

GABRIEL MARCOS MAGALHÃES

**SOLUÇÕES CONTÍNUAS E DISCRETAS DE
ESCOAMENTOS CISALHANTES LIVRES EM
REGIMES LAMINAR E TURBULENTO**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2018

GABRIEL MARCOS MAGALHÃES

**SOLUÇÕES CONTÍNUAS E DISCRETAS DE ESCOAMENTOS
CISALHANTES LIVRES EM REGIMES LAMINAR E
TURBULENTO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Uberlândia - MG

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

M188s Magalhães, Gabriel Marcos, 1995-
2018 Soluções contínuas e discretas de escoamentos cisalhantes livres em regimes laminar e turbulento [recurso eletrônico] / Gabriel Marcos Magalhães. - 2018.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1181>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. 2. Escoamento - Modelos matemáticos. 3. Escoamento turbulento. I. Silveira Neto, Aristeu da, 1955- (Orient.) II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Maria Salete de Freitas Pinheiro - CRB6/1262



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



TERMO

ALUNO: Gabriel Marcos Magalhães

MATRÍCULA: 11622EMC008

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos **LINHA DE PESQUISA:** Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: “*Soluções Contínuas e Discretas de Escoamentos Cisalhantes Livres em Regimes Laminar e Turbulento*”

ORIENTADOR: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada no Auditório do Laboratório de Mecânica dos Fluidos - Bloco 5P, Campus Santa Mônica, em 25 de julho de 2018, às 09:30 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto - UFU

Prof. Dr. Gilmar Guimarães - UFU

Prof. Dr. João Marcelo Vedovoto - UFU

Prof. Dr. Alexandre Megiorin Roma - USP

Uberlândia, 25 de julho de 2018



Documento assinado eletronicamente por **Aristeu da Silveira Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/07/2018, às 15:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



Documento assinado eletronicamente por **João Marcelo Vedovoto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/07/2018, às 15:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



Documento assinado eletronicamente por **Alexandre Megiorin Roma, Usuário Externo**, em 25/07/2018, às 16:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



Documento assinado eletronicamente por **Gilmar Guimarães, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/07/2018, às 16:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0601193** e o código CRC **47CE573F**.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, por me capacitar, conduzir e colocar pessoas fantásticas em meu caminho ao longo deste trabalho.

Aos meus pais, Walda e Alexander, meus primeiros e eternos orientadores, que sempre me apoiaram e incentivaram em todos os momentos de minha caminhada. À minha irmã Aline, pela constante companhia e apoio.

À Barbara Scaramussa, pelo companheirismo, carinho e por ser constante instrumento do Deus em minha vida.

Ao Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto, meu orientador e fonte de inspiração, por abrir as portas do Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab), pela dedicação e paciência constante na orientação deste trabalho, pelos ricos conselhos e constante exemplo.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia e à coordenação do Programa de Pós-graduação pelo suporte e infraestrutura necessários para a realização dos trabalhos.

Aos Professores Gilmar Guimarães e Alexandre Megiorin Roma pela disponibilidade em participar desta banca.

Aos colegas do laboratório pela troca de conhecimento, colaboração e grande amizade e companheirismo durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos técnicos do MFLab, Luismar, Ana Luisa, Taciane e Bruno pelo constante apoio e suporte ao longo de minha caminhada.

Ao CNPQ pela bolsa de Mestrado e à PETROBRAS pelo apoio à esta pesquisa.

MAGALHÃES, G.M., **Soluções contínuas e discretas de escoamentos cisalhantes livres em regimes laminar e turbulento**. 2018. 169f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Nessa dissertação o autor se propõe a apresentar o desenvolvimento detalhado para soluções contínuas dos modelos físicos simplificados de escoamentos cisalhantes livres em regimes laminar e turbulento e compará-las com soluções ou dados discretos. O método utilizado na obtenção das soluções é o método de auto-similaridade, o que faz com que os resultados só sejam válidos em regiões do escoamento onde os perfis das propriedades em questão sejam auto-similares. Para as soluções de escoamentos em regime turbulento foram utilizadas duas formas do modelo do comprimento de mistura de Prandtl, a forma original e uma forma simplificada, chamada modelo de Prandtl-Reichardt. Após a obtenção das soluções contínuas para diversas propriedades dos escoamentos cisalhantes livres trabalhados, tais como velocidades médias e espalhamento, os perfis contínuos foram comparados com dados discretos de experimentos materiais apresentados na literatura ou de experimentos computacionais realizados como parte do presente trabalho. Para a realização dos experimentos computacionais foi utilizado o código MFSim, desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Foram implementados no código dois modelos de fechamento da turbulência a duas equações, da classe $k - \epsilon$. No presente trabalho, são apresentadas soluções contínuas e comparações entre os perfis contínuos e discretos para camadas de mistura temporais, jatos planos e esteiras formadas a jusante de corpos imersos, avaliadas em regiões distantes do corpo, todos esses em regimes laminar e turbulento e para camadas de mistura em desenvolvimento espacial apenas no regime turbulento.

Palavras chave: Escoamentos cisalhantes livres; soluções contínuas; auto similaridade; modelo do comprimento de mistura de Prandtl; escoamentos laminares e turbulentos.

MAGALHÃES, G. M., **Continuous and discrete solutions of laminar and turbulent free shear flow**. 2018. 169f. Master Dissertation, Federal University of Uberlandia, Uberlandia.

This master dissertation presents the detailed development for continuous solutions of the simplified physical models of free shear flows in laminar and turbulent regimes, and their comparison with discrete solutions or discrete data. The method used to obtain the solutions is the self-similarity method, which makes the results valid only in regions of the flow where the profiles of the properties in question are self-similar. For turbulent flow solutions, two forms of the Prandtl mixing-length model, the original form and a simplified form called Prandtl-Reichardt model, were used. After obtaining the continuous solutions for various properties of the free shear flows, such as mean velocities and spreading rate, the continuous profiles were compared with discrete data obtained from material experiments or from computational experiments. The material experiments were available in the literature, and the computational experiments were performed as part of the present work. For the accomplishment of the computational experiments, it was used the code MFSim, developed in the Laboratory of Fluid Mechanics (MFLab) of the Federal University of Uberlandia (UFU). Two turbulence closure models, with two transport equations of the $k - \epsilon$ class, were implemented in the code. The present work presents continuous solutions and comparisons between the continuous and discrete profiles for temporal mixing layers, plane jets and wakes generated by immersed bodies, evaluated in distant regions of the body, all in laminar and turbulent regimes and for spatial mixing layers only in the turbulent regime.

Keywords: Free shear flow; continuous solutions; self-similarity; Prandtl mixing-length model; laminar and turbulent flow.

Lista de Figuras

2.1	Família de matrioscas russas.	5
2.2	Família de flautas transversais.	6
2.3	Exemplo de fractal.	6
2.4	Fotografias da primeira explosão de bomba atômica no deserto do Novo México - 5:29 A.M. em 16 de julho de 1945.	7
3.1	Esquematisação de uma camada de mistura espacial para representar os con- ceitos envolvidos na definição do comprimento característico l_m	19
4.1	Transformação dos perfis de velocidade que se desenvolvem ao longo de x em um único perfil auto-similar pelos fatores de proporcionalidade.	38
4.2	Camada de mistura em desenvolvimento temporal em $t = 0 s$	41
4.3	Camada de mistura em desenvolvimento temporal em $t > 0 s$	41
4.4	Ilustração do perfil médio de velocidade $u(y, t)$, da função de auto similaridade $F(\eta)$ e de sua derivada $F'(\eta)$ para uma camada de mistura temporal.	44
4.5	Camada de mistura em desenvolvimento espacial: perfis para três valores de x	52
4.6	Modelo físico de um jato plano.	68
4.7	Representação do problema do jato plano com as linhas de corrente e a definição de um volume de controle para o TTR.	74
4.8	Modelo físico de uma esteira gerada por um corpo imerso.	89
4.9	Volume e superfície de controle para cálculo de arrasto sobre um cilindro longo.	92
5.1	Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação em $t = 0, 1s$ para o regime laminar.	116

5.2	Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação em $t = 0,5s$ para o regime laminar.	116
5.3	Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação em $t = 5,0s$ para o regime laminar.	117
5.4	Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação em $t = 10,0s$ para o regime laminar.	117
5.5	Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação em $t = 14,0s$ para o regime laminar.	118
5.6	Comparação entre o perfil auto similar de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação para o regime laminar.	118
5.7	Comparação entre o perfil do espalhamento obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação para o regime laminar.	120
5.8	Comparação entre o espalhamento obtido por Silvestrini (2000), através de uma simulação LES, e o valor obtido pela Eq. (5.4) considerando $\alpha = 0,07$ e $\alpha = 0,06$	123
5.9	Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação em $\tau^* = 77,25$ para o regime turbulento.	125
5.10	Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação em $\tau^* = 85,5$ para o regime turbulento.	125
5.11	Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação em $\tau^* = 93,45$ para o regime turbulento.	125
5.12	Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação em $\tau^* = 96,0$ para o regime turbulento.	126
5.13	Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação em $\tau^* = 108,8$ para o regime turbulento.	126
5.14	Comparação entre o perfil de velocidade auto-similar obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação para o regime turbulento.	127
5.15	Visualização do critério Q colorido pela velocidade para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$	128

5.16	Vista superior do critério Q colorido pela velocidade para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$	128
5.17	Vista lateral do critério Q colorido pela velocidade para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$	129
5.18	Visualização da velocidade $u[m/s]$ para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$	129
5.19	Visualização da velocidade $v[m/s]$ para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$	129
5.20	Visualização da velocidade $w[m/s]$ para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$	130
5.21	Visualização do perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds para valores de $\alpha = 0,06$ e $\alpha = 0,07$	130
5.22	Perfil da componente x da velocidade média de uma camada de mistura espacial em regime turbulento.	132
5.23	Perfil da componente y da velocidade média de uma camada de mistura espacial em regime turbulento.	133
5.24	Perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds para uma camada de mistura espacial em regime turbulento.	134
5.25	Comparação entre os perfis contínuos da componente x da velocidade média com resultados discretos obtidos por Reichardt (1942) via experimentação material de uma camada de mistura espacial em regime turbulento.	134
5.26	Relação entre σ e $r = U_1/U_2$ apresentada por Sabin (1965).	135
5.27	Comparação entre a solução contínua para a velocidade da linha de centro de um plano em regime laminar com resultados do experimento material de Andrade (1939).	137
5.28	Comparação da solução exata para a velocidade da linha de centro com dados de experimento virtual para um jato plano laminar.	138

5.29	Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 8$ para um jato plano laminar.	139
5.30	Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 12$ para um jato plano laminar.	140
5.31	Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 20$ para um jato plano laminar.	140
5.32	Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 24$ para um jato plano laminar.	141
5.33	Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 32$ para um jato plano laminar.	141
5.34	Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 40$ para um jato plano laminar.	142
5.35	Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 44$ para um jato plano laminar.	142
5.36	Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em para um jato plano laminar.	143
5.37	Norma L_2 avaliada em cada estação de sondas para um jato plano laminar. . .	143
5.38	Perfil contínuo da velocidade v para um jato plano laminar em $x/d_j = 40$. . .	144
5.39	Comparação entre a solução contínua para a velocidade da linha de centro de um jato plano turbulento com resultados discretos obtidos por Zijnen (1958) via experimentação material.	146

5.40	Comparação entre a solução contínua para a componente x de velocidade para jatos planos turbulentos e resultados obtidos por Bradbury (1965) e Heskestad (1965) via experimentação material.	147
5.41	Domínio computacional utilizados nas simulações computacionais realizadas no código MFSim para um jato plano turbulento.	148
5.42	Comparação entre os resultados discretos de simulações computacionais no MFSim, a solução contínua para a velocidade da linha de centro de um jato plano turbulento e resultados discretos obtidos por Zijnen (1958) via experimentação material.	149
5.43	Comparação entre os resultados discretos de simulações computacionais no MFSim e a solução contínua para a velocidade \bar{u} de um jato plano turbulento avaliada em $x/d_j = 50$	150
5.44	Comparação entre os resultados discretos de simulações computacionais no MFSim e a solução contínua para a velocidade \bar{u} de um jato plano turbulento avaliada em $x/d_j = 60$	150
5.45	Comparação entre os resultados discretos de simulações computacionais no MFSim e a solução contínua para a velocidade \bar{u} de um jato plano turbulento avaliada em $x/d_j = 70$	151
5.46	Comparação entre os resultados discretos de simulações computacionais no MFSim e a solução contínua para a velocidade \bar{u} de um jato plano turbulento avaliada em $x/d_j = 75$	151
5.47	Perfil contínuo da velocidade v para um jato plano turbulento em $x/d_j = 55$	152
5.48	Perfil contínuo da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds para um jato plano turbulento em $x/d_j = 55$	153
5.49	Perfil do espalhamento de uma esteira distante gerada por um escoamento laminar ao longo de x	154
5.50	Perfil do déficit máximo de uma esteira distante gerada por um escoamento laminar ao longo de x	155

5.51	Perfil do déficit de velocidade de uma esteira distante gerada por um escoamento laminar avaliado em $x/d = 90$	155
5.52	Perfil da componente x da velocidade média de uma esteira distante gerada por um escoamento laminar avaliado em $x/d = 90$	156
5.53	Comparação entre a solução contínua obtida para o déficit de velocidade e resultados discretos obtidos por Schlichting (1930) em $x/d = 80$	158
5.54	Comparação entre a solução contínua obtida para o déficit de velocidade e resultados discretos obtidos por Fage e Falkner (1932) e Weygandt e Mehta (1995).	158
5.55	Perfil do espalhamento de uma esteira distante gerada por um escoamento turbulento ao longo de x	159
5.56	Perfil do déficit máximo de uma esteira distante gerada por um escoamento turbulento ao longo de x	160
5.57	Perfil do déficit de velocidade de uma esteira distante gerada por um escoamento turbulento avaliado em $x/d = 90$	161
5.58	Perfil da componente x da velocidade média de uma esteira distante gerada por um escoamento laminar avaliado em $x/d = 90$	162
5.59	Perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds para uma esteira distante gerada por um escoamento turbulento avaliado em $x/d = 90$	163

Lista de Tabelas

3.1	Varição do comprimento de mistura e constante de proporcionalidade associada a cada escoamento cisalhante livre.	21
5.1	Valores das normas L_2 e L_∞ entre os resultados da simulação computacional e a solução contínua para a velocidade $u(x, t)$ da camada de mistura em desenvolvimento temporal no regime laminar.	119
5.2	Normas L_2 e L_∞ entre os resultados da simulação e a solução contínua para a camada de mistura em desenvolvimento temporal no regime turbulento. . . .	128

Lista de símbolos

Siglas

DNS	Simulação numérica direta <i>Direct Numerical Simulation</i>
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
FPM	Método do parâmetro livre (<i>Free Parameter Method - FPM</i>)
LES	Simulação das Grandes Escalas (<i>Large Eddy Simulation</i>)
RDT	Teoria da rápida distorção (<i>Rapid Distortion Theory</i>)
S.C	Superfície de controle
TTR	Teorema do Transporte de Reynolds
URANS	<i>Unsteady Reynolds Average Navier-Stokes</i>
V.C	Volume de controle

Operadores

Δ	Variação
$\partial()$	Derivada parcial
$\vec{\nabla}()$	Gradiente
$\vec{\nabla} \cdot ()$	Divergente

$d()$	Derivada ordinária
$(-)$	Operador de filtragem

Subscritos

\bar{u}_1	Déficit de velocidade entre U_∞ e \bar{u} em uma esteira [m/s]
\bar{u}_{1max}	Déficit máximo no perfil de velocidade de uma esteira em relação a U_∞ [m/s]
δ_o	Espessura inicial da zona de mistura [m]
δ_{ij}	Delta de Kronecker
μ_t	Viscosidade dinâmica turbulenta [kg/(m s)]
ν_t	Viscosidade cinemática turbulenta [m ² /s]
Ω_{ij}	Tensor taxa de rotação [1/s]
ϕ_r	Parâmetro utilizado no cálculo da constante A_s do modelo $k - \epsilon$ realizável
σ_ϵ	Constante presente no termo difusivo da equação de transporte de ϵ
σ_k	Constante presente no termo difusivo da equação de transporte de k
τ_{ij}	Tensor das tensões viscosas [Pa]
$\vec{F}_{cilindro \rightarrow S.C}$	Força que o cilindro exerce sobre a superfície de controle [N]
\vec{F}_{ext}	Força externa exercida sobre um sistema
A_0	Constante utilizada no cálculo do parâmetro C_μ do modelo $k - \epsilon$ realizável
A_S	Constante utilizada no cálculo do parâmetro C_μ do modelo $k - \epsilon$ realizável

$A_{frontal}$	Área frontal [m ²]
B_{sist}	Propriedade extensiva do fluido
C_1	Constante do modelo $k - \epsilon$ realizável
C_2	Constante do modelo $k - \epsilon$ realizável
C_μ	Termo utilizado no cálculo da viscosidade turbulenta para modelos $k - \epsilon$
c_D	Coeficiente de arrasto
c_n	Constante originada do processo de integração, sendo n qualquer subscrito
$C_{\epsilon 1}$	Constante do modelo $k - \epsilon$ padrão
$C_{\epsilon 2}$	Constante do modelo $k - \epsilon$ padrão
d_j	Altura do bocal para um jato plano [m]
f_ϵ	Conjunto de termos referentes a transformações relativas a ϵ [kg W/(m ³ s ²)]
F_D	Força de arrasto [N]
f_i	Termo de transformação de alguma informação em quantidade de movimento linear [N]
f_k	Conjunto de termos referentes a transformações relativas a energia cinética turbulenta [kg/(m s ³)]
K_l	Constante envolvida no cálculo do espalhamento de uma camada de mistura temporal laminar
K_t	Constante envolvida no cálculo do espalhamento de uma camada de mistura temporal turbulenta

l_m	Comprimento característico do modelo do comprimento de mistura de Prandtl [m]
s_i	Coordenadas espaciais da sonda i
S_{ij}	Tensor taxa de deformação [1/s]
u_0	Campo inicial de velocidade [m/s]
U_1	Velocidade da corrente mais rápida em uma camada de mistura
U_2	Velocidade da corrente mais lenta em uma camada de mistura
U_∞	Velocidade da corrente livre [m/s]
U_c	Velocidade da linha de centro de um jato plano
U_d	Velocidade utilizada na definição da função de auto-similaridade [m/s]
u_i	Velocidade na direção i para representação indicial [m/s]
U_j	Velocidade média do perfil de velocidade para um jato plano na saída do bocal [m/s]
u_j	Velocidade na direção j para representação indicial [m/s]
u_o	Déficit máximo no perfil de velocidade de uma esteira em relação a U_∞ [m/s]
U_R	Velocidade de referência utilizada na definição da função de auto-similaridade [m/s]
U_{ch}	Velocidade característica do modelo de Prandtl-Reichardt [m/s]
U_{max}	Velocidade máxima que ocorre no escoamento [m/s]
U_{min}	Velocidade mínima que ocorre no escoamento [m/s]
W_r	Parâmetro baseado no tensor de deformação utilizado no modelo $k - \epsilon$ realizável

x_i	Variável independente na direção i para representação indicial [m]
x_j	Variável independente na direção j para representação indicial [m]
x_o	Origem virtual de um jato plano [m]

Sobrescritos

$\overline{u'v'}$	Componente xy do tensor de Reynolds [m^2/s^2]
τ^*	Tempo adimensional
$\tilde{\beta}$	Forma negativa do coeficiente, β , da EDO
\bar{p}^*	Pressão média modificada [Pa]
\bar{U}	Média entre as velocidades das correntes em uma camada de mistura [m/s]
\hat{V}	Velocidade característica do modelo do comprimento de mistura de Prandtl [m/s]
\tilde{B}	Propriedade intensiva do fluido
\tilde{S}	Parâmetro baseado no tensor taxa de deformação utilizado no cálculo do parâmetro W_r do modelo $k - \epsilon$ realizável [1/s]
\tilde{U}	Semi-diferença entre as velocidades das correntes em uma camada de mistura [m/s]
\vec{g}	Campo gravitacional [m/s^2]
\vec{V}	Vetor velocidade [m/s]
$d\vec{A}$	Vetor normal a um elemento infinitesimal de área sobre uma superfície de controle
U^*	Parâmetro baseado nos tensores taxa de deformação e de rotação utilizado no cálculo do parâmetro C_μ do modelo $k - \epsilon$ realizável [1/s]

u'	Flutuação da componente de velocidade na direção x [m/s]
v'	Flutuação da componente de velocidade na direção y [m/s]
w'	Flutuação da componente de velocidade na direção z [m/s]

Letras gregas

ϵ	Pontência específica de transformação viscosa [W/m ³]
ζ	Variável de auto-similaridade transformada para o caso da camada de mistura espacial turbulenta
α	Constante empírica de fechamento do modelo do comprimento de mistura de Prandtl
β	Constante correspondente a um dos coeficientes da EDO obtida via transformação de auto-similaridade
χ	Constante empírica de fechamento do modelo de Prandtl-Reichardt
δ	Espalhamento da zona de mistura do escoamento
η	Variável de auto similaridade
Γ	Constante que representa o coeficiente de η na solução contínua de um jato plano turbulento
γ	Constante obtida pela aplicação do TTR nos casos do jato plano e da esteira distante
κ	Constante correspondente a um dos coeficientes da EDO obtida via transformação de auto-similaridade
λ	Razão entre a semi-diferença e a média de velocidades em uma camada de mistura $\lambda = \tilde{U}/\bar{U}$
μ	Viscosidade dinâmica do fluido [kg/(m s)]

ν	Viscosidade cinemática do fluido [m^2/s]
ω	Escala de frequência de Kolmogorov
Φ	Função genérica de proporcionalidade
ϕ	Função genérica
ρ	Massa específica do fluido [kg/m^3]
σ	Constante definida na resolução da camada de mistura espacial turbulenta
Υ	Parâmetro utilizado no cálculo da constante C_1 do modelo $k - \epsilon$ realizável [s/kg]
ξ	Função de proporcionalidade da variável de auto-similaridade relacionada a um comprimento característico do problema físico [m]

Letras latinas

b	Tamanho do domínio na direção z [m]
c	Taxa de espalhamento de uma camada de mistura espacial turbulenta
d	Tamanho do corpo imerso relativo ao eixo y , para o caso de uma esteira [m]
F	Função de auto-similaridade
f	Função de auto-similaridade
G	Função de auto-similaridade
g	Função de auto-similaridade
J	Fluxo de quantidade de movimento linear [N]
J'	Fluxo de quantidade de movimento linear por unidade de comprimento [N/m]

L	Tamanho da entrada do V.C no TTR [m]
m	Massa [kg]
p	Pressão [Pa]
r	Raio entre as velocidades das correntes $r = U_2/U_1$
Re	Número de Reynolds
S	Termo derivado do tensor taxa de deformação, utilizado nos modelos $k - \epsilon$ [1/s]
t	Variável temporal [s]
u	Componente do vetor velocidade na direção x [m/s]
V	Volume [m ³]
v	Componente do vetor velocidade na direção y [m/s]
w	Componente do vetor velocidade na direção z [m/s]
x	Variável espacial que representa a direção principal do escoamento [m]
y	Variável espacial que representa a direção transversal do escoamento [m]
A	Taxa de espalhamento da zona de mistura de um jato plano turbulento
k	Energia cinética turbulenta [m ² /s ²]
n	Contador de termos da série utilizada na solução da camada de mistura espacial turbulenta

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xx
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
3 METODOLOGIA	13
3.1 Equações de Navier-Stokes filtradas	13
3.2 Modelos de fechamento	16
3.2.1 Conceito de viscosidade turbulenta	17
3.2.2 Modelo do comprimento de mistura de Prandtl	19
3.2.3 Modelo de Prandtl-Reichardt	21
3.2.4 Modelos de fechamento $k - \epsilon$	23
3.2.4.1 Modelo $k - \epsilon$ padrão	24
3.2.4.2 Modelo $k - \epsilon$ realizável	26
3.3 Soluções contínuas via método de auto similaridade	29
3.4 O código MFSim	34
4 SOLUÇÕES CONTÍNUAS	36
4.1 Generalidades	36
4.2 Camada de mistura em desenvolvimento temporal	40

4.2.1	Modelo físico	40
4.2.2	Regime laminar	42
4.2.2.1	Modelo matemático diferencial parcial	42
4.2.2.2	Modelo matemático diferencial ordinário	42
4.2.2.3	Modelo matemático exato	45
4.2.3	Regime turbulento	47
4.2.3.1	Modelo matemático diferencial parcial	47
4.2.3.2	Modelo matemático diferencial ordinário	48
4.2.3.3	Modelo matemático exato	50
4.3	Camada de mistura em desenvolvimento espacial	52
4.3.1	Modelo Físico	52
4.3.2	Regime turbulento	53
4.3.2.1	Modelo matemático diferencial parcial	53
4.3.2.2	Modelo matemático diferencial ordinário	55
4.3.2.3	Modelo matemático exato	60
4.4	Jato plano	66
4.4.1	Modelo físico	66
4.4.2	Modelo matemático diferencial parcial	68
4.4.3	Modelo matemático diferencial ordinário	70
4.4.4	Aplicação do TTR para a quantidade de movimento linear	73
4.4.5	Regime laminar	75
4.4.5.1	Modelo matemático exato	75
4.4.6	Regime turbulento	81
4.4.6.1	Modelo matemático exato	81
4.5	Esteira gerada pelo escoamento sobre um corpo imerso avaliada em uma região distante	88
4.5.1	Modelo físico	88
4.5.2	Modelo matemático diferencial parcial	90
4.5.3	TTR para o escoamento sobre um corpo imerso	92

4.5.4	Regime laminar	96
4.5.4.1	Modelo matemático diferencial ordinário	96
4.5.4.2	Modelo matemático exato	99
4.5.5	Regime turbulento	102
4.5.5.1	Modelo matemático diferencial parcial específico	102
4.5.5.2	Modelo matemático diferencial ordinário	105
4.5.5.3	Modelo matemático exato	106
5	RESULTADOS	114
5.1	Camada de mistura temporal	115
5.1.1	Regime laminar	115
5.1.1.1	Comparação com simulações computacionais	115
5.1.2	Regime turbulento	120
5.1.2.1	Comparação com simulações computacionais	121
5.1.2.2	Perfis sem comparação com dados discretos	130
5.2	Camada de mistura espacial	131
5.2.1	Regime turbulento	131
5.2.1.1	Perfis sem comparação com dados discretos	132
5.2.1.2	Comparação com experimentos materiais	134
5.3	Jato plano	136
5.3.1	Regime laminar	136
5.3.1.1	Comparação com experimentos materiais	136
5.3.1.2	Comparação com simulações computacionais	137
5.3.1.3	Perfis sem comparação com dados discretos	144
5.3.2	Regime turbulento	145
5.3.2.1	Comparação com experimentos materiais	145
5.3.2.2	Comparação com simulações computacionais	147
5.3.2.3	Perfis sem comparação com resultados discretos	152
5.4	Esteira distante	153
5.4.1	Regime laminar	153

5.4.1.1	Perfis sem comparações com dados discretos	153
5.4.2	Regime turbulento	157
5.4.2.1	Comparação com experimentos materiais	157
5.4.2.2	Perfis sem comparação com dados discretos	160
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	164
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	166

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Os escoamentos cisalhantes livres ocorrem na ausência de paredes e de gradientes adversos de pressão, sendo uma classe adequada para se dar os primeiros passos no campo da mecânica dos fluidos. Nesses escoamentos existem regiões espaciais ou temporais onde os perfis de velocidades, por exemplo, possuem formas muito parecidas, que podem ser levadas a uma única forma através da aplicação de uma função sobre os mesmos. Nessas regiões, os perfis são chamados de auto-similares. A existência de tal propriedade nos escoamentos abre a possibilidade da busca por soluções contínuas para diversas propriedades dos escoamentos pertencentes a essa classe.

Nesse sentido, no presente trabalho, propõem-se a exploração de tal propriedade dos escoamentos e a utilização do método do parâmetro livre para compor o que foi chamado de resolução por auto-similaridade. A ideia básica para a solução por auto-similaridade é partir de um sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), que fornecem o modelo físico simplificado para cada problema e transformá-lo em um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Tal procedimento se justifica pelo fato de que a solução de EDOs tendem a ser mais simples que a solução de EDPs. Uma das exigências para que tal método possa ser aplicado é que os coeficientes da EDO obtida sejam constantes. Através dessa exigência é possível integrar os coeficientes para a obtenção de propriedades do escoamento, tais como, o espalhamento ao longo do tempo ou do espaço e o decaimento da velocidade na linha

central do escoamento. A integração do sistema de EDOs fornece soluções contínuas para as velocidades na região auto-similar.

Os escoamentos cisalhantes livres trabalhados na presente dissertação são: camadas de mistura em desenvolvimento temporal nos regimes laminar e turbulento, camadas de mistura em desenvolvimento espacial no regime turbulento, jatos planos em desenvolvimento espacial nos regimes laminar e turbulento e esteiras desenvolvidas a jusante de corpos imersos, avaliadas em uma região distante, também para os regimes laminar e turbulento. Quando os escoamentos ocorrem em regime turbulento, é necessário que se utilize um modelo de fechamento da turbulência. Existem várias opções para tais modelos com características de aplicações diferentes. No presente trabalho foram utilizadas duas formas do modelo do comprimento de mistura de Prandtl, adequado para escoamentos cisalhantes livres.

A apresentação do desenvolvimento das soluções contínuas por si só é uma contribuição do presente trabalho no sentido didático e educacional já que o estudo e o entendimento dos escoamentos cisalhantes livres são os passos iniciais para o entendimento de escoamentos complexos e, apesar de algumas das soluções trabalhadas estarem presentes na literatura clássica da área, o processo de solução omite diversos passos importantes e não triviais. A fim de fornecer ao trabalho maior embasamento, foram realizadas comparações das soluções contínuas obtidas com resultados discretos fornecidos por trabalhos de experimentos materiais apresentados na literatura e/ou de experimentos computacionais realizados como parte do desenvolvimento do presente trabalho.

No que tange às simulações computacionais foi utilizado o código MFSim, desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Além da utilização do código já desenvolvido para simulação dos escoamentos em regime laminar ou em regime turbulento utilizando Simulação das Grandes Escalas (LES), foram implementados dois modelos de fechamento da turbulência a duas equações de transporte pertencentes a classe URANS (*Unsteady Reynolds Average Navier-Stokes*), o modelo $k - \epsilon$ padrão e o modelo $k - \epsilon$ realizável. Além desses modelos foram implementadas melhorias no código ao longo do trabalho.

A seguir, no Capítulo 2 é apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre os temas

envolvidos no presente trabalho. No Capítulo 3 são apresentados elementos da metodologia utilizada na obtenção das soluções contínuas e nas implementações realizadas no código MFSim. No Capítulo 4 são apresentados os desenvolvimentos detalhados das soluções contínuas para os escoamentos cisalhantes livres supracitados. No Capítulo 5 são apresentadas as comparações das soluções contínuas com resultados discretos de experimentos materiais e computacionais, a fim de embasar os desenvolvimentos do Capítulo 4. Finalmente, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões a respeito dos desenvolvimentos e resultados obtidos no presente trabalho.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os fenômenos físicos que ocorrem na natureza podem ser modelados de diferentes maneiras. Quando se identifica o problema parte-se para a sua modelagem física, podendo se utilizar, por exemplo, a modelagem material ou a modelagem teórica. Na modelagem material, são realizados experimentos materiais com o objetivo de se extrair informações relativas ao problema modelado. A modelagem teórica por sua vez busca modelar o problema através de equações algébricas, diferenciais, integrais ou integro-diferenciais, podendo conduzir a modelos contínuos ou discretos. No presente trabalho, foi utilizada uma modelagem teórica diferencial para os escoamentos com o objetivo de se chegar a soluções contínuas.

Quando se trata da solução de equações diferenciais, podem ser utilizados métodos numéricos para a integração ou métodos matemáticos que conduzam a soluções contínuas. Como o objetivo da presente dissertação é a obtenção de soluções contínuas, não são apresentados ou aplicados métodos de integração numérico-computacionais, mas sim um método matemático capaz de conduzir a soluções contínuas: o método de resolução por auto-similaridade.

A história da simetria que, posteriormente derivou o conceito de auto similaridade foi construída ao longo de muito tempo com a participação de vários matemáticos e filósofos, conforme relatado de maneira lúdica por Stewart (2012).

A auto similaridade de uma forma é um aspecto geométrico presente que se faz invariante por escala espacial ou temporal. O conceito de auto similaridade pode ser atribuído

também através da análise de propriedades estatísticas das formas ou estruturas. Seguindo por essa linha, pode-se dizer que existe auto similaridade em uma forma quando as propriedades estatísticas são preservadas para escalas espaciais e/ou temporais.

Podem ser enumerados diversos exemplos de auto similaridade, sendo alguns deles:

- Matrioscas (Fig. 2.1): também conhecidas como bonecas russas, são um brinquedo tradicional da Rússia. Constitui-se de uma série de bonecas, feitas geralmente de madeira, colocadas umas dentro das outras, da maior (exterior) até a menor (a única que não é oca). Apesar de não apresentarem pinturas idênticas as formas das bonecas são auto-similares, até para possibilitar o encaixe de uma dentro da outra.

Figura 2.1: Família de matrioscas russas.



Fonte: http://france-cei.net/catalog/product_info.php/products_id/6655 (Acessado em 08/07/2018).

- Família de flautas transversais (Fig. 2.2): existem 6 tipos diferentes de flautas na família. Cada uma tem som e tamanho particular. Apesar de a primeira flauta apresentar uma forma distinta das demais, a construção, a embocadura e a forma com que as notas se apresentam em todas as flautas transversais é auto-similar. Além disso, é possível tornar a primeira flauta auto-similar às demais aplicando operações de rotação além de fatores de proporcionalidade, ou apenas considerando que a auto-similaridade ocorre somente na parte não curva.

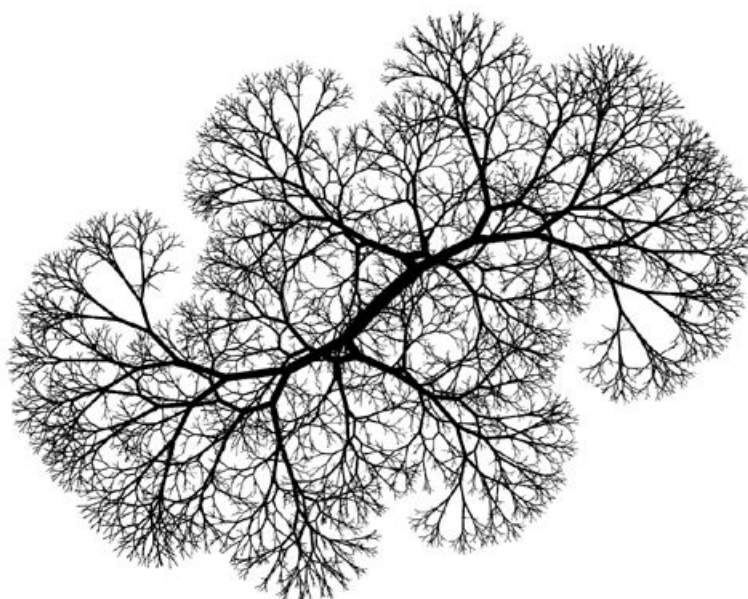
Figura 2.2: Família de flautas transversais.



Fonte: <http://geddisfluteqat.weebly.com/flute-family.html> (Acessado em 08/07/2018).

- Fractais (Fig. 2.3): são objetos ou geometrias que possuem as seguintes propriedades características: auto-similaridade, estrutura fina, lei de construção iterativa. Estrutura fina é uma propriedade relacionada à auto-similaridade e significa que o objeto possui características semelhantes em diferentes escalas; em particular, a aparência do objeto não fica mais simples quando a escala de observação é reduzida. (BARBOSA, 2002). Também representa um caso onde apenas fatores de proporcionalidade não são suficientes para levar todo o fractal a uma única forma auto-similar.

Figura 2.3: Exemplo de fractal.

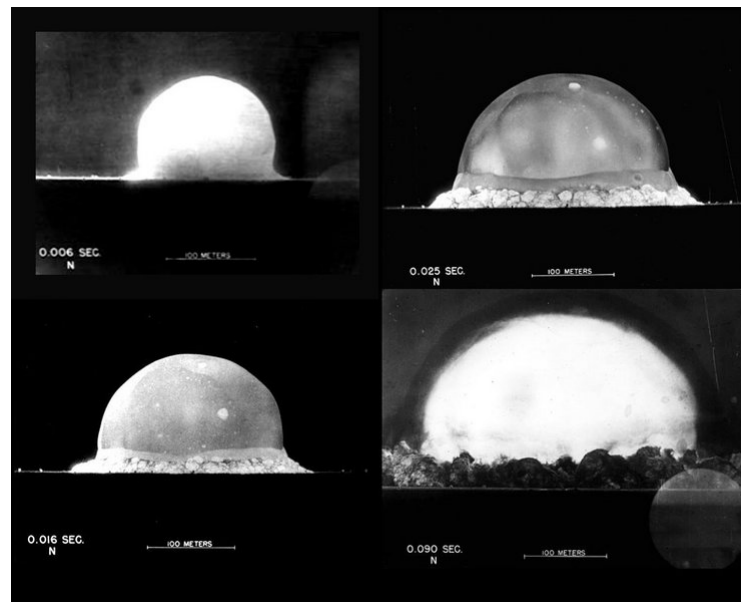


Fonte: <https://www.pinterest.pt/pin/864620828436508319/> (Acessado em 08/07/2018).

- Explosão de uma bomba atômica (Fig. 2.4): usando considerações simples da análise dimensional, Taylor (1950) foi capaz, nos anos 40, de fornecer a resolução para uma onda de choque gerada no ar pela explosão de uma bomba atômica, reduzindo-a a um problema de uma variável auto similar. Um fato interessante, citado no artigo de Taylor é que, apesar de o trabalho ter sido realizado por volta de 1941, o mesmo só foi publicado em 1950, já que era um trabalho científico de alto interesse no ambiente da segunda guerra mundial que estava se desenrolando nessa época.

teste teste

Figura 2.4: Fotografias da primeira explosão de bomba atômica no deserto do Novo México - 5:29 A.M. em 16 de julho de 1945.



Fonte: <https://www.atomicheritage.org/history/trinity-test-1945> (Acessado em 08/07/2018).

Se um escoamento apresenta tais características para o perfil médio de velocidade, sua solução contínua pode ser obtida através do método de auto similaridade, que possibilita a redução de um conjunto de EDPs para um conjunto de EDOs. Os escoamentos cisalhantes livres geralmente contemplam as características necessárias para auto similaridade, pelo menos em parte do domínio.

A aplicação da técnica de solução por auto similaridade deve vir acompanhada por um método auxiliar que permita a determinação da variável e da função que irão promover a

transformação. Dentre eles estão o método do parâmetro livre (*Free Parameter Method - FPM*) e a utilização de teoria de grupos.

A teoria de grupos, que pode ser utilizada no processo de solução, é uma área vasta da matemática, exigindo conceitos específicos. Hansen (1964) expõe o procedimento de resolução por auto similaridade via teoria de grupos e enumera algumas vantagens e desvantagens da técnica. Segundo ele, a necessidade de conceitos específicos pode dificultar o uso da técnica quando não se tem uma formação em tal área, porém, o procedimento utilizado é exposto em seu trabalho. Por outro lado, existem duas desvantagens no uso de métodos da teoria de grupos. A primeira é que as condições de contorno do problema não são levadas em consideração até que toda a análise seja concluída. Além disso, existe a incerteza a respeito da escolha de um grupo de transformação adequado.

O método do parâmetro livre (FPM) é considerado simples e robusto para se determinar soluções por auto similaridade. O FPM é empregado na maior parte dos trabalhos encontrados na literatura e que serão apresentados na seção seguinte. Em essência o método consiste em assumir que a variável dependente presente na EDP pode ser expressa como um produto de duas funções. Uma das funções presente neste produto é função de todas as variáveis independentes, exceto de uma. A outra função é dependente apenas de um parâmetro, a variável de auto similaridade η , sendo η obtida da transformação de variáveis envolvendo a variável independente que não foi incluída na primeira função. Por exemplo, supondo uma variável dependente ϕ , sendo as variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_n, y . Segundo o FPM tem-se

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)F(\eta), \quad (2.1)$$

onde

$$\eta = \eta(x_1, x_2, \dots, x_n, y). \quad (2.2)$$

Como a forma de η não é especificada no início, esta variável é chamada de parâmetro livre e, portanto, designa tal método.

Barenblatt (1996), Barenblatt (2003) apresentam uma base teórica muito consistente a respeito dos conceitos básicos relacionados à ocorrência de similaridade em diferentes sistemas dinâmicos e à resolução de problemas utilizando a técnica de auto similaridade.

A literatura apresenta vasto material a respeito do uso de tal método em problemas de mecânica e elétrica (SEDOV, 1993), além de livros que aprofundam em características, conceitos, restrições e derivações do método de solução por auto similaridade (BARENBLATT, 1996; BARENBLATT, 2003).

A busca por soluções contínuas para modelos diferenciais de problemas físicos empregando o mínimo possível de simplificações é, há muito tempo, algo que recebeu grande esforço de engenheiros e matemáticos. Em grande parte dos casos, as equações utilizadas para modelar os problemas físicos são Equações Diferenciais Parciais (EDPs). A solução contínua de EDPs pode apresentar diferentes graus de complexidade, dependendo do modelo diferencial. Em certos casos é possível obter soluções contínuas para o modelo diferencial através do uso de métodos como, por exemplo, separação de variáveis, transformada de Laplace, transformada de Fourier, dentre outros. Porém, existem casos em que não é possível encontrar uma solução contínua para a EDP a partir dos métodos supracitados, principalmente quando existem não linearidades ou condições de contorno não homogêneas. Um bom exemplo de EDPs que apresentam não linearidades são as equações de Navier Stokes, com as quais modelam-se escoamentos de fluidos.

Em casos onde os métodos clássicos de solução apresentam dificuldades para solucionar um sistema de EDPs uma alternativa interessante é realizar a transformação da equação diferencial parcial para uma equação diferencial ordinária (EDO). O método chamado solução por auto similaridade permite tal transformação, trazendo a vantagem de que, geralmente é mais simples se obter a solução de uma EDO que de uma EDP, mesmo que a EDO apresente não linearidades. Esse método é comumente utilizado na área de mecânica dos fluidos, porém sua utilização está condicionada à presença de certas características no problema físico, as quais serão expostas posteriormente. Cabe, portanto, reiterar a importância das EDPs e ressaltar que o método de auto-similaridade pode ser aplicado a casos específicos, os quais atendem as características exigidas, ou seja, a solução auto-similar pode ser obtida para um conjunto

restrito de problemas físicos.

O foco do presente trabalho é em escoamentos cisalhantes livres, ou seja, que ocorrem na ausência de paredes. Esse tipo de escoamento está bastante presente em situações da natureza e raramente em escoamentos industriais, exceto quando são encontrados em meio a outros tipos de escoamentos, cuja combinação caracterizará os chamados escoamentos complexos. São exemplos de escoamentos cisalhantes livres os jatos, as camadas de mistura e as esteiras formadas a jusante de corpos imersos, avaliadas em regiões distantes do corpo (esteiras distantes). Esses escoamentos podem acontecer em regime laminar ou turbulento. O regime do escoamento é caracterizado pelo número de Reynolds, calculado com base em uma velocidade e um comprimento de referência, U e x , respectivamente e na viscosidade cinemática do fluido ν . O número de Reynolds é definido como,

$$Re = \frac{U x}{\nu}. \quad (2.3)$$

Se o regime é turbulento, o número de Reynolds é alto e existe a necessidade de se adicionar um modelo de fechamento às equações médias de Reynolds. Se o número de Reynolds é baixo o escoamento é considerado laminar.

No campo de mecânica dos fluidos a apresentação de soluções por auto similaridade de escoamentos cisalhantes livres e parietais é algo presente na maior parte da literatura clássica da área como nos clássicos livros de Schlichting *et al.* (1955), White e Corfield (2006), Wilcox *et al.* (1998) e Tennekes e Lumley (1972). O trabalho de Tennekes e Lumley (1972) forneceu a base do procedimento de solução utilizado no presente trabalho. Lumley propõe a transformação das EDPs usadas para modelar o problema físico em uma EDO cujos coeficientes são integráveis e precisam ser constantes para que o método tenha validade. Assim, as características do escoamento, tais como velocidade de referência e comprimento característico da zona de mistura são determinados por meio de integrações e não de suposições ou hipóteses. O trabalho de Schlichting porém é o que apresenta o mais amplo conteúdo sobre o tema, trazendo resoluções de escoamentos de diversas naturezas e níveis de complexidade.

Apesar de a literatura apresentar um vasto material sobre o tema, grande parte das soluções expostas não possuem riqueza de detalhes e a metodologia completa de solução é

apresentada em alguns casos, como para a esteira distante em regime turbulento por Wilcox *et al.* (1998). Diante disso, o principal objetivo da presente dissertação é apresentar um procedimento bem embasado, possibilitando aos leitores irem além das soluções e procedimentos apresentados na literatura. Além disso, os autores apresentam, para alguns casos, soluções ainda não apresentadas na literatura vasculhada ou modificações importantes nas mesmas.

Contextualizando o tema nos desenvolvimentos atuais apresentados na literatura, resoluções matemáticas de escoamentos continuam a ser desenvolvidas porém, o material encontrado atualmente tratando da solução de escoamentos cisalhantes livres, de forma especial para o regime turbulento, não é muito amplo. O material a respeito de tal tema é relativamente antigo, como os trabalhos de Görtler (1942), Schlichting *et al.* (1955) e White (1962), mas existem trabalhos recentes abordando soluções auto-similares de outros tipos de escoamentos como, por exemplo, problemas que envolvem transferência de energia térmica.

A utilização de resultados obtidos via experimentação material é necessária, a fim de se realizar comparações com as soluções auto-similares para os escoamentos trabalhados. Experimentações materiais são aquelas realizadas através de experimentos que envolvam a reprodução material, em laboratório, do problema físico a ser estudado. Ao longo da história da turbulência a experimentação material foi fundamental para a observação de certas características presentes em escoamentos de tal natureza e também no fornecimento de informações a serem utilizadas como parâmetros de entrada dos modelos de fechamento para escoamentos turbulentos, principalmente dos primeiros que surgiram, os quais serão abordados no capítulo seguinte. Por outro lado, a grande parte dos desenvolvimentos via experimentação material foram incitadas por desenvolvimentos teóricos. Por exemplo, Tollmien (1930) e Schlichting (1933) previram teoricamente a transição de camadas limite. Só após o desenvolvimento teórico, eles comprovaram por experimentos materiais as observações que haviam sido realizadas. A necessidade de dados experimentais para alimentar modelos será tratada de forma mais profunda no Capítulo 3, porém, pode-se adiantar que modelos precursores no tratamento de escoamentos turbulentos como o modelo do comprimento de mistura proposto por Prandtl fazia uso de dados experimentais e teve modificações propostas pelo próprio Prandtl com base no trabalho experimental de Reichardt (1942). Os experimentos materiais de escoamentos

cisalhantes livres são comuns na literatura, Andrade (1939), Bradbury (1965) e Heskestad (1965) realizaram experimentos de jatos planos em regime laminar e turbulento, Reichardt (1942) e Liepmann e Laufer (1947) trabalharam com camadas de mistura espaciais em regime turbulento e Schlichting (1930) e Weygandt e Mehta (1995) apresentam resultados para a esteira distante em regime turbulento. Esses são apenas alguns exemplos de trabalhos que podem ser utilizados como forma de comparação com as soluções contínuas obtidas e em procedimentos de validação computacional para escoamentos cisalhantes livres.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Nesta seção será apresentada a metodologia utilizada no desenvolvimento do presente trabalho, começando pelas equações de Navier-Stokes, que são utilizadas para modelar escoamentos de fluidos, abordando o problema de fechamento da turbulência, que consiste em modelar o tensor de Reynolds, apresentando os modelos utilizados no presente trabalho.

3.1 Equações de Navier-Stokes filtradas

As equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade são suficientes para modelar escoamentos isotérmicos de fluidos tanto em regime laminar quanto em regime turbulento, e para qualquer número de Reynolds. Porém, quanto maior o número de Reynolds, mais largo torna-se o espectro de energia associado ao escoamento. A geometria do problema limita a formação das maiores estruturas, isto significa que altas frequências e altos números de onda são características de escoamentos que ocorrem a elevados números de Reynolds. O cálculo de todas as estruturas turbilhonares requer o uso de malhas muito finas, implicando em custos computacionais elevados. Logo, a prática de Simulação Numérica Direta (DNS), onde todas as estruturas são resolvidas, é limitada a escoamentos pouco complexos e depende do *hardware* disponível.

A equação da continuidade na forma indicial para escoamentos incompressíveis e sem

variação da massa específica pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.1)$$

As equações de Navier Stokes na forma indicial para escoamentos incompressíveis e sem variação de massa específica são dadas por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{f_i}{\rho}, \quad (3.2)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, ν é a viscosidade cinemática do fluido e f_i pode ser tratado como um termo de transformação de alguma informação em quantidade de movimento linear, por exemplo, efeitos gravitacionais, podendo ser positivo ou negativo.

É importante ressaltar que a abertura da Eq. (3.2) resultará em três equações, sendo uma para cada componente de velocidade.

O avanço em termos de métodos de resolução e a evolução dos *hardwares* vem possibilitando a prática de DNS para escoamentos com maiores números de Reynolds a cada ano. No entanto, os valores de número de Reynolds para os quais é possível se realizar DNS atualmente ainda são modestos quando comparados com os valores que caracterizam as aplicações industriais.

Uma das alternativas que possibilita a não utilização de DNS nas simulações é a decomposição do espectro de escalas do escoamento em duas bandas, utilizando o conceito de filtragem. Reynolds e Boussinesq propuseram aplicar o operador média temporal às Eqs. (3.1) e (3.2). Esse operador será aqui representado pelo símbolo barra ($\bar{\quad}$). Sabendo-se que os operadores média temporal e derivadas parciais são lineares, então eles podem ser comutados, resultando, ao final do processo de dedução em:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.3)$$

e

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}. \quad (3.4)$$

Essas equações estariam prontas para ser resolvidas, se não fosse o termo não linear $\overline{u_i u_j}$ que aparece na Eq. (3.4). As variáveis que estão sendo transportadas são as velocidades \bar{u}_i , as quais são as incógnitas das equações, juntamente com o campo de pressão, \bar{p} . Assim, essas equações não podem ser resolvidas, uma vez que para determinar a sua solução seria necessário conhecer as velocidades u_i , o que só seria possível via DNS. Essas equações poderiam ser resolvidas se no lugar de $\overline{u_i u_j}$ aparecesse o termo $\bar{u}_i \bar{u}_j$. Para tanto, faz-se a decomposição proposta por Reynolds-Boussinesq, ou seja, decompõem-se os campos totais de velocidade nas suas partes médias e flutuantes. Matematicamente, essa decomposição se faz como segue:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad (3.5)$$

sendo u'_i a flutuação no campo de velocidade.

Substituindo a Eq. (3.5) em (3.4), realizando manipulações e aplicando as propriedades referentes ao operador de média temporal chega-se a:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}. \quad (3.6)$$

O termo $\overline{u'_i u'_j}$ é conhecido como tensor de Reynolds. Ele é simétrico uma vez que a ordem das componentes das flutuações de velocidade não afeta os momentos estatísticos de segunda ordem que o compõem. Assim, esse tensor abriga seis incógnitas adicionais, que vêm das correlações entre as flutuações de velocidades relativas às três direções coordenadas. Esse tensor representa toda a troca de quantidade de movimento linear entre a parte média e a parte flutuante do escoamento turbulento.

As Eqs. (3.6), são chamadas de equações médias transientes de Reynolds que tem como sigla URANS, de *Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*. Essas equações

junto à equação da continuidade compõem o modelo para o comportamento médio de um escoamento turbulento isotérmico. Esse é um modelo matemático aberto, tendo seis incógnitas que compõem o tensor de Reynolds adicionais às velocidades e pressão médias. Esse é o famoso problema de fechamento da turbulência que requer modelos adicionais de fechamento. Essa discussão será apresentada na seção seguinte.

Além das metodologias DNS e URANS para simulação computacional de escoamentos turbulentos existe ainda uma terceira metodologia também amplamente utilizada, com a qual se modela o comportamento instantâneo do escoamento e que possui menor custo computacional que DNS: a metodologia LES (*Large Eddy Simulation*).

Nas simulações de grandes escalas, o espectro de energia cinética turbulenta é dividido em duas bandas, resolvendo-se a primeira banda, dos menores números de onda e modelando-se a interação entre a primeira e a segunda banda. Como uma parte do espectro é resolvida, o resultado não é um comportamento médio do escoamento, como o que se tem utilizando a metodologia URANS. Por outro lado, como se tem também uma parte do espectro que não é resolvida não se obtém a acurácia fornecida quando se utiliza DNS. O processo de obtenção das equações utilizadas na metodologia LES também passa pela aplicação de um operador de filtragem na Eq. (3.2). Pode-se dizer que as equações para as três metodologias podem ser derivadas das equações de Navier Stokes filtradas, sendo utilizado na metodologia URANS um filtro passa-nada, correspondente a média temporal, em DNS um filtro passa-tudo e em LES um filtro intermediário, dependente da malha utilizada.

No presente trabalho foram implementados dois modelos de fechamento para a metodologia URANS, justificando a maior ênfase dada a ela na presente seção. A metodologia LES foi utilizada em algumas simulações ao longo do trabalho porém, os modelos já se encontravam implementados no código computacional utilizado.

3.2 Modelos de fechamento

Conforme exposto na Seção 3.1, as Eqs. (3.6), somadas à equação da continuidade possuem seis incógnitas que compõem o tensor de Reynolds adicionais às velocidades e pressão médias. Boussinesq propôs fechar esse sistema de equações filtradas modelando o tensor de

Reynolds com o conceito de viscosidade turbulenta, $\nu_t(\vec{x}, t)$. Existem outras abordagens, nas quais não se utiliza o conceito de viscosidade turbulenta, porém, no presente trabalho, foi utilizada somente a proposta de Boussinesq, a qual será abordada a seguir.

3.2.1 Conceito de viscosidade turbulenta

Boussinesq (1877) realizou uma analogia com o modelo de Stokes para as tensões viscosas moleculares. Através dessa analogia ele propôs que o fechamento para o tensor de Reynolds, também fosse realizado com o seguinte modelo:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (3.7)$$

onde μ_t é a chamada viscosidade dinâmica turbulenta e k é a energia cinética turbulenta, dada por:

$$k \equiv -\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} \left(\overline{u' u'} + \overline{v' v'} + \overline{w' w'} \right). \quad (3.8)$$

A viscosidade dinâmica turbulenta, $\mu_t(\vec{x}, t)$, apresenta maior dificuldade em sua avaliação, uma vez que ela depende da natureza do escoamento, e não do fluido como a viscosidade dinâmica molecular, constituindo-se numa forte não-linearidade na solução das equações.

A energia cinética turbulenta k também aparece na proposta de Boussinesq, dada pela Eq. (3.7). No entanto, como ela depende apenas do traço do tensor de Reynolds, a sua natureza é semelhante à da pressão e pode ser incorporada no termo do gradiente de pressão, conforme será apresentado adiante.

Substituindo a Eq. (3.7) em (3.6), tem-se a equação de Navier-Stokes filtrada em notação indicial, utilizando o modelo proposto por Boussinesq:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right], \quad (3.9)$$

onde $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$.

O divergente do termo envolvendo a energia cinética turbulenta resulta no gradiente da

mesma:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) = \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i}, \quad (3.10)$$

o que permite incorporá-lo ao gradiente de pressão na Eq. (3.9), gerando uma pressão modificada na equação modelada

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}, \quad (3.11)$$

onde a pressão modificada \bar{p}^* é dada por:

$$\bar{p}^* = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho k. \quad (3.12)$$

Para recuperar o campo real de pressão estática do escoamento, a energia cinética também deve ser modelada, e isso deve ser feito de maneira simultânea ao cálculo da viscosidade turbulenta.

Essas equações de transporte para as componentes filtradas da velocidade estariam fechadas se não fosse a presença da viscosidade turbulenta, ν_t . O cálculo desta propriedade constitui o principal problema a ser resolvido para a modelagem do fechamento das equações filtradas. Existem vários tipos de modelos de fechamento, que podem ser a zero, uma ou duas equações de transporte, podem ser algébricos ou ainda transportarem as componentes do tensor de Reynolds. Cada tipo de modelo tem suas particularidades.

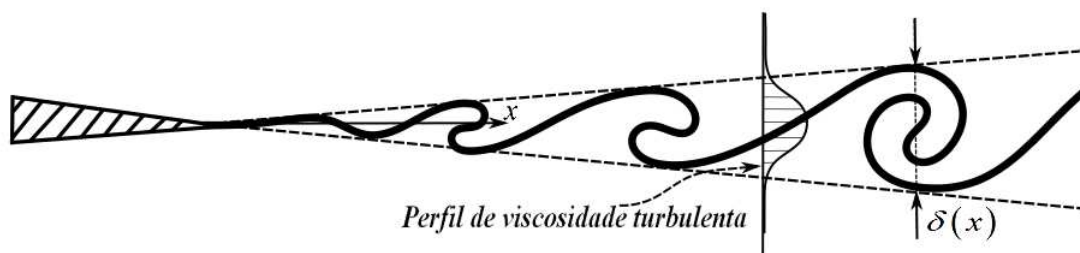
No presente trabalho, utilizou-se para o desenvolvimento das soluções aproximadas de escoamentos turbulentos um modelo de fechamento a zero equações: o modelo do comprimento de mistura de Prandtl. No que tange às simulações computacionais foram implementados dois modelos de fechamento a duas equações para a metodologia URANS: o modelo $k - \epsilon$ padrão e o modelo $k - \epsilon$ realizável. Apesar da existência de diversos modelos de fechamento apenas os três utilizados no presente trabalho serão abordados de forma mais profunda nas seções seguintes.

3.2.2 Modelo do comprimento de mistura de Prandtl

O modelo do comprimento de mistura de Prandtl foi proposto com a finalidade de modelar escoamentos que possuam comportamento físico predominante em uma direção. Os escoamentos cisalhantes livres, objetivo de estudo do presente trabalho, possuem tal característica junto a escoamentos desenvolvidos no interior de um duto circular, por exemplo. A história do modelo e a primeira vez que ele foi citado em um trabalho por Prandtl não estão bem esclarecidas. Bradshaw (1974) apresenta uma discussão sobre a possível história do surgimento deste modelo, incluindo as primeiras menções a ele e as dificuldades presentes notadas após observações de resultados obtidos via experimentações materiais.

Através de uma analogia com a viscosidade molecular, usando a teoria cinética dos gases, é possível propor-se um modelo para a viscosidade turbulenta. Um modelo para a viscosidade cinemática molecular pode ser dado pelo produto da velocidade do som em meio gasoso pelo livre caminho molecular. Tal modelo conduz a uma alternativa que a viscosidade cinemática turbulenta pode ser modelada pelo produto entre um comprimento e uma velocidade característicos de um escoamento turbulento. A velocidade característica será aqui denotada por \hat{V} e o comprimento característico vem da hipótese de Prandtl para o comprimento de mistura, l_m .

Figura 3.1: Esquematização de uma camada de mistura espacial para representar os conceitos envolvidos na definição do comprimento característico l_m .



A Fig. 3.1 ilustra a definição do parâmetro $\delta(x)$, o qual é utilizado para cálculo do comprimento característico, que representa todas as estruturas turbilhonares que coabitam em um dado volume de fluido. Diante de tal definição, a viscosidade turbulenta pode ser calculada como

$$\nu_t \approx \hat{V} l_m. \quad (3.13)$$

Para escoamentos que possuam comportamento físico predominante em uma direção, pode-se obter uma ordem de grandeza da velocidade característica de deslocamento das estruturas turbilhonares, como função do gradiente de velocidade, normal à direção predominante:

$$\hat{V} = l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (3.14)$$

Portanto, substituindo a Eq. (3.14) em (3.13), chega-se a:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (3.15)$$

O cisalhamento que aparece na Eq. (3.15) pode ser positivo ou negativo mas, por questões relativas a estabilidade numérica, é desejável que a viscosidade turbulenta seja sempre positiva. Esse é o motivo para que a taxa de deformação seja tomada em módulo.

O comprimento característico l_m permanece como uma incógnita. Porém, analisando a Fig. 3.1 observa-se que esse tipo de escoamento apresenta um comportamento estatístico bem determinado em termos da espessura da camada cisalhante criada pela dinâmica das estruturas coerentes. Através da observação da figura nota-se que o comprimento característico do escoamento é proporcional ao espalhamento $\delta(x)$. Logo,

$$l_m \sim \delta(x) \Rightarrow l_m = \alpha \delta(x), \quad (3.16)$$

onde α é uma constante de fechamento do modelo.

Os valores da constante α são obtidos por otimização numérica do modelo contra dados experimentais. O modelo do comprimento de mistura de Prandtl possui um único coeficiente para fechamento, a constante α , e ela varia para cada tipo de escoamento. Esta constitui uma das deficiências do modelo pois, apesar de representar razoavelmente bem as quantidades médias do escoamento, sua constante não tem universalidade, isto é, ela assume diferentes valores conforme o escoamento. A Tab. 3.1 apresenta os valores para alguns tipos

de escoamentos, sendo x a direção principal do escoamento.

Tabela 3.1: Variação do comprimento de mistura e constante de proporcionalidade associada a cada escoamento cisalhante livre.

Escoamento	Constante α	Comprimento de mistura (l_m)
Jato plano	0,098	x^1
Jato axisimétrico	0,080	x^1
Esteira plana	0,180	$x^{1/2}$
Esteira axissimétrica	-	$x^{1/3}$
Camada de mistura espacial	0,071	x^1

Fonte: Adaptada de Schlichting *et al.* (1955) e Wilcox *et al.* (1998).

A fim de preparar o modelo do comprimento de mistura de Prandtl para as soluções matemáticas posteriores, pode-se substituir a Eq. (3.16) em (3.15), chegando a uma expressão para a viscosidade cinemática turbulenta dada por

$$\nu_t = \alpha^2 \delta^2(x) \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (3.17)$$

Este modelo foi o precursor de grande parte dos modelos de fechamento e deu origem a algumas particularizações, como a que será apresentada a seguir, que será denominada no presente trabalho de modelo de Prandtl-Reichardt. O modelo de Prandtl-Reichardt foi utilizado na solução de alguns dos escoamentos turbulentos do presente trabalho e será abordado na seção seguinte.

3.2.3 Modelo de Prandtl-Reichardt

Uma deficiência no modelo do comprimento de mistura de Prandtl que pode ser observada é que, quando a derivada da Eq. (3.17) é nula, a viscosidade turbulenta também é nula. Isso acontece quando se tem um ponto de máximo ou de mínimo no perfil de velocidade. Reichardt (1938) apresentou resultados obtidos via experimentação material do escoamento turbulento em um canal. Os resultados de seu trabalho apontaram que, ao contrário do previsto pelo modelo do comprimento de mistura de Prandtl, no centro do canal, as flutuações u' e v' não eram nulas. Para contornar as dificuldades apresentadas pelo modelo Prandtl (1942) propôs um modelo simplificado, baseado no trabalho experimental de Reichardt (1942) para

determinação da viscosidade turbulenta aplicado somente a escoamentos cisalhantes livres. Reconhecendo que a viscosidade turbulenta é dada em função do comprimento de mistura por

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{du}{dy} \right|, \quad (3.18)$$

conforme apresentado na seção precedente, onde se abordou o modelo do comprimento de mistura de Prandtl.

Baseando no comportamento físico dos escoamentos cisalhantes livres, pode-se admitir que neles o gradiente de velocidade pode ser expresso por

$$\frac{du}{dy} \simeq \frac{U_{ch}}{\delta(x)}. \quad (3.19)$$

onde U_{ch} é uma velocidade característica definida como a diferença entre as velocidades máxima e mínima do escoamento analisado, ou seja,

$$U_{ch} = U_{max} - U_{min}. \quad (3.20)$$

Substituindo as Eqs.(3.16) e (3.19) na Eq.(3.18) tem-se

$$\nu_t = \chi \delta(x) U_{ch}, \quad (3.21)$$

sendo χ é uma constante de fechamento para o modelo em questão

Substituindo a Eq. (3.20) em (3.21), chega-se a

$$\nu_t = \chi \delta(x) (U_{max} - U_{min}). \quad (3.22)$$

Este modelo possibilita a generalização das soluções de escoamentos livres em regime laminar para turbulento com pequenas modificações, já que não envolve derivadas como o modelo do comprimento de mistura de Prandtl. Essa característica ficará mais clara durante a apresentação das soluções matemáticas. Além disso, esse modelo contorna a dificuldade

gerada por valores nulos da viscosidade turbulenta apresentada pelo modelo do comprimento de mistura de Prandtl. Tanto o modelo do comprimento de mistura de Prandtl quanto o modelo de Prandtl-Reichardt serão utilizados para a obtenção de soluções contínuas de escoamentos turbulentos no presente trabalho.

Após a abordagem dos modelos de fechamento da turbulência que serão utilizados no desenvolvimento das soluções matemáticas abordadas no presente trabalho serão apresentados os modelos que foram implementados no código MFSim visando a simulação de escoamentos em regime turbulento.

3.2.4 Modelos de fechamento $k - \epsilon$

Os modelos a zero ou a uma equação de transporte apresentam como característica a necessidade de informações sobre o escoamento além das condições iniciais e de contorno. Dois exemplos são o modelo do comprimento de mistura de Prandtl (seção 3.2.2) que requer que se conheça um comprimento característico do escoamento, que varia caso a caso, para a utilização do mesmo e o modelo de Prandtl-Reichardt (seção 3.2.3), que tem como parâmetro χ , que é uma constante empírica. Buscando contornar tal necessidade Kolmogorov (1942) propôs, em adição à equação de transporte para a energia cinética turbulenta k proposta por Prandtl (1945), uma equação de transporte para a escala de frequência de Kolmogorov, denotada por ω . Seguindo as ideias de Kolmogorov, Chou (1945), Davydov (1961) e Harlow e Nakayama (1968), trabalharam na dedução de uma equação de transporte, adicional à equação da energia cinética turbulenta, $k \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$, para a potência específica de transformação viscosa, $\epsilon \left[\frac{W}{m^3} \right]$, possibilitando o surgimento dos modelos $k - \epsilon$.

De forma geral as equações de transporte para k e ϵ podem ser escritas como

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + f_k, \quad (3.23)$$

e

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + f_\epsilon, \quad (3.24)$$

onde f_k é o conjunto de termos referentes a transformações relativas a energia cinética turbulenta e f_ϵ é o conjunto de termos relativos a transformações de ϵ . As expressões para σ , f_k e f_ϵ dependem dos diferentes modelos propostos e apresentados na literatura.

O cálculo da viscosidade dinâmica turbulenta como uma função da energia cinética turbulenta, k , e da potência específica de transformação viscosa, ϵ , é dado por

$$\mu_t = \rho \frac{C_\mu k^2}{\epsilon}, \quad (3.25)$$

onde C_μ é um parâmetro que pode ser constante ou dinâmico de acordo com o modelo $k - \epsilon$ utilizado.

A seguir as equações de transporte e os parâmetros envolvidos nas mesmas serão particularizados para os dois modelos $k - \epsilon$ implementados no presente trabalho. Serão também apresentadas as características tanto do modelo padrão quanto do modelo realizável.

3.2.4.1 Modelo $k - \epsilon$ padrão

O modelo $k - \epsilon$ padrão foi inicialmente proposto por Launder e Spalding (1972). Com o decorrer do tempo foram sugeridas modificações a esse modelo. Algumas alterações não apresentaram mudanças significativas nos processos de dedução das equações de transporte, e por esse motivo foi mantida a mesma nomenclatura. No entanto, surgiram novas propostas na dedução das equações de k e ϵ , e assim surgiram novas variações do modelo original.

O modelo $k - \epsilon$ padrão consiste em um modelo semi-empírico, muito popular na simulação de problemas industriais devido a sua robustez, ao seu baixo custo computacional e a sua acurácia razoável. A obtenção das equações de transporte de k e ϵ é dada através de considerações físicas e empíricas. As hipóteses necessárias para a demonstração das equações são apresentadas por Mohammadi e Pironneau (1994).

Dentre as vantagens do modelo $k - \epsilon$ padrão, pode-se citar:

- Implementação relativamente simples;
- Baixo custo computacional;
- Predições razoáveis para diversos escoamentos;

- Cálculos estáveis que convergem com relativa facilidade.

Contudo, o modelo também apresenta desvantagens, tais como:

- Adequado apenas para escoamentos a altos números Reynolds;
- Predições ruins para escoamentos rotativos, jatos, escoamentos rapidamente deformados, e escoamentos totalmente desenvolvidos em dutos não circulares;
- Necessita da implementação de leis de paredes, quando tem-se como objetivo a simulação de escoamentos parietais (as equações para k e ϵ não são válidas na região interna de camadas limite, sendo essa composta pela subcamada viscosa e pela região tampão);
- Dificuldade na atribuição de condições de contorno para k e ϵ , em particular para condições de entrada, porque são quantidades dependentes de dados experimentais ou estatísticos.

As duas equações de transporte para o modelo $k - \epsilon$ padrão podem ser escritas como

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t S^2 - \rho \epsilon, \quad (3.26)$$

e

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \mu_t S^2 - \rho C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}, \quad (3.27)$$

sendo

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad (3.28)$$

onde S_{ij} é o tensor taxa de deformação dado por

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.29)$$

As propriedades obtidas através das Eqs. (3.26) e (3.27) são então utilizadas para calcular a viscosidade dinâmica turbulenta conforme a Eq. (3.25).

Os coeficientes do modelo são: $\sigma_k = 1,0$, $\sigma_\epsilon = 1,3$, $C_\mu = 0,09$, $C_{\epsilon 1} = 1,44$ e $C_{\epsilon 2} = 1,92$.

Como pôde ser observado ao longo da apresentação do modelo $k - \epsilon$ padrão, diversos parâmetros utilizados na equação de transporte de ϵ e na determinação da viscosidade turbulenta são constantes. Essa característica pode não ser interessante em alguns casos. O modelo $k - \epsilon$ realizável, apresentado na seção seguinte, avalia diversos parâmetros de forma dinâmica, ou seja, baseando-se no campo de velocidade do escoamento. Tal característica pode ser de grande valia para a simulação de escoamentos turbulentos complexos.

3.2.4.2 Modelo $k - \epsilon$ realizável

Shih, Zhu e Lumley (1995) propuseram um novo modelo $k - \epsilon$, o qual consiste em uma nova equação para modelar a potência específica de transformação viscosa e uma nova formulação realizável para a viscosidade turbulenta. O modelo foi então chamado de $k - \epsilon$ realizável e apresenta uma melhor consistência matemática no cálculo do tensor de Reynolds em comparação ao modelo $k - \epsilon$ padrão, com certas restrições.

A nova equação para modelar ϵ é baseada na equação dinâmica para flutuação de vorticidade. Enquanto isso, na nova formulação da viscosidade turbulenta, são impostas restrições baseadas na realizabilidade, e na teoria de rápida distorção (*Rapid Distortion Theory*, RDT), que é baseada em análise linear, isto é, na positividade das tensões normais de Reynolds e na desigualdade de Schwarz para tensões cisalhantes turbulentas. Quanto aos coeficientes do modelo, estes foram obtidos por meio de calibrações utilizando escoamentos canônicos e bem trabalhados na literatura, como por exemplo, escoamentos cisalhantes livres e escoamentos internos em canais.

O modelo $k - \epsilon$ padrão tem um bom comportamento para escoamentos envolvendo camada limite, mas não para escoamentos com uma taxa elevada de cisalhamento ou com gradiente adverso de pressão, pelo fato de não prever bem a viscosidade turbulenta nesses casos. Sendo assim, de acordo com Shih, Zhu e Lumley (1995), o modelo $k - \epsilon$ realizável apresenta uma melhoria significativa em relação ao modelo padrão. A partir dos resultados obtidos por Shih, Zhu e Lumley (1995), foi possível observar que o modelo realizável tem um

bom desempenho na modelagem de escoamentos turbulentos complexos, como jatos confinados e escoamentos sobre um degrau. Além disso, este modelo também apresenta robustez e baixo custo computacional como o modelo padrão.

No modelo $k - \epsilon$ realizável as equações de transporte de k e ϵ para escoamentos isotérmicos e incompressíveis são dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t S^2 - \rho \epsilon, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S \epsilon - \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{\nu \epsilon}}. \quad (3.31)$$

As constantes do modelo presentes nas equações precedentes são dadas por $C_2 = 1,9$, $\sigma_k = 1,0$ e $\sigma_\epsilon = 1,2$.

Na Eq. (3.31), o coeficiente C_2 é uma constante, porém o coeficiente C_1 é avaliado de forma dinâmica através da expressão

$$C_1 = \max \left[0, 43, \frac{\Upsilon}{\Upsilon + 5} \right] \quad (3.32)$$

onde

$$\Upsilon = S \frac{k}{\epsilon}, \quad (3.33)$$

sendo S dado pela Eq. (3.28).

O termo C_μ é considerado constante no modelo padrão, porém, uma das diferenças cruciais do modelo realizável é a avaliação dinâmica desse parâmetro, ou seja, o cálculo é realizado em cada passo de tempo baseando-se em outras propriedades do escoamento.

O cálculo de C_μ , segundo Shih, Zhu e Lumley (1995) é dado por

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s U^* \frac{k}{\epsilon}}, \quad (3.34)$$

onde

$$U^* = \sqrt{S_{ij}S_{ij} + \Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad (3.35)$$

Voltando à Eq. (3.34), tem-se $A_0 = 4,04$ e

$$A_s = \sqrt{6} \cos(\phi_r) \quad (3.36)$$

com

$$\phi_r = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6} W_r). \quad (3.37)$$

onde o termo W_r é dado por

$$W_r = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\tilde{S}^3}. \quad (3.38)$$

onde $\tilde{S} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$, S_{ij} é o tensor taxa de deformação dado pela Eq. (3.29) e Ω_{ij} é o tensor taxa de rotação, calculado como

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.39)$$

Portanto, fica evidente que a grande diferença entre o modelo $k - \epsilon$ realizável e o modelo $k - \epsilon$ padrão é a avaliação dinâmica de coeficientes na equação de transporte da potência específica de transformação viscosa, ϵ , e no cálculo da viscosidade turbulenta. Os modelos $k - \epsilon$ padrão também contém avaliações dinâmicas, porém em menor quantidade.

Após a apresentação dos modelos de fechamento da turbulência implementados para simulações computacionais e dos utilizados na obtenção das soluções contínuas de escoamentos

turbulentos, na próxima seção será abordada, de maneira geral, a sistemática do método de auto-similaridade, apontando os principais passos para, utilizando essa metodologia, partir de uma EDP que modela o problema físico e chegar-se a uma EDO equivalente.

3.3 Soluções contínuas via método de auto similaridade

É pertinente que, nesta parte do texto se discorra a respeito da nomenclatura utilizada para tratar as soluções obtidas no presente trabalho. Portanto, cabe a discussão sobre a diferença entre os termos: soluções contínuas e soluções discretas (descontínuas).

Uma solução contínua de uma equação diferencial satisfaz de forma exata ou aproximada à equação diferencial. Uma solução discreta ou numérica, satisfaz de forma sempre aproximada uma equação diferencial. Assim, uma solução contínua pode ser exata ou aproximada. Uma solução numérica será sempre aproximada. Por outro lado, uma solução exata pode ser ou não uma solução analítica, uma vez que para uma função ser analítica ela deve atender, dentre outros, o requisito de infinitas derivadas contínuas. Por exemplo, uma solução contínua por partes não pode ser considerada analítica. Além dessas observações, cabe ressaltar que, quando nos referimos à solução matemática de um problema físico, ela será sempre aproximada, mesmo que seja uma solução exata para a equação diferencial com a qual se modela o problema físico. Um modelo matemático será sempre um modelo aproximado para o problema físico. Isso também ocorre para a modelagem e para a experimentação material de um problema físico. Teremos sempre resultados aproximados da realidade física. No presente trabalho, os autores buscaram utilizar essa terminologia com cuidado.

Outra discussão necessária é a respeito de quando a solução pode ser considerada exata e quando deve ser tratada como aproximada. Partindo das equações de Navier-Stokes, não é possível se obter uma solução exata para a sua forma completa porém, é possível particularizar essas equações para determinados casos, através de hipóteses, análises de ordem de grandeza e simplificações. Quando, em casos específicos, é possível que as equações de Navier-Stokes sejam simplificadas e reduzidas a uma EDO através da aplicação de algum método, chega-se a um modelo diferencial ordinário para o caso particular trabalhado e, esse modelo diferencial ordinário equivalente pode ser resolvido de forma exata. Sendo assim, o termo solução exata

pode ser utilizado para se referir à solução do modelo diferencial ordinário, porém, quando se trata do escoamento em si, a solução sempre deve ser tratada como aproximada, já que não foi obtida através das equações de Navier-Stokes em sua forma completa.

Tendo apresentado tais considerações, será abordado a seguir o método utilizado no presente trabalho: o método de auto similaridade. Serão apresentadas características do método, bem como o procedimento a ser seguido para se obter soluções aproximadas para casos especiais das equações de Navier-Stokes utilizando esse método.

Conforme exposto no Capítulo 2, para que um problema físico possa ser resolvido utilizando o método de auto similaridade existe a necessidade de que o problema seja auto similar, definição já apresentada no presente texto. Os escoamentos a serem trabalhados nessa dissertação são uma camada de mistura em desenvolvimento temporal e em desenvolvimento espacial, um jato plano e uma esteira gerada pelo escoamento de um fluido em torno de um corpo imerso. Todos esses escoamentos possuem partes no domínio físico em que apresentam características auto similares. Tomando como exemplo o caso da esteira, o escoamento logo após o corpo não possui tal característica, porém a medida que se afasta do corpo imerso, nota-se um comportamento auto similar. Portanto, a solução encontrada só é válida nessa parte do escoamento e, por isso esse caso é chamado de esteira distante.

Os escoamentos a serem trabalhados na presente dissertação, além de apresentarem a característica de auto similaridade em certas partes do domínio físico, são todos modelados pelas equações de Navier-Stokes e equação da continuidade, ou de maneira equivalente pela equação do balanço de massa e equação do balanço da quantidade de movimento linear que, para escoamentos incompressíveis e para fluidos newtonianos, conforme apresentado na seção 3.1, são dadas por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.40)$$

e

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} \cdot \tau_{ij} \quad (3.41)$$

onde $\vec{V} = (u, v, w)$ é o vetor velocidade e u , v e w são as componentes de velocidade nas direções x , y e z , respectivamente, ρ é a massa específica do fluido, \vec{g} é o campo gravitacional e τ_{ij} é o tensor das tensões viscosas.

Os escoamentos cisalhantes livres possuem gradiente de pressão nulo e acontecem em uma direção preferencial, ou seja, nos casos abordados a equação do balanço da quantidade de movimento linear será resolvida para apenas uma das componentes. Além disso, os casos são bidimensionais, sendo a componente w nula. Todas as considerações realizadas simplificam as Eqs.(3.40) e (3.41), eliminando alguns termos.

Além das simplificações expostas, existem outras ligadas às características físicas de cada caso, porém, para todos os casos, tais simplificações irão originar um conjunto de duas EDPs, com as quais se modela o problema físico.

De posse do sistema de EDPs que modela o problema específico, o primeiro passo para a aplicação do método de auto similaridade consiste em realizar uma transformação de variáveis no sistema, definindo uma função e uma variável de auto similaridade, ambas adimensionais. A variável de auto similaridade é geralmente chamada de η e é definida como

$$\eta = y \xi(x), \quad (3.42)$$

para casos espaciais, e como

$$\eta = y \xi(t), \quad (3.43)$$

para casos temporais, onde ξ é uma função relacionada a um comprimento característico do problema físico, geralmente o espalhamento δ do escoamento e que será determinada ao longo do processo de resolução.

A função de auto similaridade é definida por meio do uso de velocidades de referência do problema e é dada por

$$\frac{u + U_d}{U_R} = f'(\eta) = g(\eta), \quad (3.44)$$

onde

$$U_d = u(y = 0, t) - U_{max} - U_{min}, \quad (3.45)$$

e

$$U_R = u(y = 0, t) - U_{min}, \quad (3.46)$$

sendo U_{min} e U_{max} a mínima e máxima velocidade, respectivamente, que ocorre no escoamento e u a componente de velocidade na direção principal do escoamento, com y sendo a coordenada da direção perpendicular ao escoamento.

Evidenciando u na Eq.(3.44), colocando v em função de u com a Eq.(3.40) e substituindo os resultados obtidos na Eq.(3.41) e calculando-se as derivadas, o sistema é reduzido de duas EDPs para uma EDO. A partir daí basta aplicar métodos de solução à EDOs, já que estes são mais conhecidos e mais simples que os métodos de solução para sistemas de EDPs. Em alguns casos é possível obter a solução contínua, porém, existem casos em que não é possível obtê-la, exigindo o uso de métodos numéricos de integração. Mesmo assim é importante ressaltar que é mais simples realizar a integração numérica de uma EDO que de uma EDP.

Para os casos de escoamentos turbulentos, além do procedimento mencionado acima, é necessário que se utilize um modelo de fechamento no tensor das tensões viscosas (τ_{ij}), procedimento abordado na seção 3.2. Através do uso dos dois modelos apresentados nas seções 3.2.2 e 3.2.3 e do procedimento apresentado inicialmente para escoamentos laminares, é possível a obtenção de soluções contínuas também para os escoamentos turbulentos.

Conforme exposto anteriormente baseando no trabalho de Tennekes e Lumley (1972), características do escoamento, tais como velocidade de referência e comprimento característico da zona de mistura são determinados por meio de integrações e não de suposições ou hipóteses, porém, em alguns escoamentos tais integrações exigem informações complementares. Geralmente, é possível obter-se equações adicionais através do Teorema do Transporte de Reynolds (TTR) junto à realização de alguma hipótese a respeito do fluxo de quantidade

de movimento linear, por exemplo. Nos casos da esteira distante e do jato plano, por exemplo, foi necessária a aplicação do TTR para a quantidade de movimento linear e a realização de hipóteses a respeito do fluxo de quantidade de movimento linear a fim de deduzir uma nova equação auxiliar ao processo de integração dos coeficientes da EDO. Esse passo não é necessário para os casos das camadas de mistura.

Buscando proporcionar maior clareza a respeito do procedimento para obtenção de uma solução auto similar, o mesmo será apresentado em forma de tópicos a seguir, objetivando apresentar de maneira mais clara quais os passos devem ser seguidos no processo de, partindo de uma EDP utilizadas para modelar o problema físico trabalhado, chegar-se a soluções aproximadas para perfis médios de propriedades, como velocidades, e outras características do escoamento que podem variar de caso para caso. O procedimento consiste em:

- Definir a variável de auto similaridade, segundo a Eq. (3.42) ou (3.43), dependendo se o caso é espacial ou temporal;
- Definir a função de auto similaridade, segundo a Eq. (3.44) ou de alguma outra proposta;
- Colocar o sistema de EDPs, gerado pela simplificação das Eqs. (3.40) e (3.41) de acordo com o caso particular a ser resolvido, e as condições de contorno em termos da variável e da função de auto similaridade. Ao final desse passo será encontrada uma EDO em termos da variável η , que pode ou não ter coeficientes que envolvam variáveis características do problema e suas derivadas, como, por exemplo, o espalhamento ou a velocidade da linha central do escoamento;
- Considerar, por imposição, os coeficientes da EDO obtida constantes, já que ela deve ser dependente apenas da variável de auto similaridade, η ;
- Determinar os coeficientes da EDO para obtenção de outras propriedades do escoamento, caso tais coeficientes envolvam derivadas de propriedades características do escoamento resolvido. Por exemplo, a evolução temporal da espessura de uma camada de mistura em desenvolvimento temporal;
- Atender restrições que podem surgir a partir da necessidade de aplicação do Teorema

do Transporte de Reynolds (TTR). A aplicação do TTR é fundamental para o processo de solução em alguns tipos de escoamentos;

- Integrar a EDO, sem a utilização de métodos numéricos, quando possível, para obtenção da distribuição espaço-temporal da velocidade média (média no sentido de um escoamento turbulento).

Algumas observações devem ser feitas a respeito do procedimento apresentado. São elas:

- A definição da variável e da função de auto-similaridade tem como única exigência que sejam adimensionais. Isso significa que podem ser escolhidas de forma diferente da apresentada no presente trabalho, porém tal escolha afetará a EDO obtida, podendo levar a uma EDO com nível de complexidade maior ou menor. No entanto, as soluções contínuas obtidas devem conduzir ao mesmo resultado;
- A integração da EDO para obtenção da distribuição média de velocidade, em alguns casos, pode exigir o uso de séries na solução ou, até mesmo de métodos numéricos de integração;
- Se a imposição de que os coeficientes da EDO são constantes violar comportamentos físicos do caso analisado, a mesma não pode ser resolvida com o uso da auto similaridade. Porém, é importante ressaltar que em alguns casos a troca da função e/ou da variável de auto similaridade pode levar à obtenção de uma EDO cujos coeficientes podem ser considerados constantes.

3.4 O código MFSim

O código computacional MFSim iniciou-se com o trabalho de Villar *et al.* (2007) sobre escoamentos multifásicos, e vem sendo desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), em parceria com a PETROBRAS. O código está sendo escrito, em sua maior parte, em Fortran90, apresentando algumas partes em linguagem C. Atualmente, ele permite ao usuário simular, utilizando processamento paralelo,

uma diversidade de problemas pseudo bidimensionais e tridimensionais que envolvem escoamentos turbulentos. Entre as possibilidades oferecidas pelo código MFSim estão a simulação de escoamentos reativos (VEDOVOTO *et al.*, 2011; DAMASCENO *et al.*, 2018), escoamentos na presença de corpos imersos (MELO *et al.*, 2017), escoamentos bifásicos (BARBI *et al.*, ; SANTOS, 2017) e fluido estrutura (NETO *et al.*, 2016).

Uma das vantagens do código está relacionada ao fato do mesmo resolver as equações de Navier-Stokes utilizando malha adaptativa bloco estruturada, possibilitando o uso de refinamento fixo local ou a utilização de critérios baseados em propriedades do escoamento para definir o posicionamento dos níveis de refinamento, além disso, o código possui diversos esquemas numéricos de discretização implementados.

Inicialmente o código foi desenvolvido para trabalhar com a metodologia LES mas, com o trabalho de Melo *et al.* (2017), começaram a ser inseridos modelos de fechamento da classe URANS. A contribuição do presente trabalho em termos de desenvolvimento do código MFSim consistiu na implementação dos modelos de fechamento $k - \epsilon$ padrão e $k - \epsilon$ realizável, os quais também são modelos de fechamento pertencentes à classe URANS.

CAPÍTULO IV

SOLUÇÕES CONTÍNUAS

4.1 Generalidades

Nesse capítulo serão apresentados os desenvolvimentos detalhados de cada escoamento, deduzindo o modelo matemático exato, apresentando a metodologia de maneira detalhada e buscando esclarecer as hipóteses adotadas durante o processo de solução, estabelecendo o modelo físico, o modelo matemático diferencial parcial, o modelo matemático diferencial ordinário e o modelo matemático exato para cada caso, a começar pela camada de mistura em desenvolvimento temporal. A fim de tornar o procedimento mais claro, cada caso se inicia com o modelo físico válido para ambos regimes. Em alguns casos são tratados outros aspectos válidos tanto para o regime laminar quanto para o turbulento. Quando os desenvolvimentos passam a ser específicos para um dado regime, cria-se uma nova seção a fim de situar o leitor ao longo dos desenvolvimentos apresentados.

A resolução por auto-similaridade tem como fundamento reduzir uma Equação Diferencial Parcial (EDP) a uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Nesta seção os passos para tal transformação são apresentados e a EDO pode ser aplicada aos diversos casos contemplados pelo conjunto de EDPs, bastando a alteração das condições de contorno e restrições.

O que se objetiva ao utilizar essa técnica de resolução é que uma variável de auto-similaridade η agrupe as variáveis independentes do problema, x e y , em uma única variável.

A variável η pode ser proposta como o produto entre a variável independente na qual o perfil tem sua forma analisada, no caso y , e um fator de proporcionalidade que dependa das demais variáveis independentes, no caso x . Em outras palavras, pode-se dizer que o perfil de velocidade dado em y será auto-similar ao longo da direção x , ou seja, existe a necessidade de um fator de proporcionalidade, que é dado por uma função, que reescale o perfil ao longo de x para que o mesmo seja invariante. Assim, η pode ser definida como

$$\eta = y \cdot \xi(x), \quad (4.1)$$

sendo a $\xi(x)$ a função de proporcionalidade.

Como se propôs uma nova variável para definir o problema, é necessário que se relacione a solução do problema em termos das variáveis primitivas $u(x, y)$, com a solução da equação em termos da variável de auto similaridade, que pode ser representada pela função $g(\eta)$. A relação de proporcionalidade entre as duas soluções deve ser feita por meio de propriedades conhecidas do problema, com as escolhas sendo feitas em conformidade com cada caso a ser abordado. Sendo assim, os autores propõem uma forma generalizada, dada por:

$$\frac{u(x, y) + U_d}{U_R} = g(\eta), \quad (4.2)$$

sendo

$$U_d = u(y = 0, x) - U_{max} - U_{min}, \quad (4.3a)$$

$$U_R = u(y = 0, x) - U_{min}, \quad (4.3b)$$

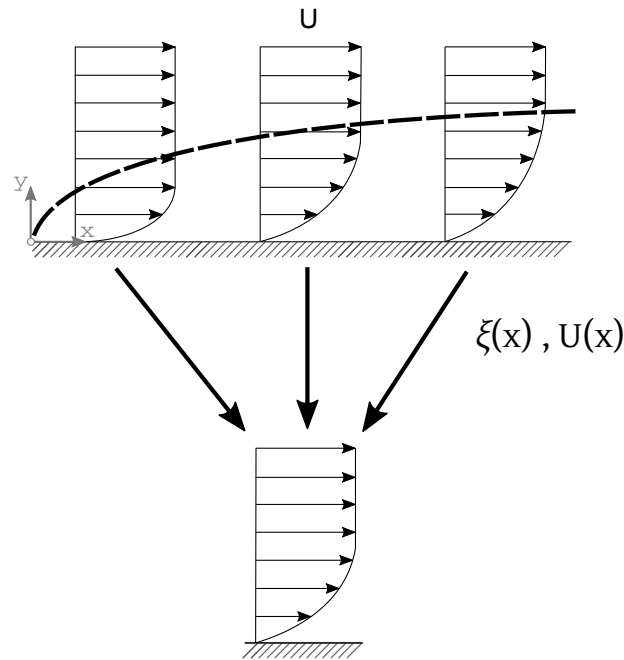
onde U_{min} e U_{max} são as velocidades mínima e máxima que ocorrem no perfil.

Para casos com evolução temporal a velocidade é dependente de y e t , portanto, nas Eqs. (4.2) e (4.3), onde aparece x usa-se t .

Buscando demonstrar de maneira mais clara os conceitos envolvidos, na Fig. 4.1 representa-se a transformação dos perfis de velocidade que se desenvolvem ao longo de x ou t em um único perfil auto-similar. Tal transformação é realizada através das funções de

proporcionalidade $\xi(x)$ e $U_R(x)$. Portanto, o procedimento consiste em definir funções de proporcionalidade que, ao serem aplicadas aos perfis de velocidade os levam a um único perfil, chamado auto-similar.

Figura 4.1: Transformação dos perfis de velocidade que se desenvolvem ao longo de x em um único perfil auto-similar pelos fatores de proporcionalidade.



A seguir será apresentada a demonstração de que na Eq. (4.2) pode-se utilizar uma função ou uma primeira derivada. O primeiro passo é utilizar a definição de função corrente (ψ) para a componente u de velocidade:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (4.4)$$

que, readequando e substituindo o valor de u dado pela Eq. (4.2), e reescrevendo a Eq. (4.4), tem-se:

$$\partial \psi = [U_R(x)g(\eta) - U_d]\partial y. \quad (4.5)$$

Trocando o diferencial do lado direito da Eq. (4.5) faz-se

$$\eta = y \cdot \xi(x) \longrightarrow \partial \eta = \xi(x)\partial y, \quad (4.6)$$

levando a

$$\partial\psi = \frac{1}{\xi(x)}[U_R(x)g(\eta) - U_d]\partial\eta. \quad (4.7)$$

Integrando em η a Eq. (4.7) tem-se

$$\psi = \frac{U_R(x)}{\xi(x)} \int g(\eta)\partial\eta - \frac{U_d}{\xi(x)} \int \partial\eta \longrightarrow \psi = \frac{U_R(x)}{\xi(x)} \int g(\eta)\partial\eta - \frac{U_d}{\xi(x)}\eta. \quad (4.8)$$

A integral da Eq. (4.8) pode ser expressa como uma função, tal que

$$F(\eta) = \int g(\eta)\partial\eta, \quad (4.9)$$

fazendo com que a função corrente possa ser reescrita como

$$\psi = \frac{U_R(x)}{\xi(x)}F(\eta) - \frac{U_d}{\xi(x)}\eta. \quad (4.10)$$

Voltando à Eq. (4.4) e de posse do valor de ψ dado pela Eq. (4.10) tem-se

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial y} = \left[\frac{U_R(x)}{\xi(x)}F'(\eta) - \frac{U_d}{\xi(x)} \right] \cdot \xi(x) \quad (4.11)$$

que leva a

$$u = U_R(x)F'(\eta) - U_d \longrightarrow \frac{u(x, y) + U_d}{U_R(x)} = F'(\eta) \quad (4.12)$$

Portanto, a função de auto-similaridade pode ser definida tanto pela Eq. (4.2) quanto pela Eq. (4.12), ressaltando mais uma vez que, para casos temporais a variável espacial x é substituída pela variável temporal, t . No presente trabalho, foram utilizadas as duas formas de definição, a depender do caso trabalhado. Muitas vezes é necessário realizar todo o procedimento utilizando uma das formas e, caso o resultado obtido com a transformação não seja considerado satisfatório para prosseguir com a solução, o processo deve ser reiniciado

com a outra forma de definição da função de auto-similaridade.

Outra colocação pertinente a respeito dos escoamentos trabalhados é que são casos bidimensionais, ressaltando que para escoamentos turbulentos só faz sentido falar em bidimensionalidade quando se trata do comportamento médio. Diante dessa característica a equação de Navier-Stokes, dada pela Eq. (3.6), só será utilizada na direção x . As equações da continuidade e de Navier-Stokes para o caso supracitado são apresentados a seguir

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y}. \quad (4.14)$$

4.2 Camada de mistura em desenvolvimento temporal

4.2.1 Modelo físico

Um dos escoamentos canônicos mais simples de ser modelado é uma camada de mistura em desenvolvimento temporal. Duas correntes de fluido a velocidades diferentes U_1 e U_2 definem e mantêm o escoamento. Em um tempo inicial, $t = 0$ s, o campo de velocidade será considerado com gradiente de velocidade no centro do domínio, teoricamente, infinito. A espessura da camada cisalhante será nula, $\delta(t = 0) = 0$. Isso pode ser visualizado na Fig. 4.2. À medida que o tempo passa o processo de difusão de quantidade de movimento linear atenua esse gradiente, gerando um perfil inflexional de velocidade, como pode ser visualizado na Fig. 4.3. Essa difusão será gerada pela movimentação molecular, em regime laminar. No regime turbulento, as estruturas turbilhonares acelerarão em ordens de grandeza esse processo de difusão molecular. É importante perceber que a turbulência acelera esse processo de transporte molecular uma vez que ela amplia os gradientes locais e aumenta a quantidade de gradientes por unidade de volume.

Na presente análise não será objetivada a modelagem e a simulação do processo de formação de instabilidades de Kelvin-Helmholtz, mas, somente, a modelagem do comportamento

médio do escoamento. Como ilustrado nas Figs. 4.2 e 4.3, a evolução do escoamento se dá apenas na direção y e no tempo, mas ao longo de x os perfis são iguais. Como em cada instante não existe variação espacial na direção x , o desenvolvimento é dito temporal, apesar de que há também mudança em y . Observa-se que os perfis de velocidade, ilustrados na nas Figs. 4.2 e 4.3, são auto similares, o que permitirá o uso da teoria de auto similaridade para a solução do modelo diferencial. Observa-se que o modelo físico apresentado é válido tanto para o regime laminar quanto para o regime turbulento.

Figura 4.2: Camada de mistura em desenvolvimento temporal em $t = 0 s$

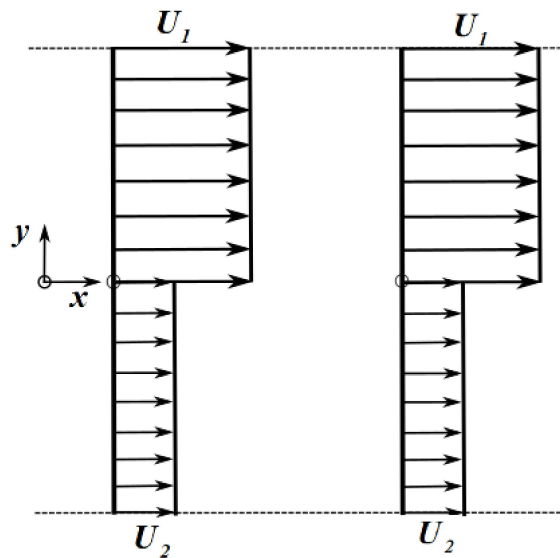
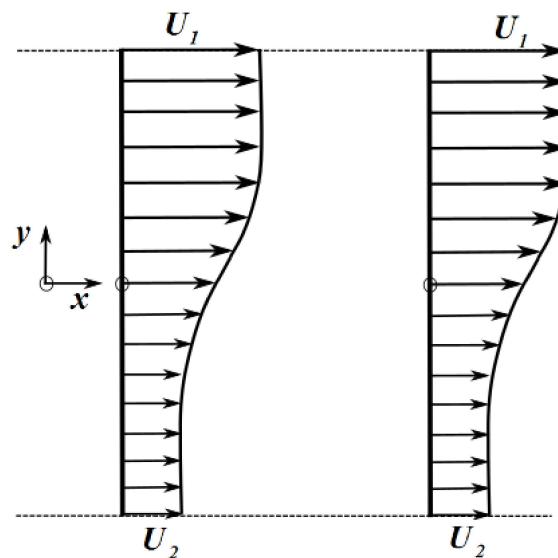


Figura 4.3: Camada de mistura em desenvolvimento temporal em $t > 0 s$



4.2.2 Regime laminar

4.2.2.1 Modelo matemático diferencial parcial

O modelo matemático diferencial para a camada de mistura em regime laminar pode ser extraído das Eqs. (4.13) e (4.14). Simplifica-se o termo advectivo, em conformidade com a natureza física desse problema, ou seja, o escoamento ocorre apenas na direção x e só depende da direção y e do tempo t , além disso, o gradiente de pressão é nulo e o termo referente a $\overline{u'v'}$ é desconsiderado já que o escoamento ocorre em regime laminar. Isso resulta em:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.15)$$

sendo as condições inicial e de contorno dadas por:

$$u(y, t = 0) = u_0(y), \quad (4.16a)$$

$$u\left(y = +\frac{\delta(t)}{2}, t\right) = U_1, \quad (4.16b)$$

$$u\left(y = -\frac{\delta(t)}{2}, t\right) = U_2, \quad (4.16c)$$

onde $\delta(t)$ é o espalhamento da zona de mistura, representado na Fig. 4.4 e, ressaltando que para o regime laminar o operador filtragem não é mais necessário.

4.2.2.2 Modelo matemático diferencial ordinário

A resolução por auto similaridade pode ser aplicada à Eq.(4.15) reduzindo-a a uma EDO. Para se realizar a transformação auto similar propõe-se uma solução para a componente longitudinal de velocidade, $u(y, t)$, da forma

$$\frac{u(y, t) + U_d}{U_R} = F(\eta), \quad (4.17)$$

sendo

$$U_d = u(y = 0, t) - U_{max} - U_{min}, \quad (4.18a)$$

$$U_R = u(y = 0, t) - U_{min}. \quad (4.18b)$$

Para o caso específico da camada de mistura tem-se que no ponto de inflexão, tratado como $y = 0$, a velocidade é dada pela média das velocidades das correntes, ou seja, $u(y = 0, t) = \bar{U}$, o que leva a uma função de auto similaridade dada por

$$\frac{u(y, t) + \left(\frac{U_1 + U_2}{2} - U_1 - U_2 \right)}{\left(\frac{U_1 + U_2}{2} - U_2 \right)} = F(\eta) \longrightarrow \frac{u(y, t) - \bar{U}}{\tilde{U}} = F(\eta), \quad (4.19)$$

sendo $\bar{U} = (U_1 + U_2)/2$ e $\tilde{U} = (U_1 - U_2)/2$.

A variável auto similar dada por

$$\eta(y, t) = \frac{y}{\delta(t)}. \quad (4.20)$$

Derivando a Eq.(4.19) em relação ao tempo t e a variável espacial y , levando-se em conta a Eq.(4.20) tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{U} \frac{dF}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt} = \tilde{U} F' \left(-\frac{y}{\delta^2} \right) \frac{d\delta}{dt} = -\frac{\tilde{U}}{\delta} \frac{d\delta}{dt} \eta F', \quad (4.21a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \tilde{U} \frac{dF}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \tilde{U} F' \frac{1}{\delta}, \quad (4.21b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \tilde{U} \frac{1}{\delta} \frac{d^2 F}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \tilde{U} \frac{1}{\delta^2} F''. \quad (4.21c)$$

Substituindo as Eqs.(4.21) na Eq.(4.15) chega-se a:

$$F'' + \underbrace{\frac{\delta}{\nu} \frac{d\delta}{dt}}_{\kappa} \eta F' = 0. \quad (4.22)$$

O termo κ na Eq.(4.22) deve ser uma constante por imposição do método, uma vez que a solução desta EDO deve resultar em uma função de η apenas. Logo,

$$\frac{\delta}{\nu} \frac{d\delta}{dt} = \kappa \longrightarrow \delta(t) = \sqrt{2\nu\kappa t} \longrightarrow \boxed{\delta(t) = K_l \sqrt{\nu t}}, \quad (4.23)$$

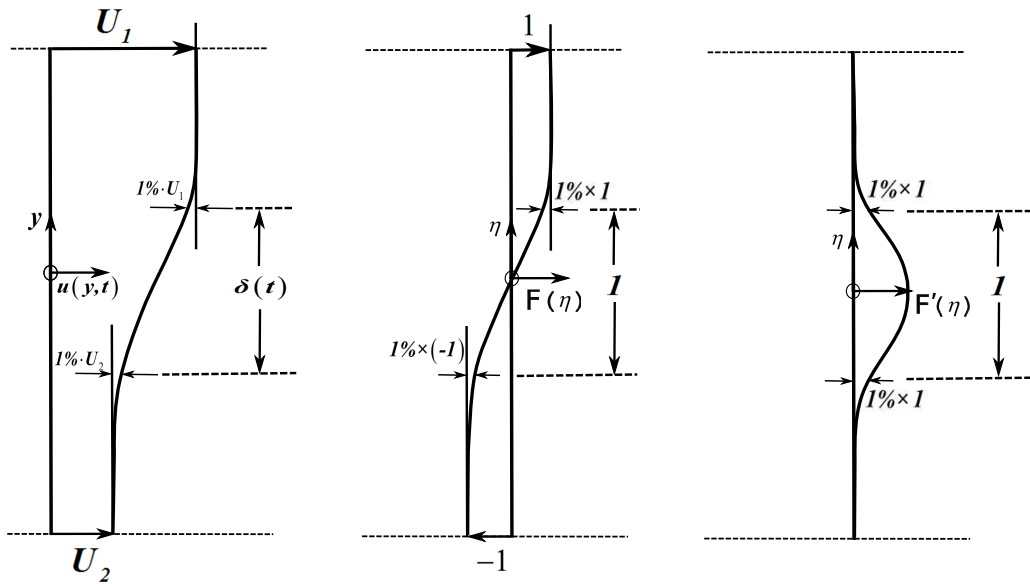
onde $K_l = \sqrt{2\kappa}$. A obtenção da Eq.(4.23) passa pela determinação de uma constante de integração. Para tanto foi utilizada a condição inicial $\delta(t = 0) = 0$. A Eq. (4.22) pode então

ser reescrita como segue

$$F'' + \kappa \eta F' = 0. \quad (4.24)$$

Para estabelecer as condições de contorno para a Eq.(4.24) deve-se perceber o comportamento assintótico da distribuição de velocidade, $u(y, t)$, da função de auto similaridade, $F(\eta)$, e de sua derivada $F'(\eta)$, conforme ilustrado na Fig.4.4.

Figura 4.4: Ilustração do perfil médio de velocidade $u(y, t)$, da função de auto similaridade $F(\eta)$ e de sua derivada $F'(\eta)$ para uma camada de mistura temporal.



Inspecionando-se as curvas qualitativas apresentadas, pode-se estabelecer como condições de contorno para a Eq.(4.24)

$$F\left(\eta = \frac{1}{2}\right) = 0,99, \quad (4.25a)$$

$$F\left(\eta = -\frac{1}{2}\right) = -0,99, \quad (4.25b)$$

$$F'\left(\eta = \frac{1}{2}\right) = 0,01. \quad (4.25c)$$

Assim, fica estabelecido o modelo matemático diferencial ordinário, composto pelas Eqs.(4.24) e (4.25). Esse modelo representa o problema físico da camada de mistura em desenvolvimento temporal, em regime laminar.

4.2.2.3 Modelo matemático exato

A integração da Eq.(4.24) leva a uma solução exata para o modelo diferencial ordinário obtido no item anterior. Essa solução é também uma solução contínua aproximada para o problema físico em análise. Assim, fazendo a integração, obtém-se:

$$F(\eta) = c_1 \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2\kappa}}{2} \eta \right) + c_2, \quad (4.26)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração e $\operatorname{erf}(\eta)$ é a função erro de Gauss, a qual é dada por

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\tilde{\eta}^2) d\tilde{\eta}. \quad (4.27)$$

As constantes de integração serão determinadas utilizando as Eqs.(4.25a) e (4.25b), que levam ao sistema de equações

$$c_1 \operatorname{erf} \left[\frac{\sqrt{2\kappa}}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right] + c_2 = 0,99, \quad (4.28a)$$

$$c_1 \operatorname{erf} \left[\frac{\sqrt{2\kappa}}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right] + c_2 = -0,99. \quad (4.28b)$$

Sabendo que

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x), \quad (4.29)$$

sendo x uma variável qualquer, a solução do sistema leva a $c_1 = 1/\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2\kappa}}{4} \right)$ e $c_2 \approx 0$, que conduzem a

$$F(\eta) = \frac{\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2\kappa}}{2} \eta \right)}{\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2\kappa}}{4} \right)}. \quad (4.30)$$

Para determinar a constante κ que aparece na Eq.(4.30) será utilizada a condição de

contorno restante, dada pela Eq.(4.25c). A derivada da função de auto similaridade, $F'(\eta)$ é dada por

$$F'(\eta) = \frac{dF}{d\eta} = \frac{\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \exp\left(-\frac{\kappa\eta^2}{2}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2\kappa}}{4}\right)}. \quad (4.31)$$

A aplicação da condição de contorno dada pela Eq.(4.25c) em (4.31) resulta em

$$\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \exp\left(-\frac{\kappa/4}{2}\right) - 0,01 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2\kappa}}{4}\right) = 0, \quad (4.32)$$

cuja solução fornece o valor da constante $\kappa = 50,745$. Assim, fica também determinada a constante K_l que, substituído na Eq.(4.23) leva a

$$\delta(t) = \sqrt{2 \cdot 50,745} \sqrt{\nu t} \longrightarrow \delta(t) = 10,074 \sqrt{\nu t}. \quad (4.33)$$

Portanto, a solução contínua do modelo diferencial dado pelas Eqs.(4.24) e (4.25), para uma camada de mistura em desenvolvimento temporal, em regime laminar, é dada por

$$u(y, t) = \bar{U} + \tilde{U} \frac{\operatorname{erf}\left(5,037 \frac{y}{\delta(t)}\right)}{\operatorname{erf}(2,519)}. \quad (4.34)$$

Como $1/\operatorname{erf}(2,519) \approx 1$ pode-se escrever:

$$u(y, t) = \bar{U} + \tilde{U} \operatorname{erf}\left(5,037 \frac{y}{\delta(t)}\right). \quad (4.35)$$

A EDP que modela esse caso se assemelha à equação da difusão transiente unidimensional, para a qual encontra-se na literatura a solução por auto similaridade, porém o problema com tais coeficientes e condições de contorno não é abordado em tais resoluções. A solução apresentada para a camada de mistura em desenvolvimento temporal no regime laminar não foi encontrada na literatura em buscas realizadas contemplando livros e artigos, podendo caracterizar uma contribuição original do presente trabalho.

4.2.3 Regime turbulento

4.2.3.1 Modelo matemático diferencial parcial

O modelo matemático diferencial para a camada de mistura temporal, em regime turbulento, também pode ser extraído das Eqs. (4.13) e (4.14). Considera-se que o processo de transporte difusivo promovido pela turbulência é ordens de grandeza maior que o processo difusivo molecular puro. Assim o termo de difusão molecular não será considerado. Simplifica-se o termo advectivo, em conformidade com a natureza física desse problema, ou seja, o escoamento médio ocorre apenas na direção x e só depende da direção y e do tempo t . Assim, a Equação de Navier-Stokes filtrada, para a direção x resulta em:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \quad (4.36)$$

Utilizando-se a hipótese de viscosidade turbulenta e o modelo do comprimento de mistura de Boussinesq-Prandtl, apresentado na seção 3.2.2, a componente τ_{xy} do tensor de Boussinesq-Reynolds pode ser modelada como segue:

$$\tau_{xy} = \underbrace{\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{Boussinesq}} = \underbrace{l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{Boussinesq-Prandtl}}. \quad (4.37)$$

Considerando-se que $\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \geq 0$ e que, para esse escoamento $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \geq 0$ para todo y , então $\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ e, substituindo-se a Eq.(4.37) em (4.36), tem-se

$$\tau_{xy} = -\overline{u'v'} = \left(l_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (4.38)$$

e

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = l_m^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (4.39)$$

onde, conforme estabelecido anteriormente, na Eq. (3.16) $l_m = \alpha \delta(t)$. O coeficiente α

deve ser determinado experimentalmente, seja por experimento material, seja por experimento computacional, via DNS (Simulação Numérica Direta).

Como condições inicial e de contorno tem-se:

$$\bar{u}(y, t = 0) = \bar{u}_0(y), \quad (4.40a)$$

$$\bar{u}\left(y = \frac{\delta(t)}{2}\right) = U_1, \quad (4.40b)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\left(y = \frac{\delta(t)}{2}\right) = 0, \quad (4.40c)$$

$$\bar{u}(y = 0, t) = \bar{U}, \quad (4.40d)$$

onde é a velocidade média das correntes, dada por $\bar{U} = \frac{U_1 + U_2}{2}$.

Após a apresentação do modelo matemático diferencial parcial para a camada de mistura temporal em regime turbulento, serão aplicadas as transformações visando obter-se uma EDO equivalente que modele o problema físico.

4.2.3.2 Modelo matemático diferencial ordinário

A transformação da Eq.(4.39) através da teoria de auto-similaridade faz uso da mesma variável e da mesma função de auto similaridade do caso laminar, dadas pelas Eqs.(4.20) e (4.19), respectivamente

$$\eta(y, t) = \frac{y}{\delta(t)} \quad \text{e} \quad \frac{\bar{u}(y, t) - \bar{U}}{\tilde{U}} = F(\eta),$$

sendo $\tilde{U} = \frac{U_1 - U_2}{2}$ e $\bar{U} = \frac{U_1 + U_2}{2}$.

As derivadas no tempo e no espaço da função de auto similaridade junto à variável de auto similaridade fornecem

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \tilde{U} \frac{dF}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt} = \tilde{U} F' \left(-\frac{y}{\delta^2}\right) \frac{d\delta}{dt} = -\frac{\tilde{U}}{\delta} \frac{d\delta}{dt} \eta F', \quad (4.41a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tilde{U} \frac{dF}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\tilde{U}}{\delta} F', \quad (4.41b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\tilde{U}}{\delta} F' \right)^2 \right] = \frac{2\tilde{U}^2}{\delta^3} F' F''. \quad (4.41c)$$

Substituindo-se as Eqs. (4.41a) e (4.41c) em (4.39), obtém-se

$$F'F'' + \underbrace{\frac{1}{2\tilde{U}\alpha^2} \frac{d\delta}{dt}}_{\kappa} \eta F' = 0, \quad (4.42)$$

onde o termo κ deve ser uma constante, uma vez que a solução dessa equação diferencial deve resultar em uma função de η apenas. Assim,

$$\frac{1}{2\tilde{U}\alpha^2} \frac{d\delta}{dt} = \kappa \longrightarrow \delta(t) = 2\tilde{U}\alpha^2\kappa t \longrightarrow \delta(t) = K_t t, \quad (4.43)$$

onde $K_t = 2\tilde{U}\alpha^2\kappa$ é uma constante, relativa ao escoamento turbulento, a qual será determinada utilizando-se uma condição de contorno do problema. Para obtenção da Eq. (4.43) foi necessária a determinação de uma constante de integração. Para tanto, foi utilizada a condição inicial $\delta(t = 0) = 0$.

A Eq. (4.42) é reescrita com a constante a_{ot} como

$$F'F'' + \kappa\eta F' = 0. \quad (4.44)$$

Para complementar o modelo ordinário, basta acrescentar condições de contorno para a Eq. (4.44), que são dadas por

$$F\left(\eta = \frac{1}{2}\right) = 1, \quad (4.45a)$$

$$F'\left(\eta = \frac{1}{2}\right) = 0, \quad (4.45b)$$

$$F(\eta = 0) = 0. \quad (4.45c)$$

As Eqs. (4.44) e (4.45), junto às condições de contorno (Eqs. (4.45)), compõem o modelo diferencial ordinário para uma camada de mistura temporal em regime turbulento, o qual pode ser resolvido através da aplicação de métodos clássicos para a integração de EDOs, conforme será apresentado na seção seguinte.

4.2.3.3 Modelo matemático exato

Para a obtenção da solução contínua serão aplicadas técnicas clássicas de integração. Antes de se integrar a EDO em questão, a mesma pode ser manipulada evidenciando F' . Portanto, a Eq. (4.44) pode ser reescrita como:

$$F'(F'' + \kappa\eta) = 0, \quad (4.46)$$

possibilitando a sua decomposição em duas equações. A primeira equação é dada por

$$F' = 0, \quad (4.47)$$

e conduz a uma solução trivial $F(\eta) = cte$.

A segunda equação é dada por

$$F'' + \kappa\eta = 0, \quad (4.48)$$

e seu resultado é obtido integrando por separação de variáveis:

$$F(\eta) = -\frac{\kappa}{6}\eta^3 + c_{1t}\eta + c_{2t}, \quad (4.49)$$

sendo $\kappa = \frac{K_t}{2\alpha^2\tilde{U}}$ e c_{1t} e c_{2t} constantes de integração.

Utilizando-se a condição de contorno dada pela Eq. (4.45c), ou seja, $F(0) = 0$, resulta em $c_{2t} = 0$. As outras duas condições de contorno, dadas pelas Eqs. (4.45a) e (4.45b) fornecem $\kappa = 24$ e $c_{1t} = 3$. Assim, tem-se que a função $F(\eta)$ é dada por

$$F(\eta) = -4\eta^3 + 3\eta. \quad (4.50)$$

Retomando à constante κ , já de posse do seu valor determinado, tem-se que

$$\kappa = \frac{K_t}{2\alpha^2\tilde{U}} = 24 \longrightarrow K_t = 48\alpha^2\tilde{U}. \quad (4.51)$$

logo, substituindo a Eq.(4.51) em (4.43), chega-se a

$$\delta(t) = K_t t = 48 \alpha^2 \frac{(U_1 - U_2)}{2} t \longrightarrow \delta(t) = 24 \alpha^2 (U_1 - U_2) t, \quad (4.52)$$

onde é importante ressaltar que a constante α deve ser determinada por experimentação material ou computacional, não possuindo um valor determinado na literatura vasculhada para o presente trabalho. No presente trabalho, devido à falta dessa informação, utilizou-se $\alpha = 0,07$, que corresponde ao valor determinado para a camada de mistura espacial segundo Wilcox *et al.* (1998). Portanto, de posse das Eqs. (4.50) e (4.52) tem-se que

$$\bar{u}(\eta) = \bar{U} + \tilde{U} (3\eta - 4\eta^3), \quad (4.53)$$

ou

$$\bar{u}(y, t) = \bar{U} + \tilde{U} \left[3 \left(\frac{y}{\delta(t)} \right) - 4 \left(\frac{y}{\delta(t)} \right)^3 \right], \quad (4.54)$$

onde $\delta(t)$ é dado pela Eq. (4.52).

Por fim, sabendo que a derivada da função de auto-similaridade, $F(\eta)$, é dada por

$$F'(\eta) = 3 - 12\eta^2, \quad (4.55)$$

pode-se substituí-la, junto com a Eq. (4.41b) em (4.38), obtendo que o perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds é dado por:

$$-\overline{u'v'} = \alpha^2 \bar{U}^2 (3 - 12\eta^2)^2, \quad (4.56)$$

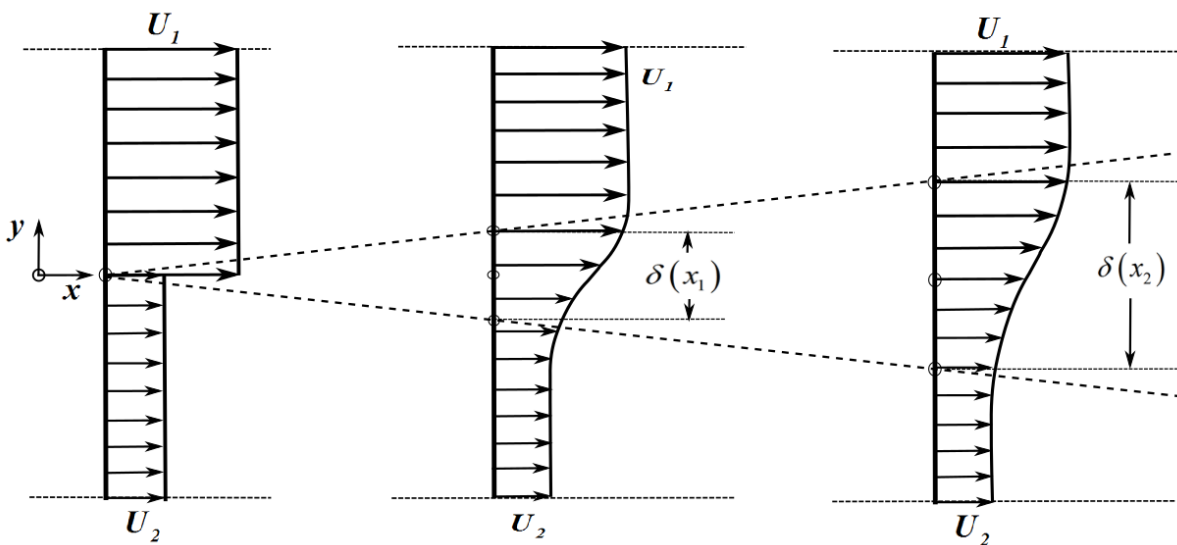
relembrando que α é uma constante empírica do modelo do comprimento de mistura de Prandtl e \bar{U} é a média das velocidades das correntes.

4.3 Camada de mistura em desenvolvimento espacial

4.3.1 Modelo Físico

Uma camada de mistura em desenvolvimento espacial é um dos escoamentos canônicos turbulentos mais simples do ponto de vista físico. Esse escoamento é formado por duas correntes de fluido a velocidades diferentes U_1 e U_2 que se encontram na entrada de um dado domínio físico. Essas duas correntes mantêm o escoamento no interior do domínio. Assim, no centro da entrada do domínio o campo de velocidade apresenta um forte gradiente, podendo mesmo ser infinito, teoricamente. Nesse caso, a espessura da camada cisalhante será nula, $\delta(x=0) = 0$. A evolução do campo médio de velocidade, ao longo do espaço pode ser visualizado na Fig. 4.5, em três posições x .

Figura 4.5: Camada de mistura em desenvolvimento espacial: perfis para três valores de x .



À medida que se desloca em x , o transporte difusivo de quantidade de movimento linear atenua esse gradiente, gerando um perfil inflexional de velocidade, como pode ser visualizado na Fig. 4.5. Essa difusão será gerada pela movimentação molecular, em regime laminar. No regime turbulento, as estruturas turbilhonares acelerarão em ordens de grandeza esse processo de difusão molecular com o auxílio da advecção promovida pela turbulência. É importante frisar que a turbulência acelera esse processo de transporte molecular uma vez que ela amplia os gradientes locais e aumenta a quantidade de gradientes por unidade de volume.

Na presente análise não será objetivada a modelagem e a simulação do processo de formação de instabilidades de Kelvin-Helmholtz, mas tão somente a modelagem do comportamento médio do escoamento. Como ilustrado na Fig. 4.5, a evolução do escoamento se dá no plano (x, y) . Observa-se que os perfis de velocidade, ilustrados na Fig. 4.5, são auto similares, o que permitirá o uso da teoria de auto similaridade para a obtenção da modelagem diferencial ordinária equivalente à modelagem diferencial parcial e para a solução contínua do modelo diferencial ordinário obtido. Observa-se que o modelo físico apresentado é válido tanto para o regime laminar quanto para o regime turbulento, porém, esse é o único escoamento apresentado que só terá a sua solução matemática desenvolvida para um regime, o regime turbulento.

4.3.2 Regime turbulento

4.3.2.1 Modelo matemático diferencial parcial

O modelo matemático diferencial parcial para uma camada de mistura em desenvolvimento espacial, no regime turbulento, pode ser extraído das Eqs. (4.13) e (4.14). Considera-se que o processo de transporte difusivo promovido pela turbulência é ordens de grandeza maior que o processo difusivo molecular puro. Assim o termo de difusão molecular não será considerado. Simplifica-se o termo advectivo, em conformidade com a natureza física desse problema, ou seja, o escoamento ocorre no plano (x, y) e considera-se que o comportamento médio esteja em regime permanente. Assim a Equação da continuidade e de Navier-Stokes filtrada, para a direção x , são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (4.57)$$

e

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \quad (4.58)$$

onde a barra posicionada sobre as componentes da velocidade indica que se trata de uma

grandeza filtrada. Além disso,

$$\tau_{xy} = -\overline{u'v'}. \quad (4.59)$$

Utilizando-se a hipótese de viscosidade turbulenta de Boussinesq e o modelo de Prandtl-Reichardt, apresentado na seção 3.2.3, a componente τ_{xy} do tensor de Boussinesq-Reynolds pode ser modelada como segue:

$$\tau_{xy} = -\overline{u'v'} = \underbrace{\nu_t}_{\text{Boussinesq}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \underbrace{\delta(x) \chi (U_{max} - U_{min})}_{\text{Prandtl-Reichardt}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (4.60)$$

relembrando que χ é uma constante empírica do modelo.

A partir da equação da continuidade pode-se determinar a velocidade $\bar{v}(x, y)$ em função de $\bar{u}(x, y)$, o que facilita a transformação e solução da Eq. (4.58). Portanto, manipulando a Eq. (4.57), tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \longrightarrow \partial \bar{v} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \partial y.$$

Integrando chega-se a

$$\int \partial \bar{v} = \int -\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \partial y \longrightarrow \bar{v} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} \partial y + v_o(x), \quad (4.61)$$

onde $v_o(x)$ é uma função de x que resulta do processo de integração.

Existe uma condição de contorno para a camada de mistura espacial turbulenta, que corresponde ao fato de que em $y = 0$ a velocidade \bar{v} é nula, utilizando o domínio centrado em zero. Ou seja,

$$\bar{v}(x, y = 0) = 0. \quad (4.62)$$

Através da condição de contorno dada pela Eq. (4.62) obtem-se que $v_o(x) = 0$ e,

portanto,

$$\bar{v} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} \, dy. \quad (4.63)$$

Substituindo as Eqs. (4.63) e (4.60) na Eq. (4.58)

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \left(-\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} \, dy \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \nu_t \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}. \quad (4.64)$$

4.3.2.2 Modelo matemático diferencial ordinário

Conforme ressaltado anteriormente, no presente trabalho os autores visam seguir um método padronizado para se chegar às soluções contínuas. Objetivou-se utilizar as mesmas função e variável de auto similaridade em todos os casos. Assim, ao se utilizar a função e a variável apresentadas no início do atual capítulo, dadas pelas Eqs. (4.12) e (4.1), tem-se:

$$\frac{\bar{u}(x, y) + U_d}{U_R} = F'(\eta) \quad \text{e} \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)},$$

sendo

$$U_d = u(x, y = 0) - U_{max} - U_{min} = \bar{U} - U_1 - U_2 = -\bar{U},$$

$$U_R = u(x, y = 0) - U_{min} = \bar{U} - U_2 = \tilde{U},$$

e, portanto,

$$\bar{u}(x, y) = \bar{U} + \tilde{U} F'(\eta) \quad \text{e} \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}.$$

Seguindo todos os passos expostos na parte final da seção 3.3, chegou-se a uma EDO não linear de terceira ordem, dada por:

$$F''' + \frac{\lambda}{2\chi} \eta F'' + \frac{1}{2\chi} \frac{d\delta}{dx} F F'' = 0, \quad (4.66)$$

onde $\lambda = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}$ e χ é a constante relacionada ao modelo de fechamento utilizado, dado pela Eq. (4.60).

A Eq. (4.66) não possui uma solução evidente através de métodos analíticos empregados para solucionar EDOs. Ela pode ser resolvida através de algum método numérico de integração, e deve conduzir a uma solução para o problema analisado. Porém, o objetivo do presente trabalho é a obtenção de soluções sem o uso de ferramentas numérico-computacionais. Sendo assim, será proposta, para a camada de mistura em desenvolvimento espacial, uma função de auto similaridade diferente dos casos anteriores, considerando como velocidade de referência a média das velocidades das duas correntes $\bar{U} = \frac{U_1 + U_2}{2}$. Assim, a função de auto similaridade utilizada é

$$\frac{u(x, y)}{\bar{U}} = F'(\eta). \quad (4.67)$$

Apesar da mudança realizada na função de auto similaridade, a variável η não será alterada na nova proposição, continuando a ser definida por:

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (4.68)$$

Derivando a Eq. (4.67) em relação às direções x e y , levando-se em conta a variável de auto similaridade η tem-se

$$\bar{u} = \bar{U}F'(\eta), \quad (4.69a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\bar{U}}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F''(\eta), \quad (4.69b)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\bar{U}}{\delta(x)} F''(\eta), \quad (4.69c)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} dy = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta} \bar{U} \delta(x) F'(\eta) d\eta = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{U} \delta(x) \int_0^{\eta} F'(\eta) d\eta \right] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [\bar{U} \delta(x) F(\eta)] \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} dy = \bar{U} \frac{d\delta}{dx} F(\eta) - \bar{U} \frac{d\delta}{dx} \eta F'(\eta), \end{aligned} \quad (4.69d)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\bar{U}}{\delta(x)} F''(\eta) \right] = \frac{\bar{U}}{\delta(x)} \frac{dF''}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} \longrightarrow \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\bar{U}}{\delta^2(x)} F'''(\eta). \quad (4.69e)$$

Substituindo as Eqs. (4.69) em (4.64) chega-se a

$$-\frac{\bar{U}^2}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F' F'' - \frac{\bar{U}^2}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} F F'' + \frac{\bar{U}^2}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F' F'' = \nu_t \frac{\bar{U}}{\delta^2(x)} F'''. \quad (4.70)$$

Retomando a Eq. (3.22), que representa o modelo de Prandtl-Reichardt, utilizando o valor da semi diferença, o qual é definido por $\tilde{U} = \frac{U_1 - U_2}{2}$, multiplicando e dividindo a equação pela velocidade média das correntes \bar{U} , a viscosidade cinemática turbulenta, ν_t , para uma camada de mistura espacial, pode ser reescrita como

$$\nu_t = 2 \chi \delta(x) \tilde{U} \frac{\bar{U}}{\bar{U}} \rightarrow \nu_t = 2 \chi \delta(x) \lambda \bar{U}, \quad (4.71)$$

onde $\lambda = \frac{\tilde{U}}{\bar{U}}$.

A substituição da Eq. (4.71) em (4.70) leva a

$$-\frac{\bar{U}^2}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F' F'' - \frac{\bar{U}^2}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} F F'' + \frac{\bar{U}^2}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F' F'' = 2 \chi \delta(x) \lambda \bar{U} \frac{\bar{U}}{\delta^2(x)} F''',$$

$$2\chi\lambda F''' + \frac{d\delta}{dx} F F'' = 0. \quad (4.72)$$

Uma exigência do método de auto similaridade é que os coeficientes da EDO obtida sejam constantes. Assim, pode-se integrar o coeficiente do segundo termo da EDO a fim de se obter a taxa de espalhamento da camada de mistura espacial em regime turbulento. Igualando-o a uma constante c e integrando-o tem-se

$$\frac{d\delta}{dx} = c \rightarrow \int d\delta = \int c dx \rightarrow \delta(x) = cx + c_1, \quad (4.73)$$

sendo c_1 uma constante originada do processo de integração.

Sabe-se que em $x = 0$, o perfil de velocidades é praticamente descontínuo, como pode-se observar na Fig. 4.5. Sendo assim, uma condição de contorno para $\delta(x)$ pode ser definida por $\delta(x = 0) = 0$, que leva a $c_1 = 0$. Portanto, conclui-se que a camada de mistura espacial

se espalha linearmente com x :

$$\delta(x) = cx. \quad (4.74)$$

Substituindo a Eq. (4.74) em (4.72) e definindo uma constante σ dada por

$$\sigma = \sqrt{\frac{c}{4\chi\lambda}}, \quad (4.75)$$

tem-se que

$$F''' + 2\sigma^2 FF'' = 0. \quad (4.76)$$

Sabendo que em $y = 0$ a velocidade $\bar{u}(x, y)$ corresponde à média entre as velocidades das duas correntes livres e que quando $y \rightarrow \pm\infty$ a velocidade $\bar{u}(x, y)$ corresponde a velocidade da corrente livre existente naquela região, as condições de contorno para a Eq. (4.76) são dadas por

$$\begin{aligned} \eta = 0 &\implies F'(0) = 1, \\ \eta = 0 &\implies F''(0) = 0, \\ \eta \rightarrow \infty &\implies F'(\infty) = \frac{U_1}{U}, \\ \eta \rightarrow -\infty &\implies F'(-\infty) = \frac{U_2}{U}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

As condições de contorno dadas em $\pm\infty$ podem ser reescritas em função do parâmetro λ . Basta que se some e subtraia $U_2/(U_1 + U_2)$ na condição em que $\eta \rightarrow \infty$ e $U_1/(U_1 + U_2)$ na condição em que $\eta \rightarrow -\infty$. Após manipulações algébricas e simplificações, as condições de contorno do problema podem ser reescritas como:

$$\eta = 0 \implies F'(0) = 1, \quad (4.78a)$$

$$\eta = 0 \implies F''(0) = 0, \quad (4.78b)$$

$$\eta \rightarrow \infty \implies F'(\infty) = 1 + \lambda, \quad (4.78c)$$

$$\eta \rightarrow -\infty \implies F'(-\infty) = 1 - \lambda. \quad (4.78d)$$

A fim de possibilitar a resolução da Eq. (4.76) através de uma expansão em série, pode-se seguir a proposta de Görtler (1942), que consiste em realizar um transformação de variáveis da seguinte forma

$$\zeta = \sigma \frac{y}{cx}, \quad (4.79)$$

fazendo com que a velocidade \bar{u} , seja redefinida como

$$\bar{u}(x, y) = \bar{U}G'(\zeta). \quad (4.80)$$

Derivando a Eq. (4.80) em relação às direções x e y , levando-se em conta a variável ζ tem-se

$$\bar{u} = \bar{U}G', \quad (4.81a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\bar{U}}{x} \zeta G'', \quad (4.81b)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\sigma}{cx} \bar{U} G'', \quad (4.81c)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} dy = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta} \bar{U} \frac{cx}{\sigma} G' d\zeta = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{U} \frac{cx}{\sigma} \int_0^{\zeta} G' d\zeta \right] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{U} \frac{cx}{\sigma} G \right] \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} dy = \frac{\bar{U}c}{\sigma} (\zeta G' - G), \end{aligned} \quad (4.81d)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\sigma}{cx} \bar{U} G'' \right] \longrightarrow \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\bar{U} \sigma^2}{c^2 x^2} G'''. \quad (4.81e)$$

Substituindo as Eqs. (4.81) e (4.71) em (4.64) chega-se a

$$-\frac{\bar{U}^2}{x} \zeta G' G'' + \bar{U}^2 \frac{\sigma}{cx} \frac{c}{\sigma} \zeta G' G'' - \frac{\bar{U}^2}{x} G G'' - \bar{U}^2 \left(\frac{\sigma^2}{c^2 x^2} 2\chi cx \lambda \right) G''' = 0. \quad (4.82)$$

Realizando as simplificações possíveis na Eq. (4.82), a mesma pode ser reescrita como

$$\frac{2\chi\lambda\sigma^2}{c} G''' + G G'' = 0, \quad (4.83)$$

onde, substituindo-se a Eq. (4.75), tem-se:

$$G''' + 2GG'' = 0. \quad (4.84)$$

É importante ressaltar que, como $\zeta = \sigma\eta$, sendo σ uma constante, as Eqs. (4.78) são condições de contorno também para a Eq. (4.84). As condições de contorno podem ser reescritas em termos de ζ

$$\zeta \rightarrow \infty \implies G'(\infty) = 1 + \lambda, \quad (4.85a)$$

$$\zeta = 0 \implies G'(0) = 1, \quad (4.85b)$$

$$\zeta = 0 \implies G''(0) = 0, \quad (4.85c)$$

$$\zeta \rightarrow -\infty \implies G'(-\infty) = 1 - \lambda. \quad (4.85d)$$

4.3.2.3 Modelo matemático exato

A solução da Eq. (4.84) pode ser aproximada através de uma série baseada na proposta de Görtler (1942). A série utilizada no presente trabalho é dada por

$$G(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n G_n(\zeta). \quad (4.86)$$

Para uma primeira aproximação pode ser utilizado apenas o primeiro termo da série, ou seja, o termo correspondente a $n = 0$. Sabendo-se que a função G é dependente de ζ , tal representação será omitida nas representações posteriores da função. A primeira aproximação pela série é:

$$G = G_0. \quad (4.87)$$

Derivando a Eq. (4.87) que $G' = G'_0$ e utilizando as condições de contorno (4.85b) e (4.85c) tem-se

$$G'_0 = 1, \quad (4.88)$$

que pode ser integrada e ter a constante de integração determinada pela Eq. (4.85c), chegando-se a

$$G_0 = \zeta. \quad (4.89)$$

Portanto, essa é a primeira aproximação da solução quando utiliza-se apenas o primeiro termo da série dada pela Eq. (4.86). Através dessa aproximação é possível inferir que o termo correspondente a $n = 0$ é nulo a partir da segunda derivada. Isso faz com que não seja possível aproximar a solução utilizando apenas tal termo. Pode-se então agregar mais termos à série. O procedimento apresentado a seguir utiliza como limite superior $n = 3$.

A expansão para a função $G(\zeta)$ e suas respectivas derivadas utilizando os quatro primeiros termos da série são dadas por

$$G = \zeta + \lambda G_1 + \lambda^2 G_2 + \lambda^3 G_3, \quad (4.90a)$$

$$G' = 1 + \lambda G'_1 + \lambda^2 G'_2 + \lambda^3 G'_3, \quad (4.90b)$$

$$G'' = \lambda G''_1 + \lambda^2 G''_2 + \lambda^3 G''_3, \quad (4.90c)$$

$$G''' = \lambda G'''_1 + \lambda^2 G'''_2 + \lambda^3 G'''_3. \quad (4.90d)$$

Substituindo as Eqs. (4.90a), (4.90c) e (4.90d) na EDO (4.84) chega-se a

$$\lambda G'''_1 + \lambda^2 G'''_2 + \lambda^3 G'''_3 + 2 [(\zeta + \lambda G_1 + \lambda^2 G_2 + \lambda^3 G_3) (\lambda G''_1 + \lambda^2 G''_2 + \lambda^3 G''_3)] = 0, \quad (4.91)$$

que, após a realização das operações de multiplicação e agrupamento dos termos segundo o expoente de λ , pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \lambda [G'''_1 + 2\zeta G''_1] + \lambda^2 [G''_2 + 2\zeta G''_2 + 2G_1 G''_1] + \lambda^3 [G''_3 + 2\zeta G''_3 + 2G_1 G''_2 + 2G_2 G''_1] + \\ \lambda^4 [2G_1 G''_3 + 2G_2 G''_2 + 2G_3 G''_1] + \lambda^5 [2G_2 G''_3 + 2G_3 G''_2] + \lambda^6 [G_3 G''_3] = 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

A Eq. (4.92) deve atender as condições de contorno da função G dadas pelas Eqs.

(4.85a) a (4.85d), sendo assim as condições de contorno da Eq. (4.92) são dadas por

$$\zeta \rightarrow \infty \implies G'_1(\infty) = 1, \quad (4.93a)$$

$$\zeta \rightarrow -\infty \implies G'(-\infty) = -1, \quad (4.93b)$$

$$\zeta = 0 \implies G'_n(0) = 0 \quad \forall n > 0, \quad (4.93c)$$

$$\zeta = 0 \implies G''_n(0) = 0 \quad \forall n > 0, \quad (4.93d)$$

$$\zeta \rightarrow \pm\infty \implies G'(\pm\infty) = 0 \quad \forall n \geq 2. \quad (4.93e)$$

No caso da camada de mistura espacial as velocidades das duas correntes devem possuir o mesmo sentido e, para que se caracterize uma camada de mistura, as velocidades não podem ser iguais. Como o valor de λ não pode ser nulo, para que a igualdade da Eq. (4.92) seja atendida, as equações que acompanham cada potência de λ devem ser iguais a zero e, conseqüentemente, darão origem a uma EDO. Como foi utilizada uma expansão considerando como limite $n = 3$, será originado um sistema de quatro EDOs, sendo uma delas a Eq. (4.88). O sistema de EDOs extraído da Eq. (4.92) é dado por:

$$G'''_1 + 2\zeta G''_1 = 0, \quad (4.94a)$$

$$G'''_2 + 2\zeta G''_2 + 2G_1 G''_1 = 0, \quad (4.94b)$$

$$G'''_3 + 2\zeta G''_3 + 2G_1 G''_2 + 2G_2 G''_1 = 0. \quad (4.94c)$$

Para se obter as soluções das EDOs (4.94a) a (4.94c) realiza-se a redução de ordem definindo-se uma função $g(\zeta)$:

$$g(\zeta) = G'_n(\zeta) \quad \text{sendo} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.95)$$

o que permite reescrever a Eq. (4.94a) como

$$g''_1(\zeta) + 2\zeta g'_1(\zeta) = 0. \quad (4.96)$$

cujas condições de contorno são dadas pelas Eqs. (4.93a) e (4.93b), ou seja,

$$\zeta \rightarrow \infty \implies g_1'(\infty) = 1, \quad (4.97a)$$

$$\zeta \rightarrow -\infty \implies g_1'(-\infty) = -1. \quad (4.97b)$$

Integrando a Eq. (4.96), obtém-se a seguinte solução:

$$g_1(\zeta) = c_1 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\zeta) + c_2, \quad (4.98)$$

onde c_1 e c_2 são constantes originadas do processo de integração. Utilizando as condições de contorno dadas pelas Eqs. (4.97a) e (4.97b) obtém-se que os valores das constantes são $c_1 = 1/\sqrt{\pi}$ e $c_2 = 0$. Resultando em:

$$g_1(\zeta) = \operatorname{erf}(\zeta), \quad (4.99)$$

e, conseqüentemente,

$$G_1'(\zeta) = \operatorname{erf}(\zeta). \quad (4.100)$$

A partir da Eq. (4.100) é possível se obter o valor da própria função $G_1(\zeta)$ e de sua segunda derivada, $G_1''(\zeta)$. Integrando a Eq. (4.100) chega-se a:

$$G_1(\zeta) = \zeta \operatorname{erf}(\zeta) + \frac{e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} + c_3, \quad (4.101)$$

onde c_3 é uma constante vinda da integração.

Para se obter o valor da segunda derivada deve-se derivar a Eq. (4.100), obtendo-se:

$$G_1''(\zeta) = \frac{2e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.102)$$

Na solução apresentada por Schlichting *et al.* (1955), a aproximação é realizada utilizando apenas os termos em que $n = 0$ e $n = 1$, ou seja, substitui-se a Eq. (4.100) na Eq.

(4.90b) e considera-se $G'_2 = G'_3 = 0$, conduzindo a uma solução aproximada dada por

$$G'(\zeta) = 1 + \lambda \operatorname{erf}(\zeta). \quad (4.103)$$

Contudo, no presente trabalho, buscou-se como contribuição agregar-se mais um termo à solução contínua obtida para o modelo matemático. A solução agregando o termo referente a $n = 2$ não foi localizada na literatura pelos autores do presente trabalho.

Para a obtenção de G'_2 basta resolver a EDO (4.94b), substituindo nela as Eqs. (4.101) e (4.102), tendo-se que:

$$G_2''' + 2\zeta G_2'' + 2 \left(\zeta \operatorname{erf}(\zeta) + \frac{e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} + c_3 \right) \left(\frac{2e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} \right) = 0. \quad (4.104)$$

Realizando o mesmo procedimento utilizado na integração da EDO com $n = 1$ apresentado na Eq. (4.95) tem-se:

$$g_2'' + 2\zeta g_2' = -2 \left(\zeta \operatorname{erf}(\zeta) + \frac{e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} + c_3 \right) \left(\frac{2e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} \right), \quad (4.105)$$

também com as condições de contorno dadas pelas Eqs. (4.93a) e (4.93b).

Integrando-se a Eq. (4.105) obtém-se a seguinte função

$$g_2(\zeta) = \frac{2c_3 e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} c_4 \operatorname{erf}(\zeta) + \frac{\zeta e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}^2(\zeta) + c_5 + \frac{e^{-2\zeta^2}}{\pi}, \quad (4.106)$$

onde c_3 , c_4 e c_5 são constantes que surgem do processo de integração da EDO. Essas constantes podem ser determinadas através das condições de contorno (4.93c) e (4.93e), resultando em $c_3 = \frac{\sqrt{\pi}(2 + \pi)}{4\pi}$, $c_4 = 0$ e $c_5 = 1/2$. Portanto, a solução para G'_2 é dada por:

$$G'_2(\zeta) = g_2(\zeta) = \frac{\zeta e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}^2(\zeta) - e^{-\zeta^2} \right]. \quad (4.107)$$

Com a obtenção do valor de $G'_2(\zeta)$ é possível que se agregue um termo a mais na aproximação dada pela Eq. (4.90b). Portanto, substituindo-se as Eqs. (4.100) e (4.107) em

(4.90b) tem-se:

$$G'(\zeta) = 1 + \lambda \operatorname{erf}(\zeta) + \lambda^2 \left[\frac{\zeta e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}^2(\zeta) - e^{-\zeta^2} \right) \right]. \quad (4.108)$$

Substituindo-se a Eq. (4.108) em (4.67), conclui-se que a solução contínua para a velocidade \bar{u} pode ser escrita como

$$\bar{u}(\zeta) = \bar{U} \left(1 + \lambda \operatorname{erf}(\zeta) + \lambda^2 \left[\frac{\zeta e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}^2(\zeta) - e^{-\zeta^2} \right) \right] \right). \quad (4.109)$$

É importante ressaltar também que a aproximação da solução pode ser ainda melhorada agregando outros termos à série ($n = 3, 4, 5, \dots$), bastando, para isso, que se resolva as EDOs correspondentes.

De forma análoga, a componente de velocidade $\bar{v}(\zeta)$ e o termo $-\overline{u'v'}$ podem ser obtidos utilizando as expressões para $G(\eta)$ e $G''(\eta)$. A função $G(\eta)$ e sua segunda derivada são dadas por:

$$G(\zeta) = \zeta + \lambda \left[\frac{e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} + \zeta \operatorname{erf}(\zeta) \right] + \frac{\lambda^2}{2} \left[\frac{\zeta^2 e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} + \zeta \left(1 - \operatorname{erf}^2(\zeta) - e^{-\zeta^2} \right) - \frac{3 e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\zeta e^{-2\zeta^2}}{\pi} + \frac{\sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}\zeta)}{\sqrt{\pi}} \right], \quad (4.110)$$

$$G''(\zeta) = \lambda \left[\frac{2 e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} \right] + \lambda^2 \left[\frac{e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2 \zeta e^{-2\zeta^2}}{\pi} - \frac{2 e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} \right], \quad (4.111)$$

Substituindo as Eqs. (4.108) e (4.110) em (4.81c), a qual é dada por

$$\bar{v}(\zeta) = \frac{\bar{U} c}{\sigma} (\zeta G' - G),$$

tem-se que o perfil de velocidade \bar{v} é dado por:

$$\bar{v}(\zeta) = \frac{\bar{U} c \lambda}{\sigma} \left(\frac{e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} \right) + \frac{\bar{U} c \lambda^2}{2\sigma} \left(\frac{\zeta^2 e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}\zeta)}{\sqrt{\pi}} + \frac{3e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{2\sqrt{\pi}} - \frac{\zeta e^{-2\zeta^2}}{\pi} \right). \quad (4.112)$$

De posse do valor da segunda derivada da função $G(\zeta)$ é possível obter a expressão para a componente do tensor de Reynolds $\overline{u'v'}$. Substituindo as Eqs. (4.71) e (4.81b) na Eq. (4.60) tem-se

$$\tau_{xy} = -\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 2\chi \delta(x) \lambda \bar{U} \frac{\sigma}{cx} \bar{U} G'''. \quad (4.113)$$

Sabendo, pela Eq. (4.74) que $\delta(x) = cx$ e substituindo a Eq. (4.111) em (4.113), tem-se que a componente do tensor de Reynolds é dada por

$$-\overline{u'v'} = 2\tilde{U}^2 \chi \sigma \lambda^2 \left[\frac{2e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} + \lambda \left(\frac{e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2\zeta e^{-2\zeta^2}}{\pi} - \frac{2e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} \right) \right]. \quad (4.114)$$

Portanto, após os desenvolvimentos apresentados foram obtidas as expressões para as velocidades \bar{u} e \bar{v} , além da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds, para uma camada de mistura em desenvolvimento espacial no regime turbulento. No capítulo 5 serão apresentadas comparações da solução contínua \bar{u} com dados discretos, além da plotagem dos demais perfis obtidos.

4.4 Jato plano

4.4.1 Modelo físico

Os jatos planos são originados de escoamentos que saem de um bocal com seção retangular e adentram em um meio fluido que se encontra em velocidade diferente, podendo ser um meio em repouso. Quando o fluido sai do bocal e começa a interagir com o meio, acontece um processo de espalhamento, que se intensifica conforme cresce a distância do bocal.

A figuras 4.6 representa o modelo físico para um jato plano tanto em regime laminar

quanto turbulento. Através delas pode-se observar que o escoamento pode ser dividido em três regiões distintas, denominadas nas figuras de A, B e C.

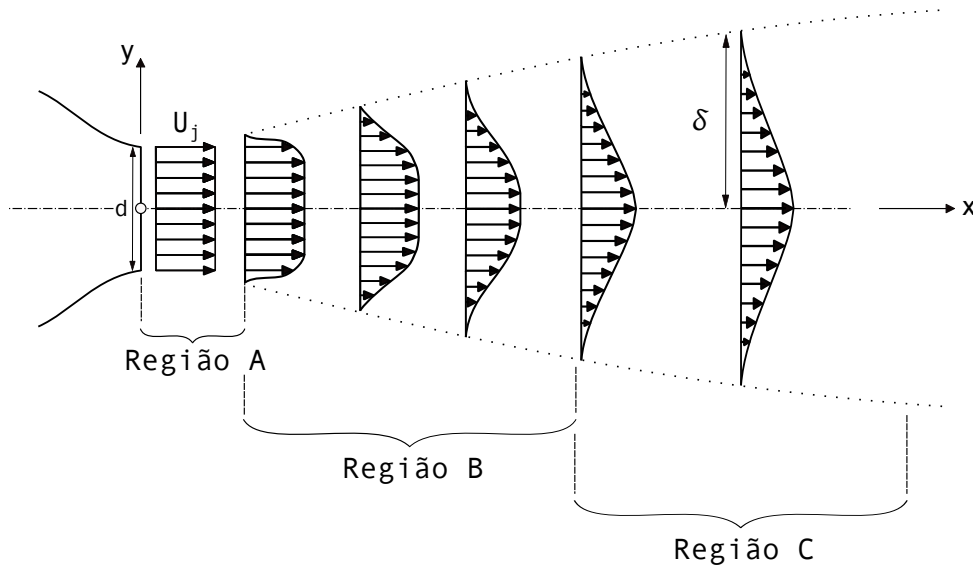
Na região A, situada imediatamente após a saída do bocal ocorre pouco espalhamento devido à inércia do jato e, conseqüentemente, a velocidade da linha de centro praticamente se mantém constante. Cabe ressaltar que a região A é mais extensa quando o jato se encontra em regime turbulento já que, nesse caso, a inércia é maior que a do jato em regime laminar. Nos gráficos que mostram a velocidade da linha de centro em função da coordenada axial é possível observar, no início do gráfico, a presença de um platô, que acontece justamente nessa região.

A segunda região, representada por B, é onde o espalhamento do jato começa a se intensificar, fazendo com que a velocidade da linha de centro comece a cair. Porém, apesar desse decaimento, na região B o perfil médio de velocidade tem um núcleo potencial, fazendo com que os perfis médios de velocidade nessa região não sejam auto similares, ou seja, a solução contínua obtida para os perfis médios de velocidade não vale para as regiões A e B. Porém, como a velocidade da linha de centro já está decaindo na região B, sua solução contínua só não vale para a região A. Isso demonstra que, segundo Tennekes e Lumley (1972), a auto-similaridade pode começar a ocorrer em diferentes regiões para cada propriedade.

Quando o núcleo potencial se finda o escoamento adentra então na região C, onde os perfis médios de velocidade passam a ser auto similares e podem ser comparados com a solução contínua. Para o regime laminar, na região C o jato passa a ser totalmente auto similar porém, para o regime turbulento, segundo Tennekes e Lumley (1972), a auto similaridade para os perfis médios de flutuações pode não acontecer desde o início da região C, começando a existir em uma distância maior do bocal.

Vale ressaltar novamente que, por possuir pouca inércia, o jato laminar começa a difundir para valores da coordenada axial menores que o turbulento, regime onde o jato possui uma inércia maior. Porém, quando o jato turbulento começa a difundir o espalhamento ocorre rapidamente, ao contrário do laminar, que se espalha de maneira mais lenta. A distância axial para a qual o jato permanece com a velocidade da linha de centro constante é menor no regime laminar comparado com o regime turbulento, conforme representado nos modelos físicos.

Figura 4.6: Modelo físico de um jato plano.



4.4.2 Modelo matemático diferencial parcial

Para jatos planos tanto em regime laminar quanto turbulento, a Eq. (4.1) fornece a variável de auto similaridade e a Eq. (4.12) a função de auto similaridade.

Os jatos planos também são modelados pelas Eqs. (4.13) e (4.14). Simplifica-se o termo temporal em conformidade com a natureza física desse problema, ou seja, o escoamento ocorre em regime permanente, além disso, para o caso do jato plano, buscando uma generalização no processo de solução considerou-se o termo difusivo da forma

$$(\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}. \quad (4.115)$$

Quando se tem o escoamento em regime laminar a viscosidade turbulenta não existe, quando o escoamento é turbulento considera-se que o processo de transporte difusivo promovido pela turbulência é ordens de grandeza maior que o processo difusivo molecular puro, desconsiderando a viscosidade molecular.

Perante a análise de ordem de grandeza dos termos das equações de Navier-Stokes e de todas as considerações expostas tem-se que, para um jato plano, a equação do balanço de

massa e de quantidade de movimento linear são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (4.116)$$

e

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}, \quad (4.117)$$

onde $\tilde{\nu}$ é ν para o escoamento em regime laminar e ν_t para jatos planos turbulentos.

As condições inicial e de contorno do problema são dadas por:

$$\bar{v}(x, y = 0) = 0, \quad (4.118a)$$

$$\bar{u}(x, y \rightarrow \pm\infty) = 0, \quad (4.118b)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(x, y = 0) = 0, \quad (4.118c)$$

$$\bar{u}(x, y = 0) = U_c(x). \quad (4.118d)$$

A partir da equação da continuidade pode-se determinar a velocidade $\bar{v}(x, y)$ em função de $\bar{u}(x, y)$, o que facilita a transformação e solução da Eq. (4.117). Portanto, manipulando a Eq. (4.116), tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \longrightarrow \partial \bar{v} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \partial y.$$

Integrando chega-se a

$$\int \partial \bar{v} = \int -\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \partial y \longrightarrow \bar{v} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} \partial y + v_o(x), \quad (4.119)$$

onde $v_o(x)$ é uma função de x que resulta do processo de integração em y .

Existe uma condição de contorno para os jatos planos em regime laminar e turbulento, que corresponde ao fato de que em $y = 0$ a velocidade \bar{v} é nula, utilizando o domínio centrado

em zero. Ou seja,

$$\bar{v}(x, y = 0) = 0. \quad (4.120)$$

Através da condição de contorno dada pela Eq. (4.120) obtem-se que $v_o(x) = 0$ e, portanto,

$$\bar{v} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} \, dy. \quad (4.121)$$

Substituindo a Eq. (4.121) na Eq. (4.117)

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \left(-\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} \, dy \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}. \quad (4.122)$$

4.4.3 Modelo matemático diferencial ordinário

Tendo a equação da quantidade de movimento linear envolvendo apenas a velocidade $\bar{u}(x, y)$, é possível realizar a transformação da Eq. (4.122) colocando todos os termos dependentes de η e $F(\eta)$.

Na Eq. (4.1) definiu-se a variável de auto similaridade como um produto entre y e uma função genérica de x . Agora, definindo o problema a ser resolvido pode-se propor a função $\xi(x)$ como alguma propriedade de comprimento conhecida do escoamento. Para o jato plano pode-se usar a largura da zona de mistura do jato, $\delta(x)$, conforme apresentado na Fig. 4.6, na definição da função. Opta-se por propor

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}, \quad (4.123)$$

Com essa suposição, a adimensionalidade da variável de auto similaridade é mantida, conforme deve acontecer. A dependência entre a largura do jato e x é obtida ao longo da resolução dos problemas específicos.

Na região auto similar do escoamento tem-se que U_{min} ocorre nas extremidades do perfil

de velocidade e é zero supondo que o meio externo ao jato se encontre em repouso e U_{max} ocorre no centro do jato, ou seja, $U_{max} = u(x, y = 0) = U_c(x)$, sendo $U_c(x)$ a velocidade na linha de centro do jato que é a velocidade de referência (U_R) considerada na região auto similar. Sendo assim, usando a definição geral da função de auto-similaridade, dada pela Eq. (4.12):

$$\frac{\bar{u}(x, y) + [u(y = 0, x) - U_{max} - U_{min}]}{u(y = 0, x) - U_{min}} = F'(\eta),$$

tem-se que, para o caso do jato plano

$$\frac{\bar{u}(x, y)}{U_c(x)} = F'(\eta). \quad (4.124)$$

Ao se observar que na definição da função de auto-similaridade aparece a velocidade da linha de centro do jato surge um problema, já que tal velocidade varia ao longo de x , ao contrário do que se obteve nas camadas de mistura, onde a velocidade de referência é constante. Apesar de $U_c(x)$ não ser conhecida a priori, ela pode ser determinada através da integração dos coeficientes da EDO obtida, o que torna possível o uso de tal função de auto-similaridade. Portanto, colocando a EDP (4.122) em termos de η e $F(\eta)$, porém sem que se aplique as derivadas em relação a η , chega-se a:

$$\bar{u} = U_c F', \quad (4.125a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [U_c(x) F'(\eta)] \longrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = U_c F'' \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{dU_c}{dx} F', \quad (4.125b)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = U_c F'' \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (4.125c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\eta \frac{U_c F'}{\partial \eta / \partial y} d\eta = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U_c}{\partial \eta / \partial y} \int_0^\eta F' d\eta \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U_c F}{\partial \eta / \partial y} \right] \longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{u} dy = \frac{U_c F' \partial \eta / \partial x}{\partial \eta / \partial y} + \frac{(dU_c/dx) F}{\partial \eta / \partial y} - \frac{U_c F \partial^2 \eta / \partial x \partial y}{(\partial \eta / \partial y)^2}, \quad (4.125d)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[U_c F'' \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \longrightarrow \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = U_c F''' \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2. \quad (4.125e)$$

Substituindo as Eqs. (4.125) na Eq. (4.122)

$$\begin{aligned}
 U_c F' \left[U_c F'' \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{dU_c}{dx} F' \right] + U_c F'' \frac{\partial \eta}{\partial y} \left[-\frac{U_c F' \partial \eta / \partial x}{\partial \eta / \partial y} - \frac{dU_c}{dx} \frac{F}{\partial \eta / \partial y} + \frac{U_c F \partial^2 \eta / \partial x \partial y}{(\partial \eta / \partial y)^2} \right] \\
 = \tilde{\nu} U_c F''' \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \tag{4.126}
 \end{aligned}$$

realizando as multiplicações e dividindo todos os termos pelo coeficiente que acompanha a derivada de terceira ordem, tem-se:

$$F''' - \frac{U_c (\partial^2 \eta / \partial x \partial y)}{\tilde{\nu} (\partial \eta / \partial y)^3} F F'' - \frac{dU_c}{dx} \frac{1}{\tilde{\nu} (\partial \eta / \partial y)^2} (F'^2 - F F'') = 0. \tag{4.127}$$

Considerando que, para haver transformação por auto similaridade os coeficientes da EDO precisam ser constantes pode-se reescrever a Eq. (4.127) tomando

$$\kappa = \frac{U_c (\partial^2 \eta / \partial x \partial y)}{\tilde{\nu} (\partial \eta / \partial y)^3}, \tag{4.128}$$

e

$$\beta = \frac{dU_c}{dx} \frac{1}{\tilde{\nu} (\partial \eta / \partial y)^2}, \tag{4.129}$$

ou seja, a EDO que modela esta classe de problemas é dada por

$$F''' - \kappa F F'' - \beta (F'^2 - F F'') = 0. \tag{4.130}$$

Considerando o domínio centrado em $y = 0$, as condições de contorno são dadas por

$$\eta = 0 \rightarrow F = 0 \quad \text{velocidade } \bar{v} \text{ nula em } y = 0, \tag{4.131a}$$

$$\eta = \infty \rightarrow F' = 0 \quad \text{velocidade } \bar{u} \text{ nula em } y \rightarrow \infty, \tag{4.131b}$$

$$\eta = -\infty \rightarrow F' = 0 \quad \text{velocidade } \bar{u} \text{ nula em } y \rightarrow -\infty, \tag{4.131c}$$

$$\eta = 0 \rightarrow F'' = 0 \quad \text{derivada } \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \text{ nula em } y = 0, \tag{4.131d}$$

$$\eta = 0 \rightarrow F' = 1 \quad \bar{u} = U_c(x) \text{ em } y = 0. \tag{4.131e}$$

É importante ressaltar que o procedimento apresentado foi realizado com informações genéricas a respeito da variável de auto-similaridade, o que significa que sua definição pode variar caso se deseje, porém, a forma da EDO não mudará. Além disso, a EDO pode ser aplicada tanto para casos laminares como para casos turbulentos, utilizando o modelo de fechamento de Prandtl-Reichardt bastando que, para a solução de escoamentos turbulentos, se substitua a viscosidade cinemática do fluido (ν) pelo modelo de viscosidade turbulenta (ν_t), conforme será mostrado posteriormente. Além disso, cabe ressaltar que para o caso laminar o operador filtragem deve ser desconsiderado.

4.4.4 Aplicação do TTR para a quantidade de movimento linear

De posse dos parâmetros de auto similaridade, da EDO que modela o problema e das condições de contorno, é conveniente que, visando a integração dos coeficientes da EDO se adote ainda uma hipótese simplificadora: a quantidade de movimento linear do jato é constante, ou seja,

$$J = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}^2 dA = \text{constante.} \quad (4.132)$$

Esta hipótese pode ser embasada pela aplicação do Teorema do Transporte de Reynolds (TTR) para quantidade de movimento linear e vem da necessidade de, para esse caso, se agregar mais uma equação ao sistema. Essa necessidade surge pois, ao contrário das camadas de mistura, no jato, a velocidade de referência, utilizada na definição da função de auto-similaridade não é conhecida a priori e precisará ser obtida via integração dos coeficientes da EDO.

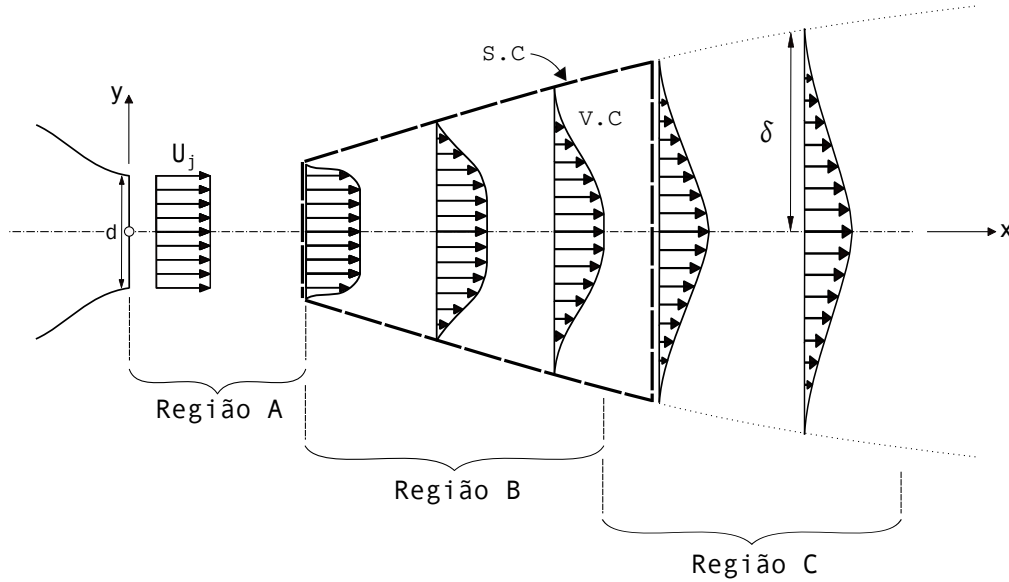
O TTR para o caso supracitado é dado por

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt} \int_{V.C} \rho \vec{V} dV + \int_{S.C} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot d\vec{A}),$$

onde $V.C$ é o volume de controle definido no problema e $S.C$ a superfície de controle. \vec{F}_{ext} é a força externa exercida sobre o sistema, ρ a massa específica do fluido, \vec{V} a velocidade e $d\vec{A}$ um vetor normal a um elemento infinitesimal de área sobre a superfície de controle. A Fig. 4.7

representa, delimitado pela linha tracejada, o volume de controle definido sobre o problema do jato.

Figura 4.7: Representação do problema do jato plano com as linhas de corrente e a definição de um volume de controle para o TTR.



Embasado na Fig. 4.7 pode-se realizar uma análise de cada termo do TTR

- \vec{F}_{ext} : o escoamento do jato abordado no presente trabalho ocorre na ausência de paredes e, além disso, não está presente nenhum gradiente de pressão. Isso leva a conclusão de que não existem forças externas atuando sobre o sistema e, conseqüentemente, esse termo é nulo.
- $\frac{d}{dt} \int_{V.C} \rho \vec{V} dV$: o valor da integral desse termo não é nulo, porém como se trata de um problema em regime permanente a derivada temporal é nula.

Perante as considerações realizadas sobre cada termo, o TTR para a quantidade de movimento linear em x pode ser escrito como

$$\rho \int_{saída} \bar{u}^2 dA - \rho \int_{entrada} \bar{u}^2 dA = 0 \rightarrow \rho \int_{saída} \bar{u}^2 dA = \rho \int_{entrada} \bar{u}^2 dA, \quad (4.133)$$

ou seja, através desse resultado é possível concluir que o fluxo de quantidade de movimento linear J é constante em x , conforme apresentado na Eq. (4.132).

Sendo b a largura do jato pode-se trocar o diferencial de área por um diferencial de coordenada fazendo $dA = b dy$. Realizando tal troca e definindo o fluxo de quantidade de movimento linear por unidade de comprimento ($J' = J/b$) a Eq. (4.132) pode ser reescrita como

$$J' = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}^2 dy \approx \text{cte.} \quad (4.134)$$

Substituindo as Eqs. (4.123) e (4.124) na Eq. (4.134)

$$J' = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} U_c^2 F'^2(\eta) \delta d\eta \longrightarrow J' = \rho U_c^2 \delta \int_{-\infty}^{+\infty} F'^2(\eta) d\eta. \quad (4.135)$$

Tendo que o valor de J' é uma constante, pode-se rearranjar a Eq. (4.135), chegando a

$$U_c^2 \delta = \frac{J'}{\underbrace{\rho \int_{-\infty}^{+\infty} F'^2(\eta) d\eta}_{\gamma}} = \text{constante} \longrightarrow U_c^2 \delta = \gamma. \quad (4.136)$$

Vale frisar que, apesar de omitido no texto, tanto a largura da zona de mistura do jato, δ , quanto a velocidade da linha de centro, U_c , variam ao longo de x .

4.4.5 Regime laminar

4.4.5.1 Modelo matemático exato

De posse da EDO que modela o problema, dada pela Eq. (4.130), e da equação adicional obtida pela aplicação do TTR, parte-se para a integração da EDO e de seus coeficientes.

Para o jato plano em regime laminar, conforme exposto anteriormente no texto, $\tilde{\nu} = \nu$ e o operador filtragem pode ser omitido. Tendo definidas a função e a variável de auto similaridade é possível calcular os coeficientes κ e β , a começar por κ . Substituindo a variável

de auto similaridade dada pela Eq.(4.123) na Eq.(4.128), chega-se a

$$\kappa = \frac{U_c(\partial^2\eta/\partial x\partial y)}{\nu(\partial\eta/\partial y)^3} = \frac{U_c[(-d\delta/dx)/\delta^2]}{\nu(1/\delta^3)} \longrightarrow \kappa = -\frac{U_c\delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx}, \quad (4.137)$$

quando substitui-se a Eq.(4.123) na Eq.(4.129)

$$\beta = \frac{1}{\nu(\partial\eta/\partial y)^2} \frac{dU_c}{dx} = \frac{1}{\nu(1/\delta^2)} \frac{dU_c}{dx} \longrightarrow \beta = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_c}{dx}. \quad (4.138)$$

É possível ainda que, combinando as Eqs.(4.137) e (4.138), se obtenha uma equação para a razão entre os coeficientes β e κ , sendo

$$\frac{\beta}{\kappa} = -\frac{\delta^2}{\nu} \frac{\nu}{U_c\delta(d\delta/dx)} \rightarrow \frac{dU_c}{dx} \frac{1}{U_c} = -\frac{\beta}{\kappa} \frac{d\delta}{dx} \frac{1}{\delta} \rightarrow \frac{dU_c}{U_c} = -\frac{\beta}{\kappa} \frac{d\delta}{\delta}. \quad (4.139)$$

Integrando a Eq.(4.139) tem-se que

$$U_c = c_8 \delta^{-\beta/\kappa}, \quad (4.140)$$

sendo c_8 uma constante resultante do processo de integração da Eq. (4.139).

Voltando à Eq.(4.138), substituindo a constante dada na Eq.(4.136) e integrando chega-se a

$$\frac{dU_c}{dx} \frac{1}{U_c^4} = \frac{\beta\nu}{\gamma^2} \rightarrow \frac{dU_c}{U_c^4} = \frac{\beta\nu}{\gamma^2} dx \rightarrow -\frac{1}{3U_c^3} = \frac{\beta\nu}{\gamma^2} x + c_9,$$

$$U_c = -\left(\frac{\gamma^2}{3\beta\nu x}\right)^{1/3} + c_{10}, \quad (4.141)$$

onde c_9 e c_{10} são constantes advindas do processo de integração e readequação da equação.

Conforme a região de análise do jato se afasta do bocal de entrada a velocidade da linha de centro decai, sendo assim, conforme x se aproxima do ∞ , a velocidade da linha de centro

do jato se aproxima de zero, ou seja, $x \rightarrow \infty \Rightarrow U_c \rightarrow 0$. Utilizando tal condição na Eq. (4.141), conclui-se que a constante de integração c_{10} é nula, levando a

$$U_c(x) = - \left(\frac{\gamma^2}{3\beta\nu} \right)^{1/3} x^{-1/3}. \quad (4.142)$$

Realizando o mesmo procedimento com a Eq.(4.137) e substituindo também a Eq.(4.142) tem-se

$$\kappa = -\frac{U_c \delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx} \rightarrow \delta \frac{d\delta}{dx} = -\frac{\nu \kappa}{U_c} \rightarrow \delta \frac{d\delta}{dx} = \left(\frac{\gamma^2}{3\beta\nu^4 \kappa^3} \right)^{-1/3} x^{1/3},$$

$$\frac{\delta^2}{2} = \left(\frac{\gamma^2}{3\beta\nu^4 \kappa^3} \right)^{-1/3} \frac{3}{4} x^{4/3} + c_{\delta 1}, \quad (4.143)$$

onde $c_{\delta 1}$ é uma constante proveniente do processo de integração.

Sabendo que imediatamente após sair do bocal ($x \approx 0$) não existe nenhum espalhamento no perfil de velocidade tem-se que $\delta(x=0) = 0$ e, portanto, $c_{\delta 1} = 0$, levando a

$$\delta(x) = \left(\frac{8\gamma^2}{81\beta\nu^4 \kappa^3} \right)^{-1/6} x^{2/3}. \quad (4.144)$$

Substituindo a Eq.(4.144) na Eq.(4.140) pode-se escrever

$$U_c = c_8 \left[\left(\frac{8\gamma^2}{81\beta\nu^4 \kappa^3} \right)^{-1/6} x^{2/3} \right]^{-\beta/\kappa} \rightarrow U_c = c_8 \left(\frac{8\gamma^2}{81\beta\nu^4 \kappa^3} \right)^{-\beta/6\kappa} x^{-2\beta/3\kappa}. \quad (4.145)$$

Da Eq.(4.142) tira-se que $U_c \sim x^{-1/3}$ e da Eq.(4.145) que $U_c \sim x^{-2\beta/3\kappa}$, sendo assim, é necessário que

$$-\frac{1}{3} = -\frac{2\beta}{3\kappa} \rightarrow \kappa = 2\beta. \quad (4.146)$$

Após a obtenção de como os coeficientes κ e β se relacionam, pode-se voltar a Eq.(4.130)

e substituir o valor de κ em termos de β , dado pela Eq.(4.146)

$$F''' - 2\beta FF'' - \beta(F'^2 - FF'') = 0 \longrightarrow F''' - \beta FF'' - \beta F'^2 = 0. \quad (4.147)$$

Aplicando a regra do produto para derivada na Eq.(4.147) e definindo $\tilde{\beta} = -\beta$ tem-se

$$\frac{d}{d\eta} [F'' + \tilde{\beta} FF'] = 0, \quad (4.148)$$

de onde pode-se inferir que

$$F'' + \tilde{\beta} FF' = \text{constante}, \quad (4.149)$$

onde, substituindo as condições de contorno (4.131a),(4.131d) e (4.131e) chega-se que o valor da constante é igual a zero, ou seja,

$$F'' + \tilde{\beta} FF' = 0. \quad (4.150)$$

Para se descobrir o valor da constante $\tilde{\beta}$ pode-se usar um procedimento puramente matemático, realizando a substituição $G = \tilde{\beta} F$ que conduz a

$$\frac{G''}{\tilde{\beta}} + G \frac{G'}{\tilde{\beta}} = 0 \longrightarrow G'' + GG' = 0, \quad (4.151)$$

com as condições de contorno extraídas de (4.131) dadas por

$$\eta = 0 \rightarrow G = 0, \quad \text{velocidade } v \text{ nula em } y = 0, \quad (4.152a)$$

$$\eta = \infty \rightarrow G' = 0, \quad \text{velocidade } u \text{ nula em } y \rightarrow \infty, \quad (4.152b)$$

$$\eta = -\infty \rightarrow G' = 0, \quad \text{velocidade } u \text{ nula em } y \rightarrow -\infty, \quad (4.152c)$$

$$\eta = 0 \rightarrow G'' = 0, \quad \text{derivada nula no centro do jato.} \quad (4.152d)$$

Integrando a Eq.(4.151) e utilizando a condição de contorno (4.152a) para determinar

que a constante de integração é nula, tem-se que

$$G(\eta) = \sqrt{2} \tanh\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right), \quad (4.153)$$

e

$$G'(\eta) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.154)$$

Da Eq.(4.154) tem-se que para $\eta = 0 \rightarrow G'(0) = 1$, sabendo que $G' = \tilde{\beta}F'$ e usando a condição de contorno (4.131e) chega-se a

$$G'(0) = \tilde{\beta}F'(0) \rightarrow 1 = \tilde{\beta} \cdot 1 \rightarrow \tilde{\beta} = 1 \rightarrow \beta = -1. \quad (4.155)$$

Portanto, em termos de F tem-se que

$$F(\eta) = \sqrt{2} \tanh\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right), \quad (4.156)$$

e

$$F'(\eta) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.157)$$

Tendo obtido as soluções contínuas para $F(\eta)$ e $F'(\eta)$ deve-se observar se as funções atendem as condições de contorno (4.131) para o escoamento em questão. Fazendo $\eta = 0$ na Eq.(4.156) verifica-se que (4.131a) é atendida. Ao se aplicar $\eta = 0$ na Eq.(4.157) tem-se que $F'(0) = 1$, resultado que também está de acordo com (4.131e).

Para se obter a expressão final da velocidade de centro convém começar pela determinação da constante γ . Substituindo a Eq.(4.156) em (4.136), realizando a integração e considerando o momentum calculado na saída do bocal ($J' = \rho U_j^2 d$) tem-se

$$\gamma = \frac{J'}{\rho \int_{-\infty}^{+\infty} F'^2(\eta) d\eta} = \frac{\rho U_j^2 d_j}{\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) d\eta} \rightarrow \gamma = 0,53033 U_j^2 d_j, \quad (4.158)$$

onde U_j é a velocidade média do perfil de entrada do jato e d_j a altura do bocal.

Substituindo as Eqs.(4.155) e (4.158) em (4.142) chega-se a

$$U_c(x) = \left(\frac{0,28125 U_j^4 d_j^2}{3 \nu x} \right)^{1/3}. \quad (4.159)$$

Na forma final da solução é conveniente utilizar-se o número de Reynolds (Re) calculado com base nas propriedades do jato no bocal, que será denotado por

$$Re_j = \frac{U_j d_j}{\nu}. \quad (4.160)$$

Assim, a solução exata para a velocidade da linha de centro em um jato laminar plano é dada por:

$$\frac{U_c(x)}{U_j} = 0,45428 Re_j^{1/3} \left(\frac{x}{d_j} \right)^{-1/3}. \quad (4.161)$$

Pode-se obter também uma expressão para $\delta(x)$ substituindo as Eqs.(4.146), (4.155) e (4.158) em (4.144)

$$\delta = \left(\frac{8 \gamma^2}{81 \beta \nu^4 \kappa^3 x^4} \right)^{-1/6} = \left(\frac{0,28125 U_j^4 d_j^2}{3 \nu x} \frac{1}{27 \nu^3 x^3} \right)^{-1/6}. \quad (4.162)$$

Pode-se observar que a Eq.(4.159) aparece na Eq.(4.162), o que permite reescrever a equação precedente como

$$\delta(x) = \left(U_c^3 \frac{1}{27 \nu^3 x^3} \right)^{-1/6} = \left(\frac{U_c}{3 \nu x} \right)^{-1/2}. \quad (4.163)$$

Utilizando-se uma segunda definição do número de Reynolds, baseado na posição x da linha de centro:

$$Re_x = \frac{U_c x}{\nu}, \quad (4.164)$$

e multiplicando a Eq.(4.163) por $\sqrt{x/x}$ chega-se a

$$\delta(x) = x \sqrt{\frac{3}{Re_x}}. \quad (4.165)$$

De acordo com a Eq. (4.125d), usando $\eta = y/\delta(x)$, a velocidade \bar{v} é dada por

$$v(x, y) = U_c(x) \frac{d\delta}{dx} [F(\eta) + \eta F'(\eta)] - \delta(x) \frac{dU_c}{dx} F(\eta). \quad (4.166)$$

Substituindo as Eqs. (4.163) e (4.161) e os valores de $F(\eta)$ e $F'(\eta)$ em (4.166) tem-se que o perfil de $\bar{v}(x, y)$ é dado por:

$$v(x, y) = 0,389 U_j Re_j^{1/3} \left(\frac{x}{d_j}\right)^{-1/2} \left[3\sqrt{2} \tanh\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) + 2\eta \operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (4.167)$$

Após a obtenção dos perfis para o espalhamento, para a velocidade de centro e para as velocidades $\bar{u}(x, y)$ e $\bar{v}(x, y)$ de um jato plano em regime laminar, serão apresentados os desenvolvimentos para um jato plano em regime turbulento.

4.4.6 Regime turbulento

4.4.6.1 Modelo matemático exato

Para o jato plano em regime turbulento, conforme exposto anteriormente no texto, $\tilde{\nu} = \nu_t$. Tendo definidas agora a viscosidade turbulenta, a função e a variável de auto similaridade é possível calcular os coeficientes κ e β , a começar por κ . Substituindo a variável de auto similaridade dada pela Eq. (4.123) em (4.128) e considerando o modelo de Prandtl-Reichardt, dado pela Eq. (3.22), onde

$$\nu_t = \chi \delta(x) (U_{max} - U_{min}) = \chi \delta(x) U_c(x), \quad (4.168)$$

chega-se a

$$\kappa = \frac{U_c(\partial^2 \eta / \partial x \partial y)}{\nu_t (\partial \eta / \partial y)^3} = \frac{U_c[-(d\delta/dx)/\delta^2]}{\chi \delta U_c(1/\delta^3)} = -\frac{1}{\chi} \frac{d\delta}{dx}. \quad (4.169)$$

Integrando a Eq. (4.169) tem-se

$$\frac{d\delta}{dx} = -\kappa\chi \longrightarrow \delta(x) = Ax + c_{t1},$$

onde $A = -\kappa\chi$ é a taxa de espalhamento da zona de mistura e c_{t1} uma constante de integração. Como em $x = 0$ o perfil de velocidade de entrada se mantém inalterado $\delta(0) = 0$, o que implica em $c_{t1} = 0$. Portanto,

$$\delta(x) = Ax, \quad (4.170)$$

e

$$\kappa = -\frac{A}{\chi}. \quad (4.171)$$

Voltando ao coeficiente β da EDO (4.130), sabendo que $U_R = U_{ch} = U_c$ e substituindo as Eqs. (4.123) e (4.170) em (4.129), usando o modelo de fechamento de Prandtl-Reichardt:

$$\beta = \frac{1}{\nu_t (\partial\eta/\partial y)^2} \frac{dU_c}{dx} = \frac{1}{\chi\delta U_c (1/\delta^2)} \frac{dU_c}{dx} = \frac{\delta}{\chi U_c} \frac{dU_c}{dx} = -\frac{\kappa\chi x}{\chi U_c} \frac{dU_c}{dx},$$

$$\frac{1}{U_c} \frac{dU_c}{dx} = -\frac{\beta}{\kappa} \frac{1}{x}. \quad (4.172)$$

Integrando a Eq. (4.172)

$$\int \frac{dU_c}{U_c} = -\frac{\beta}{\kappa} \int \frac{dx}{x} \longrightarrow \ln(U_c) = -\frac{\beta}{\kappa} \ln(x) + c_{t4} \longrightarrow U_c = c_{t5} x^{-\beta/\kappa}, \quad (4.173)$$

onde c_{t4} e c_{t5} são constantes.

Substituindo o valor de δ da Eq. (4.170) na Eq. (4.136) tem-se

$$U_c^2 \delta = \gamma \longrightarrow U_c^2 A x = \gamma \longrightarrow U_c = \sqrt{\frac{\gamma}{A}} x^{-1/2}, \quad (4.174)$$

ou seja,

$$U_c \sim x^{-1/2}. \quad (4.175)$$

Da Eq. (4.173) conclui-se que $U_c \sim x^{-\beta/\kappa}$ e da Eq. (4.175) que $U_c \sim x^{-1/2}$. Como ambas as equações devem ser válidas para calcular a velocidade na linha de centro do jato, ambas devem fornecer U_c proporcional a mesma potência de x . Portanto,

$$-\frac{\beta}{\kappa} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \beta = \frac{\kappa}{2}. \quad (4.176)$$

Substituindo a Eq. (4.171) na Eq. (4.176) tem-se que

$$\beta = -\frac{A}{2\chi}. \quad (4.177)$$

Agora, pode-se voltar a Eq. (4.130) e substituir os novos valores para os coeficientes κ e β , dados, respectivamente, pelas Eqs. (4.171) e (4.177)

$$F''' + \frac{A}{\chi}FF'' + \frac{A}{2\chi}(F'^2 - FF'') = 0 \longrightarrow F''' + \frac{A}{2\chi}FF'' + \frac{A}{2\chi}F'^2 = 0. \quad (4.178)$$

Aplicando a regra do produto na Eq. (4.178) tem-se

$$\frac{d}{d\eta} \left[F'' + \frac{A}{2\chi}FF' \right] = 0,$$

de onde pode-se inferir que:

$$F'' + \frac{A}{2\chi}FF' = \text{constante},$$

onde, substituindo as condições de contorno (4.131a),(4.131d) e (4.131e) chega-se que o valor da constante é igual a zero, ou seja,

$$F'' + \frac{A}{2\chi}FF' = 0. \quad (4.179)$$

Também aplicando a regra do produto na Eq. (4.179) e readequando os termos chega-se

a

$$\frac{d}{d\eta} \left[\chi F' + \frac{A}{4} F^2 \right] = 0,$$

e

$$\chi F' + \frac{A}{4} F^2 = \text{constante},$$

onde, substituindo as condições de contorno (4.131a) e (4.131e) se obtém que a constante é igual a χ , ou seja,

$$F' + \frac{A}{4\chi} F^2 = 1. \quad (4.180)$$

Integrando a Eq. (4.180) tem-se que

$$F(\eta) = 2\sqrt{\frac{\chi}{A}} \tanh \left(\sqrt{\frac{A}{\chi}} \frac{\eta}{2} \right), \quad (4.181)$$

e

$$F'(\eta) = \text{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\chi}} \eta \right). \quad (4.182)$$

Tendo obtido o resultado, deve-se observar se o mesmo atende as condições de contorno (4.131) para o problema. Fazendo $\eta = 0$ na Eq. (4.181) verifica-se que (4.131a) é atendida. Ao se aplicar $\eta = 0$ na Eq. (4.182) tem-se que $F'(0) = 1$, resultado que também está de acordo com (4.131e).

Através de resultados obtidos via experimentação material tem-se que, para jatos planos em regime turbulento, a taxa de abertura (*spreading rate*), é aproximadamente 0,1 conforme Wilcox *et al.* (1998). A taxa de abertura de um jato plano é definida como o valor da razão y/x em que a velocidade $\bar{u}(x, y)$ é igual a metade da velocidade na linha de centro do jato U_c , ou seja, $\bar{u}(x, y) = U_c(x)/2$.

Dados de experimentos materiais possibilitam a determinação da constante A da Eq. (4.170), a qual, segundo medições realizadas por Bradbury (1965), é dada por $A = 0,109$.

Substituindo os valores da taxa de abertura e da constante A em η tem-se uma nova condição de contorno para a Eq. (4.182), a qual é dada por

$$\frac{\bar{u}}{U_c} = F'(\eta) \rightarrow \frac{1/2 U_c}{U_c} = F' \left(\frac{y}{Ax} \right) \rightarrow \frac{1}{2} = F' \left(\frac{0,1}{0,109} \right) \rightarrow F'(0,9174) = \frac{1}{2}. \quad (4.183)$$

Definindo

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\chi}}, \quad (4.184)$$

na Eq. (4.182) e usando a condição de contorno dada pela Eq. (4.183) chega-se a

$$\frac{1}{2} = \operatorname{sech}^2(0,9174\Gamma) \rightarrow \Gamma = 0,96073, \quad (4.185)$$

permitindo que a Eq. (4.182) seja reescrita como

$$\frac{\bar{u}(x,y)}{U_c(x)} = \operatorname{sech}^2(0,96073\eta). \quad (4.186)$$

É possível também definir-se a solução exata da velocidade da linha de centro do jato, porém como as comparações gráficas apresentadas envolvem formas adimensionais é conveniente apresentar a razão entre $U_c(x)$ e U_j , onde U_j é a velocidade média do jato na seção de entrada, em função de x e d_j , sendo d_j a largura do bocal. Para tanto, o primeiro passo é readequar a Eq. (4.136)

$$\gamma = \frac{J'}{\rho \int_{-\infty}^{+\infty} F'^2(\eta) d\eta} = \frac{\rho U_j^2 d_j}{\rho \int_{-\infty}^{+\infty} F'^2(\eta) d\eta} = \frac{U_j^2 d_j}{\int_{-\infty}^{+\infty} F'^2(\eta) d\eta}, \quad (4.187)$$

e substituir a Eq. (4.186) que dá o valor de $F'^2(\eta)$ na Eq. (4.187), levando a

$$\gamma = \frac{U_j^2 d_j}{\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(0,96073 \eta) d\eta} \longrightarrow \gamma = 0,720549 U_j^2 d_j. \quad (4.188)$$

Finalmente, para obter a solução exata da razão entre U_c e U_j em função de x/d_j , basta substituir a Eq. (4.188) em (4.174), resultando em:

$$U_c = \sqrt{\frac{0,720549 U_j^2 d_j}{A x}} \longrightarrow \frac{U_c}{U_j} = \sqrt{\frac{0,720549 d_j}{A x}},$$

$$\frac{U_c(x)}{U_j} = \sqrt{\frac{0,720549}{A}} \left(\frac{x}{d_j}\right)^{-1/2}. \quad (4.189)$$

Adotando o valor de A medido por Bradbury (1965) via experimentação material tem-se, portanto:

$$\frac{U_c(x)}{U_j} = 2,5711 \left(\frac{x}{d_j}\right)^{-1/2}. \quad (4.190)$$

A respeito da Eq. (4.190) deve ser realizada uma consideração antes da abordagem dos resultados. Andrade (1939) expõe que não é conveniente adotar a origem efetiva do jato em $x = 0$. Ele sugere que a solução exata se aproxima mais de dados experimentais quando se utiliza um valor x_o somado a x/d_j , mesmo procedimento adotado por Schlichting (1968) em grande parte das soluções apresentadas, fazendo com que a Eq. (4.190) seja reescrita como

$$\frac{U_c(x)}{U_j} = 2,5711 \left(\frac{x + x_o}{d_j}\right)^{-1/2}, \quad (4.191)$$

sendo x_o uma constante, chamada de origem virtual do jato.

Para definir o valor de x_o pode ser usado o conceito de auto similaridade e uma afirmação apresentada por Tennekes e Lumley (1972) de que não existem muitos resultados de experimentos materiais a respeito mas, para jatos planos turbulentos, a auto similaridade começa a

ocorrer a partir de $x/d_j = 5$, além disso, os mesmos autores afirmam que a auto similaridade começa a ocorrer em diferentes posições para diferentes propriedades do escoamento, ocorrendo somente a partir de $x/d_j = 40$ para as propriedades relacionadas à turbulência como, por exemplo, as flutuações de velocidade.

Considerando, portanto, que a auto similaridade passa a existir a partir de $x/d_j = 5$ para a velocidade de centro, ou seja, ela começa a decair, mas não necessariamente se finda o perfil médio contendo um núcleo potencial, pode-se escrever que

$$1 = 2,5711 \left(5 + \frac{x_o}{d_j} \right)^{-1/2}, \quad (4.192)$$

tendo $\frac{x_o}{d_j} = 1,61054$ e levando a

$$U_c(x) = 2,5711 U_j \left(\frac{x}{d_j} + 1,61054 \right)^{-1/2}. \quad (4.193)$$

Retomando a Eq. (4.170) junto ao valor de A extraído do trabalho de Bradbury (1965), tem-se que o espalhamento do jato é dado por

$$\delta(x) = 0,109 x. \quad (4.194)$$

Substituindo a Eq. (4.193) em (4.186) obtém-se a expressão para a velocidade média de um jato plano em regime turbulento, a qual é dada por

$$\bar{u}(x, y) = 2,5711 U_j \left(\frac{x}{d_j} + 1,61054 \right)^{-1/2} \operatorname{sech}^2 \left(0,96073 \frac{y}{\delta(x)} \right). \quad (4.195)$$

De acordo com a Eq. (4.125d), usando $\eta = y/\delta(x)$, a velocidade \bar{v} é dada por

$$\bar{v}(x, y) = U_c(x) \frac{d\delta}{dx} [F(\eta) + \eta F'(\eta)] - \delta(x) \frac{dU_c}{dx} F(\eta). \quad (4.196)$$

Substituindo as Eqs. (4.194) e (4.193) e os valores de $F(\eta)$ e $F'(\eta)$ em (4.196) tem-se

que o perfil de $\bar{v}(x, y)$ é dado por:

$$\bar{v}(x, y) = 0,28 U_j \left(\frac{x}{d_j} + 1,61054 \right)^{-1/2} \left[\eta \operatorname{sech}^2(0,96073 \eta) + 0,5205 \left(\frac{x}{x + 1,61054 d} \right) \tanh(0,96073 \eta) \right]. \quad (4.197)$$

Para o caso turbulento, além dos perfis de velocidade $\bar{u}(x, y)$ e $\bar{v}(x, y)$, pode-se obter a expressão para a componente $-\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds. Para tanto, devem ser retomadas as Eqs. (4.168) e (4.125c), junto à hipótese de Boussinesq

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \chi \delta(x) U_c(x) \frac{U_c(x)}{\delta(x)} F'' = \chi U_c^2(x) F''(\eta). \quad (4.198)$$

Para finalizar a expressão deste último perfil é necessária a segunda derivada da função $F(\eta)$, a qual é dada por:

$$F''(\eta) = -1,92146 \tanh(0,96073 \eta) \operatorname{sech}^2(0,96073 \eta). \quad (4.199)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (4.199) e (4.193) em (4.198), chega-se a:

$$-\overline{u'v'} = -1,173 \chi U_j^2 \tanh(0,96073 \eta) \operatorname{sech}^2(0,96073 \eta). \quad (4.200)$$

Portanto, após os desenvolvimentos apresentados foram obtidas as expressões para as velocidades \bar{u} e \bar{v} , além da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds, para um jato plano no regime turbulento. No capítulo 5 serão apresentadas comparações da solução contínua \bar{u} com dados discretos, além da plotagem dos demais perfis obtidos.

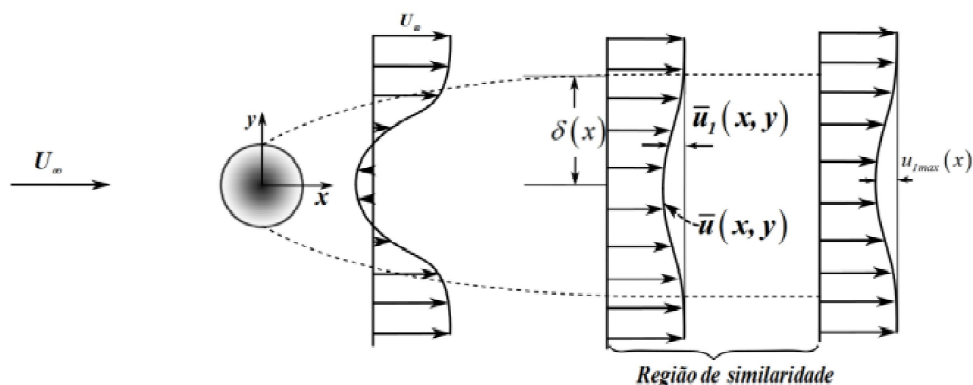
4.5 Esteira gerada pelo escoamento sobre um corpo imerso avaliada em uma região distante

4.5.1 Modelo físico

O escoamento ilustrado na Fig. 4.8 se caracteriza pela aproximação de um fluido pela esquerda de um cilindro disposto transversalmente ao escoamento. A velocidade do

escoamento a montante do cilindro é U_∞ e a distribuição de velocidade média a jusante é $\bar{u}(x, y)$ e a espessura da camada cisalhante é $\delta(x)$. A diferença entre a velocidade da corrente livre e a velocidade local é $\bar{u}_1(x, y) = U_\infty - \bar{u}(x, y)$ e o déficit máximo é $\bar{u}_{1max}(x, y)$, que será tratado ao longo do texto como $u_o(x)$. O sistema de eixos coordenados está posicionado no centro de cilindro. O escoamento ilustrado na Fig. 4.8 dá origem a uma esteira a jusante do corpo imerso. Devido à obstrução gerada pelo corpo no interior do escoamento, forma-se uma região de menor velocidade a jusante do corpo, podendo o escoamento recircular, formando uma região em déficit de quantidade de movimento linear. Na primeira distribuição de velocidade, esquematizada na Fig. 4.8, percebe-se um grande gradiente de quantidade de movimento linear, o que cria um forte processo de transporte difusivo para o interior da esteira. Assim, à medida que se afasta do corpo, na direção positiva do eixo x , esse déficit será suprido pela difusão, levando ao segundo perfil desenhado, o qual mostra uma redução do déficit. A partir desse plano, pode-se fazer a hipótese de "esteira distante", onde existe auto similaridade entre os perfis de velocidade. Isso significa que a região de análise está distante de sua fonte de formação, o bastante para fazer a hipótese de esteira distante e de auto similaridade entre perfis nessa região do escoamento.

Figura 4.8: Modelo físico de uma esteira gerada por um corpo imerso.



Observa-se, na Fig. 4.8, que entre o primeiro e o segundo perfis desenhados, não tem auto similaridade, uma vez que próximo ao corpo existem velocidades negativas, enquanto no segundo perfil, só existem velocidades positivas, assim como no terceiro perfil representado. A suposição de auto similaridade gera a base da teoria para buscar uma solução contínua para

o escoamento em análise tanto no regime laminar quanto no regime turbulento .

Vale ressaltar que o procedimento e a solução apresentadas valem para diversos corpos imersos no escoamento como, por exemplo, cilindros elípticos, placas planas alinhadas ao eixo x e aerofólios, desde que se tenha o coeficiente de arrasto correspondente ao corpo. Para casos com corpos diferentes de um cilindro circular o comprimento d a ser considerado é o tamanho do corpo relativo ao eixo y .

4.5.2 Modelo matemático diferencial parcial

Após a apresentação do modelo físico para uma esteira distante válido tanto para o regime laminar quanto para o regime turbulento, nessa seção serão apresentadas hipóteses e considerações também válidas para ambos regimes que conduzirão ao modelo matemático diferencial parcial do problema físico.

A fim de integrar o sistema de Equações (4.13) e (4.14), considerou-se a pressão no interior da esteira, na região de similaridade, igual à pressão da corrente livre, portanto, o gradiente de pressão na direção x é considerado nulo. Considerou-se ainda, com base em análise de ordem de grandeza, que a advecção de quantidade de movimento linear na direção y , $\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, seja pequena, quando comparada com a advecção na direção x , $\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ e que o escoamento ocorra em regime permanente. Após tais considerações tem-se que as equações da continuidade e de Navier-Stokes são dadas por

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (4.201)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}) . \quad (4.202)$$

Quando o escoamento acontecer em regime laminar despreza-se o termo que envolve as flutuações de u e v . No caso do escoamento turbulento considera-se que as tensões viscosas sejam desprezíveis quando comparadas com as tensões turbulentas, por isso o termo $\nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$ pode ser desprezado. Para o caso da esteira distante turbulenta o termo das tensões turbulentas

será modelado através do modelo do comprimento de mistura de Prandtl, apresentado na seção 3.2.2.

A EDP dada pela Eq. (4.202) é não linear tanto para o escoamento laminar quanto turbulento. Uma das opções para viabilizar a solução da EDP através de métodos que conduzam a soluções contínuas é apresentada em Schlichting *et al.* (1955) e consiste em particularizar a solução para uma região distante do corpo imerso, permitindo que a Eq. (4.202) seja linearizada. Em regiões distantes do corpo $|\vec{u}_1| \ll U_\infty$ e a proposta de linearização parte da definição de $\bar{u}(x, y)$ em função da velocidade da corrente livre, U_∞ e do perfil de déficit de velocidade, $\bar{u}_1(x, y)$. O perfil de velocidade é definido como:

$$\bar{u}(x, y) = U_\infty - \bar{u}_1(x, y), \quad (4.203)$$

que pode ser melhor compreendido através da Fig. 4.8.

O procedimento de linearização consiste em substituir a Eq. (4.203) em (4.202) antes de começar a resolução. Após a substituição define-se uma função de auto-similaridade para o perfil do déficit de velocidade. Observando a Fig. 4.8 conclui-se que as condições de contorno para o perfil do déficit são dadas por:

$$\bar{u}_1(x, y = \pm\delta(x)) = 0, \quad (4.204a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\bar{u}_1(x, y = 0)] = 0, \quad (4.204b)$$

$$\bar{u}_1(x, y = 0) = u_o(x), \quad (4.204c)$$

onde $u_o(x)$ é o déficit máximo de velocidade, chamado de \bar{u}_{1max} na Fig. 4.8.

A variável de auto-similaridade será definida segundo a ideia da Eq. (4.1), sendo a função de proporcionalidade, $\xi(x)$, definida como $1/\delta(x)$, onde $\delta(x)$ é metade da espessura (espalhamento) da esteira. Portanto, a variável de auto-similaridade utilizada será

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (4.205)$$

A função de auto-similaridade será definida também pela forma geral proposta no pre-

sente trabalho, dada pela Eq. (4.2). Sabendo que no perfil do déficit de velocidade $U_{min} = 0$, $U_{max} = u_o(x)$ e $\bar{u}_1(x, y = 0) = u_o(x)$, tem-se que

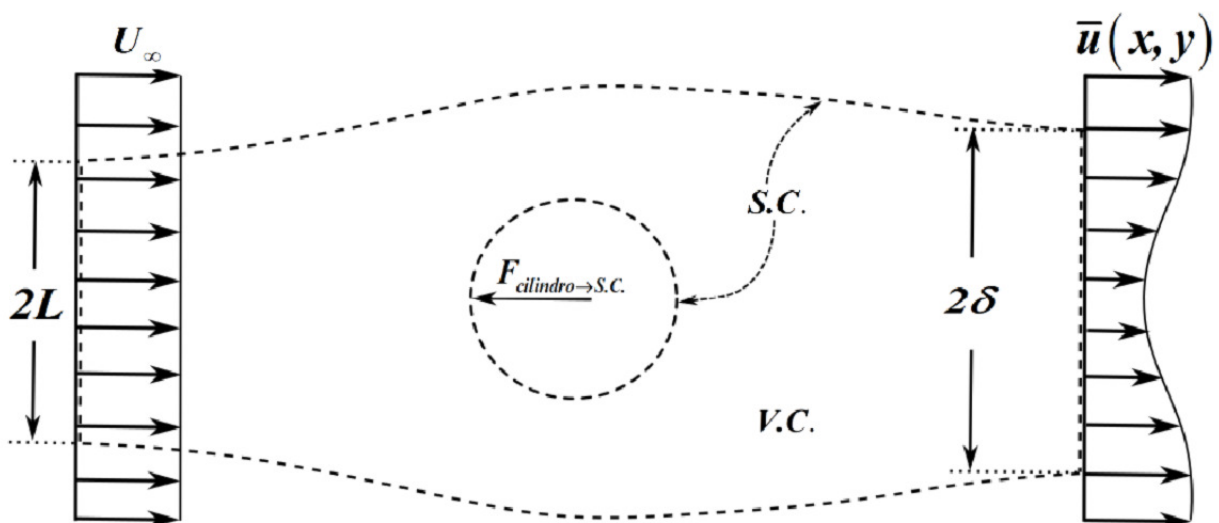
$$\frac{\bar{u}_1(x, y)}{u_o(x)} = F(\eta). \quad (4.206)$$

De posse das informações apresentadas nos desenvolvimentos precedentes na atual seção será aplicado o TTR para o balanço de massa e de quantidade de movimento linear com o objetivo de agregar outra equação a ser utilizada durante o processo de solução do modelo matemático diferencial da esteira distante em regimes laminar e turbulento, assim como foi feito para o caso do jato plano.

4.5.3 TTR para o escoamento sobre um corpo imerso

A obtenção de uma restrição para o processo de solução da EDO que será obtida para uma esteira distante em regimes laminar e turbulento pode ser feita aplicando o TTR para um balanço de quantidade de movimento linear em um volume de controle que envolve o corpo imerso, conforme ilustrado na Fig. 4.9, com o corpo imerso representado por um cilindro.

Figura 4.9: Volume e superfície de controle para cálculo de arrasto sobre um cilindro longo.



Conforme apresentado em White (1962), o Teorema do Transporte de Reynolds para

um volume de controle deformável assume a forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_{sist}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V.C} \rho \tilde{B} dV \right) + \int_{S.C} \rho \tilde{B} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA, \quad (4.207)$$

onde B_{sist} é a propriedade extensiva do fluido, \tilde{B} é a propriedade intensiva, \vec{V} é a velocidade que o fluido atravessa a superfície de controle, $S.C$ é a superfície de controle e $V.C$ o volume de controle.

O primeiro passo é aplicar o TTR para um balanço de massa que servirá para determinar a dimensão de entrada do V.C. Para esse caso $B_{sist} = m$ e $\tilde{B} = 1$. Considerando que não existe variação de massa no sistema ao longo do tempo e que o escoamento ocorre em regime permanente, tem-se que a Eq. (4.207), para esse caso, é dada por

$$\int_{saida} \rho u b dy - \int_{entrada} \rho u b dy = 0, \quad (4.208)$$

sendo u a velocidade que o fluido passa pela superfície de controle e b a dimensão z do volume de controle.

Usando os dados apresentados na Fig. 4.9 e considerando ρ e b constantes no $V.C$, conclui-se que a Eq. (4.208) pode ser reescrita como

$$\rho b \left[\int_{-\delta}^{\delta} \bar{u}(x, y) dy - \int_{-L}^L U_{\infty} dy \right] = 0 \longrightarrow 2 \int_0^{\delta} \bar{u}(x, y) dy - 2LU_{\infty} = 0. \quad (4.209)$$

Portanto, aplicando o TTR para um balanço de massa no volume de controle tem-se que

$$L = \frac{1}{U_{\infty}} \int_0^{\delta} \bar{u}(x, y) dy. \quad (4.210)$$

Após aplicar o TTR para um balanço de massa ele será aplicado para um balanço de quantidade de movimento linear. Para esse caso $B_{sist} = m\vec{V}$ e $\tilde{B} = \vec{V}$. Considerando que a única força que atua sobre o sistema seja a que o corpo imerso, no caso um cilindro, exerce sobre a superfície de controle e que o escoamento ocorre em regime permanente, tem-se que

a Eq. (4.207), para esse caso, é dada por

$$F_{cilindro \rightarrow S.C} = \int_{saida} \rho u^2 b dy - \int_{entrada} \rho u^2 b dy. \quad (4.211)$$

Assim como no balanço de massa, a integração é realizada de $-L$ a L na entrada, onde o fluido atravessa a $S.C$ com uma velocidade U_∞ e de $-\delta$ a δ na saída, onde o fluido atravessa a $S.C$ com uma velocidade $\bar{u}(x, y)$. Portanto, a Eq. (4.211) pode ser reescrita como

$$F_{cilindro \rightarrow S.C} = 2 \rho b \int_0^\delta \bar{u}^2(x, y) dy - 2 \rho b \int_0^L U_\infty^2 dy,$$

$$F_{cilindro \rightarrow S.C} = 2 \rho b \left[\int_0^\delta \bar{u}^2(x, y) dy - LU_\infty^2 \right]. \quad (4.212)$$

A força que o cilindro exerce sobre a superfície de controle é igual à força de arrasto, porém, as duas têm sentidos opostos, ou seja, $F_{cilindro \rightarrow S.C} = -F_D$. Substituindo essa relação e a Eq. (4.210) em (4.212), chega-se a

$$F_D = 2 \rho b \int_0^\delta \bar{u} (U_\infty - \bar{u}) dy. \quad (4.213)$$

Outra alternativa é obter-se a força de arrasto em função do déficit de velocidade, $\bar{u}_1(x, y)$, substituindo a Eq. (4.203) em (4.213), chegando a

$$F_D = 2 \rho b \int_0^\delta \bar{u}_1 (U_\infty - \bar{u}_1) dy. \quad (4.214)$$

Conforme exposto anteriormente, a solução que será apresentada só é válida em regiões distantes do corpo imerso, onde $\bar{u}_1 \ll U_\infty$. Assumindo esta hipótese, a Eq. (4.214) pode

ser reescrita como

$$F_D = 2 \rho b U_\infty \int_0^\delta \bar{u}_1 dy. \quad (4.215)$$

Substituindo as Eqs. (4.205) e (4.206) em (4.215), a variável de integração pode ser trocada de y para η . Portanto, em termos da variável de auto-similaridade, a Eq. (4.215) é dada por

$$F_D = 2 \rho b U_\infty \delta(x) u_o(x) \int_0^1 F(\eta) d\eta. \quad (4.216)$$

Conforme apresentado em White (1962), a força de arrasto sobre corpos imersos como cilindros circulares e elípticos, placas planas sem ângulo de incidência e aerofólios simétricos, é dada por

$$F_D = \frac{1}{2} c_D \rho U_\infty^2 A_{frontal} \longrightarrow F_D = \frac{1}{2} c_D \rho U_\infty^2 b d, \quad (4.217)$$

onde c_D é o coeficiente de arrasto e $A_{frontal}$ a área frontal do corpo imerso.

Igualando as Eqs. (4.216) e (4.217) tem-se

$$2 \rho b U_\infty \delta(x) u_o(x) \int_0^1 F(\eta) d\eta = \frac{1}{2} c_D \rho U_\infty^2 b d,$$

$$u_o(x) \delta(x) = \frac{U_\infty c_D d}{4 \int_0^1 F(\eta) d\eta}. \quad (4.218)$$

Na Eq. (4.218), sabe-se que U_∞ , c_D e d possuem valores constantes. Além disso, a integral da função de auto-similaridade também possui um valor constante ao longo de toda a região do domínio onde a solução é válida. Sendo assim, é possível definir uma nova constante,

dada por

$$\gamma = \frac{c_D d}{2 \int_0^1 F(\eta) d\eta}, \quad (4.219)$$

e reescrever a Eq. (4.218) como

$$u_o(x) \delta(x) = \frac{U_\infty \gamma}{2}. \quad (4.220)$$

A Eq. (4.220) é necessária no processo de integração dos coeficientes da EDO tanto para o caso laminar quanto para o turbulento.

Após apresentadas as hipóteses e considerações adotadas para o caso da esteira distante serão apresentados a seguir os modelos matemáticos diferencial ordinário e exato para os regimes laminar e turbulento, respectivamente. Os desenvolvimentos serão particularizados com o objetivo de se proporcionar maior clareza no processo.

4.5.4 Regime laminar

4.5.4.1 Modelo matemático diferencial ordinário

Para se obter a EDP que modela uma esteira distante no regime laminar despreza-se o termo relativo à difusão turbulenta na equação de Navier-Stokes para a direção x e substituindo a relação entre a velocidade \bar{u} e o déficit de velocidade, \bar{u}_1 , dada pela Eq. (4.203) em (4.202), pode-se colocar a equação de Navier-Stokes em função da velocidade da corrente livre e do perfil de déficit de velocidade:

$$(U_\infty - \bar{u}_1) \frac{\partial}{\partial x} (U_\infty - \bar{u}_1) = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (U_\infty - \bar{u}_1), \quad (4.221)$$

que, perante a hipótese de que na região em que a solução é válida, $\bar{u}_1 \ll U_\infty$, pode ser reescrita como

$$U_\infty \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial y^2}. \quad (4.222)$$

com condições de contorno dadas por

$$\bar{u}_1(x, y = \pm\delta(x)) = 0, \quad (4.223a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\bar{u}_1(x, y = 0)] = 0, \quad (4.223b)$$

$$\bar{u}_1(x, y = 0) = u_o(x), \quad (4.223c)$$

relembrando que $u_o(x)$ é o déficit máximo de velocidade, ocorrido em $y = 0$, o qual será usado como função de proporcionalidade na função de auto-similaridade.

A definição da variável e da função de auto-similaridade são dadas pelas Eqs. (4.205) e (4.206), por

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

$$\bar{u}_1(x, y) = u_o(x) F(\eta).$$

Ao se utilizar o déficit máximo como função de proporcionalidade na função de auto-similaridade, intrinsecamente, uma nova condição de contorno é obtida pois, sendo assim, o maior valor que $F(\eta)$ pode assumir é 1 e ele ocorre em $y = 0$. Portanto, as condições de contorno para $F(\eta)$ são dadas por

$$F(\eta = \pm 1) = 0, 01 \quad (4.224a)$$

$$F'(\eta = 0) = 0, \quad (4.224b)$$

$$F(\eta = 0) = 1, \quad (4.224c)$$

onde é importante se observar que, assim como no caso da camada de mistura temporal laminar, a condição de contorno de $F(\eta)$ é assintótica nos extremos do perfil.

Colocando a EDP (4.222) em termos da variável e da função de auto-similaridade (Eqs.

(4.205) e (4.206)), tem-se que

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = u_o(x)F'(\eta) \left(\frac{-y}{\delta^2(x)} \right) \frac{d\delta}{dx} + \frac{du_o}{dx}F(\eta) = -\frac{u_o(x)}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F'(\eta) + \frac{du_o}{dx}F(\eta) \quad (4.225a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} = u_o(x)F'(\eta) \frac{1}{\delta(x)} = \frac{u_o(x)}{\delta(x)}F'(\eta), \quad (4.225b)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial y^2} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{u_o(x)}{\delta(x)}F'(\eta) \right] = \frac{u_o(x)}{\delta^2(x)}F''(\eta). \quad (4.225c)$$

Substituindo as Eqs. (4.225a) e (4.225c) em (4.222)

$$U_\infty \left[-\frac{u_o(x)}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F'(\eta) + \frac{du_o}{dx}F(\eta) \right] = \nu \frac{u_o(x)}{\delta^2(x)}F''(\eta)$$

$$\nu \frac{u_o(x)}{\delta^2(x)}F''(\eta) + U_\infty \frac{u_o(x)}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F'(\eta) - U_\infty \frac{du_o}{dx}F(\eta) = 0$$

$$F''(\eta) + \frac{U_\infty}{\nu} \delta(x) \frac{d\delta}{dx} \eta F'(\eta) - \frac{U_\infty}{\nu} \frac{\delta^2(x)}{u_o(x)} \frac{du_o}{dx} F(\eta) = 0 \quad (4.226)$$

A Eq. (4.226) pode ser reescrita como

$$F''(\eta) + \kappa \eta F'(\eta) + \beta F(\eta) = 0, \quad (4.227)$$

onde κ e β os coeficientes do segundo e terceiro termo da EDO (4.226), respectivamente, os quais, para que o método de auto-similaridade possa ser utilizado, devem ser constantes. Eles são dados por

$$\kappa = \frac{U_\infty}{\nu} \delta(x) \frac{d\delta}{dx}, \quad (4.228)$$

e

$$\beta = -\frac{U_\infty}{\nu} \frac{\delta^2(x)}{u_o(x)} \frac{du_o}{dx}. \quad (4.229)$$

4.5.4.2 Modelo matemático exato

O coeficiente κ só depende de $\delta(x)$ e pode ser rearranjado como

$$\delta(x) \frac{d\delta}{dx} = \frac{\kappa \nu}{U_\infty} \longrightarrow \delta(x) d\delta = \frac{\kappa \nu}{U_\infty} dx, \quad (4.230)$$

que, integrada, conduz a

$$\frac{\delta^2(x)}{2} = \frac{\kappa \nu}{U_\infty} x + c_1, \quad (4.231)$$

onde c_1 é uma constante originada do processo de integração.

Como no início do domínio ($x = 0$) não existe esteira ($\delta(0) = 0$), obtem-se que a constante $c_1 = 0$. Portanto, a Eq. (4.231) pode ser reescrita como

$$\delta(x) = \left(\frac{2 \kappa \nu}{U_\infty} \right)^{1/2} x^{1/2}. \quad (4.232)$$

Para a integração do coeficiente β também deseja-se que o mesmo só dependa da variável $u_o(x)$. Sendo assim, uma alternativa é utilizar a Eq. (4.220), dada por

$$u_o(x) \delta(x) = \frac{U_\infty \gamma}{2},$$

e substituí-la na Eq. (4.229), chegando-se a

$$\beta = -\frac{U_\infty}{\nu} \frac{\left(\frac{U_\infty \gamma}{2 u_o(x)} \right)^2}{u_o(x)} \frac{du_o}{dx} \longrightarrow \beta = -\frac{U_\infty^3 \gamma^2}{4\nu} \frac{1}{u_o(x)} \frac{du_o}{dx} \quad (4.233)$$

Integrando a Eq. (4.233) tem-se

$$\frac{1}{2} u_o^{-2}(x) = \frac{4\nu\beta}{U_\infty^3 \gamma^2} x + c_1 \longrightarrow u_o(x) = \left(\frac{4\nu\beta}{U_\infty^3 \gamma^2} \right)^{1/2} x^{-1/2} + c_2, \quad (4.234)$$

onde c_1 e c_2 são constantes originadas do processo de integração e de manipulação, respectivamente. Em uma região distante do corpo imerso ($x \rightarrow \infty$) existe apenas a corrente livre,

sem nenhum déficit, portanto, tem-se que $u_o(x \rightarrow \infty) = 0$ e, conseqüentemente, $c_2 = 0$ e a Eq. (4.234) pode ser reescrita como

$$u_o(x) = \left(\frac{4\nu\beta}{U_\infty^3 \gamma^2} \right)^{1/2} x^{-1/2}. \quad (4.235)$$

O próximo passo do processo de solução é encontrar a relação entre os coeficientes κ e β , visando obter uma EDO com apenas um coeficiente, já que tal característica pode facilitar o processo de integração da EDO. No presente trabalho, a relação entre ambos foi encontrada substituindo as Eqs. (4.232) e (4.235) em (4.220):

$$u_o(x) \delta(x) = \left(\frac{2\kappa\nu}{U_\infty} \right)^{1/2} x^{1/2} \left(\frac{4\nu\beta}{U_\infty^3 \gamma^2} \right)^{1/2} x^{-1/2} = \frac{U_\infty\gamma}{2},$$

$$\frac{U_\infty\gamma}{2} \left(\frac{\kappa}{\beta} \right)^{1/2} = \frac{U_\infty\gamma}{2} \quad \longrightarrow \quad \kappa = \beta \quad (4.236)$$

Portanto, substituindo a Eq. (4.236) em (4.227), pode-se simplificar a EDO para

$$F''(\eta) + \beta\eta F'(\eta) + \beta F(\eta) = 0. \quad (4.237)$$

Usando a regra do produto nos dois termos acompanhados por β , pode-se reescrever a Eq. (4.237) como

$$\frac{d}{d\eta} [F'(\eta) + \beta\eta F(\eta)] = 0. \quad (4.238)$$

Integrando a Eq. (4.238) e avaliando o resultado da integração em $\eta = 0$, com o auxílio das condições de contorno (4.224b) e (4.224c), tem-se

$$F'(\eta) + \beta\eta F(\eta) = 0. \quad (4.239)$$

Integrando também a Eq. (4.239) e usando a condição de contorno dada pela Eq.

(4.224c):

$$\ln[F(\eta)] = -\frac{\beta\eta^2}{2} \longrightarrow F(\eta) = \exp\left(-\frac{\beta\eta^2}{2}\right), \quad (4.240)$$

onde o valor de β precisa ser determinado.

Para encontrar o valor de β utiliza-se a condição de contorno assintótica nos extremos do perfil, dada pela Eq. (4.224a), junto a Eq. (4.240):

$$\exp\left(-\frac{\beta \cdot 1}{2}\right) = 0,01 \implies \beta = 9,21034. \quad (4.241)$$

Substituindo o valor de β na Eq. (4.240), tem-se que a função de auto-similaridade é dada por

$$\frac{\bar{u}_1(x, y)}{u_o(x)} = F(\eta) = \exp(-4,60517 \eta^2). \quad (4.242)$$

De posse da forma final da função de auto-similaridade é possível calcular a integral da mesma, que está presente na expressão obtida através do TTR, dada pela Eq. (4.219)

$$\gamma = \frac{c_D d}{2 \int_0^1 F(\eta) d\eta}.$$

Calculando a integral chega-se a

$$\gamma = \frac{c_D d}{2 \int_0^1 \exp(-4,60517 \eta^2) d\eta} \implies \gamma = 1,21365 c_D d. \quad (4.243)$$

Substituindo as Eqs. (4.229) e (4.236) em (4.232) é possível encontrar o espalhamento da esteira, o qual é dado por

$$\delta(x) = 4,29193 \left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{1/2} x^{1/2}. \quad (4.244)$$

É possível também evidenciar o número de Reynolds baseado no diâmetro (Re_d) na

expressão para cálculo da espessura da zona de mistura da esteira, bastando multiplicar e dividir o lado direito da expressão por \sqrt{d} :

$$\delta(x) = 4,29193 \left(\frac{d}{Re_d} \right)^{1/2} x^{1/2}. \quad (4.245)$$

Pode-se encontrar também a expressão para o déficit máximo ao longo de x , substituindo as Eqs. (4.229) e (4.243) em (4.235):

$$u_o(x) = 0,14139 U_\infty c_D \left(\frac{U_\infty d^2}{\nu x} \right)^{1/2}, \quad (4.246)$$

ou, evidenciando Re_d ,

$$u_o(x) = 0,14139 \frac{U_\infty c_D}{\sqrt{Re_d}} \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2}, \quad (4.247)$$

Após todos os desenvolvimentos apresentados, finalmente obtém-se as expressões para o déficit de velocidade ($\bar{u}_1(x, y)$) e para a velocidade média em na direção x , ($\bar{u}(x, y)$) dadas, respectivamente, por

$$\bar{u}_1(x, y) = 0,14139 \frac{U_\infty c_D}{\sqrt{Re_d}} \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \exp \left[-4,60517 \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^2 \right], \quad (4.248)$$

$$\bar{u}(x, y) = U_\infty \left[1 - 0,14139 \frac{c_D}{\sqrt{Re_d}} \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \exp \left[-4,60517 \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^2 \right] \right]. \quad (4.249)$$

4.5.5 Regime turbulento

4.5.5.1 Modelo matemático diferencial parcial específico

Nessa seção será apresentada a modelagem simplificada para uma esteira plana distante, turbulenta e bidimensional, gerada por um corpo imerso de grande comprimento em z , comparado com a sua altura. Cabe lembrar que um escoamento turbulento só faz sentido se ele for tridimensional. No entanto faz sentido falar de tratamento bidimensional de escoamen-

tos turbulentos, quando está sendo tratado apenas o comportamento médio do escoamento. Ressalta-se ainda que o objetivo desta seção em específico é continuar o desenvolvimento do modelo matemático diferencial parcial para o regime turbulento a partir do modelo geral, apresentado na seção 4.5.2. Ressalta-se que o desenvolvimento aqui apresentado se deve à utilização do modelo do comprimento de mistura de Prandtl como modelo de fechamento da turbulência.

A EDP que modela o problema físico é obtida desprezando o termo referente às tensões viscosas na Eq. (4.202). Esse termo pode ser desprezado pois, através da análise de ordem de grandeza dos termos da equação conclui-se que o termo das tensões turbulentas é ordens de grandeza maior que o das tensões viscosas. Para escoamentos em regime turbulento é necessário que se utilize algum modelo de fechamento da turbulência a fim de modelar o termo das tensões turbulentas. Conforme exposto na seção 3.2.2 um modelo simples e adequado para esse caso é o modelo do comprimento de mistura, dado pela Eq. (3.17):

$$\nu_t = \alpha^2 \delta^2(x) \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (4.250)$$

Perante todas as hipóteses apresentadas e usando a hipótese de Boussinesq junto ao modelo do comprimento de mistura de Prandtl, a Eq. (4.202) pode ser reescrita como:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^2 \delta^2(x) \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right]. \quad (4.251)$$

com condições de contorno dadas por

$$\bar{u}(x, y = \pm \delta(x)) = U_\infty, \quad (4.252a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \bar{u}(x, y = 0) = 0. \quad (4.252b)$$

Substituindo a Eq. (4.203) em (4.251), pode-se colocar a equação de Navier-Stokes em função da velocidade da corrente livre e do perfil de déficit de velocidade:

$$(U_\infty - \bar{u}_1) \frac{\partial}{\partial x} (U_\infty - \bar{u}_1) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^2 \delta^2(x) \left| \frac{\partial}{\partial y} (U_\infty - \bar{u}_1) \right| \left(\frac{\partial}{\partial y} (U_\infty - \bar{u}_1) \right) \right], \quad (4.253)$$

que, perante a hipótese de que na região em que a solução é válida, $\bar{u}_1 \ll U_\infty$ e sabendo que U_∞ é constante, pode ser reescrita como

$$U_\infty \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^2 \delta^2(x) \left| -\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right| \left(-\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right) \right], \quad (4.254)$$

Sendo o termo $\left| -\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right|$ sempre positivo e, sabendo-se, que o termo $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y}$ para a esteira ilustrada na Fig. 4.8, especificamente, é sempre negativo, tem-se

$$\left| -\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right| = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y}. \quad (4.255)$$

Substituindo a Eq. (4.255) em (4.254) chega-se a

$$U_\infty \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = \alpha^2 \delta^2(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right)^2 \right],$$

onde, aplicando a regra da cadeia no termo do lado direito da EDP, tem-se

$$U_\infty \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = 2\alpha^2 \delta^2(x) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial y^2}, \quad (4.256)$$

com condições de contorno dadas por

$$\bar{u}_1(x, y = \pm \delta(x)) = 0, \quad (4.257a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [\bar{u}_1(x, y = 0)] = 0, \quad (4.257b)$$

$$\bar{u}_1(x, y = 0) = u_o(x). \quad (4.257c)$$

onde, lembrando, α é a constante empírica do modelo do comprimento de mistura de Prandtl, $\delta(x)$ é a metade do espalhamento da esteira e $u_o(x)$ é o déficit máximo do perfil.

A seguir serão apresentados os desenvolvimentos relativos à transformação da EDP (4.256) em uma EDO equivalente, partindo da definição da variável e da função de auto-similaridade e seguindo todos os passos requeridos pelo método até que se chegue a EDO que será integrada para a obtenção das soluções contínuas.

4.5.5.2 Modelo matemático diferencial ordinário

A definição da variável e da função de auto-similaridade são dadas pelas Eqs. (4.205) e (4.206), por

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

$$\bar{u}_1(x, y) = u_o(x) F(\eta).$$

Ao se utilizar o déficit máximo como função de proporcionalidade na função de auto-similaridade, intrinsecamente, uma nova condição de contorno é obtida pois, sendo assim, o maior valor que $F(\eta)$ pode assumir é 1 e ele ocorre em $y = 0$. Portanto, as condições de contorno para $F(\eta)$ são dadas por

$$F(\eta = \pm 1) = 0 \quad (4.258a)$$

$$F'(\eta = 0) = 0, \quad (4.258b)$$

$$F(\eta = 0) = 1, \quad (4.258c)$$

onde é importante se observar que, diferentemente da esteira distante em regime laminar, a condição de contorno de $F(\eta)$ não é assintótica nos extremos do perfil.

Colocando a EDP (4.256) em termos da variável e da função de auto-similaridade (Eqs. (4.205) e (4.206)), tem-se que

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = u_o(x) F'(\eta) \left(\frac{-y}{\delta^2(x)} \right) \frac{d\delta}{dx} + \frac{du_o}{dx} F(\eta) = -\frac{u_o(x)}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F'(\eta) + \frac{du_o}{dx} F(\eta) \quad (4.259a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} = u_o(x) F'(\eta) \frac{1}{\delta(x)} = \frac{u_o(x)}{\delta(x)} F'(\eta), \quad (4.259b)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial y^2} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{u_o(x)}{\delta(x)} F'(\eta) \right] = \frac{u_o(x)}{\delta^2(x)} F''(\eta). \quad (4.259c)$$

Substituindo as Eqs. (4.259a) a (4.259c) em (4.256)

$$U_\infty \left[-\frac{u_o(x)}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F'(\eta) + \frac{du_o}{dx} F(\eta) \right] = 2 \alpha^2 \delta^2(x) \frac{u_o(x)}{\delta(x)} F'(\eta) \frac{u_o(x)}{\delta^2(x)} F''(\eta)$$

$$2\alpha^2 \frac{u_o^2(x)}{\delta(x)} F'(\eta) F''(\eta) + U_\infty \frac{u_o(x)}{\delta(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F'(\eta) - U_\infty \frac{du_o}{dx} F(\eta) = 0$$

$$2\alpha^2 F'(\eta) F''(\eta) + \frac{U_\infty}{u_o(x)} \frac{d\delta}{dx} \eta F'(\eta) - \frac{U_\infty \delta(x)}{u_o^2(x)} \frac{du_o}{dx} F(\eta) = 0 \quad (4.260)$$

Aplicando a regra do produto no primeiro termo da Eq. (4.260), ela pode ser reescrita como

$$\alpha^2 \frac{d}{d\eta} [F'^2(\eta)] + \kappa \eta F'(\eta) + \beta F(\eta) = 0, \quad (4.261)$$

onde κ e β os coeficientes do segundo e terceiro termo da EDO (4.260), respectivamente, os quais, para que o método de auto-similaridade possa ser utilizado, devem ser constantes. Eles são dados por

$$\kappa = \frac{U_\infty}{u_o(x)} \frac{d\delta}{dx}, \quad (4.262)$$

e

$$\beta = -\frac{U_\infty \delta(x)}{u_o^2(x)} \frac{du_o}{dx}. \quad (4.263)$$

De posse da EDO e de seus coeficientes pode-se começar o processo de integração, visando obter a solução contínua para diversas propriedades de uma esteira formada a jusante de um corpo imerso em regime turbulento, avaliada em uma região distante.

4.5.5.3 Modelo matemático exato

Antes de realizar a integração da EDO em si, serão integrados os seus coeficientes, κ e β , com o objetivo de se obter as funções contínuas que representam a espessura da esteira, $\delta(x)$, e o déficit máximo de velocidade, $u_o(x)$, ao longo de x .

Na Eq. (4.220), vinda da aplicação do TTR, é possível isolar o déficit máximo, $u_o(x)$. Isso será necessário para a integração do coeficiente κ , já que a única variável dependente de x

nesse coeficiente deve ser $\delta(x)$, visando simplificar o processo de integração. Da Eq. (4.220) tem-se

$$u_o(x) = \frac{U_\infty \gamma}{2 \delta(x)}, \quad (4.264)$$

que, substituída na Eq. (4.262), leva a

$$\frac{U_\infty}{2 \delta(x)} \frac{d\delta}{dx} = \kappa \longrightarrow \frac{2 \delta(x)}{\gamma} \frac{d\delta}{dx} = \kappa \longrightarrow \delta(x) d\delta = \frac{\kappa \gamma}{2} dx \quad (4.265)$$

Integrando a Eq. (4.265) tem-se

$$\frac{\delta^2(x)}{2} = \frac{\kappa \gamma}{2} x + c_1 \longrightarrow \delta(x) = (\kappa \gamma)^{1/2} x^{1/2} + \sqrt{c_1}, \quad (4.266)$$

onde c_1 é uma constante originada do processo de integração.

Como no início do domínio ($x = 0$) não existe esteira ($\delta(0) = 0$), obtém-se que a constante $c_1 = 0$. Portanto, a Eq. (4.266) pode ser reescrita como

$$\delta(x) = (\kappa \gamma)^{1/2} x^{1/2}. \quad (4.267)$$

Para a integração do coeficiente β também deseja-se que o mesmo só dependa da variável $u_o(x)$ e x . Para que isso aconteça pode-se substituir a Eq. (4.267) em (4.263), levando a

$$-\frac{U_\infty (\kappa \gamma)^{1/2} x^{1/2}}{u_o^2(x)} \frac{du_o}{dx} = \beta \longrightarrow -U_\infty (\kappa \gamma)^{1/2} \frac{du_o}{u_o^2(x)} = \beta x^{-1/2} dx \quad (4.268)$$

Integrando e rearranjando a Eq. (4.268):

$$u_o(x) = \frac{U_\infty}{2 \beta} (\kappa \gamma)^{1/2} x^{-1/2} + c_1, \quad (4.269)$$

onde c_1 é uma constante originada do processo de integração e manipulação. Em uma região distante do corpo imerso ($x \rightarrow \infty$) existe apenas a corrente livre, sem nenhum déficit, portanto,

tem-se que $u_o(x \rightarrow \infty) = 0$ e, conseqüentemente, $c_1 = 0$ e a Eq. (4.269) pode ser reescrita como

$$u_o(x) = \frac{U_\infty}{2\beta} (\kappa\gamma)^{1/2} x^{-1/2}. \quad (4.270)$$

Encontrar uma relação entre κ e β é uma alternativa para simplificar a EDO dada pela Eq. (4.261). Uma possibilidade para encontrar a maneira como esses coeficientes se relacionam é substituir as Eqs. (4.267) e (4.270) na relação obtida do TTR, dada pela Eq. (4.220). Fazendo a substituição sugerida obtem-se que

$$\delta(x) u_o(x) = (\kappa\gamma)^{1/2} x^{1/2} \cdot \frac{U_\infty}{2\beta} (\kappa\gamma)^{1/2} x^{-1/2} = \frac{U_\infty \gamma}{2}$$

$$\frac{\kappa}{\beta} = 1 \longrightarrow \kappa = \beta. \quad (4.271)$$

Substituindo $\kappa = \beta$ na EDO (4.261) tem-se

$$\frac{d}{d\eta} [\alpha^2 F'^2] + \beta \eta F'(\eta) + \beta F(\eta) = 0$$

$$\frac{d}{d\eta} [\alpha^2 F'^2] + \beta (\eta F'(\eta) + F(\eta)) = 0. \quad (4.272)$$

Usando a regra do produto nos termos evidenciados por β na Eq. (4.272), ela pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d\eta} [\alpha^2 F'^2] + \beta \frac{d}{d\eta} [\eta F(\eta)] = 0 \longrightarrow \frac{d}{d\eta} [\alpha^2 F'^2 + \beta \eta F(\eta)] = 0, \quad (4.273)$$

que leva a

$$\alpha^2 F'^2 + \beta \eta F(\eta) = c_1, \quad (4.274)$$

onde c_1 é uma constante que vem do processo de integração e deve ser determinada. Aplicando as condições de contorno em $\eta = 0$, vindas das Eqs. (4.258b) e (4.258b), tem-se que $c_1 = 0$ e, portanto,

$$(\alpha F')^2 + \beta \eta F(\eta) = 0 \longrightarrow \alpha \frac{dF}{d\eta} = -\sqrt{\beta \eta F(\eta)} \quad (4.275)$$

Integrando a Eq. (4.275) são possíveis duas soluções

$$F(\eta) = \left(-\frac{\sqrt{\beta}}{3\alpha} \eta^{3/2} + c_1 \right)^2, \quad (4.276)$$

ou

$$F(\eta) = \left(\frac{\sqrt{\beta}}{3\alpha} \eta^{3/2} + c_2 \right)^2, \quad (4.277)$$

onde c_1 e c_2 são constantes originadas do processo de integração e manipulação. A condição de contorno $F(1) = 0$, dada pela Eq. (4.258a) será utilizada para determinar-se o valor das constantes de integração como se segue:

$$F(1) = \left(-\frac{\sqrt{\beta}}{3\alpha} + c_1 \right)^2 = 0 \longrightarrow c_1 = \frac{\sqrt{\beta}}{3\alpha}, \quad (4.278)$$

levando a

$$F(\eta) = \frac{\beta}{9\alpha^2} (1 - \eta^{3/2})^2, \quad (4.279)$$

e

$$F(1) = \left(\frac{\sqrt{\beta}}{3\alpha} + c_2 \right)^2 = 0 \longrightarrow c_2 = -\frac{\sqrt{\beta}}{3\alpha}, \quad (4.280)$$

levando a

$$F(\eta) = \frac{\beta}{9\alpha^2} (\eta^{3/2} - 1)^2. \quad (4.281)$$

Conforme pode ser observado, as duas soluções obtidas são idênticas, mudando apenas o sinal no interior termo quadrático. Portanto, nos desenvolvimentos seguintes será adotada a solução apresentada pela Eq. (4.279)

$$F(\eta) = \frac{\beta}{9\alpha^2} (1 - \eta^{3/2})^2. \quad (4.282)$$

Substituindo a Eq. (4.281) na Eq. (4.206), a qual apresenta a relação entre o perfil do déficit e a função de auto-similaridade $F(\eta)$, tem-se

$$\frac{\bar{u}_1(x, y)}{u_o(x)} = \frac{\beta}{9\alpha^2} (1 - \eta^{3/2})^2. \quad (4.283)$$

Sabe-se que no centro do domínio o déficit de velocidade, \bar{u}_1 , é igual ao déficit máximo, conforme a Eq. (4.258c). Aplicando essa condição de contorno na Eq. (4.283), chega-se a

$$\frac{\beta}{9\alpha^2} = 1 \longrightarrow \beta = 9\alpha^2. \quad (4.284)$$

Substituindo a Eq. (4.284) em (4.283) tem-se

$$\frac{\bar{u}_1(x, y)}{u_o(x)} = \left[1 - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{3/2} \right]^2, \quad (4.285)$$

ou

$$F(\eta) = (1 - \eta^{3/2})^2. \quad (4.286)$$

De posse da função de auto similaridade $F(\eta)$, é possível calcular a integral presente na constante γ , a qual é dada pela Eq. (4.219):

$$\gamma = \frac{c_D d}{2 \int_0^1 F(\eta) d\eta},$$

onde a integral é dada por

$$2 \int_0^1 (1 - \eta^{3/2})^2 d\eta = 2 \frac{9}{20} = \frac{9}{10} \quad (4.287)$$

Substituindo o valor obtido da integração na Eq. (4.219), chega-se a

$$\gamma = \frac{10 c_D d}{9}. \quad (4.288)$$

Combinando as Eqs. (4.271) e (4.263) tem-se que $\kappa = \beta = 9\alpha^2$. Voltando na Eq. (4.267) e substituindo os valores de κ e γ :

$$\delta(x) = (\kappa \gamma)^{1/2} x^{1/2} = \left(9\alpha^2 \frac{10 c_D d}{9}\right)^{1/2} x^{1/2},$$

$$\delta(x) = \sqrt{10} \alpha (c_D d x)^{1/2}. \quad (4.289)$$

Realizando o mesmo processo na Eq. (4.270) tem-se

$$u_o(x) = \frac{U_\infty}{2\beta} (\kappa \gamma)^{1/2} x^{-1/2} = \frac{U_\infty}{18\alpha^2} \left(9\alpha^2 \frac{10 c_D d}{9}\right)^{1/2} x^{-1/2}$$

$$u_o(x) = U_\infty \frac{\sqrt{10 c_D}}{18\alpha} \left(\frac{x}{d}\right)^{-1/2} \quad (4.290)$$

Substituindo a Eq. (4.290) em (4.285) obtém-se a expressão para cálculo do déficit de velocidade, a qual é dada por:

$$\bar{u}_1(x, y) = U_\infty \frac{\sqrt{10 c_D}}{18\alpha} \left(\frac{x}{d}\right)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{3/2}\right]^2, \quad (4.291)$$

onde $\delta(x)$ é dado pela Eq. (4.289).

É possível obter também o perfil de velocidade $\bar{u}(x, y)$, substituindo a Eq. (4.291) em (4.203), a qual é dada por:

$$\bar{u}(x, y) = U_\infty - \bar{u}_1(x, y).$$

Realizando a substituição tem-se

$$\bar{u}(x, y) = U_\infty \left\{ 1 - \frac{\sqrt{10} c_D}{18 \alpha} \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{3/2} \right]^2 \right\}. \quad (4.292)$$

Conforme exposto anteriormente, usando o modelo do comprimento de mistura de Prandtl junto à hipótese de Boussinesq e às simplificações possíveis pela hipótese para linearização da EDP

$$-\overline{u'v'} = (\alpha \delta(x))^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right)^2 = \left(\alpha \delta(x) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right)^2, \quad (4.293)$$

onde a derivada de \bar{u}_1 pode ser calculada através da Eq. (4.291) como

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[U_\infty \frac{\sqrt{10} c_D}{18 \alpha} \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{3/2} \right]^2 \right] = U_\infty \frac{\sqrt{10} c_D}{18 \alpha} \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left[1 - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{3/2} \right]^2 \right]$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} = \frac{U_\infty \sqrt{10} c_D}{\delta(x) 6 \alpha} \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \left[\left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^2 - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{1/2} \right] \quad (4.294)$$

Substituindo (4.294) em (4.293) chega-se a

$$-\overline{u'v'} = \left(\alpha \delta(x) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right)^2 = \left(\alpha \delta(x) \frac{U_\infty \sqrt{10} c_D}{\delta(x) 6 \alpha} \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \left[\left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^2 - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{1/2} \right] \right)^2$$

$$-\overline{u'v'} = \left(U_\infty \frac{\sqrt{10} c_D}{6} \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \left[\left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^2 - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{1/2} \right] \right)^2$$

$$-\overline{u'v'} = U_\infty^2 \frac{10 c_D}{36} \left(\frac{x}{d}\right)^{-1} \left[\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^2 - \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{1/2} \right]^2. \quad (4.295)$$

Após o desenvolvimento das soluções contínuas para todos os casos propostos, no próximo capítulo serão apresentados os perfis das soluções contínuas junto a algumas comparações com resultados discretos de experimentos materiais apresentados na literatura e de experimentos computacionais realizados no código MFSim.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

Na presente seção serão apresentados os resultados obtidos com as soluções contínuas para os perfis médios de velocidade e para outras propriedades relacionadas a cada escoamento trabalhado. As comparações serão feitas com dados de experimentos materiais que foram encontrados na literatura para alguns casos e com dados de simulações numérico-computacionais que foram realizadas com o código MFSim.

Os dados das simulações realizadas são apresentados em cada caso, além dos procedimentos utilizados para extração de dados e perfis médios. Além disso, grande parte dos casos apresenta resultados em termos de variáveis dimensionais e adimensionais, visando facilitar o uso dos resultados apresentados no trabalho e explorar de maneira mais profunda as soluções contínuas obtidas.

O capítulo será iniciado apresentando os resultados para a camada de mistura temporal nos regimes laminar e turbulento.

5.1 Camada de mistura temporal

5.1.1 Regime laminar

5.1.1.1 Comparação com simulações computacionais

A simulação da camada de mistura temporal em regime laminar foi realizada em um domínio de dimensão $1[m] \times 1[m] \times 0,005[m]$, nas direções x , y e z , respectivamente, considerando-se um fluido com viscosidade cinemática $\nu = 1,406 \times 10^{-6}[m^2/s]$ e as duas correntes com velocidades de $U_1 = 1[m/s]$ e $U_2 = -1[m/s]$. Como o código utilizado oferece a possibilidade de se usar malha multi-nível, utilizou-se uma malha base de 200 elementos nas direções x e y e apenas um elemento na direção z , posicionando-se um refinamento fixo com passo espacial correspondente a metade do utilizado na malha base, localizado na região central do domínio. A simulação foi realizada considerando-se periodicidade em x , direção prioritária do escoamento e Neumann para as velocidades nas demais direções. Além disso, foram utilizados 4 processos na direção x .

Quando o escoamento acontece em regime laminar não são formadas instabilidades, ou seja, ocorrerá apenas a difusão molecular ao longo do tempo. Por esse motivo, o perfil de velocidade pode ser extraído fixando-se a coordenada nas direções x e z , realizando a aquisição de dados por meio de 200 sondas posicionadas ao longo de y . No presente trabalho os dados foram extraídos em $x = 0,5[m]$ e $z = 0,0025[m]$ em diferentes tempos.

É importante ressaltar que os perfis obtidos na solução contínua são centrados em zero, e o domínio utilizado na simulação computacional não possui origem em zero, portanto, é necessário que se translate os perfis, de modo que sejam comparados no mesmo sistema de eixos, sendo que essa escolha não afeta os resultados.

Nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 estão representados os perfis de velocidade que foram obtidos com a solução contínua, dada pela Eq. (4.35):

$$u(y, t) = \bar{U} + \tilde{U} \operatorname{erf} \left(5,037 \frac{y}{\delta(t)} \right),$$

comparados com os resultados da simulação em diferentes tempos. Na Fig. 5.6 pode-se

observar a comparação dos perfis auto similares obtidos na solução contínua.

Figura 5.1: Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação em $t = 0,1s$ para o regime laminar.

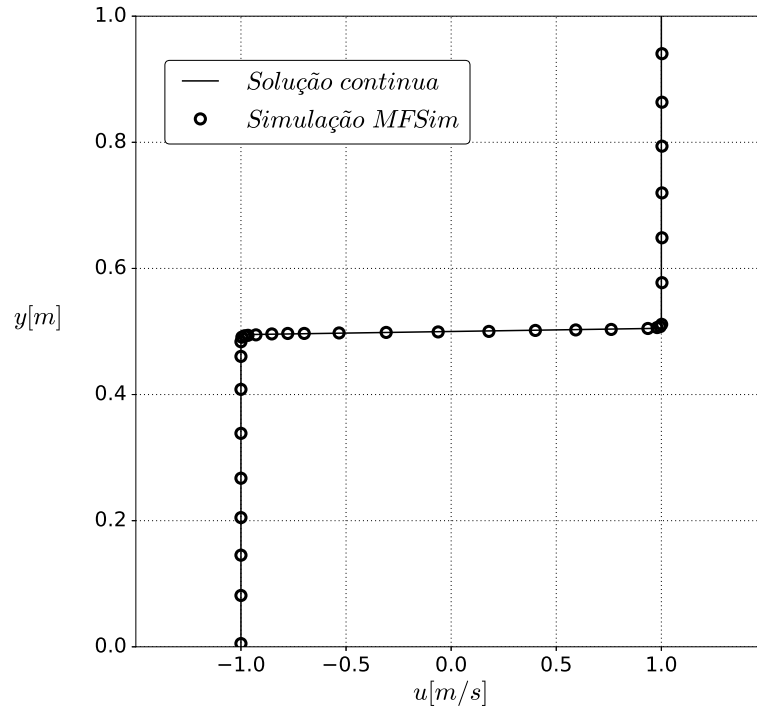


Figura 5.2: Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação em $t = 0,5s$ para o regime laminar.

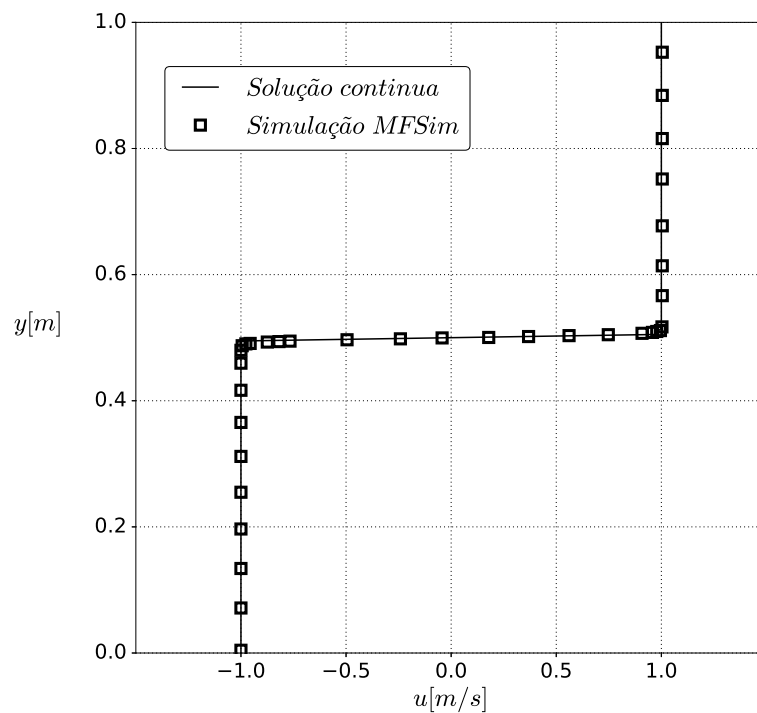


Figura 5.3: Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação em $t = 5,0s$ para o regime laminar.

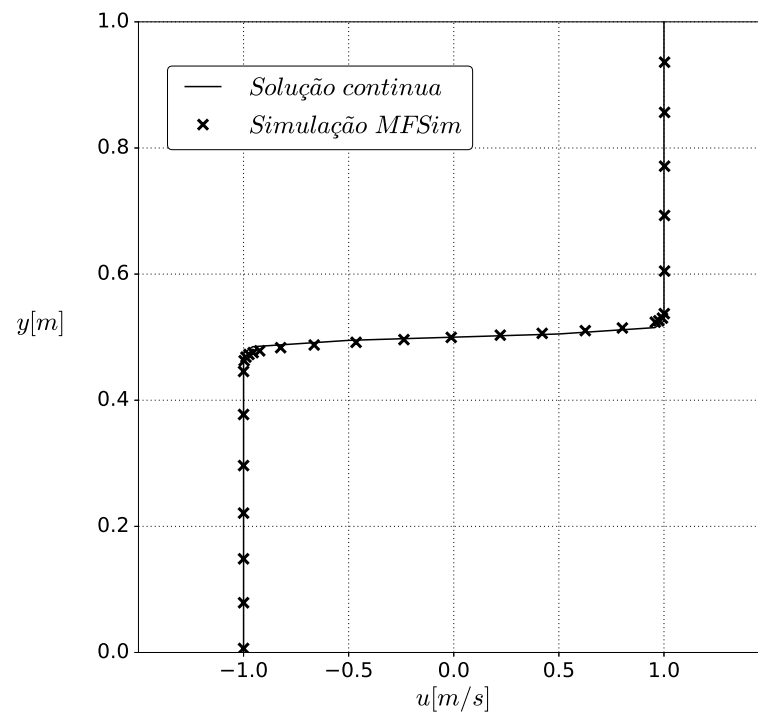


Figura 5.4: Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação em $t = 10,0s$ para o regime laminar.

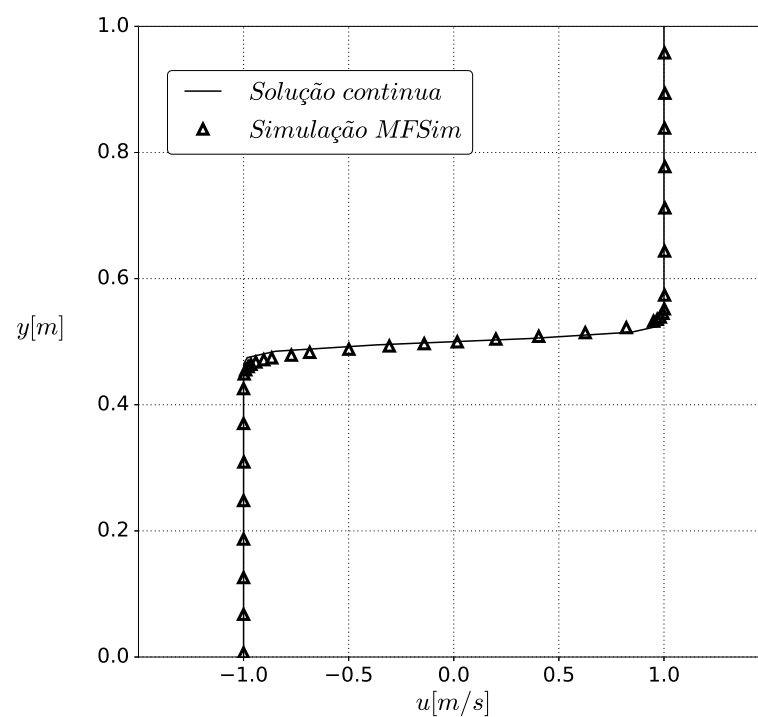


Figura 5.5: Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação em $t = 14,0s$ para o regime laminar.

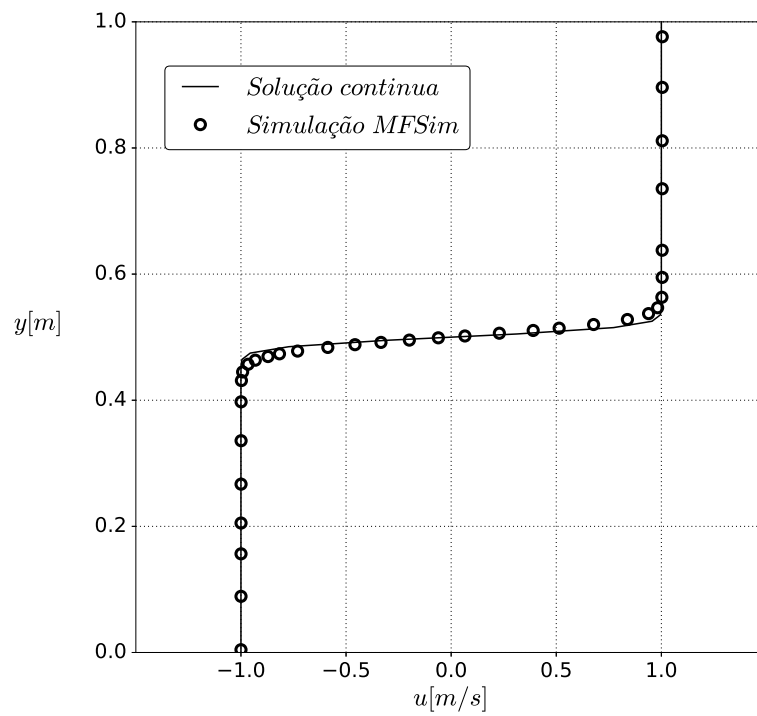
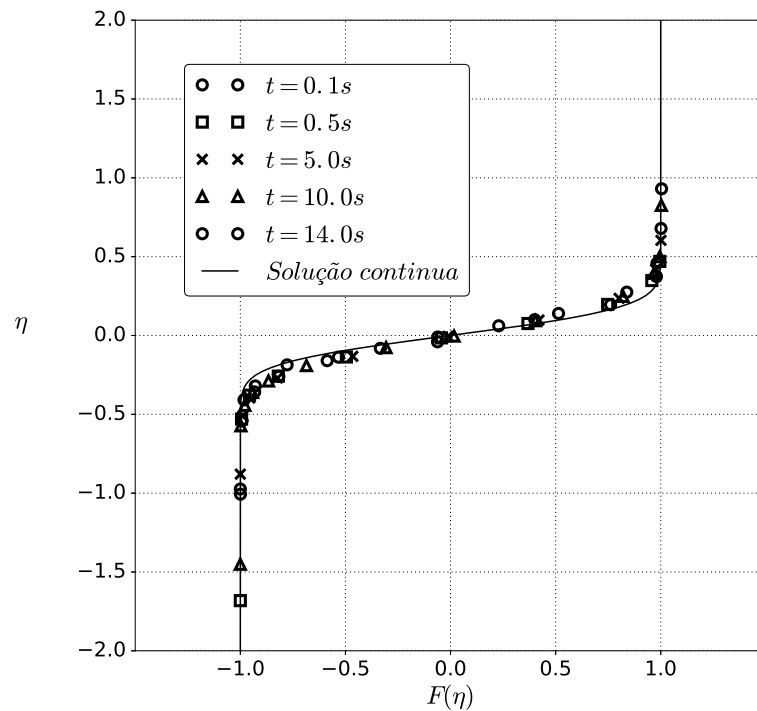


Figura 5.6: Comparação entre o perfil auto similar de velocidade obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação para o regime laminar.



Apesar de não apresentar todos os pontos extraídos da simulação computacional nas figuras, é possível que se realize, por meio delas, uma análise qualitativa a respeito da con-

cordância entre os resultados obtidos por meio das duas metodologias

Na Tab.5.1 são apresentados os valores da norma L_∞ e da norma L_2 entre os resultados da simulação computacional e a solução contínua para a velocidade $u(x, t)$. As normas são medidas de distância e são calculadas da seguinte forma:

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_0^n (u_{cont} - u_{sim})^2}{n}}, \quad (5.1)$$

e

$$L_\infty = \max |u_{cont} - u_{sim}|, \quad (5.2)$$

onde n é o número de pontos avaliados, u_{cont} é a velocidade obtida através da solução contínua e u_{sim} é o valor da velocidade extraído da simulação computacional.

Tabela 5.1: Valores das normas L_2 e L_∞ entre os resultados da simulação computacional e a solução contínua para a velocidade $u(x, t)$ da camada de mistura em desenvolvimento temporal no regime laminar.

t [s]	0,1	0,5	5,0	10,0	14,0
L_2	0,195204	0,116851	0,097334	0,090774	0,106983
L_∞	0,530471	0,337780	0,259468	0,243236	0,229960

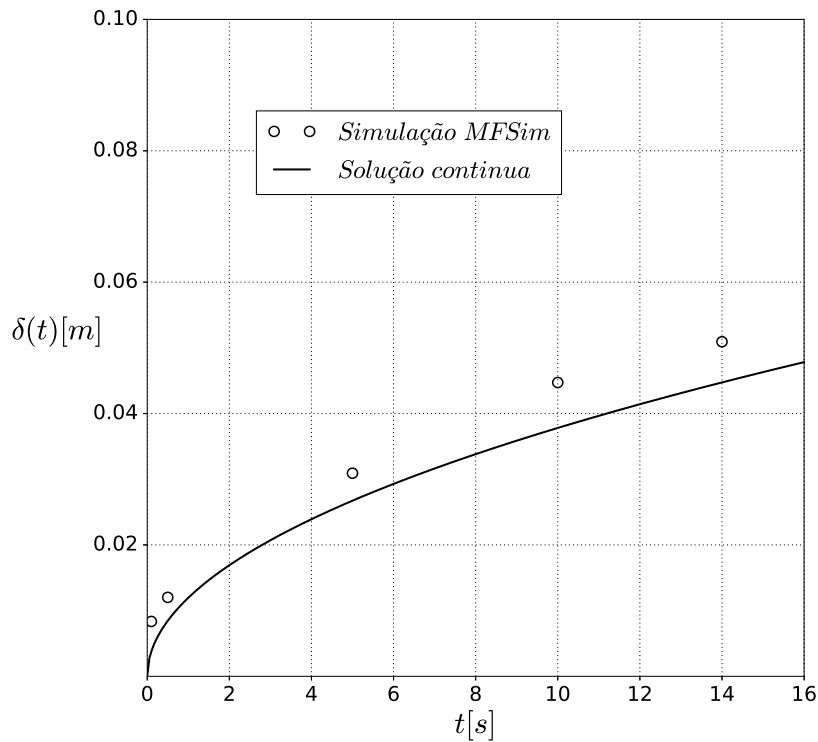
Por meio da tabela podem ser analisados os valores das duas normas supracitadas, sendo importante ressaltar que a simulação computacional não faz uso da solução contínua em nenhum momento.

Além dos valores para a componente de velocidade $u(y, t)$, é possível comparar também os valores obtidos para o espalhamento da zona de mistura, $\delta(x)$, cuja solução contínua é dada pela Eq. (4.33):

$$\delta(t) = 10,074 \sqrt{\nu t},$$

com os resultados discretos da simulação realizada no código MFSim. Na Fig. 5.7 é apresentada essa comparação.

Figura 5.7: Comparação entre o perfil do espalhamento obtido com a solução contínua e resultados discretos da simulação para o regime laminar.



Na Fig. 5.7 é evidenciado que, conforme se observa na Fig. 5.6, nos extremos da zona de mistura existe uma piora na correspondência entre a solução contínua e os resultados da simulação computacional. É importante ressaltar que a solução contínua deve ser utilizada como base para validar a simulação computacional, e não vice-versa.

5.1.2 Regime turbulento

De posse das soluções contínuas obtidas nas seções precedentes para propriedade de uma camada de mistura em desenvolvimento temporal no regime turbulento, é desejável que se compare os resultados obtidos com resultados experimentais discretos. A realização de experimentos materiais para camadas de mistura em desenvolvimento temporal é bastante complexa tanto para o regime laminar quanto para o turbulento. Isso deve ao fato que a experimentação material para o regime laminar deve acontecer na ausência de ruídos de qualquer magnitude e para o regime turbulento deve-se realizar a aquisição de dados em vários planos e em diversos pontos desses planos.

É importante realizar-se algumas colocações sobre a transição da camada de mistura em

desenvolvimento temporal. Se o escoamento ocorre na ausência de perturbações com qualquer magnitude, ele se manterá no regime laminar difundindo a informação, porém sem transicionar. Quando qualquer perturbação é inserida no escoamento o processo de transição será iniciado, levando-o do regime laminar a totalmente turbulento após algum tempo. Observa-se que, pela teoria da estabilidade linear, segundo Betchov e Szewczyk (1963), uma camada de mistura temporal torna-se instável, sendo ela perturbada, mesmo para o número de Re_δ tendendo a zero. A seguir serão apresentados os resultados e comparações para ambos os regimes.

5.1.2.1 Comparação com simulações computacionais

As primeiras análises serão referentes à constante α , presente no modelo do comprimento de mistura de Prandtl e que consta na Eq. (4.52), usada para determinar o espalhamento da esteira. Conforme exposto anteriormente, a constante α deve ser determinada por meio de experimentação material ou de uma simulação computacional que utilize a metodologia DNS, não possuindo um valor determinado na literatura vasculhada para o presente trabalho. Há porém o valor determinado para camadas de mistura espaciais, o qual corresponde a $\alpha = 0,07$ (WILCOX, 2006).

Uma primeira observação a se realizar é a respeito do procedimento de cálculo para o número de Reynolds em uma camada de mistura, tanto em desenvolvimento temporal quanto espacial, já que tal escoamento não possui um comprimento característico tão evidente como um jato ou uma esteira distante, por exemplo. A situação ideal para uma camada de mistura é partir de um perfil descontínuo de velocidades, porém é muito difícil conseguir tal condição em experimentos materiais ou em simulações computacionais. Sendo assim, na maior parte das situações existe um espalhamento inicial no perfil de velocidade, o qual será chamado de δ_o . Esse espalhamento inicial, portanto, será utilizado como comprimento característico no cálculo do número de Reynolds. Para camadas de mistura em desenvolvimento temporal é possível que as duas correntes possuam velocidades com o mesmo valor em módulo, porém em sentidos contrários, portanto, se a velocidade utilizada no cálculo do número de Reynolds for a velocidade média, em tais situações $Re = 0$. Para evitar que isso ocorra, a velocidade característica utilizadas será a semi-diferença \tilde{U} , que só será zero quando $U_1 = U_2$ e nessa

situação não se caracteriza uma camada de mistura. Perante as considerações realizadas, o número de Reynolds para uma camada de mistura em desenvolvimento temporal pode ser calculado por

$$Re_{\delta} = \frac{\tilde{U} \delta_o}{\nu}. \quad (5.3)$$

Quando se tem um espalhamento inicial da camada de mistura, a Eq. (4.52) deve ser modificada, a fim de se levar tal fato em consideração. Portanto, o espalhamento de uma camada de mistura em desenvolvimento temporal que possua um espalhamento inicial, δ_o , é dado por

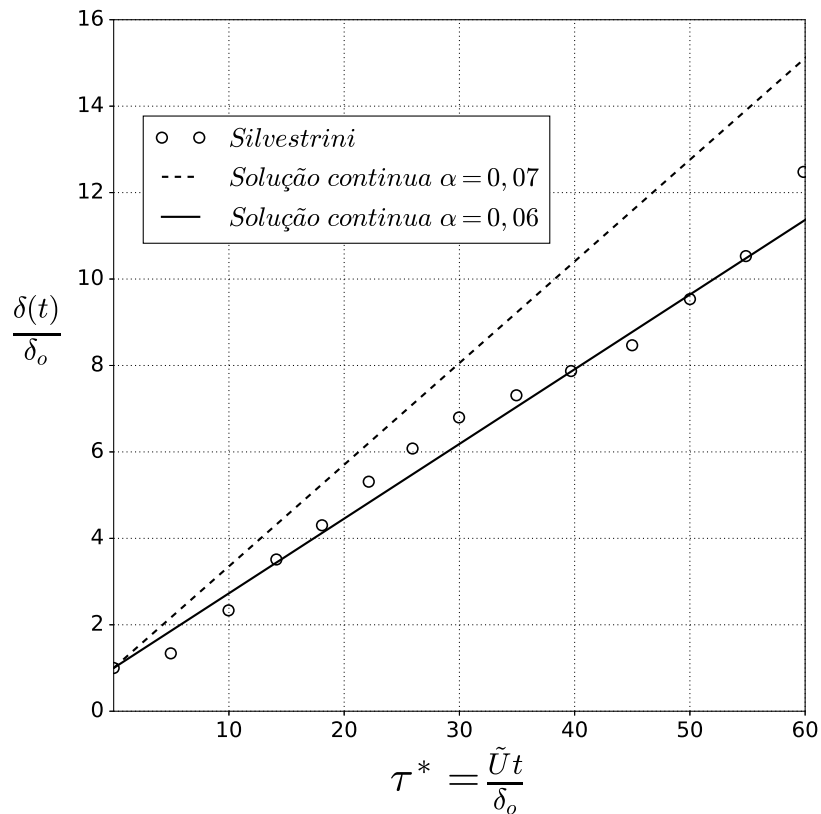
$$\delta(t) = \delta_o + 48 \alpha^2 \tilde{U} t. \quad (5.4)$$

Silvestrini (2000) realizou a simulação computacional de uma camada de mistura espacial utilizando a metodologia LES com um modelo de fechamento dinâmico espectral, com escoamento ocorrendo a $Re_{\delta} = 2000$. Através da simulação computacional realizada foi apresentado o gráfico da evolução do espalhamento da zona de mistura ao longo do tempo. Os resultados apresentados foram comparados com a solução contínua para o espalhamento $\delta(t)$, dada pela Eq. (5.4), como mostra a Fig. 5.8. Como não foi encontrado na literatura um valor para a constante α , são apresentadas duas curvas para diferentes valores desse parâmetro. A primeira curva considera $\alpha = 0,07$, valor apresentado para a camada de mistura em desenvolvimento espacial, na segunda curva foi utilizado $\alpha = 0,06$. Nas comparações realizadas, foi utilizado um parâmetro chamado de tempo adimensional, τ^* , o qual é utilizado também por Silvestrini e é calculado como:

$$\tau^* = \frac{t \tilde{U}}{\delta_o}. \quad (5.5)$$

A seguir, é apresentada na Fig. 5.8 a comparação supracitada.

Figura 5.8: Comparação entre o espalhamento obtido por Silvestrini (2000), através de uma simulação LES, e o valor obtido pela Eq. (5.4) considerando $\alpha = 0,07$ e $\alpha = 0,06$.



Como é possível observar na Fig. 5.8, a curva com $\alpha = 0,06$ apresenta melhor concordância com os dados obtidos através da simulação de Silvestrini, porém não é possível afirmar que esse é o melhor valor ou o valor correto. Para se obter o melhor valor desse parâmetro seria necessário realizar uma simulação numérica direta, a qual resolve todas as escalas presentes no escoamento. Quando se utiliza LES, o modelo de fechamento utilizado pode afetar diretamente os resultados.

Após a obtenção da solução aproximada para a camada de mistura em desenvolvimento temporal no regime turbulento, foram realizados também simulações computacionais a fim de se verificar a concordância entre os perfis médios de velocidade obtidos por meio das metodologias. A simulação computacional foi realizada utilizando-se o código MFSim. A camada de mistura foi simulada em um domínio de $8[m] \times 4[m] \times 8[m]$, considerando um fluido com viscosidade cinemática $\nu = 0,01[m^2/s]$ e as duas correntes com velocidade de $U_1 = 20[m/s]$ e $U_2 = -20[m/s]$. O domínio foi considerado periódico em x e z e foram impostas velocidades nas condições de contorno da direção y . A malha utilizada foi de $512 \times 256 \times 512$

elementos e o espalhamento inicial da camada de mistura $\delta_o = 0,03125$.

Conforme exposto anteriormente, o escoamento só entrará em regime completamente turbulento caso seja submetido a perturbações. Por esse motivo foi utilizado em todo o domínio, na condição inicial, ruído branco, na magnitude de 10% nas três direções, levando o escoamento à transição e, posteriormente, ao regime turbulento. Quando se tem um escoamento turbulento é necessário que se utilize algum modelo de fechamento, e, nas simulações apresentadas no presente trabalho foi utilizado o modelo dinâmico de Germano *et al.* (1991).

O processo de obtenção do perfil médio de velocidade também é diferente para esse caso, já que se trata de um escoamento em desenvolvimento temporal. A média foi realizada com dados coletados por 68.231 sondas que foram divididas em 71 planos ao longo da direção y , com cada plano contendo 961 sondas igualmente espaçadas. A média em cada plano foi calculada através da fórmula

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=0}^n \Delta s_i u_i}{\sum_{i=0}^n \Delta s_i} \quad (5.6)$$

sendo Δs_i o valor do passo espacial entre as sondas.

Nas Figuras 5.9, 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13 são apresentados os perfis de velocidade que foram obtidos com a solução contínua, dada pela Eq. (4.54)

$$\bar{u}(y, t) = \bar{U} + \tilde{U} \left[3 \left(\frac{y}{\delta(t)} \right) - 4 \left(\frac{y}{\delta(t)} \right)^3 \right],$$

para $\alpha = 0,06$ e $\alpha = 0,07$ comparados com os resultados discretos da simulação computacional em determinados tempos. Já a Fig. 5.14 mostra a comparação dos perfis auto similares obtidos pela solução contínua. É importante ressaltar que os perfis obtidos pela solução contínua são centrados em zero, e o domínio utilizado na simulação computacional tem a origem em zero, portanto, é necessário que se translade algum dos perfis, de modo que sejam comparados com origem ou centro em zero, sendo que essa escolha não afeta os resultados.

Figura 5.9: Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação em $\tau^* = 77,25$ para o regime turbulento.

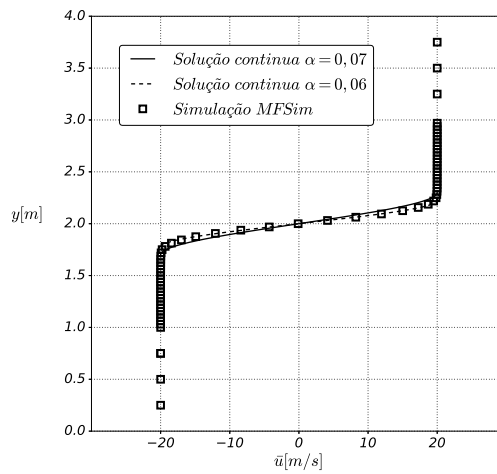


Figura 5.10: Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação em $\tau^* = 85,5$ para o regime turbulento.

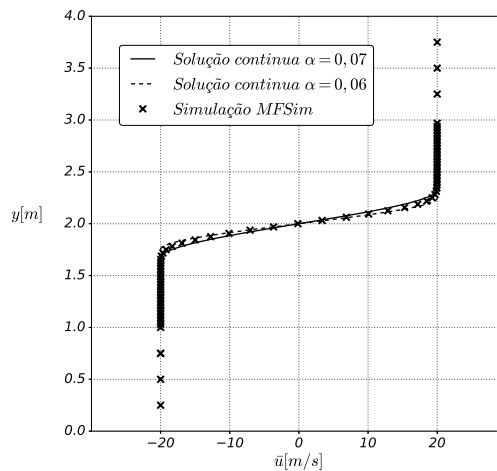


Figura 5.11: Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação em $\tau^* = 93,45$ para o regime turbulento.

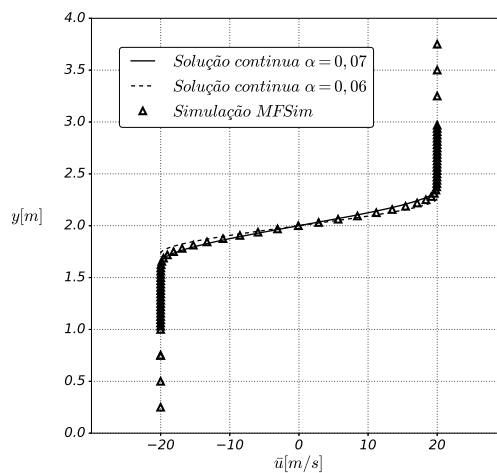


Figura 5.12: Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação em $\tau^* = 96,0$ para o regime turbulento.

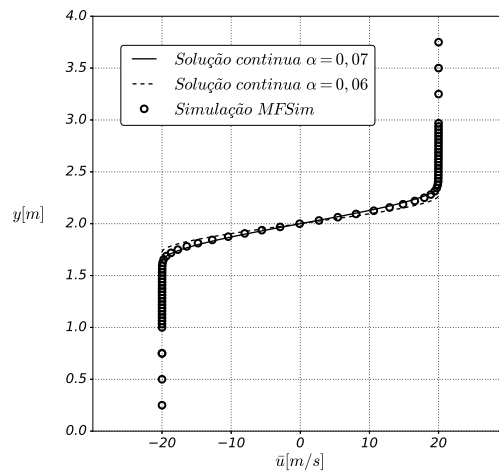
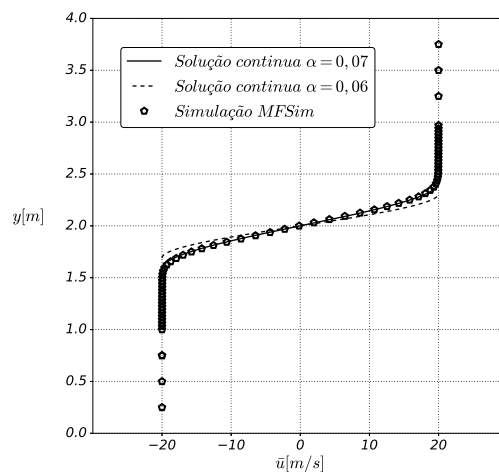
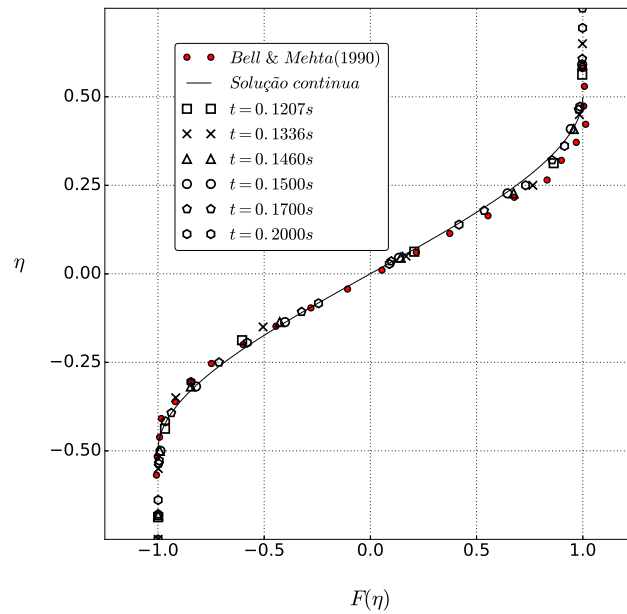


Figura 5.13: Comparação entre o perfil de velocidade obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação em $\tau^* = 108,8$ para o regime turbulento.



A respeito da Fig. 5.14, apresentada a seguir, Silvestrini (2000) mostra que é possível relacionar os resultados para uma camada de mistura temporal com os resultados para a camada de mistura em desenvolvimento espacial nas regiões temporais e espaciais em que ocorre auto similaridade entre os perfis. Sendo possível que se realize tal correspondência, os perfis obtidos por meio da solução contínua e os resultados da simulação computacional foram comparados com resultados de experimentos materiais de Bell e Mehta (1990) para uma camada de mistura espacial em regime turbulento. Conforme pode ser observado na Fig. 5.14 os resultados obtidos via solução contínua, simulação computacional e experimentação material apresentam proximidade em termos do perfil auto similar.

Figura 5.14: Comparação entre o perfil de velocidade auto-similar obtido com a solução contínua e os dados discretos da simulação para o regime turbulento.



A Tab.5.2 mostra os valores da norma L_∞ , Eq. (5.2), e da norma L_2 , Eq. (5.1), avaliadas com os valores da solução contínua do perfil de velocidade e dos resultados da simulação computacional. As normas foram avaliadas para a solução contínua considerando $\alpha = 0,06$ e $\alpha = 0,07$ e, através dos valores apresentados na tabela, nota-se que a curva com $\alpha = 0,06$ só apresenta menor valor para as normas com os dados extraídos em $t = 0,1207s$. Para os demais tempos a curva com $\alpha = 0,07$ apresenta menores valores. Porém, conforme ressaltado na análise da Fig. 5.8, como não se trata de um DNS não se pode cravar qual o valor mais adequado para o parâmetro α . A partir dos valores apresentados pode-se notar que existe uma boa correspondência entre os resultados apresentados em ambas metodologias, sendo importante ressaltar que a simulação computacional não faz uso da solução exata em nenhum momento.

As Figuras 5.15, 5.16 e 5.17 apresentam a visualização do critério Q, com $Q = 0,01$, colorido pelo campo de velocidade relativo à simulação da camada de mistura temporal em regime turbulento realizada através do código MFSim. Nas figuras supracitadas é possível visualizar o entrelaçamento das estruturas turbilhonares, características de escoamentos turbulentos. Além disso, as velocidades u , v e w são mostradas respectivamente nas Figs. 5.18, 5.19 e 5.20 no plano $x - y$ em $z = 4,0[m]$.

Tabela 5.2: Normas L_2 e L_∞ entre os resultados da simulação e a solução contínua para a camada de mistura em desenvolvimento temporal no regime turbulento.

t [s]	τ^*	$\alpha = 0,06$		$\alpha = 0,07$	
		L_2	L_∞	L_2	L_∞
0,1207	77,25	0,34956	1,27598	0,85214	2,64935
0,1336	85,5	0,70812	2,19735	0,54382	1,60707
0,146	93,45	1,06589	2,91829	0,24704	0,77866
0,15	96,0	1,18749	3,16361	0,15492	0,49351
0,17	108,8	1,66143	4,00314	0,31046	0,73213
0,20	128,0	2,18923	4,85504	0,72043	1,38966

Figura 5.15: Visualização do critério Q colorido pela velocidade para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$.

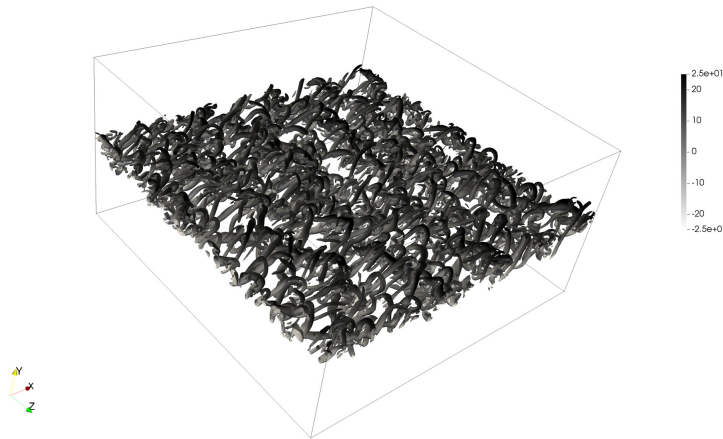


Figura 5.16: Vista superior do critério Q colorido pela velocidade para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$.

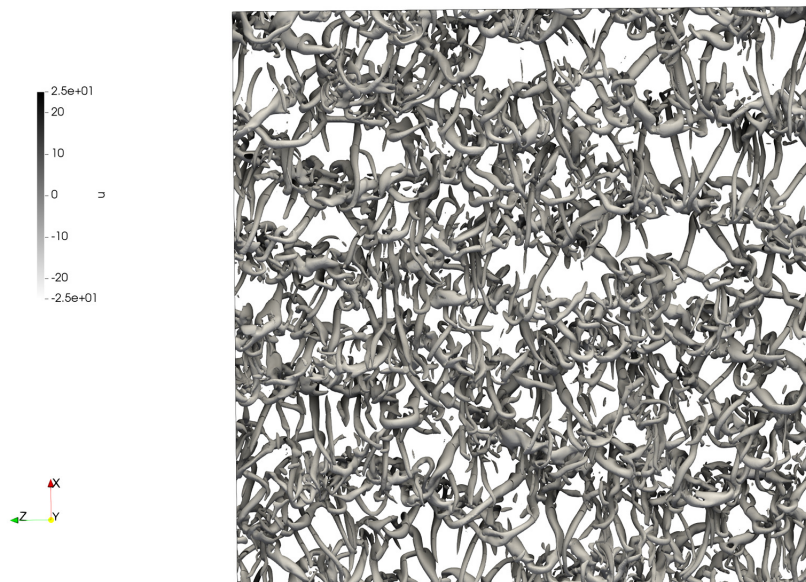


Figura 5.17: Vista lateral do critério Q colorido pela velocidade para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$.

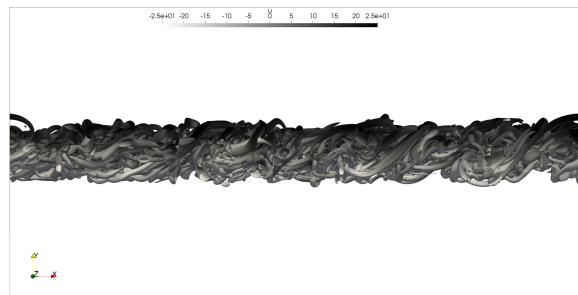


Figura 5.18: Visualização da velocidade $u[m/s]$ para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$.

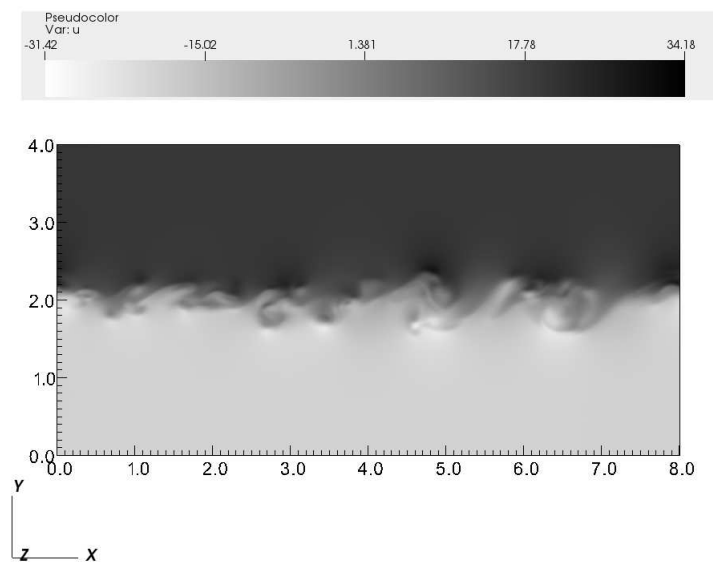


Figura 5.19: Visualização da velocidade $v[m/s]$ para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$.

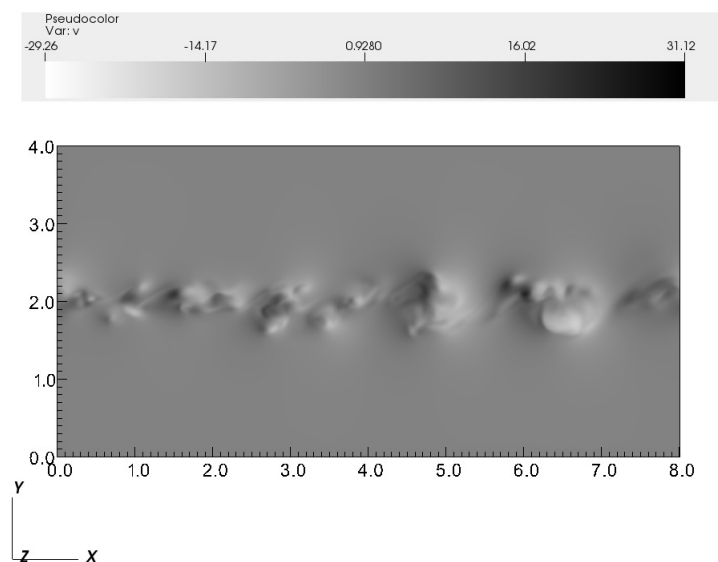
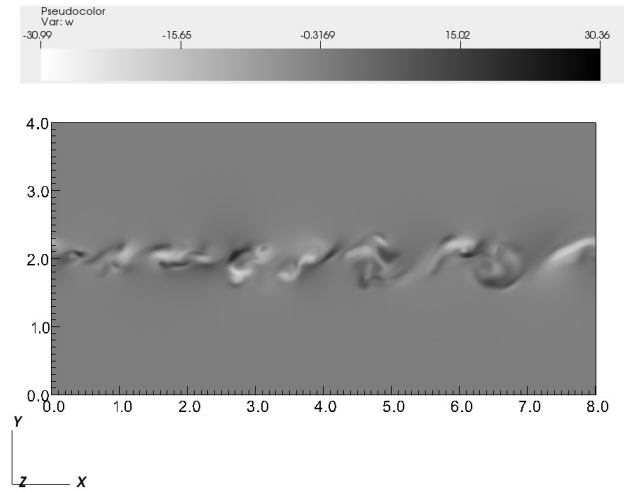


Figura 5.20: Visualização da velocidade $w[m/s]$ para uma camada de mistura temporal em regime turbulento no tempo $t = 0,17[s]$.



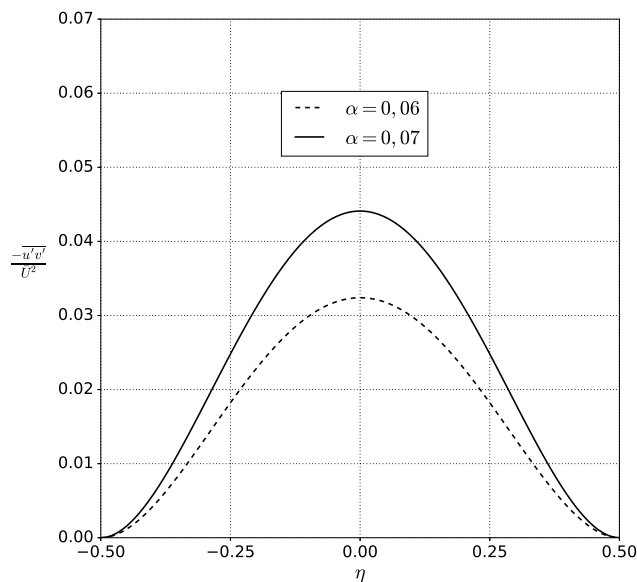
5.1.2.2 Perfis sem comparação com dados discretos

Na Fig. 5.21 é apresentado o perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds, dado pela Eq. (4.56):

$$-\overline{u'v'} = \alpha^2 \bar{U}^2 (3 - 12\eta^2)^2.$$

Mesmo sem a comparação com resultados discretos é interessante observar a forma da solução contínua e a influência do valor de α sobre ela.

Figura 5.21: Visualização do perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds para valores de $\alpha = 0,06$ e $\alpha = 0,07$.



5.2 Camada de mistura espacial

5.2.1 Regime turbulento

De posse das soluções obtidas na seção 4.3, é desejável que se compare os perfis contínuos obtidos com resultados experimentais. Experimentos materiais para camadas de mistura em desenvolvimento espacial no regime turbulento são encontrados em alguns trabalhos na literatura e fornecem base para a comparação da aproximação encontrada para os perfis de velocidade média. A seguir serão apresentados os resultados e comparações envolvendo a aproximação da solução para esse caso. Além disso serão apresentados os perfis das demais propriedades, mesmo que na ausência da comparação com resultados discretos de experimentos.

O caso da camada de mistura espacial possui uma peculiaridade em relação aos demais apresentados: a EDO foi solucionada utilizando uma expansão em série da pela Eq. (4.86)

$$G(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n G_n(\zeta).$$

O uso da série exige que ela seja truncada em algum termo. Schlichting *et al.* (1955) apresenta a solução com a série truncada em $n = 1$ e argumenta que o uso dos demais termos não se fazem necessários já que os resultados encontrados por ele apresentaram boa concordância com resultados de experimentos materiais. No presente trabalho, foi agregado mais um termo a série ($n = 2$), na obtenção de todas as soluções contínuas. Portanto, na presente seção serão apresentados primeiramente os perfis sem comparações com dados discretos. Em todos os gráficos serão apresentados os perfis para a solução com a série truncada em $n = 1$ (G_1) e em $n = 2$ (G_1 e G_2). Cabe ressaltar ainda que o termo correspondente a $n = 2$ em todas as soluções apresentadas é o termo acompanhado pela maior potência de λ .

Em todos os perfis que serão apresentados sem a comparação com dados discretos foi considerada uma camada de mistura espacial onde $U_2 = 0$, o que leva a $\lambda = 1$.

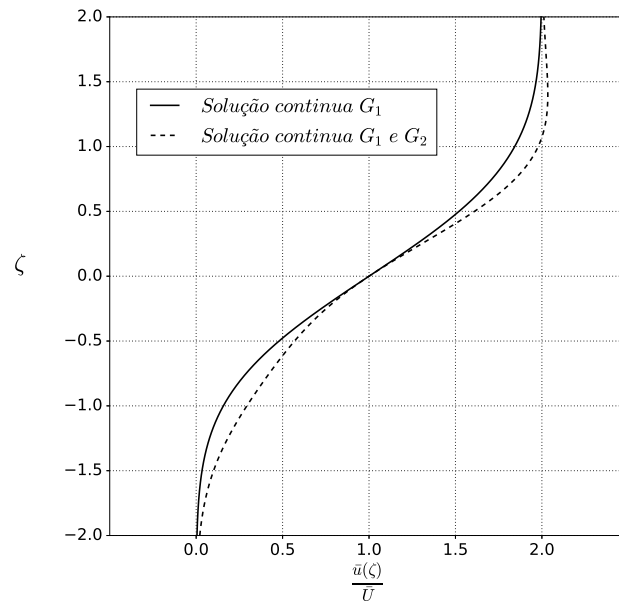
5.2.1.1 Perfis sem comparação com dados discretos

O primeiro perfil apresentado será o da componente média de velocidade \bar{u} , o qual é dado pela Eq. (4.109):

$$\bar{u}(\zeta) = \bar{U} \left(1 + \lambda \operatorname{erf}(\zeta) + \lambda^2 \left[\frac{\zeta e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}^2(\zeta) - e^{-\zeta^2} \right) \right] \right).$$

Na Fig. 5.25 é apresentada a comparação entre as duas soluções contínuas, ressaltando que, para a solução contínua da velocidade $\bar{u}(\zeta)$, o termo correspondente a $n = 2$ é o multiplicado por λ^2 .

Figura 5.22: Perfil da componente x da velocidade média de uma camada de mistura espacial em regime turbulento.



Nota-se que, para esse primeiro perfil, agregar o termo $n = 2$ na solução promoveu pequenas alterações na curva em regiões fora do centro e dos extremos do intervalo de ζ utilizado.

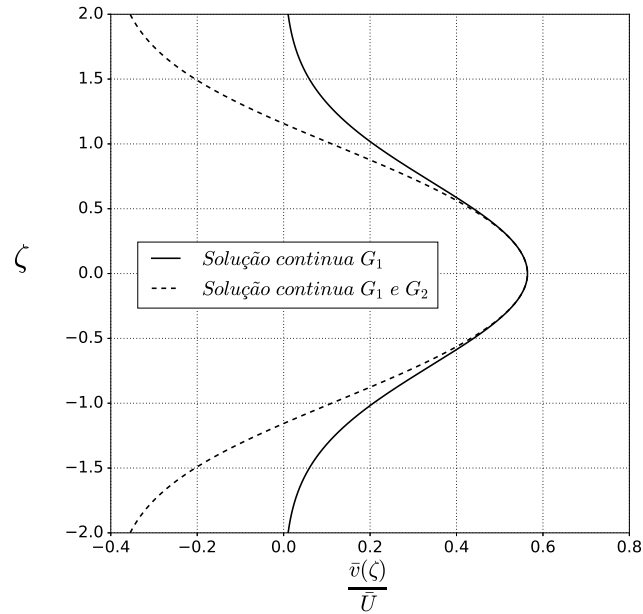
Em seguida, apresenta-se o perfil contínuo para a componente y de velocidade média, \bar{v} , que tem o seu perfil dado pela Eq. (4.112)

$$\bar{v}(\zeta) = \frac{\bar{U} c}{\sigma} \left[\lambda \left(\frac{e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} \right) + \lambda^2 \left(\frac{\zeta^2 e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{2\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}\zeta)}{2\sqrt{\pi}} + \frac{3 e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{4\sqrt{\pi}} - \frac{\zeta e^{-2\zeta^2}}{2\pi} \right) \right],$$

ressaltando também que o termo correspondente a $n = 2$ é o multiplicado por λ^2 .

A Fig. 5.23 apresenta a comparação entre as duas soluções contínuas.

Figura 5.23: Perfil da componente y da velocidade média de uma camada de mistura espacial em regime turbulento.



Para o caso de \bar{v} a diferença do perfil obtido quando se agrega o termo referente a $n = 2$ é maior que para o caso dos perfis de \bar{u} , sobretudo nas extremidades do domínio. No centro os dois perfis são coincidentes e os valores se distanciam conforme se aproxima dos extremos.

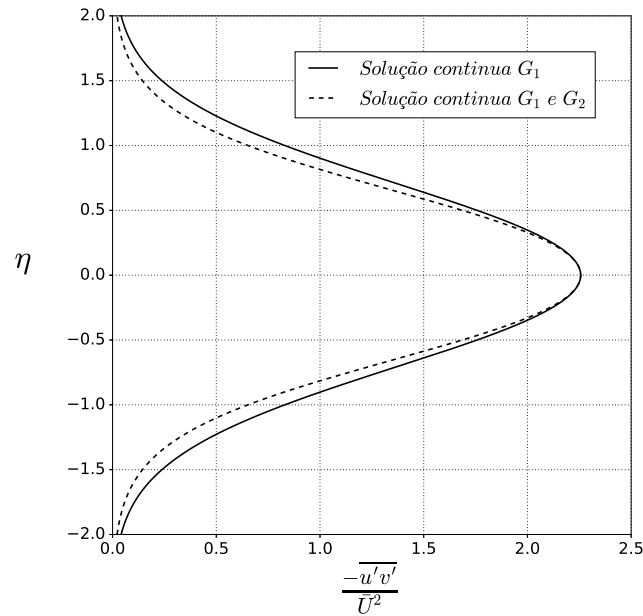
Por fim, é apresentada a mesma comparação para a componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds, que tem o perfil dado pela Eq. (4.114)

$$-\overline{u'v'} = 2\tilde{U}^2 \chi \sigma \lambda^2 \left[\frac{2e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} + \lambda \left(\frac{e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2\zeta e^{-2\zeta^2}}{\pi} - \frac{2e^{-\zeta^2} \operatorname{erf}(\zeta)}{\sqrt{\pi}} \right) \right].$$

Para esse caso é importante ressaltar que o termo referente a $n = 2$ é o que se encontra multiplicado por λ , já que existe em evidência λ^2 . Portanto, o termo com maior potência se encontra multiplicado por λ^3 .

Os perfis para a componente $\overline{u'v'}$ são mostrados na Fig. 5.24.

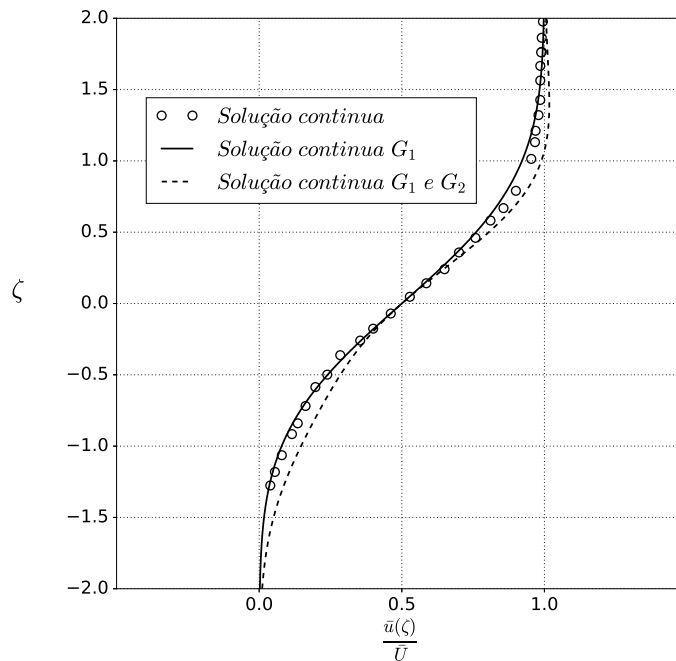
Figura 5.24: Perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds para uma camada de mistura espacial em regime turbulento.



Nota-se que, também para esse perfil, agregar o termo $n = 2$ na solução promoveu pequenas alterações na curva em regiões fora do centro do intervalo de ζ utilizado.

5.2.1.2 Comparação com experimentos materiais

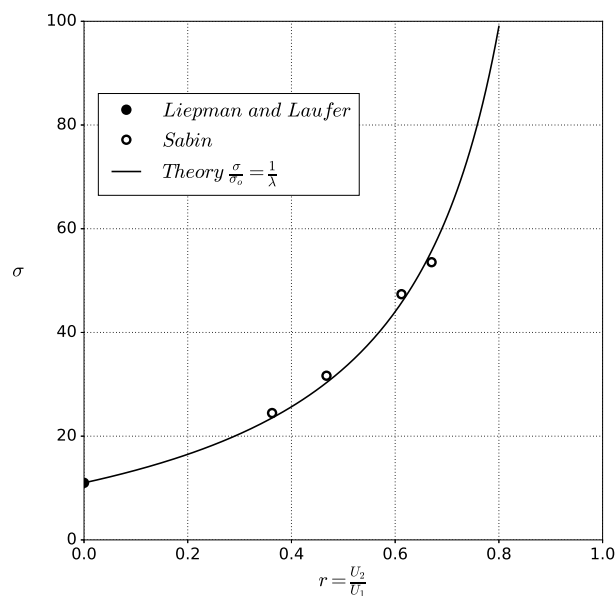
Figura 5.25: Comparação entre os perfis contínuos da componente x da velocidade média com resultados discretos obtidos por Reichardt (1942) via experimentação material de uma camada de mistura espacial em regime turbulento.



Na Fig. 5.25 apresentada a comparação entre os perfis contínuos da componente x da velocidade média com resultados discretos obtidos por Reichardt (1942) via experimentação material de uma camada de mistura espacial em regime turbulento.

Nessa figura apresentam-se os dados do experimento material e duas curvas referentes à solução contínua. Observa-se que a concordância entre solução contínuas e dados experimentais é aceitável, tanto para a solução aproximada com $n = 1$ quanto com a solução baseada em $n = 2$. Essa última apresenta uma leve melhora no comportamento global da comparação. Observa-se que na modelagem foi admitido que a viscosidade turbulenta fosse ordens de grandeza maior que a viscosidade molecular. Assim, o presente modelo se torna insensível ao número de Reynolds. Enfatiza-se novamente que, para comparar com os resultados experimentais de Reichardt (1942), considerou-se, como em seu trabalho, $U_2 = 0$ levando a $\lambda = 1$. Para recuperar a velocidade $\bar{u}(x, y)[m/s]$ pode-se especificar qualquer valor de $U_1[m/s]$ mas, segundo Schlichting *et al.* (1955), deve-se utilizar $\sigma = 13,5$, sendo que esse valor foi determinado como base em dados experimentais. Com isso, foi calculada a norma L_2 entre os dados discretos e os dois perfis apresentados na Fig. 5.25. Foram obtidos os valores $L_{2@n=1} = 0,0143$ e $L_{2@n=2} = 0,0136$. Esses resultados mostram uma melhora de 5% na diferença de resultado quando se agrega o termo correspondente a $n = 2$ à solução contínua.

Figura 5.26: Relação entre σ e $r = U_1/U_2$ apresentada por Sabin (1965).



Quanto ao valor de σ , Sabin (1965), apresenta uma relação entre esse parâmetro e a

razão entre as velocidades das correntes $r = U_2/U_1$ e a compara com resultados de experimentação material obtidos em seu trabalho e no trabalho de Liepmann e Laufer (1947). Os resultados de Sabin (1965) são reproduzidos na Fig. 5.26.

5.3 Jato plano

A presente seção apresenta os perfis obtidos pelas soluções contínuas desenvolvidas para jatos planos tanto em regime laminar, quanto turbulento. Foi realizada a comparação dos perfis com resultados discretos obtidos através de simulações computacionais realizadas no código MFSim e também com resultados de experimentação material apresentados na literatura. Ambas as comparações foram realizadas para os dois regimes, ressaltando-se que na simulação do jato plano turbulento foram utilizados os dois modelos $k - \epsilon$ implementados como parte do presente trabalho.

5.3.1 Regime laminar

A fim de se verificar a coerência da soluções contínuas obtidas para as propriedades de um jato plano em regime laminar buscou-se na literatura resultados de experimentos materiais, mas, como os mesmos são escassos, realizou-se também uma simulação computacional por meio do código MFSim.

5.3.1.1 Comparação com experimentos materiais

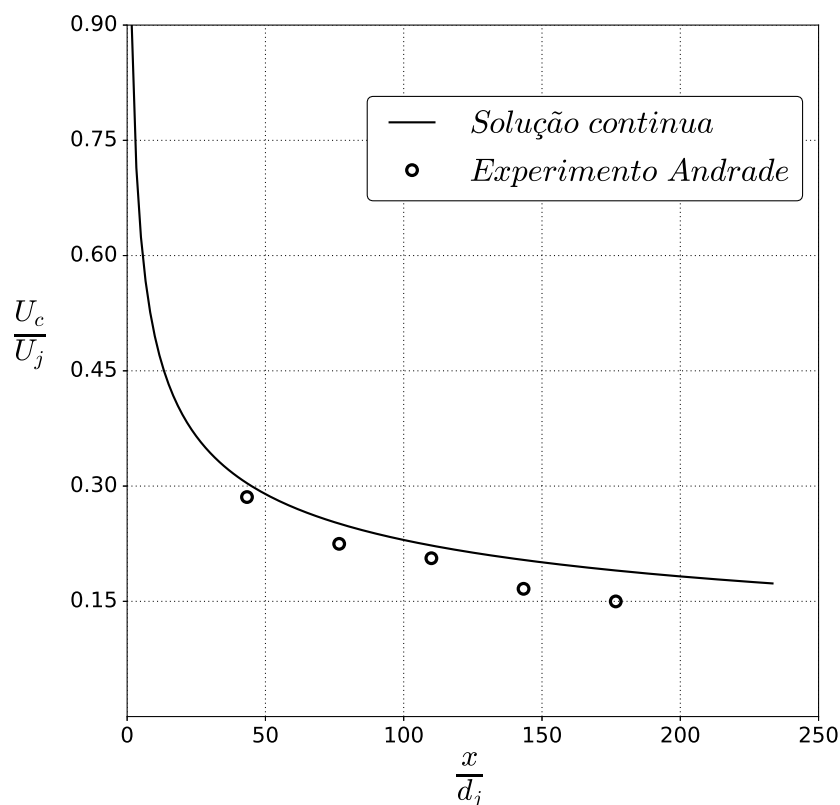
Trabalhos de experimentação material para jatos planos em regime laminar não são comuns na literatura. Andrade (1939) mostra resultados para esse caso e relata as dificuldades para obtê-los. A Fig.5.27 mostra a comparação dos dados experimentais obtidos por ele para a velocidade da linha de centro do jato com a solução contínua obtida apresentada na Eq.(4.161), a qual é dada por

$$\frac{U_c(x)}{U_j} = 0,45428 Re_j^{1/3} \left(\frac{x}{d_j} \right)^{-1/3} .$$

Pode-se observar pelo gráfico que os resultados da solução contínua e do experimento

material realizado por Andrade (1939) apresentam concordância aceitável.

Figura 5.27: Comparação entre a solução contínua para a velocidade da linha de centro de um plano em regime laminar com resultados do experimento material de Andrade (1939).



5.3.1.2 Comparação com simulações computacionais

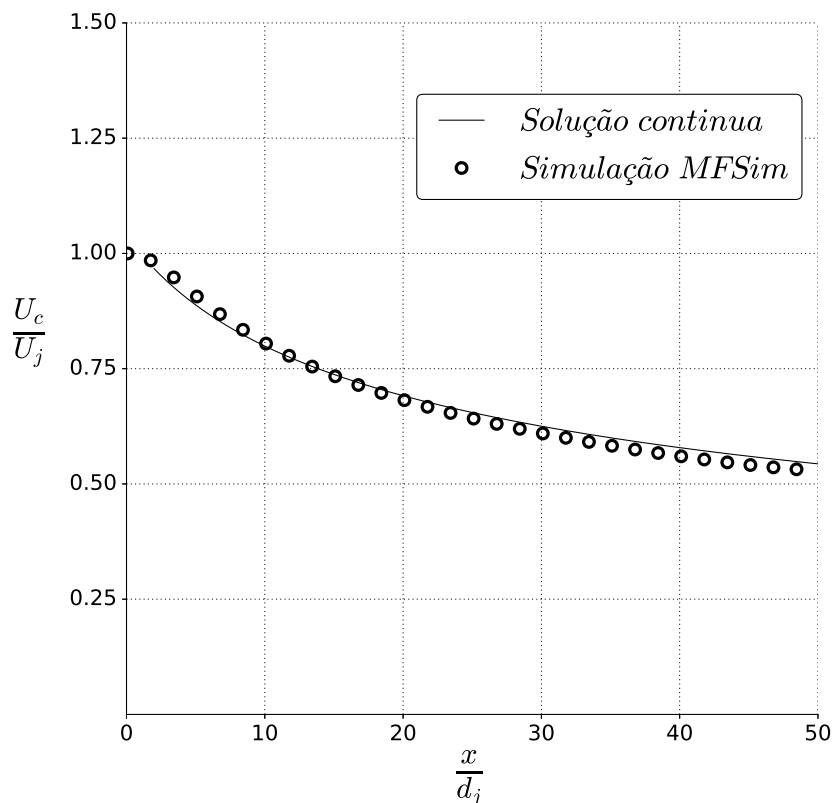
A fim de se verificar a coerência das soluções contínuas obtidas para esse caso foi realizada também uma simulação computacional, conforme mencionado anteriormente, para um jato plano em regime laminar a $Re_j = \frac{U_j d_j}{\nu} = 100$. Na simulação foram usados:

- Simulação bidimensional;
- Diâmetro do jato $d_j = 0,0755[m]$;
- Velocidade do jato $U_j = 0,1[m/s]$;
- Domínio com 50 diâmetros em x e 20 diâmetros na direção y ;
- 600 elementos na direção x e 240 na direção y ;

- Discretização do termo advectivo com o esquema cubista;
- SBDF para discretização semi-implícita do tempo;
- Condição de Dirichlet para velocidade na entrada do jato e Neumann nas demais faces;
- Jato inicializado ao longo de todo o domínio.

Para se extrair os perfis médios de velocidade e demais informações da simulação computacional foram utilizadas ao todo 3480 sondas para gravação de dados, sendo 600 sondas ao longo da linha de centro e 12 estações de 240 sondas posicionadas ao longo de y , sendo todas elas igualmente espaçadas. As estações em y foram colocadas a cada 4 diâmetros de distância do bocal. É importante ressaltar que as médias são realizadas apenas com os dados obtidos quando o jato se encontra em regime totalmente permanente.

Figura 5.28: Comparação da solução exata para a velocidade da linha de centro com dados de experimento virtual para um jato plano laminar.



A figura 5.28 mostra a comparação da solução contínua para a velocidade da linha de centro, dada pela Eq. (4.161), com os dados do experimento virtual para o jato plano laminar. É possível observar no gráfico que o platô inicial, onde a velocidade de centro não decai é pequeno, aproximadamente igual a 2 diâmetros, e é a partir dessa região que a solução exata passa a valer. A comparação mostra uma boa coerência entre a simulação e a solução contínua.

As Figuras 5.29 a 5.35 mostram uma comparação entre o perfil médio de velocidade discreto obtido na simulação computacional utilizando o código MFSim e a solução contínua dada pela Eq. (4.157):

$$F'(\eta) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right),$$

nas estações de sondas.

Segundo White e Corfield (2006) os perfis de velocidade passam a ser auto similares em aproximadamente $x/d_j = 25$, o que justifica a distância entre os perfis nas sondas mais próximas do bocal, porém já é possível notar uma boa coerência entre os resultados a partir de $x/d_j = 16$, como pode ser observado nas figuras.

Figura 5.29: Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 8$ para um jato plano laminar.

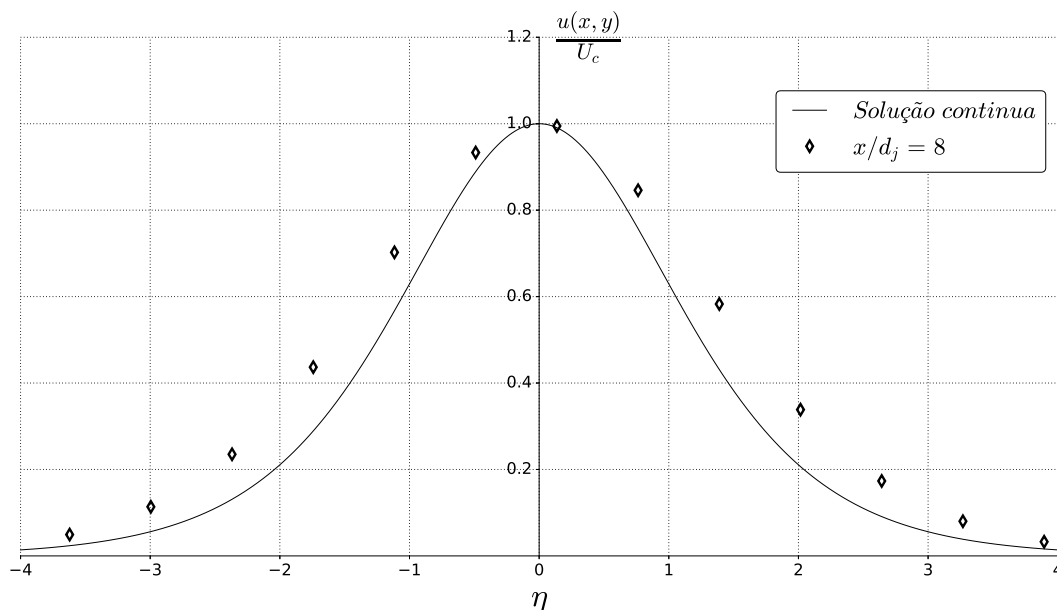


Figura 5.30: Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 12$ para um jato plano laminar.

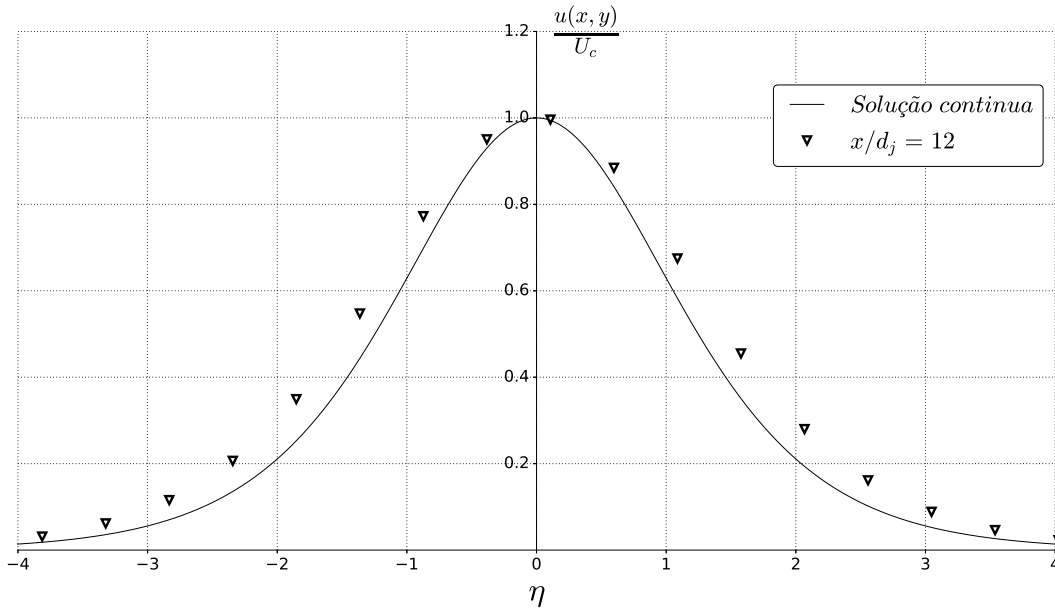


Figura 5.31: Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 20$ para um jato plano laminar.

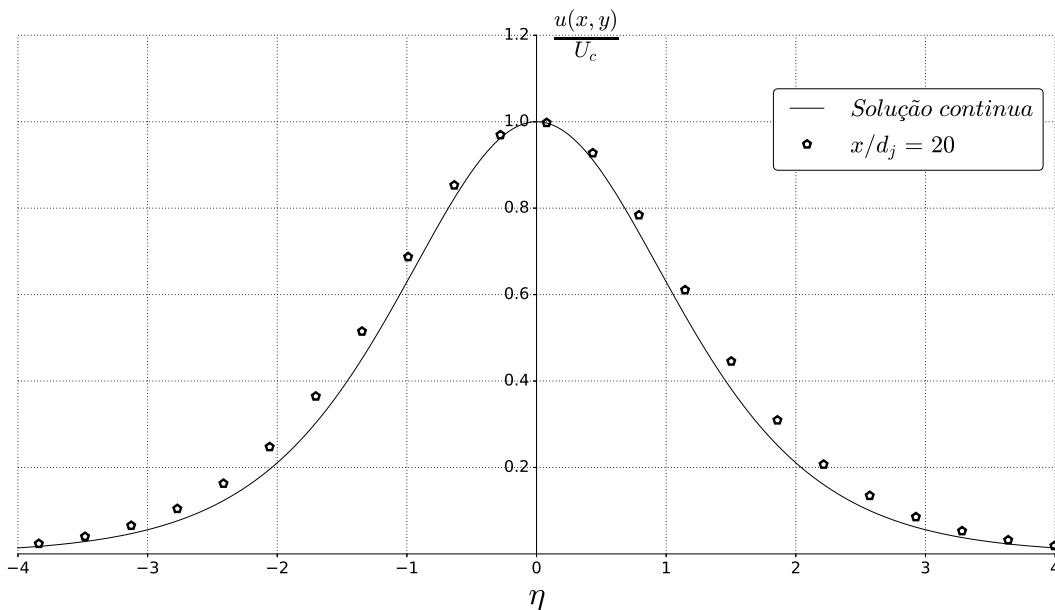


Figura 5.32: Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 24$ para um jato plano laminar.

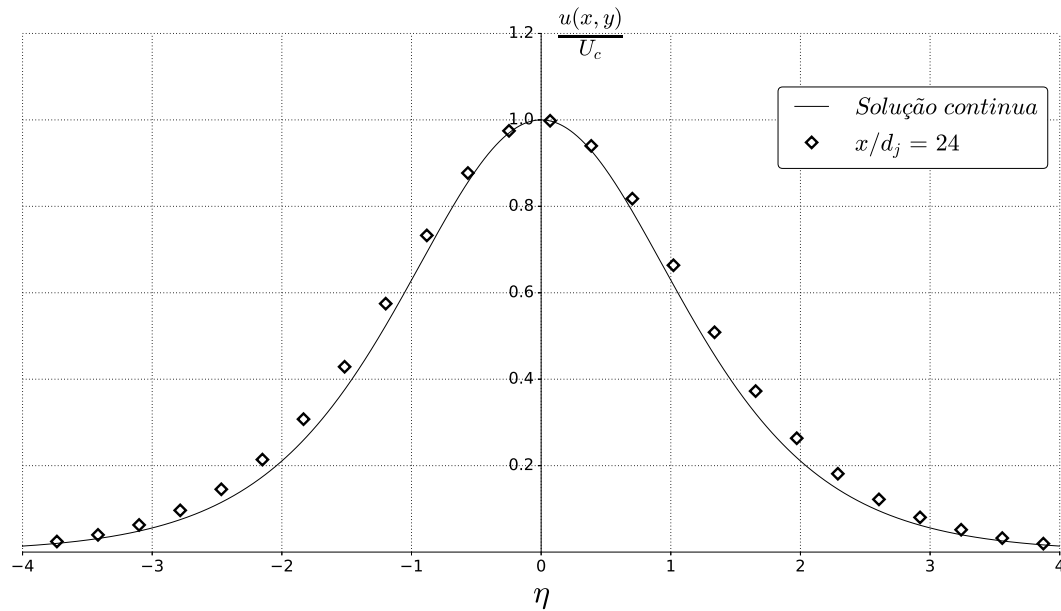


Figura 5.33: Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 32$ para um jato plano laminar.

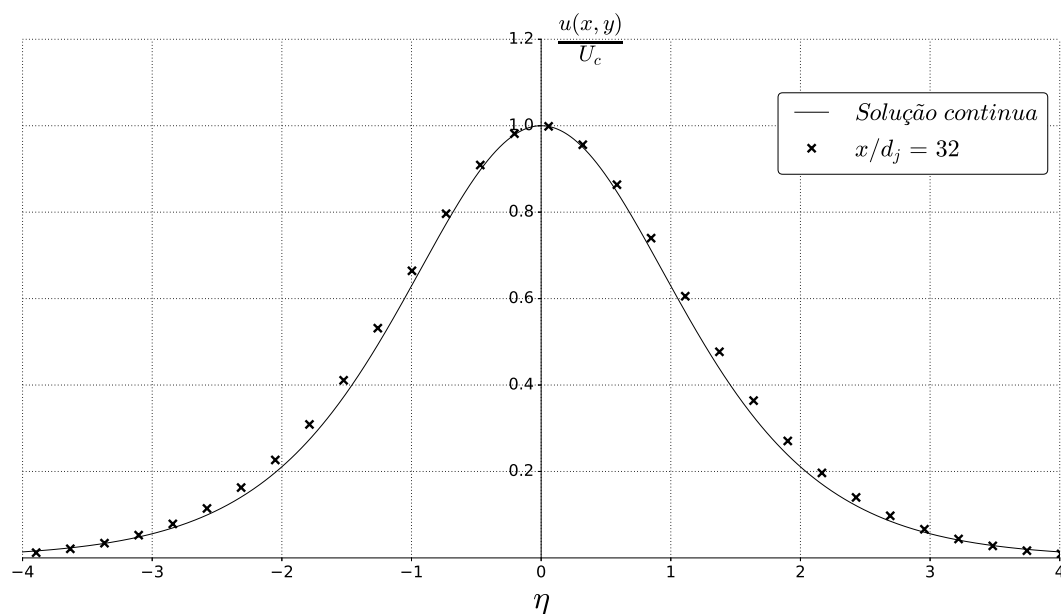


Figura 5.34: Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 40$ para um jato plano laminar.

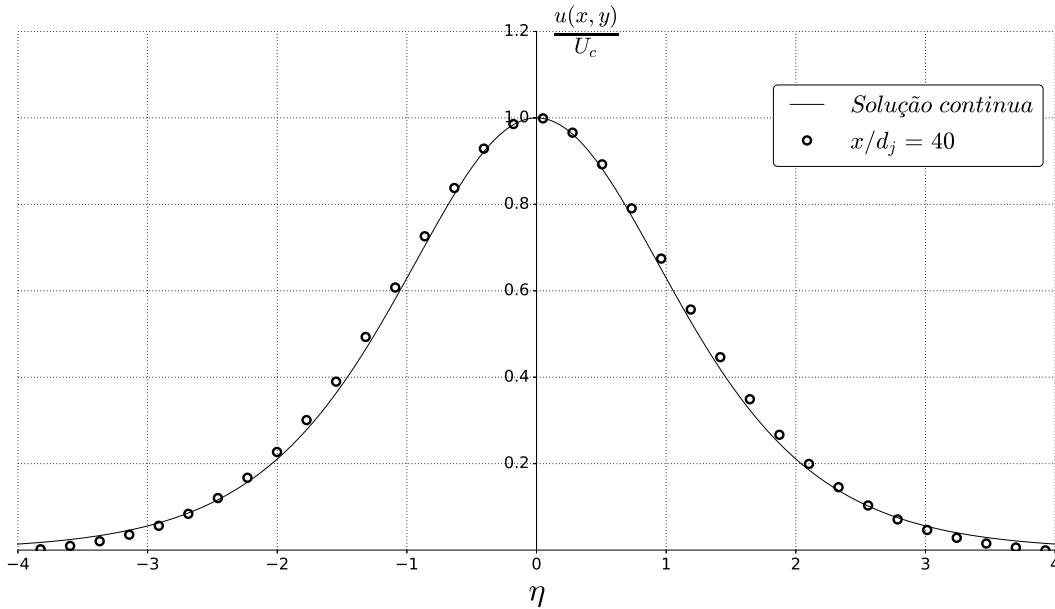


Figura 5.35: Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em $x/d_j = 44$ para um jato plano laminar.

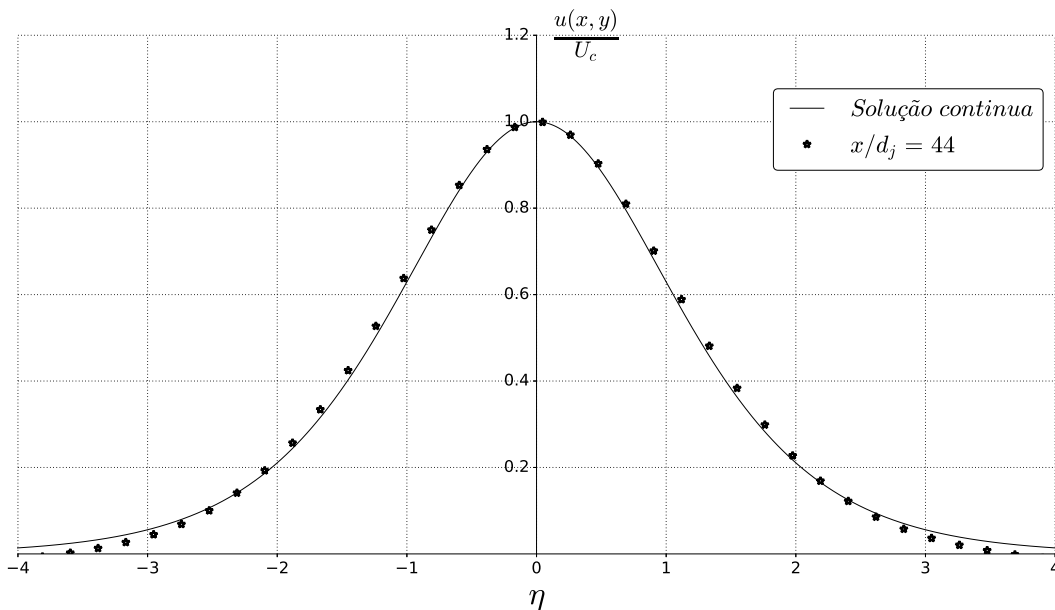
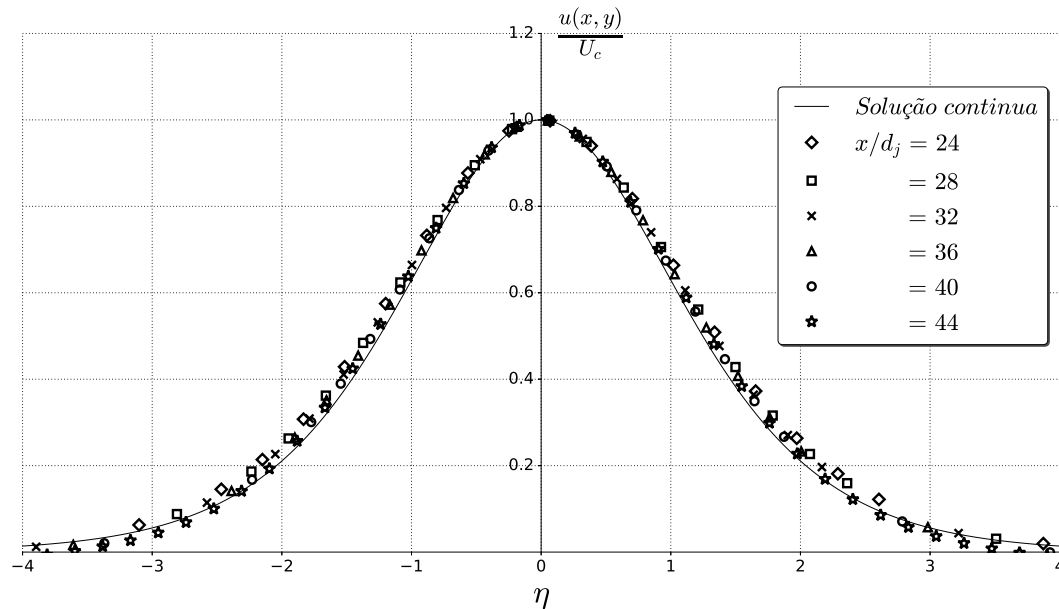
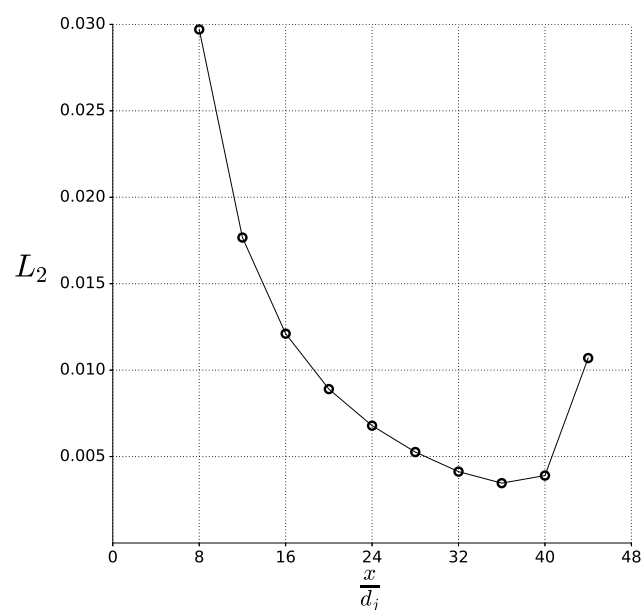


Figura 5.36: Comparação entre a solução contínua para o perfil médio de velocidade com resultados da simulação computacional realizada no código MFSim em para um jato plano laminar.



A Figura 5.36 mostra a comparação dos perfis médios de velocidade ao longo de várias seções em x e, além de mostrar a coerência entre os resultados da simulação e da solução contínua, também mostra que os perfis são, de fato, auto similares a partir da distância aproximada de $x/d_j = 20$ do bocal.

Figura 5.37: Norma L_2 avaliada em cada estação de sondas para um jato plano laminar.



A fim de melhor embasar a comparação entre os perfis contínuos e discretos da velocidade u foi calculada a norma L_2 em cada estação de sondas. O resultado é mostrado graficamente na Fig. 5.37:

Na Fig. 5.37 é possível observar que o valor da norma decai a medida que se afasta do bocal. Isso se deve ao fato de que quanto mais longe do bocal, mais segurança se tem de que o escoamento é auto-similar. Porém, é identificado um aumento no valor da norma para a última estação de sondas. Isso pode ser atribuído ao fator de que essa estação se encontra muito próxima a face de saída de fluido do domínio computacional, portanto, a condição de contorno pode afetar os valores de velocidade próximos.

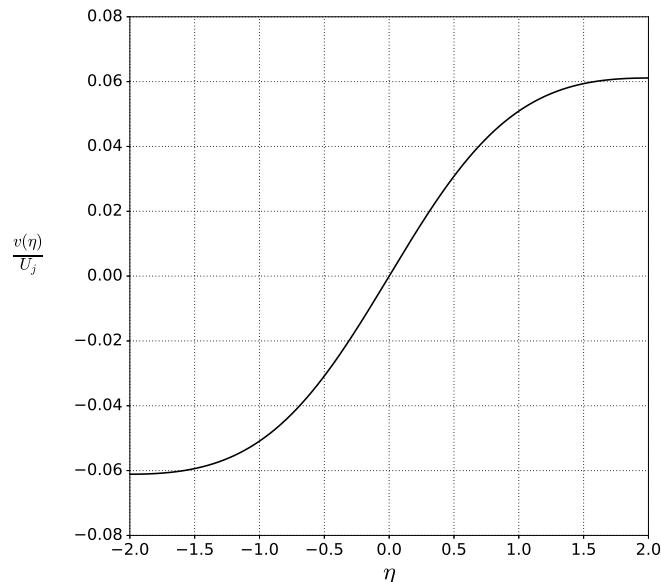
5.3.1.3 Perfis sem comparação com dados discretos

Por fim, apesar de não apresentar a comparação com dados discretos, é mostrado o perfil da componente de velocidade v obtido com a solução contínua, dada pela Eq. (4.167):

$$v(x, y) = 0,389 U_j Re_j^{1/3} \left(\frac{x}{d_j} \right)^{-1/2} \left[3\sqrt{2} \tanh \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) + 2\eta \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right].$$

Na Fig. 5.38, foi considerado o mesmo número de Reynolds utilizado na simulação computacional ($Re_j = 100$), com a avaliação sendo realizada em $x/d_j = 40$.

Figura 5.38: Perfil contínuo da velocidade v para um jato plano laminar em $x/d_j = 40$.



Após a apresentação dos perfis obtidos através das soluções contínuas e de comparações com resultados discretos para um jato plano em regime laminar, na seção seguinte serão apresentados os resultados e comparações para um jato plano em regime turbulento.

5.3.2 Regime turbulento

De posse das soluções contínuas obtidas para as propriedades de um jato plano em regime turbulento foi realizada a comparação com resultados discretos de experimentos materiais tanto para o perfil médio de velocidade, \bar{u} , quanto para a velocidade da linha de centro do jato, U_c . Além das comparações com resultados discretos de experimentos materiais, foram realizadas simulações computacionais no código MFSim utilizando os dois modelos de fechamento da turbulência implementados no presente trabalho: o modelo $k - \epsilon$ padrão e o modelo $k - \epsilon$ realizável.

5.3.2.1 Comparação com experimentos materiais

A presente seção será iniciada mostrando as comparações entre os perfis contínuos de \bar{u} e U_c com resultados discretos obtidos de experimentações materiais encontrados na literatura.

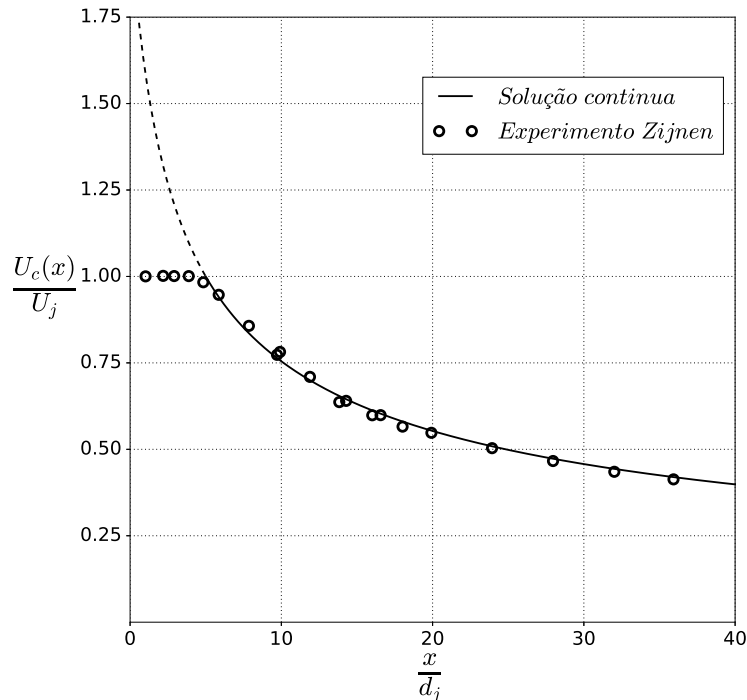
A solução exata para a velocidade da linha de centro de um jato plano turbulento, dada pela Eq. (4.193):

$$U_c(x) = 2,5711 U_j \left(\frac{x}{d_j} + 1,61054 \right)^{-1/2},$$

foi comparada com resultados de experimentos materiais apresentados por Zijnen (1958).

Analisando o resultado da comparação, mostrado na Fig. 5.39, observa-se que os resultados são coerentes entre si. Cabe ressaltar que no intervalo de x/d_j que vai da origem do jato até, aproximadamente, $x/d = 5$. segundo Tennekes e Lumley (1972), nenhuma propriedade do jato é auto-similar e, portanto, a solução não é válida nessa região. Na região onde a solução não é válida a curva contínua foi apresentada pontilhada. Na região de validade do perfil contínuo observa-se uma boa concordância com os resultados discretos obtidos por Zijnen (1958).

Figura 5.39: Comparação entre a solução contínua para a velocidade da linha de centro de um jato plano turbulento com resultados discretos obtidos por Zijnen (1958) via experimentação material.



O perfil contínuo da componente x de velocidade média, \bar{u} , é representado pela Eq. (4.195), a qual é dada por:

$$\bar{u}(x, y) = 2,5711 U_j \left(\frac{x}{d_j} + 1,61054 \right)^{-1/2} \operatorname{sech}^2 \left(0,96073 \frac{y}{\delta(x)} \right),$$

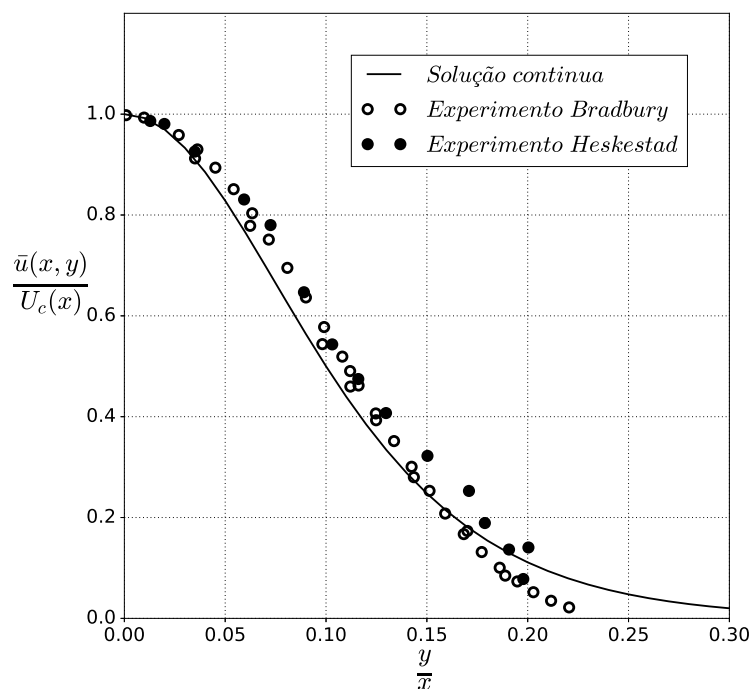
ressaltando que para um jato plano turbulento o espalhamento é calculado como $\delta(x) = 0,109 x$.

Na Fig.5.40 apresenta-se a comparação entre a solução contínua obtida no presente trabalho para o perfil médio de velocidade com os resultados dos trabalhos de experimentação material realizados por Bradbury (1965) e Heskestad (1965).

Analisando a Fig.5.40 é possível observar um afastamento entre os dados da solução exata e dos dados experimentais na extremidade do jato, isso acontece pelo fato da solução exata necessitar do uso de condições de contorno no processo de resolução. Para isso, o modo de definição que não requer o uso de dados empíricos é a determinação de tais condições no infinito, porém estudos sobre jatos mostram que o perfil médio não se iguala com a velocidade

do escoamento no infinito mas em uma distância finita da linha de centro do jato. Tal deficiência pode ser trabalhada em trabalhos futuros, visando melhorar a solução contínua nesse sentido.

Figura 5.40: Comparação entre a solução contínua para a componente x de velocidade para jatos planos turbulentos e resultados obtidos por Bradbury (1965) e Heskestad (1965) via experimentação material.



5.3.2.2 Comparação com simulações computacionais

Para o jato plano em regime turbulento foram realizadas duas simulações no código MFSim. As mesmas utilizaram modelos de fechamento da turbulência da classe URANS implementados como parte do presente trabalho: os modelos $k - \epsilon$ padrão e $k - \epsilon$ realizável. As simulações utilizando os modelos $k - \epsilon$ padrão e $k - \epsilon$ realizável retornam o comportamento médio do escoamento em regime permanente, não requerendo pois a realização de médias espaciais ou temporais.

Uma observação importante a se realizar é que o uso de tais modelos acrescenta duas equações de transporte ao conjunto de EDPs resolvido, uma para k e outra para ϵ . O acréscimo de tais equações de transporte exige que se forneça o campo inicial de k e ϵ e seus valores nos contornos quando se usa condição de Dirichlet. O cálculo de k para a condição de contorno

do jato é dado por

$$k = \frac{3}{2}(\bar{U}_j I)^2, \quad (5.7)$$

onde \bar{U}_j é a velocidade média do perfil de entrada do jato e I é a intensidade turbulenta. Essa quantidade pode ser definida através de um valor obtido em experimento material ou por meio da expressão

$$I = 0,16 Re_j^{-1/8} \quad (5.8)$$

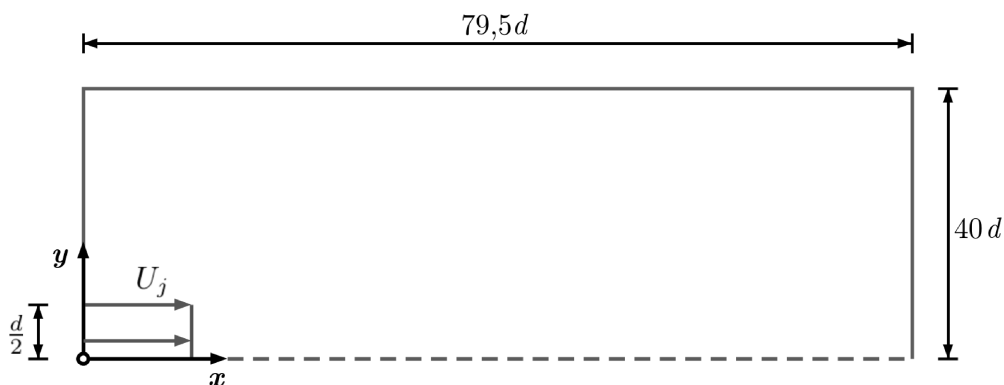
A obtenção do valor de ϵ para as condições iniciais e de contorno pode ser realizada baseando-se no valor de k através da expressão

$$\epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{d_j} \quad (5.9)$$

onde C_μ é uma constante e d_j é a altura total do bocal do jato.

Nas simulações realizadas foi utilizado um domínio considerando apenas metade do jato, já que o comportamento do escoamento é simétrico em relação à linha de centro do jato. O domínio computacional utilizado é representado na Fig. 5.41

Figura 5.41: Domínio computacional utilizados nas simulações computacionais realizadas no código MFSim para um jato plano turbulento.

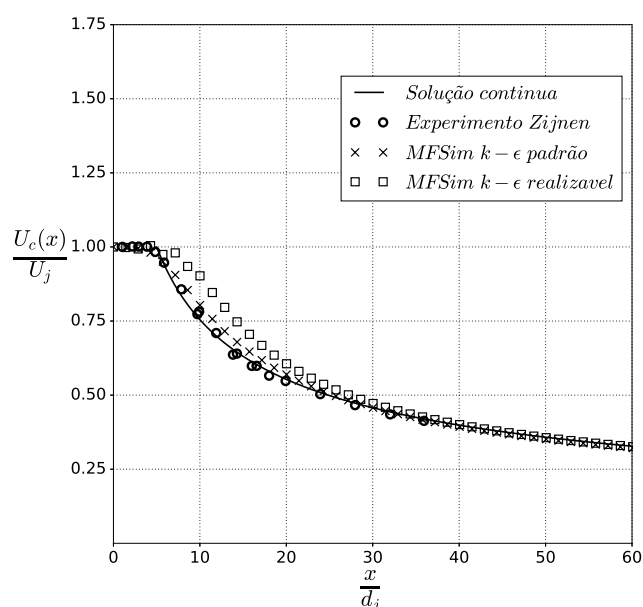


Na representação do domínio é possível observar que o mesmo tem dimensões de $79,5d_j \times 40d_j \times 0,67d_j$. Foram utilizadas 6 células por diâmetro para compor a malha uniforme das simulações. O jato simulado tem um perfil uniforme na entrada com $U_j = 56.2 [m/s]$

e a altura do bocal utilizada foi $d_j = 0,0755[m]$. As propriedades físicas utilizadas para o fluido foram $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 4.443 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$ que resultam em um número de Reynolds $Re_j = 9.55 \times 10^4$.

A Fig. 5.42 apresenta os resultados discretos para a velocidade na linha de centro do jato obtidos com as simulações computacionais realizadas utilizando os modelos $k - \epsilon$ padrão e $k - \epsilon$ realizável comparados com a solução contínua apresentada no presente trabalho e com os resultados obtidos por Zijnen (1958) através de experimentos materiais.

Figura 5.42: Comparação entre os resultados discretos de simulações computacionais no MFSim, a solução contínua para a velocidade da linha de centro de um jato plano turbulento e resultados discretos obtidos por Zijnen (1958) via experimentação material.



Pela Fig. 5.42 pode-se observar que, para a predição da velocidade na linha de centro do jato, o modelo $k - \epsilon$ padrão apresenta melhor concordância com o perfil obtido pela solução contínua e com os resultados de experimentos materiais de Zijnen. O modelo $k - \epsilon$ realizável apresentou dificuldades em lidar com o núcleo potencial inicial do jato, e isso comprometeu os resultados para a predição da velocidade U_c no restante do domínio.

As Figs.5.43 a 5.46 apresentam os resultados discretos para a velocidade \bar{u} do jato obtidos com as simulações computacionais realizadas utilizando os modelos $k - \epsilon$ padrão e $k - \epsilon$ realizável comparados com a solução contínua apresentada no presente trabalho em quatro valores de x/d_j .

Figura 5.43: Comparação entre os resultados discretos de simulações computacionais no MFSim e a solução contínua para a velocidade \bar{u} de um jato plano turbulento avaliada em $x/d_j = 50$.

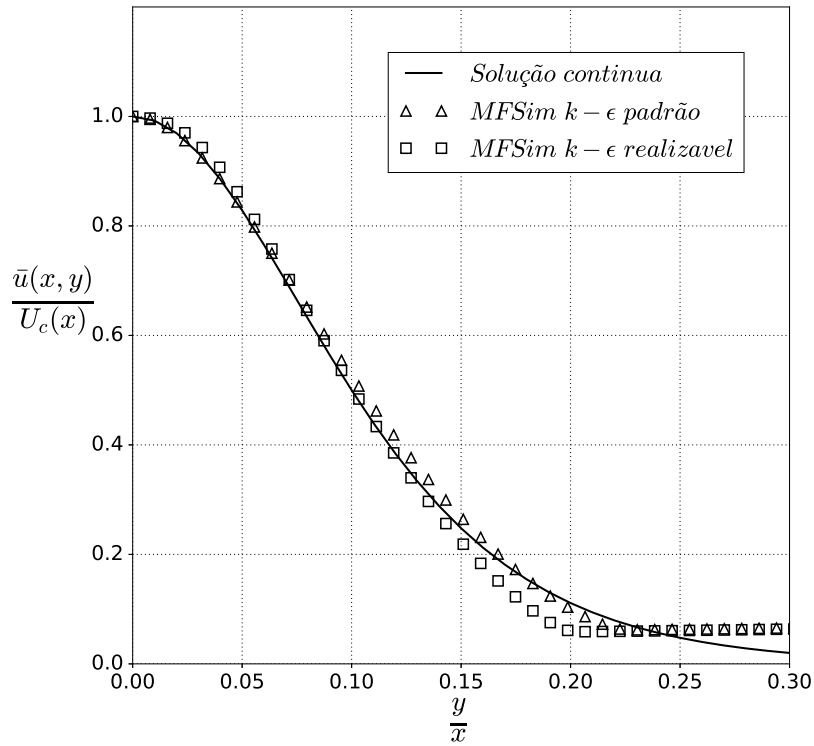


Figura 5.44: Comparação entre os resultados discretos de simulações computacionais no MFSim e a solução contínua para a velocidade \bar{u} de um jato plano turbulento avaliada em $x/d_j = 60$.

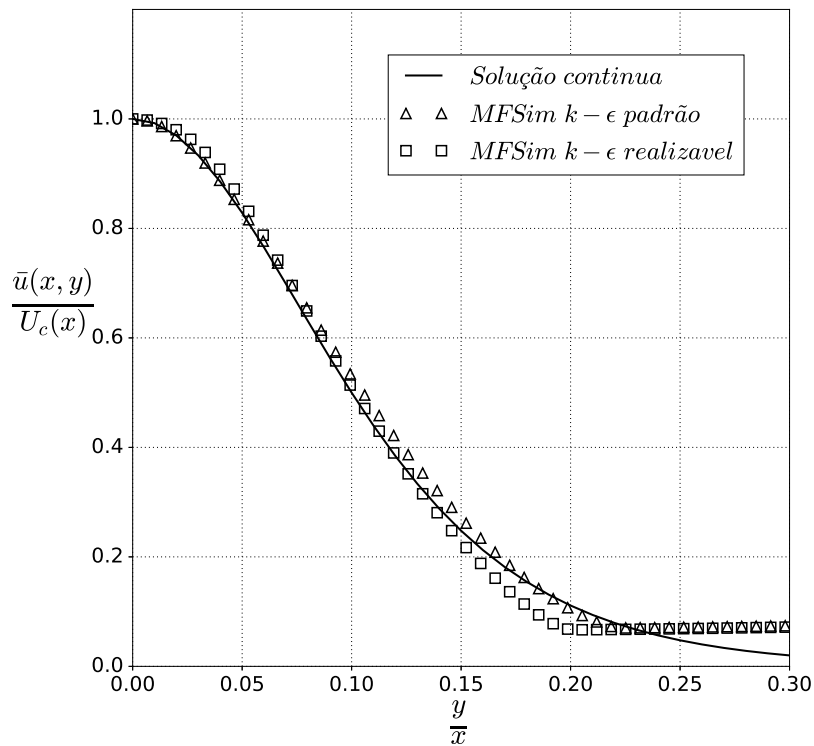


Figura 5.45: Comparação entre os resultados discretos de simulações computacionais no MFSim e a solução contínua para a velocidade \bar{u} de um jato plano turbulento avaliada em $x/d_j = 70$.

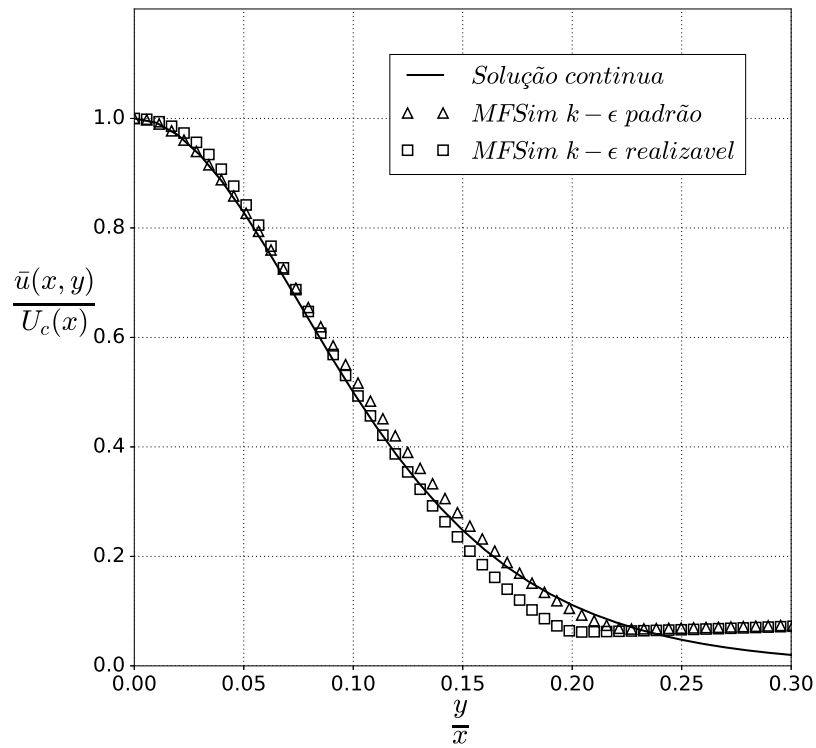
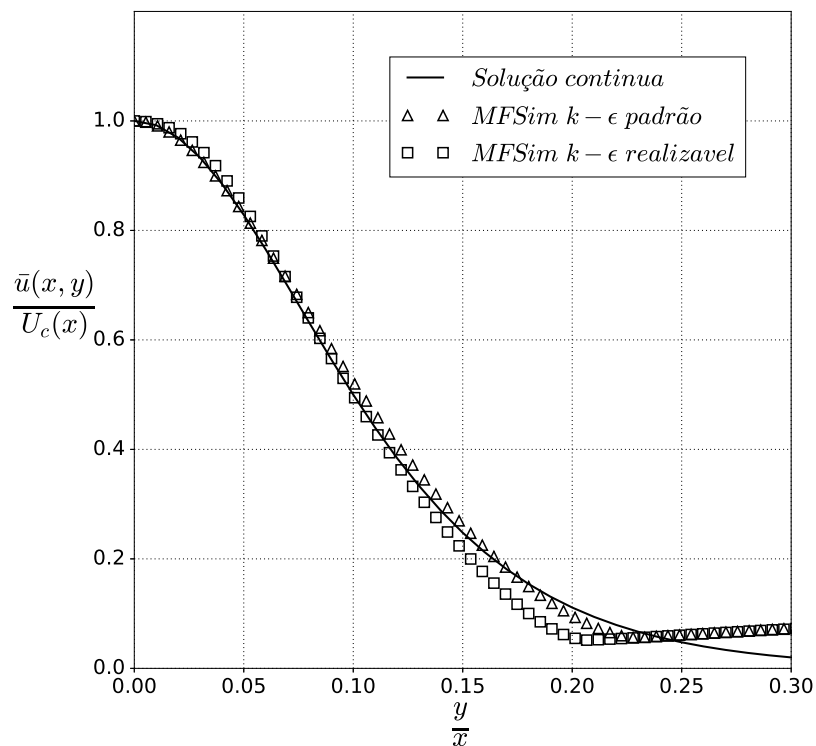


Figura 5.46: Comparação entre os resultados discretos de simulações computacionais no MFSim e a solução contínua para a velocidade \bar{u} de um jato plano turbulento avaliada em $x/d_j = 75$.



Através das Figs.5.43 a 5.46 é possível observar que os dois modelos $k - \epsilon$ apresentam concordância semelhante com a solução contínua, porém no extremo do perfil, o modelo $k - \epsilon$ realizável se distancia mais da solução contínua.

5.3.2.3 Perfis sem comparação com resultados discretos

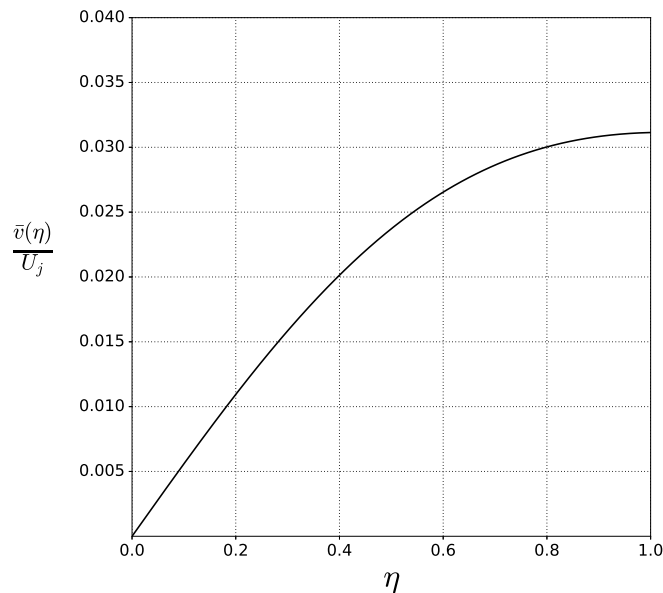
Os perfis para a velocidade \bar{v} e para $\overline{u'v'}$ serão apresentados, porém sem que sejam comparados com resultados discretos obtidos via experimentação.

O primeiro perfil apresentado é para a componente y de velocidade, dado pela Eq. (4.197):

$$\bar{v}(x, y) = 0,28 U_j \left(\frac{x}{d_j} + 1,61054 \right)^{-1/2} \left[\eta \operatorname{sech}^2(0,96073 \eta) + 0,5205 \left(\frac{x}{x + 1,61054 d_j} \right) \tanh(0,96073 \eta) \right].$$

O perfil obtido da solução contínua é apresentado na Fig. 5.47.

Figura 5.47: Perfil contínuo da velocidade v para um jato plano turbulento em $x/d_j = 55$.

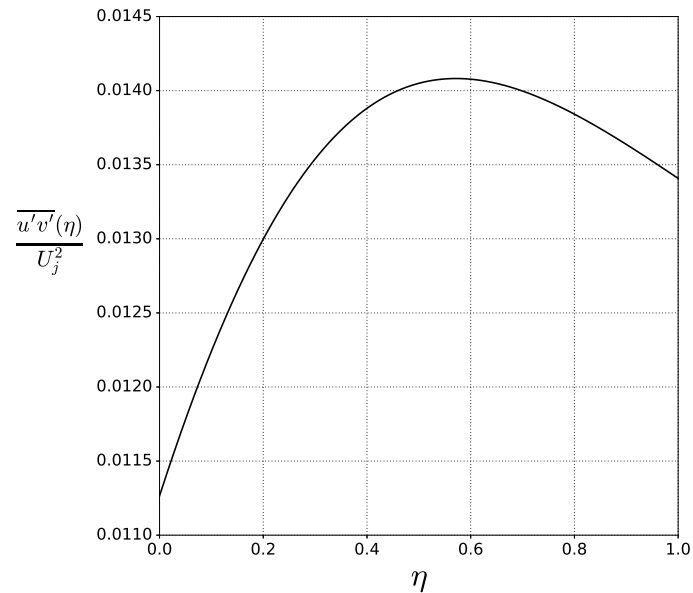


Para o jato plano em regime turbulento obteve-se também o perfil para a componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds, o qual é dado pela Eq. (4.200):

$$-\overline{u'v'} = -1,173 \chi U_j^2 \tanh(0,96073 \eta) \operatorname{sech}^2(0,96073 \eta),$$

e apresentado na Fig. 5.48

Figura 5.48: Perfil contínuo da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds para um jato plano turbulento em $x/d_j = 55$.



5.4 Esteira distante

5.4.1 Regime laminar

5.4.1.1 Perfis sem comparações com dados discretos

Para o caso da esteira gerada por um escoamento laminar sobre um corpo imerso avaliada em uma região distante serão apresentados somente os perfis obtidos através das soluções contínuas, sem a comparação com resultados discretos extraídos de experimentos materiais ou computacionais.

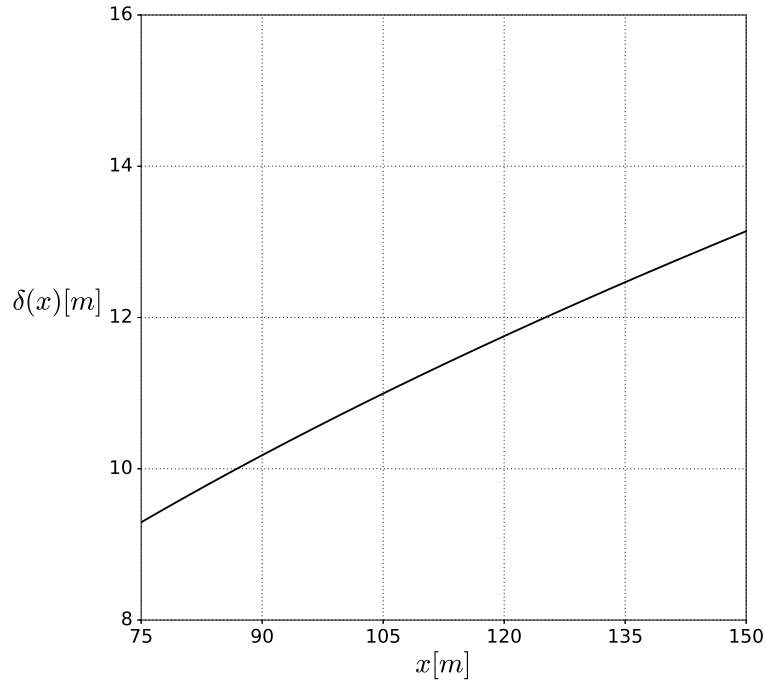
Nos perfis apresentados será considerada uma situação puramente matemática onde $U_\infty = 1[m/s]$, $d = 1[m]$, $Re_d = 16$ e $c_D = 3$. Cabe ressaltar que a região distante considerada no presente trabalho inicia-se em $x/d = 75$

O primeiro perfil apresentado é o do espalhamento da esteira, $\delta(x)$, dado pela Eq. (4.245):

$$\delta(x) = 4,29193 \left(\frac{d}{Re_d} \right)^{1/2} x^{1/2}, \quad (5.10)$$

e mostrado na Fig. 5.49.

Figura 5.49: Perfil do espalhamento de uma esteira distante gerada por um escoamento laminar ao longo de x .



Através da Fig. 5.49 é possível observar que a esteira aumenta o espalhamento conforme a região de avaliação se distancia do corpo imerso. Esse é o comportamento físico esperado já que, em uma região infinitamente distante do corpo imerso o perfil de velocidade $\bar{u}(x, y)$, tenderá a um valor constante igual à velocidade da corrente livre, U_∞ .

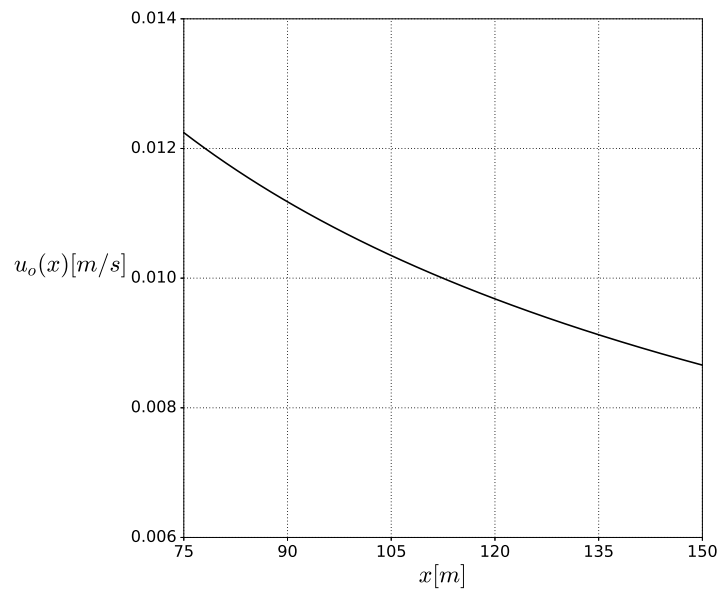
Assumindo os mesmos dados supracitados será apresentado o perfil do déficit máximo de velocidade, $u_o(x)$, o qual é dado pela Eq. (4.247)

$$u_o(x) = 0,14139 \frac{U_\infty c_D}{\sqrt{Re_d}} \left(\frac{x}{d}\right)^{-1/2}. \quad (5.11)$$

A solução contínua para $u_o(x)$ é apresentada na Fig. 5.50.

Também no perfil do déficit máximo, mostrado na Fig. 5.50, é observado um comportamento da solução contínua consistente com a física do problema já que, conforme a região de avaliação se distancia do corpo imerso, o déficit de velocidade tende a diminuir devido ao transporte difusivo de informações do centro da esteira para a região da corrente livre.

Figura 5.50: Perfil do déficit máximo de uma esteira distante gerada por um escoamento laminar ao longo de x .

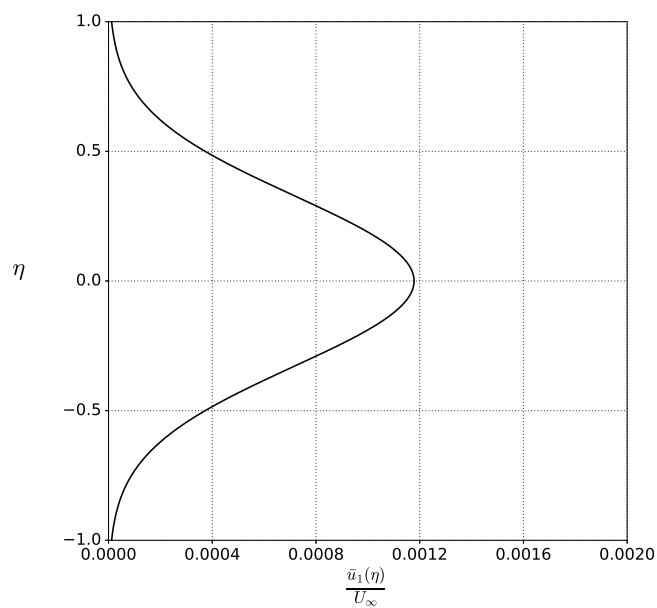


Na Fig. 5.51 é apresentado o perfil para o déficit de velocidade, dado pela Eq. (4.248)

$$\bar{u}_1(x, y) = 0,14139 \frac{U_\infty c_D}{\sqrt{Re_d}} \left(\frac{x}{d}\right)^{-1/2} \exp \left[-4,60517 \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^2 \right],$$

avaliado em $x/d = 90$, região do domínio onde o escoamento tem comportamento auto similar.

Figura 5.51: Perfil do déficit de velocidade de uma esteira distante gerada por um escoamento laminar avaliado em $x/d = 90$.



Observando o perfil mostrado na Fig. 5.51 é possível notar que realmente a função

contínua possui comportamento assintótico em $y = \pm\delta(x)$, tal como imposto pelas condições de contorno utilizadas e que realmente o déficit máximo de velocidade, u_o ocorre em $y = 0$.

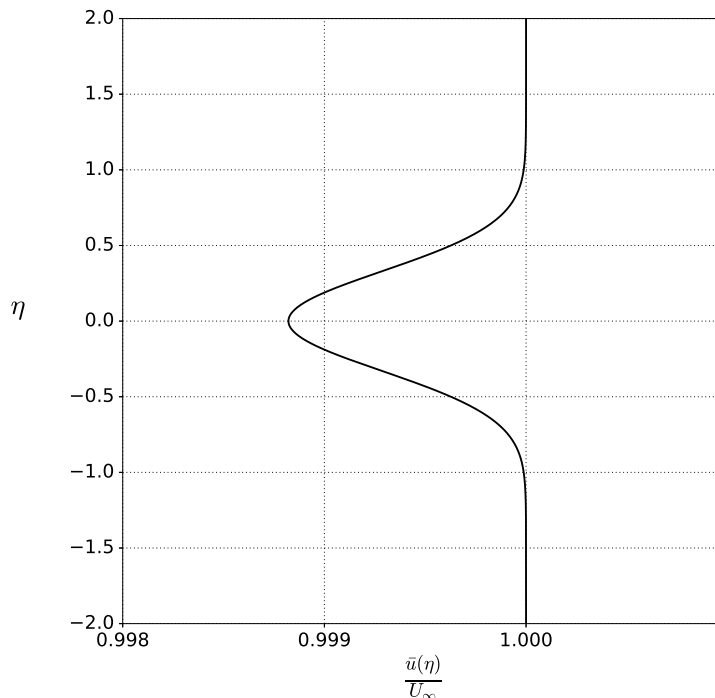
Na Fig. 5.52 é apresentado o perfil para a componente x da velocidade média, \bar{u} , dada pela Eq. (4.249)

$$\bar{u}(x, y) = U_\infty \left[1 - 0,14139 \frac{c_D}{\sqrt{Re_d}} \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \exp \left[-4,60517 \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^2 \right] \right],$$

também avaliada em $x/d = 90$.

Percebe-se na Fig. 5.52 que o déficit de velocidade é realmente um valor bem pequeno perante à velocidade da corrente livre, tanto que a escala precisou ser modificada para favorecer a visualização do perfil de \bar{u} . Tal observação confirma a hipótese utilizada na linearização da EDP e em simplificações promovidas no TTR, de que, na região de auto-similaridade, $\bar{u}_1 \ll U_\infty$.

Figura 5.52: Perfil da componente x da velocidade média de uma esteira distante gerada por um escoamento laminar avaliado em $x/d = 90$.



Após a apresentação de todos os perfis obtidos através das soluções contínuas para o caso da esteira laminar a jusante de um corpo imerso avaliada em uma região distante, na seção seguinte serão apresentados os resultados para o mesmo caso em regime turbulento.

5.4.2 Regime turbulento

Para o caso da esteira gerada por um escoamento turbulento sobre um corpo imerso avaliada em uma região distante serão apresentados somente todos perfis obtidos através das soluções contínuas, porém, a comparação com resultados discretos extraídos de experimentos materiais só será realizada para o perfil do déficit de velocidade \bar{u}_1 . Para a esteira distante turbulenta, assim como para a laminar, apresentada na seção precedente, não foi realizada nenhuma simulação computacional.

5.4.2.1 Comparação com experimentos materiais

Existem na literatura diversos trabalhos de experimentação material para esteiras formadas a jusante de corpos imersos, considerando o escoamento sobre diversos tipos de corpos. Na presente seção serão apresentados os resultados de três trabalhos nesse sentido. Schlichting (1930) realizou a experimentação material da esteira formada a jusante de um cilindro, enquanto Fage e Falkner (1932) e Weygandt e Mehta (1995) apresentam resultados de experimentos materiais para esteiras formadas a jusante de uma placa plana. O perfil comparado com os dados discretos da literatura, para todos os trabalhos citados, será o de $\bar{u}_1(x, y)$

O perfil do déficit de velocidade é dado pela Eq. (4.291):

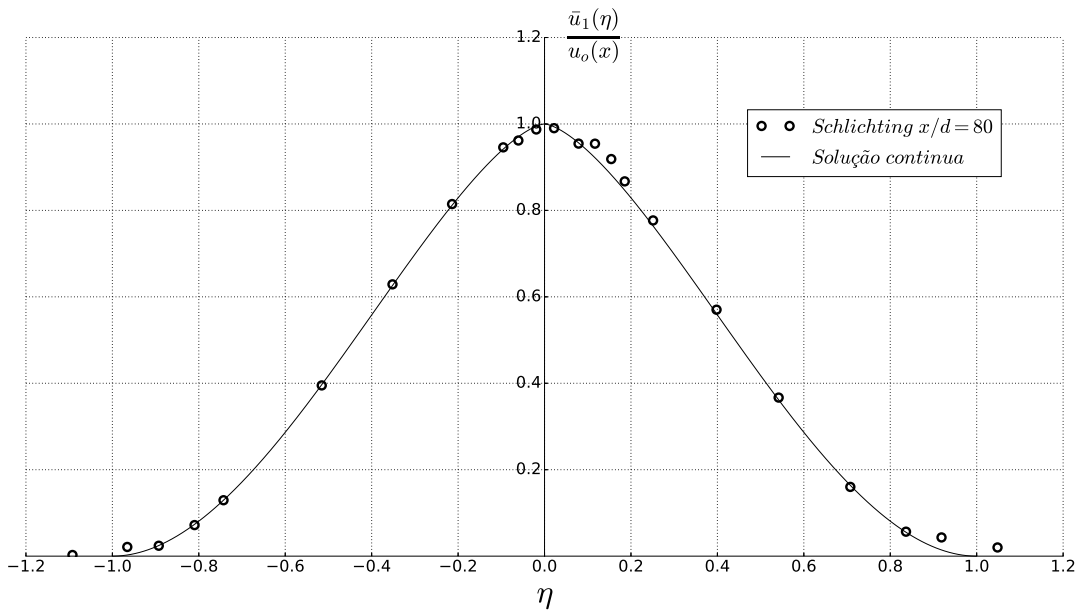
$$\bar{u}_1(x, y) = U_\infty \frac{\sqrt{10} c_D}{18 \alpha} \left(\frac{x}{d}\right)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{3/2}\right]^2, \quad (5.12)$$

onde $y/\delta(x) = \eta$.

Cabe ressaltar também que a constante α presente na solução contínua vem do modelo do comprimento de mistura de Prandtl e é diferente para cada escoamento. Para uma esteira distante turbulenta, de acordo com a Tab. 3.1, tem-se $\alpha = 0,18$.

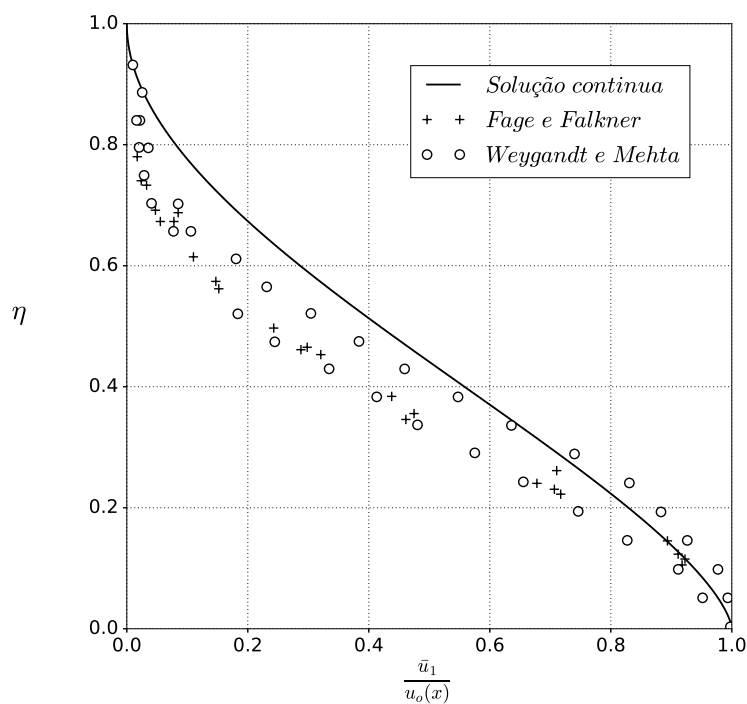
Para a comparação desse perfil foram utilizados resultados de três trabalhos de experimentação material. O primeiro trabalho a ter seus resultados comparados com o perfil da solução contínua foi realizado por Schlichting (1930). A Fig. 5.53 mostra a comparação entre os resultados discretos obtidos via experimentos materiais e a solução contínua obtida para o déficit de velocidade.

Figura 5.53: Comparação entre a solução contínua obtida para o déficit de velocidade e resultados discretos obtidos por Schlichting (1930) em $x/d = 80$.



É possível observar na Fig. 5.53 que os dados obtidos em $x/d = 80$ apresentam boa concordância com a solução contínua obtida. Tal fato pode ser atribuído à região onde foram realizadas as medições já que em $x/d = 80$ todos os perfis de propriedades do escoamento são auto-similares.

Figura 5.54: Comparação entre a solução contínua obtida para o déficit de velocidade e resultados discretos obtidos por Fage e Falkner (1932) e Weygandt e Mehta (1995).



Esse mesmo perfil foi comparado também com resultados discretos de experimentos materiais realizados por Fage e Falkner (1932) e Weygandt e Mehta (1995), os quais são comparados com a solução contínua na Fig. 5.54

Perante as três comparações realizadas, nota-se que a melhor concordância com a solução contínua acontece com os resultados do trabalho de Schlichting (1930), porém a proximidade com os demais resultados também pode ser considerada razoável.

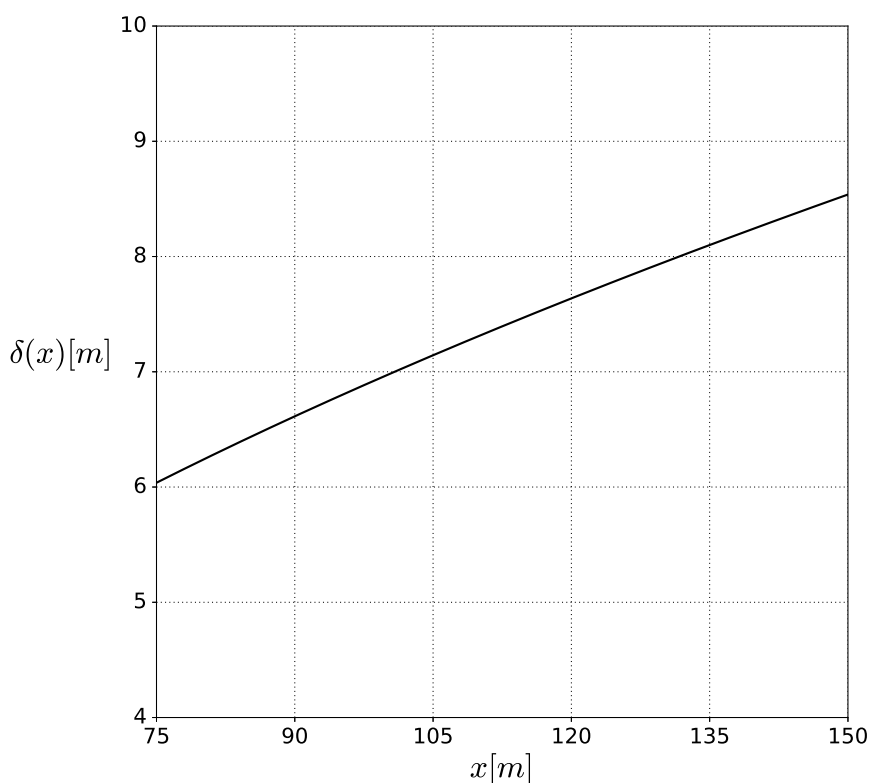
Para a apresentação dos demais perfis considerou-se uma situação hipotética, onde $c_D = 1.5$ e $d = 1.0[m]$.

O primeiro perfil apresentado é o do espalhamento da esteira, $\delta(x)$, dado pela Eq. (4.289)

$$\delta(x) = \sqrt{10} \alpha (c_D d x)^{1/2}.$$

e mostrado na Fig. 5.55, para um intervalo de x/d indo de 75 a 150, já que foi utilizado um valor de $d = 1[m]$. Nesse intervalo, os perfis do escoamento são auto-similares

Figura 5.55: Perfil do espalhamento de uma esteira distante gerada por um escoamento turbulento ao longo de x .



Através da Fig. 5.55 é possível observar que a esteira aumenta o espalhamento conforme a região de avaliação se distancia do corpo imerso. Esse é o comportamento físico esperado já que, em uma região infinitamente distante do corpo imerso o perfil de velocidade $\bar{u}(x, y)$, tenderá a um valor constante igual à velocidade da corrente livre, U_∞ .

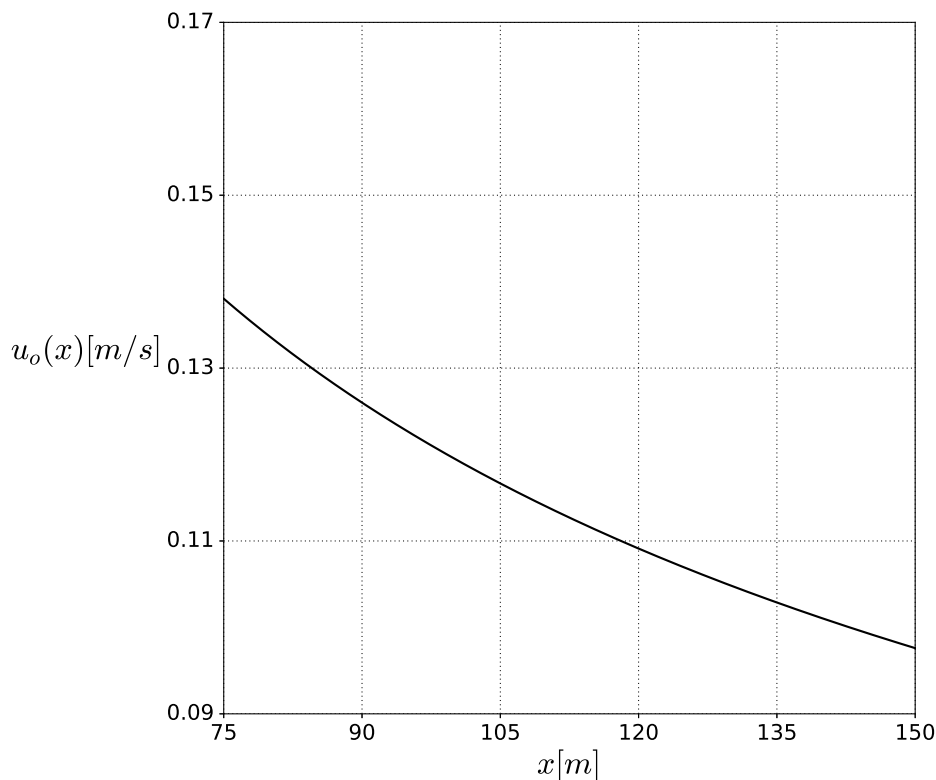
5.4.2.2 Perfis sem comparação com dados discretos

Assumindo os mesmos dados supracitados será apresentado o perfil do déficit máximo de velocidade, $u_o(x)$, o qual é dado pela Eq. (4.290)

$$u_o(x) = U_\infty \frac{\sqrt{10} c_D}{18 \alpha} \left(\frac{x}{d}\right)^{-1/2}.$$

A solução contínua para $u_o(x)$ é apresentada na Fig. 5.56, na mesma faixa em que foi avaliado o espalhamento, $\delta(x)$, na Fig. 5.55.

Figura 5.56: Perfil do déficit máximo de uma esteira distante gerada por um escoamento turbulento ao longo de x .



Também no perfil do déficit máximo, mostrado na Fig. 5.56, é observado um comportamento da solução contínua consistente com a física do problema já que, conforme a região

de avaliação se distancia do corpo imerso, o déficit de velocidade tende a diminuir devido ao transporte difusivo de informações do centro da esteira para a região da corrente livre.

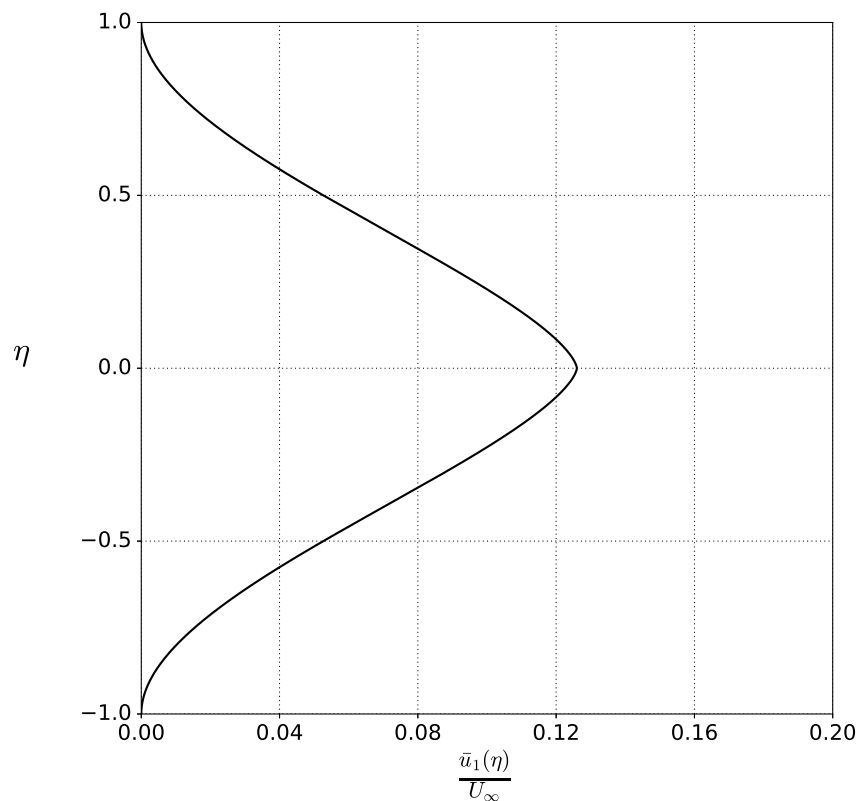
Outro ponto que deve ser analisado é a diferença entre os valores para o déficit máximo de velocidade, $u_o(x)$, na faixa apresentada no gráfico, nos regimes laminar e turbulento. Fazendo uma comparação entre os valores das Figs. 5.50 e 5.56, nota-se que os valores se diferem em uma ordem de grandeza.

Na Fig. 5.57 é apresentado o perfil para o déficit de velocidade, \bar{u}_1 , o qual é dado pela Eq. (4.291)

$$\bar{u}_1(x, y) = U_\infty \frac{\sqrt{10 c_D}}{18 \alpha} \left(\frac{x}{d}\right)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{3/2}\right]^2,$$

onde $\delta(x)$ é dado pela Eq. (4.289).

Figura 5.57: Perfil do déficit de velocidade de uma esteira distante gerada por um escoamento turbulento avaliado em $x/d = 90$.



De posse de todas as soluções contínuas, na Fig. 5.58 é apresentado o perfil para a

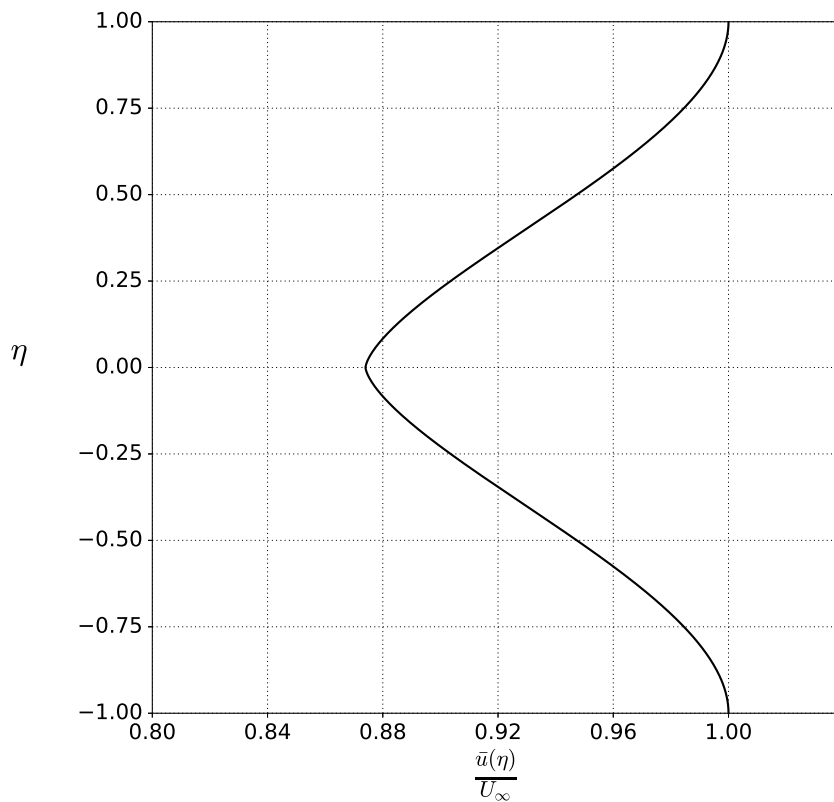
componente x da velocidade média, \bar{u} , dada pela Eq. (4.292)

$$\bar{u}(x, y) = U_{\infty} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{10} c_D}{18 \alpha} \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{3/2} \right]^2 \right\}. \quad (5.13)$$

avaliada também em $x/d = 90$.

Percebe-se na Fig. 5.58 que o déficit de velocidade é realmente um valor bem pequeno perante à velocidade da corrente livre, tanto que a escala precisou ser modificada para favorecer a visualização do perfil de \bar{u} . Tal observação confirma a hipótese utilizada na linearização da EDP e em simplificações promovidas no TTR, de que, na região de auto-similaridade, $\bar{u}_1 \ll U_{\infty}$. Porém, quando comparado com o déficit do caso laminar, percebe-se que este valor é consideravelmente maior no regime turbulento.

Figura 5.58: Perfil da componente x da velocidade média de uma esteira distante gerada por um escoamento laminar avaliado em $x/d = 90$.



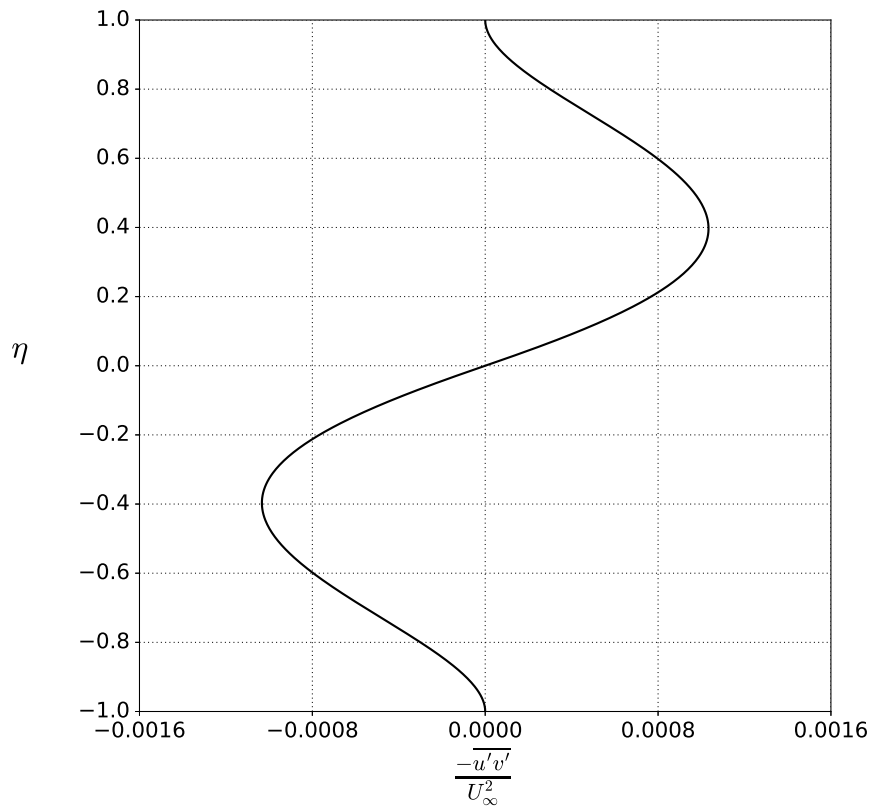
Quando a esteira se desenvolve no regime turbulento, há um perfil adicional em relação ao regime laminar. Se trata da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds. O perfil contínuo

para tal foi obtido na Eq. (4.295), a qual é dada por

$$-\overline{u'v'} = U_\infty^2 \frac{10 c_D}{36} \left(\frac{x}{d}\right)^{-1} \left[\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^2 - \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{1/2} \right]^2.$$

A representação gráfica da expressão para $\overline{u'v'}$ é mostrada na Fig. 5.59, e mesmo que não seja comparada com resultados experimentais discretos, é importante para que se visualize a forma do perfil. Cabe ressaltar que foram utilizados os mesmos valores dos perfis anteriores para o diâmetro, para o coeficiente de arrasto, avaliado em $x/d = 90$.

Figura 5.59: Perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds para uma esteira distante gerada por um escoamento turbulento avaliado em $x/d = 90$.



CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Perante os desenvolvimentos apresentados ao longo desta dissertação pode-se concluir que foi apresentada uma metodologia bem fundamentada para o desenvolvimento de soluções contínuas através do método de auto-similaridade, algo que não é encontrado com facilidade nas referências vasculhadas para o presente trabalho. Entende-se que a postulação de uma metodologia que visa generalizar o desenvolvimento de tais soluções auxilia no processo da busca pela resolução de escoamentos que ainda não foram apresentados na literatura.

Pode-se considerar também que a presente dissertação representa uma importante ferramenta didática já que apresenta de forma detalhada a solução para diversos escoamentos cisalhantes livres que, apesar de não possuírem aplicação industriais apresentam mecanismos e aspectos físicos presentes em escoamentos complexos. A solução de escoamentos cisalhantes livres possibilita o entendimento de aspectos físicos e matemáticos envolvidos nos casos trabalhados e podem ser de grande valia no entendimento inicial de escoamentos, principalmente quando se trata do regime turbulento.

As soluções contínuas apresentadas no presente trabalho podem ser utilizadas também no processo de validação de códigos computacionais. A concordância dos resultados apresentados por códigos com as soluções contínuas pode ser considerada validação já que, diferentemente perfis obtidos pelo método de solução manufaturada, elas representam situações físicas. A comparação de resultados obtidos por simulações computacionais pode ser

mais viável já que, a extração de resultados discretos de gráficos apresentados em artigos, por exemplo, não tem alto grau de precisão. Além disso, entende-se que tais soluções oferecem maior liberdade quanto aos parâmetros utilizados, visto que podem ser facilmente adequadas a escoamentos com diferentes valores dos parâmetros envolvidos.

Como o principal objetivo da dissertação foi estabelecer de forma clara o procedimento básico para a obtenção de soluções auto-similares, na visão dos autores, conseguiu-se alcançar o almejado. Indo além, no presente trabalho são apresentadas contribuições originais, como, por exemplo, a agregação de um novo termo na solução para a camada de mistura espacial em regime turbulento, além de outras contribuições destacadas ao longo do texto. Sendo assim, propõe-se como continuação do trabalho a realização de novas simulações computacionais e busca por outros experimentos materiais visando comparar todos os perfis contínuos apresentados com dados discretos advindos de experimentos. Outro ponto a ser trabalhado é a agregação da parte térmica aos escoamentos trabalhados, agregando a eles a equação da energia e entendendo como o método é utilizado para esses casos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, E. d. C. The velocity distribution in a liquid-into-liquid jet. part 2: The plane jet. *Proceedings of the Physical Society*, v. 51, p. 784–793, 1939. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0959-5309/49/4/309>>.

BARBI, F. *et al.* Experimentação numérica de bolhas em ascensão. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/18155>>.

BARBOSA, R. M. *Descobrimo a Geometria Fractal: para a sala de aula*. [S.l.]: Autêntica Editora, 2002.

BARENBLATT, G. I. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics: dimensional analysis and intermediate asymptotics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. v. 14.

BARENBLATT, G. I. *Scaling*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. v. 34.

BELL, J. H.; MEHTA, R. D. Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers. *AIAA journal*, v. 28, n. 12, p. 2034–2042, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.10519>>.

BETCHOV, R.; SZEWCZYK, A. Stability of a shear layer between parallel streams. *The Physics of Fluids*, v. 6, n. 10, p. 1391–1396, 1963. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1710959>>.

BOUSSINESQ, J. Theorie de l'ecoulement tourbillant. *Mem. Acad. Sci.*, v. 23, p. 46–50, 1877.

BRADBURY, L. The structure of a self-preserving turbulent plane jet. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 23, n. 1, p. 31–64, 1965. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112065001222>>.

BRADSHAW, P. Possible origin of prandtl's mixing-length theory. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 249, n. 5453, p. 135, 1974. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/249135b0>>.

CHOU, P. Y. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 3, n. 1, p. 38–54, 1945. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/qam/11999>>.

DAMASCENO, M. M. R. *et al.* Desenvolvimento de uma modelagem para escoamentos reativos em malhas adaptativas do tipo bloco-estruturada. Universidade Federal de Uberlândia, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2018.771>>.

DAVYDOV, B. On statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid. In: *Soviet Physics Doklady*. [S.l.: s.n.], 1961. v. 6, p. 10.

FAGE, A.; FALKNER, V. Notes on experiments on the temperature and velocity in the wake of a heated cylindrical obstacle. appendix. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, JSTOR, v. 135, n. 828, p. 702–705, 1932. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1932.0062>>.

GERMANO, M.; PIOMELLI, U.; MOIN, P.; CABOT, W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, AIP, v. 3, n. 7, p. 1760–1765, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.857955>>.

GÖRTLER, v. H. Berechnung von aufgaben der freien turbulenz auf grund eines neuen näherungsansatzes. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Wiley Online Library, v. 22, n. 5, p. 244–254, 1942. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/zamm.19420220503>>.

HANSEN, A. G. *Similarity analyses of boundary value problems in engineering*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1964.

HARLOW, F. H.; NAKAYAMA, P. I. *Transport of turbulence energy decay rate*. [S.l.], 1968. Disponível em: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc1026296/m2/1/high_res_d/4556905.pdf>.

HESKESTAD, G. Hot-wire measurements in a plane turbulent jet. *J. Appl. Mech*, v. 32, n. 4, p. 721, 1965. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3627309>>.

KOLMOGOROV, A. N. Equations of turbulent motion of an incompressible fluid. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz*, v. 6, n. 56-58, 1942.

LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, 1972. Disponível em: <<http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:LIEnacatn1257>>.

LIEPMANN, H. W.; LAUFER, J. Investigations of free turbulent mixing. 1947. Disponível em: <<http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:LIEnacatn1257>>.

MELO, R. R. d. S. *et al.* Modelagem e simulação de escoamentos turbulentos com efeitos térmicos, utilizando a metodologia da fronteira imersa e malha adaptativa. Universidade Federal de Uberlândia, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/18667>>.

MOHAMMADI, B.; PIRONNEAU, O. *Analysis of the K-Epsilon turbulence model*. [S.l.]: Wiley, 1994. (Recherches en mathématiques appliquées).

RIBEIRO NETO, H. *et al.* Modelagem matemática para a interação fluido-estrutura acoplado escoamentos incompressíveis e viga de timoshenko. Universidade Federal de Uberlândia, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/21141>>.

PRANDTL, L. Bemerkungen zur theorie der freien turbulenz. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Wiley Online Library, v. 22, n. 5, p. 241–243, 1942. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/zamm.19420220502>>.

PRANDTL, L. *Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz*. Vandenhoeck & Ruprecht, 1945. (Nachrichten der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=JByAPwAACAAJ>>.

REICHARDT, H. Messungen turbulenter schwankungen. *Naturwissenschaften*, Springer, v. 26, n. 24-25, p. 404–408, 1938. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01772950>>.

REICHARDT, H. *Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz*. VDI-Verlag, 1942. (Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=i9yOvgAACAAJ>>.

SABIN, C. M. An analytical and experimental study of the plane, incompressible, turbulent free-shear layer with arbitrary velocity ratio and pressure gradient. *Journal of Basic Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 87, n. 2, p. 421–428, 1965. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3650566>>.

SANTOS, J. G. d. F. Análise numérica de jatos turbulentos bifásicos utilizando modelo de fase discreta com refinamento adaptativo de malha. Universidade Federal de Uberlândia, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/19491>>.

SCHLICHTING, H. Über das ebene windschattenproblem. *Ingenieur-Archiv*, Springer, v. 1, n. 5, p. 533–571, 1930.

SCHLICHTING, H. Zur entstehung der turbulenz bei der plattenströmung. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, v. 1933, p. 181–208, 1933.

SCHLICHTING, H. *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill, 1968.

SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K.; KRAUSE, E.; OERTEL, H. *Boundary-layer theory*. [S.l.]: Springer, 1955. v. 7.

SEDOV, L. I. *Similarity and dimensional methods in mechanics*. [S.l.]: CRC press, 1993.

SHIH, T.-H.; ZHU, J.; LUMLEY, J. L. A new reynolds stress algebraic equation model. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 125, n. 1-4, p. 287–302, 1995. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00796-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00796-4)>.

SILVESTRINI, J. H. Dynamics of coherent vortices in mixing layers using direct numerical and large-eddy simulations. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, scielo, v. 22, p. 53 – 67, 00 2000. ISSN 0100-7386. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0100-73862000000100005>>.

STEWART, I. *Uma história da simetria na matemática*. [S.l.]: Zahar, 2012.

TAYLOR, G. The formation of a blast wave by a very intense explosion. i. theoretical discussion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 201, n. 1065, p. 159–174, 1950. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0049>>.

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. *A first course in turbulence*. [S.l.]: MIT press, 1972.

TOLLMEN, W. Über die entstehung der turbulenz. In: *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete*. Springer, 1930. p. 18–21. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_4>.

VEDOVOTO, J. M. *et al.* Modelagem matemática de escoamentos reativos turbulentos utilizando uma metodologia hibrida les/pdf. Universidade Federal de Uberlândia, 2011. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14704>>.

VILLAR, M. M. *et al.* Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais. Universidade Federal de Uberlândia, 2007. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14664>>.

WEYGANDT, J. H.; MEHTA, R. D. Three-dimensional structure of straight and curved plane wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 282, p. 279–311, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112095000140>>.

WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 1962.

WHITE, F. M.; CORFIELD, I. *Viscous fluid flow*. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education Boston, 2006. v. 3.

WILCOX, D. C. Companion software: turbulence modeling for cfd. *American Institute of Aeronautics and Astronautics, DCW Industries, La Canada, CA*, 2006.

WILCOX, D. C. *et al.* *Turbulence modeling for CFD*. [S.l.]: DCW industries La Canada, CA, 1998. v. 2.

HEGGE ZIJNEN, B. Van der. Measurements of the velocity distribution in a plane turbulent jet of air. *Applied Scientific Research*, Springer, v. 7, n. 4, p. 256–276, 1958. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF03185052>>.