LUIS ANTHONY MIÑOPE GAONA

Classes Homoclínicas

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2018

LUIS ANTHONY MIÑOPE GAONA

Classes Homoclínicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan.

UBERLÂNDIA - MG
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

M666c 2019

Miñope Gaona, Luis Anthony, 1994-
Classes homoclínicas [recurso eletrônico] / Luis Anthony Miñope Gaona. - 2019.

Orientador: Thiago Aparecido Catalan.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2019.333
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. 2. Espaços hiperbólicos. 3. Difeomorfismos. I. Catalan, Thiago Aparecido, 1984-, (Orient.) II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Maria Salete de Freitas Pinheiro - CRB6/1262

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Luis Anthony Miñope Gaona

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11612MAT005.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Sistemas Dinâmicos.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Classes Homoclínicas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 18 de Fevereiro de 2019, às 13:30 horas, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan UFU - Universidade Federal de Uberlândia (orientador)	
Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita IBILCE- UNESP	
Prof. Dr. Jean Venato Santos UFU - Universidade Federal de Uberlândia	

Uberlândia-MG, 18 de Fevereiro de 2019.

Dedicatória

Dedicado aos meus pais Sebastian e Carmen, e meus irmãos Henry e Jenner.

Agradecimentos

Agradeço principalmente a Deus pela saúde, pelas vitórias conquistadas e bem-estar que nunca me ha faltado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan pela sua paciência e disponibilidade. Pela ajuda em esclarecer minhas duvidas da pesquisa, por seus conselhos e discussões construtivas sobre a pesquisa e demais assuntos. Também agradeço a confiança, amizade e tempo que teve comigo.

Aos membros da banca pela gentileza de participar da avaliação deste trabalho.

Agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia. Aos meus professores: Thiago Aparecido Catalan, Mário Henrique de Castro, Rosana Sueli da Motta Jafelice, Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, e Luis Renato Gonçalves Dias, que tiveram importante contribuição na minha formação acadêmica.

Ao meus companheiros e amigos de mestrado, especialmente a minha turma: Rejiane, Telmo, Kassandra ,Garcia, Ivan Dario, Daniel e Gabriel Esteban.

E finalmente, agradeço o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, que foi essencial para concluir os estudos de mestrado satisfatoriamente.

MIÑOPE, L.A.M.G. *Classes Homoclínicas.* 2019. - 71p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Nesta dissertação, vamos fazer um estudo de difeomorfismos sobre classes homoclínicas. Introduziremos a propriedade de períodos grandes, como no artigo de Arbieto, Catalan e Santiago [3], e nesta linha tiraremos propriedades robustas de classes homoclínicas genéricas.

Palavras-chave: (Hiperbolicidade, Topologicamente mixing, Propriedade de períodos grandes, Classes homoclínicas, λ-Lemma ou Lema de inclinação, Lema de Sombreamento).

MIÑOPE, L.A.M.G. *Homoclinic Classes* 2019. - 71p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this dissertation, we will study homoclinic classes of diffeomorphisms. We will introduce the large periods property as in the paper of Arbieto, Catalan and Santiago [3], and thus we will take robust properties of generic homoclinic classes.

Keywords: (Hyperbolicity, Topologically mixing, large periods property, Homoclinic classes, λ-Lemma or Inclination Lemma, Shadowing lemma).

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathrm{Diff}^r(M)$	Conjunto dos difeomorfismos de M em M de classe $C^r (r \geq 0)$.
$\mathrm{Per}(f)$	Conjunto dos pontos periódicos de f.
$\mathrm{Fix}(f)$	Conjunto dos pontos fixos de f.
$\mathrm{L}(f)$	Conjunto limite de f.
$\Omega(f)$	Conjunto não errante de f.
$W^s(p)$	Conjunto estável no ponto p.
$W^u(p)$	Conjunto instável do ponto p.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas dinâmicos concerne em analisar o comportamento “assintótico"de pontos ou conjuntos de pontos mediante a ação de uma lei (em nosso caso tal lei será um difeomorfismo). Os conjuntos de pontos que estudaremos são conjuntos compactos e invariantes pela lei de ação. Um exemplo de conjuntos invariantes muito bem estudados na literatura são os chamados *conjuntos hiperbólicos*, que foram introduzidos por Anosov ([2]) e Smale ([12]) nos anos 60. Estes conjuntos possuem uma rica estrutura, em linhas gerais este conjunto possui uma decomposição do seu espaço tangente em dois subfibrados invariantes, onde em um se vê contração e em outro expansão, como acontece no caso hiperbólico linear. Mais precisamente, se M é uma variedade compacta e $f\colon M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo, dizemos que $\Lambda \subseteq M$ é um conjunto hiperbólico, se é $f-$invariante, isto é, $f(\Lambda) = \Lambda$ e vale:

i) Existem subespaços $E^s_x, E^u_x \subseteq T_xM$, tais que $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$, variando continuamente para todo $x \in \Lambda$.

ii) $Df_x(E^s_x) = E^s_{f(x)}$ e $Df_x(E^u_x) = E^u_{f(x)}$.

ii) Existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que:

$$\begin{aligned}
\|Df^n_x(v^s)\| &\leq C\lambda^n\|v^s\|, \forall v^s \in E^s_x, \forall n \geq 0.\\
\|Df^{-n}_x(v^u)\| &\leq C\lambda^n\|v^u\|, \forall v^u \in E^u_x, \forall n \geq 0.
\end{aligned}$$

Nosso interesse nesta dissertação é estudar as dinâmicas de difeomorfismos restrito a uma classe especial de conjuntos, conhecidos como: *Classes Homoclínicas*. Em linhas gerais estes conjuntos são definidos como sendo o fecho das interseções transversais das *variedades estáveis e instáveis* da órbita de um ponto periódico hiperbólico do difeomorfismo em questão. Convém destacarmos que todo difemorfismo hiperbólico, isto é, quando o conjunto não errante é hiperbólico, este se decompõe em finitas classes homoclínicas disjuntas, resultado este conhecido por Decomposição Espectral de Smale. Convém destacarmos que, genericamente, as classes homoclínicas admitem uma certa decomposição também, veja Teorema 3.2.2.

O principal objetivo desta dissertação é estudar a propriedade de períodos grandes e mostrar que certas classes homoclínicas possuem aquela propriedade, tomando como base de estudo o artigo de Arbieto, Catalan e Santiago, [3]. Em palavras, um conjunto invariante compacto possui a propriedade de períodos grandes se este conjunto possui pontos periódicos de todos os períodos a partir de um específico, e além disto as órbitas destes pontos periódicos são arbitrariamente Hausdorff densas. Veremos também que tal propriedade implica uma importante propriedade dinâmica topológica, que é a propriedade mixing na dinâmica. E assim, a partir de uma série de resultados, será possível concluir os seguintes resultados gerais:

Teorema A *Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset Diff^1(M)$, tal que se $f \in \mathcal{R}$ e se $p \in M$ é um ponto periódico hiperbólico de f tal que sua classe homoclínica, $\mathcal{H}(p)$, possui a propriedade de períodos grandes homoclínica, então $\mathcal{H}(p(g))$ possui a propriedade de períodos grandes homoclínica para todo difeomorfismo g C^1-próximo a f.*

Teorema B *Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset Diff^1(M)$, tal que se $f \in \mathcal{R}$, e se $p \in M$ é um ponto periódico hiperbólico de f tal que sua classe homoclínica $\mathcal{H}(p)$ seja isolada, então $\mathcal{H}(p)$ é topologicamente mixing se, e somente se, possui a propriedade de períodos grandes homoclínica.*

Estes resultados, em particular, vão implicar que a propriedade topologicamente mixing genericamente é uma propriedade robusta sobre classes homoclínicas isoladas (veja Corolario 3.3.14).

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: no Capítulo 1 introduzimos as definições e as propriedades usadas no desenvolvimento deste trabalho: espaço de sequências de símbolos, a função shift, subshift do tipo finito e as noções básicas de dinâmica topológica (transitividade topológica e topologicamente mixing). No Capítulo 2 estudamos alguns Sistemas Dinâmicos discretos de difeomorfismos. O objetivo principal é demonstrar o Teorema 2.5.8 para o qual precisamos de definições e propriedades como: conjuntos hiperbólicos, conjuntos invariantes maximal, e λ-lema. Também introduzimos aqui a famosa Ferradura de Smale. No Capítulo 3 introduzimos a *propriedade de períodos grandes*, e provamos alguns resultados antes de mostrarmos de fato os Teoremas A e B.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 A função shift

Nesta seção apresentaremos um conceito importante da teoria de Sistemas Dinâmicos, a Dinâmica Simbólica, a qual possui um papel importante no estudo de Dinâmicas Hiperbólicas.

1.1.1 Espaço de sequências de símbolos

Nesta subseção vamos introduzir o espaço da Dinâmica Simbólica.

Definição 1.1.1 *Seja um conjunto A não vazio. Definimos o espaço de sequências bilaterais em A como o conjunto $\Sigma_A = A^Z = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n \in A, \forall n \in \mathbb{Z}\}$. O conjunto A é chamado de alfabeto e seus elementos de símbolos.*

Em geral, tem-se interesse quando nosso alfabeto é finito pois nesse caso o espaço de sequências possui boas propriedades topológicas, como veremos nesta subseção. Assim fixaremos o alfabeto do tipo $A_d = \{1, 2, \ldots, d\}$, $d \in \mathbb{N}$ e denotaremos por Σ_{A_d} ou Σ_d o espaço de sequências de d símbolos. Consideremos em $A_d = \{1, 2, \ldots, d\}$ a topologia discreta e em Σ_d a topologia produto.

Na sequência mostraremos que Σ_d é metrizável. Para tal vejamos as sequintes definições:

Definição 1.1.2 *Um bloco vazio em Σ_d é aquele subconjunto que não contém nenhuma sequência e é denotado por W_0. Um n-bloco W em Σ_d é uma sequência finita com n símbolos, isto é: $W = a_1, \ldots, a_n$, onde $a_i \in A_d$, para todo $i = 1, \ldots, n$. n é chamado* *de comprimento de W e denotamos como $|W| = n$, no caso de W_0, temos $|W_0| = 0$. Dado um n-Bloco $W = a_1, \ldots, a_n$ definimos um subbloco de W como um bloco da forma $a_i a_{i+1}, \ldots, a_j$, onde $1 \leq i, j \leq n$, por conveção o bloco vazio W_0 é subbloco de todo bloco.*

Observação 1.1.3 Dado um ponto $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}$, $i, j \in \mathbb{Z}, i \leq j$, denotamos o bloco com coordenadas em x desde a posição i até a posição j por $x_{[i,j]} = x_i x_{i+1}, \ldots, x_j$ e no caso em que $i < j$ define-se $x_{[j,i]}$ por o bloco vazio W_0. Além disto, é conveniente definir $x_{[i,j)} = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}$, $x_{(i,j]} = x_{i+1}, \ldots, x_j$, $x_{(i,j)} = x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}$. Por extensão usamos $x_{[i,\infty)} = x_i, x_{i+1}, \ldots$ a sequência infinita à direita(a qual não é bloco pois tem comprimento infinito) e do mesmo modo $x_{(-\infty,j]} = \ldots, x_{i-1}, x_i$. O $(2n+1)$-Bloco central de x é dado por $x_{[-n,n]} = x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n$, às vezes escreve-se x_i por $x_{[i]}$, e também dizemos que os blocos $x_{[i,j]}$ e $y_{[i,j]}$ são iguais e denota-se por $x_{[i,j]} = y_{[i,j]}$ se $x_k = y_k$, para todo $i \leq k \leq j$.

Definição 1.1.4 *Dados os blocos $W = a_1, \ldots, a_n$, $W' = b_1, \ldots, b_m$, definimos a concatenação deles como sendo o bloco $W \wedge W' = a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$.*

Note que $|W \wedge W'| = n + m = |W| + |W'|$ e sendo que geralmente, $W \wedge W'$ não é o mesmo que $W' \wedge W$, apesar deles passuirem o mesmo comprimento. Por conveção dado um bloco W escrevemos $W_0 \wedge W = W \wedge W_0 = W$, onde W_0 é o bloco vazio.

Dado um bloco W e $n \in \mathbb{N}$, denotamos a concatenação de n-copias de W por W^n e $W^0 = W_0$. Assim temos uma boa lei de expoentes, isto é:

$$W^n \wedge W^m = W^m \wedge W^n = W^{m+n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado $u \in A_d$ denotamos por u^∞ a sequência $\ldots, u, \ldots$. Agora definimos a seguinte função $d_{\frac{1}{2}} : \Sigma_d \times \Sigma_d \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$d_{\frac{1}{2}}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \text{se } x \neq y, x_0 = y_0, n = \max\{r \geq 0 : x_{[-r,r]} = y_{[-r,r]}\} \\ 2 & \text{se } x \neq y, x_0 \neq y_0 \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

Quando escrevemos $r \geq 0$ queremos dizer que $r \in \mathbb{N}_0$. Note que $x = y$, implica dizer que $x_n = y_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, $x \neq y$, quando existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x_n \neq y_n$.

Agora daremos a seguinte proposição que vai nos permitir tornar Σ_d como um espaço métrico.

Proposição 1.1.5 *$d_{\frac{1}{2}}$ é uma métrica para Σ_d.*

Demonstração. Pela definição de $d_{\frac{1}{2}}$, já temos a propriedade simétrica e também que $d_{\frac{1}{2}}(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$ em Σ_d. Assim, precisamos apenas provar que vale também a desigualdade triangular. Para tal, consideremos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_d$.

No caso de $x = y$, a desigualdade triangular vale por definição. Suponhamos portanto $x \neq y$. Logo, existe algum $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x_n \neq y_n$. Consideremos, em valor absoluto, o menor valor possível de n tal que $x_n \neq y_n$. Desta forma, temos que vale o seguinte:

$$x_n \neq z_n \text{ ou } y_n \neq z_n.$$

Suponhamos que seja $x_n \neq z_n$. Portanto, por definição de $d_{\frac{1}{2}}$, temos que

$$d_{\frac{1}{2}}(x,y) \leq d_{\frac{1}{2}}(x,z).$$

Logo, $d_{\frac{1}{2}}(x,y) \leq d_{\frac{1}{2}}(x,z) + d_{\frac{1}{2}}(y,z)$, como queríamos. ■

Observação 1.1.6 Dados um ponto $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ em Σ_d, um número natural $n \in \mathbb{N}$ e um número real $r > 0$ tal que $r \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ temos que a bola aberta de centro x e raio r : $B_r(x) := B(x,r) = \{y \in \Sigma_d : d_{\frac{1}{2}}(y,x) < r\}$, escreve-se como:

$$B_r(x) := B(x,r) = \{y \in \Sigma_d : y_{[-n,n]} = x_{[-n,n]}\}.$$

Passamos a definir alguns conjuntos conhecidos em Dinâmica Simbólica como *Cilindros* os quais têm relação com a topologia do espaço de sequências de símbolos, como iremos ver daqui a pouco.

Definição 1.1.7 Dado um bloco $W = w_1, \ldots, w_{|W|}$ em Σ_d e $k \in \mathbb{Z}$ definimos um cilindro da seguinte maneira: $C_k(W) = \{x \in \Sigma_d : x_{[k,k+|W|-1]} = W\}$, onde $x_{[k,k+|W|-1]} = W$ significa que $x_i = w_{i-k+1}$, para todo $i = k, \ldots, k+|W|-1$.

Note que, dado $n \in \mathbb{N}_0$ e um $(2n+1)$-bloco central $x_{[-n,n]} = x_{-n}, ..., x_{-1}, x_0, x_1, ..., x_n$ associado a $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, temos que o cilindro $C_{-n}(x_{[-n,n]}) = B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x)$. De fato, tomando o ponto $y \in C_{-n}(x_{[-n,n]})$ tem-se $y_{[-n,n]} = x_{[-n,n]}$, logo $d_{\frac{1}{2}}(y,x) \leq \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ e assim $y \in B_{1/2^{n-1}}(x)$. Por outro lado, se $z \in B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x)$, então $d_{\frac{1}{2}}(z,x) < \dfrac{1}{2^{n-1}}$, segue que $d_{\frac{1}{2}}(z,x) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ logo $z_{[-m,m]} = x_{[-m,m]}$, para algum $m \in \mathbb{N}, m \geqslant n$, em particular $z_{[-n,n]} = x_{[-n,n]}$ e assim obtemos que $z \in C_{-n}(x_{[-n,n]})$.

Agora, mostraremos umas propriedades básicas de topologia para os cilindros.

Proposição 1.1.8 *Todo cilindro é aberto e fechado.*

Demonstração. Dados um bloco W, $|W| \geqslant 1$ e $k \in \mathbb{Z}$. Consideremos o cilindro

$$C_k(W) = \{x \in \Sigma_d : x_{[k,k+|W|-1]} = W\}.$$

Afirmação 1. $C_k(W)$ é aberto.

Seja $x \in C_k(W)$ então $x_{[k,k+|W|-1]} = W$. Tomando $n = max\{|k|, |k+|W|-1|\}$ temos que:

$$B_{1/2^{n-1}}(x) = C_{-n}(x_{[-n,n]}) \subseteq C_k(W).$$

Afirmação 2. $C_k(W)$ é fechado ou equivalentemente $(C_k(W))^c$ é aberto.

Suponhamos por absurdo que exista $y \in (C_k(W))^c$ de tal maneira que para todo $\epsilon > 0$ tem-se $B_\epsilon(y) \nsubseteq (C_k(W))^c$, isto é, $B_\epsilon(y) \cap (C_k(W)) \neq 0$. Como $y \notin C_k(W)$ tem-se $y_{[k,k+|W|-1]} \neq W$, existindo assim um $j \in \{k, k+1, ..., k+|W|-1\}$ tal que $y_j \neq W_j$. Tomando $\epsilon_0 = \dfrac{1}{2^{|j|-1}}$ temos que $B_{\epsilon_0}(y) \cap (C_k(W)) \neq \emptyset$, logo vai existir um ponto

$$z \in B_{\epsilon_0}(y) \cap C_k(W)$$

Assim, temos $d_{\frac{1}{2}}(z, y) < \dfrac{1}{2^{|j|-1}}$, ou seja $d_{\frac{1}{2}}(z, y) \leq \dfrac{1}{2^{|j|}}$, e como consequência $z_{[-|j|,|j|]} = y_{[-|j|,|j|]}$ e assim $z_j = y_j$. Também tem-se $z_{[k,k+|W|-1]} = W$ e logo $z_j = W_j$. Obtendo $y_j = W_j$, o qual é absurdo. Portanto para cada $y \in (C_k(W))^c$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(y) \subseteq (C_k(W))^c$, logo $(C_k(W))^c$ é aberto e assim concluimos que $C_k(W)$ é fechado. ■

Observação 1.1.9 Pela Observação feita acima e a Proposição 1.1.8, a coleção de cilindros resulta ser uma base para a topologia do espaço de sequências de símbolos, isto é, todo aberto pode-se expressar como uma união finita de cilindros. Disto, segue que dada uma sequência $(x_n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{Z}})_{n\in\mathbb{N}}$ e um ponto $x \in \Sigma_d$, dizer que x_n coverge para x quando $n \longrightarrow +\infty$, é equivalente a dizer que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ com $k \geqslant k_0$, tem-se $x^k_{[-n,n]} = x_{[-n,n]}$.

Agora, mostraremos mais uma propriedade básica em topologia para nosso espaço de sequências de d símbolos, propriedade importante considerada em nosso trabalho.

Teorema 1.1.10 *O espaço métrico $(\Sigma_d, d_{\frac{1}{2}})$ é compacto.*

Demonstração. Seja a sequência $(x_n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{Z}})_{n=1}^\infty$ em Σ_d. Para $k^{'} = 1$, pelo fato da sequência $(x_0^n)_{n=1}^\infty$ tomar valores em $\{1, 2, \ldots, d\}$, vai existir uma subsequência $(x_0^{n_k^1})_{k=1}^\infty$ tal que todos seus termos assumem o mesmo valor, o qual vamos denotar por x_0. Assim, a subsequência $(x_{n_k^1} = (x_r^{n_k^1})_{r\in\mathbb{Z}})_{k=1}^\infty$ de $(x_n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{Z}})_{k=1}^\infty$ satisfaz: $x_0^{n_k^1} = x_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomemos o ponto $x_{n_1} = x_{n_1^1} = (x_r^{n_1^1})_{r\in\mathbb{Z}}$ o qual satisfaz: $x_0^{n_1^1} = x_0$. Novamente temos que a sequência $(x_1^{n_k^1})_{k=1}^{\infty}$ toma valores em $\{1, 2, \ldots, d\}$. Logo existe uma subsequência $(x_1^{m_k^2})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_1^{n_k^1})_{k=1}^{\infty}$ para a qual todos seus termos assumem o mesmo valor, denotamos esse valor por x_1 e assim a nossa subsequência $(x_{m_k^2} = (x_r^{m_k^2})_{r\in\mathbb{Z}})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_{n_k^1} = (x_r^{n_k^1})_{r\in\mathbb{Z}})_{k=1}^{\infty}$ satisfaz:

$$x_0^{m_k^2} = x_0 \text{ e } x_1^{m_k^2} = x_1, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Novamente temos que a sequência $(x_{-1}^{m_k^2})_{k=1}^{\infty}$ toma valores em $\{1, 2, \ldots, d\}$. Existe portanto, uma subsequência $(x_{-1}^{n_k^2})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_{-1}^{m_k^2})_{k=1}^{\infty}$ tal que assume o mesmo valor, denotamos esse valor por x_{-1} e assim a subsequência $(x_{n_k^2} = (x_r^{n_k^2})_{r\in\mathbb{Z}})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_{m_k^2} = (x_r^{m_k^2})_{r\in\mathbb{Z}})_{k=1}^{\infty}$ satisfaz:

$$x_{-1}^{n_k^2} = x_{-1}, \ x_0^{n_k^2} = x_0 \text{ e } x_1^{n_k^2} = x_1, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Dessa maneira tomamos $n_2 = \min\{n_k^2 \in \mathbb{N} : n_k^2 > n_1\}$ e temos o ponto $x_{n_2} = (x_r^{n_2})_{r\in\mathbb{Z}}$ o qual satisfaz: $x_{-1}^{n_2} = x_{-1}$, $x_0^{n_2} = x_0$ e $x_1^{n_2} = x_1$. Continuando o processo, para $k' = i > 1$ temos uma subsequência $(x_{n_k^i} = (x_r^{n_k^i})_{r\in\mathbb{Z}})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{Z}})_{k=1}^{\infty}$ e $x_i \in \{1, 2, ..., d\}$ tal que:

$$x_j^{n_k^i} = x_j, \text{ para } j = -i, -i+1, \ldots, 0, \ldots, i-1, i, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Logo, tomando $n_i = \min\{n_k^i \in \mathbb{N} : n_k^i > n_{i-1}\}$ temos o ponto $x_{n_i} = (x_r^{n_i})_{r\in\mathbb{Z}}$ para o qual satisfaz $x_j^{n_i} = x_j$. Obtendo assim para cada $i \in \mathbb{N}$ uma sequência finita $x_{-i}, x_{-i+1}, ..., x_{-1}, x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_i$ em $\{1, 2, ..., d\}$ satisfazendo (1.1). Tomando o ponto $x = (x_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ o qual está em Σ_d, a subsequência $(x_{n_i} = (x_r^{n_i})_{r\in\mathbb{Z}})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{Z}})_{k=1}^{\infty}$ converge para x, já que para cada $i \in \mathbb{N}$ tem-se $x_{[-i,i]}^{n_k} = x_{[-i,i]}$, para todo $k \geqslant i$. Portanto x_{n_i} converge para x, quando $i \to +\infty$. Concluimos assim que o espaço métrico $(\Sigma_d, d_{\frac{1}{2}})$ é compacto. ■

Observação 1.1.11 Quando nosso alfabeto A não é finito, $(\Sigma_A, d_{\frac{1}{2}})$ não é compacto. Por exemplo para $A = \mathbb{N}$ consideremos a sequência $(x_n = (x_r^n)_{n\in\mathbb{Z}})_{n=1}^{\infty}$ em Σ_A tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $x_0^n = n$ e $x_r^n = 1$, para todo $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Assim essa sequência não possui uma subsequência convergente, uma vez que $d_{\frac{1}{2}}(x_n, x_m) = 2$. É por isso que nosso alfabeto será finito para assim ter a propriedade de compacidade, propriedade que terá importância em nosso trabalho.

1.1.2 A Função Shift

Agora vamos definir uma função sobre Σ_d, a qual é de grande importância dentro da teoria de Sistemas Dinâmicos.

Definição 1.1.12 *Dado o espaço* $\Sigma_d = \{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : x_k \in \{1, ..., d\}, \forall k \in \mathbb{Z}\}$, *definimos a função Shift Bilateral* (*ou simplesmente Shift*) $\sigma\colon \Sigma_d \to \Sigma_d$, *dada por:*

$$\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ y_n = x_{n+1},\ \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Tentamos ilustrar um pouco mais a função shift.

$$\begin{array}{c}
\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}})_{[-r]} = x_{-r+1} \\
\vdots \\
\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}})_{[-1]} = x_0\ . \\
\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}})_{[0]} = x_1 \\
\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}})_{[1]} = x_2 \\
\vdots \\
\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}})_{[r]} = x_{r+1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc}
x = & \ldots x_{-2} & & x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 \ldots \\
\big\downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\
\sigma(x) = & \ldots x_{-1} & & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \ldots
\end{array}$$

Observamos que σ faz um deslocamento das coordenadas para a esquerda, isto é, a função σ é como um *tic-tac* do relógio movendo-se um passo no futuro.

Uma boa propriedade da função shift é que ela é bijetiva sendo sua inversa a função $\sigma^{-1} : \Sigma_d \to \Sigma_d$ dada por:

$$\sigma^{-1}((y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ x_n = y_{n-1},\ \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja:

$$\begin{array}{c}
\sigma^{-1}((y_n)_{n\in\mathbb{Z}})_{[-r]} = x_{-r-1} \\
\vdots \\
\sigma^{-1}(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}})_{[-1]} = y_{-2}\ . \\
\sigma^{-1}((y_n)_{n\in\mathbb{Z}})_{[0]} = y_{-1} \\
\sigma^{-1}((y_n)_{n\in\mathbb{Z}})_{[1]} = y_0 \\
\vdots \\
\sigma^{-1}((y_n)_{n\in\mathbb{Z}})_{[r]} = y_{r-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc}
x = & \ldots y_{-2} & y_{-1} & & y_0 & y_1 & y_2 \ldots \\
\big\downarrow{\scriptstyle\sigma^{-1}} & & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\
\sigma^{-1}(x) = & \ldots y_{-3} & y_{-2} & & y_{-1} & y_0 & y_1 \ldots
\end{array}$$

A composição de σ n-vezes ($n \in \mathbb{N}$), isto é, $\sigma^n = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ ... \circ \sigma}_{n-vezes}$ desloca cada sequência n-lugares para a esquerda. Enquanto para σ^{-n} desloca cada sequência n-lugares para a direita.

Em Topologia temos os chamados invariantes topológicos nos quais se utiliza um certo tipo especial de funções: homeomorfismos. Na seguinte proposição veremos que nossa função shift é um homeomorfismo.

Proposição 1.1.13 *A função shift* $\sigma\colon \Sigma_d \longrightarrow \Sigma_d$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração. Observe que já temos que σ é bijetiva. Assim, basta provarmos que σ é contínua. O que implica que σ é um homeomorfismo, dado que uma bijeção contínua em um compacto (pelo Teorema 1.1.10 temos que Σ_d é compacto) é um homeomorfismo. Então, seja $x \in \Sigma_d$ e $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^n} < \epsilon$. Logo, tomando $r = \dfrac{1}{2^n}$, temos que para cada $y \in B_r(x)$ tem-se $d_{\frac{1}{2}}(y,x) < \dfrac{1}{2^n}$, isto é, $d_{\frac{1}{2}}(y,x) \leq 1/2^{n+1}$. Segue que $y_{[-n-1,n+1]} = x_{[-n-1,n+1]}$. Logo, tem-se:

$$\sigma(y)_{[-n,n]} = y_{-n+1}, \ldots, y_0, \ldots, y_{n+1} = x_{-n+1}, \ldots, x_0, \ldots, x_{n+1} = \sigma(x)_{[-n,n]}.$$

Portanto $d(\sigma(y), \sigma(x)) \leq \dfrac{1}{2^n} < \epsilon$. Provando desta maneira que σ é contínua em x e sendo x arbitrário, concluímos que σ é contínua em Σ_d. ∎

Definição 1.1.14 *Dada uma função $f\colon X \longrightarrow X$ e um ponto $p \in X$, dizemos que p é um ponto fixo de f se $f(p) = p$. Dizemos que que p é um ponto periódico de f de período $\tau(p)$ se $f^{\tau(p)}(p) = p$. Denotamos o conjunto $Fix(f) = \{x \in X : f(x) = x\}$ dos pontos fixos de f e o conjunto $Per_n(f) = \{x \in X : x$ é um ponto periódico de período $n\}$. Mais geral temos o conjunto $Per(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(f)$ dos pontos periódicos de f.*

Agora, mostraremos que os pontos periódicos da função shift são densos em Σ_d. Isto de certa maneira, implica o quão complexa é a função shift.

Proposição 1.1.15 *$Per(\sigma)$ é um conjunto denso em Σ_d.*

Demonstração. Para mostrar a densidade, mostraremos que $cl(Per(\sigma)) = \Sigma_d$. Seja $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ um ponto qualquer em Σ_d. Dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^n} < \epsilon$. Desta maneira tomamos o seguinte ponto em Σ_d, $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que para cada $i \in \{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}$ definimos $x_{j(2n+1)+i} = y_i,$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Isto é,

$$x = \ldots y_n \ldots y_{-1}y_0y_1 \ldots y_ny_{-n} \ldots y_{-1}y_0y_1 \ldots y_ny_{-n} \ldots y_{-1}y_0y_1 \ldots y_n \ldots$$

Portanto, por definição, $\sigma^{2n+1}(x) = x$ o que implica $x \in Per_{2n+1}(\sigma) \subset Per(\sigma)$. Além disso $x_{[-n,n]} = y_{[-n,n]}$, logo $d_{\frac{1}{2}}(x,y) = \dfrac{1}{2^n} < \epsilon$. Assim, $x \in B_\epsilon(y)$ e portanto $y \in cl(Per(\sigma))$. Provando que $\Sigma_d = cl(Per(\sigma))$ e assim a densidade. ∎

O tipo de funções que vamos definir na sequência, têm como propriedade característica o aumento da distância entre iterados de pontos próximos.

Definição 1.1.16 *Dado um homeomorfismo $f\colon (M,d) \longrightarrow (M,d)$, onde (M,d) é um espaço métrico, dizemos que f é expansivo se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que: se*

$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{Z}$, *então* $x = y$. *Segue que para cada par de pontos* $x, y \in M$ *com* $x \neq y$, *existe* $n_0 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) > \alpha$. *A constante* α *é chamada de constante de expansividade do homeomorfismo expansivo* f.

Outra propriedade importante da função shift é a expansividade.

Proposição 1.1.17 *A função Shift* $\sigma\colon (\Sigma_d, d_{\frac{1}{2}}) \longrightarrow (\Sigma_d, d_{\frac{1}{2}})$ *é expansiva.*

Demonstração. Consideremos $\alpha < 1$.
Sejam os pontos $x = (x_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ e $y = (y_r)_{r\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_d$ satisfazendo $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Afirmação $x = y$.

Suponhamos por absurdo $x \neq y$. Logo existe um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x_m \neq y_m$ e portanto $\sigma^m(x) \neq \sigma^m(y)$, pois $\sigma^m(x)_{[0]} = x_m \neq y_m = \sigma^m(y)_{[0]}$. Disto, segue que

$$d_{\frac{1}{2}}(\sigma^m(x), \sigma^m(y)) = 2 > 1 > \alpha.$$

Contradizendo a hipotese que $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. O que prova a afirmação. ∎

Definição 1.1.18 *Dada uma função* $f\colon X \longrightarrow X$, *onde* X *é um espaço topológico, dizemos que* f *é transitiva ou topologicamente transitiva se para cada par de abertos* U *e* V *em* X *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de modo que* $U \cap f^{-n_0}(V) \neq \emptyset$, *ou equivalentemente existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, *existe* $x \in U$, *tal que* $f^{n_0}(x) \in V$, *ou seja* $f^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$.

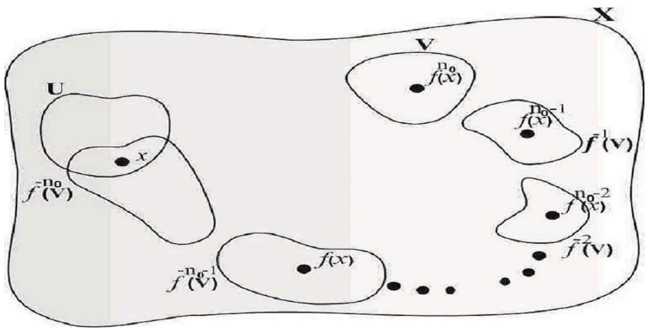


Figura 1.1: Função topologicamente transitiva

Assim, uma função topologicamente transitiva, garante a existência de pontos cuja órbita viaja de uma parte arbitrária do espaço a outra parte também arbitrária. Uma função topologicamente transitiva quer dizer que a órbita de um aberto qualquer do espaço "*visita*" em algum tempo outro aberto arbitrário, mas sem saber que para os tempos consecutivos continua "*visitando*". É assim que, damos a seguinte definição que nos fala sobre isso.

Definição 1.1.19 *Dada uma função $f\colon X \longrightarrow X$, onde X é um espaço topológico, dizemos que f é mixing ou topologicamente mixing se para cada par de abertos U,V em X existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, tem-se $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$ ou equivalentemente existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant n_0$, existe $x \in U$ de modo que $f^n(x) \in V$, ou seja $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

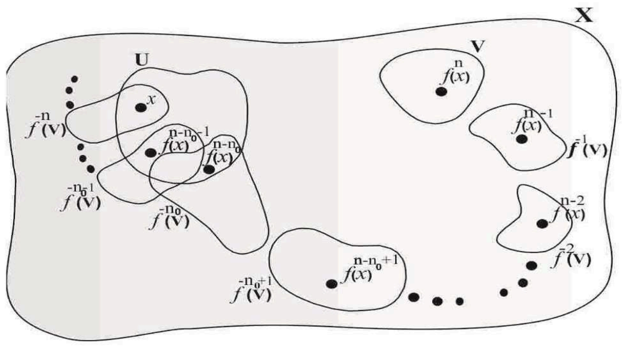


Figura 1.2: Função topologicamente mixing

Proposição 1.1.20 *A função shift $\sigma\colon \Sigma_d \longrightarrow \Sigma_d$ é topológicamente mixing.*

Demonstração. Da Observação 1.1.6, vamos mostrar que Σ_d é topologicamente mixing utilizando cilindros em vez de abertos. Dados os blocos U e V com comprimentos $|U|$, $|V|$ maiores que 0, e números inteiros $n, m \in \mathbb{Z}$ temos os cilindros:

$$C_n(U) = \{x \in \sigma_d : x_{[n,n+|U|-1]} = U\}.$$

$$C_m(V) = \{x \in \sigma_d : x_{[m,m+|V|-1]} = V\}.$$

caso : $n \leqslant m$.
Tomando $r_0 = |U|$, para cada $r \geqslant r_0$ definimos a seguinte sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que $x_{n+j-1} = u_j, 1 \leq j \leq |U|$ e $x_{m+r-1+j} = v_j, 1 \leq j \leq |V|$, onde os u_j, v_j são os termos dos blocos U e V respectivamente. Assim, $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in C_n(U)$ e $\sigma^r((x_k)_{k\in\mathbb{Z}})_{[m,m+|V|-1]} = V$. Logo, $\sigma^r((x_k)_{k\in\mathbb{Z}}) \in C_m(V)$ e portanto $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in C_n(U) \cap \sigma^{-r}(C_m(V))$. O caso $n > m$ é analógo. E assim, provamos que σ é topologicamente mixing. ■

1.2 Subshift do tipo finito

Nesta seção iremos definir um tipo especial de subconjunto no espaço das sequências de símbolos, mediante uma matriz com entradas 0 ou 1. Este subconjunto será invariante pela função shift, o que nos levará a estudarmos sua dinâmica. A saber, esta dinâmica terá boas propriedades, principalmente quando a matriz for *irredutível.*

Seja $A_{d\times d} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ uma matriz tal que $a_{ij} = 0$ ou 1. Um ponto $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em Σ_d é dito admissível com respeito a matriz A, quando $a_{x_n x_{n+1}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, definimos o conjunto

$$\Sigma_{A_{d\times d}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = x \in \Sigma_d : x \text{ é admissível com respeito a matriz } A_{d\times d}\}.$$

O conjunto $\Sigma_{A_{d\times d}}$ também é chamado de *Subshift de tipo finito* associado à matriz A. Mostraremos que o conjunto $\Sigma_{A_{d\times d}}$ é σ-invariante. Logo, podemos estudar a função shift restrita a este subconjunto $A_{d\times d} = (a_{ij})_{1\le i,j\le d}$. De fato, dado $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em $\Sigma_{A_{d\times d}}$ temos que $a_{\sigma(x)_{[i]}\sigma(x)_{[i+1]}} = a_{x_{i+1}x_{i+2}} = 1$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Segue que $\sigma(x) \in \Sigma_{A_{d\times d}}$ e portanto

$$\sigma(\Sigma_{A_{d\times d}}) \subseteq \Sigma_{A_{d\times d}}.$$

De fato, vale $\sigma(\Sigma_{A_{d\times d}}) = \Sigma_{A_{d\times d}}$, pois dado $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em $\Sigma_{A_{d\times d}}$ temos $a_{\sigma^{-1}(z)_{[i]}\sigma^{-1}(z)_{[i+1]}} = a_{z_{i-1}z_i} = 1$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Isto, implica que $z \in \sigma(\Sigma_{A_{d\times d}})$. Também temos que $\Sigma_{A_{d\times d}}$ é fechado, pois dado $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em $\overline{\Sigma_{A_{d\times d}}}$ e $\epsilon > 0$ temos:

$$B_\epsilon(y) \cap \Sigma_{A_{d\times d}} \neq \emptyset. \tag{1.2}$$

Disso, temos $y \in \Sigma_{A_{d\times d}}$ e portanto $\overline{\Sigma_{A_{d\times d}}} = \Sigma_{A_{d\times d}}$. Se fosse o caso em que $y \notin \Sigma_{A_{d\times d}}$, existiria um $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$a_{y_{n_0}y_{n_0+1}} = 0. \tag{1.3}$$

Tomamos o número real positivo $r = \dfrac{1}{2^{|n_0|}}$ e por (1.2) temos $B_r(y) \cap \Sigma_{A_{d\times d}} \neq \emptyset$. Assim, vai existir um ponto $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_d$ tal que $z \in B_r(y) \cap \Sigma_{A_{d\times d}}$. Segue que $d_{\frac{1}{2}}(z, y) < r$ e $a_{z_n z_{n+1}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo tem-se

$$d_{\frac{1}{2}}(z, y) \le \frac{1}{2^{|n_0|+1}} \text{ e } a_{z_{n_0}z_{n_0+1}} = 1. \tag{1.4}$$

Disso, obtemos $z_{[-|n_0|-1,|n_0|+1]} = y_{[-|n_0|-1,|n_0|+1]}$, o que implica que $z_{n_0} = y_{n_0}$ e $z_{n_0+1} = y_{n_0+1}$. Por (1.3) temos que $a_{z_{n_0}z_{n_0+1}} = 0$, contradizendo (1.4).

Definição 1.2.1 *Dada uma matriz $A_{d\times d} = (a_{ij})_{1\le i,j\le d}$ com $a_{ij} = 0$ ou 1, dizemos que $A_{d\times d}$ é irredutível se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge n_0$ tem-se que para cada $i, j \in \{1, \dots, d\}$, $a^n_{ij} > 0$. Sendo $a^n_{ij} > 0$ o termo da matriz $A^n_{d\times d}$ na i-ésima fila e j-ésima coluna.*

Definição 1.2.2 *Dados $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, um bloco $W := w_0 = i, w_1, \ldots, w_r = j$ em Σ_d e uma matriz $A_{d\times d} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ com $a_{ij} = 0$ ou 1, irredutível. Dizemos que W é possível em relação à matriz $A_{d\times d}$ se $a_{w_k w_{k+1}} = 1$, para todo $k \in \{1, \ldots, r-1\}$. Isto é equivalente a dizer que $a_{iw_1}a_{w_1w_2}, \ldots, a_{w_{r-1}j} = 1$ ou também equivale a dizer que existe um ponto $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em $\Sigma_{A_{d\times d}}$ e $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x_m = i$ e $x_{m+r} = j$, $x_{[m,m+r]} = W$.*

Observação 1.2.3 Consideremos uma matriz $A_{d\times d} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ com $a_{ij} = 0$ ou 1.
Da Definição 1.2.1 é fácil ver que as seguintes afirmações são equivalentes:
1. $A_{d\times d}$ é irredutível.
2. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$ tem-se que para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $a^n_{ij} > 0$.
3. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$ tem-se que para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $a^n_{ij} = \sum_{s=1}^{d^{n-1}} a^s_{is_1} \ldots a^s_{s_{n-1}j} > 0$.
4. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$ tem-se que para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, existe um bloco $W = is_1 \ldots s_{n-1}j$ de comprimento $n+1$ que é possível em relação a $A_{d\times d}$.
5. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$ tem-se que para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, existe um ponto $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em $\Sigma_{A_{d\times d}}$ e $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x_m = i$ e $x_{m+n} = j$.

Teorema 1.2.4 *Seja a matriz $A_{d\times d} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ com $a_{ij} = 0$ ou 1. A_{dxd} é irredutível se, e somente se, $\sigma_{|\Sigma_{A_{d\times d}}} : \Sigma_{A_{d\times d}} \longrightarrow \Sigma_{A_{d\times d}}$ é topologicamente mixing.*

Demonstração. Suponhamos que $A_{d\times d}$ seja irredutível. Consideremos os cilindros $C_k[U]$ e $C_k[V]$ com comprimentos $|U|$ e $|V|$ maiores que 0 e $k, l \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$C_k[U] \cap \Sigma_{A_{d\times d}} \neq \emptyset \;\text{ e }\; C_l[V] \cap \Sigma_{A_{d\times d}} \neq \emptyset.$$

Existem pontos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em $\Sigma_{A_{d\times d}}$ tais que $x \in C_k[U]$ e $y \in C_l[V]$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} a_{x_n x_{n+1}} =& 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e } x_{[k,k+|U|-1]} = U. \\ a_{y_n y_{n+1}} =& 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e } y_{[l,l+|V|-1]} = V. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Sem perda de generalidade podemos supor $k \leqslant l$.
Pelo Item 5 da Observação 1.2.3, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$ tem-se que para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, existe um bloco $W = w_0w_1 \ldots w_{n-1}w_n$ ($w_0 = i$ e $w_n = j$) de comprimento $n + 1$ que é possível em relação com $A_{d\times d}$, isto é:

$$a_{w_r w_{r+1}} = 1, \text{ para todo } \; r = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Logo, para $x_{k+|U|}, y_l \in \{1,\dots,d\}$ existe um bloco $W^{'} = x_{k+|U|}s_1 \dots s_{n-1}y_l$ possível, isto é:

$$a_{x_{k+|U|}s_1} = 1,\ a_{s_1s_2} = 1, \dots,\ a_{s_{n-1}y_l} = 1.$$

Definimos a seguinte sequência $z = (z_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_d$:

$$\begin{aligned} z_m &= x_m,\ \text{para todo } m \in \mathbb{Z}, m \le l + |U|,\\ z_{l+|U|+i} &= s_i,\ \text{para } i = 1,\dots,n-1 \text{ e}\\ z_{l+|U|+n+j-1} &= y_{l+j-1},\ \text{para todo } j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $z_{[k,k+|U|-1]} = x_{[k,k+|U|-1]} = U$ temos $z \in C_k(U)$. Além disso, $\sigma^{n+|U|}(z)_{[l,l+|V|-1]} = y_{[l,l+|V|-1]} = V$, logo $\sigma^{n+|U|}(z) \in C_l(V)$. Mais ainda, pela definição de z e por (1.5) temos que $z \in \Sigma_{A_{d\times d}}$ e portanto:

$$z \in C_k(U) \cap \Sigma_{A_{d\times d}} \cap \sigma^{-(n+|U|)}(C_k(V) \cap \Sigma_{A_{d\times d}}). \tag{1.6}$$

Tomando $r_0 = n + |U| \in \mathbb{N}$, para todo $r \in \mathbb{N}, r \geqslant r_0$ de (1.6) tem-se que: $z \in C_k(U) \cap \Sigma_{A_{d\times d}} \cap \sigma^{-r}(C_k(V) \cap \Sigma_{A_{d\times d}})$.

Reciprocamente, suponhamos que $\sigma_{|\Sigma_{A_{d\times d}}}$ seja topologicamente mixing. Para cada $i, j \in \{1,\dots,d\}$ consideremos os cilindros:

$$C_0(i) = \{x \in \Sigma_d : x_0 = i\}.$$

$$C_0(j) = \{y \in \Sigma_d : y_0 = j\}.$$

Os quais são abertos (Proposição 1.1.8). E assim, temos que $C_0(i)\cap\Sigma_{A_{d\times d}}$ e $C_0(j)\cap\Sigma_{A_{d\times d}}$ são abertos em $\Sigma_{A_{d\times d}}$. Pelo fato de $\sigma_{|A_{d\times d}}$ ser topologicamente mixing existe um número $r_{i,j} \in \mathbb{N}$ tal que para cada $r \in \mathbb{N}, r \geqslant r_{i,j}$ temos que:

$$C_0(i) \cap \Sigma_{A_{d\times d}} \cap \sigma^{-r}_{|A_{d\times d}}(C_0(j) \cap \Sigma_{A_{d\times d}}) \neq \emptyset.$$

O que implica a existência de um ponto $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in C_0(i)\cap\Sigma_{A_{d\times d}}\cap\sigma^{-r}_{|A_{d\times d}}(C_0(j)\cap\Sigma_{A_{d\times d}})$. Segue que $z \in C_0(i)$ e assim $z_0 = i$. Como $z \in \Sigma_{A_{d\times d}}$, logo $a_{z_nz_{n+1}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, como $\sigma^r(z) \in C_0(j)$ temos $\sigma^r(z)_{[0]} = j$, isto é, $z_r = j$. Dessa maneira obtemos o bloco $W = z_0 = iz_1 \dots z_{r-1}z_r = j$ o qual é possível em relação à matriz $A_{d\times d}$ e portanto:

$$a^r_{ij} = \sum_{s=1}^{d^{r-1}} \underbrace{a^s_{im} \dots a^s_{nj}}_{\text{r-termos}}$$

$$= a_{iz_1} \dots a_{z_{r-1}j} + \sum_{s}^{d^{r-1}-1} \underbrace{a^s_{im} \dots a^s_{nj}}_{\text{r-termos}}$$

$$= 1 + \sum_{s}^{d^{r-1}-1} \underbrace{a^s_{im} \dots a^s_{nj}}_{\text{r-termos}} > 0.$$

Então ${a^r}_{ij} > 0$. Desta maneira, tomamos $r_0 = \max_{1 \leq i,j \leq n} \{r_{i,j}\} > 0$. Logo, para cada $1 \leq i, j \leq n$ tem-se: $a^r_{ij} > 0$, para todo $r \geq r_0$. Portanto $A_{n\times n}$ é irredutível.

$\blacksquare$

Proposição 1.2.5 *Dado $\Sigma_{A_{n\times n}}$ o Subshift do tipo finito. Se para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que em A^{n_0} é tal que $a^{n_0}_{i,j} > 0$, então $\sigma_{|\Sigma_{A_{n\times n}}}$ é topologicamente transitivo.*

Demonstração. Dados $k \in \mathbb{Z}$, n e $m \in \mathbb{N}$. Sejam $C_k(a_{k_1}, \dots, a_{k_n})$ e $C_k(b_{l_1}, \dots, b_{l_m})$ cilindros tais que intersectam $\Sigma_{A_{n\times n}}$. Isto é, $a_{k_1}, \dots, a_{k_n}$ e $b_{l_1}, \dots, b_{l_m}$ são sequências permissíveis para $A_{n\times n}$. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e elementos $c_1, \dots c_{n_0-1} \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$a_{k_n} c_1 \dots c_{n_0-1} b_{l_1}.$$

seja um pedaço de sequência permissível para $A_{n\times n}$. Dados os pontos $x = (x_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ e $y = (y_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ em $\Sigma_{A_{n\times n}}$ tais que $x \in C_k(a_{k_1}, \dots, a_{k_n})$ e $y \in C_k(b_{l_1}, \dots, b_{l_m})$, tomemos o seguinte ponto: $z = (z_r)_{r\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{A_{n\times n}}$:

$$\begin{aligned} z_r &= x_r, \text{ para todo } r \in \mathbb{Z}, m \leq k + k_n - 1, \\ z_{k+k_n-1+i} &= c_i, \text{ para } i = 1, \dots, n_0 - 1 \text{ e} \\ z_{k+k_n-1+n_0-1+j} &= y_{k-1+j}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Isto é:

$$z : \dots a_{k_1} \dots a_{k_n} c_1 \dots c_{n_0-1} b_{l_1} \dots b_{l_m} \dots$$

Logo, $z \in C_k(a_{k_1}, \dots, a_{k_n})$ e $\sigma^{n_0+k_n}(z) \in C_k(b_{l_1}, \dots, b_{l_m})$. Portanto

$$\sigma^{n_0+k_n}(C_k(a_{k_1}, \dots, a_{k_n})) \cap C_k(b_{l_1}, \dots, b_{l_m}) \neq \emptyset.$$

$\blacksquare$

Na seguinte proposição mostraremos que sob uma certa condição da matriz é possível ter densidade dos pontos periódicos.

Proposição 1.2.6 *Seja a matriz $A_{d\times d} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$, com $a_{ij} = 0$ ou 1. Se para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que em A^{n_0} é tal que $a^{n_0}_{i,j} > 0$, então $Per(\sigma_{|A_{d\times d}})$ é denso em $\Sigma_{A_{dxd}}$.*

Demonstração. Da hipótese, temos que para cada $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{ij}^{n_0} > 0$, e assim, vai existir um bloco possível $W = iw_1 \ldots w_{n_0-1}j$. Dado $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^k} < \epsilon$. Tomando um ponto $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{A_{d\times d}}$, temos que:

$$a_{y_n}a_{y_{n+1}} = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Logo, para $y_k, y_{-k} \in \{1, \ldots, d\}$ existe um número $k_0 \in \mathbb{N}$ e um bloco possível $U = y_k s_1 \ldots s_{k_0-1} y_{-k}$. Isto é:

$$a_{y_k s_1} = 1, a_{s_1 s_2} = 1, \ldots, a_{s_{k_0-1} y_{-k}} = 1. \tag{1.8}$$

Agora, definimos o seguinte ponto:

$$z = \ldots y_{-k} \ldots y_0 \ldots y_k s_1 \ldots s_{k_0-1} y_{-k} \ldots y_{-1} y_0 y_1 \ldots y_k s_1 \ldots s_{k_0-1} \ldots.$$

Por definição $d_{\frac{1}{2}}(z, y) \leq \dfrac{1}{2^k} < \epsilon$, logo $z \in B_\epsilon(y)$. Por (1.7), (1.8) tem-se que $z \in \Sigma_{A_{d\times d}}$ e assim $z \in B_\epsilon(y) \cap \Sigma_{A_{d\times d}}$. Além disso, pela definição de z temos que $\sigma^{2k+k_0}(z) = z$ o que implica $z \in Per_{2k+K_0}(\sigma_{|\Sigma_{A_{d\times d}}}) \subseteq Per(\sigma_{|\Sigma_{A_{d\times d}}})$. Disto, temos que $z \in (B_\epsilon(y) \cap \Sigma_{A_{d\times d}}) \cap Per(\sigma_{|\Sigma_{A_{d\times d}}})$. Mostrando dessa maneira que

$$(B_\epsilon(y) \cap \Sigma_{A_{d\times d}}) \cap Per(\sigma_{|\Sigma_{A_{d\times d}}}) \neq \emptyset, \text{para todo } \epsilon > 0.$$

Isto é, $y \in \overline{Per(\sigma_{|\Sigma_{A_{d\times d}}})}$ e sendo y arbitrário concluímos $A_{d\times d} = \overline{Per(\sigma_{|\Sigma_{A_{d\times d}}})}$.

■

1.3 Dinâmica topológica

Sejam X um espaço topólogico, $f\colon X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua, e $x \in X$. Chamamos a *órbita futura* de x ao conjunto $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_0^+\}$. No caso de f ser um homeomorfismo, definimos a *órbita passada* de x como o conjunto $\mathcal{O}^-(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_0^-\}$. Neste caso dizemos que o conjunto $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} = O^+(x) \cup O^-(x)$ é a *órbita de x*. Estamos considerando $\mathbb{Z}_0^+$ como o conjunto dos números inteiros positivos junto com o zero, analogamente para $\mathbb{Z}_0^-$ o conjunto dos números inteiros negativo junto com o zero.

Seja $A \subset X$. Dizemos que A é positivamente f-invariante se $f(A) \subset A$ e o caso de ser negativamente f-invariante quando $A \subset f(A)$. Assim A é f-invariante se é positivamente e negativamente f-invariante, isto é, $f(A) = A$.

Daremos na seguinte definição os conjuntos dos pontos de acumulação da órbita de pontos do espaço.

Definição 1.3.1 *Sejam X um espaço métrico compacto, $f\colon X \longrightarrow X$ uma função contínua. Dado $x \in X$, definimos*

$$\omega(x,f) = \{y \in M : \exists\ n_k \to +\infty \ tal\ que\ f^{n_k}(x) \to y\}.$$

que é o conjunto ω-limite de x (para f). No caso de f ser um homeomorfismo, definimos

$$\alpha(x,f) = \{z \in M : \exists\ m_k \to +\infty \ tal\ que\ f^{-m_k}(x) \to z\}.$$

é o conjunto α-limite de x (para f).

Intuitivamente o conjunto $\alpha(x,f)$ é onde a órbita de x *"nasce"* e $\omega(x,f)$ onde ela *"morre"*.

Observação 1.3.2 Note que $\alpha(x,f) = \omega(x,f^{-1})$ e $\omega(x,f) \neq \emptyset$ pelo fato de X ser um espaço métrico compacto. De fato, a sequência $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para um ponto em X. Analogamente, $\alpha(x,f) \neq \emptyset$. Neste texto vamos denotar $\omega(x,f)$ por $\omega(x)$ e $\alpha(x,f)$ por $\alpha(x)$, se não houver dúvida com respeito a função que estamos trabalhando. No caso de f ser um homeomorfismo e $p \in M$ um ponto periódico tem-se $\omega(p) = \alpha(p) = \mathcal{O}(p)$. Os conjuntos $\omega(x,f)$ e $\alpha(x,f)$ são conjuntos fechados e f-invariantes, para ver os detalhes da demostração veja [5], página 29.

Definição 1.3.3 *Sejam X um espaço métrico compacto, $f\colon X \longrightarrow X$ um homeomorfismo e $x \in X$ um ponto. O ponto $x \in X$ é dito recorrente no futuro (resp. no passado) se $x \in \omega(x)$ (resp. $x \in \alpha(x)$) . Isto, é equivalente a dizer x é recorrente no futuro (resp. no passado) se para qualquer vizinhança V de x existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in V$ (resp. existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-m}(x) \in V$). Se x é recorrente no futuro e no passado, dizemos que x é recorrente, isto é, para toda vizinhança V de x existem $n, m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$f^n(x), f^{-m}(x) \in V.$$

Denotamos o conjunto dos pontos recorrentes por $\mathcal{R}(f)$.

Note que, um ponto periódico $p \in X$ é recorrente, pois $p \in \mathcal{O}(p) = \omega(p) = \alpha(p)$, pela Observação 1.3.2.

Definição 1.3.4 *Sejam X um espaço métrico compacto e $f\colon X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Dizemos que $x \in X$ é um ponto não-errante se para cada vizinhança U contendo* *x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$, caso contrário dizemos que x é um ponto errante. Denotamos ao conjunto dos pontos não errantes para f como:*

$$\Omega = \Omega(f) = \{x \in M : x \text{ é não errante } \}.$$

Observação 1.3.5 Observe que todo ponto recorrente é não-errante. Na verdade o fecho do conjunto dos pontos recorrentes está contido no conjuntos dos pontos não-errantes. Além disso, $\Omega(f)$ é positivamente f-invariante e $\omega(x, f) \subset \Omega(f)$, no caso de f ser um homeomorfismo tem-se que $\Omega(f)$ é f-invariante e $\alpha(x, f) \subset \Omega(f)$, veja [5] página 29.

Definição 1.3.6 *Sejam X um espaço métrico compacto e $f\colon X \longrightarrow X$ um homeomorfismo. Definimos o conjunto limite de f como:*

$$L(f) = L_+(f) \cup L_-(f), \text{ onde } L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)} \text{ e } L_-(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \alpha(x)}.$$

Observemos que $L(f)$ é compacto e f-invariante. Damos a seguinte proposição cuja demostração pode ser vista em [5], página 31.

Proposição 1.3.7 *Seja X um espaço métrico compacto, $f\colon X \longrightarrow X$ um homeomorfismo. Tem-se $cl(Per(f)) \subset L(f) \subset \Omega(f)$.*

Assim como na topologia a equivalência entre espaços topológicos é dada pelos homeomorfismos, em sistemas dinâmicos é dada por um tipo especial de funções chamadas de *conjugações*.

Definição 1.3.8 *Sejam X e Y espaços métricos compactos, $f\colon X \to X$ e $g\colon Y \longrightarrow Y$ homeomorfismos. Dizemos que uma função $h\colon X \longrightarrow Y$ é uma conjugação de f e g se h é um homeomorfismo e $h \circ f = g \circ h$.*

Note que, na definição acima o fato de $h \circ f = g \circ h$ implica que:

$$h \circ f^n = g^n \circ h, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$
$$f^n \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

No próximo teorema mostraremos a importância das conjugações, mostrando que as dinâmicas conjugadas possuem as mesmas propriedades.

Teorema 1.3.9 *Sejam X e Y espaços métricos compactos e $f\colon X \longrightarrow X$, $g\colon Y \longrightarrow Y$ homeomorfismos, $h\colon X \longrightarrow Y$ uma conjugação de f e g e $x \in X$ um ponto. Então:*

1. *$h(Per(f)) = Per(g)$.*

2. $h(\omega(x,f)) = \omega(h(x),g)$.

3. $h(\alpha(x,f)) = \alpha(h(x),g)$.

4. $h(\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(g)$.

5. $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.

6. f *é topologicamente mixing se, e somente se,* g *é topologicamente mixing.*

7. f *é expansivo se, e somente se,* g *é expansivo.*

Demonstração. Item 1. De fato, seja $x \in Per(f)$ um ponto periódico de f com período n. Assim,

$$g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x).$$

Logo, $h(x) \in Per_n(g) \subseteq Per(g)$, o que nos permite concluir que $h(Per(f)) \subseteq Per(g)$. Por outro lado, seja $z \in Per(g)$ um ponto periódico de g com periodo m. Escrevendo $x = h^{-1}(z)$ temos que

$$f^m(x) = f^m(h^{-1}(z)) = h^{-1}(g^m(z)) = h^{-1}(z) = x.$$

Logo, $x \in Per_m(f) \subset Per(f)$ e assim $z = h(x) \in h(Per(f))$. Disto, seque que $Per(g) \subseteq h(Per(f))$ e portanto $h(Per(f)) = Per(g)$.

Item 2. Mostremos que $h(\omega(x,f)) = \omega(h(x),g)$. Dado $b \in h(\omega(x,f))$, existe um ponto $a \in \omega(x,f)$ tal que $b = h(a)$. Logo existe uma sequência de índices $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}, n_k \longrightarrow +\infty$, tal que $a = \lim\limits_{k\to+\infty} f^{n_k}(x)$. Logo, teremos

$$b = h(a) = h(\lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x)) = \lim_{k\to+\infty} h(f^{n_k}(x)) = \lim_{k\to+\infty} g^{n_k}(h(x)) \in \omega(h(x),g).$$

Isto nos permite mostrar a inclusão $h(\omega(x,f)) \subseteq \omega(h(x),g)$. Agora, vamos mostrar a outra inclusão $\omega(h(x),g) \subseteq h(\omega(x,f))$. Seja $y \in \omega(h(x),g)$, então existe uma sequência de índices $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $m_k \longrightarrow +\infty$ tal que

$$y = \lim_{k\to+\infty} g^{m_k}(h(x)) = \lim_{k\to+\infty} h(f^{m_k}(x)) = h(\lim_{k\to+\infty} f^{m_k}(x)) \in h(\omega(x,f)).$$

Item 3. Dado que h é também uma conjugação de f^{-1} e g^{-1}, pelo Item 2 temos que

$$h(\alpha(x,f)) = h(\omega(x,f^{-1})) = \omega(h(x),g^{-1}) = \alpha(h(x),g).$$

Como queriamos provar.

Item 4. Este item é uma implicação direta dos itens 2 e 3.

Item 5. Vejamos $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$. Para isto, dado $y \in h(\Omega(f))$ existe um ponto $x \in \Omega(f)$ tal que $y = h(x)$. Logo, tomando uma vizinhança aberta V de y e pelo fato de h ser um homeomorfismo temos que $h^{-1}(V)$ é também uma vizinhança aberta do ponto x. Como x é um ponto não errante para f, existe um número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{n_0}(h^{-1}(V)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Assim, existe um ponto $b \in X$ tal que $b \in f^{n_0}(h^{-1}(V))$ e $b \in h^{-1}(V)$. Logo, $h(b) \in V$ e existe um ponto (único) $a \in V$ tal que $b = f^{n_0}(h^{-1}(a))$ e portanto $b = h^{-1}(g^{n_0}(a))$. Segue que, $h(b) = g^{n_0}(a) \in g^{n_0}(V)$. Isto, mostra que $g^{n_0}(V) \cap V \supset \{h(b)\} \neq \emptyset$. Mostrando que $y \in \omega(g)$ e portanto a inclusão $h(\Omega(f)) \subseteq \Omega(g)$.

Por outro lado, seja $z \in \Omega(g)$. Devido à injetividade de h podemos tomar o ponto $x = h^{-1}(z)$. Dado U uma vizinhança aberta qualquer de x, então $h(U)$ é vizinhança aberta de z e sendo este um ponto não errante para g existe um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$g^{m_0}(h(U)) \cap h(U) \neq \emptyset.$$

Segue, que existe $c \in X$ tal que $c \in g^{m_0}(h(U)) \cap h(U) \neq \emptyset$. $h \circ f^{m_0} = g^{m_0} \circ h$. Isto é, $c \in h(f^{m_0}(U)) \cap h(U)$ e assim $h^{-1}(c) \in f^{m_0}(U) \cap U$. Obtemos que $x \in \Omega(f)$ e portanto $z = h(x) \in h(\Omega(f))$. Daí $\Omega(g) \subseteq h(\Omega(f))$.

Item 6. Supondo f topologicamente mixing, acontece que dados dois abertos U e V não vazios em Y, as imagens inversas $h^{-1}(U), h^{-1}(V)$, são abertos não vazios em X e existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $n \geq m$ tem-se

$$f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Assim, existe $z \in X$ tal que $z \in f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V)$, logo $h(z) \in V$ e existe um ponto $x \in U$ tal que $z = (f^n \circ h^{-1})(x)$. Pelo fato de h ser uma conjugação de f e g temos que:

$$h(z) = (h \circ f^n)(h^{-1}(x)) = (g^n \circ h)(h^{-1}(x)) = g^n(x) \in g^n(U).$$

Logo, $h(z) \in g^n(U) \cap V$, para todo $n \geq m$. Isto é, $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq m$. O que garante que g é topologicamente mixing. Reciprocamente, suponha que g é topologicamente mixing. Dado dois abertos $\widehat{U}$ e $\widehat{V}$ não vazios em X temos que $h(\widehat{U}), h(\widehat{V})$ são abertos em Y e existe $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $m \geq m_0$ tem-se

$$g^m(h^{-1}(\widehat{U})) \cap h^{-1}(\widehat{V}) \neq \emptyset.$$

Então, existe $z \in Y$ tal que $z \in g^m(h(\widehat{U})) \cap h(\widehat{V})$, logo $z \in g^m(h(\widehat{U}))$ e $z \in h(\widehat{V})$. Segue que $z \in h(f^n(\widehat{U}))$ e assim temos que $h^{-1}(z) \in f^n(\widehat{U}) \cap \widehat{V}$. Mostrando desta maneira que $f^n(\widehat{U}) \cap \widehat{V} \neq \emptyset$, para todo $n \geq m_0$ e portanto f é topologicamente mixing.

Item 7. Suponhamos que f é expansivo. Seja $\alpha > 0$ a constante de expansividade de f. Como $h^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ é um homeomorfismo, em particular contínua, e sendo Y compacto temos que h^{-1} é uniformemente contínua. Logo, existe $\beta > 0$ tal que para cada par de pontos $y_1, y_2 \in Y$ com $d_Y(y_1, y_2) < \beta$, implica que

$$d_X(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) < \alpha. \tag{1.9}$$

Sejam $y, z \in Y$ tal que

$$d_Y(g^n(y), g^n(z)) < \beta, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \tag{1.10}$$

Afirmação: $y = z$
De (1.9) e (1.10) temos que $d_X(h^{-1}(g^n(y)), h^{-1}(g^n(z))) < \alpha$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Daí temos que $d_X(f^n(h^{-1}(y)), f^n(h^{-1}(z))) < \alpha$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ (pois sendo h uma conjugação de f e g tem-se $h \circ f = g \circ h$, logo $f^n \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$). Como α é a constante de expansividade de f temos que $h^{-1}(y) = h^{-1}(z)$ e pela injetividade de h^{-1} concluimos que $y = z$. Portanto g é expansivo com constante de expasividade β.

Agora, suponhamos que g é expansivo. Pelo fato de $h\colon X \longrightarrow Y$ ser a conjugação de f e g temos que h é um homeomorfismo e $h \circ f = g \circ h$, logo $h^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ é um homemorfismo e $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$ e portanto h^{-1} é uma conjugação de g e f. E assim que pela afirmação feita acima já demostrada obtemos que f também é expansivo.

■

CAPÍTULO 2

HIPERBOLICIDADE

2.1 Hiperbolicidade local

Nesta primeira seção estudaremos pontos periódicos hiperbólicos para um difeomorfismo em uma variedade compacta M, n-dimensional, dotado de uma métrica Riemmaniana de classe C^r. Estes tipos de pontos permitem relacionar localmente a dinâmica de um difeomorfismo e sua parte linear. Isto será provado num teorema conhecido como o Teorema de *Hartman-Grobman.*

A métrica Riemanniana no fibrado tangente TM induz uma métrica em M, definida $d(x, y)$ como o mínimo dos comprimentos de curvas diferenciáveis, por partes, ligando x a y. Seja $r \geqslant 1$, $C^r(M) = \{g\colon M \longrightarrow M : g$ é uma função de classe $C^r\}$ dotada da norma C^r ou C^r-norma, formando um espaço completo, e induzindo uma topologia em $C^r(M)$, chamada topologia C^r ou C^r-topologia. Observemos que pelo Teorema da Função Inversa é possivel mostrar que o conjunto $Diff^r(M) = \{f\colon M \longrightarrow M : f$ é C^r-difeomorfismo$\}$ é aberto em $C^r(M)$.

Definição 2.1.1 *Sejam M uma variedade compacta, $f\colon M \longrightarrow M$ um homeomorfismo e Λ um subconjunto compacto f-invariante de M. Λ é dito isolado se existe uma vizinhança U de Λ em M tal que $\Lambda \subset int(U)$ e $\Lambda = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$.*

Definição 2.1.2 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in Per_n(f)$. Dizemos que p é um ponto hiperbólico se a aplicação linear $Df_p^n\colon T_pM \longrightarrow T_pM$ não possui autovalores no círculo $S^1 \subset \mathbb{C}$.*

Observação 2.1.3 Na definição acima denotamos *o espectro* de Df_p^n como o conjunto $spec(Df_p^n) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Df_p^n - \lambda I$ não é um isomorfismo $\}$. Logo, $p \in Per_n(f)$, será um ponto periódico hiperbólico de f se $spec(Df_p^n) \cap \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1\} = \emptyset$.

Por um resultado da *Teoria Espectral* existem subespaços E_p^s, E_p^u, Df_p^n-invariantes, e constantes $0 < \mu < 1$, $\lambda > 1$ tal que $T_pM = E_p^s \oplus E_p^u$, $spec(Df_p^n{}_{|E_p^s}) \subset \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| < \mu\}$, $spec(Df_p^n{}_{|E_p^u}) \subset \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| > \lambda\}$. Temos também que $Df_p^n{}_{|E_p^s}$ e $Df_p^n{}_{|E_p^u}$ são isomorfismos em E_p^se E_p^u, respectivamente. Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|Df_p^n{}_{|E_p^s}\| < C\mu^n \text{ e } \|Df_p^{-n}{}_{|E_p^s}\| > C\lambda^{-n}.$$

Os subespaços E_p^s e E_p^u são chamados de *Subespaços Estável e Instável no ponto* p, respectivamente.

Definição 2.1.4 *Uma transformação linear $A\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é dita hiperbólica se*

$$spec(A) \cap \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1\} = \emptyset.$$

Definição 2.1.5 *Sejam $A\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear, $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ um homeomorfismo e $r > 0$. Dizemos que A possui a propriedade de r-estabilidade se para cada homeomorfismo $G : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^m} \{\|(G - A)(x)\|\} < +\infty$ e $G - A$ tem constante de lipschitz menor que r, então G e A são conjugados. Dizemos que F tem constante de expansividade infinita se $\sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \{\|F^n(x) - F^n(y)\|\} = +\infty$, $x \neq y$.*

Agora, enunciamos o seguinte resultado cuja demostração será omitida e pode ser achada em [8].

Proposição 2.1.6 *Se $A\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear hiperbólica, então existe um $\epsilon > 0$ tal que A possui a propriedade de ϵ-estabilidade. Além disso, aqueles homeomorfismos G como na definição acima possuem constante de expansividade infinita.*

Se p é um ponto periódico de período n para um difeomorfismo f, então é um ponto fixo para f^n, por isto consideramos para estudos locais, pontos fixos hiperbólicos. Provaremos o Teorema de Hartman-Grobman, relacionando dinâmica de um difeomorfismo, em uma vizinhança do ponto fixo hiperbólico, com a dinâmica da sua parte linear, resultado que dá uma boa informação da *dinâmica* local.

Teorema 2.1.7 *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo. Se $p \in M$ é um ponto fixo hiperbólico de f, então f e Df_p são localmente conjugados. Isto é, existem vizinhanças U_p de p em M e V_0 de 0 em T_pM, e um homeomorfismo $h\colon U_p \longrightarrow V_0$ tal que $h \circ f = Df_p \circ h$.*

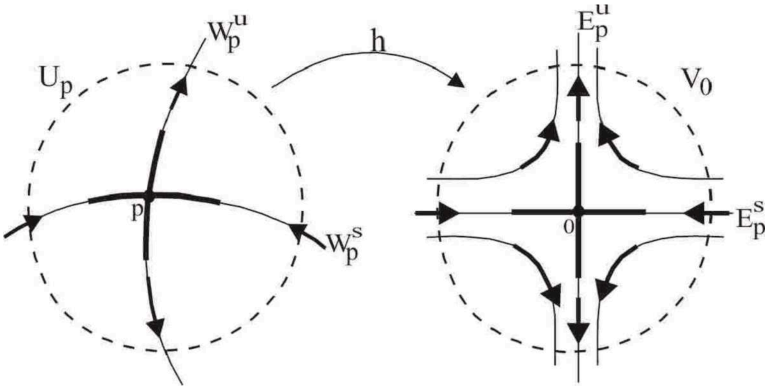


Figura 2.1: Conjugação local.

Demonstração. Pelo fato de f ser um difeomorfismo existe uma carta local $(\widehat{U}_p, \varphi)$ do ponto p, isto é, $\widehat{U}_p$ é um aberto de p e $\varphi\colon \widehat{U}_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo, com $\varphi(p) = 0$ tal que a expressão local $f_{\varphi\varphi} = \varphi f \varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo, com

$$f_{\varphi\varphi}(0) = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(0) = \varphi(f(p)) = \varphi(p) = 0.$$

Como p é um ponto fixo hiperbólico de f então Df_p é hiperbólica e desde que a matriz associada a Df_p coincide com a matriz de $D(f_{\varphi\varphi})_0$, temos que $D(f_{\varphi\varphi})_0$ é hiperbólica, ou seja $0 \in \mathbb{R}^n$ é ponto fixo hiperbólico da expressão local $f_{\varphi\varphi}$.

Vamos denotar $A = D(f_{\varphi\varphi})_0$. Pela Proposição 2.1.6 existe um $\epsilon > 0$ tal que A possui a propiedade de ϵ-estabilidade. Pela diferenciabilidade de $f_{\varphi\varphi}$ temos que $f_{\varphi\varphi}(x) = A(x) + r(x)$, onde $r \in C^1$ (pois $Dr_x = D(f_{\varphi\varphi})_x - A$ é uma diferença de duas funções contínuas) e $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{r(x)}{\|x\|} = 0$. Temos também

$$\begin{aligned} r(0) &= f_{\varphi\varphi}(0) - A(0) = 0, \text{ e} \\ Dr_0 &= D(f_{\varphi\varphi})_0 - A = A - A = 0. \end{aligned}$$

Pela diferenciabilidade de $f_{\varphi\varphi}$ e continuidade de Dr na origem, para $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que para $\|x_1\| < \delta_1$ e $\|x_2\| < \delta_2$ tem-se $\dfrac{\|r(x_1)\|}{\|x\|} < \dfrac{\epsilon}{16}$ e $\|Dr_{x_2}\| < \dfrac{\epsilon}{4}$. Logo, tomando $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ temos que para $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| < \delta_3$ implica

$$\|r(x)\| < \frac{\epsilon\|x\|}{16} \text{ e } \|Dr_x\| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Consideraremos um tipo especial de função $\rho\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $0 \leq \rho(x) \leq 1$, com $\rho(x) = 1$, se $\|x\| < \dfrac{\delta_3}{2}$, $\rho(x) = 0$, se $\|x\| \geqslant \delta_3$ e $\|\nabla\rho(x)\| \leq \dfrac{4}{\delta_3}$. Definamos também a função $G\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $G(x) = A(x) + \rho(x)r(x)$. Temos que $G(x) = f_{\varphi\varphi}(x)$, se

$\|x\| < \dfrac{\delta_3}{2}$, $G(x) = A(x)$, se $\|x\| \geqslant \delta_3$ e $\sup\{\|G(x) - A(x)\|, x \in \mathbb{R}^n\} < +\infty$. Também, temos que $DG_x = A + \rho(x)Dr_x + r^t(x)\nabla\rho(x)$. Daí segue que para $\|x\| \geqslant \delta_3$ tem-se que $DG_x - A$ é identicamente nula e para $\|x\| < \delta_3$, temos

$$\begin{aligned} \|DG_x - A\| &= \|\rho(x)Dr_x + r^t(x)\nabla\rho(x)\| \\ &\leq |\rho(x)|\|Dr_x\|\| + |r^t(x)|\|\nabla\rho(x)\| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon\|x\|}{16}\frac{4}{\delta_3} \\ &= \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4}\frac{\delta_3}{\delta_3} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $\|DG_x - A\| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e pela desigualdade do Teorema do Valor Médio temos que $G - A$ tem constante de lipschitz $\dfrac{\epsilon}{2}$, ou seja, menor que ϵ em $B_{\delta_3}(0)$. Pela ϵ-estabilidade de A, existe um homeomorfismo $H\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $H \circ G = A \circ H$. Desta maneira tomamos

$$\delta = \frac{\delta_3}{2},\ U_0 = B_\delta(0),\ V = H(B_\delta(0)) \text{ e } \ h_1 = H_{|V}.$$

Como $G = f_{\varphi\varphi}$ em U_0, então $h_1 \circ f_{\varphi\varphi} = (Df_{\varphi\varphi})_0 \circ h_1$. Finalmente, tomando $U_p = \varphi^{-1}(U_0)$ e $V_0 = \overline{\varphi}^{-1}(V)$, onde $\overline{\varphi}\colon T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo dado por $\overline{\varphi}([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$ ($\alpha\colon I \longrightarrow M$ um caminho diferenciável em M, I um intervalo aberto contendo 0 com $\alpha(0) = p$ e $[\alpha] = \{\beta\colon I \longrightarrow M : \beta$ um caminho diferenciável em M com $\beta(0) = p\ e\ (\varphi \circ \beta)'(0) = (\varphi \circ \alpha)'(0)\})$ e satisfaz $Df_p = \overline{\varphi}^{-1} \circ (Df_{\varphi\varphi})_0 \circ \overline{\varphi}$. O que implica que, para $h = \overline{\varphi}^{-1} \circ h_1 \circ \varphi$ e dado $x \in U_p$ temos

$$\begin{aligned} (h \circ f)(x) &= (\overline{\varphi}^{-1} \circ h_1 \circ (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}))(\varphi(x)) \\ &= \overline{\varphi}^{-1}((h_1 \circ f_{\varphi\varphi})(\varphi(x))) \\ &= \overline{\varphi}^{-1}(((Df_{\varphi\varphi})_0 \circ h_1)(\varphi(x))) \\ &= ((\overline{\varphi}^{-1} \circ (Df_{\varphi\varphi})_0 \circ \overline{\varphi}) \circ (\overline{\varphi}^{-1} \circ h_1 \circ \varphi))(x) \\ &= (Df_p \circ h)(x). \end{aligned}$$

Assim, obtemos que $h \circ f = Df_p \circ h$. O que prova o resultado.

$\blacksquare$

Observação 2.1.8 Note acima que G é expansivo em U_0 com constante de expansividade infinita, ou seja $f_{\varphi\varphi}$ é expansivo em U_0, o que quer dizer que, para $\widehat{x}, \widehat{y} \in U, \widehat{x} \neq \widehat{y}$, temos $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\{\|f^n_{\varphi\varphi}(\widehat{x}) - f^n_{\varphi\varphi}(\widehat{y})\|\} = +\infty$.

Agora, provaremos a não existência de órbitas inteiramente contidas numa vizinhança pequena de um ponto fixo hiperbólico.

Corolário 2.1.9 *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo. Se $p \in M$ é um ponto fixo hiperbólico de f, então existe uma vizinhança U_p de p tal que se $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}} \subset U_p, x \in M$, então $x = p$. Em particular, p é o único ponto fixo de f em U_p.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.7 temos a vizinhança $U_p = \varphi^{-1}(U_0) = \varphi^{-1}(B_\delta(0))$ do ponto p tal que a expressão local $f_{\varphi\varphi}$ em $B_\delta(0)$ é expansiva com constante de expansividade infinita. Suponhamos que exista um ponto $x \in M, x \neq p$, tal que $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}} \subset U_p$.
Dado que $x \neq p$ temos $\widehat{x} = \varphi(x) \neq \varphi(p) = 0$, seque que $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\{\|f^n_{\varphi\varphi}(\widehat{x}) - f^n_{\varphi\varphi}(0)\|\} = +\infty$ e sendo 0 um ponto fixo de $f_{\varphi\varphi}$, temos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\{\|f^n_{\varphi\varphi}(\widehat{x})\|\} = +\infty$. O que gera uma contradição, pelo fato que $f^n(x) \in U_p$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Temos, portanto, que $\varphi(f^n(x)) \in B_\delta(0)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, $f^n_{\varphi\varphi}(\widehat{x}) \in B_\delta(0)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, isto é, $\|f^n_{\varphi\varphi}(\widehat{x})\| < \delta$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, obtemos $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\{\|f^n_{\varphi\varphi}(\widehat{x})\|\} \leq \delta$. Portanto, para cada $x \in M, x \neq p$ temos que a órbita $\mathcal{O}(x) \nsubseteq U_p$. Isto é, existe um $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{n_0}(x) \notin U_p$.

■

2.2 Variedades invariantes

Na seção anterior, o Teorema 2.1.7 além de nos permitir encontrar equivalência local de dinâmicas, também nos fornece variedades topológicas estáveis e instáveis imersas na variedade M, as quais iremos apresentar nesta seção. Na próxima seção mostraremos a diferenciabilidade delas no *Teorema da Variedade Estável e Instável*.

Definição 2.2.1 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, $p \in M$ e $r \geqslant 0$. Definimos os seguintes conjuntos:*

$$W^s(p,f) = \{y \in M : d(f^n(y), f^n(p)) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty\} \text{ e}$$

$$W^u(p,f) = \{y \in M : d(f^{-n}(y), f^{-n}(p)) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty\}.$$

Os quais são chamados de conjuntos estável e instável do ponto p, respectivamente. Agora, definimos os conjuntos estáveis e instáveis locais do ponto p, por:

$$W^s_r(p,f) = \{y \in M : d(f^n(y), f^n(p)) < r, \forall n \geq 0\} \text{ e}$$

$$W^u_r(p,f) = \{y \in M : d(f^{-n}(y), f^{-n}(p)) < r, \forall n \geq 0\}.$$

A definição dada dos conjuntos estáveis e intáveis podem também ser dada em espaços métricos compactos. Notemos que $W^u(p, f) = W^s(p, f^{-1})$. Quando não existir dúvida a respeito da função que define o conjunto estável e instável denotamos apenas por $W^s(p)$, $W^s(p)$, o mesmo para os conjunto estável local e instável local $W^s_r(p)$ e $W^u_r(p)$, respectivamente.

Lembremos que, para uma função uniformente contínua $f\colon X \longrightarrow Y$ definida entre dois espaços métricos vale: se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são duas sequências de pontos de X tais que: se $d_X(x_n, y_n) \longrightarrow 0$, então $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \longrightarrow 0$. A próxima proposição permite relacionar as variedades estáveis e instáveis entre duas dinâmicas.

Proposição 2.2.2 *Sejam $f\colon X \longrightarrow X$ e $g\colon Y \longrightarrow Y$ dois homeomorfismos definidos nos espaços métricos compactos X e Y, e uma função $h\colon X \longrightarrow Y$. Se h é uma conjugação entre f e g, então $h(W^s(x, f)) = W^s(h(x), g)$ e $h(W^u(x, f)) = W^u(h(x), g)$.*

Demonstração. Dado $y \in W^s(x, f)$ temos que $d_X(f^n(y), f^n(x)) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Como h é contínua e X é compacto, então h é uniformemente contínua e portanto $d_Y(h(f^n(y)), h(f^n(x))) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$. O que implica que:

$$d_Y(g^n(h(y)), g^n(h(x))) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Isto é, $h(y) \in W^s(h(x), g)$, e logo $h(W^s(x, f)) \subseteq W^s(h(x), g)$. Por outro lado, dado $z \in W^s(h(x), g)$ temos $d_Y(g^n(z), g^n(h(x))) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Novamente, como h^{-1} é contínua no compacto Y então h^{-1} é uniformemente contínua. Portanto $d_X(h^{-1}(g^n(z)), h^{-1}(g^n(h(x)))) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Isto, nos leva a concluir que:

$$d_X(f^n(h^{-1}(z)), f^n(x)) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Isto é, $h^{-1}(z) \in W^s(x, f)$ e portanto $z \in h(W^s(x, f))$, provando assim a outra inclusão. Agora, pelo fato que h é também uma conjugação de f^{-1} e g^{-1} temos $h(W^u(x, f)) = h(W^s(x, f^{-1})) = W^s(h(x), g^{-1}) = W^u(h(x), g)$.

■

O próximo resultado mostra que os conjuntos estáveis e instáveis são densos em Dinâmica Simbólica. Fato que também constataremos em conjuntos hiperbólicos maximais mediante conjugação topológica com dinâmicas simbólicas.

Proposição 2.2.3 *Seja $(\Sigma_d, d_{\frac{1}{2}})$ o espaço das sequências de d símbolos. Então, para cada ponto $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ em Σ_d, os conjuntos estável $W^s(x, \sigma) = \{y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in$*

$\Sigma_d : \lim\limits_{n\to+\infty} d_{\frac{1}{2}}(\sigma^n(y), \sigma^n(x)) = 0\}$ *e instável* $W^s(x,\sigma) = \{z = (z_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_d : \lim\limits_{n\to+\infty} d_{\frac{1}{2}}(\sigma^{-n}(y), \sigma^{-n}(x)) = 0\}$ *são densos em* Σ_d.

Demonstração. Dado um ponto $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ em Σ_d, tomemos o seguinte conjunto

$$A_x = \{y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_d : y_j = x_j, \text{ para todo } j \geq j_0, \text{ para algum } j_0 \in \mathbb{Z}\}.$$

Vejamos que $W^s(x,\sigma) = A_x$. Dado $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in W^s(x,\sigma)$ temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_{\frac{1}{2}}(\sigma^n(y), \sigma^n(x)) = 0$. Assim, pela definição de limite existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_{\frac{1}{2}}(\sigma^n(y), \sigma^n(x)) < 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \tag{2.1}$$

Suponhamos por absurdo que $y \notin A_x$. Assim, para n_0 existe um $m_0 \in \mathbb{N}, m_0 \geq n_0$ tal que $y_{m_0} \neq x_{m_0}$, logo $\sigma^{m_0}(y)_{[0]} = y_{m_0} \neq x_{m_0} \neq \sigma^{m_0}(x)_{[0]}$. Isso, implica que $d_{\frac{1}{2}}(\sigma^{m_0}(y), \sigma^{m_0}(x)) = 2 > 1$ contradizendo (2.1). Segue que, $y \in A_x$ e portanto $W^s(x,\sigma) \subseteq A_x$. Por outro lado, dado $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in A_x$ existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a_j = x_j$, para todo $j \geq j_0$. Dado $\epsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{i_0} < \epsilon$. Logo tomando $n_0 = j_0 + i_0$, tem-se

$$\sigma^n(a)_{[-n+j_0, n-j_0]} = \sigma^n(x)_{[-n+j_0, n-j_0]}, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Isto implica que, $d_{\frac{1}{2}}(\sigma^n(a), \sigma^n(x)) = \dfrac{1}{n - j_0} \leq \dfrac{1}{i_0} < \epsilon$. Disso, temos provado que $a \in W^s(x,\sigma)$ e portanto $W^s(x,\sigma) = A_x$. Analogamente, temos que $W^u(x,\sigma) = \{z = (z_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_d : z_j = x_j, \text{ para todo } j \leq j_0, \text{ para algum } j_0 \in \mathbb{Z}\}$. Agora, vamos provar a densidade dos conjuntos estáveis e instáveis em Σ_d. Seja $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ em Σ_d. Dado $\epsilon > 0$ existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{r_0} < \epsilon$. Assim, concatenando dois blocos infinitos e um finito definimos o seguinte ponto a em Σ_d:

$$a := x_{(-\infty, r_0-1)} \wedge c_{[-r_0, r_0]} \wedge x_{[r_0+1, +\infty)}.$$

Segue que $a_{[-r_0,r_0]} = c_{[-r_0,r_0]}$, logo $d_{\frac{1}{2}}(a,c) = \dfrac{1}{r_0} < \epsilon$ e portanto $a \in B_\epsilon(c)$. Além disso, pela definição de a temos que $a \in W^s(x,\sigma)$ e $a \in W^u(x,\sigma)$. Isto, mostra que

$$B_\epsilon(c) \cap W^s(x,\sigma) \neq \emptyset \text{ e } B_\epsilon(c) \cap W^u(x,\sigma) \neq \emptyset.$$

O que nos permite concluir que $W^s(x,\sigma)$ e $W^u(x,\sigma)$ são densos em Σ_d. ■

Na próxima proposição veremos algumas das propriedades dos conjuntos estáveis e instáveis.

Proposição 2.2.4 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, $p \in M$ e $r \geqslant 0$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $f(W^s(p)) = W^s(f(p))$.

2. $f(W^s_r(p)) \subseteq W^s_r(f(p))$.

3. *Se* $y \in W^s(p)$, *então* $W^s(y) = W^s(p)$.

4. *Se* $y \notin W^s(p)$, *então* $W^s(y) \cap W^s(p) = \emptyset$.

Demonstração. Item 1. Dado $y \in f(W^s(p))$, existe $x \in W^s(p)$ tal que $y = f(x)$. Daí temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0$ e também

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(f^n(y), f^n(f(p))) &= \lim_{n\to\infty} d(f^n(f(x)), f^n(f(p)))\\ &= \lim_{n\to\infty} d(f^{n+1}(x), f^{n+1}(p)) = 0.\end{aligned}$$

Logo $y \in W^s(f(p))$, mostrando desta maneira que $f(W^s(p)) \subseteq W^s(f(p))$. Agora provaremos a outra inclusão. Para isto, tomamos $z \in W^s(f(p))$, logo tem-se $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f^n(z), f^n(f(p))) = 0$ e pela bijetividade de f existe $x \in M$ tal que $z = f(x)$, logo:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(p)) &= \lim_{n\to\infty} d(f^n(f^{-1}(z)), f^{n-1}(f(p)))\\ &= \lim_{n\to+\infty} d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(f(p)) = 0.\end{aligned}$$

Assim, temos que $z \in f(W^s(p))$ e portanto $W^s(f(p)) \subseteq f(W^s(p))$. Disso resulta que $f(W^s(p)) = W^s(f(p))$.

Item 2. Dado $y \in f(W^s_r(p))$, existe um único $x \in W^s_r(p)$ tal que $y = f(x)$. Logo, para cada $n \geq 0$ tem-se $d(f^n(x), f^n(p)) < r$ e

$$\begin{aligned}d(f^n(y), f^n(f(p))) &= d(f^n(f(x)), f^n(f(p)))\\ &= d(f^{n+1}(x), f^{n+1}(p) < r.\end{aligned}$$

Segue que, $y \in W^s_r(f(p))$ e tem-se: $f(W^s_r(p)) \subseteq W^s_r(f(p))$.

Item 3. Seja $a \in W^s(y)$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f^n(a), f^n(y)) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$d(f^n(a), f^n(p)) \leq d(f^n(a), f^n(y)) + d(f^n(y), f^n(p)).$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$ obtemos $\lim_{n\to+\infty} d(f^n(a), f^n(p)) = 0$. Concluimos que $a \in W^s(p)$, provando a inclusão $W^s(y) \subseteq W^s(p)$. Agora tomando $b \in W^s(p)$, temos $\lim_{n\to+\infty} d(f^n(b), f^n(p)) = 0$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$d(f^n(b), f^n(y)) \leq d(f^n(b), f^n(p)) + d(f^n(p), f^n(y)).$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$ obtemos $\lim_{n\to+\infty} d(f^n(b), f^n(y)) = 0$. Segue que $b \in W^s(y)$, logo temos a outra inclusão e portanto $W^s(y) = W^s(p)$.

Item 4. Sejam $y \in M$ e $y \notin W^s(p)$. Vejamos que $W^s(y) \cap W^s(p) = \emptyset$. Suponhamos por absurdo que $W^s(y) \cap W^s(p) \neq \emptyset$, e seja $z \in W^s(y) \cap W^s(p)$. Logo, temos

$$\lim_{n\to+\infty} d(f^n(z), f^n(y)) = 0 \text{ e } \lim_{n\to+\infty} d(f^n(z), f^n(p)) = 0.$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$0 \leq d(f^n(y), f^n(p)) \leq d(f^n(y), f^n(z)) + d(f^n(z), f^n(p)).$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$ obtemos $\lim_{n\to+\infty} d(f^n(y), f^n(p) = 0$ e portanto $y \in W^s(p)$, o que é um absurdo.

■

Observação 2.2.5 Também podemos obter resultados análogos à proposição acima, para o conjunto instável e conjunto instável local. Isto é:

1. $f(W^u(p)) = W^u(f(p))$.

2. $f(W^u_r(p)) \supseteq W^u_r(f(p))$.

3. Se $y \in W^u(p)$, então $W^u(y) = W^u(p)$.

4. Se $y \notin W^u(p)$,então $W^u(y) \cap W^u(p) = \emptyset$.

Definição 2.2.6 *Seja $f\colon N \longrightarrow M$ uma função definida entre duas variedades N e M. Dizemos que f é uma imersão topológica, se para cada $x \in N$, existe uma vizinhança V de x em N tal que $f_{|V}$ é um homeomorfismo sobre sua imagem (esta última dotada da topologia de sub-espaço). Neste caso dizemos que $f(N) \subseteq M$ é uma subvariedade topológica imersa com mesma dimensão de N.*

O resultado seguinte, mostra que os conjuntos estáveis e instáveis locais são subvariedades topológicas.

Proposição 2.2.7 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f. Existe $\delta > 0$ tal que:*

1. $W^s_\delta(p) \subset W^s(p)$ *(respectivamente* $W^u_\delta(p) \subset W^u(p)$*).*

2. $W^s_\delta(p)$ *(respectivamente* $W^u_\delta(p)$ *é uma subvariedade topológica com a mesma dimensão que o sub-espaço estável (respectivamente o sub-espaço instável).*

3. $W^s(p) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(W^s_\delta(p))$ *e* $W^u(p) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{n}(W^u_\delta(p))$ *são subvariedades topológicas imersas em M.*

Demonstração. Item 1. Pelo Teorema 2.1.7 existe $\delta > 0$, uma vizinhança V_δ de 0 em T_pM e um homeomorfismo $h : B_\delta(p) \to V_\delta$, onde $B_\delta(p)$ é uma bola aberta em M de centro p e raio δ tal que conjuga f e Df_p, isto é $h \circ f = Df_p \circ h$. Observemos que Df_p é um isomorfismo que satisfaz: se $v \in V_\delta$ e $Df^n_p(v) \in V_\delta$, para todo $n \geq 0$, então

$$v \in E^s_p \text{ e } \lim_{n\to+\infty} Df^n_p(v) = 0. \tag{2.2}$$

Dado $y \in W^s_\delta(p)$ temos que $f^n(y) \in B_\delta(p)$, para todo $n \geq 0$. Segue que $Df^n_p(h(y)) = h(f^n(y)) \in V_\delta$, então por (2.2) tem-se $h(y) \in E^s_p$ e $\lim_{n\to+\infty} Df^n_p(h(y)) = 0$, logo pela continuidade de h^{-1} tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} h^{-1}(Df^n_p(h(y))) = h^{-1}(0) = p.$$

Usando a conjugação h temos que $f^n(y) = h^{-1}(Df^n_p(h(y)))$, para todo $n \geq 0$, e portanto $\lim_{n\to+\infty} f^n(y) = p$, ou seja, $\lim_{n\to+\infty} d(f^n(y), p) = 0$. O que garante que $y \in W^s(p)$, provando assim que $W^s_\delta(p) \subseteq W^s(p)$.

Item 2. Como $h^{-1}(E^s_p \cap V_\delta) = W^s_\delta(p)$, $W^s_\delta(p)$ é uma subvariedade imersa com a mesma dimensão que E^s_p, analogamente temos que $h^{-1}(E^u_p \cap V_\delta) = W^u_\delta(p)$.

Item 3. Dado que $W^s(p)$ é f-invariante e $W^s_\delta(p) \subset W^s(p)$, temos que

$$f^{-n}(W^s_\delta(p)) \subseteq f^{-n}(W^s(p)) = W^s(p), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Daí, segue que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(W^s(p)) \subseteq W^s(p)$. Para mostrarmos a outra inclusão, tomamos um ponto $y \in W^s(p)$. Então $\lim_{n\to+\infty} d(f^n(y), p) = 0$, isto é, $\lim_{n\to+\infty} f^n(y) = p$. Logo, existe um

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ tem-se $f^n(y) \in B_\delta(p)$, ou equivalentemente

$$d(f^n(y), p) < \delta, \text{ para todo } n \geqslant n_0.$$

Isto, implica que $f^{n_0}(y) \in W^s_\delta(p)$, logo $y \in f^{-n_0}(W^s_\delta(p))$. Concluímos, assim que $y \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(W^s_\delta(p))$ e portanto $W^s(p) \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(W^s_\delta(p)$. Provando, portanto que, $W^s(p) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(W^s_\delta(p))$. Analogamente, podemos mostrar que $W^u(p) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{n}(W^u_\delta(p))$.

Dado $x \in E^s_p$, tomamos $n_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : Df^k_p(x) \in V_\delta \cap E^s_p\}$. Logo, $h^{-1}(Df^{n_0}_p(x)) \in B_\delta(p) \cap W^s_\delta(p) = W^s_\delta(p)$. Disto, definimos a seguinte função $\varphi_s \colon E^s_p \longrightarrow M$, dada por

$$\varphi_s(x) = f^{-n_0}(h^{-1}(Df^{n_0}_p(x))).$$

A qual é um homeomorfismo por ser uma composição de homeomorfismos, mais ainda $\varphi_s(E^s_p) = W^s(p)$, mostrando desta maneira que $W^s_\delta(p)$ é uma subvariedade imersa em M com a mesma dimensão que E^s_p. De forma analóga, dado o ponto $x \in E^u_p$ tomamos $m_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : Df^{-k}_p(x) \in V_\delta \cap E^u_p\}$. Logo, $h^{-1}(Df^{-m_0}_p(x)) \in B_\delta(p) \cap W^u_\delta(p) = W^u_\delta(p)$. Assim, temos a imersão topológica injetiva $\varphi_u \colon E^u_p \longrightarrow M$, dada por $\varphi_s(x) = f^{m_0}(h^{-1}(Df^{-m_0}_p(x)))$, tendo $\varphi_u(E^u_p) = W^u(p)$

■

No caso de $p \in M$ ser um ponto periódico hiperbólico de período $\tau := \tau(p)$, temos as variedades estáveis e instáveis de p, dadas por:

$$W^s(p) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n\tau}(W^s_\delta(p)) = \{x \in M : d(f^{n\tau(p)}(x), f^{n\tau(p)})(p) \to 0, \text{ quando } n \to +\infty\},$$
$$W^u(p) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{n\tau}(W^u_\delta(p)) = \{x \in M : d(f^{-n\tau(p)}(x), f^{-n\tau(p)})(p) \to 0, \text{ quando } n \to +\infty\}.$$

Neste caso, o índice de p, denotado por $l(p)$, é a dimensão da variedade estável. Isto é

$$l(p) = dim(W^s(p)).$$

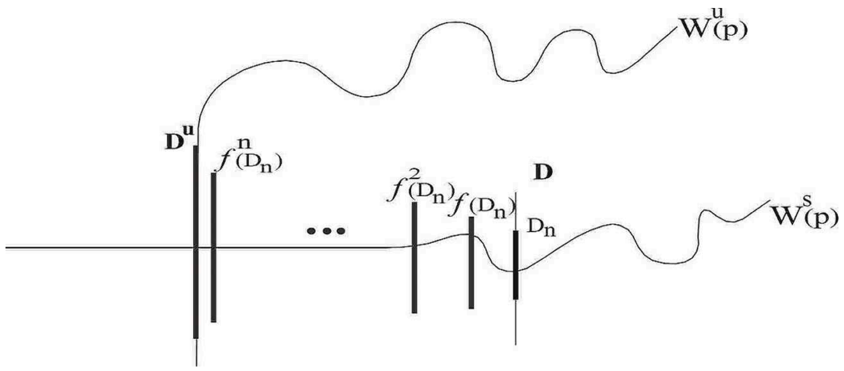
Agora, enunciaremos o teorema conhecido na literatura como o *Teorema da Variedade estável e instável* o qual mostra a diferenciabilidade das subvariedades estáveis e instáveis locais de um ponto fixo hiperbólico para um difeomorfismo. Para ver uma demonstração veja [10], página 187.

Teorema 2.2.8 *Seja $f \colon M \longrightarrow M$ um C^r-difeomorfismo. Se p é um ponto fixo* *hiperbólico de f, então para a decomposição $T_pM = E_p^s \oplus E_p^u$ existe $\delta > 0$ tal que $W_\delta^s(p)$ e $W_\delta^u(p)$ são subvariedades imersas de classe C^r em M tal que $T_pW_\delta^s(p) = E_p^s$, $T_pW_\delta^u(p) = E_p^u$ e $W_\delta^s(p) \subseteq W^s(p)$, $W_\delta^u(p) \subseteq W^u(p)$.*

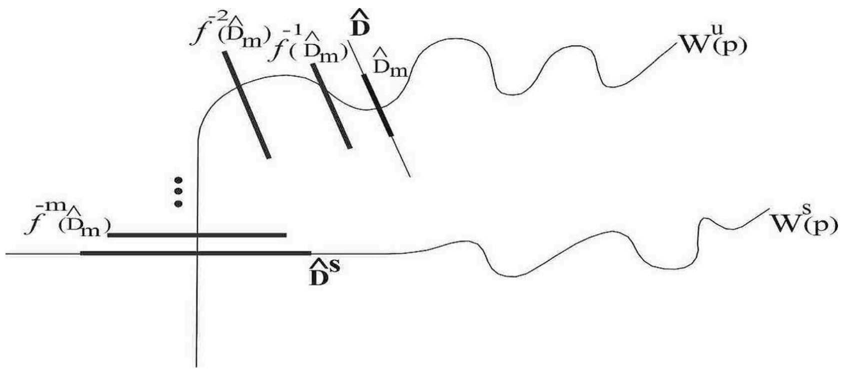
Definição 2.2.9 *Sejam S e S' duas C^r-subvariedades em M e $\epsilon > 0$. Dizemos que S e S' são ϵ C^r-próximas se existe um C^r-difeomorfismo $h\colon S \longrightarrow S' \subseteq M$ tal que $i' \circ h$ é ϵ-próximo de i na C^r-topologia, onde $i\colon S \longrightarrow M$ e $i'\colon S' \longrightarrow M$ denotam as inclusões.*

O próximo resultado nos permite compreender o comportamento local dos pontos fixos hiperbólicos mediante suas variedades invariantes, a sua demonstração pode ser vista em [8].

Teorema 2.2.10 (λ-Lemma ou Lema de Inclinação) *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico e D^u um disco compacto em $W^u(p)$. Se D é um disco de mesma dimensão que $W^u(p)$ tal que $D \cap W^s(p) \neq \emptyset$ e sua intersecção é transversal, então para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$, existe um disco $D_n \subseteq D$ tal que $f^n(D_n)$ está ϵ C^1-próximo de D^u.*



Observemos que se p é um ponto fixo de f, então também o é para f^{-1} e pelo fato de $W^u(p, f^{-1}) = W^s(p, f), W^s(p, f^{-1}) = W^u(p, f)$, vale um resultado análogo Isto é, dado um disco $\widehat{D}^s$ compacto em $W^s(p)$ e $\widehat{D}$ um disco de igual dimensão que $W^s(p)$ tal que $\widehat{D} \cap W^u(p) \neq \emptyset$ e sua intersecção é transversal, tem-se para todo $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}, m \geqslant m_0$, existe um disco $\widehat{D}_m \subseteq \widehat{D}$ tal que $f^{-m}(\widehat{D}_m)$ está ϵ C^1-próximo de $\widehat{D}^s$.



2.3 Conjuntos hiperbólicos

Nesta Seção vamos definir e estudar um tipo especial de conjunto invariante para um difeomorfismo, conhecido em dinâmica hiperbólica, como *Conjunto hiperbólico.*

Definição 2.3.1 *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, M uma variedade compacta e $\Lambda \subseteq M$ um subconjunto f-invariante. Dizemos que Λ é hiperbólico se, para cada $x \in \Lambda$ tem-se:*

i) *Existem subespaços $E^s_x, E^u_x \subseteq T_xM$ tais que, $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$ e eles variam continuamente para cada $x \in \Lambda$.*

ii) $Df_x(E^s_x) = E^s_{f(x)}$ *e* $Df_x(E^s_x) = E^u_{f(x)}$.

ii) *Existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tal que:*

$$\begin{aligned} \|Df^n_x(v^s)\| &\leq C\lambda^n\|v^s\|, \forall v^s \in E^s_x, \forall n \geq 0. \\ \|Df^{-n}_x(v^u)\| &\leq C\lambda^n\|v^u\|, \forall v^u \in E^u_x, \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Neste caso, dizemos também que o subconjunto invariante Λ tem estrutura hiperbólica.

Observação 2.3.2 Na definição acima pode-se observar facilmente que os subespaços estáveis e instáveis são caracterizados por:

$$\begin{aligned} E^s_x &= \{v \in T_xM : \|Df^n_x(v)\| \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty\} \\ E^u_x &= \{v \in T_xM : \|Df^{-n}_x(v)\| \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty\} \end{aligned}$$

Mais ainda, para o conjunto hiperbólico Λ existe uma constante $\lambda' \in (0,1)$ e uma norma $\|.\|^*$ tal que para cada $x \in \Lambda$ tem-se:

$$\|Df^n_x(v^s)\|^* \leq (\lambda')^n\|v^s\|^*, \forall v^s \in E^s_x, \forall n \geq 0.$$

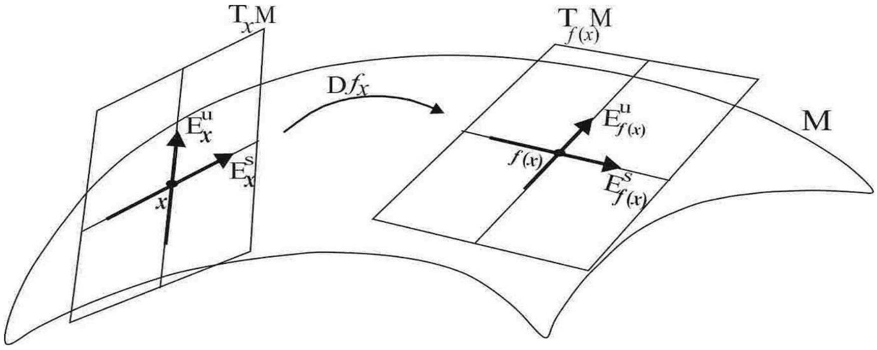


Figura 2.2: Conjunto Hiperbólico

$$\|Df_x^{-n}(v^u)\|^* \quad \leq \quad (\lambda^{'})^n \|v^u\|^*, \forall v^u \in E^u_x, \forall n \geq 0.$$

Assim, obtemos que $Df_{x|E^s_x}$, $Df_x^{-1}{}_{|E^u_x}$ são contrações.

Na seguinte proposição mostraremos a unicidade da decomposição Df-invariante do espaço tangente em cada ponto de um conjunto hiperbólico.

Proposição 2.3.3 *Seja Λ um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo f em M. A decomposição $E^s_x \oplus E^u_x$, $x \in \Lambda$, que torna Λ hiperbólico é única.*

Demonstração. Seja $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x = F^s_x \oplus F^u_x$, $x \in \Lambda$. Provaremos que $E^s_x \subseteq F^s_x$. Suponhamos por absurdo que existe $\alpha^s \in E^s_x$ tal $\alpha^s \notin F^s_x$. Pela decomposição de T_xM existem $v^s \in F^s_x$ e $w^u \in F^u_x, w^u \neq 0$ tais que $\alpha^s = v^s + w^u$. Logo temos

$$0 < \|Df^n_x(w^u)\| = \|Df^n_x(\alpha^s) - Df^n_x(v^s)\| \leq \|Df^n_x(\alpha^s)\| + \|Df^n_x(v^s)\|.$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$, pela Observação 2.3.2 tem-se $\lim_{n \to +\infty} \|Df^n_x(w^u)\| = 0$. Disto, segue que $w^u \in F^s_x \cap F^u_x = \{0\}$, logo $w^u = 0$, absurdo. Portanto $E^s_x \subseteq F^s_x$ e de maneira analóga prova-se $E^u_x \subseteq F^u_x$. Agora, pelos mesmos argumentos, desde que as descomposições possuem as mesmas propriedades, podemos inverter os papéis de E^s_x, F^s_x e mostrarmos que $F^s_x \subseteq E^s_x$. Analogamente, concluir que $F^u_x \subseteq E^u_x$. O que implica $E^s_x = F^s_x$ e $E^u_x = F^u_x$.

■

Agora, apresentaremos o enunciado do Teorema da Variedade Estável e Instável para um conjunto hiperbólico.

Teorema 2.3.4 (Variedade Estável e Instável para um conjunto hiperbólico) *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um C^1-difeomorfismo e $\Lambda \subseteq M$ subconjunto f-invariante. Se Λ é hiperbólico, então para cada $p \in \Lambda$ existe $\delta > 0$ tal que $W^s_\delta(p)$ e $W^u_\delta(p)$ são subvariedades imersas de classe C^1 em M, para a decomposição $T_pM = E^s_p \oplus E^u_p$, tem-se $T_pW^s_\delta(p) = E^s_p$,*

$T_pW^u_\delta(p) = E^u_p$ *e* $W^s_\delta(p) \subseteq W^s(p)$*,* $W^u_\delta(p) \subseteq W^u(p)$ *e* $W^s(p) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(W^s_\delta(f^n(p))$ *e* $W^u(p) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^n(W^s_\delta(f^{-n}(p))$ *são subvariedades imersas em* M *de classe* C^r *que variam continuamente com* p*.*

No Teorema acima as subvariedades estáveis e instáveis locais são gráficos de funções definidas em vizinhanças dos subespaços estável e instável.

Definição 2.3.5 *Dado um espaço vetorial* W *com produto interno e* $C \subseteq W$*, dizemos que* C *é um Cone em* W *se existe uma forma quadrática não degenerada* $B\colon W \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $C = \{v \in W : B(v) \leq 0\}$*.*

No caso de W possuir uma decomposição, isto é, $W = E \oplus F$ então dada a forma quadrática $B : E \oplus F \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como: $B(v_E, v_F) = -a^2\|v_E\|^2 + a\|v_F\|^2, a > 0$, temos o cone $C = \{(v_E, v_F) : a\|v_E\| \leq a\|v_F\|\}$. Chamamos de dimensão do cone a dimensão do maior subespaço contido nele.

O próximo resultado permite caracterizar os conjuntos hiperbólicos, via teoria de cones.

Teorema 2.3.6 *Seja* $f\colon M \longrightarrow M$ *um difeomorfismo e* Λ *um conjunto compacto* f*-invariante. As seguintes condições são equivalentes:*

1. Λ *é hiperbólico.*

2. *para cada* $x \in \Lambda$ *existem cones* C^s_x *e* C^u_x*, e constantes* $n_0 > 0$ *e* $\mu > 1$ *tal que:*

   i) $Df_x(C^u_x) \subseteq C^s_{f(x)}$ *e* $Df^{-1}_x(C^s_x) \subseteq C^s_{f^{-1}(x)}$*.*

   ii) $\|Df^{n_0}_x(v)\| > \mu\|v\|$*, se* $v \in C^u_x$ *e* $\|Df^{-n_0}_x(v)\| > \mu\|v\|$*,se* $v \in C^s_x$*.*

   iii) *A dimensão dos cones são complementares (a soma das dimensões é a dimensão do espaço tangente) e são constantes nas órbitas.*

Vamos provar a existência de uma vizininhança para um conjunto hiperbólico de tal maneira que o conjunto invariante maximal, também é um conjunto hipebólico.

Teorema 2.3.7 *Seja* $f\colon M \longrightarrow M$ *um* C^r*-difeomorfismo e* $\Lambda \subseteq M$ *um subconjunto* f*-invariante. Se* Λ *hiperbólico, então existe uma vizinhaça* V *de* Λ *de modo que, se* $\Lambda \subseteq U \subseteq V$ *então o conjunto invariante maximal* $\Lambda_U = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U)$ *é um conjunto hiperbólico.*

Demonstração. Em Λ tomamos uma métrica adaptada, implicando que para cada $x \in \Lambda$, $Df_{E_x^s}$ é uma contração e $Df_{E_x^u}$ é uma expansão. Da nossa hipótese temos que Λ é um conjunto hiperbólico e pela continuidade existe uma vizinhança V de Λ tal que:

$$Df_x(C_x^u) \subset C_{f(x)}^u, x, f(x) \in V,$$

$$Df_x^{-1}(C_x^s) \subset C_{f^{-1}(x)}^s, x, f^{-1}(x) \in V,$$

$$\|Df_x^{n_0}(v^u)\| > \mu\|v^u\|, v^u \in C_x^u,$$

$$\|Df_x^{-n_0}(v^s)\| > \mu\|v^s\|, v^s \in C_x^s.$$

Onde $\mu > 1$ e n_0 é algum número natural. Seja $U \subseteq V$ vizinhança arbitrária de Λ e $\Lambda_U = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{Z}} f^i(U) \supset \Lambda$. Logo, para a vizinhança U definimos os seguintes conjuntos.

$$E_x^s = \bigcap_{n=0}^{+\infty} Df_{f^n(x)}^{-n}(C_{f^n(x)}^s) \text{ e } E_x^u = \bigcap_{n=0}^{+\infty} Df_{f^{-n}(x)}^{n}(C_{f^{-n}(x)}^u).$$

Assim, temos que $Df(E_x^s) = E_x^s$ e $Df(E_x^u) = E_x^u$.

Afirmação: Existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tal que se $v \in E_x^s$, então $\|Df_x^n(v)\| \leq C\lambda^n, n \geq 0$.

Seja $n \geq 0$, então $n = kn_0 + r, 0 \leq r < n_0$. Tomando $C_1 = \inf\limits_{x\in M}\{\min\{\|Df_x^{-r}w\|/\|w\| : 0 \leq r < n_0\}\}$ temos que para $v \in E_x^s$ tem-se $w = Df_x^n(v) \in E_{f^n(x)}^s$ e pela invariância dos cones obtemos:

$$\|v\| = \|Df_{f^n(x)}^{-n}(w)\| = \|Df_{f^r(x)}^{-r}(Df_{f^n(x)}^{-kn_0}(w))\| \geq C_1\|Df_{f^n(x)}^{-kn_0}(w)\| \geq C_1\mu^k\|w\|.$$

Logo, escrevendo $C = \dfrac{\mu^{\frac{r}{n_0}}}{C_1}$ e $\lambda = \mu^{\frac{-1}{n_0}}$ obtemos $\|Df_x^n(v)\| \leq C\lambda^n\|v\|$. Podemos mostrar uma afirmação equivalente para E_x^u de manera análogo. Em particular, $E_x^s \cap C_x^u = \{0\}$ e $E_x^u \cap C_x^s = \{0\}$.

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos o subespaço $E_n \subset C_{f^n(x)}^s$ de dimensão máxima e denotemos $S_n = Df_x^{-n}(E_n)$, analogamente tomamos $F_n \subset C_{f^{-n}(x)}^u$ de dimensão máxima e denotamos $U_n = Df_x^n(F_n)$. Sejam S e U subespaços limites de S_n e F_n respectivamente. Segue que $S \subset E^s$ $U \subset E^u$ e $S \cap U = \{0\}$, obtendo $T_xM = S \oplus U$. Portanto $S = E^s$ e $U = E^u$, pois se não fosse assim, teríamos um elemento $v \in E^s \setminus S$. Escrevendo $v = s + u$ temos que:

$$\|Df_x^n(v)\| \geq \|Df_x^n(u)\| - \|Df_x^n(s)\| \longrightarrow +\infty, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Contradizendo o fato de $v \in E^s$. De forma analóga teríamos uma contradição se supormos que $U \subsetneq E^u$. Disso concluímos que $T_xM = E^s \oplus E^u$ e temos assim que Λ_V é um conjunto invariante hiperbólico. ■

2.4 Ferradura de Smale

Nesta seção vamos construir e estudar a chamada *ferradura de Smale* ou ferradura geométrica em relação a hiperbolicidade e conjugação com o espaço de sequências de dois símbolos. Recebe este nome, pois foi introduzida por Smale em 1965 no Rio de Janeiro. Esta possui muitas características importantes e o principal exemplo que apresenta dinâmica caótica sobre um conjunto invariante que é um conjunto de Cantor. Para mais estudos veja [7].

2.4.1 Construção da ferradura

Vamos construir um difeomorfismo possuíndo um conjunto hiperbólico não trivial. A saber a ferradura de Smale.

Dado $I = [0, 1]$ temos o quadrado $R = I \times I$. Consideremos um difeomorfismo f definido numa vizinhança de R, como na Figura 2.3. Isto é, considerando os retângulos horizontais $H_1 = I \times [\frac{1}{9}, \frac{4}{9}]$ e $H_2 = I \times [\frac{5}{9}, \frac{8}{9}]$ e os retângulos verticais $V_1 = [\frac{1}{4}, \frac{4}{9}] \times I$ e $V_2 = [\frac{5}{9}, \frac{8}{9}] \times I$, definimos a seguinte função:

$$\begin{aligned} g : H_1 \cup H_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad g(x, y) = \begin{cases} (x/3, 3y) + (1/9, -1/3) & \text{se } (x, y) \in H_1 \\ (-x/3, -3y) + (8/9, 8/3) & \text{se } (x, y) \in H_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que $f_{|H_1 \cup H_2} = g$ e $f(H_1) = V_1$, $f(H_2) = V_2$.

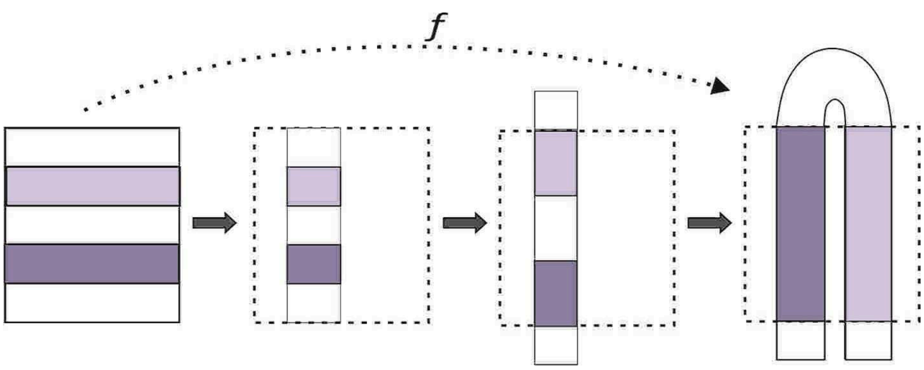


Figura 2.3: Ferradura de Smale

Vejamos imagens que mostram a evolução para frente(utilizando f) e sua evolução para trás (utilizando f^{-1}). Ver Figura 2.4.

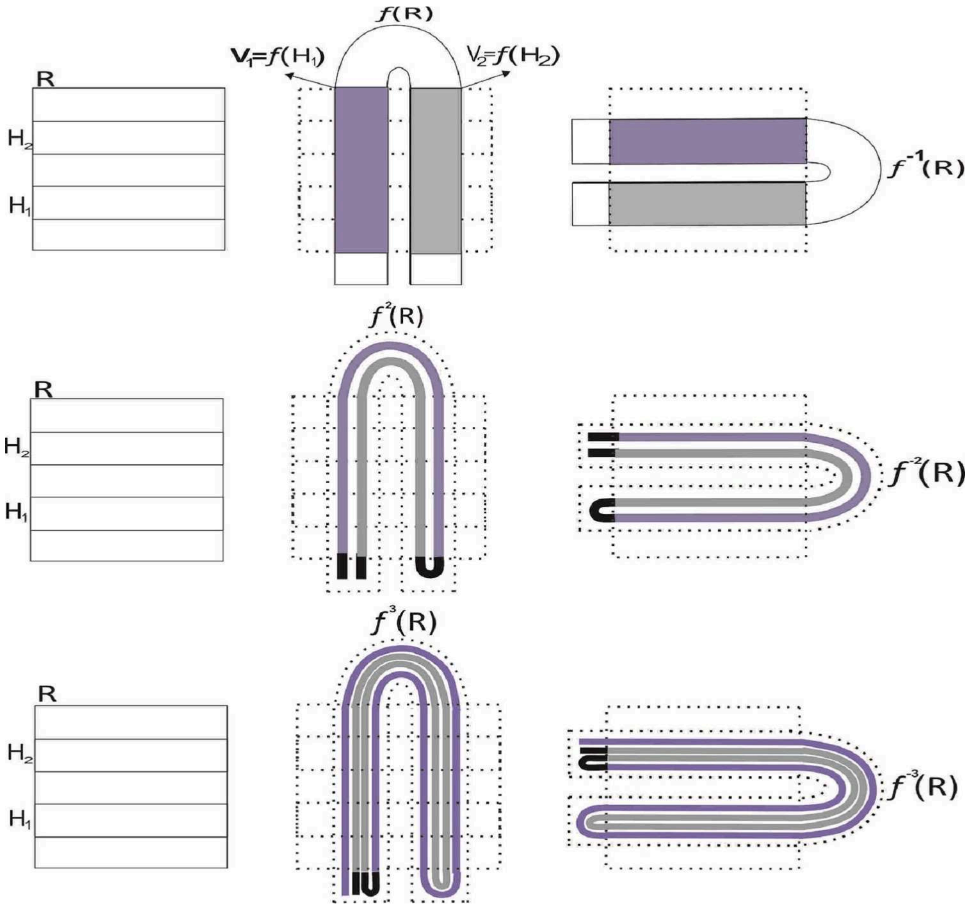


Figura 2.4: Evolução Futura e Passada da Ferradura de Smale

Observamos também que $\bigcap_{j=0}^{n} f^j(R)$ é formado por 2^n faixas verticais contidas em $V_1 \cup V_2$ e $\bigcap_{j=0}^{n} f^{-j}(R)$ é formado por 2^n faixas horizontais contidas em $H_1 \cup H_2$. Obtemos desta maneira que

$$\bigcap_{j=0}^{+\infty} f^j(R) = K_1 \times I \text{ e } \bigcap_{j=0}^{+\infty} f^{-j}(R) = I \times K_2,$$

onde K_1 e K_2 são conjuntos de cantor em I. Portanto, $\Lambda = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^j(R) = K_1 \times K_2$ é um produto de conjuntos cantor. Assim, para cada $n \geq 0$ definimos o conjunto $R_n = \bigcap_{j=-n}^{n} f^j(R)$ os quais tem 4^n quadrados. Ver Figura 2.5:

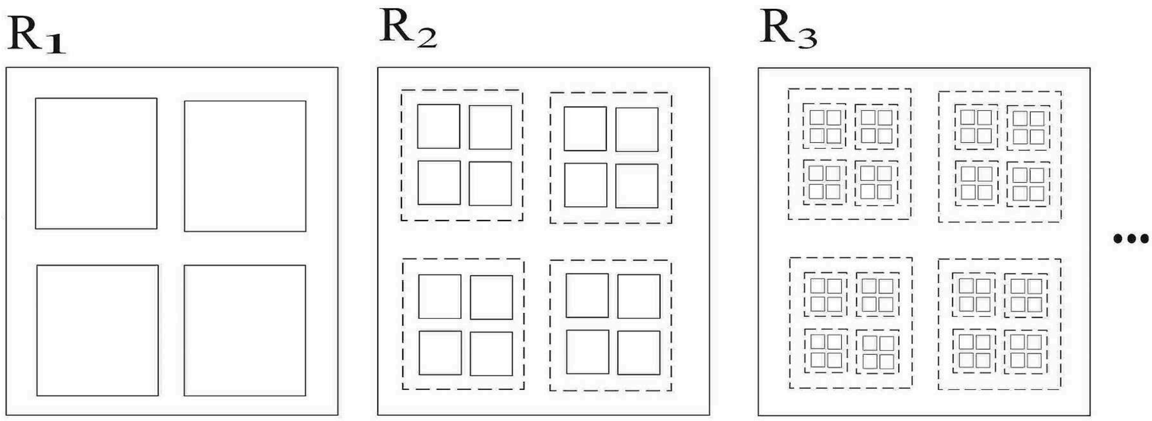


Figura 2.5: Gerando Λ

Notemos que Λ é f-invariante, pois $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ e por ser f um difeomorfismo tem-se $f(\Lambda) = \Lambda$, fazendo sentido considerar a dinâmica de f restrito a Λ.

2.4.2 Hiperbolicidade e dinâmica simbólica na ferradura

Nessa subseção, vamos ver que a ferradura construída na subseção anterior é um conjunto hiperbólico e que a dinâmica do difeomorfismo f restrito a ela é equivalente à dinâmica do shift no espaço de sequências de dois símbolos.

Proposição 2.4.1 *A ferradura de smale Λ é um conjunto hiperbólico para o difeomorfismo f.*

Demonstração. Do fato $f_{|H_1 \cup H_2} = g$, obtemos que para cada $x \in \Lambda$ tem-se

$$Df_x = \begin{cases} A & \text{, se } x \in H_1, \ \textit{onde } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \\ -A & \text{, se } x \in H_2 \end{cases}$$

Disto, resulta que Df_x é uma aplicação linear bijetora e consideramos a decomposição $T_x\mathbb{R}^2 = E_x^s \oplus E_x^u$, sendo E_x^s, E_x^u os eixos horizontal e vertical, respectivamente, os quais são Df_x-invariantes e ainda mais

$$\|Df_x(v)\| = \begin{cases} \frac{1}{3}\|v\| & \text{, se } v \in E_x^s \\ 3\|v\| & \text{, se } v \in E_x^u. \end{cases}$$

Portanto, todas as condições da definição de conjunto hiperbólico são satisfeitas. Provando que Λ é um conjunto hiperbólico.

■

Vamos relacionar as dinâmicas $(\Lambda, f_{|\Lambda})$ e (Σ_2, σ) mediante uma conjugação topológica.

Proposição 2.4.2 *$f_{|\Lambda} : \Lambda \to \Lambda$ é conjugado ao shift de dois símbolos $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$.*

Demonstração. Primeiramente, como a ferradura Λ é definida por $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R)$, onde R é o retângulo inicial, observamos que se $x, y \in \Lambda$ são dois pontos distintos, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que eles pertencem a retângulos diferentes de $R_{n_0} = \bigcap_{k=-n_0}^{n_0} f^j(R)$ pois os diâmetros dos quadrados vão para zero. Portanto, se $x, y \in \Lambda, x \neq y$, existe um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $f^m(x)$ e $f^m(y)$ não estão no mesmo $V^i, i \in 0, 1$. Assim, podemos definir:

$$\begin{aligned} h : \Lambda &\longrightarrow \Sigma_2 \\ x \ \ \mapsto \ \ h(x) &= (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \ x_n = \begin{cases} 1 & \text{, se } f^n(x) \in V_1. \\ 2 & \text{, se } f^n(x) \in V_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Como $\Lambda \subset V_1 \cup V_2$ é f-invariante, h está bem definida e é injetiva pois dados dois pontos $x, y \in \Lambda, x \neq y$, pela observação feita acima existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $f^m(x)$ e $f^m(y)$ não estão no mesmo $V_i, i \in \{0, 1\}$, logo $h(x)_{[m]} = x_m \neq y_m = h(y)_{[m]}$ e portanto $h(x) \neq h(y)$. Temos também que h é sobrejetiva, pois dado o ponto $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em Σ_2, considera-se para cada $n \in \mathbb{N}_0$ a sequência encaixada de retângulos compactos $Q_m(\beta) = \bigcap_{j=-n}^{n} f^{-j}(V_{\beta_j})$, o que implica a existência de um único ponto x em Λ tal que

$$\bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^{-j}(V_{\beta_j}) = x.$$

Segue que, $h(x) = \beta$ e portanto que h é bijetiva. Ainda mais, h é contínua. De fato, dado $s \in \Sigma_2$ e o cilindro $N = \{t \in \Sigma_2 : t_i = s_i \text{ para } -n_0 \leq j \leq n_0\}$ para $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrário, pela bijetividade de h existe um único $x \in \Lambda$ tal que $s = h(x)$. Como f é contínua, para cada $-n_0 \leq j \leq n_0$, existe δ_j tal que para $z \in \Lambda$ e $\|z - x\| < \delta_j$ implica $f^j \in V_{\delta_j}$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_j : -n_0 \leq j \leq n_0\}$ e temos que para $z \in \Lambda$,$\|z - x\| < \delta_j$ tem-se:

$$f^j(q) \in V_{s_j}, \text{ para todo } j \in \{-n_0 \leq j \leq n_0\}.$$

Segue que, para $t = h(z)$ tem-se $t_j = s_j$, para todo $j \in \{-n_0 \leq j \leq n_0\}$ e portanto $h(z) \in N$. Pela compacidade de Λ (pois, é um subconjunto fechado do compacto R) obtemos que a inversa de h é também contínua. Provando desta maneira que h é um homeomorfismo e cuja inversa é dada por

$$h^{-1}((\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^{-j}(V_{\alpha_j}).$$

Por fim, mostramos que de fato h conjuga $f_{|V}$ e $\sigma_{|\Sigma_2}$:

$$\begin{aligned}\sigma(h(x)) &= \sigma((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}), \text{ onde } f^i(x) \in V_{x_i}, \forall i \in \mathbb{Z}.\\ &= (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}, y_i = x_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z}, f^i(f(x)) = f^{i+1}(x) \in V_{x_{i+1}} = V_{y_i}.\\ &= h(f(x)), \forall x \in \Lambda.\end{aligned}$$

Portanto $h \circ f_{|\Lambda} = \sigma \circ h$.

■

Note que, para cada $m \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\sigma^m((\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ se, e somente se, } f^m_{|V}(h^{-1}((\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}})) = h^{-1}((\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}})$$

2.5 Ponto homoclínico transversal de um ponto periódico hiperbólico

Nesta seção estaremos interessados quando as variedades estáveis e instáveis de um ponto periódico hiperbólico se intersectam, gerando conjuntos como a Ferradura de Smale.

Definição 2.5.1 *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico de período $\tau \in \mathbb{N}$. Definimos as variedades estável e instável da órbita do ponto p como:*

$$W^s(\mathcal{O}(p)) = \bigcup_{j=0}^{\tau-1} W^s(f^j(p)) \text{ e } W^u(\mathcal{O}(p)) = \bigcup_{j=0}^{\tau-1} W^u(f^j(p)).$$

Dizemos que $q \in M$ é um ponto homoclínico do ponto p se $q \in W^s(\mathcal{O}(p)) \cap W^u(\mathcal{O}(p))$ e $q \notin \mathcal{O}(p)$.

É bem conhecido que, se p é um ponto periódico hiperbólico de f, então para todo difeomorfismo g, C^1-próximo de f, possui um ponto periódico hiperbólico com o mesmo período e índice. Este é chamado a continuação de p para g e é denotado por $p(g)$.

Proposição 2.5.2 *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico de período n, isto é, $f^n(p) = p$. Se $q \in M$ é um ponto homoclínico para p, então $\Lambda_q = \mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$ é f-invariante e fechado.*

Demonstração. Pela definição de Λ_q é f-invariante. Como $\omega(q) \subset \mathcal{O}(p)$ e $\alpha(q) \subset \mathcal{O}(q) \subset \Lambda_q$, pelo fato de $q \in W^s(\mathcal{O}(p)) \cap W^u(\mathcal{O}(p))$ temos que $\alpha(\Lambda) \subset \Lambda$ e $\omega(\Lambda) \subset \Lambda$, logo $\Lambda = \alpha(\Lambda) = \omega(\Lambda)$ e portanto é fechado.

■

Definição 2.5.3 *Dado um difeomorfismo $f\colon M \longrightarrow M$, $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico de período n, dizemos que $q \in M$ é ponto de interseção transversal de $W^s(\mathcal{O}(p))$ com $W^u(\mathcal{O}(p))$ se*

$$q \in W^s(f^j(p)) \cap W^u(f^k(p)), \ \textit{para } j, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \ \textit{e}$$

$$T_qW^s(f^j(p)) \cap T_qW^u(f^k(p)) = \{0\}.$$

Denotamos o conjunto deses pontos por $W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(p))$. Desta maneira definimos o conjunto dos pontos homoclínicos transversais de p como sendo:

$$H(p) = W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(p)) \setminus \mathcal{O}(p).$$

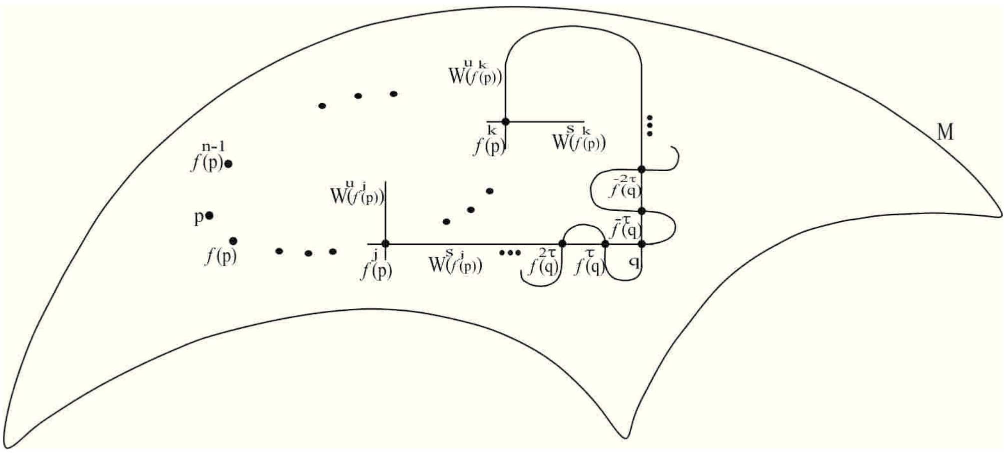


Figura 2.6: Ponto Homoclínico Transversal.

A partir de agora todos os resultados serão mostrados, por simplicidade, para pontos fixos hiperbólicos, mas ressaltamos que eles continuam sendo válidos para pontos periódicos hiperbólicos.

Proposição 2.5.4 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico. Se $q \in M$ é um ponto homoclínico transversal para p, então todos os pontos da órbita $\mathcal{O}(q)$ também o são.*

Demonstração. Pela invariância de $W^s(p)$ e $W^u(p)$ temos direto que $f^j(q) \in W^s(p) \cap W^u(p)$ e portanto também é um ponto homoclínico de p para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Agora, dado $j \in \mathbb{Z}$ tomemos $v \in T_{f^j(q)}W^s(p) \cap T_{f^j(q)}W^u(p)$. Como f é um difeomorfismo e pela invariancia e diferenciabilidade de $W^\sigma(p)$, $\sigma = s, u$ temos que:

$$Df^{-j}_{f^j(p)}(v) \in T_qW^s(p) \cap T_qW^u(p)$$

Como q é homoclínico transversal, temos $T_qW^s(p) \cap T_qW^u(p) = 0$, o que implica que $Df^{-j}_{f^j(p)}(v) = 0$, e portanto, $v = 0$. Logo,

$$T_{f^j(q)}W^s(p) \cap T_{f^j(q)}W^u(p) = \{0\}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.5.5 Desta maneira, para o casso em que $p \in M$ for um ponto periódico hiperbólico temos que:

$$f(W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(p))) = W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(p)).$$

Proposição 2.5.6 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico. Se $q \in M$ é um ponto homoclínico transversal para p, então $\Lambda_q = \{p\} \cup \mathcal{O}(q)$ é um conjunto hiperbólico.*

Demonstração. Pela Proposição 2.5.2 sabemos que Λ_q é f-invariante (também compacto, pois é um subconjunto fechado de M). Iremos mostrar cada uma das condições da Definição 2.3.1 para Λ_q.

Afirmação 1. Para cada $x \in \Lambda_q$, existem subespaços $\widetilde{E^s_x}$, $\widetilde{E^u_x} \subset T_qM$ tais que $T_xM = \widetilde{E^s_x} \oplus \widetilde{E^u_x}$. Além disso, a decomposição é Df-invariante, isto é, $Df(\widetilde{E^s_x}) = \widetilde{E^s_x}$ e $Df(\widetilde{E^u_x}) = \widetilde{E^u_x}$, para todo $x \in \Lambda_q$

Pelo fato de ser q um ponto homoclínico transversal para p, temos pela Proposição 2.5.4 que todos os pontos da sua órbita são também homoclínicos transversais. Isto é, $f^k(q) \in W^s_p \cap W^u_p$ e $T_{f^k(q)}M = T_{f^k(q)}W^s_p \oplus T_{f^k(q)}W^u_p, \forall k \in \mathbb{Z}$. Logo, definimos

$$\widetilde{E^s_x} = \begin{cases} E^s_p = T_pW^s_\delta & \text{, se } x = p \\ T_{f^k(q)}W^s_p & \text{, se } x = f^k(q), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\widetilde{E}^u_x = \begin{cases} E^u_p = T_pW^u_\delta & ,\text{se } x = p \\ T_{f^k(q)}W^u_p & ,\text{se } x = f^k(q), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

temos que $T_xM = \widetilde{E}^s_x \oplus \widetilde{E}^u_x$, para todo $x \in \Lambda_q$.
Agora, verifiquemos que estes são Df-invariantes.

Se $x = p$, já sabemos pelo Teorema da Variedade Estável e Instável (2.2.8) que $Df(E^s_p) = E^s_p$ e $Df(E^u_p) = E^u_p$. Agora, seja $x = f^k(q)$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Consideremos os vetores $v \in \overset{\sim s}{E}_{f^k(q)} = T_{f^k(q)}W^s_p$ e $w \in \overset{\sim u}{E}_{f^k(q)} = T_{f^k(q)}W^u_p$. Logo, existem caminhos diferenciáveis $\alpha\colon I \longrightarrow W^s_p$, $\beta\colon I \longrightarrow W^u_p$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo contendo 0, tais que $\alpha(0) = f^k(q)$, $\beta(0) = f^k(q)$ e $v = [\alpha]$, $w = [\beta]$. Como $f^k(q) \in \alpha(I) \subset W^s_p$, $f^k(q) \in \beta(I) \subset W^u_p$ e $f(W^s_p) = W^s_p$, $f(W^u_p) = W^u_p$ (pela Proposição 2.2.4) temos que $(f \circ \alpha)(I) \subset W^s_p$, $(f \circ \beta)(I) \subset W^u_p$ e $(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(f^k(q)) = f^{k+1}(q) \in W^s_p$, $(f \circ \beta)(0) = f(\beta(0)) = f(f^k(q)) = f^{k+1}(q) \in W^u_p$. Dessa maneira, obtemos os caminhos diferenciáveis (por ser composição de duas funções diferenciáveis) $f \circ \alpha\colon I \longrightarrow W^s_p$, $f \circ \beta\colon I \longrightarrow W^u_p$ tais que $[f \circ \alpha] \in T_{f^{k+1}(q)}W^s_p$ e $[f \circ \beta] \in T_{f^{k+1}(q)}W^u_p$. Disto, temos

$$Df_{f^k(q)}(v) = Df_{f^k(q)}([\alpha]) = [f \circ \alpha] \in T_{f^{k+1}(p)}W^s_p = \overset{\sim s}{E}_{f^{k+1}(q)} = \overset{\sim s}{E}_{f(f^k(q))}.$$
$$Df_{f^k(q)}(w) = Df_{f^k(q)}([\beta]) = [f \circ \beta] \in T_{f^{k+1}(p)}W^u_p = \overset{\sim u}{E}_{f^{k+1}(q)} = \overset{\sim u}{E}_{f(f^k(q))}.$$

Lembrando que $Df_{f^k(q)}\colon T_{f^k(q)}M \longrightarrow T_{f^{k+1}(q)}M$. Sendo v e w arbitrários temos que

$$Df_x(\overset{\sim s}{E}_x) = Df_{f^k(q)}(\overset{\sim s}{E}_{f^k(q)}) \subseteq \overset{\sim s}{E}_{f(f^k(q))} = \overset{\sim s}{E}_{f(x)}$$

$$Df_x(\overset{\sim u}{E}_x) = Df_{f^k(q)}(\overset{\sim u}{E}_{f^k(q)}) \subseteq \overset{\sim u}{E}_{f(f^k(q))} = \overset{\sim u}{E}_{f(x)}.$$

O que prova uma das inclusões. Agora iremos provar as outras inclusões. Sejam $v_1 = \overset{\sim s}{E}_{f(x)} = T_{f^{k+1}(q)}W^s_p$, $w_1 = \overset{\sim u}{E}_{f(x)} = T_{f^{k+1}(q)}W^u_p$. Então existem caminhos $\alpha_1\colon J \longrightarrow W^s_p$, $\beta_1\colon J \longrightarrow W^u_p$, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo 0, tais que $\alpha_1(0) = f^{k+1}(q)$, $\beta_1(0) = f^{k+1}(q)$ e $v_1 = [\alpha_1]$, $w_1 = [\beta_1]$. Como $f^{k+1}(q) \in \alpha_1(I) \subset W^s_p$, $f^{k+1}(q) \in \beta_1(I) \subset W^u_p$ e $f^{-1}(W^s_p) = W^s_p$, $f^{-1}(W^u_p) = W^u_p$ (pela Proposição 2.2.4) temos que: $f^k(q) \in (f^{-1} \circ \alpha_1)(I) \subset W^s_p$, $f^k(q) \in (f^{-1} \circ \beta_1)(I) \subset W^u_p$ e $(f^{-1} \circ \alpha_1)(0) = f^{-1}(\alpha_1(0)) = f^{-1}(f^{k+1}(q)) = f^k(q) \in W^s_p$, $(f^{-1} \circ \beta_1)(0) = f^{-1}(\beta_1(0)) = f^{-1}(f^{k+1}(q)) = f^k(q) \in W^u_p$. Dessa maneira, obtemos os caminhos diferenciáveis (por ser composição de duas funções diferenciáveis) $f^{-1} \circ \alpha\colon J \longrightarrow W^s_p$, $f^{-1} \circ \beta\colon J \longrightarrow W^u_p$ tais que $v_2 = [f^{-1} \circ \alpha_1] \in T_{f^k(q)}W^s_p = \overset{\sim s}{E}_x$ e $w_2 = [f^{-1} \circ \beta_1] \in T_{f^k(q)}W^u_p = \overset{\sim u}{E}_x$, como

$$v_1 = [\alpha_1] = [f(f^{-1} \circ \alpha_1)] = Df_{f^k(q)}([f^{-1} \circ \alpha_1]) = Df_x(v_2) \in Df_x(\overset{\sim s}{E}_x).$$
$$w_1 = [\beta_1] = [f(f^{-1} \circ \beta_1)] = Df_{f^k(q)}([f^{-1} \circ \beta_1]) = Df_x(w_2) \in Df_x(\overset{\sim u}{E}_x).$$

Sendo v_1 e w_1 arbitrários temos que $\tilde{E}^s_{f(x)} \subseteq Df_x(\tilde{E}^s_x)$ e $\tilde{E}^u_{f(x)} \subseteq Df_x(\tilde{E}^u_x)$. Disto, temos provado que $Df_x(\tilde{E}^s_x) = \tilde{E}^s_{f(x)}$ e $Df_x(\tilde{E}^u_x) = \tilde{E}^u_{f(x)}, x = f^k(q), k \in \mathbb{Z}$.

Afirmação 2. A decomposição $TM = \tilde{E}^s \oplus \tilde{E}^u$ é contínua em Λ_q.

Pelo fato de ser p o único ponto de acumulação de Λ_q, vamos mostrar a continuidade da decomposição no ponto p. Tomemos o caso em que $f^j(q) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} p$. Escrevendo $V = W^s_\delta(p) \times W^u_\delta(p)$ como vizinhança de p (Teorema da variedade estável) temos que para δ existe um $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^j(q) \in W^s_\delta(p) \subset V,$ para todo $j \geq j_0$. Pelo λ-*Lema* tem-se que $Df^n(\tilde{E}^u_{f^j(q)}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{E}^u(p)$, isto é

$$\tilde{E}^u_{f^{j+n}(q)} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{E}^u(p).$$

Além disso, $Df_{|\tilde{E}^u_{f^j(q)}}$ é uma contração. O caso de $\tilde{E}^s_{f^j(q)} \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{E}^s(p)$ sai direto do Teorema da Variedade Estável e $Df_{\tilde{E}^s_{f^j(q)}}$ ser uma contração. Por último, vamos mostrar a existência das constantes de hiperbolicidade para Λ_q.

Pela continuidade da decomposição, tomemos $j_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $f^j(q) \in V = W^s_\delta(p) \times W^u_\delta(p)$, para todo $j \geq j_0$ e $j \leq -j_0$, e $E^\sigma_{f^j(q)}$ está próximo de E^σ_p, $\sigma = s, u$. Assim, temos que, $Df_{|E^s_{f^j(q)}}$ (resp. $Df^{-1}_{|E^u_{f^j(q)}}$) está próximo de $Df_{|E^s_p}$ (resp. $Df^{-1}_{|E^u_p}$). Portanto,

$$\|Df^n_{|E^s_{f^j(q)}}\| \leq C_p\lambda^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ e}$$
$$\|Df^{-n}_{|E^u_{f^j(q)}}\| \leq C_p\lambda^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $C_p > 0$ e $0 < \lambda < 1$ são as constantes de hiperbolicidade do ponto p. Para cada $i = 1, \ldots, 2j_0 - 1$, definimos as constantes $C^u_i = \max\limits_{1\leq k\leq i}\{\|Df^{-k}_{|E^u_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\|\}$, $C^s_i = \max\limits_{1\leq k\leq i}\{\|Df^{-k}_{|E^s_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\|\}$ e $C = \max\limits_{1\leq i\leq 2j_0-1}\{C_p\frac{C^u_i}{\lambda^{2j_0}}, \frac{C^u_i}{\lambda^{2j_0}}, C_pC^s_i, \frac{C^s_i}{\lambda^{2j_0}}\}$. Dado $i \in \{1, \ldots, 2j_0 - 1\}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que:

Se $n > i$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\|Df^{-n}_{|E^u_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\| &= \|Df^{-(n-i)}_{|E^u_{f^{-j_0}(q)}} \circ Df^{-i}_{|E^u_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\| \\
&\leq \|Df^{-(n-i)}_{|E^u_{f^{-j_0}(q)}}\|\|Df^{-i}_{|E^u_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\| \\
&\leq C_p\lambda^{n-i}C^u_i \\
&< \frac{C_pC^u_i}{\lambda^{2j_0}}\lambda^n \\
&\leq C\lambda^n.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|Df^n_{|E^s_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\| &= \|Df^{n+i}_{|E^s_{f^{-j_0}(q)}} \circ Df^{-i}_{|E^s_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\| \\
&\leq \|Df^{n+i}_{|E^s_{f^{-j_0}(q)}}\| \|Df^{-i}_{|E^s_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\| \\
&\leq C_p \lambda^{n+i} C_i^s \\
&< C_p \lambda^n C_i^s \\
&\leq C\lambda^n.
\end{aligned}
$$

Se $n \leq i$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\|Df^{-n}_{|E^u_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\| &= \lambda^n \frac{\|Df^{-n}_{|E^u_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\|}{\lambda^n} \\
&< \lambda^n \frac{\|Df^{-n}_{|E^u_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\|}{\lambda^{2j_0}} \\
&\leq \lambda^n \frac{C_i^u}{\lambda^{2j_0}} \\
&\leq C\lambda^n. \\
\|Df^{n}_{|E^s_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\| &= \lambda^n \frac{\|Df^{n}_{|E^s_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\|}{\lambda^n} \\
&< \lambda^n \frac{\|Df^{n}_{|E^s_{f^{-(j_0-i)}(q)}}\|}{\lambda^{2j_0}} \\
&\leq \lambda^n \frac{C_i^s}{\lambda^{2j_0}} \\
&\leq C\lambda^n.
\end{aligned}
$$

Assim, direto das afirmações concluímos a demostração. ■

Corolário 2.5.7 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico. Se q é um ponto homoclínico transversal para p, então existe uma vizinhança V de Λ_q, temos que o conjunto invariante maximal $\Lambda_V = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(V)$ é um conjunto hiperbólico.*

Demonstração. Pela Proposição 2.5.6 temos que Λ_q é hiperbólico, mais ainda pela Proposição 2.3.7, existe uma vizinhança aberta V de Λ_q tal que o conjunto invariante maximal $\Lambda_V = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(V)$ é também hiperbólico. ■

Provavelmente o conjunto Λ_V não seja conjugado a um subshift do tipo finito. Porém vamos construir no seguinte teorema: *Teorema do Ponto Homoclínico Transversal*, uma vizinhança menor de Λ_q, $U \subset V$ tal que U é uma união finita de caixas, onde cada caixa está associada a um símbolo no subshift, e assim construir uma conjugação topológica entre o conjunto hiperbólico e um subshift do tipo finito.

Teorema 2.5.8 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f e $q \in M$ um ponto homoclínico transversal para p. Então:*

1. *Para cada vizinhança aberta U' de p e q, existe uma vizinhança $U \subseteq U'$ e um número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que o conjunto invariante maximal $\Lambda = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{ni}(U) \subset U'$ de f^n é hiperbólico e $f^n_{|\Lambda}$ é topologicamente conjugado a função shift de dois símbolos, σ em Σ_2.*

2. *Para cada vizinhança U'' de Λ_q, existe uma vizinhaça pequena $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ de $\Lambda_q, n \geq 2, U \subset U''$ tal que $\Lambda_U = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(U) \subset U''$ é um conjunto invariante hiperbólico para f e $f_{|\Lambda_U}$ é topologicamente conjugado a função shift σ restrita ao subshift de tipo finito de n símbolos, $\Sigma_{A_n} \subset \Sigma_n$.*

Demonstração. (Construção das caixas no espaço ambiente) Seja U'' (respectivamente U') uma vizinhança de Λ_q (respectivamente de $\{p, q\}$). Tomamos coordenadas próximas a p induzidas pela decomposição hiperbólica. Primeiro vamos identificar E^s_p, E^u_p como subespaços de $E^s_p \times E^u_p \subset T_pM$ de tal maneira que uma vizinhança de p pode ser considerada como um subconjunto de $E^s_p \times E^u_p$ e as variedades locais estáveis e instáveis são discos nos subespaços da seguinte forma:

$$W^s_\delta(p) \equiv E^s_p(\delta) \times \{0\} \equiv E^s_p(\delta) \text{ e } W^u_\delta(p) \equiv \{0\} \times E^s_p(\delta) \equiv E^u_p(\delta).$$

Como $q \in W^s_p \cap W^u_p$, então existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $f^{-n_1}(q) \in W^u_\delta(p)$, $f^{n_2}(q) \in W^s_\delta(p)$ e $f^{-n_1+1}(q) \notin W^u_\delta(p)$, $f^{n_2-1}(q) \notin W^s_\delta(p)$(temos também que $f^{-m}(q) \in W^u_\delta(p)$ e $f^r(q) \in W^s_\delta(p)$, para todo $m \geq n_1$ e $r \geq n_2$). Tomemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, logo $f^{-n_0}(q) \in W^u_\delta(p)$ e $f^{n_0}(q) \in W^s_\delta(p)$ (novamente, temos também que $f^{-n}(q) \in W^u_\delta(p)$ e $f^n(q) \in W^s_\delta(p)$, para todo $n \geq n_0$). Ver Figura 2.7.

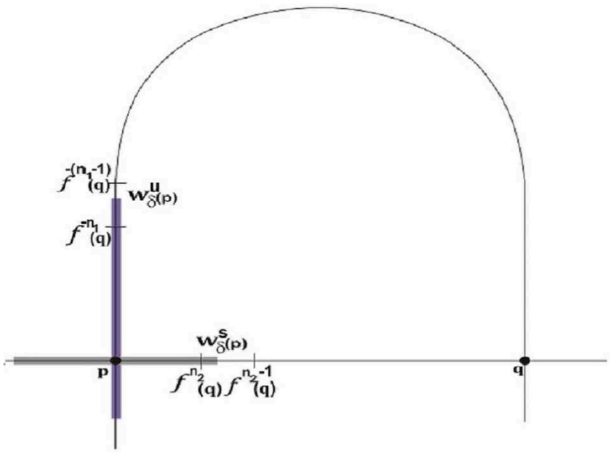


Figura 2.7: Homoclínico 1.

Sejam $\delta_s > 0$ e $\delta_u > 0$ tais que $0 \leq \delta_s, \delta_u \leq \delta$, $f^{n_0}(q) \in W^s_{\delta_s}(p)$ e $f^{n_0-1}(q) \notin W^s_{\delta_s}(p)$; $f^{-n_0}(q) \in W^u_{\delta_u}(p)$ e $f^{-(n_0-1)}(q) \notin W^u_{\delta_u}(p)$. Além disto

$$q \in int(f^{n_0}(D^u) \setminus f^{n_0-1}(D^u)), \text{ onde } D^u = W^u_{\delta_u}(p), \text{ e}$$

$$q \in int(f^{-n_0}(D^s) \setminus f^{-(n_0-1)}(D^s)), \text{ onde } D^s = W^s_{\delta_s}(p).$$

Além disso, $\delta_s > 0$ e $\delta_u > 0$ são tomamos de tal maneira que $D^s \times D^u \subset U'' \cap V$(respectivamente $U' \cap V$), onde V é a vizinhança de Λ_q dada pelo Corolário 2.5.7. Ver Figura 2.8.

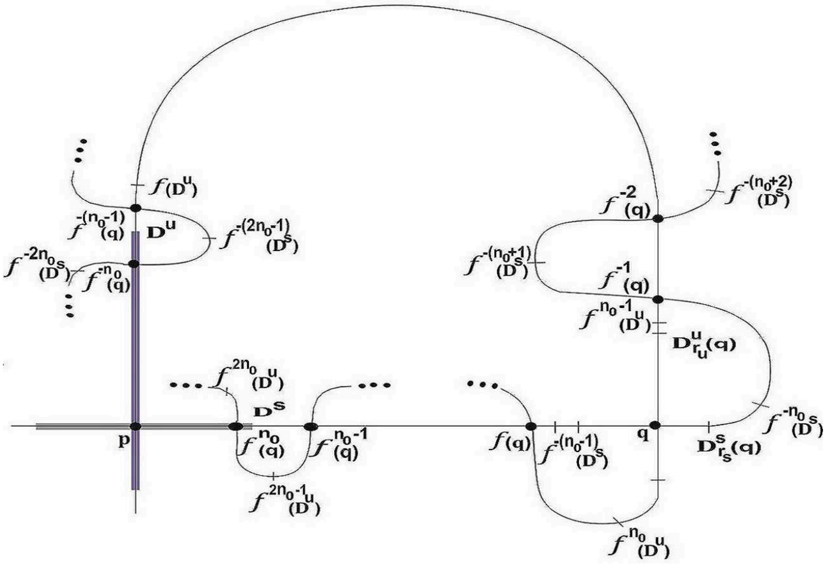


Figura 2.8: Homoclínico 2.

Onde $D^s_{r_s}(q)$ é um disco aberto em W^s_p e raio $r_s > 0$, contido em $f^{-n_0}(D^s) \setminus f^{-(n_0-1)}(D^s)$ e $D^u_{r_u}(q)$ um disco aberto em W^u_p com raio $r_u > 0$, contido em $f^{n_0}(D^u) \setminus f^{n_0-1}(D^u)$.
Tomando o disco compacto $\overline{D^s}$ em W^s_p, os quais têm a mesma dimensão. Notemos também que o disco $D^s_{r_s}(q)$ intersecta transversalmente a W^u_p em q (pois q é um ponto homoclínico transversal, os pontos da sua órbita também o são). Pelo Lema de inclinação para $\delta_0 = \min\{\delta_u, r_u\}$, existe $j_1' \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j' \in \mathbb{N}, j' \geq j_1'$ existe um disco $D_{j'} \subseteq D^s_{r_s}(q)$ tal que $f^{-j'}(D_{j'})$ está δ_0 C^1-próximo de $\overline{D^s}$. Como $\delta_0 \leq \delta_u$ e r_u, então $j_1' \geq n_0$. Logo, $j_1' = n_0 + j_1$ para algum $j_1 \in \mathbb{N}$. Assim, $f^{-j_1}(D^s \times D^u) \supset f^{-j_1'}(D_{j_1'})$ e $f^{-j_1}(D^u) \ni f^{-j_1'}(q)$. Tomemos $j > j_1$ suficientemente grande talque $f^{n_0}(D^u)$ cruza a $f^{-n_0}(D^s \times f^{-j}(D^u))$ transversalmente, isto é, $f^{n_0}(D^u)$ cruza transversalmente a fibra horizontal $f^{-n_0}(D^s \times \{y\})$ uma vez, para todo $y \in f^{-j}(D^u)$. Ver Figura 2.9.

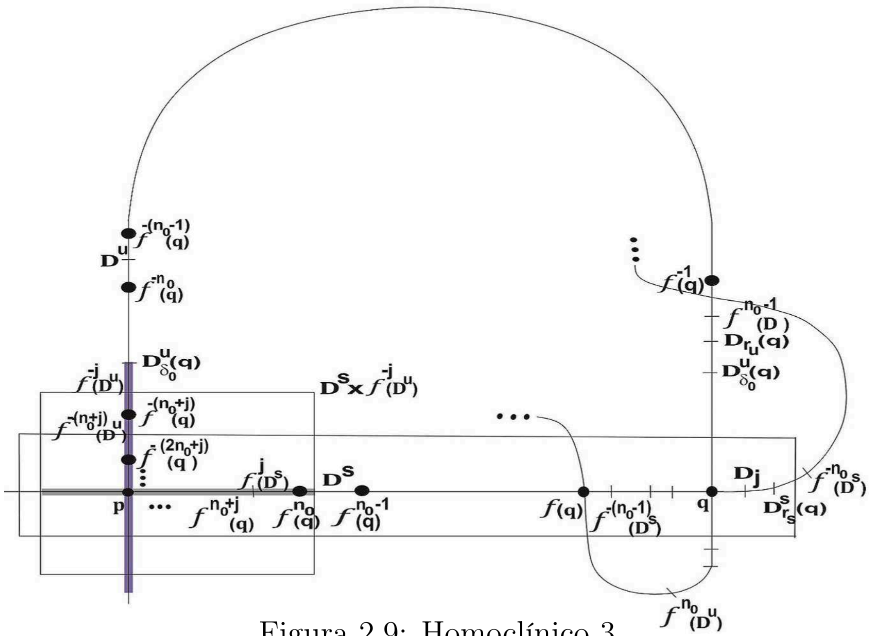


Figura 2.9: Homoclínico 3.

Assim, próximo de q, $f^{n_0}(D^u)$ é um *Disco Vertical*, na realidade na vizinhança $D^u_{\delta_0}(q)$ do ponto q. Logo, tomamos $n = n_0 + j$ e o conjunto $f^n(f^{-n_0}(D^s \times f^{-j}(D^u))) = f^{n_0+j}(D^s \times f^{-j}(D^u))$ o qual é uma vizinhança de $f^{n_0}(D^u)$ pela escolha de n_0. Portanto, para $j > j_1$ suficientemente grande $f^{n_0+j}(D^s \times f^{-j}(D^u))$ cruza transversalmente as componentes conexas de interseção Com_p contendo p e Com_q contendo q, definidas por:

$$V_1 = Com_p(D \cap f^n(D)) \subset U_1$$

$$V_2 = Com_q(D \cap f^n(D)).$$

onde, $D = f^{-n_0}(D^s \times f^{-j}(D^u))$ e $U_1 = D^s \times f^{-j}(D^u)$, logo $f^n(D) = f^{n-n_0}(U_1) = f^{n_0+j}(U_1)$. Ver Figura 2.10.

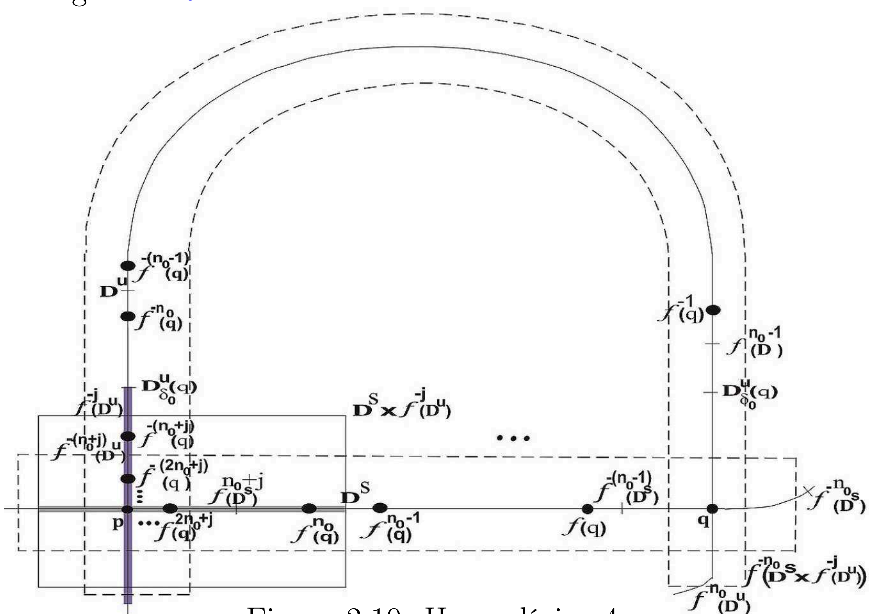


Figura 2.10: Homoclínico 4.

Em particular, cada *fibra vertical* $f^{n_0+j}(\{x\}\times f^{-j}(D^u))$ cruza a cada *fibra horizontal* $f^{-n_0}(D^s \times \{y\})$ exatamente uma vez, para cada $x \in D^s$ e $y \in f^{-j}(D^u)$. Para acabar com a construção, definimos a colecção finita de caixas: $(U_i)_{i=2}^{n}$, onde $U_i = f^{i-1-n_0-j}(V_2)$; Isto é:

$$U_2 = f^{-(n_0+j-1)}(V_2)$$
$$\vdots$$
$$U_j = f^{-(n_0+1)}(V_2)$$
$$\vdots$$
$$U_{j+n_0} = f^{-1}(V_2)$$
$$U_{j+n_0+1} = V_2$$
$$\vdots$$
$$U_n = B_{2n_0+j} = f^{n_0-1}(V_2)$$

Ver Figura 2.11.

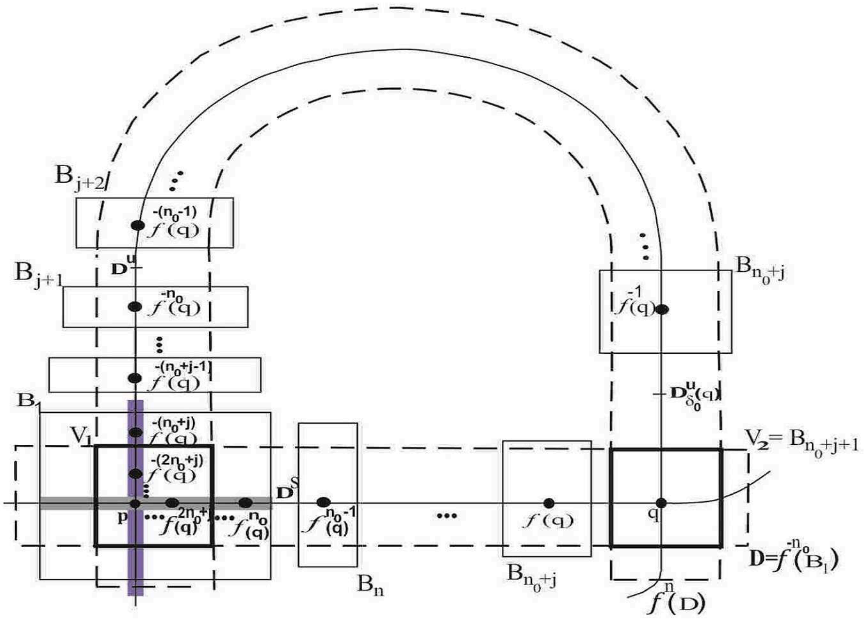


Figura 2.11: Homoclínico 5.

Item 1. Seja U' uma vizinhança aberta de p e q, que intersecta com a vizinhança V dado pelo Corolário 2.5.7. Sejam $n_0, j \in \mathbb{N}, \delta_s, \delta_u$ como definidos acima. Tomemos $n = 2n_0 + j$. Das escolhas acima V_1, V_2 são dois conjuntos tais que $V_1 \cup V_2 \subset U' \cap V$ e suas imagens por f^n se *estendem verticalmente* em D. Tomemos a vizinhança $U = V_1 \cup V_2$ de p e q. Logo, para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos o conjunto:

$$S_{0,m-1} = \bigcap_{i=0}^{m-1} f^{in}(U) = \bigcap_{i=0}^{m} f^{in}(D),$$

o qual possui 2^m componentes e elas se *estendem verticalmente* em D. Analogamente, seja o conjunto

$$S_{-m,-1} = \bigcap_{i=-m}^{-1} f^{in}(U) = \bigcap_{i=-m}^{0} f^{in}(D).$$

com 2^m componentes, as quais se *estendem horizontalmente*, transversalmente as fibras verticais em D.
Assim, obtemos o conjunto:

$$S_{-m,m-1} = \bigcap_{i=-m}^{m-1} f^{in}(U) = \bigcap_{i=-m}^{m} f^{in}(D) = \bigcap_{i=-m}^{m} (f^n)^i(D).$$

o qual possui 2^{2m} componentes (o máximo dos diâmetros dessas componentes vão para zero, quando m vai para o infinito.

Por argumentos análogos a demonstração da Proposição 2.4.2, segue-se que existe uma função contínua $h_1 : \Lambda \to \Sigma_2$, onde $\Lambda = \bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} f^{in}(U) \subset U'$, sobrejetiva e $h_1 \circ f^n_{|\Lambda} = \sigma \circ h_1$. Pelo fato de f^n ter uma estrutura hiperbólica em Λ implica que para qualquer sequência de símbolos $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$, existe apenas um único ponto $x \in \Lambda$ tal que $f^{in}(x)$ está na caixa V_{s_i}, para todo $i \in \mathbb{N}$, isto é, h_1 é injetiva.
Item 2. Seja $U_1, \ldots, U_n$ a colecção finita de caixas como definida acima. Assim, definimos a vizinhança $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ de Λ_q. Pela construção temos que $U \subset V$, logo o conjunto invariante maximal $\Lambda_U = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(U)$ de f tem estrutura hiperbólica, pois $\Lambda_U \subset \Lambda_V \subset V$.

Sejam $n = 2n_0 + j$, com n_0 e j como definidos acima.
Afirmação 1. Usando os indíces das caixas (não lineares) U_i, $1 \leq i \leq n$ como símbolos, Λ_U é conjugado a um subshift do tipo finito em Σ_n.

Devido a construção, $f^{-n_0}(U_1)$ e $f^{n_0+j}(U_1) = f^n(D)$ cruzam V_2 mas $f^l(U_1) \cap V_2 = \emptyset$, para $l = -n_0 + 1, \ldots, n_0 + j - 1$. Segue, portanto que:
i) $f(U_1)$ cruza U_1 e $f^{-n_0-j+1}(V_2) = U_2$, porém não cruza U_i, $i > 2$.
ii) $f^{n_0}(V_2) = f(f^{2n_0+j-1-n_0-j}(V_2)) = f(U_n)$ passa por U_1.
iii) $f^l(U_1) \cap U_1 = \emptyset$ para $l = -n_0 - j + 1, \ldots, n_0 - 1$. Assim $U_i \cap U_1 = \emptyset$, para $i = 2, \ldots, n$. Obtendo caixas contidas em V. Logo, o primeiro simbolo vai para ele ou para o segundo simbolo. Os outros símbolos só podem ir para o próximo, isto é, i vai par $i + 1$, onde $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ e o último simbolo: n vai para o primeiro simbolo. Assim, definimos a

matriz de transisão $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ para o subshift do tipo finito.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1 \ e \ j = 1,2 \ ou \ j = i+1, 2 \leq i < n \ ou \ i = n, j = 1. \\ 0 & outro \ caso. \end{cases}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{2.3}$$

Lembrando que, pela construção das caixas cada uma delas pode ser atribuidas coordenadas de modo que a imagem de un disco instável em U_i cruza U_{i+1} na direcção instável. Definamos a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} h_2: & \Lambda_U & \longrightarrow & \Sigma_{A_n} \\ & x & \mapsto & h(x) = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}}, s_i \in \{1,\ldots,n\} \ tal \ que \ f^i(x) \in U_{s_i}. \end{array}$$

Por (i), (ii) e (iii), h_2 está bem definida. Ainda mais, h_2 é sobrejetiva, pois dado $s = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{A_n}$ temos que para cada $m \geq 0$, pelo correto alinhamento topológico das imagens das caixas, $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{m} f^i(U_{s_{-i}})$ é uma subcaixa não vazia de U_{s_0} que se extende por todo o caminho atráves da direção instável. Analogamente, $\displaystyle\bigcap_{i=-m}^{0} f^i(U_{s_{-i}})$ é uma subcaixa não-linear não vazia de U_{s_0} que se extende por todo o caminho atráves da direção estável. Portanto

$$\bigcap_{i=-m}^{m} f^i(U_{s_{-i}}) \text{ e } \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(U_{s_{-i}})$$

são não vazias. Donde, obtemos um ponto $x \in M$ tal que $x \in \displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(U_{s_{-i}})$. Isto é, $x \in \Lambda_U$ e $h_2(x) = s$. Tendo também que $h_2 \circ f_{|\Lambda_U} = \sigma \circ h_2$ e h_2 é contínua. h é injetiva já que pela estrutura hiperbólica de f em Λ_U, a contracção e expansão implica que para qualquer sequência de símbolos $s = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{A_n}$ existe apenas um ponto na intersecção $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(U_{s_{-i}})$, obtendo desta maneira que h é uma conjugação. ■

Corolário 2.5.9 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f. Se $q \in M$ é um ponto homoclínico transversal de p, então para cada $x \in \Lambda$ as variedades estáveis e intáveis $W^s(x, f^n)$ e $W^u(x, f^n)$, respectivamente, são* *densas em Λ. Sendo $n \in \mathbb{N}$ e Λ como no Teorema 2.5.8.*

Demonstração. Dados a conjugação h_1 dada pelo Teorema 2.5.8 no Item 1 e $x \in \Lambda_q$, pela Proposição 2.2.3 temos que $W^s(h_1(x), \sigma)$ e $W^u(h_1(x), \sigma)$ são densas em Σ_2. Como h_1^{-1} é uma conjugação, entre σ e f^n tem-se:

$$\Lambda = h_1^{-1}(\Sigma_2) = h_1^{-1}(\overline{W^s(h_1(x),\sigma)}) = \overline{h_1^{-1}(W^s(h_1(x),\sigma))} = \overline{W^s(x, f^n)}, \text{ e}$$
$$\Lambda = h_1^{-1}(\Sigma_2) = h_1^{-1}(\overline{W^u(h_1(x),\sigma)}) = \overline{h_1^{-1}(W^u(h_1(x),\sigma))} = \overline{W^u(x, f^n)}.$$

Provando assim o corolário. ■

Corolário 2.5.10 *Sejam $f: M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f. Se $q \in M$ é um ponto homoclínico transversal de p, então para $n \in \mathbb{N}$, Λ e Λ_U como no Teorema 2.5.8 tem-se:*

1. *$f^n_{|\Lambda}$ é expansiva.*
2. *$f^n_{|\Lambda}$ é topologicamente mixing.*
3. *$f_{|\Lambda_U}$ é topologicamente mixing.*

Demonstração. **Item 1.** Pelo Teorema 2.5.8 temos que $f^n_{|\Lambda}$ é conjugado à a função σ no espaço de dois símbolos, a qual é expansiva, pela Proposição 1.1.17. O que implica que $f^n_{|\Lambda}$ é expansiva, pelo Item 7 do Teorema 1.3.9.

Item 2. Sabemos que $f^n_{|\Lambda}$ é conjugado à função shift σ no espaço de dois símbolos pelo Teorema 2.5.8. Pela Proposição 1.1.20, temos que σ é topológicamente mixing. Logo, pelo Item 6 do Teorema 1.3.9 concluimos $f^n_{|\Lambda}$ é topologicamente mixing.

Item 3. Pelo Teorema 2.5.8 temos que $f_{|\Lambda_B}$ é conjugado à função restrição $\sigma_{|\Sigma_{A_n}}$ sobre o subshift do tipo finito de n símbolos dado pela matriz A_n (Veja (2.3)). Matriz que é irredutível e como consequência $\sigma_{|\Sigma_{A_n}}$ é topologicamente mixing, pelo Teorema 1.2.4. Segue, pelo Item 6 do Teorema 1.3.9 que $f_{|\Lambda_U}$ é topologicamente mixing. ■

Teorema 2.5.11 *Seja $f: M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f. Se $q \in M$ é um ponto homoclínico transversal de p. Então:*

1. *Para cada vizinhança aberta $U^{'}$ de p e q, existe uma vizinhança $U \subseteq U^{'}$ de p e q e um número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que o conjunto maximal invariante em U mediante f^n possui pontos periódicos densos.*

2. *Para cada vizinhança U'' de Λ_q, existe uma vizinhança $U \subset U''$ de Λ_q tal que o conjunto maximal invariante em U mediante f possui pontos periódicos densos.*

Demonstração. Dado a vizinhança U' de p e q. Tomemos a vizinhança $U \subseteq U'$ de p e q e o número natural $n \in \mathbb{N}$ dados pelo Teorema 2.5.8. Assim, temos o conjunto maximal invariante em U mediante f^n, isto é, $\Lambda = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{in}(U)$. Pelo Teorema 2.5.8 temos que $f^n_{|\Lambda}$ é conjugado a função shift de dois simbolos, ito é, σ em Σ_2. Assim, tomando a conjugação h_1 dada pelo Teorema 2.5.8 no Item 1, a densidade dos pontos periódicos da função shift dada pela Proposição 1.1.15 e usando o item 1 do Teorema 1.3.9 temos que:

$$\Lambda = h^{-1}(\Sigma_2) = h^{-1}(\overline{Per(\sigma)}) = \overline{h^{-1}(Per(\sigma))} = \overline{Per(f^n_{|\Lambda})}. \tag{2.4}$$

Como consequência, temos que próximo aos pontos de Λ existem pontos periódicos em nosso conjunto maximal com um período multiplo de n.
Item 2 Dado a vizinhança U'' de Λ_q. Tomemos a vizinhança $U \subseteq U''$ de Λ_q dada pelo Teorema 2.5.8. Assim, temos o conjunto maximal invariante em U mediante f, isto é, $\Lambda_U = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(U)$. Pelo Teorema 2.5.8 temos que $f_{|\Lambda_U}$ é conjugado a função shift restrita a um subshift do tipo finito de n símbolos $\Sigma_{A_n} \subset \Sigma_n$. Sendo A_n a matriz quadrada dada em (2.3), a qual é irredutível. Segue que, o conjunto dos pontos periódicos de $\sigma_{|\Sigma_{A_n}}$ é denso em Σ_{A_n}, pela Proposição 1.2.6. Assim, tomando a conjugação h_2 dada pelo Teorema 2.5.8 no Item 2 e pelo Item 1 do Teorema 1.3.9 temos que:

$$\Lambda_U = h_2^{-1}(\Sigma_{A_n}) = h_2^{-1}(\overline{Per(\sigma_{|\Sigma_{A_n}})}) = \overline{h_2^{-1}(Per(\sigma_{|\Sigma_{A_n}}))} = \overline{Per(f_{|\Lambda_U})}. \tag{2.5}$$

Como consequência, temos que próximo aos pontos de Λ_U existem pontos periódicos em nosso conjunto maximal. ■

Corolário 2.5.12 *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f. Se $q \in M$ é um ponto homoclínico transversal de p. Então:*

1. *$\Lambda \subset \overline{Per(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f)$. Em particular, para p e q existem sequências de pontos periódicos de f que covergem para p e q respectivamente.*

2. *$\Lambda_U \subset \overline{Per(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f)$ Em particular, para p e os pontos da órbita $\mathcal{O}(q)$ existem sequências de pontos periódicos de f que covergem para p e os pontos de $\mathcal{O}(q)$ respectivamente.*

Demonstração. Por (2.4) e (2.5) e pela Proposição 1.3.7 temos que

$$\Lambda = \overline{Per(f^n_{|\Lambda})} \subset \overline{Per(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f).$$

$$\Lambda_U = \overline{Per(f_{|\Lambda_B})} \subset \overline{Per(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f).$$

Provando assim o corolário. $\blacksquare$

CAPÍTULO 3

CLASSES HOMOCLÍNICAS E A PROPRIEDADE DE PERÍODOS GRANDES

Neste capítulo trabalharemos em variedades Riemanianas compactas n-dimensionais, que denotaremos por M. Estudaremos dinâmicas em M com respeito a conjuntos invariantes maximais, mostrando que neles existe de certa forma caos usando para isto a existência da *Propriedade de Períodos Grandes*. Mais precisamente, mostraremos que certas classes homoclínicas possuem essa propriedade, o que implicará a propriedade topologicamente mixing.

3.1 Classes homoclínicas

Nesta subseção, vamos definir classes homoclínicas para um difeomorfismo e mostraremos dois resultados, usando como referência [11].

Definição 3.1.1 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico. Definimos a classe homoclínica de p com respeito a f, como sendo o conjunto*

$$\mathcal{H}(p) = \overline{H(p)} = \overline{W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(p)) \setminus \mathcal{O}(p)}.$$

Observemos que $\mathcal{H}(p)$ é um conjunto compacto e f-invariante.

Proposição 3.1.2 *Se $f\colon M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo e $p \in M$ é um ponto periódico* *hiperbólico de período τ para f, então $\mathcal{H}(p)$ é topologicamente transitivo. Em particular, $\mathcal{H}(p) \subset \Omega(f)$.*

Demonstração. Sejam V_1 e V_2 dois abertos não vazios em $\mathcal{H}(p) = \overline{H(p)}$. Logo, existem dois abertos U_1 e U_2 em M e pontos q_1, $q_2 \in H(p)$ tais que

$$q_1 \in V_1 = U_1 \cap \mathcal{H}(p) \text{ e } q_2 \in V_2 = U_2 \cap \mathcal{H}(p).$$

Portanto, existem $0 \leq i_k, j_k \leq \tau - 1$, $k = 1, 2$, tais que

$$q_1 \in W^s(f^{i_1}(p)) \cap W^u(f^{j_1}(p)) \text{ e } q_2 \in W^s(f^{i_2}(p)) \cap W^u(f^{j_2}(p)).$$

Tome um disco aberto D_1^u em $W^u(f^{j_1}(p))$ contendo $f^{j_1}(p)$ e q_1 em seu interior, e D_2^u um disco aberto em $W^u(f^{j_2}(p)) \cap U_2$ de mesma dimensão, contendo q_2 em seu interior. Agora, como D_2^u intersecta $W^s(f^{i_2}(p)) \subset W^s(\mathcal{O}(p))$ transversalmente, o λ-lemma diz que $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} f^n(D_2^u)$ contém discos arbitrariamente C^1-próximos de D_1^u. E assim, tais discos intersectam a variedade estável de $O(p)$ arbitrariamente próximo a q_1, ou seja, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} f^n(D_2^u)$ contém pontos em $H(p)$ arbitrariamente próximos de q_1. Em particular existe um ponto homoclínico q de p em $D_2^u \subset V_2$ e um número natural n tal que $f^n(q)$ está em V_1. O que portanto mostra a transitividade da classe homoclínica.

■

Definição 3.1.3 *Sejam $f \colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico, dizemos que um ponto periódico hiperbólico q é homoclínicamente relacionado a p ou h-relacionado a p se:*

$$W^u(\mathcal{O}(q)) \pitchfork W^s(\mathcal{O}(p)) \neq \emptyset \text{ e } W^u(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^s(\mathcal{O}(q)) \neq \emptyset.$$

O que segue é um resultado que permite dar outra definição, ou caracterização, para uma classe homoclínica.

Proposição 3.1.4 *Sejam $f \colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico. Então, vale o seguinte:*

$$\mathcal{H}(p) = \overline{\{q \in Per(f) / \quad q \text{ é } h\text{-relacionado a } p\}}.$$

Demonstração. Vejamos primeiro que $\overline{\{q \in Per(f)/ \quad q \text{ é } h\text{-relacionado a } p\}} \subseteq \mathcal{H}(p) = \overline{H(p)}$. Dado p_1 h-relacionado a p tal que $p_1 \notin \mathcal{O}(p)$, consideremos os pontos

$$
\begin{aligned}
x \in W^u(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^s(\mathcal{O}(p_1)) \text{ e}\\
y \in W^u(\mathcal{O}(p_1)) \pitchfork W^s(\mathcal{O}(p)).
\end{aligned}
$$

Asssim, usando $\lambda-$lema, temos que tanto a variedade estável quanto a variedade instável da $O(p)$ possuem discos aproximando de maneira C^1, respectivamente, as variedades estáveis e instáveis local da $\mathcal{O}(p_1)$, e assim, $\mathcal{O}(p_1)$ é aproximada por pontos homoclínicos de p, e portanto p_1 pertence a classe homoclínica de p.

Por outro lado, seja $q \in H(p)$. Pelo Item 2 do Teorema 2.5.8 (para o caso em que p é um ponto periódico hiperbólico) e por (2.5) temos que $q \in \Lambda_U = \overline{Per(f_{|\Lambda_U})}$. Logo, vão existir pontos periódicos de f em Λ_U arbitrariamente próximo de p e pelo fato de Λ_B ser um conjunto hiperbólico, estes pontos são h-relacionados a p. O que prova a outra inclusão, concluindo a demonstração. ■

Desta maneira, definimos o período de uma classe homoclínica $\mathcal{H}(p)$ como sendo o maior divisor comum dos períodos dos pontos periódicos hiperbólicos relacionados a p e é denotado por $l(\mathcal{O}(p))$.

3.2 Teorema da Decomposição de Smale

Sabemos que o espaço $\text{Diff}^1(M)$ dos difeomorfismo de classe C^1 sobre M, é munido da topologia C^1, e desta forma, sabemos que o mesmo é um espaço de baire. Portanto, todo subconjunto residual, isto é, a interseção enumerável de conjuntos abertos e densos é denso.

Lembremos agora algumas terminologias conhecidas na área de Sistemas Dinâmicos e que usaremos bastante nesta seção. Dado um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(M)$ e $\mathcal{U}$ uma vizinhança de f na topologia C^1, chamaremos aos difeomorfismos g que estejam em $\mathcal{U}$ como difeomorfismos C^1-próximos a f. Ao dizermos que um difeomorfismo é genérico estaremos nos referindo a difeomorfismos em conjuntos residuais. Quando uma propiedade P vale para todo difeomorfismo num conjunto residual dizemos que P vale genericamente ou que os difeomorfismos genéricos exibem a propriedade P. Uma classe homoclínica $\mathcal{H}(p)$ é robustamente topologicamente mixing se existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f tal que para todo difeomorfismo $g \in \mathcal{U}$ a classe homoclínica $\mathcal{H}(p(g))$, para continuação $p(g)$, é também topologicamente mixing. Isto é, para todo par de abertos U e V em $\mathcal{H}(p(g))$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq N_0$, tem-se $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definição 3.2.1 *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico, dizemos que a classe homoclínica $\mathcal{H}(p)$ é isolada se existe uma vizinhaça U de $\mathcal{H}(p)$ tal que*

$$\mathcal{H}(p) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U).$$

O próximo resultado é conhecido como o Teorema da Decomposição de Smale generalizado, dado por Abdenur e Crovisier([1]), o qual mostra a existência de uma decomposição de qualquer conjunto genérico isolado transitivo numa união finita de compactos nos quais está presente a propriedade topologicamente mixing. Como estamos interessados apenas no estudo de classes homoclínicas isoladas, citamos o resultado somente para classes homoclínicas.

Teorema 3.2.2 *Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset Diff^1(M)$ tal que para todo $f \in \mathcal{R}$, toda classe homoclínica isolada $\mathcal{H}(p, f)$ de um ponto periódico hiperbólico de f admite uma decomposição única como uma união finita de compactos, $\mathcal{H}(p, f) = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_l$, onde f^l é topologicamente mixing, restrito a cada um destes compactos. Mais ainda, l é o menor inteiro positivo tal que $W^s(p)$ tem interseção transversal não vazia com $W^u(f^l(p))$.*

O inteiro positivo l do Teorema da Decomposição de Smale, é igual ao período da classe homoclínica $\mathcal{H}(p, f)$ denotado aqui por $l(\mathcal{O}(p))$.

Outro resultado que precisaremos neste texto é o seguinte (para maiores detalhes veja [1]):

Proposição 3.2.3 *Sejam $f \colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, p_1 e p_2 dois pontos periódicos hiperbólicos homoclinicamente relacionados a p tais que $W^u(p_1) \pitchfork W^s(p_2) \neq \emptyset$. Então, $W^u(f^n(p_1)) \pitchfork W^s(p_2) \neq \emptyset$ se, e somente se, n está no grupo $l(\mathcal{O}(p))\mathbb{Z}$.*

Observação 3.2.4 Em particular, para um ponto periódico hiperbólico $\tilde{p}$ que é homoclinicamente relacionado a p temos que $W^u(f^n(\tilde{p})) \pitchfork W^s(\tilde{p}) \neq \emptyset$ se, e somente se, n está no grupo $l(\mathcal{O}(p))\mathbb{Z}$.

3.3 Propriedade de períodos grandes

Nesta seção introduziremos a *Propriedade de Períodos Grandes* e usaremos como principal referencia [3].

Definição 3.3.1 *Sejam X um espaço métrico e $f \colon X \longrightarrow X$ um homeomorfismo, dizemos que f possui a propriedade de períodos grandes, se para cada $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada número natural $n \geq n_0$, exista $p_n \in Fix(f^n)$, cuja órbita para f é ϵ-densa em X.*

A propriedade de períodos grandes pode ser usada como um critério para assegurar a propriedade mixing, como mostra o próximo resultado devido a Arbieto, Catalan e Santiago em [3].

Lema 3.3.2 *Sejam X um espaço métrico e $f\colon X \longrightarrow X$ um homeomorfismo. Se f tem a propriedade de períodos grandes, então f é topologicamente mixing.*

Demonstração. Vejamos primeiro que f é topologicamente transitivo. Para tal, consideremos B_1 e B_2 duas bolas abertas disjuntas em X. Para $\epsilon < \min\left\{\frac{diam(B_1)}{2}, \frac{diam(B_2)}{2}\right\}$, pela propriedade de períodos grandes existe $p_{n_0} \in Fix(f^{n_0})$ cuja órbita sobre f é ϵ-densa em X. Sejam $\widehat{B_1}, \widehat{B_2}$ bolas abertas de raio ϵ contida em B_1 e B_2, respectivamente. Segue que, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $0 \le n_1, n_2 < n_0$ tais que

$$f^{n_1}(p_{n_0}) \in \widehat{B_1} \text{ e } f^{n_2}(p_{n_0}) \in \widehat{B_2}.$$

Como B_1 e B_2 são disjuntas, então $n_1 \neq n_2$, isto é, $n_1 < n_2$ ou $n_2 < n_1$. Supondo $n_1 < n_2$ e tomando $r = n_2 - n_1 > 0$, para $x = f^{n_1}(p_{n_0}) \in \widehat{B_1}$ temos que

$$f^r(x) = f^r(f^{n_1}(p_{n_0})) = f^{r+n_1}(p_{n_0}) = f^{n_2}(p_{n_0}) \in \widehat{B_2}.$$

Isto, mostra que $f^r(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$. Agora, dados os abertos U e V não vazios, tomamos duas bolas abertas disjuntas contidas em U e V, e assim, pelo mostrado acima alguma iteração de U intersecta V. Provando o que queríamos.

Agora, provaremos que f é topologicamente mixing. Dados U e V dois abertos não vazios e disjuntos, pela transitividade de f, já mostrada acima, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Tomando m_1 o menor possível, temos que $f^j(U) \cap V = \emptyset$ para todo $j = 0, 1, \ldots, m_1 - 1$. Agora, tomemos uma bola aberta B em $f^{-m_1}(f^{m_1}(U) \cap V)$ que é um aberto não vazio em X (pois $f^{m_1}(U) \cap V$ é aberto). Assim,

$$f^{m_1}(B) \subset f^{m_1}(U) \cap V \text{ e } B \subset U.$$

Tomemos agora $\epsilon = \dfrac{diam(B)}{2} > 0$ e seja $m_0 = m_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ dado pela propriedade de períodos grandes. Logo, para cada $n \neq 0$, existe um ponto

$$p_\tau \in Fix(f^\tau), \text{ onde } \tau = n + m_0 + m_1,$$

cuja órbita é ϵ-densa em X. Pela escolha de ϵ, B contém algum iterado de p_τ. Isto é, existe $0 \le i < \tau$ tal que $f^i(p_\tau) \in B \subset U$ o que implica que $f^{m_1}(f^i(p_\tau)) \in V$. Disto, segue que:

$$f^{n+m_0}(f^{m_1}(f^i(p_\tau))) = f^i(f^\tau(p_\tau)) = f^i(p_\tau) \in U.$$

Isto, mostra que $f^{n+m_0}(V) \cap U \neq \emptyset$, para todo $n \ge 0$ e portanto f é topologicamente mixing. ∎

É uma questão natural se o inverso desse resultado for verdadeiro. No entanto, Carvalho e Kwietniak [6] deram um exemplo de um homeomorfismo de um espaço métrico compacto com a *propriedade de sombreamento de limite de dois lados*, mas sem pontos periódicos. O Teorema B em [6] estabelece que a propriedade de sombreamento de limite de dois lado, implica tologicamente mixing. Portanto, o inverso do Lema 4.2 não é verdadeiro em geral.

No o Teorema B do nosso trabalho a equivalencia entre a propriedade de periodos grandes homoclinica e topologicamente mixing acontece num mundo mais restrito.

Definição 3.3.3 *Seja $f\colon X \longrightarrow X$ um homeomorfismo num espaço métrico X. Dado $\delta > 0$, dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma δ-pseudo órbita se $d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Dizemos que uma δ-pseudo órbita é ϵ-sombreada por um ponto $z \in X$ com $\epsilon > 0$, se $d(f^n(z), x_n) < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Uma δ-pseudo órbita é chamada periódica se existe um mínimo número τ tal que $x_{n+\tau} = x_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. O número τ é chamado o período da δ-pseudo órbita.*

Note que, a órbita de todo ponto é uma δ-pseudo órbita, para todo $\delta > 0$.

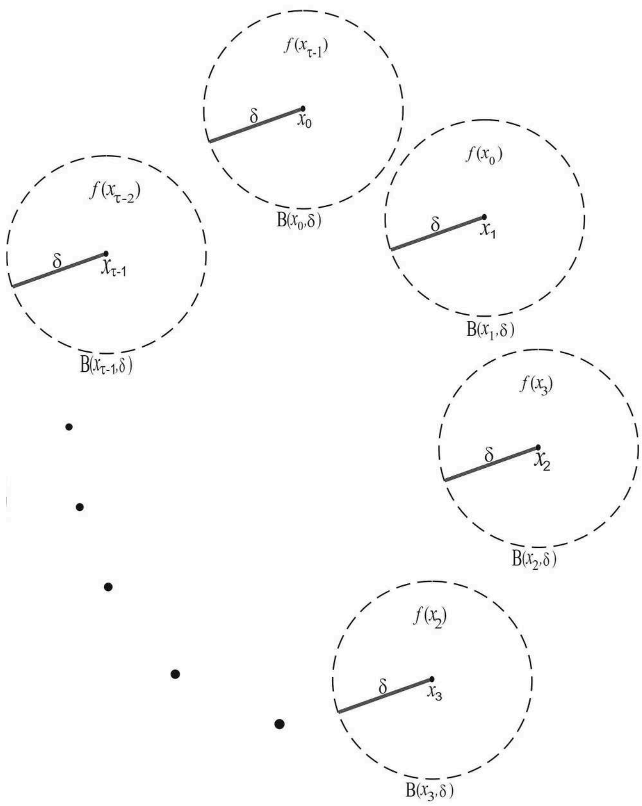


Figura 3.1: δ-pseudo órbita periódica de período τ.

Para mostramos a existência da propriedade de períodos grandes em certos conjuntos será fortemente usado um resultado conhecido na teoria de Sistemas Dinâmicos por Lema de Sombreamento. Na sequência vamos enunciar tal resultado no caso periódico. Para maiores detalhes e versões mais gerais, além das demonstrações dos mesmos veja [10].

Lema 3.3.4 (Lema de Sombreamento) *Seja Λ um conjunto hiperbólico localmente maximal. Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita periódica pode ser ϵ sombreada por uma órbita periódica. Mais ainda, se τ é o período da δ-pseudo órbita, então o ponto periódico é um ponto fixo de f^τ.*

Antes de usar o Lema de Sombreamento para conseguirmos encontrar pontos periódicos com períodos grandes, vamos estudar alguns resultados que são consequências da hiperbolicidade de certos conjuntos.

Proposição 3.3.5 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subseteq M$ um conjunto f-invariante. Se Λ é um conjunto hiperbólico compacto para f, então existe $\delta_0 > 0$ tal que $W^\sigma_{loc}(x) \supseteq W^\sigma_{\delta_0}(x)$, para todo $x \in \Lambda$, $\sigma = s, u$.*

Demonstração. Pelo Teorema da Variedade Estável em Λ, para cada $x \in \Lambda$, existe $\delta_x > 0$ tal que $W^\sigma_{\delta_x}(x) \subseteq W^\sigma_{loc}(x)$, $\sigma = s, u$. Pela continuidade das W^σ, $\sigma = s, u$ em Λ, para cada $x \in \Lambda$, existe $\epsilon_x > 0$ tal que para todo $y \in B(x, \epsilon_x)$, tem-se $W^\sigma_{\delta_x}(y) \subseteq W^\sigma_{loc}(y)$. Assim, obtemos a cobertura aberta $\Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda}(B(x, \epsilon_x) \cap \Lambda)$. Pela compacidade de Λ, existe uma subcobertura finita, isto é, existem $x_1, \ldots, x_n \in \Lambda$ tais que $\Lambda = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(B(x_i, \epsilon_{x_i}) \cap \Lambda)$. Ou seja,

$$\Lambda \subseteq B(x_1, \epsilon_1) \cup \ldots \cup B(x_n, \epsilon_{x_n})$$

Agora, tome $\delta_0 = \min\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\} > 0$. Dado $y \in \Lambda$, existe $x_{i_y} \in \Lambda$, $i_y \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in B(x_{i_y}, \epsilon_{x_{i_y}})$. Logo, $W^\sigma_{\delta_0}(y) \subset W^\sigma_{\delta_{x_{i_y}}}(y) \subseteq W^\sigma_{loc}(y)$, $\sigma = s, u$. ■

Proposição 3.3.6 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subseteq M$ um conjunto f-invariante. Se Λ é um conjunto hiperbólico compacto para f, então existem $\delta_0 > 0$ e $\epsilon_0 > 0$ tal que: Se $d(x, y) < \epsilon_0, x, y \in \Lambda$, então $W^s_{\delta_0}(x) \pitchfork W^u_{\delta_0}(y) \neq \emptyset$ e $W^u_{\delta_0}(x) \pitchfork W^s_{\delta_0}(y) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.3.5 existe $\delta_0 > 0$ tal que $W^\sigma_{\delta_0}(a) \subseteq W^\sigma_{loc}(a)$, para todo $a \in \Lambda$. Agora, pela continuidade das W^σ, $\sigma = s, u$ temos que, para cada $a \in \Lambda$, existe $\epsilon_a > 0$ tal que para $b, c \in \Lambda$, $d(b, a) < \epsilon_a$ e $d(c, a) < \epsilon_a$ tem-se:

$$W^s_{\delta_0}(b) \pitchfork W^u_{\delta_0}(c) \neq \emptyset \text{ e } W^u_{\delta_0}(b) \pitchfork W^s_{\delta_0}(c) \neq \emptyset.$$

Assim, obtemos a cobertura aberta $\Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda}(B(a, \epsilon_a) \cap \Lambda)$. Pela compacidade de Λ, obtemos o número de lebesgue para a cobertura aberta. Isto é, para todo subconjunto com diametro menor que ϵ_0, está contido em algum aberto da cobertura. Segue que, para $x, y \in \Lambda$ com $d(x,y) < \epsilon_0$, existe $a_{x,y} \in \Lambda$ tal que $d(x, a_{x,y}) < \epsilon_{a_{x,y}}$ e $d(y, a_{x,y}) < \epsilon_{a_{x,y}}$. Assim, temos

$$W^s_{\delta_0}(x) \pitchfork W^u_{\delta_0}(y) \neq \emptyset \text{ e } W^u_{\delta_0}(x) \pitchfork W^s_{\delta_0}(y) \neq \emptyset.$$

■

Agora, vamos usar o Lema de Sombreamento e a Proposição 3.3.6 para construir órbitas de períodos grandes e além disso, h-relacionadas ([3]).

Lema 3.3.7 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, e $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico tal que existe um ponto de interseção transversal $q \in W^s(p) \pitchfork W^u(f(p))$. Então, dado uma vizinhança U'' de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$ existe uma vizinhança $U \subset U''$ de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$ tal que para $\epsilon > 0$ arbitrários, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ de tal maneira que para todo $n \geq N_0$ existe $p_n \in Per_n(f) \cap \Lambda_U$ h-relacionado a p e $d(p_n, p) < \epsilon$.*

Demonstração. Seja $\tau := \tau(p)$ o período de p. Dada uma vizinhança U'' de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$. Tomemos a vizinhança $U \subset U''$ de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$ dado pelo Teorema 2.5.8 (para o caso em que o ponto $p \in M$ seja periódico hiperbólico). Assim, por esse mesmo teorema, o conjunto invariante maximal $\Lambda_U = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ é não vazio e é um conjunto hiperbólico compacto. Sejam $\delta_0 > 0$ e $\epsilon_0 > 0$ dados pela Proprosição 3.3.6 para Λ_U. Assim, dado $\epsilon > 0$, seja $\delta_1 > 0$ dado pelo Lemma 3.3.4 para $\epsilon_1/2$, onde $\epsilon_1 = \min\{\epsilon_0, \epsilon\}$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \epsilon_1/2\} > 0$. Note que toda δ-pseudo órbita é também δ_1-pseudo órbita e portanto existirá órbita $\epsilon_1/2-$sombreando.

Como $q \in W^s(p) \pitchfork W^u(f(p))$, para $N \in \mathbb{N}$ grande o suficiente, tomamos $x = f^{N\tau}(q)$ tal que $f^{-r\tau}(x) \in W^s_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2})$ para todo $r = 1, \ldots, \tau$. Isto é,

$$f^{(N-r)\tau}(q) \in W^s_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2}) \text{ para todo } r = 1, \ldots, \tau,\ N > \tau.$$

Pelo fato de $q \in W^u(f(p))$ temos que $x = f^{N\tau}(q) \in W^u(f(p))$ e assim $f^{-1}(x) \in W^u(p)$. Portanto, podemos tomar $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, e $y = f^{-l\tau}(f^{-1}(x)) \in W^u_{\frac{\delta}{2}} \subset B(p, \frac{\delta}{2}), l > \tau$. Para cada $r = 1, \ldots, \tau$ definimos $k_r = rl$ e assim $L = \prod_{r=1}^{\tau} k_r$. Desta maneira, tomamos $N_0 = L\tau$. O objetivo de todo este cuidado com os índices, é exatamente para que todo $n > N_0$ possa ser decomposto da seguinte maneira:

$$n = (a+L)\tau + r = (a+L-k_r)\tau + k_r\tau + r,\ a \geq 0 \text{ e } r = 1, \ldots, \tau.$$

Agora, utilizando as decomposições acima, vamos construir δ-pseudo órbitas de qualquer tamanho suficientemente grande. Para tal, vamos usar vários pedaços de órbitas. Mais precisamente:

- Primeira corda: $x_0 = f^{-r\tau}(y) \in W^u_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2}), x_j = f^j(x_0)$, para $j = 1, \ldots, l\tau$. Note que $f(x_{l\tau}) = f^{-r\tau}(x) \in W^s_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2})$.
- Segunda corda: $x_{l\tau+1} = f^{-(r-1)\tau}(y) \in W^u_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2})$, logo temos que $d(f(x_{l\tau}), x_{l\tau+1}) < \delta$. $x_{l\tau+1+j} = f^j(x_{l\tau+1})$, para $j = 1, \ldots, l\tau$. Note que, $f(x_{2l\tau+1}) = f^{-(r-1)\tau}(x) \in W^s_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2})$.
- Terceira corda: $x_{2l\tau+2} = f^{-(r-2)\tau}(y) \in W^u_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2})$, logo temos que $d(f(x_{2l\tau+1}), x_{2l\tau+2}) < \delta$. $x_{2l\tau+2+j} = f^j(x_{2l\tau+2})$, para $j = 1, \ldots, l\tau$. Note que $f(x_{3l\tau+2}) = f^{-(r-2)\tau}(x) \in W^s_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2})$.

Assim, definindo indutivamente:

$$x_{kl\tau+k} = f^{-(r-k)\tau}(y) \in W^u_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2}),\ 0 \leq k < r.$$
$$x_{kl\tau+k+j} = f^j(x_{kl\tau+k}),\ \text{para } j = 1, \ldots, l\tau.$$

Logo, na r-ésima corda, isto é, para $k = r - 1$, o índice do último termo é $rl\tau + r - 1 = k_r\tau + r - 1$ e $f(x_{k_r\tau+r-1}) = f^{-\tau}(x) \in W^s_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2})$. Agora, vamos definir $x_{k_r\tau+r} = x$ e $x_{k_r\tau+r+j} = f^j(x), j = 1, \ldots, (a + L - k_r)\tau - 1$. Note que $f(x_{n-1}) = f(x_{rl\tau+r+(a+L-k_r)\tau-1}) = f^{(a+L-k_r)\tau}(x) \in W^s_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2})$. Por último definimos $x_n = x_{k_r\tau+r+(a+L-k_r)\tau} = x_0 \in W^u_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset B(p, \frac{\delta}{2})$, isto é, $x_n = x_0$ e temos que

$$d(f(x_{n-1}), x_n) = d(f^{(a+L-k_r)\tau}(x), x_0) < \delta.$$

Assim, obtemos a δ-pseudo órbita $(x_i)_{i=0}^n \subset \mathcal{O}(q) \subset \mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$ periódica de período n. Portanto, pelo Lema do Sombreamento, esta $\delta-$ pseudo órbita é $\frac{\epsilon_1}{2}$-sombreada por um ponto periódico de período n em Λ_U. Isto é, existe $p_n \in Per_n(f) \cap \Lambda_U$ tal que

$$d(f^i(p_n), x_i) < \frac{\epsilon}{2},\ \textit{para todo } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Mais ainda, tem-se que: $d(p_n, p) \leq d(p_n, x_0) + d(x_0, p) < d(p_n, x_0) + \frac{\delta}{2} \leq d(p_n, x_0) + \frac{\epsilon_1}{2} < \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_1}{2} = \epsilon_1 < \epsilon$. E pela escolha de ϵ_1 temos que $d(p_n, p) < \epsilon_0$, o que implica que:

$$W^s_{\delta_0}(p_n) \pitchfork W^u_{\delta_0}(p) \neq \emptyset \text{ e } W^u_{\delta_0}(p_n) \pitchfork W^s_{\delta_0}(p) \neq \emptyset.$$

Isto é, p_n é h-relacionado a p. ■

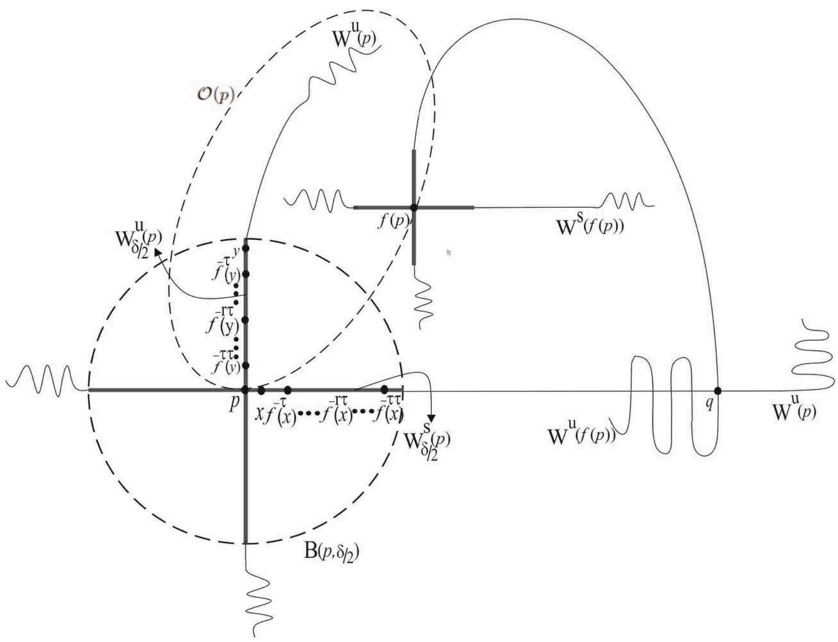


Figura 3.2: δ-pseudo órbita

No caso de classes homoclínicas podemos pedir um pouco mais na propriedade de grandes períodos.

Definição 3.3.8 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, $\mathcal{H}(p)$ uma classe homoclínica de um ponto periódico hiperbólico p e $\Lambda \subseteq \mathcal{H}(p)$ um subconjunto invariante, dizemos que Λ possui a propiedade de períodos grandes homoclínica se para todo $\epsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ existe um ponto $p_n \in Fix(f^n)$ em Λ, sendo homoclinicamente relacionado a p e cuja órbita por f é ϵ-densa em Λ.*

E assim, o objetivo nosso agora será provarmos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.9 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, e $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico. Se existe um ponto de interseção homoclínica transversal $q \in W^s(p) \pitchfork W^u(f(p))$, então para toda vizinhança U'' de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$ existe uma vizinhança $U \subseteq U''$ de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$ a restrição de f ao conjunto invariante maximal $\Lambda_U = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ possui a propriedade de períodos grandes homoclínica.*

Demonstração. Será feita depois de uns certos resultados. ∎

Observemos que o Lema 3.3.7 já nos dá a possibilidade de construirmos órbitas de períodos grandes e ainda mas, h-relacionadas. Assim, para provarmos o teorema acima, precisamos conseguir a densidade destas órbitas. Para tal, apresentaremos e provaremos os seguintes lemas.

Vamos enunciar e dar um esboço da demonstração do seguinte lema.

Lema 3.3.10 *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico tal que existe um ponto de interseção transversal $q \in W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(p))$. Então, para toda vizinhança pequena o suficiente U de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$, o conjunto maximal Λ_U é transitivo.*

Demonstração. Pelo Teorema do ponto homoclínico transversal(para o caso em que o ponto $p \in M$ seja periódico hiperbólico), Λ_U é conjugado com um subshift de tipo finito, o qual desde já sabemos que é definido á partir de uma matriz(ver [10], página 293), a qual satisfaz a hipotése da Proposição 1.2.5 e portanto Λ_U é transitivo. ■

Lema 3.3.11 *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico tal que existe um ponto de interseção transversal $q \in W^s(p) \pitchfork W^u(f(p))$. Então, para toda vizinhança pequena o suficiente U de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$ o conjunto maximal Λ_U é aproximado com a distância de Hausdorff por órbitas periódicas .*

Demonstração. Pelo Lemma 3.3.10 temos que Λ_U é transitivo, o que implica que existe $y \in \Lambda_U$ tal que $\Lambda_U = \overline{\mathcal{O}(y)}$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ dado pelo Lema de Sombreamento em Λ_U para $\frac{\epsilon}{2}$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\delta < \frac{\epsilon}{2}$. Sabemos que $f_{|\Lambda_U}$ é conjugado com $\sigma_{|\Sigma_{A_n}}$ e que Σ_{A_n} é compacto. Segue que Λ_U é compacto. Para cada $x \in \Lambda_U$, seja a bola aberta $B(x, \frac{\delta}{2})$ e obtemos a cobertura aberta

$$\Lambda_U = \bigcup_{x \in \Lambda_U} B(x, \frac{\delta}{2}) \cap \Lambda_U.$$

Logo, pela compacidade de Λ_U, existem $a_1, \ldots, a_n \in \Lambda_U$ tais que $\Lambda_U = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{\delta}{2}) \cap \Lambda_U$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $n_i \geq 0$ tal que $f^{n_i}(y) \in B(a_i, \frac{\delta}{2})$. Dado $n_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \{n_i\}$ e tomamos $N_1 > n_0$ tal que $d(y, f^{N_1}(y)) < \delta$. Assim obtemos a δ-pseudo órbita $Y = \{y, f(y), \ldots, f^{N_1}(y)\}$ e portanto existe um ponto $p_{N_1} \in Per_{N_1}(f) \cap \Lambda_U$ tal que

$$d(f^m(p_{N_1}), f^m(y)) < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } 0 \leq m \leq N_1 - 1.$$

Segue que a órbita $\mathcal{O}(p_{N_1})$ é ϵ-densa. Pois dado $x \in \Lambda_U$ existe $1 \leq i_x \leq n$ tal que $x \in B(a_{i_x}, \frac{\delta}{2})$, logo

$$d(x, f^{n_{i_x}}(p_{N_1})) \leq d(x, a_{i_x}) + d(a_{i_x}, f^{n_{i_x}}(y)) + d(f^{n_{i_x}}(y), f^{n_{i_x}}(p_{N_1})) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto $d_H(\mathcal{O}(p_{N_1}), \Lambda_U) < \epsilon$, onde d_H é a distância de Hausdorff. Provando assim o que queríamos. ■

Munido destes resultados acima podemos finalmente provar o **Teorema 3.3.9** :

Demonstração. Dada uma vizinhança $U^{''}$ de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(p)$, tomemos a vizinhança $U \subset U^{''}$ de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(p)$ dada pelo Teorema (no caso de $p \in M$ ser periódico hiperbólico). Seja $\epsilon > 0$ dado arbitrário. Tome $\widetilde{\delta}$ dado pelo Lema de Sombreamento em Λ_U para $\frac{\epsilon_1}{2}$, onde $\epsilon_1 < \min\{\epsilon_0, \epsilon\}$, sendo ϵ_0 dado pela Proposição 3.3.6 (pois Λ_U é um conjunto hiperbolico compacto). Tomemos $\delta = \min\{\widetilde{\delta}, \frac{\epsilon_1}{2}\}$. Pelo Lema 3.3.11 existe $x \in Per(f)$ tal que $\mathcal{O}(x)$ cuja órbita é δ-densa em Λ_U. Pelo Lema 3.3.7 existe $\widetilde{N}$ tal que para todo $n > \widetilde{N}$ existe um ponto periódico de período n, h-relacionado a p e que está δ-próximo de p. Tomemos $N = \tau(x) + \widetilde{N}$ ($\tau(x)$ é o périodo de x). Tomemos $n > N$, para tal vamos construir uma δ-pseudo órbita periódica de período n. Mais precisamente, considere:

$$\{y, \ldots, f^{\tau(y)-1}(y), f^j(x), \ldots, f^{j+\tau(x)-1}(x)\},$$

onde $d(f^j(x), y) < \delta$ e $y \in Per(f)$ h-relacionado a p com $\tau(y) = n - \tau(x)$ e $d(y,p) < \delta$ que existe pelo Lema 3.3.7. Pelo Lema de Sombreamento, existe um $z \in \Lambda_U$ periódico de período n que $\frac{\epsilon_1}{2}$-sombreia a δ-pseudo órbita. Como a $\mathcal{O}(z)$ $\frac{\epsilon_1}{2}$-sombreia $\mathcal{O}(x)$ que é δ-densa, então $\mathcal{O}(z)$ é ϵ_1-densa em Λ_U, por escolha de δ. Em particular, $\mathcal{O}(z)$ é ϵ-densa em Λ_U, pois $\epsilon_1 < \epsilon$. Como $d(z,y) < \frac{\epsilon_1}{2} < \frac{\epsilon_0}{2}$ e $d(y,p) < \delta \leq \frac{\epsilon_0}{2}$, então $d(z,p) < \epsilon_0$ e portanto temos que e z está homoclínicamente relacionado a p. ■

Uma consequência imediata deste teorema é o seguinte corolário:

Corolário 3.3.12 *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico tal que existe um ponto de interseção transverversal $q \in W^s(p) \pitchfork W^u(f(p))$, então para toda vizinhança pequena o suficiente U de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$, o conjunto invariante maximal $\Lambda_U = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ é topologicamente mixing.*

Demonstração. Pela Proposição 3.3.9 temos que $f_{|\Lambda_U}$ possui a propriedade de períodos grandes homoclínica, logo pelo Lema 3.3.2 temos que $f_{|\Lambda_U}$ é topologicamente mixing e portanto Λ_U é um conjunto hiperbólico topologicamente mixing.

■

Daremos um último resultado preliminar, antes de provarmos os resultados principais.

Teorema 3.3.13 *Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, e $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico. Se $\mathcal{H}(p)$ é tal que $l(\mathcal{O}(p)) = 1$, então $\mathcal{H}(p)$ possui a propriedade de períodos grandes homoclínica.*

Demonstração. Pela caracterização de classe homoclínica os pontos períodicos h-relacionados a p são densos em $\mathcal{H}(p)$. Assim, pela continuidade e transitividade de $\mathcal{H}(p)$, dado $\epsilon > 0$, existe um ponto periódico $\tilde{p}$ h-relacionado a p tal que $\mathcal{O}(\tilde{p})$ é $\frac{\epsilon}{2}$-densa em $\mathcal{H}(p)$. Pela continuidade de f, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, \tilde{p}) < \delta$, então $d(f^j(x), f^j(\tilde{p})) < \frac{\epsilon}{2}$, para $j = 0, 1, \dots, \tau(\tilde{p})$. Em particular, $\mathcal{O}(x)$ é ϵ-densa em $\mathcal{H}(p)$. Pela Observação 1, $l(\mathcal{O}(p)) = 1$ vale $W^s(\tilde{p}) \pitchfork W^u(f(\tilde{p}) \neq \emptyset$. Pelo Lema 3.3.7 existe N_0 para $\delta > 0$ tal que para todo $n > N_0$ existe $p_n \in Fix(f^n)$ h-relacionado a p e $d(p_n, \tilde{p}) < \delta$. O que implica por escolha de δ que $\mathcal{O}(p_n)$ é ϵ-densa em $\mathcal{H}(p)$. Concluimos que $\mathcal{H}(p)$ possui a propriedade de períodos grandes homoclínica. ■

Finalmente, encerraremos esta seção provando os dois teoremas principais do trabalho, enunciados na introdução:

Teorema A *Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset Diff^1(M)$, tal que se $f \in \mathcal{R}$ e se $p \in M$ é um ponto periódico hiperbólico de f tal que sua classe homoclinica, $\mathcal{H}(p)$, possui a propriedade de períodos grandes homoclínica, então $\mathcal{H}(p(g))$ possui a propriedade de períodos grandes homoclínica para todo difeomorfismo g C^1-próximo a f.*

Demonstração. Para tal vamos considerar o conjunto residual $\mathcal{R}$ do Teorema 3.2.2. Suponhamos $\mathcal{H}(p)$ possui a propriedade de períodos grandes. O que implica que, o período da classe homoclínica $l(\mathcal{O}(p)) = 1$. Assim, temos que $W^s(p) \pitchfork W^u(f(p)) \neq \emptyset$. Agora, como esta interseção é transversal, e portanto, robusta então temos que $W^s(p(g)) \pitchfork W^u(g(p(g))) \neq \emptyset$, para toda continuação $p(g)$ do ponto periódico hiperbólico p, para todo difeomorfismo g C^1-próximo de f. Portanto, $l(\mathcal{O}(p(g)) = 1$ para toda continuação $p(g)$ do ponto periódico hiperbólico p, para todo difeomorfismo g C^1-próximo de f. Pelo Teorema 3.3.13 concluimos que, a classe homoclínica $\mathcal{H}(p(g))$ da continuação $p(g)$ do ponto periódico hiperbólico p possui a propriedades de períodos grandes homoclínica, para todo difeomorfismo g C^1-próximo de f. ■

Teorema B *Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset Diff^1(M)$, tal que se $f \in \mathcal{R}$, e se $p \in M$ é um ponto periódico hiperbólico de f tal que sua classe homoclínica $\mathcal{H}(p)$ seja isolada, então $\mathcal{H}(p)$ é topologicamente mixing se, e somente se, possui a propriedade de períodos grandes homoclínica.*

Demonstração. Para tal vamos considerar o conjunto residual $\mathcal{R}$ do Teorema 3.2.2. Suponhamos que a classes homoclínica isolada $\mathcal{H}(p)$ seja topologicamente mixing. Pelo Teorema da Descomposição de smale temos que o período da classe é $l(\mathcal{O}(p)) = 1$. O que implica pelo Teorema 3.3.13 que a classe homoclínica $\mathcal{H}(p)$ possui a propriedade de períodos grandes homoclínica. Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{H}(p)$ possui a propriedade de períodos grandes homoclínica, então pelo Lema 3.3.2 temos que $\mathcal{H}(p)$ é topologicamente mixing. ■

Para finalizar o trabalho, provamos que genericamente a propriedade topologicamente mixing sobre classes homoclínicas isoladas é robusta.

Corolário 3.3.14 *Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathit{Diff}^1(M)$, tal que se $f \in \mathcal{R}$, e se $p \in M$ é um ponto periódico hiperbólico de f tal que sua classe homoclínica $\mathcal{H}(p)$ seja isolada, então $\mathcal{H}(p)$ ser topologicamente mixing, implica que $\mathcal{H}(p(g))$ é topologicamente mixing, para todo difeomorfismo g C^1-próximo de f.*

Demonstração. Pela Hipotese, $\mathcal{H}(p)$ é uma classe homoclínica topologicamente mixing, então pelo Teorema B, $\mathcal{H}(p)$ possui a propriedade de períodos grandes homoclínica. Agora, pelo Teorema A $\mathcal{H}(p(g))$ possui a propriedade de períodos grandes, para todo difeomorfismo g C^1-próximo de f. Segue, do Lema 3.3.2 $\mathcal{H}(p(g))$ é topologicamente mixing, para todo difeomorfismo g C^1-próximo de f. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Abdenur F. and Crovisier S. *Transitivity and topological mixing for C^1- diffeomorphisms*, 2011. DOI: arXiv:1111.4206.

[2] D. V. Anosov, *Geodesic flows on Riemannian manifolds with negative curvature*, In Proc. Steklov Inst. Math., volume 90. American Mathematical Society,Providence, RI, 1967.

[3] Arbieto A., Catalan T. and Santiago B. *Mixing-like properties for some generic and robust dynamics*, 2014. https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/11/4103

[4] Barreira, Luis.*Ergodic Theory, Hyperbolic Dynamics and Dimension Theory*. Springer, Science & Business Media(2012).

[5] Brin, M., and Stuck, G. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press, 2002. https://doi.org/10.1017/CBO9780511755316.001

[6] Carvalho Bernardo anda Kwietniak Dominik. *On homeomorphisms with the two-sided limit shadowing property*, 2014. DOI: arXiv:1402.0674.

[7] Amélia Ferreira Fernanda. *Dinâmica simbólica e ferradura de Smale*. Escola Superior de Estudos Industriais e de Gestão - ESEIG, Instituto Politécnico do Porto, V. 8, p. 183-199, 2007.

[8] Palis Jacob and Welinton de Melo Jr. *Geometric Theory of Dynamical Systems An Introduction*, Springer-Verlag(1982).

[9] Katok, A., and Hasselblatt, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, vol. 54. Cambridgne university press, 1997.

[10] Robinson, C. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2na ed. Studies and Avansed and Mathematics(1999).

[11] Newhouse Sheldon E. *Hyperbolic Limit* Sets(1971).

[12] S. Smale,*Diferentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc., 73, 6 (1967),747-817. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11798-1

[13] Viana, M., and Oliveira, K. *Fundamentos da teoria ergódica*. Rio de Janeiro: SBM 90 (2014).