LUIS ALBERTO GARCIA SANTISTEBAN

Técnicas de Extensão de Operadores Multilineares em Espaços de Banach

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2019

LUIS ALBERTO GARCIA SANTISTEBAN

Técnicas de Extensão de Operadores Multilineares em Espaços de Banach

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

G216t 2019

Garcia Santisteban, Luis Alberto, 1992-
Técnicas de extensão de operadores multilineares em Espaços de Banach [recurso eletrônico] / Luis Alberto Garcia Santisteban. - 2019.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2019.329
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. 2. Banach, Espaços de. 3. Análise funcional. 4. . I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo, 1962- (Orient.) II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Maria Salete de Freitas Pinheiro - CRB6/1262

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Luis Alberto Garcia Santisteban.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11712MAT006.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Técnicas de Extensão de Operadores Multilineares em Espaços de Banach.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 20 de fevereiro de 2019, às 14:00hs, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho UFU - Universidade Federal de Uberlândia	
Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos UFPB - Universidade Federal da Paraíba	
Prof. Dr. Ewerton Ribeiro Torres UFU - Universidade Federal de Uberlândia	

Uberlândia-MG, 20 de Fevereiro de 2019

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família e amigos que já não estão neste mundo, mais se que pronto nos volveremos a encontrar.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por estar com boa saudê e pela força que me dá dia a dia para seguir em frente com meus objetivos traçados.

Ao meu orientador, Geraldo Botelho, por ter aceitado ser meu orientador no meu mestrado, pelo apoio e paciência durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, Paula Santisteban Llauce e Luciano Garcia Chapoñan, a minhas irmãs Felicita, Carmen, Laura, Nelly e Delcy, a meus irmãos Genaro e Lorenzo e a todos meus sobrinhos e minhas sobrinhas. Todos eles são parte de minha vida e são meu motivo para seguir em frente e lograr meus objetivos.

A minha namorada Kassandra, pelo amor e apoio durante meu mestrado.

Ao meus amigos da minha turma do mestrado Daniel, Fidel, Gabriel, Ivan, Kassandra, Luis Miñope, Rejiane e Telmo que foram parte da minha vida e de ter encontrado uma boa amizade com eles.

A Javier, Nathali e Eduar pelo apoio durante os momentos iniciais na cidade de Uberlândia. Estou muito grato a vocês.

A CAPES, pelo apoio financeiro durante os dois anos de mestrado.

Ao programa de Mestrado em Matemática da UFU, por dar-me a oportunidade de ser parte deste programa. Aos professores que me ensinaram durante meu mestrado, Dr. Geraldo, Dr. Cícero, Dr. Mario, Dr. Jean Venato e ao Dr. Marcio. A coordenadora Dra. Rosana, por ser sempre prestativa com minhas solicitações.

Aos professores Dr. Jamilson Ramos e Dr. Ewerton Ribeiro por aceitarem o convite para compor a banca deste trabalho.

L. G. SANTISTEBAN. *Técnicas de Extensão de Operadores Multilineares em Espaços de Banach.* 2019. – xi + 88p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar técnicas variadas de extensão de operadores multilineares contínuos entre espaços de Banach. O problema geral é o seguinte: dados subespaços $G_1, \dots, G_n$ dos espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$, e um operador n-linear contínuo $A\colon G_1 \times \cdots \times G_n \longrightarrow F$, existe um operador n-linear contínuo de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F que estende A? Existe uma tal extensão que preserva a norma de A? Se tal extensão existir, ela é única? O primeiro objetivo foi mostrar que em geral não vale uma versão multilinear do Teorema de Hahn-Banach. Motivados por este fato, mostramos que operadores multilineares contínuos podem ser estendidos (i) ao fecho de cada subespaço, (ii) quando os subespaços são complementados, (iii) quando os subespaços são subespaços de um espaço de Hilbert. Um outro problema em que trabalhamos, mais delicado que os anteriores, é sobre a extensão de operadores multilineares contínuos ao bidual. Nesta direção estudamos em detalhes as chamadas extensões de Aron-Berner, incluindo um estudo completo de quando elas coincidem, de quando são separadamente fraca-estrela-fraca-estrela contínuas e de quando tomam valores no espaço de chegada original. Finalmente concluímos este trabalho apresentando alguns exemplos de espaços Arens-regulares e de outras situações em que todos os operadores lineares contínuos são fracamente compactos.

Palavras-chave: Espaços de Banach, operadores multilineares contínuos, extensão de operadores multilineares contínuos, extensões de Aron-Berner, operadores multilineares separadamente ω^*- ω^*-contínuos, espaços Arens-regular, operadores fracamente compactos.

L. G. SANTISTEBAN. *Extension Techniques for Multilinear Operators on Banach Spaces.* 2019. – xi + 88p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The main purpose of this work is to study several techniques of extending continuous multilinear operators between Banach spaces. The general problem is as follows: Given subspaces $G_1, \ldots, G_n$ of the Banach spaces $E_1, \ldots, E_n$ and a continuous n-linear operator $A\colon G_1 \times \cdots \times G_n \longrightarrow F$, does there exist a continuous n-linear operator of $E_1 \times \cdots \times E_n$ in F which extends A? Is there a norm preserving extension? Is this extension, if any, unique? The first aim it show that there is no multilinear version of the Hahn-Banach Theorem. Motivated by this fact we show that continuous multilinear operators can be extended to (i) the closure of each subspace, (ii) when the subspaces are complemented, (iii) when the subspaces are subspaces of a Hilbert space. Another problem we deal with, a more delicate one, concerns the extension of continuous multilinear operators to the bidual. In this direction we provide a detailed study of the so-called Aron-Berner extensions, including a complete study of when they coincide, of when they are separetely weak-star-weak-star continuouos and of when they take values in the original target space. Finally we conclude this work presenting some examples of Arens-regular spaces and other situations where all continuous linear operators are weakly compact.

Keywords: Banach spaces, continuous multilinear operators, extension of continuous multilinear operators, Aron-Berner extensions, separately ω^*- ω^*-continuous multilinear operators, Arens-regular spaces, weakly compact operators.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\\|\cdot\\|$ ou $\\|\cdot\\|_E$	norma em um espaço normado E
$(E, \\|\cdot\\|)$	espaço normado E com a norma $\\|\cdot\\|$
$\vert\cdot\vert$	módulo
$M_1, \ldots, M_n, M, N$	espaços métricos
$X_1, \ldots, X_n, Y$	espaços vetoriais
$E_1, \ldots, E_n, E, F$	espaços vetoriais, espaços normados ou espaços de Banach
$G_1, \ldots, G_n, G$	subespaços de um espaço normado ou de um espaço de Banach
H	espaço de Hilbert
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	produto interno
B_E	bola unitária fechada do espaço normado E
$x_n \xrightarrow{n} x$	a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para x
$\mathcal{L}(E; F)$	espaço dos operadores lineares contínuos entre os espaços normados E e F
E'	dual topológico do espaço normado E
E''	bidual topológico do espaço normado E
T'	operador adjunto de T
T''	operador biadjunto de T
ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$	espaço das sequências de escalares absolutamente p-somáveis
ℓ_∞	espaço das sequências de escalares limitadas
c_0	espaço das sequências de escalares que convergem para zero
c_{00}	subespaço de c_0 formado pelas sequências eventualmente nulas
J_E	mergulho canônico do espaço normado E em seu bidual E''

$\sigma(E, E')$ ou w	topologia fraca do espaço normado E
$x_n \xrightarrow{w} x$	a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge na topologia fraca para x
$\overline{A}^w$	fecho na topologia fraca do conjunto A
$\overline{A}$	fecho na topologia da norma do conjunto A
$\sigma(E', E)$ ou w^*	topologia fraca-estrela do espaço dual E'
$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$	a sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge na topologia fraca-estrela para φ
$h(E)$	imagem de um conjunto E pela aplicação $h\colon E \longrightarrow F$
$L(X_1, \ldots, X_n; Y)$	espaço dos operadores n-lineares de $X_1 \times \cdots \times X_n$ em Y
$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$	espaço dos operadores n-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F
id_E	operador identidade definido em E
$i\colon G \longrightarrow E$	operador inclusão de G em E
u, T	operadores lineares contínuos
A, B	operadores multilineares contínuos
$\widetilde{A}, \widetilde{B}$	extensão de um operador multilinear contínuo
e_n	n-ésimo vetor unitário canônico $e_n = (0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots)$
S_n	conjunto das permutações dos n primeiros números naturais
$\mathcal{K}(E; F)$	espaço dos operadores compactos
$\mathcal{W}(E; F)$	espaço dos operadores fracamente compactos
$\overline{A}_1, \overline{A}_2$	extensões de Aron-Berner de operadores bilineares contínuos
$\overline{A}_\sigma$	extensão de Aron-Berner de um operador multilinear contínuos associado à permutação σ
$\prod_{n=1}^{m} x_n$	produto dos m números $x_n \in \mathbb{K}$, $n = 1, \ldots, m$
H^∞	espaço de Hardy
$\mathcal{A}(\mathbb{D})$	a álgebra do disco
J	o espaço de James
$C(K)$	conjunto das funções contínuas no compacto K sobre $\mathbb{K}$

Sumário

Introdução

A Análise Funcional pode ser vista como o estudo dos operadores lineares contínuos definidos entre espaços normados, em particular entre espaços de Banach de dimensão infinita. No caso de dimensão finita, muitos resultados são encontrados na Álgebra Linear, e quando trata-se do estudo da continuidade dos operadores entra em cena a Topologia Geral. Sendo assim, pode-se dizer, com um pouco de liberdade, que a Análise Funcional é uma Álgebra Linear em dimensão infinita.

Um dos teoremas clássicos da Análise Funcional é o Teorema de extensão de Hahn-Banach. Este teorema deve o seu nome a Hans Hahn e Stefan Banach, que o provaram na década de 1920. No artigo [3], Richard M. Aron e Paul D. Berner se dedicam ao estudo do teorema de extensão de Hahn-Banach para funções analíticas. Um outro resultado de extensão para um operador linear contínuo trata extensão ao fecho (veja [18]) e também em [8] podemos encontrar o Teorema de Phillips, que é um resultado sobre a extensão de operadores lineares contínuos tomando valores em ℓ_∞.

É bem sabido que alguns resultados para operadores lineares contínuos na Análise Funcional Linear não seguem sendo válidos para operadores multilineares contínuos. Por exemplo, por um lado operadores lineares contínuos são sempre uniformemente contínuos, e por outro lado, conforme provaremos neste trabalho, operadores multilineares contínuos não-nulos nunca são uniformemente contínuos. Com isso em vista, um primeiro objetivo desta dissertação é verificar se resultados sobre extensão de operadores lineares contínuos ainda seguem sendo válidos no caso multilinear.

Um outro tipo de extensão que é estudada é a extensão de operadores ao bidual. Para o caso linear isso é bem conhecido, pois o biadjunto resolve totalmente o problema. Mas para operadores multilineares isto já não acontece, pois ao contrário do caso linear, o biadjunto de um operador multilinear não ajuda nesse sentido. Em 1951, no artigo [2], Richard Arens foi uns dos primeiros a apresentar uma extensão de um operador bilinear contínuo ao bidual. Em [3] R. Aron e P. Berner fazem essa construção para operadores multilineares tomando valores no corpo $\mathbb{K}$, construção essa que pode ser adaptada para estender operadores multilineares a valores vetoriais (veja [11], pág. 413). Um dos objetivos principais deste trabalho é apresentar um estudo detalhado das extensões de Aron-Berner para o caso geral, isto é, não apenas para o caso bilinear. Cabe ressaltar que a grande maioria dos textos existentes faz as demonstrações apenas no caso bilinear, dizendo que o caso multilinear geral segue de forma análoga. O fato é que a notação se complica muito no caso geral, e neste trabalho enfrentamos o desafio de escrever as demonstrações do caso geral em detalhes, com todas as complicações de notação envolvidas.

Em seguida descrevemos como o trabalho está organizado. Para possibilitar uma boa compreensão e leitura do texto, no primeiro capítulo apresentamos os conceitos e resultados básicos da Análise Funcional Linear e Topologia Geral que serão usados no decorrer do texto. A maior parte desses resultados são enunciados com as demonstrações devidamente referenciadas. Neste ponto, as principais referências utilizadas foram [22] e [8].

Começamos o segundo capítulo mostramos que em geral não vale uma versão multilinear do Teorema de Hahn-Banach. A peça fundamental para mostrar este resultado foi a consideração de subespaços não-complementados de espaços de Banach. Por outro lado, quando consideramos subespaços complementados, o resultado muda repentinamente, pois neste caso todo operador multilinear contínuo pode ser estendido. Mesmo não valendo um teorema de Hahn-Banach para o caso multilinear, passamos a investigar a validade de tal tipo de extensão em alguns casos particulares. Para finalizar este capítulo provamos que nem sempre operadores multilineares contínuos tomando valores em espaços injetivos podem ser estendidos. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [10] e [8].

No terceiro capítulo apresentamos duas demonstrações do teorema de extensão multilinear ao fecho e algumas aplicações. A demonstração do caso linear deste resultado (veja [18]) se baseia no fato de que operadores lineares serem uniformemente contínuos. Como já dissemos, esse argumento não se adapta ao caso multilinear, pois operadores multilineares não-nulos não são uniformemente contínuos. A primeira demonstração que apresentamos para este resultado baseia-se no fato de que operadores multilineares são sempre uniformemente contínuos sobre conjuntos limitados. Já a segunda demonstração será feita usando o caso linear e procedendo por indução sobre o grau de multilinearidade. Como aplicação do teorema de extensão multilinear ao fecho temos que operadores multilineares contínuos definidos em subespaços de espaços de Hilbert podem ser estendidos continuamente ao espaço todo.

No quarto e último capítulo apresentamos um outro tipo de extensão multilinear, a saber, a extensão de operadores multilineares contínuos ao bidual. Começamos estudando o caso linear. Neste caso o biadjunto u'' de um operador linear contínuo $u\colon E \longrightarrow F$ pode ser visto como uma extensão no sentido de que $u'' \circ J_E = J_F \circ u$, onde $J_E\colon E \longrightarrow E''$ é o mergulho canônico. A pergunta natural que surge é se um resultado análogo vale para operadores multilineares contínuos. O mesmo procedimento não pode ser adaptado, já que o biadjunto de um operador multilinear é um operador linear e não multilinear. O objetivo deste capítulo é descrever a solução deste problema fazendo a construção de Aron-Berner para estender um operador n-linear contínuo $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ obtendo $n!$ extensões de Aron-Berner. A existência de várias extensões de Aron-Berner nos levou a considerar o problema de quando todas elas coincidem, pois em [4] encontramos um exemplo que nos dizem que pode ocorrer o contrário. Em vista disto, procuramos estabelecer condições sob as quais todas as extensões de Aron-Berner coincidam. Lançando mão da teoria dos operadores fracamente compactos, pois são situações em que todos os operadores lineares contínuos são fracamente compactos que resolvem o problema. Além disso, estudamos a preservação da norma pelas extensões de Aron-Berner e também quando essas extensões são separadamente ω^*- ω^*-contínuas. Estudamos também quando essas extensões são verdadeiras, ou genuínas, isto é, quando tomam valores no conjunto $J_F(F)$. Primeiro damos um exemplo que deixa claro que isso nem sempre acontece. Em seguida estabelecemos condições sobre os espaços envolvidos para que todas as extensões de Aron-Berner tomem valores em $J_F(F)$. De novo é a teoria dos operadores fracamente compactos que nos ajuda a estabelecer este resultado. Para finalizar estudamos os espaços Arens-regulares, que estão por definição fortemente conectados com essa coincidência dos operadores fracamente compactos. Finalmente, para completar a teoria concluímos este capítulo dando alguns exemplos de espaços Arens-regulares e de várias outras situações em que todos os operadores lineares contínuos são fracamente compactos.

Luis Alberto Garcia Santisteban
Uberlândia-MG, 20 de fevereiro de 2019.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar alguns conceitos e resultados que nos ajudarão no decorrer da dissertação. As principais fontes desta capítulo foram [22] e [8].

Todos os espaços vetoriais são definidos sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Espaços normados e espaços de Banach

Definição 1.1.1. Uma *norma* sobre um espaço vetorial E é uma função

$$\|\cdot\|_E \colon E \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \|x\|_E,$$

que satisfaz as seguintes condições:
(i) $\|x\|_E \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
(ii) $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$;
(iii) $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ para todos $x, y \in E$ (desigualdade triangular).

Neste caso, o par $(E, \|\cdot\|_E)$ é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado*. Quando não houver perigo de confusão, escreveremos $\|\cdot\|$ no lugar de $\|\cdot\|_E$. É fácil ver que a função

$$d \colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ d(x, y) = \|x - y\|,$$

é uma métrica em E, chamada de *métrica induzida pela norma*. A menos de menção em contrário, um espaço normado será visto como espaço topológico, na verdade espaço métrico, com a topologia induzida por esta métrica.

Denotamos a bola unitária fechada em E por $B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

Definição 1.1.2. Um espaço normado E é chamado de *espaço de Banach* quando for completo na métrica induzida pela norma.

Exemplo 1.1.3. Por c_0 denotamos o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja, fixando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$c_0 = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \ a_n \longrightarrow 0\}.$$

O conjunto c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências e a expressão

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

torna c_0 um espaço normado. Mais ainda, a norma $\|\cdot\|_{\infty}$ é completa, assim c_0 é um espaço de Banach.

Exemplo 1.1.4. Para cada número real $p \geq 1$, definimos

$$\ell_p = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}.$$

O conjunto ℓ_p é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências e a expressão

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

torna ℓ_p um espaço normado. Por outro lado a norma $\|\cdot\|_p$ é completa, assim o conjunto ℓ_p é um espaço de Banach. Para $p = \infty$, definimos o conjunto de todas as sequências limitadas de escalares, isto é,

$$\ell_{\infty} = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\}.$$

O conjunto ℓ_{∞} é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências e a expressão

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

torna ℓ_{∞} um espaço normado. Além disso, a norma $\|\cdot\|_{\infty}$ é completa, logo ℓ_{∞} é um espaço de Banach.

Definição 1.1.5. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados. Para $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, definimos

$$\begin{aligned}
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 &= \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|; \\
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 &= (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2)^{1/2}; \\
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_{\infty} &= \text{máx}\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}.
\end{aligned}$$

Para a demonstração do seguinte resultado veja [22, Proposição 2.3].

Proposição 1.1.6. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Então $E_1 \times \cdots \times E_n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as seguintes operações: Dados $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos*

$$\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n); \\
\lambda(x_1, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).
\end{aligned}$$

Além disso, as funções $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_{\infty}$ são normas em $E_1 \times \cdots \times E_n$.

As normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ em $E_1 \times \cdots \times E_n$ são chamadas norma da soma, norma euclidiana e norma do máximo, respectivamente.

Definição 1.1.7. Duas normas em um espaço vetorial E são *equivalentes* se as métricas induzidas por elas são equivalentes, isto é, definem a mesma topologia em E.

Para as demonstrações das seguinte proposições veja [17, Capitulo 2, Proposição 9] e [22, Proposição 2.6] respectivamente.

Proposição 1.1.8. *Duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ no espaço vetorial E são equivalentes se, e somente se, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que*

$$c_1\|x\| \leq \|x\|^{'} \leq c_2\|x\| \text{ para todo } x \in E.$$

Proposição 1.1.9. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados. As normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ em $E_1 \times \cdots \times E_n$ são equivalentes e completas se $E_1, \ldots, E_n$ são espaços de Banach.*

A partir de agora, a menos de menção em contrário, dados espaços normados $E_1, \ldots, E_n$, o produto cartesiano $E_1 \times \cdots \times E_n$ estará munido de uma das três normas equivalentes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

1.2 Operadores multilineares contínuos

Definição 1.2.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_n$ e Y espaços vetoriais. Dizemos que uma aplicação $A\colon X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ é um *operador n-linear* se A é linear em cada uma de suas variáveis separadamente, isto é,

$$A(x_1, \ldots, \lambda x_i + x_i^{'}, \ldots, x_n) = \lambda A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + A(x_1, \ldots, x_i^{'}, \ldots, x_n),$$

para quaisquer $x_i, x_i^{'} \in X_i$ com $i = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

O conjunto de todos os operadores n-lineares de $X_1 \times \cdots \times X_n$ em Y será denotado por $L(X_1, \ldots, X_n; Y)$. É fácil verificar que com as operações usuais de funções definidas a seguir tornam $L(X_1, \ldots, X_n; Y)$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$:

1) Dados $A, B \in L(X_1, \ldots, X_n; Y)$ e $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$, definimos

$$(A + B)(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n) + B(x_1, \ldots, x_n).$$

2) Dados $A \in L(X_1, \ldots, X_n; Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$, definimos

$$(\lambda A)(x_1, \ldots, x_n) = \lambda A(x_1, \ldots, x_n).$$

Exemplo 1.2.2. Dados os espaços vetoriais $X_1, \ldots, X_n$ e Y, escolha funcionais lineares $\varphi_i\colon X_i \longrightarrow \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, n$, um vetor $y \in Y$ e defina

$$A\colon X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y,\ A(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)(y).$$

É fácil verificar que $A \in L(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

Apresentamos agora alguns resultados sobre operadores multilineares contínuos no produto cartesiano de espaços normados e o espaço normado (Banach) dos operadores multilineares contínuos.

Para a demonstração dos seguintes resultados veja [22, Capítulo 2].

Proposição 1.2.3. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados. As seguintes afirmações são equivalentes para um operador n-linear $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$:*

(a) *A é contínuo.*

(b) *A é contínuo na origem.*

(c) *Existe $C \geq 0$ tal que $\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_n\|$, para quaisquer $x_j \in E_j$; $j = 1, \ldots, n$.*

(d) $\|A\| := \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_n)\| : x_j \in E_j$ *e* $\|x_j\| \leq 1$, *para todo* $j = 1, \ldots, n\} < \infty$.

O conjunto de todos os operadores n-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F será denotado por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. No caso $n = 1$ e $F = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ por E', espaço este que é chamado de *dual topológico de* E, os elementos de E' são chamados de funcionais lineares contínuos.

Proposição 1.2.4. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então:*

(a) $\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ *para quaisquer* $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.

(b) $\|A\| := \inf\{C \geq 0 : \|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_n\|$ *para todos* $x_j \in E_j;\ j = 1, \ldots, n\}$.

Proposição 1.2.5. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados. Então $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

Proposição 1.2.6. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados.*

(a) *A função $A \longmapsto \|A\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

(b) *Se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, com a norma do item (a), também é um espaço de Banach.*

Como $\mathbb{K}$ é Banach, da Proposição 1.2.6(b) segue que E' é Banach. Podemos então considerar o dual de E', chamado de *bidual de* E e denotado por E''.

No caso $n = 1$, escrevemos $\mathcal{L}(E; F)$ no lugar de $\mathcal{L}(^1E; F)$ para designar o espaço dos operadores lineares contínuos de E em F com a norma

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\| : x \in B_E\}\ ,\ u \in \mathcal{L}(E; F).$$

Um operador bijetor $u \in \mathcal{L}(E; F)$ cujo operador inverso é contínuo é chamado de *isomorfismo* e neste caso dizemos que os espaços E e F são *isomorfos*. Se, além disso, $\|u(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in E$, dizemos que u é um *isomorfismo isométrico* e neste caso dizemos que E e F são *isomorfos isometricamente.*

1.3 Os duais dos espaços ℓ_p e c_0

Dado $1 < p < \infty$, por q denotamos o (único) número maior que 1 tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para $p = 1$ tomamos $q = \infty$. Diz-se que q é o *conjugado* de p e vice-versa.

Para as seguintes proposições veja [8, Proposição 4.2.1, Proposição 4.2.3] respectivamente.

Proposição 1.3.1. *Para $1 \leq p < \infty$, os espaços ℓ_q e ℓ_p' são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade*

$$b = (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q \longmapsto \varphi_b \in \ell_p', \ \varphi_b((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \ \textit{para toda } (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p.$$

Por um abuso de notação escrevemos $\ell_p' = \ell_q$. Em particular, $\ell_1' = \ell_\infty$ e $\ell_2' = \ell_2$.

Proposição 1.3.2. *Os espaços ℓ_1 e c_0' são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade*

$$b = (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1 \longmapsto \varphi_b \in c_0', \ \varphi_b((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \ \textit{para toda } (a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0.$$

1.4 Espaços de Hilbert

Um *produto interno* no espaço vetorial E sobre $\mathbb{K}$ é uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon E \times E \longrightarrow \mathbb{K}, \ (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle,$$

tal que para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

(a) $\langle x, x \rangle > 0$ se $x \neq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$,

(b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

(c) $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$.

O par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado de *espaço com produto interno*. Prova-se que a função

$$\| \cdot \| \colon E \longrightarrow \mathbb{R}, \ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

é uma norma em E, chamada de *norma induzida pelo produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (veja [8, Corolário 5.1.3]).

Definição 1.4.1. Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de *espaço de Hilbert*. Em particular, todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

Exemplo 1.4.2. O espaço ℓ_2 é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle (a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

1.5 Alguns resultados complementares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados complementares que serão necessários para o desenvolvimento desta dissertação.

Definição 1.5.1. Sejam E, F espaços normados. Um operador $u \colon E \longrightarrow F$ é uma imersão isométrica se $\|u(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in E$.

Note que uma imersão isométrica linear é sempre injetora. Assim, um isomorfismo isométrico nada mais é que uma imersão isométrica linear sobrejetora.

Para a demonstração dos seguintes resultados veja [8, Proposição 4.3.1] e [17, Proposição 5.7.19] respectivamente.

Proposição 1.5.2. *Para todo espaço normado E, o operador*

$$J_E \colon E \longrightarrow E'' \ , \ J_E(x)(\varphi) = \varphi(x), \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in E',$$

é uma imersão isométrica linear, chamado de mergulho canônico de E em E''.

Dizemos que o espaço normado E é *reflexivo* se o mergulho canônico é sobrejetor.

Por $\overline{U}$ denotaremos o fecho de um subconjunto U de um espaço topológico, mais precisamente sejam X um espaço topológico e $U \subset X$. Definimos

$$\overline{U} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ é fechado e } U \subset F\}.$$

Proposição 1.5.3. *Sejam M, N espaços métricos, $X \subseteq M$, $a \in \overline{X}$ e $f \colon X \longrightarrow N$ uma função. Então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in N$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X tal $x_n \longrightarrow a$, tem-se $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.*

Lema 1.5.4. *Sejam E espaço normado e $u \in \mathcal{L}(E; F)$. Definindo $\overline{u} \colon E \longrightarrow u(E)$ por $\overline{u}(x) = u(x)$, então $\overline{u} \in \mathcal{L}(E; u(E))$ e $\|\overline{u}\| = \|u\|$.*

Demonstração. Dados $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, da linealidade de u temos

$$\overline{u}(x + \lambda y) = u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y) = \overline{u}(x) + \lambda \overline{u}(y),$$

provando que $\overline{u}$ é linear. Para todo $x \in E$, tem-se

$$\|\overline{u}(x)\| = \|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$$

donde segue a continuidade de $\overline{u}$ e a desigualdade $\|\overline{u}\| \leq \|u\|$. Da definição da norma de um operador segue que, para todo $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$,

$$\|\overline{u}\| \geq \|\overline{u}(x)\| = \|u(x)\|$$

e isso mostra que $\|\overline{u}\| \geq \|u\|$. Portanto $\|\overline{u}\| = \|u\|$. $\square$

Definição 1.5.5. Sejam $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ espaços métricos, definimos a *métrica do máximo d_∞ em $M_1 \times \cdots \times M_n$ como sendo*

$$d_\infty((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \text{máx}\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\},$$

em que $x_i, y_i \in M_i$, $i = 1, \ldots, n$.

No próximo lema utilizaremos a métrica do máximo d_∞ no produto cartesiano $M_1 \times \cdots \times M_n$ de espaços métricos. Assim, a bola aberta de centro em $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$ e raio $r > 0$ com a métrica do máximo é

$$B(x, r) = B(x_1, r) \times \cdots \times B(x_n, r).$$

De fato, para $y = (y_1, \ldots, y_n)$, note que

$$\begin{aligned} y \in B(x,r) &\Longleftrightarrow d_\infty(x,y) < r \\ &\Longleftrightarrow d(x_j, y_j) \le d_\infty(x,y) < r, \text{ para todo } j = 1, \ldots, n \\ &\Longleftrightarrow d(x_j, y_j) < r, \text{ para todo } j = 1, \ldots, n \\ &\Longleftrightarrow y_j \in B(x_j, r), \text{ para todo } j = 1, \ldots, n \\ &\Longleftrightarrow y = (y_1, \ldots, y_n) \in B(x_1, r) \times \cdots \times B(x_n, r). \end{aligned}$$

Lema 1.5.6. *Sejam $M_1, \ldots, M_n$ espaços métricos e $A_1 \subseteq M_1, \ldots, A_n \subseteq M_n$. Então*

$$\overline{A_1 \times \cdots \times A_n} = \overline{A_1} \times \cdots \times \overline{A_n}.$$

Demonstração. Chame $B = \overline{A_1 \times \cdots \times A_n}$, tome $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e veja que

$$\begin{aligned} x \in B &\Longleftrightarrow \text{para todo } r > 0, B(x,r) \cap (A_1 \times \cdots \times A_n) \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \text{para todo } r > 0, (B(x_1,r) \times \cdots \times B(x_n,r)) \cap (A_1 \times \cdots \times A_n) \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \text{para todo } r > 0, (B(x_1,r) \cap A_1) \times \cdots \times (B(x_n,r) \cap A_n) \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \text{para todo } r > 0, B(x_j,r) \cap A_j \neq \emptyset, j = 1, \ldots, n \\ &\Longleftrightarrow x_j \in \overline{A_j}, \text{ para todo } j = 1, \ldots, n \\ &\Longleftrightarrow x \in \overline{A_1} \times \cdots \times \overline{A_n}. \end{aligned}$$

□

Definição 1.5.7. Um subconjunto S de um espaço topológico X é *denso* se $\overline{S} = X$.

É claro que S é denso em $\overline{S}$, pois $\overline{S} = \overline{\overline{S}}$.

A definição de um subespaço de Banach λ-complementados $\lambda \ge 1$ sera definido mais para frente. Para o próximo resultado veja [8, Corolário 5.2.7].

Proposição 1.5.8. *Todo subespaço fechado não-nulo de um espaço de Hilbert é 1-complementado.*

Sejam E, F espaços normados e $u \in \mathcal{L}(E; F)$ um operador linear contínuo. Definindo

$$u' \colon F' \longrightarrow E' \ , \ u'(\varphi)(x) = \varphi(u(x)),$$

provaremos no Capítulo 4 que u' é um operador linear contínuo, chamado de *adjunto de u*. Isso nos permite considerar o adjunto do operador $u' \in \mathcal{L}(F'; E')$,

$$(u')' := u'' \colon E'' \longrightarrow F'' \ , \ u''(\psi)(\varphi) = \psi(u'(\varphi)),$$

para todos $\psi \in E''$ e $\varphi \in F'$. O operador $u'' \in \mathcal{L}(E''; F'')$ é chamado de *biadjunto de u*.

1.6 Espaços topológicos e redes

Começamos esta seção recordando a noção de espaço topológico.

Definição 1.6.1. Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados conjuntos abertos, satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) X e $\emptyset$ pertencem a τ.

(b) Se $n \in \mathbb{N}$ e $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, então $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \tau$.

(c) Se $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma coleção de elementos de τ, então $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Neste caso, dizemos que o par (X, τ) é um *espaço topológico* e quando não houver perigo de confusão escrevemos X no lugar de (X, τ).

O próximo passo é definir redes convergentes em espaços topológicos, conceito este que é uma generalização da noção de sequências convergentes.

Definição 1.6.2. Um *conjunto dirigido é um par* $(\Omega, \leq)$, *onde* Ω *é um conjunto e* $\leq$ *é uma relação em* Ω *satisfazendo*

(a) $\lambda \leq \lambda$, *para todo* $\lambda \in \Omega$,

(b) Se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *e* $\lambda_2 \leq \lambda_3$, *então* $\lambda_1 \leq \lambda_3$,

(c) Para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$, *existe* $\lambda_3 \in \Omega$ *tal que* $\lambda_1 \leq \lambda_3$ *e* $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Definição 1.6.3. Sejam $(\Omega, \leq)$ um conjunto dirigido e X um espaço topológico. Uma função $f \colon \Omega \longrightarrow X$ é chamada de *rede* em X. Chamando $f(\lambda) = x_\lambda$, para todo $\lambda \in \Omega$, podemos denotar a rede f por $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$.

Uma *subrede* da rede $f \colon \Omega \longrightarrow X$ é uma composição $f \circ \varphi$, onde $\varphi \colon \wedge \longrightarrow \Omega$ é uma função não-decrescente e cofinal definida num conjunto dirigido $\wedge$, isto é: $\wedge$ é um conjunto dirigido e:

1. $\varphi(\mu_1) \leq \varphi(\mu_2)$, sempre que $\mu_1 \leq \mu_2$,
2. para cada $\lambda \in \Omega$, existe $\mu \in \wedge$ tal que $\lambda \leq \varphi(\mu)$.

Note que toda subrede de uma rede em X é também uma rede em X.

Definição 1.6.4. Uma vizinhança de um elemento x do espaço topológico X é um subconjunto U de X que contém um aberto V contendo x, isto é, $x \in V \subset U$.

Definição 1.6.5. (a) Dizemos que uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ no espaço topológico X *converge* para $x \in X$, e neste caso escrevemos $x_\lambda \longrightarrow x$, se para cada vizinhança V de x existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda_0 \leq \lambda$.
(b) Dizemos que a rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ em X tem $x \in X$ como *ponto de acumulação*, se para cada vizinhança U_x de x e cada $\lambda_0 \in \Omega$, existe $\lambda \in \Omega$ tal que $\lambda_0 \leq \lambda$ e $x_\lambda \in U_x$.

Para a demonstração dos seguintes teoremas veja [24, Teorema 11.5, Teorema 17.4] respectivamente.

Teorema 1.6.6. *Uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ no espaço topológico X tem $x \in X$ como um ponto de acumulação se, e somente se, existe uma subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ que converge para x.*

Relembre que um espaço topológico X é *compacto* se toda cobertura aberta de X admite subcobertura finia.

Teorema 1.6.7. *Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, toda rede em X possui uma subrede convergente em X.*

Definição 1.6.8. Um espaço topológico X é um *espaço de Hausdorff* se para todos $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem vizinhanças U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.

É sabido que se uma rede é convergente em um espaço de Hausdorff, então o limite é único.

Lema 1.6.9. *Sejam X um espaço topológico e Y um espaço topológico de Hausdorff. Se $f, g\colon X \longrightarrow Y$ são funções contínuas e coincidem em um subconjunto denso de X, então $f = g$.*

Demonstração. Seja B um subconjunto denso de X no qual f e g coincidem, isto é, $\overline{B} = X$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in B$. Dado $x \in X = \overline{B}$, existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ em B tal que $x_\lambda \longrightarrow x$. Como f e g são contínuas em x, tem-se $f(x_\lambda) \longrightarrow f(x)$ e $g(x_\lambda) \longrightarrow g(x)$ e como $x_\lambda \in B$, para todo $\lambda \in \Omega$, tem-se $f(x_\lambda) = g(x_\lambda)$, para todo $x_\lambda \in B$. Daí $f(x_\lambda) = g(x_\lambda) \longrightarrow g(x)$ em Y. Da unicidade do limite em espaços de Hausdorff segue que $f(x) = g(x,)$ para todo $x \in X$, ou seja, $f = g$. $\square$

1.7 A topologia gerada por uma família de funções

Sejam X um conjunto, $(Y_i)_{i\in I}$ uma coleção de espaços topológicos e $(f_i)_{i\in I}$ uma coleção de funções de X em Y_i. A topologia gerada pelas funções $(f_i)_{i\in I}$ é a topologia τ em X que tem como base o conjunto

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(A_{i_j}) : n \in \mathbb{N}, i_j \in I \text{ e } A_{i_j} \text{ aberto em } Y_{i_j}\ ,\ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Dado um espaço normado E, cada $\varphi \in E'$ é um funcional linear contínuo de E no espaço topológico $\mathbb{K}$, ou seja, $E' = (\varphi)_{\varphi\in E'}$. Logo podemos considerar a topologia em E gerada pelos funcionais $\varphi \in E'$, que tem como base o conjunto

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^{n} \varphi_j^{-1}(A_j) : n \in \mathbb{N}, \text{ e } A_j \text{ aberto em } \mathbb{K} \text{ e } \varphi_j \in E',\ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Essa topologia é chamada de *topologia fraca* em E, denotada por $\sigma(E, E')$ ou ω. Quando uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ em E converge para $x \in E$ na topologia fraca, escrevemos $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$ ou $x = \omega\text{ -}\lim\limits_{\lambda\in\Omega} x_\lambda$. Para a demonstração de todos os resultados desta seção, veja [8, Capítulo 6].

Proposição 1.7.1. *Seja E um espaço normado*

(a) Para todo $\varphi \in E'$, $\varphi\colon (E,\omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.

(b) Para cada $x_0 \in E$, os conjuntos da forma

$$V_{J,\varepsilon} = \{x \in E : |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \varepsilon, \text{ para todo } j \in J\},$$

onde J é um conjunto finito, $\varepsilon > 0$ e $\varphi_j \in E'$, para todo $j \in J$, formam uma base de vizinhanças abertas de x_0 para a topologia fraca.

(c) Seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega} \subseteq E$ uma rede e $x \in E$. Então $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$ se, e somente se, $\varphi(x_\lambda) \longrightarrow \varphi(x)$, para todo $\varphi \in E'$.

Como E' é um espaço normado e os elementos de E'' são funcionais lineares contínuos de E' em $\mathbb{K}$, podemos considerar a topologia fraca em E', que é a topologia gerada pelos funcionais $f \in E''$, a qual estamos denotando por $\sigma(E', E'')$ ou ω.

Do Teorema 1.5.2 sabemos que para cada $x \in E$, $J_E(x)\colon E' \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo, e assim podemos considerar a topologia em E' gerada pelos elementos do conjunto

$$J_E(E) = \{J_E(x) \in E'' : x \in E\} \subseteq E''.$$

Essa topologia é chamada de *topologia fraca-estrela* em E' e denotada por $\sigma(E', E)$ ou ω^*. Quando uma rede $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ em E' converge para $\varphi \in E'$ na topologia fraca-estrela, escrevemos $\varphi_\lambda \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ ou $\varphi = \omega^*\text{-}\lim\limits_{\lambda\in\Omega} \varphi_\lambda$.

Proposição 1.7.2. *Seja E um espaço normado*

(a) Para todo $x \in E$, $J_E(x)\colon (E', \omega^*) \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.

(b) Para cada $\varphi_0 \in E'$, os conjuntos da forma

$$W_{J,\varepsilon} = \{\varphi \in E' : |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon, \text{ para todo } i \in J\},$$

onde J é um conjunto finito, $\varepsilon > 0$ e $x_i \in E$, para todo $i \in J$, formam uma base de vizinhanças abertas de φ_0 para a topologia fraca-estrela.

(c) Seja $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Omega} \subseteq E'$ uma rede e $\varphi \in E'$. Então $\varphi_\lambda \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ se, e somente se, $\varphi_\lambda(x) \longrightarrow \varphi(x)$, para todo $x \in E$.

Proposição 1.7.3. *Sejam E um espaço normado e $f\colon E' \longrightarrow \mathbb{K}$, um funcional linear ω^*-contínuo. Então existe $x \in E$ tal que $f = J_E(x)$. Em outras palavras, $(E', \omega^*)' = J_E(E)$.*

Como E'' é um espaço normado e $f\colon E'' \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo de E'' em $\mathbb{K}$, podemos então considerar a topologia fraca-estrela em E'', e assim os itens da proposição acima seguem válidos para (E'', ω^*).

Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos. Em vez de dizer que uma função $f\colon (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ é contínua, diremos que $f\colon X \longrightarrow Y$ é $\tau_1 - \tau_2$-contínua.

Teorema 1.7.4. *(Teorema de Goldstine) Sejam E um espaço de Banach e $J_E : E \longrightarrow E''$ o mergulho canônico. Então $J_E(B_E)$ é denso em $B_{E''}$ na topologia fraca-estrela. Portanto, $\overline{J_E(E)}$ é denso em E'' na topologia fraca-estrela, isto é, $\overline{J_E(E)}^{\omega^*} = E''$.*

Capítulo 2

Extensões de Hahn-Banach, subespaços complementados e espaços injetivos

Estudaremos neste capítulo a validade ou não dos casos multilineares de três situações clássicas em que operadores lineares podem ser estendidos a espaços maiores. São as seguintes:

• **Extensões de Hahn-Banach.** Um dos pilares da Análise Funcional Linear, o Teorema de Hahn-Banach diz que se G é subespaço do espaço normado E, então todo funcional linear contínuo em G pode ser estendido para um funcional linear contínuo em E, mantendo a norma. Será que tal fato continua válido para funcionais multilineares? Ou seja, é verdade que se G_1 é subespaço de E_1, ..., G_n é subespaço de E_n, então todo funcional n-linear contínuo em $G_1 \times \cdots \times G_n$ pode ser estendido para um funcional n-linear contínuo em $E_1 \times \cdots \times E_n$?

• **Subespaços complementados.** É fato conhecido que se G é um subespaço complementado do espaço normado E, F é um espaço de Banach, então todo operador linear contínuo de G em F pode ser estendido para um operador linear contínuo de E em F. Será que vale o caso multilinear? Ou seja, é verdade que se G_1 é subespaço complementado de E_1, ..., G_n é subespaço complementado de E_n, então todo operador n-linear contínuo em $G_1 \times \cdots \times G_n$ pode ser estendido para um operador n-linear contínuo em $E_1 \times \cdots \times E_n$?

• **Espaços injetivos.** Existem espaços de Banach F, chamados de espaços injetivos, que satisfazem a seguinte propriedade: para todo espaço de Banach E, todo subespaço G de E e todo operador linear contínuo de G em F pode ser estendido a um operador linear contínuo de E em F. A pergunta é clara: será que todo operador multilinear contínuo tomando valores em um espaço injetivo pode ser estendido para espaços maiores?

O objetivo deste capítulo é responder as três perguntas acima, o que evidenciará as semelhanças e as diferenças entre as teorias linear e não-linear. Mais ainda, a solução do problema multilinear do caso de subespaços complementados nos ajudará a resolver, no Capítulo 3, mais um caso multilinear de uma extensão linear clássica, a saber, a extensão de operadores definidos em espaços de Hilbert.

2.1 Subespaços complementados

Além de resolver a questão da extensão de operadores multilineares definidos em subespaços complementados, nesta seção mostraremos também que extensões tipo Hahn-Banach não valem para operadores a valores vetoriais, ou seja, valem apenas para funcionais lineares.

Definição 2.1.1. Seja E um espaço de Banach. Um operador linear contínuo $P\colon E \longrightarrow E$ é uma *projeção* se $P^2 := P \circ P = P$.

Se $P \neq 0$ é uma projeção, então $\|P\| \geq 1$. De fato, tomando $x \in E$ tal que $P(x) \neq 0$, temos

$$\|P(x)\| = \|P(P(x))\| \leq \|P\| \cdot \|P(x)\|.$$

Veja também que $P(y) = y$, para todo $y \in P(E)$. De fato, para todo $y \in P(E)$ existe $x \in E$ tal que $P(x) = y$. Segue que

$$y = P(x) = P(P(x)) = P(y).$$

Definição 2.1.2. Um subespaço F do espaço de Banach E é *complementado* se existe uma projeção $P\colon E \longrightarrow E$ cuja imagem coincide com F, ou, equivalentemente, se F é fechado e existe um subespaço fechado G de E tal que $E = G \oplus F$. Dizemos que F é *λ-complementado*, $\lambda \geq 1$, se $\|P\| \leq \lambda$.

O seguinte resultado será útil duas vezes em nosso trabalho.

Proposição 2.1.3. *Seja G um subespaço não-complementado do espaço de Banach E. Então não existe operador linear e contínuo $u\colon E \longrightarrow G$ tal que $u(x) = x$, para todo $x \in G$.*

Demonstração. Suponha que exista um operador linear e contínuo $u\colon E \longrightarrow G$ tal que $u(x) = x$, para todo $x \in G$. Como a função inclusão

$$i\colon G \longrightarrow E,\ i(x) = x,$$

é linear e contínua, tem-se que $i \circ u\colon E \longrightarrow E$ é linear e contínuo. Mais ainda, como $u(x) \in G$, para todo $x \in G$,

$$(i \circ u)^2(x) = (i \circ u)((i \circ u)(x)) = (i \circ u)(i(u(x))) = (i \circ u)(u(x)) = (i \circ u)(x) = i(u(x)) = x,$$

para todo $x \in G$. Isso prova que $(i \circ u)^2 = i \circ u$. A última igualdade acima nos diz que $(i \circ u)(G) = G$, e portanto

$$(i \circ u)(E) = i(u(E)) \subseteq G = (i \circ u)(G) \subseteq (i \circ u)(E),$$

provando que $(i \circ u)(E) = G$. Segue que $i \circ u$ é uma projeção sobre G, mas isso contradiz o fato de ser G um subespaço não-complementado de E. $\square$

A primeira utilidade da proposição acima é a conclusão, a seguir, de que o Teorema de Hahn-Banach somente é valido para funcionais lineares contínuos, isto é, não existe uma versão vetorial do teorema de Hahn-Banach. Isso responde uma das questões do início do capítulo.

Corolário 2.1.4. *Seja G um subespaço não-complementado do espaço de Banach E. Então o operador identidade em G não pode ser estendido linearmente e continuamente a E.*

A seguir damos alguns exemplos de subespaços não-complementados de um espaço de Banach. Sabemos que o conjunto

$$c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0, \text{ para todo } n \geq n_0\}$$

é um subespaço não-fechado de c_0.

Da definição de subespaço complementado segue que, se F é um subespaço não-fechado de um espaço de Banach E então F não é um subespaço complementado de E.

Exemplo 2.1.5.

(a) Como c_{00} é um subespaço não-fechado de c_0, temos que c_{00} não é um subespaço complementado de c_0.

(b) Em 1937, Murray [19] provou que para todo $2 \neq p > 1$, ℓ_p contém um subespaço fechado não-complementado, isto é, existe um subespaço fechado G de ℓ_p, $2 \neq p > 1$ tal que G não é complementado em ℓ_p, $2 \neq p > 1$.

(c) Em 1940, Phillips [20] provou que c_0 não é um subespaço complementado de ℓ_∞.

(d) O espaço de Banach ℓ_1 contém um subespaço fechado não-complementado (veja [1, Corollary 2.3.3]).

Nos voltamos agora para o objetivo central desta seção, que é provar a possibilidade de estender operadores multilineares definidos em subespaços complementados.

Lema 2.1.6. *Sejam $E_1, G_1, \ldots, E_n, G_n, F$ espaços normados, $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, G_1)$,...,$u_n \in \mathcal{L}(E_n, G_n)$ e $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$. Definindo*

$$A \circ (u_1, \ldots, u_n) \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F, \ (A \circ (u_1, \ldots, u_n))(x_1, \ldots, x_n) = A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)),$$

tem-se que $A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\|A \circ (u_1, \ldots, u_n)\| \leq \|A\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|$.

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[d, "u_1"'] & \times \cdots \times & E_n \arrow[d, "u_n"'] \arrow[dr, "A \circ (u_1, \ldots, u_n)"] & \\
G_1 & \times \cdots \times & G_n \arrow[r, "A"] & F
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Sejam $x_j, y_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Da linearidade dos operadores u_i, $i = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned}
(A \circ (u_1, \ldots, u_n))(x_1, \ldots, x_j + \lambda y_j, \ldots, x_n) &= A(u_1(x_1), \ldots, u_j(x_j + \lambda y_j), \ldots, u_n(x_n)) \\
&= A(u_1(x_1), \ldots, u_j(x_j), \ldots, u_n(x_n)) + \lambda A(u_1(x_1), \ldots, u_j(y_j), \ldots, u_n(x_n)) \\
&= (A \circ (u_1, \ldots, u_n))(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + \lambda (A \circ (u_1, \ldots, u_n))(x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

provando que $A \circ (u_1, \ldots, u_n)$ é n-linear. Como $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$ e $u_j \in \mathcal{L}(E_j, G_j)$, $j = 1, \ldots, n$, pela Proposição 1.2.4 temos

$$\begin{aligned}\|(A \circ (u_1, \ldots, u_n))(x_1, \ldots, x_n)\| &= \|A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))\| \\ &\leq \|A\| \cdot \|u_1(x_1)\| \cdots \|u_n(x_n)\| \\ &\leq \|A\| \cdot \|u_1\| \cdot \|x_1\| \cdots \|u_n\| \cdot \|x_n\| \\ &= \big(\|A\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|\big)\|x_1\| \cdots \|x_n\|.\end{aligned}$$

Tomando $C = \|A\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\| \geq 0$, tem-se que $A \circ (u_1, \ldots, u_n)$ é contínua e

$$\|A \circ (u_1, \ldots, u_n)\| \leq \|A\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

□

Observe que no lugar de considerar subespaços não-complementados de um espaço de Banach, consideramos subespaços complementados temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1.7. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach, G_1 subespaço λ_1-complementado de E_1,...,G_n subespaço λ_n-complementado de E_n e F espaço normado. Para toda $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$ existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ extensão de A com*

$$\|A\| \leq \|\widetilde{A}\| \leq \|A\|\lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Demonstração. Para cada $j = 1, \ldots, n$, G_j é um subespaço λ_j-complementado de E_j, portanto existe uma projeção $P_j \colon E_j \longrightarrow E_j$ cuja imagem coincide com G_j e $\|P_j\| \leq \lambda_j$. Como $P_j \in \mathcal{L}(E_j, E_j)$ e $P_j(E_j) = G_j$, podemos definir

$$Q_j \colon E_j \longrightarrow G_j \ , \ Q_j(x_j) = P_j(x_j).$$

Pelo Lema 1.5.4, sabemos que $Q_j \in \mathcal{L}(E_j, G_j)$ e $\|Q_j\| = \|P_j\| \leq \lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$. Definindo $\widetilde{A} := A \circ (Q_1, \ldots, Q_n)$, isto é,

$$\widetilde{A} \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F, \ \widetilde{A}(x_1, \ldots, x_n) = A(Q_1(x_1), \ldots, Q_n(x_n)),$$

pelo Lema 2.1.6 temos $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e

$$\|\widetilde{A}\| = \|A \circ (Q_1, \ldots, Q_n)\| \leq \|A\| \cdot \|Q_1\| \cdots \|Q_n\| \leq \|A\|\lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Vejamos que $\widetilde{A}$ estende A. De fato, para todos $x_j \in G_j$ temos que $Q_j(x_j) = P_j(x_j) = x_j$, $j = 1, \ldots, n$, e portanto

$$\widetilde{A}(x_1, \ldots, x_n) = A(Q_1(x_1), \ldots, Q_n(x_n)) = A(x_1, \ldots, x_n),$$

provando que $\widetilde{A}$ estende A. Por fim,

$$\|\widetilde{A}\| = \sup_{\substack{x_j \in B_{E_j} \\ 1 \leq j \leq n}} \|\widetilde{A}(x_1, \ldots, x_n)\| \geq \sup_{\substack{y_j \in B_{G_j} \\ 1 \leq j \leq n}} \|\widetilde{A}(y_1, \ldots, y_n)\| = \sup_{\substack{y_j \in B_{G_j} \\ 1 \leq j \leq n}} \|A(y_1, \ldots, y_n)\| = \|A\|,$$

o que nos permite concluir que $\|A\| \leq \|\widetilde{A}\| \leq \|A\|\lambda_1 \cdots \lambda_n$. □

Se, no teorema acima, os subespaços G_j, $j = 1 \ldots, n$; são $1-$complementados então a extensão preserva a norma, isto é, $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.

De [8, Exemplo 3.2.4] tem-se que todo subespaço de dimensão finita de um espaço de Banach é complementado, assim $\mathbb{K}^n, n \geq 1$ é complementado em qualquer espaço de Banach que contém $\mathbb{K}^n$. Mais ainda, se, no Teorema 2.1.7, G_1 é um subespaço de dimensão finita de E_1,..., G_n é um subespaço de dimensão finita de E_n e $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$, então existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ extensão de A.

Sempre que se prova um teorema de existência, é natural perguntar pela unicidade. Veremos no seguinte exemplo que a extensão n-linear contínua $\widetilde{A}$ do Teorema 2.1.7 não é única em geral.

Exemplo 2.1.8. Considere os operadores lineares contínuos

$$u\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^3\ ,\ u(x) = (x, 0, 0),$$

$$id\colon \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3\ ,\ id(x, y, z) = (x, y, z) \text{ e}$$
$$T\colon \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3\ ,\ T(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Para todo $x \in \mathbb{K}$,

$$id(x, 0, 0) = (x, 0, 0) = u(x) = (x, 0, 0) = T(x, 0, 0),$$

o que prova que id e T são extensões distintas de u. Portanto não há unicidade nem no caso linear.

2.2 Extensões de Hahn-Banach

Enunciando precisamente, o clássico Teorema de Hahn-Banach estabelece que se G é um subespaço do espaço normado E e $\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo, então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi}\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

A pergunta no caso multilinear é a seguinte: será que dados subespaços $G_1, \ldots, G_n$ dos espaços normados $E_1, \ldots, E_n$, respectivamente, e uma forma n-linear contínua $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; \mathbb{K})$, sempre existe uma forma n-linear contínua $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$ que estende A?

Provaremos nesta seção que a resposta é negativa em geral. Entretanto, veremos duas situações particulares em que a resposta é positiva.

Denotamos por S_n, $n \in \mathbb{N}$, o conjunto de todas as permutações dos n primeiros números naturais, isto é, funções bijetoras, $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$.

O próximo resultado será útil mais de uma vez.

Teorema 2.2.1. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados. Então para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ e cada permutação $\sigma \in S_n$, o operador*

$$\psi\colon \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(j)}; \mathcal{L}(E_{\sigma(j+1)}, \ldots, E_{\sigma(n)}; F)),$$

$$\psi(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j)})(x_{\sigma(j+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = A(x_1, \ldots, x_n),$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Vejamos que ψ está bem definida no sentido de que para todos $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma \in S_n$, $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $x_{\sigma(1)} \in E_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j)} \in E_{\sigma(j)}$, tem-se

$$\psi(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j)}) \in \mathcal{L}(E_{\sigma(j+1)}, \ldots, E_{\sigma(n)}; F) \text{ e}$$

$$\psi(A) \in \mathcal{L}(E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(j)}; \mathcal{L}(E_{\sigma(j+1)}, \ldots, E_{\sigma(n)}; F)).$$

Para começar, tome $k \in \{j+1, \ldots, n\}$ e $x_{\sigma(k)}, y_{\sigma(k)} \in E_{\sigma(k)}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Chame $x = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j)})$ e $y = (x_{\sigma(j+1)}, \ldots, x_{\sigma(k)} + \lambda y_{\sigma(k)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ e veja que para cada $i \in \{\sigma(j+1), \ldots, \sigma(n)\}$,

$$\begin{aligned}
\psi(A)(x)(y) &= A(x_1, \ldots, x_i + \lambda y_i, \ldots, x_n) \\
&= A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \lambda A(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n) \\
&= \psi(A)(x)(x_{\sigma(j+1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \\
&\quad + \lambda\psi(A)(x)(x_{\sigma(j+1)}, \ldots, y_{\sigma(k)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),
\end{aligned}$$

provando que $\psi(A)(x)$ é $(n-j)$-linear. De

$$\begin{aligned}
\|\psi(A)(x)(x_{\sigma(j+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\| &= \|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\| \\
&= \big(\|A\| \cdot \|x_{\sigma(1)}\| \cdots \|x_{\sigma(j)}\|\big) \|x_{\sigma(j+1)}\| \cdots \|x_{\sigma(n)}\|,
\end{aligned}$$

segue que $\psi(A)(x)$ é contínua e

$$\|\psi(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j)})\| \leq \|A\| \cdot \|x_{\sigma(1)}\| \cdots \|x_{\sigma(j)}\|. \tag{2.1}$$

Vejamos que $\psi(A) \in \mathcal{L}(E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(j)}; \mathcal{L}(E_{\sigma(j+1)}, \ldots, E_{\sigma(n)}; F))$. Para $k \in \{1, \ldots, j\}$, sejam $x_{\sigma(k)}, y_{\sigma(k)} \in E_{\sigma(k)}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Chame $x = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)} + \lambda y_{\sigma(k)}, \ldots, x_{\sigma(j)})$ e $y = (x_{\sigma(j+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ e veja que, para $i \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(j)\}$,

$$\begin{aligned}
\psi(A)(x)(y) &= A(x_1, \ldots, x_i + \lambda y_i, \ldots, x_n) \\
&= A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \lambda A(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n) \\
&= \psi(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}, \ldots, x_{\sigma(n)})(y) + \lambda\psi(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k)}, \ldots, x_{\sigma(n)})(y) \\
&= (\psi(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) + \lambda\psi(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k)}, \ldots, x_{\sigma(n)}))(y).
\end{aligned}$$

Como isso vale para para todo $y \in E_{\sigma(j+1)} \times \cdots \times E_{\sigma(n)}$, temos

$$\psi(A)(x) = \psi(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) + \lambda\psi(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

o que prova que $\psi(A)$ é j-linear e de (2.1) segue que $\psi(A)$ é contínua. Vejamos que ψ é linear. Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ e cada permutação $\sigma \in S_n$, chame $x = (x_{\sigma(j+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ e note que, para todos $x_{\sigma(1)} \in E_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j)} \in E_{\sigma(j)}$,

$$\begin{aligned}
\psi(A + \lambda B)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j)})(x) &= (A + \lambda B)(x_1, \ldots, x_n) \\
&= A(x_1, \ldots, x_n) + \lambda B(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \psi(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j)})(x) + \lambda\psi(B)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j)})(x) \\
&= (\psi(A) + \lambda\psi(B))(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j)})(x).
\end{aligned}$$

Como isso vale para todo $x \in E_{\sigma(j+1)} \times \cdots \times E_{\sigma(n)}$, temos

$$\psi(A+\lambda B)(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)}) = (\psi(A)+\lambda\psi(B))(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)}),$$

para todos $x_{\sigma(1)} \in E_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)} \in E_{\sigma(j)}$, temos $\psi(A+\lambda B) = \psi(A)+\lambda\psi(B)$, isto é, ψ é linear. Vejamos que $\|\psi(A)\| = \|A\|$. De fato, para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$ e cada permutação $\sigma \in S_n$,

$$\begin{aligned}
\|\psi(A)\| &= \sup_{\substack{x_{\sigma(i)}\in B_{E_{\sigma(i)}}\\ i=1,\ldots,j}} \|\psi(A)(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)})\| \\
&= \sup_{\substack{x_{\sigma(i)}\in B_{E_{\sigma(i)}}\\ i=1,\ldots,j}} \sup_{\substack{x_{\sigma(k)}\in B_{E_{\sigma(k)}}\\ k=j+1,\ldots,n}} \|\psi(A)(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)})(x_{\sigma(j+1)},\ldots,x_{\sigma(n)})\| \\
&= \sup_{\substack{x_{\sigma(i)}\in B_{E_{\sigma(i)}}\\ i=1,\ldots,n}} \|A(x_1,\ldots,x_n)\| \\
&= \sup_{\substack{x_i\in B_{E_i}\\ i=1,\ldots,n}} \|A(x_1,\ldots,x_n)\| = \|A\|.
\end{aligned}$$

Por fim, vejamos que ψ é sobrejetora. Sejam $j \in \{1,\ldots,n\}$, $\sigma \in S_n$ e um operador $B \in \mathcal{L}(E_{\sigma(1)},\ldots,E_{\sigma(j)};\mathcal{L}(E_{\sigma(j+1)},\ldots,E_{\sigma(n)};F))$. Defina

$$A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F \ , \ A(x_1,\ldots,x_n) = B(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)})(x_{\sigma(j+1)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$

A n-linearidade e a continuidade do operador A segue da j-linearidade e da continuidade de B e da $(n-j)$-linearidade e da continuidade de $B(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)})$. Temos então $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\psi(A)(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)})(x_{\sigma(j+1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) &= A(x_1,\ldots,x_n) \\
&= B(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)})(x_{\sigma(j+1)},\ldots,x_{\sigma(n)}),
\end{aligned}$$

para todos $x_{\sigma(j+1)} \in E_{\sigma(j+1)},\ldots,x_{\sigma(n)} \in E_{\sigma(n)}$, o que nos permite concluir que

$$\psi(A)(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)}) = B(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)}),$$

para todos $x_{\sigma(1)} \in E_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)} \in E_{\sigma(j)}$. Assim $\psi(A) = B$, e portanto ψ é sobrejetora, ou seja, ψ é um isomorfismo isométrico. $\square$

O resultado a seguir estabelece que não há versão multilinear do Teorema de Hahn-Banach.

Proposição 2.2.2. *Sejam G, F espaços de Banach tais que G' é subespaço não complementado de F e*

$$A\colon G \times G' \longrightarrow \mathbb{K} \ , \ A(x,\varphi) = \varphi(x).$$

Então $A \in \mathcal{L}(G,G';\mathbb{K})$ e não existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(G,F;\mathbb{K})$ que estende A.

Demonstração. Da linearidade e da continuidade de φ segue facilmente que A é um operador bilinear e contínuo. Suponha que exista $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(G, F; \mathbb{K})$ que estende A, isto é, $\widetilde{A}(x, \varphi) = A(x, \varphi)$, para todo $x \in G$ e todo $\varphi \in G'$. Pelo Teorema 2.2.1, o operador

$$\psi \colon \mathcal{L}(G, F; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}(F; G')\ ,\ \psi(B)(x)(y) = B(y, x),$$

é um isomorfismo isométrico. Como $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(G, F; \mathbb{K})$, temos $\psi(\widetilde{A}) \in \mathcal{L}(F; G')$ e, mais ainda,

$$\psi(\widetilde{A})(\varphi)(x) = \widetilde{A}(x, \varphi) = A(x, \varphi) = \varphi(x),$$

para todos $\varphi \in G'$ e $x \in G$.. Disso segue que $\psi(\widetilde{A})(\varphi) = \varphi$ para todo $\varphi \in G'$; mas isso é um absurdo, pois pela Proposição 2.1.3 não existe operador linear e contínuo $u \colon F \longrightarrow G'$ tal que $u(\varphi) = \varphi$, para todo $\varphi \in G'$. $\square$

Para completar a conclusão de que não existe versão multilinear do Teorema de Hahn-Banach, precisamos exibir um espaço dual que é subespaço não-complementado de um espaço de Banach. Para isso seja $2 \neq p > 1$. Do Exemplo 2.1.5(b) sabemos que existe um subespaço fechado G de ℓ_p que não é complementado em ℓ_p. O espaço G é reflexivo por ser subespaço fechado do espaço reflexivo ℓ_p. Portanto, $G = G'' = (G')'$ é um espaço dual que é subespaço fechado não-complementado de ℓ_p.

Observe que, na proposição acima, o operador A poderia ter sido definido como $A(\varphi, x) = \varphi(x)$, e assim teríamos $A \in \mathcal{L}(G', G; \mathbb{K})$ que, pelo mesmo motivo, também não pode ser estendido para um operador bilinear contínuo $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(F, G; \mathbb{K})$.

Nosso próximo objetivo é mostrar que, mesmo não valendo um Teorema de Hahn-Banach multilinear em geral, existem casos particulares nos quais funcionais multilineares contínuos podem ser estendidos.

Definição 2.2.3. Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços normados e G um subespaço de F. O operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; G')$ é *levantável* se existe $\widehat{A} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F')$ tal que $i' \circ \widehat{A} = A$, onde $i' \colon F' \longrightarrow G'$ é o adjunto do opeador inclusão $i \colon G \longrightarrow F$.

$$\begin{tikzcd} & F' \arrow[d, "i'"] \\ E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[ur, "\widehat{A}"] \arrow[r, "A"] & G' \end{tikzcd}$$

O caso bilinear do resultado a seguir encontra-se enunciado como exercício em [10, Ex 1.5].

Proposição 2.2.4. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços normado, $j \in \{1, \ldots, n\}$ e G_j um subespaço de E_j. São equivalentes:*
(a) *Todo operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, G_j, E_{j+1}, \ldots, E_n; \mathbb{K})$ é extensível para um operador $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$.*
(b) *Todo operador $B \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_n; G_j')$ é levantável para um operador $\widehat{B} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_n; E_j')$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.1, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ temos os seguintes isomorfismos

$$\psi_1 \colon \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, G_j, E_{j+1}, \ldots, E_n; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_n; G_j'),$$

e

$$\psi_2 \colon \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_n; E_j').$$

(a) $\Longrightarrow$ (b) Seja $B \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_n; G_j')$. Então existe $B_1 \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, G_j, E_{j+1}, \ldots, E_n; \mathbb{K})$ tal que $\psi_1(B_1) = B$. Por hipótese, existe $\widetilde{B_1} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$ que estende B_1, logo $\psi_2(\widetilde{B_1}) \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_n; E_j')$. Chamando de $\widehat{B} = \psi_2(\widetilde{B_1})$, vejamos que $\widehat{B}$ é um levantamento para B, isto é, $i' \circ \widehat{B} = B$, onde $i' \colon E_j' \longrightarrow G_j'$ é o adjunto da inclusão. De fato, para todos $x_k \in E_k$, $k = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ e $x_j \in G_j$,

$$\begin{aligned}
(i' \circ \widehat{B})(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n))(x_j) &= i'(\widehat{B}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n))(x_j) \\
&= \widehat{B}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)(x_j) \\
&= \psi_2(\widetilde{B_1})(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)(x_j) \\
&= \widetilde{B_1}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\
&= B_1(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\
&= \psi_1(B_1)(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)(x_j) \\
&= B(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)(x_j),
\end{aligned}$$

provando que o operador B é levantável.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Sejam $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, G_j, E_{j+1}, \ldots, E_n; \mathbb{K})$. Então $B := \psi_1(A) \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_n; G_j')$, e segue da hipótese que existe um operador $\widehat{B} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_n; E_j')$ tal que $i' \circ \widehat{B} = B$. Como ψ_2 é sobrejetor, existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$ tal que $\psi_2(\widetilde{A}) = \widehat{B}$. Vejamos que $\widetilde{A}$ estende A:

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) &= \psi_2(\widetilde{A})(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)(x_j) \\
&= \widehat{B}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)(x_j) \\
&= i'(\widehat{B}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n))(x_j) \\
&= B(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)(x_j) \\
&= \psi_1(A)(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)(x_j) \\
&= A(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

para todos $x_k \in E_k$, $k = 1 \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ e $x_j \in G_j$. $\square$

O resultado a seguir encontra-se enunciado como exercício em [10, Ex 1.6].

Proposição 2.2.5. *Sejam G um subespaço do espaço normado E e $i \colon G \longrightarrow E$ a inclusão. São equivalentes:*

(a) *Todo operador $A \in \mathcal{L}(G, G'; \mathbb{K})$ é extensível para um operador $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E, G'; \mathbb{K})$.*

(b) *Existe um operador $u \in \mathcal{L}(E; G'')$ tal que $u \circ i = J_G$.*

$$\begin{tikzcd}
 & G'' \\
G \arrow[ur, "J_G"] \arrow[r, "i"'] & E \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.1, o operador

$$\psi\colon \mathcal{L}(E, G'; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}(E; G'')\ ,\ \psi(B)(x)(\varphi) = B(x, \varphi)$$

é um isomorfismo isométrico.
(a) $\Longrightarrow$ (b) Considere o operator

$$A\colon G \times G' \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ A(x, \varphi) = \varphi(x).$$

Da linearidade e da continuidade de φ segue que $A \in \mathcal{L}(G, G'; \mathbb{K})$, logo existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E, G'; \mathbb{K})$ extensão de A, e assim $\psi(\widetilde{A}) \in \mathcal{L}(E; G'')$. Tome $u = \psi(\widetilde{A})$ e vejamos que $u \circ i = J_G$: para todos $x \in G$ e $\varphi \in G'$,

$$\begin{aligned}(u \circ i)(x)(\varphi) &= u(i(x))(\varphi) = u(x)(\varphi) = \psi(\widetilde{A})(x)(\varphi)\\ &= \widetilde{A}(x, \varphi) = A(x, \varphi) = \varphi(x) = J_G(x)(\varphi).\end{aligned}$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) Seja $A \in \mathcal{L}(G, G'; \mathbb{K})$. Pelo Teorema 2.2.1, o operador

$$\psi_1\colon \mathcal{L}(G, G'; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}(G; G'')\ ,\ \psi_1(A)(x)(\varphi) = A(x, \varphi)$$

é um isomorfismo. Logo $\psi_1(A) \in \mathcal{L}(G; G'')$, e então $\psi_1(A)'' \in \mathcal{L}(G''; G'''')$. Considere os mergulhos canônicos $J_{G''}\colon G'' \longrightarrow G''''$, $J_{G'}\colon G' \longrightarrow G'''$ e $J_G\colon G \longrightarrow G''$. Por hipótese existe um operador $u \in \mathcal{L}(E; G'')$ tal que $u \circ i = J_G$. Os operadores envolvidos podem ser resumidos no seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] & G'' \arrow[r, "\psi_1(A)''"] & G'''' \arrow[r, "J'_{G'}"] & G'' \\
 & G \arrow[u, "J_G"] \arrow[r, "\psi_1(A)"] & G'' \arrow[u, "J_{G''}"'] &
\end{tikzcd}$$

Considere $T := J'_{G'} \circ \psi_1(A)'' \circ u : E \longrightarrow G''$. É claro que $T \in \mathcal{L}(E, G'')$, logo existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E, G'; \mathbb{K})$ tal que $\psi(\widetilde{A}) = T$. Vejamos que $\widetilde{A}$ estende A: para todos $x \in G$ e $\varphi \in G'$,

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(x, \varphi) &= \psi(\widetilde{A})(x)(\varphi) = T(x)(\varphi) = (J'_{G'} \circ \psi_1(A)'' \circ u)(x)(\varphi)\\ &= J'_{G'}(\psi_1(A)''(u(x)))(\varphi) = J'_{G'}(\psi_1(A)''(u(i(x))))(\varphi)\\ &= J'_{G'}(\psi_1(A)''(J_G(x)))(\varphi) = \psi_1(A)''(J_G(x))(J_{G'}(\varphi))\\ &= J_G(x)(\psi_1(A)'(J_{G'}(\varphi))) = \psi_1(A)'(J_{G'}(\varphi))(x)\\ &= J_{G'}(\varphi)(\psi_1(A)(x)) = \psi_1(A)(x)(\varphi) = A(x, \varphi).\end{aligned}$$

$\square$

Já vimos no Exemplo 2.1.5 que c_0 é subespaço não-complementado de ℓ_∞. Dessa forma, dado um operador $A \in \mathcal{L}(c_0, G'; \mathbb{K})$ não sabemos pelo Teorema 2.1.7 se existe um operador $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\ell_\infty, G'; \mathbb{K})$ que estende A. Vejamos, como consequência do resultado anterior, que tal extensão existe quando $G = c_0$.

Corolário 2.2.6. *Para todo operador bilinear $A \in \mathcal{L}(c_0, \ell_1; \mathbb{K})$ existe um operador bilinear $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_1; \mathbb{K})$ que estende A.*

Demonstração. Pela Proposição 1.3.1, $\ell_1' = \ell_\infty$, e pela Proposição 1.3.2, $c_0' = \ell_1$. Daí

$$c_0'' = ((c_0)')' = (\ell_1)' = \ell_\infty.$$

Tome $Id\colon \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$ o operador identidade, é claro que $Id \in \mathcal{L}(\ell_\infty; \ell_\infty)$. Mais ainda, $Id \circ i : c_0 \longrightarrow \ell_\infty = c_0''$, onde $i : c_0 \longrightarrow \ell_\infty$ é a inclusão. Assim $Id \circ i = J_{c_0}$, pois o mergulho canônico $J_{c_0} : c_0 \longrightarrow c_0'' = \ell_\infty$ é na verdade a função inclusão de c_0 em ℓ_∞ (veja [8]). Segue pela Proposição 2.2.5 que existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_1; \mathbb{K})$ extensão de A. □

2.3 Espaços injetivos

Vimos na Seção 2.1 que não vale uma versão vetorial do Teorema de Hahn-Banach. Entretanto, existem espaços de Banach F para os quais vale uma versão do teorema de extensão de Hahn-Banach para operadores tomando valores em F. A primeira descoberta nesta direção, devida a Phillips, diz que o espaço ℓ_∞ goza dessa propriedade:

Teorema 2.3.1. [8, Teorema 3.2.7] *Se G é um subespaço do espaço normado E e $T\colon G \longrightarrow \ell_\infty$ é um operador linear contínuo, então existe um operador linear contínuo $\widetilde{T}\colon E \longrightarrow \ell_\infty$ que estende T, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "\widetilde{T}"] & \\ G \arrow[u, "i"] \arrow[r, "T"] & \ell_\infty \end{tikzcd}$$

Mais ainda, $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

A eventual existência de outros espaços com essa propriedade ensejou a seguinte definição:

Definição 2.3.2. Um espaço de Banach F é chamado *injetivo* se para cada espaço de Banach E, cada subespaço $G \subseteq E$ e $u \in \mathcal{L}(G; F)$, existe $\widetilde{u} \in \mathcal{L}(E; F)$ extensão de u.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "\widetilde{u}"] & \\ G \arrow[u, "i"] \arrow[r, "u"] & F \end{tikzcd}$$

Do teorema de Hahn-Banach segue que $\mathbb{K}$ é um espaço injetivo, e do Teorema de Phillips acima segue que ℓ_∞ também é um espaço injetivo. Para uma descrição completa de todos os espaços injetivos, veja [8, Teorema 3.5.1].

A partir da discussão acima, a seguinte pergunta é natural no contexto desta dissertação: se F é um espaço injetivo, G_1 é subespaço do espaço normado $E_1, \ldots, G_n$ é subespaço do espaço normado E_n e $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$, será que existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ que estende A?

A resposta é negativa: como $\mathbb{K}$ é um espaço injetivo, a Proposição 2.2.2 nos diz que nem sempre operadores multilineares contínuos tomando valores em espaços injetivos podem ser estendidos.

Capítulo 3

Extensões multilineares ao fecho

Um resultado clássico de extensão de operadores lineares contínuos é o seguinte:

Proposição 3.0.1. *Sejam E um espaço normado, F um espaço de Banach, G um subespaço de E e $u \in \mathcal{L}(G;F)$. Então existe um único $\widetilde{u} \in \mathcal{L}(\overline{G};F)$ que estende u, isto e, $\widetilde{u}(x) = u(x)$, para todo $x \in G$, e $\|\widetilde{u}\| = \|u\|$. Mais ainda, se $\|u(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in G$, então $\|\widetilde{u}(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \overline{G}$.*

Uma demonstração detalhada pode ser encontrada em [18, Lema 3.32].

Neste capítulo estamos interessados em versões multilineares desta extensão ao fecho: dados espaços normados $E_1, \ldots, E_n$, um espaço de Banach F, G_1 subespaço de E_1,..., G_n subespaço de E_n, e $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$, será que existe um único $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_n; F)$ que estende A e $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$?

É bem disseminado o conhecimento de que tais extensões multilineares ao fecho são válidas, mas demonstrações deste fato não são facilmente encontradas. Mais ainda, não é difícil ouvir que a demonstração do caso multilinear é uma simples adaptação do caso linear. Ao mesmo tempo em que daremos duas demonstrações da extensão multilinear ao fecho neste capítulo, aqui também mostraremos que o argumento usado no caso linear não se adapta ao caso multilinear. Assim, além de provarmos a extensão multilinear ao fecho, desmistificaremos a crença de que o caso multilinear é análogo ao caso linear.

A demonstração do caso linear baseia-se no fato de que operadores lineares contínuos entre espaços normados são uniformemente contínuos. Na Seção 3.1 mostraremos que operadores multilineares contínuos não-nulos nunca são uniformemente contínuos, deixando clara a impossibilidade de se adaptar a demonstração linear para o caso multilinear. Em seguida provaremos a extensão multilinear ao fecho usando o fato de que operadores multilineares contínuos são uniformemente contínuos sobre conjuntos limitados.

A segunda demonstração da extensão multilinear ao fecho, apresentada na Seção 3.2, será feita por indução sobre o grau de multilinearidade e usando os isomorfismos isométricos do Teorema 2.2.1. Finalmente, daremos algumas aplicações da extensão multilinear ao fecho e responderemos a pergunta formulada no Capítulo 2 sobre extensões de operadores multilineares em espaços de Hilbert.

3.1 Primeira demonstração do teorema de extensão ao fecho

Começamos a seção mostrando a impossibilidade de se adaptar a demonstração do caso linear para o caso multilinear. Essa impossibilidade segue do fato de que a demonstração linear depende da continuidade uniforme dos operadores lineares contínuos e do resultado a seguir, que mostra que operadores multilineares não-nulos nunca são uniformemente contínuos.

Proposição 3.1.1. *Sejam $n \geq 2$, $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços normados e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ um operador não-nulo. Então A não é uniformemente contínuo.*

Demonstração. Como $A \neq 0$, existe $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tal que $A(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Da n-linearidade de A segue que $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Tome $0 < \varepsilon < \|A(x_1, \ldots x_n)\|$. Para qualquer $\delta > 0$, como $x_1 \neq 0$, podemos escolher $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\lambda| < \frac{\delta}{\|x_1\|}$. Neste caso, temos

$$\left\| \left(x_1 + \lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots, x_n \right) - \left(x_1, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots, x_n \right) \right\| = \|\lambda x_1\| < \delta,$$

mas

$$\begin{aligned} \left\| A \left(x_1 + \lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots, x_n \right) - A \left(x_1, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots, x_n \right) \right\| &= \left\| A \left(\lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots, x_n \right) \right\| \\ &= \|A\left(x_1, \ldots x_n\right)\| > \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto prova que A não é uniformemente contínuo. $\square$

Excluída a possibilidade de adaptar a demonstração linear usando a continuidade uniforme dos operadores multilineares, a primeira demonstração da extensão multilinear ao fecho lança mão do conceito a seguir, que normalmente não é visto em um primeiro curso de Espaços Métricos.

Definição 3.1.2. Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f \colon M \longrightarrow N$ é *uniformemente contínua sobre limitados* se para todo $X \subseteq M$ limitado e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que pode depender de X e de ε, tal que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, para todos $x, y \in X$ com $d(x, y) < \delta$.

Da definição segue que toda função uniformemente contínua é uniformemente contínua sobre limitados. Vejamos que recíproca nem sempre é verdade: considere a função $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Como funções contínuas sobre compactos são uniformemente contínuas, segue que f é uniformemente contínua sobre limitados de $\mathbb{R}$. Vejamos que f não é uniformemente contínua. Para isso, tome $0 < \varepsilon < 2$ e note que, para cada $\delta > 0$, tomando $x \in \mathbb{R}$ com $|x| > \frac{1}{\delta}$, temos

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - x^2 = 2 + \frac{1}{x^2} > 2.$$

Chamando $y = x + \frac{1}{x}$, segue que $|y - x| < \delta$ mas $|f(y) - f(x)| > 2 > \varepsilon$.

É conhecido que funções uniformemente continuas transformam sequências de Cauchy em sequências de Cauchy. Será importante para nós o fato de que funções uniformemente contínuas sobre limitados também têm essa propriedade.

Lema 3.1.3. *Se $f\colon M \longrightarrow N$ é uma função uniformemente contínua sobre limitados entre espaços métricos e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em M, então $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em N.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em M. Como toda sequência de Cauchy é limitada, existe $X \subseteq M$ limitado tal que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$. Sendo f uniformemente contínua sobre limitados, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in X,\ d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Como $\delta > 0$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \delta$, para todos $n, m \geq n_0$. Segue que $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, para todo $n, m \geq n_0$, provando que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em N. $\square$

Precisamos desenvolver um pouco mais a teoria de funções uniformemente contínuas sobre limitados.

Lema 3.1.4. *Se $f\colon M \longrightarrow N$ é uma função uniformemente contínua sobre limitados entre espaços métricos e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ são sequências limitadas em M tais que $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$, então $d(f(x_n), f(y_n)) \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências limitadas em M. Podemos tomar $x, y \in M$ e $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tais que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq B(x, \delta_1)$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq B(y, \delta_2)$. Tomando $r = \delta_1 + d(x, y) + \delta_2$, tem-se que o conjunto $X = \{x_n, y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(x, r)$ é limitado. Da continuidade uniforme de f sobre limitados, existe $\delta > 0$ tal que

$$x_n, y_n \in X,\ d(x_n, y_n) < \delta \Longrightarrow d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon.$$

Como $\delta > 0$ e $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, y_n) < \delta$, para todo $n \geq n_0$. Portanto, $d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, o que é suficiente para concluir que $d(f(x_n), f(y_n)) \longrightarrow 0$. $\square$

Definição 3.1.5. Sejam M, N espaços métricos e $X \subseteq M$. Uma função $f\colon X \longrightarrow N$ é *localmente uniformemente contínua* se para cada $x \in X$ existe $B = B(x, r)$, bola aberta de centro $x \in X$ e raio $r > 0$, tal que $f|_{B \cap X}$ é uniformemente contínua, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, sempre que $x, y \in B \cap X$ e $d(x, y) < \delta$.

É imediato que toda função localmente uniformemente contínua é contínua.

Teorema 3.1.6. *Sejam M, N espaços métricos, N espaço completo e X um subconjunto não vazio de M. Se $f\colon X \longrightarrow N$ é uma função uniformemente contínua sobre limitados, então existe uma única função $\widetilde{f}\colon \overline{X} \longrightarrow N$ localmente uniformemente contínua que estende f, isto é, $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Dado $x \in \overline{X}$, tome uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X tal que $x_n \longrightarrow x$. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy e pelo Lema 3.1.3 sabemos que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em N, portanto convergente pois N é completo. Considere a função

$$\widetilde{f}\colon \overline{X} \longrightarrow N\ ,\ \widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Vejamos que $\widetilde{f}$ está bem definida. Para isso, sejam $x \in \overline{X}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências em X tais que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow x$. Pelo feito acima, existem $z, w \in N$ tais que $f(x_n) \longrightarrow z$ e $f(y_n) \longrightarrow w$. Veja que $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ pois

$$0 \leq d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \longrightarrow 0.$$

Por serem convergentes, as sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ são limitadas, portanto concluímos pelo Lema 3.1.4 que $d(f(x_n), f(y_n)) \longrightarrow 0$. De

$$0 \leq d(y, w) = d\left(\lim_{n\to\infty}(f(x_n), f(y_n))\right) = \lim_{n\to\infty}(d(f(x_n), f(y_n))) = 0,$$

segue que $y = w$, o que mostra que o limite de $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ depende somente de $x \in \overline{X}$ e não da sequência escolhida $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ convergindo para x. Isso comprova a boa definição de $\widetilde{f}$.

Mostremos agora que $\widetilde{f}$ satisfaz todas as propriedades do teorema. Dado $a \in \overline{X}$, o que foi feito garante que para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X tal que $x_n \longrightarrow a$ tem-se $f(x_n) \longrightarrow \widetilde{f}(a)$. Da Proposição 1.5.3 segue que $\widetilde{f}(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Daí, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\ d(x, a) < \delta \Longrightarrow d(f(x), \widetilde{f}(a)) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.1}$$

Tome $r = \frac{\delta}{4} > 0$ e vejamos que $\widetilde{f}$ é uniformemente contínua em $B(a, r) \subseteq \overline{X}$. Para isso, sejam $y, z \in B(a, r)$. Então $d(y, z) < \frac{\delta}{2}$ e, como $y, z \in \overline{X}$, existem $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ em X tais que $y_n \longrightarrow y$ e $z_n \longrightarrow z$. Como $d(y, z) < \frac{\delta}{2}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_n, y) < \frac{\delta}{2}$ e $d(z_n, z) < \frac{\delta}{2}$, para todo $n \geq n_0$. Assim,

$$d(y_n, a) \leq d(y_n, y) + d(y, a) < \frac{\delta}{2} + r < \delta \ \text{ e } \ d(z_n, a) \leq d(z_n, z) + d(z, a) < \frac{\delta}{2} + r < \delta.$$

Disso e por (3.1),

$$d(f(y_n), \widetilde{f}(a)) < \frac{\varepsilon}{4} \ \text{ e } \ d(f(z_n), \widetilde{f}(a)) < \frac{\varepsilon}{4}, \ \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Segue que $d(f(y_n), f(z_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$, e portanto

$$d(\widetilde{f}(y), \widetilde{f}(z)) = d\left(\lim_{n\to\infty}(f(y_n), f(z_n))\right) = \lim_{n\to\infty}(d(f(x_n), f(y_n))) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

provando que $\widetilde{f}$ é localmente uniformemente contínua.

Para provar que $\widetilde{f}$ estende f, seja $x \in X$ e tome $x_n = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $x_n \longrightarrow x$ e, da boa definição de $\widetilde{f}$,

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Finalmente vejamos que $\widetilde{f}$ é única. Suponha que $g\colon \overline{X} \longrightarrow N$ seja uma função localmente uniformemente contínua que estende f. Dados $x \in \overline{X}$, tome $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X tal que $x_n \longrightarrow x$. Como g estende f, tem-se $g(x_n) = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e sendo g contínua (pois é localmente uniformemente contínua), tem-se $g(x_n) \longrightarrow g(x)$. Assim,

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x),$$

provando que $g = \widetilde{f}$. $\square$

Observação 3.1.7. (a) Note que o Teorema 3.1.6 não continua válido quando se omite a hipótese de N ser um espaço completo. Por exemplo, tome a função identidade $id\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, id(x) = x$. É claro que id é uniformemente contínua, logo uniformemente contínua sobre limitados. E id não pode ser estendida continuamente a $\overline{Q} = \mathbb{R}$, pois toda função contínua $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ é constante. De fato, como $\mathbb{R}$ é conexo e f contínua, tem-se $f(\mathbb{R})$ conexo; e portanto f é constante pois os únicos subconjuntos conexos não vazios de $\mathbb{Q}$ são unitários.
(b) Não sabemos se a função $\widetilde{f}$ do Teorema 3.1.6 é uniformemente contínua sobre limitados.

Apesar de não serem uniformemente contínuos, os operadores multilineares contínuos são uniformemente contínuos sobre limitados:

Teorema 3.1.8. *Todo operador multilinear contínuo entre espaços normados é uniformemente contínuo sobre limitados.*

Demonstração. Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços normados e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Nesta demonstração utilizaremos a norma do máximo $\|\cdot\|_\infty$ em $E_1 \times \cdots \times E_n$. Pela Proposição 1.2.3 existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_n\| \quad \text{para quaisquer } x_j \in E_j,\ j = 1, \ldots, n.$$

Se $C = 0$, temos $\|A(x_1, \ldots, x_n)\| = 0$ para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, n$; o que quer dizer que A é o operador nulo, que obviamente é uniformemente contínuo, logo uniformemente contínuo sobre limitados.

Façamos agora o caso $C > 0$. Como todo conjunto limitado de $E_1 \times \cdots \times E_n$ está contido em alguma bola centrada na origem, basta mostrar que A é uniformemente contínuo na bola fechada $B[0, r]$ centrada na origem e raio $r > 0$ qualquer. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{nCr^{n-1}} > 0$. Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em $B[0, r]$ tais que $\|x - y\|_\infty < \delta$. Então $\|x\|_\infty \leq r$ e $\|y\|_\infty \leq r$, logo $\|x_j\| \leq r$ e $\|y_j\| \leq r$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Da n-linearidade de A temos

$$\begin{aligned}
A(x_1, \ldots, x_n) - A(y_1, \ldots, y_n) &= A(x_1, \ldots, x_n) - A(y_1, x_2, \ldots, x_n) + A(y_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\quad - A(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n) + \cdots + A(y_1, \ldots, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\
&\quad - A(y_1, \ldots, y_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n) + \cdots - A(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) \\
&\quad + A(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) - A(y_1, \ldots, y_n) \\
&= A(x_1 - y_1, x_2, \ldots, x_n) + A(y_1, x_2 - y_2, x_3, \ldots, x_n) \\
&\quad + \cdots + A(y_1, \ldots, y_j, x_{j+1} - y_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n) \\
&\quad + \cdots + A(y_1 \ldots, y_{n-1}, x_n - y_n).
\end{aligned}$$

Disso segue que

$$\begin{aligned}
\|A(x) - A(y)\| &= \|A(x_1, \ldots, x_n) - A(y_1, \ldots, y_n)\| \\
&\leq \|A(x_1 - y_1, x_2, \ldots, x_n)\| \\
&\quad + \cdots + \|A(y_1, \ldots, y_j, x_{j+1} - y_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n)\| \\
&\quad + \cdots + \|A(y_1 \ldots, y_{n-1}, x_n - y_n)\| \\
&\leq \|A\| \cdot \|x_1 - y_1\| \cdot \|x_2\| \cdots \|x_n\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \cdots + \|A\| \cdot \|y_1\| \cdots \|y_j\| \cdot \|x_{j+1} - y_{j+1}\| \cdot \|x_{j+2}\| \cdots \|x_n\| \\
&+ \cdots + \|A\| \cdot \|y_1\| \cdots \|y_{n-1}\| \cdot \|x_n - y_n\| \\
&\leq Cr^{n-1}(\|x_1 - y_1\| + \cdots + \|x_{j+1} - y_{j+1}\| + \cdots + \|x_n - y_n\|) \\
&= nCr^{n-1}\|x - y\|_\infty < nCr^{n-1}\delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo $\|A(x) - A(y)\| < \varepsilon$, para todos $x, y \in B[0, r]$ com $\|x - y\|_\infty < \delta$, o que prova que A é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de $E_1 \times \cdots \times E_m$. □

Agora estamos em condições para apresentar a primeira demonstração do teorema de extensão ao fecho.

Teorema 3.1.9. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados, F espaço de Banach e G_1 subespaço de E_1,..., G_n subespaço de E_n. Para todo operador $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$ existe um único operador $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_n; F)$ que estende A e $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.*

Demonstração. Como $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$, pelo Teorema 3.1.8 A é uniformemente contínuo sobre conjuntos limitados do conjunto $G_1 \times \cdots \times G_n$. Pelo Lema 1.5.6 e pelo Teorema 3.1.6 existe um único $\widetilde{A}\colon \overline{G_1} \times \cdots \times \overline{G_n} \longrightarrow F$, contínuo que estende A, tal que $\widetilde{A}(x) = \lim\limits_{m\to\infty} A(x_m)$, onde $(x_m)_{m=1}^\infty$ é qualquer sequência em $G_1 \times \cdots \times G_n$ convergindo para x.
Falta mostrar que $\widetilde{A}$ é n-linear e $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$. Consideremos em $E_1 \times \cdots \times E_n$ a norma da soma. Sejam $x_j, y_j \in \overline{G_j}$, $j = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Tome $(x_m^j)_{m=1}^\infty$ e $(y_m^j)_{m=1}^\infty$ em G_j tais que $x_m^j \longrightarrow x_j$ e $y_m^j \longrightarrow y_j$. Então,

$$x_m^j + \lambda y_m^j \longrightarrow x_j + \lambda y_j,\ j = 1, \ldots, n.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|(x_m^1, \ldots, x_m^j + \lambda y_m^j, \ldots, x_m^n) - (x_1, \ldots, x_j + \lambda y_j, \ldots, x_n)\|_1 \\
&= \|(x_m^1 - x_1, \ldots, (x_m^j + \lambda y_m^j) - (x_j + \lambda y_j), \ldots, x_m^n - x_n)\|_1 \\
&= \|x_m^1 - x_1\| + \cdots + \|(x_m^j + \lambda y_m^j) - (x_j + \lambda y_j)\| + \cdots + \|x_m^n - x_n\| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Segue que $(x_m^1, \ldots, x_m^j + \lambda y_m^j, \ldots, x_m^n) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_j + \lambda y_j, \ldots, x_n)$, do mesmo modo temos que

$$(x_m^1, \ldots, x_m^j, \ldots, x_m^n) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \text{ e } (x_m^1, \ldots, y_m^j, \ldots, x_m^n) \longrightarrow (x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_n).$$

Disto e sendo A n-linear

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}(x_1, \ldots, x_j + \lambda y_j, \ldots, x_n) &= \lim_{m\to\infty} A(x_m^1, \ldots, x_m^j + \lambda y_m^j, \ldots, x_m^n) \\
&= \lim_{m\to\infty} (A(x_m^1, \ldots, x_m^j, \ldots, x_m^n) + \lambda A(x_m^1, \ldots, y_m^j, \ldots, x_m^n)) \\
&= \lim_{m\to\infty} A(x_m^1, \ldots, x_m^j, \ldots, x_m^n) + \lambda \lim_{m\to\infty} A(x_m^1, \ldots, y_m^j, \ldots, x_m^n) \\
&= \widetilde{A}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + \lambda \widetilde{A}(x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

provando que $\widetilde{A}$ é n-linear. Como $\widetilde{A}$ estende A, temos

$$\|\widetilde{A}\| = \sup\{\|\widetilde{A}(y_1, \ldots, y_n)\| : y_j \in \overline{G_j} \text{ e } \|y_j\| \leq 1, \text{ para todo } j = 1, \ldots, n\}$$

$$\geq \sup\{\|\widetilde{A}(x_1,\ldots,x_n)\| : x_j \in G_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1, \text{ para todo } j=1,\ldots,n\}$$
$$= \sup\{\|A(x_1,\ldots,x_n)\| : x_j \in G_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1, \text{ para todo } j=1,\ldots,n\} = \|A\|.$$

Por outro lado como $A \in \mathcal{L}(G_1,\ldots,G_n;F)$, pela Proposição 1.2.4, tem-se $\|A(x_1,\ldots,x_n)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$, para todos $x_j \in G_j$, $j=1,\ldots,n$. Logo

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{A}(x_1,\ldots,x_n))\| &= \left\| \lim_{m\to\infty} A(x_m^1,\ldots,x_m^n) \right\| \\
&= \lim_{m\to\infty} \|A(x_m^1,\ldots,x_m^n)\| \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \|A\| \cdot \|x_m^1\| \cdots \|x_m^n\| \\
&= \|A\| \cdot \lim_{m\to\infty} \|x_m^1\| \cdots \lim_{m\to\infty} \|x_m^n\| \\
&= \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|,
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$. $\square$

Se, no Teorema 3.1.9, cada subespaço G_j é denso em E_j, então o operador A pode ser estendido continuamente ao espaço $E_1 \times \cdots \times E_n$.

3.2 Segunda demonstração do teorema de extensão ao fecho e aplicações

Nesta seção apresentaremos uma segunda demonstração do Teorema 3.1.9, que ao invés de usar o conceito de função uniformemente contínua sobre limitados, usa o teorema linear (Proposição 3.0.1) e um argumento de indução sobre o grau de multilinearidade usando os isomorfismos do Teorema 2.2.1. Além disso, daremos algumas aplicações da extensão multilinear ao fecho.

Demonstração. (Segunda demonstração do Teorema 3.1.9)

Para $n=1$, isto é, para o caso linear, o resultado segue da Proposição 3.0.1. Suponhamos que o teorema seja válido para $n=k$, isto é, a hipótese indutiva é que para todos espaços normados $E_1,\ldots,E_k,F$, todos subespaços G_j de E_j, $j=1,\ldots,k$, todo operador $B \in \mathcal{L}(G_1,\ldots,G_k;F)$ admite uma única extensão $\widetilde{B} \in \mathcal{L}(\overline{G}_1,\ldots,\overline{G}_k;F)$ tal que $\|\widetilde{B}\| = \|B\|$. Mostremos que o teorema é válido para $n=k+1$. Para isso sejam $E_1,\ldots,E_{k+1},F$, espaços normados, G_j subespaço de E_j para $j=1,\ldots,k+1$, e $A \in \mathcal{L}(G_1,\ldots,G_{k+1};F)$. Considere o isomorfismo isométrico do Teorema 2.2.1:

$$\psi_1 \colon \mathcal{L}(G_1,\ldots,G_{k+1};F) \longrightarrow \mathcal{L}(G_1;\mathcal{L}(G_2,\ldots,G_{k+1};F)),$$

isto é,

$$\psi_1(A)(x_1)(x_2,\ldots,x_{k+1}) = A(x_1,\ldots,x_{k+1}),$$

para todos $x_j \in G_j$, $j=1,\ldots,k+1$. Para cada $x_1 \in G_1$, o operador $\psi_1(A)(x_1)$ pertence a $\mathcal{L}(G_2,\ldots,G_{k+1};F)$, portanto, pela hipótese indutiva, existe um único operador $\widetilde{\psi_1(A)(x_1)} \in \mathcal{L}(\overline{G}_2,\ldots,\overline{G}_{k+1};F)$ que estende $\psi_1(A)(x_1)$ e

$$\left\| \widetilde{\psi_1(A)(x_1)} \right\| = \|\psi_1(A)(x_1)\|. \tag{3.2}$$

Defina

$$A_1\colon G_1 \longrightarrow \mathcal{L}(\overline{G}_2,\ldots,\overline{G}_{k+1};F),\ A_1(x_1) = \widetilde{\psi_1(A)(x_1)}.$$

A boa definição de A_1 segue da existência e unicidade do operador $\widetilde{\psi_1(A)(x_1)}$. Mostraremos agora que A_1 é um operador linear contínuo, isto é, $A_1 \in \mathcal{L}(G_1;\mathcal{L}(\overline{G}_2,\ldots,\overline{G}_{k+1};F))$. De fato vejamos que isso acontece. Sejam $x_1, y_1 \in G_1$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e

$$y = (x_2,\ldots,x_{k+1}) \in \overline{G}_2 \times \cdots \times \overline{G}_{k+1} = \overline{G_2 \times \cdots \times G_{k+1}}.$$

Existe uma sequência $((x_m^2,\cdots,x_m^{k+1}))_{m=1}^{\infty}$ em $G_2\times\ldots\times G_{k+1}$ tal que $(x_m^2,\ldots,x_m^{k+1}) \longrightarrow (x_2,\ldots,x_{k+1})$ em $\overline{G}_2 \times \cdots \times \overline{G}_{k+1}$. Da continuidade de $\widetilde{\psi_1(A)(x_1+\lambda y_1)}$, $\widetilde{\psi_1(A)(x_1)}$ e $\widetilde{\psi_1(A)(y_1)}$ segue que

$$\begin{aligned}
A_1(x_1+\lambda y_1)(y) &= \widetilde{\psi_1(A)(x_1+\lambda y_1)}(x_2,\ldots,x_{k+1})\\
&= \lim_{m\to\infty} \widetilde{\psi_1(A)(x_1+\lambda y_1)}(x_m^2,\ldots,x_m^{k+1})\\
&= \lim_{m\to\infty} \psi_1(A)(x_1+\lambda y_1)(x_m^2,\ldots,x_m^{k+1})\\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\psi_1(A)(x_1)+\lambda\psi_1(A)(y_1)\right)(x_m^2,\ldots,x_m^{k+1})\\
&= \lim_{m\to\infty} \psi_1(A)(x_1)(x_m^2,\ldots,x_m^{k+1}) + \lambda \lim_{m\to\infty} \psi_1(A)(y_1)(x_m^2,\ldots,x_m^{k+1})\\
&= \lim_{m\to\infty} \widetilde{\psi_1(A)(x_1)}(x_m^2,\ldots,x_m^{k+1}) + \lambda \lim_{m\to\infty} \widetilde{\psi_1(A)(y_1)}(x_m^2,\ldots,x_m^{k+1})\\
&= \widetilde{\psi_1(A)(x_1)}(x_2,\ldots,x_{k+1}) + \lambda\widetilde{\psi_1(A)(y_1)}(x_2,\ldots,x_{k+1})\\
&= A_1(x_1)(x_2,\ldots,x_{k+1}) + \lambda A_1(y_1)(x_2,\ldots,x_{k+1})\\
&= (A_1(x_1)+\lambda A_1(y_1))(y).
\end{aligned}$$

Isso prova que A_1 é linear. De (3.2), relembrando que ψ_1 é isomorfismo isométrico, temos

$$\|A_1(x_1)\| = \left\|\widetilde{\psi_1(A)(x_1)}\right\| = \|\psi_1(A)(x_1)\| \le \|\psi_1(A)\|\cdot\|x_1\| = \|A\|\cdot\|x_1\|,$$

para todo $x_1 \in G_1$, donde segue que A_1 é contínuo. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|A_1\| &= \sup_{x_1\in B_{G_1}} \|A_1(x_1)\| = \sup_{x_1\in B_{G_1}} \left\|\widetilde{\psi_1(A)(x_1)}\right\| = \sup_{x_1\in B_{G_1}} \|\psi_1(A)(x_1)\|\\
&= \sup_{x_1\in B_{G_1}} \sup_{\substack{x_j\in B_{G_j}\\ j=2,\ldots,k+1}} \|\psi_1(A)(x_1)(x_2,\ldots,x_{k+1})\|\\
&= \sup_{x_1\in B_{G_1}} \sup_{\substack{x_j\in B_{G_j}\\ j=2,\ldots,k+1}} \|A(x_1,\ldots,x_{k+1})\|
\end{aligned}$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in B_{G_j} \\ j=1,\dots,k+1}} \|A(x_1, \dots, x_{k+1})\| = \|A\|,$$

concluímos que $\|A_1\| = \|A\|$. Provamos que $A_1 \in \mathcal{L}(G_1; \mathcal{L}(\overline{G}_2, \dots, \overline{G}_{k+1}; F))$ e $\|A_1\| = \|A\|$. Pela Proposição 3.0.1 existe um único operador linear $\widetilde{A_1} \in \mathcal{L}(\overline{G_1}; \mathcal{L}(\overline{G}_2, \dots, \overline{G}_{k+1}; F))$ que estende A_1 e $\|\widetilde{A_1}\| = \|A_1\|$. Recorremos novamente ao Teorema 2.2.1 para considerar o isomorfismo isométrico

$$\psi_2 \colon \mathcal{L}(\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_{k+1}; F) \longrightarrow \mathcal{L}(\overline{G_1}; \mathcal{L}(\overline{G}_2, \dots, \overline{G}_{k+1}; F)).$$

Como $\widetilde{A_1} \in \mathcal{L}(\overline{G_1}; \mathcal{L}(\overline{G}_2, \dots, \overline{G}_{k+1}; F))$, existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_{k+1}; F)$ tal que $\psi_2(\widetilde{A}) = \widetilde{A_1}$. Resta mostrar que $\widetilde{A}$ estende A, é único e $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$. Para a extensão, seja $(x_1, \dots, x_{k+1}) \in G_1 \times \cdots \times G_{k+1}$ e note que

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}(x_1, \dots, x_{k+1}) &= \psi_2(\widetilde{A})(x_1)(x_2, \dots, x_{k+1}) \\
&= \widetilde{A_1}(x_1)(x_2, \dots, x_{k+1}) \\
&= A_1(x_1)(x_2, \dots, x_{k+1}) \\
&= \widetilde{\psi_1(A)(x_1)}(x_2, \dots, x_{k+1}) \\
&= \psi_1(A)(x_1)(x_2, \dots, x_{k+1}) = A(x_1, \dots, x_{k+1}).
\end{aligned}$$

A preservação da norma segue de

$$\|\widetilde{A}\| = \|\psi_2(\widetilde{A})\| = \|\widetilde{A_1}\| = \|A_1\| = \|A\|.$$

Por último, a unicidade de $\widetilde{A}$ segue do Lema 1.6.9. $\square$

Passaremos agora a explorar algumas consequências da extensão multilinear ao fecho.

Corolário 3.2.1. *Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços normados, F espaço de Banach e G_1 subespaço de $E_1, \dots, G_n$ subespaço de E_n. Então a correspondência*

$$A \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; F) \longmapsto \widetilde{A} \in \mathcal{L}(\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_n; F)$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Considere o operador

$$T \colon \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; F) \longrightarrow \mathcal{L}(\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_n; F) \ , \ T(A) = \widetilde{A}.$$

A boa definição de T e a igualdade $\|T(A)\| = \|A\|$ seguem do Teorema 3.1.9. Provemos que T é linear. Sejam $A, B \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então existem únicos $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathcal{L}(\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_n; F)$ tais que $\widetilde{A}(x) = A(x)$ e $\widetilde{B}(x) = B(x)$, para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$. Como $A + \lambda B \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; F)$, existe um único $\widetilde{A + \lambda B} \in \mathcal{L}(\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_n; F)$ tal que $(\widetilde{A + \lambda B})(x) = (A + \lambda B)(x)$, para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$. Para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$, tem-se

$$(\widetilde{A + \lambda B})(x) = (A + \lambda B)(x) = A(x) + \lambda B(x) = \widetilde{A}(x) + \lambda \widetilde{B}(x) = (\widetilde{A} + \lambda \widetilde{B})(x),$$

provando que os operadores $\widetilde{A+\lambda B}$ e $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ coincidem em $G_1\times\cdots\times G_n$. Pelo Lema 1.6.9 segue que $\widetilde{A+\lambda B}=\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$. Dessa forma, para todo $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\overline{G}_1\times\cdots\times\overline{G}_n$,

$$T(A+\lambda B)(y)=(\widetilde{A+\lambda B})(y)=(\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B})(y)=(T(A)+\lambda T(B))(y),$$

provando que T é linear.

Por outro lado, dado qualquer $B\in\mathcal{L}(\overline{G}_1,\ldots,\overline{G}_n;F)$, é claro $B_1:=B|_{G_1\times\cdots\times G_n}\in\mathcal{L}(G_1,\ldots,G_n;F)$. Pelo Teorema 3.1.9 existe um único operador $\widetilde{B_1}\in\mathcal{L}(\overline{G}_1,\ldots,\overline{G}_n;F)$ que estende B_1. Assim,

$$T(B_1)(x)=\widetilde{B_1}(x)=B_1(x)=B(x),$$

para todo $x=(x_1,\ldots,x_n)\in G_1\times\cdots\times G_n$. Aplicando uma vez mais o Lema 1.6.9 concluímos que $T(B_1)=B$, provando que T é sobrejetora. $\square$

Definição 3.2.2. Um *completamento* de um espaço normado E é um par $(\widetilde{E},\varphi)$, onde:

(a) $\widetilde{E}$ é um espaço de Banach;

(b) $\varphi\colon E\longrightarrow\widetilde{E}$ é uma imersão isométrica linear;

(c) $\varphi(E)$ é denso em $\widetilde{E}$.

É bem conhecido que todo espaço normado admite um completamento que é único a menos de isomorfismos isométricos.

Corolário 3.2.3. *Sejam $E_1,\ldots,E_n$ espaços normados, $(\widetilde{E_1},\varphi_1),\ldots,(\widetilde{E_n},\varphi_n)$ seus respectivos completamentos, F espaço de Banach e $A\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Então existe um único $\widetilde{A}\in\mathcal{L}(\widetilde{E}_1,\ldots,\widetilde{E}_n;F)$ que estende A no sentido de que*

$$\widetilde{A}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x_n))=A(x_1,\ldots,x_n),$$

para todos $x_1\in E_1,\ldots,x_n\in E_n$, e $\|\widetilde{A}\|=\|A\|$. Mais ainda, a correspondência

$$A\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)\longmapsto\widetilde{A}\in\mathcal{L}(\widetilde{E}_1,\ldots,\widetilde{E}_n;F)$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Usando que os operadores φ_j são imersões isométricas lineares, é imediato que o operador

$$u\colon\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)\longrightarrow\mathcal{L}(\varphi_1(E_1),\ldots,\varphi_n(E_n);F),$$

$$u(A)(\varphi_1(x_1),\ldots,\varphi_n(x_n))=A(x_1,\ldots,x_n),$$

é um isomorfismo isométrico. Como cada $\varphi_j(E_j)$ é denso em $\widetilde{E_j}$, o Corolário 3.2.1 nos garante um isomorfismo isométrico

$$T\colon\mathcal{L}(\varphi_1(E_1),\ldots,\varphi_n(E_n);F)\longrightarrow\mathcal{L}(\widetilde{E_1},\ldots,\widetilde{E_n};F)$$

tal que $T(B)$ é uma extensão de B, para todo $B\in\mathcal{L}(\varphi_1(E_1),\ldots,\varphi_n(E_n);F)$. Tome $\widetilde{A}=T(u(A))$ e considere o isomorfismo isométrico $T\circ u$ para completar a demonstração. $\square$

Finalizamos este capítulo respondendo a questão formulada no Capítulo 2 sobre extensão de operadores multilineares em subespaços de espaços de Hilbert. Faremos isso combinando teoremas de extensão provados neste capítulo e no anterior.

Teorema 3.2.4. *Sejam $H_1, \ldots, H_n$ espaços de Hilbert, F espaço de Banach e G_1 subespaço de H_1,...,G_n subespaço de H_n. Se $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$, então existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ que estende A e $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.*

Demonstração. Se $G_j = \{0\}$ para algum j, da n-linearidade de A segue que $A = 0$, pois

$$A(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n) = 0,$$

para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$. Neste caso basta tomar $\widetilde{A} = 0$. Tratemos agora o caso em que $G_j \neq \{0\}$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Pelo Teorema 3.1.9 existe $B \in \mathcal{L}(\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_n; F)$ que estende A e $\|B\| = \|A\|$. Para cada $j = 1, \ldots, n$; $\overline{G}_j$ é um subespaço fechado não-nulo de um espaço de Hilbert H_j, logo $\overline{G}_j$ é um subespaço 1-complementado de H_j, $j = 1, \ldots, n$, pela Proposição 1.5.8. Como $B \in \mathcal{L}(\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_n; F)$, pelo Teorema 2.1.7 existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(H_1, \ldots, H_n; F)$ que estende B e $\|\widetilde{A}\| = \|B\|$. Daí $\|\widetilde{A}\| = \|B\| = \|A\|$ e, além disso, para todos $x_j \in G_j$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\widetilde{A}(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n),$$

o que nos permite concluir que $\widetilde{A}$ estende A. □

Observe que, conforme vimos no Exemplo 2.1.8, não se pode garantir a unicidade do operador $\widetilde{A}$ do Teorema 3.2.4.

Capítulo 4

Extensão de operadores multilineares contínuos ao bidual

Para todo espaço normado E, podemos identificar E com o subespaço $J_E(E)$ de E''. É então natural questionar se operadores lineares ou multilineares contínuos podem ser estendidos ao bidual. No caso linear, o problema é o seguinte: dado um operador linear $u \in \mathcal{L}(E;F)$, existe um operador $\overline{u} \in \mathcal{L}(E'';F)$ que estende u no sentido de que $\overline{u} \circ J_E = u$?

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[dr, "\overline{u}"] & \\ E \arrow[u, "J_E"] \arrow[r, "u"] & F \end{tikzcd}$$

Vejamos que nem sempre isso é possível: seja $id\colon c_0 \longrightarrow c_0$ o operador identidade. Suponha que exista $\overline{id}\colon (c_0)'' = \ell_\infty \longrightarrow c_0$ que estende id. Neste caso $J_{c_0} \circ \overline{id}$ seria uma projeção de ℓ_∞ sobre c_0, o que contraria o fato de c_0 ser subespaço não-complementado de ℓ_∞. Na verdade esse argumento vale para o operador identidade em qualquer espaço que não é complementado em seu bidual.

Estabelecida a impossibilidade de estender operadores lineares contínuos para o bidual, veremos na Seção 4.1 que algo mais fraco sempre é possível: para todo operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$, seu biadjunto $u'' \in \mathcal{L}(E'';F'')$ é uma extensão de u no sentido de que $u'' \circ J_E = J_F \circ u$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "u''"] & F'' \\ E \arrow[u, "J_E"] \arrow[r, "u"] & F \arrow[u, "J_F"'] \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Note que u'' não é uma extensão *genuína* de u, no sentido de que u'' toma valores em F'' e não em F em geral. Apesar disso, o fato de u'' estender u no sentido acima tem inúmeras aplicações em Análise Funcional Linear. Isso nos levar a considerar o mesmo problema no caso multilinear, o qual descrevemos a seguir.

Dados espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n, F$ e um operador n-linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, será que sempre existe um operador $\overline{A} \in \mathcal{L}(E_1'', \ldots, E_n''; F'')$ que estende A no sentido de que

$$\overline{A} \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n}) = J_F \circ A? \tag{4.2}$$

Queremos que seguinte diagrama seja comutativo:

$$\begin{tikzcd} E_1'' \times \cdots \times E_n'' \arrow[r, "\overline{A}"] & F'' \\ E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[u, "J_{E_1}", "J_{E_n}"'] \arrow[r, "A"] & F \arrow[u, "J_F"'] \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Este problema se mostrou bem mais difícil, pois no caso multilinear não temos o adjunto para nos ajudar. O objetivo deste capítulo é responder afirmativamente esta pergunta usando as chamadas *extensões de Aron-Berner*, desenvolvidas num primeiro momento por Arens [2] e depois por Aron e Berner [3].

Fazemos a seguir uma descrição dos conteúdos deste capítulo:
(i) Funcionais lineares contínuos podem ser estendidos de maneira natural ao bidual de forma única para um operador ω^*-contínuo que preserva a norma.
(ii) Operadores lineares contínuos podem ser estendidos ao bidual por meio do biadjunto, que também é único e é ω^*- ω^*-contínuo. Mais ainda, esta extensão por meio do biadjunto preserva a norma.
(iii) Operadores n-lineares contínuos também podem ser estendidos ao bidual. Essas extensões são chamadas de extensões de Aron-Berner. Um traço distintivo do caso linear para o caso multilinear é que, ao contrário do caso linear, no caso multilinear há várias extensões de Aron-Berner, que em geral não são coincidentes (provaremos isso usando um exemplo de [4]).
(iv) Estudaremos quando todas as extensões de Aron-Berner coincidem, e para isso estudaremos a existência de extensões que são separadamente ω^*- ω^*-contínuas.
(v) De (4.2) obtemos que se existir uma extensão $\overline{A}$, então $\overline{A}(J_{E_1}(E_1) \times \cdots \times J_{E_n}(E_n)) \subseteq J_F(F)$, isto é, $\overline{A}(J_{E_1}(x_1), \ldots, J_{E_n}(x_n)) \in J_F(F)$, para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$. Mesmo no caso linear já vimos que nem sempre $\overline{A}(E_1'' \times \cdots \times E_n'') \subseteq J_F(F)$, ou seja, nem sempre $\overline{A}$ é uma extensão genuína de A. Estabeleceremos neste capítulo condições suficientes para que $\overline{A}$ seja uma extensão genuína de A.
(vi) Finalizaremos o capítulo com uma seção de exemplos de espaços que cumprem as condições do item (v). Para isso introduziremos e estudaremos a noção de espaços Arens-regulares.

4.1 Extensão de funcionais e operadores lineares contínuos ao bidual

Começamos mostrando que funcionais lineares contínuos podem ser estendidos de uma maneira natural ao bidual.

Lema 4.1.1. *Sejam E um espaço de Banach e $\varphi \in E'$. Definindo*

$$\overline{\varphi}\colon E'' \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ \overline{\varphi}(x'') = x''(\varphi),$$

temos $\overline{\varphi} \in E'''$*, isto é,* $\overline{\varphi}$ *é um operador linear contínuo, e:*
(i) $\overline{\varphi}$ *estende* φ *no sentido de que* $\overline{\varphi} \circ J_E = \varphi$*;*
(ii) $\overline{\varphi}$ *é* ω^**-contínuo;*
(iii) $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Mais ainda, $\overline{\varphi}$ *é o único funcional contínuo em* E'' *satisfazendo (i) e (ii).*

Demonstração. Dados $x'', y'' \in E''$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\overline{\varphi}(x'' + \lambda y'') = (x'' + \lambda y'')(\varphi) = x''(\varphi) + \lambda y''(\varphi) = \overline{\varphi}(x'') + \lambda \overline{\varphi}(y''),$$

provando que $\overline{\varphi}$ é linear. De

$$|\overline{\varphi}(x'')| = |x''(\varphi)| \leq \|x''\| \cdot \|\varphi\| = \|\varphi\| \cdot \|x''\|,$$

segue que $\overline{\varphi}$ é contínuo e $\|\overline{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. Para todo $x \in E$,

$$(\overline{\varphi} \circ J_E)(x) = \overline{\varphi}(J_E(x)) = J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

donde concluímos que $\overline{\varphi}$ estende φ e

$$|\varphi(x)| = |(\overline{\varphi} \circ J_E)(x)| = |\overline{\varphi}(J_E(x))| \leq \|\overline{\varphi}\| \cdot \|J_E(x)\| = \|\overline{\varphi}\| \cdot \|x\|,$$

o que nos permite concluir que $\|\varphi\| \leq \|\overline{\varphi}\|$. Logo $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Vejamos que $\overline{\varphi}$ é ω^*-contínuo. Para isso seja $(x''_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ uma rede em E'' tal que $x''_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x'' \in E''$. Então $x''_\alpha(x') \longrightarrow x''(x')$, para todo $x' \in E'$. De

$$\overline{\varphi}(x'') = x''(\varphi) = \lim_\alpha x''_\alpha(\varphi) = \lim_\alpha \overline{\varphi}(x''_\alpha),$$

segue que $\overline{\varphi}$ é ω^*-contínuo.

Finalmente suponha que existe outra extensão ω^*-contínua $\psi \in E'''$ de φ. Dado $x'' \in E''$, pelo Teorema de Goldstine, existe uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ em E tal que $J_E(x_\alpha) \xrightarrow{\omega^*} x''$. Como $\overline{\varphi}$ e ψ são extensões de φ então $\overline{\varphi} \circ J_E = \psi \circ J_E$, e daí

$$\overline{\varphi}(x'') = \lim_\alpha \overline{\varphi}(J_E(x_\alpha)) = \lim_\alpha (\overline{\varphi} \circ J_E)(x_\alpha) = \lim_\alpha (\psi \circ J_E)(x_\alpha) = \lim_\alpha \psi(J_E(x_\alpha)) = \psi(x'').$$

□

No Capítulo 2 definimos o adjunto de um operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ entre espaços de Banach. Faremos uso do biadjunto $u'' = (u')'$ para provar que u pode ser estendido ao bidual no sentido de que o diagrama (4.1) é comutativo.

Para o próximo resultado precisamos do Teorema de Hahn-Banach na forma em que aparece em [8, Corolário 3.1.5]: para todo espaço normado $E \neq \{0\}$ e todo $x \in E$, tem-se

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \max_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x)|. \tag{4.4}$$

Proposição 4.1.2. *Se* $u \in \mathcal{L}(E; F)$*, então* $u' \in \mathcal{L}(F'; E')$ *e* $\|u\| = \|u'\|$*. Mais ainda, se* u *é um isomorfismo isométrico, então* u' *também o é.*

Demonstração. Vejamos primeiramente que o operador u' está bem definido, isto é, $u'(y') \in E'$ para cada $y' \in F'$. De fato, dados $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, da linearidade de u e y' segue que

$$\begin{aligned} u'(y')(x + \lambda y) &= y'(u(x + \lambda y)) = y'(u(x) + \lambda u(y)) \\ &= y'(u(x)) + \lambda y'(u(y)) = u'(y')(x) + \lambda u'(y')(y). \end{aligned}$$

Além disso, de

$$\|u'(y')(x)\| = \|y'(u(x))\| \leq \|y'\| \cdot \|u\| \cdot \|x\|,$$

segue que $u'(y')$ é linear e contínuo, ou seja, $u'(y') \in E'$.

Vejamos agora que o operador u' é linear e contínuo. De fato, para todos $y'_1, y'_2 \in F'$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$,

$$u'(y'_1 + \lambda y'_2)(x) = (y'_1 + \lambda y'_2)(u(x)) = y'_1(u(x)) + \lambda y'_2(u(x)) = (u'(y'_1) + \lambda u'(y'_2))(x),$$

donde concluímos que u' é linear e para cada $y' \in F'$,

$$\|u'(y')\| = \sup_{x \in B_E} |u'(y')(x)| = \sup_{x \in B_E} |y'(u(x))| \leq \|y'\| \sup_{x \in B_E} \|u(x)\| = \|y'\| \cdot \|u\|,$$

mostrando que u' é contínuo e $\|u'\| \leq \|u\|$. Por outro lado, para cada $x \in E$, de (4.4) temos

$$\|u(x)\| = \sup_{y' \in B_{F'}} |y'(u(x))| = \sup_{y' \in B_{F'}} |u'(y')(x)| \leq \|x\| \sup_{y' \in B_{F'}} \|u'(y')\| = \|x\| \cdot \|u'\|,$$

o que nos permite concluir que $\|u'\| = \|u\|$.

Suponha agora que u seja um isomorfismo isométrico. Devemos provar que u' é bijetor e $\|u'(y')\| = \|y'\|$, para todo $y' \in F'$. Para verificar que u' é injetor, note que se $\psi \in \ker(u')$, então

$$0 = u'(\psi)(x) = \psi(u(x)), \text{ para todo } x \in E.$$

Como u é sobrejetor, isto é, $u(E) = F$, e $\psi \in F'$, resulta que $\psi = 0$. Para provar a sobrejetividade de u', seja $\psi \in E'$. Observe que $y' := \psi \circ u^{-1} \in F'$, e portanto

$$u'(y')(x) = u'(\psi \circ u^{-1})(x) = (\psi \circ u^{-1})(u(x)) = \psi(x).$$

Como isso vale para todo $x \in E$, segue que $u'(y') = \psi$, provando que u' é sobrejetora.

Finalmente, para cada $x \in E$ tem-se $\|u(x)\| = \|x\|$, donde segue que $x \in B_E$ se, e somente se, $u(x) \in B_F$. Logo, para todo $y' \in F'$,

$$\|u'(y')\| = \sup_{x \in B_E} |u'(y')(x)| = \sup_{x \in B_E} |y'(u(x))| = \sup_{u(x) \in B_F} |y'(u(x))| = \sup_{y \in B_F} |y'(y)| = \|y'\|,$$

completando a demonstração. □

Dado $u \in \mathcal{L}(E; F)$, aplicando a proposição acima duas vezes obtemos que o adjunto $u' \in \mathcal{L}(F'; E')$ e que o biadjunto $u'' \in \mathcal{L}(E''; F'')$, isto é, u'' é um operador linear contínuo de E'' em F''. Diz-se que u'' é uma extensão de u no sentido do teorema a seguir.

Dados espaços de Banach E e F, dizemos que uma função $f\colon E' \longrightarrow F'$ é ω^*- ω^*-contínua se f é contínua considerando-se a topologia ω^* em E' e em F'.

Teorema 4.1.3. *Seja* $u \in \mathcal{L}(E;F)$. *Então:*
(i) $u'' \in \mathcal{L}(E'';F'')$ *estende* u *no sentido de que* $u'' \circ J_E = J_F \circ u$, *isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "u''"] & F'' \\ E \arrow[u, "J_E"] \arrow[r, "u"] & F \arrow[u, "J_F"'] \end{tikzcd}$$

(ii) u'' *é* ω^*- ω^*-*contínuo.*
(iii) $\|u''\| = \|u\|$.

Mais ainda, u'' *é o único operador em* $\mathcal{L}(E'';F'')$ *satisfazendo (i) e (ii).*

Demonstração. (i) Para todos $x \in E$ e $y' \in F'$,

$$\begin{aligned}(u'' \circ J_E)(x)(y') &= u''(J_E(x))(y') = J_E(x)(u'(y')) = J_E(x)(y' \circ u) \\ &= (y' \circ u)(x) = J_F(u(x))(y') = (J_F \circ u)(x)(y'),\end{aligned}$$

provando que $u'' \circ J_E = J_F \circ u$.
(ii) Seja $(x''_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ uma rede em E'' tal que $x''_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x'' \in E''$. Então $x''_\alpha(\psi) \longrightarrow x''(\psi)$, para todo $\psi \in E'$. Como, para todo $y' \in F'$, $u'(y') \in E'$, tem-se que $x''_\alpha(u'(y')) \longrightarrow x''(u'(y'))$. Pela definição do biadjunto,

$$u''(x''_\alpha)(y') = x''_\alpha(u'(y')) \longrightarrow x''(u'(y')) = u''(x'')(y')$$

para todo $y' \in F'$. Segue que $u''(x''_\alpha) \xrightarrow{\omega^*} u''(x'')$, provando que u'' é ω^*- ω^*-contínuo.
(iii) Como u' é um operador linear contínuo de F' sobre E', pelo Teorema 4.1.2 temos que $\|u'\| = \|u''\|$, de novo pelo Teorema 4.1.2 tem-se que $\|u'\| = \|u\|$, logo $\|u''\| = \|u\|$.

Finalmente provemos a unicidade de u''. Suponha que exista outra extensão ω^*- ω^*-contínua T de u. Como T e u'' são extensões de u,

$$(u'' \circ J_E)(x) = (T \circ J_E)(x), \text{ para todo } x \in E. \tag{4.5}$$

Dado $x'' \in E''$, pelo Teorema de Goldstine, existe uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ em E tal que $J_E(x_\alpha) \xrightarrow{\omega^*} x''$. Por (4.5),

$$u''(x'') = \omega^*\text{-}\lim_\alpha u''(J_E(x_\alpha)) = \omega^*\text{-}\lim_\alpha T(J_E(x_\alpha)) = T(x''),$$

provando que $u'' = T$. □

4.2 Extensões bilineares de Aron-Berner

O Teorema 4.1.3 nos leva naturalmente a questionar se existe um resultado análogo para o caso de operadores multilineares. Infelizmente, ao contrário do caso linear, o adjunto de um operador multilinear não ajuda nesse sentido. Expliquemos a razão: dado um operador n-linear $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$, seu adjunto é definido por (veja [5])

$$A' \colon F' \longrightarrow \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;\mathbb{K}) \ , \ A'(y')(x_1,\ldots,x_n) = y'(A(x_1,\ldots,x_n)).$$

É fácil verificar que A' é um operador *linear* contínuo, e portanto o biadjunto A'' também é um operador *linear* continuo. Assim, não há como esperar que o operador *linear* A'' seja uma extensão do operador n-linear A. Isso quer dizer que o caso multilinear demanda uma nova abordagem.

Um dos primeiros a estudar este tipo de problema foi Richard Arens [2], que encontrou um modo de estender operadores bilineares contínuos entre espaços de Banach ao produto cartesiano dos biduais. Apresentaremos neste capítulo a construção de R. Aron and P. Berner [3] para estender operadores n-lineares contínuos, $n \geq 2$, ao produto cartesiano dos biduais (veja diagrama (4.3)). Para facilitar a compreensão do leitor, faremos primeiramente o caso bilinear e depois o caso n-linear para $n \geq 2$. A notação se complica no caso geral, por isso é melhor entender bem o caso bilinear primeiro

Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach. Começaremos construindo a extensão de formas bilineares continuas, isto é, operadores bilineares contínuos tomando valores no corpo dos escalares $\mathbb{K}$. Ou seja, construiremos primeiro as extensões de formas bilineares $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; \mathbb{K})$. Sem perigo de ambiguidade, escreveremos $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ no lugar de $\mathcal{L}(E_1, E_2; \mathbb{K})$.

Para lograr nosso objetivo, dado $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ queremos construir um operador $\overline{A} \in \mathcal{L}(E_1'', E_2'')$ tal que o seguinte diagrama seja comutativo:

$$\begin{tikzcd}
E_1'' \times E_2'' \arrow[r, "\overline{A}"] & \mathbb{K} \\
E_1 \times E_2 \arrow[u, "J_{E_1}", "J_{E_2}"'] \arrow[ur, "A"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

isto é, $A = \overline{A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2})$. Mais ainda, de acordo com o que vale no caso linear, gostaríamos também que $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

Comecemos a construção: dados $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, defina:

$$A(x_1; \bullet)\colon E_2 \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ A(x_1; \bullet)(x_2) = A(x_1, x_2), \quad \text{e}$$

$$A(\bullet; x_2)\colon E_1 \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ A(\bullet; x_2)(x_1) = A(x_1, x_2).$$

Pelo Teorema 2.2.1 sabemos que $A(x_1; \bullet) \in E_2'$ e $A(\bullet; x_2) \in E_1'$. Mais ainda, de

$$|A(x_1; \bullet)(x_2)| = |A(x_1, x_2)| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|,$$

$$|A(\bullet; x_2)(x_1)| = |A(x_1, x_2)| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|,$$

segue que

$$\|A(x_1; \bullet)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \quad \text{e} \quad \|A(\bullet; x_2)\| \leq \|A\| \cdot \|x_2\|. \tag{4.7}$$

Além disso, como A é bilinear segue que

$$A(x_1 + \lambda y_1; \bullet) = A(x_1; \bullet) + \lambda A(y_1; \bullet) \quad \text{e} \quad A(\bullet; x_2 + \lambda y_2) = A(\bullet; x_2) + \lambda A(\bullet; y_2)$$

para todos $x_1, y_1 \in E_1$, $x_2, y_2 \in E_2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Teorema 4.2.1. *Sejam E_1, E_2 espaços de Banach.*

(a) *Dados* $x_1'' \in E_1''$ *e* $x_2'' \in E_2''$*, defina*

$$\overline{x_1''}^1 \colon \mathcal{L}(E_1, E_2) \longrightarrow E_2' \ , \ \overline{x_1''}^1(A)(x_2) = x_1''(A(\bullet; x_2)) \ ; \ \overline{x_2''}^1 := x_2'';$$

$$\overline{x_2''}^2 \colon \mathcal{L}(E_1, E_2) \longrightarrow E_1' \ , \ \overline{x_2''}^2(A)(x_1) = x_2''(A(x_1, \bullet)) \ ; \ \overline{x_1''}^2 := x_1''.$$

Então, para $j = 1, 2$, $\overline{x_j''}^1$ *e* $\overline{x_j''}^2$ *são operadores lineares contínuos tais que* $\left\|\overline{x_j''}^1\right\| \leq \|x_j''\|$ *e* $\left\|\overline{x_j''}^2\right\| \leq \|x_j''\|$.

(b) *Dado* $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$*, defina*

$$\overline{A}_1 \colon E_1'' \times E_2'' \longrightarrow \mathbb{K} \ , \ \overline{A}_1(x_1'', x_2'') = \big(\overline{x_2''}^1 \circ \overline{x_1''}^1\big)(A),$$

$$\overline{A}_2 \colon E_1'' \times E_2'' \longrightarrow \mathbb{K} \ , \ \overline{A}_2(x_1'', x_2'') = \big(\overline{x_1''}^2 \circ \overline{x_2''}^2\big)(A).$$

Então $\overline{A}_1, \overline{A}_2 \in \mathcal{L}(E_1'', E_2'')$ *e* $\overline{A}_1$ *e* $\overline{A}_2$ *são extensões de* A *no sentido de que*

$$A = \overline{A}_1 \circ (J_{E_1}, J_{E_2}) = \overline{A}_2 \circ (J_{E_1}, J_{E_2}).$$

Mais ainda, $\|A\| = \|\overline{A}_1\| = \|\overline{A}_2\|$.

Demonstração. (a) É imediato das definições que $\overline{x_2''}^1$ e $\overline{x_1''}^2$ são lineares contínuos e $\left\|\overline{x_2''}^1\right\| = \|x_2''\|$ e $\left\|\overline{x_1''}^2\right\| = \|x_1''\|$.

Vejamos que $\overline{x_1''}^1$ está bem definido no sentido de que $\overline{x_1''}^1(A) \in E_2'$ para todo $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. De fato, para todos $x_2, y_2 \in E_2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\overline{x_1''}^1(A)(x_2 + \lambda y_2) &= x_1''(A(\bullet; x_2 + \lambda y_2)) = x_1''(A(\bullet; x_2) + \lambda A(\bullet; y_2)) \\ &= x_1''(A(\bullet; x_2)) + \lambda x_1''(A(\bullet; y_2)) = \overline{x_1''}^1(A)(x_2) + \lambda \overline{x_1''}^1(A)(y_2)\end{aligned}$$

e daí segue que $\overline{x_1''}^1(A)$ é linear. De (4.7),

$$|\overline{x_1''}^1(A)(x_2)| = |x_1''(A(\bullet; x_2))| \leq \|x_1''\| \cdot \|A(\bullet; x_2)\| \leq \|x_1''\| \cdot \|A\| \cdot \|x_2\|,$$

o que nos permite concluir que $\overline{x_1''}^1(A)$ é contínuo e

$$\|\overline{x_1''}^1(A)\| \leq \|x_1''\| \cdot \|A\|. \tag{4.8}$$

Vejamos que $\overline{x_1''}^1$ é linear: dados $A, B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\overline{x_1''}^1(A + \lambda B)(x_2) &= x_1''((A + \lambda B)(\bullet; x_2)) = x_1''(A(\bullet; x_2) + \lambda B(\bullet; x_2)) \\ &= x_1''(A(\bullet; x_2)) + \lambda x_1''(B(\bullet; x_2)) = \overline{x_1''}^1(A)(x_2) + \lambda \overline{x_1''}^1(B)(x_2) \\ &= \big(\overline{x_1''}^1(A) + \lambda \overline{x_1''}^1(B)\big)(x_2),\end{aligned}$$

para todo $x_2 \in E_2$. Então

$$\overline{x_1''}^1(A + \lambda B) = \overline{x_1''}^1(A) + \lambda \overline{x_1''}^1(B),$$

provando que $\overline{x_1''}^1$ é linear. De (4.8) concluímos que $\overline{x_1''}^1$ é contínuo e $\left\|\overline{x_1''}^1\right\| \leq \|x_1''\|$. De modo totalmente análogo mostra-se que $\overline{x_2''}^2$ é linear contínuo e $\left\|\overline{x_2''}^2\right\| \leq \|x_2''\|$.

(b) Segue diretamente das definições que, para todos $x_j'', z_j'' \in E_j''$, $j = 1, 2$, e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\overline{x_j'' + \lambda z_j''}^1 = \overline{x_j''}^1 + \lambda \overline{z_j''}^1, \; j = 1, 2. \tag{4.9}$$

Disso segue a bilinearidade de $\overline{A}_1$, e de

$$\begin{aligned}
\left|\overline{A}_1(x_1'', x_2'')\right| &= \left|(\overline{x_2''}^1 \circ \overline{x_1''}^1)(A)\right| \leq \left\|\overline{x_2''}^1 \circ \overline{x_1''}^1\right\| \cdot \|A\| \\
&\leq \left\|\overline{x_2''}^1\right\| \cdot \left\|\overline{x_1''}^1\right\| \cdot \|A\| \leq \|x_2''\| \cdot \|x_1''\| \cdot \|A\| \\
&= \|A\| \cdot \|x_1''\| \cdot \|x_2''\|,
\end{aligned}$$

para todos $x_1'' \in E_1'', x_2'' \in E_2''$, obtemos que $\overline{A}_1$ é contínuo e $\left\|\overline{A}_1\right\| \leq \|A\|$.

Vejamos que $A = \overline{A}_1 \circ (J_{E_1}, J_{E_2})$: para todos $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\overline{A}_1 \circ (J_{E_1}, J_{E_2})\right)(x_1, x_2) &= \overline{A}_1(J_{E_1}(x_1), J_{E_2}(x_2)) = \left(\overline{J_{E_2}(x_2)}^1 \circ \overline{J_{E_1}(x_1)}^1\right)(A) \\
&= \overline{J_{E_2}(x_2)}^1\left(\overline{J_{E_1}(x_1)}^1(A)\right) = J_{E_2}(x_2)\left(\underbrace{\overline{J_{E_1}(x_1)}^1(A)}_{\in E_2'}\right) \\
&= \overline{J_{E_1}(x_1)}^1(A)(x_2) = J_{E_1}(x_1)(A(\bullet; x_2)) \\
&= A(\bullet; x_2)(x_1) = A(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $\overline{A}_1 \circ (J_{E_1}, J_{E_2}) = A$. Além disso, para todos $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$,

$$\begin{aligned}
|A(x_1, x_2)| &= \left|(\overline{A}_1 \circ (J_{E_1}, J_{E_2}))(x_1, x_2)\right| = \left|\overline{A}_1(J_{E_1}(x_1), J_{E_2}(x_2))\right| \\
&\leq \left\|\overline{A}_1\right\| \cdot \|J_{E_1}(x_1)\| \cdot \|J_{E_2}(x_2)\| = \left\|\overline{A}_1\right\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|.
\end{aligned}$$

Logo $\|A\| \leq \left\|\overline{A}_1\right\|$ e assim $\|A\| = \left\|\overline{A}_1\right\|$. De modo análogo prova-se que $\overline{A}_2 \in \mathcal{L}(E_1'', E_2'')$, $A = \overline{A}_2 \circ (J_{E_1}, J_{E_2})$ e $\|A\| = \left\|\overline{A}_2\right\|$. □

Seja $x'' \in E''$ então pelo Teorema de Goldstine, $x'' \in \overline{J_E(E)}^{\omega^*}$ logo existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega} \subseteq E$ tal que $J_E(x_\lambda) \xrightarrow{\omega^*} x''$.

As seguintes caracterizações das extensões de Aron-Berner são muito úteis e, algumas vezes, são apresentadas como suas definições.

Corolário 4.2.2. *Sejam E_1, E_2 espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Então as extensões de Aron-Berner $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ de A construídas no Teorema 4.2.1 são dadas por*

$$\overline{A}_1(x_1'', x_2'') = \lim_{\alpha_2}\lim_{\alpha_1} A(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \text{ e}$$

$$\overline{A}_2(x_1'', x_2'') = \lim_{\alpha_1}\lim_{\alpha_2} A(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}),$$

onde $(x_{\alpha_1})_{\alpha_1 \in \Omega_1}$, $(x_{\alpha_2})_{\alpha_2 \in \Omega_2}$ são redes em E_1 e E_2, respectivamente, tais que $J_{E_1}(x_{\alpha_1}) \xrightarrow{\omega^*} x_1'' \in E_1''$ e $J_{E_2}(x_{\alpha_2}) \xrightarrow{\omega^*} x_2'' \in E_2''$.

Demonstração. Como $J_{E_1}(x_{\alpha_1}) \xrightarrow{\omega^*} x_1''$, então $J_{E_1}(x_{\alpha_1})(x_1') \longrightarrow x_1''(x_1')$ para todo $x_1' \in E_1'$. Logo $x_1'(x_{\alpha_1}) \longrightarrow x_1''(x_1')$ para todo $x_1' \in E_1'$ e, em particular, $A(\bullet; x_2)(x_{\alpha_1}) \longrightarrow x_1''(A(\bullet; x_2))$ para todo $x_2 \in E_2$, isto é,

$$x_1''(A(\bullet; x_2)) = \lim_{\alpha_1} A(\bullet; x_2)(x_{\alpha_1}) = \lim_{\alpha_1} A(x_{\alpha_1}, x_2), \text{ para todo } x_2 \in E_2. \tag{4.10}$$

Do mesmo modo, como $J_{E_2}(x_{\alpha_2}) \xrightarrow{\omega^*} x_2''$, então $J_{E_2}(x_{\alpha_2})(x_2') \longrightarrow x_2''(x_2')$ para todo $x_2' \in E_2'$. Logo $x_2'(x_{\alpha_2}) \longrightarrow x_2''(x_2')$ para todo $x_2' \in E_2'$. Mas, para cada $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, tem-se que $\overline{x_1''}^1(A) \in E_2'$, assim

$$x_1''(A(\bullet; x_{\alpha_2})) = \overline{x_1''}^1(A)(x_{\alpha_2}) \longrightarrow x_2''\big(\overline{x_1''}^1(A)\big)$$

pelo Teorema 4.2.1, e de (4.10),

$$\overline{A}_1(x_1'', x_2'') = \overline{x_2''}^1\big(\overline{x_1''}^1(A)\big) = x_2''\big(\overline{x_1''}^1(A)\big) = \lim_{\alpha_2} x_1''(A(\bullet; x_{\alpha_2})) = \lim_{\alpha_2}\lim_{\alpha_1} A(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}),$$

provando a primeira identidade desejada.

Para a segunda identidade, como $J_{E_2}(x_{\alpha_2}) \xrightarrow{\omega^*} x_2''$, então $J_{E_2}(x_{\alpha_2})(x_2') \longrightarrow x_2''(x_2')$ para todo $x_2' \in E_2'$, donde segue que $x_2'(x_{\alpha_2}) \longrightarrow x_2''(x_2')$ para todo $x_2' \in E_2'$ e, em particular, $A(x_1; \bullet)(x_{\alpha_2}) \longrightarrow x_2''(A(x_1; \bullet))$ para todo $x_1 \in E_1$, isto é,

$$x_2''(A(x_1; \bullet)) = \lim_{\alpha_2} A(x_1; \bullet)(x_{\alpha_2}) = \lim_{\alpha_2} A(x_{\alpha_2}, x_1), \text{ para todo } x_1 \in E_1. \tag{4.11}$$

Por outro lado, como $J_{E_1}(x_{\alpha_1}) \xrightarrow{\omega^*} x_1''$, então $J_{E_1}(x_{\alpha_1})(x_1') \longrightarrow x_1''(x_1')$ para todo $x_1' \in E_1'$, e portanto $x_1'(x_{\alpha_1}) \longrightarrow x_1''(x_1')$ para todo $x_1' \in E_1'$. Mas $\overline{x_2''}^2(A) \in E_1'$, e assim

$$x_2''(A(x_{\alpha_1}; \bullet)) = \overline{x_2''}^2(A)(x_{\alpha_1}) \longrightarrow x_1''\big(\overline{x_2''}^2(A)\big)$$

pelo Teorema 4.2.1, e de (4.11),

$$\overline{A}_2(x_1'', x_2'') = \overline{x_1''}^2\big(\overline{x_2''}^2(A)\big) = x_1''\big(\overline{x_2''}^2(A)\big) = \lim_{\alpha_1} x_2''(A(x_{\alpha_1}; \bullet)) = \lim_{\alpha_1}\lim_{\alpha_2} A(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}),$$

completando a demonstração. □

Como já dito, os operadores bilineares $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ do Teorema 4.2.1 são chamados de *extensões de Aron-Berner* do operador bilinear $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. A pergunta óbvia é se essas extensões são iguais. Começamos com um exemplo em que as duas extensões de Aron-Berner são iguais.

Exemplo 4.2.3. Considere o operador

$$A\colon c_0 \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ A((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = x_2 \cdot y_6.$$

É imediato que A é bilinear, contínuo e $\|A\| = 1$. Queremos estender A a $c_0'' \times c_0'' = \ell_\infty \times \ell_\infty$. Para isso, defina

$$\overline{A}\colon \ell_\infty \times \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ \overline{A}((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = x_2 \cdot y_6.$$

De novo é imediato que $\overline{A} \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)$ é um operador bilinear contínuo. Como o mergulho canônico J_{c_0} é na verdade a inclusão $c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$, isto é, $J_{c_0}(z) = z$, para todo $z \in c_0$, temos

$$(\overline{A} \circ (J_{c_0}, J_{c_0}))(x,y) = \overline{A}(J_{c_0}(x), J_{c_0}(y)) = \overline{A}(x,y) = x_2 \cdot y_6 = A(x,y),$$

para todos $x = (x_n)_{n=1}^\infty, y = (y_n)_{n=1}^\infty \in c_0$. Disso segue que $\overline{A} \circ (J_{c_0}, J_{c_0}) = A$, ou seja, $\overline{A}$ estende A, e $\|\overline{A}\| = \|A\| = 1$.

Vamos provar agora que as duas extensões de Aron-Berner de A coincidem com $\overline{A}$ e portanto são iguais. Para isso sejam $x = (x_n)_{n=1}^\infty, y = (y_n)_{n=1}^\infty \in c_0'' = \ell_\infty$ e $(x_{\alpha_1})_{\alpha_1 \in \Omega_1}, (y_{\alpha_2})_{\alpha_2 \in \Omega_2}$ redes em c_0, onde $x_{\alpha_1} = (x_{n,\alpha_1})_{n=1}^\infty$ e $y_{\alpha_2} = (y_{n,\alpha_2})_{n=1}^\infty$, tais que $J_{c_0}(x_{\alpha_1}) \xrightarrow{\omega^*} x$ e $J_{c_0}(y_{\alpha_2}) \xrightarrow{\omega^*} y$. Da definição da topologia ω^*, para toda sequência $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty \in c_0' = \ell_1$,

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_{n,\alpha_1} = \lambda(x_{\alpha_1}) = J_{c_0}(x_{\alpha_1})(\lambda) \longrightarrow x(\lambda) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n \quad \text{e}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n y_{n,\alpha_2} = \lambda(x_{\alpha_2}) = J_{c_0}(x_{\alpha_2})(\lambda) \longrightarrow y(\lambda) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n y_n.$$

Tomando primeiramente $\lambda = e_2 = (0,1,0,0,\ldots)$ e depois $\lambda = e_6 = (0,0,0,0,0,1,0,0,\ldots)$, obtemos

$$x_{2,\alpha_1} \longrightarrow x_2 \quad \text{e} \quad y_{6,\alpha_2} \longrightarrow y_6.$$

Do Corolário 4.2.2 resulta que

$$\begin{aligned}
\overline{A}_1(x,y) &= \lim_{\alpha_2} \lim_{\alpha_1} A(x_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}) = \lim_{\alpha_2} \lim_{\alpha_1} (x_{2,\alpha_1} \cdot y_{6,\alpha_2}) = \lim_{\alpha_2} \left(\lim_{\alpha_1} x_{2,\alpha_1} \right) \cdot y_{6,\alpha_2} \\
&= \lim_{\alpha_2} (x_2 \cdot y_{6,\alpha_2}) = x_2 \cdot \lim_{\alpha_2} y_{6,\alpha_2} = x_2 y_6 = \overline{A}(x,y) = x_2 y_6 = \left(\lim_{\alpha_1} x_{2,\alpha_1} \right) \cdot y_6 \\
&= \lim_{\alpha_1} (x_{2,\alpha_1} \cdot y_6) = \lim_{\alpha_1} \left(x_{2,\alpha_1} \cdot \lim_{\alpha_2} y_{6,\alpha_2} \right) = \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} (x_{2,\alpha_1} \cdot y_{6,\alpha_2}) \\
&= \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} A(x_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}) = \overline{A}_2(x,y),
\end{aligned}$$

provando que $\overline{A}_1 = \overline{A} = \overline{A}_2$.

Do Corolário 4.2.2 sabemos que as extensões de Aron-Berner $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ de A coincidem se, e somente se, $\lim_{\alpha_2} \lim_{\alpha_1} A(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} A(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})$. No exemplo acima isso acontece, mas no exemplo a seguir (obtido em [4]) veremos que nem sempre podemos intercambiar esses limites, ou seja, as extensões de Aron-Berner podem ser distintas.

Exemplo 4.2.4. Considere o operador

$$A \colon \ell_1 \times \ell_1 \longrightarrow \mathbb{K} \ , \ A((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty x_n \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} y_k \right).$$

Dados $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ e $y = (y_n)_{n=1}^\infty$ em ℓ_1,

$$\sum_{n=1}^\infty \left| x_n \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} y_k \right) \right| = \sum_{n=1}^\infty |x_n| \cdot \left| \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} y_k \right| \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n| \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} |y_k| \right)$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = \|x\|_1 \cdot \|y\|_1, \tag{4.12}$$

provando que A está bem definida. Vejamos que A é bilinear: dados $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty}, z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
A(x, y + \lambda z) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} (y_k + \lambda z_k) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} y_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} z_k \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} y_k \right) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} z_k \right) \\
&= A(x, y) + \lambda A(x, z).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A(x + \lambda y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + \lambda y_n) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} z_k \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} z_k \right) + \lambda y_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} z_k \right) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} z_k \right) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} y_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} z_k \right) \\
&= A(x, z) + \lambda A(y, z).
\end{aligned}$$

Uma vez provado que A é bilinear, sua continuidade segue de (4.12) e também o fato de que $\|A\| \leq 1$. Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in B_{\ell_1}$ e $A(e_n, e_n) = \dfrac{n}{n+1}$, logo

$$\|A\| = \sup\{|A(x, y)| : x, y \in B_{l_1}\} \geq |A(e_n, e_n)| = \frac{n}{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, concluímos que $\|A\| \geq 1$ e portanto $\|A\| = 1$.

Nosso objetivo neste exemplo é mostrar que as duas extensões de Aron-Berner de A, denotadas por $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ no Teorema 4.2.1, não são iguais.

Observe que $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq B_{\ell_1}$, logo a sequência $(J_{\ell_1}(e_n))_{n=1}^{\infty}$ está contida em $B_{\ell_1''}$ que é compacta na topologia fraca-estrela, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki. Pelo Teorema 1.6.7, existem $z \in B_{\ell_1''}$ e uma subrede de $(J_{\ell_1}(e_n))_{n=1}^{\infty}$, digamos $(J_{\ell_1}(e_{\varphi(\alpha)}))_{\alpha \in \Omega}$, tal que $J_{\ell_1}(e_{\varphi(\alpha)}) \xrightarrow{\omega^*} z$, onde $\varphi \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma função crescente, cofinal em um conjunto dirigido Ω. Pelo Teorema 1.6.6, z é um ponto de acumulação na topologia fraca-estrela da rede $(J_{\ell_1}(e_n))_{n=1}^{\infty}$.

Afirmação: $\overline{A}_1(z, z) = 1 = \|A\| = \|\overline{A}_1\|$.

Provemos a afirmação: como $J_{\ell_1}(e_{\varphi(\alpha)}) \xrightarrow{\omega^*} z$, toda subrede da subrede $(J_{\ell_1}(e_{\varphi(\lambda)}))_{\lambda \in \Omega}$ converge para z, isto é, se $(J_{\ell_1}(e_{\varphi(\psi(\beta))}))_{\beta \in \wedge}$ é uma subrede da subrede $(J_{\ell_1}(e_{\varphi(\lambda)}))_{\lambda \in \Omega}$, tem-se que $J_{\ell_1}(e_{\varphi(\psi(\beta))}) \xrightarrow{\omega^*} z$, onde $\psi\colon \wedge \longrightarrow \Omega$ é uma função crescente, cofinal em um conjunto dirigido $\wedge$. Pelo Corolário 4.2.2,

$$\overline{A}_1(z,z) = \lim_{\beta}\lim_{\lambda} A(e_{\varphi(\lambda)}, e_{\varphi(\psi(\beta))}).$$

Da definição de A, fixando $\beta \in \wedge$, $\lim_{\lambda} A(e_{\varphi(\lambda)}, e_{\varphi(\psi(\beta))}) = \dfrac{\varphi(\psi(\beta))}{\varphi(\psi(\beta))+1}$, e assim

$$\overline{A}_1(z,z) = \lim_{\beta}\lim_{\lambda} A(e_{\varphi(\lambda)}, e_{\varphi(\psi(\beta))}) = \lim_{\beta} \frac{\varphi(\psi(\beta))}{\varphi(\psi(\beta))+1} = 1.$$

Provada a afirmação, para mostrar que $\overline{A_1} \neq \overline{A}_2$ basta mostrar que, para todos $a, b \in B_{\ell_1''}$, $\overline{A}_2(a,b) \neq 1$. Suponha, por absurdo, que existam $y, w \in B_{\ell_1''}$ tais que $\overline{A}_2(y,w) = 1$. Pelo Teorema de Goldstine existe uma rede $(y_\beta)_{\beta\in\Omega}$ em B_{ℓ_1}, onde $y_\beta = (y_{k,\beta})_{k=1}^{\infty}$ para cada β, tal que $J_{\ell_1}(y_\beta) \xrightarrow{\omega^*} w$. Provemos que $y_{k,\beta} \xrightarrow{\beta} 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Suponha o contrário, isto é, que exista um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que a rede $(y_{k_0,\beta})_{\beta\in\Omega}$ não convirja para zero. Neste caso existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } \beta \in \Omega, \text{ existe } \beta' \in \Omega, \beta' \geq \beta \text{ tal que } |y_{k_0,\beta'}| \geq \delta. \tag{4.13}$$

Vejamos que o conjunto $\wedge = \{\beta' \in \Omega : \beta' \geq \beta \text{ para algum } \beta \in \Omega\}$ é um conjunto dirigido com a mesma relação do conjunto dirigido $(\Omega, \leq)$. De fato, como $\wedge$ é um subconjunto do conjunto dirigido Ω, é claro que $\beta' \leq \beta'$ para todo $\beta' \in \wedge$ e, se $\beta' \leq \alpha'$ e $\alpha' \leq \rho'$, então $\beta' \leq \rho'$, para todos $\beta', \alpha', \rho' \in \wedge$. Sejam agora $\beta', \alpha' \in \wedge$. Então $\beta', \alpha' \in \Omega$ e existem $\beta, \alpha \in \Omega$ tais que $\beta' \geq \beta$ e $\alpha' \geq \alpha$. Como Ω é um conjunto dirigido existe um $\rho \in \Omega$ tal que $\beta' \leq \rho$ e $\alpha' \leq \rho$, assim $\rho \geq \beta$ e $\rho \geq \alpha$ e portanto $\rho \in \wedge$. Em resumo, existe $\rho \in \wedge$ tal que $\beta' \leq \rho$ e $\alpha' \leq \rho$, provando que $(\wedge, \leq)$ é um conjunto dirigido.

Defina $\varphi\colon \wedge \longrightarrow \Omega$, $\varphi(\beta') = \beta'$. É claro que φ é crescente (na verdade, não-decrescente). Vejamos que φ é cofinal no conjunto dirigido $\wedge$: dado $\beta \in \Omega$, por (4.13) existe $\beta' \in \Omega$ tal que $\beta \leq \beta'$, e então $\beta' \in \wedge$ e $\beta \leq \beta' = \varphi(\beta')$. Isso prova que φ é cofinal em $\wedge$. Assim, $f\circ\varphi\colon \wedge \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma subrede da rede $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, $f(\beta) = y_{k_0,\beta}$, que satisfaz a seguinte condição: todo $\beta' \in \wedge$, $f(\varphi(\beta')) = f(\beta') = y_{k_0,\beta'}$ é tal que $|y_{k_0,\beta'}| \geq \delta$. Além disso, como $J_{\ell_1}(y_\beta) \xrightarrow{\omega^*} w$, toda subrede da rede $(J_{\ell_1}(y_\beta))_{\beta\in\Omega}$ também converge para w na topologia fraca-estrela. Segue que a subrede $(J_{\ell_1}(y_{\beta'}))_{\beta'\in\wedge}$ é tal que $J_{\ell_1}(y_{\beta'}) \xrightarrow{\omega^*} w$. Daí, para qualquer $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1}$,

$$\left|\overline{A}_2(J_{\ell_1}(x), w)\right| = \left|\lim_{\beta'} A(x, y_{\beta'})\right| = \lim_{\beta'} |A(x, y_{\beta'})|. \tag{4.14}$$

Mais ainda, como a série $A(x,y)$ é convergente, para todo $\beta' \in \wedge$,

$$\begin{aligned} |A(x, y_{\beta'})| &= \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{n=1}^{m} x_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} y_{k,\beta'} \right) \right| \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |x_n| \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} |y_{k,\beta'}| \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k+1}|y_{k,\beta'}|\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\left(\sum_{k=1,k\neq k_0}^{\infty}\frac{k}{k+1}|y_{k,\beta'}|+\frac{k_0}{k_0+1}|y_{k_0,\beta'}|\right)\\
&< \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\left(\sum_{k=1,k\neq k_0}^{\infty}|y_{k,\beta'}|+\frac{k_0}{k_0+1}|y_{k_0,\beta'}|\right)\\
&= \|x\|_1\left(\sum_{k=1,k\neq k_0}^{\infty}|y_{k,\beta'}|\right)+\left(\frac{k_0}{k_0+1}|y_{k_0,\beta'}|\right)\|x\|_1\\
&\leq \sum_{k=1,k\neq k_0}^{\infty}|y_{k,\beta'}|+\frac{k_0}{k_0+1}|y_{k_0,\beta'}|\\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_{k,\beta'}|-|y_{k_0,\beta'}|\right)+\frac{k_0}{k_0+1}|y_{k_0,\beta'}|\\
&= \|y_{\beta'}\|_1-|y_{k_0,\beta'}|+\frac{k_0}{k_0+1}|y_{k_0,\beta'}|\\
&\leq 1-\delta\left(1-\frac{k_0}{k_0+1}\right)=:1-M,\ \ M>0.
\end{aligned}
$$

Isso nos permite concluir que $|A(x,y_{\beta'})|<1-M$, para todo $\beta^{'}\in\wedge$ e para todo $x\in B_{\ell_1}$. Como $y\in B_{\ell_1''}$, pelo Teorema de Goldstine, existe uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega_1}\subseteq B_{\ell_1}$ tal que $J_{\ell_1}(x_\alpha)\xrightarrow{\omega^*}y$. Pelo Corolário 4.2.2 e de (4.14),

$$1=|\overline{A}_2(y,w)|=\lim_{\alpha}\lim_{\beta'}|A(x_\alpha,y_{\beta'})|\leq 1-M<1,$$

contradição essa que nos leva a concluir que, para cada $k\in\mathbb{N}$, $y_{k,\beta}\xrightarrow{\beta}0$.

Dado $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_1}$, para todo $\epsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|x_n|<\frac{\epsilon}{2}$ e, como para cada $k\in\mathbb{N}$, $y_{k,\beta}\xrightarrow{\beta}0$, então $\dfrac{k}{k+1}y_{k,\beta}\xrightarrow{\beta}0$. Assim $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0}\frac{k}{k+1}|y_{k,\beta}|\xrightarrow{\beta}0$ e portanto podemos escolher $\beta_0\in\Omega$ tal que para todo $\beta\geq\beta_0$ tem-se $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0}\frac{k}{k+1}|y_{k,\beta}|<\frac{\epsilon}{2}$. Segue que, para todo $\beta\geq\beta_0$,

$$
\begin{aligned}
|A(x,y_\beta)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}|y_{k,\beta}|\right)\\
&= \sum_{n=1}^{n_0}|x_n|\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}|y_{k,\beta}|\right)+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|x_n|\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}|y_{k,\beta}|\right)\\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n_0}\frac{k}{k+1}|y_{k,\beta}|\right)\sum_{n=1}^{n_0}|x_n|+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|x_n|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k+1}|y_{k,\beta}|\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{k}{k+1}|y_{k,\beta}|\right)\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}|x_n|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_{k,\beta}|\right)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{k}{k+1}|y_{k,\beta}|\right)\|x\|_1 + \|y_\beta\|_1 \sum_{n=n_0+1}^{\infty}|x_n|\\
&\leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{k}{k+1}|y_{k,\beta}| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}|x_n| < \epsilon,
\end{aligned}
$$

isto é, $\lim\limits_{\beta} A(x, y_\beta) = 0$, para todo $x \in B_{\ell_1}$. Daí,

$$1 = \overline{A}_2(y,w) = \lim_{\alpha}\lim_{\beta} A(x_\alpha, y_\beta) = 0.$$

Essa contradição provém da suposição de que $\overline{A}_2(y,w) = 1$, o que nos faz concluir que $\overline{A}_2(y,w) \neq 1$ para todos $y, w \in B_{\ell_1''}$. Dessa forma, tomando $z \in B_{\ell_1''}$ como ponto de acumulação na topologia fraca-estrela da rede $(J_{\ell_1}(e_n))_{n=1}^{\infty}$, temos

$$\overline{A}_1(z,z) = 1 \neq \overline{A}_2(z,z).$$

Até agora aprendemos apenas estender formas bilineares contínuas ao produto cartesiano dos biduais. Faremos em seguida o caso vetorial, isto é, operadores bilineares contínuos tomando valores em espaços de Banach, e mostraremos que neste caso valem os análogos do item (b) do Teorema 4.2.1 e o Corolário 4.2.2.

No seguinte teorema, $\overline{x_j''}^1$ e $\overline{x_j''}^2$, $j = 1, 2$, são como no Teorema 4.2.1.

Teorema 4.2.5. *Sejam E_1, E_2, F espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. Defina:*

$$\overline{A}_1 \colon E_1'' \times E_2'' \longrightarrow F'' \ , \ \overline{A}_1(x_1'', x_2'')(y') = \left(\overline{x_2''}^1 \circ \overline{x_1''}^1\right)(y' \circ A), \ \textit{para todo } y' \in F' \textit{e}$$

$$\overline{A}_2 \colon E_1'' \times E_2'' \longrightarrow F'' \ , \ \overline{A}_2(x_1'', x_2'')(y') = \left(\overline{x_1''}^2 \circ \overline{x_2''}^2\right)(y' \circ A), \ \textit{para todo } y' \in F'.$$

Então $\overline{A}_1, \overline{A}_2 \in \mathcal{L}(E_1'', E_2''; F'')$ e $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ são extensões de A no sentido de que

$$\overline{A}_1 \circ (J_{E_1}, J_{E_2}) = J_F \circ A = \overline{A}_2 \circ (J_{E_1}, J_{E_2}).$$

Mais ainda, $\|\overline{A}_1\| = \|A\| = \|\overline{A}_2\|$.

Demonstração. De (4.9) segue a bilinearidade de $\overline{A}_1$ e pelo Teorema 4.2.1, tem-se

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{A}_1(x_1'', x_2'')(y')\right| &= \left|\left(\overline{x_2''}^1 \circ \overline{x_1''}^1\right)(y' \circ A)\right| \leq \left\|\overline{x_2''}^1 \circ \overline{x_1''}^1\right\| \cdot \|y' \circ A\|\\
&\leq \left\|\overline{x_2''}^1\right\| \cdot \left\|\overline{x_1''}^1\right\| \cdot \|y'\| \cdot \|A\| \leq \|x_2''\| \cdot \|x_1''\| \cdot \|y'\| \cdot \|A\|\\
&= \|\|A\| \cdot \|x_1''\| \cdot \|x_2''\| \cdot \|y'\|,
\end{aligned}
$$

para todo $y \in F'$. Segue que $\left\|\overline{A}_1(x_1'', x_2'')\right\| \leq \|A\| \cdot \|x_2''\| \cdot \|x_1''\|$, o que nos permite concluir que $\overline{A}_1$ é contínuo e $\|\overline{A}_1\| \leq \|A\|$. Vejamos que $\overline{A}_1 \circ (J_{E_1}, J_{E_2}) = J_F \circ A$: de fato, para todos $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ e $y' \in F'$,

$$\left(\overline{A}_1 \circ (J_{E_1}, J_{E_2})\right)(x_1, x_2)(y') = \overline{A}_1(J_{E_1}(x_1), J_{E_2}(x_2))(y') = \left(\overline{J_{E_2}(x_2)}^1 \circ \overline{J_{E_1}(x_1)}^1\right)(y' \circ A)$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{J_{E_2}(x_2)}^1 \left(\overline{J_{E_1}(x_1)}^1 (y' \circ A)\right) = J_{E_2}(x_2) \left(\overline{J_{E_1}(x_1)}^1 (y' \circ A)\right) \\
&= \overline{J_{E_1}(x_1)}^1 (y' \circ A)(x_2) = J_{E_1}(x_1) \left((y' \circ A)(\bullet; x_2)\right) \\
&= (y' \circ A)(\bullet; x_2)(x_1) = (y' \circ A)(x_1, x_2) = y'(A(x_1, x_2)) \\
&= J_F(A(x_1, x_2))(y') = (J_F \circ A)(x_1, x_2)(y').
\end{aligned}
$$

Finalmente, de (4.4), temos

$$
\begin{aligned}
|A(x_1, x_2)| &= \sup_{y' \in B_{F'}} |y'(A(x_1, x_2))| = \sup_{y' \in B_{F'}} |J_F(A(x_1, x_2))(y')| \\
&= \sup_{y' \in B_{F'}} |(J_F \circ A)(x_1, x_2)(y')| = \sup_{y' \in B_{F'}} \left|(\overline{A}_1 \circ (J_{E_1}, J_{E_2}))(x_1, x_2)(y')\right| \\
&= \sup_{y' \in B_{F'}} |\overline{A}_1(J_{E_1}(x_1), J_{E_2}(x_2))(y')| = \left\|\overline{A}_1(J_{E_1}(x_1), J_{E_2}(x_2))\right\| \\
&\leq \left\|\overline{A}_1\right\| \cdot \left\|J_{E_1}(x_1)\right\| \cdot \|J_{E_2}(x_2)\| = \left\|\overline{A}_1\right\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|,
\end{aligned}
$$

para todos $x_1 \in E_1, x_2 \in_2$. Segue que $\|A\| \leq \|\overline{A}_1\|$ e portanto $\|\overline{A}_1\| = \|A\|$. De modo análogo, se mostra que o operador $\overline{A}_2$ é um operador bilinear contínuo, estende A e $\|\overline{A}_2\| = \|A\|$. □

Corolário 4.2.6. *Sejam E_1, E_2, F espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. Então as extensões de Aron-Berner $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ de A construídas no Teorema 4.2.5 são dadas por*

$$\overline{A}_1(x_1'', x_2'')(y') = \lim_{\alpha_2} \lim_{\alpha_1} (y' \circ A)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}), \textit{para todo } y' \in F' \textit{ e}$$

$$\overline{A}_2(x_1'', x_2'')(y') = \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} (y' \circ A)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \textit{ para todo } y' \in F'$$

onde $(x_{\alpha_1})_{\alpha_1 \in \Omega_1}$, $(x_{\alpha_2})_{\alpha_2 \in \Omega_2}$ são redes em E_1 e E_2, respectivamente, tais que $J_{E_1}(x_{\alpha_1}) \xrightarrow{\omega^*} x_1'' \in E_1''$ e $J_{E_2}(x_{\alpha_2}) \xrightarrow{\omega^*} x_2'' \in E_2''$.

Demonstração. Para cada $y' \in F'$, temos $y' \circ A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Logo, pelo feito no Corolário 4.2.2,

$$\overline{x_1''}^1 (y' \circ A)(x_2) = \lim_{\alpha_1} (y' \circ A)(x_{\alpha_1}, x_2), \text{ para todo } x_2 \in E_2.$$

Além disso,

$$\overline{x_2''}^1 (\overline{x_1''}^1 (y' \circ A)) = x_2''(\overline{x_1''}^1 (y' \circ A)) = \lim_{\alpha_2} \overline{x_1''}^1 (y' \circ A)(x_{\alpha_2}), \text{ para todo } x_1 \in E_1$$

e assim, pelo Teorema 4.2.5,

$$\overline{A}_1(x_1'', x_2'')(y') = \overline{x_2''}^1 (\overline{x_1''}^1 (y' \circ A)) = \lim_{\alpha_2} \overline{x_1''}^1 (y' \circ A)(x_{\alpha_2}) = \lim_{\alpha_2} \lim_{\alpha_1} (y' \circ A)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}),$$

para todo $y' \in F'$. De modo análogo, mostra-se que

$$\overline{A}_2(x_1'', x_2'')(y') = \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} (y' \circ A)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}), \text{ para todo } y' \in F'.$$

□

4.3 Coincidência das extensões bilineares

Nos exemplos 4.2.3 e 4.2.4 vimos que as extensões $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ de um operador bilinear $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ no Teorema 4.2.1 às vezes coincidem e às vezes não coincidem. Neste seção estabeleceremos condições sob as quais as extensões $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ do operador $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ no Teorema 4.2.5, e portanto aquelas do Teorema 4.2.1, coincidem. O primeiro resultado é o seguinte.

Lema 4.3.1. *Sejam E_1, E_2, F espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. Se A tem uma extensão $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1'', E_2''; F'')$ separadamente ω^*- ω^*-contínua, então $\widetilde{A}$ é única, isto é, qualquer outra extensão separadamente ω^*- ω^*-contínua coincide com $\widetilde{A}$.*

Demonstração. Suponha que $\widehat{A} \in \mathcal{L}(E_1'', E_2''; F'')$ seja uma extensão de A separadamente ω^*- ω^*-contínua. Devemos provar que $\widehat{A} = \widetilde{A}$, e para isso sejam $x_1'' \in E_1''$, $x_2'' \in E_2''$. Pelo Teorema de Goldstine, para cada $j = 1, 2$ existe uma rede $(x_{\alpha_j})_{\alpha_j \in \Omega_j}$ em E_j tal que $J_{E_j}(x_{\alpha_j}) \xrightarrow{\omega^*} x_j''$. Daí,

$$\begin{aligned}
\widehat{A}(x_1'', x_2'') &= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \widehat{A}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), x_2'') \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} \widehat{A}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), J_{E_2}(x_{\alpha_2})) \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} (\widehat{A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2}))(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} (J_F \circ A)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} (\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2}))(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} \widetilde{A}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), J_{E_2}(x_{\alpha_2})) \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \widetilde{A}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), x_2'') = \widetilde{A}(x_1'', x_2'').
\end{aligned}$$

□

Observe que o Lema 4.3.1 nos diz que se as extensões de Aron-Berner $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ de $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ forem separadamente ω^*- ω^*-contínuas, então $\overline{A}_1 = \overline{A}_2$. Entretanto, nem sempre isso é verdade. Para comprovar este fato, suponha que as extensões de Aron-Berner $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ de $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ sejam separadamente ω^*- ω^*-contínuas. Pelo Lema 4.3.1 teríamos que $\overline{A}_1 = \overline{A}_2$, mas no Exemplo 4.2.4 mostramos que isso nem sempre acontece. Então, naquele caso, pelo menos uma das extensões $\overline{A}_1$ ou $\overline{A}_2$ não é separadamente ω^*- ω^*-contínua. O máximo que vale, em geral, em relação à continuidade ω^*- ω^* da extensões de Aron-Berner é o seguinte:

Proposição 4.3.2. *Sejam E_1, E_2, F espaços de Banach, $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ as extensões de Aron-Berner de $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. Então.*

(a) *Para cada $x_1'' \in E_1''$ e cada $x_2 \in E_2$, os operadores*

$$\overline{A}_1(x_1''; \bullet) \colon E_2'' \longrightarrow F'' \ , \ \overline{A}_1(x_1''; \bullet)(x_2'') = \overline{A}_1(x_1''; x_2''),$$

$$\overline{A}_1(\bullet; J_{E_2}(x_2)) \colon E_1'' \longrightarrow F'' \ , \ \overline{A}_1(\bullet; J_{E_2}(x_2))(x_1'') = \overline{A}_1(x_1'', J_{E_2}(x_2)),$$

são ω^*- ω^*-contínuos.

(b) *Para cada* $x_2'' \in E_2''$ *e cada* $x_1 \in E_1$, *os operadores*

$$\overline{A}_2(\bullet; x_2'') \colon E_1'' \longrightarrow F'' \ , \ \overline{A}_2(\bullet; x_2'')(x_1'') = \overline{A}_2(x_1''; x_2''),$$

$$\overline{A}_2(J_{E_1}(x_1); \bullet) \colon E_2'' \longrightarrow F'' \ , \ \overline{A}_2(J_{E_1}(x_1); \bullet)(x_2'') = \overline{A}_2(J_{E_1}(x_1), x_2''),$$

são ω^*- ω^*- *contínuos.*

Demonstração. (a) Vejamos que para cada $x_1'' \in E_1''$, $\overline{A}_1(x_1''; \bullet)$ é ω^*- ω^*-contínuo. Para isso seja $(x_{\alpha_2}'')_{\alpha_2 \in \Omega_2}$ uma rede em E_2'' tal que $x_{\alpha_2}'' \xrightarrow{\omega^*} x_2'' \in E_2''$. Então $x_{\alpha_2}''(x_2') \longrightarrow x_2''(x_2')$ para todo $x_2' \in E_2'$. Para todo $y' \in F'$, $\overline{x_1''}^1(y' \circ A) \in E_2'$, logo $x_{\alpha_2}''\big(\overline{x_1''}^1(y' \circ A)\big) \longrightarrow x_2''\big(\overline{x_1''}^1(y' \circ A)\big)$, isto é, para todo $y' \in F'$, $\overline{A}_1(x_1'', x_{\alpha_2}'')(y') \longrightarrow \overline{A}_1(x_1'', x_2'')(y')$. Daí,

$$\overline{A}_1(x_1''; \bullet)(x_{\alpha_2}'')(y') \longrightarrow \overline{A}_1(x_1''; \bullet)(x_2'')(y') \text{ para todo } y' \in F',$$

isto é, $\overline{A}_1(x_1''; \bullet)(x_{\alpha_2}'') \xrightarrow{\omega^*} \overline{A}_1(x_1''; \bullet)(x_2'')$, provando que $\overline{A}_1(x_1''; \bullet)$ é ω^*- ω^*-contínuo.

Vejamos agora que para todo $x_2 \in E_2$, $\overline{A}_1(\bullet; J_{E_2}(x_2))$ é ω^*- ω^*-contínuo. Para isso seja $(x_{\alpha_1}'')_{\alpha_1 \in \Omega_1}$ uma rede em E_1'' tal que $x_{\alpha_1}'' \xrightarrow{\omega^*} x_1'' \in E_1''$. Então $x_{\alpha_1}''(x_1') \longrightarrow x_1''(x_1')$ para todo $x_1' \in E_1'$. Para todo $y' \in F'$, $(y' \circ A)(\bullet; x_2) \in E_1'$, logo

$$\begin{aligned}
\overline{A}_1(\bullet; J_{E_2}(x_2))(x_1'')(y') &= \overline{A}_1(x_1'', J_{E_2}(x_2))(y') = J_{E_2}(x_2)\left(\overline{x_1''}^1(y' \circ A)\right) \\
&= \left(\overline{x_1''}^1(y' \circ A)\right)(x_2) = x_1''\left((y' \circ A)(\bullet; x_2)\right) \\
&= \lim_{\alpha_1} x_{\alpha_1}''\left((y' \circ A)(\bullet; x_2)\right) = \lim_{\alpha_1} \overline{x_{\alpha_1}''}^1(y' \circ A)(x_2) \\
&= \lim_{\alpha_1} \overline{A}_1(x_{\alpha_1}'', J_{E_2}(x_2))(y') = \lim_{\alpha_1} \overline{A}_1(\bullet; J_{E_2}(x_2))(x_{\alpha_1}'')(y'),
\end{aligned}$$

donde segue que $\overline{A}_1(\bullet; J_{E_2}(x_2))(x_{\alpha_1}'') \xrightarrow{\omega^*} \overline{A}_1(\bullet; J_{E_2}(x_2))(x_1'')$, ou seja, $\overline{A}_1(\bullet; J_{E_2}(x_2))$ é ω^*- ω^*-contínuo.

(b) Segue de modo totalmente similar ao item (a). □

Um primeiro resultado que nos diz quando as extensões de Aron-Berner $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ do operador $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ coincidem é o seguinte:

Teorema 4.3.3. *Seja* $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. *Se* A *tem uma extensão* $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1'', E_2''; F'')$ *separadamente* ω^*- ω^*-*contínua, então as duas extensões de Aron-Berner de* A *coincidem com* $\widetilde{A}$, *isto é,* $\widetilde{A} = \overline{A}_1 = \overline{A}_2$. *Em particular, as extensões de Aron-Berner* $\overline{A}_1$ *e* $\overline{A}_2$ *são separadamente* ω^*- ω^*-*contínuas.*

Demonstração. Sejam $x_j'' \in E_j''$, $j = 1, 2$. Pelo Teorema de Goldstine, existem redes $(x_{\alpha_j})_{\alpha_j \in \Omega_j}$ em E_j tais que $J_{E_j}(x_{\alpha_j}) \xrightarrow{\omega^*} x_j''$, $j = 1, 2$. Pela Proposição 4.3.2,

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}(x_1'', x_2'') &= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_2} \widetilde{A}(x_1'', J_{E_2}(x_{\alpha_2})) = \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_2} \lim_{\alpha_1} \widetilde{A}\left(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), J_{E_2}(x_{\alpha_2})\right) \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_2} \lim_{\alpha_1} (\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2}))(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_2} \lim_{\alpha_1} (J_F \circ A)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_2} \lim_{\alpha_1} \left(\overline{A}_1 \circ (J_{E_1}, J_{E_2})\right)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_2} \lim_{\alpha_1} \overline{A}_1\left(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), J_{E_2}(x_{\alpha_2})\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \omega^*\text{- } \lim_{\alpha_2}\lim_{\alpha_1} \overline{A}_1\,(\bullet; J_{E_2}(x_{\alpha_2}))\,(J_{E_1}(x_{\alpha_1})) = \omega^*\text{- } \lim_{\alpha_2} \overline{A}_1\,(\bullet; J_{E_2}(x_{\alpha_2}))\,(x_1'')\\ &= \omega^*\text{- } \lim_{\alpha_2} \overline{A}_1(x_1'', J_{E_2}(x_{\alpha_2})) = \omega^*\text{- } \lim_{\alpha_2} \overline{A}_1(x_1''; \bullet)(J_{E_2}(x_{\alpha_2}))\\ &= \overline{A}_1(x_1''; \bullet)(x_2'') = \overline{A}_1(x_1'', x_2''),\end{aligned}$$

o que prova $\widetilde{A} = \overline{A}_1$. Analogamente, prova-se que $\widetilde{A} = \overline{A}_2$. □

O Teorema 4.3.3 nos diz, em particular, que se uma das extensões de Aron-Berner $\overline{A}_1$ ou $\overline{A}_2$ for separadamente ω^*- ω^*-contínua, então $\overline{A}_1 = \overline{A}_2$. Mas do Exemplo 4.2.4 podemos concluir que, em geral, as extensões de Aron-Berner $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ nem sempre são separadamente ω^*- ω^*-contínuas. Agora podemos concluir que, neste caso, ambas as extensões não são separadamente ω^*- ω^*-contínuas.

O seguinte lema e a teoria de operadores fracamente compactos nos levarão a condições que garantem quando as extensões de Aron-Berner são separadamente ω^*- ω^*-contínuas e, portanto, coincidentes.

Lema 4.3.4. *Sejam E_1, E_2, F espaços de Banach, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ e $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ suas extensões de Aron-Berner de A. Então, para todo $y' \in F'$, os operadores*

$$A_{1y'} \colon E_1 \longrightarrow E_2'\ ,\ \ A_{1y'}(x_1) = (y' \circ A)(x_1; \bullet)$$

e

$$A_{2y'} \colon E_2 \longrightarrow E_1'\ ,\ \ A_{2y'}(x_2) = (y' \circ A)(\bullet; x_2)$$

são lineares e contínuos. Além disso, $A_{1y'}'(x_2'') = \overline{x_2''}^2(y' \circ A)$ e $A_{2y'}'(x_1'') = \overline{x_1''}^1(y' \circ A)$.

Demonstração. Vejamos que, para qualquer $y' \in F'$, $A_{1y'} \in \mathcal{L}(E_1; E_2')$. Para isso, sejam $x_1, y_1 \in E_1$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Para qualquer $x_2 \in E_2$,

$$\begin{aligned} A_{1y'}(x_1 + \lambda y_1)(x_2) &= (y' \circ A)(x_1 + \lambda y_1; \bullet)(x_2) = (y' \circ A)(x_1 + \lambda y_1, x_2)\\ &= (y' \circ A)(x_1, x_2) + \lambda (y' \circ A)(y_1, x_2)\\ &= (y' \circ A)(x_1; \bullet)(x_2) + \lambda (y' \circ A)(y_1; \bullet)(x_2)\\ &= ((y' \circ A)(x_1; \bullet) + \lambda (y' \circ A)(y_1; \bullet))(x_2)\\ &= (A_{1y'}(x_1) + \lambda A_{1y'}(y_1))(x_2),\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $A_{1y'}$ é linear. De (4.7),

$$\|A_{1y'}(x_1)\| = \|(y' \circ A)(x_1; \bullet)\| \leq \|y' \circ A\| \cdot \|x_1\| \leq \|y'\| \cdot \|A\| \cdot \|x_1\|,$$

donde concluímos que $A_{1y'}$ é contínuo e $\|A_{1y'}\| \leq \|y'\| \cdot \|A\|$. Além disso, para todos $x_2'' \in E_2''$ e $x_1 \in E_1$,

$$A_{1y'}'(x_2'')(x_1) = x_2''(A_{1y'}(x_1)) = x_2''((y' \circ A)(x_1; \bullet)) = \overline{x_2''}^2(y' \circ A)(x_1),$$

provando que $A_{1y'}'(x_2'') = \overline{x_2''}^2(y' \circ A)$. De modo similar obtemos que, para cada $y' \in F'$, $A_{2y'} \in \mathcal{L}(E_2; E_1')$ e $A_{2y'}' = \overline{x_1''}^1(y' \circ A)$. □

Definição 4.3.5. Sejam E, F espaços de Banach. Um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ é *compacto* (*fracamente compacto*, respectivamente) se $\overline{T(B_E)}$ é compacto (fracamente compacto, respectivamente) em F.

É claro que todo operador compacto é fracamente compacto e todo operador fracamente compacto é contínuo.

Teorema 4.3.6. *As seguintes afirmações são equivalentes para um operador $T \in \mathcal{L}(E;F)$:*

(a) $T' \in \mathcal{L}(F';E')$ *é ω^*- ω-contínuo.*

(b) T *é fracamente compacto.*

(c) $T''(E'') \subseteq J_F(F)$.

Demonstração. Veja [14, Teorema 2, pag. 482 e Lema 7 pag. 484] □

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F que são compactos (fracamente compactos) será denotado por $\mathcal{K}(E;F)$ ($\mathcal{W}(E;F)$ respectivamente).

Da Proposicao 4.3.2 já sabemos que, para cada $x_1'' \in E_1''$, $\overline{A}_1(x_1'';\bullet)$ é ω^*- ω^*-contínuo; e, para cada $x_2'' \in E_2''$, $\overline{A}_2(\bullet;x_2'')$ é ω^*- ω^*-contínuo. A seguinte proposição estabelece uma condição suficiente para concluir que $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ são separadamente ω^*- ω^*-contínuas.

Proposição 4.3.7. *Sejam E_1, E_2, F espaços de Banach, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ e $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ as extensões de Aron-Berner de A. Então:*

(a) *Se $\mathcal{L}(E_2;E_1') = \mathcal{W}(E_2;E_1')$, então, para cada $x_2'' \in E_2''$, o operador*

$$\overline{A}_1(\bullet;x_2'')\colon E_1'' \longrightarrow F'' \ , \ \overline{A}_1(\bullet;x_2'')(x_1'') = \overline{A}_1(x_1'';x_2''),$$

é ω^*- ω^*-contínuo.

(b) Se $\mathcal{L}(E_1;E_2') = \mathcal{W}(E_1;E_2')$, então, para cada $x_1'' \in E_1''$, o operador

$$\overline{A}_2(x_1'';\bullet)\colon E_2'' \longrightarrow F'' \ , \ \overline{A}_2(x_1'';\bullet)(x_2'') = \overline{A}_2(x_1'';x_2''),$$

é ω^*- ω^*-contínuo.

Demonstração. (a) Seja $x_2'' \in E_2''$ e tome $(x_{\alpha_1}'')_{\alpha_1 \in \Omega_1}$ uma rede em E_1'' tal que $x_{\alpha_1}'' \xrightarrow{\omega^*} x_1'' \in E_1''$. Pelo Lema 4.3.4, para qualquer $y' \in F'$ o operador $A_{2y'}\colon E_2 \longrightarrow E_1'$ é linear e contínuo, e por hipótese $A_{2y'}$ é fracamente compacto. Pelo Teorema 4.3.6, $A_{2y'}'\colon E_1'' \longrightarrow E_2'$ é ω^*- ω-contínuo, logo $A_{2y'}'(x_{\alpha_1}'') \xrightarrow{\omega} A_{2y'}'(x_1'')$, donde segue que $x_2''(A_{2y'}'(x_{\alpha_1}'')) \longrightarrow x_2''(A_{2y'}'(x_1''))$. Pelo Lema 4.3.4 temos $x_2''\left(\overline{x_{\alpha_1}''}^1(y' \circ A)\right) \longrightarrow x_2''\big(\overline{x_1''}^1(y' \circ A)\big)$. Disso segue que, para todo $y' \in F'$,

$$\lim_{\alpha_1} \overline{A}_1(\bullet;x_2'')(x_{\alpha_1}'')(y') = \lim_{\alpha_1} \overline{A}_1(x_{\alpha_1}'', x_2'')(y') = \overline{A}_1(x_1'', x_2'')(y') = \overline{A}_1(\bullet;x_2'')(x_1'')(y'),$$

o que implica que

$$\overline{A}_1(\bullet;x_2'')(x_{\alpha_1}'')(y') \longrightarrow \overline{A}_1(\bullet;x_2'')(x_1'')(y'), \text{ para todo } y' \in F'.$$

Provamos que $\overline{A}_1(\bullet;x_2'')(x_{\alpha_1}'') \xrightarrow{\omega^*} \overline{A}_1(\bullet;x_2'')(x_1'')$ e portanto $\overline{A}_1(\bullet;x_2'')$ é ω^* - ω^*-continuo.

O item (b) segue de forma totalmente análoga.

□

Observe que o Lema 4.3.1 nos diz que se todas as extensões de Aron-Berner foram separadamente ω^*- ω^*-contínuas então $\overline{A}_1 = \overline{A}_2$, enquanto que o Teorema 4.3.3 nos diz, em particular, que se uma extensão de Aron-Berner é separadamente ω^*- ω^*-contínua, então $\overline{A}_1 = \overline{A}_2$. Assim temos o

Corolário 4.3.8. *Sejam E_1, E_2, F espaços de Banach. Se $\mathcal{L}(E_1; E_2') = \mathcal{W}(E_1; E_2')$ ou $\mathcal{L}(E_2; E_1') = \mathcal{W}(E_2; E_1')$, então para todo $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ tem-se $\overline{A}_1 = \overline{A}_2$.*

Demonstração. Pelo Proposição 4.3.7 temos que, para cada $x_2'' \in E_2''$, $\overline{A}_1(\bullet; x_2'')$ é ω^*- ω^*-continuo e pela Proposição 4.3.2 temos que, para cada $x_1'' \in E_1''$, $\overline{A}_1(x_1''; \bullet)$ é ω^*- ω^*-continuo. Daí, $\overline{A}_1$ é separadamente ω^*- ω^*-continua e do Teorema 4.3.3 segue que $\overline{A}_1 = \overline{A}_2$. □

O Corolário acima nos dá uma condição suficiente para mostrar que as extensões de Aron-Berner de uma forma bilinear são iguais. A pergunta óbvia é se essa mesma condição, ou seja, a hipótese do corolário acima, também garante que as extensões de um operador bilinear a valores vetoriais são iguais. Mais precisamente: se todo operador linear contínuo de E_i em E_j', $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$, é fracamente compacto, será que, para todo operador $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$, existe uma única extensão do operador A separadamente ω^*- ω^*-contínua que ainda preserve a norma?. Em seguida mostraremos que a resposta é afirmativa.

Lema 4.3.9. *Sejam E, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Então T é fracamente compacto se, e somente se, para cada $x'' \in E''$ o operador $T''(x''): F' \longrightarrow \mathbb{K}$ é ω^*-continuo.*

Demonstração. Suponha que T seja fracamente compacto. Seja $(y'_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ uma rede em F' tal que $y'_\alpha \xrightarrow{\omega^*} y' \in F'$. Então $y'_\alpha(z) \longrightarrow y'(z)$, para todo $z \in F$. Como T é fracamente compacto, pelo Teorema 4.3.6 temos $T''(E'') \subseteq J_F(F)$. Assim, para cada $x'' \in E''$ existe $y \in F$ tal que $T''(x'') = J_F(y)$. Disso segue que

$$T''(x'')(y') = J_F(y)(y') = y'(y) = \lim_\alpha y'_\alpha(y) = \lim_\alpha J_F(y)(y'_\alpha) = \lim_\alpha T''(x'')(y'_\alpha),$$

provando que, para cada $x'' \in E''$, o operador $T''(x'')$ é ω^*-contínuo.

Reciprocamente, suponha que, para cada $x'' \in E''$, o operador $T''(x''): F' \longrightarrow \mathbb{K}$ seja ω^*-contínuo. Pela Proposição 1.7.3, existe $x \in F$ tal que $T''(x'') = J_F(x)$ e do Teorema 4.3.6 segue que T é fracamente compacto. □

Teorema 4.3.10. *Sejam E_1, E_2 espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Se $\mathcal{L}(E_i; E_j') = \mathcal{W}(E_i; E_j')$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, então existe uma única extensão $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1'', E_2'')$ de A separadamente ω^*-continua. Além disso, $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.*

Demonstração. Para cada $x_1 \in E_1$, $A(x_1; \bullet) \in E_2'$. Pelo Lema 4.1.1 existe uma única extensão $\overline{A(x_1; \bullet)}: E_2'' \longrightarrow \mathbb{K}$ linear e contínua de $A(x_1; \bullet)$ que é ω^*-continua e $\|\overline{A(x_1; \bullet)}\| = \|A(x_1; \bullet)\|$. Dado $x_2'' \in E_2''$, defina

$$A_{x_2''}: E_1 \longrightarrow \mathbb{K},\ A_{x_2''}(x_1) = \overline{A(x_1; \bullet)}(x_2'').$$

Observe que, para todos $x_1, y_1 \in E_1$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\overline{A(x_1+\lambda y_1;\bullet)}(x_2'') &= x_2''(A(x_1+\lambda y_1;\bullet)) = x_2''(A(x_1;\bullet)+\lambda A(y_1;\bullet))\\
&= x_2''(A(x_1;\bullet)) + \lambda x_2''(A(y_1;\bullet)) = \overline{A(x_1;\bullet)}(x_2'') + \lambda\overline{A(y_1;\bullet)}(x_2'')\\
&= (\overline{A(x_1;\bullet)} + \lambda\overline{A(y_1;\bullet)})(x_2''),
\end{aligned}$$

para todo $x_2'' \in E_2''$. Disso segue que $A_{x_2''}$ é linear e de

$$\begin{aligned}
|A_{x_2''}(x_1)| &= \left|\overline{A(x_1;\bullet)}(x_2'')\right| \leq \left\|\overline{A(x_1;\bullet)}\| \cdot \|x_2''\right\|\\
&= \|A(x_1;\bullet)\| \cdot \|x_2''\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2''\| \leq \|A\| \cdot \|x_2''\| \cdot \|x_1\|,
\end{aligned}$$

concluímos que $A_{x_2''}$ é contínuo e $\|A_{x_2''}\| \leq \|A\| \cdot \|x_2''\|$. Sendo $A_{x_2''}$ um funcional linear e contínuo, pelo Lema 4.1.1 existe uma única extensão $\overline{A}_{x_2''} \colon E_1'' \longrightarrow \mathbb{K}$ linear contínua de $A_{x_2''}$ que é ω^*-contínuo e $\left\|\overline{A}_{x_2''}\right\| = \|A_{x_2''}\|$. Além disso, se $x_2'', y_2'' \in E_2''$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $A_{x_2''+\lambda y_2''} = A_{x_2''} + \lambda A_{y_2''}$, Mais ainda, definindo os operadores $A_{x_2''+\lambda y_2''}$, $A_{x_2''}$ e $A_{y_2''}$ como acima, temos que cada um desses funcionais são lineares contínuos, portanto pelo Lema 4.1.1 existem únicos operadores lineares contínuos $\overline{A}_{x_2''+\lambda y_2''}$, $\overline{A}_{x_2''}$ e $\overline{A}_{y_2''}$ que estendem $A_{x_2''+\lambda y_2''}$, $A_{x_2''}$ e $A_{y_2''}$ respectivamente, onde cada um desse funcionais é ω^*-contínuo. Consequentemente, para todo $x_1 \in E_1$,

$$\begin{aligned}
\left(\left(\overline{A}_{x_2''} + \lambda\overline{A}_{y_2''}\right) \circ J_{E_1}\right)(x_1) &= \left(\overline{A}_{x_2''} + \lambda\overline{A}_{y_2''}\right)(J_{E_1}(x_1)) = \overline{A}_{x_2''}(J_{E_1}(x_1)) + \lambda\overline{A}_{y_2''}(J_{E_1}(x_1))\\
&= \left(\overline{A}_{x_2''} \circ J_{E_1}\right)(x_1) + \lambda\left(\overline{A}_{y_2''} \circ J_{E_1}\right)(x_1) = A_{x_2''}(x_1) + \lambda\overline{A}_{y_2''}(x_1)\\
&= (A_{x_2''} + \lambda A_{y_2''})(x_1) = A_{x_2''+\lambda y_2''}(x_1),
\end{aligned}$$

provando que $\overline{A}_{x_2''} + \lambda\overline{A}_{y_2''}$ estende $A_{x_2''+\lambda y_2''}$ e é ω^*-contínuo, Mas como $\overline{A}_{x_2''+\lambda y_2''}$ é o único funcional ω^*-contínuo que estende $A_{x_2''+\lambda y_2''}$, segue que $\overline{A}_{x_2''+\lambda y_2''} = \overline{A}_{x_2''} + \lambda\overline{A}_{y_2''}$. Defina

$$\widetilde{A} \colon E_1'' \times E_2'' \longrightarrow \mathbb{K},\ \widetilde{A}(x_1'', x_2'') = \overline{A}_{x_2''}(x_1'').$$

Vejamos que $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1'', E_2'')$. Para todos $x_1'', y_1'' \in E_1''$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\widetilde{A}(x_1''+\lambda y_1'', x_2'') = \overline{A}_{x_2''}(x_1''+\lambda y_1'') = \overline{A}_{x_2''}(x_1'') + \lambda\overline{A}_{x_2''}(y_1'') = \widetilde{A}(x_1'', x_2'') + \lambda\widetilde{A}(y_1'', x_2''),$$

e, para todos $x_2'', y_2'' \in E_2''$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}(x_1'', x_2''+\lambda y_2'') &= \overline{A}_{x_2''+\lambda y_2''}(x_1'') = \left(\overline{A}_{x_2''} + \lambda\overline{A}_{y_2''}\right)(x_1'')\\
&= \overline{A}_{x_2''}(x_1'') + \lambda\overline{A}_{y_2''}(x_1'') = \widetilde{A}(x_1'', x_2'') + \lambda\widetilde{A}(x_1'', y_2'').
\end{aligned}$$

Isso prova que $\widetilde{A}$ é bilinear. De

$$\left|\widetilde{A}(x_1'', x_2'')\right| = \left|\overline{A}_{x_2''}(x_1'')\right| \leq \left\|\overline{A}_{x_2''}\right\| \cdot \|x_1''\| = \|A_{x_2''}\| \cdot \|x_1''\| \leq \|A\| \cdot \|x_1''\| \cdot \|x_2''\|,$$

concluímos que $\widetilde{A}$ é contínuo e $\|\widetilde{A}\| \leq \|A\|$. Para todos $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$,

$$\left(\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2})\right)(x_1, x_2) = \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), J_{E_2}(x_2)) = \overline{A}_{J_{E_2}(x_2)}(J_{E_1}(x_1))$$

$$
\begin{aligned}
&= (\overline{A}_{J_{E_2}(x_2)} \circ J_{E_1})(x_1) = A_{J_{E_2}(x_2)}(x_1) = \overline{A(x_1;\bullet)}(J_{E_2}(x_2)) \\
&= \big(\overline{A(x_1;\bullet)} \circ J_{E_2}\big)(x_2) = A(x_1;\bullet)(x_2) = A(x_1, x_2),
\end{aligned}
$$

provando que $\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2}) = A$, isto é, $\widetilde{A}$ estende A. Como $\overline{A}_{x_2''}$ é ω^*-contínuo, segue que $\widetilde{A}$ é ω^*-contínuo na primeira variável. De

$$
\begin{aligned}
|A(x_1, x_2)| &= \left| \left(\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2})\right)(x_1, x_2) \right| = \left| \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), J_{E_2}(x_2)) \right| \\
&\leq \|\widetilde{A}\| \cdot \|J_{E_1}(x_1)\| \cdot \|J_{E_2}(x_2)\| = \|\widetilde{A}\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|,
\end{aligned}
$$

obtemos $\|A\| \leq \|\widetilde{A}\|$, portanto $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$. Finalmente vejamos que, para cada $x_1'' \in E_1''$, $\widetilde{A}(x_1''; \bullet) \colon E_2'' \longrightarrow \mathbb{K}$ é ω^*-contínuo. Para isso, considere o operador

$$
T \colon E_1 \longrightarrow E_2' \ , \ T(x_1) = A(x_1; \bullet).
$$

De

$$
T(x_1 + \lambda y_1) = A(x_1 + \lambda y_1; \bullet)(x_2) = A(x_1; \bullet) + \lambda A(y_1; \bullet) = T(x_1) + \lambda T(y_1)
$$

e

$$
\|T(x_1)\| = \|A(x_1; \bullet)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\|,
$$

obtemos que $T \in \mathcal{L}(E_1; E_2')$ e $\|T\| \leq \|A\|$. Dado $x_1'' \in E_1''$, podemos tomar uma rede $(x_{\alpha_1})_{\alpha_1 \in \Omega_1}$ em E_1 tal que $J_{E_1}(x_{\alpha_1}) \xrightarrow{\omega^*} x_1''$. Como T'' é ω^*- ω^*-contínuo, $T''(J_{E_1}(x_{\alpha_1})) \xrightarrow{\omega^*} T''(x_1'')$. Portanto, para todo x_2'',

$$
\begin{aligned}
T''(x_1'')(x_2'') &= \lim_{\alpha_1} T''(J_{E_1}(x_{\alpha_1}))(x_2'') = \lim_{\alpha_1} (T'' \circ J_{E_1})(x_{\alpha_1})(x_2'') \\
&= \lim_{\alpha_1} (J_{E_2'} \circ T)(x_{\alpha_1})(x_2'') = \lim_{\alpha_1} J_{E_2'}(T(x_{\alpha_1}))(x_2'') \\
&= \lim_{\alpha_1} x_2''(T(x_{\alpha_1})) = \lim_{\alpha_1} x_2''(A(x_{\alpha_1}; \bullet)) \\
&= \lim_{\alpha_1} \overline{A(x_{\alpha_1}; \bullet)}(x_2'') = \lim_{\alpha_1} A_{x_2''}(x_{\alpha_1}) \\
&= \lim_{\alpha_1} \big(\overline{A}_{x_2''} \circ J_{E_1}\big)(x_{\alpha_1}) = \lim_{\alpha_1} \overline{A}_{x_2''}(J_{E_1}(x_{\alpha_1})) \\
&= \overline{A}_{x_2''}(x_1'') = \widetilde{A}(x_1'', x_2'') = \widetilde{A}(x_1''; \bullet)(x_2'').
\end{aligned}
$$

Segue que $T''(x_1'') = \widetilde{A}(x_1''; \bullet)$. Como T é linear e contínuo, por hipótese sabemos que T é fracamente compacto. Pelo Lema 4.3.9, $T''(x_1'')$ é ω^*-contínuo, logo $\widetilde{A}(x_1''; \bullet)$ é ω^*-contínuo, o que nos permite concluir que $\widetilde{A}$ é separadamente ω^*-contínuo. A unicidade de $\widetilde{A}$ segue do Lema 4.3.1. $\square$

A seguir mostraremos o caso vetorial do Teorema 4.3.10 e, mais do que isso, mostraremos a recíproca desse teorema.

Teorema 4.3.11. *As seguinte afirmações são equivalentes para os espaços de Banach E_1, E_2.*

(a) $\mathcal{L}(E_i; E_j') = \mathcal{W}(E_i; E_j')$ *para todos $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.*

(b) Para todo espaço de Banach F, todo operador $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ admite uma única extensão $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1'', E_2''; F'')$ de A que é separadamente ω^*- ω^*-continua. Além disso, $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.

Demonstração. (a)$\Longrightarrow$ (b) Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. Para todo $y' \in F'$, $y' \circ A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, e então pelo Teorema 4.3.10 existe uma única extensão $\widetilde{y' \circ A} \in \mathcal{L}(E_1'', E_2'')$ de $y' \circ A$ que é separadamente ω^*-contínua. Mais ainda, $\|\widetilde{y' \circ A}\| = \|y' \circ A\|$. Defina

$$\widetilde{A}\colon E_1'' \times E_2'' \longrightarrow F'',\ \widetilde{A}(x_1'', x_2'')(y') = \widetilde{y' \circ A}(x_1'', x_2'').$$

Como $\widetilde{y' \circ A}$ é bilinear, segue que $\widetilde{A}$ é bilinear, e de

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{A}(x_1'', x_2'')(y')\right| &= \left|\widetilde{y' \circ A}(x_1'', x_2'')\right| \leq \left\|\widetilde{y' \circ A}\right\| \cdot \|x_1''\| \cdot \|x_2''\| \\ &= \|y' \circ A\| \cdot \|x_1''\| \cdot \|x_2''\| \leq \|y'\| \cdot \|A\| \cdot \|x_1''\| \cdot \|x_2''\| \\ &= \|A\| \cdot \|x_1''\| \cdot \|x_2''\| \cdot \|y'\|,\end{aligned}$$

segue que $\widetilde{A}$ é contínuo e $\|\widetilde{A}\| \leq \|A\|$. Para todos $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$,

$$\begin{aligned}(\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2}))(x_1, x_2)(y') &= \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), J_{E_2}(x_2))(y') \\ &= \widetilde{y' \circ A}(J_{E_1}(x_1), J_{E_2}(x_2)) = \big(\widetilde{y' \circ A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2})\big)(x_1, x_2) \\ &= (y' \circ A)(x_1, x_2) = y'(A(x_1, x_2)) \\ &= J_F(A(x_1, x_2))(y') = (J_F \circ A)(x_1, x_2)(y'),\end{aligned}$$

provando $\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2}) = J_F \circ A$, isto é, $\widetilde{A}$ estende A. Também por (4.4), temos

$$\begin{aligned}\|A(x_1, x_2)\| &= \sup_{y' \in B_{F'}} |y'(A(x_1, x_2))| = \sup_{y' \in B_{F'}} |J_F(A(x_1, x_2))(y')| \\ &= \sup_{y' \in B_{F'}} |(J_F \circ A)(x_1, x_2)(y')| = \sup_{y' \in B_{F'}} \left|(\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2}))(x_1, x_2)(y')\right| \\ &= \left\|(\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, J_{E_2}))(x_1, x_2)\right\| = \left\|\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), J_{E_2}(x_2))\right\| \\ &\leq \|\widetilde{A}\| \cdot \|J_{E_1}(x_1)\| \cdot \|J_{E_2}(x_2)\| = \|\widetilde{A}\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|\end{aligned}$$

donde concluímos que $\|A\| \leq \|\widetilde{A}\|$ e então $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$. Como $\widetilde{y' \circ A}$ é separadamente ω^*-contínua, segue que $\widetilde{A}$ é separadamente ω^*- ω^*-contínua. Finalmente, a unicidade segue do Lema 4.3.1.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Sejam $T_{ij}\colon E_i \longrightarrow E_j'$, com $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$, operadores lineares e contínuos. Defina

$$A_1\colon E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ A_1(x_1, x_2) = T_{12}(x_1)(x_2).$$

Como T_{12} é linear e contínuo, segue que $A_1 \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ é bilinear contínuo. Por hipótese existe uma única extensão $\widetilde{A_1} \in \mathcal{L}(E_1'', E_2'')$ de A_1 separadamente ω^*-contínua. Dados $x_1'' \in E_1''$ e $x_2'' \in E_2''$, podemos tomar redes $(x_{\alpha_1})_{\alpha_1 \in \Omega_1}$ e $(x_{\alpha_2})_{\alpha_2 \in \Omega_2}$ em E_1 e E_2, respectivamente, tais que $J_{E_1}(x_{\alpha_1}) \xrightarrow{\omega^*} x_1''$ e $J_{E_2}(x_{\alpha_2}) \xrightarrow{\omega^*} x_2''$. Logo

$$\widetilde{A_1}(x_1'', x_2'') = \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} \widetilde{A_1}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), J_{E_2}(x_{\alpha_2})) = \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} \big(\widetilde{A_1} \circ (J_{E_1}, J_{E_2})\big)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\alpha_1}\lim_{\alpha_2} A_1(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = \lim_{\alpha_1}\lim_{\alpha_2} T_{12}(x_{\alpha_1})(x_{\alpha_2}) \\
&= \lim_{\alpha_1}\lim_{\alpha_2} J_{E_2}(x_{\alpha_2})(T_{12}(x_{\alpha_1})) = \lim_{\alpha_1} x_2''(T_{12}(x_{\alpha_1})) \\
&= \lim_{\alpha_1} T_{12}'(x_2'')(x_{\alpha_1}) = \lim_{\alpha_1} J_{E_1}(x_{\alpha_1})(T_{12}'(x_2'')) \\
&= x_1''(T_{12}'(x_2'')) = T_{12}''(x_2'')(x_1''),
\end{aligned}
$$

provando que $\widetilde{A_1}(x_1'', x_2'') = T_{12}''(x_2'')(x_1'')$. Como $\widetilde{A_1}(\bullet; x_2'')$ é ω^*-contínuo, segue que $T_{12}''(x_2'')$ é ω^*-contínuo, e pelo Lema 4.3.9 concluímos que T_{12} é fracamente compacto. Do mesmo modo, considerando a forma bilinear

$$A_2 \colon E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ A_2(x_1, x_2) = T_{21}(x_2)(x_1),$$

provamos que $T_{21} \colon E_2 \longrightarrow E_1'$ é fracamente compacto. $\square$

4.4 Extensões multilineares de Aron-Berner

Todos os resultados da Seção 4.3 tratam de extensões de operadores Bilineares contínuos. A partir desta seção vamos fazer o caso de operadores n-lineares para qualquer $n \geq 2$. Vale a pena notar que, na grande maioria dos textos, apenas o caso bilinear é feito, e normalmente diz-se que o caso multilinear é análogo. Como o leitor poderá comprovar a partir desta seção, essa afirmação é capciosa, pois no caso $n > 2$ a notação se complica muito.

Começamos com a seguinte notação: dados espaços $E_1, \ldots, E_n$, uma permutação $\sigma \in S_n$ e $k \in 1, \ldots, n$, denotamos

$$E_1, \ldots, \widehat{E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(k-1)}}, \ldots, E_n = \begin{cases} E_1, \ldots, E_n & \text{se } k = 1, \\ E_1, \ldots, E_n & \text{nessa mesma ordem onde } E_{\sigma(1)}, \ldots, \\ & E_{\sigma(k-1)} \text{ são retirados se } k = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

O mesmo define-se para $(x_1, \ldots, \widehat{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k-1)}}, \ldots, x_n)$.

Agora, se $k = 1, \ldots, n-1$, denotamos

$$E_1, \ldots, \widehat{E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(k)}}, \ldots, E_n = E_1, \ldots, E_n,$$

nessa mesma ordem, onde $E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(k)}$ são retirados.

O mesmo define-se para $(x_1, \ldots, \widehat{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}}, \ldots, x_n)$, $\{1, \ldots, \widehat{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)}, \ldots, n\}$ e $\|x_1\| \cdots \widehat{\|x_{\sigma(1)}\| \cdots \|x_{\sigma(k)}\|} \cdots \|x_n\|$. Se $k = n$, denotamos

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, \widehat{E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(k)}}, \ldots, E_n; \mathbb{K}) = \mathbb{K}.$$

Dados $\sigma \in S_n$ e $k = 1, \ldots, n$, seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, \widehat{E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(k-1)}}, \ldots, E_n)$. Definimos

$$A(x_1, \ldots, \widehat{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}}; \bullet; \ldots, x_n) : E_{\sigma(k)} \longrightarrow \mathbb{K},$$

$$A(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n)(x_{\sigma(k)}) = A(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k-1)}},\ldots,x_n), \tag{4.15}$$

onde o ponto $\bullet$ está na $\sigma(k)$-ésima coordenada. Aplicando o Teorema 2.2.1 obtemos que $A(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n) \in E'_{\sigma(k)}$. No caso em que para $k=n$, em (4.15) escrevemos $A(-;\bullet)(x_{\sigma(n)}) = A(x_{\sigma(n)})$, isto é, $A(-;\bullet) = A$.

Note que, para todos $x_j, y_j \in E_j$, $j \in \{1,\ldots,\widehat{\sigma(1),\ldots,\sigma(k)},\ldots,n\}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, fazendo $x = (x_1,\ldots,x_j+\lambda y_j,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n)$, tem-se que

$$\begin{aligned} A(x) &= A(x_1,\ldots,x_j,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n) \\ &\quad +\lambda A(x_1,\ldots,y_j,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Além disso,

$$\left\|A(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n)\right\| \le \|A\|\cdot\|x_1\|\cdots\widehat{\|x_{\sigma(1)}\|\cdots\|x_{\sigma(k)}\|}\cdots\|x_n\|. \tag{4.17}$$

Proposição 4.4.1. *Sejam $E_1,\ldots,E_n$ espaços normados, $\sigma \in S_n$, $k \in \{1,\ldots,n\}$ e $x''_{\sigma(k)}, y''_{\sigma(k)} \in E''_{\sigma(k)}$. Então:*
(a) *O operador*

$$\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma} : \mathcal{L}(E_1,\ldots,\widehat{E_{\sigma(1)},\ldots,E_{\sigma(k-1)}},\ldots,E_n) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1,\ldots,\widehat{E_{\sigma(1)},\ldots,E_{\sigma(k)}},\ldots,E_n),$$

$\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}(A)(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}},\ldots,x_n) = x''_{\sigma(k)}(A(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n))$, *é linear, contínuo e* $\left\|\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}\right\| \le \|x''_{\sigma(k)}\|$.
(b) *Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\overline{x''_{\sigma(k)} + \lambda y''_{\sigma(k)}}^{\sigma} = \overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma} + \lambda\,\overline{y''_{\sigma(k)}}^{\sigma}.$$

Demonstração. (a) A boa definição de $\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}$ segue de (4.16), (4.17), da linearidade e da continuidade de $x''_{\sigma(k)}$. Chame $x = (x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}},\ldots,x_n)$.

Vejamos que $\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}$ é linear. De fato, dados $A, B \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,\widehat{E_{\sigma(1)},\ldots,E_{\sigma(k-1)}},\ldots,E_n)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, chamando $y = (x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n)$,

$$\begin{aligned} \overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}(A+\lambda B)(x) &= x''_{\sigma(k)}((A+\lambda B)(y)) = x''_{\sigma(k)}(A(y)+\lambda B(y)) \\ &= x''_{\sigma(k)}(A(y)) + \lambda x''_{\sigma(k)}(B(y)) = \overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}(A)(x) + \lambda\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}(B)(x) \\ &= \big(\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}(A) + \lambda\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}(B)\big)(x), \end{aligned}$$

provando que $\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}$ é linear. De (4.17),

$$\begin{aligned}\left|\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}(A)(x)\right| &= \left|x''_{\sigma(k)}(A(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n))\right|\\ &\leq \|x''_{\sigma(k)}\|\cdot\left\|A(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n)\right\|\\ &\leq \|x''_{\sigma(k)}\|\cdot\|A\|\cdot\|x_1\|\cdots\widehat{\|x_{\sigma(1)}\|\cdots\|x_{\sigma(k)}\|}\cdots\|x_n\|,\end{aligned}$$

segue que $\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}$ é contínuo e $\left\|\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}\right\| \leq \|x''_{\sigma(k)}\|$.

(b) Sejam $\lambda\in\mathbb{K}$, $A\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,\widehat{E_{\sigma(1)},\ldots,E_{\sigma(k-1)}},\ldots,E_n)$ e $x=(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}}$ $,\ldots,x_n)\in E_1\times\cdots\times\widehat{E_{\sigma(1)}\times\cdots\times E_{\sigma(k)}}\times\cdots\times E_n$. Então

$$\begin{aligned}\overline{x''_{\sigma(k)}+\lambda y''_{\sigma(k)}}^{\sigma}(A)(x) &= (x''_{\sigma(k)}+\lambda y''_{\sigma(k)})\left(A(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n)\right)\\ &= x''_{\sigma(k)}\left(A(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n)\right)\\ &\quad+\lambda y''_{\sigma(k)}\left(A(x_1,\ldots,\widehat{x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}};\bullet;\ldots,x_n)\right)\\ &= \overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}(A)(x)+\lambda\,\overline{y''_{\sigma(k)}}^{\sigma}(A)(x) = \big(\overline{x''_{\sigma(k)}}^{\sigma}+\lambda\,\overline{y''_{\sigma(k)}}^{\sigma}\big)(A)(x),\end{aligned}$$

provando a igualdade desejada. □

Note que se fixamos uma permutação $\sigma\in S_n$, então no caso $k=n$ o operador $\overline{x''_{\sigma(n)}}^{\sigma}: E_{\sigma(n)}\longrightarrow\mathbb{K}$ é tal que

$$\overline{x''_{\sigma(n)}}^{\sigma}(A) = x''_{\sigma(n)}(A(-;\bullet)) = x''_{\sigma(n)}(A),$$

isto é, $\overline{x''_{\sigma(n)}}^{\sigma} = x''_{\sigma(n)}$.

Observe que, da Proposição 4.4.1(a), fixando $\sigma\in S_n$ e fazendo variar k, temos n operadores lineares contínuos, e fazendo a composição de todos eles, obtemos a seguinte cadeia:

$$\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n)\xrightarrow{\overline{x''_{\sigma(1)}}^{\sigma}}\mathcal{L}(E_1,\ldots,\widehat{E_{\sigma(1)}},\ldots,E_n)\xrightarrow{\overline{x''_{\sigma(2)}}^{\sigma}}\mathcal{L}(E_1,\ldots,\widehat{E_{\sigma(1)},E_{\sigma(2)}},\ldots,E_n)$$

$$\xrightarrow{\overline{x''_{\sigma(3)}}^{\sigma}}\cdots\xrightarrow{\overline{x''_{\sigma(n-3)}}^{\sigma}}\mathcal{L}(E_1,\ldots,\widehat{E_{\sigma(1)},\ldots,E_{\sigma(n-3)}},\ldots,E_n)\xrightarrow{\overline{x''_{\sigma(n-2)}}^{\sigma}}\mathcal{L}(E_1,\ldots,$$

$$\widehat{E_{\sigma(1)},\ldots,E_{\sigma(n-2)}},\ldots,E_n)\xrightarrow{\overline{x''_{\sigma(n-1)}}^{\sigma}}\mathcal{L}(E_1,\ldots,\widehat{E_{\sigma(1)},\ldots,E_{\sigma(n-1)}},\ldots,E_n)\xrightarrow{\overline{x''_{\sigma(n)}}^{\sigma}}\mathbb{K}.$$

Como isso vale para cada permutação $\sigma \in S_n$, temos na verdade $n!$ cadeias deste tipo. São essas composições que nos permitirão estender operadores multilineares.

Teorema 4.4.2. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach, $\sigma \in S_n$ e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$. Definindo*

$$\overline{A}_\sigma \colon E_1 \times \cdots \times E_n'' \longrightarrow \mathbb{K},\ \overline{A_\sigma}(x_1'', \ldots, x_n'') = \left(\overline{x_{\sigma(n)}''}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{x_{\sigma(1)}''}^\sigma\right)(A),$$

tem-se que $\overline{A}_\sigma \in \mathcal{L}(E_1'', \ldots, E_n'')$ estende A no sentido de que $A = \overline{A}_\sigma \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n})$ e $\|\overline{A}_\sigma\| = \|A\|$.

Demonstração. A n-linearidade de $\overline{A}_\sigma$ segue da Proposição 4.4.1(b). Da Proposição 4.4.1(a), temos

$$\begin{aligned}
|\overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots, x_n'')| &= \left|\left(\overline{x_{\sigma(n)}''}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{x_{\sigma(1)}''}^\sigma\right)(A)\right| \\
&\leq \left\|\left(\overline{x_{\sigma(n)}''}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{x_{\sigma(1)}''}^\sigma\right)\right\| \cdot \|A\| \\
&\leq \left\|\overline{x_{\sigma(n)}''}^\sigma\right\| \cdots \left\|\overline{x_{\sigma(1)}''}^\sigma\right\| \cdot \|A\| \\
&\leq \|x_{\sigma(n)}''\| \cdots \|x_{\sigma(1)}''\| \cdot \|A\| = \|A\| \cdot \|x_1''\| \cdots \|x_n''\|,
\end{aligned}$$

para todos $x_j'' \in E_j'', j = 1, \ldots, n$. Segue que $\overline{A}_\sigma$ é contínuo e $\|\overline{A}_\sigma\| \leq \|A\|$. Para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$,

$$\begin{aligned}
\overline{A}_\sigma(J_{E_1}(x_1), \ldots, J_{E_n}(x_n)) &= \left(\overline{J_{E_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(n)})}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})}^\sigma\right)(A) \\
&= \overline{J_{E_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(n)})}^\sigma\left(\left(\overline{J_{E_{\sigma(n-1)}}(x_{\sigma(n-1)})}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})}^\sigma\right)(A)\right) \\
&= J_{E_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(n)})\left(\left(\left(\overline{J_{E_{\sigma(n-1)}}(x_{\sigma(n-1)})}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})}^\sigma\right)(A)\right)(-;\bullet)\right) \\
&= \left(\left(\left(\overline{J_{E_{\sigma(n-1)}}(x_{\sigma(n-1)})}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})}^\sigma\right)(A)\right)(-;\bullet)\right)(x_{\sigma(n)}) \\
&= \left(\left(\overline{J_{E_{\sigma(n-1)}}(x_{\sigma(n-1)})}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})}^\sigma\right)(A)\right)(x_{\sigma(n)}) \\
&\ \ \vdots \\
&= \overline{J_{E_{\sigma(2)}}(x_{\sigma(2)})}^\sigma\left(\overline{J_{E_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})}^\sigma(A)\right)\left(x_1, \ldots, \widehat{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}}, \ldots, x_n\right) \\
&= J_{E_{\sigma(2)}}(x_{\sigma(2)})\left(\left(\overline{J_{E_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})}^\sigma(A)\right)\left(x_1, \ldots, \widehat{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}};\bullet; \ldots, x_n\right)\right) \\
&= \left(\left(\overline{J_{E_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})}^\sigma(A)\right)\left(x_1, \ldots, \widehat{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}};\bullet; \ldots, x_n\right)\right)(x_{\sigma(2)}) \\
&= \overline{J_{E_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})}^\sigma(A)\left(x_1, \ldots, \widehat{x_{\sigma(1)}}, \ldots, x_n\right) \\
&= J_{E_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})\left(A(x_1, \ldots, \widehat{x_{\sigma(1)}};\bullet; \ldots, x_n)\right)
\end{aligned}$$

$$= A\left(x_1, \ldots, \widehat{x_{\sigma(1)}}; \bullet; \ldots, x_n\right)(x_{\sigma(1)}) = A(x_1, \ldots, x_n),$$

onde a primeira igualdade é óbvia, a segunda decorre da definição de $\overline{A}_\sigma$, a terceira é óbvia, a quarta segue da Proposição 4.4.1(a), a quinta decorre da definição do mergulho canônico, a sexta segue de (4.15), e assim sucessivamente. Segue que $\overline{A}_\sigma \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n}) = A$ e dessa igualdade, como já fizemos antes, decorre que $\|A\| \leq \|\overline{A}_\sigma\|$ e portanto $\|\overline{A}_\sigma\| = \|A\|$. $\square$

Observe que no Teorema 4.4.2 temos $n!$ extensões para o operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$, extensões essas que são chamadas de *extensões de Aron-Berner de A*. O próximo resultado fornece uma caracterização dessas extensões que, conforme vimos no caso bilinear, é muito útil (veja também [7]).

Corolário 4.4.3. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach e Se $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$. Então os operadores $\overline{A}_\sigma$, $\sigma \in S_n$, do Teorema 4.4.2 são dados por*

$$\overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots, x_n'') = \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} A(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}),$$

onde, para cada $k = 1, \ldots, n$, $(x_{\alpha_{\sigma(k)}})_{\alpha_{\sigma(k)} \in \Omega_{\sigma(k)}}$ é uma rede em $E_{\sigma(k)}$ tal que $J_{E_{\sigma(k)}}(x_{\alpha_{\sigma(k)}}) \xrightarrow{\omega^*} x''_{\sigma(k)} \in E''_{\sigma(k)}$.

Demonstração. Sejam $\sigma \in S_n$ e $k = 1, \ldots, n$. Como $J_{E_{\sigma(k)}}(x_{\alpha_{\sigma(k)}}) \xrightarrow{\omega^*} x''_{\sigma(k)}$, então $J_{E_{\sigma(k)}}(x_{\alpha_{\sigma(k)}})(x'_{\sigma(k)}) \longrightarrow x''_{\sigma(k)}(x'_{\sigma(k)})$, para todo $x'_{\sigma(k)} \in E'_{\sigma(k)}$, isto é,

$$x''_{\sigma(k)}(x'_{\sigma(k)}) = \lim_{\alpha_{\sigma(k)}} x'_{\sigma(k)}(x_{\alpha_{\sigma(k)}}) \text{ para todo } x'_{\sigma(k)} \in E'_{\sigma(k)}. \tag{4.18}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots, x_n'') &= \big(\overline{x''_{\sigma(n)}}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{x''_{\sigma(1)}}^\sigma\big)(A)\\
&= \overline{x''_{\sigma(n)}}^\sigma \big(\big(\overline{x''_{\sigma(n-1)}}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{x''_{\sigma(1)}}^\sigma\big)(A)\big)\\
&= x''_{\sigma(n)}\big(\big(\big(\overline{x''_{\sigma(n-1)}}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{x''_{\sigma(1)}}^\sigma\big)(A)\big)(-;\bullet)\big)\\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \big(\big(\big(\overline{x''_{\sigma(n-1)}}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{x''_{\sigma(1)}}^\sigma\big)(A)\big)(-;\bullet)\big)(x_{\alpha_{\sigma(n)}})\\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \big(\big(\overline{x''_{\sigma(n-1)}}^\sigma \circ \cdots \circ \overline{x''_{\sigma(1)}}^\sigma\big)(A)\big)(x_{\alpha_{\sigma(n)}})\\
&\ \vdots\\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(3)}} \big(\big(\overline{x''_{\sigma(2)}}^\sigma \circ \overline{x''_{\sigma(1)}}^\sigma\big)(A)\big)\left(x_{\alpha_1}, \ldots, \widehat{x_{\alpha_{\sigma(1)}}, x_{\alpha_{\sigma(2)}}}, \ldots, x_{\alpha_n}\right)\\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(3)}} \overline{x''_{\sigma(2)}}^\sigma \big(\overline{x''_{\sigma(1)}}^\sigma(A)\big)\left(x_{\alpha_1}, \ldots, \widehat{x_{\alpha_{\sigma(1)}}, x_{\alpha_{\sigma(2)}}}, \ldots, x_{\alpha_n}\right)\\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(3)}} x''_{\sigma(2)}\left(\big(\overline{x''_{\sigma(1)}}^\sigma(A)\big)\left(x_{\alpha_1}, \ldots, \widehat{x_{\alpha_{\sigma(1)}}, x_{\alpha_{\sigma(2)}}}; \bullet; \ldots, x_{\alpha_n}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(3)}} \lim_{\alpha_{\sigma(2)}} \left(\overline{x''_{\sigma(1)}}^{\sigma}(A)\right)\left(x_{\alpha_1}, \ldots, \widehat{x_{\alpha_{\sigma(1)}}, x_{\alpha_{\sigma(2)}}}; \bullet; \ldots, x_{\alpha_n}\right)(x_{\alpha_{\sigma(2)}}) \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(2)}} \overline{x''_{\sigma(1)}}^{\sigma}(A)\left(x_{\alpha_1}, \ldots, \widehat{x_{\alpha_{\sigma(1)}}}, \ldots, x_{\alpha_n}\right) \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(2)}} x''_{\sigma(1)}\left(A\left(x_{\alpha_1}, \ldots, \widehat{x_{\alpha_{\sigma(1)}}}; \bullet; \ldots, x_{\alpha_n}\right)\right) \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(2)}} \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} A\left(x_{\alpha_1}, \ldots, \widehat{x_{\alpha_{\sigma(1)}}}, \ldots; \bullet; \ldots, x_{\alpha_n}\right)(x_{\alpha_{\sigma(1)}}) \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} A(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}),
\end{aligned}
$$

onde a primeira igualdade segue do Teorema 4.4.2, a segunda é óbvia, a terceira decorre da Proposição 4.4.1(a), a quarta segue de 4.18, a quinta segue de 4.15, e assim sucessivamente. □

Provemos agora os casos vetoriais do Teorema 4.4.2 e do Corolário 4.4.3.

Teorema 4.4.4. *Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach, $\sigma \in S_n$ e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Definindo*

$$
\overline{A}_\sigma \colon E_1'' \times \cdots \times E_n'' \longrightarrow F'', \ \overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots, x_n'')(y') = \left(\overline{x''_{\sigma(n)}}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\sigma(1)}}^{\sigma}\right)(y' \circ A),
$$

para todo $y' \in F'$, tem-se que $\overline{A}_\sigma \in \mathcal{L}(E_1'', \ldots, E_n''; F'')$ estende A no sentido de que $\overline{A}_\sigma \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n}) = J_F \circ A$ e $\left\|\overline{A}_\sigma\right\| = \|A\|$.

Demonstração. A $n-$linearidade de $\overline{A}_\sigma$ segue da Proposição 4.4.1(b). De

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots, x_n'')(y')| &= \left|\left(\overline{x''_{\sigma(n)}}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\sigma(1)}}^{\sigma}\right)(y' \circ A)\right| \\
&\leq \left\|\left(\overline{x''_{\sigma(n)}}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\sigma(1)}}^{\sigma}\right)\right\| \cdot \|y' \circ A\| \\
&\leq \left\|\overline{x''_{\sigma(n)}}^{\sigma}\right\| \cdots \left\|\overline{x''_{\sigma(1)}}^{\sigma}\right\| \cdot \|y'\| \cdot \|A\| \\
&\leq \|x''_{\sigma(n)}\| \cdots \|x''_{\sigma(1)}\| \cdot \|y'\| \cdot \|A\| \\
&= \|A\| \cdot \|x_1''\| \cdots \|x_n''\| \cdot \|y'\|,
\end{aligned}
$$

segue que $\overline{A}_\sigma$ é contínuo e $\|\overline{A}_\sigma\| \leq \|A\|$. Como $y' \circ A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$, pelo Teorema 4.4.2 temos

$$
\begin{aligned}
(\overline{A}_\sigma \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n}))(x_1, \ldots, x_n)(y') &= \overline{A}_\sigma(J_{E_1}(x_1), \ldots, J_{E_n}(x_n))(y') \\
&= \left(\overline{J_{E_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(n)})}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})}^{\sigma}\right)(y' \circ A) \\
&= \overline{(y' \circ A)}_\sigma(J_{E_1}(x_1) \circ \cdots \circ J_{E_n}(x_n)) \\
&= \left(\overline{(y' \circ A)}_\sigma \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n})\right)(x_1, \ldots, x_n) \\
&= (y' \circ A)(x_1, \ldots, x_n) = y'(A(x_1, \ldots, x_n))
\end{aligned}
$$

$$= J_F(A(x_1, \ldots, x_n))(y') = (J_F \circ A)(x_1, \ldots, x_n)(y'),$$

para todo $y' \in F'$, provando que $\overline{A}_\sigma \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n}) = J_F \circ A$. Finalmente, de (4.4),

$$\begin{aligned}
|A(x_1, \ldots, x_n)| &= \sup_{y' \in B_{F'}} |y'(A(x_1, \ldots, x_n))| \\
&= \sup_{y' \in B_{F'}} |J_F(A(x_1, \ldots, x_n))(y')| \\
&= \sup_{y' \in B_{F'}} |(J_F \circ A)(x_1, \ldots, x_n))(y')| \\
&= \sup_{y' \in B_{F'}} |(\overline{A}_\sigma \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n}))(x_1, \ldots, x_n)(y')| \\
&= \sup_{y' \in B_{F'}} |(\overline{A}_\sigma \circ (J_{E_1}(x_1), \ldots, J_{E_n}(x_n))(y')| \\
&= \left\|\overline{A}_\sigma \circ (J_{E_1}(x_1), \ldots, J_{E_n}(x_n))\right\| \\
&\leq \left\|\overline{A}_\sigma\right\| \cdot \|J_{E_1}(x_1)\| \cdots \|J_{E_n}(x_n)\| \\
&= \left\|\overline{A}_\sigma\right\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|,
\end{aligned}$$

provando que $\|A\| \leq \left\|\overline{A}_\sigma\right\|$ e portanto $\left\|\overline{A}_\sigma\right\| = \|A\|$. □

Mais uma vez, os operadores $\overline{A}_\sigma$, $\sigma \in S_n$, são chamados de *extensões de Aron-Berner de A*.

Corolário 4.4.5. *Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então os operadores $\overline{A}_\sigma$, $\sigma \in S_n$, do Teorema 4.4.4, são dados por*

$$\overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots, x_n'')(y') = \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} (y' \circ A)(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}), \text{ para todo } y' \in F',$$

onde, para cada $k = 1, \ldots, n$, $(x_{\alpha_{\sigma(k)}})_{\alpha_{\sigma(k)} \in \Omega_{\sigma(k)}}$ é uma rede em $E_{\sigma(k)}$ tal que $J_{E_{\sigma(k)}}(x_{\alpha_{\sigma(k)}}) \xrightarrow{\omega^*} x''_{\sigma(k)} \in E''_{\sigma(k)}$.

Demonstração. Para todo $y' \in F'$, tem-se $y' \circ A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$. Logo pelo Teorema 4.4.2 e pelo Corolário 4.4.3,

$$\begin{aligned}
\overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots, x_n'')(y') &= \left(\overline{x''_{\sigma(n)}}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\sigma(1)}}^{\sigma}\right)(y' \circ A) = \overline{(y' \circ A)}_\sigma(x_1'', \ldots, x_n'') \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} (y' \circ A)(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}).
\end{aligned}$$

□

4.5 Coincidência das extensões multilineares

Sabemos que em geral as extensões de Aron-Berner não são iguais e por esse fato estamos interessados em mostrar sobre quais condições todas as $n!$ extensões de Aron-Berner do operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ coincidem. Um primeiro resultado é o seguinte:

Lema 4.5.1. *Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se A admite uma extensão $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1'', \ldots, E_n''; F'')$ separadamente ω^*- ω^*-contínua, então ela é única no sentido de que qualquer outra extensão separadamente ω^*- ω^*-contínua de A coincide com $\widetilde{A}$.*

Demonstração. Suponha que $\widehat{A} \in \mathcal{L}(E_1'', \ldots, E_n''; F'')$ seja uma extensão de A separadamente ω^*- ω^*-contínua. Dados $x_j'' \in E_j''$, $j = 1, \ldots, n$, tomemos redes $(x_{\alpha_j})_{\alpha_j \in \Omega_j}$ em E_j, $j = 1, \ldots, n$, tais que $J_{E_j}(x_{\alpha_j}) \xrightarrow{\omega^*} x_j''$. Como $\widetilde{A}$ e $\widehat{A}$ são separadamente ω^*- ω^*-contínuas,

$$\begin{aligned}
\widehat{A}(x_1'', \ldots, x_n'') &= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_n} \widehat{A}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), \ldots, J_{E_n}(x_{\alpha_n})) \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_n} (\widehat{A} \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n}))(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_n} (J_F \circ A)(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_n} (\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n}))(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) \\
&= \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_n} \widetilde{A}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), \ldots, J_{E_n}(x_{\alpha_n})) \\
&= \widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_n''),
\end{aligned}$$

provando que $\widehat{A} = \widetilde{A}$. □

Observe que se $\sigma = id \in S_n$, isto é, $id(m) = m$, $m = 1, \ldots, n$, então a extensão de Aron-Berner de $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ associada à permutação Id é dada por

$$\overline{A}_{id}(x_1'', \ldots, x_n'')(y') = \big(\overline{x_n''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(y' \circ A), \text{ para todo } y' \in F'. \tag{4.19}$$

Proposição 4.5.2. *Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach, $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\overline{A}_{id}$ a extensão de Aron-Berner (4.19) de A. Para todos $k \in \{1, \ldots, n\}$ e $x_1'' \in E_1'', \ldots, x_{k-1}'' \in E_{k-1}'', x_{k+1} \in E_{k+1}, \ldots, x_n \in E_n$, o operador*

$$\overline{A}_{id}(x_1'', \ldots, x_{k-1}''; \bullet; J_{E_{k+1}}(x_{k+1}), \ldots, J_{E_n}(x_n)) \colon E_k'' \longrightarrow F'' \text{ dado por}$$

$$\overline{A}_{id}(x_1'', \ldots, x_{k-1}''; \bullet; J_{E_{k+1}}(x_{k+1}), \ldots, J_{E_n}(x_n))(x_k'') = \overline{A}_{id}(x_1'', \ldots, x_k'', J_{E_{k+1}}(x_{k+1}), \ldots, J_{E_n}(x_n)),$$

é ω^*- ω^*-contínuo.

Demonstração. Dados $k \in \{1, \ldots, n\}$ e $x_1'' \in E_1'', \ldots, x_{k-1}'' \in E_{k-1}'', x_{k+1} \in E_{k+1}, \ldots, x_n \in E_n$, tome $(x_{\alpha_k}'')_{\alpha_k \in \Omega_k}$ uma rede em E_k'' tal que $x_{\alpha_k}'' \xrightarrow{\omega^*} x_k'' \in E_k''$. Então

$$x_{\alpha_k}''(x_k') \longrightarrow x_k''(x_k'), \text{ para todo } x_k' \in E_k'. \tag{4.20}$$

Chamando $L = \overline{A}_{id}(x_1'', \ldots, x_{k-1}''; \bullet; J_{E_{k+1}}(x_{k+1}), \ldots, J_{E_n}(x_n))(x_k'')(\psi)$, para todo $\psi \in F'$, temos

$$\begin{aligned}
L &= \overline{A}_{id}(x_1'', \ldots, x_k'', J_{E_{k+1}}(x_{k+1}), \ldots, J_{E_n}(x_n))(\psi) \\
&= \big(\overline{J_{E_n}(x_n)}^{id} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{k+1}}(x_{k+1})}^{id} \circ \overline{x_k''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A) \\
&= \overline{J_{E_n}(x_n)}^{id}\Big(\big(\overline{J_{E_{n-1}}(x_{n-1})}^{id} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{k+1}}(x_{k+1})}^{id} \circ \overline{x_k''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= J_{E_n}(x_n)\Big(\Big(\big(\overline{J_{E_{n-1}}(x_{n-1})}^{id} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{k+1}}(x_{k+1})}^{id} \circ \overline{x_k''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)(-;\bullet)\Big)\\
&= \Big(\Big(\big(\overline{J_{E_{n-1}}(x_{n-1})}^{id} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{k+1}}(x_{k+1})}^{id} \circ \overline{x_k''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)(-;\bullet)\Big)(x_n)\\
&= \Big(\big(\overline{J_{E_{n-1}}(x_{n-1})}^{id} \circ \cdots \circ \overline{J_{E_{k+1}}(x_{k+1})}^{id} \circ \overline{x_k''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)(x_n)\\
&\;\vdots\\
&= \Big(\big(\overline{J_{E_{k+1}}(x_{k+1})}^{id} \circ \overline{x_k''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)(x_{k+2}, \ldots, x_n)\\
&= \overline{J_{E_{k+1}}(x_{k+1})}^{id}\Big(\big(\overline{x_k''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)(x_{k+2}, \ldots, x_n)\\
&= J_{E_{k+1}}(x_{k+1})\Big(\Big(\big(\overline{x_k''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)(\bullet; x_{k+2}, \ldots, x_n)\Big)\\
&= \Big(\Big(\big(\overline{x_k''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)(\bullet; x_{k+2}, \ldots, x_n)\Big)(x_{k+1})\\
&= \Big(\big(\overline{x_k''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)(x_{k+1}, \ldots, x_n)\\
&= \overline{x_k''}^{id}\Big(\big(\overline{x_{k-1}''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)(x_{k+1}, \ldots, x_n)\\
&= x_k''\Big(\Big(\big(\overline{x_{k-1}''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)(\bullet; x_{k+1}, \ldots, x_n)\Big),
\end{aligned}
$$

onde a primeira igualdade é óbvia, a segunda decorre da definição de $\overline{A}_\sigma$, a terceira é óbvia, a quarta segue pela Proposição 4.4.1(a), a quinta decorre da definição do mergulho canônico, a sexta igualdade segue de 4.3.3 e assim sucessivamente. Em resumo,

$$
L = x_k''\Big(\Big(\big(\overline{x_{k-1}''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(\psi \circ A)\Big)(\bullet; x_{k+1}, \ldots, x_n)\Big), \text{ para todo } \psi \in F'. \tag{4.21}
$$

Seja $y' \in F'$. Como $\Big(\big(\overline{x_{k-1}''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(y' \circ A)\Big)(\bullet; x_{k+1}, \ldots, x_n) \in E_k'$, de (4.20) e de (4.21), chamando $x = (x_1'', \ldots, x_{k-1}''; \bullet; J_{E_{k+1}}(x_{k+1}), \ldots, J_{E_n}(x_n))$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_{id}(x)(x_k'')(y') &= x_k''\Big(\Big(\big(\overline{x_{k-1}''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(y' \circ A)\Big)(\bullet; x_{k+1}, \ldots, x_n)\Big)\\
&= \lim_{\alpha_k} x_{\alpha_k}''\Big(\Big(\big(\overline{x_{k-1}''}^{id} \circ \cdots \circ \overline{x_1''}^{id}\big)(y' \circ A)\Big)(\bullet; x_{k+1}, \ldots, x_n)\Big)\\
&= \lim_{\alpha_k} \overline{A}_{id}(x_1'', \ldots, x_{k-1}''; \bullet; J_{E_{k+1}}(x_{k+1}), \ldots, J_{E_n}(x_n))(x_{\alpha_k}'')(y')\\
&= \lim_{\alpha_k} \overline{A}_{id}(x)(x_{\alpha_k}'')(y').
\end{aligned}
$$

Isso nos permite concluir que, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\overline{A}_{id}(x)$ é ω^* -ω^*-contínuo. $\square$

Observação 4.5.3. Da demonstração da Proposição 4.5.2 é imediato que o mesmo resultado vale para qualquer outra extensão de Aron-Berner de A com as seguintes modificações na ordem das coordenadas: dados $\sigma \in S_n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ e $x_{\sigma(1)}'' \in E_{\sigma(1)}'', \ldots, x_{\sigma(k-1)}'' \in E_{\sigma(k-1)}''$, $x_{\sigma(k+1)} \in E_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)} \in E_{\sigma(n)}$, as coordenadas de $(x_1'', \ldots; \bullet; \ldots, x_n'')$ são

$$
x_{\sigma(j)}'' = \begin{cases} x_{\sigma(j)}'' & \text{se} \quad j = 1, \ldots, k-1 \\ J_{E_{\sigma(j)}}(x_{\sigma(j)}) & \text{se} \quad j = k+1, \ldots, n, \end{cases}
$$

onde $\bullet$ está na $\sigma(k)$-ésima coordenada.

Teorema 4.5.4. *Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach. Se $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ admite uma extensão $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1'', \ldots, E_n''; F'')$ separadamente ω^*- ω^*-contínua, então todas as extensões de Aron-Berner de A coincidem com $\widetilde{A}$. Em particular, todas as extensões de Aron-Berner de A são separadamente ω^*- ω^*-contínuas.*

Demonstração. Sejam $\sigma \in S_n$ e $\overline{A}_\sigma \in \mathcal{L}(E_1'', \ldots, E_n''; F'')$ a extensão de Aron-Berner de $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ associada à partição σ. Dados $x_k'' \in E_k''$, $k = 1, \ldots, n$, pelo Corolário 4.4.5,

$$\overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots, x_n'')(y') = \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} (y' \circ A)(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) \text{ para todo } y' \in F',$$

onde $(x_{\alpha_k})_{\alpha_k \in \Omega_k}$ é uma rede em E_k tal que $J_{E_k}(x_{\alpha_k}) \xrightarrow{\omega^*} x_k'' \in E_k''$, $k = 1, \ldots, n$. Combinando isso com o fato de $\widetilde{A}$ ser extensão separadamente ω^*- ω^*-contínua de A, obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots, x_n'')(y') &= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} (y' \circ A)(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} y'(A(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})) \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} J_F(A(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}))(y') \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} (J_F \circ A)(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})(y') \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} (\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n}))(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})(y') \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \cdots \lim_{\alpha_{\sigma(1)}} \widetilde{A}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}), \ldots, J_{E_n}(x_{\alpha_n}))(y') \\
&= \widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_n'')(y'),
\end{aligned}$$

para todo $y' \in F'$, o que completa a demonstração. $\square$

O Teorema 4.5.4 sugere mostrar que se uma extensão de Aron-Berner é separadamente ω^*- ω^*-contínua, então todas as extensões de Aron-Berner são iguais e separadamente ω^*- ω^*-contínuas. Entretanto, optamos por um caminho mais curto, provando alguns resultados que estabelecem uma condição suficiente para que um operador multilinear tenha uma única extensão, não necessariamente de Aron-Berner, separadamente ω^*-contínua. Faremos primeiramente o caso de formas multilineares.

Teorema 4.5.5. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach. Se $\mathcal{L}(E_i; E_j') = \mathcal{W}(E_i; E_j')$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, então toda forma $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$ admite uma única extensão $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1'', \ldots, E_n'')$ de A separadamente ω^*-contínua. Mais ainda, $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre o grau de multilinearidade. Para $n = 2$ o resultado segue do Teorema 4.3.10. Suponha que o teorema seja válido para $n = k$, isto é, a hipótese indutiva é que se todo operador linear e contínuo de E_i em E_j', com $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, é fracamente compacto, então toda forma $B \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k)$ admite uma única extensão $\widetilde{B} \in \mathcal{L}(E_1'', \ldots, E_k'')$ separadamente ω^*-contínua e $\|\widetilde{B}\| = \|B\|$.

Provemos que o teorema é válido para $n = k + 1$. Para isso seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{k+1})$. Dados $x_1 \in E_1, \ldots, x_k \in E_k$, defina

$$A_{x_1, \ldots, x_k} \colon E_{k+1} \longrightarrow \mathbb{K},\ A_{x_1, \ldots, x_k}(x_{k+1}) = A(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}).$$

Como A é $(k+1)$-linear, segue que $A_{x_1,\ldots,x_k}$ é linear e de

$$|A_{x_1,\ldots,x_k}(x_{k+1})| = |A(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})| \leq \|A\|\cdot\|x_1\|\cdots\|x_k\|\cdot\|x_{k+1}\|,$$

concluímos que $A_{x_1,\ldots,x_k}$ é contínuo e $\|A_{x_1,\ldots,x_k}\| \leq \|A\|\cdot\|x_1\|\cdots\|x_k\|$. Pelo Lema 4.1.1 existe uma única extensão ω^*-contínua $\overline{A}_{x_1,\ldots,x_k} \in E'''_{k+1}$ de $A_{x_1,\ldots,x_k}$ e $\left\|\overline{A}_{x_1,\ldots,x_k}\right\| = \|A_{x_1,\ldots,x_k}\|$. A n-linearidade de A também garante que se $x_i, y_i \in E_i$, $i = 1,\ldots,k$, e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$A_{x_1,\ldots,x_i+\lambda y_i,\ldots,x_k} = A_{x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_k} + \lambda A_{x_1,\ldots,y_i,\ldots,x_k}. \tag{4.22}$$

Dado $x''_{k+1} \in E''_{k+1}$, defina

$$A_{x''_{k+1}}\colon E_1\times\cdots\times E_k \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ A_{x''_{k+1}}(x_1,\ldots,x_k) = \overline{A}_{x_1,\ldots,x_k}(x''_{k+1}).$$

Note que que se $x_1 \in E_1,\ldots,x_k \in E_k$, $x''_{k+1}, y''_{k+1} \in E''_{k+1}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned} A_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}}(x_1,\ldots,x_k) &= \overline{A}_{x_1,\ldots,x_k}(x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}) = \overline{A}_{x_1,\ldots,x_k}(x''_{k+1}) + \lambda\overline{A}_{x_1,\ldots,x_k}(y''_{k+1}) \\ &= A_{x''_{k+1}}(x_1,\ldots,x_k) + \lambda A_{y''_{k+1}}(x_1,\ldots,x_k) \\ &= (A_{x''_{k+1}} + \lambda A_{y''_{k+1}})(x_1,\ldots,x_k), \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que

$$A_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}} = A_{x''_{k+1}} + \lambda A_{y''_{k+1}}. \tag{4.23}$$

De (4.22) segue que $A_{x''_{k+1}}$ é k-linear e de

$$\begin{aligned} \left|A_{x''_{k+1}}(x_1,\ldots,x_k)\right| &= \left|\overline{A}_{x_1,\ldots,x_k}(x''_{k+1})\right| \leq \left\|\overline{A}_{x_1,\ldots,x_k}\right\|\cdot\|x''_{k+1}\| \\ &= \|A_{x_1,\ldots,x_k}\|\cdot\|x''_{k+1}\| \leq \|A\|\cdot\|x_1\|\cdots\|x_k\|\cdot\|x''_{k+1}\|, \end{aligned}$$

obtemos que $A_{x''_{k+1}}$ é contínuo e $\|A_{x''_{k+1}}\| \leq \|A\|\cdot\|x''_{k+1}\|$. Assim $A_{x''_{k+1}} \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_k)$, e pela hipótese indutiva existe uma única extensão $\widetilde{A}_{x''_{k+1}} \in \mathcal{L}(E''_1,\ldots,E''_k)$ de $A_{x''_{k+1}}$ separadamente ω^*-contínua e $\|\widetilde{A}_{x''_{k+1}}\| = \|A_{x''_{k+1}}\|$. Defina

$$\widetilde{A}\colon E''_1\times\cdots\times E''_{k+1} \longrightarrow \mathbb{K},\ \widetilde{A}(x''_1,\ldots,x''_{k+1}) = \widetilde{A}_{x''_{k+1}}(x''_1,\ldots,x''_k).$$

Provemos que $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E''_1,\ldots,E''_{k+1})$. A linearidade de $\widetilde{A}$ nas primeiras k variáveis segue da k-linearidade de $\widetilde{A}_{x''_{k+1}}$. Sejam $x''_{k+1}, y''_{k+1} \in E''_{k+1}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Definindo $A_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}}$, $A_{x''_{k+1}}$ e $A_{y''_{k+1}}$ como acima, obtemos que $A_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}}, A_{x''_{k+1}}, A_{y''_{k+1}} \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_k)$ e, novamente pela hipótese indutiva, existem únicas extensões $\widetilde{A}_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}}, \widetilde{A}_{x''_{k+1}}, \widetilde{A}_{y''_{k+1}} \in \mathcal{L}(E''_1,\ldots,E''_k)$ de $A_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}}, A_{x''_{k+1}}$ e $A_{y''_{k+1}}$, respectivamente, cada uma delas separadamente ω^*-contínua. Chamando $L = \big(\big(\widetilde{A}_{x''_{k+1}} + \lambda\widetilde{A}_{y''_{k+1}}\big)\circ(J_{E_1},\ldots,J_{E_k})\big)(x_1,\ldots,x_k)$, de (4.23),

$$\begin{aligned} L &= \big(\widetilde{A}_{x''_{k+1}} + \lambda\widetilde{A}_{y''_{k+1}}\big)(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_k}(x_k)) \\ &= \widetilde{A}_{x''_{k+1}}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_k}(x_k)) + \lambda\widetilde{A}_{y''_{k+1}}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_k}(x_k)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \big(\widetilde{A}_{x''_{k+1}} \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_k})\big)(x_1, \ldots, x_k) + \lambda\big(\widetilde{A}_{y''_{k+1}} \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_k})\big)(x_1, \ldots, x_k) \\
&= A_{x''_{k+1}}(x_1, \ldots, x_k) + \lambda A_{y''_{k+1}}(x_1, \ldots, x_k) \\
&= (A_{x''_{k+1}} + \lambda A_{y''_{k+1}})(x_1, \ldots, x_k) = A_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}}(x_1, \ldots, x_k)
\end{aligned}
$$

e assim $\widetilde{A}_{x''_{k+1}} + \lambda \widetilde{A}_{y''_{k+1}}$ estende $A_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}}$. Mais ainda, como $\widetilde{A}_{x''_{k+1}}$ e $\widetilde{A}_{y''_{k+1}}$ são separadamente ω^*-contínuas, então $\widetilde{A}_{x''_{k+1}} + \lambda \widetilde{A}_{y''_{k+1}}$ também é separadamente ω^*-contínua. Sendo o operador $\widetilde{A}_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}}$ a única extensão de $A_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}}$ separadamente ω^*-contínua, segue que

$$
\widetilde{A}_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}} = \widetilde{A}_{x''_{k+1}} + \lambda \widetilde{A}_{y''_{k+1}}. \tag{4.24}
$$

Daí, para todos $x''_1 \in E''_1, \ldots, x''_k \in E''_k$,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A}(x''_1, \ldots, x''_k, x''_{k+1} + \lambda y''_{k+1}) &= \widetilde{A}_{x''_{k+1}+\lambda y''_{k+1}}(x''_1, \ldots, x''_k) \\
&= (\widetilde{A}_{x''_{k+1}} + \lambda \widetilde{A}_{y''_{k+1}})(x''_1, \ldots, x''_k) \\
&= \widetilde{A}_{x''_{k+1}}(x''_1, \ldots, x''_k) + \lambda \widetilde{A}_{y''_{k+1}}(x''_1, \ldots, x''_k) \\
&= \widetilde{A}(x''_1, \ldots, x''_k, x''_{k+1}) + \lambda \widetilde{A}(x''_1, \ldots, x''_k, y''_{k+1}),
\end{aligned}
$$

concluindo a demonstração de que $\widetilde{A}$ é $(k+1)$-linear. Além disso, temos

$$
\begin{aligned}
\left|\widetilde{A}(x''_1, \ldots, x''_{k+1})\right| &= \left|\widetilde{A}_{x''_{k+1}}(x''_1, \ldots, x''_k)\right| = \left\|\widetilde{A}_{x''_{k+1}}\right\| \cdot \|x''_1\| \cdots \|x''_k\| = \left\|A_{x''_{k+1}}\right\| \cdot \|x''_1\| \cdots \|x''_k\| \\
&\leq \|A\| \cdot \|x''_{k+1}\| \cdot \|x''_1\| \cdots \|x''_k\| = \|A\| \cdot \|x''_1\| \cdots \|x''_k\| \cdot \|x''_{k+1}\|,
\end{aligned}
$$

donde concluímos que $\widetilde{A}$ é contínuo e $\left\|\widetilde{A}\right\| \leq \|A\|$. Vejamos que $\widetilde{A}$ estende A: para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_{k+1} \in E_{k+1}$, temos

$$
\begin{aligned}
\big(\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_{k+1}})\big)(x_1, \ldots, x_{k+1}) &= \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), \ldots, J_{E_{k+1}}(x_{k+1})) \\
&= \widetilde{A}_{J_{E_{k+1}}(x_{k+1})}(J_{E_1}(x_1), \ldots, J_{E_k}(x_k)) \\
&= \big(\widetilde{A}_{J_{E_{k+1}}(x_{k+1})} \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_k})\big)(x_1, \ldots, x_k) \\
&= A_{J_{E_{k+1}}(x_{k+1})}(x_1, \ldots, x_k) \\
&= \overline{A}_{x_1,\ldots,x_k}(J_{E_{k+1}}(x_{k+1})) = \big(\overline{A}_{x_1,\ldots,x_k} \circ J_{E_{k+1}}\big)(x_{k+1}) \\
&= A_{x_1,\ldots,x_k}(x_{k+1}) = A(x_1, \ldots, x_{k+1}),
\end{aligned}
$$

donde segue que $\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_{k+1}}) = A$, isto é, $\widetilde{A}$ estende A. Disso também segue, conforme fizemos várias vezes antes, que

$\|A\| \leq \|\widetilde{A}\|$, logo $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.

Observe que $\widetilde{A}$ é separadamente ω^*-contínuo nas k primeiras variáveis pois o operador $\widetilde{A}_{x''_{k+1}}$ é separadamente ω^*-contínua. Vejamos agora que o operador

$$
\widetilde{A}(x''_1, \ldots, x''_k; \bullet) \colon E''_{k+1} \longrightarrow \mathbb{K}
$$

é ω^*-contínuo. Dados $x_2 \in E_2, \ldots, x_k \in E_k$, defina

$$
A_{x_2,\ldots,x_k} \colon E_1 \longrightarrow E'_{k+1},\ A_{x_2,\ldots,x_k}(x_1) = A(x_1, \ldots, x_k; \bullet).
$$

Como A é $(k+1)$-linear, em particular é linear na primeira variável, e portanto $A_{x_2,\ldots,x_k}$ é linear. Também temos

$$\|A_{x_2,\ldots,x_k}(x_1)\| = \|A(x_1,\ldots,x_k;\bullet)\| \leq \|A\|\cdot\|x_1\|\cdots\|x_k\| = \big(\|A\|\cdot\|x_2\|\cdots\|x_k\|\big)\|x_1\|,$$

donde podemos concluir que $A_{x_2,\ldots,x_k}$ é contínuo e $\|A_{x_2,\ldots,x_k}\| \leq \|A\|\cdot\|x_2\|\cdots\|x_k\|$. Por outro lado, dado $x_1'' \in E_1''$, tomemos uma rede $(x_{\alpha_1})_{\alpha_1\in\Omega_1}$ em E_1 tal que $J_{E_1}(x_{\alpha_1}) \xrightarrow{\omega^*} x_1''$. Pelo Teorema 4.1.3, tem-se que $A''_{x_2,\ldots,x_k}$ é ω^*- ω^*-contínuo, logo $A''_{x_2,\ldots,x_k}(J_{E_1}(x_{\alpha_1})) \xrightarrow{\omega^*} A''_{x_2,\ldots,x_k}(x_1'')$. Dessa forma, para todo $x''_{k+1} \in E''_{k+1}$,

$$\begin{aligned}
A''_{x_2,\ldots,x_k}(x_1'')(x''_{k+1}) &= \lim_{\alpha_1} A''_{x_2,\ldots,x_k}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}))(x''_{k+1}) = \lim_{\alpha_1} J_{E_1}(x_{\alpha_1})(A'_{x_2,\ldots,x_k}(x''_{k+1}))\\
&= \lim_{\alpha_1} A'_{x_2,\ldots,x_k}(x''_{k+1})(x_{\alpha_1}) = \lim_{\alpha_1} x''_{k+1}(A_{x_2,\ldots,x_k}(x_{\alpha_1}))\\
&= \lim_{\alpha_1} x''_{k+1}(A_{x_{\alpha_1},x_2,\ldots,x_k}) = \lim_{\alpha_1} \overline{A}_{x_{\alpha_1},x_2,\ldots,x_k}(x''_{k+1})\\
&= \lim_{\alpha_1} A_{x''_{k+1}}(x_{\alpha_1},x_2,\ldots,x_k)\\
&= \lim_{\alpha_1} \big(\widetilde{A}_{x''_{k+1}} \circ (J_{E_1},J_{E_2},\ldots,J_{E_k})\big)(x_{\alpha_1},x_2,\ldots,x_k)\\
&= \lim_{\alpha_1} \widetilde{A}_{x''_{k+1}}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}),J_{E_2}(x_2),\ldots,J_{E_k}(x_k))\\
&= \widetilde{A}_{x''_{k+1}}(x_1'',J_{E_2}(x_2),\ldots,J_{E_k}(x_k)) = \widetilde{A}(x_1'',J_{E_2}(x_2),\ldots,J_{E_k}(x_k),x''_{k+1}),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$A''_{x_2,\ldots,x_k}(x_1'')(x''_{k+1}) = \widetilde{A}(x_1'',J_{E_2}(x_2),\ldots,J_{E_k}(x_k),x''_{k+1}), \text{ para todo } x''_{k+1} \in E''_{k+1}. \quad (4.25)$$

Dados $x_1'' \in E_1'', x_3 \in E_3,\ldots,x_k \in E_k$, defina

$$A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}\colon E_2 \longrightarrow E'_{k+1}\ ,\ A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2)(x_{k+1}) = \widetilde{A}(x_1'',J_{E_2}(x_2),\ldots,J_{E_{k+1}}(x_{k+1})).$$

Como $\widetilde{A}$ é $(k+1)$-linear, em particular é linear na segunda variável, e sendo o mergulho canônico J_{E_2} linear, segue que $A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}$ é linear. Também podemos calcular

$$\begin{aligned}
\big|A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2)(x_{k+1})\big| &= \Big|\widetilde{A}(x_1'',J_{E_2}(x_2),\ldots,J_{E_{k+1}}(x_{k+1}))\Big|\\
&\leq \Big\|\widetilde{A}\Big\|\cdot\|x_1''\|\cdot\|J_{E_2}(x_2)\|\cdots\|J_{E_{k+1}}(x_{k+1})\|\\
&\leq \Big\|\widetilde{A}\Big\|\cdot\|x_1''\|\cdot\|x_2\|\cdots\|x_{k+1}\|\\
&= \big(\|A\|\cdot\|x_1''\|\cdot\|x_3\|\cdots\|x_k\|\big)\|x_2\|\cdot\|x_{k+1}\|
\end{aligned}$$

e concluímos que $A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}$ é contínuo e $\|A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}\| \leq \|A\|\cdot\|x_1''\|\cdot\|x_3\|\cdots\|x_k\|$.

Observe que, para todo $x_2 \in E_2$, $A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2) \in E'_{k+1}$ e então, pelo Lema 4.1.1, existe uma única extensão ω^*-contínua $\overline{A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2)} \in E'''_{k+1}$ de $A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2)$. Dado $x''_{k+1} \in E''_{k+1}$, tome uma rede $(x_{\alpha_{k+1}})_{\alpha_{k+1}\in\Omega_{k+1}}$ em E_{k+1} tal que $J_{E_{k+1}}(x_{\alpha_{k+1}}) \xrightarrow{\omega^*} x''_{k+1}$. Como $A_{x_2,\ldots,x_k}$ é linear e contínuo, a hipótese nos garante que é fracamente compacto.

Daí, pelo Lema 4.3.9, para cada $x_1'' \in E_1''$ tem-se que $A''_{x_2,\ldots,x_k}(x_1'')$ é ω^*-contínuo. Disso e por (4.25), segue que

$$\begin{aligned}
\overline{A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2)}(x_{k+1}'') &= \lim_{\alpha_{k+1}} \overline{A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2)}(J_{E_{k+1}}(x_{\alpha_{k+1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{k+1}} \left(\overline{A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2)} \circ J_{E_{k+1}}\right)(x_{\alpha_{k+1}}) \\
&= \lim_{\alpha_{k+1}} A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2)(x_{\alpha_{k+1}}) \\
&= \lim_{\alpha_{k+1}} \widetilde{A}(x_1'', J_{E_2}(x_2), \ldots, J_{E_{k+1}}(x_{\alpha_{k+1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{k+1}} A''_{x_2,\ldots,x_k}(x_1'')(J_{E_{k+1}}(x_{\alpha_{k+1}})) \\
&= A''_{x_2,\ldots,x_k}(x_1'')(x_{k+1}'') \\
&= \widetilde{A}(x_1'', J_{E_2}(x_2), \ldots, J_{E_k}(x_k), x_{k+1}''),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2)}(x_{k+1}'') = \widetilde{A}(x_1'', J_{E_2}(x_2), \ldots, J_{E_k}(x_k), x_{k+1}''), \text{ para todo } x_2 \in E_2. \tag{4.26}$$

Dado $x_2'' \in E_2''$, tome uma rede $(x_{\alpha_2})_{\alpha_2 \in \Omega_2}$ em E_2 tal que $J_{E_2}(x_{\alpha_2}) \xrightarrow{\omega^*} x_2''$. Pelo Teorema 4.1.3, tem-se que $A''_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}$ é ω^*- ω^*-contínuo, logo $A''_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(J_{E_2}(x_{\alpha_2})) \xrightarrow{\omega^*} A''_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2'')$. Assim, para todo $x_{k+1}'' \in E_{k+1}''$, de (4.26) temos

$$\begin{aligned}
A''_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2'')(x_{k+1}'') &= \lim_{\alpha_2} A''_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(J_{E_2}(x_{\alpha_2}))(x_{k+1}'') \\
&= \lim_{\alpha_2} J_{E_2}(x_{\alpha_2})(A'_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_{k+1}'')) \\
&= \lim_{\alpha_2} A'_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_{k+1}'')(x_{\alpha_2}) \\
&= \lim_{\alpha_2} x_{k+1}''(A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_{\alpha_2})) \\
&= \lim_{\alpha_2} \overline{A_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_{\alpha_2})}(x_{k+1}'') \\
&= \lim_{\alpha_2} \widetilde{A}(x_1'', J_{E_2}(x_{\alpha_2}), \ldots, J_{E_k}(x_k), x_{k+1}'') \\
&= \widetilde{A}(x_1'', x_2'', J_{E_3}(x_3), \ldots, J_{E_k}(x_k), x_{k+1}'')
\end{aligned}$$

e provamos que

$$A''_{x_1'',x_3,\ldots,x_k}(x_2'')(x_{k+1}'') = \widetilde{A}(x_1'', x_2'', J_{E_3}(x_3), \ldots, J_{E_k}(x_k), x_{k+1}'').$$

Repetindo este mesmo procedimento $(k-3)$ vezes, concluímos que

$$A''_{x_1'',\ldots,x_{k-2}'',x_k}(x_{k-1}'')(x_{k+1}'') = \widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_{k-1}'', J_{E_k}(x_k), x_{k+1}''), \tag{4.27}$$

onde o operador $A_{x_1'',\ldots,x_{k-2}'',x_k} \colon E_{k-1} \longrightarrow E_{k+1}'$ é dado por

$$A_{x_1'',\ldots,x_{k-2}'',x_k}(x_{k-1})(x_{k+1}) = \widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_{k-2}'', J_{E_{k-1}}(x_{k-1}), J_{E_k}(x_k), J_{E_{k+1}}(x_{k+1})),$$

com $x_1'' \in E_1'', \ldots, x_{k-2}'' \in E_{k-2}'', x_k \in E_k$ fixados arbitrariamente. Pelo feito acima, segue que $A_{x_1'',\ldots,x_{k-2}'',x_k}$ é linear e contínuo. Finalmente, dados $x_1'' \in E_1'', \ldots, x_{k-1}'' \in E_{k-1}''$, defina

$$A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''} : E_k \longrightarrow E_{k+1}' \ , \ A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}(x_k)(x_{k+1}) = \widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_{k-1}'', J_{E_k}(x_k), J_{E_{k+1}}(x_{k+1})).$$

Mais uma vez pelo calculo acima, sabemos que $A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}$ é linear e contínuo. Observe que, para todo $x_k \in E_k$, $A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}(x_k) \in E_{k+1}'$ e então, pelo Lema 4.1.1, existe uma única extensão ω^*-contínua $\overline{A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}(x_k)} \in E_{k+1}'''$ de $A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}(x_k)$. Dado $x_{k+1}'' \in E_{k+1}''$, tome uma rede $(x_{\alpha_{k+1}})_{\alpha_{k+1} \in \Omega_{k+1}}$ em E_{k+1} tal que $J_{E_{k+1}}(x_{\alpha_{k+1}}) \xrightarrow{\omega^*} x_{k+1}''$. Como $A_{x_1'',\ldots,x_{k-2}'',x_k}$ é linear e contínuo, por hipótese é fracamente compacto e, pelo Lema 4.3.9, para cada $x_{k-1}'' \in E_{k-1}''$ tem-se que $A_{x_1'',\ldots,x_{k-2}'',x_k}''(x_{k-1}'')$ é ω^*-contínuo. Disso e por (4.27), temos

$$\begin{aligned}
\overline{A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}(x_k)}(x_{k+1}'') &= \lim_{\alpha_{k+1}} \overline{A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}(x_k)}(J_{E_{k+1}}(x_{\alpha_{k+1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{k+1}} \left(\overline{A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}(x_k)} \circ J_{E_{k+1}}\right)(x_{\alpha_{k+1}}) \\
&= \lim_{\alpha_{k+1}} A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}(x_k)(x_{\alpha_{k+1}}) \\
&= \lim_{\alpha_{k+1}} \widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_{k-1}'', J_{E_k}(x_k), J_{E_{k+1}}(x_{\alpha_{k+1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{k+1}} A_{x_1'',\ldots,x_{k-2}'',x_k}''(x_{k-1}'')(J_{E_{k+1}}(x_{\alpha_{k+1}})) \\
&= A_{x_1'',\ldots,x_{k-2}'',x_k}''(x_{k-1}'')(x_{k+1}'') \\
&= \widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_{k-1}'', J_{E_k}(x_k), x_{k+1}''),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}(x_k)}(x_{k+1}'') = \widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_{k-1}'', J_{E_k}(x_k), x_{k+1}''). \tag{4.28}$$

Dado $x_k'' \in E_k''$, tome uma rede $(x_{\alpha_k})_{\alpha_k \in \Omega_k}$ em E_k tal que $J_{E_k}(x_{\alpha_k}) \xrightarrow{\omega^*} x_k''$. Pelo Teorema 4.1.3, tem-se que $A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}''$ é ω^*- ω^*-contínuo logo $A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}''(J_{E_k}(x_{\alpha_k})) \xrightarrow{\omega^*} A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}''(x_k'')$. Assim, para todo $x_{k+1}'' \in E_{k+1}''$, de (4.28) temos

$$\begin{aligned}
A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}''(x_k'')(x_{k+1}'') &= \lim_{\alpha_k} A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}''(J_{E_k}(x_{\alpha_k}))(x_{k+1}'') \\
&= \lim_{\alpha_k} J_{E_k}(x_{\alpha_k})(A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}'(x_{k+1}'')) \\
&= \lim_{\alpha_k} A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}'(x_{k+1}'')(x_{\alpha_k}) \\
&= \lim_{\alpha_k} x_{k+1}''(A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}(x_{\alpha_k})) \\
&= \lim_{\alpha_k} \overline{A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}(x_{\alpha_k})}(x_{k+1}'') \\
&= \lim_{\alpha_k} \widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_{k-1}'', J_{E_{\alpha_k}}(x_k), x_{k+1}'') \\
&= \widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_{k-1}'', x_k'', x_{k+1}''),
\end{aligned}$$

provando que

$$A_{x_1'',\ldots,x_{k-1}''}''(x_k'')(x_{k+1}'') = \widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_{k-1}'', x_k'', x_{k+1}''),$$

para todo $x''_{k+1} \in E''_{k+1}$, isto é,

$$A''_{x''_1,\ldots,x''_{k-1}}(x''_k) = \widetilde{A}(x''_1,\ldots,x''_{k-1},x''_k;\bullet).$$

Como $A_{x''_1,\ldots,x''_{k-1}}$ é linear e contínuo, por hipótese é fracamente compacto e, pelo Lema 4.3.9, segue que $A''_{x''_1,\ldots,x''_{k-1}}(x''_k)$ é ω^*-contínuo, portanto $\widetilde{A}(x''_1,\ldots,x''_{k-1},x''_k;\bullet)$ é ω^*-contínuo, como queríamos mostrar. A unicidade segue do Lema 4.5.1. $\square$

A seguir mostraremos o caso vetorial do Teorema 4.5.5 assim como a reciproca desse mesmo teorema.

Teorema 4.5.6. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1,\ldots,E_n$ espaços de Banach. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) $\mathcal{L}(E_i;E'_j) = \mathcal{W}(E_i;E'_j)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $i \neq j$.

(b) *Para todo espaço de Banach F, todo operador $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ admite uma única extensão $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E''_1,\ldots,E''_n;F'')$ de A separadamente ω^*- ω^*-contínua. Mais ainda, $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.*

Demonstração. (a) $\Longrightarrow$ (b) Seja $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Para todo $y' \in F'$, $(y' \circ A) \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n)$ e então, pelo Teorema 4.5.5, existe uma única extensão $\widetilde{y' \circ A} \in \mathcal{L}(E''_1,\ldots,E''_n)$ de $(y' \circ A)$ separadamente ω^*-contínua e $\left\|\widetilde{y' \circ A}\right\| = \|y' \circ A\|$. Defina

$$\widetilde{A}\colon E''_1 \times \cdots \times E''_n \longrightarrow F''\ ,\ \widetilde{A}(x''_1,\ldots,x''_n)(y') = \widetilde{y' \circ A}(x''_1,\ldots,x''_n).$$

Como $\widetilde{y' \circ A}$ é n-linear, segue que $\widetilde{A}$ é n-linear. Além disso

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{A}(x''_1,\ldots,x''_n)(y')\right| &= \left|\widetilde{y' \circ A}(x''_1,\ldots,x''_n)\right| \leq \left\|\widetilde{y' \circ A}\right\| \cdot \|x''_1\| \cdots \|x''_n\| \\ &= \|y' \circ A\| \cdot \|x''_1\| \cdots \|x''_n\| \leq \|y'\| \cdot \|A\| \cdot \|x''_1\| \cdots \|x''_n\| \\ &= \|A\| \cdot \|x''_1\| \cdots \|x''_n\| \cdot \|y'\|,\end{aligned}$$

para todos $x''_j \in E''_j$, $j = 1,\ldots,n$, e $y' \in F'$, donde obtemos que $\widetilde{A}$ é contínuo e $\|\widetilde{A}\| \leq \|A\|$. Vejamos que $\widetilde{A}$ estende A: para todos $x_1 \in E_1,\ldots,x_n \in E_n$ e $y' \in F'$, temos

$$\begin{aligned}&\big(\widetilde{A} \circ (J_{E_1},\ldots,J_{E_n})\big)(x_1,\ldots,x_n)(y') = \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_n}(x_n))(y') \\ &\quad = \widetilde{y' \circ A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_n}(x_n)) = \left(\widetilde{y' \circ A} \circ (J_{E_1},\ldots,J_{E_n})\right)(x_1,\ldots,x_n) \\ &\quad = (y' \circ A)(x_1,\ldots,x_n) = y'(A(x_1,\ldots,x_n)) \\ &\quad = J_F(A(x_1,\ldots,x_n))(y') = (J_F \circ A)(x_1,\ldots,x_n)(y')\end{aligned}$$

e concluímos que $\widetilde{A} \circ (J_{E_1},\ldots,J_{E_n}) = J_F \circ A$, isto é, $\widetilde{A}$ estende A. Mais ainda, de (4.4), segue que

$$\|A(x_1,\ldots,x_n)\| = \sup_{y' \in B_{F'}} \|y'(A(x_1,\ldots,x_n))\| = \sup_{y' \in B_{F'}} \|J_F(A(x_1,\ldots,x_n))(y')\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{y' \in B_{F'}} \|(J_F \circ A)(x_1, \ldots, x_n)(y')\| \\
&= \sup_{y' \in B_{F'}} \left\| \left(\widetilde{A} \circ (J_{E_1}, \ldots, J_{E_n})\right)(x_1, \ldots, x_n)(y') \right\| \\
&= \sup_{y' \in B_{F'}} \left\| \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), \ldots, J_{E_n}(x_n))(y') \right\| = \left\| \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), \ldots, J_{E_n}(x_n)) \right\| \\
&\leq \left\| \widetilde{A} \right\| \cdot \|J_{E_1}(x_1)\| \cdots \|J_{E_n}(x_n)\| = \left\| \widetilde{A} \right\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|.
\end{aligned}
$$

Podemos concluir que $\|A\| \leq \|\widetilde{A}\|$ e portanto $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$. Vejamos que $\widetilde{A}$ é separadamente ω^*- ω^*-contínua: seja $(x''_{\alpha_k})_{\alpha_k \in \Omega_k}$ uma rede em E''_k tal que $x''_{\alpha_k} \xrightarrow{\omega^*} x''_k \in E''_k$, $k = 1, \ldots, n$. Como $\widetilde{y' \circ A}$ é separadamente ω^*-contínua, para todo $y' \in F'$, temos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A}(x''_1, \ldots, x''_k \ldots, x''_n)(y') &= \widetilde{y' \circ A}(x''_1, \ldots, x''_k \ldots, x''_n) \\
&= \lim_{\alpha_k} \widetilde{y' \circ A}(x''_1, \ldots, x''_{k-1}, x''_{\alpha_k}, x''_{k+1} \ldots, x''_n) \\
&= \lim_{\alpha_k} \widetilde{A}(x''_1, \ldots, x''_{k-1}, x''_{\alpha_k}, x''_{k+1} \ldots, x''_n)(y')
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\widetilde{A}(x''_1, \ldots, x''_k \ldots, x''_n) = \omega^*\text{-} \lim_{\alpha_k} \widetilde{A}(x''_1, \ldots, x''_{k-1}, x''_{\alpha_k}, x''_{k+1} \ldots, x''_n),
$$

o que prova que $\widetilde{A}$ é separadamente ω^*- ω^*-contínua. A unicidade segue do Lema 4.5.1.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Seja $T \colon E_i \longrightarrow E'_j$, com $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, um operador linear e contínuo. Suponha que $i < j$ e provemos que T é fracamente compacto. Pelo Lema 4.3.9 basta mostrar que, para cada $x''_i \in E''_i$, o funcional linear contínuo $T''(x''_i) \colon E''_j \longrightarrow \mathbb{K}$ é ω^*-contínuo. Para isso, escolha $x'_k \in E'_k \setminus \{0\}$, $k = 1, \ldots, n$, com $k \neq i, j$, e defina

$$
A \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow \mathbb{K} \ , \ A(x_1 \ldots, x_n) = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} J_{E_k}(x_k)(x'_k) \right) T(x_i)(x_j).
$$

Vejamos que o operador A é n-linear e contínuo:: para todos $x_k \in E_k$, $k = 1, \ldots, n$, $k \neq i, j$, e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$
\begin{aligned}
A(x_1, \ldots, x_k + \lambda y_k, \ldots, x_n) &= \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} J_{E_k}(x_k + \lambda y_k)(x'_k) \right) T(x_i)(x_j) \\
&= \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} (J_{E_k}(x_k) + \lambda J_{E_k}(y_k))(x'_k) \right) T(x_i)(x_j) \\
&= \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} J_{E_k}(x_k)(x'_k) + \lambda J_{E_k}(y_k)(x'_k) \right) T(x_i)(x_j)
\end{aligned}
$$

$$= \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} J_{E_k}(x_k)(x'_k)\right)T(x_i)(x_j) + \lambda\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} J_{E_k}(y_k)(x'_k)\right)T(x_i)(x_j)$$
$$= A(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) + \lambda A(x_1,\ldots,y_k,\ldots,x_n).$$

Isso prova que A é linear nas variáveis x_k, para $k \neq i,j$. Como o operador T e, para todo $x_i \in E_i$, o operador $T(x_i)$ sao lineares, segue que A é n-linear. Mais ainda, para todos $x_1 \in E_1,\ldots,x_n \in E_n$,

$$|A(x_1,\ldots,x_n)| = \left|\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} J_{E_k}(x_k)(x'_k)\right)T(x_i)(x_j)\right| = \left|\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} J_{E_k}(x_k)(x'_k)\right| |T(x_i)(y_j)|$$
$$= \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} |x'_k(x_k)|\right)|T(x_i)(x_j)| \leq \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} \|x'_k\|\cdot\|x_k\|\right)\|T(x_i)\|\cdot\|x_j\|$$
$$\leq \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} \|x'_k\|\cdot\|x_k\|\right)\|T\|\cdot\|x_i\|\cdot\|x_j\| = \left(\|T\|\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} \|x'_k\|\right)\prod_{m=1}^{n}\|x_m\|$$

e portanto A é contínuo e $\|A\| \leq \|T\|\cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} \|x'_k\|$. Por hipótese, existe uma única extensão $\widetilde{A}$ de A separadamente ω^*-contínua. Dados $x''_m \in E''_m$, $m = 1,\ldots,n$, tome redes $(x_{\alpha_m})_{\alpha_m\in E_m}$ em E_m tais que $J_{E_m}(x_{\alpha_m}) \xrightarrow{\omega^*} x''_m$, $m = 1,\ldots,n$. Então $J_{E_m}(x_{\alpha_m})(x'_m) \longrightarrow x''_m(x'_m)$, para todo $x'_m \in E'_m$. Daí,

$$\widetilde{A}(x''_1,\ldots,x''_i,\ldots,x''_j,\ldots,x''_n) = \lim_{\alpha_n}\ldots\widehat{\lim_{\alpha_j}\lim_{\alpha_i}}\ldots\lim_{\alpha_1}\lim_{\alpha_i}\lim_{\alpha_j}\widetilde{A}(J_{E_1}(x_{\alpha_1}),\ldots,J_{E_n}(x_{\alpha_n}))$$
$$= \lim_{\alpha_n}\ldots\widehat{\lim_{\alpha_j}\lim_{\alpha_i}}\ldots\lim_{\alpha_1}\lim_{\alpha_i}\lim_{\alpha_j}\big(\widetilde{A}\circ(J_{E_1},\ldots J_{E_n})\big)(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_n})$$
$$= \lim_{\alpha_n}\ldots\widehat{\lim_{\alpha_j}\lim_{\alpha_i}}\ldots\lim_{\alpha_1}\lim_{\alpha_i}\lim_{\alpha_j}A(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_n})$$
$$= \lim_{\alpha_n}\ldots\widehat{\lim_{\alpha_j}\lim_{\alpha_i}}\ldots\lim_{\alpha_1}\lim_{\alpha_i}\lim_{\alpha_j}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} J_{E_k}(x_{\alpha_k})(x'_k)\right)T(x_{\alpha_i})(x_{\alpha_j})$$
$$= \left(\lim_{\alpha_n}\ldots\widehat{\lim_{\alpha_j}\lim_{\alpha_i}}\ldots\lim_{\alpha_1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} J_{E_k}(x_{\alpha_k})(x'_k)\right)\lim_{\alpha_i}\lim_{\alpha_j}T(x_{\alpha_i})(x_{\alpha_j})$$
$$= \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} x''_k(x'_k)\right)\lim_{\alpha_i}\lim_{\alpha_j}J_{E_j}(x_{\alpha_j})(T(x_{\alpha_i})) = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} x''_k(x'_k)\right)\lim_{\alpha_i}x''_j(T(x_{\alpha_i}))$$
$$= \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} x''_k(x'_k)\right)\lim_{\alpha_i}T'(x''_j)(x_{\alpha_i}) = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} x''_k(x'_k)\right)\lim_{\alpha_i}J_{E_i}(x_{\alpha_i})(T'(x''_j))$$

$$= \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} x_k''(x_k')\right) x_i''(T'(x_j'')) = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} x_k''(x_k')\right) T''(x_i'')(x_j'').$$

Reescrevendo,

$$\widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_i'', \ldots, x_j'', \ldots, x_n'') = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} x_k''(x_k')\right) T''(x_i'')(x_j''),$$

para todos $x_1'' \in E_1'', \ldots, x_n'' \in E_n''$. Como $x_k' \neq 0$, para todo $k = 1, \ldots, n$, $k \neq i, j$, existem $x_k \in E_k$ tais que

$$J_{E_k}(x_k)(x_k') = x_k'(x_k) = 1$$

(pois x_k' é sobrejetor) para todo $k = 1, \ldots, n$, $k \neq i, j$. Assim

$$\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1), \ldots, x_i'', \ldots, x_j'', \ldots, J_{E_n}(x_n)) = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} J_{E_k}(x_k)(x_k')\right) T''(x_i'')(x_j'') = T''(x_i'')(x_j'').$$

Como $\widetilde{A}$ é separadamente ω^*-contínua, segue que $T''(x_i'')$ é ω^*-contínuo, como queríamos mostrar. De modo similar mostra-se que $T\colon E_i \longrightarrow E_j'$, com $j < i$, é fracamente compacto. Na verdade, basta trocar i por j e j por i no argumento acima. □

O seguinte resultado nos será de grande ajuda para mostrar uma das equivalências do corolário a seguir.

Lema 4.5.7. *Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach e seja $\overline{A}_\sigma$ a extensão de Aron-Berner do operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ associada à permutação $\sigma \in S_n$. Então o operador*

$$\overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots ; \bullet ; \ldots, x_n'') \colon E_{\sigma(n)}'' \longrightarrow F'',$$

$$\overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots ; \bullet ; \ldots, x_n'')(x_{\sigma(n)}'') = \overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots, x_{\sigma(n)}'', \ldots, x_n''),$$

onde o ponto $\bullet$ encontra-se na $\sigma(n)$-ésima coordenada, é ω^*- ω^*-contínuo.

Demonstração. Seja $(x_{\alpha_{\sigma(n)}}'')_{\alpha_{\sigma(n)} \in \Omega_{\sigma(n)}}$ uma rede em $E_{\sigma(n)}''$ tal que $x_{\alpha_{\sigma(n)}}'' \xrightarrow{\omega^*} x_{\sigma(n)}'' \in E_{\sigma(n)}''$. Então $x_{\alpha_{\sigma(n)}}''(x_{\sigma(n)}') \longrightarrow x_{\sigma(n)}''(x_{\sigma(n)}')$, para todo $x_{\sigma(n)}' \in E_{\sigma(n)}'$. Por outro lado, para todo $y' \in F'$, $\big(\overline{x_{\sigma(n-1)}''}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{x_{\sigma(1)}''}^{\sigma}\big)(y' \circ A) \in E_{\sigma(n)}'$ e portanto

$$x_{\alpha_{\sigma(n)}}''\Big(\big(\overline{x_{\sigma(n-1)}''}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{x_{\sigma(1)}''}^{\sigma}\big)(y' \circ A)\Big) \longrightarrow x_{\sigma(n)}''\Big(\big(\overline{x_{\sigma(n-1)}''}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{x_{\sigma(1)}''}^{\sigma}\big)(y' \circ A)\Big).$$

Combinando isso com o Teorema 4.4.4, para todo $y' \in F'$, segue que

$$\begin{aligned}
\overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots ; \bullet ; \ldots, x_n'')(x_{\sigma(n)}'')(y') &= \overline{A}_\sigma(x_1'', \ldots, x_{\sigma(n)}'', \ldots, x_n'')(y') \\
&= \big(\overline{x_{\sigma(n)}''}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{x_{\sigma(1)}''}^{\sigma}\big)(y' \circ A) \\
&= x_{\sigma(n)}''\Big(\big(\overline{x_{\sigma(n-1)}''}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{x_{\sigma(1)}''}^{\sigma}\big)(y' \circ A)\Big) \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} x_{\alpha_{\sigma(n)}}''\Big(\big(\overline{x_{\sigma(n-1)}''}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{x_{\sigma(1)}''}^{\sigma}\big)(y' \circ A)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \left(\overline{x''_{\alpha_{\sigma(n)}}}^{\sigma} \circ \cdots \circ \overline{x''_{\sigma(1)}}^{\sigma}\right)(y' \circ A) \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \overline{A}_\sigma(x''_1, \ldots, x''_{\alpha_{\sigma(n)}}, \ldots, x''_n)(y') \\
&= \lim_{\alpha_{\sigma(n)}} \overline{A}_\sigma(x''_1, \ldots; \bullet; \ldots, x''_n)(x''_{\alpha_{\sigma(n)}})(y'),
\end{aligned}$$

provando que $\overline{A}_\sigma(x''_1, \ldots; \bullet; \ldots, x''_n)$ é ω^*- ω^*-contínuo. $\square$

Observe que no Lema 4.5.7 temos até $n!$ operadores ω^*- ω^*contínuos e no Teorema 4.5.6 temos até $n(n-1)$ operadores fracamente compactos de E_i em E'_j, com $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Combinando esses resultados com o Teorema 4.5.4 temos o:

Corolário 4.5.8. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) $\mathcal{L}(E_i; E'_j) = \mathcal{W}(E_i; E'_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

(b) *Para todo espaço de Banach F e para todo operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, todas as extensões de Aron-Berner de A coincidem.*

(c) *Para todo espaço de Banach F e para todo operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, todas as extensões de Aron-Berner de A são separadamente ω^*- ω^*-contínuas.*

(d) *Para todo espaço de Banach F, todo operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ admite uma extensão de Aron-Berner separadamente ω^*- ω^*-contínua.*

(e) *Para todo espaço de Banach F, todo operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ admite uma extensão separadamente ω^*- ω^*-contínua.*

Demonstração. As implicações (c) $\Longrightarrow$ (d) e (d) $\Longrightarrow$ (e) são óbvias.

(a) $\Longrightarrow$ (b) Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Por hipótese, todo operador linear e contínuo de E_i em E'_j, com $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, é fracamente compacto. Pelo Teorema 4.5.6 existe uma única extensão $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E''_1, \ldots, E''_n; F'')$ de A separadamente ω^*- ω^*-contínua e pelo Teorema 4.5.4 todas as extensões de Aron-Berner de A coincidem com $\widetilde{A}$, portanto coincidem entre si.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e seja $\overline{A}_\sigma$ a extensão de Aron-Berner de A associada a uma permutação $\sigma \in S_n$ qualquer. Para mostrar que $\overline{A}_\sigma$ é separadamente ω^*- ω^*-contínua, basta mostrar que, dados $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $x''_1 \in E''_1, \ldots, x''_{j-1} \in E''_{j-1}, x''_{j+1} \in E''_{j+1}, \ldots, x''_n \in E''_n$, o operador

$$\overline{A}_\sigma(x''_1, \ldots, x''_{j-1}; \bullet; x''_{j+1}, \ldots, x''_n) \colon E''_j \longrightarrow F'',$$

é ω^*- ω^*-contínuo. Para isso tome $\rho \in S_n$ tal que $\rho(n) = j$. Pelo Lema 4.5.7, o operador

$$\overline{A}_\rho(x''_1, \ldots, x''_{j-1}; \bullet; x''_{j+1}, \ldots, x''_n) \colon E''_j \longrightarrow F'',$$

é ω^*- ω^*-contínuo e por hipótese todas as extensões de Aron-Berner de A coincidem, logo

$$\overline{A}_\sigma(x''_1, \ldots, x''_{j-1}; \bullet; x''_{j+1}, \ldots, x''_n) = \overline{A}_\rho(x''_1, \ldots, x''_{j-1}; \bullet; x''_{j+1}, \ldots, x''_n).$$

Segue que $\overline{A}_\sigma$ é ω^*- ω^*-contínuo em cada variável, isto é, $\overline{A}_\sigma$ é separadamente ω^*- ω^*-contínua.

(e) $\Longrightarrow$ (a) Seja $T\colon E_i \longrightarrow E'_j$ com $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ um operador linear e contínuo. Suponha que $i < j$ e vejamos que T é fracamente compacto. Pelo Lema 4.3.9 basta mostrar que, para cada $x''_i \in E''_i$, o funcional linear contínuo $T''(x''_i)\colon E''_j \longrightarrow \mathbb{K}$ é ω^*-contínuo. Para isso seja $x'_k \in E'_k \setminus \{0\}$, $k = 1, \ldots, n$, com $k \neq i, j$, e defina

$$A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow \mathbb{K},\ A(x_1 \ldots, x_n) = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} J_{E_k}(x_k)(x'_k) \right) T(x_i)(x_j).$$

Assim, como na demonstração do Teorema 4.5.6, prova-se que $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$. Por hipótese, A admite uma extensão separadamente ω^*- ω^*-contínua. Daí, novamente como foi feito no Teorema 4.5.6, segue que, para cada $x''_i \in E''_i$, $T''(x''_i)$ é ω^*-contínuo, como queríamos mostrar. Do mesmo modo, obtemos que $T\colon E_i \longrightarrow E_j$, com $j < i$, é fracamente compacto. $\square$

4.6 Extensões genuínas

No Teorema 4.3.6 vimos que o biadjunto u'' de um operador linear $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é uma extensão genuína de u, no sentido de que $u''(E'') \subseteq J_F(F)$, se, e somente se, o operador u é fracamente compacto. Mas existem muitos operadores que não são fracamente compactos, por exemplo o operador identidade em um espaço não reflexivo (por exemplo, c_0, ℓ_∞ ou ℓ_1). Em resumo, às vezes, mas nem sempre, o biadjunto é uma extensão genuína de u.

Nesta seção vamos tratar do caso multilinear desta questão, ou seja, estamos interessados em saber quando uma extensão de Aron-Berner de um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é uma extensão genuína no sentido de que sua imagem está contida em $J_F(F)$.

Na seção anterior vimos condições sob as quais as extensões de Aron-Berner são bem comportadas no sentido de serem todas coincidentes. Uma primeira tentativa então é verificar se, sob aquelas condições, as extensões de Aron-Berner são extensões genuínas. Começamos a seção com o seguinte contra-exemplo.

Exemplo 4.6.1. Defina

$$A\colon c_0 \times c_0 \longrightarrow c_0\ ,\ A((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = (x_n y_n)_{n=1}^\infty.$$

É fácil verificar que $A \in \mathcal{L}(c_0, c_0; c_0)$. Na seção seguinte veremos que todo operador de c_0 em $\ell_1 = c'_0$ é compacto, e portanto fracamente compacto. Segue então do Corolário 4.5.8 que as duas extensões de Aron-Berner de A são coincidentes. Vejamos a seguir que, mesmo satisfazendo as condições da seção anterior, as extensões de Aron-Berner de A não são genuínas, ou sejam, não tomam valores em $J_{c_0}(c_0)$.

Dadas $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty = c''_0$, tome $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ e $(y_\beta)_{\beta\in\triangle}$ redes em c_0 tais que $J_{c_0}(x_\alpha) \xrightarrow{\omega^*} (x_n)_{n=1}^\infty$ e $J_{c_0}(y_\beta) \xrightarrow{\omega^*} (y_n)_{n=1}^\infty$. Escrevemos $x_\alpha = (x_{\alpha,n})_{n=1}^\infty$, para todo $\alpha \in \Omega$, e $y_\beta = (y_{\beta,n})_{n=1}^\infty$, para todo $\beta \in \triangle$. Assim, $J_{c_0}((x_{\alpha,n})_{n=1}^\infty) \xrightarrow{\omega^*} (x_n)_{n=1}^\infty$, isto é,

$$J_{c_0}((x_{\alpha,n})_{n=1}^\infty)(x') \longrightarrow (x_n)_{n=1}^\infty(x'),\ \text{para todo } x' \in c'_0 = \ell_1.$$

Para $x' \in \ell_1$, escrevemos $x' = (x'_n)_n^\infty$. Dessa forma, $(x_n)_{n=1}^\infty((x'_n)_n^\infty) = \lim_\alpha (x'_n)_n^\infty((x_{\alpha,n})_{n=1}^\infty)$, o que implica que, para toda $(x'_n)_n^\infty \in \ell_1$,

$$\sum_{n=1}^\infty x_n x'_n = \lim_\alpha \sum_{n=1}^\infty x'_n x_{\alpha,n}. \tag{4.29}$$

De modo análogo,

$$\sum_{n=1}^\infty y_n y'_n = \lim_\beta \sum_{n=1}^\infty y'_n y_{\beta,n}, \text{ para toda } (y'_n)_n^\infty \in \ell_1. \tag{4.30}$$

Dadas $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty = c_0''$ e $(z_n)_{n=1}^\infty \in c_0' = \ell_1$, pelo Corolário 4.2.6 e por (4.29) e (4.30), temos

$$\begin{aligned}
\overline{A}_1((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty)((z_n)_{n=1}^\infty) &= \lim_\beta \lim_\alpha \big((z_n)_{n=1}^\infty \circ A\big)((x_{\alpha,n})_{n=1}^\infty, (y_{\beta,n})_{n=1}^\infty) \\
&= \lim_\beta \lim_\alpha (z_n)_{n=1}^\infty \big(A((x_{\alpha,n})_{n=1}^\infty, (y_{\beta,n})_{n=1}^\infty)\big) \\
&= \lim_\beta \lim_\alpha (z_n)_{n=1}^\infty \big((x_{\alpha,n} y_{\beta,n})_{n=1}^\infty\big) = \lim_\beta \lim_\alpha \sum_{n=1}^\infty (z_n y_{\beta,n}) x_{\alpha,n} \\
&= \lim_\beta \sum_{n=1}^\infty x_n (z_n y_{\beta,n}) = \lim_\beta \sum_{n=1}^\infty (x_n z_n) y_{\beta,n} \\
&= \sum_{n=1}^\infty (y_n x_n) z_n = (x_n y_n)_{n=1}^\infty ((z_n)_{n=1}^\infty)
\end{aligned}$$

e então

$$\overline{A}_1((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = (x_n y_n)_{n=1}^\infty, \text{ para todas } (x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty = c_0''.$$

Tomando $x = (1, 1, \ldots) \in \ell_\infty$, temos

$$\overline{A}_1(x, x) = x \notin J_{c_0}(c_0) = c_0,$$

provando que a extensão de Aron-Berner não é genuína.

Está estabelecido então que as condições da seção anterior, a saber, todo operador de E_i em E'_j, $i \neq j$, é fracamente compacto, não são suficientes. Nos próximos resultados mostraremos que basta exigir também que todo operador de E_i em F seja fracamente compacto para todo i.

Teorema 4.6.2. *Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E_1 \ldots E_n; F)$. Se A tem uma extensão $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1'', \ldots, E_n''; F'')$ separadamente ω^*- ω^*-contínua e $\mathcal{L}(E_i; F) = \mathcal{W}(E_i; F)$, para todo $i = 1, \ldots, n$, então $\widetilde{A}$ toma valores em $J_F(F)$.*

Demonstração. Dados $x_1 \in E_1, \ldots, x_{n-1} \in E_{n-1}$, defina

$$A_{x_1,\ldots,x_{n-1}} \colon E_n \longrightarrow F,\ A_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(x_n) = A(x_1, \ldots, x_n).$$

É claro que $A_{x_1,\ldots,x_{n-1}}$ é linear e de

$$\|A_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(x_n)\| = \|A(x_1,\ldots,x_n)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

podemos concluir que $A_{x_1,\ldots,x_{n-1}}$ é contínuo, portanto fracamente compacto por hipótese. Dado $x_n'' \in E_n''$, tome $(x_{\alpha_n})_{\alpha_n\in\Omega_n}$ uma rede em E_n tal que $J_{E_n}(x_{\alpha_n}) \xrightarrow{\omega^*} x_n''$. Usando que o operador $A''_{x_1,\ldots,x_{n-1}} \colon E_n'' \longrightarrow F''$ é ω^*- ω^*-contínuo (Teorema 4.1.2) e que $\widetilde{A}$ é uma extensão separadamente ω^*- ω^*-contínua de A, para todo $y' \in F'$, temos

$$\begin{aligned}
A''_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(x_n'')(y') &= \lim_{\alpha_n} A''_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(J_{E_n}(x_{\alpha_n}))(y') = \lim_{\alpha_n} J_{E_n}(x_{\alpha_n})(A'_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(y'))\\
&= \lim_{\alpha_n} A'_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(y')(x_{\alpha_n}) = \lim_{\alpha_n} y'(A_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(x_{\alpha_n}))\\
&= \lim_{\alpha_n} y'(A(x_1,\ldots,x_{\alpha_n})) = \lim_{\alpha_n} J_F(A(x_1,\ldots,x_{\alpha_n}))(y')\\
&= \lim_{\alpha_n} (J_F \circ A)(x_1,\ldots,x_{\alpha_n})(y')\\
&= \lim_{\alpha_n} (\widetilde{A} \circ (J_{E_1},\ldots,J_{E_n}))(x_1,\ldots,x_{\alpha_n})(y')\\
&= \lim_{\alpha_n} \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_n}(x_{\alpha_n}))(y')\\
&= \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-1}}(x_{n-1}),x_n'')(y').
\end{aligned}$$

Provamos que, para todos $x_1 \in E_1,\ldots,x_{n-1} \in E_{n-1}, x_n'' \in E_n''$,

$$A''_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(x_n'') = \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-1}}(x_{n-1}),x_n''). \tag{4.31}$$

Da compacidade fraca de $A_{x_1,\ldots,x_{n-1}}$ segue pelo Teorema 4.3.6 que $A''_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(E_n'') \subseteq J_F(F)$, logo $\widetilde{A}(J_{E_1}(E_1)\times\cdots\times J_{E_{n-1}}(E_{n-1})\times E_n'') \subseteq J_F(F)$ por (4.31). Dados $x_1 \in E_1,\ldots,x_{n-2} \in E_{n-2}, x_n'' \in E_n''$, podemos então definir

$$A_{x_1,\ldots,x_{n-2},x_n''} \colon E_{n-1} \longrightarrow F\ ,\ A_{x_1,\ldots,x_{n-2},x_n''}(x_{n-1}) = J_F^{-1}(\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-1}}(x_{n-1}),x_n'')).$$

Como $J_{E_{n-1}}$ e J_F^{-1} são lineares e $\widetilde{A}$ é linear na $(n-1)$-ésima variável, segue que $A_{x_1,\ldots,x_{n-2},x_n''}$ é linear e de

$$\begin{aligned}
\|A_{x_1,\ldots,x_{n-2},x_n''}(x_{n-1})\| &= \left\|J_F^{-1}(\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-1}}(x_{n-1}),x_n''))\right\|\\
&\leq \|J_F^{-1}\| \cdot \left\|\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-1}}(x_{n-1}),x_n'')\right\|\\
&\leq \|\widetilde{A}\| \cdot \|J_{E_1}(x_1)\| \cdots \|J_{E_{n-1}}(x_{n-1})\| \cdot \|x_n''\|\\
&= \|\widetilde{A}\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_{n-1}\| \cdot \|x_n''\|\\
&= \big(\|\widetilde{A}\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_{n-2}\| \cdot \|x_n''\|\big)\|x_{n-1}\|,
\end{aligned}$$

podemos concluir que o operador $A_{x_1,\ldots,x_{n-2},x_n''}$ é continuo. Seja agora $x_{n-1}'' \in E_{n-1}''$ e tome $(x_{\alpha_{n-1}})_{\alpha_{n-1}\in\Omega_{n-1}}$ uma rede em E_{n-1} tal que $J_{E_{n-1}}(x_{\alpha_{n-1}}) \xrightarrow{\omega^*} x_{n-1}''$. Por hipótese o operador $A_{x_1,\ldots,x_{n-2},x_n''}$ é fracamente compacto e, pelo Teorema 4.1.2, o operador $A''_{x_1,\ldots,x_{n-2},x_n''} \colon E_{n-1}'' \longrightarrow F''$ é ω^*- ω^*-contínuo. Combinando isso com (4.31), para todo $y' \in F'$, temos

$$A''_{x_1,\ldots,x_{n-2},x_n''}(x_{n-1}'')(y') = \lim_{\alpha_{n-1}} A''_{x_1,\ldots,x_{n-2},x_n''}(J_{E_{n-1}}(x_{\alpha_{n-1}}))(y')$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\alpha_{n-1}} J_{E_{n-1}}(x_{\alpha_{n-1}})(A'_{x_1,\ldots,x_{n-2},x''_n}(y')) \\
&= \lim_{\alpha_{n-1}} A'_{x_1,\ldots,x_{n-2},x''_n}(y')(x_{\alpha_{n-1}}) \\
&= \lim_{\alpha_{n-1}} y'(A_{x_1,\ldots,x_{n-2},x''_n}(x_{\alpha_{n-1}})) \\
&= \lim_{\alpha_{n-1}} y'(J_F^{-1}(\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-1}}(x_{\alpha_{n-1}}),x''_n)) \\
&= \lim_{\alpha_{n-1}} J_F(J_F^{-1}(\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-1}}(x_{\alpha_{n-1}}),x''_n)))(y') \\
&= \lim_{\alpha_{n-1}} (J_F \circ J_F^{-1})(\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-1}}(x_{\alpha_{n-1}}),x''_n))(y') \\
&= \lim_{\alpha_{n-1}} Id|_{J_F(F)}(\widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-1}}(x_{\alpha_{n-1}}),x''_n))(y') \\
&= \lim_{\alpha_{n-1}} \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-1}}(x_{\alpha_{n-1}}),x''_n)(y') \\
&= \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-2}}(x_{n-2}),x''_{n-1},x''_n))(y').
\end{aligned}
$$

Provamos que, para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_{n-2} \in E_{n-2}, x''_{n-1} \in E''_{n-1}, x''_n \in E''_n$,

$$A''_{x_1,\ldots,x_{n-2},x''_n}(x''_{n-1}) = \widetilde{A}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_{n-2}}(x_{n-2}),x''_{n-1},x''_n).$$

Da compacidade fraca do operador linear contínuo $A_{x_1,\ldots,x_{n-2},x''_n}$, pelo Teorema 4.3.6 segue que $A''_{x_1,\ldots,x_{n-2},x''_n}(E''_{n-1}) \subseteq J_F(F)$ e assim

$$\widetilde{A}(J_{E_1}(E_1) \times \cdots \times J_{E_{n-2}}(E_{n-2}) \times E''_{n-1} \times E''_n) \subseteq J_F(F).$$

Repetindo esse procedimento $(n-2)$ vezes, concluímos que $\widetilde{A}(E''_1 \times \cdots \times E''_n) \subseteq J_F(F)$, isto é, $\widetilde{A}$ toma valores em $J_F(F)$. □

Como consequência do Corolário 4.5.8 e do Teorema 4.6.2, temos o seguinte

Corolário 4.6.3. *Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se $\mathcal{L}(E_i; E'_j) = \mathcal{W}(E_i; E'_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, e $\mathcal{L}(E_i; F) = \mathcal{W}(E_i; F)$, $i = 1, \ldots, n$, então todas as extensões de Aron-Berner de A coincidem e tomam valores em $J_F(F)$.*

4.7 Exemplos e espaços Arens-regulares

Nas seções anteriores provamos vários resultados que têm como hipótese o fato de todo operador linear contínuo de um determinado espaço de Banach a valores em um outro espaço de Banach ser fracamente compacto. Algumas vezes o espaço de chegada deve ser um espaço dual. Daremos nesta seção um grande número de exemplos de espaços E e F tais que todo operador linear contínuo de E em F é fracamente compacto; situações essas nas quais os teoremas das seções anteriores podem ser aplicados.

Começamos com um resultado que, apesar de simples, fornece uma grande quantidade de exemplos.

Proposição 4.7.1. *Sejam E, F espaços de Banach. Se E ou F é reflexivo, então $\mathcal{L}(E; F) = \mathcal{W}(E; F)$ e $\mathcal{L}(E; F') = \mathcal{W}(E; F')$.*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Suponha primeiramente que E seja reflexivo. Por [8, Proposição 6.2.9] sabemos que T é ω- ω-contínuo, e por [8, Teorema 6.4.2] sabemos que a bola unitária fechada B_E é fracamente compacta. Como funções contínuas transformam compactos em compactos, segue que $T(B_E)$ é fracamente compacto em F. Como F é um um espaço de Hausdorff, $T(B_E)$ é fracamente fechado. Sendo T linear e $T(B_E)$ é convexo, por [8, Teorema 6.2.11] segue que $T(B_E)$ é fechado em norma, portanto $\overline{T(B_E)}$ é fracamente compacto em F, provando que T é fracamente compacto.

Suponha agora que F seja reflexivo. De $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, para todo $x \in E$, segue que $\|T(x)\| \leq \|T\|$, para todo $x \in B_E$, e portanto $T(B_E) \subseteq \|T\| B_F$. Como F é reflexivo, novamente por [8, Teorema 6.4.2], temos que $\|T\|B_F$ é fracamente compacto. Como temos

$$\overline{T(B_E)}^{\omega} = \overline{T(B_E)} \subseteq \overline{\|T\|B_F} = \|T\|\overline{B_F} = \|T\|B_F,$$

segue que $\overline{T(B_E)}$ é um subconjunto fracamente fechado do conjunto fracamente compacto $\|T\|B_F$, logo fracamente compacto em F, pois a topologia fraca é de Hausdorff. Segue que T é fracamente compacto.

Isso prova a primeira igualdade e a segunda segue da primeira e do fato de que F é reflexivo se, e somente, se F' é reflexivo. □

A proposição acima nos permite concentrar em exemplos em que $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{W}(E;F)$ com ambos E e F não reflexivos. Também nesse caso temos muitos exemplos, como mostramos até o fim desta seção.

Começamos com um resultado clássico, cuja demonstração pode ser encontada em, por exemplo, [15, Proposição 4.49].

Teorema 4.7.2. (Pitt) *Todo operador linear contínuo de c_0 em ℓ_1 é compacto, e portanto fracamente compacto.*

Sejam $\mathcal{F}$ uma álgebra de subconjuntos do conjunto S e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos do conjunto S. O símbolo χ_E denota a função característica do conjunto E. O espaço $B(\mathcal{A})$ (respectivamente $B(\mathcal{F})$) é o espaço de Banach com a norma do supremo, de todas as funções $f\colon S \longrightarrow \mathbb{K}$ limitadas que podem ser aproximadas uniformemente por funções da forma $\sum_{n=1}^{m} \alpha_n \chi_{E_n}$, onde $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathbb{K}$ e $E_n \in \mathcal{A}$ (respectivamente em $\mathcal{F}$), para todo $n = 1, \ldots, m$.

Seja K um espaço topológico compacto de Hausdorff. Por $C(K)$ denotamos o espaço de Banach das funções $f\colon K \longrightarrow \mathbb{K}$ contínuas com a norma do máximo.

Exemplo 4.7.3. Sejam K um espaço compacto de Hausdorff, $\mathcal{F}$ uma álgebra em S, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em S e E um espaço de Banach. Então:

1. Se E não possui um subespaço isomorfo a c_0, então $\mathcal{L}(B(\mathcal{F});E) = \mathcal{W}(B(\mathcal{F});E)$.

2. Se E não possui um subespaço isomorfo a ℓ_∞, então $\mathcal{L}(B(\mathcal{A});E) = \mathcal{W}(B(\mathcal{A});E)$.

3. Se E'' não possui um subespaço isomorfo a ℓ_∞, então $\mathcal{L}(C(K);E) = \mathcal{W}(C(K);E)$.

4. Se E não possui um subespaço isomorfo a c_0, então $\mathcal{L}(C(K);E) = \mathcal{W}(C(K);E)$.

Para a demonstração, veja [13, Capítulo VI, Corolário 2, Corolário 3, Proposição 4 e Teorema 15], respectivamente.

Como consequência de [21, Corolário 1.4] temos os seguintes exemplos:

Proposição 4.7.4. *Seja E um espaço de Banach que não possui um subespaço isomorfo a ℓ_∞. Então $\mathcal{L}(\ell_\infty; E) = \mathcal{W}(\ell_\infty; E)$.*

Definição 4.7.5. Um espaço topológico X é chamado *Stonean* (ou *extremamente desconexo*) se o fecho de cada conjunto aberto é aberto.

Observe que o espaço topológico X ser Stonean não implica que X seja um espaço de Hausdorff. De fato, tomando $X = \{a, b\}$, $a \neq b$ e $\tau = \{\emptyset, X\}$, é claro que (X, τ) é um espaço topológico Stonean que não é de Hausdorff. Os seguintes resulados valem mesmo para compactos Stonean que não são de Hausdorff.

Teorema 4.7.6. (a) ***(Rosenthal)*** *Se o espaço de Banach E não contém um subespaço isomorfo a ℓ_∞ e K é compacto Stonean, então $\mathcal{L}(C(K); E) = \mathcal{W}(C(K); E)$.*
(b) ***(Grothendieck)*** *Se K é compacto Stonean e E é um espaço de Banach separável, então $\mathcal{L}(C(K); E) = \mathcal{W}(C(K); E)$.*

Demonstração. Para (a) veja [13, Teorema 10] e para (b) veja [13, Corolário 12]. □

Definição 4.7.7. Um espaço de Banach E é dito *Arens-regular* se todo operador linear contínuo de E em E' é fracamente compacto, isto é, se $\mathcal{L}(E; E') = \mathcal{W}(E; E')$.

A Proposição 4.7.1 diz que todo espaço reflexivo é Arens-regular e o Teorema de Pitt diz que c_0 é Arens-regulares.
Como consequência do Corolário 4.5.8 e do Corolário 4.6.3, obtemos os seguintes resultados. Quando $E_1 = \cdots = E_n = E$, escrevemos $\mathcal{L}(^nE; F)$ no lugar de $\mathcal{L}(E, \ldots, E; F)$.

Corolário 4.7.8. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e E um espaço de Banach. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) *E é Arens-regular.*

(b) *Para todo espaço de Banach F e para todo operador $A \in \mathcal{L}(^nE; F)$, todas as extensões de Aron-Berner de A coincidem.*

(c) *Para todo espaço de Banach F e para todo operador $A \in \mathcal{L}(^nE; F)$, todas as extensões de Aron-Berner de A são separadamente ω^*- ω^*-contínuas.*

(d) *Para todo espaço de Banach F, todo operador $A \in \mathcal{L}(^nE; F)$ admite uma extensão de Aron-Berner separadamente ω^*- ω^*-contínua.*

(e) *Para todo espaço de Banach F, todo operador $A \in \mathcal{L}(^nE; F)$ admite uma extensão separadamente ω^*- ω^*-contínua.*

Corolário 4.7.9. *Sejam E, F espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(^nE; F)$. Se E é Arens-regular e $\mathcal{L}(E; F) = \mathcal{W}(E; F)$, então todas as extensões de Aron-Berner de A coincidem e tomam valores em $J_F(F)$.*

Terminaremos esta dissertação com vários exemplos de espaços Arens-regulares.

Seja $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ o disco unitário fechado nos complexos. Por $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ denotamos a *álgebra do disco*, isto é, o espaço de todas as funções contínuas $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ que são analíticas no interior do disco $\mathbb{D}$. A álgebra disco é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\| = \sup_{|z|\leq 1} |f(z)|. \tag{4.32}$$

Por H^∞ denotamos o *espaço de Hardy*, que consiste de todas as funções $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ que são analíticas e limitadas. O espaço de Hardy H^∞ é completo com a norma dada em (4.32).

Exemplo 4.7.10. A álgebra do disco $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ e o espaço de Hardy H^∞ são Arens-regulares. Para as demonstrações, veja [23, Teorema 2.8 e Teorema 2.10].

Seja R uma álgebra sobre os números complexos $\mathbb{C}$. Uma *involução* em R é uma função ${}^*\colon R \longrightarrow R$, $x \longmapsto x^*$, tal que:

(i) $(x^*)^* = x$, para todo $x \in R$.

(ii) $(x+y)^* = x^* + y^*$, para todos $x, y \in R$.

(iii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$, para todos $x \in R$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iv) $(xy)^* = y^* x^*$, para todos $x, y \in R$.

Uma álgebra R munida de uma involução * é chamada de *álgebra involutiva.*

Exemplo 4.7.11. A função $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$, onde $\overline{z}$ é o conjugado de z, é uma involução em $\mathbb{C}$, que assim se torna uma álgebra involutiva.

Uma álgebra involutiva normada é uma álgebra normada R munida de uma involução $x \longmapsto x^*$ tal que $\|x^*\| = \|x\|$, para todo $x \in R$. Se R é um espaço de Banach, então dizemos que R é uma *álgebra de Banach involutiva.* No Exemplo 4.7.11, definindo $\|z\| = |z|$, para todo $z \in \mathbb{C}$, e relembrando que $|z| = |\overline{z}|$, segue que $\mathbb{C}$ é uma álgebra de Banach involutiva.

Definição 4.7.12. Uma *C^*-álgebra* é uma álgebra de Banach involutiva R tal que $\|x\|^2 = \|x^* x\|$, para todo $x \in R$.

As C^*-álgebras formam uma classe central dentro da teoria dos espaços de Banach (veja, por exemplo, [9, Capítulos VIII e IX]).

Exemplo 4.7.13. Toda C^*-álgebra é Arens-regular. Para a demonstração, veja [23, Teorema 2.9].

Definição 4.7.14. O *espaço de James J* consiste de todas as sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ de números reais tais que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ e

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_J := \sup_{n_1,\ldots,n_k} \left((x_{n_1} - x_{n_2})^2 + \cdots + (x_{n_{k-1}} - x_{n_k})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

onde o supremo é tomado sobre os $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tais que $n_1 < \cdots < n_k$.

De [15, Pag. 205] sabemos que o espaço de James J é um espaço de Banach não reflexivo. Na verdade este espaço foi o primeiro exemplo de um espaço de Banach não reflexivo que é isomorfo isometricamente ao seu bidual.

Exemplo 4.7.15. O espaço de James J é Arens-regular. Para a demonstração, veja [16].

As *funções de Rademacher* $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ são definidas por

$$r_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ r_n(t) = sign(\mathrm{sen} 2^{\mathrm{n}} \pi \mathrm{t}),$$

onde *sign* é a função sinal.

Definição 4.7.16. Um espaço de Banach E é de *tipo* 2 se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^2 dt \leq C \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos $x_1, \ldots, x_n \in E$.

Para muitos exemplos de espaços de tipo 2 veja [12, Capítulo 11].

Exemplo 4.7.17. Todo espaço de Banach de tipo 2 é Arens-regular. Para a demonstração, veja [6, Proposition 22(b)].

Referências Bibliográficas

[1] F. Albiac e N. Kalton, *Topics in Banach Spaces Theory,* Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 2005.

[2] R. Arens, *The adjoint of a bilinear operation,* Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 839–848. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1951-0045941-1

[3] R. Aron and P. Berner, *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France **106** (1978), no. 1, 3–24.

[4] R. Aron, D. García and M. Maestre, *On norm attaining polynomials,* Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto univ. **39** (2002), 165–172. https://doi.org/10.2977/prims/1145476151

[5] R. Aron and M. Schottenloher, *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*, J. Functional Analysis **21** (1976), no. 1, 7–30.

[6] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note Mat. **25** (2005/06), no. 1, 69–102.

[7] G. Botelho, P. Galindo and L. Pellegrini, *Uniform approximation on ideals of multilinear mappings,* Math. Scand. **106** (2010), 301–319. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-15139

[8] G. Botelho; D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional,* Sociedade Brasileira de Matemática, 2^a edição, 2015.

[9] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Springer, 1990.

[10] A. Defant and K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals,* North-Holland Math. Studies 174, North-Holland, Amsterdam.

[11] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces,* Springer, 1998.

[12] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge,, Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, 1995. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526138

[13] J. Diestel and J. J. Uhl JR, *Vector Measures,* American Mathematical Society, 1997.

[14] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators I,* Interscience Publishers, INC., New York, 1958.

[15] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos and V. Zizler, *Banach Space Theory, The Basis for Linear and Nonlinear Analysis,* Springer, New York, 2010.

[16] D. Leung, *Banach spaces with property (w),* Glasgow Math. J. **35** (1993), 207–217. https://doi.org/10.1017/S0017089500009769

[17] E. L. Lima, *Espaços métricos,* Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Rio de Janeiro, 1977(Projeto Euclides.)

[18] W. A. Lopes, *O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações,* Dissertação de Mestrado, UFU, 2009.

[19] F. J. Murray, *On complementary manifolds and projections in spaces L_p and ℓ_p,* Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 138–152. https://doi.org/10.2307/1989881

[20] R. S. Phillips, *On linear transformations,* Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516–541 https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1940-0004094-3

[21] H. P. Rosenthal, *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory,* Studia Math. **37** (1971), 13–36. https://doi.org/10.4064/sm-37-1-13-36

[22] A. R. Silva, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição,* Dissertação de Mestrado, UFU, 2010.

[23] A. Ülger, *Weakly compact bilinear forms and Arens regularity,* Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 697–704. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1987-0911036-X

[24] S. Willard, *General Topology,* Dover Publications, 2004.