

Gabriel Esteban Perico Monsalve

Conjunto de valores críticos generalizados e fibrção



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2019

GABRIEL ESTEBAN PERICO MONSALVE

Conjunto de valores críticos generalizados e fibrção

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Teoria das Singularidades.

Orientador: Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Dias.

UBERLÂNDIA - MG
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

P441c Perico Monsalve, Gabriel Esteban, 1992-
2019 Conjunto de valores críticos generalizados e fibração [recurso eletrônico] / Gabriel Esteban Perico Monsalve. - 2019.

Orientador: Luis Renato Gonçalves Dias.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2019.328>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. 2. Geometria diferencial. 3. Teoria da bifurcação. I.
Dias, Luis Renato Gonçalves, 1982- (Orient.) II. Universidade Federal
de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
 Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Gabriel Esteban Perico Monsalve.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11712MAT010.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Teoria das Singularidades.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Conjunto de valores críticos generalizados e fibração.

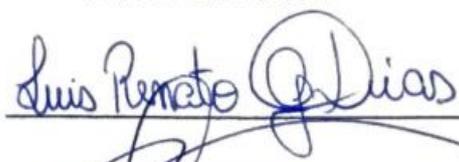
ORIENTADOR: Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Dias.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 19 de fevereiro de 2019, às 14h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Dias
 Universidade Federal de Uberlândia - UFU.



Prof. Dr. Raimundo Nonato Araújo dos Santos
 Universidade de São Paulo, ICMC-USP.



Profa. Dra. Catiana Casonatto
 Universidade Federal de Uberlândia - UFU.



Uberlândia-MG, 19 de fevereiro de 2019.

Ao Valentin.

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer à minha família pelo apoio constante apesar da distância. Também quero agradecer ao departamento de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia. Um agradecimento especial para Luis Renato Gonçalves Dias pela sua imensa paciência e ainda mais pelas nossas conversas que acrescentaram enormemente o meu desenvolvimento nesta dissertação. Agradeço todos os meus colegas do curso de mestrado pelas experiências acadêmicas e interpessoais que compartilhamos. A minha imensa e eterna gratidão para Nubia, Ivan, Letícia, Rejiane e Jessica porque vocês no seu apoio constante foram os meus anjos nos momentos mais difíceis durante esse mestrado.

E finalmente, agradeço o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, que foi essencial para a conclusão do curso de mestrado.

PERICO MONSALVE, G. E. *Conjunto de valores críticos generalizados e fibração*. 2019. - (ix+ 47 p.) Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG, Brasil.

Resumo

Esta dissertação consiste do estudo detalhado das técnicas relacionadas ao estudo do conjunto dos pontos críticos generalizados apresentada por P. Rabier em [32], com foco no estudo de três resultados fundamentais. Seguindo [25], provamos o clássico Teorema de Morse-Sard. Apresentamos a prova do Teorema de Fibração de P. Rabier apresentada por Z. Jelonek em [10]. Por último estudamos dois teoremas do tipo Morse-Sard para o conjunto dos valores críticos generalizados, o primeiro para aplicações semi-algébricas diferenciáveis e o segundo para aplicações polinomiais complexas.

Palavras-chave: Teorema Morse-Sard, Teoremas de Fibração, Conjunto de bifurcação.

PERICO MONSALVE, G. E. *Generalized critical values an fibration*. 2019. (ix+47 pages) M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG, Brazil.

Abstract

This dissertation consists of a detailed study of the techniques belonging to the theory of generalized critical values announced by P. Rabier in [32], focusing on applications of three fundamental theorems. Following [25], we prove the classical Morse-Sard theorem. We present the proof of Rabier's fibration theorem given by Z. Jelonek in [10]. Finally, we study two theorems like Morse-Sard theorem to the generalized critical values, the first one for semi-algebraic differentiable mappings and the second one for complex polynomial mappings.

Keywords: Morse-Sard Theorem, Fibration theorems, Bifurcation set.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 O Teorema de Morse-Sard	3
1.1 Conjuntos semi-algébricos	4
1.2 Teorema de Sard e Teorema de Morse-Sard	7
2 Teorema de Rabier	13
2.1 Função de Rabier	14
2.1.1 Propriedades e equivalências de ν	14
2.1.2 Função de Kuo	19
2.1.3 Número de Gaffney	21
2.2 Prova do Teorema de Rabier	23
2.3 Determinante de Gram	28
3 Teorema de tipo Morse-Sard para valores críticos generalizados	33
3.1 Aplicações semi-algébricas reais	33
3.1.1 Arcos semi-algébricos no infinito	35
3.1.2 Prova do Teorema Kurdyka-Orro-Simon	36
3.2 Aplicações polinomiais complexas	39
3.3 O conjunto J_f de pontos não próprios	43

Introdução

Neste trabalho pretendemos sintetizar algumas técnicas da teoria de valores críticos generalizados de aplicações diferenciáveis inicialmente introduzidas por P. Rabier [32]. Com este objetivo, apresentamos três teoremas principais.

O primeiro teorema é um resultado clássico e de grande importância teórica em Topologia Diferencial. Tal teorema é conhecido como Teorema de Sard ou Teorema de Morse-Sard e será apresentado no nosso Teorema 1.1.

Essencialmente, sob certas hipóteses sobre a diferenciabilidade da aplicação, esse teorema diz que conjunto de *valores críticos* (veja Teorema 1.1) de uma aplicação possui medida nula. Mais precisamente, em [26], Morse demonstrou que se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathcal{C}^n definida em um aberto U de \mathbb{R}^n , então o conjunto de valores críticos de f possui medida nula. Alguns anos depois, em [33], Sard generaliza o Teorema de Morse para aplicações obtendo o seguinte resultado:

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável de classe \mathcal{C}^{m-n+1} definida em um aberto U de \mathbb{R}^m com $m \geq n$. Então o conjunto dos valores críticos de f possui medida nula em \mathbb{R}^n .

O teorema acima é conhecido como Teorema de Sard ou Teorema de Morse-Sard. A prova dada por Sard do resultado acima utiliza um resultado conhecido como o *Lema de decomposição de Morse*. Este lema diz que o conjunto de pontos críticos de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^r pode ser decomposto em subconjuntos A_1, A_2, \dots tais que se $x_n \in A_i$ com $x_n \neq x$ e $x_n \rightarrow x$, então

$$\lim_{x_n \rightarrow x} \frac{|g(x_n) - g(x)|}{|x_n - x|^r} = 0.$$

Nesta dissertação não apresentamos a prova original dada por Sard. Expomos a demonstração dada em [25] por G. Moreira e M. Aparecida.

Uma das principais colaborações de [25] é utilizar o *Lema de seleção da curva* (Lema 1.15) para mostrar que na prova do Teorema de Morse-Sard não é necessário decompor o conjunto de pontos críticos como no Lema de decomposição de Morse (veja Lema 1.18).

O segundo resultado principal que estudamos é o Teorema 2.5, que trata de um caso particular de um resultado provado por P. Rabier em [32]. Este resultado pode ser visto como uma generalização do clássico Teorema de Fibração de C. Ehresmann [5] que diz que

Toda submersão própria é uma fibração trivial local.

Dada uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ de classe \mathcal{C}^2 , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , denotamos por $B(f)$ o conjunto formado pelos pontos de \mathbb{K}^m onde f não é uma fibração trivial, veja Definições 2.1 e 2.2. Em [32], Rabier define o *conjunto dos valores críticos generalizados*, que denotamos por $K(f)$. Então ele prova que $B(f) \subset K(f)$. Observamos que se f é uma submersão própria então $K(f) = \emptyset$, o que fornece uma generalização do Teorema de Ehresmann. Observamos também que o resultado de Rabier é para aplicações definidas sobre variedades de Finsler, muito mais geral que a versão apresentada nesta dissertação.

A prova do Teorema 2.5 que apresentaremos neste trabalho foi apresentada por Jelonek [10]. Essencialmente, a ideia é obter a trivialização de f através do fluxo de um campo de vetores construído a partir do menores da matriz jacobiana de f .

Por último, estudamos um teorema do tipo Morse-Sard para o conjunto dos valores críticos generalizados apresentado por Kurdyka, Orro e Simon [17]. Este resultado possui uma versão para o caso de aplicações semi-algébricas diferenciáveis (Teorema 3.1) e uma versão para o caso de aplicações polinomiais complexas (Teorema 3.2).

Teorema 3.1 mostra que o conjunto dos valores críticos generalizados $K(f)$ é semi-algébrico e de dimensão menor que k para uma aplicação semi-algébrica diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Teorema 3.2 mostra que o conjunto dos valores críticos generalizados $K(f)$ é um conjunto algébrico e de dimensão menor que k para uma aplicação polinomial $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$. Em particular, Teoremas 3.1 e 3.2 provam que o conjunto de valores críticos generalizados possui medida nula para as classes de aplicações acima. Como consequência, segue que $B(f)$ também possui medida nula.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma :no Capítulo 1, apresentamos algumas definições e propriedades de Geometria Semi-Algébrica que serão utilizadas nesta dissertação. Apresentamos também os resultados preliminares para a prova do Teorema 1.1 e no final apresentamos a prova deste teorema. A prova apresentada neste trabalho segue [25] onde os autores utilizam o *Lema de seleção da curva* (Lema 1.15) para provar a desigualdade do Teorema 1.17.

No Capítulo 2, apresentamos a definição da função de Rabier ν que será utilizada para a definição do conjunto de valores críticos generalizados. Apresentamos propriedades de ν e funções equivalentes à ν que serão utilizadas no trabalho (veja definições 2.15, 2.21, 2.24). Baseados em [10] apresentamos a prova do teorema de fibração de Rabier para o caso de aplicações de \mathbb{K}^n em \mathbb{K}^m (Teorema 2.5).

No Capítulo 3, apresentamos algumas definições e propriedades de Geometria Algébrica que serão utilizadas. Apresentamos também os resultados preliminares para a prova dos resultados: Teorema 3.1 e Teorema 3.2. Com estes teoremas se garante que o conjunto $K(f)$ (veja Definição 2.4) é uma boa aproximação de $B(f)$ para estas classes de aplicações.

Capítulo 1

O Teorema de Morse-Sard

O Teorema de Morse-Sard, também conhecido como Teorema de Sard diz o seguinte:

Teorema 1.1. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável de classe \mathcal{C}^{m-n+1} , com $m \geq n$ e U um conjunto aberto em \mathbb{R}^m . Então $f(\text{crit}(f))$ possui medida nula em \mathbb{R}^n .*

No teorema acima, $\text{crit}(f) := \{x \in U \mid \text{posto}(d(f(x))) < n\}$ e $df(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota a diferencial de f em x .

O teorema anterior foi motivado por várias observações intuitivas para depois evoluir à sua versão mais geral apresentada acima. Ele possui várias aplicações e implicações em Topologia Diferencial e outras áreas, como por exemplo o Teorema de Imersão de Whitney provado em [35], que diz que toda variedade diferenciável de dimensão n pode ser mergulhada em \mathbb{R}^{2n} .

Uma das motivações para o Teorema de Morse-Sard é o seguinte resultado bem conhecido: *seja f uma função de classe \mathcal{C}^1 , definida num intervalo conexo $I \subset \mathbb{R}$. Se $df(x) = 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função constante.* Como consequência, surge a pergunta natural se é possível obter o mesmo resultado para funções reais de várias variáveis. Em 1935, Whitney apresenta em [36] um exemplo de uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 e um arco $A \subset \mathbb{R}^2$, tais que $df(x) = 0$, para todo $x \in A$, mas f não é constante sobre A . De fato, neste exemplo $f(A)$ é um conjunto de medida não nula em \mathbb{R} . No mesmo trabalho, Whitney indica a construção de uma aplicação de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^{n-1} e de um arco $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $df(x) = 0$, para todo $x \in A$, mas f não é constante sobre A .

Estudos feitos por Matson Morse e Arthur Sard, levaram a considerar o estudo do problema do ponto de vista da medida do conjunto $f(\text{crit}(f))$ e assumindo hipóteses sobre a classe de diferenciabilidade. Como resultado preliminar ao resultado geral, Morse demonstrou em [26] que *se $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathcal{C}^m definida no aberto U , então o conjunto $f(\text{crit}(f))$ possui medida nula em \mathbb{R}* , para a prova veja Corolário 1.21. Em 1942, Sard [33] enuncia e publica a demonstração do Teorema 1.1.

O Teorema de Morse-Sard traz muitas aplicações em diversas áreas da Matemática. Para mais detalhes das aplicações ou mesmo sobre o Teorema de Morse-Sard indicamos por exemplo [11].

O nosso principal propósito neste capítulo é estudar a demonstração do Teorema de Morse-Sard dada em [25]. A prova original de Sard em [33] utiliza o seguinte próximo resultado, conhecido como *Lema de decomposição de Morse*:

Lema 1.2. *Dado um inteiro positivo r e um conjunto A no conjunto das variáveis x . Então existe uma decomposição A_0, A_1, A_2, \dots de conjuntos limitados com as propriedades:*

- (i) A_0 é enumerável ou finito.
- (ii) *Seja f uma função de classe \mathcal{C}^r . Se o seu conjunto de pontos críticos contém A e se x_1, x_2 são pontos em A_k , então*

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\|x_2 - x_1\|^r} = 0.$$

A demonstração de Sard utiliza o Lema 1.2 para decompor o conjunto dos pontos críticos de f .

Em [25], Moreira e Ruas utilizam o *Lema de seleção da curva* (Lema 1.15) para provar a desigualdade do Teorema 1.17 e com isso provar que a decomposição usada na prova original de Sard não é necessária para a prova do Teorema de Sard (veja Lema 1.18). Mais precisamente eles demonstram que

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \text{crit}(f)}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^r} = 0.$$

Na seção 1.1 apresentamos algumas noções básicas de Geometria Semi-Algébrica. As definições assim como as demonstrações dos resultados podem ser encontrados em [2] e [25]. Na seção 1.2 apresentamos a prova do Teorema de Sard (Corolário 1.21) e do Teorema de Morse-Sard (Teorema 1.1) apresentada em [25] por Moreira e Ruas.

1.1 Conjuntos semi-algébricos

Começamos com a definição de conjuntos semi-algébricos.

Definição 1.3. Dizemos que um subconjunto $W \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto semi-algébrico se $W = U \cap V$, onde $V \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto algébrico e $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto definido por finitas desigualdades de polinômios, isto é,

$$U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) > 0, \dots, g_k(x) > 0\}.$$

Conjuntos semi-algébricos em \mathbb{R}^n possuem um número finito de componentes conexas que são conjuntos semi-algébricos também. Mais precisamente, temos (veja [2], Teorema 2.4.4):

Proposição 1.4. Todo subconjunto semi-algébrico $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma união disjunta de um número finito de conjuntos conexos e semi-algébricos.

A descrição dos conjuntos semi-algébricos está relacionada com alguns conceitos de lógica, desta forma considere a seguinte definição:

Definição 1.5. Uma fórmula de primeira ordem $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ na linguagem dos corpos ordenados com parâmetros em \mathbb{R} é um número finito de conjunções, disjunções, negações, e quantificadores universais ou existenciais, sobre variáveis, onde as fórmulas atômicas que são fórmulas do tipo $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ ou $g(x_1, \dots, x_n) > 0$, onde f e g são polinômios com coeficientes em \mathbb{R} . As variáveis livres da fórmula são aquelas variáveis dos polinômios que aparecem na fórmula e que não estão quantificadas.

Em alguns casos, o próximo resultado é bastante útil para mostrar se um dado conjunto é ou não um conjunto semi-algébrico.

Proposição 1.6. Seja $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula de primeira ordem na linguagem dos corpos ordenados com parâmetros em \mathbb{R} , com variáveis livres x_1, \dots, x_n . Então $W := \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x_1, \dots, x_n)\}$ é um conjunto semi-algébrico de \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.7. Considere o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/25 + y^2/16 < 1\}$. Pela Proposição 1.6 é semi-algébrico.

Temos a seguinte noção de aplicações semi-algébricas:

Definição 1.8. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ dois subconjuntos semi-algébricos. Dizemos que uma aplicação $f : A \rightarrow B$ é semi-algébrica se o seu gráfico é um conjunto semi-algébrico de \mathbb{R}^{n+m} .*

Alguns exemplos de conjuntos semi-algébricos e aplicações semi-algébricas são:

Exemplo 1.9.

- (i) *Se $A, B \subset \mathbb{R}^n$ são conjuntos semi-algébricos, então $\mathbb{R}^n \setminus A$, \bar{A} , $A \cup B$ e $A \cap B$ são conjuntos semi-algébricos.*
- (ii) *Conjuntos algébricos são conjuntos semi-algébricos e aplicações polinomiais $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são aplicações semi-algébricas.*
- (iii) *A função $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

é uma função semi-algébrica.

- (iv) *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto semi-algébrico. Então a função*

$$\text{dist}(x, A) := \inf(\{\|x - y\| : y \in A\})$$

é uma função semi-algébrica.

- (v) *A projeção canônica $\Pi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação semi-algébrica.*

Aplicações semi-algébricas possuem a propriedade de preservar conjuntos semi-algébricos, assim temos:

Proposição 1.10. *Seja $f : A \rightarrow B$ uma aplicação semi-algébrica entre conjuntos semi-algébricos. Se $S \subset A$ é um conjunto semi-algébrico, então $f(S)$ é um conjunto semi-algébrico. Se $T \subset B$ é um conjunto semi-algébrico, então $f^{-1}(T)$ é um conjunto semi-algébrico.*

A seguir, apresentamos uma proposição que garante que a derivada de uma função semi-algébrica diferenciável é ainda uma função semi-algébrica, veja [2] Proposição 2.9.1.

Proposição 1.11. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semi-algébrica e diferenciável no intervalo (a, b) . Então a derivada $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função semi-algébrica.*

Relembramos o conceito de variedade em \mathbb{R}^n , que será útil para definir a noção de dimensão para conjuntos semi-algébricos. Utilizaremos a referência [19].

Definição 1.12. *Seja U_0 um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Dizemos que $\varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma parametrização de classe \mathcal{C}^k e dimensão m se φ é uma imersão de classe \mathcal{C}^k e φ é um homeomorfismo de U_0 sobre $\varphi(U_0)$.*

Definição 1.13. *Uma variedade m -dimensional do \mathbb{R}^n (de classe \mathcal{C}^k) é um subconjunto não vazio $M = M^m \subset \mathbb{R}^n$ no qual todo ponto p possui uma vizinhança aberta $W \subset M$ de modo que existe uma parametrização $\varphi : U_0 \rightarrow W$ de classe \mathcal{C}^k e dimensão m .*

A seguinte definição de [7] apresenta a noção de dimensão para conjuntos semi-algébricos.

Definição 1.14. *Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semi-algébrico. Dizemos que um ponto $x \in V$ é regular de dimensão d , quando x possui uma vizinhança U em \mathbb{R}^n tal que $U \cap V$ é uma variedade de \mathbb{R}^n de dimensão d . Definimos a dimensão de V como sendo a dimensão máxima dos pontos regulares. Para o conjunto vazio, definimos a dimensão como sendo -1 . Denotamos por $\dim(V)$ a dimensão de um conjunto semi-algébrico V .*

Segue o Lema de seleção da curva, cuja demonstração pode ser encontrada em Milnor [23, §3].

Lema 1.15 ([23]). *Se W é um conjunto semi-algébrico de \mathbb{R}^n que contém pontos arbitrariamente próximos da origem. Então existe uma curva semi-algébrica $p : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, analítica em $(0, \epsilon)$ tal que $p(0) = 0$ e $p(t) \in W$, para todo $t \in (0, \epsilon)$.*

Observação 1.16. *Uma curva analítica, como a curva dada no Lema 1.15, pode ser escrita na origem como*

$$p(t) = a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + a_{k+2} t^{k+2} \dots$$

(veja Lema 3.3 [23]) onde a_k é o primeiro termo não nulo na expansão de Taylor de p em 0. Assim, para $\alpha > 0$, consideremos a curva $\gamma(\alpha) = p(\sqrt[k]{\alpha}) = a_k \alpha + a_{k+1} \alpha^{\frac{k+1}{k}} + a_{k+2} \alpha^{\frac{k+2}{k}} \dots$. Podemos reparametrizar esta curva pelo comprimento de arco como segue. Primeiro consideremos:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\alpha)\| d\alpha.$$

Temos que $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$. Pelo Teorema da Função Inversa, podemos considerar $g(t) = s^{-1}(t)$. Portanto, obtemos a curva $\gamma(\alpha) = g(\alpha) a_k + g(\alpha)^{\frac{k+1}{k}} a_{k+1} + g(\alpha)^{\frac{k+2}{k}} a_{k+2} t^{k+2} \dots$. Temos que $s(0) = 0$ e assim $g(0) = 0$. Logo,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{g(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g'(\alpha) = \frac{1}{\|a_k\|}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| \frac{\gamma(\alpha)}{\alpha} \right\| &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| \frac{g(\alpha)}{\alpha} a_k + \frac{g(\alpha)^{\frac{k+1}{k}}}{\alpha} a_{k+1} + \dots \right\| \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\|a_k\|} a_k + \frac{g(\alpha)}{\alpha} g(\alpha)^{1/k} a_{k+1} + \dots \right\| \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

O próximo teorema foi apresentado em [3, Lemma 2], com o propósito de provar a recíproca de um teorema de Kuiper-Kuo (veja [13] e [15]). A demonstração apresentada em [3] utiliza o Lema 1.15, mas não considerando o conjunto W como semi-algébrico mas considerando W como um conjunto descrito por finitas desigualdades de funções analíticas. Seguindo [25], apresentamos a prova do próximo resultado utilizando o Lema de seleção da curva apresentado acima.

Teorema 1.17. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial tal que $f(0) = 0$. Dada uma contante $C > 1$, existe uma vizinhança $W \subset U$ da origem em \mathbb{R}^n tal que*

$$|f(x)| \leq C|x||d(f(x))|, \forall x \in W. \tag{1.2}$$

Demonstração. Por contradição, suponha que a origem está no fecho do seguinte conjunto

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > C|x||d(f(x))|\}.$$

Como o conjunto A pode ser escrito como interseção finita de conjuntos expressos com fórmulas de primeira ordem, segue que A é um conjunto semi-algébrico (veja Proposição 1.6).

Pelo Lema 1.15 e Observação 1.16, temos que existe uma curva $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que γ é de classe \mathcal{C}^1 no intervalo $(0, \epsilon)$ e satisfaz que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(t) \in A$ e $|\gamma'(t)| = 1$, $\forall t \in (0, \epsilon)$. Considere $\phi = f \circ \gamma$. Pela hipótese de contradição aplicada à ϕ , temos que:

$$|f(\gamma(t))| > C|\gamma(t)||\phi'(t)|,$$

que implica

$$\frac{|t|}{C|\gamma(t)|} |f(\gamma(t))| > |t||\phi'(t)|. \quad (1.3)$$

Da observação 1.16 temos que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{|\gamma(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|\gamma'(t)|} = 1$, que segue que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{C|\gamma(t)|} = \frac{1}{C}$. Este limite e pelo fato que $C > 1$, temos que existem $\delta \in (0, 1)$ e $\rho \in [\frac{1}{C}, 1)$ tais que se $t \in (0, \delta]$, então $\rho > \frac{|t|}{C|\gamma(t)|}$. Portanto, nestas condições, obtemos de (1.3) que:

$$\rho|\phi(t)| \geq |t||\phi'(t)|, \forall t \in (0, \delta]. \quad (1.4)$$

Defina $g(t) = \ln |\phi(t)|$, para todo $t \in (0, \delta]$. Temos que propriedades de logaritmo implicam:

$$g(t) = \frac{1}{2} \ln |\phi(t)|^2 = \frac{1}{2} \ln(\langle \phi(t), \phi(t) \rangle).$$

Diferenciando a função g , obtemos $g'(t) = \frac{\langle \phi'(t), \phi(t) \rangle}{|\phi(t)|^2}$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, esta última igualdade e a desigualdade de (1.4) implicam que:

$$|g'(t)| \leq \frac{\rho}{t}, \forall t \in (0, \delta]. \quad (1.5)$$

Integrando de s até δ a função $g'(t)$, com $s \in (0, \delta]$, e usando a desigualdade (1.5) obtemos:

$$\ln \left(\frac{|\phi(\delta)|}{|\phi(s)|} \right) = g(\delta) - g(s) \leq \rho \ln \left(\frac{\delta}{s} \right) = \ln \left(\left(\frac{\delta}{s} \right)^\rho \right). \quad (1.6)$$

Como $\ln(t)$ é uma função crescente, temos que

$$|\phi(s)| \geq \left(\frac{s}{\delta} \right)^\rho |\phi(\delta)|.$$

Mas, usando L'Hospital e que $0 < \rho < 1$, obtemos que $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi(s)}{s^\rho} = 0$, o que contradiz a última desigualdade acima e que termina nossa prova. \square

1.2 Teorema de Sard e Teorema de Morse-Sard

Nesta seção apresentamos a demonstração do Teorema de Morse (Corolário 1.21) e do Teorema de Morse-Sard (Teorema 1.1) seguindo a prova de [25]. Um resultado chave na demonstração destes teoremas que iremos apresentar é o próximo resultado, Lema 1.18, que mostra que na prova original do Teorema de Morse-Sard não é necessário o lema de decomposição de Morse.

Lema 1.18. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^r , então*

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \text{crit}(f)}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^r} = 0,$$

para todo $x \in \overline{\text{crit}(f)} \cap U$, e como antes $\text{crit}(f) := \{z \in U \mid \text{posto}(df(z)) < 1\}$.

Demonstração. Observamos primeiramente que para funções $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, temos que $\text{crit}(f) = \{z \in U \mid df(z) = 0\}$.

Por contradição, suponha que existam uma sequência $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{crit}(f)$ e um número $\epsilon > 0$ tais que

$$|f(y_k) - f(x)| > \epsilon |y_k - x|^r \text{ e } |d(f(y_k))| = 0, \quad (1.7)$$

para todo k . Seja

$$\tilde{f}(y) = \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (y - x)^k,$$

o polinômio de Taylor de grau r de f no ponto x . Portanto, $f(y) = \tilde{f}(y) + o(|y - x|^r)$.

Para k suficientemente grande, obtemos:

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(y_k) - \tilde{f}(x)| &= |f(y_k) - f(x) - o(|y_k - x|^r)| \\ &\geq ||f(y_k) - f(x)| - |o(|y_k - x|^r)|| \\ &\geq |f(y_k) - f(x)| - |o(|y_k - x|^r)| \\ &\geq \epsilon |y_k - x|^r - \epsilon/2 |y_k - x|^r \\ &\geq \frac{\epsilon}{2} \cdot |y_k - x|^r. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Para obtermos a penúltima desigualdade acima, utilizamos (1.7) e que $\lim_{y \rightarrow x} \frac{o(|y-x|^r)}{|y-x|^r} = 0$ (propriedade de polinômio de Taylor).

Por outro lado, temos que $df(y) = d\tilde{f}(y) + o(|y - x|^{r-1})$. Como $df(y_k) = 0$, para todo k , temos a seguinte igualdade:

$$d\tilde{f}(y_k) = -o(|y_k - x|^{r-1}). \quad (1.9)$$

Agora, considere a função polinomial $h(z) = \tilde{f}(x - z) - \tilde{f}(x)$. Temos que $h(0) = 0$ e assim, pelo Teorema 1.17 para $C = 2$, segue que para k suficientemente grande vale a seguinte desigualdade:

$$|h(z_k)| \leq 2|z_k| |dh(z_k)|,$$

onde $z_k := x - y_k$. Ou seja, $|\tilde{f}(y_k) - \tilde{f}(x)| \leq 2|y_k - x| |d\tilde{f}(y_k)|$. Esta última desigualdade implica:

$$\frac{|\tilde{f}(y_k) - \tilde{f}(x)|}{|y_k - x|^r} \leq 2 \frac{|d\tilde{f}(y_k)|}{|y_k - x|^{r-1}}. \quad (1.10)$$

Usando (1.9) e propriedade de polinômio de Taylor, obtemos

$$\lim_{y_k \rightarrow x} 2 \frac{|d\tilde{f}(y_k)|}{|y_k - x|^{r-1}} = \lim_{y_k \rightarrow x} 2 \frac{|o(|y_k - x|^{r-1})|}{|y_k - x|^{r-1}} = 0.$$

Esta última desigualdade e (1.10), mostram que

$$\lim_{y_k \rightarrow x} \frac{|\tilde{f}(y_k) - \tilde{f}(x)|}{|y_k - x|^r} = 0,$$

o que é uma contradição com (1.8). Portanto, a prova segue. \square

O Teorema 1.20 e o Corolário 1.21 são casos particulares do Teorema de Morse-Sard (Teorema 1.1) e também passos intermediários para o teorema geral. Para a demonstração destes resultados, faremos uso do Lema 1.19, conhecido como Lema de cobertura de Vitali.

Lema 1.19. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto com volume $a < +\infty$ e $X \subset U$ tal que, para todo $x \in X$, associamos a bola $B(x, \delta_x) \subset U$. Então existe um subconjunto enumerável $\{x_i\} \subset X$ tal que $X \subset \cup B(x_i, \delta_{x_i})$ e $\sum_i \text{vol}(B(x_i, \delta_{x_i})) \leq 3^m a$.*

Demonstração. Escolhemos de forma recursiva para cada $i \geq 1$ o ponto $x_i \in X$ tal que

$$B(x_i, \delta_{x_i}/3) \cap \cup_{j < i} B(x_j, \delta_{x_j}/3) = \emptyset,$$

e

$$\delta_{x_i} > \frac{1}{2} \sup\{\delta_x > 0 \mid B(x, \delta_x/3) \cap \cup_{j < i} B(x_j, \delta_{x_j}/3) = \emptyset\}.$$

No caso em que o conjunto $\{x \in X \mid B(x, \delta_x/3) \cap \cup_{j < s} B(x_j, \delta_{x_j}/3) = \emptyset\}$, para algum $s \geq 2$, a construção anterior é finita. Caso contrário, temos uma construção enumerável.

Segue da construção acima que as bolas $B(x_i, \delta_{x_i}/3)$ são disjuntas. Portanto

$$\sum_i \text{vol}(B(x_i, \delta_{x_i}/3)) < a,$$

o que implica

$$\sum_i \text{vol}(B(x_i, \delta_{x_i})) < 3^m a.$$

Para terminar a prova, provaremos que $X \subset \cup_i B(x_i, \delta_{x_i})$. Dado $x \in X$, é necessário que $B(x, \delta_x/3) \cap \cup_i B(x_i, \delta_{x_i}/3) \neq \emptyset$. Caso contrário, pela construção, x estaria incluído no conjunto $\{x_i\}$. Assim, suponha que i_0 é o primeiro índice tal que $B(x, \delta_x/3) \cap B(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}}/3) \neq \emptyset$. Pela escolha de $\delta_{x_{i_0}}$ na construção acima, temos que $\delta_{x_{i_0}} > \frac{\delta_x}{2}$. Logo,

$$|x - x_{i_0}| \leq \frac{\delta_x}{3} + \frac{\delta_{x_{i_0}}}{3} < \frac{2\delta_{x_{i_0}}}{3} + \frac{\delta_{x_{i_0}}}{3} = \delta_{x_{i_0}},$$

o que mostra que $x \in B(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}})$. □

A seguir provemos uma versão particular do Teorema 1.1.

Teorema 1.20. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^p e $m \geq n$. Se $p \geq m/n$, então $f(C(f))$ tem medida nula em \mathbb{R}^n , onde $C(f) := \{x \in U \mid d(f(x)) = 0\}$.*

Demonstração. Como U pode ser descrito como uma união enumerável de conjuntos limitados e como união enumerável de conjuntos de medida nula é também de medida nula, podemos supor sem perda de generalidade que $\text{vol}(U) < +\infty$. Para simplificar notações, denotemos por c_k o volume da bola unitária em \mathbb{R}^k , ou seja, $c_k := \text{vol}(B(0, 1))$. Desta forma, o volume da bola de raio r em \mathbb{R}^k é dado por $c_k r^k$.

Para cada componente de f , apliquemos o Lema 1.18 para obtermos que

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in C(f)}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^p} = 0, \forall x \in \overline{C(f)} \cap U.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, temos que para todo $x \in \overline{C(f)}$, existe $\delta_x \in (0, 1)$ tal que se $y \in C(f) \cap B(x, \delta_x)$, então

$$|f(y) - f(x)| < \left(\frac{\epsilon \cdot c_m}{c_n \cdot 3^m \cdot \text{vol}(U)} \right)^{\frac{1}{n}} |y - x|^p. \quad (1.11)$$

A desigualdade (1.11) significa que $f(C(f) \cap B(x, \delta_x)) \subset D_x$, onde

$$D_x := B \left(f(x), \left(\frac{\epsilon \cdot c_m}{c_n \cdot 3^m \cdot \text{vol}(U)} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \delta_x^p \right).$$

Temos que o volume de D_x é finito. Como $p \geq \frac{m}{n}$ e $\delta_x < 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{vol}(D_x) &= c_n \left[\left(\frac{\epsilon \cdot c_m}{c_n \cdot 3^m \cdot \text{vol}(U)} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \delta_x^p \right]^n \\ &\leq \frac{\epsilon \cdot c_m}{3^m \cdot \text{vol}(U)} \cdot \delta_x^m \\ &= \frac{\epsilon}{3^m \cdot \text{vol}(U)} \cdot \text{vol}(B(x, \delta_x)). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Pelo Lema 1.19, segue que existe um conjunto enumerável $\{x_i\} \subset C(f)$ tal que $C(f) \subset \cup_i B(x_i, \delta_{x_i})$ e $\sum_i \text{vol}(B(x_i, \delta_{x_i})) < 3^m \cdot \text{vol}(U)$. Estes implicam

$$f(C(f)) = \cup_i f(C(f) \cap B(x_i, \delta_{x_i})) \subset \cup_i D_{x_i},$$

e junto com a desigualdade (1.12), obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_i \text{vol}(D_{x_i}) &\leq \frac{\epsilon}{3^m \cdot \text{vol}(U)} \sum_i \text{vol}(B(x_i, \delta_{x_i})) \\ &< \frac{\epsilon}{3^m \cdot \text{vol}(U)} \cdot 3^m \cdot \text{vol}(U) \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que dado qualquer $\epsilon > 0$, temos que $f(C(f))$ está contido em um conjunto de medida menor que ϵ . Isto mostra que $f(C(f))$ possui medida nula, o que termina a prova \square

Observamos que se $n = 1$ no teorema anterior, então $\text{crit}(f) = C(f)$. Logo, o Teorema 1.20 implica diretamente no Teorema 1.1 (Teorema de Morse-Sard) para $n = 1$. Mais precisamente, temos:

Corolário 1.21. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^m . Então $f(\text{crit}(f))$ é um conjunto de medida nula em \mathbb{R} .*

O corolário acima é conhecido como o Teorema de Morse. Vamos mostrar que ele implica o Teorema de Morse-Sard (Teorema 1.1). Seguindo [25], provamos inicialmente o próximo lema que é um caso particular do Teorema de Fubini.

Lema 1.22. *Seja $K \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ um conjunto compacto. Suponha que para todo $x \in \mathbb{R}^p$, o conjunto $K_x := \{y \in \mathbb{R}^{n-p} \mid (x, y) \in K\}$ possui medida nula em \mathbb{R}^{n-p} . Então K é um conjunto de medida nula em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Como K é compacto em \mathbb{R}^n , existe $R > 0$ tal que $K \subset B(0, R) \times \mathbb{R}^{n-p}$, onde $B(0, R) \subset \mathbb{R}^p$ denota a bola com centro na origem e raio R .

Pela hipótese, para todo $x \in B(0, R)$, o conjunto K_x possui medida nula. Logo, dado $\epsilon > 0$, existem bolas $B(y_i, r_i) \subset \mathbb{R}^{n-p}$ tais que $K_x \subset \cup_i B(y_i, r_i)$ e

$$\sum_i \text{vol}(B(y_i, r_i)) < \epsilon.$$

Afirmamos que como K é compacto existe $\delta_x > 0$ tal que

$$K \cap (B(x, \delta_x) \times \mathbb{R}^{n-p}) \subset \cup_i B(x, \delta_x) \times B(y_i, r_i). \quad (1.13)$$

De fato, se supormos que não existe tal δ_x , podemos construir uma sequência $(u_n, v_n) \in K$ com $\lim u_n = x$ e $v_n \notin \cup_i B(y_i, r_i)$. Como K é compacto, podemos tomar uma subsequência convergente com $\lim v_n = v \in K$. Como $v_n \notin \cup_i B(y_i, r_i)$, segue que $v \notin \cup_i B(y_i, r_i)$. Desta forma, $\lim(u_n, v_n) = (x, v) \in K$ e $v \in K_x \setminus \cup_i B(y_i, r_i)$, o que é uma contradição com o fato de que $\cup_i B(y_i, r_i)$ é uma cobertura de K_x . Portanto, a existência de δ_x satisfazendo (1.13) está assegurada.

Continuando com a demonstração, usamos as construções anteriores e o Lema 1.19 para obtermos uma cobertura de $B(0, R)$ com bolas $B(x_j, \delta_{x_j})$ satisfazendo $\sum_i \text{vol}(B(x_j, \delta_{x_j})) < 3^n \cdot \text{vol}(B(0, R))$ e de modo que para cada x_j temos uma cobertura de K_{x_j} com bolas $B(y_{ij}, r_{ij})$ satisfazendo $\sum_j \text{vol}(B(y_{ij}, r_{ij})) < \epsilon$. Além destes, temos ainda que (1.13) é satisfeita para todo j , ou seja:

$$K \cap (B(x_j, \delta_{x_j}) \times \mathbb{R}^{n-p}) \subset \cup_i B(x_j, \delta_{x_j}) \times B(y_{ij}, r_{ij}).$$

Portanto, $\cup_{i,j} B(x_j, \delta_{x_j}) \times B(y_{ij}, r_{ij})$ é uma cobertura de K e

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \text{vol}(B(x_j, \delta_{x_j}) \times B(y_{ij}, r_{ij})) &< \epsilon \sum_j \text{vol}(B(x_j, \delta_{x_j})) \\ &< 3^n \cdot \epsilon \cdot \text{vol}(B(0, R)). \end{aligned}$$

Escolhendo ϵ tão pequeno como desejarmos, obtemos que K é um conjunto de medida nula em \mathbb{R}^n . \square

A seguir apresentamos a demonstração do Teorema 1.1

Demonstração Teorema 1.1. Considere $C_p := \{x \in U \mid \text{posto}(df(x)) = p\}$. Como $\text{crit}(f) = \cup_{p=0}^{n-1} C_p$, segue que para mostrarmos que $f(\text{crit}(f))$ possui medida nula é suficiente provarmos que $f(C_p)$ possui medida nula para $p \leq n-1$. Como U pode ser descrito como uma união enumerável de conjuntos compactos, podemos supor sem perda de generalidade que C_p e $f(C_p)$ são conjuntos compactos. Desta forma, mostraremos que, para todo $x \in C_p$, existe $\delta_x > 0$ tal que $f(B(x, \delta_x) \cap C_p)$ é um conjunto de medida nula.

Como $\text{posto}(df(x)) = p$, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^m$ de x tal que $\text{posto}(df(y)) \geq p$, para todo $y \in V$ e, através de uma mudança de coordenadas adequada, podemos escrever $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ de modo que $\pi_1 \circ df(y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ seja uma transformação linear sobrejetora para todo $y \in V$. Aqui, $\pi_1 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}^p$ denota a projeção canônica sobre a primeira coordenada.

Portanto, a restrição $\pi_1 \circ f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma submersão. Pelo teorema da função implícita, existe um difeomorfismo local $h : \widetilde{U}_1 \times \widetilde{U}_2 \rightarrow \widetilde{V}$, de classe \mathcal{C}^{m-n+1} , sendo $\widetilde{U}_1 \subset \mathbb{R}^p$, $\widetilde{U}_2 \subset \mathbb{R}^{m-p}$ e $\widetilde{V} \subset V \subset \mathbb{R}^m$ abertos e de modo que h satisfaz $(\pi_1 \circ f) \circ h(u, v) \equiv u$. Portanto, temos que

$$f \circ h(u, v) = (u, \widetilde{f}(u, v)). \quad (1.14)$$

Como h é um difeomorfismo, podemos supor sem perda de generalidade que f é como (1.14). Assim,

$$(u, v) \in C_p \Leftrightarrow d_v \widetilde{f}(u, v) = 0.$$

Dado $(u_0, v_0) \in C_p$, consideramos $F_{u_0} := \{(u_0, v) \mid v \in \mathbb{R}^{m-p}\}$. Logo,

$$f(F_{u_0} \cap C_p) \subset \{u_0\} \times \tilde{f}_{u_0}(N),$$

onde $\tilde{f}_{u_0}(v) := \tilde{f}(u_0, v)$ e $N = \{v \in \tilde{U}_2 \mid d\tilde{f}_{u_0}(v) = 0\}$.

Temos que $\tilde{f}_{u_0} : \tilde{U}_2 \subset \mathbb{R}^{m-p} \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ é de classe C^{m-n+1} . Além disto, como $n-1 \geq p$, temos que $m-n \geq \frac{m-n}{n-p}$, o que implica que $m-n+1 \geq \frac{m-p}{n-p}$. Portanto, podemos aplicar Teorema 1.20 para concluir que $\tilde{f}_{u_0}(N)$ possui medida nula em \mathbb{R}^{n-p} , $\forall u_0 \in \tilde{U}_1$. Utilizando Lema 1.22, obtemos que $f(C_p)$ tem medida nula em \mathbb{R}^n , o que termina a prova. \square

Em [36], Whitney mostrou que a hipótese sobre a classe de diferenciabilidade deve ser considerada no Teorema de Morse-Sard. Depois da demonstração de Sard do Teorema 1.1, outros trabalhos em busca de generalizações apareceram. Por exemplo, em [24], C. Moreira apresenta uma generalização do Teorema de Morse-Sard considerando a medida de Hausdorff e também mostrando a necessidade da hipótese de diferenciabilidade no Teorema 1.1.

O Teorema 1.1 garante que $f(\text{crit}(f))$ possui medida nula, mas não garante por exemplo que este conjunto é fechado. Em efeito, o próximo exemplo mostra uma função de classe C^∞ tal que $f(\text{crit}(f))$ é denso em \mathbb{R} .

Exemplo 1.23. *Primeiro vamos construir uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ com suporte no intervalo $(-1/2, 1/2)$ tal que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$. Seguindo [19], consideramos a função $\alpha(t) = \exp(-1/t)$, para $t > 0$, e $\alpha(t) = 0$ para $t \leq 0$. A função $\alpha(t)$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e a suas derivadas de todos as ordens convergem para 0, quando $t \rightarrow 0$. Logo α é de classe C^∞ . Considere agora a função $\beta(t) = \alpha(t + 1/2) \cdot \alpha(-t - 1/4)$. Temos que $\beta(t) = \exp([(t + 1/2)(-t - 1/4)]^{-1})$, quando $-1/2 < t < -1/4$, e $\beta(t) = 0$, caso contrário. Assim, tome $b = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(s) ds = \int_{-1/2}^{-1/4} \beta(s) ds$ e a função*

$$\gamma(t) = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(s) ds$$

é de classe C^∞ tal que $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ e $\gamma(t) = 1$ para $t \geq -1/4$. Então definimos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(t) = \gamma(-|t|)$. Para terminar, note que γ é constante perto de $t = 0$. Portanto f é de classe C^∞ e satisfaz as condições mencionadas.

Considere também q_1, q_2, \dots uma ordem de \mathbb{Q} . Agora considere a função

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n f(x - n).$$

Como $f \in C^\infty$, então $g \in C^\infty$. Note que se $m \in \mathbb{N}$ então $g(m) = q_m$ e $g'(m) = 0$. Portanto, $\mathbb{N} \subset \text{crit}(g)$ e $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$. Logo, $\mathbb{Q} \subset f(\text{crit}(f))$.

Observação 1.24. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função semi-algébrica de classe C^n . Então o conjunto $f(\text{crit}(f))$ é semi-algébrico. Pela Proposição 1.4, $f(\text{crit}(f))$ é uma união finita de pontos e de intervalos. Por último, pelo Corolário 1.21, segue que $f(\text{crit}(f))$ é um conjunto finito de pontos.*

Capítulo 2

Teorema de Rabier

Um objetivo no estudo de Topologia Diferencial é entender propriedades e resultados globais. Um conceito global relacionado ao trabalho que consideraremos nos próximos capítulos é a noção de fibração, que apresentamos a seguir:

Definição 2.1. *Seja $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ uma aplicação contínua, $n \geq m$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Dizemos que f é uma fibração trivial em $y \in \mathbb{K}^m$, se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathbb{K}^m$ de y e um homeomorfismo $h : \mathcal{U} \times f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(\mathcal{U})$ tal que $f \circ h = P_{\mathcal{U}}$. Onde $P_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times f^{-1}(y) \rightarrow \mathcal{U}$ é a projeção sobre o primeiro fator.*

Em outras palavras, f é uma fibração trivial em $y \in \mathbb{K}^m$, se o diagrama a seguir comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} \times f^{-1}(y) & \xrightarrow{h} & f^{-1}(\mathcal{U}) \\ & \searrow P_{\mathcal{U}} & \downarrow f \\ & & \mathcal{U} \end{array}$$

De modo natural, a definição acima se estende para aplicações definidas entre variedades suaves. Relacionado à noção de fibração, temos o Teorema de Ehresmann que diz: *se M, N são variedades suaves de dimensão finita e $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação própria e submersão, então f é uma fibração trivial em todo $y \in N$. Sendo que própria significa que a pré-imagem de qualquer conjunto compacto de N é ainda um conjunto compacto de M .*

Em 1997, P. Rabier [32] generaliza o Teorema de Ehresmann para o caso de dimensão infinita, introduzindo os conceitos de submersão forte e núcleos uniformemente separados, obtendo diferentes aplicações, entre elas um teorema de função implícita global e ideias para uma teoria de pontos críticos generalizados.

Neste capítulo, apresentamos uma versão particular do Teorema de Rabier (Teorema 2.5). A demonstração que apresentaremos deste resultado foi dada por Z. Jelonek [10]. Para apresentarmos o Teorema de Rabier precisamos das definições a seguir.

Relacionada à Definição 2.1, temos:

Definição 2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua, $n \geq m$. Dizemos que um valor $y \in \mathbb{R}^m$ é um valor típico de f se f é uma fibração trivial em y . Caso contrário, dizemos que y é um valor atípico de f . Denotamos o conjunto dos valores atípicos de f por $B(f)$ e chamamos este conjunto de conjunto de bifurcação de f .*

A definição a seguir é devida à [32]:

Definição 2.3 (Função de Rabier). *Consideramos $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ o conjunto das transformações lineares de \mathbb{K}^n em \mathbb{K}^m , onde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Definimos:*

$$\nu(A) = \inf_{\|\varphi\|=1} \|A^*\varphi\|,$$

onde $A^* : (\mathbb{K}^m)^* \rightarrow (\mathbb{K}^n)^*$ denota a adjunta de A e $(\mathbb{K}^q)^*$ denota o espaço dual de \mathbb{K}^q .

Com a função definida acima temos:

Definição 2.4. Dada $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ uma aplicação diferenciável, $n \geq m$. Definimos os seguintes dois conjuntos:

$$K_0(f) := f(\text{crit}(f)),$$

onde $\text{crit}(f)$ denota o conjunto dos pontos críticos de f (veja página 3) e

$$K_\infty(f) = \{y \in \mathbb{K}^m : \exists x_i \in \mathbb{K}^n \text{ tal que } |x_i| \rightarrow \infty, f(x_i) \rightarrow y \text{ e } |x_i| \nu(df(x_i)) \rightarrow 0\}.$$

Com isso definimos o conjunto $K(f) = K_0(f) \cup K_\infty(f)$.

O conjunto $K_\infty(f)$ é chamado de conjunto de valores críticos assintóticos. Com as definições acima apresentamos a seguir o Teorema de Rabier, cuja prova será dada na seção 2.2.

Teorema 2.5. Seja $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^2 para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou holomorfa para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Então

$$B(f) \subset K(f) = K_0(f) \cup K_\infty(f).$$

A função ν na Definição 2.3 permite definir o conjunto $K(f) = K_0(f) \cup K_\infty(f)$ da Definição 2.4 que é uma extensão do conjunto de valores críticos e que também contém os valores críticos assintóticos, chamamos de *conjunto de valores críticos generalizados*. Neste capítulo apresentamos funções equivalentes à ν (veja Definições 2.15, 2.21, e 2.24) e que podem ser utilizadas para definir o mesmo conjunto $K_\infty(f)$. Em [32], P. Rabier prova para aplicações entre variedades de Finsler que o conjunto de bifurcação de uma aplicação $B(f)$ é um subconjunto do conjunto de valores críticos generalizados $K(f)$. Seguimos Jelonek em [10] para apresentar o Teorema de Rabier para aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m .

Na seção 2.1, apresentamos propriedades e funções equivalentes à ν . Na seção 2.2 apresentamos uma prova do Teorema 2.5. Na seção 2.3 apresentamos o Determinante de Gram com algumas propriedades que foram utilizadas na seção 2.1.

2.1 Função de Rabier

Nesta seção, provaremos uma equivalência entre a função de Rabier, da distância de Kuo, do número de Gaffney e do número g' , além de algumas propriedades destes números (veja Definições 2.3, 2.15, 2.21 e 2.24). Para a prova destas equivalências, na seção 2.3 apresentamos a definição do determinante de Gram que será utilizada na demonstração da equivalência entre o número de Gaffney e a distância de Kuo (veja Proposição 2.23). No que segue nesta dissertação denotamos por $\|\cdot\|$ a norma usual.

2.1.1 Propriedades e equivalências de ν

Em [32], a função ν definida em Definição 2.3 é utilizada para o estudo do conjunto de bifurcação (veja Definição 2.2 e Teorema 2.5).

Nesta seção, mostraremos interpretações geométricas da função ν , como por exemplo Proposição 2.13 e Proposição 2.14, além de propriedades interessantes da função ν . Começamos com o seguinte resultado:

Teorema 2.6. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. São equivalentes:

- (i) A é sobrejetora.

(ii) Existe uma constante $c \geq 0$ tal que:

$$\|\varphi\| \leq c\|A^*\varphi\|, \text{ para todo } \varphi \in (\mathbb{K}^m)^*.$$

onde $(\mathbb{K}^m)^*$ é o espaço dual de \mathbb{K}^m e A^* é a adjunta de A .

O Teorema 2.6 é um resultado clássico de Análise Funcional cuja prova pode ser vista, por exemplo, em [4, Theo II.19]. A seguir caracterizamos a nulidade da função ν com a sobrejetividade do operador A .

Lema 2.7. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Temos que $\nu(A) > 0$ se, e somente se, A é sobrejetora.*

Demonstração. Suponha $\nu(A) > 0$. Segue pela Definição 2.3 que

$$\nu(A) \leq \|A^* \frac{\varphi}{\|\varphi\|}\| = \frac{1}{\|\varphi\|} \|A^*\varphi\|, \forall \varphi \in (\mathbb{K}^m)^* \text{ e } \varphi \neq 0.$$

A igualdade acima implica

$$\|\varphi\| \leq \frac{1}{\nu(A)} \|A^*\varphi\|.$$

Logo, a condição (ii) do Teorema 2.6 é satisfeita para $c := \nu(A)^{-1}$. Portanto, pelo mesmo Teorema 2.6 concluímos que A é sobrejetora.

Agora, suponha que A é sobrejetora. Pelo Teorema 2.6, existe $c > 0$ tal que

$$\|A^*\varphi\| \geq c^{-1}\|\varphi\|, \forall \varphi \in Y^*.$$

Esta desigualdade e Definição 2.3 implicam que

$$\nu(A) \geq c^{-1},$$

o que termina nossa prova. □

A Proposição 2.8 mostra propriedades úteis para o decorrer do trabalho.

Proposição 2.8. *Sejam $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.*

- (i) *Se $m = 1$, então $\nu(A) = \|A\|$.*
- (ii) *Se $A \in GL(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$, então $\nu(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$. Onde $GL(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ é o conjunto das matrizes invertíveis.*
- (iii) *A função ν é 1-Lipschitz. Isto é, $|\nu(A) - \nu(B)| \leq \|A - B\|$.*

Demonstração. Primeiro mostremos o item (i). Se A não é sobrejetora, temos que A é o operador nulo e portanto $\|A\| = 0$. Por outro lado, segue pelo Lema 2.7 que $\nu(A) = 0$. Assim, se A não é sobrejetora, a prova segue. Suponhamos agora que A é sobrejetora. Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{K}^*$ tais que $\|\varphi_1\| = 1$ e φ_2 é não nula. Afirmamos que

$$\|A^*\varphi_1\| = \|A^* \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|}\|. \tag{2.1}$$

De fato, como $\dim(\mathbb{K}^*) = 1$, existe $c \in \mathbb{K}$ tal que $\varphi_2 = c\varphi_1$. Logo,

$$\|A^* \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|}\| = \|A^* \frac{c\varphi_1}{\|c\varphi_1\|}\| = \frac{|c|\|A^*\varphi_1\|}{|c|} = \|A^*\varphi_1\|,$$

o que prova a igualdade (2.1). Em particular, para $\varphi_1 = I_{\mathbb{K}}$, ou seja considerando φ_1 como sendo a identidade de \mathbb{K} em \mathbb{K} , obtemos com a igualdade (2.1) que

$$\inf_{\|\varphi\|=1} \|A^*\varphi\| = \|A^*\varphi_1\|.$$

Mas, como $A^*\varphi_1 = I_{\mathbb{K}}A = A$, concluímos que

$$\inf_{\|\varphi\|=1} \|A^*\varphi\| = \|A\|.$$

Pela Definição 2.3, segue que $\nu(A) = \|A\|$, o que mostra item (i).

Para (ii) lembremos que $\|A^*\| = \|A\|$ e $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. Portanto, segue:

$$\begin{aligned} \inf_{\|\varphi\|=1} \|A^*\varphi\| &= \frac{1}{\sup_{\|\varphi\|=1} \|(A^*)^{-1}\varphi\|} \\ &= \frac{1}{\|(A^*)^{-1}\|} \\ &= \|A^{-1}\|^{-1}, \end{aligned}$$

o que mostra o item (ii).

Para terminar a prova, temos que provar que o item (iii). Ou seja, temos que provar que

$$|\nu(A) - \nu(B)| \leq \|A - B\|, \quad \forall A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m).$$

Mas, para quaisquer $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ e $\varphi \in (\mathbb{K}^m)^*$, com $\|\varphi\| = 1$, temos a seguinte desigualdade:

$$\|A^*\varphi\| \geq \|B^*\varphi\| - \|(A^* - B^*)\varphi\|. \quad (2.2)$$

Como $\|C\| = \|C^*\|$, para qualquer $C \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ (veja por exemplo [9]), temos que $\|B^*\varphi\| - \|(A^* - B^*)\varphi\| \geq \|B^*\varphi\| - \|A - B\| \geq \nu(B) - \|A - B\|$. Esta desigualdade e (2.2) implicam que:

$$\nu(A) \geq \nu(B) - \|A - B\|.$$

Consequentemente

$$\|A - B\| \geq \nu(B) - \nu(A).$$

Similarmente, trocando A por B , mostra-se que $\|A - B\| \geq \nu(A) - \nu(B)$. Portanto, temos

$$|\nu(A) - \nu(B)| \leq \|A - B\|,$$

o que termina a prova. □

Agora provaremos que $\nu(A)$ pode ser interpretada como a distância do operador $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ao conjunto singular de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ assim definido:

Definição 2.9. Definimos Σ como o conjunto das transformações lineares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ tais que B não é sobrejetor. O conjunto Σ é chamado de conjunto singular de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.

Os próximos três lemas serão úteis para a prova de que $\nu(A)$ é exatamente a distância de A ao conjunto Σ (veja Proposição 2.13).

Lema 2.10. Seja $\varphi \in (\mathbb{K}^m)^*$ com φ não nula. Se $y \in \mathbb{K}^m$ é tal que $\varphi(y) = 1$, então:

$$\mathbb{K}^m = \ker(\varphi) \oplus \langle y \rangle.$$

Demonstração. Suponha $z \in \ker(\varphi) \cap \langle y \rangle$. Então $\varphi(z) = 0$ e $z = cy$ para algum $c \in \mathbb{K}$. Logo $0 = \varphi(z) = c\varphi(y) = c$, o que mostra que $z = 0$. Agora, dado $w \in \mathbb{K}^m$, escrevemos $w = (w - \varphi(w)y) + \varphi(w)y$. Temos que $(w - \varphi(w)y) \in \ker(\varphi)$ e $\varphi(w)y \in \langle y \rangle$. Portanto, o lema vale. \square

Lema 2.11. *Seja $\phi \in (\mathbb{K}^m)^*$ com ϕ não nula. Para todo $y \in \mathbb{K}^m$, temos:*

$$\text{dist}(y, \ker(\phi)) = \frac{|\phi(y)|}{\|\phi\|}.$$

Demonstração. Para qualquer $x \in \ker(\phi)$, pela definição de norma, temos $\left| \phi\left(\frac{y-x}{\|y-x\|}\right) \right| \leq \|\phi\|$, o que mostra que

$$\frac{|\phi(y)|}{\|\phi\|} \leq \|y - x\|.$$

Consequentemente,

$$\frac{|\phi(y)|}{\|\phi\|} \leq \text{dist}(y, \ker(\phi)).$$

Para a outra desigualdade, considere uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\left| \phi\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \right| \rightarrow \|\phi\|$ e os vetores $x^n = y - \frac{\phi(y)}{\phi(x_n)}x_n \in \ker(\phi)$. Logo, temos

$$\begin{aligned} \text{dist}(y, \ker(\phi)) &\leq \inf_n \|y - x^n\| = \inf_n \left\| y - \left(y - \frac{\phi(y)}{\phi(x_n)}x_n \right) \right\| \\ &= |\phi(y)| \inf_n \left\| \frac{x_n}{\phi(x_n)} \right\| \\ &= \frac{|\phi(y)|}{\|\phi\|}, \end{aligned}$$

o que termina a prova. \square

Lema 2.12. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ um operador sobrejetor e $\epsilon > 0$. Então*

$$\text{dist}(A, \Sigma) \leq \nu(A) + \epsilon.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, segue da Definição 2.3 que existe $\varphi_\epsilon \in (\mathbb{K}^m)^*$, com $\|\varphi_\epsilon\| = 1$, tal que

$$\|\varphi_\epsilon \circ A\| \leq \nu(A) + \epsilon. \quad (2.3)$$

Considere y_ϵ tal que $\varphi_\epsilon(y_\epsilon) = 1$. Pelo Lema 2.10, temos $\mathbb{K}^m = \ker(\varphi_\epsilon) \oplus \langle y_\epsilon \rangle$. Consideremos a projeção canônica p_ϵ de \mathbb{K}^m sobre $\langle y_\epsilon \rangle$ e a aplicação linear $B_\epsilon := A - p_\epsilon \circ A$.

Logo, para todo $x \in \mathbb{K}^n$ existem $k \in \ker(\varphi_\epsilon)$ e $c \in \mathbb{K}$ tal que $A(x) = k + cy_\epsilon$. Portanto:

$$\begin{aligned} B_\epsilon(x) &= A(x) - p_\epsilon \circ A(x) \\ &= (k + cy_\epsilon) - p_\epsilon(k + cy_\epsilon) \\ &= (k + cy_\epsilon) - cy_\epsilon \\ &= k. \end{aligned}$$

Das igualdades acima, concluímos que $\text{Im}(B_\epsilon) \cap \langle y_\epsilon \rangle = \{0\}$ e consequentemente B_ϵ não é sobrejetor, ou seja, $B_\epsilon \in \Sigma$. Segue então que vale:

$$\text{dist}(A, \Sigma) \leq \|A - B_\epsilon\| = \|p_\epsilon \circ A\| = \sup_{\|x\|=1} \|p_\epsilon \circ A(x)\| = \|y_\epsilon\| \|\varphi_\epsilon \circ A\|, \quad (2.4)$$

sendo que na última desigualdade usamos o fato de que $p_\epsilon \circ A(x) = (\varphi_\epsilon \circ A(x))y_\epsilon, \forall x$.

De (2.3) e (2.4), concluímos:

$$\frac{dist(A, \Sigma)}{\|y_\epsilon\|} \leq \|\varphi_\epsilon \circ A\| \leq \nu(A) + \epsilon.$$

Pelo Lema 2.11, temos $dist(y_\epsilon, ker(\varphi_\epsilon)) = \frac{|\varphi_\epsilon(y_\epsilon)|}{\|\varphi_\epsilon\|} = 1$.

Então existe uma sequência $u_n \in ker(\varphi_\epsilon)$ tal que $\|y_\epsilon - u_n\|$ é uma sequência decrescente e que converge para 1. Agora, definindo $y_\epsilon^n := y_\epsilon - u_n$, temos $\varphi_\epsilon(y_\epsilon^n) = 1$ e desta forma aplicando o mesmo processo à sequência crescente $\{y_\epsilon^n\}$ obtemos

$$\frac{dist(A, \Sigma)}{\|y_\epsilon^n\|} \leq \nu(A) + \epsilon,$$

Como $\|y_\epsilon^n\|$ converge para 1, segue que

$$dist(A, \Sigma) \leq \nu(A) + \epsilon,$$

o que termina a prova. □

Finalmente, temos a seguinte interpretação para ν :

Proposição 2.13. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Então*

$$\nu(A) = dist(A, \Sigma).$$

Demonstração. Segue da Proposição 2.8 que $|\nu(A) - \nu(B)| \leq \|A - B\|$, para qualquer B . Se $B \in \Sigma$, temos pelo Lema 2.7 que $\nu(B) = 0$ e conseqüentemente obtemos a seguinte desigualdade:

$$\nu(A) \leq \|A - B\|.$$

Portanto, a igualdade acima garante que:

$$\nu(A) \leq dist(A, \Sigma).$$

O fato de que $\nu(A) \geq dist(A, \Sigma)$ segue pelo Lema 2.12 e isto conclui a prova. □

No próximo resultado apresentamos mais uma interpretação geométrica da função ν :

Proposição 2.14. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Temos:*

$$\nu(A) = \sup\{r \geq 0 : \mathcal{B}^m(0, r) \subset A(\mathcal{B}^n(0, 1))\},$$

onde $\mathcal{B}^q(0, r)$ representa a bola em \mathbb{K}^q com centro na origem e de raio r .

Demonstração. Denote $R := \sup\{r \geq 0 : \mathcal{B}^m(0, r) \subset A(\mathcal{B}^n(0, 1))\}$.

Primeiramente vamos provar que $\nu(A) \geq R$. Para isto, considere $r < R$, $\epsilon > 0$ e $\varphi \in (\mathbb{K}^m)^*$ com $\|\varphi\| = 1$. Denotamos por $y \in S^{q-1}(0, r) = \{x \in \mathbb{K}^q \mid \|x\| = r\}$. Logo, existe $y \in S^{m-1}(0, r)$ tal que $|\varphi(y)| \geq 1 - \epsilon$. Seja $r \leq r' < R$. Temos que $r'y \in S^{m-1}(0, r')$ e $|\varphi(r'y)| \geq |\varphi(ry)|$. Pela definição de R existe $x \in \mathcal{B}^n(0, 1)$ tal que $Ax = r'y$ e portanto obtemos:

$$|\varphi(Ax)| \geq r|\varphi(y)| \geq r(1 - \epsilon),$$

que implica

$$\|\varphi \circ A\| \geq r(1 - \epsilon), \forall \epsilon > 0.$$

Como r , ϵ e φ são arbitrários, segue que $\nu(A) \geq R$.

Agora, mostremos que $\nu(A) \leq R$. Para isto, fixe $\epsilon > 0$ e $y \in \mathcal{B}^m(0, R + \epsilon) \setminus A(\mathcal{B}^n(0, 1))$. Defina $H = A^{-1}(\langle y \rangle)$. Então $A|_H$ define o funcional $\lambda \in (H)^*$ tal que $A(h) = \lambda(h)y$, para $h \in H$. Pelo Teorema de Hahn-Banach (veja [12], Teorema 4.2-1) λ pode ser estendido a \mathbb{K}^n de tal forma que se $\bar{\lambda}$ é a extensão de λ , então $\|\bar{\lambda}\| = \|\lambda\|$.

Afirmamos que $\|\bar{\lambda}\| < 1$. De fato, se supormos que $\|\bar{\lambda}\| = c \geq 1$, então, como $\|\bar{\lambda}\| = \|\lambda\|$, existe uma sequência $\{h_n\} \in H$ com $\|h_n\| = 1$ tal que $\|\bar{\lambda}(h_n)\| = \|\lambda(h_n)\| \rightarrow c$. A menos de subsequência podemos supor que existe $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $h_n \rightarrow x$ e $\|x\| = 1$. Logo $\bar{\lambda}(x) = c$. Considere agora o elemento $\frac{x}{c} \in \mathcal{B}^n(0, 1)$. Temos $A(\frac{x}{c}) = \bar{\lambda}(\frac{x}{c})y = y$ o que é uma contradição com o fato de que $y \in \mathcal{B}^m(0, R + \epsilon) \setminus A(\mathcal{B}^n(0, 1))$. Portanto temos $\|\bar{\lambda}\| < 1$.

Continuando com a prova, considere $B_y = A - \bar{\lambda}y \in \Sigma$, pois B_y não atinge y e

$$\|A - B_y\| = \|\bar{\lambda}y\| \leq \|y\| \leq R + \epsilon.$$

Portanto $\text{dist}(A, \Sigma) \leq R + \epsilon$. Segue da Proposição 2.13 que $\nu(A) \leq R + \epsilon$. Como ϵ é arbitrário, concluímos que $\nu(A) \leq R$, o que termina a prova. \square

2.1.2 Função de Kuo

Em 1972 T.C.Kuo [16] estudou caracterizações de jatos para funções reais. Para isso apresentou a Definição 2.15. Seguindo [17] utilizamos a distância de Kuo para provar Teorema 3.1. Na Proposição 2.18 provamos a equivalência de ν com a distância de Kuo. Seguindo [17] utilizaremos tal equivalência no Capítulo 3 para provar o Teorema 3.1 e o Teorema 3.2. Começamos com a definição e alguns resultados preliminares:

Definição 2.15 ([16], página 116). *Sejam η_1, \dots, η_k de vetores \mathbb{K}^n . A distância de Kuo entre esses vetores é definida da seguinte forma*

$$\kappa(\eta_1, \dots, \eta_k) = \min_{1 \leq i \leq k} \text{dist}(\eta_i, \langle (\eta_j)_{j \neq i} \rangle),$$

onde $\langle (\eta_j)_{j \neq i} \rangle$ denota o espaço vetorial gerado pelos vetores $(\eta_j)_{j \neq i}$.

O seguinte lema será utilizado para relacionarmos as funções ν e a distância de Kuo, veja Proposição 2.18.

Lema 2.16. *Seja (ξ_1, \dots, ξ_k) uma base ortogonal de \mathbb{K}^k e $u \in S^{k-1}(0, 1)$ então:*

- (i) *Existe $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\frac{1}{\sqrt{k}} \|\xi_{i_0}\| \leq |\langle u, \xi_{i_0} \rangle|$.*
- (ii) *Seja (e_1, \dots, e_k) uma base ortonormal de \mathbb{K}^k e escreva por \mathcal{E} o elipsoide definido nessa base por $\left\{ x : \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 = 1 \right\}$ onde $0 \leq |a_1| \leq \dots \leq |a_k| \in \mathbb{R}_+^*$, para $1 \leq i \leq k$. Suponha que $\xi_i \in \mathcal{E}$ para $1 \leq i \leq k$. Então $\min_{1 \leq i \leq k} \|\xi_i\| \leq \sqrt{k}|a_1|$.*

Demonstração. Começamos com a prova do item (i). Tome u tal que $\|u\| = 1$. Como (ξ_1, \dots, ξ_k) é uma base ortogonal de \mathbb{K}^k , segue pela desigualdade de Bessel (veja [9]) que:

$$1 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^k \left| \left\langle u, \frac{\xi_i}{\|\xi_i\|} \right\rangle \right|^2.$$

Assim, existe $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que

$$\left| \left\langle u, \frac{\xi_{i_0}}{\|\xi_{i_0}\|} \right\rangle \right|^2 \geq \frac{1}{k}.$$

Consequentemente

$$|\langle u, \xi_{i_0} \rangle| \geq \frac{\|\xi_{i_0}\|}{\sqrt{k}},$$

o que prova o item (i).

Agora a prova do item (ii). Pelo item (i), tomando $u = e_1$, obtemos que existe $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \|\xi_{i_0}\| \leq |\langle e_1, \xi_{i_0} \rangle|. \quad (2.5)$$

Como $\xi_{i_0} \in \mathcal{E}$, temos que

$$\sum_{i=1}^k \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^2 = 1,$$

com $x_i = |\langle e_i, \xi_{i_0} \rangle|$ e portanto

$$\left| \frac{x_1}{a_1} \right| \leq 1 \Rightarrow x_1 = |\langle e_1, \xi_{i_0} \rangle| \leq |a_1|.$$

Esta última desigualdade e (2.5) implicam que:

$$\|\xi_{i_0}\| \leq \sqrt{k} |a_1|.$$

Tomando o mínimo, obtemos

$$\min_{1 \leq i \leq k} \|\xi_i\| \leq \sqrt{k} |a_1|,$$

o que termina a prova do item (ii). \square

A Proposição 2.18 mostra que ν e κ são equivalentes no seguinte sentido:

Definição 2.17. *Sejam f e f' duas funções definidas sobre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k)$ dizemos que f é equivalente à f' e escrevemos $f \sim f'$, se existem constantes $c, d > 0$ tais que para todo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k)$ vale a desigualdade:*

$$d \cdot f(A) \leq f'(A) \leq c \cdot f(A).$$

Proposição 2.18. *Seja $A = (A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k)$. Para $i \in \{1, \dots, k\}$ denote por η_i a linha A_i . Então*

$$\nu(A) \leq \kappa(\eta_1, \dots, \eta_k) \leq \sqrt{k} \nu(A).$$

Demonstração. Primeiro se A não for sobrejetora, então pela definição 2.15 de κ temos que $\kappa(\eta_1, \dots, \eta_k) = 0$ e pelo Lema 2.7 $\nu(A) = 0$ e a desigualdade segue. Por outro lado, se A for sobrejetora, então para cada $1 \leq i \leq k$, defina

$$V_i := \{x \in \mathbb{K}^n : \langle x, \eta_j \rangle = 0, j \neq i\}.$$

Então $V_i = \langle (\eta_j)_{j \neq i} \rangle^\perp$ (veja [9] pagina 285) e portanto $V_i^\perp = \langle (\eta_j)_{j \neq i} \rangle$.

Temos o seguinte fato geométrico:

$$\text{dist}(\eta_i, V_i^\perp) = \|P_{V_i}(\eta_i)\|, \quad (2.6)$$

onde $P_{V_i} : \mathbb{K}^n \rightarrow V_i$ é a projeção sobre V_i . De fato, como $V_i^\perp = \langle (\eta_j)_{j \neq i} \rangle$ temos que $\text{dist}(\eta_i, V_i^\perp) = \text{dist}(\eta_i, \langle (\eta_j)_{j \neq i} \rangle) = \|\langle \eta_i, x_i \rangle x_i\| = \|P_{V_i}(\eta_i)\|$, com $x_i = \frac{P_{V_i}(\eta_i)}{\|P_{V_i}(\eta_i)\|} \in V_i$ unitário.

Consideramos para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, o vetor $x_i \in V_i \cap S(0, 1)$ como acima. Desta forma, $\{x_1, \dots, x_k\}$ é um conjunto ortonormal de \mathbb{K}^n e tal que $|\langle x_i, \eta_i \rangle| = \|P_{V_i}(\eta_i)\|$.

Defina $\xi_i = A(x_i) = A_1(x_i)e_1 + \dots + A_k(x_i)e_k = A_i(x_i)e_i = \langle x_i, \eta_i \rangle e_i$. Assim $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ é uma base ortogonal de \mathbb{K}^k e satisfazem $\|\xi_i\| = \|P_{V_i}(\eta_i)\|$.

Agora, dado $\varphi \in (\mathbb{K}^k)^*$ com $\|\varphi\| = 1$, temos que $\|\varphi A(x_i)\| = \langle \varphi, \xi_i \rangle$. Pelo Lema 2.16, existe $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\frac{1}{\sqrt{k}}\|\xi_{i_0}\| \leq |\langle \varphi, \xi_{i_0} \rangle|$. Com esta desigualdade e pelo fato que $\|\xi_{i_0}\| = \|P_{V_{i_0}}(\eta_{i_0})\|$, obtemos:

$$\|P_{V_{i_0}}(\eta_{i_0})\| \leq \sqrt{k}\|\varphi A\|.$$

A desigualdade acima, a definição de κ e (2.6) implicam

$$\kappa(\eta_1, \dots, \eta_k) \leq \sqrt{k}\|\varphi A\|.$$

Como φ é arbitrária, obtemos:

$$\kappa(\eta_1, \dots, \eta_k) \leq \sqrt{k}\nu(A). \quad (2.7)$$

Mostremos agora a desigualdade $\nu(A) \leq \kappa(\eta_1, \dots, \eta_k)$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, consideramos o funcional $\varphi_i(y_1, \dots, y_k) = y_i$. Então $\|\varphi_i\| = 1$, para todo i , e vale $\|\varphi_i A\| = \|\xi_i\| = \|P_{V_i}(\eta_i)\| = \text{dist}(\eta_i, V_i^\perp)$, onde a última igualdade segue de (2.6). Logo, $\nu(A) \leq \min_{1 \leq i \leq k} \|P_{V_i}(\eta_i)\| = \kappa(\eta_1, \dots, \eta_k)$, e portanto:

$$\nu(A) \leq \kappa(\eta_1, \dots, \eta_k) \leq \sqrt{k}\nu(A).$$

□

Definição 2.19. *Seja $A = (A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k)$ e sejam η_i as linhas A_i de A . Definimos*

$$\kappa(A) := \kappa(\eta_1, \dots, \eta_k).$$

Corolário 2.20. *Seja κ como na Definição 2.15 e seja ν como na Definição 2.3. Então $\kappa \sim \nu$.*

2.1.3 Número de Gaffney

Nesta seção mostraremos que, a distância de Kuo, o número de Gaffney e g' são funções sobre aplicações lineares que estão relacionadas com a função ν .

Definição 2.21 ([6], página 158). *Sejam $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, com $n \geq m$, e $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ a matriz de A . Considere $I = (i_1, \dots, i_m)$ um multi-índice de ordem m , com $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$. Definimos M_I o menor de ordem $m \times m$ da matriz \mathbf{a} dado pelas colunas indexadas por I .*

Dado um multi-índice J de ordem $m - 1 \times m - 1$, definimos $M_J(j)$ o menor de \mathbf{a} de ordem $m - 1 \times m - 1$ dado pelas colunas indexadas por J e deletando a j -ésima linha. Se $m = 1$, definimos $M_J(j) = 1$.

Definimos o número de Gaffney para A como segue:

$$g(A) := \frac{(\sum_I |M_I|^2)^{1/2}}{(\sum_{J,j} |M_J(j)|^2)^{1/2}}.$$

No caso em que o denominador da expressão acima se anular, definimos $g(A) = 0$.

Segue um exemplo para calcular o numero de Gaffney.

Exemplo 2.22. Considere a aplicação polinomial $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (xy - 1, y^2z)$. Assim

$$df(x, y, z) = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 2yz & y^2 \end{bmatrix}.$$

Sejam $I_1 = (1, 2)$, $I_2 = (1, 3)$ e $I_3 = (2, 3)$ os multi-índices de ordem 2. Assim

$$|M_{I_1}|^2 = \begin{vmatrix} y & x \\ 0 & 2yz \end{vmatrix}^2 = 4|y^4z^2|.$$

$$|M_{I_2}|^2 = \begin{vmatrix} y & 0 \\ 0 & y^2 \end{vmatrix}^2 = |y^6|.$$

$$|M_{I_3}|^2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 2yz & y^2 \end{vmatrix}^2 = |x^2y^4|.$$

Agora sejam $J_1 = (1)$, $J_2 = (2)$ e $J_3 = (3)$ os multi-índices de ordem 1. Então $|M_{J_1}(1)|^2 = |y^2|$, $|M_{J_1}(2)|^2 = 0$, $|M_{J_2}(1)|^2 = |x^2|$, $|M_{J_2}(2)|^2 = 4|y^2z^2|$, $|M_{J_3}(1)|^2 = 0$ e $|M_{J_3}(2)|^2 = |y^4|$. Com isso obtemos que

$$g(df(x, y, z)) = \frac{4|y^4z^2| + |y^6| + |x^2y^4|}{|y^2| + |x^2| + 4|y^2z^2| + |y^4|}.$$

Proposição 2.23. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $n \geq m$. Então $g(A) \sim \kappa(A)$.

Demonstração. Note que $dist(\eta_i, \langle (\eta_j)_{j \neq i} \rangle)$ na notação da Definição 2.36 (ii) é o h_1 portanto pela Proposição 2.35 e a Observação 2.37 temos

$$dist(\eta_i, \langle (\eta_j)_{j \neq i} \rangle) = \frac{(G(\{\eta_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}))^{1/2}}{(G(\{\eta_j\}_{j \neq i}))^{1/2}} = \frac{(\sum_I |M_I|^2)^{1/2}}{(\sum_J |M_J(i)|^2)^{1/2}} \geq \frac{(\sum_I |M_I|^2)^{1/2}}{(\sum_{J,j} |M_J(j)|^2)^{1/2}},$$

sendo que a segunda igualdade segue da Proposição 2.41. Tomando mínimo, obtemos a desigualdade $\kappa(A) \geq g(A)$. Por outro lado, existe i_0 tal que $(\sum_J |M_J(i_0)|^2)^{1/2}$ é máximo. Logo,

$$(\sum_{J,j} |M_J(j)|^2)^{1/2} = (\sum_r (\sum_J |M_J(r)|^2))^{1/2} \leq \sqrt{m} (\sum_J |M_J(i_0)|^2)^{1/2},$$

o que implica

$$g(A) \geq C \frac{(\sum_I |M_I|^2)^{1/2}}{(\sum_J |M_J(i_0)|^2)^{1/2}} = C dist(\eta_{i_0}, \langle (\eta_j)_{j \neq i_0} \rangle) \geq C \kappa(A),$$

onde $C = 1/\sqrt{m}$. Com esta última desigualdade concluímos a prova. \square

Definição 2.24 ([10], definição 2.3). Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, com $n \geq m$. Seja $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ a matriz de A . Definimos o seguinte número:

$$g'(A) = \max_I \left\{ \min_{J \subset I} \frac{|M_I|}{|M_J(j)|} \right\},$$

onde M_I , $M_J(j)$ são definidos como em Definição 2.21. Se todos $M_J(j)$ são zero, definimos $g'(A) = 0$.

Proposição 2.25. $g' \sim g$.

Demonstração. Fixemos um índice $I = (i_1, \dots, i_m)$ e consideremos os números $\frac{|M_I|}{|M_J(s)|}$, onde $J \subset I$. Como $M_J(s)$ é um menor de M_I de ordem $(m-1) \times (m-1)$, temos que os números $\frac{M_J(s)}{M_I}$ são elementos da matriz $\mathbb{A}(I)^{-1}$, onde $\mathbb{A}(I) = [a_{i,k}]_{1 \leq i \leq m, k \in I}$. Pelo item (ii) da Proposição 2.8 e o fato de que todas as normas em um espaço vetorial de dimensão finita serem equivalentes temos:

$$\min_{J \subset I} \frac{|M_I|}{|M_J(j)|} \sim \nu(A(I)) \leq \nu(A),$$

sendo que a última desigualdade segue da Proposição 2.14 e o fato de que $A(I)$ ser restrição de A .

Pela Proposição 2.23 existe uma constante c_1 tal que $\kappa(A) \leq c_1 g(A)$ e pela Proposição 2.18 existe uma constante c_2 tal que $\nu(A) \leq c_2 \kappa(A)$, obtemos que existe uma constante C tal que $g'(A) \leq Cg(A)$.

Por outro lado, existe I_0 tal que o menor M_{I_0} é máximo. Portanto

$$g(A) \leq \binom{n}{m}^{1/2} \frac{|M_{I_0}|}{(\sum_{J,j} |M_J(j)|^2)^{1/2}} \leq \binom{n}{m}^{1/2} \min_{J \subset I_0} \left\{ \frac{|M_{I_0}|}{|M_J(j)|} \right\} \leq \binom{n}{m}^{1/2} g'(A),$$

o que completa nossa demonstração. \square

Proposições 2.18, 2.23 e 2.25 mostram que os números ν , κ , g e g' são equivalentes. Portanto o conjunto de valores críticos generalizados pode ser descrito em termos de qualquer um destes números. Observamos que ν é utilizado por P. Rabier, para demonstrar o Teorema 2.5. Por outro lado, Z. Jelonek demonstra em [10] uma versão do Teorema 2.5 para aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m utilizando o número g' . Em [17], os autores utilizam κ para provar Teorema 3.1 e Teorema 3.2. Gaffney utiliza o número g para provar um teorema de fibração para funções polinomiais complexas em [6]. Observamos também que em [16], T. C. Kuo utilizou κ para caracterizações da v -suficiência de jatos.

2.2 Prova do Teorema de Rabier

Apresentamos nesta seção a prova do Teorema de Rabier (Teorema 2.5) seguindo a prova dada por Z. Jelonek em [10]. Começamos com os seguintes lemas que serão úteis para a prova do Teorema 2.5.

Lema 2.26. *Sejam $U \subset \mathbb{K}^n$ um conjunto aberto e $V : U \rightarrow \mathbb{K}^n$ uma aplicação suave. Suponha que existam constantes $R > 0$ e $M > 0$ tais que para todo $x \in \mathbb{K}^n$ com $\|x\| > R$ temos que $\|V(x)\| < M\|x\|$. Considere $y \in U$ e a seguinte equação diferencial:*

$$x'(t) = V(x), \quad x(0) = y.$$

Seja $x(y, t)$ uma solução da equação diferencial acima, com $t \in [0, t_0)$. Então a sua trajetória é limitada. Em particular, temos que a trajetória está definida para todo $t > 0$ ou intersecta a fronteira ∂U de U .

Demonstração. Considere $r(t) = \|x(y, t)\|^2$. Temos que provar que r é limitada. Por contradição, assumamos que existe uma sequência de pontos t_i tais que $r(t_i) \rightarrow \infty$ quando $t_i \rightarrow t_0$.

Considere N um valor regular de r tal que $N > R$. Como N é um valor regular, temos que a sua pré-imagem $r^{-1}(N)$ é no máximo um conjunto enumerável $r^{-1}(N) = \{w_1, w_2, \dots\}$. Logo, para cada $w_i \in r^{-1}(N)$, temos dois casos possíveis:

- (i) $r(t) < N$ para todo $t \in [w_i, w_{i+1})$.

(ii) $r(t) > N$ para todo $t \in [w_i, w_{i+1})$.

Se w_{i+1} não estiver definido, escolhamos $w_{i+1} = t_0$. O caso que interessa é o caso do item (ii). Temos

$$r'(t) = 2\langle x(y, t), x'(y, t) \rangle \leq 2\|x'(y, t)\|\|x(y, t)\| \leq 2M\|x(y, t)\|^2 = 2Mr(t),$$

onde a última desigualdade segue do fato de que $\|V(x(y, t))\| < M\|x(y, t)\|$, $\forall t \in [w_i, w_{i+1})$.

Portanto $[\ln(r(t))]' \leq 2M$. Integrando esta desigualdade de w_i até t e aplicando a exponencial, obtemos:

$$r(t) \leq r(w_i)e^{2M(t-w_i)} = Ne^{2M(t-w_i)} \leq Ne^{2M(t-w_1)}.$$

Desta forma, a desigualdade acima mostra que o conjunto $\{r(t) : w_1 \leq t \leq t_0\}$ é limitado, o que é uma contradição e a prova segue. \square

Lema 2.27. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável, então $K(f)$ e $K_\infty(f)$ são fechados.*

Demonstração. Tome uma sequência $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ em $K(f)$ (em $K_\infty(f)$) convergindo a y . Vamos provar que $y \in K(f)$ (em $K_\infty(f)$): Como $y_i \in K(f)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então para todo i existe uma sequência $\{x_k^i\}$ tal que $f(x_k^i) \rightarrow y_i$ e $\|x_{k_N}^i\|\nu(df(x_k^i)) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Assim, para $N \in \mathbb{N}$ dado, tome $x_N := x_{k_N}^N$ tal que $|y_N - f(x_{k_N}^N)| \leq \frac{1}{N}$ e $\|x_{k_N}^N\|\nu(df(x_{k_N}^N)) < \frac{1}{N}$. Então $\|x_{k_N}^N\|\nu(df(x_{k_N}^N)) \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$ e $\lim_{N \rightarrow \infty} f(x_N) = y$. De fato,

$$\begin{aligned} |y - f(x_N)| &\leq |y - y_N| + |y_N - f(x_{k_N}^N)| \\ &\leq \epsilon + \frac{1}{N} \end{aligned}$$

o que termina a prova do lema. \square

Estamos prontos para apresentar a prova do teorema de Rabier:

Prova do Teorema 2.5. Seja $a \notin K(f)$. Sem perda de generalidade e para simplificar notações vamos supor que $a = 0$. Como $K(f)$ é fechado (Lema 2.27), temos que existem $R > 0$, $\epsilon > 0$, $\eta > 0$ tais que, para todo x com $\|x\| > R$ e $\|f(x)\| < \eta$ vale:

$$\max_I \left\{ \min_{J \subset I} \|x\| \frac{|M_I|}{|M_J(j)|} \right\} > \epsilon,$$

onde M_I é o menor de $df(x)$ indexado pelo multi-índice I . Mais ainda, existe $\omega > 0$ tal que se x com $\|x\| \leq R$ e $\|f(x)\| \leq \eta$ então $\max_I |M_I(x)| \geq \omega$.

Tome $U = \{y \in \mathbb{K}^m : \|y\| < \eta\}$ e seja $\Gamma = f^{-1}(0)$. O objetivo é provar que $f^{-1}(U) \cong \Gamma \times U$ e após uma mudança de coordenadas f é a projeção

$$\begin{aligned} \Gamma \times U &\rightarrow U \\ (\gamma, u) &\rightarrow u. \end{aligned}$$

Para isto, definimos os seguintes dois conjuntos:

$$U_I = \left\{ x \in f^{-1}(U) : \text{se } \|x\| \geq R, \text{ então } \min_{J \subset I} \|x\| \frac{|M_I|}{|M_J(j)|} \geq \epsilon, \text{ se } \|x\| \leq R, \text{ então } |M_I(x)| \geq \omega \right\}$$

e

$$V_I = \{x \in f^{-1}(U) : \text{se } \|x\| \geq R, \text{ então } \min_{J \subset I} \|x\| \frac{|M_I|}{|M_J(j)|} \leq \epsilon/2, \text{ se } \|x\| \leq R, \text{ então } |M_I(x)| \leq \omega/2\}.$$

Pela definição U_I e V_I são conjuntos disjuntos e fechados. Além disto, como \mathbb{K}^n é um espaço normal, existe uma função $\delta_I : \mathbb{K}^n \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ tal que $\delta_I = 1$ em U_I e $\delta_I = 0$ em V_I .

Consideramos a cobertura de $f^{-1}(U)$ dada pelos conjuntos $H_I = \{x : \delta_I > 0\}$ e definimos $\delta := \sum_I \delta_I$ e $\Delta_I := \delta_I / \delta$.

Tome $y = (y_1, \dots, y_m) \in U$. Escolha o índice $I = (1, \dots, m)$ e considere o seguinte sistema de equações diferenciáveis:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x(t)) x'_j(t) &= y_1, \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x(t)) x'_j(t) &= y_m, \\ x'_{m+1}(t) &= 0, \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= 0. \end{aligned}$$

Denote $M_J(i) := M_{k,i}$, para $J = I \setminus \{k\}$. Pela regra de Cramer, temos:

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= \sum_{k=1}^m (-1)^{1+k} y_k M_{1,k} / M_I, \\ &\vdots \\ x'_m(t) &= \sum_{k=1}^m (-1)^{m+k} y_k M_{m,k} / M_I, \\ x'_{m+1}(t) &= 0, \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= 0. \end{aligned}$$

Escrevendo o sistema de uma forma mais simplificada, temos:

$$x'(t) = V_I(y, x(t)).$$

Assim

$$df(V_I(y, x)) = y.$$

Similarmente, definimos V_I para todo índice $I = (i_1, \dots, i_m)$. A seguir consideramos o campo vetorial

$$V(x, y) = \sum_I \Delta_I V_I(x, y),$$

definido em $f^{-1}(U)$.

Temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|V(x)\| &\leq \sum_I \|V_I(x)\| \\ &\leq \binom{n}{m} m^2 \eta / \epsilon \\ &\leq 2m\eta / \epsilon \|x\|, \end{aligned}$$

sendo a última desigualdade válida para $\|x\| \geq R$. Finalmente, consideramos a equação diferencial:

$$x'(t) = V(y, x(t)), \quad x(0) = \gamma, \quad (2.8)$$

com $\gamma \in \Gamma$.

Portanto $df(V(y, x)) = df(\Sigma_I \Delta_I V_I(y, x)) = \Sigma_I df(\Delta_I V_I(y, x)) = \Sigma_I \Delta_I df(V_I(y, x)) = y$ e então, se $x(t, y, \gamma)$ é solução do sistema (2.8), temos que $f(x(t), y, \gamma) = yt$. Como $y \in U$, temos que a trajetória $x(t, y, \gamma)$, $t \in [0, t_0]$ não intersecta a fronteira $\partial f^{-1}(U)$ para todo $0 \leq t_0 \leq \delta + 1$, para algum $\delta > 0$. Logo, Lema 2.26 garante que a trajetória $x(t, y, \gamma)$ está definida em $[0, 1]$. Como $f(x(t, y, \gamma)) = yt$, então o fluxo de fase $x(t, y, \gamma)$, $t \in [0, 1]$ transforma $f^{-1}(0) = \Gamma$ em $f^{-1}(y)$ e pela simetria transforma $f^{-1}(y)$ em Γ . Para terminar consideramos o difeomorfismo:

$$\Phi : \Gamma \times U \ni (\gamma, y) \rightarrow x(1, y, \gamma) \in f^{-1}(U).$$

Portanto, $0 \notin B(f)$, o que termina nossa prova. \square

Exemplo 2.28. Considere a função polinomial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x(xy + 1)$. Temos que $f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1/x\}$ possui três componentes conexas. Mas, para $\epsilon \neq 0$, temos que $f^{-1}(\epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\epsilon - x)/x^2\}$ possui duas componentes conexas. Portanto $0 \in B(f)$. Por outro lado, $\nabla f(x, y) = (2xy + 1, x^2)$ e assim $K_0(f) = \emptyset$. Pelo Teorema 2.5, temos que $0 \in K_\infty(f)$. De fato, considere $x_n \rightarrow 0$ e $y_n = -1/2x_n$. A sequência $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ satisfaz:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_n, y_n)\|^2 \|(2x_n y_n + 1, x_n^2)\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + y_n^2) ((2x_n y_n + 1)^2 + x_n^4) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^4 + x_n^2 / 2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mais ainda $B(f) = \{0\}$. De fato, considere $\Phi : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow f^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ tal que $\Phi(t, \epsilon) = (t, (\epsilon - t)/t^2)$. Então $f(\Phi(t, \epsilon)) = \epsilon$. Ou seja, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\Phi} & f^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) \\ & \searrow \Pi & \downarrow f \\ & & \mathbb{R}_{>0} \end{array}$$

onde Π é a projeção sobre $\mathbb{R}_{>0}$. De forma similar, podemos mostrar para $\mathbb{R}_{<0}$. Portanto, $B(f) = \{0\}$.

Observações

A prova do Teorema 2.5 apresentada primeiramente por Rabier em [32] utiliza no lugar de $K(f)$ o seguinte conjunto:

$$\tilde{K}(f) = K_0(f) \cup \tilde{K}_\infty(f), \quad (2.10)$$

onde

$$\tilde{K}_\infty(f) := \{y \in \mathbb{K}^m : \exists x_l \in \mathbb{K}^n \text{ tal que } \|x_l\| \rightarrow \infty, f(x_l) \rightarrow y \text{ e } \nu(df(x_l)) \rightarrow 0\}.$$

Note que $K_\infty(f) \subset \tilde{K}_\infty(f)$.

Não obstante, o próprio Rabier comenta em [32, página 76] que seu Teorema continua verdadeiro se, na definição de $\tilde{K}_\infty(f)$, substituirmos a condição de $\nu(df(x_l)) \rightarrow 0$ pela condição $\omega(|x_l|)\nu(df(x_l)) \rightarrow 0$, onde $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é qualquer função contínua que satisfaz

$$\int_0^\infty \frac{du}{\omega(u)} = \infty.$$

A prova apresentada neste trabalho é feita para a condição $\|x_l\|\nu(df(x_l)) \rightarrow 0$ e que segue a prova dada por Jelonek [10].

Observamos que em alguns casos o conjunto $\tilde{K}_\infty(f)$ pode ser grande em comparação à $B(f)$ e mesmo à $K_\infty(f)$. Vejamos um exemplo para um polinômio de três variáveis.

Exemplo 2.29 ([29], Exemplo 1.11). *Considere o polinômio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $f(x, y, z) = x + x^2y + x^4yz$. Temos que $K_0(f) = \emptyset$, $\tilde{K}_\infty(f) = \mathbb{R}$ e $K_\infty(f) = \{0\}$. De fato, temos:*

$$\nabla f(x, y, z) = (1 + 2yx + 4x^3yz, x^2 + x^4z, x^4y).$$

Note que $\nabla f(x, y, z) \neq 0$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, o que mostra que $K_0(f) = \emptyset$.

Por outro lado, temos $\tilde{K}_\infty(f) = \mathbb{R}$. De fato, considere a sequência $\{(-\frac{1}{2n}, n, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Logo, $\nabla f(-\frac{1}{2n}, n, 0) \rightarrow 0$ e $f(-\frac{1}{2n}, n, 0) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Portanto $0 \in \tilde{K}_\infty(f)$.

Agora, dado $a \in \mathbb{R}^*$, tomemos a curva:

$$\gamma_a(s) = \left(s, \frac{2a}{s^2}, -\frac{(1 + (4a)^{-1}s)}{2s^2} \right).$$

Vale

$$f(\gamma_a(s)) = a + s \left(1 - \frac{1}{4} \right) \rightarrow a,$$

e

$$\nabla f(\gamma_a(s)) = \left(0, s^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{8a} \right), 2as^2 \right) \rightarrow 0,$$

quando $s \rightarrow 0$. Portanto, $\tilde{K}_\infty(f) = \mathbb{R}$.

Para mostrarmos que $K_\infty(f) = \{0\}$, consideramos:

$$\nabla f(x, y, z) = (1 + 2xy + 4x^3yz, x^2 + x^4z, x^4y) := (A, B, C).$$

Se supormos que $t \neq 0$, e $t \in K_\infty(f)$ e $m = (x, y, z)$ segue que se $|m|\nu(df(m)) \rightarrow 0$, quando $|m| \rightarrow \infty$, então $\nu(df(m)) \rightarrow 0$. Pela Proposição 2.8, isso significa que $\nabla f(m) \rightarrow 0$. Assim não é possível que $x \rightarrow \infty$ pois nesse caso, pelo fato de $A, B \rightarrow 0$ então $y \rightarrow 0$ e z é limitado. Logo tanto $2xy$ como $4x^3yz$ vão para 0 e assim $A \rightarrow 0$, então $x \rightarrow \infty$. Por outro lado no caso em que x tem limite diferente do 0, pelo fato de $B, C \rightarrow 0$ teria que z, y são limitados, desse modo $x \rightarrow 0$.

Agora como $x(1 + 2xy + 4x^3yz) \rightarrow t$ e $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow \infty$ de fato se y é limitado então $A = 1 + xy + x^3yz + xy + x^3yz + 2x^3yz \rightarrow \infty$, assim temos $y \rightarrow \infty$.

Como $|m|\nabla(f(m)) \rightarrow 0$, então $|m|C \rightarrow 0$ em particular

$$x^8y^4 \rightarrow 0 \quad (1) \text{ e } x^8y^2z^2 \rightarrow 0 \quad (2)$$

. De (1) obtemos $|x^2y| := \epsilon(m) \rightarrow 0$, assim como $(x + 2x^2y + 4x^4yz) \rightarrow t$, temos $x^4yz = t + \delta(m)$ com $\delta \rightarrow 0$ quando $|m| \rightarrow \infty$. Mas de (2) obtemos $x^4yz \rightarrow 0$, assim $t = 0$. Desta forma, $K_\infty(f) = \{0\}$. Segue do Teorema 2.5, que o polinômio f é uma fibração em cada componente conexa de \mathbb{R}^* .

Em [8], mostra-se que $K_\infty(f) = \tilde{K}_\infty(f)$ para qualquer função polinomial $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$. Usando este fato, mostremos um exemplo onde $B(f)$ é diferente do conjunto $K_\infty(f)$.

Exemplo 2.30 ([34], Exemplo 3.4). *Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x, y) = 2x^2y^3 - 9xy^2 + 12y$. Então f não tem pontos críticos, $0 \in \tilde{K}_\infty(f)$, mas f é uma fibração sobre \mathbb{R} .*

De fato, $\nabla f(x, y) = (4xy^3 - 9y^2, 6(xy)^2 - 18(xy) + 12)$ e para que este gradiente seja zero devemos ter $x, y \neq 0$. Pela primeira componente, obtemos a condição $xy = \frac{9}{4}$. Mas esta condição implica que a segunda coordenada do gradiente é diferente de zero. Portanto, $K_0(f) = \emptyset$.

Por outro lado, mostremos que $0 \in \tilde{K}_\infty(f) = K_\infty(f)$. Para isto, consideramos a sequência $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}^} = \{(\frac{4n}{9}, \frac{9}{4n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Logo,*

$$f((x_n, y_n)) = \frac{45}{4n} \rightarrow 0,$$

e também

$$\nabla f((x_n, y_n)) = \left(\frac{9^2}{4n^2} - \frac{9^3}{16n^2}, 0 \right) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Assim, $0 \in \tilde{K}_\infty(f)$.

Seguindo [34], consideramos a aplicação

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

tal que

$$F(x, y) = \left(f(x, y), \frac{x}{g(x, y)} \right),$$

onde $g(x, y) = 2x^2y^2 - 9xy + 12$. Temos que $F = F^{-1}$ e portanto F é um difeomorfismo. Isto mostra que f é uma fibração e conseqüentemente $B(f) = \emptyset$.

No Capítulo 3 provaremos que para aplicações semi-algébricas diferenciáveis o conjunto $K(f)$ possui medida nula. E portanto $K(f)$ pode ser visto como uma boa aproximação para $B(f)$.

2.3 Determinante de Gram

O determinante de Gram está relacionado com o volume do paralelepípedo formado pelos vetores v_1, \dots, v_k . Essa relação permite provar uma identidade conhecida como a *Identidade de Lagrange* que apresentamos na Proposição 2.41.

Definição 2.31 ([22, Capítulo 38]). *Dados os vetores $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^q$, a matriz de Gram é a matriz $\mathbf{g}(v_1, \dots, v_k) = [g_{ij}]_{k \times k}$, onde cada g_{ij} é o produto interno entre v_i e v_j . Ou seja, $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Também denotamos a matriz de Gram dos vetores v_1, \dots, v_k como $\mathbf{g}(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k})$.*

Dados v_1, v_2, v_3 , a matriz de Gram é dada por:

$$\mathbf{g}(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_1, v_3 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle \\ \langle v_3, v_1 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle \end{bmatrix}.$$

Uma observação que será útil nesta seção é a seguinte:

Observação 2.32. *Sejam v_1, \dots, v_k vetores em \mathbb{R}^q . Considere a matriz A de ordem $q \times k$, com colunas v_1, \dots, v_k . Então*

$$\mathbf{g}(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}) = A^t A,$$

onde A^t representa a matriz transposta de A .

Definição 2.33. *Dados $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^q$, definimos o determinante de Gram como*

$$G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}) := \det(\mathbf{g}(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k})) = \det(A^t A).$$

Proposição 2.34. *Se v_1, \dots, v_k são vetores linearmente dependentes, então $G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}) = 0$.*

Demonstração. Como v_1, \dots, v_k são linearmente dependentes, então existe um vetor $a = (a_1, \dots, a_k)$ não nulo tal que $\sum_{i=1}^k a_i v_i = 0$. Logo para todo j temos

$$\sum_{i=1}^k \langle a_i v_j, v_i \rangle = 0,$$

isto é a^t está no núcleo de $\mathbf{g}(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k})$. Portanto $G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}) = 0$. □

A Proposição 2.35 fornece uma intuição geométrica que será formalizada na Proposição 2.38.

Proposição 2.35. *Sejam v_1, \dots, v_k vetores em \mathbb{R}^q . Se v_1 é perpendicular a v_2, \dots, v_k , então*

$$G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}) = |v_1|^2 G(\{v_i\}_{2 \leq i \leq k}).$$

Demonstração. Se v_1 é perpendicular à v_2, \dots, v_k , então $\langle v_1, v_j \rangle = 0$, quando $j \neq 1$. Portanto

$$\mathbf{g}(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}) = \begin{bmatrix} |v_1|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |v_2|^2 & \cdots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle v_k, v_2 \rangle & \cdots & |v_k|^2 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante pela primeira linha, obtemos:

$$G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}) = |v_1|^2 G(\{v_i\}_{2 \leq i \leq k}).$$

□

A seguir apresentamos a noção de volume de um paralelepípedo em \mathbb{R}^q e mostraremos a seguir que o determinante de Gram está relacionado com o volume do paralelepípedo dos vetores v_1, \dots, v_k .

Definição 2.36. *Dados v_1, \dots, v_k , vetores em \mathbb{R}^q , definimos:*

- (i) *O paralelepípedo formado pelos vetores $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto $P[v_1, \dots, v_k]$ formado por todas as combinações lineares $t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k$ com $0 \leq t_i \leq 1$, para $i = 1, \dots, k$.*

(ii) Para $P[v_1, \dots, v_k]$ definimos seu volume, denotado por $\text{vol}(P[v_1, \dots, v_k])$, como 0 se v_1, \dots, v_k , são linearmente dependentes. Se v_1, \dots, v_k , são linearmente independentes definimos $\text{vol}(P[v_1, \dots, v_k])$ de forma recursiva em k da seguinte forma:

(a) para $k = 1$, temos $\text{vol}(P[v_1]) := \|v_1\|$;

(b) suponha definido $\text{vol}(P[v_2, \dots, v_k])$, então defina

$$\text{vol}(P[v_1, \dots, v_k]) = |h_1| \text{vol}(P[v_2, \dots, v_k]),$$

onde $h_1 = v_1 - w_1$, sendo w_1 a projeção ortogonal de v_1 no espaço vetorial gerado por v_2, \dots, v_k .

Observação 2.37. Note que se v_1, \dots, v_k são linearmente independentes então

$$G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}) = G(\{h_1, v_2, \dots, v_k\}),$$

onde $h_1 = v_1 - w_1$ com w_1 a projeção ortogonal de v_1 no espaço gerado pelos vetores v_2, \dots, v_k . De fato, considerando que h_1 é ortogonal ao espaço gerado pelos vetores v_2, \dots, v_k , temos:

$$\begin{aligned} G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}) &= \begin{vmatrix} \langle w_1 + h_1, w_1 + h_1 \rangle & \langle w_1 + h_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle w_1 + h_1, v_k \rangle \\ \langle w_1 + h_1, v_2 \rangle & |v_2|^2 & \cdots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_1 + h_1, v_k \rangle & \langle v_k, v_2 \rangle & \cdots & |v_k|^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & \langle w_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, v_k \rangle \\ \langle w_1 + h_1, v_2 \rangle & |v_2|^2 & \cdots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_1 + h_1, v_k \rangle & \langle v_k, v_2 \rangle & \cdots & |v_k|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle h_1, h_1 \rangle & \langle h_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle h_1, v_k \rangle \\ \langle w_1 + h_1, v_2 \rangle & |v_2|^2 & \cdots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_1 + h_1, v_k \rangle & \langle v_k, v_2 \rangle & \cdots & |v_k|^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & \langle w_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, v_k \rangle \\ \langle w_1, v_2 \rangle & |v_2|^2 & \cdots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_1, v_k \rangle & \langle v_k, v_2 \rangle & \cdots & |v_k|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \langle w_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, v_k \rangle \\ \langle h_1, v_2 \rangle & |v_2|^2 & \cdots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle h_1, v_k \rangle & \langle v_k, v_2 \rangle & \cdots & |v_k|^2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} \langle h_1, h_1 \rangle & \langle h_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle h_1, v_k \rangle \\ \langle h_1, v_2 \rangle & |v_2|^2 & \cdots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle h_1, v_k \rangle & \langle v_k, v_2 \rangle & \cdots & |v_k|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle h_1, h_1 \rangle & \langle h_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle h_1, v_k \rangle \\ \langle w_1, v_2 \rangle & |v_2|^2 & \cdots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_1, v_k \rangle & \langle v_k, v_2 \rangle & \cdots & |v_k|^2 \end{vmatrix} \\ &= G(\{w_1, v_2, \dots, v_k\}) + \begin{vmatrix} 0 & \langle w_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, v_k \rangle \\ 0 & |v_2|^2 & \cdots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle v_k, v_2 \rangle & \cdots & |v_k|^2 \end{vmatrix} + G(\{h_1, v_2, \dots, v_k\}) \\ &+ \begin{vmatrix} \langle h_1, h_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \langle w_1, v_2 \rangle & |v_2|^2 & \cdots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_1, v_k \rangle & \langle v_k, v_2 \rangle & \cdots & |v_k|^2 \end{vmatrix} \\ &= G(\{w_1, v_2, \dots, v_k\}) + G(\{h_1, v_2, \dots, v_k\}). \end{aligned}$$

Sendo válida a penultima igualdade pela Proposição 2.34 temos que $G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}) = G(\{h_1, v_2, \dots, v_k\})$.

Desta forma, temos a seguinte relação entre o determinante de Gram e a definição de volume apresentada acima:

Proposição 2.38. *Sejam v_1, \dots, v_k vetores em \mathbb{R}^q . Então*

$$\text{vol}(P[v_1, \dots, v_k]) = \sqrt{G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k})}.$$

Demonstração. A prova será por indução em k . Para $k = 1$, temos que $\text{vol}(P[v_1]) = \|v_1\|$. Por outro lado, temos $G(v_1) = \langle v_1, v_1 \rangle$, o que implica que $\text{vol}(P[v_1]) = \sqrt{G(v_1)}$.

Agora, suponha a proposição verdadeira para $k - 1$. Pela Definição 2.36 temos:

$$\text{vol}(P[v_1, \dots, v_k]) = \|h_1\| \text{vol}(P[v_2, \dots, v_k]),$$

onde $h_1 = v_1 - w_1$ e w_1 é a projeção ortogonal de v_1 no espaço vetorial gerado por v_2, \dots, v_k . Da igualdade acima e com a hipótese de indução, obtemos:

$$\text{vol}(P[v_1, \dots, v_k]) = \|h_1\| \text{vol}(P[v_2, \dots, v_k]) = \|h_1\| \sqrt{G(\{v_i\}_{2 \leq i \leq k})}.$$

Por outro lado, juntando a Observação 2.37 e a Proposição 2.35 temos que $G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}) = \|h_1\|^2 G(\{v_i\}_{2 \leq i \leq k})$. Segue daí que $\text{vol}(P[v_1, \dots, v_k]) = \sqrt{G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq k})}$. \square

Definição 2.39. *Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, se v_1, \dots, v_n são linearmente dependentes, definimos o produto vetorial $v_1 \times \dots \times v_n = 0$. Caso que v_1, \dots, v_n sejam linearmente independentes definimos o produto vetorial de v_1, \dots, v_n como sendo o único vetor não nulo $v = v_1 \times \dots \times v_n$ tal que para todo $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ temos $\langle w, v \rangle = \det(v_1, \dots, v_n, w)$ é o determinante da matriz com colunas v_1, \dots, v_n, w .*

O próximo resultado é bem conhecido e diz como descrever o produto vetorial de v_1, \dots, v_n :

Proposição 2.40. *Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$.*

- (i) *Considere $A = (v_1, \dots, v_n)$ a matriz de ordem $n + 1 \times n$ cujas colunas são os vetores v_1, \dots, v_n . Para cada $1 \leq i \leq n + 1$, seja A_i a matriz obtida pela omissão da i -ésima linha de A . Então a i -ésima coordenada do vetor $v = v_1 \times \dots \times v_n$ é $(-1)^{n+i+1} \det(A_i)$.*
- (ii) *Se $v = v_1 \times \dots \times v_n$, então $\|v\| = \text{vol}(P[v_1, \dots, v_n])$.*

Demonstração. Começamos com a prova de (i). Pela Definição 2.39 temos que a i -ésima coordenada de v é $\langle v, e_i \rangle = \det(v_1, \dots, v_n, e_i)$. Ou seja, sua i -ésima coordenada é dada por $(-1)^{n+i+1} \det(A_i)$.

Mostremos agora o item (ii). Denotemos por B a matriz com colunas v, v_1, \dots, v_n . A Observação 2.32 e a Definição 2.33 implicam

$$G(v, v_1, \dots, v_n) = (\det(B))^2.$$

Pela definição de produto vetorial temos:

$$(\det(B))^2 = (-1)^n \det(v, v_1, \dots, v_n)^2 = (-1)^n \langle v, v \rangle^2 = (-1)^n \|v\|^2.$$

Com as duas igualdades acima, concluímos:

$$\sqrt{G(v, v_1, \dots, v_n)} = \|v\|^2.$$

Como v é perpendicular a v_1, \dots, v_n , segue da Proposição 2.35 que:

$$\sqrt{G(v_1, \dots, v_n)} = \|v\|.$$

Finalmente, a igualdade acima e Proposição 2.38 garantem que:

$$\text{vol}(P[v_1, \dots, v_n]) = \|v\|,$$

o que termina nossa prova. \square

Terminamos esta seção com o seguinte resultado:

Proposição 2.41 (Identidade de Lagrange). *Sejam v_1, \dots, v_n vetores em \mathbb{R}^{n+1} . Então*

$$G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}) = \sum_{i=1}^{n+1} (\det(A_i))^2.$$

Demonstração. As proposições 2.38 e 2.40 garantem as seguintes igualdades:

$$G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}) = \text{vol}(P[v_1, \dots, v_n])^2 = \|v\|^2.$$

Pela Proposição 2.40 e igualdade acima obtemos:

$$G(\{v_i\}_{1 \leq i \leq n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (\det(A_i))^2,$$

o que termina a prova. □

Capítulo 3

Teorema de tipo Morse-Sard para valores críticos generalizados

No Capítulo 1, o Teorema 1.1 mostra que para uma aplicação de classe C^s de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^k , com $s \geq n - k + 1$, o conjunto dos valores críticos $K_0(f)$ possui medida nula. No Capítulo 2, o Teorema 2.5 generaliza o teorema de fibração de Ehresmann ao mostrar que $B(f) \subset K_0(f) \cup K_\infty(f)$, mas não fornece nenhuma estimativa sobre $K_\infty(f)$.

Relacionado a esta estimativa, apresentamos os seguintes resultados de Kurdyka, Orro e Simon [17]:

Teorema 3.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação semi-algébrica diferenciável. Então $K_\infty(f)$ é um conjunto semi-algébrico fechado de dimensão menor do que k .*

Teorema 3.2. *Se $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ uma aplicação polinomial, então $K_\infty(f)$ é um conjunto algébrico e $\dim_{\mathbb{C}} K_\infty(f) < k$.*

Com estes resultados e o Teorema de Morse-Sard (Teorema 1.1), temos que para ambas classes de aplicações dos resultados acima o conjunto $K(f)$ é um conjunto de medida nula. Em particular, estes resultados mostram que $K(f)$ é uma boa estimativa para $B(f)$ e que $B(f)$ é um conjunto de medida nula também.

Apresentamos a prova do caso real na seção 3.1 (mais especificamente na subseção 3.1.2) e do caso complexo na seção 3.2. Na seção 3.3, apresentamos a relação entre $K_\infty(f)$ e o conjunto dos pontos não próprios de uma aplicação semi-algébrica equidimensional de classe C^2 .

3.1 Aplicações semi-algébricas reais

Apresentamos alguns resultados prévios para a prova do Teorema 3.1. Apresentaremos também alguns resultados conhecidos de Geometria Semi-Algébrica e apresentamos uma versão semi-algébrica do Lema de seleção da curva para curvas no infinito, veja Lema 3.7.

Começamos com o seguinte resultado que garante que a função ν é semi-algébrica:

Proposição 3.3. *Se as normas em \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^k são semi-algébricas, então ν é semi-algébrica em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.*

Demonstração. O conjunto Σ (veja Definição 2.9) é um conjunto semi-algébrico porque depende dos determinantes dos menores de $B \in \Sigma$. Pela Proposição 2.13, ν é a função distância de Σ e como a função distância é uma aplicação semi-algébrica (veja [2] e Exemplo 1.9), temos que ν é semi-algébrica. \square

Vamos utilizar fortemente o fato de que $K_\infty(f)$ pode ser expresso pelo conjunto $K_\infty^N(f)$, que é definido como segue:

Definição 3.4. Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação diferenciável, define-se

$$K_\infty^N(f) = \{y \in \mathbb{R}^k : \exists x_l \in \mathbb{R}^n ; \|x_l\| \rightarrow \infty , f(x_l) \rightarrow y \text{ e } \|x_l\|^{1+\frac{1}{N}} \nu(df(x_l)) \rightarrow 0\}.$$

Segue o Lema 3.5 que será útil para a prova da caracterização de $K_\infty(f)$ apresentada no Lema 3.6

Lema 3.5 (Wing Lemma). [2, Teorema 9.7.10] Sejam B, Ω dois conjuntos semi-algébricos de \mathbb{R}^n . Assuma que $B = \overline{B} \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Então existe um conjunto semi-algébrico $A \subset \Omega$ tal que

$$B = \overline{A} \cap (\overline{\Omega} \setminus \Omega).$$

Lema 3.6. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação semi-algébrica diferenciável. Então existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$K_\infty(f) = K_\infty^N(f).$$

Demonstração. Considere $i_n : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a inversa da projeção estereográfica onde $S^{q-1} = S^{q-1}(0, 1)$. Então

$$\text{graph}(i_n) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \left(\sum_{i=1}^n (x_i^2) + 4 \right) y_i = 4x_i \forall 1 \leq i \leq n \text{ e } \left(\sum_{i=1}^n (x_i^2) + 4 \right) y_{n+1} = 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \right\}, \quad (3.1)$$

que é um conjunto semi-algébrico e portanto i_n é semi-algébrica. Denote $\{\infty\} = S^n \setminus i_n(\mathbb{R}^n)$. De forma similar, consideramos a compactificação de \mathbb{R}^k e \mathbb{R} .

Tomemos a função

$$\sigma(x) = \|x\| \nu(df(x)), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pela Proposição 3.3, segue que σ é semi-algébrica.

Agora

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \subset S^k \times S^1, \\ x &\rightarrow (f(x), \sigma(x)). \end{aligned}$$

Denotemos $\Omega = \text{graph}(\varphi) \subset S^n \times S^k \times S^1$ e $B = \overline{\{\infty\} \times K_\infty(f) \times \{0\}}$ em $S^n \times S^k \times S^1$. Em geral o conjunto $\{\infty\} \times K_\infty(f) \times \{0\}$ não é fechado, mas

$$\{\infty\} \times K_\infty(f) \times \{0\} = \{(\bar{x}, y, 0) : \|\bar{x}\| > \|x\| \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \exists x_l \text{ com } \|x_l\| \rightarrow \infty, f(x_l) \rightarrow y, \nu(df(x_l)) \rightarrow 0\}.$$

Logo $\{\infty\} \times K_\infty(f) \times \{0\}$ é um conjunto semi-algébrico, bem como o seu fecho, a saber B . Assim é fácil ver que $B \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega$.

Segue, pelo Lema 3.5 que existe $A \subset \Omega$ tal que

$$B = \overline{A} \cap (\overline{\mathbb{R}^n \times \text{Im}(f) \times \text{Im}(\sigma)}). \quad (3.2)$$

Consideremos $\Gamma = \pi(A)$, onde $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção canônica. Por outro lado, a igualdade (3.2) significa que $\{\infty\} \times y \times \{0\} \in B$ se, e somente se, existe uma sequência $x_l \in \Gamma$ com $|x_l| \rightarrow \infty$, $f(x_l) \rightarrow y$ e $\sigma(x_l) \rightarrow 0$. Assim, definimos

$$\theta(r) = r \sup_{x \in \Gamma, |x|=r} \nu(df(x)),$$

sendo que $\theta(r) = 0$, se $\Gamma \cap S^{n-1}(0, r) = \emptyset$. A função θ é semi-algébrica pois ν é semi-algébrica (Proposição 3.3). Logo, tomemos uma sequência $|x_l| \rightarrow \infty$ em Γ tal que $\sigma(x_l) \rightarrow 0$. Consequentemente, a desigualdade de Puiseux garante que $\theta(r) \leq cr^{-\alpha}$, em ∞ , para algum $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ e $c > 0$. Logo, escolhendo $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{2}{N} < \alpha$, obtemos

$$r^{1+\frac{1}{N}}\nu(df(x_l)) < cr^{-\frac{1}{N}}\theta(r).$$

Para terminar, como $\theta(r) \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$, segue então que $|x_l|^{1+\frac{1}{N}}\nu(df(x_l)) \rightarrow 0$. Isto significa que $K_\infty(f) \subset K_\infty^N(f)$. \square

3.1.1 Arcos semi-algébricos no infinito

No Capítulo 1, Lema 1.15, apresentamos o clássico lema de seleção da curva. A seguir apresentamos uma versão no infinito deste lema.

Lema 3.7 (Lema de seleção da curva no infinito). *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e seja $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ uma aplicação semi-algébrica. Assuma que existe uma sequência $x_l \in A$ tal que $|x_l| \rightarrow \infty$ e $\phi(x_l) \rightarrow y$, para algum $y \in \mathbb{R}^q$. Então existe uma curva analítica semi-algébrica $\gamma : (\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(t) \in A$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = +\infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(\gamma(t))\| = y$.*

Demonstração. Seja i_n a inversa da projeção estereográfica como no Lema 3.6. Denotemos $A_S = i_n(A)$. O conjunto A_S é um conjunto semi-algébrico de \mathbb{R}^{n+1} pois A é um conjunto semi-algébrico e i_n é uma função semi-algébrica (veja Proposição 1.10).

Como $|x_l| \rightarrow \infty$ em \mathbb{R}^n , segue que $i_n(x_l) \rightarrow \infty$ em S^n , ou seja, $\infty \in \partial A_S$. Logo, $(i_n(x_l), \phi(x_l)) \rightarrow (\infty, y)$. Pelo Lema 1.15, existe uma curva semi-algébrica $p : [0, \epsilon) \rightarrow S^n \times \mathbb{R}^q$ e analítica em $(0, \epsilon)$ tal que $p(0, \epsilon) \subset A_S \times \mathbb{R}^q$ e $p(0) = (\infty, y)$. Consideremos $\tilde{\gamma} := i_n^{-1} \circ p_1 : (0, \epsilon) \rightarrow A$. Temos que $\tilde{\gamma}$ é analítica e semi-algébrica. Para terminar, tomemos $\gamma : (1/\epsilon, \infty) \rightarrow A$, $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(1/t)$. \square

Observação 3.8. *Sem perda de generalidade podemos supor que γ no lema anterior satisfaz $\|\gamma(r)\| = r, \forall r$. De fato, como a curva γ na proposição anterior é semi-algébrica, podemos supor sem perda de generalidade que para α_0 suficiente grande a curva $\gamma : (\alpha_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz $\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle \neq 0$, para todo $t \geq \alpha_0$. Desta forma, a função $f : (\alpha_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \|\gamma(t)\|$ não possui pontos críticos e portanto é crescente. Além disto, f é analítica. Segue pelo Teorema de Função Inversa que existe f^{-1} analítica. Portanto, $\beta := \gamma \circ f^{-1}$ é uma reparametrização de γ que satisfaz $\|\beta(r)\| = r$. Além disto, β é analítica e semi-algébrica.*

Com as condições acima temos o seguinte resultado:

Lema 3.9. *Seja $\gamma : (\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva semi-algébrica e analítica como no Lema 3.7 e que satisfaz $\|\gamma(r)\| = r, \forall r$, como na Observação 3.8. Então os limites $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(r)}{\|\gamma(r)\|}$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma'(r)}{\|\gamma'(r)\|}$ existem e são iguais.*

Demonstração. Consideremos a função $h : (\alpha, \infty) \rightarrow S^n$, com $h(r) = \frac{\gamma(r)}{\|\gamma(r)\|}$ e a sequência $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como esta sequência está contida em um conjunto compacto, existe uma subsequência $\{h(n_k)\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ convergente. Seja $v \in S^n$ o limite desta subsequência. Para $\epsilon > 0$ e pela convergência existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que se $k > N$ então $h(n_k) \in B_\epsilon(v) \cap S^n$. Portanto, temos infinitos n_k em $B_\epsilon(v) \cap S^n$. Por outro lado, como γ é semi-algébrica segue que h é semi-algébrica. Logo $h^{-1}(B_\epsilon(v) \cap S^n)$ é um conjunto semi-algébrico em \mathbb{R} . Mas como conjuntos semi-algébricos em \mathbb{R} são união finita de pontos e uniões finitas de intervalos, segue que $h^{-1}(B_\epsilon(v) \cap S^n)$ é da forma (δ, ∞) . Portanto, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(r)}{\|\gamma(r)\|} = v$. Que $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma'(r)}{\|\gamma'(r)\|}$ existe, segue do fato de que a derivada de uma função semi-algébrica é semi-algébrica, ou seja, segue do fato de que γ'

também é semi-algébrica e podemos utilizar o argumento anterior para concluir que o limite existe.

Por outro lado para provar a igualdade, como γ é analítica podemos escrever $\gamma(r) = a_\beta r^\beta + a_{\beta-1} r^{\beta-1} + a_{\beta-2} r^{\beta-2} + \dots$, com $\beta \geq 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(r)}{\|\gamma(r)\|} &= \frac{a_\beta r^\beta + a_{\beta-1} r^{\beta-1} + a_{\beta-2} r^{\beta-2} + \dots}{\|a_\beta r^\beta + a_{\beta-1} r^{\beta-1} + a_{\beta-2} r^{\beta-2} + \dots\|} \\ &= \frac{r^\beta (a_\beta + a_{\beta-1} r^{-1} + a_{\beta-2} r^{-2} + \dots)}{|r^\beta| \|a_\beta + a_{\beta-1} r^{-1} + a_{\beta-2} r^{-2} + \dots\|} \\ &= \frac{a_\beta + a_{\beta-1} r^{-1} + a_{\beta-2} r^{-2} + \dots}{\|a_\beta + a_{\beta-1} r^{-1} + a_{\beta-2} r^{-2} + \dots\|}. \end{aligned}$$

Aplicando o mesmo argumento para $\gamma'(r)$, obtemos:

$$\frac{\gamma'(r)}{\|\gamma'(r)\|} = \frac{\beta a_\beta + (\beta-1) a_{\beta-1} r^{-1} + (\beta-2) a_{\beta-2} r^{-2} + \dots}{\|\beta a_\beta + (\beta-1) a_{\beta-1} r^{-1} + (\beta-2) a_{\beta-2} r^{-2} + \dots\|}.$$

Com as duas expressões acima segue

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(r)}{\|\gamma(r)\|} = \frac{a_\beta}{\|a_\beta\|} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma'(r)}{\|\gamma'(r)\|},$$

o que conclui a prova. Observe que $v = \frac{a_\beta}{\|a_\beta\|}$. □

Lema 3.10. *Seja γ a curva obtida no Lema 3.7, com $\|\gamma(r)\| = r$ (Observação 3.8). Então $\lim_{r \rightarrow \infty} \|\gamma'(r)\| = 1$. Em particular, $\gamma'(r)$ é limitada.*

Demonstração. Diferenciando a igualdade $\|\gamma(r)\|^2 = r^2$, obtemos $\langle \gamma(r), \gamma'(r) \rangle = r$. Esta igualdade implica que $\|\gamma'(r)\| = \frac{1}{\cos(\alpha(r))}$, com $\alpha(r)$ sendo o ângulo entre $\gamma'(r)$ e $\gamma(r)$. Pelo Lema 3.9, temos $\alpha(r) \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$. Portanto, $\lim_{r \rightarrow \infty} \|\gamma'(r)\| = 1$ e a prova segue. □

3.1.2 Prova do Teorema Kurdyka-Orro-Simon

Nesta seção apresentaremos uma prova do Teorema 3.1 seguindo [17]. Antes da prova, apresentaremos alguns lemas fundamentais para a prova do resultado final. Para estes lemas, consideramos as seguintes convenções: fixemos um $N \in \mathbb{N}$ tal que $K_\infty(f) = K_\infty^N(f)$ como no Lema 3.4 e pela Proposição 2.18, podemos substituir a função ν pela distância de Kuo κ .

Definição 3.11. *Seja $i \in \{1, \dots, k\}$. Definimos*

$$D_i := \{x \in \mathbb{R}^n : \kappa(df(x)) = \text{dist}(\nabla f_i(x), V_i)\},$$

onde V_i é o espaço gerado pelos vetores $\nabla(f_j(x))$, com $j = 1, \dots, k$ e $j \neq i$.

Para cada D_i acima, definimos:

$$K_\infty(f|_{D_i}) := \{y \in \mathbb{R}^k : \exists x_l \in D_i, |x_l| \rightarrow \infty, f(x_l) \rightarrow \infty \text{ e } |x_l| \nu(df(x_l)) \rightarrow 0\}.$$

Temos:

Lema 3.12. *D_i é um conjunto semi-algébrico.*

Demonstração. Considere a função semi-algébrica $h_i(x) = \kappa(df(x)) - \text{dist}(\nabla(f_i(x)), V_i)$. Temos que $h_i^{-1}(0) = D_i$ e portanto D_i é um conjunto semi-algébrico em \mathbb{R}^n . □

Lema 3.13.

$$K_\infty(f) = \cup_{i=1}^k K_\infty(f|_{D_i}).$$

Demonstração. A inclusão $\cup_{i=1}^k K_\infty(f|_{D_i}) \subset K_\infty(f)$, segue diretamente das definições destes conjuntos.

Para a outra inclusão, observamos primeiramente que $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^k D_i$. Logo, dado $y \in K_\infty(f)$, existe uma sequência $x_l \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x_l| \rightarrow \infty$, $f(x_l) \rightarrow \infty$ e $|x_l|\kappa(df(x_l)) \rightarrow 0$. Logo existe $1 \leq j \leq k$ e uma subsequência x_{l_p} tal que $x_{l_p} \in D_j$. Portanto, x_{l_p} satisfaz $|x_{l_p}| \rightarrow \infty$, $\lim_{p \rightarrow \infty} f(x_{l_p}) = y$ e $|x_{l_p}|\nu(df(x_{l_p})) \rightarrow 0$, ou seja, $y \in K_\infty(f|_{D_j}) \subset \cup_{i=1}^k K_\infty(f|_{D_i})$. \square

A prova do Teorema 3.1 segue diretamente do próximo resultado:

Lema 3.14. *Temos que*

$$\text{vol}_k(K_\infty(f|_{D_i})) = 0,$$

para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Em particular $\dim(K_\infty(f)) < \infty$.

Demonstração. Para fixar as ideias, provaremos para $i = 1$. Os outros casos são análogos. Sejam $D = D_1$ e $\bar{f} = (f_2, \dots, f_k)$. Fixemos uma bola aberta B em \mathbb{R}^{k-1} e um intervalo limitado (α, β) em \mathbb{R} . Nosso objetivo é provar que

$$\text{vol}_k(K_\infty(f|_D) \cap (\alpha, \beta) \times B) = 0, \quad (3.3)$$

o que implica diretamente a prova do lema.

Considere os conjuntos

$$\widetilde{\Sigma}_r = \{x \in D : |x| \geq r, f_1(x) \in (\alpha, \beta), \bar{f}(x) \in B \text{ e } |x|^{1+\frac{1}{N}}\nu(df(x)) \leq 1\},$$

onde $r > 0$. Definimos os seguintes dois conjuntos:

$$\Delta_r = f(\widetilde{\Sigma}_r),$$

$$\Delta = \cap_{r>0} \overline{\Delta_r}.$$

Cada Δ_r é um conjunto semi-algébrico e portanto é mensurável (na medida de Lebesgue). Temos que $(\Delta_r)_{r>0}$ é uma sequência decrescente de conjuntos. Pelo Teorema da convergência monótona e o fato de que $\text{vol}_k(\overline{\Delta_r}) = \text{vol}_k(\Delta_r)$, segue que (veja [1], Teorema 4.6):

$$\text{vol}_k(\Delta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{vol}_k(\Delta_r).$$

Por outro lado, temos $K_\infty(f|_D) \cap (\alpha, \beta) \times B \subset \Delta$. Assim basta provarmos que $\text{vol}_k(\Delta) = 0$. Primeiramente, usando o Teorema de Fubini (veja [1], Teorema 10.10), escrevemos

$$\text{vol}_k(\Delta_r) = \int_B m_r(b) db,$$

onde db é a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^{k-1} e

$$m_r(b) = \text{vol}_1(\{y_1 \in \mathbb{R} : (y_1, b) \in \Delta_r\}), \quad (3.4)$$

com $m_r(b)$ mensurável. Agora fixemos $b \in B$. Temos que a função $r \rightarrow m_r(b) \geq 0$ é decrescente. Denote

$$m(b) := \lim_{r \rightarrow \infty} m_r(b),$$

e segue que o teorema da convergência dominada de Lebesgue (veja por exemplo [1], Teorema 5.6) garante que:

$$\text{vol}_k(\Delta) = \int_B m(b)db.$$

Para terminarmos a demonstração, vamos provar no lema 3.17 que $m \equiv 0$, o que implica que $\text{vol}_k(\Delta) = 0$. \square

Para a prova do Lema 3.17 utilizaremos que um conjunto semi-algébrico pode ser decomposto como a união de conjuntos semi-algébricos com a propriedade de Whitney com constante M , propriedade esta que definimos a seguir.

Definição 3.15 (Propriedade de Whitney com constante M). *Dizemos que um conjunto L possui a propriedade de Whitney com constante M , se quaisquer $x, y \in L$ podem ser ligados por um arco em L contínuo por partes de comprimento menor ou igual a $M\|y - x\|$.*

K. Kurdyka em [18] demonstrou que todo conjunto semi-algébrico $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma união finita de conjuntos L^i com a propriedade de Whitney. Seguindo [17], apresentamos o Teorema 3.16 que é uma decomposição uniforme do resultado provado em [18].

Teorema 3.16. *Existe $M = M(n) > 0$ tal que, qualquer conjunto semi-algébrico $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ pode ser decomposto em uma união finita e disjunta $A = \cup_{i \in I} L^i$ de modo que para cada $t \in \mathbb{R}^p$, os conjuntos $L_t^i = \{y \in \mathbb{R}^n : (y, t) \in L^i\}$ tem a propriedade de Whitney com constante M . Em particular $A_t = \cup_{i \in I} L_t^i$, para cada $t \in \mathbb{R}^p$.*

Com este teorema, segue a prova do Lema 3.17:

Lema 3.17. *Existe uma constante $c > 0$, tal que para r suficientemente grande temos:*

$$m_r(b) \leq cr^{-\frac{1}{N}},$$

onde m_r é como em (3.4).

Demonstração. Definimos

$$\Sigma_{r,b} = \tilde{\Sigma}_r \cap \bar{f}^{-1}(b) \cap S^n(0, r),$$

onde $b \in B$ e $r > 0$. Seja:

$$\tilde{\Sigma}_{r,b} = \tilde{\Sigma}_r \cap \bar{f}^{-1}(b) = \cup_{s \geq r} \Sigma_{s,b}.$$

Observamos que

$$m_r(b) = \text{vol}_1(f_1(\tilde{\Sigma}_{r,b})).$$

Segue do Teorema 3.16 que existe uma família finita $L^i \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}$, $i \in I$, de subconjuntos semi-algébricos tais que

$$\Sigma_{r,b} = \bigcup_{i \in I} L_{r,b}^i,$$

com cada $L_{r,b}^i$ tendo a propriedade de Whitney com constante M .

A condição $|x|^{1+\frac{1}{N}} \kappa(d(f)) \leq 1$, quando $x \in \bar{f}^{-1}(b) = W_b$, significa que $\nabla f_j|_{W_b}(x) = 0$. Portanto,

$$|\nabla f_1|_{W_b}(x)| \leq |x|^{-(1+\frac{1}{N})}. \quad (3.5)$$

Assim, $f_1(L_{r,b}^i)$ é um segmento de comprimento $d(r)$ e pelo Teorema do Valor Médio temos

$$\begin{aligned}
d(r) &= |\nabla f_1|_{W_b}(x')|x - y| \\
&\leq \sup_{L_{r,b}^i} |\nabla f_1|_{W_b} |\gamma_{x,y}| \\
&\leq M \sup_{L_{r,b}^i} |\nabla f_1|_{W_b} |x - y| \\
&\leq 2Mr \sup_{L_{r,b}^i} |\nabla f_1|_{W_b}| \\
&\leq 2Mr^{-\frac{1}{N}},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $\gamma_{x,y}$ é o comprimento de arco em $L_{r,b}^i$ ligando x com y .

Fixado $b \in B$ e $i \in I$, assumamos que $L_{r,b}^i \neq \emptyset$, para r suficientemente grande. Pelo Lema 3.7 existe um arco semi-algébrico $\gamma : [r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(\varsigma) \in L_{\varsigma,b}$. Em particular $\gamma(\varsigma) \in W_b$ e $|\gamma(\varsigma)| = \varsigma$.

Pelo Lema 3.10, podemos supor $|\gamma(\varsigma)| \leq 2$ e usando (3.5) temos a seguinte estimativa para o comprimento de $f_1 \circ \gamma([r, +\infty))$:

$$\int_r^{+\infty} |(f_1 \circ \gamma)'([r, +\infty))| d\varsigma \leq 2 \int_r^{+\infty} \varsigma^{-(1+\frac{1}{N})} = 2Nr^{-\frac{1}{N}}. \tag{3.7}$$

De (3.6) e (3.7), $f_1(\bigcup_{\varsigma \geq r} L_{\varsigma,b}^i)$ está contido em um segmento de comprimento

$$(2M + 2N)r^{-\frac{1}{N}}.$$

Como $f(\tilde{\Sigma}_{r,b})$ está contido em $\#I$ segmentos desse comprimento, então, se $c = (\#I)(2M + 2N)$, segue que $m_r(b) \leq cr^{-\frac{1}{N}}$, o que termina nossa prova. \square

Para terminar a seção, formalizemos a prova do Teorema 3.1:

Demonstração Teorema 3.1. Pela prova do Lema 3.4, temos que a aplicação $\varphi = (f, \sigma)$ é semi-algébrica, logo o conjunto $K(f)$ é semi-algébrico em \mathbb{R}^k . Como $K(f) = K_0(f) \cup K_\infty(f)$, segue pelo Teorema de Sard (Teorema 1.1) que $\dim(K_0(f)) < k$. Pelo Lema 3.14, temos $\dim(K_\infty(f)) < k$ e portanto $\dim(K(f)) < k$, o que termina a prova. \square

3.2 Aplicações polinomiais complexas

No caso complexo, F. Pham em [31] considerou $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial e demonstrou que existe um conjunto finito $\Delta \subset \mathbb{C}$ tal que $B(f) \subset \Delta$. Em [28], A. Parusinski descreveu o conjunto de bifurcação de f , $B(f)$, em termos de $K(f)$ e $K_\infty(f)$ para uma classe especial de funções polinomiais. Na literatura podemos encontrar vários trabalhos em busca de descrever $B(f)$, por exemplo [30], [32], [34], [28], etc. Seguindo [17], apresentamos o Teorema 3.2, que pode ser visto por exemplo como uma generalização do trabalho de F. Pham [31].

Dividimos a prova do caso complexo em dois casos, o primeiro para aplicações polinomiais dominantes e o segundo para não dominantes. Começamos apresentando a noção de dimensão para um conjunto algébrico, tendo como referência [23].

Definição 3.18. Dizemos que um subconjunto $V \subset \mathbb{C}^n$ é um conjunto algébrico se V é o conjunto de zeros de um coleção de funções polinomiais definidas em \mathbb{C}^n .

Considere $I(V) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ o conjunto de todas as funções polinomiais que se anulam em V . É fácil ver que $I(V)$ é um ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Pelo Teorema da base de Hilbert (veja [14], Proposição 2.3) todo conjunto algébrico V pode ser definido como uma coleção finita de equações polinomiais. Pelo Teorema da base de Hilbert também, para toda cadeia de conjuntos algébricos $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ existe $i \in \mathbb{N}$, tal que $V_i = V_{i+1} = V_{i+2} = \dots$.

Definição 3.19. *Um conjunto algébrico é dito irredutível se ele não pode ser escrito como união de dois conjuntos algébricos próprios.*

É bem conhecido que um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{C}^n$ é irredutível se, e somente se, $I(V)$ é um ideal primo de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Se V é irredutível podemos falar do corpo de frações f/g com f e g no domínio de integridade $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$. Este corpo de frações é chamado de corpo de funções racionais de V . Definimos a dimensão de um conjunto algébrico irredutível V sobre \mathbb{C} da seguinte forma:

Definição 3.20. *A dimensão de um conjunto algébrico irredutível V sobre \mathbb{C} é o grau de transcendência de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$ sobre \mathbb{C} .*

Dada uma variedade V sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então o conjunto $V \setminus \Sigma(V)$ é uma variedade analítica, onde $\Sigma(V)$ denota o conjunto dos pontos críticos de V .

Quando a variedade V é uma variedade irredutível a dimensão da variedade analítica $V \setminus \Sigma(V)$ sobre \mathbb{K} coincide com a dimensão algébrica de V sobre \mathbb{K} .

Segue a definição de conjunto construtível:

Definição 3.21 ([27], página 51). *Um subconjunto W de \mathbb{C}^m é chamado de construtível se ele é união finita de conjunto localmente fechados de \mathbb{C}^m . Isto é união finita de conjuntos que são interseções de um conjunto aberto com um conjunto fechado na topologia de Zariski.*

Proposição 3.22 ([27], página. 51, Corolário 2). *Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ uma aplicação polinomial complexa, então imagem de conjuntos construtível é construtível.*

Proposição 3.23 ([27], página. 60). *Seja W um conjunto construtível então seus fechos na topologia de Zariski e na topologia forte são iguais.*

Lema 3.24. *Se W é um conjunto construtível e fechado então ele é algébrico.*

Demonstração. Como W é construtível, pela Proposição 3.23 os fechos nas duas topologias são iguais. Como W é fechado, então também é fechado na topologia de Zariski, portanto W é algébrico. □

Definição 3.25 ([27], página 48). *Dada $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ uma aplicação polinomial, dizemos que f é dominante se a imagem de f é densa em \mathbb{C}^m , ou seja, se $f(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^m$.*

O Teorema 3.26 é fundamental para a prova do caso em que f é dominante:

Teorema 3.26 ([27], página 48). *Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ uma aplicação polinomial dominante com $n \geq m$ e defina $r = n - m$. Tome $W \subset \mathbb{C}^m$ um subconjunto fechado irredutível e seja Z uma componente de $f^{-1}(W)$ que domina W . Então*

$$\dim Z \geq \dim W + r.$$

Lema 3.27. *Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ uma aplicação polinomial, $n \geq m$. Se f é não dominante, então $\text{posto}(df(x)) < m$. Ou seja, se f é não dominante, então $K_0(f) = f(\mathbb{C}^n)$.*

Demonstração. Por contradição, suponha que existe $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $df(x) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ é sobrejetora. Pela forma local das submersões (veja [21]), segue que f após uma mudança de coordenadas, f pode ser vista como uma projeção (aplicação aberta) e portanto existe um $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(x)) \subset f(\mathbb{C}^n)$. Logo, $\dim \overline{f(\mathbb{C}^n)} = m$, o que implica $\overline{f(\mathbb{C}^n)} = \mathbb{C}^m$, o que contradiz o fato de f ser não dominante. Portanto, a prova segue. \square

Segue um exemplo que mostra que $K_0(f) = \text{Im}(f)$ e $\text{Im}(f) \subsetneq \overline{\text{Im}(f)} = K_\infty(f)$.

Exemplo 3.28. Considere a aplicação polinomial complexa $f : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^4$ dada por $f(x, y, z, w, t) = ((xy - 1)^2, y, y, z + w + t)$. Temos que o Jacobiano de f é dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} 2(xy - 1)y & 2(xy - 1)x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que $\text{rank}(df(x, y, z, w, t)) \leq 3$, ou seja, $\text{crit}(f) = \mathbb{C}^5$ e portanto $K_0(f) = \text{Im}(f)$. Por outro lado, temos que $\text{Im}(f) = \{(a, b, b, c) : a, b, c \in \mathbb{C}\} \setminus \{(a, 0, 0, c) \in \mathbb{C}^4 : a \neq 1\}$ que não é um conjunto fechado. Note também que, pelo Lema 2.7, temos $K_\infty(f) = \{(a, b, b, c) : a, b, c \in \mathbb{C}\}$.

Lema 3.29. Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ uma aplicação polinomial, $n \geq m$. Se f é não dominante, então $f(\mathbb{C}^n) \subset K_\infty(f)$.

Demonstração. Considere f como uma aplicação sobre o fecho de sua imagem, ou seja, $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \overline{f(\mathbb{C}^n)}$. Desta forma, esta aplicação é dominante e como f sobre \mathbb{C}^m é não dominante segue que $\dim f(\mathbb{C}^n) = p < m$. Consideremos $\{y\} = W$ e $f^{-1}(W) = Z$. Segue pelo Teorema 3.26 que:

$$\dim f^{-1}(y) \geq n - p > n - m \geq 0.$$

Portanto, $\dim f^{-1}(y) \geq 1$ e conseqüentemente $f^{-1}(y)$ é um conjunto algébrico não compacto. Logo, existe uma seqüência $x_k \rightarrow \infty$ com $f(x_k) = y$ e pelo Lema 3.27, temos que $\nu(df(x_k)) = 0$. Portanto, $y \in K_\infty(f)$, o que conclui a prova. \square

Lema 3.30. Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ uma aplicação polinomial, $n \geq m$. Se f é não dominante, então $\overline{f(\mathbb{C}^n)} = K_\infty(f)$.

Demonstração. Segue diretamente da definição de $K_\infty(f)$ a inclusão $K_\infty(f) \subset \overline{f(\mathbb{C}^n)}$. Agora a prova termina usando Lema 3.29. \square

A seguir, apresentamos a prova do Teorema 3.2.

Demonstração Teorema 3.2. Inicialmente, suponha que f é não dominante. Neste caso, pelo Lema 3.30 temos que $K_\infty(f) = \overline{f(\mathbb{C}^n)}$ e portanto $K_\infty(f)$ é um conjunto algébrico de dimensão menor que m .

Agora, suponhamos que f é dominante. Pela Proposição 2.18, podemos utilizar a função κ no lugar da função ν . Seja $f = (f_1, \dots, f_k)$. Para cada $j = 1, \dots, k$, escrevemos

$$\tilde{f}_j = (f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_k) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{k-1}.$$

Sejam $V_j(z) = \ker(df_j(z))$ e $w_j(z)$ a restrição de $df_j(z)$ em $V_j(z)$. Pela definição da distância de Kuo temos

$$\kappa(df(z)) = \min_{1 \leq j \leq k} \|w_j(z)\|.$$

Por outro lado, seja $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ e, para cada $s = 1, \dots, n$, consideremos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\tau_s(z) = \left(\frac{z_1}{z_s}, \dots, \frac{z_{s-1}}{z_s}, \frac{1}{z_s}, \frac{z_{s+1}}{z_s}, \dots, \frac{z_n}{z_s} \right).$$

Observe que se $z_s = 0$, então $\tau_s(z) = \infty$.

Denotemos por $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{n-k+1}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C})$ o Grasmanniano dos hiperplanos de dimensão $n-k+1$ do espaço \mathbb{C}^{n+1} . Fixemos j, s e consideremos a aplicação racional

$$A_s^j : \mathbb{C}^n \setminus \{z_s = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^k \times \mathbb{G},$$

dada por $A_s^j(z) = (f(\tau_s(z)), W_s^j(z))$, onde $W_s^j(z)$ é o gráfico da função $\frac{1}{z_s}w_j(z)$.

A aplicação $A_s^j(z)$ está bem definida para aqueles z tais que $V_j(z)$ é de dimensão $n-k+1$. Como f é dominante, então esta condição é satisfeita fora de um conjunto algébrico nunca denso. Consideremos o conjunto $\Lambda = \mathbb{G}_{n-k+1}(\mathbb{C}^n \times 0) \subset \mathbb{G}$. Note que, cada $\lambda \in \Lambda$ pode ser visto como o gráfico de uma aplicação constante (igual ao 0) sobre o plano λ de dimensão $n-k+1$. Tome

$$B_s^j = \overline{\text{graph}(A_s^j)} \cap \{z \in \mathbb{C}^n : z_s = 0\} \times \mathbb{C}^k \times \Lambda.$$

O fecho é considerado na topologia forte, mas é igual ao fecho de Zariski, assim B_s^j é um conjunto algébrico. Se $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}^k$ denota a projeção, então seja

$$K_s^j = \pi(B_s^j).$$

Como K_s^j é a projeção de um conjunto algébrico, então é construtível. Agora, assumindo que

$$K_\infty(f) = \bigcup_{s=1, j=1}^{n, k} K_s^j,$$

(veja Lema 3.31) temos que $K_\infty(f)$ é construtível e fechado, (Lema 2.27) e então, pelo Lema 3.24, ele é um conjunto algébrico. \square

Lema 3.31. *Sejam K_s^j como na construção feita na prova do Teorema 3.2 então*

$$K_\infty(f) = \bigcup_{s=1, j=1}^{n, k} K_s^j.$$

Demonstração. Primeiro, suponha que $y \in K_s^j$. Então existe um arco real de Puiseux $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) : (0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}^n$ com $|\eta_s(t)| = t$, tal que $f \circ \tau_s \circ \eta(t) \rightarrow y$ quando $t \rightarrow 0$. Como Λ é compacto então existe $W_s^j \in \Lambda$, tal que $W_s^j(\tau_s(\eta(t))) \rightarrow W_s^j$ quando $t \rightarrow 0$, o que significa que $y \in K_\infty(f)$.

Agora, tome $y \in K_\infty(f)$, Então existe um arco indo ao infinito $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ tal que $f(z(t)) \rightarrow y$ e

$$\|z(t)\| \kappa(df(z(t))) \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

Seja z_s a coordenada que vai mais rápido para infinito do que as outras e tome j tal que $\kappa(df(z(t))) = \|w_j(z(t))\|$. Assim, usando a aplicação racional A_s^j existe um limite W_s^j de gráficos de $z_s w_j(z(t))$. Segue então que $(0, y, W_s^j) \in B_s^j$, conseqüentemente $y \in K_s^j$. \square

Para funções polinomiais $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ a condição de $t_0 \notin K_\infty(f)$ significa que t_0 satisfaz a condição de Malgrange. Nesta direção, apresentamos como exemplo uma caracterização da condição de Malgrange obtida por Parusinski (veja por exemplo [29]).

Primeiro, dada uma função polinomial complexa $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, seja $d = \deg(f)$ e escreva $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$ como na sua decomposição em componentes homogêneas com $f_d \neq 0$. Dizemos que f possui singularidades isoladas no infinito se o seguinte conjunto:

$$\{p \in \mathbb{P}^n \mid \partial f_d / \partial x_1(p) = \dots = \partial f_d / \partial x_n(p) = f_{d-1}(p) = 0\}$$

é um conjunto finito em \mathbb{P}^n . Para mais detalhes, veja [28, página 370]. Com estas noções temos:

Teorema 3.32. *Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial com singularidades isoladas no infinito e t_0 um valor regular, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $t_0 \notin B(f)$.
- (ii) t_0 satisfaz a condição de Malgrange, isto é, $\exists \delta > 0 : |x| |\nabla f(x)| \geq \delta$ para x suficientemente grande.
- (iii) $\chi(f^{-1}(t))$ é constante perto de t_0 , onde $\chi(f^{-1}(t))$ denota a característica de Euler de $f^{-1}(t)$.

Em particular, o teorema anterior caracteriza $B(f)$ para polinômios se $n = 2$. Neste caso, em [8], mostra-se que $K_\infty(f) = \tilde{K}_\infty(f)$.

3.3 O conjunto J_f de pontos não próprios

Nesta seção, mostraremos que no caso equidimensional o conjunto de pontos não próprios de f , denotado por J_f (veja Definição 3.34 e Teorema 3.36), coincide com $K_\infty(f)$. Começamos com a seguinte definição:

Definição 3.33. *Uma aplicação contínua $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ é dita própria em $y \in \mathbb{K}^m$, se existe um conjunto aberto U contendo y tal que $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ é uma aplicação própria, ou seja, que pré-imagem de qualquer compacto é compacto.*

Definição 3.34. *Seja $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$. Definimos o conjunto J_f como sendo o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{K}^m$ tais que f não é própria em y .*

Dados dois espaços topológicos X, Y , uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita de homeomorfismo local se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança U , com $x \in U$, tal que a aplicação $f|_U : U \rightarrow f(U)$ é um homeomorfismo. Na sequência precisaremos do seguinte resultado de topologia que pode ser visto em [20].

Lema 3.35 ([20], página 121). *Sejam X um espaço de Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo local. Se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a imagem inversa $f^{-1}(y)$ possui exatamente n elementos, $\forall y \in Y$, então f é uma aplicação própria, ou seja, $J_f = \emptyset$.*

O Lema 3.35 é uma modificação da Proposição 3.1 apresentada em [17]. Acrescentamos a hipótese de submersão e utilizamos o resultado acima.

Teorema 3.36. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação semi-algébrica de classe \mathcal{C}^2 . Suponha que f é uma submersão, então $K_\infty(f) = J_f$.*

Demonstração. A inclusão $K_\infty(f) \subset J_f$ segue diretamente da definição destes conjuntos.

Suponha que $p \notin K_\infty(f)$. Pelo Teorema da Função Inversa, temos que f é um difeomorfismo local e portanto $f^{-1}(p)$ é um conjunto de pontos isolados. Além disto, como f é uma aplicação semi-algébrica segue que $f^{-1}(p)$ é um conjunto finito, pois a quantidade de componentes conexas de um conjunto semi-algébrico é finita. Portanto, $f^{-1}(p) = \{x_1, \dots, x_n\}$ e pelo Teorema 2.5 existe $\mathcal{U}_p \subset \mathbb{R}^n$ tal que f é uma fibração local trivial sobre \mathcal{U}_p . Assim, $\#(f^{-1}(z)) = \#(f^{-1}(p))$, para todo $z \in \mathcal{U}_p$. Assim, o Lema 3.35 implica que f é própria em \mathcal{U}_p e portanto $p \notin J_f$. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Robert G Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014.
- [2] Jacek Bochnak, Michel Coste, and Marie-Françoise Roy. *Real algebraic geometry*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] Jacek Bochnak and S Łojasiewicz. A converse of the Kuiper-Kuo theorem. In *Proceedings of Liverpool Singularities—Symposium I*, pages 254–261. Springer, 1971. doi:<https://doi.org/10.1007/BFb0066825>.
- [4] Haïm Brezis, Philippe G Ciarlet, and Jacques Louis Lions. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*, volume 91. Dunod Paris, 1999.
- [5] Charles Ehresmann. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, colloque de topologie (espaces fibrés), bruxelles, 1950, georges thone, liege, 1951. *MR*, 42768(13,159):29–55.
- [6] Terence Gaffney. Fibers of polynomial mappings at infinity and a generalized Malgrange Condition. *Compositio Mathematica*, 119(2):157–167, 1999. doi:<https://doi.org/10.1023/A:1001702518505>.
- [7] Christopher Gibson. Construction of canonical stratifications. In *Topological stability of smooth mappings*, pages 8–34. Springer, 1976.
- [8] Huy Vui Ha. Nombres de Łojasiewicz et singularités à l’infini des polynômes de deux variables complexes. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 311:429–432, 1990.
- [9] Kenneth Hoffman and Ray Kunze. Linear algebra. 1971. *Englewood Cliffs, New Jersey*.
- [10] Zbigniew Jelonek. On the generalized critical values of a polynomial mapping. *Manuscripta Mathematica*, 110(2):145–157, 2003. doi:<https://doi.org/10.1007/s00229-002-0320-x>.
- [11] Edson Durão Júdice. *O Teorema de Sard e suas aplicações*. IMPA, 2012.
- [12] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 1. wiley New York, 1978.
- [13] Nicolaas H Kuiper. C^1 -equivalence of functions near isolated critical points. In *Symposium on Infinite-Dimensional Topology (Louisiana State University, Baton Rouge, LA, 1967)*. *Annals of Mathematics Studies*, volume 69, pages 199–218, 1968. doi:<https://doi.org/10.1515/9781400881406-019>.
- [14] Ernst Kunz. *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [15] Tzee-Char Kuo. On C^0 -sufficiency of jets of potential functions. *Topology*, 8(2):167–171, 1969. doi:[https://doi.org/10.1016/0040-9383\(69\)90007-X](https://doi.org/10.1016/0040-9383(69)90007-X).
- [16] Tzee-Char Kuo. Characterizations of v-sufficiency of jets. *Topology*, 11(1):115–131, 1972. doi:[https://doi.org/10.1016/0040-9383\(72\)90026-2](https://doi.org/10.1016/0040-9383(72)90026-2).
- [17] Krzysztof Kurdyka, Patrice Orro, and S Simon. Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values. *Journal of differential geometry*, 56(1):67–92, 2000. doi:<https://doi.org/10.4310/jdg/1090347525>.
- [18] Krzysztof Kurdyka. On a subanalytic stratification satisfying a Whitney property with exponent 1. In *Real algebraic geometry*, pages 316–322. Springer, 1992. doi:<https://doi.org/10.1007/BFb0084630>.
- [19] Elon Lages Lima. *Variedades diferenciáveis*. Number 15. Instituto Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1973.
- [20] Elon Lages Lima. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CN Pq., 1977.
- [21] Elon Lages Lima. *Análise real*. Impa, 2004.
- [22] Elon Lages Lima. *Geometria analítica e álgebra linear*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015.
- [23] John Milnor. *Singular Points of Complex Hypersurfaces.(AM-61)*, volume 61. Princeton University Press, 2016.
- [24] Carlos Gustavo Moreira. Hausdorff measures and the Morse-Sard theorem. *Publicacions matemàtiques*, pages 149–162, 2001. doi:https://doi.org/10.5565/PUBLMAT_45101_06.
- [25] Carlos Gustavo Moreira and Maria Aparecida Soares Ruas. The curve selection lemma and the Morse–Sard theorem. *Manuscripta Mathematica*, 129(3):401–408, 2009. doi:<https://doi.org/10.1007/s00229-009-0275-2>.
- [26] Anthony P Morse. The behavior of a function on its critical set. *Annals of Mathematics*, pages 62–70, 1939. doi:<https://doi.org/10.2307/1968544>.
- [27] David Mumford. *The red book of varieties and schemes: includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians*, volume 1358. Springer Science & Business Media, 1999. doi:<https://doi.org/10.1007/b62130>.
- [28] Adam Parusiński. On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity. *Compositio Math*, 97:369–384, 1995.
- [29] Adam Parusiński. A note on singularities at infinity of complex polynomials. *Banach Center Publications*, 39(1):131–141, 1997. doi:<https://doi.org/10.4064/-39-1-131-141>.
- [30] Laurențiu Păunescu and Alexandru Zaharia. Remarks on the Milnor fibration at infinity. *manuscripta mathematica*, 103(3):351–361, 2000. doi:<https://doi.org/10.1007/s002290070011>.
- [31] Frédéric Pham. Vanishing homologies and the n variables saddlepoint method. In *Proc. Symp. Pure Math.*, volume 40, pages 310–333, 1983. doi:<https://doi.org/10.1090/pspum/040.2/713258>.

- [32] Patrick J Rabier. Ehresmann fibrations and Palais–Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds. *Annals of Mathematics*, pages 647–691, 1997. doi:<https://doi.org/10.2307/2952457>.
- [33] Arthur Sard. The measure of the critical values of differentiable maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 48(12):883–890, 1942. doi:<https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1942-07811-6>.
- [34] Mihai Tibăr and Alexandru Zaharia. Asymptotic behaviour of families of real curves. *Manuscripta Mathematica*, 99(3):383–393, 1999. doi:<https://doi.org/10.1007/s002290050180>.
- [35] Hassler Whitney. Differentiable manifolds. *Annals of Mathematics*, pages 645–680, 1936. doi:<https://doi.org/10.2307/1968482>.
- [36] Hassler Whitney et al. A function not constant on a connected set of critical points. *Duke Mathematical Journal*, 1(4):514–517, 1935. doi:<https://doi.org/10.1215/S0012-7094-35-00138-7>.