

LAUREN KAROLINE DE SOUSA GONÇALVES

**ANÁLISE DE FADIGA DE SISTEMAS
ESTOCÁSTICOS INCORPORANDO MATERIAIS
VISCOELÁSTICOS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2018

LAUREN KAROLINE DE SOUSA GONÇALVES

**ANÁLISE DE FADIGA DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS
INCORPORANDO MATERIAIS VISCOELÁSTICOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

UBERLÂNDIA – MG

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

G635a
2018 Gonçalves, Lauren Karoline de Sousa, 1988-
 Análise de fadiga de sistemas estocásticos incorporando materiais
 viscoelásticos [recurso eletrônico] / Lauren Karoline de Sousa
 Gonçalves. - 2018.

 Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.
 Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa
 de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
 Modo de acesso: Internet.
 Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2018.817>
 Inclui bibliografia.
 Inclui ilustrações.

 1. Engenharia mecânica. 2. Materiais viscoelásticos. 3. Metais -
 Fadiga. 4. Otimização estrutural. I. Lima, Antônio Marcos Gonçalves de,
 1975- (Orient.) II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de
 Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Maria Salete de Freitas Pinheiro - CRB6/1262



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



TERMO

ALUNA: Lauren Karoline de Sousa Gonçalves

MATRÍCULA: 11423EMC010

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

LINHA DE PESQUISA: Dinâmica de Sistemas Mecânicos

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL DOUTORADO

TÍTULO DA TESE: "Análise de Fadiga de Sistemas Estocásticos Incorporando Materiais Viscoelásticos"

ORIENTADOR: Prof. Dr. Antonio Marcos Gonçalves de Lima

A Tese foi **APROVADA** em reunião pública, realizada na Sala 313 - Bloco 1M, Campus Santa Mônica, em 31 de agosto de 2018, às 09:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Antonio Marcos Gonçalves de Lima (orientador) - UFU

Prof. Dr. Marcus Antonio Viana Duarte - UFU

Prof. Dr. Roberto Mendes Finzi Neto - UFU

Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho - UNIFEI

Prof. Dr. Romes Antonio Borges - UFG

Uberlândia, 30 de agosto de 2018



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/08/2018, às 12:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nelson Manzanares Filho, Usuário Externo**, em 31/08/2018, às 13:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Romes Antonio Borges, Usuário Externo**, em 31/08/2018, às 13:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcus Antonio Viana Duarte, Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/08/2018, às 13:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roberto Mendes Finzi Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/08/2018, às 13:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0680497** e o código CRC **29233758**.

“Aquele que ousa perder uma hora de seu tempo não sabe o valor da vida”.

Charles Darwin

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que permitiu a realização deste trabalho, estando sempre comigo, me iluminando, protegendo e fortalecendo principalmente nos momentos mais difíceis.

Ao meu marido, Luan, agradeço pela amorosa presença e incansável incentivo. Obrigada amor por ser sempre meu companheiro, muito atencioso e compreensivo comigo. Produzir uma tese ao lado de um companheiro como você é um verdadeiro presente.

Ao meu orientador, um exemplo de profissional para mim, sempre me ensinando com muita paciência, presente em todos os momentos da pesquisa e principalmente nas horas em que mais precisei. Tenho eterna gratidão por ter aceitado ser meu orientador neste trabalho, por me direcionar à tantos conhecimentos novos e por toda paciência com as minhas dificuldades.

A minha família e amigos, em especial aos meus pais, Celso e Judith, pelas calorosas orações, pelos valiosos conselhos diários e por tudo que fizeram por mim para me tornar a pessoa que sou hoje. Às minhas irmãs, Leana e Liriana, por estarem sempre por perto como minhas amigas.

À Universidade Federal de Uberlândia, à Faculdade de Engenharia Mecânica e à Faculdade de Engenharia Civil pela oportunidade e estrutura concedida para realização do curso. Aos professores do curso de Pós-Graduação, pelos sábios conhecimentos transmitidos.

Às funcionárias da Seção de Pós-Graduação, pela atenção e prestatividade.

Aos meus colegas de laboratório, obrigada pela convivência diária onde aprendemos e apoiamos muito uns aos outros. Agradeço por todos os momentos que compartilhamos durante as nossas pesquisas. Um agradecimento especial à Raquel, Karina, Lorrane e Lorraine que sempre me apoiaram com palavras doces de carinho e motivação. Ao Ulisses, Luiz Fernando, Yvon e André que tanto tiveram paciência com as minhas infinitas dúvidas.

Aos membros da banca, que com extrema competência, contribuíram com importantes e enriquecedoras sugestões.

Aos órgãos de fomento CNPq e CAPES através do INCT que forneceu o contexto científico na qual esta pesquisa foi desenvolvida.

GONÇALVES, Lauren Karoline de Sousa. **Análise de fadiga de sistemas estocásticos incorporando materiais viscoelásticos**. 2018. 99 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018.

RESUMO

Este trabalho propõe uma nova formulação probabilística do critério de fadiga multiaxial de *Sines* para a análise de fadiga no domínio da frequência de sistemas amortecidos viscoelasticamente e na presença de incertezas. Para isto, o método dos elementos finitos é combinado com o método de expansão de Karhunen-Loève para a discretização dos campos aleatórios e consequente geração das matrizes estocásticas para um elemento de placa sanduíche de três camadas. Para considerar a dependência em frequência e em temperatura das propriedades mecânicas do material viscoelástico LSD112 da 3M utilizado neste trabalho, optou-se pela aproximação do módulo complexo para o cálculo das funções de resposta em frequência e das respostas em tensão necessárias na estimação do índice de fadiga. Uma extensão natural da análise de fadiga dos sistemas viscoelásticos tratados neste trabalho é o uso de técnicas de otimização. Ela permite reduzir o custo e o tempo de execução do projeto de um sistema viscoelástico com vistas à sua vida em fadiga. Neste sentido, optou-se por utilizar o NSGA. Entretanto, em vista do grande número de avaliações exatas das funções objetivo associado ao procedimento de otimização multiobjetivo robusto proposto para avaliar as incertezas no espaço de busca, propõem-se o uso de uma técnica de redução de modelos bem adaptada aos sistemas viscoelásticos. Neste caso, foi construída uma base de redução constante (independente da frequência e da temperatura) enriquecida iterativamente com resíduos estáticos dos esforços externos e das forças viscoelásticas. O objetivo é aproximar as respostas em tensão do sistema viscoelástico e reduzir o tempo de cálculo das soluções ótimas e robustas. Através dos inúmeros exemplos numéricos com uma placa plana sanduíche de três camadas, pode-se ilustrar os desenvolvimentos abordados ao longo deste trabalho e a importância de se considerar as incertezas na otimização de sistemas viscoelásticos mais realísticos para a análise de fadiga.

Palavras-chave: Materiais viscoelásticos, incertezas paramétricas, análise de fadiga, critério de Sines, NSGA, otimização robusta.

GONÇALVES, Lauren Karoline de Sousa. **Fatigue analysis of stochastic systems incorporating viscoelastic materials**. 2018. 99 f. Thesis (Mechanical Engineering), Federal University of Uberlândia, Uberlândia, 2018.

ABSTRACT

This work proposes a new probabilistic approach for the Sines's fatigue criterion in the frequency-domain to investigate the fatigue damage of a viscoelastically-damped system with uncertainties. In this case, the finite element method has been used in conjunction with the Karhunen-Loève expansion method to discretize the Gaussian random fields and to construct the stochastic elementary FE matrices for a three-layer sandwich plate element. To incorporate the frequency- and temperature-dependent behavior of the 3M ISD112 viscoelastic material adopted here, it is considered the complex modulus approach, which is used in the computation of the frequency response functions and the stress responses of the viscoelastic system. These responses are required in the estimation of the Sines's global criterion. A natural extension of the modeling capability presented here is the use of optimization techniques with the aim of reducing the time to perform a fatigue analysis of viscoelastic systems. Within this context, it has been used the well-known NSGA optimization technique. However, due to the large number of exact evaluations of the objective functions for the robust multiobjective optimization strategy proposed in the present contribution, it is suggested a model reduction method to deal with viscoelastic systems. It is based on the construction of a frequency- and temperature-independent basis which is further enriched by static residues due to the external excitations and viscoelastic damping forces in an iteratively way. The main goal is to approximate the stress responses of the viscoelastic system and to reduce the computational time required to compute the optimal-robust solutions. The numerical examples with a three-layer sandwich plate incorporating viscoelastic damping illustrate the developments of the methodology proposed herein and the necessity of considering the uncertainties in the optimization process of more realistic viscoelastically-damped systems with the aim of increasing their fatigue life.

Keywords: Viscoelastic materials, parametric uncertainties, fatigue analysis, Sines criterion, NSGA, robust optimization.

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

| | |
|---|---|
| $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ | graus de liberdade: deslocamentos e flexões |
| u_j, v_j | deslocamentos longitudinais |
| $C^{(j)}$ | matriz de coeficientes elásticos das camadas j |
| $s^{(j)}(x, y, z, t)$ | vetor de tensões |
| $s^{(j)}(x, y, z, t, T)$ | resposta no tempo do sistema viscoelástico |
| $B(x, y, z)$ | operadores diferenciais aplicados às funções de forma |
| $C(x_1, x_2)$ | função de covariância |
| D_{Sines} | coeficiente de Sines |
| $E^{(j)}$ | módulo de elasticidade |
| $E[\bullet]$ | operador esperança matemática |
| $\bar{f}(t)$ | carregamento externo aplicado médio |
| $f(t, \theta)$ | carregamento externo aleatório estacionário e gaussiano |
| h_j | espessuras das camadas j da placa |
| $H(x, y, \theta)$ | campo aleatório bidimensional |
| $\hat{H}(x, y, \theta)$ | campo aleatório aproximado |
| $H_r(x), \xi_r(\theta)$ | funções determinísticas e variáveis aleatórias |
| J_2 | segundo invariante do tensor desvio |
| J_{2a} | segundo invariante do tensor desvio aproximado |
| $J_{2a}(\theta)$ | notação de J_{2a} sob carregamento aleatório |
| L_x, L_y | comprimentos de correlação nas direções x, y |
| $M^{(e)}(\theta), K^{(e)}(\theta)$ | matrizes elementares estocásticas |
| $N(x, y)$ | vetor de funções de forma |
| $N_u, N_v, N_w, N_{\theta_x}, N_{\theta_y}$ | funções de forma ou de aproximação |
| $s(t, T, \theta)$ | respostas em tensão do sistema viscoelástico |
| $Z(\omega, T)$ | matriz de rigidez dinâmica média |

| | |
|--|---|
| $\mathbf{H}(\omega, T, \theta), \mathbf{Z}(\omega, T, \theta)$ | matriz de rigidez dinâmica complexa estocástica |
| $\mathbf{H}_r(\omega, T, \theta), \mathbf{Z}_r(\omega, T, \theta)$ | matriz de rigidez dinâmica estocástica reduzida |
| $\mathbf{R}_f(\omega, T)$ | resíduos associados às forças externas |
| $\mathbf{R}_d(\omega, T)$ | resíduos dos deslocamentos |
| \mathbf{T}_{ERM} | base de redução do método iterativo de Ritz enriquecido |
| $\mathbf{u}_{(e)}(t)$ | vetor de graus de liberdade a nível elementar |
| $G(\omega, T)$ | módulo complexo de cisalhamento do material viscoelástico |
| $G(\omega, T, \theta)$ | módulo complexo de cisalhamento estocástico |
| $G_0 = G(0, T)$ | módulo complexo de cisalhamento em baixa frequência |
| $p(x)$ | função densidade de probabilidade |
| $p_{hid}(t)$ | pressão hidrostática |
| t_{-I} | limite de fadiga em torção alternada simétrica |
| $\mathbf{U}(x, y)$ | vetor de deslocamentos longitudinais e transversais |
| $\mathbf{M}^{(k)}, \mathbf{K}^{(k)}$ | matrizes de massa e rigidez elementares |
| $\mathbf{M}(\theta), \mathbf{K}_e(\theta), \bar{\mathbf{K}}_v(\theta)$ | matrizes de massa rigidez estocásticas |
| $\mathbf{u}(t, T)$ | resposta no tempo do sistema viscoelástico |

Símbolos Gregos

| | |
|---|--|
| $\varepsilon_x^j, \varepsilon_y^j, \varepsilon_z^j, \varepsilon_x^j, \gamma_{xy}^j, \gamma_{xz}^j, \gamma_{yz}^j$ | deformações normais e cisalhantes |
| $\varepsilon(x, y, z, t)$ | vetor de deformações |
| δ_i | fator de irregularidade |
| ρ_j | massa específica |
| ν_j | coeficiente de poisson |
| λ_m | momento estatístico de ordem m |
| $\lambda_r, f_r(x, y)$ | autovalores e autofunções de $C(x_1, x_2)$ |
| μ_i, β_i | modo e dispersão de um processo aleatório |
| ω | frequência de excitação em $[rad / s]$ |
| δ_i | fator de irregularidade |

| | |
|---------------------------------------|---|
| $\Phi_s(\omega, T)$ | matriz de densidades espectrais em tensão |
| $\widehat{\Phi}_s(\omega, T, \theta)$ | respostas em tensão do sistema estocástico |
| $\alpha(T_v)$ | fator de deslocamento para o princípio de equivalência frequência-temperatura |
| ε_k | erro da energia de deformação |
| Ψ | matriz de propriedades mecânicas reduzida |
| ε_k | erro da energia de deformação |
| ζ | constante de Apery |

Acrônimos

| | |
|------|--|
| ACLD | Camadas restritas ativas |
| EF | Elementos Finitos |
| ER | Fluidos eletroreológicos |
| ERM | Base de redução robusta |
| FRF | Função resposta em frequência |
| GDL | Número de graus de liberdade |
| HCL | Método Hipercubo-Latino |
| IERM | Iterative Enriched Reduction Method |
| KL | Discretização de Karhunen-Loève |
| MAC | Modal Assurance Criteria |
| MC | Simulação de Monte Carlo |
| MOGA | Multiple Objective Genetic Algorithm |
| MR | Fluidos magneto-reológicos |
| NSGA | Non-dominated Sorting Genetic Algorithm |
| PMO | Procedimento de otimização multiobjetivo |
| PMOD | Problema multiobjetivo determinístico |
| PMOR | Problema multiobjetivo robusto |
| PSD | Densidade Espectral de potência |
| PSFT | Princípio de Superposição Frequência-Temperatura |
| RMSD | Raiz quadrada do desvio médio quadrático |
| SCA | Sistema conservativo associado |
| SFEM | Método dos elementos finitos estocásticos |
| SPEA | Strength Pareto Evolutionary Algorithm |
| VEGA | Vector Evaluated Genetic Algorithm |

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| CAPÍTULO I..... | 1 |
| Introdução | 1 |
| 1.1. Contextualização e Justificativas | 1 |
| 1.2. Objetivos | 6 |
| 1.3. Organização da Tese | 7 |
| CAPÍTULO II..... | 9 |
| Revisão sobre a Modelagem Determinística de Placas Sanduíches Viscoelásticas | 9 |
| 2.1. Relações cinemáticas | 9 |
| 2.1.1. <i>Relações tensão-deformação</i> | 11 |
| 2.1.2. <i>Discretização por elementos finitos</i> | 14 |
| 2.1.3. <i>Equações do movimento, resposta em frequência e resposta em tensão</i> | 15 |
| 2.2. Amortecimento viscoelástico | 19 |
| 2.3. Resposta em tensão média do sistema viscoelástico sujeito a cargas aleatórias 22 | |
| 2.3.1. <i>Densidade espectral de potência da resposta em tensão</i> | 23 |
| CAPÍTULO III..... | 25 |
| Modelagem Estocástica de Placas Sanduíches Viscoelásticas | 25 |
| 3.1. Definições introdutórias | 25 |
| 3.2. Discretização por Karhunen-Loève (KL) | 27 |
| 3.2.1. <i>Matrizes elementares estocásticas</i> | 30 |
| 3.3. Redução de modelos | 32 |
| CAPÍTULO IV | 38 |
| Análise de fadiga de sistemas viscoelásticos estocásticos sujeitos a cargas aleatórias estacionárias e gaussianas | 38 |
| 4.1. Introdução | 38 |
| 4.2. Escolha do método de análise de fadiga | 39 |
| 4.3. Critério multiaxial de Sines | 41 |
| 4.3.1. <i>Cálculo do segundo invariante do tensor desvio de tensão</i> | 42 |
| 4.4. Formulação probabilística do critério de Sines | 45 |
| CAPÍTULO V | 49 |

| | |
|--|----|
| Metodologia de Otimização Multiobjetivo Robusta | 49 |
| 5.1. Introdução | 49 |
| 5.2. Problema multiobjetivo determinístico (PMOD) | 50 |
| 5.3. Escolha de um método de otimização multiobjetivo | 52 |
| CAPÍTULO VI | 58 |
| Simulações Numéricas | 58 |
| 6.1. Descrição do modelo nominal | 58 |
| 6.1.1. <i>Análise modal</i> | 60 |
| 6.2. Redução do sistema viscoelástico determinístico | 61 |
| 6.3. Avaliação das respostas dinâmicas do sistema estocástico | 64 |
| 6.3.1. <i>Influência paramétrica no índice de fadiga do sistema viscoelástico nominal</i> | 65 |
| 6.3.2. <i>Influência das incertezas no índice de fadiga do sistema viscoelástico estocástico</i> | 67 |
| 6.4. Problema de otimização multiobjetivo determinístico (PMOD) | 74 |
| 6.5. Problema de otimização multiobjetivo robusto (PMOR) | 77 |
| CAPÍTULO VII | 83 |
| Conclusões gerais e perspectivas de trabalhos futuros | 83 |
| 7.1. Resumo e contribuições | 83 |
| 7.2. Perspectivas de trabalhos futuros | 85 |
| REFERÊNCIAS | 87 |
| ANEXO A | 97 |

CAPÍTULO I

Introdução

1.1. Contextualização e Justificativas

Estruturas cada vez maiores e mais eficientes que garantam condições de conforto e segurança aos operadores e usuários, são o que impulsiona a modernização de processos e produtos industriais na Engenharia (KOÇER, 2010). Neste sentido, para possibilitar a execução de projetos, por exemplo, de arranha-céus e aeronaves de grandes proporções, pesquisadores têm buscado o desenvolvimento de materiais cada vez mais leves e mais resistentes. Entretanto, isso pode levar a redução da massa da estrutura e, conseqüentemente, a redução do próprio amortecimento inerente, resultando em níveis indesejáveis de vibrações e ruídos. Tais perturbações geram instabilidades aerodinâmicas, perda de desempenho de estruturas e equipamentos, bem como falhas por fadiga induzidas por vibrações (de LIMA, 2007; FARIA, 2010).

Neste contexto, estima-se que 90% de todas as ocorrências de falhas envolvendo metais estão relacionadas à ruptura causada pela fadiga induzida por vibrações (CALLISTER, 2008). Além disso, em plataformas *offshores*, aproximadamente 50% dos custos de monitoramento das condições em serviço referem-se a inspeções para avaliar trincas por fadiga (TAIER, ARAÚJO E GODEFROID, 2002). Em vista disto, estruturas submetidas a carregamentos cíclicos devem ser projetadas de forma a minimizar a probabilidade de ocorrência de falhas por fadiga, o que dispõe certa complexidade por não ser um fenômeno completamente compreendido (TAKAHASHI, 2014).

Segundo relatos na literatura, as pesquisas em fadiga têm mais de 175 anos (TAIER, ARAÚJO E GODEFROID, 2002) e a importância de seu estudo deve-se à necessidade em compreender melhor este fenômeno, a fim de garantir durabilidade adequada das estruturas, confiabilidade, segurança e conforto aos usuários. Assim, para evitar desconfortos e desastres, os padrões ambientais estabelecidos estão com restrições cada vez mais rigorosas com relação aos níveis admissíveis de vibrações e ruídos de máquinas e equipamentos. E para eliminar as vibrações, ou pelo menos reduzir os seus efeitos, é

fundamental compreender as técnicas de controle e incluir a análise de vibrações como parte integrante do projeto de uma estrutura (BEARDS, 1996).

Várias técnicas de controle de vibrações de sistemas dinâmicos têm sido propostas nos últimos anos, podendo ser divididas em métodos de controle ativo, passivo ou semiativo. O controle ativo envolve o uso de elementos como atuadores e microprocessadores para produzir um sinal fora de fase para cancelar eletronicamente a perturbação indesejável. Métodos de controle passivo tradicionais utilizam absorvedores, barreiras, abafadores e silenciadores. Nos métodos semiativos, o controle ativo é utilizado para melhorar as propriedades de amortecimento dos elementos passivos, podendo ser aplicados na forma de fluidos eletreológicos (ER), magneto-reológicos (MR) ou camadas restritas ativas (ACLD), nos quais a camada restringente é substituída por um material inteligente (RAO, 2003). A tabela 1.1 apresenta alguns tipos de sistemas de amortecimento.

Tabela 1. 1 – Sistemas de amortecimento (adaptado de Soong e Constantinou, 1994)

| Isolamento sísmico | Controle passivo | Controle ativo |
|---|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ▪ Rolamento elastomérico ▪ Rolamento de borracha ▪ Rolamento elastomérico com dispositivo de dissipação de energia ▪ Pêndulo por atrito deslizante ▪ Rolamentos planos com dispositivo de força de reação | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Amortecedores metálicos ▪ Amortecedores por atrito ▪ Amortecedores viscoelástico ▪ Amortecedores viscoso ▪ Absorvedor harmônico ▪ Amortecedores de líquidos sintonizados | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Sistema de contraventamento ativo ▪ Amortecedores de massa ativo ▪ Sistema de amortecimento ou rigidez variável ativa ▪ Sistemas do pulso ▪ Apêndices aerodinâmicos |

Dentre as técnicas para o controle passivo de vibrações e ruído, aquelas que utilizam os materiais viscoelásticos têm despertado grande interesse da comunidade científica mundial, em virtude do seu baixo custo de aplicação e manutenção, além da eficiência e robustez inserida aos sistemas dinâmicos em que atuam (RAMOS, 2014). Inúmeros trabalhos têm demonstrado que os materiais viscoelásticos são altamente eficientes e largamente utilizados em aplicações de diferentes setores industriais (SAMALI e KWOK, 1995; CAZENOVE *et al.*, 2012; de LIMA, STOPPA e RADE, 2003; de LIMA, 2007; RAO, 2003; LAKES, 2009; SALES, 2012; ZHOU *et al.*, 2016). Estes materiais apresentam características combinadas de um sólido elástico e de um fluido viscoso newtoniano e, de maneira geral, são aplicados para reduzir os níveis de vibrações pela sua capacidade de absorver a energia vibratória do sistema e dissipá-la sob a forma de calor (DIACENCO, 2010).

Samali e Kwok (1995) observaram que a efetividade de aplicação dos materiais viscoelásticos tem sido demonstrado experimentalmente e analiticamente por muitos pesquisadores nos últimos 48 anos. Na construção civil aplica-se o amortecimento viscoelástico para reduzir os níveis de vibrações causados por movimentos sísmicos, ventos e equipamentos em operação, como refrigeradores, unidades de ar condicionado e elevadores (de LIMA, 2007). Destaca-se as estruturas das torres gêmeas

do *World Trade Center* em Nova Iorque e do prédio do *Columbia SeaFirst* em Seattle entre os primeiros edifícios com aplicações de amortecedores viscoelásticos. As Figs. 1.1 e 1.2 exemplificam algumas aplicações de amortecedores viscoelásticos na construção civil.



Figura 1. 1 – Amortecedores viscoelásticos utilizados na Construção Civil como rolamento elastomérico: a) Aplicado em reforço horizontal de uma estrutura de aço; b) Aplicado em pilares (extraída de Magebasa, 2018)

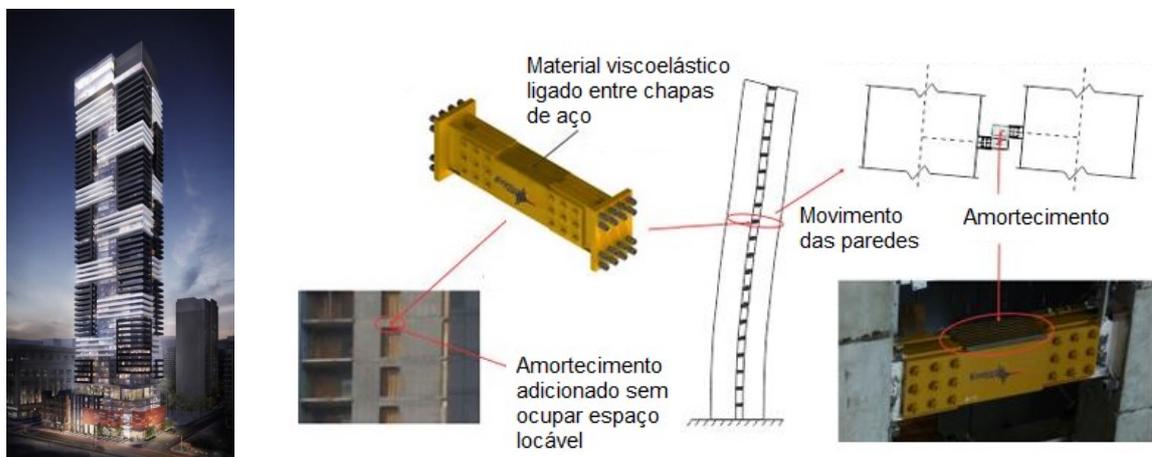


Figura 1. 2 – Amortecedores aplicados em edifícios altos (extraída de Mirabelli, 2015)

Nas Engenharias Mecânica e Aeronáutica, o campo de aplicação de amortecedores viscoelásticos é vasto, com destaque para aplicações em automóveis e aeronaves, rotores flexíveis, *risers* e compressores (BALMÈS E GERMÈS, 2002; RAO, 2003; de LIMA, 2007; RODOVALHO, 2014). A Fig. 1.3 evidencia alguns pontos de aplicação de materiais viscoelásticos em automóveis com a finalidade de reduzir os níveis de vibrações e ruído gerados pelo motor e/ou irregularidades do pavimento para melhorar o conforto interno dos usuários.



Figura 1. 3 - Pontos de aplicação de tratamentos viscoelásticos em automóveis (Adaptado de EMS - EFTEC, 2018)

De acordo com Rao (2003), na Engenharia Aeronáutica, aplicações de amortecimento em aeronaves são complexas por serem estruturas com restrições de peso. Sendo assim, os tratamentos devem ser projetados de modo a maximizar o amortecimento com o mínimo aumento de peso. A Figura 1.4 exemplifica aplicações de tratamento viscoelástico em fuselagem de aeronaves.



Figura 1. 4 - Seção da fuselagem de uma aeronave (extraído de SMAC, 2018)

Entretanto, o projeto e a análise de sistemas de engenharia com materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibrações não é uma tarefa fácil. Primeiro, pelo fato do comportamento dinâmico desses materiais depender fortemente de fatores ambientais e operacionais como temperatura de operação e frequência de excitação, por exemplo; segundo, pelo fato de que as incertezas inerentes dos parâmetros físicos e/ou geométricos que influem no comportamento de tais sistemas amortecidos devem ser levadas em conta com vistas a aplicações mais realísticas de interesse industrial.

Em relação à influência de incertezas, sabe-se que elas são inerentes às propriedades dos materiais, condições ambientais e carregamentos mecânicos cíclicos (ABDESSALEM *et al.*, 2016). Assim, tem-se observado maior interesse na temática das pesquisas atuais em implementar modelos

que levem em conta tais incertezas. No entanto, no âmbito da estimativa da vida em fadiga induzida por vibrações de sistemas dinâmicos não amortecidos, dentre os critérios disponíveis na literatura, nenhum deles foi considerado ser adaptado para estimar a vida em fadiga de sistemas contendo amortecimento viscoelástico considerando incertezas, o que demonstra o carácter original da presente Tese.

É fundamental destacar que implementar modelos estocásticos muitas vezes pode ser inviável do ponto de vista do custo computacional requerido na avaliação das respostas em frequência e das respostas em tensão. Respostas estas necessárias para estimar o índice de fadiga no domínio da frequência adotado neste trabalho para a verificação da falha ou não de pontos e/ou elementos do sistema amortecido. Assim sendo, faz-se necessário utilizar métodos de redução de modelos adaptados aos sistemas viscoelásticos estocásticos para viabilizar as análises dinâmicas estocásticas propostas neste estudo. Além disso, técnicas de otimização multiobjetivo determinística e robusta também são empregadas como estratégias para encontrar projetos ótimos e robustos com vistas ao melhor desempenho do sistema viscoelástico no tocante à fadiga.

Salienta-se que este trabalho de Tese é uma continuidade dos trabalhos que vêm sendo desenvolvidos pela equipe de dinâmica estrutural do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst), da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), no contexto dos materiais viscoelásticos, análise de sistemas estocásticos, otimização robusta e fadiga induzida por vibrações. A pesquisa se sustenta sobre uma extensa experiência do grupo de pesquisa, conforme caracterizada por dissertações de mestrado e teses de doutorado anteriores, como os trabalhos de Barros (2009), Ávila (2010), Guaraldo Neto (2012), Sales (2012), Rodovalho (2014), Ramos (2014), Cunha Filho (2015), Ribeiro (2015), Rosa (2016), Cunha (2016) e Briend (2017).

De Lima (2007) apresentou o estudo de sistemas mecânicos com materiais viscoelásticos utilizando a técnica de expansão de Karhunen-Loève para discretização dos campos estocásticos e otimização robusta via emprego de funções de vulnerabilidade. De Lima *et al.* (2014) implementaram o critério de fadiga multiaxial de *Sines* em estruturas sujeitas a carregamentos aleatórios multiaxiais com camadas de materiais viscoelásticos, a fim de estimar o aumento da vida em fadiga pela redução das amplitudes de vibração do sistema.

O modelo de elementos finitos determinístico implementado por Ramos (2014) permitiu avaliar o ganho da vida em fadiga de estruturas de engenharia sujeitas somente a carregamentos aleatórios, com camada restrita passiva. Considerando a natureza do estado de tensão e aplicando o critério global de *Sines*, a autora avaliou o dano por fadiga para uma placa sanduíche retangular de três camadas com núcleo de material viscoelástico submetida a um carregamento estacionário e Gaussiano.

Lambert (2007) aplicou o critério multiaxial de *Sines* para estimar o dano de estruturas elásticas sem amortecimento considerando incertezas paramétricas a partir de um modelo de elementos finitos determinístico. Para estimar a vida em fadiga dos sistemas investigados, o autor partiu da resistência dos materiais aliada com teorias de análises estatísticas, critérios de fadiga e acúmulo de dano.

A importância em considerar incertezas na análise de fadiga de sistemas dinâmicos não amortecidos foi verificada por Rosa (2016). O principal objetivo do autor foi o de determinar os elementos críticos de uma placa simples que estão sujeitos a falhas por fadiga. Em seu trabalho, o autor empregou o critério multiaxial de *Sines* para o sistema submetido a carregamentos aleatórios do tipo estacionário e Gaussiano. Para o desenvolvimento do modelo estocástico foi utilizado o método dos elementos finitos estocásticos combinado com a expansão de Karhunen-Loève.

O trabalho de Briend (2017) apresentou um novo método de redução de modelos em elementos finitos para sistemas aeroviscoelásticos. O interesse foi o de prever as fronteiras do *flutter* de painéis aeronáuticos planos através de abordagens nos domínios da frequência e do tempo. A qualidade da aproximação dos resultados e a eficiência dos cálculos ao aplicar o método de redução foram avaliadas pela análise das funções de resposta em frequência, respostas temporais e problemas de autovalores. Na abordagem no domínio da frequência, o método IERM (*Iterative Enriched Reduction Method*) proposto pelo autor foi o mais eficiente quando comparado a outros métodos da literatura. Portanto, para o desenvolvimento da base de redução robusta (ERM) proposta nesta Tese, parte-se do trabalho original de Briend (2017).

Assim, considerando as pesquisas desenvolvidas anteriormente, fica evidente a contribuição deste trabalho ao propor uma formulação probabilística do critério de fadiga multiaxial de *Sines* para estimar a vida em fadiga de sistemas viscoelásticos na presença de incertezas. Além disso, para a obtenção dos parâmetros ótimos e robustos do sistema viscoelástico estocástico com vistas ao aumento da sua vida em fadiga, é implementado uma estratégia de otimização multiobjectivo robusta baseada no emprego do algoritmo evolucionário NSGA (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*), combinando funções vulnerabilidade e o método de redução ERM.

1.2. Objetivos

Diante do exposto anteriormente, o objetivo geral desta Tese é aplicar os materiais viscoelásticos na forma de camadas restritas passivas para avaliar a possibilidade de aumento da vida em fadiga de sistemas dinâmicos na presença de incertezas e carregamentos mecânicos cíclicos aleatórios do tipo Gaussiano e estacionário. São os seguintes os objetivos específicos:

- a) Implementar um modelo estocástico de um elemento multicamada de uma placa plana utilizando o método dos elementos finitos combinado com a técnica de expansão de campos aleatórios de Karhunen-Loève;
- b) Implementar uma técnica de redução de modelos para reduzir o custo computacional requerido no cálculo dos envelopes das funções de respostas em frequência (FRFs) e das

respostas em tensão dos sistemas viscoelásticos estocásticos, requeridas na estimação do índice de fadiga;

- c) Estimar a distribuição do índice de fadiga multiaxial de *Sines* dos sistemas viscoelásticos estocásticos, considerando as incertezas paramétricas;
- d) Aplicar uma estratégia de otimização multiobjetivo robusta dos sistemas viscoelásticos estocásticos via emprego de funções vulnerabilidade suplementares a serem otimizadas ao mesmo tempo que as funções objetivo iniciais. O intuito é obter os parâmetros ótimos e robustos que levem à uma diminuição do índice de fadiga do sistema viscoelástico na presença de incertezas, visando aplicações mais realísticas de interesse industrial;
- e) Realizar simulações numéricas e analisar os resultados obtidos.

1.3. Organização da Tese

Além deste capítulo introdutório, esta Tese é composta pelos seguintes capítulos:

O Capítulo 2 apresenta uma breve revisão sobre a modelagem determinística por elementos finitos de placas sanduíches viscoelásticas baseada nos trabalhos de Khatua e Cheung (1973) e de Lima (2007). É mostrado um procedimento genérico para a introdução da dependência em frequência e temperatura do amortecimento viscoelástico no modelo da placa sanduíche viscoelástica. Além disso, é mostrado o procedimento numérico de cálculo das FRFs e das respostas em tensão média do sistema viscoelástico, requeridas no cálculo do critério de fadiga multiaxial de *Sines* a ser adotado neste trabalho. Vale ressaltar que a adoção do critério global de *Sines* foi feita com base em estudos anteriores do grupo de pesquisa do LMEst/UFU.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação do modelo de placa sanduíche viscoelástica levando-se em conta a presença de incertezas paramétricas. No capítulo de simulações, essas incertezas serão consideradas nas espessuras do tratamento viscoelástico e na temperatura de operação do sistema. Neste caso, será utilizado o método dos elementos finitos estocásticos, onde os campos aleatórios são discretizados segundo a expansão de Karhunen-Loève para a obtenção das matrizes de massa e rigidez estocásticas do sistema.

O Capítulo 4 apresenta alguns conceitos fundamentais da análise de fadiga de metais, com foco nos critérios baseados nos invariantes de tensão. Além disso, a partir da formulação determinística do critério multiaxial de *Sines*, inicialmente desenvolvida para sistemas não amortecidos, é desenvolvida a formulação probabilística do mesmo para os sistemas viscoelásticos na presença de incertezas paramétricas.

O Capítulo 5 apresenta, de forma sucinta, a estratégia de otimização multiobjetivo robusta empregada nesta Tese, inicializando com conceitos básicos de otimização multiobjetivo e a importância

de sua aplicação na engenharia. Além disso, são apresentados os conceitos relacionados a problemas determinísticos e robustos. No caso determinístico otimiza-se as funções custos originais, enquanto que no problema robusto, as funções vulnerabilidades são otimizadas ao mesmo tempo que as funções custo originais. Além disso, destaque é dado ao algoritmo NSGA ao critério de dominância de Pareto para obter as soluções ótimas e robustas do problema estocástico abordado neste trabalho.

O Capítulo 6 compreende as simulações numéricas, inicialmente esclarecendo a descrição do problema numérico nominal e, na sequência, são apresentados os resultados e suas respectivas discussões.

Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões gerais obtidas com o desenvolvimento deste trabalho e as perspectivas de continuidade de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

Revisão sobre a Modelagem Determinística de Placas Sanduíches Viscoelásticas

Este capítulo apresenta uma breve revisão sobre a modelagem determinística por elementos finitos de placas finas sanduíches de três camadas contendo um núcleo de material viscoelástico cujo comportamento mecânico é fortemente dependente da frequência e da temperatura de operação. Além disso, é mostrado um procedimento de introdução do amortecimento viscoelástico em modelos de elementos finitos, bem como o cálculo das FRFs e das respostas em tensão que serão requeridas no cálculo do índice de fadiga do sistema amortecido viscoelasticamente.

2.1. Relações cinemáticas

A Fig. 2.1 mostra o modelo composto pelas camadas base (1), viscoelástica (2) e restrigente (3), e a Fig. 2.2 ilustra a cinemática da deformação do elemento para os planos xz e yz , onde u é o deslocamento na direção x , v é o deslocamento na direção y , e w é o deslocamento transversal. $\theta_x = \partial w / \partial y$ é a rotação em torno do eixo x , e $\theta_y = \partial w / \partial x$ é a rotação em torno do eixo y (DE LIMA, 2007). Foram assumidas as seguintes hipóteses: (a) será considerado material elástico e linear para ambas as camadas; (b) as tensões cisalhantes transversais serão negligenciadas para as camadas base e restrigente (Teoria de Kirchhoff para placas finas), e para o núcleo viscoelástico, o cisalhamento transversal é considerado; (c) as tensões normais na direção z são assumidas desprezíveis para todas as camadas.

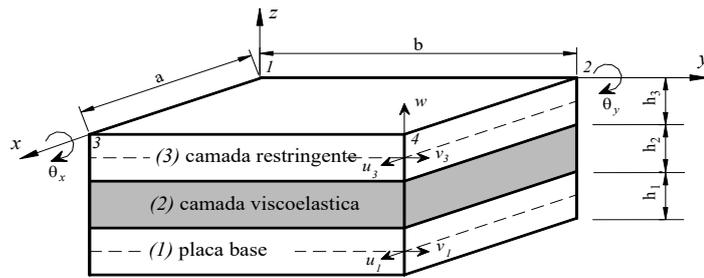


Figura 2.1- Ilustração do elemento de placa de três camadas (adaptado de Lima, 2007).

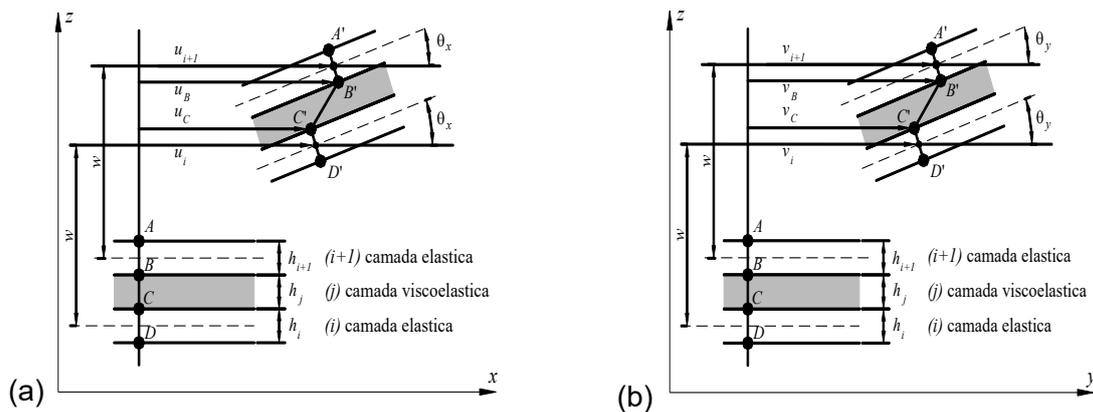


Figura 2.2 – Cinemática da deformação do elemento de placa sanduíche (adaptado de Lima *et al.*, 2006).

Será assumido que o deslocamento transversal, w , e as rotações, θ_x e θ_y , são comuns a todas as camadas do elemento de placa sanduíche. Neste sentido, a partir da Fig. 2.2, pode-se chegar às seguintes relações para os deslocamentos das camadas elásticas:

$$u_B = u_3 + \frac{h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_C = u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.1)$$

onde u_1 e u_3 representam, respectivamente, os deslocamentos longitudinais médios das camadas elásticas inferior e superior na direção x .

Similarmente, os campos de deslocamentos na direção y podem ser obtidos:

$$v_B = v_3 + \frac{h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad v_C = v_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.2)$$

Para a camada viscoelástica, as seguintes relações para as direções x e y , podem ser

obtidas, respectivamente:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2 = \frac{u_B - u_C}{h_2}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_2 = \frac{v_B - v_C}{h_2} \quad (2.3)$$

Através da substituição das Eqs. (2.1) e (2.2) nas relações (2.3), obtém-se:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2 = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{(u_3 - u_1)}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_2 = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{(v_3 - v_1)}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.4)$$

onde (u_1, v_1) e (u_3, v_3) são os deslocamentos longitudinais médios das camadas elásticas inferior e superior nas direções x e y , respectivamente, e $d_2 = (h_3 + h_1)/2$.

Por fim, os deslocamentos longitudinais médios do núcleo viscoelástico nas respectivas direções x e y são dados pelas seguintes expressões:

$$u_2 = \frac{u_B + u_C}{2} = \frac{1}{2} \left[(u_3 + u_1) + \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.5)$$

$$v_2 = \frac{v_B + v_C}{2} = \frac{1}{2} \left[(v_3 + v_1) + \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.6)$$

2.1.1. Relações tensão-deformação

Através da teoria da elasticidade linear, onde é assumido a hipótese de pequenos deslocamentos, são válidas as seguintes relações envolvendo os deslocamentos e as deformações:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.7)$$

Para as camadas elásticas serão consideradas somente as deformações de extensão e flexão, e para o núcleo viscoelástico, serão consideradas ainda as deformações devido ao cisalhamento transversal. Os deslocamentos longitudinais de um ponto qualquer nas direções x e y para as camadas elásticas de base (1) e restrigente (3) são dados por:

$$u^1 = u_1 + z_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1, \quad v^1 = v_1 + z_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \quad (2.8)$$

$$u^3 = u_3 + z_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_3, \quad v^3 = v_3 + z_3 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \quad (2.9)$$

A partir das relações (2.7) e das Eqs. (2.8) e (2.9), pode-se obter os seguintes campos de deformações para as camadas base (1) e restrigente (3):

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.10.a)$$

$$\varepsilon_y^{(1)} = \frac{\partial v_1}{\partial y} - z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.10.b)$$

$$\gamma_{xy}^{(1)} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.10.c)$$

$$\varepsilon_x^{(3)} = \frac{\partial u_3}{\partial x} - z_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.11.a)$$

$$\varepsilon_y^{(3)} = \frac{\partial v_3}{\partial y} - z_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.11.b)$$

$$\gamma_{xy}^{(3)} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.11.c)$$

Ao considerar a Lei de Hooke pode-se obter a seguinte forma matricial:

$$\mathbf{s}^{(i)} = \mathbf{C}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}, \quad \mathbf{s}^{(3)} = \mathbf{C}^{(3)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \quad (2.12)$$

onde \mathbf{s} representa o vetor contendo as tensões, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor das deformações, e \mathbf{C} indica a matriz dos coeficientes elásticos, dados por ($i = 1$ e 3):

$$\mathbf{s}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{C}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Para a camada viscoelástica, os deslocamentos longitudinais de um ponto qualquer nas direções x e y são dados por:

$$u^{(2)} = u_2 + z_2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_2, \quad v^{(2)} = v_2 + z_2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_2 \quad (2.14)$$

Combinando as expressões (2.4) a (2.6) com as relações (2.14), pode-se obter os campos de deslocamentos para o núcleo viscoelástico nas direções x e y , respectivamente:

$$u^{(2)} = u_2 + z_2 \left[\frac{u_3 - u_1}{h_2} + \left(\frac{h_3 + h_1}{2h_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad v^{(2)} = v_2 + z_2 \left[\frac{v_3 - v_1}{h_2} + \left(\frac{h_3 + h_1}{2h_2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.15)$$

Considerando-se as relações (2.7), as deformações para a camada viscoelástica podem ser escritos como se segue:

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{z_2}{h_2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2.16.a)$$

$$\varepsilon_y^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{z_2}{h_2} \left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2.16.b)$$

$$\gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{z_2}{h_2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + (h_3 + h_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.16.c)$$

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{h_2} \left[u_3 - u_1 + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.16.d)$$

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{h_2} \left[v_3 - v_1 + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.16.e)$$

Desta forma, obtém-se a seguinte expressão matricial que representa as relações tensão-deformação para a camada viscoelástica:

$$\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{C}^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \quad (2.17)$$

onde o vetor das tensões $\mathbf{s}^{(2)}$, o vetor das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$, e a matriz dos coeficientes elásticos $\mathbf{C}^{(2)}$, para o núcleo viscoelástico são dados como segue:

$$\mathbf{s}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} \\ \tau_{xz}^{(2)} \\ \tau_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix}; \mathbf{C}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & \frac{E^{(2)}\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E^{(2)}\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

2.1.2. Discretização por elementos finitos

Após a obtenção dos deslocamentos e das relações tensão-deformações, pode-se discretizar o modelo via método dos elementos finitos. Para tanto, será empregado o elemento de placa retangular plana composto por quatro nós e sete graus de liberdade por nó, conforme os desenvolvimentos originais feitos por Khatua e Cheung (1973) e implementado por de Lima *et al.* (2010). São os seguintes os graus de liberdade a nível nodal: deslocamentos longitudinais u_1 e v_1 da camada restringente superior, deslocamentos u_3 e v_3 da camada base; deflexão transversal w ; e rotações $\theta_x = \partial w / \partial y$ e $\theta_y = \partial w / \partial x$. a e b representam, respectivamente, as dimensões do elemento nas direções x e y . Portanto, o vetor dos graus de liberdade nodais pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_{(e)_j}(t) = [u_{1j} \quad v_{1j} \quad u_{3j} \quad v_{3j} \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj}]^T \quad j = 1, \dots, 4 \quad (2.19)$$

e o vetor dos graus de liberdade a nível elementar é dado como segue:

$$\mathbf{u}_{(e)}(t) = [u_{(e)_1} \quad u_{(e)_2} \quad u_{(e)_3} \quad u_{(e)_4}]^T \quad (2.20)$$

O campo de deslocamentos longitudinais e transversais no interior do elemento é interpolado segundo a relação:

$$\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad 0 \leq x \leq a; \quad 0 \leq y \leq b \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{U}(x, y) = [u_1 \ v_1 \ u_3 \ v_3 \ w \ \theta_x \ \theta_y]^T$ e $\mathbf{N}(x, y) = [N_{u_1} \ N_{v_1} \ N_{u_3} \ N_{v_3} \ N_w \ N_{\theta_x} \ N_{\theta_y}]^T$ é a matriz contendo as funções de interpolação descritas no Anexo A.

A partir das expressões (2.10), (2.11) e (2.16), pode-se definir o seguinte vetor das deformações como função da matriz dos operadores diferenciais e do vetor dos campos de deslocamentos a nível elementar:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y, z) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (2.22)$$

onde $\mathbf{B}(x, y, z)$ é a matriz obtida aplicando-se os operadores diferenciais das relações tensão-deformação na matriz contendo as funções de forma $\mathbf{N}(x, y)$.

A partir das relações tensão-deformação, pode-se definir a resposta em tensão do sistema da seguinte maneira:

$$\mathbf{s}(x, y, z, t) = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \mathbf{CB}(x, y, z) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (2.23)$$

onde $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k$ ($k = 1, 3$) é a matriz das propriedades mecânicas das camadas elásticas, e $\mathbf{C} = \mathbf{C}_2^*$ contém as propriedades da subestrutura viscoelástica dependentes da frequência e da temperatura.

2.1.3. Equações do movimento, resposta em frequência e resposta em tensão

As equações do movimento do sistema podem ser obtidas através das equações de Lagrange (de LIMA, 2007). Para isto, é preciso formular as expressões das energias de deformação e cinética do elemento de placa sanduíche formado por três camadas.

A energia de deformação total do elemento de placa sanduíche pode ser obtida através da adição das energias de deformação de cada camada da seguinte forma:

$$U = \sum_{k=1}^3 U^{(k)} \quad (2.24)$$

onde o índice k representa a camada a ser considerada, sendo a energia de deformação da k -ésima camada calculada da forma:

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} dV \quad (2.25)$$

A introdução da Eq. (2.22) na equação anterior permite obter a seguinte relação:

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}(t)^T \left(\int_V \mathbf{B}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{B}^{(k)} dV \right) \mathbf{u}_{(e)}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}(t)^T \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (2.26)$$

onde $\mathbf{K}^{(k)} = \int_V \mathbf{B}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{B}^{(k)} dV$ é a contribuição da k -ésima camada na rigidez do elemento finito de placa sanduíche de três camadas.

Após algumas manipulações matemáticas, pode-se mostrar que a matriz de rigidez elementar para as camadas elásticas, $i = 1$ e 3 , são escritas como segue:

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{K}_{mm}^{(i)} + \mathbf{K}_{ff}^{(i)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(i)} \quad (2.27)$$

onde $\mathbf{K}_{mm}^{(i)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_m^{(i)} dV$, $\mathbf{K}_{ff}^{(i)} = \int_V \mathbf{B}_f^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_f^{(i)} dV$ e $\mathbf{K}_{mf}^{(i)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_f^{(i)} dV$, e os índices m , f , e mf designam os efeitos de membrana, flexão e membrana-flexão, respectivamente.

Para a camada viscoelástica, a matriz de rigidez elementar é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}_{mm}^{(2)} + \mathbf{K}_{ff}^{(2)} + \mathbf{K}_{cc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{fc}^{(2)} \quad (2.28)$$

onde $\mathbf{K}_{mm}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_m^{(2)} dV$, $\mathbf{K}_{ff}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_f^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_f^{(2)} dV$, $\mathbf{K}_{cc}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_c^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_c^{(2)} dV$,

$\mathbf{K}_{mf}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_f^{(2)} dV$, $\mathbf{K}_{mc}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_c^{(2)} dV$ e $\mathbf{K}_{fc}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_f^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_c^{(2)} dV$, onde o índice

c designa os efeitos do cisalhamento na camada viscoelástica.

Da mesma forma, a energia cinética total do elemento finito de placa sanduíche de três camadas é dada pela soma das energias cinéticas de cada camada:

$$T = \sum_{k=1}^3 T^{(k)} \quad (2.29)$$

onde $T^{(k)} = \frac{I}{2} \int_V \left(\dot{\mathbf{u}}^{(k)T} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + \dot{\mathbf{v}}^{(k)T} \dot{\mathbf{v}}^{(k)} + \dot{\mathbf{w}}^{(k)T} \dot{\mathbf{w}}^{(k)} \right) dV$, ou ainda sob a seguinte forma:

$$T^{(k)} = \frac{\rho_k h_k}{2} \left(\int_A \dot{\mathbf{u}}^{(k)T} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} dA + \int_A \dot{\mathbf{v}}^{(k)T} \dot{\mathbf{v}}^{(k)} dA + \int_A \dot{\mathbf{w}}^{(k)T} \dot{\mathbf{w}}^{(k)} dA \right) \quad (2.30)$$

A expressão (2.21) permite reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \left[\rho_k h_k \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_k}^T \mathbf{N}_{u_k} + \mathbf{N}_{v_k}^T \mathbf{N}_{v_k} \right) dA \right] \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}^{(k)} \dot{\mathbf{U}} \quad (2.31)$$

onde $\mathbf{M}^{(k)} = \rho_k h_k \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_k}^T \mathbf{N}_{u_k} + \mathbf{N}_{v_k}^T \mathbf{N}_{v_k} \right) dA$ é a matriz de massa de cada camada k do elemento, \mathbf{N}_w , \mathbf{N}_{u_k} e \mathbf{N}_{v_k} são as matrizes contendo as funções de interpolação, e h_k e ρ_k são as espessuras e as densidades, respectivamente. Detalhes dos desenvolvimentos para a obtenção das matrizes elementares de massa e rigidezes estão no Anexo A.

Finalmente, as matrizes de massa e rigidez elementares do elemento finito de placa sanduíche de três camadas podem ser escritas, respectivamente, como segue:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{M}^{(k)}, \quad \mathbf{K} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{K}^{(k)} \quad (2.32)$$

Após a obtenção das matrizes elementares, as matrizes globais podem ser obtidas aplicando-se procedimentos padrões de montagem de matrizes elementares e levando-se em conta a conectividade dos nós. Portanto, chega-se à seguinte equação do movimento do sistema viscoelástico no domínio do tempo (sem a presença de amortecimento viscoso), composta por N graus de liberdade (GDLs):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.33)$$

onde $\mathbf{M}, \mathbf{K}^* \in R^{N \times N}$ são as matrizes de massa e rigidez complexa, $\mathbf{u}(t) \in R^N$ e $\mathbf{f}(t) \in R^N$ são os vetores de deslocamentos e forças externas.

Para o caso de uma excitação harmônica da forma, $\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}e^{i\omega t}$ e $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}e^{i\omega t}$, as equações do movimento do sistema no domínio do tempo são transformadas nas seguintes equações algébricas no domínio da frequência:

$$\mathbf{Z}(\omega, T)\mathbf{U}(\omega, T) = \mathbf{F}(\omega) \quad (2.34)$$

onde $\mathbf{Z}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T)\bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M}$ é a expressão da matriz de rigidez dinâmica complexa do sistema viscoelástico, \mathbf{K}_e é a rigidez da subestrutura puramente elástica, e $\mathbf{K}_v(\omega, T) = G(\omega, T)\bar{\mathbf{K}}_v$ é a matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica dependente da frequência e temperatura, conforme o módulo complexo, $G(\omega, T)$, como detalhado na sequência.

Uma vez definida a rigidez dinâmica complexa, a etapa seguinte consiste em resolver o sistema no domínio da frequência, o que pode ser feito através da construção da seguinte matriz de Funções de Resposta em Frequência (FRFs):

$$\mathbf{H}(\omega, T) = \mathbf{Z}(\omega, T)^{-1} \quad (2.35)$$

No domínio do tempo, a resposta em tensão do sistema viscoelástico pode ser obtida a partir da Eq. (2.23) e da resposta ao impulso do sistema viscoelástico:

$$\mathbf{s}(x, y, z, t, T) = \mathbf{C} \mathbf{B}(x, y, z) \mathbf{u}(t, T) \quad (2.36.a)$$

onde a resposta no tempo do sistema viscoelástico é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{u}(t, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\tau, T) \mathbf{f}(t - \tau) d\tau \quad (2.36.b)$$

onde $\mathbf{h}(t, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega, T) e^{j\omega t} d\omega$ é a resposta ao impulso do sistema viscoelástico que pode ser calculada a partir da matriz de FRFs do sistema.

2.2. Amortecimento viscoelástico

Uma vez definidas as equações do movimento do sistema com material viscoelástico, antes de proceder à incorporação no modelo da dependência das propriedades mecânicas do mesmo em relação à frequência e temperatura, é importante fazer uma revisão sobre a influência da frequência da excitação e da temperatura no comportamento mecânico desses materiais, uma vez que estes são considerados os parâmetros mais influentes.

A Fig. 2.3 ilustra as amplitudes das FRFs experimentais de uma viga engastada-livre tratada com material viscoelástico. Através das mudanças observadas nas frequências de ressonância e amplitudes de vibração do sistema amortecido, conclui-se que as propriedades mecânicas do sistema viscoelástico dependem fortemente da temperatura e da frequência.

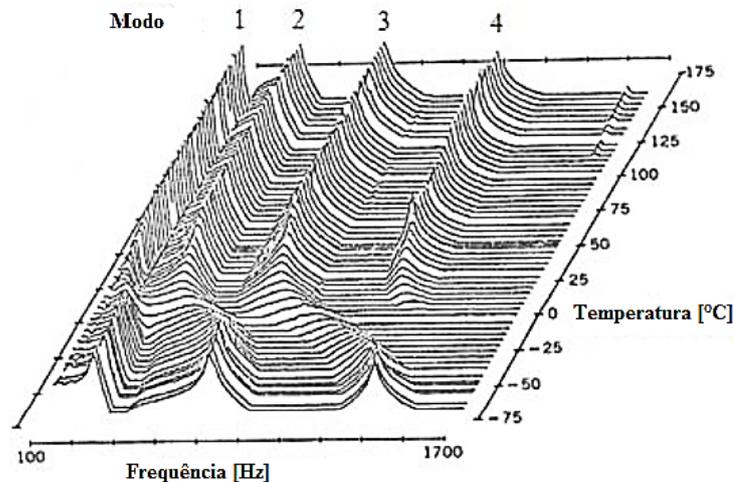


Figura 2.3 – FRFs de uma viga com material viscoelástico (adaptada de Nashif *et al.*, 1985).

A temperatura é o fator ambiental que exerce a maior influência sobre as propriedades dos materiais viscoelásticos (NASHIF *et al.*, 1985; RODOVALHO *et al.*, 2016). Neste caso, eles podem apresentar quatro tipos de comportamento, como ilustrado na Fig. 2.4: estado vítreo (I), estado de transição (II), estado de borracha (III) e estado de fluido (IV). Portanto, é imprescindível considerar as variações de temperatura durante a modelagem de sistemas viscoelásticos (de LIMA *et al.*, 2010).

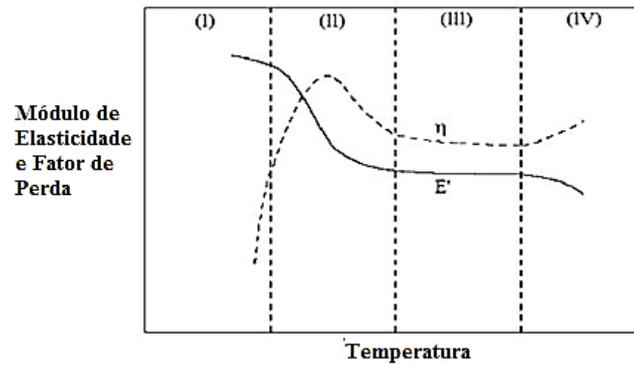


Figura 2.4 – Variação de E' e η de um material viscoelástico qualquer em função da temperatura para uma frequência constante (adaptada de Lima, Stoppa e Rade, 2003).

A região (I) corresponde às temperaturas mais baixas onde o material apresenta-se sob a forma vítrea, caracterizado por um módulo de armazenamento atingindo seu valor máximo, e variando pouco com a temperatura. Já o fator de perda é muito pequeno e aumenta rapidamente com a temperatura. Nesta região, as deformações do material são muito pequenas. A região (II) é caracterizada por um módulo que decresce fortemente com a temperatura, e um fator de perda apresentando seu valor máximo. Na região da borracha (III), o módulo de armazenamento e o fator de perda são caracterizados por valores pequenos e que variam pouco com a temperatura. A quarta região corresponde ao estado de fluido do material. Este estado é pouco considerado em aplicações estruturais em razão de sua instabilidade.

Para uma temperatura fixa próxima da temperatura de transição vítrea (dentro da região de transição II), as medidas das características viscoelásticas fornecem o módulo de armazenamento, E' , e o fator de perda, η , para o qual a variação em frequência assemelha-se geralmente à configuração ilustrada na Fig. 2.5.

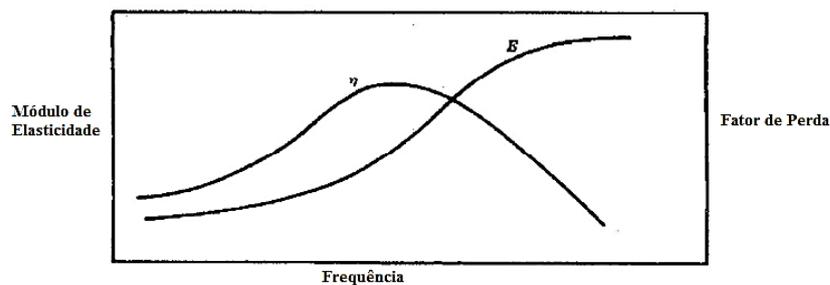


Figura 2.5 – Variações de E' e η com a frequência para uma temperatura constante (adaptada de Nashif *et al.*, 1985).

Através da análise das Figs. 2.4 e 2.5 para materiais viscoelásticos lineares, observou-se que a influência exercida pela frequência da excitação é, qualitativamente, o inverso do efeito da temperatura, mas em uma escala menor, ou seja, a variação na frequência de algumas décadas reflete a mesma influência de alguns poucos graus de temperatura. Como consequência, se deslocamentos em frequência das curvas mostradas na Fig. 2.5 são aplicados para diferentes temperaturas, elas tendem a se sobreporem, e a descreverem uma única curva contínua. Este fato indica que as características viscoelásticas em diferentes temperaturas podem ser associadas entre si através de deslocamentos horizontais aplicados nos valores da frequência da excitação, conduzindo aos então conhecidos *fator de deslocamento* e *frequência reduzida*, caracterizando o Princípio da Superposição Frequência-Temperatura (PSFT), que se aplica a vários materiais viscoelásticos lineares. Simbolicamente, o PSFT pode ser expresso da forma:

$$G(\omega_r, T_0) = E(\alpha_T \omega, T_0); \quad \eta(\omega_r, T_0) = \eta(\alpha_T \omega, T_0) \quad (2.37)$$

onde $\omega_r = \alpha_T(T)\omega$ é a frequência reduzida, ω corresponde à frequência da excitação, $\alpha_T(T)$ é o fator de deslocamento que depende da temperatura do material viscoelástico, e T_0 é a temperatura de referência. Os termos $E(\alpha_T \omega, T_0)$ e $\eta(\alpha_T \omega, T_0)$ permitem construir as curvas mestre ou nomogramas do material viscoelástico.

A Fig. 2.6 ilustra o PSFT, tendo o módulo de armazenamento e o fator de perda de um material viscoelástico arbitrário para diferentes valores de temperatura, T_{-1} , T_0 , T_1 , se deslocamentos horizontais segundo o eixo da frequência são aplicados a cada uma das curvas, elas podem ser combinadas numa única curva. O fator de deslocamento é dado por α_T , e depende da temperatura.

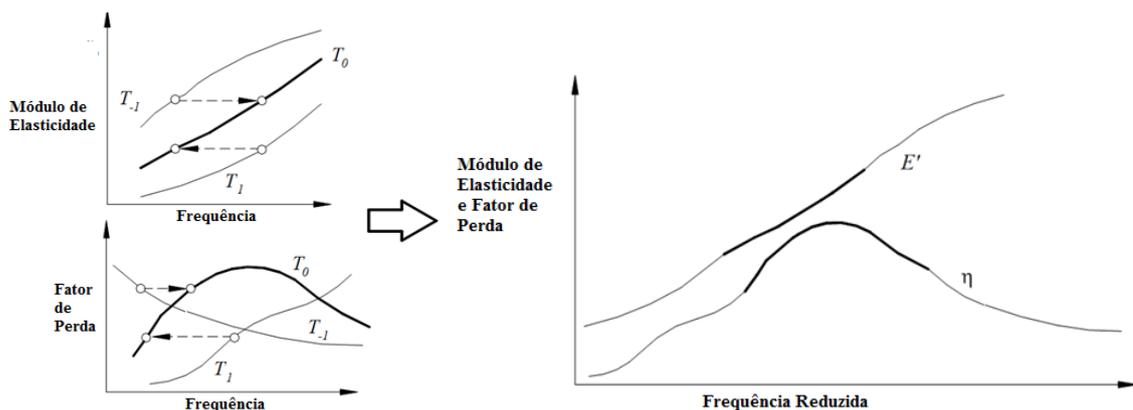


Figura 2.6 – Princípio da superposição PSFT (adaptada de Lima; Faria; Rade, 2010).

A expressão seguinte representa o módulo complexo como função da frequência reduzida e da temperatura para o material viscoelástico 3M ISD112 a ser utilizado neste trabalho, conforme desenvolvimentos feitos por Drake e Soovere (1984) e utilizado por de Lima, Rade, Léopore-Neto (2009).

$$G(\omega, T_v) = 0.4307 + \frac{1200}{1 + 3.24 \times \left(\frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0.18} + \left(\frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0.6847}} \text{ [MPa]} \quad (2.38)$$

onde $\alpha(T_v) = 10^{\left(-3758.4 \times \left(\frac{1}{T_v} - 0.00345 \right) - 225.06 \times \log(0.00345 \times T_v) + 0.23273 \times (T_v - 290) \right)}$ é o fator de deslocamento e $\omega_r = \alpha(T_v) \omega$ é a frequência reduzida.

2.3. Resposta em tensão média do sistema viscoelástico sujeito a cargas aleatórias

A partir da combinação das relações (2.36) e aplicando-se a transformada de Fourier na expressão resultante para, $\omega_\theta = 0$, o valor médio da resposta em tensão do sistema viscoelástico submetido a uma carga aleatória estacionária, $f(t, \theta)$, é dado como segue:

$$\bar{s}(t, T) = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{H}(\omega_0, T) \bar{f}(t) = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{K}_0^{-1} \bar{f}(t) \quad (2.39)$$

onde $\bar{s}(t, T) = E[s(t, T, \theta)]$ e $\bar{f}(t) = E[f(t, \theta)]$. $E[\bullet]$ representa a esperança matemática e θ designa um processo aleatório estacionário.

A Eq. (2.39) mostra que o valor médio da resposta em tensão de uma estrutura amortecida viscoelasticamente e submetida a carregamentos aleatórios estacionários é proporcional ao valor médio das cargas aleatórias e da resposta estática do sistema viscoelástico representando o comportamento do sistema conservativo associado.

2.3.1. Densidade espectral de potência da resposta em tensão

Para a caracterização de um processo aleatório estacionário no domínio da frequência, a propriedade estatística normalmente utilizada é a Densidade Espectral de Potência (*Power Spectral Density*- PSD) (MEIROVITCH,1986).

A partir da equação do movimento do sistema viscoelástico (2.33) sujeito a uma carga aleatória estacionária e Gaussiana, $f(t, \theta)$, que pode ser totalmente caracterizada por seu valor médio, $\bar{f}(t)$, e sua matriz PSD, $\Phi_f(\omega)$, a PSD da resposta pode ser então expressa em termos da matriz das FRFs do sistema viscoelástico, $\Phi_u(\omega, T) = \mathbf{H}(\omega, T)\Phi_f(\omega)\mathbf{H}(\omega, T)^H$, onde $\mathbf{H}(\omega, T)^H$ representa o conjugado complexo transposto da matriz complexa das FRFs. Assim, considerando as Eqs. (2.45) e (2.46) e $\Phi_u(\omega, T)$, a densidade espectral de potência da resposta em tensão do sistema viscoelástico no domínio da frequência assume a forma:

$$\Phi_s(\omega, T) = \mathbf{CBH}(\omega, T)\Phi_f(\omega)\mathbf{H}(\omega, T)^H \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T \quad (2.40)$$

onde, para o estado plano de tensões, $s(t, T) = [s_{xx}(t, T) \ s_{yy}(t, T) \ s_{xy}(t, T)]^T$, a expressão da matriz da densidade espectral de potência das respostas em tensão assume a forma:

$$\Phi_s(\omega, T) = \begin{bmatrix} \Phi_{xx,xx}(\omega, T) & \Phi_{xx,yy}(\omega, T) & \Phi_{xx,xy}(\omega, T) \\ & \Phi_{yy,yy}(\omega, T) & \Phi_{yy,xy}(\omega, T) \\ sym & & \Phi_{xy,xy}(\omega, T) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

É importante salientar que o cálculo da resposta em tensão de um sistema viscoelástico no domínio da frequência é menos oneroso do que no domínio do tempo, uma vez que não é necessário calcular as integrais de convolução, especialmente para o caso de estruturas de interesse industrial contendo amortecimento viscoelástico. Além disso, para uma estrutura viscoelástica linear sujeita a uma carga aleatória estacionária e Gaussiana, a PSD e o valor médio da resposta em tensão aleatória do sistema podem ser determinados com base na PSD da carga aleatória estacionária e das FRFs do sistema viscoelástico, conforme Eq. (2.40).

CAPÍTULO III

Modelagem Estocástica de Placas Sanduíches Viscoelásticas

Este capítulo apresenta um modelo de propagação de incertezas ao nível de elementos finitos para a placa sanduíche viscoelástica de três camadas apresentada no capítulo anterior. Para tanto, as incertezas são consideradas segundo aproximações paramétricas através do método dos elementos finitos estocásticos, onde as espessuras das camadas e a temperatura de operação do material são consideradas campos aleatórios e discretizadas via expansão de Karhunen-Loève. Isto permitirá, na sequência, avaliar a influência dessas incertezas nos envelopes das soluções em termos das FRFs, das respostas em tensão e no índice de fadiga do sistema viscoelástico estocástico. Em função do alto custo computacional requerido para a determinação dos envelopes das soluções do sistema viscoelástico estocástico, um método de redução de modelos iterativo baseado na construção de uma base enriquecida com resíduos estáticos é apresentada neste capítulo. O intuito é utilizá-la em conjunto com a estratégia de otimização multiobjetivo robusta para reduzir o custo computacional envolvido na obtenção das soluções ótimas e Pareto.

3.1. Definições introdutórias

O constante desenvolvimento tecnológico observado nos últimos anos na área informática tem possibilitado a proposição de modelos matemáticos cada vez mais realísticos de sistemas de engenharia, envolvendo algum tipo de processo estocástico (GHANEM e SPANOS, 1991). Devido à variabilidade de parâmetros físicos e/ou geométricos, os modelos numéricos resultantes certamente estarão sujeitos a algum tipo de incerteza. Além disso, hipóteses simplificadoras sobre condições de contorno ou comportamento linear dos sistemas em análise pode resultar nas chamadas incertezas do modelo. Portanto, fica claro que para aumentar a confiabilidade desses modelos preditivos, é extremamente importante considerar tais incertezas durante as fases de concepção inicial e/ou projeto (SOIZE, 2013).

De uma maneira geral, as incertezas são consideradas nos modelos segundo a aproximação não paramétrica que permite sua introdução diretamente nas matrizes do modelo (SOIZE, 1999; 2000), e pela aproximação paramétrica, utilizando-se principalmente o método dos elementos finitos estocásticos (*Stochastic Finit Element Method - SFEM*), que permite uma combinação da análise clássica por elementos finitos e a análise estatística (GHANEM e SPANOS, 1991; SCHUELLER, 2001).

Baseado em Dessombz *et al.* (2001) e de Lima (2007) definem-se as incertezas no estado de concepção em duas etapas: as incertezas estatísticas, modeladas por variáveis aleatórias, no qual se conhece bem a lei de probabilidade; e as variáveis incertas e limitadas, que são modeladas por intervalos definidos pela física do problema. Além disso, as incertezas podem ser classificadas em quatro categorias, a saber (GUEDRI *et al.*, 2008):

- **Parâmetros aleatórios:** são os parâmetros físicos ou mecânicos no qual se conhecem as tolerâncias. Como exemplo, pode-se citar a espessura de chapas metálicas modeladas com frequência por uma lei Gaussiana;
- **Parâmetros mal conhecidos:** neste caso, as condições de limite são problemas típicos das diferentes montagens mecânicas, como soldagem, colagem, etc, que são difíceis de serem modeladas;
- **Parâmetros variáveis:** podem-se distinguir os parâmetros que podem ser variáveis no tempo que são difíceis de serem modelados, como por exemplo, a degradação ou o envelhecimento de um material viscoelástico no tempo;
- **Incertezas no modelo:** podem-se citar as leis do comportamento adotadas que representam mal ou de forma incompleta os fenômenos físicos, os erros associados à escolha da malha de elementos finitos, o número de elementos na malha, o tipo de elemento escolhido, etc. Em geral, essas incertezas são difíceis de serem avaliadas.

Outro aspecto no tocante à modelagem de sistemas dinâmicos na presença de incertezas é a escolha da melhor técnica de resolução a ser empregada para a obtenção da variabilidade das soluções dos sistemas estocásticos. Neste caso, podem-se citar os seguintes métodos frequentemente empregados para resolver tais problemas (BENAROYA e REHAK, 1988; IBRAHIM, 1987; SCHUELLER, 2001):

- simulação de Monte Carlo (MC) (SCHINOZURA, 1972; RUBINSTEIN, 1981; PAPADRAKAKIS e KOTSOPULOS, 1999) usada como referência por não ser um método intrusivo (SOIZE, 2001), mas que possui o inconveniente de requerer um alto custo computacional em função do número elevado de cálculos para se atingir a convergência (DE LIMA, RADE E BOUHADDI, 2010). Como alternativa,

o método Hipercubo-Latino (HCL) (IMAN e CONOVERS, 1980; FLORIAN, 1992; MANTEUFEL, 2000; VIANA *et al.*, 2008) foi proposto com o objetivo de reduzir o número de cálculos necessários para a convergência da simulação de Monte Carlo, conservando o nível de predição;

- os métodos de perturbação que são baseados nas expansões em série de Taylor (KLEIBER e HIEN, 1992; ALVIN, 1998) ou série de Neumann (YAMAZAKI e SCHINOZUKA, 1988; LEI e QIU, 2000), das respostas ao redor das médias das variáveis aleatórias;
- os métodos espectrais que utilizam as funções de base no espaço de Hilbert associadas aos problemas aleatórios (GHANEM e SPANOS, 1991; GHANEM e KRUGER, 1996). Estas funções podem ser polinômios ortogonais de uma maneira geral, ou um caos polinomial em particular. Neste caso, utilizam-se as variáveis aleatórias onde os campos aleatórios contínuos são discretizados.

Nesta Tese, para a análise de fadiga da placa sanduíche viscoelástica na presença de incertezas será utilizado o método HCL combinado com um método de redução de modelos bem adaptado aos sistemas viscoelásticos estocásticos de interesse deste trabalho.

3.2. Discretização por Karhunen-Loève (KL)

Para um campo aleatório bidimensional qualquer, $H(x, y, \theta)$, formado por parâmetros físicos, (x, y) , que descrevem a geometria do sistema e θ pertencente ao espaço dos eventos aleatórios, um procedimento de discretização bastante interessante é aquele baseado na aproximação de $H(x, y, \theta)$ por $\hat{H}(x, y, \theta)$, segundo a expansão de *Karhunen-Loève (KL)* (GHANEM e SPANOS, 1991):

$$\hat{H}(x, y, \theta) = \mu + \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_r} f_r(x, y) \xi_r(\theta) \quad (3.1)$$

onde μ é o valor médio do campo, $\xi_r(\theta)$ ($i=1, \dots, n$) representa as variáveis aleatórias gaussianas centradas (média zero e variância unitária) e λ_r e $f_r(x, y)$ são, respectivamente, os autovalores e autofunções determinísticas obtidas pela resolução da seguinte integral:

$$H_r(x, y) = \int_{\Omega} C(x, y) f_r(x, y) dx dy \quad (3.2.a)$$

onde $C(x, y)$ é a função de covariância conhecida associada ao campo, $H(x, y, \theta)$. Desta forma o termo $H_r(x, y)$ pode ser calculado pela seguinte relação:

$$H_r(x, y) = \lambda_r f_r(x, y) \quad (3.2.b)$$

Para o problema bidimensional formado pela placa sanduíche retangular mostrada na Fig. 2.1, Capítulo 2, considera-se que todas as variáveis de interesse fatoradas das matrizes elementares segundo a parametrização expressa pelas Eqs. (2.26) e (2.31) representam processos aleatórios bidimensionais Gaussianos, sendo associados à seguinte função de covariância:

$$C((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = C(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L_x} - \frac{|y_1 - y_2|}{L_y}\right) \quad (3.3)$$

onde $(x_1, x_2) \in \Omega_x$ e $(y_1, y_2) \in \Omega_y$. L_x e L_y são os comprimentos de correlação para os domínios $\Omega_x = [-a, +a]$ e $\Omega_y = [-b, +b]$, respectivamente.

A consequência da escolha da função de covariância do tipo exponencial definida na Eq. (3.3) reside, principalmente, na utilização da propriedade da separabilidade inerente a este tipo de função, decorrendo-se, assim que o problema em duas dimensões pode ser tratado como um problema de valores próprios unidimensionais independentes. Como resultado, é possível escrever a expressão das autofunções (3.1) sob a seguinte forma:

$$f_r(x, y) = f_i(x) f_j(y) \quad \text{e} \quad \lambda_r = \lambda_i \lambda_j \quad (3.4)$$

onde $(\lambda_i, f_i(x))$, soluções da Eq. (3.3), são obtidos através da resolução da expansão de KL com um comprimento de correlação $L_x \in \Omega_x$, e os termos $(\lambda_j, f_j(y))$ são obtidos resolvendo-se o mesmo problema, mas para um comprimento de correlação $L_y \in \Omega_y$. Esses termos são detalhados em Ghanem e Spanos (1991) e obtidos por meio das seguintes equações:

- Para i e j ímpares: $i \geq 1$ e $j \geq 1$:

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2}; \quad f_i(x) = \alpha_i \cos(\omega_i x) \quad (3.5.a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2}; \quad f_j(y) = \alpha_j \cos(\omega_j y) \quad (3.5.b)$$

onde $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}}$ e $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b + \frac{\sin(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}$. Os termos ω_i e ω_j são as soluções das

seguintes equações transcendentais:

$$c_1 - \omega_i \tan(\omega_i a) = 0; \quad c_2 - \omega_j \tan(\omega_j b) = 0 \quad (3.5.c)$$

nos domínios $\left[(i-1)\frac{\pi}{a}, \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a} \right]$ e $\left[(j-1)\frac{\pi}{b}, \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b} \right]$. $c_1 = l/L_x$ e $c_2 = l/L_y$.

- Para i e j pares: $i \geq 2$ e $j \geq 2$:

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2}; \quad f_i(x) = \alpha_i \sin(\omega_i x) \quad (3.6.a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2}; \quad f_j(y) = \alpha_j \sin(\omega_j y) \quad (3.6.b)$$

onde $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}}$ e $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b - \frac{\sin(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}$. Os termos ω_i e ω_j são, respectivamente,

as soluções das equações transcendentais seguintes:

$$\omega_i + c_1 \tan(\omega_i a) = 0; \quad \omega_j + c_2 \tan(\omega_j b) = 0 \quad (3.6.c)$$

nos domínios $\left[\left(i - \frac{l}{2} \right) \frac{\pi}{a}, i \frac{\pi}{a} \right]$ e $\left[\left(j - \frac{l}{2} \right) \frac{\pi}{b}, j \frac{\pi}{b} \right]$, respectivamente.

3.2.1. Matrizes elementares estocásticas

Para mostrar a construção das matrizes elementares estocásticas do modelo de elementos finitos da placa sanduíche viscoelástica conforme o modelo de elementos finitos descrito na Seção 2.1.3, Capítulo 2, toma-se como exemplo a matriz de rigidez estocástica da contribuição da k -ésima camada do elemento finito de placa sanduíche:

$$\mathbf{K}_r^{(k)}(\theta) = \int_V H_r(x, y) \mathbf{B}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{B}^{(k)} dV \quad (3.7)$$

Substituindo a Eq. (3.1) na equação anterior, pode-se obter a seguinte expressão que deve ser avaliada para valores de r ímpares ou pares, conforme as relações (3.5) e (3.6):

$$\mathbf{K}_r^{(k)}(\theta) = \bar{\mathbf{K}}^{(k)} + \sum_{r=1}^n \mathbf{K}_r^{(k)} \xi_r(\theta) \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{K}_r^{(k)} = \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(x, y) \int_{\Omega_x} f_i(x, y) \mathbf{B}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{B}^{(k)} d\Omega_x d\Omega_y$ é a parte estocástica da matriz de rigidez da camada elástica $k(l, 3)$.

Este procedimento é realizado para todas as matrizes elementares do modelo de placa sanduíche viscoelástica, no qual se intervém diretamente no processo de integração, para cada matriz associada aos efeitos de membrana, flexão, flexão-membrana e cisalhamento, através das funções de forma. O objetivo é determinar as matrizes elementares estocásticas pares e ímpares que são utilizadas na série truncada de KL. Entretanto, para a subestrutura viscoelástica, como o comportamento do material depende da frequência e da temperatura, a matriz de rigidez estocástica assume a seguinte forma:

$$\mathbf{K}^{(2)}(\omega, T, \theta) = G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}^{(2)} + G(\omega, T, \theta) \sum_{r=1}^n \bar{\mathbf{K}}_r^{(2)} \xi_r(\theta) \quad (3.9)$$

onde $\bar{\mathbf{K}}^{(2)}$ e $\bar{\mathbf{K}}_r^{(2)}$ representam, respectivamente, as matrizes de rigidez de módulo complexo fatorado das partes determinística e estocástica, respectivamente, e $G(\omega, T, \theta)$ é o módulo complexo cuja temperatura é considerada como sendo um parâmetro aleatório.

Por fim, a matriz de massa estocástica da k -ésima camada da placa sanduíche é expressa da forma:

$$\mathbf{M}_r^{(k)}(\theta) = \bar{\mathbf{M}}^{(k)} + \sum_{r=1}^n \mathbf{M}_r^{(k)} \xi_r(\theta) \quad (3.10)$$

Portanto, quando são introduzidas as incertezas no modelo, seja sobre as espessuras das camadas, seja sobre a temperatura de operação do material viscoelástico, a equação de equilíbrio estocástica do sistema amortecido submetido a uma excitação harmônica determinística, é escrita como segue:

$$\left[\mathbf{K}_e(\theta) + G(\omega, T, \theta) \bar{\mathbf{K}}_v(\theta) - \omega^2 \mathbf{M}(\theta) \right] \mathbf{U}(\omega, T, \theta) = \mathbf{F}(\omega) \quad (3.11.a)$$

ou ainda sob a seguinte forma:

$$\left[\mathbf{Z}(\omega, T) + \mathbf{Z}(\omega, \theta, T) \right] \mathbf{U}(\omega, T, \theta) = \mathbf{F}(\omega) \quad (3.11.b)$$

onde $\mathbf{M}(\theta)$, $\mathbf{K}_e(\theta)$ e $\bar{\mathbf{K}}_v(\theta)$ são as matrizes estocásticas da massa e de rigidez; $G(\omega, T, \theta)$ é o módulo complexo estocástico; $\mathbf{U}(\omega, T, \theta)$ e $\mathbf{F}(\omega)$ são, respectivamente, os vetores das respostas estocásticas e das forças. $\mathbf{Z}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M}$ é a matriz de rigidez dinâmica média; $\mathbf{Z}(\omega, \theta, T) = \sum_{r=1}^n \left(\mathbf{K}_{e_r} + G(\omega, \theta, T) \bar{\mathbf{K}}_{v_r} - \omega^2 \mathbf{M}_r \right) \xi_r(\theta)$ é a matriz de rigidez dinâmica complexa estocástica.

Seguindo os desenvolvimentos apresentados na Seção 2.3, Capítulo 2, pode-se então obter as respostas em tensão do sistema estocástico:

$$\hat{\Phi}_s(\omega, T, \theta) = \Psi \hat{\mathbf{H}}(\omega, T, \theta) \hat{\Phi}_f(\omega) \hat{\mathbf{H}}(\omega, T, \theta)^H \Psi^T \quad (3.12)$$

onde $s(t, T, \theta) = [s_{xx}(t, T, \theta) \ s_{yy}(t, T, \theta) \ s_{xy}(t, T, \theta)]^T$ e as matrizes referentes à densidade espectral de potência e à FRF estocásticas são definidas, respectivamente, como segue:

$$\hat{\Phi}_s(\omega, T, \theta) = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{xx,xx}(\omega, T, \theta) & \hat{\Phi}_{xx,yy}(\omega, T, \theta) & \hat{\Phi}_{xx,xy}(\omega, T, \theta) \\ \hat{\Phi}_{yy,xx}(\omega, T, \theta) & \hat{\Phi}_{yy,yy}(\omega, T, \theta) & \hat{\Phi}_{yy,xy}(\omega, T, \theta) \\ \hat{\Phi}_{xy,xx}(\omega, T, \theta) & \hat{\Phi}_{xy,yy}(\omega, T, \theta) & \hat{\Phi}_{xy,xy}(\omega, T, \theta) \end{bmatrix} \quad (3.13.a)$$

$$\mathbf{H}(\omega, T, \theta) = \mathbf{Z}(\omega, T, \theta)^{-1} \quad (3.13.b)$$

Vale ressaltar que o método KL leva a uma modelagem estocástica do problema na presença de incertezas, mas a um custo computacional elevado, principalmente para o caso da análise de fadiga de sistemas viscoelásticos, uma vez que há a necessidade de se avaliar a matriz de rigidez dependente da frequência e da temperatura para todas as amostras. Portanto, torna-se imprescindível o emprego de métodos de redução de modelos adaptados à análise de fadiga dos sistemas estocásticos viscoelásticos evocados neste trabalho, como será tratado na Seção 3.3, deste Capítulo.

Por fim, é importante destacar ainda que os sistemas estocásticos (3.11) e (3.12) são resolvidos utilizando o método HCL que foi introduzido por Iman e Conovers (1980), depois melhorado por Florian (1992). Em resumo, ele consiste em dividir o intervalo de variação das variáveis incertas em n intervalos, nos quais as probabilidades de se obter os valores inclusos nestes intervalos são iguais. Em cada intervalo faz-se a escolha de um valor particular, podendo ser este definido como o centro do intervalo ou determinado de maneira aleatória. Na sequência, é escolhido aleatoriamente um valor particular entre os n valores de cada parâmetro incerto e em seguida são feitos os cálculos necessários. Após a escolha de um valor da variável, ela é retirada, não podendo ser selecionada uma segunda vez, restando, neste caso, $n - 1$ cálculos a serem efetuados. Esse processo é repetido continuamente até que se executem todos os cálculos.

3.3. Redução de modelos

Durante a avaliação das respostas dinâmicas e do critério de fadiga do sistema viscoelástico estocástico no qual os parâmetros de concepção variam durante um processo de otimização paramétrica para efeito de projeto, o custo computacional é primordial. As reanálises exatas são, neste caso, excluídas em razão do alto custo numérico para a obtenção

dos envelopes das soluções, obrigando-se a utilizar técnicas de aproximação de funções ou reanálises aproximadas. Existem vários métodos de reanálise aproximadas, tais como os métodos de perturbação, de sensibilidade, as formulações baseadas em redução de modelos ou ainda os chamados metamodelos que podem ser construídos a partir de redes neurais artificiais, ou através do emprego de superfícies de respostas para acelerar o processo de busca das soluções ótimas. Nesta parte do trabalho, uma nova técnica de redução de modelos robusta é proposta, sendo considerada uma outra contribuição importante deste trabalho. A nova base desenvolvida para lidar com os sistemas viscoelásticos estocásticos é uma base de redução que deve ser enriquecida de forma iterativa para levar em conta as perturbações no modelo advindas das incertezas paramétricas durante um processo de otimização e/ou ajuste de modelos.

Vale ressaltar que sem a redução de modelos, seria praticamente impossível utilizar a técnica de otimização robusta proposta no Capítulo 5 para obter configurações ótimas e robustas do sistema viscoelástico estocástico, visando o aumento da sua vida em fadiga. A partir da Eq. (3.13.b), pode-se imaginar que para um sistema viscoelástico estocástico contendo um número elevado de graus de liberdade, não é prático utilizar diretamente o modelo completo para estimar as respostas em tensão (3.12) requeridas no cálculo do índice de fadiga (ver Capítulo 4). Ele conduz a um tempo de cálculo proibitivo em virtude da inversão da matriz de rigidez dinâmica complexa para cada passo em frequência e para cada amostra. Neste caso, utiliza-se aproximações de respostas, buscando-se a solução num subespaço: isto é, a aproximação modal, que consiste em projetar as equações do movimento numa base de redução, \mathbf{T} , para diminuir o número de graus de liberdade do sistema e acelerar o cálculo. Neste caso, assume-se a hipótese de que as respostas exatas podem ser aproximadas por soluções dentro de um subespaço reduzido da seguinte forma:

$$\mathbf{U}(\omega, T, \theta) = \mathbf{T}\mathbf{U}_r(\omega, T, \theta) \quad (3.14)$$

onde a matriz $\mathbf{T} \in C^{N \times NR}$ é a base de redução, ou base de Ritz, e $\mathbf{U}_r \in C^{NR}$ com $NR \ll N$ (NR representa os modos retidos na base).

Considerando-se as expressões (3.14) e (3.11.a), a função de transferência (3.13.b) pode ser aproximada como:

$$\mathbf{H}_r(\omega, T, \theta) = \mathbf{Z}_r(\omega, T, \theta)^{-1} \quad (3.15)$$

$\mathbf{Z}_r(\omega, T, \theta) = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e(\theta) \mathbf{T} + G(\omega, T, \theta) \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_v(\theta) \mathbf{T} - \omega^2 \mathbf{T}^T \mathbf{M}(\theta) \mathbf{T}$ é a matriz de rigidez dinâmica reduzida que pode ser calculada e invertida para cada passo de frequência de uma maneira direta, utilizando-se algoritmos numéricos eficientes.

Entretanto, para sistemas amortecidos viscoelasticamente, a escolha da base de redução não é tarefa simples, nem sistemática, em função da dependência da matriz de rigidez do material com relação à frequência de excitação e à temperatura. Neste caso, a base de redução deve levar em conta as variações da frequência e da temperatura (DE LIMA *et al.*; 2015).

A base de redução, \mathbf{T}_{ERM} , do método iterativo de Ritz enriquecido proposto nesta Tese é baseada nos desenvolvimentos de Bobillot e Balmès (2002) e Cunha-Filho *et al.* (2018). A construção da base inicia-se com a obtenção dos modos, ϕ^0 , do sistema viscoelástico conservativo associado (SCA) através da resolução do seguinte problema de autovalores:

$$\left[\mathbf{K}_e + G_0 \bar{\mathbf{K}}_v - (\omega_k^0)^2 \mathbf{M} \right] \phi_k^0 = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

onde $G_0 = G(\omega \rightarrow 0)$ no módulo complexo (2.38), Seção 2.2, Capítulo 2, e $k = 1$ a NR .

Na etapa inicial do processo, $k = 0$, assume-se o seguinte valor inicial da base, $\mathbf{T}_{ERM}^{k=0} = [\phi^0]$, referente ao sistema SCA. Além disso, após definir a tolerância requerida, tol , e um indicador de erro, $\varepsilon_k = 1$, para uma dada amostra, θ , e temperatura de operação, T , as seguintes *Etapas* são realizadas à cada iteração, k , até que a relação, $\varepsilon_k < tol$, seja satisfeita:

Etapa 1: Assume-se um valor inicial da base, $\mathbf{T}_{ERM}^k = [\phi^0]$, referente ao sistema SCA;

Etapa 2: Após definir a tolerância do método, tol , e um indicador de erro, $\varepsilon_k = 1$, para uma dada temperatura de operação, T , do material viscoelástico, as seguintes subetapas são realizadas em cada iteração, k , até que a seguinte relação, $\varepsilon_k < tol$, seja satisfeita:

Subetapa 2.1: cálculo da matrix de rigidez dinâmica do modelo reduzido para, ω_k^0 :

$$\mathbf{Z}_R(\omega_k^0, T) = \mathbf{T}_{ERM}^T \left[\mathbf{K}_e + G(\omega_k^0, T) \bar{\mathbf{K}}_v - (\omega_k^0)^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{T}_{ERM} \quad (3.17.a)$$

Subetapa 2.2: avaliação do resíduo associado às forças externas para a resposta dinâmica reduzida por, $\mathbf{U}_R(\omega_k^0, T) = \mathbf{Z}_R(\omega_k^0, T)^{-1} \mathbf{f}$:

$$\mathbf{R}_f(\omega_k^0, T) = \left[\mathbf{K}_e + G(\omega_k^0, T) \bar{\mathbf{K}}_v - (\omega_k^0)^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{U}_R(\omega_k^0, T) - \mathbf{f} \quad (3.17.b)$$

Subetapa 2.3: determinação dos resíduos dos deslocamentos dado por:

$$\mathbf{R}_d(\omega_k^0, T) = \left[\mathbf{K}_e + G(\omega_k^0, T) \bar{\mathbf{K}}_v \right]^{-1} \mathbf{R}_f(\omega_k^0, T) \quad (3.17.c)$$

Subetapa 2.4: enriquecimento da base, \mathbf{T}_{ERM}^k , pelas partes real e imaginária dos resíduos referentes aos deslocamentos para gerar a nova base iterativa enriquecida:

$$\mathbf{T}_{ERM}^{k+1} = \left[\mathbf{T}_{ERM}^{k+1} \quad \text{Re}(\mathbf{R}_d(\omega_k^0, T)) \quad \text{Im}(\mathbf{R}_d(\omega_k^0, T)) \right] \quad (3.17.d)$$

Subetapa 2.5: avaliação do erro da energia de deformação dado por:

$$\varepsilon_k = \frac{\mathbf{R}_d(\omega_k^0, T)^T \left[\mathbf{K}_e + G_0 \bar{\mathbf{K}}_v \right] \mathbf{R}_d(\omega_k^0, T)}{\left(\mathbf{T}_{ERM}^{k+1} \right)^T \mathbf{U}_R(\omega_k^0, T) \left[\mathbf{K}_e + G_0 \bar{\mathbf{K}}_v \right] \mathbf{U}_R(\omega_k^0, T) \mathbf{T}_{ERM}^{k+1}} \quad (3.17.e)$$

Vale salientar que é de se esperar que o tamanho da base robusta (3.17.d) aumente a cada etapa do processo. Entretanto, isto melhora significativamente a precisão das respostas dinâmicas aproximadas (FRF e respostas em tensão do sistema).

A título de ilustração, a Fig. 3.1 compara o método de redução clássico comumente encontrado na literatura com o método de redução robusto proposto nesta Tese e que será utilizado em conjunto com a otimização robusta detalhada no Capítulo 5. Note que para construir a base padrão nos métodos clássicos faz-se necessário a resolução de um problema de autovalores à cada modificação do sistema advinda de incertezas e/ou otimização. Já o método robusto, há a necessidade de se resolver um único problema de autovalores (3.16) do sistema nominal, levando a um ganho significativo de tempo, já que o processo iterativo das Etapas 1 a 5 é de fácil execução numérica e a robustez advém do fato da base levar em conta os resíduos das forças de modificações, além das forças de amortecimento viscoelástico.

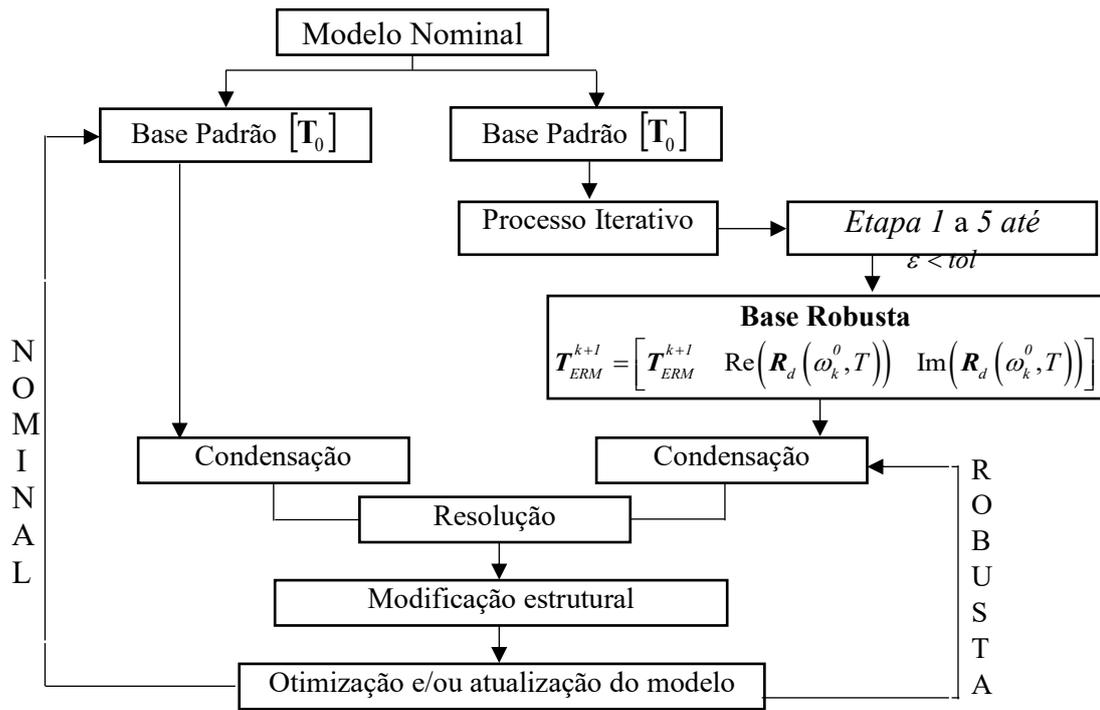


Figura 3.1. Comparação entre os métodos de redução clássica e robusta

CAPÍTULO IV

Análise de fadiga de sistemas viscoelásticos estocásticos sujeitos a cargas aleatórias estacionárias e gaussianas

Este capítulo apresenta os desenvolvimentos do critério de fadiga multiaxial de *Sines*, proposto inicialmente para sistemas determinísticos não amortecidos. Neste caso, o método é estendido para o caso dos sistemas sanduíches viscoelásticos estocásticos apresentados no capítulo anterior. Salienta-se que esta é considerada uma das principais contribuições deste trabalho, onde é apresentada uma formulação probabilística do critério de *Sines* para avaliar os pontos de falha de um sistema viscoelástico na presença de incertezas nas espessuras das camadas do tratamento e na temperatura de operação do material viscoelástico.

4.1. Introdução

Na Engenharia, níveis elevados de vibrações podem ocasionar falhas por fadiga. Geralmente este tipo de falha ocorre após um longo período de tensões repetidas ou ciclos de deformações, que resultam na nucleação e propagação lenta e gradual de uma pequena trinca até o colapso súbito do sistema. A origem das trincas na superfície está relacionada ao próprio processo de fabricação, mas também podem ser desenvolvidas durante a vida útil da estrutura, em função das deformações cíclicas ao redor de uma descontinuidade que resulta na concentração de tensões (LAMBERT, 2007; CALLISTER, 2008; TAKAHASHI, 2014).

A classificação da fadiga está relacionada ao número de ciclos que a estrutura suporta até sua ruptura, podendo ser classificada em fadiga de baixo ciclo ou de alto ciclo, também denominadas oligocíclica ou policíclica, respectivamente (TAKAHASHI, 2014; ROSA, 2016). A vida em fadiga de baixo ciclo corresponde a ruptura que ocorre entre 10^4 e 10^5 ciclos, resultando em deformação plástica seguida de ruptura. Enquanto a fadiga de alto ciclo ocorre entre 10^5 e 10^7 ciclos sem a ocorrência de uma deformação plástica mensurável (LAMBERT, 2007; RAMOS, 2014).

A título de ilustração, a Fig. 4.1 ilustra uma superfície característica de ruptura por fadiga, em que os estágios de ocorrência podem ser divididos em nucleação da trinca, propagação da trinca e ruptura repentina (TAKAHASHI, 2014).

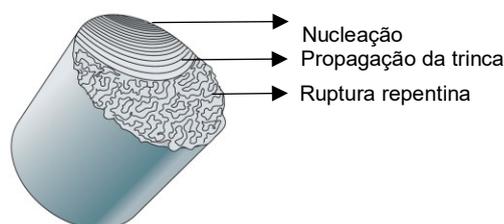


Figura 4. 1 - Característica de superfície sob falha por fadiga (adaptado de Askeland, Fulay e Wright, 2010)

O primeiro estágio da falha por fadiga está relacionado à nucleação das trincas na superfície do material. Estas trincas surgem em virtude da deformação plástica cíclica e se propagam dentro do grão, a chamada propagação cristalográfica, podendo atingir de 1 a 5 grãos não visíveis a olho nu. No estágio II, a trinca é fisicamente grande comparada à microestrutura do material e apresenta concentração de tensão de tração em sua ponta, promovendo o crescimento da trinca. Vale salientar que é neste estágio que aparecem as chamadas marcas de praia, que são marcas deixadas na superfície fraturada. No terceiro estágio a estrutura sofre uma fratura repentina, em virtude da continuidade de propagação das trincas até que o material remanescente não suporte o ciclo de carregamento e descarregamento, resultando em uma falha rápida, catastrófica e sem aviso prévio (KOÇER, 2010; TAKAHASHI, 2014).

Portanto, as falhas por fadiga são consideradas críticas pelas dificuldades em identificar sinais prévios à ruptura. Em função disto, muitos pesquisadores em todo o mundo tem se mobilizado para desenvolver mecanismos de estimativa da vida em fadiga para garantir maior vida útil das estruturas de engenharia e conseqüentemente evitar acidentes associados a este tipo de falha, como abordado nos trabalhos de Dirlik (1985), Dang-Van (1993); Li e Freitas (2002), Khalij, Pagnacco e Lambert (2010), Lambert, Pagnacco e Khalij (2010), Cesário (2012), de Lima *et al.* (2014), Palmeri e Ricciardelli (2006), Yaich *et al.* (2017) e Mayssam *et al.* (2017).

4.2. Escolha do método de análise de fadiga

A partir de relatos na literatura, observa-se que a falha por fadiga tem sido objeto de estudo há aproximadamente 190 anos (TAIER, ARAÚJO e GODEFROID, 2002). A Fig. 4.2 esquematiza cronologicamente importantes contribuições envolvendo a temática de análise de dano por fadiga de sistemas estruturais não amortecidos, que são descritos com detalhes nos trabalhos de Schütz (1996),

Bishop e Sherratt (2000), Koçer (2010), Pires (2012), Rubi (2013), Ramos (2014), Takahashi (2014) e Rosa (2016).

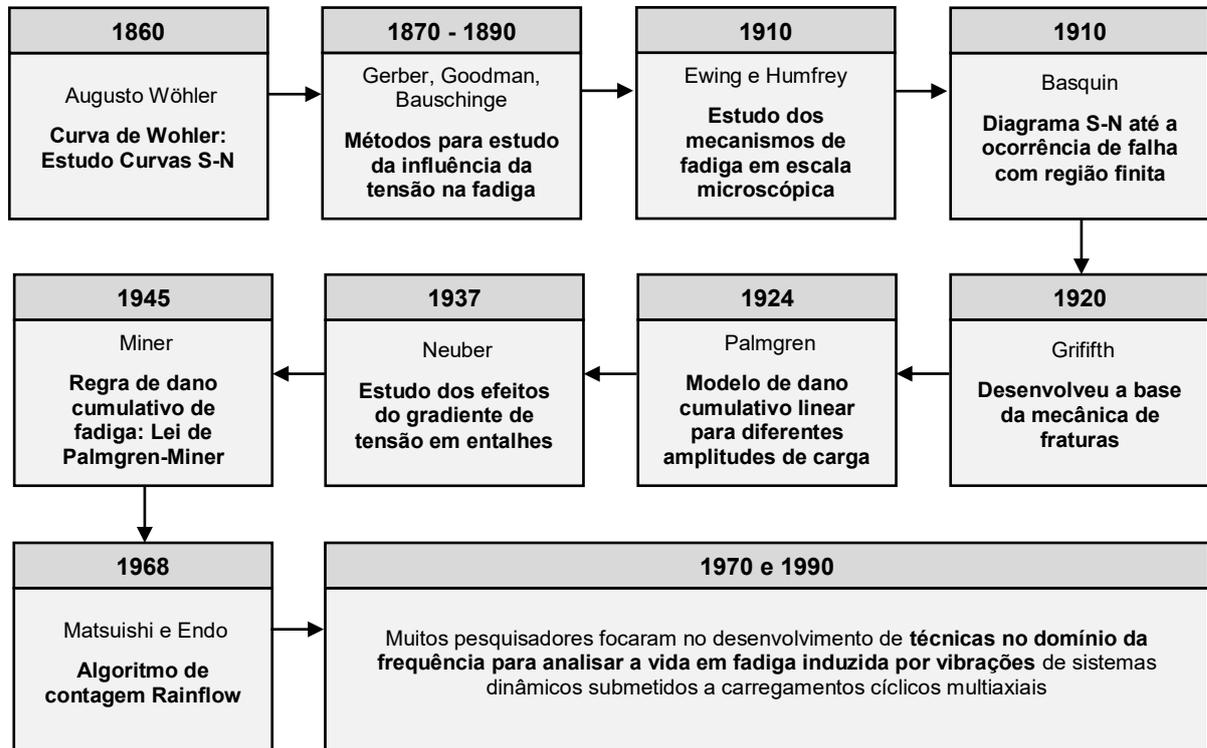


Figura 4. 2 - Alguns métodos de análise de dano por fadiga (Adaptado de Schütz, 1996)

Os métodos de análise de fadiga no domínio da frequência são preferíveis por requerem um menor custo computacional envolvido no cálculo dos índices de fadiga quando comparados com os métodos no domínio do tempo (PITOISSET E PREUMONT, 2000; LAMBERT, 2007; KOÇER, 2010). Além disso, como na maioria dos casos as estruturas de engenharia estão submetidas a estados de tensões multiaxiais cíclicas, devem ser utilizadas teorias de fadiga multiaxial. Em geral, divide-se estas teorias em quatro grandes grupos, a saber (RAMOS, 2014; ROSA, 2016):

- (a) Critérios empíricos: geralmente utilizam as tensões equivalentes de Von Mises e Tresca, apresentando boas predições de vida em fadiga apenas para as condições de carga que foram elaborados;
- (b) Critérios de energia: fundamentados na energia transmitida pela excitação do sistema e bem adaptados à fadiga de baixo ciclo pelo nível de deformação plástica envolvido;
- (c) Critérios do tipo plano crítico: bem adaptados para carregamento proporcional, onde adotam como planos críticos os pontos de maior probabilidade de ocorrência de falha, em que é decomposto o tensor tensão para gerar o trajeto do carregamento. Eles apresentam

resultados mais precisos e são os mais utilizados atualmente, destacando-se o critério de Dang Van (1993), Papadopoulos (1995) e Matake (1977);

- (d) Critérios de abordagem global: bem adaptados para carregamentos não-proporcionais ou fora de fase. Eles se baseiam no primeiro invariante do tensor tensão (I_1) ou no segundo invariante do tensor desvio de tensão (J_2). Neste caso, destacam-se os critérios de *Sines* (1959) e *Crossland* (1956).

Considerando os principais modelos de fadiga multiaxiais do plano crítico e de abordagens globais, Weber (1999) estabeleceu um comparativo a partir de ensaios que permitiram observar que os critérios de *Fogue* e *Sines* apresentam os melhores resultados. Ao comparar estes dois métodos, observa-se uma formulação mais simples para o critério multiaxial de *Sines* por requerer apenas dois limites de fadiga, enquanto que no critério de *Fogue* requer três limites de resistência em sua formulação.

Portanto, a partir do trabalho de Weber (1999), outros pesquisadores têm utilizado o método multiaxial de *Sines* para estimar o índice de fadiga de sistemas mecânicos não amortecidos. Destaca-se o trabalho de Ramos (2014) que estendeu a metodologia do *Sines* para modelos determinísticos com amortecimento viscoelástico. Rosa (2016) também utilizou o mesmo critério adaptado para aplicações em sistemas não amortecidos sujeitos a carregamentos aleatórios estacionários e Gaussianos. No presente trabalho, a análise de fadiga será realizada estendendo a formulação determinística do critério global de *Sines* para os sistemas viscoelásticos estocásticos apresentados no Capítulo 3, submetidos à cargas multiaxiais e aleatórias no domínio da frequência combinado com redução de modelos.

4.3. Critério multiaxial de Sines

O critério de *Sines* é um critério de tensão para fadiga multiaxial formulado com base no segundo invariante do tensor desvio de tensão, J_{2a} , e no limite de fadiga, t_{-1} , do material da peça. O critério definido conforme a Eq. (4.1), para o caso de sistemas com pressão hidrostática nula, estabelece que para valores maiores que à unidade a estrutura falhará por fadiga antes de atingir dois milhões de ciclos (SINES, 1959; TAKAHASHI, 2014; ROSA, 2016).

$$D_{Sines} = \frac{\sqrt{J_{2a}}}{t_{-1}} \leq 1 \quad (4.1)$$

4.3.1. Cálculo do segundo invariante do tensor desvio de tensão

Classicamente, o segundo invariante das componentes do tensor tensão para um estado tri-axial de tensão-deformação é dado pela seguinte relação (WEBER, LABESSE-JIED e ROBERT, 2001):

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{\frac{1}{6} \left[(s_{xx}(t) - s_{yy}(t))^2 + (s_{yy}(t) - s_{zz}(t))^2 + (s_{zz}(t) - s_{xx}(t))^2 + (s_{xy}(t) + s_{yz}(t) + s_{xz}(t))^2 \right]} \quad (4.2)$$

Para o caso específico de carregamento em fase, o valor da amplitude da tensão equivalente, $\sqrt{J_{2a}}$, pode ser determinado diretamente das componentes alternadas da resposta em tensão do sistema, $\mathbf{s}(t) = [s_{xx}(t) \ s_{yy}(t) \ s_{zz}(t) \ s_{xy}(t) \ s_{yz}(t) \ s_{xz}(t)]^T$, da forma (LAMBERT, 2007):

$$\sqrt{J_{2a}} = \sqrt{\frac{1}{6} \left[(s_{xx,a} - s_{yy,a})^2 + (s_{yy,a} - s_{zz,a})^2 + (s_{zz,a} - s_{xx,a})^2 + (s_{xy,a} + s_{yz,a} + s_{xz,a})^2 \right]} \quad (4.3)$$

onde $s_{\bullet,a} = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in [0,t]} [s_{\bullet}(t)] - \min_{t \in [0,t]} [s_{\bullet}(t)] \right\}$.

No entanto, situações com carregamento não proporcional ou fora de fase, o segundo invariante das componentes do tensor tensão não pode ser determinado diretamente pelas componentes de tensão alternadas, e deve-se utilizar outros métodos para sua determinação. Neste caso, destaca-se o modelo de Li e de Freitas (2002) que propõe uma abordagem estatística bidimensional fundamentada no trajeto do carregamento de uma elipse circunscrita mínima de semieixos R_1 e R_2 . A representação do trajeto está ilustrada na Fig. 4.3 e calculado pela Eq. (4.4). Este modelo é aplicado para espaços bidimensionais e considera os efeitos da não-proporcionalidade.

$$\sqrt{J_{2a}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \quad (4.4)$$

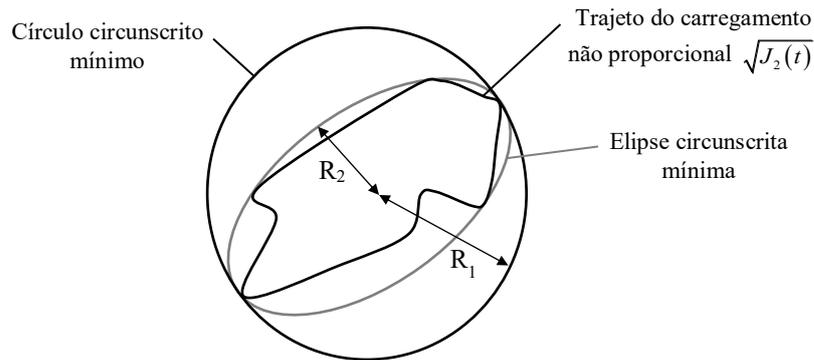


Figura 4. 3 - Representação do método da elipse para um carregamento bi-dimensional não proporcional (adaptado de Lambert, Pagnacco e Khalij, 2010)

A partir do método da elipse circunscrita mínima, Khalij, Pagnacco e Lambert (2010) propuseram expandi-lo para o método de casca prismática, sendo este o método adotado para o desenvolvimento deste trabalho. Destaca-se que este método foi aplicado em outros trabalhos como de Lima *et al.* (2014), Ramos e de Lima (2014), Ramos (2014), Rosa e de Lima (2015) e Rosa (2016). Entretanto, para o caso de carregamentos não proporcionais de natureza aleatória e a presença de incertezas em parâmetros físicos e/ou geométricos do sistema viscoelástico, como definido pelas relações (3.13), Seção 3.2.1, Capítulo 3, a direção e a magnitude da resposta em tensão aleatória, $s(t, T, \theta)$, não são constantes durante um ciclo de carregamento. Portanto, faz-se necessário propor uma formulação probabilística da técnica da casca prismática inicialmente proposta por Khalij, Pagnacco e Lambert (2010) para sistemas determinísticos.

As principais etapas da metodologia a ser empregada neste trabalho são descritas a seguir, onde, para simplificar os desenvolvimentos, a natureza aleatória e a temperatura de operação do material viscoelástico serão omitidas:

- Inicialmente, partindo-se de um estado tri-axial de tensões, é realizada uma mudança de variável de seis para cinco dimensões sobre a resposta em tensão aleatória do sistema viscoelástico, $s(t)$, por meio da seguinte transformação, $\mathcal{S}(t) = \mathbf{P}_s s(t)$, em N_s intervalos de tempo discretos, t_i , com $i = 1, \dots, N_s$, onde o vetor das tensões modificado, $\mathcal{S}(t)$, e a matriz de transformação, \mathbf{P}_s , são definidos da forma:

$$\mathcal{S}(t) = [\mathcal{S}_1(t), \mathcal{S}_2(t), \mathcal{S}_3(t), \mathcal{S}_4(t), \mathcal{S}_5(t)]^T \quad (4.5.a)$$

$$\mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/6 & -\sqrt{3}/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5.b)$$

onde, $S_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{2}{3} s_{xx}(t) - \frac{1}{3} s_{yy}(t) - \frac{1}{3} s_{zz}(t) \right]$, $S_2(t) = \frac{1}{2} [s_{yy}(t) - s_{zz}(t)]$, $S_3(t) = s_{xy}(t)$,
 $S_4(t) = s_{xz}(t)$ e $S_5(t) = s_{yz}(t)$.

Nota-se que o tensor tensão é descrito por um número menor de componentes no espaço transformado, sendo esta, uma das grandes vantagens em se utilizar a relação, $\mathbf{S}(t) = \mathbf{P}_s \mathbf{s}(t)$.

- Em seguida, uma nova avaliação, $\mathbf{S}'(t) = \mathbf{T}_s^T \mathbf{S}(t)$, é obtida via transformação ortonormal, onde $\mathbf{T}_s \in R^{5 \times 5}$ é uma matriz contendo os cinco autovetores referentes aos eixos principais do carregamento aleatório, obtidos da análise de autovalores da matriz de covariância, $\mathbf{V}_s = (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}}) \cdot (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}})^T / (N_s - 1)$, onde $\bar{\mathbf{S}} = \left(\sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{S}_i \right) / N_s$, $\mathbf{V}_s \in R^{5 \times N}$ e $\bar{\mathbf{S}} \in R^{5 \times 1}$;
- Posteriormente, é calculada as amplitudes, $\mathbf{R} = (1/2) [\max(\mathbf{S}') - \min(\mathbf{S}')]$, para um período de tempo, $t \in t_p$, no sistema de coordenadas principal, após a transformação ortogonal, onde $\mathbf{R} = [R_1 \ R_2 \ R_3 \ R_4 \ R_5]^T$ são as medidas dos vetores das tensões aleatórias ao longo dos eixos principais do prisma que circunscreve o caminho do carregamento, para então estimar o segundo invariante do tensor tensão da forma:

$$\sqrt{J_{2a}} = \|\mathbf{R}\| = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2} \quad (4.6)$$

A título de exemplo, a Figura 4.4 ilustra os vetores $\mathbf{S}(t)$ e $\mathbf{S}'(t)$ definidos no espaço bidimensional para o seguinte problema ilustrativo: $s_x(t) = s_1(t) = 315 \times \sin(\omega t)$ [MPa] e $s_{xy}(t) = s_3(t) = 158 \times \sin(\omega t + \pi/3)$ [MPa]. Após o procedimento de transformação ortogonal, é

possível calcular as medidas máximas de, $\mathbf{R} = [118.7 \ 209.6]^T$, utilizadas para estimar, $\sqrt{J_{2a}} = \|\mathbf{R}\| = 240.91$.

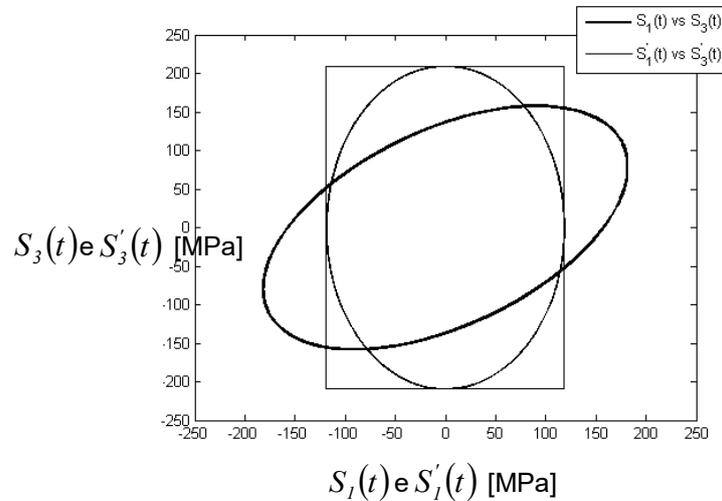


Figura 4.4 – Ilustração da técnica casca prismática para um problema bidimensional (adaptada de Lima *et al.*, 2014).

4.4. Formulação probabilística do critério de Sines

Lambert (2007) define o critério de Sines como um dos mais bem adaptados para o caso de carregamentos não-proporcionais ou fora de fase. Entretanto, para avaliar a probabilidade de não falha por fadiga do sistema sanduíche viscoelástico sujeito incertezas paramétricas e a ciclos de cargas aleatórias que podem ser multiaxiais, estacionárias e Gaussianas, o cálculo do índice, D_{Sines} , passa de cálculo direto como definido pela relação (4.1) para a seguinte estimativa de sua esperança matemática:

$$E[D_{Sines}] \approx \frac{E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]}{t_{-1}} \leq 1 \quad (4.7)$$

onde $E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}] \approx \sqrt{E[R_1^2(\theta)] + E[R_2^2(\theta)] + E[R_3^2(\theta)] + E[R_4^2(\theta)] + E[R_5^2(\theta)]}$ é a estimativa da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desvio de tensão aleatório.

Vale ressaltar novamente que para carregamentos determinísticos em fase ou fora de fase, $\sqrt{J_{2a}}$, pode ser estimado seguindo os procedimentos apresentados na seção anterior. Entretanto, a análise deve levar em conta a natureza aleatória e a dependência em frequência

e temperatura das respostas em tensão do sistema viscoelástico, $s(t, T, \theta)$, e o fato de não ser constante durante um ciclo de vibração. Portanto, para estimar o índice de fadiga (4.7) levando-se em conta a natureza estacionária e Gaussiana do estado de tensão do sistema, uma etapa intermediária para estimar a distribuição de, $\sqrt{J_{2a}(\theta)}$, consiste em caracterizar os dois primeiros momentos estatísticos máximos das medidas aleatórias estacionárias e Gaussianas não correlacionadas, $R_i(\theta)$, onde $i = 1$ a 5 .

Dentre as várias estratégias usadas para estimar a distribuição de valores extremos atingido por processos Gaussianos durante um período de tempo, os resultados encontrados por Preumont (1985) serão empregados neste trabalho, no qual os momentos estatísticos de, $R_i(\theta)$, são expressos da forma:

$$E[R_i(\theta)] = \sqrt{\lambda_0} (\mu_R + \gamma \beta_R) \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, 5 \quad (4.8.a)$$

$$V[R_i(\theta)] = \lambda_0 \frac{\pi^2}{6} \beta_R^2 \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, 5 \quad (4.8.b)$$

onde $\beta_R = 1/\sqrt{2 \ln(\kappa_u N_p)}$ e $\mu_R = \sqrt{2 \ln(\kappa_u N_p)}$ são, respectivamente, a dispersão e o modo de, $R_i(\theta)$, e $N_p = \frac{T_p}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}}$ é o número de máximos associados às componentes, $S'(t) - \bar{S}'$, avaliado num intervalo, t_p . Os parâmetros λ_0 e λ_2 indicam, respectivamente, os momentos espectrais de zero e segunda ordens do vetor, $S'(t)$, e $\gamma = 0.5772$ é a constante de Euler. Os parâmetros de largura de banda são definidos como segue:

$$\kappa_u = \begin{cases} 1.5(1 - e^{-1.8\delta}) & \text{for } \delta < 0.5 \\ 0.94 & \text{for } \delta \geq 0.5 \end{cases}, \quad \kappa_a = \begin{cases} 7\delta & \text{for } \delta < 0.5 \\ 4.05 & \text{for } \delta \geq 0.5 \end{cases} \quad (4.9)$$

onde $\delta = \sqrt{1 - \lambda_1^2 / (\lambda_0 \lambda_2)}$ é o fator de irregularidade dependente dos momentos espectrais do processo aleatório, $S'(t)$, de acordo com a teoria do fator de pico (PREUMONT, 1985).

De acordo com Preumont (1985), as características estatísticas (4.9) levam a estimações razoáveis para várias formas espectrais de uma maneira simples considerando a largura de banda do processo. Além disso, para o desenvolvimento dessas expressões, a distribuição de Gumbel foi adotada assumindo-se que as passagens de níveis ocorrem de

acordo com um processo de Markove. Tal suposição, que é adotada neste trabalho, também foi usada por Pitoiset, Rychlik e Preumont (2001), Lambert, Pagnacco e Khalij (2010) e Preumont (1985).

Baseado nas distribuições (4.8), obtidas para os processos aleatórios estacionários e Gaussianos não correlacionados, $R_i(\theta)$, é possível obter as seguintes funções para os valores da média e da variância da amplitude do segundo invariante do tensor desvio de tensão aleatório, $E[J_{2a}(\theta)] = \sum_{i=1}^5 E[R_i^2(\theta)]$ e $V[J_{2a}(\theta)] = \sum_{i=1}^5 V[R_i^2(\theta)]$, onde os primeiros dois momentos estatísticos de, $R_i^2(\theta)$, podem ser definidos da forma (LAMBERT, PAGNACCO E KHALIJ, 2010):

$$E[R_i^2(\theta)] = E[R_i(\theta)]^2 + V[R_i(\theta)] \quad (4.10)$$

$$V[R_i^2(\theta)] = \overbrace{4E[R_i(\theta)]^2 V[R_i(\theta)] + \frac{22}{5} V[R_i(\theta)]^2 + \frac{48\zeta\sqrt{6}}{\pi^3} E[R_i(\theta)] V[R_i(\theta)]^{3/2} - E[R_i^2(\theta)]}^{E[R_i^4(\theta)]} \quad (4.11)$$

onde $\zeta = 1.20206$ é a constante de Apery. Detalhes da obtenção da média e da variância de, $R_i^2(\theta)$, estão descritos em Lambert, Pagnacco e Khalij (2010).

A partir deste ponto, é necessário fazer uma suposição sobre a função densidade de probabilidade de, $\sqrt{J_{2a}(\theta)}$, para continuar com a sua caracterização em função da dificuldade em obter expressões analíticas para o caso de uma distribuição de Gumbel. Neste trabalho, na Eq. (4.11), será assumido que, $E[J_{2a}^2(\theta)] = E[J_{2a}(\theta)]^2 - V[J_{2a}(\theta)]$, $E[J_{2a}^2(\theta)]$, além da seguinte definição de variância, $V[\sqrt{J_{2a}(\theta)}] = E[J_{2a}(\theta)] - E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]^2$. Portanto, após combinar estas relações, chega-se à uma equação não linear a ser resolvida numericamente:

$$\begin{aligned}
& E[J_{2a}(\theta)]^2 + V[J_{2a}(\theta)] - 4E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]^2 \left(E[J_{2a}(\theta)] - E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]^2 \right) \\
& - \frac{22}{5} \left(E[J_{2a}(\theta)] - E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]^2 \right)^2 \\
& - \frac{48\zeta\sqrt{6}}{\pi^3} E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}] \left(E[J_{2a}(\theta)] - E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]^2 \right)^{3/2} = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Na Eq. (4.12), observa-se que somente o termo, $E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]$, não é conhecido. Entretanto, este pode ser estimado empregando o método de Newton–Raphson através da seguinte estimativa inicial, $E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}] \approx \sqrt{E[J_{2a}(\theta)]}$.

Portanto, a solução da equação anterior em conjunto com a definição de variância para a variável aleatória, $\sqrt{J_{2a}(\theta)}$, permite obter a seguinte expressão analítica para a sua função densidade de probabilidade (LAMBERT; PAGNACCO E KHALIJ, 2010):

$$p_{\sqrt{J_{2a}}}(r) = \frac{1}{\beta_J} \exp\left(\frac{\mu_J - r}{\beta_J}\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{\mu_J - r}{\beta_J}\right)\right] \tag{4.13}$$

onde $\beta_J = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \left(V[\sqrt{J_{2a}(\theta)}] \right)^{1/2}$ e $\mu_J = E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}] - \gamma \beta_J$ designam, respectivamente, a dispersão e o modo de, $\sqrt{J_{2a}(\theta)}$. Nota-se que o valor mais provável de, $\sqrt{J_{2a}(\theta)}$, é o seu modo e não o seu valor médio.

CAPÍTULO V

Metodologia de Otimização Multiobjetivo Robusta

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos fundamentais a respeito da estratégia de otimização multiobjetivo adotada neste trabalho para ser combinada com a noção de funções de vulnerabilidade e/ou robustez. O intuito é utilizar esta metodologia para o projeto ótimo e robusto dos sistemas viscoelásticos estocásticos de interesse deste trabalho, visando o aumento da vida em fadiga de tais sistemas. Neste caso, serão definidas as funções de vulnerabilidade e o método utilizado no problema de otimização multiobjetivo robusto, com destaque para o algoritmo evolucionário NSGA e para o critério de dominância de Pareto para obter as Frentes de Pareto dos sistemas determinístico e estocástico.

5.1. Introdução

A origem dos problemas de otimização é anterior ao desenvolvimento de ferramentas computacionais e aplicado com o objetivo de obter a melhor combinação para um sistema mais confiável e eficiente. Conceituando, a otimização envolve um conjunto de procedimentos por meio dos quais se busca minimizar ou maximizar uma determinada função, denominada função objetivo, sujeita ou não a restrições de igualdade e desigualdade, obtendo assim, um melhor aproveitamento dos recursos disponíveis. A maioria dos problemas reais apresentam diferentes possibilidades de soluções e, neste caso, a otimização permite encontrar a melhor solução do problema considerando algum critério de desempenho (DEB, 2001).

Na Engenharia, durante a fase de concepção inicial ou pré-projeto, o engenheiro normalmente se depara com muitas variáveis de projeto, várias restrições tecnológicas e/ou econômicas e, na maioria das vezes, com múltiplos objetivos. Nestes casos, técnicas numéricas de otimização permitem garantir a robustez, confiabilidade e o desempenho máximo do sistema, a partir dos parâmetros ótimos obtidos via minimização ou maximização de alguma função custo (DE LIMA, RADE, BOUHADDI, 2010; MOREIRA, 2015). É importante destacar que a otimização permite reduzir significativamente o tempo

de projeto, levando a uma melhor solução com menor custo computacional, dependendo, é claro, da complexidade do problema.

Os métodos de otimização são classificados inicialmente em função da natureza dos algoritmos como determinísticos e não determinísticos. Os métodos determinísticos são aqueles constituídos por algoritmos normalmente conflitantes entre si em alguma parte do espaço de decisão, não havendo oportunidade para decisões de caráter aleatório. Enquanto que os métodos não determinísticos, conhecidos como estocásticos ou aleatórios, são aqueles que utilizam regras de probabilidade introduzindo elementos aleatórios dentro do algoritmo, resultando em aspectos menos rigorosos e menor chance de convergir para mínimos locais comparado aos métodos determinísticos (SUDRET e DER KIUREGHIAN, 2000; SUDRET, 2007).

Outra classificação está relacionada ao número de critérios a ser otimizado, podendo ser mono-objetivo ou multiobjetivo. Os problemas mono-objetivo são caracterizados pela existência de um único critério enquanto que os multiobjetivo apresentam mais de um critério a ser otimizado. De acordo com Vicente (2014), os problemas de otimização multiobjetivo normalmente são caracterizados por diferentes funções custo que estão em conflito em alguma parte do espaço de projeto e buscam otimizar várias componentes de um vetor custo, a partir de um conjunto das soluções de Pareto.

5.2. Problema multiobjetivo determinístico (PMOD)

Contrariamente à otimização mono-objetivo, a solução de um problema multiobjetivo determinístico (PMOD), não é única, mas constituída de um conjunto de soluções, conhecidas como soluções de Pareto (Eschenauer, KOSHI e Osyczka, 1990). Toda solução deste conjunto é ótima desde que qualquer melhoria não possa ser feita sobre uma componente do vetor sem a degradação de ao menos uma outra componente. O primeiro objetivo na resolução de um problema multiobjetivo é o de obter o conjunto das soluções de Pareto ou amostrar as soluções diversificadas deste conjunto. A determinação do conjunto é apenas uma primeira fase na resolução prática de um PMO que necessita, num segundo momento, da escolha de uma solução a partir deste conjunto de acordo com preferências do projetista. A escolha de uma solução em relação às outras necessita do conhecimento prévio do problema e dos inúmeros fatores que influem no mesmo. Assim, uma solução escolhida por um critério de decisão pode não ser aceitável por outro. Faz-se então necessário ter várias alternativas na escolha de uma solução de Pareto.

Um PMOD é definido da forma (AIT BRIK, BOUHADDI e COGAN, 2004a; 2004b; AIT BRIK, 2005):

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad \mathbf{x} \in C \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $n \geq 2$ é o número de funções objetivo, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ é o vetor que representa as variáveis de projeto, $C \subset R^k$ representa o conjunto realizável (espaço de projeto) associado às restrições de igualdade ou desigualdade $g_j(\mathbf{x})$, e os limites explícitos; $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é o vetor de critérios ou funções objetivo a serem otimizadas.

De acordo com o princípio de Vilfredo Pareto, o ótimo de Pareto para um problema multiobjetivo, é obtido ao considerar que existe um equilíbrio tal que não se pode melhorar um critério sem deteriorar pelo menos um dos outros critérios. Esta definição para as soluções de Pareto, decorrem diretamente da noção de dominância, em que: *uma solução* $x^* \in C$ *é uma solução de Pareto se, e somente se, não existe uma solução* $x \in C$ *tal que* $F(x)$ *domine* $F(x^*)$. Neste sentido, considera-se difícil encontrar uma solução que melhore os desempenhos sobre um critério sem que isto provoque uma degradação dos desempenhos sobre ao menos um outro critério. As soluções de Pareto são conhecidas sob o nome de soluções admissíveis, não dominadas e inferiores (ZITZLER E THIELE, 1998).

A Figura 5.1 ilustra o conceito de dominância de Pareto para o caso de minimização de duas funções objetivos, onde os pontos 1, 3 e 5 não são dominados pelos outros pontos. Por outro lado, o ponto 2 é dominando pelo ponto 3, e o ponto 4 é dominado pelos pontos 3 e 5.

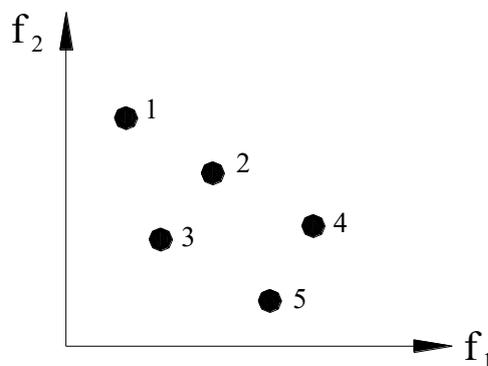


Figura 5.1 – Noção de dominância de Pareto para minimizar os objetivos f_1 e f_2 (adaptada de Ait Brik, 2005).

5.3. Escolha de um método de otimização multiobjetivo

A principal dificuldade de um problema multiobjetivo não consiste em buscar a solução ótima, mas o conjunto das soluções satisfatórias, que devem, em seguida, se submeterem a uma operação de classificação. Os métodos de resolução dos problemas multiobjetivo, são então, métodos de auxílio à decisão, porque a escolha final será feita pelo projetista. Neste contexto, existem dois tipos de resolução de um problema multiobjetivo (Ait Brik, 2005): a primeira solução adota um ponto de vista do utilizador, e consiste em transformar um problema multiobjetivo num problema simples mono-objetivo onde as funções custo são ponderadas e a resolução do problema torna-se clássica. Neste caso, a solução é ótima no contexto de uma função mono-objetivo. O problema é que esta solução não satisfaz necessariamente todos os critérios multiobjetivos, além disso, desconsidera-se o significado físico do problema de partida. Além disso, ela não cobre o conjunto das soluções quando o domínio das funções custo é não convexo (DAS E DENNIS, 1997). A segunda solução é de tentar responder ao problema multiobjetivo, levando-se em conta o conjunto de critérios de acordo com o conceito de otimização de Pareto. No primeiro método, o projetista intervém desde o começo da definição do problema, exprimindo suas preferências, afim de transformar o problema multiobjetivo num problema mono-objetivo. Na segunda estratégia, a escolha é feita no conjunto das soluções propostas pelo otimizador multiobjetivo.

Na maioria dos casos, o projetista não pode exprimir claramente as suas preferências, seja porque lhe faltam experiências ou informações, seja porque as funções objetivos são de naturezas diferentes. O inconveniente é que quando os objetivos não são convexos, o método de ponderação ignora esta parte do conjunto de soluções de Pareto (Das e Dennis, 1997) como ilustrado na Figura 5.2 abaixo.

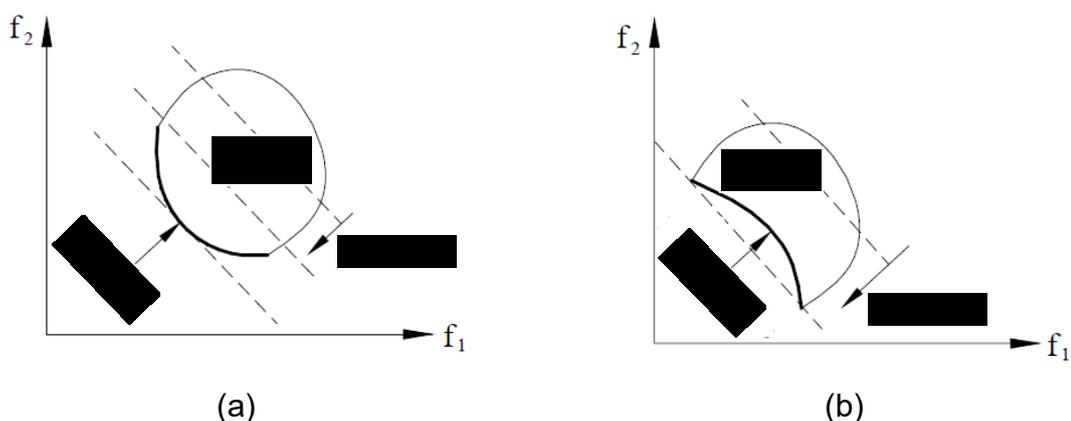


Figura 5.2 – Espaço convexo (a) e não convexo (b). (adaptada de (Das e Dennis, 1997)).

Observa-se que existe um certo número de técnicas que permitem encontrar o conjunto das soluções ótimas de Pareto (Das e Dennis, 1997 ; STEUER, 1986). As principais vantagens destes métodos são que as soluções ótimas são independentes das preferências do projetista e que a análise pode ser executada somente uma vez, porque o conjunto de Pareto não sofrerá mudanças significativas desde que a descrição do problema continue sem alterações. Uma dificuldade encontrada é que geralmente, o número de soluções no primeiro Fronte de Pareto é muito grande, significando algumas vezes um problema suplementar ao projetista para a escolha final da solução a ser implementada. Contudo, existem métodos que podem resolver este problema, agrupando as soluções em famílias que têm propriedades estatísticas semelhantes (ROSENMAN E GERO, 1985; MORSE, 1980).

Neste contexto, os algoritmos evolucionários se tornam atrativos para resolver problemas multiobjetivo. Mas, existem inúmeras variantes dos mesmos como por exemplo, o método VEGA (*Vector Evaluated Genetic Algorithm*) (Schaffer, 1985); o método MOGA (*Multiple Objective Genetic Algorithm*) (Fonseca e Fleming, 1993); o método SPEA (*Strength Pareto Evolutionary Algorithm*) (Zitzler, 1999); e aquele a ser utilizado neste trabalho chamado de NSGA (*Non dominated Sorting Genetic Algorithm*), proposto por Srinivas e Deb (1993).

O NSGA é baseado no conceito de dominância de Pareto e as soluções são classificadas de acordo com um procedimento denominado *ranking*, onde os indivíduos que não são dominados, são posicionados no *Fronte n° 1* e, em seguida, eliminados da população. O conjunto seguinte de indivíduos não dominados é identificado no *Fronte n° 2*, e assim por diante, conforme ilustrado na Fig. 5.3. Este procedimento é reiterado até que todos os indivíduos da população tenham um *Fronte*.

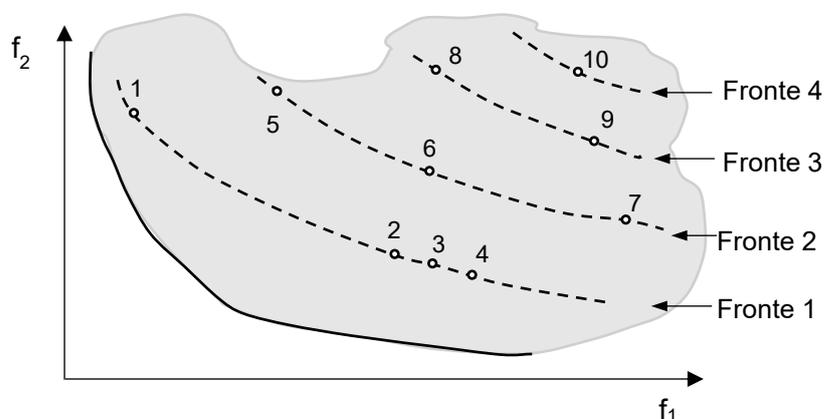


Figura 5.3 – Exemplo de ordenamento por *Fronte* do NSGA (Adaptado de Deb,2001)

Vicente (2014) aborda o processo para encontrar as soluções uniformemente distribuídas no conjunto de soluções de Pareto. Em síntese, o algoritmo NSGA, após o ordenamento atribui a cada indivíduo, x_i , um valor, $f_i = 1/r$, denominado *fitness*, sendo r o *ranking* do indivíduo. Após a definição

da função *fitness*, aplica-se a técnica de formação de *sharing*, responsável por dividir os valores da função *fitness* pela função *sharing* (*niche*), a partir da Eq. (5.2). Assim, aplicam-se as operações de um algoritmo genético como seleção, cruzamento e mutação, como ilustrado na Fig. 5.4.

$$sh(d(x_i, x_j)) = \begin{cases} 1 - d(x_i, x_j)/\sigma & \text{se } d(x_i, x_j) < \sigma \\ 0 & \text{se } d(x_i, x_j) \geq \sigma \end{cases} \quad (5.2)$$

onde x_i e x_j são os indivíduos, sh é a função *sharing*, σ é a constante definida a priori que define o intervalo de *sharing*, $d(x_i, x_j)$ é a distância euclidiana entre os dois indivíduos.

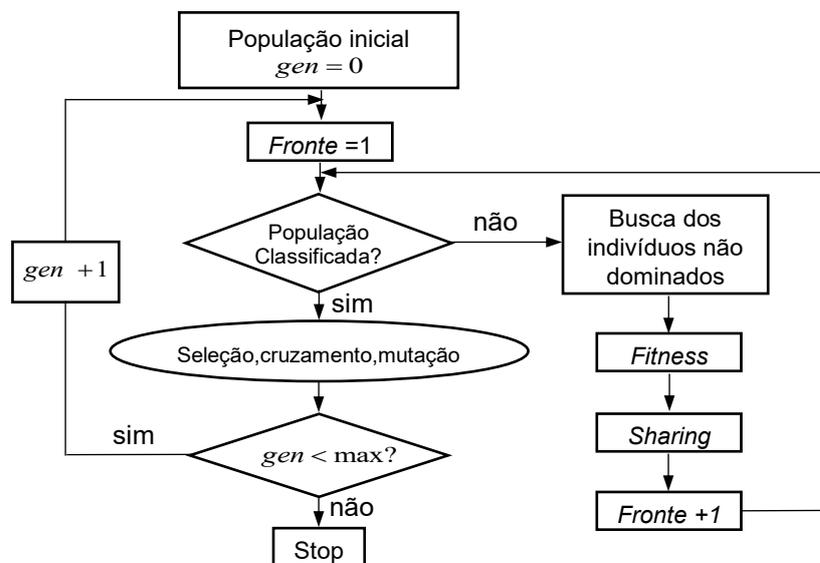


Figura 5.4 - Estratégia NSGA para um problema PMOD (adaptada de Ait Brik, 2005)

5.4. Problema multiobjetivo robusto (PMOR)

É evidente que a utilização de técnicas de otimização numérica pode ser dificultada em virtude de descontinuidades das funções custo a serem otimizadas, sensibilidade diferente de cada variável de projeto, dificuldade da estimativa inicial das variáveis de projeto e existência de ruídos nas respostas do modelo (VANDERPLAATS, 1984). Neste sentido, destaca-se que a sensibilidade das variáveis de projeto é uma das preocupações do presente estudo, uma vez que pequenas variações nas espessuras das camadas do tratamento viscoelástico e/ou na temperatura de operação do sistema amortecido podem significar enormes variações nos objetivos e, conseqüentemente, no índice de fadiga multiaxial de *Sines*.

Ao considerar tais variações, os problemas tornam-se mais complexos e faz-se necessário garantir soluções ótimas e robustas. Nestes casos, as técnicas de otimização podem envolver métodos globais ou locais, sendo uma solução ótima local em geral eficiente, principalmente em casos de inviabilidade em obter a solução ótima global. Isto porque a otimização global apresenta um gasto computacional elevado e requer considerar todas as variáveis de projeto, o que torna inviável pelo elevado número de combinações necessárias a solução do problema. Além disso, quanto maior for o número de variáveis, maior será o risco de mal condicionamento do problema (VANDERPLAATS, 1984).

Assim, considerando o caso de estruturas com amortecimento viscoelástico, é essencial buscar soluções robustas para evitar que pequenos desvios de seu valor ótimo teórico, possam resultar em comportamentos distintos daquele fornecido inicialmente pela otimização numérica. Neste sentido, para melhor entendimento, Lee e Park (2001) ilustraram a partir da Fig. 5.5 duas soluções ótimas, sendo a solução A denominada ótima não robusta e a solução B ótima robusta. Observa-se que o desempenho do ótimo global considerando o valor médio é melhor que o do ótimo robusto, no entanto, sua distribuição é mais ampla que o ótimo robusto (de Lima, 2007). Neste caso, observa-se uma maior susceptibilidade do ótimo A sofrer variações ao considerar perturbações no sistema comparado ao ótimo B.

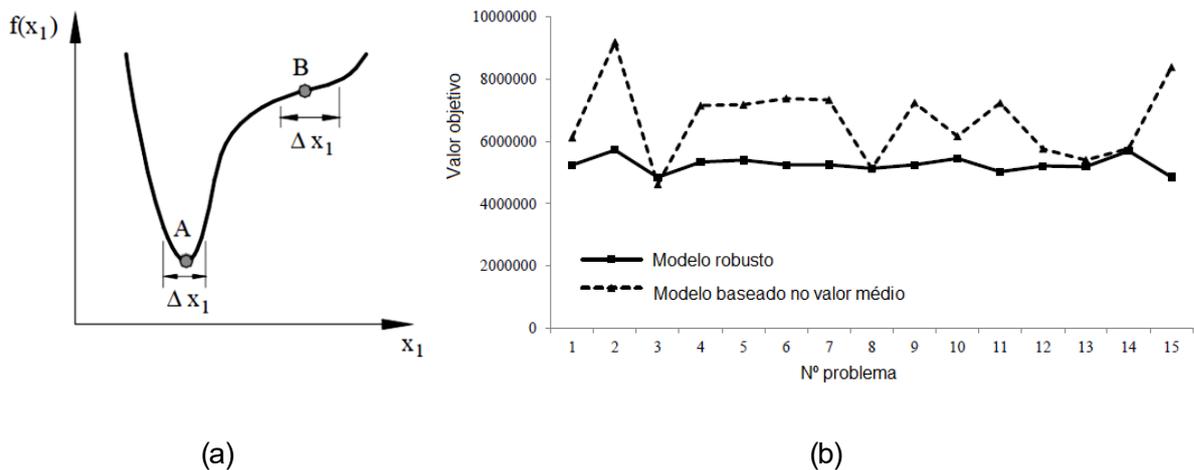


Figura 5.5. – Ilustração de soluções ótimas (a) adaptado de Lee e Park (2001); (b) Rahmani et al. (2013)

A otimização robusta é uma metodologia que permite obter soluções menos sensíveis a essas pequenas variações no projeto. É considerada uma ferramenta muito interessante por considerar as perturbações no projeto e nas funções de custo, bem como no processamento de restrições. E assim, é possível obter uma solução que pode ser considerada “sub-ótima”, mas estável, no que se refere às incertezas paramétricas.

É importante esclarecer que uma função de robustez avalia o impacto das variações dos parâmetros de projeto a partir de uma função objetivo original. As soluções robustas para problemas considerando incertezas são aquelas que, simultaneamente, minimizam as funções iniciais de custo e maximizam sua robustez, ou minimizam suas vulnerabilidades. Matematicamente, o problema de otimização multiobjetivo robusto (PMOR) apresenta as funções objetivos com suas respectivas funções de vulnerabilidade, sob as restrições apresentadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}^*(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_1^v(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_2^v(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}), f_n^v(\mathbf{x})) \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad \mathbf{x} \in C \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $f_i^v(\mathbf{x})$ é a função vulnerabilidade do objetivo, $f_i(\mathbf{x})$, definida da forma:

$$f^v = (\sigma_f / \mu_f)^{-1} \quad (5.4)$$

onde (σ_f / μ_f) corresponde a medida da dispersão, sendo μ_f a média e σ_f o desvio padrão (DE LIMA, 2007).

Nesta Tese, utilizou-se a abordagem robusta proposta por Ait Brik (2005) e aplicado por de Lima (2007). A Fig. 5.6 ilustra a metodologia de otimização determinística e robusta, ressaltando que na otimização robusta considerou as incertezas nos parâmetros de projeto do sistema sanduíche viscoelástico estocástico a partir das funções de vulnerabilidade. Enfatiza que o problema PMOR deve ser capaz de encontrar ótimos estáveis quando os parâmetros do projeto são aleatórios.

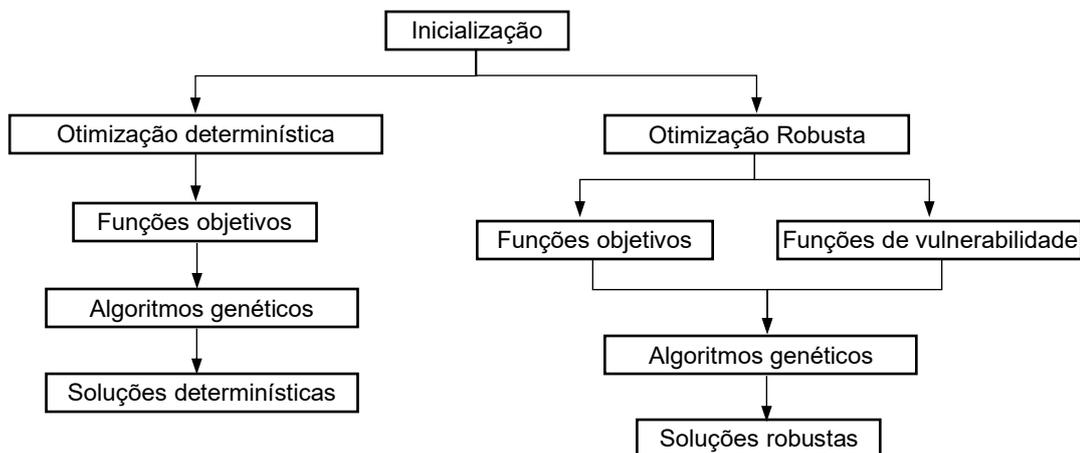


Figura 5.6 - Metodologias de otimização determinística (PMOD) e robusta (PMOR).

As funções objetivo a serem utilizadas nos problemas de otimização determinístico e robusto considerados neste trabalho serão convenientemente definidas no Capítulo 6. Entretanto, vale salientar que o objetivo da otimização é encontrar os parâmetros ótimos e robustos do sistema viscoelástico estocástico na presença de incertezas com vistas ao aumento da sua vida em fadiga. Portanto, o problema PMOR consiste em avaliar numericamente a função vulnerabilidade (5.4) de maneira simples e com um número de amostras reduzido empregando o método HCL, uma vez que não se trata apenas em caracterizar um ótimo, mas de integrar um critério de robustez ao algoritmo de busca.

CAPÍTULO VI

Simulações Numéricas

Este capítulo apresenta os resultados das simulações numéricas realizadas a partir de rotinas próprias desenvolvidas em ambiente de programação MATLAB®. Inicialmente é definido o modelo numérico nominal a ser considerado nas simulações e, na sequência, os resultados obtidos para o sistema segundo as abordagens determinística e estocástica apresentadas nos Capítulos 2, 3 e 4, respectivamente. Neste caso, o principal objetivo foi realizar análises dinâmicas a fim de estimar o índice de fadiga da estrutura. Para isto, determinou-se as respostas em frequência e em tensão, além dos envelopes das soluções dinâmicas considerando a presença de incertezas. Por fim, foram geradas configurações ótimas do sistema viscoelástico, resultado das otimizações determinística e robusta que foram implementadas segundo os desenvolvimentos apresentados no Capítulo 5. Finalmente, foram avaliados *a posteriori* a robustez das soluções de ambas as estratégias de otimização visando minimizar o índice multiaxial de *Sines* visando o aumento da vida em fadiga do sistema viscoelástico.

6.1. Descrição do modelo nominal

A Figura 6.1 ilustra a placa sanduíche viscoelástica bi-engastada a ser utilizada nas simulações. As camadas base e restringente são de alumínio e o núcleo é formado pelo material viscoelástico 3M ISD112™. As propriedades físicas e geométricas a serem utilizadas para a construção do modelo de elementos finitos do sistema nominal são definidas na Tabela 6.1.

Para garantir a confiabilidade dos resultados e minimizar a influência da discretização por EFs nas respostas dinâmicas do sistema, foi feito um estudo de convergência de malha, correlacionando a quarta frequência natural do sistema dentro da banda de interesse com o número de elementos da malha, conforme mostrado na Figura 6.2. Em função desse resultado, será adotada a malha de 10×10 elementos finitos, tendo em vista não somente a convergência, mas também o alto custo computacional na implementação do modelo estocástico para malhas superiores à adotada.

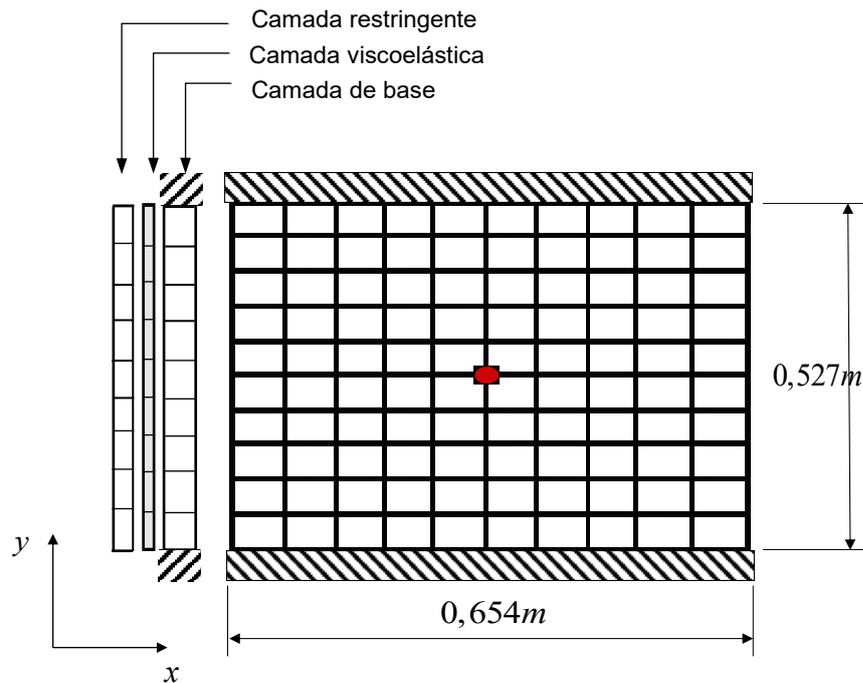


Figura 6.1 – Discretização do modelo da placa sanduíche de três camadas

Tabela 6. 1 – Propriedades físicas e geométricas das camadas da placa sanduíche

| | | | |
|------------------------|----------------------------|------|---------------------------|
| Espessuras | Base (h_1) | 1,00 | <i>mm</i> |
| | Viscoelástica (h_2) | 0,13 | |
| | Restringente (h_3) | 0,25 | |
| Módulo de Young | Base (E_1) | 70 | <i>GPa</i> |
| | Restringente (E_3) | 70 | |
| Densidade | Base (ρ_1) | 2700 | <i>kg / m³</i> |
| | Viscoelástica (ρ_2) | 950 | |
| | Restringente (ρ_3) | 2700 | |
| Coeficiente de Poisson | Base (ν_1) | 0,29 | |
| | Viscoelástica (ν_2) | 0,49 | |
| | Restringente (ν_3) | 0,29 | |

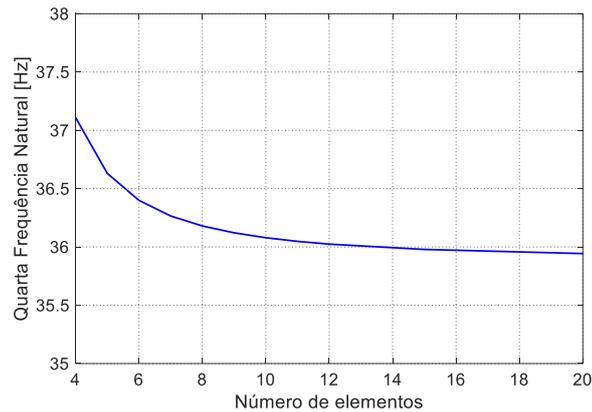


Figura 6.2 – Análise de convergência da malha em função da quarta frequência natural

6.1.1 Análise modal

Após a escolha da malha de EFs a ser utilizada nas simulações, foram determinadas as quatro primeiras frequências naturais do sistema, como mostrado na Tabela 6.2, e os correspondentes modos de vibração representados na Figura 6.3. Elas foram determinadas a partir da resolução do problema de autovalores do sistema nominal SCA definido pela Eq. (3.16), Seção 3.3, Capítulo 3.

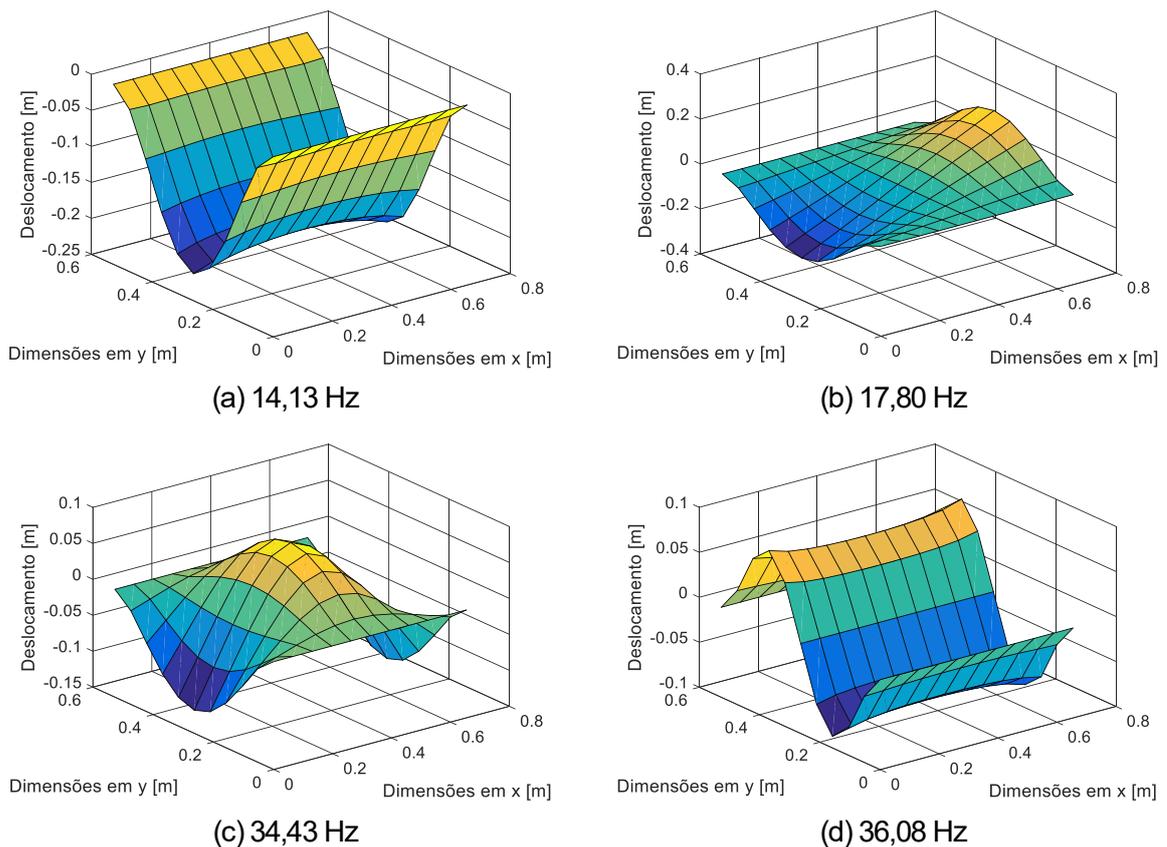


Figura 6.3 – Representação dos quatro primeiros modos do sistema nominal SCA.

Tabela 6.2 – Valores das quatro primeiras frequências naturais do nominal SCA

| Modo | Frequências naturais [Hz] |
|------|---------------------------|
| 1º | 14,13 |
| 2º | 17,80 |
| 3º | 34,43 |
| 4º | 36,08 |

6.2. Redução do sistema viscoelástico determinístico

Nesta seção, será avaliada a capacidade do modelo reduzido em aproximar o comportamento dinâmico do sistema viscoelástico determinístico para uma temperatura de operação de 25°C, conforme os desenvolvimentos apresentados na Seção 3.3, Capítulo 3. Para isto, optou-se por construir as FRFs e as respostas em tensão dos sistemas viscoelásticos completo e reduzido para duas bases de redução, a saber: a primeira refere-se à base de Ritz enriquecida somente com resíduos estáticos do esforço externo (T_R), correspondente ao ponto em vermelho na Figura 6.1; e a segunda refere-se à base proposta neste trabalho (T_{ERM}). Os resultados são apresentados nas Figuras 6.4 e 6.5 para as FRFs e para as respostas em tensão, respectivamente, sendo que, para este último, foi escolhido um elemento finito na porção central da placa próximo ao carregamento.

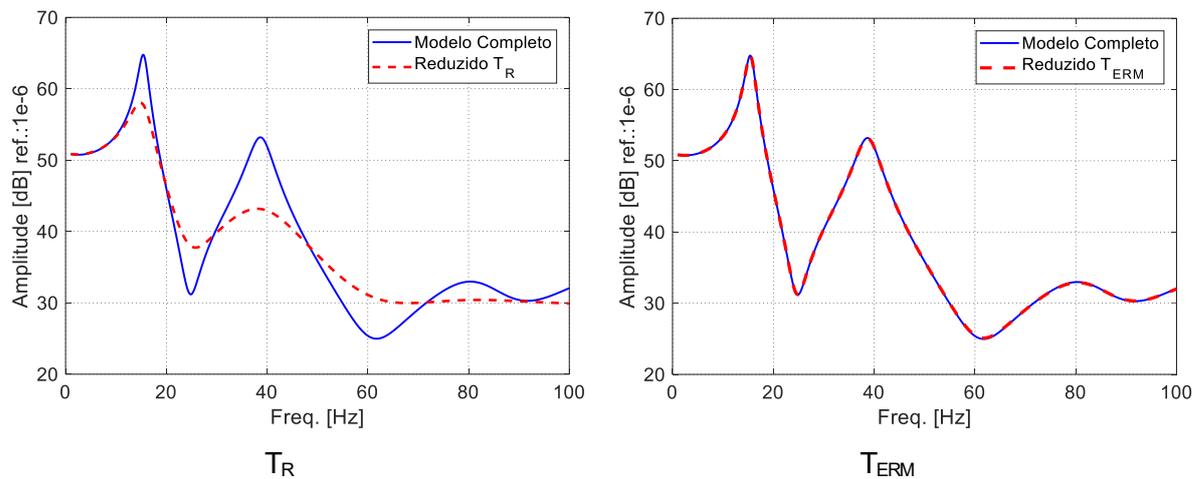


Figura 6.4 – Comparação das FRFs dos modelos nominais completo e reduzido.

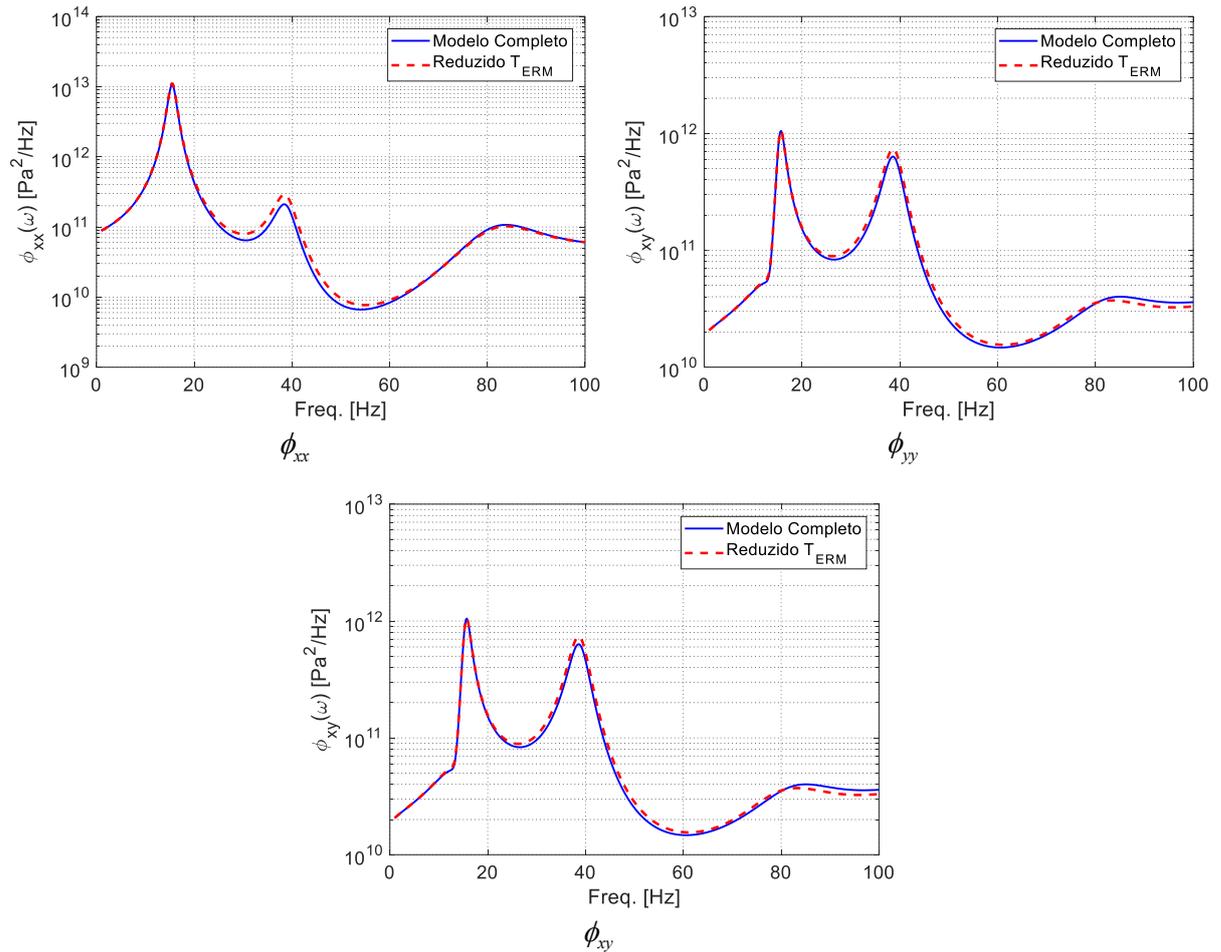


Figura 6.5 - Respostas em tensão dos modelos determinísticos completo e reduzidos.

A partir da análise visual das figuras anteriores, percebe-se claramente a capacidade do método de redução iterativo proposto em aproximar tanto as FRFs, quanto as respostas em tensão do sistema viscoelástico, ambas dependentes fortemente da frequência e da temperatura. Ao analisar o erro relativo, fica evidente a capacidade de representação da base pela dispersão máxima de 0,21% para banda de frequência de 0 a 100 Hz. Além disso, a Tab. 6.3 permite concluir sobre a eficiência do método em termos da redução do custo computacional de cálculo no contexto determinístico para cada uma das respostas, notando-se um ganho computacional médio de aproximadamente 98%. Vale salientar que foi utilizado um computador com processador Intel(R) Core(TM) i7-6700K de 4GHz, 16 GB de RAM instalada, placa de vídeo GEFORCE NVIDIA 9800GT 1GB DDR3 256 BITS e sistema operacional Windows 10 Pro de 64 bits.

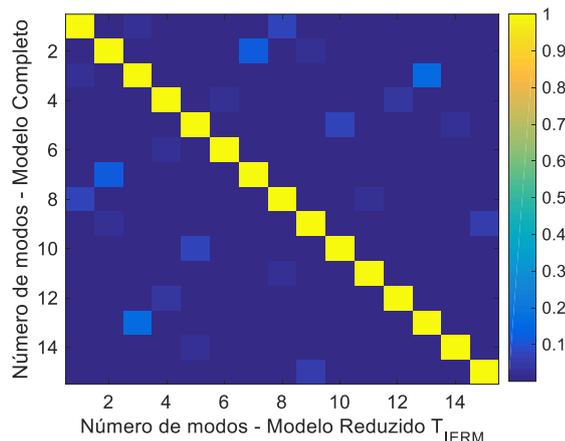
É importante salientar que para o cálculo das respostas em tensão do sistema viscoelástico no domínio da frequência, conforme definido pela relação (2.40), foi considerado um carregamento aleatório do tipo ruído branco, $\phi_f(\omega) = 85 \times 10^3 \text{ Pa}^2/\text{Hz}$, aplicado no ponto em vermelho indicado na Figura 6.1.

Tabela 6.3 - Gasto de tempo no cálculo das respostas dos modelos completo e reduzido

| | FRF | Resp. Tensão | GDLs |
|----------|--------|--------------|-----------|
| Completo | 62,91s | 925,75s | 847 × 847 |
| Reduzido | 0,41s | 7,44s | 59 × 59 |

O modelo reduzido foi ainda avaliado em termos do critério MAC (*Modal Assurance Criteria*), que é um indicador estatístico para comparação quantitativa de vetores modais. O MAC foi modelado a partir do produto escalar normalizado dos vetores modais dos sistemas reduzido e não reduzido, ϕ_R e ϕ_{NR} , respectivamente, conforme a Eq. (6.1). Quando o MAC se aproxima de zero significa que o modelo reduzido não é consistente, enquanto que para valores próximos à unidade, isto indica uma boa correlação entre os modelos. A partir da Figura 6.6 é possível perceber uma boa correção entre os modelos completo e reduzido.

$$MAC = \frac{|\phi_R^T \phi_{NR}^T|^2}{(\phi_R^T \phi_R)(\phi_{NR}^T \phi_{NR})} \quad (6.1)$$

Figura 6.6 - MAC associado aos modelos completo e reduzido para a base, T_{ERM} .

E por fim, a partir do critério multiaxial de Sines definido pela Eq. (4.7), Seção 4.4, Capítulo 4, obteve-se então a esperança matemática do coeficiente de fadiga para o sistema viscoelástico sujeito, neste momento, somente ao carregamento aleatório estacionário e Gaussiano. Para a estimação do índice de fadiga, foram considerados o limite de resistência, $t_{-1} = 92MPa$, válida até, $2,0 \times 10^6$ ciclos.

A Fig. 6.7 mostra a distribuição do índice de Sines para a placa sanduíche viscoelástica. Nota-se que as áreas mais críticas são aquelas de maiores coeficientes que, neste caso, estão concentradas

na porção central próxima ao carregamento. Portanto, esses elementos são os considerados mais críticos em termos da vida em fadiga.

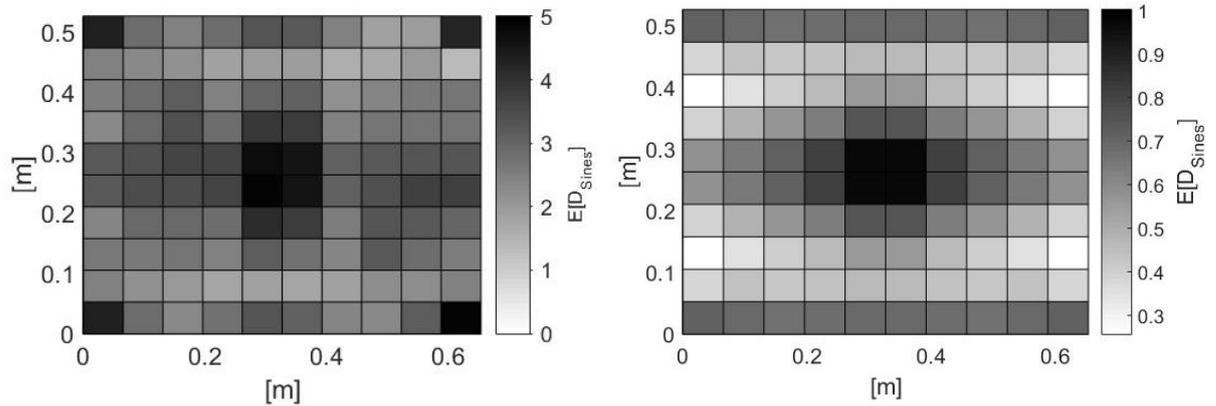


Figura 6.7 – Distribuição do índice de Sines para a placa sem e com tratamento viscoelástico.

A Tab. 6.4 compara os valores máximos dos índices de fadiga para os modelos completo e reduzido e para pontos diferentes da placa. A comparação destes valores leva a diferenças inferiores a 1%, o que reforça a qualidade do modelo viscoelástico reduzido na predição do índice de fadiga multiaxial de Sines.

Salienta-se que os resultados apresentados são para a temperatura de operação do material viscoelástico de 25°C. Entretanto, como esse parâmetro é o que mais afeta a eficiência dos materiais viscoelásticos em aplicações práticas de engenharia, neste capítulo será feito um estudo da influência do mesmo no desempenho do sistema viscoelástico.

Tabela 6.4 – Comparação dos índices de fadiga dos modelos reduzido e completo

| Modelos | Centro | Borda |
|----------|--------|--------|
| Completo | 0,9765 | 0,7210 |
| Reduzido | 0,9718 | 0,7153 |

6.3. Avaliação das respostas dinâmicas do sistema estocástico

Nesta seção, são mostrados os resultados obtidos para o modelo viscoelástico estocástico considerando tanto o carregamento aleatório quanto a presença de incertezas nos parâmetros do modelo. Para tanto, foi feito inicialmente um estudo comparativo relacionando a estimativa do coeficiente de Sines para diferentes valores das espessuras das camadas e da temperatura de operação, que são os parâmetros incertos do modelo. Na sequência, assim como no caso determinístico, foi avaliada a eficiência do modelo estocástico reduzido em aproximar os envelopes das FRFs e das respostas em

tensão do sistema, além do ganho computacional de cálculo dos envelopes de soluções. Por fim, são apresentados os índices de fadiga obtidos e discutido sobre a importância de se considerar as incertezas nos parâmetros de projeto para representar sistemas mais realísticos de engenharia.

6.3.1. Influência paramétrica no índice de fadiga do sistema viscoelástico nominal

Da literatura (de Lima *et al.*, 2006), sabe-se que as espessuras das camadas e a temperatura de operação exercem forte influência no comportamento de um sistema viscoelástico. Entretanto, a temperatura é considerada o parâmetro de maior influência nas propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos comumente usados em aplicações práticas, além de ser um parâmetro de difícil controle (Nashif *et al.*, 1985). Neste sentido, o primeiro passo foi avaliar a influência da temperatura de operação do sistema viscoelástico na estimativa do índice de fadiga. Para isto, considerou-se uma variação de 10°C para valores entre 0°C e 60°C.

A Fig. 6.8(a) apresenta o índice de fadiga do modelo completo para cada valor de temperatura, conforme o módulo complexo (2.38), Seção 2.2, Capítulo 2. Da Fig. 6.8(a) percebe-se claramente que os menores valores para o índice de fadiga estão na faixa entre 30°C e 40°C. A partir deste intervalo, realizou-se uma segunda análise com variações de 1°C. Portanto, a Fig. 6.8(b) mostra que a temperatura de 35°C é uma boa escolha por apresentar o menor índice de fadiga.

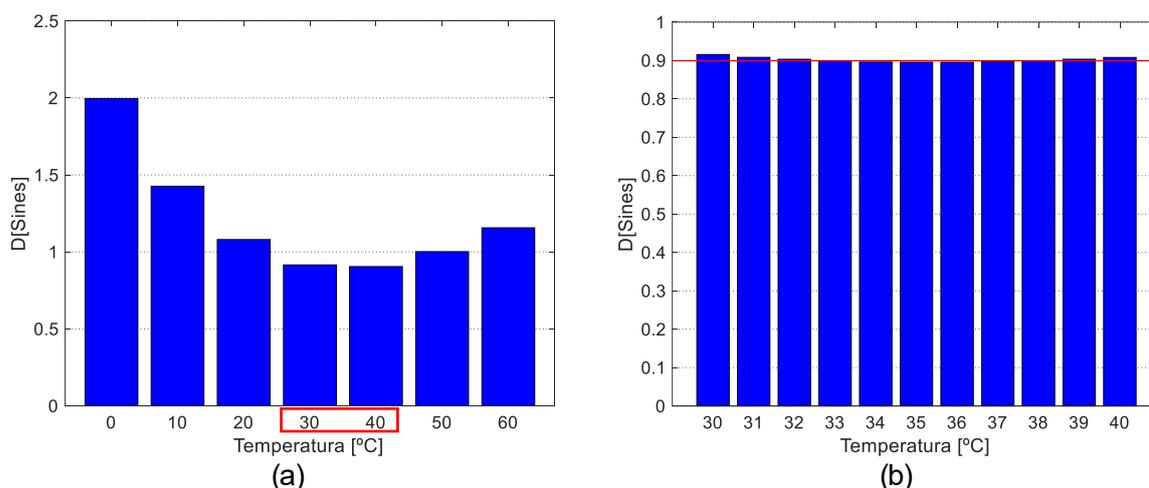


Figura 6.8 – Influência da temperatura no índice de fadiga: (a) 0 a 70°C, (b) 30°C a 40°C.

Outros parâmetros que influem significativamente no índice de fadiga são as espessuras das camadas viscoelástica e restringente. Neste caso, foi assumida uma temperatura de operação constante de 35°C com variação nas espessuras de $\pm 15\%$ em torno dos seus valores nominais definidos na Tab. 6.1. Os resultados obtidos para uma porção central da placa próximo ao carregamento são mostrados na Figs. 6.9. Percebe-se claramente que um aumento em ambas as espessuras separadamente leva a

uma diminuição significativa no índice de fadiga. Isto pode ser explicado pelo aumento da capacidade de dissipação de energia apresentada pelo tratamento viscoelástico. Entretanto, em aplicações práticas principalmente de interesse aeronáutico onde o peso é um dos grandes problemas, deve-se ter o cuidado em avaliar o custo de obtenção de um projeto menos susceptível à falha por fadiga e o peso acrescentado à estrutura.

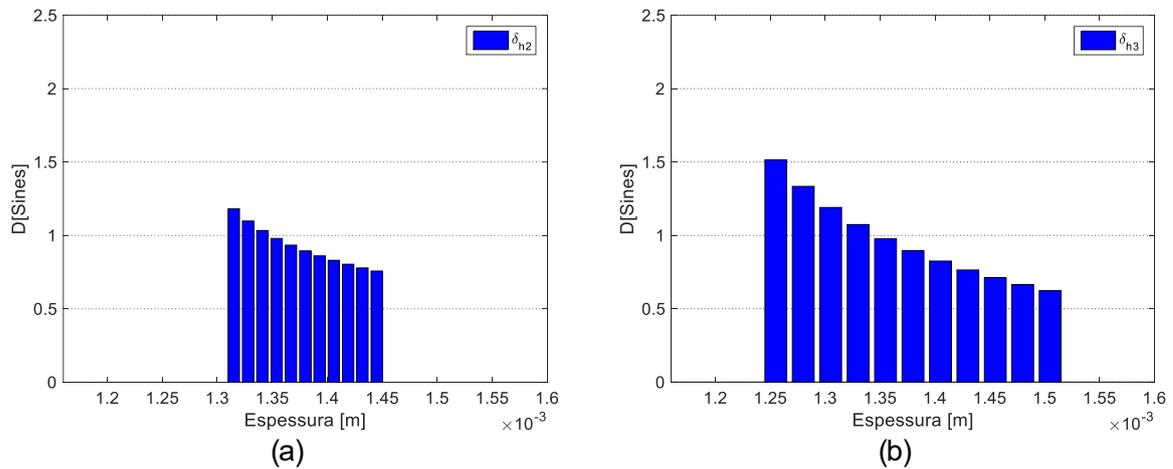


Figura 6.9 – Influência das espessuras no índice de fadiga de um elemento da porção central da placa: (a) espessura viscoelástica; (b) camada restringente.

Para o caso em que são consideradas variações simultâneas nas espessuras e na temperatura do material viscoelástico, a Fig. 6.10(b) deixa claro que variações na temperatura do material viscoelástico pode afetar significativamente a vida em fadiga de um sistema viscoelástico.

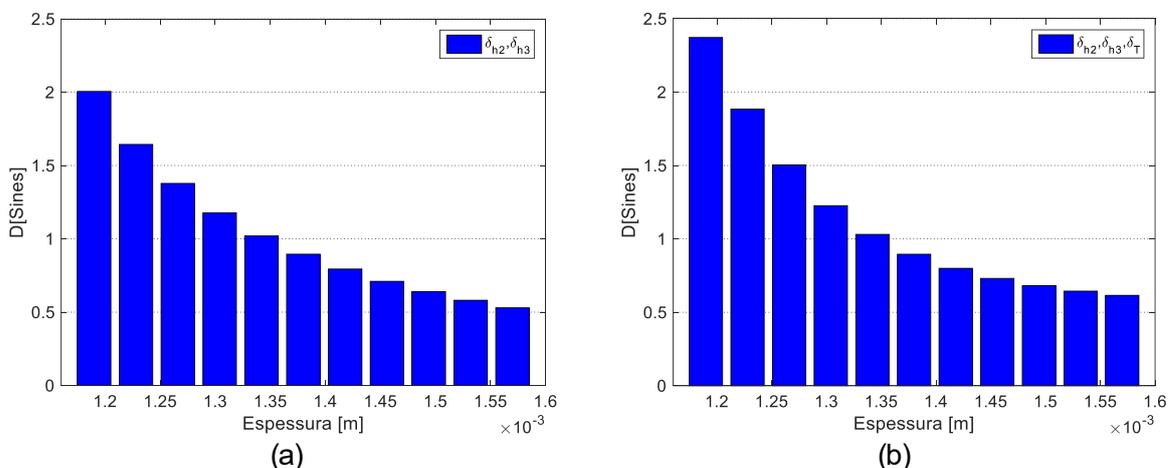


Figura 6.10 – Influência simultânea dos parâmetros de projeto no índice de fadiga para: (a) espessuras das camadas; (b) espessuras das camadas e temperatura

6.3.2. Influência das incertezas no índice de fadiga do sistema viscoelástico estocástico

Nesta seção, será avaliado o sistema viscoelástico na presença de incertezas paramétricas obtido pelo método de elementos finitos estocásticos via emprego da expansão de KL, conforme os desenvolvimentos apresentados no Capítulo 3. É evidente que modelos estocásticos apresentam um alto custo computacional na construção dos envelopes das soluções, principalmente para o problema em estudo em que as matrizes não são constantes, o que inviabiliza a realização de simulações para diferentes combinações aleatórias. Neste sentido, faz-se necessário aplicar a técnica de redução de modelos descrita na Seção 3.3, Capítulo 3, para obter os envelopes das FRFs e das respostas em tensão do sistema viscoelástico e a posterior estimativa do índice de fadiga.

Para a construção do modelo estocástico viscoelástico, utilizou-se dez termos ($N_t = 10$) na composição da série de KL definida na Eq. (3.1), Seção 3.2, Capítulo 3. Este número de termos foi fixado também nos trabalhos de Lima, Rade e Bouhaddi (2010) e Rosa e de Lima (2016). Além disso, as respostas dinâmicas foram avaliadas para um total de $N_s = 500$ amostras obtidas pelo método HCL com distribuição Gaussiana. Este número de amostras foi fixado a partir de um estudo de convergência feito *a priori* baseado no seguinte desvio médio quadrático (RMSD) entre as FRFs aleatórias, $\mathbf{H}(\omega, T, \theta)$, e determinísticas, $\mathbf{H}(\omega, T)$, do sistema viscoelástico:

$$RMSD = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} |\mathbf{H}(\omega, T, \theta) - \mathbf{H}(\omega, T)|^2} \quad (6.2)$$

O sistema viscoelástico estocástico será avaliado para os cenários de incertezas descritos na Tab. 6.5. Os cenários de incertezas investigados foram estabelecidos a partir do estudo de variações paramétricas introduzidas nos parâmetros físicos e geométricos que influem na eficiência do sistema viscoelástico em termos dos resultados do coeficiente de fadiga.

A título de ilustração, a Fig. 6.11 mostra as análises de convergência via RMSD normalizado para todos os cenários de interesse desse estudo. Conclui-se que o número adotado de 500 amostras garante uma boa convergência dos resultados para os diferentes níveis de incertezas.

Os resultados obtidos para cada cenário serão apresentados na forma de envelope de soluções. A Fig. 6.12 mostra os envelopes das amplitudes das FRFs para cada cenário investigado, podendo ser observadas as dispersões maiores ou menores das respostas dinâmicas aleatórias para cada caso a partir da simples observação dos extremos estatísticos máximos, mínimo e médio das soluções. Além disso, pode-se comparar os envelopes com as respostas dos sistemas determinísticos.

Tabela 6.5 - Cenários de incertezas para avaliar o sistema viscoelástico estocástico

| Cenário | Nível de Incerteza | | |
|---------|--------------------|-------|-----|
| | h_2 | h_3 | T |
| 1 | 5% | 5% | — |
| 2 | 10% | 10% | — |
| 3 | 5% | 5% | 5% |
| 4 | 10% | 10% | 10% |

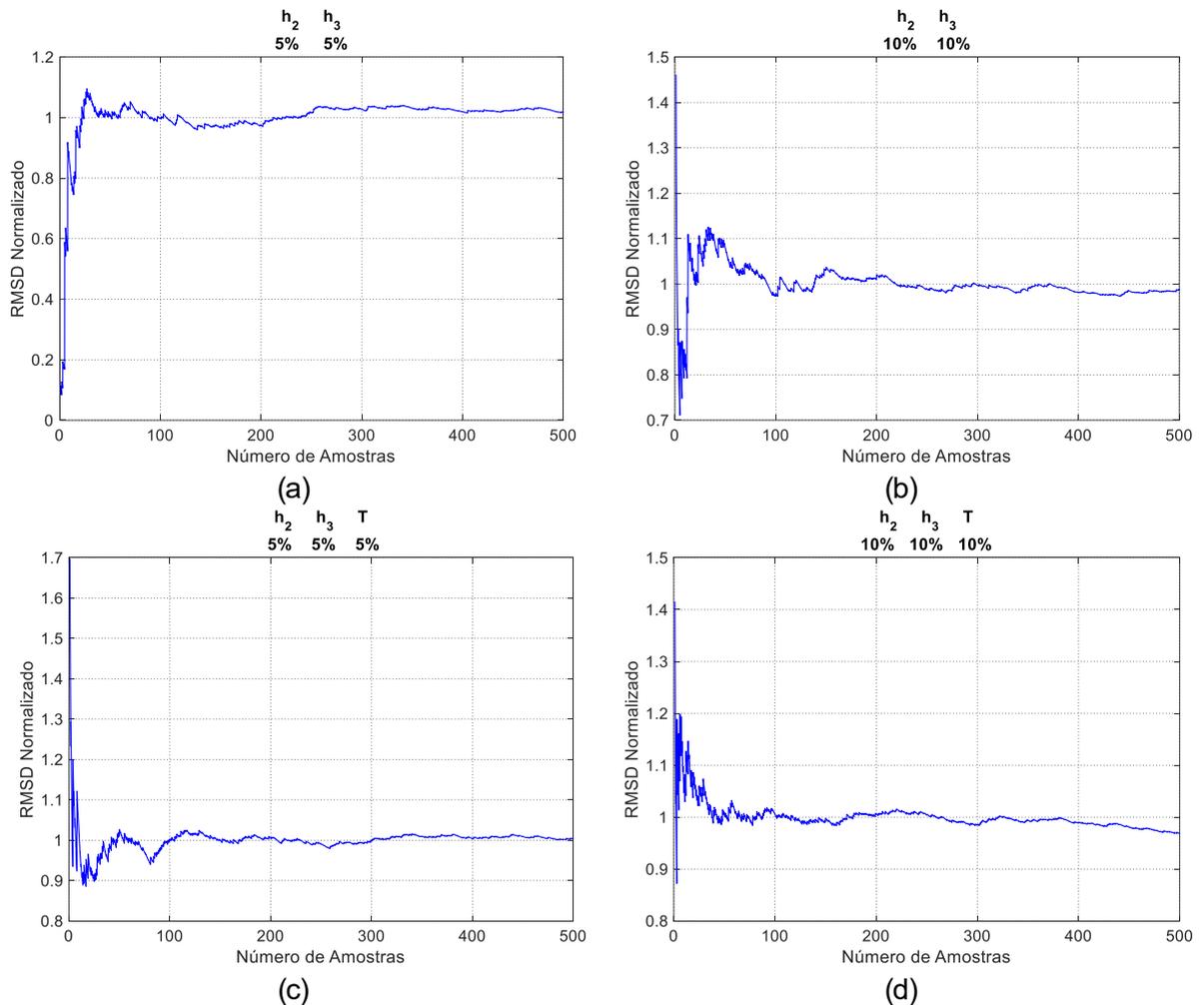


Figura 6.11 - Análise de convergência via RMSD normalizado para o cenário 4

Pela análise da Fig. 6.12, pode-se constatar sem dificuldades que o aumento das incertezas nas espessuras das camadas leva a um aumento significativo do intervalo de confiança do envelope das soluções. Entretanto, as amplitudes das FRFs do sistema determinístico estão contidas nos envelopes das soluções de ambos os cenários, o que permite concluir sobre a representabilidade do modelo de elementos finitos do sistema viscoelástico. Além disso, verifica-se um aumento da influência das incertezas no modelo quando são consideradas também as perturbações na temperatura de operação do material viscoelástico (cenários 3 e 4), como esperado. Mas, mesmo para estes cenários de

incertezas, o modelo determinístico ainda é representativo, uma vez que está contido entre os extremos estatísticos das soluções.

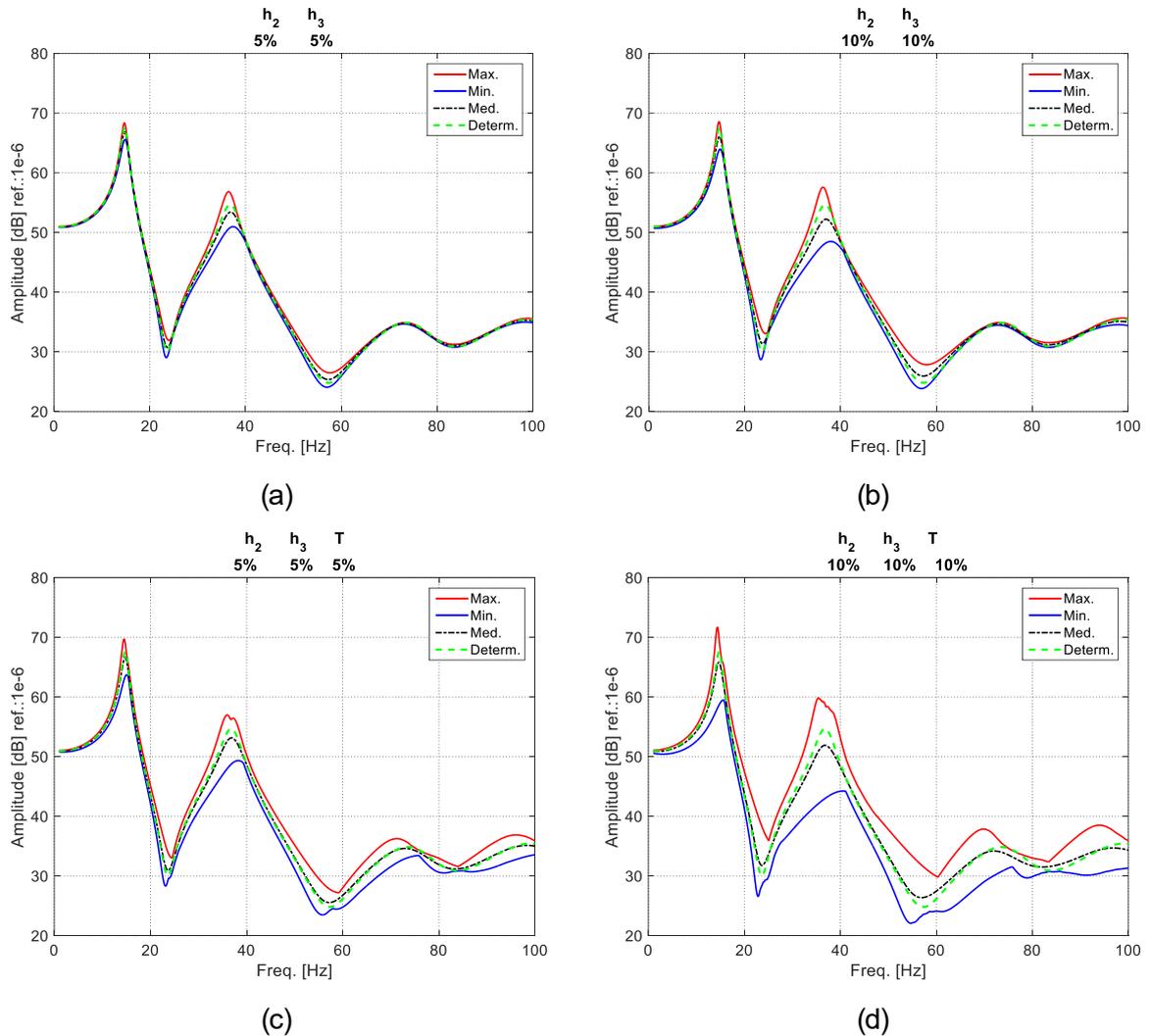


Figura 6.12 - Envelopes das FRFs para os cenários: (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4.

As Figs. 6.13 a 6.15 mostram as dispersões das respostas em tensão aleatórias obtidas com base nas PSDs definidas pela Eq. (3.12), Seção 3.2.1, Capítulo 3. Cada envelope representa os casos de incertezas investigados para as tensões normais, s_{xx} e s_{yy} , e para a tensão cisalhante, s_{xy} , referente ao estado plano de tensões assumidas pelo modelo (ver Capítulo 2). De maneira geral, os resultados também mostram a influência significativa da temperatura nas respostas em tensão aleatórias do sistema viscoelástico. Além disso, eles permitem identificar os níveis mais elevados de componentes de tensão atuantes no elemento finito central dentro da faixa de frequência de interesse para que, na sequência, seja estimado o índice de fadiga do mesmo.

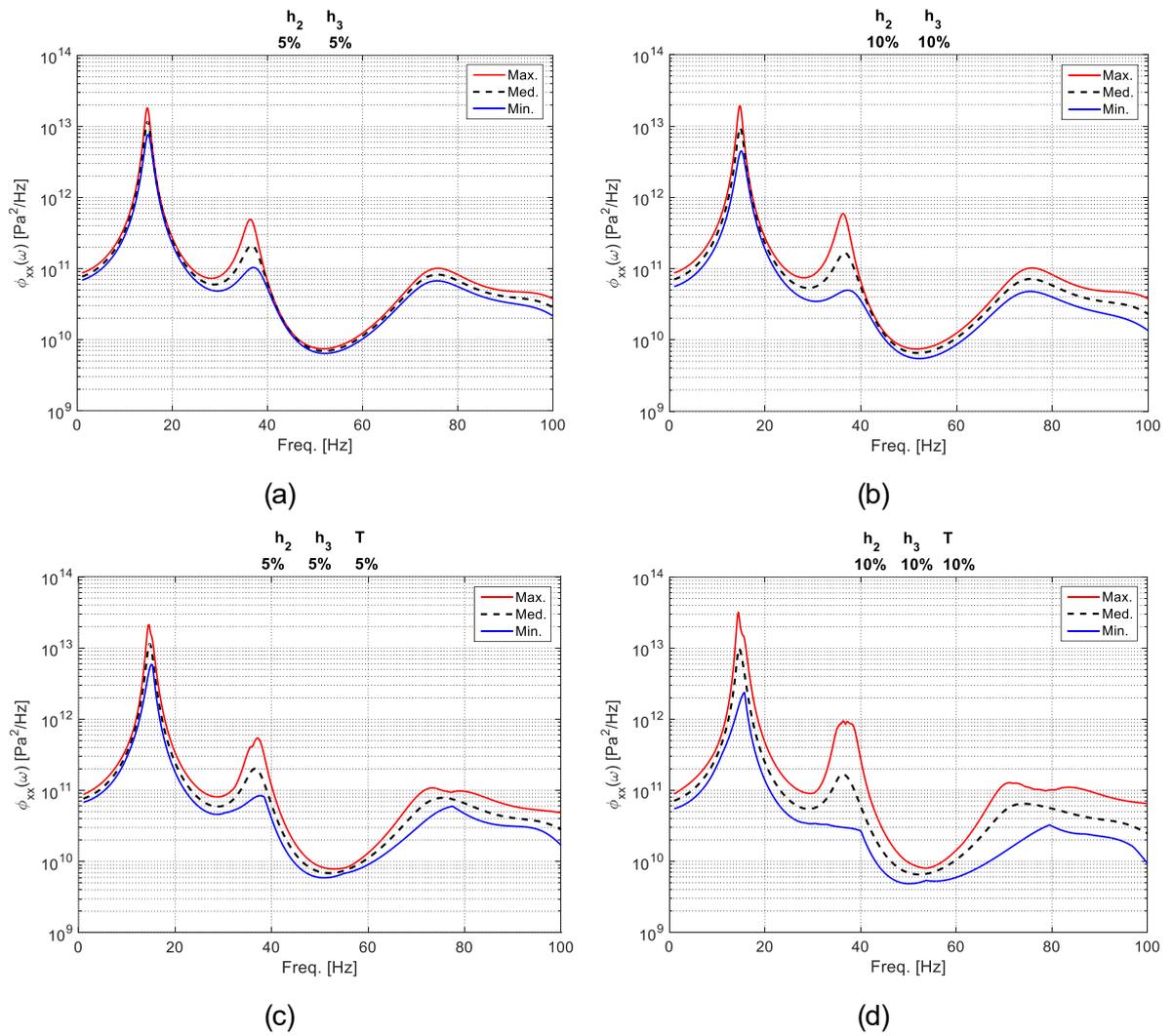
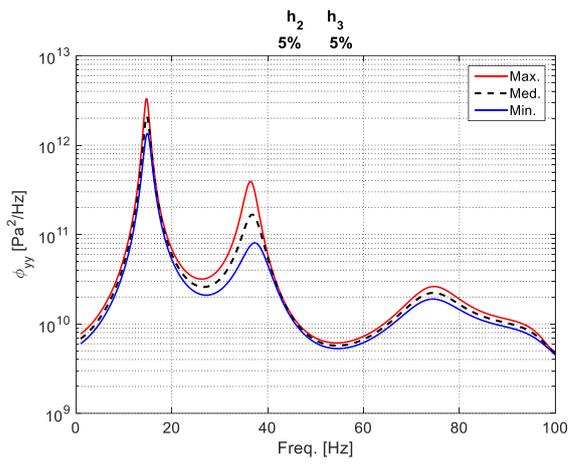
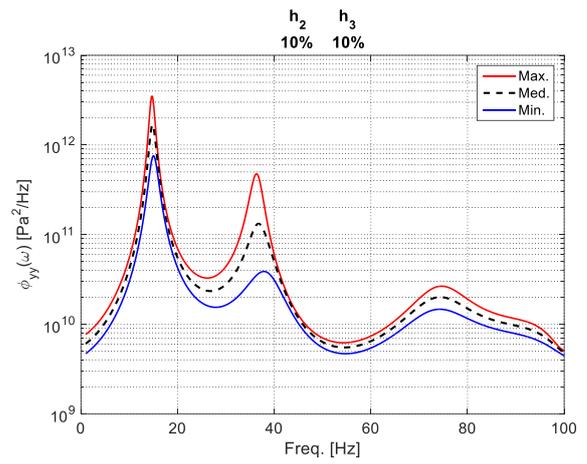


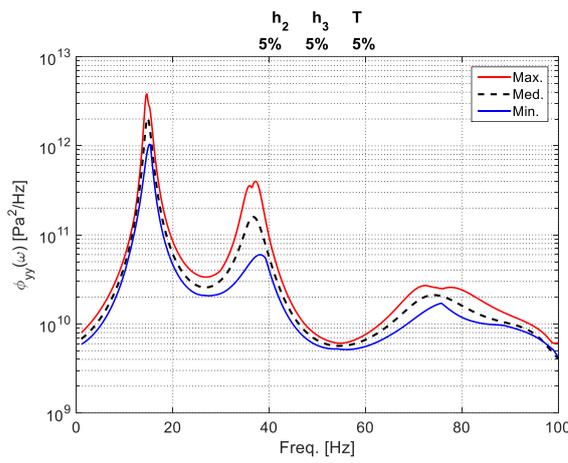
Figura 6.13 - Envelopes da resposta em tensão s_{xx} para os cenários (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4.



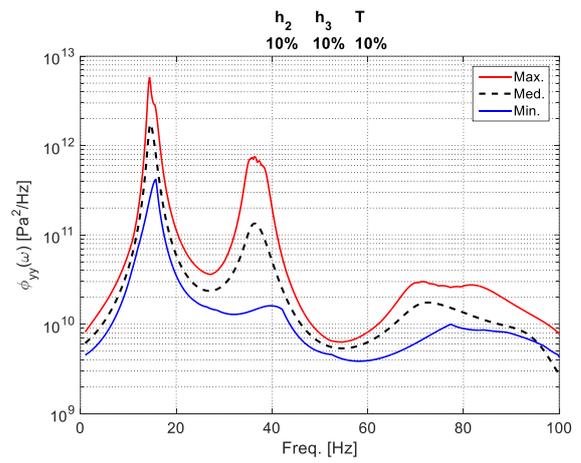
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.14 - Envelopes da resposta em tensão s_{yy} para os cenários: (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4.

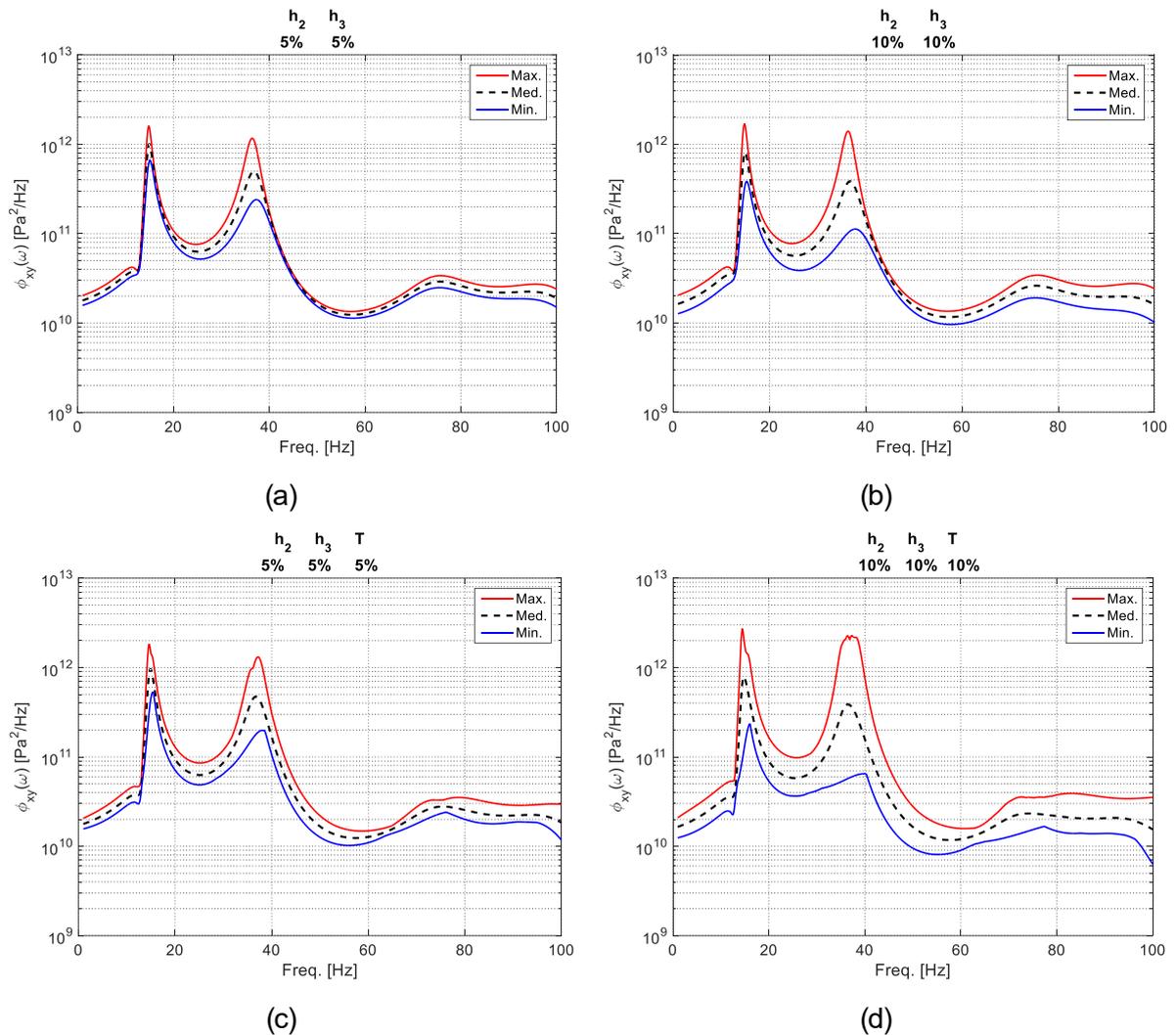


Figura 6.15 - Envelopes da resposta em tensão s_{xy} para os cenários: (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4.

A partir das respostas em frequência e em tensão aleatórias do sistema viscoelástico estocástico para os cenários definidos na Tab. 6.5, pode-se então estimar os índices de fadiga. A Fig. 6.16 mostra as distribuições do índice de fadiga para os diferentes cenários de estudo. Novamente pode-se constatar sem dificuldades a influência significativa da temperatura no índice de fadiga. Para os cenários 2, 3 e 4, o índice supera a unidade, indicando a falha do sistema. Os máximos valores do índice de fadiga para os extremos estatísticos de cada cenário estão mostrados na Tab. 6.6. Pode-se identificar facilmente os pontos mais críticos da placa sanduíche, o que facilitaria a escolha dessas áreas como sendo áreas de atenção para atuação do sistema viscoelástico com vistas à redução do índice de fadiga.

Por fim, vale salientar que os resultados obtidos nesta fase permitiram concluir sobre a importância em considerar as incertezas paramétricas nos modelos visando aplicações mais realísticas no futuro de interesse industrial.

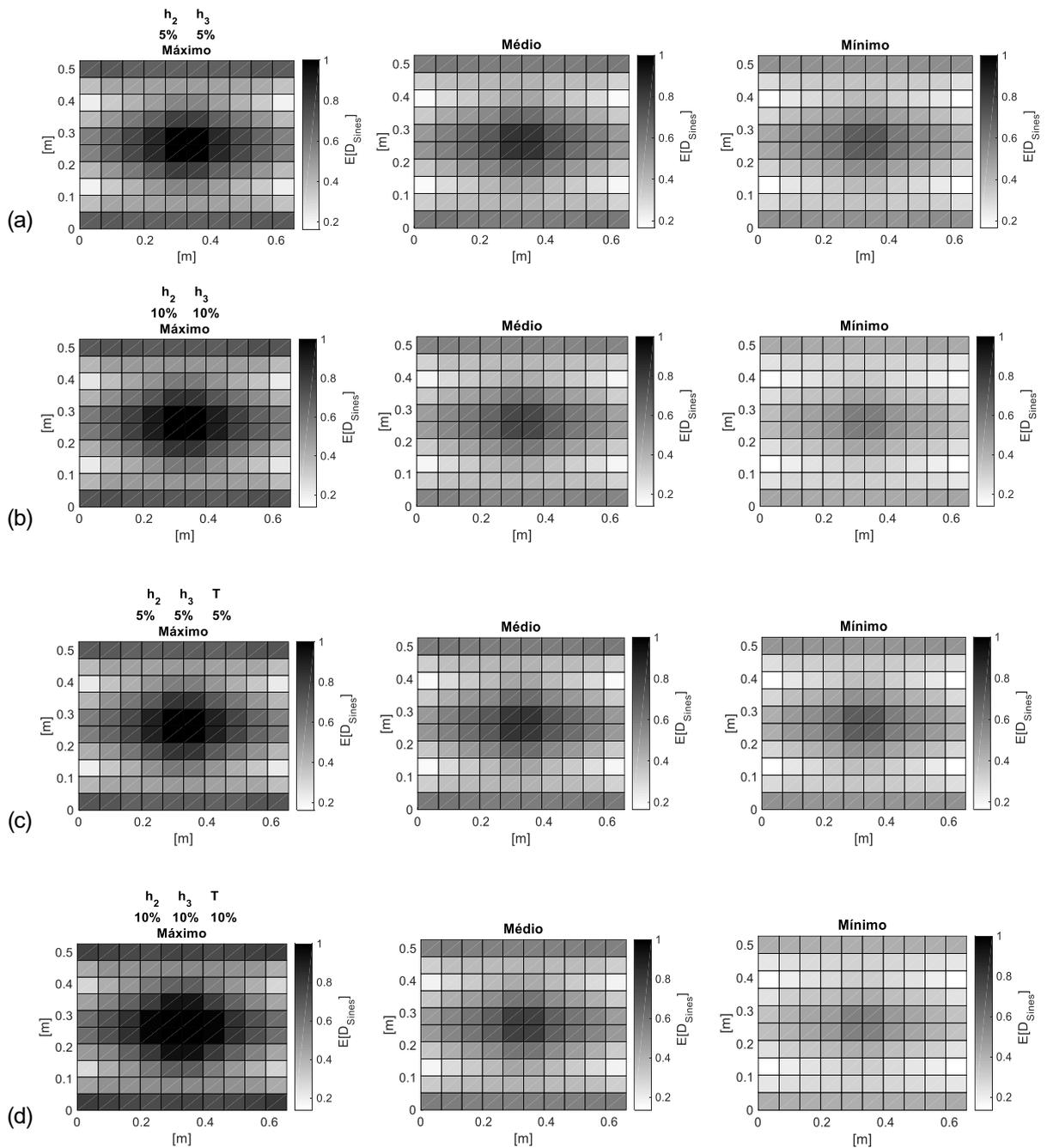


Figura 6.16 - Distribuição do índice de fadiga do sistema viscoelástico estocástico para os diferentes cenários de incertezas.

Tabela 6.6 – Índices de fadiga máximos para diferentes elementos e cenários de incertezas

| Máximos | Cenário 1 | | Cenário 2 | | Cenário 3 | | Cenário 4 | |
|---------|-----------|--------|-----------|--------|-----------|--------|-----------|--------|
| | Centro | Bordas | Centro | Bordas | Centro | Bordas | Centro | Bordas |
| Máximo | 0,9973 | 0,7006 | 1,0327 | 0,7127 | 1,0405 | 0,7231 | 1,1803 | 0,8057 |
| Médio | 0,8188 | 0,6033 | 0,7547 | 0,5555 | 0,8175 | 0,6032 | 0,7745 | 0,5724 |
| Mínimo | 0,7003 | 0,5283 | 0,5769 | 0,4376 | 0,6910 | 0,5216 | 0,5588 | 0,4214 |

6.4. Problema de otimização multiobjetivo determinístico (PMOD)

Nesta seção, será empregado o procedimento de otimização multiobjetivo (PMO) para o problema determinístico, tendo como funções objetivo a serem minimizadas a soma das amplitudes dos dois primeiros modos da FRF mostrada na Fig. 6.4 e a massa total do tratamento viscoelástico (camadas viscoelástica e restringente). O problema é definido pela Eq. (6.3). Estas funções conflitantes foram escolhidas tendo em vista que, para se ter um aumento da eficiência do tratamento viscoelástico, a primeira estratégia seria um aumento das espessuras das camadas do tratamento e, como consequência, um aumento da massa do sistema. Entretanto, em aplicações práticas de interesse aeronáutico, por exemplo, o acréscimo de massa à estrutura torna-se um grande problema deste tipo de controle passivo de vibrações. Portanto, este se torna um problema de otimização multiobjetivo bastante interessante do ponto de vista da análise de fadiga.

$$\text{Minimizar} \begin{cases} f_1 = \text{amplitude}(1^{\circ} \text{ modo}) + \text{amplitude}(2^{\circ} \text{ modo}) \\ f_2 = \text{massa tratamento}(m_{h_2} + m_{h_3}) \end{cases} \quad (6.3)$$

Na Tab. 6.7 estão definidas as variáveis de projeto com seus respectivos valores nominais e correspondentes variações consideradas no espaço de busca para a otimização. Já na Tab. 6.8 estão definidos os valores dos parâmetros utilizados no algoritmo NSGA.

Tabela 6.7 - Definição do espaço de projeto para o problema PMOD

| Variáveis de projeto | Valores nominais | Variações admissíveis |
|----------------------|------------------|-----------------------|
| $h_2 [mm]$ | 0,13 | 60% |
| $h_3 [mm]$ | 0,25 | 30% |
| $T [^{\circ}C]$ | 35 | 15% |

Tabela 6.8 - Parâmetros do NSGA

| | |
|------------------------------------|------|
| Probabilidade de seleção | 0,25 |
| Probabilidade de reprodução | 0,25 |
| Probabilidade de mutação | 0,25 |
| Número de gerações | 100 |
| Número de indivíduos | 20 |
| Coefficiente de niche (σ) | 0,20 |

A Fig. 6.17 representa as soluções de Pareto para o problema PMOD. O critério de escolha do ponto ótimo A na Frente de Pareto foi baseado no melhor índice que atendeu ao melhor compromisso

entre as duas funções objetivo. Os valores ótimos determinísticos das variáveis de projeto, bem como os valores de cada função objetivo, estão representados na Tab. 6.9.

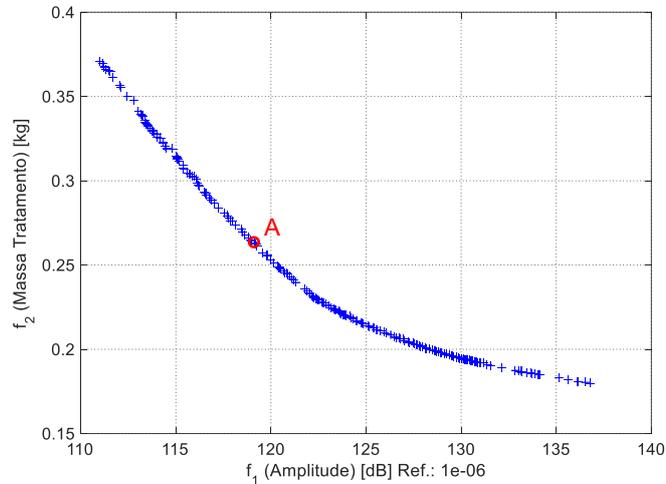


Figura 6.17 – Frente de Pareto para o PMOD

Tabela 6.9 – Valores dos ótimos determinísticos e funções objetivo para o problema PMOD

| Valores ótimos (A) | |
|--------------------|--------|
| h_2 [mm] | 0,2080 |
| h_3 [mm] | 0,2216 |
| T [°C] | 29,75 |
| Funções objetivo | |
| Amplitude [dB] | 118,07 |
| Massa [kg] | 0,2743 |

Com base nos valores ótimos é possível comparar o comportamento dinâmico do sistema nominal com o do sistema otimizado. É importante destacar que o modelo utilizando os parâmetros ótimos apresenta massa menor do que a do modelo nominal de 0,2752 kg .

A Fig. 6.18 compara as amplitudes das FRFs e respostas em tensão dos sistemas nominal e otimizado. Nota-se que o sistema otimizado é um pouco mais eficiente do que o sistema nominal em termos da atenuação das amplitudes das FRFs e das respostas em tensão. Portanto, é de se esperar que ocorra uma diminuição do índice de fadiga para o sistema otimizado quando comparado ao sistema nominal, como pode ser confirmado pela análise da Fig. 6.19 que mostra as distribuições do índice de fadiga para os sistemas nominal e otimizado. Percebe-se uma redução no índice de fadiga de 10,62% e 6,78% para os elementos das bordas engastadas e do centro, respectivamente. A redução no índice

de fadiga já era esperada uma vez que, o índice de fadiga depende diretamente das FRFs e das respostas em tensão do sistema viscoelástico, conforme Eq. (2.40), Seção 2.3.1, Capítulo 2.

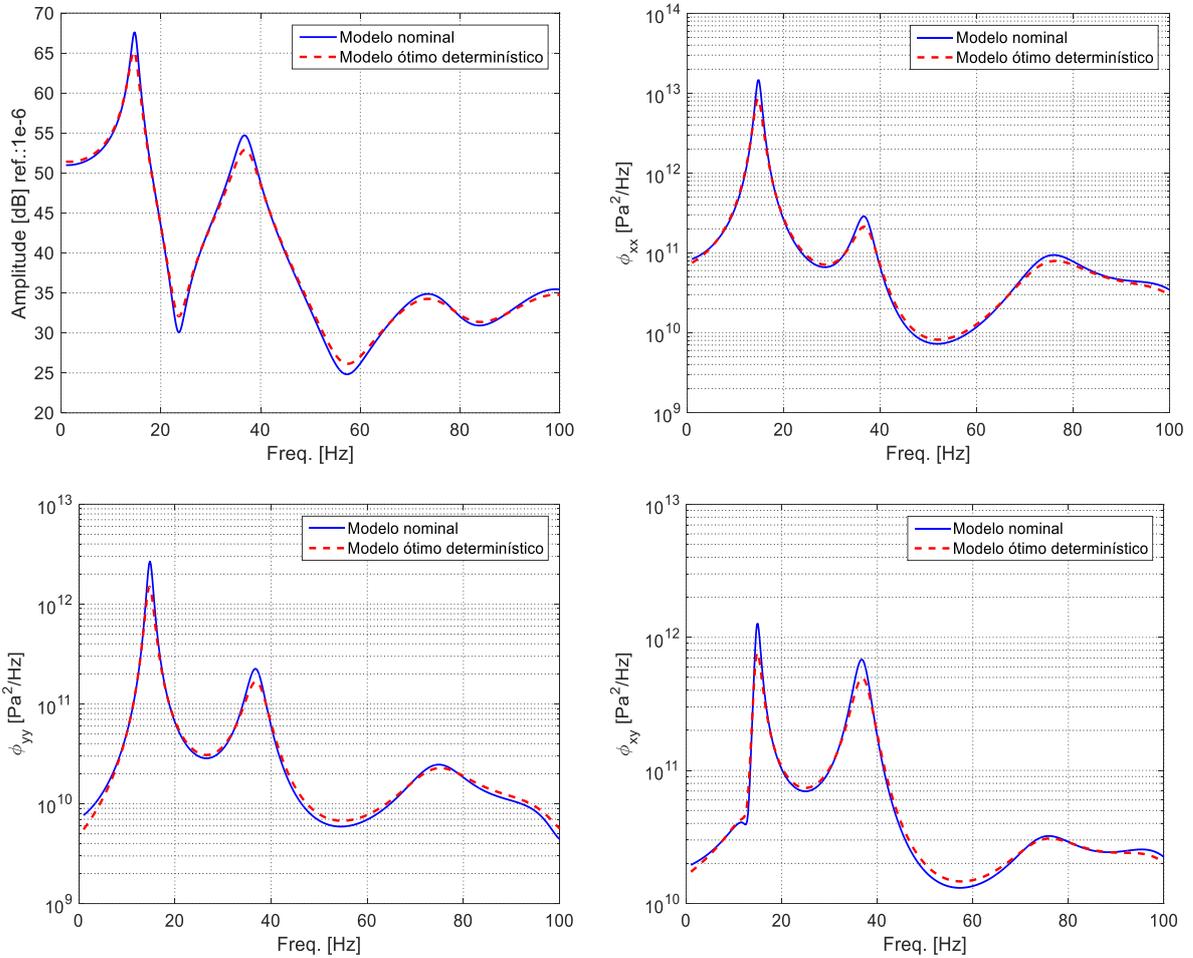


Figura 6.18 – Comparação das FRFs e das respostas em tensão dos sistemas nominal e otimizado para o problema PMOD

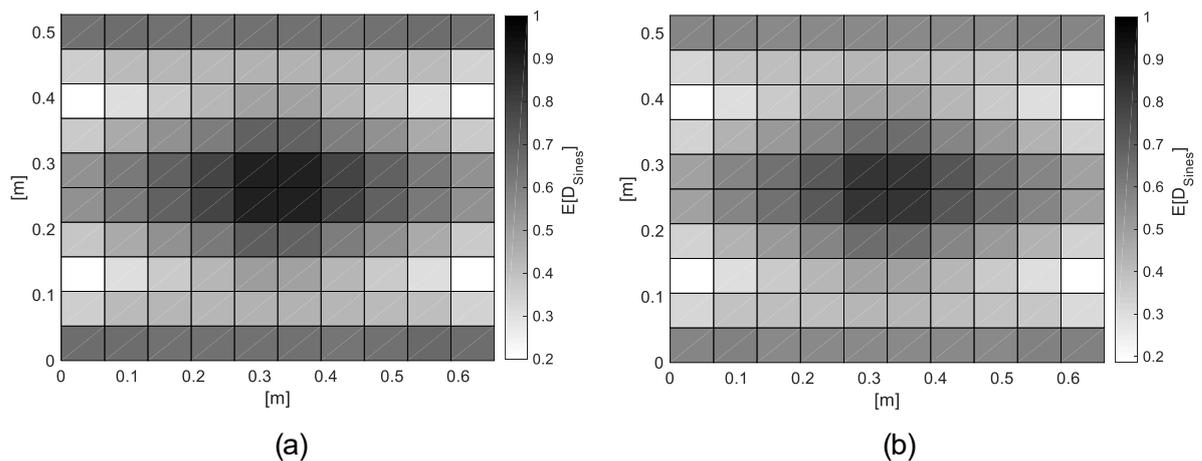


Figura 6.19 - Comparação dos índices de fadiga para os sistemas nominal (a) e otimizado (b) para o problema PMOD.

6.5. Problema de otimização multiobjetivo robusto (PMOR)

Esta seção é dedicada ao problema PMOR considerando as incertezas nas variáveis de projeto durante o procedimento de otimização, conforme espaço de projeto definido na Tab. 6.10. Desta forma, as funções objetivo a serem otimizadas no PMOR são as mesmas consideradas no caso PMOD, além das funções vulnerabilidade a serem minimizadas ao mesmo tempo em que as funções custo originais, conforme procedimento ilustrado na Fig. 5.6, Seção 5.4, Capítulo 5. Segue o seguinte problema a ser otimizado:

$$\text{Minimizar} \begin{cases} f_1 = \text{amplitude}(1^\circ\text{Modo}) + \text{amplitude}(3^\circ\text{Modo}) \\ f_2 = \text{massa tratamento}(m_{h_2} + m_{h_3}) \\ f_3 = (\sigma_1/\mu_1)^{-1} : \text{vulnerabilidade da } f_1 \\ f_4 = (\sigma_2/\mu_2)^{-1} : \text{vulnerabilidade da } f_2 \end{cases} \quad (6.4)$$

Da mesma forma que na otimização multiobjetivo determinística, aplicou-se o algoritmo NSGA com os mesmos parâmetros da Tab. 6.8. Para obter as funções de vulnerabilidade, a cada geração foram realizadas 2000 tiragens aleatórias, com base em um estudo prévio de convergência das FRFs, como realizado na Fig. 6.11.

Tabela 6.10 - Definição do espaço de projeto para o problema PMOR

| Variáveis de projeto | Valores nominais | Variações admissíveis | Níveis de incertezas |
|----------------------|------------------|-----------------------|----------------------|
| $h_2 [mm]$ | 0,13 | 60% | $\Delta h_2 = 10\%$ |
| $h_3 [mm]$ | 0,25 | 30% | $\Delta h_3 = 10\%$ |
| $T [^\circ C]$ | 35 | 15% | $\Delta T = 5\%$ |

A Fig. 6.20 representa as soluções de Pareto para o problema robusto em termos das funções custo e suas respectivas vulnerabilidades para a identificação dos pontos com menores dispersões ao redor de cada solução ótima encontrada no espaço objetivo. Assim, foi possível determinar parâmetros com menor vulnerabilidade para obter as soluções ótimas e robustas. Da Fig. 6.20(a), nota-se o intervalo de dispersão entre 0,005% e 0,025%, relativo à soma das amplitudes de vibração dos dois primeiros modos. Para o caso da massa total do tratamento viscoelástico, a Fig. 6.20(b) estabelece uma dispersão entre 0,01% a 0,035%.

A Fig. 6.21 faz uma comparação entre as Frentes de Pareto obtidas do problema PMOD (curvas em azul) e as correspondentes geradas pela implementação do problema PMOR (curvas em vermelho). De imediato, pode-se notar que as soluções ótimas determinísticas dominam as soluções ótimas robustas. Entretanto, as soluções determinísticas correspondentes ao Ponto A do espaço determinístico não são robustas no que diz respeito às incertezas nas suas variáveis ótimas quando comparadas com as correspondentes geradas para o ponto B do espaço objetivo robusto, como será verificado na sequência.

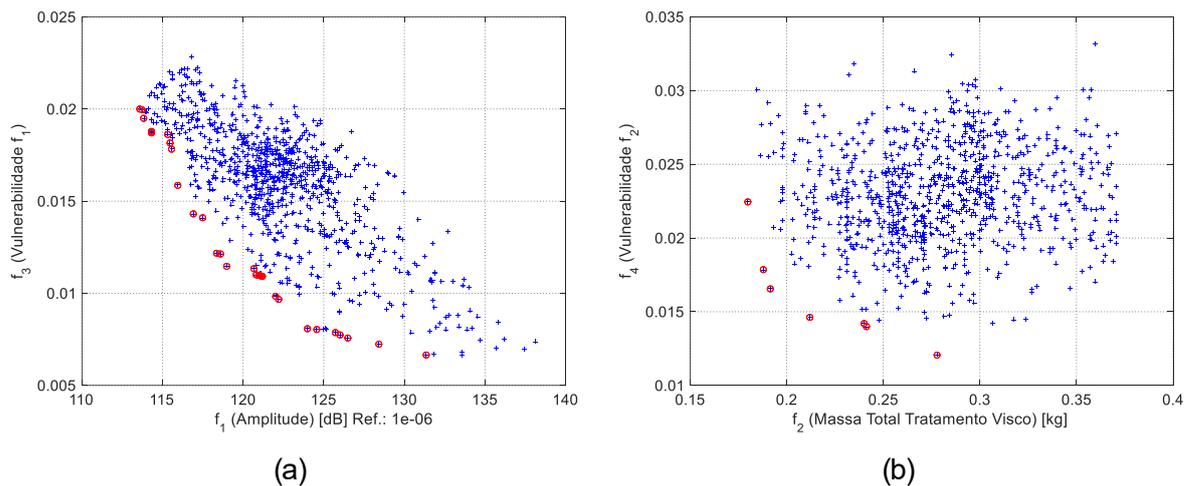


Figura 6.20 – Soluções de Pareto para o PMOR: (a) amplitude de vibração vs vulnerabilidade; (b) Massa do tratamento viscoelástico vs vulnerabilidade

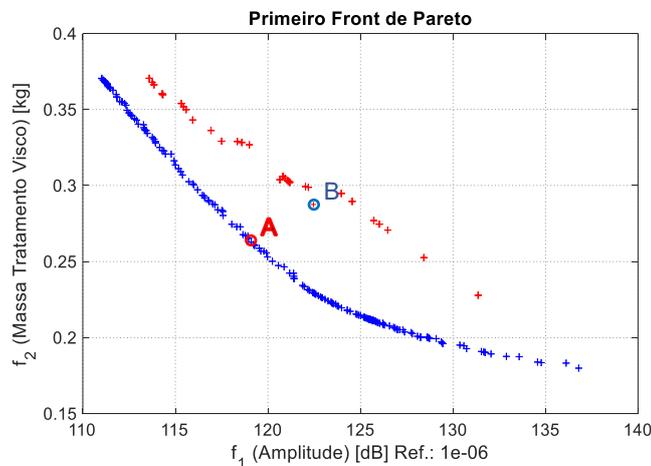


Figura 6.21 – Comparação das Frentes de Pareto dos problemas PMOD e PMOR

6.5.1. Avaliação da robustez das soluções ótimas determinísticas e robustas

Com base nos resultados obtidos para os problemas PMO e PMOR definidos, respectivamente, nas Tabs. 6.9 e 6.11, faz-se necessário avaliar a estabilidade de ambas as soluções com vistas à sua robustez. Para avaliá-las, é necessário analisar os envelopes das soluções em termos das amplitudes das FRFs para os parâmetros definidos como ótimos determinísticos e ótimos robustos. Neste sentido, foram geradas aleatoriamente 300 amostras utilizando o HCL para cada variável de projeto relativa aos Pontos A e B dos espaços objetivo determinístico e robustos, respectivamente, e construído os envelopes das FRFs apresentados na Fig. 6.22. Neste caso, os envelopes foram obtidos para os níveis de incertezas de 2% e 5% introduzidos nos valores ótimos das variáveis de projeto.

Tabela 6.11 – Valores dos ótimos robustos e funções objetivo para o problema PMOR

| Valores ótimos robustos (B) | |
|-------------------------------------|--------|
| $h_2 [mm]$ | 0,1361 |
| $h_3 [mm]$ | 0,2440 |
| $T [^{\circ}C]$ | 34,43 |
| Funções objetivos | |
| Amplitude (f_1) [dB] | 122,15 |
| Massa (f_2) [kg] | 0,2717 |
| Vulnerabilidade amplitude (f_3) | 0,0156 |
| Vulnerabilidade de massa (f_4) | 0,0285 |

A Fig. 6.22 mostra as soluções correspondentes aos pontos ótimos determinístico e robusto para o nível de incerteza de 10% na espessura da camada viscoelástica, na camada restrigente e na temperatura. É possível observar que as soluções ótimas robustas são mais estáveis frente à perturbação introduzida quando comparada ao ótimo determinístico, uma vez que apresentaram mínima vulnerabilidade das respostas. Portanto, conclui-se que a estratégia robusta implementada leva as soluções de Pareto mais robustas, o que se torna uma estratégia interessante para problemas práticos.

Em termos numérico, é possível identificar quais soluções apresentam menor nível de dispersão. Para isto, foram analisadas as variações nos valores do 1º e 2º modos das FRFs de cada envelope, obtendo as seguintes variações: 13,50dB e 11,65dB para os valores ótimos determinísticos; 4,64dB e 7,41dB para os valores ótimos robustos. Isto confirma a robustez das soluções robustas frente às determinísticas.

Em relação à análise de fadiga, observa-se da Fig. 6.23 um comportamento semelhante ao das FRFs em que a solução ótima robusta também apresentou menor vulnerabilidade do índice de fadiga frente às perturbações introduzidas nas variáveis de projeto, como esperado.

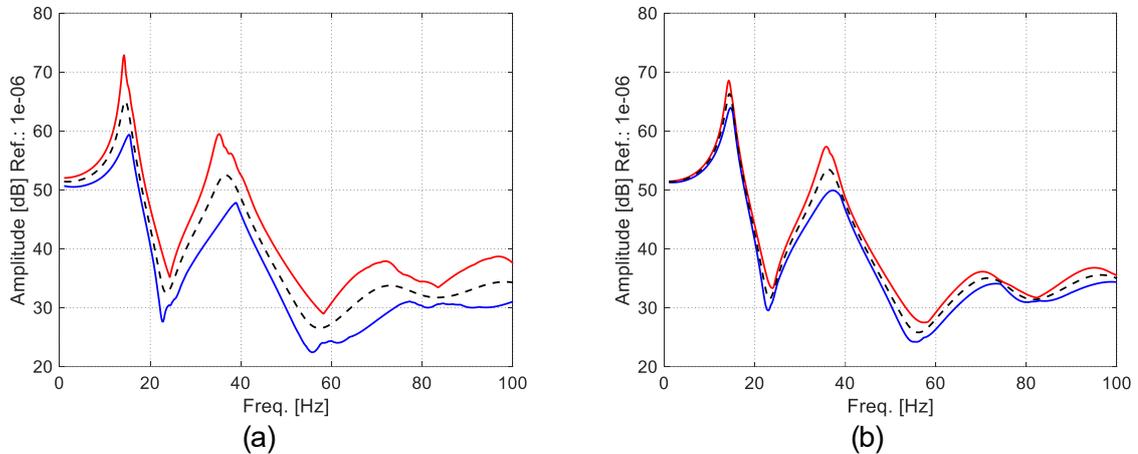


Figura 6.22 - Envelopes das FRFs para $\Delta h_2 = \Delta h_3 = \Delta T = 10\%$: (a) determinístico; (b) robusto.

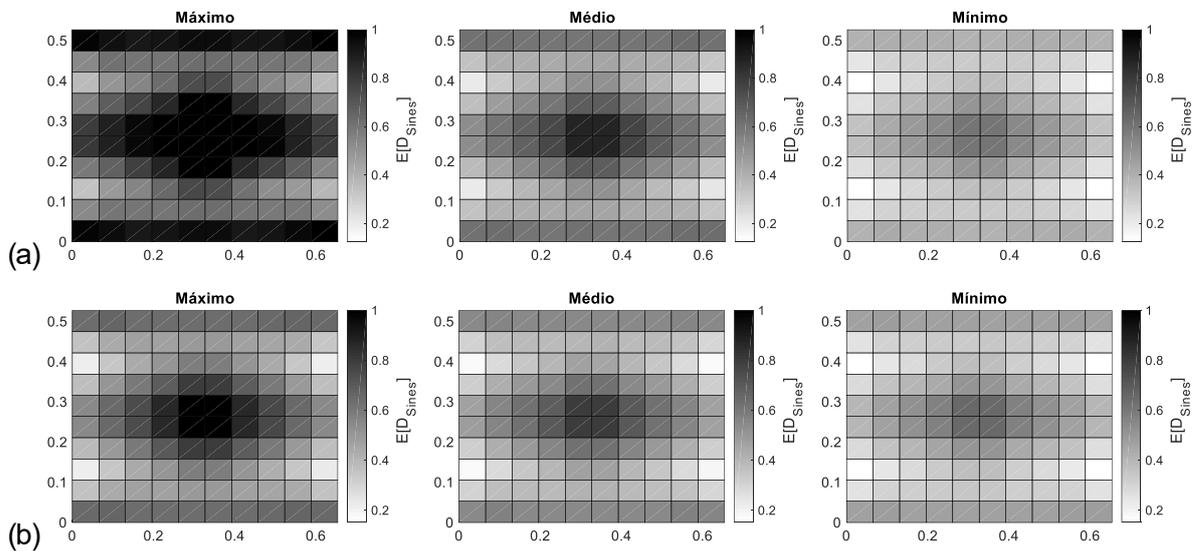


Figura 6.23 - Distribuição do índice de fadiga do sistema para $\Delta h_2 = \Delta h_3 = \Delta T = 10\%$: (a) ótimo determinístico; (b) ótimo robusto.

Por fim, as conclusões relativas à maior robustez das distribuições do índice de fadiga para as soluções ótimas robustas mencionadas anteriormente podem ser verificadas numericamente a partir dos valores máximos obtidos para cada envelope de solução. A Tab. 6.12 apresenta os resultados dos coeficientes de fadiga obtidos para o nível de incerteza de 10%. Em vista disso, observa-se que as soluções robustas apresentam variações bem menores entre os valores de máximos e mínimos obtidos

para o elemento mais crítico no centro da placa, garantindo assim a não falha por fadiga do sistema para até dois milhões de ciclos.

Tabela 6.12 – Índices de fadiga máximos para os diferentes níveis de perturbação

| Valores | 10% | |
|---------------|---------|---------|
| | Detern. | Robusto |
| Máximo | 1,3117 | 0,9908 |
| Médio | 0,8750 | 0,7950 |
| Mínimo | 0,6017 | 0,6533 |
| Variações [%] | 54,12 | 34,06 |

CAPÍTULO VII

Conclusões gerais e perspectivas de trabalhos futuros

7.1. Resumo e contribuições

Esta Tese contribui com a proposição de uma formulação probabilística do critério multiaxial de Sines, inicialmente desenvolvido para sistemas determinísticos não amortecidos, para a análise de fadiga de sistemas viscoelásticos estocásticos. É proposto também um procedimento de projeto ótimo-robusto do sistema viscoelástico utilizando técnicas de otimização multiobjetivo combinadas com um método de redução de modelos. O intuito foi aliviar o custo computacional requerido no cálculo das FRFs e das respostas em tensão do sistema viscoelástico, indispensáveis na estimação do índice de fadiga via critério multiaxial de Sines.

Vale ressaltar que a base de redução utilizada neste trabalho é robusta e esta robustez advém do processo iterativo de atualização da mesma com os resíduos dos esforços externos e das forças viscoelásticas na faixa de frequência de interesse. Neste caso, uma única base constante é criada e, na sequência, o modelo reduzido é utilizado mesmo nos casos envolvendo otimização, já que faz-se uso do modelo de elementos finitos parametrizado, onde as variáveis de interesse a serem modificadas durante a otimização são fatoradas fora das matrizes reduzidas. Sem a redução de modelos seria praticamente impossível executar os problemas PMOD e PMOR apresentados no Capítulo 6, em função do alto custo computacional requerido nas análises.

Um exemplo numérico formado por uma placa plana sanduíche viscoelástica de três camadas foi utilizado para ilustrar a metodologia de análise de fadiga de sistemas viscoelásticos determinísticos e estocásticos, bem como os procedimentos de otimização determinístico e robusto.

De maneira geral, num primeiro momento, foram introduzidas modificações nas espessuras das camadas e na temperatura de operação do sistema sanduíche viscoelástico nominal. Isto permitiu concluir sobre a grande influência desses parâmetros do tratamento viscoelástico na distribuição do índice de fadiga da placa sanduíche. Além disso, notou-se que para situações em que não há um controle da temperatura de operação do tratamento viscoelástico, isto pode acarretar variações ainda

mais significativas do índice de fadiga do sistema amortecido, piorando a sua vida em fadiga. Para isto, foi feito um estudo com a placa sanduíche para determinar a faixa de temperatura nominal que garanta um melhor desempenho do tratamento viscoelástico visando a diminuição do índice de fadiga.

Com relação ao sistema viscoelástico estocástico, foram gerados os envelopes das FRFs e das respostas em tensão que permitiram constatar a grande influência das incertezas nas espessuras das camadas e na temperatura do viscoelástico no intervalo de confiança delimitado pelos extremos estatísticos dos envelopes das soluções. A estimação do índice de fadiga para os vários cenários de incertezas demonstrou também uma grande influência da temperatura na distribuição do índice de fadiga, como esperado. Mostrando que em alguns casos há mesmo a presença de elementos que apresentam falhas por fadiga. Os envelopes das FRFs e respostas em tensão permitem ao projetista estabelecer sem dificuldades as faixas de frequência em que ocorrem os maiores níveis de tensão na estrutura e, conseqüentemente, identificar os elementos e/ou pontos do sistema com índices de fadiga críticos e que merecem atenção.

Para obter as soluções ótimas e robustas, foram levadas em conta as incertezas nos parâmetros de concepção que caracterizam o tratamento viscoelástico, como espessuras das camadas viscoelástica e restringente, e a temperatura do material viscoelástico. Neste caso, foram formulados os problemas de otimização multiobjetivos determinístico, PMOD, e robusto, PMOR, utilizando o algoritmo evolucionário multiobjetivo NSGA. Para o problema PMOD, o interesse foi minimizar a soma das amplitudes dos dois primeiros modos da FRF e a massa total do tratamento viscoelástico. Na otimização robusta PMOR, além das funções custo do problema PMOD, foram também introduzidas funções vulnerabilidades como funções objetivo suplementares a serem otimizadas ao mesmo tempo que as funções objetivo iniciais. Este procedimento permitiu estabelecer um compromisso entre os conceitos de ótimo e robusto de soluções, conforme os critérios de Pareto.

A comparação das Frentes de Pareto dos problemas PMOD e PMOR permitiram concluir sobre a dominância das soluções ótimas determinísticas frente às robustas. Entretanto, quando perturbações foram introduzidas *a posteriori* nos parâmetros ótimos de ambas as Frentes de Pareto, ficou evidente que as soluções robustas levam a respostas dinâmicas e a índices de fadiga menos sensíveis às perturbações. Portanto, isto demonstra o interesse da metodologia de projeto ótimo robusto para aplicações mais realísticas de interesse prático.

Portanto, com base nas inúmeras simulações numéricas realizadas, foi possível evidenciar a importância de se incluir as incertezas no modelo determinístico para análises de fadiga de sistemas dinâmicos, uma vez que os resultados finais mostraram que uma condição de não falha pode se tornar uma condição de possível falha ao considerar a presença de incertezas paramétricas. E ainda, a importância em aplicar métodos de otimização multiobjetivo para determinar os parâmetros de projeto que levem a baixos índices de fadiga. Neste caso, nota-se que quanto menor for a faixa de variações

próximo ao valor médio do índice de fadiga, maior a probabilidade de não falha por fadiga do sistema para até dois milhões de ciclos.

Por fim, é importante destacar a seguinte produção bibliográfica decorrente deste trabalho:

- Rosa, U.L.; Gonçalves, L.K.S.; de Lima, A.M.G. A robust condensation strategy for stochastic systems. In: XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2016, Brasília. XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2016. p. 1-11.
- Rosa, U.L.; Gonçalves, L.K.S.; de Lima, A.M.G. Fatigue analysis of viscoelastically damped structures subjected to uncertainties. In: XXXVIII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2017, Florianópolis. XXXVIII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2017.
- Gonçalves, L.K.S.; Rosa, U.L.; de Lima, A.M.G. Multiobjective Optimization Techniques applied to Fatigue Analysis of Viscoelastically Damped Systems. In: XII Brazilian Workshop on Continuous Optimization, Foz do Iguaçu, 2018.
- Gonçalves, L. K. S.; Rosa, U. L.; de Lima, A. M. G. Iterative condensation strategy to fatigue analysis of viscoelastically damped structures. In: XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2016, Brasília. XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2018. (Trabalho aceito)

7.2. Perspectivas de trabalhos futuros

O presente trabalho de Tese possibilitou o surgimento de inúmeras perspectivas no qual pode-se citar as seguintes:

- Aplicar a metodologia de projeto ótimo robusto baseada no critério de fadiga no domínio da frequência a um sistema industrial mais complexo como um compressor de refrigeração ou um painel aeronáutico;
- Avaliar a eficiência de configurações parciais de tratamentos viscoelásticos na estrutura correspondentes aos pontos críticos em termos do índice de fadiga. Isto permitirá reduzir em muito o peso acrescentado à estrutura pelo tratamento viscoelástico;

- Incluir na modelagem probabilística do critério de Sines, as características da vida em fadiga do material viscoelástico;
- Efetuar a modelagem termomecânica do índice de fadiga para incluir o efeito de auto-aquecimento do material viscoelástico em função do carregamento;
- Integrar o conjunto de ferramentas desenvolvidas neste trabalho numa metodologia geral de otimização determinística e robusta que será dedicada à concepção de estruturas industriais mais complexas amortecidas por materiais viscoelásticos com vistas à fadiga induzida por vibrações.

REFERÊNCIAS

ABDESSALEM, A. B., AZAÏS, R., TOUZET-CORTINA, M., GÉGOUT-PETIT, A., PUIGGALI, M. Stochastic modelling and prediction of fatigue crack propagation using piecewise-deterministic Markov processes. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability**, 2016.

AIT BRIK, B.; BOUHADDI, N.; COGAN, S. Neural Networks and Evolutionary Algorithm for Solving Multi-objective Optimization Problems. **Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Structures Technology**, Lisbon, Portugal, 2004a. CD-ROM.

AIT BRIK, B.; BOUHADDI, N.; COGAN, S. Multiobjective Optimization Augmented with a Robustness Function. **Proceedings of the IMAC XXII**, Dearborn, USA, 2004b.

AIT-BRIK; A. **Méthodologie de conception robuste et optimisation dans un concept d'architectures mécaniques nouvelles en avant projet**. 2005. Thèse de doctorat, Besançon.

ALVIN, K.F. Efficient computation of eigenvector sensitivities for structural dynamics. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, v. 35(11), 1998. <https://doi.org/10.2514/2.24>

ASKELAND, D. R.; FULAY, P. P.; WRIGHT, W. J. **The science and engineering of materials**. 6 ed. Stamford: Cengage Learning, 2010.

ÁVILA, E. B. **A Study of Fractional Calculus Applied to the Modeling of Vibratory Systems Containing Viscoelastic Damping**. 2010. 109 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

BÀLMES, E.; GERMÈS, S. Tools for viscoelastic damping treatment design: Application to an automotive floor panel. **Proceedings of the 28th International Seminar on Modal Analysis**, 2002.

BARROS, M. B. **Proposal, Numerical and Experimental Evaluation of a Multimodal Vibration Dynamic Absorber**. 2009. 80 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

BEARDS, C. F. **Structural vibration: analysis and damping**. 1 ed. London: Butterworth-Heinemann, 1996.

BENAROYA, H.; REHAK, M. Finite element methods in probabilistic structural analysis: A selective review. **Applied Mechanics Reviews - ASME**, v. 41(5), p. 201-213, 1988.

BISHOP, N. W. M.; SHERRATT, F. **Finite element based fatigue calculations**. Farnham: NAFEMS, 2000.

BOBILLOT, A.; BALMÈS, E. Iterative techniques for eigenvalue solutions of damped structures coupled with fluids. **American Institute of Aeronautics and Astronautics**, n. 1391, 2002.

BRIEND, Y. P. J. **Contribuição aos métodos de redução aplicados a sistemas aeroviscoelásticos**. 2017. 138 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

CALLISTER JR., W. T. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução**. 7 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 724 p.

CAZENOVE, J.; RADE, D.A.; DE LIMA, A.M.G.; ARAÚJO, C.A. A numerical and experimental investigation on self-heating effects in viscoelastic dampers. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.27, p. 433-445, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2011.05.004>

CESÁRIO, A.A. **Estimativa da vida em fadiga de componentes de implementos rodoviários através de métodos espectrais**. 2012. 148f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

CROSSLAND, B. Effects of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. **International Conference on Fatigue of Metals**, London, 1956.

CUNHA, B. S. C. **Controle passivo de vibrações induzidas por vórtices utilizando materiais viscoelásticos**. 2016. 77 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

CUNHA FILHO, A. G. **A influência do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos**. 2015. 106 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

CUNHA-FILHO, A.G.; BRIEND, Y.P.J.; DE LIMA, A.M.G.; DONADON, M.V. An efficient iterative model reduction method for aeroviscoelastic panel flutter analysis in the supersonic regime. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.104, p. 575-588, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.018>

DANG-VAN, K. Macro-Micro Approach in High-Cycle Multiaxial Fatigue, *Advances in Multiaxial Fatigue*, 1993. <https://doi.org/10.1520/STP24799S>

DAS, I.; DENNIS, J. E. A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generations in multicriteria optimization problems. *Journal of Structural Optimization*, v.14, p. 63-69, 1997. <https://doi.org/10.1007/BF01197559>

DE LIMA, A.M.G., STOPPA, M. H., RADE, D. A., Finite Element Modeling of Structures Incorporating Viscoelastic Materials. In: PROCEEDINGS OF IMACXXI - CONFERENCE AND EXPOSITION ON STRUCTURAL DYNAMICS, 2003, Orlando, EUA. **CD-ROM**.

DE LIMA, A.M.G.; DA SILVA, A.R.; RADE, D.A.; BOUHADDI, N. Component mode synthesis combining robust enriched Ritz approach for viscoelastically damped structures. *Engineering Structures*, v. 32, p. 1479-1488, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.01.028>

DE LIMA, A. M. G.; RADE, D. A.; BOUHADDI, N. Stochastic modeling of surface viscoelastic treatments combined with model condensation procedures. *Shock and Vibration*, v. 17, n. 4-5, p. 429-444, 2010. <https://doi.org/10.1155/2010/359283>

DE LIMA, A. M. G. **Modélisation et Optimisation Robuste de l'amortissement Viscoélastique de Systèmes Mécaniques**. 2007. 175 f. Tese de Doutorado - Université de Franche-Comté, Besançon.

DE LIMA, A.M.G.; STOPPA; RADE, D.A.; STEFFEN JR. Sensitivity analysis of viscoelastic structures. *Shock and Vibration*, v. 13, p. 545-558, 2006. <https://doi.org/10.1155/2006/917967>

DE LIMA, A.M.G., RADE, D.A., LÉPORE-NETO, F.P. An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 23, p. 1272-1281, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.09.005>

DE LIMA, A.M.G.; LAMBERT, S.; RADE, D.A.; PAGNACCO, E.; KHALIJ, L. Fatigue reliability analysis of viscoelastic structures subjected to random loads. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 43, p. 305-318, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.10.004>

DE LIMA, A. M. G. D., BOUHADDI, N., RADE, D. A., BELONSI, M. A time-domain finite element model reduction method for viscoelastic linear and nonlinear systems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 12, n. 6, p. 1182-1201, 2015. <https://doi.org/10.1590/1679-78251695>

DE LIMA, A.M.G.; FARIA, A.W.; RADE, D.A. Sensitivity analysis of frequency response functions of composite sandwich plates containing viscoelastic layers, **Composite Structures**, n.92, p. 364-376, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.017>

DEB, K. **Multi-objective optimization using evolutionary algorithms**. 1 ed. England: John Wiley & Sons, LTD, 2001.

DESSOMBZ, O.; THOUVEREZ, F.; LAÏNE, J.P.; JÉZEQUEL, L. Analyse Dynamique de Structures Comportant des Paramètres Incertains. **Journal of Sound and Vibration**, v. 239(5), p. 949-968, 2001. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3191>

DIACENCO, A.A. **Modelagem por elementos finitos de materiais compósitos estruturais incorporando material viscoelástico para o controle passivo de vibração e ruído**. 2010. 69p. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá.

DIRLIK, T. **Application of computer in fatigue analysis**. 1985. 234 f. PhD Thesis, University of Warwick Coventry, England.

DRAKE, M. L., SOOVERE, J. A. A design guide for damping of aerospace structures. **Vibration Damping Workshop**, Long Beach, California, 1984.

EMS - EFTEC. Products & Application – Damping. Disponível em: <<https://www.eftec.ch/en/products-applications/products-applications/damping/>>. Acesso em: 28 abr. 2018.

ESCHENAUER, H.; KOSHI, J.; OSYCZKA, A. **Multicriteria Design Optimization: Procedures and Applications**. Germany: Springer-Verlag, 1990. 482 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-48697-5>

FARIA, A.W. **Modélisation par éléments finis de plaques composites: contribution a l'étude de l'amortissement, endommagement et prise en compte d'incertitudes**. 2010. 321 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

FLORIAN, A. An efficient sampling scheme: updates Latin Hypercube sampling. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 7(2), p.123-130, 1992. [https://doi.org/10.1016/0266-8920\(92\)90015-A](https://doi.org/10.1016/0266-8920(92)90015-A)

FONSECA, C.M.; FLEMING, P.J. Multiobjective genetic algorithms, IEE Colloquium on Genetic Algorithms for Control Systems Engineering, London, 1993.

GHANEM, R. G.; KRUGER, R. M. Numerical solution of spectral stochastic finite element system, **Computers Methods Applied Mechanics Engineering**, v.129, p. 289-303, 1996. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00909-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00909-4)

GHANEM, R.G.; SPANOS, P.D. **Stochastic finite elements: a spectral approach**. Mineola, NY: Courier Corporation, 1991. 129 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3094-6>

GUARALDO NETO, B. **Finite element modeling of dynamic systems combining viscoelastic materials and shape memory materials for the passive control of vibration and noise**. 2012. 121 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

GUEDRI, M., LIMA, A. M. G., BOUHADDI, N., RADE, D. A. Robust design of viscoelastic structures based on stochastic finite element models. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 24, n. 1, p. 59-77, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2009.03.010>

IBRAHIM, R. A. Structural dynamics with parameters uncertainties. **Applied Mechanics Reviews**, v. 40(3), p. 309-328, 1987. <https://doi.org/10.1115/1.3149532>

IMAN, R. L.; CONOVERS, W. J. Small sample sensitivity analysis techniques for computer models, with an application to risk assessment. **Communications Statistics**, v. A9, p. 1749-1842, 1980. <https://doi.org/10.1080/03610928008827996>

KHALIJ, L.; PAGNACCO, E.; LAMBERT, S. A measure of the equivalent shear stress amplitude from a prismatic hull in the principal coordinate system. **International Journal of Fatigue**, v.32, p. 1977-1984, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2010.07.007>

KLEIBER, M.; HIEN, T. D. The stochastic finite element method: basic perturbation technique and computer implementation, **Wiley**, Chichester, U.K., 1992.

KOÇER, B. **Vibration fatigue analysis of structures under broadband excitation**. 2010. 117p. Master of Science in Mechanical Engineering Department, Middle East Technical University.

KHATUA, T.P.; CHEUNG, Y. K. Bending and vibration of multilayer sandwich beams and plates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 6, n. 1, p. 11-24, 1973. <https://doi.org/10.1002/nme.1620060103>

LAKES, R. **Viscoelastic Materials**. New York: Cambridge University Press, 2009. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511626722>

LAMBERT, S. **Contribution à l'analyse de l'endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires**. 2007. 143 f. Thèse de l'INSA de Lyon, Lyon, França.

LAMBERT, S.; PAGNACCO, E.; KHALIJ, L. A probabilistic model for the fatigue reliability of structures under random loadings with phase shift effects. **International Journal of Fatigue**, v.32, p. 463-474, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2009.09.007>

LEE, K. H., PARK, G. J. Robust optimization considering tolerances of design variables. **Journal of Computers and Structures**, Vol. 79, pp. 77-86, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00117-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00117-6)

LEI, Z.; QIU, C. Neumann dynamics stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation. **Computers and Structures**, v.77, p. 651-657, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00019-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00019-5)

LI, B.; FREITAS, M. J. A Procedure for Fast Evaluation of High-Cycle Fatigue Under Multiaxial Random Loading. **Journal of Mechanical Design**, v. 124, p.558-563, 2002. <https://doi.org/10.1115/1.1485291>

3M. Ciência Aplicada à vida. Disponível em: <<https://www.3m.com.br>>. Acesso em: 27 abr. 2018.

MAGEBAUSA. Seismic protection. Disponível em: <<http://www.magebausa.com>>. Acesso em: 29 abr. 2018.

MANTEUFEL, R. D. Evaluating the convergence of Latin Hypercube sampling. **American Institute of Aeronautics and Astronautics**, v.3, p.100-106, 2000. <https://doi.org/10.2514/6.2000-1636>

MATAKE, T. An explanation on fatigue limit under combined stress. **Bulletin of the JSME**, v. 20, n.141, p. 257-263, 1977. <https://doi.org/10.1299/jsme1958.20.257>

MAYSSAM, J.; AOUES, Y.; PAGNACCO, E.; EL HAMI, A.; POUUNET, P. Estimation of Fatigue Damage of a Control Board Subjected to Random Vibration, In: EL HAMI, A.; DELAUX, D.; GRZESKOWIAK, H. Reliability of High-Power Mechatronic Systems, v. 1, 2017.

MEIROVITCH, L. **Elements of vibration analysis**. 2 ed. New York: McGraw-Hill, 1986.

MIRABELLI, J. Damping Technology Revolutionizing Tall Building Construction. **Urban Toronto**, 2015. Disponível em: <<http://urbantoronto.ca/news/2015/11/damping-technology-revolutionizing-tall-building-construction>>. Acesso em: 23 abr. 2018.

MOREIRA, F.R. **Otimização robusta multiobjetivo para o projeto de sistemas de engenharia**. 2015. 267 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

MORSE, J.N. Reducing the size of the nondominated set: pruning by clustering, **Computers & Operations Research**, v. 7. P. 55-66, 1980. [https://doi.org/10.1016/0305-0548\(80\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0305-0548(80)90014-3)

NASHIF, A.D.; JONES, D.I.G.; HENDERSON, J.P. **Vibration Damping**. New York: John Wiley & Sons, 1985.

PALMERI, A.; RICCIARDELLI, F. Fatigue analyses of buildings with viscoelastic dampers. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 94 (5), 2006, p. 377-395. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2006.01.005>

PAPADOPOULOS, I. V. A high-cycle fatigue criterion applied in biaxial and triaxial out-of-phase stress conditions. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v.18, n.1, p. 79-91, 1995. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.1995.tb00143.x>

PAPADRAKAKIS, M.; KOTSOPULOS, A. Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo Simulation. **Computers Methods Applied Mechanics Engineering**, vol. 168, p. 305-320, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00147-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00147-9)

PIRES, M.S.T. **Estimativa de vida para fadiga sob condições de Fretting usando o método das curvas de Wöhler modificadas associado com a teoria das distâncias críticas**. 2012. 118 p. Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília, Brasília.

PITOSET, X.; PREUMONT, A. Spectral methods for multiaxial random fatigue analysis of metallic structures. **International Journal of Fatigue**, n. 22, p. 541-550, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(00\)00038-4](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(00)00038-4)

PITOSET, X.; RYCHLIK, I.; PREUMONT, A. Spectral methods to estimate local multiaxial fatigue failure for structures undergoing random vibrations. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 24(11), p. 715-727, 2001. <https://doi.org/10.1046/j.1460-2695.2001.00394.x>

PREUMONT, A. On the peak factor of stationary gaussian process. **Journal of Sound and Vibration**, v.100, n.1, p.15-34, 1985. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(85\)90339-6](https://doi.org/10.1016/0022-460X(85)90339-6)

RAHMANI, D.; RAMEZANIAN, R.; FATTAHI, P.; HEYDARI, M. A robust optimization model for multi-product two-stage capacitated production planning under uncertainty. **Applied Mathematical Modeling**, 2013, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.016>

RAMOS, A.P.R. **Contribuição à análise de fadiga de sistemas estruturais incorporando materiais viscoelásticos**. 2014. 106 p. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RAMOS, A.P.R.; DE LIMA, A. M. G. Fatigue analysis of structures with passive constraining damping layers subjected to random loads. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, 2014 Caldas Novas. **Anais...** p. 1-10.

RAO, M. D. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 262, p. 457-474, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00106-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00106-8)

RIBEIRO, L. P. **Modelagem estocástica de estruturas compósitas incorporando circuitos Shunt para o controle passivo de vibrações**. 2015. 121 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RODOVALHO, L. F. F. **A numerical study computational implementation and experimental verification of the thermal runaway phenomenon in viscoelastic materials**. 2014. 98 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RODOVALHO, L.F.F.; DE LIMA, A.M.G.; BORGES, R.A.; LACERDA, H. B. A Study of the Thermal Runaway Phase Generated During Cyclic Loading of Viscoelastic Materials Accounting for the Prestress. **Latin American Journal Solids and Structures**, v.13 n.15, Rio de Janeiro, 2016.

ROSA, U.L. **Análise de fadiga de sistemas estocásticos submetidos a carregamentos aleatórios multiaxiais**. 2016. 89 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

ROSA, U. L., DE LIMA, A. M. G., Fatigue analysis of dynamic systems subjected to cyclic loading in the frequency domain. In: COBEM – 23rd INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 2015, Rio de Janeiro, Brasil. **Anais...** p.1-8.

ROSA, U. L., DE LIMA, A. M. G., Fatigue analysis of stochastic systems subjected to cyclic loading in the frequency domain. In: 3RD INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON UNCERTAINTY QUANTIFICATION AND STOCHASTIC MODELING, 2016, Maresias, Brasil. **Anais...** p. 1-10.

ROSENMAN, M.A.; GERO, J.S. Reducing the Pareto optimal set in multicriteria optimization (with application to Pareto optimal dynamic programming), *Engineering Optimization*, v.8, p. 189-206, 1985. <https://doi.org/10.1080/03052158508902489>

RUBI, V.A.S. **Comparação entre métodos de cálculo da vida útil à fadiga de linhas de ancoragem considerando espectros bi-modais de tração**. 2013. 58 p. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

RUBINSTEIN, R.Y. **Simulation and the Monte Carlo Method**. 1 ed. New York: John & Wiley & Sons, 1981. <https://doi.org/10.1002/9780470316511>

SALES, T. P. **Computational-numerical modeling of flexible multibody systems containing viscoelastic materials**. 2012. 212 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

SAMALI, B.; KWOK, K. C. S. Use of viscoelastic dampers in reducing wind- and earthquake-induced motion of building structures. **Engineering Structures**, v. 17, n. 9, pp. 639-654, 1995. [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(95\)00034-5](https://doi.org/10.1016/0141-0296(95)00034-5)

SCHAFFER, D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithm, In genetic Algorithm and their Applications, Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithm, p. 93-100, 1985.

SCHINOZURA, M. Monte Carlo Solution of Structural dynamics. **Computers and Structures**, v.2, p. 855-874, 1972. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(72\)90043-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(72)90043-0)

SCHUELLER, G.I. Computational stochastic mechanics: recent advances. **Journal of Computers and Structures**, v. 79, p. 2225-2234, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00078-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00078-5)

SCHÜTZ, W. A history of fatigue. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 54, No. 2, pp. 263-300, 1996. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(95\)00178-6](https://doi.org/10.1016/0013-7944(95)00178-6)

SMAC. Disponível em: <http://www.smac-sas.com/portfolio_page/damping-solution-smacsonic/> . Acesso em: 30 abr. 2018.

SINES, G. **Behavior of metals under complex stresses**. Metal Fatigue. New York: McGraw-Hill, 1959.

SOIZE, C. A nonparametric model of random uncertainties in linear structural dynamics. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 15, p. 277-294, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(99\)00028-4](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(99)00028-4)

SOIZE, C. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. **Journal of the Acoustical Society of America**, v.109 (5), 2001. <https://doi.org/10.1121/1.1360716>

SOIZE, C. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v.15(3), p. 277-294, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(99\)00028-4](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(99)00028-4)

SOIZE, C. Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics - recent theoretical advances. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332(10), p. 2379-2395, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.10.010>

SOONG, T.T.; CONSTANTINOU, M.C. **Passive and active structural vibration control in civil engineering**. New York: Springer-Verlag, 1994. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-3012-4>

SRINIVAS, N.; DEB, K. Multi-objective using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms. **Journal of Evolutionary Computation**, v.2, n.3, p. 221-248, 1993. <https://doi.org/10.1162/evco.1994.2.3.221>

STEUER, R.E. **Multiple Criteria: Theory, Computation and Application**. John Wiley & Sons, New York, 1986.

SUDRET, B.; DER KIUREGHIAN, A. **Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report**. Berkeley, CA: Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, 2000.

SUDRET, B. **Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models: Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods**. 2007. 253 f. Habilitation à diriger des recherches - Université Blaise Pascal, France.

TAIER, R.; ARAÚJO, E. C.; GODEFROID, L. B. Fadiga em plataformas offshore fixas com modelos em elementos finitos. **REM: Revista Escola de Minas**, v.55, n.3, Ouro Preto, 2002.

TAKAHASHI, B.X. **Metodologia moderna para análise de fadiga baseada em elementos finitos de componentes sujeitos a fadiga uni e multiaxial**, 2014. 338 p. Dissertação de Mestrado - Universidade de São Paulo, São Paulo. <https://doi.org/10.11606/D.3.2014.tde-19032015-173219>

VANDERPLAATS, G.N. **Numerical optimization techniques for engineering design**. New York: McGraw-Hill, 1984.

VIANA, F.C.; HAFTKA, R.T.; STEFFEN JR., V; BUTKEWITSCH, S.; LEAL, M.F. Ensemble of Surrogates: A Framework Based on Minimization of Integrated Square Error. In: 49TH AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS, AND MATERIALS CONFERENCE 16TH AIAA/ASME/AHS ADAPTIVE STRUCTURES CONFERENCE, 2008, Schaumburg,IL. **American Institute of Aeronautics and Astronautics**. p.1-27.

VICENTE, B.G.G.L.Z. **Projeto robusto de circuitos shunt para o controle passivo de vibrações de estruturas compostas**. 2014. 97 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

WEBER, B. **Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque**. 1999. 243 f. Tese de doutorado - INSA de Lion, Lion.

WEBER, B.; LABESSE-JIED, F.; ROBERT, J.L. Comparison of multiaxial high cycle fatigue criteria and their application to fatigue design of structures. In: CARPINTERI A, DE FREITAS M, SPAGNOLI A, EDITORS. SIXTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON BIAXIAL/MULTIAXIAL FATIGUE AND FRACTURE, ESIS 31, 2001, Lisbon. **Elsevier**, p.195-202.

YAICH, A; EL HAMI, A.; WALHA, L.; HADDAR, M. Local multiaxial fatigue damage estimation for structures under random vibrations. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.132, p. 1-7, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.04.003>

YAMAZAKI, F.; SCHINOZUKA, M. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. **Journal of Engineering Mechanics ASCE**, v. 114(8), p.1335-1354, 1988. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1988\)114:8\(1335\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:8(1335))

ZITZLER, E. E THIELE, L. **An evolutionary algorithm for multiobjective optimization: the strength Pareto approach**. Zurich: TIK-Report, n.43, 1998. 43 p.

ZITZLER, E. **Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: methods and applications**. 1999. 134 f. Tese de doutorado - Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

ZHOU, X. Q.; YU, D. Y.; SHAO, X. Y.; ZHANG, S. Q.; WANG, S. Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: a review. **Composite Structures**, n.136, p. 460-480, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.10.014>

ANEXO A

A.1 Definição das funções de interpolação para os campos de deslocamentos

Os deslocamentos longitudinais nas direções x e y são interpolados por funções bilineares, e o deslocamento transversal w é interpolado por um polinômio de terceira ordem, fornecidos pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\
 v_1 &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \\
 u_3 &= a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}xy \\
 v_3 &= a_{13} + a_{14}x + a_{15}y + a_{16}xy \\
 w &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + b_7x^3 + b_8x^2y + b_9xy^2 + b_{10}y^3 + b_{11}x^3y + b_{12}xy^3
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Desta forma, segundo a Eq. (2.21) e omitindo a dependência com relação a x e y para simplificar a notação, a interpolação dos campos de deslocamentos, é expressa como segue:

$$\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{u}_{(e)} \tag{A.2}$$

onde:

$$\mathbf{U}(x, y) = [u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3 \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T \tag{A.3}$$

$$\mathbf{N}(x, y) = [N_{u_1} \quad N_{v_1} \quad N_{u_3} \quad N_{v_3} \quad N_w \quad N_{\theta_x} \quad N_{\theta_y}]^T \tag{A.4}$$

$$\mathbf{u}_{(e)} = [u_1^1 \quad v_1^1 \quad u_3^1 \quad v_3^1 \quad w^1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1 \quad u_1^2 \quad v_1^2 \quad u_3^2 \quad v_3^2 \quad w^2 \quad \theta_x^2 \quad \theta_y^2 \quad u_1^3 \quad v_1^3 \quad u_3^3 \quad v_3^3 \quad w^3 \quad \theta_x^3 \quad \theta_y^3 \quad u_1^4 \quad v_1^4 \quad u_3^4 \quad v_3^4 \quad w^4 \quad \theta_x^4 \quad \theta_y^4] \tag{A.5}$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{u_1} &= [N_{11} \ \mathbf{0} \ N_{12} \ \mathbf{0} \ N_{13} \ \mathbf{0} \ N_{14} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{N}_{v_1} &= [0_1 \ N_{11} \ \mathbf{0} \ N_{12} \ \mathbf{0} \ N_{13} \ \mathbf{0} \ N_{14} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{N}_{u_3} &= [\mathbf{0} \ N_{11} \ \mathbf{0} \ N_{12} \ \mathbf{0} \ N_{13} \ \mathbf{0} \ N_{14} \ \mathbf{0}], \ \mathbf{N}_{v_3} = [\mathbf{0} \ N_{11} \ \mathbf{0} \ N_{12} \ \mathbf{0} \ N_{13} \ \mathbf{0} \ N_{14} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{N}_w &= [\mathbf{0} \ N_{1w} \ N_{1\theta_x} \ N_{1\theta_y} \ \mathbf{0} \ N_{2w} \ N_{2\theta_x} \ N_{2\theta_y} \ \mathbf{0} \ N_{3w} \ N_{3\theta_x} \ N_{3\theta_y} \ \mathbf{0} \ N_{4w} \ N_{4\theta_x} \ N_{4\theta_y}], \\ \mathbf{N}_{\theta_x} &= [\mathbf{0} \ N_{1w}^x \ N_{1\theta_x}^x \ N_{1\theta_y}^x \ \mathbf{0}_6 \ N_{2w}^x \ N_{2\theta_x}^x \ N_{2\theta_y}^x \ \mathbf{0}_6 \ N_{3w}^x \ N_{3\theta_x}^x \ N_{3\theta_y}^x \ \mathbf{0}_6 \ N_{4w}^x \ N_{4\theta_x}^x \ N_{4\theta_y}^x], \\ \mathbf{N}_{\theta_y} &= [\mathbf{0} \ N_{1w}^y \ N_{1\theta_x}^y \ N_{1\theta_y}^y \ \mathbf{0} \ N_{2w}^y \ N_{2\theta_x}^y \ N_{2\theta_y}^y \ \mathbf{0} \ N_{3w}^y \ N_{3\theta_x}^y \ N_{3\theta_y}^y \ \mathbf{0} \ N_{4w}^y \ N_{4\theta_x}^y \ N_{4\theta_y}^y]. \end{aligned}$$

Os termos N_{li} , N_{iw} , $N_{i\theta_x}$, $N_{i\theta_y}$, N_{iw}^x , $N_{i\theta_x}^x$, $N_{i\theta_y}^x$, N_{iw}^y , $N_{i\theta_x}^y$ et $N_{i\theta_y}^y$ para $i = 1, \dots, 4$, são fornecidos pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{(y-b)(x-b)}{ab}; \quad N_{12} = \frac{x(b-y)}{ab}; \quad N_{13} = \frac{xy}{ab}; \quad N_{14} = \frac{y(a-x)}{ab}; \\ N_{1w} &= \frac{(b-y)(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b - a^2b^2)}{a^3b^3}; \\ N_{2w} &= \frac{x(y-b)(x-a)(2x^2a^2 - ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2)}{a^3b^3}; \\ N_{3w} &= \frac{-xy(a^2b^2 - 3xab^2 - 3ya^2b + 2x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3}; \\ N_{4w} &= \frac{y(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 - 3ya^2b + 2y^2a^2)}{a^3b^3}; \\ N_{1\theta_x} &= \frac{x(x-a)^2(b-y)}{a^2b}; \quad N_{2\theta_x} = \frac{x^2(b-y)(x-a)}{a^2b}; \quad N_{3\theta_x} = \frac{x^2y(x-a)}{a^2b} \\ N_{4\theta_x} &= \frac{xy(x-a)^2}{a^2b}; \quad N_{1\theta_y} = \frac{y(y-b)^2(a-x)}{ab^2}; \quad N_{2\theta_y} = \frac{xy(y-b)^2}{ab^2}; \quad N_{3\theta_y} = \frac{xy^2(y-b)}{ab^2} \\ N_{4\theta_y} &= \frac{y^2(y-b)(a-x)}{ab^2}; \quad N_{1w}^x = \frac{(b-y)(6x^2b^2 - 6xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b)}{a^3b^3}; \\ N_{2w}^x &= \frac{(y-b)(6x^2b^2 - 6xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b)}{a^3b^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{3w}^x &= \frac{-y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3}; \\
N_{4w}^x &= \frac{y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3}; \quad N_{1\theta_x}^x = \frac{(x-a)(b-y)(3x-a)}{a^2b}; \\
N_{2\theta_x}^x &= \frac{x(b-y)(3x-2a)}{a^2b}; \quad N_{3\theta_x}^x = \frac{xy(3x-2a)}{a^2b}; \quad N_{4\theta_x}^x = \frac{y(x-a)(3x-a)}{a^2b}; \\
N_{1\theta_y}^x &= \frac{-y(y-b)^2}{ab^2}; \quad N_{2\theta_y}^x = \frac{y(y-b)^2}{ab^2}; \quad N_{3\theta_y}^x = \frac{y^2(y-b)^2}{ab^2}; \quad N_{4\theta_y}^x = \frac{y^2(b-y)}{ab^2}; \\
N_{1w}^y &= \frac{(a-x)(2x^2b^2 - xab^2 + 6y^2a^2 - 6ya^2b)}{a^3b^3}; \\
N_{2w}^y &= \frac{x(6y^2a^2 - 6ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2 + a^2b^2)}{a^3b^3}; \\
N_{3w}^y &= \frac{-x(6y^2a^2 - 6ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2 + a^2b^2)}{a^3b^3}; \\
N_{4w}^y &= \frac{(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 6y^2a^2 - 6ya^2b)}{a^3b^3}; \quad N_{1\theta_x}^y = \frac{-x(x-a)^2}{ba^2}; \quad N_{2\theta_x}^y = \frac{-x^2(x-a)}{ba^2}; \\
N_{3\theta_x}^y &= \frac{x^2(x-a)}{ba^2}; \quad N_{4\theta_x}^y = \frac{x(x-a)^2}{ba^2}; \quad N_{4\theta_x}^y = \frac{x(x-a)^2}{ba^2}; \quad N_{1\theta_y}^x = \frac{(x-a)(b-y)(3y-b)}{ab^2}; \\
N_{2\theta_y}^x &= \frac{x(y-b)(3y-b)}{ab^2}; \quad N_{3\theta_y}^x = \frac{xy(-2b+3y)}{ab^2}; \quad N_{4\theta_y}^x = \frac{y(x-a)(2b-3y)}{ab^2}
\end{aligned}$$