

**CAIO FRANCO RODRIGUES
RAÍSSA MARTINS**

**ANÁLISE COMPARATIVA DO COMPORTAMENTO
ESTRUTURAL DE UMA VIGA ENGASTADA-LIVRE
DE SEÇÃO-CAIXÃO COM PAREDES FINAS
CONSTITUÍDAS POR MATERIAL COMPÓSITO E
CONVENCIONAL**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA
2019**

**CAIO FRANCO RODRIGUES
RAÍSSA MARTINS**

Análise Comparativa do Comportamento Estrutural de uma Viga Engastada-Livre de Seção-Caixa com Paredes Finas Constituídas por Material Compósito e Convencional

Projeto de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **BACHAREL EM ENGENHARIA AERONÁUTICA.**

Orientadora: Profa. Dra. Núbia dos Santos Saad

UBERLÂNDIA – MG

2019

**CAIO FRANCO RODRIGUES
RAÍSSA MARTINS**

**Análise Comparativa do Comportamento Estrutural de uma Viga
Engastada-Livre de Seção-Caixa com Paredes Finas Constituídas
por Material Compósito e Convencional**

Projeto de Conclusão de Curso
Aprovado pelo corpo docente do Curso
de Graduação em Engenharia
Aeronáutica da Universidade Federal de
Uberlândia.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Núbia dos Santos Saad – FEMEC/UFU – Orientadora

Prof. Dr. Ruham Pablo Reis – FEMEC/UFU

Prof. Dr. Tobias Souza Morais – FEMEC/UFU

Uberlândia, 08 de fevereiro de 2019.

DEDICATÓRIAS

Em primeiro lugar, dedico esse trabalho à minha família, pelo apoio que recebi e pelo esforço que todos fizeram para que eu realizasse meu sonho. Dedico também ao meu namorado, que está sempre ao meu lado, com toda sua paciência e me dando apoio. Além, desses, dedico esse trabalho aos meus amigos e companheiros de cursos e a todos os professores que passaram pela minha vida escolar e acadêmica. (***Raíssa Martins***)

Dedico este trabalho à minha família, que ao longo do curso cresceu e que me deu uma ambição maior para continuar neste caminho. Dedico aos colegas de graduação que me deram um grande apoio do início até a conclusão do curso. Dedico também a todos os professores que tive durante minha caminhada escolar pois graças a eles pude me dedicar e realizar meu sonho. (***Caio Franco Rodrigues***)

AGRADECIMENTOS

(Raíssa Martins)

A Deus, por permitir chegar onde cheguei, e por me guardar todos os dias da minha vida.

À minha família, que tanto fez e faz para que esteja onde estou.

Ao meu namorado, Gilberto, que tem me sustentado nos meus momentos de angústia.

A todos meus colegas pelo apoio, e em especial ao Leonardo Cabral que me auxiliou com a parte computacional do trabalho.

E meu agradecimento, de forma mais especial vai para a professora Núbia: Obrigada por toda sua dedicação e empenho com o aprendizado de seus alunos, me sinto privilegiada pela a oportunidade de ter sido sua aluna e orientanda.

(Caio Franco Rodrigues)

À Universidade Federal de Uberlândia, à Faculdade de Engenharia Mecânica e a todos os professores e colaboradores do curso de Engenharia Aeronáutica.

À primeiramente a Deus, que foi um alicerce e uma busca de forças para chegar à conclusão do curso, agradeço meus pais José Eurípedes e Cláudia que sempre me deram a oportunidade de ter um bom estudo, agradeço meus colegas e amigos pelo companheirismo durante toda esta caminhada.

Em especial, à professora e orientadora Nubia dos Santos Saad e à colega e amiga Raissa Martins pela contribuição deste trabalho e em outros momentos da graduação.

RODRIGUES, C.F.; MARTINS, R. **Análise Comparativa do Comportamento Estrutural de uma Viga Engastada-Livre de Seção-Caixa com Paredes Finas Constituídas por Material Compósito e Convencional.** 2019. 89 f. Projeto de Conclusão de Curso – Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

RESUMO

O presente trabalho apresenta diversas análises do comportamento estrutural de uma viga constituída por paredes finas, com seção transversal do tipo caixa, no tocante às tensões normais e de cisalhamento. Foi considerada uma viga com condições de extremidade engastada-livre, simulando uma asa de aeronave, solicitada por cargas concentradas e excêntricas atuantes perpendicularmente ao seu eixo, proporcionando esforços combinados de flexão, torção e cisalhamento. Foram compilados os desenvolvimentos analíticos de comportamento estrutural de vigas de paredes finas, via métodos analíticos, considerando a idealização estrutural por *Booms* e também com seção transversal com paredes desprovidas de enrijecedores, com emprego de materiais estruturais isotrópicos e compósitos. Foram obtidas tensões normais e cisalhantes críticas para seis modelos diferentes de combinação de materiais estruturais e de idealização estrutural, e confrontadas com as adquiridas com modelagem numérica por elementos finitos, realizado com o auxílio do programa computacional NASTRAN®. Os desvios obtidos com as comparações dos resultados obtidos foram satisfatórios. Destaca-se a constatação do impacto dos módulos de elasticidade de materiais compósitos tanto no comportamento estrutural de enrijecedores solicitados por esforços normais como dos painéis sob o efeito dos fluxos cisalhantes intervenientes.

RODRIGUES, C.F.; MARTINS, R. **Comparative Analysis of the Structural Behavior of Free-crimped Closed-section Thin-walled Composite and Conventional Beam**. 2019. 89 f. Term Paper – Bachelor of Aeronautical Engineering, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG

ABSTRACT

The present work presents several analyzes of the structural behavior of a beam constituted by thin walls, with cross section of the coffin type, with respect to the normal and shear stresses. It was considered a beam with set-free end conditions, simulating an aircraft wing, requested by concentrated and eccentric loads acting perpendicular to its axis, providing combined bending, torsion and shear forces. Analytical developments of thin - walled beams were compiled through analytical methods, considering Booms' structural idealization and also with cross section with walls devoid of stiffeners, using isotropic and composite structural materials. Normal and critical shear stresses were obtained for six different models of combination of structural materials and structural idealization, and compared with those acquired with finite element numerical modeling, carried out with the aid of the NASTRAN® computer program. The deviations obtained with the comparisons of the obtained results were satisfactory. It is important to note the impact of the elastic modulus of composite materials on both the structural behavior of stiffeners requested by normal stresses and of the panels under the effect of intervening shear flows.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Materiais compósitos empregados na construção do Boeing 787. Fonte: (SULINFORMAÇÃO, 2016).	2
Figura 2.1	Tensão que atua em uma seção transversal de uma barra com carga axial. Fonte: adaptada de Hibbeler (2004).	4
Figura 2.2	Deformação resultante de uma tensão normal constante. Fonte: (HIBBELER, 2004).	4
Figura 2.3	Vista esquemática global de viga compósita com paredes finas. Fonte: (MEGSON, 2013).	6
Figura 2.4	Vista esquemática global de viga compósita com paredes finas. Fonte: (MEGSON, 2013).	7
Figura 2.5	Representação dos efeitos de flexão para visualização da tração e compressão. Fonte: adaptada de Megson (2013).	8
Figura 2.6	Convenção positiva para forças, momentos e deslocamentos. Fonte: (MEGSON, 2013).	9
Figura 2.7	Decomposição de um momento fletor qualquer, em componentes segundo os planos x e y da seção transversal de uma viga. Fonte: (MEGSON, 2013).	10
Figura 2.8	Visualização da linha neutra (LN) em uma seção transversal qualquer, sujeita à flexão. Fonte: (MEGSON, 2013).	10
Figura 2.9	Visualização dos deslocamentos ocorridos em uma seção qualquer, solicitada à flexão. Fonte: (MEGSON, 2013).	15
Figura 2.10	Solicitações em elemento diferencial de viga de paredes finas expressas por: (a) tensões normais e tensões tangenciais; (b) tensões normais e fluxo cisalhante. Fonte: (MEGSON, 2013).	18
Figura 2.11	Componentes normal, axial e tangencial de deslocamento em um ponto de uma parede em uma viga. Fonte: (MEGSON, 2013).	20
Figura 2.12	Visualização da obtenção da deformação cisalhante γ em função das componentes axial e tangencial de deslocamento. Fonte: adaptada de Megson (2013).	20
Figura 2.13	Representação dos deslocamentos que ocorrem, em translação e rotação, para um ponto genérico da seção transversal da viga. Fonte: (MEGSON, 2013).	21
Figura 2.14	Carregamento cisalhante de uma viga de seção aberta. Fonte: (MEGSON, 2013).	23
Figura 2.15	Posição do centro de cisalhamento para vigas de seção aberta. Fonte: (MEGSON, 2013).	24
Figura 2.16	Representação de uma viga solicitada por cargas cisalhante. Fonte: (MEGSON, 2013).	26

Figura 2.17	(a) Esquema para procedimento de cálculo de $q_{s,0}$; (b) carregamento equivalente em uma viga de seção aberta. Fonte: (MEGSON, 2013).	27
Figura 2.18	Visualização do centro de cisalhamento S em uma seção fechada qualquer. Fonte: (MEGSON, 2013).	31
Figura 2.19	(a) Fluxo de cisalhamento em uma viga de seção aberta com paredes finas sujeita à torção; (b) fluxo cisalhante em uma extensão diferencial da parede.	32
Figura 2.20	Empenamento de uma fina faixa retangular. Fonte: (MEGSON, 2013).	34
Figura 2.21	Deformação de uma viga de seção aberta. Fonte: (MEGSON, 2013).	35
Figura 2.22	Torção de uma viga de seção fechada. Fonte: (MEGSON, 2013).	36
Figura 2.23	Determinação da distribuição do fluxo de cisalhamento em uma viga de seção fechada sujeita à torção. Fonte: (MEGSON, 2013).	37
Figura 2.24	Convenção de sinalização para áreas varridas. Fonte: (MEGSON, 2013).	38
Figura 2.25	Seção típica real de uma asa. Fonte: (MEGSON, 2013).	43
Figura 2.26	Idealização estrutural de uma seção de asa, por <i>Booms</i> . Fonte: (MEGSON, 2013).	44
Figura 2.27	Idealização de um painel estrutural aeronáutico: (a) real; (b) idealizado. Fonte: (MEGSON, 2013).	44
Figura 3.1	Representação da viga de paredes finas considerada: (a) vista global; (b) seção transversal; (c) vista superior. Unidades em mm.	49
Figura 4.1	Esquema da seção transversal da viga, idealizada por <i>Booms</i> (B).	51
Figura 5.1	Campos pertinentes à sessão de análise estrutural NASTRAN®.	62
Figura 5.2	Visualização da entrada de dados na plataforma do NASTRAN®.	63
Figura 5.3	Modelo da viga-caixão gerado pelo software NASTRAN®	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Esquema da seção transversal da viga, idealizada por dez <i>Booms</i> (B_i).	50
Tabela 4.2	Valor de tensão normal que solicita cada <i>Boom</i> para os modelos I, III e V.	51
Tabela 4.3	Valores de tensões normais para os Modelos II e IV.	55
Tabela 4.4	Fluxos e tensões de cisalhamento atuantes na ST do Modelo I.	55
Tabela 4.5	Fluxos e tensões de cisalhamento atuantes na ST do Modelo I.	57
Tabela 4.6	Tensões cisalhantes correspondentes aos Modelos II, IV e VI.	61
Tabela 5.1	Resultados numéricos das tensões normais atuantes nos perfis enrijecedores para os Modelos de I a V.	64
Tabela 5.2	Resultados numéricos das tensões normais atuantes nos perfis enrijecedores para o Modelo VI.	65
Tabela 5.3	Tensões cisalhantes correspondentes aos Modelos de I a VI.	66
Tabela 6.1	Desvios dos valores numéricos frente aos teóricos, no tocante às tensões normais (σ_z).	72
Tabela 6.2	Desvios dos valores numéricos frente aos teóricos, no tocante às tensões Cisalhantes τ_{Total}	74

SUMÁRIO

C A P Í T U L O I – INTRODUÇÃO	Erro! Indicador não definido.	1
C A P Í T U L O II – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA		4
2.1 Introdução.....		5
2.2 Carga Axial em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas.....		5
2.2.1 Material Isotrópico.....		8
2.2.2 Material Compósito.....		11
2.3 Cisalhamento em Vigas de Seção Fechada de Paredes Finas.....		14
2.3.1 Material Isotropico.....		14
2.3.1.1 Distribuição de Tensões Normais devidas à Flexão.....		10
2.3.1.2 Posição da Linha Neutra.....		14
2.3.1.3 Deslocamento Decorrente da Flexão.....		15
2.3.2 Material Compósito.....		16
2.4 Cargas Cisalhantes em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas.....		18
2.4.1 Material Isotropico.....		18
2.4.1.1 Seção Transversal Aberta.....		23
2.4.1.2 Seção Transversal Fechada		26
2.4.2 Material Compósito.....		31
2.4.2.1 Seção Transversal Aberta.....		31
2.4.2.2 Seção Transversal Fechada		32
2.5 Torção em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas.....		32
2.5.1 Material Isotropico		32
2.5.1.1 Seção Transversal Aberta		32
2.5.1.2 Seção Transversal Fechada		35
2.5.2 Materiais Compósitos		39
2.5.2.1 Seção Transversal Aberta.....		39
2.5.2.2 Seção Transversal Fechada		40

2.6	Idealização Estrutural.....	41
2.6.1	Flexão e Cisalhamento em Vigas de Seção Fechada Idealizada.....	43
2.6.1.1	Material Isotrópico.....	43
2.6.2.1	Material Compósito.....	45
C A P Í T U L O III	–MATERIAIS E MÉTODOS	47
3.1	Apresentação.....	47
3.2	Aspectos Elástico-Geométricos e de Carregamento da Viga.....	47
C A P Í T U L O IV	– ANÁLISE TEÓRICA DE TENSÕES QUE SOLICITAM A VIGA	50
4.1	Modelo Teórico.....	50
4.2	Tensões Normais Devidas ao Momento de Flexão.....	51
4.3	Tensões Tangenciais Devidas ao Momento de Torção	55
C A P Í T U L O V	– ANÁLISE NUMÉRICA DE TENSÕES QUE SOLICITAM A VIGA.....	62
5.1	Modelo Numérico	62
5.2	Tensões devidas à Flexão.....	64
5.3	Tensões devidas ao Cisalhamento.....	65
C A P Í T U L O VI	– ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÕES	66
6.1	Comparação entre os Resultados das Análises Teórico-Analíticas dos Modelos.....	66
6.1.1	Tensões Normais	66
6.1.2	Tensões Tangenciais.....	68
6.1.2.1	Devidas ao Momento Torçor (T_z).....	68
6.1.2.2	Devidas à Força Cortante (S_y).....	68
6.2	Comparações entre os Resultados Teóricos-Analíticos com os Números.....	71
6.1.1	Tensões Normais	71
6.1.2	Tensões Tangenciais.....	72
C A P Í T U L O VII	– CONCLUSÕES	73
C A P Í T U L O VIII	– REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	75

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Por sua leveza, resistência e eficiência, os materiais compósitos vem sendo cada vez mais usados pela indústria aeronáutica de forma estratégica no desenvolvimento de projetos de aeronaves. A leveza trazida por esse tipo de material diminui o peso da aeronave, e como consequência, tem-se a redução do consumo de combustível. Além dessa vantagem, os compósitos possuem uma grande flexibilidade de *design* combinado com resistência e rigidez facilitando a capacidade de criar complexas estruturas curvas ou aerodinâmicas (REZENDE; BOTELHO, 2000).

As pesquisas envolvendo compósitos na indústria aeronáutica vêm sendo desenvolvidas desde a década de 1960, e materiais de alto desempenho vêm sendo introduzidos, de maneira crescente, no campo experimental e em aplicações secundárias, tais como carenagens. Atualmente, indústrias internacionais vêm utilizando materiais compósitos na estrutura de aeronaves, como, por exemplo, na fuselagem, asas e estabilizadores, tendo já atingido 50% de sua estrutura com material compósito, como é o caso da aeronave Boeing 787, ilustrada na Figura 1.1 (REZENDE; BOTELHO, 2000).

Apesar de todos os benefícios referentes ao uso de materiais compósitos na indústria aeronáutica, é de grande importância que estes sejam bastantes conhecidos em suas características e propriedades mecânicas, caso contrário estes podem ser drasticamente menos eficientes que os materiais tradicionais (ZANATTA, 2012).

Existem diferentes tipos de fibras e sistemas matriciais. Na aviação, a matriz em resina epóxi, que é do tipo termofixa, é a de ocorrência mais comum. Comparando com outras opções esta é mais forte e possui boas propriedades em alta temperatura. Já as fibras mais utilizadas na construção de aeronaves são fibras de vidro e fibras de carbono (ZANATTA, 2012).

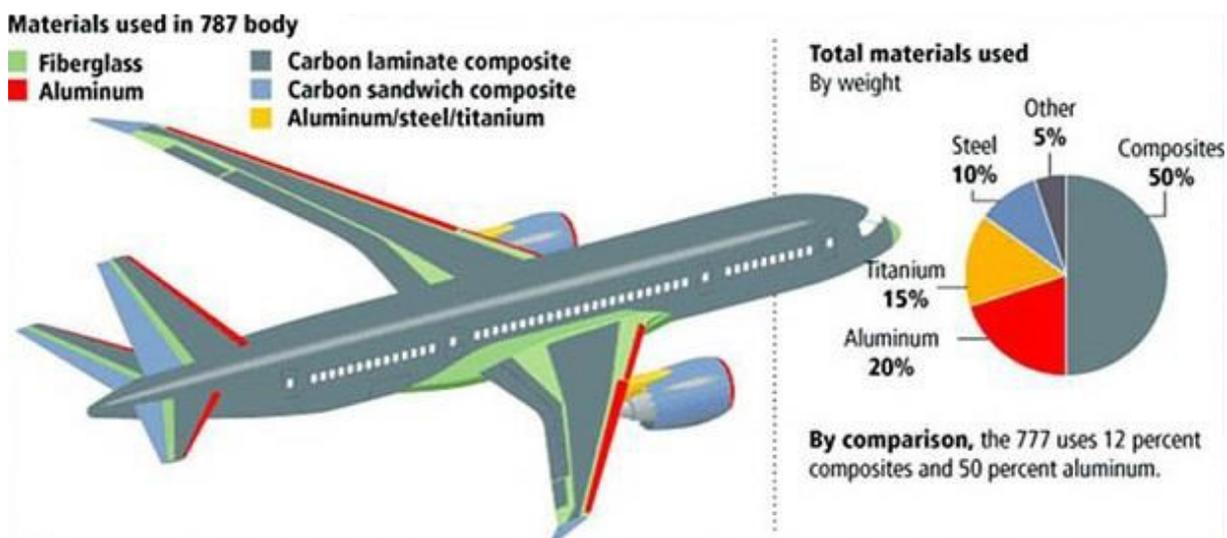


Figura 1.1 – Materiais compósitos empregados na construção da Boeing 787. Fonte: (SULINFORMAÇÃO, 2016).

A fibra de vidro possui boa resistência à tração, compressão e impacto sendo facilmente manuseável. É relativamente barata e de fácil acesso. A principal desvantagem desta fibra é que ela é relativamente pesada e dificilmente consegue-se construir uma estrutura que seja mais leve que uma estrutura de alumínio em um projeto equivalente (GAY, 2015).

Segundo Gay (2015), a fibra de carbono é, geralmente, mais resistente à tração e compressão em relação a fibra de vidro, além de uma maior capacidade de flexão. Também é mais leve do que a fibra de vidro. Uma desvantagem é sua resistência ao impacto. Suas fibras são frágeis e tendem a se quebrar sob forte impacto. Outra desvantagem é seu preço, mais cara em relação a fibra de vidro, mas é um fator que vem mudando graças a diversas inovações impulsionadas por vários programas de desenvolvimento.

Este trabalho tem como objetivo fazer a análise das tensões de uma viga se seção-caixão, com paredes finas, considerando-se a idealização estrutural por *Booms* ou não, engastada em uma das extremidades e livre na outra, simulando uma asa aeronáutica. Busca-se compilar todas as formulações teóricas intervenientes constantes nas literaturas de ensino de graduação de elementos estruturais aeronáuticos, com respeito ao comportamento estrutural mediante as possíveis ações, de forças normais e cortantes e momentos de flexão e de torção.

Para fins de comparação, é feita também uma modelagem via Método dos Elementos Finitos, com a utilização do software NASTRAN® em que se calcula a estrutura considerando os enrijecedores com suas reais seções transversais.

São considerados materiais estruturais isotrópicos e compósitos nos seis modelos concebidos para as análises comparativas das tensões normais e cisalhantes que ocorrem na viga. Os resultados são bastante satisfatórios e revelam a maneira com que os módulos de elasticidade dos materiais compósitos estão relacionados com as respostas tanto dos enrijecedores como dos painéis de paredes finas dispostos entre cada dois perfis, ao longo da seção de paredes finas.

Acrescenta-se que o modelo de viga tomado como objeto de estudo será construído para a realização de aulas práticas da disciplina Estruturas de Aeronaves II, do Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da UFU.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução

Neste capítulo, serão investigadas as tensões que ocorrem em vigas de seções transversais abertas e fechadas de paredes finas solicitadas à flexão, cisalhamento e torção. Destaca-se que as fundamentações teóricas apresentadas nesta Subseção estão baseadas em Megson (2013).

2.2 Carga Axial em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

2.2.1 Material Isotrópico

Um dos tipos de solicitações que ocorrem com frequência em elementos estruturais é a carga axial, segundo a direção de seus comprimentos, como ilustra a Figura 2.1. Define-se a distribuição média de tensão que atua em uma seção transversal de uma barra solicitada à carga axial, de tração ou compressão. De acordo com Hibbeler (2004), para se definir essa distribuição média, é necessário considerar as seguintes hipóteses:

- 1- as seções transversais do elemento solicitado devem permanecer planas antes da deformação, assegurando que a barra se deforme uniformemente;
- 2- a carga P seja aplicada ao longo do eixo longitudinal que passa pelo centroide da seção transversal;
- 3- o material seja homogêneo e isotrópico.

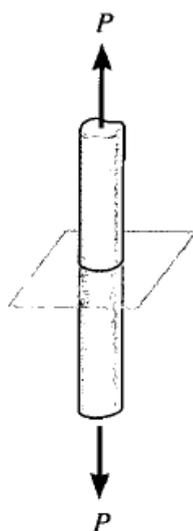


Figura 2.1 – Carga axial que atua em uma barra. Fonte: adaptada de Hibbeler (2004).

Como a barra está submetida a uma deformação uniforme e constante, a tensão normal σ será constante, conforme representa o esquema da Figura 2.2.

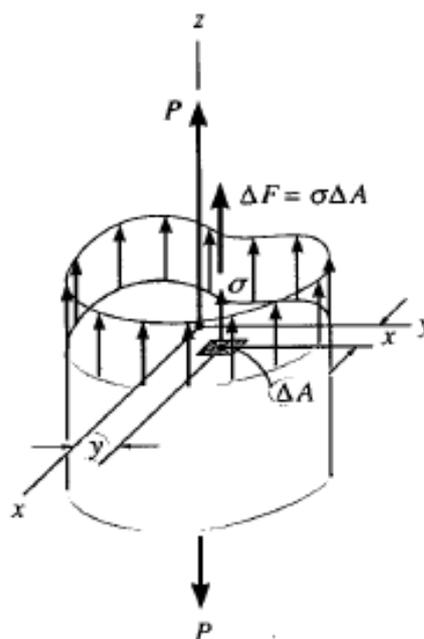


Figura 2.2 – Deformação resultante de uma tensão normal constante. Fonte: (HIBBELER, 2004).

Hibbeler (2004) define a tensão normal σ conforme a Equação (2.1).

$$\Delta F = \sigma \cdot \Delta A \quad (2.1)$$

Considerando que:

$\Delta A \rightarrow dA$ e

$\Delta F \rightarrow dF$,

escrevem-se:

$$\int dF = \int_A \sigma dA;$$

$$P = \sigma \cdot A; \quad (2.2)$$

$$\sigma = \frac{P}{A}. \quad (2.3)$$

2.2.2 Material Compósito

Em se tratando de materiais compósitos, aplica-se a mesma carga axial P , semelhante ao abordado na Subseção 2.2.1; porém, neste caso, tal carga será absorvida em parcelas, por cada parede laminada constituinte da viga compósita (exemplificadas por 1, 2 e 3 na Figura 2.3, e denominadas simplesmente por lâminas), definindo-se a carga P_i absorvida pela lâmina genérica i . Semelhantemente ao caso de materiais isotrópicos, será considerado que as seções permanecem planas sob as solicitações e deformações intervenientes.

Destaca-se que a deformação longitudinal ocorrida em cada lâmina ($\epsilon_{x,i}$) é a mesma deformação longitudinal da viga (ϵ_z), referentes os eixos coordenados mostrados na Figura 2.3. Assim, escrevem-se as seguintes expressões, em função do módulo de elasticidade de cada lâmina, segundo o eixo x do sistema de coordenadas locais ($E_{x,i}$):

$$\frac{P_i}{b_i t_i} = \epsilon_{x,i} E_{x,i}; \quad (2.4)$$

$$P_i = \epsilon_z b_i t_i E_{x,i}. \quad (2.5)$$

Assim, a carga axial total aplicada na viga constituída por n lâminas, pode ser equacionada por:

$$P = \epsilon_z \sum_{i=1}^n b_i t_i E_{x,i}. \quad (2.6)$$

E, portanto, a deformação linear específica longitudinal que ocorre na viga é obtida por:

$$\epsilon_z = \frac{P}{\sum_{i=1}^n b_i t_i E_{x,i}} = \frac{P}{\sum_{i=1}^n b_i t_i E_{z,i}} \quad (2.7)$$

Registra-se que, conforme mostrado pela Equação (2.7), o módulo de elasticidade de cada lâmina pode ser escrito, tanto com referência ao sistema de coordenadas locais ($E_{x,i}$) como globais ($E_{z,i}$).

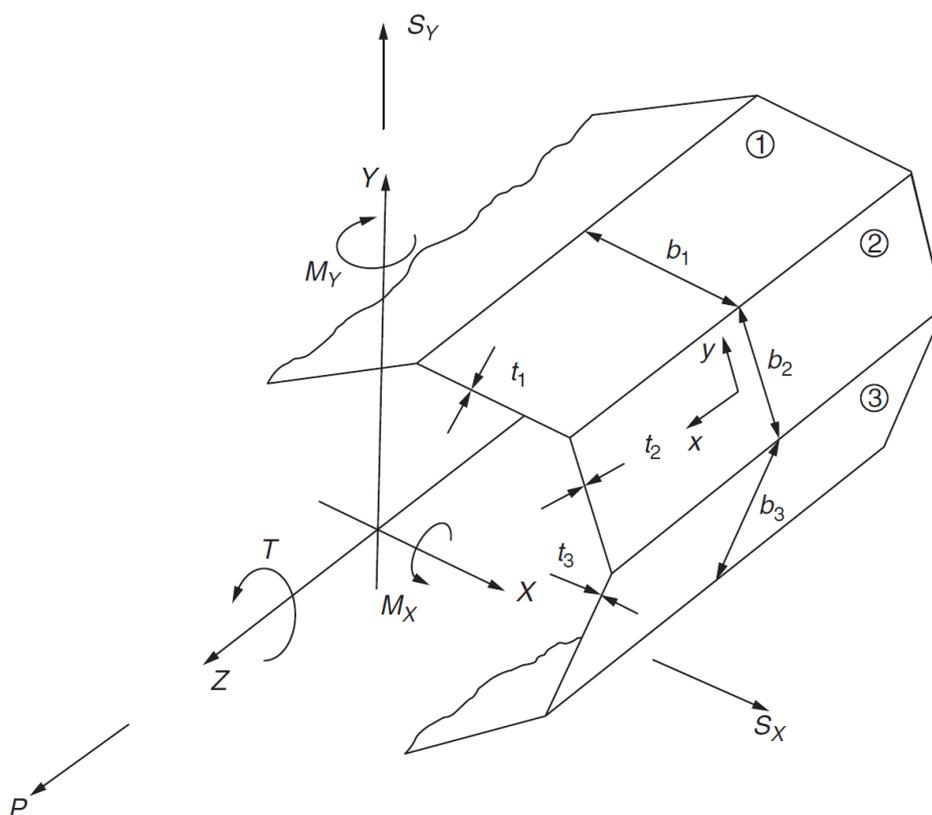


Figura 2.3 – Vista esquemática global de viga composta com paredes finas. Fonte: (MEGSON, 2013).

Caso as fibras do material composto estejam inclinadas em relação à direção local x , ou seja, orientadas de um ângulo θ com relação a este eixo local, como mostra a Figura 2.4, é feita uma correção do módulo de elasticidade da lâmina, para a direção x (E_x), que coincide com a direção global Z , com o auxílio da seguinte expressão:

$$E_x = E_z = \frac{1}{\frac{c^4}{E_l} + \frac{s^4}{E_t} + 2c^2s^2\left(\frac{1}{2G_{lt}} - \frac{\nu_{lt}}{E_l}\right)}, \quad (2.8)$$

em que:

- $c = \cos \theta$;
- $s = \sin \theta$;
- E_l = módulo de elasticidade longitudinal (paralelamente às fibras) do compósito;
- E_t = módulo de elasticidade transversal (perpendicularmente às fibras) do compósito;
- ν_{lt} = coeficiente de Poisson do compósito;
- G_{lt} = módulo de cisalhamento do compósito.

Nota-se que o módulo de elasticidade diminui com o aumento do ângulo θ (Figura 2.4).

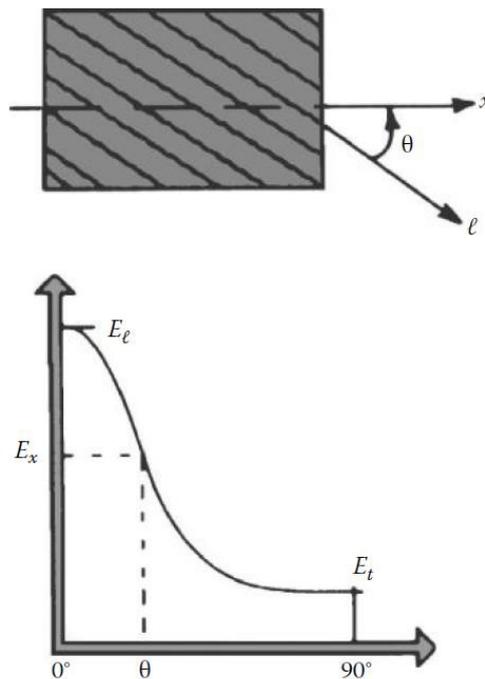


Figura 2.4 – Módulo de elasticidade para uma direção qualquer com relação às fibras. Fonte: (GAY, 2015).

2.3 Flexão Assimétrica em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

2.3.1 Material Isotrópico

Forças axiais aplicadas ao longo do eixo longitudinal de uma viga produzem em suas seções transversais tensões axiais consideradas uniformemente distribuídas em toda a extensão das mesmas. Uma situação diferente surge quando cargas aplicadas perpendicularmente ao eixo de uma viga a fazem fletir, por ocasião do surgimento nas seções transversais do momento fletor que divide a seção transversal em duas regiões, sendo uma comprimida e outra tracionada, por tensões normais oriundas deste momento, existindo em cada seção uma linha que divide ambas as regiões, denominada linha neutra (LN).

Evidentemente, a flexão pode gerar duas configurações de deslocamento em um elemento estrutural, uma côncava (∩) e outra convexa (∪), conforme ilustrado na Figura 2.5. Obviamente, de um extremo mais tracionado a outro mais comprimido, o módulo da tensão normal ao longo da seção transversal reduz a zero até a LN e depois aumenta, diferentemente da situação da viga carregada por força axial, em que tal distribuição ocorre uniformemente.

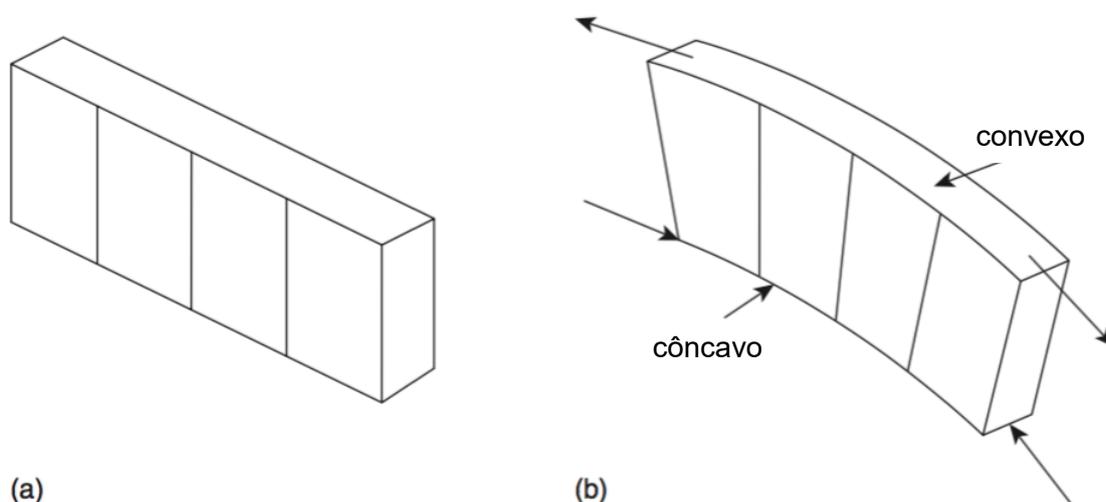


Figura 2.5 – Representação dos efeitos de flexão para visualização da tração e compressão. Fonte: adaptada de Megson (2013).

De acordo com a Figura 2.5(b), em que as fibras do elemento estão sendo tracionadas em cima e comprimidas embaixo, ao longo de toda a viga haverá o denominado plano neutro, que na configuração deformada, a rigor, trata-se de uma casca neutra.

Sabe-se que o valor de tensão normal em um ponto na seção transversal de uma viga sujeita à flexão depende da posição deste ponto, da carga aplicada e das propriedades geométricas dessa seção.

Para se deduzir a equação de distribuição de tensão normal produzida por flexão pura é necessário fazer algumas considerações. A primeira delas é a de que os planos das seções transversais se mantêm planos e normais às fibras longitudinais da viga após a flexão. Além disso, assume-se que o material da viga seja linearmente elástico, ou seja, obedeça à Lei de Hooke, e que este material seja homogêneo. Porém, antes de se deduzir esta expressão, deve-se estabelecer uma convenção de sinais para momentos, bem como a determinação de suas componentes.

Forças, momentos e deslocamentos são referenciados a um sistema arbitrário de eixos $Oxyz$, no qual Oz é paralelo com o eixo longitudinal da viga e Oxy são os eixos do plano da seção transversal. A nomenclatura sugerida por Megson (2013) é: M para momento fletor, S para força cisalhante, P para carga axial e normal, T para momento de torção e W para carga distribuída, sendo essas variáveis subscritas pelos nomes dos eixos coordenados, visando indicar as suas direções.

A Figura 2.6 mostra as direções e sentidos positivos adotados por Megson (2013) para as forças e momentos aplicados a uma viga, além das direções positivas das componentes de deslocamentos u , v e w para qualquer ponto da seção transversal, correspondentes aos eixos coordenados x , y e z , respectivamente. Segundo esta consideração, os momentos fletores (M_x e M_y) são positivos quando geram tensão de tração no primeiro quadrante da seção transversal da viga.

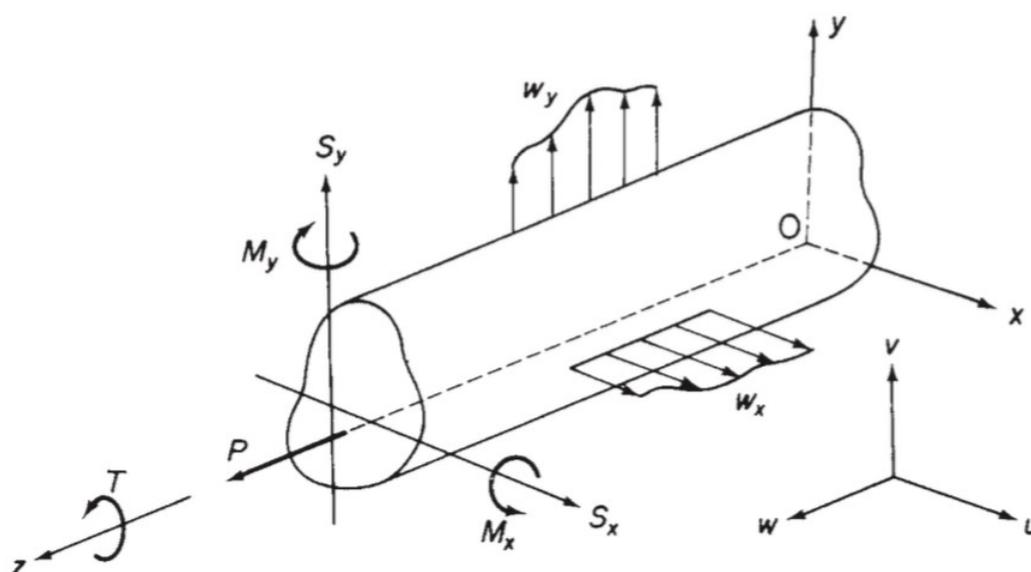


Figura 2.6 – Convenção positiva para forças, momentos e deslocamentos. Fonte: (MEGSON, 2013).

Um momento fletor qualquer, quando aplicado em um plano longitudinal paralelo ao eixo z pode ser decomposto nas componentes M_x e M_y pelas regras de decomposição de

vetores, o que fica facilmente percebido pelo desenho da Figura 2.7. Para ambos os casos, têm-se:

$$M_x = M \sin \theta,$$

$$M_y = M \cos \theta,$$

o que significa que, para $\theta > 90^\circ$, M_x e M_y são positivos; e, para $\theta < 90^\circ$, são negativos.

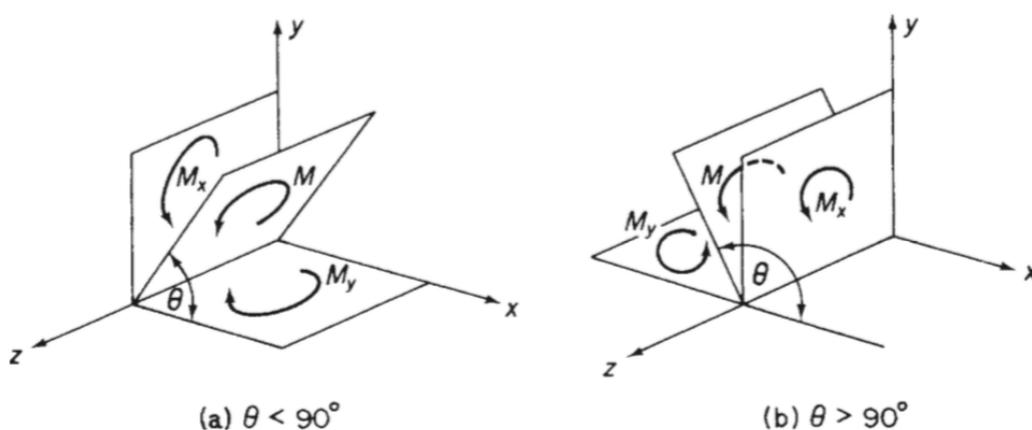


Figura 2.7 – Decomposição de um momento fletor qualquer, em componentes segundo os planos x e y da seção transversal de uma viga. Fonte: (MEGSON, 2013).

2.3.1.1 Distribuição de Tensões Normais devidas à Flexão

Considere-se uma viga com seção transversal genérica, conforme exibe a Figura 2.8, sob qualquer momento de flexão, cujas componentes estão mostradas segundo os eixos x e y . Nesta consideração estrutural, a viga suporta os momentos M_x e M_y e flete em torno de um eixo denominado linha neutra (LN) onde, tanto as tensões como as deformações advindas dessa flexão são nulas.

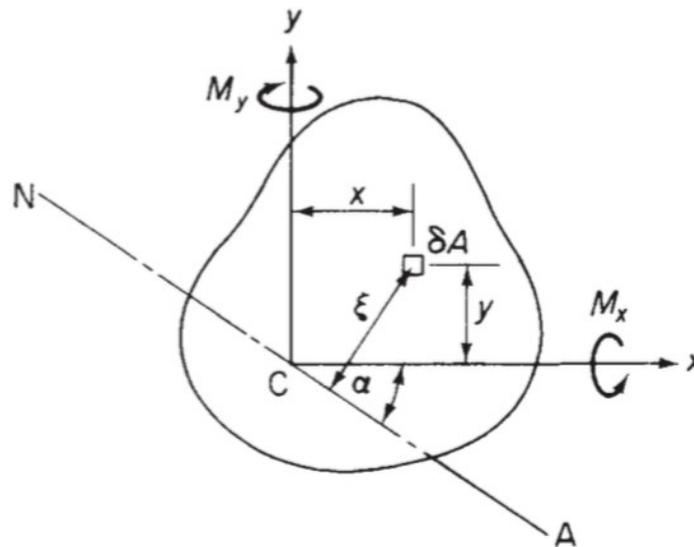


Figura 2.8 – Visualização da linha neutra (LN) em uma seção transversal qualquer, sujeita à flexão.
Fonte: (MEGSON, 2013).

Fazendo coincidir o lugar geométrico do centro de gravidade (C) da seção transversal com a origem do sistema cartesiano xy , a tensão normal σ_z correspondente a um elemento infinitesimal de área δA locada pelo ponto de coordenadas (x, y) e distante ξ da linha neutra, é definida por:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z, \quad (2.9)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material e ε_z a deformação linear na direção longitudinal da viga.

A linha da configuração fletida da viga, denominada elástica, tem raio de curvatura ρ , e conforme anunciado, com as seções transversais mantidas planas após a flexão. Assim, escreve-se a deformação linear que ocorre na direção do seu eixo longitudinal (HIBBELER, 2004):

$$\varepsilon_z = \frac{\xi}{\rho},$$

sendo a distância ξ equacionada por:

$$\xi = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad (2.10)$$

Substituindo ε_z na Equação (2.9), reescreve-se:

$$\sigma_z = E \frac{\xi}{\rho}. \quad (2.11)$$

A viga suporta momentos fletores de modo que a força normal resultante em qualquer seção seja nula, ou seja:

$$\int_A \sigma_z dA = 0 ,$$

a partir da qual, substituindo σ_z da Equação (2.11) e eliminando a constante E/ρ , devido à igualdade ser nula, obtém-se:

$$\int_A \xi dA = 0 .$$

ou seja, o primeiro momento de área da seção transversal da viga em torno da linha neutra é zero, significando que a linha neutra passa pelo centro de gravidade da seção transversal, para uma seção qualquer, sob momento de flexão qualquer, equivalendo a uma situação genérica denominada flexão assimétrica (MEGSON, 2013).

Combinando as Equações (2.10) e (2.11), equaciona-se da seguinte maneira a tensão normal que solicita a seção transversal de um elemento estrutural sob flexão assimétrica:

$$\sigma_z = \frac{E}{\rho} (x \sin \alpha + y \cos \alpha). \quad (2.12)$$

Equacionando os momentos fletores aplicados como integral, em toda a seção transversal, das tensões normais produzidas pelos mesmos, têm-se:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA , \quad M_y = \int_A \sigma_z x dA. \quad (2.13)$$

Substituindo σ_z da Equação (2.12) na Equação (2.13) e definindo os segundos momentos de área da seção em torno dos eixos C_x e C_y como:

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA, \quad I_{yy} = \int_A x^2 dA, \quad I_{xy} = \int_A xy dA ,$$

chega-se a:

$$M_x = E \frac{\sin \alpha}{\rho} I_{xy} + E \frac{\cos \alpha}{\rho} I_{xx}, \quad M_y = E \frac{\sin \alpha}{\rho} I_{yy} + E \frac{\cos \alpha}{\rho} I_{xy},$$

ou na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{\rho} \begin{bmatrix} I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & I_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix},$$

em que:

$$\frac{E}{\rho} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & I_{xy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix}. \quad (2.14)$$

Assim, da Equação (2.12), tem-se: $\sigma_z = \frac{E}{\rho} (x \sin \alpha + y \cos \alpha)$.

$$\sigma_z = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y, \quad (2.15)$$

ou, ainda:

$$\sigma_z = \frac{M_x (I_{xx} y - I_{xy} x)}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} + \frac{M_y (I_{xx} x - I_{xy} y)}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}. \quad (2.16)$$

No caso em que a seção transversal tem Cx ou Cy (ou ambos) como um eixo de simetria, o produto de inércia I_{xy} é zero sendo esses denominados eixos principais, e a flexão denominada simétrica (MEGSON, 2013). Desta forma, a Equação (2.16) se reduz a:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} y + \frac{M_y}{I_{yy}} x. \quad (2.17)$$

Além disso, se um dos momentos M_x ou M_y forem nulos, ter-se-ão as seguintes expressões para as tensões normais, que traduzem o caso denominado “flexão simples reta”, um caso específico da flexão simétrica (MEGSON, 2013):

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} y \quad \text{ou} \quad \sigma_z = \frac{M_y}{I_{yy}} x . \quad (2.18)$$

Também pode ser observado que na Equação (2.18), σ_z é zero quando y é zero na primeira equação; e quando x é zero na segunda. Portanto, para a flexão simétrica do tipo simples reta, o eixo x se torna a linha neutra quando $M_y = 0$ e o eixo y se torna a linha neutra quando $M_x = 0$. Assim, constata-se que a posição da linha neutra depende da forma de aplicação das cargas, bem como das propriedades geométricas da seção transversal, exclusivamente responsáveis pelos momentos de inércia da mesma.

2.3.1.2 Posição da Linha Neutra

A linha neutra sempre passa pelo centro de gravidade da seção transversal da viga, mas sua orientação depende da forma de aplicação da carga e das propriedades geométricas dessa seção, como comprovado na Subseção 2.3.1.

Em todos os pontos da linha neutra, a tensão normal é zero e, conseqüentemente, não ocorrem deformações. Portanto, da Equação (2.14), obtém-se o seguinte equacionamento para a definição da LN:

$$0 = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x_{LN} + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y_{LN} ,$$

onde x_{LN} e y_{LN} são as coordenadas de qualquer ponto da seção contido na LN, revelando a inclinação da reta em questão:

$$\frac{y_{LN}}{x_{LN}} = - \frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}} . \quad (2.19)$$

2.3.1.3 Deslocamentos Decorrentes da Flexão

Nesta Subseção, são apresentados os equacionamentos intervenientes à obtenção dos deslocamentos segundo as direções x e y , denominados, respectivamente, por u e v , para qualquer ponto da seção transversal solicitada por tensões normais, segundo Megson (2013). A Figura 2.9 dará o suporte visual necessário a tanto.

Sendo ζ a deflexão normal à linha neutra da seção transversal de uma viga assimétrica sob flexão, tem-se que o centro de gravidade da seção denominado C é deslocado ζ de sua posição inicial C_I para final C_F e, assim, equacionam-se os deslocamentos u e v em função de ζ :

$$u = -\zeta \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad v = -\zeta \operatorname{cos} \alpha.$$

De acordo com Megson (2013), o raio de curvatura ρ referente à configuração curva deslocada da viga sob flexão, denominada elástica, é escrito a partir das segundas derivadas dos deslocamentos u e v , conforme os desenvolvimentos mostrados a seguir:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\zeta}{dz^2} \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2\zeta}{dz^2} \operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{\rho} \operatorname{sen} \alpha \\ \frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{d^2\zeta}{dz^2} \operatorname{cos} \alpha = -\frac{1}{\rho} \operatorname{cos} \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\rho} = -\frac{d^2u}{dz^2} = -u'' \\ \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\rho} = -\frac{d^2v}{dz^2} = -v'' \end{cases},$$

ou, matricialmente:

$$\frac{1}{\rho} \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos} \alpha \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} u'' \\ v'' \end{Bmatrix}.$$

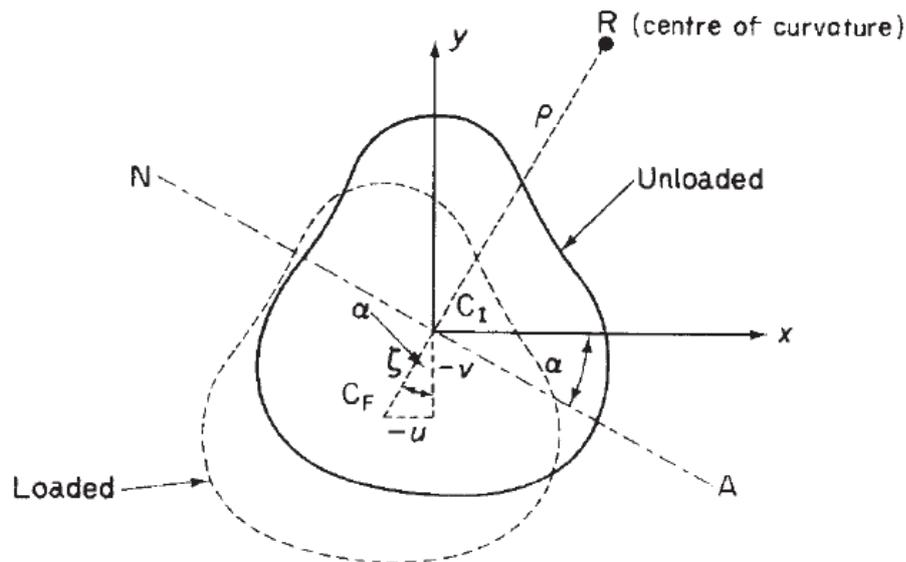


Figura 2.9 – Visualização dos deslocamentos ocorridos em uma seção qualquer, solicitada à flexão.
Fonte: (MEGSON, 2013).

Fazendo o tratamento por manipulações algébricas desta expressão com a Equação (2.14) repetida aqui:

$$\frac{E}{\rho} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & I_{xy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix},$$

obtêm-se as expressões dos deslocamentos u e v requeridas em redação matricial ou não:

$$\begin{Bmatrix} u'' \\ v'' \end{Bmatrix} = -\frac{1}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \begin{bmatrix} -I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & -I_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix}, \text{ ou}$$

$$u'' = \frac{M_x I_{xy} - M_y I_{xx}}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \quad \text{e} \quad v'' = \frac{M_y I_{xy} - M_x I_{yy}}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}.$$

2.3.2 Material Compósito

Como visto anteriormente, foi desenvolvida uma expressão para a distribuição de tensões normais em uma viga de seção transversal assimétrica – vide Equações (2.15) e (2.16). Em tal desenvolvimento, a tensão em um elemento foi expressa em termos do módulo de elasticidade (E), do raio de curvatura da viga, das coordenadas cartesianas de qualquer ponto da seção transversal e da inclinação da linha neutra em relação ao eixo x , como pode ser visto na Equação (2.12). Para a situação anterior, assumiu-se que a viga era composta

por material homogêneo; com isso, o seu módulo de Young era constante. Já para uma viga compósita, onde E pode variar, deve-se reescrever as equações já apresentadas na seção anterior da seguinte forma (vide Figuras 2.3 e 2.9):

$$M_X = \int_A \frac{E_{z,i}}{\rho} (X \sin \alpha + Y \cos \alpha) Y dA \quad , \quad M_Y = \int_A \frac{E_{z,i}}{\rho} (X \sin \alpha + Y \cos \alpha) X dA,$$

ou

$$M_X = \frac{\sin \alpha}{\rho} \int_A E_{z,i} X Y dA + \frac{\cos \alpha}{\rho} \int_A E_{z,i} Y^2 dA,$$

$$M_Y = \frac{\sin \alpha}{\rho} \int_A E_{z,i} X^2 dA + \frac{\cos \alpha}{\rho} \int_A E_{z,i} X Y dA .$$

A partir disso, serão definidos os momentos de inércia de segunda ordem incluindo os valores dos módulos de Young ($E_{z,i}$) dos laminados, com referência nos eixos XYZ. Assim:

$$I'_{XX} = \int_A E_{z,i} Y^2 dA, \quad I'_{YY} = \int_A E_{z,i} X^2 dA, \quad I'_{XY} = \int_A E_{z,i} X Y dA ,$$

de maneira que:

$$M_X = \frac{\sin \alpha}{\rho} I'_{XY} + \frac{\cos \alpha}{\rho} I'_{XX} ,$$

$$M_Y = \frac{\sin \alpha}{\rho} I'_{YY} + \frac{\cos \alpha}{\rho} I'_{XY} .$$

Resolvendo, têm-se:

$$\frac{\sin \alpha}{\rho} = \frac{M_Y I'_{XX} - M_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} ;$$

$$\frac{\cos \alpha}{\rho} = \frac{M_X I'_{YY} - M_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} .$$

E, a partir da Equação (2.12), obtém-se:

$$\sigma_z = E_{z,i} \left[\left(\frac{M_Y I'_{XX} - M_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) X + \left(\frac{M_X I'_{YY} - M_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) Y \right]. \quad (2.20)$$

2.4. Cargas Cisalhantes em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

2.4.1 Material Isotrópico

Diferentemente das formulações apresentadas para a análise de flexão de vigas, que são válidas para quaisquer geometrias de seção transversal, os desenvolvimentos que se apresentam nesta Subseção para a análise do cisalhamento de vigas são destinados, especificamente, a elementos estruturais constituídos por paredes finas, justificado pelo interesse de investigação de estruturas aeronáuticas. Aqui também a abordagem fundamenta-se em Megson (2013).

São avaliadas as tensões de cisalhamento que ocorrem em seções transversais de viga de parede fina, oriundas tanto da ação de forças contidas no plano da seção, como de momentos de torção aplicados ao longo do eixo longitudinal desse elemento estrutural.

São estabelecidas as equações de equilíbrio e as expressões necessárias à obtenção das tensões e deslocamentos referentes à análise do comportamento estrutural de vigas de seção fechada solicitada por esforços de cisalhamento. Para esta análise, assume-se que os efeitos de restrição axial são desprezíveis; que as tensões de cisalhamento normais à viga são desconsideradas; que tensões axiais em planos normais à superfície da viga são constantes em toda a espessura da parede; e, ainda, que a viga apresenta seção transversal uniforme, mas podendo a espessura das paredes variar ao longo do contorno da seção transversal fechada e vazada. Além disso, potências quadradas ou superiores aplicadas à espessura t são negligenciadas quando da determinação das propriedades de inércia das seções.

Na análise de cisalhamento que ocorre na seção transversal de paredes finas, surge um parâmetro adicional de referência para a locação de pontos em seu contorno, denominado trajetória s . Tal distância percorrida é medida a partir de um referencial de partida convenientemente escolhido na seção transversal, condizente com os desenvolvimentos analíticos que daqui por diante se apresentam.

Um elemento diferencial $\delta s \times \delta z \times t$ destacado da parede da viga é mantido em equilíbrio por um sistema de tensões axiais e de cisalhamento como mostrado na Figura 2.10(a). Genericamente, a tensão normal σ_z é produzida pelos momentos de flexão e as tensões de cisalhamento são provenientes do cisalhamento e/ou torção da viga.

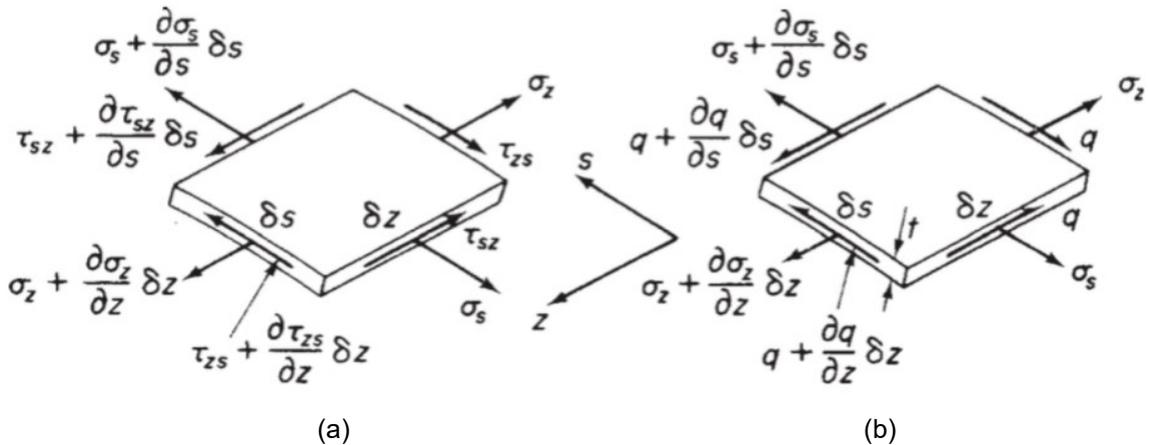


Figura 2.10 – Solicitações em elemento diferencial de viga de paredes finas expressas por: (a) tensões normais e tensões tangenciais; (b) tensões normais e fluxo cisalhante. Fonte: (MEGSON, 2013).

Normalmente, a tensão σ_s é desprezível, podendo ser desconsiderada. Além disso, assume-se que neste volume diferencial, a espessura t seja constante. A tensão de cisalhamento τ é convenientemente substituída por fluxo cisalhante (q) nos cálculos de perfis de paredes finas, correspondendo ao valor da tensão de cisalhamento multiplicada pela espessura da parede, em cada ponto da seção, Figura 2.10(b). Com isso, o fluxo cisalhante fica definido como força por unidade de comprimento, sendo expresso conforme a Equação (2.21).

$$q = \tau t \tag{2.21}$$

Para o equilíbrio do elemento da Figura 2.10(b) na direção z , desconsiderando as forças externas, tem-se a expressão:

$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta z \right) t \delta s - \sigma_z t \delta s + \left(q + \frac{\partial q}{\partial s} \delta s \right) \delta z - q \delta z = 0 ,$$

que pode ser simplificada para se tornar a Equação (2.22).

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{2.22}$$

Da mesma forma, o equilíbrio de forças na direção s pode ser expresso pela Equação (2.23).

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} = 0 \quad (2.23)$$

As tensões σ_z e σ_s produzem as deformações ϵ_z e ϵ_s , respectivamente, enquanto a tensão cisalhante τ produz a deformação cisalhante γ . Para definir as equações de deformações, obtêm-se, primeiramente, as suas componentes.

Tem-se que v_t é o deslocamento tangencial à superfície, sendo positivo na direção de aumento de s , ou seja, segundo o sentido de caminho da trajetória, como mostra a Figura 2.11; v_n é o deslocamento normal à superfície e é positivo para fora da mesma; e w é o deslocamento axial, positivo se concordar com o sentido positivo do eixo coordenado tridimensional z .

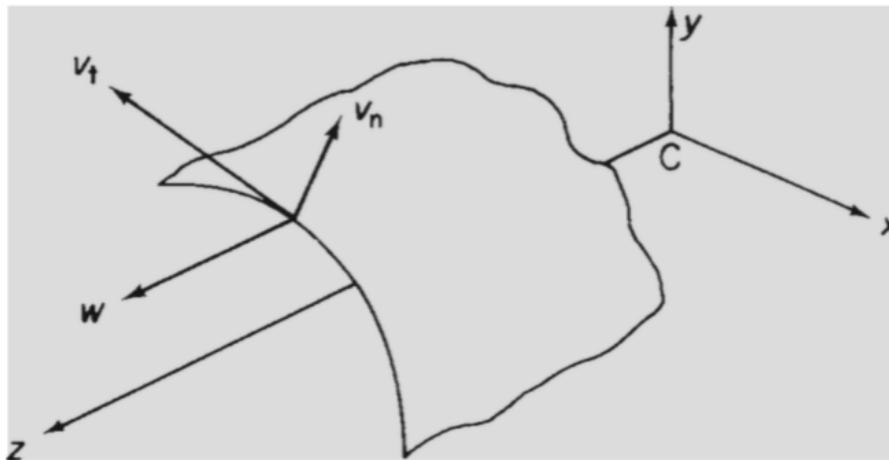


Figura 2.11 – Componentes normal, axial e tangencial de deslocamento em um ponto de uma parede em uma viga. Fonte: (MEGSON, 2013).

A Equação (2.24) expressa a deformação ϵ_z correspondente à taxa de variação do deslocamento axial w , segundo a direção z .

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.24)$$

A Equação (2.25) expressa a deformação linear ϵ_s ao longo da trajetória, em termos de v_t , v_n , s e da curvatura $1/r$ no plano xy da parede da viga.

$$\epsilon_s = \frac{\partial v_t}{\partial s} + \frac{v_n}{r} \quad (2.25)$$

A deformação cisalhante γ é equacionada em termos dos deslocamentos w e v_t , considerando a deformação angular do elemento diferencial $\delta s \times \delta z$ de uma viga. A partir da Figura 2.12 pode-se constatar que a deformação cisalhante é obtida por:

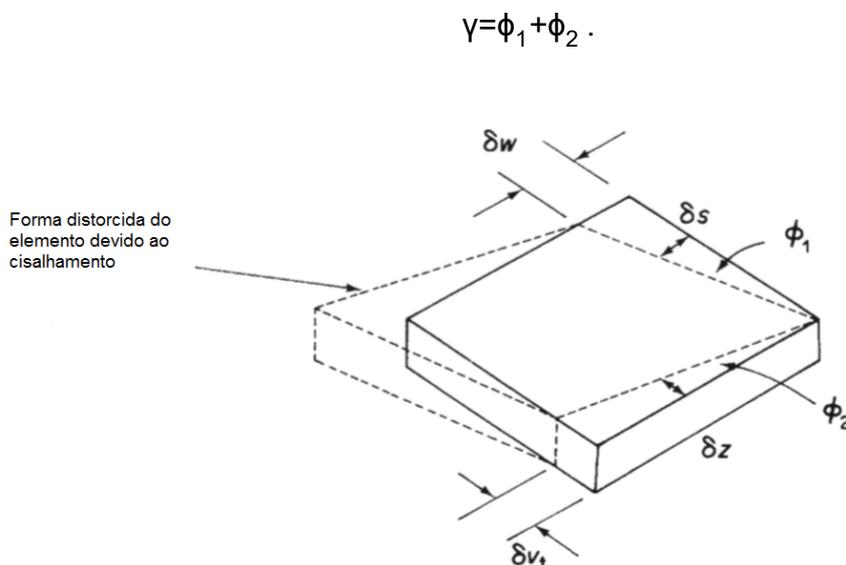


Figura 2.12 – Visualização da obtenção da deformação cisalhante γ em função das componentes axial e tangencial de deslocamento. Fonte: adaptada de Megson (2013).

Com δs e δz tendendo a zero, a deformação cisalhante pode ser expressa conforme exibe a Equação (2.26).

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \quad (2.26)$$

Segundo Megson (2013), além das considerações realizadas anteriormente, assume-se também que durante quaisquer deslocamentos, o formato da seção transversal da viga é mantido por um sistema de diafragmas rígidos em seu próprio plano, mas perfeitamente flexíveis ao plano normal a este. Portanto, não existe resistência ao deslocamento axial w e a seção transversal se move como um corpo rígido em seu próprio plano, fazendo com que o deslocamento de qualquer ponto possa ser expresso pelas translações u e v e pela rotação θ . Com isso, o deslocamento tangencial v_t de qualquer ponto em uma parede de uma viga de seção fechada como na Figura 2.13, pode ser obtido a partir da Equação (2.27):

$$v_t = \rho\theta + u \cos \psi + v \sin \psi, \quad (2.27)$$

onde u , v e θ são funções unicamente da variável independente z .

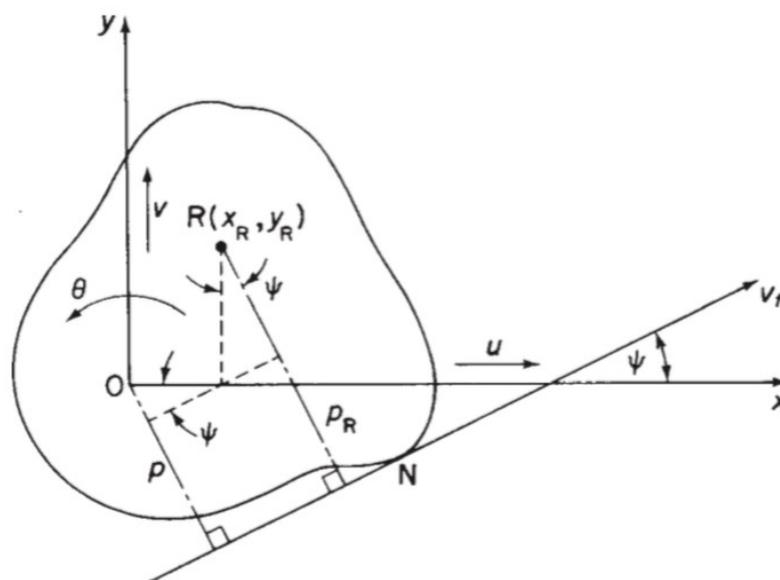


Figura 2.13 – Representação dos deslocamentos que ocorrem, em translação e rotação, para um ponto genérico da seção transversal da viga. Fonte: (MEGSON, 2013).

Com o auxílio da Figura 2.13, representam-se as duas translações (u, v) e a rotação θ , possíveis de ocorrer na seção da origem O do sistema cartesiano xy . Caso ocorra uma torção pura, há unicamente a rotação de toda a seção em torno do centro de torção $R(x_R, y_R)$, no qual é aplicado o momento de torção resultante. A partir deste esquema, pode-se expressar genericamente o deslocamento de qualquer ponto da parede da seção vazada, segundo a direção da tangente à seção passando pelo ponto que se considere, conforme:

$$v_t = p_R \theta, \quad (2.28)$$

em que:

$$p_R = p - x_R \sin \psi + y_R \cos \psi,$$

o que resulta em:

$$v_t = p\theta + x_R \theta \sin \psi + y_R \theta \cos \psi,$$

cuja primeira derivada em relação a z fica assim expressa:

$$\frac{\partial v_t}{\partial z} = p \frac{d\theta}{dz} + x_R \sin \psi \frac{d\theta}{dz} + y_R \cos \psi \frac{d\theta}{dz}. \quad (2.29)$$

Semelhantemente, a partir da derivada em relação à coordenada z , a Equação (2.27) se torna:

$$\frac{\partial v_t}{\partial z} = p \frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{dz} \cos \psi + \frac{dv}{dz} \sin \psi . \quad (2.30)$$

Comparando os coeficientes das Equações (2.29) e (2.30), obtêm-se as relações entre os deslocamentos possíveis e as coordenadas do centro de torção da seção transversal:

$$x_R = - \frac{dv/dz}{d\theta/dz}; \quad y_R = - \frac{du/dz}{d\theta/dz} . \quad (2.31)$$

2.4.1.1 Seção Transversal Aberta

Considere-se uma viga de seção arbitrária aberta (Figura 2.14) que suporta as cargas de cisalhamento S_x e S_y , tal que não haja torção na seção transversal da viga. Para que isso ocorra, é necessário que as cargas cisalhantes passem pelo centro de cisalhamento (C.C.).

Como não ocorre torção na seção transversal, os fluxos de cisalhamento e as tensões normais atuam em um elemento da parede da viga e estão relacionadas pela Equação (2.22).

Será assumido que as tensões normais serão obtidas com precisão suficiente, fundamentada na teoria básica de flexão, de modo que a partir da Equação (2.15), escreve-se:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{[\left(\frac{\partial M_y}{\partial z}\right) I_{xx} - \left(\frac{\partial M_x}{\partial z}\right) I_{xy}]}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} x + \frac{[\left(\frac{\partial M_x}{\partial z}\right) I_{yy} - \left(\frac{\partial M_y}{\partial z}\right) I_{xx}]}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} y . \quad (2.32)$$

Sabendo que $\frac{\partial M_y}{\partial z} = S_x$ e que $\frac{\partial M_x}{\partial z} = S_y$ a Equação (2.8) fica:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} x + \frac{(S_y I_{xx} - S_x I_{xy})}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} y . \quad (2.33)$$

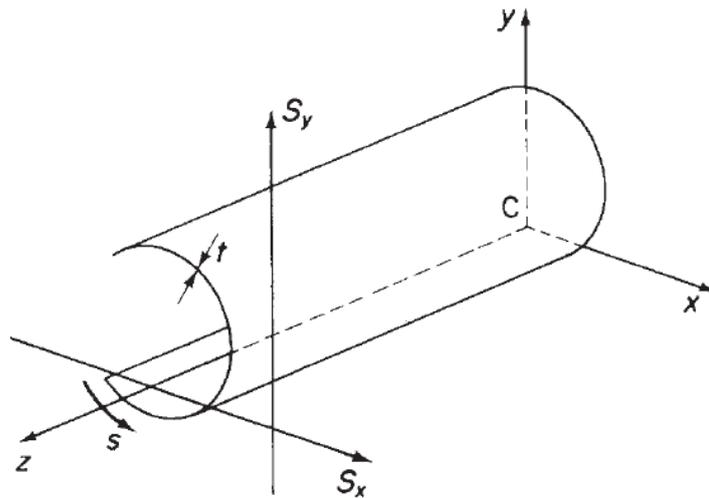


Figura 2.14 – Carregamento cisalhante de uma viga de seção aberta. Fonte: (MEGSON, 2013).

Substituindo a Equação (2.33) em (2.22), tem-se:

$$\frac{\partial q}{\partial s} = - \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} t_x - \frac{(S_y I_{xx} - S_x I_{xy})}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} t_y . \quad (2.34)$$

Integrando a Equação (2.35) da origem até a trajetória percorrida s , sendo s correspondente a qualquer ponto da seção transversal, obtém-se:

$$\int_0^s \frac{\partial q}{\partial s} ds = - \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \int_0^s t_x ds - \frac{(S_y I_{xx} - S_x I_{xy})}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \int_0^s t_y ds . \quad (2.35)$$

Considerando que a trajetória s seja iniciada em uma das extremidades da seção transversal aberta, tem-se que $q = 0$ e $s = 0$. Lembra-se que, se pelo menos um dos eixos x ou y for de simetria, ter-se-á o momento (ou produto) de inércia $I_{xy} = 0$. Logo, a Equação (2.35) se reduz a:

$$q_s = - \frac{S_x}{I_{yy}} \int_0^s t_x ds - \frac{S_y}{I_{xx}} \int_0^s t_y ds . \quad (2.36)$$

• Centro de Cisalhamento

O centro de cisalhamento, representado por C.C., S. ou S.C. é um ponto contido no plano que contém a seção transversal, no qual as cargas cisalhantes não produzem torção, caso a linha de ação da resultante destas passe por este ponto. Em seções transversais que

possuem um eixo de simetria, o centro de cisalhamento estará contido neste eixo. Em outras seções também com geometrias peculiares, cujos bordos se interceptam em um ponto (Figura 2.15), este corresponderá ao centro de cisalhamento (MEGSON, 2013).

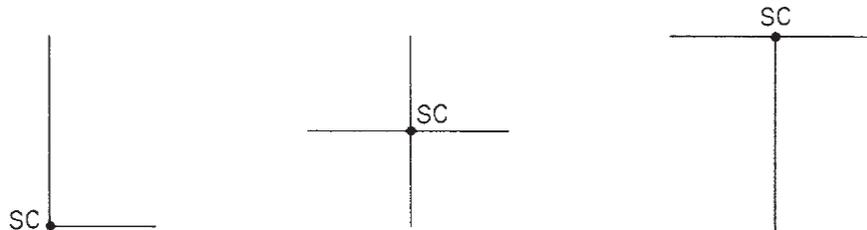


Figura 2.15 – Posição do centro de cisalhamento para vigas de seção aberta. Fonte: (MEGSON, 2013).

2.4.1.2 Seção Transversal Fechada

Em se tratando de seção transversal fechada, considerando as Equações (2.21) e (2.26), e sabendo que $\tau = G\gamma$, escreve-se o fluxo de cisalhamento no caminho s como:

$$q_s = G t \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \right). \quad (2.37)$$

Levando a Equação (2.30) à Equação (2.37), escreve-se a equação diferencial:

$$\frac{q_s}{Gt} = \frac{\partial w}{\partial s} + p \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \psi + \frac{\partial v}{\partial z} \sin \psi,$$

que, integrada em todo o contorno, e considerando que A seja a área interna da seção transversal vazada, e, ainda, visualizando os diferenciais dx e dy nas integrais geradas, chega-se a:

$$\int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds = \int_0^s \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{\partial \theta}{\partial z} \int_0^s p ds + \frac{\partial u}{\partial z} \int_0^s \overbrace{\cos \psi ds}^{dx} + \frac{\partial v}{\partial z} \int_0^s \overbrace{\sin \psi ds}^{dy}, \text{ e}$$

$$\int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds = (w_s - w_0) + \frac{\partial \theta}{\partial z} 2A + \frac{\partial u}{\partial z} (x_s - x_0) + \frac{\partial v}{\partial z} (y_s - y_0). \quad (2.38)$$

Evidentemente, sendo a seção transversal fechada, parte-se de um ponto e retorna-se ao mesmo, ao se percorrer toda a trajetória, simplificando ainda mais os desenvolvimentos para:

$$\oint \frac{q_s}{Gt} ds = 2A \frac{\partial \theta}{\partial z},$$

expressão esta que permite escrever a taxa de torção da seção em função do fluxo de cisalhamento, ou seja, a taxa de variação do giro da seção, com relação ao desenvolvimento longitudinal da peça:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{2A} \oint \frac{q_s}{Gt} ds. \quad (2.39)$$

- **Tensões Tangenciais geradas por Forças Cisalhantes**

Considerando a viga de seção fechada mostrada na Figura 2.16, as cargas cisalhantes S_x e S_y são aplicadas em qualquer ponto da seção transversal, de modo que causem flexão e fluxo de cisalhamento.

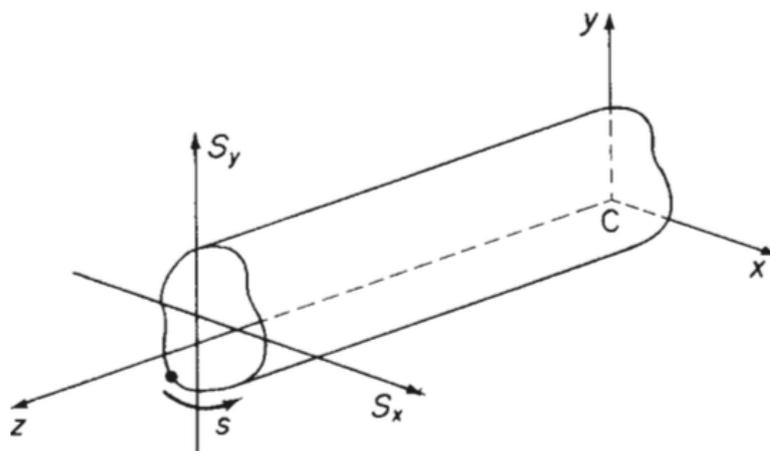


Figura 2.16 – Representação de uma viga solicitada por cargas cisalhante. Fonte: (MEGSON, 2013).

Evocando a Equação (2.22) já apresentada neste trabalho:

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

em que t é a espessura das paredes da viga, obtém-se, por integração, a expressão do fluxo de cisalhamento, conforme mostrado na Equação (2.40).

$$\int_0^s \frac{\partial q}{\partial s} ds = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y ds \quad (2.40)$$

Escolhendo um ponto de origem para se iniciar a trajetória genérica s , correspondendo a este, o fluxo de cisalhamento de valor desconhecido $q_{s,0}$, reescreve-se a Equação (2.40):

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y ds + q_{s,0} . \quad (2.41)$$

Considerando que em uma seção aberta inicia-se o caminhamento a partir de uma das extremidades livres da seção em que o fluxo é nulo, ou seja, $q_{s,0}$, denomina-se a seguinte parte desta Equação (2.28) por q_b (q_{basic} , correspondente ao fluxo de seção aberta):

$$q_b = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y ds , \quad (2.42)$$

ou seja, a Equação (2.41) se reescreve com:

$$q_s = q_b + q_{s,0} . \quad (2.43)$$

Pelo procedimento de cálculo do fluxo de cisalhamento apresentado por Megson (2013), corta-se a seção fechada em qualquer ponto, sendo assim calculado, por meio da Equação (2.42), o fluxo q_b (q_{basic} , de seção aberta), Figura 2.17.

Na Figura 2.17 está representada a seção transversal fechada cortada em um local escolhido aleatoriamente cujo fluxo é considerado nulo. Tal representação mostra, no local de ação das cargas cisalhantes, um momento de torção gerado pelo fluxo que ali existe, na realidade. Ou seja, trata-se de um desenho que representa a simplificação utilizada como procedimento de cálculo, transformando a seção fechada em uma aberta qualquer, ficando este momento de torção como um complemento necessário para que se equivalha à situação real.

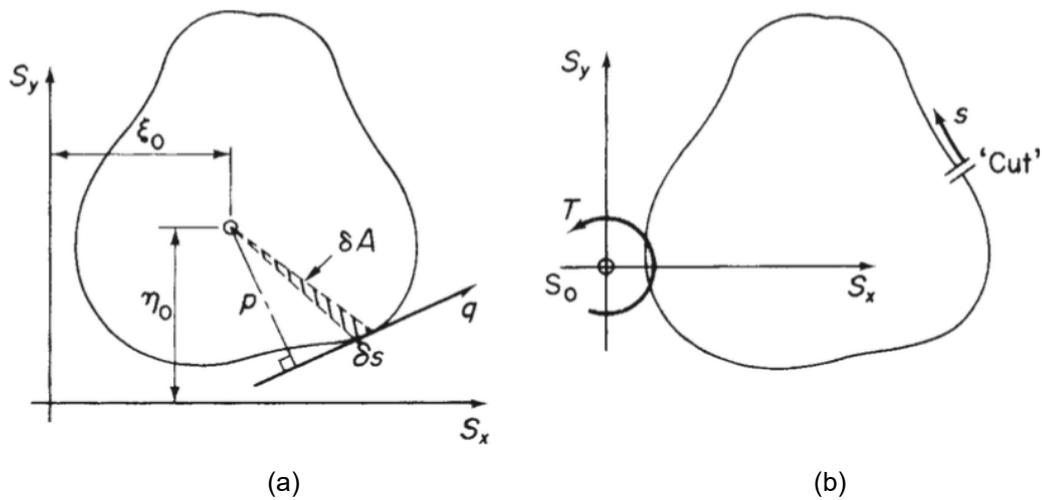


Figura 2.17 – (a) Esquema para procedimento de cálculo de $q_{s,0}$; (b) carregamento equivalente em uma viga de seção aberta. Fonte: (MEGSON, 2013).

Equiparando a representação supracitada com o procedimento de cálculo empregado, tal momento está associado ao fluxo $q_{s,0}$ que, adicionado à parcela de fluxo advinda da seção aberta qualquer, resulta no fluxo real q_s da seção fechada, o que é válido para qualquer ponto da seção transversal.

Através de equacionamento de momentos de torção que ocorrem na seção transversal, por um lado calculado pelas cargas externas e por outro, pelos fluxos de cisalhamento que essas cargas produzem ao longo de toda a seção fechada, é possível encontrar o valor de $q_{s,0}$. Trata-se de um equacionamento de equivalência e não de equilíbrio, pois as cargas geram os fluxos.

O princípio desse método de cálculo é simples: para qualquer ponto contido na seção ou fora da mesma, contanto que esteja em seu plano, convenientemente escolhido para simplificar cálculos, equacionam-se os momentos de torção, com o entendimento de que os momentos das forças externas geram todo e qualquer momento de torção produzido pelos fluxos que essas mesmas cargas geram no ponto adotado. Destaca-se que o equacionamento iguala o somatório de momentos de torção externos com os internos, sendo estes causados pelos primeiros (MEGSON, 2013).

Exprimindo, analiticamente, este procedimento proposto por Megson (2013), tem-se, em observância à Figura 2.17(a), onde são ilustradas as resultantes de forças segundo os eixos cartesianos x e y , bem como um ponto escolhido pelo calculista, as seguintes expressões para os momentos de torção:

$$T_{\text{devido a } S_x \text{ e } S_y} = T_{\text{gera}} = T_{\text{devido aos fluxos produzidos por } S_x \text{ e } S_y}$$

ou seja:

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \oint p q_s ds = \oint p (q_b + q_{s,0}) ds ,$$

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \oint p q_b ds + q_{s,0} \oint p ds , \quad (2.44)$$

em que a integração de linha \oint denota integração completa em torno da seção transversal.

Da Figura 2.17(a), constata-se que a área infinitesimal obtida ao se percorrer a seção vazada pode ser assim calculada:

$$\delta A = \frac{1}{2} \delta s \cdot p ,$$

cujas integrais ao longo de toda a seção fechada resulta em:

$$\oint dA = \frac{1}{2} \oint p ds ,$$

chegando-se a:

$$\oint p ds = 2 A ,$$

sendo A é a área delimitada pela linha média da parede da seção da viga de seção vazada, o que conduz a Equação (2.44) à seguinte redação:

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \oint p q_b ds + 2 A q_{s,0} . \quad (2.45.a)$$

Se o ponto escolhido para o cálculo dos momentos de torção coincidir com a linha de ação de S_x e S_y , por pura conveniência, a Equação (2.45) se simplificará ainda mais:

$$0 = \oint p q_b ds + 2 A q_{s,0} . \quad (2.45.b)$$

- **Locação do Centro de Cisalhamento**

É apresentado o desenvolvimento proposto por Megson (2013), para a obtenção do ponto correspondente ao centro de cisalhamento (C.C., S. ou S.C.) de seções transversais fechadas.

Tomando-se uma seção genérica fechada de paredes finas, mostrada na Figura 2.18, visualizam-se as coordenadas planas com referência qualquer, para a consideração do ponto correspondente a S.

Para determinar a coordenada ξ_S , aplica-se uma carga de cisalhamento S_y arbitrária em S, calcula-se a distribuição de fluxo cisalhante q_s devido à S_y e então equacionam-se os momentos interno e externo, sendo o interno decorrente da carga arbitrada e o externo, correspondente ao fluxo de cisalhamento gerado pela carga arbitrada.

Como visto, no caso de seções fechadas, o fluxo cisalhante tem a parcela de um fluxo desconhecido $q_{s,0}$ correspondente ao fluxo que ocorre no local onde a seção fechada tenha sido cortada. Assim, segundo Megson (2013), bastará calcular o valor de $q_{s,0}$, para que se possa realizar o equacionamento de momentos anunciado, a fim de obter a locação do centro de cisalhamento S.

A estratégia para o cálculo de $q_{s,0}$ é simples, bastando lembrar que, quando as cargas cisalhantes estão atuando no centro de cisalhamento, não ocorre torção, ou seja, a taxa de torção é nula e, assim, evocando a Equação (2.39), em que se tem:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{2A} \oint \frac{q_s}{Gt} ds,$$

chega-se a:

$$0 = \oint \frac{q_s}{Gt} ds,$$

ou, ainda:

$$0 = \oint \frac{1}{Gt} (q_b + q_{s,0}) ds,$$

resultando, assim, na expressão do fluxo desconhecido $q_{s,0}$:

$$q_{s,0} = - \frac{\oint \left(\frac{q_b}{Gt} \right) ds}{\oint \frac{ds}{Gt}} \quad (2.46)$$

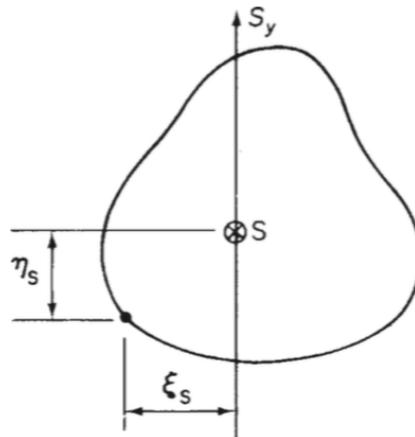


Figura 2.18 – Visualização do centro de cisalhamento S em uma seção fechada qualquer. Fonte: (MEGSON, 2013).

Caso o material estrutural seja o mesmo, com G constante, a Equação (2.46) é simplificada para Equação (2.47).

$$q_{s,0} = - \frac{\oint (q_b/t) ds}{\oint ds/t} \quad (2.47)$$

2.4.2 Material Compósito

2.4.2.1 Seção Transversal Aberta

Como foi visto na seção anterior, foi obtida uma expressão para a distribuição do fluxo cisalhante em uma seção aberta de uma viga de paredes finas, quando a mesma está submetida a uma carga de cisalhamento. Diferentemente do que ocorre para vigas com materiais isotrópicos, para as quais o módulo de Young (E) é constante, a vigas com materiais compósitos pode apresentar diferentes valores de E devendo este ser levado em consideração no cálculo do fluxo cisalhante. Com isso, a equação passa a apresentar a seguinte forma:

$$q_s = - E_{z,i} \left[\left(\frac{S_x I'_{xx} - S_x I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) \int_0^s t_i X ds + \left(\frac{S_y I'_{yy} - S_x I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) \int_0^s t_i Y ds \right] \quad (2.48)$$

2.4.2.2 Seção Transversal Fechada

O mesmo argumento utilizado para seções abertas se aplica para as seções fechadas, porém a equação passa a ter a seguinte forma:

$$q_s = -E_{z,i} \left[\left(\frac{S_X I'_{XX} - S_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) \int_0^s t_i X ds + \left(\frac{S_Y I'_{YY} - S_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) \int_0^s t_i Y ds \right] + q_{s,0}. \quad (2.49)$$

2.5 Torção em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

2.5.1 Material isotrópico

2.5.1.1 Seção Transversal Aberta

Uma solução aproximada para a torção de uma viga de seção transversal aberta com paredes finas pode ser encontrada aplicando os resultados para a torção de uma faixa (ou tira) retangular fina, pela teoria da membrana (MEGSON, 2013). Se tal faixa é dobrada para formar uma viga de seção aberta, como ilustrado pela Figura 2.19(a), e se a distância s medida em torno da extensão transversal de cada parede é grande em comparação com sua espessura t (como ocorre em estruturas aeronáuticas), então os fluxos de cisalhamento são aproximadamente paralelos às bordas internas e externas.

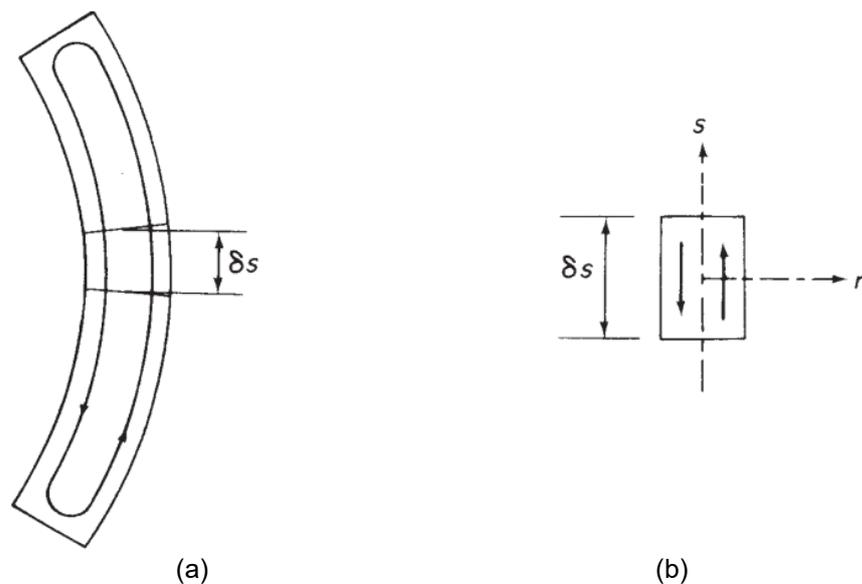


Figura 2.19 – (a) Fluxo de cisalhamento em uma viga de seção aberta com paredes finas sujeita à torção; (b) fluxo cisalhante em uma extensão diferencial da parede.

Com base na Figura 2.19(b) escrevem-se os equacionamentos referentes à análise de torção (MEGSON, 2013):

$$\tau_{zs} = 2 G_n \frac{d\theta}{dz}, \quad \tau_{zn} = 0, \quad (2.50)$$

$$\tau_{zs,max} = \mp G t \frac{d\theta}{dz}, \quad (2.51)$$

$$J = \sum \frac{st^3}{3} \quad \text{ou} \quad J = \frac{1}{3} \int_{ST} t^3 ds, \quad (2.52)$$

$$T = G J \frac{d\theta}{dz}, \quad (2.53)$$

sendo:

- G : módulo de rigidez ao cisalhamento;
- J : momento polar de inércia da seção transversal;
- $\frac{d\theta}{dz}$: taxa de torção.

• Empenamento

Uma faixa retangular fina sofre empenamento ao longo da sua espessura quando sujeita à torção, que corresponde a deslocamentos ao longo do eixo z , ao longo da espessura da parede. Tais deslocamentos são denominados **secundários**.

Similarmente, uma viga de seção aberta com paredes finas vai distorcer ao longo da sua espessura, ocorrendo os denominados empenamentos (w_t), que correspondem a deslocamentos na direção z , perpendicularmente ao plano da seção transversal, expressos, segundo Megson (2013), por:

$$w_t = n s \frac{d\theta}{dz} .$$

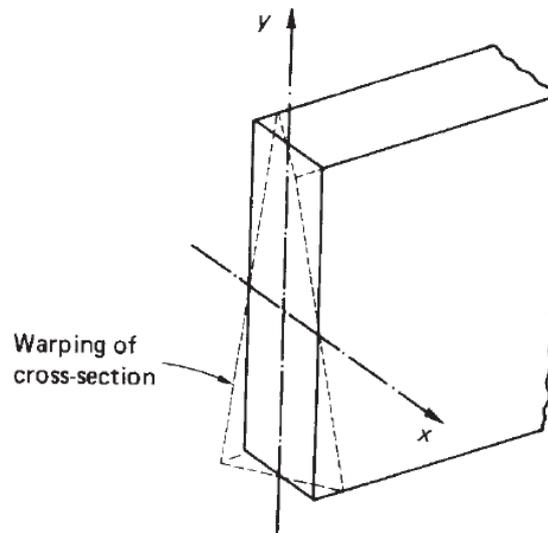


Figura 2.20 – Empenamento de uma fina faixa retangular. Fonte: (MEGSON, 2013).

Por outro lado, é definido um empenamento referente às linhas médias das espessuras das paredes finas, denominado **primário**, pois possuem valores maiores que os secundários. Para seu cálculo, de acordo com Megson (2013), considera-se a deformação angular de um elemento diferencial da parede (vide Figura 2.12):

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial s} + p_r \frac{d\theta}{dz} \quad (2.54)$$

Assim:

$$\tau_{zs} = G \left(\frac{\partial w}{\partial s} + p_R \frac{d\theta}{dz} \right) \quad (2.55)$$

Na linha média da parede da seção transversal, tem-se $\tau_{zs} = 0$ de modo que, da Equação (2.55), escreve-se:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = - p_r \frac{d\theta}{dz}$$

Integrando essa expressão em relação a s e tomando o limite inferior da integral, para coincidir com o ponto de deformação nula, escreve-se:

$$w_s = - \frac{d\theta}{dz} \int_0^s p_R ds \quad (2.56)$$

Equação (2.56) pode ser reescrita na forma:

$$w_s = -2 A_R \frac{d\theta}{dz}, \quad (2.57)$$

ou, em função do momento de torção (T) aplicado na seção transversal:

$$w_s = -2 A_R \frac{T}{GJ}, \quad (2.58)$$

sendo $A_R = \frac{1}{2} \int_0^s p_R ds$ a área varrida por um gerador, rotacionando em volta do centro da torção onde está aplicado o momento, a partir do ponto em que o empenamento seja nulo, como mostrado na Figura 2.21. Destaca-se que o sinal da área varrida A_R é positivo se o giro para varrê-la for anti-horário (mesmo giro do momento de torção positivo).

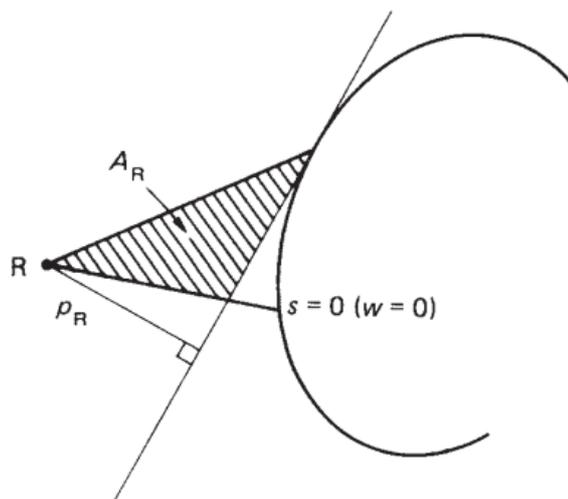


Figura 2.21 – Deformação de uma viga de seção aberta. Fonte: (MEGSON, 2013).

2.5.1.2 Seção Transversal Fechada

De acordo com Megson (2013), uma viga de seção fechada sujeita a um momento de torção T como mostra a Figura 2.22, não desenvolve tensões normais. Assim, as condições de equilíbrio das Equações (2.21) e (2.22) reduzem para $\partial q/\partial s = 0$ e $\partial q/\partial z = 0$, respectivamente. Tais expressões podem ser simultaneamente satisfeitas por uma constante de valor q. Deduz-se, portanto, que a aplicação de um torque puro em uma viga de seção fechada resulta no desenvolvimento de um fluxo de cisalhamento constante na parede da viga. Entretanto, a tensão do cisalhamento τ pode variar ao longo da seção transversal, visto que a espessura da parede t seja uma função de s.

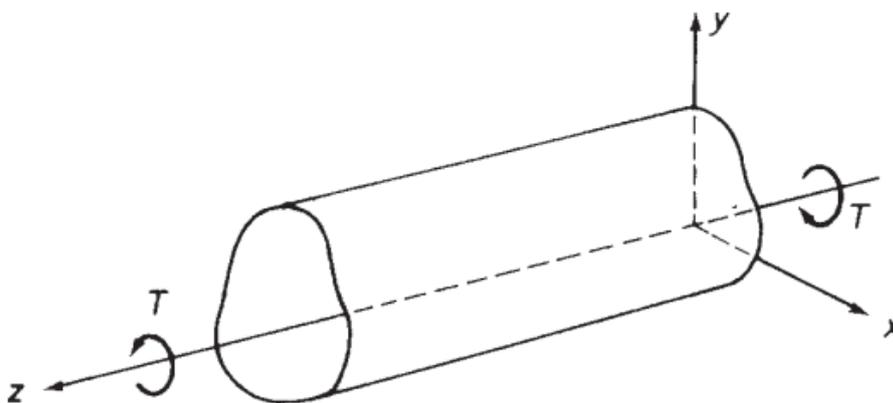


Figura 2.22 – Torção de uma viga de seção fechada. Fonte: (MEGSON, 2013).

Sabendo que o torque produzido pelo fluxo de cisalhamento atuando num elemento δs da parede da viga é $p \cdot q \cdot \delta s$ (Figura 2.23), tem-se:

$$T = \oint p \cdot q \cdot ds.$$

Visto que q é uma constante e $\oint p \cdot ds = 2A$, escreve-se:

$$T = 2Aq. \quad (2.59)$$

Nota-se que a origem O dos eixos na Figura 2.23 pode ser posicionada fora do corte transversal da viga desde que o momento do fluxo de cisalhamento interno (cujo resultado é um torque puro) seja o mesmo em qualquer ponto do seu plano.

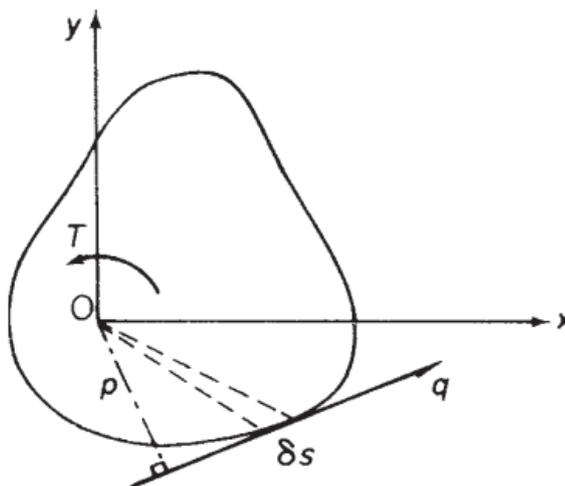


Figura 2.23 – Determinação da distribuição do fluxo de cisalhamento em uma viga de seção fechada sujeita à torção. Fonte: (MEGSON, 2013).

De uma origem fora do corte transversal o termo $p \cdot ds$ envolverá a somatória das áreas positivas e negativas. O sinal de uma área é determinado pelo sinal de p , que está associado à convenção de sinal para o torque que o acompanha.

Se o movimento da base de p ao longo da tangente em qualquer ponto na direção positiva de s leva a uma rotação anti-horária, p é positivo.

Portanto, na Figura 2.24 um gerador OA , rotacionando em torno de O , inicialmente varrerá uma área negativa já que p_A é negativo. Em B , entretanto, p_B é positivo já que a área varrida pelo gerador tem o sinal trocado.

A teoria da torção de vigas de seção fechada é conhecida como a Teoria de Bredt-Batho e a Equação (2.59) é frequentemente referida como a “Fórmula de Bredt-Batho”.

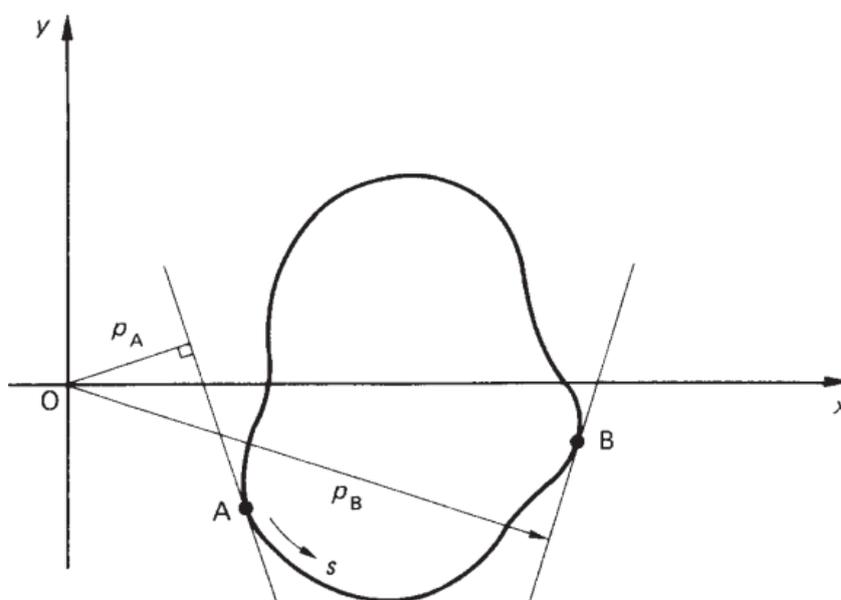


Figura 2.24 – Convenção de sinalização para áreas varridas. Fonte: (MEGSON, 2013).

- **Deslocamentos associados com o fluxo de cisalhamento de Bredt-Batho**

A relação entre q e a tensão de cisalhamento τ estabelecida na Equação (2.17) é dada por:

$$q = G t \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \right),$$

sendo válida para o caso de torção pura onde q é constante. Diferenciando essa expressão em relação à z tem-se:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = G t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} + \frac{\partial^2 v_t}{\partial z^2} \right) = 0 ,$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 v_t}{\partial z^2} = 0 .$$

Na ausência de tensões normais, a deformação linear longitudinal $\partial w / \partial z$ ($= \epsilon_z$) é nula visto que:

$$\frac{\partial^2 v_t}{\partial z^2} = 0 .$$

Consequentemente, da Equação (2.44), escreve-se:

$$p \frac{d^2 \theta}{dz^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \cos \psi + \frac{d^2 v}{dz^2} \sin \psi = 0 . \quad (2.60)$$

Para que a Equação (2.60) contemple todos os pontos do contorno da seção transversal, em outras palavras, para todos os valores de ψ :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

Assim: $\theta = Az + B$; $u = Cz + D$; $v = Ez + F$; onde A, B, C, D, E e F são constantes desconhecidas. Portanto, θ , u e v são todas funções lineares de z .

A Equação (2.32), relacionando a taxa de torção para o fluxo de cisalhamento variável q_s desenvolvida em uma viga de seção fechada carregada por cisalhamento, é também válida para o caso $q_s = q = \text{constante}$. Consequentemente:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{q}{2A} \oint \frac{ds}{Gt} , \quad (2.61)$$

a qual se torna, ao substituir pela expressão de q , obtida com a Equação (2.59):

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{4A^2} \oint \frac{ds}{Gt} .$$

A distribuição de empenamento produzida por um fluxo de cisalhamento variável é também aplicável para o caso de um fluxo de cisalhamento constante. Consequentemente:

$$w_s - w_0 = q \int_0^s \frac{ds}{Gt} - \frac{A_{Os}}{A} q \oint \frac{ds}{Gt} . \quad (2.62)$$

Substituindo q da Equação (2.59) tem-se:

$$w_s - w_0 = \frac{T \delta}{2A} \left(\frac{\delta_{Os}}{\delta} - \frac{A_{Os}}{A} \right), \quad (2.63)$$

onde:

$$\delta = \oint \frac{ds}{Gt} \quad \text{e} \quad \delta_{Os} = \int_0^s \frac{ds}{Gt} \cdot \int_{ST} G_{XY,i} t_i^3 ds \quad (2.64)$$

O sinal do deslocamento na Equação (2.61) é governado pelo sinal do torque aplicado T e pelos sinais dos parâmetros δ_{Os} e A_{Os} .

2.5.2 Materiais Compósitos

2.5.2.1 Seção Transversal Aberta

Diferentemente de uma viga isotrópica, em que o módulo de cisalhamento é constante, as vigas de materiais compósitos devem considerar os diferentes módulos de cisalhamento de cada laminado compósito constituinte das paredes da viga. Para se levar em consideração a contribuição dos diferentes módulos de cisalhamento, faz-se o somatório discretizado ou calcula-se a integral para os diferentes $G_{XY,i}$, conforme a Equação (2.65).

$$GJ = \sum_{i=1}^n G_{XY,i} \frac{s t_i^3}{3} \quad \text{ou} \quad GJ = \frac{1}{3} \int_{ST} G_{XY,i} t_i^3 ds \quad (2.65)$$

A taxa de torção de uma viga está relacionada ao momento de torção aplicado. Para uma viga compósita de seção aberta, a rigidez torcional é dada pela Equação (2.65), ou seja:

$$T = \left(\sum_{i=1}^n G_{XY,i} \frac{s t_i^3}{3} \right) \frac{d\theta}{dZ} \quad \text{ou} \quad T = \left(\frac{1}{3} \int_{ST} G_{XY,i} t_i^3 ds \right) \frac{d\theta}{dZ}. \quad (2.66)$$

Obtendo a taxa de torção, pode-se determinar a distribuição das tensões de cisalhamento ao longo da espessura em um ponto qualquer da seção da viga, ou seja:

$$\tau = 2 G_{XY,i} n \frac{d\theta}{dZ}. \quad (2.67)$$

Assim, a tensão máxima de cisalhamento irá ocorrer na superfície da seção da viga, onde $n = \pm t/2$.

A distribuição primária de deslocamento segue a Equação (2.57), para a qual, a taxa de torção é obtida por qualquer uma das Equações (2.66).

2.5.2.2 Seção Transversal Fechada

A distribuição do fluxo de cisalhamento em uma viga de paredes finas de seção fechada sujeita a um momento de torção é:

$$T = 2Aq,$$

ou

$$q = \frac{T}{2A}. \quad (2.68)$$

A obtenção da Equação (2.68) se baseia em considerações de equilíbrio, portanto não depende das propriedades elásticas da viga. Assim, ela pode ser aplicada tanto para seções isotrópicas como compósitas. A taxa de torção de uma viga de seção fechada, sujeita a um momento de torção é obtida por:

$$\frac{d\theta}{dZ} = \frac{T}{4A^2} \oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i}, \quad (2.69)$$

e, rearranjando, escreve-se:

$$T = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i}} \frac{d\theta}{dZ}. \quad (2.70)$$

Sabe-se que o torque e a taxa de torção em uma viga são relacionados pela rigidez torcional GJ . Portanto, da Equação (2.70) vê-se que a rigidez torcional de uma viga composta de seção fechada é dada por:

$$GJ = \frac{4 A^2}{\oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i}} \quad (2.71)$$

Os argumentos citados acima se aplicam à determinação da distribuição de empenamento (w) em uma viga composta de seção fechada, expresso por:

$$W_s - W_0 = q \int_0^s \frac{ds}{G_{XY,i} t_i} - \frac{A_{0s}}{A} q \oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i}, \quad (2.72)$$

ou, em termos de torque aplicado:

$$W_s - W_0 = \frac{T}{2A} \int_0^s \frac{ds}{G_{XY,i} t_i} - \frac{A_{0s}}{A} \oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i}. \quad (2.73)$$

2.6 Idealização Estrutural

Suponha-se que se deseje idealizar, estruturalmente, o trecho do painel esquematizado na Figura 2.25(a) por uma combinação de *Booms* que suportem tensões normais e por paredes que suportem tensões de cisalhamento, Figura 2.25(b).

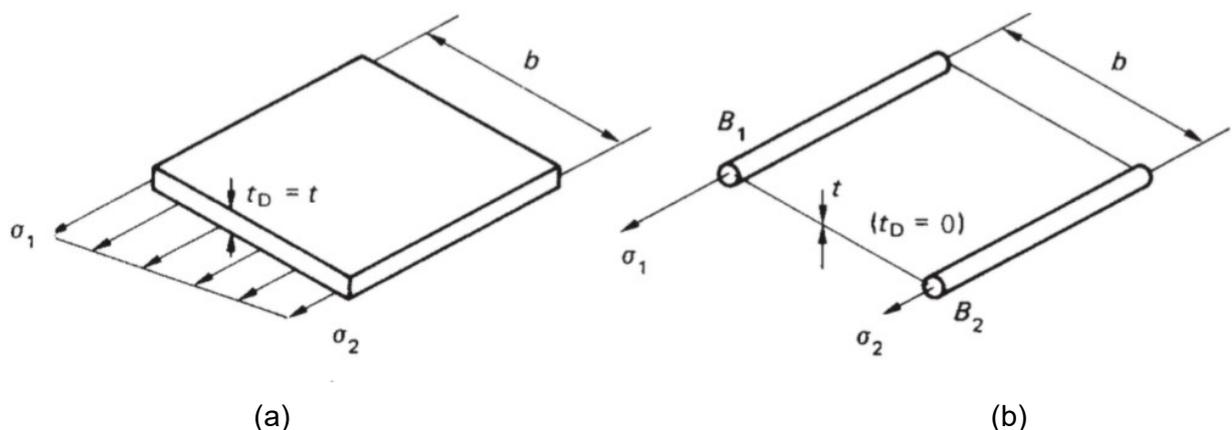


Figura 2.25 – Idealização de um painel estrutural aeronáutico: (a) real; (b) idealizado.

Fonte: (MEGSON, 2013).

Na Figura 2.25(a) a espessura t_D do revestimento que suporta as tensões normais é igual à espessura real t , porém, na Figura 2.25(b), considera-se $t_D = 0$. Suponha-se também que a distribuição de tensões normais no painel real varie linearmente de um valor

desconhecido σ_1 a outro valor desconhecido σ_2 . Evidentemente, a análise deve prever os extremos das tensões σ_1 e σ_2 . Fazendo a equivalência dos momentos fletores pelas duas situações, real e idealizada, escreve-se:

$$\sigma_2 t_D \frac{b^2}{2} + \frac{1}{3} (\sigma_1 - \sigma_2) t_D b^2 = \sigma_1 B_1 b ,$$

em que se tem:

$$B_1 = \frac{t_D b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right). \quad (2.74)$$

Numa seção transversal de asa ilustrada pela Figura 2.26, as nervuras e as longarinas de bordo têm seções transversais bem menores se comparadas com a seção completa da asa. Com isso, a variação das tensões ao longo dessas áreas é também pequena no âmbito de toda a seção transversal deste elemento estrutural.

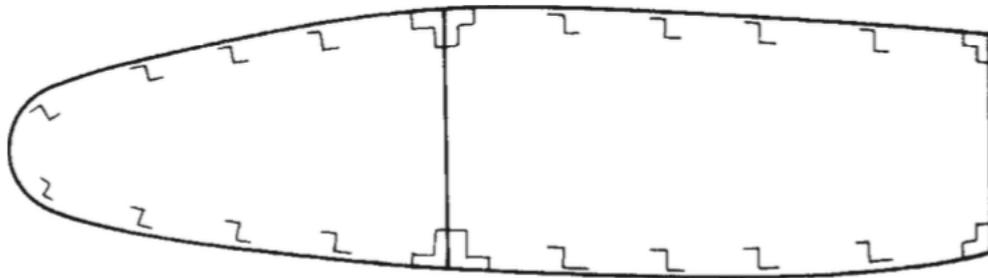


Figura 2.26 – Seção típica real de uma asa. Fonte: (MEGSON, 2013).

Além disso, a distância entre o centroide de uma nervura e o revestimento adjacente à mesma é também bastante pequena. Assim, é razoável assumir que a tensão normal seja constante ao longo das seções transversais das nervuras. Em conformidade, podem-se substituir as áreas das nervuras e das longarinas de bordo por áreas concentradas, conhecidas por *Booms*, sendo estes alocados sobre a linha média do revestimento, nos quais a tensão normal seja constante, como mostrado na Figura 2.27.

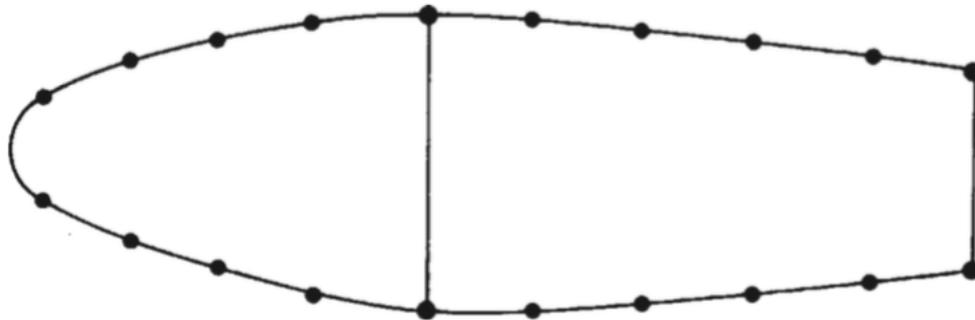


Figura 2.27 – Idealização estrutural de uma seção de asa, por *Booms*. Fonte: (MEGSON, 2013).

Em seções de fuselagem e asa, as nervuras e as longarinas de bordo suportam a maior parte das tensões normais, enquanto o revestimento é mais eficaz para resistir aos esforços cisalhantes (MEGSON, 2013).

2.6.1 Flexão e Cisalhamento em Vigas de Seção Fechada Idealizada

Será apresentada a idealização estrutural quando da utilização de material isotrópico ou compósito.

2.6.1.1 Material Isotrópico

As análises realizadas na Subseção 2.3 apresentam desenvolvimentos que culminam na expressão que permite o cálculo da distribuição de tensões normais que ocorrem ao longo de toda a seção transversal real, a partir da Equação (2.15), replicada aqui:

$$\sigma_z = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y .$$

Nessa expressão, as coordenadas (x, y) de quaisquer pontos da seção transversal são referenciadas a eixos com origem no centro geométrico desta seção. Além disso, as propriedades de inércia da seção I_{xx} , I_{yy} e I_{xy} são calculadas em relação a tais eixos, denominados centroidais.

Ao se considerar a idealização estrutural da seção, a distribuição de tensões normais correspondente ocorrerá discretizadamente, para cada ponto que contenha a área concentrada de um *Boom*.

Ainda na Equação (2.15), registra-se que, ao se transformar a seção transversal real em uma condição idealizada por *Booms*, as inércias reais serão calculadas também com relação aos eixos centroidais, porém, levando em consideração apenas as áreas dos *Booms*, lembrando que suas inércias locais são nulas, por corresponderem, a rigor, a pontos.

Similarmente, com relação às tensões de cisalhamento, as expressões para cálculo do fluxo cisalhante são simplificadas no contexto da idealização estrutural. Segundo Megson (2013), na Equação (2.41) apresentada na Subseção 2.4.1.2 e reproduzida aqui:

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t_x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t_y ds + q_{s,0},$$

pelo fato do *Boom* gerar descontinuidade no fluxo cisalhante, sempre que um deles é encontrado, o fluxo cisalhante recebe um incremento semelhante à parcela da parede do painel, visualizada na equação acima, pela integral, porém, equacionada pontualmente, ou seja:

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D x ds + \sum_{r=1}^n B_r x_r \right) - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D y ds + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right) + q_{s,0} \quad (2.75)$$

Observa-se a simbologia da espessura do painel idealizado t_D condizente com a Figura 2.26, com o destaque de que este será nulo na condição estrutural idealizada. Assim, a Equação (2.75) se reduzirá a:

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \sum_{r=1}^n B_r x_r - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \sum_{r=1}^n B_r y_r + q_{s,0} \quad (2.76)$$

Reitera-se que, havendo carga fora do centro de cisalhamento, a mesma será levada para este ponto, juntamente com o momento de torção correspondente ao produto da mesma e braço de alavanca. Assim, o fluxo cisalhante obtido com cargas de cisalhamento será acrescido pelo fluxo proveniente do momento de torção, calculado conforme a Equação (2.68).

2.6.2.1 Material Compósito

Em se tratando de viga constituída por material compósito, no tocante à flexão, com idealização estrutural, as tensões normais são obtidas semelhantemente ao caso apresentado na Subseção 2.3.2, com a diferença do cálculo das inércias apenas pelos *Booms*, com respectivos módulos de elasticidade:

$$\sigma_z = E_{z,i} \left[\left(\frac{M_Y I'_{XX} - M_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) X + \left(\frac{M_X I'_{YY} - M_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) Y \right].$$

Registra-se que, caso haja carga axial, na seção transversal idealizada, bastará que a mesma seja distribuída igualmente aos *Booms* e, obviamente, as expressões apresentadas na Subseção 2.2.2 terão os módulos de elasticidade especificamente dos *Booms* e não das paredes compósitas.

Com relação ao cisalhamento, de modo semelhante ao supra ponderado, escreve-se a equação do fluxo cisalhante que atua nas paredes da seção idealizada, decorrente de cargas de cisalhamento:

$$q_s = - E_{z,i} \left[\left(\frac{S_X I'_{XX} - S_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) \sum_{r=1}^n B_r X_r + \left(\frac{S_Y I'_{YY} - S_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) \sum_{r=1}^n B_r Y_r \right] + q_{s,0}.$$

Acrescenta-se que, sob a ação do momento de torção, o cálculo do fluxo cisalhante da seção idealizada não difere da seção real, valendo as mesmas expressões apresentadas na Subseção 2.5.2.2.

CAPÍTULO III

MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Apresentação

O objeto de pesquisa assumido para que se cumpram as proposições do Projeto de Conclusão de Curso em apreço é uma viga simulando uma asa aeronáutica, com seção do tipo caixão engastada-livre, solicitada por carga de compressão excêntrica a fim de produzir na seção transversal, tensões normais e de cisalhamento a serem avaliadas, decorrente dos esforços solicitantes: momento de flexão, momento de torção e força cisalhante.

Visando à obtenção das tensões requeridas com o presente estudo, são utilizados dois procedimentos de cálculo: um teórico-analítico, com a utilização das expressões desenvolvidas a partir da revisão bibliográfica fundamentada em Megson (2013) e apresentadas no Capítulo 2 desta monografia, considerando a idealização estrutural por *Booms*; e outro numérico, via Método dos Elementos Finitos (MEF), sendo a modelagem e cálculo realizados com o auxílio do programa computacional NASTRAN®.

Para todas as análises serão considerados materiais isotrópicos e materiais compósitos, a fim de comparar o comportamento da viga, para as mesmas condições de esforços e condições estruturais.

3.2 Aspectos Elástico-Geométricos e de Carregamento da Viga

O elemento estrutural considerado é a viga de paredes finas ilustrada na Figura 3.1, com condições de extremidade engastada-livre, e com dimensões 250 mm x 150 mm x 1100 mm; com espessura de 2,0 mm nas paredes verticais e 0,8 mm nas horizontais. Foram dispostos, longitudinalmente, perfis estruturais enrijecedores de três tipos (P_1 , P_2 e P_3) cujas seções são apresentadas na Figura 3.1(a), simulando uma condição próxima à situação real de asa aeronáutica, constituída por painel e reforçadores.

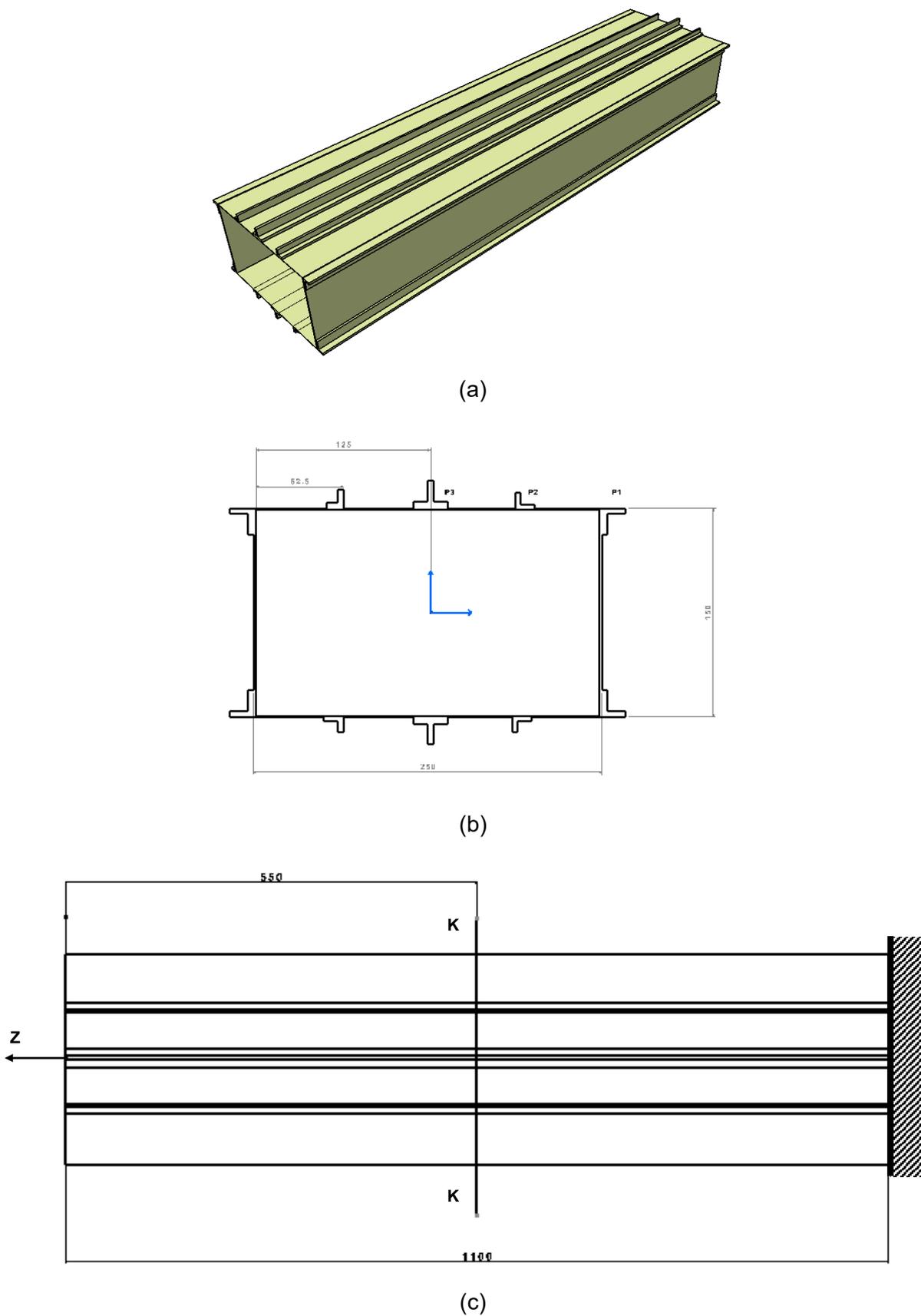


Figura 3.1 – Representação da viga de paredes finas considerada: (a) vista global; (b) seção transversal; (c) vista superior. Unidades em mm.

Registra-se que o elemento estrutural concebido e investigado neste PCC será montado para a realização de aulas práticas referentes ao conteúdo das disciplinas Estruturas de Aeronaves II do Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da UFU. Sua concepção foi baseada em um sistema estrutural montado no ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica) e destinado ao ensino-aprendizagem do comportamento estrutural de elementos constituídos por paredes finas, em nível de graduação e pós-graduação.

Como material isotrópico do presente estudo, será considerado o Alumínio 2024-T3, liga aeronáutica vastamente utilizada em fabricação de aeronaves, e que apresenta as seguintes características mecânicas (ASM, 2016):

- $E = 73100 \text{ N/mm}^2$: Módulo de Elasticidade;
- $\nu = 0,33$: Coeficiente de Poisson;
- $G = 27500 \text{ N/mm}^2$: Módulo de Rigidez ao Cisalhamento.

Para a consideração compósita, serão consideradas lâminas em resina epóxi com fibras de vidro em fração volumétrica de 60%; um material compósito de uso expressivo, devido à sua elevada resistência e baixo peso, e que apresenta as seguintes características mecânicas (GAY, 2015):

- $E_l = 45000 \text{ N/mm}^2$: Módulo de Elasticidade Longitudinal;
- $E_t = 12000 \text{ N/mm}^2$: Módulo de Elasticidade Transversal;
- $\nu = 0,30$: Coeficiente de Poisson;
- $G_{lt} = 4500 \text{ N/mm}^2$: Módulo de Rigidez ao Cisalhamento.

Para possibilitar comparação com variações compósitas, também serão consideradas lâminas, também com resina epóxi, mas com fibras de carbono, a 60%, em fração volumétrica, com o triplo de ganho em rigidez longitudinal, frente ao compósito precedente (GAY, 2015):

- $E_l = 134000 \text{ N/mm}^2$: Módulo de Elasticidade Longitudinal;
- $E_t = 7000 \text{ N/mm}^2$: Módulo de Elasticidade Transversal;
- $\nu = 0,25$: Coeficiente de Poisson;
- $G_{lt} = 4200 \text{ N/mm}^2$: Módulo de Rigidez ao Cisalhamento.

Para o carregamento, é considerada a atuação de uma força vertical para baixo, de 200 kgf, distante de 300 mm da parede vertical direita da viga. Tal carregamento foi concebido

para proporcionar aos autores deste PCC uma investigação completa no âmbito das possíveis tensões que possam surgir na seção transversal do elemento estrutural em análise, advindas da flexão, torção e cisalhamento do mesmo.

Os perfis utilizados foram os seguintes, alocados simetricamente na seção-caixão, repetidos nos quatro quadrantes da mesma:

- **P₁**: perfil tipo cantoneira, 19 mm x 17 mm x 4 mm, A_1 : 128 mm²;
- **P₂**: perfil tipo cantoneira, 14 mm x 12 mm x 4 mm, A_2 : 88 mm²;
- **P₃**: perfil tipo “T”, 25 mm x 15 mm x 5 mm, A_3 : 200 mm².

Para que se explorem as análises comparativas teórico-numéricas foram concebidos seis Modelos, considerando os enrijecedores como *Booms*, ou desconsiderando-os, com modificação do material estrutural a saber:

- **MODELO I**: idealizado por *Booms*; material dos *Booms* e das paredes: Alumínio 2024-T3;
- **MODELO II**: considerando apenas as paredes (sem enrijecedores e sem *Booms*); material das paredes: Alumínio 2024-T3;
- **MODELO III**: idealizado por *Booms*; material dos *Booms* e das paredes: epóxi/vidro;
- **MODELO IV**: considerando apenas as paredes (sem enrijecedores e sem *Booms*); material das paredes: epóxi/vidro;
- **MODELO V**: idealizado por *Booms*; material dos *Booms* e das paredes horizontais: epóxi/carbono e das paredes verticais: epóxi/vidro;
- **MODELO VI**: considerando apenas as paredes (sem enrijecedores e sem *Booms*); material das paredes horizontais: epóxi/carbono e das paredes verticais: epóxi/vidro.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE TEÓRICA DAS TENSÕES QUE SOLICITAM A VIGA

4.1 Modelo Teórico

Para a análise teórico-analítica da viga, foi considerada a idealização estrutural por *Booms*, apresentada na Subsecção 2.6 conforme ilustrado na Figura 4.1, e utilizada nos Modelos I, III e V.

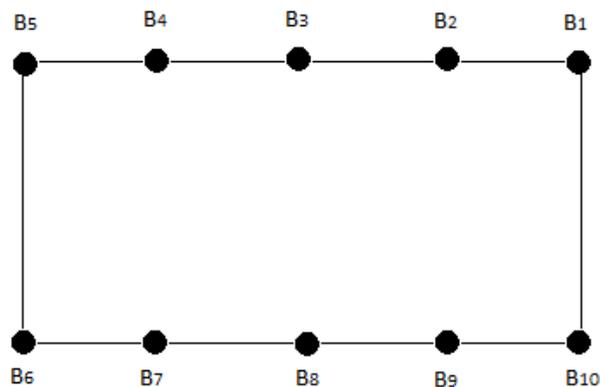


Figura 4.1 – Esquema da seção transversal da viga, idealizada por dez *Booms* (B_i).

Para exemplificar o procedimento de cálculo depreendido para a determinação da área pontual de cada *Boom*, é apresentada a seguir a obtenção da área do B_1 .

Considerando a Equação (2.74) a área do *Boom* B_1 é:

$$B_1 = A_1 + \frac{t_{1-2} l_{1-2}}{6} \left[2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] + \frac{t_{1-10} l_{1-10}}{6} \left[2 + \frac{\sigma_{10}}{\sigma_1} \right],$$

$$B_1 = A_1 + \frac{t_{1-2} l_{1-2}}{6} \left[2 + \frac{y_2}{y_1} \right] + \frac{t_{1-10} l_{1-10}}{6} \left[2 + \frac{y_{10}}{y_1} \right],$$

$$B_1 = 128 + \frac{0,8 \cdot 62,5}{6} \left[2 + \frac{75}{75} \right] + \frac{2 \cdot 150}{6} \left[2 + \frac{-75}{75} \right] = 203 \text{ mm}^2.$$

Destaca-se que, para o cálculo da área do *Boom*, não é necessário que se conheçam os valores das tensões normais, bastando que se tenham os valores das coordenadas y dos *Booms* até a linha de ação do momento M_x , ou seja, até o eixo centroidal da seção, considerando que o quociente das tensões normais fica simplificado pelos parâmetros referentes às propriedades de inércia e ao momento fletor, atuantes na seção transversal da viga, em observância à Equação (2.16) obtida na Subseção 2.3.1.

Repetindo o desenvolvimento para os demais *Booms*, elabora-se a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Área correspondente a cada *Boom* da seção idealizada.

Boom	Área [mm²]
B₁	203
B₂	138
B₃	250
B₄	138
B₅	203
B₆	203
B₇	138
B₈	250
B₉	138
B₁₀	203

Reitera-se que para os Modelos II, IV e VI, não serão considerados enrijecedores e, conseqüentemente, *Booms*, para que sejam possibilitadas análises comparativas adicionais.

4.2 Tensões Normais Devidas ao Momento de Flexão

Em decorrência da dupla simetria geométrica que apresenta a seção transversal da viga em estudo, tem-se que $I_{xy} = 0$ e, por ocasião da carga vertical aplicada, ocorrerá flexão em torno do eixo x mostrado na Figura 3.1(b), gerando o momento denominado M_x .

Para a idealização estrutural adotada, os *Booms* absorvem as tensões normais, cujo equacionamento apresentado na Subseção 2.6.1.1, levado às particularidades aqui apresentadas, para a viga em estudo, resulta expresso por:

$$\sigma_z = \frac{M_x Y_r}{I_{xx}} = \frac{F(l-z)Y_r}{I_{xx}}, \quad (4.1)$$

onde:

- F é carga aplicada na viga, com valor de 200 kgf ($200 \cdot 9,8066 = 1961,32$ N);
- l é o comprimento da viga;
- Y_r é a coordenada vertical de locação de cada *Boom*, no sistema tridimensional mostrado na Figura 3.1, adotando r como referência indicial dos *Booms*;
- I_{xx} é o momento de inércia da seção idealizada em relação ao eixo centroidal de inércia x , correspondente ao eixo horizontal coordenado mostrado na Figura 3.1;
- z é a locação da seção, segundo o eixo longitudinal da viga, de comprimento l , que define o valor do momento fletor que ocorre em cada seção transversal da mesma.

Foi considerada a seção K disposta no meio do comprimento da viga em apreço, conforme ilustrado na Figura 3.1, para a qual se tem $Z = 550$ mm e:

$$M_x = + F (l - Z) = 1961,32 \cdot 550 = 1,0787 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}.$$

A partir da idealização estrutural realizada, o cálculo do momento de inércia I_{xx} em relação ao eixo centroidal de inércia x perfaz-se, simplificada, por:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^r A_i y_i^2 = 75^2 (4 \cdot 203 + 4 \cdot 138 + 2 \cdot 250) = 1,0485 \cdot 10^7 \text{ mm}^4.$$

Já para materiais compósitos, para a obtenção das tensões normais, é utilizada a expressão apresentada na Equação (2.20), repetida aqui:

$$\sigma_z = E_{z,i} \left[\left(\frac{M_y I'_{xx} - M_x I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) X + \left(\frac{M_x I'_{yy} - M_y I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) Y \right].$$

Havendo dois eixos de simetria, e apenas o momento M_x ; assim, a expressão anterior se reduz a:

$$\sigma_z = E_{z,i} \left(\frac{M_x}{I'_{xx}} \right) Y, \quad (4.2)$$

sabendo que (vide item 2.3.2): $I'_{xx} = \int_A E_{z,i} Y^2 dA$.

O cálculo dos momentos de inércia I_{xx} em relação ao eixo centroidal de inércia x , para cada modelo é apresentado a seguir:

- **Modelo I** (isotrópico, com *Booms*)

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^r A_r Y_r^2 = 75^2 (4 \cdot 203 + 4 \cdot 138 + 2 \cdot 250) = 1,0485 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

- **Modelo II** (isotrópico, sem *Booms*)

$$I_{xx} = \int_A E_{z,i} Y^2 dA = 2 * \left(\frac{2 * 150^3}{12} \right) + 2 * \left[\frac{250 * (0,8)^2}{12} + (75)^2 * 250 * 0,8 \right] = 3,3750 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

- **Modelo III** (compósito, com *Booms*)

$$I'_{xx} = E_{z,i} \sum_{i=1}^r A_r Y_r^2 = 45000 * [75^2 (4 \cdot 203 + 4 \cdot 138 + 2 \cdot 250)] = 45000 * [1,0485 \times 10^7] = 4,7183 \times 10^{11} \text{ mm}^4$$

- **Modelo IV** (compósito, sem *Booms*)

$$I'_{xx} = \int_A E_{z,i} Y^2 dA = 45000 \left\{ 2 * \left(\frac{2 * 150^3}{12} \right) + 2 * \left[\frac{250 * (0,8)^2}{12} + (75)^2 * 250 * 0,8 \right] \right\} = 45000 * 3,3750 \times 10^6 = 1,5188 \times 10^{11} \text{ mm}^4$$

- **Modelo V** (compósitos diferentes, com *Booms*)

$$I'_{xx} = E_{z,i} A_r Y_r^2 = 134000 * 75^2 (4 \cdot 203 + 4 \cdot 138 + 2 \cdot 250) = 1,4050 \times 10^{12} \text{ mm}^4$$

- **Modelo VI** (compósitos diferentes, sem *Booms*)

$$I'_{xx} = \int_A E_{z,i} Y^2 dA = 45000 * \left[2 * \frac{2 * (150)^3}{12} \right] + 134000 * \left\{ 2 * \left[\frac{250 * (0,8)^2}{12} + (75)^2 * 250 * 0,8 \right] \right\} = 3,5213 \times 10^{11} \text{ mm}^4$$

A partir dos desenvolvimentos apresentados, são obtidas as tensões normais que solicitam cada *Boom*, conforme mostra a Tabela 4.2, para os Modelos I, III e V. Ressalta-se

que a seção transversal (ST) está posicionada no meio do comprimento da viga (ST denominada K, na Figura 3.1).

Destaca-se que, pelo fato de os *Booms* para esses três modelos serem constituídos pelo mesmo material (no mesmo modelo), os valores das tensões normais, são exatamente os mesmos, pois sendo o material compósito, a expressão das tensões normais apresenta o módulo de elasticidade do *Boom* no numerador, que fica anulado pelo efeito do mesmo, no denominador, quando do cálculo dos momentos de inércia.

Tabela 4.2 – Valor de tensão normal que solicita cada *Boom* para os modelos I, III e V.

		Tensão Normal σ_z [N/mm ²]		
Boom	Y_r [mm]	Modelo I	Modelo III	Modelo V
1	75	7,716	7,716	7,716
2	75	7,716	7,716	7,716
3	75	7,716	7,716	7,716
4	75	7,716	7,716	7,716
5	75	7,716	7,716	7,716
6	-75	-7,716	-7,716	-7,716
7	-75	-7,716	-7,716	-7,716
8	-75	-7,716	-7,716	-7,716
9	-75	-7,716	-7,716	-7,716
10	-75	-7,716	-7,716	-7,716

Já para os Modelos II e IV, em que não se empregou a idealização estrutural por *Booms*, os valores máximos de tensão normal de tração e de compressão, respectivamente, são obtidos para as paredes superior e inferior, respectivamente, distantes de 75 cm do CG da seção transversal, em que está aplicado o momento de flexão. Os resultados são mostrados na Tabela 4.3.

É importante ressaltar que, assim como para os Modelos III e V, os impactos dos módulos de elasticidade do material compósito referente ao Modelo IV, no cálculo do momento de inércia da ST, é anulado pela sua existência (exatamente de mesma magnitude) no numerador da expressão de tensão normal, porque toda a viga é constituída do mesmo material compósito. Assim, as tensões normais serão exatamente iguais, tanto para a viga isotrópica como para a compósita; Modelos II e IV, respectivamente. Para que se tenha um

valor adicional de tensão para comparações com o Modelo VI, em que também não se tem Booms, anota-se também na Tabela 4.3 valores de tensões correspondentes intermediários entre o valor nulo (referente ao eixo centroidal, em que Y é igual a zero) e o valor máximo, ou seja, para $Y = \pm 37,5$ cm.

Tabela 4.3 – Valores de tensões normais para os Modelos II e IV.

Local	Y [mm]	Tensões Normais σ_z [N/mm ²]	
		Modelo II	Modelo IV
mesa superior	75	23,972	23,972
mesa inferior	-75	-23,972	-23,972
alma	37,5	11,986	11,986
	-37,5	-11,986	-11,986

Foram calculados, para o Modelo VI, constituído por dois materiais compósitos diferentes, os valores de tensões normais máximas bem como os outros dois, referentes às almas, analogamente aos Modelos II e IV. Destaca-se que, neste modelo, ocorre a influência dos módulos de elasticidade, dependendo do local em que se calculam as tensões por serem diferentes.

Tabela 4.4 – Valores de tensões normais para o Modelo VI.

Local	Y [mm]	Tensões Normais σ_z [N/mm ²]
mesa superior	75	30,7877
mesa inferior	-75	-30,7877
alma	37,5	10,3391
	-37,5	-10,3391

4.3 Tensões Tangenciais devidas ao Momento de Torção (T_z)

Para a viga em questão, o fluxo cisalhante que ocorrerá nas paredes da sua seção transversal decorrerá tanto a partir da força cortante concentrada excêntrica, como do momento de torção gerado pela mesma. A carga excêntrica é levada para o Centro de Cisalhamento (C.C.), que coincide com o Centro de Gravidade (C.G.) da seção transversal e

com a origem do sistema cartesiano XY. Junto à carga, agora centrada, é levado o momento de torção calculado pelo produto desta carga pelo braço de alavanca da mesma.

Assim, a expressão completa de fluxo se traduz como expressa pela Equação (4.3), em que a primeira parcela se refere ao fluxo de cisalhamento oriundo do momento de torção e as demais, à força cortante.

$$q_{s, \text{total}} = q_T + q_b + q_{s,0} \quad (4.3)$$

Equaciona-se o fluxo decorrente da torção reportando-se à Equação (2.34):

$$q_T = \frac{T}{2A} = \frac{F \cdot d}{2A},$$

onde A é a área retangular interna à seção caixão; e d é a distância total da carga aplicada até o centro de torção da seção, coincidente este, com a origem do sistema coordenado tridimensional mostrado na Figura (3.1). Portanto, chega-se a:

$$q_T = \frac{-1961,32 \cdot (300 + 125)}{2 \cdot [(250 - 2) \cdot (150 - 0,8)]} = -11,2639 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Este sentido de corte é condizente com o giro do momento de torção, ou seja, horário. O sinal negativo indica que o sentido do giro é contrário ao da orientação positiva do eixo Z da viga (com origem no engaste).

É importante deixar claro que este valor é o mesmo para qualquer um dos seis modelos, não dependendo de propriedades mecânicas do material. As respectivas tensões de cisalhamento torcionais são obtidas dividindo o valor do fluxo que é constante em todas as paredes, pela espessura de cada parede:

$$\tau_{T, \text{mesas}} = \frac{q_T}{0,8} = -14,0798 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$\tau_{T, \text{almas}} = \frac{q_T}{2,0} = -5,6319 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Tais valores de tensão estão apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Fluxos e tensões de cisalhamento atuantes na ST do Modelo I.

Trecho	τ_T [N/mm ²]	q_b [N/mm]	$q_{s,0}$ [N/mm]	q_s [N/mm]	τ_{Sy} [N/mm ²]	τ_{Total} [N/mm ²]
1-2	-14,0798	0	-3,6898	-3,6898	-4,6122	-18,6920
2-3	-14,0798	1,9361	-3,6898	-1,7537	-2,1921	-16,2719
3-4	-14,0798	5,4434	-3,6898	1,7537	2,1921	-11,8877
4-5	-14,0798	7,3795	-3,6898	3,6898	4,6122	-9,4676
5-6	-5,6319	10,2275	-3,6898	6,5377	3,2689	-2,3631
6-7	-14,0798	7,3795	-3,6898	3,6898	4,6122	-9,4676
7-8	-14,0798	5,4434	-3,6898	1,7537	2,1921	-11,8877
8-9	-14,0798	1,9361	-3,6898	-1,7537	-2,1921	-16,2719
9-10	-14,0798	0	-3,6898	-3,6898	-4,6122	-18,6920
10-1	-5,6319	-2,8480	-3,6898	-6,5377	-3,2689	-8,9008

4.4 Tensões Tangenciais devidas à Força Cortante (S_V)

- **Modelo I** (isotrópico, com *Booms*)

Para o cálculo de q_b algumas considerações devem ser feitas a fim de simplificar a Equação (2.76), dada a dupla simetria geométrica da seção, e por ser desprezada a espessura do painel, decorrente da idealização estrutural conferida pelos *Booms*. Desta feita, tal expressão se torna:

$$q_b = - \frac{F}{I_{xx}} \sum_{i=1}^r B_r y_r \quad (4.4)$$

Seguindo às recomendações constantes na Seção 2.6, o painel é cortado em um local qualquer. Cortando-o no trecho 1-2, e escolhendo o sentido anti-horário para percorrer a seção transversal, escreve-se:

$$q_{b_{1-2}} = 0.$$

O procedimento é o seguinte: a partir da Equação (4.4), vão se incorporando os efeitos de cada *Boom*, na medida em que os mesmos vão sendo percorridos, ao longo desta trajetória assumida, e a partir do ponto de partida eleito.

A Tabela 4.5 apresenta os valores de q_b , para o Modelo I, cujos cálculos detalhados são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned}
 q_{b1-2} &= 0; \\
 q_{b2-3} &= 0 + 1,8706 \times 10^{-4} \cdot 138 \cdot (+75) = 1,9361 \text{ N/mm}; \\
 q_{b3-4} &= 1,9361 + 1,8706 \times 10^{-4} \cdot 250 \cdot (+75) = 5,4434 \text{ N/mm}; \\
 q_{b4-5} &= 5,4434 + 1,8706 \times 10^{-4} \cdot 138 \cdot (+75) = 7,3795 \text{ N/mm}; \\
 q_{b5-6} &= 7,3795 + 1,8706 \times 10^{-4} \cdot 203 \cdot (+75) = 10,2275 \text{ N/mm}; \\
 q_{b6-7} &= 10,2275 + 1,8706 \times 10^{-4} \cdot 203 \cdot (-75) = 7,3795 \text{ N/mm}; \\
 q_{b7-8} &= 7,3795 + 1,8706 \times 10^{-4} \cdot 138 \cdot (-75) = 5,4434 \text{ N/mm}; \\
 q_{b8-9} &= 5,4434 + 1,8706 \times 10^{-4} \cdot 250 \cdot (-75) = 1,9361 \text{ N/mm}; \\
 q_{b9-10} &= 1,9361 + 1,8706 \times 10^{-4} \cdot 138 \cdot (-75) = 0 \text{ N/mm}; \\
 q_{b10-1} &= 0 + 1,8706 \times 10^{-4} \cdot 203 \cdot (-75) = -2,8480 \text{ N/mm}.
 \end{aligned}$$

Obviamente, diferentemente da análise das tensões normais decorrentes de momento fletor que variam conforme a posição da seção transversal (dependentes da posição Z da ST) ao longo do comprimento da viga, aqui isso não faz sentido, pois tanto força de corte como momento de torção são os mesmos para todas as seções transversais.

O cálculo de $q_{s,0}$, que deve corrigir os valores básicos obtidos, e que depende do local de corte e do sentido do giro adotados, é obtido por meio da Equação (2.46) repetida aqui:

$$q_{s,0} = - \frac{\oint \left(\frac{q_b}{t} \right) ds}{\oint \frac{ds}{t}}.$$

Tomando-se os valores de extensões e espessuras da viga e de fluxo cisalhante q_b apresentados na Tabela 4.5, calcula-se o valor de $q_{s,0}$, também apresentado nesta Tabela:

$$q_{s,0} = - \frac{\left[\frac{62,5}{0,8} (1,9361 + 5,4434 + 7,3795) \cdot 2 + \frac{150}{2} (10,2275 - 2,8480) \right]}{\left(\frac{62,5}{0,8} \cdot 8 + \frac{150}{2} \cdot 2 \right)} \rightarrow q_{s,0} = - 3,6898 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Assim, calcula-se o fluxo decorrente apenas da força cortante:

$$q_s = q_b + q_{s,0},$$

que dividido pelas respectivas espessuras de paredes, resulta nas tensões cisalhantes atuantes nestas τ_{Sy} . Finalmente, somando estes valores de tensão com os advindos da torção, completa-se a tabela com a última coluna, revelando os valores totais de tensões de cisalhamento que solicitam cada trecho da seção transversal idealizada por *Booms*, do Modelo I.

- **Modelo III** (compósito, com *Booms*)

Mesmo sendo compósito, pelo fato de todos os *Booms* apresentarem o mesmo módulo de elasticidade, os valores das tensões cisalhantes não sofrerão impacto dos mesmos, pois estes aparecem no cômputo dos momentos de inércia, mas também no cálculo das tensões, de maneira inversamente proporcional, ou seja, um anulando o outro, em mesma magnitude.

- **Modelo V** (compósitos diferentes, com *Booms*)

O comentário acima vale para este modelo também, haja vista o fato de que os módulos de elasticidade dos *Booms* são os mesmos e os cálculos tanto dos momentos de inércia como das tensões são decorrentes destes módulos, não havendo interferência das diferenças destes parâmetros pelas paredes constituídas de compósitos diferentes.

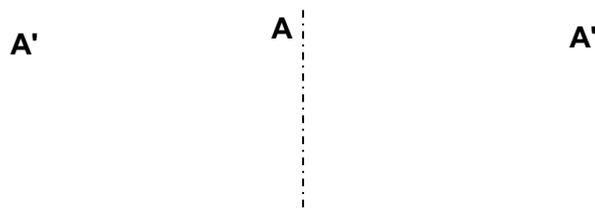
- **Modelo II** (isotrópico, sem *Booms*)

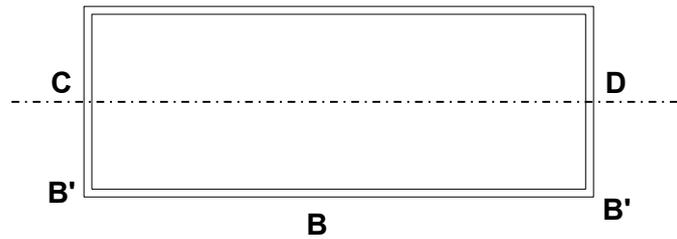
Sem a idealização por *Booms*, o cálculo do fluxo cisalhante neste caso será:

$$q_s = q_b + q_{s,0}$$

$$q_b = -\frac{F}{I_{xx}} \int_0^s t Y ds = \frac{-(-1961,32)}{3,370 \times 10^6} \int_0^s t Y ds = 5,8113 \times 10^{-4} \int_0^s t Y ds.$$

Estando a carga aplicada no eixo de simetria vertical, sabe-se que o fluxo cisalhante nos pontos A e B, de interseção da seção transversal com este eixo, é zero:





Assim, será feito o corte em A, por exemplo, e tendo-se $q_{s,0} = 0$, ou seja, para toda seção transversal, tem-se: $q_s = q_b$.

Para o trecho 1, de A até A', escreve-se:

$$q_{s_1} = q_{b_1} = 5,88113 \times 10^{-4} \cdot 0,8 \cdot (+75) \int_0^{s_1} ds_1 = 0,03487 \cdot S_1 ;$$

$$q_{s_1}^{A'} = 4,3585 \text{ N/mm} \quad (s_1 = 125 \text{ mm}).$$

Para o trecho 2, de A' até B', escreve-se:

$$q_{s_2} = 4,3585 + 5,88113 \times 10^{-4} \cdot 2 \int_0^{s_2} (75 - s_2) ds_2 = 4,3585 + 0,0872 S_2 - 5,8113 \times 10^{-4} (s_2)^2 ;$$

$$q_{s_2}^C = q_{s_2}^D = 7,629 \text{ N/mm} \quad (s_2 = 75 \text{ mm}).$$

Sendo assim, as tensões cisalhantes totais para o Modelo II, obtidas com a superposição dos efeitos da carga e do momento de torção são mostradas na Tabela 4.6.

- **Modelo IV** (compósito, sem Booms)

Pelo fato de toda a viga ser constituída pelo mesmo material estrutural, a despeito de ser compósito, as tensões de cisalhamento serão iguais às do Modelo II, pois o módulo de elasticidade considerados nos cálculos dos momentos de inércia é também considerado no numerador do equacionamento da tensão de cisalhamento, resultando que um anula o efeito do outro. Assim, anotam-se na Tabela 4.6 os mesmos valores que os do Modelo II.

Tabela 4.6 – Tensões cisalhantes correspondentes aos Modelos II, IV e VI.

Trecho	τ_{Total} [N/mm ²]		
	Modelo II	Modelo IV	Modelo VI
1-2	19,5279	19,5279	v
2-3	8,6317	8,6317	7,0833
3-4	3,4527	3,4527	2,8330
4-5	1,4506	1,4506	2,1281
5-6	3,4527	3,4527	2,8330
6-7	8,6317	8,6317	7,0826
7-8	19,5279	19,5279	21,0770
8-9	7,8112	7,8112	8,4308
9-10	12,7144	12,7144	9,4357
10-1	7,8112	7,8112	8,4308

- **Modelo VI** (compósitos diferentes, sem *Booms*)

Com procedimento semelhante ao Modelo II, porém, levando em consideração o momento de inércia já apresentado, e o momento de inércia de cada parede, ao se calcular a tensão cisalhante, alimenta-se a Tabela 4.6 com as tensões cisalhantes totais do Modelo VI.

CAPÍTULO V

ANÁLISE NUMÉRICA DAS TENSÕES QUE SOLICITAM A VIGA

5.1 Modelo Numérico

A análise numérica neste trabalho foi realizada através do software NASTRAN® que é um pacote computacional vastamente empregado em simulações de engenharia, e também utilizado pelos alunos de graduação em Engenharia Aeronáutica da UFU.

Foi selecionada a análise estrutural, dentre tantas possibilidades de simulações que esta ferramenta possibilita. Na Figura 5.1, é mostrada a sequência oferecida pelo software, destinada à entrada de dados, modelagem, cálculo e aquisição dos resultados. Primeiramente, são inseridos os dados elástico-geométricos intervenientes, e já enunciados na Subseção 3.2, conforme ilustra a Figura 5.2.

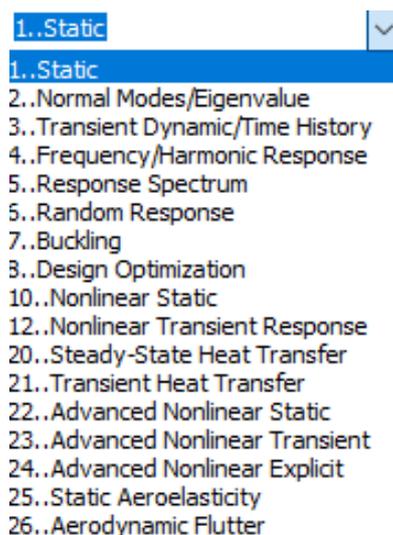


Figura 5.1 – Campos pertinentes à sessão de análise estrutural NASTRAN®.

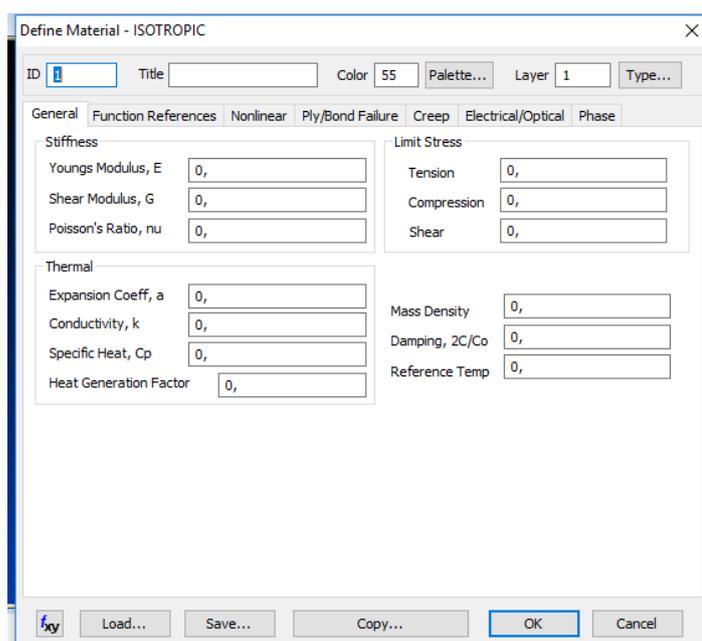


Figura 5.2 – Visualização da entrada de dados na plataforma do NASTRAN®.

A geometria tridimensional da viga de seção-caixão estudada, foi desenvolvida no próprio NASTRAN®, como exibido pela Figura 5.3.

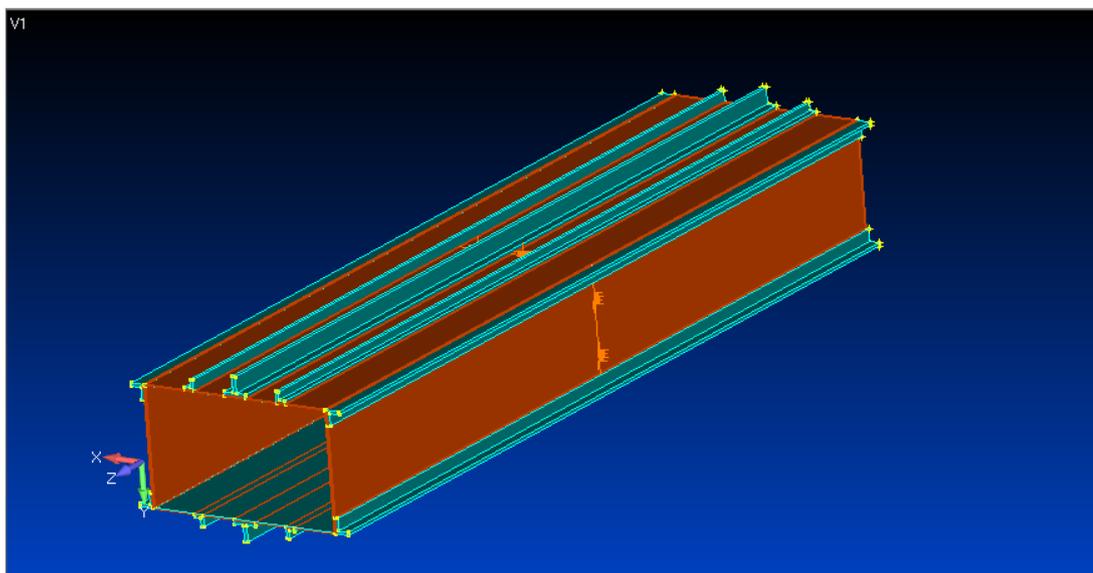


Figura 5.3 – Modelo da viga-caixão gerado pelo software NASTRAN®.

No módulo referente à concepção do modelo, deve-se definir a forma como os enrijecedores estão conectados à viga, bem como a malha a ser utilizada; e aplicar as condições de contorno. O software gera a malha, atribuindo aos elementos finitos a mesma configuração geométrica, com concepção padronizada.

O próximo passo na modelagem é a aplicação de forças e momentos, além das condições de contorno, impondo as restrições de deslocamento. As condições apresentadas na Subseção 3.2 foram inseridas no modelo, partindo-se, em seguida, ao processamento, a fim de se aquisitarem as tensões normais e cisalhantes para comparação com as obtidas teoricamente.

5.2 Tensões Devidas à Flexão

Um dos resultados obtidos se refere às tensões normais, cuja ocorrência ao longo da seção transversal da viga, considerada aqui como a seção K, disposta no meio do comprimento da viga (vide Figura 3.1) pode ser vista nas Tabelas 5.1 e 5.2.

Foram registradas as tensões normais que ocorrem em cada um dos dez enrijecedores. Para que se faça a correspondência com os *Booms* adotados na idealização estrutural daquela seção, os enrijecedores foram numerados de forma semelhante.

Tabela 5.1 – Resultados numéricos das tensões normais atuantes nos perfis enrijecedores para os Modelos de I a V.

σ_z [N/mm ²]					
Enrijecedores	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
1	7,169	21,653	6,461	21,566	7,528
2	7,503	22,331	7,222	21,739	8,880
3	7,403	22,331	6,952	21,877	8,471
4	7,335	22,348	6,386	21,958	7,150
5	7,351	21,733	7,134	22,012	8,267
6	-7,373	-21,733	-6,062	-22,012	-6,243
7	-7,343	-22,348	-6,491	-21,958	-7,215
8	-7,268	-22,331	-6,523	-21,877	-7,628
9	-7,405	22,307	-6,370	-21,739	-8,995
10	-7,209	-21,653	-6,444	-21,566	-7,514

Tabela 5.2 – Resultados numéricos das tensões normais atuantes nos perfis enrijecedores para o Modelo VI.

Local	σ_z [N/mm ²]
mesa superior	31,624
mesa inferior	-31,624

5.3 Tensões Devidas ao Cisalhamento

Além das tensões normais, também são obtidas as tensões cisalhantes, nos trechos de interesse, com referência às criticidades obtidas do cálculo teórico-analítico, também com o interesse de se averiguar se estes se confirmam, e se calcularem os desvios obtidos entre a modelagem, que considera os perfis enrijecedores com suas reais seções transversais, e a condição de comportamento tridimensional da viga, com a analisada teoricamente, que versa sobre a análise de uma seção transversal apenas sob específicos valores de ações de força e momentos de flexão e de torção atuantes.

Tabela 5.3 – Tensões cisalhantes correspondentes aos Modelos de I a VI.

Enrijecedores	τ_{Total} [N/mm ²]					
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6
1-2	17,860	20,425	7,116	18,783	11,028	9,626
2-3	14,544	18,075	4,643	15,950	6,948	8,884
3-4	10,522	16,025	5,221	14,433	8,1300	8,007
4-5	9,224	14,683	6,860	13,757	10,698	6,895
5-6	2,819	5,457	6,786	6,372	4,676	9,820
6-7	9,224	14,683	3,908	13,733	5,443	6,895
7-8	10,552	16,025	5,581	14,266	8,843	8,007
8-9	14,544	18,075	4,925	15,800	8,655	8,884
9-10	17,860	20,425	7,998	18,783	13,446	9,626
10-1	7,890	9,713	11,368	10,080	8,720	23,101

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo mostra a comparação entre os valores de tensões normais e cisalhamento que solicitam a viga em estudo, para os materiais isotrópico e compósito, obtidos a partir das análises teórica e numérica.

Antes de quantificar as diferenças obtidas entre os resultados das análises teórico-analíticas e numéricas para os Modelos de I a VI, serão tecidos comentários entre as primeiras, mostrando o que há em comum e o que difere em cada um desses modelos.

6.1 Comparação entre os Resultados das Análises Teórico-Analíticas dos Modelos

6.1.1 Tensões Normais

Observando os resultados apresentados na Subseção 4.2 e considerando os Modelos I, III e V, em que foram utilizados *Booms*, constata-se que as tensões normais teóricas que ocorrem nos mesmos é exatamente a mesma, independentemente de o material ser isotrópico ou compósito. Verifica-se que para isso ocorra, é necessário apenas que todos os *Booms* sejam confeccionados com o mesmo material estrutural. Caso alguns apresentem módulos de elasticidade em Z diferentes dos demais Booms, essa diferença impactará no cálculo do momento de inércia da seção transversal analisada e, conseqüentemente, o valor da tensão normal.

Analisando as paredes da viga desprovidas de enrijecedores, correspondente aos Modelos II, IV e VI, constata-se que as tensões normais são as mesmas para os Modelos II e IV, simplesmente porque o material estrutural em cada modelo é o mesmo em toda a viga. Assim, a influência do módulo de elasticidade no cálculo dos momentos de inércia são exatamente os mesmos que no cálculo da tensão normal, ou seja, um efeito anula o outro, pois estão arrançados em quociente (vide Subitem 2.3.2). Já o modelo VI apresenta essa influência do módulo de elasticidade de cada um dos dois compósitos que compõem a viga.

Assim, semelhantemente ao caso em que se têm os *Booms*, sendo as paredes de mesmo material, todas terão mesmas tensões normais. Percebe-se que o Modelo VI com relação aos outros dois (de mesmo material constituindo toda a viga), apresenta:

- os maiores valores de tensão normal ocorridas nas mesas ($\sigma_z^A = 30,7877 \text{ N/mm}^2$) são 28,43% superiores aos dos Modelos II e IV ($\sigma_z^A = 23,972 \text{ N/mm}^2$). Justifica-se esta diferença pois o módulo de elasticidade do compósito constituinte das paredes horizontais é cerca de três vezes superior (2,978) ao das paredes verticais: 134000 N/mm^2 e 45000 N/mm^2 , respectivamente, rigidez esta que absorve maior parcela dos esforços normais, dada esta diferença.
- constata-se, por outro lado, que as paredes verticais (exemplificadas pelos pontos E e F) do Modelo VI apresenta menores valores de tensões normais do que as correspondentes dos Modelos II e IV. A justificativa é semelhante à supracitada, pois no conjunto estrutural dos dois compósitos compondo a mesma viga, no local em que a rigidez é menor, ocorre redução dos valores desta tensão.

Por outro lado, comparando o Modelo I (isotrópico e com *Booms*) com o II (isotrópico e sem *Booms*), sob o mesmo momento de flexão, percebe-se que ocorre um alívio nas tensões normais máximas (de $\sigma_z^A = 23,972 \text{ N/mm}^2$ para $\sigma_z^A = 7,716 \text{ N/mm}^2$), quando se inserem os *Booms* nas paredes desprovidas destes, ou seja, passando do Modelo II para o I. Neste caso, está-se considerando o mesmo valor de momento fletor atuante na seção transversal. Obviamente, em decorrência dos enrijecedores, numa situação real, o peso próprio da estrutura se somaria ao valor da carga vertical para baixo aplicada neste estudo. Aqui se está desprezando tal efeito, ou seja, inserem-se os perfis enrijecedores e no cálculo dos *Booms*, as áreas das paredes são desfeitas, e acrescidas no cálculo da área do *Boom* (vide Equação 2.74). Percebe-se uma redução para um terço do valor da tensão normal, ao se considerar os *Booms*. Isso sugere uma otimização de material consumido, e uma economia nos projetos, na ótica da resistência do material estrutural constituinte dos perfis enrijecedores, à tração e à compressão. Recorda-se que nessa consideração por *Booms*, estes ficam exclusivamente destinados a resistir às tensões normais de tração e de compressão e as paredes, às tensões cisalhantes.

6.1.2 Tensões Tangenciais

6.1.2.1 Devidas ao Momento de Torção (T_z)

Depreende-se da Subseção 4.3 que o momento de torção horário que solicita qualquer seção transversal da viga produz o mesmo fluxo de cisalhamento em todas as paredes, independentemente de o material ser isotrópico ou compósito, ou com variação nas paredes compósitas.

A partir do fluxo constante citado, são obtidas as tensões de cisalhamento, inversamente proporcionais às espessuras das paredes da viga. Assim, conclui-se que a tensão que cisalha as paredes verticais, que são mais espessas, é menor que a das horizontais, sendo as verticais menos solicitadas ao cisalhamento torcional. Reitera-se que tais tensões são as mesmas para os seis modelos tratados.

6.1.2.2 Devidas à Força Cortante (S_y)

Como procedimento de cálculo teórico-analítico, em que a força excêntrica ao centro de cisalhamento da seção transversal é levada para este ponto, com o momento de torção comentado no item precedente, neste item serão avaliados os efeitos exclusivamente desta força, vertical e para baixo, no cisalhamento das paredes da viga. Registra-se que qualquer seção transversal da viga é carregada pelo mesmo valor desta carga, aplicada em sua extremidade e que representa um esforço cortante constante ao longo de toda a extensão da viga.

Primeiramente, analisando os resultados da Tabela (4.5), com o esquema da Figura 4.1, percebe-se, com o fluxo que ocorre nas paredes do Modelo I, em que se consideram os *Booms*, percorre em simetria de descida, à esquerda e à direita, desse fluxo que cisalha a seção desde o *Boom* 3 até o 8. Constata-se o valor crescente em módulo, sendo máximo ($q = 6,5377 \text{ N/mm}$) nas paredes verticais (5-6 e 1-10), que absorvem a maior parcela do fluxo cisalhante. Ao se calcularem as tensões cisalhantes correspondentes, sendo essas inversamente proporcionais às espessuras das paredes, averigua-se que as tensões maiores ($\tau = 4,6122 \text{ N/mm}^2$) ocorrem nos trechos extremos das paredes horizontais (1-2, 4-5, 6-7 e 9-10) ficando as paredes verticais com menores solicitações desta tensão ($\tau = 3,2689 \text{ N/mm}^2$).

Ainda observando a Tabela (4.5), ao se superporem as tensões cisalhantes advindas do momento de torção e da carga cisalhante, ou seja, ao se computar o efeito cisalhante real que ocorre em qualquer seção transversal da viga, oriundo da carga concentrada aplicada excentricamente, constata-se que:

- as paredes mais tensionadas são as horizontais e correspondentes aos trechos posicionados à extrema direita (1-2 e 9-10);
- na parede vertical à extrema esquerda (5-6), ocorre o menor valor de tensão de cisalhamento, orientada para cima, o que significa que o efeito cisalhante do momento de torção é superior ao da própria força que o causa, ou seja, a excentricidade da força é tal que leva à preponderação do corte no sentido de giro horário do momento de torção sobre o descendente da força cortante;
- o comentário acima referente ao efeito preponderante do momento de torção pode também ser percebido nas demais paredes, ou seja, em toda a seção transversal, os sentidos das tensões de cisalhamento resultantes são tais que concordam com o sentido do giro horário do momento de torção causado pela excentricidade da força.

Analisando-se os Modelos I, III e V, similarmente ao que fora constatado para as tensões normais, as tensões cisalhantes também serão as mesmas. Isso ocorre porque, tanto para materiais isotrópicos como compósitos, o fato dos *Booms* e das paredes serem do mesmo material, o impacto dos seus módulos de elasticidade no cálculo das propriedades de inércia da seção transversal (em que são considerados apenas os *Booms*), é anulado pelo impacto dos módulos de elasticidade utilizados na expressão de cálculo do fluxo cisalhante (em que são consideradas apenas as paredes), conforme formulações apresentadas na Subseção 2.6.2.1. É importante destacar que, mesmo o Modelo V, em que as paredes verticais são de compósitos diferentes das horizontais, e o fluxo cisalhante seja calculado para atuarem nestas paredes, seu módulo de elasticidade não interferirá, pois com a idealização por *Booms*, ao se pular o Boom, está se considerando a sua rigidez e não a da parede. Há que se dizer o quanto é relevante esse aspecto registrado aqui, pois ao rigor da idealização estrutural, o que prepondera é a variação ou não do módulo de elasticidade dos *Booms*. Caso sejam todos do mesmo material, independentemente do material da parede entre cada dois *Booms*, o fluxo cisalhante não vai ser calculado em função da rigidez desta parede, e sim do *Boom*.

Ao se defrontarem os resultados de fluxos de cisalhamento decorrentes da força cortante do Modelo I (com material isotrópico, com *Booms*) e os do Modelo II (com material isotrópico, sem *Booms*), percebe-se que os sentidos são os mesmos, que os valores das paredes horizontais (mesas) são da mesma ordem de grandeza, sendo o máximo obtido para o Modelo II ($q = 4,3585 \text{ N/mm}$) nas extremidades à direita e à esquerda dessas mesas superior em 18,1% que os correspondentes do Modelo I ($q = 3,6898 \text{ N/mm}$), nos trechos extremos respectivos (1-2, 4-5, 6-7 e 9-10). E o valor máximo obtido para o cisalhamento das

paredes verticais (almas) do Modelo II ($q = 7,6296 \text{ N/mm}$) é 16,7% maior que o correspondente no Modelo I ($q = 6,5377 \text{ N/mm}$).

Pondera-se que, esta constatação acima sugere uma lógica com o que se constatou no final da Subseção 6.6.1, em que, ao se utilizar os *Booms*, as paredes ficam aliviadas de tensões normais, que inclusive são exclusivamente resistidas pelos *Booms*. Além das tensões normais serem reduzidas, as tangenciais também serão, pois o fluxo cisalhante percorre o comprimento de cada *Boom* e retorna ao trecho de parede, com outro valor. Assim, depreende-se que a presença dos *Booms* também alivia as paredes das vigas com relação às tensões de cisalhamento decorrentes de carga aplicada no centro de cisalhamento, contribuindo também, nesta natureza de esforço, para a economia dos projetos, para a otimização do material estrutural utilizado.

Comparando-se, agora, os valores totais de tensões cisalhantes decorrentes da carga excêntrica (somando efeitos do momento de torção e da carga cortante aplicada no centro de cisalhamento da seção transversal) verifica-se que tanto as paredes horizontais como as verticais do Modelo I (com *Booms*) apresentam menores valores máximos de tensão de cisalhamento que as correspondentes do Modelo II (sem *Booms*). Assim, também com a existência do momento de torção, a presença dos *Booms* é favorável no tocante à economia nos projetos.

Averigua-se que, assim como para as tensões normais, com relação às de cisalhamento, os valores teórico-analíticos serão exatamente os mesmos considerando-se material isotrópico ou compósito. Os resultados obtidos para os Modelos I (material isotrópico, com *Booms*) e III (material compósito, com *Booms*) são iguais, pois o módulo de elasticidade dos *Booms* fica embutido nos equacionamentos, e são cancelados, por serem todos iguais. O mesmo ocorre entre os Modelos II (material isotrópico, sem *Booms*) e IV (material compósito, sem *Booms*), pois o módulo de elasticidade das paredes fica embutido nos equacionamentos, e são cancelados, por serem todos iguais.

Analisando-se os Modelos II e IV, similarmente ao que fora constatado para as tensões normais, as tensões cisalhantes também serão as mesmas. Isso ocorre porque, tanto para materiais isotrópicos como compósitos, o fato das paredes serem do mesmo material, o impacto do seu módulo de elasticidade no cálculo das propriedades de inércia da seção transversal é anulado pelo impacto do módulo de elasticidade utilizado na expressão de cálculo do fluxo cisalhante (em que são considerados apenas as paredes), conforme formulações apresentadas na Subseção 2.4.2.2. O mesmo não ocorre para o Modelo VI, em que as paredes verticais são de um material compósito diferente dos das horizontais. Comparando este com os Modelos II e IV, percebe-se que os valores dos fluxos que solicitam as paredes verticais do Modelo VI são menores e das horizontais, maiores, e isso se deve ao

fato do módulo de elasticidade longitudinal das paredes horizontais ser praticamente o triplo das verticais, absorvendo assim, maior parcela do esforço cisalhante.

Com relação às tensões cisalhantes totais, do Modelo VI em comparação com II e IV, obviamente, percebe-se que, como o efeito do momento de torção é o mesmo, para todos os Modelos, fica nítida, confirmando o supracitado, que é a maior sollicitação de cisalhamento nas paredes horizontais e menor, nas verticais, por ocasião do maior valor do módulo de resistência das primeiras.

6.2 Comparação entre os Resultados Teórico-Analíticos com os Numéricos

6.2.1 Tensões Normais

Considerando-se como referência os resultados teóricos, calculam-se os desvios obtidos para os seis modelos estudados analiticamente, através da seguinte expressão:

$$\text{Erro}_{\%} = \left| \frac{\sigma_{\text{teórico}} - \sigma_{\text{numérico}}}{\sigma_{\text{teórico}}} \right| \times 100 . \quad (6.1)$$

Compilando todos os resultados, para as tensões normais, elabora-se a Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Desvios dos valores numéricos frente aos teóricos, no tocante às tensões normais (σ_z).

Modelo Locação	I (%)	II (%)	III (%)	IV (%)	V (%)
1	7,089	9,6738	16,265	10,036	2,436
2	2,760	6,8455	6,402	9,3150	15,086
3	4,056	6,8455	9,901	8,739	9,785
4	4,9378	6,7746	17,237	8,401	7,335
5	4,730	9,3401	7,543	8,176	7,141
6	4,445	9,3401	21,436	8,176	19,090
7	4,834	6,7746	15,876	8,401	6,493
8	5,806	6,8455	15,461	8,739	1,140
9	4,030	6,9456	17,444	9,315	16,576
10	6,570	9,6738	16,485	10,036	2,618

Local	VI (%)
mesa superior	2,716
mesa inferior	2,716

6.2.2 Tensões Tangenciais

A principal causa para a fonte dos erros é o modo de obtenção dos resultados, ou seja, o valor de tensão normal teórico é obtido no centro do *Boom*, enquanto que o mesmo não pode ser feito na análise numérica, devido à dificuldade de se localizar este ponto no elemento finito discretizado da malha. Mesmo na situação teórica, registra-se que, sendo considerada a idealização por *Booms*, na realidade, o ponto a que se refere cada um desses *Booms* não corresponde ao centro de gravidade do perfil real que o mesmo corresponde, e que está modelado numericamente, ou seja, mesmo na situação teórica, existe uma simplificação para a condição real, não representando, assim, o valor exato da tensão normal que ali ocorre. Na idealização estrutural, o centro geométrico do perfil assumido como *Boom* é, por isso, levado para o eixo da parede do painel diferentemente do que se modela numericamente.

Adicionalmente, segundo a idealização estrutural, os valores de tensão normal são obtidos apenas para os *Booms*, e se sabe que na realidade a seção transversal da viga é solicitada integralmente.

Além disso, pode ser considerado o refinamento da malha como outra fonte de erro, podendo este não ter sido suficiente para a obtenção de valores numéricos mais próximos dos teóricos. Uma confirmação disso é o fato de que os valores de tensões normais para *Booms* simétricos com relação ao eixo x não são iguais, sendo que, teoricamente, são idênticos.

Outro aspecto que se destaca é com relação às dimensões do modelo adotado. Em se tratando de dimensões reais de asas e também de fuselagens, a simplificação por *Booms* se tornaria mais próxima da situação real, pois as distâncias comentadas que se desprezam, assumindo que os centros de gravidade locais dos *Booms*, por exemplo, estejam contidos exatamente no eixo das paredes da seção transversal podem, de fato, ser desprezadas. No presente estudo, tal simplificação é grosseira, mediante as dimensões aqui adotadas.

Em situações reais de modelagem, refina-se melhor a malha, diferentemente também, em regiões próximas aos enrijecedores, exigindo maior esforço computacional. Aqui o objetivo essencial foi o aprendizado, a partir de análises comparativas entre materiais empregados na mesma indústria e que se comportam de formas diferentes.

Tabela 6.2 – Desvios dos valores numéricos frente aos teóricos, no tocante às tensões Cisalhantes τ_{Total}

Modelo Locação	I (%)	II (%)	III (%)	IV (%)	V (%)	VI (%)
1-2	4,451	4,594	10,137	3,8145	41,001	54,329
2-3	10,618	109,402	35,710	84,784	57,001	25,422
3-4	11,488	364,129	24,899	318,021	31,610	182,633
4-5	2,573	912,202	7,422	848,366	12,996	223,998
5-6	19,295	58,050	4,878	84,551	97,876	246,629
6-7	2,573	70,105	35,533	59,099	42,501	2,648
7-8	11,236	17,938	14,019	26,945	25,612	62,011
8-9	10,618	131,398	24,498	102,273	46,810	5,375
9-10	4,451	60,644	25,557	47,730	28,065	2,016
10-1	11,356	24,347	76,412	29,048	2,031	174,007

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Dentro de um contexto aeronáutico, uma das partes mais fundamentais é a estrutural, pois ela é a responsável pela redução do peso em aeronaves, através da busca de novos materiais que resistam a grandes esforços sem que ocorra deformação plástica. O cálculo estrutural é a melhor forma de se fazerem previsões de custos e as análises numéricas são fundamentais neste contexto, devido à complexidade sempre presente e crescente em projetos de estruturas aeronáuticas cada vez mais arrojadas e desafiadoras.

Através do desenvolvimento desse trabalho, buscou-se a percepção do desafio em desenvolver estruturas aeronáuticas, tanto pela ótica teórico-analítica como a numérica. Com isso, foi permitida a consolidação do aprendizado na disciplina de Estruturas Aeronáuticas, e indo além, pois foram considerados materiais isotrópicos e compósitos.

A partir dos resultados obtidos, constatou-se que a análise estrutural idealizada por *Booms* se presta, essencialmente, a seções aeronáuticas reais de asas e fuselagens, em que as dimensões totais das seções são bem maiores que as dos perfis enrijecedores. Nesses casos, não se torna grosseira a simplificação inerente a este procedimento analítico de cálculo estrutural, diferentemente do que fora constatado com o modelo que se assumiu para o presente estudo.

Com relação às tensões normais, foram obtidos desvios aceitáveis, bem como pela análise das tensões de cisalhamento. Todavia, para essas últimas, localizadamente, foram obtidas diferenças bastante grandes, o que se justifica pela dificuldade em se aquisitarem as reais tensões ocorridas em locais específicos, de modo a retratar melhor a realidade; à diferença ocorrida entre a situação numérica mais próxima da real, com a idealizada por *Booms*, simplicista para a seção relativamente pequena se comparada com a de um elemento estrutural real; bem como do refinamento da malha que, sendo maior, certamente, resultaria em menores erros.

Com o desenvolvimento deste trabalho, foi possível explorar ferramentas de cálculo apreendidas em sala de aula, tanto de estruturas como de materiais compósitos, possibilitando maior aprofundamento e reflexões sobre a real participação dos módulos de elasticidade dos materiais constituintes da viga em estudo. Foi importante fazer um paralelo da situação real tanto de ensaio a que se propõe, futuramente o objeto de estudo, para fins

de ensino prático aos alunos do curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da UFU, e as prescrições de cálculo embasadas em Gay (2015) e Megson (2013).

Foi possível aprofundar no sentido de compreender, no tocante às solicitações normais e de cisalhamento, que ocorrem em uma seção de elemento estrutural solicitada por momentos de torção, flexão e esforço cortante, e também mensurar quando ocorrem diferenças por ocasião de se utilizar um material isotrópico ou compósito.

Percebeu-se a influência dos Booms, no estudo teórico realizado, impactando nos valores das tensões cisalhantes ocorridas nas paredes, mesmo estas não contribuindo efetivamente com seus módulos de elasticidade e também, mesmo estes absorvendo apenas esforços normais de tração e compressão. Com isso, abriu-se visões para o conhecimento e entendimento, ampliando o que se depreendera em conteúdos vistos nas disciplinas afins.

Principalmente pelo fato de ainda não ser de curso obrigatório, a disciplina sobre projetos estruturais em materiais compósitos, este estudo possibilitou uma análise profunda sobre os conteúdos teóricos destinados ao cálculo de estruturas aeronáuticas, tanto os convencionais como por idealização estrutural com Booms. São detalhadamente apresentadas as formulações teóricas com relação ao comportamento de elementos estruturais aeronáuticos de paredes finas, no tocante a tensões, deslocamentos, giros, compilando em completude aspectos importantes à concepção de projetos estruturais aeronáuticos. Outrossim, deslumbrando o fato de que, ao se empregar determinado perfil com maior módulo de elasticidade, destinados a absorver esforços normais, automaticamente, estar-se-á aliviando as paredes da casca aeronáutica, resistentes, sobretudo à esforços cisalhantes.

Sugere-se, como estudos consequentes, além da análise experimental, uma análise por Planejamento de Experimentos, para investigação das relações geométricas entre paredes da viga e enrijecedores.

Finalmente, registra-se que, com a realização deste Projeto de Conclusão de Curso, foram adquiridos importantes conhecimentos que agregam competências valiosas ao aprendizado sobre análise do comportamento estrutural de estruturas aeronáuticas.

CAPÍTULO VIII

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASM, **Aerospace Specification Metals**. Disponível em: <<http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=ma2024t3>>. Acesso em: 20 nov. 2018.

GAY, D. **Composite materials design and applications**. Terceira edição. CRC Press Taylor & Francis Group, 2015.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**. 5ª.ed. São Paulo: Editora Pearson, 2004. 666p.

MEGSON, T.H.G. **Aircraft Structures for Engineering Students**. 5th.ed. UK: Butterworth-Heinemann, 2013. 804p.

REZENDE, M.C.; BOTELHO, E.C. **O Uso de Compósitos Estruturais na Indústria Aeroespacial**. Associação Brasileira de Polímeros, v.10, n.2, p.E4-E10, 2000.

SULINFORMAÇÃO, **Primeiro Boeing 787 Dreamliner a aterrar em Faro**, 2016. Disponível em:<<https://www.sulinformacao.pt/2016/05/primeiro-boeing-787-dreamliner-a-aterrar-em-faro-chega-no-domingo/>>. Acesso em: 10 out. 2018.

ZANATTA, R. **Materiais Compósitos na Aviação**, 2012. Disponível em:< <http://www.aviacao.org/article/materiais-compositos/>>. Acesso em: 10 dez. 2018.