

PATRICK NUNES LEITE

**MODELAGEM DINÂMICA DE
HELICÓPTEROS COM MOTORES NÃO
IDEAIS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2018

PATRICK NUNES LEITE

**MODELAGEM DINÂMICA DE
HELICÓPTEROS COM MOTORES NÃO
IDEAIS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Bacharel em Engenharia Mecânica**.

Área de concentração: Dinâmica de sistemas mecânicos e aeronáuticos.

Orientadores:

Prof. Dr. Leonardo Sanches

Prof. Dr. Thiago Augusto Machado Guimarães

UBERLÂNDIA - MG

2018

PATRICK NUNES LEITE

**MODELAGEM DINÂMICA DE
HELICÓPTEROS COM MOTORES NÃO
IDEAIS**

Trabalho de conclusão de curso **APROVADO** pela Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) da Universidade Federal de Uberlândia.

Área de concentração: Dinâmica de sistemas mecânicos e aeronáuticos.

Banca Examinadora

Professor Dr. Thiago Augusto Machado Guimarães – FEMEC – UFU - Orientador

Professor Dr. Tobias Morais- FEMEC - UFU

Professor Dr. Márcio Peres de Souza – FEMEC - UFU

UBERLÂNDIA - MG

2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e meus irmãos pelos ensinamentos passados em minha criação e pelo apoio dado constantemente.

Em especial à Júlia Barcelos, minha fiel companheira para todos os momentos, a qual me ajudou diversas vezes ao longo deste trabalho e de minha graduação.

Aos professores Leonardo Sanches e Thiago Guimarães, pelo apoio ao longo do trabalho, pela confiança que depositaram em mim, pelos ensinamentos de engenharia passados, por disponibilizarem seu tempo para ensinar e pela amizade desenvolvida ao longo desta jornada.

À Universidade Federal de Uberlândia (UFU), à Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC), pela estrutura e corpo docente de grande qualidade.

RESUMO

A não idealidade das fontes de energia usadas em sistemas mecânicos, de forma geral, vem sendo estudada cada vez mais a fundo na engenharia mecânica. Conhecer os efeitos da presença de um motor não ideal é extremamente importante, pois a interação dinâmica deste com a estrutura resulta em fenômenos indesejáveis, como o efeito Sommerfeld. Este fenômeno ocorre quando há algum desbalanceamento, podendo este ser no motor, no rotor ou mesmo nas pás do helicóptero, gerando instabilidades verificadas na aceleração ou desaceleração do motor. A modelagem de sistemas mecânicos acionados por motores é, normalmente, realizada considerando que toda energia fornecida para o motor é convertida em trabalho útil ou mesmo que as perdas envolvidas ocorrem no interior do motor e no acoplamento ao sistema. No entanto, esta simplificação é feita para reduzir a complexidade do sistema, facilitando, assim, a solução das equações de movimento, por exemplo; havendo também condições onde a energia é dissipada para a estrutura na forma de movimentos vibratórios. Em helicópteros, efeitos dinâmicos, como o descrito anteriormente, são responsáveis por acidentes graves. A ressonância solo, por exemplo, é um fenômeno amplamente conhecido no meio aeronáutico e que ocorre quando a excitação promovida pelo motor faz com que seja atingida a frequência de ressonância da estrutura no momento em que a aeronave se encontra no solo. O contato do helicóptero com o solo promove alteração no sistema composto pela aeronave, comparado ao mesmo em condição de voo, causando uma resposta dinâmica indesejada. O presente trabalho apresenta a modelagem de um helicóptero (dividido em modelos HT1 e HT2), a qual foi realizada com o desenvolvimento das equações de energia, seguida pelo equacionamento do motor não ideal. Para isso foi utilizada uma equação simplificada de torque, além da linearização das equações, resultando em um sistema de matrizes capaz de representar a aeronave. Foram, também, exibidas as respostas dinâmicas dos modelos, mostrando que as aeronaves apresentam instabilidade dinâmica ao serem acionadas com frequência próxima a alguma natural da fuselagem. Ainda, foi verificada a complexidade relacionada à construção de um sistema de equações capaz de acoplar o modelo de ressonância solo ao motor não ideal, mostrando que a simplificação da curva de torque limita a capacidade de representar o modelo com parâmetros reais de operação.

Palavras chave: helicópteros, dinâmica não linear, motores não ideais, ressonância solo.

ABSTRACT

The non-ideality of energy sources used in mechanical systems, in general, has been studied more thoroughly at mechanical engineering. Knowing how a non-ideal engine affects the system is really important, because of undesirable effects resulting from the interaction between the structure of the equipment and the energy source, like Sommerfeld Effect. This one happens when there is some imbalance, from the engine, the rotor hub or in the system blades, promoting instabilities shown in the system acceleration and slowingdown process. The mechanical system modeling excited by engine is normally based in the assumption that all of the power supplied to the engine is converted in useful work or considering that the energy loss happens in the coupling of the engine. However, this is a simplification done to reduce the system complexity, making the movement equations solution easier, but there are also conditions in which energy is dissipated in the structure by vibrating movements. In helicopters, dynamic effects, as discussed previously, are responsables for major accidents. Ground Resonance for example is a widely known phenomenon in the aeronautical environment which occurs when the excitation generated by the engine reaches the aircraft natural frequency, when this last one is in the ground. The contact between the helicopter and the ground progress a system change, when compared to the aircraft in flight, causing an unwated dynamic responce. The present work presents the modeling of a helicopter (divided in models HT1 and HT2), which was carried out with the development of system energy equations, followed by the non-ideal motor equation, using a simplified torque curve, besides linearization of equations, allowing to obtain a system of matrices, representing the aircraft. The dynamical responses of the models were also presented, showing that the aircraft presents dynamic instability when they are driven with frequency near to some natural of the fuselage. Also, the complexity related to the construction of a system of equations capable of coupling the ground resonance model to the non - ideal motor was verified, showing that the simplification of the torque curve limits the ability to represent the model with real operating parameters.

Keywords: helicopters, nonlinear dynamics, non-ideal engines, ground resonance.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2. 1 – Helicóptero com rotor semirrígido.....	4
Figura 2. 2 - Aerospatiale Alouette III completamente destruído após a ocorrência de ressonância solo durante uma operação de decolagem.	5
Figura 2. 3 - Exemplo dos componentes de um rotor articulado.....	6
Figura 2. 4 - Representação do movimento de rotação da pá em relação à sua articulação (lead/lag motion) em um sistema de rotor articulado.	6
Figura 2. 5 – Exemplo gráfico demonstrando o efeito Sommerfeld.	9
Figura 2. 6 - Curvas de torque e potência de motores utilizados em helicópteros.	11
Figura 2. 7 - Curva característica simplificada do motor não ideal.....	12
Figura 3. 1 – Modelo físico do helicóptero.	14
Figura 3. 2 – Detalhamento da posição do centro de massa da fuselagem.....	17
Figura 3. 3 - Diagrama de corpo livre das pás do helicóptero.....	22
Figura 3. 4 - Aplicação da linearização na equação de movimento.	27
Figura 4. 1 - Definição de parâmetros do modelo de helicóptero.	38
Figura 4. 2 - Definição do amortecimento do modelo.....	39
Figura 4. 3 - Construção da matriz de massa.....	41
Figura 4. 4 - Construção da matriz de amortecimento.	42
Figura 4. 5 - Construção da matriz de rigidez.	42
Figura 4. 6 - Construção da matriz de forças.....	43
Figura 4. 7 - Substituição realizada no MAPLE para inclusão da variável Ω	45
Figura 5. 1 - Resultados do modelo HT2 com frequência de 4,7 Hz.	52
Figura 5. 2 - Resultados do modelo HT2 com frequência de 5,8 Hz.	53
Figura 5. 3 - Resposta do helicóptero HT2 com frequência de 4,7 Hz:	54
Figura 5. 4 - Resposta do helicóptero HT2 com frequência de 5,8 Hz:	55
Figura 5. 5 - Resultados do modelo HT2 com frequência de 4,7 Hz.	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 3. 1 - Parâmetros dos modelos de helicóptero adotados no trabalho.....	15
Tabela 5. 1 - Equações do torque do motor em função da frequência natural do modelo.	58

LISTA DE ABREVIACOES E SIMBOLOS

a	<i>Raio do rotor (dist. do centro do rotor à rótula de unio da pá ao rotor)</i>
a_{cgb}	<i>Acelerao do centro de massa (CG) da pá</i>
b	<i>Distncia da rótula de unio da pá ao centro de massa da pá</i>
c_X	<i>Fator de amortecimento do sistema em relao ao eixo de coordenadas X</i>
c_Y	<i>Fator de amortecimento do sistema em relao ao eixo de coordenadas Y</i>
c_{bk}	<i>Constante de amortecimento das pás para rotao em torno da rótula</i>
c_{bn}	<i>Fator de amortecimento da n – ésimas pá</i>
C	<i>Matriz de amortecimento do sistema</i>
C_D	<i>Componente da matriz de amortecimento contendo os termos diagonais</i>
C_P	<i>Componente da matriz de amortecimento contendo os termos periódicos</i>
E_d	<i>Energia dissipada pelo amortecimento do sistema</i>
E_{dT}	<i>Energia total dissipada pelo amortecimento do sistema</i>
E_{ab}	<i>Energia dissipada pelo amortecimento nas pás</i>
E_{df}	<i>Energia dissipada pelo amortecimento na fuselagem</i>
F_{inerc}	<i>Fora inercial devido à rotao da pá</i>
FNL	<i>Matriz dos termos não lineares</i>
I_{zb}	<i>Momento de inércia de rotao da pá</i>
K	<i>Matriz de rigidez do sistema</i>
K_D	<i>Componente da matriz de rigidez contendo os termos diagonais</i>
K_P	<i>Componente da matriz de rigidez contendo os termos periódicos</i>
K_X	<i>Rigidez da fuselagem em relao ao eixo de coordenadas X</i>
K_Y	<i>Rigidez da fuselagem em relao ao eixo de coordenadas Y</i>
K_{bk}	<i>Constante de rigidez da pá k para rotao em torno da rótula k</i>
K_{bn}	<i>Rigidez da n – ésimas pá</i>
K_x	<i>Constante de rigidez da fuselagem na direo X</i>
M	<i>Matriz de massa do sistema</i>
M_D	<i>Componente da matriz de massa contendo os termos diagonais</i>
m_{bk}	<i>Massa da pá k</i>

m_f	<i>Massa da fuselagem</i>
M_p	<i>Componente da matriz de massa contendo os termos periódicos</i>
N_b	<i>Número de pás</i>
n_{dof}	<i>Número de graus de liberdade do sistema</i>
P_{eng}	<i>Potência do motor</i>
Q_i	<i>Esforço externo aplicado sobre o sistema</i>
T	<i>Energia cinética do sistema</i>
T_b	<i>Energia cinética das pás do sistema</i>
T_f	<i>Energia cinética da fuselagem</i>
T_{inerc}	<i>Torque de inércia devido à rotação da pá</i>
T_{motor}	<i>Torque do motor</i>
V	<i>Energia potencial do sistema</i>
V_T	<i>Energia potencial total do sistema</i>
V_f	<i>Energia potencial da fuselagem</i>
x	<i>Posição do centro de massa da fuselagem no eixo X</i>
x_{bk}	<i>Posição do centro de massa da pá no eixo X</i>
y	<i>Posição do centro de massa da fuselagem no eixo Y</i>
y_{bk}	<i>Posição do centro de massa da pá no eixo Y</i>
ξ_b	<i>Fator de amortecimento das pás</i>
ξ_f	<i>Fator de amortecimento da fuselagem</i>
$\dot{\varphi}$	<i>Rotação do motor</i>
ψ_k	<i>Posição angular da k – ésima rótula em relação ao eixo X</i>
ϕ_k	<i>Deslocamento angular da k – ésima pá em relação à k – ésima rótula</i>
ω_{nX}	<i>Frequência natural da fuselagem em relação ao eixo X</i>
ω_{nY}	<i>Frequência natural da fuselagem em relação do eixo Y</i>
ω_{nY}	<i>Frequência natural da n – ésima pá</i>
ω_{nbn}	<i>Frequência natural da n – ésima pá</i>

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
2.1. Componentes básicos de helicópteros.....	3
2.2. Ressonância solo em helicópteros	4
2.3. Fontes de energia não ideais e Efeito Sommerfeld	7
2.4. Modelagem de motores não ideais	10
CAPÍTULO III - METODOLOGIA	13
3.1. Definição inicial do modelo físico do helicóptero	13
3.2. Equações de energia do sistema	16
3.2.1. Equacionamento da posição dos centros de massa.....	16
3.2.2. Equacionamento da energia cinética do sistema	17
3.2.3. Equacionamento da energia potencial do sistema	18
3.2.4. Equacionamento da energia dissipada.....	19
3.3. Aplicação das equações de Lagrange.....	20
3.4. Equacionamento do motor não ideal.....	20
3.5. Linearização das equações	25
3.6. Determinação da rigidez do modelo.....	27
3.6.1. Rigidez em relação aos eixos de coordenada X e Y.....	28
3.6.2. Rigidez das pás.....	28
3.7. Determinação do amortecimento do modelo.....	29
3.7.1. Amortecimento em relação aos eixos de coordenada X e Y	29
3.7.2. Amortecimento das pás	29
CAPÍTULO IV - DESENVOLVIMENTO	31
4.1. Modelo convencional de ressonância solo em helicópteros.....	31
4.1.1. Equação da energia cinética total do sistema	32
4.1.2. Equação da energia potencial total do sistema	33
4.1.3. Equação do trabalho das forças dissipativas do sistema	34
4.1.4. Equações de movimento obtidas por meio da aplicação da equação de Lagrange	35
4.1.5. Construção do modelo em MATLAB	37
4.2. Modelo de ressonância solo em helicóptero acionado por motor não ideal.....	44
4.2.1. Construção das equações de movimento.....	45
4.2.2. Modelagem do motor não ideal.....	46

4.2.3. Equações linearizadas	48
4.2.4. Disposição do sistema de equações na forma matricial	48
CAPÍTULO V - RESULTADOS E DISCUSSÃO	51
5.1. Modelo desenvolvido em MATLAB	51
5.2. Modelagem do Helicóptero com motor não ideal	57
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	62
REFERÊNCIAS	64
ANEXOS.....	67
ANEXO A.....	67
ANEXO B	70
ANEXO C	72
ANEXO D.....	75
ANEXO E	76
ANEXO F.....	78

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A ressonância solo é um mecanismo de instabilidade potencialmente destrutivo que pode ocorrer em aeronaves de asas rotativas. O fenômeno de ressonância solo é o resultado de interações entre movimento da fuselagem e o movimento das pás do rotor da aeronave. As equações de movimento que descrevem o sistema rotor-fuselagem são não lineares e, geralmente, amplamente complexas até mesmo para sistemas simplificados. Procedimentos e técnicas para lidar com a grande variedade de complexidades da ressonância solo e de outros fenômenos mecânicos e aeronáuticos, característicos de helicópteros, têm sido exaustivamente investigados ao longo das últimas décadas. (ROBINSON, 1997)

A modelagem da condição de ressonância solo em helicópteros pode ser feita sem levar em consideração os efeitos aerodinâmicos aos quais a aeronave está submetida. Como a condição de ressonância solo ocorre com o helicóptero em contato com o solo, desconsiderar fenômenos como sustentação é uma simplificação plausível, tornando o modelo mais enxuto e exigindo um esforço computacional menor para a solução das equações de movimento. Dessa forma, o estudo desta instabilidade é, na grande maioria dos casos, realizado por meio de um sistema simplificado, composto por uma fuselagem e um rotor, no qual são acopladas as pás e trem de aterrissagem flexível, conectando a estrutura da fuselagem ao solo. Neste modelo, são definidos os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento, os quais determinarão, juntamente com a forma construtiva do sistema de pás, a resposta dinâmica do sistema. (ROBINSON, 1997; SANCHES, 2011)

Normalmente, é comum considerar que o helicóptero é acionado por uma fonte de energia ideal, a qual não é limitada, não sendo afetada pela resposta do sistema à excitação imposta. De forma geral, analisar o problema considerando a idealidade da fonte foi o procedimento adotado por pesquisadores da área, como COLEMAN E FEINGOLD (1947), ROBINSON (1997) e TONGUE (1984), os quais alcançaram resultados expressivos e fiéis aos fenômenos evidenciados em experimentos com sistemas reais.

Apesar de ser comumente adotado, o motor ideal não representa, de forma adequada, a dinâmica do helicóptero, sendo que a capacidade do motor em transferir energia para a aeronave é afetada pela reposta da fuselagem, principalmente quando a frequência de rotação do motor se aproxima da frequência natural da fuselagem. Nesse caso, a amplitude de vibração aumenta de forma mais intensa em função da energia aplicada ao motor da aeronave, fazendo com que a fonte comece a transferir energia para a fuselagem, na forma de vibração, reduzindo a capacidade de aceleração do sistema.

O principal contratempo, ocasionado pela inclusão de uma fonte de energia não ideal no modelo, reside no grande aumento da complexidade deste, uma vez que, para equacionar a interação entre motor e estrutura, é necessária a adição de um grau de liberdade e da dinâmica do motor. Portanto, a partir do momento em que se adota um motor não ideal acionando a aeronave, deve ser equacionado o comportamento do motor em função do aumento ou redução da energia fornecida a ele para excitação do sistema, além dos efeitos decorrentes da reação do sistema acionado (sistema de pás do helicóptero) à excitação. (SAMANTARAY, 2009; DIMENTBERG, 1997)

Neste sentido, o trabalho desenvolvido visou ampliar os conhecimentos a respeito da modelagem do fenômeno de ressonância solo, partindo de um modelo de fuselagem acoplada a um conjunto de quatro pás com rotor articulado. Foram considerados os movimentos do sistema em relação a dois eixos X e Y, além dos quatro graus de liberdade relacionados à rotação das pás. E, para a inclusão da condição de motor não ideal, foi adicionado o equacionamento básico de um motor elétrico (devido a sua maior simplicidade quando comparado aos motores usualmente utilizados em helicópteros), completando assim os sete graus de liberdade totais do modelo.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, serão descritos os conceitos e definições mais importantes relacionados ao trabalho desenvolvido. Um dos maiores desafios do trabalho consiste no acoplamento da equação do motor não ideal com o sistema composto por fuselagem e as pás do rotor.

Entre os assuntos abordados estão: tipos de rotores de helicóptero, sistemas dinâmicos não lineares, fontes de energia não ideais, efeito Sommerfeld, ressonância solo e modelagem de motores não ideais.

2.1. Componentes básicos de helicópteros

Os componentes básicos de um helicóptero são mostrados na Figura 2. 1, onde são vistas as pás acopladas ao rotor, a fuselagem, o motor de acionamento, neste caso uma turbina, e o sistema de transmissão de potência. Este último tem como função reduzir as altas velocidades geradas pela turbina, permitindo o funcionamento do helicóptero em um regime de operação seguro. Além disso, há também a função de transmitir potência para o rotor auxiliar, localizado na calda da aeronave e responsável pela estabilização desta em condição de voo.

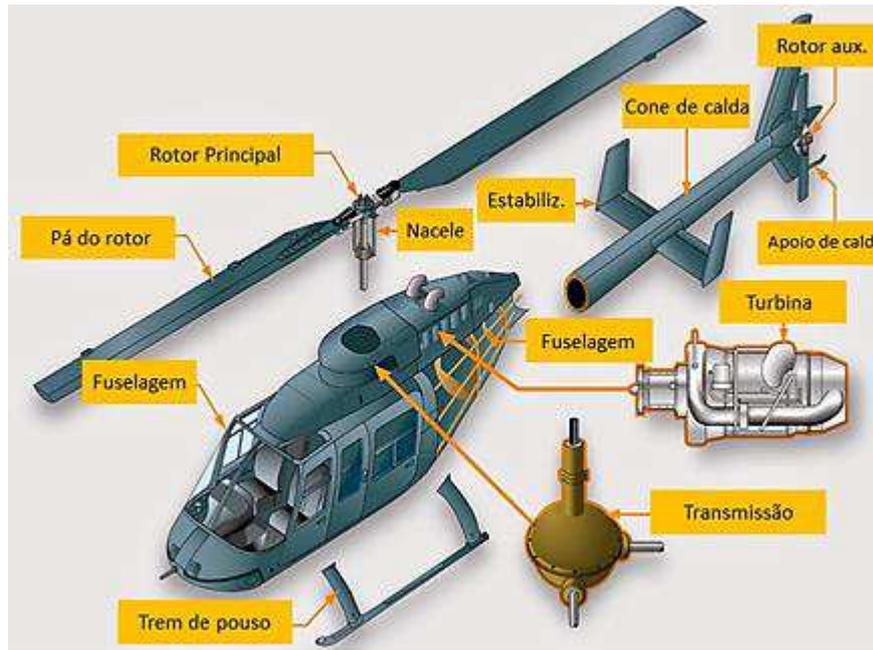
Entre os principais componentes, está o rotor principal do helicóptero, que é composto por três componentes básicos: eixo, hub (ou cubo) e pás, sendo normalmente divididos em três tipos: rotor semirrígido, rígido e articulado.

A função do eixo é interligar a saída de potência do motor, também chamado volante, ao hub, sendo responsável por suportar o torque imposto pelo sistema de transmissão.

O rotor hub, ou somente hub (“cubo”), fica localizado no topo do eixo, e é por meio dele que as pás do helicóptero são presas ao sistema, transferindo assim o torque para elas. As formas de acoplamento das pás ao hub serão discutidas na sequência deste capítulo.

As pás do helicóptero são os componentes que geram a sustentação da aeronave, permitindo o voo por meio da rotação ao redor do eixo do rotor. Sua forma aerodinâmica é semelhante ao perfil de uma asa de avião convencional, sendo, por este motivo, o helicóptero denominado aeronave de asas rotativas.

Figura 2. 1 – Helicóptero com rotor semirrígido.



Fonte: Helicopter Flying Handbook, 2012. Modificada pelo autor.

2.2. Ressonância solo em helicópteros

Com sua ocorrência observada pela primeira vez antes do século XX, a ressonância solo pode ocorrer em sistemas rotativos apoiados em suporte flexível. Essencialmente, uma perturbação nas pás causa o deslocamento do centro de gravidade do rotor, criando um esforço inercial na fuselagem. A fuselagem, conectada ao solo por meio de um trem de pouso flexível, começará a oscilar em resposta ao esforço inercial. Para uma faixa definida de frequência de operação do rotor, a oscilação da fuselagem causa aumento da amplitude de vibração das pás, e conseqüentemente o aumento das forças inerciais sobre a fuselagem. Mantendo-se a condição de operação do sistema, este conjunto, composto por fuselagem e pás do rotor, irá crescer em amplitude de vibração, até que seja atingido um limite de rotação ou alguma parte da aeronave falhe (TONGUE, 1984).

A Figura 2. 2 mostra um exemplo de acidente ocorrido devido à ressonância solo. A aeronave mostrada é um Aerospatiale Alouette III, que foi completamente destruído, em segundos, enquanto realizava um procedimento de decolagem. Felizmente, todos da tripulação e passageiros sobreviveram.

Figura 2. 2 - Aerospatiale Alouette III completamente destruído após a ocorrência de ressonância solo durante uma operação de decolagem.



Fonte: Air&Space Magazine, 2008.

É importante ressaltar que a ressonância solo é uma instabilidade puramente mecânica, a qual pode ser determinada sem levar em conta os efeitos aerodinâmicos. Contudo, principalmente em rotores com articulações flexíveis, o mecanismo de aumento de instabilidade pode influenciar a dinâmica do helicóptero no solo. Os fenômenos de ressonâncias em solo e em voo são conhecidos como instabilidades aeromecânicas. (SANCHES, 2011)

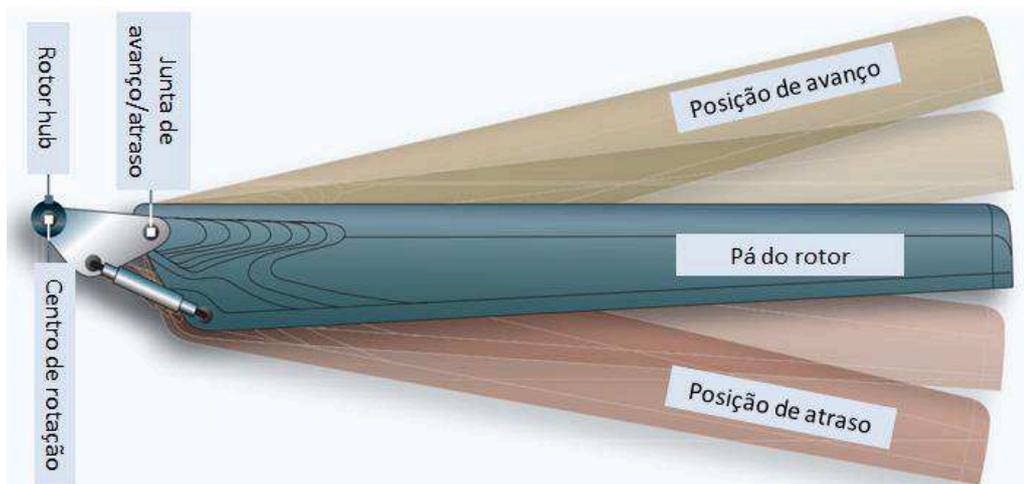
Helicópteros com rotores articulados apresentam uma liberdade de rotação em torno do centro da rótula, na sua união do *rotor hub* com as pás. Esta liberdade de giro é limitada, normalmente, a menos de 10° e estabilizada com uso de amortecedor (*Damper*), mostrado na Figura 2. 3. O amortecedor evita o movimento denominado *lead/lag* ou em português “avanço-atraso”, representado esquematicamente na Figura 2. 4. Este tipo de rotor é, geralmente, utilizado em helicópteros, com duas ou mais pás, e como resultado da forma de acoplamento, sua estrutura exige menos resistência mecânica, entretanto, sua forma construtiva é mecanicamente mais complexa (HELICOPTER FLYING HANDBOOK, 2012)

Figura 2. 3 - Exemplo dos componentes de um rotor articulado. À esquerda da articulação da pá, está o amortecedor (*damper*) que regula o movimento das pás no plano de rotação do eixo.



Fonte: Helicopter Flying Handbook, 2012. Modificada pelo autor.

Figura 2. 4 - Representação do movimento de rotação da pá em relação à sua articulação (lead/lag motion) em um sistema de rotor articulado.



Fonte: Helicopter Flying Handbook, 2012. Modificada pelo autor.

A ressonância solo está diretamente ligada a esta articulação flexível, onde a movimentação das pás ao longo da rótula de acoplamento destas ocorre de forma periódica durante o funcionamento da aeronave. Com isso, assim que estas oscilações se aproximam da frequência natural da estrutura, a energia dispendida destinada ao acionamento da aeronave é convertida em energia vibratória, levando a aeronave a uma condição de instabilidade.

Em 1940, COLEMAM E FEINGOLD analisaram com sucesso o acoplamento entre rotor e fuselagem, identificando a ressonância solo como um fenômeno de instabilidade elasto-mecânica. Seu estudo era baseado em um sistema simplificado, composto por um modelo de rotor com três pás. A aeronave apresentava seus graus de liberdade de translação em um plano e a defasagem das pás do rotor (*lead-lag*) no mesmo plano. Eles resumiram os resultados de seus estudos em uma série de gráficos, que podem ser aplicados a uma ampla gama de configurações de rotores.

As formas mais comuns de evitar a instabilidade é adicionar mecanismos para aumentar o amortecimento do modo de defasagem do rotor ou da fuselagem. Ultimamente, helicópteros têm sido equipados com amortecedores passivos acoplados ao *rotor hub*. Alguns contratempos têm sido vinculados ao uso deste tipo de dispositivo, como a complexidade do *hub* e as exigências de manutenção. (SANCHES, 2011)

Os estudos focados na ressonância solo, normalmente, desconsideram a presença de um motor não ideal acoplado à aeronave. Com isso, é evitada a complexidade resultante da não idealidade do motor, a qual torna necessária a modelagem da fonte de energia do sistema. No entanto, os efeitos da presença de um motor não ideal na formulação de um modelo de ressonância solo podem ser críticos na análise do fenômeno, permitindo a obtenção de uma resposta mais próxima da situação real.

2.3. Fontes de energia não ideais e Efeito Sommerfeld

Uma fonte ideal de energia é aquela que não é influenciada pela resposta do sistema. Ao contrário, uma fonte não ideal é influenciada pela resposta do sistema para o qual ela fornece energia. Um motor elétrico de corrente contínua com escovas é um exemplo comum de fonte não ideal. Da mesma forma, um sistema vibratório, cujo fornecimento de energia é limitado, é dito sistema não ideal. Além disso, o comportamento dinâmico de um sistema não ideal difere, significativamente, de um caso ideal pelo fornecimento de energia ser limitado.

Comparando os modelos matemáticos de sistemas ideais e não ideais, o caso não ideal equivale a incluir uma equação extra, a qual descreve como a fonte de energia interage com o restante do sistema. Comparado com um sistema mecânico ideal, o não ideal possui um grau

de liberdade a mais, tornando as equações diferenciais extremamente não lineares. (ROBINSON, 1997)

O crédito pelas primeiras observações feitas a respeito desses problemas não ideais foi dado a Arnold Sommerfeld. Descoberto em 1902 e nomeado Efeito Sommerfeld em sua homenagem, este fenômeno vem sendo discutido em diversos livros e trabalhos. Sommerfeld observou que a estrutura de um sistema acoplado à uma motor, pode atuar como um dissipador de energia sobre certas condições, onde parte da energia é gasta para vibrar a estrutura ao invés de acelerar o equipamento. Além disso, o trabalho de Sommerfeld abrange a dinâmica de um motor desbalanceado, acoplado a um suporte flexível. (ROBINSON, 1997)

No sistema descrito por Sommerfeld, aumentando gradualmente o fornecimento de energia, aumenta-se a velocidade angular do motor até que a frequência de rotação se aproxime da natural da estrutura; depois disso, aumentando ainda mais o fornecimento de energia, a rotação permanece praticamente a mesma e a vibração do sistema atinge níveis muito elevados. Permanecendo o aumento da energia disposta para excitar o sistema, subitamente a rotação do motor aumenta (ocorrendo em conjunto uma queda brusca na amplitude de vibração).

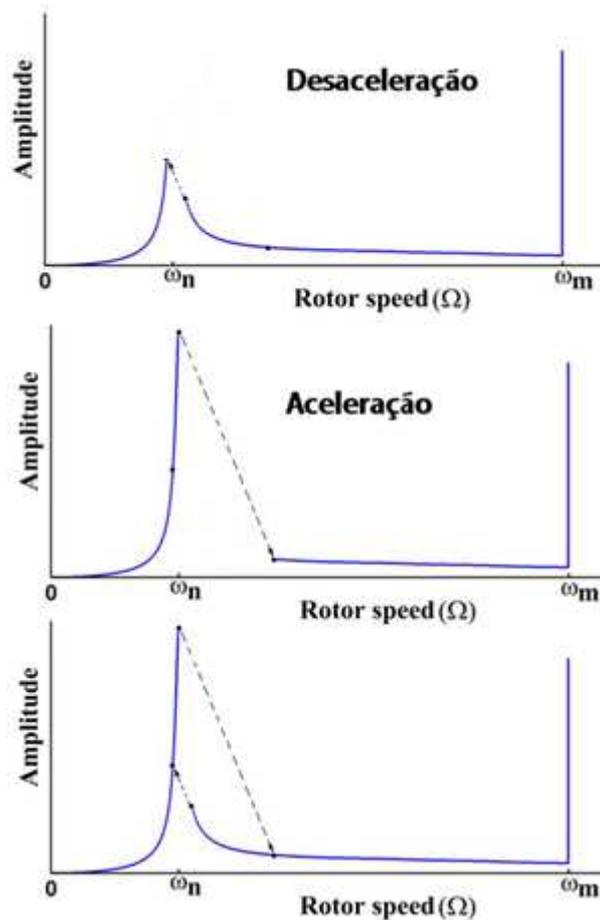
Fenômenos similares ao descrito são percebidos quando a potência é gradualmente reduzida na fonte de energia, ou seja, a forma da curva de ressonância depende do sentido da variação gradual da frequência de excitação (aceleração ou desaceleração), como é mostrado na Figura 2. 5 por meio de um exemplo gráfico. Este tipo de “fenômeno de salto” caracteriza o motivo pelo qual alguns motores apresentam incapacidade de acelerar diante de valores próximos a frequência de ressonância. (SAMANTHARAY, 2010)

Os estudos em sistemas não ideais abrangem, normalmente, sistemas discretos. Estes estudos na grande maioria dos casos são limitados a um ou dois graus de liberdade, onde mais um grau será adicionado devido à condição de não idealidade do sistema. (ROBINSON, 1997)

Provavelmente, C. LAVAL foi o primeiro a trabalhar com problemas não ideais por meio de experimentos. Ele construiu, em 1889, uma turbina de estágio único e demonstrou que em caso de uma rápida passagem pela frequência de ressonância com potência suficiente, a amplitude máxima de vibração pode ser reduzida significativamente, quando comparada com o valor obtido para ressonância, sendo aplicada uma aceleração progressiva.

Posteriormente, tomou-se conhecimento de que, em alguns casos, a passagem pela frequência de ressonância requer mais energia do que o sistema tem disponível. A consequência desta observação é o chamado Efeito Sommerfeld. O estudo de Sommerfeld foi o ponto inicial da pesquisa nesta área. (WEBER, 2012)

Figura 2. 5 – Exemplo gráfico demonstrando o efeito Sommerfeld.



Fonte: SAMANTARAY, 2010.

O professor KONONENKO (1961) apresentou o primeiro estudo detalhado de um problema não ideal de passagem pela ressonância. Posteriormente, examinando o sistema mecânico de KONONENKO (1961) em sua tese de pós-doutorado, EVAN-IWANOSKI (1976) também contribuiu trabalhando no oscilador Duffing (exemplo de oscilador excitado periodicamente com elasticidade não linear).

Após estes trabalhos, o problema da passagem pela ressonância foi investigado, independentemente, por um grande número de cientistas pelo mundo, os quais produziram diversos resultados expressivos. A maioria destes estudos foi baseada em uma fonte de

energia ideal, com aumento e redução de velocidade pré-definidos. DIMENTBERG (1997) incluiu uma fonte de energia limitada em um sistema dinâmico simples de um grau de liberdade.

DIMENTBERG (1997) considerou um sistema dinâmico composto por uma base rígida, conectada ao solo por um suporte flexível, e excitada por um motor desbalanceado. A rigidez do suporte era alterada de um valor maior para um menor em função do aumento da rotação do motor. Alguns experimentos foram realizados para comparação com as simulações numéricas.

O objetivo principal da mudança da rigidez está em alterar o sistema em condições específicas de funcionamento, visando evitar a passagem pela ressonância. No entanto, o movimento transiente induzido pela mudança da rigidez pode ser amplo e, portanto, a redução da amplitude máxima de resposta era, na maioria das vezes, insignificante.

A relação intrínseca do sistema vibratório com a sua fonte de energia torna a dinâmica desse sistema bastante complexa, com a ocorrência de alguns fenômenos, principalmente perto da região da ressonância, como, por exemplo, o aumento da potência exigida pela fonte, o fenômeno do salto e do caos. Os dois primeiros são manifestações do efeito Sommerfeld. Já a ocorrência do caos nos sistemas não ideais está associada à presença de termos não lineares, à presença de pontos de bifurcação, ao surgimento de regiões de instabilidade e regimes não estacionários na região da ressonância, assim como transições bruscas na rigidez. Por isso, é de suma importância estudar o sistema nessa região. (MORAES, 2012)

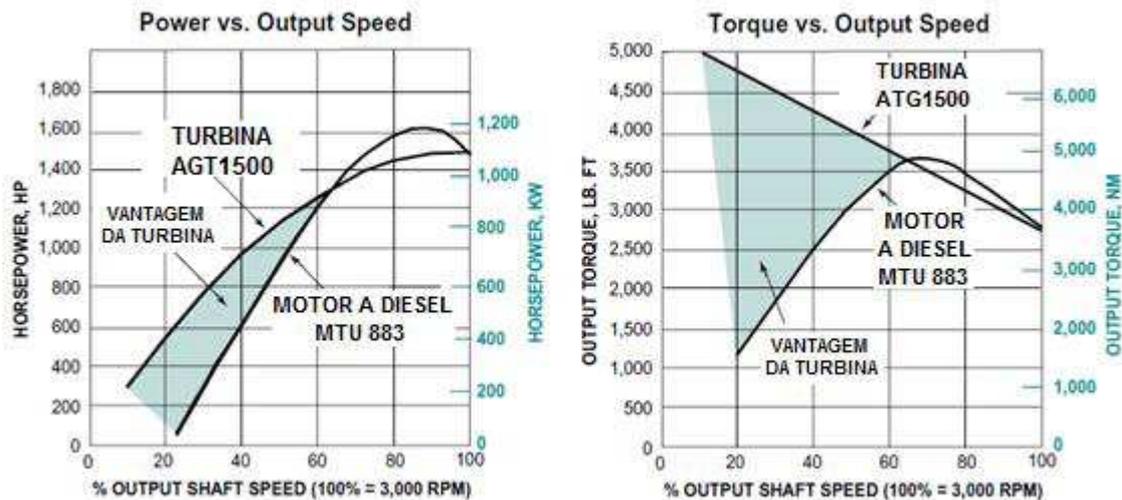
A possibilidade de passagem pela ressonância sem a ocorrência de grandes amplitudes de vibração, por meio da variação da rigidez do sistema, atraiu a atenção da comunidade de engenheiros mecânicos, resultando em diversos trabalhos e ensaios de diferentes mecanismos. Entretanto, poucos autores consideraram sistemas dinâmicos não ideais em seus trabalhos.

2.4. Modelagem de motores não ideais

A curva de torque de um motor é o principal mecanismo de análise da sua capacidade de fornecimento de energia mecânica para um sistema. Por meio dela, é possível definir as forças que serão aplicadas ao dispositivo acionado, assim como determinar qual a relação

entre a velocidade angular atingida e o torque disponível. A Figura 2. 6 mostra um exemplo de curva de torque e potência de motores aeronáuticos utilizados em helicópteros.

Figura 2. 6 - Curvas de torque e potência de motores utilizados em helicópteros. Uma das curvas representa um motor a Diesel (MTU 883) e a outra representa uma turbina (AGT 1500).



Fonte: BLOG TURBOTRAIN. Modificada pelo autor.

Normalmente, o torque do motor é representado por dois termos, sendo eles L (característica do motor) e H (torque resistivo do motor), ambos função da velocidade angular $\dot{\varphi}$. A equação de torque do motor é, portanto, da seguinte forma:

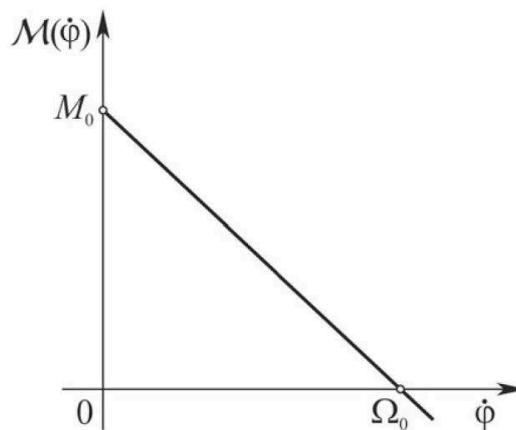
$$\mathcal{M}(\dot{\varphi}) = L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi}) \quad 2.1$$

Os termos L e H são, normalmente, determinados experimentalmente, o que torna uma tarefa extremamente difícil o conhecimento destes no caso de um motor fabricado e em operação. Devido à grande complexidade das turbinas e motores a diesel de helicópteros, os fabricantes destes não disponibilizam informações suficientes para que a equação mostrada acima seja construída, dificultando a modelagem.

Para contornar esta falta de informações, uma modelagem simplificada pode ser feita, visando equacionar o torque do motor em função de sua velocidade angular. A equação, mostrada abaixo, é linear e amplamente utilizada em representações de sistemas acionados por motores não ideais.

A equação 2.2 depende de dois parâmetros constantes que são M_0 e Ω_0 , que representam a limitação da fonte de energia com o aumento da velocidade angular, caracterizando o funcionamento de um motor não ideal. M_0 é o torque máximo fornecido pelo motor e Ω_0 a frequência natural do sistema acionado. A Figura 2. 7 mostra a curva característica do motor, onde o torque reduz linearmente com o aumento da velocidade angular, sendo o torque máximo para velocidade nula.

Figura 2. 7 - Curva característica simplificada do motor não ideal.



Fonte: CVETICANIN L., ZUKOVIC M., BALTHAZAR J.M, 2017.

$$\mathcal{M}(\dot{\varphi}) = M_0 \left(1 - \frac{\dot{\varphi}}{\Omega_0} \right)$$

2.2

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Neste Capítulo será apresentada a metodologia utilizada para o desenvolvimento do trabalho em questão, onde serão descritos os modelos físicos utilizados para modelagem do sistema.

Posteriormente, serão descritas as alterações que foram feitas no modelo ideal para adição da condição de motor não ideal, permitindo, assim, a interação entre a aeronave (fuselagem e demais sistemas) e a fonte de acionamento do helicóptero.

3.1. Definição inicial do modelo físico do helicóptero

A primeira etapa do trabalho constituiu-se da definição de um modelo físico, simplificado, capaz de representar o helicóptero em sua condição de operação em solo. Como o objetivo do trabalho é o estudo dos efeitos do motor não ideal no modelo de ressonância solo de Coleman, a aeronave se encontra apoiada no solo. Dessa forma, serão desconsiderados os efeitos aerodinâmicos atuantes sobre a aeronave, como é proposto pelo próprio modelo de Coleman.

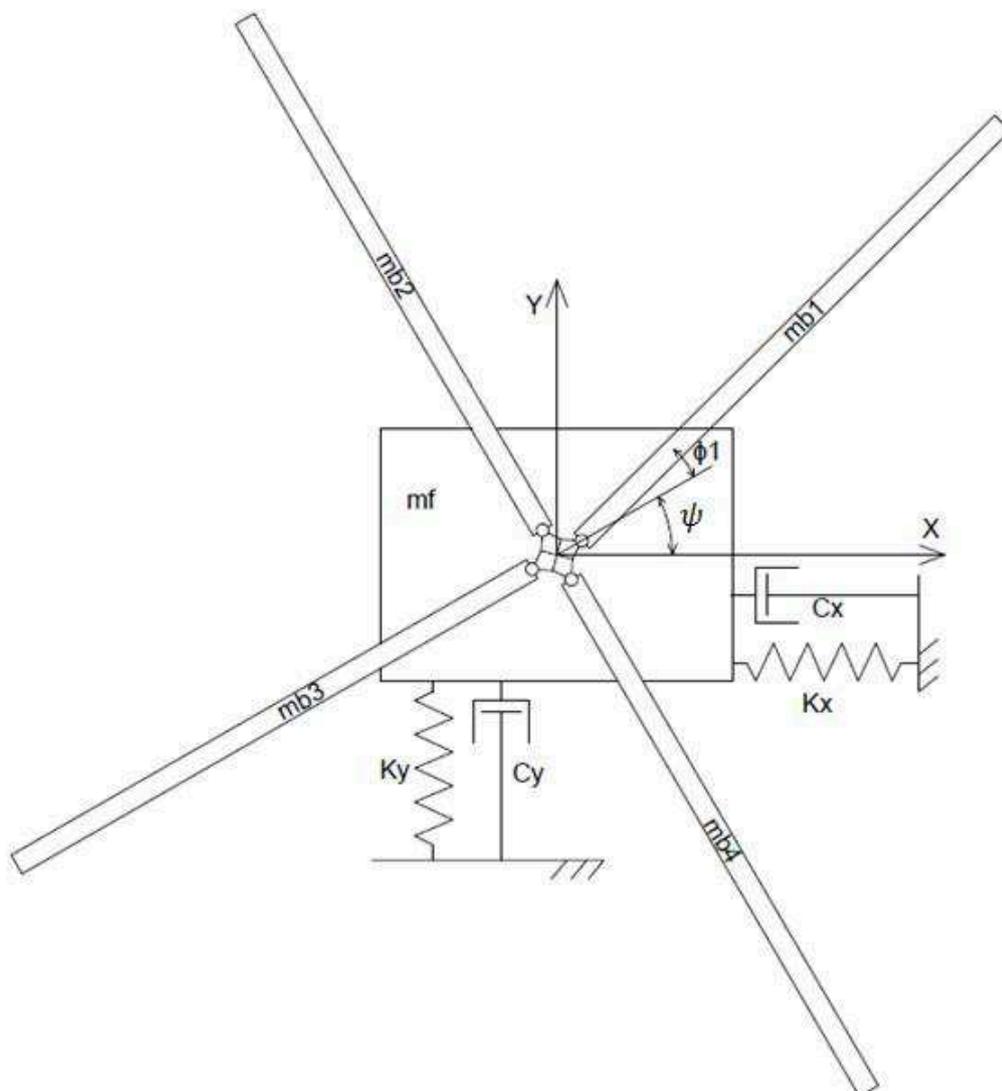
A Figura 3. 1 mostra o modelo físico adotado para a representação do helicóptero. O modelo apresenta liberdade de deslocamento linear nas direções X e Y, nas quais são mostradas as representações de rigidez e amortecimento, relativos ao acoplamento da aeronave ao solo por meio dos trens de pouso. Além disso, são utilizadas as coordenadas ψ e ϕ para o posicionamento angular das pás, onde a primeira refere-se à posição angular da rótula de acoplamento da pá em relação ao eixo X e a segunda define o deslocamento angular da pá em relação à linha que passa pelos centros do rotor e do acoplamento da pá ao *rotor hub*.

No acoplamento das pás ao rotor há, ainda, a presença de rigidez e amortecimento angulares, ou seja, os parâmetros estão relacionados à resistência ao giro da pá ao redor do

seu acoplamento. Dessa forma, há energia potencial elástica relacionada ao movimento de rotação da pá ao redor do seu acoplamento, assim como dissipação de energia resultante do amortecimento imposto ao movimento citado.

A fuselagem, por sua vez, foi considerada como um bloco rígido, não sofrendo deformação em função dos esforços aplicados e não contendo rigidez ou amortecimento internos. Dessa forma, a fuselagem inclui na modelagem apenas a sua massa, sendo os demais parâmetros dinâmicos relativos aos trens de aterrissagem, sistema rotor-pás e motor, conforme modelo descrito por SANCHES (2011). Esse trabalho, foi utilizado como referência para a determinação do modelo.

Figura 3. 1 – Modelo físico do helicóptero.



Fonte: Gerada pelo autor.

Como indicado no modelo, foram definidos parâmetros de massa, rigidez e amortecimento da aeronave apoiada ao solo, havendo rigidez e amortecimento nos eixos X e Y. Além disso, o modelo utilizado possui rigidez e amortecimento angulares nas pás, influenciando a rotação destas em torno da rótula que as une ao rotor da aeronave.

Para facilitar a elaboração dos cálculos, a linha de centro do rotor da aeronave foi colocada no centro de massa da fuselagem. Dessa forma, o posicionamento angular das pás em relação ao CG do helicóptero é mais simples e direto.

Os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento do sistema foram definidos da mesma forma que na modelagem previamente realizada por SANCHES (2011). Os valores destas constantes estão dispostos na Tabela 3. 1 e foram amplamente utilizados na etapa de desenvolvimento das equações em MATLAB, onde foi gerada a resposta do sistema no domínio do tempo.

Tabela 3. 1 - Parâmetros dos modelos de helicóptero adotados no trabalho.

Parâmetro	HT1	HT2
Massa da fuselagem [kg]	2902.9	2902.9
Massa das pás [kg]	31.9	31.9
Raio do rotor [m]	0.2	0.2
Distância articulação x Cg da pá [m]	2.5	2.5
Momento de Inércia de rotação [kg.m ²]	259	259
Freq. natural da fuselagem em X ω_{nX} [rad.s ⁻¹]	$6.\pi$	$6.\pi$
Freq. natural da fuselagem em Y ω_{nY} [rad.s ⁻¹]	$6.\pi$	$8.\pi$
Freq. natural das pás ω_{nY} [rad.s ⁻¹]	$3.\pi$	$3.\pi$
Fator de amortecimento em X	0,02	0,02
Fator de amortecimento em Y	0,02	0,02
Fator de amortecimento da articulação das pás	0,02	0,02

Fonte: Gerada pelo autor.

Os modelos HT1 e HT2 mostrados na Tabela 3. 1 representam dois helicópteros distintos. Em HT1 é considerada a existência de apenas uma frequência natural da estrutura; já em HT2, são consideradas duas frequências naturais, sendo cada uma delas em uma direção e com valores distintos entre si.

3.2. Equações de energia do sistema

A equação de movimento do modelo de aeronave de asas rotativas pode ser escrita de diversas formas. A metodologia adotada foi a determinação das equações de posição dos centros de massa da fuselagem e das pás, para em seguida realizar o cálculo das energias cinéticas, potencial e dissipativa do sistema como um todo.

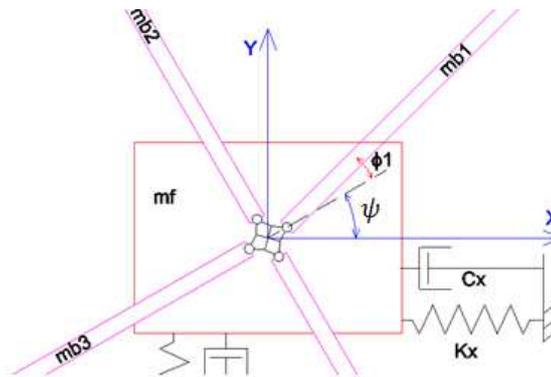
Após a determinação das equações de energia, foi utilizado o método de Lagrange para obtenção do sistema de equações equivalente à equação do movimento para o sistema, com seus seis graus de liberdade.

3.2.1. Equacionamento da posição dos centros de massa

Para desenvolver as equações de energia foi necessário o posicionamento dos centros de massa dos corpos em uma posição de equilíbrio estático. Dessa forma, foram tomados referenciais inerciais para posicionamento do sistema em repouso, sendo estes denominados eixos X e Y, perpendiculares entre si.

O centro de massa da fuselagem foi colocado diretamente sobre a origem de X e Y, tendo, portanto, coordenada (0,0) no plano X,Y. Ademais, a linha de centro do rotor da aeronave foi colocada passando pela origem, de forma que o centro do eixo do rotor se encontra na coordenada (0,0) no plano X,Y. A Figura 3. 2 mostra um detalhamento da posição dos eixos X e Y em relação ao helicóptero.

Figura 3.2 – Detalhamento da posição do centro de massa da fuselagem.



Fonte: Gerada pelo autor.

Foi necessário equacionar a posição dos centros de massa das pás em relação ao centro de massa da fuselagem. Portanto, as equações do CG da pá são da seguinte forma:

$$x_{bk}(t) = a \cdot \cos(\psi_k) + b \cdot \cos(\psi_k + \phi_k) + x(t) \quad 3.1$$

$$y_{bk}(t) = a \cdot \sin(\psi_k) + b \cdot \sin(\psi_k + \phi_k) + y(t) \quad 3.2$$

A variável ψ_k caracteriza a posição da pá ao longo do tempo, sempre medida em relação ao referencial inercial X. Este parâmetro é de extrema importância, pois através dele pode ser determinada a rotação do rotor, assim como podem ser obtidas equações para um sistema acionado por um motor com curva de torque, ou potência, conhecida. As considerações referentes à posição angular das pás (ψ_k) serão detalhadas mais a frente neste trabalho.

3.2.2. Equacionamento da energia cinética do sistema

O equacionamento de energias do sistema foi feito em etapas, desenvolvendo as equações para energia cinética em cada variável e por fim agrupando as equações para formar uma equação de energia cinética geral.

Primeiramente, foi desenvolvida a equação da energia cinética da fuselagem:

$$T_f = \frac{m_f \cdot \left(\frac{d x(t)}{dt}\right)^2}{2} + \frac{m_f \cdot \left(\frac{d y(t)}{dt}\right)^2}{2} \quad 3.3$$

Em seguida, foram desenvolvidas as equações de energia cinética para as pás do helicóptero:

$$T_b = \sum_{k=1}^{Nb} \frac{m_{bk} \cdot \left(\frac{d x_{bk}(t)}{dt}\right)^2}{2} + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{m_{bk} \cdot \left(\frac{d y_{bk}(t)}{dt}\right)^2}{2} + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{I_{Z_{bk}} \cdot \left(\frac{d \phi_k(t)}{dt}\right)^2}{2} \quad 3.4$$

Portanto, a equação geral da energia cinética do sistema é dada por:

$$T_T = T_f + T_b \quad 3.5$$

$$T_T = \frac{m_f \cdot \left(\frac{d x(t)}{dt}\right)^2}{2} + \frac{m_f \cdot \left(\frac{d y(t)}{dt}\right)^2}{2} + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{m_{bk} \cdot \left(\frac{d x_{bk}(t)}{dt}\right)^2}{2} + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{m_{bk} \cdot \left(\frac{d y_{bk}(t)}{dt}\right)^2}{2} + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{I_{Z_{bk}} \cdot \left(\frac{d \phi_k(t)}{dt}\right)^2}{2} \quad 3.6$$

3.2.3. Equacionamento da energia potencial do sistema

O equacionamento da energia potencial foi realizado da mesma forma que a energia cinética. Iniciando pela energia associada à fuselagem, a equação é da seguinte forma:

$$V_f = \frac{K_x \cdot x^2(t)}{2} + \frac{K_y \cdot y^2(t)}{2} \quad 3.7$$

Para as pás, a equação é desenvolvida conforme abaixo:

$$V_{bk} = \sum_{k=1}^{Nb} \frac{K_{bk} \cdot \phi_k^2(t)}{2} \quad 3.8$$

Portanto, a energia potencial total do sistema é dada pela soma de V_f com V_{bk} , chegando à seguinte equação:

$$V_T = \frac{K_x \cdot x^2(t)}{2} + \frac{K_y \cdot y^2(t)}{2} + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{K_{bk} \cdot \phi_k^2(t)}{2} \quad 3.9$$

3.2.4. Equacionamento da energia dissipada

A energia dissipada é uma consequência da presença de amortecimento no sistema. Esta se deve, normalmente, ao atrito (de contato ou viscoso, por exemplo) ocorrente no interior do amortecedor ou mesmo como resultado da lubrificação existente em um mancal ou rótula.

O equacionamento da energia dissipada pelo amortecimento da fuselagem é da seguinte forma:

$$E_{df} = \frac{c_x \cdot \left(\frac{d x(t)}{dt}\right)^2}{2} + \frac{c_y \cdot \left(\frac{d y(t)}{dt}\right)^2}{2} \quad 3.10$$

No caso das pás, o equacionamento é da seguinte forma:

$$E_{db} = \sum_{k=1}^{Nb} \frac{c_{bk} \cdot \left(\frac{d \phi_k(t)}{dt}\right)^2}{2} \quad 3.11$$

Portanto, a equação geral da energia dissipada pelo amortecimento no sistema é dada pela soma de E_{df} com E_{db} , sendo a equação geral da seguinte forma:

$$E_{dT} = \frac{c_x \cdot \left(\frac{d x(t)}{dt}\right)^2}{2} + \frac{c_y \cdot \left(\frac{d y(t)}{dt}\right)^2}{2} + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{c_{bk} \cdot \left(\frac{d \phi_k(t)}{dt}\right)^2}{2} \quad 3.12$$

3.3. Aplicação das equações de Lagrange

Com as equações de energia determinadas, é possível aplicar as equações de Lagrange, a partir das quais será obtida a equação de movimento geral para todo o sistema. As equações de Lagrange permitem, por meio de equações de energia, obter as equações de movimento na sua forma mais clássica, ou seja:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = F \quad 3.13$$

Para isso, a equação de Lagrange, mostrada abaixo, deve ser aplicada a cada um dos graus de liberdade do sistema.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n_{dof} \quad 3.14$$

Após a aplicação das equações de Lagrange, é obtido um sistema de equações na forma clássica da equação de movimento, descrita anteriormente, sendo possível, portanto, agrupar o conjunto de equações na forma matricial. Assim, são obtidas as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema, além de um vetor (matriz com apenas uma coluna) referente aos esforços externos aplicados no sistema.

3.4. Equacionamento do motor não ideal

Com a metodologia para a obtenção das equações de movimento do sistema definida, foi necessária a elaboração de um procedimento matemático para a modelagem do motor não ideal e, conseqüentemente, para adicioná-la ao sistema de equações que descrevem o comportamento dinâmico da aeronave.

Como foi mencionado na revisão bibliográfica, a condição de acionamento de um sistema dinâmico por meio de uma fonte de energia não ideal significa, basicamente, adicionar um grau de liberdade ao sistema. Este grau de liberdade adicional representa o modo de operação deste equipamento em uma condição ideal de funcionamento.

Para incluir um sistema acionando o helicóptero, foi necessário conhecer os esforços que geram resistência ao movimento imposto pelo motor. De forma geral, a rotação das pás gera forças e torques de operação no rotor da aeronave, os quais são transmitidos ao eixo. A aceleração do motor depende da sua capacidade de os esforços, fornecendo energia suficiente para que o sistema consiga aumentar sua velocidade angular, ou mesmo mantê-la.

O equacionamento do motor não ideal consiste em formular as equações de esforços impostos pelo motor sobre o sistema e igualar estes aos esforços de resistência do sistema ao movimento. A formulação dos esforços resultantes da rotação das pás foi elaborada utilizando equações de torque aplicado sobre o eixo do rotor, onde a partir de um diagrama de corpo livre (DCL), é possível obter todos os esforços resistivos que deverão ser vencidos pelo motor da aeronave.

Uma parcela considerável do tempo utilizado no desenvolvimento deste trabalho consistiu na análise e construção das equações de torque de inércia resultantes do acionamento das pás pelo motor. Foram analisados mais de um método para a obtenção das equações, selecionando o DCL como melhor deles, devido à simplicidade, apesar de ser um equacionamento elaborado.

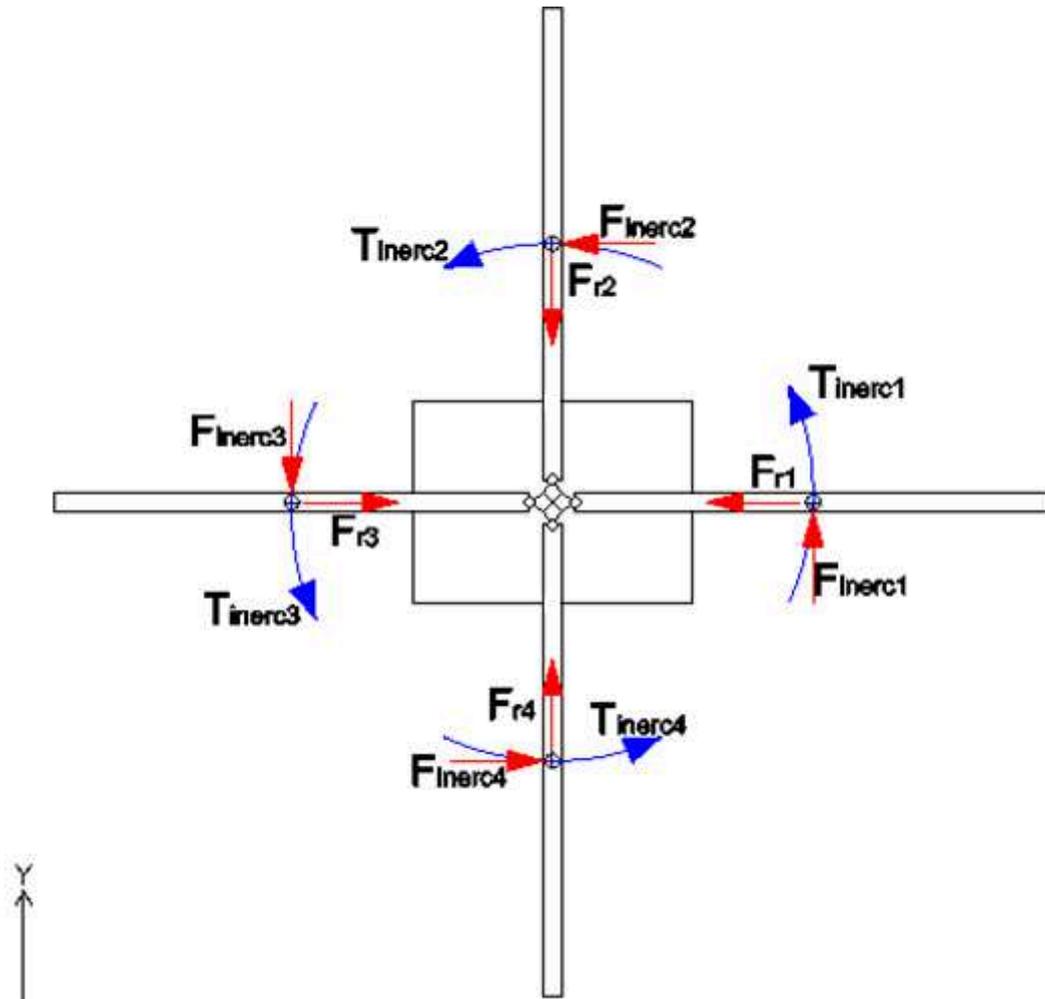
Foi necessário, ainda, dividir os momentos resultantes das forças inerciais nas direções X e Y, visto que todo o modelo foi construído baseando-se nas componentes destas direções. Portanto, o torque e as forças mostrados são calculados em função das componentes de aceleração nas direções dos eixos de coordenadas inerciais utilizados no modelo.

Todos os esforços pertinentes à dinâmica da aeronave foram devidamente transferidos para o rotor da aeronave e, finalmente, foram calculados os esforços inerciais resultantes do movimento das pás.

Em alguns trabalhos, os esforços não são calculados, visando simplificar a solução, sendo feitas analogias ou mesmo considerações de que a equação do motor já engloba os efeitos dinâmicos da rotação dos componentes do rotor.

A Figura 3.3 mostra os esforços de inércia aos quais as pás da aeronave estão sujeitas, utilizando um DCL simplificado. Como as forças F_r têm sua linha de ação passando pelo centro do rotor, estas não geram momento no eixo e, por este motivo, não serão descritas suas equações.

Figura 3.3 - Diagrama de corpo livre das pás do helicóptero.



Fonte: Gerada pelo autor.

Os esforços mostrados no DCL, e que serão utilizados na modelagem do motor não ideal, são equacionados da seguinte forma:

$$F_{inerc} = -m_b \cdot a_{cgb} \quad 3.15$$

$$T_{inerc} = -I_{zb} \cdot \alpha_{cgb} \quad 3.16$$

O modelo de aeronave que é abordado neste trabalho consiste em um helicóptero com rotor articulado, ou seja, as pás têm liberdade para uma rotação, de pequena amplitude, ao redor da rótula que a une ao rotor. Dessa forma, a aceleração do CG de cada pá será calculada da seguinte forma:

$$\alpha_{bk}(t) = \frac{d^2 (\psi_k(t) + \phi_k(t))}{dt^2} \quad 3.17$$

Normalmente, os dados necessários para equacionar o funcionamento do motor podem ser obtidos por meio do fabricante do equipamento, visto que este possui informações reais de operação baseadas em testes e ensaios realizados durante etapas de certificação, por exemplo. No entanto, estas informações não são disponibilizadas pelos fabricantes, tornando difícil a análise do sistema real.

Na modelagem do motor foi utilizada a mesma simplificação utilizada na equação 2.2, no entanto, é necessária a determinação do coeficiente angular da reta que descreve o torque do motor. Para isso, foi necessário determinar uma metodologia para estimar a potência requerida para o acionamento do modelo em questão, tendo sido utilizada a relação peso x potência média encontrada em aeronaves reais de mesmo porte, neste caso 1,6 kg por hp (GILBERT AND JOHN, 1984). Para o modelo desenvolvido neste trabalho, cuja massa é de 2902,9 kg, são usadas, normalmente, duas turbinas com potência conjunta estimada em 1800 cavalos. Com esta informação definida, o próximo passo foi determinar a rotação de operação deste motor em sua condição de máxima potência.

Foi dado início então a uma pesquisa por motores de reação utilizados em helicópteros, cuja potência fosse igual ou próxima dos 900 cv. O motor selecionado foi o Rolls-Royce GEM 1, amplamente utilizado em helicópteros militares, com potência nominal de 900 cv e uma rotação máxima de 6164 RPM. Portanto, foi feita uma analogia ao motor GEM 1 de forma que o acionamento do modelo será feito por meio de uma fonte de energia com potência de 1800 cv, com pico de torque em 5000 RPM.

A representação do motor pela equação 2.2 necessita ainda do parâmetro Ω_0 que se refere à frequência natural do sistema. Existem duas questões importantes relacionadas à determinação desta variável, sendo uma delas a determinação de uma das frequências naturais do sistema como sendo a que irá influenciar o funcionamento do motor, visto que o sistema possui diferentes graus de liberdade e, portanto, diferentes frequências naturais. O outro ponto

importante está relacionado ao acoplamento do motor ao sistema de pás, que é feito por meio de uma caixa de redução, responsável pela redução da rotação e aumento do torque.

Em relação à existência de uma transmissão acoplando o motor ao rotor, não foram consideradas as perdas decorrentes do atrito ou outras formas de dissipação de energia. Portanto, o único parâmetro utilizado foi a própria relação de transmissão do sistema, sendo esta dimensionada visando atender às rotações convencionais de operação de helicópteros de médio porte (que é a categoria onde se enquadra o modelo utilizado). Esta velocidade é limitada a 480 RPM, medidos no eixo do rotor acoplado às pás do helicóptero (GILBERT AND JOHN, 1984). Sendo assim, a relação de transmissão é de 12,8417:1.

$$Z_t = 12,8417$$

Com as informações de potência máxima e relação de transmissão de acionamento do helicóptero definidos, foi determinada a forma como as informações serão utilizadas para o cálculo do torque do motor. A constante M_0 representa o torque máximo do motor e será calculada usando a potência e a rotação na qual o torque é máximo, supondo que torque e potência máximos ocorrem com a mesma rotação.

$$M_0 = \frac{P_{eng}}{\dot{\phi}} = \frac{1800.735,499}{\frac{5000.2.\pi}{60}} = 2528,4593 [N.m] \quad 3.18$$

Com M_0 calculado, para calcular a curva de torque do motor falta apenas definir a frequência natural a ser utilizada. A equação 3.19 apresenta a substituição de 3.18 na equação 2.2, sendo que o torque mostrado é calculado antes do sistema de transmissão do helicóptero.

$$\mathcal{M}(\dot{\phi}) = 2528,4593. \left(1 - \frac{\dot{\phi}}{Z_t \Omega_0}\right) \quad 3.19$$

Na equação mostrada, a frequência natural foi multiplicada pela relação de transmissão. Esta manipulação matemática deve ser realizada devido ao fato do termo que divide a rotação do motor ser referente à frequência de operação do motor no instante em que o sistema acionado atinge a frequência natural da estrutura.

Com a equação do torque do motor definida, é possível finalizar a modelagem da fonte de energia não ideal do sistema. Isso é feito igualando o torque do motor às equações de torque devido aos esforços de inércia a que as pás estão submetidas. Dessa forma, há na formulação, a relação entre os elementos rotativos acionados, o motor de acionamento e a estrutura da aeronave, permitindo assim a verificação dos efeitos decorrentes da interação entre eles.

$$F_{inerc} = -m_b \cdot a_{cgb} \quad 3.15$$

$$T_{inerc} = -I_{zb} \cdot \alpha_{cgb} \quad 3.16$$

3.5. Linearização das equações

Após a determinação das equações de energia, que deram origem às equações de movimento da aeronave, por meio da aplicação da equação de Lagrange e, posteriormente, acoplando as equações do motor não ideal, é necessário entender que o sistema de equações gerado caracteriza um modelo dinâmico não linear. Dessa forma, um método de linearização das equações deve ser adotado, permitindo a simplificação de alguns termos e facilitando a aplicação de integração numérica, por exemplo.

Para realizar qualquer tipo de linearização é preciso identificar variáveis que resultarão em valores ínfimos e multiplicação de variáveis e de suas derivadas, permitindo assim igualar alguns termos a zero, deixando apenas os lineares. Podem ser usadas, ainda, aproximações para algumas variáveis em determinadas condições, nas quais se tenha conhecimento da grandeza dos termos em análise. Uma atenção especial deve ser dada nesta etapa da modelagem do helicóptero, pois um procedimento de linearização feito de forma incorreta pode resultar em respostas incoerentes, fazendo com que todo o trabalho apresente informações incorretas.

O primeiro método de linearização utilizado foi aplicado aos senos e cossenos, sendo uma simplificação trigonométrica amplamente utilizada nos mais diversos trabalhos. Esta simplificação foi aplicada aos senos e cossenos da variável ϕ , que descreve o deslocamento angular das pás em relação à sua rótula de acoplamento. O ângulo ϕ apresenta valores pequenos, uma vez que o movimento das pás do helicóptero é limitado a menos de 10° , permitindo a linearização destes termos.

$$\cos(\phi) = 1$$

$$\text{sen}(\phi) = \phi$$

Com a construção das equações de movimento, foram verificados diversos termos não lineares gerados devido à multiplicação de variáveis e derivadas destas entre si. Estes termos não podem ser separados, impedindo a disposição das equações na forma clássica da equação de movimento, ou mesmo para disposição do sistema na forma matricial. Por conseguinte, foi elaborada uma metodologia para separação de termos lineares e não lineares.

A metodologia de separação dos termos não lineares foi baseada na criação de uma constante, ϵ , sendo esta multiplicada por todas as variáveis do sistema. Dessa forma, em caso de termos onde houvesse multiplicações de variáveis por suas derivadas, a constante ϵ aumentaria de ordem (ϵ^2, ϵ^3 e ϵ^4) facilitando a identificação destes termos. Posteriormente, foi criada uma nova equação de movimento, na qual são igualados a zero os termos que estiverem multiplicados por ϵ^2, ϵ^3 e ϵ^4 . Esta equação representa o sistema linearizado de equações, que pode ser disposto na forma matricial. A Figura 3. 4 apresenta uma das equações de movimento, evidenciando a utilização da constante ϵ para identificação dos termos não lineares.

Após a separação dos termos lineares, foi construída também a equação dos termos não lineares, a qual é utilizada no final da formulação. Ela está inserida na matriz de forças não lineares, a fim de permitir futuras análises, pois há o risco de obter informações incorretas em caso de aplicação de integração numérica apenas nas equações linearizadas, por exemplo.

Figura 3. 4 - Aplicação da linearização na equação de movimento.

$$\begin{aligned}
sub1 := & \left(-\phi_3(t) \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^3 mb_3 + \sin(\epsilon \Omega(t)) \phi_1(t) b \epsilon^3 mb_1 \right. \\
& - \cos(\epsilon \Omega(t)) \phi_4(t) b \epsilon^3 mb_4 + \cos(\epsilon \Omega(t)) \phi_2(t) b \epsilon^3 mb_2 + \sin(\epsilon \Omega(t)) a \epsilon^2 mb_2 \\
& - \sin(\epsilon \Omega(t)) a \epsilon^2 mb_4 + \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_2 - \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_4 \\
& - \cos(\epsilon \Omega(t)) a \epsilon^2 mb_1 + \cos(\epsilon \Omega(t)) a \epsilon^2 mb_3 - \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_1 \\
& + \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_3 \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 + \left(2 \sin(\epsilon \Omega(t)) \phi_1(t) b \epsilon^3 mb_1 \right. \\
& - 2 \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_1 \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) + \left(2 \cos(\epsilon \Omega(t)) \phi_2(t) b \epsilon^3 mb_2 \right. \\
& + 2 \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_2 \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) + \left(-2 \phi_3(t) \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^3 mb_3 \right. \\
& + 2 \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_3 \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) + \left(-2 \cos(\epsilon \Omega(t)) \phi_4(t) b \epsilon^3 mb_4 \right. \\
& - 2 \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_4 \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \left. \right) \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) + \left(\phi_3(t) \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_3 \right. \\
& - \sin(\epsilon \Omega(t)) \phi_4(t) b \epsilon^2 mb_4 + \sin(\epsilon \Omega(t)) \phi_2(t) b \epsilon^2 mb_2 - \cos(\epsilon \Omega(t)) \phi_1(t) b \epsilon^2 mb_1 \\
& - \sin(\epsilon \Omega(t)) a \epsilon mb_1 + \sin(\epsilon \Omega(t)) a \epsilon mb_3 - \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon mb_1 + \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon mb_3 \\
& - \cos(\epsilon \Omega(t)) a \epsilon mb_2 + \cos(\epsilon \Omega(t)) a \epsilon mb_4 - \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon mb_2 \\
& + \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon mb_4 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) + (\epsilon mf + \epsilon mb_1 + \epsilon mb_2 + \epsilon mb_3 \\
& + \epsilon mb_4) \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + \left(-\cos(\epsilon \Omega(t)) \phi_1(t) b \epsilon^2 mb_1 \right. \\
& - \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon mb_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) + \left(\sin(\epsilon \Omega(t)) \phi_2(t) b \epsilon^2 mb_2 \right. \\
& - \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon mb_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) + \left(\phi_3(t) \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_3 \right. \\
& + \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon mb_3 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) + \left(-\sin(\epsilon \Omega(t)) \phi_4(t) b \epsilon^2 mb_4 \right. \\
& + \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon mb_4 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) + cx \epsilon \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + \left(\sin(\epsilon \Omega(t)) \phi_1(t) b \epsilon^3 mb_1 \right. \\
& - \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_1 \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 + \left(\cos(\epsilon \Omega(t)) \phi_2(t) b \epsilon^3 mb_2 \right. \\
& + \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_2 \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 + \left(-\phi_3(t) \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^3 mb_3 \right. \\
& + \cos(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_3 \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 + \left(-\cos(\epsilon \Omega(t)) \phi_4(t) b \epsilon^3 mb_4 \right. \\
& - \sin(\epsilon \Omega(t)) b \epsilon^2 mb_4 \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 + Kx \epsilon x(t)
\end{aligned}$$

Fonte: Gerada pelo autor via MAPLE.

3.6. Determinação da rigidez do modelo

O modelo de helicóptero utilizado neste trabalho possui dois tipos de rigidez, uma delas referente à fuselagem em contato com o solo, sendo uma na direção X e outra na direção

Y, além da rigidez relacionada ao deslocamento angular das pás ao redor do seu acoplamento ao *rotor hub*, neste caso, uma para cada pá. Portanto, há uma metodologia para determinação de cada rigidez, a qual depende da frequência natural da fuselagem ou das pás.

3.6.1. Rigidez em relação aos eixos de coordenada X e Y

A equação para determinação da rigidez do contato entre a aeronave e o solo é a mesma para as direções X e Y, no entanto, como foi mostrado na Tabela 3.1, a fuselagem do modelo HT2 possui diferentes frequências naturais nas direções X e Y, o que resulta em diferentes valores de rigidez. As equações 3.21 e 3.22 mostram o cálculo da rigidez.

$$K_X = \omega_{nX}^2 \cdot (m_f + m_{b1} + m_{b2} + m_{b3} + m_{b4}) \quad 3.21$$

$$K_Y = \omega_{nY}^2 \cdot (m_f + m_{b1} + m_{b2} + m_{b3} + m_{b4}) \quad 3.22$$

3.6.2. Rigidez das pás

No caso das pás, a rigidez está relacionada, também, à inércia rotacional. Sendo assim, são calculadas de forma diferente, levando em conta não só a frequência natural e a massa, mas também a inércia rotativa das pás, como é visto na equação 3.23.

$$K_{b1} = \omega_{nb1}^2 \cdot (b^2 \cdot m_{b1} + I_{z_{b1}})$$

$$K_{b2} = \omega_{nb2}^2 \cdot (b^2 \cdot m_{b2} + I_{z_{b2}})$$

⋮

$$K_{bn} = \omega_{nbn}^2 \cdot (b^2 \cdot m_{bn} + I_{z_{bn}}) \quad 3.23$$

3.7. Determinação do amortecimento do modelo

Antes de realizar o cálculo do amortecimento, é importante ter noção de que o trabalho desenvolvido utiliza como base o modelo de ressonância solo de Coleman, ou seja, a aeronave encontra-se no solo, e são desconsiderados os efeitos aerodinâmicos. Com isso, é preciso ter em mente que a determinação de parâmetros como a rigidez e o amortecimento não se refere apenas a dados construtivos da aeronave de forma isolada e sim ao sistema formado pela aeronave acoplada ao solo por meio de seus trens de pouco.

Serão descritos a seguir, os procedimentos para o cálculo do amortecimento da fuselagem acoplada ao solo e do amortecimento relativo à rotação das pás ao redor do seu ponto de acoplamento ao *rotor hub*.

3.7.1. Amortecimento em relação aos eixos de coordenada X e Y

O amortecimento da fuselagem, em relação aos eixos de coordenada X e Y, é determinado utilizando o fator de amortecimento, o qual está disponível na Tabela 3.1. São usados também os valores das frequências naturais em X e em Y e das massas das pás e da fuselagem. As equações do amortecimento para este caso são mostradas abaixo.

$$c_X = 2 \cdot \xi_f \cdot \omega_{nX} \cdot (m_f + m_{b1} + m_{b2} + m_{b3} + m_{b4}) \quad 3.24$$

$$c_Y = 2 \cdot \xi_f \cdot \omega_{nY} \cdot (m_f + m_{b1} + m_{b2} + m_{b3} + m_{b4}) \quad 3.25$$

3.7.2. Amortecimento das pás

No caso das pás, de forma semelhante ao que foi descrito no cálculo da rigidez, o amortecimento é relativo à rotação das mesmas ao redor do ponto de acoplamento ao *rotor hub*. A equação 3.26 mostra como são calculados os coeficientes de amortecimento das pás do helicóptero.

$$c_{b1} = 2 \cdot \xi \cdot \omega_{nb1} \cdot (b^2 \cdot m_{b1} + I_{z_{b1}})$$

$$c_{b2} = 2 \cdot \xi_b \cdot \omega_{nb2} \cdot (b^2 \cdot m_{b2} + I_{z_{b2}})$$

$$\vdots$$

$$c_{bn} = 2 \cdot \xi_b \cdot \omega_{nbn} \cdot (b^2 \cdot m_{bn} + I_{z_{bn}})$$

3.26

CAPÍTULO IV

DESENVOLVIMENTO

Neste Capítulo serão apresentados os desenvolvimentos de equações e métodos descritos anteriormente, além de procedimentos de transformação de variáveis e construção de matrizes, obtendo as equações de movimento para cada coordenada do sistema, inclusive do motor não ideal.

A primeira parte deste Capítulo apresenta o desenvolvimento de um modelo simplificado para o fenômeno a ser estudado, onde foi desenvolvido o conjunto de matrizes e mudanças de variáveis necessárias para a obtenção da resposta do sistema no tempo. O desenvolvimento das equações de energia do sistema foi realizado por meio do software MAPLE, no qual foram realizadas as linearizações necessárias. Em seguida, serão mostradas as equações linearizadas na forma matricial, as quais foram usadas para modelagem no MATLAB.

Em um segundo momento, são apresentadas as equações responsáveis pela modelagem do motor não ideal. Neste caso, as equações do modelo anteriormente citado serão utilizadas e a elas será acoplado o equacionamento do motor. Assim, no Anexo B estão dispostas as equações matriciais linearizadas do sistema composto por fuselagem, pás e motor não ideal.

4.1. Modelo convencional de ressonância solo em helicópteros

Tomando como base as informações já comentadas sobre a modelagem, foi adotado um modelo onde a aeronave possuía quatro pás, com a geometria do rotor caracterizando-a como um helicóptero de pás articuladas, ou seja, com pequena liberdade de rotação destas ao redor da sua rótula de acoplamento ao *rotor hub*.

Como o modelo segue a teoria de Ressonância Solo de Coleman, foram desconsiderados todos os efeitos aerodinâmicos atuando sobre o helicóptero, sendo

considerados apenas os efeitos dinâmicos resultantes da rotação das pás e do contato entra a fuselagem e o solo.

4.1.1. Equação da energia cinética total do sistema

A equação de energia cinética foi desenvolvida separadamente, sendo dividida em energia cinética da fuselagem e energia cinética das pás. Em seguida, ambas foram unidas, gerando a equação de energia cinética total do sistema, denominada T_{total} . Abaixo está mostrada a equação da energia cinética total do sistema, desenvolvida no MAPLE.

- Fuselagem

$$> T_f := \frac{mf \cdot diff(x(t), t)^2}{2} + \frac{mf \cdot diff(y(t), t)^2}{2}$$

$$T_f := \frac{1}{2} mf \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \frac{1}{2} mf \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \quad 4.1$$

- Pás do helicóptero

$$> T_b := Sum\left(\frac{mb[k] \cdot diff(x_{bk}, t)^2}{2}, k = 1 .. Nb\right) + Sum\left(\frac{mb[k] \cdot diff(y_{bk}, t)^2}{2}, k = 1 .. Nb\right) \\ + \frac{1}{2} \cdot Sum(Izb[k] \cdot diff(phi[k](t), t)^2, k = 1 .. Nb);$$

$$T_b := \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} mb_k \left(-a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t)) - b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t) \right. \\ \left. + \phi_k(t) + \frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} mb_k \left(a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t)) + b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t) + \phi_k(t)) + \frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 Izb_k \left(\frac{d}{dt} \phi_k(t) \right)^2 \quad 4.2$$

- Energia cinética total

$$> T_{total} := T_f + T_b;$$

$$\begin{aligned}
T_{total} := & \frac{1}{2} mf \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \frac{1}{2} mf \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} mb_k \left(-a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t)) \right. \\
& - b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t) + \phi_k(t)) + \left. \frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \sum_{k=1}^4 \\
& \frac{1}{2} mb_k \left(a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t)) + b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t) + \phi_k(t)) \right. \\
& \left. + \frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 Izb_k \left(\frac{d}{dt} \phi_k(t) \right)^2
\end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1.2. Equação da energia potencial total do sistema

As equações de energia potencial são desenvolvidas apenas em função da energia relacionada à rigidez do sistema, uma vez que não há deslocamento, de nível, para que seja necessária a avaliação de energia potencial gravitacional.

Dessa forma, as equações foram calculadas separadamente, sendo divididas em energia potencial da fuselagem e das pás. Posteriormente, da mesma forma como foi feito com a energia cinética, foram somadas as energias potenciais, resultando na equação de energia potencial total do sistema, equação 4.6, mostrada a seguir em sua representação obtida a partir do MAPLE.

- **Fuselagem**

$$> V_f := \frac{Kx \cdot x \cdot f^2}{2} + \frac{Ky \cdot y \cdot f^2}{2};$$

$$V_f := \frac{1}{2} Kx x(t)^2 + \frac{1}{2} Ky y(t)^2 \tag{4.4}$$

- **Pás do helicóptero**

$$> V_{bk} := \text{sum} \left(\frac{Kb[n] \cdot \text{phi}[n](t)^2}{2}, n = 1 .. Nb \right);$$

$$V_{bk} := \frac{1}{2} Kb_1 \phi_1(t)^2 + \frac{1}{2} Kb_2 \phi_2(t)^2 + \frac{1}{2} Kb_3 \phi_3(t)^2 + \frac{1}{2} Kb_4 \phi_4(t)^2 \tag{4.5}$$

- **Energia potencial total**

$$> V_{total} := V_f + V_{bk}$$

$$V_{total} := \frac{1}{2} Kx x(t)^2 + \frac{1}{2} Ky y(t)^2 + \frac{1}{2} Kb_1 \phi_1(t)^2 + \frac{1}{2} Kb_2 \phi_2(t)^2 + \frac{1}{2} Kb_3 \phi_3(t)^2 + \frac{1}{2} Kb_4 \phi_4(t)^2 \quad 4.6$$

4.1.3. Equação do trabalho das forças dissipativas do sistema

O trabalho das forças dissipativas do sistema representa a perda de energia em função do amortecimento do sistema. Suas equações, divididas entre trabalho das forças dissipativas resultante da fuselagem e das pás, foram unidas em uma só equação, que é denominada equação do trabalho total das forças dissipativas, definida aqui como Ed_{total} .

- **Fuselagem**

$$> Ed_f := \frac{cx \cdot diff(x_f, t)^2}{2} + \frac{cy \cdot diff(y_f, t)^2}{2};$$

$$Ed_f := \frac{1}{2} cx \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \frac{1}{2} cy \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \quad 4.7$$

- **Pás do helicóptero**

$$> Ed_b := sum \left(\frac{c_b[n] \cdot diff(phi[n](t), t)^2}{2}, n = 1 .. Nb \right);$$

$$Ed_b := \frac{1}{2} c_{b1} \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} c_{b2} \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 + \frac{1}{2} c_{b3} \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 + \frac{1}{2} c_{b4} \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 \quad 4.8$$

- **Trabalho total das forças dissipativas**

$$> Ed_{total} := Ed_f + Ed_b;$$

$$Ed_{total} := \frac{1}{2} cx \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \frac{1}{2} cy \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \frac{1}{2} c_{b1} \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} c_{b2} \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 + \frac{1}{2} c_{b3} \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 + \frac{1}{2} c_{b4} \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 \quad 4.9$$

4.1.4. Equações de movimento obtidas por meio da aplicação da equação de Lagrange

Com a aplicação da equação de Lagrange nas equações de energia mostradas, para cada coordenada, foram obtidas as equações de movimento do sistema. No Anexo A estão disponíveis as equações das variáveis X, Y e ϕ_1 , desenvolvidas no MAPLE.

Estas equações são obtidas por meio da aplicação da equação Lagrange, termo a termo. Neste procedimento, são separados os termos e obtidas as equações para cada um deles e, em seguida, todos os termos são somados, com seus respectivos sinais, obtendo as equações de movimento para a coordenada desejada. No caso das coordenadas ϕ , será apresentada a equação apenas de ϕ_1 , visto que as equações das demais são iguais.

Logo após a construção das equações mostradas no Anexo A, a variável ψ (presente nas equações das coordenadas X e Y) foi substituída por Ω de acordo com a equação 4.1. Na igualdade mostrada, o segundo termo é referente à posição inicial da pá em questão. Em seguida, no Anexo A, está disposta a equação da coordenada ϕ_1 com a substituição já realizada.

$$\psi(t) = \Omega \cdot t + \frac{(k - 1) \cdot 2 \cdot \pi}{N_b} \quad 4.10$$

A equação 4.10 representa uma consideração importante feita neste primeiro modelo, a qual se refere à velocidade angular (Ω) constante no eixo de acionamento. Sendo assim, o modelo apresentará aceleração angular nula e, conseqüentemente, será representado por equações mais simples, quando comparado a modelos com velocidade angular variável. Posteriormente, serão realizados testes da resposta do sistema no tempo, aplicando diferentes valores à velocidade angular, visando analisar os efeitos desta sobre a condição dinâmica do sistema.

Após a aplicação da equação de Lagrange, é preciso linearizar o sistema a fim de garantir que o conjunto de equações seja passível de alocação na forma matricial. Neste modelo simplificado, a linearização das equações é mais simples, assim como os termos não lineares estão em menor número, portanto, estes últimos podem ser desconsiderados nas etapas posteriores.

As equações linearizadas estão disponíveis no Anexo B, onde serão apresentadas as coordenadas X, Y e apenas a coordenada ϕ_1 , pois as demais coordenadas ϕ possuem as mesmas equações. Nestas equações, estão apenas os termos lineares, ou seja, aqueles utilizados posteriormente para a construção do sistema de equações na forma matricial.

Depois de finalizada a linearização do sistema de equações, o mesmo foi disposto na forma matricial, formando as matrizes de massa, rigidez, amortecimento e força. Para isso, as equações são agrupadas de acordo com seus termos, deixando o modelo matemático na forma clássica da equação de movimento.

Para montagem dessas matrizes é usada a função *LinearAlgebra* do MAPLE, sendo esta responsável por separar os termos que multiplicam os vetores de variáveis. Para montagem das matrizes, é preciso efetuar a separação dos termos, seguindo na ordem: construção da matriz de massa, seguida pela matriz de amortecimento e por último a matriz de rigidez. A seguir será mostrado como foi feito o desenvolvimento destas matrizes no MAPLE.

- **Disposição das equações na forma matricial (matriz de massa)**

> *with(LinearAlgebra)* :

> *EQ := [EQL[1], EQL[2], EQL[3], EQL[4], EQL[5], EQL[6]]* :

> *varM := [diff(x(t), t, t), diff(y(t), t, t), diff(phi[1](t), t, t), diff(phi[2](t), t, t), diff(phi[3](t), t, t), diff(phi[4](t), t, t)]* :

> *M, R1 := GenerateMatrix(EQ, varM)*;

$$M, R1 := \begin{bmatrix} mf + mb_1 + mb_2 + mb_3 + mb_4 & 0 & -mb_1 b \sin(\Omega t) & -mb_2 b \cos(\Omega t) & mb_3 b \sin(\Omega t) & mb_4 b \cos(\Omega t) \\ 0 & mf + mb_1 + mb_2 + mb_3 + mb_4 & mb_1 b \cos(\Omega t) & -mb_2 b \sin(\Omega t) & -mb_3 b \cos(\Omega t) & mb_4 b \sin(\Omega t) \\ -mb_1 b \sin(\Omega t) & mb_1 b \cos(\Omega t) & b^2 mb_1 + Iz b_1 & 0 & 0 & 0 \\ -mb_2 b \cos(\Omega t) & -mb_2 b \sin(\Omega t) & 0 & b^2 mb_2 + Iz b_2 & 0 & 0 \\ mb_3 b \sin(\Omega t) & -mb_3 b \cos(\Omega t) & 0 & 0 & b^2 mb_3 + Iz b_3 & 0 \\ mb_4 b \cos(\Omega t) & mb_4 b \sin(\Omega t) & 0 & 0 & 0 & b^2 mb_4 + Iz b_4 \end{bmatrix} \quad 4.11$$

- **Disposição das equações na forma matricial (matriz de amortecimento)**

> *varC := [diff(x(t), t), diff(y(t), t), diff(phi[1](t), t), diff(phi[2](t), t), diff(phi[3](t), t), diff(phi[4](t), t)]* :

> *G, R2 := GenerateMatrix(-convert(R1, list), varC)*;

$$G, R2 := \begin{bmatrix} cx & 0 & -2 \cos(\Omega t) \Omega b m b_1 & 2 \sin(\Omega t) \Omega b m b_2 & 2 \cos(\Omega t) \Omega b m b_3 & -2 \sin(\Omega t) \Omega b m b_4 \\ 0 & cy & -2 \sin(\Omega t) \Omega b m b_1 & -2 \cos(\Omega t) \Omega b m b_2 & 2 \sin(\Omega t) \Omega b m b_3 & 2 \cos(\Omega t) \Omega b m b_4 \\ 0 & 0 & c_{-b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{-b_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{-b_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{-b_4} \end{bmatrix}, \quad 4.12$$

- **Disposição das equações na forma matricial (matriz de rigidez)**

```
> varK := [x(t), y(t), phi[1](t), phi[2](t), phi[3](t), phi[4](t)]:
> K, F := GenerateMatrix(-convert(R2, list), varK);
```

$$K, F := \begin{bmatrix} Kx & 0 & m b_1 b \Omega^2 \sin(\Omega t) & m b_2 b \Omega^2 \cos(\Omega t) & -m b_3 b \Omega^2 \sin(\Omega t) & -m b_4 b \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ 0 & Ky & -m b_1 b \Omega^2 \cos(\Omega t) & m b_2 b \Omega^2 \sin(\Omega t) & m b_3 b \Omega^2 \cos(\Omega t) & -m b_4 b \Omega^2 \sin(\Omega t) \\ 0 & 0 & \Omega^2 a b m b_1 + K b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^2 a b m b_2 + K b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2 a b m b_3 + K b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2 a b m b_4 + K b_4 \end{bmatrix}, \quad 4.13$$

4.1.5. Construção do modelo em MATLAB

Com as matrizes do sistema montadas, foi dado início à modelagem em MATLAB, visando gerar a resposta do sistema no domínio do tempo, aplicando a função *ode45* para a integração numérica via método Runge-Kutta.

Nesta etapa, foram utilizados os dados mostrados na Tabela 3.1, além de uma informação adicional retirada do trabalho de SANCHES (2011), as velocidades de rotação a serem aplicadas. Foram usados os mesmos valores que SANCHES (2011) utilizou em seu trabalho, com a finalidade de comparar resultados, permitindo a validação da formulação desenvolvida até aqui. No trabalho de SANCHES (2011) foi aplicada a transformada de Coleman às matrizes de massa, rigidez e amortecimento, visando a redução da complexidade do sistema e, conseqüentemente, exigindo menos capacidade computacional do sistema. Este método desenvolvido por Coleman consiste na aplicação de mudanças de variáveis nas equações de movimento, eliminando suas características periódicas.

Neste trabalho, a integração numérica será feita sem uso da transformada de Coleman (ou *Multi-blade Coordinate Transformation*), pois era de grande interesse a verificação de todos os fenômenos relacionados às equações de movimento. Sendo assim, foram resolvidas as equações de movimento em sua forma geral.

A Figura 4. 1 mostra um trecho do código desenvolvido em MATLAB, no qual são definidas as variáveis referentes à massa, rigidez e inércia rotacional do modelo. É possível observar, ainda, a utilização do modelo HT2 do trabalho de SACHES (2011), no qual a frequência natural da fuselagem em X é de 6π radianos por segundo e em Y de 8π radianos por segundo.

Figura 4. 1 - Definição de parâmetros do modelo de helicóptero. Neste caso o modelo HT2 está sendo utilizado.

```

17 - mf = 2902.9; % Massa da fuselagem
18
19 - mb1 = 31.9; % Massa da pá n°1
20 - mb2 = 31.9; % Massa da pá n°2
21 - mb3 = 31.9; % Massa da pá n°3
22 - mb4 = 31.9; % Massa da pá n°4
23
24 - b = 2.5;
25
26 - Izb1 = 259; % Inércia Rotacional da pá n°1
27 - Izb2 = 259; % Inércia Rotacional da pá n°2
28 - Izb3 = 259; % Inércia Rotacional da pá n°3
29 - Izb4 = 259; % Inércia Rotacional da pá n°4
30
31 - a = 0.2;
32
33 - omega_nx = 6*pi; % Freq natural em X
34 - Kx = omega_nx^2*(mf+mb1+mb2+mb3+mb4);
35
36 - omega_ny = 8*pi; % Freq natural em Y
37 - Ky = omega_ny^2*(mf+mb1+mb2+mb3+mb4);
38
39 - omega_nbk = 3*pi; % Freq Natural das pás
40 - Kb1 = omega_nbk^2*(b^2*mb1+Izb1); % Cte de Rigidez da pá n°1
41 - Kb2 = omega_nbk^2*(b^2*mb2+Izb2); % Cte de Rigidez da pá n°2
42 - Kb3 = omega_nbk^2*(b^2*mb3+Izb3); % Cte de Rigidez da pá n°3
43 - Kb4 = omega_nbk^2*(b^2*mb4+Izb4); % Cte de Rigidez da pá n°4

```

Fonte: Gerada pelo autor via MATLAB.

A Figura 4. 2 apresenta a definição dos valores de amortecimento, calculados a partir das informações contidas na Tabela 3.1 e disponíveis no trabalho de SANCHES (2011).

Figura 4.2 - Definição do amortecimento do modelo.

```

45 - qsi_x = 0.02; % Coef. de amortecimento da fuselagem em X
46 - cx = 2 * omega_nx * qsi_x * (mf+mb1+mb2+mb3+mb4);
47
48 - qsi_y = 0.02; % Coef. de amortecimento da fuselagem em Y
49 - cy = 2 * omega_ny * qsi_y * (mf+mb1+mb2+mb3+mb4);
50
51 - qsi_bk = 0.02; % Coef. de amortecimento das pás
52 - cb1 = 2 * omega_nbk * qsi_bk * (b^2*mb1+Izb1);
53 - cb2 = 2 * omega_nbk * qsi_bk * (b^2*mb2+Izb2);
54 - cb3 = 2 * omega_nbk * qsi_bk * (b^2*mb3+Izb3);
55 - cb4 = 2 * omega_nbk * qsi_bk * (b^2*mb4+Izb4);

```

Fonte: Gerada pelo autor via MATLAB.

O modelo desenvolvido em MATLAB utiliza o equacionamento elaborado no MAPLE, no entanto, em relação às matrizes de massa, rigidez e amortecimento há algumas questões que devem ser levadas em conta e que são de extrema importância ao modelo.

O conjunto de equações desenvolvido pode ser dividido em duas partes, sendo uma delas referente aos termos independentes, ou seja, os termos que caracterizam a vibração da fuselagem de forma isolada ao comportamento de cada uma das pás, por exemplo. Em contrapartida, os demais termos representam elementos periódicos, sendo estes os termos assimétricos e não diagonais das matrizes. Dessa forma, cada uma das matrizes pode ser representada como sendo a soma de duas matrizes, uma do sistema não acoplado e a outra dos termos periódicos, como é mostrado abaixo.

$$M = M_D + M_P \quad 4.14$$

$$C = C_D + C_P \quad 4.15$$

$$K = K_D + K_P \quad 4.16$$

Para obter a resposta do sistema no domínio do tempo foi preciso seguir a metodologia descrita por SANCHES (2011) em seu trabalho, onde a equação de movimento contendo todas as matrizes é multiplicada pela inversa da matriz de massa dos termos não periódicos

(M_D^{-1}) . Para descrever o sistema resultante, é preciso definir alguns termos que facilitarão o equacionamento do modelo, conforme apresentado por SANCHES (2011) em seu trabalho. Os termos mostrados abaixo são utilizados na modelagem do MATLAB.

$$r_{mk} = \frac{m_{bk}}{m_f + \sum_{k=1}^{N_b} m_{bk}} \quad 4.17$$

$$r_{bk} = \frac{b \cdot m_{bk}}{b^2 \cdot m_{bk} + I_{z_{bk}}} \quad 4.18$$

$$r_{ak}^2 = a \cdot b_k \quad 4.19$$

$$r_{c1,2} = \frac{C_{X,Y}}{m_f + \sum_{k=1}^{N_b} m_{bk}} \quad 4.8$$

$$r_{ck+2} = \frac{C_{bk}}{b^2 \cdot m_{bk} + I_{z_{bk}}} \quad 4.20$$

Os termos r_{mk} e r_{bk} representam a razão do momento estático das pás em relação à inércia total de translação do helicóptero e da inércia rotacional total das pás, respectivamente. Ademais, os fatores $r_{c1...2}$ são razões do coeficiente de amortecimento da fuselagem nas direções X e Y em relação à massa total do helicóptero; sendo $r_{c3...6}$ a razão do coeficiente de amortecimento das pás em relação à inércia rotacional total das pás.

A partir dos termos mostrados, são montadas as equações em MATLAB, aplicando os termos conforme descrição presente no trabalho de SANCHES (2011). Estas são mostradas nas Figura 4. 3, Figura 4. 4 e Figura 4. 5.

Figura 4.3 - Construção da matriz de massa.

```

% MATRIZ DE MASSA DO SISTEMA

M = zeros(6,6);

M(1,1) = 1;
M(2,2) = 1;
M(3,3) = 1;
M(4,4) = 1;
M(5,5) = 1;
M(6,6) = 1;

M(1,3) = -rm1*sin(phi1);

M(1,4) = -rm2 * sin(phi2);

M(1,5) = -rm3 * sin(phi3);

M(1,6) = -rm4 * sin(phi4);

M(2,3) = rm1*cos(phi1);

M(2,4) = rm2 * cos(phi2);

M(2,5) = rm3 * cos(phi3);

M(2,6) = rm4 * cos(phi4);

M(3,1) = -rb1 * sin(phi1);

M(4,1) = -rb2 * sin(phi2);

M(5,1) = -rb3 * sin(phi3);

M(6,1) = -rb4 * sin(phi4);

M(3,2) = rb1 * cos(phi1);

M(4,2) = rb2 * cos(phi2);

M(5,2) = rb3 * cos(phi3);

M(6,2) = rb4 * cos(phi4);

```

Fonte: Gerada pelo autor via MATLAB.

Figura 4.4 - Construção da matriz de amortecimento.

```

% MATRIZ DE AMORTECIMENTO DO SISTEMA

C = zeros(6,6);

C(1,1) = rc1;
C(2,2) = rc2;
C(3,3) = rc3;
C(4,4) = rc4;
C(5,5) = rc5;
C(6,6) = rc6;

C(1,3) = -2 * omega * rm1 * cos(phi1);
C(1,4) = -2 * omega * rm2 * cos(phi2);
C(1,5) = -2 * omega * rm3 * cos(phi3);
C(1,6) = -2 * omega * rm4 * cos(phi4);

C(2,3) = -2 * omega * rm1 * sin(phi1);
C(2,4) = -2 * omega * rm2 * sin(phi2);
C(2,5) = -2 * omega * rm3 * sin(phi3);
C(2,6) = -2 * omega * rm4 * sin(phi4);

```

Fonte: Gerada pelo autor via MATLAB.

Figura 4.5 - Construção da matriz de rigidez.

```

% MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA

K = zeros(6,6);

K(1,1) = omega_nx * omega_nx;
K(2,2) = omega_ny * omega_ny;
K(3,3) = omega_nbk * omega_nbk + omega*omega*ra1*ra1;
K(4,4) = omega_nbk * omega_nbk + omega*omega*ra2*ra2;
K(5,5) = omega_nbk * omega_nbk + omega*omega*ra3*ra3;
K(6,6) = omega_nbk * omega_nbk + omega*omega*ra4*ra4;

K(1,3) = omega*omega * rm1 * sin(phi1);
K(1,4) = omega*omega * rm2 * sin(phi2);
K(1,5) = omega*omega * rm3 * sin(phi3);
K(1,6) = omega*omega * rm4 * sin(phi4);

K(2,3) = -omega*omega * rm1 * cos(phi1);
K(2,4) = -omega*omega * rm2 * cos(phi2);
K(2,5) = -omega*omega * rm3 * cos(phi3);
K(2,6) = -omega*omega * rm4 * cos(phi4);

```

Fonte: Gerada pelo autor via MATLAB.

Assim como as matrizes de massa, rigidez e amortecimento, a matriz de forças foi construída seguindo os procedimentos descritos por SANCHES (2011) em seu trabalho, sendo está mostrada na Figura 4. 6.

Figura 4. 6 - Construção da matriz de forças.

```

197 % MATRIZ DE FORÇA DO SISTEMA
198
199 - F = zeros(6,1);
200
201 - F1 = ( omega*omega * ((a+b)/a) ) * (cos(phi1)*rm1 + cos(phi2)*rm2 + cos(phi3)*rm3 + cos(phi4)*rm4);
202
203 - F2 = ( omega*omega * ((a+b)/a) ) * (sin(phi1)*rm1 + sin(phi2)*rm2 + sin(phi3)*rm3 + sin(phi4)*rm4);
204

```

Fonte: Gerada pelo autor via MATLAB.

Com as matrizes montadas, foi necessário realizar uma substituição de variáveis, a fim de resolver a equação de movimento utilizando o método de Runge-Kutta, visto que este permite apenas a solução de equações diferenciais de primeira ordem. A equação de movimento 3.13 pode ser resolvida como sendo um sistema de equações de primeira ordem, por meio da substituição de variáveis mostrada na equação 4.13, utilizando a matriz nula (Z) e a identidade (I).

$$[M_{6 \times 6}] \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \\ \ddot{\phi}_4 \end{bmatrix} + [C_{6 \times 6}] \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} + [K_{6 \times 6}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = [F_{6 \times 1}] \quad 4.21$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 4.22$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 4.23$$

$$\begin{bmatrix} I_{6 \times 6} & Z_{6 \times 6} \\ Z_{6 \times 6} & M_{6 \times 6} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \\ \ddot{\phi}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{6 \times 6} & -I_{6 \times 6} \\ K_{6 \times 6} & C_{6 \times 6} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} = [F_{6 \times 1}] \quad 4.24$$

Aplicando a transformação de variáveis mostrada foi possível resolver a equação de movimento do modelo no domínio do tempo, utilizando a função *ode45*.

4.2. Modelo de ressonância solo em helicóptero acionado por motor não ideal

O modelo constando a presença do motor não ideal é baseado, também, no modelo de ressonância solo de Coleman, no entanto, agora não será determinada constante a velocidade angular do rotor, implicando em aumento da complexidade do modelo como um todo, visto que as derivadas de diversos termos não serão nulas.

Outra alteração importante é a própria presença do motor, que irá resultar no aumento de um grau de liberdade, o qual caracteriza a resposta dinâmica da fonte de energia e permite a interação entre esta e a fuselagem da aeronave.

A seguir, serão mostradas as etapas de desenvolvimento deste modelo, que são a elaboração do equacionamento da aeronave para uma condição de velocidade angular variável com o tempo, a elaboração do sistema de equações do motor não ideal, a linearização do sistema e, por fim, a disposição deste em uma forma matricial.

4.2.1. Construção das equações de movimento

Como o modelo a ser desenvolvido apresenta a mesma disposição física daquele que foi desenvolvido no item 4.1 deste trabalho, não são necessárias alterações nos procedimentos de determinação das energias totais do sistema. As mudanças entre modelagens são iniciadas após a aplicação da equação de Lagrange, onde a variável ψ (posição angular do rotor da aeronave em relação ao eixo de coordenadas X) é substituída por $\Omega(t)$, uma função com dependência temporal.

Um aumento de complexidade do sistema será observado a partir da aplicação da dependência temporal na velocidade angular do rotor da aeronave, no entanto, esta consideração faz com que seja possível a variação da velocidade, seguindo uma equação pré-determinada ou mesmo uma curva de aceleração real do sistema. Sendo assim, com a rotação do motor sendo uma variável de controle, é possível utilizar o modelo aplicando acelerações e desacelerações, verificando a resposta do sistema à excitação.

As equações mostradas abaixo representam manipulações realizadas para a condição de velocidade angular com variação temporal. Na Figura 4. 7, a substituição foi feita após a aplicação da equação de Lagrange e representa o desenvolvimento na coordenada X, sendo o procedimento igual para Y. Na coordenada ϕ , por sua vez, a substituição é realizada antes mesmo da aplicação da equação de Lagrange, ou seja, diretamente nas equações de energia do sistema, sendo este procedimento aplicado aos eixos de coordenadas ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 . Em sub1, a substituição é aplicada à energia cinética.

Figura 4. 7 - Substituição realizada no MAPLE para inclusão da variável Ω .

$$Eqx_total[1] := simplify(collect(expand(subs(Nb = 4, subs(seq(psi[k](t) = Omega(t) + (k - 1) \cdot (2 \cdot Pi) / Nb, k = 1 .. 4), Eq[1]))), [diff(x(t), t, t), diff(x(t), t), x(t)]));$$

$$sub1 := subs\left(\psi[k](t) = \Omega(t) + \frac{(k-1) \cdot (2 \cdot \text{Pi})}{Nb}, T_total\right):$$

Fonte: Gerada pelo autor via MAPLE.

No Anexo C, estão disponíveis as equações de movimento obtidas após a substituição da variável ψ por $\Omega(t)$ e que serão utilizadas nas demais etapas de desenvolvimento do modelo do helicóptero acionado por motor não ideal.

Por meio da análise das equações disponíveis no Anexo C e da comparação destas com as equações de movimento do modelo desenvolvido no item 4.1, é notável o aumento da complexidade do equacionamento. Diversos termos que haviam sido zerados, como aqueles que multiplicam derivadas da aceleração angular, agora fazem parte do equacionamento, e ainda, tem grande influência na resposta do sistema, de forma geral.

4.2.2. Modelagem do motor não ideal

Com as equações de movimento montadas, o próximo passo é construir as equações que serão responsáveis por representar o motor não ideal. Nestas equações, devem estar presentes termos referentes às condições de operação do motor, além de termos que caracterizam a interação entre o motor e a estrutura da aeronave.

Para representar o funcionamento do motor, foi utilizada a equação 2.2 para o torque em função da rotação do mesmo, sendo aplicada, ainda, a relação de transmissão do sistema.

A inclusão do motor não ideal tem como finalidade incluir o conjunto de equações que será responsável por garantir que o sistema tenha solução, ou seja, a partir do momento em que a variável $\Omega(t)$ foi incluída, havia um desbalanceamento entre o número de equações e o de variáveis. Dessa forma, as equações de torque de inércia e do torque do motor são responsáveis por balancear o sistema.

Sendo assim, as equações desenvolvidas foram igualadas, gerando o balanceamento de torque entre motor e sistema de pás. As equações mostradas abaixo apresentam os cálculos desenvolvidos no MAPLE.

> # **TORQUE IMPOSTO PELO MOTOR**

> $Z_t := 12.8417$

$Z_t := 12.8417$

4.25

> $T_m := T_{motor};$

$T_m := T_{motor}$

4.26

> # **TORQUE DE INÉRCIA (resultante da rotação das pás -> teo. eixos paralelos)**

>

> $T_{im} := \text{sum}((mb[k] \cdot b^2) \cdot \text{diff}((\text{Omega}(t) + (k-1) \cdot (2 \cdot \text{Pi}) / \text{Nb}) + \text{phi}[k](t), t, t), k = 1 \dots \text{Nb});$

$$T_{im} := mb_1 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) + mb_2 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) + mb_3 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) + mb_4 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \quad 4.27$$

> # **TORQUE DE INÉRCIA (resultante da inércia rotacional das pás)**

> $T_i := \text{sum}(\text{Izb}[k] \cdot \text{diff}(\text{psi}[k](t) + \text{phi}[k](t), t, t), k = 1 \dots \text{Nb});$

$$T_i := \text{Izb}_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_1(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) + \text{Izb}_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_2(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) + \text{Izb}_3 \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_3(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) + \text{Izb}_4 \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_4(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \quad 4.28$$

> $T_i := \text{subs}(\text{Nb} = 4, \text{subs}(\text{seq}(\text{psi}[k](t) = \text{Omega}(t) + (k-1) \cdot (2 \cdot \text{Pi}) / \text{Nb}, k = 1 \dots 4), T_i));$

$$T_i := \text{Izb}_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) + \text{Izb}_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\Omega(t) + \frac{1}{2} \pi \right) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) + \text{Izb}_3 \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\Omega(t) + \pi \right) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) + \text{Izb}_4 \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\Omega(t) + \frac{3}{2} \pi \right) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \quad 4.29$$

Como é visto nas equações mostradas acima, a equação completa do torque do motor não foi incluída nesta etapa. Este fato se deve a alguns contratempos gerados a partir da inclusão da equação do torque antes da linearização das equações. A equação completa do torque será adicionada ao modelo após a montagem das matrizes do sistema.

A partir das equações mostradas, é construída a equação de equilíbrio de torque do sistema, que é mostrada no Anexo D. Esta equação será em seguida linearizada, assim como as equações de movimentos mostradas no item 4.1.1, e em seguida serão montadas as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do modelo.

> # *Equação Geral do Motor Não Ideal*

> $\text{EQ_mni} := -T_m + T_{im} + T_i - M_i :$

> $\text{EQ_mni} := \text{simplify}(\text{collect}(\%, [\text{diff}(\text{Omega}(t), t, t), \text{diff}(\text{Omega}(t), t), \text{Omega}(t)]));$

4.2.3. Equações linearizadas

O procedimento de linearização das equações é semelhante ao mostrado no item 4.1.5, havendo diferenças apenas em relação aos senos e cossenos da variável $\Omega(t)$. Estas diferenças estão ligadas ao fato de, neste modelo, a velocidade angular ser uma variável e não mais somente uma constante.

Os termos não lineares obtidos a partir da linearização não serão mostrados nesta etapa, pois o foco até aqui é apresentar as equações que serão utilizadas diretamente na construção das matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Posteriormente, serão mostradas as equações não lineares na etapa de construção das matrizes.

As equações linearizadas estão disponíveis no Anexo E, onde estão representadas as equações das coordenadas X , Y , ϕ_1 e Ω . As equações das demais coordenadas ϕ são idênticas às de ϕ_1 , não sendo necessária a representação de cada uma delas. Dos desenvolvimentos realizados no MAPLE, EQL₁, EQL₂, EQL₃ e EQL₇ referem-se às coordenadas X , Y , ϕ_1 e Ω , respectivamente.

A partir das equações do Anexo E, são construídas as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema, as quais utilizam apenas os termos lineares. Na equação de movimento da Ω é observada a presença de um termo denominado T_{motor} o qual representa de forma genérica a equação 2.2. No final da construção do modelo do helicóptero com motor não ideal, T_{motor} será substituído pela equação em sua forma original.

4.2.4. Disposição do sistema de equações na forma matricial

A disposição do sistema de equações na forma matricial é feita utilizando o módulo *LinearAlgebra* do MAPLE. Com isso, é montado o sistema de equações capaz de representar o helicóptero acoplado ao motor não ideal.

As matrizes são montadas de forma sequencial, seguindo da maior ordem do vetor de coordenadas para a menor. Após a construção das matrizes de massa, rigidez e amortecimento, foi feita a substituição da equação do torque do motor na matriz de forças do sistema. Dessa forma, o modelo do helicóptero com motor não ideal foi finalizado.

> with(LinearAlgebra) :

> EQ := [EQL[1], EQL[2], EQL[3], EQL[4], EQL[5], EQL[6], EQL[7]] :

> varM := [diff(x(t), t, t), diff(y(t), t, t), diff(phi[1](t), t, t), diff(phi[2](t), t, t),
diff(phi[3](t), t, t), diff(phi[4](t), t, t), diff(Omega(t), t, t)] :

$$\begin{aligned}
 M, R1 := & \left[\left[mf + mb_1 + mb_2 + mb_3 + mb_4, 0, -\sin(\Omega(t)) b mb_1, -\cos(\Omega(t)) b mb_2, \right. \right. \\
 & \left. \sin(\Omega(t)) b mb_3, \cos(\Omega(t)) b mb_4, -\cos(\Omega(t)) a mb_2 + \cos(\Omega(t)) a mb_4 \right. \\
 & \left. - \cos(\Omega(t)) b mb_2 + \cos(\Omega(t)) b mb_4 - \sin(\Omega(t)) a mb_1 + \sin(\Omega(t)) a mb_3 \right. \\
 & \left. - \sin(\Omega(t)) b mb_1 + \sin(\Omega(t)) b mb_3 \right], \\
 & \left[0, mf + mb_1 + mb_2 + mb_3 + mb_4, \cos(\Omega(t)) b mb_1, -\sin(\Omega(t)) b mb_2, \right. \\
 & \left. -\cos(\Omega(t)) b mb_3, \sin(\Omega(t)) b mb_4, \cos(\Omega(t)) a mb_1 - \cos(\Omega(t)) a mb_3 \right. \\
 & \left. + \cos(\Omega(t)) b mb_1 - \cos(\Omega(t)) b mb_3 - \sin(\Omega(t)) a mb_2 + \sin(\Omega(t)) a mb_4 \right. \\
 & \left. - \sin(\Omega(t)) b mb_2 + \sin(\Omega(t)) b mb_4 \right], \\
 & \left[-\sin(\Omega(t)) b mb_1, \cos(\Omega(t)) b mb_1, b^2 mb_1 + Iz b_1, 0, 0, 0, a b mb_1 + b^2 mb_1 \right], \\
 & \left[-\cos(\Omega(t)) b mb_2, -\sin(\Omega(t)) b mb_2, 0, b^2 mb_2 + Iz b_2, 0, 0, a b mb_2 + b^2 mb_2 \right], \\
 & \left[\sin(\Omega(t)) b mb_3, -\cos(\Omega(t)) b mb_3, 0, 0, b^2 mb_3 + Iz b_3, 0, a b mb_3 + b^2 mb_3 \right], \\
 & \left[\cos(\Omega(t)) b mb_4, \sin(\Omega(t)) b mb_4, 0, 0, 0, b^2 mb_4 + Iz b_4, a b mb_4 + b^2 mb_4 \right], \\
 & \left[-\cos(\Omega(t)) b mb_2 + \cos(\Omega(t)) b mb_4 - \sin(\Omega(t)) b mb_1 + \sin(\Omega(t)) b mb_3, \right. \\
 & \left. \cos(\Omega(t)) b mb_1 - \cos(\Omega(t)) b mb_3 - \sin(\Omega(t)) b mb_2 + \sin(\Omega(t)) b mb_4, 2 b^2 mb_1 \right. \\
 & \left. + Iz b_1, 2 b^2 mb_2 + Iz b_2, 2 b^2 mb_3 + Iz b_3, 2 b^2 mb_4 + Iz b_4, a b mb_1 + a b mb_2 + a b mb_3 \right. \\
 & \left. + a b mb_4 + 2 b^2 mb_1 + 2 b^2 mb_2 + 2 b^2 mb_3 + 2 b^2 mb_4 + Iz b_1 + Iz b_2 + Iz b_3 + Iz b_4 \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 -Kx x(t) - cx \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \\
 -Ky y(t) - cy \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \\
 -c_b1 \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) - Kb_1 \phi_1(t) \\
 -Kb_2 \phi_2(t) - c_b2 \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \\
 -Kb_3 \phi_3(t) - c_b3 \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \\
 -c_b4 \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) - Kb_4 \phi_4(t) \\
 T_motor
 \end{bmatrix}$$

4.30

> M, R1 := GenerateMatrix(EQ, varM);

> varC := [diff(x(t), t), diff(y(t), t), diff(phi[1](t), t), diff(phi[2](t), t), diff(phi[3](t), t),
diff(phi[4](t), t), diff(Omega(t), t)] :

> G, R2 := GenerateMatrix(-convert(R1, list), varC);

$$G, R2 := \begin{bmatrix}
 cx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & cy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & c_b1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_b2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_b3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_b4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix}
 -Kx x(t) \\
 -Ky y(t) \\
 -Kb_1 \phi_1(t) \\
 -Kb_2 \phi_2(t) \\
 -Kb_3 \phi_3(t) \\
 -Kb_4 \phi_4(t) \\
 T_motor
 \end{bmatrix}$$

4.31

> varK := [x(t), y(t), phi[1](t), phi[2](t), phi[3](t), phi[4](t), Omega(t)] :

> K, F := GenerateMatrix(-convert(R2, list), varK);

> FF := subs(T_motor = M_0 * (1 - \frac{diff(Omega(t), t)}{Zt \cdot f_nat}), F);

$$K, F := \begin{bmatrix} Kx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ky & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Kb_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Kb_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Kb_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Kb_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_{motor} \end{bmatrix} \quad 4.32$$

$$FF := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_0 \left(1 - \frac{0.07787130987 \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)}{f_{nat}} \right) \end{bmatrix} \quad 4.33$$

O desenvolvimento do modelo do helicóptero acionado por motor não ideal foi feito até a finalização da construção das matrizes mostradas.

CAPÍTULO V

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste Capítulo serão mostrados os resultados obtidos por meio das modelagens já descritas, além de detalhamentos sobre as informações apresentadas. Serão descritos os dados extraídos por meio da modelagem do sistema simplificado, com velocidade angular constante, no domínio do tempo. Formas de alterar a resposta do sistema, influência das frequências naturais da estrutura, complexidade da modelagem do motor não ideal e comparação dos dados obtidos com os de outras literaturas serão alguns dos temas abordados.

5.1. Modelo desenvolvido em MATLAB

O modelo desenvolvido em MATLAB permitiu a realização de testes para análise da resposta do sistema no tempo. O principal objetivo, desta etapa, foi de comparar a resposta do helicóptero com os resultados obtidos por SANCHES (2011). No entanto, o grande diferencial foi realizar a integração numérica sem a utilização da transformada de Coleman, a qual tem como finalidade eliminar os termos periódicos. Estes termos, como já foi mencionado neste trabalho, foram separados por meio de uma manipulação das matrizes, multiplicando todo o sistema pela inversa da matriz diagonal dos termos não periódicos.

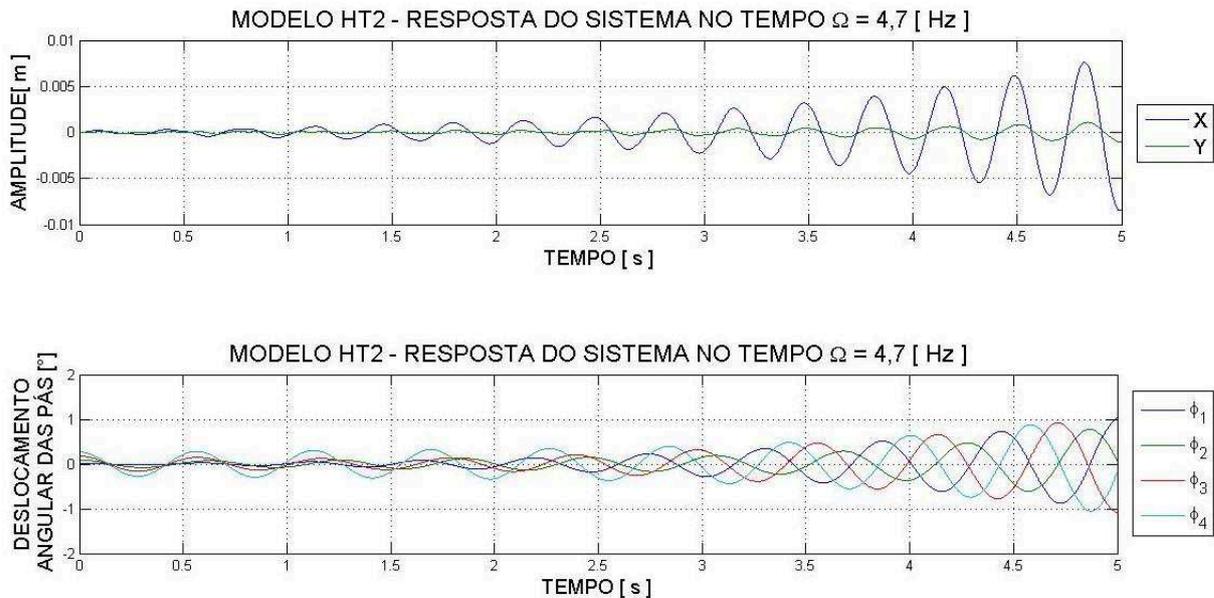
O fenômeno de ressonância solo ocorre em aeronaves de asas rotativas com rotores articulados, sendo presenciado, principalmente, em helicópteros com três ou mais pás. Sendo assim, o modelo com quatro pás, como foi utilizado, representa uma condição real na qual ocorre o efeito para o qual foi desenvolvido o modelo de Coleman. Os resultados foram obtidos para o mesmo sistema modelado por SANCHES (2011), pois são comparadas, a seguir, as respostas do modelo deste.

A primeira análise do sistema foi feita com a finalidade de avaliar as diferenças entre as respostas dos modelos HT1 e HT2, mantendo a velocidade angular constante. As velocidades angulares nas quais os testes foram feitos são determinadas por SANCHES

(2011) em seu trabalho. Estas são referentes às regiões de instabilidade verificadas por meio do diagrama de Campbell.

A Figura 5. 1 mostra a resposta no tempo, para o helicóptero HT2, acionado com uma frequência de rotação de 4,7 Hz.

Figura 5. 1 - Resultados do modelo HT2 com frequência de 4,7 Hz.



Fonte: Gerada pelo autor.

No modelo desenvolvido em MATLAB, Ω se refere à velocidade angular e não ao deslocamento angular, como foi definido no equacionamento do MAPLE.

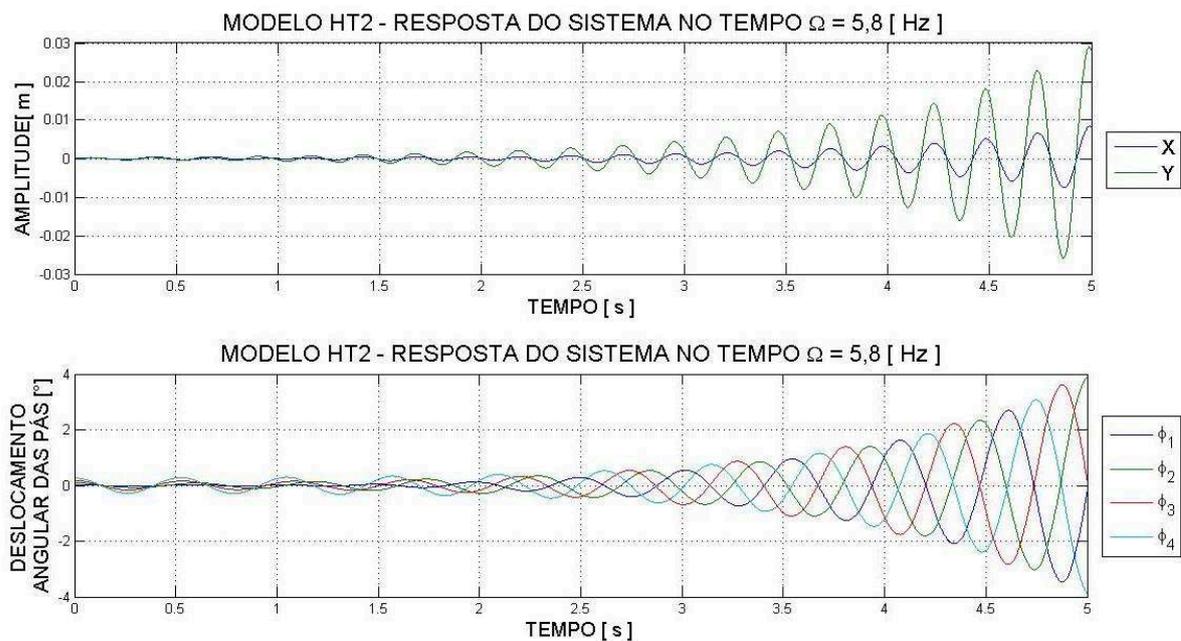
A resposta do sistema HT2, com excitação constante na frequência de 4,7 Hz, apresentou uma amplitude de oscilação na direção X superior ao deslocamento em Y. Este fato se deve à maior proximidade entre a frequência de rotação das pás e a frequência natural do sistema na direção X. Dessa forma, a energia é dissipada em maior proporção na direção X, fazendo com que sejam baixos os efeitos na coordenada Y.

É possível notar também, na Figura 5. 1, uma condição de instabilidade dinâmica, expressa pela ampliação exponencial da amplitude de vibração da aeronave. Este mesmo efeito pode ser notado, também, no deslocamento angular das pás.

Para que seja montada a resposta do sistema conforme Figura 5. 1, é preciso definir uma ou mais condições iniciais do sistema. No gráfico do deslocamento angular das pás pode ser visto que, no instante inicial, há valores não nulos de posição angular das pás, valores estes que foram definidos de forma aleatória, utilizando de baixos valores de deslocamento angular, apenas para possibilitar a construção da curva de resposta no tempo.

Para confrontar os dados da Figura 5. 1, foi obtida, também, a resposta do helicóptero considerando uma excitação de 5,8 Hz, ou seja, uma frequência mais próxima da natural da coordenada Y do HT2. Por conseguinte, a Figura 5. 2 apresentam as curvas de amplitude de vibração (para as coordenadas X e Y) e deslocamento angular das pás para esta condição de operação.

Figura 5. 2 - Resultados do modelo HT2 com frequência de 5,8 Hz.



Fonte: Gerada pelo autor.

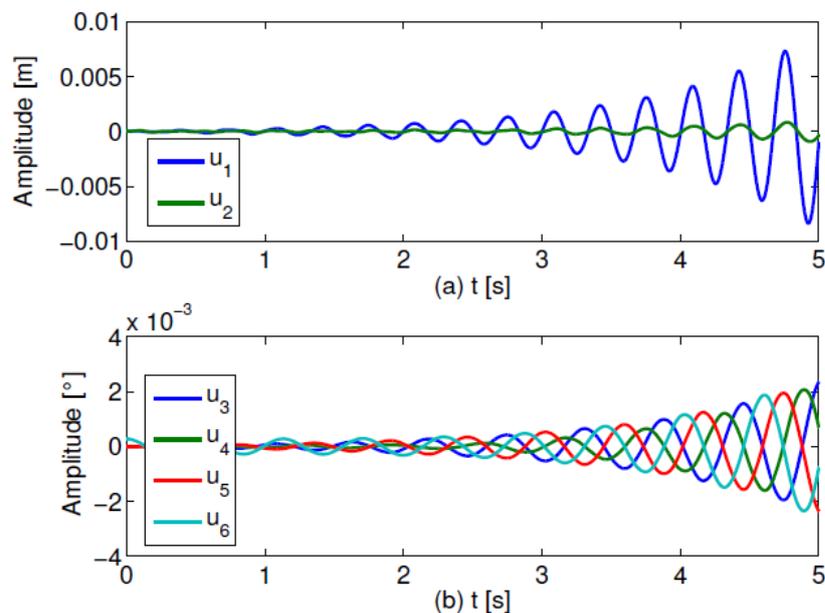
Ao alterar a velocidade de rotação das pás para 5,8 Hz, a excitação do sistema se aproxima da frequência natural da coordenada Y. Esta mudança é notada pela inversão do aumento crítico de amplitude, passando da coordenada X (enquanto a rotação era de 4,7 Hz) para a coordenada Y. Ocorre, neste caso, um crescimento mais rápido da amplitude de vibração do sistema, visto que os parâmetros de rigidez e amortecimento foram calculados em função das frequências naturais do HT2 e, sendo estas diferentes nas direções X e Y, a

aeronave responde de forma distinta nas regiões próximas às frequências naturais de cada grau de liberdade.

Ainda, houve alteração, também, nas curvas de deslocamento angular, que em paralelo com o deslocamento em Y, tiveram um crescimento em amplitude mais rápido do que no caso mostrado na Figura 5.1.

A comparação dos resultados mostrados pôde ser feita com os dados apresentados no trabalho de SANCHES (2011), o qual fez as mesmas simulações que são apresentadas nas Figuras 5.1 e 5.2, ou seja, a aeronave HT2 acionada com frequência de rotação das pás constante e igual a 4,7 Hz e 5,8 Hz. A Figura 5.3 apresenta os resultados de SANCHES (2011) para frequência de 4,7 Hz e a Figura 5.4 para 5,8 Hz.

Figura 5.3 - Resposta do helicóptero HT2 com frequência de 4,7 Hz: (a) deslocamento da fuselagem, (b) deslocamento angular das pás.



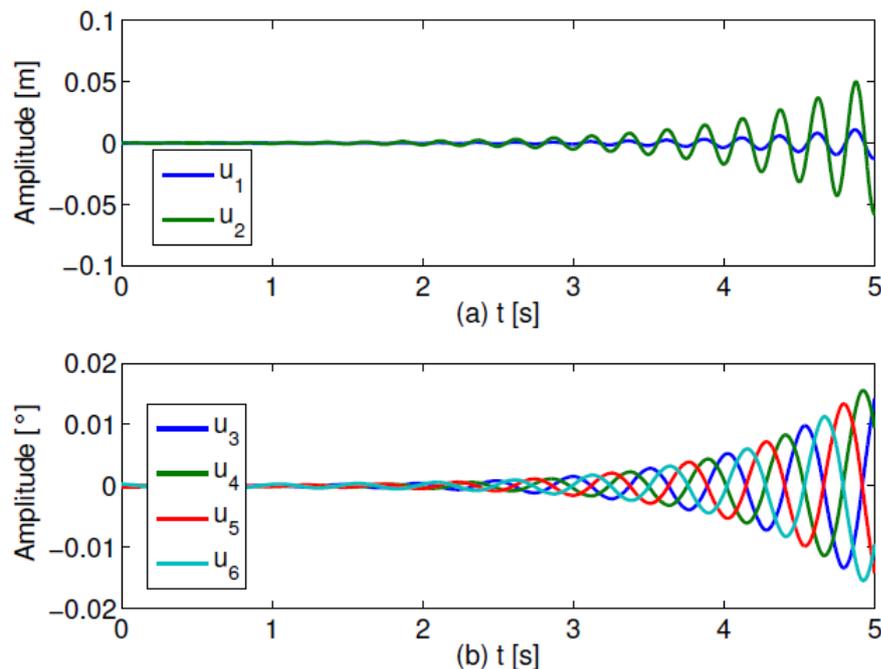
Fonte: SANCHES, 2011.

Na Figura 5.3, nota-se a semelhança da resposta do sistema quando comparada à apresentada na Figura 5.1, mostrando que o modelo desenvolvido apresenta resultado consistente com o fenômeno avaliado. Na Figura 5.3 (b) a amplitude de deslocamento angular das pás apresentou valores inferiores no trabalho de SANCHES (2011). No entanto este resultado é dependente da condição inicial de deslocamento das pás, a qual não é conhecida e teve de ser aplicada aleatoriamente, conforme já comentado anteriormente. A

análise da Figura 5. 3 (b) permite, também, notar a presença de uma condição inicial de deslocamento das pás do rotor no instante em que $t=0$.

No trabalho de SANCHES (2011) as coordenadas ϕ são apresentadas como sendo “u”. Onde u_1, u_2, u_3 e u_4 se referente à ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e ϕ_4 , respectivamente.

Figura 5. 4 - Resposta do helicóptero HT2 com frequência de 5,8 Hz: (a) deslocamento da fuselagem, (b) deslocamento angular das pás.



Fonte: SANCHES, 2011.

Assim como na Figura 5. 3, na Figura 5. 4 (b), a comparação dos resultados obtidos com os apresentados por SANCHES (2011) mostra uma divergência entre os valores de amplitude de deslocamento das pás. Este resultado é justificado pelo não conhecimento das condições iniciais aplicadas ao modelo de SANCHES (2011).

Em relação ao deslocamento da fuselagem, são notadas grandes semelhanças entre os resultados, comprovando a evolução da amplitude de vibração em caráter exponencial, caracterizando a condição de instabilidade dinâmica. Além disso, comparando as Figuras 5.3 e 5.4, é verificada a mudança de coordenada mais crítica, no que se refere à estabilidade do

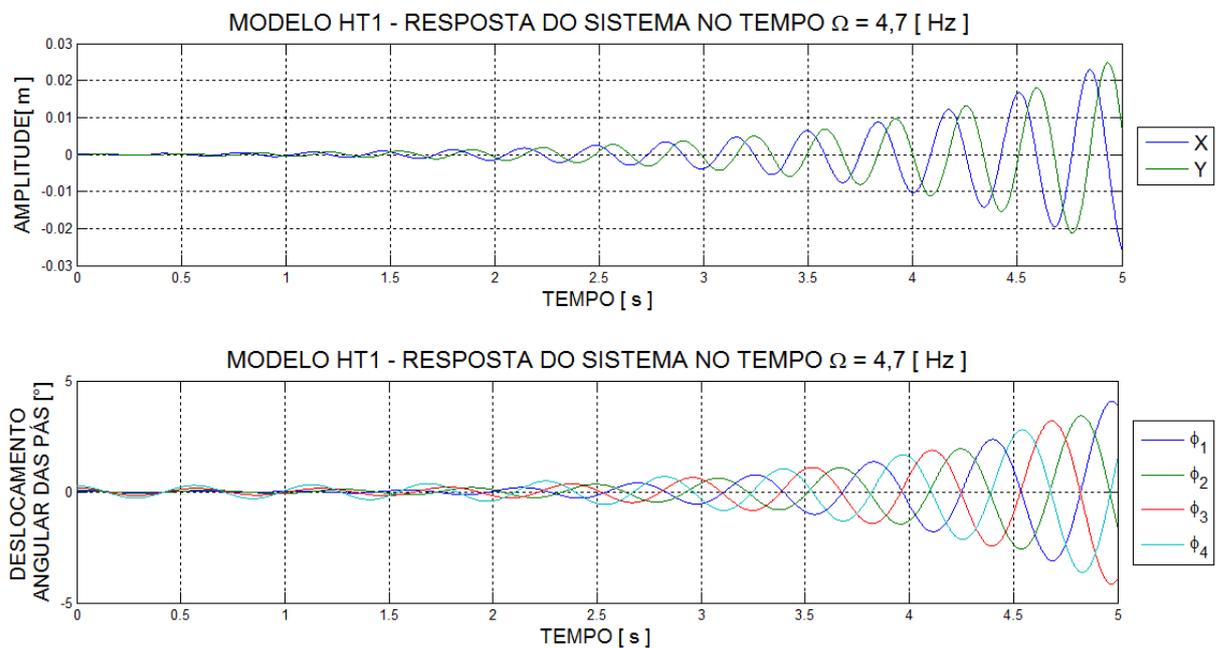
sistema, havendo um crescimento exponencial nas coordenadas X e Y, assim como nas coordenadas ϕ , no trabalho de SANCHES (2011), coordenadas u .

Outra análise importante é a comparação entre as respostas dos modelos HT1 e HT2. No trabalho de SANCHES (2011) é feita uma análise de estabilidade de ambos os modelos de helicóptero, sendo apresentado que no HT2, que possui duas frequências naturais distintas, há duas regiões de instabilidade. Exatamente por este motivo, a resposta do sistema foi analisada aplicando excitação constante em duas frequências.

O helicóptero HT1, por sua vez, apresenta apenas uma região de instabilidade, ocorrendo esta próxima da frequência natural, ou seja, 6π . No entanto, em ambos os casos a região de instabilidade relacionada à frequência natural de X ocorrem, praticamente, na mesma região, fazendo com que a excitação dos sistemas na frequência de 4,7 Hz seja caracterizada por um aumento exponencial da amplitude de vibração do sistema.

Na Figura 5. 5 é mostrada a resposta do modelo HT1 com frequência de rotação das pás igual a 4,7 Hz.

Figura 5. 5 - Resultados do modelo HT2 com frequência de 4,7 Hz.



Fonte: Gerada pelo autor.

O comportamento de HT1 na frequência de 4,7 Hz é bem diferente de HT2, sendo notável o fato de as amplitudes de vibração das coordenadas X e Y não destoarem muito entre

si. Este fato se deve a uma importante questão, a igualdade entre as frequências naturais das coordenadas X e Y, fazendo com que a energia dissipada na forma de vibrações mecânicas excite o sistema em ambas as direções.

Na Figura 5. 5, é visto que em HT1, com frequência de 4,7 Hz, a aeronave se encontra na zona de instabilidade, comprovada pelo aumento exponencial da amplitude de vibração nas direções X e Y. O deslocamento angular, por sua vez, não sofre grandes variações no formato de sua resposta no tempo. No entanto, a amplitude de deslocamento angular das pás sofre um aumento considerável.

5.2. Modelagem do Helicóptero com motor não ideal

O modelo do helicóptero com motor não ideal foi construído visando obter o equacionamento necessário para representar a aeronave e seu sistema de acionamento, de forma integrada, garantindo a interação entre si. Para alcançar tal objetivo, foi necessária uma mudança, a inclusão da dependência temporal da rotação das pás e, conseqüentemente, dos deslocamentos angulares destas em torno do seu acoplamento ao rotor.

A etapa de desenvolvimento das equações de movimento para as seis coordenadas utilizadas no modelo com velocidade constante foi mantida, uma vez que as equações de Lagrange permanecem as mesmas e a aplicação destas é feita da mesma forma, apenas mudando o resultado, como os termos multiplicados por $\cos(\Omega(t))$ e $\sin(\Omega(t))$, por exemplo, como já foi mostrado no item 4.1.4 deste trabalho.

Dessa forma, a modelagem do motor foi onde as principais diferenças ocorreram, em relação ao modelo com frequência de rotação constante. Com as equações do motor definidas, a equação do torque desenvolvido pelo motor fica em função de parâmetros da aeronave, nesse caso HT1 e HT2.

Para finalizar por completo o equacionamento do helicóptero com motor não ideal, é preciso definir a equação do torque. Este processo depende da frequência natural da estrutura, onde no caso de sistemas em que haja mais de uma natural, como em HT2, uma delas deve ser escolhida para preencher a equação.

A Tabela 5. 1 mostra as equações do torque do motor em função do modelo de aeronave escolhido e da frequência natural utilizada para o cálculo.

Tabela 5. 1 - Equações do torque do motor em função da frequência natural do modelo.

Modelo	Frequência Natural	$\mathcal{M}(\dot{\varphi})$ [N.m]
HT1	$6.\pi$	$\mathcal{M}(\dot{\varphi}) = 2528,4593. \left(1 - \frac{\dot{\varphi}}{38,5251}\right)$
HT2	$6.\pi$	$\mathcal{M}(\dot{\varphi}) = 2528,4593. \left(1 - \frac{\dot{\varphi}}{38,5251}\right)$
HT2	$8.\pi$	$\mathcal{M}(\dot{\varphi}) = 2528,4593. \left(1 - \frac{\dot{\varphi}}{51,3668}\right)$

Fonte: Gerada pelo autor.

As equações mostradas na Tabela 5. 1 limitam o sistema no que se refere à rotação do eixo do motor. Esta limitação se deve ao fato de que, para que o modelo respeite a equação 2.2, este não pode ultrapassar a velocidade na qual a frequência de rotação das pás se iguala à frequência natural da estrutura. Desse modo, para os modelos HT1 e HT2 (considerando a frequência de 6π rad/s) o motor do helicóptero fica limitado às rotações de 2311,51 e 3082,01 RPM, respectivamente.

Por este motivo, foi determinado que o torque máximo fornecido pelo motor ocorresse com rotação nula do eixo do motor. Esta é uma simplificação não muito aderente ao funcionamento real do motor da aeronave, no entanto, a equação 2.2 é uma forma simplificada de apresentar o funcionamento da fonte de energia não ideal, apresentando limitações.

O aumento de complexidade gerado fez com que o processo de linearização e, também, de separação entre termos lineares e não lineares tivessem de ser revistos, a fim de evitar a perda de informação. Com isso, o helicóptero com motor não ideal foi construído matematicamente, unido matrizes de massa, rigidez, amortecimento, vetores de coordenadas, matriz de força e matriz de termos não lineares, como é mostrado na equação 5.1.

$$\begin{bmatrix} I_{6 \times 6} & Z_{6 \times 6} \\ Z_{6 \times 6} & M_{6 \times 6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \\ \ddot{\phi}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{6 \times 6} & -I_{6 \times 6} \\ K_{6 \times 6} & C_{6 \times 6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} = [F_{6 \times 1}] - [FNL_{6 \times 1}] \quad 5.1$$

A seguir são apresentadas as matrizes M, K, C, F e FNL, mostradas na equação 5.1, sendo os dados baseados no modelo HT2 e considerando na equação do torque do motor a frequência natural de 8π rad/s.

- Matriz de massa

$$\begin{aligned} & \left[\left[mf + mb_1 + mb_2 + mb_3 + mb_4, 0, -\sin(\Omega(t)) b mb_1, -\cos(\Omega(t)) b mb_2, \right. \right. \\ & \left. \left. \sin(\Omega(t)) b mb_3, \cos(\Omega(t)) b mb_4, -\cos(\Omega(t)) a mb_2 + \cos(\Omega(t)) a mb_4 \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos(\Omega(t)) b mb_2 + \cos(\Omega(t)) b mb_4 - \sin(\Omega(t)) a mb_1 + \sin(\Omega(t)) a mb_3 \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin(\Omega(t)) b mb_1 + \sin(\Omega(t)) b mb_3 \right] \right. \\ & \left[0, mf + mb_1 + mb_2 + mb_3 + mb_4, \cos(\Omega(t)) b mb_1, -\sin(\Omega(t)) b mb_2, \right. \\ & \left. -\cos(\Omega(t)) b mb_3, \sin(\Omega(t)) b mb_4, \cos(\Omega(t)) a mb_1 - \cos(\Omega(t)) a mb_3 \right. \\ & \left. + \cos(\Omega(t)) b mb_1 - \cos(\Omega(t)) b mb_3 - \sin(\Omega(t)) a mb_2 + \sin(\Omega(t)) a mb_4 \right. \\ & \left. - \sin(\Omega(t)) b mb_2 + \sin(\Omega(t)) b mb_4 \right] \right. \\ & \left[-\sin(\Omega(t)) b mb_1, \cos(\Omega(t)) b mb_1, b^2 mb_1 + Iz b_1, 0, 0, 0, a b mb_1 + b^2 mb_1 \right] \right. \\ & \left[-\cos(\Omega(t)) b mb_2, -\sin(\Omega(t)) b mb_2, 0, b^2 mb_2 + Iz b_2, 0, 0, a b mb_2 + b^2 mb_2 \right] \right. \\ & \left[\sin(\Omega(t)) b mb_3, -\cos(\Omega(t)) b mb_3, 0, 0, b^2 mb_3 + Iz b_3, 0, a b mb_3 + b^2 mb_3 \right] \right. \\ & \left[\cos(\Omega(t)) b mb_4, \sin(\Omega(t)) b mb_4, 0, 0, 0, b^2 mb_4 + Iz b_4, a b mb_4 + b^2 mb_4 \right] \right. \\ & \left[-\cos(\Omega(t)) b mb_2 + \cos(\Omega(t)) b mb_4 - \sin(\Omega(t)) b mb_1 + \sin(\Omega(t)) b mb_3, \right. \\ & \left. \cos(\Omega(t)) b mb_1 - \cos(\Omega(t)) b mb_3 - \sin(\Omega(t)) b mb_2 + \sin(\Omega(t)) b mb_4, 2 b^2 mb_1 \right. \\ & \left. + Iz b_1, 2 b^2 mb_2 + Iz b_2, 2 b^2 mb_3 + Iz b_3, 2 b^2 mb_4 + Iz b_4, a b mb_1 + a b mb_2 + a b mb_3 \right. \\ & \left. + a b mb_4 + 2 b^2 mb_1 + 2 b^2 mb_2 + 2 b^2 mb_3 + 2 b^2 mb_4 + Iz b_1 + Iz b_2 + Iz b_3 + Iz b_4 \right] \end{aligned}$$

- Matriz de amortecimento

$$\begin{bmatrix} cx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{b_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{b_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{b_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{b_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez

$$\begin{bmatrix} Kx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ky & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Kb_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Kb_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Kb_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Kb_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de força

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2528.4593 - 49.22360942 \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \end{bmatrix}$$

- Matriz de termos não lineares

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& \cos(\Omega(t)) \phi_2(t) \dot{b} m \dot{b}_2 - \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 \\
& + \sin(\Omega(t)) \phi_1(t) \dot{b} m \dot{b}_1 - \sin(\Omega(t)) \phi_3(t) \dot{b} m \dot{b}_3 \\
& - \cos(\Omega(t)) a m \dot{b}_1 + \cos(\Omega(t)) a m \dot{b}_3 - \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_1 \\
& + \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_3 + \sin(\Omega(t)) a m \dot{b}_2 - \sin(\Omega(t)) a m \dot{b}_4 \\
& + \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_2 - \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_4 \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \\
& + \left(2 \sin(\Omega(t)) \phi_1(t) \dot{b} m \dot{b}_1 \right. \\
& - 2 \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_1 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \right. \\
& + \left(2 \cos(\Omega(t)) \phi_2(t) \dot{b} m \dot{b}_2 \right. \\
& + 2 \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_2 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \right. + \left. \left(\right. \right. \\
& - 2 \sin(\Omega(t)) \phi_3(t) \dot{b} m \dot{b}_3 + 2 \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_3 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \right. \\
& + \left. \left(-2 \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 \right. \right. \\
& - 2 \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_4 \left. \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \right) \right) \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) + \left(\right. \\
& - \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) \dot{b} m \dot{b}_1 + \cos(\Omega(t)) \phi_3(t) \dot{b} m \dot{b}_3 \\
& + \sin(\Omega(t)) \phi_2(t) \dot{b} m \dot{b}_2 - \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 \\
& \left. \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) - m \dot{b}_1 \dot{b} \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) \right. \\
& + m \dot{b}_2 \dot{b} \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_2(t) \\
& + m \dot{b}_3 \dot{b} \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_3(t) \\
& - m \dot{b}_4 \dot{b} \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) \\
& + \left(\sin(\Omega(t)) \phi_1(t) \dot{b} m \dot{b}_1 - \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_1 \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \\
& + \left(\cos(\Omega(t)) \phi_2(t) \dot{b} m \dot{b}_2 + \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_2 \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 \\
& + \left(-\sin(\Omega(t)) \phi_3(t) \dot{b} m \dot{b}_3 \right. \\
& + \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_3 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 \right. + \left. \left(\right. \right. \\
& - \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 - \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_4 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 \right. \\
& - \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) \dot{b} m \dot{b}_1 + \sin(\Omega(t)) \phi_2(t) \dot{b} m \dot{b}_2 \\
& + \cos(\Omega(t)) \phi_3(t) \dot{b} m \dot{b}_3 - \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 \\
& - \cos(\Omega(t)) a m \dot{b}_2 + \cos(\Omega(t)) a m \dot{b}_4 - \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_2 \\
& + \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_4 - \sin(\Omega(t)) a m \dot{b}_1 + \sin(\Omega(t)) a m \dot{b}_3 \\
& - \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_1 + \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_3 \left. \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \right. + \left. \left(\right. \right. \\
& - 2 \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) \dot{b} m \dot{b}_1 - 2 \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_1 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \right. \\
& + \left. \left(2 \sin(\Omega(t)) \phi_2(t) \dot{b} m \dot{b}_2 \right. \right. \\
& - 2 \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_2 \left. \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \right. \right. \\
& + \left. \left(2 \cos(\Omega(t)) \phi_3(t) \dot{b} m \dot{b}_3 \right. \right. \\
& + 2 \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_3 \left. \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \right. \right. + \left. \left(\right. \right. \\
& - 2 \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 + 2 \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_4 \\
& \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \right) \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) + \left(-\cos(\Omega(t)) \phi_2(t) \dot{b} m \dot{b}_2 \right. \\
& + \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 - \sin(\Omega(t)) \phi_1(t) \dot{b} m \dot{b}_1 \\
& + \sin(\Omega(t)) \phi_3(t) \dot{b} m \dot{b}_3 \left. \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \right. \\
& - m \dot{b}_1 \dot{b} \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_1(t) \\
& - m \dot{b}_2 \dot{b} \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_2(t) \\
& + m \dot{b}_3 \dot{b} \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_3(t) \\
& + m \dot{b}_4 \dot{b} \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) + \left(\right. \\
& - \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) \dot{b} m \dot{b}_1 - \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_1 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \right. \\
& + \left(\sin(\Omega(t)) \phi_2(t) \dot{b} m \dot{b}_2 - \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_2 \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 \\
& + \left(\cos(\Omega(t)) \phi_3(t) \dot{b} m \dot{b}_3 + \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_3 \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 \\
& + \left(-\sin(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 \right. \\
& + \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_4 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 \right. \\
& + \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_4 \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 \\
& - m \dot{b}_4 \dot{b} \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) \\
& + m \dot{b}_4 \dot{b} \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) \\
& + m \dot{b}_4 \dot{b}^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \phi_4(t)^2 + \left(-\cos(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 \right. \\
& - \sin(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_4 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \right. + \left. \left(\right. \right. \\
& - \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 + \cos(\Omega(t)) \dot{b} m \dot{b}_4 \\
& \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \right. \left. \left. \left(\phi_3(t) a \dot{b} m \dot{b}_3 + \phi_4(t) a \dot{b} m \dot{b}_4 \right. \right. \right. \\
& + \phi_1(t) a \dot{b} m \dot{b}_1 + \phi_2(t) a \dot{b} m \dot{b}_2 \left. \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \right. + \left. \left(\right. \right. \\
& - \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) \dot{b} m \dot{b}_1 + \cos(\Omega(t)) \phi_3(t) \dot{b} m \dot{b}_3 \\
& + \sin(\Omega(t)) \phi_2(t) \dot{b} m \dot{b}_2 - \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 \\
& \left. \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + \left(-\cos(\Omega(t)) \phi_2(t) \dot{b} m \dot{b}_2 \right. \right. \\
& + \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) \dot{b} m \dot{b}_4 - \sin(\Omega(t)) \phi_1(t) \dot{b} m \dot{b}_1 \\
& + \sin(\Omega(t)) \phi_3(t) \dot{b} m \dot{b}_3 \left. \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \right) \left. \right]
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}$$

Como pôde ser visto a equação dos termos não lineares é extensa e, com o equacionamento desenvolvido, há a possibilidade de incluí-la em um modelo para integração numérica. No entanto, o custo computacional exigido será muito superior que o necessário para simulação do helicóptero somente com as matrizes dos termos lineares, como foi realizado com o modelo da aeronave com velocidade constante de rotação do *rotor hub*.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Neste trabalho foram desenvolvidas duas modelagens de helicópteros, ambas utilizando o modelo de ressonância solo de Coleman, ou seja, desprezando os efeitos aerodinâmicos, as quais foram objeto de estudo e permitiram obter as conclusões apresentadas neste capítulo.

Por meio da primeira modelagem desenvolvida, foi possível analisar os efeitos dinâmicos de um helicóptero em condição de ressonância solo, onde a aeronave foi acionada com velocidade constante. Neste caso, foi verificada a resposta da aeronave à excitação aplicada nas regiões de instabilidade, mostrando um comportamento típico de crescimento exponencial das amplitudes de vibração. Além disso, o estudo realizado permitiu compreender que em sistemas com vários graus de liberdade e frequências naturais distintas entre si, a excitação com frequência próxima a uma das naturais irá gerar vibrações preferencialmente neste grau de liberdade, sendo menos intensa a energia dissipada, na forma de vibração, nos demais.

Em um segundo momento, foi aplicada uma consideração extra, a dependência temporal da velocidade angular de acionamento do rotor do helicóptero. Com isso, a complexidade do sistema aumentou, tornando as equações de movimento altamente não lineares. Desse modo, o procedimento de linearização das equações teve de ser revisto, sendo sua complexidade maior, em relação ao modelo com velocidade angular constante.

Para o helicóptero acionado por velocidade variável, as matrizes de massa, rigidez e amortecimento dão a impressão de um sistema mais simples, como pode ser visto no item 5.2 (ou no Anexo F), no entanto, a complexidade do equacionamento deste é evidente quando são observados os termos não lineares, separados dos demais para permitir a construção das matrizes do modelo.

O aumento de complexidade observado se deve à inclusão da coordenada referente à posição angular do motor, definida no MAPLE como Ω . Ao adicionar este grau de liberdade

ao sistema, ocorre uma alteração crítica nas equações, principalmente, como resultado da multiplicação de derivadas de duas variáveis, por exemplo, caracterizando os termos não lineares. Estes termos não podem ser separados e conseqüentemente impendem a disposição do sistema de equações na forma matricial clássica da equação de movimento.

Portanto, foram desenvolvidas duas modelagens das quais foi possível extrair um grande número de informações e resultados, mostrando que a representação matemática de uma aeronave de asas rotativas é feita por meio de um sistema dinâmico não linear, ocorrendo um aumento de complexidade grande quando acoplado um motor não ideal. Ainda, a não idealidade da fonte de energia exige a adição de um grau de liberdade, contendo a resposta dinâmica do motor e equações capazes de descrever a interação motor-fuselagem. Nesta etapa, o ideal é sempre representar a dinâmica da aeronave por meio de equações que propiciem resultados tão próximos do real quanto possível, efetuando simplificações somente quando outros meios de abordagem do problema forem avaliados e se mostrarem ineficientes na solução do problema proposto.

Como propostas para trabalhos futuros ficam as seguintes sugestões:

- Estudar equações alternativas para o torque do motor e que permitam modelar o comportamento deste de forma mais condizente com sua resposta dinâmica real;
- Aplicar a integração numérica ao modelo construído, verificando a resposta do sistema ao acoplamento do motor;
- Modelar o sistema controlando aceleração e desaceleração do motor, a fim de verificar a ocorrência do fenômeno do salto (*Jump phenomenon*).

REFERÊNCIAS

AIR&SPACE MAGAZINE, **How Things Works: Ground Resonance**. Blog Air&Space Magazine. Estados Unidos, Dezembro de 2008. Disponível em: < <https://www.airspacemag.com/flight-today/how-things-work-ground-resonance-94660854/> > Acessado em 17 de junho de 2018.

BLOG TURBOTRAIN, **Merits and demerits of gas turbines**. *Blog Turbotrain. Inglaterra*. Disponível em: < <http://turbotrain.net/en/merit.htm> > Acessado em 12 de dezembro de 2017.

COLEMAN, R. P., FEINGOLD, A. M. **Theory of Ground Vibrations of a two Blade Helicopter Rotor on Anisotropic Flexible Supports**. National Advisory Committee for Aeronautics, 1947.

COLEMAN, R. P., FEINGOLD, A. M. **Theory of Self-Excited Mechanical oscillations of Helicopter Rotors With Hinged Blades**. National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.

CVETICANIN L., ZUKOVIC M., BALTHAZAR J.M. **Nonlinear Oscillator and a Non-ideal Energy Source. In: Dynamics of Mechanical Systems with Non-Ideal Excitation**. Mathematical Engineering. Editora Springer, Disponível online a partir de 2017 Páginas 49 a 120.

DIMENTBERG, M.F., MCGOVERN, L., **Dynamics of an unbalanced shaft interacting with a limited power supply**. *Nonlinear Dynamics*. 1997, 171– 187 p.

EVAN-IWANOWSKI, R. M., **Resonance Oscillation in Mechanical Systems**. Elsevier, London, 1976.

FEINGOLD, A. M., **Theory of Mechanical Oscilations of Rotors With Two Hinged Blades**. National Advisory Committee for Aeronautics, 1943.

KONONENKO, S., **Vibration Problems in Engineering**. Van Nostrand. NJ, 1961.

MORAES, F.H., **Comportamento dinâmico não linear de um sistema mecânico com vibrações associadas a uma transição brusca na rigidez**. Universidade Estadual Paulista. Bauru, São Paulo, Brasil, 2012. 112 páginas.

ROBINSON, C.S., **Modeling and analysis of helicopter ground resonance utilizing symbolic processing and dynamical simulation software**. Naval Postgraduate School. Monterey, California, USA, 1997. 191 p.

SAMANTARAY, A.K., **Bond Graph Modeling of an Internally Damped Nonideal Flexible Spinning Shaft**. Indian Institute of Technology Kharagpur. Kharagpur, India. November, 2010. 9 p.

SAMANTARAY, A.K., **Steady-state dynamics of a non-ideal rotor with internal damping and gyroscopic effect**. Indian Institute of Technology Kharagpur. Kharagpur, India. June, 2009. 13 p.

SANCHES, L., **Helicopter Ground Resonance: Dynamical Modeling, Parametric Robustness Analysis and Experimental Validation**. Institut Supérieur de l'Aéronautique et l'Espace (ISAE). Toulouse, France. 2011. 192 p.

SHARF, I., ROSEN, A., **Validation of Deutsch Stability Criteria for Helicopter Ground Resonance**. University of Victoria, Georgia, USA. 24th European Rotorcraft Forum, 1998. 13 p.

SOMMERFELD, A., **Beiträge Zum Dynamischen Ausbau Der Festigkeitslehre. Physikal Zeitschr.** 1902, 266-286 p.

TONGUE, B. H., **Limit Cycle Oscillation of a Nonlinear Rotorcraft Model**, *AIAA Journal*, Vol. 22 de julho de 1984, 967-974 p.

U.S. DEPARTMENT OF TRANSPORTATION., **Helicopter Flying Handbook**. Federal Aviation Administration – Flight Standards Service, 2012.

UDWADIA, F.E., WEBER, H.I., LEITMANN, G., **Dynamical Systems and Control**. Volume 22. Chapman & Hall/CRL, 2012. 450 p. (Stability and Control: Theory, Methods and Applications).

WEDEN, G. J., COY, J. J., **Summary of Drive-Train Component Technology in Helicopters.**
Propulsion Laboratory, NASA. Cleveland, Ohio, EUA. 1984. 25 páginas.

ANEXOS

ANEXO A: Equações de movimento do helicóptero com velocidade constante obtidas utilizando a equação de Lagrange.

- **Coordenada X**

$$\begin{aligned}
 Eq_1 := & mf \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + mb_1 \left(-a \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_1(t) \right) \sin(\psi_1(t)) - a \left(\frac{d}{dt} \psi_1(t) \right)^2 \cos(\psi_1(t)) \right. \\
 & - b \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_1(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \sin(\psi_1(t) + \phi_1(t)) - b \left(\frac{d}{dt} \psi_1(t) \right. \\
 & \left. + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \cos(\psi_1(t) + \phi_1(t)) + \frac{d^2}{dt^2} x(t) \Big) + mb_2 \left(-a \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_2(t) \right) \sin(\psi_2(t)) \right. \\
 & - a \left(\frac{d}{dt} \psi_2(t) \right)^2 \cos(\psi_2(t)) - b \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_2(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \sin(\psi_2(t) + \phi_2(t)) \\
 & \left. - b \left(\frac{d}{dt} \psi_2(t) + \frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 \cos(\psi_2(t) + \phi_2(t)) + \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + mb_3 \left(\right. \\
 & -a \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_3(t) \right) \sin(\psi_3(t)) - a \left(\frac{d}{dt} \psi_3(t) \right)^2 \cos(\psi_3(t)) - b \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_3(t) \right. \\
 & \left. + \frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \sin(\psi_3(t) + \phi_3(t)) - b \left(\frac{d}{dt} \psi_3(t) + \frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 \cos(\psi_3(t) + \phi_3(t)) \\
 & \left. + \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + mb_4 \left(-a \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_4(t) \right) \sin(\psi_4(t)) - a \left(\frac{d}{dt} \psi_4(t) \right)^2 \cos(\psi_4(t)) \right. \\
 & - b \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_4(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \sin(\psi_4(t) + \phi_4(t)) - b \left(\frac{d}{dt} \psi_4(t) \right. \\
 & \left. + \frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 \cos(\psi_4(t) + \phi_4(t)) + \frac{d^2}{dt^2} x(t) \Big) + Kx x(t) + cx \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)
 \end{aligned}$$

- **Coordenada Y**

$$\begin{aligned}
Eqy_1 := & mf \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + mb_1 \left(a \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_1(t) \right) \cos(\psi_1(t)) - a \left(\frac{d}{dt} \psi_1(t) \right)^2 \sin(\psi_1(t)) \right. \\
& + b \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_1(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \cos(\psi_1(t) + \phi_1(t)) - b \left(\frac{d}{dt} \psi_1(t) \right. \\
& + \left. \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \sin(\psi_1(t) + \phi_1(t)) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \Big) + mb_2 \left(a \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_2(t) \right) \cos(\psi_2(t)) \right. \\
& - a \left(\frac{d}{dt} \psi_2(t) \right)^2 \sin(\psi_2(t)) + b \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_2(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \cos(\psi_2(t) + \phi_2(t)) \\
& - b \left(\frac{d}{dt} \psi_2(t) + \frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 \sin(\psi_2(t) + \phi_2(t)) + \left. \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \\
& + mb_3 \left(a \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_3(t) \right) \cos(\psi_3(t)) - a \left(\frac{d}{dt} \psi_3(t) \right)^2 \sin(\psi_3(t)) + b \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_3(t) \right. \right. \\
& + \left. \frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \cos(\psi_3(t) + \phi_3(t)) - b \left(\frac{d}{dt} \psi_3(t) + \frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 \sin(\psi_3(t) + \phi_3(t)) \\
& + \left. \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + mb_4 \left(a \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_4(t) \right) \cos(\psi_4(t)) - a \left(\frac{d}{dt} \psi_4(t) \right)^2 \sin(\psi_4(t)) \right. \\
& + b \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi_4(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \cos(\psi_4(t) + \phi_4(t)) - b \left(\frac{d}{dt} \psi_4(t) \right. \\
& + \left. \frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 \sin(\psi_4(t) + \phi_4(t)) + \left. \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + Ky y(t) + cy \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)
\end{aligned}$$

- Coordenada ϕ_1

$$\begin{aligned}
Eqphi_total_1 := & -mb_1 \left(-a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) - a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \right. \\
& - b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) - b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \cos(\Omega(t) \\
& + \phi_1(t)) + \frac{d^2}{dt^2} x(t) \left. \right) b \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) - mb_1 \left(-a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \right. \\
& - b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) + \frac{d}{dt} x(t) \left. \right) b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right. \\
& + \left. \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) + mb_1 \left(a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \right. \\
& - a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) + b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) \\
& - b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \left. \right) b \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) \\
& - mb_1 \left(a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) + b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) \right. \\
& + \left. \frac{d}{dt} y(t) \right) b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) + Iz b_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) + mb_1 \left(\right. \\
& - a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) - b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) + \frac{d}{dt} x(t) \left. \right) \\
& b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) + mb_1 \left(a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \right. \\
& + b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) + \frac{d}{dt} y(t) \left. \right) b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) \\
& + Kb_1 \phi_1(t) + c_- b_1 \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)
\end{aligned}$$

ANEXO B: Equações de movimento do helicóptero, com velocidade constante, obtidas por meio de linearização.

- **Linearização - coordenada x**

> $EQL[1] := collect(simplify(subs(\epsilon^3 = 0, \epsilon^2 = 0, \text{epsilon} = 1, \text{sub}l)), diff);$

$$\begin{aligned}
 EQL_1 := & (mf + mb_1 + mb_2 + mb_3 + mb_4) \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + mb_2 b \Omega^2 \cos(\Omega t) \phi_2(t) \\
 & + mb_1 b \Omega^2 \sin(\Omega t) \phi_1(t) - mb_3 b \Omega^2 \sin(\Omega t) \phi_3(t) - mb_4 b \Omega^2 \cos(\Omega t) \phi_4(t) \\
 & - 2 mb_1 b \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega t) + 2 mb_3 b \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \cos(\Omega t) \\
 & + 2 mb_2 b \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \sin(\Omega t) - 2 mb_4 b \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \sin(\Omega t) + mb_2 a \Omega^2 \sin(\Omega t) \\
 & - mb_4 a \Omega^2 \sin(\Omega t) + mb_2 b \Omega^2 \sin(\Omega t) - mb_4 b \Omega^2 \sin(\Omega t) - mb_1 a \Omega^2 \cos(\Omega t) \\
 & + mb_3 a \Omega^2 \cos(\Omega t) - mb_1 b \Omega^2 \cos(\Omega t) + mb_3 b \Omega^2 \cos(\Omega t) \\
 & - mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega t) - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \cos(\Omega t) \\
 & + mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \sin(\Omega t) + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \cos(\Omega t) + Kx x(t) + cx \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)
 \end{aligned}$$

- **Linearização - coordenada y**

> $EQL[2] := collect(simplify(subs(\epsilon^3 = 0, \epsilon^2 = 0, \text{epsilon} = 1, \text{sub}l)), diff);$

$$\begin{aligned}
 EQL_2 := & (mf + mb_1 + mb_2 + mb_3 + mb_4) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) - mb_4 b \Omega^2 \sin(\Omega t) \phi_4(t) \\
 & + mb_2 b \Omega^2 \sin(\Omega t) \phi_2(t) - mb_1 b \Omega^2 \cos(\Omega t) \phi_1(t) + mb_3 b \Omega^2 \cos(\Omega t) \phi_3(t) \\
 & + 2 mb_4 b \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \cos(\Omega t) - 2 mb_1 b \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega t) \\
 & + 2 \sin(\Omega t) b mb_3 \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) - mb_1 a \Omega^2 \sin(\Omega t) + mb_3 a \Omega^2 \sin(\Omega t) \\
 & - mb_1 b \Omega^2 \sin(\Omega t) + \sin(\Omega t) b mb_3 \Omega^2 - 2 mb_2 b \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \cos(\Omega t) \\
 & - mb_2 a \Omega^2 \cos(\Omega t) + mb_4 a \Omega^2 \cos(\Omega t) - mb_2 b \Omega^2 \cos(\Omega t) + mb_4 b \Omega^2 \cos(\Omega t) \\
 & + mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega t) - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \sin(\Omega t) \\
 & - mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \cos(\Omega t) + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \sin(\Omega t) + Ky y(t) + cy \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)
 \end{aligned}$$

- **Linearização - coordenada ϕ_1**

> $EQL[3] := \text{expand}(\text{simplify}(\text{subs}(\epsilon^3 = 0, \epsilon^2 = 0, \text{epsilon} = 1, \text{sub1})), \text{sub1});$

$$\begin{aligned}
 EQL_3 := & mb_1 b a \Omega^2 \phi_1(t) - mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \sin(\Omega t) + mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \cos(\Omega t) \\
 & + mb_1 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) + Iz b_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) + Kb_1 \phi_1(t) + c_{-} b_1 \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)
 \end{aligned}$$

ANEXO C: equações de movimento obtidas após a substituição da variável ψ por $\Omega(t)$.

$$\begin{aligned}
Eqx_{total_1} := & -mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_1(t)) \\
& + mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_1(t)) - mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_1(t)) \\
& + mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_1(t)) - mb_4 a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \\
& - mb_1 a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) + mb_2 a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \\
& + mb_3 a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) + cx \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + Kx x(t) \\
& - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_2(t)) + mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_3(t)) \\
& + mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_3(t)) + mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_3(t)) \\
& + mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_3(t)) - mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_4(t)) \\
& + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_4(t)) - mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_4(t)) \\
& + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_4(t)) - mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_1(t)) \\
& - mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_1(t)) - mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_1(t)) \\
& - mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_1(t)) + mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_2(t)) \\
& - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_2(t)) + mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_2(t)) \\
& + mb_4 a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) - mb_1 a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \\
& - mb_2 a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) + mb_3 a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \\
& + mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_2(t)) + mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_2(t)) \\
& + mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_2(t)) + mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_2(t)) \\
& + mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_3(t)) - mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_3(t)) \\
& + mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_3(t)) - mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_3(t)) \\
& - mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_4(t)) - mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_4(t)) \\
& - mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_4(t)) - mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_4(t)) \\
& + mf \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + mb_4 \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + mb_3 \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + mb_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \\
& + mb_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + 2mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_2(t)) \\
& + 2mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_2(t)) \\
& + 2mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_3(t)) \\
& - 2mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_3(t)) \\
& - 2mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_4(t)) \\
& - 2mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_4(t)) \\
& - 2mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_1(t)) \\
& + 2mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_1(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Eqy_total_1 := & mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_2(t)) \\
& - mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_2(t)) + mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_2(t)) \\
& - mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_2(t)) + mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_3(t)) \\
& + mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_3(t)) + mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_3(t)) \\
& + mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_3(t)) - mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_4(t)) \\
& + mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_4(t)) - mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_4(t)) \\
& + mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_4(t)) + mb_4 a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \\
& + mb_1 a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) - mb_2 a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \\
& - mb_3 a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) + mb_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + mb_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \\
& + mb_3 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + mb_4 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + cy \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \\
& - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_2(t)) - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_2(t)) \\
& - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_2(t)) - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_2(t)) \\
& - mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_3(t)) + mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_3(t)) \\
& - mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_3(t)) + mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_3(t)) \\
& + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_4(t)) + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_4(t)) \\
& + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_4(t)) + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_4(t)) \\
& + mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_1(t)) - mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_1(t)) \\
& + mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_1(t)) - mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_1(t)) \\
& - 2 mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_4(t)) \\
& + 2 mb_4 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_4(t)) \\
& - 2 mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_1(t)) \\
& - 2 mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_1(t)) \\
& + 2 mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\phi_2(t)) \\
& - 2 mb_2 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\phi_2(t)) \\
& + 2 mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_3(t)) \\
& + 2 mb_3 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_3(t)) + mf \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \\
& - mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_1(t)) - mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_1(t)) \\
& - mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\phi_1(t)) - mb_1 b \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \sin(\phi_1(t)) \\
& + mb_4 a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) - mb_1 a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \\
& - mb_2 a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) + mb_3 a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) + Ky y(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Eqphi_total_1 := & -mb_1 \left(-a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) - a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \right. \\
& - b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) - b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \cos(\Omega(t) \\
& + \phi_1(t)) + \frac{d^2}{dt^2} x(t) \left. \right) b \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) - mb_1 \left(-a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \right. \\
& - b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) + \frac{d}{dt} x(t) \left. \right) b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right. \\
& + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \left. \right) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) + mb_1 \left(a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \right. \\
& - a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) + b \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) \\
& - b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \left. \right) b \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) \\
& - mb_1 \left(a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) + b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) \right. \\
& + \frac{d}{dt} y(t) \left. \right) b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) + \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) + Iz b_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) + mb_1 \left(\right. \\
& - a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) - b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) + \frac{d}{dt} x(t) \left. \right) \\
& b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) + mb_1 \left(a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \right. \\
& + b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) + \frac{d}{dt} y(t) \left. \right) b \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) \\
& + Kb_1 \phi_1(t) + c_b_1 \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)
\end{aligned}$$

ANEXO D: equação de equilíbrio de torque do sistema acionado por velocidade com dependência temporal.

$$\begin{aligned}
EQ_mni := & -T_motor + \cos(\Omega(t)) \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t) + \phi_4(t)) a b m b_4 \\
& - \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\Omega(t) + \phi_4(t)) a b m b_4 + \cos(\Omega(t) \\
& + \phi_4(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) b m b_4 + \sin(\Omega(t) + \phi_4(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) b m b_4 + \cos(\Omega(t) \\
& + \phi_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) b m b_1 - \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) b m b_1 \\
& - \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_2(t)) b m b_2 - \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \cos(\Omega(t) + \phi_3(t)) b m b_3 \\
& - \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \cos(\Omega(t) + \phi_2(t)) b m b_2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \sin(\Omega(t) + \phi_3(t)) b m b_3 \\
& + \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \sin(\Omega(t) + \phi_1(t)) a b m b_1 + \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \sin(\Omega(t) \\
& + \phi_2(t)) a b m b_2 + \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \cos(\Omega(t)) \sin(\Omega(t) + \phi_3(t)) a b m b_3 \\
& - \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) a b m b_1 - \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\Omega(t) \\
& + \phi_2(t)) a b m b_2 - \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \sin(\Omega(t)) \cos(\Omega(t) + \phi_3(t)) a b m b_3 \\
& + Izb_3 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) + Izb_4 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) + Izb_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) Izb_1 \\
& + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) Izb_2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) Izb_3 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) Izb_4 + Izb_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \\
& + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\Omega(t) + \phi_4(t)) a b m b_4 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\Omega(t) \\
& + \phi_4(t)) a b m b_4 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\Omega(t) + \phi_1(t)) a b m b_1 \\
& + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\Omega(t) + \phi_2(t)) a b m b_2 \\
& + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \cos(\Omega(t)) \cos(\Omega(t) + \phi_3(t)) a b m b_3 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\Omega(t) \\
& + \phi_1(t)) a b m b_1 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\Omega(t) + \phi_2(t)) a b m b_2 \\
& + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \sin(\Omega(t)) \sin(\Omega(t) + \phi_3(t)) a b m b_3 + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) b^2 m b_2 \\
& + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) b^2 m b_3 + 2 m b_1 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) + 2 m b_2 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \\
& + 2 m b_3 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) b^2 m b_4 + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) b^2 m b_4 \\
& + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) b^2 m b_1
\end{aligned}$$

ANEXO E: equações de movimento linearizadas do helicóptero acionado com velocidade variável no tempo.

> $EQL[1] := collect(simplify(subs(\epsilon^4 = 0, \epsilon^3 = 0, \epsilon^2 = 0, \epsilonpsilon = 1, sub1)), diff);$

$$\begin{aligned}
 EQL_1 := & \left(-\cos(\Omega(t)) a mb_2 + \cos(\Omega(t)) a mb_4 - \cos(\Omega(t)) b mb_2 + \cos(\Omega(t)) b mb_4 \right. \\
 & \left. - \sin(\Omega(t)) a mb_1 + \sin(\Omega(t)) a mb_3 - \sin(\Omega(t)) b mb_1 + \sin(\Omega(t)) b mb_3 \right) \\
 & \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) + (mf + mb_1 + mb_2 + mb_3 + mb_4) \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \\
 & - mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t)) - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \cos(\Omega(t)) \\
 & + mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \sin(\Omega(t)) + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \cos(\Omega(t)) + cx \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \\
 & + Kx x(t)
 \end{aligned}$$

> $EQL[2] := collect(simplify(subs(\epsilon^4 = 0, \epsilon^3 = 0, \epsilon^2 = 0, \epsilonpsilon = 1, sub1)), diff);$

$$\begin{aligned}
 EQL_2 := & \left(\cos(\Omega(t)) a mb_1 - \cos(\Omega(t)) a mb_3 + \cos(\Omega(t)) b mb_1 - \cos(\Omega(t)) b mb_3 \right. \\
 & \left. - \sin(\Omega(t)) a mb_2 + \sin(\Omega(t)) a mb_4 - \sin(\Omega(t)) b mb_2 + \sin(\Omega(t)) b mb_4 \right) \\
 & \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) + (mf + mb_1 + mb_2 + mb_3 + mb_4) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \\
 & + mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t)) - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \sin(\Omega(t)) \\
 & - mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \cos(\Omega(t)) + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \sin(\Omega(t)) + cy \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \\
 & + Ky y(t)
 \end{aligned}$$

> $EQL[3] := collect(expand(simplify(subs(\epsilon^4 = 0, \epsilon^3 = 0, \epsilon^2 = 0, \epsilonpsilon = 1, sub1)), sub1), diff);$

$$\begin{aligned}
 EQL_3 := & (a b mb_1 + b^2 mb_1) \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) - mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \sin(\Omega(t)) \\
 & + mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \cos(\Omega(t)) + (b^2 mb_1 + Iz b_1) \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) + Kb_1 \phi_1(t) \\
 & + c_{-b_1} \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)
 \end{aligned}$$

> EQL[7] := expand(simplify(subs(ε⁴ = 0, ε³ = 0, ε² = 0, epsilon = 1, sub1)), sub1);

$$\begin{aligned}
EQL_7 := & lzb_4 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) + lzb_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) - mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \cos(\Omega(t)) \\
& + mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \sin(\Omega(t)) + mb_3 b a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) + 2 mb_1 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \\
& - T_motor + mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \cos(\Omega(t)) - mb_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \sin(\Omega(t)) \\
& + mb_1 b a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) + lzb_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) + lzb_3 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) b^2 mb_2 \\
& + 2 mb_2 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \sin(\Omega(t)) - mb_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \cos(\Omega(t)) \\
& + mb_2 b a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) lzb_1 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) lzb_2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) lzb_3 \\
& + \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) lzb_4 + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) b^2 mb_1 + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) b^2 mb_4 \\
& + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) b^2 mb_4 + mb_4 b a \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \sin(\Omega(t)) \\
& + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \cos(\Omega(t)) + 2 mb_3 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) b^2 mb_3
\end{aligned}$$

ANEXO F: Matriz dos termos não lineares.

$$\begin{aligned}
& \left[\cos(\Omega(t)) \phi_2(t) b m b_2 - \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) b m b_4 \right. \\
& \quad + \sin(\Omega(t)) \phi_1(t) b m b_1 - \sin(\Omega(t)) \phi_3(t) b m b_3 \\
& \quad - \cos(\Omega(t)) a m b_1 + \cos(\Omega(t)) a m b_3 - \cos(\Omega(t)) b m b_1 \\
& \quad + \cos(\Omega(t)) b m b_3 + \sin(\Omega(t)) a m b_2 - \sin(\Omega(t)) a m b_4 \\
& \quad + \sin(\Omega(t)) b m b_2 - \sin(\Omega(t)) b m b_4 \left. \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \right. \\
& \quad + \left(2 \sin(\Omega(t)) \phi_1(t) b m b_1 \right. \\
& \quad - 2 \cos(\Omega(t)) b m b_1 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \right. \\
& \quad + \left(2 \cos(\Omega(t)) \phi_2(t) b m b_2 \right. \\
& \quad + 2 \sin(\Omega(t)) b m b_2 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) + \left(\right. \right. \\
& \quad - 2 \sin(\Omega(t)) \phi_3(t) b m b_3 + 2 \cos(\Omega(t)) b m b_3 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \right. \\
& \quad + \left(-2 \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) b m b_4 \right. \\
& \quad - 2 \sin(\Omega(t)) b m b_4 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \right) \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) + \left(\right. \\
& \quad - \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) b m b_1 + \cos(\Omega(t)) \phi_3(t) b m b_3 \\
& \quad + \sin(\Omega(t)) \phi_2(t) b m b_2 - \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) b m b_4 \\
& \quad \left. \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) - m b_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) \right. \\
& \quad + m b_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_2(t) \\
& \quad + m b_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_3(t) \\
& \quad - m b_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) \\
& \quad + \left(\sin(\Omega(t)) \phi_1(t) b m b_1 - \cos(\Omega(t)) b m b_1 \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \\
& \quad + \left(\cos(\Omega(t)) \phi_2(t) b m b_2 + \sin(\Omega(t)) b m b_2 \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 \\
& \quad + \left(-\sin(\Omega(t)) \phi_3(t) b m b_3 \right. \\
& \quad + \cos(\Omega(t)) b m b_3 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 + \left(\right. \right. \\
& \quad - \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) b m b_4 - \sin(\Omega(t)) b m b_4 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 + \left(\right. \right. \\
& \quad - \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) b m b_1 + \sin(\Omega(t)) \phi_2(t) b m b_2 \\
& \quad + \cos(\Omega(t)) \phi_3(t) b m b_3 - \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) b m b_4 \\
& \quad - \cos(\Omega(t)) a m b_2 + \cos(\Omega(t)) a m b_4 - \cos(\Omega(t)) b m b_2 \\
& \quad + \cos(\Omega(t)) b m b_4 - \sin(\Omega(t)) a m b_1 + \sin(\Omega(t)) a m b_3 \\
& \quad - \sin(\Omega(t)) b m b_1 + \sin(\Omega(t)) b m b_3 \left. \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 + \left(\right. \right. \\
& \quad - 2 \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) b m b_1 - 2 \sin(\Omega(t)) b m b_1 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \right. \\
& \quad + \left(2 \sin(\Omega(t)) \phi_2(t) b m b_2 \right. \\
& \quad - 2 \cos(\Omega(t)) b m b_2 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \right. \\
& \quad + \left(2 \cos(\Omega(t)) \phi_3(t) b m b_3 \right. \\
& \quad + 2 \sin(\Omega(t)) b m b_3 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) + \left(\right. \right. \\
& \quad - 2 \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) b m b_4 + 2 \cos(\Omega(t)) b m b_4 \\
& \quad \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \right) \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) + \left(-\cos(\Omega(t)) \phi_2(t) b m b_2 \right. \\
& \quad + \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) b m b_4 - \sin(\Omega(t)) \phi_1(t) b m b_1 \\
& \quad + \sin(\Omega(t)) \phi_3(t) b m b_3 \left. \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \right. \\
& \quad - m b_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_1(t) \\
& \quad - m b_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_2(t) \\
& \quad + m b_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_3(t) \\
& \quad + m b_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) + \left(\right. \\
& \quad - \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) b m b_1 - \sin(\Omega(t)) b m b_1 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 \right. \\
& \quad + \left(\sin(\Omega(t)) \phi_2(t) b m b_2 - \cos(\Omega(t)) b m b_2 \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 \\
& \quad + \left(\cos(\Omega(t)) \phi_3(t) b m b_3 + \sin(\Omega(t)) b m b_3 \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 \\
& \quad + \left(-\sin(\Omega(t)) \phi_4(t) b m b_4 \right. \\
& \quad + \cos(\Omega(t)) b m b_4 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 + \right. \\
& \quad m b_1 b a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \phi_1(t) \\
& \quad - m b_1 b a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \phi_1(t) \\
& \quad + m b_1 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \phi_1(t)^2 \\
& \quad - m b_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) \\
& \quad - m b_1 b \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_1(t) \\
& \quad + m b_1 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \phi_1(t)^2 + \left(\sin(\Omega(t)) \phi_1(t) b m b_1 \right. \\
& \quad - \cos(\Omega(t)) b m b_1 \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + \left(\right. \right. \\
& \quad - \cos(\Omega(t)) \phi_1(t) b m b_1 - \sin(\Omega(t)) b m b_1 \\
& \quad \left. \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right), m b_2 b a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \phi_2(t) \right. \\
& \quad - m b_2 b a \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \phi_2(t) \\
& \quad + m b_2 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \phi_2(t)^2 \\
& \quad + m b_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_2(t) \\
& \quad - m b_2 b \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_2(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + mb_2 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \phi_2(t)^2 + (\cos(\Omega(t)) \phi_2(t) bmb_2 \\
& + \sin(\Omega(t)) bmb_2) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \\
& + (\sin(\Omega(t)) \phi_2(t) bmb_2 \\
& - \cos(\Omega(t)) bmb_2) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right), \\
& mb_3 ba \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \phi_3(t) \\
& - mb_3 ba \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \phi_3(t) \\
& + mb_3 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \phi_3(t)^2 \\
& + mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_3(t) \\
& + mb_3 b \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_3(t) \\
& + mb_3 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \phi_3(t)^2 + (-\sin(\Omega(t)) \phi_3(t) bmb_3 \\
& + \cos(\Omega(t)) bmb_3) \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \\
& + (\cos(\Omega(t)) \phi_3(t) bmb_3 \\
& + \sin(\Omega(t)) bmb_3) \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right), \\
& mb_4 ba \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 \phi_4(t) \\
& - mb_4 ba \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \phi_4(t) \\
& + mb_4 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \Omega(t) \right) \phi_4(t)^2 \\
& - mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) \\
& + mb_4 b \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) \\
& + mb_4 b^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \phi_4(t)^2 + (-\cos(\Omega(t)) \phi_4(t) bmb_4 \\
& - \sin(\Omega(t)) bmb_4) \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + (\\
& -\sin(\Omega(t)) \phi_4(t) bmb_4 + \cos(\Omega(t)) bmb_4) \\
& \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right), (\phi_3(t) abmb_3 + \phi_4(t) abmb_4 \\
& + \phi_1(t) abmb_1 + \phi_2(t) abmb_2) \left(\frac{d}{dt} \Omega(t) \right)^2 + (\\
& -\cos(\Omega(t)) \phi_1(t) bmb_1 + \cos(\Omega(t)) \phi_3(t) bmb_3 \\
& + \sin(\Omega(t)) \phi_2(t) bmb_2 - \sin(\Omega(t)) \phi_4(t) bmb_4) \\
& \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + (-\cos(\Omega(t)) \phi_2(t) bmb_2 \\
& + \cos(\Omega(t)) \phi_4(t) bmb_4 - \sin(\Omega(t)) \phi_1(t) bmb_1 \\
& + \sin(\Omega(t)) \phi_3(t) bmb_3) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \Big]
\end{aligned}$$