

**EDUARDO PEIXOTO DE OLIVEIRA**

**USO DE FUNÇÕES DE GREEN NO ESTUDO DA  
BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR TRIDIMENSIONAL  
CONSIDERANDO EFEITOS DE PERFUSÃO SANGUÍNEA  
E METABOLISMO**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
**2018**



**EDUARDO PEIXOTO DE OLIVEIRA**

**USO DE FUNÇÕES DE GREEN NO ESTUDO DA  
BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR TRIDIMENSIONAL  
CONSIDERANDO EFEITOS DE PERFUSÃO SANGUÍNEA E  
METABOLISMO**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães

**UBERLÂNDIA - MG  
2018**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

O48u  
2018      Oliveira, Eduardo Peixoto de, 1991-  
            Uso de funções de Green no estudo da biotransferência de calor  
            tridimensional considerando efeitos de perfusão sanguínea e  
            metabolismo [recurso eletrônico] / Eduardo Peixoto de Oliveira. - 2018.

Orientador: Gilmar Guimarães.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1217>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. 2. Calor - Condução. 3. Green, Funções de.  
I. Guimarães, Gilmar (Orient.) II. Universidade Federal de Uberlândia.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

---

CDU: 621

Maria Salete de Freitas Pinheiro - CRB6/1262



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



## TERMO

**ALUNO:** Eduardo Peixoto de Oliveira

**MATRÍCULA:** 11612EMC005

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos **LINHA DE PESQUISA:** Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor

**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA:** NÍVEL MESTRADO

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** **Uso de Funções de Green no Estudo da Biotransferência de Calor Tridimensional Transiente Considerando Efeitos de Perfusão Sanguínea e Metabolismo**

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Gilmar Guimarães

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada na Sala de Reuniões 1M313 do Bloco 1M, Campus Santa Mônica, em 26 de julho de 2018, às 09:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gilmar Guimarães (orientador) - UFU

Prof. Dr. Cleudmar Amaral de Araújo - UFU

Prof. Dr. Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva - UNIFEI

Uberlândia, 27 de julho de 2018



Documento assinado eletronicamente por **Gilmar Guimarães, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/07/2018, às 08:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva, Usuário Externo**, em 27/07/2018, às 08:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Cleudmar Amaral de Araujo, Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/07/2018, às 09:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0604561** e o código CRC **BCC0B2FE**.



## **AGRADECIMENTOS**

O maior agradecimento sempre é e será a Deus, pois Ele é nossa força e amparo nos momentos mais difíceis e naqueles que pensamos em desistir.

Agradeço a meus pais, Lusia Helena e José Nicásio, às minhas madrinhas, Maria de Fátima, Sandra e Walkíria, a meu padrinho Marcos Antônio, a meus amigos, em especial aos "Danieis" Tabak e Dall'Onder, José Warney; Ediluce e Aninha, grandes professoras e amigas; às minhas coordenadoras Alzira e Veridiana; e à Maria Fernanda que foi grande companheira durante o tempo que estivemos juntos e depois também, por sempre estarem ao meu lado para acompanhar toda a trajetória percorrida.

Um agradecimento muito especial a meu orientador, Gilmar Guimarães, por sempre conduzir meu caminho profissional e também, porque não, pessoal, com muita seriedade e sinceridade.

Agradeço aos companheiros do Laboratório de Transferência de Calor: Modelagem e Experimento, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e aos funcionários do PPGEM da UFU. Agradeço também aos órgãos de fomento (CNPq, CAPES e FAPEMIG) pelos recursos disponibilizados ao Programa que permite a formação de pessoal qualificado e a estruturação dos laboratórios de pesquisa.





*"In the game of life  
The strong survive  
We're on a one-way street  
We gotta make it out alive  
And never let'em drag us down  
[...]*

*Another breath begins  
Another chance to win the fight"*

Trecho da música **The Game of Life**

Composição: Klaus Meine, Mikael Anderson, Martin Hansen e Desmond Child

©Kobalt Music Publishing Ltd

Universal Music Publishing Group

BMG Rights Management US, LLC



OLIVEIRA, E.P. **Uso de Funções de Green no Estudo da Biotransferência de Calor Tridimensional Considerando Efeitos de Perfusão Sanguínea e Metabolismo**. 2018. 100f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia-MG

## Resumo

Este trabalho dedica-se à obtenção de soluções analíticas de problemas de biotransferência de calor usando Funções de Green (FG). O estudo leva em consideração os efeitos decorrentes da pulsação do sangue no interior de um tecido *in vivo*, conhecida como perfusão sanguínea, combinada com os efeitos metabólicos inerentes do organismo. O primeiro efeito é tomado como sendo proporcional à diferença entre as temperaturas do tecido e do interior do corpo e o segundo como termo-fonte na equação da difusão do calor. A equação da difusão de calor quando construída seguindo tais hipóteses é conhecida como *Modelo de Pennes para a Biotransferência de Calor*. O uso de Funções de Green como técnica de obtenção de soluções analíticas justifica-se pela possibilidade de obtenção de soluções dos mais diversos tipos de problemas de condução de calor com geometrias ortogonais, condições de contorno não homogêneas e podendo, ainda, variar com o tempo e o espaço. O problema tratado é tridimensional e transiente, e, com o uso de Funções de Green, pode-se resolvê-lo indentificando o tipo de problema em cada uma das direções e escrever a equação-solução em termos da superposição das Funções de Green correspondentes em cada caso. Apresentam-se neste trabalho a fundamentação teórica da técnica, resolução e validação de problemas unidimensionais e a obtenção do campo de temperaturas em um domínio representativo de um tecido biológico tridimensional, bem como sua verificação intrínseca. O uso das FG auxilia também na interpretação dos termos da equação-solução do problema e, uma vez tendo-se em mãos uma solução exata, pode-se utilizá-la na implementação de rotinas computacionais com o intuito de redução de custos computacionais e aumento da precisão.

**Palavras-chaves:** Solução analítica, condução de calor, biotransferência de calor, Funções de Green.

OLIVEIRA, E.P. **Green Function Based Solution of the Threedimensional Bioheat Transfer Problem Considering Perfusion and Metabolism**. 2018. 100f. M.Sc. Dissertation. Universidade Federal de Uberlândia.

### **Abstract**

The present work rely on presenting analytical solutions for bioheat transfer problems using Green's Functions (GF). In the modeling process for an *in vivo* tissue, both metabolism and blood perfusion effects were considered. The first was taken as a heat source and, the other is modeled as proportional to the temperature difference between the body core and the tissue. The classic conduction equation when combined with those two assumptions is named *Pennes' Bioheat transfer model*. Using Green's function for obtaining the equation solution for this problem is justified for the possibility of its use in many different geometries and boundary conditions that could be both heterogeneous or time-spacing dependent. The problem solved is 3-D time-dependent, and, with GF it can be treated as three independent problems in each direction so the equation-solution would be simply the superposition for the correspondent GF in each direction, just multiplying each other. Also the theoretical bases of the technique, 1-D problems solution and verification and the 3-D transient problem in a domain corresponding a biological tissue, so as its intrinsic verification are presented. By using GF as the way for obtaining the analytical solution of heat conduction problems it can help in understanding the physical meaning of each term of the equation-solution and, once the exact solution is obtained, one can use it to build computational routines and codes in order to reduce the computational cost and improve accuracy.

**Key-words:** Analytical solution, heat conduction, bioheat transfer, Green's Functions

## Lista de Figuras

2.1	(a) Aproximação bidimensional do olho humano feita por meio de um programa de CAD; (b) Domínio analisado; (c) Malha triangular não estruturada (4814 elementos, 2506 nós) (SILVA, 2004). . . . .	6
2.2	Camadas do tecido da estrutura intraocular (CALDEIRA <i>et al.</i> , 2013). . . . .	7
2.3	Carcinoma Lobular in situ, adaptado de ONCOGUIA (2014). Acesso em: 12 abr 2018.	10
2.4	Modelo unidimensional representativo de um tecido exposto a um meio convectivo (FIGUEIREDO, 2014). . . . .	11
3.1	Representação gráfica do sistema de numeração para coordenadas cartesianas (COLE <i>et al.</i> , 2010). . . . .	20
3.2	Exemplos de aplicação do sistema de numeração, da esquerda para a direita: X22, X23Y33 e X23Y33Z33 (FERNANDES, 2009). . . . .	20
4.1	Domínio e condições de contorno para o problema unidimensional do tipo X21. . . . .	24
4.2	Efeito da variação do fluxo na temperatura superficial ao longo do tempo. . . . .	27
4.3	Evolução temporal das temperaturas em todo o domínio. Para um fluxo constante e igual a $1\ 000\ \text{W}/\text{m}^2$ imposto na superfície. . . . .	27
4.4	Domínio e condições de contorno para o problema bidimensional do tipo X11Y12. . . . .	28
5.1	Comparação entre a solução analítica dada pela Eq. (4.23) sem os efeitos de perfusão para um tempo muito grande e metabolismo e a solução em regime permanente (Eq. (5.4)). . . . .	32
5.2	Erro relativo entre a solução analítica unidimensional via FG para tempos muito grandes e a solução em regime permanente quando eliminados os efeitos de perfusão e do metabolismo. . . . .	32
5.3	Domínio e condições de contorno para o problema unidimensional do tipo X21 sem o efeito do metabolismo. . . . .	33
5.4	Comparação entre a solução analítica dada pela Eq. (4.23) via FG para tempos muito grandes sem o efeito do metabolismo e a solução em regime permanente (Eq. (5.14)). . . . .	34

5.5	Erro relativo entre a solução analítica unidimensional em regime permanente com a eliminação do efeito do metabolismo. . . . .	35
5.6	Comparação entre a solução analítica dada pela Eq. (4.23) e a solução do problema 1D considerando os efeitos de perfusão e metabolismo (Eq. (5.22)) ambas em regime permanente. . . . .	37
5.7	Erro relativo entre a solução analítica unidimensional completa em regime permanente e a eliminação do efeito do metabolismo. . . . .	38
6.1	Configuração da estrutura da pele (TOLEDO; LOUREIRO, 2014). . . . .	39
6.2	Domínio de cálculo representativo do antebraço humano submetido a um fluxo de calor na superfície, temperatura prescrita na base (em contato com o organismo) e à convecção nas demais faces - Problema X21Y33Z33. . . . .	41
6.3	Evolução da temperatura no centro da superfície do tecido ao longo do tempo quando aplicado um fluxo $q_0 = 1.000 \text{ W/m}^2$ (Problema X21Y33Z33). . . . .	47
6.4	Distribuição de temperaturas na superfície ( $x = 0$ ) para $t = 1 \cdot 10^4 \text{ s}$ (Problema X21Y33Z33). . . . .	48
7.1	Evolução da temperatura superficial do tecido nos casos tridimensional com efeito de convecção desprezível e unidimensional, ambos resolvidos via Funções de Green. . . . .	50
7.2	Erro relativo entre as soluções 1D e 3D (com convecção lateral desprezível) ao longo do tempo (Eq. (7.1)). . . . .	51
7.3	Evolução da temperatura superficial do tecido nos casos 1D e 3D com as direções $y$ e $z$ estendidas, ambos resolvidos via FG (200 autovalores). . . . .	52
7.4	Erro relativo entre as soluções 1D e 3D (com a superfície estendida) ao longo do tempo. . . . .	53
7.5	Domínio de cálculo representativo do antebraço humano submetido a um fluxo de calor na superfície, temperatura prescrita na base (em contato com o organismo) e isolado nas demais faces - Problema X21Y22Z22. . . . .	54
8.1	Definição do plano $\sigma: y = 0,015 \text{ m}$ . . . . .	59
8.2	Sondas no plano $\sigma: y = 0,015 \text{ m}$ . . . . .	59
8.3	Campo de temperaturas no tecido em $t = 1 \cdot 10^4 \text{ s}$ (200 autovalores). . . . .	61
8.4	Evolução temporal da temperatura na superfície do tecido exposta ao fluxo. . . . .	62
8.5	Evolução temporal da temperatura 1 mm abaixo da superfície do tecido exposta ao fluxo. . . . .	63
8.6	Evolução temporal da temperatura em $x = 5 \text{ mm}$ . . . . .	63
8.7	Evolução temporal da temperatura em $x = 10 \text{ mm}$ . . . . .	64
8.8	Evolução temporal da temperatura em $x = 15 \text{ mm}$ . . . . .	65
8.9	Evolução temporal da temperatura em $x = 20 \text{ mm}$ . . . . .	65

8.10	Evolução temporal da temperatura em $x = 25$ mm. . . . .	66
8.11	Evolução temporal da temperatura em $x = 30$ mm. . . . .	66
8.12	Evolução temporal da temperatura na região central do tecido. . . . .	67
8.13	Evolução temporal da temperatura na face lateral do tecido, sujeita à convecção. . . . .	68
8.14	Evolução temporal da temperatura na intersecção das faces laterais sujeitas à convecção. . . . .	69
8.15	Comparação das respostas de sondas seleccionadas. . . . .	69
8.16	Comparação das respostas de sondas seleccionadas a um tecido sem a presença de perfusão sanguínea e metabolismo. . . . .	70
8.17	Campo de temperaturas no tecido morto em $t = 1 \cdot 10^4$ s (200 autovalores). . . . .	71
A.1	Domínio representativo de um tecido biológico vivo e condições de contorno para o problema unidimensional do tipo X21 . . . . .	92
A.2	Comparação entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem metabolismo e o modelo em regime permanente para a mesma condição. . . . .	96
A.3	Erro relativo entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem metabolismo com 1 000 autovalores, e o modelo em regime permanente para a mesma condição. . . . .	96
A.4	Comparação entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem perfusão e o modelo em regime permanente para a mesma condição. . . . .	98
A.5	Comparação entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem perfusão e o modelo em regime permanente para a mesma condição. . . . .	98
A.6	Comparação entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem perfusão e o modelo em regime permanente para a mesma condição. . . . .	100
A.7	Comparação entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem perfusão e o modelo em regime permanente para a mesma condição. . . . .	100

## Lista de Tabelas

3.1	Sistema de Numeração para os Diferentes Tipos de Condições de Contorno . . . . .	19
6.1	Propriedades do tecido em estudo e condições de contorno (HOLMES, 1997) . . . . .	40
7.1	Estudo da convergência da solução tridimensional com efeitos convectivos laterais desprezíveis para um ponto no centro da superfície do domínio em relação à solução unidimensional. $m, n, p$ indicam o número de autovalores utilizados na série nas direções $x, y, z$ , respectivamente. . . . .	51
7.2	Estudo da convergência da solução tridimensional com dimensões grandes nas direções $y$ e $z$ em relação à solução unidimensional para um ponto central da superfície do tecido. $m, n, p$ indicam o número de autovalores utilizados na série nas direções $x, y, z$ , respectivamente. . . . .	53
8.1	Posições, em termos de suas coordenadas [m], das sondas numéricas colocadas no domínio representativo de um tecido biológico <i>in vivo</i> em estudo. . . . .	60



## Lista de Símbolos

- a, b, L - dimensões do domínio em estudo
- B - número de Biot
- c - calor específico do tecido
- $c_b$  - calor específico do sangue
- $c_f$  - calor específico de um fluido sobre uma superfície
- C - velocidade da onda no tecido
- $C_1, C_2$  - constantes auxiliares
- $^{\circ}\text{C}$  - graus Celsius
- $f_i(t)$  - condição de contorno genérica
- g - grama (kg - kilograma)
- $g(x)$  - termo fonte
- $g_0$  - geração de calor volumétrica constante
- G - Função de Green
- $G^*$  - variável auxiliar
- $h, h_f, h_0$  - coeficiente de convecção
- $h_i$  - indicador do tipo de condição de contorno adotada
- i, j - contadores, sub-índices
- I - integral
- k - condutividade térmica
- $k_i$  - indicador do tipo de condição de contorno adotada
- m - metro (cm - centímetro, mm - milímetro)
- m, n, p - contadores (autovalores)
- M - variável auxiliar

- $q(x, t)$  - fluxo de calor em função da posição e do tempo  
 $q_0$  - fluxo de calor imposto  
 $Q_e$  - fluxo de calor externo  
 $Q_m$  - taxa de calor devido ao metabolismo  
 $Q''$  - taxa de transferência de calor entre o sangue e o tecido biológico  
 $r$  - raio  
 $\mathbf{r}$  - vetor posição  
 $\mathbf{r}'$  - vetor posição da aplicação do fluxo instantâneo para a definição da FG  
 $s$  - segundo (unidade no SI)  
 $S$  - taxa de transferência de calor por unidade de volume depositada por um *laser*  
 $S_i$  - superfície em estudo  
 $t$  - tempo, instante de análise  
 $T$  - distribuição de temperatura  
 $T_a$  - temperatura arterial  
 $T_{b,i}$  - temperatura no interior do tecido  
 $T_{b,s}$  - temperatura na superfície do tecido  
 $T_c$  - temperatura da base do tecido  
 $T_p$  - solução particular  
 $T_0$  - temperatura inicial  
 $T_\infty, T_f$  - temperatura do meio  
 $W$  - watt  
 $W$  - variável auxiliar  
 $x, y, z$  - coordenadas cartesianas  
 $x', y', z'$  - coordenadas cartesianas do ponto de aplicação do fluxo instantâneo para a definição da FG  
 $X, Y, Z$  - coordenadas cartesianas para indicação do tipo de problema térmico  
 $z$  - cota  
 $\alpha$  - difusividade térmica  
 $\beta_m$  - autovalores da FG na direção  $x$   
 $\beta_n$  - autovalores da FG na direção  $y$   
 $\beta_p$  - autovalores da FG na direção  $z$   
 $\gamma_n$  - autovalores na direção  $y$   
 $\delta$  - função delta de Dirac

$\epsilon$	- espessura
$\eta$	- direção normal
$\Theta$	- variável auxiliar
$\lambda$	- variável auxiliar
$\rho$	- massa específica
$\rho_b$	- massa específica do sangue
$\rho_f$	- massa específica de um fluido sobre uma superfície
$\tau$	- instante de aplicação do fluxo local no problema auxiliar para a definição da FG
$\tau_q$	- tempo característico, tempo de relaxação térmica
$\phi$	- ângulo de fase
$\omega$	- frequência de um fluxo de calor periódico
$\omega_b$	- taxa de perfusão sanguínea
$\partial$	- derivada parcial
$\propto$	- proporcional a
$\nabla$	- operador nabla
$\nabla \cdot ()$	- divergente de um campo
$\nabla()$	- gradiente de uma função
$\nabla^2()$	- laplaciano de uma função
$\cos x$	- função cosseno do argumento $x$
$\cosh x$	- função cosseno hiperbólico do argumento $x$
$\exp$	- função exponencial
$\sin x$	- função seno do argumento $x$
$\sinh x$	- função seno hiperbólico do argumento $x$
$\operatorname{tg} x$	- função tangente do argumento $x$

## Abreviaturas e siglas

EDO - Equação Diferencial Ordinária

EDP - Equação Diferencial Parcial

FG - Função de Green

JAP - *Journal of Applied Physics*

RHS - Segundo membro de uma equação (lado direito), ou, do inglês, *Right Hand Side*

UFU - Universidade Federal de Uberlândia

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>4</b>
2.1	O modelo de Pennes para transferência de calor em tecidos biológicos . . . . .	4
2.2	Problemas diretos . . . . .	5
2.3	Problemas Inversos . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Funções de Green: Fundamentos</b>	<b>14</b>
3.1	Condução unidimensional em regime permanente . . . . .	15
3.2	Condução unidimensional transiente - Problema auxiliar . . . . .	16
3.3	Propriedades das Funções de Green para problemas transientes . . . . .	18
3.4	Sistema de Numeração . . . . .	19
3.5	Equação-solução integral baseada em Funções de Green . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Problemas Uni e Bidimensionais</b>	<b>23</b>
4.1	Problema X21 . . . . .	23
4.2	Placa Plana - Problema X11Y12 . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Verificação Intrínseca da Solução para o Problema de Pennes Unidimensional</b>	<b>31</b>
5.1	Regime permanente sem os efeitos de perfusão e de metabolismo . . . . .	31
5.2	Regime permanente sem o efeito do metabolismo ( $Q_m = 0$ ) . . . . .	33
5.3	Equação do biocalor 1D em regime permanente com os efeitos de perfusão e metabolismo	35
<b>6</b>	<b>Problemas Tridimensionais</b>	<b>39</b>
6.1	Problema X21Y33Z33 . . . . .	40
<b>7</b>	<b>Verificação Intrínseca da Solução do Problema X21Y33Z33 da Seção 6.1</b>	<b>49</b>
7.1	Eliminação do efeito convectivo nas faces laterais . . . . .	49
7.2	Avaliação do efeito do tamanho do domínio . . . . .	52
7.3	Problema X21Y22Z22 . . . . .	54

<b>8 Resultados</b>	<b>58</b>
8.1 Análise da evolução da temperatura em vários pontos do tecido . . . . .	61
8.2 Análise de sondas dispostas na secção central e na face lateral (sujeita à convecção) do tecido . . . . .	67
8.3 Respostas de sondas seleccionadas à anulação do efeito do metabolismo . . . . .	68
8.4 Comentários sobre presença de uma fonte de calor estranha ao metabolismo no tecido	71
<b>9 Conclusão</b>	<b>74</b>
9.1 Propostas para trabalhos futuros . . . . .	75
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>76</b>
<b>Apêndices</b>	<b>80</b>
<b>A Demonstração da equação-solução integral baseada em Funções de Green para problemas unidimensionais</b>	<b>80</b>
<b>B Dedução da condição inicial dada pela Eq. (4.9)</b>	<b>85</b>
<b>C Resolução das integrais da solução tridimensional</b>	<b>88</b>
<b>Anexo</b>	<b>92</b>
<b>A Solução Unidimensional para o domínio com condição inicial uniforme e igual à temperatura arterial</b>	<b>92</b>
A.1 Dedução da solução unidimensional para o modelo da biotransferência de calor para $T(x, 0) = T_a$ via Funções de Green . . . . .	92
A.2 Regime permanente sem o efeito do metabolismo . . . . .	95
A.3 Regime permanente sem o efeito de perfusão . . . . .	97
A.4 Modelo completo em regime permanente . . . . .	99

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

A história da Ciência revela que a curiosidade e a busca pelo entendimento do comportamento de tudo que nos rodeia é o combustível para o avanço tecnológico em diversas áreas, sejam nas Humanidades, nas Ciências Biológicas ou nas Ciências Exatas e da Terra. Nesse sentido podemos citar três pilares fundamentais para que os objetivos dessas buscas sejam alcançados: a Matemática, a Física e a Filosofia.

A Filosofia, como "ciência mãe", é a precursora de todo o pensamento humano e fundamenta as questões éticas e morais em qualquer trabalho a ser desenvolvido. A Matemática, com sua linguagem simples e elegante, busca explicar, com segurança, através de soluções de equações e modelos matemáticos provindos de uma situação-problema o comportamento e a evolução do mesmo nas mais diversas áreas. Já a Física é fundamental nas descrições teóricas e explicações dos fenômenos naturais e aplicação dos mesmos. Dessa combinação, o presente trabalho nasceu.

O uso de soluções analíticas nas mais diversas áreas da Engenharia vem, nas últimas décadas, ganhando papel de destaque, uma vez que o uso de formas fechadas ou até mesmo de séries infinitas, dependendo do número de termos usados, dão segurança, confiabilidade e rapidez na obtenção de respostas. Além de darem mais robustez a rotinas computacionais que são utilizadas na previsão e análise do comportamento dos mais diversos fenômenos físicos como o comportamento de uma estrutura, o desgaste de uma ferramenta em processos de fabricação, o comportamento térmico de uma peça ou de um tecido biológico, permitindo ainda uma redução do custo computacional envolvido por aumentarem a agilidade nos cálculos e facilitarem a implementação.

O problema da biotransferência de calor admite várias condições de contorno e iniciais, dependendo do foco a ser analisado. Pode-se citar a estimação do campo de temperaturas no braço humano, em mamas, em um órgão específico ou até mesmo em ossos, com a finalidade de se comparar um valor previsto com um valor medido e inferir sobre a existência ou não de uma doença como, por

exemplo, câncer de pele e de mama. Como a variedade de condições de contorno é muito grande e a geometria do domínio em análise permite uma infinidade de combinações, o uso da técnica de solução por Funções de Green é altamente indicado, uma vez que, com condições de contorno transientes, o uso de separação de variáveis é descartado e a presença de mais de uma dimensão inviabiliza o uso de Transformadas de Laplace. Assim, uma vez indentificadas as condições de contorno, estabelece-se o tipo de problema e é determinada a Função de Green correspondente. Desse modo, a equação-solução torna-se um simples problema de integração matemática de cada termo envolvido e cada integral permite a interpretação física seja das condições de contorno, da condição inicial ou da presença ou não de termos-fonte de geração de calor.

Outra vantagem da obtenção da solução de um problema de transferência de calor via Funções de Green é a possibilidade de se construir, sem grandes dificuldades, a solução para problemas multidimensionais a partir da obtenção das Funções de Green unidimensionais correspondentes e a equação-solução será formada pela superposição das Funções de Green em cada direção.

O grande trunfo por trás do uso de Funções de Green está na possibilidade da obtenção de soluções de problemas de condução de calor dos mais diversos tipos e de alta complexidade. Por exemplo, problemas tridimensionais transientes, como o apresentado neste trabalho, com termos de geração de calor (uniformes ou não) podendo admitir condições de contorno não homogêneas e com modelo matemático governado por uma equação diferencial parcial em que não aparecem somente as derivadas espaço-temporais da função incógnita, mas ela mesma também está presente. Como essas não-homogeneidades podem variar com o tempo e o espaço essa potencialidade de aplicação da técnica é a motivação principal no desenvolvimento deste trabalho.

São propostas, como objetivos finais, a solução de um problema de transferência de calor em um tecido biológico *in vivo* submetido a um fluxo de calor conhecido e a avaliação do comportamento do mesmo quando exposto a tal condição. O presente trabalho busca resolver o problema direto, bem posto, ou seja, com as condições de contorno e iniciais conhecidas e respeitando a ordem da equação diferencial parcial que rege toda a problemática, através do uso de Funções de Green para a obtenção da solução. O uso de Funções de Green na solução de problemas em transferência de calor é de extrema relevância por sua simplicidade de aplicação e abrangência.

No Capítulo 2, faz-se uma revisão bibliográfica a respeito da evolução histórica e de trabalhos já publicados sobre o problema da Biotransferência de Calor. Apresenta-se o modelo clássico para este tipo de problema, conhecido como *Modelo de Pennes*, proposto por Harry H. Pennes, que estabelece a equação governante para o problema cuja solução é obtida nesse trabalho. São estabelecidas as simplificações e hipóteses que o modelo leva em consideração. A seguir, faz-se um levantamento sobre as publicações que resolvem o problema direto da transferência de calor em tecidos biológicos tanto analítica quanto numericamente. É importante traçar esse paralelo entre as duas abordagens, uma vez que cada uma traz em si vantagens e desvantagens. Por fim, são apresentados trabalhos que discutem Problemas Inversos em (bio)transferência de calor que são, do



ponto de vista matemático, problemas mal-postos. A intenção deste trabalho é, portanto, apresentar soluções analíticas para situações ainda não exploradas na literatura: solução da Equação de Pennes tridimensional por Funções de Green levando-se em conta o efeito de perfusão sanguínea e a presença do metabolismo no tecido.

Apresentam-se, no Capítulo 3, os fundamentos teóricos (definições, propriedades e definição de sistemas de numeração) que embasam o uso de Funções de Green na solução de problemas de difusão de calor. É apresentada a equação-solução integral em termos de Funções de Green que é demonstrada no Apêndice A.

No Capítulo 4, as aplicações da técnica de solução por Funções de Green em casos unidimensionais e bidimensionais, explorando sua versatilidade e simplicidade. Os Apêndices B e C trazem demonstrações que complementam a solução apresentada.

Soluções analíticas devem respeitar as condições de contorno e a condição inicial acopladas à Equação Diferencial bem como satisfazê-la. No entanto, mesmo sendo satisfeitas essas condições, isto pode não revelar alguns erros como a convergência da série ou o número de autovalores necessários para que ela ocorra. Para tanto, é recomendado que seja feita a verificação intrínseca da solução obtida. Verificar intrinsecamente uma solução analítica é o processo de determinar valores numéricos corretos para ela, em muitas situações diferentes, de duas ou mais maneiras distintas. Isto dá segurança à solução e leva a crer que o processo de obtenção de valores numéricos corretos estará garantida. É relevante ressaltar e destacar que *verificação intrínseca* difere de *verificação numérica* que é utilizada pelos adeptos às técnicas numéricas como diferenças, elementos e volumes finitos. Verificação intrínseca é a comparação entre duas soluções exatas distintas com o objetivo de assegurar que os valores obtidos estão corretos com uma precisão muito maior do que aquela geralmente aceita para soluções numéricas. Essa discussão e a verificação dos resultados obtidos no Capítulo 4 são apresentadas nos Capítulos 5 e 7, e no Anexo A.

No Capítulo 6 apresenta-se a solução para o problema tridimensional da biotransferência de calor resolvido por Funções de Green, objetivo do presente trabalho. Para assegurar a validade dos resultados obtidos, é feita a verificação intrínseca da solução no Capítulo 7, através da modelagem de pontos específicos do domínio de cálculo por meio de sondas numéricas com o intuito de se estudar a evolução da temperatura tanto em pontos da superfície quanto em pontos interiores ao domínio do tecido.

Ideias conclusórias e análises finais acerca dos resultados obtidos e propostas de trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 9.

# CAPÍTULO II

## REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O objetivo que norteia o presente trabalho é a obtenção da solução analítica para um problema tridimensional de biotransferência de calor usando Funções de Green. Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica ilustrando as diversas abordagens que tal problema recebe. É feita uma breve discussão sobre o modelo de biotransferência de calor mais utilizado e aceito, conhecido como modelo de Pennes. A seguir, são apresentados trabalhos que o solucionaram via métodos numéricos e, por fim, uma discussão sobre os trabalhos que obtêm a solução analítica porém com simplificações no modelo ou que não utilizam Funções de Green. Ao final, são apresentados trabalhos que usam técnicas de problemas inversos para obtenção de alguns parâmetros do modelo térmico de Pennes.

### 2.1 O modelo de Pennes para transferência de calor em tecidos biológicos

A equação da condução de calor foi modificada por Harry H. Pennes com o intuito de modelar problemas de transferência de calor em tecidos humanos. No conhecido artigo "*Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm*" (JAP - volume 1, No. 2, de agosto de 1948), Pennes propôs, a partir do balanço de energia no antebraço humano, a seguinte equação que leva seu nome e é conhecida como **Equação da Biotransferência de Calor**:

$$k\nabla^2 T + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T) + Q_m = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

em que  $\rho$ ,  $c$  e  $k$  representam, respectivamente, a massa específica [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ], o calor específico [ $\text{J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$ ] e a condutividade térmica do tecido [ $\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ ],  $\omega_b$  é a taxa de perfusão sanguínea (em  $\text{mL}/(\text{mL} \cdot \text{s})$ ),  $\rho_b$  e  $c_b$  referem-se, respectivamente, à massa específica e ao calor específico do sangue,  $T_a$  é a temperatura arterial (temperatura na qual o sangue se encontra) e  $T$  a distribuição

de temperatura no domínio (tecido), ambas dadas em  $^{\circ}\text{C}$ ,  $Q_m$  é a taxa de geração de calor devido ao metabolismo [ $\text{W}/\text{m}^3$ ] e  $t$  o tempo [s].

Este modelo é amplamente aceito para descrever problemas de condução de calor em tecidos biológicos, apesar de, nas últimas décadas, muitos pesquisadores questionarem a sua validade e as hipóteses assumidas por Pennes (WISSLER, 1998). Três questões levantadas por Wissler (1998) ainda permanecem abertas acerca do modelo descrito pela Eq. (2.1):

- Os dados experimentais de Pennes carregam consigo uma leve divergência com relação aos resultados teóricos;
- Pennes deu atenção somente à condução de calor entre os vasos sanguíneos de maior diâmetro e o tecido, no entanto, é possível de se demonstrar que as trocas de calor também ocorrem com arteríolas e capilares;
- A perfusão pode não ser isotrópica no domínio.

Apesar destas questões ainda em discussão e de muitos pesquisadores proporem diversos outros modelos como alternativa ao modelo de Pennes como pode ser consultado no trabalho de Charny (1992), o presente trabalho é baseado no modelo original de Pennes pelo fato de seus resultados serem muito próximos da realidade e do modelo tratar com certa verossimilhança os efeitos mais consideráveis de trocas de calor em tecidos biológicos.

## 2.2 Problemas diretos

Segundo Wissler (1998), o objetivo dos estudos de Pennes era avaliar a aplicabilidade da teoria sobre o escoamento sanguíneo no antebraço em termos da taxa local de produção de calor e da perfusão sanguínea. A contribuição principal de Pennes nesse sentido foi propor que a taxa de transferência de calor entre o sangue e o tecido biológico é proporcional ao produto da perfusão (volumétrica) pela diferença entre as temperaturas do sangue arterial e do tecido em estudo.

$$Q'' \propto \omega_b (T_a - T) \quad (2.2)$$

Wulff (1974) discute a validade da Eq. (2.1) analisando em detalhes o termo de perfusão. Para tanto, parte da equação da energia, obtida a partir de um balanço de energia que inclui dois termos de geração: a taxa de metabolismo do organismo por unidade de volume e o efeito da perfusão sanguínea (obtido a partir da Lei de Fick). Sendo assim, a Equação da Biotransferência de Calor pode ser obtida a partir do seguinte modelo:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \omega_b \rho_b c_b (T_{b,i} - T_{b,s}) + Q_m = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3)$$

sendo  $T_{b,i}$  a temperatura no interior e  $T_{b,s}$  a temperatura na superfície. Simplificando-se a Eq. (2.3), tomando-se como hipótese um tecido com propriedades físicas constantes e assumindo que  $T_{b,i} = T_a$  e  $T_{b,s} = T$ , chega-se à Equação de Pennes (Eq. (2.1)).

Vários pesquisadores vêm, nas últimas décadas, analisando problemas que envolvem a Equação da Biotransferência de Calor (Eq. (2.1)). A maioria, entretanto, obtém a solução desta equação via métodos numéricos. A relevância e aplicabilidade de tais modelos físicos pode ser avaliada, por exemplo, por meio dos trabalhos de Zhao *et al.* (2005) e Souza (2009).

Deng & Liu (2002) utilizaram o método de Monte Carlo para resolver o problema tridimensional ligado à hipertermia causada por um tumor.

Silva (2004) discute o problema da biotransferência de calor em tecidos oculares devida à presença de implantes na retina e faz uma análise numérica do problema por meio da técnica de volumes finitos, aproximando o olho por um modelo bidimensional como mostrado na Fig. 2.1.

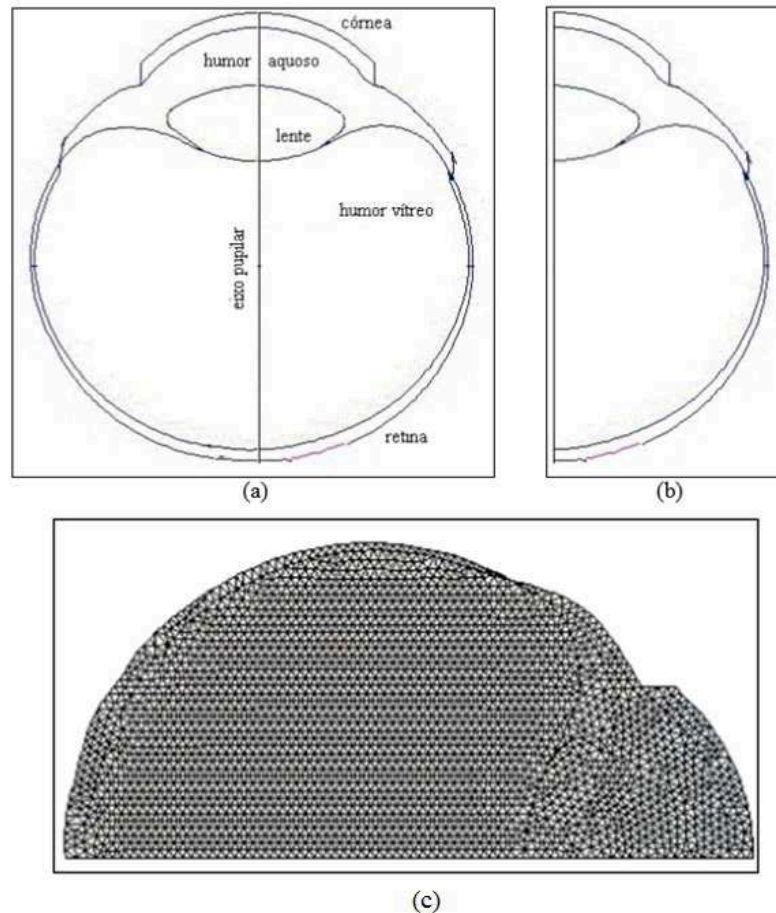


Figura 2.1: (a) Aproximação bidimensional do olho humano feita por meio de um programa de CAD; (b) Domínio analisado; (c) Malha triangular não estruturada (4814 elementos, 2506 nós) (SILVA, 2004).

Zhao *et al.* (2005) propuseram um esquema numérico unidimensional para resolver o problema de Pennes usando um esquema de diferenças finitas.

Bagaria & Johnson (2005) trataram o problema da biotransferência de calor de forma híbrida: analítica e numérica. A análise feita apresenta métodos de otimização para o tratamento de hipertermia e os resultados numéricos são baseados em soluções analíticas tridimensionais, sem o efeito de perfusão, obtidas por separação de variáveis em coordenadas cilíndricas.

Yang *et al.* (2007) modificaram o modelo de Pennes expandindo a equação da biotransferência de calor com a inclusão de uma parcela que modela a evaporação de água em tecidos durante o aquecimento, alterando, assim, o termo de geração de calor no metabolismo.

Souza (2009) apresentou uma solução via Volumes Finitos acoplada a técnicas de otimização para analisar os termos fonte da Eq. (2.1) em um problema aplicado ao olho humano, modelando o efeito da temperatura por uma chamada função dano que descreve como acontece a desnaturação de células. Nesse trabalho, a quantidade de volumes e o tipo de malha (uniforme ou não uniforme) foram adaptados dependendo da região do olho em que se desejava analisar. Para a realização de experimentos, Souza (2009) traduziu os termos fonte da equação do bio-calor como a energia produzida por um *laser* que percorre o domínio do olho ao longo do tempo e, a partir disso, utilizou métodos para a otimização da densidade de energia.

Caldeira *et al.* (2013) avaliaram o modelo de Pennes também aplicado ao processo de transferência de calor no olho humano em resposta à aplicação de um laser na superfície do olho, como o que ocorre durante uma cirurgia a *laser*. A partir de um modelo multicamadas, como descrito pela Fig. 2.2, com propriedades termofísicas constantes em cada camada do tecido, e adotando um sistema de coordenadas cartesianas, via volumes finitos. Na elaboração de seu modelo, os autores não consideraram o efeito da perfusão sanguínea e assumiram o processo como unidimensional e transiente. A interpolação feita foi por diferenças centrais e com uma discretização totalmente implícita, por isso, para a modelagem das condições de contorno foram aplicadas a técnica de meio-volume na fronteira.



Figura 2.2: Camadas do tecido da estrutura intraocular (CALDEIRA *et al.*, 2013).

Ainda no âmbito das soluções numéricas, pode-se citar os trabalhos de Caldeira *et al.* (2013), Lobosco, Loureiro & Reis (2014), Toledo & Loureiro (2014) e Bagaria & Johnson (2005).

Lobosco, Loureiro & Reis (2014) trataram o modelo de Pennes (Eq. (2.1)) como descrito originalmente e buscaram encontrar a solução numérica para tal problema via Diferenças Finitas por meio de um esquema explícito utilizando o método de Euler e traçando um paralelo com o tratamento de câncer via hipertermia. Trazem resultados para o problema tridimensional e analisam o tecido

por meio da variação do comportamento de nanopartículas magnéticas acopladas ao modelo na discretização do mesmo.

Toledo & Loureiro (2014) buscaram desenvolver um modelo computacional para estudar o efeito de queimaduras sobre a pele avaliando o dano térmico causado quando o tecido é submetido à temperaturas críticas que podem ocasionar desnaturação de proteínas e alterações celulares podendo levar até à necrose do tecido. Para tanto, utilizaram métodos explícitos para as discretizações espacial e temporal, além de utilizar o método de Saul'yev's (DEHGHAN, 2004) que, por ser incondicionalmente estável, permite uma certa liberdade na escolha do passo de tempo.

Já Varón & Elccabe (2014) fizeram um estudo teórico da hipertermia em um tecido biológico induzida por radiofrequências, em um modelo tridimensional que acopla o problema térmico às condições de contorno que são dependentes do termo fonte. Analisam o comportamento de tecidos carregados com nanopartículas e perfazem uma análise numérica via Volumes Finitos.

No trabalho de Soares & Wrobel (2018) é proposto um esquema numérico diferenciado para a resolução da equação do biocalor. A discretização espacial é feita pelo Método de Elementos Finitos e, durante a evolução temporal, as integrais temporais são localmente avaliados por métodos de passo simples.

É vasta a bibliografia que recorre a métodos numéricos para a resolução de problemas nas mais variadas áreas de Engenharia, em especial Termofluidos, portanto, fez-se uma compilação de trabalhos que se aproximam da discussão e das soluções que serão obtidos nos capítulos seguintes.

Vyas & Rustgi (1992) abordaram um problema tridimensional e resolveram a equação de Pennes em coordenadas cilíndricas (Eq. (2.4)), acrescentando aos termos fonte a taxa de transferência de calor por unidade de volume depositada na superfície de um tecido biológico por um *laser*, indicada por  $S(r, z, t)$ . Eles obtiveram expressões simplificadas para a solução analítica do campo de temperaturas usando *Funções de Green*, mas, mesmo o modelo sendo tridimensional, foram feitas simplificações nos termos de geração que representam tanto a perfusão quanto o metabolismo.

$$k\nabla^2 T(r, z, t) + \omega_b \rho_b c_b T(r, z, t) + S(r, z, t) = \rho c \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

Liu & Xu (1999) propuseram uma estimativa para a perfusão sanguínea solucionando o problema descrito pela Eq. (2.1) com condições de contorno adequadas por meio de *separação de variáveis* e *equações características*, assim, obtêm a perfusão supondo que ela é a resposta a um fluxo de calor senoidal responsável pelo aquecimento da pele em regime permanente. Chegaram então à conclusão de que a perfusão, sob dadas hipóteses, pode ser estimada conhecendo-se as propriedades do tecido biológico ( $\rho_b$  e  $c_b$ ) e a frequência do fluxo imposto ( $\omega$ ). Para tanto, segundo os autores, basta medir-se a diferença entre as fases ( $\phi$ ) do fluxo de calor na superfície do tecido e do campo de

temperaturas, chegando-se à forma mostrada na Eq. (2.5) para a perfusão sanguínea.

$$\omega_b = -\frac{\rho c \omega}{\rho_b c_b \operatorname{tg}(2\phi)} \quad (2.5)$$

Shih *et al.* (2007) resolveram o problema transiente em uma dimensão desprezando o termo de metabolismo na Eq. (2.1) e assumindo que a pele pode ser tratada como um sólido semi-infinito submetido a um fluxo prescrito periódico, e investigaram o efeito deste fluxo de calor na pele utilizando, para a solução do problema, *transformadas de Laplace*.

A caracterização da propagação de calor através de um tecido biológico levando-se em consideração tratamentos para hipertermia é feita de modo analítico por Vafai & Mahjoob (2009). Nesse trabalho são obtidas equações, resolvidas por separação de variáveis, e adimensionais que permitem a interpretação dos efeitos do metabolismo e das estruturas celulares na obtenção do campo de temperaturas. São deduzidas também correlações que permitem avaliar tais parâmetros sob diversas condições.

O trabalho de Romero-Mendéz *et al.* (2010) tratou de um problema bidimensional adimensionalizado no qual a equação da biotransferência de calor foi resolvida nessa forma via *separação de variáveis*. Ainda apresentou uma aproximação unidimensional, além de utilizar técnicas de resolução de problemas inversos para a determinação da profundidade de uma queimadura.

Outros autores buscaram resolver o problema analítico propondo modelos modificados para estudar situações particulares ou termos de interesse na Eq. (2.1), como Lakhssassi, Kengne & Semmanou (2010) que determinaram a solução analítica do problema unidimensional de Pennes (Eq. (2.1)) em regime permanente, tomando como constante o termo de perfusão e admitindo nulo o termo de geração devido ao metabolismo. No modelo foi proposta ainda uma modificação no termo representativo da temperatura, fazendo uma ponderação entre a temperatura do tecido e a temperatura arterial. As soluções obtidas são dadas em termos de *funções trigonométricas, funções racionais e de funções elípticas de Jacobi*.

Fazlali & Ahmadikia (2013) propuseram soluções analíticas para modelos de biotransferência de calor baseados e não baseados no modelo de Fourier. Para estes autores, a equação da biotransferência de calor pode assumir duas formas:

- *Seguindo o modelo de Fourier*: A equação da biotransferência de calor assume a forma apresentada na Eq. (2.1);
- *Modelo de transferência de calor baseado na equação de onda*: neste modelo, a equação da condução é escrita na forma:

$$q(x, t) + \tau_q \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = -k \nabla T(x, t) \quad (2.6)$$

sendo  $\tau_q$  o tempo característico. A forma geral da equação de Pennes nesse modelo passa a ser, em sua versão unidimensional, escrita na forma:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \left( Q_m + Q_{ext} + \tau_q \frac{\partial Q_m}{\partial t} + \tau_q \frac{\partial Q_{ext}}{\partial t} \right) - \omega_b \rho_b c_b (T_a - T) = \\ = \tau_q \rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + (\rho c + \tau_q \omega_b \rho_b c_b) \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde  $\tau_q = \alpha/C^2$ , com  $C$  sendo a velocidade da onda no tecido [m/s], o tempo de relaxação térmica. Para a solução e comparação destes modelos, os autores utilizaram *transformadas de Laplace*.

O trabalho de Figueiredo (2014) apresenta uma análise analítica de um modelo unidimensional em regime permanente e investiga, numericamente, o problema de transferência de calor em tecidos biológicos tomando como termo fonte o calor produzido por um câncer de mama (ver Fig. 2.3) em regimes permanente e transiente.

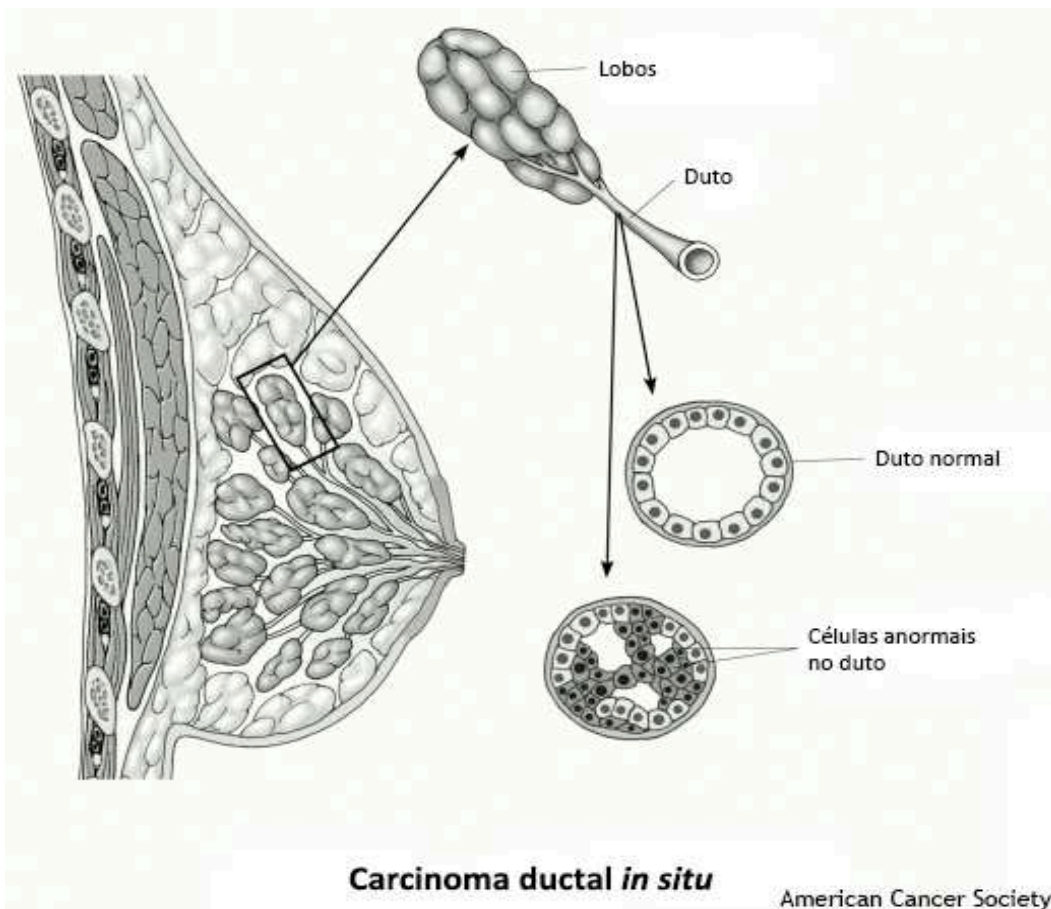


Figura 2.3: Carcinoma Lobular in situ, adaptado de ONCOGUIA (2014). Acesso em: 12 abr 2018.



O modelo unidimensional explorado por Figueiredo (2014) representa uma pequena espessura de um tecido com fontes de calor diferentes para simular o metabolismo em um tecido normal e naquele em que o tumor se instala com uma geração atípica de calor, como mostrado na Fig. 2.4.

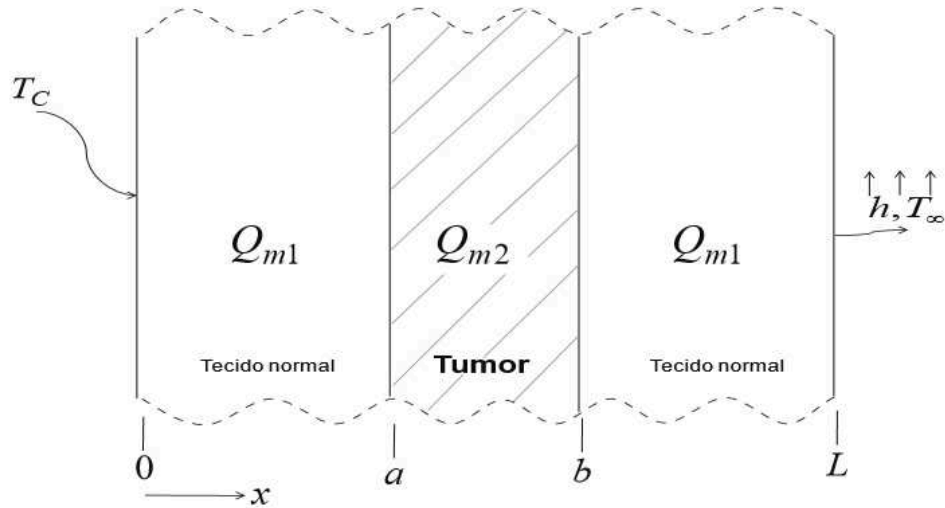


Figura 2.4: Modelo unidimensional representativo de um tecido exposto a um meio convectivo (FIGUEIREDO, 2014).

O modelo matemático que representa a transferência de calor no domínio esquematizado na Fig. 2.4 e descrito pela Eq. (2.1) é então bem posto conhecidas as condições de contorno e iniciais (Eqs. (2.8) a (2.10)):

$$T(x, 0) = T_0 \quad (2.8)$$

$$T = T_c, \text{ em } x = 0 \quad (2.9)$$

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h(T - T_\infty) \quad (2.10)$$

com

$$Q_m = \begin{cases} Q_{m1}, & \text{para } 0 < x < a \text{ e } 0 < x < L \\ Q_{m2}, & \text{para } a < x < b \end{cases} \quad (2.11)$$

sendo  $T_0$  a temperatura inicial do domínio,  $T_c$  a temperatura arterial,  $T_\infty$  a temperatura do ambiente

circundante,  $Q_{m1}$  e  $Q_{m2}$  constantes que representam as taxas metabólicas no seus respectivos domínios, todos termos conhecidos. O problema, seguindo o sistema de numeração proposto por BECK (2010) e detalhado no capítulo 3, é do tipo X13 (condição do 1<sup>o</sup> tipo – temperatura prescrita – em  $x = 0$  e do 3<sup>o</sup> tipo – fluxo prescrito – em  $x = L$ ) e a solução assume a forma de séries em termos de Funções de Green após mudanças variáveis adequadas (ver também (SHIH *et al.*, 2007)).

Askarizadeh & Ahmadikia (2015) deduziram soluções analíticas para modelos físicos bidimensionais para biotransferência de calor para situações baseadas e não-baseadas no modelo de Fourier via Transformadas de Laplace. Em seu trabalho, os autores consideraram os efeitos de perfusão sanguínea e metabolismo e avaliaram três modelos distintos: *dual-phase-lag* (DPL), modelo térmico baseado na equação da onda - *thermal wave* (TW) e o modelo de Pennes; além de estabelecer um comparativo entre os resultados fornecidos por cada modelo.

Um modelo térmico de duas equações para meios porosos foi utilizado por Monte & Haji-Sheikh (2017) para descrever o rápido aquecimento em tecidos biológicos durante tratamentos para hipertermia e analisam o problema térmico que se constrói quando observa-se a interação entre as fases sólida e líquida em um tecido. Usando Funções de Green, os autores apresetam soluções exatas tanto para a fase sólida (tecido) quanto para a fase líquida (sangue).

No trabalho de Sun *et al.* (2018) foi apresentada a solução analítica para um problema envolvendo uma fonte móvel de calor (*laser*) na superfície do tecido humano para o estudo de efeito de hipertermia provocados por tumores. A expressão para o campo de temperaturas foi desenvolvida para um domínio no formato cúbico, representando um tecido biológico, via Funções de Green. Os resultados foram avaliados numericamente e as influências do laser tais como velocidade e tamanho são discutidas.

### 2.3 Problemas Inversos

Os problemas de Engenharia nas últimas décadas vêm tornando-se cada vez mais complexos. O desenvolvimento e a utilização de técnicas analíticas e numéricas para resolver problemas diretos e inversos é cada vez mais frequente na busca por precisão de resultados. Diversos autores abordam técnicas de solução de *Problemas Inversos* para a estimativa de propriedades térmicas e, especificamente em biotransferência de calor, na determinação da perfusão sanguínea e das propriedades (térmicas) dos tecidos biológicos.

Liu & Xu (1999) obtêm valores estimados para a taxa de perfusão a partir de soluções sintéticas e as relacionam com problemas de otimização para casos bidimensionais. Já Lopes (2009) apresenta uma estimativa para a perfusão sanguínea por meio de técnicas inversas em problemas bidimensionais de transferência de calor.

Bueno (2012) tratou em seu trabalho de um problema para localização de tumores de pele utilizando algoritmos genéticos acoplados com o Método dos Elementos de Contorno. Baseado na

equação da biotransferência de calor de Pennes, desenvolveu uma técnica que destina-se à previsão de campos de temperatura, visualização do comportamento e diagnóstico de tumores.

Fazlali & Ahmadikia (2013) além de resolverem analiticamente o problema de biotransferência de calor em um domínio unidimensional, utilizaram técnicas de problemas inversos para estabelecer o dano térmico causado por um fluxo de calor externo, como por exemplo uma queimadura. A avaliação dos danos no tecido devido a queimaduras é um dos conceitos essenciais em termos da bioengenharia dos tecidos epiteliais (FAZLALI; AHMADIKIA, 2013).

Um dos principais requisitos para a solução de um problema inverso, seja ele qual for, é a necessidade de se conhecer a solução do problema direto, ainda que alguns parâmetros sejam desconhecidos.

É nesse sentido que este trabalho se insere. A obtenção de parâmetros como a perfusão ou o metabolismo passam, necessariamente, pela obtenção da solução da Equação da Biotransferência de Calor. Assim, a solução analítica de um modelo tridimensional transiente em um tecido humano representa uma ferramenta muito valiosa no desenvolvimento de técnicas de medição desses parâmetros. Este é o ponto aqui abordado.

# CAPÍTULO III

## FUNÇÕES DE GREEN: FUNDAMENTOS

Uma Função de Green (FG) é, em termos gerais, a solução de um problema descrito por uma equação diferencial com condições de contorno homogêneas. Tal tipo de problema pode ser associado ao problema de interesse por meio da identificação dos tipos de condições de contorno do problema original o que leva a identificar as condições homogêneas correspondentes. Em Condução de Calor, uma Função de Green descreve a distribuição de temperatura causada por um pulso de calor local e instantâneo. As Funções de Green podem ser obtidas pelos métodos clássicos de resolução de equações diferenciais como separação de variáveis e transformadas de Laplace como nos trabalhos de Carslaw & Jaeger (1959) e Özisik (1993). Cole *et al.* (2010) trazem uma compilação das principais Funções de Green associadas a diversas condições de contorno. O objetivo desta seção é o embasamento teórico para os capítulos subsequentes.

O método das Funções de Green, assim chamado em homenagem ao físico e matemático inglês George Green (1793-1841) é uma ferramenta útil na resolução de problemas lineares em Condução de Calor.

Dentre as vantagens em se utilizar as FG na resolução de problemas de condução de calor, podem-se citar:

1. É uma técnica flexível e que pode ser aplicada a uma gama infinita de problemas lineares;
2. Uma mesma FG para um dado tipo de problema em uma dada geometria pode ser aplicada a diferentes condições do problema de interesse sejam elas dependentes do tempo ou variáveis no domínio;
3. A solução dá-se de maneira sistemática, resultando sempre em um problema de integração;
4. A solução do problema pode ser escrita em termos das FG e, a partir desses termos, é possível identificar a influência de cada contorno;

5. Para problemas em duas ou três dimensões, transientes, a FG é obtida pela superposição da FG em cada uma das direções;
6. A solução em FG admite formas alternativas que permitem um aumento na convergência da solução em séries.
7. Permite a verificação intrínseca da solução.

### 3.1 Condução unidimensional em regime permanente

Para exemplificar a interpretação das Funções de Green como resposta a um pulso unitário, apresenta-se o problema mais simples em Condução de Calor: uma barra de comprimento  $L$ , feito de um material de condutividade isotrópica  $k$ , isolada em uma extremidade, com temperatura prescrita na outra e podendo haver (ou não) geração de calor  $g(x)$ :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{g(x)}{k} = 0 \quad (3.1)$$

$$T|_{x=0} = T_1 \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.3)$$

Integrando-se a Eq. (3.1) e aplicando as condições de contorno, obtém-se

$$T(x) = -\frac{g_0}{2k}x^2 + \frac{g_0 L}{k}x + T_1 \quad (3.4)$$

A Função de Green,  $G(x|x')$ , associada a este problema térmico é aquela que é solução do problema com condições homogêneas de mesma espécie que a do problema original, no qual, o termo de geração é substituído por um pulso unitário, ou seja,

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \delta(x - x') = 0 \quad (3.5)$$

$$G|_{x=0} = 0 \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{dG}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.7)$$

A Função de Green é apresentada na forma  $G(x|x')$  pois é dependente de duas variáveis: o ponto de interesse  $x$  do domínio e o local onde é aplicado o pulso:  $x'$ . Analogamente, para uma FG tridimensional transiente em coordenadas cartesianas escreve-se  $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ , sendo  $(x, y, z)$  um ponto qualquer do domínio,  $t$  o instante de interesse,  $(x', y', z')$  as coordenadas de aplicação do pulso unitário de calor e  $\tau$  o instante de tempo em que o pulso é aplicado.

Integrando a Eq. (3.5), tem-se:

$$G(x|x') = \begin{cases} x, & \text{se } x < x' \\ x', & \text{se } x > x' \end{cases} \quad (3.8)$$

Como será discutido a seguir, conhecida a FG, a solução de (3.1) será

$$T(x) = T_1 + \frac{1}{k} \int_{x'=0}^L g(x') G(x|x') dx' \quad (3.9)$$

perfazendo a integral, obtém-se:

$$T(x) = T_1 + \frac{g_0}{k} \left[ \frac{x^2}{2} + x(L - x) \right] \quad (3.10)$$

que é idêntica à solução obtida anteriormente (Eq. (3.4)).

### 3.2 Condução unidimensional transiente - Problema auxiliar

Nos textos clássicos de Transferência de Calor (Incropera *et al.* (2008), Çengel & Ghajar (2012), entre outros), o primeiro problema a ser estudado é o da condução em uma barra submetida a diversos tipos de condições de contorno. A Equação da Difusão neste caso, assumindo um domínio isotrópico, de condutividade térmica  $k$  e dimensões  $0 < x < L$ , e admitindo uma possível geração de calor, é dada por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{g(x, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.11)$$

por ser uma Equação Diferencial Parcial (EDP) de segunda ordem no espaço e de primeira ordem no tempo, são necessárias duas condições de contorno e uma condição inicial. As condições de contorno

serão tomadas da forma genérica como

$$k_i \left. \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \right|_{x=x_i} + h_i T|_{x=x_i} = f_i(t) \quad (3.12)$$

observa-se que, nesta forma geral,  $\eta$  representa a normal unitária apontando externamente ao domínio e as condições de contorno são discriminadas pelos coeficientes identificados com o índice  $i$ , isto é,  $k_i$ ,  $h_i$  e  $f_i$ . Para condições de temperatura prescrita (1<sup>o</sup> tipo), também chamadas de condições de Dirichlet, tomam-se  $k_i = 0$  e  $h_i = 1$ , assim, a temperatura na  $i$ -ésima superfície será

$$T(x_i, t) = f_i(t) \quad (3.13)$$

com  $f_i(t)$  representando a temperatura (nula, constante ou variável no tempo) na face indicada.

Para casos em que a condição de contorno representa um fluxo prescrito, tomam-se  $h_i = 0$  e  $k_i = k$ , nesse caso, condição de 2<sup>o</sup> tipo (ou condição de Neumann),  $f_i(t)$  representa um fluxo imposto na superfície e quando  $f_i(t) = 0$  tem-se que a superfície em questão encontra-se isolada, para este caso, na face  $i$ , escreve-se:

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_i} = f_i(t) \quad (3.14)$$

Se a condição de contorno for de convecção (3<sup>o</sup> tipo ou de Robin), assume-se  $f_i(t) = h_i T_\infty$ , desse modo, escreve-se

$$-k \left. \frac{dT}{d\eta_i} \right|_{x=x_i} = h_i (T|_{x=x_i} - T_\infty) \quad (3.15)$$

O problema homogêneo auxiliar que representa a Eq. (3.11) deve traduzir os efeitos espacial e temporal, isto é

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\delta(x - x')\delta(t - \tau)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (3.16)$$

submetido às condições de contorno

$$k_i \left. \frac{\partial G}{\partial \eta_i} \right|_{x=x_i} + h_i G|_{x=x_i} = 0, \text{ com } i = 1; 2 \quad (3.17)$$

e à condição inicial

$$G(x, t | x', \tau) = 0, \text{ para } t < \tau \quad (3.18)$$

É importante observar que as condições de contorno do problema auxiliar devem ser do mesmo tipo que as do problema original e que a unidade da Função de Green,  $G(x, t|x', \tau)$ , unidimensional é  $m^{-1}$ . Assim, resolvendo-se o problema auxiliar para a obtenção de  $G$ , consegue-se obter, de maneira similar ao que foi feito na secção anterior, a distribuição de temperatura transiente  $T(x, t)$ .

### 3.3 Propriedades das Funções de Green para problemas transientes

Antes de se apresentar a forma geral da solução para um problema de Condução resolvido por meio da técnica das Funções de Green, é conveniente apresentar algumas propriedades que as FG obedecem que são úteis para que se tenha domínio da técnica e da formulação matemática que a circunda.

**Propriedade 1.** *A Função de Green é solução da equação homogênea do problema auxiliar.*

**Propriedade 2.** *A Função de Green particular de cada problema é aquela que é obtida por meio das condições de contorno homogêneas de mesmo tipo daquelas do problema original.*

**Definição 1.** *Relação de Causalidade para uma função  $G(x, t|x', \tau)$ : para todo ponto do domínio tem-se*

$$\begin{cases} G \geq 0, & \text{para } t - \tau \geq 0 \\ G = 0, & \text{para } t - \tau < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

**Definição 2.** *Relação de Reciprocidade para uma função  $G(x, t|x', \tau)$ :*

$$G(x, t|x', \tau) = G(x', -\tau|x, -t) \quad (3.20)$$

**Propriedade 3.** *As Funções de Green obedecem às relações de causalidade e de reciprocidade.*

**Propriedade 4.** *A dependência temporal da Função de Green é sempre em termos de  $t - \tau$ .*

A partir da propriedade 4, pode-se sempre escrever

$$G(x, t|x', \tau) = G(x, x', t - \tau) \quad (3.21)$$

**Propriedade 5.** *Em coordenadas cartesianas, a Função de Green possuirá unidades de  $m^{-1}$  para problemas unidimensionais,  $m^{-2}$  para casos bidimensionais e  $m^{-3}$  para problemas tridimensionais.*



### 3.4 Sistema de Numeração

A fim de auxiliar a identificação das condições de contorno pelo seu tipo e facilitar a resolução de problemas utilizando-se Funções de Green, no trabalho de Beck (1986) é proposto um sistema de numeração para problemas de condução no qual cada número traz em si a informação relevante sobre o tipo de problema, tornando assim mais fácil a determinação das Funções de Green corretas para a resolução do problema, além de poder ser aplicado a diferentes geometrias.

Além dos tipos de condição de contorno discutidos na seção 3.2, pode-se definir condições de contorno que representam um sólido semi-infinito e um filme fino de fluido com ou sem convecção. A notação está esquematizada, juntamente com a interpretação física de cada tipo de condição de contorno, na Tabela 3.1. O quarto e o quinto tipos de condição de contorno representam uma camada de fluido de pequena espessura sem e com convecção, respectivamente. Tome um fluido de calor específico  $c_f$ , massa específica  $\rho_f$  e espessura  $\epsilon$  colado em uma superfície com fluxo prescrito  $f_i(t)$ , a condição de contorno do quarto tipo será da forma

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \right|_{x=x_i} = f_i(t) - (\rho_f c_f \epsilon)_i \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x=x_i} \quad (3.22)$$

caso seja permitida trocas de calor por convecção na  $i$ -ésima superfície, tem-se a condição de contorno do quinto tipo:

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \right|_{x=x_i} + h_i T_{x=x_i} = f_i(t) - (\rho_f c_f \epsilon)_i \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x=x_i} \quad (3.23)$$

Tabela 3.1: Sistema de Numeração para os Diferentes Tipos de Condições de Contorno

Notação	Condição	Descrição física da condição
0	Tipo 0 - Natural	Sem restrição física, semi-infinito
1	1º tipo - Dirichlet	Temperatura prescrita (Eq. (3.13))
2	2º tipo - Neumann	Fluxo prescrito (Eq. (3.14))
3	3º tipo - Robin	Convecção (Eq. (3.15))
4	4º tipo - Carslaw	Filme fino de fluido sem convecção (Eq. (3.22))
5	5º tipo - Jaeger	Filme fino de fluido com convecção (Eq. (3.23))

As condições de contorno apresentadas podem ser esquematizadas como na Fig. ???. Observa-se que existem três formas distintas de abordagem: geometria infinita (caso X00), geometrias semi-infinita e geometrias finitas) e que, em três casos finitos (X22, X42 e X44) atenta-se para o fato de que não admite-se um regime permanente. Matematicamente, esses casos estão associados a

autovalores nulos. De um ponto de vista físico, tais casos não apresentam regime permanente para uma condição de contorno cujos valores de  $f_i(\cdot)$  nas Eqs. (3.14) ou (3.22) independentes do tempo (COLE *et al.*, 2010).

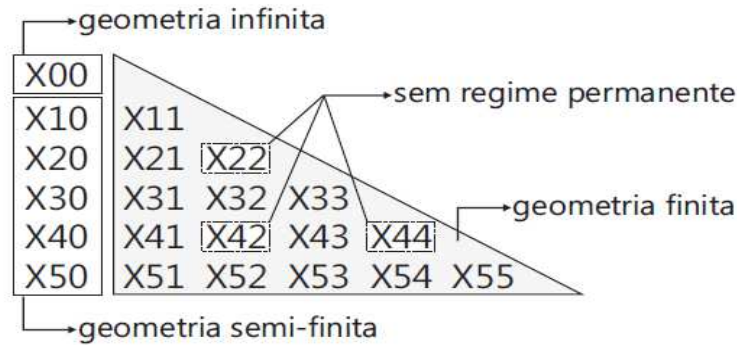


Figura 3.1: Representação gráfica do sistema de numeração para coordenadas cartesianas (COLE *et al.*, 2010).

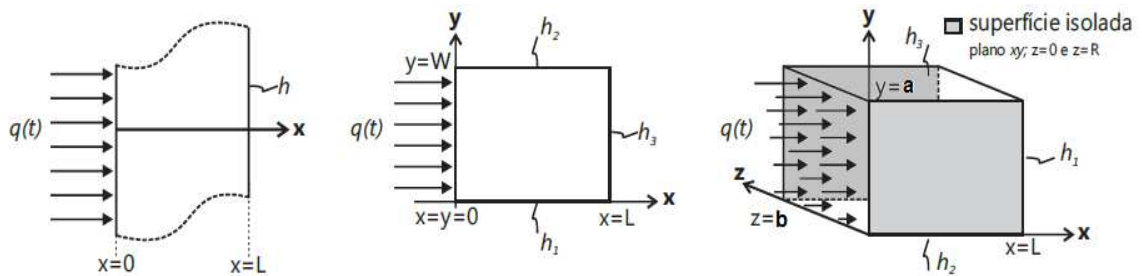


Figura 3.2: Exemplos de aplicação do sistema de numeração, da esquerda para a direita: X22, X23Y33 e X23Y33Z33 (FERNANDES, 2009).

Por exemplo, para um problema unidimensional com fluxo prescrito em uma superfície e a outra isolada tem-se um problema do tipo X22. Logo a Função de Green utilizada para a solução será  $G_{X22}$ . Para problemas multidimensionais, a Função de Green associada é dada pela composição das FG em cada uma das direções (COLE *et al.*, 2010). Isto é, para uma placa plana com fluxo prescrito em  $x = 0$  e convecção nas demais faces o problema é identificado como sendo do tipo X23Y33, as Funções de Green em cada uma das direções são  $G_{X23}$  e  $G_{Y33}$  e, portanto, a FG neste caso será

$$G_{X23Y33} = G_{X23} \cdot G_{Y33} \tag{3.24}$$

aumentando-se mais uma dimensão com faces submetidas à convecção, o problema torna-se do tipo X23Y33Z33, a FG para a coordenada  $z$  é  $G_{Z33}$  e a Função de Green associada ao problema é dada por

$$G_{X23Y33Z33} = G_{X23} \cdot G_{Y33} \cdot G_{Z33} \tag{3.25}$$

Esses três tipos de problemas citados estão esquematizados na Fig. 3.2. Estabelecido o tipo de problema e as condições de contorno pertinentes, obtêm-se as expressões das Funções de Green correspondentes a cada caso (COLE *et al.*, 2010). Na seção seguinte, discute-se como construir a solução do problema de condução de calor de interesse via integrais das Funções de Green estabelecidas.

### 3.5 Equação-solução integral baseada em Funções de Green

A solução da Equação da Difusão tridimensional transiente com propriedades térmicas constantes dada por

$$\nabla^2 T + \frac{g(x, y, z, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.26)$$

com condições de contorno genéricas da forma

$$k_i \left. \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \right|_{S_i} + h_i T|_{S_i} = f_i(t) \quad (3.27)$$

e condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) \quad (3.28)$$

combinada com o problema auxiliar, que representa a versão homogênea do problema original, dado por

$$\nabla^2 G + \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - \tau)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.29)$$

sendo  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  correspondetes às coordenadas  $(x, y, z)$  e  $(x', y', z')$ , sujeito a

$$k_i \left. \frac{\partial G}{\partial \eta_i} \right|_{S'_i} + h_i T|_{S'_i} = 0 \quad (3.30)$$

com  $S$  e  $S'_i$  representando a  $i$ -ésima face de análise, e condição inicial

$$G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = 0 \text{ para } t < \tau \quad (3.31)$$

pode ser escrita, em termos da FG relacionada ao problema,  $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ , como

$$\begin{aligned}
T(x, y, z, t) = & \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a \int_{z'=0}^b G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) F(x', y', z') dz' dy' dx' + \\
& + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a \int_{z'=0}^b g(x', y', z', \tau) G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) dz' dy' dx' d\tau + \\
& + \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^a \int_{z'=0}^b \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t|x'_i, y', z', \tau) \right] dz' dy' d\tau + \\
& + \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{z'=0}^b \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t|x', y'_i, z', \tau) \right] dz' dx' d\tau + \\
& + \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t|x', y', z'_i, \tau) \right] dy' dx' d\tau - \\
& - \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^a \int_{z'=0}^b \sum_{j=1}^2 \left[ f_j(\tau) \frac{\partial G}{\partial \eta'_j} \Big|_{x'=x_j} \right] dz' dy' d\tau - \\
& - \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{z'=0}^b \sum_{j=1}^2 \left[ f_j(\tau) \frac{\partial G}{\partial \eta'_j} \Big|_{y'=y_j} \right] dz' dy' d\tau - \\
& - \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a \sum_{j=1}^2 \left[ f_j(\tau) \frac{\partial G}{\partial \eta'_j} \Big|_{z'=z_j} \right] dz' dy' d\tau
\end{aligned} \tag{3.32}$$

A demonstração da validade dessa solução encontra-se, em sua versão unidimensional, no Apêndice A, bem como é indicada sua versão bidimensional. Da mesma forma que na Eq. (A.19), todas as parcelas do segundo membro da Eq. (3.32) devem obdecer à homogeneidade dimensional, ou seja, devem ter unidade de temperatura e a FG,  $G(\cdot)$ , a ser utilizada é única para cada problema em particular. Nos casos bi e tridimensionais a função de Green é obtida pela multiplicação das funções referentes a cada direção. Nos capítulos seguintes, a técnica será utilizada para resolver casos particulares que serão úteis para a resolução e validação dos resultados do problema central: condução de calor com o efeito do metabolismo e da perfusão sanguínea em um domínio representativo do antebraço humano.

# CAPÍTULO IV

## PROBLEMAS UNI E BIDIMENSIONAIS

Neste capítulo deduzem-se as soluções uni e bidimensionais para o problema da biotransferência de calor (Eq. (2.1)). Na seção 4.1, deduz-se a solução para o problema unidimensional com condições contorno de fluxo prescrito e temperatura prescrita. Já na seção 4.2, deduz-se a solução para um caso bidimensional a fim de demonstrar a eficiência de se resolver problemas de condução de calor via Funções de Green.

Para os problemas que serão discutidos, assumem-se propriedades típicas do tecido da pele humana e do sangue (apresentadas por Holmes (1997)): massas específicas do tecido e do sangue:  $\rho = \rho_b = 1000 \text{ kg/m}^3$ ; calores específicos do tecido e do sangue:  $c = c_b = 4200 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$ ; temperaturas arterial e da base do tecido:  $T_a = T_c = 37^\circ\text{C}$ ; condutividade térmica do tecido:  $k = 0,5 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$ ; taxa de perfusão sanguínea  $\omega_b = 5\cdot 10^{-4} \text{ (mL/s)/mL}$ ; e calor gerado devido ao metabolismo do organismo:  $Q_m = 33\ 800 \text{ W/m}^3$ . O coeficiente de convecção devido à convecção natural e possíveis efeitos de radiação no ambiente é tomado como  $h_0 = 10 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$  e a temperatura do ambiente circundante  $T_f = 25^\circ\text{C}$ .

### 4.1 Problema X21

Considere um domínio unidimensional, representando um tecido vivo, com  $0 < x < L$  submetido a um fluxo de calor constante em  $x = 0$  e mantido à temperatura constante  $T = T_c$  em  $x = L$  como na Fig. 4.1.

Levando-se em consideração os efeitos da perfusão sanguínea e do metabolismo, a Eq. (2.1), juntamente com as condições de contorno adequadas, assume a forma:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T) + Q_m = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

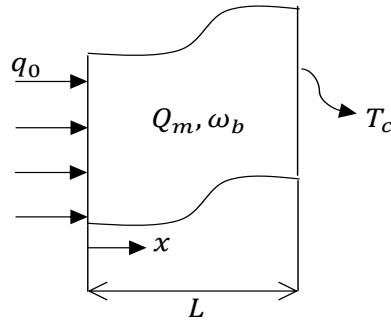


Figura 4.1: Domínio e condições de contorno para o problema unidimensional do tipo X21.

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad (4.2)$$

$$T(L, t) = T_c \quad (4.3)$$

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = h_0(T_f - T(0, t)) + q_0 \quad (4.4)$$

Para o problema em questão, ilustrado na Fig. 4.1, os efeitos convectivos são desprezados, ou seja, a Eq. (4.4) é escrita simplesmente como sendo:

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = q_0 \quad (4.5)$$

Para obter-se a distribuição inicial de temperaturas da Eq. (4.2), assume-se que, em  $t = 0$  o domínio encontra-se em regime estacionário, ou seja,

$$k \frac{d^2 T_0}{dx^2} + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T_0) + Q_m = 0 \quad (4.6)$$

$$-k \left. \frac{dT_0}{dx} \right|_{x=0} = h_0 (T_f - T_0(0)) \quad (4.7)$$

$$T(L) = T_c \quad (4.8)$$

Usando-se métodos clássicos de resolução de EDO's de segunda ordem, a solução do problema (4.6) é então obtida como:

$$T_0(x) = T_p + \frac{T_c - T_p}{\cosh(ML)} \cdot \cosh(Mx) \quad (4.9)$$

com

$$M = \sqrt{\frac{\omega_b \rho_b c_b}{k}} \quad (4.10)$$

e

$$T_p = \frac{M^2 T_a + \frac{Q_m}{k}}{M^2} \quad (4.11)$$

Os passos intermediários para a obtenção da Eq. (4.9) podem ser vistos no Apêndice B.

Entretanto, para que o problema definido pelas Eqs. (4.1) a (4.4) seja resolvido por Funções de Green, torna-se necessária a remoção do termo de perfusão. Para tanto, perfaz-se a seguinte mudança de variáveis:

$$T(x, t) = T_0(x) + W(x, t) \cdot \exp\left(\frac{-\omega_b \rho_b c_b t}{\rho c}\right) \quad (4.12)$$

ou, de forma mais compacta,

$$T(x, t) = T_0(x) + W(x, t) \cdot \exp(-\lambda t) \quad (4.13)$$

sendo

$$\lambda = \frac{\omega_b \rho_b c_b}{\rho c} \quad (4.14)$$

Assim, aplicando-se a Eq. (4.13) às Eqs. (4.1) a (4.4), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (4.15)$$

sujeita às condições de contorno:

$$-k \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=0} = q_o \exp(\lambda t) \quad (4.16)$$

e

$$W = 0, \text{ em } x = L \quad (4.17)$$

e condição inicial

$$W(x, 0) = 0 \quad (4.18)$$

A Função de Green associada a esse problema (ver Cole *et al.* (2010)) é dada por

$$G_{X21}(x, t|x', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[\frac{-\beta_m^2 \alpha (t - \tau)}{L^2}\right] \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cos\left(\beta_m \frac{x'}{L}\right) \quad (4.19)$$

sendo os autovalores:

$$\beta_m = \pi \left(m - \frac{1}{2}\right) \quad (4.20)$$

E, portanto, a solução  $W(x, t)$  pode ser obtida como

$$W(x, t) = \frac{2\alpha q_0}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cdot \frac{1}{\lambda + \frac{\beta_m^2 \alpha}{L^2}} \cdot \left[ \exp(\lambda t) - \exp\left(\frac{-\beta_m^2 \alpha t}{L^2}\right) \right] \quad (4.21)$$

Retornando à variável original  $T(x, t)$ , obtém-se

$$T(x, t) = T_0(x) + W(x, t) \exp(-\lambda t) \quad (4.22)$$

ou ainda,

$$T(x, t) = T_p + \frac{T_c - T_p}{\cosh(ML)} \cdot \cosh(Mx) + \frac{2\alpha q_0}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cdot \frac{1}{\lambda + \frac{\beta_m^2 \alpha}{L^2}} \cdot \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\lambda + \frac{\beta_m^2 \alpha}{L^2}\right) t\right] \right\} \quad (4.23)$$

O comportamento de  $T(x, t)$  é mostrado nas Figs. 4.2 e 4.3 para a superfície, em  $x = 0$ . Na Figura 4.2 apresenta-se a evolução da temperatura superficial considerando a imposição de diferentes fluxos de calor, como  $1.000 \text{ W/m}^2$ ,  $500 \text{ W/m}^2$  e  $400 \text{ W/m}^2$ . Estes valores de fluxos impostos estão numa faixa de segurança para a aplicação na pele humana (DENG; LIU, 2002). Nesta avaliação, observa-se que, para fluxos de calor mais intensos, há um aumento na temperatura superficial. A evolução das temperaturas em todo o domínio ao longo do tempo até que o sistema atinja o regime permanente, é ilustrada na Fig. 4.3. Neste diagrama nota-se que, para qualquer instante de tempo, a condição de contorno em  $x = L$  é respeitada, ou seja, a temperatura prescrita na base do domínio é, em qualquer instante de tempo,  $37^\circ\text{C}$ . A partir das Figs. 4.3 e 4.2 observa-se que o regime permanente é atingido a partir de  $1 \cdot 10^4 \text{ s}$ .



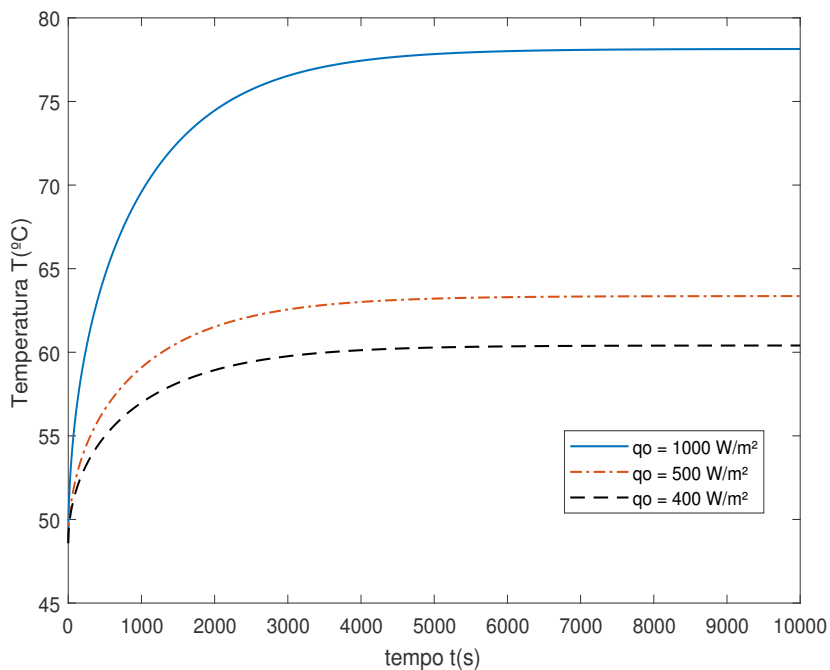


Figura 4.2: Efeito da variação do fluxo na temperatura superficial ao longo do tempo.

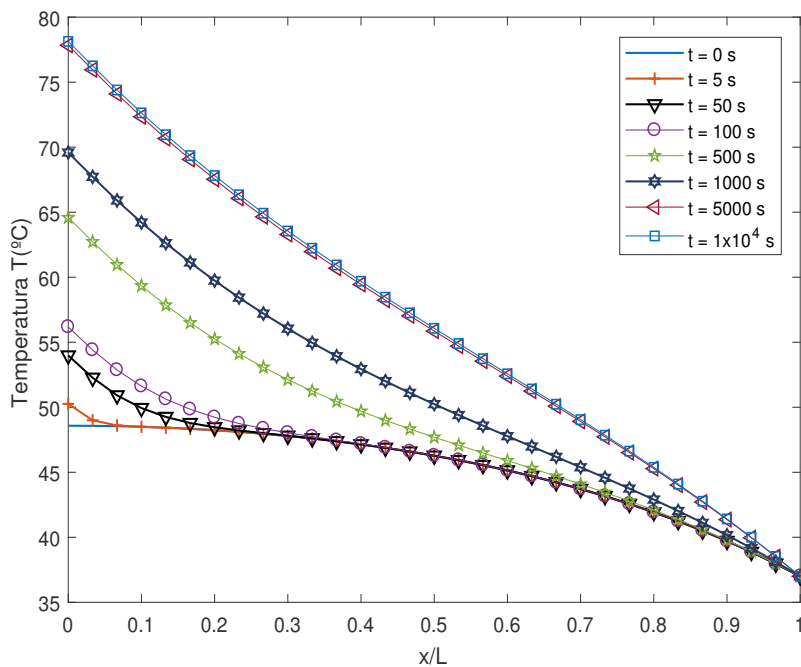


Figura 4.3: Evolução temporal das temperaturas em todo o domínio. Para um fluxo constante e igual a  $1000 \text{ W/m}^2$  imposto na superfície.

## 4.2 Placa Plana - Problema X11Y12

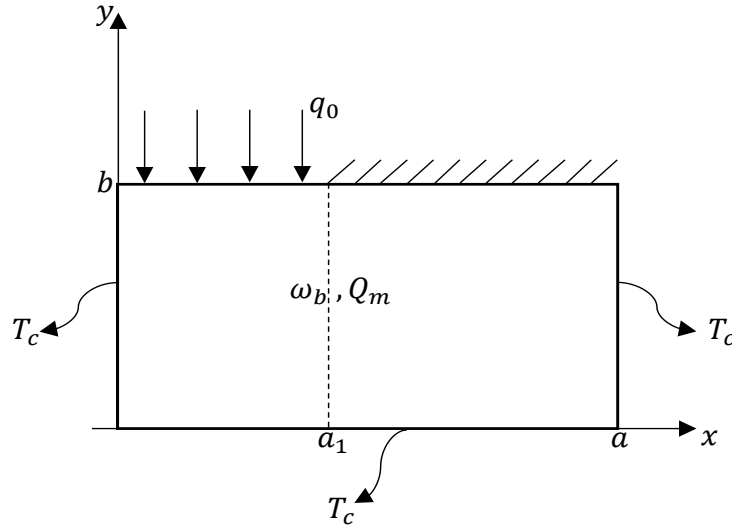


Figura 4.4: Domínio e condições de contorno para o problema bidimensional do tipo X11Y12.

Para exemplificar a aplicabilidade da técnica para obtenção de soluções em problemas envolvendo domínios representativos de tecidos biológicos por Funções de Green, considere uma placa plana, como na Fig. 4.4, de dimensões  $a \times b$  a certa temperatura inicial  $T(x, y, 0) = T_0$  submetida às condições de contorno

$$T(0, y, t) = T(x, 0, t) = T(a, y, t) = T_c \quad (4.24)$$

e

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=b} = \begin{cases} q_0, & \text{para } 0 < x < a_1 < a \\ 0, & \text{para } a_1 < x < a \end{cases} \quad (4.25)$$

em que estão presentes os efeitos de perfusão e metabolismo.

Nesse caso, a Equação da Biotransferência de Calor, assumindo propriedades constantes, é escrita como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k} (T_a - T) + \frac{Q_m}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.26)$$

Similarmente ao caso unidimensional, é necessário que a equação só dependa das variáveis temporal e espaciais da temperatura, para tanto, pode-se fazer a mudança de variáveis:  $T = T_0 + W \cdot \exp[-\omega_b \rho_b c_b t / (\rho c)] = T_0 + W \cdot \exp(-\lambda t)$ ; e assume-se que a distribuição inicial das

temperaturas na placa seja dependente apenas da direção de aplicação do fluxo, isto é,

$$T_0(y) = T_p + C_1 \sinh(My) + C_2 \cosh(My) \quad (4.27)$$

como na seção anterior, com  $M = \sqrt{(\omega_b \rho_b c_b)/k}$ . Desse modo, o problema assume a forma:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (4.28)$$

submetido às condições de contorno:

$$W = 0, \text{ em } x = 0, x = a \text{ e } y = 0 \quad (4.29)$$

$$-k \frac{\partial W}{\partial y} = \begin{cases} q_o \exp(\lambda t), & \text{para } 0 < x < a_1 < a \\ 0, & \text{para } a_1 < x < a \end{cases} \quad (4.30)$$

e condição inicial

$$W(x, y, 0) = 0 \quad (4.31)$$

Segundo Cole *et al.* (2010), as Funções de Green associadas ao problema são:

$$G_{X11} = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t - \tau)}{a^2}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \quad (4.32)$$

e

$$G_{Y12} = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[\frac{-\gamma_n^2 \alpha (t - \tau)}{b^2}\right] \text{sen}\left(\frac{\gamma_n Y}{b}\right) \text{sen}\left(\frac{\gamma_n Y'}{b}\right) \quad (4.33)$$

com  $\gamma_n = \frac{\pi(2n-1)}{2}$ . E, portanto, a função de Green para este problema é dada por

$$G_{X11Y12} = G_{X11} \cdot G_{Y12} \quad (4.34)$$

isto é

$$G_{X11Y12}(x, y, t|x', y', \tau) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ - \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{\gamma_n^2}{b^2} \right) \alpha (t - \tau) \right] \times \\ \times \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\gamma_n y}{b} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x'}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\gamma_n y'}{b} \right) \quad (4.35)$$

Para estabelecer-se a solução deste problema, basta, então, aplicar a equação-solução integral dada pela Eq. (3.32) reduzida ao caso bidimensional (Eq. (A.26)) acoplada às condições de contorno estabelecidas, isto é:

$$W(x, y, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^{a_1} q_0 \exp(\lambda \tau) G_{X11Y12}|_{y'=b} dx' d\tau \quad (4.36)$$

E, após as integrações, obtém-se

$$T(x, y, t) = T_0(y) + \frac{4\alpha q_0}{b\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\gamma_n y}{b} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{m\pi a_1}{a} \right) \right] \times \\ \times \frac{\operatorname{sen} \gamma_n}{m \left( \frac{\alpha m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{\alpha \gamma_n^2}{b^2} + \lambda \right)} \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{\gamma_n^2}{b^2} + \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k} \right) \alpha t \right] \right\} \quad (4.37)$$

Nos próximos capítulos serão discutidas técnicas para a validação das soluções obtidas e deduzida a solução para um problema tridimensional de biotransferência de calor por meio de Funções de Green, construída a partir das soluções desses problemas.

# CAPÍTULO V

## VERIFICAÇÃO INTRÍNSECA DA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE PENNES UNIDIMENSIONAL

Apresenta-se a verificação intrínseca da solução obtida na seção 4.1, Eq. (4.23). Para tanto, são comparadas situações em que os efeitos da perfusão sanguínea e do metabolismo são eliminados e, nestas situações, as duas soluções devem convergir para um mesmo resultado. A solução para o modelo em regime permanente é também apresentada.

### 5.1 Regime permanente sem os efeitos de perfusão e de metabolismo

A equação em regime permanente que governa a distribuição de temperaturas no domínio quando são eliminados os efeitos de perfusão e metabolismo é dado por

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (5.1)$$

com as condições de contorno

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = q_0 \quad (5.2)$$

e

$$T(L) = T_c \quad (5.3)$$

cuja solução, via integração e combinação das condições de contorno, é dada por

$$T(x) = -\frac{q_0}{k}x + \frac{q_0 L}{k} \quad (5.4)$$

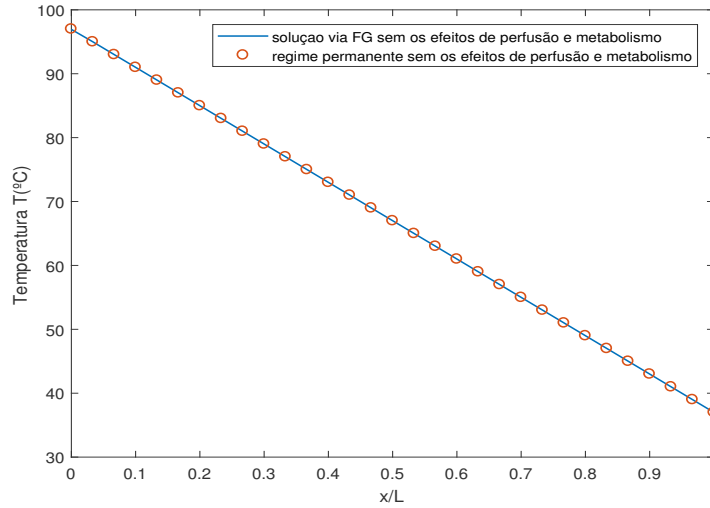


Figura 5.1: Comparação entre a solução analítica dada pela Eq. (4.23) sem os efeitos de perfusão e metabolismo para um tempo muito grande e metabolismo e a solução em regime permanente (Eq. (5.4)).

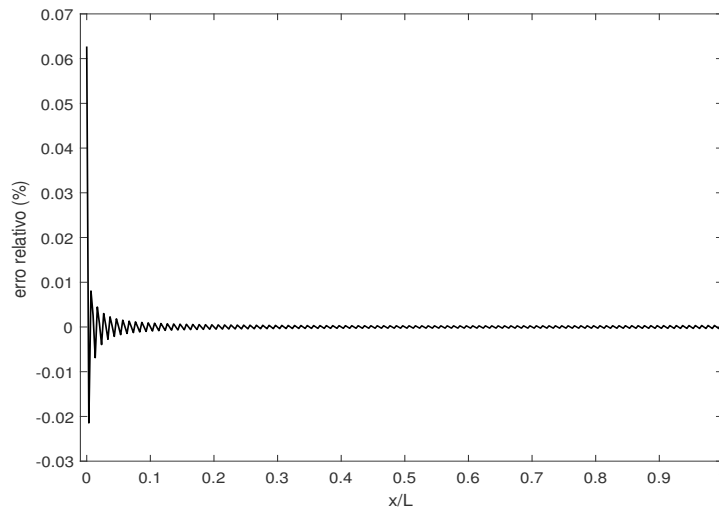


Figura 5.2: Erro relativo entre a solução analítica unidimensional via FG para tempos muito grandes e a solução em regime permanente quando eliminados os efeitos de perfusão e do metabolismo.

Pelas Figs. 5.1 e 5.2 percebe-se que as duas soluções comportam-se de maneiras similares, com um erro próximo de 0,06% na superfície, caindo rapidamente para menos de 0,01% em pontos já próximos da aplicação do fluxo. Dessa maneira, a solução unidimensional obtida na seção 4.1 é verificada intrinsicamente quando os dois efeitos (perfusão e metabolismo) são eliminados.

## 5.2 Regime permanente sem o efeito do metabolismo ( $Q_m = 0$ )

No caso em que o metabolismo é eliminado do estudo, a situação unidimensional do problema da biotransferência de calor pode ser representada pelo modelo descrito na Fig. 5.3:

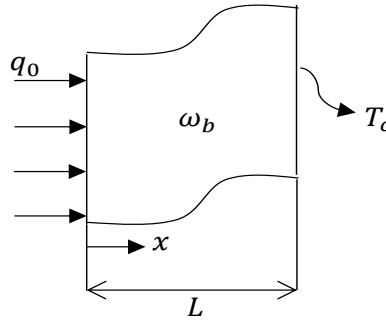


Figura 5.3: Domínio e condições de contorno para o problema unidimensional do tipo X21 sem o efeito do metabolismo.

A equação de Pennes, Eq. (2.1), unidimensional sem o efeito do metabolismo pode ser escrita, em regime permanente, sob a forma

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T) = 0 \quad (5.5)$$

tomando as mesmas condições de contorno que foram estabelecidas nas seções 4.1 e 5.1:

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = q_0 \quad (5.6)$$

e

$$T(L) = T_c \quad (5.7)$$

Para a resolução deste problema, é feita uma mudança de variável conveniente que facilita a resolução da EDO (5.5), para tanto, tomam-se

$$M^2 = \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k} \quad (5.8)$$

e

$$\Theta = T - T_a \quad (5.9)$$

obtendo-se a equação:

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} + M^2 \Theta = 0 \quad (5.10)$$

com condições de contorno

$$-k \left. \frac{d\Theta}{dx} \right|_{x=0} = q_0 \quad (5.11)$$

e

$$\Theta(L) = T_c - T_a \quad (5.12)$$

cuja solução, via separação de variáveis, é

$$\Theta(x) = -\frac{q_0}{kM} \sinh(Mx) + \operatorname{sech}(ML) \left[ T_c - T_a + \frac{q_0}{kM} \sinh(ML) \right] \cosh(Mx) \quad (5.13)$$

Portanto, a distribuição de temperaturas em regime permanente sem o efeito do metabolismo é dada por

$$T(x) = T_a - \frac{q_0}{kM} \sinh(Mx) + \operatorname{sech}(ML) \left[ T_c - T_a + \frac{q_0}{kM} \sinh(ML) \right] \cosh(Mx) \quad (5.14)$$

Na Figura 5.4, apresenta-se a comparação das temperaturas dadas pela Eq. (4.23) (sem o efeito metabólico) ao longo de  $x$ , para um tempo muito grande, com a solução em regime permanente.

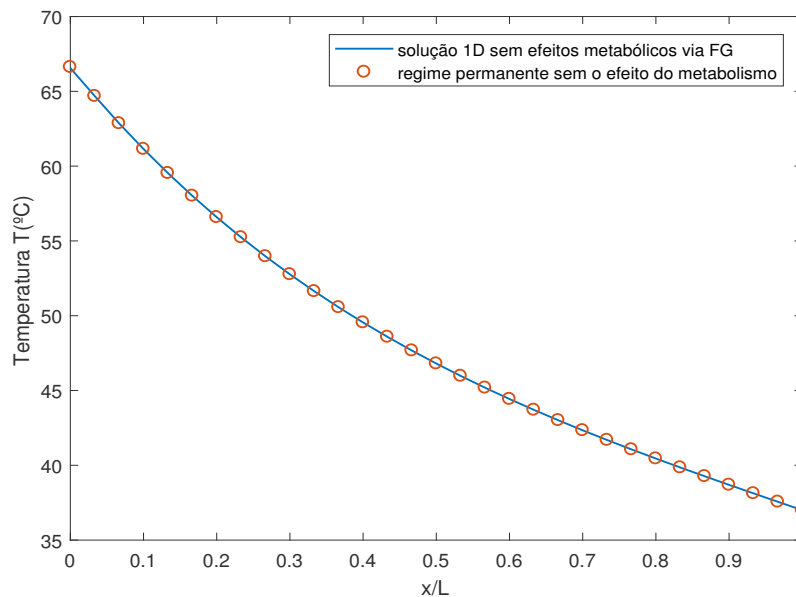


Figura 5.4: Comparação entre a solução analítica dada pela Eq. (4.23) via FG para tempos muito grandes sem o efeito do metabolismo e a solução em regime permanente (Eq. (5.14)).



Observa-se que as duas soluções são bem próximas, obtendo-se uma diferença da ordem de menos de 0,1%. Deste modo, verifica-se intrinsecamente que a solução obtida na seção 4.1 converge para o regime permanente quando elimina-se o efeito do metabolismo, podendo, então, ser aplicada para a obtenção do perfil de temperaturas em qualquer ponto do domínio e em qualquer instante. O uso de soluções analíticas permite agilidade e precisão nos cálculos de temperatura podendo ainda ser utilizada em problemas inversos para a obtenção de propriedades térmicas como a condutividade ou propriedades do organismo como a perfusão sanguínea e a taxa de metabolismo.

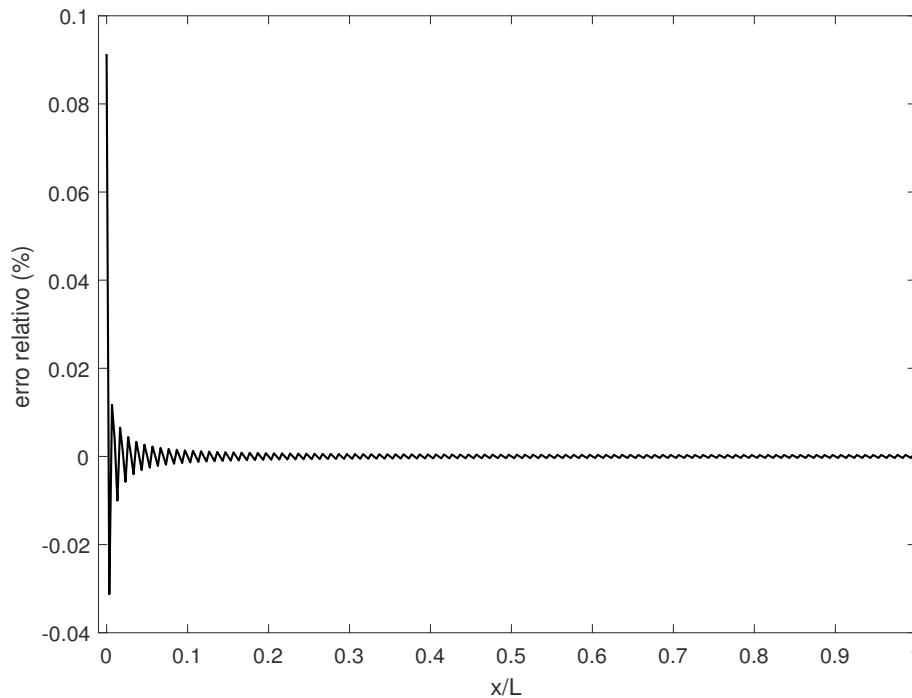


Figura 5.5: Erro relativo entre a solução analítica unidimensional em regime permanente com a eliminação do efeito do metabolismo.

### 5.3 Equação do biocalor 1D em regime permanente com os efeitos de perfusão e metabolismo

A partir do que foi demonstrado nas seções anteriores, pode-se também deduzir o modelo unidimensional em regime permanente da equação da biotransferência de calor levando-se em consideração os efeitos de metabolismo e perfusão. Isto é, a Eq. (2.1) traduz estes efeitos quando escrita

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T) + Q_m = 0 \quad (5.15)$$

acompanhada das condições de contorno:

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = q_0 \quad (5.16)$$

e

$$T(L) = T_c \quad (5.17)$$

efetuando-se as mesmas mudanças de variáveis da seção anterior, a Eq. (5.15) fica da forma

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - M^2\Theta + \frac{Q_m}{k} = 0 \quad (5.18)$$

que é uma EDO de 2ª ordem não homogênea com coeficientes constantes. As condições de contorno tem o mesmo formato do apresentado na seção anterior:

$$-k \left. \frac{d\Theta}{dx} \right|_{x=0} = q_0 \quad (5.19)$$

e

$$\Theta(L) = T_c - T_a \quad (5.20)$$

Uma solução particular da Eq. (5.18) é

$$\Theta_p = \frac{Q_m}{kM^2} \quad (5.21)$$

e a solução da equação homogênea é a obtida na seção anterior. Assim, a distribuição de temperaturas em regime permanente para o caso unidimensional é dada por:

$$T(x) = T_a + \frac{Q_m}{kM^2} - \frac{q_0}{kM} \sinh(Mx) + \left[ T_c - T_a - \frac{Q_m}{kM^2} + \frac{q_0}{kM} \sinh(ML) \right] \cdot \frac{\cosh(Mx)}{\cosh(ML)} \quad (5.22)$$

Como observado nas Figuras 5.6 e 5.7, as duas soluções (Eq. (5.22) e Eq. (4.23)) em regime permanente convergem, constatando novamente que a solução analítica obtida é válida e aplicável a todo instante. Soluções como esta são de grande importância em bio-engenharia, pois a partir do perfil resultante de temperaturas ao longo do domínio pode-se prever a existência de alguma anomalia no tecido, seja uma elevada taxa de metabolismo caracterizada por alguma infecção ou até mesmo um carcinoma. Novamente as curvas-solução nas duas situações são coincidentes e o erro é da ordem de  $10^{-2}$  % em praticamente todo o domínio.

Um comparativo interessante pode ser traçado entre as soluções em regime permanente

sem o efeito do metabolismo (Fig. 5.4) e com o efeito do metabolismo (Fig. 5.6) a concavidade da curva muda quando o efeito do metabolismo é considerado ou não é considerado. No caso da seção anterior, percebe-se que a solução como não é dependente do metabolismo sofre apenas os efeitos do fluxo imposto na superfície e da perfusão sanguínea.

Já no exposto na Fig. 5.6 o efeito do metabolismo aumenta a derivada próxima à superfície dando maior relevância ao efeito do fluxo imposto e indo em contrapartida ao efeito da perfusão que pode ser entendido como um efeito convectivo na parte interior do tecido que tende a manter a temperatura corporal constante e igual a  $T_c$ . Pode-se sugerir por exemplo, a dedução de uma solução que leva em conta, separadamente, apenas o efeito do metabolismo devido à respiração celular e acopla, por exemplo, o efeito de transpiração, o que deixaria o modelo mais complexo pois a transpiração tem por sua função termorreguladora papel importante nos efeitos de convecção na superfície.

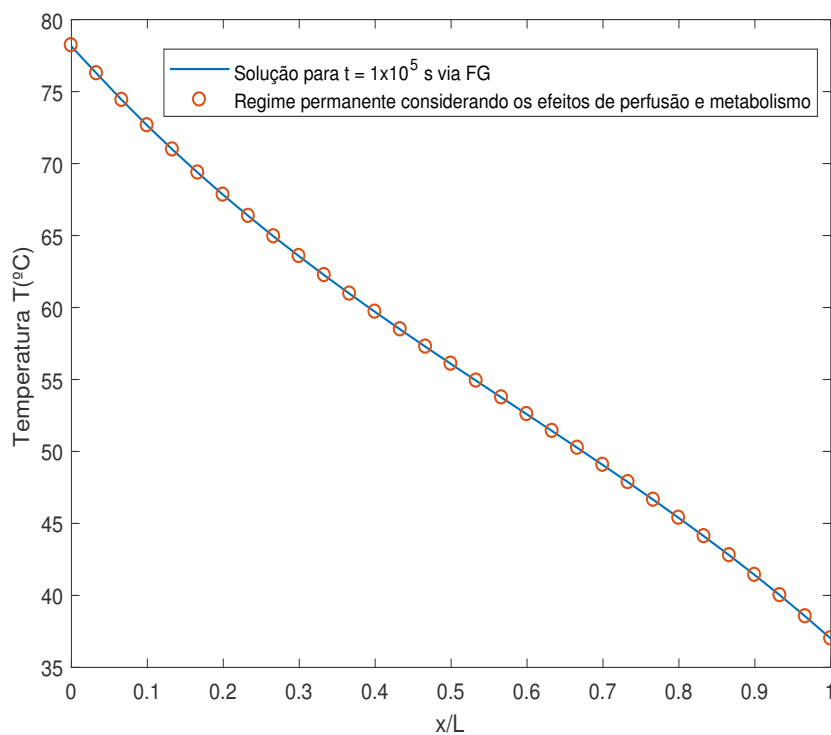


Figura 5.6: Comparação entre a solução analítica dada pela Eq. (4.23) e a solução do problema 1D considerando os efeitos de perfusão e metabolismo (Eq. (5.22)) ambas em regime permanente.

Uma das vantagens que a solução analítica traz é permitir a sua verificação intrínseca (resultados discutidos ao longo deste capítulo), o que permite avaliar seu comportamento e descobrir possíveis erros em sua dedução mesmo sem comparar com outras metodologias como, por exemplo, métodos numéricos, experimentos ou outras técnicas de obtenção de soluções analíticas.

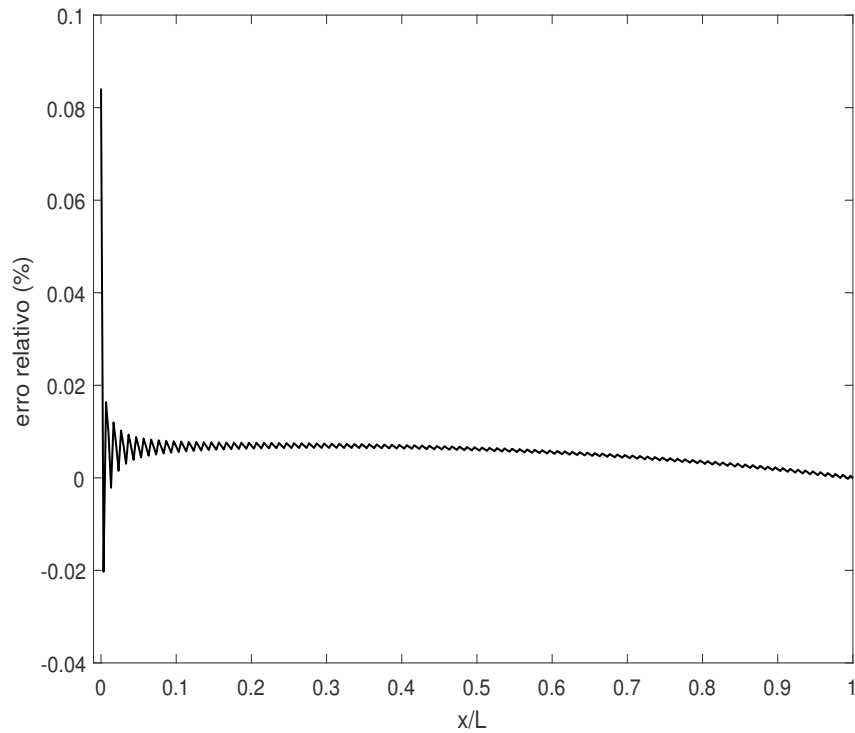


Figura 5.7: Erro relativo entre a solução analítica unidimensional completa em regime permanente e a eliminação do efeito do metabolismo.

No capítulo seguinte, a partir dos resultados analisados e verificados da solução unidimensional, é deduzida a solução para o modelo de Pennes tridimensional levando-se em conta os efeitos de perfusão e metabolismo.

# CAPÍTULO VI

## PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS

Soluções do problema da biotransferência de calor para casos tridimensionais são obtidas neste capítulo. O problema analisado corresponde a um domínio submetido a um fluxo prescrito constante na superfície, com convecção nas faces laterais e condição inicial uniforme em todo o domínio (seção 6.1).

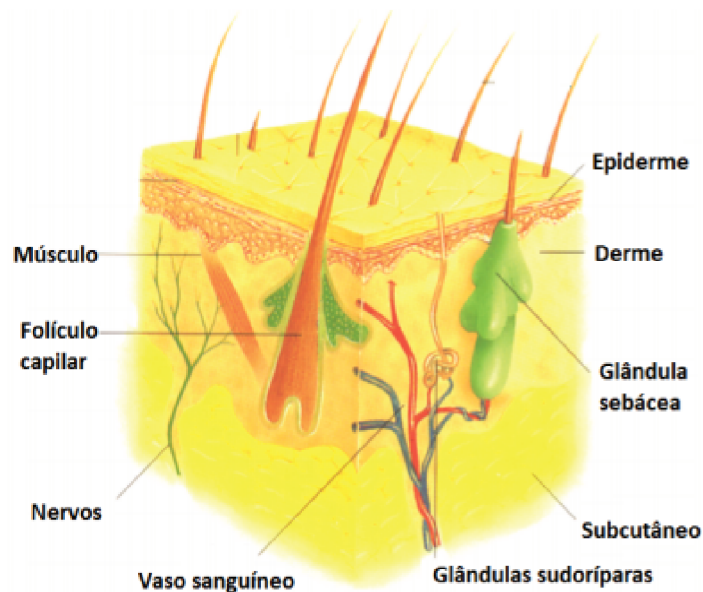


Figura 6.1: Configuração da estrutura da pele (TOLEDO; LOUREIRO, 2014).

Detalha-se na Fig. 6.1 a estrutura básica da pele humana de forma tridimensional, domínio de interesse do presente capítulo. A estrutura é analisada considerando que o efeito do escoamento do sangue através dos vasos sanguíneos pode ser modelado totalmente pelo termo de perfusão ( $\omega_b$ ). Os efeitos metabólicos devido aos músculos e demais estruturas estão agrupados

no termo de metabolismo ( $Q_m$ ), as trocas de calor devido aos pelos que revestem o tecido e têm papel importante na termorregulação do organismo são tratados no termo de convecção. O tecido subcutâneo é tratado como a referência para a definição do domínio de cálculo sendo denotado por  $x = L$  nos cálculos realizados.

As propriedades do tecido e os valores definidos de temperaturas prescritas, fluxos e coeficientes de convecção estão indicados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Propriedades do tecido em estudo e condições de contorno (HOLMES, 1997)

Símbolo	Valor	Descrição
$L$	0,03 m	dimensão do domínio na direção $x$
$a$	0,03 m	dimensão do domínio na direção $y$
$b$	0,03 m	dimensão do domínio na direção $z$
$\rho$	$1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	massa específica do tecido
$\rho_b$	$1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	massa específica do sangue
$c$	4,2 kJ/(kg°C)	calor específico do tecido
$c_b$	4,2 kJ/(kg°C)	calor específico do sangue
$T_a$	37°C	temperatura arterial
$T_c$	37°C	temperatura interior do corpo humano
$T_f$	25°C	temperatura do ambiente
$k$	$5 \cdot 10^{-1} \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$	condutividade térmica do tecido
$\omega_b$	$5 \cdot 10^{-4} \text{ mL/(mL}\cdot\text{s)}$	perfusão sanguínea
$h_0$	$10 \text{ W/(m}^2 \text{ }^\circ\text{C)}$	coeficiente de convecção do ar
$Q_m$	$3,38 \cdot 10^4 \text{ W/m}^3$	taxa de metabolismo do organismo
$q_0$	$1000 \text{ W/m}^2$	fluxo imposto na superfície

## 6.1 Problema X21Y33Z33

Para o estudo de caso do problema tridimensional, pode-se assumir um volume de controle representativo de um tecido biológico vivo (Fig. 6.2), por exemplo o braço humano, submetido às condições de contorno de convecção e fluxo prescrito.

A equação governante, seguindo o modelo de Pennes, considerando propriedades constantes, pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k} (T_a - T) + \frac{Q_m}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.1)$$

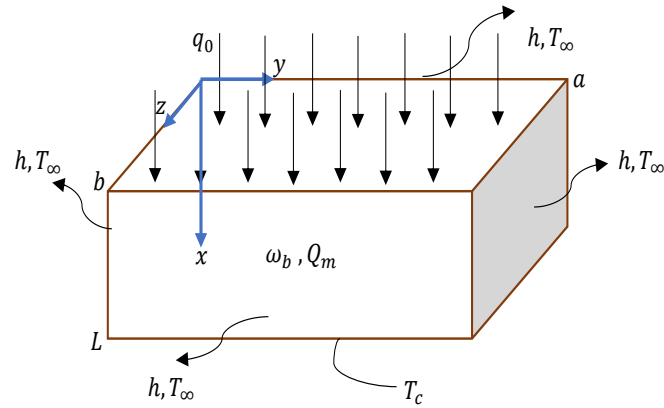


Figura 6.2: Domínio de cálculo representativo do antebraço humano submetido a um fluxo de calor na superfície, temperatura prescrita na base (em contato com o organismo) e à convecção nas demais faces - Problema X21Y33Z33.

Para simplificar a obtenção do modelo, assume-se que, inicialmente, todo o domínio esteja à mesma temperatura

$$T(x, y, z, 0) = T_a \quad (6.2)$$

e submetido às condições de contorno:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_o \quad (6.3)$$

$$T = T_c \text{ em } x = L \quad (6.4)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h (T_f - T|_{y=0}) \quad (6.5)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=a} = h (T|_{y=a} - T_f) \quad (6.6)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h (T_f - T|_{z=0}) \quad (6.7)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{z=b} = h(T|_{z=b} - T_f) \quad (6.8)$$

Na condição de contorno dada pela Eq. (6.3) é prescrito um fluxo na superfície do tecido e na Eq. (6.4) indica-se uma temperatura prescrita na posição  $x = L$ , ou seja, o problema na direção  $x$  é do tipo X21. As Equações (6.5) a (6.8) representam as faces externas nos planos  $xy$  e  $xz$  que estão submetidas à convecção, portanto, o problema nessas direções é do tipo Y33 e Z33, respectivamente. Porém, devido à simetria do problema, ele pode ser transformado num problema do tipo X21Y32Z32, considerando que, nos planos centrais paralelos aos planos  $xOy$  e  $xOz$  a derivada é nula. Redefine-se os limites nas coordenadas  $y$  e  $z$  para simplificação de notação:  $a = 2a$  e  $b = 2b$ ; e, assim, as condições de contorno para a Eq. (6.1), passam a ser da forma

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q_o \quad (6.9)$$

$$T = T_c \text{ em } x = L \quad (6.10)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = h(T_f - T|_{y=0}) \quad (6.11)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=a} = 0 \quad (6.12)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = h(T_f - T|_{z=0}) \quad (6.13)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{z=b} = 0 \quad (6.14)$$

No entanto, a Eq. (6.1) não pode ser resolvida por Funções de Green da maneira em que está escrita, por apresentar o termo de temperatura vinculado à perfusão, para tanto, analogamente



ao caso unidimensional, toma-se

$$T(x, y, z, t) = T_a + W(x, y, z, t) \exp(-\lambda t) \quad (6.15)$$

com

$$\lambda = M^2 \alpha \quad (6.16)$$

e

$$M^2 = \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k} \quad (6.17)$$

Derivando em relação ao tempo a Eq. (6.15), tem-se

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} \cdot \exp(-\lambda t) - \lambda \cdot W \exp(-\lambda t) \quad (6.18)$$

Pode-se, então, aplicar o laplaciano em ambos os membros da Eq. (6.15), levando a

$$\nabla^2 T = \nabla^2 W \cdot \exp(-\lambda t) \quad (6.19)$$

A partir das equações (6.18) e (6.19), manipulando-se corretamente os termos, a Eq. (6.1) é escrita em termos da variável  $W$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{1}{k} \cdot Q_m \exp(\lambda t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (6.20)$$

De maneira análoga, pode-se demonstrar que as condições inicial e de contorno podem ser escritas em termos da variável  $W$  sendo:

- a condição inicial dada por

$$W(x, y, z, 0) = 0 \quad (6.21)$$

- as condições de contorno na direção  $x$  (fluxo e temperatura prescritos):

$$-k \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=0} = q_0 \exp(\lambda t) \quad (6.22)$$

e

$$W = 0 \text{ em } x = L \quad (6.23)$$

- as condições de contorno na direção  $y$ :

$$-k \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} = h[(T_f - T_a) \cdot \exp(\lambda t) - W] \quad (6.24)$$

e

$$-k \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=a} = 0 \quad (6.25)$$

- e as condições de contorno na direção  $z$ :

$$-k \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = h[(T_f - T_a) \cdot \exp(\lambda t) - W] \quad (6.26)$$

e

$$-k \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=b} = 0 \quad (6.27)$$

Desse modo, pode-se estabelecer as Funções de Green que se relacionam com o tipo de problema em cada direção (ver Cole *et al.* (2010)). Na direção  $x$ :

$$G_{X21} = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-\beta_m^2 \alpha (t - \tau)}{L^2}\right) \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cos\left(\beta_m \frac{x'}{L}\right) \quad (6.28)$$

onde

$$\beta_m = \pi \left(m - \frac{1}{2}\right) \quad (6.29)$$

na direção  $y$ :

$$G_{Y32} = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left[\beta_n \left(1 - \frac{y}{a}\right)\right] \cos\left[\beta_n \left(1 - \frac{y'}{a}\right)\right] \exp\left[\frac{-\beta_n^2 \alpha (t - \tau)}{a^2}\right] \times \frac{\beta_n^2 + B_1^2}{\beta_n^2 + B_1^2 + B_1} \quad (6.30)$$

sendo

$$B_1 = \frac{ha}{k} \quad (6.31)$$

e os autovalores  $\beta_n$  são as raízes positivas, ordenadas em ordem crescente, da equação transcendental

(ver Fernandes (2009)):

$$\beta_n \operatorname{tg} \beta_n = B_1 \quad (6.32)$$

e na direção z:

$$G_{Z32} = \frac{2}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \cos \left[ \beta_p \left( 1 - \frac{z}{b} \right) \right] \cos \left[ \beta_p \left( 1 - \frac{z'}{b} \right) \right] \exp \left[ \frac{-\beta_p^2 \alpha (t - \tau)}{b^2} \right] \times \frac{\beta_p^2 + B_2^2}{\beta_p^2 + B_2^2 + B_2} \quad (6.33)$$

onde, analogamente,

$$B_2 = \frac{hb}{k} \quad (6.34)$$

e

$$\beta_p \operatorname{tg} \beta_p = B_2 \quad (6.35)$$

Portanto, a função de Green associada ao problema tridimensional (Eq. (6.20)) é

$$G_{X21Y32Z32}(x, y, z, t | x', y', z', \tau) = G_{XYZ} = G_{X21} \cdot G_{Y32} \cdot G_{Z32} \quad (6.36)$$

ou seja,

$$G_{XYZ} = \frac{8}{Lab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left( \frac{\beta_n^2 + B_1^2}{\beta_n^2 + B_1^2 + B_1} \right) \left( \frac{\beta_p^2 + B_2^2}{\beta_p^2 + B_2^2 + B_2} \right) \exp[-\gamma \alpha (t - \tau)] \times \cos \left( \beta_m \frac{x}{L} \right) \cos \left[ \beta_n \left( 1 - \frac{y}{a} \right) \right] \cos \left[ \beta_p \left( 1 - \frac{z}{b} \right) \right] \times \cos \left( \beta_m \frac{x'}{L} \right) \cos \left[ \beta_n \left( 1 - \frac{y'}{a} \right) \right] \cos \left[ \beta_p \left( 1 - \frac{z'}{b} \right) \right] \quad (6.37)$$

com

$$\gamma = \frac{\beta_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{a^2} + \frac{\beta_p^2}{b^2} \quad (6.38)$$

A solução da Eq. (6.20) via Funções de Green é obtida através da equação-solução integral dada pela Eq. (3.32):

$$\begin{aligned}
W(x, y, z, t) = & \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a \int_{z'=0}^b G \cdot Q_m \exp(\lambda\tau) dz' dy' dx' d\tau + \\
& + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^a \int_{z'=0}^b q_0 \exp(\lambda\tau) G|_{x'=0} dz' dy' d\tau + \\
& + \frac{\alpha h}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{z'=0}^b (T_f - T_a) \exp(\lambda\tau) G|_{y'=0} dz' dx' d\tau + \\
& + \frac{\alpha h}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a (T_f - T_a) \exp(\lambda\tau) G|_{z'=0} dy' dx' d\tau
\end{aligned} \tag{6.39}$$

e a distribuição de temperatura  $T(x, y, z, t)$  é dada por

$$\begin{aligned}
T(x, y, z, t) = & T_a + \left\{ \frac{\alpha Q_m}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* l_x l_y l_z l_\tau + \frac{\alpha q_0}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* l_y l_z l_\tau + \right. \\
& + \frac{\alpha h}{k} (T_f - T_a) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* l_x l_z l_\tau \cos \beta_n + \\
& \left. + \frac{\alpha h}{k} (T_f - T_a) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* l_x l_y l_\tau \cos \beta_p \right\} \exp(-\lambda t)
\end{aligned} \tag{6.40}$$

sendo

$$\begin{aligned}
G^* = & \frac{8}{Lab} \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cos\left[\beta_n \left(1 - \frac{y}{a}\right)\right] \cos\left[\beta_p \left(1 - \frac{z}{b}\right)\right] \\
& \times \left(\frac{\beta_n^2 + B_1^2}{\beta_n^2 + B_1^2 + B_1}\right) \left(\frac{\beta_p^2 + B_2^2}{\beta_p^2 + B_2^2 + B_2}\right)
\end{aligned} \tag{6.41}$$

$$l_x = \frac{L \operatorname{sen} \beta_m}{\beta_m} \tag{6.42}$$

$$l_y = \frac{a \operatorname{sen} \beta_n}{\beta_n} \tag{6.43}$$

$$l_z = \frac{b \operatorname{sen} \beta_p}{\beta_p} \tag{6.44}$$

e

$$I_r = \frac{\exp(\lambda t) - \exp(-\gamma \alpha t)}{\alpha(M^2 + \gamma)} \quad (6.45)$$

os cálculos intermediários para a dedução das Eqs. (6.39) e (6.40) podem ser acompanhados no Apêndice C.

A evolução das temperaturas ao longo do tempo na superfície podem ser avaliadas pelas figuras seguintes. Os resultados mostrados apresentam a evolução da temperatura superficial do domínio ao longo do tempo. Nos instantes iniciais, entre 0,1 s e 10 s, a mudança na temperatura superficial é, inicialmente, dependente da convecção nas faces laterais, o que demonstra a simetria do problema.

À medida que o tempo avança, a aplicação do fluxo prescrito e os efeitos convectivos vão evoluindo, há uma mudança nas características da superfície  $T(x, y, z, t_i)$ , com  $t_i$  sendo o instante de análise. Após 1000 s o sistema como um todo tende a entrar em regime permanente havendo pequenas variações em grandes intervalos de tempo. Assume-se, a partir desse padrão que o regime permanente é estabelecido a partir de  $1 \cdot 10^4$  s. No capítulo seguinte, essa solução é verificada intrinsecamente comparando-a com a solução tridimensional eliminando-se o efeito de convecção (toma-se  $h = 1 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$ ) e avaliando-se um domínio com dimensões comparativamente muito maiores nas direções  $y$  e  $z$  em relação ao do estudo original.

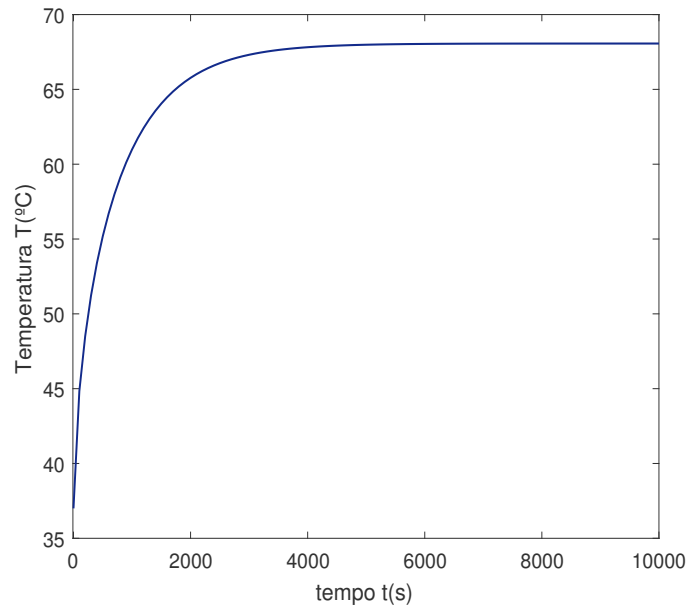


Figura 6.3: Evolução da temperatura no centro da superfície do tecido ao longo do tempo quando aplicado um fluxo  $q_0 = 1.000 \text{ W}/\text{m}^2$  (Problema X21Y33Z33).

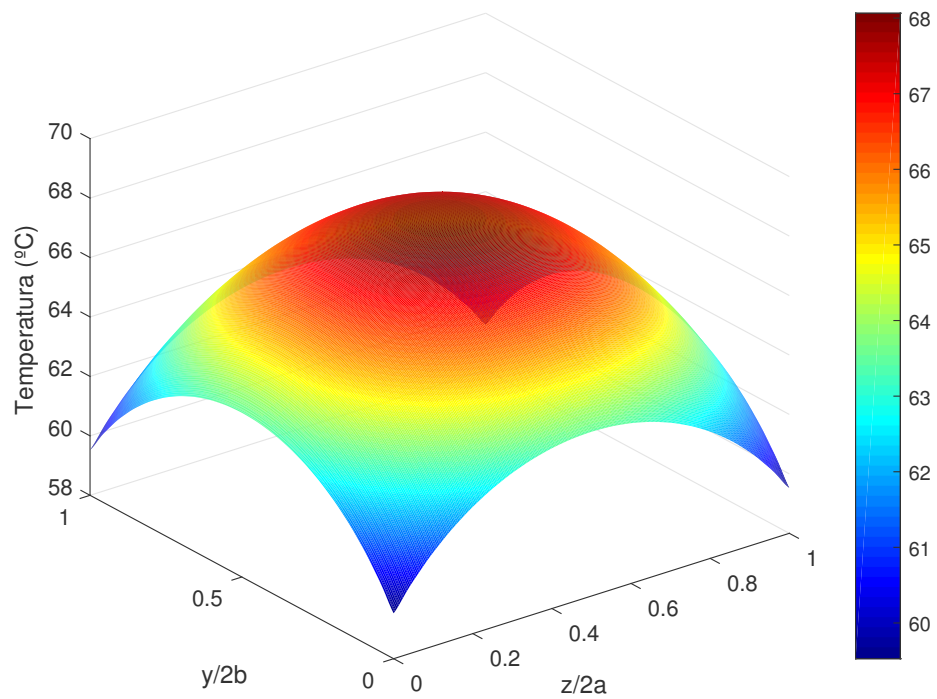


Figura 6.4: Distribuição de temperaturas na superfície ( $x = 0$ ) para  $t = 1 \cdot 10^4$  s (Problema X21Y33Z33).

# CAPÍTULO VII

## VERIFICAÇÃO INTRÍNSECA DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA X21Y33Z33 DA SEÇÃO 6.1

Neste capítulo, estuda-se a validade da solução tridimensional de condução em tecidos biológicos obtida no capítulo anterior. Faz-se a verificação intrínseca da solução por meio de simplificações e/ou hipóteses no modelo com o intuito de compará-lo a um resultado previamente conhecido e verificado. Nesse sentido, duas situações são estudadas:

- (i) avaliação da presença e da ausência da convecção, diminuindo-se em cinco ordens de grandeza o valor do coeficiente de convecção e analisando o perfil em relação ao caso unidimensional (seção 7.1);
- (ii) comparação de um domínio estendido (com dimensões nas direções  $y$  e  $z$  comparativamente maiores que o domínio original) em relação ao caso unidimensional (seção 7.2).

Na seção 7.3, o problema é reduzido ao caso unidimensional substituindo a condição de contorno de convecção nas faces laterais por faces isoladas.

### 7.1 Eliminação do efeito convectivo nas faces laterais

Para verificar a validade da solução tridimensional obtida, faz-se a verificação intrínseca da mesma quando os efeitos convectivos são eliminados das faces laterais. Para um mesmo fluxo imposto, na Fig. 7.1 mostra-se o comportamento transiente das soluções uni e tridimensionais. O ponto de análise no domínio tridimensional é o centro da superfície. Foram utilizados 200 autovalores em cada direção. A partir da análise das curvas, percebe-se que a solução tridimensional acompanha a solução unidimensional durante toda a evolução temporal, o que corrobora para a validade da solução 3D obtida.

Sendo  $T_{X21Y33Z33}$  a solução tridimensional dada pela Eq. (7.24) com a convecção nas faces laterais desprezível e  $T_{X21}$  a solução unidimensional deduzida no Anexo A, o erro relativo entre as duas soluções é dado por

$$erro_{hp} = \frac{T_{X21Y33Z33} - T_{X21}}{T_{X21}} \times 100\% \quad (7.1)$$

Analisando a Fig. 7.2, percebe-se que a diferença relativa entre as duas soluções é da ordem de  $10^{-8}$  %, que, confirma a convergência do problema tridimensional com efeitos convectivos desprezíveis ao caso unidimensional.

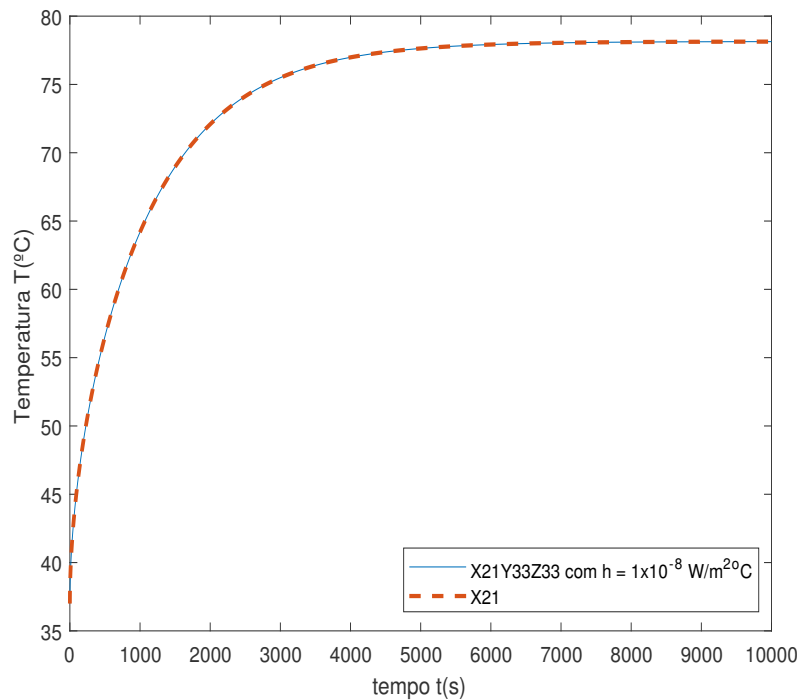


Figura 7.1: Evolução da temperatura superficial do tecido nos casos tridimensional com efeito de convecção desprezível e unidimensional, ambos resolvidos via Funções de Green.

Na Tabela 7.1 é mostrada a comparação entre a quantidade de autovalores utilizada no cálculo da solução tridimensional com efeitos convectivos laterais reduzidos e o erro relativo obtido em regime permanente em comparação com o caso unidimensional.



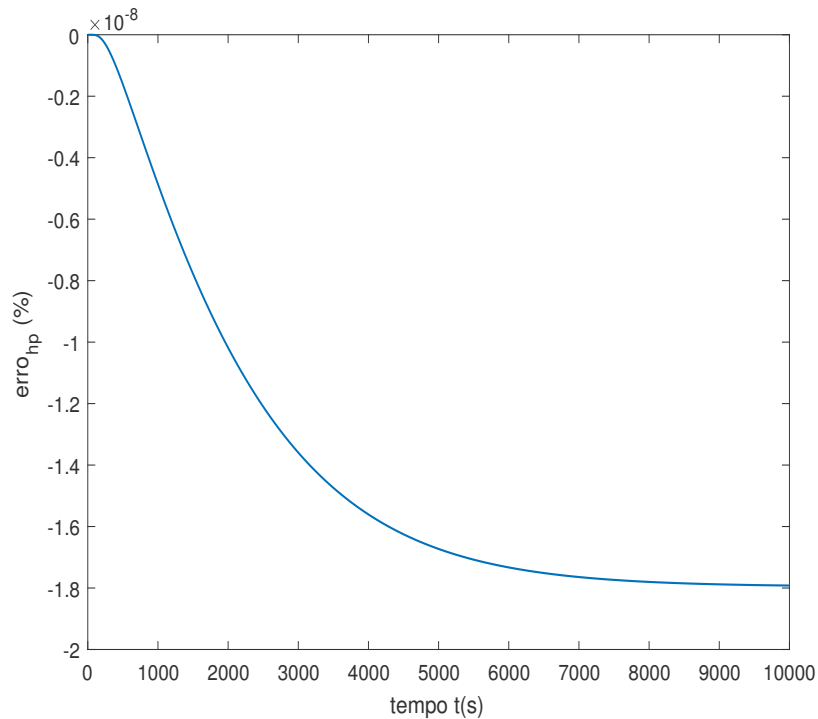


Figura 7.2: Erro relativo entre as soluções 1D e 3D (com convecção lateral desprezível) ao longo do tempo (Eq. (7.1)).

Tabela 7.1: Estudo da convergência da solução tridimensional com efeitos convectivos laterais desprezíveis para um ponto no centro da superfície do domínio em relação à solução unidimensional.  $m$ ,  $n$ ,  $p$  indicam o número de autovalores utilizados na série nas direções  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente.

$m, n, p$	erro máximo (%)	erro em regime permanente (%)
2	-11,2162	-7,5653
5	-5,2819	-2,9900
10	-2,8196	-1,4775
20	-1,3989	-0,7001
30	-0,8959	-0,4409
40	-0,6378	-0,3112
50	-0,4807	-0,2334
100	-0,1611	-0,0778
200	$-1,7920 \cdot 10^{-8}$	$-1,7920 \cdot 10^{-8}$

## 7.2 Avaliação do efeito do tamanho do domínio

Com o intuito de analisar a eliminação dos efeitos convectivos de uma segunda forma, altera-se o tamanho do domínio estendendo-o nas direções  $y$  e  $z$  tomando-se como ponto de análise o centro da superfície ( $T_{3Dde}$ ). O subíndice 'dE' refere-se a "domínio estendido". Comparando a solução com a já verificada solução unidimensional para o problema de biotransferência de calor, novamente para um mesmo fluxo de calor, o comportamento da temperatura superficial nos dois casos é visualmente convergente como ilustrado na Fig. 7.3 para 200 autovalores em cada uma das direções.

Para esta situação, o erro relativo entre os dois casos,  $erro_{de}$ , é calculado pela expressão:

$$erro_{de} = \frac{T_{3Dde} - T_{X21}}{T_{X21}} \times 100\% \quad (7.2)$$

Nesse caso, o número de autovalores para que o problema tridimensional convirja para o problema unidimensional deve aumentar, uma vez que as dimensões em  $y$  e  $z$  aumentaram, isto é observado na Tab. 7.2 na qual, para os mesmos 200 autovalores do caso anterior o erro ainda possui uma ordem de grandeza de  $10^{-2}\%$  em regime permanente.

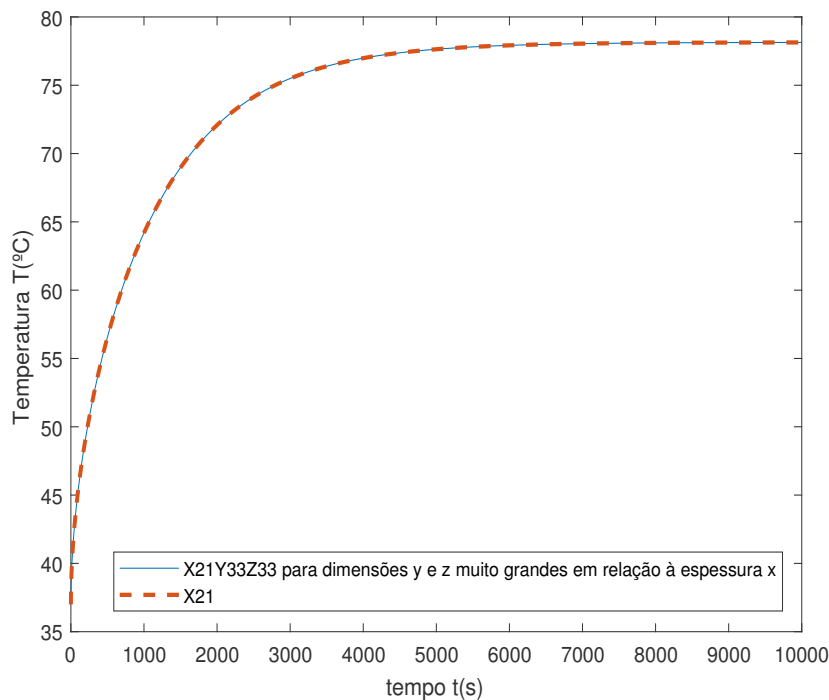


Figura 7.3: Evolução da temperatura superficial do tecido nos casos 1D e 3D com as direções  $y$  e  $z$  estendidas, ambos resolvidos via FG (200 autovalores).

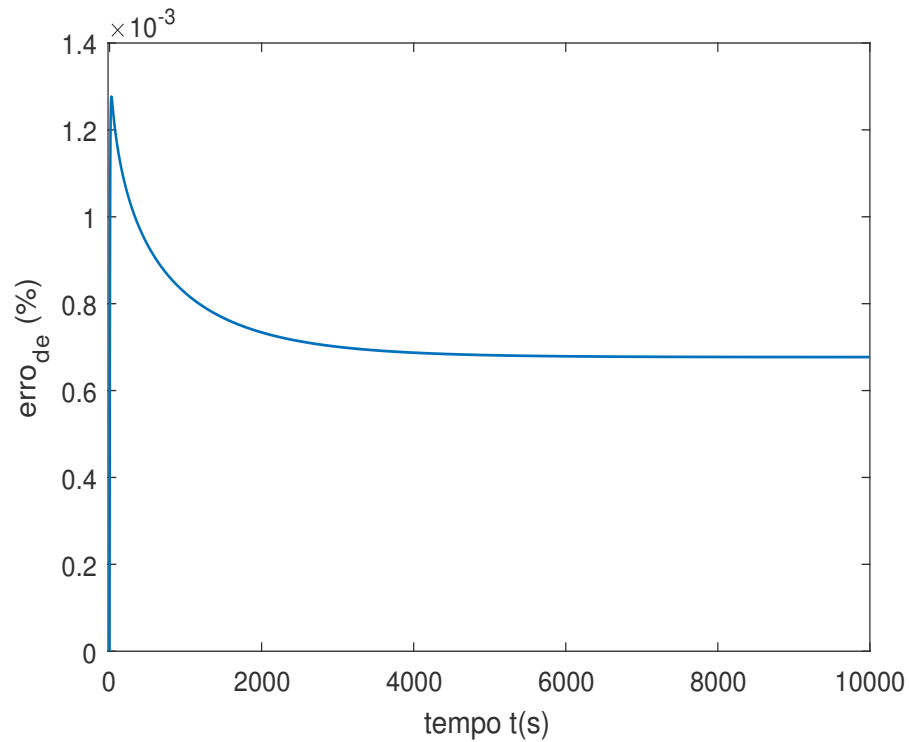


Figura 7.4: Erro relativo entre as soluções 1D e 3D (com a superfície estendida) ao longo do tempo.

Tabela 7.2: Estudo da convergência da solução tridimensional com dimensões grandes nas direções  $y$  e  $z$  em relação à solução unidimensional para um ponto central da superfície do tecido.  $m$ ,  $n$ ,  $p$  indicam o número de autovalores utilizados na série nas direções  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente.

$m, n, p$	erro máximo (%)	erro em regime permanente (%)
2	-18,3624	-18,3624
5	-4,7536	+0,1605
10	-2,9382	-2,0968
20	-1,4151	-0,7538
30	-0,9008	-0,4434
40	-0,6400	-0,3067
50	-0,4816	-0,2284
100	-0,1612	-0,0755
200	+0,0013	+6,7704 · 10 <sup>-3</sup>

### 7.3 Problema X21Y22Z22

O problema do tipo X21Y22Z22, com fluxo prescrito na superfície, temperatura prescrita em  $x = L$  e isolado nas demais faces, também pode ser utilizado para verificar, intrinsecamente, a solução obtida na seção 6.1. Para tanto, alteram-se as condições de contorno do problema de tal forma que o domínio é isolado em todas as faces exceto na superfície e em  $x = L$ , ver Fig. 7.5.

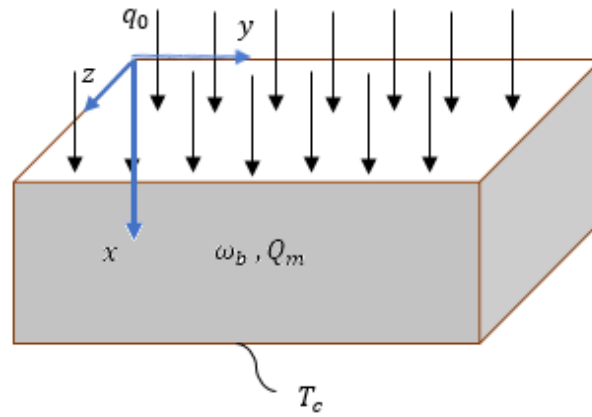


Figura 7.5: Domínio de cálculo representativo do antebraço humano submetido a um fluxo de calor na superfície, temperatura prescrita na base (em contato com o organismo) e isolado nas demais faces - Problema X21Y22Z22.

Sendo assim, pode-se reescrever o problema de Pennes:

$$k\nabla^2 T + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T) + Q_m = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7.3)$$

vinculado às condições de contorno:

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q_0 \quad (7.4)$$

$$T = T_c, \text{ em } x = L \quad (7.5)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=a} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=b} = 0 \quad (7.6)$$

e à condição inicial:

$$T(x, y, z, 0) = T(x, 0) = T_0(x) = T_p + \frac{T_c - T_p}{\cosh(ML)} \cdot \cosh(Mx) \quad (7.7)$$

com

$$M = \sqrt{\frac{\omega_b \rho_b c_b}{k}} \quad (7.8)$$

e

$$T_p = \frac{M^2 T_a + \frac{Q_m}{k}}{M^2} \quad (7.9)$$

Tomando-se

$$T(x, y, z, t) = T_0 + W(x, y, z, t) \cdot \exp(-\lambda \cdot t) \quad (7.10)$$

com

$$\lambda = \frac{\omega_b \rho_b c_b}{\rho c} \quad (7.11)$$

Realizando a mudança de variável definida pela Eq. (7.10) para eliminar o termo de perfusão e ser possível a resolução via funções de Green, a Eq. (7.3) torna-se:

$$\nabla^2 W = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (7.12)$$

e as condições inicial e de contorno (indicadas pelas Eqs. (7.4) a (7.6)) assumem, respectivamente, a forma:

$$W = 0, \quad \text{em } t = 0 \quad (7.13)$$

$$-k \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=0} = q_0 \exp(-\lambda t) \quad (7.14)$$

$$W = 0, \quad \text{em } x = L \quad (7.15)$$

$$-k \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} = -k \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=a} = -k \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = -k \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=b} = 0 \quad (7.16)$$

A função de Green que resolve o problema é da forma:  $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X21}G_{Y22}G_{Z22}$ , em que:

$$G_{X21} = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\beta_m^2 \alpha (t - \tau)}{L^2} \right] \cos \left( \frac{\beta_m x}{L} \right) \cos \left( \frac{\beta_m x'}{L} \right) \quad (7.17)$$

com  $\beta_m = \pi \left( m - \frac{1}{2} \right)$ ,

$$G_{Y22} = \frac{1}{a} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{n^2 \pi^2 \alpha (t - \tau)}{a^2} \right] \cos \left( \frac{n \pi y}{a} \right) \cos \left( \frac{n \pi y'}{a} \right) \right\} \quad (7.18)$$

$$G_{Z22} = \frac{1}{b} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{p^2 \pi^2 \alpha (t - \tau)}{b^2} \right] \cos \left( \frac{p \pi z}{b} \right) \cos \left( \frac{p \pi z'}{b} \right) \right\} \quad (7.19)$$

Assim, conforme a Eq. (3.25), a função de Green relacionada ao problema em questão é:

$$\begin{aligned} G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = & \frac{2}{abL} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\beta_m^2 \alpha (t - \tau)}{L^2} \right] \cos \left( \frac{\beta_m x}{L} \right) \cos \left( \frac{\beta_m x'}{L} \right) + \right. \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \exp \left[ -\alpha (t - \tau) \left( \frac{\beta_m^2}{L^2} + \frac{\pi^2 p^2}{b^2} \right) \right] \cos \left( \frac{\beta_m x}{L} \right) \cos \left( \frac{p \pi z}{b} \right) \cos \left( \frac{\beta_m x'}{L} \right) \cos \left( \frac{p \pi z'}{b} \right) + \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\alpha (t - \tau) \left( \frac{\beta_m^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \right) \right] \cos \left( \frac{\beta_m x}{L} \right) \cos \left( \frac{n \pi y}{a} \right) \cos \left( \frac{\beta_m x'}{L} \right) \cos \left( \frac{n \pi y'}{a} \right) + \\ & + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \exp \left[ -\alpha (t - \tau) \left( \frac{\beta_m^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{p^2 \pi^2}{b^2} \right) \right] \cos \left( \frac{\beta_m x}{L} \right) \cos \left( \frac{\beta_m x'}{L} \right) \cos \left( \frac{n \pi y}{a} \right) \times \\ & \left. \times \cos \left( \frac{n \pi y'}{a} \right) \cos \left( \frac{p \pi z}{b} \right) \cos \left( \frac{p \pi z'}{b} \right) \right\} \quad (7.20) \end{aligned}$$

e a solução do problema na variável  $W$ , a partir da Eq. (3.32), será:

$$W = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^a \int_{z'=0}^b G|_{x'=0} q_0 \exp(\lambda \tau) dz' dy' d\tau \quad (7.21)$$

O que resulta em:

$$W(x, y, z, t) = \frac{2\alpha q_0}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[ \exp(\lambda t) - \exp\left(-\frac{\beta_m^2 \alpha t}{L^2}\right) \right] \cos\left(\frac{\beta_m x}{L}\right)}{\left(\frac{\beta_m^2 \alpha}{L^2} + \frac{\omega_b \rho_b c_b}{\rho c}\right)} \quad (7.22)$$

os demais termos da Eq. (7.20) desaparecem na integração pois

$$\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi y'}{a}\right) dy' = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^b \cos\left(\frac{p\pi z'}{b}\right) dz' = 0 \quad (7.23)$$

Portanto, a distribuição de temperaturas é

$$T(x, y, z, t) = T(x, t) = T_0 + \frac{2\alpha q_0}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[ 1 - \exp\left(-\frac{\beta_m^2 \alpha t}{L^2} - \lambda\right) t \right] \cos\left(\frac{\beta_m x}{L}\right)}{\left(\frac{\beta_m^2 \alpha}{L^2} + \frac{\omega_b \rho_b c_b}{\rho c}\right)} \quad (7.24)$$

Assim, observa-se que uma aproximação unidimensional para o problema tridimensional é viável e que a solução pode ser validada lançando mão de tal técnica. A Eq. (7.24) é dependente somente da direção em que o fluxo é aplicado e tem o mesmo comportamento da solução apresentada na seção 4.1, sendo a solução a mesma que a obtida na Eq. (4.23), ou, se a distribuição inicial de temperatura for uniforme, a Eq. (A.15) do Anexo A.

Portanto, a partir das condições avaliadas neste capítulo, a solução tridimensional proposta fica verificada. Uma vez que se tem a solução analítica de um problema complexo em mãos, alteração dos valores de condição de contorno e análises a cerca do comportamento do campo de temperaturas em qualquer tempo e/ou posição ficam facilitados, o que reduz tempo computacional, erros e aproximações numéricas.

## CAPÍTULO VIII

### RESULTADOS

Neste capítulo, apresenta-se o campo de temperatura em diferentes posições do domínio, representados por sondas numéricas, para discutir e avaliar a aplicabilidade da solução obtida. Foram posicionadas sondas em 4 posições diferentes da superfície, em  $x = 0$  (sondas  $S1$  a  $S4$ ), 4 sondas 1 mm abaixo da superfície (sondas  $S5$  a  $S8$ ), 4 na base do tecido biológico ("core") indicadas pelas sondas  $S29$  a  $S32$ , 8 sondas na superfície exposta à convecção ( $z = 0,03$  cm), as sondas foram colocadas apenas em uma das superfícies expostas à convecção devido à simetria do problema, representadas pelas sondas  $S4$  (comum à superfície exterior),  $S8$  (comum às sondas nas proximidades da superfície),  $S32$  (comum às sondas basais) e as sondas  $S12$ ,  $S16$ ,  $S20$ ,  $S24$  e  $S28$  que analisam apenas o efeito daquela superfície, as demais sondas foram posicionadas no interior do tecido para melhor compreender a evolução térmica do mesmo como um todo. As posições das sondas foram tomadas conforme a Tab. 8.1 ao longo do plano  $\sigma$  definido na Fig. 8.1. Os resultados ilustrados e discutidos foram obtidos com 200 autovalores em cada direção. A disposição das sondas, conforme a Tab. 8.1, no plano  $\sigma$  é ilustrada na Fig. 8.2.



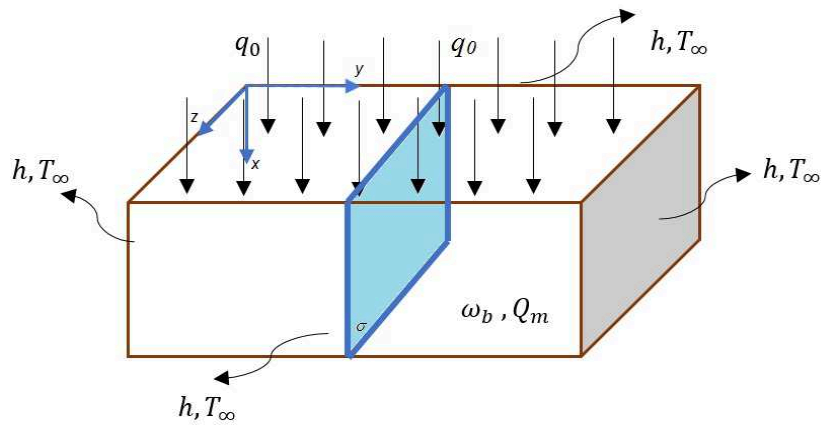


Figura 8.1: Definição do plano  $\sigma: y = 0,015 \text{ m}$

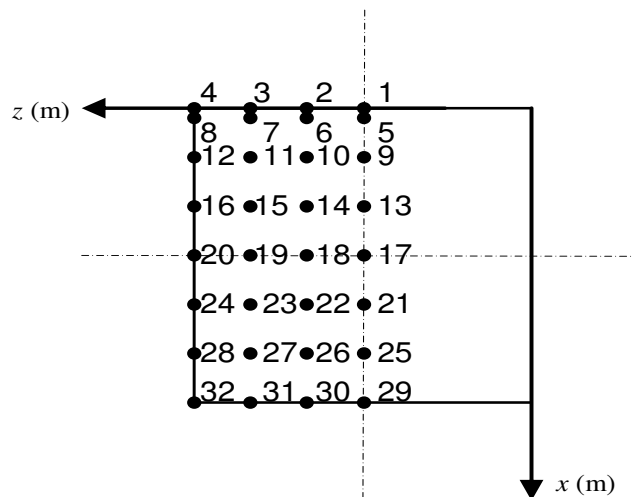


Figura 8.2: Sondas no plano  $\sigma: y = 0,015 \text{ m}$ .

Tabela 8.1: Posições, em termos de suas coordenadas [m], das sondas numéricas colocadas no domínio representativo de um tecido biológico *in vivo* em estudo.

<b>Sonda</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>z</b>	<b>Sonda</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>z</b>
<b>1</b>	0	0,015	0,015	<b>17</b>	0,015	0,015	0,015
<b>2</b>	0	0,015	0,020	<b>18</b>	0,015	0,015	0,020
<b>3</b>	0	0,015	0,025	<b>19</b>	0,015	0,015	0,025
<b>4</b>	0	0,015	0,030	<b>20</b>	0,015	0,015	0,030
<b>5</b>	0,001	0,015	0,015	<b>21</b>	0,020	0,015	0,015
<b>6</b>	0,001	0,015	0,020	<b>22</b>	0,020	0,015	0,020
<b>7</b>	0,001	0,015	0,025	<b>23</b>	0,020	0,015	0,025
<b>8</b>	0,001	0,015	0,030	<b>24</b>	0,020	0,015	0,030
<b>9</b>	0,005	0,015	0,015	<b>25</b>	0,025	0,015	0,015
<b>10</b>	0,005	0,015	0,020	<b>26</b>	0,025	0,015	0,020
<b>11</b>	0,005	0,015	0,025	<b>27</b>	0,025	0,015	0,025
<b>12</b>	0,005	0,015	0,030	<b>28</b>	0,025	0,015	0,030
<b>13</b>	0,010	0,015	0,015	<b>29</b>	0,030	0,015	0,015
<b>14</b>	0,010	0,015	0,020	<b>30</b>	0,030	0,015	0,020
<b>15</b>	0,010	0,015	0,025	<b>31</b>	0,030	0,015	0,025
<b>16</b>	0,010	0,015	0,030	<b>32</b>	0,030	0,015	0,030

### 8.1 Análise da evolução da temperatura em vários pontos do tecido

A condição em regime permanente do tecido após a aplicação do fluxo imposto e a combinação dos efeitos convectivos laterais, e metabólicos e de perfusão internos é apresentada na Fig. 8.3. Observa-se que a distribuição de temperaturas na superfície traduz a resposta esperada: uma maior temperatura no centro da superfície superior com gradual diminuição até as faces laterais. Na base, a condição de contorno de temperatura prescrita é respeitada, obtendo-se como resposta  $T = T_C = 37^\circ\text{C}$ .

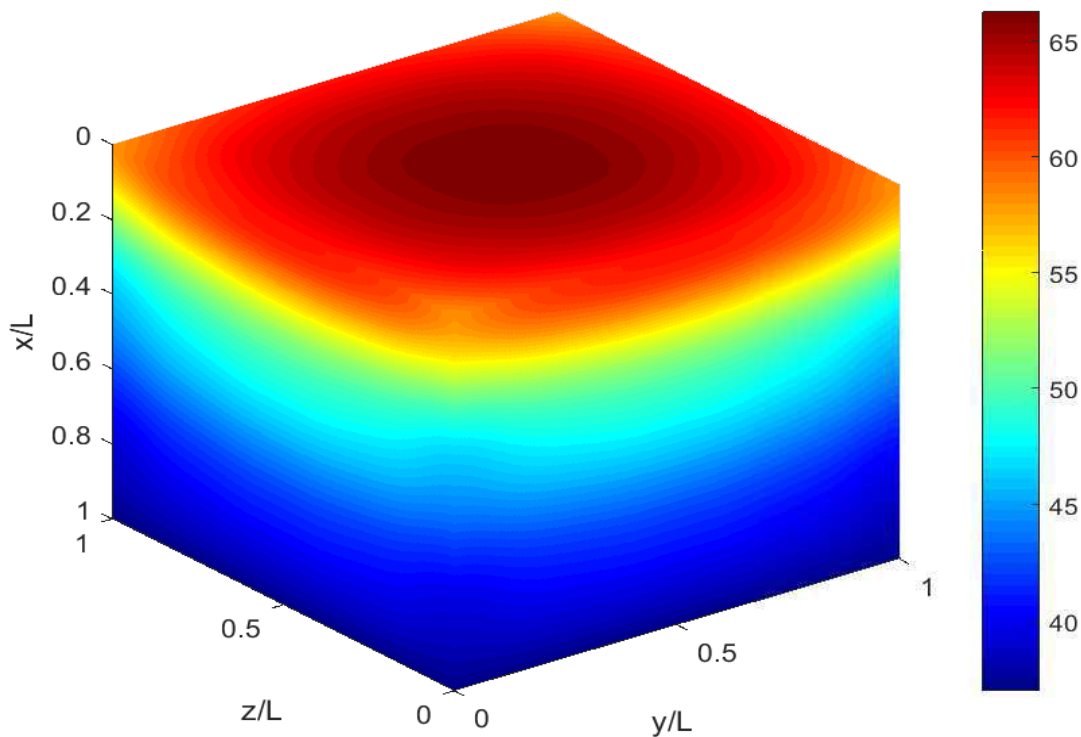


Figura 8.3: Campo de temperaturas no tecido em  $t = 1 \cdot 10^4$  s (200 autovalores).

As sondas numéricas instaladas na superfície,  $S1$  a  $S4$ , trazem a resposta de quatro pontos desta seção à aplicação do fluxo externo ( $q_0 = 1.000 \text{ W/m}^2$ ). Como observado na Fig. 8.4, o ponto central (sonda  $S1$ ) é aquele com a resposta com maior influência ao efeito do fluxo, como discutido no capítulo anterior, os efeitos convectivos vão diminuindo ao aproximar-se do centro do domínio em questão. As demais sondas, separadas 5 mm entre si, traduzem a combinação do efeito do fluxo, da geração de calor devido ao metabolismo, da perfusão sanguínea e da convecção nas laterais. Em especial a sonda  $S4$ , que possui a menor temperatura em regime permanente na superfície. Quatro sondas foram instaladas 1 mm abaixo da superfície, para comparar o efeito direto do fluxo e a influência dos efeitos interiores. Representadas pelas sondas  $S5$  a  $S8$ , estas sondas tem temperaturas

muito próximas às sondas imediatamente superiores, com uma diferença de 2°C.

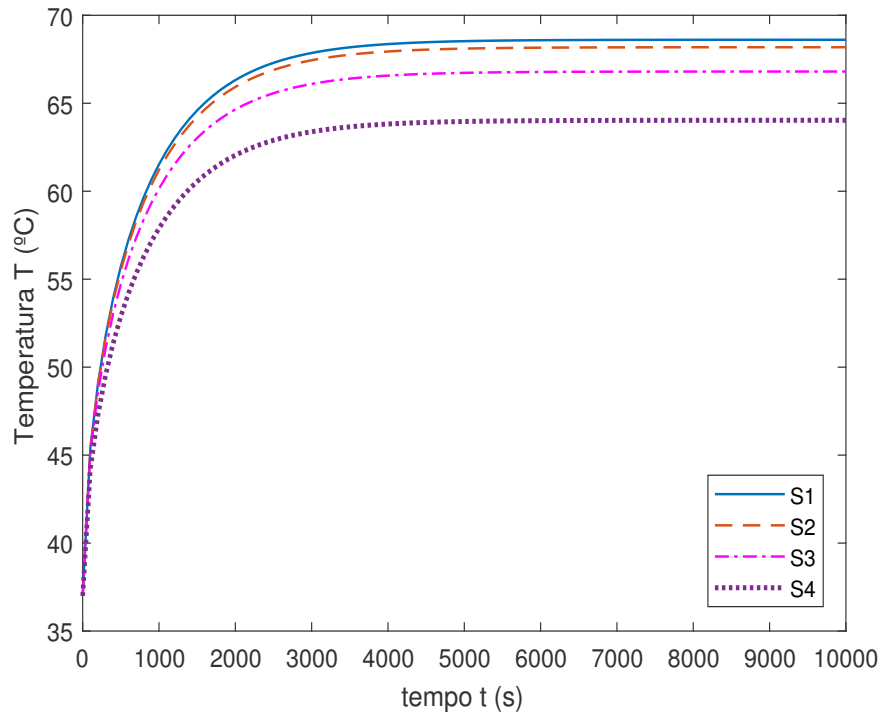


Figura 8.4: Evolução temporal da temperatura na superfície do tecido exposta ao fluxo.

Cinco milímetros abaixo da superfície exposta ao fluxo, as temperaturas são ainda menores, como ilustrado na Fig. 8.6, sendo a maior temperatura a central (S9) e a menor temperatura registrada na face exposta à convecção (S12).

Nas sondas instaladas em  $x = 10$  mm (ver Fig. 8.7), o efeito da convecção na face lateral destaca-se mais do que o feito do fluxo, como indicado no comportamento da sonda S16. É possível também observar que os comportamentos das sondas dispostas em  $z = 0,020$  m, no plano  $\sigma$ , têm comportamento próximo daquelas instaladas na linha central  $z = 0,015$  m, como pode ser acompanhado nas Figs. 8.4 a 8.7.

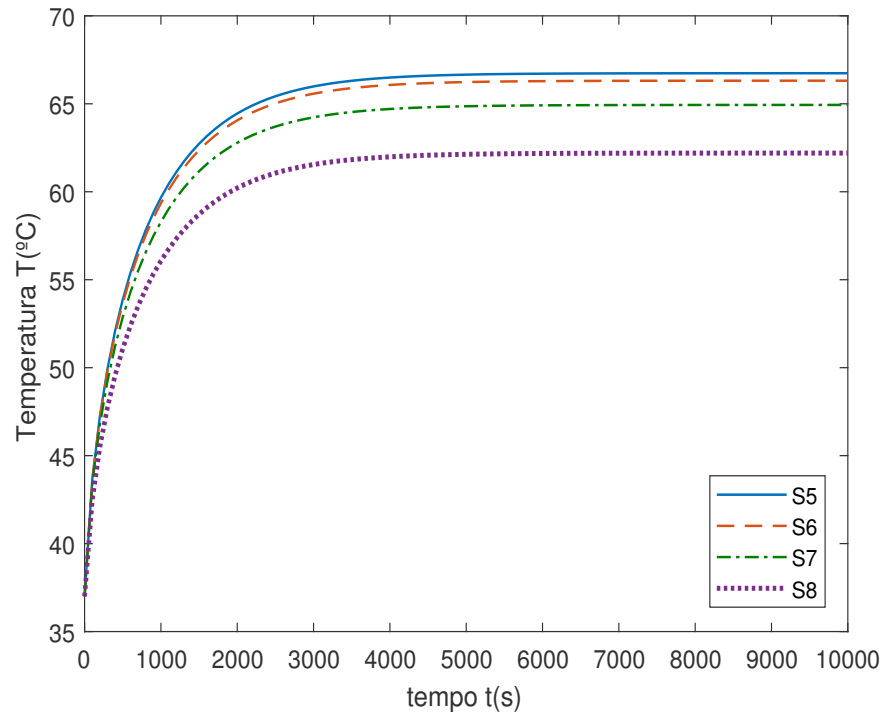


Figura 8.5: Evolução temporal da temperatura 1 mm abaixo da superfície do tecido exposta ao fluxo.

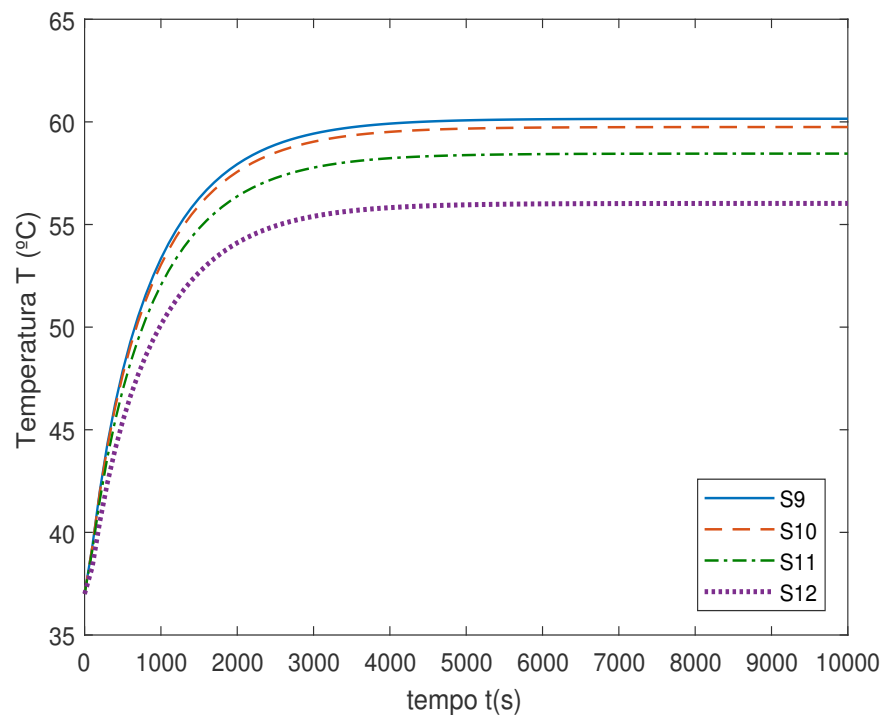


Figura 8.6: Evolução temporal da temperatura em  $x = 5$  mm.

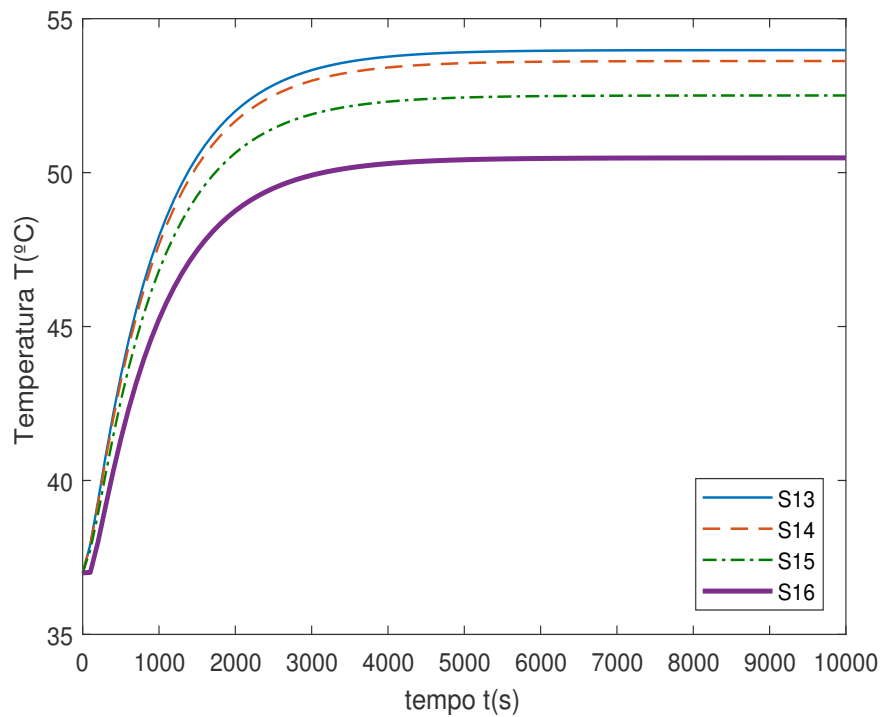


Figura 8.7: Evolução temporal da temperatura em  $x = 10$  mm.

As sondas tomadas no plano central do domínio, em  $x = L/2$ , no plano  $\sigma$ , ilustradas na Fig. 8.8, mostram o comportamento destes pontos, onde o efeito do fluxo em  $x = 0$  passa a ser sobrepujado pelos efeitos metabólicos e de perfusão. Para tempos muito pequenos, observa-se um abaixamento da temperatura na face lateral, exposta à convecção, além da temperatura inicial a qual o tecido estava submetido, isto justifica-se pela ação instantânea da convecção, que é eliminada com o passar do tempo com as ações do fluxo e da geração metabólica. O mesmo ocorre nas sondas dessa face dispostas em  $x = 20$  mm e  $x = 25$  mm, como é possível identificar nas Figs. 8.9 e 8.10.

Para fins de validação numérica da solução analítica, o comportamento de pontos da base do tecido é ilustrado na Fig. 8.11, que respondem à condição de temperatura prescrita imposta mantendo a temperatura constante e igual à temperatura arterial.

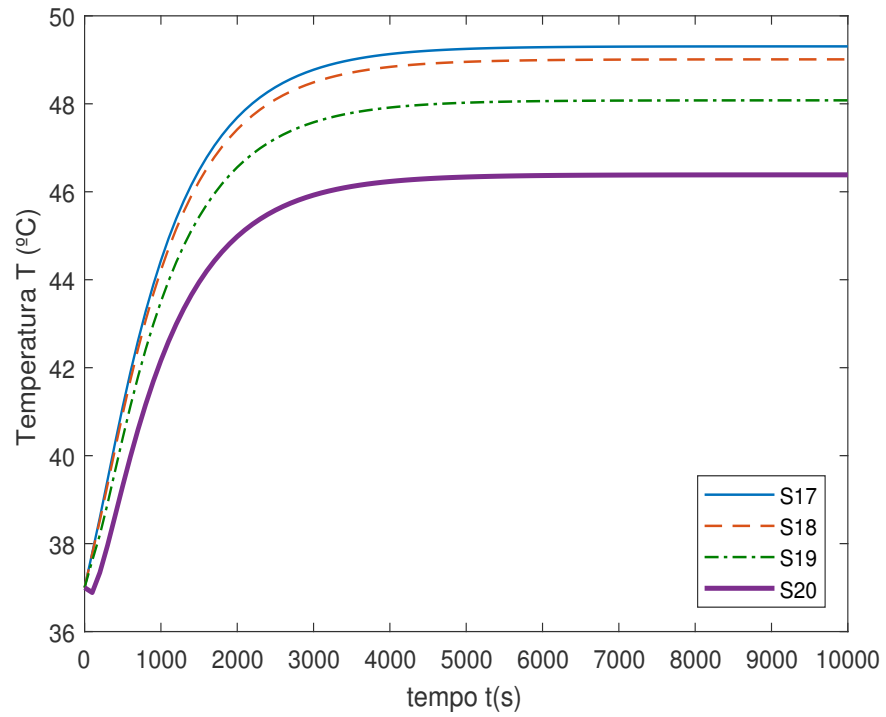


Figura 8.8: Evolução temporal da temperatura em  $x = 15$  mm.

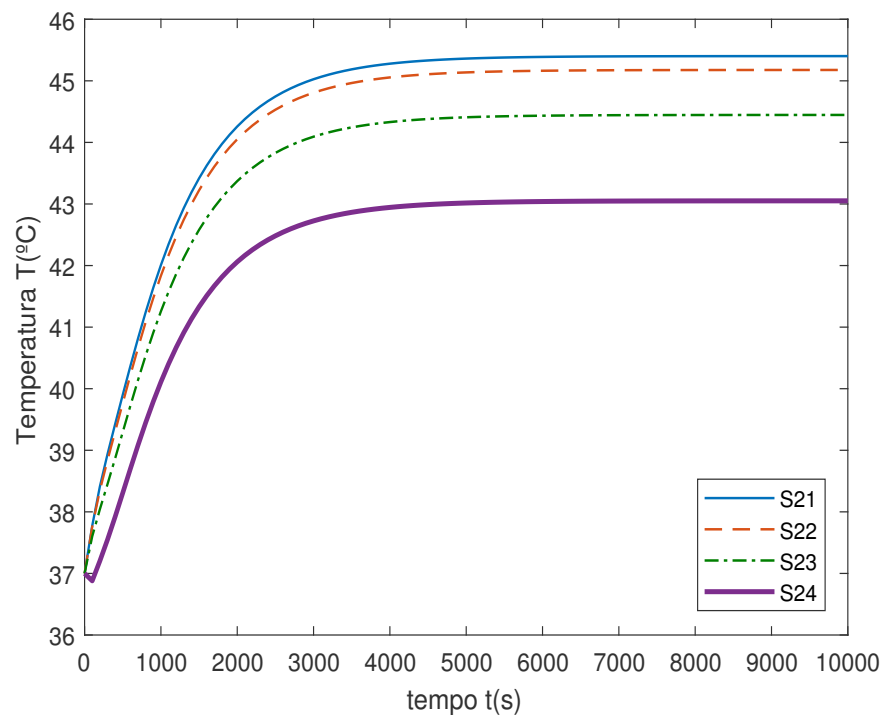
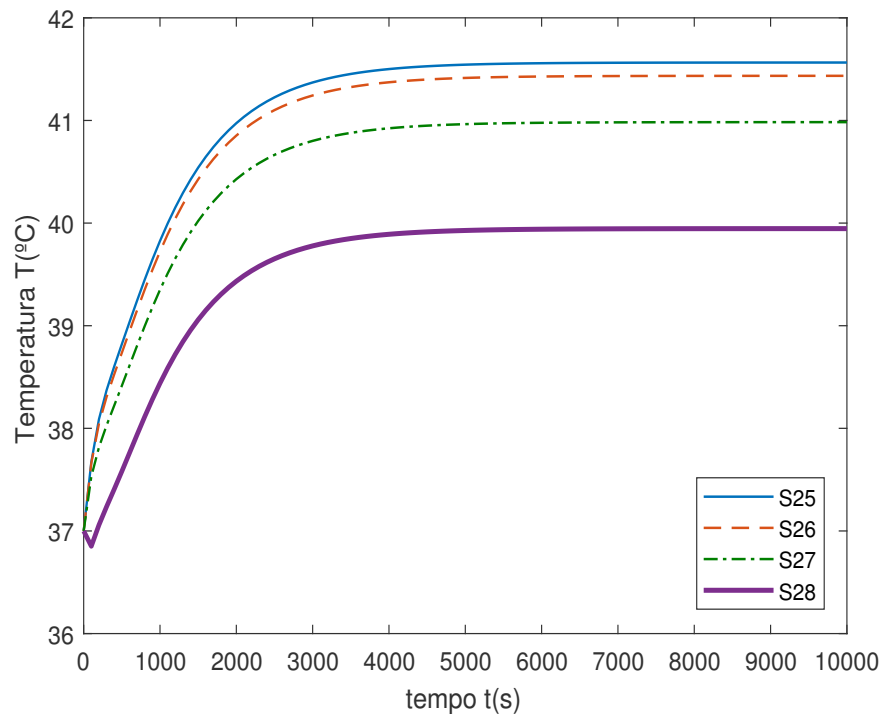
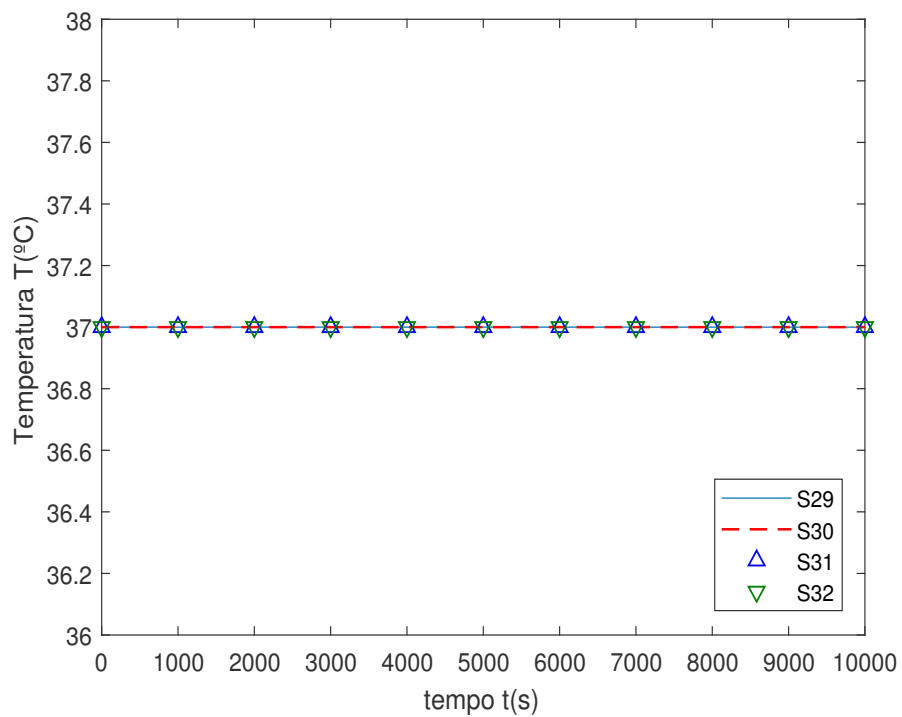


Figura 8.9: Evolução temporal da temperatura em  $x = 20$  mm.

Figura 8.10: Evolução temporal da temperatura em  $x = 25$  mm.Figura 8.11: Evolução temporal da temperatura em  $x = 30$  mm.



## 8.2 Análise de sondas dispostas na secção central e na face lateral (sujeita à convecção) do tecido

Dois secções são de especial interesse: a linha definida por  $z = 0,015$  m no plano  $\sigma$ , e a face lateral submetida aos efeitos convectivos. A primeira foi utilizada na verificação intrínseca da solução analítica, confrontando os resultados obtidos em três situações distintas com a também verificada solução unidimensional. A segunda avalia o efeito da convecção que circunda o tecido.

O comportamento de tais sondas é ilustrado nas Figs. 8.12 e 8.13. Nelas é possível verificar que, à medida que se caminha em direção à base do tecido, as temperaturas vão diminuindo e os efeitos do fluxo de calor imposto em  $x = 0$  vão perdendo força até chegar em  $x = L$  onde a temperatura se mantém constante. Na face lateral as temperaturas registradas são menores que na linha central, isto é devido à ação da convecção exterior.

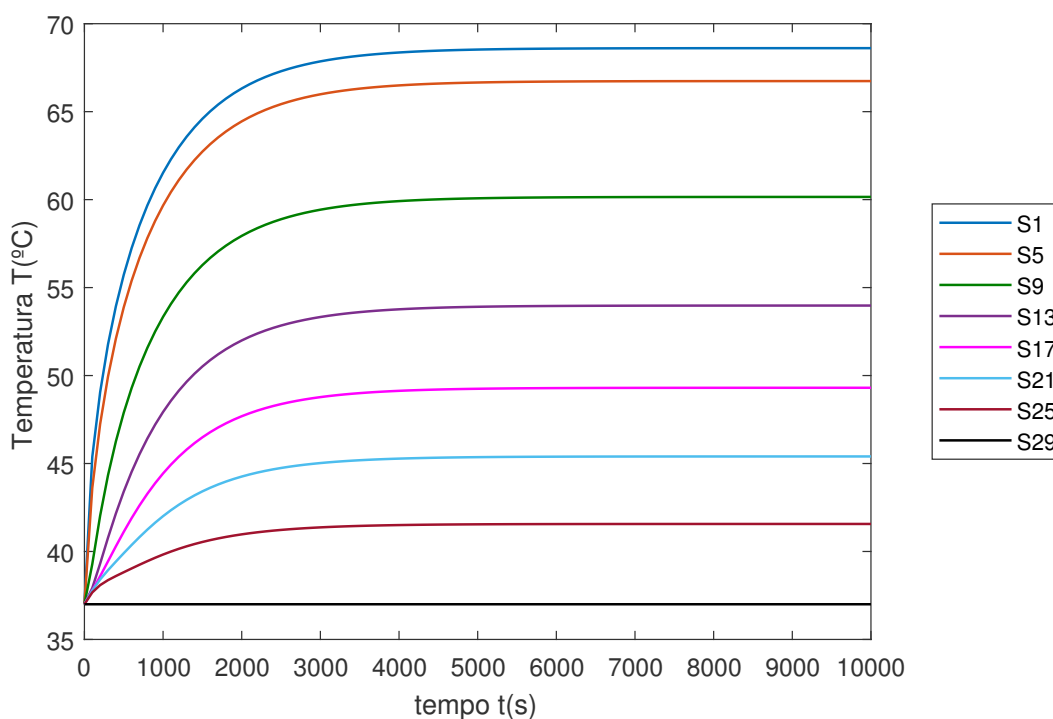


Figura 8.12: Evolução temporal da temperatura na região central do tecido.

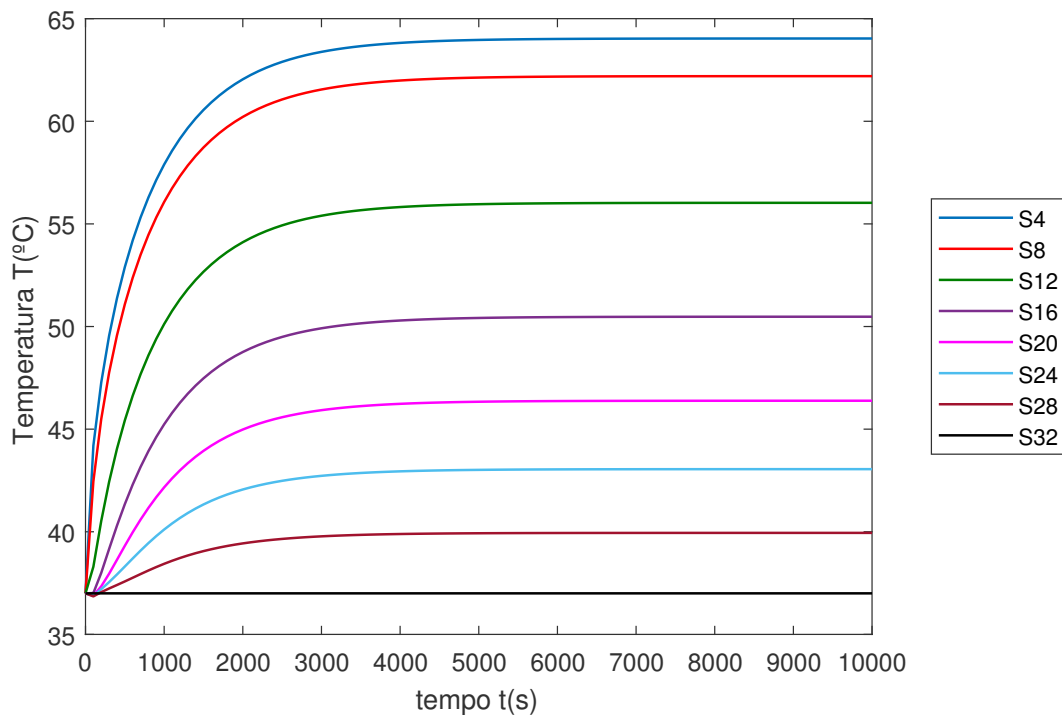


Figura 8.13: Evolução temporal da temperatura na face lateral do tecido, sujeita à convecção.

### 8.3 Respostas de sondas seleccionadas à anulação do efeito do metabolismo

Sete sondas são tomadas para se avaliar o comportamento do tecido quando são variadas as taxas de perfusão e metabolismo: S1, S4, S17, S20, S29, S32 e uma trigésima terceira sonda instalada no centro da intersecção entre as faces laterais expostas à convecção então denominada S33.

Para a situação tomada nas seções anteriores, o comportamento do ponto onde é instalada a sonda S33 é registrado na Fig. 8.14. Neste ponto é novamente notável a influência da convecção nos primeiros instantes de análise, trazendo a temperatura deste ponto 1°C abaixo da temperatura arterial.

Um comparativo entre as temperaturas registradas pelas sondas citadas é mostrado na Fig. 8.15 que registra que um ponto da intersecção entre as faces sujeitas à convecção registra uma temperatura menor do que um ponto central de uma das faces que contém efeitos convectivos.

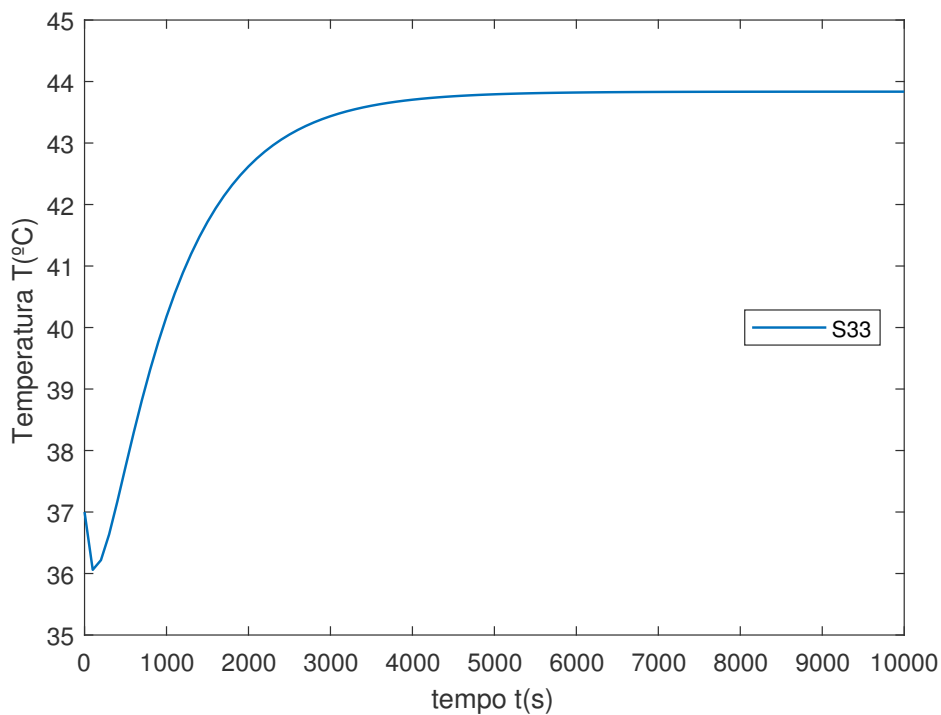


Figura 8.14: Evolução temporal da temperatura na intersecção das faces laterais sujeitas à convecção.

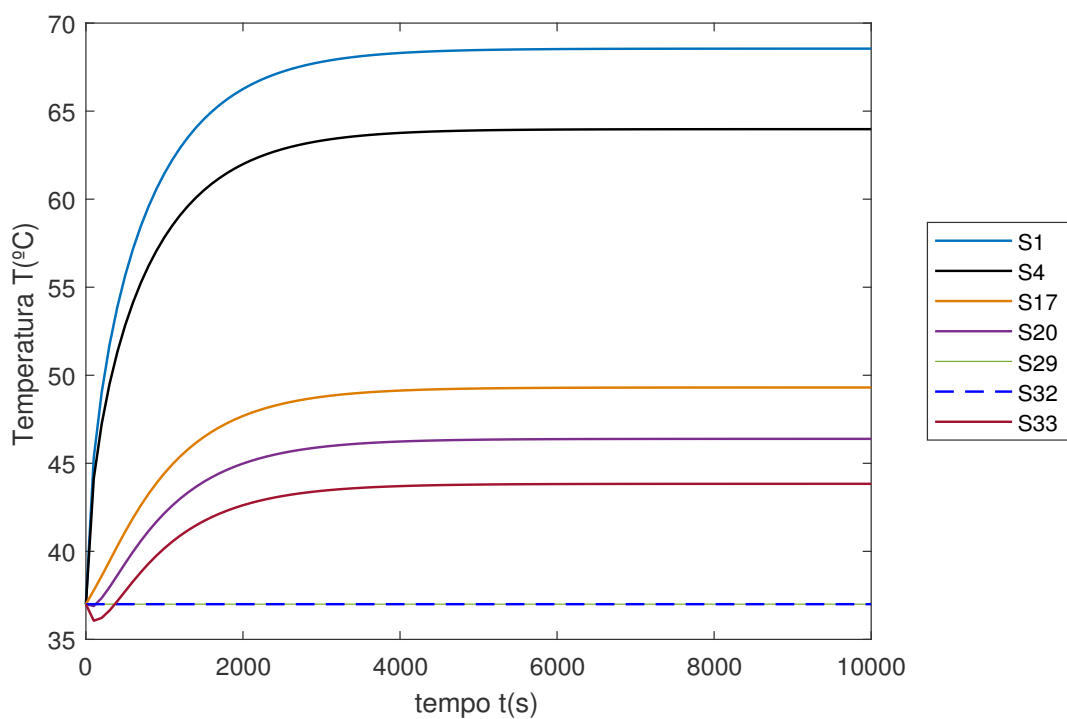


Figura 8.15: Comparação das respostas de sondas selecionadas.

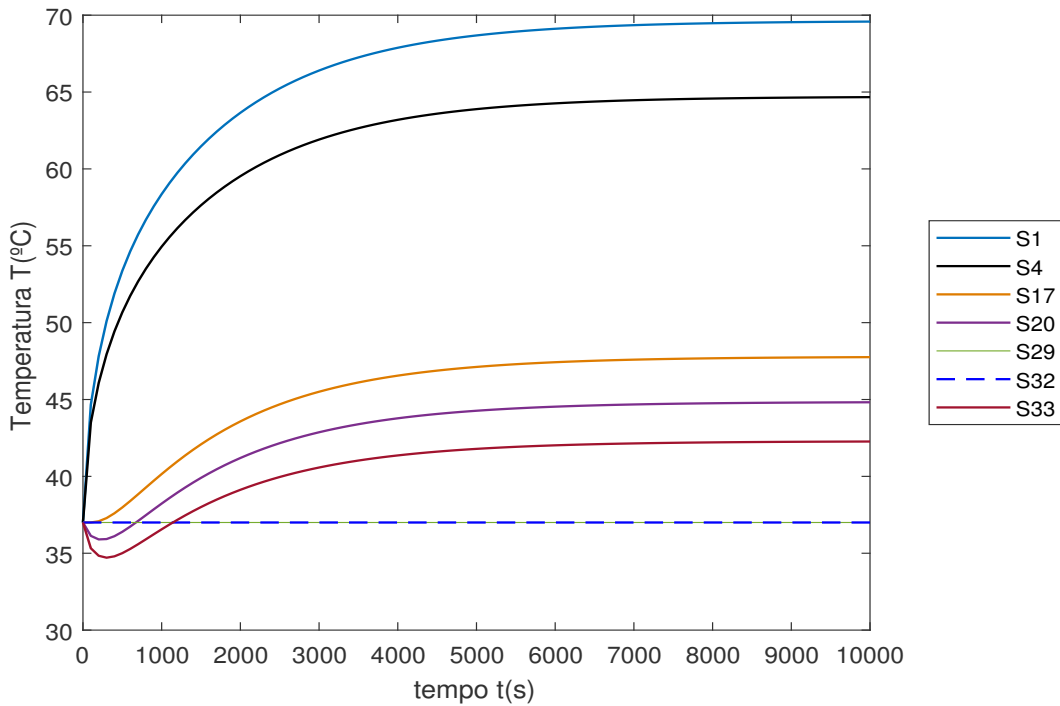


Figura 8.16: Comparação das respostas de sondas selecionadas a um tecido sem a presença de perfusão sanguínea e metabolismo.

Nesse caso, como também observado nas Figs. 8.16 e 8.17, o efeito do fluxo se propaga por uma maior parte de todo o tecido elevando as temperaturas além daquelas registradas quando o tecido tinha a presença de circulação sanguínea. Outro ponto a ser levantado é que, ao eliminar-se tais efeitos, a equação governante do problema de biotransferência de calor reduz-se a um problema tridimensional de condução mais simples, sem geração de energia:

$$\nabla^2 T(x, y, z, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8.1)$$

com condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = T_a \quad (8.2)$$

e respondendo às condições de contorno

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q_o \quad \text{e} \quad T = T_c \quad \text{em} \quad x = L \quad (8.3)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(T_f - T|_{y=0}) \quad \text{e} \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=a} = h(T|_{y=a} - T_f) \quad (8.4)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h(T_f - T|_{z=0}) \quad \text{e} \quad -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=b} = h(T|_{z=b} - T_f) \quad (8.5)$$

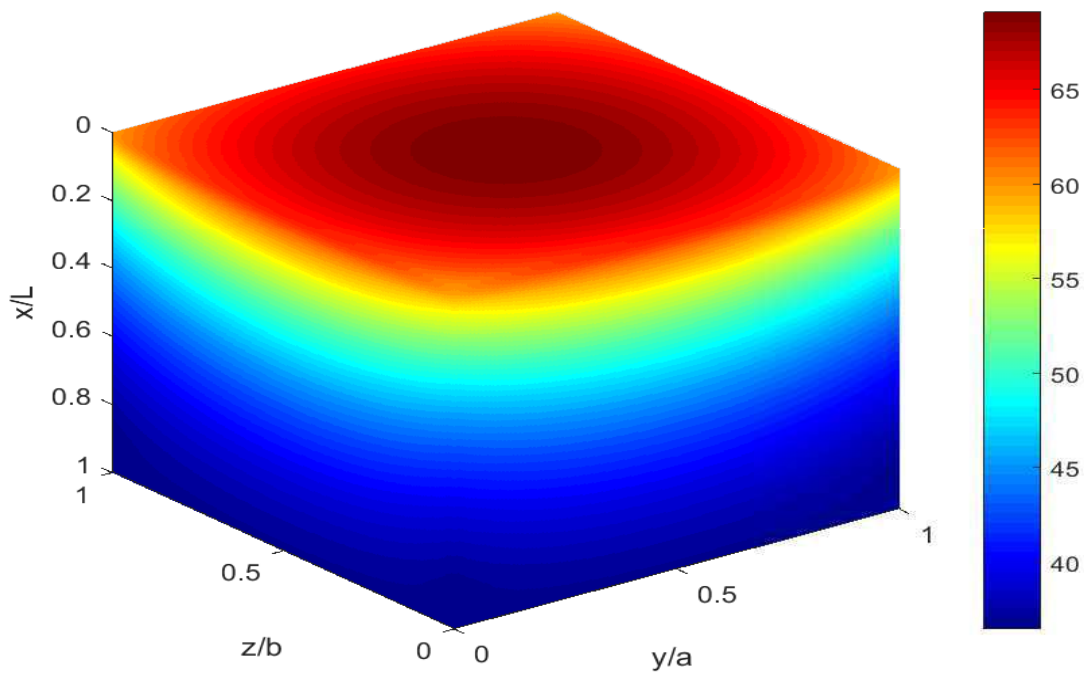


Figura 8.17: Campo de temperaturas no tecido morto em  $t = 1 \cdot 10^4$  s (200 autovalores).

#### 8.4 Comentários sobre presença de uma fonte de calor estranha ao metabolismo no tecido

Supondo que haja no tecido uma fonte de calor estranha ao metabolismo,  $Q_E$ , um suposto tumor, por exemplo, numa região  $\mathcal{R} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$  com  $0 < x_1 < x_2 < L$ ,  $0 < y_1 < y_2 < a$  e  $0 < z_1 < z_2 < b$ , o termo de geração da equação

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{1}{k} \cdot g(x, y, z, t) \exp(M^2 \alpha t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (8.6)$$

pode ser escrito como sendo

$$g(x, y, z, t) = \begin{cases} Q_m + Q_E(t), & \text{para } (x, y, z) \in \mathcal{R} \\ Q_m, & \text{para } (x, y, z) \notin \mathcal{R} \end{cases} \quad (8.7)$$

Nesse caso, acrescenta-se à solução a seguinte integral:

$$\frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=x_1}^{x_2} \int_{y'=y_1}^{y_2} \int_{z'=z_1}^{z_2} G \cdot Q_E(\tau) \exp(M^2 \alpha \tau) dz' dy' dx' d\tau \quad (8.8)$$

As funções de Green associadas ao problema são:

$$G_{X21}(x, t|x', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[\frac{-\beta_m^2 \alpha (t - \tau)}{L^2}\right] \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cos\left(\beta_m \frac{x'}{L}\right) \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} G_{Y33}(y, t|y', \tau) &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[\frac{-\beta_n^2 \alpha (t - \tau)}{a^2}\right] \left[ \beta_n \cos\left(\beta_n \frac{y}{a}\right) + B_1 \text{sen}\left(\beta_n \frac{y'}{a}\right) \right] \\ &\quad \times \left[ \beta_n \cos\left(\beta_n \frac{y'}{a}\right) + B_1 \text{sen}\left(\beta_n \frac{y}{a}\right) \right] \\ &\quad \times \left\{ (\beta_n^2 + B_1^2) \left(1 + \frac{B_1}{\beta_n^2 + B_1^2}\right) + B_1 \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (8.10)$$

e

$$\begin{aligned} G_{Z33}(z, t|z', \tau) &= \frac{2}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \exp\left[\frac{-\beta_p^2 \alpha (t - \tau)}{b^2}\right] \left[ \beta_p \cos\left(\beta_p \frac{z}{b}\right) + B_2 \text{sen}\left(\beta_p \frac{z'}{b}\right) \right] \\ &\quad \times \left[ \beta_p \cos\left(\beta_p \frac{z'}{b}\right) + B_2 \text{sen}\left(\beta_p \frac{z}{b}\right) \right] \\ &\quad \times \left\{ (\beta_p^2 + B_2^2) \left(1 + \frac{B_2}{\beta_p^2 + B_2^2}\right) + B_2 \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (8.11)$$

com

$$B_1 = \frac{ha}{k} \quad \text{e} \quad B_2 = \frac{hb}{k} \quad (8.12)$$

e os autovalores sendo calculados por

$$\beta_m = \pi \left(m - \frac{1}{2}\right) \quad \text{tg} \beta_n = \frac{2\beta_n B_1}{\beta_n^2 - B_1^2} \quad \text{e} \quad \text{tg} \beta_p = \frac{2\beta_p B_2}{\beta_p^2 - B_2^2} \quad (8.13)$$

$\beta_n$  e  $\beta_p$  são as raízes positivas, organizadas em ordem crescente, de suas respectivas equações transcendentais.

Neste sentido, a solução para o problema tridimensional de transferência de calor em tecidos biológicos torna-se ainda mais genérica, o que dá liberdade ao pesquisador em modificar condições dos tipos mencionados. Um grande trunfo, a ser explorado em trabalhos futuros, é caso a posição do tumor não seja conhecida, mas a sua presença sim. Isto é possível através do uso de técnicas de Problemas Inversos em Transferência de Calor.

A determinação de perfis térmicos em tecidos biológicos e a análise dos mesmos permitem avanços nos campos de bio-engenharia e medicina no que tange ao diagnóstico precoce de possíveis tumores.

# CAPÍTULO IX

## CONCLUSÃO

Foi proposta e apresentada neste trabalho a solução da Equação da Biotransferência de Calor de Pennes para um problema tridimensional que descreve o tecido da pele humana *in vivo*, levando em conta, portanto, os efeitos do metabolismo e da perfusão sanguínea através do uso de Funções de Green.

Num primeiro momento, apresentou-se a equação-solução integral de condução de calor baseada em Funções de Green (FG) através da abordagem de um problema geral de condução de calor unidimensional transiente e com condições de contorno variando com o espaço e o tempo e a presença de termos de geração de calor. Mesmo tal problema não tendo sido resolvido, os aspectos matemáticos e físicos, além das principais propriedades das FG foram apresentados e discutidos. Posteriormente, aplicou-se a técnica para a solução de problemas uni e bidimensionais.

Sempre com o intuito de ilustrar a simplicidade e a abrangência da técnica, soluções para casos particulares mais simples foram obtidas e verificadas dando segurança à aplicação da mesma.

O foco principal do trabalho é por fim discutido obtendo-se a solução para o problema tridimensional que é verificado intrinsecamente em mais de duas maneiras diferentes. O resultado pode ser empregado na comparação com soluções numéricas ou na verificação intrínseca de soluções analíticas 3D transientes com outras condições de contorno e termos de metabolismo. Representa também uma ferramenta importante no uso de técnicas inversas para a detecção da perfusão sanguínea ou fontes internas de calor originadas pelo metabolismo de células normais e/ou tumores.

O presente trabalho insere-se no contexto de pesquisas voltadas ao estudo da biomecânica cujo principal objetivo é o estudo do comportamento térmico de tecidos vivos. Representa, nesse sentido, uma grande ferramenta de auxílio para técnicas de detecção precoce da presença de tumores em tecidos humanos.



## 9.1 Propostas para trabalhos futuros

Concluído o estudo tridimensional de um domínio com propriedades constantes representativo de um tecido biológico via Funções de Green, várias aplicações se apresentam no sentido de estudos para a obtenção de soluções com condições mais complexas:

- Obtenção do campo de temperaturas para um tecido com uma geração de calor metabólica anômala em posições conhecidas;
- Determinação da solução analítica para o problema tridimensional de análise térmica de um tecido biológico multicamadas;
- Análise da resposta da temperatura, usando Funções de Green, a uma aplicação de uma fonte móvel na superfície do tecido;
- Estudo e análise de problemas inversos para determinação de propriedades térmicas de tecidos biológicos e determinação de fontes anômalas de geração de calor metabólica com o intuito de prevenir e identificar possíveis tumores no tecido;

## Referências Bibliográficas

ASKARIZADEH, H.; AHMADIKIA, H. Analytical study on the transient heating of a two-dimensional skin tissue using parabolic and hyperbolic bioheat transfer equations. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, p. 3704–3720, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.12.003>>.

BAGARIA, H.; JOHNSON, D. Transient solution to the bioheat equation and optimization for magnetic fluid hyperthermia treatment. *International Journal of Hyperthermia*, v. 21, n. 1, p. 57–75, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/02656730410001726956>>.

BECK, J. Green's functions and numbering system for transient heat conduction. *AIAA Journal*, v. 24, p. 327–333, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.9264>>.

BUENO, F. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil), *Análise inversa com uso de algoritmo genético para localização de tumores de pele em três dimensões utilizando elementos de contorno com reciprocidade dual*. 2012. Disponível em: <<http://repositorio.unb.br/handle/10482/10408>>.

CALDEIRA, F. *et al.* Otimização de termos fontes em modelos de biotransferência de calor em cirurgias oftalmológicas a laser. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 14, n. 2, p. 133–146, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S2179-84512013005000005>>.

CARSLAW, H.; JAEGER, J. *Conduction of Heat in Solids*. 2. ed. Nova York: Oxford University Press, 1959. ISBN 9780198533689.

CHARNY, C. K. Mathematical models of bioheat transfer. In: *Advances in heat transfer*. Elsevier, 1992. v. 22, p. 19–155. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0065-2717\(08\)70344-7](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70344-7)>.

COLE, K. *et al.* *Heat Conduction Using Green's Functions (Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences)*. 2. ed. Boca Raton, FL, EUA: Taylor & Francis and CRC Press, 2010. 643 p. ISBN 9781439813546.

DEHGHAN, M. Numerical schemes for one-dimensional parabolic equations with non-standard initial conditions. *Applied Mathematics and Computation*, v. 147, p. 321–331, 2004. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00669-0](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00669-0)>.

DENG, Z.-S.; LIU, J. Analytical study on bioheat transfer problems with spatial or transient heating on skin surface or inside biological bodies. *Transactions of the ASME*, v. 124, p. 638–649, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.1516810>>.

ÇENGEL, Y.; GHAJAR, A. *Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 909 p. ISBN 8580551277.

FAZLALI, R.; AHMADIKIA, H. Analytical solution of thermal wave models on skin tissue under arbitrary periodic boundary conditions. *International Journal of Thermophysics*, v. 34, n. 1, p. 139–159, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10765-013-1396-0>>.

FERNANDES, A. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), *Funções de Green: Soluções Analíticas Aplicadas a Problemas Inversos em Condução de Calor*. 2009. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14844>>.

FIGUEIREDO, A. A. A. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), *Análise Numérica de Modelos Térmicos Envolvendo a Estimativa de Parâmetros na Equação da Biotransferência de Calor*. 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14981>>.

HOLMES, K. Biological structures and heat transfer. In: *Allerton Workshop on the Future of Biothermal Engineering*. University of Illinois, Allerton, IL, USA: [s.n.], 1997. p. 14–37. Disponível em: <<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/9917802>>.

INCROPERA, F. *et al. Fundamentos de transferência de calor e massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 643 p. ISBN 8521615841.

LAKHSSASSI, A.; KENGNE, E.; SEMMANOU, H. Modified pennes' equation modelling bio-heat transfer in living tissues: Analytical and numerical analysis. *Natural Science*, v. 2, n. 12, p. 1375–1385, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.4236/ns.2010.212168>>.

LIU, J.; XU, L. Estimation of blood perfusion using phase shift in temperature response to sinusoidal heating at the skin surface. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 46, n. 9, p. 1037–1043, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/10.784134>>.

LOBOSCO, M.; LOUREIRO, F.; REIS, R. Solução numérica paralela de um modelo de biotransferência de calor tridimensional não linear. In: *XI Simpósio de Mecânica Computacional & II Encontro Mineiro de Modelagem Computacional*. Juiz de Fora, MG, Brasil: [s.n.], 2014. Disponível em: <<http://www.ufjf.br/simmec-emmcomp-2014/artigos/>>.

LOPES, C. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), *Problema Inverso de Estimativa da Variação Espacial da Perfusão Sanguínea em Problemas de Biotransferência de Calor*. 2009. Disponível em: <<http://www.ime.eb.mil.br/pt/corpo-docente-mestrado-eng-mecanica/105-portugues/pos-graduacao/mestrado/mecanica/215-dissertacoes-engenharia-mecanica-mestrado.html>>.

MONTE, F. D.; HAJI-SHEIKH, A. Bio-heat diffusion under local thermal non-equilibrium conditions using dual-phase lag-based green's functions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 113, p. 1291–1305, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.06.006>>.

ONCOGUIA. 2014. Disponível em: <<http://www.oncoguia.org.br/conteudo/tipos-de-cancer-de-mama/1382/34/>>.

ROMERO-MENDÉZ, R. *et al.* Analytical solution of the pennes equation for burn-depth determination from infrared thermographs. *Mathematical Medicine and Biology*, n. 27, p. 21–38, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/imammb/dqp010>>.

SHIH, T.-C. *et al.* Analytical analysis of the pennes bioheat transfer equation with sinusoidal heat flux condition on skin surface. *Medical Engineering & Physics*, v. 29, p. 946–953, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2006.10.008>>.

SILVA, G. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), *Análise da biotransferência de calor nos tecidos oculares devido à presença de implantes retinianos através da utilização do método dos volumes finitos em malhas não estruturadas*. 2004. Disponível em: <[https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/5674/1/arquivo7690\\_1.pdf](https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/5674/1/arquivo7690_1.pdf)>.

SOARES, D.; WROBEL, L. Solution of hyperbolic bioheat conduction models based on adaptive time integrators. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 149, p. 1–4, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.finel.2018.06.003>>.

SOUZA, M. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), *Otimização de termos fontes em problemas de Biotransferência de Calor*. 2009. Disponível em: <<http://www.ime.eb.mil.br/pt/corpo-docente-mestrado-eng-mecanica/105-portugues/pos-graduacao/mestrado/mecanica/215-dissertacoes-engenharia-mecanica-mestrado.html>>.

SUN, Y. *et al.* Exact solution of thermal response in a three-dimensional living bio-tissue subjected to a scanning laser beam. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 124, p. 1107–1116, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.04.042>>.

TOLEDO, F.; LOUREIRO, F. Problemas de biotransferência de calor: Simulações numéricas de queimaduras na pele. In: *XI Simpósio de Mecânica Computacional & II Encontro Mineiro de Modelagem Computacional*. Juiz de Fora, MG, Brasil: [s.n.], 2014. Disponível em: <<http://www.ufjf.br/simmec-emmcomp-2014/artigos/>>.

VAFAI, K.; MAHJOOB, S. Analytical characterization of heat transport through biological media incorporating hyperthermia treatment. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, p. 1608–1618, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.07.038>>.

VARÓN, L.; ELCCABE, G. Estudo teórico da hipertermia induzida por radiofrequência em tecidos carregados com nanopartículas. In: *VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*. Uberlândia-MG-Brazil: [s.n.], 2014. ISSN 2178-180x.

VYAS, R.; RUSTGI, M. Green's function solution to the tissue bioheat equation. *Medical Physics*, v. 19, n. 5, p. 1319–1324, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1118/1.596767>>.

WISSLER, H. *Pennes' 1948 paper revisited*. 1998. Acesso em: 20 fev. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1152/jappl.1998.85.1.35>>.

WULFF, W. The energy conservation equation for living tissue. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 21, p. 494–495, 1974. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TBME.1974.324342>>.

YANG, D. *et al.* Expanding the bioheat equation to include tissue internal water evaporation during heating. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 54, n. 8, p. 1382–1388, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TBME.2007.890740>>.

ZHAO, J. *et al.* A two-level finite difference scheme for one dimensional pennes' bioheat equation. *Applied Mathematics and Computation*, v. 171, p. 320–331, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.01.052>>.

ÖZISIK, M. *Heat Conduction*. Nova York: John Wiley, 1993. ISBN 0471532568.

## APÊNDICE A

### Demonstração da equação-solução integral baseada em Funções de Green para problemas unidimensionais

Reconsidere o caso unidimensional transiente de Condução de Calor, cujo equacionamento é (Eqs. (3.11) a (3.13))

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{g(x, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

$$k_i \left. \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \right|_{x=x_i} + h_i T|_{x=x_i} = f_i(t) \quad (\text{A.2})$$

$$T(x, 0) = F(x) \quad (\text{A.3})$$

Como discutido na seção 3.2, o problema auxiliar, que corresponde à versão homogênea do problema original, é composto pela EDP e condições seguintes:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} + \frac{\delta(x - x')\delta(t - \tau)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial \tau}, \text{ para } t > \tau \quad (\text{A.4})$$

$$k_i \left. \frac{\partial G}{\partial \eta_i} \right|_{x=x_i} + h_i G|_{x=x_i} = 0 \text{ com } i = 1; 2 \quad (\text{A.5})$$

$$G(x, t|x', \tau) = 0 \text{ para } t < \tau \quad (\text{A.6})$$

Aplicando-se a propriedade de reciprocidade na Eq. (A.4), escreve-se

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} + \frac{\delta(x - x')\delta(t - \tau)}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial \tau} \quad (\text{A.7})$$

Fazendo uma mudança de variáveis na Eq. (A.1) para escrevê-la em termos das variáveis  $x'$  e  $\tau$  obter-se-á

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{g(x', \tau)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (\text{A.8})$$

multiplicando-se a Eq. (A.7) por  $T(x', \tau)$

$$T \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} + \frac{T}{\alpha} \delta(x - x')\delta(t - \tau) = -\frac{T}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial \tau} \quad (\text{A.9})$$

a Eq. (A.8) por  $G(x, t|x', \tau)$

$$G \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{G}{k} g(x', \tau) = \frac{G}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (\text{A.10})$$

e subtraindo a Eq. (A.9) da Eq. (A.10) chega-se na relação

$$G \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} - T \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} + \frac{G}{k} g(x', \tau) - \frac{T}{\alpha} \delta(x - x')\delta(t - \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial(TG)}{\partial \tau} \quad (\text{A.11})$$

Ao integrar-se a Eq. (A.11) em relação a  $x'$  por todo o domínio ( $0 \leq x' \leq L$ ), e em relação a  $\tau$  entre os instantes  $\tau = 0$  e  $\tau = t + t'$ ,  $t'$  sendo um número real positivo e próximo de zero, o resultado é

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \int_{x'=0}^L [TG]_{\tau=0}^{t+t'} dx' &= \int_{\tau=0}^{t+t'} d\tau \int_{x'=0}^L \left( G \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} - T \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} \right) dx' + \\ &+ \frac{1}{k} \int_{\tau=0}^{t+t'} d\tau \int_{x'=0}^L g(x', \tau) G(x, t|x', \tau) dx' - \frac{T(x, t)}{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Na Eq. (A.12) a distribuição de temperaturas aparece no segundo membro. As demais integrais podem ser reescritas utilizando-se as propriedades de integração e das Funções de Green,

para isto, reescreve-se:

$$T(x, t) = - \int_{x'=0}^L [TG]_{\tau=0}^{t+t'} dx' + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^{t+t'} d\tau \int_{x'=0}^L g(x', \tau) G(x, t|x', \tau) dx' + \\ + \alpha \int_{\tau=0}^{t+t'} d\tau \int_{x'=0}^L \left( G \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} - T \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} \right) dx' \quad (\text{A.13})$$

A primeira integral a ser resolvida pode ser simplificada uma vez que, da relação de causalidade,

$$G(x, t|x', t + t') = 0 \quad (\text{A.14})$$

pois  $t - \tau = t - (t + t') = -t' < 0$  e não há resposta antes que o impulso ocorra. Assim, apenas a parcela para  $\tau = 0$  resta e como, das condições de contorno,  $T(x', 0) = F(x')$ , tem-se:

$$- \int_{x'=0}^L [TG]_{\tau=0}^{t+t'} dx' = \int_{x'=0}^L F(x') G(x, t|x', 0) dx' \quad (\text{A.15})$$

Portanto, a Eq. (A.15) pode ser interpretada como o efeito da condição inicial na distribuição de temperaturas. A segunda parcela do segundo membro (RHS) da Eq. (A.13) representa a contribuição da geração por unidade de volume. Para se interpretar a terceira parcela do RHS da Eq. (A.13), deve-se, primeiramente, executar a integral espacial por integração por partes:

$$\int_{x'=0}^L \left( G \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} - T \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} \right) dx' = \\ = G \frac{\partial T}{\partial x'} \Big|_{x'=0}^{x'=L} - \int_{x'=0}^L \frac{\partial G}{\partial x'} \frac{\partial T}{\partial x'} dx' - T \frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=0}^{x'=L} - \int_{x'=0}^L \frac{\partial T}{\partial x'} \frac{\partial G}{\partial x'} dx' \quad (\text{A.16})$$

logo

$$\int_{x'=0}^L \left( G \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} - T \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} \right) dx' = G \frac{\partial T}{\partial x'} \Big|_{x'=0}^{x'=L} - T \frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=0}^{x'=L} \quad (\text{A.17})$$

Na Eq. (A.17), observa-se que as derivadas que aparecem representam as condições de contorno, assim, a Eq. (A.5) pode ser utilizada, de acordo com o tipo de problema, para descrever as diferentes condições de contorno. Sendo possível mostrar (ver (COLE *et al.*, 2010)) que

$$G \frac{\partial T}{\partial x'} \Big|_{x'=0}^{x'=L} - T \frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=0}^{x'=L} = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 \frac{f_i(\tau)}{k_i} G|_{x'=x_i}, & \text{para condições de 2º e 3º tipos} \\ - \sum_{j=1}^2 f_j(\tau) \frac{\partial G}{\partial \eta_j} \Big|_{x'=x_j}, & \text{para condição de 1º tipo} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$



O uso do somatório na Eq. (A.18) justifica-se para que se consiga escrever o efeito de todas as superfícies em uma mesma expressão.

Desta maneira, tomando-se o limite para  $t' \rightarrow 0$  da Eq. (A.13) com os termos simplificados, tem-se a equação-solução integral para um problema unidimensional em termos de Funções de Green para um domínio que representa um material homogêneo e com propriedades constantes:

$$T(x, t) = \int_{x'=0}^L G(x, t|x', 0)F(x')dx' + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L g(x', \tau)G(x, t|x', \tau)dx'd\tau + \\ + \alpha \int_{\tau=0}^t \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, t|x'_i, \tau) \right] d\tau - \alpha \int_{\tau=0}^t \sum_{j=1}^2 \left[ f_j(\tau) \frac{\partial G}{\partial \eta'_j} \Big|_{x'=x_j} \right] d\tau \quad (A.19)$$

cada termo da Eq. (A.19) deve ter unidades de temperatura, o que é verificado fazendo-se uma análise dimensional termo a termo, assim, conclui-se que a derivada presente na quarta parcela do RHS é um termo adimensional. A Função de Green,  $G(\cdot)$ , a ser utilizada é única para cada combinação particular de condições de contorno do problema. Neste ponto, é trivial expandir-se a Eq. (A.19) para problemas bi e tridimensionais, nos quais o efeitos espaciais devem ser incorporados nas integrais para que seja possível varrer todo o domínio. Assim, para um problema bidimensional, que apresenta 4 (quatro) faces a serem analisadas, a interpretação dos termos do lado direito da equação é a mesma. Isto ocorre da mesma maneira para um problema tridimensional, que apresenta 6 (seis) faces que são planos paralelos aos planos coordenados do sistema cartesiano. Portanto, para um problema bidimensional com dimensões  $0 \leq x \leq L$  e  $0 \leq y \leq a$ , regido pela Eq. (A.20) acoplado às condições inicial e de contorno do formato descrito pelas Eqs. (A.21) e (A.22), dado por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{g(x, y, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (A.20)$$

$$k_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \Big|_{S_i} + h_i T|_{S_i} = f_i(t) \quad (A.21)$$

$$T(x, y, 0) = F(x, y) \quad (A.22)$$

cujo problema auxiliar homogêneo é escrito

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y'^2} + \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - \tau)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \text{para } t > \tau \quad (A.23)$$

sendo  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  as coordenadas  $(x, y)$  e  $(x', y')$ , sujeito a

$$k_i \left. \frac{\partial G}{\partial \eta_i} \right|_{x=x_i} + h_i G|_{x=x_i} = 0 \text{ com } i = 1; 2 \quad (\text{A.24})$$

e condição inicial

$$G(x, y, t|x', y', \tau) = 0 \text{ para } t < \tau \quad (\text{A.25})$$

neste caso, a Eq. (A.19), assume a forma

$$\begin{aligned} T(x, y, t) = & \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a G(x, y, t|x', y', \tau) F(x', y') dy' dx' + \\ & + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a g(x', y', \tau) G(x, y, t|x', y', \tau) dy' dx' d\tau + \\ & + \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^a \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, t|x'_i, y', \tau) \right] dy' d\tau + \\ & + \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, t|x', y'_i, \tau) \right] dx' d\tau - \\ & - \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^a \sum_{j=1}^2 \left[ f_j(\tau) \left. \frac{\partial G}{\partial \eta'_j} \right|_{x'=x_j} \right] dy' d\tau - \\ & - \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \sum_{j=1}^2 \left[ f_j(\tau) \left. \frac{\partial G}{\partial \eta'_j} \right|_{y'=y_j} \right] dx' d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

## APÊNDICE B

### Dedução da condição inicial dada pela Eq. (4.9)

Neste apêndice deduz-se o perfil de distribuição inicial de temperaturas em um domínio unidimensional representativo de um tecido vivo, Eq. (4.9), proveniente do seguinte problema:

$$k \frac{d^2 T_0}{dx^2} + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T_0) + Q_m = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$-k \left. \frac{dT_0}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$T(L) = T_c \quad (\text{B.3})$$

pode-se reescrever a Eq. (B.1), tomando-se

$$M^2 = \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k} \quad (\text{B.4})$$

dessa forma,

$$\frac{d^2 T_0}{dx^2} + M^2 T_a - M^2 T_0 + \frac{Q_m}{k} = 0 \quad (\text{B.5})$$

por simplicidade, escreve-se:

$$\frac{d^2 T_0}{dx^2} - M^2 T_0 + B = 0 \quad (\text{B.6})$$

com

$$B = M^2 T_a + \frac{Q_m}{k} \quad (\text{B.7})$$

A Eq. (B.6) é uma EDO de 2ª ordem não homogênea com coeficientes constantes. A sua solução é da forma

$$T_0(x) = T_p + T_H \quad (\text{B.8})$$

sendo  $T_p$  uma solução particular e  $T_H$  a solução da equação homogênea associada.

Assumindo-se uma solução particular da forma:

$$T_p = \frac{B}{M^2} \quad (\text{B.9})$$

e sabendo-se que a equação homogênea associada é

$$\frac{d^2 T_0}{dx^2} - M^2 T_0 = 0 \quad (\text{B.10})$$

que tem como solução

$$T_H(x) = C_1 \sinh(Mx) + C_2 \cosh(Mx) \quad (\text{B.11})$$

a solução da equação (B.6) será

$$T_0(x) = T_p + C_1 \sinh(Mx) + C_2 \cosh(Mx) \quad (\text{B.12})$$

Aplicando-se as condições de contorno obtém-se

$$C_1 = 0 \quad (\text{B.13})$$

e

$$C_2 = \frac{T_c - T_p}{\cosh(ML)} \quad (\text{B.14})$$

portanto, recupera-se a Eq. (4.9):

$$T_0(x) = T_p + \frac{T_c - T_p}{\cosh(ML)} \cdot \cosh(Mx) \quad (\text{B.15})$$

Caso os efeitos convectivos fossem levados em consideração, a condição de contorno dada

pela Eq. (B.2), seria escrita da forma:

$$-k \left. \frac{dT_0}{dx} \right|_{x=0} = h_0 (T_f - T_0(0)) + q_0 \quad (\text{B.16})$$

o que alteraria os valores das constantes  $C_2$  e  $C_1$  para

$$C_2 = \frac{kMT_c - kMT_p + h_0 T_f \sinh(ML) - h_0 T_p \sinh(ML)}{kM \cosh(ML) + h_0 \sinh(ML)} \quad (\text{B.17})$$

e

$$C_1 = \frac{T_c - T_p - C_2 \cosh(ML)}{\sinh(ML)} \quad (\text{B.18})$$

## APÊNDICE C

### Resolução das integrais da solução tridimensional

Para a determinação da solução para o problema de biotransferência de calor discutido na seção 6.1 via Funções de Green, chegou-se à Eq. (C.3) que é a aplicação da equação-solução integral deduzida na seção 3.5 dada pela Eq. (3.32).

A Função de Green para este problema é:

$$\begin{aligned} G_{XYZ} = \frac{8}{Lab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} & \left( \frac{\beta_n^2 + B_1^2}{\beta_n^2 + B_1^2 + B_1} \right) \left( \frac{\beta_p^2 + B_2^2}{\beta_p^2 + B_2^2 + B_2} \right) \exp[-\gamma\alpha(t - \tau)] \\ & \times \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cos\left[\beta_n \left(1 - \frac{y}{a}\right)\right] \cos\left[\beta_p \left(1 - \frac{z}{b}\right)\right] \\ & \times \cos\left(\beta_m \frac{x'}{L}\right) \cos\left[\beta_n \left(1 - \frac{y'}{a}\right)\right] \cos\left[\beta_p \left(1 - \frac{z'}{b}\right)\right] \end{aligned} \quad (C.1)$$

com

$$\gamma = \frac{\beta_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{a^2} + \frac{\beta_p^2}{b^2} \quad (C.2)$$

Portanto, como discutido, a solução para o problema de Pennes discutido na seção 6.1

encontrada é:

$$\begin{aligned}
W(x, y, z, t) = & \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a \int_{z'=0}^b G \cdot Q_m \exp(\lambda t) dz' dy' dx' d\tau + \\
& + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^a \int_{z'=0}^b q_0 \exp(\lambda t) G|_{x'=0} dz' dy' d\tau + \\
& + \frac{\alpha h}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{z'=0}^b (T_f - T|_{y'=0}) \exp(\lambda t) G|_{y'=0} dz' dx' d\tau + \\
& + \frac{\alpha h}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a (T_f - T|_{z'=0}) \exp(\lambda t) G|_{z'=0} dy' dx' d\tau
\end{aligned} \tag{C.3}$$

com

$$M^2 = \frac{\lambda}{k} = \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k} \tag{C.4}$$

Observa-se que na resolução das integrais em cada parcela as integrais recaem somente nos termos que variam nas variáveis do problema homogêneo auxiliar, sendo assim, definem-se:

$$\begin{aligned}
G^* = & \frac{8}{Lab} \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cos\left[\beta_n \left(1 - \frac{y}{a}\right)\right] \cos\left[\beta_p \left(1 - \frac{z}{b}\right)\right] \\
& \times \left(\frac{\beta_n^2 + B_1^2}{\beta_n^2 + B_1^2 + B_1}\right) \left(\frac{\beta_p^2 + B_2^2}{\beta_p^2 + B_2^2 + B_2}\right)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

que combina os termos que não serão integrados. Ao abrir os termos da Função de Green e combiná-los às integrais, aparecerão termos recorrentes tanto nas integrais espaciais quanto temporais. No espaço, três integrais são calculadas:

- em x:

$$I_x = \int_{x'=0}^L \cos\left(\beta_m \frac{x'}{L}\right) dx' = \frac{L \operatorname{sen}\beta_m}{\beta_m} \tag{C.6}$$

- em y:

$$I_y = \int_{y'=0}^a \cos\left[\beta_n \left(1 - \frac{y'}{a}\right)\right] dy' = \frac{a \operatorname{sen}\beta_n}{\beta_n} \tag{C.7}$$

- em z:

$$I_z = \int_{z'=0}^b \cos\left[\beta_p \left(1 - \frac{z'}{b}\right)\right] dz' = \frac{b \operatorname{sen}\beta_p}{\beta_p} \tag{C.8}$$

E a integral temporal dada por

$$I_\tau = \int_{\tau=0}^t \exp[\lambda t - \gamma\alpha(t - \tau)] d\tau = \frac{\exp(\lambda t) \exp(-\gamma\alpha t)}{\alpha(M^2 + \gamma)} \quad (\text{C.9})$$

A primeira parcela, representada pela integral

$$I_1 = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a \int_{z'=0}^b G \cdot Q_m \exp(\lambda t) dz' dy' dx' d\tau \quad (\text{C.10})$$

representa a geração de calor no tecido devida à presença do metabolismo, sendo igual a

$$I_1 = \frac{\alpha Q_m}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* I_x I_y I_z I_\tau \quad (\text{C.11})$$

A segunda parcela

$$I_2 = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^a \int_{z'=0}^b q_0 \exp(\lambda t) G|_{x'=0} dz' dy' d\tau \quad (\text{C.12})$$

representa a resposta no campo de temperatura contorno devido ao fluxo imposto na superfície. A partir do exposto, calcula-se:

$$I_2 = \frac{\alpha q_0}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* I_y I_z I_\tau \quad (\text{C.13})$$

Como a condição de contorno na variável auxiliar  $W$  em  $x = L$  é  $W = 0$ , não há termos que retratam a resposta do campo de temperaturas no domínio à temperatura prescrita que essa condição de contorno carrega. Bem como, devido à simetria do problema, as condições de contorno nas superfícies das faces  $y = a$  e  $y = b$  são nulas. As integrais  $I_3$  e  $I_4$  traduzem o efeito da convecção nas faces em que são aplicadas. Pode-se, dessa maneira, retomar tais integrais e identificá-las como

$$I_3 = \frac{\alpha h}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{z'=0}^b (T_f - T_a) \exp(\lambda t) G|_{y'=0} dz' dx' d\tau \quad (\text{C.14})$$

e

$$I_4 = \frac{\alpha h}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^a (T_f - T_a) \exp(\lambda t) G|_{z'=0} dy' dx' d\tau \quad (\text{C.15})$$



que, após as integrações indicadas, reduzem-se a

$$I_3 = \frac{\alpha h (T_f - T_a)}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* I_x \cos \beta_n I_z I_\tau \quad (\text{C.16})$$

e

$$I_4 = \frac{\alpha h (T_f - T_a)}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* I_x \cos \beta_p I_y I_\tau \quad (\text{C.17})$$

Obtendo, dessa maneira, a Eq. (6.40)

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = T_a + & \left\{ \frac{\alpha Q_m}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* I_x I_y I_z I_\tau + \frac{\alpha q_0}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* I_y I_z I_\tau + \right. \\ & + \frac{\alpha h}{k} (T_f - T_a) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* I_x I_z I_\tau \cos \beta_n + \\ & \left. + \frac{\alpha h}{k} (T_f - T_a) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} G^* I_x I_y I_\tau \cos \beta_p \right\} \exp(-\lambda t) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

uma vez que  $T = T_a + W \exp(-\lambda t)$ .

## ANEXO A

### Solução Unidimensional para o domínio com condição inicial uniforme e igual à temperatura arterial

Para a validação da solução tridimensional do capítulo 6 cuja condição inicial imposta ao domínio representativo de um tecido biológico é que todo o tecido está a uma mesma temperatura igual à temperatura média do corpo humano,  $T_a = 37^\circ\text{C}$ , faz-se necessária a dedução e verificação do modelo unidimensional correspondente que é utilizado no capítulo 7 no processo de verificação intrínseca da solução.

#### A.1 Dedução da solução unidimensional para o modelo da biotransferência de calor para $T(x, 0) = T_a$ via Funções de Green

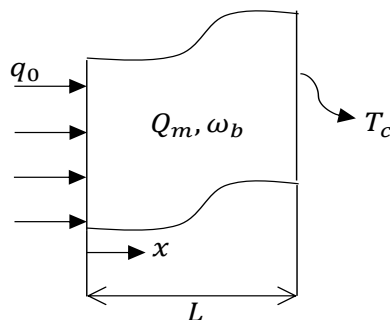


Figura A.1: Domínio representativo de um tecido biológico vivo e condições de contorno para o problema unidimensional do tipo X21

Considerando o domínio unidimensional representado na Fig. A.1, o modelo de Pennes

pode ser escrito na forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k} (T_a - T) + \frac{Q_m}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

submetido às condições de contorno

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q_0 \quad (\text{A.2})$$

$$T(L, t) = T_a = T_c \quad (\text{A.3})$$

e à condição inicial

$$T(x, t) = T_a \quad (\text{A.4})$$

Como a condição de contorno é de fluxo prescrito em  $x = 0$  e temperatura prescrita em  $x = L$ , tem-se um problema do tipo X21. A FG correspondente para esse tipo de problema (ver Cole *et al.* (2010)) é

$$G_{X21}(x, t|x', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cos\left(\beta_m \frac{x'}{L}\right) \exp\left[\frac{-\beta_m^2 \alpha (t - \tau)}{L^2}\right] \quad (\text{A.5})$$

sendo os autovalores dados por

$$\beta_m = \pi \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{A.6})$$

No entanto, para que seja possível utilizar-se da equação solução integral via Funções de Green, deve-se eliminar o termo correspondente à perfusão, fazendo assim a seguinte mudança de variáveis:

$$\bar{\lambda} = \omega_b \rho_b c_b \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{M}^2 = \frac{\bar{\lambda}}{k} \quad (\text{A.8})$$

$$T(x, t) = T_a + W(x, t) \cdot \exp(-\bar{M}^2 \alpha t) \quad (\text{A.9})$$

que transforma as Eqs. (A.2) a (A.4) em

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{k} \cdot Q_m \exp(\bar{M}^2 \alpha t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

$$-k \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=0} = q_0 \exp(\bar{M}^2 \alpha t) \quad (\text{A.11})$$

$$W(L, t) = 0 \quad (\text{A.12})$$

e

$$W(x, 0) = 0 \quad (\text{A.13})$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} W(x, t) = & \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L Q_m \exp(\bar{M}^2 \alpha \tau) \cdot G_{x21} dx' d\tau + \\ & + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t q_0 \exp(\bar{M}^2 \alpha \tau) G_{x21}|_{x'=0} d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Resolvendo as integrais da Eq. (A.14) e retomando à variável original ( $T(x, t)$ ), tem-se:

$$\begin{aligned} T(x, t) = & T_a + \frac{2Q_m}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \beta_m}{\beta_m \left( \bar{M}^2 + \frac{\beta_m^2}{L^2} \right)} \cos \left( \beta_m \frac{x}{L} \right) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \bar{M}^2 + \frac{\beta_m^2}{L^2} \right) \alpha t \right] \right\} + \\ & + \frac{2q_0}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left( \beta_m \frac{x}{L} \right) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \bar{M}^2 + \frac{\beta_m^2}{L^2} \right) \alpha t \right] \right\} \cdot \frac{1}{\bar{M}^2 + \frac{\beta_m^2}{L^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Esta solução é verificada nas seções seguintes comparando-a, em regime permanente, com diferentes condições impostas.

## A.2 Regime permanente sem o efeito do metabolismo

Para avaliar o regime permanente eliminando-se o efeito do metabolismo, deve-se estabelecer, primeiramente, o modelo matemático correspondente. Portanto, a Eq. (A.1) torna-se:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k} (T_a - T) = 0 \quad (\text{A.16})$$

submetida às condições de contorno

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = q_0 \quad (\text{A.17})$$

e

$$T(L) = T_a \quad (\text{A.18})$$

A solução para este problema via separação de variáveis é:

$$T(x) = T_a - \frac{q_0}{kM} \sinh(Mx) + \frac{q_0 \sinh(ML)}{kM \cosh(ML)} \cosh(Mx) \quad (\text{A.19})$$

As Figuras A.2 e A.3 trazem a comparação entre a solução unidimensional do problema de biotransferência de calor sem o efeito do metabolismo resolvido por Funções de Green para um tempo grande ( $10^5$  s), usando 1000 autovalores,  $T_{FG}$  dada pela Eq. (A.15), e a solução para o problema em regime permanente,  $T_{1Dsm}$ , obtida na Eq. (A.19). Observa-se que o erro relativo, nesse caso, é da ordem de  $10^{-2}$  % na superfície e, rapidamente, cai a zero, sendo calculado por

$$\text{erro}_{sm} = \frac{T_{FG} - T_{1Dsm}}{T_{1Dsm}} \times 100\% \quad (\text{A.20})$$

Sendo assim, uma primeira técnica de verificação intrínseca para a solução unidimensional do problema de biotransferência de calor com condição inicial uniforme é estabelecida. No entanto, para esta técnica de validação de soluções analíticas, é necessário que pelo menos mais um método e/ou condição seja avaliada, como é feito nas seções seguintes.

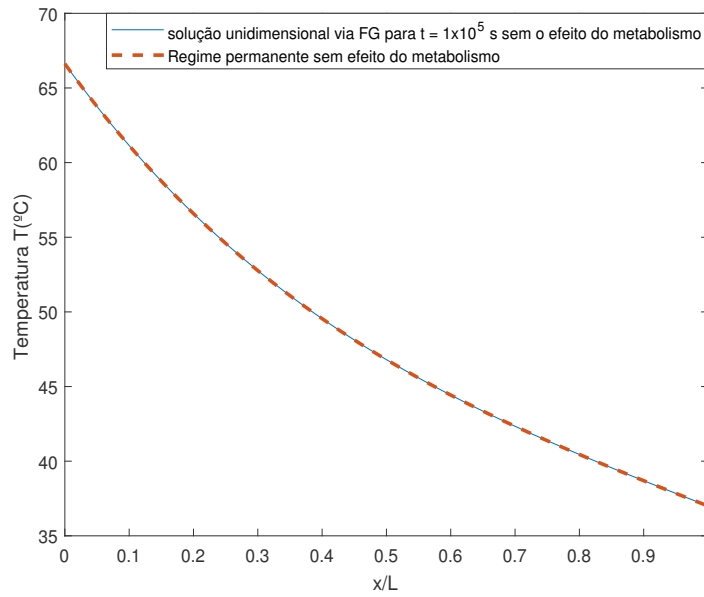


Figura A.2: Comparação entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem metabolismo e o modelo em regime permanente para a mesma condição.

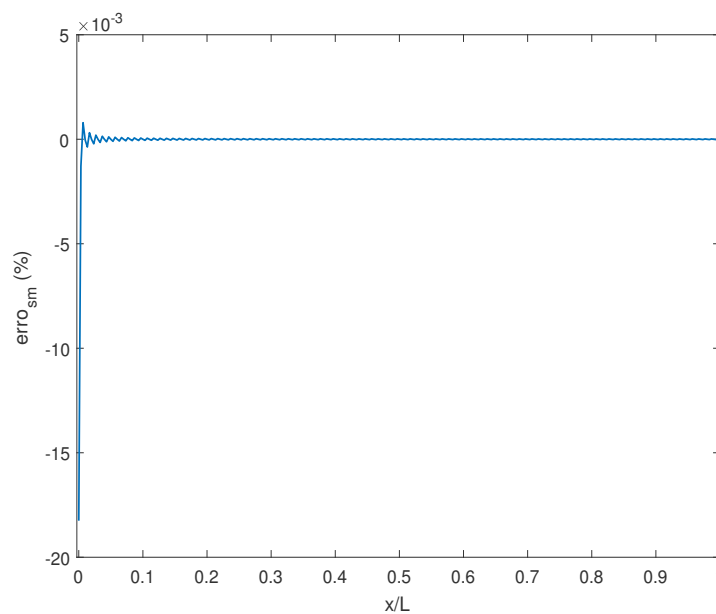


Figura A.3: Erro relativo entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem metabolismo com 1 000 autovalores, e o modelo em regime permanente para a mesma condição.

### A.3 Regime permanente sem o efeito de perfusão

Quando apenas o efeito de perfusão é eliminado do modelo em regime permanente, a Eq. (A.1) é escrita na forma:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{Q_m}{k} = 0 \quad (\text{A.21})$$

com as condições de contorno

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = q_0 \quad (\text{A.22})$$

e

$$T(L) = T_a \quad (\text{A.23})$$

cuja solução, via integração, é

$$T(x) = -\frac{Q_m}{2k}x^2 - \frac{q_0}{k}x + \frac{Q_m}{2k}L^2 + \frac{q_0}{k}L + T_a \quad (\text{A.24})$$

Tomando a solução em regime permanente dada pela Eq. (A.24) como sendo  $T_{1Dsp}$ , o erro relativo da solução via FG sem perfusão para um tempo grande em relação ao modelo em regime permanente é calculado como sendo

$$\text{erro}_{sp} = \frac{T_{FG} - T_{1Dsp}}{T_{1Dsp}} \times 100\% \quad (\text{A.25})$$

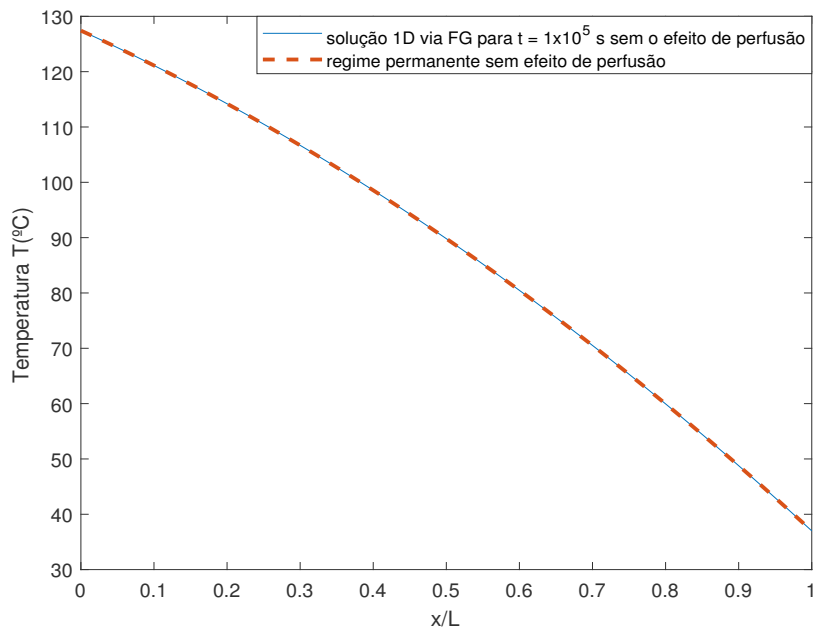


Figura A.4: Comparação entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem perfusão e o modelo em regime permanente para a mesma condição.

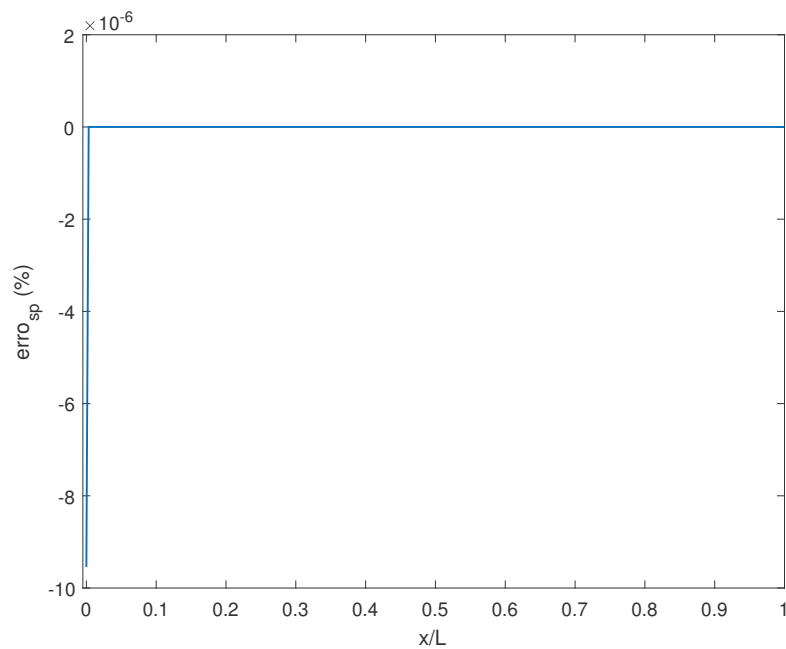


Figura A.5: Comparação entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem perfusão e o modelo em regime permanente para a mesma condição.



#### A.4 Modelo completo em regime permanente

Avaliando a presença dos efeitos de metabolismo e perfusão em regime permanente, pode-se escrever o modelo de biotransferência de calor como sendo a seguinte equação:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k} (T_a - T) + \frac{Q_m}{k} = 0 \quad (\text{A.26})$$

acoplada às condições de contorno

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = q_0 \quad (\text{A.27})$$

e

$$T(L) = T_a \quad (\text{A.28})$$

que tem como solução

$$T(x) = T_a + \frac{Q_m}{\omega_b \rho_b c_b} - \frac{q_0}{k \bar{M}} \sinh(\bar{M}x) + \left[ \frac{q_0}{k \bar{M}} \sinh(\bar{M}L) - \frac{Q_m}{\omega_b \rho_b c_b} \right] \frac{\cosh(\bar{M}x)}{\cosh(\bar{M}L)} \quad (\text{A.29})$$

sendo

$$\bar{M} = \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k} \quad (\text{A.30})$$

Pode-se, então, fazer a comparação entre as duas soluções completas: via FG para tempos grandes e em regime permanente via separação de variáveis ( $T_{reg}$  dada na Eq. (A.29)), definindo o erro relativo entre essas duas soluções como

$$\text{erro}_{reg} = \frac{T_{FG} - T_{reg}}{T_{reg}} \times 100\% \quad (\text{A.31})$$

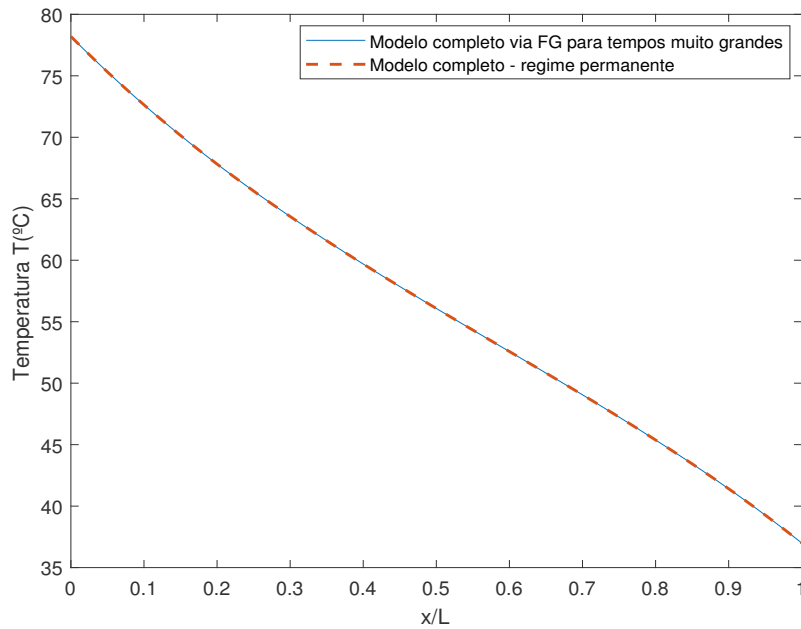


Figura A.6: Comparação entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem perfusão e o modelo em regime permanente para a mesma condição.

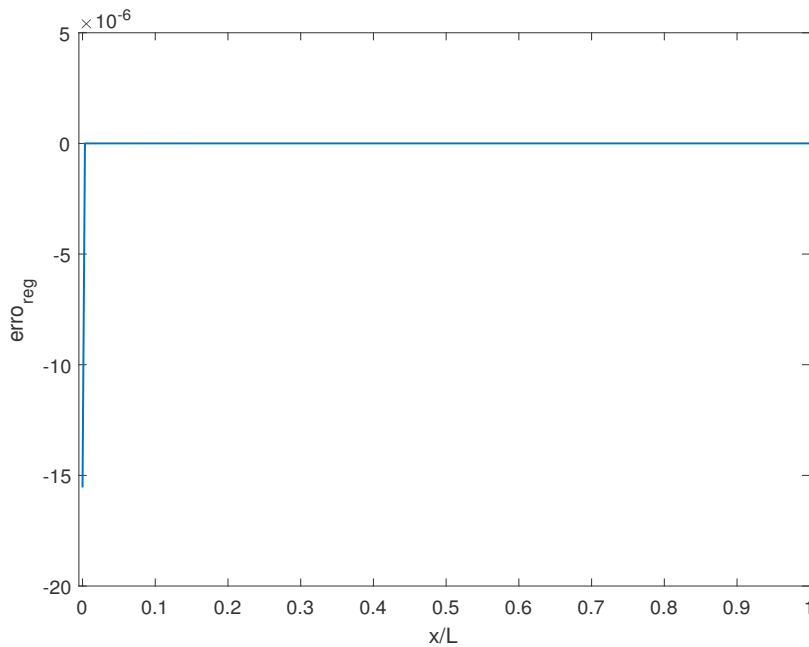


Figura A.7: Comparação entre a solução unidimensional via Funções de Green do problema X21 sem perfusão e o modelo em regime permanente para a mesma condição.