâmico a energia térmica não é suficiente para produzir uma inversão de população porque o calor só aumenta a energia média mas não aumenta o número de partículas no estado excitado. Para produzir a inversão de população exigida para a ação laser, átomos ou moléculas devem ser excitados a níveis de energia muito específicos, os correspondentes às transições eletrônicas. O que ocorre em geral é que se excita um átomo ou molécula a um nível de energia superior àquele que participa da emissão estimulada e após isso ele decai para o nível excitado de interesse.

## 2.6 Regimes ópticos em Pontos Quânticos

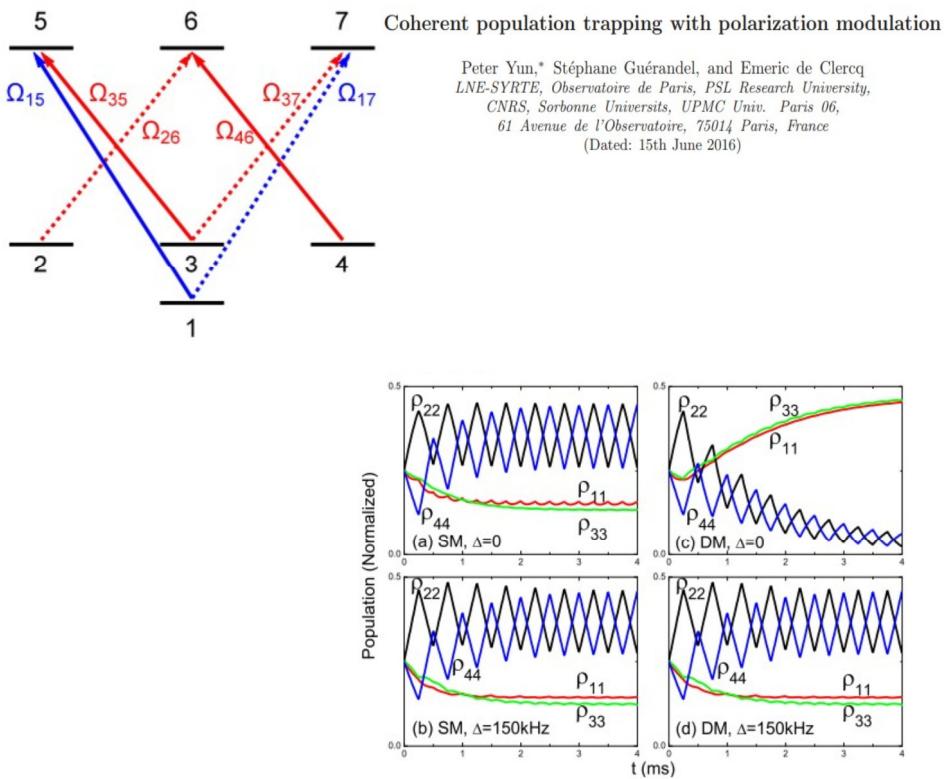
A energia que uma onda eletromagnética transporta depende de sua frequência e dependendo das condições, essa energia pode ser totalmente ou parcialmente transferida da onda para um meio material. Essa interação depende do tipo de material com o qual a radiação interage e das características da onda, tais como sua frequência e intensidade. O resultado dessa interação advém entre outros fatores, das propriedades ondulatórias da luz como reflexão, refração e difração [66]. Normalmente tais fenômenos ópticos se manifestam em tempos longos onde o sistema já não sofre modificações significativas tendo atingido uma condição assintótica devido aos mecanismos de decoerência [67] entre sistema e ambiente. A decoerência nada mais é do que um mecanismo de perda de coerência. A existência de uma relação de fase bem definida entre os diferentes estados de um sistema físico define o que chamamos de coerência. O conceito de coerência está intimamente ligado ao isolamento do sistema em relação ao ambiente que o circunda. Em outras palavras, quando um sistema quântico não está perfeitamente isolado, a coerência de seus estados decai com o tempo, caracterizando o processo chamado de descoerência quântica. Esse efeito de perda de coerência faz com que para tempos longos o comportamento quântico do sistema desapareça, dando lugar ao comportamento clássico que emerge como consequência do teorema de Ehrenfest [68].

Do ponto de vista da teoria de informação e computação quântica [69], a decoerência pode ser interpretada como uma perda de informação do sistema para o ambiente, comumente chamado de reservatório. Em PQs é possível a observação de diversos regimes ópticos distintos ligados a mudanças nas propriedades ópticas do meio pela interação dele com a REM. Esses regimes são alvo de amplo estudo principalmente pela suas promissoras aplicações nas mais diversas áreas.

---

### 2.6.1 CPT: armadilhamento coerente de população

O fenômeno de aprisionamento coerente de população (CPT) [70] é uma consequência da superposição coerente de estados. Se o sistema é preparado numa superposição coerente de estados, então, é possível cancelar a absorção ou a emissão sob certas condições, aliando os efeitos de decoerência e a interação com a REM. Assim, o sistema torna-se efetivamente transparente ao campo incidente, inclusive na presença de transições ressonantes. Nesse fenômeno a população é aprisionada nos estados mais baixos e não há absorção inclusive na presença de um campo. Um dos aspectos interessantes do aprisionamento coerente, é que ele pode acontecer mesmo se o sistema não estiver em um estado escuro<sup>1</sup> [71] em  $t = 0$ , ou seja, o sistema pode ser forçado a ir para este estado pela ação de um campo eletromagnético via transferência adiabática de população. A Figura 2.4 mostra um trabalho recente da literatura a respeito do fenômeno de CPT e de suas aplicações:



**Figura 2.4:** Resultado recente da literatura acerca do aprisionamento coerente de população. Referência retirada de *Journal of Applied Physics* 119, 244502 (2016).

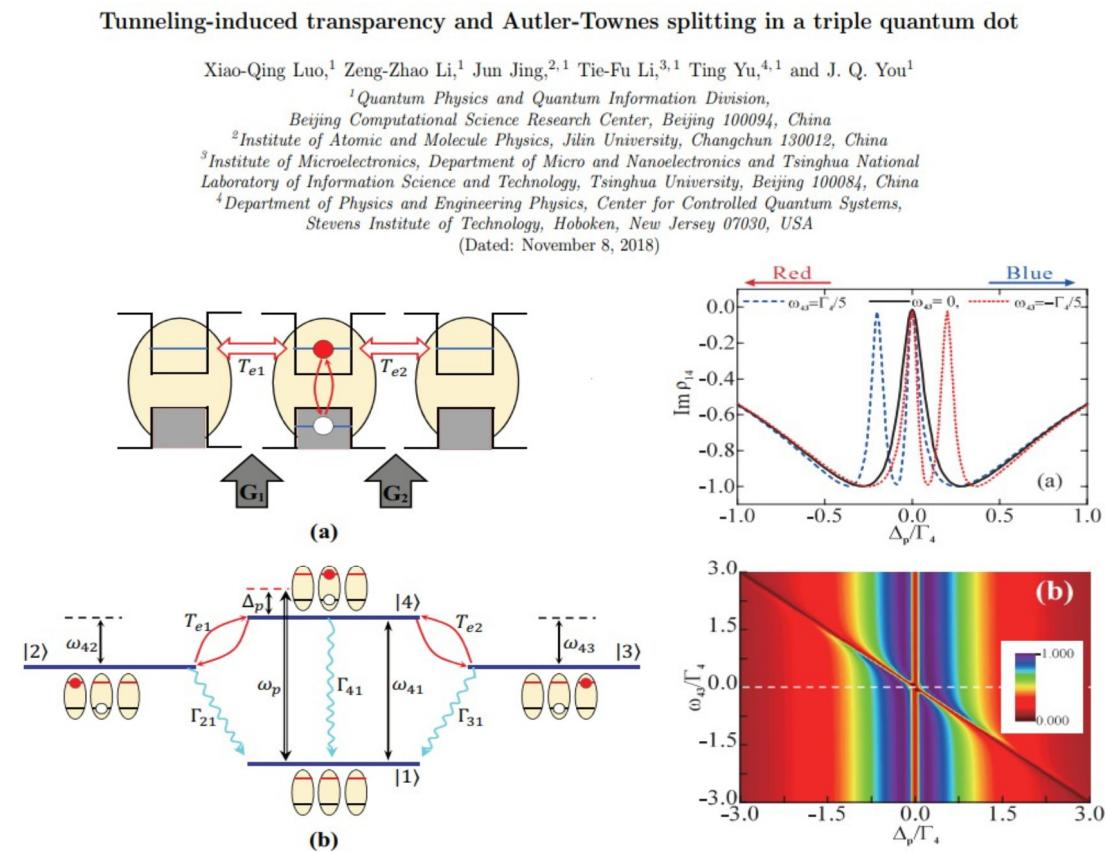
Nesse trabalho, o fenômeno de CPT é amplamente estudado para aplicações futuras em temporizadores de células de vapor de alta frequência e para tal é usado um campo laser bicromático com polarização e fase sincronicamente moduladas.

<sup>1</sup>Um estado escuro refere-se a um estado que não pode absorver ou emitir fôtons.

Esse campo é aplicado em um meio atômico modelado como um sistema quântico de sete níveis e o que se observa é que um alto sinal de CPT ocorre na configuração de dupla modulação, devido ao fato da população atômica não migrar para os estados extremos, o que faz com que os dois estados escuros da CPT, que são produzidos sucessivamente pelas polarizações alternadas se somem construtivamente. A modulação construtiva gerada pelo fenômeno de CPT é extremamente atraente para aplicações em relógios atômicos, magnetômetros atômicos e espectroscopia de alta precisão, por exemplo.

## 2.6.2 DAT: doublets de Autler-Townes

Após a invenção do laser, Autler [72] e Townes observaram um tipo de efeito Stark [73] dinâmico que aparece quando um campo elétrico oscilante está sintonizado próximo da ressonância da transição de uma determinada linha espectral. O resultado desse efeito Stark dinâmico é provocar uma mudança na forma dos espectros de absorção e emissão associados à essa linha. Equivalentemente ao efeito Stark estático que divide as linhas espetrais em duas, no efeito Autler-Townes como foi batizado, o espectro de absorção também é dividido em dois, formando os chamados doublets de Autler-Townes (DAT) como pode ser visto por exemplo na Figura 2.5.



**Figura 2.5:** Resultado recente da literatura acerca do regime óptico dos doublets de Autler-Townes. Referência retirada de arXiv:1506.08680.

Em espectroscopia o efeito Autler-Townes [74] é caracterizado pela separação do pico de absorção em dois, conforme a intensidade do laser incidente aumenta. Teoricamente esses díbletos são caracterizados como estados vestidos [75] que atuam como desdobramentos dos estados despidos do sistema, que são os autoestados do Hamiltoniano antes da incidência do laser. Consideremos a título de exemplo um PQ com três níveis. Um elétron nesse PQ pode estar no estado fundamental, onde ocupa um nível energético na banda de valência do PQ ou em algum dos dois estados excitados, onde ocupa um nível na banda de condução. Uma transição eletrônica entre estes níveis pode acontecer pela incidência de um laser, o que provoca a absorção de fôtons pelo material. Se a frequência do laser estiver próxima da frequência da transição valência-condução [76], poderemos observar o aparecimento de um pico de absorção.

Experimentalmente falando, para provocar uma transição entre os estados de condução precisamos acrescentar um segundo laser ressonante com a transição desses dois estados. A ideia aqui, é fazer com que um dos lasers atue como bombeio [77] e o outro como prova, controlando apenas suas intensidades. O que se observa é que conforme se aumenta a intensidade do laser de bombeio sobre a transição valência-condução, o pico de absorção do laser de prova na transição condução-condução se divide em dois, formando o perfil conhecido como DAT. A separação entre os picos é chamada de desdobramento de Rabi [78] e estabelece uma forte dependência entre a formação dos díbletos e a frequência de oscilação do elétron entre os níveis excitados pelo laser de bombeio. Essa é a chamada frequência de Rabi [79].

A Figura 2.5 mostra um resultado recente da literatura a respeito da obtenção do regime óptico de díbletos e sua relação com as janelas de transparência. Nesse trabalho, os regimes de transparência induzida por tunelamento (TIT) e de DAT foram investigados em um sistema de PQ triplo. O que pôde ser observado pelos pesquisadores, é que para um regime de tunelamento fraco, o sistema exibe uma janela de transparência bem estreita e muito semelhante à observada no fenômeno de EIT, enquanto que, para um regime de tunelamento forte o fenômeno de TIT evolui para o desdobramento de Autler-Townes resultando em um díbleto bem resolvido.

### 2.6.3 EIT: transparência eletromagneticamente induzida

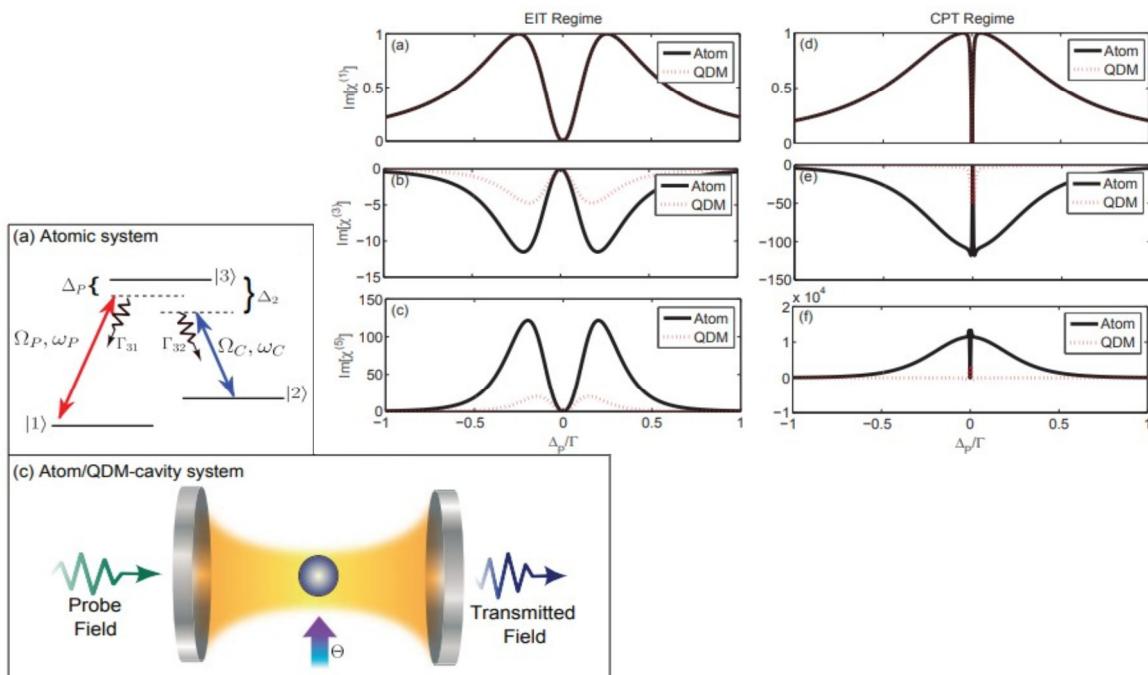
Outro fenômeno óptico muito interessante é a transparência eletromagneticamente induzida (EIT). A EIT [80] é um efeito óptico não linear [81] da luz coerente que torna um meio transparente dentro de uma faixa espectral estreita em torno de uma linha de absorção. O fenômeno [82] é caracterizado pela mudança brusca do índice de refração e da sua dispersão em torno da região de ressonância do laser o que cria dentro dessa janela de transparência o chamado fenômeno de luz lenta [83] caracterizado pela grande diminuição da velocidade de grupo do pacote de onda em relação à velocidade da luz.

O fenômeno de EIT é essencialmente um fenômeno de interferência que possibilita a propagação da luz em um meio a princípio opaco. Experimentalmente, a observação do fenômeno envolve a presença de dois campos ópticos coerentes (lasers), assim como no efeito Autler-Townes. Um campo forte comumente denotado laser de controle ou bombeio e um campo fraco, comumente denotado laser de prova ou sonda. O que se faz é sintonizar o laser de prova próximo da ressonância entre dois estados do sistema e o laser de controle em uma transição distinta. Em condições favoráveis, a presença do campo de bombeio criará uma janela espectral de transparência que será detectada pela sonda. A Figura 2.6 mostra um resultado recente da literatura a respeito da observação do fenômeno de EIT em sistemas atômicos e PQs:

**Influence of the asymmetric excited state decay on coherent population trapping: atom  $\times$  quantum dot**

H. S. Borges,<sup>1</sup> M. H. Oliveira,<sup>1</sup> and C. J. Villas-Bôas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Universidade Federal de São Carlos, P.O. Box 676, 13565-905, São Carlos, São Paulo, Brazil



**Figura 2.6:** Resultados recente da literatura acerca do fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida. Referência retirada de *Scientific Reports* volume 7, Article number: 7132 (2017).

Nesse trabalho é demonstrado que no regime de EIT as propriedades ópticas de uma molécula de PQs e de um sistema atômico são idênticas. No entanto, quando esses sistemas são levados a um regime de CPT intenso aparece uma forte discrepância entre suas propriedades ópticas. Observa-se que a origem de tal diferença está ligada às diferentes taxas de decaimento do estado excitado dos dois sistemas o que implica em uma forte diferença em suas susceptibilidades não lineares de ordem superior.

A fim de evitar essa discrepância eles investigam a resposta óptica dos sistemas quando fortemente acoplados aos modos de uma cavidade e notam que esse acoplamento proporciona a vantagem de permitir um melhor estreitamento da largura da ressonância do estado escuro no regime de CPT, o que novamente faz com que os sistemas atômico e de PQs se comportem de forma semelhante.

Em suma, a EIT baseia-se na interferência destrutiva da amplitude de probabilidade de transição entre os estados, o que está diretamente ligado ao fenômeno de captura coerente de população. Entretanto, existe uma outra abordagem que tenta explicar o fenômeno de EIT, na qual o conjunto formado pelo sistema e pelo campo de controle é diagonalizado e o efeito do laser de prova é calculado nessa nova base utilizando a ideia de um estado vestido. Sob essa perspectiva, o fenômeno de EIT é encarado como uma combinação dos efeitos causados pelos DAT e a interferência de Fano [84] entre os estados. A interferência de Fano ocorre devido à interferência entre duas amplitudes de espalhamento, uma devido à dispersão dentro de um continuum de estados, o chamado processo de segundo plano e outra devido a uma excitação de um estado discreto, o processo chamado ressonante. A energia do estado ressonante deve estar na faixa de energia dos estados do continuum para que o efeito ocorra. Perto da energia ressonante, a amplitude do espalhamento de fundo varia lentamente com a energia, enquanto a amplitude de espalhamento ressonante muda tanto em magnitude quanto em fase rapidamente. É essa variação que cria o perfil assimétrico responsável pelo fenômeno de interferência.

Em ambas as interpretações a ideia da formação de polaritons<sup>2</sup> [85] é importante para a descrição do fenômeno de luz lenta. Os fôtons do laser de prova são coerentemente convertidos em polaritons [86] escuros ligados às transições escuras [87] do sistema. Essas excitações existem e podem ser armazenadas por um período de tempo a princípio exclusivamente dependente das taxas de decoerência a que o sistema está sujeito. Diversas condições físicas distintas podem induzir no sistema físico regimes ópticos que se assemelham ao fenômeno de EIT mas pelas relações de Kramers-Kronig [88], uma mudança na absorção do meio em uma faixa espectral estreita deve sempre vir acompanhada de uma mudança brusca no índice de refração do meio dentro dessa faixa espectral e essa mudança brusca produz velocidades de grupo extremamente baixas o que pode nos assegurar que o fenômeno óptico relacionado ao processo é mesmo o fenômeno de EIT. No próximo capítulo vamos discutir as ferramentas matemáticas fundamentais para o presente trabalho.

---

<sup>2</sup>Polaritons são quase-partículas formadas por um fôton fortemente acoplado a um dipolo elétrico (normalmente formado pelo par elétron-buraco denominado exciton).

# Capítulo 3

## Mecânica Quântica de sistemas abertos: estados puros e mistos

### 3.1 Introdução

A MQ se firma na ideia de que o estado de um sistema físico é completamente descrito por um vetor de estado denominado ket. Nesse vetor de estado está contida a máxima informação sobre o sistema, salvas as claras limitações impostas pelo princípio de incerteza de Heisenberg [89]. Estes kets são pertencentes a um espaço vetorial no domínio dos números complexos chamado espaço de Hilbert que, entre outras características, possui dimensão infinita, para soluções exatas. Entretanto, esse formalismo baseado na representação dos vetores de estado dados pelas funções de onda não nos possibilita lidar de forma prática com estados mistos e para tanto é necessária a definição de uma ferramenta mais adequada como por exemplo o formalismo da matriz densidade. Para os leitores interessados, o apêndice A traz uma descrição detalhada de alguns conceitos fundamentais da MQ.

### 3.2 Operador Densidade e Matriz Densidade

Na prática, em MQ sempre estamos lidando com coleções de partículas comumente chamadas de ensembles [90]. Entretanto, é comum que essas coleções de partículas estejam divididas nos diversos estados possíveis de um sistema físico cada qual com uma probabilidade associada. Nessa condição, é dito que estamos em um ensemble misto [91]. Foi para lidar com sistemas mistos que Landau introduziu o conceito de operador densidade e mais tarde von Neumann utilizou este conceito para descrever de forma unificada os aspectos estatísticos inerentes à MQ. Matematicamente, quando não estamos lidando com um ensemble puro, podemos apenas associar certas probabilidades  $w_1, w_2, \dots, w_n$  de que um particular sistema do ensemble, escolhido aleatoriamente, esteja nos estados quânticos descritos pelos kets  $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle$ .

O ensemble pode então ser interpretado como uma superposição incoerente de estados, com  $w_n$  representando a fração de sistemas no estado  $|v_n\rangle$ . Podemos supor que esses kets são normalizados  $\langle v_n|v_n\rangle = 1$  e que a soma das probabilidades seja 1 mas não podemos garantir a princípio que eles sejam ortogonais. A probabilidade de que a medida no ket  $|v_n\rangle$  do ensemble de uma quantidade física representada pelo operador  $\hat{A}$  forneça o resultado  $a$  como autovalor (resultado da medida) é,

$$p_a^n = \langle v_n| \hat{P}_a |v_n\rangle, \quad (3.1)$$

da qual podemos definir a probabilidade de que a medida no ensemble forneça o resultado  $a$  na maioria das vezes como sendo uma média ponderada dada por:

$$p_a = \sum_n w_n p_a^n = \sum_n w_n \langle v_n| \hat{P}_a |v_n\rangle = \sum_n w_n \text{Tr}\{|v_n\rangle \langle v_n| \hat{P}_a\}, \quad (3.2)$$

$$p_a = \text{Tr}\left\{\left(\sum_n w_n |v_n\rangle \langle v_n|\right) \hat{P}_a\right\}, \quad (3.3)$$

onde o termo entre parênteses é definido como o Operador Densidade [92] que carrega toda a informação sobre o sistema para ensembles mistos:

$$\hat{\rho} = \sum_n w_n |v_n\rangle \langle v_n|. \quad (3.4)$$

Assim, a probabilidade de obter o valor  $a$  e o valor médio do operador  $\hat{A}$  são, respectivamente:

$$p_a = \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{P}_a\}, \quad \langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{A}\}. \quad (3.5)$$

Um fato interessante a ser ressaltado é que a média do operador  $\hat{A}$  independe do vetor de estado que representa o ensemble. Em contrapartida, para ensembles puros o ket do sistema é completamente conhecido sendo que  $w_n = 1$  para  $|v_n\rangle = |v\rangle$  e nulo para qualquer outro estado. Dessa forma o Operador Densidade para ensembles puros fica definido como,

$$\hat{\rho} = |v\rangle \langle v|, \quad (3.6)$$

e a matriz que representa o operador densidade é chamada Matriz de Densidade:

$$\hat{\rho} = \sum_k \sum_j |n_k\rangle \langle n_k| \hat{\rho} |n_j\rangle \langle n_j| = \sum_{k,j} \rho_{kj} |n_k\rangle \langle n_j|. \quad (3.7)$$

Note que o operador densidade é um operador projetor<sup>1</sup>, hermiteano, positivo definido e com traço unitário. A hermiticidade de  $\rho$  decorre do fato das probabilidades  $w_n$  serem números reais.

<sup>1</sup>Para estados puros o operador densidade é dado por um único projetor e para estados mistos é representado por uma combinação linear de projetores.

Sua positividade definida advém do fato de matematicamente as probabilidades serem sempre não negativas e a unitariedade do traço é consequência direta da normalização das probabilidades e dos autovetores imposta pela teoria quântica. Suponhamos agora um sistema quântico arbitrário sujeito a atuação de um Hamiltoniano, e portanto regido pela equação de Schrodinger dependente do tempo dada pela forma:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (3.8)$$

Nos domínios da MQ, um sistema físico estará completamente descrito quando conhecemos os seus autovalores e autovetores associados. Os autovalores de um sistema quântico representam o conjunto de energias associadas aos processos físicos em cada autoestado do sistema. Os autovetores ou autoestados de um sistema físico representam o conjunto de configurações que o sistema assume possibilitando assim conhecer a cara do sistema e mapear o seu comportamento. Dessa forma, para o conjunto de autoestados do sistema podemos definir a matriz de densidade no tempo inicial da dinâmica como:

$$\rho(t_0) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\Psi_{\alpha}(t_0)\rangle \langle \Psi_{\alpha}(t_0)|, \quad (3.9)$$

onde  $w_{\alpha}$  é um conjunto de coeficientes positivos que representam as probabilidades de encontrarmos o sistema físico em um dado autoestado  $|\Psi_{\alpha}\rangle$ . Aos elementos da diagonal principal da matriz que representa o operador densidade costumamos chamar populações. As populações são as taxas de transição associadas a cada autoestado do sistema mantendo-se sempre normalizadas ao longo do tempo. Os elementos não diagonais da matriz de densidade são as chamadas coerências e são elementos responsáveis por carregar a informação de como as partes componentes do sistema interagem entre si. Assim, podemos escrever a matriz de densidade para um tempo  $t$  qualquer com o auxílio do operador de evolução temporal<sup>2</sup> como:

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^{\dagger}(t, t_0), \quad (3.10)$$

$$\rho(t) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\Psi_{\alpha}(t)\rangle \langle \Psi_{\alpha}(t)|. \quad (3.11)$$

Apesar de  $|\Psi(t)\rangle$  representar um autoestado do sistema físico em um tempo  $t$  qualquer e  $\rho(t)$  carregar consigo toda a informação desse autoestado, ambas as representações tem carácter estático e não fornecem informações da dinâmica completa do sistema ao longo do tempo. Olhando somente para  $|\Psi(t)\rangle$  e  $\rho(t)$  não sabemos como as variáveis do sistema se modificam. Contudo, podemos derivar com relação ao tempo a expressão para a matriz de densidade, obtendo:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]. \quad (3.12)$$

---

<sup>2</sup>A definição do operador de evolução temporal está dada no apêndice A.

Esta é a chamada equação mestra de Liouville-von Neumann [93] que carrega consigo toda a informação da dinâmica do sistema. Integrando os dois membros da equação podemos conhecer  $\rho(t)$  de forma que:

$$\rho(t) = \rho(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t [H(t'), \rho(t')] dt'. \quad (3.13)$$

Na próxima seção vamos discutir o comportamento das equações que regem a dinâmica dos sistemas quânticos, as chamadas equações mestras.

### 3.3 Equações mestras

Um sistema físico é determinado por um conjunto de entes materiais que estabelecem entre si vínculos denominados interações. As interações entre os componentes de um sistema qualquer compreendem forças e campos e suas consequências no comportamento das grandezas físicas relacionadas a cada sistema. Imaginemos por exemplo uma prateleira fixada na parede. Nessa prateleira estão colocadas em repouso esferas de diferentes massas, composições e raios. Podemos definir nosso sistema físico como o conjunto formado pelas esferas e a prateleira. O ambiente ao redor do sistema determinado pelas paredes e pelo ar que circula representa o que chamamos de reservatório [94]. As interações entre as componentes do sistema, entre as componentes do reservatório e entre o reservatório e o sistema serão dadas pelo campo gravitacional ao qual estão sujeitos os corpos com massa que compõem sistema e reservatório, pelas forças de contato entre as componentes e pelas possíveis modificações na estrutura das componentes do sistema causadas por variáveis do reservatório como temperatura e umidade, dentre inúmeros outros fatores. Do ponto de vista da interação entre sistema e reservatório, podemos classificar os sistemas físicos em três tipos: abertos [95], fechados e isolados [96].

Os sistemas físicos abertos como sugere o nome, são aqueles nos quais é possível a troca de informação das componentes do sistema com todo o seu entorno. Nesse tipo de sistema o número de graus de liberdade do reservatório pode ser considerado infinito. Podem ocorrer incrementos ou decrementos das quantidades físicas ao longo do tempo devido aos efeitos de decoerência como por exemplo ocorre com as moléculas de um gás inicialmente confinado em um recipiente e posteriormente liberado na atmosfera. Os sistemas físicos fechados são aqueles nos quais somente é permitida a troca de informação das componentes do sistema com uma região limitada do seu entorno denominada vizinhança. Nesse tipo de sistema físico o número de graus de liberdade do reservatório é finito e as quantidades físicas se conservam ao longo do tempo como por exemplo ocorre com as partículas em um semicondutor ligado a contatos metálicos que mesmo na presença de radiação ionizante conservam suas quantidades físicas como momento e energia. Já os sistemas físicos isolados, são aqueles sistemas nos quais não é permitida nenhuma troca de informação com o ambiente.

De forma rigorosa, não existem sistemas físicos completamente isolados mas sempre podemos supor que uma pequena região do sistema onde as interações entre suas grandezas possam ser desprezadas se comporte como um sistema físico isolado, como por exemplo, ocorre com átomos em armadilhas [97] de luz. De um modo geral, quando nos referimos a equações mestras [98], estamos nos referindo a um conjunto de equações que descrevem a evolução temporal de probabilidades de um determinado sistema. Dessa forma, se conhecermos a evolução temporal das probabilidades de ocupação dos estados de um sistema, podemos determinar como quaisquer propriedades médias desse sistema variam em função do tempo. Como as transições de população entre estados influenciam estas probabilidades de ocupação é necessário determiná-las por equações acopladas. Através da descrição dessas probabilidades é possível modelar sistemas fora do equilíbrio, o que em última análise, é o objetivo deste tipo de equações. Do ponto de vista prático, podemos dividir os processos aos quais estão sujeitos sistema e reservatório em dois tipos fundamentais: processos markovianos [99] e processos não markovianos. Processos markovianos são processos nos quais as probabilidades futuras são aleatórias e sem memória, ou seja, um sistema onde a probabilidade de um determinado estado futuro depende somente do estado atual e não de qualquer outro estado anterior. Processos não markovianos [100] em contrapartida são aqueles nos quais o sistema guarda algum tipo de memória do que aconteceu em tempos anteriores. No presente trabalho vamos nos limitar aos processos markovianos para os quais vamos lançar mão de equações mestras na aproximação markoviana, como por exemplo, a equação mestra de Lindblad [101].

A partir de agora vamos estabelecer uma distinção entre reservatório que vamos representar por  $R$  e sistema que vamos representar por  $S$ . O conjunto formado por reservatório e sistema compreende um espaço de Hilbert dado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert individuais correspondentes ao reservatório e ao sistema. A cada espaço individual está associado um Hamiltoniano distinto de forma que o Hamiltoniano total do conjunto reservatório-sistema é dado por:

$$H = H_S \otimes H_R. \quad (3.14)$$

O conhecimento das partes individuais do conjunto reservatório-sistema pode ser feito via traço parcial [102]. Se quisermos olhar apenas para o comportamento das propriedades físicas do sistema precisaremos fazer o traço parcial sobre os graus de liberdade do reservatório e se quisermos obter as propriedades físicas do reservatório precisaremos fazer o traço parcial sobre os graus de liberdade do sistema, isto é,

$$\rho_S = Tr_R\{\rho\}, \quad (3.15)$$

$$\rho_R = Tr_S\{\rho\}. \quad (3.16)$$

O valor médio de qualquer observável físico associado ao reservatório ou ao sistema pode ser obtido pelo traço parcial sobre os graus de liberdade do reservatório ou do sistema via matriz de densidade da seguinte forma:

$$\langle A_R \rangle = \text{Tr}_S\{A\rho\}, \quad (3.17)$$

$$\langle A_S \rangle = \text{Tr}_R\{A\rho\}. \quad (3.18)$$

Consideremos, por exemplo dois autoestados do conjunto reservatório-sistema. Um primeiro autoestado em  $t = 0$  nos fornece uma matriz de densidade do conjunto que pode ser escrita como  $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(0)$ . Um segundo autoestado em  $t \neq 0$  nos fornece uma matriz de densidade que pode ser escrita como  $\rho(t) = \rho_S(t) \otimes \rho_R(t)$ . Assim, definimos dois autoestados do conjunto reservatório-sistema que estão separados somente pela evolução temporal. Se aplicarmos o traço parcial sobre o reservatório nesses dois autoestados, obtemos as matrizes de densidade do sistema nos tempos  $t = 0$  e  $t \neq 0$ , respectivamente. Por outro lado, já que sabemos que um autoestado difere do outro apenas pela atuação do operador de evolução temporal, podemos escrever  $\rho_S(t)$  o estado do sistema evoluído no tempo como  $\rho_S(t) = V(t)\rho_S(0)$  onde fica definido o que chamamos de mapa da dinâmica denotado por  $V(t)$ . O mapa da dinâmica é um ente que carrega consigo toda a informação sobre a evolução das propriedades do sistema no intervalo de tempo entre  $t = 0$  e  $t$ . Vale ressaltar, entretanto, que esse mapa está definido unicamente pelos autoestados que escolhemos e portanto  $\rho_S(0) \mapsto \rho_S(t)$ . Para quaisquer outros dois autoestados haverá um mapa  $V(t') \neq V(t)$  definido unicamente pelos dois novos autoestados.

Imagine agora que ao invés de definirmos apenas dois autoestados entre  $t = 0$  e  $t \neq 0$ , definamos  $N$  autoestados distintos aos quais estarão associados  $N$  mapas distintos  $V(t_1), \dots, V(t_N)$  ligados aos tempos  $t_1, t_2, \dots, t_N \geq 0$ . A partir desses mapas podemos construir o autoestado  $\rho_S(t) = V(t)\rho_S(0)$ , onde  $V(t) = V(t_1)V(t_2)\dots V(t_N)$  representa a produto dos mapas para intervalos de tempo distintos na dinâmica. Esse produto indica a interdependência dos mapas na construção da dinâmica do sistema e advém do modo como o operador de evolução temporal atua nesses autoestados. Processos físicos que são regidos por mapas da dinâmica que seguem essa lei de comutatividade são conhecidos como processos não markovianos. Em um processo não markoviano a evolução temporal de cada autoestado do sistema depende da evolução em intervalos de tempo anteriores e portanto é como se o sistema tivesse uma espécie de memória relacionada aos processos ao longo do tempo. Considerar a não markovianidade dos processos físicos torna a solução da equação de Liouville-von Neumann bastante complicada. Para torná-la mais simples podemos considerar a aproximação feita por Markov dada por:

$$V(t_1)V(t_2)\dots V(t_N) = V(t_1 + t_2 + \dots + t_N), \quad (3.19)$$

que em outras palavras desconsidera a capacidade do sistema de guardar memória em relação aos processos físicos ao longo de toda a dinâmica. Essa é a chamada aproximação markoviana [103]. Considerando a aproximação Markoviana e executando o traço parcial sobre as variáveis do reservatório, podemos reescrever a equação de Liouville-von Neumann, que agora passa a ser chamada equação mestra de Markov na forma de Liouville-von Neumann<sup>3</sup>,

$$\dot{\rho}_S = -\frac{i}{\hbar} [H_S(t), \rho_S(t)]. \quad (3.20)$$

### 3.4 Função de correlação e equação de Markov

Sabemos que a equação mestra descreve a evolução temporal da matriz de densidade e que a partir da matriz de densidade podemos obter o valor médio das observáveis físicas. A questão que surge é como podemos considerar as modificações nas observáveis físicas do sistema a cada intervalo de tempo?

Essa de fato é uma questão importante e nada trivial. Para tanto, podemos supor a existência de uma grandeza física capaz de contabilizar as mudanças sofridas pelas variáveis do sistema ao longo de cada intervalo de tempo da dinâmica e estabelecer uma relação entre elas, a chamada função de correlação [104]:

$$g(t, t') = \langle B(t)C(t') \rangle = Tr_S\{B(t)C(t')\rho_S(0)\}, \quad (3.21)$$

onde os operadores  $B(t) = B_0V(t, t')$  e  $C(t') = C_0V(t', 0)$  são operadores relacionados aos mapas da dinâmica em tempos distintos e  $B_0, C_0$  são constantes. Assim, a forma da função de correlação fica sendo,

$$g(t, t') = Tr_S\{B_0V(t, t')C_0V(t', 0)\rho_S(0)\}. \quad (3.22)$$

Podemos notar que os operadores  $B(t)$  e  $C(t')$  funcionam como propagadores da informação da dinâmica do sistema em um dado intervalo de tempo dando à função de correlação a capacidade de correlacionar eventos ocorridos em tempos distintos. O operador  $B(t) = B_0V(t, t')$  tem o papel de carregar consigo a informação sobre a dinâmica no intervalo de tempo entre  $t'$  e  $t$  enquanto o operador  $C(t') = C_0V(t', 0)$  carrega consigo a informação sobre a dinâmica do sistema no intervalo de tempo compreendido entre 0 e  $t'$ . O produto desses dois operadores se encarrega de construir toda a linha da dinâmica entre 0 e  $t$ . Compreendida está ideia, podemos generalizá-la para um número suficientemente grande de intervalos de tempo da seguinte forma:

$$g(t_1, t_2, \dots, t_n; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) = \langle B_1(t_1) \dots B_n(t_n) C_1(t'_1) \dots C_m(t'_m) \rangle, \quad (3.23)$$

---

<sup>3</sup>Note que a equação (3.20) difere da equação (3.12) por tratar apenas das variáveis do sistema.

sempre respeitando a condição de que  $t_n; t'_m > t_{n-1}; t'_{m-1} > \dots > t_1; t'_1 \geq 0$  e assim podemos escrever,

$$g(t_1, t_2, \dots, t_n; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) = \text{Tr}_S\{B_1(t_1)C_1(t'_1)\dots B_n(t_n)C_m(t'_m)\rho_S(0)\}. \quad (3.24)$$

Como  $n$  e  $m$  são a princípio diferentes é preciso definir um ordenamento temporal dado por uma variável  $r_l$  onde  $l = 0, 1, 2, \dots, q$ . Estabelecendo que  $r_q > r_{q-1} > \dots > r_1 \geq 0$ . Assim, o produto dos operadores  $B_i$  e  $C_j$  será definido como um novo operador  $F_q = B_i C_j$  com o qual podemos escrever o seguinte:

$$g(t, t') = \text{Tr}_S\{F_q V(r_q, r_{q-1})F_{q-1} V(r_{q-1}, r_{q-2})\dots F_1 V(r_1, 0)\rho_S(0)\}, \quad (3.25)$$

onde agora o operador  $F_q$  assume o papel de correlacionar todos os eventos em tempos sucessivos da dinâmica. Retornando à equação de Liouville-von Neumann e aplicando recorrência temos,

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H(t), \rho(0)] - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [H(t'), \rho(t')], \quad (3.26)$$

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H(t), \rho(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [H(t), [H(t'), \rho(t')]]. \quad (3.27)$$

Para obter a dinâmica do sistema podemos fazer o traço parcial sobre os graus de liberdade do reservatório,

$$\dot{\rho}_S = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_R\{[H(t), \rho(0)]\} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_R\{[H(t), [H(t'), \rho(t')]]\}. \quad (3.28)$$

Por simplicidade vamos considerar que ao nosso sistema esteja acoplado muito fracamente um reservatório bosônico com infinitos graus de liberdade de forma que o tempo de correlação<sup>4</sup> entre as variáveis do reservatório e do sistema possa ser considerado infinito, ou seja, modificações nas variáveis do reservatório não irão afetar as variáveis do sistema mas modificações nas variáveis do sistema poderão ser percebidas pelas variáveis do reservatório. Assim, sempre podemos escolher o primeiro termo após a igualdade da equação (3.28) nulo para todo instante de tempo e dessa forma a equação de Liouville-von Neumann fica dada por:

$$\dot{\rho}_S = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_R\{[H(t), [H(t'), \rho(t')]]\}. \quad (3.29)$$

Como o reservatório é, em suma, muito maior do que o sistema e eles estão muito fracamente acoplados, podemos considerar que a matriz de densidade total do conjunto reservatório-sistema segue a chamada aproximação de Born [105] onde  $\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_R(t)$ , ou seja, sistema e reservatório são tão dimensionalmente distintos que os autoestados de um

<sup>4</sup>O tempo de correlação é o intervalo de tempo necessário para que dois entes físicos se percebam e passem a interagir.

não afetam ou modificam os autoestados do outro além, é claro da aproximação Markoviana de que já havíamos falado anteriormente,  $\rho_S(t) = \rho_S(t')$ , na qual vamos negligenciar a capacidade do sistema de guardar memória em relação aos processos ocorridos ao longo da dinâmica. Dessa forma a equação de Liouville-von Neuman passa a ser chamada equação mestra de Markov.

$$\dot{\rho}_S = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R \{ [H(t), [H(t'), \rho_S(t) \otimes \rho_R(t)]] \}, \quad (3.30)$$

$$\dot{\rho}_S = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' Tr_R \{ [H(t), [H(t-t'), \rho_S(t) \otimes \rho_R(t)]] \}. \quad (3.31)$$

Em uma formulação canônica a evolução temporal de um sistema é governada por uma dinâmica unitária [106] e isto implica que não há decadência do sistema e a coerência de fase é mantida durante todo o processo. No entanto, qualquer sistema físico real não é absolutamente isolado e irá interagir com o seu ambiente. Essa interação com os graus de liberdade externos ao sistema resulta na dissipação de energia para o ambiente. Para tratar a interação de um sistema quântico com seu ambiente é necessária a inclusão de processos incoerentes que levem em conta essa inevitável perda de fase.

A equação mestra na forma de Lindblad descreve bem a evolução de vários tipos de sistemas quânticos abertos, como por exemplo, um sistema fracamente acoplado a um reservatório markoviano na presença de efeitos de decoerência como dephasing puro [107], amplitude damping [108], depolarizing [109], bit-flip [110]. No formalismo de Lindblad os efeitos de decoerência a que estão sujeitos os sistemas abertos são dados pelo dissipador  $D(\rho_S(t))$ :

$$D(\rho_S(t)) = \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k (A_k \rho_S A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho_S - \frac{1}{2} \rho_S A_k^\dagger A_k), \quad (3.32)$$

onde  $k$  representam as componentes do sistema,  $\gamma_k$  as taxas de decoerência associadas a processos incoerentes e os operadores  $A_k$  representam a interação entre sistema e reservatório. Assim, a equação mestra de Liouville-von Neumann escrita na forma de Lindblad fica dada por:

$$\dot{\rho}_S = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_S(t)] + D(\rho_S(t)). \quad (3.33)$$

Na próxima seção vamos definir os conceitos de entropia linear e grau de pureza de um sistema quântico associados ao operador densidade, que serão muito úteis nas discussões realizadas nos próximos capítulos a respeito da relação da pureza dos estados de um sistema com as fases adquiridas por esses estados durante a evolução temporal. Para os leitores interessados, o apêndice B traz a visão histórica e uma discussão mais detalhada acerca da teoria de informação proposta por Shannon.

### 3.5 Entropia linear, estados puros e mistos

De um modo geral, do ponto de vista do formalismo da matriz densidade, a diferença fundamental entre estados puros e mistos [111] é a perda da idempotência do operador densidade, ou seja, para estados puros, medidas simultâneas do estado de  $\rho$  levam sempre ao mesmo resultado enquanto que para estados mistos essas medidas simultâneas levam sempre a resultados distintos já que o sistema perde sua pureza e colapsa em algum dos infinitos estados mistos possíveis. Todas as demais características do operador densidade permanecem intactas. Por exemplo, imagine que no laboratório tenhamos uma máquina que produz estados quânticos  $|\Psi_1\rangle$  idênticos a cada nova medida. Entretanto, em condições reais essa máquina não é perfeita e esporadicamente ela produz estados  $|\Psi_2\rangle$  com um erro de bit-flip, ou seja, dado que  $|\Psi_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ , teremos que as vezes a máquina produz  $|\Psi_2\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle$ . Suponhamos que em 90% das vezes tenhamos como resultado da medida o estado  $|\Psi_1\rangle$  e em 10% das vezes  $|\Psi_2\rangle$ . Dessa forma, qual será o estado final entregue pela máquina?

Do ponto de vista da função de onda  $|\Psi\rangle$  esse estado não pode ser completamente descrito e para tal precisamos usar o operador densidade como definido anteriormente, assim, o resultado final entregue pela máquina será dado por,

$$\rho_F = 0.9|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + 0.1|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|, \quad (3.34)$$

$$\rho_F = \begin{pmatrix} 0.9|a|^2 + 0.1|b|^2 & 0.9ab^* + 0.1a^*b \\ 0.9a^*b + 0.1ab^* & 0.9|b|^2 + 0.1|a|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

O grau de pureza de um sistema quântico é dado por  $Tr\{\rho^2\}$ . Se  $Tr\{\rho^2\} = 1$ , dizemos que o sistema é puro, se  $Tr\{\rho^2\} < 1$  dizemos que o sistema é misto. Complementar à ideia de grau de pureza está a definição de entropia linear [112]:

$$S_L = 1 - Tr\{\rho^2\}, \quad (3.36)$$

que configura como uma medida de quanto os estados do sistema se afastam dos estados de um sistema puro ao longo do tempo. Por outro lado, para sistemas puros a entropia linear [113] é nula e quanto mais misto o sistema se torna maior é seu valor de entropia linear [114]. O valor máximo da entropia linear [115] está limitado por  $S_L^{max} = \frac{N-1}{N}$ , onde N é o número de componentes do sistema.

No próximo capítulo vamos apresentar os principais sistemas físicos discutidos no presente trabalho: o sistema de dois níveis, famoso candidato a representante do qubit, um sistema de três níveis formado por uma molécula de PQs acoplada por tunelamento e um sistema de quatro níveis formado por tríons e elétrons controlados pela aplicação de um campo magnético externo.

# Capítulo 4

## Os sistemas de 2, 3 e 4 níveis

### 4.1 O sistema de dois níveis

No escopo da interpretação probabilística a que nos leva a MQ, o sistema físico não trivial mais simples possível é o chamado sistema de dois níveis [116]. Diversos sistemas físicos podem ser aproximados pela representação de um sistema de dois níveis [117] como por exemplo, as duas configurações possíveis para as ligações duplas entre os átomos de carbono no anel de benzeno [118], os dois níveis de energia formados em uma molécula de  $H_2$  ionizada [119], os dois estados de spin inerentes do experimento de Stern-Gerlach [120]. No presente trabalho, lidamos com um sistema de dois níveis formado por um par elétron-buraco comumente chamado de exciton [121] como representado na Figura 4.1:

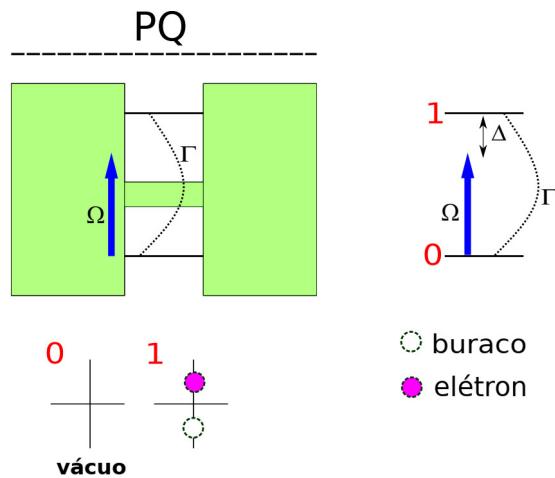


Figura 4.1: Esquema ilustrativo de um sistema de dois níveis formado por um exciton.

A descrição de um sistema de dois níveis tem como sua principal vantagem a possibilidade de obter soluções analíticas com poucas ou nenhuma aproximação. Em teoria de informação e computação quântica um sistema de dois níveis é comumente utilizado na representação de um qubit. Um qubit ou bit quântico, é a unidade básica de informação quântica e assume

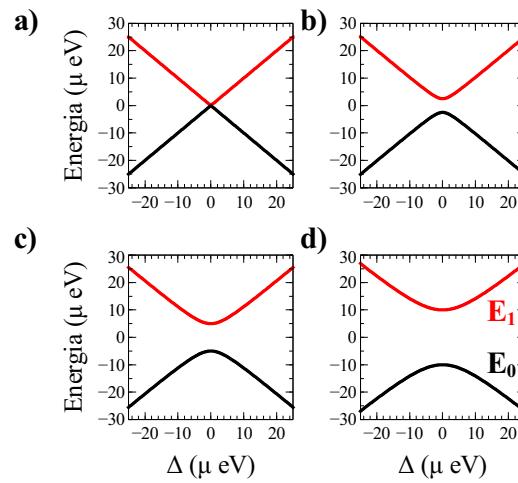
o papel de versão quântica do comportamento binário clássico. No caso do sistema físico da Figura 4.1 temos o estado fundamental do sistema representado por  $|0\rangle$  composto pelo vácuo excitônico e o estado excitado  $|1\rangle$  composto pela formação de um exciton. Os dois estados do sistema estão conectados pela aplicação de um laser com intensidade  $\Omega$  e uma dessintonia  $\Delta$  entre eles. Os efeitos de decoerência são devidos ao decaimento espontâneo entre o estado excitado e o estado fundamental dado pela taxa de decoerência  $\Gamma$ . Em todos os sistemas físicos estudados no presente trabalho vamos adotar as aproximações dipolar [122] e RWA [123] para o Hamiltoniano. Para os leitores interessados, o apêndice C traz em detalhes essas aproximações [124]. A RWA ou aproximação de onda girante é uma aproximação [125] bastante usada em óptica atômica e ressonância magnética e consiste em desprezar as contribuições do Hamiltoniano que oscilam muito mais rápido do que as oscilações devidas às transições ópticas. Normalmente em um tratamento semiclássico a luz laser é modulada por um termo proporcional a  $\cos \omega t = e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}$  e o que se faz é desprezar os chamados termos contragirantes  $e^{i\omega t}$ . Dessa forma o Hamiltoniano que descreve o sistema de dois níveis na aproximação RWA é dado por:

$$H = \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

A evolução dos estados do sistema na presença de um Hamiltoniano é dada pela equação de estado  $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$  da qual podemos extrair os autovalores de energia fazendo o determinante de  $(H - I\lambda) = 0$ :

$$\lambda_0 = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}, \quad \lambda_1 = -\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}, \quad (4.2)$$

e assim obter o gráfico dos autovalores de energia como função da dessintonia do laser.



**Figura 4.2:** Autovalores do Hamiltoniano em função de  $\Delta$  para diferentes valores de  $\Omega$ . a)  $\Omega = 0$ , b)  $\Omega = 2.5\mu\text{eV}$ , c)  $\Omega = 5\mu\text{eV}$ , d)  $\Omega = 10\mu\text{eV}$ .

Na Figura 4.2, vemos que a interação entre os estados do sistema se intensifica com o aumento da intensidade do laser. Quando o laser está desligado ( $\Omega = 0$ ) as autoenergias se cruzam exatamente na ressonância do laser. Quando a intensidade do laser cresce aparece um anticruzamento característico da interação quântica entre esses estados. Quando o laser está desligado o sistema experimenta uma configuração de energias degeneradas em torno da dessintonia ressonante do laser com os níveis do sistema. O que acontece quando o laser é ligado é que os estados do sistema sentem uma perturbação local ao redor da ressonância do laser propiciando uma quebra de degenerescência tal como a observada no efeito Stark ao aplicar um campo elétrico em átomos. De posse dos autovalores de  $H$ , podemos obter os autovetores associados escritos em função da base computacional:

$$|\Psi_0\rangle = \frac{\mp\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + (\Delta - \lambda_0)^2}} |0\rangle \pm \frac{(\Delta - \lambda_0)}{\sqrt{\Omega^2 + (\Delta - \lambda_0)^2}} |1\rangle, \quad (4.3)$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{\pm(\Delta - \lambda_1)}{\sqrt{\Omega^2 + (\Delta - \lambda_1)^2}} |0\rangle \mp \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + (\Delta - \lambda_1)^2}} |1\rangle, \quad (4.4)$$

para os quais podemos introduzir a parametrização:

$$\cos \alpha = \frac{\mp\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + (\Delta - \lambda_{0,1})^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\pm(\Delta - \lambda_{0,1})}{\sqrt{\Omega^2 + (\Delta - \lambda_{0,1})^2}}, \quad (4.5)$$

que nos possibilitem escrever de forma mais compacta os autovetores como,

$$|\Psi_0\rangle = \cos \alpha |0\rangle - \sin \alpha |1\rangle, \quad |\Psi_1\rangle = \sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha |1\rangle. \quad (4.6)$$

Podemos, através de manipulação algébrica, obter os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  como função dos estados vestidos  $|\Psi_0\rangle$  e  $|\Psi_1\rangle$  que são os autoestados do Hamiltoniano do sistema em  $t = 0$ ,

$$|0\rangle = \cos \alpha |\Psi_0\rangle + \sin \alpha |\Psi_1\rangle, \quad |1\rangle = \cos \alpha |\Psi_1\rangle - \sin \alpha |\Psi_0\rangle. \quad (4.7)$$

Nesse ponto, vamos definir que em  $t = 0$  o sistema se encontra no estado fundamental descrito pelo autoestado  $|0\rangle$  e dessa forma toda a dinâmica dos estados do sistema passa pela atuação do operador de evolução temporal no estado fundamental:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |0\rangle \Rightarrow |\Psi(t)\rangle = \cos \alpha e^{-i\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}t} |\Psi_0\rangle + \sin \alpha e^{-i\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}t} |\Psi_1\rangle. \quad (4.8)$$

Podemos então substituir os estados vestidos  $|\Psi_0\rangle$  e  $|\Psi_1\rangle$  pelas suas representações em função dos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  como expressos nas equações (4.7) e lançando mão de algumas relações trigonométricas, obtendo:

$$|\Psi(t)\rangle = (\cos \Omega_R t + i \sin \Omega_R t \cos 2\alpha) |0\rangle + i \sin \Omega_R t \sin 2\alpha |1\rangle, \quad (4.9)$$

onde definimos  $\Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$  como a chamada frequência de Rabi do sistema.

A frequência de Rabi, como definida por ele é a frequência para uma dada transição na presença de um campo. Ela representa portanto, a frequência das oscilações das populações dos dois níveis envolvidos nessa transição. A frequência de Rabi é proporcional à intensidade do acoplamento entre a luz e a transição e à amplitude do campo elétrico da luz. Podemos escrever as probabilidades de transição entre os níveis do sistema como:

$$P_i = |\langle i | \Psi(t) \rangle|^2 \Rightarrow P_0 + P_1 = 1. \quad (4.10)$$

Assim, as probabilidades de transição para os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  no nosso sistema de dois níveis ficam dadas por:

$$P_0 = \cos^2 \Omega_R t + \sin^2 \Omega_R t \cos^2 2\alpha, \quad P_1 = \sin^2 \Omega_R t \sin^2 2\alpha, \quad (4.11)$$

e representam as populações desses dois estados ao longo do tempo. De posse da forma da função de onda  $|\Psi(t)\rangle$  que descreve o sistema, podemos utilizando a definição do operador densidade escrever uma forma analítica geral para a matriz de densidade:

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|, \quad (4.12)$$

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 \Omega_R t + \sin^2 \Omega_R t \cos^2 2\alpha & \sin 2\alpha (\sin^2 \Omega_R t \cos 2\alpha - \frac{i}{2} \sin 2\Omega_R t) \\ \sin 2\alpha (\sin^2 \Omega_R t \cos 2\alpha + \frac{i}{2} \sin 2\Omega_R t) & \sin^2 \Omega_R t \sin^2 2\alpha \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Do ponto de vista da análise desse sistema em questão como um qubit (que nos será muito útil no próximo capítulo), podemos tomar por conveniência a condição em que  $\alpha = \pi/4$  o que nos levará a seguinte forma para os estados do sistema:

$$|0\rangle = \frac{(|\Psi_0\rangle + |\Psi_1\rangle)}{\sqrt{2}}, \quad |1\rangle = \frac{(|\Psi_1\rangle - |\Psi_0\rangle)}{\sqrt{2}}, \quad (4.14)$$

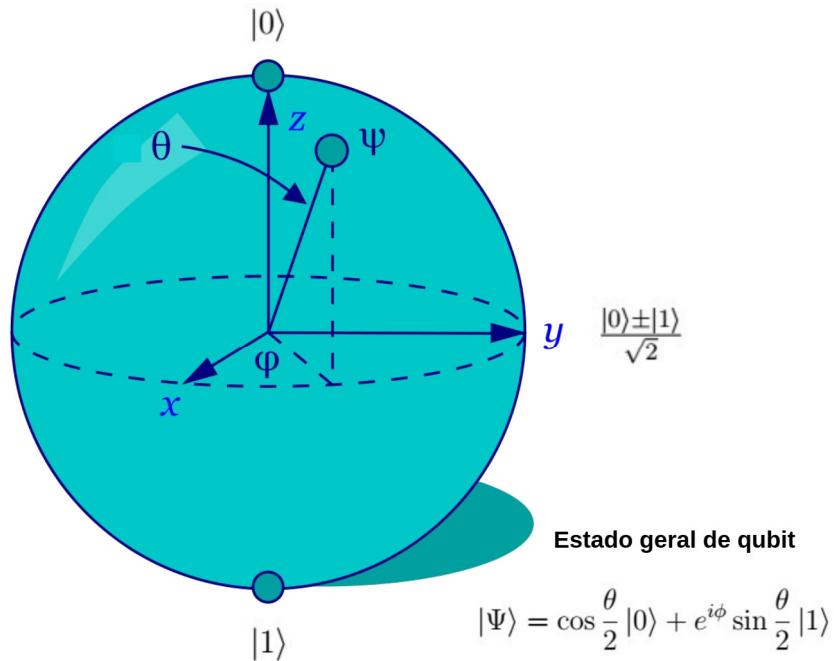
é fácil notar que eles representam estados maximamente superpostos dos estados vestidos  $|\Psi_0\rangle$  e  $|\Psi_1\rangle$  em  $t = 0$ . Assim, a matriz de densidade fica:

$$\rho(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

advinda da definição do estado  $|\Psi\rangle$  como o estado de um qubit na esfera de Bloch-Poincaré como representado na Figura 4.3,

$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (4.16)$$

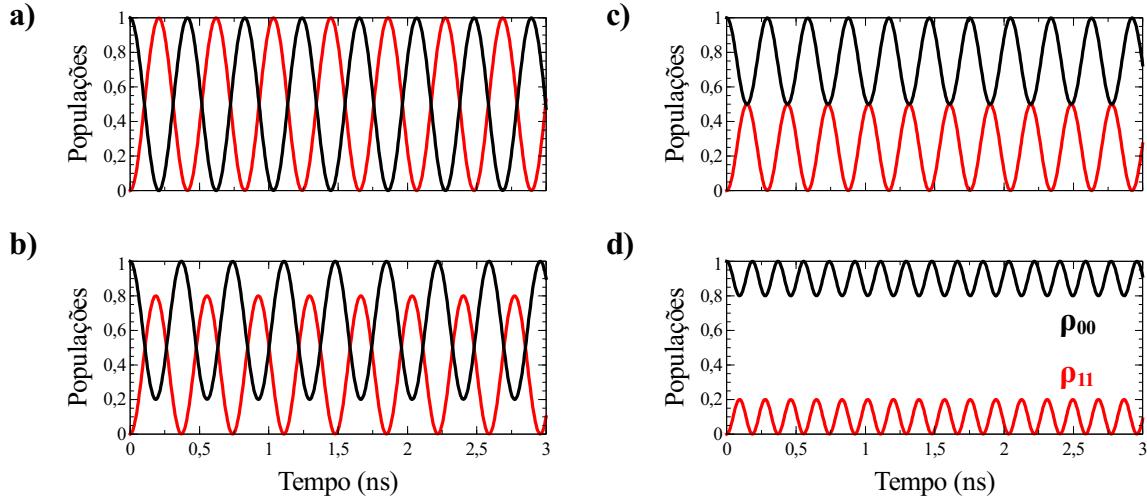
onde  $\theta/2 = (\Omega_R)t$  é o ângulo polar da esfera de Bloch-Poincaré como função da frequência de Rabi do sistema.



**Figura 4.3:** Representação esquemática de um qubit na esfera de Bloch-Poincaré.

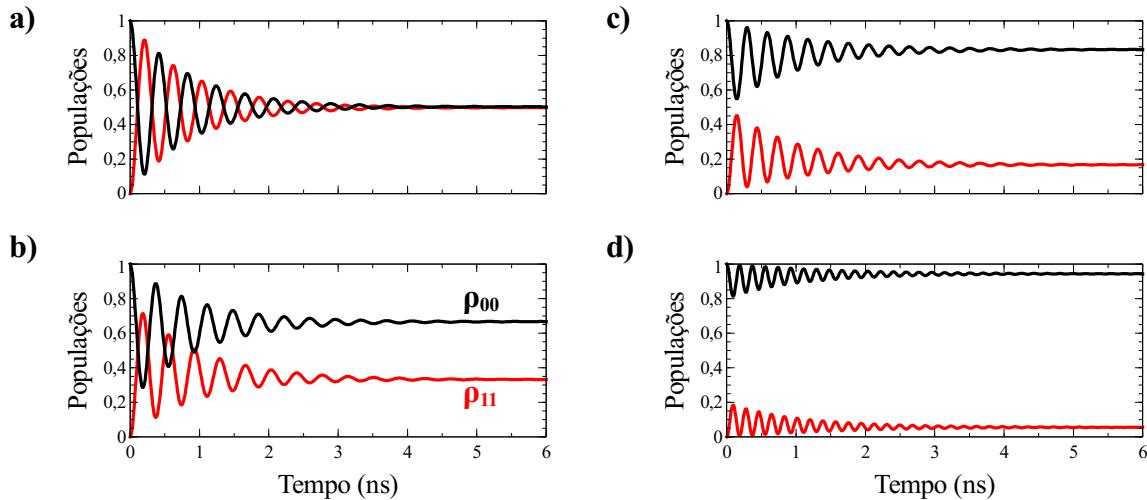
Associadas à frequência de Rabi nos sistemas quânticos estão as chamadas oscilações de Rabi [126]. Um ciclo de Rabi [127] é representado pelo comportamento cíclico de um sistema quântico na presença de um campo. Existem diversos processos físicos de computação quântica, física dos sólidos, física atómica, molecular, nuclear e de partículas que podem ser convenientemente modelados como sistemas quânticos de dois níveis e podem exibir oscilações do tipo Rabi [128] quando acoplados a um campo. A explicação do fenômeno das oscilações de Rabi é bem simples. Se em um sistema de dois níveis qualquer os dois estados são degenerados em algum momento, é sabido que o sistema pode ficar excitado quando absorve um quanta de energia. Quando um átomo é iluminado por um feixe coerente de fôtons, ele irá ciclicamente absorver fôtons e reemití-los por emissão estimulada. Esse ciclo de absorção e reemissão estimulado pelo campo é o chamado ciclo de Rabi.

Na Figura 4.4, trazemos o gráfico das oscilações de Rabi presentes na dinâmica das populações entre os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . É fácil perceber que existe uma competição entre a dessintonia do laser e sua intensidade no comportamento das oscilações do sistema. Na condição onde o laser está ressonante observamos que as populações dos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  sofrem uma completa inversão cíclica ao longo do tempo e ao passo que vamos dessintonizando o laser conseguimos observar o afastamento vertical entre as oscilações das duas populações. A condição em que  $\Delta = \pm\Omega$  é bastante interessante pois podemos observar que nessa condição as populações dos dois estados oscilam cada uma até o valor máximo 0.5 e se cruzam uma única vez a cada ciclo.



**Figura 4.4:** Populações em função do tempo para diferentes valores de  $\Delta$ . Em todas as situações  $\Gamma = 0$  e  $\Omega = 5\mu eV$ . a)  $\Delta = 0$ , b)  $\Delta = \pm 2.5\mu eV$ , c)  $\Delta = \pm 5\mu eV$ , d)  $\Delta = \pm 10\mu eV$ .

Outra análise importante é de que se tomarmos o limite em que a dessintonia do laser é muito maior que sua intensidade, basicamente veremos que as populações dos dois estados deixarão de oscilar entre eles permanecendo em suas configurações assumidas em  $t = 0$ , ou seja, a princípio não haverá emissão estimulada de fôtons no sistema. A Figura 4.5, traz os efeitos provocados pela decoerência nas oscilações de Rabi do sistema.



**Figura 4.5:** Populações em função do tempo para diferentes valores de  $\Delta$ . Em todas as situações  $\Gamma = 1\mu eV$  e  $\Omega = 5\mu eV$ . a)  $\Delta = 0$ , b)  $\Delta = \pm 2.5\mu eV$ , c)  $\Delta = \pm 5\mu eV$ , d)  $\Delta = \pm 10\mu eV$ .

Em todas as situações observamos o amortecimento gradual das oscilações de Rabi com o passar do tempo, entretanto, somente nas condições em que  $\Delta \ll \pm\Omega$  conseguimos ver que essas oscilações levam o sistema a um regime estacionário no qual os dois estados contri-

buem de uma forma mais ou menos igualitária para os processos de emissão. Em especial na condição em que o laser está ressonante o sistema tende a um estado onde  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  contribuem cada um com a mesma probabilidade de ocorrência. Podemos aqui, fazer uma análise analítica do comportamento do sistema no regime estacionário e compará-la ao comportamento observado na Figura 4.5. A dinâmica de  $\rho(t)$  é dada pela equação de Liouville-von Neumann como já foi dito. A manipulação algébrica das equações de movimento nos levam ao seguinte:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{00} &= \Gamma\rho_{11} + (\rho_{10} - \rho_{01})i\Omega, \\ \dot{\rho}_{01} &= i\Omega(\rho_{11} - \rho_{00}) + 2i\Delta\rho_{01} - \frac{\Gamma}{2}\rho_{01}, \\ \dot{\rho}_{10} &= i\Omega(\rho_{00} - \rho_{11}) - 2i\Delta\rho_{10} - \frac{\Gamma}{2}\rho_{10}, \\ \dot{\rho}_{11} &= i\Omega(\rho_{01} - \rho_{10}) - \Gamma\rho_{11}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Sabemos, entretanto, que no regime estacionário, ou seja, passado um tempo muito longo para a dinâmica do sistema, as variações dos elementos de  $\rho(t)$  deixam de existir tal que  $\dot{\rho} = 0$ , assim os elementos de  $\rho$  no regime estacionário ficam dados por:

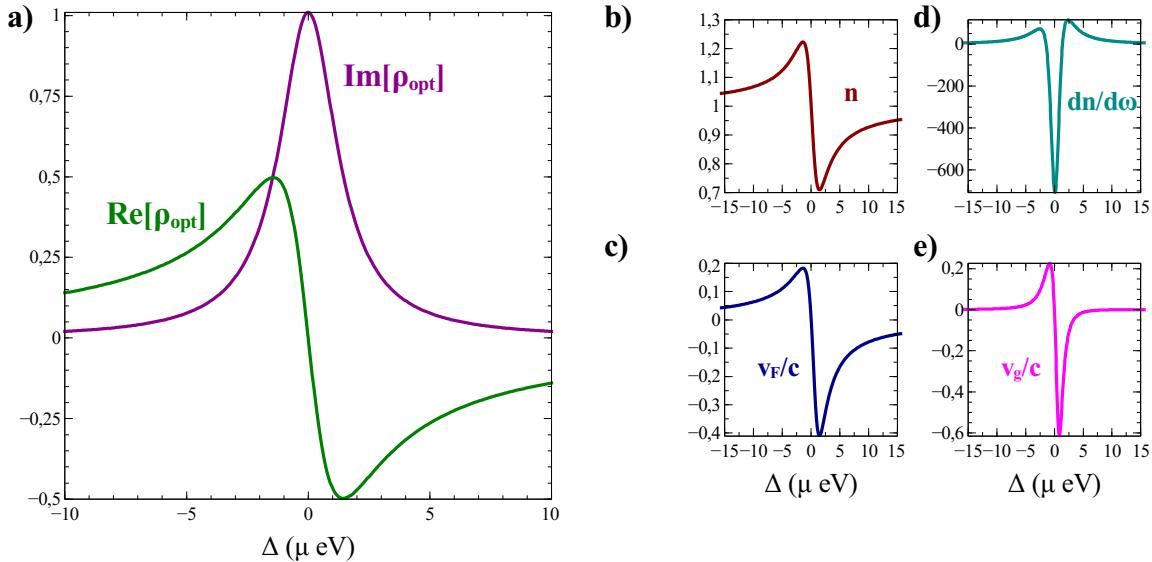
$$\rho_{00}^{est} = \frac{(\Gamma^2 + 16\Delta^2 - 4\Omega^2)}{(\Gamma^2 + 16\Delta^2 - 8\Omega^2)}, \quad \rho_{11}^{est} = \frac{-4\Omega^2}{(\Gamma^2 + 16\Delta^2 - 8\Omega^2)},\tag{4.18}$$

onde fica fácil ver que por exemplo na condição de ressonância em que  $\Delta = 0$  se considerarmos  $\Gamma \ll$ , temos que tanto a população do estado fundamental quanto a população do estado excitado tendem ao valor 0.5. É também no regime estacionário que podemos observar o comportamento dos elementos ópticos do sistema, ou seja, os elementos da matriz de densidade acoplados por luz. A óptica não linear trata do estudo da interação da luz com a matéria no regime em que suas propriedades ópticas são modificadas pela presença da luz. Para o caso do sistema de dois níveis temos que, no regime estacionário [129], o elemento óptico<sup>1</sup> de  $\rho$  fica dado por:

$$\rho_{01}^{est} = \frac{-2\Omega(4\Delta - i\Gamma)}{(\Gamma^2 + 16\Delta^2 - 8\Omega^2)}.\tag{4.19}$$

No formalismo da matriz de densidade a susceptibilidade [130] está diretamente ligada com o comportamento do elemento óptico de  $\rho$  no regime estacionário do sistema. Nessa condição, podemos relacionar a parte real do elemento óptico com o índice de refração e a parte imaginária com o coeficiente de absorção do meio. No quadro (a) da Figura 4.6, apresentamos as partes real e imaginária da susceptibilidade óptica do sistema de dois níveis. No caso particular do sistema de dois níveis independentemente da intensidade do laser podemos observar que em torno da ressonância da dessintonia do laser, o coeficiente de absorção atinge seu valor máximo ao passo que o índice de refração assume valor nulo.

<sup>1</sup>O elemento óptico de  $\rho$  é o elemento ligado à transição óptica do laser mais fraco (menos intenso).



**Figura 4.6:** a) Partes real e imaginária da susceptibilidade óptica, b) índice de refração, c) razão entre a velocidade de fase e a velocidade da luz, d) derivada do índice de refração, e) razão entre a velocidade de grupo e a velocidade da luz. Em todas as situações  $\Gamma = 1\mu\text{eV}$ .

Esse comportamento caracteriza um regime de dispersão anômala análogo àquele observado na equação (2.3) no capítulo 2 quando falamos da descrição clássica e semiclássica da luz. No caso particular do sistema de dois níveis, não é possível observar outros regimes ópticos pela ausência de canais de interferência quântica. No contexto dos materiais semicondutores, o índice de refração se relaciona com a parte real da susceptibilidade óptica segundo a expressão,

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi_{\text{Re}}}. \quad (4.20)$$

De posse da derivada do índice de refração em relação à frequência  $\omega$ , podemos definir as velocidades de fase e de grupo do pacote de onda, respectivamente,

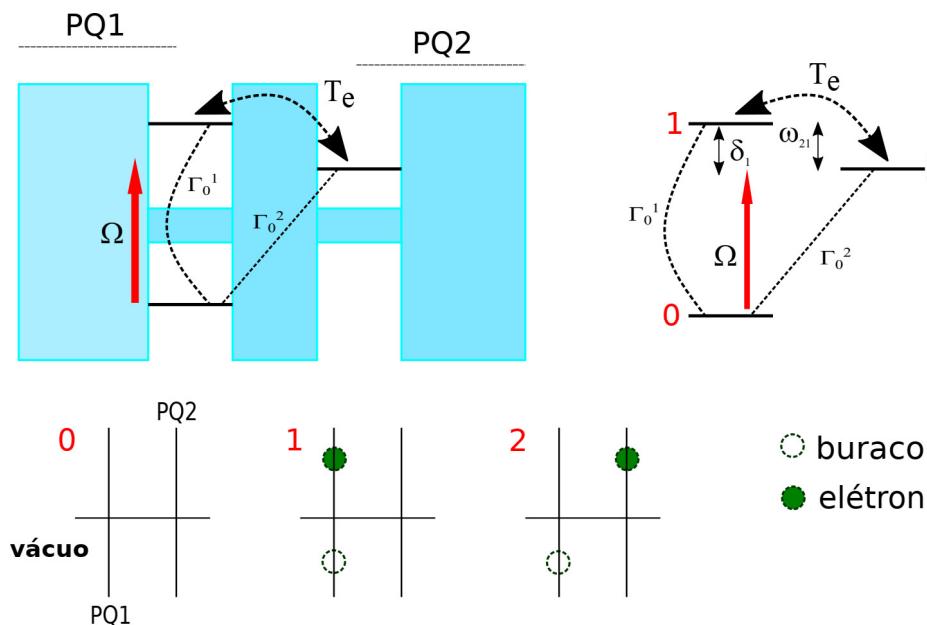
$$\frac{v_F}{c} = \frac{1}{n(\omega)}, \quad \frac{v_G}{c} = \frac{1}{n(\omega) + \frac{dn}{d\omega}}. \quad (4.21)$$

Nos quadros (c) e (e) da Figura 4.6 trazemos, respectivamente os gráficos da razão entre a velocidade de fase e a velocidade da luz e da razão entre a velocidade de grupo e a velocidade da luz. Do ponto de vista óptico, o que se pode analisar é que o regime de dispersão anômala faz com que enquanto a velocidade de fase perceba uma mudança relativamente suave nas proximidades da ressonância, a velocidade de grupo das ondas sofre uma alteração brusca em relação a velocidade da luz. Esse comportamento se deve em grande parte à mudança repentina na derivada do índice de refração exatamente na ressonância. Entretanto, ambas as velocidades, de fase e de grupo não tem seus valores tão modificados mantendo-se na mesma ordem de grandeza da velocidade da luz. Na próxima seção vamos analisar o que acontece em um sistema de três níveis.

## 4.2 O sistema de três níveis

O sistema físico que consideramos aqui é formado por um PQ duplo (Figura 4.7) assimétrico [131] onde os níveis estão acoplados por tunelamento. Em outras palavras, estamos considerando uma molécula de PQs. Nessa situação, elétrons e buracos podem ser confinados em qualquer um dos pontos e promovidos entre as bandas de valência e condução pela aplicação de um laser ocasionando a formação de quasipartículas [132] neutras conhecidas como excitons. Um exciton é um estado ligado de um elétron e seu buraco quando estes são atraídos um pelo outro pela força eletrostática de Coulomb [133].

Um exciton pode se formar quando um fóton é absorvido pelo sistema. Esse processo, excita um elétron da banda de valência para a banda de condução que por sua vez deixa para trás um buraco carregado positivamente e então o elétron recém-chegado à banda de condução é atraído por esse buraco que está localizado pelas forças repulsivas de Coulomb de um grande número de elétrons ao redor do buraco e do elétron excitado. Essa atração proporciona um equilíbrio energético estabilizador e consequentemente, o exciton tem um pouco menos de energia do que o elétron e o buraco não ligados. No caso específico do sistema tratado aqui, para a aplicação do laser no regime quase ressonante temos que os elétrons e os buracos podem tunelar para o outro ponto criando assim o que chamamos de excitons indiretos. Experimentalmente é sabido que a taxa de tunelamento de buracos é muito inferior à taxa de tunelamento de elétrons e por esse motivo vamos considerar  $T_h \approx 0$ .



**Figura 4.7:** Esquema ilustrativo da molécula de PQs acoplados por tunelamento. O estado fundamental  $|0\rangle$  é representado pelo vácuo excitônico e os estados excitados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  por diferentes configurações de excitons.

A Figura 4.7 apresenta um esquema representativo do sistema de três níveis considerado no presente trabalho. O estado fundamental representado pelo  $|0\rangle$  é composto pelo vácuo excitônico, o estado  $|1\rangle$  é composto pelo estado de exciton direto formado entre as bandas de valência e condução do PQ1 e o estado  $|2\rangle$  é composto pelo exciton indireto formado entre as bandas de valência do PQ1 e de condução do PQ2 via tunelamento de elétrons ou buracos. O Hamiltoniano do sistema após a aproximação de onda girante (RWA) [134] (ver apêndice C) é escrito como,

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\delta_1}{2} & \Omega & 0 \\ \Omega & \frac{\delta_1}{2} & T_e \\ 0 & T_e & \frac{\delta_2}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

onde  $\delta_2 = \delta_1 + 2\omega_{21}$  é a dessintonia da transição escura do sistema definida em função da dessintonia da transição brilhante e do campo elétrico  $\omega_{21}$  que surge entre os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  por consequência do tunelamento entre os PQs da molécula. Vale lembrar que o tunelamento em materiais semicondutores depende, entre outras coisas, da distância interatômica, de modo que para controlar o fator de tunelamento é preciso controlar a distância interatômica e isso pode ser feito utilizando diversas amostras distintas ou por exemplo aplicando um campo elétrico capaz de distorcer os níveis eletrônicos e facilitar certas transições. Analogamente ao que fizemos na seção anterior, podemos diagonalizar o Hamiltoniano do sistema e obter seus autovalores na condição de ressonância máxima ( $\delta_1 = \delta_2 = \omega_{21} = 0$ ) como:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\Omega^2 + T_e^2}. \quad (4.23)$$

De posse dos autovalores podemos obter os autovetores associados,

$$|\Psi_0\rangle = \frac{T_e}{\sqrt{T_e^2 + \Omega^2}} |0\rangle - \frac{\Omega}{\sqrt{T_e^2 + \Omega^2}} |2\rangle. \quad (4.24)$$

Definindo as seguintes relações trigonométricas podemos simplificar a forma destes autovetores:

$$\cos \alpha = \pm \frac{T_e}{\sqrt{T_e^2 + \Omega^2}}, \quad \sin \alpha = \mp \frac{\Omega}{\sqrt{T_e^2 + \Omega^2}}. \quad (4.25)$$

Os autovetores dos estados vestidos do Hamiltoniano  $|\Psi_0\rangle$ ,  $|\Psi_1\rangle$  e  $|\Psi_2\rangle$  podem ser escritos como,

$$|\Psi_0\rangle = \cos \alpha |0\rangle - \sin \alpha |2\rangle, \quad (4.26)$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \alpha |0\rangle + |1\rangle + \cos \alpha |2\rangle),$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \alpha |0\rangle - |1\rangle + \cos \alpha |2\rangle).$$

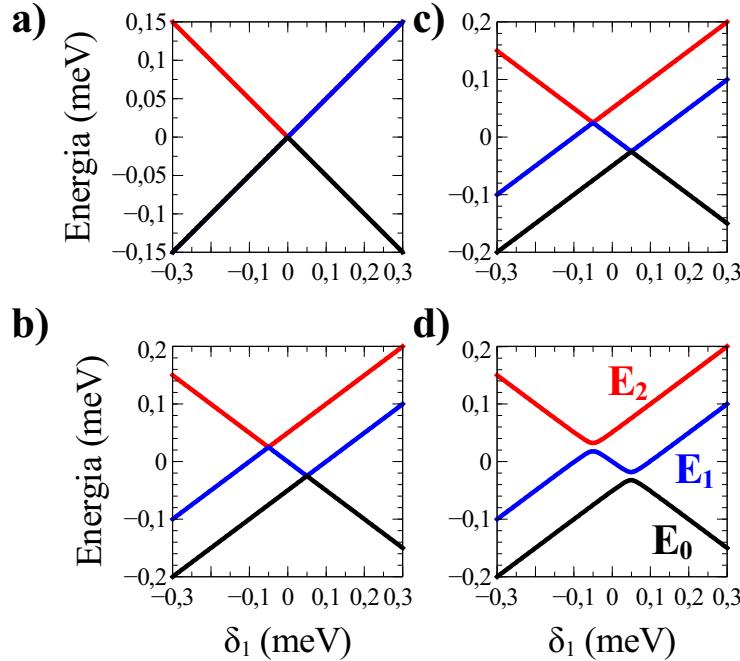
Para efeito de simplicidade, vamos considerar que em  $t = 0$  o sistema esteja no estado fundamental configurado pelo estado  $|0\rangle$ . Dessa forma a evolução temporal dos estados do sistema passa por atuar o operador de evolução temporal sobre o estado fundamental. Após alguma manipulação algébrica, podemos escrever o estado desrido  $|0\rangle$  em função dos estados vestidos  $|\Psi_0\rangle$ ,  $|\Psi_1\rangle$  e  $|\Psi_2\rangle$  da seguinte forma:

$$|0\rangle = \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} (|\Psi_0\rangle + \frac{\tan \alpha}{\sqrt{2}} (|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle)). \quad (4.27)$$

Assim, o estado de  $|\Psi\rangle$  evoluído no tempo ficará dado por,

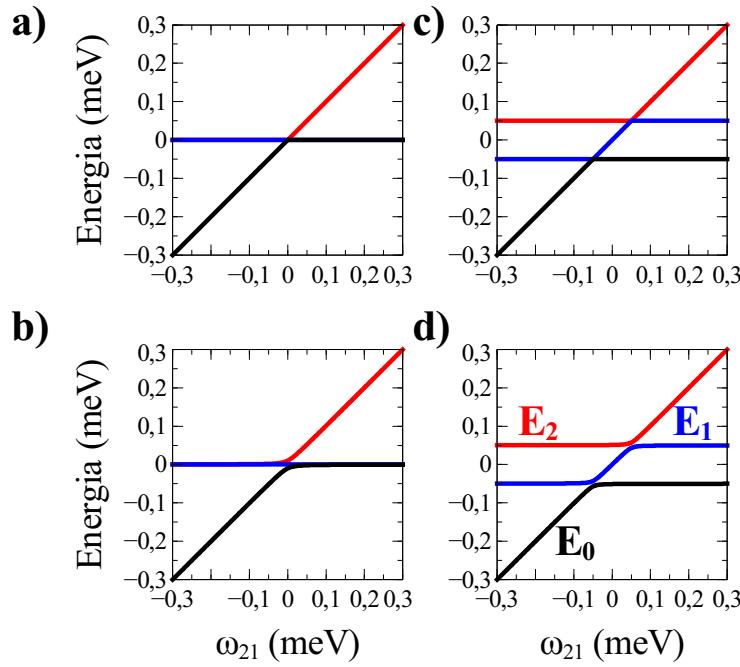
$$|\Psi(t)\rangle = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \Omega_R t) |0\rangle + i \sin \alpha \sin \Omega_R t |1\rangle + (\sin \alpha \cos \alpha (\cos \Omega_R t - 1)) |2\rangle, \quad (4.28)$$

de onde agora podemos definir a frequência de Rabi associada ao sistema  $\Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + T_e^2}$  como função exclusiva das variáveis do Hamiltoniano. A frequência de Rabi para o sistema de três níveis independe das dessintonias do laser ou do campo elétrico aplicado, diferentemente do que acontecia no sistema de dois níveis. Nas Figuras 4.8 e 4.9 trazemos o gráfico dos autovalores do Hamiltoniano em todas as possíveis condições de ressonância parcial das dessintonias e do campo elétrico aplicado.



**Figura 4.8:** Autovalores do Hamiltoniano como função de  $\delta_1$  na condição em que  $\omega_{21} = 0$ . a)  $\Omega = T_e = 0$ , b)  $\Omega = 50\mu eV$ ,  $T_e = 0$ , c)  $\Omega = 0$ ,  $T_e = 10\mu eV$ , d)  $\Omega = 50\mu eV$ ,  $T_e = 10\mu eV$ .

Nos quadros da Figura 4.8 temos os autovalores de  $H$  na condição ressonante do campo elétrico, onde podemos observar que na ausência completa de tunelamento e do acoplamento óptico os níveis do sistema simplesmente não interagem. Nas condições em que apenas um dos dois acoplamentos (tunelamento ou laser) está presente ocorre o aparecimento de dois cruzamentos, o que evidencia a eminência de uma interação, que pode ser observada quando ligamos o outro acoplamento que estava inicialmente desligado. Isso representa exatamente a condição observada no quadro (d). Outro fato interessante é que independentemente dos valores de  $\Omega$  e  $T_e$ , se ambos os acoplamentos estão presentes, os dois anticruzamentos se posicionam nas dessintonias  $\delta_1 = \pm 50\mu eV$ .



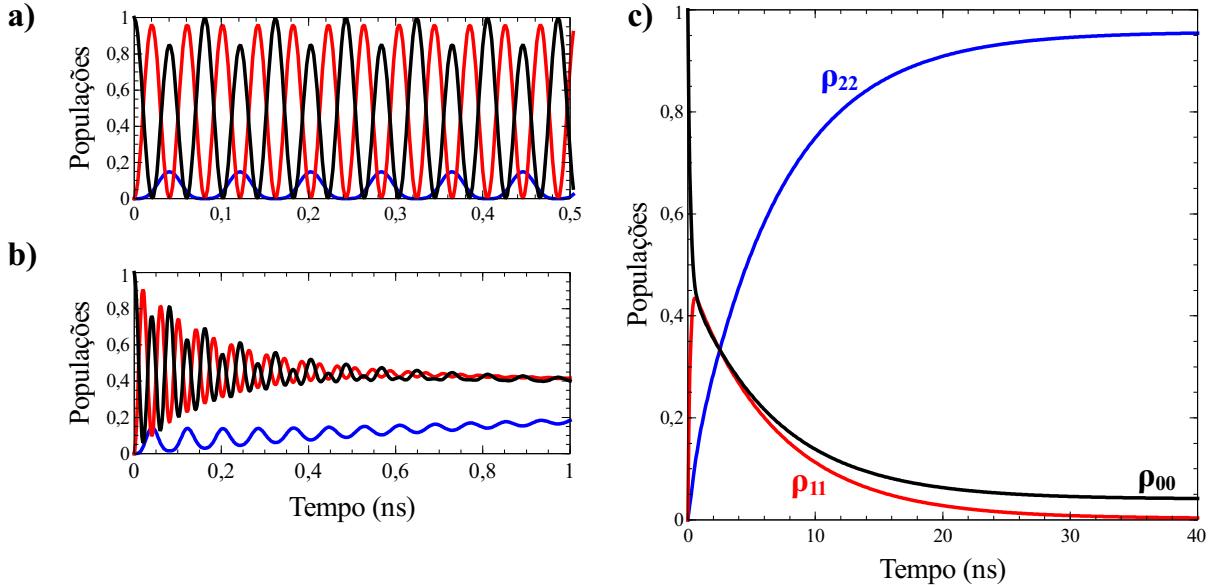
**Figura 4.9:** Autovalores do Hamiltoniano como função de  $\omega_{21}$  na condição em que  $\delta_1 = 0$ . a)  $\Omega = T_e = 0$ , b)  $\Omega = 50\mu eV$ ,  $T_e = 0$ , c)  $\Omega = 0$ ,  $T_e = 10\mu eV$ , d)  $\Omega = 50\mu eV$ ,  $T_e = 10\mu eV$ .

Nos quadros da Figura 4.9 estamos na ressonância da dessintonia da transição brilhante e fazendo variar o campo elétrico aplicado. Na situação em que ambos os acoplamentos  $\Omega$  e  $T_e$  estão desligados, os autovalores do sistema se portam assim como no caso ressonante em  $\omega_{21}$ . Na situação em que somente está presente o acoplamento óptico, o sistema permanece praticamente inalterado, já na situação em que só o tunelamento está presente surgem dois anticruzamentos novamente nos levando à ideia de que o sistema está na eminência de interagir. Esse comportamento oposto ao das variações de  $\delta_1$ , se deve ao fato de que a aplicação de  $\omega_{21}$  favorece o tunelamento e portanto aumenta seus efeitos sobre o sistema. A dessintonia  $\delta_1$  favorece apenas o bombeio. Na situação em que ambos os acoplamentos estão presentes observamos a formação de dois anticruzamentos exatamente em  $\omega_{21} = \pm 50\mu eV$ .

De posse do estado evoluído no tempo dado pela equação (4.28), podemos escrever as probabilidades de transição entre os estados do sistema que representam as populações dos mesmos ao longo do tempo:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \Omega_R t)^2, \\ P_1(t) &= \sin^2 \alpha \sin^2 \Omega_R t, \\ P_2(t) &= \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\cos \Omega_R t - 1)^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Aqui, assim como no sistema de dois níveis, podemos observar oscilações do tipo Rabi agora controladas exclusivamente pela intensidade do laser e pelo tunelamento entre os estados de exciton direto e indireto. A Figura 4.10 apresenta os resultados numéricos para as populações do sistema de três níveis na presença e na ausência dos mecanismos de decoerência na condição em que o acoplamento por luz é maior que o tunelamento.

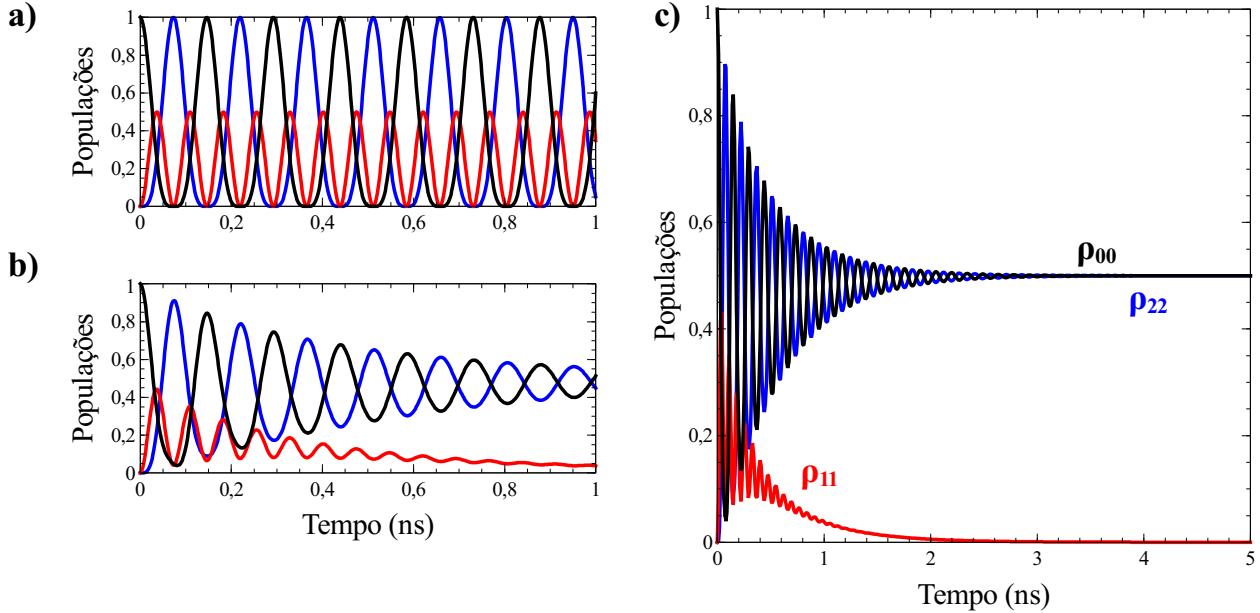


**Figura 4.10:** Populações em função do tempo na condição em que  $\delta_1 = \delta_2 = \omega_{21} = 0$ . a)  $\Gamma_0^1 = 0$ , b)  $\Gamma_0^1 = 5 \mu\text{eV}$ , c) populações para tempos longos sob o efeito da decoerência. Em todas as situações  $\Omega = 50 \mu\text{eV}$ ,  $T_e = 10 \mu\text{eV}$ .

Assim como o observado para o sistema de dois níveis, as oscilações de Rabi são amortecidas pelos efeitos da decoerência e para tempos longos ao menos na condição em que  $\Omega \gg T_e$ , temos a formação de um estado robusto com cerca de 96% de inversão de população entre os estados  $|0\rangle$  e  $|2\rangle$ .

A condição em que os acoplamentos por luz e por tunelamento são iguais é apresentada na Figura 4.11 na qual podemos notar que na ausência da decoerência o sistema exibe claras oscilações de Rabi predominantemente entre o estado de exciton indireto e o estado fundamental com completa inversão de população entre eles a cada ciclo.

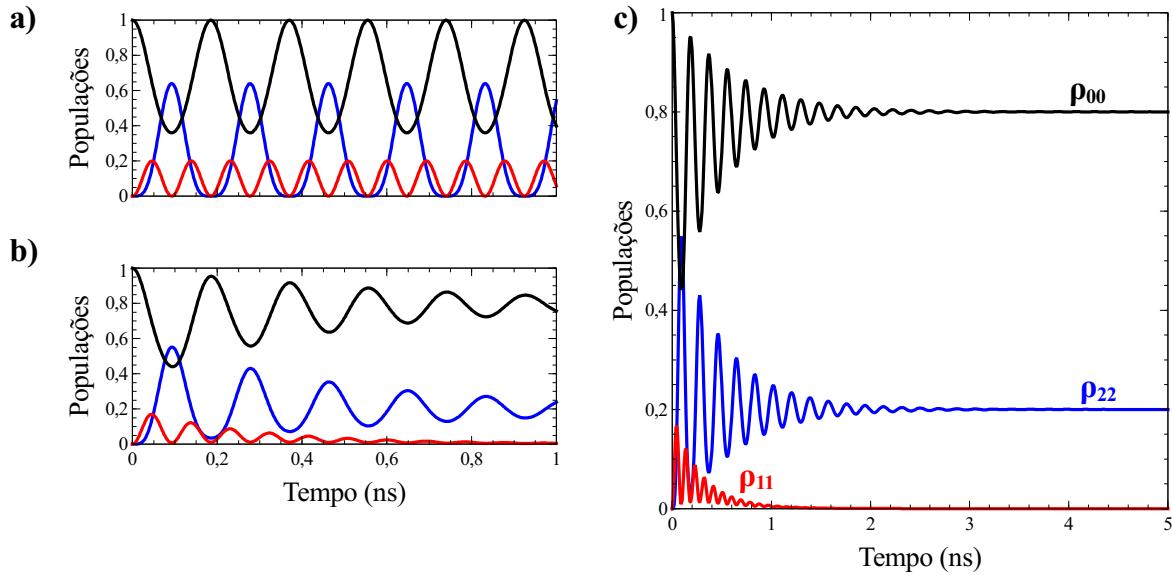
O efeito da decoerência amortece fortemente as oscilações do estado de exciton direto ao passo que faz as populações do estado fundamental e do estado de exciton indireto tenderem à mesma ocupação, como se nesse regime de acoplamento, para tempos longos o sistema se comportasse como um sistema de dois níveis fracamente acoplado a um terceiro estado.



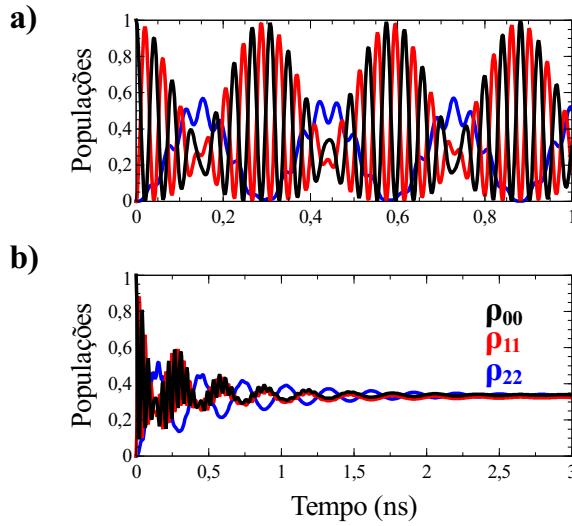
**Figura 4.11:** Populações em função do tempo na condição em que  $\delta_1 = \delta_2 = \omega_{21} = 0$ . a)  $\Gamma_0^1 = 0$ , b)  $\Gamma_0^1 = 5\mu\text{eV}$ , c) populações para tempos longos sob o efeito da decoerência. Em todas as situações  $\Omega = 20\mu\text{eV}$ ,  $T_e = 20\mu\text{eV}$

Já no regime em que o acoplamento por luz é mais fraco que o tunelamento como pode ser observado na Figura 4.12, apesar de na condição livre de decoerência podermos observar oscilações do tipo Rabi, podemos notar que essas oscilações não são tão eficientes quanto nos outros regimes de acoplamento. O efeito da decoerência mesmo para tempos curtos mostra que nesse regime de acoplamento a inversão de população entre os estados do sistema não é possível o que se concretiza para tempos longos onde maior parte da população oscila e permanece no estado fundamental.

Todas as análises feitas até agora acerca das populações dos estados do sistema de três níveis foram feitas na condição de ressonância total ( $\delta_1 = \delta_2 = \omega_{21} = 0$ ). Entretanto, nos espectros dos autovalores do Hamiltoniano, observamos que nas condições de ressonância parcial (com  $\delta_1 = 0, \delta_2 \neq 0$  ou  $\delta_2 = 0, \delta_1 \neq 0$ ) os anticruzamentos entre os estados na presença dos acoplamentos aparecem sempre em  $\delta_1 = \pm 50\mu\text{eV}$  ou  $\omega_{21} = \pm 50\mu\text{eV}$ , portanto vamos analisar o que acontece com as populações dos estados no regime em que  $\Omega \gg T_e$ .



**Figura 4.12:** Populações em função do tempo na condição em que  $\delta_1 = \delta_2 = \omega_{21} = 0$ . a)  $\Gamma_0^1 = 0$ , b)  $\Gamma_0^1 = 5 \mu\text{eV}$ , c) populações para tempos longos sob o efeito da decoerência. Em todas as situações  $\Omega = 10 \mu\text{eV}$ ,  $T_e = 20 \mu\text{eV}$ .



**Figura 4.13:** Populações em função do tempo na condição em que  $\delta_1 = 0$ ,  $\omega_{21} = \pm 50 \mu\text{eV}$ . a)  $\Gamma_0^1 = 0$ , b)  $\Gamma_0^1 = 5 \mu\text{eV}$ . Em todas as situações  $\Omega = 50 \mu\text{eV}$ ,  $T_e = 10 \mu\text{eV}$ .

A Figura 4.13 mostra que para os valores do campo elétrico  $\omega_{21} = \pm 50 \mu\text{eV}$  os estados do sistema apresentam um fenômeno de batimento. O batimento quântico é um fenômeno de interferência responsável por suprimir as oscilações de Rabi do sistema mesmo no caso isolado. Quando consideramos os efeitos da decoerência, observamos que todos os estados do sistema colapsam em um estado maximamente superposto entre  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ . Mesmo estando na condição de ressonância da dessintonia da transição brilhante não ocorre a inversão de população.

Podemos fazer duas análises distintas no regime estacionário do sistema: uma análise para um regime de acoplamento forte  $\Omega, T_e \gg \Gamma_0^1$  e uma análise para um regime de acoplamento fraco  $\Omega, T_e \leq 2\Gamma_0^1$ . No regime de acoplamento forte, poderemos comparar os resultados obtidos numericamente para as populações com os resultados analíticos para tempos longos e no regime de acoplamento fraco, seremos capazes de obter expressões analíticas para o elemento óptico de  $\rho$  e a susceptibilidade do meio. Considerando a matriz de densidade do sistema de três níveis, seu Hamiltoniano como definido na equação (4.22) e levando em consideração os efeitos de decoerência, podemos escrever as equações de movimento como:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{00} &= -i\Omega(\rho_{10} - \rho_{01}) + \Gamma_0^1\rho_{11} + \Gamma_0^2\rho_{22}, \\ \dot{\rho}_{01} &= -i[\Omega(\rho_{11} - \rho_{00}) - \delta_1\rho_{01} - T_e\rho_{02}] - \frac{\Gamma_0^1}{2}\rho_{01}, \\ \dot{\rho}_{02} &= -i[\Omega\rho_{12} - T_e\rho_{01} - \frac{(\delta_1 + \delta_2)}{2}\rho_{02}] - \frac{\Gamma_0^2}{2}\rho_{02}, \\ \dot{\rho}_{11} &= i[\Omega(\rho_{10} - \rho_{01}) + T_e(\rho_{12} - \rho_{21})] - \Gamma_0^1\rho_{11}, \\ \dot{\rho}_{12} &= -i[\frac{(\delta_1 - \delta_2)}{2}\rho_{12} + T_e(\rho_{22} - \rho_{11}) - \Omega\rho_{02}] - \frac{(\Gamma_0^1 + \Gamma_0^2)}{2}\rho_{12}, \\ \dot{\rho}_{22} &= iT_e(\rho_{21} - \rho_{12}) - \Gamma_0^2\rho_{22}.\end{aligned}\tag{4.30}$$

No regime estacionário, sabemos que  $\dot{\rho} = 0$ . Por efeito de simplicidade, no limite de acoplamento forte  $\Omega, T_e \gg \Gamma_0^1$  vamos analisar somente o caso completamente ressonante  $\delta_1 = \delta_2 = \omega_{21} = 0$ . Nessas condições podemos desprezar o valor da taxa de decoerência associada à transição escura tal que  $\Gamma_0^2 \approx 0$  visto que, naturalmente, ela já é bem menor que a taxa de decoerência da transição brilhante. De posse dessas aproximações podemos manipular algebricamente as equações (4.30), de onde decorre que  $\rho_{01}^{est} = \rho_{10}^{est} = 0$ ,  $\rho_{12}^{est} = \rho_{21}^{est} = 0$ ,  $\rho_{11}^{est} = \rho_{02}^{est} = \rho_{20}^{est}$ . Além disso, podemos escrever expressões para as populações dos estados  $|0\rangle$  e  $|2\rangle$ ,

$$\rho_{00}^{est} = -\frac{T_e}{\Omega}\rho_{02}, \quad \rho_{22}^{est} = -\frac{\Omega}{T_e}\rho_{02}.\tag{4.31}$$

De posse da relação de conservação da probabilidade,  $\rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{22} = 1$ , podemos escrever,

$$\begin{aligned}\rho_{00}^{est} &= \frac{T_e^2}{\Omega^2 + T_e^2}, \\ \rho_{22}^{est} &= \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + T_e^2}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

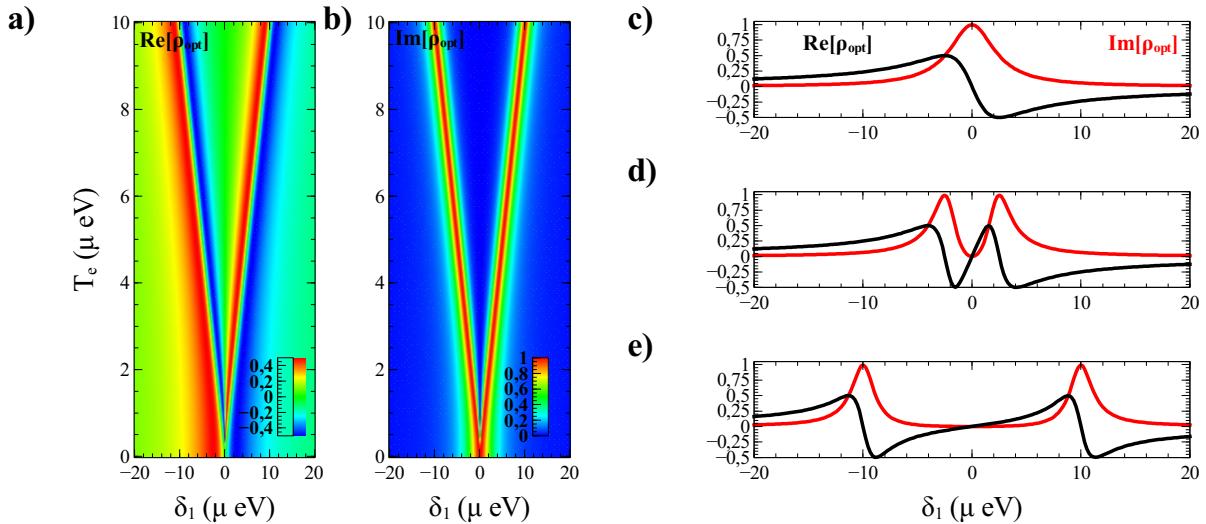
Podemos analisar os resultados da equação (4.32) para a situação do quadro (c) da Figura 4.10, que possui o seguinte par de acoplamentos ( $\Omega = 50\mu eV, T_e = 10\mu eV$ ). Tais valores de intensidade do laser e do fator de tunelamento nos levam aos valores  $\rho_{00}^{est} \approx 0.04$  e  $\rho_{22}^{est} \approx 0.96$  que são exatamente os observados no gráfico da população para tempos longos.

No quadro (c) da Figura 4.11, temos a situação em que os dois acoplamentos tem a mesma intensidade. Nessa situação as expressões analíticas obtidas nos levam aos valores de  $\rho_{00}^{est} = \rho_{22}^{est} = 0.5$ , assim como pode ser observado no gráfico. O mesmo pode ser visto para o quadro (c) da Figura 4.12. Um fato interessante a observar é que nesse limite de acoplamento forte, o elemento óptico do sistema se anula, entretanto, o elemento escuro<sup>2</sup>,  $\rho_{02}^{est}$ , não se anula e assume um valor puramente real.

No limite de acoplamento fraco onde  $\Omega, T_e \leq 2\Gamma_0^1$ , vamos considerar a seguinte situação: Imaginemos que após um certo tempo desligamos o acoplamento por luz de forma que  $\Omega = 0$ , dessa forma as populações dos estados  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  no regime estacionário ficam dadas como  $\rho_{00}^{est} \approx 1$ ,  $\rho_{11}^{est} = \rho_{22} \approx 0$  e consequentemente, o elemento que acopla os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  também é nulo ( $\rho_{12}^{est} \approx 0$ ). Após um tempo nessa situação religamos o laser, mantendo porém, a condição em que o acoplamento por luz é muito menor que o acoplamento por tunelamento o que fará com que as populações não sofram grandes alterações. Dessa forma reescrevendo as equações (4.30) é fácil ver que as únicas equações não identicamente nulas são as expressões para  $\rho_{01}^{est}$  e  $\rho_{02}^{est}$ , das quais decorre que,

$$\rho_{01}^{est} = \frac{2\Omega(\delta_1 + \delta_2 + i\Gamma_0^2)}{(2i\delta_1 - \Gamma_0^1)[i(\delta_1 + \delta_2) - \Gamma_0^2] + 4T_e^2}. \quad (4.33)$$

Na Figura 4.14 trazemos o gráfico das partes real e imaginária do elemento óptico da matriz de densidade como função da dessintonia da transição brillante para diversos valores de tunelamento, caracterizando os regimes ópticos associados ao sistema de três níveis em questão.



**Figura 4.14:** a) e b) mapa das partes real e imaginária do elemento óptico do sistema na condição em que  $\omega_{21} = 0$ , c) corte para  $T_e/\Gamma_0^1 = 0$ , d) corte para  $T_e/\Gamma_0^1 = 0.5$ , e) corte para  $T_e/\Gamma_0^1 = 2$ .

<sup>2</sup>O elemento escuro está ligado à transição escura  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$

Os quadros (a) e (b) da Figura 4.14 trazem os mapas das partes real e imaginária normalizadas do elemento óptico de  $\rho$  respectivamente e ao lado nos quadros (c), (d) e (e) apresentamos cortes desses mapas para diferentes valores do acoplamento por tunelamento  $T_e$ , mantendo fixa a intensidade do laser. Diferentemente do que ocorria no sistema de dois níveis, aqui com o aumento do acoplamento observamos a mudança dos regimes ópticos do sistema e ela está diretamente ligada à razão entre o tunelamento e a taxa de decoerência da transição brilhante. Exatamente na condição em que não temos tunelamento, ou seja, na condição em que o sistema se comporta como um sistema de dois níveis usual, observamos a completa reprodução do regime óptico que já havíamos observado para o sistema de dois níveis. Entretanto, o regime observado aqui é um pouco diferente. No caso do sistema de dois níveis o que observamos foi um regime de dispersão anômala fundamentalmente definido pela condição de que mesmo para grandes intensidades do acoplamento o espectro de absorção e de refração permanecia inalterado e isso certamente acontece porque não existem canais de interferência suficientes no sistema de dois níveis.

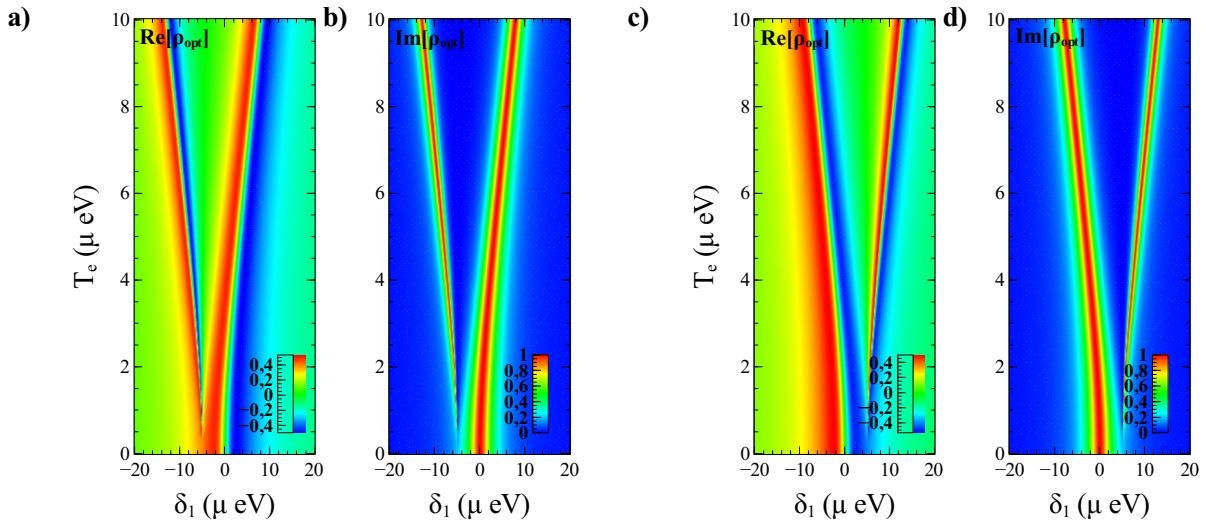
Para o caso em que  $T_e/\Gamma_0^1 = 0.5$ , observamos um fenômeno [135] óptico semelhante ao fenômeno conhecido como EIT [136]. Fundamentalmente, tratam-se do mesmo fenômeno, entretanto, rigorosamente, o fenômeno observado aqui é o fenômeno de TIT (transparência induzida por tunelamento) [137] já que o papel do acoplamento forte está sendo realizado pelo tunelamento e não por um campo eletromagnético como de costume. O fenômeno de EIT é um fenômeno de interferência destrutiva [138] associado a um fenômeno de CPT. O CPT ou armadilhamento coerente de população acontece quando algum dos estados do sistema durante a evolução temporal sujeito a uma fonte de excitação coerente se torna um estado robusto (protegido) e quando esse processo acontece associado a uma interferência entre duas amplitudes de espalhamento distintas, como por exemplo, uma devido à dispersão dentro de um contínuo de estados e outra devido a excitação de um estado discreto, temos as condições propícias para a ocorrência de um fenômeno de transparência [139].

Para que isso ocorra, a energia do estado ressonante (discreto) deve estar na mesma faixa de energia dos estados do contínuo que aqui atuam como um processo de segundo plano. Nas proximidades da energia ressonante, a amplitude de espalhamento do processo de fundo varia lentamente com a energia de excitação, enquanto que a amplitude de espalhamento ressonante muda tanto em magnitude quanto em fase rapidamente e essa variação cria uma interferência destrutiva no espectro de absorção do sistema formando uma janela estreita de transparência ao redor da linha espectral do processo ressonante.

Na condição em que  $T_e/\Gamma_0^1 > 0.5$ , observamos a gradual formação dos chamados DAT [140] e exatamente em  $T_e/\Gamma_0^1 = 2$  observamos seus picos afastados da frequência de ressonância do laser por um fator de  $2\Gamma_0^1$ .

O que acontece nesse regime pode ser interpretado de duas maneiras distintas: como um alargamento da janela de transparência associada ao fenômeno de EIT propiciado pelo aumento da intensidade do acoplamento forte ou como dois picos de absorção distintos [141] formados por uma espécie de efeito Stark dinâmico gerado pela separação do espectro de absorção ressonante em dois picos associados a frequências de dessintonização do laser opostas.

A Figura 4.15 traz o caso fora da ressonância do campo elétrico ( $\omega_{21} \neq 0$ ), onde podemos observar que os espectros de absorção e refração do sistema são alterados pelo campo de modo que um dos picos é deslocado para a direita ou para a esquerda exatamente do valor do módulo do campo elétrico aplicado.

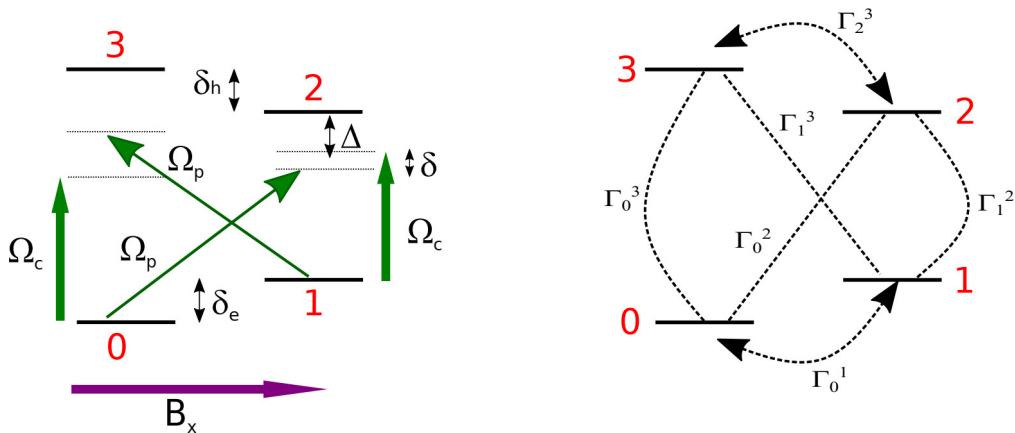


**Figura 4.15:** a) e b) mapa das partes real e imaginária do elemento óptico do sistema na condição em que  $\omega_{21} = +5\mu\text{eV}$ , c) e d) mapa das partes real e imaginária do elemento óptico do sistema na condição em que  $\omega_{21} = -5\mu\text{eV}$ .

Quando aplicamos um campo elétrico negativo observamos o deslocamento de um dos picos da região de ressonância do laser para a direita em uma dessintonia positiva, quando aplicamos um campo elétrico positivo observamos o deslocamento de um dos picos da região de ressonância do laser para a esquerda em uma dessintonia negativa. Para o regime sem tunnelamento os espectros não mudam e conforme aumentamos o acoplamento via tunnelamento o pico deslocado pelo campo elétrico sofre um ligeiro alargamento. Somente o regime de EIT é completamente destruído pela aplicação do campo, o regime dos DAT simplesmente sofre um deslocamento para a esquerda ou para a direita de um dos picos do doubleto. É perfeitamente razoável que o fenômeno de transparência tenha sido suprimido pela aplicação do campo elétrico visto que na Figura 4.13 observamos que a aplicação de um campo externo provoca gradualmente no sistema o aparecimento de batimentos quânticos [142] que suprimem para tempos longos a formação do estado robusto que origina o fenômeno de EIT. Na próxima seção vamos discutir as propriedades de um sistema de quatro níveis.

### 4.3 O sistema de quatro níveis

O sistema físico [143] apresentado na Figura 4.16 consiste de um PQ que foi inicialmente carregado com apenas um elétron na banda de condução [144]. Experimentalmente, essa situação pode ser obtida de várias formas como por exemplo pela criação de um exciton por um pulso de luz coerente, seguido pela aplicação de uma voltagem externa afim de remover o buraco por tunelamento em um processo bastante parecido com o que ocorre no sistema de três níveis discutido anteriormente. Entretanto, aqui não estamos interessados em formar excitons e sim trions [145]. Outro método bastante utilizado é a injeção de elétrons a partir de contatos metálicos com a aplicação de uma voltagem reversa criando uma espécie de armadilha pra que os elétrons fiquem presos no semicondutor e ainda há os métodos de dopagem [146] com materiais doadores de elétrons.



**Figura 4.16:** Esquema ilustrativo do sistema de quatro níveis na configuração de Voigt para o campo magnético. Os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  representam elétrons e os estados  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  representam trions.

Uma vez que se tenha conseguido carregar o PQ com um único elétron, podemos utilizar um laser para criar um exciton adicional (seguindo obviamente as regras de seleção) o que nos proporciona a formação de um exciton carregado comumente chamado de trion. Um trion nada mais é do que um exciton associado a um elétron ou a um buraco solitário. Quando o exciton está ligado a um elétron dizemos que se trata de um trion carregado negativamente e quando ele está ligado a um buraco dizemos que se trata de um trion carregado positivamente. Efetivamente, com esse procedimento, criamos um sistema de quatro níveis, entretanto, os estados devidos aos elétrons e os estados devidos aos trions tornam-se degenerados entre si de modo que, afim de quebrar a degenerescência deles, podemos aplicar um campo magnético externo ao sistema. A escolha da direção de aplicação do campo magnético é de extrema importância para a eficiente manipulação dos estados de spin do sistema. Por exemplo, se aplicarmos o campo magnético paralelo à direção de propagação da onda ele-

tromagnética (laser), que neste caso coincide com a direção de crescimento do PQ, teremos o que é comumente chamado de configuração de Faraday para o campo magnético. Nessa configuração conseguimos via efeito Zeeman a separação energética dos níveis<sup>3</sup> dados por  $|\uparrow\rangle$  (elétron spin up),  $|\downarrow\rangle$  (elétron spin down),  $|\uparrow\downarrow, \uparrow\rangle$  (trion, com buraco spin up) e  $|\uparrow\downarrow, \downarrow\rangle$  (trion com buraco spin down), entretanto, as regras de seleção dos estados anteriormente degenerados continuam preservadas e isso não é útil para os fins deste trabalho. Entretanto, existe uma segunda configuração de campo magnético aplicado chamada configuração de Voigt [147] na qual o campo magnético externo é aplicado na direção perpendicular ao crescimento do material e à propagação da radiação eletromagnética. Além da quebra de degenerescência entre os estados de energia, a aplicação do campo nessa direção provoca uma mistura dos estados do sistema o que altera as regras de seleção [148] proporcionando uma maior faixa de possibilidades de transições ópticas. Nessas condições, podemos definir os estados do nosso sistema de quatro níveis composto por elétrons e trions sobre a aplicação de um campo magnético externo na direção x como:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \\ |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \\ |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\uparrow\downarrow, \uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow, \downarrow\rangle), \\ |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow, \uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow, \downarrow\rangle). \end{aligned} \quad (4.34)$$

A princípio, o sistema em questão apresenta uma dependência temporal explícita ligada aos lasers de prova e controle, entretanto, aplicando a aproximação de onda girante com uma transformação unitária conveniente conseguimos retirar a dependência temporal associada ao laser de controle. A dependência temporal associada ao laser de prova após a aproximação de onda girante fica dada por  $(\Omega_p/2)e^{-i\hbar(\omega_c - \omega_p)t + i\phi}$ , onde para efeito de simplicidade, no presente trabalho vamos sempre adotar a condição ressonante entre prova e controle tal que  $\omega_c = \omega_p$  e uma fase relativa entre eles  $\phi = 0$ . Dessa forma podemos escrever o Hamiltoniano RWA [149] (ver apêndice C) associado à dinâmica do sistema como,

$$H = \begin{pmatrix} -\delta_e & 0 & \frac{\Omega_p}{2} & \frac{\Omega_c}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\Omega_c}{2} & \frac{\Omega_p}{2} \\ \frac{\Omega_p}{2} & \frac{\Omega_c}{2} & \Delta & 0 \\ \frac{\Omega_c}{2} & \frac{\Omega_p}{2} & 0 & \Delta + \delta_h \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

onde  $\delta_e$  e  $\delta_h$  são as dessintonias do campo magnético associadas respectivamente aos elétrons e aos buracos do sistema. A dessintonia dos elétrons  $\delta_e$  está ligada à separação entre

---

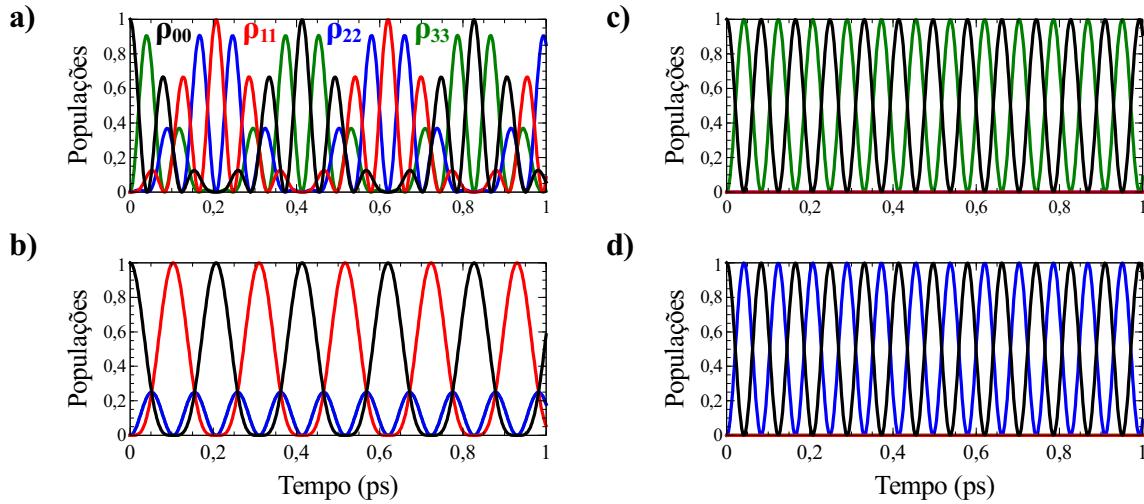
<sup>3</sup>A notação aqui refere setas  $\uparrow, \downarrow$  a elétrons e setas  $\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow$  a buracos.

os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  e a dessintonia dos buracos  $\delta_h$  está ligada à separação entre os estados  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  proporcionadas pelo campo magnético aplicado. Essas dessintonias, são definidas em função dos fatores giromagnéticos de elétrons ( $g_e$ ) e buracos ( $g_h$ ) e do campo magnético externo tendo como constante de proporcionalidade o magneton de Bohr. Para o caso dos estados de elétrons a dessintonia  $\delta_e = g_e\mu_B B_x$  e para o caso dos estados de trions a dessintonia  $\delta_h = g_h\mu_B B_x$ . Assim, fica fácil observar que o campo magnético externo afeta simultaneamente os estados de elétrons e os estados de trions visto que  $\delta_e = \frac{g_e}{g_h}\delta_h$ . Em outras palavras, o afastamento ou a aproximação dos estados de elétrons faz com que os estados de trions também se aproximem ou afastem simultaneamente. A dessintonia óptica  $\Delta$  desempenha a função de sintonizar a ressonância entre os lasers de prova e controle. De posse dessas informações e adotando os efeitos de decoerência, podemos escrever as equações de movimento do sistema como abaixo:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho_{00}} &= \Gamma_0^3\rho_{33} - \Gamma_0^2\rho_{22} - \frac{i}{2}[\Omega_p(\rho_{02} - \rho_{20}) - \Omega_c(\rho_{03} + \rho_{30})], \\
\dot{\rho_{01}} &= -\Gamma_0^1\rho_{01} - \frac{i}{2}[\Omega_p(\rho_{21} - \rho_{03}) + \Omega_c(\rho_{31} - \rho_{02}) - 2\rho_{01}\delta_e], \\
\dot{\rho_{02}} &= -\Gamma_0^2\rho_{02} - \frac{i}{2}[\Omega_p(\rho_{22} - \rho_{00}) + \Omega_c(\rho_{32} - \rho_{01}) - 2\rho_{02}(\delta_e + \Delta)], \\
\dot{\rho_{03}} &= -\Gamma_0^3\rho_{03} - \frac{i}{2}[\Omega_p(\rho_{23} - \rho_{01}) + \Omega_c(\rho_{33} - \rho_{00}) - 2\rho_{03}(\delta_e + \Delta + \delta_h)], \\
\dot{\rho_{11}} &= \Gamma_1^3\rho_{33} + \Gamma_1^2\rho_{22} + \frac{i}{2}[\Omega_p(\rho_{13} - \rho_{31}) + \Omega_c(\rho_{12} - \rho_{21})], \\
\dot{\rho_{12}} &= -\Gamma_1^2\rho_{12} - \frac{i}{2}[\Omega_p(\rho_{32} - \rho_{10}) + \Omega_c(\rho_{22} - \rho_{11}) - 2\rho_{12}\Delta], \\
\dot{\rho_{02}} &= -\Gamma_1^3\rho_{13} - \frac{i}{2}[\Omega_p(\rho_{33} - \rho_{11}) + \Omega_c(\rho_{23} - \rho_{10}) - 2\rho_{13}(\delta_h + \Delta)], \\
\dot{\rho_{22}} &= -(\Gamma_1^2 + \Gamma_0^2)\rho_{22} - \frac{i}{2}[\Omega_p(\rho_{02} - \rho_{20}) + \Omega_c(\rho_{12} - \rho_{21})], \\
\dot{\rho_{23}} &= -\Gamma_2^3\rho_{23} - \frac{i}{2}[\Omega_p(\rho_{03} - \rho_{21}) + \Omega_c(\rho_{13} - \rho_{20}) - 2\rho_{23}\delta_h], \\
\dot{\rho_{33}} &= -(\Gamma_1^3 + \Gamma_0^3)\rho_{33} - \frac{i}{2}[\Omega_p(\rho_{13} - \rho_{31}) + \Omega_c(\rho_{03} - \rho_{30})].
\end{aligned} \tag{4.36}$$

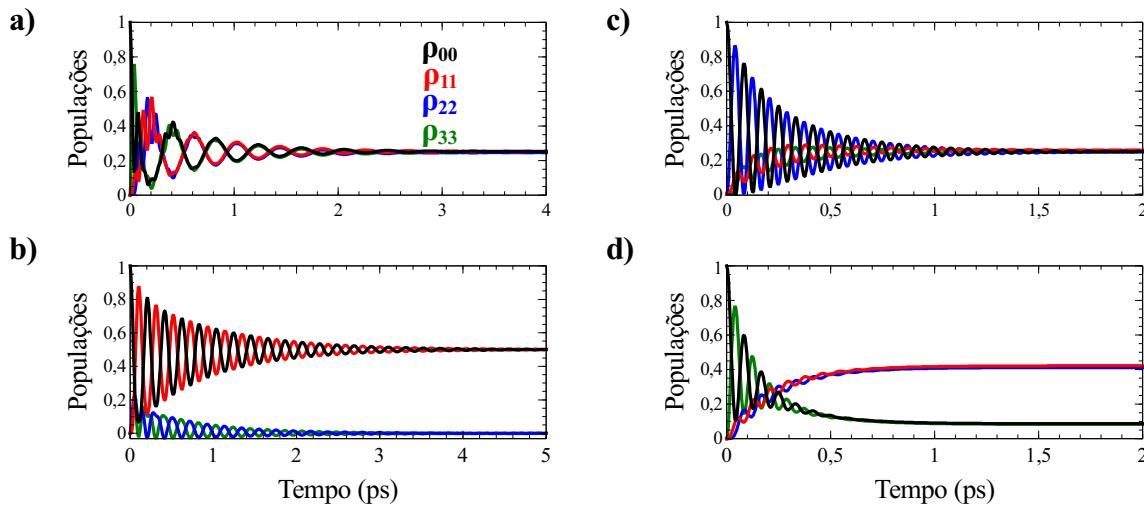
Na Figura 4.17, trazemos o gráfico das populações dos estados  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  na condição de ressonância completa dada por  $\delta_e = \delta_h = \Delta = 0$  para diferentes regimes de acoplamento entre os lasers de prova e controle. No quadro (a) estamos em um regime em que  $\Omega_c \gg \Omega_p$  e é possível observar a formação de batimentos quânticos entre os quatro estados do sistema. No quadro (b) passamos ao regime em que a intensidade dos lasers de prova e controle é equivalente e o que observamos é que, nesse regime, o sistema parece se comportar como um sistema de três níveis com as populações dos estados de trion degeneradas, enquanto toda a inversão de população se faz entre os estados de elétrons em uma situação muito semelhante à observada no quadro (a) da Figura 4.11 no sistema de três níveis discutido anteriormente. No quadros (c) e (d) estamos em regimes onde um dos dois acoplamentos por

luz está desligado e o que observamos é que, a princípio, as duas situações são equivalentes, entretanto, em cada uma das situações o sistema se porta como um sistema de dois níveis distintos. Quando o laser de controle está desligado o sistema de dois níveis ativo é formado entre os estados  $|0\rangle$  e  $|3\rangle$  e quando o laser de prova está desligado o sistema de dois níveis ativo é formado entre os estados  $|0\rangle$  e  $|2\rangle$ . Em ambas as situações o estado  $|1\rangle$  não contribui.



**Figura 4.17:** Populações em função do tempo na condição em que  $\delta_e = \delta_h = \Delta = 0$ . a)  $\Omega_c = 50\mu\text{eV}$ ,  $\Omega_p = 10\mu\text{eV}$ , b)  $\Omega_c = 20\mu\text{eV}$ ,  $\Omega_p = 20\mu\text{eV}$ , c)  $\Omega_c = 0$ ,  $\Omega_p = 50\mu\text{eV}$ , d)  $\Omega_c = 50\mu\text{eV}$ ,  $\Omega_p = 0$ . Em todas as situações  $\Gamma_i^j = 0$ .

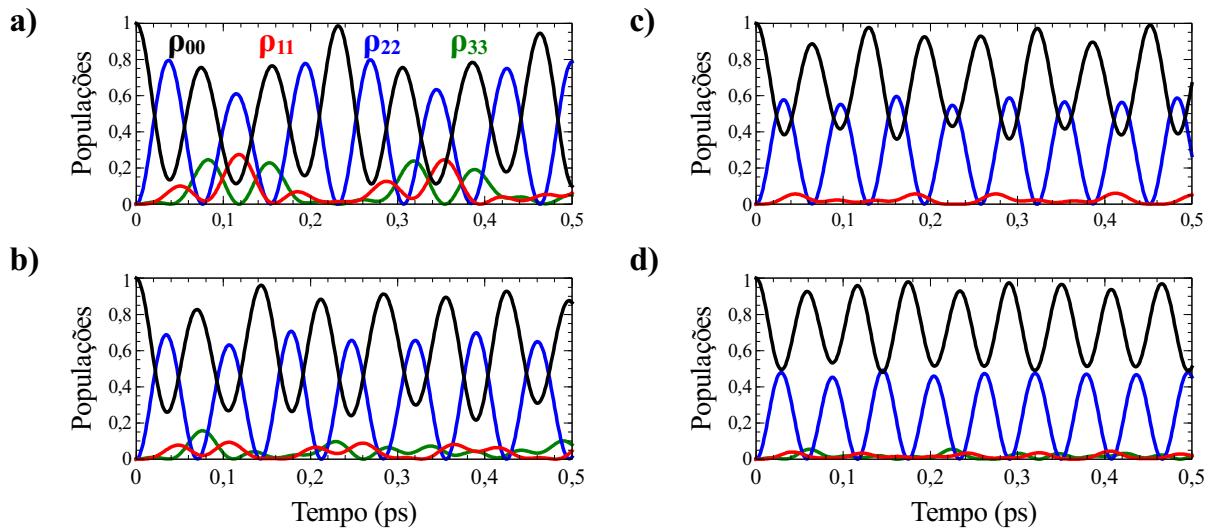
Na Figura 4.18, trazemos as mesmas situações da Figura 4.17 mas agora sob o efeito da decoerência.



**Figura 4.18:** Populações em função do tempo na condição em que  $\delta_e = \delta_h = \Delta = 0$ . a)  $\Omega_c = 50\mu\text{eV}$ ,  $\Omega_p = 10\mu\text{eV}$ , b)  $\Omega_c = 20\mu\text{eV}$ ,  $\Omega_p = 20\mu\text{eV}$ , c)  $\Omega_c = 0$ ,  $\Omega_p = 50\mu\text{eV}$ , d)  $\Omega_c = 50\mu\text{eV}$ ,  $\Omega_p = 0$ . Em todas as situações  $\Gamma = 5\mu\text{eV}$ ,  $\gamma = 1\mu\text{eV}$ .

Em suma, no quadro (a) observamos a concretização do efeito dos batimentos quânticos sobre os estados do sistema. Analogamente ao que aconteceu no sistema de três níveis (no quadro (b) da Figura 4.13) aqui o efeito dos batimentos associados ao efeito da decoerência colapsou os estados do sistema para um estado estacionário maximamente superposto entre  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$ , o que com toda certeza irá afetar os regimes ópticos do sistema, em especial a observação do fenômeno de EIT. No quadro (b) ocorre que as populações dos estados de elétron tendem a contribuir de forma igualitária para tempos longos, analogamente ao que ocorre nas mesmas condições de acoplamento para o sistema de três níveis, como pode ser visto no quadro (c) da Figura 4.11. Nos quadros (c) e (d) observa-se o esperado para sistemas de dois níveis, as populações dos estados tendem a se igualar para tempos longos.

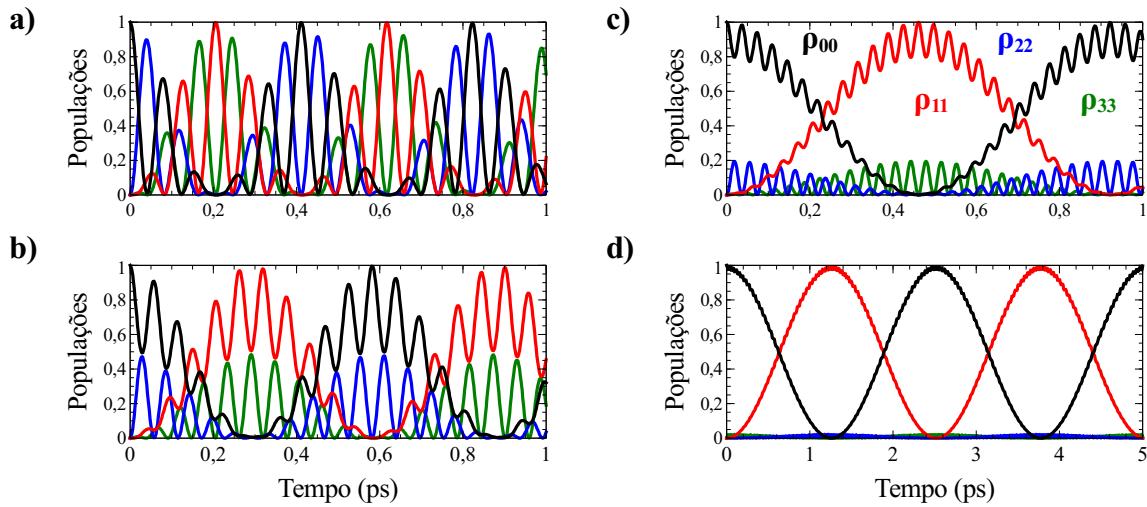
Na Figura 4.19 observamos quais são os efeitos de dessintonizar os níveis de elétrons e trions no regime de acoplamento em que  $\Omega_c > \Omega_p$ . Esse regime é interessante por causa dos batimentos quânticos observados. A questão é que o aumento gradual das dessintonias de elétrons e buracos provoca a extinção dos batimentos do sistema mas não recupera as oscilações de Rabi, tais como as observadas para os sistemas de dois e três níveis. O que acontece, entretanto, é que as dessintonias do campo magnético reduzem o comportamento das populações a algo muito semelhante ao observado para o sistema de dois níveis na Figura 4.4 quando do aumento da dessintonia do laser. Aqui o aumento gradativo e simultâneo das dessintonias do campo magnético leva o sistema a se comportar como um sistema de dois níveis entre os estados  $|0\rangle$  e  $|2\rangle$ .



**Figura 4.19:** Populações em função do tempo na condição em que  $\Delta = 0$ ,  $\delta_e = (g_e/g_h)\delta_h$ . a)  $\delta_h = \pm 10\mu\text{eV}$ , b)  $\delta_h = \pm 15\mu\text{eV}$ , c)  $\delta_h = \pm 20\mu\text{eV}$ , d)  $\delta_h = \pm 25\mu\text{eV}$ . Em todas as situações  $\Gamma_i^j = 0$ .

Na Figura 4.20 observamos quais são os efeitos sobre o sistema da manipulação da desintonia óptica  $\Delta$  entre os lasers de prova e controle. A princípio nota-se que o efeito que

$\Delta$  provoca no sistema é bastante inferior ao que  $\delta_e$  e  $\delta_h$  provocam, visto que para que  $\Delta$  comece a modificar de forma visível as populações é preciso tomar valores bem altos. Com o aumento da dessintonia óptica observamos primeiramente a supressão vertical dos batimentos dos estados de trions enquanto ocorre um alargamento no período dos batimentos dos estados de elétrons. Para valores cada vez maiores de  $\Delta$ , tanto os batimentos dos estados de elétrons quanto dos estados de trions somem, mas somente os estados de trions deixam de contribuir para a inversão de população do sistema. No limite em que  $\Delta \rightarrow \infty$  observamos a formação de um sistema de dois níveis com oscilações de Rabi bem definidas entre os dois estados de elétron como se o elétron tivesse ficado armadilhado entre esses dois estados.

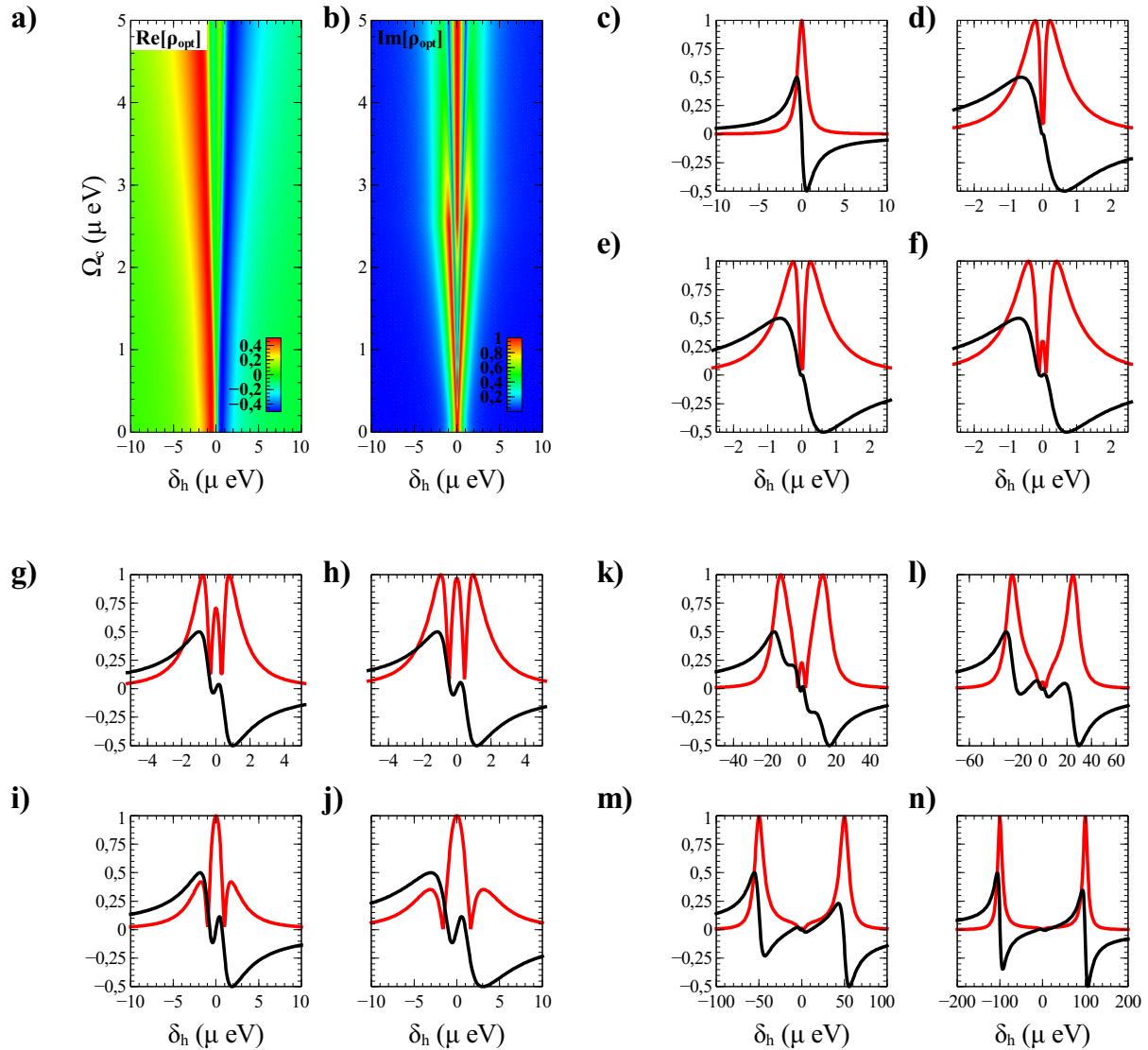


**Figura 4.20:** Populações em função do tempo na condição em que  $\delta_e = \delta_h = 0$ . a)  $\Delta = \pm 5 \mu eV$ , b)  $\Delta = \pm 50 \mu eV$ , c)  $\Delta = \pm 100 \mu eV$ , d)  $\Delta = \pm 300 \mu eV$ . Em todas as situações  $\Gamma_i^j = 0$ .

Podemos agora fazer uma análise no regime estacionário afim de obter expressões para as propriedades ópticas do meio como função das variáveis do Hamiltoniano. Consideremos um regime de acoplamento fraco para tempos longos de modo que  $\Omega_c, \Omega_p \ll \Gamma_i^j$ . Nessas condições, imaginemos que por um período de tempo desligamos desligado o laser de controle de modo que  $\rho_{00}^{est} \approx 1$ ,  $\rho_{11}^{est} = \rho_{22}^{est} = \rho_{33}^{est} \approx 0$ . E dessa forma todos os elementos ligados direta ou indiretamente pelo laser de controle serão identicamente nulos, ou seja,  $\rho_{12}^{est} = \rho_{03}^{est} = \rho_{23}^{est} \approx 0$ . Após um certo tempo religamos o laser de controle mantendo a condição de acoplamento fraco e assim os elementos de  $\rho$  não nulos podem ser reescritos. Após alguma manipulação algébrica, é possível obter o elemento óptico do laser de prova, de onde podemos extrair a susceptibilidade óptica do meio,

$$\rho_{02}^{est} = -\frac{i\Omega_p[4(-\Gamma_0^1 + i\delta_e)(\Gamma_1^3 + i(\delta_h + \Delta)) - \Omega_c^2]}{2[(-\Gamma_0^2 + i(\delta_e + \Delta))[4(-\Gamma_0^1 + i\delta_e)(\Gamma_1^3 + i(\delta_h + \Delta)) - \Omega_c^2] + \Omega_c^2(\Gamma_1^3 + i(\delta_h + \Delta))]} \quad (4.37)$$

Na Figura 4.21 apresentamos os regimes ópticos do sistema de quatro níveis. Tomamos as taxas de decoerência do sistema de acordo com dados encontrados na literatura para sistemas físicos semelhantes de forma que  $\Gamma_0^3 = \Gamma_1^2 = \Gamma_2^3 = \Gamma$ ,  $\Gamma_0^2 = \Gamma_1^3 = \gamma$  e  $\Gamma_0^1 = 0$  e adotamos a condição de ressonância da dessintonia óptica  $\Delta = 0$ , considerando a dependência entre as dessintonias do campo magnético  $\delta_h = \frac{g_h}{g_e} \delta_e$ .



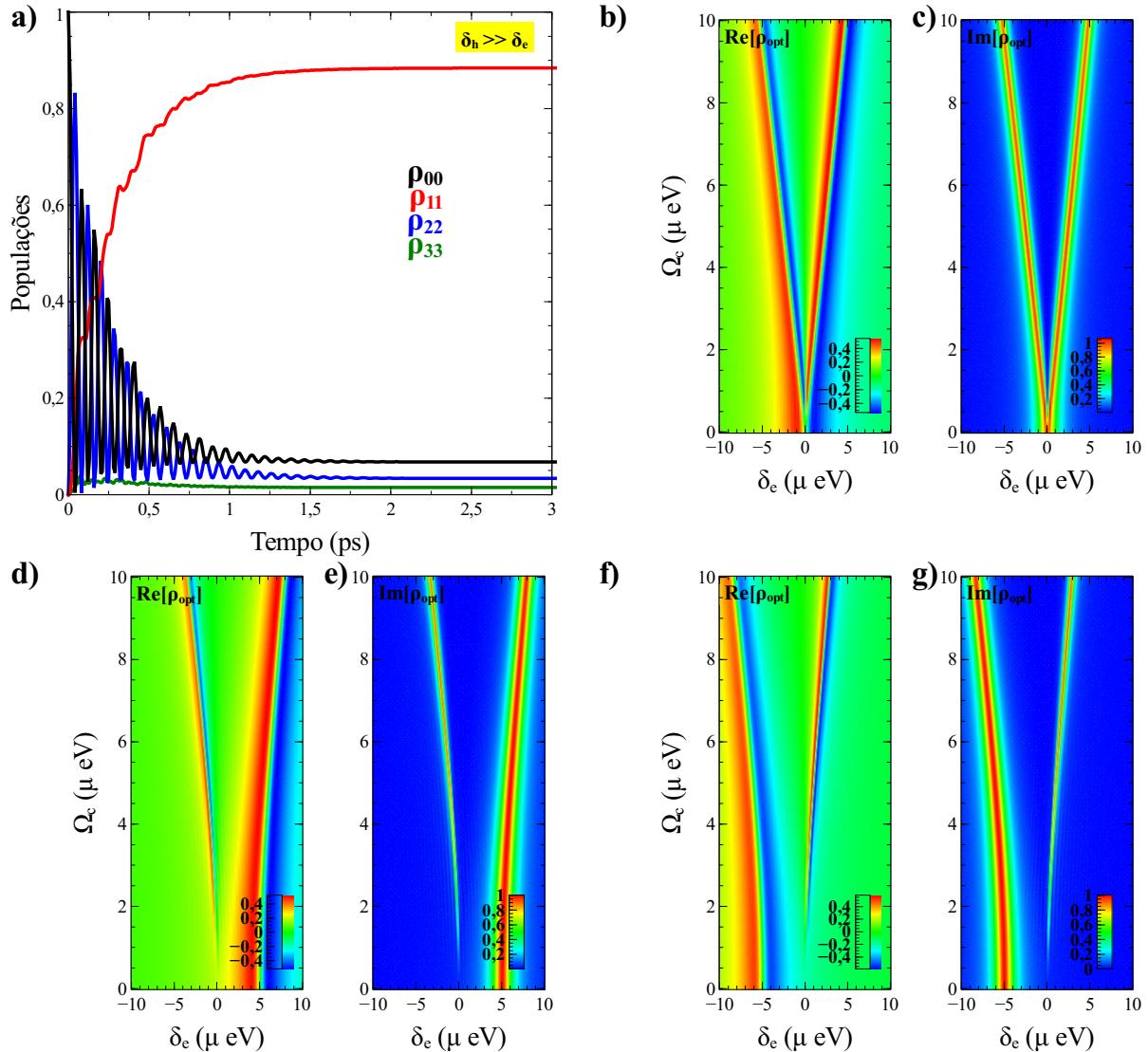
**Figura 4.21:** a) e b) mapas das partes real e imaginária do elemento óptico, c) corte para  $\Omega_c = 0$ , d)  $\Omega_c = 0.1\Gamma$ , e)  $\Omega_c = 0.12\Gamma$ , f)  $\Omega_c = 0.2\Gamma$ , g)  $\Omega_c = 0.4\Gamma$ , h)  $\Omega_c = 0.5\Gamma$ , i)  $\Omega_c = \Gamma$ , j)  $\Omega_c = 2\Gamma$ , k)  $\Omega_c = 10\Gamma$ , l)  $\Omega_c = 20\Gamma$ , m)  $\Omega_c = 40\Gamma$ , n)  $\Omega_c = 80\Gamma$ . Em todas as situações  $\Omega_p = 0.1\mu\text{eV}$ ,  $\Gamma = 5\mu\text{eV}$  e  $\gamma = 1\mu\text{eV}$ .

Os quadros (a) e (b) da Figura 4.21 mostram os mapas das partes real e imaginária do elemento óptico de prova do sistema como função da dessintonia  $\delta_h$  e da intensidade do laser de controle  $\Omega_c$ . Nos quadros de (c) a (i) temos cortes desses mapas para diferentes valores do laser de controle e nos quadros de (j) a (n) temos alguns gráficos extras dos regimes

ópticos do sistema para valores de  $\Omega_c$  substancialmente grandes. Nota-se por exemplo que na ausência do laser de controle (quadro (c)) o sistema exibe um regime óptico comum aos sistemas de dois e três níveis na ausência de um dos acoplamentos, o regime de dispersão anômala. Nos quadros (d) e (e) observamos o que a princípio parecia ser um fenômeno de EIT mas apesar da anulação do coeficiente de absorção em torno da ressonância não se observa uma mudança brusca no índice de refração na mesma região, o que leva a concluir que ocorre interferência destrutiva mas que ela não está acompanhada de um fenômeno de CPT eficiente por causa da coincidência entre a frequência de batimentos quânticos do sistema com a ressonância completa das dessintonias. Entretanto, essa hipótese só pode ser corroborada se no regime óptico observado aqui a velocidade de grupo da onda não cair bruscamente em relação à velocidade da luz, como é característico de um fenômeno de EIT genuíno. Nos quadros (f) até (j) observamos o surgimento de um regime óptico que ainda não havia sido observado no presente trabalho, o regime dos TRM [150], que pode ser perfeitamente contemplado no quadro (h) exatamente quando a razão entre  $\Omega_c$  e  $\Gamma$  é 0.5. O aparecimento desse regime óptico peculiar [151] é consequência direta da coincidência entre as frequências de batimento e de ressonância que provocam um fenômeno de interferência construtiva [152]. Os quadros de (k) a (n) mostram um certo exagero na intensidade de  $\Omega_c$  que surpreendentemente levaram a um regime de DAT.

Rigorosamente, sabemos que as dessintonias do campo magnético ligadas às separações entre os estados de elétrons e de trions são dependentes e a modificação de uma delas afeta a outra. Entretanto, existem alguns trabalhos na literatura acerca de sistemas físicos semelhantes ao nosso sistema de quatro níveis que propõem o desacoplamento de um dos estados de trion do sistema, fazendo com que a dessintonia associada a ele assuma valores muito maiores que os dos demais parâmetros do sistema. Em suma, o que eles propõem é que o sistema de quatro níveis em questão possa ser aproximado por um sistema de três níveis muito fracamente ligado a um quarto nível. Essa proposta é justificada por eles para a observação do fenômeno de EIT em sistemas de quatro níveis análogos ao do presente trabalho.

Na Figura 4.22, apresentamos os regimes ópticos para essa situação proposta na literatura onde  $\delta_h \gg \delta_e$ , o que tem como consequência a inversão entre prova e controle, de modo que  $\Omega_c^{NOVO} = \Omega_p$  e  $\Omega_p^{NOVO} = \Omega_c$ . Primeiramente, no quadro (a) podemos observar que de fato essa aproximação induz no sistema a formação de um estado robusto formado pelo estado  $|1\rangle$ . Nos quadros (b) e (c) podemos notar que os mapas das partes real e imaginária dos elementos ópticos do laser de prova são os mesmos observados na Figura 4.14 do sistema de três níveis anteriormente discutido. Outro fato interessante é que aqui, o análogo do campo elétrico  $\omega_{21}$  do sistema de três níveis é a dessintonia óptica  $\Delta$ , e isso pode ser visto nos quadros (d), (e), (f) e (g) que reproduzem perfeitamente o comportamento do sistema de três níveis quando da aplicação de um campo externo.



**Figura 4.22:** a) Populações em função do tempo para o caso em que  $\delta_h = 100\mu\text{eV}$ ,  $\delta_e = 0$ , b) e c) mapas das partes real e imaginária do elemento óptico na condição em que  $\Delta = 0$ , d) e e)  $\Delta = -5\mu\text{eV}$ , f) e g)  $\Delta = +5\mu\text{eV}$ . Em todas as situações  $\Omega_p = 0.1\mu\text{eV}$ ,  $\Gamma = 5\mu\text{eV}$  e  $\gamma = 1\mu\text{eV}$ .

No próximo capítulo vamos apresentar nossos resultados acerca das fases geométricas de Berry e Pancharatnam para os sistemas de dois e três níveis.

# Capítulo 5

## Fases Geométricas em Pontos Quânticos

### 5.1 Motivação

No seio da mecânica clássica podemos descrever de forma completa o movimento dos corpos através de sua função horária, que nada mais é do que a solução da segunda lei de Newton. Na MQ, em contrapartida, tudo que se faça necessário saber está contido na função de onda que é fundamentalmente uma variável complexa em oposição a função horária da mecânica clássica que é puramente real. Entretanto, a interpretação probabilística dada à MQ define a quantidade  $\Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$  como a probabilidade de encontrar uma partícula, ou um conjunto de partículas em uma dada região do espaço delimitada por  $\vec{r}$  em um instante de tempo  $t$ . Assim como qualquer número complexo, a função de onda  $\Psi$  pode ser escrita em função de seu módulo e de uma fase que representa o ângulo formado no plano complexo entre suas partes real e imaginária:  $\Psi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|e^{i\theta(\vec{r}, t)}$ . É muito comum porém que desprezemos essa fase associada à função de onda visto que a função densidade de probabilidade se mostra independente da fase. Entretanto, devemos nos atentar ao fato de que ao desprezarmos esse termo de fase, estamos ignorando o caráter ondulatório da matéria e deixando de olhar para uma parte importante da informação contida no sistema físico. Um modo eficaz de verificar a importância do termo de fase associado à função de onda é através da realização de experimentos de interferência como os realizados por Young [153].

Os efeitos de interferência nesses experimentos tem origem na superposição de funções de onda que representam, em suma, a mesma partícula. Do ponto de vista clássico tal afirmação beira ao absurdo, já que uma partícula clássica pontual não pode ser representada por duas funções horárias de posição, mas no escopo da MQ é perfeitamente aceitável que uma onda seja descrita como a superposição de outras duas ondas. Independente da partícula com a qual se realize o experimento de dupla fenda, o padrão de interferência que podemos observar no anteparo sugere que após as partículas passarem pelas duas fendas suas funções de onda sejam compostas pela superposição das funções de onda das partículas que passaram pela primeira fenda com as funções de onda das partículas que passaram pela segunda fenda, for-

mando no anteparo um padrão de interferência que representa a probabilidade de encontrar as partículas em uma dada região. O que se observa é que a posição do centro desse padrão de interferência está relacionada com as fases adquiridas pelas componentes da função de onda. Em outras palavras, o termo de fase associado às funções de onda carrega consigo uma espécie de memória do trajeto feito pelas partículas e de todos os fenômenos aos quais o sistema físico esteve sujeito durante o trajeto, o que torna o estudo do comportamento do termo de fase adquirida pelos estados quânticos do sistema crucial para a compreensão do mesmo.

## 5.2 Um pouco de história

A priori é impossível diferenciar os estados final e inicial de um sistema clássico que passou por uma evolução cíclica, ou seja, uma evolução em que o sistema retorna ao seu estado inicial após algum tempo. Em 1984, Berry [154] atentou para um aspecto dos sistemas dinâmicos que sofrem evoluções cíclicas que até então era completamente ignorado. Ele verificou que o cálculo do fator de fase [155] da função de onda não depende simplesmente da evolução temporal do Hamiltoniano. A função de onda desse sistema quântico retém, além do fator de fase dinâmica que depende da evolução temporal do Hamiltoniano, um fator de fase conhecido como fase geométrica que depende da trajetória no espaço dos estados do sistema. A fase [156] total adquirida por um estado após uma evolução é a soma de suas fases geométrica e dinâmica. Apesar da formulação inicial ter sido feita para sistemas quânticos, sua generalização para sistemas clássicos originou debates referentes a sua origem física: quântica ou clássica.

Em 1956, Pancharatnam [157] já havia antecipado a existência de fases geométricas ao determinar a mudança de fase observada em um feixe de luz polarizado que passou por uma sequência de polarizadores tal que sua direção de polarização final fosse a mesma que a direção de polarização inicial. Esta fase pode ser medida por interferência deste feixe com outro feixe coerente. Pancharatnam usou esta definição de diferença de fase para analisar uma sequência de três mudanças na polarização de um feixe que passa por polarizadores. Após esta sequência de transformações, a polarização final é a mesma que a polarização inicial, ou seja, o estado A evolui para um estado B e depois evolui para um estado C e retorna para um estado A' que possui a mesma polarização inicial. Considerando a natureza quântica da luz, A descreve o estado de uma onda luminosa polarizada representando o conjunto de valores necessários para descrever um estado completamente. Todos os valores de A' com exceção da fase de polarização são idênticos aos de A. Portanto, esta não é uma evolução cíclica. Assim, a diferença de fase observada vem da diferença de fase entre os estados inicial e final de um fóton representada pelo ângulo sólido entre os estados A, B e C na esfera de Poincaré.

---

Pancharatnam concluiu que se as trajetórias envolverem somente deslocamentos curvos na superfície da esfera de Poincaré (geodésicas) separando dois estados distintos do sistema, então a fase adquirida é puramente geométrica mas se as trajetórias entre dois estados distintos do sistema forem representadas somente por deslocamentos não curvos (não geodésicos) a fase [158] adquirida pelo sistema é puramente dinâmica e advinda unicamente da evolução temporal do Hamiltoniano do sistema. Em seus estudos, Berry [159] observou que, em geral, o aparecimento de uma fase quântica pode ocorrer sempre que existam pelo menos dois parâmetros físicos variando adiabaticamente na proximidade de algum tipo de singularidade ou anomalia na topologia do sistema.

Ele observou que pelo menos dois parâmetros são necessários porque a variação deles mutuamente produz estados não singulares e o conjunto desses estados não é simplesmente conexo ou apresenta holonomia [160] não trivial. Uma região simplesmente conexa não apresenta furos e é portanto continua. Por exemplo, um círculo é simplesmente conexo mas um torus não é, uma vez que consiste de duas regiões desconectadas entre si. A holonomia está associada a simetria das geometrias do meio. Por exemplo a esfera apresenta holonomia trivial já que apresenta a simetria de uma região simplesmente conexa já o torus apresenta holonomia não trivial por apresentar um furo em sua conectividade geométrica.

As onda são caracterizadas por uma amplitude e uma fase e ambas podem variar como uma função dos parâmetros da hamiltoniana. A fase geométrica ocorre quando ambos os parâmetros são alterados simultaneamente de forma adiabática e depois são trazidos de volta à condição inicial. Seria de se esperar que as ondas no sistema voltassem perfeitamente ao seu estado inicial mas no entanto se a mudança dos parâmetros da hamiltoniana corresponderem a um laço não trivial, os estados final e inicial irão diferir de uma fase e essa é a chamada fase geométrica. Historicamente diversos fenômenos físicos a princípio não compreendidos em sua totalidade encontraram na ideia de fase geométrica uma explicação satisfatória. Por exemplo, a mudança na polarização de luz linearmente polarizada que entra numa fibra óptica com um único modo vibracional. Suponhamos que a fibra esteja colocada ao longo de um caminho retilíneo no espaço de forma que a luz saia da fibra óptica no mesmo sentido em que entrou. Experimentalmente, observa-se que as polarizações final e inicial da luz são diferentes. Entretanto, não há forças ou quaisquer agentes que poderiam girar a polarização da luz, a única condição mantida é a de que a luz entre e saia tangente à fibra o que mais tarde com o advento das teorias sobre as fases geométricas provou ser o bastante pra introduzir uma fase no sistema. Um exemplo muito mais antigo porém, é o famoso pêndulo de Foucault concebido para comprovar o movimento de rotação da Terra. A primeira demonstração desse aparato data de 1851, quando um pêndulo foi fixado junto ao teto do Phanteon de París por um fio e solto a oscilar despejando durante seu movimento um rastro de areia no chão afim de marcar a trajetória executada pela massa pendular.

Entretanto, observou-se que os rastros deixados no chão não se sobreponham a cada período completo do pêndulo deixando entre eles um espaçamento. Por muito tempo acreditou-se que a explicação para tal fenômeno eram as forças de Coriolis que deslocavam a posição final do pêndulo a cada ciclo mas com o advento da teoria de Berry pode-se demonstrar que se tratava de uma fase geométrica adquirida pelo sistema dada a variação conjunta dos parâmetros da hamiltoniana. O espaçamento observado compreende o ângulo sólido entre o eixo do pêndulo e a direção em que ele oscila.

Talvez o exemplo mais difundido de aplicação do conceito de fase geométrica na MQ seja o efeito Aharonov-Bohm [161], no qual uma partícula pontual eletricamente carregada é afetada por um campo eletromagnético mesmo estando confinada em uma região onde  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são nulos. Aharonov e Bohm conceberam a ideia de que o potencial vetor magnético se acopla com a fase da função de onda da partícula carregada modificando o estado dessa partícula mesmo que ela não tenha estado sujeita a um campo magnético, fato este que foi comprovado em um experimento do tipo dupla fenda fazendo dois feixes de elétrons passarem por dentro de um solenóide muito longo e observando o padrão de interferência deles após passar pelo aparato.

### 5.3 Teorema Adiabático

Em 1916 Ehrenfest cunhou a chamada hipótese adiabática que se baseia na ideia de que qualquer estado que se transforme adiabaticamente nos parâmetros do sistema, retorna a um estado definido com o mesmo conjunto de números quânticos. Em 1928, Born e Fock demonstraram a hipótese adiabática de Ehrenfest introduzindo o teorema adiabático [162] para estados de sistemas quânticos não degenerados. O teorema adiabático envolve situações em que os Hamiltonianos evoluem muito lentamente no tempo. Devemos, entretanto, notar que existe uma clara diferença entre a evolução temporal de autoestados de um sistema físico sujeitos a ação de Hamiltonianos dependentes do tempo em relação à evolução dos mesmos autoestados sujeitos agora a Hamiltonianos independentes do tempo. No caso independente do tempo os autoestados do sistema apenas incorporam a si uma fase ligada aos autovalores de energia do Hamiltoniano, enquanto que no caso em que estão sujeitos a Hamiltonianos explicitamente dependentes do tempo existe a possibilidade de transicionar para outros autoestados do sistema.

Um modo bastante eficiente para a compreensão da ideia por trás do teorema adiabático é imaginar que a evolução temporal provocada por um Hamiltoniano nos autoestados do sistema seja encarada como uma atuação da teoria de perturbação sobre os autoestados. Imaginemos por exemplo, um oscilador harmônico quântico que se encontre em seu estado fundamental no instante de tempo  $t_0$ .

---

A distribuição de probabilidades desse sistema é uma gaussiana centrada na origem do sistema de coordenadas. Suponhamos então, que um campo elétrico uniforme atue de forma lenta e contínua ao longo do tempo sob esse oscilador até um certo tempo  $t$ . Após esse tempo a distribuição de probabilidades do sistema permanece sendo uma gaussiana porém se encontra deslocada de uma distância  $d$  em relação à origem. Essa situação corresponde à distribuição de probabilidade do estado fundamental do Hamiltoniano no tempo  $t$ . Em outras palavras, a mudança adiabática do campo elétrico provocou uma mudança adiabática do estado fundamental do sistema, entretanto, se o campo elétrico tivesse sofrido uma mudança abrupta nesse intervalo de tempo, o estado final do oscilador quântico seria dado por uma combinação linear complicada das autofunções do Hamiltoniano no tempo  $t$ .

## 5.4 Formulação Matemática

Consideremos um sistema físico  $S_1$  acoplado a um reservatório  $S_2$ . Consideremos que o reservatório  $S_2$  é grande o suficiente para que as variações sofridas por seus parâmetros físicos ao longo do tempo sejam sentidas pelo sistema  $S_1$  como mudanças perfeitamente adiabáticas no escopo do que diz o teorema adiabático. Em outras palavras, estamos a considerar que o reservatório possui um número infinito de graus de liberdade e que a sua interação com o sistema é dada via um conjunto de campos clássicos  $\vec{R}(t)$ , formados pela variação dos parâmetros do Hamiltoniano do conjunto sistema-reservatório, o que, nas palavras do próprio Berry, poderia ser substituído sem nenhuma perda de generalidade pela interação entre uma amostra em um laboratório (sistema  $S_1$ ) e todo o universo ao seu redor (reservatório  $S_2$ ). Dessa forma, podemos escrever as equações de Schrodinger independente e dependente do tempo, respectivamente, como função dos campos  $\vec{R}(t)$ ,

$$H(\vec{R}(t)) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle = E_n(\vec{R}(t)) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle, \quad (5.1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle = H(\vec{R}(t)) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle. \quad (5.2)$$

Ao sujeitar o sistema  $S_1$  a uma evolução adiabática cíclica, o operador Hamiltoniano  $H(\vec{R}(t))$  que depende parametricamente de  $\vec{R}(t)$  irá se modificar em uma escala de tempo com período característico  $T$  mas todos os fenômenos quânticos associados às transições ópticas e eletrônicas irão ocorrer em um intervalo de tempo muito menor, com um período característico  $\tau$ . Para que possamos escrever de forma explícita a dependência de todas as variáveis do sistema com o campo  $\vec{R}(t)$ , podemos introduzir relações de completeza e ortonormalidade dadas, respectivamente por,

$$\sum_n |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle \langle \phi_n; \vec{R}(t)| = 1, \quad \langle \phi_n; \vec{R}(t)| \phi_m; \vec{R}(t)\rangle = \delta_{n,m}, \quad (5.3)$$

e assim a evolução temporal dos autoestados da equação de Schrodinger independente do tempo podem ser obtidos pela aplicação do operador de evolução temporal, formando uma base completa de soluções,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{i\Theta_n(t)} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle, \quad (5.4)$$

de onde podemos extrair o chamado fator de fase dinâmica,

$$\Theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(\vec{R}(t')) dt', \quad (5.5)$$

que está diretamente ligado, a como os autoestados do sistema evoluem no tempo por ação do operador Hamiltoniano. E portanto, um fator intimamente relacionado à dinâmica do sistema. O termo  $a_n(t)$  representa a condição de normalização dos autoestados de  $|\Psi(t)\rangle$  ao longo do tempo e pode ser reescrito de forma compacta agregando a si o fator de fase dinâmica,  $b_n(t) = a_n(t) e^{i\Theta_n(t)}$ , e assim criando uma base completa ortonormal para os autoestados da função de onda que podem ser reescritos,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n b_n(t) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle. \quad (5.6)$$

Substituindo a equação (5.4) na equação (5.2), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_n \left\{ \left( \frac{d}{dt} a_n(t) \right) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle + i \left( \frac{d}{dt} \Theta_n(t) \right) a_n(t) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle \right. \\ \left. + a_n(t) \left( \frac{d}{dt} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle \right) \right\} e^{i\Theta_n(t)} = \sum_n E_n(\vec{R}(t)) a_n(t) e^{i\Theta_n(t)} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle, \end{aligned} \quad (5.7)$$

na qual podemos identificar a derivada do termo de fase dinâmica que pode ser facilmente retirada da equação (5.5). Substituindo esse resultado na equação (5.7) e fazendo as devidas simplificações matemáticas podemos reescrevê-la como,

$$\sum_n \left( \frac{d}{dt} a_n(t) \right) e^{i\Theta_n(t)} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle = - \sum_n a_n(t) e^{i\Theta_n(t)} \left( \frac{d}{dt} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle \right), \quad (5.8)$$

onde a variação no tempo dos autoestados de energia está associada à mudanças adiabáticas do operador Hamiltoniano, que é governada pelo conjunto de campos clássicos  $\vec{R}(t)$ . Afim de obter uma expressão para o termo  $a_n(t)$ , podemos fazer o produto interno com um autoestado dual com índice  $m$  de forma que,

$$\sum_n \left( \frac{d}{dt} a_n(t) \right) e^{i\Theta_n(t)} \langle \phi_m; \vec{R}(t) | \phi_n; \vec{R}(t) \rangle = - \sum_n a_n(t) \langle \phi_m; \vec{R}(t) | \left( \frac{d}{dt} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle \right), \quad (5.9)$$

da qual podemos separar os termos para os quais  $m = n$  dos termos em que  $m \neq n$  utilizando a condição de ortonormalidade para obter uma equação que rege a dinâmica de  $a_n(t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_m(t) &= -a_m(t) \langle \phi_m; \vec{R}(t) | \left( \frac{d}{dt} |\phi_m; \vec{R}(t)\rangle \right) \\ &\quad - \sum_{n \neq m} a_n(t) \langle \phi_m; \vec{R}(t) | \left( \frac{d}{dt} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle \right) e^{i(\Theta_n(t) - \Theta_m(t))}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Como sabemos que as variações no tempo dos autoestados de energia estão associados a mudanças adiabáticas de  $H(\vec{R}(t))$ , sabemos, portanto, que os coeficientes de  $\langle \phi_m; \vec{R}(t) | (\frac{d}{dt} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle)$  do lado direito da equação (5.10) devem ser escritos em termos da taxa de variação no tempo de  $H(\vec{R}(t))$  e essa relação pode ser rapidamente obtida tomando a derivada temporal da equação de Schrodinger independente do tempo,

$$\frac{d}{dt} \left( H(\vec{R}(t)) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle \right) = \frac{d}{dt} \left( E_n(\vec{R}(t)) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle \right), \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} H(\vec{R}(t)) \right) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle + H(\vec{R}(t)) \left( \frac{d}{dt} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle \right) &= \\ \left( \frac{d}{dt} E_n(\vec{R}(t)) \right) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle + E_n(\vec{R}(t)) \left( \frac{d}{dt} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Agora podemos projetar o estado dual  $\langle \phi_m; \vec{R}(t) |$  e novamente, com o auxílio da condição de ortonormalidade acrescida da condição de hermiticidade do Hamiltoniano  $H^\dagger(\vec{R}(t)) = H(\vec{R}(t))$ , podemos obter uma expressão para o termo  $\langle \phi_m; \vec{R}(t) | (\frac{d}{dt} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle)$  dada por,

$$\langle \phi_m; \vec{R}(t) | \left( \frac{d}{dt} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle \right) = \frac{\langle \phi_m; \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} H(\vec{R}(t)) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle}{E_n(\vec{R}(t)) - E_m(\vec{R}(t))}. \quad (5.13)$$

Note que a equação (5.13) lembra muito o termo de segunda ordem da teoria de perturbação independente do tempo apesar de aqui termos uma relação de dependência temporal paramétrica explícita com o campo  $\vec{R}(t)$ .

Assim como no exemplo do oscilador harmônico quântico dado nas seções anteriores, aqui é como se o Hamiltoniano do sistema e consequentemente seus autovalores e autoestados associados sofressem uma ação lenta e contínua de um pequeno campo perturbativo que os modifica adiabaticamente.

Podemos agora substituir esse resultado na equação (5.10) e obter,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_m(t) &= -a_m(t) \langle \phi_m; \vec{R}(t) | \left( \frac{d}{dt} |\phi_m; \vec{R}(t)\rangle \right) \\ &\quad - \sum_{n \neq m} a_n(t) \frac{\langle \phi_m; \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} H(\vec{R}(t)) |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle}{E_n(\vec{R}(t)) - E_m(\vec{R}(t))} e^{-i(\Theta_m(t) - \Theta_n(t))}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Esse caráter perturbativo dos termos em que  $m \neq n$  pode ser completamente desprezado no limite em que  $t \rightarrow \infty$  já que nessa escala de tempo o sistema  $S_1$  nada sofre com a variação dos parâmetros físicos do reservatório  $S_2$ . Assim, podemos escrever uma equação diferencial completamente desacoplada para  $a_m(t)$ ,

$$\frac{d}{dt}a_m(t) = -a_m(t) \langle \phi_m; \vec{R}(t) | \left( \frac{d}{dt} |\phi_m; \vec{R}(t)\rangle \right), \quad (5.15)$$

que exibe soluções do tipo,

$$a_m(t) = a_m(0) e^{i\gamma_m(t)}, \quad (5.16)$$

com  $\gamma_m(t)$  dado por:

$$\gamma_m(t) = i \int_0^t \langle \phi_m; \vec{R}(t') | \left( \frac{d}{dt} |\phi_m; \vec{R}(t')\rangle \right) dt'. \quad (5.17)$$

Esse é o chamado termo de fase geométrica de Berry [163]. Em 1988, Samuel e Bhandari [164] generalizaram o conceito de fases geométricas a evoluções não cíclicas e mostraram que as diferença entre as fases geométricas adiabáticas do tipo Berry e as fases geométricas não adiabáticas devem ser levadas em consideração uma vez que efeitos de interferências são produzidos quando calculamos os valores médios de certas quantidades físicas em estados mistos e isso afeta a linearidade da equação de Schrodinger. Agora podemos escrever o estado da função de onda evoluído no tempo como,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n a_n(0) e^{i(\gamma_n(t) + \Theta_n(t))} |\phi_n; \vec{R}(t)\rangle, \quad (5.18)$$

onde agora podemos definir uma fase global denominada fase total, adquirida pela evolução adiabática do conjunto de parâmetros do Hamiltoniano do sistema através do campo  $\vec{R}(t)$ . Uma parcela advinda da evolução temporal do Hamiltoniano é denominada fase dinâmica e uma parcela advinda da geometria da trajetória dos autoestados do sistema no espaço de parâmetros do Hamiltoniano é denominada fase geométrica.

## 5.5 Fase Geométrica de Pancharatnam

A definição de Berry [165] para a chamada fase geométrica só é realmente válida no contexto adiabático de uma evolução cíclica de estados puros. No entanto, um estado puro é uma idealização e qualquer experimento realístico precisa lidar com incertezas estatísticas, o que requer uma descrição em termos de estados quânticos mistos. Consideremos o operador matriz de densidade e suas propriedades de hermiticidade  $\rho^\dagger = \rho$ , idempotência  $\rho^2 = \rho$  e unitariedade  $Tr[\rho] = 1$ . De forma geral, para estados mistos o operador matriz de densidade representa uma mistura estatística dos estados quânticos do sistema e pode ser definido como,

$$\rho(t) = \sum_{k=1}^N \omega_k^2(t) |\Psi_k(t)\rangle \langle \Psi_k(t)|, \quad (5.19)$$

onde  $\omega_k^2(t)$  garante a normalização de  $\rho(t)$  em todo instante de tempo. Adotando o termo  $\rho_k(t) = |\Psi_k(t)\rangle \langle \Psi_k(t)|$  como a matriz de densidade para cada componente do sistema, podemos reescrever a matriz de densidade total para estados mistos como,

$$\rho(t) = \sum_{k=1}^N \omega_k^2 \rho_k(t). \quad (5.20)$$

Entretanto, a definição de uma fase geométrica para estados mistos ainda é um problema em aberto. Diversas propostas tentam abordar a questão em diferentes perspectivas, como por exemplo, através da purificação dos estados quânticos utilizando procedimentos interferométricos, ou usando sistemas dissipativos sob a ação de decoerência e essa será a estratégia adotada no presente trabalho. Vamos calcular as fases total, dinâmica e geométrica baseados na representação de Pancharatnam para sistemas quânticos fechados (livres de mecanismos de decoerência) e para sistemas abertos (sujeitos a decoerência) inicializados em estados puros  $r = 1$ . A matriz de densidade [166] para estados puros pode ser generalizada da seguinte forma [167],

$$\rho(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N^2-1} \left( I + \sqrt{\frac{N(N-1)}{2}} \vec{n}_i(t) \vec{\lambda}_i \right), \quad (5.21)$$

onde  $N$  é a dimensão do sistema,  $I$  é a matriz identidade  $N \times N$ ,  $\vec{n}_i(t)$  são as coordenadas da hiperesfera de Bloch-Poincaré e  $\vec{\lambda}_i$  representa a generalização das matrizes de Pauli. No caso  $N = 2$ , as matrizes  $\vec{\lambda}_i$  se reduzem às matrizes de Pauli e no caso  $N = 3$  elas se reduzem às matrizes de Gelmmman [168]. Essas matrizes respeitam as seguintes propriedades:  $Tr[\lambda_i] = 0$ ,  $Tr[\lambda_i \lambda_j] = 2\delta_{ij}$ . Em seus estudos Pancharatnam encontrou uma interpretação natural para a fase geométrica no contexto de sistemas quânticos de dois níveis, para os quais o espaço das matrizes de densidade de estados puros sempre recai na esfera de Bloch-Poincaré.

Para sistemas quânticos com mais de dois níveis uma representação das coordenadas na esfera de Bloch-Poincaré não é possível mas o raio da hiperesfera pode ser visto como um parâmetro importante através do qual podemos mapear o grau de mistura dos estados do sistema. A fase geométrica no formalismo de Pancharatnam [169] pode ser calculada da seguinte forma [170]:

$$\gamma_g^P = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \arg \left( \sqrt{\Lambda_j(t_0) \Lambda_j(t)} \langle \Lambda_j(t_0) | \Lambda_j(t) \rangle \right) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} \left\{ \int_{t_0}^t \langle \Lambda_j(t') | \frac{d}{dt} | \Lambda_j(t') \rangle dt' \right\}, \quad (5.22)$$

onde os  $\Lambda_j$ , representam os autovalores da matriz de densidade e os  $|\Lambda_j\rangle$  os autovetores associados aos autovalores de  $\rho$  no instante inicial e ao longo de toda a dinâmica do sistema. Para obter a fase de Pancharatnam, primeiramente resolvemos o problema de valores próprios para a matriz de densidade do sistema e obtemos seus autovalores e autovetores normalizados em todo instante de tempo. Porém, é importante separar os autovalores e autovetores no instante de tempo inicial da dinâmica dos demais, o que ressalta a observação feita por Berry de que para obter uma fase geométrica não nula é necessário que o sistema seja inicializado em um estado puro, ou em outras palavras, a fase geométrica é uma entidade que depende fortemente das condições iniciais. Duas condições iniciais distintas irão gerar fases geométricas distintas.

Alguns autores interpretam o primeiro termo da fase geométrica de Pancharatnam como uma fase total adquirida pelo sistema ao longo da evolução temporal e o segundo termo como uma fase dinâmica ligada à mudança adiabática dos parâmetros do Hamiltoniano. Essa interpretação se baseia na dedução formal de fase geométrica feita por Berry. Na definição de Berry, um sistema fechado (livre de decoerência) sempre executa uma evolução cíclica ao longo do tempo retornando a seu estado inicial ao final de cada período da evolução. Assim, ao fim de cada ciclo o sistema adquire fase total  $2\pi$  ou de forma equivalente fase zero. Nesse contexto, para evoluções cíclicas formalmente a fase de Pancharatnam se reduz à fase geométrica de Berry.

Entretanto, há aqueles que discordam dessa interpretação e adotam a ideia de que o primeiro termo da fase de Pancharatnam representa uma fase dinâmica já que esse termo está diretamente ligado à dinâmica dos autoestados da matriz de densidade e o segundo termo como uma fase geométrica propriamente dita já que esse termo lida com a trajetória executada pelos estados da matriz de densidade ao longo do tempo. Nessa interpretação a fase de Pancharatnam acaba sendo interpretada como uma fase total ao invés de geométrica. No presente trabalho vamos assumir como verdade a primeira interpretação. Na próxima seção vamos começar a discutir alguns resultados.

## 5.6 Resultados

Existe uma correspondência biunívoca entre os estados de um qubit e os pontos na superfície da esfera de Bloch-Poincaré. Essa ideia foi generalizada para sistemas com um número arbitrário de níveis, mas infelizmente, para sistemas quânticos maiores, como por exemplo o qutrit, não existe uma correspondência trivial entre os estados do sistema e os pontos na superfície da hiperesfera de Bloch-Poincaré, o que faz com que nem todas as escolhas de condição inicial levem a estados quânticos válidos do ponto de vista da análise das fases geométricas associadas à dinâmica desses estados.

No presente trabalho, vamos discutir os resultados obtidos para os termos de fase total, dinâmica e geométrica calculadas no formalismo proposto por Pancharatnam. Vamos nos limitar ao estudo dos casos do qubit associado ao sistema quântico de dois níveis e ao qutrit associado ao sistema quântico de três níveis. A dinâmica desses sistemas foi amplamente discutida no capítulo 4.

### 5.6.1 Sistema de dois níveis: o qubit

O qubit é um conjunto de dois estados quânticos, como por exemplo a polarização de um único fóton que pode ser vertical ou horizontal. Diferentemente de um sistema clássico onde o sistema teria que ser encontrado em um estado ou em outro, em MQ é permitido que um qubit esteja em uma superposição dos dois estados o que é um fator importante para a computação quântica.

As coordenadas de um ponto  $P$  arbitrário na superfície da esfera de Bloch-Poincaré são dadas por  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  e  $z = r \cos \theta$ , em coordenadas esféricas de onde decorre que  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$  mantendo a condição para o raio da esfera  $0 \leq r \leq 1$ . Dessa forma, o estado puro geral de um qubit na esfera de Bloch-Poincaré pode ser escrito em função dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  como,

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) & \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) e^{i\phi} \\ \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) e^{-i\phi} & \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Com o auxílio de algumas identidades trigonométricas como por exemplo,  $\cos^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ ,  $\sin^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$  e  $\sin(\theta/2) \cos(\theta/2) = \frac{1}{2} \sin \theta$ , a matriz de densidade como definida pela equação (5.23) pode ser reescrita como:

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sin \theta e^{i\phi} \\ \sin \theta e^{-i\phi} & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + z & x + iy \\ x - iy & 1 - z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (I + n_i \sigma_i). \quad (5.24)$$

Dessa maneira utilizamos a definição das coordenadas da esfera de Bloch-Poincaré para escrever uma forma geral da matriz de densidade onde  $I$  é a matriz identidade 2x2,  $n_i = (n_1, n_2, n_3) = (x, y, z)$  é o chamado vetor de Bloch e  $\sigma_i = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  são as matrizes de Pauli definidas no espaço SU(2) como,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

No formalismo da matriz de densidade, para o caso do sistema de dois níveis, podemos escrever as coordenadas do vetor de Bloch como  $n_i = \text{Tr}[\sigma_i \rho(t)]$  de onde decorre que,

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{Tr}[\sigma_x \rho(t)] = (\rho_{01} + \rho_{10}), \\ n_2 &= \text{Tr}[\sigma_y \rho(t)] = i(\rho_{10} - \rho_{01}), \\ n_3 &= \text{Tr}[\sigma_z \rho(t)] = (\rho_{00} - \rho_{11}). \end{aligned} \quad (5.26)$$

A partir destas podemos escrever o raio da esfera de Bloch-Poincaré definido pela relação  $r^2 = |n_1|^2 + |n_2|^2 + |n_3|^2$ . Para calcularmos a fase geométrica de Pancharatnam associada ao sistema de dois níveis, precisamos a princípio solucionar a equação de autovalores para  $\rho$  de modo a encontrar seus autovalores e autovetores associados. Afim de obter expressões analíticas para os autovalores e autovetores de  $\rho$ , podemos escrever a matriz de densidade geral associada a um sistema de dois níveis na base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  da seguinte forma,

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Tomando o  $\det(\rho - I\Lambda) = 0$  podemos obter a equação característica para os autovalores de  $\rho$ :  $\Lambda^2 - \Lambda(\rho_{00} + \rho_{11}) + (\rho_{00}\rho_{11} - |\rho_{10}|^2) = 0$ , cujas soluções podem ser obtidas facilmente:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{(\rho_{00} + \rho_{11})}{2} \pm \frac{\sqrt{(\rho_{00} - \rho_{11})^2 + 4|\rho_{10}|^2}}{2}. \quad (5.28)$$

Para cada autovalor podemos retornar à equação de autovalores  $\rho |\Lambda\rangle = \Lambda |\Lambda\rangle$  e obter seus autovetores normalizados dados por,

$$\begin{aligned} |\Lambda_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(\rho_{00} - \Lambda_+)^2 + |\rho_{10}|^2}} \begin{pmatrix} -\rho_{10} \\ \rho_{00} - \Lambda_+ \end{pmatrix}, \\ |\Lambda_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(\rho_{11} - \Lambda_-)^2 + |\rho_{10}|^2}} \begin{pmatrix} \rho_{11} - \Lambda_- \\ -\rho_{10} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

De posse dos autovalores e autovetores podemos obter uma expressão analítica para a fase geométrica dada pela equação (5.22).

Para efeito de simplicidade, vamos definir nossa condição inicial para  $\rho$  dada por  $\theta = 0$ , ou seja, vamos obter uma expressão para a fase ligada a um estado puro e inicialmente posicionado no polo norte da esfera de Bloch-Poincaré. A escolha dessa condição inicial é conveniente para facilitar as contas visto que para  $t = 0$ , ela nos conduz a dois autovalores distintos sendo um deles zero e os autovetores associados a esses autovalores são a própria base computacional. A escolha dessa condição inicial elimina metade dos termos a serem calculados por causa do produto entre os autovalores de  $\rho$ . A definição de  $\rho(t)$  dada pelo estado geral de um qubit proporciona que para qualquer  $t$ , os autovalores da matriz de densidade assumam valores zero e um, ou seja,

$$\begin{aligned}\Lambda_+(t) &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + 4 \sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{2} = 1, \quad (5.30) \\ \Lambda_-(t) &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + 4 \sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{2} = 0.\end{aligned}$$

Obviamente, isso se deve ao fato das populações e coerências como da definição do estado geral do qubit serem dadas por senos e cossenos. No capítulo 4, na discussão sobre o sistema de dois níveis, definimos o ângulo  $\theta(t)$  como função exclusiva das variáveis do Hamiltoniano do sistema  $\Delta$  e  $\Omega$  através da frequência de Rabi  $\Omega_R$ . Dessa forma, os autovetores de  $\rho(t)$  para qualquer tempo ficam dados pelas seguintes relações,

$$|\Lambda_+(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos^2(\Omega_R t) \sin^2(\Omega_R t) + 1 \\ \frac{\cos^2(\Omega_R t) \sin^3(\Omega_R t) - (\cos(\phi) - i \sin(\phi)) \cos(\Omega_R t)}{\sin(\Omega_R t)} \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

$$|\Lambda_-(t)\rangle = - \begin{pmatrix} \frac{\sin^5(\Omega_R t) - \sin^3(\Omega_R t) + (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \cos(\Omega_R t)}{\sin(\Omega_R t)} \\ \sin^4(\Omega_R t) + \sin^2(\Omega_R t) + 1 \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Com os resultados obtidos nas equações (5.31) e (5.32), podemos calcular o termo de fase total  $\gamma_T$ , referente ao primeiro termo da equação (5.22) dado por,

$$\gamma_T = \arg\{\cos(\Omega_R t)^2 \sin(\Omega_R t)^2 + 1\}. \quad (5.33)$$

Da definição dos estados quânticos de um sistema físico sabemos que o autoestado  $|\Psi\rangle$  é um vetor de componentes complexas na forma geral  $u + iv$ , onde  $u$  e  $v$  são respectivamente as partes real e imaginária desse vetor. O argumento de um vetor complexo é dado por  $\arg(u + iv) = \arctan(v/u)$ . No nosso caso temos um vetor puramente real dado que sua parte imaginária é nula, dessa forma a componente de fase total também é nula  $\gamma_T = 0$ . Esse resultado corrobora com a definição da fase geométrica dada por Berry.

No contexto de estados inicialmente puros sujeitos a evoluções cíclicas e adiabáticas a fase total adquirida pelos estados do sistema ao final de cada ciclo da dinâmica é nula sendo toda a fase ganha pelo sistema devida à trajetória dos estados no espaço de parâmetros do Hamiltoniano do sistema. Podemos agora derivar as equações (5.31) e (5.32) afim de obter o termo de fase dinâmica associado ao sistema de dois níveis,

$$\frac{d}{dt} |\Lambda_+(t)\rangle = \begin{pmatrix} \Omega_R \cos(\Omega_R t) \sin(\Omega_R t) - 4\Omega_R \cos(\Omega_R t) \sin^3(\Omega_R t) \\ -\frac{4\Omega_R \cos(\Omega_R t) \sin^5(\Omega_R t) - 2\Omega_R \cos(\Omega_R t) \sin^3(\Omega_R t) + \Omega_R(i \sin(\phi) - \cos(\phi))}{\sin^2(\Omega_R t)} \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

$$\frac{d}{dt} |\Lambda_-(t)\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{4\Omega_R \cos(\Omega_R t) \sin^5(\Omega_R t) - 2\Omega_R \cos(\Omega_R t) \sin^3(\Omega_R t) - \Omega_R(i \sin(\phi) + \cos(\phi))}{\sin^2(\Omega_R t)} \\ 2\Omega_R \cos(\Omega_R t) \sin(\Omega_R t) - 4\Omega_R \cos(\Omega_R t) \sin^3(\Omega_R t) \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

De posse dos resultados das equações (5.34) e (5.35), podemos calcular o produto que representa o integrando da equação (5.22), o termo devido a  $\Lambda_-$  é nulo e portanto somente precisamos calcular o termo devido a  $\Lambda_+$ . Entretanto, somente a parte imaginária desse produto nos interessa de forma que,

$$Im \left\{ \langle \Lambda_+(t') | \frac{d}{dt} |\Lambda_+(t')\rangle \right\} = \Omega_R \sin(\phi) (\cos^2(\Omega_R t') - 4 \cos^4(\Omega_R t')), \quad (5.36)$$

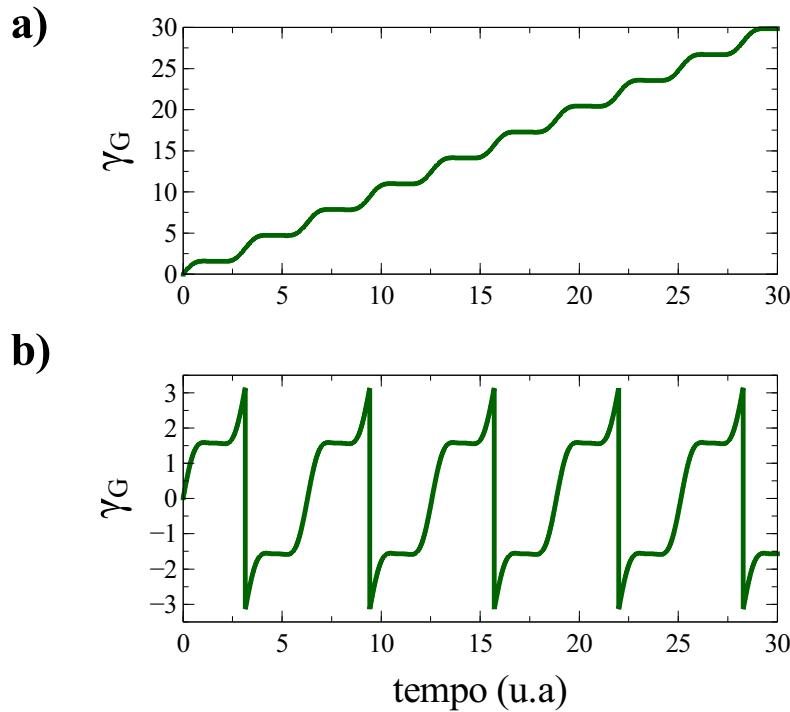
que agora podemos integrar para obter o termo de fase dinâmica:

$$\gamma_D = -\frac{\phi}{8} [\sin(4\Omega_R t) + 6 \sin(2\Omega_R t) + 8\Omega_R t]. \quad (5.37)$$

Uma análise rápida da equação (5.37) nos possibilita perceber o carácter cumulativo da fase dinâmica dado pela dependência temporal linear dominante na expressão. Em outras palavras, é como se o sistema físico acumulasse uma certa fase a cada ciclo completo da dinâmica. Para tempos longos bastaria então dividir o valor total acumulado pela fase por  $2\pi$  para saber quantos ciclos completos (a princípio) da dinâmica do sistema já se passaram.

O comportamento linear da expressão é dominante mas os termos oscilantes em seno provocam a formação de pequenos platôs que mantêm o valor da fase constante em um pequeno intervalo de tempo que pode ser controlado pelo ajuste da frequência de Rabi do sistema. Rigorosamente, para que a equação (5.37) seja válida temos que nos fixar em  $\phi = \pi/2$  já que foi nessas condições que definimos  $\rho(\theta(t))$  como função da frequência de Rabi na discussão sobre o sistema de dois níveis no capítulo 4, embora logo após tenhamos generalizado para qualquer  $\phi$  e definido o estado geral de um qubit puro. Nos quadros (a) e (b) da Figura 5.1 trazemos o gráfico da expressão (5.37) para  $\phi = \pi/2$ .

No quadro (b) trazemos novamente o gráfico do quadro (a) mas agora impondo a limitação dos valores da fase dinâmica dentro do intervalo  $[-\pi, \pi]$  como usualmente se encontra na literatura. Para nosso exemplo podemos notar no quadro (a) que se dividirmos o último valor da fase, ou seja, o valor acumulado de fase ao longo do período por  $2\pi$  obteremos  $\approx 5$  o que pode ser facilmente visto no quadro (b) onde temos quase 5 ciclos completos da dinâmica de  $\gamma_D$ . Ajustando os valores de  $\Omega$  e  $\Delta$ , podemos a princípio aumentar ou diminuir a quantidade de ciclos e a fase adquirida neles.



**Figura 5.1:** Gráfico do termo de fase geométrica analítico da equação (5.37). a) fase acumulada ao longo do tempo, b) fase limitada no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

No presente trabalho, vamos concentrar nossos esforços na tentativa de relacionar as fases total, dinâmica e geométrica com as propriedades do sistema. Na evolução considerada por Berry, a função de onda final está relacionada à função de onda inicial de alguma forma. Isso significa que as características das observações dos estados inicial e final são as mesmas e, portanto, de acordo com a teoria clássica, não podemos distinguir entre elas. No entanto, na teoria quântica, a fase adquirida entre os estados inicial e final constitui uma espécie de memória da evolução sofrida pelo sistema. Berry mostrou que, além de uma contribuição do efeito do ambiente a cada instante de tempo existe uma contribuição de natureza geométrica. Essa geometria não é a geometria a que estamos habituados mas sim a geometria da trajetória no espaço de parâmetros do Hamiltoniano do sistema. Em outras palavras, a fase adquirida pelo sistema guarda consigo informações da trajetória dos estados do sistema no análogo

quântico do espaço de fase clássico. Vamos começar nossa análise sobre as fases no sistema de dois níveis calculando quais são os efeitos da inicialização do sistema em estados puros e mistos, com e sem superposições. Como já discutimos, as fases total, dinâmica e geométrica são muito sensíveis à preparação inicial dos ensembles do sistema. Para uma primeira análise, vamos observar o que acontece com o raio da esfera de Bloch-Poincaré e a entropia linear associados ao sistema de dois níveis quando da escolha de condições iniciais distintas para a dinâmica. A entropia linear como já foi abordado no capítulo 3 é uma medida do grau de pureza do sistema definida como quanto o traço de  $\rho^2$  se distancia de um. Para estados puros, definimos a matriz de densidade para o estado puro geral de um qubit como na equação (5.23) de forma que a entropia linear associada a ele é dada por,

$$\begin{aligned} S_L^{puro} &= 1 - (\cos^4(\theta/2) + \sin^4(\theta/2) + 2 \sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)) \\ &= 1 - (\sin^2(\theta/2) + \cos^2(\theta/2))^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ou seja, para estados puros, a entropia linear do sistema é nula, já que a idempotência da matriz de densidade é conservada. Para estados mistos, entretanto, a matriz de densidade definida pela equação (5.23) pode ser aproximada por [171],

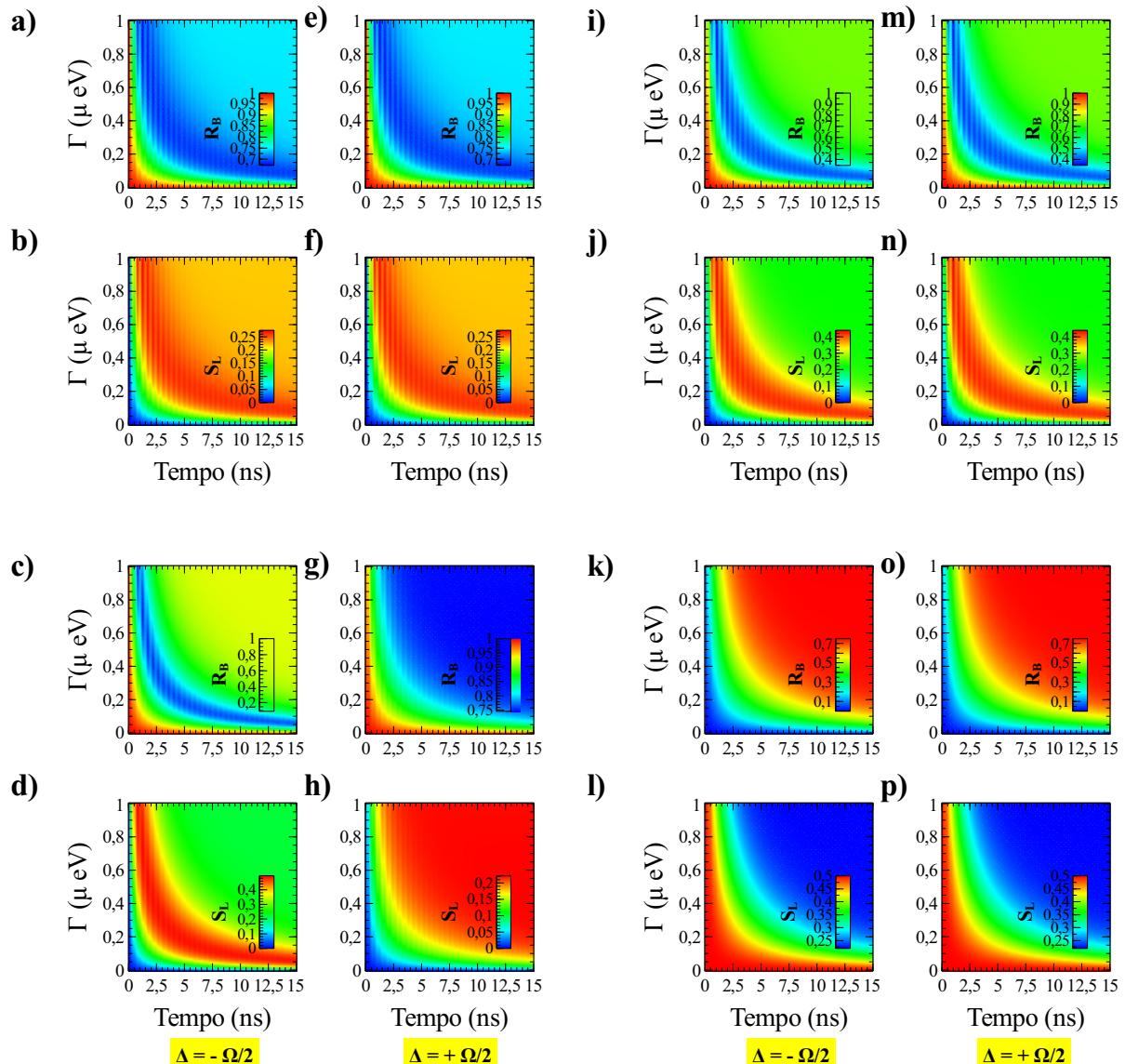
$$\rho(t)^{misto} \approx \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix} \Rightarrow S_L^{misto} = 1 - (\cos^4(\theta/2) + \sin^4(\theta/2)), \quad (5.39)$$

onde os termos de coerência associados aos elementos fora da diagonal principal de  $\rho$  são todos nulos. Dessa forma, a entropia linear associada a estados mistos é não nula, visto que a idempotência da matriz de densidade é perdida. Quanto ao raio da esfera de Bloch-Poincaré, para estados puros e mistos, temos que as coordenadas da esfera e consequentemente o raio ficam dados por,

$$\begin{aligned} x^{puro} &= \cos \theta \cos \phi, & x^{misto} &= 0, \\ y^{puro} &= \cos \theta \sin \phi, & y^{misto} &= 0, \\ z^{puro} &= \sin \theta, & z^{misto} &= \sin \theta, \\ r^{puro} &= 1, & r^{misto} &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Em outras palavras, para estados puros, a trajetória dos estados de  $\rho$  na esfera de Bloch-Poincaré é descrita por uma esfera de raio um e todos os estados caminham na superfície da esfera. Para estados mistos os estados do sistema caminham no interior da esfera de Bloch-Poincaré em esferas de raio inferior a um e consequentemente na condição de estados maximamente mistos, teremos os estados do sistema habitando a origem da esfera.

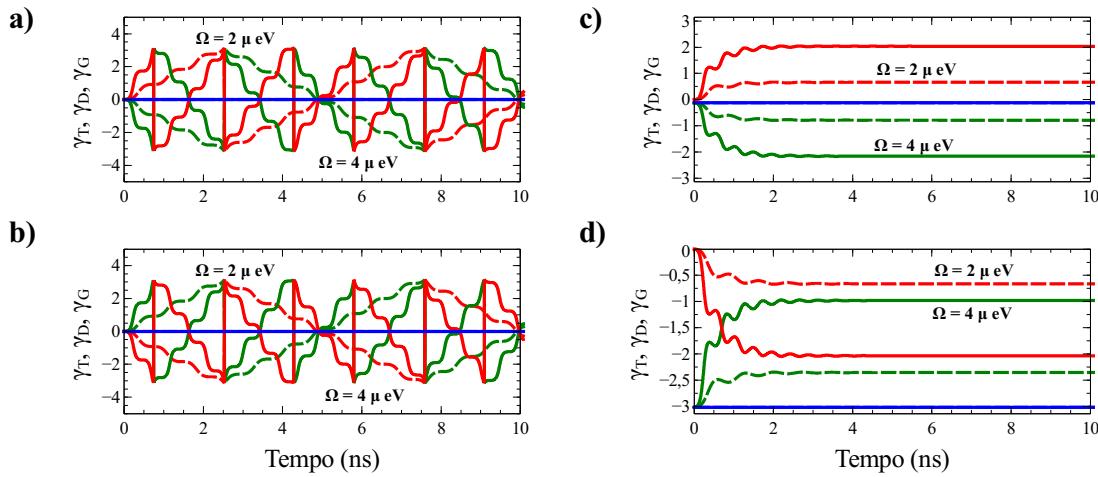
Na Figura 5.2, trazemos o gráfico do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear em função da taxa de decoerência do sistema ao longo do tempo para diversas condições iniciais para o qubit. A primeira observação importante diz respeito à transição entre sistemas fechados ( $\Gamma_0^1 = 0$ ) e abertos ( $\Gamma_0^1 \neq 0$ ). Em todas as configurações em que o sistema é iniciado em um estado puro (quadros de (a) a (n)), observa-se que livres do efeito de decoerência os raios das esferas de Bloch-Poincaré associados assumem sempre valor um e na única condição em que o sistema é inicializado em um estado misto (quadros de (k) a (p)) o raio da esfera assume um valor próximo de zero quando  $\Gamma_0^1 = 0$ .



**Figura 5.2:** Mapas do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear em função do tempo e da taxa de decoerência para valores opostos de  $\Delta$ . a), b), e), f) para  $\theta = 0$ , i), j), m), n) para  $\theta = \pi$ , c), d), g), h) para  $\theta = \pi/2$  e k), l), o), p) para  $P_1 = P_2 = 0.5$ .

Outro fato bastante interessante é que para grandes decoerências, sendo o estado inicializado em um estado puro ou misto, o estado final sempre corresponde a um raio da esfera em torno de 0.7. Em algumas situações o sistema sai de um estado puro, se torna bastante misto e com o tempo sofre uma espécie de repurificação. Em alguns casos ele simplesmente passa de um estado misto para um estado puro. Para a entropia linear o efeito do estado final é muito semelhante e em todas as configurações com o passar do tempo o sistema tende a ter mais ou menos a mesma entropia linear sendo que em alguns casos o sistema se torna maximamente misto ( $S_L \approx 0.5$ ) e depois retorna a um estado menos entrópico. Em outras palavras, independentemente da inicialização do qubit na esfera de Bloch-Poincaré, seja no polo norte dado pelo estado puro  $|0\rangle$  em  $\theta = 0$ , no polo sul dado pelo estado puro  $|1\rangle$  em  $\theta = \pi$ , no equador da esfera dado pelos estados puros e superpostos  $\frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}$  em  $\theta = \pi/2$  ou em qualquer estado misto, o estado final do sistema sob o efeito da decoerência é sempre o mesmo e no caso do sistema de dois níveis esse estado corresponde a um estado com certo grau de mistura. Isso se deve ao fato de que no sistema de dois níveis não temos canais de interferência capazes de criar estados robustos protegidos, o que evita a perfeita repurificação do sistema com o passar do tempo. Além disso podemos notar que somente na condição em que o qubit é inicializado no equador da esfera a aplicação de dessintonias opostas do laser provoca modificações no perfil dos mapas do raio e da entropia. Esse efeito é devido à interferência da frequência de Rabi no valor das fases nessa configuração que será mostrada mais adiante.

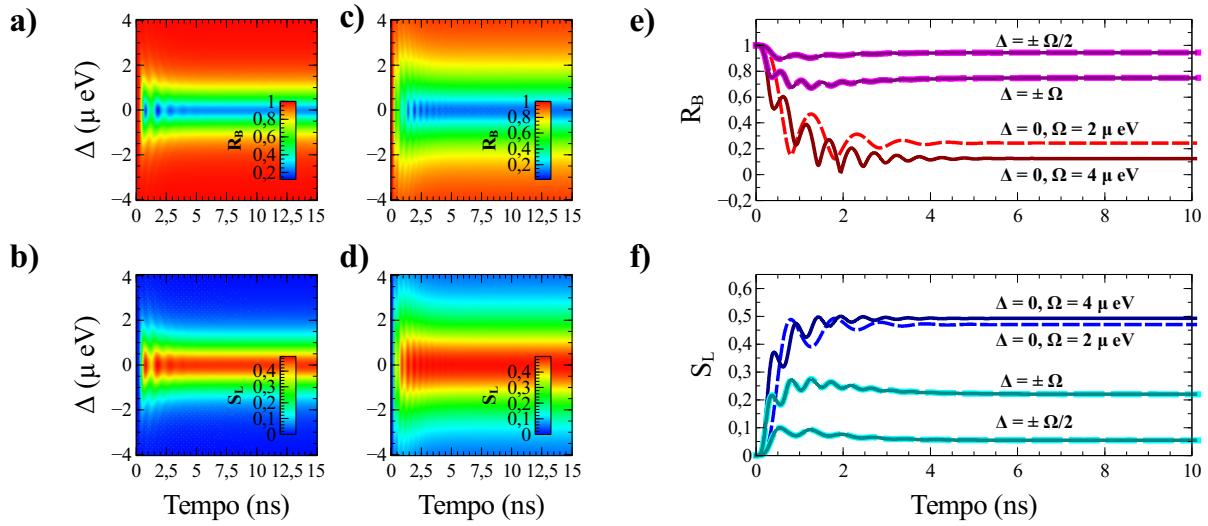
Na Figura 5.3, trazemos para o qubit inicializado no polo norte da esfera (estado  $|0\rangle$ ) os gráficos para diferentes valores da intensidade do laser e de sua dessintonia dos termos de fase total, dinâmica e geométrica nos regimes sem e com efeitos de decoerência:



**Figura 5.3:** Termos de fase total (curvas azuis), fase dinâmica (curvas vermelhas) e fases geométricas (curvas verdes) em função do tempo para a condição em que  $\theta = 0$ . a)  $\Delta = -2 \mu\text{eV}$ , b)  $\Delta = 2 \mu\text{eV}$ , onde  $\Gamma = 0$ . c)  $\Delta = -2 \mu\text{eV}$ , d)  $\Delta = 2 \mu\text{eV}$ , onde  $\Gamma = 1 \mu\text{eV}$ .

Nos quadros (a) e (b), podemos notar que para mesmas intensidades do laser e dessintonias opostas, o sinal das fases dinâmica e geométrica se invertem ao passo que como estamos no regime sem decoerência o termo de fase total é nulo. Em outras palavras, nessas condições observamos que a fase geométrica de Pancharatnam se reduz à fase geométrica de Berry e é dada simplesmente por  $-\gamma_D$ . Na ausência de decoerência, todo fator de fase adquirido pelo sistema advém da trajetória executada pelos estados no espaço de parâmetros do Hamiltoniano. Nota-se que o período de repetição das fases é alterado tão somente pela intensidade do laser. Nos quadros (c) e (d), já sob o efeito de decoerência observamos que o sistema executa a transição entre a fase geométrica de Berry e a fase geométrica de Pancharatnam, fato esse devido ao ganho pelo sistema de uma fase total já que os estados final e inicial do sistema se distanciam. O mais interessante talvez seja o fato de que nessas condições a dessintonia do laser além de mudar o sinal das fases também produz fases totais distintas para dessintonias opostas, existe uma espécie de anisotropia ligada à dessintonia do laser para sistemas abertos.

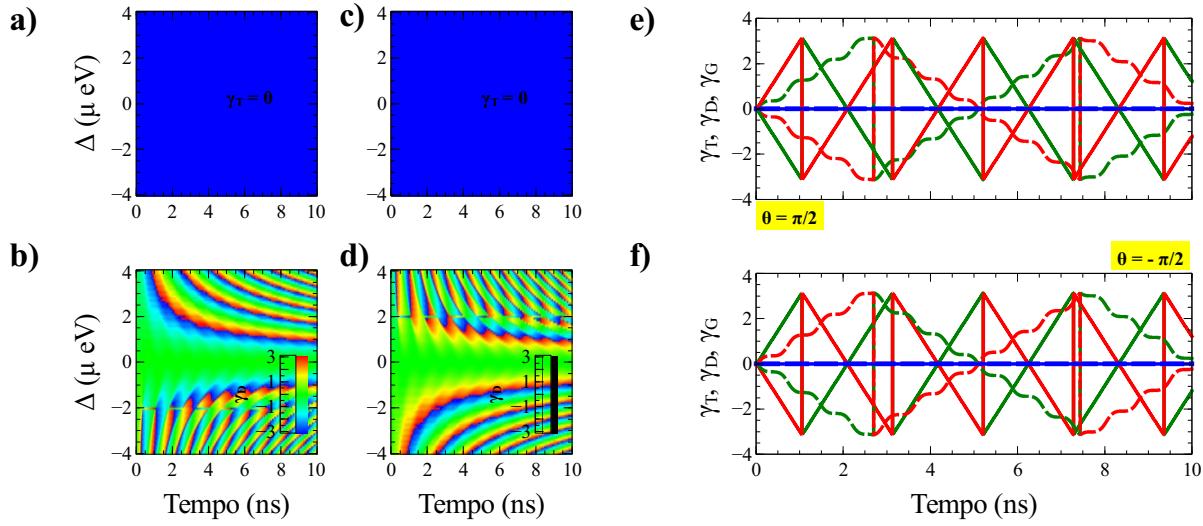
A Figura 5.4, apresenta o comportamento do raio da esfera e da entropia na configuração do sistema inicializado no polo norte da esfera:



**Figura 5.4:** Mapas do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear em função do tempo e de  $\Delta$ . a) e b)  $\Omega = 2\mu\text{eV}$ , c) e d)  $\Omega = 4\mu\text{eV}$ . e) e f) cortes dos mapas para diferentes valores de  $\Omega$  e  $\Delta$ . Em todas as situações  $\Gamma = 1\mu\text{eV}$ .

Nos quadros (a), (b), (c) e (d) temos os mapas como função da dessintonia do laser e do tempo para dois valores distintos da intensidade do laser. Podemos notar que em torno da dessintonia zero do laser, o sistema atinge o seu maior grau de mistura e essa faixa de estados mistos se alarga com o aumento da intensidade do laser. Nos cortes desses mapas, apresentados nos quadros (e) e (f) nota-se que, ao passo que a intensidade do laser e a dessintonia se aproximam em módulo, o sistema tende a permanecer em um estado mais puro, ou seja, o desbalanço da frequência de Rabi do sistema é quem parece provocar a

mistura dos estados isso aliado obviamente aos efeitos de decoerência. As Figuras 5.5 e 5.6 trazem gráficos dos termos de fase e do comportamento do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear do sistema em uma configuração de um estado puro porém maximamente superposto localizado no equador da esfera. Para  $\theta = \pi/2$ , temos o estado inicial do qubit em uma superposição do tipo  $\frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}$ ,

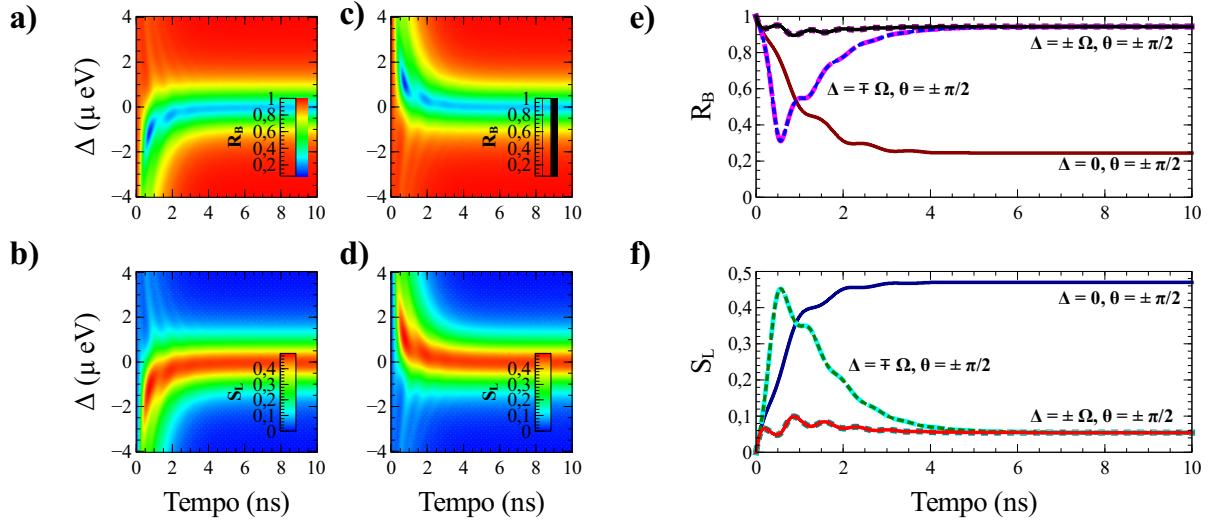


**Figura 5.5:** Em a) e c) mapa do termo de fase total, em b) e d) o termo de fase dinâmica. a), b)  $\theta = +\pi/2$ . c), d)  $\theta = -\pi/2$ . Em e) e f) cortes dos termos de fase total (curvas azuis), dinâmica (curvas vermelhas) e geométricas (curvas verdes) para dessintonias opostas  $\Delta = +2\mu\text{eV}$  (curvas tracejadas) e  $\Delta = -2\mu\text{eV}$  (curvas cheias).

Nos quadros (a), (b), (c) e (d) da Figura 5.5 temos o mapa das fases total e dinâmica para estados opostos no equador da esfera em  $\theta = \pm(\pi/2)$  e o que observamos é que exatamente nas linhas em que a intensidade do laser coincide com o módulo da dessintonia, ou seja, na situação em que a frequência de Rabi do sistema é  $\Omega_R = \pm\sqrt{2}\Omega$  temos uma espécie de interferência nos termos de fase dinâmica que pode ser observada nos cortes dos quadros (e) e (f). Ao que tudo indica, na condição em que a frequência de Rabi assume tais valores o sistema experimenta uma mudança repentina no comportamento da fase dinâmica do sistema, devida a alguma singularidade no espaço de parâmetros do Hamiltoniano. Nessa condição tanto o período de repetição das fases quanto suas formas (quantidades de platôs) são alterados e isso ocorre de forma simétrica para ângulos opostos na esfera.

Na Figura 5.6 fazemos uma análise detalhada do que acontece com o raio da esfera e a entropia associada a ele quando o qubit passa pelo equador. Nos quadros (a), (b), (c) e (d) nota-se um comportamento completamente distinto do observado na Figura 5.4. Aqui o maior grau de mistura do sistema é deslocado na direção da dessintonia que provoca a interferência nos termos de fase dinâmica. Nos cortes dos quadros (e) e (f) observamos que nessa linhas de interferência o sistema é acometido por uma perfeita repurificação dos seus

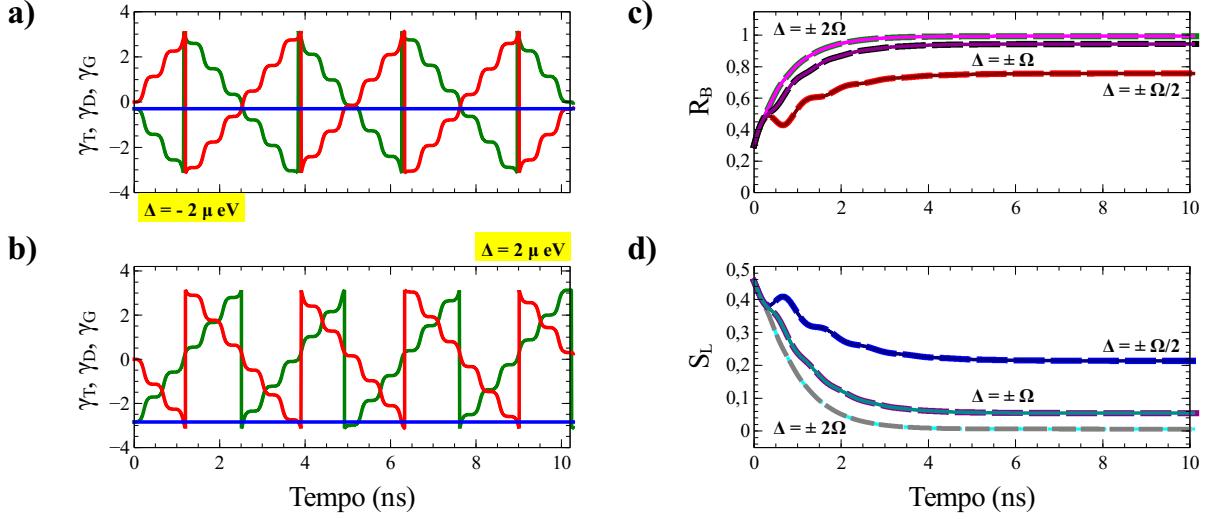
estados ao passo que em torno da dessintonia  $\Delta = 0$  continuamos observando a perda quase completa da pureza do sistema. É como dizer que quando o qubit passa pelo equador da esfera de Bloch-Poincaré existe uma frequência de Rabi RMS (a mais eficiente possível) que favorece a sua purificação entretanto isso não é o bastante para torná-lo um estado robusto e protegido pela falta de canais de interferência que proporcionem o mantenimento dessa pureza.



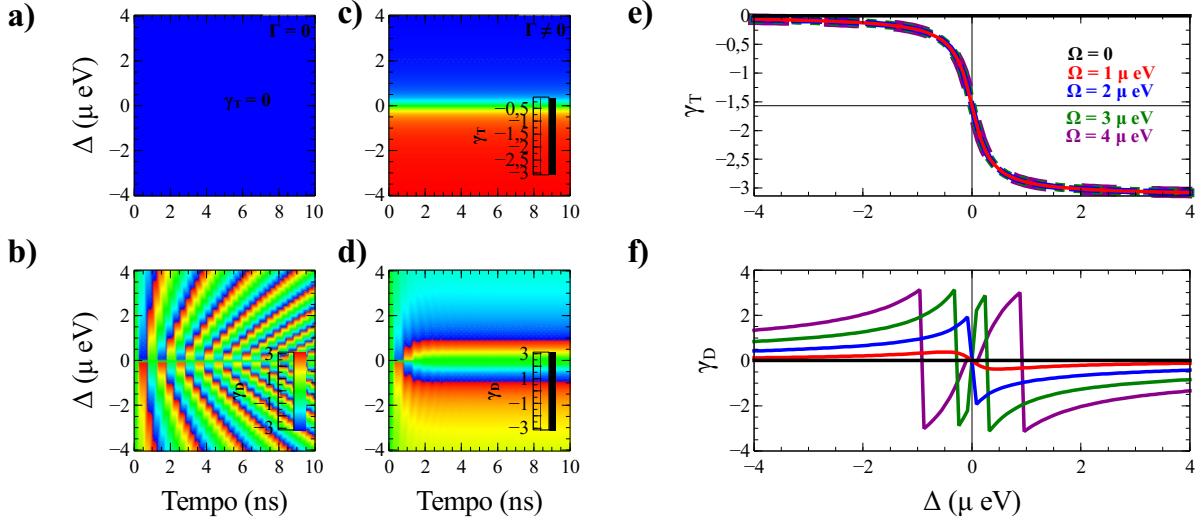
**Figura 5.6:** Em a), b), c) e d) os mapas do raio da esfera de Bloch-Poincaré em função do tempo e de  $\Delta$  para ângulos opostos no equador da esfera  $\theta = \pm\pi/2$  com  $\Omega = 2\mu\text{eV}$ . e) e f) cortes para diversas condições de  $\Delta$  e  $\Omega$ .

Por fim, falta analisarmos o comportamento do sistema quando ele é iniciado em um estado misto. A princípio, o estado maximamente misto representado pelas probabilidades  $P_0 = P_1 = 0.5$  parece o melhor candidato para essa análise. Entretanto, esse estado guarda grandes semelhanças com o estado puro em que o sistema é inicializado no equador da esfera de Bloch-Poincaré, e portanto, vamos tomar um estado misto distinto dado por exemplo pelas probabilidades  $P_0 = 0.65$  e  $P_1 = 0.35$ . A Figura 5.7 traz em seus quadros (a) e (b) o gráfico dos termos de fase total, dinâmica e geométrica associados a essa configuração. É interessante notar que aqui, mesmo no contexto de sistemas fechados o sistema exibe uma fase total diferente de zero o que reforça ainda mais a definição dada por Berry da fase geométrica. A fase geométrica de Berry somente é possível no contexto de evoluções cíclicas, adiabáticas e unitárias de estados inicialmente puros. A fase geométrica como definida por Pancharatnam é portanto mais geral e se estende a evoluções cíclicas, adiabáticas e não unitárias. Nos quadros (c) e (d) que os estados do sistema experimentam uma perfeita purificação para grandes dessintonias do laser.

A Figura 5.8 em seus quadros (a), (b), (c) e (d) traz os mapas das fases total e dinâmica na ausência e na presença dos efeitos de decoerência em função da dessintonia do laser ao longo do tempo e os quadros (e) e (f) apresentam os efeitos da decoerência para tempos



**Figura 5.7:** Em a) e b) para  $\Gamma = 0$ , temos os termos de fase total (curvas azuis), dinâmica (curvas vermelhas) e geométricas (curvas verdes) para valores opostos de  $\Delta$ . Em c) e d) com  $\Gamma = 1 \mu\text{eV}$  temos os gráficos do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear para diversas condições de  $\Delta$  e  $\Omega$ . Em todas as situações estamos na condição em que  $P_0 = 0.65$  e  $P_1 = 0.35$ .



**Figura 5.8:** Em a) e c) mapas da fase total e em b) e d) da fase dinâmica para  $\Gamma = 0$  e  $\Gamma = 1 \mu\text{eV}$  respectivamente na condição em que  $\theta = 0$  com  $\Omega = 4 \mu\text{eV}$ . Em e) cortes da fase total e em f) cortes da fase dinâmica para diversos valores de  $\Omega$  quando  $\Gamma = 1 \mu\text{eV}$ .

longos nos termos de fase total e dinâmica do sistema. Os cortes para os quadros (a), (b), (c) e (d) já foram apresentados na Figura 5.3. Nos quadros (c) e (d) podemos observar que o efeito da decoerência faz com que ao longo da variação da dessintonia do laser tanto o termo de fase total quanto o termo de fase dinâmica sofram variações adiabáticas e em torno da dessintonia zero o sistema adquire uma fase total em torno de  $-\pi/2$  e uma fase dinâmica

nula para todo tempo. No regime estacionário mostrado nos quadros (e) e (f), observamos que o perfil de fase total como função da dessintonia  $\Delta$  é o perfil da função arco tangente e independentemente do valor da intensidade do laser o valor de fase total adquirida pelo sistema é invariante. Além disso nota-se que na ausência de um laser o sistema não exibe nem fase total nem fase dinâmica e isso demonstra que apesar da dessintonia do laser ter papel fundamental no controle da fase é a intensidade do laser o fator determinante para que o sistema evolua.

### 5.6.2 Sistema de três níveis: um possível qutrit

Em uma linguagem bem simples, um qutrit nada mais é do que um sistema quântico de três níveis. Talvez a diferença mais evidente entre qutrits e qubits esteja na possibilidade que os qutrits tem de assumirem diferentes configurações como por exemplo as tão estudadas configurações  $\Lambda$ ,  $V$  e cascata que possibilitam que esse tipo de sistema físico exiba propriedades físicas interessantes como o fenômeno de EIT, a propagação solitônica da luz dentre tantas outras, enquanto os qubits estão limitados a uma configuração única em cascata.

No caso de um qubit, os vetores de Bloch abrangem toda a superfície da esfera e qualquer ponto  $P$  com  $r \leq 1$  corresponde a um estado quântico válido. Para os estados puros de um qutrit, os vetores de Bloch satisfazem a condição  $r = 1$  e para estados mistos  $r < 1$ . No entanto, nem todos os vetores de Bloch com  $r \leq 1$  irão corresponder a estados de qutrit válidos. O operador densidade é um operador positivo por definição o que implica que todos os seus autovalores estão limitados no intervalo  $[0, 1]$ . Entretanto, existem escolhas do vetor de Bloch que não estão associadas a nenhum estado de qutrit válido, porque a matriz de densidade associada a ele possui autovalores negativos como por exemplo na escolha:  $\vec{n} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$  que leva aos autovalores  $2/3$ ,  $2/3$  e  $-1/3$ .

Outro ponto importante está ligado a álgebra que rege a manipulação dos estados de qutrit. Enquanto nos qubits toda a álgebra se baseia nas matrizes de Pauli pertencentes ao grupo unitário [172] especial  $SU(2)$  que é o grupo das matrizes complexas  $2 \times 2$  unitárias e com determinante um, no caso dos qutrits, é preciso lançar mão das chamadas matrizes de Gell-Mann [173] que são generalizações das matrizes de Pauli para o grupo unitário [174] especial  $SU(3)$ . Para definir uma matriz de densidade geral de um qutrit, as matrizes de Gell-Mann  $\lambda_i$  compreendidas entre  $i = 1, 2, \dots, (N^2 - 1)$  são dadas por,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

A partir delas podemos definir para o caso do sistema de três níveis o equivalente ao vetor de Bloch (agora com oito coordenadas),

$$\begin{aligned} n_1(t) &= \frac{3}{2\sqrt{3}}(\rho_{01} + \rho_{10}), & n_2(t) &= \frac{3i}{2\sqrt{3}}(\rho_{01} - \rho_{10}), \\ n_3(t) &= \frac{3}{2\sqrt{3}}(\rho_{00} - \rho_{11}), & n_4(t) &= \frac{3}{2\sqrt{3}}(\rho_{02} + \rho_{20}), \\ n_5(t) &= \frac{3i}{2\sqrt{3}}(\rho_{02} - \rho_{20}), & n_6(t) &= \frac{3}{2\sqrt{3}}(\rho_{12} + \rho_{21}), \\ n_7(t) &= \frac{3i}{2\sqrt{3}}(\rho_{12} - \rho_{21}), & n_8(t) &= \frac{1}{2}(\rho_{00} + \rho_{11} - 2\rho_{22}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Note que o vetor de Bloch para um qutrit possui oito componentes, o que define a chamada hiperesfera de Bloch-Poincaré que não exibe uma representação geométrica possível. Entretanto, a hiperesfera mantém o raio invariante  $r \leq 1$  assim como a esfera de Bloch-Poincaré em três dimensões observada no caso dos qubits. Da definição do raio de Bloch temos que:

$$r^2(t) = |n_1|^2 + |n_2|^2 + |n_3|^2 + |n_4|^2 + |n_5|^2 + |n_6|^2 + |n_7|^2 + |n_8|^2. \quad (5.44)$$

De uma forma geral, as componentes do vetor de Bloch [175] só fazem sentido como as coordenadas de uma esfera no caso 2x2. Para sistemas maiores como por exemplo os qutrits essas componentes tem apenas a função de possibilitar o mapeamento do grau de pureza do sistema através da verificação ao longo do tempo do valor assumido pelo raio da hiperesfera. Entretanto, os grupos unitários especiais exibem propriedades algébricas interessantes que podem ser bastante úteis para auxiliar na formulação de uma interpretação para a dinâmica dos estados quânticos como por exemplo a existências das chamadas subálgebras de Lie.

Considerando que o grupo unitário especial [176]  $SU(3)$  é uma extensão do grupo especial unitário  $SU(2)$ , isto é:  $SU(2)$  está contido em  $SU(3)$  [177]. É natural imaginar que os subespaços de  $SU(3)$  levem a representações do  $SU(2)$ . De fato, isso é uma realidade, as chamadas subálgebras de Lie para o  $SU(3)$  são definidas como ternos ordenados:  $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ ,  $[\lambda_4, \lambda_5, A\lambda_3 + B\lambda_8]$  e  $[\lambda_6, \lambda_7, C\lambda_3 + D\lambda_8]$ , onde  $A, B, C$  e  $D$  são números reais quaisquer. Essa definição a princípio nos permite lidar com o  $SU(3)$  como a coexistência de três subespaços do  $SU(2)$  [178] cada qual com sua própria esfera de Bloch-Poincaré associada.

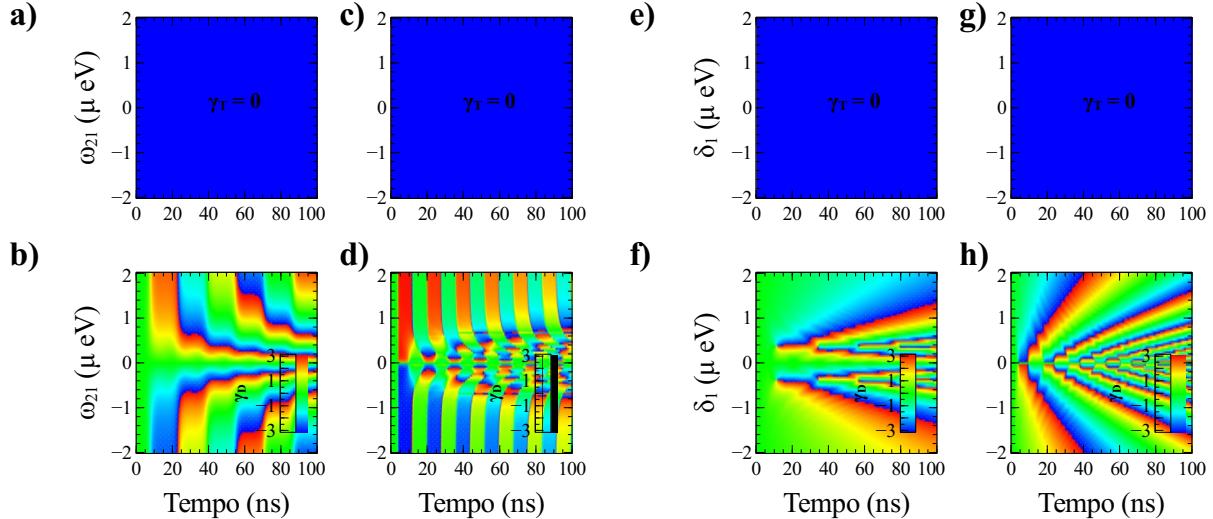
O estado geral de um qutrit puro pode ser definido a partir das coordenadas esféricas como,

$$|\Psi\rangle = \sin(\theta/2) \cos(\phi/2) |0\rangle + \sin(\theta/2) \sin(\phi/2) |1\rangle + \cos(\theta/2) |2\rangle. \quad (5.45)$$

Podemos agora definir a matriz de densidade geral para os estados de um qutrit puro com o auxílio das matrizes de Gell-Mann para  $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$  como,

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta/2) \cos^2(\phi/2) & \sin^2(\theta/2) \sin(\phi/2) \cos(\phi/2) & \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(\phi/2) \\ \sin^2(\theta/2) \sin(\phi/2) \cos(\phi/2) & \sin^2(\theta/2) \sin^2(\phi/2) & \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \sin(\phi/2) \\ \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(\phi/2) & \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \sin(\phi/2) & \cos^2(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Diferentemente do que acontecia no sistema de dois níveis onde tínhamos apenas duas variáveis para controlar, aqui no sistema de três níveis temos ao menos cinco variáveis que podem influenciar no controle dos termos de fase. Entretanto, da definição da frequência de Rabi para o sistema de três níveis apresentada no capítulo 4, sabemos que majoritariamente as variáveis que devem interferir de forma mais efetiva no comportamento dos termos de fase são o tunelamento e a intensidade do laser. Na Figura 5.9, trazemos os mapas dos termos de fase total e dinâmica como funções do campo elétrico aplicado na condição de ressonância da dessintonia do laser e da dessintonia na condição de campo elétrico nulo.

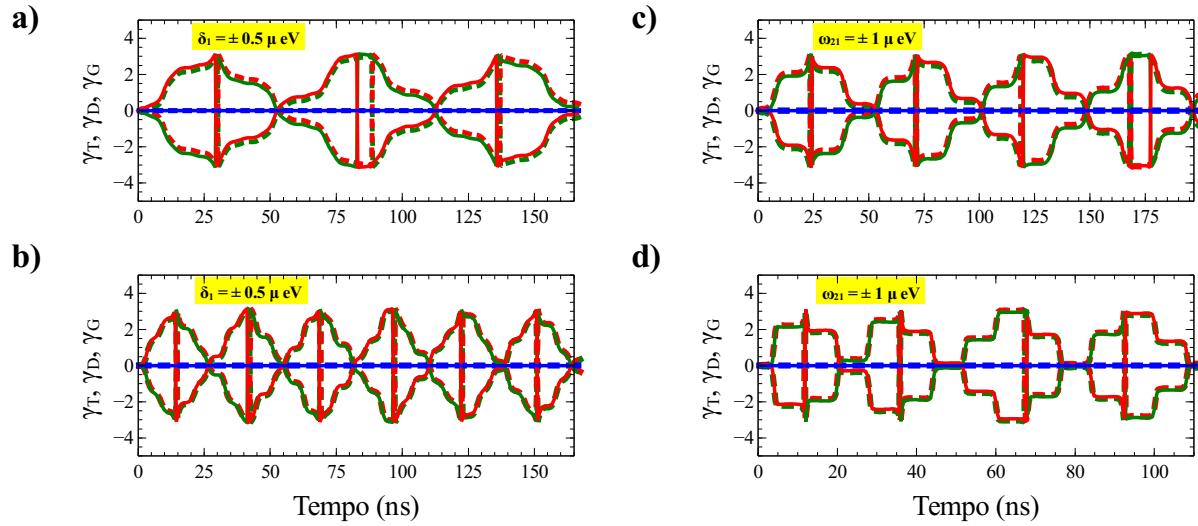


**Figura 5.9:** Em a) e b) mapas dos termos de fase total e dinâmica na condição em que  $\delta_1 = 0$  para  $\Omega = T_e/2$ , em c) e d) na condição em que  $\Omega = 2T_e$ . Em e) e f) na condição em que  $\omega_{21} = 0$  para  $\Omega = T_e/2$  e em g) h) para  $\Omega = 2T_e$ . Em todas as situações estamos em  $\theta = \pi$  e  $\Gamma = 0$ .

Nos quadros (a), (b), (e) e (f) estamos em um regime de acoplamento óptico fraco e nos quadros (c), (d), (g) e (h) em um regime de acoplamento óptico forte definidos a partir do tunelamento. Como estamos em um estado puro dado por  $\theta, \phi = 0$  e no regime sem decoerência, observa-se que a fase [179] total adquirida pelo sistema é nula em todas as situações.

Em ambas as situações, para o campo elétrico  $\omega_{21}$  e para a dessintonia  $\delta_1$ , no regime de acoplamento óptico fraco em torno da origem em  $\delta_1$  e  $\omega_{21}$  as fases dinâmicas do sistema se anulam em comum acordo com o que já havíamos observado no sistema de dois níveis. No regime de acoplamento óptico forte, o comportamento das fases dinâmicas no entorno da origem é caracterizado pelo aparente aumento das oscilações da fase.

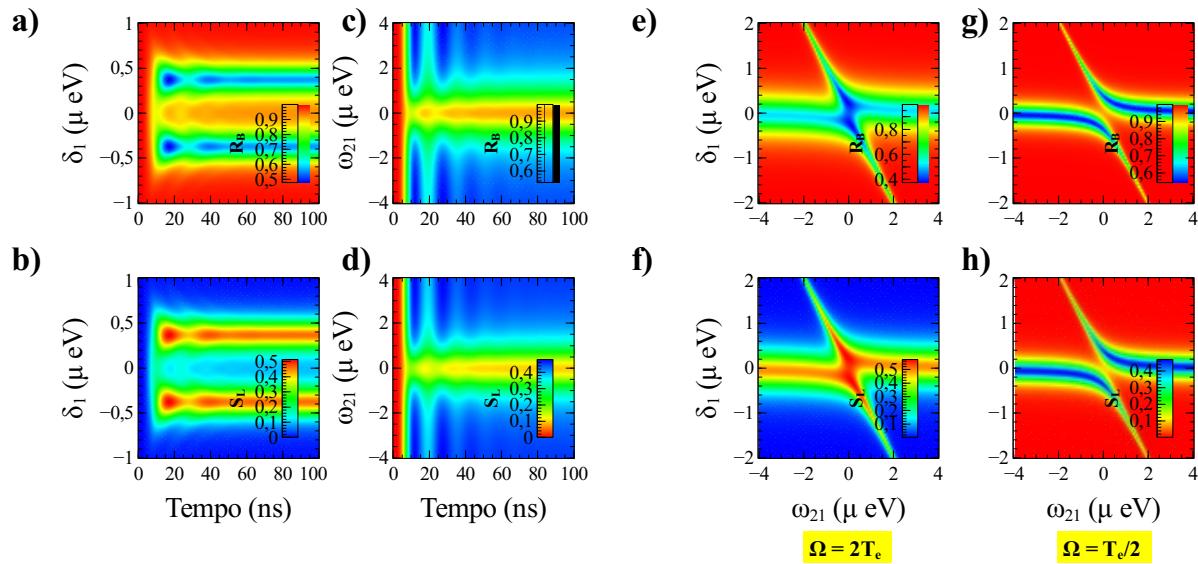
A Figura 5.10 traz cortes das situações apresentadas na Figura 5.9. Nos quadros (a) e (b) podemos observar que assim como ocorria com o sistema de dois níveis a dessintonia do laser afeta os termos de fase mudando seus sinais para dessintonias opostas como pode ser observado comparando as curvas cheias e pontilhadas. Um fato interessante porém é que, diferentemente do que acontecia no sistema de dois níveis, aqui o período de repetição das fases e a forma das curvas não está muito bem definido apesar de ser possível observar certa periodicidade. Esse fato com toda certeza está ligado aos canais de interferência acessíveis ao sistema de três níveis. O mesmo pode ser observado em relação ao campo elétrico aplicado  $\omega_{21}$ .



**Figura 5.10:** Cortes da Figura 5.9. Em a) e c) na condição em que  $\omega_{21} = 0$  com  $\Omega = T_e/2$ . Em b) e d) na condição em que  $\delta_1 = 0$  com  $\Omega = 2T_e$ .

A Figura 5.11 traz o comportamento do raio da hiperesfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear do sistema durante a dinâmica nos quadros (a), (b), (c) e (d) e no regime estacionário nos quadros (e), (f), (g) e (h). Nos quadros (a) e (b) para os mapas em função da dessintonia do laser observamos um comportamento distinto ao observado no sistema de dois níveis, em torno da ressonância do laser os estados do sistema permanecem mais puros e ao longo de duas dessintonias opostas o sistema exibe um elevado grau de mistura. Para os quadros (c) e (d) na condição de campo elétrico zero o sistema exibe pureza e essa se desvanece, ao passo que o campo elétrico aplicado aumenta em módulo.

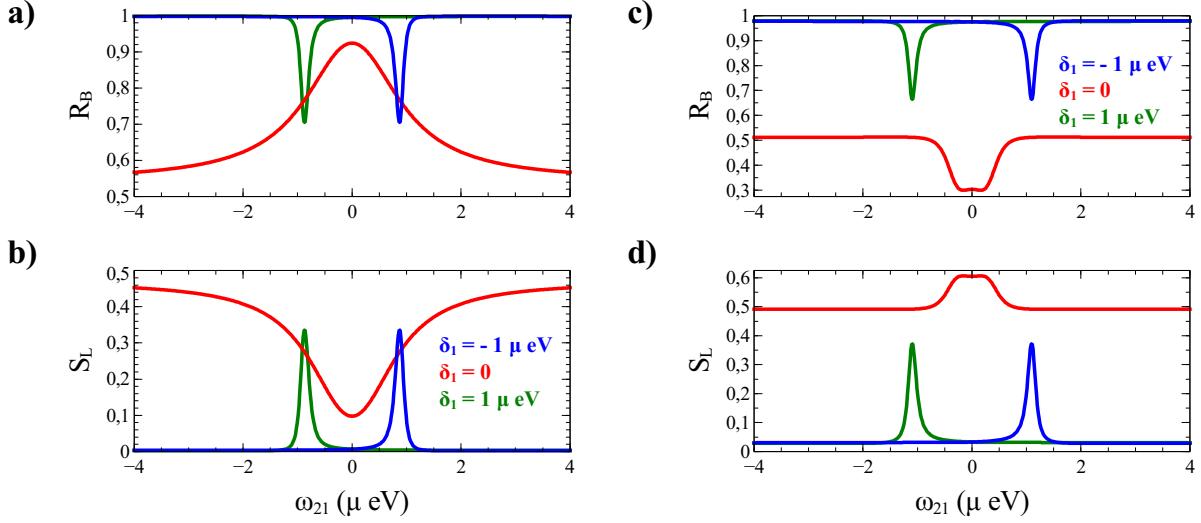
Os quadros de (e) a (h) trazem o comportamento dessas grandezas no regime estacionário como função exclusivas da dessintonia e do campo elétrico variando conjuntamente nos regimes de acoplamento óptico fraco e forte. No regime de acoplamento forte dos quadros (e) e (f), observa-se que na condição de ressonância máxima  $\delta_1 = \omega_{21} = 0$  o sistema experimenta o maior grau de mistura possível se tornando um estado maximamente misto e a trajetória dos estados na hiperesfera experimenta um raio bastante reduzido. No regime de acoplamento fraco, entretanto, especificamente nas proximidades da condição de ressonância completa, o sistema sofre uma perfeita repurificação. Ao longo da linha em que  $\delta_1 = 0$  o sistema se manifesta misto e ao longo da linha em que  $\omega_{21} = 0$  o sistema se manifesta puro.



**Figura 5.11:** No regime de acoplamento fraco  $\Omega = T_e/2$ , em a) e b) os mapas do raio da esfera de Bloch-Poincaré em função do tempo na condição em que  $\omega_{21} = 0$  e em c) e d) na condição em que  $\delta_1 = 0$ . Em e), f), g) e h) os mapas no regime estacionário na condição nos regimes de acoplamento fraco  $\Omega = T_e/2$  e forte  $\Omega = 2T_e$ .

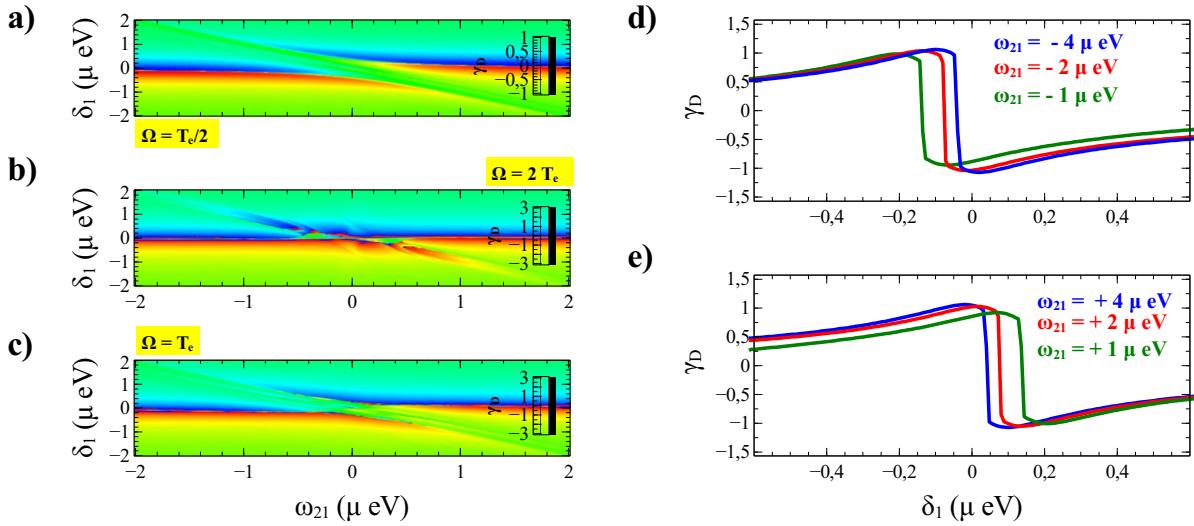
A Figura 5.12 apresenta alguns cortes dos quadros (e), (f), (g) e (h) da Figura 5.11 para o regime estacionário. Podemos notar que para o regime de acoplamento fraco exatamente na dessintonia nula o sistema sofre uma mudança suave passando de um estado misto em  $\omega_{21} < 0$  para um estado purificado em  $\omega_{21} = 0$  e retornando a um estado misto para  $\omega_{21} > 0$ .

Em dessintonias opostas e diferentes da ressonância o sistema experimenta uma mudança brusca de um estado puro para um estado misto exatamente onde  $\omega_{21} = -\delta_1$  e logo após retorno ao estado puro de que saiu como se a dessintonia do laser funcionasse como uma perturbação da pureza do sistema. No regime de acoplamento forte a única situação distinta ocorre na ressonância da dessintonia do laser. O sistema sai de um estado misto e se torna ainda mais misto.



**Figura 5.12:** Cortes dos quadros e), f), g) e h) da Figura 5.11. Em a) e b no regime de acoplamento fraco  $\Omega = T_e/2$  e em c) e d) no regime de acoplamento forte  $\Omega = 2T_e$ . Em todas as situações  $\Gamma_0^1 = 1\mu eV$ .

A Figura 5.14 traz o comportamento da fase dinâmica do sistema de três níveis no estado puro definido por  $\theta, \phi = 0$  nos regimes de acoplamento fraco  $\Omega = T_e/2$ , forte  $\Omega = 2T_e$  e de acoplamento igualitário  $\Omega = T_e$ .



**Figura 5.13:** Em a), b) e c) os mapas do termo de fase dinâmica em função de  $\omega_{21}$  e  $\delta_1$  para os regimes  $\Omega = T_e/2$ ,  $\Omega = 2T_e$  e  $\Omega = T_e$  respectivamente. Em d) e e) cortes para o regime de acoplamento fraco  $\Omega = T_e/2$  para diferentes valores do campo elétrico  $\omega_{21}$ .

Nos quadros a), (b) e (c) podemos observar claramente que os mapas da fase dinâmica para os regimes de acoplamento onde o laser tem intensidades maiores ou iguais que o tunelamento, exibem uma aparente interferência na região no entorno da ressonância completa

$\delta_1 = \omega_{21} = 0$ . Aqui, assim como acontece no sistema de dois níveis, valores maiores ou iguais que  $\sqrt{2}\Omega$  da frequência de Rabi provocam mudanças bruscas no comportamento da fase adquirida pelo sistema na evolução temporal entre os estados inicial e final. Os quadros (d) e (e) trazem cortes da condição de acoplamento óptico fraco e neles podemos ver claramente que nessa região de acoplamento o termo de fase dinâmica tem variação suave em torno da ressonância do laser. Valores distintos do campo aplicado apenas deslocam a posição no eixo das dessintonias da mudança de sinal das fase. Na próxima seção vamos adotar uma abordagem perturbativa para aproximar o nosso qutrit por um qubit na esfera de Bloch-Poincaré.

### 5.6.3 Teoria de perturbação de Van Vleck

O gráfico dos autovalores do Hamiltoniano do sistema de três níveis apresentados nas Figuras 4.8 e 4.9 mostra que para um regime de acoplamento forte entre  $\Omega$  e  $T_e$  os autovalores do Hamiltoniano se anticruzam duas vezes e esses anticruzamentos estão localizados nas frequências de batimento quântico do sistema. A proposta aqui é utilizar conceitos de teoria de perturbação para transformar o sistema de três níveis em um sistema de dois níveis efetivo.

No presente trabalho vamos lançar mão da teoria de perturbação independente do como descrita por Van Vleck [180], onde, de posse do Hamiltoniano do sistema (assumido independente do tempo) de três níveis vamos tomar como perturbações na nossa teoria os efeitos de  $\Omega$  e  $T_e$ . Assim, a perturbação como definida por Van Vleck [181] fica dada pela expressão,

$$\begin{aligned} \langle i\alpha | H^{eff} | j\alpha \rangle &= E_{j\alpha} \delta_{ij} + \langle i\alpha | V | j\alpha \rangle + \\ &\frac{1}{2} \sum_{k,\gamma \neq \alpha} \langle i\alpha | V | k\gamma \rangle \langle k\gamma | V | j\alpha \rangle \left[ \frac{1}{E_{i\alpha} - E_{k\gamma}} + \frac{1}{E_{j\alpha} - E_{k\gamma}} \right], \end{aligned} \quad (5.47)$$

onde o primeiro termo a direita representa o Hamiltoniano sem perturbação, o segundo representa a perturbação incluída no sistema e o terceiro termo é uma correção em segunda ordem da energia. Para o nosso sistema de três níveis, a partir do Hamiltoniano, podemos definir  $H_0$  e  $V$  como,

$$H_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\delta_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta_1}{2} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & T_e \\ \Omega & T_e & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

note que executamos uma troca entre os estados de exciton direto e indireto, visto que a ideia aqui é desacoplar o estado de exciton direto já que nele a princípio não estão embutidos os efeitos do acoplamento por tunelamento somente do acoplamento óptico.

Assim, podemos calcular os elementos do Hamiltoniano perturbado que ficam dados por,

$$\begin{aligned} \langle i\alpha | H^{eff} | i\alpha \rangle &= -\frac{\delta_1}{2} - \frac{\Omega^2}{\delta_1}, & \langle j\alpha | H^{eff} | j\alpha \rangle &= \frac{\delta_2}{2} + \frac{T_e^2}{\omega_{21}} \\ \langle k\beta | H^{eff} | k\beta \rangle &= \frac{\delta_1}{2} - \frac{\Omega^2}{\delta_1} + \frac{T_e^2}{\omega_{21}}, & \langle i\alpha | H^{eff} | j\alpha \rangle &= \frac{\Omega T_e}{2} \left[ \frac{1}{\omega_{21}} - \frac{1}{\delta_1} \right]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Podemos então eliminar o estado de exciton direto. Da dinâmica do sistema de três níveis apresentada no 4 sabemos que o intenso regime de CPT anula a contribuição da população do estado  $|1\rangle$ . Além disso, a análise dos autovalores do Hamiltoniano do sistema de três níveis mostra que ajustando  $\delta_1$  ou  $\omega_{21}$  é possível fazer com que ao menos localmente, o sistema se comporte como um sistema efetivo de dois níveis e isso justifica o uso de uma teoria de perturbação. Assim, nosso Hamiltoniano efetivo fica dado por,

$$H^{eff} = \begin{pmatrix} \delta_1^{eff} & \Omega^{eff} \\ \Omega^{eff} & \delta_2^{eff} \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

A principal vantagem dessa abordagem é que ao aproximar um estado de qutrit por um estado de qubit recuperamos a interpretação da trajetória dos estados do sistema na esfera de Bloch-Poincaré. As desvantagens passam pelas limitações dos valores acessíveis de desintonia e campo elétrico que agora visivelmente não podem passar mais pela ressonância. Podemos aqui fazer uma análise semelhante a feita no capítulo 4 quando da discussão do sistema de dois níveis. Diagonalizando o Hamiltoniano efetivo podemos obter seus autovalores:

$$\Lambda_{\pm} = -\frac{(\delta_1^{eff} - \delta_2^{eff})}{2} \pm \sqrt{\frac{(\delta_1^{eff} + \delta_2^{eff})^2}{4} + \Omega_{eff}^2}, \quad (5.51)$$

com os quais podemos escrever os autovetores associados. Considerando que em  $t = 0$  o sistema está no estado  $|0\rangle$  temos que  $|0\rangle = \cos \alpha |\Psi_0\rangle + \sin \alpha |\Psi_1\rangle$ , onde o ângulo  $\alpha$  é definido como função dos parâmetros do Hamiltoniano efetivo como,

$$\cos \alpha = \frac{\pm \Omega_{eff}}{\sqrt{\Omega_{eff}^2 + (\delta_{1,2}^{eff} \pm \Lambda_{\pm})^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\mp (\delta_{1,2}^{eff} \pm \Lambda_{\pm})}{\sqrt{\Omega_{eff}^2 + (\delta_{1,2}^{eff} \pm \Lambda_{\pm})^2}}. \quad (5.52)$$

Podemos então, escrever a evolução temporal do estado do nosso qubit efetivo a partir da aplicação do operador de evolução temporal ao estado  $|0\rangle$  de forma que após algumas simplificações matemáticas chegamos à expressão para  $|\Psi(t)\rangle$ ,

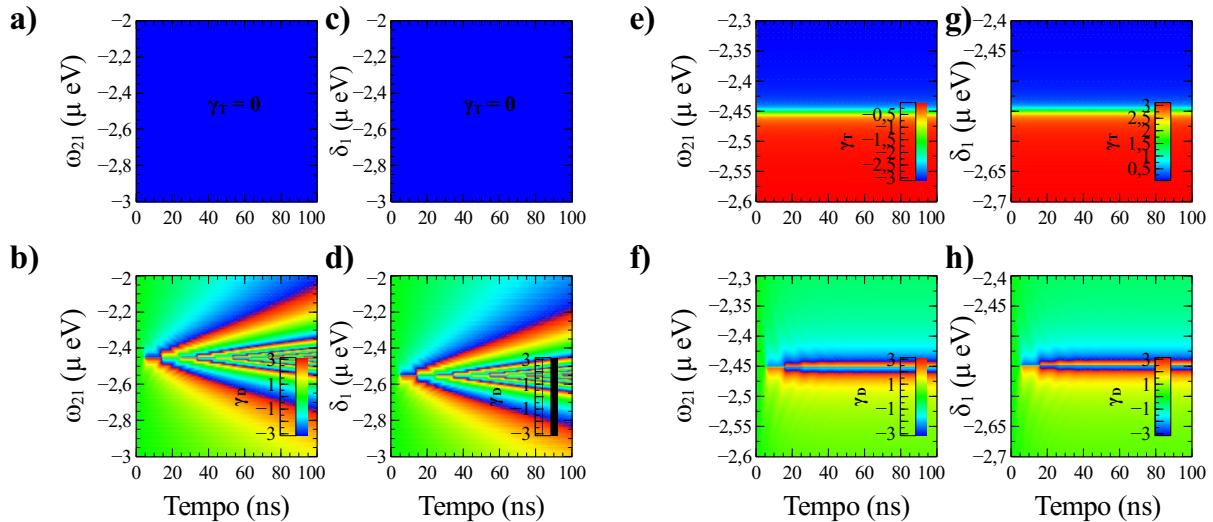
$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{i\nu t} (e^{-i\Omega_R t} \cos^2 \alpha + e^{i\Omega_R t} \sin^2 \alpha) |0\rangle \\ &+ (e^{-i\Omega_R t} - e^{i\Omega_R t}) \sin \alpha \cos \alpha |1\rangle. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Aqui, podemos definir a frequência de Rabi efetiva associada ao sistema efetivo de dois níveis  $\Omega_R$ :

$$\Omega_R = \sqrt{\Omega_{eff}^2 + \frac{(\delta_1^{eff} + \delta_2^{eff})^2}{4}} = \sqrt{\Omega_{eff}^2 + \Delta_{eff}^2}, \quad (5.54)$$

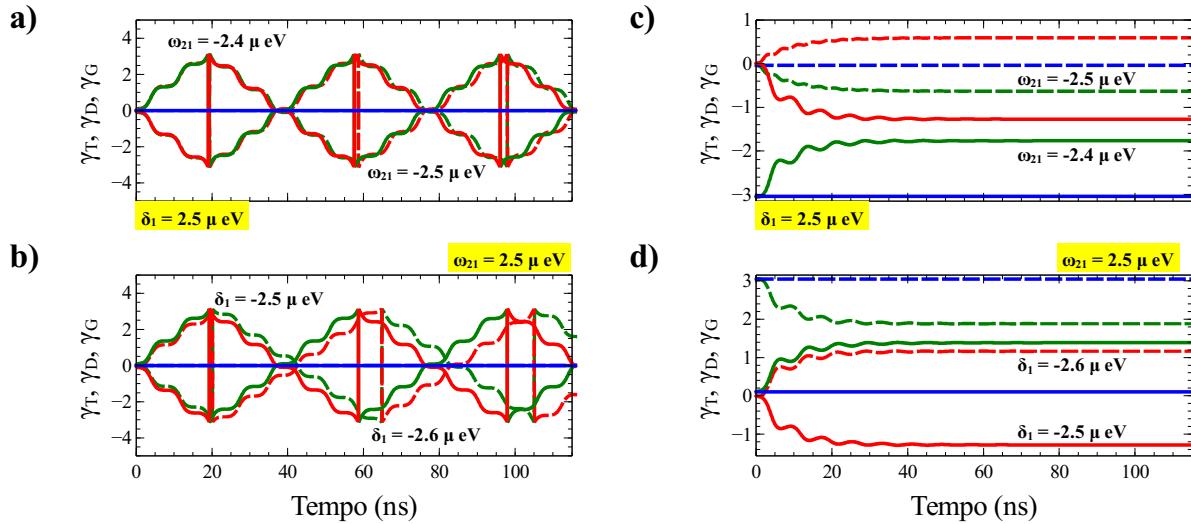
e uma fase global adicional ganha pelo sistema dada por  $\nu = (\delta_1^{eff} - \delta_2^{eff})/2$ . De posse desses resultados podemos partir para uma análise numérica do problema. As Figuras 5.14, 5.15 e 5.16 trazem a análise do comportamento das fases total, dinâmica e geométrica nos regimes com e sem decoerência além do comportamento do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear para o sistema efetivo de dois níveis.

O gráfico dos mapas das fases total, dinâmica e geométrica apresentados na Figura 5.14 foram feitos para dessintonias e campos elétricos no entorno do anticruzamento no qual foi realizada a avaliação perturbativa. Podemos observar nos quadros (e), (f), (g) e (h) que tanto para as variações da dessintonia do laser mantendo o campo elétrico aplicado fixo como para as variações do campo elétrico mantendo a dessintonia fixa, as fases total e dinâmica do sistema se comportam de forma semelhante.



**Figura 5.14:** Nos quadros a), b), c) e d) temos  $\Gamma = 0$ . Em a) e b) os mapas da fase total e dinâmica em função de  $\omega_{21}$  na condição em que  $\delta_1 = 2.5\mu eV$ , em c) e d) em função de  $\delta_1$  na condição em que  $\omega_{21} = 2.5\mu eV$ . Nos quadros e), f), g) e h) as mesmas situações mas com  $\Gamma = 1\mu eV$ .

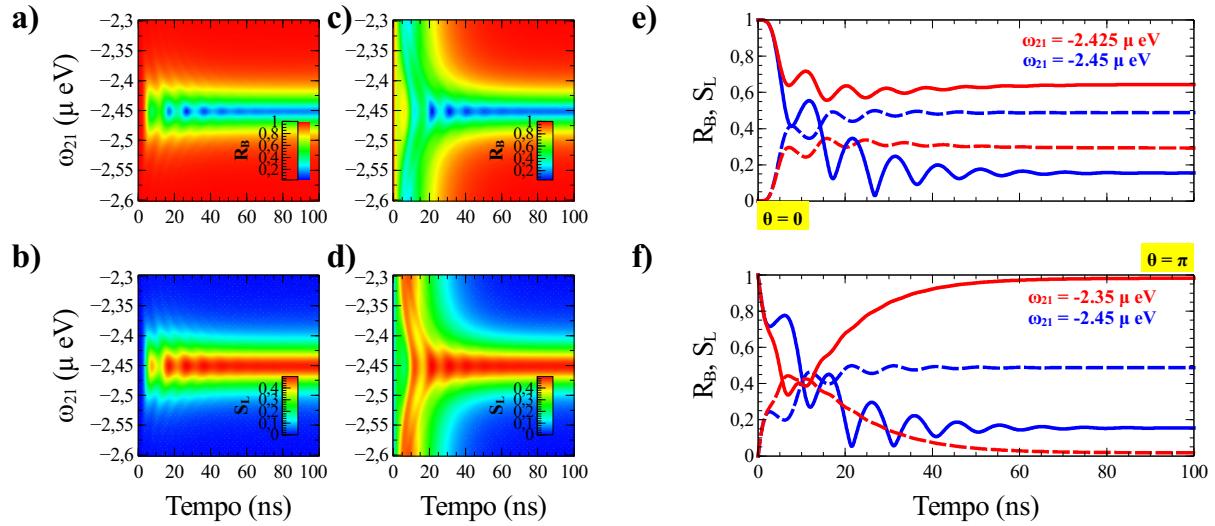
No caso em que variamos o campo elétrico a fase total muda de zero para  $-\pi$  enquanto para variações do campo elétrico ela muda de zero para  $\pi$ . Os perfis de fase total e dinâmica se comportam de forma muito semelhante ao que foi observado para o sistema de dois níveis real. Os quadros (a) e (c) da Figura 5.15 trazem os cortes do mapa para dessintonia do laser fixa para alguns valores de  $\omega_{21}$  no entorno do anticruzamento. Podemos notar que agora a inversão do sinal da fase dinâmica se dá numa escala de variação do campo bem pequena e isso é devido ao shift de energia provocado pela expansão perturbativa. Um fato interessante a ser observado é que na ausência do efeito de decoerência a periodicidade da fase não está sendo conservada o que pode indicar que a validade da expansão perturbativa não é completamente mantida. Entretanto, esse efeito é corrigido na presença da decoerência por estarmos utilizando uma teoria de perturbação independente do tempo e no regime estacionário ao qual o sistema é levado pelos efeitos da decoerência não existem mudanças significativas nas variáveis do sistema.



**Figura 5.15:** Em a) e c) cortes da Figura 5.14 para  $\Gamma = 0$  e  $\Gamma = 1\mu\text{eV}$  respectivamente. As linhas cheias indicam  $\omega_{21} = -2.4\mu\text{eV}$  e as linhas tracejadas  $\omega_{21} = -2.5\mu\text{eV}$ . Em b) e d) o mesmo mas agora para cortes em  $\delta_1$ .

Na Figura 5.16 apresentamos os mapas do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear para duas inicializações distintas do nosso qubit efetivo. Nos quadros (a) e (b) para o sistema inicializado no estado  $|0\rangle$  localizado no polo norte e nos quadros (c) e (d) para o sistema inicializado no estado  $|1\rangle$  localizado no polo sul da esfera. Os resultados para  $\theta = 0$  estão de acordo com o que já havíamos observado no sistema de dois níveis. No quadro (e) temos os cortes desse mapa para alguns valores de  $\omega_{21}$ . As linhas cheias representam o raio da esfera e as linhas pontilhadas a entropia linear associada. Para  $\theta = \pi$ , entretanto, observamos um comportamento muito interessante. Em certos valores de  $\omega_{21}$  o sistema exibe uma perfeita repurificação dos seus estados, saindo de um estado puro, ficando bastante misto e retornando a um estado puro para tempos longos.

Esse comportamento é oposto ao observado no sistema de dois níveis, onde apenas inicializações no equador da esfera de Bloch-Poincaré levam ao fenômeno de repurificação dos estados. A justificativa para que aqui na esfera efetiva isso ocorra nos polos está ligada à fase adicional que o sistema ganha como consequência da adoção de uma teoria de perturbação, como pode ser visto na equação (5.53).



**Figura 5.16:** Mapas do raio da esfera de Bloch-Poincaré e da entropia linear em função de  $\omega_{21}$  e do tempo. Em a) e b) para a condição  $\theta = 0$  com  $\delta_1 = 2.5 \mu\text{eV}$ . Em c) e d) para  $\theta = \pi$ . Em e) e f) cortes para alguns valores de  $\omega_{21}$ . Em todas as situações  $\Gamma = 1 \mu\text{eV}$ .

No próximo capítulo vamos discutir a manipulação de pulsos gaussianos para a obtenção do fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida no sistema de quatro níveis estudado no capítulo 4.

# Capítulo 6

## Manipulação de Pulses Gaussianos em Pontos Quânticos

### 6.1 Introdução

No capítulo 4 discutimos a dinâmica e as características dos sistemas de dois, três e quatro níveis. No que diz respeito aos regimes ópticos, observamos uma coleção de possibilidades. O sistema de dois níveis em quaisquer condições de acoplamento exibe um único regime óptico, o regime caracterizado por um perfil lorentziano da absorção e uma dispersão anômala do índice de refração, caracterizada pela diminuição do mesmo com o aumento da dessintonia do laser no entorno da região de ressonância. O sistema de três níveis, entretanto, exibe três regimes ópticos claros e distintos a depender da relação entre os acoplamentos e os efeitos de decoerência. Talvez o regime mais interessante observado nesse sistema seja o regime de EIT, gerado quando a razão entre o tunelamento e a taxa de decoerência da transição brilhante se aproxima de 0.5, caracterizando um regime de transparência induzido não por um campo eletromagnético mas por tunelamento. O sistema de quatro níveis, em contrapartida, exibe um regime óptico incomum aos demais sistemas estudados, um regime que se assemelha muito aos conhecidos triplets de Mollow (TRM). Entretanto, não foi possível observar uma transição suave entre os regimes de dispersão anômala e um possível regime de EIT, apesar do sistema apresentar quase todos os pré-requisitos para a observação desse fenômeno.

A questão crucial para a não observação desse regime no sistema de quatro níveis, passa pela impossibilidade de, utilizando um laser contínuo (CW), induzir nesse sistema um regime de acúmulo coerente de população. Isso se deve basicamente, ao fato da frequência de batimentos quânticos do sistema coincidir exatamente com a condição de ressonância completa, que é justamente onde o fenômeno de EIT se manifesta, fazendo com que a velocidade de grupo da onda associada ao acoplamento de prova se reduza bruscamente produzindo o fenômeno de luz lenta.

A incapacidade do laser em uma modulação CW de produzir CPT é bastante justificável, visto que lasers nesse regime possuem baixa resolução espectral e devido à coincidência entre as frequências de batimento e a ressonância do sistema não foi possível sintonizar exatamente o canal de interferência quântica que produz o regime de transparência na condição em que as dessintonias do campo magnético aplicado são paramétricas. No presente capítulo vamos adotar o uso de um laser pulsado afim de contornar esse problema. Existem lasers atuando em diversos modos de operação, que diferem principalmente no que diz respeito ao casamento de fase entre os seus modos vibracionais. O regime de operação mais comum é o regime multimodos. Esse regime ocorre principalmente para lasers operando em modulações CW. Nesse tipo de laser, a intensidade total é a soma das intensidades de cada modo, como por exemplo acontece, nos lasers de He-Ne, argônio e criptônio.

Normalmente os lasers multimodos possuem muitas componentes espetrais, o que faz com que as fases relativas entre os modos sejam aleatórias. Em aplicações onde se deseja uma frequência bem definida, como é o caso do nosso sistema de quatro níveis, esse tipo de laser não é muito indicado. Outro regime de operação muito importante é o chamado regime de modos travados, também conhecido como regime de fases travadas. Esse tipo de operação permite a obtenção de pulsos extremamente curtos e ocorre, por exemplo, ao se inserir um elemento intracavidade que produza uma correlação entre as fases dos diversos modos longitudinais do laser gerando, por exemplo, um trem de pulsos que pode induzir o acúmulo coerente de população. No presente capítulo, vamos estudar maneiras para induzir o fenômeno de EIT no sistema de quatro níveis estudado no capítulo 4. Primeiramente vamos utilizar a manipulação do delay temporal entre os pulsos de prova e controle, e depois vamos implementar um trem de pulsos ultracurtos para modelar nosso laser de controle. Para os leitores interessados, os apêndices D e E trazem uma breve análise acerca do uso de pulse chirps e da propagação de pulsos em PQs, respectivamente.

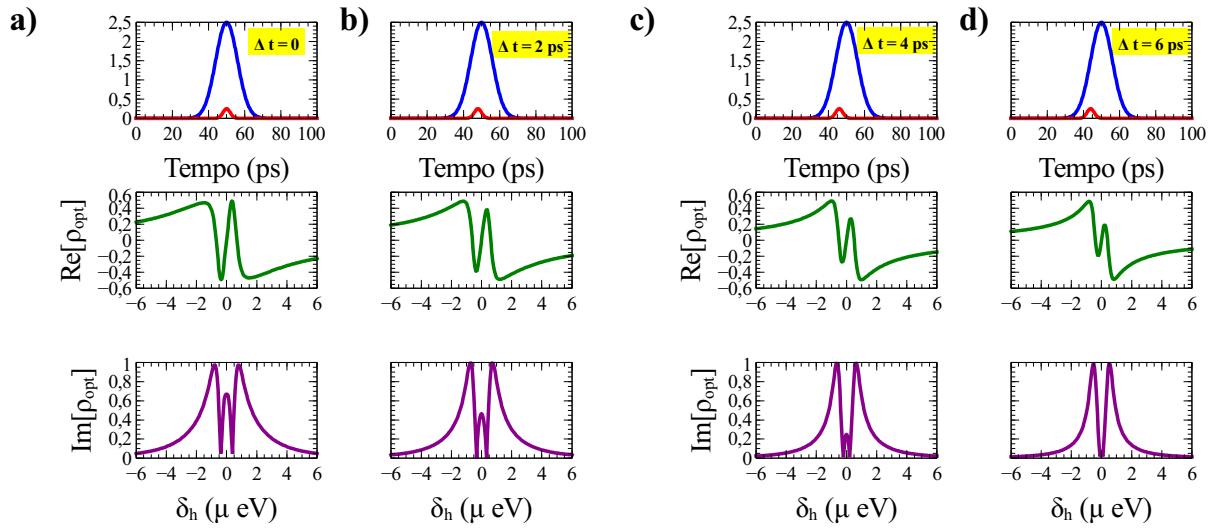
## 6.2 Delay temporal entre pulsos

A ideia aqui é modelar os lasers de prova e controle como pulsos gaussianos de ordem zero, respeitando logicamente suas intensidades. O laser de prova ligado às transições dos estados  $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$  e  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  é um laser de baixa intensidade se comparado ao laser de controle ligado às transições entre os estados  $|0\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  e  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ . Podemos definir os pulsos gaussianos de prova e controle como,

$$\begin{aligned}\Omega_p &= A_p \exp \left\{ -\frac{(t - t_p)^2}{2S_p^2} \right\}, & S_p &= \frac{\tau_0^p}{2\sqrt{2\ln 2}} \\ \Omega_c &= A_c \exp \left\{ -\frac{(t - t_c)^2}{2S_c^2} \right\}, & S_c &= \frac{\tau_0^c}{2\sqrt{2\ln 2}},\end{aligned}\tag{6.1}$$

onde  $A_{p,c}$  representa a intensidade dos pulsos de prova e controle,  $S_{p,c}$  é a dispersão dos pulsos,  $\tau_0^{p,c}$  são as larguras dos pulsos de prova e controle a meia altura e  $t_{p,c}$  são as posições do centro dos pulsos de prova e controle respectivamente. Para fins de análise [182] vamos nos importar apenas como os valores das intensidades e das larguras dos pulsos a meia altura e do delay [183] entre eles definido como  $\Delta t = |t_c - t_p|$ .

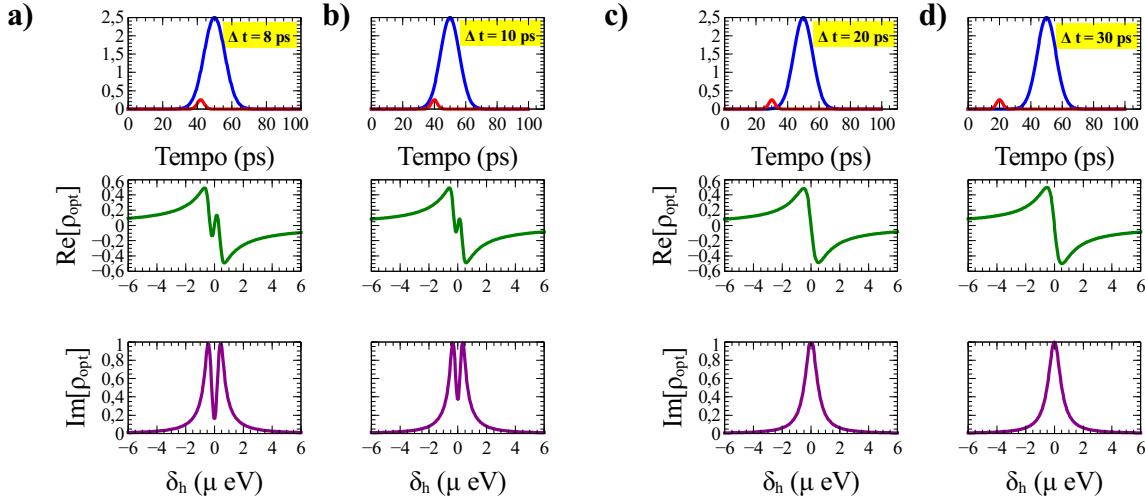
Na Figura 6.1 trazemos os gráficos para diferentes valores do delay [184] entre os pulsos de prova e controle na condição em que suas larguras são dadas como  $\tau_0^p = 2$  ps e  $\tau_0^c = 6$  ps. Para todos os casos o pulso de controle foi posto centrado em 50 ps exatamente no meio da dinâmica do sistema. Podemos observar que na condição em que não existe delay temporal [185] entre os pulsos o sistema exibe um regime óptico do tipo TRM e conforme o delay entre os pulsos vai crescendo, o pico central do espectro de absorção vai perdendo intensidade. Na condição em que  $\Delta t = 6$  ps o espectro de absorção zera em torno da ressonância de  $\delta_h$  e o índice de refração sofre uma variação brusca em torno da ressonância porém menor que nos outros casos.



**Figura 6.1:** Nos quadros superiores o gráfico do laser de prova (curva vermelha) e de controle (curva azul), nos quadros do meio a parte real do elemento óptico e nos quadros inferiores a parte imaginária. Na coluna a) para  $\Delta t = 0$ , na coluna b) para  $\Delta t = 2$  ps, na coluna c) para  $\Delta t = 4$  ps e na coluna d) para  $\Delta t = 6$  ps. Em todas as situações  $\Gamma = 5\mu\text{eV}$  e  $\gamma = 1\mu\text{eV}$  e  $\Delta = 0$ .

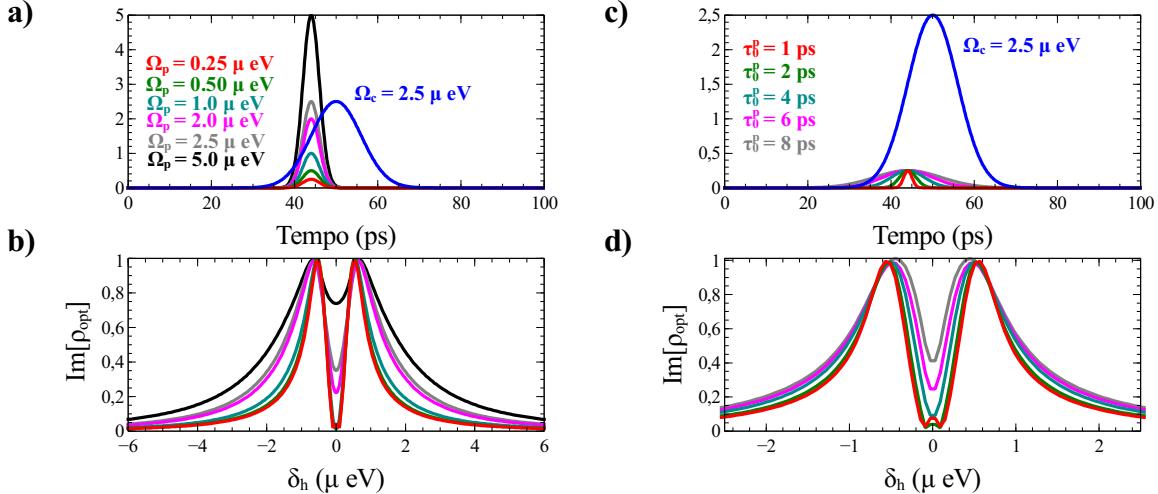
Na Figura 6.2 observamos que se continuamos aumentando o delay entre os pulsos de prova e controle o espectro de absorção continua mudando e sai da condição de EIT observada na coluna (d) da Figura 6.1. O que acontece aqui é que o regime óptico do sistema continua transicionando de forma suave, conforme o delay aumenta e para delays razoavelmente grandes, recuperamos o regime de dispersão anômala observado nos sistemas de dois e três níveis. Esse regime óptico também é observado no sistema de quatro níveis quando o laser de prova está desligado.

Esse regime também é recuperado quando as áreas dos pulsos de prova e controle deixam de interferir entre si.



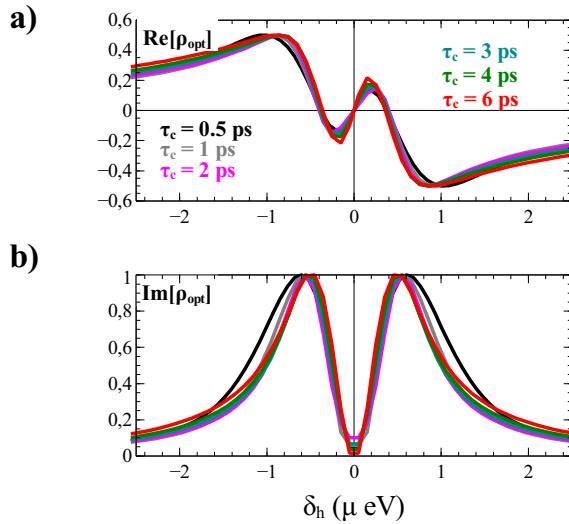
**Figura 6.2:** Nos quadros superiores o gráfico do laser de prova (curva vermelha) e de controle (curva azul), nos quadros do meio a parte real do elemento óptico e nos quadros inferiores a parte imaginária. Na coluna a) para  $\Delta t = 8$  ps, na coluna b) para  $\Delta t = 10$  ps, na coluna c) para  $\Delta t = 20$  ps e na coluna d) para  $\Delta t = 30$  ps. Em todas as situações  $\Gamma = 5\mu\text{eV}$  e  $\gamma = 1\mu\text{eV}$  e  $\Delta = 0$ .

A Figura 6.3 traz em seu quadro (b) mais detalhados do que acontece com o caso observado na coluna (d) da Figura 6.1 para variações da intensidade do laser de prova apresentadas no quadro (a).



**Figura 6.3:** Em a) diferentes valores de intensidade do laser de prova para a intensidade do laser de controle fixa  $\Omega_c = 2.5\mu\text{eV}$ . Em b) as mudanças na parte imaginária do elemento óptico para diferentes valores de  $\Omega_p$ . Em c) diferentes larguras do pulso de prova e em d) as modificações que elas causam em  $\text{Im}[\rho_{\text{opt}}]$ . Em todas as situações  $\tau_0^p = 2$  ps,  $\tau_0^c = \Delta t = 6$  ps.

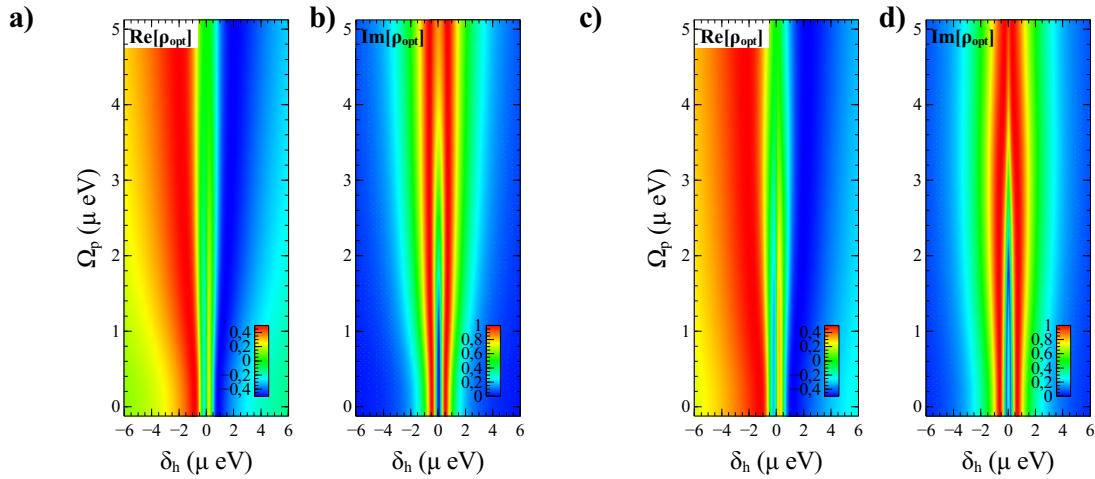
Pode-se observar que conforme se aumenta a intensidade do laser de prova a parte imaginária do elemento óptico tende a sair do regime de EIT observado para baixa intensidade ao passo que se continuarmos aumentando a intensidade do laser de prova iremos recuperar o regime de absorção com perfil lorentziano. No quadro (d) observa-se algo parecido em relação ao comportamento da parte imaginária do elemento óptico porém agora variando a largura do laser de prova. O que podemos notar é que nessa condição também perdemos o regime de EIT mas, ao que parece, o efeito da largura do pulso é menos drástico que o da intensidade do laser ao passo que será necessário adotar um pulso de prova muito largo para recuperar completamente o regime lorentziano. A Figura 6.4 explora a condição implícita ao resultado obtido na coluna (d) da Figura 6.1. Para diversos valores da largura do pulso de controle  $\tau_0^c$ , tomamos a condição em que  $\Delta t = \tau_0^c$  e  $\tau_0^p = \tau_0^c/2$ . O que fica evidente é que essa é uma condição bastante favorável à produção do fenômeno de EIT.



**Figura 6.4:** Em a) e b) o comportamento das partes real e imaginária do elemento óptico associado ao laser de prova para diferentes larguras do laser de controle na condição  $\Delta t = \tau_0^c$ ,  $\tau_0^p = \tau_0^c/2$ .

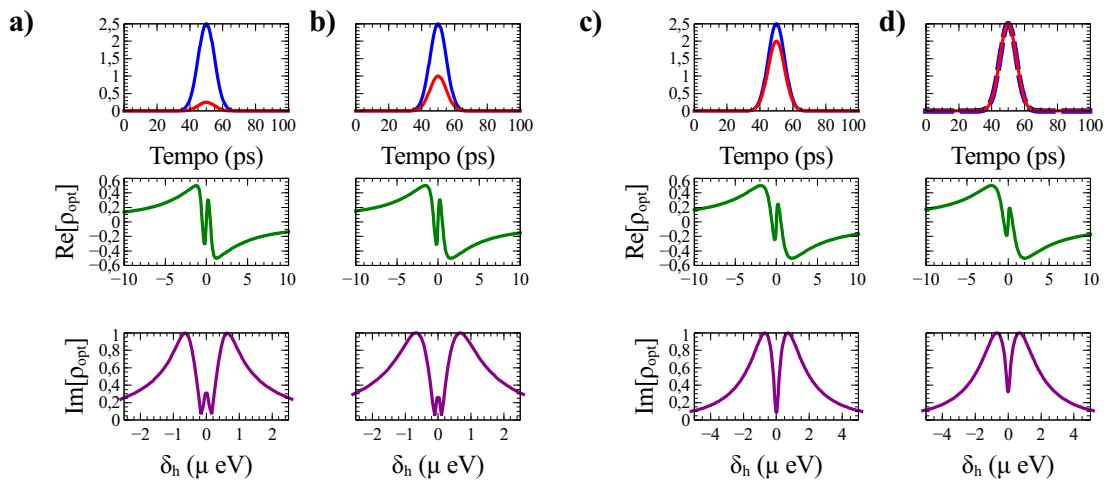
A Figura 6.5 apresenta mapas do comportamento das partes real e imaginária do elemento óptico associado do laser de prova como função da dessintonia  $\delta_h$  e da intensidade do laser de controle. Nos quadros (a) e (b) temos o comportamento para a condição em que a largura do laser de controle é igual ao delay entre os pulsos, assumindo valor 6 ps e a largura do laser de prova é tomada como a metade da largura do laser de controle. Essa situação representa um mapa do que foi observado nos quadros (a) e (b) da Figura 6.3, por exemplo, mas agora para uma largura do pulso de prova que corresponde a metade da do laser de controle. Olhando simplesmente para a parte imaginária podemos notar que ao passo que a intensidade do laser aumenta recuperamos o perfil lorentziano caracterizado pela cor vermelha no mapa. Entretanto, nos quadros (c) e (d) da Figura 6.5, trazemos uma situação diferente. Mantendo o delay entre os pulsos nulo, ou seja, fazendo com que toda

a área do pulso de prova esteja circunscrita na área do pulso de controle, para larguras de pulso iguais, observamos o comportamento do índice de refração e do coeficiente de absorção para diferentes valores da intensidade de  $\Omega_p$ . Note que um comportamento próximo do regime de EIT pode ser visto nas proximidades de  $\Omega_p = 2\mu\text{eV}$ . Abaixo desse valor estamos em um regime de tripletos com o pico central menos intenso que os outros dois e acima dele tendemos a recuperar o perfil lorentziano.



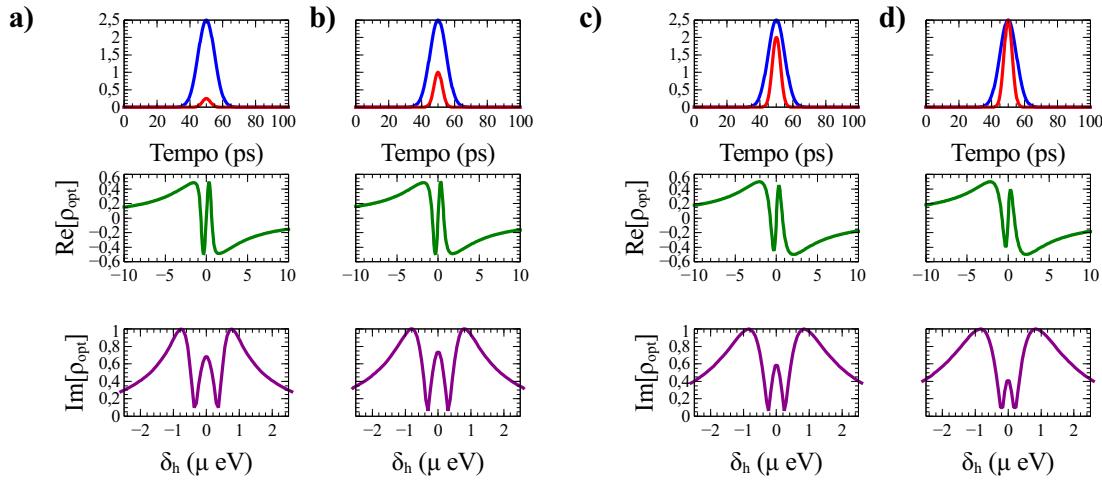
**Figura 6.5:** Em a) e b) os mapas das partes real e imaginária do elemento óptico na condição em que  $\Delta t = \tau_0^c = 6 \text{ ps}$ ,  $\tau_0^p = 3 \text{ ps}$ . Em c) e d) temos a condição em que não existe delay temporal entre os pulsos  $\Delta t = 0$ ,  $\tau_0^p = \tau_0^c = 5 \text{ ps}$ . Em todas as situações  $\Omega_c = 2.5\mu\text{eV}$ .

A Figura 6.6 traz cortes do mapa dos quadros (c) e (d) da Figura 6.5 onde podemos notar o comportamento descrito.



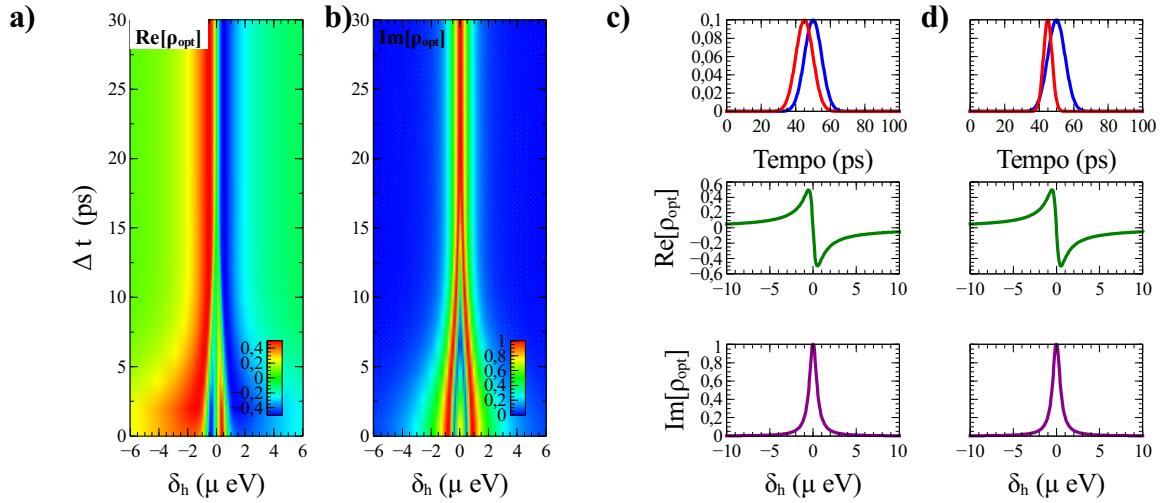
**Figura 6.6:** Cortes da Figura 6.5 na condição em que  $\Delta t = 0$ ,  $\tau_0^p = \tau_0^c$ . Em a) para  $\Omega_p = 0.25\mu\text{eV}$ , em b) para  $\Omega_p = 1\mu\text{eV}$ , em c) para  $\Omega_p = 2\mu\text{eV}$  e em d) para  $\Omega_p = 2.5\mu\text{eV}$ . Em todas as situações  $\Omega_c = 2.5\mu\text{eV}$ .

Na Figura 6.7 podemos observar que esse comportamento se mantém quando passamos à condição de que para delay zero entre os pulsos tenhamos a largura do pulso de prova sendo a metade da pulso de controle, entretanto, nas situações em que o laser de prova é menos intenso observa-se que o pico central do padrão tipo triplo para o espectro de absorção é mais intenso do que nas mesmas situações para pulsos de mesma largura, o que reforça a ideia de que existe uma espécie de regra que possibilita a visualização do fenômeno de EIT na presença de pulsos, válida apenas para a condição de delay não nulo entre eles.

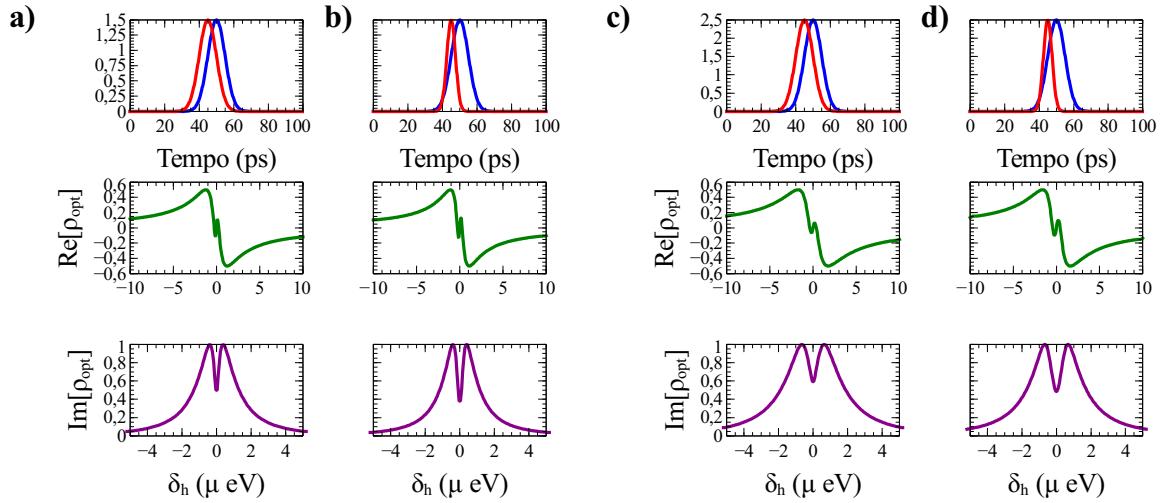


**Figura 6.7:** Na condição em que  $\Delta t = 0$ ,  $\tau_0^p = \tau_0^c/2$ . Em a) para  $\Omega_p = 0.25\mu eV$ , em b) para  $\Omega_p = 1\mu eV$ , em c) para  $\Omega_p = 2\mu eV$  e em d) para  $\Omega_p = 2.5\mu eV$ . Em todas as situações  $\Omega_c = 2.5\mu eV$  e  $\tau_0^c = 5$  ps.

Nos quadros (a) e (b) da Figura 6.8 mostramos um mapa das partes real e imaginária de  $\rho_{opt}$  agora como função do delay entre os pulsos na condição em que suas larguras são iguais a 5 ps para as intensidades dos lasers de prova e controle fixas e respeitando a condição de que  $\Omega_c \gg \Omega_p$ . Olhando para a parte (b) o espectro de absorção, observa-se que existe uma clara transição entre os regimes de absorção em triplets e um regime próximo ao de EIT onde a absorção se reduz bastante na dessintonia ressonante porém ela não vai a zero e quando o delay continua aumentando observamos a recuperação do regime lorentziano. No quadro (c) da Figura 6.8 e nos quadros (a) e (c) da Figura 6.9 exploramos a situação em que os acoplamentos de prova e controle tem intensidades iguais além de larguras iguais. O que se pode observar é que para intensidade baixa de ambos obtemos um regime de absorção lorentziana e ao passo que as intensidades aumentam mantendo-se iguais os índices de refração sofrem uma perturbação em torno de  $\delta_h = 0$  o que também provoca a redução da absorção na mesma região, entretanto, no regime em que as intensidades são iguais não conseguimos uma interferência destrutiva eficiente a ponto de zerar a absorção que chega no mínimo valor de 0.5 na coluna (a) da Figura 6.9. As colunas (b) e (d) da Figura 6.9 trazem a mesma situação mas agora fazendo a largura da prova metade do controle, entretanto, não se observam grandes melhorias na eficiência de zerar a absorção.



**Figura 6.8:** Em a) e b) os mapas das partes real e imaginária do elemento óptico em função do delay entre os pulsos de prova e controle na condição em que  $\tau_0^p = \tau_0^c = 5$  ps. Na coluna c) um corte para  $\Delta t = 5$  ps dos mapas das partes a) e b) com  $\Omega_p = \Omega_c = 0.1\mu\text{eV}$ . Em d) a condição em que  $\Delta t = 5$  ps,  $\tau_0^p = \tau_0^c/2$ .



**Figura 6.9:** Em a) e c) a condição em que  $\Delta t = 5$  ps,  $\tau_0^p = \tau_0^c$ . Em b) e d) a condição em que  $\Delta t = 5$  ps,  $\tau_0^p = \tau_0^c/2$ . Em todas as situações tomamos  $\Omega_p = \Omega_c$ .

A adoção de delays entre os pulsos é eficaz na geração de regimes ópticos que se aproximem bastante do fenômeno de EIT e existe uma receita para a indução da transparência. A maior eficiência em zerar a absorção e produzir índices de refração que mudam bruscamente em torno da ressonância do laser se deram na condição em que o delay temporal entre os pulsos é igual à largura do pulso de controle e essa é o dobro da largura do pulso de prova. No apêndice D, fazemos uma breve discussão sobre o efeito da introdução de uma fase dependente do tempo em pulsos gaussianos no que diz respeito à janela de transparência.

### 6.3 Trens de pulsos

Um trem de pulsos [186] ópticos pode ser definido como uma sequência de pulsos com envoltórias [187] idênticas, separados temporalmente por um intervalo constante e com uma relação de fase muito bem definida entre eles. Os primeiros estudos teóricos sobre a interação entre luz e matéria são devidos a Lorentz. No entanto, experimentos envolvendo a interação coerente entre a luz e sistemas de átomos começaram a surgir pouco depois da invenção do laser por Maiman. Em 1962, surgiu o primeiro laser de diodo que apesar de representar um grande avanço na tecnologia da geração de luz coerente ainda engatinhava no tocante ao controle dos modos de frequência do laser. Somente em 1977 surgiu o primeiro laser de diodo com cavidade ressonante, o que o deixou sintonizável e reduziu a sua emissão a um único modo longitudinal, com uma largura de linha de aproximadamente 32 MHz e apenas quatro anos depois, já era possível reduzir essa largura de linha para valores abaixo de 1 MHz.

Ainda na década de 1960 foi desenvolvida uma técnica chamada de mode-locking capaz de travar os modos de um laser o que tornou possível a geração dos chamados trens de pulso, que possibilitam a obtenção de uma sequência de pulsos com duração temporal bastante reduzida. A duração [188] de cada pulso fica basicamente dada pela quantidade de modos travados, isto é, que oscilam em fase dentro da cavidade do laser, e que também é responsável pela relação de fase bem definida entre os pulsos do trem. Por volta de 1978, Hansch observou que ao gerar pulsos uniformemente [189] espaçados no tempo, produzia em contrapartida, modos de frequência uniformemente espaçados e por essa contribuição que ficou conhecida como pente de frequências, Hansch foi agraciado com o prêmio Nobel em 2005. Na década de 1980, a tecnologia dos laser deu outro grande salto com a apresentação do laser de Titânio-safira pulsado feita por Moulton, o que impulsou os experimentos por toda a década de 1980 e parte da década de 1990. Nos anos 1990 diversos trabalhos reportaram a geração de pulsos com menos de 100 fs que em menos de uma década foram reduzidos para poucas dezenas de fs e até a alguns poucos ps com uma taxa de repetição entre 70 e 90 MHz.

Em 2011 o grupo de Niering conseguiu medir a frequência da transição de dois fôtons em átomos de hidrogênio com uma incerteza muito menor do que todos os demais experimentos feitos até então. O domínio e a compreensão dos pentes de frequência possibilitaram o avanço tecnológico de diversas áreas como por exemplo a informação e computação quântica e a medida de distâncias astronômicas. No tocante à informação e computação quântica, em 1986, o trabalho desenvolvido por Kocharovskaya e Khanin demonstrou que um trem de pulsos ultracurtos com fases muito bem definidas gerava uma condição conhecida como regime de acumulação coerente (CPT), e isso é válido quando o tempo entre os pulsos do trem é menor do que os tempos de vida dos átomos da amostra.

Matematicamente, podemos definir um trem de pulsos como,

$$E(t) = \sum_{n=0}^{N-1} E_0(t - nT_R) e^{-i(\omega_c t - n\omega_c T_R + n\Delta\phi)}, \quad (6.2)$$

onde  $E_0(t - nT_R)$  representa a envoltória dos pulsos do trem,  $N$  é a quantidade de pulsos,  $T_R$  a taxa de repetição,  $\omega_c$  é a frequência da onda e  $\Delta\phi$  é a fase relativa entre os pulsos do trem. Podemos aplicar a transformada de Fourier na equação (6.2) para obter o campo elétrico como função da frequência do laser,

$$E'(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in(\omega_c T_R - \Delta\phi)} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t - nT_R) e^{i(\omega - \omega_c)t} dt. \quad (6.3)$$

Imaginemos agora que o número de pulsos no trem tenda ao infinito,  $N \rightarrow \infty$ , de forma que o intervalo de tempo entre os pulsos na envoltória se torne pequeno o bastante para que  $t - nT_r \approx t$ . Dessa forma temos o seguinte:

$$E'(\omega) = E'_0(\omega - \omega_c) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in(\omega T_R - \Delta\phi)}. \quad (6.4)$$

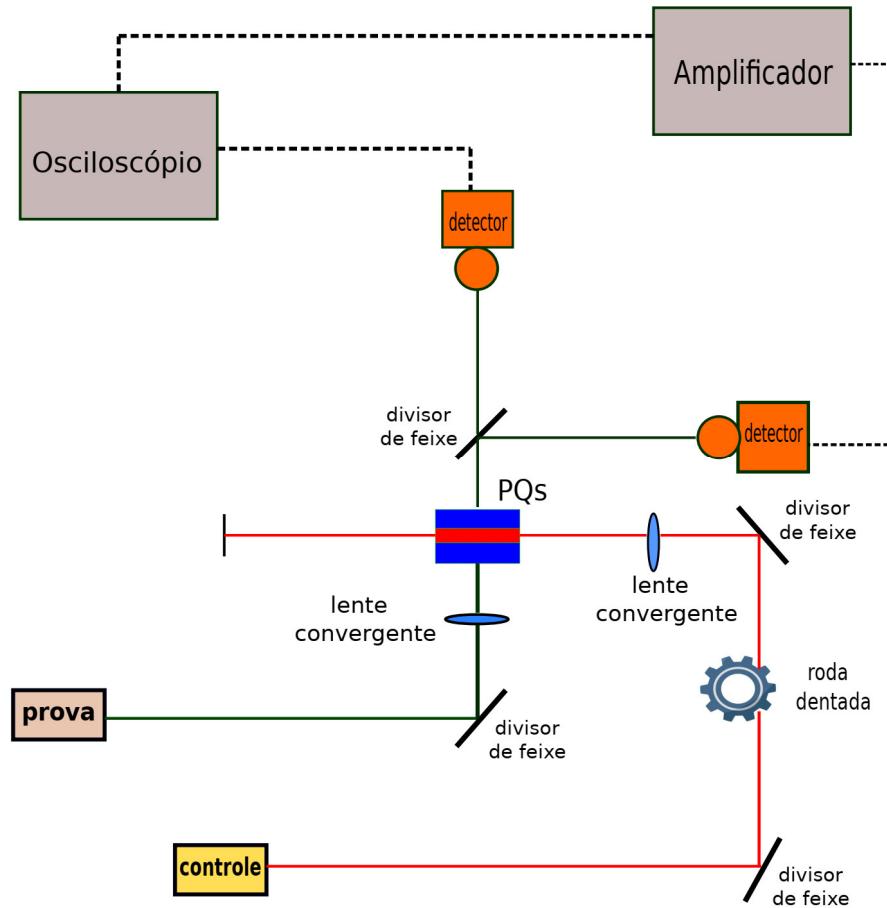
A soma entre zero e  $\infty$  pode ser trocada por uma soma de  $-\infty$  a  $\infty$  de uma função delta e dessa forma definimos o chamado pente de frequências do trem de pulsos:

$$E'(\omega) = 2\pi E'_0(\omega - \omega_c) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega T_R - \Delta\phi + 2m\pi). \quad (6.5)$$

A largura de cada um dos modos do pente de frequências [190] depende do tamanho do trem de pulsos, e é dada por  $(1/NT_R)$ . Em outras palavras, quanto mais pulsos o trem possuir, mais estreitos serão os seus modos de frequência e consequentemente maior será sua resolução espectral. A quantidade de modos em um pente de frequências depende da separação entre os modos,  $f_R$  e da largura de banda de um pulso,  $\Delta\omega$ .

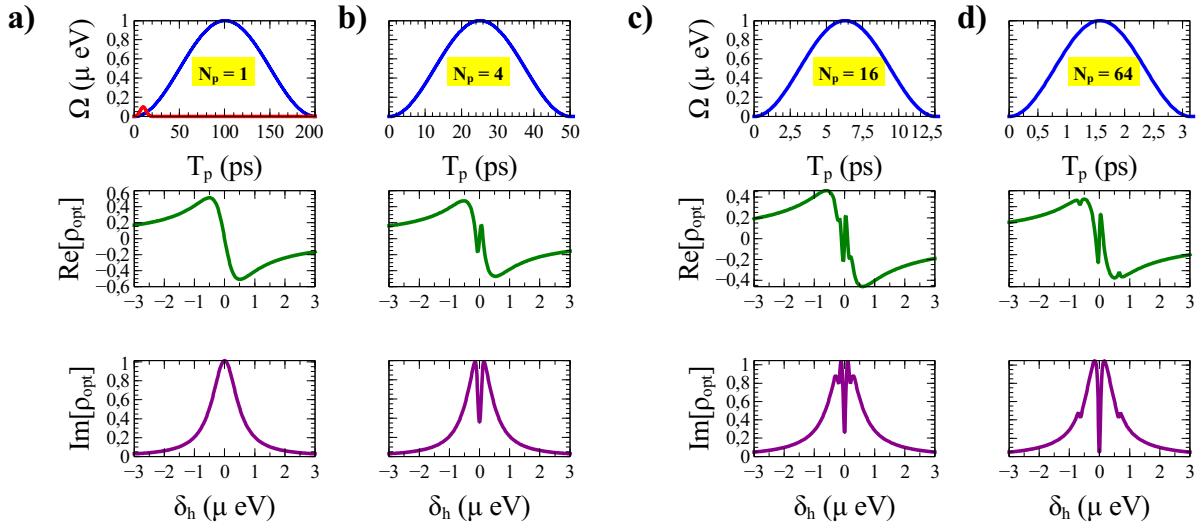
Esse valor é da ordem de  $\Delta\omega/f_R$  ou seja, um laser com  $f_R = 100\text{MHz}$  e  $T_p = 100\text{fs}$  tem cerca de 100 mil modos. Se o período de repetição dos pulsos em um trem for menor do que os tempos de relaxação dos átomos, estes adquirem uma coerência total que resulta da excitação acumulada devido à interação com os pulsos do trem e essa situação define o regime de acumulação coerente de população, podendo favorecer a formação de regimes ópticos interessantes como por exemplo o regime de EIT.

A Figura 6.10 traz uma representação do esquema experimental para a obtenção dos regimes ópticos em PQs utilizando um trem de pulsos,



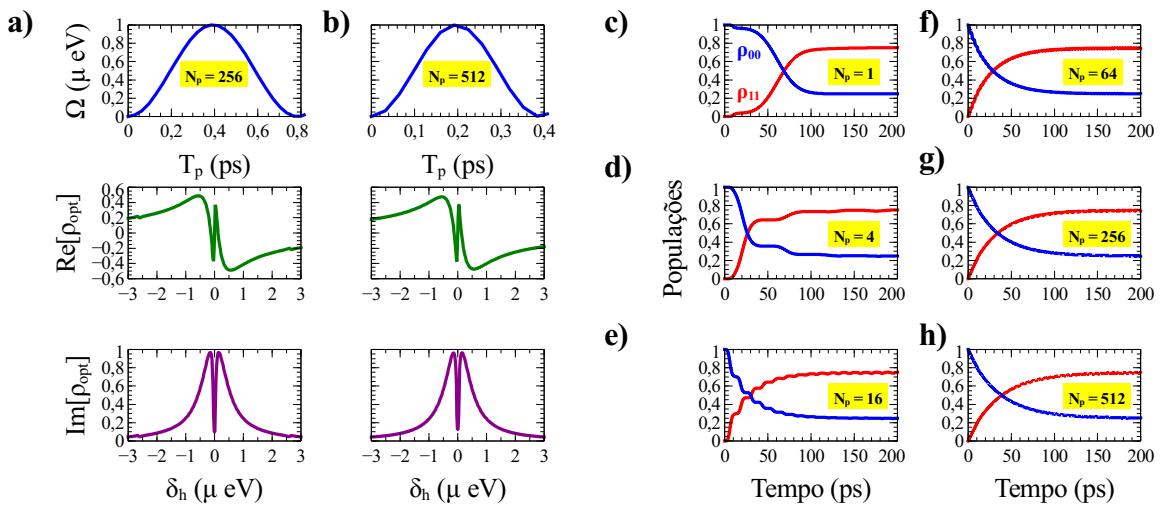
**Figura 6.10:** Esquema ilustrativo do aparato experimental para a geração de um trem de pulsos.

A Figura 6.11 e 6.12 trazem o avanço gradual da implementação de um trem de pulsos ultracurtos para modelar o laser de controle no sistema de quatro níveis. Em todas as situações consideramos um laser de prova com largura de 5 ps e gradualmente fomos aumentando a quantidade de pulsos de controle consequentemente diminuindo suas larguras. Das colunas (a) a (d) podemos ver claramente a transição do regime óptico do sistema entre a condição de dispersão anômala quando temos apenas um pulso de controle bastante largo  $\approx 96$  ps para um regime muito próximo do regime de EIT na coluna (d) já com 64 pulsos de aproximadamente 1.5 ps de largura. Podemos observar que já com 4 pulsos de  $\approx 24$  ps a absorção em torno de  $\delta_h$  se reduz para menos da metade e o índice de refração começa a exibir uma mudança brusca. Nas colunas (a) e (b) da Figura 6.12 observamos a saturação da queda da absorção já para uma quantidade de pulsos em torno de 256 com larguras de aproximadamente 0.4 ps. Os quadros de (c) a (h) trazem a inversão de população causada pelo trem de pulsos entre os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

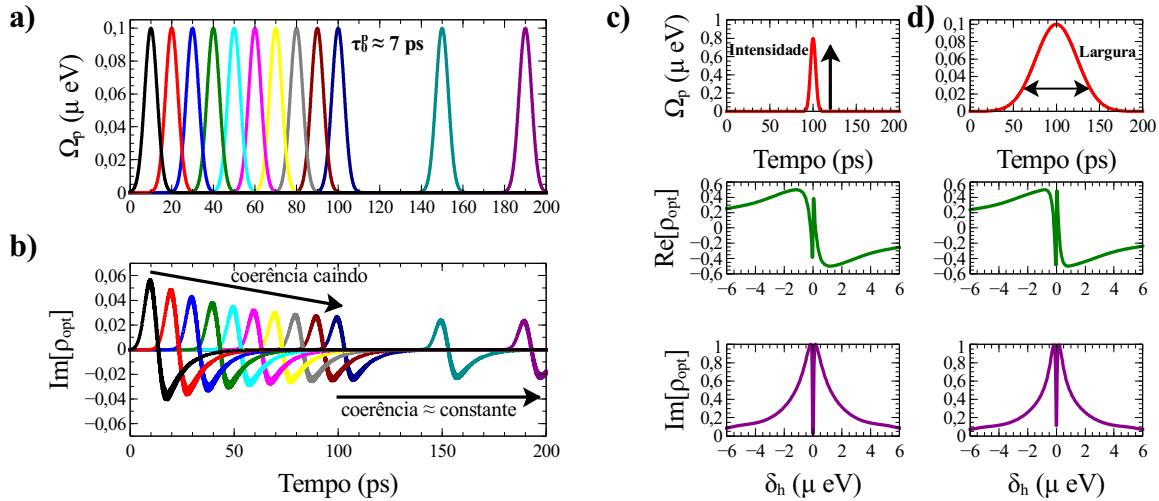


**Figura 6.11:** Evolução das propriedades ópticas com o aumento da quantidade de pulsos do trem. Em a)  $\tau_0^c \approx 96$  ps, em b)  $\tau_0^c \approx 24$  ps, em c)  $\tau_0^c \approx 6$  ps e em d)  $\tau_0^c \approx 1.5$  ps.

Apesar de em todas as situações haver inversão de população, o fenômeno de acúmulo coerente só pode ser observado a partir do quadro (e) onde fica evidente que a cada novo pulso de controle a população é empurrada e antes que consiga cair o pulso seguinte a empurra novamente. No limite em que a quantidade de pulsos fica razoavelmente grande cria-se um estado robusto correspondente ao estado  $|2\rangle$  com cerca de 80% da população ocupando. À medida em que se aumenta ainda mais a quantidade de pulsos as populações não se alteram mais e portanto chegamos à eficiência máxima do CPT.



**Figura 6.12:** Em a)  $\tau_0^c \approx 0.4$  ps e b)  $\tau_0^c \approx 0.2$  ps. Nos quadros c), d), e), f), g) e h) as populações dos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  com o aumento da quantidade de pulsos de controle no trem.



**Figura 6.13:** Evolução da coerência com a aplicação do laser de prova. Em a) temos um pulso de prova de  $\tau_0^p \approx 7$  ps aplicado em diferentes momentos da dinâmica do sistema. Em b) o gráfico da evolução no tempo do termo da parte imaginária do termo de coerência em função do tempo para cada posição do pulso de prova na dinâmica. Em (c) e (d) os modos de corrigir a perda de coerência do sistema. Em todas as situações temos  $N_p = 512$  com  $\tau_0^c \approx 0.2$  ps.

A Figura 6.13 traz o efeito de posicionamento do pulso de prova ao longo da dinâmica. Nos casos observados nas Figuras 6.11 e 6.12 o pulso de prova foi colocado no ínicio da dinâmica e centrado em torno de 10 ps. No quadro (a) está a disposição dos pulsos de prova para diferentes posições na dinâmica do sistema. Na condição em que temos 512 pulsos de controle formando o trem, podemos notar que até mais ou menos a metade da dinâmica a parte imaginária do termo de coerência associado ao elemento óptico tem uma diminuição, caindo exatamente no meio da dinâmica para metade do valor observado quando o pulso de prova é colocado no ínicio da dinâmica. Da metade da dinâmica em diante o termo de coerência permanece praticamente constante. Um modo de corrigir esse efeito de perda de coerência é, por exemplo, aumentando a intensidade do pulso e mantendo sua largura fixa ou aumentando sua largura e mantendo sua intensidade fixa.

De forma geral, em um laser, cada modo oscila de forma independente sem uma relação de fase fixa entre eles, emitindo luz em frequências ligeiramente diferentes. A fase individual das ondas em cada modo não é fixa e pode variar aleatoriamente, por exemplo, devido a mudanças térmicas. Em lasers com apenas alguns modos de oscilação, a interferência entre os modos pode causar efeitos de batimento na saída do laser e conforme se aumente a quantidade de modos esses efeitos de interferência tendem a manter a intensidade de saída do laser quase constante. Entretanto, se ao invés de oscilar de forma independente, cada modo opera com uma fase fixa, os modos do laser periodicamente interferem de forma construtiva produzindo CPT. O princípio de funcionamento de um trem [191] de pulsos é o travamento dos modos. No próximo capítulo vamos estudar brevemente uma fotocélula de PQs.

# Capítulo 7

## Efeito Fotovoltaico em Pontos Quânticos

### 7.1 Um pouco de história

O Efeito fotovoltaico [192] foi observado pela primeira vez em 1839 pelo físico francês Becquerel [193] que verificou que placas metálicas, de platina ou prata, mergulhadas num eletrolito, produziam uma pequena diferença de potencial quando expostas à luz. Mais tarde, em 1877, dois inventores norte americanos, Adams e Day, utilizaram as propriedades fotocondutoras do selênio para desenvolver o primeiro dispositivo sólido de produção de eletricidade por exposição à luz. A primeira célula solar produzida a base de selênio, alcançava modestos 1% de eficiência de conversão da luz solar em energia elétrica. Tratava-se de um filme de selênio depositado num substrato de ferro sobre o qual era depositado um segundo filme agora de ouro que servia de contato. Apesar da baixa eficiência de conversão, no final do século XIX o engenheiro alemão Siemens, fundador da Siemens já comercializava essas precursoras das células fotovoltaicas para serem utilizadas como fotômetros em máquinas fotográficas. Somente com a explicação de Einstein sobre o efeito fotoelétrico no ano de 1905, com o advento da MQ e da física dos materiais semicondutores é que o processo de produção de energia solar fotovoltaica começou a evoluir de fato. Enquanto isso no Bell Labs, Pearson [194] havia acabado de fazer a primeira célula solar de silício. Enthusiasmado, Pearson recrutou o jovem engenheiro Chapin, que a tempos estudava algumas possíveis soluções para substituir as baterias elétricas que mantinham em funcionamento as redes telefônicas. Chapin [195] e Pearson passaram a trabalhar na produção de células solares de silício e verificaram que a máxima eficiência de conversão delas era de cerca de 4%, um resultado modesto porém muitas vezes superior ao obtido com as células de selênio até então.

Rapidamente, o grupo do Bell Labs encontrou vários obstáculos. Por um lado, a célula revelava uma resistência muito significativa, devida à dificuldade em soldar contatos ao material. Por outro, mesmo à temperatura ambiente, verificaram que o lítio migrava para o interior do silício, o que fazia com que a zona ativa da célula solar ficasse cada vez mais inacessível aos fôtons da radiação solar, diminuindo assim a eficiência da célula.

Foi então que Fuller experimentou fazer uma dopagem do tipo-n usando uma difusão de fósforo, e obteve uma junção p-n mais estável do que a anterior. Isso solucionou o problema da perda de eficiência mas o problema dos contatos permaneceu. Fuller então experimentou substituir o gálio por arsénio formando assim um substrato do tipo-n seguido por uma difusão de boro formando uma zona do tipo-p na superfície. As novas células podiam agora ser facilmente soldadas e revelaram uma eficiência [196] recorde, atingindo 6%. Entusiasmados com o resultado dos experimentos de Fuller, o Pentágono autorizou a sua publicação e a primeira célula solar foi apresentada na reunião anual da National Academy of Sciences, em Washington, e anunciada numa conferência de imprensa no dia 25 de Abril de 1954. Ela tinha apenas dois centímetros quadrados de área e uma eficiência de 6%, gerando 5 mW de potência elétrica. A demonstração pública da “pilha solar” consistiu numa transmissão via rádio de algumas palavras entre Thomas e Prince usando um sistema portátil alimentado por uma célula solar. A imprensa reagiu eufórica e nas páginas do New York Times podia ler-se: “marca o princípio de uma nova era, levando, eventualmente, à realização de um dos mais belos sonhos da humanidade: a colheita de energia solar sem limites, para o bem-estar da civilização”.

O primeiro satélite, o Sputnik, lançado em 1957, acabara de inaugurar oficialmente a corrida ao espaço entre os Estados Unidos e a União Soviética e as pesquisas da célula solar [197] deixavam claro que seu custo elevado de produção, só poderia ser considerado viável para aplicações específicas como a geração de energia elétrica no espaço. Inicialmente, os satélites usaram pilhas químicas ou baseadas em isótopos radioativos. As células solares eram consideradas uma curiosidade, e foi com grande relutância que a NASA aceitou incorporá-las, como backup de uma pilha convencional, no Vanguard I, lançado em Março de 1958. A pilha química falhou, mas o pequeno painel com cerca de  $100\text{ cm}^2$ , que produzia quase 0.1 W, manteve o transmissor de 5 mW em funcionamento muito além de todas as expectativas. Depois desta demonstração de fiabilidade e durabilidade, o programa espacial norte-americano adotou as células solares como fonte de energia dos seus satélites. Também o programa espacial soviético viu nas células solares a solução para uma fonte de energia inesgotável para os seus satélites.

O desenvolvimento de células solares cada vez mais eficientes para utilização no espaço levou a alguns avanços tecnológicos importantes na década que se seguiu. É o caso da substituição, a partir de 1960, do contato frontal único por uma rede de contatos mais finos mas espalhados, reduzindo a resistência e aumentando a eficiência da fotocélula. Outro avanço importante foi a chamada “célula violeta”, dos Laboratórios Comsat. Esta célula [198] tinha uma zona tipo-n significativamente mais fina que as anteriores, o que permitiu eliminar a zona inativa na superfície, melhorando portanto, a resposta da célula para frequências da radiação solar próximas do azul. A célula violeta obteve uma eficiência recorde de 13,5%.

O pânico criado pela crise petrolífera de 1973 levou a um súbito investimento em programas de investigação para reduzir o custo de produção das células solares. Algumas das tecnologias financiadas por estes programas revolucionaram as ideias sobre o processamento das células solares. É o caso da utilização de novos materiais, em particular o silício multicristalino. Outra inovação particularmente importante do ponto de vista de redução de custo foi a deposição de contatos por serigrafia em vez das técnicas tradicionais como a fotolitografia e a deposição por evaporação em vácuo. O resultado de todos estes avanços foi a redução do custo da eletricidade solar de 80 dólares por Watt para cerca de 12 dólares por Watt em menos de uma década. Do ponto de vista da eficiência de conversão, a barreira dos 20% de eficiência foi pela primeira vez ultrapassada por células de silício monocristalino na Universidade de New South Wales, na Austrália.

As décadas de oitenta e noventa foram também marcadas por um maior investimento em programas de financiamento e de demonstração motivados sobretudo pela consciência crescente da ameaça das alterações climáticas devida à queima de combustíveis fósseis. Exemplos destas iniciativas são a instalação da primeira central solar de grande envergadura com cerca de 1 MW de potência na Califórnia, em 1982, e o lançamento dos programas de telhados solares na Alemanha em 1990 e no Japão em 1993. Em 1998 foi atingida a eficiência recorde de 24,7%, em células de silício monocristalino e um ano antes um grupo do Fraunhofer Institute for Solar Energy Systems anunciou ter obtido uma eficiência superior a 20% em células de silício multicristalino. Células solares com configurações mais complexas, como as chamadas células solares em cascata formadas pela sobreposição de várias células semicondutores, cada uma otimizada para um dado comprimento de onda da radiação solar, permitem atingir rendimentos de conversão superiores a 34%. Estima-se que em 2020 cerca de 1% da eletricidade consumida mundialmente será de origem fotovoltaica, elevando-se para cerca de 26% em 2040.

## 7.2 Princípio de funcionamento

A energia solar fotovoltaica é aquela que transforma a radiação solar diretamente em energia elétrica. O efeito ocorre de forma que o material exposto a luz tem seus elétrons excitados da banda de valência para banda de condução e, na presença de eletrodos, isso resulta na formação de uma tensão elétrica e, consequentemente, de uma corrente elétrica. A primeira célula solar de silício produzida utilizava uma junção de placas de silício dopado positiva ou negativamente e essa junção p-n dava origem a um campo elétrico quando exposta ao sol. A junção p-n, segundo a teoria de Shockley, funciona de modo que ao se juntar um material do tipo p (com excesso de cargas positivas), onde se tem buracos, com um material do tipo n (com excesso de cargas negativas), onde se tem elétrons livres, os elétrons livres e os buracos mais próximos do centro dessa junção se recombina formados pares estáveis.

Essa região estável recebe o nome de zona de depleção. Em suma, apenas os portadores criados na zona de depleção contribuem para a fotocorrente. Quando a junção p-n é exposta a fôtons com energia maior do que o gap, que é exatamente a quantidade de energia necessária para a transição eletrônica ocorre então a geração desses pares elétron-buraco (excitons), o que acaba por gerar uma corrente através da junção. Se esta junção p-n está ligada entre eletrodos externamente, haverá geração de corrente, onde para cada elétron que sai da célula existe um outro que retorna da carga para substituí-lo de forma autoconsistente. A Figura 7.1 traz um esquema representativo da formação da zona de depleção na junção p-n:

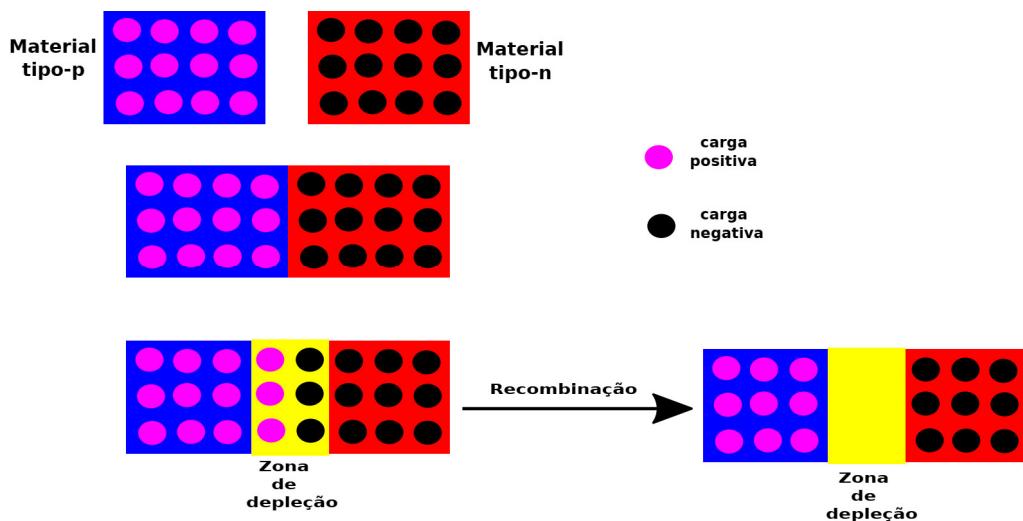


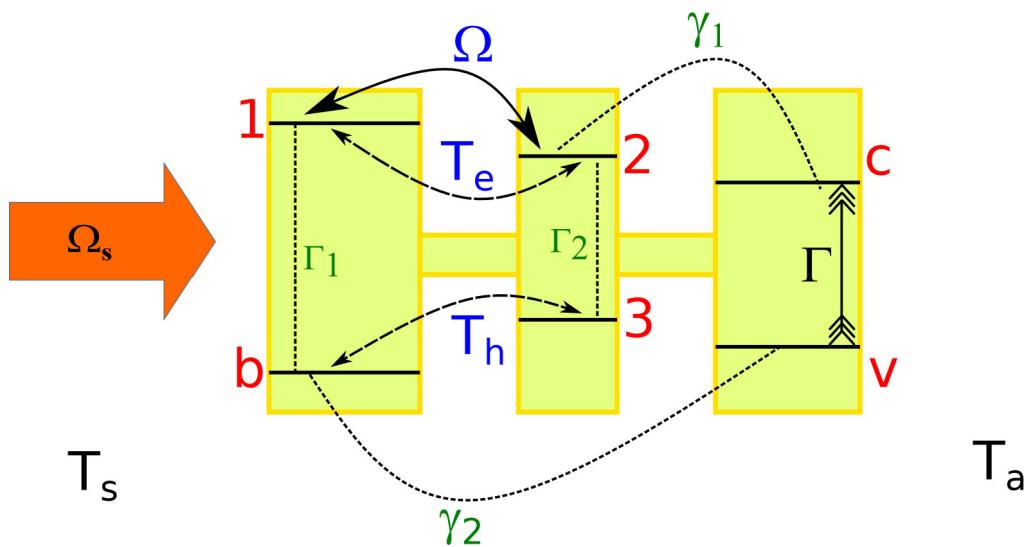
Figura 7.1: Esquema ilustrativo da formação da zona de depleção em um material semicondutor.

### 7.3 Fotocélulas de PQs

A história da produção de fotocélulas pode ser dividida em três gerações: A primeira geração é aquela representada pelas células de Si cristalino. Essa tecnologia ainda representa cerca de 90% do mercado de painéis fotovoltaicos e é capaz de produzir painéis solares estáveis com eficiência próximas de 20%. A segunda geração é formada pelas células de filmes finos inorgânicos de Si amorfo e CdTe. Nesse tipo de tecnologia, a eficiência máxima de conversão está entre 12 e 16%, entretanto, o custo de produção se comparado com a de primeira geração, é razoavelmente mais baixo além do fato de que essas células podem ser produzidas sobre substratos flexíveis e leves. A terceira geração de células fotovoltaicas é marcada pela utilização de materiais orgânicos e de PQs e é esse tipo de células solares em que estamos interessados no presente trabalho.

Uma característica muito favorável à construção das fotocélulas de terceira geração é o fato desses materiais apresentarem coeficiente de absorção extremamente altos na faixa de luz visível do espectro o que possibilita por exemplo a utilização de filmes bastante finos de poucos nm. As células dessa geração apresentam uma eficiência em geral ainda mais baixa do que a das outras duas gerações em torno de 9% mas sabe-se que se a eficiência puder ser aumentada, a produção dessas células tem custo muito mais baixo o que facilitaria a real popularização dessa tecnologia. Inicialmente a camada ativa dessas células eram construídas em uma estrutura chamada bicamada, onde os materiais p e n eram depositados separadamente, um sobre o outro e assim a região de formação dos excitons existia apenas na interface desses materiais, limitando a fotogeração de novos excitons. Para que essa região pudesse ser aumentada e consequentemente para que os excitons se dissociassem de maneira eficiente, os materiais doadores e aceitadores passaram a ser depositados misturados, em uma única camada, em uma metodologia que passou a ser chamada de heterojunção bulk que também tem a característica de absorver maior quantidade de fôtons e é aí que os PQs ganham destaque.

A Figura 7.2 traz a representação esquemática do sistema físico alvo desse capítulo, uma fotocélula de PQs que conta com um mecanismo de acoplamento coerente na tentativa de aumentar a eficiência de conversão da energia solar em energia elétrica.



**Figura 7.2:** Esquema representativo de uma fotocélula de PQs acoplados por tunelamento em um sistema de quatro níveis ligado a contatos metálicos por um potencial  $\Gamma$ .

Nosso sistema físico é formado por uma molécula de PQs acoplada por tunelamento de elétrons  $T_e$  e de buracos  $T_h$  cujos níveis de valência e condução estão interligados por uma voltagem  $\Gamma$  a partir de eletrodos metálicos.

A luz solar  $\Omega_S$  sensibiliza os estados  $|b\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  gerando uma fotocorrente que passa pelos eletrodos dos estados de valência e condução  $|v\rangle$  e  $|c\rangle$ . Os elétrons do sistema são livres para tunelar entre os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  da banda de condução sob uma taxa  $T_e$  e os buracos entre os estados  $|b\rangle$  e  $|3\rangle$  da banda de valência sob uma taxa  $T_h$  a princípio muito menor que  $T_e$ . Na transição entre os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  da banda de condução foi colocado um acoplamento  $\Omega$  que tem por objetivo amplificar a eficiência de conversão de energia do sistema. O sistema está acoplado via fôtons a dois reservatórios térmicos distintos um na temperatura da radiação solar  $T_S$  e outro a temperatura ambiente  $T_a$  de forma que todos os efeitos de decoerência experimentados pela fotocélula advêm da interação do sistema com seus reservatórios. O Hamiltoniano total do sistema fotocélula mais reservatórios pode ser escrito da seguinte forma:

$$H(t) = V_\mu(t) + V_{th}(t) + V_{ph}(t), \quad (7.1)$$

onde os termos  $V_\mu(t)$ ,  $V_{th}(t)$  e  $V_{ph}(t)$  representam respectivamente o Hamiltoniano do acoplamento coerente, o Hamiltoniano do acoplamento incoerente devido a luz solar e o Hamiltoniano da interação entre sistema e reservatórios via fôtons que podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} V_\mu(t) &= \hbar(\Omega e^{i\phi} + T_e e^{i\omega_{12}t}) |1\rangle \langle 2| + \hbar T_h e^{i\omega_{3b}t} |b\rangle \langle 3| + c.c \\ V_{th}(t) &= \hbar \sum_k g_{1k} |1\rangle \langle b| a_k e^{i(\omega_{1b} - \mu_k)t} + g_{2k} |2\rangle \langle 3| a_k e^{i(\omega_{23} - \mu_k)t} + c.c \\ V_{ph}(t) &= \hbar \sum_l g_l |2\rangle \langle c| b_l e^{i(\omega_{2c} - \mu_l)t} + \hbar \sum_m g_m |v\rangle \langle b| b_m e^{i(\omega_{23} - \mu_m)t} + c.c, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$\phi$  é a fase relativa atribuída ao acoplamento coerente. As frequências  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{3b}$ ,  $\omega_{2c}$  e  $\omega_{23}$  estão associadas às transições  $|1\rangle \longleftrightarrow |2\rangle$ ,  $|b\rangle \longleftrightarrow |3\rangle$ ,  $|2\rangle \longleftrightarrow |c\rangle$  e  $|2\rangle \longleftrightarrow |3\rangle$  e  $a_k$ ,  $b_{l,m}$  representam os operadores de aniquilação de fôtons e fôtons respectivamente associados aos coeficientes  $g$ . A equação mestra para esse problema fica dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} Tr_R \left\{ \left[ V_\mu(t), \rho(t) \otimes \rho_R(t_0) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} Tr_R \left\{ \int_{t_0}^t dt' \left[ V_{th}(t), \left[ V_{th}(t'), \rho(t') \otimes \rho_R(t_0) \right] \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} Tr_R \left\{ \int_{t_0}^t dt' \left[ V_{ph}(t), \left[ V_{ph}(t'), \rho(t') \otimes \rho_R(t_0) \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (7.3) se refere à evolução unitária do sistema sob o efeito dos acoplamentos coerentes da fonte externa e do tunelamento. O segundo e o terceiro termo estão relacionados ao acoplamento do sistema com a radiação solar e seus reservatórios de acordo com a definição da equação mestra de Redfield. Note, entretanto, que estamos interessados apenas na dinâmica do sistema e portanto estamos tomando o traço parcial sobre todas as variáveis dos reservatórios. A manipulação dos comutadores do segundo e do terceiro termo da equação (7.3) nos leva a ter que calcular elementos do tipo:

$$[A, [B, C]] = ABC - BCA - ACB + CBA, \quad (7.4)$$

onde  $A = V_{th,ph}(t)$ ,  $B = V_{th,ph}(t')$  e  $C = \rho(t') \otimes \rho_R(t_0)$ .

Os elementos do tipo ABC ficam dados como:

$$\hbar^2 \sum_{kk'} \left\{ g_{1k} g_{1k'}^* |1\rangle \langle 1| a_k a_{k'}^\dagger + g_{2k} g_{2k'}^* |2\rangle \langle 2| a_k a_{k'}^\dagger + g_{1k}^* g_{1k'} |b\rangle \langle b| a_k^\dagger a_{k'} + g_{2k}^* g_{2k'} |3\rangle \langle 3| a_k^\dagger a_{k'} \right\} \rho(t') \otimes \rho_R(t_0), \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} & \hbar^2 \sum_{ll'} \left\{ g_l g_{l'}^* |2\rangle \langle 2| b_l b_{l'}^\dagger + g_l^* g_{l'} |c\rangle \langle c| b_l^\dagger b_{l'} \right\} \rho(t') \otimes \rho_R(t_0) + \\ & \hbar^2 \sum_{mm'} \left\{ g_m g_{m'}^* |v\rangle \langle v| b_m b_{m'}^\dagger + g_m^* g_{m'} |b\rangle \langle b| b_m^\dagger b_{m'} \right\} \rho(t') \otimes \rho_R(t_0), \end{aligned} \quad (7.6)$$

e os elementos do tipo BCA ficam dados por:

$$\begin{aligned} & \hbar^2 \sum_k \left\{ |g_{1k}|^2 \left\{ |1\rangle \langle 1| \rho - \rho_{11} |b\rangle \langle b| \right\} (n_k + 1) + |g_{1k}|^2 \left\{ |b\rangle \langle b| \rho - \rho_{bb} |1\rangle \langle 1| \right\} n_k \right. \\ & \left. + |g_{2k}|^2 \left\{ |2\rangle \langle 2| \rho - \rho_{22} |3\rangle \langle 3| \right\} (n_k + 1) + |g_{2k}|^2 \left\{ |3\rangle \langle 3| \rho - \rho_{33} |2\rangle \langle 2| \right\} n_k + c.c \right\} \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} & \hbar^2 \sum_l |g_l|^2 (n_l + 1) \left\{ |2\rangle \langle 2| \rho - \rho_{22} |c\rangle \langle c| \right\} + |g_l|^2 n_l \left\{ |c\rangle \langle c| \rho - \rho_{cc} |2\rangle \langle 2| \right\} + \\ & \hbar^2 \sum_m |g_m|^2 (n_m + 1) \left\{ |v\rangle \langle v| \rho - \rho_{vv} |b\rangle \langle b| \right\} + |g_m|^2 n_m \left\{ |b\rangle \langle b| \rho - \rho_{bb} |v\rangle \langle v| \right\} + c.c \end{aligned} \quad (7.8)$$

Note, entretanto, que nas equações (7.5), (7.6), (7.7) e (7.8) por efeito de simplicidade desprezamos os termos cruzados dos coeficientes  $g$  (por exemplo os termos  $g_{1k}g_{2k}^*$ ) que estão relacionados às interferências de Fano do sistema. Em sistemas onde o acoplamento coerente é majoritário as interferências de Fano são bastante importantes do ponto de vista da observação dos fenômenos ópticos como por exemplo o fenômeno de EIT, essas interferências são as responsáveis por gerar uma descontinuidade no espectro de absorção dos materiais quando associadas a fenômenos de acúmulo coerente de população. Entretanto, aqui, a fonte de acoplamento majoritária é uma fonte incoerente (luz solar) de forma que os efeitos da interferência de Fano na dinâmica desse sistema pode ser considerado mínimo. Podemos agora, substituir essas expressões na equação (7.3) e quando tomarmos o traço parcial sobre todas as variáveis dos reservatórios podemos considerar a aproximação Markoviana tal que, ou seja, vamos considerar que o número de graus de liberdade dos reservatórios é infinitamente maior que o número de graus de liberdade das variáveis do sistema e dessa forma para tempos distintos o sistema não guarda memória das mudanças ocorridas nos reservatórios e isso leva à seguinte relação:

$$\sum_{\nu} \rightarrow \int_0^{\infty} D(\mu_{\nu}) \frac{\mu_{\nu}^2}{c^3} d\mu_{\nu} \rightarrow \Gamma_{\nu} = D(\omega_{\nu}) \frac{\omega_{\nu}^2}{c^3} |g_{\nu}|^2 2\pi, \quad (7.9)$$

onde  $\Gamma_{\nu}$  são as taxas de decoerência entre sistema e reservatórios definidas como função das densidades espetrais  $D(\omega_{\nu})$  das transições entre os estados do sistema. Na Figura 7.2 podemos ver as taxas de decoerência associadas às transições entre os estados na banda de valência e na banda de condução. Por simplicidade no presente trabalho vamos considerar que as taxas  $\Gamma_{\nu}$  sejam constantes onde,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  representam as taxas de decaimento das transições  $|1\rangle \longleftrightarrow |b\rangle$  e  $|2\rangle \longleftrightarrow |3\rangle$  e  $\gamma_1, \gamma_2$  representam as taxas de decaimento das transições  $|2\rangle \longleftrightarrow |c\rangle$  e  $|v\rangle \longleftrightarrow |b\rangle$  entre os contatos e as bandas de valência e condução. De posse dessas informações, podemos escrever o sistema de equações (7.10), (7.11) que descrevem a dinâmica da matriz de densidade associada à fotocélula:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{bb} &= -iT_h(\rho_{3b} - \rho_{b3}) - \Gamma_1[n_1\rho_{bb} - (n_1 + 1)\rho_{11}] + \gamma_2[n_v\rho_{bb} - (n_v + 1)\rho_{vv}], \\ \dot{\rho}_{vb} &= iT_h\rho_{v3} - \frac{1}{2}[\Gamma_1n_1 + \gamma_2(2n_v + 1)]\rho_{vb} + i\omega_{3b}\rho_{vb}, \\ \dot{\rho}_{1b} &= -i[(\Omega + T_e)\rho_{2b} - T_h\rho_{13}] - \frac{1}{2}[\Gamma_1(2n_1 + 1) + \gamma_2n_v]\rho_{1b} + i\omega_{12}\rho_{1b}, \\ \dot{\rho}_{2b} &= -i[(\Omega + T_e)\rho_{1b} - T_h\rho_{23}] - \frac{1}{2}[\Gamma_1n_1 + \Gamma_2(n_2 + 1) + \gamma_1(n_c + 1) + \gamma_2n_v]\rho_{2b} + i\omega_{2b}, \\ \dot{\rho}_{3b} &= -iT_h(\rho_{bb} - \rho_{33}) - \frac{1}{2}[(\Gamma_1n_1 + \Gamma_2n_2 + \gamma_2n_v)\rho_{3b} - \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}(n_1 + n_2 + 2)], \\ \dot{\rho}_{cb} &= iT_h\rho_{c3} - \frac{1}{2}(\Gamma_1n_1 + \gamma_1n_c + \gamma_2n_v)\rho_{cb} + i\omega_{3b}\rho_{cb}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{vv} &= -\gamma_2[(n_v + 1)\rho_{vv} - n_v\rho_{bb}] + \Gamma\rho_{cc}, & (7.11) \\
\dot{\rho}_{1v} &= -i(\Omega + T_e)\rho_{2v} - \frac{1}{2}[\Gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_v + 1)]\rho_{1v} + i\omega_{1v}, \\
\dot{\rho}_{2v} &= -i(\Omega + T_e)\rho_{1v} - \frac{1}{2}[\Gamma_2(n_2 + 1) + \gamma_1(n_c + 1) + \gamma_2(n_v + 1)]\rho_{2v} + i\omega_{12}\rho_{2v}, \\
\dot{\rho}_{3v} &= -iT_h\rho_{bv} - \frac{1}{2}[\Gamma_2n_2 + \gamma_2(n_v + 1)]\rho_{3v} + i\omega_{3b}\rho_{3v}, \\
\dot{\rho}_{cv} &= -\frac{1}{2}[\gamma_1n_c + \gamma_2(n_v + 1)]\rho_{cv} + i\omega_{3b}\rho_{cv}, \\
\dot{\rho}_{11} &= -i(\Omega + T_e)(\rho_{21} - \rho_{12}) - \Gamma_1[(n_1 + 1)\rho_{11} - n_1\rho_{bb}], \\
\dot{\rho}_{21} &= -i(\Omega + T_e)(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{1}{2}[(\Gamma_1(n_1 + 1) + \Gamma_2(n_2 + 1) + \gamma_1(n_c + 1))\rho_{21} \\
&\quad - \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}(n_1 + n_2)\rho_{3b}] + i\omega_{12}\rho_{21}, \\
\dot{\rho}_{31} &= i[(\Omega + T_e)\rho_{32} - T_h\rho_{b1}] - \frac{1}{2}[\Gamma_1(n_1 + 1) + \Gamma_2n_2]\rho_{31} + i\omega_{3b}\rho_{31}, \\
\dot{\rho}_{c1} &= i(\Omega + T_e)\rho_{c2} - \frac{1}{2}[\Gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_1n_c]\rho_{c1} + i\omega_{12}\rho_{c1}, \\
\dot{\rho}_{22} &= -i(\Omega + T_e)(\rho_{12} - \rho_{21}) - \Gamma_2[(n_2 + 1)\rho_{22} - n_2\rho_{33}] + \gamma_1[(n_c + 1)\rho_{22} - n_c\rho_{cc}], \\
\dot{\rho}_{32} &= i[(\Omega + T_e)\rho_{31} + T_h\rho_{b2}] - \frac{1}{2}[\Gamma_2(2n_1 + 1) + \gamma_1(n_c + 1)]\rho_{32} + i\omega_{3b}\rho_{32}, \\
\dot{\rho}_{c2} &= i(\Omega + T_e)\rho_{c1} - \frac{1}{2}[\Gamma_2(n_2 + 1) + \gamma_1(2n_c + 1)]\rho_{c2} + i\omega_{12}\rho_{c2}, \\
\dot{\rho}_{33} &= -iT_h(\rho_{b3} - \rho_{3b}) - \Gamma_2[n_2\rho_{33} - (n_2 + 1)\rho_{22}], \\
\dot{\rho}_{c3} &= iT_h\rho_{cb} - \frac{1}{2}[\Gamma_2n_2 + \gamma_1n_c]\rho_{c3} + i\omega_{3b}\rho_{c3}, \\
\dot{\rho}_{cc} &= -\gamma_1[n_c\rho_{cc} - (n_c + 1)\rho_{22}] + \Gamma\rho_{cc}.
\end{aligned}$$

Um fato interessante porém é que o fechamento do circuito fotogerador de corrente não advém da definição da equação mestra que produziu as equações (7.10) e (7.11) e tem que ser colocado a parte nas equações correspondentes às populações dos estados  $|v\rangle$  e  $|c\rangle$  das bandas de valência e condução como pode ser visto na primeira e na última equações do conjunto de equações (7.11). O produto  $\Gamma\rho_{cc}$  funciona como contato entre as bandas de valência e condução retirando população de um estado e levando para o outro. O número de fôtons presentes nos estados  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ ,  $|v\rangle$  e  $|c\rangle$  são dados por:

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{1}{e^{(\Delta E_{1b}/K_B T_s)} - 1}, & n_2 &= \frac{1}{e^{(\Delta E_{23}/K_B T_s)} - 1}, & (7.12) \\
n_v &= \frac{1}{e^{(\Delta E_{2c}/K_B T_a)} - 1}, & n_c &= \frac{1}{e^{(\Delta E_{vb}/K_B T_a)} - 1},
\end{aligned}$$

onde  $T_s$  e  $T_a$  são respectivamente as temperaturas dos reservatórios da radiação solar e do meio ambiente (PQs) e as energias  $\Delta E_{1b}$ ,  $\Delta E_{23}$ ,  $\Delta E_{2c}$  e  $\Delta E_{vb}$  correspondem às diferenças de energia das transições entre os estados do sistema.

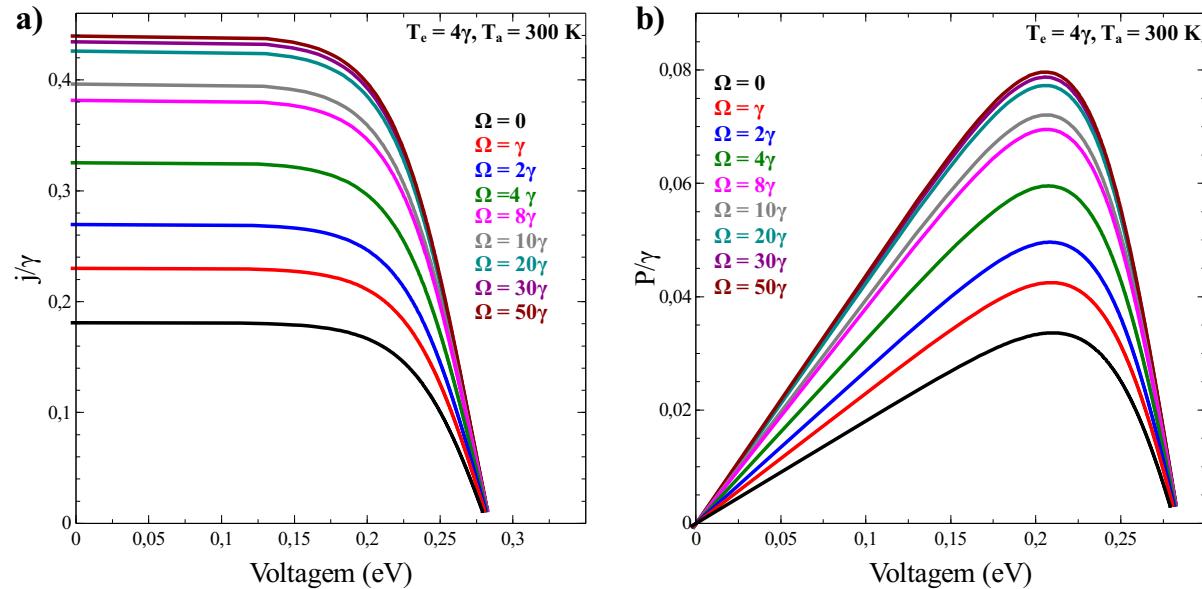
Na literatura podemos encontrar alguns trabalhos que investigam as propriedades de fotocélulas de PQs dos quais se destacam os trabalhos de Dorfman [199] onde é possível encontrar uma definição para a corrente [200] gerada pela fotocélula e para a voltagem associada a essa geração de corrente da seguinte forma:

$$j = \Gamma \rho_{cc}, \quad V = \Delta E_{vc} + K_B T_a \log\left(\frac{\rho_{cc}}{\rho_{vv}}\right), \quad (7.13)$$

onde  $\Delta E_{vc} = \Delta E_{1b} - (\Delta E_{2c} + \Delta E_{vb})$  é a diferença de energia entre os níveis de valência e condução do sistema. Na próxima seção vamos discutir alguns resultados obtidos para a fotocélula de PQs [201].

## 7.4 Resultados

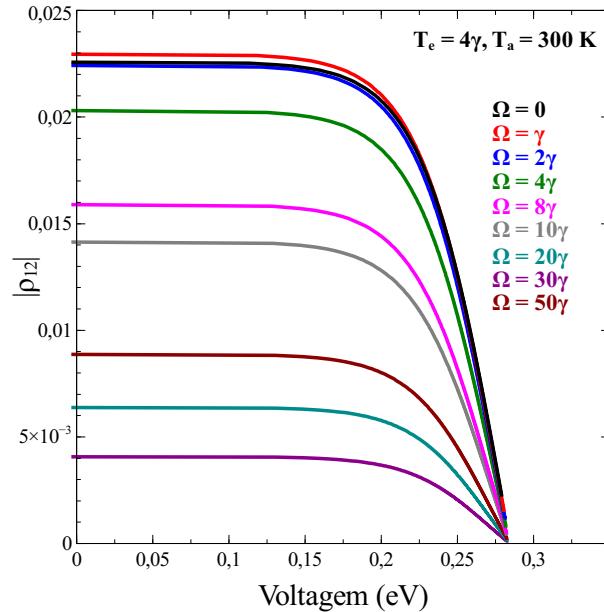
A Figura 7.3 traz o gráfico para a temperatura ambiente de  $T_a = 300K$  da corrente e da potência geradas pela fotocélula, considerando diversas intensidades do acoplamento coerente  $\Omega$  a que está sujeito a transição dos estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  na banda de condução do sistema:



**Figura 7.3:** Em a) corrente fotogerada como função da voltagem aplicada para diferentes valores do acoplamento coerente  $\Omega$ . Em b) as curvas da potência da fotocélula em função da voltagem aplicada para a temperatura ambiente de 300K.

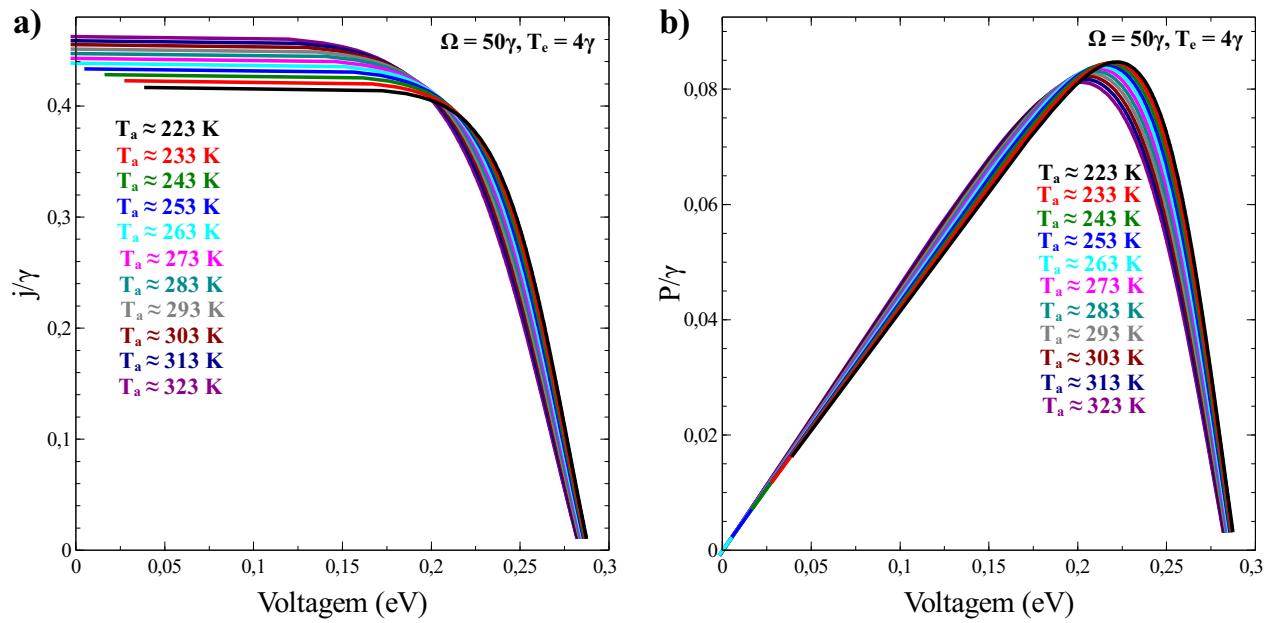
Todas as variáveis foram escritas em função da decoerência da transição  $|1\rangle \longleftrightarrow |b\rangle$ . Pode-se observar que o aumento da intensidade de  $\Omega$  provoca um aumento substancial da corrente fotogerada, assim como da potência útil fornecida pela fotocélula. Existe também um limite de saturação [202] para a corrente a potência em torno de  $\Omega = 30\gamma$  e a partir desse valor a eficiência da célula deixa de aumentar com a aplicação de uma fonte externa.

A cada vez que dobramos o valor da intensidade de  $\Omega$  a razão entre as curvas de corrente aumenta até um certo ponto e depois vai diminuindo até se tornar constante no regime de saturação. A voltagem de corte do sistema fica dada em torno de  $V \approx 0.275\text{eV}$  e pode-se observar um ganho de potência muito significativo entre as condições sem acoplamento coerente  $\Omega = 0$  e acoplamento de saturação  $\Omega \approx 30\gamma$ . O ganho de corrente e potência é algo da ordem de 3 vezes. A Figura 7.4 traz o gráfico do módulo do elemento óptico associado à transição  $|1\rangle \longleftrightarrow |2\rangle$  como função da voltagem aplicada nas mesmas condições apresentadas na Figura 7.3 onde podemos observar um comportamento oposto ao das curvas de corrente. Para baixas intensidades de  $\Omega$  a coerência do elemento  $\rho_{12}$  é máxima e vai diminuindo ao passo que aumentamos  $\Omega$ , entretanto, ela não atinge um regime de saturação assim como a corrente e a potência. O que acontece no entanto é que após a intensidade de saturação da corrente o termo de coerência começa a subir novamente como se o sistema não mais percebesse a existência de um acoplamento coerente.



**Figura 7.4:** Termo de coerência associado à transição dos estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  como função da voltagem aplicada para diferentes valores do acoplamento  $\Omega$ .

Na Figura 7.5 trazemos gráficos considerando diversas possíveis temperaturas ambientes a que a fotocélula pode ser sujeitada e para tanto tomamos a condição de saturação da corrente e da potência em torno de  $50\gamma$ . Variamos a temperatura ambiente numa faixa entre 223 K e 323 K que corresponde a uma variação real de temperatura entre -50°C e 50°C que são mais ou menos as temperaturas extremas na Terra. O que se pode observar é que não existem ganhos significativos de corrente ou de potência para essas variações de temperatura o que possibilitaria em uma possível produção dessas fotocélulas o uso em qualquer região do planeta sem grandes perdas de eficiência. Vale lembrar que estamos considerando  $T_S \approx 6000K$  a temperatura dos fôtons da radiação solar.



**Figura 7.5:** Em a) as curvas de photocorrente para a intensidade de saturação  $\Omega = 50\mu\text{eV}$  para diferentes temperaturas. Em b) as curvas de potência associadas.

No próximo capítulo, apresentaremos de forma sucinta nossas principais conclusões.

# Capítulo 8

## Conclusões

**N**o presente trabalho investigamos o comportamento dos termos de fase total, dinâmica e geométrica associados à evolução dos estados dos sistemas de dois e três níveis discutidos no capítulo 4, também procuramos modos de manifestar e controlar regimes de transparência eletromagneticamente induzida em um sistema de quatro níveis formado por elétrons e trions utilizando fontes pulsadas de luz coerente. No capítulo 7 estudamos os efeitos da inclusão de uma fonte coerente de radiação no ganho de eficiência de uma possível fotocélula de pontos quânticos acoplados por tunelamento.

Na ausência dos efeitos de decoerência ao menos para estados inicialmente puros, superpostos ou não, a fase geométrica de Pancharatnam se reduz à fase geométrica de Berry relacionada à trajetória dos estados no espaço de parâmetros do Hamiltoniano do sistema. Para sistemas com mais de dois níveis não é possível uma representação da trajetória dos estados na esfera de Bloch-Poincaré mas observamos que aplicando uma teoria de perturbação conseguimos recuperar os resultados do qubit apesar das limitações impostas pelo método.

A inclusão dos efeitos de decoerência e também a preparação do sistema inicialmente em um estado misto produzem fases geométricas diferentes da fase geométrica como definida por Berry, esses ingredientes produzem uma fase total diferente de zero advinda da aparente necessidade do sistema em purificar ou repurificar seus estados como pode ser visto no raio da esfera dos estados e na entropia linear associada a eles.

Dinamicamente as fases adquiridas pelos sistemas estão ligadas a evolução dos estados no tempo o que pode ser visto analisando as populações, ao final de cada ciclo o termo de fase se encontra em um platô de fase constante acumulada até o momento. No regime estacionário, exatamente onde as populações deixam de mudar o termo de fase assume um valor assintótico. O valor assumido pelo termo de fase é controlado exclusivamente pela intensidade dos acoplamentos enquanto a mudança de sinal depende das dessintonias.

Nos sistemas de dois e quatro níveis estudados não é possível observar o fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida. No primeiro caso pela falta de canais de interferência e no segundo pelo excesso deles. Nos quatro níveis não é possível induzir no sistema um acúmulo coerente de população que favoreça a diminuição da velocidade de grupo do pacote de onda pela inconveniente coincidência entre as frequências de batimentos quânticos e de ressonância, fato que pode ser contornado trocando os laser no regime CW por lasers pulsados.

Sob certas condições, observamos a supressão do regime de tripletos e a formação de janelas de transparência para trens de pulsos e pulsos gaussianos com delay temporal o que possibilita a propagação solitônica da luz e o fenômeno de memória quântica durante essas janelas de transparência.

Na fotocélula de pontos quânticos estudada podemos aumentar significativamente a eficiência da conversão de energia solar em energia elétrica controlando a intensidade da fonte externa colocada em ressonância com a banda de condução do sistema. Os efeitos da variação da temperatura não são determinantes para a produção de fotocorrente ao menos na faixa de variação observada mas comparativamente conseguimos obter uma fotocélula mais eficiente do que as concorrentes encontradas na literatura.

## 8.1 Perspectivas futuras

As perspectivas futuras do presente trabalho passam pela investigação do efeito da utilização de fontes pulsadas de luz coerente nos termos de fase total, dinâmica e geométrica associados aos sistemas de dois, três e quatro níveis. Além disso, a busca de uma interpretação razoável para a informação trazida por esses termos de fase que possibilite associá-los, por exemplo, aos fenômenos ópticos observados. Outro grande avanço seria conseguir obter uma maior eficiência da fotocélula pela troca da fonte CW de radiação, por pulsos e trens de pulsos ultracurtos, o que poderia alavancar a produção das fotocélulas de terceira geração.

## Apêndice A

# Conceitos fundamentais da Mecânica Quântica

**E**M Mecânica Clássica [203] sabemos que se em um instante inicial conhecemos as posições e as velocidades de todas as N partículas constituintes de um sistema, então, a princípio, temos meios para determinar completamente o comportamento do sistema em qualquer instante de tempo lançando mão das leis de Newton. Análises estatísticas somente se fazem necessárias quando estamos interessados em grandezas como pressão e temperatura, que em geral, representam comportamentos médios de um sistema composto por um número muito grande de variáveis ao longo do tempo. Em MQ [204], entretanto, as coisas são diferentes, principalmente no que diz respeito à certeza com que determinamos os estados de um sistema. Enquanto a Mecânica Clássica é fundamentalmente determinista, a MQ [205] é intrinsecamente indeterminada. Mesmo em sistemas simples não é possível conhecer com total certeza o resultado a ser obtido em uma medida de um observável qualquer, o que se conhece, é apenas a probabilidade de em uma dada medida ocorrer cada um dos possíveis valores do observável. A MQ se firma na ideia de que o estado de um sistema físico é completamente descrito por um vetor de estado denominado ket. Nesse vetor de estado está contida a máxima informação sobre o sistema, salvas as claras limitações impostas pelo princípio de incerteza de Heisenberg [89]. Estes kets são pertencentes a um espaço vetorial no domínio dos números complexos chamado espaço de Hilbert, que entre outras características, possui dimensão infinita (para problemas exatamente solúveis). No espaço de Hilbert [206], o produto escalar fica definido como  $\langle u|v \rangle = \langle v|u \rangle^*$ , onde  $|u\rangle$  e  $|v\rangle$  são vetores de estado (kets) do espaço escritos na notação de Dirac [207] e assumidos normalizados, tais que,  $\langle u|u \rangle = \langle v|v \rangle = 1$ . Como em qualquer espaço vetorial, é possível definir uma base completa e ortonormal, o que permite expressar qualquer vetor pertencente ao espaço como uma combinação linear dos vetores da base:

$$|v\rangle = \sum_k v_k |n_k\rangle, \quad (\text{A.1})$$

e além disso podemos definir as relações de ortogonalidade e de completeza entre os vetores da base do espaço de Hilbert como:

$$\langle n_k | n_m \rangle = \delta_{km}, \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_k |n_k\rangle \langle n_k| = 1. \quad (\text{A.3})$$

Um conceito fundamental na definição do espaço de Hilbert é o conceito de operador. O operador é um ente matemático que está intimamente relacionado com a medida das observáveis do sistema. Por efeito de simplicidade, vamos admitir que todos os operadores de interesse físico sejam lineares, de forma que, a cada operador estará associado uma matriz. Tomando um operador  $\hat{A}$  arbitrário e sua respectiva relação de completeza da base, podemos definir:

$$\hat{A} = \sum_j \sum_k |n_j\rangle \langle n_j| \hat{A} |n_k\rangle \langle n_k|, \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{A} = \sum_{j,k} A_{jk} |n_j\rangle \langle n_k|, \quad (\text{A.5})$$

onde os elementos da matriz que representa o operador  $\hat{A}$  são dados por  $A_{jk} = \langle n_j | \hat{A} | n_k \rangle$ . É importante observar que assim como no produto matricial, o produto de operadores é uma operação não comutativa, de forma que, no produto de dois operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , é necessário respeitar a ordem em que cada operador aparece pois,  $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ . O produto de operadores representa a medida sucessiva de dois ou mais observáveis, de forma que, a partir deste produto podemos definir o chamado comutador entre os operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (\text{A.6})$$

Quando dois operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  comutam  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ , podemos dizer que estes dois operadores representam dois observáveis do sistema que podem ser medidos simultaneamente com incerteza mínima. Dois operadores muito interessantes são por exemplo, o operador identidade  $\hat{I}$ , que é capaz de levar qualquer operador nele próprio  $\hat{A}\hat{I} = \hat{A}$  e o operador inverso  $\hat{A}^{-1}$  que satisfaz a relação,

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}, \quad (\text{A.7})$$

analogia à propriedade de inversão de matrizes. Uma ferramenta bastante útil quando estamos lidando com operadores é o chamado traço de um operador. O traço de um operador é definido como a soma dos elementos da diagonal principal da matriz que o representa.

$$Tr\{\hat{A}\} = \sum_k \langle n_k | \hat{A} | n_k \rangle. \quad (\text{A.8})$$

O traço exibe algumas propriedades muito interessantes, como por exemplo, a independência da base, ou seja, em um espaço de Hilbert de dimensão infinita podemos definir a princípio infinitas bases ortonormais completas nas quais podemos escrever um operador, e em todas elas, o traço desse operador será sempre o mesmo. Além disso, o traço do produto de vários operadores é invariante pela permutação cíclica desses operadores, ou seja,

$$Tr\{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\} = Tr\{\hat{C}\hat{A}\hat{B}\} = Tr\{\hat{B}\hat{C}\hat{A}\}. \quad (\text{A.9})$$

Outra propriedade bastante útil do traço de um operador é a chamada hermiticidade [208]. Um operador  $\hat{A}$ , é dito hermiteano quando  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$  e essa característica faz com que  $Tr\{\hat{A}^\dagger\} = Tr\{\hat{A}\}$ . Nesse contexto podemos definir um espaço auxiliar associado ao espaço dos kets, denominado espaço dos bras, onde a cada vetor  $|v\rangle$  estará associado um vetor dual  $\langle v|$  em correspondência. Dessa forma, a um operador atuando em um ket estará associado um operador adjunto atuando em um bra:

$$\hat{A} |v\rangle \Leftrightarrow \langle v| \hat{A}^\dagger, \quad (\text{A.10})$$

e no caso particular de um operador hermiteano teremos:

$$\hat{A} |v\rangle \Leftrightarrow \langle v| \hat{A}. \quad (\text{A.11})$$

Uma observação interessante a ser feita é que em MQ, os observáveis físicos são sempre representados por operadores hermiteanos e o conjunto de todos os possíveis resultados das medidas desses observáveis, compreende o conjunto dos autovalores associados às matrizes que representam esses operadores. Operadores hermiteanos exibem autovalores reais, que podem ser facilmente relacionados ao resultado das medidas realizadas em um laboratório. Isso se encaixa perfeitamente na construção da teoria que embasa a MQ. Por exemplo, consideremos que  $\hat{A}$  seja um operador hermiteano associado às seguintes equações de estado,

$$\hat{A} |a\rangle = a |a\rangle, \quad \langle a| \hat{A} = \langle a| a^*. \quad (\text{A.12})$$

Se atuarmos  $|a\rangle$  na primeira equação de estado à direita e  $\langle a|$  na segunda equação à esquerda, ao subtrairmos a primeira equação da segunda obteremos,  $\langle a|a\rangle (a - a^*) = 0$ , de onde a única possibilidade é que  $a = a^*$  já que  $|a\rangle \neq 0$ . Assim, o que podemos observar é que os autovalores associados a um operador hermiteano são indiscutivelmente reais. É possível também demonstrar que os autovetores associados aos operadores hermiteanos são ortogonais e que formam entre si uma base completa. Tomemos dois autovetores associados ao operador hermiteano  $\hat{A}$ :  $|a\rangle$  e  $|a'\rangle$ .

Escrevendo as equações de estado para eles e repetindo o processo descrito, teremos o seguinte:

$$\langle a|a' \rangle (a - a') = 0, \quad (\text{A.13})$$

de onde sabemos de antemão que  $a \neq a'$ . Portanto, o produto  $\langle a|a' \rangle = 0$ , assim, é indiscutível que os autovetores de um operador hermiteano são ortogonais e formam entre si uma base completa. Uma medida em MQ representa uma média dos autovalores dos observáveis. Podemos definir o valor médio de um operador  $\hat{A}$  de forma que,

$$\langle v| \hat{A} |v\rangle = \langle v| \sum_k |a_k\rangle \langle a_k| \hat{A} |v\rangle, \quad (\text{A.14})$$

$$\langle v| \hat{A} |v\rangle = \sum_k a_k \langle v|a_k\rangle \langle a_k|v\rangle = \sum_k a_k |\langle v|a_k\rangle|^2, \quad (\text{A.15})$$

$$\langle v| \hat{A} |v\rangle = \sum_k a_k p_k, \quad (\text{A.16})$$

onde  $p_k = |\langle v|a_k\rangle|^2$  é a probabilidade de uma medida do observável  $\hat{A}$  no estado  $|v\rangle$  fornecer o resultado  $a_k$ . A probabilidade  $p_k$  obedece a normalização da teoria das probabilidades. De posse dessas ferramentas podemos definir outra entidade muito útil em MQ, os chamados operadores projetores ou vetores de projeção, dados na forma:

$$\hat{P}_k = |n_k\rangle \langle n_k|, \quad (\text{A.17})$$

onde  $\hat{P}_k$  é um operador linear e hermiteano. O operador projetor exibe características bem interessantes, como por exemplo, a idempotência, a unitariedade do traço, a hermiticidade e a positividade. Um operador é dito idempotente quando todas as potências deste operador resultam nele próprio. Assim, o operador  $P_k$  idempotente satisfaz:

$$\hat{P}_k^2 = \hat{P}_k^3 = \dots = \hat{P}_k = \hat{P}_k^\dagger, \quad (\text{A.18})$$

o que em outras palavras, significa que a aplicação sucessiva do operador projetor a um estado não altera esse estado. Talvez o maior exemplo desse tipo de operadores seja o operador densidade, ao menos quando estamos lidando com estados puros. Nesse ponto da discussão convém falar sobre os operadores de evolução temporal, que como o próprio nome nos adianta, são capazes de proporcionar a evolução no tempo [209] de qualquer estado,  $|v\rangle$ , do espaço de Hilbert. Essa evolução é determinada pela equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |v\rangle = H |v\rangle. \quad (\text{A.19})$$

O operador de evolução temporal é obtido recursivamente da série de Dayson [210] e escrito como,

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') U(t', t_0) dt', \quad (\text{A.20})$$

o qual nos casos em que o operador Hamiltoniano é independente do tempo,  $H(t) = H$ , nos leva ao seguinte:

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}. \quad (\text{A.21})$$

Em MQ, o ato de medir uma certa grandeza representada por um operador  $\hat{A}$  leva o sistema físico a um colapso em um autoestado do sistema em que o operador  $\hat{A}$  é diagonal na base desse autoestado. O fato é que o estado do sistema logo após a medida, é em geral distinto do estado do sistema pouco antes da medida. Existe, entretanto, uma representação alternativa, na qual são os operadores que evoluem no tempo ao invés dos estados, como acontece na chamada representação de Schrodinger [211]. Essa representação é a chamada representação de Heisenberg [212], onde agora, os estados do sistema permanecem fixos no tempo, enquanto os operadores evoluem. O operador  $\hat{A}$  na representação de Heisenberg fica definido como:

$$A_H(t) = U^\dagger(t, t_0)(A)U(t, t_0), \quad (\text{A.22})$$

onde  $\hat{A}$  é o operador na representação de Schrodinger e sua evolução no tempo,

$$\dot{A}_H = \frac{\partial A}{\partial t} - i\hbar[A_H, H]. \quad (\text{A.23})$$

Uma grandeza física representada por um operador hermitiano, será uma constante de movimento se seu valor médio for independente do tempo. Na maior parte dos casos, os operadores são explicitamente independentes do tempo. Na representação de Heisenberg a condição necessária e suficiente para que isso ocorra é que o comutador entre eles seja nulo, o que significa dizer, que qualquer grandeza que possa ser medida simultaneamente com o Hamiltoniano exibindo incerteza mínima representa uma constante do movimento em MQ.

## Apêndice B

### Teoria de informação: Breve histórico e ideias fundamentais

VIVEMOS na era da informação, entretanto, a ideia de informação não é de hoje ainda mais no que diz respeito a entender como armazená-la, codificá-la, quantificá-la e transmití-la. A chamada teoria da informação, originalmente proposta por Claude E. Shannon [213] em 1948, em seu artigo intitulado A Mathematical Theory of Communication foi e é fundamental para a criação de processos como a compressão [214] de dados sem perdas, a compressão de dados com perdas e o entendimento do que leva a essas perdas, a codificação de canais de comunicação, muito usados na guerra, a invenção das mídias digitais, da telefonia celular, da internet entre centenas de outras coisas. Shannon estabeleceu a entropia como uma medida fundamental na teoria de informação. A entropia possibilita mensurar a quantidade de incerteza envolvida no valor de uma variável aleatória ou em um processo aleatório.

Shannon começou sua carreira em 1937 no MIT, onde escreveu uma tese demonstrando que as aplicações elétricas da álgebra booleana [215] poderiam construir qualquer relação numérica lógica. Contribuiu para o campo da criptoanálise [216] e para a defesa nacional durante a Segunda Guerra Mundial, introduzindo as ideias fundamentais sobre a quebra de códigos e as telecomunicações seguras. Shannon provou que seus circuitos de comutação poderiam ser usados para simplificar o arranjo dos relés eletromecânicos que foram usados em chaves de roteamento de chamadas telefônicas. Em seguida, ele expandiu esse conceito, provando que esses circuitos poderiam resolver todos os problemas que a álgebra booleana poderia resolver e apresentou diagramas de vários circuitos, incluindo um somador completo de 4 bits, um grande avanço para a época. Em 1940, Shannon teve a oportunidade de discutir suas ideias com John von Neumann [217], e também teve encontros ocasionais com Einstein e Godel e ao se juntar ao Bell Labs passou a trabalhar em sistemas de controle de fogo e criptografia.

No início de 1943, Shannon entrou em contato com o principal matemático britânico, Alan Turing [218], que havia sido enviado a Washington para compartilhar com o serviço criptográfico da Marinha dos EUA os métodos usados pelo governo Britânico para quebrar as cifras usadas pelos U-boats no atlântico norte. Turing também estava interessado na codificação da fala e passou algum tempo na Bell Labs. Turing mostrou a Shannon seu artigo de 1936 que definiu o que hoje é conhecido como Máquina universal de Turing [219]. Em 1945, quando a guerra estava chegando ao fim, Shannon e seus colegas, em seus relatórios finais trataram formalmente o problema de suavizar os dados no controle de fogo como uma analogia ao problema de separar um sinal do ruído em sistemas de comunicação. Em outras palavras, eles modelaram o problema em termos de processamento de dados e sinais e assim, anunciararam a chegada da era da informação. Enquanto esteve no Bell Labs, Shannon provou que o one-time pad<sup>1</sup> [220] criptográfico é inquebrável. Ele também provou que qualquer sistema inquebrável, deve ter essencialmente as mesmas características do one-time pad: a chave deve ser verdadeiramente aleatória, tão grande quanto o texto original, nunca reutilizada no todo ou em parte e deve ser mantida em segredo.

Em 1948, após anos de expectativa da produção de uma teoria completa sobre a informação e a comunicação, o artigo de Shannon veio para apontar um caminho até a era da informação. Shannon se concentrou no problema de como melhor codificar as informações que um remetente deseja transmitir e usou ferramentas da teoria das probabilidades, desenvolvidas por Wiener [221], que estavam em seus estágios iniciais na época. Shannon desenvolveu a entropia da informação como uma medida da incerteza em uma mensagem enquanto inventava o campo da teoria da informação. Em 1949, Shannon e Fano desenvolveram uma maneira sistemática de atribuir palavras-chave com base nas probabilidades dos blocos de informação. Essa técnica ficou conhecida como codificação de Shannon-Fano [222]. Anos mais tarde, num livro em coautoria com Weaver, Shannon populariza a ideia de informação, dizendo que a informação é uma medida da liberdade de escolha quando se seleciona uma mensagem. Em 1951, em seu artigo, Predição e Entropia do Inglês Impresso, Shannon [223] mostrou os limites superior e inferior da entropia nas estatísticas do inglês e forneceu uma base estatística para a análise da linguagem. Além disso, ele provou que tratar o espaço em branco como a 27<sup>a</sup> letra do alfabeto na verdade reduzia a incerteza na linguagem escrita, fornecendo uma clara ligação quantificável entre a prática cultural e a cognição probabilística.

---

<sup>1</sup>O one-time pad é uma técnica de criptografia que não pode ser quebrada. Ela requer o uso de uma chave pré-compartilhada e única do mesmo tamanho ou mais longa que a mensagem a ser enviada. Nesta técnica, um texto simples é emparelhado com uma chave secreta aleatória e em seguida, cada bit ou caractere do texto é criptografado, combinando-se com o bit ou caractere correspondente da mensagem usando a adição modular. Se a chave é verdadeiramente aleatória, pelo menos enquanto o texto original nunca for reutilizado no todo ou em parte, e mantido completamente secreto, então o texto cifrado resultante será impossível de decifrar ou quebrar.

Do ponto de vista da teoria clássica da informação, a unidade básica de informação é o bit. O bit é um dígito binário que tem apenas dois valores possíveis e pode ser representado fisicamente como um dispositivo de dois estados, comumente representados por 0 e 1. Os dois valores de um dígito binário também podem ser interpretados como valores de operações lógicas como, verdadeiro e falso ou sim e não, por exemplo. Outra forma de representar um bit são os sinais algébricos + e −, os estados ativado e desativado ou quaisquer outros atributos de dois valores. Do ponto de vista da teoria quântica de informação, a unidade básica de informação é o qubit [224], definido da seguinte forma:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (B.1)$$

onde pela condição de normalização dos estados, temos que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . A  $|\alpha|^2$  está associada à probabilidade de observar o estado  $|0\rangle$  e a  $|\beta|^2$ , à probabilidade de medir o estado  $|1\rangle$ . Dessa forma, realizadas  $N$  observações com  $N \rightarrow \infty$ , teremos  $|\alpha|^2\%$  de chances de medir  $|0\rangle$  e  $|\beta|^2\%$  de chances de medir  $|1\rangle$ . Os números  $\alpha$  e  $\beta$  são pertencentes ao conjunto dos números complexos tais que,

$$\alpha = u + iv, \quad \beta = x + iy \Rightarrow |\alpha|^2 = u^2 + v^2, |\beta|^2 = x^2 + y^2, \quad (B.2)$$

com  $u, v, x$  e  $y$  pertencentes ao conjunto dos números reais. Outra representação possível para um qubit é a representação polar, intrínseca da definição dos números complexos:

$$|\Psi\rangle = e^{i\gamma}(\cos\theta/2|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta/2|1\rangle), \quad (B.3)$$

onde  $\theta$  e  $\phi$  são ângulos definidos na chamada esfera de Bloch-Poincaré [225]. Essa representação mostra o quanto amplo é um qubit. Enquanto no bit clássico, o sistema pode assumir somente os valores 0 ou 1, em um bit quântico, o sistema pode assumir qualquer superposição de  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  dentro da esfera de Bloch-Poincaré. Note por exemplo, que se tomarmos  $\theta = 0$  para qualquer  $\phi$ , teremos nosso qubit posicionado no polo norte da esfera. Se tomarmos  $\theta = \pi$ , teremos nosso qubit posto no polo sul da esfera, tendo apenas sua direção alterada pela escolha de  $\phi$ . Nessas duas condições estamos diante de estados puros correspondentes aos kets  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Se tomarmos  $\theta = \pi/2$  temos nosso qubit posicionado no equador da esfera de Bloch-Poincaré, representando um estado puro, porém completamente superposto entre os kets  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Estes estados são os conhecidos estados de Bell [226], cuja principal característica é a de estarem maximamente emaranhados. Controlando  $\phi$ , podemos varrer todos os possíveis estados de Bell associados ao qubit. Entretanto, a definição de qubit utilizando  $|\Psi\rangle$  não nos possibilita descrever estados mistos de uma forma prática. Imagine que no laboratório tenhamos uma máquina que produz estados quânticos  $|\Psi_1\rangle$  idênticos a cada nova medida. Em condições reais, essa máquina não é perfeita e esporadicamente ela produz estados  $|\Psi_2\rangle$  com um erro de bit-flip, ou seja, dado que  $|\Psi_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ , teremos que às vezes, nossa máquina produz  $|\Psi_2\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle$ .

Suponhamos que em 90% das vezes tenhamos como resultado da medida o estado  $|\Psi_1\rangle$  e em 10% das vezes  $|\Psi_2\rangle$ . Dessa forma, qual será o estado final entregue pela máquina? Do ponto de vista da função de onda,  $|\Psi\rangle$ , esse estado não pode ser completamente descrito e para tal, precisamos usar o operador densidade como definido anteriormente, assim, o resultado final entregue pela máquina será dado por,

$$\rho_F = 0.9 |\Psi_1\rangle \langle \Psi_1| + 0.1 |\Psi_2\rangle \langle \Psi_2|, \quad (\text{B.4})$$

$$\rho_F = \begin{pmatrix} 0.9|a|^2 + 0.1|b|^2 & 0.9ab^* + 0.1a^*b \\ 0.9a^*b + 0.1ab^* & 0.9|b|^2 + 0.1|a|^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Podemos definir o que comumente se chama de grau de pureza [227] do sistema quântico. O grau de pureza de um sistema quântico é dado por  $Tr\{\rho^2\}$ . Se  $Tr\{\rho^2\} = 1$ , dizemos que o sistema é puro, se  $Tr\{\rho^2\} < 1$ , dizemos que o sistema é misto. Complementar à ideia de grau de pureza está a definição de entropia linear [112], que configura como uma medida de quanto os estados do sistema se afastam dos estados de um sistema puro ao longo do tempo:

$$S_L = 1 - Tr\{\rho^2\}. \quad (\text{B.6})$$

Para sistemas puros, a entropia linear é nula e quanto maior for seu valor, maior será o grau de mistura experimentado pelos estados do sistema. O valor máximo da entropia linear está limitado por  $S_L^{max} = \frac{N-1}{N}$ , onde N é o número de componentes do sistema. De modo geral, no formalismo da matriz de densidade, a diferença fundamental entre estados puros e mistos está na perda da idempotência do operador densidade, ou seja, para estados puros, medidas simultâneas do estado de  $\rho$  levam sempre ao mesmo resultado, enquanto que, para estados mistos essas medidas levam sempre a resultados distintos, já que o sistema perde sua pureza e colapsa em algum dos infinitos estados mistos possíveis. Entretanto, todas as demais características do operador densidade permanecem intactas.

A teoria de informação proposta por Shannon, diz que dada uma variável aleatória X, a ela está associado um terno ordenado  $(x, A_x, P_x)$ , onde x indexa os valores que a variável X pode assumir na mensagem  $A_x$  e  $P_x$  indica a probabilidade de ocorrência de cada símbolo da mensagem  $A_x$ . Por exemplo, podemos analisar do ponto de vista da teoria de informação de Shannon, a mensagem  $A_x$  descrita pelo famoso poema "No meio do caminho" de Carlos Drummond de Andrade:

No meio do caminho tinha uma pedra,  
tinha uma pedra no meio do caminho,  
tinha uma pedra,  
no meio do caminho tinha uma pedra...

Na teoria de Shannon as letras do alfabeto, as sílabas e até mesmo as palavras podem ser encaradas como variáveis aleatórias em uma mensagem. Se tomamos como variáveis aleatórias por exemplo as palavras do texto, na mensagem  $A_x$ ,  $x$  irá indexar os valores tomados pelas variáveis aleatórias  $X$  na mensagem. Imagine que queiramos saber a informação associada à palavra pedra. Dessa forma,  $P_x = 7/61$  representa a probabilidade de ocorrência da palavra pedra na mensagem. Shannon definiu o conceito de conteúdo informativo de uma mensagem como o grau de desinformação associado a uma variável aleatória. O conteúdo informativo denotado por  $I(m_k)$  respeita as seguintes proposições:

- Se  $P_k \rightarrow 1$ , então  $I(m_k) \rightarrow 0$ , ou seja, quanto maior a probabilidade de ocorrência de uma dada variável aleatória em uma mensagem, menor será o conteúdo informativo incauto nela.
- Se  $P_k < P_i$ , então  $I(m_k) > I(m_i)$  já que temos mais desinformação sobre  $k$  do que sobre  $i$ .
- O conteúdo informativo  $I(m_k) \geq 0$ , pois  $0 \leq P_k \leq 1$ , o que implica que se a mensagem for composta de uma única variável o conteúdo informativo associado a ela é nulo. Em analogia aos sistemas quânticos é como dizer que um sistema puro não traz consigo nenhum conteúdo informativo já que é completamente conhecido. Nesse contexto, o conteúdo informativo definido por Shannon é uma medida da ignorância que temos em relação aos sistemas físicos.
- O conteúdo informativo  $I(m_k, m_j) = I(m_k) + I(m_j)$ , ou seja, a ignorância associada a um conjunto de variáveis aleatórias em uma mensagem é a soma das ignorâncias individuais associadas a cada variável aleatória e conhecendo todas elas somos capazes de quantificar toda a informação contida na mensagem.

Nessa análise feita por Shannon, podemos notar por exemplo, que na mensagem acima as variáveis aleatórias dadas pelas palavras pedra e tinha ou pelas palavras caminho e meio representam o mesmo conteúdo informativo visto que possuem a mesma probabilidade de ocorrência, no entanto, a palavra caminho tem conteúdo informativo superior ao da palavra pedra visto que tem menor probabilidade de ocorrência na mensagem, o que indica maior ignorância sobre ela. Shannon definiu o conteúdo informativo associado a uma variável aleatória em uma mensagem como  $I(x) = -\log p_i$ , da qual decorre a definição de conteúdo informativo médio:

$$H(x) = - \sum_x p(x) \log p(x), \quad (B.7)$$

que representa a ignorância média que temos sobre o conteúdo da mensagem.

Note que essa definição é análoga à definição de entropia dada por von Neumann. De forma geral, para um sistema quântico descrito pelo operador densidade, temos a entropia de von Neumann [228] como uma medida da ignorância média que temos sobre os estados do sistema. Na teoria de Shannon, dados dois conjuntos de estados que compartilham entre si informação, como por exemplo, o conjunto sistema + reservatório no contexto da equação de Liouville-von Neumann na formulação de Lindblad como definimos anteriormente, define-se os conceitos de entropia condicional e de informação mútua [229].

A entropia condicional é a entropia relacionada à coexistência dos elementos do conjunto de estados, ou seja, no contexto dos estados quânticos, se denotamos por A o sistema e por B o reservatório, a entropia associada ao sistema dada a existência do reservatório (portanto condicional), é dada pela subtração da entropia do conjunto formado pelos dois da entropia do reservatório. O conceito de informação mútua está ligado à entropia relacionada aos estados comuns aos dois e é dada pela soma das entropias individuais de A e B subtraída da entropia do conjunto formado por A e B.

É interessante ressaltar, que todas essas definições da teoria de informação de Shannon estão condicionadas a como sistema e reservatório interagem. Para sistemas perfeitamente isolados, ou seja, que não interagem com os reservatórios, estados inicialmente puros (superpostos ou não) permanecem assim ao longo da evolução temporal que é dita cíclica e unitária e portanto, as entropias linear e de von Neuman permanecem inalteradas e nosso grau de ignorância sobre as variáveis do sistema é nulo. Entretanto, para sistemas abertos, essa não é a realidade das coisas. Existem os chamados canais quânticos de decoerência, responsáveis pelo trânsito da informação entre sistema e reservatório e grandes culpados pela incapacidade de construir um computador quântico verdadeiramente eficiente. Quando falamos de PQs, os canais quânticos de decoerência mais comuns são os canais de dephasing, depolarizing, bit-flip, phase-flip e amplitude damping.

O canal de dephasing que na tradução direta é algo como desfasamento ou perda de fase, é um mecanismo que recupera o comportamento clássico de um sistema quântico e está ligado às maneiras pelas quais a coerência causada pela perturbação (um laser por exemplo) decai ao longo do tempo. Imaginemos que o conjunto sistema + reservatório, seja representado por dois qubits, um qubit relacionado ao sistema e um qubit relacionado ao reservatório. O mapa que descreve o comportamento do canal de dephasing é dado por:

$$|0\rangle_S |0\rangle_R \rightarrow |0\rangle_S |0\rangle_R, \quad (B.8)$$

$$|1\rangle_S |0\rangle_R \rightarrow \sqrt{1-p} |1\rangle_S |0\rangle_R + \sqrt{p} |1\rangle_S |1\rangle_R. \quad (B.9)$$

Se no tempo inicial sistema e reservatório não tiverem nenhuma excitação (nenhum fóton, por exemplo) com o passar do tempo, eles permanecerão sem nenhum excitação. No entanto, se no tempo inicial o sistema estiver sujeito a uma excitação (a presença de um fóton, por exemplo), ao longo do tempo eles terão uma probabilidade  $(1 - p)$  de permanecerem nessa configuração e uma probabilidade  $p = 1 - e^{-\xi t}$ , do reservatório ganhar uma excitação ( $\xi$  é a taxa de decimento espontâneo do sistema). Note que essa é a perfeita descrição do fenômeno de emissão. Podemos escrever a matriz de densidade associada ao mapa do canal de dephasing da seguinte forma,

$$|\Psi(t)\rangle_{S+R} = a|00\rangle + b(\sqrt{1-p}|10\rangle + \sqrt{p}|11\rangle), \quad (\text{B.10})$$

$$\rho^{S+R} = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & ab^* \sqrt{1-p} & ab^* \sqrt{p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^*b\sqrt{1-p} & 0 & |b|^2(1-p) & |b|^2\sqrt{p(1-p)} \\ a^*b\sqrt{p} & 0 & |b|^2\sqrt{p(1-p)} & |b|^2p \end{pmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

e se tomarmos  $t \rightarrow \infty$ , ou seja,  $p \rightarrow 1$ , no regime estacionário teremos,

$$\rho^{S+R} = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & 0 & ab^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^*b & 0 & 0 & |b|^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

que advém de  $|\Psi\rangle_{S+R} = a|00\rangle + b|11\rangle$ , que é um estado de Bell [230]. O canal de dephasing provoca o máximo emaranhamento entre o sistema e o reservatório. Apesar disso, se aplicarmos o traço parcial sobre os graus de liberdade do reservatório, afim de obter a matriz de densidade reduzida associada ao sistema é fácil notar que:

$$\rho_S = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

Fica claro que apesar do conjunto sistema + reservatório estar maximamente emaranhado, as coerências ligadas ao sistema se anulam. Essa condição é conhecida como dephasing puro, ou seja, o canal de dephasing além de emaranhar sistema e reservatório, faz com que o sistema perca seu comportamento quântico, tornando-se puramente clássico quando o tempo tende para o infinito.

O canal de amplitude damping que na tradução direta é algo como canal de amortecimento de amplitude, é um canal quântico que modela processos físicos, como por exemplo, a emissão espontânea. Um processo natural pelo qual esse canal pode ocorrer é por exemplo, em uma cadeia de spins, através da qual vários estados de spin acoplados por um Hamiltoniano independente do tempo, podem ser usados para enviar um estado quântico de um

local para outro (respeitando logicamente o teorema de não clonagem). O mapa ligado ao canal quântico de amplitude damping é dado por,

$$|0\rangle_S |0\rangle_R \rightarrow |0\rangle_S |0\rangle_R, \quad (\text{B.14})$$

$$|1\rangle_S |0\rangle_R \rightarrow \sqrt{1-p} |1\rangle_S |0\rangle_R + \sqrt{p} |0\rangle_S |1\rangle_R. \quad (\text{B.15})$$

Se no tempo inicial sistema e reservatório não possuem excitações, quando o tempo tende ao infinito eles permanecem sem excitações. Entretanto, se no tempo inicial o sistema possui uma excitação, com o passar do tempo existe uma probabilidade  $1-p$  dessa excitação permanecer no sistema e uma probabilidade  $p$  dessa excitação ser transmitida para o reservatório (por emissão espontânea, por exemplo). Podemos escrever a matriz de densidade associada ao mapa do canal de amplitude damping, da seguinte forma,

$$|\Psi(t)\rangle_{S+R} = a |00\rangle + b(\sqrt{1-p} |10\rangle + \sqrt{p} |01\rangle), \quad (\text{B.16})$$

$$\rho^{S+R} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \sqrt{p} & ab^* \sqrt{1-p} & 0 \\ ab^* \sqrt{p} & |b|^2 p & |b|^2 \sqrt{1-p} & 0 \\ ab^* \sqrt{1-p} & |b|^2 \sqrt{p(1-p)} & |b|^2 (1-p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.17})$$

e se tomarmos  $t \rightarrow \infty$ , ou seja,  $p \rightarrow 1$ , no regime estacionário teremos:

$$\rho^{S+R} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* & 0 & 0 \\ ab^* & |b|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

que advém de  $|\Psi\rangle_{S+R} = a |00\rangle + b |01\rangle = |0\rangle_S \otimes (a |0\rangle + b |1\rangle)_R$ . O canal de amplitude damping tende a levar o sistema para o estado fundamental quando o tempo tende ao infinito e isso acontece através da emissão espontânea de um fóton para o reservatório. Executando o traço parcial sobre os graus de liberdade do reservatório, podemos obter a matriz de densidade reduzida associada ao sistema,

$$\rho_S = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

Note que o mecanismo pelo qual o sistema emite um fóton espontâneamente para o reservatório, além de o fazer retornar ao estado fundamental conservando energia e momento, também é um processo que lhe devolve o comportamento clássico, anulando suas coerências quando o tempo tende para o infinito.

Controlar esses canais de decoerência é fundamental para o futuro desenvolvimento dos computadores quânticos [231]. O ideal, seria poder fazer computação quântica em sistemas isolados, onde estes canais de interferência não atuam, onde a dinâmica do sistema é cíclica e unitária e onde o grau de ignorância sobre as variáveis do sistema é nulo. Entendido tudo isso, podemos agora, generalizar a ideia de qubit para um conjunto a princípio infinito de estados quânticos:

$$|\Psi\rangle = \sum_i^n \alpha_i |\lambda_i\rangle, \quad (\text{B.20})$$

onde para o caso especial em que  $n = 2$ , retornamos ao qubit. No caso em que  $n = 3$ , temos o chamado qutrit, no caso em que  $n = 4$ , temos o chamado quiquart e para  $n > 4$  os chamados qudits. Um computador quântico, é um dispositivo que executa cálculos fazendo uso direto de propriedades da MQ, tais como a sobreposição de estados e a interferência. Atualmente já existem computadores quânticos sendo implementados, mas eles ainda encontram uma certa limitação quanto ao número de qubits que se consegue manipular. O principal ganho desses computadores é sem dúvida a possibilidade de resolver algoritmos num tempo eficiente, o que possibilitaria, por exemplo, a otimização de vários problemas da computação clássica como a decomposição em fatores primos de números naturais.

# Apêndice C

## Detalhes técnicos

### C.1 Aproximação de dipolo

CONSIDEREMOS a teoria semiclássica, onde consideraremos por simplicidade o PQ como um sistema quântico de dois níveis que interage com o campo eletromagnético, aqui tratado classicamente. O Hamiltoniano que descreve essa situação é dado por:

$$H = \frac{(\vec{P} - q\vec{A})^2}{2m} + V, \quad (\text{C.1})$$

onde  $\vec{P}$ ,  $\vec{A}$  e  $V$  representam respectivamente, o momento das partículas, o potencial vetor magnético e o potencial elétrico. Aplicando a distributiva e agrupando os termos, podemos reescrever o Hamiltoniano como,

$$H = \left(\frac{\vec{P}^2}{2m} + V\right) - \frac{q}{2m}(\vec{P}\vec{A} + \vec{A}\vec{P}) + \frac{q^2}{2m}\vec{A}^2, \quad (\text{C.2})$$

onde o primeiro termo é o Hamiltoniano das partículas, o segundo termo é o Hamiltoniano de interação [232] entre as partículas e o campo eletromagnético e o terceiro termo é o Hamiltoniano da radiação eletromagnética. Aqui, estamos interessados apenas no Hamiltoniano de interação [233] dado por:

$$H_I = -\frac{q}{2m}(\vec{P}\vec{A} + \vec{A}\vec{P}), \quad (\text{C.3})$$

que pela definição de momento da mecânica quântica pode ser reescrito como,

$$H_I = -\frac{q}{2m}(-i\hbar)(\vec{\nabla}\vec{A} + \vec{A}\vec{\nabla}). \quad (\text{C.4})$$

A princípio a interação radiação-matéria é independente do gauge [234]. Por simplicidade, vamos considerar o gauge de Coulomb ( $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$ ) e assim, o Hamiltoniano de interação [235] fica:

$$H_I = -\frac{q}{2m} \vec{A} \vec{P}. \quad (\text{C.5})$$

Podemos escrever o potencial vetor magnético como uma oscilação,

$$\vec{A} = \frac{A_0(\omega) \hat{e}}{2} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + c.c. \quad (\text{C.6})$$

No produto  $\vec{k}\vec{r}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  representa o vetor de onda da radiação eletromagnética, que é em geral muito maior que as dimensões do PQ. Dessa forma como  $\lambda \gg r$ , temos como consequência que o produto  $\vec{k}\vec{r} \ll 1$ . Assim, podemos expandir o produto  $\vec{k}\vec{r}$  em uma série de Taylor de forma que o Hamiltoniano de interação fica como:

$$H_I = -\frac{q}{2m} \frac{\tilde{A}_0(\omega) \hat{e}}{2} (1 + i\vec{k}\vec{r} + \frac{1}{2!} (i\vec{k}\vec{r})^2 + \dots) \vec{P}, \quad (\text{C.7})$$

onde podemos lançar mão da chamada aproximação dipolar [236], na qual desprezamos os termos da expansão de  $\vec{k}\vec{r}$  com ordens superiores a zero,

$$H_I^{Dip} = -\frac{q}{2m} \frac{\tilde{A}_0(\omega) \hat{e}}{2} \vec{P}. \quad (\text{C.8})$$

Por fim, podemos escrever o vetor momento  $\vec{P} = q\vec{d}$  e o vetor campo elétrico  $\vec{E} = \frac{q\tilde{A}_0(\omega)\hat{e}}{4m}$  e assim, chegamos ao Hamiltoniano de interação escrito na aproximação de dipolo [237]

$$H_I^{Dip} = -d\vec{E}. \quad (\text{C.9})$$

## C.2 Hamiltonianos transformados

Em geral os Hamiltonianos são dependentes do tempo e isso a princípio não representa nenhum problema. Entretanto, considerar a dependência temporal explícita de um Hamiltoniano torna o tratamento numérico mais difícil do ponto de vista do esforço computacional. Em geral o que fazemos, é aplicar uma transformação unitária ao Hamiltoniano afim de remover parcial ou totalmente sua dependência temporal.

Dado o Hamiltoniano  $H$ , o Hamiltoniano transformado  $H'$  pode ser obtido via,

$$H' = UHU^\dagger + iU^\dagger \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (\text{C.10})$$

onde  $U$  representa uma transformação unitária tal que,  $UU^\dagger = I$ . Comumente, as transformações unitárias são descritas por exponenciais de operadores e dessa forma os termos da equação (C.10) ficam dados por:

$$\begin{aligned} UHU^\dagger &= e^{itG}He^{-itG}, \\ iU^\dagger \frac{\partial U}{\partial t} &= -G. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

A primeira equação do conjunto de equações (C.11) pode ser reescrita com o auxílio do lema de Baker-Hausdorff<sup>1</sup> truncado em primeira ordem. Assim, o Hamiltoniano transformado  $H'$  pode ser escrito da seguinte forma,

$$H' = (H - G) + it[G, H]. \quad (\text{C.12})$$

A título de exemplo, vamos aplicar a equação (C.12) aos Hamiltonianos dos sistemas de três e quatro níveis (no capítulo 4 essas aproximações e transformações já foram aplicadas de antemão).

### C.2.1 Sistema de 3 níveis

O Hamiltoniano do sistema de três níveis formado por uma molécula de PQs duplos acoplados por tunelamento, na aproximação dipolar, pode ser escrito da seguinte forma:

$$H = \sum_{j=0}^2 \omega_j |j\rangle \langle j| + \Omega e^{-i\omega_L t} |0\rangle \langle 1| + T_e |1\rangle \langle 2| + c.c., \quad (\text{C.13})$$

onde  $\omega_L$  é a frequência do laser ligado à transição dos estados  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ . Afim de remover a dependência temporal introduzida pelo laser, vamos adotar a transformação unitária,

$$U = \exp \left\{ -\frac{i\omega_L t}{2} (|1\rangle \langle 1| - |0\rangle \langle 0| + |2\rangle \langle 2|) \right\}. \quad (\text{C.14})$$

---

<sup>1</sup>Lema de Baker-Hausdorff:  $e^{i\lambda A} B e^{-i\lambda A} = B + i\lambda[A, B] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots$ . A e B são operadores e  $\lambda$  um número real.

De posse da equação (C.12) podemos escrever o Hamiltoniano transformado como:

$$H' = \begin{pmatrix} \omega_0 - \frac{\omega_L}{2} & \Omega e^{i\omega_L t} (1 - it\omega_L) & 0 \\ \Omega e^{-i\omega_L t} (1 + it\omega_L) & \omega_1 + \frac{\omega_L}{2} & T_e \\ 0 & T_e & \omega_2 + \frac{\omega_L}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.15})$$

Podemos escrever as exponenciais em uma expansão em série de Taylor até a primeira ordem e lançando mão da aproximação RWA (aproximação de onda girante), desprezar os termos que oscilam muito:

$$(1 \pm it\omega_L)(1 \mp it\omega_L) = 1 + \omega_L^2 t^2 \approx 1. \quad (\text{C.16})$$

Nessa aproximação, os termos em um Hamiltoniano que oscilam rapidamente são negligenciados e isso é válido basicamente quando a radiação eletromagnética aplicada está próxima da ressonância com uma transição óptica e além disso a intensidade dessa radiação é baixa. Dessa forma, definindo  $\omega_0 - \frac{\omega_L}{2} = -\frac{\delta_1}{2}$ ,  $\omega_1 + \frac{\omega_L}{2} = \frac{\delta_1}{2}$  e  $\omega_2 + \frac{\omega_L}{2} = \frac{\delta_2}{2}$ , podemos escrever o Hamiltoniano do sistema de três níveis nas aproximações dipolar e RWA em sua forma independente do tempo como:

$$H' = \begin{pmatrix} -\frac{\delta_1}{2} & \Omega & 0 \\ \Omega & \frac{\delta_1}{2} & T_e \\ 0 & T_e & \frac{\delta_2}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

### C.2.2 Sistema de 4 níveis

O Hamiltoniano do sistema de quatro níveis formado por trions e elétrons com o campo magnético aplicado na configuração de Voigt pode ser escrito como:

$$H = \sum_{j=0}^3 E_j |j\rangle \langle j| + \Omega_c \cos(\omega_c t) [ |0\rangle \langle 3| + |1\rangle \langle 2| ] + \Omega_p \cos(\omega_p t + \phi) [ |0\rangle \langle 2| + |1\rangle \langle 3| ] + c.c, \quad (\text{C.18})$$

onde  $\omega_{p,c}$  são as frequências dos lasers de prova e controle e  $\phi$  é a fase relativa entre eles. As energias associadas aos estados  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  são dadas por,

$$E_0 = -\delta_e, \quad E_1 = 0, \quad (\text{C.19})$$

$$E_2 = \omega_c + \Delta, \quad E_3 = \omega_c + \Delta + \delta_h.$$

Primeiramente vamos escrever o Hamiltoniano na representação de interação, através do operador de evolução temporal associado ao Hamiltoniano  $H_0 = \sum_j E_j |j\rangle\langle j|$ :

$$\tilde{H} = U H_I U^\dagger = U(H - H_0)U^\dagger, \quad (\text{C.20})$$

onde após a atuação do operador  $U$  e escrevendo os cossenos em sua representação em termos de exponenciais, podemos escrever o Hamiltoniano na aproximação RWA,

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{\Omega_c}{2}(e^{-i(\omega_3 - \omega_0 - \omega_c)t} |0\rangle\langle 3| + e^{-i(\omega_2 - \omega_c)t} |1\rangle\langle 2|) \\ &\quad \frac{\Omega_p}{2}(e^{-i(\omega_2 - \omega_0 - \omega_p)t + i\phi} |0\rangle\langle 2| + e^{-i(\omega_3 - \omega_p)t + i\phi} |1\rangle\langle 3|). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Podemos agora retornar à representação de Schrodinger:

$$H' = S(\tilde{H} + H_0)S^\dagger, \quad (\text{C.22})$$

e tomado a transformação unitária  $S$ ,

$$S = \exp \left\{ i\omega_c t (|2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|) \right\}, \quad (\text{C.23})$$

podemos com o auxílio da equação (C.12) e novamente da aproximação RWA, escrever o Hamiltoniano transformado para o sistema de quatro níveis,

$$\begin{aligned} H' &= -\delta_e |0\rangle\langle 0| + \Delta |2\rangle\langle 2| + (\delta_h + \Delta) |3\rangle\langle 3| \\ &\quad + \frac{\Omega_c}{2}(|0\rangle\langle 3| + |1\rangle\langle 2|) + \frac{\Omega_p}{2}e^{-i(\omega_c - \omega_p)t + i\phi}(|0\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 3|) + c.c. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Note que mesmo aplicando essas transformações unitárias, não é possível eliminar completamente a dependência temporal associada ao Hamiltoniano. Entretanto, agora a dependência temporal explícita se reduz ao laser fraco (prova) e pode ser facilmente desprezada considerando a condição de ressonância entre as frequências  $\omega_c$  e  $\omega_p$  e adotando a fase relativa  $\phi = 0$  entre os lasers. Assim, podemos escrever o Hamiltoniano como:

$$H' = \begin{pmatrix} -\delta_e & 0 & \frac{\Omega_p}{2} & \frac{\Omega_c}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\Omega_c}{2} & \frac{\Omega_p}{2} \\ \frac{\Omega_p}{2} & \frac{\Omega_c}{2} & \Delta & 0 \\ \frac{\Omega_c}{2} & \frac{\Omega_p}{2} & 0 & \Delta + \delta_h \end{pmatrix}. \quad (\text{C.25})$$

## Apêndice D

### Pulse Chirp

O chirp [238] nada mais é do que um sinal onde a frequência aumenta ou diminui com o tempo. A manipulação da fase [239] de pulsos ultracurtos permite o controle da transferência populacional entre os níveis de um sistema. Experimentalmente, existem evidências em amostras de moléculas de corante de que a população se transfere para um estado eletrônico excitado, a depender da fase embuída a um pulso incidente na amostra. Essa fase dependente do tempo é o que chamamos chirp [240]. Um pulso chirpado resulta em uma forte dependência da fluorescência dessas moléculas com a forma do pulso e se mostra atraente para aplicação por se tratar de uma fase controlável, diferentemente das fases intrínsecas ao sistema, que são difíceis de medir. É sabido na literatura que um sistema de dois níveis é invariante a aplicação de pulsos chirpados e isso é devido ao comportamento adiábatico da transferência de população nesse tipo de sistema. Entretanto, para um sistema com um número de níveis igual ou superior a três, existe um ganho real na utilização de pulsos [241] chirpados para o acúmulo coerente de população.

Tem aumentado o interesse pela manipulação coerente dos estados de PQs. Visando seu amplo potencial de aplicação como bloco fundamental na construção de um futuro computador quântico, por exemplo. Experimentos demonstraram que através da excitação com pulsos de laser é possível observar oscilações de Rabi, tanto nos sinais de fotoluminescência, quanto nos sinais de fotocorrente e que a diminuição da amplitude das oscilações ocorre com o aumento da área do pulso. A excitação gira o vetor de Bloch de um ângulo igual a área do pulso, no entanto, isso não acontece se os estados acoplados pelo pulso estiverem ressonantes. Além disso, a área do pulso envolve o produto do momento de dipolo e a amplitude integrada do pulso. Em outras palavras, isso é o mesmo que dizer que para uma amostra não homogênea nenhum pulso ressonante será capaz de inverter todo o conjunto de variáveis do espaço de parâmetros do sistema. Existe, no entanto, uma boa perspectiva para tal inversão usando o que comumente se chama de rápida passagem adiabática. Nesta abordagem, o sistema é impulsionado por um pulso de laser cuja frequência varre as frequências naturais das transições permitidas ao sistema.

Imaginemos uma forma de onda dada por  $x(t)$ :

$$x(t) = \cos(\phi(t)) \pm i \sin(\phi(t)), \quad (\text{D.1})$$

onde  $\phi(t)$  é uma fase dependente do tempo. Podemos definir sua frequência instantânea como a taxa de variação dessa fase de forma que,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (\text{D.2})$$

O chirp então é definido como a taxa de variação [242] dessa frequência no tempo, ou seja, o chirp de um pulso é definido como a derivada segunda da sua fase em relação ao tempo e funciona como uma aceleração associada a essa fase:

$$c(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) = \frac{d}{dt} f(t). \quad (\text{D.3})$$

De uma forma geral, existem dois tipos de chirp, o chirp linear [243] no qual a frequência instantânea  $f(t)$  varia linearmente com o tempo<sup>1</sup>  $f(t) = f_0 + kt$  e o chirp exponencial, onde a frequência do sinal varia com uma relação geométrica ao longo do tempo. Em outras palavras, tomando dois tempos  $t_1$  e  $t_2$ , tais que  $t_2 - t_1 = \text{constante}$ , a razão entre as frequências  $(f(t_2)/f(t_1))$  também se manterá constante. No presente trabalho, vamos nos limitar apenas aos efeitos [244] do chirp linear em pulsos gaussianos para a obtenção do fenômeno de EIT em um sistema de quatro níveis formado por elétrons e trions. Sabemos que a taxa de variação da fase define a frequência angular, tal que,

$$\phi'(t) = 2\pi f(t) \Rightarrow \phi(t) = \int_0^t 2\pi f(t) dt. \quad (\text{D.4})$$

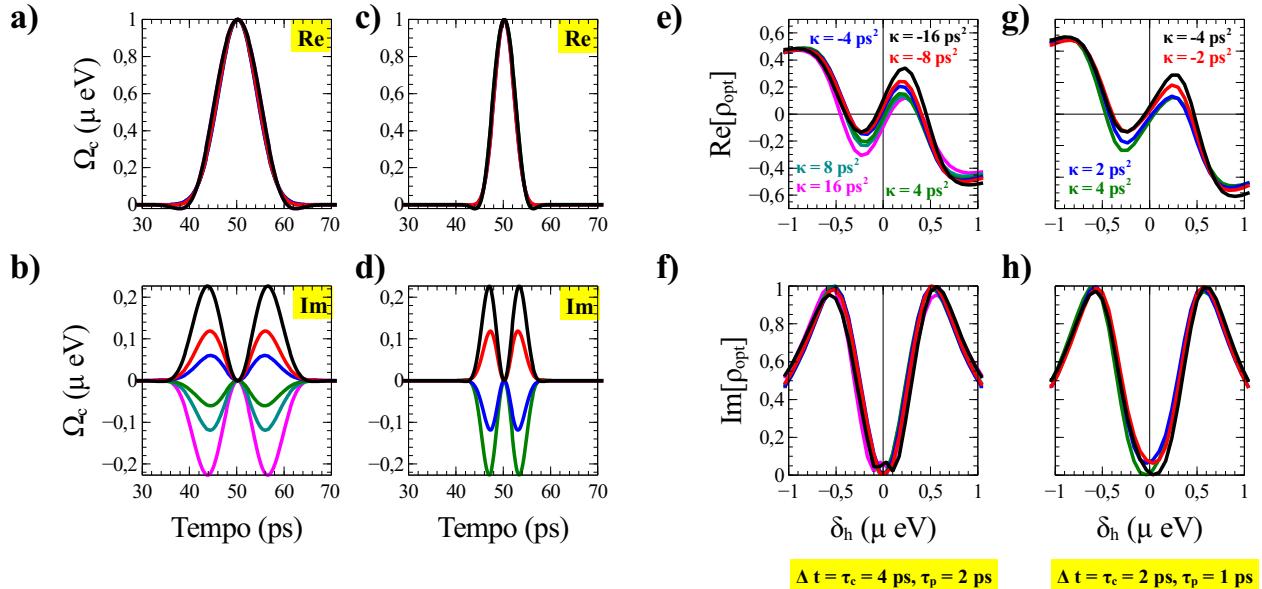
Dessa forma podemos considerar  $\phi(t + \Delta t) \approx \phi(t) + 2\pi f(t)\Delta t$ , e assim definir a fase [245] associada ao chirp linear,

$$\phi(t) = \phi_0 + 2\pi(f_0 t + \frac{kt^2}{2}), \quad (\text{D.5})$$

onde  $f_0$  é a fase em  $t = 0$ . A Figura D.1 traz nos quadros (a), (b), (c) e (d) as partes real e imaginária da envoltória do pulso de controle sob ação do chirp. Os valores do fator de chirpidez dos pulsos é dado pelas curvas de mesma cor nos quadros (e), (f), (g) e (h). Nos quadros (a) e (b) estamos na condição em que o delay entre os pulsos de prova e controle é de 4 ps, com a largura do laser de controle igual ao delay e a largura do pulso de prova

<sup>1</sup> $k$  é a chamada chirpidez definida como  $k = \frac{f_1 - f_0}{T}$

metade desse valor. Nos quadros (c) e (d) as larguras caem pela metade. Podemos observar que o fator de chirpidez não altera substancialmente a forma da parte real da envoltória dos pulsos, mas provoca grandes oscilações na parte imaginária apesar de sua intensidade ser menor em módulo.



**Figura D.1:** Na condição em que  $\Delta t = \tau_0^c, \tau_0^p = \tau_0^c/2$ . Em a) e c) as partes reais dos pulsos de controle para  $\tau_0^c = 4$  ps e  $\tau_0^c = 2$  ps na presença de diferentes fatores de chirp. Em b) e d) as partes imaginárias dos pulsos. Em e), f), g) e h) as partes real e imaginária do elemento óptico associado ao laser de prova para diferentes valores do fator de chirp.

Os fatores de chirpidez típicos em PQs estão compreendidos no intervalo que vai de  $-(\tau_0^c)^2$  a  $(\tau_0^c)^2$ . Fora desse intervalo, o fator de chirpidez pode ser desprezado, pois, a dispersão cromática é menor para pulsos largos do que para pulsos mais estreitos. Observamos nos quadros (e) e (g) que o fator de chirpidez afeta a parte real do elemento óptico do laser de prova deslocando as curvas em torno da ressonância de  $\delta_h$ , para cima no caso de chirpidez negativa e para baixo no caso de chirpidez positiva. Entretanto, não há muita diferença entre os resultados para larguras diferentes dos pulsos. Nos quadros (f) e (h), nota-se que, para uma largura de pulsos menor o fator de chirpidez separa simetricamente os espectros de absorção, deslocando o fenômeno de EIT para dessintonias no entorno de  $\delta_h = 0$ , para a direita em chirp negativo e para a esquerda em chirp positivo. Além disso, para fatores de chirpidez menor a absorção deixa de ir a zero. Em contrapartida, para larguras de pulso maiores esses efeitos são bem menos sentidos.

## Apêndice E

# Propagação de Pulses Gaussianos

### E.1 Aproximação da variação lenta da amplitude

A luz é uma onda eletromagnética formada por um campo elétrico e um campo magnético que variam rapidamente no tempo. Os campos estão relacionados entre si através das chamadas equações de Maxwell [246]. A primeira delas, conhecida como lei de Gauss, descreve a relação entre um campo elétrico estático e as cargas elétricas que o causam. O que basicamente, se resume a, contar o número de linhas de campo que passam por uma superfície fechada e que, consequentemente, produzem uma carga total encerrada por ele. O análogo magnético dessa lei, conhecida como a não existência de monopólos magnéticos, afirma que não existem cargas magnéticas isoladas, apenas os chamados dipolos magnéticos. Em última instância, isso nos diz que, qualquer linha de campo magnético que entre em um determinado volume deve em algum lugar sair desse volume, fazendo com que o fluxo magnético total através de qualquer superfície gaussiana seja zero. A terceira equação de Maxwell, conhecida como lei de indução de Faraday-Lenz, descreve como um campo magnético variável no tempo induz um campo elétrico, ou seja, o trabalho necessário para mover uma carga em torno de um circuito fechado é igual à taxa de diminuição do fluxo magnético, através dessa superfície fechada, e o pensamento oposto também é válido. Essa indução eletromagnética, provocada pela variação do campo magnético ou do campo elétrico, é a base do princípio de funcionamento dos geradores, por exemplo. Por fim, mas não menos importante, temos a chamada lei de Ámpere-Maxwell, que afirma que o campo magnético induzido em um circuito fechado é proporcional à corrente elétrica que o produz e à corrente de deslocamento, formada pela taxa de variação do fluxo elétrico através dessa superfície.

Consideremos um meio dielétrico com polarização e magnetização não nulas, tal que, o vetor de deslocamento elétrico  $\vec{D}$ , seja produzido pelo campo elétrico e pela polarização das cargas e o campo magnético induzido  $\vec{B}$ , seja produzido pelo campo magnético externo e pela magnetização do meio.

Nessas condições, as equações de Maxwell ficam dadas por,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \circ \vec{D} &= 0, \\ \vec{\nabla} \circ \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{d\vec{D}}{dt}.\end{aligned}\tag{E.1}$$

A partir das equações de Maxwell, podemos deduzir as chamadas equações de onda para os campos elétrico e magnético. A equação de onda é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, que descreve a propagação do vetor de onda no espaço e no tempo. Entretanto, como estamos lidando com um laser vamos nos limitar à equação de onda escrita para o campo elétrico. Para isso, vamos tomar o rotacional da lei de indução de Faraday-Lenz e utilizando a relação matemática  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \circ \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$ , onde  $\vec{F}$  é um campo vetorial arbitrário, aqui escolhido como sendo o campo elétrico  $\vec{E}$ . Assim, podemos escrever o seguinte:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \vec{P}}{dt^2},\tag{E.2}$$

onde  $c = (1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0})$  e  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , representam respectivamente a velocidade da luz e o vetor de deslocamento elétrico. Note que a velocidade da luz fica definida como uma constante, que depende apenas da permisividade elétrica e da permeabilidade magnética do meio. O vetor de deslocamento elétrico, pode ser entendido como a resposta do meio à presença do campo elétrico e da polarização dos portadores de carga. Essa é a chamada equação de onda para o campo elétrico e a polarização.

Consideremos agora, que o campo elétrico e a polarização possam ser escritos como campos que oscilam no tempo com a mesma frequência,  $\omega$ , do laser, tal que,  $\vec{E} = \vec{\epsilon} e^{-i\omega t}$ ,  $\vec{P} = \vec{\varrho} e^{-i\omega t}$ . Dessa forma, fazendo as derivadas no tempo e na posição podemos reescrever a equação (E.2) da seguinte forma,

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\epsilon} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon} = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \vec{\varrho},\tag{E.3}$$

onde  $\vec{\epsilon}$  e  $\vec{\varrho}$  são as amplitudes do campo elétrico e do vetor de polarização. Por simplicidade, vamos assumir que nosso meio dielétrico seja linear, homogêneo e isotrópico e que exibe uma resposta instantânea às variações do campo elétrico. Assim,  $\vec{P}$  depende linearmente do campo elétrico, de forma que,  $\vec{\varrho} = N\alpha(\omega)\vec{\epsilon}$ , onde  $N$  representa o número de portadores de carga do sistema e  $\alpha(\omega)$  é o produto da permisividade pela susceptibilidade elétrica do meio.

Dessa forma temos que,

$$\nabla^2 \vec{\varepsilon} + \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ 1 + \frac{N\alpha(\omega)}{\epsilon_0} \right\} \vec{\varepsilon} = 0. \quad (\text{E.4})$$

Podemos definir  $n(\omega) = \sqrt{1 + (N\alpha(\omega)/\epsilon_0)}$ , como o chamado índice de refração, relacionado ao número de onda  $\kappa(\omega)$  pela relação,  $\kappa(\omega) = (n(\omega)\omega/c)$  e chegamos portanto, a uma forma final simplificada para a equação de onda,

$$\nabla^2 \vec{\varepsilon} + \kappa^2(\omega) \vec{\varepsilon} = 0. \quad (\text{E.5})$$

Estamos interessados em analisar a propagação da onda eletromagnética em sistemas de PQs. Esses sistemas são caracterizados pela capacidade de confinamento dos portadores de carga em uma única direção que no nosso caso vai coincidir com a direção de crescimento do material (z). Dessa forma, o rotacional da equação (E.5) se reduz a uma derivada de segunda ordem na variável z de forma que podemos a partir de agora esquecer a notação vetorial. Entretanto, como definimos o campo elétrico e a polarização como oscilações é razoável imaginar que a amplitude deles varie lentamente numa distância correspondente ao comprimento de onda da onda em questão. Essa variação com a distância está contida no termo de fase que acompanha a amplitude dessas oscilações. Nesse contexto, a derivada segunda com relação a variável z pode ser aproximada por sua derivada primeira. Essa é a chamada aproximação da variação lenta da amplitude. A equação (E.5) tem suas soluções nas variáveis z e t escritas como uma transformada de Fourier das soluções em  $\omega$  como,

$$\varepsilon(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw' \varepsilon'(\omega') e^{-i(\omega' t - k(\omega') z)}. \quad (\text{E.6})$$

Imaginemos agora que a frequência  $\omega'$  sofra uma pequena variação dada por  $\omega' = \omega + \Delta$  tal que  $d\omega' = d\Delta$  de forma que possamos definir:

$$\varepsilon''(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \varepsilon'(\omega + \Delta) e^{-i\Delta t} e^{i(k(\omega + \Delta) - k(\omega))z}, \quad (\text{E.7})$$

tal que a solução possa ser escrita como  $\varepsilon(z, t) = e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} \varepsilon''(z, t)$ . A diferença entre os números de onda em  $\omega + \Delta$  e  $\omega$  pode ser expandida em torno da variação  $\Delta$  da seguinte forma:

$$k(\omega + \Delta) - k(\omega) \approx \Delta \frac{dk}{d\omega} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{d^2 k}{d\omega^2} + \frac{\Delta^3}{6} \frac{d^3 k}{d\omega^3} + \dots \quad (\text{E.8})$$

Substituindo a equação (E.8) na equação (E.7) e fazendo a derivada dela em relação a z obtemos,

$$\frac{d\varepsilon''}{dz} = i \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \varepsilon'(\omega + \Delta) e^{-i\Delta t} \left\{ \Delta \frac{dk}{d\omega} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{d^2 k}{d\omega^2} + \frac{\Delta^3}{6} \frac{d^3 k}{d\omega^3} + \dots \right\} e^{i(k(\omega + \Delta) - k(\omega))z}. \quad (\text{E.9})$$

É fácil perceber que as derivadas sucessivas de  $\varepsilon''(z, t)$  com relação ao tempo exibem potências de  $\Delta$ ,

$$\frac{d\varepsilon''}{dt} = -i\Delta\varepsilon'', \quad \frac{d^2\varepsilon''}{dt^2} = -\Delta^2\varepsilon'', \quad \frac{d^3\varepsilon''}{dt^3} = i\Delta^3\varepsilon'' \quad \dots \quad (\text{E.10})$$

Dessa forma comparando as potências em  $\Delta$  na equação (E.9) podemos escrever uma equação diferencial para  $\varepsilon''(z, t)$  definindo  $\frac{d^m k}{d\omega^m} = \beta_m$  que no caso especial em que  $m = 1$  se reduz a  $\frac{d\omega}{dk} = v_g$ , que é a chamada velocidade de grupo da onda. Os termos  $\beta_m$  para  $m > 1$  representam as correções em ordens superiores da dispersão sofrida pela onda ao se propagar pelo material e normalmente são assumidos nulos. A equação de onda homogênea na aproximação da variação lenta da amplitude é dada por:

$$\frac{d\varepsilon''}{dz} - \frac{1}{v_g} \frac{d\varepsilon''}{dt} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{d^2\varepsilon''}{dt^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{d^3\varepsilon''}{dt^3} + \dots = 0. \quad (\text{E.11})$$

Essa ideia pode ser extendida para o caso em que a polarização do meio não dependa linearmente do campo elétrico como por exemplo acontece em sistema de PQs que exibem fenômenos ópticos não lineares como o fenômeno de EIT. O que se faz é apenas considerar que a solução da equação não homogênea seja uma combinação linear das soluções da equação homogênea e das soluções particulares. Essas equações tem como soluções as chamadas ondas solitárias de que vamos falar detalhadamente na próxima seção.

## E.2 Ondas solitárias: Um pouco de história

Em 1834 John Scott Russell observando um barco sendo puxado por dois cavalos no canal de Edinburgh, verificou que quando o mesmo era subitamente freado, surgia uma grande onda solitária com uma forma bem definida. Ele observou que a onda continuava seu curso ao longo do canal sem mudar sua forma e aparentemente sem diminuir sua velocidade por um longo trecho. Russell realizou então várias experiências gerando ondas ao mergulhar pesos na extremidade de canais com água e foi capaz de verificar que a velocidade da onda era dada apenas pela sua amplitude e pela altura do canal. Em 1844, Russel observou que em colisões essas ondas solitárias [247] mantêm suas características. Em suas experiências ele criou duas ondas solitárias [248] com velocidades diferentes e observou que a onda mais veloz alcançava, interagia e ultrapassava a onda mais lenta, de modo que após o processo ambas permaneciam intactas e não distorcidas, exatamente como se satisfizessem o princípio de superposição. Posteriormente, Korteweg e De Vries [249], considerando uma onda que se propaga em um canal com seção transversal retangular e cujo meio era um fluido incompressível e sem viscosidade, e supondo que o comprimento da onda era muito maior que a profundidade do canal, obtiveram teoricamente o resultado obtido por Russell para a velocidade da onda [250] solitária.

Eles mostraram, que neste caso, a forma da envoltória da onda era dada por uma função do tipo secante hiperbólica (com um perfil próximo ao gaussiano) [251]. Entretanto, eles sabiam que efeitos não lineares deveriam estar envolvidos já que durante a interação, as ondas sofriam um deslocamento de fase, ou seja, depois da interação elas não estavam na posição em que deveriam estar se ambas se movessem com velocidades constantes. Somente em 1955, com o trabalho de Fermi, Pasta e Ulam [252] em uma rede anarmônica de fôtons, essa questão começou a ser melhor compreendida. Acreditava-se que a existência de não linearidades faria com que a energia se repartisse entre os modos de vibração da rede. Entretanto, a contrassenso das expectativas, verificaram que, iniciando-se o problema com a energia armazenada em um único modo de vibração da rede, o fenômeno de equipartição de energia não era observado.

A partir deste resultado, Zabusky e Kruskal [253] em 1965, estudando numericamente um problema de condição inicial verificaram que uma onda inicialmente com envoltória na forma de uma função cosseno, rapidamente adquiria o formato de uma onda prestes a quebrar devido ao termo não linear da equação. Quando a onda atingia tal configuração, o termo dispersivo tornava-se importante, ocorrendo então um balanço entre a não linearidade e a dispersão, de modo que o fenômeno de quebra não ocorria. Após algum tempo, a onda era formada de vários picos de diferentes amplitudes com diferentes velocidades de propagação e a forma inicial da envoltória da onda era totalmente perdida. O fato surpreendente é que após um longo período de tempo a forma inicial da onda era recuperada [254]. Esta persistência da onda em restabelecer a sua forma e ainda sua característica semelhante a de uma partícula que parece guardar sua identidade em uma colisão, fizeram com que Zabusky e Kruskal sugerissem o nome de solitons para tais ondas não lineares. Eles também argumentaram que as ondas solitárias de Russell [255] seriam solitons e que, tomando-se o limite do contínuo em seus cálculos, os solitons após colisões rapidamente restabeleceriam suas formas iniciais, o que explicaria o fenômeno observado por Russell.

### E.3 Pulsos gaussianos em Pontos Quânticos

Por simplicidade dos cálculos vamos considerar o sistema de três níveis discutido no capítulo 4. Imaginemos que nesse sistema possamos modelar o tunelamento como um campo elétromagnético, dessa forma passamos a ter dois lasers atuando sobre os estados de excitons diretos e indiretos, um laser fraco denotado laser de prova acoplando os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  e um laser forte denotado laser de controle acoplando os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ . Esse sistema é análogo ao sistema apresentado na literatura por Imamoglu e Marangos [82].

Dessa forma, as equações da dinâmica da matriz de densidade ficam dadas por:

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_{00} &= -i\Omega_p(\rho_{10} - \rho_{01}) + \Gamma_0^1\rho_{11} + \Gamma_0^2\rho_{22}, \\
 \dot{\rho}_{01} &= -i(\Omega_p(\rho_{11} - \rho_{00}) - \delta_1\rho_{01} - \Omega_c\rho_{02}) - \frac{\Gamma_0^1}{2}\rho_{01}, \\
 \dot{\rho}_{02} &= -i(\Omega_p\rho_{12} - \Omega_c\rho_{01} - \frac{(\delta_1 + \delta_2)}{2}\rho_{02}) - \frac{\Gamma_0^2}{2}\rho_{02}, \\
 \dot{\rho}_{11} &= i(\Omega_p(\rho_{10} - \rho_{01}) + \Omega_c(\rho_{12} - \rho_{21})) - \Gamma_0^1\rho_{11}, \\
 \dot{\rho}_{12} &= -i(\frac{(\delta_1 - \delta_2)}{2}\rho_{12} + \Omega_c(\rho_{22} - \rho_{11}) - \Omega_p\rho_{02}) - \frac{(\Gamma_0^1 + \Gamma_0^2)}{2}\rho_{12}, \\
 \dot{\rho}_{22} &= i\Omega_c(\rho_{21} - \rho_{12}) - \Gamma_0^2\rho_{22}.
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

De forma complementar como consequência da equação da equação de Schrodinger não linear podemos escrever uma equação de onda não linear para a propagação do laser de prova associada à evolução dos estados da matriz de densidade  $\rho(t) \rightarrow \rho(z, t)$ , a chamada equação de Maxwell-Bloch [256]:

$$\frac{\partial\Omega_p}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Omega_p}{\partial t} = iNg\rho_p(z, t), \tag{E.13}$$

que está conectada com as equações da dinâmica de  $\rho(z, t)$  pelos elementos ópticos do laser de prova. Note que essa equação de onda é uma equação de onda não linear escrita na aproximação da variação lenta da amplitude como apresentado na equação (E.11), entretanto, todas as correções de ordem superior das derivadas temporais estão sendo desprezadas. As soluções da equação (E.13) são obtidas de forma autoconsistente através das soluções das equações da dinâmica dos estados do sistema.

Por simplicidade vamos redefinir os elementos de  $\rho(z, t)$  tais que:  $\rho_p = \rho_{01} + \rho_{10}$  é o elemento óptico devido ao laser de prova,  $\rho_c = \rho_{12} + \rho_{21}$  é o elemento óptico devido ao laser de controle e  $\rho_e = \rho_{02} + \rho_{20}$  é o elemento da transição escura da matriz de densidade. Dessa forma, podemos definir um laço autoconsistente para obter a propagação de  $\Omega_p$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\rho_p}{\partial t} &= -i((\rho_{11} - \rho_{00})\Omega_p - \rho_e\Omega_c - \delta_1\rho_p) - (\Gamma_0^1/2)\rho_p, \\
 \frac{\partial\rho_e}{\partial t} &= -i(\rho_c\Omega_p - \rho_p\Omega_c - ((\delta_1 + \delta_2)/2)\rho_e) - (\Gamma_0^2/2)\rho_e, \\
 \frac{\partial\rho_c}{\partial t} &= -i((\rho_{22} - \rho_{11})\Omega_c + \rho_e\Omega_c((\delta_1 - \delta_2)/2)\rho_c) - ((\Gamma_0^1 + \Gamma_0^2)/2)\rho_c, \\
 \frac{\partial\Omega_p}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Omega_p}{\partial t} &= iNg\rho_p.
 \end{aligned} \tag{E.14}$$

O conjunto de equações (E.14) pode ser resolvido numericamente através de um método de discretização das variáveis  $z$  e  $t$  como por exemplo o método das diferenças finitas para aproximar as derivadas em  $z$  e em  $t$ . Outro modo eficiente de fazer isso é por exemplo utilizando uma mudança de variáveis conveniente para reduzir a quantidade de variáveis e então utilizar as diferenças finitas. No presente trabalho, utilizamos a mudança de variáveis  $\eta = z$  e  $\tau = (t - z/c)$  de forma que podemos reescrever a equação de Maxwell-Bloch [257] como,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} &= \frac{\partial \Omega_p}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \Omega_p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial \Omega_p}{\partial z} &= \frac{\partial \Omega_p}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial \Omega_p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Omega_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \Omega_p}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \Omega_p}{\partial \eta} &= \frac{iNg}{c} \rho_p(\eta, \tau).\end{aligned}\quad (\text{E.15})$$

Agora precisamos discretizar apenas a derivada em  $\eta$  para obter a solução da equação de propagação para o pulso de prova,

$$\Omega_p(\eta + \Delta\eta, \tau) = \Omega_p(\eta, \tau) + \frac{iNg}{c} \Delta\eta \rho_p(\eta, \tau). \quad (\text{E.16})$$

O fenômeno de EIT observado nesse sistema de três níveis proporciona que o sistema experimente durante a janela de transparência uma queda brusca na velocidade de grupo da onda que como registrado na literatura pode chegar a cerca de  $10^{-5}c$ . Esse fenômeno de luz lenta vem sendo estudado para possíveis aplicações do fenômeno de EIT na produção de memórias quânticas. Exatamente na condição de ressonância completa, onde ocorre a janela de transparência a propagação se torna solitônica. Assim, através da modulação do laser de controle podemos controlar o que acontece com a onda associada ao laser de prova fazendo, por exemplo, o pulso de prova desaparecer por um intervalo de tempo e reaparecer com sua forma inalterada, ou seja, sem nenhuma perda da informação contida nele. Em especial para a condição de ressonância completa do sistema  $\delta_1 = \delta_2 = \omega_{21} = 0$ , podemos obter uma solução analítica para a equação de Maxwell-Bloch.

Vamos considerar que além de estarmos na condição que gera a janela de transparência da EIT, estejamos em um regime onde a intensidade do laser de controle é muito maior que a do laser de prova  $\Omega_c \gg \Omega_p$  o que consequentemente faz com que a taxa de decoerência associada à transição escura seja desprezível  $\Gamma_0^2 \approx 0$ . Nessas condições, a partir do conjunto de equações (E.14) podemos escrever o seguinte,

$$\rho_p = -\frac{i}{\Omega_c} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -i \left( \frac{1}{\Omega_c} \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial t^2} - \frac{1}{\Omega_c^2} \frac{\partial}{\partial t} \rho_e \right). \quad (\text{E.17})$$

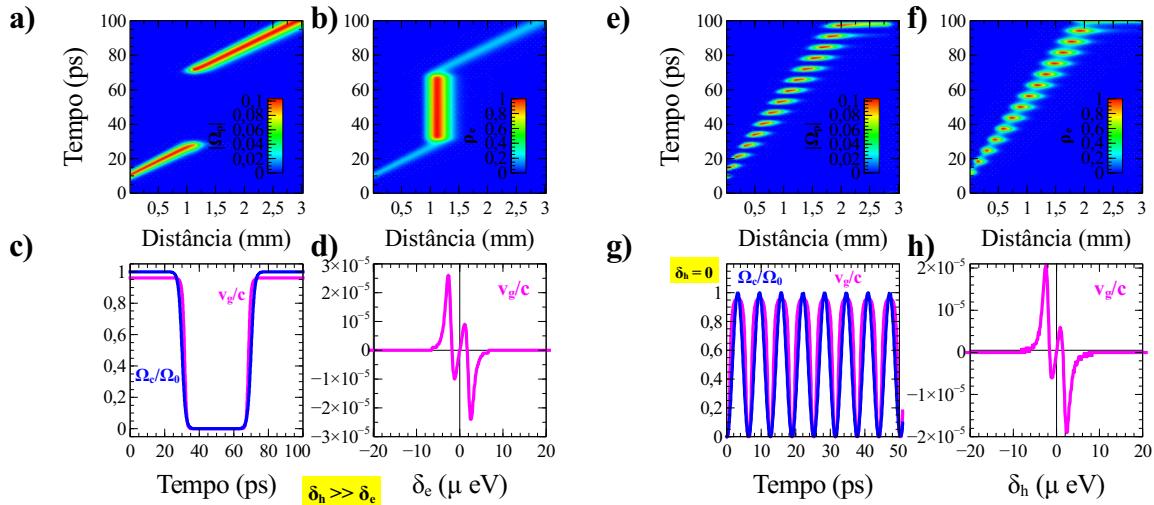
Como estamos em um regime de acoplamento onde o laser de controle é muito mais intenso que a prova, é razoável imaginar que os elementos escuros praticamente não variam mais no tempo, de forma que  $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \approx \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial t^2} \approx 0$  e assim,

$$\rho_e = -\frac{(\rho_{00} - \rho_{11})\Omega_p}{\Omega_c} = -\frac{n^0\Omega_p}{\Omega_c}. \quad (\text{E.18})$$

Substituindo o resultado da equação (E.18) na equação de Maxwell-Bloch temos o seguinte:

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + v_G \frac{\partial \Omega_p}{\partial z} = 0. \quad (\text{E.19})$$

A solução da equação (E.19) é uma onda solitária [258] que se propaga sem deformação com uma velocidade de grupo dada por  $v_G = \frac{c}{(1+(N/\Omega_c^2))}$ . A onda na condição de EIT tem sua velocidade de grupo reduzida em relação à velocidade da luz e essa redução é causada exclusivamente pelo laser de controle. No quadro (a) da Figura E.1, trazemos o gráfico da solução da equação de Maxwell-Bloch com o laser de controle modulado como uma tangente hiperbólica na condição de ressonância do sistema de quatro níveis. Podemos observar a propagação solitônica do campo elétrico associado ao laser de prova.

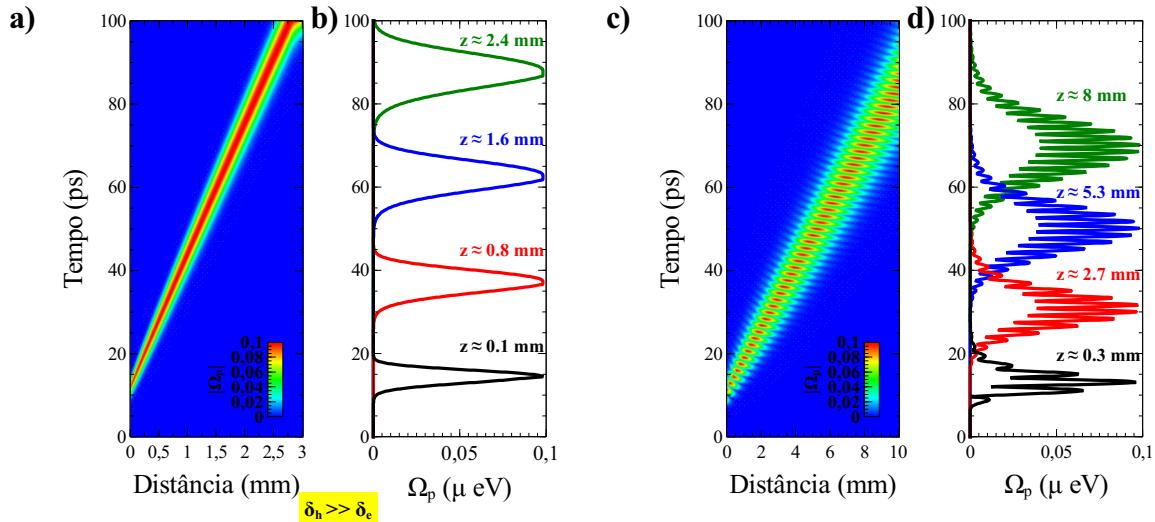


**Figura E.1:** Em a) campo elétrico de prova se propagando no espaço e no tempo. Em b) a componente de matéria  $\rho_e$  associada à transição escura do sistema. Em c) e d) os gráficos da velocidade de grupo como função do tempo e da dessintonia  $\delta_e$ , laser de controle modulado com um perfil tangente hiperbólico. Em e), f), g) e h) a mesma situação, mas agora para um laser de controle modulado como um trem de pulsos.

Durante o período de tempo em que o laser de controle permanece desligado o pulso de prova fica armazenado na transição escura do sistema como pode ser visto no quadro (b) na forma da chamada componente de matéria do sistema. Note que aqui adotamos por efeito de

simplicidade,  $\delta_h \gg \delta_e$ . No quadro (c) podemos observar a comparação entre a velocidade [259] de grupo e o laser de controle em função do tempo. Note que essa velocidade de grupo reflete o resultado analítico apresentado na equação (E.19). No quadro (d) trazemos o gráfico para em função da dessintonia  $\delta_e$  da razão entre a velocidade de grupo e a velocidade da luz exatamente na condição que gera o fenômeno de EIT e podemos observar a redução brusca em seu valor, o que proporciona condições para a observação do fenômeno de memória [260] visto no quadro (a).

Os quadros (e), (f), (g) e (h) da Figura E.1 trazem as mesmas situações só que agora, para o laser de controle modulado como um trem de pulsos. No quadro (e) observa-se que a cada pulso de controle do trem que liga e desliga, o pulso de prova é absorvido pela transição escura de  $\rho$  que pode ser observada no graficado no quadro (f). Quanto à velocidade de grupo como função da dessintonia, observamos que de fato o regime induzido pelo trem de pulsos pela produção de CPT no sistema é o regime de EIT, visto que, ocorre uma redução brusca da ordem de  $10^5$  na razão  $v_G/c$ . Entretanto, essa redução é um pouco menor do que no caso anterior por exibir um acúmulo coerente de população um pouco menos eficiente.



**Figura E.2:** Comparativo da propagação na dessintonia ressonante e fora da ressonância. Em a) propagação solitônica da luz e em b) fora da ressonância propagação não solitônica.

A Figura E.2 mostra a comparação entre as soluções da equação de onda de Maxwell-Bloch para a propagação do pulso de prova dentro e fora da condição de ressonância. Nos quadros (a) e (b), vemos a propagação solitônica do pulso, entretanto, para o sistema de quatro níveis em questão ocorre um alargamento do pulso ao se propagar mesmo solitonicamente pelo material. Nos quadros (c) e (d), vemos que fora da condição de ressonância a velocidade de grupo da onda torna-se equiparável à velocidade da luz e o pacote de onda se desloca praticamente junto sem nenhuma onda solitária se separando dele. Do mesmo modo, vemos que o pacote de onda sofre um alargamento à medida que se propaga no espaço e no tempo.

# Referências Bibliográficas

- [1] C. F. Wang, A. Badolato, I. Wilson-Rae, P. M. Petroff, E. Hu, J. Urayama, and A. Imamoglu. Optical properties of single inas quantum dots in close proximity to surfaces. *Applied Physics Letters*, 85(16):3423–3425, 2004. doi: 10.1063/1.1806251. URL <https://doi.org/10.1063/1.1806251>. iii, iv
- [2] P. Michler, A. Kiraz, C. Becher, W. V. Schoenfeld, P. M. Petroff, Lidong Zhang, E. Hu, and A. Imamoglu. A quantum dot single-photon turnstile device. *Science*, 290(5500):2282–2285, 2000. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.290.5500.2282. URL <http://science.sciencemag.org/content/290/5500/2282>. iii, iv
- [3] Antonio Badolato, Kevin Hennessy, Mete Atatüre, Jan Dreiser, Evelyn Hu, Pierre M. Petroff, and Atac Imamoglu. Deterministic coupling of single quantum dots to single nanocavity modes. *Science*, 308(5725):1158–1161, 2005. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.1109815. URL <http://science.sciencemag.org/content/308/5725/1158>. iii, iv
- [4] Sergei B. Leble and Marek Czachor. Darboux-integrable nonlinear liouville–von neu-mann equation. *Phys. Rev. E*, 58:7091–7100, Dec 1998. doi: 10.1103/PhysRevE.58.7091. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.58.7091>. iii, iv
- [5] Carlos Alexandre Brasil, Felipe Fernandes Fanchini, and Reginaldo de Jesus Napolitano. A simple derivation of the Lindblad equation. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 35:01 – 09, 03 2013. ISSN 1806-1117. URL [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172013000100003&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172013000100003&nrm=iso). iii, iv
- [6] A. Kiraz, M. Atatüre, and A. Imamoglu. Quantum-dot single-photon sources: Prospects for applications in linear optics quantum-information processing. *Phys. Rev. A*, 69:032305, Mar 2004. doi: 10.1103/PhysRevA.69.032305. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.032305>. iii, iv
- [7] Magnus T. Borgström, Valery Zwiller, Elisabeth Müller, and Atac Imamoglu. Optically bright quantum dots in single nanowires. *Nano Letters*, 5(7):1439–1443, 2005. doi: 10.1021/nl050802y. URL <https://doi.org/10.1021/nl050802y>. PMID: 16178254. iii, iv
- [8] T. H. Chyba, L. J. Wang, L. Mandel, and R. Simon. Measurement of the pancharatnam phase for a light beam. *Opt. Lett.*, 13(7):562–564, Jul 1988. doi: 10.1364/OL.13.000562. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-13-7-562>. iii, iv
- [9] U. Ernst, K. Pawelzik, and T. Geisel. Synchronization induced by temporal delays in pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 74:1570–1573, Feb 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.74.1570. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.1570>. iii, iv

- [10] P. Maine, D. Strickland, P. Bado, M. Pessot, and G. Mourou. Generation of ultrahigh peak power pulses by chirped pulse amplification. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 24(2):398–403, Feb 1988. ISSN 0018-9197. doi: 10.1109/3.137. [iii](#), [iv](#)
- [11] Craig W. Siders, Jennifer L. W. Siders, Antoinette J. Taylor, Sang-Gyu Park, and Andrew M. Weiner. Efficient high-energy pulse-train generation using a 2n-pulse michelson interferometer. *Appl. Opt.*, 37(22):5302–5305, Aug 1998. doi: 10.1364/AO.37.005302. URL <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-37-22-5302>. [iii](#), [iv](#)
- [12] M.A. Fuentes, Horacio S. Wio, and Raúl Toral. Effective markovian approximation for non-gaussian noises: a path integral approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 303(1):91 – 104, 2002. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00435-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00435-6). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437101004356>. [iii](#), [iv](#)
- [13] S.M. Rezende. *Materiais e Dispositivos Eletrônicos*. Editora Livraria da Física, 2004. ISBN 9788588325272. URL <https://books.google.com.br/books?id=YNo7KGEfrlYC>. [1](#)
- [14] W. Tsang. Heterostructure semiconductor lasers prepared by molecular beam epitaxy. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 20(10):1119–1132, October 1984. ISSN 0018-9197. doi: 10.1109/JQE.1984.1072279. [1](#)
- [15] D. Leonard, M. Krishnamurthy, C. M. Reaves, S. P. Denbaars, and P. M. Petroff. Direct formation of quantum-sized dots from uniform coherent islands of ingaas on gaas surfaces. *Applied Physics Letters*, 63(23):3203–3205, 1993. doi: 10.1063/1.110199. URL <https://doi.org/10.1063/1.110199>. [1](#)
- [16] Gert Schedelbeck, Werner Wegscheider, Max Bichler, and Gerhard Abstreiter. Coupled quantum dots fabricated by cleaved edge overgrowth: From artificial atoms to molecules. *Science*, 278(5344):1792–1795, 1997. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.278.5344.1792. URL <http://science.sciencemag.org/content/278/5344/1792>. [1](#)
- [17] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin. *Solid State Physics*. Cengage Learning, 2011. ISBN 9788131500521. URL [https://books.google.com.br/books?id=x\\_s\\_YAAACAAJ](https://books.google.com.br/books?id=x_s_YAAACAAJ). [1](#)
- [18] Iulia Buluta, Sahel Ashhab, and Franco Nori. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Reports on Progress in Physics*, 74(10):104401, 2011. URL <http://stacks.iop.org/0034-4885/74/i=10/a=104401>. [2](#)
- [19] Philippe Guyot-Sionnest. Colloidal quantum dots. *Comptes Rendus Physique*, 9(8): 777 – 787, 2008. ISSN 1631-0705. doi: <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2008.10.006>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070508001345>. Recent advances in quantum dot physics / Nouveaux développements dans la physique des boîtes quantiques. [2](#)
- [20] Fanny Delebecque-Fendt and Florian Méhats. An effective mass theorem for the bidimensional electron gas in a strong magnetic field. *Communications in Mathematical Physics*, 292(3):829, Jul 2009. ISSN 1432-0916. doi: 10.1007/s00220-009-0868-3. URL <https://doi.org/10.1007/s00220-009-0868-3>. [2](#)

- [21] G. Springholz, M. Pinczolits, V. Holy, S. Zerlauth, I. Vavra, and G. Bauer. Vertical and lateral ordering in self-organized quantum dot superlattices. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 9(1):149 – 163, 2001. ISSN 1386-9477. doi: [https://doi.org/10.1016/S1386-9477\(00\)00189-2](https://doi.org/10.1016/S1386-9477(00)00189-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1386947700001892>. Proceedings of the Eleventh International Winterschool on New Developments in Solid State Physics,. 2
- [22] D. M. Tong, E. Sjöqvist, L. C. Kwek, and C. H. Oh. Kinematic approach to the mixed state geometric phase in nonunitary evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 93:080405, Aug 2004. doi: 10.1103/PhysRevLett.93.080405. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.080405>. 3
- [23] K. Singh, D. M. Tong, K. Basu, J. L. Chen, and J. F. Du. Geometric phases for nondegenerate and degenerate mixed states. *Phys. Rev. A*, 67:032106, Mar 2003. doi: 10.1103/PhysRevA.67.032106. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.032106>. 3
- [24] W. R. Frensley and H. Kroemer. Theory of the energy-band lineup at an abrupt semiconductor heterojunction. *Phys. Rev. B*, 16:2642–2652, Sep 1977. doi: 10.1103/PhysRevB.16.2642. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.16.2642>. 4
- [25] J. Bardeen and W. H. Brattain. The transistor, a semi-conductor triode. *Phys. Rev.*, 74:230–231, Jul 1948. doi: 10.1103/PhysRev.74.230. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.230>. 4
- [26] W. Shockley. The theory of p-n junctions in semiconductors and p-n junction transistors. *Bell System Technical Journal*, 28(3):435–489. doi: 10.1002/j.1538-7305.1949.tb03645.x. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.1538-7305.1949.tb03645.x>. 4
- [27] C. K. Chiang, C. R. Fincher, Y. W. Park, A. J. Heeger, H. Shirakawa, E. J. Louis, S. C. Gau, and Alan G. MacDiarmid. Electrical conductivity in doped polyacetylene. *Phys. Rev. Lett.*, 39:1098–1101, Oct 1977. doi: 10.1103/PhysRevLett.39.1098. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.39.1098>. 5
- [28] C. Sah, R. N. Noyce, and W. Shockley. Carrier generation and recombination in p-n junctions and p-n junction characteristics. *Proceedings of the IRE*, 45(9):1228–1243, Sept 1957. ISSN 0096-8390. doi: 10.1109/JRPROC.1957.278528. 5
- [29] Herbert Kroemer. Heterostructure bipolar transistors: What should we build? *Journal of Vacuum Science & Technology B: Microelectronics Processing and Phenomena*, 1(2):126–130, 1983. doi: 10.1116/1.582513. URL <https://avs.scitation.org/doi/abs/10.1116/1.582513>. 5
- [30] H. Kroemer. Theory of a wide-gap emitter for transistors. *Proceedings of the IRE*, 45(11):1535–1537, Nov 1957. ISSN 0096-8390. doi: 10.1109/JRPROC.1957.278348. 6
- [31] S. Chuia and B. Thomas. Spatial, spectral, and temporal resolved measurements of semiconductor injection lasers - part i. homostructure lasers: Mode formation. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 13(8):652–658, August 1977. ISSN 0018-9197. doi: 10.1109/JQE.1977.1069398. 6

- [32] T. Y. Fan and R. L. Byer. Diode laser-pumped solid-state lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 24(6):895–912, June 1988. ISSN 0018-9197. doi: 10.1109/3.210. 6
- [33] Karl H. E. Kroemer. An isoinertial technique to assess individual lifting capability. *Human Factors*, 25(5):493–506, 1983. doi: 10.1177/001872088302500504. URL <https://doi.org/10.1177/001872088302500504>. PMID: 6667939. 6
- [34] A.Y. Cho and J.R. Arthur. Molecular beam epitaxy. *Progress in Solid State Chemistry*, 10:157 – 191, 1975. ISSN 0079-6786. doi: [https://doi.org/10.1016/0079-6786\(75\)90005-9](https://doi.org/10.1016/0079-6786(75)90005-9). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0079678675900059>. 7
- [35] M. A. Reed, J. N. Randall, R. J. Aggarwal, R. J. Matyi, T. M. Moore, and A. E. Wetsel. Observation of discrete electronic states in a zero-dimensional semiconductor nanostructure. *Phys. Rev. Lett.*, 60:535–537, Feb 1988. doi: 10.1103/PhysRevLett.60.535. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.535>. 8
- [36] Louis de Broglie. Xxxv. a tentative theory of light quanta. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 47(278):446–458, 1924. doi: 10.1080/14786442408634378. URL <https://doi.org/10.1080/14786442408634378>. 8
- [37] G. Bastard, E. E. Mendez, L. L. Chang, and L. Esaki. Exciton binding energy in quantum wells. *Phys. Rev. B*, 26:1974–1979, Aug 1982. doi: 10.1103/PhysRevB.26.1974. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.26.1974>. 8
- [38] C. Schneider, M. Strauß, T. Sünder, A. Huggenberger, D. Wiener, S. Reitzenstein, M. Kamp, S. Höfling, and A. Forchel. Lithographic alignment to site-controlled quantum dots for device integration. *Applied Physics Letters*, 92(18):183101, 2008. doi: 10.1063/1.2920189. URL <https://doi.org/10.1063/1.2920189>. 9
- [39] B. Daudin, F. Widmann, G. Feuillet, Y. Samson, M. Arlery, and J. L. Rouvière. Stranski-krastanov growth mode during the molecular beam epitaxy of highly strained gan. *Phys. Rev. B*, 56:R7069–R7072, Sep 1997. doi: 10.1103/PhysRevB.56.R7069. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.56.R7069>. 9
- [40] M. M. R. Evans, J. C. Glueckstein, and J. Nogami. Epitaxial growth of manganese on silicon: Volmer-weber growth on the si(111) surface. *Phys. Rev. B*, 53:4000–4004, Feb 1996. doi: 10.1103/PhysRevB.53.4000. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.53.4000>. 9
- [41] Kikuo Cho. Nonlocal theory of radiation-matter interaction: Boundary-condition-less treatment of maxwell equations. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 106:225–233, 1991. doi: 10.1143/PTP.106.225. URL <http://dx.doi.org/10.1143/PTP.106.225>. 10
- [42] Lord Rayleigh. On the instability of jets. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-10(1):4–13. doi: 10.1112/plms/s1-10.1.4. URL <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s1-10.1.4>. 10
- [43] I. Adawi. Theory of the surface photoelectric effect for one and two photons. *Phys. Rev.*, 134:A788–A798, May 1964. doi: 10.1103/PhysRev.134.A788. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.134.A788>. 11

- [44] F.R. Arutyunian and V.A. Tumanian. The compton effect on relativistic electrons and the possibility of obtaining high energy beams. *Phys. Letters*, 4, 4 1963. doi: 10.1016/0031-9163(63)90351-2. 11
- [45] S.C. Zilio. *Óptica moderna: fundamentos e aplicações*. Centro de Divulgação Científica e Cultural - CDCC, 2009. ISBN 9788588533417. URL <https://books.google.com.br/books?id=pWrvSAAACAAJ>. 11
- [46] Yu Jia. Variational study of weakly coupled triply heavy baryons. *Journal of High Energy Physics*, 2006(10):073, 2006. URL <http://stacks.iop.org/1126-6708/2006/i=10/a=073>. 11
- [47] Akheelesh K. Abeeluck and Clifford Headley. Continuous-wave pumping in the anomalous- and normal-dispersion regimes of nonlinear fibers for supercontinuum generation. *Opt. Lett.*, 30(1):61–63, Jan 2005. doi: 10.1364/OL.30.000061. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-30-1-61>. 13
- [48] Vyacheslav A. Buts, Andrey N. Lebedev, and V.I. Kurliko. *Spontaneous and Stimulated Emission*, pages 97–122. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006. ISBN 978-3-540-30690-0. doi: 10.1007/3-540-30690-0\_6. URL [https://doi.org/10.1007/3-540-30690-0\\_6](https://doi.org/10.1007/3-540-30690-0_6). 14
- [49] A. L. Schawlow and C. H. Townes. Infrared and optical masers. *Phys. Rev.*, 112: 1940–1949, Dec 1958. doi: 10.1103/PhysRev.112.1940. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.112.1940>. 14
- [50] T. H. Maiman. Stimulated optical emission in fluorescent solids. i. theoretical considerations. *Phys. Rev.*, 123:1145–1150, Aug 1961. doi: 10.1103/PhysRev.123.1145. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.123.1145>. 14
- [51] T. H. Maiman, R. H. Hoskins, I. J. D’Haenens, C. K. Asawa, and V. Evtuhov. Stimulated optical emission in fluorescent solids. ii. spectroscopy and stimulated emission in ruby. *Phys. Rev.*, 123:1151–1157, Aug 1961. doi: 10.1103/PhysRev.123.1151. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.123.1151>. 14
- [52] P.W. Milonni and J.H. Eberly. *Laser Physics*. Wiley, 2010. ISBN 9780470387719. URL <https://books.google.com.br/books?id=YW-NNQEACAAJ>. 15
- [53] R. Graham and H. Haken. Quantum theory of light propagation in a fluctuating laser-active medium. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei*, 213(5):420–450, Oct 1968. ISSN 0939-7922. doi: 10.1007/BF01405384. URL <https://doi.org/10.1007/BF01405384>. 15
- [54] K. D. Choquette and R. E. Leibenguth. Control of vertical-cavity laser polarization with anisotropic transverse cavity geometries. *IEEE Photonics Technology Letters*, 6 (1):40–42, Jan 1994. ISSN 1041-1135. doi: 10.1109/68.265883. 15
- [55] R. N. Hall, G. E. Fenner, J. D. Kingsley, T. J. Soltys, and R. O. Carlson. Coherent light emission from gaas junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 9:366–368, Nov 1962. doi: 10.1103/PhysRevLett.9.366. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.9.366>. 15

- [56] D. L. Huber. Resonant scattering of monochromatic light in gases. *Phys. Rev.*, 178: 93–102, Feb 1969. doi: 10.1103/PhysRev.178.93. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.178.93>. 16
- [57] Michael Grätzel. Conversion of sunlight to electric power by nanocrystalline dye-sensitized solar cells. *Journal of Photochemistry and Photobiology A: Chemistry*, 164 (1):3 – 14, 2004. ISSN 1010-6030. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jphotochem.2004.02.023>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S101060300400108X>. Proceedings of the Dye Solar Cell Osaka ICP-21 Pre-symposium. Dedicated to Professor Shozo Yanagida on the occasion of his retirement. 16
- [58] P. W. Smith. A waveguide gas laser. *Applied Physics Letters*, 19(5):132–134, 1971. doi: 10.1063/1.1653855. URL <https://doi.org/10.1063/1.1653855>. 16
- [59] Adam Heller. A high-gain room-temperature liquid laser: Trivalent neodymium in selenium oxychloride. *Applied Physics Letters*, 9(3):106–108, 1966. doi: 10.1063/1.1754664. URL <https://doi.org/10.1063/1.1754664>. 16
- [60] W. F. Krupke. Ytterbium solid-state lasers. the first decade. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 6(6):1287–1296, Nov 2000. ISSN 1077-260X. doi: 10.1109/2944.902180. 16
- [61] J.J. Sakurai. *Advanced Quantum Mechanics*. A-W series in advanced physics. Pearson Education, Incorporated, 1967. ISBN 9788177589160. URL <https://books.google.com.br/books?id=lvmSZkzDFt0C>. 16
- [62] Shi-Yao Zhu and Marlan O. Scully. Spectral line elimination and spontaneous emission cancellation via quantum interference. *Phys. Rev. Lett.*, 76:388–391, Jan 1996. doi: 10.1103/PhysRevLett.76.388. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.388>. 16
- [63] Carl A. Kocher and Eugene D. Commins. Polarization correlation of photons emitted in an atomic cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 18:575–577, Apr 1967. doi: 10.1103/PhysRevLett.18.575. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.18.575>. 17
- [64] A. Javan, W. R. Bennett, and D. R. Herriott. Population inversion and continuous optical maser oscillation in a gas discharge containing a he-ne mixture. *Phys. Rev. Lett.*, 6:106–110, Feb 1961. doi: 10.1103/PhysRevLett.6.106. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.6.106>. 17
- [65] V Pleitez. Bohr: O arquiteto do átomo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25, 06 2003. doi: 10.1590/S0102-47442003000200012. 18
- [66] Franklyn K. Levin. The reflection, refraction, and diffraction of waves in media with an elliptical velocity dependence. *GEOPHYSICS*, 43(3):528–537, 1978. doi: 10.1190/1.1440833. URL <https://doi.org/10.1190/1.1440833>. 18
- [67] T. Pellizzari, S. A. Gardiner, J. I. Cirac, and P. Zoller. Decoherence, continuous observation, and quantum computing: A cavity qed model. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3788–3791, Nov 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.75.3788. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.3788>. 18

- [68] B. A. Lippmann. Generalized ehrenfest theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 16:135–138, Jan 1966. doi: 10.1103/PhysRevLett.16.135. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.16.135>. 18
- [69] Michael A. Nielsen and Isaac Chuang. Quantum computation and quantum information. *American Journal of Physics*, 70(5):558–559, 2002. doi: 10.1119/1.1463744. URL <https://doi.org/10.1119/1.1463744>. 18
- [70] H. R. Gray, R. M. Whitley, and C. R. Stroud. Coherent trapping of atomic populations. *Opt. Lett.*, 3(6):218–220, Dec 1978. doi: 10.1364/OL.3.000218. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-3-6-218>. 19
- [71] Al. L. Efros, M. Rosen, M. Kuno, M. Nirmal, D. J. Norris, and M. Bawendi. Band-edge exciton in quantum dots of semiconductors with a degenerate valence band: Dark and bright exciton states. *Phys. Rev. B*, 54:4843–4856, Aug 1996. doi: 10.1103/PhysRevB.54.4843. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.54.4843>. 19
- [72] Ryo Shimano and Makoto Kuwata-Gonokami. Observation of autler-townes splitting of biexcitons in cucl. *Phys. Rev. Lett.*, 72:530–533, Jan 1994. doi: 10.1103/PhysRevLett.72.530. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.530>. 20
- [73] S. H. Autler and C. H. Townes. Stark effect in rapidly varying fields. *Phys. Rev.*, 100: 703–722, Oct 1955. doi: 10.1103/PhysRev.100.703. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.100.703>. 20
- [74] C Delsart and J C Keller. Observation of the optical autler-townes splitting in neon gas with a cascade level scheme. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 9(16):2769, 1976. URL <http://stacks.iop.org/0022-3700/9/i=16/a=012>. 21
- [75] Sajeev John and Jian Wang. Quantum electrodynamics near a photonic band gap: Photon bound states and dressed atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2418–2421, May 1990. doi: 10.1103/PhysRevLett.64.2418. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.2418>. 21
- [76] D. E. Aspnes, C. G. Olson, and D. W. Lynch. Temperature coefficients of energy separations between ga 3d core levels and  $sp^3$  valence-conduction bands in gap. *Phys. Rev. Lett.*, 36:1563–1566, Jun 1976. doi: 10.1103/PhysRevLett.36.1563. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.36.1563>. 21
- [77] William S. Capinski and Humphrey J. Maris. Improved apparatus for picosecond pump-and-probe optical measurements. *Review of Scientific Instruments*, 67(8):2720–2726, 1996. doi: 10.1063/1.1147100. URL <https://doi.org/10.1063/1.1147100>. 21
- [78] Yifu Zhu, Daniel J. Gauthier, S. E. Morin, Qilin Wu, H. J. Carmichael, and T. W. Mossberg. Vacuum rabi splitting as a feature of linear-dispersion theory: Analysis and experimental observations. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2499–2502, May 1990. doi: 10.1103/PhysRevLett.64.2499. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.2499>. 21
- [79] P.L. Knight and P.W. Milonni. The rabi frequency in optical spectra. *Physics Reports*, 66(2):21 – 107, 1980. ISSN 0370-1573. doi: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(80\)90119-2](https://doi.org/10.1016/0370-1573(80)90119-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157380901192>. 21

- [80] K.-J. Boller, A. Imamoğlu, and S. E. Harris. Observation of electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2593–2596, May 1991. doi: 10.1103/PhysRevLett.66.2593. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.2593>. 21
- [81] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics, Third Edition*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 3rd edition, 2008. ISBN 0123694701, 9780123694706. 21
- [82] J. P. Marangos. Electromagnetically induced transparency. *Journal of Modern Optics*, 45(3):471–503, 1998. doi: 10.1080/09500349808231909. URL <https://doi.org/10.1080/09500349808231909>. 21, 148
- [83] Yoshitomo Okawachi, Matthew S. Bigelow, Jay E. Sharping, Zhaoming Zhu, Aaron Schweinsberg, Daniel J. Gauthier, Robert W. Boyd, and Alexander L. Gaeta. Tunable all-optical delays via brillouin slow light in an optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 94:153902, Apr 2005. doi: 10.1103/PhysRevLett.94.153902. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.153902>. 21
- [84] Joel W. Ager, W. Walukiewicz, Matthew McCluskey, Mary Anne Plano, and Maurice I. Landstrass. Fano interference of the raman phonon in heavily boron-doped diamond films grown by chemical vapor deposition. *Applied Physics Letters*, 66(5):616–618, 1995. doi: 10.1063/1.114031. URL <https://doi.org/10.1063/1.114031>. 23
- [85] A. Laucht, N. Hauke, J. M. Villas-Bôas, F. Hofbauer, G. Böhm, M. Kaniber, and J. J. Finley. Dephasing of exciton polaritons in photoexcited ingaas quantum dots in gaas nanocavities. *Phys. Rev. Lett.*, 103:087405, Aug 2009. doi: 10.1103/PhysRevLett.103.087405. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.087405>. 23
- [86] A. Verger, C. Ciuti, and I. Carusotto. Polariton quantum blockade in a photonic dot. *Phys. Rev. B*, 73:193306, May 2006. doi: 10.1103/PhysRevB.73.193306. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.73.193306>. 23
- [87] O. El Daïf, A. Baas, T. Guillet, J.-P. Brantut, R. Idrissi Kaitouni, J. L. Staehli, F. Morier-Genoud, and B. Deveaud. Polariton quantum boxes in semiconductor microcavities. *Applied Physics Letters*, 88(6):061105, 2006. doi: 10.1063/1.2172409. URL <https://doi.org/10.1063/1.2172409>. 23
- [88] Marius Grundmann. Kramers–kronig relations. pages 775–776, 2010. doi: 10.1007/978-3-642-13884-3\_26. URL [https://doi.org/10.1007/978-3-642-13884-3\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-642-13884-3_26). 23
- [89] Paul Busch, Teiko Heinonen, and Pekka Lahti. Heisenberg’s uncertainty principle. *Physics Reports*, 452(6):155 – 176, 2007. ISSN 0370-1573. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2007.05.006>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157307003481>. 24, 122
- [90] Richard S. Ellis, Kyle Haven, and Bruce Turkington. Large deviation principles and complete equivalence and nonequivalence results for pure and mixed ensembles. *Journal of Statistical Physics*, 101(5):999–1064, Dec 2000. ISSN 1572-9613. doi: 10.1023/A:1026446225804. URL <https://doi.org/10.1023/A:1026446225804>. 24
- [91] Alexander Topchy, Anil K. Jain, and William Punch. *A Mixture Model for Clustering Ensembles*, pages 379–390. doi: 10.1137/1.9781611972740.35. URL <https://pubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611972740.35>. 24

- [92] R. O. Jones and O. Gunnarsson. The density functional formalism, its applications and prospects. *Rev. Mod. Phys.*, 61:689–746, Jul 1989. doi: 10.1103/RevModPhys.61.689. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.689>. 25
- [93] M Berman, R Kosloff, and H Tal-Ezer. Solution of the time-dependent liouville-von neumann equation: dissipative evolution. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 25(5):1283, 1992. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/25/i=5/a=031>. 27
- [94] A. O. Caldeira and A. J. Leggett. Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 46:211–214, Jan 1981. doi: 10.1103/PhysRevLett.46.211. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.46.211>. 27
- [95] R. Landauer. Electrical transport in open and closed systems. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 68(2):217–228, Jun 1987. ISSN 1431-584X. doi: 10.1007/BF01304229. URL <https://doi.org/10.1007/BF01304229>. 27
- [96] J.W Eastwood and D.R.K Brownrigg. Remarks on the solution of poisson’s equation for isolated systems. *Journal of Computational Physics*, 32(1):24 – 38, 1979. ISSN 0021-9991. doi: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90139-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90139-6). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999179901396>. 27
- [97] Patrick Campbell and Martin A. Green. Light trapping properties of pyramidal textured surfaces. *Journal of Applied Physics*, 62(1):243–249, 1987. doi: 10.1063/1.339189. URL <https://doi.org/10.1063/1.339189>. 28
- [98] H. P. Breuer and F. Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press, Great Clarendon Street, 2002. 28
- [99] Marco Bernardo and Roberto Gorrieri. Extended markovian process algebra. In Ugo Montanari and Vladimiro Sassone, editors, *CONCUR ’96: Concurrency Theory*, pages 315–330, Berlin, Heidelberg, 1996. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-70625-0. 28
- [100] M. M. Wolf, J. Eisert, T. S. Cubitt, and J. I. Cirac. Assessing non-markovian quantum dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 101:150402, Oct 2008. doi: 10.1103/PhysRevLett.101.150402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.150402>. 28
- [101] Philip Pearle. Simple derivation of the lindblad equation. *European Journal of Physics*, 33(4):805, 2012. URL <http://stacks.iop.org/0143-0807/33/i=4/a=805>. 28
- [102] Irena Knezevic and David K. Ferry. Partial-trace-free time-convolutionless equation of motion for the reduced density matrix. *Phys. Rev. E*, 66:016131, Jul 2002. doi: 10.1103/PhysRevE.66.016131. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.66.016131>. 28
- [103] Y. C. Cheng and R. J. Silbey. Markovian approximation in the relaxation of open quantum systems. *The Journal of Physical Chemistry B*, 109(45):21399–21405, 2005. doi: 10.1021/jp051303o. URL <https://doi.org/10.1021/jp051303o>. PMID: 16853776. 30
- [104] M.O. Scully and M.S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997. ISBN 9780521435956. URL <https://books.google.com.br/books?id=20ISsQCKKmQC>. 30

- [105] Léon Van Hove. Correlations in space and time and born approximation scattering in systems of interacting particles. *Phys. Rev.*, 95:249–262, Jul 1954. doi: 10.1103/PhysRev.95.249. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.95.249>. 31
- [106] Dariusz Chruściński and Filip A. Wudarski. Non-markovian random unitary qubit dynamics. *Physics Letters A*, 377(21):1425 – 1429, 2013. ISSN 0375-9601. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.04.020>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960113003666>. 32
- [107] J. L. Skinner and D. Hsu. Pure dephasing of a two-level system. *The Journal of Physical Chemistry*, 90(21):4931–4938, 1986. doi: 10.1021/j100412a013. URL <https://doi.org/10.1021/j100412a013>. 32
- [108] R. Srikanth and Subhashish Banerjee. Squeezed generalized amplitude damping channel. *Phys. Rev. A*, 77:012318, Jan 2008. doi: 10.1103/PhysRevA.77.012318. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.012318>. 32
- [109] C. King. The capacity of the quantum depolarizing channel. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(1):221–229, Jan 2003. ISSN 0018-9448. doi: 10.1109/TIT.2002.806153. 32
- [110] J. Maziero, L. C. Céleri, R. M. Serra, and V. Vedral. Classical and quantum correlations under decoherence. *Phys. Rev. A*, 80:044102, Oct 2009. doi: 10.1103/PhysRevA.80.044102. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.044102>. 32
- [111] E. Santos and M. Ferrero. Linear entropy and bell inequalities. *Phys. Rev. A*, 62: 024101, Jul 2000. doi: 10.1103/PhysRevA.62.024101. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.024101>. 33
- [112] Raymond C. Petersen. The linear relationship between enthalpy and entropy of activation. *The Journal of Organic Chemistry*, 29(11):3133–3135, 1964. doi: 10.1021/jo01034a001. URL <https://doi.org/10.1021/jo01034a001>. 33, 130
- [113] Federico M. Pont, Omar Osenda, Julio H. Toloza, and Pablo Serra. Entropy, fidelity, and double orthogonality for resonance states in two-electron quantum dots. *Phys. Rev. A*, 81:042518, Apr 2010. doi: 10.1103/PhysRevA.81.042518. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.042518>. 33
- [114] Chien-Hao Lin, Yen-Chang Lin, and Yew Kam Ho. Quantification of linear entropy for quantum entanglement in he, h and ps ions using highly-correlated hylleraas functions. *Few-Body Systems*, 54(11):2147–2153, Nov 2013. ISSN 1432-5411. doi: 10.1007/s00601-013-0729-7. URL <https://doi.org/10.1007/s00601-013-0729-7>. 33
- [115] Fabrizio Buscemi, Paolo Bordone, and Andrea Bertoni. Linear entropy as an entanglement measure in two-fermion systems. *Phys. Rev. A*, 75:032301, Mar 2007. doi: 10.1103/PhysRevA.75.032301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.75.032301>. 33
- [116] Robert Silbey and Robert A. Harris. Variational calculation of the dynamics of a two level system interacting with a bath. *The Journal of Chemical Physics*, 80(6): 2615–2617, 1984. doi: 10.1063/1.447055. URL <https://doi.org/10.1063/1.447055>. 34

- [117] J. R. Petta, A. C. Johnson, J. M. Taylor, E. A. Laird, A. Yacoby, M. D. Lukin, C. M. Marcus, M. P. Hanson, and A. C. Gossard. Coherent manipulation of coupled electron spins in semiconductor quantum dots. *Science*, 309(5744):2180–2184, 2005. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.1116955. URL <http://science.sciencemag.org/content/309/5744/2180>. 34
- [118] C. W. Young, R. B. DuVall, and Norman Wright. Characterization of benzene ring substitution by infrared spectra. *Analytical Chemistry*, 23(5):709–714, 1951. doi: 10.1021/ac60053a007. URL <https://doi.org/10.1021/ac60053a007>. 34
- [119] J. D. Poll and L. Wolniewicz. The quadrupole moment of the h<sub>2</sub> molecule. *The Journal of Chemical Physics*, 68(7):3053–3058, 1978. doi: 10.1063/1.436171. URL <https://doi.org/10.1063/1.436171>. 34
- [120] Friedel Weinert. *Stern—Gerlach Experiment*, pages 746–750. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-540-70626-7. doi: 10.1007/978-3-540-70626-7\_214. URL [https://doi.org/10.1007/978-3-540-70626-7\\_214](https://doi.org/10.1007/978-3-540-70626-7_214). 34
- [121] Holger Proehl, Thomas Dienel, Robert Nitsche, and Torsten Fritz. Formation of solid-state excitons in ultrathin crystalline films of ptcda: From single molecules to molecular stacks. *Phys. Rev. Lett.*, 93:097403, Aug 2004. doi: 10.1103/PhysRevLett.93.097403. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.097403>. 34
- [122] M. Nirmal, D. J. Norris, M. Kuno, M. G. Bawendi, Al. L. Efros, and M. Rosen. Observation of the "dark exciton" in cdse quantum dots. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3728–3731, Nov 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.75.3728. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.3728>. 35
- [123] E. K. Irish. Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 99:173601, Oct 2007. doi: 10.1103/PhysRevLett.99.173601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.173601>. 35
- [124] P. Bakshi, D. A. Broido, and K. Kempa. Electromagnetic response of quantum dots. *Phys. Rev. B*, 42:7416–7419, Oct 1990. doi: 10.1103/PhysRevB.42.7416. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.42.7416>. 35
- [125] David Zueco, Georg M. Reuther, Sigmund Kohler, and Peter Hänggi. Qubit-oscillator dynamics in the dispersive regime: Analytical theory beyond the rotating-wave approximation. *Phys. Rev. A*, 80:033846, Sep 2009. doi: 10.1103/PhysRevA.80.033846. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.033846>. 35
- [126] John M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and C. Urbina. Rabi oscillations in a large josephson-junction qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 89:117901, Aug 2002. doi: 10.1103/PhysRevLett.89.117901. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.117901>. 38
- [127] Y. Kaluzny, P. Goy, M. Gross, J. M. Raimond, and S. Haroche. Observation of self-induced rabi oscillations in two-level atoms excited inside a resonant cavity: The ringing regime of superradiance. *Phys. Rev. Lett.*, 51:1175–1178, Sep 1983. doi: 10.1103/PhysRevLett.51.1175. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.1175>. 38

- [128] J. Förstner, C. Weber, J. Danckwerts, and A. Knorr. Phonon-assisted damping of rabi oscillations in semiconductor quantum dots. *Phys. Rev. Lett.*, 91:127401, Sep 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.91.127401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.127401>. 38
- [129] S. Schuler, T. Speck, C. Tietz, J. Wrachtrup, and U. Seifert. Experimental test of the fluctuation theorem for a driven two-level system with time-dependent rates. *Phys. Rev. Lett.*, 94:180602, May 2005. doi: 10.1103/PhysRevLett.94.180602. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.180602>. 40
- [130] R. Bavli, D. F. Heller, and Y. B. Band. Nonlinear-optical properties of two-level systems with permanent dipole moments. *Phys. Rev. A*, 41:3960–3968, Apr 1990. doi: 10.1103/PhysRevA.41.3960. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.41.3960>. 40
- [131] H. S. Borges, L. Sanz, J. M. Villas-Bôas, and A. M. Alcalde. Robust states in semiconductor quantum dot molecules. *Phys. Rev. B*, 81:075322, Feb 2010. doi: 10.1103/PhysRevB.81.075322. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.075322>. 42
- [132] Mark S. Hybertsen and Steven G. Louie. Electron correlation in semiconductors and insulators: Band gaps and quasiparticle energies. *Phys. Rev. B*, 34:5390–5413, Oct 1986. doi: 10.1103/PhysRevB.34.5390. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.34.5390>. 42
- [133] R. J. Warburton, B. T. Miller, C. S. Dürr, C. Bödefeld, K. Karrai, J. P. Kotthaus, G. Medeiros-Ribeiro, P. M. Petroff, and S. Huant. Coulomb interactions in small charge-tunable quantum dots: A simple model. *Phys. Rev. B*, 58:16221–16231, Dec 1998. doi: 10.1103/PhysRevB.58.16221. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.58.16221>. 42
- [134] K. Zaheer and M. S. Zubairy. Atom-field interaction without the rotating-wave approximation: A path-integral approach. *Phys. Rev. A*, 37:1628–1633, Mar 1988. doi: 10.1103/PhysRevA.37.1628. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.37.1628>. 43
- [135] K.-J. Boller, A. Imamoğlu, and S. E. Harris. Observation of electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2593–2596, May 1991. doi: 10.1103/PhysRevLett.66.2593. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.2593>. 51
- [136] S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoğlu. Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1107–1110, Mar 1990. doi: 10.1103/PhysRevLett.64.1107. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.1107>. 51
- [137] Michael Fleischhauer, Atac Imamoğlu, and Jonathan P. Marangos. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Rev. Mod. Phys.*, 77:633–673, Jul 2005. doi: 10.1103/RevModPhys.77.633. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.77.633>. 51
- [138] M. Fleischhauer and M. D. Lukin. Dark-state polaritons in electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5094–5097, May 2000. doi: 10.1103/PhysRevLett.84.5094. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.5094>. 51

- [139] Halyne S. Borges and Celso J. Villas-Bôas. Quantum phase gate based on electromagnetically induced transparency in optical cavities. *Phys. Rev. A*, 94:052337, Nov 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.94.052337. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.052337>. 51
- [140] Mika A. Sillanpää, Jian Li, Katarina Cicak, Fabio Altomare, Jae I. Park, Raymond W. Simmonds, G. S. Paraoanu, and Pertti J. Hakonen. Autler-townes effect in a superconducting three-level system. *Phys. Rev. Lett.*, 103:193601, Nov 2009. doi: 10.1103/PhysRevLett.103.193601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.193601>. 51
- [141] Gregor Jundt, Lucio Robledo, Alexander Högele, Stefan Fält, and Atac Imamoğlu. Observation of dressed excitonic states in a single quantum dot. *Phys. Rev. Lett.*, 100:177401, Apr 2008. doi: 10.1103/PhysRevLett.100.177401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.177401>. 52
- [142] T. Flissikowski, A. Hundt, M. Lowisch, M. Rabe, and F. Henneberger. Photon beats from a single semiconductor quantum dot. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3172–3175, Apr 2001. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.3172. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.3172>. 52
- [143] Parvendra Kumar and Takashi Nakajima. Coherent population trapping in negatively charged self-assembled quantum dots using a train of femtosecond pulses. *Phys. Rev. A*, 91:023832, Feb 2015. doi: 10.1103/PhysRevA.91.023832. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.91.023832>. 53
- [144] M A Antón and F Carreño. Quantum memory and all-optical switching in positive charged quantum dots via zeeman coherent oscillations. *Journal of Optics*, 12(10):104006, 2010. URL <http://stacks.iop.org/2040-8986/12/i=10/a=104006>. 53
- [145] Ahmet Fatih Cihan, Pedro Ludwig Hernandez Martinez, Yusuf Kelestemur, Evren Mutlugün, and Hilmi Volkan Demir. Observation of biexcitons in nanocrystal solids in the presence of photocharging. *ACS Nano*, 7(6):4799–4809, 2013. doi: 10.1021/nn305259g. URL <https://doi.org/10.1021/nn305259g>. PMID: 23713481. 53
- [146] Yan Li, Yang Zhao, Huhu Cheng, Yue Hu, Gaoquan Shi, Liming Dai, and Liangti Qu. Nitrogen-doped graphene quantum dots with oxygen-rich functional groups. *Journal of the American Chemical Society*, 134(1):15–18, 2012. doi: 10.1021/ja206030c. URL <https://doi.org/10.1021/ja206030c>. PMID: 22136359. 53
- [147] F. Muller, M. A. Hopkins, N. Coron, M. Grynberg, L. C. Brunel, and G. Martinez. A high magnetic field epr spectrometer. *Review of Scientific Instruments*, 60(12):3681–3684, 1989. doi: 10.1063/1.1140474. URL <https://doi.org/10.1063/1.1140474>. 54
- [148] T. Belhadj, T. Amand, A. Kunold, C.-M. Simon, T. Kuroda, M. Abbarchi, T. Mano, K. Sakoda, S. Kunz, X. Marie, and B. Urbaszek. Impact of heavy hole-light hole coupling on optical selection rules in gaas quantum dots. *Applied Physics Letters*, 97(5):051111, 2010. doi: 10.1063/1.3473824. URL <https://doi.org/10.1063/1.3473824>. 54

- [149] G. S. Agarwal. Rotating-wave approximation and spontaneous emission. *Phys. Rev. A*, 4:1778–1781, Nov 1971. doi: 10.1103/PhysRevA.4.1778. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.4.1778>. 54
- [150] C. Roy and S. Hughes. Phonon-dressed mollow triplet in the regime of cavity quantum electrodynamics: Excitation-induced dephasing and nonperturbative cavity feeding effects. *Phys. Rev. Lett.*, 106:247403, Jun 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.106.247403. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.247403>. 60
- [151] Ata Ulhaq, Stefanie Weiler, Chiranjeeb Roy, Sven Marcus Ulrich, Michael Jetter, Stephen Hughes, and Peter Michler. Detuning-dependent mollow triplet of a coherently-driven single quantum dot. *Opt. Express*, 21(4):4382–4395, Feb 2013. doi: 10.1364/OE.21.004382. URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-21-4-4382>. 60
- [152] E. del Valle and F. P. Laussy. Mollow triplet under incoherent pumping. *Phys. Rev. Lett.*, 105:233601, Dec 2010. doi: 10.1103/PhysRevLett.105.233601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.233601>. 60
- [153] O. Carnal and J. Mlynek. Young’s double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2689–2692, May 1991. doi: 10.1103/PhysRevLett.66.2689. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.2689>. 62
- [154] Y. Aharonov and J. Anandan. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1593–1596, Apr 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.58.1593. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1593>. 63
- [155] Joseph Samuel and Rajendra Bhandari. General setting for berry’s phase. *Phys. Rev. Lett.*, 60:2339–2342, Jun 1988. doi: 10.1103/PhysRevLett.60.2339. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.2339>. 63
- [156] M V Berry. Classical adiabatic angles and quantal adiabatic phase. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 18(1):15, 1985. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/18/i=1/a=012>. 63
- [157] S. Pancharatnam. Generalized theory of interference and its applications. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Section A*, 44(6):398–417, Dec 1956. ISSN 0370-0089. doi: 10.1007/BF03046095. URL <https://doi.org/10.1007/BF03046095>. 63
- [158] Sun Yin and D. M. Tong. Geometric phase of a quantum dot system in nonunitary evolution. *Phys. Rev. A*, 79:044303, Apr 2009. doi: 10.1103/PhysRevA.79.044303. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.79.044303>. 64
- [159] M.V. Berry. The adiabatic phase and pancharatnam’s phase for polarized light. *Journal of Modern Optics*, 34(11):1401–1407, 1987. doi: 10.1080/09500348714551321. URL <https://doi.org/10.1080/09500348714551321>. 64
- [160] Barry Simon. Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and berry’s phase. *Phys. Rev. Lett.*, 51:2167–2170, Dec 1983. doi: 10.1103/PhysRevLett.51.2167. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.2167>. 64
- [161] Y. Aharonov and J. Anandan. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1593–1596, Apr 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.58.1593. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1593>. 65

- [162] H. Narnhofer and W. Thirring. Adiabatic theorem in quantum statistical mechanics. *Phys. Rev. A*, 26:3646–3652, Dec 1982. doi: 10.1103/PhysRevA.26.3646. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.26.3646>. 65
- [163] A. Carollo, I. Fuentes-Guridi, M. França Santos, and V. Vedral. Geometric phase in open systems. *Phys. Rev. Lett.*, 90:160402, Apr 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.90.160402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.160402>. 69
- [164] Huang Yun Rao, Hua Lan Xu, Guo Lan Fu, Yi Bao Liu, Bo Lv, Yan Yan Jiang, and Yan Xia Yu. Geometric phase for a three-level atoms crosses a double cavity with two near resonant fields. *International Journal of Theoretical Physics*, 53(3):1033–1039, Mar 2014. ISSN 1572-9575. doi: 10.1007/s10773-013-1896-5. URL <https://doi.org/10.1007/s10773-013-1896-5>. 69
- [165] Huan Wang and Ka-Di Zhu. Voltage-controlled berry phases in two vertically coupled ingaas/gaas quantum dots. *EPL (Europhysics Letters)*, 82(6):60006, 2008. URL <http://stacks.iop.org/0295-5075/82/i=6/a=60006>. 70
- [166] U. Fano. Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques. *Rev. Mod. Phys.*, 29:74–93, Jan 1957. doi: 10.1103/RevModPhys.29.74. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.29.74>. 70
- [167] Asher Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1413–1415, Aug 1996. doi: 10.1103/PhysRevLett.77.1413. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.1413>. 70
- [168] A. J. Macfarlane, A. Sudbery, and P. H. Weisz. On gell-mann's  $\lambda$ -matrices, d- and f-tensors, octets, and parametrizations of  $u(3)$ . *Communications in Mathematical Physics*, 11(1):77–90, Mar 1968. ISSN 1432-0916. doi: 10.1007/BF01654302. URL <https://doi.org/10.1007/BF01654302>. 70
- [169] Rajendra Bhandari and Joseph Samuel. Observation of topological phase by use of a laser interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 60:1211–1213, Mar 1988. doi: 10.1103/PhysRevLett.60.1211. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.1211>. 71
- [170] H. Schmitzer, S. Klein, and W. Dultz. Nonlinearity of pancharatnam's topological phase. *Phys. Rev. Lett.*, 71:1530–1533, Sep 1993. doi: 10.1103/PhysRevLett.71.1530. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.1530>. 71
- [171] M S Byrd, L J Boya, M Mims, and E C G Sudarshan. Geometry of n-state systems, pure and mixed. *Journal of Physics: Conference Series*, 87(1):012006, 2007. URL <http://stacks.iop.org/1742-6596/87/i=1/a=012006>. 77
- [172] D. Rodney Truax. Baker-campbell-hausdorff relations and unitarity of  $su(2)$  and  $su(1,1)$  squeeze operators. *Phys. Rev. D*, 31:1988–1991, Apr 1985. doi: 10.1103/PhysRevD.31.1988. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.31.1988>. 84
- [173] José Lages, Remo Giust, and Jean-Marie Vigoureux. Geometric phase and pancharatnam phase induced by light wave polarization. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 59:6 – 14, 2014. ISSN 1386-9477. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physe.2013.12.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1386947713004281>. 84

- [174] *BASICS OF LIE GROUPS.* 84
- [175] Fernando C. Lombardo and Paula I. Villar. Environmentally induced effects on a bipartite two-level system: Geometric phase and entanglement properties. *Phys. Rev. A*, 81:022115, Feb 2010. doi: 10.1103/PhysRevA.81.022115. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.022115>. 85
- [176] L.D. Faddeev, N.Yu. Reshetikhin, and L.A. Takhtajan. Quantization of lie groups and lie algebras. In Masaki Kashiwara and Takahiro Kawai, editors, *Algebraic Analysis*, pages 129 – 139. Academic Press, 1988. ISBN 978-0-12-400465-8. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-400465-8.50019-5>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780124004658500195>. 85
- [177] F. T. Hioe. Gell-mann dynamic symmetry for n-level quantum systems. *Phys. Rev. A*, 32:2824–2836, Nov 1985. doi: 10.1103/PhysRevA.32.2824. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.32.2824>. 85
- [178] J. Patera and H. Zassenhaus. The pauli matrices in n dimensions and finest gradings of simple lie algebras of type an1. *Journal of Mathematical Physics*, 29(3):665–673, 1988. doi: 10.1063/1.528006. URL <https://doi.org/10.1063/1.528006>. 85
- [179] Sun Yin and D M Tong. The effect of the environment parameters on the geometric phase of a quantum dot system. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(30):305303, 2010. URL <http://stacks.iop.org/1751-8121/43/i=30/a=305303>. 86
- [180] Per-Olov Löwdin. A note on the quantum-mechanical perturbation theory. *The Journal of Chemical Physics*, 19(11):1396–1401, 1951. doi: 10.1063/1.1748067. URL <https://doi.org/10.1063/1.1748067>. 90
- [181] Isaiah Shavitt and Lynn T. Redmon. Quasidegenerate perturbation theories. a canonical van vleck formalism and its relationship to other approaches. *The Journal of Chemical Physics*, 73(11):5711–5717, 1980. doi: 10.1063/1.440050. URL <https://doi.org/10.1063/1.440050>. 90
- [182] Y. Japha and G. Kurizki. Superluminal delays of coherent pulses in nondissipative media: A universal mechanism. *Phys. Rev. A*, 53:586–590, Jan 1996. doi: 10.1103/PhysRevA.53.586. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.53.586>. 97
- [183] Mike van der Poel, Jesper Mørk, and Jørn M. Hvam. Controllable delay of ultrashort pulses in a quantum dot optical amplifier. *Opt. Express*, 13(20):8032–8037, Oct 2005. doi: 10.1364/OPEX.13.008032. URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-13-20-8032>. 97
- [184] H Kessler, H Oschkinat, C Griesinger, and W Bermel. Transformation of homonuclear two-dimensional nmr techniques into one-dimensional techniques using gaussian pulses. *Journal of Magnetic Resonance (1969)*, 70(1):106 – 133, 1986. ISSN 0022-2364. doi: [https://doi.org/10.1016/0022-2364\(86\)90366-5](https://doi.org/10.1016/0022-2364(86)90366-5). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022236486903665>. 97
- [185] Yoshitomo Okawachi, Matthew S. Bigelow, Jay E. Sharping, Zhaoming Zhu, Aaron Schweinsberg, Daniel J. Gauthier, Robert W. Boyd, and Alexander L. Gaeta. Tunable all-optical delays via brillouin slow light in an optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 94: 153902, Apr 2005. doi: 10.1103/PhysRevLett.94.153902. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.153902>. 97

- [186] Marco P. Moreno and Sandra S. Vianna. Comparative analysis in the frequency domain of the resonant interaction between an ultrashort pulse train and a two-level system. *Optics Communications*, 313:113 – 118, 2014. ISSN 0030-4018. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2013.10.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401813009012>. 103
- [187] A. Greilich, D. R. Yakovlev, A. Shabaev, Al. L. Efros, I. A. Yugova, R. Oulton, V. Stavarache, D. Reuter, A. Wieck, and M. Bayer. Mode locking of electron spin coherences in singly charged quantum dots. *Science*, 313(5785):341–345, 2006. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.1128215. URL <http://science.sciencemag.org/content/313/5785/341>. 103
- [188] A. V. Uskov, T. W. Berg, and J. Mrk. Theory of pulse-train amplification without patterning effects in quantum-dot semiconductor optical amplifiers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 40(3):306–320, March 2004. ISSN 0018-9197. doi: 10.1109/JQE.2003.823032. 103
- [189] Marco P. Moreno and Sandra S. Vianna. Coherence induced by a train of ultrashort pulses in a  $\chi^{(2)}$ -type system. *J. Opt. Soc. Am. B*, 28(5):1124–1129, May 2011. doi: 10.1364/JOSAB.28.001124. URL <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-28-5-1124>. 103
- [190] Marco P. Moreno and Sandra S. Vianna. Femtosecond 1 ghz ti:sapphire laser as a tool for coherent spectroscopy in atomic vapor. *J. Opt. Soc. Am. B*, 28(9):2066–2069, Sep 2011. doi: 10.1364/JOSAB.28.002066. URL <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-28-9-2066>. 104
- [191] M Polo, C A C Bosco, L H Acioli, D Felinto, and S S Vianna. Coupling between cw lasers and a frequency comb in dense atomic samples. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 43(5):055001, 2010. URL <http://stacks.iop.org/0953-4075/43/i=5/a=055001>. 107
- [192] Chen Wang, Jie Ren, and Jianshu Cao. Optimal tunneling enhances the quantum photovoltaic effect in double quantum dots. *New Journal of Physics*, 16(4):045019, 2014. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/16/i=4/a=045019>. 108
- [193] W. J. D. van Dijck. The becquerel-effect on copper oxide electrodes. *Trans. Faraday Soc.*, 21:630–636, 1926. doi: 10.1039/TF9262100630. URL <http://dx.doi.org/10.1039/TF9262100630>. 108
- [194] D. M. Chapin, C. S. Fuller, and G. L. Pearson. A new silicon p-n junction photocell for converting solar radiation into electrical power. *Journal of Applied Physics*, 25(5):676–677, 1954. doi: 10.1063/1.1721711. URL <https://doi.org/10.1063/1.1721711>. 108
- [195] Paul Rappaport. The photovoltaic effect and its utilization. *Solar Energy*, 3(4):8 – 18, 1959. ISSN 0038-092X. doi: [https://doi.org/10.1016/0038-092X\(59\)90002-7](https://doi.org/10.1016/0038-092X(59)90002-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0038092X59900027>. 108
- [196] Fahhad H. Alharbi and Sabre Kais. Theoretical limits of photovoltaics efficiency and possible improvements by intuitive approaches learned from photosynthesis and quantum coherence. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 43:1073 – 1089, 2015. ISSN 1364-0321. doi: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2014.11.101>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S136403211401048X>. 109

- [197] Kenji Uchino, Yuichi Miyazawa, and Shoichiro Nomura. High-voltage photovoltaic effect in pbtio 3 -based ceramics. *Japanese Journal of Applied Physics*, 21(12R):1671, 1982. URL <http://stacks.iop.org/1347-4065/21/i=12R/a=1671>. 109
- [198] M. Ichiki, R. Maeda, Y. Morikawa, Y. Mabune, T. Nakada, and K. Nonaka. Photovoltaic effect of lead lanthanum zirconate titanate in a layered film structure design. *Applied Physics Letters*, 84(3):395–397, 2004. doi: 10.1063/1.1641528. URL <https://doi.org/10.1063/1.1641528>. 109
- [199] Anatoly A. Svidzinsky, Konstantin E. Dorfman, and Marlan O. Scully. Enhancing photovoltaic power by fano-induced coherence. *Phys. Rev. A*, 84:053818, Nov 2011. doi: 10.1103/PhysRevA.84.053818. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.053818>. 117
- [200] Konstantin E. Dorfman, Dmitri V. Voronine, Shaul Mukamel, and Marlan O. Scully. Photosynthetic reaction center as a quantum heat engine. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(8):2746–2751, 2013. ISSN 0027-8424. doi: 10.1073/pnas.1212666110. URL <http://www.pnas.org/content/110/8/2746>. 117
- [201] Marlan O. Scully, Kimberly R. Chapin, Konstantin E. Dorfman, Moochan Barnabas Kim, and Anatoly Svidzinsky. Quantum heat engine power can be increased by noise-induced coherence. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(37):15097–15100, 2011. ISSN 0027-8424. doi: 10.1073/pnas.1110234108. URL <http://www.pnas.org/content/108/37/15097>. 117
- [202] Konstantin E. Dorfman, Moochan B. Kim, and Anatoly A. Svidzinsky. Increasing photocell power by quantum coherence induced by external source. *Phys. Rev. A*, 84: 053829, Nov 2011. doi: 10.1103/PhysRevA.84.053829. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.053829>. 117
- [203] J.B. Marion and S.T. Thornton. *Classical dynamics of particles & systems*. Harcourt Brace Jovanovich, 1988. ISBN 9780155076402. URL <https://books.google.com.br/books?id=IIUpAQAAQAAJ>. 122
- [204] D.J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson international edition. Pearson Prentice Hall, 2005. ISBN 9780131118928. URL <https://books.google.com.br/books?id=z4fwAAAQAAJ>. 122
- [205] S. Gasiorowicz. *Quantum Physics, 3Rd Ed.* Wiley India Pvt. Limited, 2007. ISBN 9788126511174. URL <https://books.google.com.br/books?id=qFtQiVmjWUEC>. 122
- [206] Achim Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Phys. Rev. D*, 52:1108–1118, Jul 1995. doi: 10.1103/PhysRevD.52.1108. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.1108>. 122
- [207] Jaroslav Koutecký and Alexandre Laforgue. Second quantization for systems with a constant number of particles in the dirac notation. *International Journal of Quantum Chemistry*, 11(3):505–523. doi: 10.1002/qua.560110312. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qua.560110312>. 122

- [208] A. Jamiołkowski. Linear transformations which preserve trace and positive semi-definiteness of operators. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):275 – 278, 1972. ISSN 0034-4877. doi: [https://doi.org/10.1016/0034-4877\(72\)90011-0](https://doi.org/10.1016/0034-4877(72)90011-0). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0034487772900110>. 124
- [209] M. N. Rosenbluth, R. B. White, and C. S. Liu. Temporal evolution of a three-wave parametric instability. *Phys. Rev. Lett.*, 31:1190–1193, Nov 1973. doi: 10.1103/PhysRevLett.31.1190. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.31.1190>. 125
- [210] Mario Argeri, Stefano Di Vita, Pierpaolo Mastrolia, Edoardo Mirabella, Johannes Schlenk, Ulrich Schubert, and Lorenzo Tancredi. Magnus and dyson series for master integrals. *Journal of High Energy Physics*, 2014(3):82, Mar 2014. ISSN 1029-8479. doi: 10.1007/JHEP03(2014)082. URL [https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2014\)082](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2014)082). 126
- [211] O.W. Sørensen, G.W. Eich, M.H. Levitt, G. Bodenhausen, and R.R. Ernst. Product operator formalism for the description of nmr pulse experiments. *Progress in Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy*, 16:163 – 192, 1984. ISSN 0079-6565. doi: [https://doi.org/10.1016/0079-6565\(84\)80005-9](https://doi.org/10.1016/0079-6565(84)80005-9). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0079656584800059>. 126
- [212] Cecilia Jarlskog. *Paper [1950f]: Formal Integration of the Equations of Quantum Theory in the Heisenberg Representation*, pages 465–508. Springer International Publishing, Cham, 2014. ISBN 978-3-319-00627-7. doi: 10.1007/978-3-319-00627-7\_89. URL [https://doi.org/10.1007/978-3-319-00627-7\\_89](https://doi.org/10.1007/978-3-319-00627-7_89). 126
- [213] C. E. Shannon. Communication theory of secrecy systems\*. *Bell System Technical Journal*, 28(4):656–715, . doi: 10.1002/j.1538-7305.1949.tb00928.x. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.1538-7305.1949.tb00928.x>. 127
- [214] J. Ziv and A. Lempel. A universal algorithm for sequential data compression. *IEEE Transactions on Information Theory*, 23(3):337–343, May 1977. ISSN 0018-9448. doi: 10.1109/TIT.1977.1055714. 127
- [215] D. E. Muller. Application of boolean algebra to switching circuit design and to error detection. *Transactions of the I.R.E. Professional Group on Electronic Computers*, EC-3(3):6–12, Sept 1954. ISSN 2168-1740. doi: 10.1109/IREPGELC.1954.6499441. 127
- [216] Mitsuru Matsui. Linear cryptanalysis method for des cipher. In Tor Helleseth, editor, *Advances in Cryptology — EUROCRYPT '93*, pages 386–397, Berlin, Heidelberg, 1994. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-48285-7. 127
- [217] Garrett Birkhoff and John Von Neumann. The logic of quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, 37(4):823–843, 1936. ISSN 0003486X. URL <http://www.jstor.org/stable/1968621>. 127
- [218] A. M. Turing. Systems of logic based on ordinals†. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-45(1):161–228. doi: 10.1112/plms/s2-45.1.161. URL <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-45.1.161>. 128
- [219] Alan M. Turing. *Computing Machinery and Intelligence*, pages 23–65. Springer Netherlands, Dordrecht, 2009. ISBN 978-1-4020-6710-5. doi: 10.1007/978-1-4020-6710-5\_3. URL [https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6710-5\\_3](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6710-5_3). 128

- [220] Fu-Guo Deng and Gui Lu Long. Secure direct communication with a quantum one-time pad. *Phys. Rev. A*, 69:052319, May 2004. doi: 10.1103/PhysRevA.69.052319. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.052319>. 128
- [221] Frank Spitzer. The wiener-hopf equation whose kernel is a probability density. *Duke Math. J.*, 24(3):327–343, 09 1957. doi: 10.1215/S0012-7094-57-02439-0. URL <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-57-02439-0>. 128
- [222] J. B. Connell. A huffman-shannon-fano code. *Proceedings of the IEEE*, 61(7):1046–1047, July 1973. ISSN 0018-9219. doi: 10.1109/PROC.1973.9200. 128
- [223] C. E. Shannon. Prediction and entropy of printed english. *Bell System Technical Journal*, 30(1):50–64, . doi: 10.1002/j.1538-7305.1951.tb01366.x. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.1538-7305.1951.tb01366.x>. 128
- [224] Hoi-Kwong Lo and H. F. Chau. Is quantum bit commitment really possible? *Phys. Rev. Lett.*, 78:3410–3413, Apr 1997. doi: 10.1103/PhysRevLett.78.3410. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.3410>. 129
- [225] Rémy Mosseri and Rossen Dandoloff. Geometry of entangled states, bloch spheres and hopf fibrations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(47):10243, 2001. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/34/i=47/a=324>. 129
- [226] Sibasish Ghosh, Guruprasad Kar, Anirban Roy, Aditi Sen(De), and Ujjwal Sen. Distinguishability of bell states. *Phys. Rev. Lett.*, 87:277902, Dec 2001. doi: 10.1103/PhysRevLett.87.277902. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.277902>. 129
- [227] V V Dodonov. Purity- and entropy-bounded uncertainty relations for mixed quantum states. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 4(3):S98, 2002. URL <http://stacks.iop.org/1464-4266/4/i=3/a=362>. 130
- [228] Dénes Petz. *Entropy, von Neumann and the von Neumann Entropy*, pages 83–96. Springer Netherlands, Dordrecht, 2001. ISBN 978-94-017-2012-0. doi: 10.1007/978-94-017-2012-0\_7. URL [https://doi.org/10.1007/978-94-017-2012-0\\_7](https://doi.org/10.1007/978-94-017-2012-0_7). 132
- [229] Liam Paninski. Estimation of entropy and mutual information. *Neural Computation*, 15(6):1191–1253, 2003. doi: 10.1162/089976603321780272. URL <https://doi.org/10.1162/089976603321780272>. 132
- [230] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245–2248, Mar 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.80.2245. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.2245>. 133
- [231] Robert Raussendorf and Hans J. Briegel. A one-way quantum computer. *Phys. Rev. Lett.*, 86:5188–5191, May 2001. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5188. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.5188>. 135
- [232] J. R. Ackerhalt and P. W. Milonni. Interaction hamiltonian of quantum optics. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1(1):116–120, Mar 1984. doi: 10.1364/JOSAB.1.000116. URL <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-1-1-116>. 136

- [233] Wen-Hui Yang, George C. Schatz, and Richard P. Van Duyne. Discrete dipole approximation for calculating extinction and raman intensities for small particles with arbitrary shapes. *The Journal of Chemical Physics*, 103(3):869–875, 1995. doi: 10.1063/1.469787. URL <https://doi.org/10.1063/1.469787>. 136
- [234] R. Jackiw, I. Muzinich, and C. Rebbi. Coulomb gauge description of large yang-mills fields. *Phys. Rev. D*, 17:1576–1582, Mar 1978. doi: 10.1103/PhysRevD.17.1576. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.17.1576>. 137
- [235] J. J. Goodman, B. T. Draine, and P. J. Flatau. Application of fast-fourier-transform techniques to the discrete-dipole approximation. *Opt. Lett.*, 16(15):1198–1200, Aug 1991. doi: 10.1364/OL.16.001198. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-16-15-1198>. 137
- [236] Bruce T. Draine and Piotr J. Flatau. Discrete-dipole approximation for scattering calculations. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(4):1491–1499, Apr 1994. doi: 10.1364/JOSAA.11.001491. URL <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-11-4-1491>. 137
- [237] M.A. Yurkin and A.G. Hoekstra. The discrete dipole approximation: An overview and recent developments. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 106(1):558 – 589, 2007. ISSN 0022-4073. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2007.01.034>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407307000556>. IX Conference on Electromagnetic and Light Scattering by Non-Spherical Particles. 137
- [238] A. Debnath, C. Meier, B. Chatel, and T. Amand. Chirped laser excitation of quantum dot excitons coupled to a phonon bath. *Phys. Rev. B*, 86:161304, Oct 2012. doi: 10.1103/PhysRevB.86.161304. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.86.161304>. 141
- [239] E. R. Schmidgall, P. R. Eastham, and R. T. Phillips. Population inversion in quantum dot ensembles via adiabatic rapid passage. *Phys. Rev. B*, 81:195306, May 2010. doi: 10.1103/PhysRevB.81.195306. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.195306>. 141
- [240] A. V. Scherbakov, P. J. S. van Capel, A. V. Akimov, J. I. Dijkhuis, D. R. Yakovlev, T. Berstermann, and M. Bayer. Chirping of an optical transition by an ultrafast acoustic soliton train in a semiconductor quantum well. *Phys. Rev. Lett.*, 99:057402, Aug 2007. doi: 10.1103/PhysRevLett.99.057402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.057402>. 141
- [241] Ignacio R. Solá, Vladimir S. Malinovsky, Bo Y. Chang, Jesus Santamaria, and Klaas Bergmann. Coherent population transfer in three-level  $\Lambda$  systems by chirped laser pulses: Minimization of the intermediate-level population. *Phys. Rev. A*, 59:4494–4501, Jun 1999. doi: 10.1103/PhysRevA.59.4494. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.59.4494>. 141
- [242] Timo Kaldewey, Sebastian Lüker, Andreas V. Kuhlmann, Sascha R. Valentin, Jean-Michel Chauveau, Arne Ludwig, Andreas D. Wieck, Doris E. Reiter, Tilmann Kuhn, and Richard J. Warburton. Demonstrating the decoupling regime of the electron-phonon interaction in a quantum dot using chirped optical excitation. *Phys. Rev. B*, 95:241306, Jun 2017. doi: 10.1103/PhysRevB.95.241306. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.95.241306>. 142

- [243] Naoyuki T. Hashimoto, Kazuhiko Misawa, and Roy Lang. Three-level picture for chirp-dependent fluorescence yields under femtosecond optical pulse irradiation. *Applied Physics Letters*, 82(17):2749–2751, 2003. doi: 10.1063/1.1571225. URL <https://doi.org/10.1063/1.1571225>. 142
- [244] Wen-Xing Yang, Ai-Xi Chen, Yanfeng Bai, and Ray-Kuang Lee. Ultrafast single-electron transfer in coupled quantum dots driven by a few-cycle chirped pulse. *Journal of Applied Physics*, 115(14):143105, 2014. doi: 10.1063/1.4871400. URL <https://doi.org/10.1063/1.4871400>. 142
- [245] Nirat Patanasemakul, Somsak Panyakeow, and Songphol Kanjanachuchai. Chirped ingaas quantum dot molecules for broadband applications. *Nanoscale Research Letters*, 7(1):207, Apr 2012. ISSN 1556-276X. doi: 10.1186/1556-276X-7-207. URL <https://doi.org/10.1186/1556-276X-7-207>. 142
- [246] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Pearson, Boston, MA, 2013. URL <https://cds.cern.ch/record/1492149>. Re-published by Cambridge University Press in 2017. 144
- [247] P.G. Drazin, R.S. Johnson, and D.G. Crighton. *Solitons: An Introduction*. Cambridge Computer Science Tex. Cambridge University Press, 1989. ISBN 9780521336550. URL <https://books.google.com.br/books?id=HPmbIDk2u-gC>. 147
- [248] H. R. Hamedi. Pulse propagation and optically controllable switch in coupled semiconductor-double-quantum-dot nanostructures. *Journal of Applied Physics*, 119(18):183104, 2016. doi: 10.1063/1.4949328. URL <https://doi.org/10.1063/1.4949328>. 147
- [249] Roger Grimshaw. *Korteweg de-Vries Equation*, pages 1–28. Springer Vienna, Vienna, 2005. ISBN 978-3-211-38025-3. doi: 10.1007/3-211-38025-6\_1. URL [https://doi.org/10.1007/3-211-38025-6\\_1](https://doi.org/10.1007/3-211-38025-6_1). 147
- [250] Denis V. Novitsky. Controlled absorption and all-optical diode action due to collisions of self-induced-transparency solitons. *Phys. Rev. A*, 85:043813, Apr 2012. doi: 10.1103/PhysRevA.85.043813. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.043813>. 147
- [251] Wen-Xing Yang, Jing-Min Hou, and Ray-Kuang Lee. Ultraslow bright and dark solitons in semiconductor quantum wells. *Phys. Rev. A*, 77:033838, Mar 2008. doi: 10.1103/PhysRevA.77.033838. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.033838>. 148
- [252] Henry C. Yuen and Warren E. Ferguson. Fermi–pasta–ulam recurrence in the two-space dimensional nonlinear schrödinger equation. *The Physics of Fluids*, 21(11):2116–2118, 1978. doi: 10.1063/1.862122. URL <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.862122>. 148
- [253] A.R. Osborne and L. Bergamasco. The solitons of zabusky and kruskal revisited: Perspective in terms of the periodic spectral transform. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 18(1):26 – 46, 1986. ISSN 0167-2789. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(86\)90160-0](https://doi.org/10.1016/0167-2789(86)90160-0). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278986901600>. 148

- [254] Kuanhong Zeng, Denglong Wang, Yanchao She, and Xiaoqin Luo. The formation and transformation of the spatial weak-light bright and dark solitons in a quantum dot molecule with the interdot tunneling coupling. *The European Physical Journal D*, 67(11):221, Nov 2013. ISSN 1434-6079. doi: 10.1140/epjd/e2013-40197-y. URL <https://doi.org/10.1140/epjd/e2013-40197-y>. 148
- [255] Jiahua Li, Rong Yu, Pei Huang, and Xiaoxue Yang. Spatial weak infrared-light bright and dark solitons in semiconductor quantum-dot nanostructures. *Physics Letters A*, 373(5):554 – 557, 2009. ISSN 0375-9601. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.12.007>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960108017532>. 148
- [256] Teresa D’Aprile and Dimitri Mugnai. Solitary waves for nonlinear klein–gordon–maxwell and schrödinger–maxwell equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 134(5):893–906, 2004. doi: 10.1017/S030821050000353X. 149
- [257] J. E. Kim, E. Malic, M. Richter, A. Wilms, and A. Knorr. Maxwell–bloch equation approach for describing the microscopic dynamics of quantum-dot surface-emitting structures. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 46(7):1115–1126, July 2010. ISSN 0018-9197. doi: 10.1109/JQE.2010.2043923. 150
- [258] M. Fleischhauer and M. D. Lukin. Quantum memory for photons: Dark-state polaritons. *Phys. Rev. A*, 65:022314, Jan 2002. doi: 10.1103/PhysRevA.65.022314. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.022314>. 151
- [259] Chao Hang and Guoxiang Huang. Weak-light ultraslow vector solitons via electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. A*, 77:033830, Mar 2008. doi: 10.1103/PhysRevA.77.033830. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.033830>. 152
- [260] C.H. Raymond Ooi, S.W. Harun, and H. Ahmad. Quantum coherence effects in a raman amplifier. *Journal of Modern Optics*, 58(1):11–13, 2011. doi: 10.1080/09500340.2010.521594. URL <https://doi.org/10.1080/09500340.2010.521594>. 152