

JEFFERSON GOMES DO NASCIMENTO

**DESENVOLVIMENTO E USO DE UMA TÉCNICA
EXPERIMENTAL PARA MEDIÇÃO DE
PROPRIEDADES TÉRMICAS *"in situ"***



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2018**

JEFFERSON GOMES DO NASCIMENTO

**DESENVOLVIMENTO E USO DE UMA TÉCNICA EXPERIMENTAL PARA
MEDIÇÃO DE PROPRIEDADES TÉRMICAS *"in situ"***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães

**UBERLÂNDIA - MG
2018**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



TERMO

ALUNO: Jefferson Gomes do Nascimento

MATRÍCULA: 11622EMC010

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos **LINHA DE PESQUISA:** Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Desenvolvimento e Uso de uma Técnica Experimental para Medição de Propriedades Térmicas “*in situ*”

ORIENTADOR: Prof. Dr. Gilmar Guimarães

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada na Sala de Reuniões 1M313 do Bloco 1M, Campus Santa Mônica, em 27 de julho de 2018, às 09:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gilmar Guimarães (orientador) - UFU

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto - UFU

Prof. Dr. Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva - UNIFEI

Uberlândia, 27 de julho de 2018



Documento assinado eletronicamente por **Gilmar Guimarães, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/07/2018, às 12:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Aristeu da Silveira Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/07/2018, às 12:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva, Usuário Externo**, em 27/07/2018, às 13:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0604546** e o código CRC **BF837EEA**.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

N244d Nascimento, Jefferson Gomes do, 1986-
2018 Desenvolvimento e uso de uma técnica experimental para medição de propriedades térmicas “in situ” [recurso eletrônico] / Jefferson Gomes do Nascimento. - 2018.

Orientador: Gilmar Guimarães.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1207>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. 2. Cloreto de polivinila - Propriedades térmicas. 3. Aço inoxidável - Propriedades térmicas. 4. Titânio - Propriedades térmicas. 5. Alumínio - Propriedades térmicas. 6. Cobre - Propriedades térmicas. I. Guimarães, Gilmar (Orient.) II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Maria Salete de Freitas Pinheiro - CRB6/1262

"A persistência realiza o impossível."

Provérbio Chinês

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por todas as bênçãos que me proporcionou ao longo de toda minha vida, e por me guiar dando força, saúde e disposição para que eu pudesse concluir este trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gilmar Guimarães, pelo auxílio, ajuda e confiança, desde o início deste trabalho. Expresso minha total gratidão e apreço não somente aos conhecimentos compartilhados, mas também pelo profissionalismo e exemplo de ser humano.

Ao meu amigo, Alisson Augusto Figueiredo, por ter contribuído diretamente neste trabalho, tanto nas análises numéricas quanto na realização dos experimentos;

Aos meus pais, Licomedes Gomes do Nascimento e Maria Marta Aparecida, ao meu irmão Elvys Gomes do Nascimento, a minha sobrinha Isadora Martins Gomes do Nascimento e aos meus amigos que em mim depositaram confiança, dirigiram suas boas energias, pensamentos, orações, palavras e intensões em favor da concretização deste sonho.

A minha namorada Aline Meire Mendes, pela compreensão e apoio incondicional em todas as horas, pela paciência ao passar os finais de semana em casa estudando comigo;

A Ana Paula Fernandes, por ter escrito, na minha opinião, uma bibliografia perfeita em sua dissertação e tese de doutorado, as quais me auxiliaram extremamente como ferramentas de aprendizado. Aos membros do Laboratório de Transferência de Calor: Modelagem e Experimento;

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar este Curso;

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro através da bolsa de estudos, à CAPES e a FAPEMIG pelo apoio financeiro relacionados à participação em congressos nacionais e internacionais.

NASCIMENTO, J. G., **DESENVOLVIMENTO E USO DE UMA TÉCNICA EXPERIMENTAL PARA MEDIÇÃO DE PROPRIEDADES TÉRMICAS "in situ"**. 2018. 124 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Resumo

Os autores desse trabalho apresentam a aplicação de uma técnica experimental para a obtenção da difusividade e da condutividade térmicas em materiais sólidos e isotrópicos usando apenas uma única superfície de acesso. Inicialmente, a técnica proposta foi avaliada numericamente com auxílio do programa COMSOL *multiphysics*. A estimativa experimental destes parâmetros foi realizada a partir de duas configurações experimentais distintas, sendo que para a medição da difusividade térmica foi usado um soprador térmico para gerar a transferência térmica e dois termopares para a medição das temperaturas. Para a estimativa da condutividade térmica foi usada uma resistência elétrica, um transdutor de fluxo térmico e um termopar. Em ambos os experimentos, a amostra foi aquecida parcialmente em uma região específica da superfície, sendo que para a determinação da difusividade, usou-se as medições de temperatura da região não aquecida e para a obtenção da condutividade foi usado um ponto de temperatura localizado no centro e abaixo da resistência. A técnica se baseia na minimização de duas funções objetivo distintas usando a função erro quadrático. As funções foram definidas a partir das medições das temperaturas na superfície da amostra, mas usando diferentes problemas térmicos. A primeira função objetivo caracteriza-se pelo uso da razão de ganho de temperatura entre duas temperaturas medidas na superfície para a determinação da difusividade térmica. A segunda função usou valores experimentais e teóricos da temperatura no centro de aplicação do fluxo térmico, permitindo-se assim a estimativa da condutividade térmica. Na análise numérica, as estimativas da difusividade e da condutividade térmicas foram realizadas em materiais não metálicos e metálicos com erros inferiores a 1 %. Na análise experimental, a difusividade térmica foi estimada para amostra de policloreto de vinila (PVC), aço inoxidável AISI 304, AISI 1045, alumínio e fêmur bovino, e os resultados estão de acordo com a literatura. A condutividade experimental foi estimada com maior eficiência no PVC, já no aço inoxidável AISI 304 obteve-se erro na estimativa em torno de 10 %.

Palavras-chave: difusividade térmica, condutividade térmica, condução de calor, problemas inversos.

Abstract

This work presents an experimental technique to obtain the thermal diffusivity (α) and thermal conductivity (k) in solid and isotropic materials, using only a single access surface. Initially, the proposed technique was numerically evaluated using COMSOL *multiphysics*. The experimental estimation of the parameters was carried out from two different experimental configurations, for the thermal diffusivity measurement a thermal blower to generate the heat flux and two thermocouples for the temperature measurement were used. For the estimation of the thermal conductivity, an electric resistance, a heat flow transducer and a thermocouple were used. In both experiments the sample was partially heated in a specific region of the surface. For the determination of α , the temperature measurements of the unheated region were used. To obtain k , was used one point of temperature located below and in the center of the resistance. The technique relies on the minimization of two different objective functions using the quadratic error function. The functions were defined from the measurements of temperatures on the surface of the sample, but using different thermal problems. The first objective function is characterized by the use of the gain ratio between two surface temperatures for the determination of the thermal diffusivity. The second objective function was defined between the experimental and theoretical values of the temperature to estimate the thermal conductivity. In the numerical analysis, non-metallic polyvinyl chloride (PVC) and metallic materials such as AISI 304, titanium, aluminum and copper were evaluated, with errors less than 1 %. In the experimental analysis, the thermal diffusivity was estimated for samples of PVC, AISI 304, AISI 1045, aluminum and bovine femur, and the results are in agreement with the literature. The experimental thermal conductivity was estimated with greater efficiency in the PVC, already in the AISI 304 obtained an error in the estimation around 10 %.

Lista de Figuras

2.1	Classificação das técnicas de medição da difusividade e condutividade térmica, adaptado de Abad, Borca-Tasciuc e Martin-Gonzalez (2017).	6
2.2	Efeitos térmicos associados à radiação incidente absorvida por uma superfície. . .	8
2.3	Principais direções de medição de propriedades térmicas em uma amostra. . . .	8
3.1	Fluxograma de estimativa da difusividade térmica.	16
3.2	Fluxograma de estimativa da condutividade térmica.	18
3.3	Redução do intervalo de incerteza: (a) Caso $F1 > F2$; (b) Caso $F1 < F2$, (c) Caso $F1 = F2$	19
4.1	Casos para geometria unidimensional, modificado de Cole, Beck, Haji-Sheikh e Litkouhi (2010).	24
4.2	Funções de Green: (a) G_{X20} ; (b) G_{22}	24
4.3	Funções de Green: (a) G_{X23} ; (b) G_{X21}	25
4.4	Fluxo híbrido, adaptado de Fernandes (2013).	27
4.5	Problema térmico unidimensional G_{X20}	28
4.6	Problema térmico unidimensional G_{X22}	29
4.7	Modelo térmico proposto para estimativa da difusividade térmica com geometria semi-infinita caso $X00Y30Z00$	32
4.8	Modelo térmico proposto para estimativa da difusividade térmica com geometria semi-infinita caso $X00Y20Z00$	34
4.9	Modelo térmico 3D $X22Y22Z22$	36
4.10	Modelo térmico 3D $X33Y33Z33$	38
5.1	Esquema de posicionamento dos sensores de medição de temperatura.	42
5.2	aço inoxidável AISI 304: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do AISI 304 e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica. . .	44

5.3	Redução do intervalo de tempo de análise no aço inoxidável AISI 304: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do aço AISI 304 e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.	45
5.4	Titânio: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do titânio e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.	46
5.5	Redução do intervalo de tempo de análise no titânio: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do titânio e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.	47
5.6	Alumínio: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do alumínio e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.	48
5.7	Redução do intervalo de tempo de análise no alumínio: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do alumínio e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.	49
5.8	Cobre: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do cobre e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.	50
5.9	Redução do intervalo de tempo de análise no cobre: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do cobre e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.	51
6.1	Modelo tridimensional: (a) Geometria; (b) Pontos de medição de temperatura posicionados sobre a superfície da amostra, distanciados entre si de 1 em 1 mm.	53
6.2	Modelo 3D: (a) Malha refinada na região dos pontos de medição de temperatura; (b) Propagação do calor no modelo tridimensional.	53

6.3	Campo de temperatura no PVC: (a) 10 s; (b) 50 s; (c) 150 s; (d) 300 s.	55
6.4	Campo de temperatura no aço inoxidável AISI 304: (a) 5 s; (b) 10 s; (c) 15 s; (d) 20 s.	56
6.5	Campo de temperatura no alumínio: (a) 5 s; (b) 10 s; (c) 15 s; (d) 20 s.	57
6.6	Possíveis pontos para medição da difusividade térmica: (a) aço inoxidável AISI 304; (b) Alumínio.	58
6.7	Resultados numéricos da estimativa da difusividade térmica no PVC: (a) Evolução das temperaturas numéricas nas posições $x_1 = 28$ mm e $x_2 = 32$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura numérica; (c) Difusividade térmica estimada e erro em relação ao valor da literatura; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.	60
6.8	Razão de ganho de temperatura analítica e numérica no PVC.	61
6.9	Resultados numéricos da estimativa da difusividade térmica no aço inoxidável AISI 304: (a) Evolução das temperaturas numéricas nas posições $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura numérica; (c) Difusividade térmica estimada e erro em relação ao valor da literatura; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.	62
6.10	Razão de ganho de temperatura analítica e numérica no aço inoxidável AISI 304.	63
6.11	Resultados numéricos da estimativa da difusividade térmica no titânio: (a) Evolução das temperaturas numéricas nas posições $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura numérica; (c) Difusividade térmica estimada e erro em relação ao valor da literatura; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.	64
6.12	Razão de ganho de temperatura analítica e numérica no titânio.	65
6.13	Taxa de transferência de calor por unidade de área 10^4 [W/m ²] aplicada por 4 s nas análises numéricas.	67
6.14	Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o PVC usando o modelo unidimensional X20: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.	68
6.15	Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o aço inoxidável AISI 304 usando o modelo unidimensional X20: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.	68
6.16	Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o titânio usando o modelo unidimensional X20: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.	69

6.17	Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o alumínio usando o modelo tridimensional $X00Y22Z00$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.	70
6.18	Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o cobre usando o modelo tridimensional $X00Y22Z00$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.	70
6.19	Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o PVC usando o modelo tridimensional $X22Y22Z22$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.	71
6.20	Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o aço inoxidável AISI 304 usando o modelo tridimensional $X22Y22Z22$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.	71
6.21	Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o titânio usando o modelo tridimensional $X22Y22Z22$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.	72
6.22	Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o alumínio usando o modelo tridimensional $X22Y22Z22$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.	72
6.23	Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o cobre usando o modelo tridimensional $X22Y22Z22$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.	73
7.1	Esquema de posicionamento da região de aplicação do fluxo térmico e posicionamento dos termopares nas amostras experimentais.	74
7.2	Preparação do experimento para estimar a difusividade térmica no PVC: (a) Amostra com os termopares acoplados; (b) Isolamento da superfície; (c) Modelo preparado para aplicação do fluxo de calor; (d) Bancada experimental.	76
7.3	Resultados experimentais da estimativa da difusividade térmica no PVC: (a) Evolução das temperaturas experimentais nas posições $x_1 = 30$ mm e $x_2 = 35$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura experimental; (c) Difusividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor estimado por Malheiros (2017).	77
7.4	Gráfico de barras da difusividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de PVC.	78

7.5	Resultados experimentais da estimativa da difusividade térmica no AISI 304: (a) Evolução das temperaturas experimentais nas posições $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura experimental; (c) Difusividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor encontrado na literatura.	80
7.6	Gráfico de barras da difusividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de aço inoxidável AISI 304.	81
7.7	Resultados experimentais da estimativa da difusividade térmica no AISI 1045: (a) Evolução das temperaturas experimentais nas posições $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura experimental; (c) Difusividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor encontrado na literatura.	82
7.8	Gráfico de barras da difusividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de aço AISI 1045.	83
7.9	Resultados experimentais da estimativa da difusividade térmica no alumínio: (a) Evolução das temperaturas experimentais nas posições $x_1 = 85$ mm e $x_2 = 105$ mm ; (b) Razão de ganho de temperatura experimental; (c) Difusividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor encontrado na literatura.	85
7.10	Gráfico de barras da difusividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de alumínio.	86
7.11	Esquema de posicionamento da resistência, do transdutor e do termopar para realização do experimento de estimativa da condutividade térmica.	87
7.12	Esquema de montagem para validação de calibração do fabricante.	88
7.13	Validação da calibração dos transdutores de calor feita pelo fabricante: (a) Soma dos fluxos de calor; (b) Erro em relação ao valor da potência gerada na resistência.	89
7.14	Preparação do experimento para estimativa da condutividade térmica no PVC: (a) Amostra com os termopares acoplados; (b) Acoplamento do transdutor; (c) Acoplamento da resistência; (d) Bancada experimental.	90
7.15	Resultados experimentais da estimativa da condutividade térmica no PVC : (a) Evolução do fluxo de calor imposto na superfície da amostra; (b) Evolução das temperatura na posição x_3 ; (c) Condutividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor estimado por Malheiros (2017).	91
7.16	Gráfico de barras da condutividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de PVC.	92
7.17	Resultados experimentais da estimativa da condutividade térmica no aço inoxidável AISI 304 : (a) Evolução do fluxo de calor imposto na superfície da amostra; (b) Evolução das temperatura na posição x_3 ; (c) Condutividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor da literatura.	94

7.18	Preparação experimental da amostra de osso bovino: (a) Amostra com os termopares acoplados e distanciados de 1 cm entre si; (b) Amostra parcialmente isolada do meio ambiente.	95
7.19	Bancada experimental usada para estimativa da difusividade térmica do osso bovino.	96
7.20	Variação da Temperatura na amostra de osso bovino: (a) Todos termopares acoplados na amostra; (b) Termopares T2 e T3 usados na estimativa da propriedade térmica.	96
7.21	Temperatura usadas na estimativa da difusividade térmica: (a) Temperatura θ ; (b) Razão de ganho de temperatura na amostra de osso bovino.	97
7.22	Resultado experimental na estimativa da difusividade térmica do osso bovino.	98
7.23	Gráfico de barras da difusividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de osso bovino.	98
A.1	Modelo unidimensional	108
A.2	Modelo térmico proposto para estimativa da difusividade térmica com geometria semi-infinita caso $X00Y30Z00$	110
A.3	Modelo térmico proposto para estimativa da difusividade térmica com geometria semi-infinita caso $X00Y20Z00$	116
A.4	Verificação numérica da solução híbrida $X20$ para um fluxo constante:(a) Temperatura ;(b) Erro	120
A.5	Verificação numérica da solução híbrida $X20$ usando um fluxo variável:(a) Temperatura ;(b) Erro	121
A.6	Verificação numérica da solução híbrida $X22$ para fluxo constante:(a) Temperatura ;(b) Erro	123
A.7	Verificação numérica da solução híbrida $X22$ para fluxo variável:(a) Temperatura ;(b) Erro	124
A.8	Verificação numérica das soluções híbridas $X20$ e $X22$ para um fluxo de curta duração :(a) Temperatura ;(b) Erro	124

Lista de Tabelas

2.1	Termo-refletância no domínio do tempo (TDTR), modificada de Abad, Borca-Tasciuc e Martin-Gonzalez (2017)	9
2.2	Método Flash, adaptado de Abad, Borca-Tasciuc e Martin-Gonzalez (2017)	10
4.1	Sistema de numeração Cole, Beck, Haji-Sheikh e Litkouhi (2010)	22
6.1	Tipos de elementos do modelo tridimensional fornecida pelo software COMSOL <i>multiphysics</i>	54
6.2	Estatística dos elementos do modelo 3D em análise feito no software COMSOL <i>multiphysics</i>	54
6.3	Posição dos pontos de medição de temperatura distanciados do centro de aplicação do fluxo de calor	58
6.4	Propriedades térmicas do PVC	59
6.5	Difusividade térmica dos materiais usados no modelo numérico	59
6.6	Estimativa numérica da difusividade térmica para o PVC	61
6.7	Estimativa numérica da difusividade térmica no aço inoxidável AISI 304	63
6.8	Estimativa numérica da difusividade térmica no titânio	65
6.9	Resumo da estimativa numérica da difusividade térmica nos materiais condutores.	65
6.10	Tempo de desvio entre a solução semi-infinita $X20$ e a solução finita dada pelo software COMSOL <i>Multiphysics</i>	67
6.11	Condutividade térmica dos materiais usados no modelo numérico	67
7.1	Estimativa experimental da difusividade térmica para o PVC	78
7.2	Comparação dos valores estimados da difusividade térmica do PVC com a literatura	79
7.3	Estimativa experimental da difusividade térmica para o aço inoxidável AISI 304.	81
7.4	Comparação dos valores estimados da difusividade térmica do aço inoxidável AISI 304 com a literatura.	81
7.5	Estimativa experimental da difusividade térmica para o aço AISI 1045	83
7.6	Comparação dos valores estimados da difusividade térmica do aço AISI 1045 com a literatura	84

7.7	Estimativa experimental da difusividade térmica para o alumínio	86
7.8	Propriedades elétricas e geométricas da resistência	87
7.9	Propriedades térmicas do transdutor de fluxo térmico	88
7.10	Estimativa experimental da condutividade térmica para o PVC	92
7.11	Comparação dos valores estimados da condutividade térmica do PVC com a literatura	93
7.12	Valores medidos da difusividade térmica, Rodríguez, Calderón, Hernández, Stolik, Cruz-Orea e Sinencio (2001)	97
7.13	Estimativa de difusividade térmica no osso bovino	99

Lista de Símbolos

α	Difusividade térmica [m ² /s]
$\alpha_m, \beta_n, \gamma_p$	Autovalores em relação as coordenadas x, y e z respectivamente
δ	Função delta de Dirac
Ω_j	Número randômico com distribuição uniforme [°C]
ρ	Massa específica do material [kg/m ³]
σ	Amplitude máxima de variação do ruído [–]
τ	Variável auxiliar de tempo [s]
τ^*	Número relacionado a Seção Áurea
θ	Variável auxiliar de temperatura [°C]
$\theta_{XI0}(x, t)$	Temperatura do modelo semi-infinito [°C]
$\theta_{XIJ}(x, t)$	Temperatura do modelo finito [°C]
ε	Tolerância
A_{res}	Área da resistência [m ²]
B_i	Número de Biot
c_p	Calor específico [J/kgK]
$F(\alpha)$	Função objetivo em relação a difusividade térmica
$F(k)$	Função objetivo em relação a condutividade térmica
h	Coefficiente de transferência de calor por convecção [W/m ² K]
I	Corrente elétrica [A]

i, j	indices
k_{ex}	Condutividade térmica devido as varias excitações [W/mK]
k_e	Condutividade térmica devido aos elétrons [W/mK]
k_p	Condutividade térmica devido aos fônons [W/mK]
N	Critério de convergência no Método da Seção Áurea
q_1'', q_2''	Fluxo de calor nos transdutores 1 e 2 respectivamente [W/m ²]
R_{GTexp}	Razão de ganho de temperatura experimental [–]
S_i	Superfície
$S_T(k)$	Função objetivo em relação a condutividade térmica
T_3	Temperatura analítica [°C]
T_∞	Temperatura ambiente [°C]
T_{ana}	Temperatura analítica [°C]
U	Voltagem [V]
$X(\beta)$	Sensibilidade em relação ao parâmetro β
X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}	Funções de Green para as coordenadas x, y e z respectivamente
$Y(t)$	Temperatura com ruído [°C]
Y_3	Temperatura experimental [°C]
Y_{exp}	Temperatura experimental [°C]
f	Termo da condição de contorno
G	Função de Green em coordenadas retangulares 1D [m ⁻¹], 2D [m ⁻²], 3D [m ⁻³]
g	Geração de calor interna uniforme [W/m ³]
k	Condutividade térmica [W/mK]
L, W, R	Comprimento nos eixos x,y,z respectivamente [m]
T	Temperatura [°C]

t Tempo [s]

x', y', z' Variáveis auxiliares

x, y, z Coordenadas retangulares

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	3
2.1	Introdução	3
2.2	Classificação das técnicas de medição de difusividade e condutividade térmica	6
2.2.1	Técnicas no domínio do tempo	9
2.2.2	Técnicas no domínio da frequência	10
2.3	Métodos clássicos de medição de propriedades térmicas	10
2.4	Métodos contemporâneos de medição de propriedades térmicas	11
2.4.1	Técnicas experimentais para determinação de propriedades térmicas usando apenas uma superfície de acesso	12
3	Metodologia para estimativas da difusividade térmica e da condutividade térmica	14
3.1	Introdução	14
3.2	Estimativa da difusividade térmica	15
3.2.1	Razão de ganho de temperatura experimental	15
3.2.2	Função objetivo	15
3.2.3	Análise da sensibilidade da razão de ganho de temperatura	16
3.2.4	Fluxograma da estimativa da difusividade térmica	16
3.3	Estimativa da condutividade térmica	17
3.3.1	Função objetivo	17
3.3.2	Tempo de desvio	17
3.3.3	Fluxograma da estimativa da condutividade térmica	17
3.4	Técnica de otimização	18
3.4.1	Método da seção áurea	19
3.4.2	Redução do intervalo de incerteza a partir do método de busca da seção áurea	19

4	Fundamentos teóricos: modelos térmicos usados e suas soluções	21
4.1	Funções de Green	22
4.2	Solução geral 1D	25
4.2.1	Modelos térmicos unidimensionais	28
4.3	Solução geral 3D	30
4.3.1	Modelos tridimensionais usados para a estimativa da difusividade térmica	31
4.3.2	Modelos tridimensionais usados para estimativa da condutividade térmica	35
5	Análise de sensibilidade da técnica proposta	42
5.1	Materiais com baixa condutividade térmica	43
5.2	Materiais com alta condutividade térmica	48
6	Resultados Numéricos	52
6.1	Análise numérica	52
6.2	Estimativa da difusividade térmica usando dados simulados	59
6.2.1	Material Não Metálico	60
6.2.2	Materiais Condutores	62
6.3	Estimativa da condutividade térmica usando dados simulados	66
6.3.1	Modelo unidimensional	68
6.3.2	Modelos tridimensionais	69
7	Resultados Experimentais	74
7.1	Estimativa da difusividade térmica experimental	74
7.1.1	Material não metálico	75
7.1.2	Materiais condutores	79
7.2	Estimativa da condutividade térmica experimental	87
7.2.1	Material Não Metálico	89
7.2.2	Material condutor	94
7.3	Estimativa de propriedades térmicas em tecido biológico	95
8	Conclusão	100
	Referências Bibliográficas	103
A	Dedução dos modelos analíticos usados para estimativa das propriedades térmicas	108
A.1	Modelo unidimensional infinito	108
A.2	Modelos tridimensionais semi-infinitos usados para estimativa da difusividade térmica	110

A.2.1	Solução híbrida 1D - X20	119
A.2.2	Solução híbrida 1D - X22	121

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento de técnicas experimentais para a determinação de propriedades de diferentes materiais como a difusividade térmica, α , e a condutividade térmica, k , tem interessado muitos pesquisadores devida a sua larga aplicação em problemas de engenharia.

Segundo Incropera, Dewitt, Lavine e Bergman (2011), a precisão dos cálculos de engenharia depende da exatidão com que são conhecidos os valores das propriedades termofísicas. Podem ser citados, numerosos exemplos de defeitos em equipamentos e no projeto de processos, ou então de não atendimento de especificações de *performance*, que poderiam ser atribuídos a informações erradas associadas à seleção de valores de propriedades-chaves utilizados na análise inicial do sistema. A seleção de dados confiáveis para as propriedades é uma parte importante em qualquer análise criteriosa em engenharia. O uso ocasional de dados que não foram bem caracterizados ou avaliados, como podem ser achados em algumas literaturas e em manuais deve ser evitado .

A caracterização térmica de novos materiais de estruturas complexas como os compósitos, os porosos e os nanométricos, são alguns exemplos da importância relacionada com o desenvolvimento de técnicas experimentais para a estimativa destas propriedades térmicas.

A medição de propriedades térmicas em superfícies já construídas são extremamente importantes e representa um desafio tecnológico, uma vez que, na maioria das vezes, apenas uma superfície permite o acesso para excitação térmica e medição de grandezas físicas, como por exemplo, a temperatura. O objetivo principal do presente trabalho é o desenvolvimento e uso de uma técnica experimental para estimativa da difusividade e condutividade térmicas *in situ*, ou seja, a técnica deverá ser capaz da medição das propriedades usando apenas uma superfície de acesso podendo ser aplicada tanto em laboratório quanto em superfícies já construídas como carcaças de motores, paredes e superfícies planas em geral. A técnica deve também ser capaz de identificar as propriedades de materiais metálicos e não metálicos.

O presente trabalho é estruturado em oito capítulos, sendo esta introdução o primeiro deles.

No capítulo 2 apresenta-se uma revisão bibliográfica dos principais métodos de estimativa de propriedades térmicas.

No capítulo 3 mostram-se a metodologia para as estimativas da difusividade e da condutividade térmicas, sendo que para determinar a primeira propriedade, usa-se a função erro quadrático entre a razão de ganho de temperatura experimental e teórica, e, para a segunda, usa-se a função erro quadrático entre as temperaturas experimentais e analíticas.

No capítulo 4 mostram-se os fundamentos teóricos, com uma breve introdução sobre as funções de Green e a solução geral unidimensional e tridimensional. Além disso, neste capítulo também mostram-se os modelos térmicos e suas soluções analíticas usadas na determinação das propriedades térmicas, cujas deduções são mostradas nos anexos.

No capítulo 5 apresenta-se a análise de sensibilidade da técnica em estudo, sendo que essa análise foi dividida em materiais com baixa e alta condutividade térmica, com isto pode-se prever uma região mais sensível para determinação da difusividade térmica nos materiais a serem analisados.

Os resultados numéricos de temperatura obtidos em pontos específicos com auxílio do software comercial COMSOL *multiphysics* são apresentados no capítulo 6. Foram usados diferentes modelos térmicos e foi estimada a difusividade térmica e a condutividade térmica dos seguintes materiais: PVC, aço inoxidável AISI 304, titânio, alumínio e cobre.

No capítulo 7 mostra-se a análise experimental realizada para determinação das propriedades térmicas, sendo que são propostos dois conjuntos experimentais: um para a estimativa da difusividade térmica e outro para a determinação da condutividade térmica dos materiais em análise.

Por fim, no capítulo 8, são apresentadas as conclusões acerca do método e dos conceitos estudados, além da perspectiva de trabalhos futuros derivados da presente dissertação.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo uma breve introdução sobre a importância da determinação de propriedades térmicas em materiais sólidos, as classificações das técnicas de medição da difusividade térmica, α , e condutividade térmica, k , e uma análise sobre os métodos clássicos e contemporâneos de estimativas dessas propriedades.

Os materiais podem ser definidos termicamente por propriedades como a condutividade e a difusividade térmicas. A condutividade térmica é conhecida como uma propriedade de transporte, a qual fornece uma indicação da taxa na qual a energia é transferida no processo de difusão. Ela depende da estrutura física da matéria, atômica e molecular, que está relacionada ao estado da matéria. Já a difusividade térmica mede a capacidade do material de conduzir energia térmica em relação a capacidade de armazenar (INCROPERA, 2011).

A determinação das propriedades térmicas dos materiais é um problema de grande importância tanto na física quanto na engenharia. Para compreender, planejar, intervir e controlar processos que envolvem a transferência da energia em forma de calor, é fundamental conhecer as propriedades térmicas dos materiais envolvidos.

Os metais representam um grande número de materiais que foram e são usados no desenvolvimento industrial, seja na forma pura, elementar ou como novas ligas de alta resistência. Os metais são indispensáveis para a sociedade industrial moderna. Os mesmos são conhecidos por sua aparência brilhante, maleabilidade, ductilidade e capacidade de conduzir corrente elétrica. Devido a suas aplicações, é altamente desejável poder adaptar as propriedades dos metais para combinar e melhorar o desempenho de seu uso para tarefas específicas. Muitas vezes um dos critérios importantes para a escolha em aplicações específicas é saber quão bem um dado metal ou liga conduz calor. O parâmetro físico que caracteriza e quantifica a capacidade do material de conduzir calor é chamado de condutividade térmica, muitas vezes designado por compreender

a natureza do processo de transferência térmica em metais e ser capaz de prever quão bem uma determinada liga conduzirá o calor, por isso a determinação dessa propriedade é de interesse científico e tecnológico (TRITT, 2005).

O transporte de calor em um sistema é governado pelo movimento de "partículas livres" que após um período de tempo tentam restaurar o equilíbrio termodinâmico no sistema submetido a um gradiente de temperatura. Para materiais isolantes, geralmente, podemos ignorar contribuições de elétrons móveis para processos de condução térmica, que dominam a condutividade térmica de metais, e se concentrar na propagação de calor através de fônons acústicos.

Conforme Tritt (2005), a energia térmica pode ser transmitida nos sólidos por portadores de carga elétrica, ondas de rede (fônons), ondas eletromagnéticas, ondas de *spin* ou outras excitações. Nos metais, os portadores de carga elétrica carregam a maior parte do calor, enquanto que nos isolantes os fônons tem essa função principal de transporte. A condutividade térmica total, k , pode ser escrita como uma soma de todos os componentes representando várias excitações, k_{ex} , como mostra a Eq. (2.1).

$$k = \sum_{ex} k_{ex} \quad (2.1)$$

Em outros metais, como metais de transição e ligas metálicas, o termo eletrônico é menos dominante, sendo preciso levar em conta a contribuição do fônon, a fim de avaliar adequadamente a condução de calor desses materiais. No transporte de calor em metais e em semicondutores, faz-se uma suposição implícita e essencial de que os transportadores de carga (elétrons) e vibrações da rede (fônons) são entidades independentes. Isto sugere que se pode expressar a condutividade térmica total dos metais e outros sólidos, consistindo em dois termos independentes, a contribuição elétrica, k_e , e a contribuição do fônon, k_p , representado pela Eq. (2.2).

$$k = k_e + k_p \quad (2.2)$$

Esses dois termos, elétrons e fônons são certamente as principais entidades transportadoras de calor. No entanto, existem outras excitações possíveis na estrutura dos metais, como as ondas de *spin*, que podem, sob certas circunstâncias, contribuir com um pequeno termo adicional para a condutividade térmica. Na maior parte, não deve-se considerar essas pequenas contribuições (TRITT, 2005).

A condutividade térmica dos sólidos varia tanto em termo de magnitude quanto da dependência de temperatura de um material para outro, como exemplo de um material não metálico pode-se citar o policloreto de vinila (PVC) que apresenta um valor de condutividade térmica entre 0,12 e 0,25 W/mK (GOODFELLOW, 2018). Em contrapartida, tem-se a condutividade

térmica de um material condutor, como o cobre puro, que é de 401 W/mK (INCROPERA, 2011). Isso é causado por diferenças nos tamanhos das amostras monocristalinas, no tamanho dos grãos para amostras policristalinas, defeitos ou imperfeições de rede cristalina, concentrações e interação entre os elétrons e interações entre íons magnéticos, dentre outros fatores. Uma grande variedade de processos torna a condutividade térmica uma interessante área de estudo tanto teórica quanto experimental (TRITT, 2005).

Historicamente, a medição da condutividade térmica foi usada como ferramenta para investigar defeitos da rede cristalina ou imperfeições nos sólidos. Segundo Tritt (2005), materiais com alta e baixa condutividade térmica são tecnologicamente importantes, sendo que materiais de baixa condutividade térmica são o foco da recente busca por materiais termoelétricos de alta eficiência, materiais com alta condutividade térmica, como o diamante ou silício, têm sido amplamente estudados, em parte, devido às suas possíveis aplicações no gerenciamento térmico de produtos eletrônicos. Por exemplo, baixa condutividade térmica é necessária em aplicações termoelétricas, para limitar a perda de energia térmica na forma de calor entre reservatórios de alta e baixa temperatura (RULL-BRAVO, 2015).

Por outro lado, de acordo com Fan e Khodadadi (2011), alta condutividade térmica é necessária em materiais de armazenamento de hidrogênio e em materiais aplicados ao armazenamento de energia térmica. Portanto, materiais altamente condutores, como nanotubos de carbono ou grafeno, são frequentemente introduzidos para melhorar as propriedades térmicas desses materiais. Assim, ser capaz de prever a condutividade térmica é uma parte importante do esforço de desenvolvimento do material, e este processo é informado por medições experimentais.

A medição de propriedades térmicas de materiais nanoestruturados é tipicamente desafiadora e diferentes técnicas são necessárias dependendo da dimensionalidade e das propriedades de cada estrutura. Os desafios podem ser maiores quando se tenta medir as propriedades de materiais com dimensão em escala nanométrica, como filme fino ou nanofios. Por exemplo, durante a medição da condutividade térmica ou difusividade, a amostra é aquecida localmente e a resposta térmica é registrada em vários locais longe da região aquecida. A propriedade térmica é então extraída interpretando os dados experimentais de temperatura com base na análise teórica da transferência de energia térmica dentro do material. Dependendo das particularidades da configuração experimental, a transferência de energia térmica pode ser afetada por perdas de energia térmica, que se tornam dominantes na grande razão entre superfície e volume, ou resistências térmicas de contato, como entre as sondas térmicas / eletrodos e o material, que pode se tornar dominante em amostras em nanoescala e difícil de estimar com precisão a propriedade térmica.

2.2 Classificação das técnicas de medição de difusividade e condutividade térmica

Em geral, as técnicas empregadas para caracterização de propriedades térmicas podem ser classificadas com base na dependência do tempo de resposta térmica como métodos estacionários ou transitórios, como visto na Fig. 2.1, conforme Abad, Borca-Tasciuc e Martin-Gonzalez (2017).

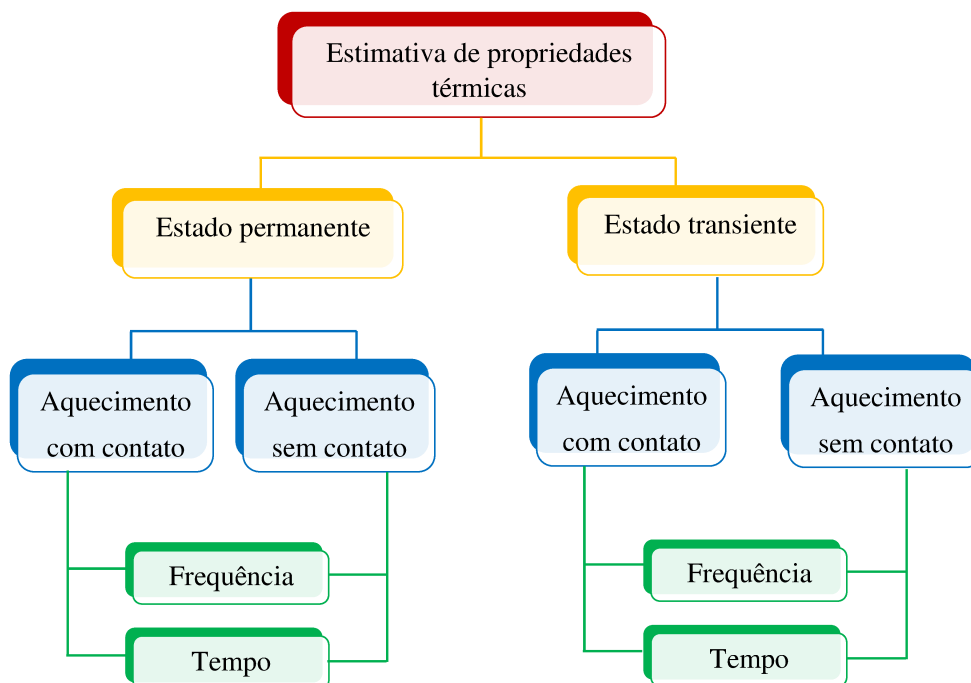


Figura 2.1: Classificação das técnicas de medição da difusividade e condutividade térmica, adaptado de Abad, Borca-Tasciuc e Martin-Gonzalez (2017).

Em estudos relacionados a estimativa de propriedades térmicas no regime permanente, o fluxo térmico é aplicado uniformemente através da amostra de seção transversal uniforme. A temperatura é medida em ambas as extremidades da amostra e a condutividade térmica é determinada pela aplicação de um modelo térmico unidimensional, conhecendo-se as dimensões da amostra Beck (1957), Sass, Stone e Munroe (1984), Dettmer, Romenesko, Charles, Carkhuff e Merrill (1989), Khorunzhii, Gabor, Job, Fahrner, Denisenko, Brunner e Peschek (2002), Moon, Weaver, Feng, Chae, Kumar, Baek e Peterson (2012) e Stoib, Filser, Stötzel, Greppmair, Petermann, Wiggers, Schierning, Stutzmann e Brandt (2014).

Por outro lado, os modelos de regime transiente estudam a resposta térmica em função do tempo de aquecimento do material como nos trabalhos de Healy, Groot e Kestin (1976) e Gustafsson (1991). O aparato experimental e a aquisição de dados das técnicas de estado

permanente são geralmente mais simples do que as técnicas no estado transiente. No entanto, experimentos que usam dados do estado permanente são mais demorados pois necessita-se de maior tempo de ensaio para chegar a esse regime. Além disso, estes, são extremamente sensíveis às perdas de energia térmica através da convecção e radiação.

Técnicas de caracterização de propriedades térmicas também são classificadas dependendo do procedimento de aquecimento, ou seja, métodos com contato e sem contato. No primeiro, a amostra é aquecida por contato direto entre a amostra e a fonte de energia térmica, onde a fonte de aquecimento pode ser um resistor elétrico de película fina depositado diretamente na superfície da amostra, método 3w (CAHILL, 1990) e (LU, 2001), aquecimento por um pulso de calor (OKUDA; OHKUBO, 1992), um resistor externo no caso do método *hot disk* (GUSTAVSSON, 1994), aquecimento por uma microsonda como no método *Scanning Thermal Microscopia* (WILSON, 2015), ou configurações de estado estacionário equivalentes.

Uma das principais desvantagens dessas técnicas é a resistência de contato entre a fonte de calor e a amostra. Isso torna difícil realizar uma medição precisa, especialmente ao medir nanoestruturas como nanofios ou filmes finos, cuja baixa resistência térmica pode ser facilmente superada pela resistência de contato. Além da resistência de contato, a micro fabricação complexa do resistor elétrico de filme fino ou do *microchip* é a principal desvantagem na preparação da amostra para muitas das técnicas de medição de contato (ABAD, 2017).

Em contraste, os métodos sem contato são tipicamente baseados em fenômenos fototérmicos, onde o aquecimento é produzido por uma radiação incidente absorvida. Assim, a resistência de contato de uma fonte de calor é evitada. Estas técnicas também são de interesse devido à simplicidade da preparação da amostra. No entanto, uma vez que é difícil estabelecer com exatidão a quantidade de calor absorvida na amostra, esses métodos utilizam geralmente uma resposta transitória ou modulada, e a propriedade de transporte determinada experimentalmente é a difusividade, α , ou a efusividade térmica, e . A difusividade térmica indica quão rápido o material responde a mudança de temperatura e está relacionada com a condutividade térmica, k , que representa a capacidade ou habilidade do material em conduzir energia térmica dada por $k = \alpha \cdot c_p \cdot \rho$, onde, ρ é a densidade e c_p é o calor específico. Por outro lado, a efusividade, $e = \sqrt{k \cdot c_p \cdot \rho}$, descreve a capacidade do material de trocar calor com o ambiente (ABAD, 2017).

A principal desvantagem desses métodos surge da necessidade de se conhecer tanto a densidade quanto o calor específico do material para conseguir estimar a condutividade térmica. No entanto, essas propriedades podem ser determinadas por outros métodos, como *differential scanning calorimetry* (DSC) para medição do calor específico e *pycnometry* para medições de densidade.

Embora a maioria das técnicas sem contato seja baseada em aquecimento óptico, existem efeitos que podem surgir ao se aquecer a amostra dessa forma, como ondas acústicas (RO-

SENCWAIG; GERSHO, 1976), alteração do índice de refração (PADDOCK; EESLEY, 1986), emissão térmica (GARCIA, 1999) e como a expansão térmica da amostra (OGAWA, 1999). A Figura 2.2 ilustra esses efeitos.

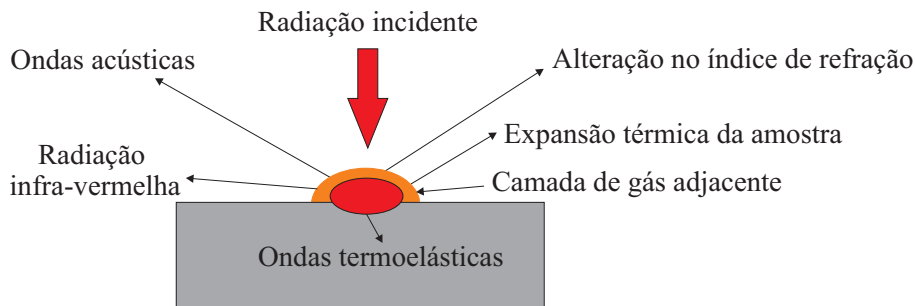


Figura 2.2: Efeitos térmicos associados à radiação incidente absorvida por uma superfície.

A maior parte das técnicas utiliza modelos de transferência de calor unidimensionais, o que permite obter as propriedades térmicas na direção perpendicular à superfície da amostra. Porém, existem modelos que usam a direção paralela à superfície da amostra, essas direções são apresentadas na Fig. 2.3.

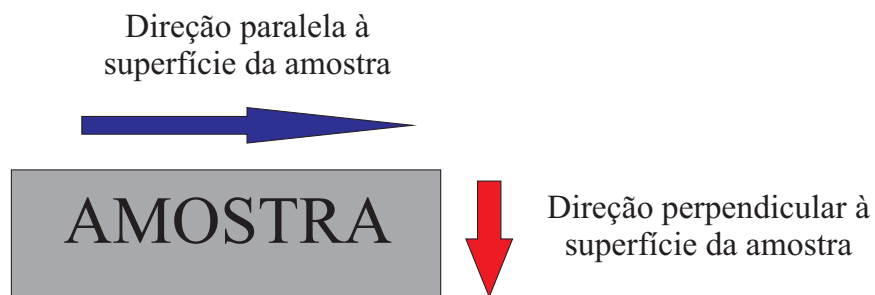


Figura 2.3: Principais direções de medição de propriedades térmicas em uma amostra.

Independentemente da abordagem de detecção utilizada, essas técnicas podem ser divididas em dois grupos principais: domínio do tempo e domínio da frequência (TRITT, 2005). Os métodos no domínio do tempo baseiam-se na análise da resposta térmica em função do tempo, como por exemplo, o decaimento da temperatura da amostra após o aquecimento por um pulso de calor. Em contraste, os métodos no domínio da frequência utilizam uma radiação modulada incidente, que gera um sinal periódico cuja dependência de amplitude e fase na frequência é analisada.

O desenvolvimento dessas técnicas de medição permitiu a otimização de propriedades térmicas e a engenharia de novos materiais para aplicações em energias renováveis e sustentáveis. O armazenamento termoelétrico de energia térmica e os materiais de armazenamento de hidrogênio podem ser encontrados entre as principais energias renováveis, que se baseiam na caracterização

das propriedades térmicas por meio de técnicas sem contato. A necessidade de estudar estes materiais complexos tem impulsionado o desenvolvimento de técnicas existentes e novas, que devem superar as dificuldades associadas à medição de propriedades térmicas em nanoescala.

2.2.1 Técnicas no domínio do tempo

As técnicas no domínio do tempo usadas para medir propriedades térmicas baseiam-se na análise da resposta térmica de um material ao longo do tempo quando este é aquecido. Esses sinais, contêm mais informações sobre as propriedades térmicas da amostra quando comparados a sinais de frequência, contudo, a análise dos sinais podem apresentar maior ruído.

(a) Termo-refletância no domínio do tempo (TDTR)

A técnica termo-refletância foi proposta pela primeira vez por Eesley (1986) para medir a condutividade térmica de filmes finos no substrato. Este método usa uma bomba de laser e uma sonda para realização do experimento. Nesta configuração, o laser é absorvido pela amostra, a qual produz uma mudança transitória na temperatura. Por sua vez, isso causa uma mudança na refletividade da superfície que é sentida com a ajuda da sonda. Assim, a amostra deve ser coberta por uma fina camada metálica, altamente refletiva no comprimento de onda do laser da sonda. Na Tabela 2.1 mostram-se as vantagens, desvantagens e o erro encontrado na determinação da propriedade térmica (PPT) usando essa técnica. A mudança na refletividade, ΔR , de materiais metálicos é tipicamente proporcional à variação de temperatura, ΔT , através do coeficiente de termo-refletância, k_r , essa relação pode ser vista na Eq. (2.3).

$$\frac{\Delta R}{R} = k_r \Delta T \quad (2.3)$$

Tabela 2.1: Termo-refletância no domínio do tempo (TDTR), modificada de Abad, Borca-Tasciuc e Martin-Gonzalez (2017)

PPT	Vantagens	Desvantagens	Erro
	Sem resistência de contato	Superfícies lisas	
	Resolução de profundidade nanométrica	Pós-processamento extenso	
k	Informações sobre a espessura e microestrutura	Metalização	$\sim 10 \%$
	Boa sensibilidade da interface térmica	Experimento complexo	
	Condutividade de <i>filmes finos</i>	Necessita de ρ e c_p	

(b) Método Flash

Esta técnica foi desenvolvida por Parker, Jenkins, Butler e Abbott (1961), e atualmente é uma das principais técnicas para medir propriedades térmicas de materiais sólidos acima da temperatura ambiente. Esta metodologia depende de aquecer a amostra opticamente de um lado com um pulso de laser e detectar a mudança de temperatura do outro lado com uma câmara infravermelha ou um termopar. Uma configuração alternativa para o método pode ser feita aplicando o aquecimento e realizando a detecção da propriedade térmica na parte frontal da estrutura Ohta, Shibata e Kasamoto (2006). As vantagens, desvantagens e o erro que esta técnica pode apresentar na determinação da difusividade térmica são mostrados na Tab. 2.2.

Tabela 2.2: Método Flash, adaptado de Abad, Borca-Tasciuc e Martin-Gonzalez (2017)

PPT	Vantagens	Desvantagens	Erro
	Sem resistência de contato	Limitação de espessura	
	Fácil tratamento dos dados	Necessita de ρ e c_p	
α	Altas ou baixas temperatura	Filmes finos complicado	$\sim 5 - 10 \%$
	Baixa energia para aquecer a amostra	Exige pintura da amostra	
	Estima a difusividade térmica	Tamanhos grandes	

2.2.2 Técnicas no domínio da frequência

Técnicas baseadas no domínio da frequência empregam, por exemplo um feixe de laser modular para aquecer a superfície da amostra em estudo. O calor periódico difunde através da amostra produzindo ondas térmicas e uma distribuição de temperatura periódica. A profundidade de penetração térmica, μ , definida como a distância em que a onda térmica é atenuada é uma função da frequência modulada, $\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi \cdot f}}$ onde α é a difusividade térmica e μ é a frequência modular. Com base neste parâmetro, pode ser definida uma frequência crítica para a qual a profundidade de penetração é igual à espessura do filme. Algumas técnicas podem ser citadas como: Termo-refletância no domínio da frequência (FDTR), emissão fototérmica/radiometria fototérmica, deflexão do feixe fototérmico (PBD) ou “método miragem”, técnica de deslocamento fototérmico (PTDT), calorimetria piroelétrica, técnica foto termoelétrica, método fotoacústico (PA).

2.3 Métodos clássicos de medição de propriedades térmicas

Um dos métodos clássicos foi desenvolvido por Blackwell (1954), o qual apresentou uma técnica transiente usada na determinação da condutividade térmica chamada de método do Fio

Quente. O método baseia-se na solução da equação da difusão de calor para uma fonte de energia térmica em forma de linha infinita, imersa numa amostra suposta infinita. Este método é realizado com a inserção de uma sonda cilíndrica no centro axial da amostra que se deseja medir. A sonda tem a função de perder energia térmica na forma de calor por efeito joule e medir a temperatura no interior da amostra. Devido a alta resistência de contato entre a sonda e a amostra, esta técnica não é indicada para metais.

Podem-se citar vários trabalhos, entre eles Grazzini, Balocco e Lucia (1996) fizeram um estudo da influência da resistência de contato na determinação da condutividade térmica, Gross e Tran (2004) estudaram os efeitos da radiação térmica na determinação da condutividade em amostras porosas, e Coquard, Baillis e Quenard (2006) determinaram a condutividade térmica de poliestireno expandido de baixa densidade (EPS),

Existem trabalhos que utilizaram a técnica do Fio Quente tanto para obtenção da condutividade térmica quanto para obtenção da difusividade térmica. Xie, Gu, Zhang e Fujii (2006) mediram a condutividade e a difusividade térmica de líquidos, gases e pós através de um modelo bidimensional usando a técnica de otimização conhecida como método *simplex*.

O método do Fio Quente também foi usado por Waite, Gilbert, Winters e Mason (2006) para estimar a difusividade, condutividade e a capacidade térmica. A técnica do Fio Quente não fornece uma medição de calor específico. Em vez disso, medições diretas de condutividade e difusividade térmicas são combinadas com a estimativa da densidade da amostra para calcular o calor específico.

2.4 Métodos contemporâneos de medição de propriedades térmicas

Os métodos *Hot Square* e *Hot Disk* usam o princípio de que o sensor permite a medição de temperatura e a imposição de calor em uma mesma face, todavia a montagem experimental exige o uso de duas amostras. Esses métodos são baseados na construção de um plano de aquecimento variável no tempo (TPS). Quando sua construção é feita com geometria retangular recebe o nome de *Hot Square*, quando a construção é radial recebe o nome de *Hot Disk*.

O método consiste em colocar o plano de aquecimento variável no tempo no interior de uma amostra ou entre duas amostras. O TPS é então submetido a uma tensão elétrica e produz um aquecimento que é absorvido pela amostra. Tal aquecimento deve ser curto o suficiente para que nenhuma outra superfície da amostra influencie na variação de temperatura. Assim, constroem-se um modelo térmico infinito ou semi-infinito considerando que a energia térmica gerada pelo TPS é absorvida pela amostra, extraindo-se daí as propriedades térmicas. O trabalho de Gustafsson (1991) apresentou os ajustes, considerações e modelos para o TPS no formato

retangular ou radial, além de resultados da medição de propriedades para diversos materiais em diferentes temperaturas, encontrando desvios da ordem de 3 % e 7 % para a condutividade e difusividade térmicas, respectivamente.

No método Angstrom modificado a difusividade e a condutividade térmica são obtidas simultaneamente através do uso de duas temperaturas superficiais de uma amostra fina. Entretanto, o aparato experimental prevê o apoio das extremidades, sendo o fluxo de calor imposto em uma delas. O método determina a difusividade térmica pela avaliação da defasagem entre as temperaturas medidas em duas posições comparada ao fluxo senoidal imposto na amostra. A capacidade térmica é estimada a partir de um modelo onde não há perda de calor, já a condutividade térmica é calculada pela relação com a difusividade e a capacidade térmica (ZHU, 2016).

Remy e Degiovanni (2005) estudaram propriedades térmicas em líquidos. Huang e Liu (2009) e Mohamed (2010) estudaram propriedades térmicas em alimentos. Laskar, Bagavathiappan, Sardar, Jayakumar, Philip e Raj (2008) estudaram propriedades térmicas em metais sólidos.

Existem limitações na estimativa de propriedades térmicas em amostras finas ou materiais condutores, sendo isso um dos motivos da tendência de se buscar modelos térmicos mais complexos que se aproximem das condições reais de um experimento e que permitam o desenvolvimento de projetos experimentais mais simples, menos onerosos e com uma maior flexibilidade em relação à geometria das amostras. Assim, modelos multidimensionais com soluções numéricas tem sido introduzidos e incorporados às técnicas experimentais como no trabalhos de Dowding, Beck e Blackwell, (1996), Aviles-Ramos, Haji-Sheikh, Beck e Dowding, (2001), Murphy, Kehoe, Pietralla, Winfield e Floyd, (2005) e Borges, Lima e Silva e Guimarães, (2006).

Borges, Lima e Silva e Guimarães (2006) desenvolveram uma técnica de medição de propriedades térmicas que baseia-se na metodologia do aquecimento parcial e na construção de um algoritmo numérico, chamado de DPT - Determinação de Propriedades Térmicas, e que entre outras atribuições, possui capacidade de adaptação e solução de modelos térmicos complexos. Por exemplo, o algoritmo possibilita a medição de propriedades térmicas a partir de um modelo tridimensional transiente e com condições de contorno transientes com fluxo de calor imposto variando com o tempo e o espaço.

2.4.1 Técnicas experimentais para determinação de propriedades térmicas usando apenas uma superfície de acesso

O objetivo principal do presente trabalho é a identificação térmica de materiais sólidos usando apenas uma superfície de acesso. Encontram-se na literatura alguns trabalhos que buscam esse objetivo. Como já mencionado, a técnica do *Hot Square* e *Hot Disk* são aplicadas à uma superfície embora o aparato experimental necessite da outra superfície para suporte.

(LIMAESILVA, 2003) Descrevem uma técnica experimental para obter, simultaneamente, a difusividade e a condutividade térmica de materiais poliméricos. Essa técnica usa dados experimentais de apenas uma das superfícies da amostra. Para isso, funções objetiva usando temperatura experimental e calculada são definidas. Uma função objetivo de fase definida a partir da correlação entre os sinais de temperatura experimental e teórico no domínio da frequência é usada para determinação da difusividade térmica, enquanto uma função de erro quadrático entre os sinais de temperatura experimental e teórico no domínio do tempo é usada para a estimativa de condutividade térmica. A técnica de otimização sequencial irrestrita (BFGS) é usada para calcular a direção de busca. Em cada caso, o método da Seção Áurea é usado e seguido de uma aproximação polinomial. Os resultados são comparados com o método Flash e a Placa Quente protegida, sendo que os resultados apresentam um desvio de 2,97 % e 0,63 % para a difusividade térmica e condutividade térmica, respectivamente, para uma amostra de PVC.

Malheiros (2017) apresentou uma técnica baseada na razão de ganho de temperatura e na minimização da função erro quadrático para estimativa de α e k em materiais sólidos. O método se baseia na utilização de um aparato experimental constituído de uma resistência elétrica para aquecimento, dois termopares e um sensor de medição de fluxo de calor. A amostra é parcialmente aquecida em uma superfície frontal. Duas regiões da superfície frontal, aquecida e não aquecida, são usadas para estimar as propriedades térmicas. As propriedades foram mensuradas em duas amostras diferentes, PVC e cobre, material não metálico e condutor, com o desvio inferior a 2 % dos valores encontrados na literatura.

Este trabalho usa também o conceito da razão de ganho para determinação de α . Entretanto, diferente de Malheiros (2017), propõe dois conjuntos experimentais. Um para estimativa de α e outro para estimativa de k . Análises de sensibilidade indicam que modelos térmicos diferentes devem ser usados para a otimização dessa técnica, assim como experimentos de aquecimento distintos.

Capítulo 3

Metodologia para estimativas da difusividade térmica e da condutividade térmica

3.1 Introdução

Como mencionado, o objetivo do presente trabalho é o desenvolvimento e a aplicação de um método experimental para a obtenção simultânea da difusividade e da condutividade térmica em materiais sólidos metálicos e não metálicos. O modelo térmico é estabelecido pelo aquecimento em uma região de uma amostra enquanto as superfícies externas a essa região são isoladas do meio ambiente. As respostas de temperatura superficiais em três posições da superfície permitem as estimativas das propriedades térmicas.

Estas propriedades, tratadas como variáveis de projeto, são estimadas a partir da otimização de duas funções objetivo distintas, ou seja, a minimização de duas funções objetivos diferentes e oriundas de modelos térmicos diferentes que por sua vez usam temperaturas provenientes da superfície da amostra.

A minimização da primeira função objetivo, responsável pela estimativa da difusividade térmica, baseia-se na minimização da função erro quadrática no ajuste experimental e teórico da razão entre duas temperaturas superficiais afastadas da região de aquecimento. A condutividade térmica, por sua vez, é estimada pela minimização da função erro quadrática entre temperaturas calculadas e medidas experimentalmente em uma posição da superfície.

Após estimadas a difusividade e a condutividade térmicas, é possível estimar tanto a capacidade térmica e a efusividade térmica de maneira direta usando equações básicas da transferência de calor, como será mostrado neste capítulo. A técnica em análise tem todos os requisitos para aplicação *in situ*, uma vez que usa apenas uma superfície de acesso para o aquecimento e me-

dição da resposta de temperatura.

3.2 Estimativa da difusividade térmica

Neste tópico serão abordados os procedimentos usados para estimativa desta propriedade térmica, que foram baseados no conceito de razão de ganho de temperatura, na determinação de uma função objetivo otimizada pelo método da Seção Áurea e na análise de sensibilidade. Além disso, será abordado o fluxograma da lógica computacional de estimativa da difusividade térmica.

3.2.1 Razão de ganho de temperatura experimental

Segundo Malheiros (2017), a razão de ganho de temperatura representa o quociente entre a variação da temperatura do ponto mais próximo da fonte de calor pela variação da temperatura do ponto mais afastado. Essa razão de ganho pode ser empregada na estimativa da difusividade térmica α , e é representada por

$$R_{GTexp} = \frac{T_1(x_1, t) - T_0}{T_2(x_2, t) - T_0} = \frac{\theta_1(x_1, t)}{\theta_2(x_2, t)} \quad (3.1)$$

onde, T_0 é a temperatura inicial da amostra, T_1 e T_2 representam as temperaturas medidas na superfície da amostra em um ponto mais próximo da fonte de calor e outro mais afastado, respectivamente.

3.2.2 Função objetivo

Juntamente com a técnica de otimização da Seção Áurea, adota-se o método dos mínimos quadrados por ser uma técnica matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados experimentais e seus respectivos valores teóricos. A Equação (3.2) representa a função dos mínimos quadrados definida pelo quadrado da diferença entre a razão de ganho de temperatura experimentais (R_{GTexp}) e a razão de ganho de temperatura analítica (R_{GTana}). Assim, a função objetivo $F(\alpha)$ a ser minimizada pode ser representada pela Eq. (3.2):

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^N [R_{GTexp}(t_i) - R_{GTana(\alpha)}(t_i)]^2 \quad (3.2)$$

A razão de ganho de temperatura analítica deve ser função exclusiva da difusividade térmica,

este modelo será mostrado no capítulo 4. Com isso, uma técnica simples de otimização unimodal pode ser aplicada para este problema.

3.2.3 Análise da sensibilidade da razão de ganho de temperatura

Nesta etapa é avaliado o comportamento da razão de ganho de temperatura em relação aos parâmetros da Eq. (3.1), ou seja α , x_1 , x_2 , L e t . Genericamente a expressão da sensibilidade é dada pela Eq. (3.3).

$$X_{\beta} = \frac{\partial R_{GTana}}{\partial \beta} \quad (3.3)$$

onde β , representa o parâmetro em análise.

3.2.4 Fluxograma da estimativa da difusividade térmica

Na Figura 3.1 é apresentada o fluxograma do algoritmo de estimativa da difusividade térmica baseado na razão de ganho de temperatura e na técnica de otimização da Seção Áurea.

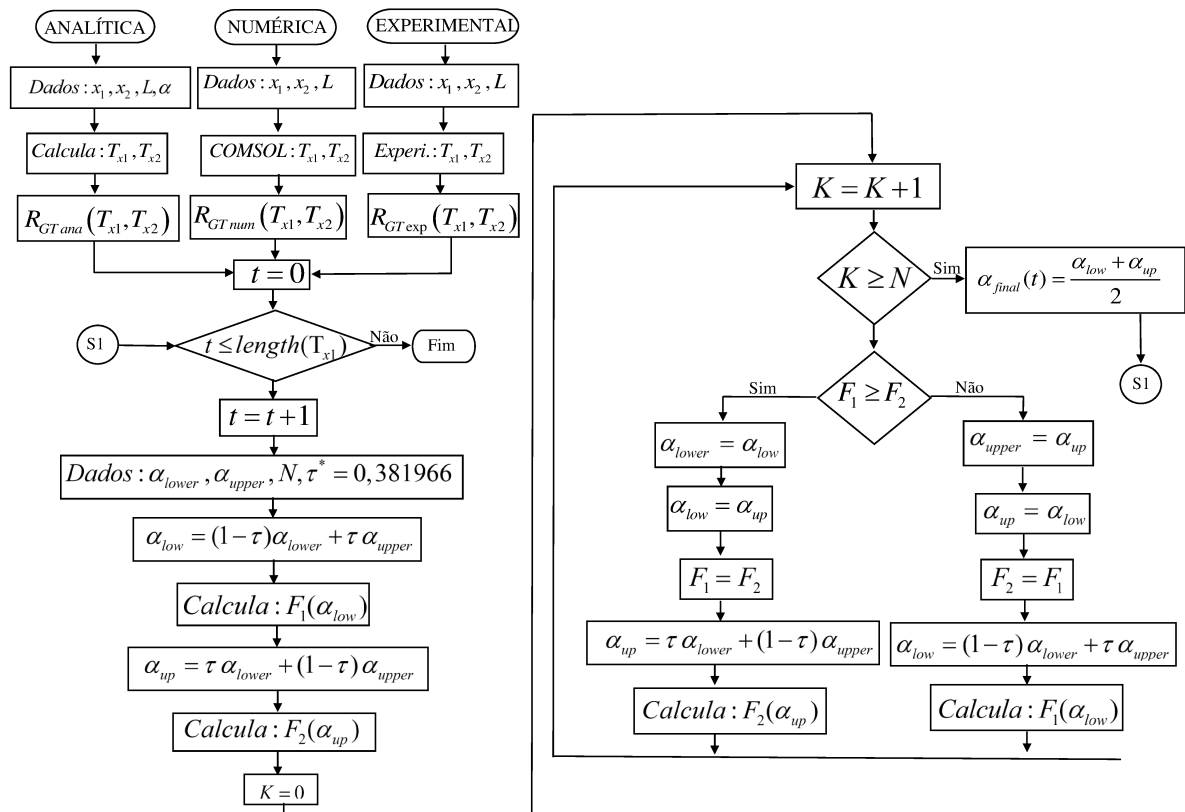


Figura 3.1: Fluxograma de estimativa da difusividade térmica.

3.3 Estimativa da condutividade térmica

Uma vez estimado o valor da difusividade térmica, α , o próximo passo é estimar a condutividade térmica, k . O método da Seção Áurea também será usado como lógica de otimização a qual será detalhada no tópico 3.4.

3.3.1 Função objetivo

A função objetivo baseada no erro quadrático entre a temperatura medida experimentalmente e a calculada pelo modelo teórico é usada para estimar a condutividade térmica, k . Na Equação (3.4) é mostrada a função de mínimos quadrados definida pelo quadrado da diferença entre as temperatura experimentais (Y_{exp}) e as temperaturas teóricas calculadas pelo modelo analítico (T_{ana}) e N é o número total de medições. Assim, a função objetivo a ser minimizada pode ser escrita como:

$$F(k) = \sum_{i=1}^N [Y_{exp}(i) - T_{ana}(i)]^2 \quad (3.4)$$

3.3.2 Tempo de desvio

Conforme Ignacio (2016), o tempo de desvio é dado pela Eq. (3.5), onde o numerador desta relação é a diferença de temperatura entre os modelos finito e semi-infinito. Neste caso, o tempo de desvio determina o instante em que o modelo finito diverge do semi-infinito. A diferença de temperatura na posição x calculada por ambos os modelos deve ser inferior a um limite de ordem decimal aceitável (10^{-n}).

$$\frac{\theta_{XIJ}(x, t) - \theta_{XIO}(x, t)}{\theta_{XIO}(x, t)} = 10^{-n} \quad (3.5)$$

onde, $\theta_{XIJ}(x, t)$ é a temperatura do modelo finito e $\theta_{XIO}(x, t)$ é a temperatura do modelo semi-infinito.

3.3.3 Fluxograma da estimativa da condutividade térmica

Na Figura 3.2 é apresentada o fluxograma do algoritmo de estimativa da condutividade térmica baseado nos modelos térmicos unidimensionais e tridimensionais de temperatura e na técnica de otimização da Seção Áurea.

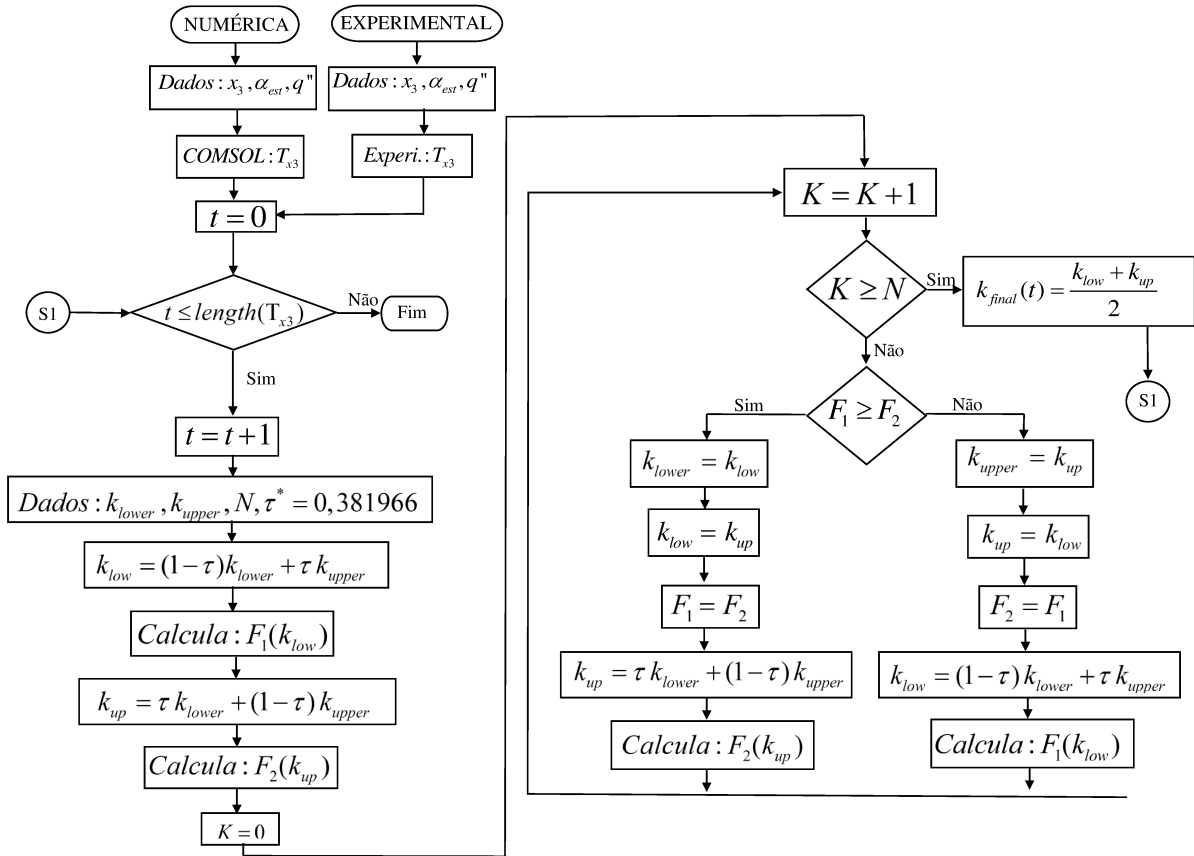


Figura 3.2: Fluxograma de estimativa da condutividade térmica.

3.4 Técnica de otimização

A otimização consiste em encontrar uma solução ou um conjunto de soluções ótimas para uma determinada função ou conjunto de funções. O conceito de solução ótima é inerente do problema que se deseja otimizar. Por exemplo, em uma situação A modelada matematicamente por uma função F_A há a necessidade de determinar um valor (valor ótimo) tal que F_A seja mínimo, ou ainda uma situação B cujo modelo matemático seja expresso por n funções F_{Bn} ($n = 1, 2, \dots, n$) onde se pretende maximizar algumas e minimizar as demais. Neste caso, pode-se ter uma única solução, um conjunto de soluções ou ainda não haver solução que satisfaça todas as funções. A medida que o número de funções e o número de variáveis aumentam, a dificuldade em se determinar o conjunto de soluções ótimas também aumenta. É neste contexto que surge a necessidade de desenvolver técnicas matemáticas e computacionais que refinem o processo de otimização, dado que este é amplamente utilizado para resolver problemas de engenharia (SARAMAGO; STEFFEN, 2000).

3.4.1 Método da Seção Áurea

Para o trabalho em questão foi utilizado o método da Seção Áurea, visto que o mesmo permite estimar o máximo, o mínimo ou o zero de uma função de uma única variável. Este método é uma técnica popular já que a função assumida como unimodal não precisa ter derivadas contínuas e em casos especiais, pode-se lidar com funções que nem sequer são unimodais ou contínuas. Além disso, essa técnica é fácil de ser implementada (VANDERPLAATS, 1999).

3.4.2 Redução do intervalo de incerteza

Na Figura 3.3 (a) mostra-se o novo intervalo de análise para a condição: $F_1 > F_2$, sendo que o novo intervalo de análise é dado por $\alpha \in [\alpha_{low}, \alpha_{upper}]$. Na Figura 3.3 (b) com $F_1 < F_2$ mostra-se o novo intervalo de análise como sendo $\alpha \in [\alpha_{lower}, \alpha_{up}]$ e na Fig. 3.3 (c) com $F_1 = F_2$ onde o novo intervalo de análise é dado por $\alpha \in [\alpha_{low}, \alpha_{up}]$.

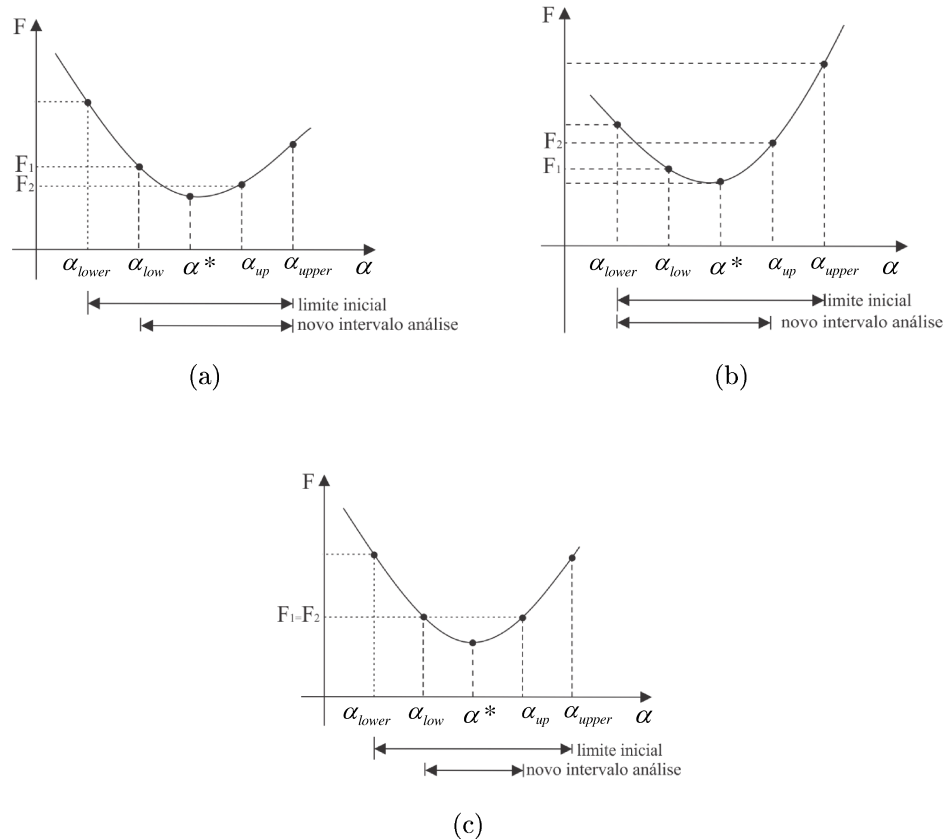


Figura 3.3: Redução do intervalo de incerteza: (a) Caso $F_1 > F_2$; (b) Caso $F_1 < F_2$, (c) Caso $F_1 = F_2$.

O principal objetivo da redução do intervalo de incerteza é o de desenvolver um procedimento computacional para aplicação iterativa do método da Seção Áurea. Como em qualquer

procedimento iterativo, deve-se definir um critério para que possa ser definido quando a solução converge para valores aceitáveis. Conforme Vanderplaats (1999), o critério de convergência do método da Seção Áurea é dado pela Eq. (3.6).

$$N = \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1 - \tau^*)} + 3 = -2,078 \ln \varepsilon + 3 \quad (3.6)$$

onde ε é a tolerância, $\tau^* = 0,38197$ é o número Áureo e N representa o número de avaliações da função necessárias para se reduzir o intervalo de incerteza a partir da Seção Áurea.

Capítulo 4

Fundamentos teóricos: modelos térmicos usados e suas soluções

Muitas das técnicas que determinam propriedades térmicas usam soluções analíticas, sendo que os algoritmos inversos usualmente necessitam do cálculo do problema direto várias vezes. O uso de soluções analíticas, neste caso, contribui não só para o aumento da precisão destas técnicas, mas também para a redução do custo computacional (FERNANDES, 2009).

A hipótese de um modelo unidimensional normalmente é garantida por um valor alto da razão geométrica (área/espessura). Neste caso, o gradiente térmico necessário para obtenção das propriedades térmicas é considerado na direção do fluxo de calor imposto. Este procedimento, por sua vez, encontra dificuldade de aplicação em materiais condutores devido à baixa sensibilidade das propriedades térmicas em relação à variação de temperatura na direção do fluxo, exigindo-se equipamentos potentes ou amostras de grandes espessuras (BORGES, 2006).

Existem limitações na estimativa de propriedades térmicas em amostras finas, com escalas nanométricas e materiais condutores, sendo isso um dos motivos para se buscar modelos térmicos mais complexos que se aproximem ainda mais das condições reais de um experimento, permitindo o desenvolvimento de projetos experimentais mais simples, menos onerosos e com uma maior flexibilidade em relação à geometria das amostras. Assim modelos multidimensionais com soluções numéricas tem sido introduzidos e incorporados à técnicas experimentais, sendo que este trabalho tem como objetivo o uso funções de Green, que no geral é ideal para se obter soluções analíticas de problemas de condução de calor.

Este capítulo apresenta uma breve introdução sobre as funções de Green (FG), sistema de numeração e a notação das FG dos mais diferenciados tipos de condições de contorno. Além disso, neste capítulo apresenta-se a solução geral de vários problemas de condução de calor que serão usados para estimar as propriedades térmicas.

4.1 Funções de Green

As funções de Green (FG), desenvolvidas pelo físico inglês George Green (1793-1841), são ferramentas para obter soluções analíticas de problemas lineares de condução de calor. Elas também são aplicadas à solução de muitos outros fenômenos físicos descritos por equações diferenciais lineares. A FG é uma solução básica de uma equação diferencial específica com condições de contorno homogêneas. Para a condução de calor transiente, uma FG descreve a distribuição de temperatura causada por um pulso de calor local instantâneo (COLE, 2010).

Ao usar as FG tabeladas, as soluções de muitos problemas de condução de calor podem ser obtidas de forma direta e eficiente. Em muitos casos, as soluções podem ser descritas diretamente em termos de integrais simples de serem calculadas. Comparado com os métodos analíticos usuais, as FG requerem um nível mais baixo de habilidade matemática para a solução de equações diferenciais parciais (COLE, 2010).

Uma vantagem é que o método possui solução sistemática, ou seja, muitas FG foram solucionadas e tabeladas no livro Cole, Beck, Haji-Sheikh e Litkouhi (2010), não sendo necessário desenvolver auto-funções e auto valores. Nesses casos, a solução pode ser escrita facilmente em termos de FG com menor possibilidade de erros tanto em geometrias bidimensionais quanto em tridimensionais. Outra vantagem do método é a possibilidade de verificação intrínseca das soluções exatas.

O sistema de numeração proposto por Cole, Beck, Haji-Sheikh e Litkouhi (2010) se aplica para geometrias ortogonais como placas, cilindros e esfera. Na Tabela 4.1 apresenta-se o sistema de numeração das FG.

Tabela 4.1: Sistema de numeração Cole, Beck, Haji-Sheikh e Litkouhi (2010)

Notação	Condição de Contorno	Descrição
0	Natural	Sem limite físico
1	Dirichlet	Temperatura prescrita
2	Neumann	Fluxo de calor prescrito
3	Robin	Balanco de energia

Para o sistema de coordenadas retangulares, o símbolo X é usado para denotar a coordenada x ; Y é usado para denotar a direção y ; e Z é usado para denotar a direção z .

As soluções são arranjadas usando um sistema de numeração para a coordenada em análise. Por exemplo, o X é seguido por dois números (representativos da condição de contorno conforme Tab. 4.1), sendo que o primeiro é para condição de contorno em $x = 0$ e o segundo número é para a condição de contorno em $x = L$. Se o contorno tende a infinito, o dígito zero é usado.

Produtos de duas ou três funções de Green das condições de contorno do tipo 0, 1, 2 e 3

podem ser usados para problemas bidimensionais e tridimensionais em coordenadas retangulares. Como já mencionado, Cole, Beck, Haji-Sheikh e Litkouhi (2010) propuseram um sistema de notação cujo principal objetivo é de facilitar e identificar de forma mais fácil o problema de condução de calor em questão. Por exemplo, o problema térmico descrito pela equação da difusão.

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

onde, k é a condutividade térmica, ρ é a massa específica, c_p é o calor específico, T é a temperatura e t é o tempo. Esse problema pode estar sujeita às seguintes condições de contorno:

1. Geometria infinita(condição natural);
2. Temperatura prescrita;

$$T(r_i, t) = f_i(r_i, t) \quad (4.2)$$

3. Fluxo de calor prescrito;

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{r_i} = f_i(r_i, t) \quad (4.3)$$

4. Condição de balanço de energia;

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{r_i} + h_i T|_{r_i} = f_i(r_i, t) \quad (4.4)$$

Os casos distintos para geometria unidimensional, considerados como geometria-infinita, semi-infinita e finita são apresentados na Fig. 4.1.

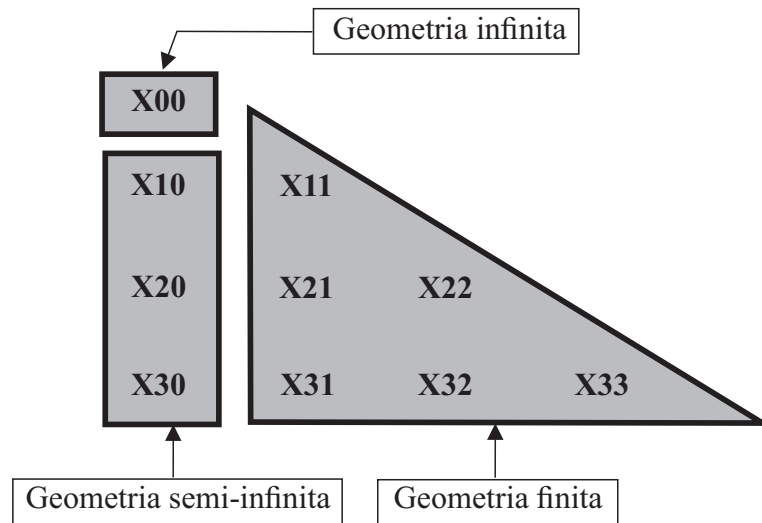


Figura 4.1: Casos para geometria unidimensional, modificado de Cole, Beck, Haji-Sheikh e Litkouhi (2010).

Na Figura 4.2 (a) apresenta-se o modelo térmico com condições de contorno do tipo fluxo prescrito em $x = 0$ e infinito na outra condição de contorno e pode ser representado pela função de Green (FG) unidimensional G_{X20} . Na Figura 4.2 (b) mostra-se o caso X22 com condições de contorno do tipo fluxo prescrito em $x = 0$ e isolado em $x = L$, representado pela (FG) G_{X22} .

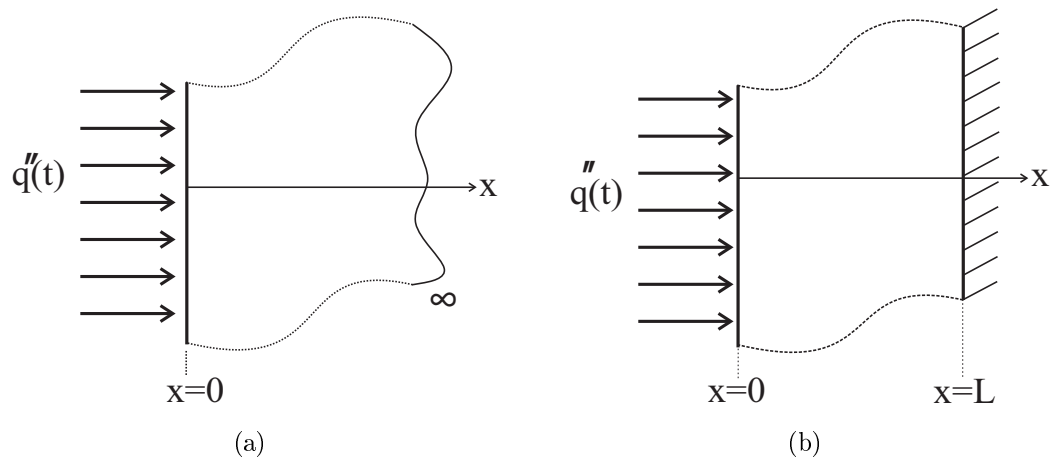


Figura 4.2: Funções de Green: (a) G_{X20} ; (b) G_{X22} .

Na Figura 4.3 (a) apresenta-se o modelo térmico, com condições de contorno do tipo fluxo prescrito, em $x = 0$, e convecção de calor do lado oposto cuja notação em (FG) é dada por G_{X23} , já o problema térmico representado pela Fig. 4.3 (b) apresenta condições de contorno do tipo fluxo prescrito, em $x = 0$ e temperatura prescrita em $x = L$, cuja notação em (FG) é dada por G_{X21} .

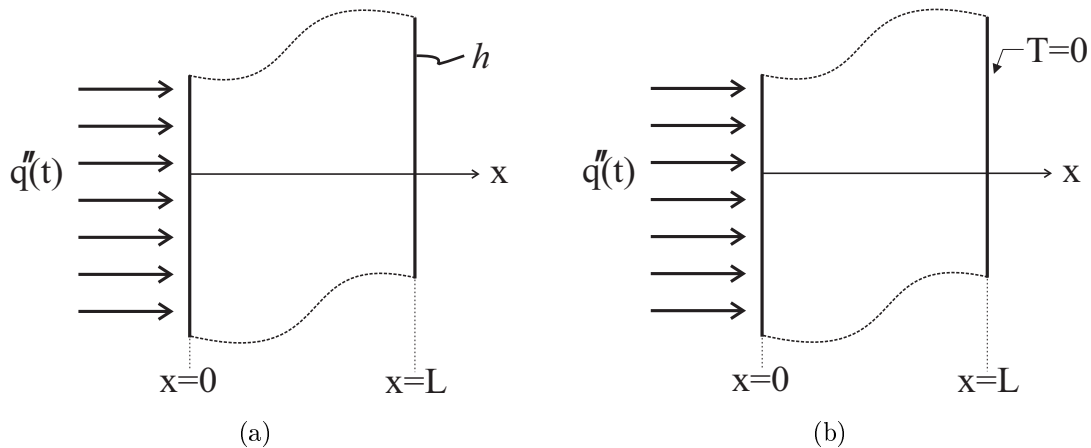


Figura 4.3: Funções de Green:(a) G_{X23} ; (b) G_{X21} .

4.2 Solução geral 1D

Um exemplo geral pode ser dado por uma placa de comprimento L , inicialmente a uma temperatura $T(x, 0) = F(x) = T_0$ sendo submetida a um meio convectivo e um fluxo de calor $q''(t)$ em suas duas superfícies e sujeita à geração de calor interna, não uniforme $g(x, t)$. O problema acima pode ser descrito pela Eq. (4.5).

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{k} g(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (4.5a)$$

sujeito às condições de contorno, em $x = 0$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} + h_1 T(0, t) = +q_1''(t) + h_1 T_\infty \quad (4.5b)$$

em $x = L$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} + h_2 T(L, t) = -q_2''(t) + h_2 T_\infty \quad (4.5c)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (4.5d)$$

O problema da Eq. (4.5) envolve os três tipos de condições de contorno em um problema de condução de calor clássico. Conforme Cole, Beck, Haji-Sheikh e Litkouhi (2010) a equação-solução integral baseada em funções de Green para o problema (4.5) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
T(x, t) &= \int_{x'=0}^L G(x, t|x', 0)F(x')dx' \\
&+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L G(x, t|x', \tau) \frac{g(x', \tau)}{k} dx' d\tau \\
&+ \alpha \int_{\tau=0}^t d\tau \sum_{i=1}^2 \frac{f_i(\tau)}{k} G(x, t|x', \tau) \\
&- \alpha \int_{\tau=0}^t d\tau \sum_{i=1}^2 f_i(\tau) \left. \frac{\partial G}{\partial x'} \right|_{x'=x_i}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Na Equação (4.6) o termo $G(x, t/x', \tau)$ representa a função de Green associada ao problema térmico, e $\frac{\partial G}{\partial x'}$ a sua derivada. Observe que $G(x, t/x', \tau)$ é a solução de um problema auxiliar cuja definição é dada pela versão homogênea do problema original (4.5), ou seja;

$$\frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} \tag{4.7a}$$

sujeito às condições de contorno, em $x = 0$

$$-k \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=0} + h_1 G(0, t) = 0 \tag{4.7b}$$

em $x = L$

$$-k \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=L} + h_2 G(L, t) = 0 \tag{4.7c}$$

e à condição inicial

$$G(x, 0) = F(x) \tag{4.7d}$$

Para a implementação numérica de dados discretos (temperatura e fluxo de calor) usou-se o modelo híbrido para solução do problema. A solução híbrida para o problema direto é uma alternativa para o emprego de dados reais em concomitância a solução analítica. Observa-se que o fluxo de calor pode ser representado como um vetor de suas componentes como pode ser observado na Fig. 4.4, que são constantes em cada intervalo de tempo, isto é, $q''(t) =$

$[q_1'', q_2'', \dots, q_n'']$, sendo q_n'' a componente para o intervalo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, com $n = 1, 2, \dots, N - 1$ (FERNANDES, 2013).

$$\int_0^t q''(\tau) d\tau = \int_{t_1=0}^{t_2} q_1'' d\tau + \int_{t_2}^{t_3} q_2'' d\tau + \dots + \int_{t_n}^{t_{n+1}} q_n'' d\tau = \sum_{n=1}^{N-1} q_n''(t_{n+1} - t_n) \quad (4.8)$$

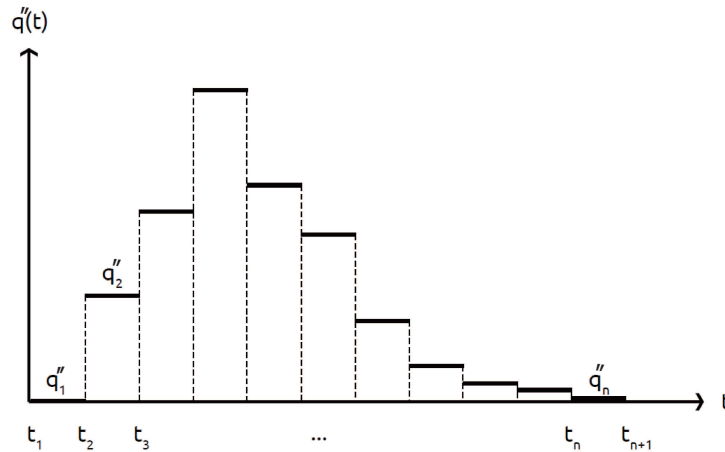


Figura 4.4: Fluxo híbrido, adaptado de Fernandes (2013).

Para solução híbrida dos casos G_{X20} e G_{X22} , a geração de calor $g(x, t)$ e $f_2(\tau)$ são considerados nulos, a temperatura inicial é dada por $F(x') = T_0$, a condutividade térmica por k considerada constante para materiais isotrópicos e o fluxo de calor dado por $f_1(t) = q''(t)$. Com isso a Eq. (4.6) pode ser simplificada pela Eq. (4.9).

$$T(x, t) = T_0 \int_{x'=0}^{\infty} G(x, t|x', 0) dx' + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t G(x, t|0, \tau) q''(\tau) d\tau \quad (4.9)$$

A função $G(x, t|x', \tau)$ é então substituída nesta Eq. (4.9) por uma função de Green particular $G_{X20}(x, t|x', \tau)$, que é obtida por meio de tabelas em (COLE, 2010). Ozisik e Hahn (2012) ressalta que a função G_{X20} é dada em termos do atraso $t - \tau$, uma vez que por definição $G(x, t|x', \tau)$ é uma função de $t - \tau$, ou seja a função de Green pode ser entendida como $G(x, t|x', \tau) = G(\text{efeito}/\text{impulso}) = \text{funo}(t - \tau)$ onde “ x, t ” representa o “efeito”, isto é, a temperatura no meio em uma posição x e um tempo t devido a um pulso de calor numa posição x' e tempo τ .

4.2.1 Modelos térmicos unidimensionais

Solução híbrida 1D - X20

O problema geral de condução de calor unidimensional, transiente, sem geração interna de calor submetida a um fluxo de calor $q''(t)$ em $x = 0$, referenciado por X20 representado pela Fig. 4.5.

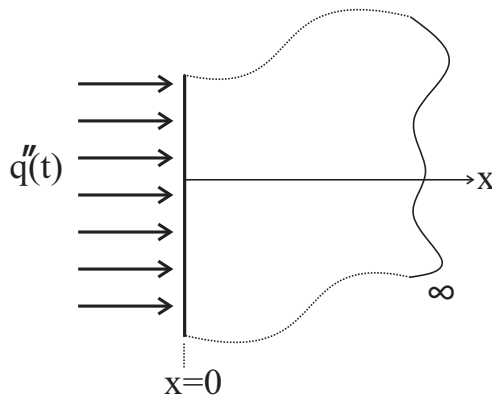


Figura 4.5: Problema térmico unidimensional G_{X20} .

Este problema pode ser descrito pela Eq. (4.10).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.10)$$

sujeito às condições de contorno

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q''(t) \quad (4.11)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (4.12)$$

A dedução matemática é descrita em anexo (A.2.1). A solução analítica para o modelo X20 é dada por:

$$T(0, t) = T_0 - \frac{\alpha}{k} \sum_{n=1}^{N-1} q_n''(t) \left(\frac{2}{\pi\alpha} \right) \left([\pi\alpha(t - t_{n+1})]^{1/2} - [\pi\alpha(t - t_n)]^{1/2} \right) \quad (4.13)$$

Solução híbrida 1D - X22

O problema de uma placa sendo submetida a um fluxo de calor em uma superfície e isolada no lado oposto é também um dos problemas clássicos em condução de calor com aplicação em modelos térmicos para a obtenção de propriedades térmicas. A Figura 4.6 apresenta este caso.

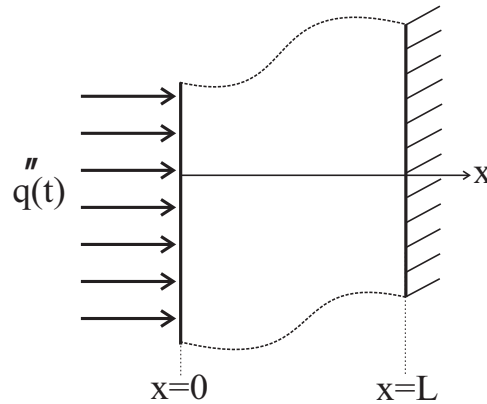


Figura 4.6: Problema térmico unidimensional G_{X22} .

Este é um problema geral de condução de calor unidimensional, transiente, sem geração interna de calor que pode ser descrito pela equação da difusão de calor Eq. (4.14).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.14)$$

sujeito às condições de contorno em $x = 0$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q''(t) \quad (4.15)$$

e em $x = L$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.16)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (4.17)$$

A dedução matemática é apresentada em anexo (A.2.2). A solução híbrida é dada por

$$T(0, t) = T_0 + \frac{\alpha}{k} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{N-1} q_n''(t)(t_{n+1} - t_n) + \frac{\alpha}{k} \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \frac{2}{L\alpha} \sum_{n=1}^{N-1} q_n''(t) \left[\exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-t_{n+1})} - \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-t_n)} \right] \quad (4.18)$$

4.3 Solução geral 3D

Um problema geral de condução de calor tridimensional, transiente, com geração interna de calor pode ser descrito pela equação da difusão de calor Eq. (4.19), conforme Fernandes (2009).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k}g(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.19)$$

sujeito às condições de contorno

$$k \frac{\partial T}{\partial n_i} \Big|_{s_i} + h_i T|_{s_i} = f_i(x, y, z, t) \quad (4.20)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) \quad (4.21)$$

onde n_i é a direção perpendicular ao contorno e s_i representa os contornos ($i=1,2,3,4$). Analogamente, a Eq. (4.20) representa os diferentes tipos de condições de contorno. A solução geral das Eqs. (4.19) (4.20) (4.21) pode ser expressa em termos de funções de Green conforme (COLE, 2010).

$$T(x, y, z, t) = \int_{x'=L_1}^{L_2} \int_{y'=W_1}^{W_2} \int_{z'=R_1}^{R_2} G(x, y, z, t|x', y', z', 0) F(x', y', z') dx' dy' dz' \quad (a)$$

$$+ \int_{\tau=0}^t \int_{x'=L_1}^{L_2} \int_{y'=W_1}^{W_2} \int_{z'=R_1}^{R_2} \frac{\alpha}{k} G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) g(x', y', z', \tau) dx' dy' dz' d\tau \quad (b)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=L_1}^{L_2} \int_{y'=W_1}^{W_2} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k} G(x, y, z, t|x, y, z_i, \tau) \right] dx' dy' d\tau \quad (c)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=L_1}^{L_2} \int_{z'=R_1}^{R_2} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k} G(x, y, z, t|x, y_i, z, \tau) \right] dx' dz' d\tau \quad (d)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=W_1}^{W_2} \int_{z'=R_1}^{R_2} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k} G(x, y, z, t|x_i, y, z, \tau) \right] dy' dz' d\tau \quad (e)$$

$$- \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=L_1}^{L_2} \int_{y'=W_1}^{W_2} \sum_{i=1}^2 \left[f_i(\tau) \frac{\partial G}{\partial n_i} \Big|_{z'=z_i} \right] dx' dy' d\tau \quad (\text{f})$$

$$- \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=L_1}^{L_2} \int_{z'=R_1}^{R_2} \sum_{i=1}^2 \left[f_i(\tau) \frac{\partial G}{\partial n_i} \Big|_{y'=y_i} \right] dx' dz' d\tau \quad (\text{g})$$

$$- \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=W_1}^{W_2} \int_{z'=R_1}^{R_2} \sum_{i=1}^2 \left[f_i(\tau) \frac{\partial G}{\partial n_i} \Big|_{x'=x_i} \right] dy' dz' d\tau \quad (\text{h})$$

(4.22)

Os termos (a) a (h) das Eqs. (4.22) representam as condições operacionais no modelo 3D:

- (a) condição inicial;
- (b) geração de energia;
- (c) das condições de contorno, em $z = R_1$ e $z = R_2$, do tipo dois à três, no plano xy;
- (d) das condições de contorno, em $y = W_1$ e $y = W_2$, do tipo dois à três, no plano xz;
- (e) das condições de contorno, em $x = L_1$ e $x = L_2$, do tipo dois à três, no plano yz;
- (f) das condições de contorno tipo um, em $z = R_1$ e $z = R_2$, para o plano xy;
- (g) das condições de contorno tipo um, em $y = W_1$ e $y = W_2$, para o plano xz;
- (h) das condições de contorno tipo um, em $x = L_1$ e $x = L_2$, para o plano yz.

4.3.1 Modelos tridimensionais usados para a estimativa da difusividade térmica

Caso X00Y30Z00

O modelo aqui analisado considera dimensões infinitas na direção x , z e semi-infinito na direção y , sendo que para esta análise considera-se a amostra exposta ao ambiente em $y = 0$. A Figura 4.7 representa uma amostra inicialmente a uma temperatura T_0 sendo aquecida parcialmente na região delimitada por $-L_1 < x < L_1$ e em $-R_1 < z < R_1$, enquanto todas as outras superfícies são expostas a um meio convectivo à temperatura T_∞ .

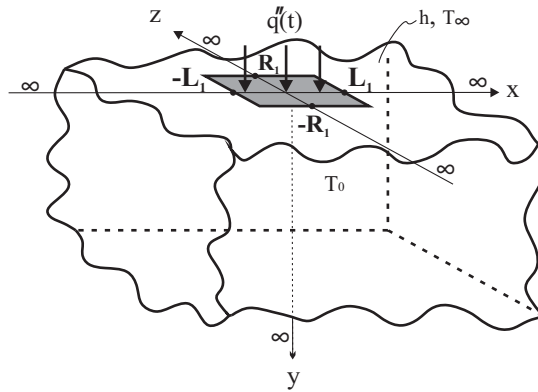


Figura 4.7: Modelo térmico proposto para estimativa da difusividade térmica com geometria semi-infinita caso $X00Y30Z00$.

A equação que representa o problema térmico citado é dada por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.23)$$

sujeito às condições de contorno em $y = 0$ delimitada por $-L_1 < x < L_1$ e em $-R_1 < z < R_1$,

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = q''(t) + h(T - T_\infty) \quad (4.24)$$

e em $y = 0$ região $x < -L_1$ ou $x > L_1$ e em $z < -R_1$ ou $z > R_1$,

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(T - T_\infty) \quad (4.25)$$

e a condição inicial $T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) = T_0$

A solução geral deste problema é dada pela Eq. (4.26). A obtenção matemática dessa solução é apresentada no anexo (A.2).

$$\begin{aligned}
\theta(x, y, z, t) &= \theta_0 \left(\exp \left[\frac{h^2}{k^2} \alpha t \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} (\alpha t)^{1/2} \right] \right) \\
&+ \left(\exp \left[\frac{h^2}{k^2} \alpha t \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} (\alpha t)^{1/2} \right] \right) \left(\frac{-C\alpha}{k} [\pi\alpha(t)]^{-1/2} \frac{h}{k} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{R+z}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{R-z}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} \right)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Portanto a razão entre as temperaturas medidas na mesma superfície da peça, $\theta(x_1, 0, 0, t)$ (ponto mais próximo da fonte quente) e $\theta(x_2, 0, 0, t)$ (ponto mais afastado da fonte térmica), é dada pela Eq. (4.27). Percebe-se que a razão de ganho de temperatura será dependente da condutividade k , da difusividade α , do coeficiente de convecção térmica h e de uma variável C que representa o fluxo de calor.

$$\frac{\theta(x_1, 0, 0, t)}{\theta(x_2, 0, 0, t)} = \frac{\theta_0 + \left(\frac{C\alpha}{k} [\pi\alpha t]^{-1/2} \times -\frac{h}{k} \right) \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x_1}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x_1}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} \right)}{\theta_0 + \left(\frac{C\alpha}{k} [\pi\alpha t]^{-1/2} \times -\frac{h}{k} \right) \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x_2}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x_2}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} \right)} \tag{4.27}$$

se $T_0 = T_\infty$ então $\theta_0 = T_0 - T_\infty = 0$, a Eq. (4.27) pode ser reescrita como

$$\frac{\theta(x_1, 0, 0, t)}{\theta(x_2, 0, 0, t)} = \frac{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{L+x_1}{\sqrt{4\alpha t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L-x_1}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right]}{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{L+x_2}{\sqrt{4\alpha t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L-x_2}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right]} \tag{4.28}$$

Observa-se que a razão de ganho é função apenas das posições x_1 , x_2 , L , α e t , ou seja, é um problema de dependência unidimensional. Ressalta-se que o problema 3D passou a ser 1D, o qual depende somente de x e que a convecção não influencia no quociente entre as variações de temperaturas.

Caso X00Y20Z00

Outro problema térmico tridimensional também considerado para as estimativas de propriedades térmicas é representado pelo modelo X00Y20Z00. Este modelo também considera dimensões infinitas na direção x , z e semi-infinito na direção y , sendo que considera-se a amostra

isolada do meio ambiente em $y = 0$. Na Figura 4.8 representa-se uma amostra inicialmente a uma temperatura T_0 sendo aquecida parcialmente na região delimitada por $-L_1 < x < L_1$ e em $-R_1 < z < R_1$, enquanto todas as outras superfícies são isoladas.

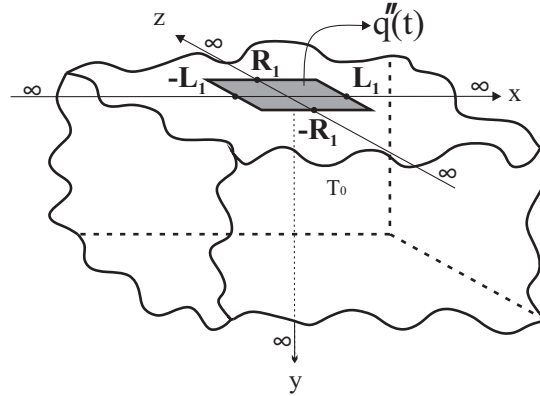


Figura 4.8: Modelo térmico proposto para estimativa da difusividade térmica com geometria semi-infinita caso X00Y20Z00.

A equação governante do problema térmico citado é dada pela Eq. (4.29)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.29)$$

sujeito às condições de contorno em $y = 0$ delimitada por $-L_1 < x < L_1$ e em $-R_1 < z < R_1$,

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = q''(t) \quad (4.30)$$

em $y = 0$ delimitada por $x < -L_1$ ou $x > L_1$ e em $z < -R_1$ ou $z > R_1$,

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (4.31)$$

e a condição inicial $T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) = T_0$

A solução geral de temperatura é dada pela Eq. (4.32). A sua dedução matemática é

apresentada no anexo A.2.

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{C\alpha}{k} [\pi\alpha t]^{-1/2} \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} \right) \\
 \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{R+z}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{R-z}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} \right)
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

na variável θ a Eq. (4.32) pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
 \theta(x, y, z, t) = -\frac{\alpha}{k} \sum_{n=1}^{N-1} q_n''(t) \left(\frac{2}{\pi\alpha} \right) \left([\pi\alpha(t-t_{n+1})]^{1/2} - [\pi\alpha(t-t_n)]^{1/2} \right) \\
 \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} \right) \\
 \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{R+z}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{R-z}{[4\alpha t]^{1/2}} \right\} \right)
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

onde a razão de temperaturas $\theta(x_1, 0, 0, t)$ e $\theta(x_2, 0, 0, t)$ é dada pela Eq. (4.34)

$$\frac{\theta(x_1, 0, 0, t)}{\theta(x_2, 0, 0, t)} = \frac{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{L+x_1}{\sqrt{4\alpha t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L-x_1}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right]}{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{L+x_2}{\sqrt{4\alpha t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L-x_2}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right]} \tag{4.34}$$

4.3.2 Modelos tridimensionais usados para estimativa da condutividade térmica

Os modelos tridimensionais $X22Y22Z22$ e $X33Y33Z33$ também podem ser usados na estimativa de propriedades térmicas, e as soluções analíticas são apresentadas a seguir:

Solução híbrida $X22Y22Z22$

Na Figura 4.9 apresenta-se em forma esquemática o modelo tridimensional transiente e sem geração de calor.

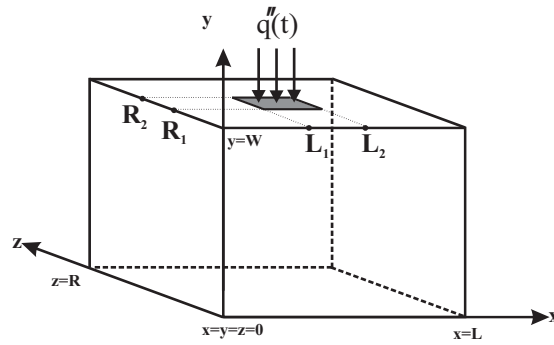


Figura 4.9: Modelo térmico 3D $X22Y22Z22$.

Assim, considera-se que não há geração de energia, o modelo térmico pode ser representado pela equação de difusão Eq. (4.35):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.35a)$$

sujeito às condições de contorno na direção x

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad +k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (4.35b)$$

e às condições de contorno na direção y

$$+k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=W} = q''(t) \quad \text{na região } L_1 \leq x \leq L_2 \text{ e } R_1 \leq z \leq R_2 \quad (4.35c)$$

e às condições de contorno na direção z

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=R} = 0 \quad (4.35d)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) = T_0 \quad (4.35e)$$

A dedução matemática para solução deste problema de condução de calor é apresentada no trabalho de Fernandes (2009). A solução analítica das Eqs. (4.35) é dada por

$$T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{\alpha}{k} \frac{1}{LWR} [L_2 - L_1][R_2 - R_1] \int_0^t q''(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha}{k} \frac{2}{WR} [R_2 - R_1] \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \\
& \times \frac{1}{m\pi} \int_0^t \left[q''(\tau) e^{\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\
& + \frac{\alpha}{k} \frac{2}{LWR} [L_2 - L_1] [R_2 - R_1] \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \int_0^t \left[q''(\tau) e^{\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\
& + \frac{\alpha}{k} \frac{2}{LW} [L_2 - L_1] \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \\
& \times \frac{1}{p\pi} \int_0^t \left[q''(\tau) e^{\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\
& + \frac{\alpha}{k} \frac{4}{WR} [R_2 - R_1] \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \\
& \times \frac{1}{m\pi} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \int_0^t \left[q''(\tau) e^{\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\
& + \frac{\alpha}{k} \frac{4}{W} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \frac{1}{m\pi} \\
& \times \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \frac{1}{p\pi} \int_0^t \left[q''(\tau) e^{\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\
& + \frac{\alpha}{k} \frac{4}{LW} [L_2 - L_1] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \\
& \times \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \frac{1}{p\pi} \int_0^t \left[q''(\tau) e^{\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha}{k} \frac{8}{W} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \frac{1}{m\pi} \\
& \times \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \frac{1}{p\pi} \\
& \times \int_0^t \left[q''(\tau) e^{\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Solução híbrida X33Y33Z33

Também considera-se a possibilidade da amostra estar exposta ao meio ambiente com temperatura T_{∞} e coeficiente de convecção térmica dado por $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h_6$. Na Figura 4.10 apresenta-se uma forma esquemática o modelo tridimensional transiente e sem geração de calor a uma temperatura inicial T_0 .

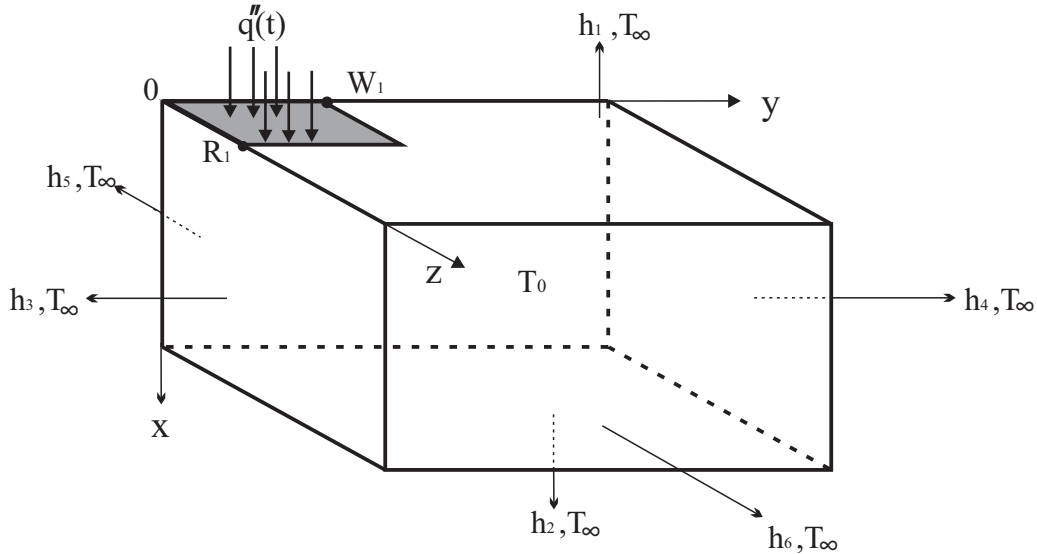


Figura 4.10: Modelo térmico 3D X33Y33Z33.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.37a}$$

sujeito às condições de contorno na direção x

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = +q''(t) + h_1(T - T_\infty); \quad (4.37b)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2(T - T_\infty) \quad (4.37c)$$

e às condições de contorno na direção y

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_3(T - T_\infty) \quad (4.37d)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=W} = h_4(T - T_\infty) \quad (4.37e)$$

e às condições de contorno na direção z

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_5(T - T_\infty) \quad (4.37f)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=W} = h_6(T - T_\infty) \quad (4.37g)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) - T_\infty \quad (4.37h)$$

Observa-se que as condições de contorno onde ocorre convecção, expressas respectivamente pela Eqs. (4.37b) - (4.37g), não são homogêneas. Deve-se definir uma nova variável $\theta = T - T_\infty$ e aplicando-a nas Eqs. (4.37) obtém-se

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.38a)$$

sujeito às condições de contorno

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = -q''(t) - h_1\theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2\theta; \quad (4.38b)$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_3 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=W} = h_4 \theta; \quad (4.38c)$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{z=0} = h_5 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{z=R} = h_6 \theta \quad (4.38d)$$

e à condição inicial

$$\theta(x, y, z, 0) = F(x, y, z) - T_\infty \quad (4.38e)$$

A dedução matemática para solução deste modelo térmico é apresentada em Malheiros (2017) e a solução analítica para este caso é dada por

$$\theta(x, y, z, t) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{8\theta_0}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\ & \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)] [\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)] [\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right] (\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right] (\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \\ & \times \frac{LWR}{\alpha_m \beta_n \gamma_p} [\alpha_m \sin \alpha_m - B_1(\cos \alpha_m - 1)] [\beta_n \sin \beta_n - B_3(\cos \beta_n - 1)] [\gamma_p \sin \gamma_p - B_5(\cos \gamma_p - 1)] \\ & + \frac{8\alpha q''(t)}{Lk} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)] \alpha_m}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right]} \\ & \times \frac{[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)] [\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right] (\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \\ & \times \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t}\right)}{\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha} \frac{1}{\beta_n \gamma_p} \left[\beta_n \sin\left(\frac{\beta_n W_1}{W}\right) - B_3(\cos\left(\frac{\beta_n W_1}{W}\right) - 1)\right] \\ & \left[\gamma_p \sin\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) - B_5(\cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) - 1)\right] \end{aligned} \tag{4.39}$$

Capítulo 5

Análise de sensibilidade da técnica proposta

Neste capítulo são apresentados os resultados analíticos cujo objetivo é de verificar o comportamento da razão de ganho de temperatura dada pela Eq. (4.34) referente a estimativa da difusividade térmica sem a necessidade de se conhecer o fluxo de calor.

Na Figura 5.1 mostra-se o esquema de posicionamento dos termopares e a região pré-aquecida localizada no centro da superfície da amostra. O modelo térmico, prevê uma região de aquecimento parcial (região cinza) com uma temperatura inicial diferente da temperatura em regiões não perturbadas, as posições x_1 e x_2 devem ser escolhidas de forma que as temperaturas $\theta(x_1, 0, 0, t)$ e $\theta(x_2, 0, 0, t)$ não sofram a influência da região aquecida, para isto é necessário a aplicação de um fluxo térmico de curta duração. Assim, após a região aquecida alcançar uma temperatura constante, o sistema de aquecimento é desligado e é analisada a propagação do calor para as regiões vizinhas aumentando primeiramente em $\theta(x_1, 0, 0, t)$ e posteriormente em $\theta(x_2, 0, 0, t)$.

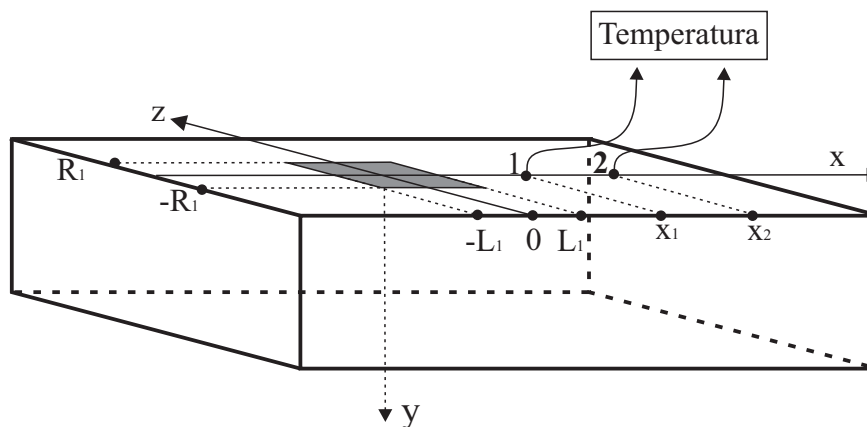


Figura 5.1: Esquema de posicionamento dos sensores de medição de temperatura.

A análise foi dividida em materiais maus e bons condutores de calor e para se verificar a validade do modelo, considerou-se também a adição de ruído, nesse caso ruídos aleatórios foram criados pelo software MATLAB e adicionados à temperatura a partir da Eq. (5.1).

$$Y(t) = T(t) + \sigma\Omega_j \quad (5.1)$$

Onde a nova temperatura é dada por Y , a temperatura sem erro é dado por T , σ é a amplitude máxima da variação da temperatura e Ω_j representa um número randômico com distribuição uniforme no intervalo entre a temperatura mínima e máxima que a amostra é submetida $[T_{min}, T_{max}]$. Foi definido $\sigma = 0,1 \cdot \Omega_j$ obtido pela função *randon* do software comercial MATLAB. Para esta análise, foram considerados $x_1 = 55$ mm, $x_2 = 75$ mm, $L = 25$ mm e $T_0 = 20$ °C. A evolução das temperaturas são calculadas pela Eq. (4.28).

A análise da sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica para metais de baixa e alta condutividade térmica, tem o objetivo de determinar o melhor intervalo de tempo para se estimar a referida propriedade nos diferentes tipos de materiais.

5.1 Materiais com baixa condutividade térmica

As Figuras 5.2 (a), (b), (c) e (d) apresentam, respectivamente, o comportamento da temperatura analítica, θ_{ana} , nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm, a razão de ganho de temperatura analítica, R_{gtana} , a estimativa teórica da difusividade térmica com o erro em relação ao valor verdadeiro e a sensibilidade da razão de ganho em relação a difusividade, X_{alfa} , para o aço inoxidável AISI 304.

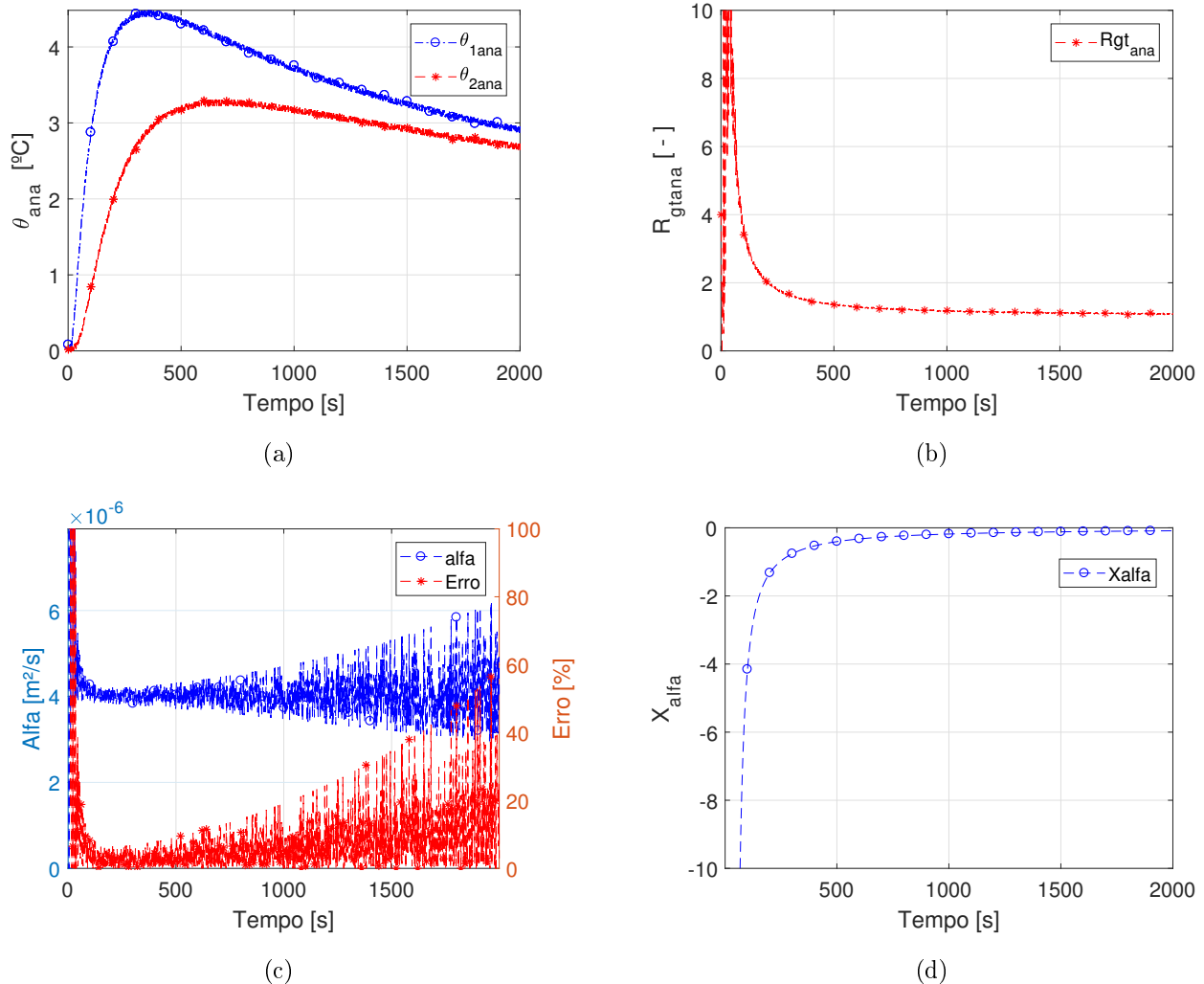


Figura 5.2: aço inoxidável AISI 304: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do AISI 304 e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.

A Figura 5.2 (b) mostra que a razão de ganho de temperatura teórica, R_{gtana} , tende a um valor unitário ao longo do tempo, ou seja, observa-se na Fig. 5.2 (a) que a temperatura θ_1 tende ao mesmo valor de θ_2 ao longo do tempo, não havendo mais diferença significativa de temperatura entre ambas, gerando grandes erros na hora de estimar a propriedade térmica. A Figura 5.2 (c) mostra no eixo y esquerdo a estimativa da difusividade térmica ao longo do tempo e o eixo y direito mostra o erro da estimativa com valor teórico. Observa-se na Fig. 5.2 (d) que o coeficiente de sensibilidade, X_{alfa} , tende a zero ao longo do tempo acarretando em estimativas com grandes erros.. Observando-se o comportamento da sensibilidade e da razão de ganho, conclui-se que menores tempos, relativos ao início do aquecimento são mais indicados para as estimativas de α . Tempos superiores a 500 s, por sua vez, devem ser evitados, pois

conduzem a uma baixa sensibilidade conforme Fig. 5.2 (d). Visando a obtenção de uma região ótima ou de segurança para a estimativa, uma análise é feita para tempos inferiores a 320 s. Nas Figuras 5.3 (a), (b), (c) e (d) são apresentados estas análises.

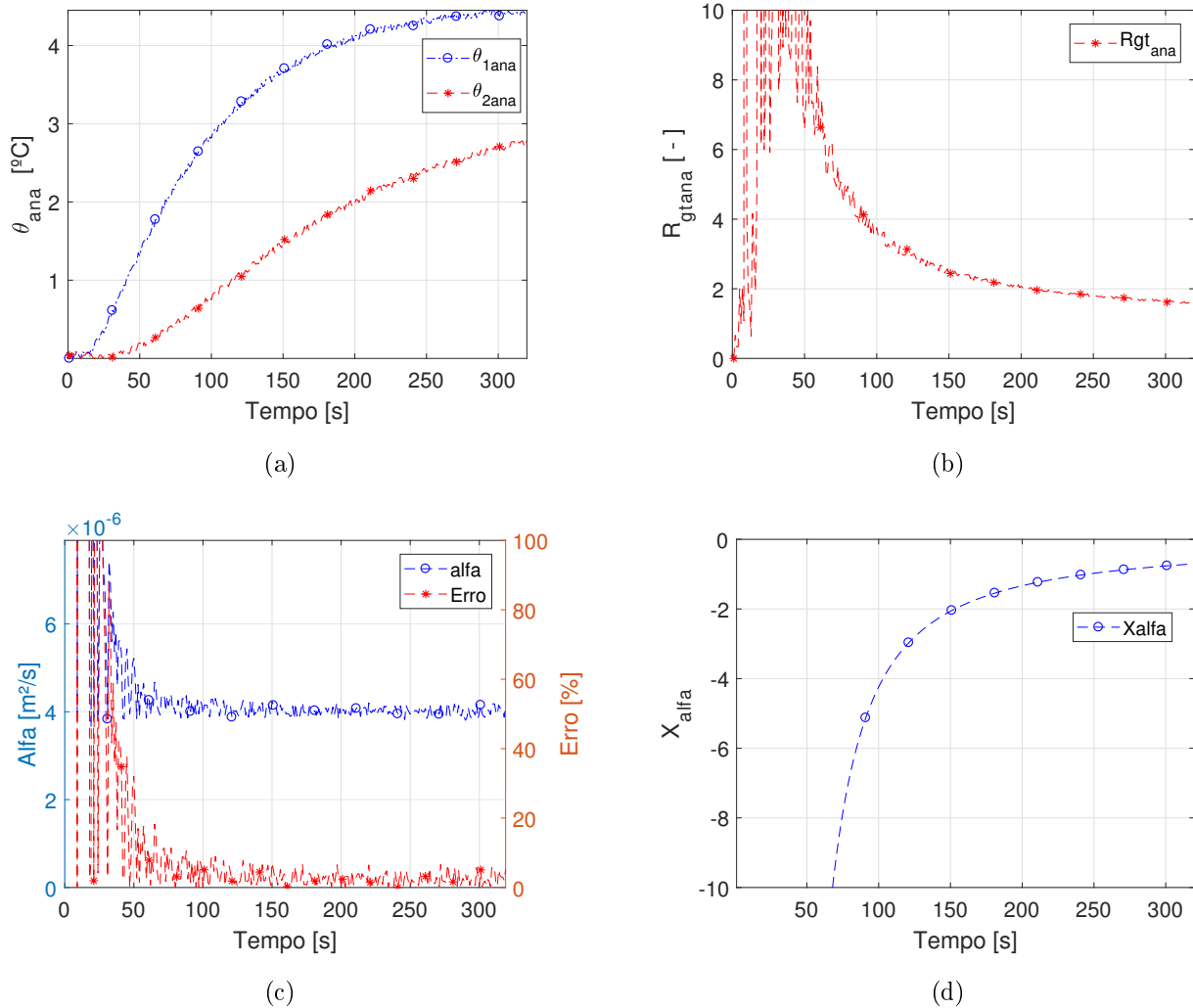


Figura 5.3: Redução do intervalo de tempo de análise no aço inoxidável AISI 304: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do aço AISI 304 e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.

Observa-se na Fig. 5.2 (a) que a temperatura em θ_1 começa a variar a partir de 20 s e a temperatura em θ_2 somente sofre uma defasagem após 50 s, ou seja, impossível de se estimar a propriedade antes desse tempo, devido a não defasagem entre as temperaturas θ_1 e θ_2 no início dos tempos. Observa-se na Fig. 5.2 (b) que a razão de ganho de temperatura apresenta grande ruído devido a não defasagem entre as temperaturas e que a partir de 70 s o mesmo é cessado, sendo o início da região indicada para se estimar a propriedade térmica, ou seja, quanto menor o

tempo, desde que superiores a 70 s melhores as estimativas. O comportamento do erro Fig. 5.2 (c) indica que estimativas com sucesso podem ser obtidas num intervalo de tempo $70 < t < 200$ s.

Nas Figuras 5.4 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, o comportamento da temperatura em dois pontos distintos da amostra, a razão de ganho de temperatura, a estimativa teórica da difusividade térmica e da sensibilidade para uma amostra de titânio.

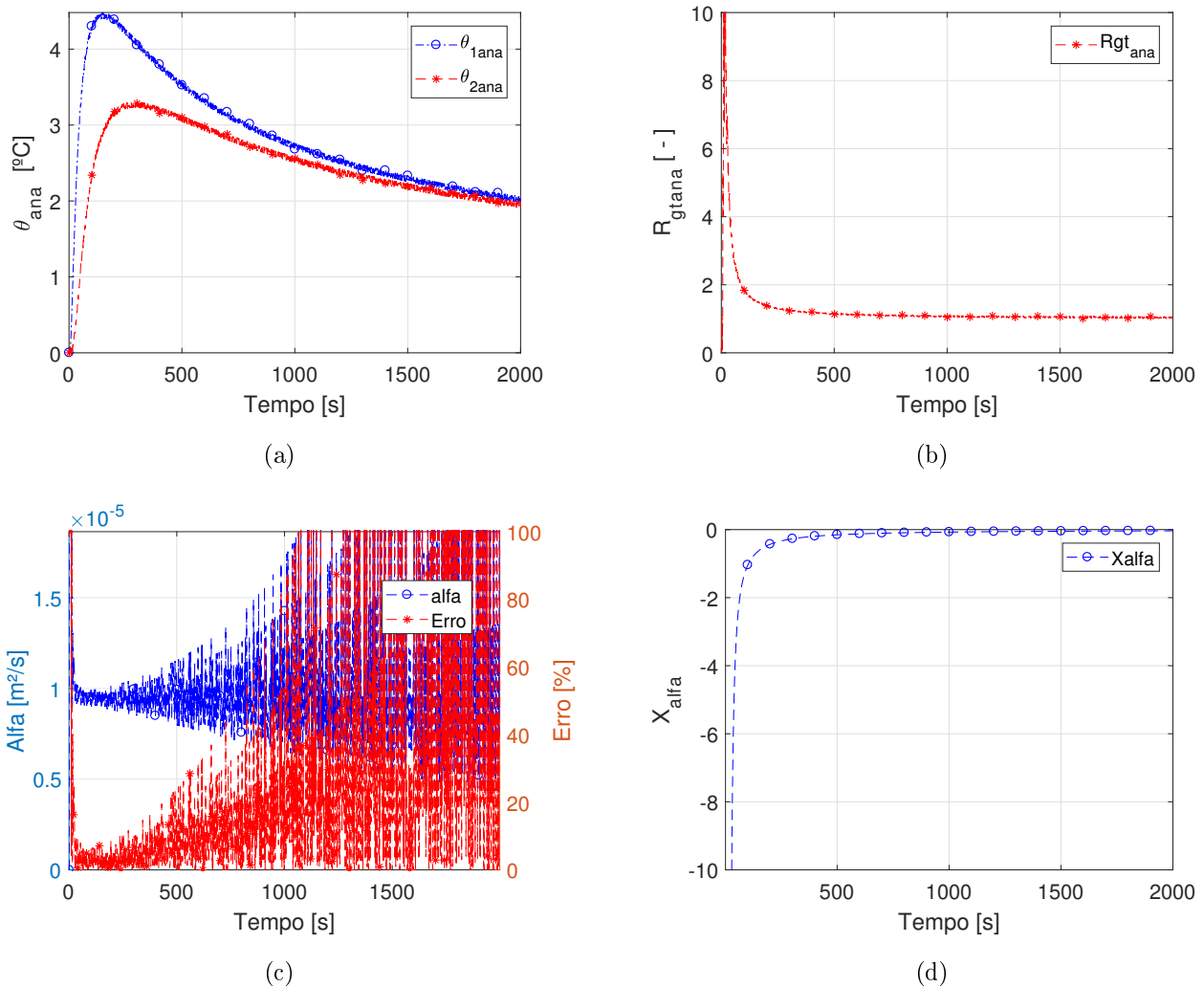


Figura 5.4: Titânio: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do titânio e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.

Novamente observa-se nas Figs. 5.4 (d) e (b), que o coeficiente de sensibilidade X_{alfa} tende a zero acarretando em estimativas com grandes erros ao longo do tempo, já a razão de ganho de temperatura teórica, R_{gtana} , tende a um valor unitário, ou seja, θ_1 tende ao mesmo valor de

θ_2 não havendo mais diferença significativa de temperatura entre ambas gerando erros grandes na hora de estimar a propriedade térmica. Observando-se o comportamento da sensibilidade e da razão de ganho, conclui-se que menores tempos, relativos ao início do aquecimento são mais indicados para as estimativas de α . Tempos superiores a 400 s, por sua vez, devem ser evitados pois conduzem a uma baixa sensibilidade conforme Fig. 5.4 (d). Visando a obtenção de uma região ótima ou de segurança para a estimativa, uma análise é feita para tempos inferiores a 320 s. As Figuras 5.4 (a), (b), (c) e (d) apresentam esta análise.

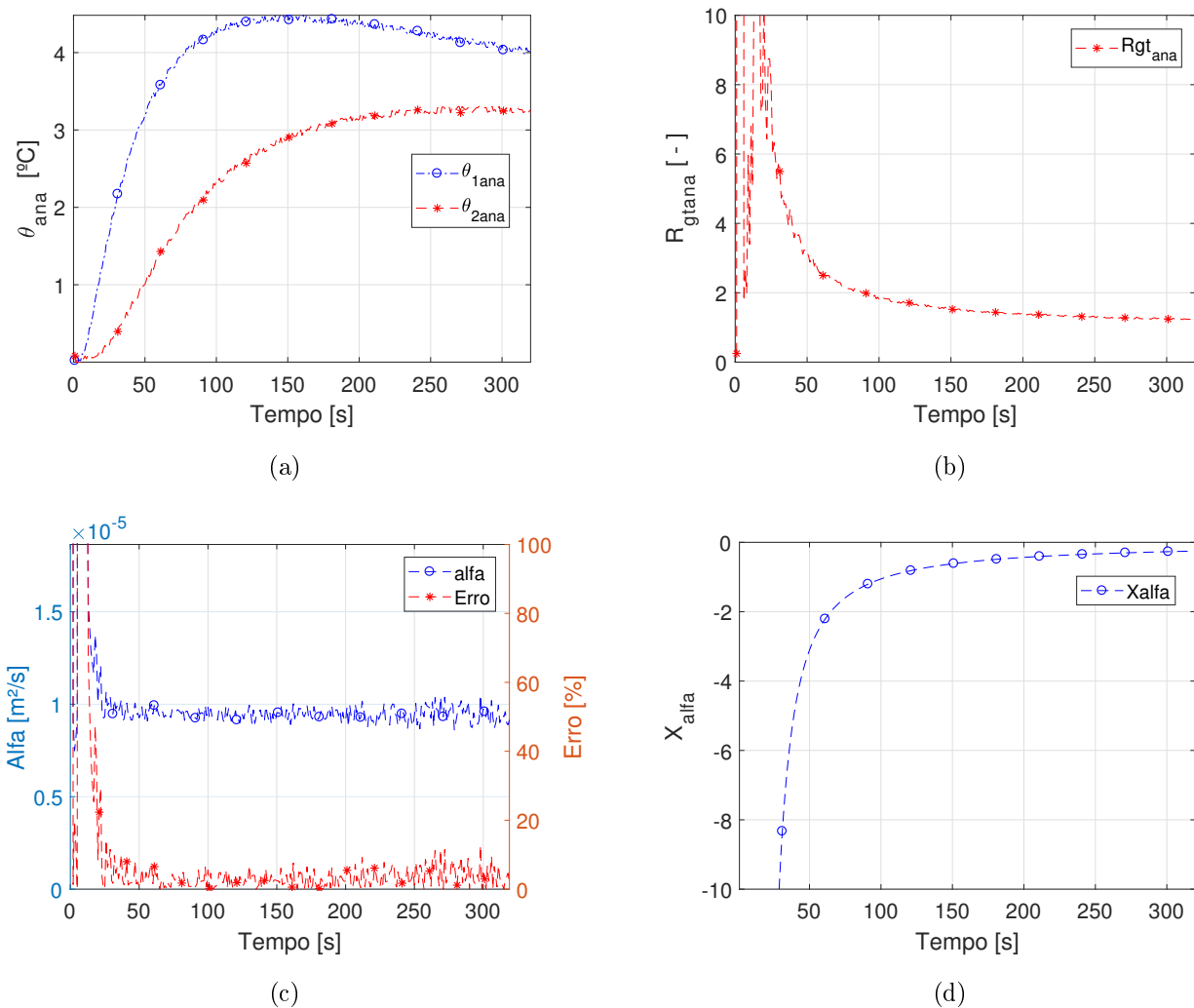


Figura 5.5: Redução do intervalo de tempo de análise no titânio: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do titânio e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.

Observa-se novamente que quanto menor o tempo, desde que superiores a 50 s melhores as estimativas. O comportamento do erro indica que estimativas com sucesso podem ser obtidas

num intervalo de tempo $50 < t < 200$ s.

5.2 Materiais com alta condutividade térmica

Análises similares são apresentadas para materiais de condutividade altas como o alumínio e o cobre. Nas Figuras 5.6 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, o comportamento da temperatura, razão de ganho de temperatura, a estimativas de α com respectivo erro em relação ao valor encontrado na literatura e a sensibilidade.

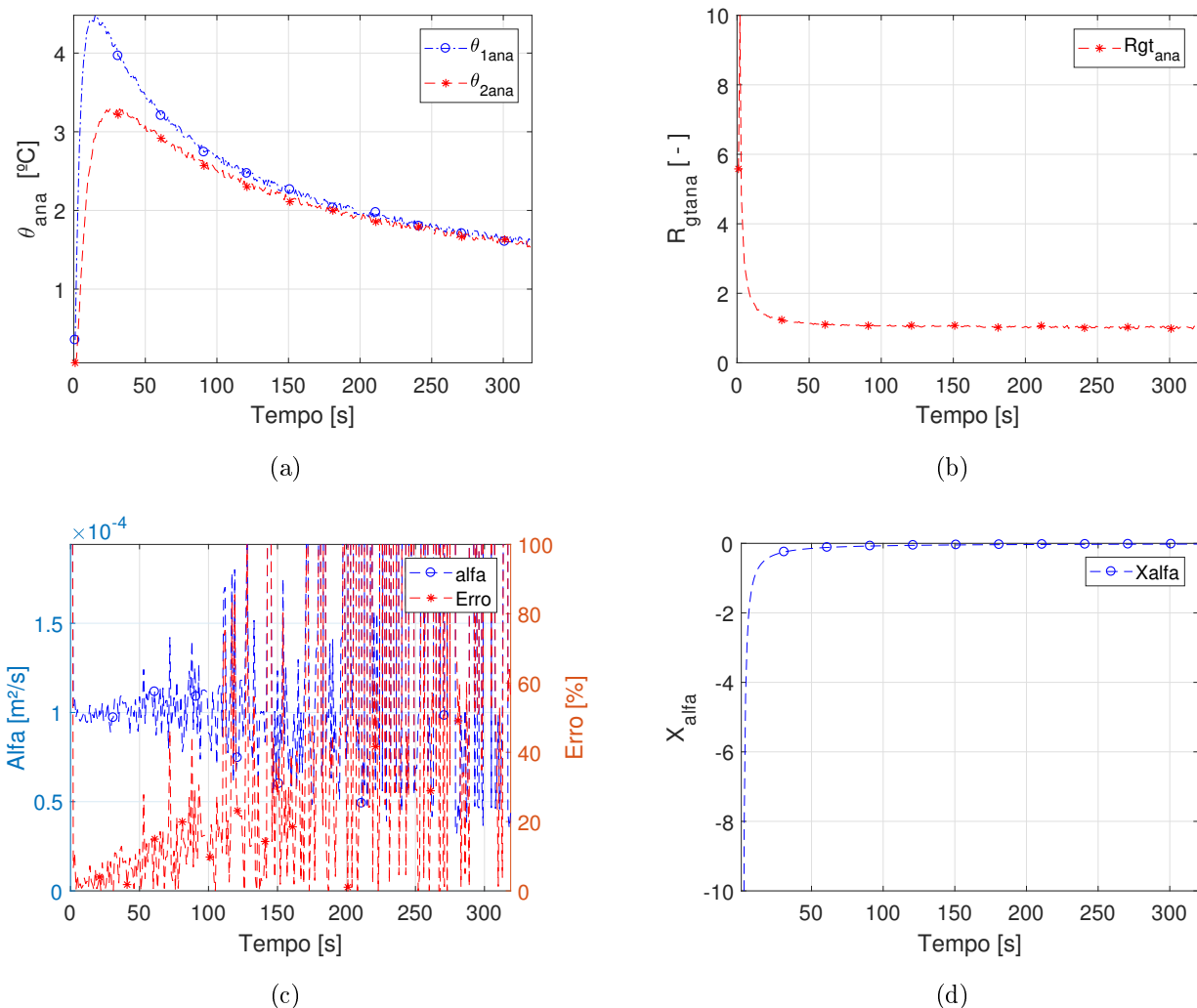


Figura 5.6: Alumínio: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do alumínio e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.

Novamente observou-se que tanto nos metais mal condutores, quanto nos bom condutores,

a melhor faixa de análise é durante o pico de aquecimento do ponto mais próximo da fonte quente. Para o alumínio a região próxima ao pico de temperatura do primeiro termopar ocorreu em torno de 15 s. Portanto, os gráficos foram refeitos, nas Figs. 5.7 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, o comportamento da temperatura, a razão de ganho de temperatura, a estimativa de α com respectivo erro em relação ao valor encontrado na literatura e a sensibilidade.

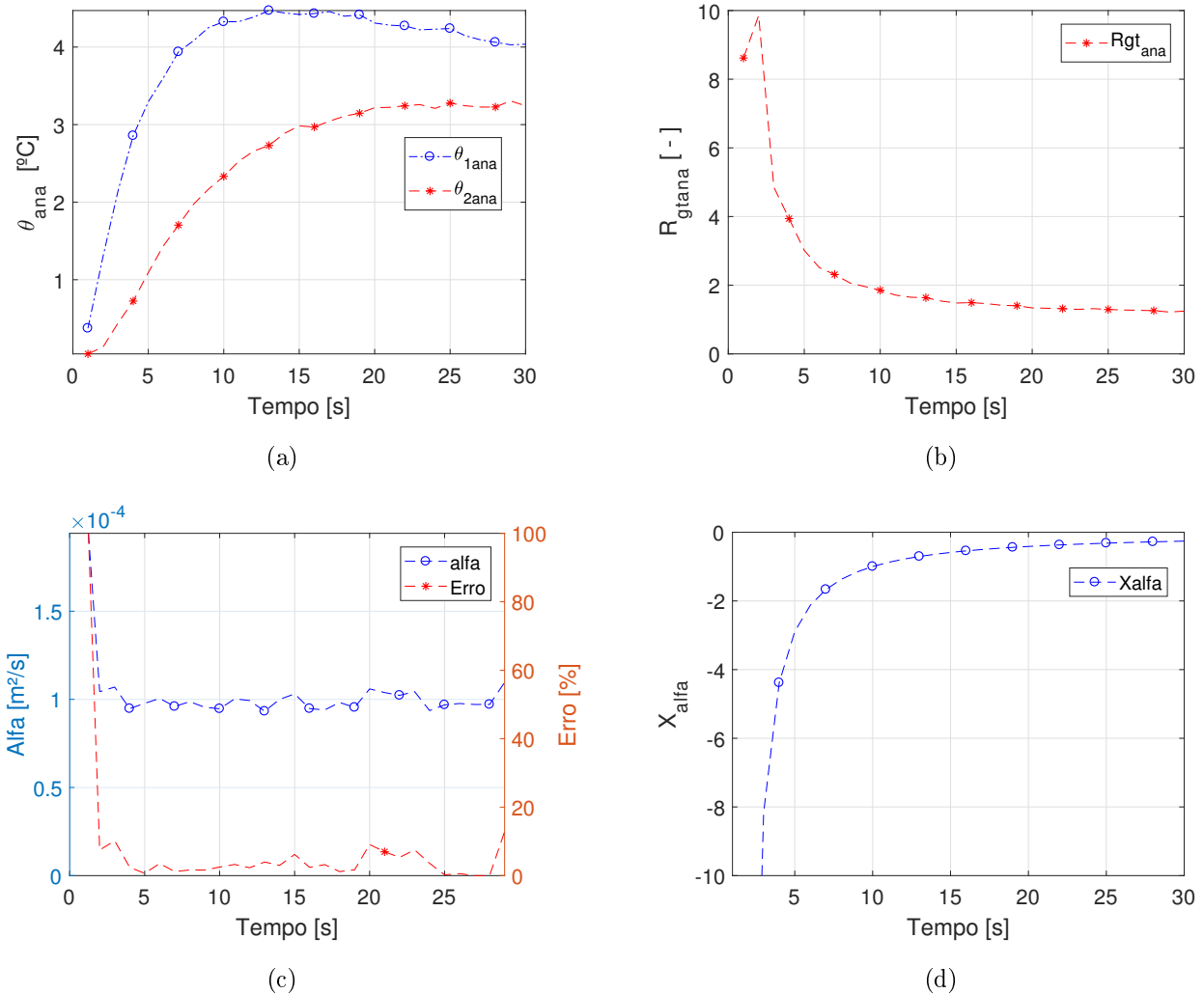


Figura 5.7: Redução do intervalo de tempo de análise no alumínio: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do alumínio e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.

Quanto mais condutor for o material menor o tempo de difusão e portanto menor o intervalo de tempo para estimativas com sucesso. Observa-se nas Figs. 5.7 (b) e (d) que o intervalo de tempo ideal situa-se de $5 < t < 20$ segundos.

A mesma análise é feita no cobre, porem diferentemente, o cobre possui maior condutividade térmica e com isso, possui maior sensibilidade em relação a estimativa de α . Nas Figuras 5.8 (a), (b), (c) e (d) são apresentados os resultados desta análise.

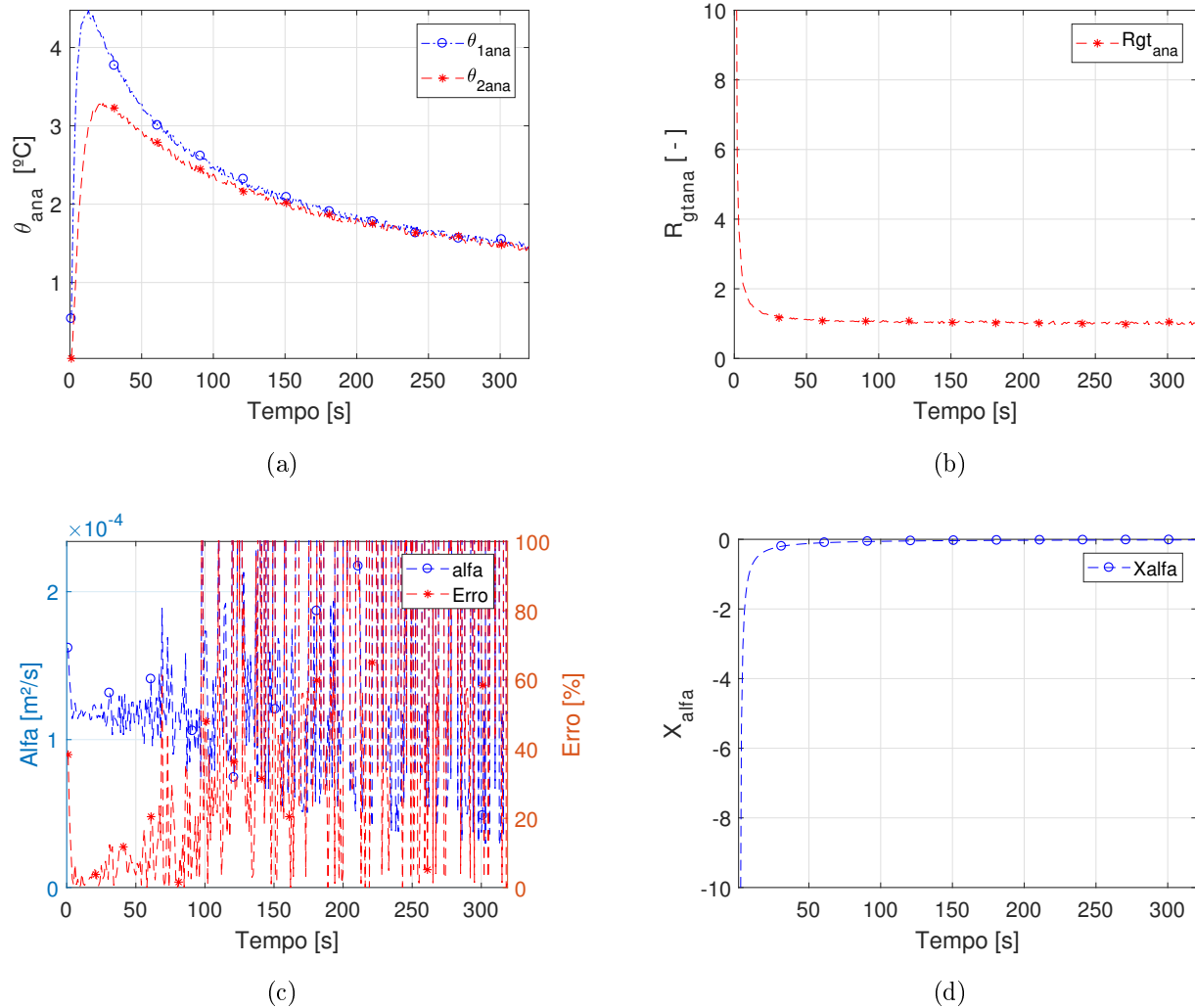
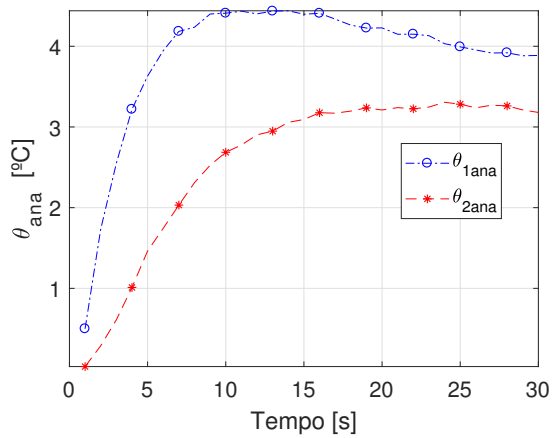
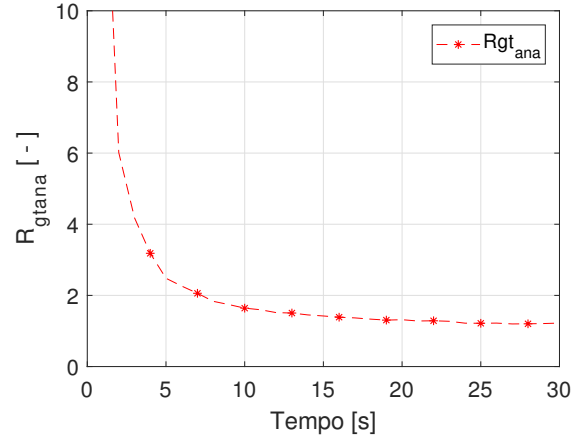


Figura 5.8: Cobre: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do cobre e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.

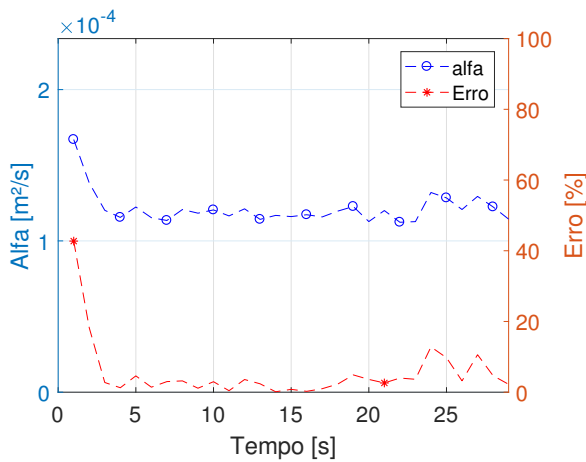
Novamente, foi reduzido o intervalo de análise, nas Figs. 5.9 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, o comportamento da temperatura, a razão de ganho de temperatura, as estimativas de α com respectivo erro em relação ao valor encontrado na literatura e a sensibilidade.



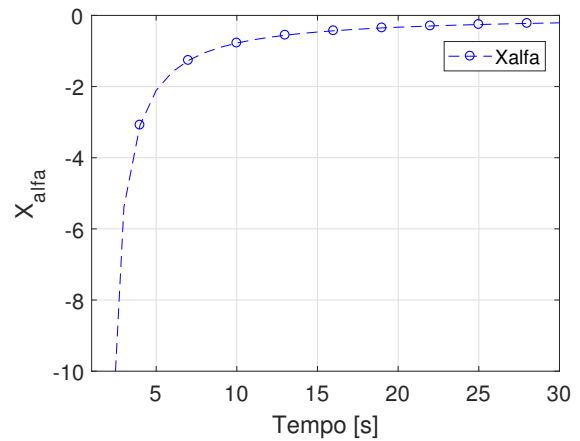
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.9: Redução do intervalo de tempo de análise no cobre: (a) Variação da temperatura nos pontos $x_1 = 55 \text{ mm}$ e $x_2 = 75 \text{ mm}$; (b) Razão de ganho de temperatura teórica; (c) Difusividade térmica estimada do cobre e o erro em relação ao valor verdadeiro; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.

Observa-se nas Figs. 5.9 (b) e (d) que o intervalo de tempo ideal situa-se na região de $5 < t < 20 \text{ s}$ para ambos - alumínio e cobre, sendo o cobre mais sensível.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

Como já mencionado, uma das motivações deste trabalho refere-se a análise e aplicação de uma técnica de medição de propriedades térmicas para aplicações *in situ*. Neste capítulo, são abordados os resultados numéricos, sendo que a lógica computacional foi toda desenvolvida no programa MATLAB e foi usado o programa COMSOL *multiphysics* para extrair os dados de temperatura em pontos desejados.

Para a análise numérica, inicialmente deve-se entrar com os dados geométricos, em seguida, é necessário informar quais serão as condições de contorno do problema, no caso toda análise foi feita considerando o modelo tridimensional isolado do meio externo, em seguida, é necessário introduzir no programa dados térmicos do material que se queria fazer testes, ou seja, deve-se previamente indicar para o software qual material será analisado, portanto deve-se entrar com os dados de condutividade térmica, calor específico e massa específica.

O objetivo da análise numérica é de conhecer os limites da técnica, ou seja, variando os principais parâmetros como diferentes materiais (materiais maus e bons condutores de calor) e foi variado também o posicionamento do termopar 1 (ponto mais próximo da fonte quente, representado por x_1) e o posicionamento do termopar 2 (ponto mais distante da fonte quente, representado por x_2).

6.1 Análise numérica

Na Figura 6.1 (a) mostra-se o modelo tridimensional que foi usado para fazer a análise numérica. Usou-se um bloco com dimensões: 300 mm \times 300 mm \times 25 mm. Considerou-se um fluxo de calor de 10^4 [W/m²] aplicado por 4 segundos na região central com dimensões 50 mm \times 50 mm como pode ser visto na Fig. 6.1 (a). Foi criada uma linha de pontos de medição de temperatura distanciados de 1 mm em 1 mm da região de aplicação do fluxo de calor até a borda da amostra, como pode ser observado na Fig. 6.1 (b).

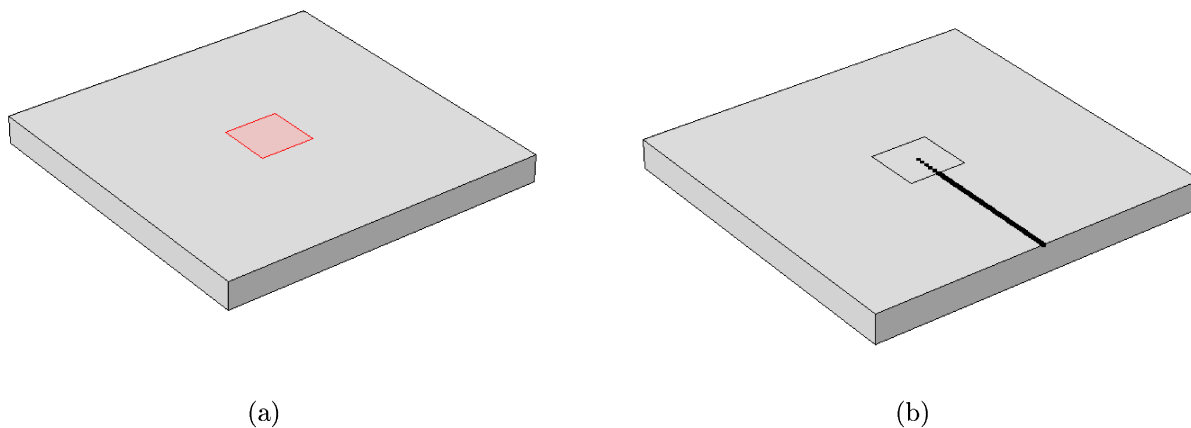


Figura 6.1: Modelo tridimensional: (a) Geometria; (b) Pontos de medição de temperatura posicionados sobre a superfície da amostra, distanciados entre si de 1 em 1 mm.

Na Figura 6.2 (a), mostra-se a malha gerada, a qual foi refinada próximo aos pontos de medição de temperatura para se ter uma melhor resposta de temperatura. Na Figura 6.2 (b) mostra-se o formato de propagação do calor no modelo numérico.

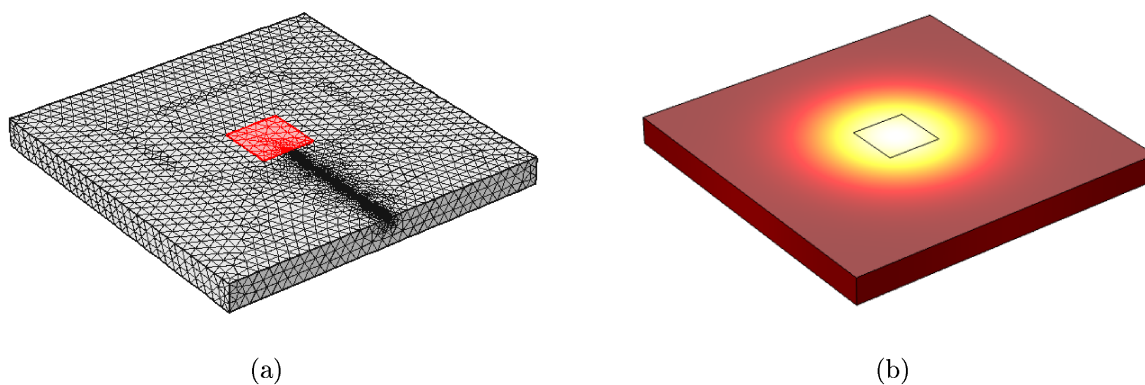


Figura 6.2: Modelo 3D: (a) Malha refinada na região dos pontos de medição de temperatura; (b) Propagação do calor no modelo tridimensional.

Na Tabela 6.1 apresenta-se os tipos de elementos do modelo tridimensional fornecidos pelo software comercial utilizado, enquanto na Tab. 6.2 apresenta-se a estatística dos elementos do modelo 3D em análise.

Tabela 6.1: Tipos de elementos do modelo tridimensional fornecida pelo software COMSOL *multiphysics*

Malha	Tipo de elementos
Elementos tetraédricos	43303
Elementos triangulares	6808
Elementos de borda	287
Elementos de vértice	143

Tabela 6.2: Estatística dos elementos do modelo 3D em análise feito no software COMSOL *multiphysics*

Elemento	Estatística
Número de elementos	43303
Taxa de volume do elemento	9,591e-5
Volume da malha	0,00225
Taxa de crescimento máxima	3,713
Taxa de crescimento média	1,7

As Figuras 6.3 apresentam uma análise numérica da propagação do fluxo de calor 10^4 [W/m²] aplicado por 4 segundos no centro de uma amostra não metálica de policloreto de vinila (PVC) com temperatura inicial $T_0 = 20$ °C. Nas Figuras 6.3 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, os resultados de temperatura na superfície da amostra para os tempos 10 s, 50 s, 150 s e 300 s.

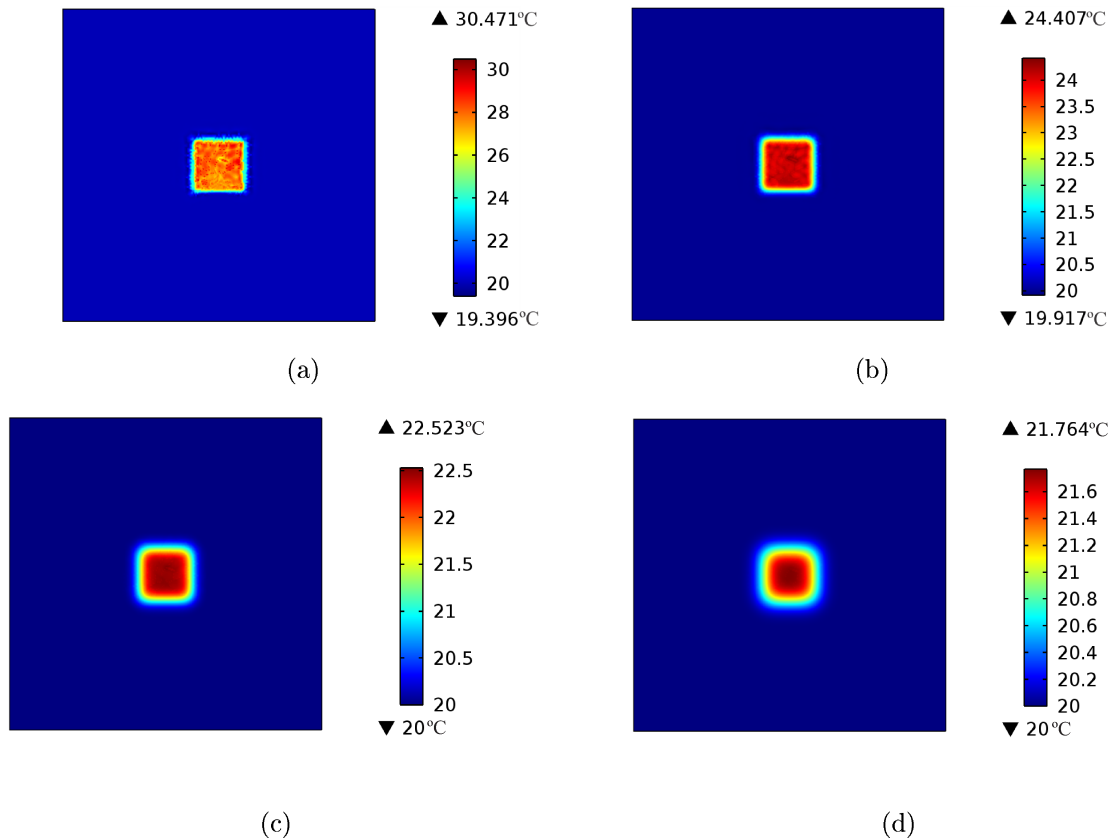


Figura 6.3: Campo de temperatura no PVC: (a) 10 s; (b) 50 s; (c) 150 s; (d) 300 s.

Como o modelo térmico prevê uma região de aquecimento parcial com uma temperatura inicial diferente da temperatura em regiões não perturbadas, as posições x_1 e x_2 devem ser escolhidas de forma que as temperaturas $T(x_1, 0)$ e $T(x_2, 0)$ não sofram a influência da região aquecida. Assim, após a região aquecida alcançar uma temperatura constante, o sistema de aquecimento é desligado e o calor se propaga para as regiões vizinhas aumentando primeiramente em $T(x_1, t)$ e posteriormente em $T(x_2, t)$.

Como observado anteriormente, as temperaturas após alcançarem um valor máximo tendem ao valor de equilíbrio com o ambiente. Observa-se a propagação de calor e o seu respectivo efeito nas temperaturas. A evolução das temperaturas permitem assim a escolha de x_1 e x_2 que devem ser feitas a partir de 28 mm afastados da região de aquecimento.

Analogamente, nas Figs. 6.4 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, os resultados de temperatura na superfície da amostra nos tempos 5 s, 10 s, 15 s e 20 s, para o aço inoxidável AISI 304.

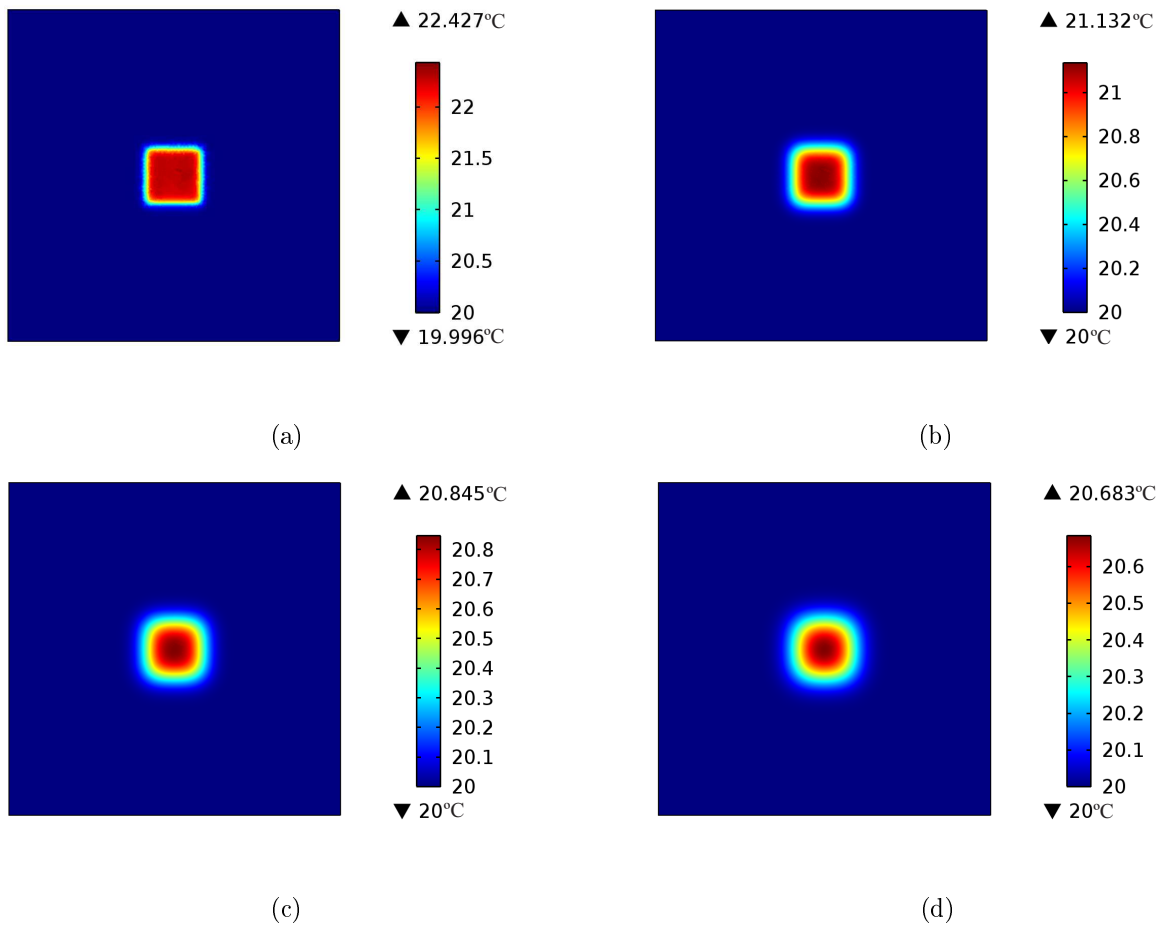


Figura 6.4: Campo de temperatura no aço inoxidável AISI 304: (a) 5 s; (b) 10 s; (c) 15 s; (d) 20 s.

Neste caso, a difusão de calor é maior que quando comparada ao PVC, uma maior distância deve ser escolhida de forma que $T(x_1, 0)$ não seja perturbada pela região aquecida. Para esse caso, a distância mínima foi observada em 45 mm.

Quanto melhor condutor o material, maior a difusão de calor e conseqüentemente uma maior distância deve ser escolhida para $T(x_1, 0)$. Este comportamento pode ser observado na simulação numérica do alumínio apresentada nas Figs. 6.5 (a), (b), (c) e (d) para as mesmas condições de aquecimento inicial.

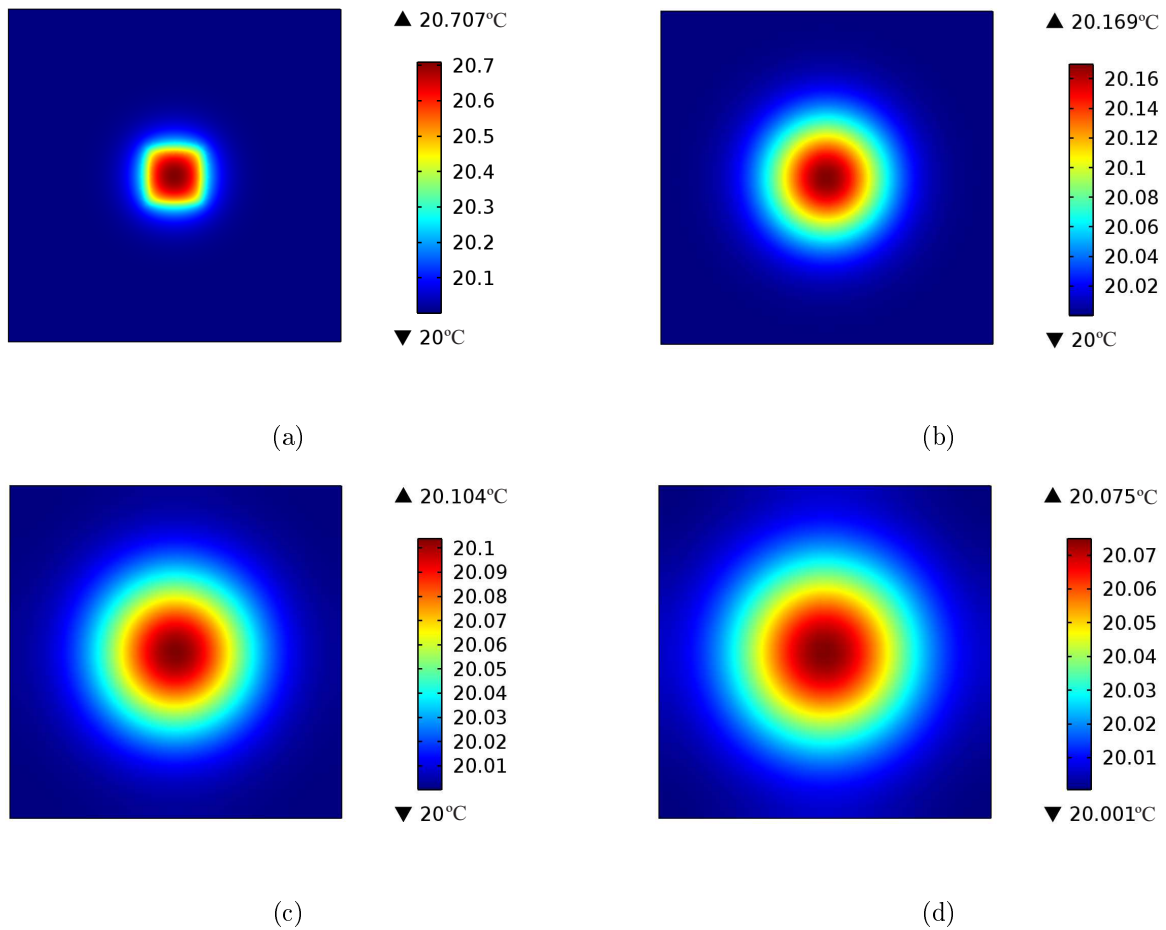


Figura 6.5: Campo de temperatura no alumínio: (a) 5 s; (b) 10 s; (c) 15 s; (d) 20 s.

Observa-se na Fig. 6.5 (d) após um tempo de 20 segundos o calor difundiu-se praticamente por toda amostra de alumínio. Neste caso a difusão de calor é maior que quando comparada ao aço, uma maior distância deve ser escolhida de forma que $T(x_1, 0)$ não seja perturbada pela região aquecida. Para esse caso, a distância mínima foi observada em 85 mm.

Esse efeito pôde ser melhor observado graficamente. Nas Figuras 6.6 (a) e (b) apresentam-se, respectivamente, o comportamento das temperaturas afastando-se da região de aquecimento para as amostras de aço inoxidável AISI 304 e alumínio. As posições de cada temperatura são apresentadas na Tab. 6.3.

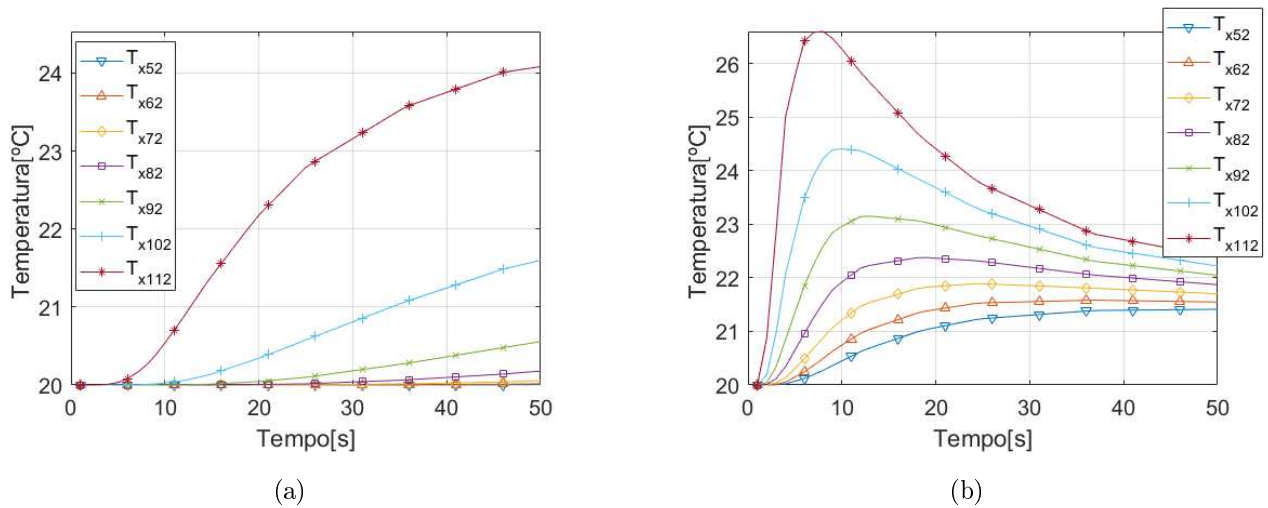


Figura 6.6: Possíveis pontos para medição da difusividade térmica: (a) aço inoxidável AISI 304; (b) Alumínio.

Tabela 6.3: Posição dos pontos de medição de temperatura distanciados do centro de aplicação do fluxo de calor

Pontos	x [mm]
T_{x112}	35
T_{x102}	45
T_{x92}	55
T_{x82}	65
T_{x72}	75
T_{x62}	85
T_{x52}	95

Considerando que o aquecimento só cessa a partir de 4 s, observa-se que para a amostra de aço inoxidável AISI 304 a posição $x = 35$ mm pode ser escolhida para $T(x_1, 0)$, enquanto a de 45 mm seria a escolha ideal, sendo que os outros pontos poderiam ser escolhidos para $T(x_2, 0)$ pois são pontos mais afastados. No entanto, considerando a amostra de alumínio, somente a partir de $x = 85$ mm uma vez que em posições inferiores o efeito do aquecimento já é sentido antes de 4 s.

6.2 Estimativa da difusividade térmica usando dados simulados

Na Tabela 6.4 apresentam-se os valores encontrados na literatura para as propriedades térmicas do material PVC, as quais variam de acordo com Goodfellow (2018). Contudo, para as simulações numéricas neste capítulo foram utilizados os valores de propriedades apresentadas na Tab. 6.5, sendo que os valores das propriedades térmicas dos metais foram obtidas de Incropera, Dewitt, Lavine e Bergman (2011).

Tabela 6.4: Propriedades térmicas do PVC

Propriedades	Goodfellow
ρ [kg/m ³]	1400
c_p [J/kg·K]	1000 - 1500
k [W/m·K]	0,12 - 0,25
α [m ² /s] × 10 ⁻⁷	0,8571 - 1,1905

Tabela 6.5: Difusividade térmica dos materiais usados no modelo numérico

Material	$\alpha \times 10^{-6}$ [m ² /s]
PVC	0,11905
AISI 304	3,95
Titânio	9,32
Alumínio	97,1
Cobre	117

6.2.1 Material Não Metálico

Na análise numérica do policloreto de vinila, foi usado como valor de referência $\alpha = 1,1905 \cdot 10^{-7}$ [m²/s], conforme Tab. 6.5. Similarmente aos casos anteriores, as Figs. 6.7 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, as variações das temperaturas na superfície em dois pontos distintos $x_1 = 28$ mm, $x_2 = 32$ mm, a razão de ganho de temperatura numérica, os valores de difusividade térmica estimados ao longo do tempo com erro gerado em relação ao valor verdadeiro e, por fim, a sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a estimativa da difusividade térmica.

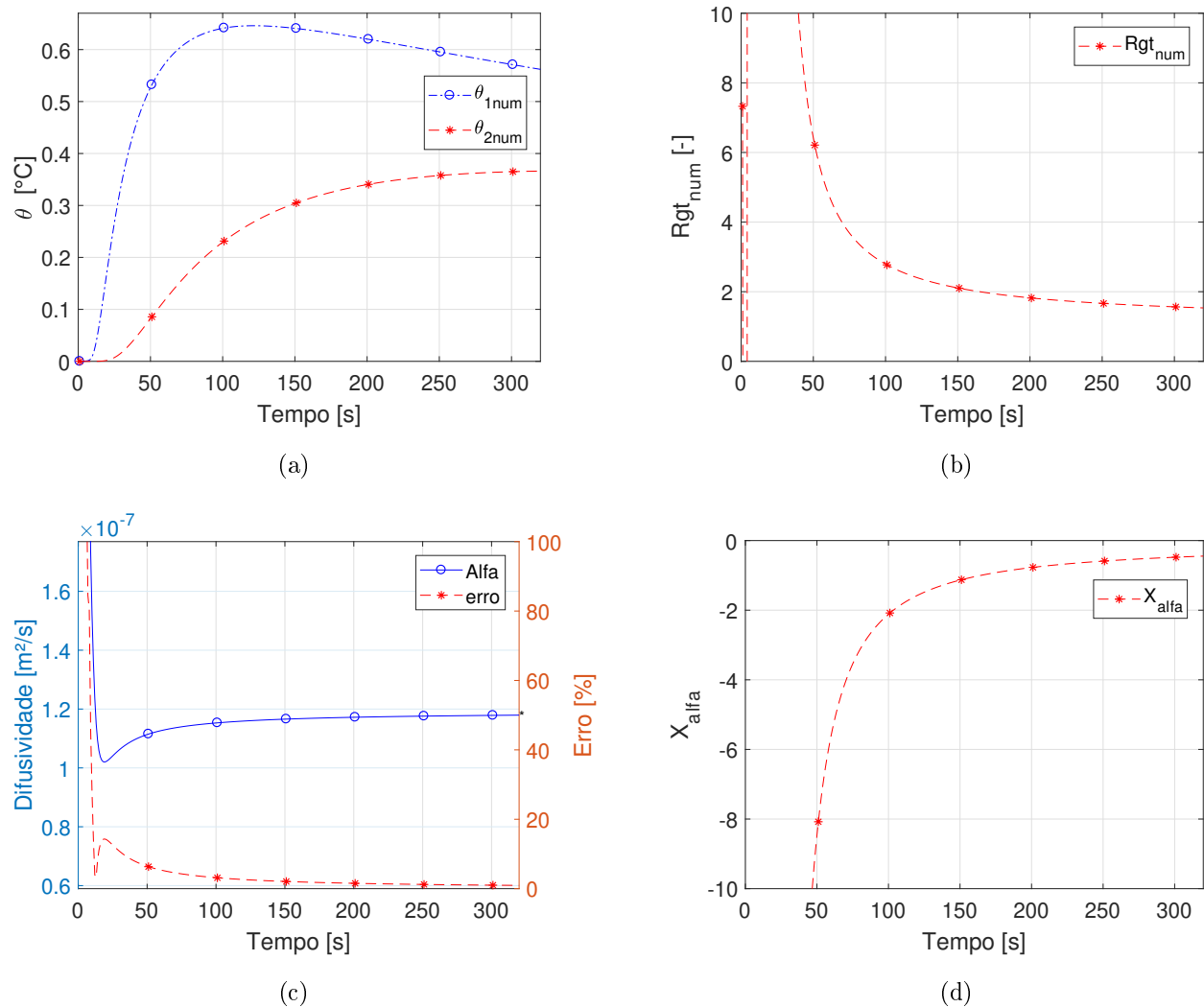


Figura 6.7: Resultados numéricos da estimativa da difusividade térmica no PVC: (a) Evolução das temperaturas numéricas nas posições $x_1 = 28$ mm e $x_2 = 32$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura numérica; (c) Difusividade térmica estimada e erro em relação ao valor da literatura; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.

Na Figura 6.8 apresenta-se uma comparação entre a razão de ganho calculadas analiticamente e numericamente. Observa-se o excelente ajuste entre as curvas permitindo o uso das soluções numéricas para análise.

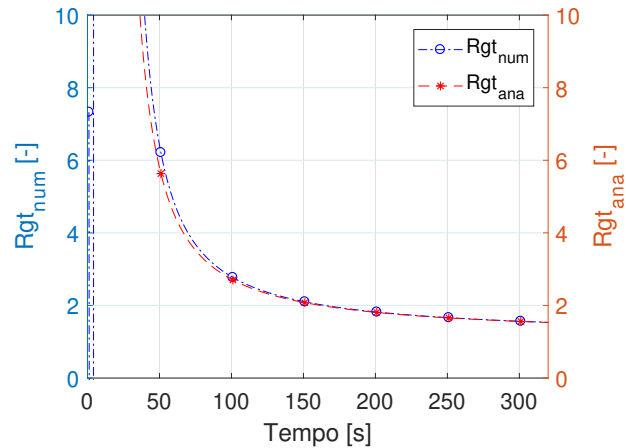


Figura 6.8: Razão de ganho de temperatura analítica e numérica no PVC.

Como mostrado anteriormente, existe uma região mais adequada para as estimativas de α . Esta região é identificada pelos valores de sensibilidade e de razão de ganho. Entretanto valores muito próximos ao início a propagação de calor sofrem influência de incertezas devido à temperatura da região aquecida. Análises numéricas indicam que a melhor faixa de estimativa se referem à faixa em que o coeficiente de sensibilidade tem comportamento linear indicando uma maior estabilidade na estimativa. Esta faixa para o PVC corresponde a tempos entre $150 < t < 300$ s como mostra a Fig. 6.7 (d). Na Tabela 6.6 apresenta-se a média dos valores estimados de α nos tempos de 150 a 300 s.

Tabela 6.6: Estimativa numérica da difusividade térmica para o PVC

$\alpha \times 10^{-7}$ [m ² /s]	$\bar{\alpha} \times 10^{-7}$ [m ² /s]	Erro [%]
1,1905	1,1789	0,9840

6.2.2 Materiais Condutores

Analogamente, análises similares foram realizadas para a identificação das melhores regiões de tempo para as estimativas de α de materiais condutores como o aço inoxidável AISI 304, titânio, alumínio e cobre. As Figuras 6.9 e 6.11 apresentam-se, respectivamente, as evoluções de temperatura, razão de ganho de temperatura, estimativas de α e coeficiente de sensibilidade destes materiais. Observa-se que para cada material, diferentes posições de x_1 e x_2 são escolhidas previamente, considerando-se as análises conforme discutido anteriormente.

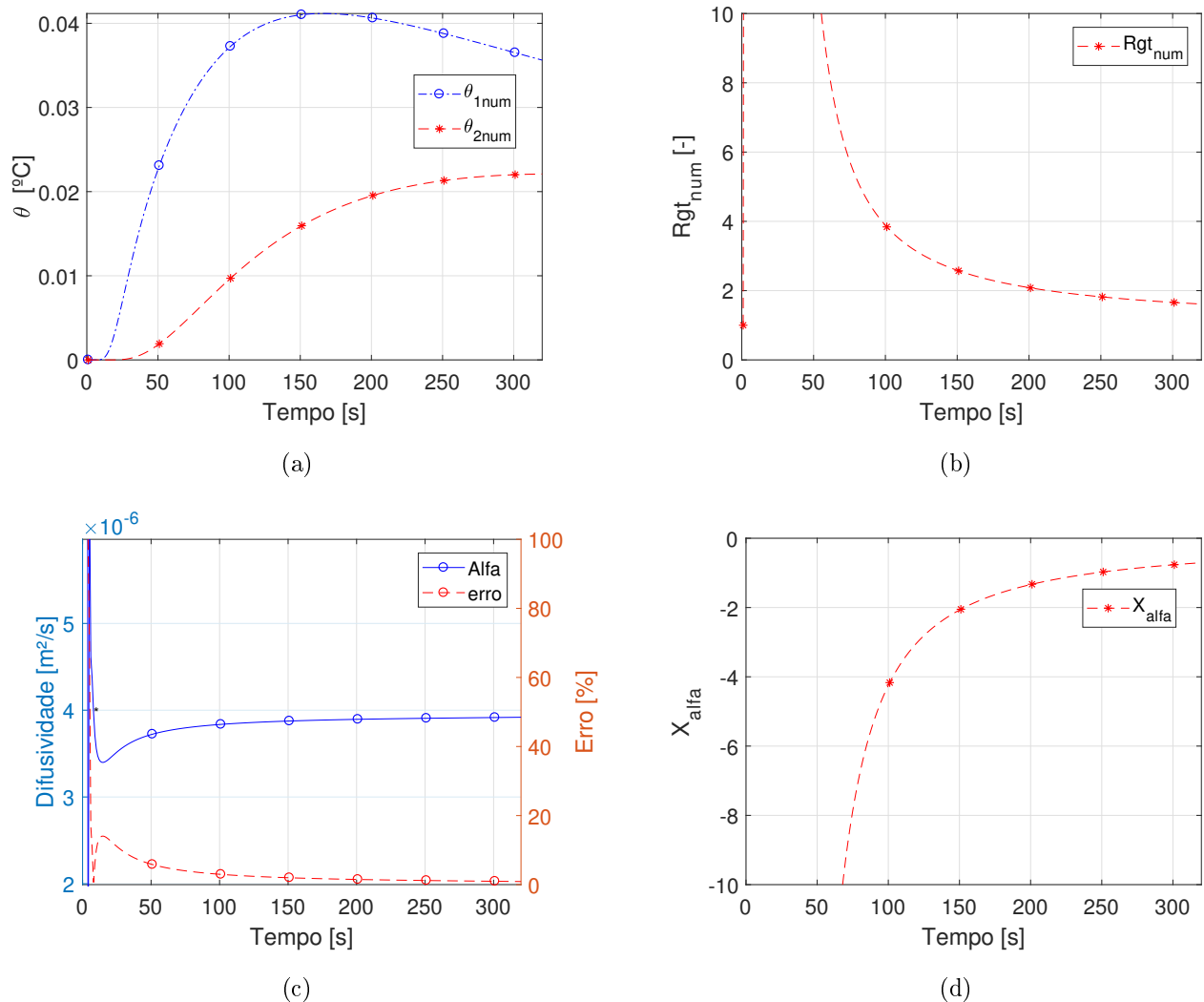


Figura 6.9: Resultados numéricos da estimativa da difusividade térmica no aço inoxidável AISI 304: (a) Evolução das temperaturas numéricas nas posições $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura numérica; (c) Difusividade térmica estimada e erro em relação ao valor da literatura; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.

Na Figura 6.10 apresenta-se, similarmente o coeficiente de ganho calculado analítica e numericamente.

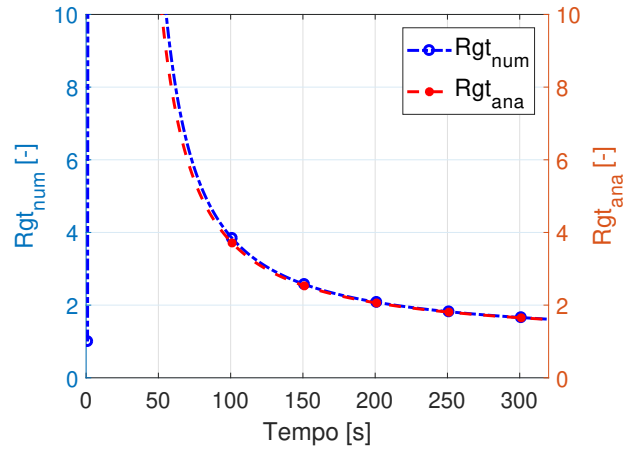


Figura 6.10: Razão de ganho de temperatura analítica e numérica no aço inoxidável AISI 304.

Novamente, identificou-se o comportamento linear de X_{alfa} sendo que neste caso a faixa de tempo escolhida foi de $200 < t < 250$ s. Na Tabela 6.7 apresenta-se o resultado da estimativa da difusividade térmica do aço inoxidável AISI 304.

Tabela 6.7: Estimativa numérica da difusividade térmica no aço inoxidável AISI 304

$\alpha \times 10^{-6}$ [m ² /s]	$\bar{\alpha} \times 10^{-6}$ [m ² /s]	Erro [%]
3,9540	3,9213	0,8270

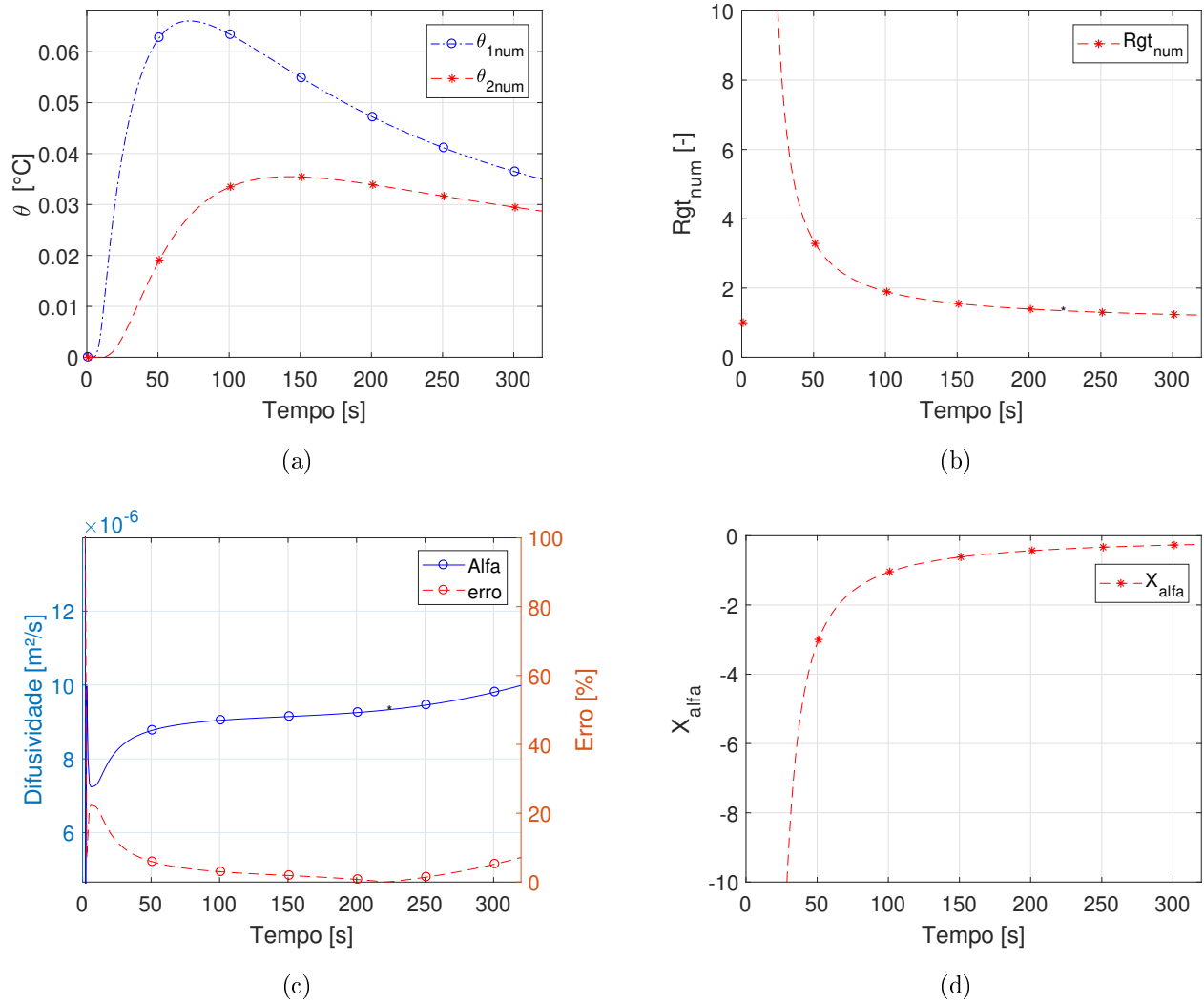


Figura 6.11: Resultados numéricos da estimativa da difusividade térmica no titânio: (a) Evolução das temperaturas numéricas nas posições $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura numérica; (c) Difusividade térmica estimada e erro em relação ao valor da literatura; (d) Sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação a difusividade térmica.

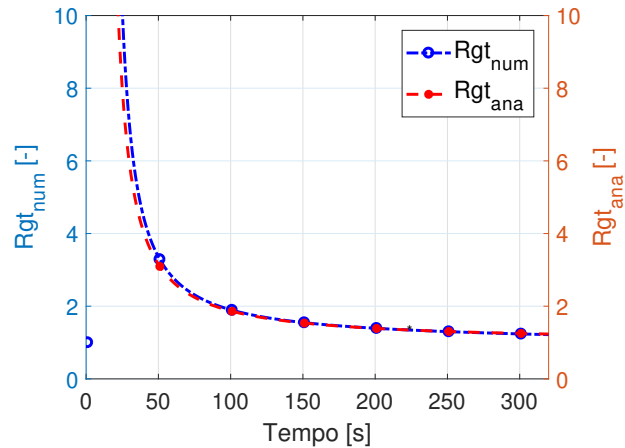


Figura 6.12: Razão de ganho de temperatura analítica e numérica no titânio.

Novamente, identificou-se o comportamento linear de X_{alfa} sendo que neste caso a faixa de tempo escolhida foi de $150 < t < 250$ s. Na Tabela 6.8 apresenta-se o resultado de α estimado para o titânio.

Tabela 6.8: Estimativa numérica da difusividade térmica no titânio

$\alpha \times 10^{-6}$ [m ² /s]	$\bar{\alpha} \times 10^{-6}$ [m ² /s]	Erro [%]
9,3231	9,2390	0,9021

Na Tabela 6.9 apresentam-se os resultados para estimativa de α dos diferentes metais. Além disso, é mostrado também os posicionamentos dos termopares nas posições x_1 e x_2 em relação ao centro de aplicação do fluxo de calor e o intervalo de tempo usado na estimativa do parâmetro térmico.

Tabela 6.9: Resumo da estimativa numérica da difusividade térmica nos materiais condutores.

	AISI 304	Titânio	Alumínio	Cobre
$\bar{\alpha} \times 10^{-6}$ [m ² /s]	3,9113	9,2390	96,22	115,89
x_1 [mm]	55	55	80	80
x_2 [mm]	75	75	127	127
ΔT [s]	200 < t < 250	150 < t < 250	20 < t < 25	15 < t < 20

Observa-se que quanto mais condutivo é o material menor o intervalo de tempo a ser usado e maior deve ser a distância da fonte de calor para que se faça a aquisição das temperaturas.

6.3 Estimativa da condutividade térmica usando dados simulados

Uma vez obtida a difusividade térmica, a condutividade deve ser estimada. O objetivo nesse caso é a minimização de uma função objetivo baseada na função erro quadrática entre temperaturas numérica e calculada, ou seja, uma nova função a ser minimizada deve ser definida, uma vez que a razão de ganho é função somente da difusividade. Na Equação (6.1) define-se a função objetivo a ser minimizada

$$F(k) = \sum_{i=1}^N [Y_3(i) - T_3(i)]^2 \quad (6.1)$$

onde, N é o número total de pontos, Y_3 representa a temperatura experimental simulada localizada em $y = 0$ e no centro da região aquecida e T_3 é a temperatura calculada para essa mesma localização na superfície. A temperatura T_3 pode ser calculada considerando o modelo tridimensional transiente obtido no capítulo 4 referenciado por $T_{X22Y22Z22}$. Entretanto, dependendo da geometria e do tempo de propagação de calor vários modelos térmicos que preveem aquecimento superficial podem ter, durante um certo intervalo de tempo, o mesmo comportamento.

Por exemplo, se todas as superfícies exceto a região de aquecimento estiverem isoladas, o modelo $T_{X22Y22Z22}$ tende a ter o mesmo comportamento de outros modelos térmicos, principalmente na posição central da região de aquecimento, onde a influência dos contornos tende a ser mínima. Esta temperatura tende a ter também o mesmo comportamento ao se considerar um modelo unidimensional transiente com espessura muito grande. Nesse caso o modelo referenciado por $X20$.

Quando usa-se a solução 1D, é feito o cálculo do tempo de desvio (que representa a diferença de temperatura entre os modelos semi-infinito Eq. (4.13) e finito dado pela solução numérica de temperatura modelada no software COMSOL *Multiphysics*), com isso, pode-se observar o instante em que o modelo semi-infinito diverge do finito, sabendo-se assim o tempo aproximado para realizar a estimativa da condutividade. A Equação (3.5) foi usada para estimar o tempo de desvio, sendo que os resultados para cada material são apresentadas na Tab. 6.10.

Tabela 6.10: Tempo de desvio entre a solução semi-infinita $X20$ e a solução finita dada pelo software COMSOL *Multiphysics*

Metal	Tempo de desvio [s]
AISI 304	12
Titânio	6
Alumínio	1
Cobre	1

Na Figura 6.13 apresenta-se o fluxo térmico de 10^4 [W/m²] imposto durante 4 s nas análises numéricas, sendo que os 2 modelos tridimensionais e unidimensional serão usados para o cálculo da condutividade térmica.

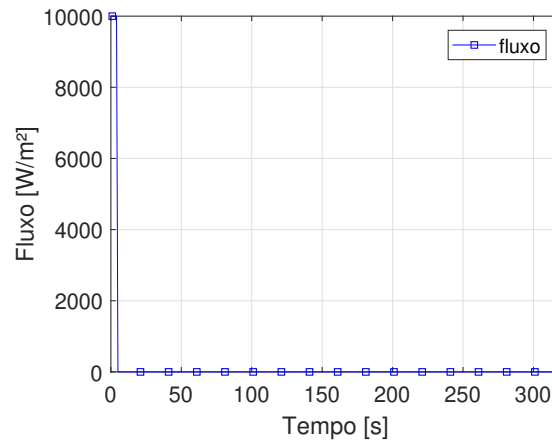


Figura 6.13: Taxa de transferência de calor por unidade de área 10^4 [W/m²] aplicada por 4 s nas análises numéricas.

Na Tabela 6.11 apresenta-se o valor de condutividade térmica dos materiais a serem simulados, sendo que para o PVC o valor da condutividade usado esta de acordo com Goodfellow (2018) e para os metais os valores usados estão de acordo com Incropera, Dewitt, Lavine e Bergman (2011).

Tabela 6.11: Condutividade térmica dos materiais usados no modelo numérico

Material	k [W/mK]
PVC	0,25
AISI 304	14,9
Titânio	21,9
Alumínio	237
Cobre	401

6.3.1 Modelo unidimensional

Devido as características menos condutivas, o modelo unidimensional $X20$ foi usado para a estimativa da condutividade térmica de um material não metálico e materiais maus condutores. Nas Figuras 6.14, 6.15 e 6.16 apresentam-se, respectivamente, a evolução da temperatura em $x = 0$, e as estimativas da condutividade térmica para os materiais PVC, aço inoxidável AISI 304 e titânio.

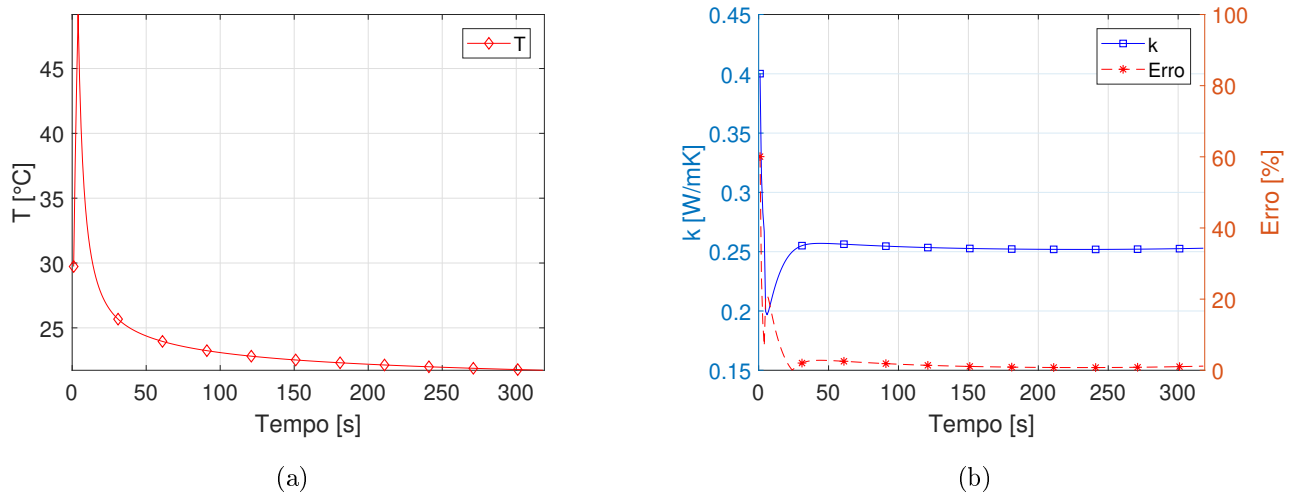


Figura 6.14: Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o PVC usando o modelo unidimensional $X20$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.

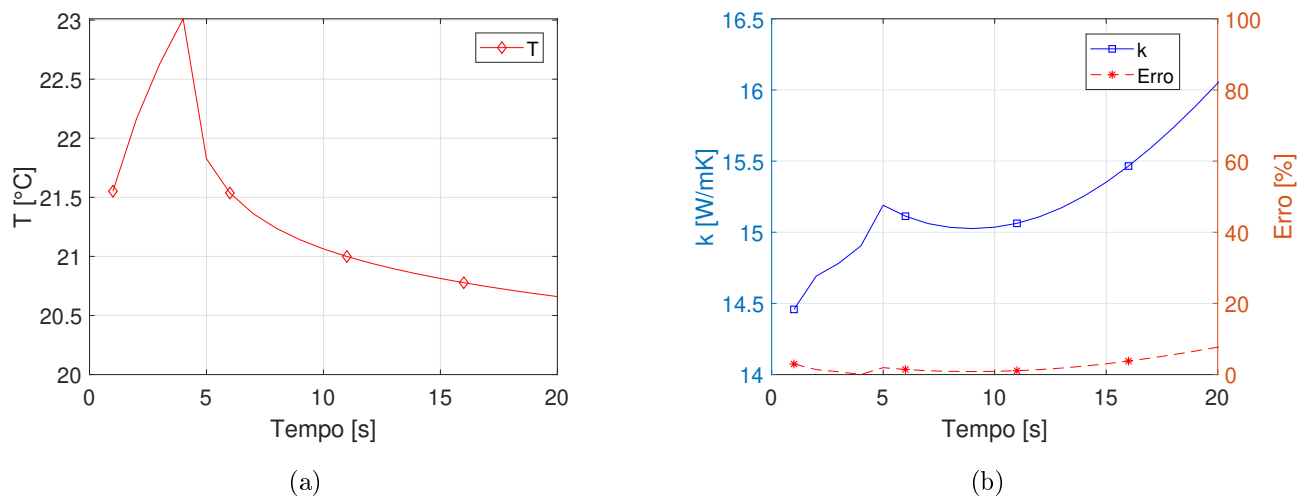


Figura 6.15: Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o aço inoxidável AISI 304 usando o modelo unidimensional $X20$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.

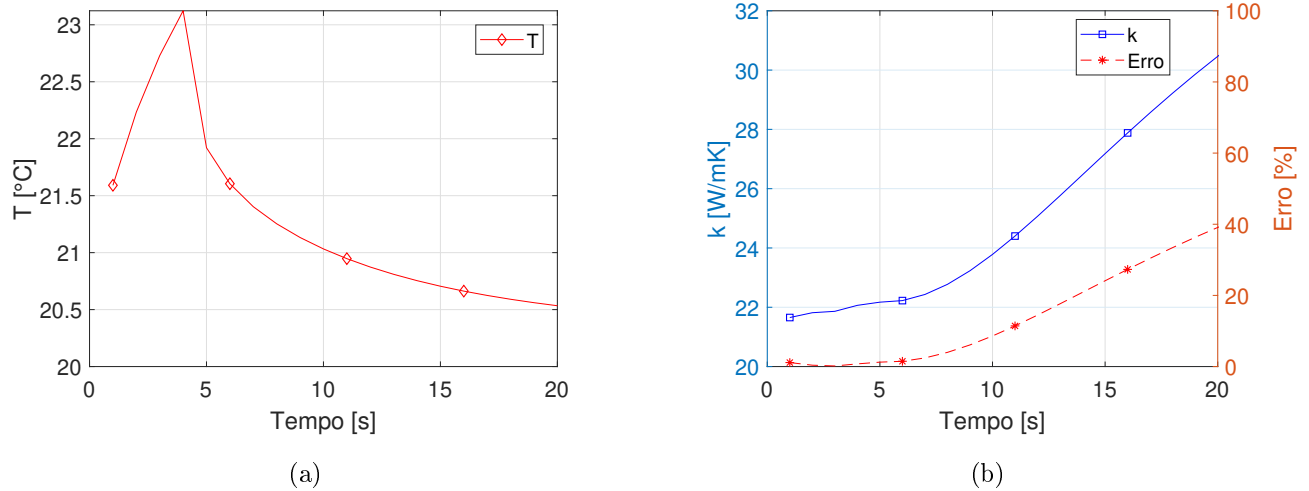


Figura 6.16: Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o titânio usando o modelo unidimensional $X20$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.

Observa-se que o tempo de estimativa pouco interfere na estimativa de k para o PVC. Entretanto, o erro da estimativa aumenta a partir de 10 s para o aço inoxidável AISI 304 e 5 s para o titânio, indicando que para os materiais condutores a condição de contorno passa a influenciar na temperatura em $x = 0$ em tempos pequenos, como previsto na Tab. 6.10 pelo tempo de desvio. Observa-se que o tempo de desvio representa o tempo no qual o contorno inativo é perturbado ou tem influência no contorno ativo, em $x = 0$. Este tempo é de 12 s para o aço inoxidável AISI 304 e 6 s para o titânio.

6.3.2 Modelos tridimensionais

Como o tempo de desvio para o alumínio e cobre são muito baixos (1s), os modelos 3D que consideram a espessura na direção do fluxo de calor são mais indicados. Nesse caso, analisou-se o modelo $X00Y22Z00$ e $X22Y22Z22$. Analogamente, nas Figs. 6.17 e 6.18 apresentam-se, respectivamente, as temperaturas e as estimativas de k para as amostras de alumínio e cobre.

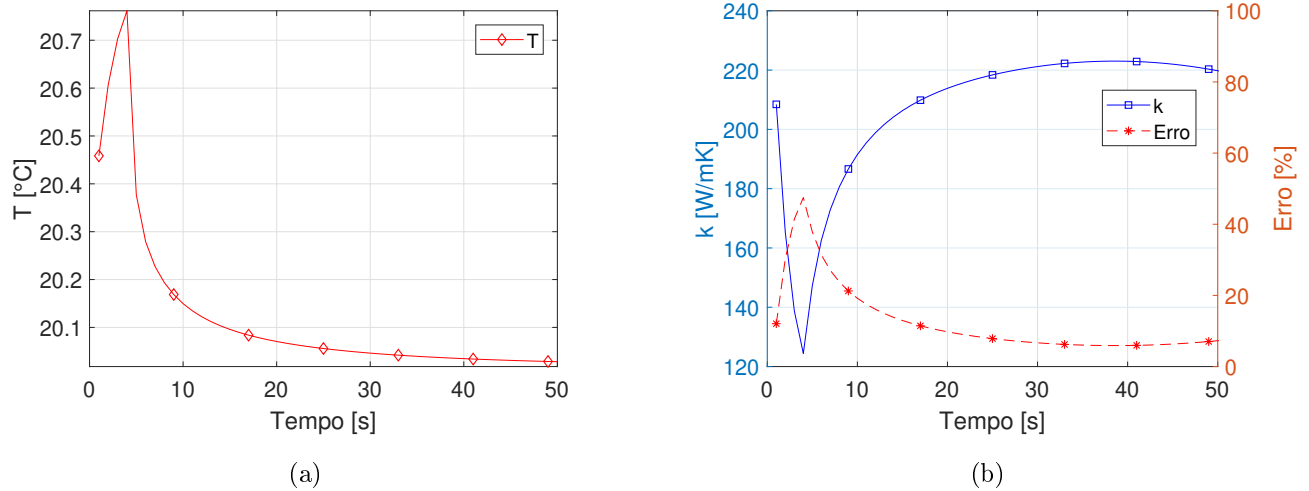


Figura 6.17: Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o alumínio usando o modelo tridimensional X00Y22Z00: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.

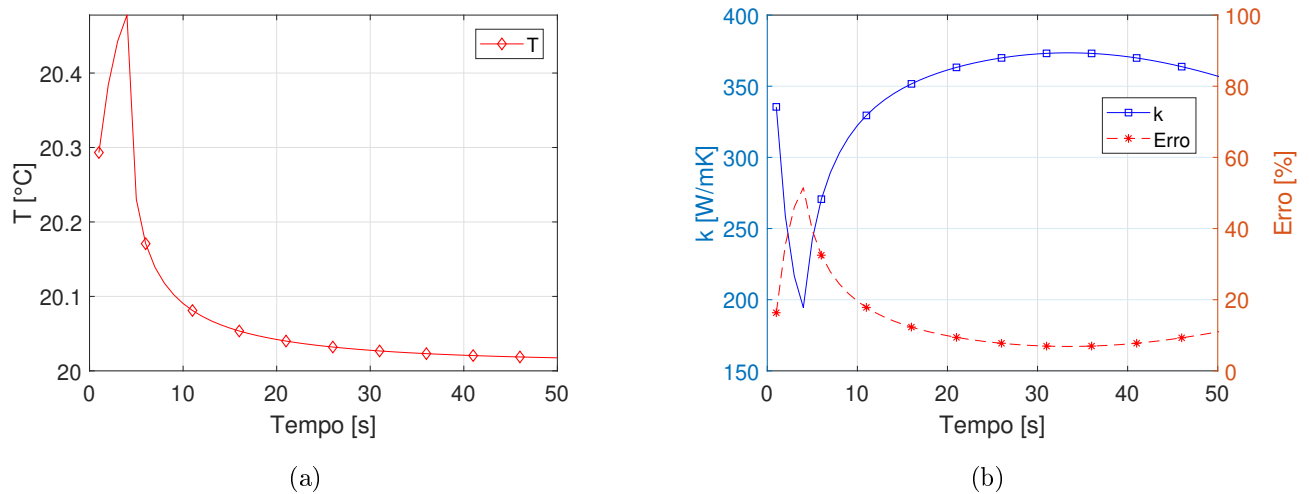


Figura 6.18: Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o cobre usando o modelo tridimensional X00Y22Z00: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.

Observa-se que as condutividades térmicas puderam ser estimadas com erros inferiores a 10% para tempos superiores a 20 s.

O modelo X22Y22Z22 que considera as dimensões finitas e isoladas em toda amostra também foi analisado. Este modelo é interessante por considerar dimensões reais da amostra. Além disso, pode ser usado para qualquer tipo de material. Analogamente, as Figs. 6.19, 6.20, 6.21, 6.22 e 6.23 apresentam-se, respectivamente, as temperaturas em $x = 0$ e as estimativas de k

para o PVC, aço inoxidável AISI 304, titânio, alumínio e cobre.

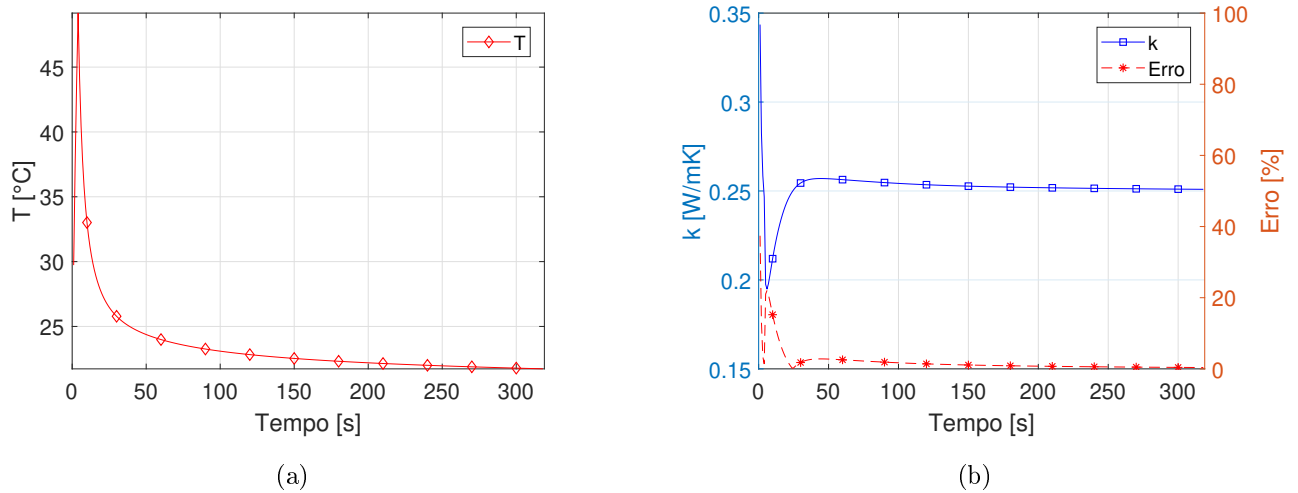


Figura 6.19: Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o PVC usando o modelo tridimensional $X22Y22Z22$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.

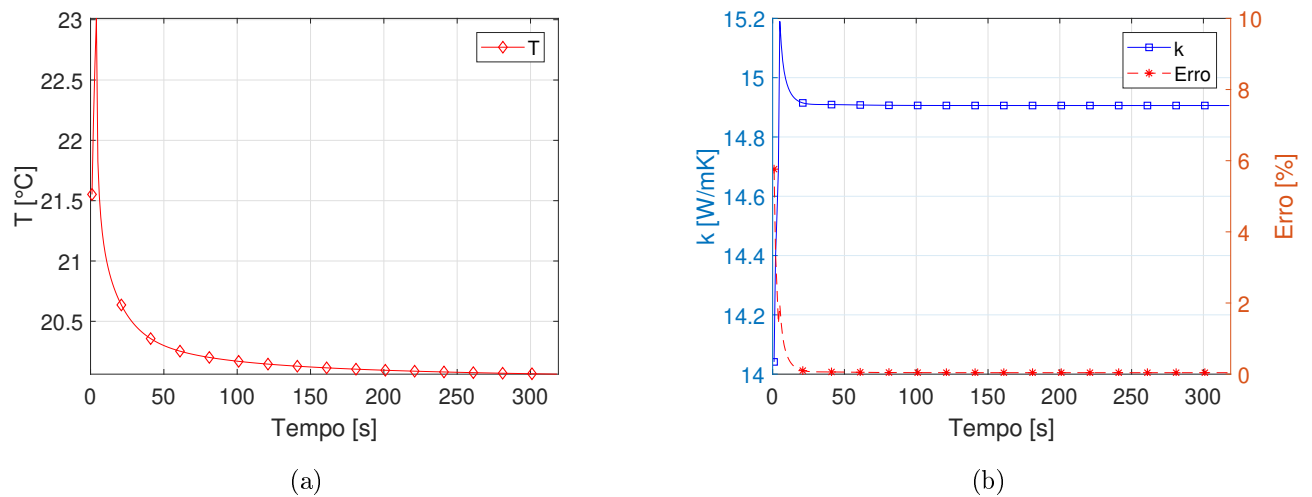


Figura 6.20: Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o aço inoxidável AISI 304 usando o modelo tridimensional $X22Y22Z22$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.

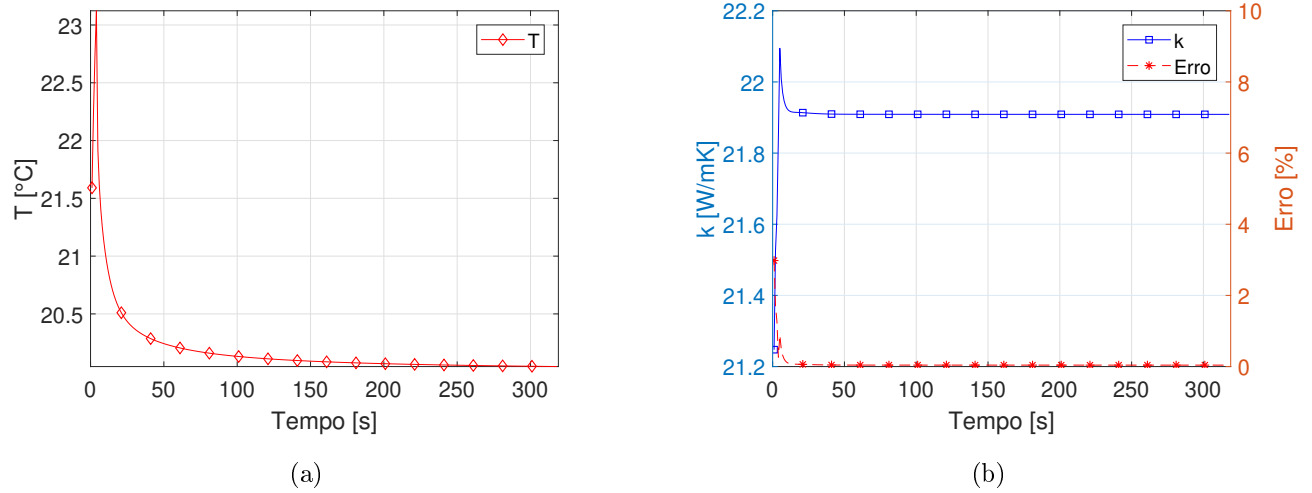


Figura 6.21: Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o titânio usando o modelo tridimensional $X22Y22Z22$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.

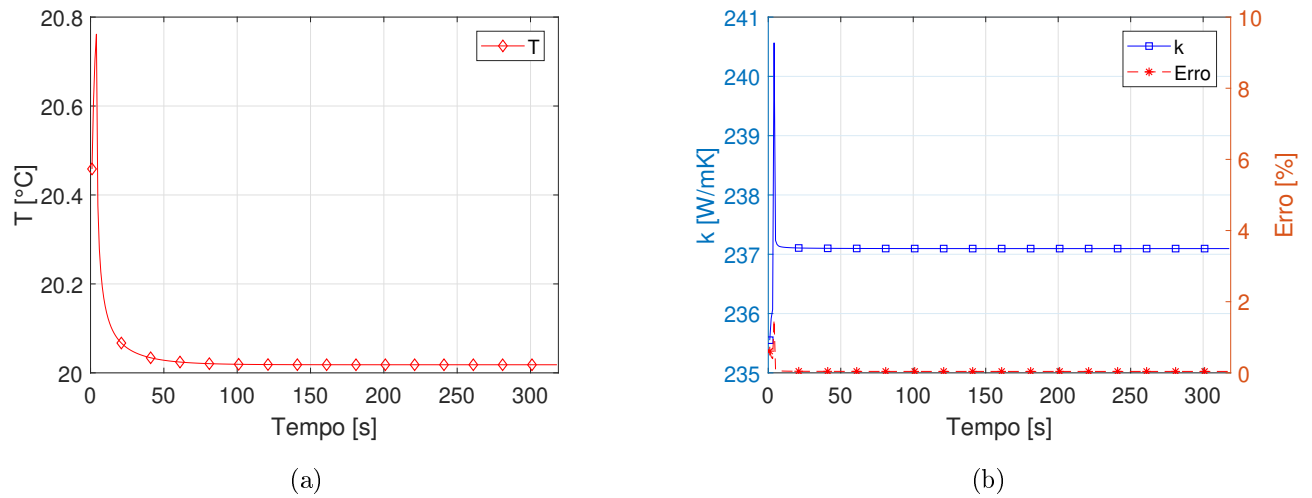
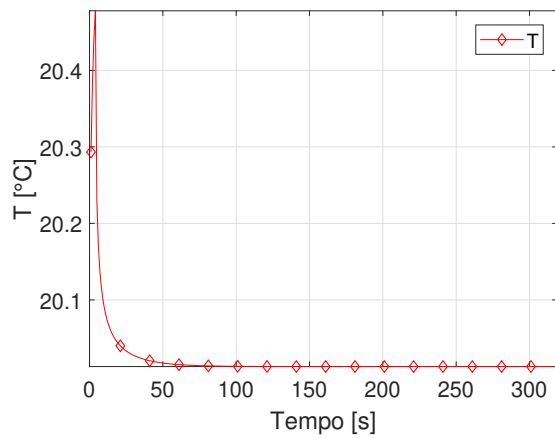
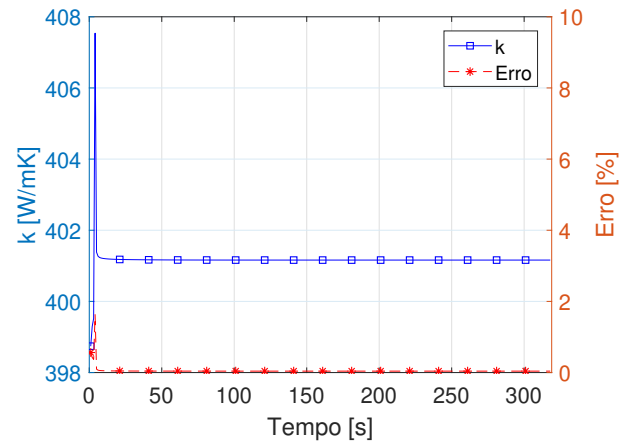


Figura 6.22: Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o alumínio usando o modelo tridimensional $X22Y22Z22$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.



(a)



(b)

Figura 6.23: Resultados numéricos da estimativa da condutividade térmica para o cobre usando o modelo tridimensional $X22Y22Z22$: (a) Evolução da temperatura em $x = 0$; (b) Condutividade térmica estimada e o erro em relação ao valor da literatura.

Observa-se que para esse modelo todos os materiais tiveram a condutividade térmica estimada com erros inferiores a 1 %, o que indica ser o modelo ideal a ser usado.

Capítulo 7

Resultados Experimentais

Neste capítulo serão apresentados os dispositivos usados nos experimentos, sendo que na estimativa da difusividade térmica, usou-se apenas termopares tipo K para medição de temperatura em dois pontos distintos e um soprador térmico para gerar o fluxo de calor numa região específica da amostra. Na estimativa da condutividade térmica ao invés de se usar o soprador térmico, usou-se uma resistência e um transdutor de fluxo de calor acoplados a amostra.

7.1 Estimativa da difusividade térmica experimental

Para realização dos ensaios, foi necessário acoplar termopares do tipo K nas posições x_1 e x_2 , sendo que o índice 1 é relativo ao ponto mais próximo da fonte quente e o índice 2 é relativo ao ponto mais afastado da fonte de calor, a região de aplicação do fluxo de calor é delimitada por $-L_1 < x < L_1$ e $-R_1 < x < R_1$, sendo que o centro de aplicação do fluxo é representado por $x = 0$. O posicionamento dos termopares e do soprador térmico está representado na Fig. 7.1.

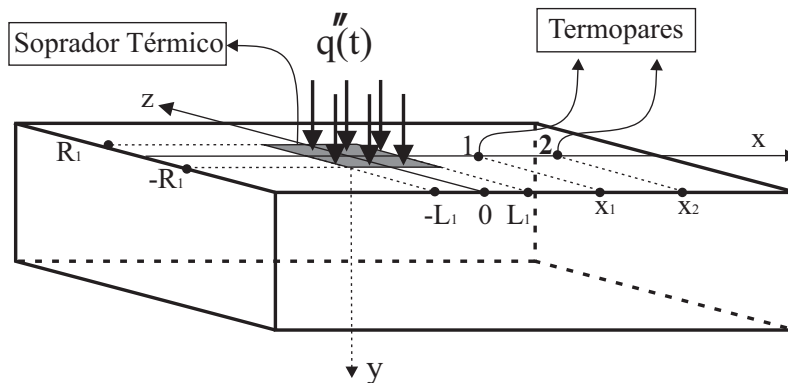
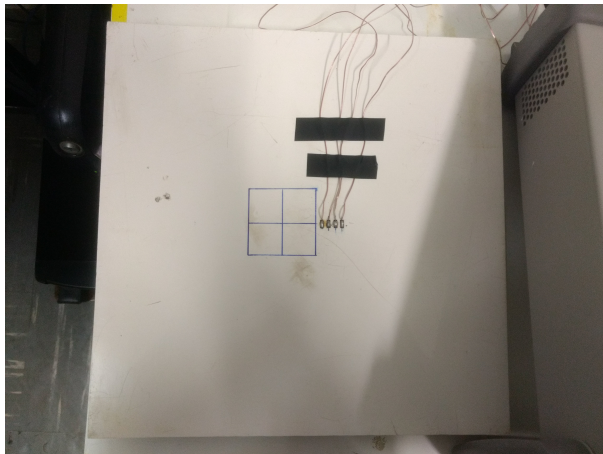


Figura 7.1: Esquema de posicionamento da região de aplicação do fluxo térmico e posicionamento dos termopares nas amostras experimentais.

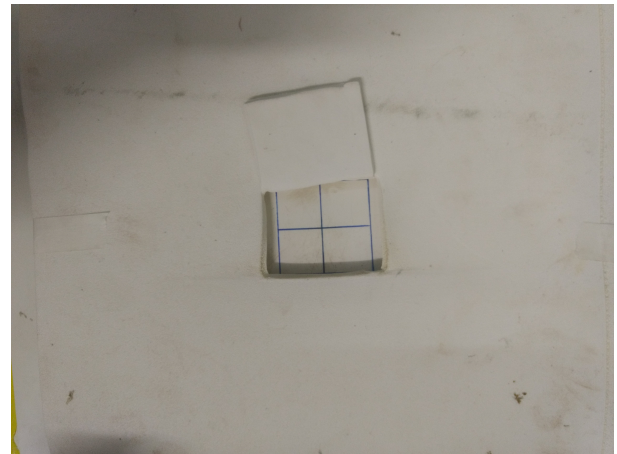
Os sinais de temperaturas e fluxo de calor foram adquiridos usando-se um sistema de aquisição de dados (Agilent® 34972A) em um intervalo de 1 s. O soprador térmico tem uma potência de 2000 W e a resistência elétrica gerou por efeito joule uma potência de 10 W. O tempo de aquecimento teve duração de 10 s para amostras de PVC, AISI 304 e AISI 1045 e 5 s para o alumínio.

7.1.1 Material não metálico

O experimento foi feito em uma amostra de PVC com dimensões laterais de 306×306 mm e espessura de 25 mm. A região de aplicação do fluxo foi delimitada com dimensões de 50×50 mm no centro da amostra. Em relação ao centro de aplicação do fluxo de calor, os termopares foram acoplados nas respectivas posições $x_1 = 30$ mm, $x_2 = 35$ mm, $x_3 = 40$ mm e $x_4 = 45$ mm como pode ser observado na Fig. 7.2 (a). As Figuras 7.2 (b), (c) e (d) apresentam, respectivamente, a amostra isolada, o modelo preparado para aplicação do fluxo térmico e a bancada experimental.



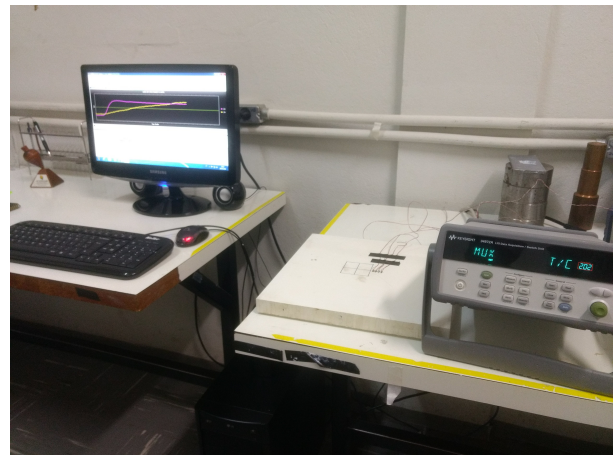
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.2: Preparação do experimento para estimar a difusividade térmica no PVC: (a) Amostra com os termopares acoplados; (b) Isolamento da superfície; (c) Modelo preparado para aplicação do fluxo de calor; (d) Bancada experimental.

Nas Figuras 7.3 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, os resultados experimentais para as temperaturas em x_1 e x_2 , razão de ganho, a evolução de estimativas de α e o erro em relação aos valores encontrados por Malheiros (2017) na mesma amostra, o qual estima a difusividade térmica $\alpha = 1,148 \cdot 10^{-7} \text{ [m}^2/\text{s]}$.

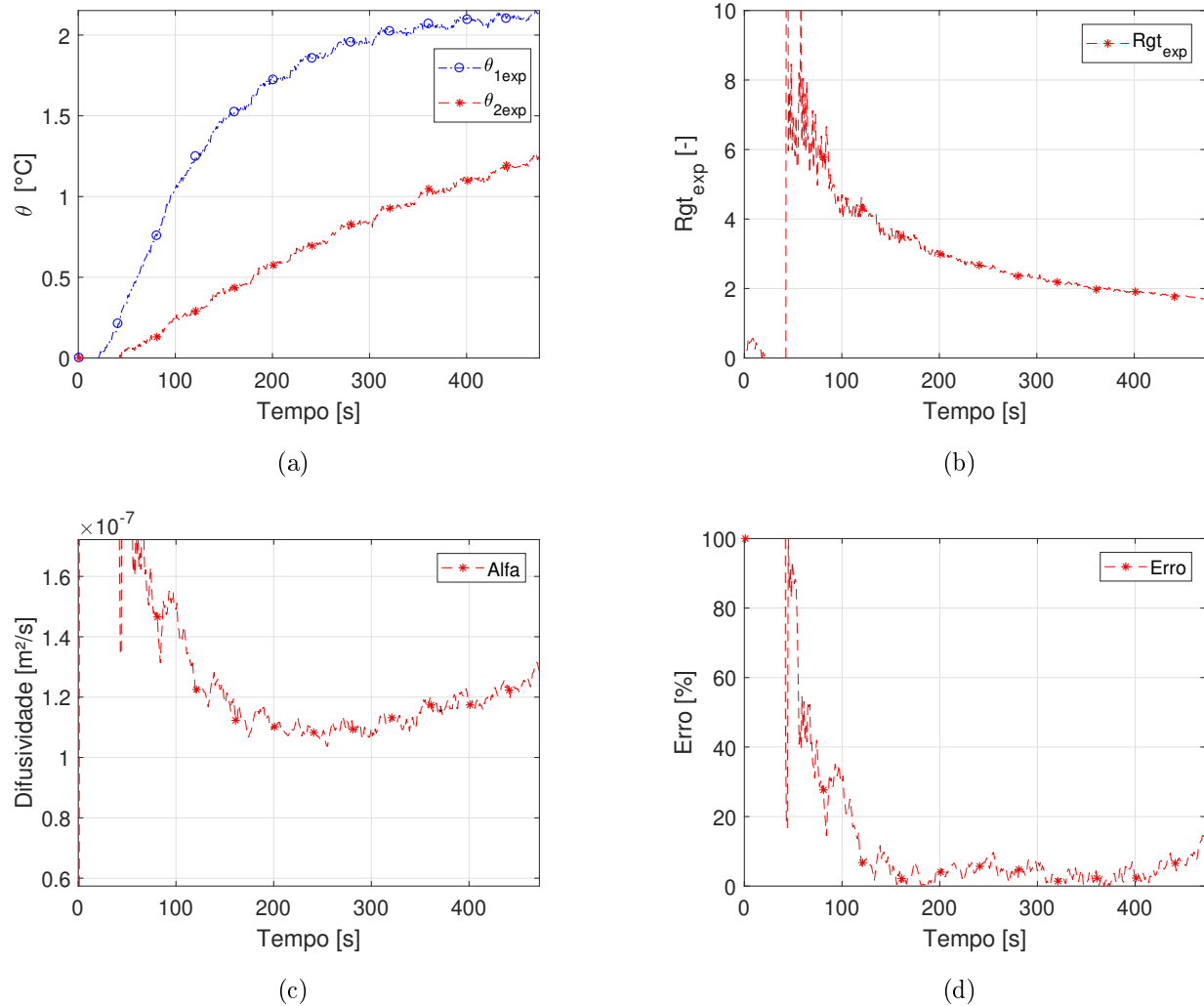


Figura 7.3: Resultados experimentais da estimativa da difusividade térmica no PVC: (a) Evolução das temperaturas experimentais nas posições $x_1 = 30$ mm e $x_2 = 35$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura experimental; (c) Difusividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor estimado por Malheiros (2017).

Foram realizados 11 experimentos independentes na amostra de PVC. Na Figura 7.4 mostra-se o gráfico de barras da estimativa da difusividade térmica em relação a cada experimento. Em todos os experimentos foi feito a média do valor da difusividade térmica no intervalo de 300 – 400 s, foi escolhido essa região de acordo com análises de sensibilidade do capítulo anterior.

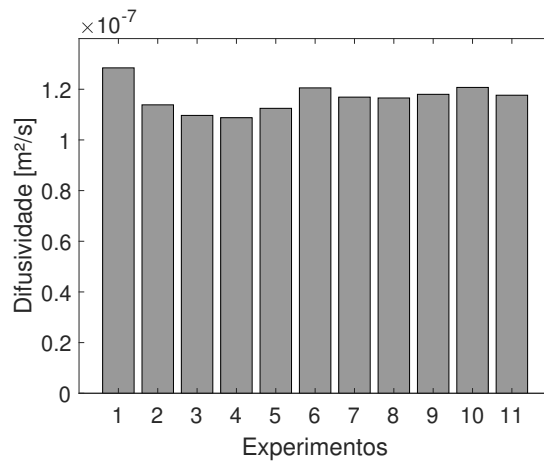


Figura 7.4: Gráfico de barras da difusividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de PVC.

Na Tabela 7.1 apresenta-se a média dos valores da difusividade térmica para cada experimento e o valor final estimado de α .

Tabela 7.1: Estimativa experimental da difusividade térmica para o PVC

Experimento	$\bar{\alpha} \times 10^{-7} [\text{m}^2/\text{s}]$
1	1,284
2	1,139
3	1,097
4	1,088
5	1,125
6	1,205
7	1,169
8	1,166
9	1,180
10	1,207
11	1,176
Valor final estimado	1,167
Desvio padrão	0,053

Na Tabela 7.2 apresenta-se o valor da difusividade térmica estimado e comparado com a literatura.

Tabela 7.2: Comparação dos valores estimados da difusividade térmica do PVC com a literatura

Resultados	$\alpha \times 10^{-7}$ [m ² /s]	Desvio [%]
Estimado	1,167±0,053	-
(LIMA e SILVA, 2000)	1,318 ±0,007	11,46
(BORGES, 2004)	1,240±0,019	5,89
(MALHEIROS, 2017)	1,148 ±0,091	1,66
(GOODFELLOW, 2018)	0,857 – 1,190	-

Observa-se que o valor de α para o material estimado apresenta-se entre os valores de referência.

7.1.2 Materiais condutores

Aço inoxidável AISI 304

O experimento foi feito em uma amostra de aço inoxidável AISI 304 com dimensões laterais de 160,46×62,42 mm e espessura de 6,82 mm. Nas Figuras 7.5 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, os resultados experimentais para as temperaturas em $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm, razão de ganho, a evolução de estimativas de α e o erro em relação aos valor encontrado na literatura.

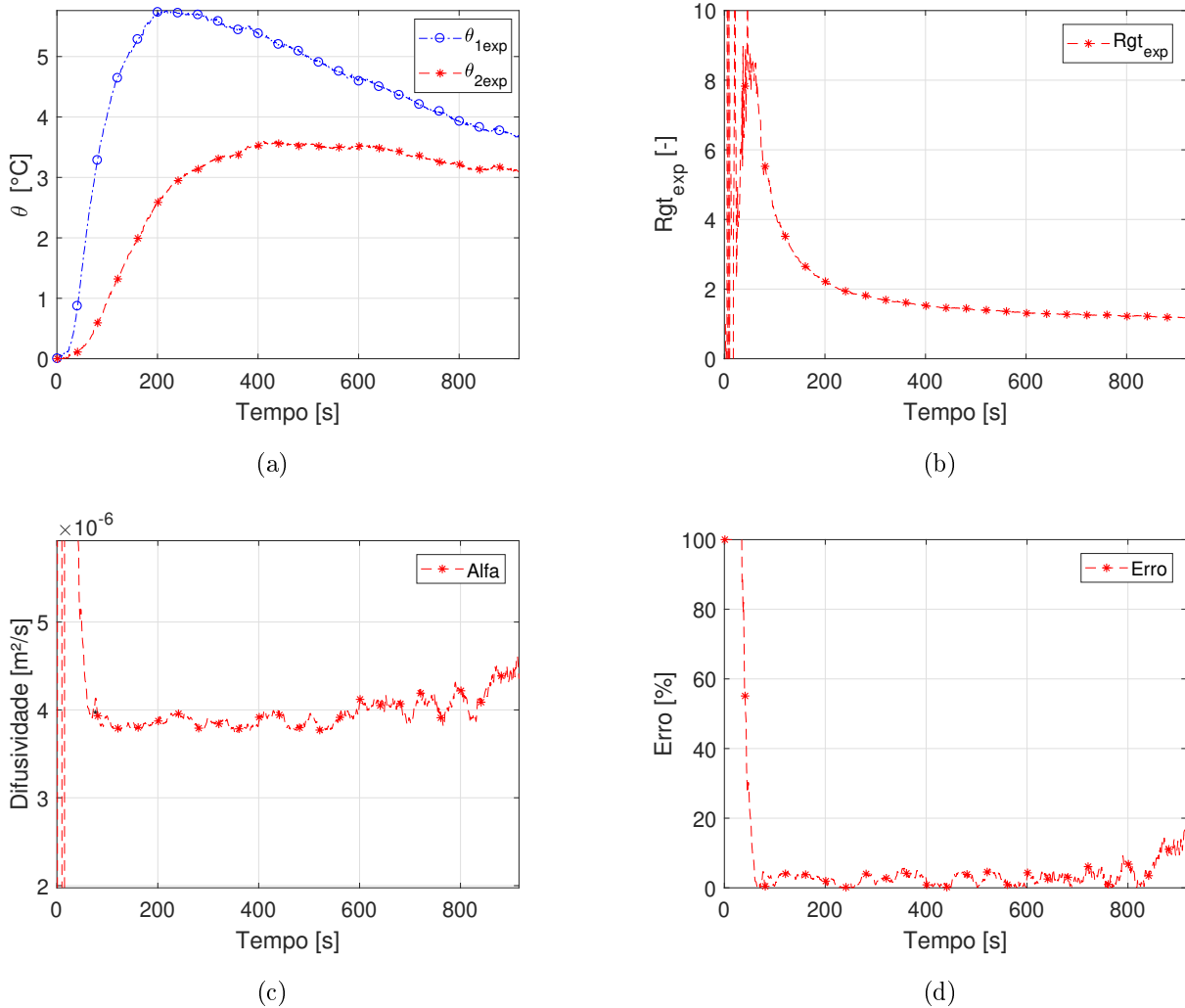


Figura 7.5: Resultados experimentais da estimativa da difusividade térmica no AISI 304: (a) Evolução das temperaturas experimentais nas posições $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura experimental; (c) Difusividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor encontrado na literatura.

Foram realizados 9 experimentos independentes na amostra de aço inoxidável AISI 304, a Fig. 7.6 mostra o gráfico de barras da estimativa da difusividade térmica em relação a cada experimento. Foi feito a média do valor da difusividade térmica de 200 – 300 s.

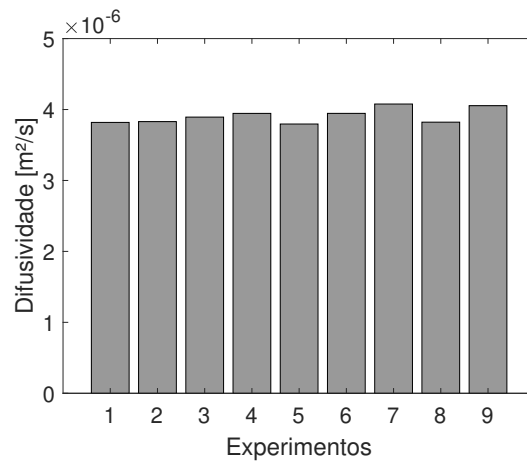


Figura 7.6: Gráfico de barras da difusividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de aço inoxidável AISI 304.

Na Tabela 7.3 apresenta-se o valor final estimado da difusividade térmica.

Tabela 7.3: Estimativa experimental da difusividade térmica para o aço inoxidável AISI 304.

Experimento	$\bar{\alpha} \times 10^{-6} \text{ [m}^2/\text{s]}$
1	3,818
2	3,830
3	3,893
4	3,946
5	3,796
6	3,946
7	4,078
8	3,822
9	4,054
Valor final estimado	3,909
Desvio padrão	0,099

Na Tabela 7.4 apresenta-se o valor da difusividade térmica estimada e comparada com a literatura.

Tabela 7.4: Comparação dos valores estimados da difusividade térmica do aço inoxidável AISI 304 com a literatura.

Resultados	$\alpha \times 10^{-6} \text{ [m}^2/\text{s]}$	Desvio [%]
Estimado	3,909±0,099	-
(BORGES, 2004)	3,762±0,019	3,91
(INCROPERA, 2011)	3,950	1,04

Aço AISI 1045

O experimento foi feito em uma amostra de aço AISI 1045 com dimensões laterais de $553,72 \times 102,72$ mm e espessura de 15,15 mm. Nas Figuras 7.7 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, os resultados experimentais para as temperaturas em $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm, razão de ganho, a evolução de estimativas de α e o erro em relação aos valores encontrados na literatura.

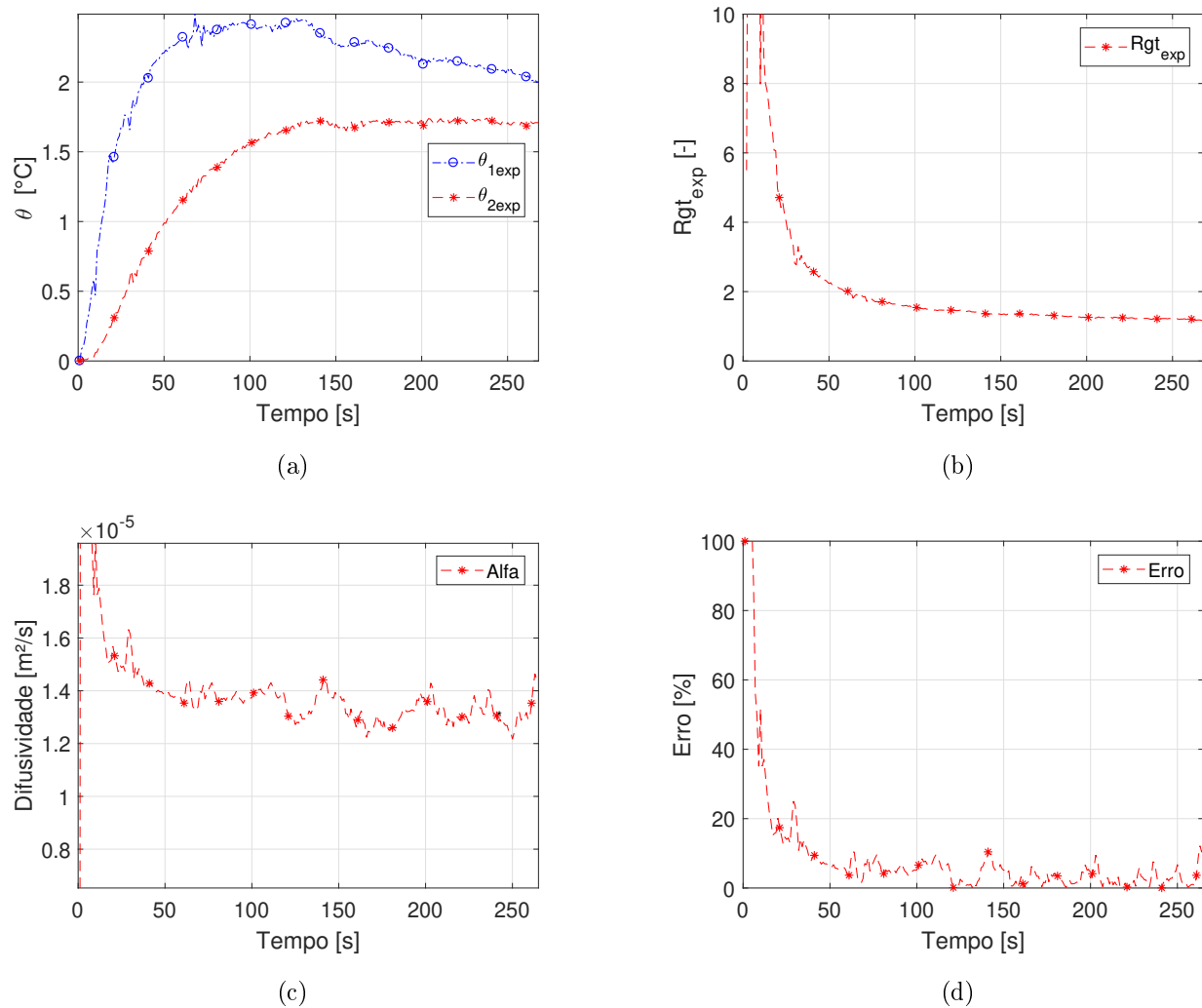


Figura 7.7: Resultados experimentais da estimativa da difusividade térmica no AISI 1045: (a) Evolução das temperaturas experimentais nas posições $x_1 = 55$ mm e $x_2 = 75$ mm; (b) Razão de ganho de temperatura experimental; (c) Difusividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor encontrado na literatura.

Foram realizados 9 experimentos independentes na amostra de aço AISI 1045, na Fig. 7.8 mostra-se o gráfico de barras da estimativa da difusividade térmica em relação a cada experi-

mento. Em todos os experimentos foi feito a média do valor da difusividade térmica de 150 – 200 s.

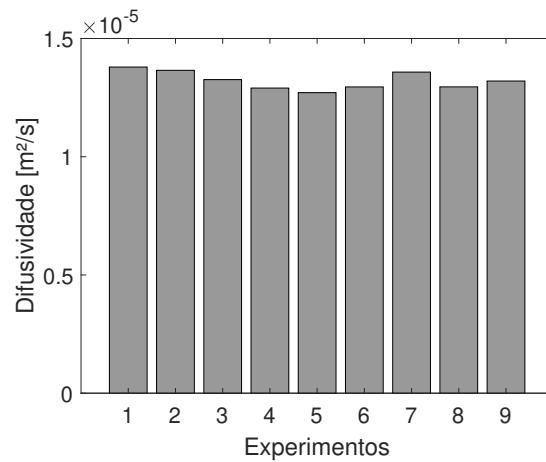


Figura 7.8: Gráfico de barras da difusividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de aço AISI 1045.

Na Tabela 7.5 apresenta-se a média dos valores para cada experimento e o valor final estimado da difusividade térmica.

Tabela 7.5: Estimativa experimental da difusividade térmica para o aço AISI 1045

Experimento	$\bar{\alpha} \times 10^{-5} \text{ [m}^2/\text{s]}$
1	1,379
2	1,365
3	1,326
4	1,290
5	1,271
6	1,295
7	1,358
8	1,295
9	1,320
Valor final estimado	1,322
Desvio padrão	0,036

Na Tabela 7.6 apresenta-se o valor da difusividade térmica estimada e comparada com a literatura.

Tabela 7.6: Comparação dos valores estimados da difusividade térmica do aço AISI 1045 com a literatura

Resultados	$\alpha \times 10^{-5} \text{ [m}^2/\text{s]}$
Estimado	$1,322 \pm 0,036$
Matweb (2018)	1,315

Alumínio

O experimento foi feito em uma amostra de alumínio com dimensões laterais de $233,33 \times 182,89$ mm e espessura de 1,52 mm. Nas Figuras 7.7 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, os resultados experimentais para as temperaturas em $x_1 = 85$ mm e $x_2 = 105$ mm, razão de ganho, a evolução de estimativas de α e o erro em relação aos valor encontrado na literatura.

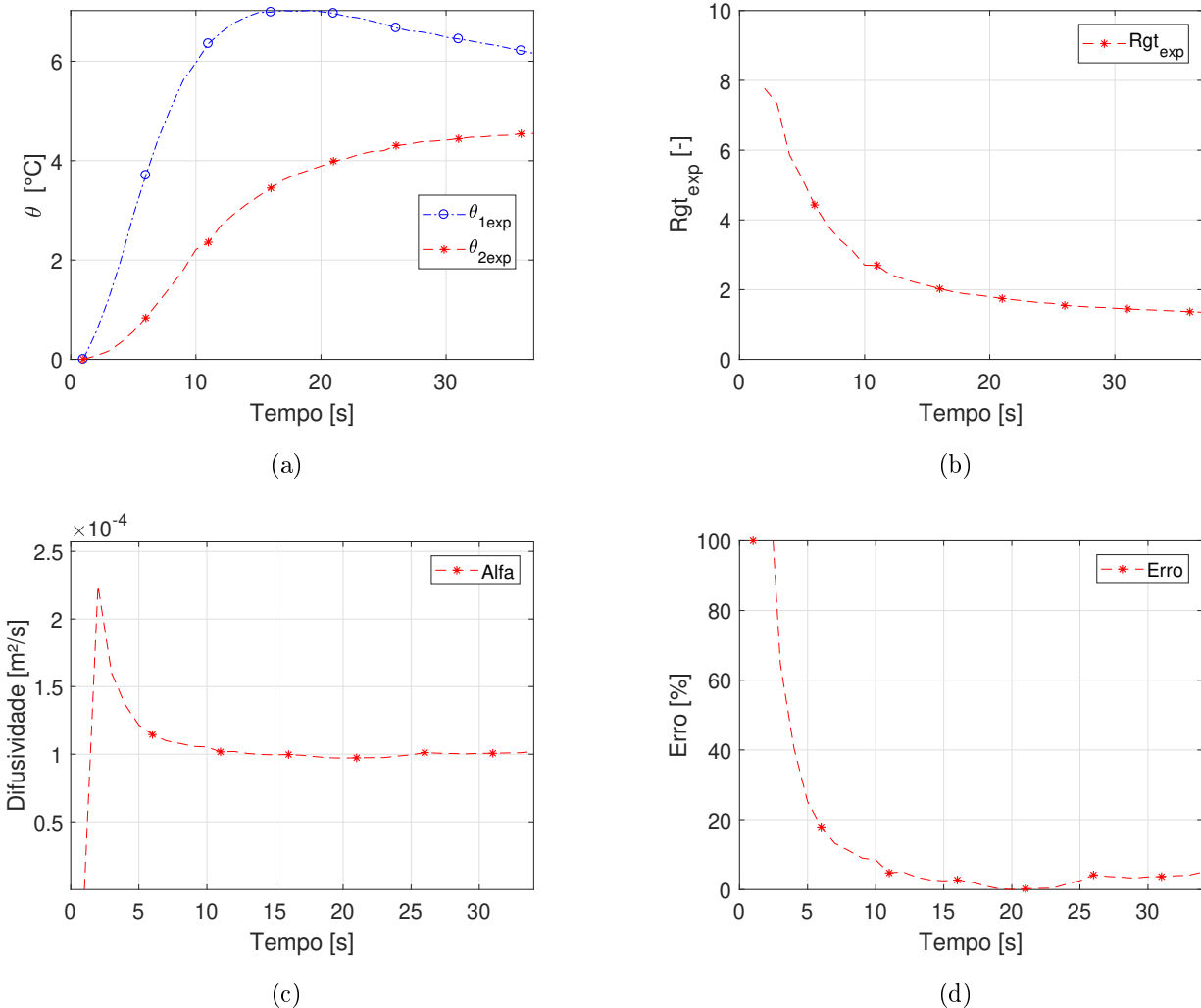


Figura 7.9: Resultados experimentais da estimativa da difusividade térmica no alumínio: (a) Evolução das temperaturas experimentais nas posições $x_1 = 85$ mm e $x_2 = 105$ mm ; (b) Razão de ganho de temperatura experimental; (c) Difusividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor encontrado na literatura.

Foram realizados 7 experimentos independentes na amostra de alumínio, na Fig. 7.10 mostra-se o gráfico de barras da estimativa da difusividade térmica em relação a cada experimento. Em todos os experimentos foi feito a média do valor da difusividade térmica de 20 – 30 s.

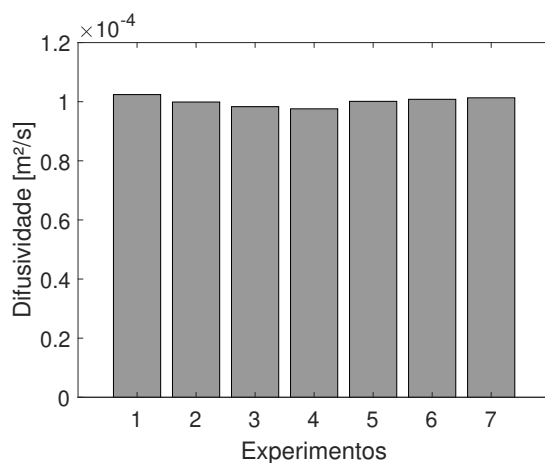


Figura 7.10: Gráfico de barras da difusividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de alumínio.

Na Tabela 7.7 apresenta-se a média dos valores para cada experimento e o valor final estimado da difusividade térmica.

Tabela 7.7: Estimativa experimental da difusividade térmica para o alumínio

Experimento	$\bar{\alpha} \times 10^{-4} \text{ [m}^2/\text{s]}$
1	1,024
2	0,999
3	0,983
4	0,976
5	1,001
6	1,008
7	1,013
Valor final estimado	1,001
Desvio padrão	0,015

7.2 Estimativa da condutividade térmica experimental

Como já descrito, para estimativa da condutividade térmica experimental é necessário se conhecer tanto o fluxo de calor imposto na amostra quanto a temperatura no ponto logo abaixo e no centro da resistência. A região de aplicação do fluxo de calor é delimitada por $-L_1 < x < L_1$ e $-R_1 < x < R_1$, sendo que o centro de aplicação do fluxo é representado por $x_3 = 0$. O posicionamento do termopar, do transdutor de fluxo de calor e da resistência estão representados na Fig. 7.11.

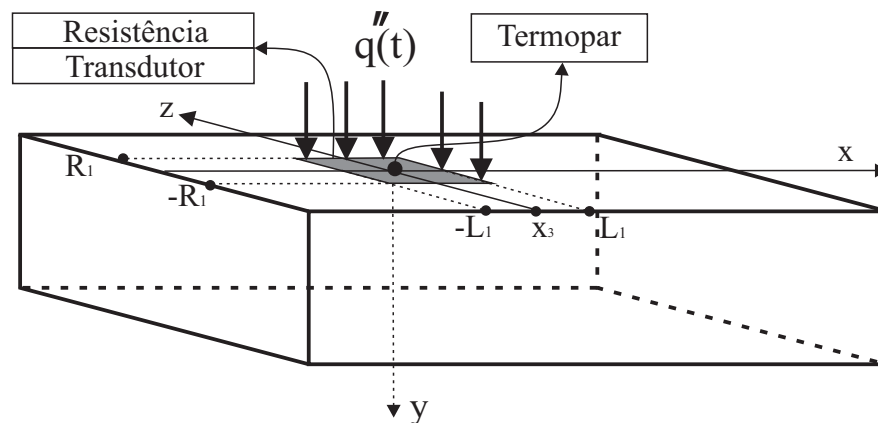


Figura 7.11: Esquema de posicionamento da resistência, do transdutor e do termopar para realização do experimento de estimativa da condutividade térmica.

Novamente os termopares usados foram do tipo K. A resistência elétrica usada é do modelo (*SRMU020202*), número de série: (*LOT/SN : 113372/5*) e as propriedades elétricas e geométricas são dadas pela Tab. 7.8.

Tabela 7.8: Propriedades elétricas e geométricas da resistência

Resistência elétrica	Voltagem	Amperagem	Potência	fase	Área
Ω	V	A	W		cm
1435	120	0,08	10	1	5,08 cm X 5,08 cm

O transdutor de fluxo de calor usado é do modelo OMEGA[®] HFS series sensor. Na Tabela 7.9 apresenta-se suas especificações.

Tabela 7.9: Propriedades térmicas do transdutor de fluxo térmico

Sensor	Resistência térmica $\frac{^{\circ}C}{W/m^2}$	Capacidade térmica $\frac{Ws}{^{\circ}Cm^2}$	Tempo de resposta s
HFS-3	0,002	600	0,6

A calibração é feita pelo fabricante (OMEGA[®] HFS series sensor) e para verificação da mesma, usou-se uma resistência elétrica, dois transdutores de calor e duas placas de metal, o esquema de montagem pode ser representado pela Fig. 7.12.

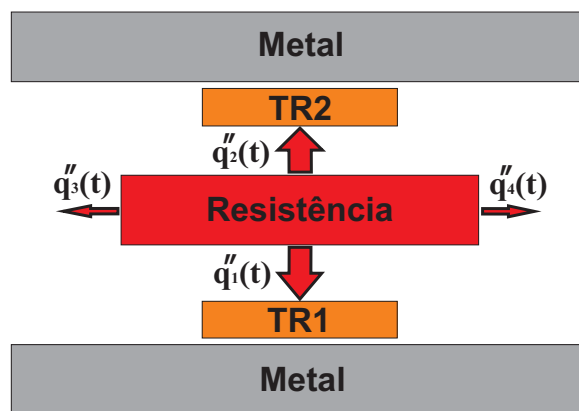


Figura 7.12: Esquema de montagem para validação de calibração do fabricante.

Desprezando-se as perdas laterais, ou seja, $q''_3 = q''_4 \cong 0$, a soma dos fluxos de calor no transdutor $TR1$ e no transdutor $TR2$ deve ser igual a potência gerada, ou seja

$$\frac{U \cdot I}{A_{res}} \cong q''_1 + q''_2 \quad (7.1)$$

Na Figura 7.13 (a) apresenta-se a validação da calibração dos transdutores de calor feita pelo fabricante. Na Figura 7.13 (b) apresenta-se o erro em relação ao valor total de fluxo de calor emitido pela resistência.

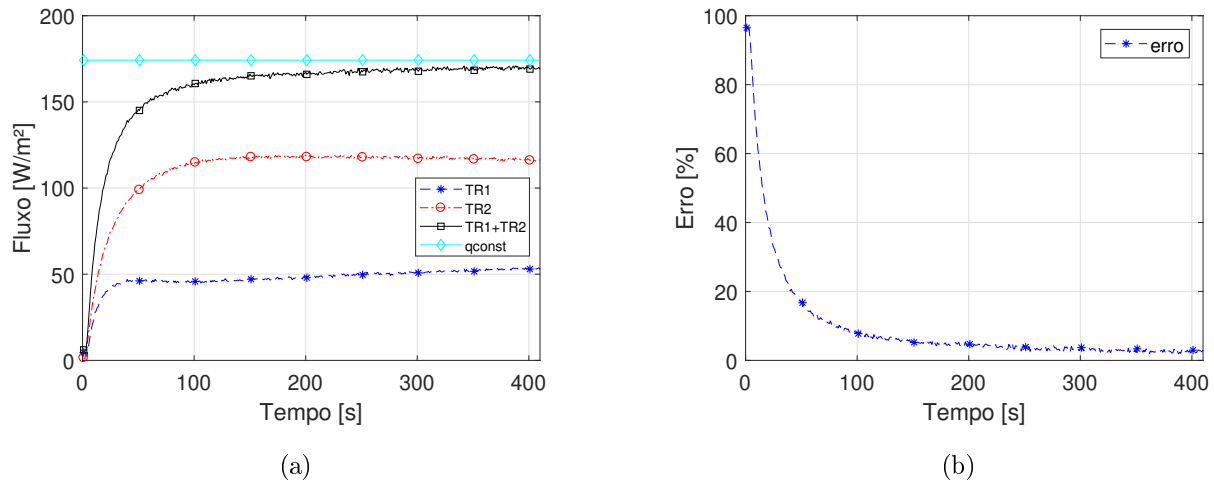
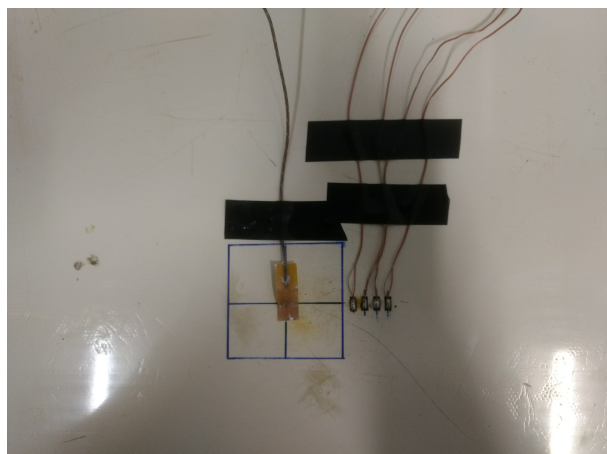


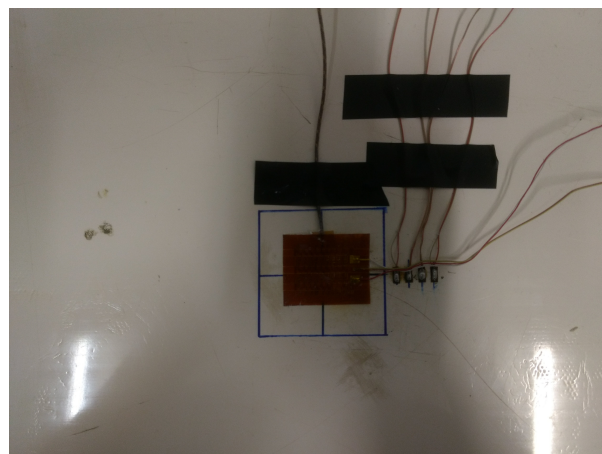
Figura 7.13: Validação da calibração dos transdutores de calor feita pelo fabricante: (a) Soma dos fluxos de calor; (b) Erro em relação ao valor da potência gerada na resistência.

7.2.1 Material Não Metálico

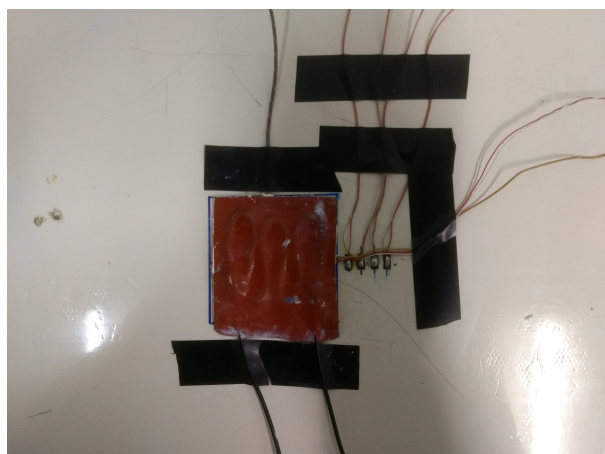
Analogamente, foi usado uma amostra de PVC como material não metálico para a realização do experimento. Uma fonte de corrente contínua (BK precision 9206) é usada para realizar o aquecimento por efeito joule. Nas Figuras 7.14 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, o termopar de superfície no centro de aplicação do fluxo de calor o qual é usado para estimativa da condutividade térmica, o posicionamento do transdutor de fluxo de calor, da resistência elétrica e a bancada experimental.



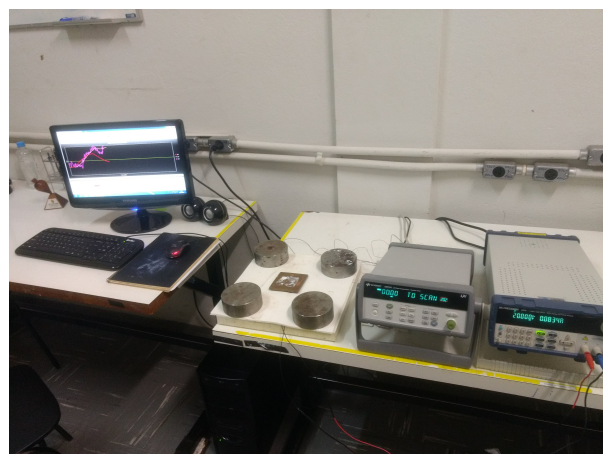
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.14: Preparação do experimento para estimativa da condutividade térmica no PVC: (a) Amostra com os termopares acoplados; (b) Acoplamento do transdutor; (c) Acoplamento da resistência; (d) Bancada experimental.

Nas Figuras 7.15 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, a evolução do fluxo de calor, da temperatura em x_3 , a estimativa da condutividade térmica da amostra de PVC, e o erro em relação ao valor da literatura.

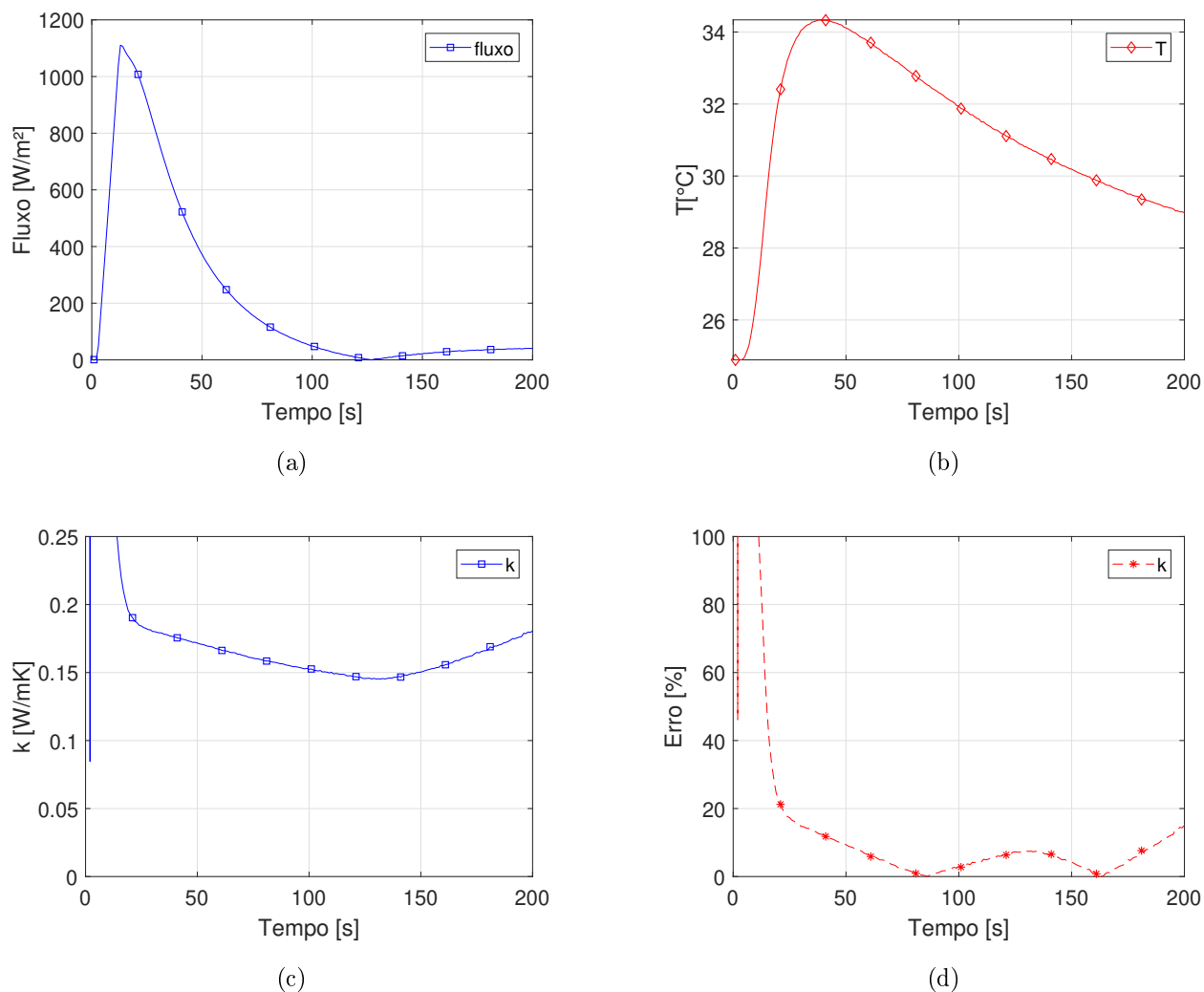


Figura 7.15: Resultados experimentais da estimativa da condutividade térmica no PVC: (a) Evolução do fluxo de calor imposto na superfície da amostra; (b) Evolução das temperatura na posição x_3 ; (c) Condutividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor estimado por Malheiros (2017).

Foram realizados 9 experimentos independentes na amostra de PVC, na Fig. 7.16 mostra-se o gráfico de barras da estimativa da condutividade térmica em cada experimento. Em todos os experimentos foi feito a média do valor da condutividade térmica de 50 a 100 s.

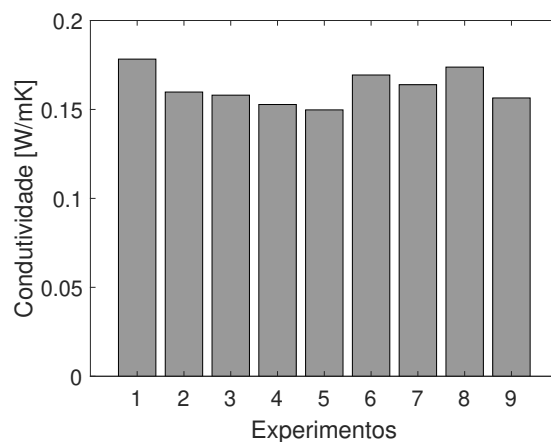


Figura 7.16: Gráfico de barras da condutividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de PVC.

Na Tabela 7.10 apresenta-se a média dos valores para cada experimento e o valor final estimado da condutividade térmica.

Tabela 7.10: Estimativa experimental da condutividade térmica para o PVC

Experimento	\bar{k} [W/mK]
1	0,1783
2	0,1598
3	0,1580
4	0,1528
5	0,1498
6	0,1694
7	0,1639
8	0,1738
9	0,1565
Valor final estimado	0,1625
Desvio padrão	0,0091

Na Tabela 7.11 apresenta-se o valor final estimado comparado aos valores de referência encontrados na literatura.

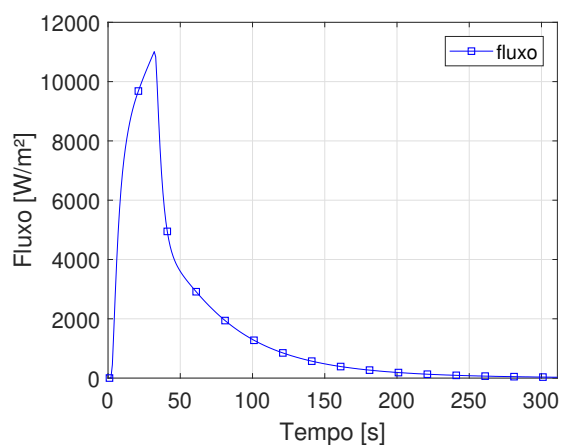
Tabela 7.11: Comparação dos valores estimados da condutividade térmica do PVC com a literatura

Resultados	k [W/mK]	Desvio [%]
Estimado	$0,163 \pm 0,009$	-
(LIMA e SILVA, 2000)	$0,156 \pm 0,007$	4,49
(BORGES, 2004)	$0,152 \pm 0,011$	7,24
(MALHEIROS, 2017)	$0,157 \pm 0,011$	3,82
(GOODFELLOW, 2018)	$0,120 - 0,250$	-

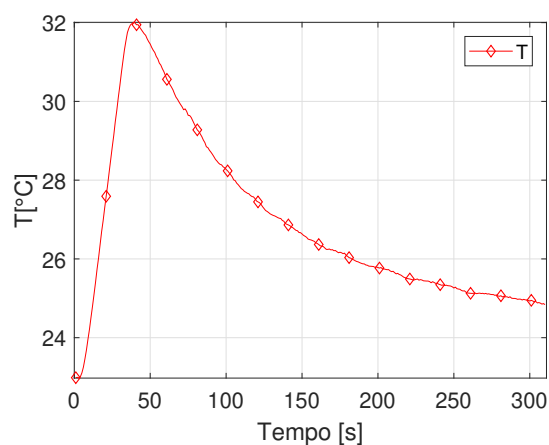
Observa-se que o valor de k para o material estimado apresenta-se entre os valores de referência.

7.2.2 Material condutor

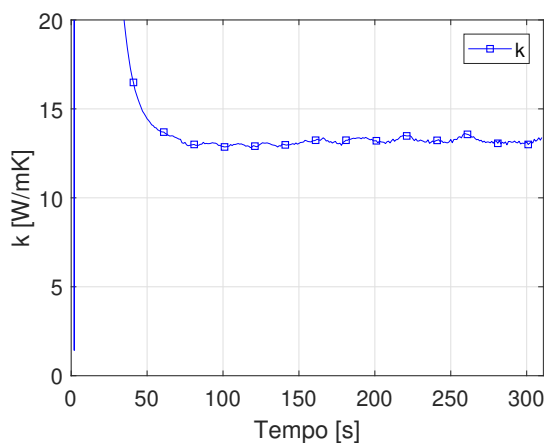
Nas Figuras 7.17 (a), (b), (c) e (d) apresentam-se, respectivamente, a evolução do fluxo de calor, a temperatura em x_3 , a estimativa da condutividade térmica na amostra de aço inoxidável AISI 304 e o erro em relação ao valor encontrado na literatura.



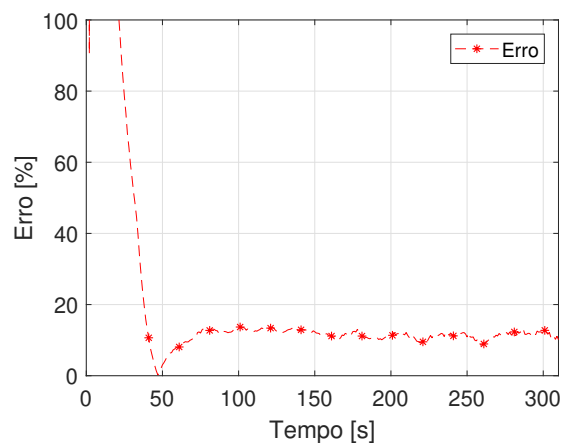
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.17: Resultados experimentais da estimativa da condutividade térmica no aço inoxidável AISI 304: (a) Evolução do fluxo de calor imposto na superfície da amostra; (b) Evolução das temperatura na posição x_3 ; (c) Condutividade térmica estimada; (d) Erro em relação ao valor da literatura.

7.3 Estimativa de propriedades térmicas em tecido biológico

O osso é um tecido biológico complexo, com fases minerais e orgânicas. A interação destas diferentes fases torna o osso um material de propriedades mecânicas únicas e complexas. Estas características são difíceis de serem previstas, sensíveis para condições de testes, preparação das amostras e são anisotrópicas (KARMANI, 2006).

Foram acoplados 6 termopares de superfície do tipo K distanciados de 1 cm cada um, como pode ser observado na Fig. 7.18 (a). Porém, como já mostrado é necessário somente 2 termopares, ou seja, dois pontos de medição de temperatura. O osso bovino foi parcialmente aquecido por um soprador térmico de marca *Dewalt* de 2000 W de potência numa região não isolada de 5 cm de comprimento, como pode ser visto na Fig. 7.18 (b). Neste caso, o tempo de aquecimento foi de 15 s.

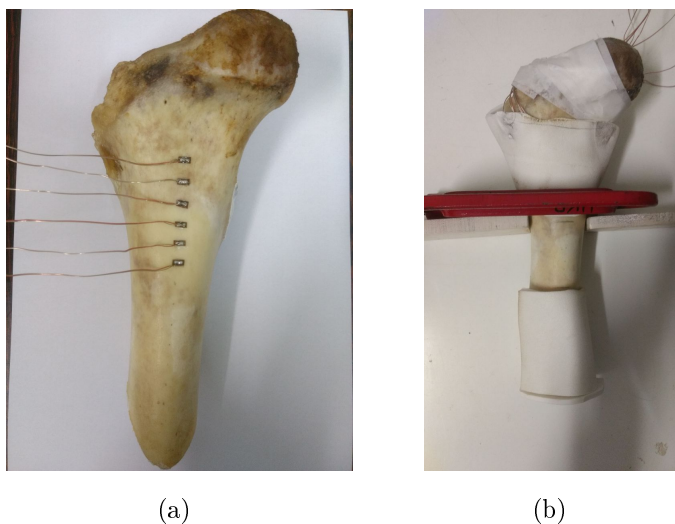


Figura 7.18: Preparação experimental da amostra de osso bovino: (a) Amostra com os termopares acoplados e distanciados de 1 cm entre si; (b) Amostra parcialmente isolada do meio ambiente.

Na Figura 7.19 apresenta-se a bancada experimental usada no experimento.

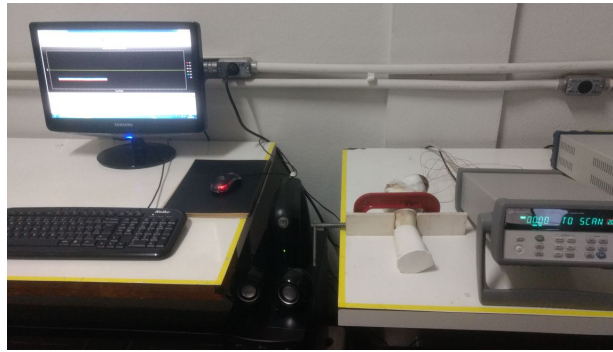


Figura 7.19: Bancada experimental usada para estimativa da difusividade térmica do osso bovino.

Os valores de temperatura experimentais em todos os termopares acoplados na amostra pode ser observado na Fig. 7.20 (a), sendo que para a estimativa da propriedade térmica usou-se apenas os dados dos termopares 2 e 3 representados na Fig. 7.20 (b), foram escolhidos esses dois pontos de medição devido ao perfil de temperatura não apresentar nenhum comportamento estranho, como no termopar 1 que no início do ensaio apresentou uma leve variação de temperatura possivelmente causado pelo fato de ser o ponto mais próximo de aplicação do fluxo de calor, portanto considerou-se $T_2 = T_{x1}$ e $T_3 = T_{x2}$. Nesta análise a temperatura inicial da amostra foi em torno de $T_0 = 26,3$ [°C].

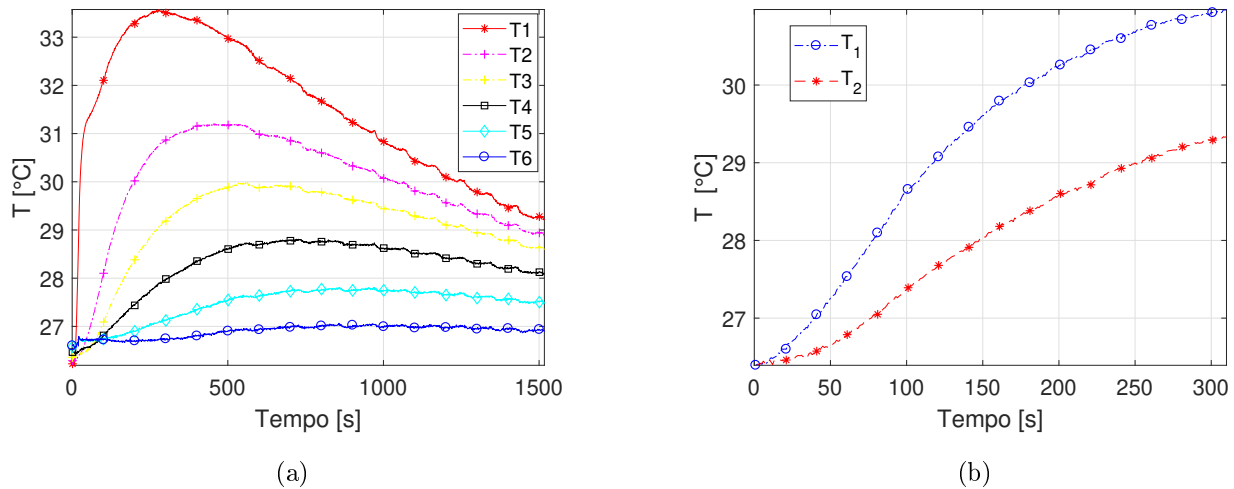


Figura 7.20: Variação da Temperatura na amostra de osso bovino: (a) Todos termopares acoplados na amostra; (b) Termopares T2 e T3 usados na estimativa da propriedade térmica.

A temperatura θ e a razão de ganho de temperatura são representadas pelas Figs. 7.21 (a) e (b), respectivamente.

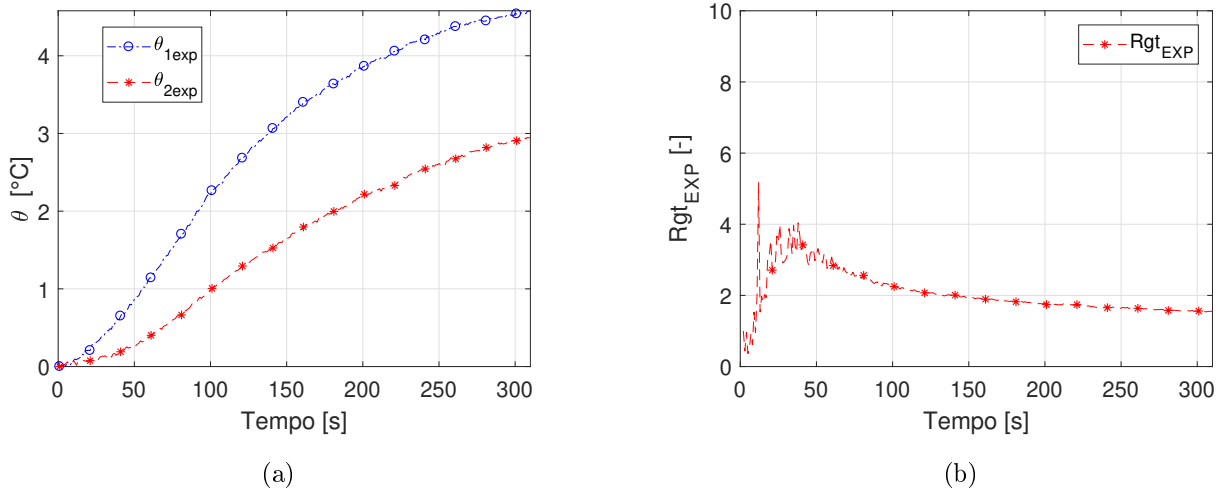


Figura 7.21: Temperatura usadas na estimativa da difusividade térmica: (a) Temperatura θ ; (b) Razão de ganho de temperatura na amostra de osso bovino.

Os valores médios da difusividade térmica estimados por Rodríguez, Calderón, Hernández, Stolik, Cruz-Orea e Sinencio (2001) é apresentada na Tab. 7.12. Neste trabalho usou-se uma amostra de osso bovino, com estimativas em duas direções diferentes, corte longitudinal e transversal.

Tabela 7.12: Valores medidos da difusividade térmica, Rodríguez, Calderón, Hernández, Stolik, Cruz-Orea e Sinencio (2001)

Tipo da Amostra	Espessura (μm)	$\alpha \cdot 10^{-7}$ (m^2/s)
Osso denso bovino (corte longitudinal)	232 ± 4	$4,4 \pm 0,1$
Osso denso bovino (corte transversal)	239 ± 4	$5,6 \pm 0,1$

Na Figura 7.22 mostra-se os valores da difusividade térmica efetiva estimados ao longo do tempo na amostra de osso bovino.

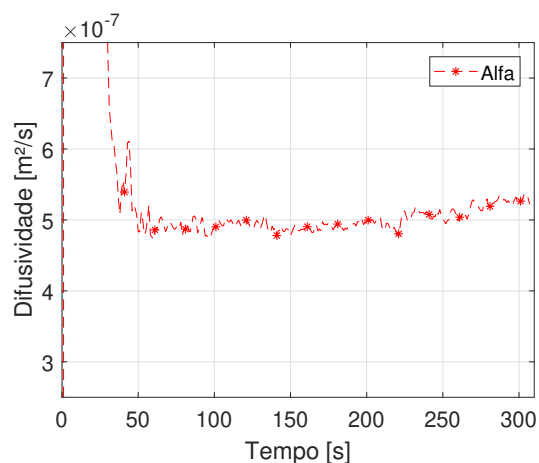


Figura 7.22: Resultado experimental na estimativa da difusividade térmica do osso bovino.

Foram realizados 3 experimentos independentes na amostra de osso bovino. Na Fig. 7.23 mostra-se o gráfico de barras da estimativa da difusividade térmica em relação a cada experimento. Em todos os experimentos foi feito a média do valor da difusividade térmica de 250 – 300 s.

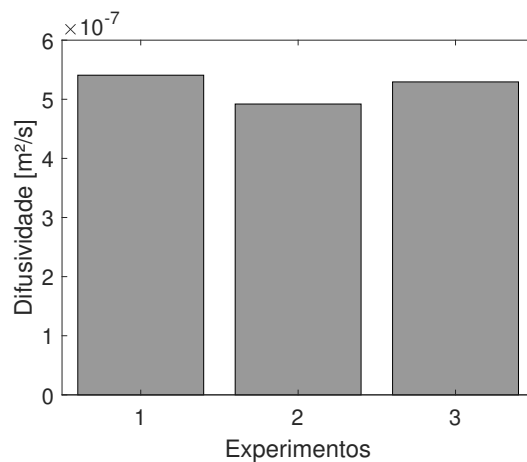


Figura 7.23: Gráfico de barras da difusividade térmica média estimada nos experimentos realizados na amostra de osso bovino.

A média dos valores para cada experimento é dado pela Tab. 7.13. Além disso, na tabela mostra-se a média geral da difusividade térmica estimada e o desvio padrão encontrado.

Tabela 7.13: Estimativa de difusividade térmica no osso bovino

Experimento	$\bar{\alpha} \times 10^{-7} \text{ [m}^2/\text{s]}$
1	5,407
2	4,920
3	5,294
Valor final estimado	5,2071
Desvio padrão	0,2083

Observa-se que o valor de $\alpha = 5,2071e^{-7} \pm 2,083e^{-8} \text{ [m}^2/\text{s]}$ situa-se entre os valores longitudinais e transversais obtidos por Rodríguez, Calderón, Hernández, Stolik, Cruz-Orea e Sinencio (2001).

Capítulo 8

Conclusão

O desenvolvimento deste trabalho mostrou que a difusividade térmica pode ser estimada para diferentes tipos de materiais usando apenas dois pontos de temperaturas numa única superfície de acesso. No caso da condutividade térmica, a sua estimativa pode ser realizada através do conhecimento do fluxo de calor e de um único ponto de temperatura na mesma superfície.

A difusividade foi estimada para casos simulados numericamente com o auxílio do software comercial COMSOL *multiphysics* em uma amostra de PVC e em amostras de metais como o aço inoxidável AISI 304, titânio, alumínio e cobre. Para a estimativa desta propriedade térmica, a razão de ganho de temperatura que é função exclusiva da difusividade térmica foi utilizada. Observou-se que quanto mais condutivo é o material, menor o intervalo de tempo a ser usado e maior deve ser a distância da fonte de calor para que se faça a aquisição das temperaturas. Neste modelo todos os materiais tiveram a difusividade térmica estimada com erros inferiores a 1 %.

Após a estimativa da difusividade nos problemas simulados, a condutividade térmica também foi estimada usando modelos térmicos $1D$ e $3D$. Observou-se que usando o modelo unidimensional $X20$, o intervalo de tempo interfere minimamente na estimativa de k para o PVC. Entretanto, o erro da estimativa aumenta a partir de 12 s para o aço inoxidável AISI 304 e 6 s para o titânio, indicando que para os materiais condutores a condição de contorno passa a influenciar na temperatura em $x = 0$ em tempos pequenos, como previsto na Tab. 6.10 pelo tempo de desvio, o qual representa o tempo no qual o contorno inativo é perturbado ou tem influência no contorno ativo.

Como o tempo de desvio para o alumínio e cobre são muito baixos, em torno de 1 s, os modelos $3D$ que consideram a espessura na direção do fluxo de calor são mais indicados. Nesse caso, analisou-se os modelos $X00Y22Z00$ e $X22Y22Z22$. No primeiro modelo, observou-se que as condutividades térmicas tanto do alumínio quanto do cobre foram estimadas com erros inferiores a 10 % para tempos superiores a 20 s. O segundo problema térmico $X22Y22Z22$ que

considera as dimensões finitas e isoladas em toda amostra foi analisado, considerando assim as dimensões reais da amostra. Neste modelo todos os materiais tiveram a condutividade térmica estimada aproximadamente sem erro, o que indica ser o modelo ideal a ser usado.

A estimativa da difusividade térmica experimental foi realizada nos materiais PVC, aço inoxidável AISI 304, aço AISI 1045, alumínio e numa amostra de osso bovino. Os resultados experimentais foram comparados com valores da literatura e foram obtidos resultados satisfatórios.

A estimativa da condutividade térmica experimental foi realizada nas amostras de PVC e aço inoxidável AISI 304. Para o procedimento experimental, foi necessário conhecer tanto o fluxo de calor quanto a temperatura de um ponto localizado abaixo e no centro da resistência. Os resultados estimados na amostra de PVC obtiveram valores próximos aos da literatura. Na obtenção da propriedade térmica do aço AISI 304, os resultados obtidos possuem uma incerteza de 10 % em comparação a valores encontrados na literatura.

Destaca-se aqui duas possíveis fontes de erros na estimativa da condutividade térmica experimental do aço. A primeira delas deve-se a não avaliação da resistência térmica de contato entre a superfície e a fonte de calor. A segunda está relacionada com o modelo térmico tridimensional $X22Y22Z22$ usado, o qual prevê o isolamento térmico perfeito da amostra, sendo que no experimento isto não é possível. Para aproximar os resultados da condição ideal, o experimento poderia ser realizado em uma câmara de vácuo para que o coeficiente de convecção, h , tenda a zero. Outra alternativa para a diminuição dos erros seria a dedução do modelo térmico através do problema $X33Y33Z33$, que prevê todas as superfícies da amostra submetidas à convecção natural. Porém a aplicação deste está limitada ao conhecimento do coeficiente de convecção (h).

O aparato experimental usado é de baixo custo e com possibilidades de aplicação *in situ*. A técnica proposta é capaz de estimar tanto a difusividade quanto a condutividade térmica de diferentes tipos de materiais de maneira não invasiva, não destrutiva, que acessa apenas uma superfície da amostra, não limitada ao tamanho da mesma e que provoca pequenas perturbações na energia.

Trabalhos futuros

A técnica possui grande potencial para aplicações *in situ*. Ideias que podem ser o ponto de partida para diversos outros trabalhos são enumeradas abaixo.

1. Obtenção de uma solução analítica que independa do fluxo de calor para estimar a condutividade térmica.
2. Desenvolvimento de um software para a automatização da técnica.

3. Avaliar o uso de uma câmara de vácuo na estimativa da condutividade térmica usando o modelo térmico tridimensional $X22Y22Z22$.
4. Usar um ambiente controlado ou estimar o coeficiente de convecção natural para usar o modelo térmico 3D $X33Y33Z33$.
5. Construção de um equipamento para medição de propriedades térmicas usando apenas uma única superfície de acesso.
6. Medição de propriedades térmicas em materiais porosos, compósitos e com escala nanométrica.
7. Medição de propriedades térmicas em tecidos biológicos.

Referências Bibliográficas

ABAD, B.; BORCA-TASCIUC, D.-A.; MARTIN-GONZALEZ, M. Non-contact methods for thermal properties measurement. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 76, p. 1348 – 1370, 2017. ISSN 1364-0321. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.03.027>>.

AVILES-RAMOS, C.; HAJI-SHEIKH, A.; BECK, J.; DOWDING, K. Estimation of thermophysical properties by the spectral method—development and evaluation. **Journal of heat transfer**, American Society of Mechanical Engineers, v. 123, n.1, p. 24–30, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.1336507>>.

BECK, A. A steady state method for the rapid measurement of the thermal conductivity of rocks. **Journal of Scientific Instruments**, v. 34, n. 5, p. 186, 1957. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0950-7671/34/5/304>>.

BLACKWELL, J. H. A transient-flow method for determination of thermal constants of insulating materials in bulk. v. 25, p. 137–144, February 1954. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1721592>>.

BORGES, V. L. **Um sistema dinâmico para a identificação de propriedades termofísicas de materiais sólidos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2004.

BORGES, V. L.; LIMA E SILVA, S. M. M.; GUIMARÃES, G. A dynamic thermal identification method applied to conductor and non conductor materials. **Inverse Problems in Science and Engineering**, v. 14, n. 5, p. 511–527, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/17415970600573700>>.

CAHILL, D. G. Thermal conductivity measurement from 30 to 750 k: the 3w method. **Review of Scientific Instruments**, v. 61, n. 2, p. 802–808, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1141498>>.

COLE, K. D.; BECK, J. V.; HAJI-SHEIKH, A.; LITKOUHI, B. **Heat conduction using Green’s functions**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2010.

COQUARD, R.; BAILLIS, D.; QUENARD, D. Experimental and theoretical study of the hot-wire method applied to low-density thermal insulators. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 49, n. 23-24, p. 4511–4524, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.05.016>>.

DETTMER, E. S.; ROMENESKO, B. M.; CHARLES, H. K.; CARKHUFF, B. G.; MERRILL, D. J. Steady-state thermal conductivity measurements of ain and sic substrate materials. **IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology**, v. 12, n. 4, p. 543–547, Dec 1989. ISSN 0148-6411. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/33.49013>>.

DOWDING, K. J.; BECK, J. V.; BLACKWELL, B. F. Estimation of directional-dependent thermal properties in a carbon-carbon composite hr. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 39, n. 15, p. 3157–3164, 1996. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(95\)00401-7](https://doi.org/10.1016/0017-9310(95)00401-7)>.

EESLEY, G. L. Generation of nonequilibrium electron and lattice temperatures in copper by picosecond laser pulses. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 33, p. 2144–2151, Feb 1986. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.33.2144>>.

FAN, L.; KHODADADI, J. Thermal conductivity enhancement of phase change materials for thermal energy storage: A review. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 15, n. 1, p. 24 – 46, 2011. ISSN 1364-0321. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.rser.2010.08.007>>.

FERNANDES, A. P. **Funções de Green: Soluções analíticas aplicadas a problemas inversos em condução de calor**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2009.

FERNANDES, A. P. **Função transferência analítica aplicada à solução de problema inverso em condução de calor**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

GARCIA, J. A.; MANDELIS, A.; FARAHBAKHS, B.; LEBOWITZ, C.; HARRIS, I. Thermophysical properties of thermal sprayed coatings on carbon steel substrates by photothermal radiometry. **International Journal of Thermophysics**, v. 20, n. 5, p. 1587–1602, Sep 1999. ISSN 1572-9567. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1021457625651>>.

GOODFELLOW. **All the materials you need for Scientific and Industrial Research and Manufacturing**. 2018. Disponível em: <www.goodfellow.com>.

GRAZZINI, G.; BALOCCO, C.; LUCIA, U. Measuring thermal properties with the parallel wire method: a comparison of mathematical models. v. 39, n. 10, p. 2009–2013, August 1996. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(95\)00311-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(95)00311-8)>.

GROSS, U.; TRAN, L.-T.-S. Radiation effects on transient hot-wire measurements in absorbing and emitting porous media. v. 47, p. 3279–3290, April 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.02.014>>.

GUSTAFSSON, S. E. Transient plane source techniques for thermal conductivity and thermal diffusivity measurements of solid materials. **Review of Scientific Instruments**, v. 62, n. 3, p. 797–804, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1142087>>.

GUSTAVSSON, M.; KARAWACKI, E.; GUSTAFSSON, S. E. Thermal conductivity, thermal diffusivity, and specific heat of thin samples from transient measurements with hot disk sensors. **Review of Scientific Instruments**, v. 65, n. 12, p. 3856–3859, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1145178>>.

HEALY, J.; GROOT, J. de; KESTIN, J. The theory of the transient hot-wire method for measuring thermal conductivity. **Physica B+C**, v. 82, n. 2, p. 392 – 408, 1976. ISSN 0378-4363. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0378-4363\(76\)90203-5](https://doi.org/10.1016/0378-4363(76)90203-5)>.

HUANG, L.; LIU, L.-S. Simultaneous determination of thermal conductivity and thermal diffusivity of food and agricultural materials using a transient plane-source method. v. 95, p. 179–185, may 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2009.04.024>>.

IGNACIO, L. H. da S. **Desenvolvimento de Técnicas de Redução de Modelos Térmicos para Solução de Problemas Inversos em Condução de Calor**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2016.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; LAVINE, A. S.; BERGMAN, T. L. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**. 6. ed. River Street, Hoboken: John Wiley and Sons, 2011.

KARMANI, S. The thermal properties of bone and the effects of surgical intervention. **Current Orthopaedics**, v. 20, n. 1, p. 52 – 58, 2006. ISSN 0268-0890. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cuor.2005.09.011>>.

KHORUNZHII, I.; GABOR, H.; JOB, R.; FAHRNER, W. R.; DENISENKO, A.; BRUNNER, D.; PESCHEK, U. Steady-state thermal conductivity measurements of super-hard materials. **Measurement**, v. 32, n. 3, p. 163 – 172, 2002. ISSN 0263-2241. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0263-2241\(02\)00009-X](https://doi.org/10.1016/S0263-2241(02)00009-X)>.

LASKAR, J.; BAGAVATHIAPPAN, S.; SARDAR, M.; JAYAKUMAR, T.; PHILIP, J.; RAJ, B. Measurement of thermal diffusivity of solids using infrared thermography. v. 62, p. 2740–2742, January 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.matlet.2008.01.045>>.

LIMAESILVA, S. M. M.; ONG, T. H.; GUIMARÃES, G. Thermal properties estimation of polymers using only one active surface. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 25, n. 1, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1678-58782003000100002>>.

LU, L.; YI, W.; ZHANG, D. L. 3w method for specific heat and thermal conductivity measurements. **Review of Scientific Instruments**, v. 72, n. 7, p. 2996–3003, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1378340>>.

MALHEIROS, F. C. **Desenvolvimento de uma técnica experimental para a estimativa de propriedades térmicas usando uma única superfície de acesso "in situ"**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2017.

MATWEB. **MatWeb: Online Materials Information Resource**. 2018. <=> www.matweb.com/. Acessado: 03/05/2018.

MOHAMED, I. O. Development of a simple and robust inverse method for determination of thermal diffusivity of solid foods. **Journal of Food Engineering**, v. 101, n. 1, p. 1 – 7, 2010. ISSN 0260-8774. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2010.05.002>>.

MOON, J.; WEAVER, K.; FENG, B.; CHAE, H. G.; KUMAR, S.; BAEK, J.-B.; PETERSON, G. P. Note: Thermal conductivity measurement of individual poly(ether ketone)/carbon nanotube fibers using a steady-state dc thermal bridge method. **Review of Scientific Instruments**, v. 83, n. 1, p. 016103, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3676650>>.

MURPHY, F.; KEHOE, T.; PIETRALLA, M.; WINFIELD, R.; FLOYD, L. Development of an algorithm to extract thermal diffusivity for the radial converging wave technique. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 48, n. 7, p. 1395–1402, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.09.046>>.

OGAWA, E. T.; HU, C.; HO, P. S. Thermal diffusivity measurement of polymeric thin films using the photothermal displacement technique. i. free-standing film case. **Journal of Applied Physics**, v. 86, n. 11, p. 6018–6027, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.371649>>.

OHTA, H.; SHIBATA, H.; KASAMOTO, T. Estimation of heat transfer of a front-heating front-detection laser flash method measuring thermal conductivity for silicate melts at high temperatures. **ISIJ International**, v. 46, n. 3, p. 434–440, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.2355/isijinternational.46.434>>.

OKUDA, M.; OHKUBO, S. A novel method for measuring the thermal conductivity of sub-micrometre thick dielectric films. **Thin Solid Films**, v. 213, n. 2, p. 176 – 181, 1992. ISSN 0040-6090. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0040-6090\(92\)90280-O](https://doi.org/10.1016/0040-6090(92)90280-O)>.

OZISIK, M.; HAHN, D. W. **Heat Conduction**. New jersey Hoboken, NY: Jhon Wiley and Sons, 2012.

PADDOCK, C. A.; EESLEY, G. L. Transient thermorefectance from thin metal films. **Journal of Applied Physics**, v. 60, n. 1, p. 285–290, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.337642>>.

PARKER, W. J.; JENKINS, R. J.; BUTLER, C. P.; ABBOTT, G. L. Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity. **Journal of Applied Physics**, v. 32, n. 9, p. 1679–1684, 1961. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1728417>>.

REMY, B.; DEGIOVANNI, A. Parameters estimation and measurement of thermophysical properties of liquids. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 48, n. 19, p. 4103 – 4120, 2005. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.03.004>>.

RODRÍGUEZ, G. P.; CALDERÓN, A.; HERNÁNDEZ, R. M.; STOLIK, S.; CRUZ-OREA, A.; SINENCIO, F. S. Measurement of thermal diffusivity of bone, hydroxyapatite and metals for biomedical application. v. 17, 01 2001.

ROSENCWAIG, A.; GERSHO, A. Theory of the photoacoustic effect with solids. **Journal of Applied Physics**, v. 47, n. 1, p. 64–69, 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.322296>>.

RULL-BRAVO, M.; MOURE, A.; FERNANDEZ, J. F.; MARTIN-GONZALEZ, M. Skutterudites as thermoelectric materials: revisited. **RSC Adv.**, The Royal Society of Chemistry, v. 5, p. 41653–41667, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1039/C5RA03942H>>.

SARAMAGO, S. P.; STEFFEN, J. V. **Introdução às Técnicas de Otimização em Engenharia**. Brasil, BR: [s.n.], 2000.

SASS, J.; STONE, C.; MUNROE, R. J. Thermal conductivity determinations on solid rock — a comparison between a steady-state divided-bar apparatus and a commercial transient line-source device. **Journal of Volcanology and Geothermal Research**, v. 20, n. 1, p. 145 – 153, 1984. ISSN 0377-0273. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0377-0273\(84\)90071-4](https://doi.org/10.1016/0377-0273(84)90071-4)>.

STOIB, B.; FILSER, S.; STÖTZEL, J.; GREPPMAIR, A.; PETERMANN, N.; WIGGERS, H.; SCHIERNING, G.; STUTZMANN, M.; BRANDT, M. S. Spatially resolved determination of thermal conductivity by raman spectroscopy. **Semiconductor Science and Technology**, v. 29, n. 12, p. 124005, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0268-1242/29/12/124005>>.

TRITT, T. M. **Thermal conductivity: theory, properties, and applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design**. 2. ed. New York, NY: Mcgraw-Hill College, 1999.

WAITE, W. F.; GILBERT, L. Y.; WINTERS, W. J.; MASON, D. H. Estimating thermal diffusivity and specific heat from needle probe thermal conductivity data. v. 77, p. 1–5, April 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.2194481>>.

WILSON, A.; ROJO, M.; ABAD, B.; TABORDA, J. P.; MAIZ, J.; SCHOMACKER, J.; MARTÍN-GONZÁLEZ, M.; BORCA-TASCIUC, D.-A.; BORCA-TASCIUC, T. Thermal conductivity measurements of high and low thermal conductivity films using a scanning hot probe method in the 3w mode and novel calibration strategies. v. 00, p. 1–3, 07 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1039/c5nr03274a>>.

XIE, H. Q.; GU, H.; ZHANG, X.; FUJII, M. Short hot wire technique for measuring the thermal conductivity and thermal diffusivity of various materials. v. 17, p. 208–214, December 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0957-0233/17/1/032>>.

ZHU, Y. Heat-loss modified angstrom method for simultaneous measurements of thermal diffusivity and conductivity of graphite sheets: The origins of heat loss in angstrom method. v. 92, p. 784–791, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.032>>.

Anexo A

Dedução dos modelos analíticos usados para estimativa das propriedades térmicas

A razão de ganho de temperatura depende apenas da difusividade térmica e para isso serão deduzidos modelos tridimensionais para estimativa deste parâmetro, após conhecido esta propriedade térmica é necessário modelos térmicos que possuem a dependência de ambas propriedades térmicas para se estimar a condutividade térmica.

A.1 Modelo unidimensional infinito

Ozisik e Hahn (2012) desenvolveram um modelo térmico unidimensional de dimensões infinitas, com $-\infty < x < \infty$, onde a região limitada por $-L < x < L$ está inicialmente com uma temperatura T_0 e todos locais fora dessa região estão a uma temperatura nula, conforme Fig.A.1.

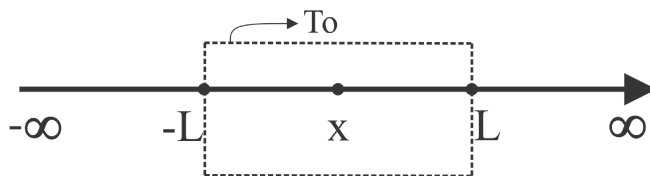


Figura A.1: Modelo unidimensional

$$T(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{x'=-L}^{x'=L} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)}\right] dx' \quad (\text{A.1})$$

Definindo-se uma nova variável

$$\eta = \frac{x - x'}{\sqrt{4\alpha t}} \quad (\text{A.2})$$

com,

$$dx' = -\sqrt{4\alpha t} d\eta \quad (\text{A.3})$$

Substituindo Eqs. (A.2) e (A.3) na Eq. (A.1)

$$T(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{4\pi\alpha(t)}} - \sqrt{4\alpha t} \int_{x'=-L}^{x'=L} e^{-\eta} d\eta = -\frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta=\frac{x+L}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\eta=\frac{x-L}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta} d\eta \quad (\text{A.4})$$

Invertendo os limites de integração da Eq. (A.4) e trocando o sinal, tem-se:

$$T(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta=\frac{x-L}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\eta=\frac{x+L}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2} d\eta \quad (\text{A.5})$$

Conforme (COLE, 2010) a solução da integral da Eq. (A.5) pode escrita como:

$$\int e^{-(ax^2+2bx+c)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{(b^2-ac)} \operatorname{erf}(\sqrt{a}x) + \frac{b}{\sqrt{a}} \quad (\text{A.6})$$

Na Equação A.6 com $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$ a solução da integral fica reduzida a

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\sqrt{x}) \quad (\text{A.7})$$

portanto a Eq. A.5

$$T(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta) \Big|_{\eta=\frac{x-L}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\eta=\frac{x+L}{\sqrt{4\alpha t}}} \quad (\text{A.8})$$

segue-se que

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+L}{\sqrt{4\alpha t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-L}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right] \quad (\text{A.9})$$

sabendo da propriedade da função erro $erf(-x) = -erf(x)$, a Eq. (A.9) pode ser reescrita como:

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[erf\left(\frac{L+x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) + erf\left(\frac{L-x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \right] \quad em \quad -\infty < x < \infty \quad (A.10)$$

Portanto a razão de ganho de temperatura unidimensional é dada por:

$$\frac{T(x_1, t)}{T(x_2, t)} = \frac{\left[erf\left(\frac{L+x_1}{\sqrt{4\alpha t}}\right) + erf\left(\frac{L-x_1}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \right]}{\left[erf\left(\frac{L+x_2}{\sqrt{4\alpha t}}\right) + erf\left(\frac{L-x_2}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \right]} \quad (A.11)$$

A.2 Modelos tridimensionais semi-infinitos usados para estimativa da difusividade térmica

Caso X00Y30Z00

O modelo aqui analisado considera infinito na direção x , infinito na direção z e semi-infinito na direção y , sendo que para esta análise considera-se a amostra exposta ao ambiente em $y = 0$.

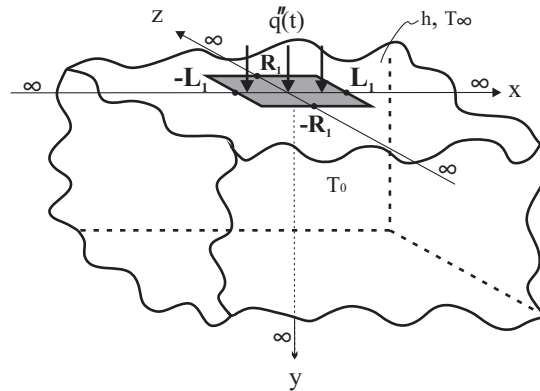


Figura A.2: Modelo térmico proposto para estimativa da difusividade térmica com geometria semi-infinita caso X00Y30Z00.

Para o modelo em estudo usa-se somente os itens (a) e (d) da Eq. (4.22), ou seja

$$T(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t|x', y', z', 0) F(x', y', z') dx' dy' dz' + \alpha \int_{z'=-\infty}^{\infty} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k} G(x, y, z, t|x, y_i, z, \tau) \right] d\tau dx' dz' \quad (A.12)$$

definindo-se uma nova variável $\theta(x, y, z, t) = T(x, y, z, t) - T_\infty$, obtêm-se

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t | x', y', z', 0) \theta(x, y, z, 0) dx' dy' dz' \\ &+ \alpha \int_{z'=-\infty}^{\infty} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k} G(x, y, z, t | x, y_i, z, \tau) \right] d\tau dx' dz' \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

sendo a Eq. (A.13) dividida em $A(x, y, z, t)$ e $B(x, y, z, t)$, têm-se

$$A(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t | x', y', z', 0) \theta(x, y, z, 0) dx' dy' dz' \quad (\text{A.14})$$

e

$$B(x, y, z, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{z'=-\infty}^{\infty} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=0}^{\infty} \left[q''(\tau) G(x, y, z, t | x, y_i, z, \tau) \right] d\tau dx' dz' \quad (\text{A.15})$$

onde $i = 1$, $y_i = y_1 = 0$ e $f_i(\tau) = f_1(\tau) = q''(\tau)$ e considera-se a condutividade térmica constante no material.

sabe-se que a função de Green tridimensional pode ser reescrita como o produto de funções unidimensionais, ou seja

$$G(x, y, z, t | x', y', z', \tau) = G_{X00}(x, t | x', \tau) G_{Y30}(y, t | y', \tau) G_{Z00}(z, t | z', \tau) \quad (\text{A.16})$$

onde,

$$G_{X00}(x, t | x', \tau) = G_{X00}(x - x', t - \tau) = [4\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{4\alpha(t - \tau)}\right] \quad (\text{A.17})$$

$$G_{Z00}(z, t | z', \tau) = G_{Z00}(z - z', t - \tau) = [4\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(z - z')^2}{4\alpha(t - \tau)}\right] \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned}
G_{Y30} = (y, t | y', \tau) = G_{Y30}(y - y', t - \tau) = \\
[4\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} \left\{ \exp\left[-\frac{(y - y')^2}{4\alpha(t - \tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(y + y')^2}{4\alpha(t - \tau)}\right] \right\} \\
- \frac{h}{k} \exp[\alpha(t - \tau)h^2k^{-2} + h(y + y')k^{-1}] \operatorname{erfc}\left[\frac{(y + y')}{4\alpha(t - \tau)^{1/2}} + \frac{h}{k}[\alpha(t - \tau)]^{1/2}\right]
\end{aligned} \tag{A.19}$$

calculando o termo de condição inicial $A(x, y, z, t)$,

$$A(x, y, z, t) = \theta_0 \int_{z'=-\infty}^{\infty} \int_{y'=0}^{\infty} \int_{x'=-\infty}^{\infty} G_{X00}(x, t | x', 0) G_{Y30}(y, t | y', 0) G_{Z00}(z, t | z', 0) dx' dy' dz' \tag{A.20}$$

a equação $A(x, y, z, t)$ pode ser reescrita como

$$A(x, y, z, t) = \theta_0 \int_{z'=-\infty}^{\infty} G_{Z00}(z, t | z', 0) dz' \int_{y'=0}^{\infty} G_{Y30}(y, t | y', 0) dy' \int_{x'=-\infty}^{\infty} G_{X00}(x, t | x', 0) dx' \tag{A.21}$$

Conforme Cole, Beck, Haji-Sheikh e Litkouhi (2010) a solução das integrais é dada pelas Eqs. (A.22), (A.23) e (A.24).

$$\int_{x'=-\infty}^{\infty} G_{X00}(x, t | x', \tau) dx' = 1 \tag{A.22}$$

$$\int_{z'=-\infty}^{\infty} G_{Z00}(z, t | z', \tau) dz' = 1 \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
\int_{y'=0}^{\infty} G_{Y30}(y, t | y', \tau) dy' = \operatorname{erf}\left[\frac{y}{[4\alpha(t - \tau)]}\right] + \\
\exp\left[\frac{hy}{k} + \frac{h^2}{k^2}\alpha(t - \tau)\right] \times \operatorname{erfc}\left[\frac{y}{4\alpha(t - \tau)^{1/2}} + \frac{h}{k}[\alpha(t - \tau)]^{1/2}\right]
\end{aligned} \tag{A.24}$$

como a superfície de interesse está em $y = 0$, tem-se que:

$$A(x, y, z, t) = \theta_0 \exp \left[\frac{h^2}{k^2} \alpha t \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} (\alpha t)^{1/2} \right] \quad (\text{A.25})$$

rearranjando a Eq. (A.15) em relação ao fluxo de calor e sabendo da propriedade da função delta de Dirac, $\delta(\tau)$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = F(t) \quad (\text{A.26})$$

Considerando um fluxo de calor imposto arbitrário $q''(\tau) = C\delta(\tau)$ representado por várias funções pulso em cada instante, então, sem perder a generalidade, segue-se que,

$$B(x, y, z, t) = \frac{C\alpha}{k} \int_{z'=-\infty}^{\infty} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \left[\int_{\tau=0}^{\infty} G(x, y, z, t | x, y_i, z, \tau) \delta(\tau) d\tau \right] dx' dz' \quad (\text{A.27})$$

onde $B(x, y, z, t)$ pode ser reescrita como:

$$B(x, y, z, t) = \frac{C\alpha}{k} \int_{z'=-\infty}^{\infty} \int_{x'=-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t | x, y_i, z) dx' dz' \quad (\text{A.28})$$

Para o cálculo de $B(x, y, z, t)$ simplifica-se G_{Y30} , que é avaliada em $y' = 0$ e como as temperaturas serão avaliadas na superfície onde o calor é aplicado, ou seja, em $y = 0$, a Eq. (A.19) pode ser simplificada como:

$$G_{Y30} = (0, t | 0, \tau) = G_{Y30}(0, t - \tau) = [\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} - \frac{h}{k} \exp \left[\frac{\alpha(t - \tau)h^2}{k^2} \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} [\alpha(t - \tau)]^{1/2} \right] \quad (\text{A.29})$$

Cumpra-se aqui observar que o interesse se reduz à solução de um problema térmico tridimensional de dimensões infinitas, com $-\infty < x < \infty$ e $-\infty < z < \infty$, sendo que na região limitada por $-L_1 < x < L_2$ e $-R_1 < z < R_2$ é aplicado um fluxo de curta duração para gerar uma temperatura $T_{regiao} > T_0$ e todos locais fora dessa região estão a uma temperatura T_0 .

Assim, as integrais G_{X00} e G_{Z00} limitadas, possuem solução:

$$\begin{aligned} \int_{x'=a}^b G_{X00}(x, t | x', \tau) dx' &= [4\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} \int_a^b \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{4\alpha(t - \tau)} \right] dx' \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfc} \left\{ \frac{x - b}{[4\alpha(t - \tau)]^{1/2}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x - a}{[4\alpha(t - \tau)]^{1/2}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

e considerando as propriedades da função erf , a Eq.(A.30) pode ser reescrita como,

$$\int_{x'=a}^b G_{X00}(x, t | x', \tau) dx' = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{b + x}{[4\alpha(t - \tau)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{a - x}{[4\alpha(t - \tau)]^{1/2}} \right\} \right) \quad (\text{A.31})$$

e

$$\begin{aligned} B(x, y, z, t) &= \frac{C\alpha}{k} \int_{z'=-R}^R \int_{x'=-L}^L G_{X00}(x, t | x', 0) G_{Y30}(0, t | 0, 0) G_{Z00}(z, t | z', 0) dx' dz' \\ &= \frac{C\alpha}{k} G_{Y30}(0, t | 0, 0) \int_{z'=-R}^R G_{Z00}(z, t | z', 0) dz' \int_{x'=-L}^L G_{X00}(x, t | x', 0) dx' \\ &= \frac{C\alpha}{k} \left([\pi\alpha(t)]^{-1/2} \times -\frac{h}{k} \exp \left[\frac{\alpha(t)h^2}{k^2} \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} [\alpha(t)]^{1/2} \right] \right) \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L + x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L - x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{R + z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{R - z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

portanto segue-se que:

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) &= \theta_0 \exp \left[\frac{h^2}{k^2} \alpha t \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} (\alpha t)^{1/2} \right] \\ &+ \frac{C\alpha}{k} \left([\pi\alpha(t)]^{-1/2} \times -\frac{h}{k} \exp \left[\frac{\alpha t h^2}{k^2} \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} [\alpha t]^{1/2} \right] \right) \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L + x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L - x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{R + z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{R - z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

simplificando obtêm-se

$$\begin{aligned}
\theta(x, y, z, t) &= \theta_0 \left(\exp \left[\frac{h^2}{k^2} \alpha t \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} (\alpha t)^{1/2} \right] \right) \\
&+ \left(\exp \left[\frac{h^2}{k^2} \alpha t \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} (\alpha t)^{1/2} \right] \right) \left(\frac{C\alpha}{k} [\pi\alpha(t)]^{-1/2} \times -\frac{h}{k} \right) \\
&\times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \\
&\times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{R+z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{R-z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right)
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Portanto a razão de temperatura medidas na mesma superfície da peça pode ser dada por $\theta(x_1, 0, 0, t)$ (ponto mais próximo da fonte quente) e $\theta(x_2, 0, 0, t)$ (ponto mais afastado da fonte de calor), é dada pela Eq. (A.35). Percebe-se que a razão de ganho de temperatura será dependente da condutividade k , da difusividade α , do coeficiente de convecção térmica h e de uma variável C que representa o fluxo de calor.

$$\frac{\theta(x_1, 0, 0, t)}{\theta(x_2, 0, 0, t)} = \frac{\theta_0 + \left(\frac{C\alpha}{k} [\pi\alpha(t)]^{-1/2} \times -\frac{h}{k} \right) \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x_1}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x_1}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right)}{\theta_0 + \left(\frac{C\alpha}{k} [\pi\alpha(t)]^{-1/2} \times -\frac{h}{k} \right) \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x_2}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x_2}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right)} \tag{A.35}$$

se $T_0 = T_\infty$ então $\theta_0 = T_0 - T_\infty = 0$, tendo a Eq. (A.35) pode ser reescrita como:

$$\frac{\theta(x_1, 0, 0, t)}{\theta(x_2, 0, 0, t)} = \frac{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{L+x_1}{\sqrt{4\alpha t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L-x_1}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right]}{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{L+x_2}{\sqrt{4\alpha t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L-x_2}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right]} \tag{A.36}$$

Observa-se que a razão de ganho é função apenas das posições x_1 , x_2 , L , α e t , ou seja, é um problema de dependência unidimensional.

Caso X00Y20Z00

Outro problema térmico tridimensional também considerado para as estimativas de propriedades térmicas é representado pelo modelo X00Y20Z00. Esse modelo considera dimensões infinitas na direção x e z e semi infinito na direção y e isolado em $y = 0$.

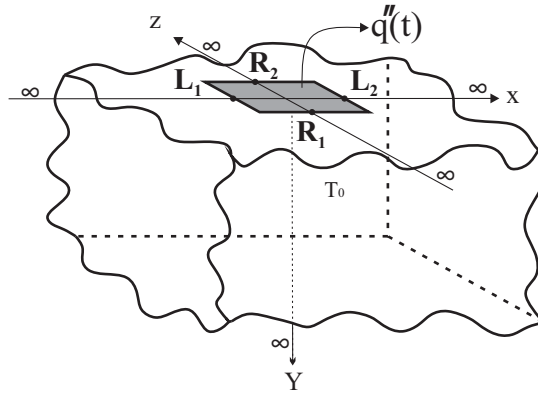


Figura A.3: Modelo térmico proposto para estimativa da difusividade térmica com geometria semi-infinita caso $X00Y20Z00$.

A função de Green G_{Y20} pode ser dada por,

$$G_{Y20} = (y, t | y', \tau) = G_{Y20}(y - y', t - \tau) = [4\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} \left\{ \exp\left[-\frac{(y - y')^2}{4\alpha(t - \tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(y + y')^2}{4\alpha(t - \tau)}\right] \right\} \quad (\text{A.37})$$

cálculo de $A(x, y, z, t)$

$$A(x, y, z, t) = T_0 \int_{z'=-\infty}^{\infty} G_{Z00}(z, t | z', 0) dz' \int_{y'=0}^{\infty} G_{Y20}(y, t | y', 0) dy' \int_{x'=-\infty}^{\infty} G_{X00}(x, t | x', 0) dx' \quad (\text{A.38})$$

como

$$\int_{y'=0}^{\infty} G_{Y20}(y, t | y', \tau) dy' = 1 \quad (\text{A.39})$$

tem-se

$$A(x, y, z, t) = T_0 \quad (\text{A.40})$$

Analogamente, para o cálculo de $B(x, y, z, t)$, considera-se que o fluxo de calor imposto possa ser representado por várias funções pulso em cada instante, ou seja $q''(\tau) = C\delta(\tau)$, e $B(x, y, z, t)$ pode ser reescrita como:

$$B(x, y, z, t) = \frac{C\alpha}{k} \int_{z'=-R}^R \int_{x'=-L}^L G_{X00}(x, t | x', 0) G_{Y20}(0, t | 0, 0) G_{Z00}(z, t | z', 0) dx' dz' \quad (\text{A.41})$$

A função G_{Y20} é avaliada em $y' = 0$, que é o local de aplicação do fluxo de calor e as temperaturas serão tomadas na superfície onde o calor é aplicado ou seja em $y = 0$, portanto obtêm-se,

$$G_{Y20} = (0, t | 0, 0) = G_{Y20}(0, t) = [\pi\alpha(t)]^{-1/2} \quad (\text{A.42})$$

Um modelo térmico tridimensional de dimensões infinitas, com $-\infty < x < \infty$ e $-\infty < z < \infty$ é proposto, sendo que na região limitada por $-L_1 < x < L_2$ e $-R_1 < z < R_2$ aplica-se um fluxo de curto intervalo de tempo, para gerar uma temperatura $T_{regiao} > T_0$ sendo que todos locais fora dessa região estão a uma temperatura T_0 .

$$B(x, y, z, t) = \frac{C\alpha}{k} [\pi\alpha(t)]^{-1/2} \int_{z'=-R}^R G_{Z00}(z, t | z', 0) dz' \int_{x'=-L}^L G_{X00}(x, t | x', 0) dx' \quad (\text{A.43})$$

Usa-se a solução das integrais limitadas Eq. (A.29), tem que a solução do termo $B(x, y, z, t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} B(x, y, z, t) = \frac{C\alpha}{k} [\pi\alpha(t)]^{-1/2} \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \\ \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{R+z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{R-z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

portanto a expressão final da temperatura pode ser dada por:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{C\alpha}{k} [\pi\alpha(t)]^{-1/2} \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \\ \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{R+z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{R-z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

sabe-se que $\theta(x, y, z, t) = T(x, y, z, t) - T_0$, pode -se reescrever a Eq. (A.45)

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) = \frac{C\alpha}{k} [\pi\alpha(t)]^{-1/2} \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \\ \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{R+z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{R-z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

como já mencionado a variável C é relacionada ao fluxo de calor, tem-se que a solução híbrida pode ser dada por:

$$\begin{aligned} T(x, y=0, z, t) = T_0 - \frac{\alpha}{k} \sum_{n=1}^{N-1} q_n'' \left(\frac{2}{\pi\alpha} \right) \left([\pi\alpha(t-t_{n+1})]^{1/2} - [\pi\alpha(t-t_n)]^{1/2} \right) \\ \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \\ \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{R+z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{R-z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

na variável θ a Eq. (A.47) pode ser expressa por;

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) = \frac{\alpha}{k} \sum_{n=1}^{N-1} q_n'' \left(\frac{2}{\pi\alpha} \right) \left([\pi\alpha(t-t_{n+1})]^{1/2} - [\pi\alpha(t-t_n)]^{1/2} \right) \\ \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{L+x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{L-x}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \\ \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left\{ \frac{R+z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{R-z}{[4\alpha(t)]^{1/2}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

onde a razão de temperaturas dados em $\theta(x_1, 0, 0, t)$ e $\theta(x_2, 0, 0, t)$ é dada pela Eq. (A.49)

$$\frac{\theta(x_1, 0, 0, t)}{\theta(x_2, 0, 0, t)} = \frac{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{L+x_1}{\sqrt{4\alpha t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L-x_1}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right]}{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{L+x_2}{\sqrt{4\alpha t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L-x_2}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right]} \quad (\text{A.49})$$

A.2.1 Solução híbrida 1D - X20

A função de Green G_{X20} com condições de contorno do tipo fluxo prescrito, em $x = 0$, e infinito na outra condição de contorno é dada pela Eq. (A.50).

$$G_{X20}(x, t | x', \tau) = \frac{1}{[4\pi\alpha(t - \tau)]^{1/2}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{4\alpha(t - \tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(x + x')^2}{4\alpha(t - \tau)}\right] \right\} \quad (\text{A.50})$$

Conforme (COLE, 2010), a primeira integral da Eq. (4.9) pode ser simplificada pela Eq. (A.51);

$$\int_{x'=0}^{\infty} G(x, t | x', \tau) dx' = 1 \quad (\text{A.51})$$

A função de Green dada pela Eq. (A.50) pode ser simplificada pela Eq. (A.52), pois o ponto de aplicação do fluxo de calor é em $x' = 0$ e os valores de temperatura serão medidos em $x = 0$.

$$G_{X20}(0, t | 0', \tau) = [\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} \quad (\text{A.52})$$

a segunda integral da Eq. (4.9) pode então ser dada pela Eq. (A.53);

$$\begin{aligned} \int_{\tau=0}^t G_{X20}(0, t | 0, \tau) q''(\tau) d\tau &= \int_{\tau=0}^t [\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} q''(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_1=0}^{t_2} [\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} q_1'' d\tau + \int_{t_2}^{t_3} [\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} q_2'' d\tau \\ &\quad + \dots + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} q_n'' d\tau \\ &= - \sum_{n=1}^{N-1} q_n'' \left(\frac{2}{\pi\alpha} \right) \left([\pi\alpha(t - t_{n+1})]^{1/2} - [\pi\alpha(t - t_n)]^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Substituindo a Eq. (A.53) na Eq. (4.9) obtém-se

$$T(0, t) = T_0 - \frac{\alpha}{k} \sum_{n=1}^{N-1} q_n'' \left(\frac{2}{\pi\alpha} \right) \left([\pi\alpha(t - t_{n+1})]^{1/2} - [\pi\alpha(t - t_n)]^{1/2} \right) \quad (\text{A.54})$$

Para verificar o resultado da solução híbrida Eq. (A.54) usou-se um fluxo de calor constante

no tempo, Eq. (A.55), conforme (COLE, 2010).

$$T_{X20}(x, t) = T_0 + \frac{q_0''}{k} \sqrt{4\alpha t} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \quad (\text{A.55})$$

Como a análise sera feita em $x = 0$, a Eq. (A.55), o termo $\operatorname{ierfc}(z)$, com $z = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$ pode ser escrito como:

$$\operatorname{ierfc}(z) = -z \cdot \operatorname{erfc}(z) + \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{(\pi)}} \quad (\text{A.56})$$

Para $x = 0$, tem-se que $z = 0$, portanto $\operatorname{ierfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, e a Eq. (A.55) pode ser reescrita como:

$$T_{X20}(0, t) = T_0 + \frac{q_0''}{k} \sqrt{4\alpha t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{A.57})$$

As soluções obtidas pelas Eqs. (A.54) e (A.57) são implementadas no *MATLAB* com as seguintes características físicas e geométricas: condutividade térmica, $k = 14,9$ [W/mK], difusividade térmica, $\alpha = 3,954e^{-6}$ [m²/s], temperatura inicial, $T_0 = 20$ [°C], comprimento $L = 25e^{-3}$ [m], $dt = 1s$ e o fluxo de calor constante $q_0'' = 10^4$ [W/m²].

A Figura A.4 (a) mostra a comparação entre as soluções híbrida Eq. (A.54) e puramente analítica Eq. (A.57). Para um passo de discretização de tempo igual a um segundo ($dt = 1s$), possível de ser realizado experimentalmente. As duas soluções mostram-se muito próximas como pode ser observado na Fig. A.4 (b), na qual é analisado o erro entre as duas soluções .

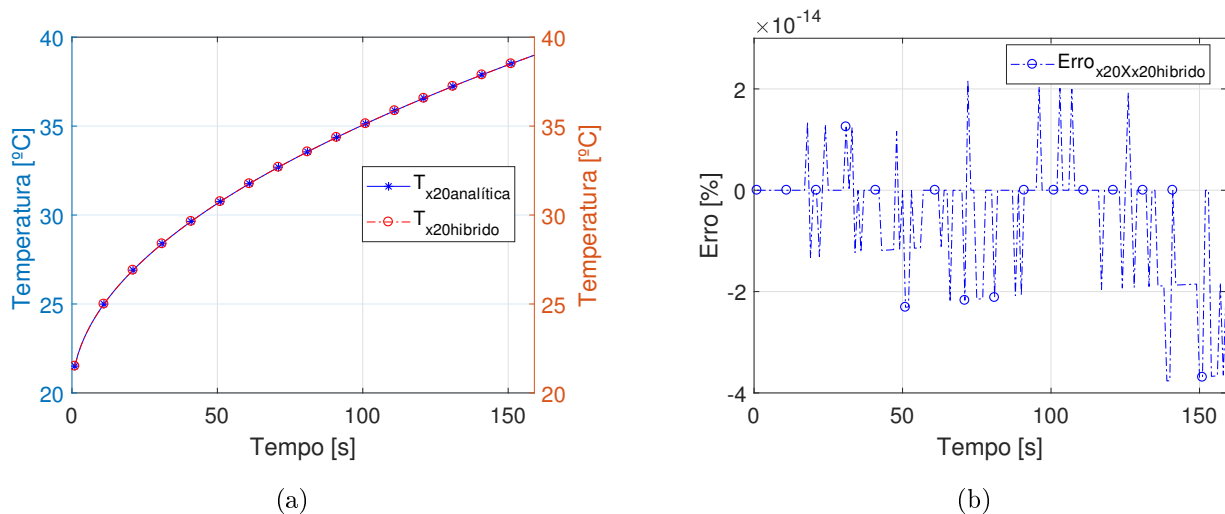


Figura A.4: Verificação numérica da solução híbrida X20 para um fluxo constante:(a) Temperatura ;(b) Erro

A verificação da solução analítica para um fluxo de curta duração $10^4[W/m^2]$ aplicado por 4 segundos é feita com base na solução de (FERNANDES, 2013) com o mesmo modelo, porém soluções diferentes.

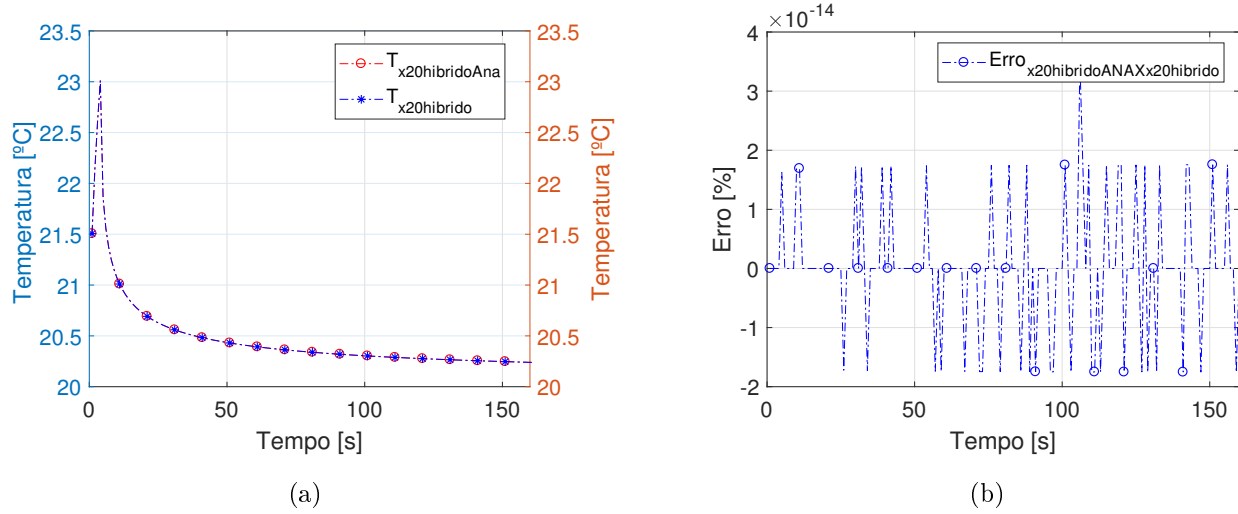


Figura A.5: Verificação numérica da solução híbrida X20 usando um fluxo variável:(a) Temperatura ;(b) Erro

A.2.2 Solução híbrida 1D - X22

A função de Green 1D G_{X22} com condições de contorno do tipo fluxo prescrito, em $x = 0$ e isolado em $x = L$ é dada pela Eq. (A.58).

$$G_{X22}(x, t | x', \tau) = \frac{1}{L} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \right] \quad (\text{A.58})$$

Observa-se que a primeira integral da Eq. (4.9) pode ser resolvida conforme Eq. (A.59).

$$\int_{x'=0}^L G_{X22}(x, t | x', \tau) = \int_{x'=0}^L \frac{1}{L} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \right] \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{1}{L} \int_{x'=0}^L dx' + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_{x'=0}^L \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) dx' = 1$$

A função de Green dada pela Eq. (A.58) pode ser simplificada pela Eq. (A.60), pois o ponto de aplicação do fluxo de calor é em $x' = 0$ e os valores de temperatura serão medidos em $x = 0$.

$$G_{X22}(0, t | 0, \tau) = \frac{1}{L} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} \right] \quad (\text{A.60})$$

A segunda integral da Eq. (4.9) pode ser resolvida conforme Eq. (A.61)

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^t G_{X22}(0, t | 0, \tau) d\tau &= \int_{t=0}^t q''(\tau) \frac{1}{L} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{L} \int_{t=0}^t q''(\tau) d\tau + \frac{2}{L} \int_{t=0}^t q''(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Sendo que a primeira integral da Eq. (A.61) é dada em forma de somatório por

$$\frac{1}{L} \int_0^t q''(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \left(\int_{t_1=0}^{t_2} q_1'' d\tau + \int_{t_2}^{t_3} q_2'' d\tau + \dots + \int_{t_n}^{t_{n+1}} q_n'' d\tau \right) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{N-1} q_n'' (t_{n+1} - t_n) \quad (\text{A.62})$$

e a segunda integral por

$$\begin{aligned} \frac{2}{L} \int_0^t q''(\tau) \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} d\tau &= \frac{2}{L} \int_{t_1=0}^{t_2} q_1'' \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} d\tau + \\ \frac{2}{L} \int_{t_2}^{t_3} q_2'' \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} d\tau + \dots + \frac{2}{L} \int_{t_n}^{t_{n+1}} q_n'' \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} d\tau &= \\ \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{N-1} q''(n) \left[\exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-t_{n+1})} - \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-t_n)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Substituindo as Eqs. (A.62) e (A.63) na Eq. (4.9) obtêm-se

$$T(0, t) = T_0 + \frac{\alpha}{k} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{N-1} q_n'' (t_{n+1} - t_n) + \frac{\alpha}{k} \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \frac{2}{L\alpha} \sum_{n=1}^{N-1} q''(n) \left[\exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-t_{n+1})} - \exp^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-t_n)} \right] \quad (\text{A.64})$$

Para verificar a solução híbrida dada pela Eq. (A.64), usou-se a solução analítica considerando o fluxo de calor constante q_0'' , ou seja,

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q'' \alpha}{k} \frac{1}{L} t + \frac{q''}{k} \frac{2}{L} \sum_m \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} - \frac{q''}{k} \frac{2}{L} \sum_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{e^{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t}}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \quad (\text{A.65})$$

As Equações (A.64) e (A.65) são implementadas no *MATLAB* com as seguintes caracte-

rísticas físicas e geométricas: condutividade térmica, $k = 14,9 \text{ [W/mK]}$, difusividade térmica, $\alpha = 3,954e^{-6} \text{ [m}^2/\text{s]}$, temperatura inicial, $T_0 = 20 \text{ [}^\circ\text{C]}$, comprimento $L = 25e^{-3} \text{ [m]}$, $dt = 1s$ e o fluxo de calor constante $q_0'' = 10^4 \text{ [W/m}^2\text{]}$.

A Figura A.6 (a) mostra a comparação entre as soluções híbrida Eq. (A.64) e puramente analítica Eq. (A.65). Para o passo de discretização de tempo igual a um segundo ($dt = 1s$), as duas soluções mostram-se muito próximas como pode ser observado na Fig. A.6 (b), na qual é analisado o erro entre as duas soluções .

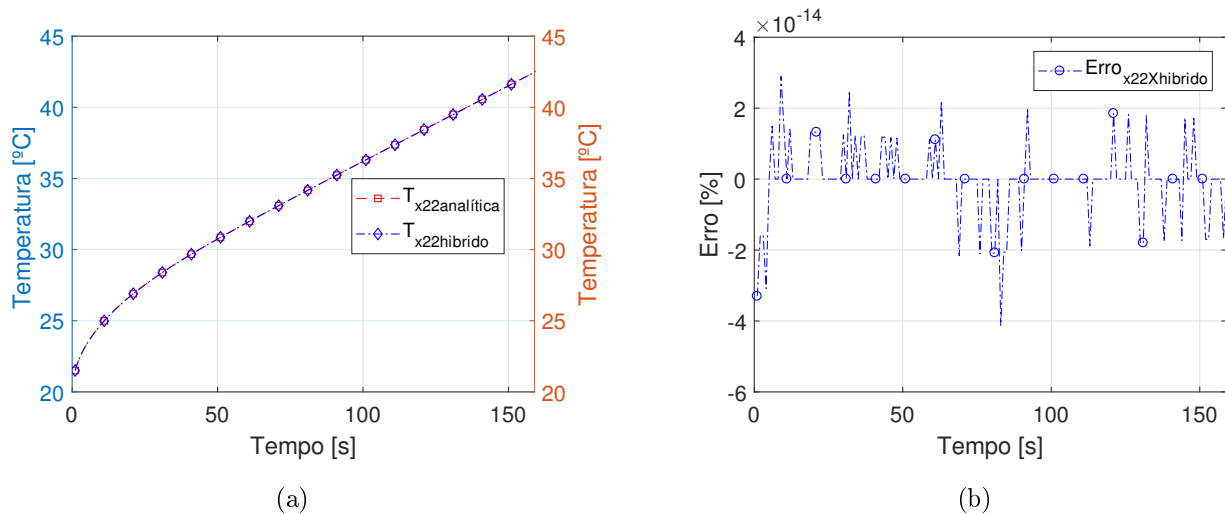


Figura A.6: Verificação numérica da solução híbrida X22 para fluxo constante:(a) Temperatura ;(b) Erro

A verificação para um fluxo de curta duração $10^4 \text{ [W/m}^2\text{]}$ é feita com base na solução de (FERNANDES, 2013) com o mesmo modelo, porém soluções diferentes pois a solução para a posição $x = 0$ tem um custo computacional menor.

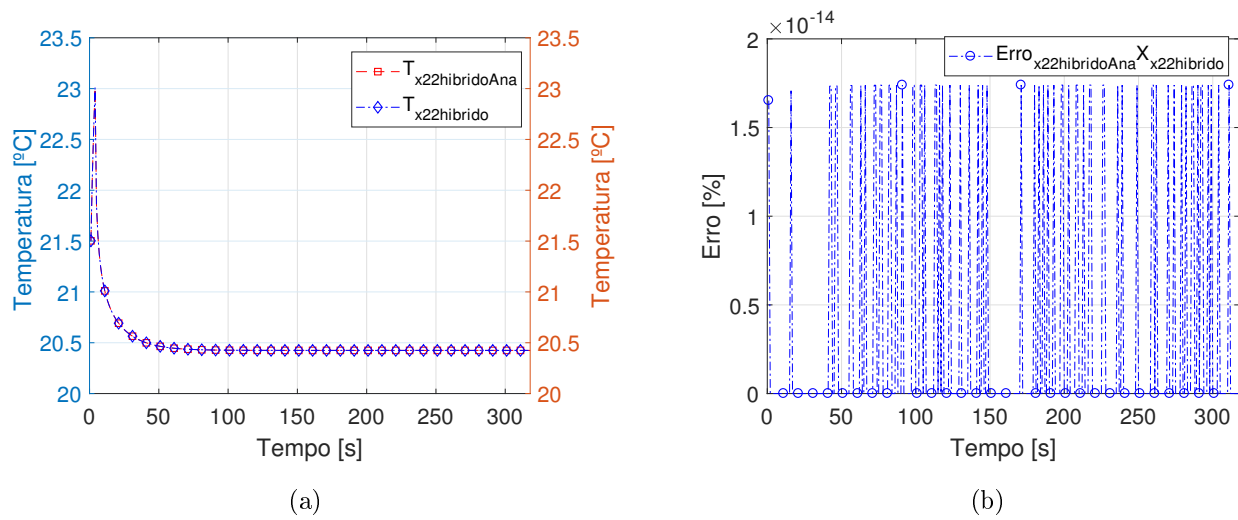


Figura A.7: Verificação numérica da solução híbrida X22 para fluxo variável:(a) Temperatura ;(b) Erro

Comparando a solução dos modelos híbridos X20 com o X22 para o fluxo de curta duração, tem-se:

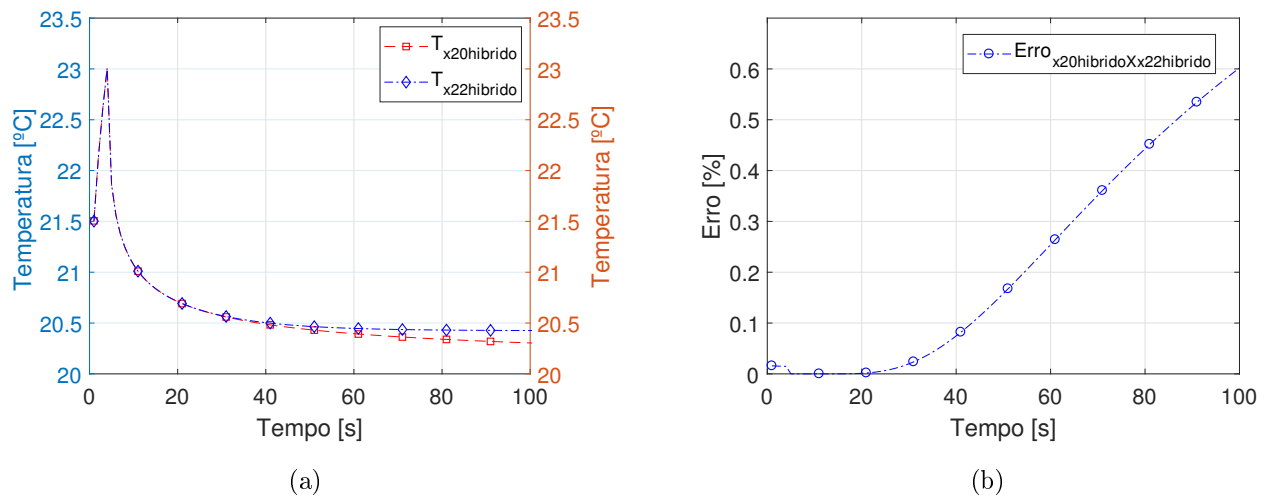


Figura A.8: Verificação numérica das soluções híbridas X20 e X22 para um fluxo de curta duração :(a) Temperatura ;(b) Erro