

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

ALEX JOSÉ ELIAS

**Modelagem Híbrida URANS-LES para
Escoamentos Turbulentos**



Uberlândia – MG – Brasil

2018

ALEX JOSÉ ELIAS

Modelagem Híbrida URANS-LES para Escoamentos Turbulentos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Coorientador: Dr. Rafael Romão da Silva Melo

Uberlândia – MG – Brasil

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

E42m
2018 Elias, Alex José, 1990-
Modelagem híbrida URANS-LES para escoamentos turbulentos
[recurso eletrônico] / Alex José Elias. - 2018.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.

Coorientador: Rafael Romão da Silva Melo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1219>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. 2. Escoamento turbulento. I. Silveira Neto,
Aristeu da, 1955- (Orient.). II. Silva Melo, Rafael Romão da (Coorient.).
III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

Maria Salete de Freitas Pinheiro - CRB6/1262



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



TERMO

ALUNO: Alex José Elias

MATRÍCULA: 11622EMC002

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos **LINHA DE PESQUISA:** Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: “Modelagem Híbrida URANS-LES para Escoamentos Turbulentos”

ORIENTADOR: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto **CO-ORIENTADOR:** Dr. Rafael Romão da Silva Melo

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada no Auditório do MFLab do Bloco 5P, Campus Santa Mônica, em 23 de agosto de 2018, às 13:30 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto	UFU
Dr. Rafael Romão da Silva Melo	UFU
Prof. Dr. Francisco José de Souza	UFU
Prof. Dr. João Marcelo Vedovoto	UFU
Prof. Dr. Carlos Henrique Ataíde	UFU
Prof. Dr. Carlos Antônio Ribeiro Duarte	UFG

Uberlândia, 23 de agosto de 2018



Documento assinado eletronicamente por **Aristeu da Silveira Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 24/08/2018, às 09:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco José de Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 24/08/2018, às 09:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Romão da Silva Melo, Usuário Externo**, em 24/08/2018, às 09:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Marcelo Vedovoto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 24/08/2018, às 10:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Antonio Ribeiro Duarte, Usuário Externo**, em 24/08/2018, às 11:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Henrique Ataíde, Professor(a) do Magistério Superior**, em 24/08/2018, às 14:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orcao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0667122** e o código CRC **09907955**.

À minha família.

Agradecimentos

Ao Deus de quem eu sou, e a quem eu sirvo, pelo resgate, consolo e direção em todos os momentos.

Aos meus pais Antônio Maria e Meninha e aos meus irmãos Alysson e Antônio Augusto, aos quais sou grato pelo amor, companheirismo, paciência e, principalmente, pelas orações. A presente dissertação é a resposta de Deus a suas lágrimas. Elas não foram em vão, por isso meu muito obrigado.

À minha família da Igreja Cristã Maranata do bairro Martins, os quais me acolheram e têm, todos os dias, combatido este bom combate ao meu lado. Que alegria é tê-los comigo.

À Daniele por tanto amor, sabedoria, serenidade e paciência demonstrados em tão pouco tempo. Você é um presente de Deus!

Aos professores Aristeu da Silveira Neto e João Marcelo Vedovoto, bem como ao colega Rafael Romão da Silva Melo, pela disposição em orientar-me. Obrigado pela paciência, compreensão e amizade adquiridos ao longo desses dois anos.

Aos companheiros do Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFlab), Abgail, Alexandre, Ana, Bernardo, Dálglis, Diego, Douglas, Fabrizio, Gabriel, Hélio, Jessica, João Rodrigo, Lívio, Luismar, Marcelo, Millena, Pedro Ricardo, Renata e Ricardo, por todas as contribuições profissionais e pessoais. Sem vocês a conclusão da presente dissertação não seria possível.

Aos membros da banca, professores Carlos Antônio Ribeiro Duarte, Carlos Henrique Ataíde, Francisco José de Souza e João Marcelo Vedovoto pela disposição em participar da conclusão de mais uma etapa da minha vida, contribuindo para o enriquecimento do presente trabalho.

À Universidade Federal de Uberlândia e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela oportunidade de realizar esta dissertação.

À Capes, FAPEMIG, CNPq e PETROBRAS pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram com o presente trabalho

"Eu te louvarei, porque de um modo terrível e tão maravilhoso fui formado; maravilhosas são as tuas obras, e a minha alma o sabe muito bem."

Salmos 139:14

Resumo

A maioria dos escoamentos que ocorrem na natureza são turbulentos. O mesmo pode ser dito acerca dos escoamentos de interesse industrial. Sendo assim, a modelagem matemática diferencial de escoamentos de fluidos nos possibilita uma melhor compreensão dos fenômenos físicos envolvidos em sua ocorrência, ao mesmo tempo que fornece um grande número de informações preciosas e de difícil obtenção por meio de experimentos materiais. Por este motivo, a comunidade científica têm se empenhado ao longo dos anos em desenvolver novas estratégias de modelagem para escoamentos turbulentos. Inserido neste contexto, o presente trabalho apresenta quatro estratégias de modelagem híbrida URANS-LES para escoamentos turbulentos. Foram implementados no código MFSim, desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia em parceria com a PETROBRAS, as metodologias de modelagem híbrida DES e SAS. Para as implementações, aproveitaram-se as bases URANS, caracterizada pelos modelos de Spalart-Allmaras e $k - \omega$ SST, e LES, dada pelo modelo dinâmico de Germano, existentes no código. Sendo assim, foi possível implementar os modelos SA-DES, SA-SAS, SST-DES e SST-SAS e testá-los no ambiente multinível com remalhagem adaptativa dinâmica do código MFSim. Observou-se que a modelagem híbrida URANS-LES pode ser considerada uma ferramenta interessante na análise de escoamentos turbulentos com o código MFSim. Demonstrou-se que, com a utilização dessas modelagens, é possível caracterizar estruturas turbilhonares com um comportamento mais próximo da metodologia LES do que a metodologia URANS. Em especial, com o modelo SA-SAS obtiveram-se bons resultados, indicando grande potencial de utilização do mesmo dentro do código MFSim, uma vez que não tem dependência explícita da malha computacional, como os modelos DES. A utilização continuada do modelo SA-SAS, bem como a sequência dos estudos acerca da implementação de outros modelos SAS e DES no código MFSim, configura uma estratégia interessante na busca por maior robustez na solução de escoamentos turbulentos.

Key-words: Modelagem híbrida URANS-LES, DES, SAS, escoamentos turbulentos, cavidade, degrau, prisma.

ELIAS, A. J., **Hybrid URANS-LES Modeling for the Simulation of Turbulent Flows**. 2018. 112p. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Abstract

Most of the flows occurring in nature are turbulent. The same can be said about flows of industrial interest. Thus, the differential mathematical modeling of fluid flows enables us to better understand the physical phenomena involved in its occurrence, while providing a large number of valuable information, which are difficult to obtain through material experiments. For this reason, the scientific community has been engaged over the years in developing new modeling strategies for turbulent flows. In this context, the present work presents four hybrid URANS-LES modeling strategies for turbulent flows. DES and SAS hybrid modeling methodologies were implemented in the MFSim code, developed in the Laboratório de Mecânica dos Fluidos of the Universidade Federal de Uberlândia in partnership with PETROBRAS. The implementations take advantage of the URANS and LES basis, characterized by, respectively, the Spalart-Allmaras/ $k - \omega$ SST models and the Germano dynamic model. Thus, it was possible to implement the SA-DES, SA-SAS, SST-DES and SST-SAS models and test them in the multilevel environment of dynamic adaptive refinement of the MFSim code. It was observed that the hybrid URANS-LES models can be considered an interesting tool in the analysis of turbulent flows with the MFSim code, being able to characterize swirling structures with a behavior closer to the LES methodology than the URANS methodology. In particular, the SA-SAS model presented good results and presents great potential of use within the MFSim code, since it does not have explicit dependence of the computational mesh, like DES models does. The continued use of the SA-SAS model, as well as the sequence of studies about the implementation of other SAS and DES models in the MFSim code, constitutes an interesting strategy in the search for greater robustness in the solution of turbulent flows.

Key-words: *Hybrid URANS-LES, DES, SAS, turbulent flows, lid-driven cavity, backward-facing step, bluff body.*

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema simplificado da densidade espectral de energia cinética turbulenta de um escoamento. Adaptado de Silveira-Neto (2017).	10
Figura 2 – Regiões para aplicação das modelagens URANS e LES. Adaptado de Davidson & Peng (2003).	16
Figura 3 – Volume de controle elementar Vedovoto (2011).	34
Figura 4 – Definição das variáveis locais e do sistema de coordenadas. Adaptado de Alves, Oliveira & Pinho (2003).	36
Figura 5 – Exemplo de refinamento adaptativo baseado no critério de vorticidade. (a) Malha bloco estruturada com refinamento adaptativo e divisões de <i>patches</i> ; (b) Contorno de magnitude de vorticidade.	40
Figura 6 – Representação dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da fronteira imersa (ANDRADE, 2015).	40
Figura 7 – Ilustração das operações de (a) prolongamento e (b) restrição (VILLAR, 2007).	43
Figura 8 – Esquema indicando os níveis virtuais e físicos da malha (MELO, 2017).	44
Figura 9 – Cavidade 3D com tampa deslizante.	47
Figura 10 – Divisão de processos na cavidade com tampa deslizante: (a) 8 processos (b) 64 processos.	48
Figura 11 – Campos de velocidade instantânea u (à esquerda) e v (à direita), no plano $z = 0, 5$, para os modelos LES-D, SA e SA-SAS.	49
Figura 12 – Campos de velocidade instantânea u (à esquerda) e v (à direita), no plano $z = 0, 5$, para os modelos LES-D, SST e SST-SAS.	50
Figura 13 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea v para os modelos LES-D, SA e SA-SAS.	51
Figura 14 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea v para os modelos LES-D, SST e SST-SAS.	52
Figura 15 – Campos instantâneos de w_z (à esquerda) e da razão de viscosidade turbulenta μ_t/μ (à direita), no plano $z = 0, 5$, para os modelos LES-D, SA e SA-SAS.	53
Figura 16 – Campos instantâneos de w_z (à esquerda) e da razão de viscosidade turbulenta μ_t/μ (à direita), no plano $z = 0, 5$, para os modelos LES-D, SST e SST-SAS.	54
Figura 17 – Campos instantâneos de w_z e do termo Q_{SAS} , no plano $z = 0, 5$, para o modelo SA-SAS e SST-SAS.	56

Figura 18 – Perfil médio para componente u de velocidade, RMS de u e componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds ao longo do eixo y . Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-SAS e o experimento material.	57
Figura 19 – Perfil médio para componente v de velocidade, RMS de v e componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds ao longo do eixo x . Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-SAS e o experimento material.	58
Figura 20 – Esquema experimental do tunel de vento utilizado no experimento material de Jovic & Driver (1994).	59
Figura 21 – Esquema representativo do domínio utilizado (MELO, 2017).	59
Figura 22 – Domínio computacional utilizado para simulação do degrau descendente. Divisão de processos em destaque.	60
Figura 23 – Perfil médio de velocidade aplicado na entrada do domínio computacional.	61
Figura 24 – Campos de velocidade instantânea u/U_0 , no plano $z/h = 2, 0$, para os modelos LES-D, SA-DES e SA.	62
Figura 25 – Campos instantâneos da componente z do vetor vorticidade, no plano $z/h = 2, 0$, para os diferentes modelos estudados.	63
Figura 26 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea u , no plano $z/h = 2, 0$, para os diferentes modelos estudados.	64
Figura 27 – Campos instantâneos da razão de viscosidade turbulenta μ_t/μ , no plano $z/h = 2, 0$, para os diferentes modelos estudados.	65
Figura 28 – Perfil médio para componente u de velocidade em cinco estações à jusante do degrau ($x/h = 4, x/h = 6, x/h = 10, x/h = 15, x/h = 19$), medidos no plano $z/h = 2, 0$. Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-DES e o experimento material.	65
Figura 29 – Perfil da componente $\overline{u'u'}$ do tensor de Reynolds em cinco estações à jusante do degrau ($x/h = 4, x/h = 6, x/h = 10, x/h = 15, x/h = 19$). Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-DES e o experimento material.	66
Figura 30 – Perfil da componente $\overline{v'v'}$ do tensor de Reynolds em cinco estações à jusante do degrau ($x/h = 4, x/h = 6, x/h = 10, x/h = 15, x/h = 19$). Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-DES e o experimento material.	67
Figura 31 – Perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds em cinco estações à jusante do degrau ($x/h = 4, x/h = 6, x/h = 10, x/h = 15, x/h = 19$). Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-DES e o experimento material.	67
Figura 32 – Comprimento de recolamento determinado pela velocidade média u obtido por meio dos modelos LES-D, SA, SA-DES.	68

Figura 33 – Esquema experimental da seção de testes utilizada no experimento material. Adaptado de (SJUNNESSON; HENRIKSSON; LOFSTROM, 1992).	70
Figura 34 – Domínio computacional utilizado para as simulações do escoamento sobre o prisma triangular.	70
Figura 35 – Campos de velocidade instantânea u/U_0 , no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-DES, SST-DES, SA-SAS, SST e SA.	73
Figura 36 – Campos instantâneos da razão de viscosidade turbulenta μ_t/μ , no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-DES, SST-DES, SA-SAS, SST e SA.	74
Figura 37 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea u . Comparação entre os modelos LES-D, SA-DES, SST-DES e SA-SAS.	75
Figura 38 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea u . Comparação entre os modelos LES-D, SST e SA.	76
Figura 40 – Campos instantâneo do termo Q_{SAS}	76
Figura 39 – Campos instantâneos de ω_z , no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-DES, SST-DES, SA-SAS, SST e SA.	77
Figura 41 – Campos instantâneo do termo F_{DES}	77
Figura 42 – Perfil médio para a componente u da velocidade em três estações à jusante do prisma triangular ($x/a = 0,375$, $x/a = 1,53$, $x/a = 3,75$), medido no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-SAS, SA-DES, SST-DES, SA, SST e o experimento material.	78
Figura 43 – Perfil de RMS para a componente u da velocidade em três estações à jusante do prisma triangular ($x/a = 0,375$, $x/a = 1,53$, $x/a = 3,75$), medido no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-SAS, SA-DES, SST-DES, SA, SST e o experimento material.	79
Figura 44 – Perfil de RMS para a componente v da velocidade em três estações à jusante do prisma triangular ($x/a = 0,375$, $x/a = 1,53$, $x/a = 3,75$), medido no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-SAS, SA-DES, SST-DES, SA, SST e o experimento material.	80
Figura 45 – Perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds em três estações à jusante do prisma triangular ($x/a = 0,375$, $x/a = 1,53$, $x/a = 3,75$), medido no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-SAS, SA-DES, SST-DES, SA, SST e o experimento material.	81
Figura 46 – Perfil médio da componente u de velocidade, à jusante do prisma triangular, ao longo do centro do domínio. Comparação entre os modelos LES-D, SA-SAS, SA-DES, SST-DES, SA, SST e o experimento material.	81

Lista de tabelas

Tabela 1	– Modelos de fechamento para a turbulência disponíveis no código MFSim no início do presente trabalho.	3
Tabela 2	– Número de células vs número de Reynolds para o escoamento no interior de um canal plano periódico (MENTER, 2012).	17
Tabela 3	– Parâmetros para obtenção de diferentes métodos de integração temporal a partir do esquema IMEX de segunda ordem.	38
Tabela 4	– Informações de duas sondas utilizadas na captura dos resultados para o caso LES-D.	68
Tabela 5	– Comprimento de recolamento para os modelos LES-D, SA-DES e SA, comparados com outros trabalhos.	69

Lista de abreviaturas e siglas

ADBQUICKEST	<i>ADaptative Bounded Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics</i>
AMR	<i>Adaptive Mesh Refinement</i>
ASM	<i>Algebraic Reynolds Stress Model</i>
CD	<i>Central Difference</i>
CFL	<i>Courant-Friedrichs-Lewy</i>
CLAM	<i>Curved-Line Advection Method</i>
CNAB	<i>Crank-Nicolson Adams-Bashforth</i>
CNLF	<i>Crank-Nicolson Leap-Frog</i>
CUBISTA	<i>Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for Treatment of Advection</i>
DDES	<i>Delayed Detached-Eddy Simulation</i>
DES	<i>Detached-Eddy Simulation</i>
DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i>
EARSM	<i>Explicit Algebraic Reynolds Stress Model</i>
EDP	Equação Diferencial Parcial
FOU	<i>First Order Upwind</i>
HWN	<i>High Wave Number damping</i>
IDDES	<i>Improved Delayed Detached-Eddy Simulation</i>
IMEX	<i>Implicit-Explicit</i>
KSKL	<i>K-Square-root KL</i>
LDA	<i>Laser Doppler Anemometry</i>
LES	<i>Large Eddy Simulation</i>
MCNAB	<i>Modified Crank-Nicolson Adams-Bashforth</i>

MFlab	Laboratório de Mecânica dos Fluidos
MINMOD	<i>MINimum MODulus</i>
RANS	<i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
RSM	<i>Reynolds Stress Model</i>
SA	<i>Spalart-Allmaras</i>
SAS	<i>Scale-Adaptive Simulation</i>
SBDF	<i>Semi-implicit Backward Differentiation Formula</i>
SMART	<i>Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport</i>
SOU	<i>Second Order Upwind</i>
SST	<i>Shear Stress Strain</i>
TDMA	<i>Tridiagonal matrix algorithm</i>
TVD	<i>Total Variation Diminishing</i>
URANS	<i>Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes</i>
VIV	<i>Vortex Induced Vibration</i>
WACEB	<i>Weighted Average Coefficient Ensuring Boundedness</i>
WALE	<i>Wall-Adapting local eddy viscosity</i>
WMLES	<i>Wall Modeling LES</i>

Lista de símbolos

f_V	Integral de volume
f_S	Integral de superfície
∇	Gradiente
$\nabla \cdot$	Divergente
∂	Derivada parcial
D	Derivada substantiva
k	Energia cinética turbulenta
ω	Frequência de Kolmogorov
ϵ	Taxa de transformação viscosa
L	Escala de comprimento característica
Re	Número de Reynolds
u	Componente do vetor velocidade na direção x
u_i	Componente do vetor velocidade em notação indicial
ρ	Massa específica
ν	Viscosidade cinemática
μ	Viscosidade dinâmica
p	Pressão
f_i	Campo de forças externas em notação indicial
T	Temperatura
α	Coefficiente de difusão de energia térmica
ϕ	Potência específica de transformação viscosa
φ	Informação genérica de um escoamento turbulento
$\bar{\varphi}$	Informação genérica filtrada de um escoamento turbulento

φ'	Flutuação de uma informação genérica de um escoamento turbulento
\bar{u}_i	Componente filtrada do vetor velocidade em notação indicial
\bar{p}	Pressão filtrada
\bar{f}_i	Campo filtrado de forças externas em notação indicial
u'_i	Flutuação de velocidade em notação indicial
L_{ij}	Tensor de Leonard
C_{ij}	Tensor Cruzado submalha
R_{ij}	Tensor de Reynolds submalha
τ_{ij}	Tensor global submalha
ν_t	Viscosidade turbulenta
C_s	Constante de Smagorinsky
Δ	Escala de comprimento da malha
S_{ij}	Tensor taxa de deformação
\bar{S}_{ij}	Tensor taxa de deformação filtrado
$\hat{\Delta}$	Segundo filtro do modelo de Smagorinsky dinâmico
$\tilde{\nu}$	Viscosidade turbulenta modificada do modelo de Spalart-Allmaras
P_k	Termo de transferência do modelo $k - \omega$ SST
F_1	Função de hibridação do modelo $k - \omega$ SST
S	Norma do tensor taxa de deformação
d	Distância à parede
\tilde{d}	Distância à parede modificada utilizada no modelo SA-DES
C_{DES}	Constante de ajuste originalmente do modelo SA-DES
F_{DES}	Função de hibridação do modelo SST-DES.
L_t	Escala de comprimento característica para a turbulência
Φ	Variável de transporte do modelo KSKL
L_{vk}	Escala de comprimento de von Karman

Q_{SAS}	Termo de acúmulo dos modelos SAS
C_{SAS}	Constante do modelo SST-SAS
ψ	Escalar genérico passivo
Γ	Coefficiente difusivo da equação de transporte genérica para um escalar passivo
S_ψ	Termo de acúmulo da equação de transporte genérica para um escalar passivo
e	Face leste do volume finito
w	Face oeste do volume finito
n	Face norte do volume finito
s	Face sul do volume finito
t	Face topo do volume finito
b	Face fundo do volume finito
α_i	Parâmetros do termo temporal do método IMEX
β_i	Parâmetros do termo advectivo do método IMEX
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ω_{n+1}	Relação entre dois passos de tempo consecutivos do método IMEX
t	Tempo
t_{adv}	Tempo advectivo
t_{dif}	Tempo difusivo
w_z	Componente z do vetor vorticidade
ζ	Constante de remalhagem
D_{ij}	Função distribuição
u_0	Velocidade de referência
T_u	Intensidade turbulenta
D_H	Diâmetro hidráulico

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Metodologia	2
1.3	Escopo da Dissertação	3
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	Os escoamentos turbulentos: breve histórico	4
2.2	Origens da turbulência nos fluidos	6
2.3	Características dos escoamentos turbulentos	8
2.4	Dinâmica turbilhonar de escoamentos turbulentos	9
2.5	A modelagem matemática da turbulência	12
2.6	Diferenças entre as modelagens RANS e URANS	15
2.7	Limitações das metodologias URANS e LES	16
2.8	Modelagens híbridas para o fechamento da turbulência	17
2.8.1	Detached Eddy Simulation (DES)	17
2.8.2	Scale Adaptive Simulation (SAS)	18
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	19
3.1	Formulação diferencial para a fluidodinâmica	19
3.2	Equações filtradas para a fluidodinâmica	20
3.3	Large Eddy Simulation (LES)	23
3.3.1	Modelagem dinâmica submalha	23
3.4	Equações Médias de Reynolds para escoamentos transientes (URANS)	24
3.4.1	Modelo de fechamento de Spalart-Allmaras	25
3.4.2	Modelo de fechamento $k - \omega$ SST	26
3.5	Detached Eddy Simulation (DES)	27
3.5.1	O modelo SA-DES	28
3.5.2	O modelo SST-DES	28
3.6	Scale Adaptive Simulation (SAS)	29
3.6.1	O modelo SST-SAS	30
3.6.2	O modelo SA-SAS	31
4	MODELAGEM NUMÉRICA	33
4.1	Discretização espacial das equações de transporte	33
4.1.1	Esquema advectivo	35
4.2	Integração temporal	37

4.3	Malha bloco estruturada e refinamento adaptativo	38
4.4	Metodologia da fronteira imersa	39
4.5	Método Multigri-Multinível	42
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	45
5.1	Validação dos modelos SAS	46
5.1.1	Resultados topológicos	48
5.1.2	Velocidade média, RMS e componentes do tensor de Reynolds	57
5.2	Validação dos modelos DES	58
5.2.1	Resultados topológicos	62
5.2.2	Velocidade média e componentes do tensor de Reynolds	65
5.2.3	Comprimento de recolamento	67
5.3	Aplicação dos modelos híbridos	69
5.3.1	Resultados topológicos	72
5.3.2	Velocidade média, RMS e componentes do tensor de Reynolds	78
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	82
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICE A – TRANSFORMAÇÃO DE VARIÁVEIS	91
	APÊNDICE B – HWN DAMPING	93

1 Introdução

As equações de Navier-Stokes, juntamente com a equação da continuidade e a equação da energia térmica, são suficientes para modelar escoamentos em qualquer um dos regimes, laminar ou turbulento, independente da magnitude do número de Reynolds. Entretanto, quanto maior este adimensional, mais largo se torna o espectro de energia associado ao escoamento.

Para calculá-lo, faz-se necessário o uso de malhas muito finas, com espaçamentos e passos de tempo da ordem das escalas de Kolmogorov, o que implica em altíssimos custos computacionais. Esta metodologia é chamada de Simulação Numérica Direta (*Direct Numerical Simulation* - DNS) e, em função dos elevados custos já mencionados, é limitada a escoamentos caracterizados por baixos valores do número de Reynolds.

Para contornar este problema, a solução encontrada pelos estudiosos do assunto passa pela decomposição do espectro de escalas. Reynolds (1894) e Boussinesq (1877), propuseram, independentemente, a decomposição do escoamento em duas partes, a saber uma parte média e outra parte flutuante. Isto foi feito aplicando um filtro média temporal às equações de Navier-Stokes, obtendo as chamadas Equações Médias de Reynolds (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes* - RANS). Dessa forma, buscaram obter o comportamento médio do escoamento, levando em consideração às flutuações do mesmo em torno dessa média.

Smagorinsky (1963), por sua vez, viu-se forçado a buscar uma nova estratégia, uma vez que o comportamento médio do escoamento de nada lhe servia em seus estudos meteorológicos. Ele propôs, então, a utilização de outro tipo de filtragem, decompondo o espectro de escalas do escoamento em duas bandas. A banda formada pelas maiores escalas do espectro, portadoras da maior parte da energia do escoamento, seria calculada, enquanto que a banda composta pelas menores escalas teria sua influência junto às maiores escalas modelada. Estabeleceu-se, então, a metodologia de Simulação das Grandes Escalas (*Large Eddy Simulation* - LES).

Em ambos os casos, a filtragem das equações de Navier-Stokes produz termos adicionais que necessitam de tratamento especial. Este é o chamado problema de fechamento da turbulência. Na filosofia RANS, os modelos de fechamento permitem incorporar ao escoamento médio, as informações presentes no campo flutuante. Já na filosofia LES, a modelagem de fechamento permite computar os efeitos não-lineares de transferência de energia entre as bandas resolvidas e não resolvidas do espectro.

Neste contexto, ao lidar com escoamentos turbulentos complexos, como aqueles que apresentam fortes gradientes adversos de pressão, as modelagens para fechamento da turbulência baseadas na metodologia RANS, carro chefe nas aplicações industriais,

têm se mostrado insuficientes para atender à crescente demanda por resultados acurados. Apesar de suficiente para se obter tais resultados, a modelagem LES, por sua vez, ainda é considerada uma abordagem de alto custo computacional (HAASE; BRAZA; REVELL, 2009).

Buscando unir estas metodologias de fechamento da turbulência, uma classe de modelos híbridos URANS-LES, tem sido, ao longo da última década, amplamente desenvolvida pela comunidade científica (PENG; DOERFFER; HAASE, 2010). Com esta estratégia, busca-se combinar as vantagens das metodologias RANS e LES, servindo assim como uma alternativa à utilização de modelos puramente RANS na indústria, até que as metodologias LES e DNS se tornem viáveis.

1.1 Objetivos

Os principais objetivos estabelecidos no presente trabalho podem ser apresentados como se segue:

- Revisar a literatura disponível acerca das metodologias URANS e LES, bem como as estratégias de modelagens empregadas;
- Implementar modelagens híbridas URANS-LES para fechamento da turbulência, no ambiente do código MFSim, desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia;
- Caracterizar e validar as modelagens híbridas implementadas, comparando seu desempenho em casos clássicos de *benchmark*.

1.2 Metodologia

Propõe-se com o presente trabalho realizar a implementação e validação de modelos híbridos no ambiente do código MFSim. O mesmo, desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFlab), se caracteriza, desde sua concepção, por modelos LES para fechamento da turbulência. Recentemente, esforços têm sido feitos (MELO, 2017) para ampliar o leque de modelos de fechamento disponíveis no código (Tabela 1), que hoje já conta com modelos da linha URANS.

Para as variantes híbridas implementadas aproveitaram-se de ambas as bases existentes no código, a saber URANS e LES. Os novos modelos híbridos são caracterizados e têm suas performances comparadas em casos clássicos, como o escoamento sobre um degrau (JOVIC; DRIVER, 1994) e o escoamento no interior de uma cavidade com tampa deslizante (PRASAD; KOSEFF, 1989). Por fim, todos os modelos serão avaliados em uma aplicação

Tabela 1 – Modelos de fechamento para a turbulência disponíveis no código MFSim no início do presente trabalho.

URANS	LES
Spalart-Allmaras (SPALART; ALLMARAS, 1992) k- ω (WILCOX, 1988) k- ω SST (MENTER, 1994)	Smagorinsky (SMAGORINSKY, 1963) Dinâmico (GERMANO <i>et al.</i> , 1991; LILLY, 1992)

industrial, a saber o escoamento ao redor de um prisma triangular (SJUNNESSON; HENRIKSSON; LOFSTROM, 1992).

1.3 Escopo da Dissertação

A presente dissertação está organizada como se segue. No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica abrangendo as principais características dos escoamentos turbulentos, além de um breve retrato do desenvolvimento histórico de seu estudo. Também são abordadas as estratégias de modelagens para o fechamento da turbulência mais conhecidas, com destaque para as modelagens híbridas.

No capítulo 3 trata-se da modelagem matemática utilizada no presente trabalho. São deduzidas as equações filtradas da continuidade e de Navier-Stokes. Equações estas que servirão como base para a apresentação das diferentes modelagens de fechamento aqui utilizadas. Serão discutidas as modelagens: LES, proposta por Smagorinsky (1963) e modificada por Germano *et al.* (1991) e Lilly (1992); URANS, propostas por Spalart & Allmaras (1992) e Menter, Kuntz & Langtry (2003); bem como dos modelos híbridos, propostos por Spalart *et al.* (1997), Menter, Kuntz & Bender (2003), Coder (2015) e Menter & Egorov (2005).

No Capítulo 4 são discutidos os detalhes mais relevantes da modelagem numérica utilizada nas simulações propostas no presente trabalho. Uma breve síntese do código MFSim é apresentada, além das principais modificações realizadas para implementação dos modelos híbridos.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos para três casos distintos. Os modelos DES são avaliados no escoamento sobre o degrau descendente de Jovic & Driver (1994). Os modelos SAS, por sua vez, são testados na cavidade com tampa deslizante, estudada por Prasad & Koseff (1989). Por fim, ambas as classes de modelos são aplicadas, juntamente com os modelos puramente URANS e LES, no escoamento sobre um prisma triangular, experimentado por Sjunnesson, Henriksson & Lofstrom (1992).

As conclusões obtidas por meio dos casos estudados, bem como sugestões para trabalhos futuros, são apresentadas no Capítulo 6.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Os escoamentos turbulentos: breve histórico

À luz do seu desenvolvimento histórico, o estudo matemático dos escoamentos turbulentos foi impulsionado por Claude Louis Marie Henri Navier (1785 – 1836). Ele ficou conhecido pela primeira dedução das equações de movimento de um fluido viscoso (BISTAFA, 2018), em 1822, na sua obra “*Sur les lois du mouvement des fluides*”. Embora não conhecesse o conceito de tensões cisalhantes em um fluido, Navier deduziu suas equações baseando-se em modificações realizadas na equação de Euler para fluidos invíscidos, bem como em considerações sobre as forças de interação entre as moléculas existentes nos fluidos.

Sete anos após a morte de Navier, Adhémar Jean Claude Barré Saint-Venant (1797 – 1886) realizou uma nova dedução das equações do movimento para um fluido viscoso, introduzindo, pela primeira vez, o conceito de tensões internas viscosas. Seu trabalho de 1843, “*Note à joindre un mémoire sur la dynamique des fluides*” questionou os argumentos moleculares de Navier, identificando a viscosidade como multiplicador dos gradientes de velocidade do escoamento.

Compartilhando das mesmas ideias, George Gabriel Stokes (1819 – 1903) publicou em 1845 seu famoso artigo “*On the theory of internal friction of fluids in motion*”, onde também apresentava a dedução das equações do movimento em um fluido, levando em conta seu atrito interno. Mesmo sabendo que outros pesquisadores haviam obtido resultados semelhantes, Stokes considerou que seus resultados haviam sido obtidos por meio de hipóteses suficientemente diferentes para justificar sua publicação (FREIRE, 2002).

Osborne Reynolds, por sua vez, estudou com maestria as mudanças experimentadas por um escoamento ao passar de um regime laminar para turbulento. Nos artigos “*An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels*”, publicado em 1883, e “*On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*”, de 1895, Reynolds introduziu o adimensional mais importante da mecânica dos fluidos, chamado, em sua homenagem, de número de Reynolds.

Contemporâneo de Reynolds, Joseph Valentim Boussinesq (1842 – 1929), analisando o problema dos escoamentos turbulentos, vislumbrou a formação dos turbilhões por meio da ação da viscosidade. Ao contrário de Navier e Stokes, Boussinesq deduziu que a ação da viscosidade não dependia unicamente do fluido, mas também da posição dentro

do escoamento e do "grau de turbulência" do mesmo. Em seu trabalho de 1877, "*Essai sur la théorie des eaux courantes*" apresenta alguns resultados matemáticos nesse sentido, devidamente validados com dados experimentais. Boussinesq também começou a elaborar o conceito de grandezas médias e flutuações. Em 1896, estabeleceu, sem conhecimento prévio, o que chamamos hoje de equações médias de Reynolds (1895).

Ludwig Prandtl (1875 – 1953) abriu a era moderna da mecânica dos fluidos com sua revolucionária teoria de camada limite. Antes de suas descobertas, a maioria dos trabalhos em mecânica dos fluidos resumia-se à construção de escoamentos potenciais. Embora apresentassem consistência matemática, tais escoamentos guardavam pouca relação com os escoamentos reais observados na natureza. Um exemplo de clara contradição são alguns escoamentos potenciais que resultam em arrasto nulo.

Prandtl percebeu que a clássica teoria potencial poderia ser aplicada em quase todo escoamento, exceto em pequenas regiões próximas às paredes. Nelas, os efeitos viscosos precisariam ser levados em consideração. Tais ideias foram expostas no artigo "*Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*", apresentado em 1904 em um congresso de matemática. Nos anos que se seguiram, com auxílio de alunos como Paul Richard Heinrich Blasius (1883 – 1970), Herman Schlichting (1907 – 1982) e Walter Tollmien (1900 – 1968), Prandtl desenvolveu suas ideias. Dentre suas principais contribuições, podemos citar (FREIRE, 2002):

- a teoria do comprimento de mistura;
- a distribuição logarítmica da velocidade;
- a lei do atrito;
- a especificação de modelos diferenciais de fechamento para a turbulência com o auxílio da equação da energia cinética turbulenta;
- a descrição de escoamentos sobre superfícies rugosas.

Seguindo uma nova linha de estudos, Geoffrey Ingram Taylor (1886 – 1975) foi o precursor da teoria estatística da turbulência. Entre 1915 e 1938, produziu diversos trabalhos de grande qualidade sobre o assunto. Em "*Experiments with rotating fluids*" (1921) e "*Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders*" (1923), Taylor estabeleceu pela primeira vez, critérios matemáticos para a previsão da transição turbulenta.

Famoso por sua pesquisa sobre a natureza da emissão de vórtices em escoamentos a jusante de um corpo rombudo, von skollokislaki Kármán Todor (1881 – 1963), conhecido como Theodore von Karman, também se destacou por suas contribuições na teoria

estatística da turbulência. Trabalhos como “*On the statistical theory of turbulence*” (1937), “*On the statistical theory of isotropic turbulence*” (1938), “*Progress in the statistical theory of turbulence*” (1948) e “*On the concept of similarity in the theory of isotropic turbulence*” (1949) eram rivais de qualidade apenas dos trabalhos de Taylor e Kolmogorov (FREIRE, 2002).

Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987) foi um grande matemático, com mais de 300 artigos relevantes publicados em diversas áreas. Dentre eles, 4 se tornaram de grande importância no estudo da turbulência nos fluidos, “*The local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid for very large Reynolds number*” (1941), “*On generation(decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid*” (1941), “*Dissipation of energy in locally isotropic turbulence*” (1941) e “*The equation of turbulent motion in an incompressible viscous flow*” (1942).

Além dos grandes pesquisadores citados acima, por se tratar de um problema com alto grau de complexidade, a turbulência nos fluidos atraiu ao longo dos anos a atenção de muitos outros estudiosos. Richard Feynman (1918 – 1988), renomado físico norte-americano do século XX, ganhador do Nobel de física em 1965, descreveu a turbulência como “*the most important unsolved problem of classical physics*”. O matemático Horace Lamb (1849 – 1934), por sua vez, disse: “*I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electro-dynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. About the former, I am really rather optimistic*”.

Feynman, Lamb, dentre outros estudiosos, externaram a necessidade de se aprofundar e compreender, de fato, os mecanismos por trás da turbulência nos fluidos. Hoje, algumas décadas depois, mesmo reconhecendo a notável contribuição destes grandes pesquisadores, ainda há muito a se esclarecer sobre este terrível e tão maravilhoso fenômeno.

2.2 Origens da turbulência nos fluidos

Em escoamentos originalmente laminares, a turbulência se desenvolve tipicamente a partir da amplificação de instabilidades a altos números de Reynolds. Para compreender melhor este processo, e também entender a influência do número de Reynolds na estabilidade dos escoamentos, é útil pensar em termos de um sistema massa-mola-amortecedor, como o sistema de suspensão de um carro.

Dirigindo ao longo de uma estrada acidentada, as molas agem para reduzir o movimento experimentado pelos passageiros. Se não houvessem amortecedores, no entanto, não haveria amortecimento do movimento e o carro continuaria a oscilar por muito tempo. Assim, os amortecedores, através de uma ação de amortecimento viscoso, transformam a energia das oscilações, reduzindo a amplitude das mesmas. Se a ação viscosa for

suficientemente forte, as oscilações podem desaparecer rapidamente, e os passageiros poderão viajar sem incômodos. Entretanto, se os amortecedores não estiverem em boas condições, as oscilações não serão amortecidas, podendo, até mesmo, serem amplificadas se a frequência de excitação estiver na faixa correta. O carro torna-se então instável e extremamente difícil de ser controlado.

Em um escoamento, interpretamos o número de Reynolds como a razão entre as forças de inércia (ou seja, a força dada pela produto massa x aceleração) e as forças viscosas. Com baixos números de Reynolds, as forças viscosas são grandes quando comparadas com as forças de inércia, e o escoamento se comporta como um carro com um bom sistema de suspensão. Pequenas perturbações no campo de velocidade, criadas por pequenas regiões de rugosidade na superfície ou perturbações no campo de pressão, oriundas de fontes externas, tais como vibrações na superfície ou ondas sonoras mais fortes, serão amortecidas e, portanto, não amplificadas.

Este é o caso de escoamentos em dutos a Reynolds inferiores ao valor crítico de, aproximadamente, 2300 (com base no diâmetro do tubo e na velocidade média), bem como para camadas limite com um número de Reynolds inferior a cerca de 200.000 (com base na espessura da camada e a velocidade da corrente livre). A medida que o número de Reynolds aumenta, no entanto, a ação do amortecimento viscoso torna-se comparativamente menor e, em algum momento, torna-se possível que pequenas perturbações cresçam, assim como no caso de um carro com amortecedores danificados. O escoamento pode se tornar instável e, por sua vez, experimentar a transição para um regime turbulento onde grandes variações no campo de velocidade podem ser mantidas.

Se as perturbações forem muito pequenas, como no caso de perturbações originadas por uma superfície muito lisa, ou se o comprimento de onda da perturbação não estiver próximo do comprimento selecionado pelo escoamento, a transição para a turbulência ocorrerá a um número de Reynolds superior ao valor crítico. Assim, o ponto de transição não corresponde a um único número de Reynolds, sendo possível atrasar a transição para valores relativamente grandes controlando o ambiente de perturbação. Em números de Reynolds muito elevados, no entanto, não é possível manter o escoamento laminar uma vez que, nestas condições, mesmo as menores perturbações serão amplificadas.

É interessante observar que, uma vez iniciado o processo de amplificação, a turbulência necessita de energia para se manter. Um dos responsáveis por manter as flutuações de velocidade é o cisalhamento. Escoamentos turbulentos são, geralmente, escoamentos cisalhantes. Se o escoamento atinge uma região onde não exista cisalhamento, ou outro mecanismo que transfira energia para que a turbulência se mantenha, ela decai. Nesse caso, o número de Reynolds local diminui, e o escoamento tende a voltar a ser laminar. Um exemplo desse comportamento é a turbulência produzida por uma grelha em um túnel de vento.

Logo, sem a transformação ou transferência de energia, a turbulência não se mantém. Com isso em mente, podemos imaginar outras formas de fazer com que um escoamento turbulento volte a ser laminar, ou mesmo evitar que um regime laminar se torne turbulento. Todas as soluções passam por transformar a energia cinética do escoamento. Isso acontece, por exemplo, em escoamentos turbulentos onde há a presença de um campo magnético e em escoamentos atmosféricos com estratificação estável (TENNEKES; LUMLEY, 1972).

2.3 Características dos escoamentos turbulentos

Embora não exista ainda uma definição que contemple plenamente todos os fenômenos físicos observados em um escoamento turbulento, existe um consenso quanto às suas principais características (TENNEKES; LUMLEY, 1972; LESIEUR, 2008; FREIRE, 2002; SILVEIRA-NETO, 2017):

- **Larga banda de escalas:** Escoamentos turbulentos são compostos por estruturas dotadas de topologias, dimensões e frequências muito diversificadas. Estas estruturas coexistem e interagem entre si de forma intensa e altamente não linear. A multiplicidade de escalas temporais e espaciais constitui uma das características fundamentais da turbulência nos fluidos;
- **Irregularidade:** Escoamentos turbulentos são caóticos, pois apresentam alto grau de aleatoriedade, traduzida por um sistema determinístico que exhibe sensibilidade quanto às suas condições iniciais. Dizemos “determinístico”, pois o comportamento irregular do sistema (definido pelas equações de Navier-Stokes) se origina das interações não lineares entre seus termos, e não de parâmetros de entrada ruidosos ou aleatórios. Tais interações não lineares são responsáveis pela divergência das soluções, quando submetidas a variações sutis (ou mesmo nenhuma variação) nas condições iniciais. Logo, métodos estatísticos são comumente empregados nos estudos envolvendo escoamentos turbulentos;
- **Difusividade:** Responsável pelas elevadas taxas de transferência de massa, quantidade de movimento linear e energia térmica, observadas em todos os escoamentos ditos turbulentos;
- **Elevados números de Reynolds:** A turbulência normalmente se origina através da amplificação de perturbações nos escoamentos laminares. Os efeitos advectivos, não lineares, são responsáveis por este fenômeno. Por outro lado, os efeitos difusivos são amortecedores da formação de instabilidades. O número de Reynolds pode ser definido como a razão entre os efeitos advectivos e difusivos. Assim, para que a supracitada amplificação de perturbações ocorra e, conseqüentemente a

transição à turbulência, são necessários elevados números de Reynolds para que se ocorram escoamentos turbulentos.

- Tridimensionalidade: Qualquer escoamento turbulento é tridimensional, com a presença de flutuações de vorticidade. Do ponto de vista físico, a vorticidade tem origem através de um processo de estiramento de vórtices que, por sua vez, é um mecanismo puramente tridimensional;
- Rotacionalidade: A turbulência é um fenômeno rotacional;
- Transformativos: Escoamentos turbulentos são transformativos, pois as tensões viscosas realizam trabalho de deformação, o que leva a um aumento da energia interna do fluido às custas da energia cinética do escoamento;
- Contínuo: A turbulência é um fenômeno contínuo. Mesmo as menores estruturas existentes em um escoamento turbulento são muito maiores do que qualquer escala molecular.

Por fim, é importante ainda nos atentarmos para o fato que a turbulência não é uma propriedade do fluido, mas sim do escoamento. Assim, é incorreto afirmar que o ar é mais turbulento que a água, ou vice versa. Se o número de Reynolds for suficientemente elevado, grande parte da dinâmica dos escoamentos turbulentos independe das propriedades do fluido.

2.4 Dinâmica turbilhonar de escoamentos turbulentos

O estudo numérico de escoamentos turbulentos se apoia na forma discreta das equações de balanço de quantidade de movimento linear (Navier-Stokes), balanço de massa (continuidade) e balanço de energia térmica. No presente trabalho, serão abordados apenas escoamentos isotérmicos, o que nos permite abrir mão do balanço de energia térmica.

Para fins de clareza, serão apresentadas abaixo as equações filtradas que compõem o modelo matemático para escoamentos isotérmicos e incompressíveis, em um referencial inercial. Estas equações serão deduzidas no Capítulo 3, baseando-se no conceito de filtragem (LEONARD, 1974).

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}. \quad (2.2)$$

onde \bar{u}_i é a componente i da velocidade filtrada, \bar{p} é a pressão filtrada, \bar{f}_i representa um campo de forças externo filtrado, τ_{ij} é o tensor global submalha, ρ a massa específica e ν a viscosidade do fluido.

Em um escoamento tridimensional, fazendo $i = 1, 2, 3$, o modelo matemático apresentado acima nos fornece 4 equações: continuidade e balanço de quantidade de movimento linear para as 3 componentes de velocidade. Entretanto, temos 10 incógnitas para serem resolvidas: 3 componentes de velocidade, pressão e 6 momentos estatísticos de segunda ordem (componentes do tensor simétrico τ_{ij}). Do ponto de vista matemático dizemos que o sistema é aberto, ou seja, existem mais incógnitas do que o número de equações disponíveis. Esse é o chamado problema de fechamento da turbulência.

As diferentes filosofias de modelagem da turbulência buscam avaliar o tensor global submalha, τ_{ij} , propondo equações adicionais, ou mesmo simplificações, de forma a se obter o mesmo número de equações que incógnitas. Ora, calculá-lo de forma completa envolveria resolver todas as estruturas presentes no escoamento em estudo. Tais estruturas se apresentam em diversas escalas de tempo e comprimento que, por sua vez, estão diretamente relacionadas ao número de Reynolds do escoamento. Quanto maior o número de Reynolds, menores serão as escalas características de Kolmogorov, o que tornaria o cálculo demasiadamente dispendioso.

Essas informações estão contempladas na Fig. 1, onde vemos, de forma esquemática, uma distribuição espectral de energia cinética turbulenta. Esta é uma ferramenta poderosa na compreensão da dinâmica turbilhonar em função das diferentes estruturas que a caracterizam. No eixo vertical temos a densidade espectral de energia cinética turbulenta ($E(k, t)$), enquanto que, no eixo horizontal, números de onda (k).

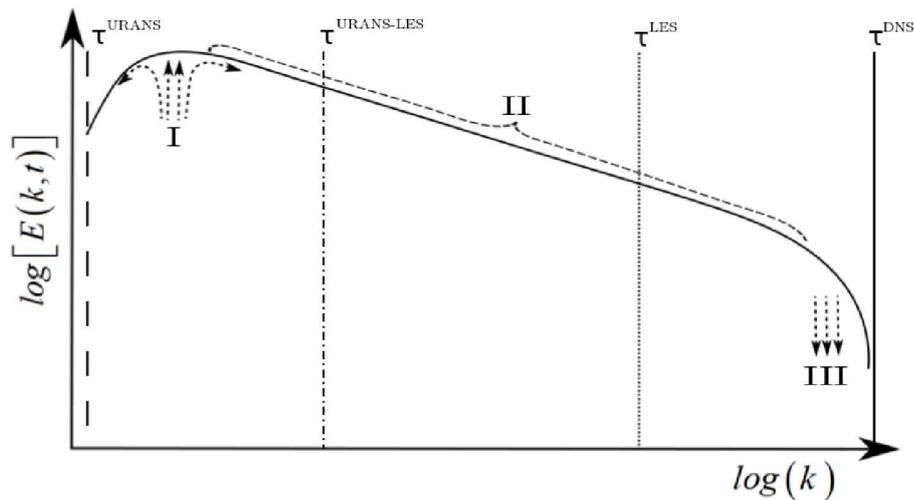


Figura 1 – Esquema simplificado da densidade espectral de energia cinética turbulenta de um escoamento. Adaptado de Silveira-Neto (2017).

De forma simplificada, o que vemos é a distribuição de energia cinética turbulenta

do escoamento entre as estruturas que o compõe. As maiores estruturas (menores números de onda) são portadoras de maior quantidade de energia. Quanto maior o número de onda, menor é a estrutura turbilhonar e menor a quantidade de energia por ela transportada. Nesse ponto, propõe-se uma analogia para melhor compreensão dos fenômenos envolvidos.

Em uma partida de futebol, podemos dividir o campo de jogo em 3 zonas: defesa, meio-campo e ataque. Estas zonas podem ser povoadas de diferentes formas, dependendo do esquema tático a ser aplicado pela equipe. Entretanto, durante o jogo, a zona mais populosa é sem dúvida o meio-campo.

Na defesa é onde tudo começa. O goleiro põe a bola em jogo e os zagueiros iniciam a jogada. A bola é então passada ao setor de meio-campo, onde ela pode ficar por um bom tempo. Vários passes são trocados em busca da melhor jogada sem, necessariamente, observarmos um padrão. Ou seja, a movimentação da bola é aleatória, e depende das condições do gramado, do posicionamento do adversário, das condições climáticas, etc. Por fim, a bola chega ao ataque, onde o objetivo final é simples, o gol.

Na banda de injeção de energia (I), a bola entra em jogo. Grandes estruturas turbilhonares, caracterizadas por baixos números de onda, capturam energia e injetam no escoamento. Na zona inercial (II), a bola chega ao meio-campo. A energia cinética é então transportada e transferida, de forma mais intensa, entre as diferentes estruturas, caracterizadas por diferentes números de onda. Da mesma forma que os passes trocados no meio-campo podem ocorrer aleatoriamente, a transferência de energia na zona inercial é não linear. Ou seja, grandes estruturas trocam energia, simultaneamente, com estruturas maiores e menores.

Na banda de transformação viscosa¹ (III), o que se espera é o gol. Aqui, como o próprio nome indica, a energia cinética turbulenta é transformada em energia interna, pela ação da viscosidade. Obviamente, num jogo de futebol, passes são trocados em todos os setores, gols podem ser feitos do meio-campo e a bola pode ser posta em jogo por outros caminhos, se não a defesa. Da mesma forma, a transferência não linear de energia, a transformação viscosa e a injeção de energia podem ocorrer em todo o espectro. Porém, essas ações são mais notórias nas regiões previamente indicadas.

Uma observação ainda é importante. Num jogo de futebol, nem sempre a bola segue somente para frente. Por vezes, em uma ação frustrada de ataque, a equipe pode optar por retornar a bola para a zaga, buscando, talvez, se reorganizar para uma nova investida. Da mesma forma, a energia não flui, exclusivamente, dos menores números de onda para

¹ Essa terminologia será utilizada no presente trabalho substituindo o que na literatura é apresentado como "dissipação viscosa". Ora, o uso da palavra "dissipação" dá ao leitor a ideia de que algo está desaparecendo, o que não é o caso. Além disso, sua utilização torna pouco intuitivo o correto entendimento do fenômeno ao qual esta palavra se refere. Fisicamente, trata-se de um processo de "transformação" de uma informação em outra, a saber a transformação da energia cinética turbulenta em energia térmica.

os maiores. A transferência de energia das menores estruturas para as maiores é chamada na literatura de cascata inversa de energia (do inglês *backscattering*). Este movimento é fisicamente possível, porém extremamente complexo de se modelar matematicamente.

2.5 A modelagem matemática da turbulência

Uma vez que temos uma ideia da dinâmica turbilhonar do escoamento, somos agora capazes de compreender melhor as estratégias de modelagem empregadas no estudo matemático da turbulência. Ainda na Fig. 1 podemos observar algumas marcações que irão nortear nosso raciocínio. As linhas verticais ilustram o alcance das diferentes modelagens matemáticas utilizadas.

A forma mais direta e simples de se resolver um escoamento é através da Simulação Numérica Direta (*Direct Numerical Simulation* - DNS). A linha cheia posiciona esta abordagem dentro do espectro de energia. Nesse caso, todas as estruturas são calculadas, pois a resolução da simulação contempla todos os números de onda existentes. Logo, $\tau^{DNS} = 0$. O fator limitante do uso dessa abordagem é o custo computacional do cálculo. Para avaliar todo o espectro de energia é necessário resolver todas as estruturas existentes no escoamento. Para tanto, malhas extremamente finas (da ordem do maior número de onda) são utilizadas em conjunto com baixíssimos passos de tempo.

Ora, como já dito, quanto maior o número de Reynolds de um escoamento, maior (em magnitude) serão os números de onda encontrados. Conseqüentemente, mais onerosa se torna a utilização de DNS. Assim, chegamos a mais uma conclusão importante: utilizamos DNS apenas para escoamentos a baixos números de Reynolds. Casos industriais são, e continuarão a ser por um bom tempo, impraticáveis com esta abordagem.

Sabendo disso, os estudiosos buscaram outra forma de se avaliar as propriedades de um escoamento turbulento. A estratégia mais difundida consiste na modelagem do tensor global submalha, ou seja, ao invés de calculá-lo diretamente, buscam-se formas de avaliá-lo indiretamente, diminuindo portanto os custos da simulação. Com exceção de DNS, todas as demais abordagens aqui citadas farão uso desse artifício.

A primeira alternativa ao uso de DNS foram os modelos de fechamento baseados nas Equações Médias de Reynolds (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes* - RANS). Em muitas aplicações de engenharia, a avaliação minuciosa das estruturas turbilhonares que compõem um escoamento é preterida diante de valores médios como velocidade, pressão, etc. Sendo assim, nenhuma parte do espectro de energia, como indicado pela linha tracejada na Fig. 1, é resolvida por esta abordagem. Todo o espectro é modelado. Logo, é intuitivo que malhas mais grossas possam ser usadas, o que diminui consideravelmente o custo computacional das simulações realizadas com essa classe de modelos.

Entretanto, uma vez que estamos utilizando uma malha mais grossa, em conjunto com a modelagem RANS, não resolvemos as estruturas existentes no escoamento. prontamente percebe-se que se faz necessário um mecanismo que contemple a física destas estruturas não calculadas, a saber, principalmente, a transformação viscosa. Boussinesq (1877) propôs, então, a utilização de uma variável adicional chamada de viscosidade turbulenta (ν_t), para modelar o tensor global submalha, conforme apresentado pela Eq. (2.3). Esta variável tem como objetivo intensificar o processo de difusão, uma vez que se soma à viscosidade molecular do fluido (coeficiente difusivo da equação de transporte), compondo o que se chama de viscosidade efetiva.

$$\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j} = -\nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \left(k + \nu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}, \quad (2.3)$$

onde ν_t é a viscosidade turbulenta, k a energia cinética turbulenta e δ_{ij} o delta de Kronecker.

A viscosidade turbulenta, por sua vez, pode ser calculada de diferentes formas. De fato, temos na avaliação da viscosidade turbulenta a gênese de uma ampla gama de modelos de fechamento para a turbulência. Utilizando a nomenclatura proposta por Wilcox (2006), podemos classificar estes modelos da seguinte forma:

- **Modelos algébricos ou a zero equações de transporte:** nenhuma equação de transporte adicional é resolvida neste caso. A teoria do comprimento de mistura de Prandtl é utilizada, em conjunto com a hipótese de Boussinesq, para o fechamento da turbulência. Exemplos: Cebeci e Smith (1974), Baldwin e Lomax (1978).
- **Modelos a uma equação de transporte:** uma equação de transporte adicional é resolvida visando avaliar a viscosidade turbulenta. O primeiro modelo desta classe foi postulado por Prandtl (1945), que propôs o cálculo da viscosidade turbulenta a partir da solução de uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta. Posteriormente, outros modelos foram propostos. Exemplos: Baldwin e Barth (1990), Spalart-Allmaras (1992), Menter (1994).
- **Modelos a duas equações de transporte:** duas equações de transporte adicionais são resolvidas visando avaliar a viscosidade turbulenta. Kolmogorov propôs o primeiro modelo a duas equações, chamado de $k-\omega$. Launder difundiu a utilização dessa classe de modelos no final do século XX com o modelo $k-\epsilon$. Na mesma época, outros pesquisadores (ver Wilcox (2006)) revisitaram e aperfeiçoaram o modelo inicialmente proposto por Kolmogorov, tornando-o amplamente empregado nos meios acadêmico e industrial, dada sua conhecida superioridade ao modelo $k-\epsilon$ em situações envolvendo a existência de gradientes adversos de pressão. Exemplos: $k-\epsilon$, $k-\omega$, $k-\omega$ SST.
- **Modelos de transporte das tensões de Reynolds:** são resolvidas equações de transporte adicionais para as componentes do tensor de Reynolds. Estes modelos,

apesar de ainda utilizarem a hipótese de Boussinesq para o fechamento, têm desempenho sabidamente superior em escoamentos com fortes anisotropias, dado à forma mais criteriosa de se avaliar o tensor de Reynolds. Em contra partida, apresentam custo computacional elevado em relação às demais classes supracitadas, além de apresentarem alto grau de instabilidade numérica, tornando sua implementação delicada. Exemplos: *Reynolds Stress Model* - RSM, *Algebraic Reynolds Stress Model* - ASM, *Explicit Algebraic Reynolds Stress Model* - EARSM.

Existem ainda modelos de fechamento da classe RANS que não se enquadram na classificação acima, proposta por Wilcox (2006). Como exemplo podemos citar o modelo *Transition k-kl- ω* (WALTERS; COKLJAT, 2008) e o modelo *Transition SST* (LANGTRY; MENTER, 2009), que resolvem, respectivamente, três e quatro equações de transporte adicionais, objetivando avaliar o processo de transição à turbulência.

Apesar de serem suficientes em grande parte dos problemas de engenharia, informações médias do escoamento deixam a desejar em algumas situações. Estudos de vibrações induzidas por vórtices (*Vortex Induced Vibration* - VIV), como os realizados por RIBEIRO NETO *et al.* (2019) seriam impossíveis com a utilização de modelos RANS, uma vez que o desprendimento de estruturas turbilhonares não seria capturado.

Outro caso problemático para ambas as classes de modelos citadas são escoamentos característicos em estudos meteorológicos. Realizar DNS ainda é proibitivo pelo custo computacional, enquanto que modelos RANS não entregam nenhuma informação flutuante dos campos de velocidade e pressão, informações estas essenciais nestas simulações. Smagorinsky (1963), buscou uma alternativa, que chamamos hoje de Simulação das Grandes Escalas (*Large Eddy Simulation* - LES).

Entre resolver (DNS) ou modelar (RANS) todo o espectro de estruturas, Smagorinsky propôs um meio termo. Com a modelagem LES, parte do espectro é resolvida, conforme indicado pela linha tracejada preta, na Fig. 1. Esta linha também delimita o número de onda de corte do cálculo, limitado pela resolução da malha utilizada. Dessa forma boa parte da espectro de estruturas é resolvido, a saber as maiores estruturas, portadoras da maior parte da energia do escoamento. A interação dessas estruturas resolvidas com aquelas não capturadas pela resolução é modelada. O próprio Smagorinsky (1963) propôs um modelo, que hoje leva o seu nome, utilizando a hipótese de Boussinesq nesta modelagem. Posteriormente, melhorias foram feitas por Germano *et al.* (1991) e Lilly (1992).

2.6 Diferenças entre as modelagens RANS e URANS

Na literatura, tem se tornado comum nomear os modelos RANS de URANS (*Unsteady* RANS) sempre que a solução calculada é transiente (VON TERZI; FRÖHLICH, 2008). Sendo assim, preserva-se a derivada temporal, utilizando o modelo RANS na busca de capturar parte do comportamento transiente do escoamento, sem nenhum ajuste de coeficientes. Entretanto, URANS não é uma simples aplicação de modelos RANS para escoamentos em regime transiente (HAASE; BRAZA; REVELL, 2009).

A grande maioria dos modelos RANS foram formulados e calibrados com base em escoamentos estáveis, próximos a condições de equilíbrio. Com a derivada temporal, estes modelos têm agora que operar em um regime altamente instável, onde o espectro é parcialmente resolvido e parcialmente modelado. Entretanto, os modelos RANS foram desenvolvidos para representar, estatisticamente, todo o espectro turbulento, e não uma porção filtrada, mal definida e dependente da malha. Sendo assim, a combinação entre as partes modeladas e resolvidas do espectro tende a ser uma representação deficiente da realidade, a menos que limitantes *ad-hoc* sejam utilizados (HAASE; BRAZA; REVELL, 2009).

VON TERZI & FRÖHLICH (2008) apresentam o caso de um escoamento ao redor de um prisma de base quadrada, investigado por (WIENKEN; STILLER; KELLER, 2006). Neste experimento foram utilizados URANS e LES, obtendo por meio desta última abordagem boa concordância com as medições experimentais do número de Strouhal (St). O fato da modelagem URANS não apresentar resultados satisfatórios para o número de Strouhal é preocupante, uma vez que esta é uma propriedade muito simples de se avaliar (VON TERZI; FRÖHLICH, 2008).

Em contra partida, (MIKUZ; TISELJ, 2017) aplicaram com sucesso uma formulação URANS do modelo $k-\omega$ SST no estudo do escoamento turbulento em um conjunto de varas horizontais, conhecido como experimento de MATiS-H (CHANG; KIM; SONG, 2014). Os autores apontam ainda que os resultados obtidos com a metodologia URANS são comparáveis com os melhores resultados registrados para este problema, obtidos, por sua vez, por meio de uma modelagem híbrida.

Os exemplos apresentados apontam que a utilização de modelos URANS deve ser avaliada com cautela. Embora tenha sido aplicada com sucesso em muitos problemas, o uso desta abordagem ainda é discutível em alguns casos (VON TERZI; FRÖHLICH, 2008).

2.7 Limitações das metodologias URANS e LES

O uso individualizado destas duas filosofias de modelagem da turbulência tem, obviamente, pontos positivos e negativos. Visando compreender a motivação para o desenvolvimento de modelos híbridos, é interessante discutirmos as limitações das modelagens URANS e LES.

A modelagem URANS, embora seja capaz de capturar efeitos transientes, resolve uma parcela muito pequena do espectro de estruturas presentes no escoamento. Ou seja, praticamente todas as estruturas existentes no escoamento são modeladas. Isso não é, necessariamente, uma deficiência desta classe de modelos, uma vez que em muitos casos, modelos da linha URANS são calibrados exclusivamente para uma classe de problemas, fornecendo excelentes resultados quando comparados com dados experimentais. Entretanto, quando são necessárias informações flutuantes dos campos característicos de um escoamento, a modelagem URANS não é suficiente.

Davidson & Peng (2003) utilizaram uma modelagem híbrida URANS-LES no estudo do escoamento desenvolvido no interior de um canal. Conforme indicado na Fig. 2, nas regiões próximas às paredes, o escoamento foi resolvido por meio de uma modelagem URANS, baseada no modelo $k-\omega$. Na região central, utilizou-se a modelagem LES, onde a viscosidade turbulenta foi avaliada através de uma equação de transporte. Na interface entre estas regiões, a solução URANS foi utilizada como condição de contorno para a modelagem LES. Observou-se que o escoamento calculado pelo modelo URANS, embora resolvesse algumas escalas de tempo e de comprimento, não fornecia informações espectrais relevantes para a região LES.

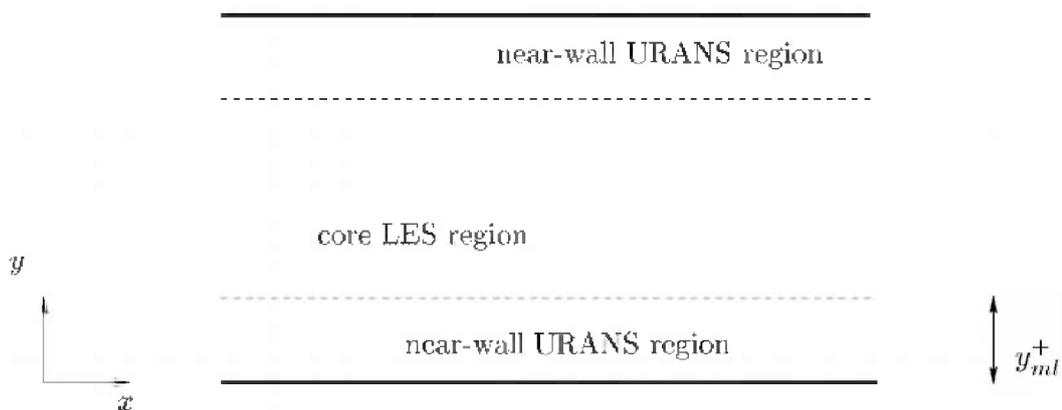


Figura 2 – Regiões para aplicação das modelagens URANS e LES. Adaptado de Davidson & Peng (2003).

Por sua vez, a modelagem puramente LES ainda é dispendiosa, principalmente em escoamentos que envolvam a presença de paredes, como é o caso do canal. A escala

característica (L) das maiores estruturas presentes no escoamento pode ser estimada por:

$$L = \kappa y, \quad (2.4)$$

onde y é a distância à parede e κ é uma constante.

Na parede, ou seja, no limite de y tendendo a zero, esta relação retorna escalas cada vez menores. Felizmente, a viscosidade do fluido previne escalas menores que o limite de Kolmogorov de existirem. Por sua vez, a camada limite que se forma, responsável pela ação de amortecimento viscoso citado, tem espessura proporcional ao número de Reynolds característico do escoamento. Portanto, mesmo que não existam estruturas menores que a escala de Kolmogorov para serem resolvidas próximas às paredes, ainda sim se faz necessário, especialmente para elevados números de Reynolds, grande resolução nestas regiões.

Esta resolução é quantificada na Tabela 2, na qual apresentam-se dados estimados para a solução de um canal plano periódico, com dimensões reduzidas dadas por $L_x = 4H$, $L_y = H$ e $L_z = 1,5H$, com H igual a altura do canal. O número de células necessárias (N_t) cresce consideravelmente com o número de Reynolds do escoamento (Re_τ). Isto não quer dizer que não é possível resolver escoamentos com presença de paredes através da modelagem LES, mas sim que os custos desse tipo cálculo são elevados.

Tabela 2 – Número de células vs número de Reynolds para o escoamento no interior de um canal plano periódico (MENTER, 2012).

Re_τ	500	10^3	10^4	10^5
N_t	5×10^5	2×10^6	2×10^8	2×10^{10}

2.8 Modelagens híbridas para o fechamento da turbulência

2.8.1 Detached Eddy Simulation (DES)

A modelagem *Detached-Eddy Simulation* (DES) foi proposta por Spalart *et al.* (1997). Historicamente, trata-se do primeiro modelo híbrido apresentado. A idéia central é combinar a metodologia URANS, resolvida nas regiões de camada limite, com a modelagem LES, utilizada em regiões de cisalhamento livre. Sua implementação é baseada na utilização de um modelo URANS de referência, porém, com uma escala de comprimento característico para a turbulência ajustada à resolução local da malha. Bons resultados obtidos por diversos autores, incluindo Travin *et al.* (1999), Constantinescu & Squires (2000), Shur *et al.* (1999), bem como sua facilidade de implementação (BUNGE; MOCKETT; THIELE, 2007), motivaram maiores desenvolvimentos desta classe de modelos (HAASE; BRAZA; REVELL, 2009).

Estes desenvolvimentos culminaram no surgimento de diversos aprimoramentos da modelagem DES. Dentre eles podemos citar *Delayed Detached-Eddy Simulation* (DDES), proposta por Spalart *et al.* (2006), com objetivo de diminuir a sensibilidade do modelo original ao refinamento excessivo da malha e a *Improved Delayed Detached-Eddy Simulation* (IDDES), apresentada por Travin *et al.* (2006), que estende o formalismo da modelagem DES para outra metodologia de fechamento, chamada *Wall Modelling LES* (WMLES).

2.8.2 Scale Adaptive Simulation (SAS)

No modelo *Scale-Adaptive Simulation* (SAS), apresentado por Menter, Kuntz & Bender (2003), Menter & Egorov (2005), utiliza-se a equação de transporte para a energia cinética turbulenta (k) multiplicada por uma escala de comprimento (L), deduzida analiticamente por Rotta (1968, 1972) como base para dedução de um novo modelo. O diferencial da equação para kL , proposta por Rotta, reside no fato de que um comprimento característico para a turbulência emerge, naturalmente, no termo de acúmulo da equação. Esta é uma característica atrativa, uma vez que possibilita ao modelo reagir subitamente às mudanças de regiões resolvidas e modeladas no escoamento.

Durante o projeto DESider (*Detached Eddy Simulation for Industrial Aerodynamics*) (HAASE; BRAZA; REVELL, 2009), várias etapas de modernização da equação para kL de Rotta foram realizados. Isso possibilitou o desenvolvimento de um modelo que, sobre certas condições, automaticamente faz o balanço entre as contribuições das partes resolvidas e modeladas no cálculo das tensões viscosas do escoamento. Uma das características mais interessantes na modelagem SAS é a forma suave com que o modelo evolui de um comportamento URANS para um comportamento sub-malha (MENTER; EGOROV, 2010).

3 Modelagem Matemática

3.1 Formulação diferencial para a fluidodinâmica

O modelo matemático mais utilizado para a solução de qualquer escoamento, sob a hipótese do contínuo, tem como fundamento a equação da continuidade (balanço de massa) e as equações de Navier-Stokes (balanço de quantidade de movimento linear), apresentadas abaixo, respectivamente, em suas formas indiciais para escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{f_i}{\rho}. \quad (3.2)$$

Nestas equações, o fluido é caracterizado por suas propriedades físicas, a saber a massa específica (ρ) e a viscosidade cinemática (ν). O escoamento, por sua vez, tem suas características descritas matematicamente pelo campo de pressão (p), pelas componentes do vetor velocidade (u_i) e pelo campo de forças externas (f_i), além das forças promovidas pelo campo de pressão e pelos efeitos viscosos, com $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$ representando as direções coordenadas.

Caso o escoamento em estudo seja incompressível, isotérmico e inerte, as Eqs. (3.1) e (3.2), daqui em diante chamadas de modelo fundamental, são suficientes para descrever seu comportamento, em um referencial inercial, desprezando-se os efeitos das acelerações de Coriolis, centrípeta e angular. Entretanto, se demais fenômenos físicos são importantes, equações adicionais devem ser utilizadas.

Para escoamentos onde a transferência térmica é relevante, devemos incorporar ao modelo fundamental uma equação para o balanço deste tipo de energia.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\phi}{\rho C_p}. \quad (3.3)$$

O coeficiente de difusão de energia térmica (α) é uma propriedade física do fluido. A transferência térmica propriamente dita é caracterizada pelo campo de temperatura (T) e pela potência específica de transformação viscosa (ϕ), dada em W/m^3 .

Seguindo essa mesma lógica, outros fenômenos podem ser incorporados pela adição de equações de balanço que, por sua vez, contemplem a física a ser embutida no modelo

fundamental. Como exemplo podemos citar escoamentos que envolvam a mistura de espécies químicas, onde equações de balanço para o escalar transportado se fazem necessárias.

3.2 Equações filtradas para a fluidodinâmica

Embora tenham sido postuladas no século XIX, as equações de Navier-Stokes ainda são um grande desafio matemático. Nas soluções exatas existentes incorporam-se um grande número de simplificações que, na maioria dos casos, constituem soluções idealizadas, dificilmente observadas no mundo real. Em vista dessa dificuldade, os resultados mais realistas são obtidos por meio de soluções numéricas.

Enquanto pouco¹ se avançou no tocante à compreensão matemática desse conjunto de equações, muito se evoluiu no conhecimento sobre métodos numéricos no mesmo espaço de tempo. Isso viabilizou a crescente utilização de soluções numéricas tanto no campo científico como no meio industrial, uma vez que tais soluções aliam os requisitos de boa acurácia (quando comparadas com dados de experimentos materiais) e custo computacional viável.

A dita solução numérica é obtida através da solução do modelo matemático diferencial, postulado a nível do contínuo, em um domínio discreto. É intuitivo pensar que informações podem não ser obtidas, uma vez que nos limitamos a resolver as equações do modelo em um número finito de nós ou células. Entretanto, se o tamanho da malha é da ordem das escalas de Kolmogorov, todas as informações fluidodinâmicas podem ser avaliadas por meio do modelo fundamental (POPE, 2000).

Visando maior clareza no entendimento dos modelos que serão apresentados no presente trabalho, serão deduzidas neste capítulo o que chamamos de equações filtradas para a fluidodinâmica. Todo o formalismo matemático será feito sem a especificação da função filtro. Entretanto, será considerado que esta é um operador linear. As equações aqui deduzidas formarão a base para as diferentes metodologias de modelagem apresentadas.

Seja $\varphi(\vec{x}, t)$ uma informação genérica de um escoamento turbulento, obtida através de experimentação material ou numérica (DNS). Podemos decompor esta informação da seguinte forma:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \overline{\varphi}(\vec{x}, t) + \varphi'(\vec{x}, t), \quad (3.4)$$

¹ No instituto de matemática Clay (*Clay Mathematics Institute*) se considera o entendimento das equações de Navier-Stokes mínimo, uma vez que existem muitas provas matemáticas a serem feitas acerca, por exemplo, da existência e unicidade das possíveis soluções deste conjunto de equações. Nesse mesmo instituto se oferece um prêmio de 1 milhão de dólares para quem puder fornecer uma prova matemática para esta questão (Clay Mathematics Institute, 2018).

onde o operador $(\bar{})$ indica que a variável φ passou por um processo de filtragem. Matematicamente, este processo é realizado por meio de uma integral de convolução entre uma função de filtragem e a função a ser filtrada. No caso de uma filtragem temporal, temos:

$$\bar{\varphi}(\vec{x}, t) = \int_{\Delta t} g(t') \varphi(\vec{x}, t - t') dt'. \quad (3.5)$$

onde $g(t)$ é a função filtro e Δt o tempo de integração, o qual determina a frequência de corte do processo de filtragem, $f_c = \frac{2\pi}{\Delta t}$. Para o caso de uma filtragem espacial:

$$\bar{\varphi}(\vec{x}, t) = \int_{\Delta V} h(\vec{x}') \varphi(\vec{x} - \vec{x}', t) d\vec{x}'. \quad (3.6)$$

onde $h(x)$ é a função filtro e ΔV o volume de integração, o qual determina o número de onda de corte do processo de filtragem, $\vec{k}_c = 2\pi \left(\frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y}, \frac{1}{\Delta z} \right)$.

O processo de filtragem das equações de transporte é simplesmente um formalismo matemático que, por sua vez, faz emergir o problema de fechamento da turbulência. Em nenhum momento estes processos serão explicitamente aplicados, antes da discretização espaço-temporal das EDP's. Ora, para a discretização faz-se necessário o uso de uma malha de volumes espaciais e uma sequência de passos temporais. Assim, é natural que todos os comprimentos de onda relativos ao processo físico, que forem menores que o tamanho das células, não sejam capturados pela solução discreta. Da mesma forma, todos os efeitos físicos com tempos característicos menores que o passo de tempo utilizado não serão capturados. Logo, percebe-se que os processos de discretização no espaço e no tempo constituem, essencialmente, em filtros espacial e temporal.

Aplicando o operador filtragem às Eq. (3.1) e (3.2), resulta:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}. \quad (3.8)$$

Utilizando o processo de decomposição descrito pela Eq. (3.4), podemos reescrever as velocidades da seguinte forma:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad u_j = \bar{u}_j + u'_j. \quad (3.9)$$

Assim, podemos desenvolver o termo $\overline{u_i u_j}$ como se segue:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{u'_i u'_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j}. \quad (3.10)$$

Levando este resultado de volta à Eq. (3.8), obtemos:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}. \quad (3.11)$$

Percebemos que, em função do processo de filtragem, quatro momentos estatísticos de segunda ordem apareceram do lado esquerdo da Eq. (3.11). Lembramos que as propriedades associadas a estes momentos estatísticos são diferentes das propriedades associadas ao comumente aplicado processo de média. Aqui, todos os momentos são diferentes de zero, uma vez que a filtragem de uma flutuação não é nula, a função filtrada não é uma constante e a filtragem do produto de duas funções filtradas é diferente do produto das duas funções filtradas. De forma resumida,

$$\overline{u'_i u'_j} \neq 0, \quad \overline{u'_i \bar{u}_j} \neq 0, \quad \overline{\bar{u}_i u'_j} \neq 0, \quad \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} \neq \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (3.12)$$

Leonard (1974) propos a seguinte decomposição:

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}, \quad (3.13)$$

onde L_{ij} é o tensor de Leonard, C_{ij} o tensor cruzado submalha e R_{ij} o tensor de Reynolds submalha, dados, respectivamente, por:

$$L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \quad (3.14)$$

$$C_{ij} = \overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j}, \quad (3.15)$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}. \quad (3.16)$$

Usando as Eq. (3.13)-(3.16), podemos reescrever a Eq. (3.10), obtendo:

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \tau_{ij}, \quad (3.17)$$

o que, por fim, nos leva a:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}. \quad (3.18)$$

O tensor τ_{ij} é denominado de tensor global submalha. Com ele, modelam-se o comportamento dos três tensores já mencionados, uma vez que a modelagem em separado

dos tensores L_{ij} e C_{ij} pouco agrega em termos de qualidade de resultados (SILVEIRA-NETO *et al.*, 1993). Sendo assim, de forma resumida, a modelagem de fechamento para a turbulência consiste em, através de diferentes estratégias, modelar este tensor.

3.3 Large Eddy Simulation (LES)

As maiores estruturas existentes em um escoamento turbulento estão diretamente relacionadas à geometria característica do problema, sendo mais difíceis de se modelar, ao passo que as menores estruturas tendem à isotropia, sendo, por sua vez, mais suscetíveis à modelagem matemática. Embora não tenha sido esta a motivação inicial para o desenvolvimento da metodologia LES, em suma, esta é sua essência.

Estruturas menores que o filtro utilizado não serão, portanto, calculadas. As interações não lineares dessas menores estruturas com as maiores estruturas são modeladas por meio de uma relação adicional. Smagorinsky (1963) propôs o fechamento da Eq.(3.18) utilizando a hipótese de Boussinesq, dada pela Eq.(2.3) em conjunto com a seguinte relação para a viscosidade turbulenta:

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \bar{S}_{ij}, \quad (3.19)$$

onde C_s é a constante de Smagorinsky, Δ a escala de comprimento, calculada em função da malha utilizada na discretização, conforme:

$$\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}, \quad (3.20)$$

e \bar{S}_{ij} o tensor taxa de deformação filtrado:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.21)$$

3.3.1 Modelagem dinâmica submalha

Germano *et al.* (1991) propuseram uma modelagem dinâmica baseada no modelo de Smagorinsky (1963), onde a constante de Smagorinsky, ao invés de ser conhecida *a priori*, é avaliada dinamicamente durante a simulação. O modelo se baseia em uma identidade algébrica entre as tensões viscosas submalha, filtradas em dois níveis distintos, e as tensões viscosas resolvidas.

Partindo da Eq.(3.18), aplica-se um segundo filtro, com comprimento característico $\hat{\Delta} > \Delta$, sendo este novo comprimento múltiplo de Δ , geralmente $\hat{\Delta} = 2\Delta$, resultando em:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{u}_i \widehat{u}_j) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial x_i} \right) - T_{ij} \right] + \frac{\widehat{f}_i}{\rho_0}. \quad (3.22)$$

Subtraindo as Eq.(3.18) e Eq.(3.22) obtemos o tensor de Leonard global, ou identidade de Germano, \widehat{L}_{ij} :

$$\widehat{L}_{ij} = T_{ij} - \tau_{ij}, \quad (3.23)$$

onde T_{ij} é um tensor teste, definido como:

$$T_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{u}_i \widehat{u}_j. \quad (3.24)$$

O coeficiente dinâmico é avaliado através da relação:

$$c(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \frac{\widehat{L}_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}, \quad (3.25)$$

onde M_{ij} é definido por:

$$M_{ij} = \widehat{\Delta}^2 \left| \widehat{\overline{S}} \right| \widehat{S}_{ij} - \overline{\Delta}^2 \left| \overline{S} \right| \overline{S}_{ij}. \quad (3.26)$$

3.4 Equações Médias de Reynolds para escoamentos transientes (URANS)

Nos modelos URANS, o tensor global submalha é computado, como nos casos LES, através da hipótese de Boussinesq. Porém, aqui a viscosidade turbulenta não é avaliada em função da malha, mas sim por meio de equações de transporte adicionais. De forma sucinta, supõe-se que quanto maior o número de equações de transporte adicionais que compõem o modelo de fechamento, mais fidedigna é a avaliação do tensor global submalha e, conseqüentemente, mais fidedigna é a avaliação da turbulência.

No início da década de 90, vários modelos de fechamento para a turbulência estavam à disposição da comunidade científica. Entre eles, podemos destacar: modelos algébricos como (Baldwin e Lomax, 1978) e (Johnson e King, 1985), onde faz-se necessário o fornecimento de uma escala de comprimento algébrica para o cálculo da viscosidade turbulenta; modelos a uma equação de transporte como (Baldwin e Barth, 1990) e (Spalart e Allmaras, 1992), onde uma equação de transporte é resolvida para avaliar a viscosidade turbulenta modificada que, por sua vez, define a viscosidade turbulenta; modelos a duas equações de transporte como $k - \epsilon$ (Launder e Sharma, 1974) e $k - \omega$ (Wilcox, 1993).

No presente trabalho, foram utilizados dois modelos de fechamento clássicos: o modelo a uma equação de transporte de Spalart-Allmaras, e o modelo $k - \omega$ SST, a duas equações de transporte.

3.4.1 Modelo de fechamento de Spalart-Allmaras

Philippe Spalart e Steven Allmaras apresentaram, em 1992, um modelo de fechamento para a turbulência a uma equação de transporte para a variável $\tilde{\nu}$ (SPALART; ALLMARAS, 1992). Exceto em regiões dominadas pelos efeitos viscosos, $\tilde{\nu}$ se iguala à viscosidade turbulenta ν_t . O modelo foi desenvolvido utilizando empirismo, argumentos de análise dimensional, invariância Galileana, além do que é chamado pelos autores de "dependência seletiva da viscosidade molecular".

A equação de transporte do modelo é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \tilde{\nu})}{\partial x_j} = c_{b1}[1 - f_{t2}] \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + c_{b2} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right\} \\ - \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + f_{t1} \Delta U^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A viscosidade turbulenta ν_t é calculada com:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu}. \quad (3.28)$$

Além disso, são utilizadas as relações:

$$\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad (3.29)$$

onde S pode ser calculado pela magnitude da vorticidade, bem como pelo módulo do tensor taxa de deformação, dado por $\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, e d é a distância à parede mais próxima.

A função adimensional f_w é obtida por meio das seguintes expressões:

$$f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}. \quad (3.30)$$

A função f_{t2} :

$$f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2). \quad (3.31)$$

Por fim, a função f_{t1} :

$$f_{t1} = c_{t1} g_t \exp \left(-c_{t2} \frac{w_t^2}{\Delta U^2} [d^2 + g_t^2 d_t^2] \right), \quad g_t \equiv \min \left(0.1, \frac{\Delta U}{w_t \Delta x_t} \right). \quad (3.32)$$

As constantes do modelo são dadas por:

$$\begin{aligned} c_{b1} &= 0,1355, & \sigma &= 2/3, & c_{b2} &= 0,622, & \kappa &= 0,41, \\ c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}, & c_{w2} &= 0,3, & c_{w3} &= 2, & c_{v1} &= 7,1, \\ c_{t1} &= 1, & c_{t2} &= 2, & c_{t3} &= 1,1, & c_{t4} &= 2. \end{aligned}$$

3.4.2 Modelo de fechamento $k - \omega$ SST

Embora amplo, o leque de modelos disponíveis no início da década de 90 se mostravam insuficientes para modelar com acurácia escoamentos com fortes gradientes adversos de pressão. Diante dessa demanda, o modelo $k - \omega$ SST (MENTER, 1994) foi concebido se valendo dos melhores atributos dos já conhecidos $k - \epsilon$ e $k - \omega$.

As equações de transporte do modelo $k - \omega$ SST (MENTER; KUNTZ; LANGTRY, 2003) são apresentadas abaixo:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i k)}{\partial x_i} = \tilde{P}_k - \rho \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right], \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \omega)}{\partial x_i} &= \alpha \rho S^2 - \rho \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] \\ &+ 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde :

$$F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \right\}, \quad (3.35)$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right). \quad (3.36)$$

Com a função F_1 caracteriza-se o modelo. Longe de superfícies, $F_1 \rightarrow 0$, o que caracteriza um modelo predominantemente $k - \epsilon$. Perto da superfície, $F_1 \rightarrow 1$, o que, por sua vez, caracteriza um modelo puramente $k - \omega$.

A viscosidade turbulenta é avaliada da seguinte forma:

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)}, \quad (3.37)$$

onde S é o invariante do tensor taxa de deformação e F_2 uma segunda função de hibridação, definida por:

$$F_2 = \tanh \left\{ \left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right\}. \quad (3.38)$$

Um limitador é utilizado no termo P_k para evitar a transferência excessiva de energia em regiões de estagnação:

$$\tilde{P}_k = \min(P_k, 10\beta^* \rho k \omega), \quad P_k = \mu_t S^2, \quad S \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (3.39)$$

Todas as constantes são obtidas por meio da hibridação entre as constantes correspondentes dos modelos $k - \epsilon$ e $k - \omega$. Este processo é feito através de relações do tipo:

$$\alpha = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 (1 - F_1) \quad (3.40)$$

As constantes para o modelo $k - \omega$ SST são:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 5/9, & \beta_1 &= 3/40, & \sigma_{k1} &= 0,85, & \sigma_{\omega1} &= 0,5, & \beta^* &= 0,09, \\ \alpha_2 &= 0,44, & \beta_2 &= 0,0828, & \sigma_{k2} &= 1,0, & \sigma_{\omega2} &= 0,856. \end{aligned}$$

3.5 Detached Eddy Simulation (DES)

No final da década de 90, Spalart *et al.* (1997) identificaram a possibilidade de utilizar o modelo de Spalart-Allmaras (SPALART; ALLMARAS, 1992) como um modelo com comportamento submalha. Para tanto, observaram que a viscosidade turbulenta modificada, $\tilde{\nu}$, assumindo equilíbrio entre os termos de acúmulo, é proporcional à magnitude do tensor taxa de deformação, S e à distância à parede d : $\tilde{\nu} \propto Sd^2$. Por sua vez, a viscosidade turbulenta calculada através do modelo de Smagorinsky (1963) é proporcional à mesma magnitude da vorticidade, S , e ao espaçamento da malha, Δ : $\nu_t \propto S\Delta^2$. Sendo assim, teoricamente, o modelo de Spalart-Allmaras, tendo d substituído por Δ , poderia assumir comportamento semelhante a um modelo submalha.

3.5.1 O modelo SA-DES

Primeiro modelo híbrido publicado (SPALART *et al.*, 1997), tem como base o modelo de Spalart-Allmaras (SPALART; ALLMARAS, 1992), com a substituição da distância à parede d , pela distância à parede modificada, \tilde{d} , dada por:

$$\tilde{d} \equiv \min(d, C_{DES}\Delta), \quad (3.41)$$

onde Δ é definido como:

$$\Delta \equiv \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad (3.42)$$

e C_{DES} uma constante calibrada por meio de experimentos envolvendo o decaimento de turbulência homogênea isotrópica. No presente trabalho, utilizou-se o valor de 0,65, conforme recomendado por Shur *et al.* (1999).

3.5.2 O modelo SST-DES

O modelo $k-\omega$ SST também pode ser modificado, conforme apresentado por Menter, Kuntz & Langtry (2003), para se transformar em um modelo DES. Isso é feito alterando o termo de transformação da equação de transporte para a energia cinética, como indicado abaixo:

$$\beta^* k\omega \longrightarrow \beta^* k\omega F_{DES}, \quad F_{DES} = \max\left(\frac{L_t}{C_{DES}\Delta}, 1\right), \quad (3.43)$$

onde,

$$\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad L_t = \frac{\sqrt{k}}{\beta^*\omega}. \quad (3.44)$$

O objetivo desta modificação é, como proposto por meio da filosofia DES, possibilitar ao modelo de fechamento a troca da escala de comprimento característica da modelagem RANS ($\propto \sqrt{k}/\omega$) para uma escala típica da modelagem LES ($\propto \Delta$). Quando F_{DES} é maior que 1, o termo de transformação da equação de k aumenta, diminuindo assim o valor final da energia cinética e, conseqüentemente, o valor da viscosidade turbulenta. Dessa, forma, com uma viscosidade efetiva menor, é permitido às equações de Navier-Stokes calcular mais e modelar menos. O valor da constante C_{DES} é 0,61, conforme recomendado pelos desenvolvedores do modelo de fechamento.

3.6 Scale Adaptive Simulation (SAS)

O primeiro modelo SAS foi apresentado à comunidade por Menter, Kuntz & Bender (2003). Os proponentes tomaram como ponto de partida o modelo a duas equações de transporte, introduzido por Rotta (1968):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - c_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{L} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right), \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} = -\overline{u'v'} \left(\hat{\xi}_1 L \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{\xi}_2 L^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \hat{\xi}_3 k^{3/2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right). \quad (3.46)$$

$$\Psi = kL; \quad \nu_t = c_\mu^{1/4} \frac{\Psi}{\sqrt{k}}; \quad P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (3.47)$$

Modelos a duas equações de transporte são desenvolvidos partindo-se do princípio que, no mínimo, duas escalas independentes, obtidas por meio de duas equações de transporte independentes, são necessárias para modelar o efeito da turbulência no escoamento médio (MENTER; EGOROV, 2006). No modelo apresentado, isso é avaliado em função de k e Ψ .

A principal diferença, e também a principal dificuldade, deste modelo a duas equações para os demais é a existência da derivada de terceira ordem para a velocidade. Todos os demais termos são equivalentes àqueles presentes em outros modelos a duas equações.

Segundo Menter & Egorov (2010), existem três motivos pelos quais este termo não deveria ser usado. Primeiramente, do ponto de vista físico, seu uso não é intuitivo. Não existe justificativa física para que a terceira derivada tenha grande influência na determinação de uma escala característica para a turbulência. Em segundo lugar, a utilização deste termo nos leva à obtenção de um sinal incorreto na camada limite logarítmica. Por fim, o cálculo da terceira derivada é oneroso do ponto de vista numérico, uma vez que demanda um *stencil* computacional maior. Entretanto, sem a presença deste termo de alta ordem, o comportamento do modelo é inferior aos modelos clássicos a duas equações de transporte (MENTER; EGOROV, 2010).

Revisitando o modelo de Rotta (1968), Menter, Kuntz & Bender (2003) verificaram que o argumento que levou ao surgimento da terceira derivada era inconsistente. Após reavaliarem as hipóteses, foi proposto um novo modelo para o transporte das variáveis k e $\Phi = \sqrt{kL}$, chamado de KSKL (*K-Square-root K L*).

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j k)}{\partial x_j} = P_k - c_\mu^{3/4} \rho \frac{k^2}{\Phi} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \Phi)}{\partial x_j} = -\frac{\Phi}{k} P_k \left(\xi_1 - \xi_2 \left(\frac{L}{L_{vK}} \right)^2 \right) - \xi_3 \rho k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right). \quad (3.49)$$

$$\mu_t = c_\mu^{1/4} \rho \Phi; \quad L_{vK} = \kappa \left| \frac{U'}{U''} \right|; \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right); \quad (3.50)$$

$$U' = S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}; \quad U'' = \sqrt{\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}}. \quad (3.51)$$

No processo de reformulação do modelo de Rotta (1968), a terceira derivada deu lugar a segunda derivada da velocidade. Ela é utilizada na avaliação da escala de comprimento de von Karman, L_{vK} . Este termo emerge naturalmente como termo de acúmulo, possibilitando ao modelo se adaptar prontamente a mudanças súbitas no escoamento, ajustando a escala de comprimento da turbulência. Por sua vez, modelos clássicos a duas equações, como $k - \epsilon$ e $k - \omega$, fornecem escalas de comprimento para a turbulência proporcionais à espessura da camada limite, o que diminui a eficácia destes modelos em escoamentos transientes (MENTER; EGOROV, 2010).

3.6.1 O modelo SST-SAS

Visando incluir esta característica nos modelos clássicos, a variável Φ pode ser transformada para ϵ e ω (conforme apresentado no Apêndice A) através das seguintes relações (MENTER; EGOROV, 2009):

$$\omega = \frac{1}{c_\mu^{1/4}} \frac{k}{\Phi}, \quad \epsilon = \frac{\omega}{c_\mu k}. \quad (3.52)$$

Menter & Egorov (2009) propuseram uma versão com escalas adaptativas do modelo $k - \omega$ SST, transformando a equação de Φ para ω . A nova versão, chamada de SST-SAS, guarda a mesma formulação do modelo $k - \omega$ SST original, acrescida de um termo de acúmulo, apresentado abaixo, na equação para a variável ω .

$$Q_{SAS} = \max \left[\rho \eta_2 \kappa S^2 \left(\frac{L}{L_{vk}} \right)^2 - C_{SAS} \frac{2\rho k}{\sigma_\Phi} \max \left(\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), 0 \right], \quad (3.53)$$

$$L = \frac{\sqrt{k}}{c_\mu^{1/4} \omega}, \quad (3.54)$$

$$L_{vk} = \kappa \left| \frac{U'}{U''} \right|, \quad (3.55)$$

$$U' = S, \quad U'' = \sqrt{\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}}, \quad \Delta = \sqrt[3]{\Delta x * \Delta y * \Delta z}, \quad (3.56)$$

$$L_{vk} = \max \left[\kappa \left| \frac{U'}{U''} \right|, C_s \sqrt{\frac{\kappa \eta_2}{(\beta/c_\mu) - \alpha} \Delta} \right]. \quad (3.57)$$

Dessa forma, o modelo $k - \omega$ SST preserva sua formulação original em regiões próximas às paredes. Em regiões mais instáveis do escoamento, o termo incluindo o comprimento de von Karman é dominante, levando a uma completa ativação da adaptatividade de escalas.

Podemos observar na Eq.(3.57) que o comprimento característico da malha, Δ , foi utilizado como limitante da escala de comprimento de von Karman. Este tratamento é necessário para fornecer o correto amortecimento de altas frequências (do inglês *high-wave-number damping*). A dedução deste limitante é apresentada no Apêndice B.

De forma simplificada, podemos dizer que o modelo matemático diferencial não tem informações acerca da resolução da malha. Sendo assim, em uma situação hipotética, a escala de von Karman poderia atingir valores consideravelmente menores que a escala de comprimento da malha. O que, por sua vez, produziriam valores cada vez menores de viscosidade turbulenta, possibilitando às equações de balanço de quantidade de movimento resolver uma porção maior do espectro de energia. Entretanto, uma vez que a resolução da malha não acompanha esta redução na escala característica da turbulência, a dissipação viscosa estaria a quem do necessário, levando ao acúmulo de energia na frequência de corte e, conseqüentemente, divergência da cálculo.

3.6.2 O modelo SA-SAS

Coder (2015) propôs, através da derivação de um modelo a uma equação de transporte, partindo do modelo a duas equações apresentado por Menter, Kuntz & Bender (2003), a seguinte variação com escalas adaptativas do modelo de Spalart & Allmaras (1992):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \tilde{\nu})}{\partial x_j} = c_{b1} [1 - f_{t2}] \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + c_{b2} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right\} \\ - \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + f_{t1} \Delta U^2 - Q_{SAS}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde,

$$Q_{SAS} = c_{s1} \max \left(\frac{\kappa^2}{L^2} - \frac{c_{s2}}{d^2}, 0 \right) \tilde{\nu}^2, \quad (3.59)$$

$$L = \max(L_{vK}, \kappa C_{DES} \Delta), \quad (3.60)$$

$$L_{vK} = \kappa \frac{S}{\sqrt{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n^2}}}. \quad (3.61)$$

Utilizam-se as constantes $c_{s1} = 4,9$, $c_{s2} = 2$ e $C_{DES} = 0,65$, conforme as recomendações do autor. Podemos observar na Eq.(3.60) que o comprimento característico da malha, Δ , também foi utilizado como limitante da escala de comprimento de von Karman.

De forma análoga à apresentada no modelo SST-SAS, a escala de comprimento de von Karman foi introduzida de forma independente no modelo original de Spalart & Allmaras (1992), através de um termo de acúmulo. Dessa forma, a escala de von Karman não substitui a distância à parede como comprimento característico. Assim, o modelo tende a seu comportamento URANS clássico em regiões próximas às paredes, enquanto que, distante das mesmas, funciona como um modelo SAS. Este comportamento é semelhante ao desejado nos modelos DES, salvo que aqui não existe uma dependência explícita da malha para transição entre as diferentes formulações de fechamento.

4 Modelagem Numérica

No presente capítulo, são apresentadas as principais estratégias numéricas utilizadas para obtenção das soluções das equações de transporte definidas anteriormente. O presente trabalho foi realizado no ambiente do código computacional MFSim, desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFlab) da Universidade Federal de Uberlândia.

O código MFSim é baseado em uma discretização em volumes finitos, com variáveis deslocadas, tridimensional e com equações diferenciais descritas para ambas as formulações, divergente e não-divergente. A integração temporal é realizada por meio de uma estratégia semi-implícita, onde o termo difusivo das equações é resolvido implicitamente, ao passo que os termos advectivos e de pressão são tratados explicitamente. Os sistemas lineares resultantes para a velocidade, bem como para as equações de transporte para o fechamento da turbulência, são resolvidos por meio do método multigrid-multinível. A malha utilizada é do tipo cartesiana e bloco-estruturada dinâmica.

O acoplamento pressão-velocidade é resolvido através de um método de projeção, baseado na técnica de passos fracionados. O resultado é uma equação de Poisson com coeficientes variáveis resolvida também pelo método multigrid-multinível.

4.1 Discretização espacial das equações de transporte

As equações de transporte utilizadas na modelagem matemática devem ser discretizadas no tempo e no espaço. Na presente dissertação, estas equações se resumem às equações de Navier-Stokes filtradas e às equações utilizadas nos modelos de fechamento para a turbulência. As discretizações das equações diferenciais de Navier-Stokes são contempladas por outros trabalhos realizados no MFlab, a saber Villar (2007), Vedovoto (2011), Melo (2017) e Damasceno (2018), e serão, portanto, omitidas no presente capítulo. Será apresentado apenas o modelo utilizado para a discretização da equação de transporte para um escalar, aplicável a todas as variáveis transportadas, a saber ν_t , k e ω .

Consideremos a equação genérica de transporte para um escalar ψ qualquer dada abaixo:

$$\frac{\partial (\rho\psi)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i \psi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) + S_\psi. \quad (4.1)$$

onde Γ é o coeficiente de difusão e S_ψ um termo de acúmulo.

Para obter sua forma discretizada, utilizaremos o volume de controle elementar apresentado na Fig. 3, com dimensões Δx , Δy e Δz . As letras maiúsculas indicam posições

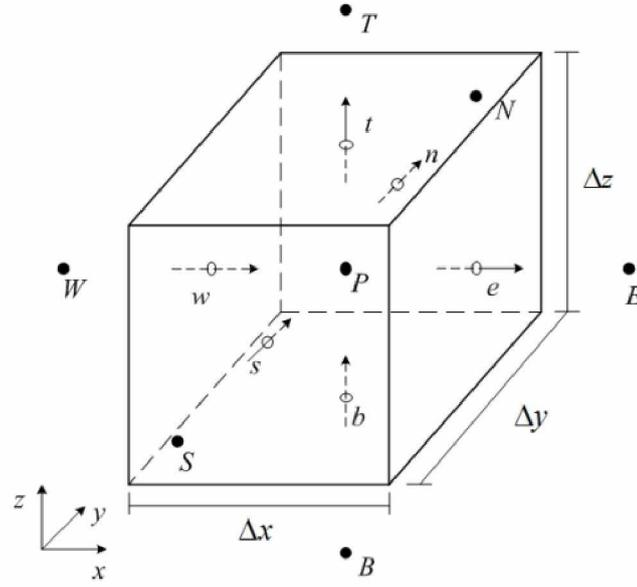


Figura 3 – Volume de controle elementar Vedovoto (2011).

centrais deste volume, enquanto que as letras minúsculas referem-se às faces do mesmo. Elas indicam as posições leste (*e - east*), oeste (*w - west*), norte (*n - north*), sul (*s - south*), topo (*t - top*) e fundo (*b - bottom*), relativas ao ponto central *P*.

Integrando a Eq.(4.1) em um volume de controle dV , como o apresentado na Fig. 3, obtemos, para as três direções:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial(\rho u\psi)}{\partial x} dV + \int_V \frac{\partial(\rho v\psi)}{\partial y} dV + \int_V \frac{\partial(\rho w\psi)}{\partial z} dV = \\ \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) dV + \int_V S_\psi dV. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Utilizando o teorema da divergência de Gauss, podemos transformar as integrais de volume dos termos advectivos e difusivos em integrais de superfície, resultando:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} dV + \iint_S \rho\psi u dS + \iint_S \rho\psi v dS + \iint_S \rho\psi w dS = \\ \iint_S \Gamma \frac{\partial\psi}{\partial x} dS + \iint_S \Gamma \frac{\partial\psi}{\partial y} dS + \iint_S \Gamma \frac{\partial\psi}{\partial z} dS + \int_V S_\psi dV, \end{aligned} \quad (4.3)$$

que, por fim, nos fornece, dividindo ambos os lados pelo volume elementar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho\psi)}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} (\rho u\psi|_e - \rho u\psi|_w) + \frac{1}{\Delta y} (\rho v\psi|_n - \rho v\psi|_s) + \\ \frac{1}{\Delta z} (\rho w\psi|_t - \rho w\psi|_b) = \frac{\Gamma}{\Delta x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_w^e + \frac{\Gamma}{\Delta y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_s^n + \\ \frac{\Gamma}{\Delta z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_b^t + S_\psi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nos termos difusivos não se encontram grandes desafios no processo de discretização, sendo determinados através de interpolações lineares. Nos termos advectivos, entretanto, a variável ψ , transportada pelos fluxos, merece maior atenção. O tratamento deste termo será discutido na seção seguinte. A integração temporal será avaliada mais adiante.

4.1.1 Esquema advectivo

Os modelos de fechamento para a turbulência, descritos no capítulo precedente, são cunhados com o propósito de intensificar a transformação de energia no limite da resolução da malha. Para atingir esse objetivo, a viscosidade turbulenta é utilizada em conjunto com diversas constantes. Adicionalmente, em alguns casos, esquemas numéricos são utilizados para atingir esse mesmo fim.

Esquemas como *Upwind* de primeira ordem (*First Order Upwind* - FOU) ou mesmo *Upwind* de segunda ordem (*Second Order Upwind* - SOU) são caracterizados por apresentarem grande difusão numérica. Isso é interessante para modelos URANS. Em contra partida, para utilização de modelos LES, deseja-se que toda a transformação viscosa seja modelada pelo modelo de fechamento utilizado, e não por difusão numérica. Por essa razão, é necessário selecionar um esquema numérico que produza baixa difusão numérica, quando comparado com a difusão do modelo de fechamento. Nesse caso, esquemas de diferenças centradas (*Central Difference* - CD) são preferíveis. No que diz respeito aos modelos híbridos URANS-LES, precisamos também de um esquema que apresente baixa difusão numérica, uma vez que desejamos resolver parte do espectro de energia do escoamento.

Em simulações de interesses industriais, esquemas de segunda ordem são comumente empregados. Entretanto, em casos que envolvam geometrias complexas, ou mesmo malhas não ideais, esquemas CD são instáveis, produzindo oscilações que, eventualmente, podem levar o cálculo à divergência. Uma alternativa à utilização de esquemas puramente FOU ou CD é a utilização de esquemas de variação total diminuída (*Total Variation Diminishing* - TVD). Esquemas TVD apresentam acurácia comparável aos esquemas CD, sem apresentarem suas oscilações características, pois são contruídos baseados em

esquemas FOU (DAMASCENO, 2018).

Com objetivo de avaliar o esquema advectivo utilizado, partimos do seguinte termo, em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial (\rho u_i \psi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \psi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \psi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \psi) \quad (4.5)$$

onde ψ representada a variável transportada, como ν_t , k ou ω .

Visando maior generalidade da formulação, a variável transportada pode ainda ser normalizada, conforme introduzido por Gaskell & Lau (1988) e Leonard (1988), Leonard (1991):

$$\hat{\psi} = \frac{\psi - \psi_U}{\psi_D - \psi_U}, \quad (4.6)$$

onde os subscritos U (*upstream*) e D (*downstream*) se referem, respectivamente, às células à montante e à jusante da célula central, P, a ser determinada.

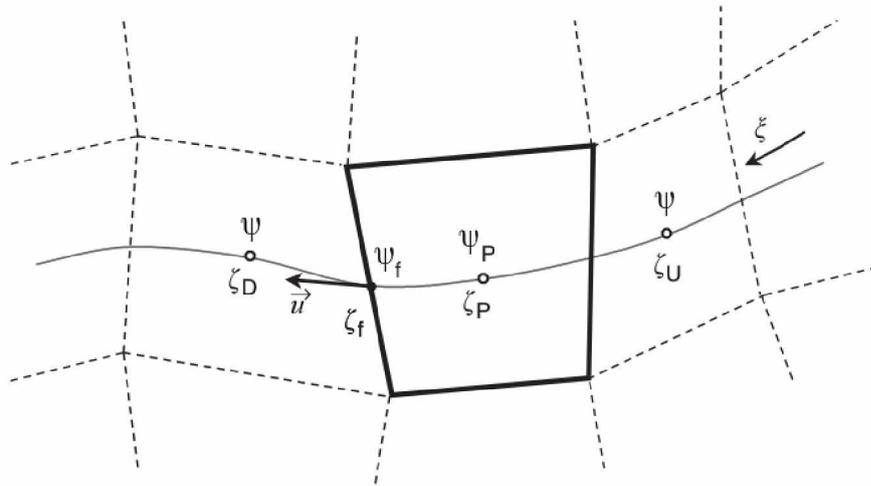


Figura 4 – Definição das variáveis locais e do sistema de coordenadas. Adaptado de Alves, Oliveira & Pinho (2003).

Por fim, as coordenadas também são normalizadas, possibilitando à formulação ser empregada tanto em malhas uniformes como não uniformes. As coordenadas normalizadas são dadas por:

$$\hat{\xi}_P = \frac{\xi_P - \xi_U}{\xi_D - \xi_U}, \quad (4.7)$$

e

$$\hat{\xi}_f = \frac{\xi_f - \xi_U}{\xi_D - \xi_U}. \quad (4.8)$$

A partir destas definições, o esquema CUBISTA é dado por:

$$\hat{\psi}_f = \begin{cases} \left[1 + \frac{\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P}{3(1 - \hat{\xi}_P)} \right] \frac{\hat{\xi}_f}{\hat{\xi}_P} \hat{\psi}_p, & 0 < \hat{\psi}_p < \frac{3}{4} \hat{\xi}_P \\ \frac{\hat{\xi}_f(1 - \hat{\xi}_f)}{\hat{\xi}_P(1 - \hat{\xi}_P)} \hat{\psi}_p + \frac{\hat{\xi}_f(\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P)}{1 - \hat{\xi}_P}, & \frac{3}{4} \hat{\xi}_P \leq \hat{\psi}_p \leq \frac{1 + 2(\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P)}{2\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P} \hat{\xi}_P \\ 1 - \frac{1 - \hat{\xi}_f}{2(1 - \hat{\xi}_P)} (1 - \hat{\psi}_p), & \frac{1 + 2(\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P)}{2\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P} \hat{\xi}_P < \hat{\psi}_p < 1 \\ \hat{\psi}_P, & \text{no restante} \end{cases}$$

Além deste esquema, é possível derivar outros esquemas TVD baseando-se nas definições introduzidas acima, conforme apresentado por Alves, Oliveira & Pinho (2003). Entre as possibilidades, podemos citar MINMOD, SMART, WACEB, ADBQUICKEST e CLAM. Detalhes para implementação destes esquemas podem ser encontrados em Alves, Oliveira & Pinho (2003) e Damasceno (2018). Na seção seguinte é apresentada a estratégia de integração temporal.

4.2 Integração temporal

Para a integração temporal das equações discretizadas no espaço foi utilizado um método implícito-explicito (*Implicit EXplicit* - IMEX), apresentado por Ascher, Ruuth & Wetton (1995), chamado de *Semi-implicit Backward Differentiation Formula* (SBDF). Esta estratégia nos permite trabalhar o termo advectivo de forma explícita, enquanto que o termo difusivo é implicitado, o que viabiliza a utilização de passos de tempo menos restritivos (VILLAR, 2007).

O passo de tempo utilizado nos cálculos realizados é dado pela expressão abaixo:

$$\Delta t = C \left(\frac{1}{t_{adv}} + \frac{1}{t_{dif}} \right)^{-1}, \quad (4.9)$$

onde C é a condição CFL (COURANT; FRIEDRICHS; LEWY, 1967), t_{adv} e t_{dif} são, respectivamente, as restrições temporais dos termos advectivo e difusivo, dadas por:

$$t_{adv} = \frac{\Delta x}{|u|_{max}} + \frac{\Delta y}{|v|_{max}} + \frac{\Delta z}{|w|_{max}}, \quad (4.10)$$

$$t_{dif} = \frac{\Delta x^2}{\nu} + \frac{\Delta y^2}{\nu} + \frac{\Delta z^2}{\nu}. \quad (4.11)$$

O método IMEX utilizado é de segunda ordem, necessitando, portanto, de um *stencil* de três tempos distintos: dois anteriores ao tempo desejado, t^{n-1} e t^n ; e o tempo

atual, t^{n+1} . Por sua vez, os passos de tempo são definidos como $\Delta t^n = t^n - t^{n-1}$ e $\Delta t^{n+1} = t^{n+1} - t^n$. Assim, temos a seguinte expressão para forma geral do esquema de segunda ordem com passo de tempo variável (DAMASCENO, 2018):

$$\frac{\alpha_2 \psi^{n+1} + \alpha_1 \psi^n + \alpha_0 \psi^{n-1}}{\Delta t^{n+1}} = \theta_2 f(\psi)^{n+1} + \theta_1 f(\psi)^n + \theta_0 f(\psi)^{n-1} + \beta_1 g(\psi)^n + \beta_0 g(\psi)^{n-1}, \quad (4.12)$$

na qual os termos advectivos e difusivos são representados pelas funções g e f , respectivamente. Os parâmetros α_i , β_i e θ_i são definidos como se segue:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{(2\gamma - 1)\omega_{n+1}^2}{1 + \omega_{n+1}}, & \alpha_1 &= (1 - 2\gamma)\omega_{n+1} - 1, & \alpha_2 &= \frac{1 + 2\gamma\omega_{n+1}}{1 + \omega_{n+1}}, \\ \beta_0 &= -\gamma\omega_{n+1}, & \beta_1 &= 1 + \gamma\omega_{n+1}, \\ \theta_0 &= \frac{c}{2}, & \theta_1 &= 1 - \gamma - \left(1 + \frac{1}{\omega_{n+1}}\right)\frac{c}{2}, & \theta_2 &= \gamma + \frac{c}{2\omega_{n+1}}, \end{aligned}$$

onde $\omega_{n+1} = \Delta t_{n+1}/\Delta t_n$ é a relaxação entre dois passos de tempo consecutivos.

Com a presente estrutura paramétrica do esquema IMEX, obtém-se, a partir da manipulação dos parâmetros α_i , β_i e θ_i , além do método SBDF utilizado, diferentes métodos, a saber Crank-Nicolson Adams-Bashforth (CNAB), *Modified* Crank-Nicolson Adams-Bashforth (MCNAB), Crank-Nicolson *Leap-Frog* (CNLF), além do clássico método de Euler. A Tabela 3 apresenta os parâmetros para cada método de integração temporal desejado.

Tabela 3 – Parâmetros para obtenção de diferentes métodos de integração temporal a partir do esquema IMEX de segunda ordem.

Parâmetros	SBDF	CNAB	MCNAB	CNLF	Euler
α_0	0,5	0	0	-0,5	-1
α_1	-2	-1	-1	0	0
α_2	1,5	1	1	0,5	1
β_0	-1	-0,5	-0,5	0	1
β_1	2	1,5	1,5	1	0
θ_0	0	0	0,0625	0,5	0
θ_1	0	0,5	0,375	0	0
θ_2	1	0,5	0,5625	0,5	1

4.3 Malha bloco estruturada e refinamento adaptativo

Escoamentos turbulentos são, por essência, transientes. Isso significa que diferentes processos ocorrem simultaneamente, através da movimentação de diversas estruturas

turbilhonares de diferentes escalas de tempo e comprimento. Para capturar esses fenômenos, malhas extremamente finas devem ser aplicadas abrangendo grandes regiões do domínio computacional.

Ora, mesmo que se tenha conhecimento da direção preferencial do escoamento, não é possível prever com precisão as regiões que necessitam de maior refinamento. Sendo assim, em grande parte dos trabalhos, são utilizados elevados números de células computacionais, concentradas em regiões de maior interesse, visando garantir a resolução necessária nesses locais.

Em escoamentos complexos, muitas vezes se fazem necessárias simulações preliminares com intuito de ajustar estas regiões de maior refinamento da malha, o que demanda tempo e recursos computacionais. Nesse sentido, a estratégia de refinamento adaptativo de malhas (*Adaptive Mesh Refinement* - AMR) aparece como uma opção eficiente. Através dela, a malha computacional se adapta, ao longo do cálculo, às regiões de maior interesse, aumentando a resolução nestes locais, otimizando assim a utilização de recursos.

No código MFSim é utilizada malha bloco estruturada com refinamento local adaptativo dinâmico. A Fig. 5 ilustra a aplicação desse tipo de malha para o escoamento no interior de uma cavidade com tampa deslizante. O critério de refinamento utilizado foi implementado por Barbi (2016). Ele se baseia na magnitude do vetor vorticidade e na velocidade. Dessa forma, regiões de maior vorticidade, no caso da cavidade mais evidentes próximas às paredes, são refinadas, enquanto que no centro da mesma são utilizados menos elementos. A formulação deste critério de remalhagem é apresentada abaixo:

$$\frac{\|w\|\Delta}{u_{max}} \geq \zeta, \quad (4.13)$$

onde w é a magnitude do vetor vorticidade, Δ o comprimento da malha, u_{max} é a magnitude do vetor velocidade e ζ uma constante fornecida *ad-hoc*. Quanto menor o valor desta constante, mais sensível se torna o algoritmo da remalhagem. Para todas as simulações envolvendo refinamento adaptativo dinâmico da presente dissertação foi utilizado $\zeta = 0,1$.

4.4 Metodologia da fronteira imersa

No presente trabalho, foi utilizada a metodologia da fronteira imersa para representar um corpo em meio fluido. Este método trabalha simultaneamente com dois domínios de cálculo, conforme ilustrada pela Fig. 6. O domínio cartesiano, onde são resolvidas as equações para o fluido, é denominado de euleriano (Ω), ao passo que o domínio que representa a interface imersa no escoamento é chamado de lagrangiano (Γ). No caso de escoamentos tridimensionais, este último domínio é representado por uma superfície.

Um das suas principais vantagens é poder simular escoamentos sobre geometrias

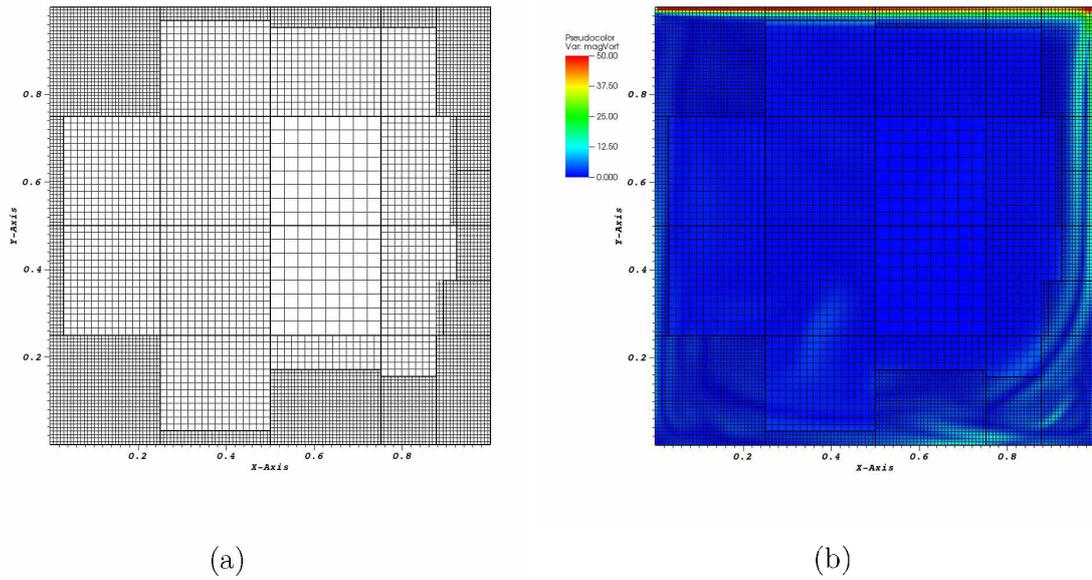


Figura 5 – Exemplo de refinamento adaptativo baseado no critério de vorticidade. (a) Malha bloco estruturada com refinamento adaptativo e divisões de *patches*; (b) Contorno de magnitude de vorticidade.

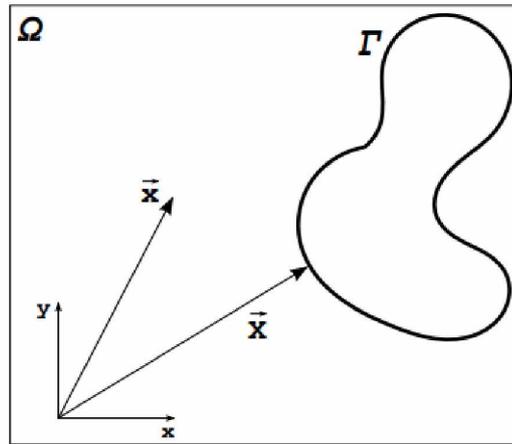


Figura 6 – Representação dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da fronteira imersa (ANDRADE, 2015).

complexas, utilizando malha cartesiana para o domínio euleriano. O corpo imerso é representado por um campo de forças que se comunica com o meio fluido por meio de um termo de forçagem, inserido, por sua vez, nas equações de Navier-Stokes e demais equações de transporte, quando necessário.

O código MFSim utiliza a multi forçagem direta, proposta por Wang, Fan & Luo (2008) e modificada por Vedovoto, Serfaty & Silveira Neto (2015). O termo de força f_i nas equações de quantidade de movimento linear é responsável por representar a interface

imersa. Para calcular esta força, utiliza-se uma função de distribuição (MELO, 2017):

$$f_i(\vec{x}) = \sum_K \vec{F}(\vec{x}_K) D_{ij}(\vec{x} - \vec{x}_K) \Delta V(\vec{x}_K), \quad (4.14)$$

onde \vec{x} é a coordenada referente ao volume euleriano, \vec{x}_K a coordenada referente ao volume lagrangiano, $\Delta V(\vec{x}_K)$ representa o volume do elemento lagrangiano, D_{ij} uma função de interpolação e $\vec{F}(\vec{x}_K)$ representa a força no ponto lagrangiano que é, por sua vez, distribuída no domínio euleriano, delimitando a fronteira. Adotou-se para os cálculos uma função gaussiana da seguinte forma:

$$D_{ij}(\vec{x}_K) = \frac{g\left(\frac{x_K - x_i}{\Delta}\right) g\left(\frac{y_K - y_i}{\Delta}\right) g\left(\frac{z_K - z_i}{\Delta}\right)}{\Delta^3}, \quad (4.15)$$

com

$$g(r) = \begin{cases} g_1(r), & \|r\| \leq 1 \\ \frac{1}{2} - g_1(2 - \|r\|), & 1 < \|r\| \leq 2 \\ 0, & \|r\| > 2 \end{cases} \quad (4.16)$$

e

$$g_1(r) = \frac{3 - 2\|r\| + \sqrt{1 + 4\|r\| - 4\|r\|^2}}{8}. \quad (4.17)$$

O termo de força f_i também é utilizado para impor condições de contorno para as variáveis transportadas pelos modelos de fechamento para a turbulência. No caso dos modelos utilizados, tanto a viscosidade turbulenta modificada do modelo de Spalart-Allmaras, ν_t , quanto a energia cinética turbulenta do modelo $k - \omega$ SST, k , atingem valores nulos sobre a fronteira imersa como consequência da imposição da condição de não deslizamento. Logo, não se faz necessária a forçagem destas variáveis.

Entretanto, para a frequência de Kolmogorov (ω) do modelo $k - \omega$ SST, a multi forçagem direta é utilizada para impor o seguinte valor na fronteira (BARDINA; HUANG; COAKLEY, 1997):

$$\omega = \frac{60\mu}{\beta\rho y_1^2}, \quad (4.18)$$

onde $\beta = 0,075$ e y_1 é a distância à parede do primeiro elemento da malha.

4.5 Método Multigri-Multinível

A discretização das equações de transporte resulta, normalmente, em um sistema linear do tipo:

$$A\chi = B, \quad (4.19)$$

onde A é a matriz de coeficientes, χ o vetor de incógnitas e B a matriz que acomoda os termos de acúmulo.

A solução do sistema dado pela Eq.(4.19) pode ser obtida pela aplicação de algum método iterativo. Métodos clássicos como Jacobi, Gauss-Seidel ou TDMA, apresentam elevada velocidade de convergência da solução numérica no início do cálculo, decaindo sensivelmente à medida que o processo iterativo avança (VILLAR, 2007). Esse comportamento viabiliza a utilização de tais métodos na relaxação da solução, ou seja, na remoção de componentes do erro de altas frequências.

Sendo assim, atribui-se às componentes do erro de baixas frequências a lenta convergência observada nos métodos supracitados (VILLAR, 2007). Uma vez que o espaçamento da malha não muda, não é possível eliminar da solução outras frequências se não aquelas relacionadas ao comprimento característico da malha.

Com isso em mente, o método Multigrid foi contruído sobre a premissa de que cada banda de frequência de erro deve ser suavizada em uma malha com comprimento característico adequado. Componentes de alta frequência (menores comprimentos de onda) são suavizadas em malhas com menores espaçamentos, enquanto que componentes de baixa frequência (maiores comprimentos de onda) são tratadas em malhas mais grossas. Isso é feito utilizando apenas uma malha física, mas com diferentes níveis virtuais.

Considerando $\bar{\chi}$ uma aproximação da solução exata χ , definimos o erro da aproximação como $e = \chi - \bar{\chi}$. Dessa forma, podemos reescrever a Eq.(4.19) como:

$$A(e - \bar{\chi}) = B. \quad (4.20)$$

Desconhecemos, entretanto, o valor exato da solução e do erro. Busca-se, então, uma estimativa do erro, dada pelo resíduo R :

$$R = B - A\bar{\chi}. \quad (4.21)$$

Podemos, em um processo iterativo, minimizar o valor de R , indicando que uma solução satisfatória foi encontrada. Subtraindo a Eq.(4.19) da Eq.(4.21), temos:

$$A(\chi - \bar{\chi}) = R, \quad (4.22)$$

que, por meio da relação $e = \chi - \bar{\chi}$, resulta

$$Ae = R. \tag{4.23}$$

A Eq.(4.23) é chamada de equação residual, pois indica que o erro, dado por e , satisfaz o mesmo conjunto de equações que a solução χ quando B é substituído por R . Portanto, resolver o sistema dado pela Eq.(4.23) é análogo a resolver o sistema da Eq.(4.19). Sendo assim, busca-se obter a solução na malha mais fina, empregando os demais níveis apenas como esquemas de correção desta solução.

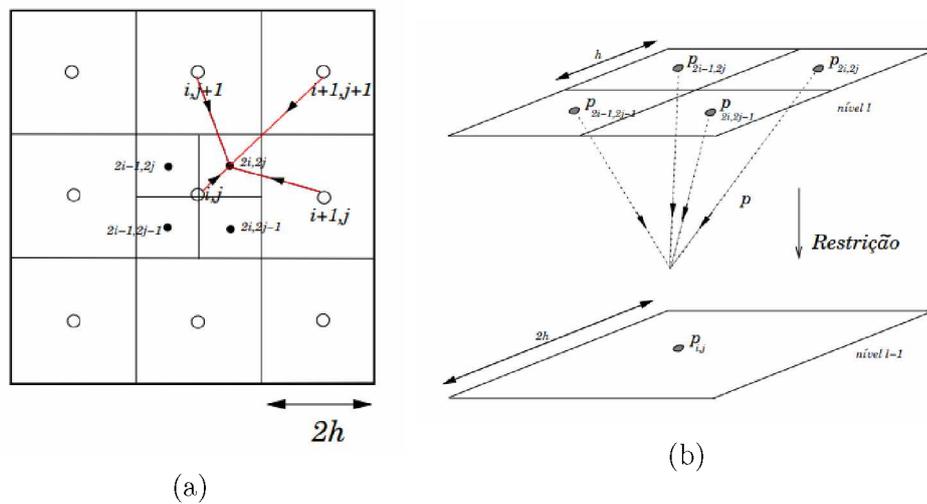


Figura 7 – Ilustração das operações de (a) prolongamento e (b) restrição (VILLAR, 2007).

Durante a aplicação do método, os valores obtidos para o erro e são transferidos de uma malha para outra. O processo de transferência de informação de uma malha grossa para uma mais fina é chamado de prolongamento, enquanto que o processo inverso é chamado de restrição. Ambas as operações são ilustradas na Fig. 7.

Como citado anteriormente, o código MFSim utiliza refinamento local. Nessas condições, o método Multigrid é chamado de método Multigrid-Multinível, pois a metodologia Multigrid não atua apenas nas malhas sequencialmente mais grossas (níveis virtuais), mas também passa a trabalhar nos demais níveis físicos do refinamento. A Fig. 8 ilustra essa divisão de níveis existentes na malha.

Todas as simulações apresentadas na presente dissertação foram realizadas utilizando o solver Multigrid-Multinível para a solução das velocidades, pressão e das equações de transporte, em conjunto com esquema advectivo CUBISTA e discretização temporal SBDF. Utilizou-se também, em todos os casos apresentados, CFL de 0,2.

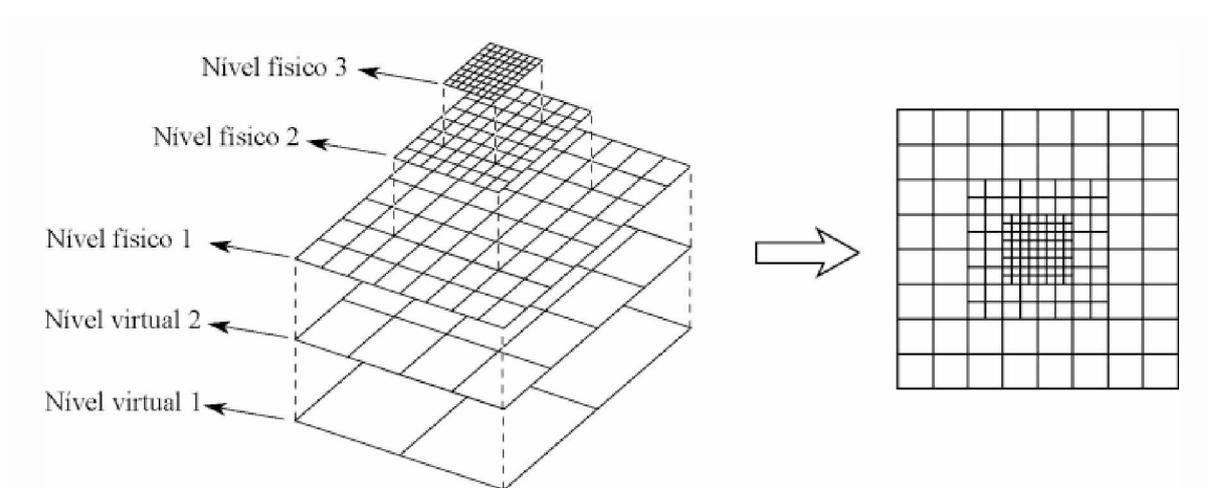


Figura 8 – Esquema indicando os níveis virtuais e físicos da malha (MELO, 2017).

5 Resultados e discussão

Será apresentada neste capítulo a validação dos modelos híbridos URANS-LES para o fechamento da turbulência no ambiente do código MFSim. Serão validados os modelos híbridos SA-DES (SPALART *et al.*, 1997), SST-DES (STRELETS, 2001), SA-SAS (CODER, 2015) e SST-SAS (MENTER; EGOROV, 2010). Para fins de comparação, serão também utilizados os modelos puramente URANS e LES que compõem a base dos modelos híbridos supracitados. São eles os modelos URANS de Spalart-Allmaras (SPALART; ALLMARAS, 1994) e $k-\omega$ SST (MENTER; KUNTZ; LANGTRY, 2003), e o modelo LES dinâmico de Germano (GERMANO *et al.*, 1991; LILLY, 1992) com filtragem explícita (MELO, 2017).

A validação dos modelos será realizada resolvendo problemas que melhor se adequam à proposta de cada classe de modelos de fechamento. Os modelos SAS serão validados no caso da cavidade cúbica com tampa deslizante, tendo como referência o experimento material de Prasad & Koseff (1989). Por sua vez, os modelos DES serão validados no degrau descendente, baseando-se no experimento material de Jovic & Driver (1994). Por fim, todos os modelos supracitados terão suas performances avaliadas no escoamento ao redor de um prisma triangular, experimentado por Sjunnesson, Henriksson & Lofstrom (1992).

A análise dos dados obtidos é feita através de dados qualitativos, como visualização dos campos de velocidade, viscosidade, vorticidade e iso-superfícies do critério Q - definido matematicamente pelas Eqs.(5.1) e (5.2), conforme apresentado por Jeong & Hussain (1995); além de dados quantitativos, obtidos nos experimentos materiais de referência, como perfis de velocidade média, RMS da velocidade e de componentes do tensor de Reynolds.

$$Q = \frac{1}{2} (\Omega^2 - S^2) \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}; & \Omega &= \sqrt{2w_{ij}w_{ij}}; \\ S_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); & w_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para obtenção dos dados quantitativos que serão apresentados, monitorou-se o compartimento da solução em regiões típicas de grande instabilidade física, como por exemplo as proximidades das paredes onde se formam recirculações na cavidade com tampa deslizante e no degrau. Nesses pontos críticos, variáveis de interesse, como as componentes de velocidade e pressão, foram avaliadas por meio de sondas disponíveis no

código MFSim. Uma vez estabelecido o regime estatisticamente permanente, as estatísticas foram calculadas.

Para facilitar as análises que se seguem, os diferentes modelos utilizados são nomeados da seguinte forma:

- SA: modelagem URANS proposta por Spalart & Allmaras (1992);
- SST: modelagem URANS proposta por (MENTER; KUNTZ; LANGTRY, 2003);
- SA-DES: modelagem DES, baseada no modelo URANS de Spalart-Allmaras, proposta por Spalart *et al.* (1997);
- SST-DES: modelagem DES, baseada no modelo URANS $k - \omega$ SST, proposta por Strelets (2001);
- SA-SAS: modelagem SAS, baseada no modelo de Spalart-Allmaras, proposta por Coder (2015);
- SST-SAS: modelagem SAS, baseada no modelo $k - \omega$ SST, proposta por Menter & Egorov (2010);
- LES-D: modelagem LES, proposta por Smagorinsky (1963) e reformulada por Germano *et al.* (1991) e Lilly (1992).

5.1 Validação dos modelos SAS

Para validação da implementação dos modelos SAS, foi simulado o caso clássico da cavidade cúbica com tampa deslizante. Na Fig. 9 é apresentado o modelo físico do problema. As arestas da cavidade possuem 1 metro de comprimento. Na parede superior, referente ao plano $y = 1\text{ m}$, foi imposta velocidade constante de 1 m/s na direção x e velocidade nula nas direções y e z . Em todas as demais paredes foi aplicada uma condição de não deslizamento, ou seja, todas as componentes do vetor velocidade são nulas.

Uma vez que foram usadas condições de Dirichlet para a velocidade em todas as paredes, aplicou-se condições de Neumann para a pressão. Para as condições iniciais no interior do domínio foram utilizados valores nulos para todas as componentes de velocidade e para a pressão. As propriedades do fluido foram selecionadas visando atingir o número de Reynolds desejado para o escoamento, a saber $Re = 10000$, o que caracteriza um regime turbulento.

Os modelos de fechamento da classe URANS também exigem condições iniciais e de contorno para as variáveis transportadas. Para a viscosidade turbulenta modificada, ν_t , variável de transporte do modelo Spalart-Allmaras, utilizou-se valores nulos em todas as

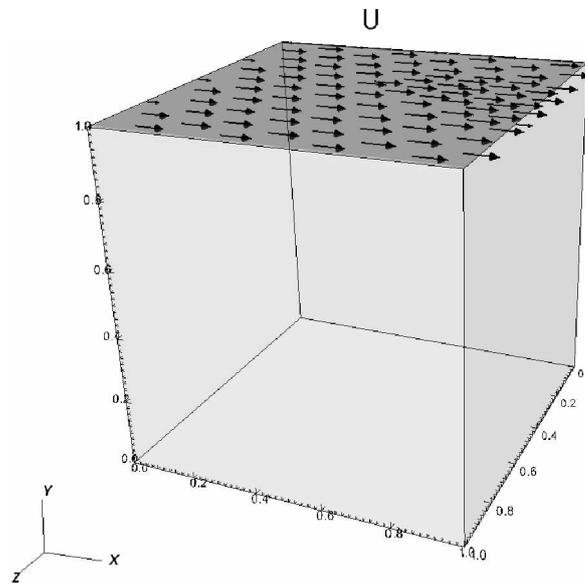


Figura 9 – Cavidade 3D com tampa deslizante.

paredes (BARDINA; HUANG; COAKLEY, 1997). Por sua vez, para a energia cinética turbulenta, k , e para a frequência de Kolmogorov, ω , variáveis de transporte do modelo $k - \omega$ SST, utilizou-se os seguintes valores recomendados por Bardina, Huang & Coakley (1997):

$$k = 0 \quad e \quad \omega = \frac{60\mu}{\beta\rho y_1^2}, \quad (5.3)$$

onde $\beta = 0,075$ e y_1 é a distância à parede do primeiro elemento da malha.

Os valores iniciais utilizados também seguem as recomendações de Bardina, Huang & Coakley (1997). Para a viscosidade turbulenta modificada, aplicou-se

$$\nu_t = \frac{\nu}{4}, \quad (5.4)$$

e para a energia cinética turbulenta e frequência específica de Kolmogorov ¹

$$\omega_\infty > \lambda \frac{U}{L}, \quad \mu_{t\infty} < 10^{-2} \mu_{tmax}, \quad k_\infty = \frac{\mu_{t\infty}}{\rho_\infty} \omega_\infty \quad (5.5)$$

¹ A variável ω recebe na literatura o nome de "taxa de dissipação específica" (do inglês *specific dissipation rate*). Proposta inicialmente por Kolmogorov, ela tem unidade de s^{-1} . Na presente dissertação, acredita-se que a nomenclatura comumente utilizada não reflete a natureza da variável, provocando, até mesmo, confusão para o leitor. Propõe-se, então, o nome de "frequência de Kolmogorov", visando fazer jus à grandeza física por ela representada (uma frequência) e a seu proponente original (Kolmogorov).

onde L é o comprimento aproximado do domínio computacional, U é a velocidade da tampa deslizante e λ é um fator de proporcionalidade. O símbolo ∞ é usado para indicar, nesse caso, grandezas no interior da cavidade.

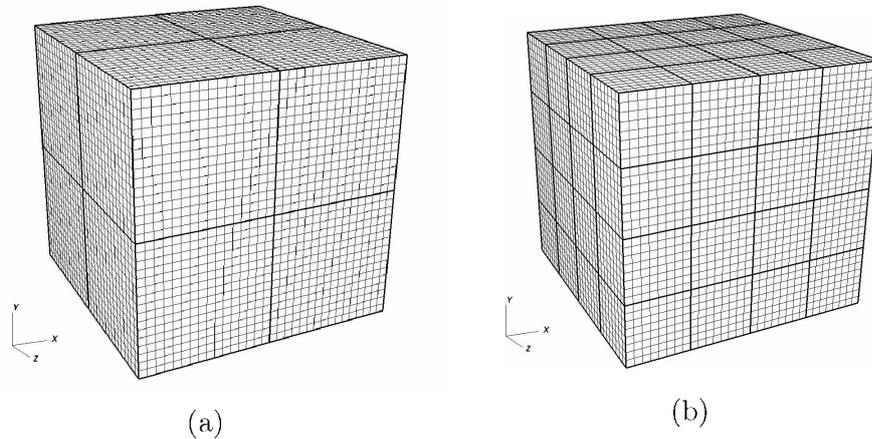


Figura 10 Divisão de processos na cavidade com tampa deslizante: (a) 8 processos (b) 64 processos.

Foram utilizadas malhas iniciais com 32^3 volumes e 3 níveis físicos (o que corresponde, no nível mais fino, a uma malha de 128^3 volumes), juntamente com refinamento adaptativo dinâmico controlado utilizando-se o critério de vorticidade. Os cálculos foram processados em paralelo, sendo utilizados 8 processos para os modelos URANS e 64 processos para os modelos SAS. A divisão de processos no domínio é ilustrada pela Fig. 10.

5.1.1 Resultados topológicos

Campos de velocidade instantânea u e v são apresentados na Fig. 11 para os modelos LES-D, SA e SA-SAS e na Fig. 12 para os modelos LES-D, SST e SST-SAS. Os contornos exibidos foram tomados no plano central da cavidade. Os resultados obtidos com os cinco modelos são, qualitativamente, semelhantes para os campos apresentados.

Nas Fig. 13 e 14 são apresentadas visualizações das estruturas turbilhonares calculadas utilizando cada modelo. Em todos os casos, utilizaram-se iso-superfícies do critério Q , com $Q = 0,5s^{-2}$, coloridas pela velocidade instantânea v . Na Fig. 13, percebe-se que as estruturas calculadas utilizando-se o modelo SA são, de forma geral, maiores do que aquelas calculadas por meio dos modelos LES-D e SA-SAS. O mesmo não pode ser dito das estruturas obtidas por meio do modelo SST, quando comparadas àquelas calculadas pelos modelos LES-D e SST-SAS, conforme exibido na Fig. 14.

Espera-se que as estruturas obtidas por meio da modelagem SAS sejam menores do que aquelas visualizadas através dos modelos URANS. Isso porque, com os modelos URANS,

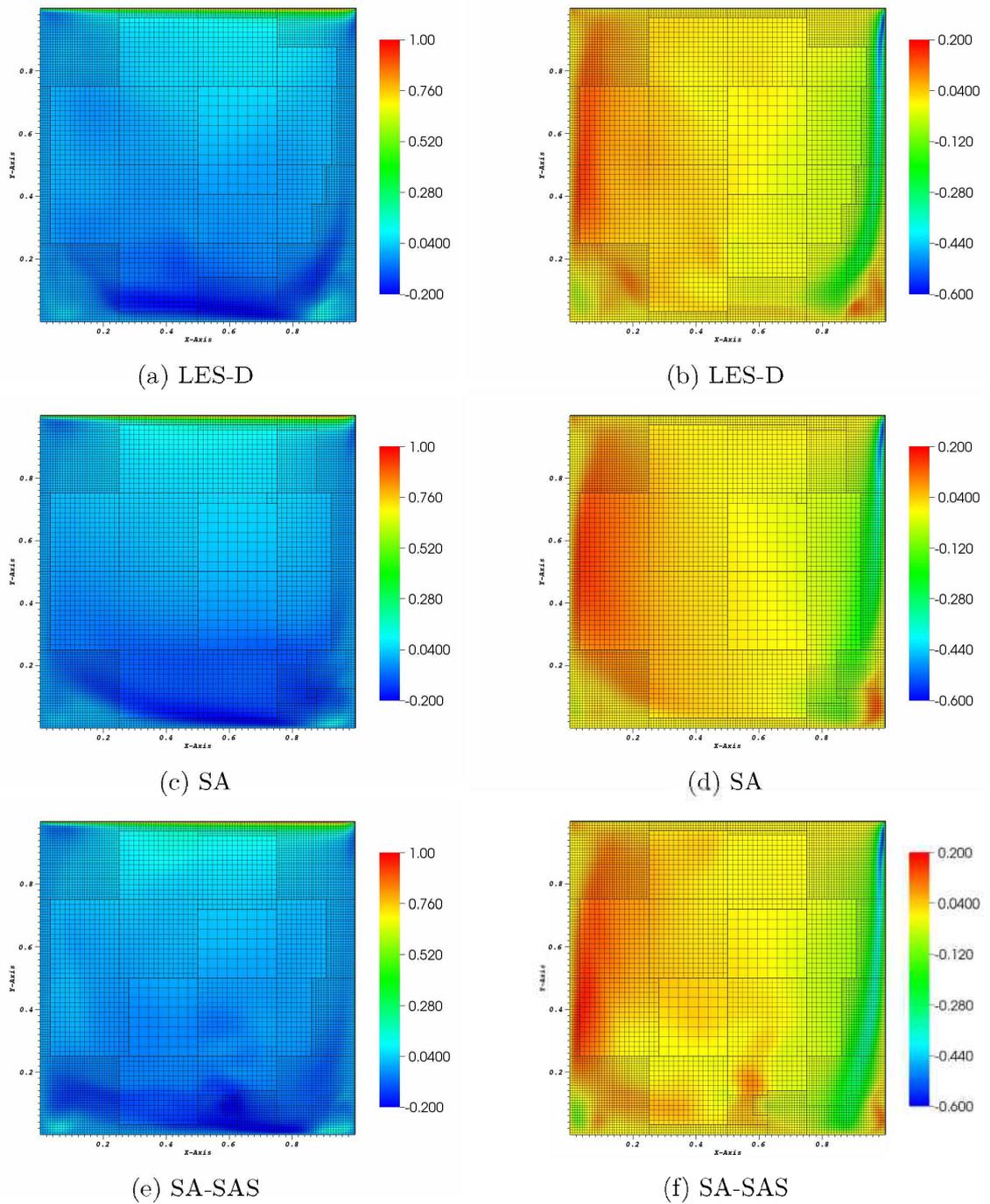


Figura 11 – Campos de velocidade instantânea u (à esquerda) e v (à direita), no plano $z = 0,5$, para os modelos LES-D, SA e SA-SAS.

modela-se praticamente todo o espectro de energia cinética turbulenta do escoamento. Para tanto, utilizam-se altos valores de viscosidade turbulenta, como pode ser visto nas Fig. 15 e 16, o que diminui localmente o número de Reynolds, amortecendo, por sua vez, flutuações nos campos de velocidade e pressão. Dessa forma, apenas grandes estruturas sobrevivem a esse brusco processo de filtragem.

Entretanto, como apresentado no capítulo de modelagem matemática, os modelos

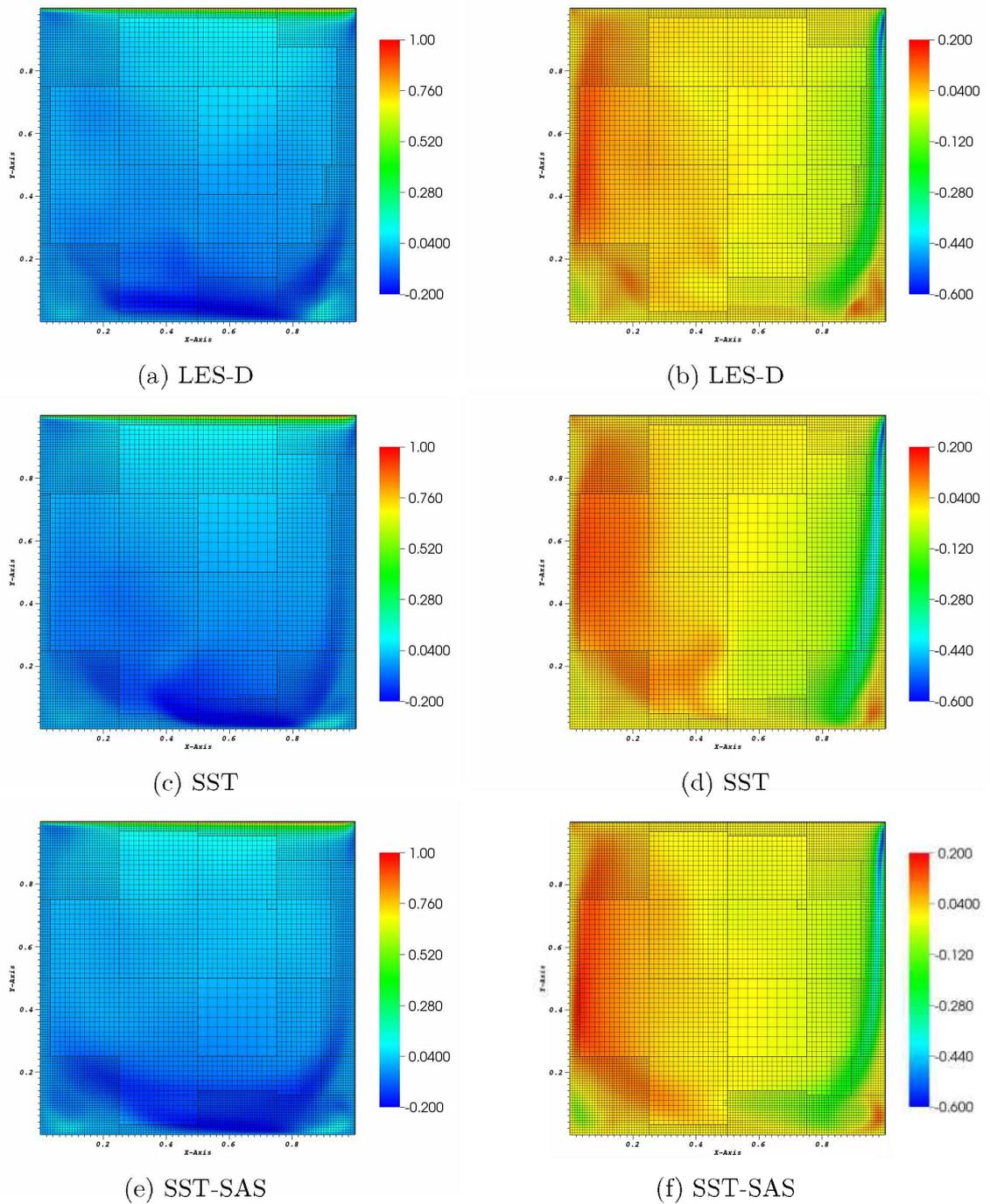


Figura 12 Campos de velocidade instantânea u (à esquerda) e v (à direita), no plano $z = 0, 5$, para os modelos LES-D, SST e SST-SAS.

SA-SAS e SST-SAS, apresentados no presente trabalho, foram formulados com intuito de se preservar o comportamento RANS clássico dos modelos SA e SST. Com esta estratégia, torna-se possível, em situações onde o escoamento tenda ao regime permanente, ou mesmo onde as instabilidades fluidodinâmicas presentes sejam pequenas, que seja obtido, por meio dos modelos SA-SAS e SST-SAS, resultados semelhantes àqueles observados nos modelos puramente URANS.

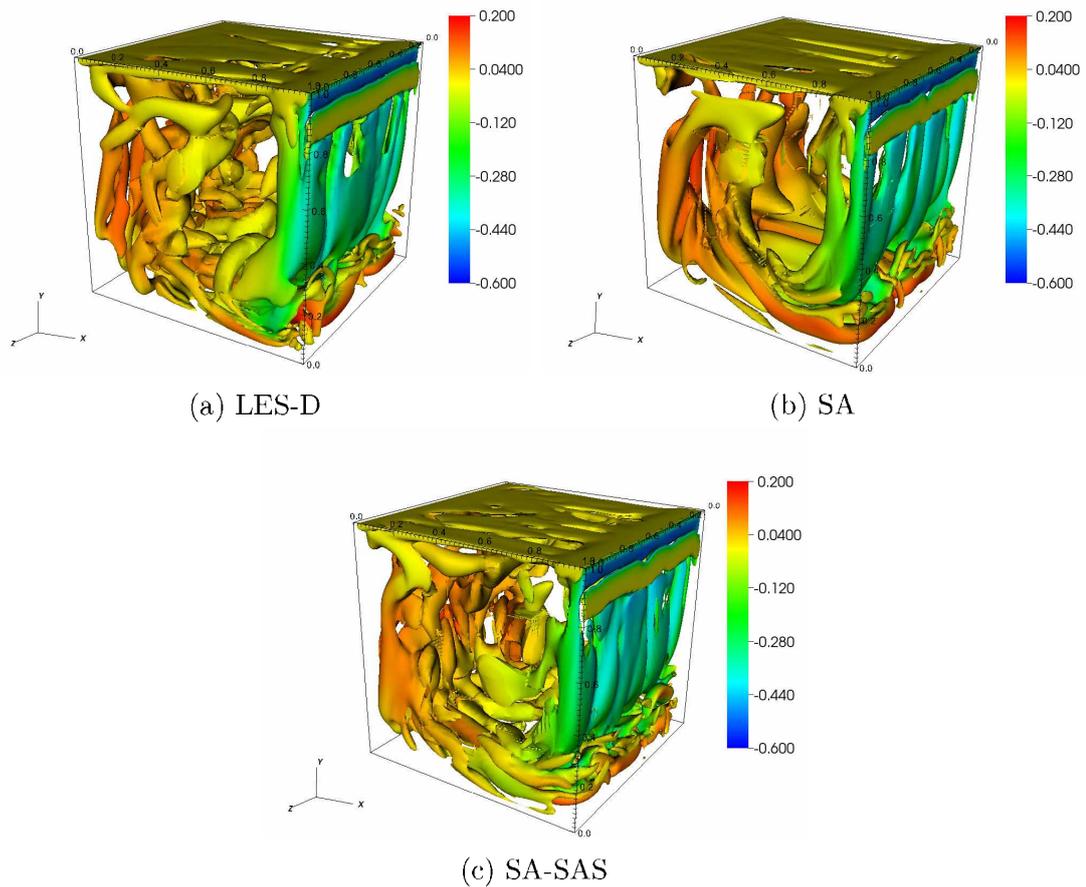


Figura 13 Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea v para os modelos LES-D, SA e SA-SAS.

Percebe-se esta situação em evidência na Fig. 16. Contrariamente ao comportamento observado nos modelos SA e SA-SAS, nota-se pouca diferença entre as estruturas obtidas por meio dos modelos SST e SST-SAS. Isso pode indicar que a característica de adaptatividade de escalas não foi plenamente alcançada. A partir dos campos instantâneos da razão de viscosidade turbulenta, apresentados na Fig. 16, reforça-se o que foi dito acima. Os valores observados para o modelo SST pouco se diferem dos obtidos por meio do modelo SST-SAS. Podem ter influência neste comportamento o espaçamento da malha e até mesmo a amplitude das instabilidades características deste escoamento.

Para o modelo LES-D, ainda que se faça uso da viscosidade turbulenta para o fechamento da turbulência, observam-se níveis menores dessa variável. Na Fig. 15 ilustra-se este comportamento. São apresentados contornos instantâneos para a razão de viscosidade turbulenta, dada por μ_t/μ . Esta razão nos permite avaliar a ordem de grandeza da viscosidade turbulenta em relação à viscosidade molecular do fluido.

Embora as imagens tenham sido capturadas em tempos diferentes, observou-se em todos os casos a instauração de um regime estatisticamente permanente. Dessa forma, é possível comparar com segurança a ordem de grandeza dos valores apresentados. A

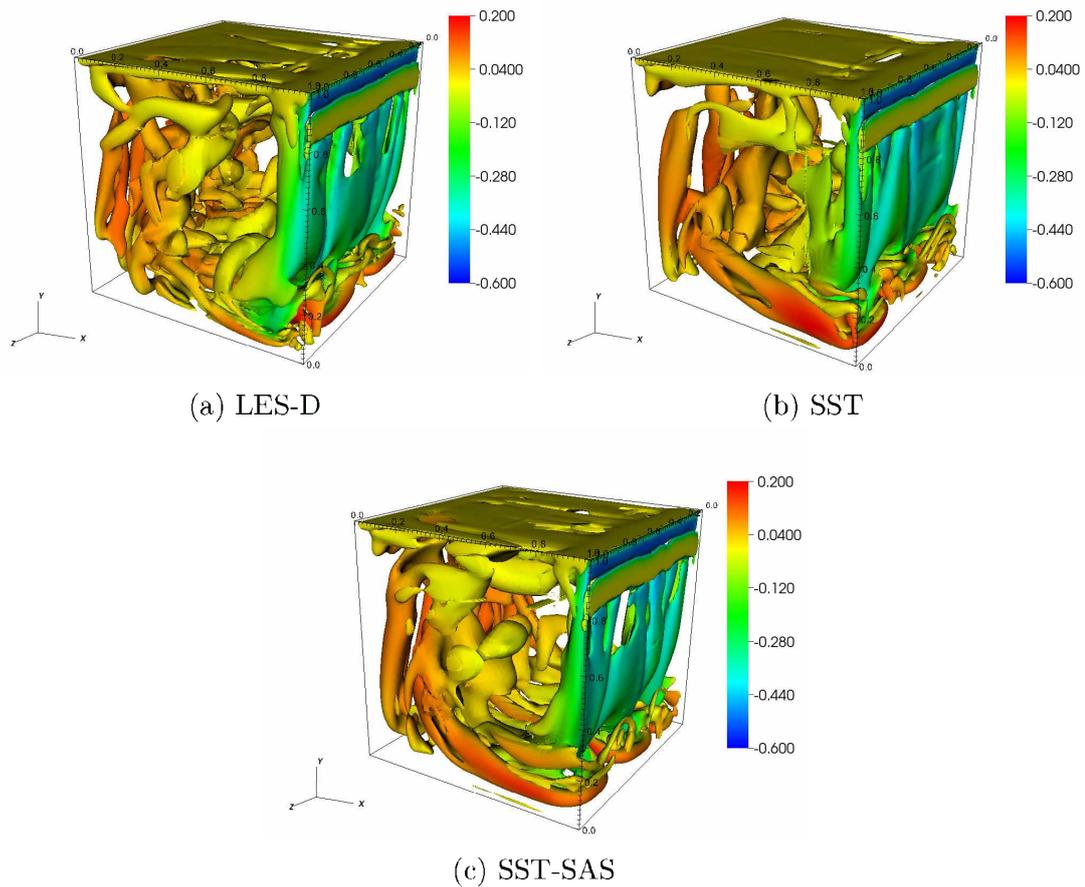


Figura 14 Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea v para os modelos LES-D, SST e SST-SAS.

viscosidade turbulenta no modelo LES-D tem picos de $0,18\mu$, enquanto que no modelo SA ela atinge $6,50\mu$, cerca de 36 vezes maior. Nos modelos SST e SST-SAS, observam-se picos da mesma ordem de grandeza. Para o modelo SA-SAS, observam-se valores de aproximadamente $0,005\mu$. Ora, mesmo sendo este o objetivo da modelagem SAS - diminuir o valor da viscosidade turbulenta para que mais instabilidades sejam capturadas - é questionável que valores tão pequenos tenham sido atingidos por meio do modelo SA-SAS.

Como apresentado no capítulo de modelagem matemática, faz-se necessário nos modelos SAS o chamado *High Wave Number (HWN) damping*, responsável pelo amortecimento das menores estruturas (qualificadas pelas maiores frequências) do escoamento. Estas estruturas ocorrem no limite da malha computacional (frequência de corte). Este amortecimento é necessário, pois a formulação matemática dos modelos SAS, em geral, não contempla o limite da malha. Ora, sem essa informação, é possível que a escala de comprimento de von Karman, L_{vk} , retorne valores menores que o comprimento da malha.

Por sua vez, valores de L_{vk} menores que o comprimento da malha produzem valores de ν_t mais baixos do que o necessário. Sendo assim, toda a modelagem do fenômeno

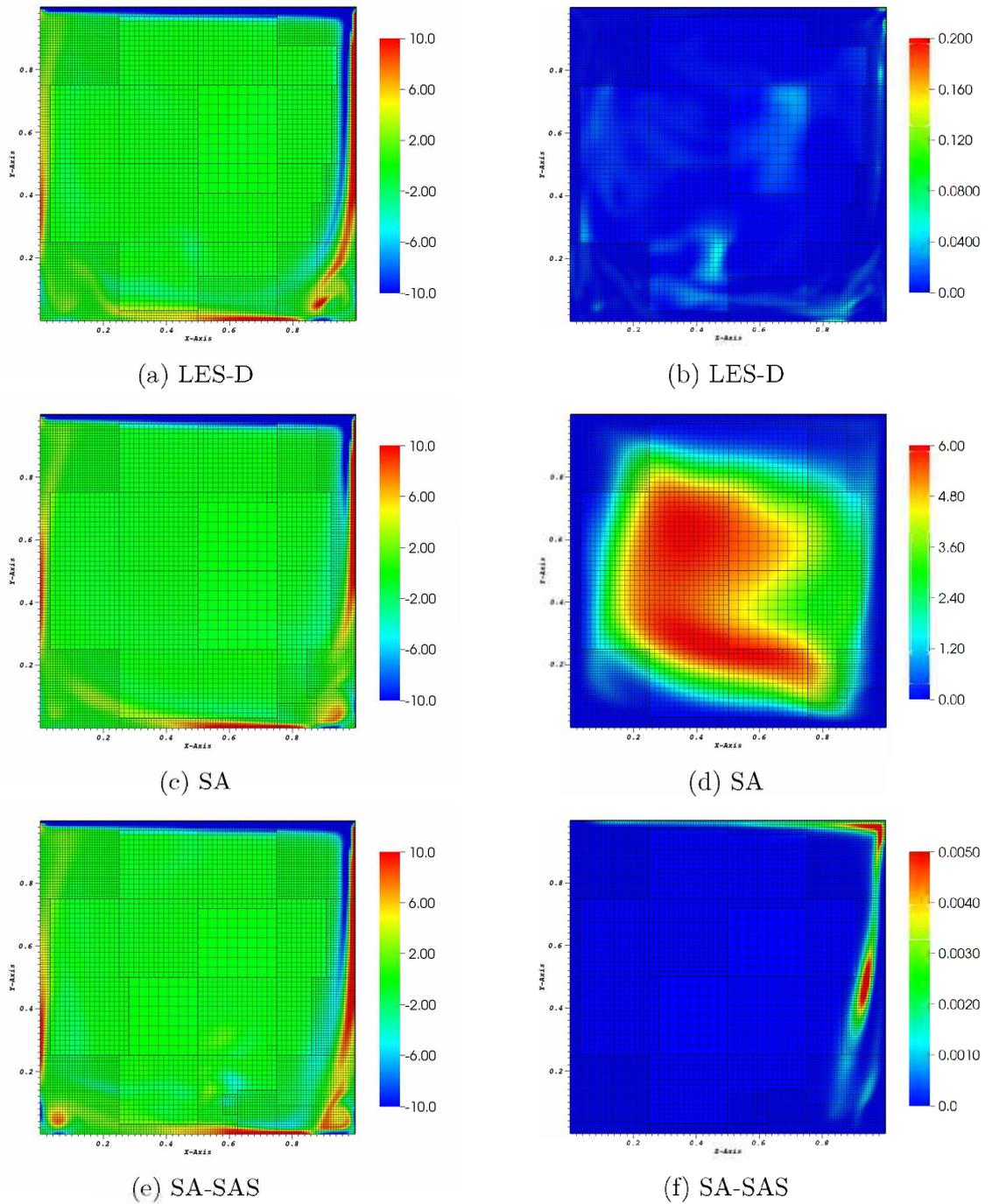


Figura 15 – Campos instantâneos de w_z (à esquerda) e da razão de viscosidade turbulenta μ_t/μ (à direita), no plano $z = 0,5$, para os modelos LES-D, SA e SA-SAS.

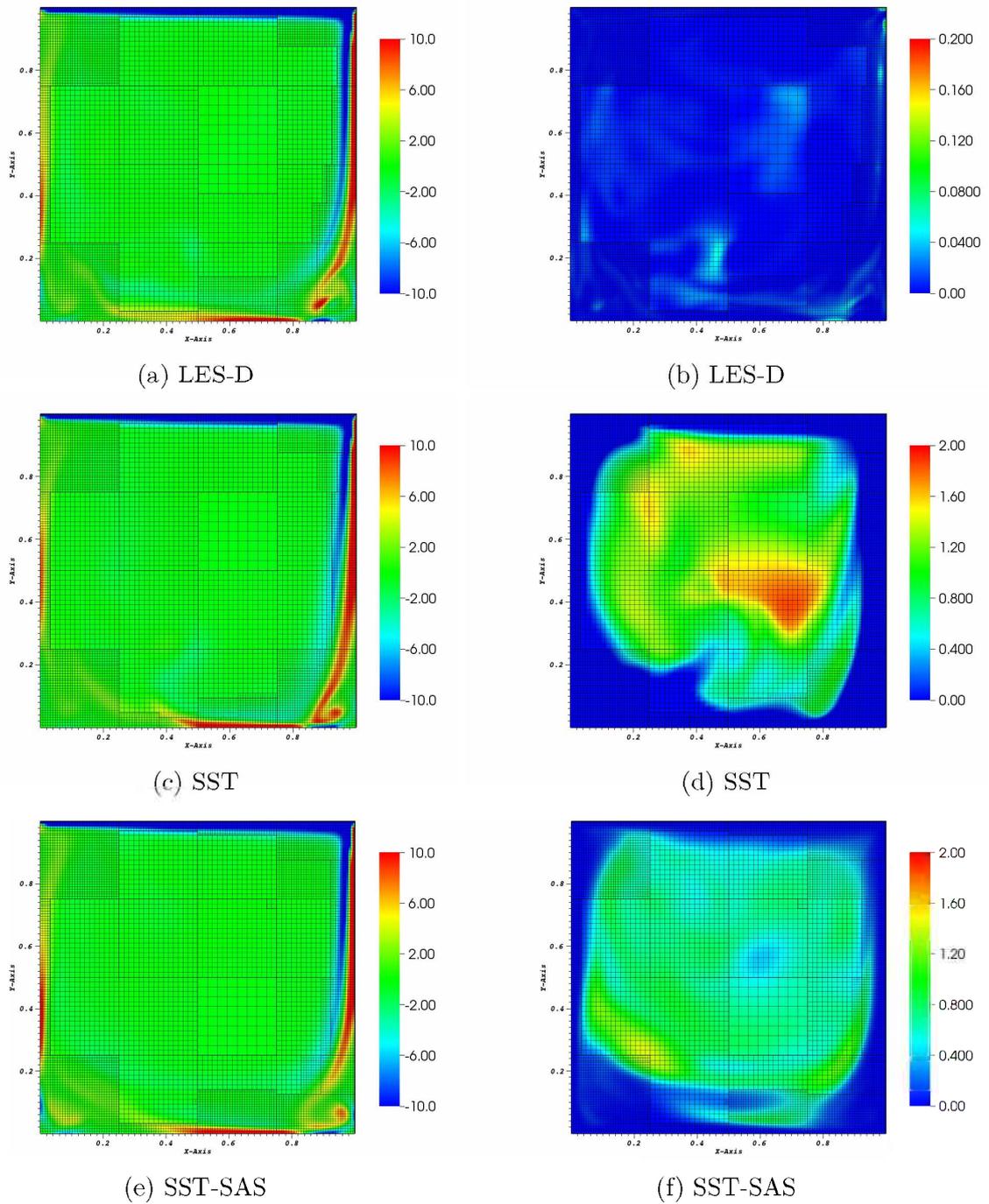


Figura 16 Campos instantâneos de w_z (à esquerda) e da razão de viscosidade turbulenta μ_t/μ (à direita), no plano $z = 0, \delta$, para os modelos LES-D, SST e SST-SAS.

de transformação viscosa tende a ficar prejudicada, levando ao acúmulo de energia na frequência de corte da malha. Embora não tenha sido observado neste caso, em função do número de Reynolds e até mesmo da amplitude da diferença entre L_{vk} e Δ , este acúmulo pode levar à divergência do cálculo.

Para que tenhamos segurança na análise que se segue, cabe ressaltar que o último caso apresentado neste capítulo também foi estudado por meio do modelo SA-SAS, tendo apresentado valores coerentes para a razão de viscosidade turbulenta. Logo, não se observou robustez na utilização dessa formulação em casos fisicamente (no que diz respeito à dinâmica turbilhonar) distintos. Dois aspectos podem ter influenciado neste resultado.

Em primeiro lugar, em função da baixa eficiência do algoritmo de remalhagem do código MFSim em situações com presença de fronteira imersa, utilizou-se remalhagem adaptativa dinâmica apenas no caso da cavidade cúbica com tampa deslizante. Dessa forma, ainda é necessário investigar com cautela a influência da remalhagem adaptativa dinâmica no correto funcionamento do modelo SA-SAS. Outro fator que merece atenção, e não está necessariamente desvinculado do primeiro, é a estratégia de amortecimento viscoso (HWN) utilizada no modelo de Coder (2015). Os baixos valores que se observam para a viscosidade turbulenta podem indicar que o modelo não recebeu uma informação correta acerca da frequência de corte do cálculo. Ou seja, o modelo SA-SAS pode ter fornecido um comprimento característico menor que a resolução da malha. O próprio autor considera como não ideal a formulação utilizada para HWN do modelo SA-SAS. Uma alternativa seria o uso da formulação WALE-LES, proposta por Nicoud & Ducros (1999).

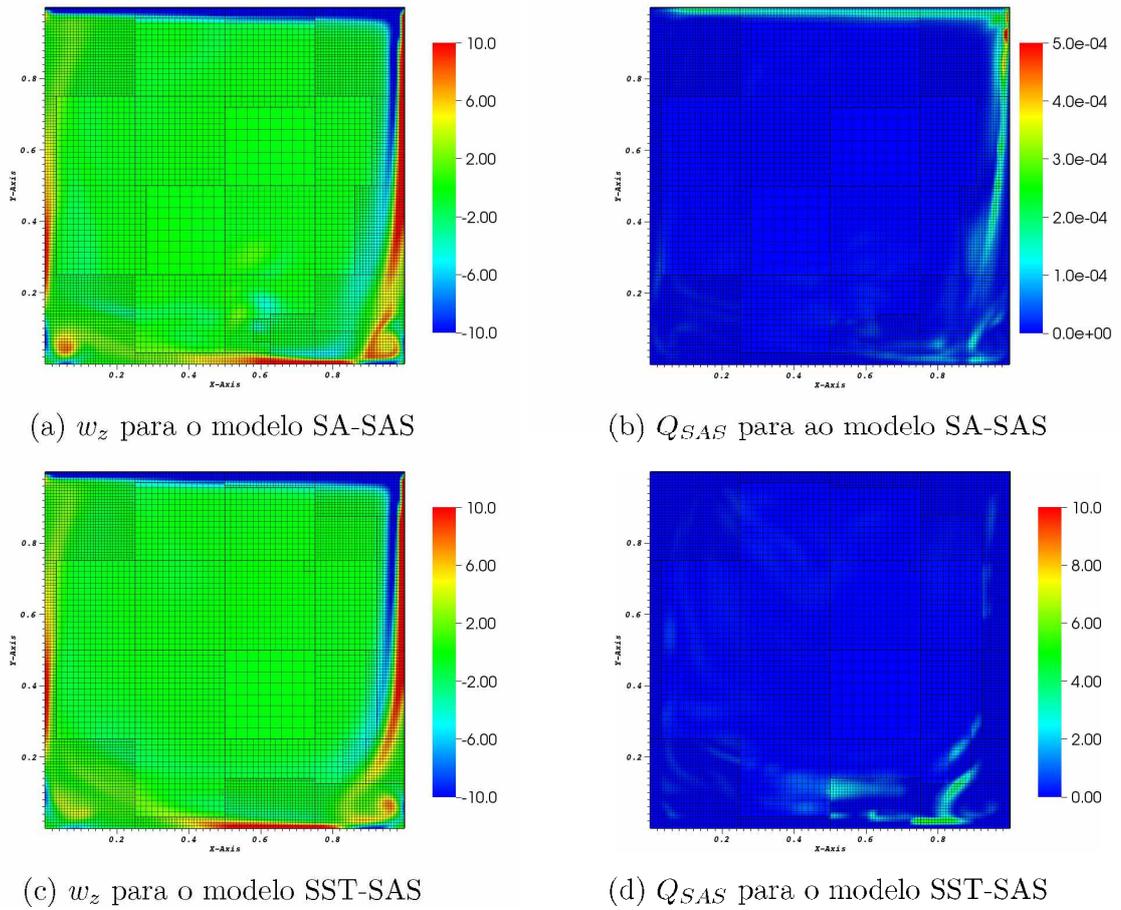


Figura 17 – Campos instantâneos de w_z e do termo Q_{SAS} , no plano $z = 0, 5$, para o modelo SA-SAS e SST-SAS.

Nas Fig. 15 e 16 também são apresentados campos instantâneos para a componente z do vetor vorticidade, doravante w_z . A cor azul indica regiões onde o fluido rotaciona no sentido horário, enquanto a cor vermelha aponta regiões que rotacionam em sentido anti-horário. Capturou-se, por meio de todos os modelos, a recirculação central principal, bem como as recirculações secundárias, localizadas nos cantos inferior direito e esquerdo da cavidade.

Por fim, na Fig. 17 é possível visualizar, à direita, o campo instantâneo do termo de acúmulo Q_{SAS} , para os modelos SA-SAS e SST-SAS, por meio do qual se inclui a adaptatividade de escalas nos modelos URANS clássicos de referência. À esquerda é apresentado novamente o campo de w_z . Observa-se através dos contornos que foi possível, por meio de ambos os modelos híbridos, identificar a física do problema, uma vez que no campo do termo Q_{SAS} observam-se os maiores valores desse termo em regiões de maior instabilidade. Em teoria, justamente nessas regiões se deseja diminuir a viscosidade turbulenta, para que se torne possível a captura de instabilidades fluidodinâmicas.

5.1.2 Velocidade média, RMS e componentes do tensor de Reynolds

Perfis de velocidade média u , RMS de u e da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds, são apresentados na Fig. 18. Todos estes perfis foram medidos no plano $z = 0,5$, ao longo do eixo y .

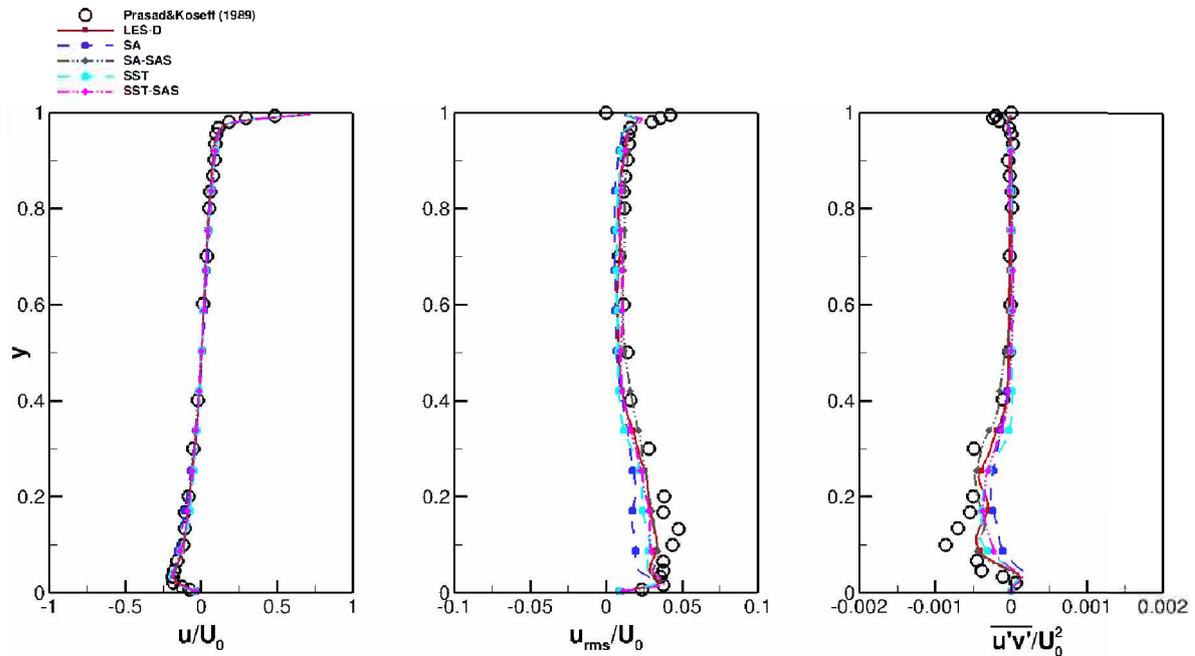


Figura 18 – Perfil médio para componente u de velocidade, RMS de u e componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds ao longo do eixo y . Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-SAS e o experimento material.

Não foram observadas dificuldades em se capturar o comportamento médio do escoamento com os modelos utilizados. Entretanto, o mesmo não pode ser dito sobre as flutuações de velocidade. Como esperado, observam-se dificuldades na correta predição do RMS de u e a componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds, por meio do modelo SA, principalmente nas regiões de maior instabilidade da cavidade, a saber em $0 < y < 0,3$. Dificuldades essas não observadas nos modelos LES-D e SA-SAS, embora ainda seja possível identificar a carência de um maior refinamento da malha.

A dita falta de refinamento fica evidente nas regiões próximas às paredes superior e inferior. Ora, todos os modelos apresentados são considerados baixo Reynolds, pois contemplam, por meio das suas formulações, os fenômenos que ocorrem na camada limite. Entretanto, não se capturou, por meio de nenhum deles, as instabilidades características de regiões parientais, devido ao baixo espaçamento da malha.

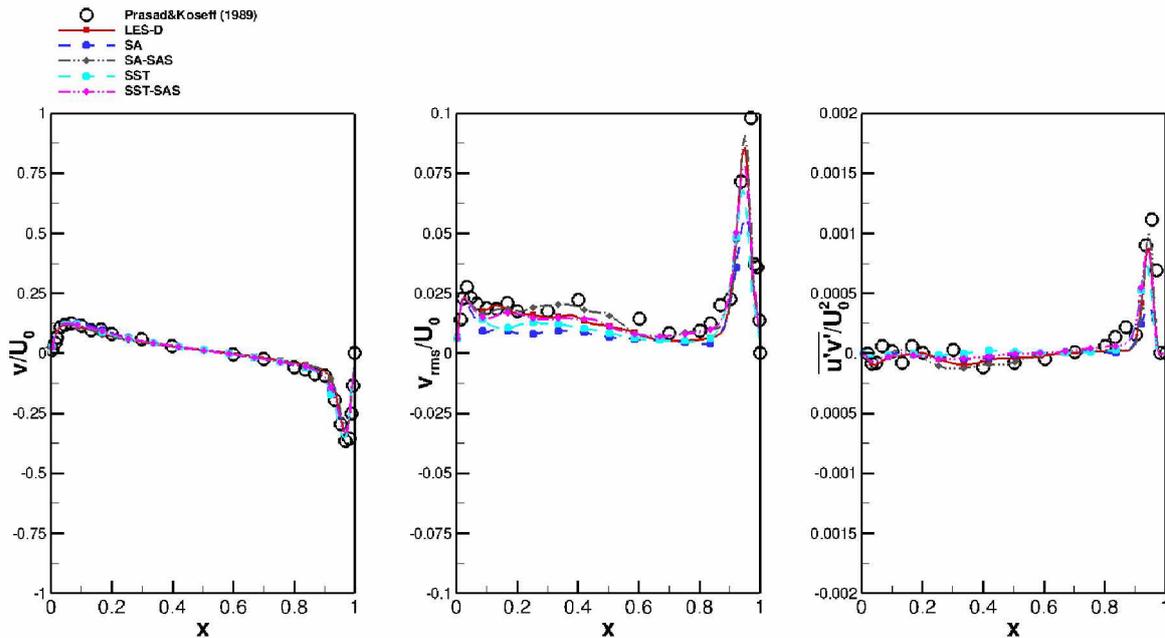


Figura 19 – Perfil médio para componente v de velocidade, RMS de v e componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds ao longo do eixo x . Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-SAS e o experimento material.

Comportamento semelhante pode ser observado nos perfis de velocidade média v , RMS de v e da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds, apresentados na Fig. 19. Todos estes perfis foram medidos no plano $z = 0,5$, ao longo do eixo x . Mais uma vez fica evidente como capturou-se com todos os modelos o comportamento médio do escoamento. Nos perfis de RMS de v , novamente percebemos as limitações na utilização do modelo SA frente aos demais, destacando a leve superioridade observada no modelo SA-SAS na região central da cavidade. Por fim, observou-se boa concordância para a componente $\overline{u'v'}$, até mesmo por meio do modelo SA. Nesse conjunto de resultados fica menos evidente a necessidade de refinamento junto às paredes, uma vez que foi observado boa concordância com o experimento material.

5.2 Validação dos modelos DES

Os modelos DES foram validados por meio do escoamento sobre um degrau descendente. O experimento material de referência foi realizado por Jovic & Driver (1994) em um túnel de vento com seção com expansão simétrica, conforme apresentado na Fig. 20.

No túnel de vento, o ar passa inicialmente por uma série de obstáculos, com objetivo de transformar grandes estruturas turbilhonares em estruturas menores, diminuindo assim a interferência destas no regime do escoamento a se desenvolver. Na sequência, o ar passa por uma seção onde o escoamento se desenvolve. A intensidade turbulenta não passa de

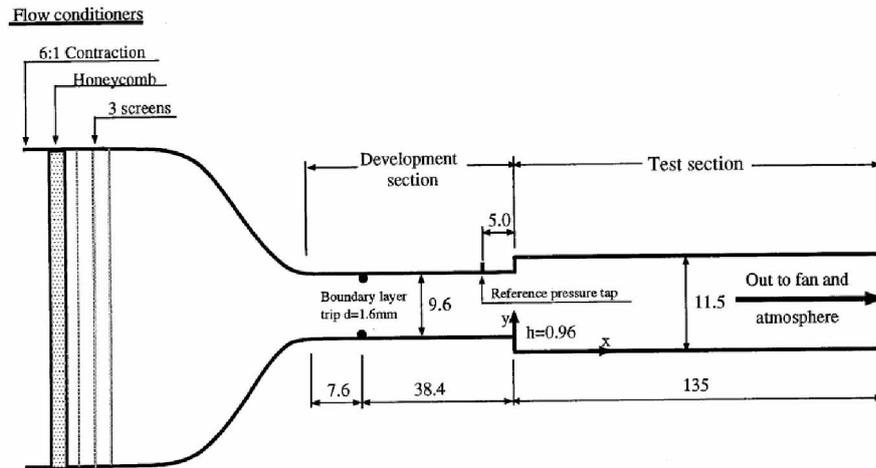


Figura 20 – Esquema experimental do túnel de vento utilizado no experimento material de Jovic & Driver (1994).

1% na corrente livre. Por fim, o escoamento atinge a seção de testes com um perfil de velocidade desenvolvido, onde a espessura da camada limite é 1,15 cm.

Melo (2017) utilizou um domínio composto por apenas um degrau, conforme ilustrado na Fig. 21, uma vez que a seção apresenta expansão simétrica e os dados amostrados no experimento material indicam que o escoamento do degrau superior não interfere no escoamento do degrau inferior. Com isso em vista, adotou-se o mesmo domínio utilizado por Melo (2017), com apenas uma modificação na dimensão L .

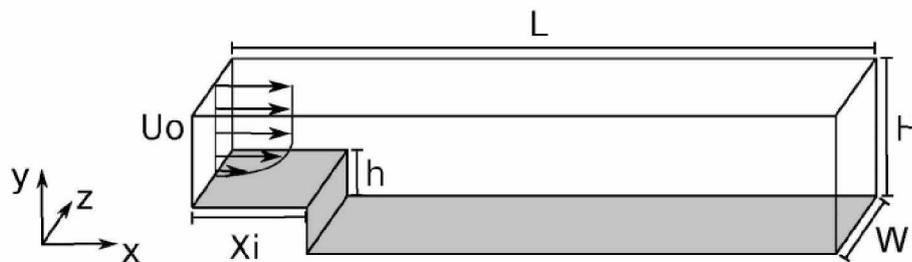


Figura 21 – Esquema representativo do domínio utilizado (MELO, 2017).

Os dados geométricos utilizados são $X_i = 1,5m$, $h = 0,5m$, $W = 2,0m$, $H = 3,0m$ e $L = 12,0m$. Segundo Spode (2006), muitos autores defendem o uso de um comprimento longo após o degrau, da ordem de $30h$, evitando assim que ocorram efeitos elípticos da condição de contorno imposta na saída do domínio, como utilizado por SILVEIRA-NETO *et al.* (1993). O próprio Melo (2017) trabalhou com $29h$ após o degrau. Entretanto, outros autores advogam o uso de domínios mais curtos, como Delcayre & Lesieur (1997) que utilizaram um comprimento pós degrau de $15h$, priorizando assim o refino da malha. Por sua vez, Spode (2006) utilizou $20h$ de extensão após o degrau, sem observar influência nos resultados, nem problemas elípticos na condição de saída.

Após a realização de testes, optou-se na presente dissertação pela utilização do

comprimento pós degrau sugerido por Spode (2006). Por comodidade dentro do código MFSim, definiu-se um domínio de $L = 12,0m$, garantindo $21h$ após o degrau. A malha base possui $48 \times 16 \times 8$ volumes e 4 níveis físicos. Nas simulações utilizando os modelos SA-DES e LES-D, utilizou-se o refinamento adaptativo dinâmico, com critério de refinamento dado pela magnitude do vetor vorticidade.

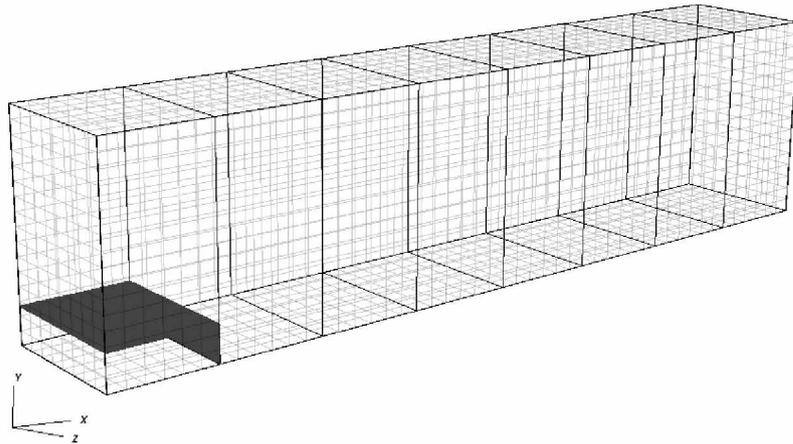


Figura 22 – Domínio computacional utilizado para simulação do degrau descendente. Divisão de processos em destaque.

As condições de contorno aplicadas visam reproduzir o ambiente do experimento material. Na face superior ($y = 3,0m$), foi imposta condição de simetria,

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (5.6)$$

Na direção z , assume-se que o escoamento seja homogêneo, e a condição de periodicidade foi, conseqüentemente, utilizada. Na face inferior ($y = 0,0m$), assim como sobre o degrau, é aplicada uma condição de não deslizamento. O degrau é modelado por uma fronteira imersa, conforme pode ser visto na Fig. 22. Na saída do domínio ($x = 12,0m$) é aplicada uma condição advectiva. Por fim, na entrada ($x = 0,0m$) é imposto um perfil de velocidade média extraído do experimento material de Jovic & Driver (1994), apresentado na Fig. 23. Para a pressão, foi imposto valor nulo na face inferior, e condição de Neumann nas demais faces.

No caso dos modelos SA e SA-DES, além do perfil de velocidade média, é necessário prescrever as condições de contorno para ν_t . Foi ajustado, a partir das informações fornecidas pelo experimento de Jovic & Driver (1994), um perfil para a energia cinética turbulenta, k . De posse dessa informação, e utilizando as relações apresentadas abaixo, sugeridas pelo manual do Ansys FLUENT (2015), chegou-se a um perfil de entrada para

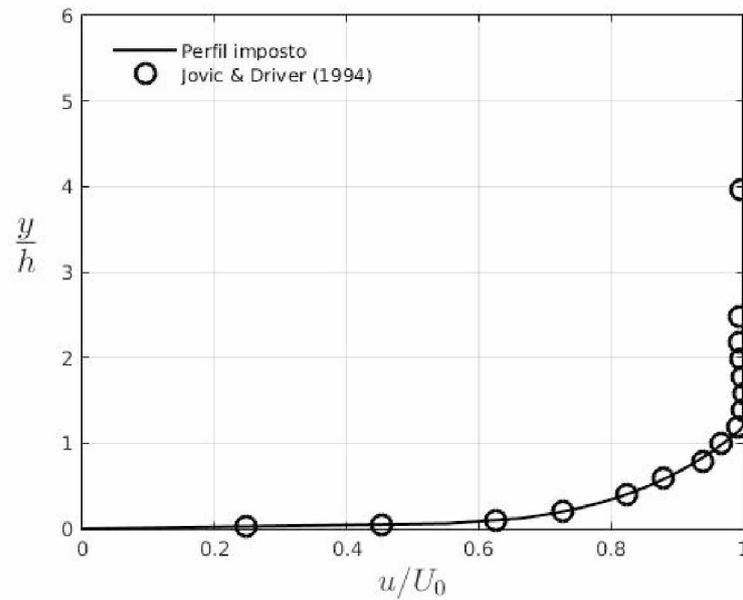


Figura 23 – Perfil médio de velocidade aplicado na entrada do domínio computacional.

ν_t .

$$\nu_t = \sqrt{\frac{3}{2}} u_0 (T_u) L_t, \quad k = \frac{3}{2} (u_0 T_u)^2, \quad (5.7)$$

onde, u_0 é a velocidade de referência, T_u representa a intensidade turbulenta e L_t uma escala comprimento característica da turbulência.

A intensidade turbulenta utilizada foi de $T_u = 5\%$. Por fim, a estimativa da escala de comprimento característica é feita baseando-se na definição de diâmetro hidráulico. Ainda segundo o manual do Ansys FLUENT (2015),

$$L_t = 0,07 D_H. \quad (5.8)$$

O cálculo do diâmetro hidráulico de uma seção retangular, por sua vez, pode ser feito da seguinte forma:

$$D_H = 2 \frac{ab}{a+b}, \quad (5.9)$$

onde a e b representam, respectivamente, a largura e altura da seção retangular de referência. No nosso caso, foi utilizada a seção de desenvolvimento do escoamento, com dimensões de $2,0m \times 2,5m$, fornecendo $D_H = 2,22$ e $L_t = 0,155$.

Nas faces definidas como paredes, utilizou-se ainda $\nu_t = 0$. São elas a face inferior e o degrau. Na direção z , onde foi aplicada condição de periodicidade para a velocidade, na face superior, onde foi aplicada condição de simetria, e na saída do domínio foi aplicado condição de derivada nula para ν_t .

5.2.1 Resultados topológicos

Campos instantâneos de velocidade u são apresentados na Fig. 24, exibidos no plano $z/h = 2, 0$, para os modelos LES-D, SA-DES e SA. Como esperado, conclui-se por meio das figuras que, a utilização dos modelos LES-D e SA-DES permitiu a captura do comportamento transiente do escoamento. O mesmo não se observa nos resultados obtidos por meio do modelo SA que, mesmo operando em sua formulação URANS, convergiu para a média.

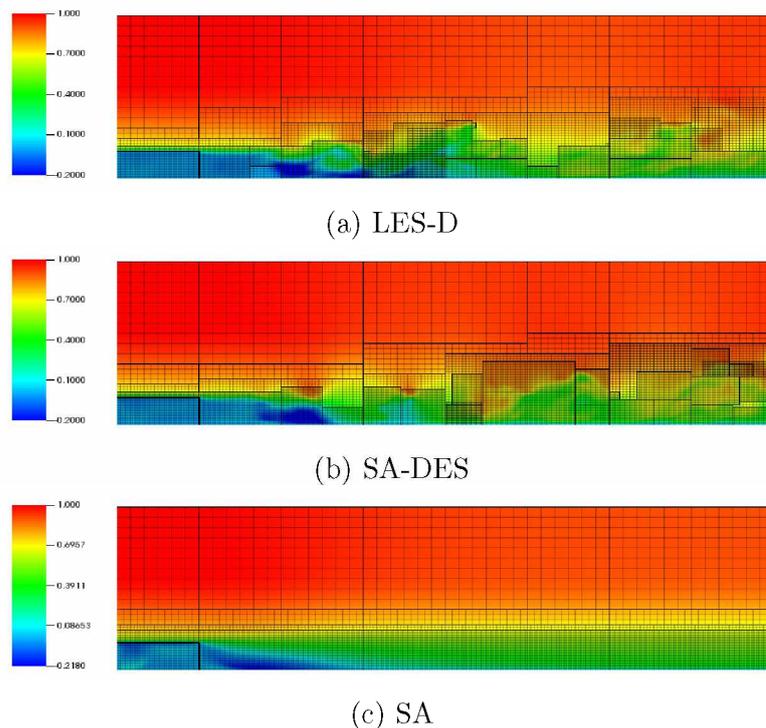


Figura 24 – Campos de velocidade instantânea u/U_0 , no plano $z/h = 2, 0$, para os modelos LES-D, SA-DES e SA.

Ora, como apresentado por Menter *et al.* (2010), o escoamento sobre o degrau descendente é estável do ponto de vista das formulações URANS. Ou seja, as instabilidades desenvolvidas nesse tipo de problema não possuem magnitude suficiente para vencer o amortecimento imposto pelas altas viscosidades turbulentas, características de modelos URANS, o que faz com que o escoamento seja levado para a média.

O mesmo se observa nos modelos SAS, pois estes operam justamente sobre as instabilidades que emergem do escoamento. Por isso, o principal objetivo do trabalho de Menter *et al.* (2010) é, por meio de uma técnica de forçagem, estender a utilização dos modelos SAS para aqueles escoamento ditos estáveis do ponto de vista da formulação URANS.

Os campos instantâneos da componente z do vetor vorticidade, exibidos na Fig. 25, corroboram com a análise feita até aqui. É notória a presença de estruturas turbilhonares

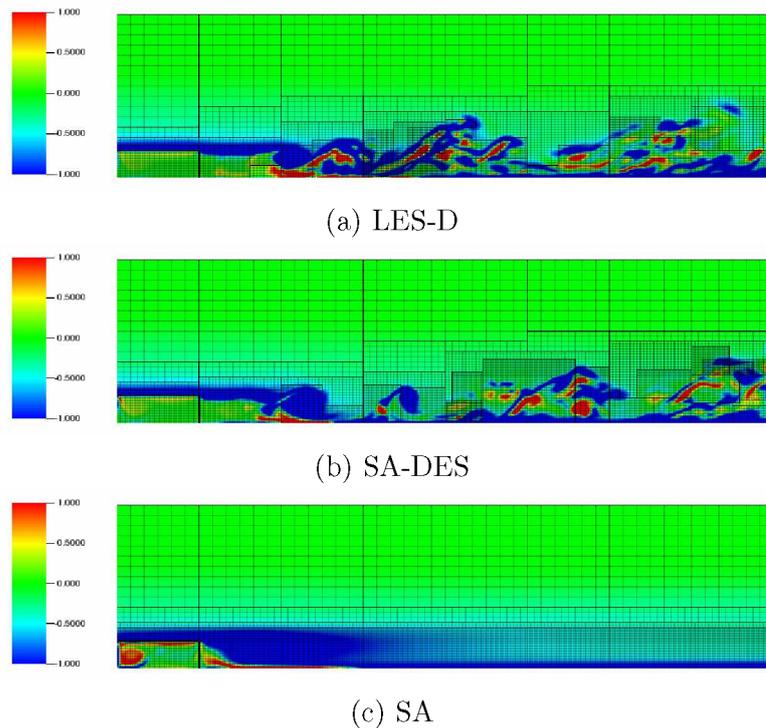


Figura 25 – Campos instantâneos da componente z do vetor vorticidade, no plano $z/h = 2,0$, para os diferentes modelos estudados.

nos campos obtidos por meio dos modelos LES-D e SA-DES. Elas são identificadas pelas cores azul e vermelha, que indicam a existência de estruturas contra rotativas, ao longo do domínio. No caso do modelo SA, nota-se rotação diferente, além daquela observada no interior da fronteira imersa devido ao escoamento complementar, apenas na região de recolamento da camada cisalhante.

A ausência de estruturas turbilhonares nos resultados obtidos por meio do modelo SA é evidenciada pelas iso-superfícies do critério Q , coloridas pela velocidade instantânea u , apresentadas na Fig. 26. Apenas uma grande estrutura se forma próximo ao degrau, destacando a existência de uma região de recirculação estável.

Nos modelos LES-D e SA-DES, por sua vez, identificamos a formação de estruturas do tipo Kelvin-Helmholtz após o descolamento da camada cisalhante. Como também pode ser visto na Fig. 25, estas estruturas são instáveis e rotativas. Devido à constante injeção de energia cinética a partir da entrada do domínio, ocorre a formação de estruturas longitudinais secundárias, que interagem continuamente entre si, produzindo novas formas características, como as estruturas do tipo grampo de cabelo, também identificadas na Fig. 26.

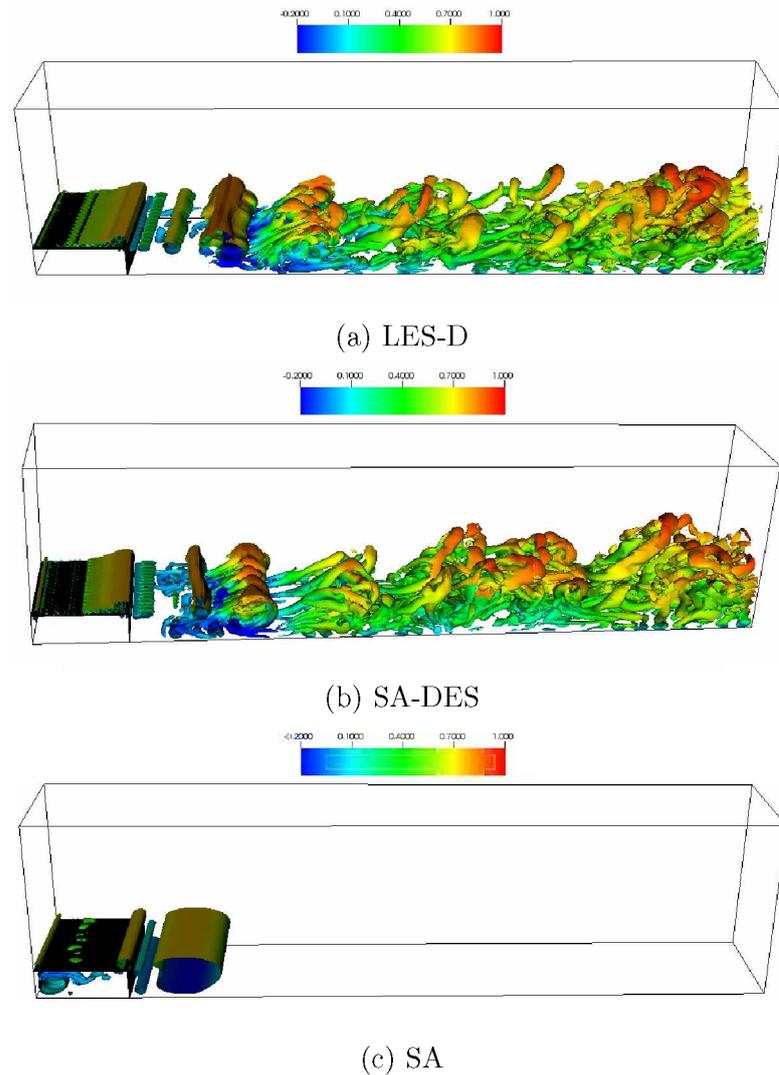


Figura 26 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea u , no plano $z/h = 2,0$, para os diferentes modelos estudados.

Apresenta-se ainda, na Fig. 27, campos instantâneos da razão de viscosidade turbulenta. Os baixos valores observados nos resultados produzidos pela utilização do modelo LES-D contrastam com àqueles obtidos por meio do modelo SA. Observa-se, ainda, que a condição de contorno imposta para a variável ν_t pode ser melhor ajustada, uma vez que os altos valores presentes na entrada do domínio não foram transformados, apenas difundidos.

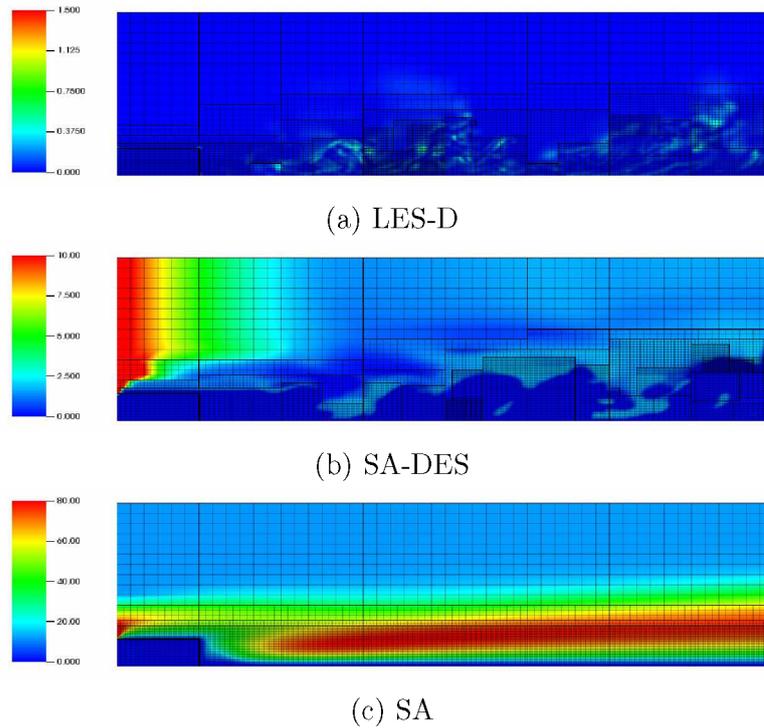


Figura 27 – Campos instantâneos da razão de viscosidade turbulenta μ_t/μ , no plano $z/h = 2,0$, para os diferentes modelos estudados.

5.2.2 Velocidade média e componentes do tensor de Reynolds

Os perfis de velocidade média u são apresentados na Fig. 24 em cinco regiões de interesse ao longo do domínio: no interior da zona de recirculação ($x/h = 4$), próximo ao ponto de recolamento ($x/h = 6$), após o ponto de recolamento ($x/h = 10$) e em regiões afastadas do ponto de recolamento ($x/h = 15$ e $x/h = 19$).

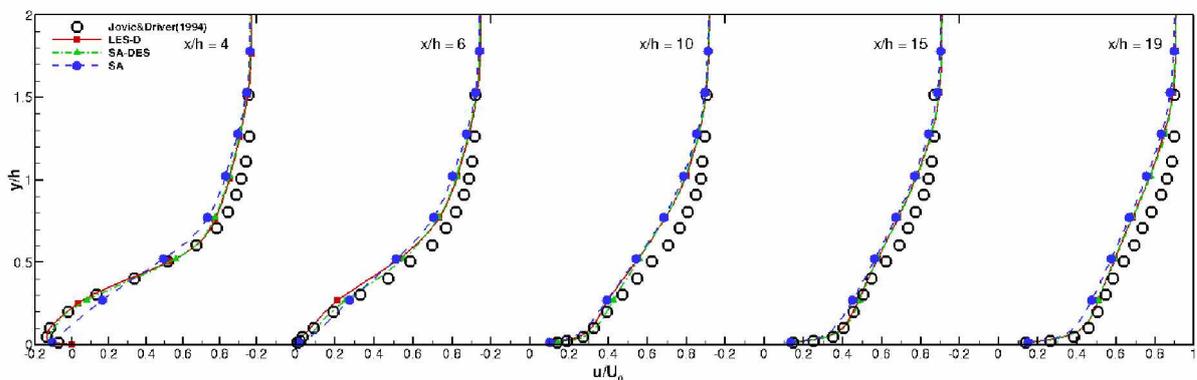


Figura 28 – Perfil médio para componente u de velocidade em cinco estações à jusante do degrau ($x/h = 4, x/h = 6, x/h = 10, x/h = 15, x/h = 19$), medidos no plano $z/h = 2,0$. Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-DES e o experimento material.

À primeira vista, percebe-se que em todas as estações de medição, os perfis médio

de velocidade u se afastam dos dados experimentais para valores de y/h maiores que a altura do degrau. Estas regiões podem ter sido afetadas pelo baixo refinamento da malha. Ora, o refinamento adaptativo baseado no critério de vorticidade, concentra o nível fino nas regiões inferiores. Uma alternativa para correção desse comportamento pode ser a utilização de um valor menos restritivo para este critério, possibilitando ao código cobrir uma maior área com o nível mais fino.

Adicionalmente, obteve-se por meio dos modelos comportamentos semelhantes em praticamente todas as estações. Observa-se uma exceção no perfil médio obtido através do modelo SA, na estação $x/h = 4$. Percebe-se que a zona de recirculação não foi capturada com sucesso, apresentando perfil de velocidade média u aquém do esperado.

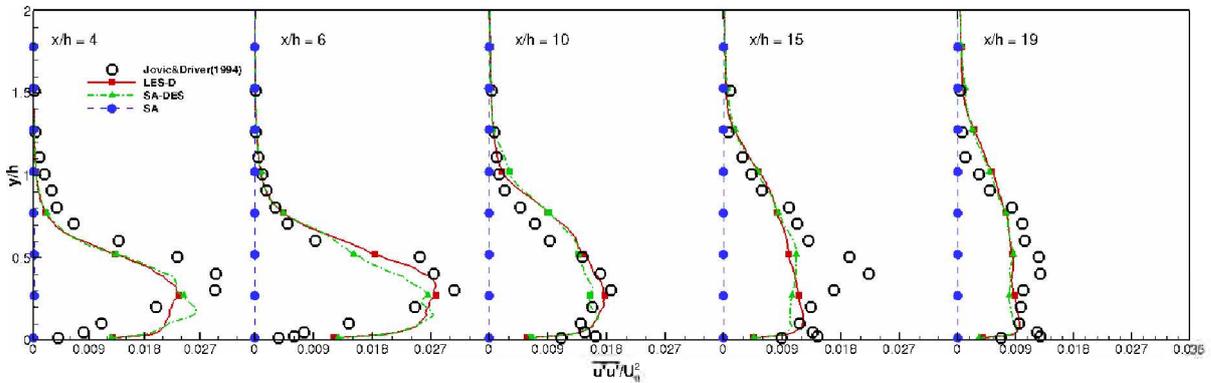


Figura 29 – Perfil da componente $\overline{u'u'}$ do tensor de Reynolds em cinco estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$, $x/h = 19$). Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-DES e o experimento material.

Quando analisamos as componentes do tensor de Reynolds, $\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$ e $\overline{u'v'}$, apresentadas, respectivamente, nas Fig. 29, 30 e 31, algumas informações são dignas de nota. Inicialmente, fica evidente a convergência para a média do modelo SA. Nenhuma das propriedades estatísticas supracitadas apresentou valor diferente de zero, o que indica a convergência das velocidades u e v .

Das três componentes do tensor de Reynolds, $\overline{u'u'}$ é a que apresenta a pior concordância com os dados experimentais. A falta de condição de contorno turbulenta na entrada poderia explicar a baixa concordância obtida com os modelo LES-D, principalmente nas duas primeiras estações. Soma-se a esse aspecto a já mencionada resolução da malha, desta vez nas regiões próximas às paredes. Em todas as estações, a componente $\overline{u'u'}$ não foi bem avaliada próximo às paredes. Os resultados obtidos com a utilização do modelo SA-DES acompanham esta tendência em todas as estações.

Nos perfis das componentes $\overline{v'v'}$ e $\overline{u'v'}$ fica menos evidente a carência de refinamento junto às paredes. Entretanto, os valores exagerados de $\overline{v'v'}$ nas duas primeiras estações podem indicar a necessidade da condição de entrada turbulenta. Como apresentado por

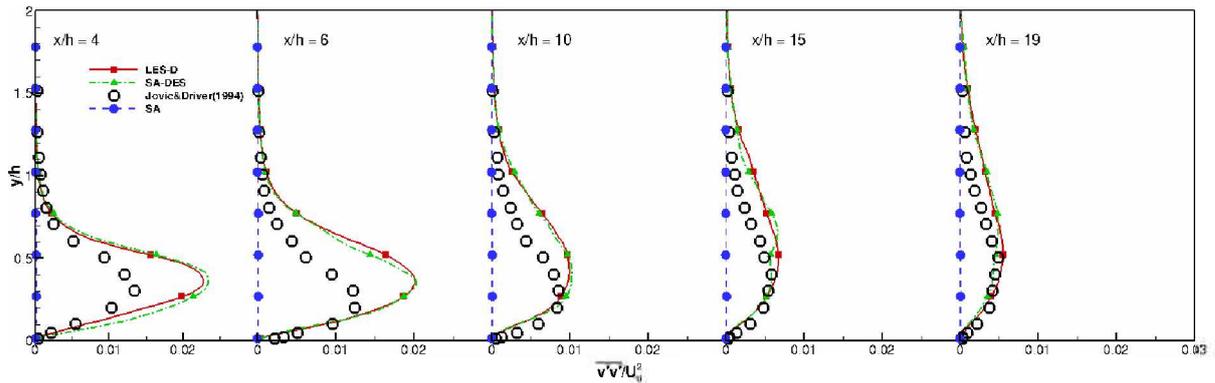


Figura 30 – Perfil da componente $\overline{v'v'}$ do tensor de Reynolds em cinco estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$, $x/h = 19$). Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-DES e o experimento material.

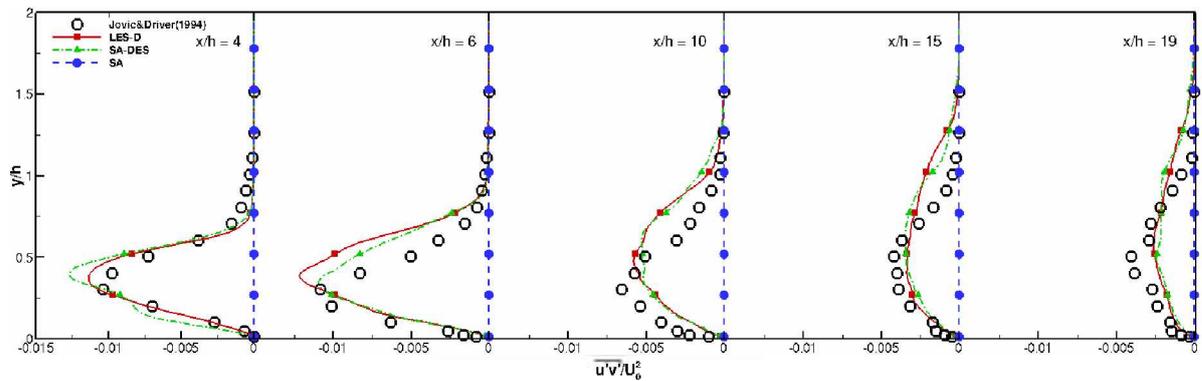


Figura 31 – Perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds em cinco estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$, $x/h = 19$). Comparação entre os modelos LES-D, SA, SA-DES e o experimento material.

Vedovoto *et al.* (2015), mesmo fazendo uso de perfis de velocidade média e energia cinética turbulenta (o que não foi utilizado no presente trabalho) na entrada do domínio, ainda se faz necessária a utilização de métodos matemáticos para a correta prescrição da condição de contorno turbulenta na entrada.

5.2.3 Comprimento de recolamento

O resultado mais importante do escoamento sobre o degrau descendente é o comprimento de recolamento da camada cisalhante. Ele influencia os perfis médios e as flutuações de velocidade, sendo sensível aos modelos de fechamento para turbulência utilizados, bem como às condições de entrada da camada limite (SPODE, 2006).

O comprimento de recolamento foi determinado na presente dissertação através da localização do ponto de velocidade média u nula, no centro do primeiro volume ao longo do eixo y . Para tanto, utilizaram-se sondas numéricas, introduzidas no MFSim por Melo

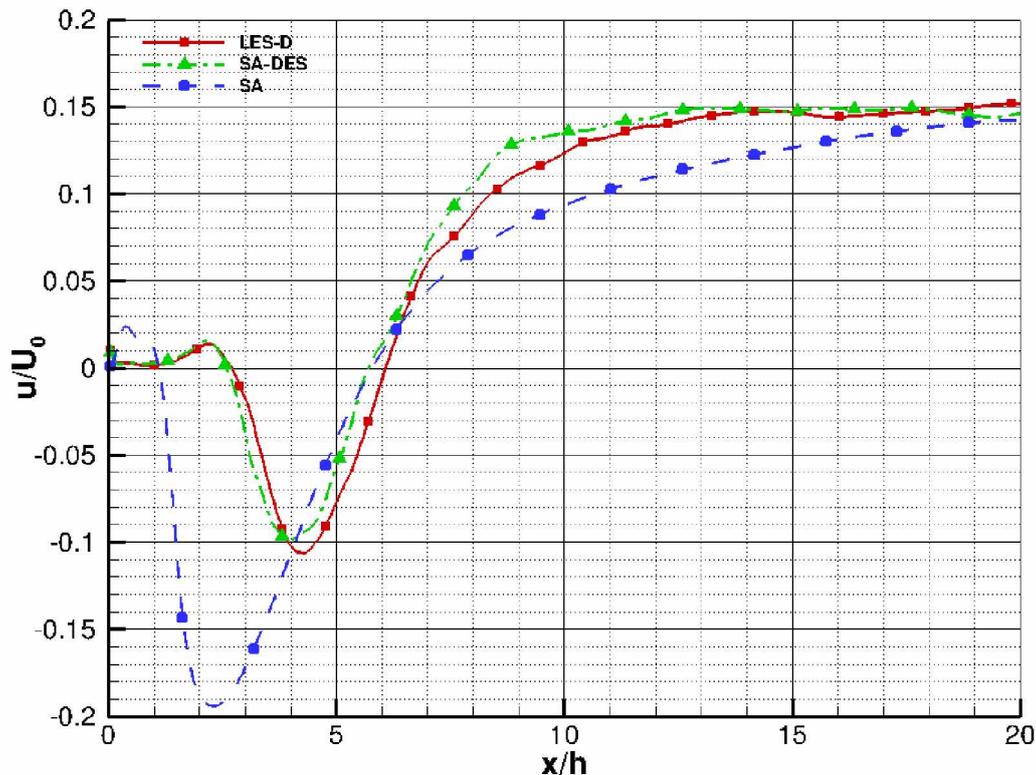


Figura 32 – Comprimento de recolamento determinado pela velocidade média u obtido por meio dos modelos LES-D, SA, SA-DES.

(2017), distribuídas ao longo do plano $z/h = 2$. É apresentado na Fig. 32 o resultado médio extraído das referidas sondas. Nela fica evidente a já observada dificuldade de se avaliar corretamente a região de recirculação por meio do modelo SA, como pode ser observado no perfil médio da componente u da velocidade (Fig. 28).

Como dito, a determinação do comprimento de recolamento é feita identificando o ponto onde a componente u da velocidade se anula. Entretanto, um número finito de sondas numéricas foi utilizado para armazenar a velocidade ao longo da parede inferior, o que não nos permite identificar exatamente o ponto de velocidade $u = 0$. Sendo assim, a estratégia adotada foi de identificar os pontos mais próximos onde a velocidade muda de sentido e, em sequência, realizar a média entre essas duas posições.

Tabela 4 – Informações de duas sondas utilizadas na captura dos resultados para o caso LES-D.

sonda	u	x/h	y	z
697	-0,00491068815976	0,30094043E+01	0,15625000E-01	0,10000000E+01
698	0,000310075710669	0,30407523E+01	0,15625000E-01	0,10000000E+01

Apenas a título de ilustração, é explicitado na Tabela 4, para o caso LES-D, como é feito o processo descrito acima. A recirculação termina entre as sondas 697 e 698. Fazendo a média entre as posições, obtemos o valor aproximado de 6,05 para o comprimento de recolamento. Um resumo com os valores aproximados para o comprimento de recolamento, obtidos na presente dissertação, é apresentado na Tabela 5. São apresentados também resultados obtidos por outros autores, oriundos de experimentos numéricos e materiais.

Tabela 5 – Comprimento de recolamento para os modelos LES-D, SA-DES e SA, comparados com outros trabalhos.

Fonte	Natureza do resultado	Comprimento de recolamento (x/h)
Jovic & Driver (1994)	Experimento Material	$6,0 \pm 0,15$
Le, Moin & Kim (1997)	DNS	6,28
Spode (2006)	LES	6,94
	SA	7,26
	SA-DES	6,36
Melo (2017)	LES-D	5,93
	SA	6,24
Presente trabalho	LES-D	6,05
	SA	5,30
	SA-DES	5,48

5.3 Aplicação dos modelos híbridos

Todos os modelos estudados na presente dissertação teriam suas performances comparadas no caso apresentado nesta seção. Entretanto, dificuldades foram encontradas por este autor para se trabalhar com o modelo SST-SAS, no ambiente do código MFSim, em conjunto com a metodologia da fronteira imersa. Ora, o código possui mais de 200.000 linhas de programação, em sua grande grande maioria escritas em FORTRAN, com partes em C e C++. O baixo conhecimento da estrutura do código no início do presente trabalho impediu uma maior evolução na utilização desse modelo. Embora o mesmo tenha sido implementado e testado, resultados ainda inconsistentes imperidiram que este conteúdo fosse apresentado na presente dissertação.

O escoamento ao redor de um prisma de seção triangular, experimentado por Sjunnesson, Henriksson & Lofstrom (1992), constitui um problema adequado para utilização dos modelos DES e SAS. O experimento foi originalmente desenvolvido para estudar o comportamento de escoamentos reativos. Entretanto, também foram conduzidos experimentos para o escoamento inerte. A seção de entrada estende-se por $0,55m$. Ela contém injetores de combustível, para os experimentos reativos e emissores de partículas para as medições realizadas por meio da anemometria laser de efeito Doppler (LDA). Ainda nesta

região encontra-se uma tela em formato de colméia, que tem objetivo de condicionar o escoamento, diminuindo assim a intensidade turbulenta do mesmo.

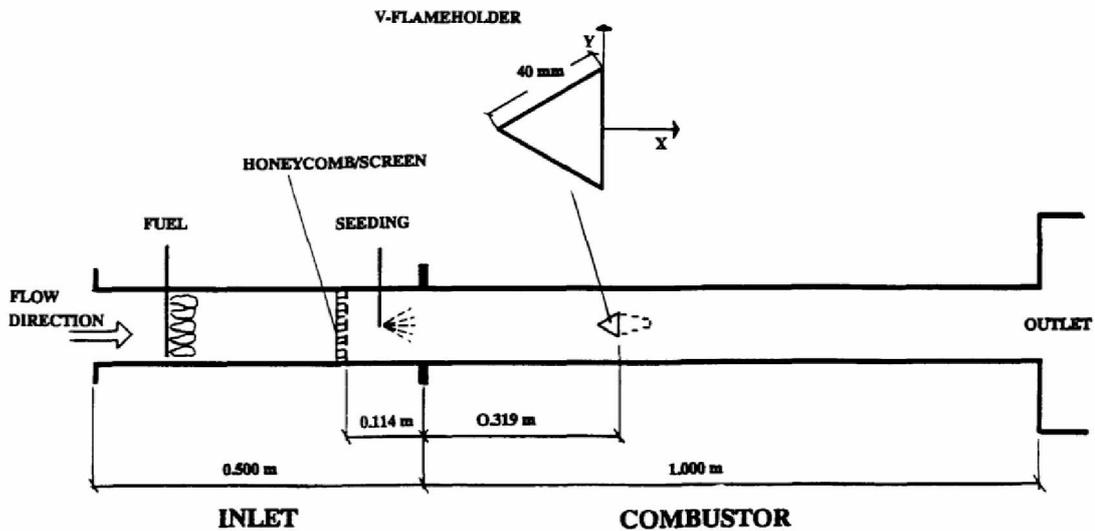


Figura 33 – Esquema experimental da seção de testes utilizada no experimento material. Adaptado de (SJUNNESSON; HENRIKSSON; LOFSTROM, 1992).

Em sequência encontra-se a seção do combustor, formada por um duto com seção de $0,12\text{m} \times 0,24\text{m}$ e comprimento de $1,0\text{m}$. Um anteparo, a saber um prisma triangular, é centrado no duto, distando $0,319\text{m}$ da entrada do combustor, como pode ser verificado na Fig. 33. O número de Reynolds, baseado na velocidade de entrada de $17,3\text{ m/s}$ e na aresta do prisma triangular de $40,0\text{mm}$, é de 45500. Não foi informado o valor de intensidade turbulenta observado na seção de testes. Entretanto, pelas condições do experimento, podemos estimar valores da ordem de $1\% - 5\%$.

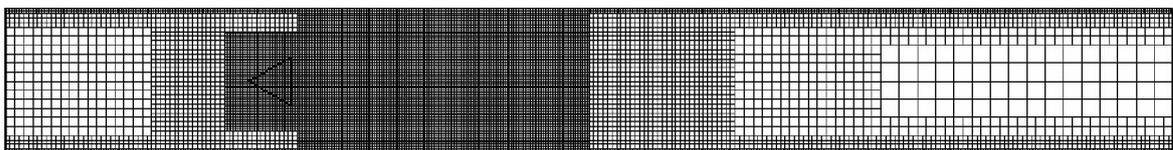


Figura 34 – Domínio computacional utilizado para as simulações do escoamento sobre o prisma triangular.

Para as simulações, utilizou-se o modelo físico apresentado na Fig. 34. Ele

representa o combustor do experimento material. As dimensões utilizadas são $24a \times 3a \times 3a$, onde a representa a aresta do prisma, definida, por comodidade, como sendo $1,0m$. A maior diferença está na direção z . O experimento material possui seis arestas nessa dimensão, enquanto que o domínio computacional apenas três. O uso de duas arestas na direção z em conjunto com condição de periodicidade foi reportado com sucesso por diversos autores (POTTURI; PATTON; EDWARDS, 2017; WEST; GROTH; HU, 2017; SANKARAN; GALLAGHER, 2017; WU *et al.*, 2017). Sendo assim, a utilização de três arestas na direção z em conjunto com condição de periodicidade não representa um problema. O valor de três arestas, ao invés de duas, foi escolhido pois define um domínio mais equilibrado para a utilização do código MFSim, uma vez que facilita o trabalho do método Multigrid-Multinível.

Além da citada condição de periodicidade na direção z , foram definidas paredes com condição de não deslizamento em ambas as faces na direção y . Na saída, foi utilizada uma condição de contorno do tipo advectiva. Na entrada, foi aplicado um perfil de velocidade desenvolvido, típico de escoamentos confinados, adaptado de Courtois (2005):

$$u(y) = u_{max} \left[1 - \left(\frac{y - 0,5b}{0,5b} \right)^6 \right], \quad (5.10)$$

onde, b é a altura da seção e u_{max} é avaliado em função da velocidade média desejada,

$$u_{max} = \frac{u_{médio}}{0,85628}. \quad (5.11)$$

Para a pressão foram aplicadas condição de Dirichlet nas paredes superior e inferior, impondo valores nulos, e condição de Neumann nas demais faces.

Para a especificação da viscosidade turbulenta modificada na entrada, foi utilizada uma estratégia semelhante àquela descrita para o caso do degrau descendente. Foi imposto um valor para ν_t , dado pela Eq.(5.7), utilizando as relações auxiliares dadas pelas Eq.(5.8) e Eq.(5.9). Para a velocidade média u_0 foi aplicado o perfil descrito na Eq.(5.10). Utilizou-se, baseado nos trabalhos de West, Groth & Hu (2017), Sankaran & Gallagher (2017), um valor de 5% para intensidade turbulenta na entrada. Nas paredes, bem como sobre a fronteira imersa, foi aplicado valor nulo para ν_t . Nas demais faces utilizou-se condição de Neumann.

Para a energia cinética turbulenta, k , utilizou-se na entrada a recomendação do manual do Ansys FLUENT (2015), dada pela Eq.(5.7) em conjunto com o mesmo perfil de velocidade desenvolvido, apresentado na Eq.(5.10) e $T_u = 5\%$. Nas paredes superior e inferior, utilizou-se $k = 0$, enquanto que nas demais faces aplicou-se uma condição de fluxo nulo. Os valores de ω na entrada também acompanham recomendações do manual

supracitado, sendo imposto

$$\omega = \frac{k^{1/2}}{c_{\mu}^{1/4} L_t}, \quad (5.12)$$

onde L_t também é avaliado conforme as Eq.(5.8) e Eq.(5.9). Nas paredes é imposto o valor recomendado por Bardina, Huang & Coakley (1997) apresentado na Eq.(4.18). Nas demais faces aplicou-se condição de fluxo nulo.

A malha base é composta de 64 x 8 x 8 volumes, com 4 níveis de refinamento, totalizando 1.912.351 elementos. Para este caso não foi utilizado refinamento adaptativo dinâmico em função do algoritmo utilizado no cálculo de distância às paredes, informação esta indispensável para o correto funcionamento do modelo Spalart-Allmaras. O mesmo ainda carece de otimização e seu uso em conjunto com a remalhagem elevaria consideravelmente o custo computacional das simulações.

5.3.1 Resultados topológicos

Campos de velocidade instantânea u são apresentados na Fig. 35. Com os modelos LES-D, SA-DES, SST-DES, SA-SAS e SST, foi possível obter, como esperado, o comportamento transiente do escoamento, dado a existência de fortes instabilidades globais em função da geometria do anteparo. Justamente em função desta característica, é de se surpreender que o modelo SA, mesmo operando no modo URANS, convergiu para a média.

Diferentemente do que ocorre no escoamento sobre o degrau descendente, o escoamento ao redor do prisma triangular não é considerado estável do ponto de vista da modelagem URANS. Entretanto, acredita-se que mesmo as supracitadas instabilidades foram amortecidas pela alta viscosidade turbulenta produzida pelo modelo SA. Ao mesmo tempo, comprovou-se a capacidade teórica do modelo SA-SAS de diminuir a viscosidade turbulenta em regiões de grandes instabilidades, proporcionando a obtenção do comportamento transiente característico de um regime turbulento.

Os campos de razão da viscosidade turbulenta, exibidos na Fig. 36, reforçam esta análise. Os campos estão organizados, de cima para baixo, em ordem crescente de razão de viscosidade turbulenta. Os valores mais elevados são observados no modelo SA, atingindo picos de viscosidade turbulenta de 2300μ . Embora o valor de pico seja semelhante, percebe-se que por meio do modelo SST, valores médios menores, de aproximadamente 1100μ , são obtidos para a viscosidade turbulenta.

Nota-se que, através do modelo SA-SAS, houve a redução dos valores médios de μ_t para cerca de 200μ . Em sequência, observa-se nos modelos SA-DES e SST-DES uma maior redução nos valores médios de viscosidade turbulenta para cerca de 100μ . Por fim,

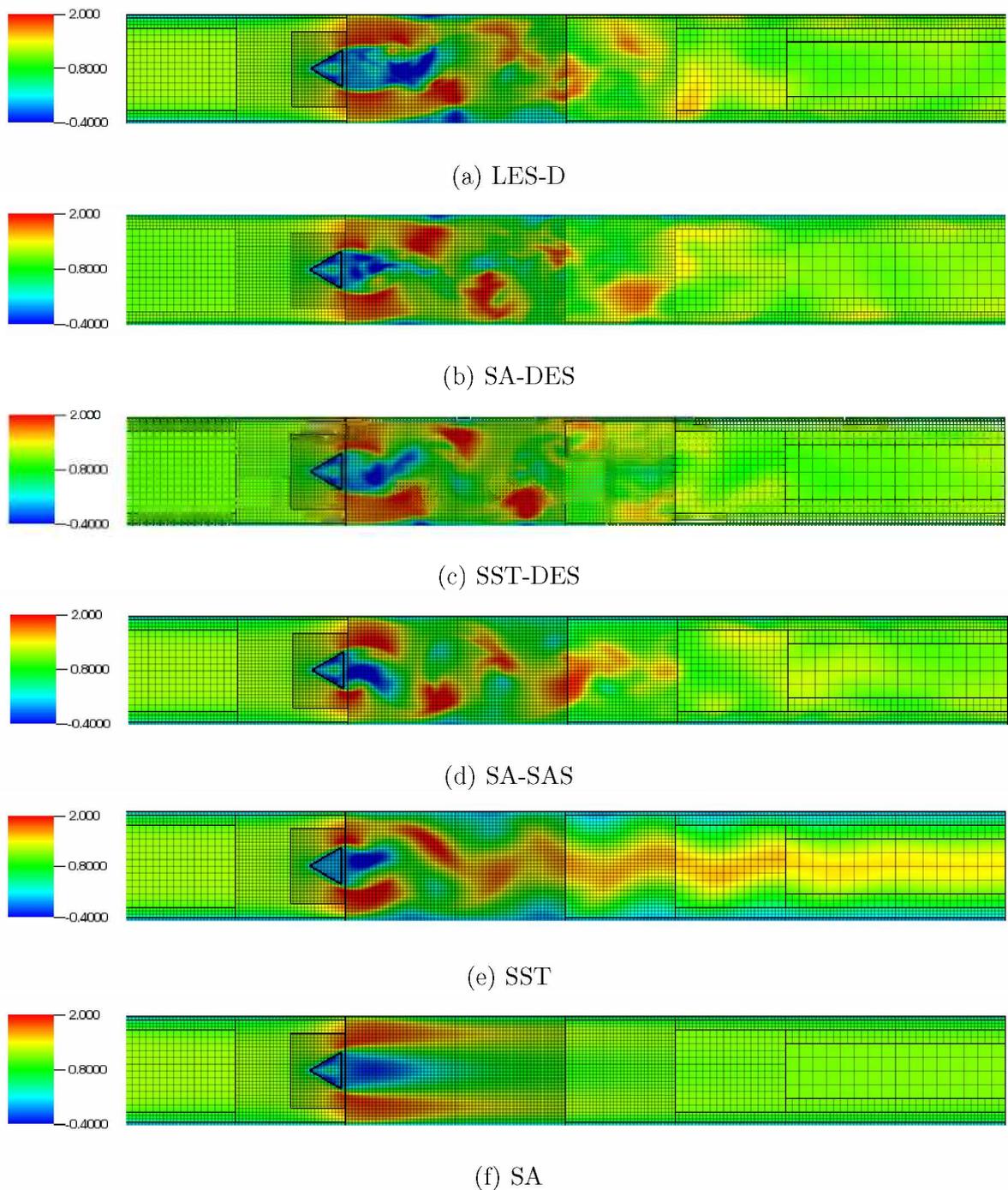


Figura 35 – Campos de velocidade instantânea u/U_0 , no plano $z/a = 1, 5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-DES, SST-DES, SA-SAS, SST e SA.

os menores valores de μ_t foram observados no modelo LES-D, com médias em torno de 10μ .

Como já observado nos demais casos apresentados, menores valores de viscosidade turbulenta resultam, caso o tamanho dos elementos da malha permita, em um maior nível de detalhamento no cálculo das estruturas turbilhonares que compõem o escoamento. Nas Fig. 37 e 38 são apresentadas iso-superfícies do critério Q , com $Q = 10s^{-2}$, coloridas pela

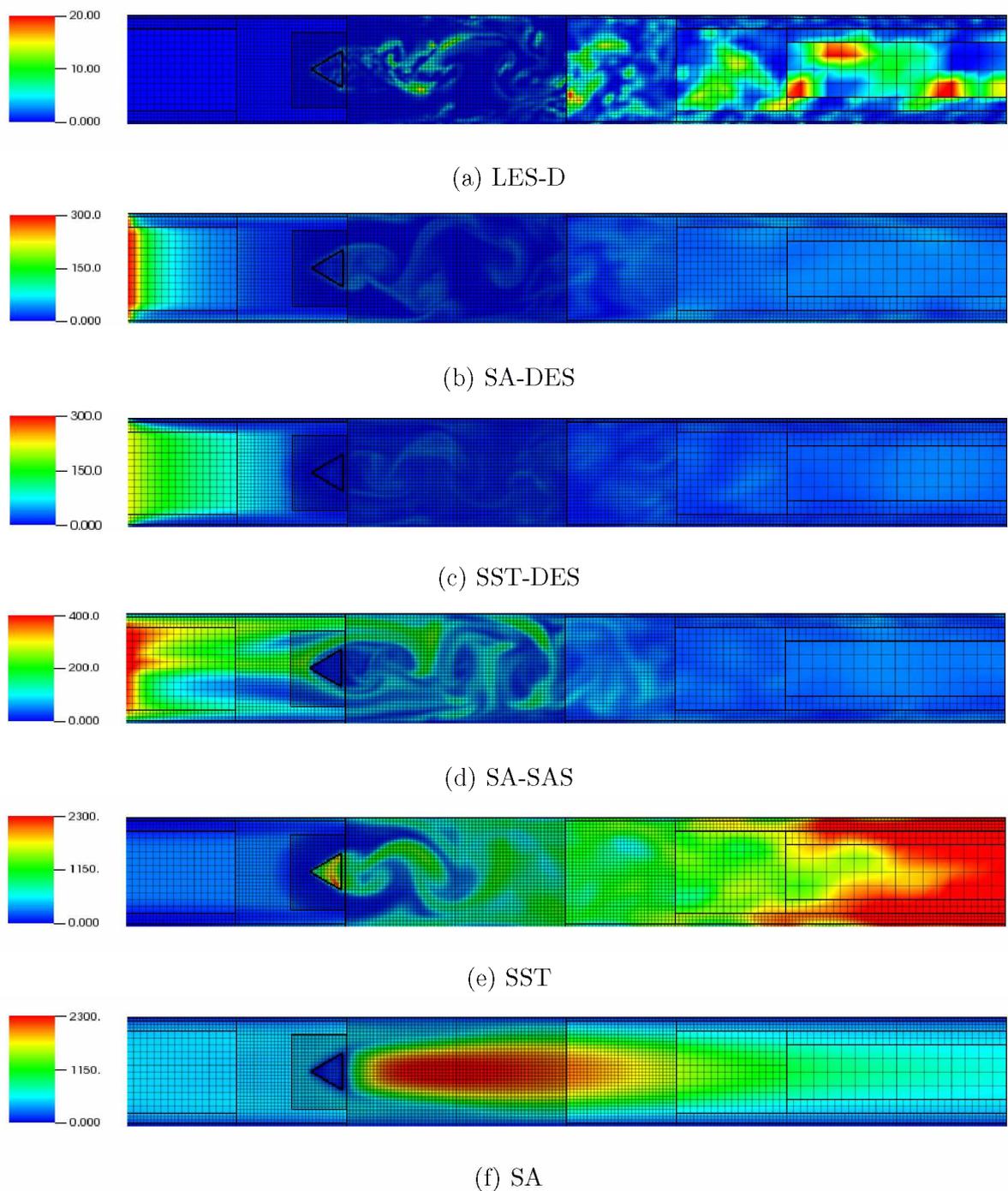
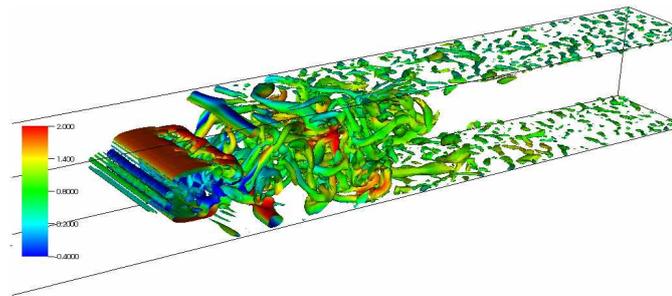


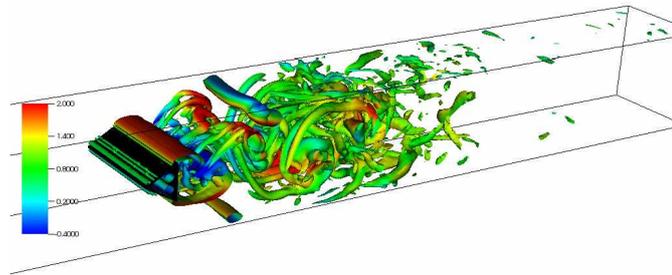
Figura 36 – Campos instantâneos da razão de viscosidade turbulenta μ_t/μ , no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-DES, SST-DES, SA-SAS, SST e SA.

velocidade instantânea u .

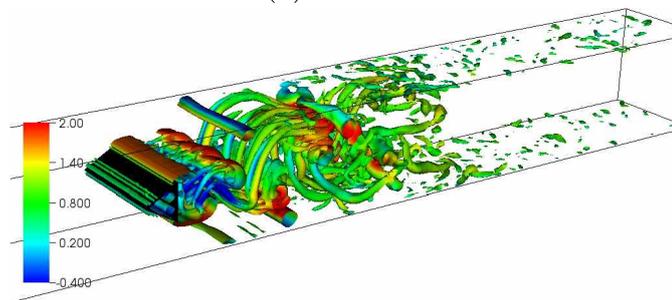
Confrontando a Fig. 36 com as Figs. 37 e 38, é perceptível como o nível de detalhe cai com aumento da viscosidade turbulenta. Na Fig.39, além do grau de detalhamento alcançado com cada modelo, podemos também identificar o desprendimento de estruturas turbilhonares que ocorre à jusante do anteparo. A presença de estruturas contra rotativas



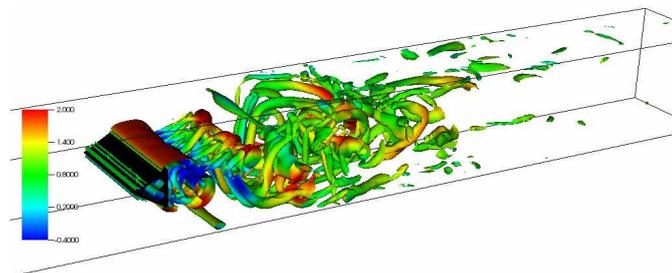
(a) LES-D



(b) SA-DES



(c) SST-DES

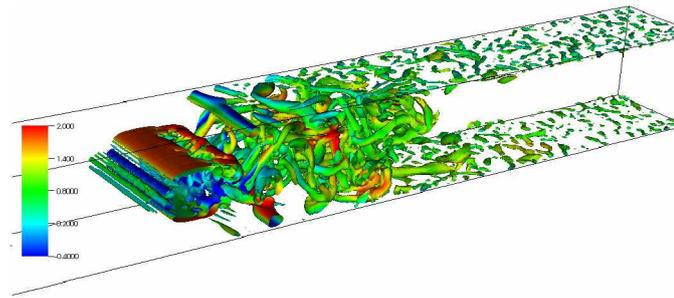


(d) SA-SAS

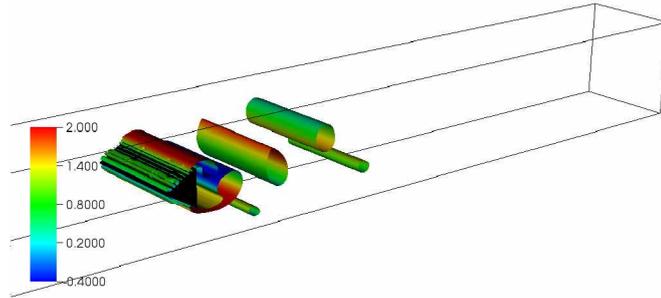
Figura 37 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea u . Comparação entre os modelos LES-D, SA-DES, SST-DES e SA-SAS.

na esteira formada é característica deste tipo de escoamento.

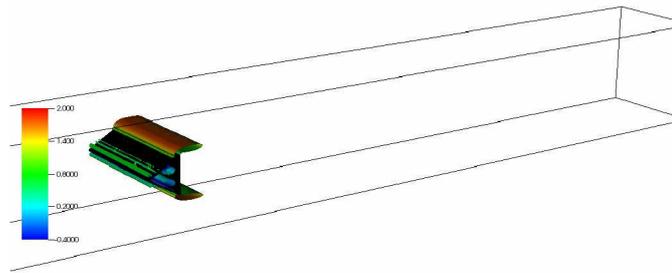
O campo instantâneo do termo de acúmulo Q_{SAS} é apresentado na Fig. 40. Nele, observam-se as regiões de maiores instabilidades existentes no escoamento, que certamente seriam amortecidas pela formulação URANS tradicional do modelo SA, caso um novo comprimento característico para a turbulência, como é o caso do termo L_{vk} no modelo SA-SAS, não fosse avaliado de forma dinâmica ao longo da simulação.



(a) LES-D



(b) SST



(c) SA

Figura 38 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea u . Comparação entre os modelos LES-D, SST e SA.

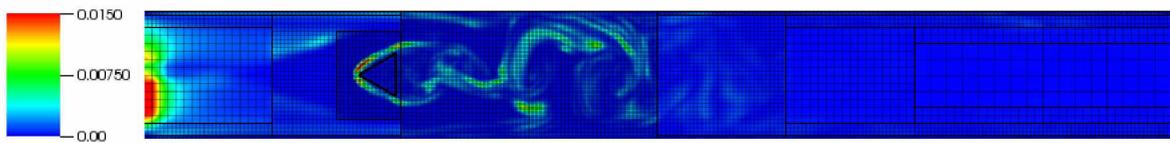


Figura 40 – Campos instantâneo do termo Q_{SAS} .

Semelhantemente, é apresentado na Fig. 41 o campo instantâneo da variável F_{DES} , descrita pela Eq.(3.43). Valores maiores do que a unidade indicam que fez-se uso na formulação SST-DES de uma escala de comprimento proporcional ao tamanho da malha, o que caracteriza um comportamento submalha.

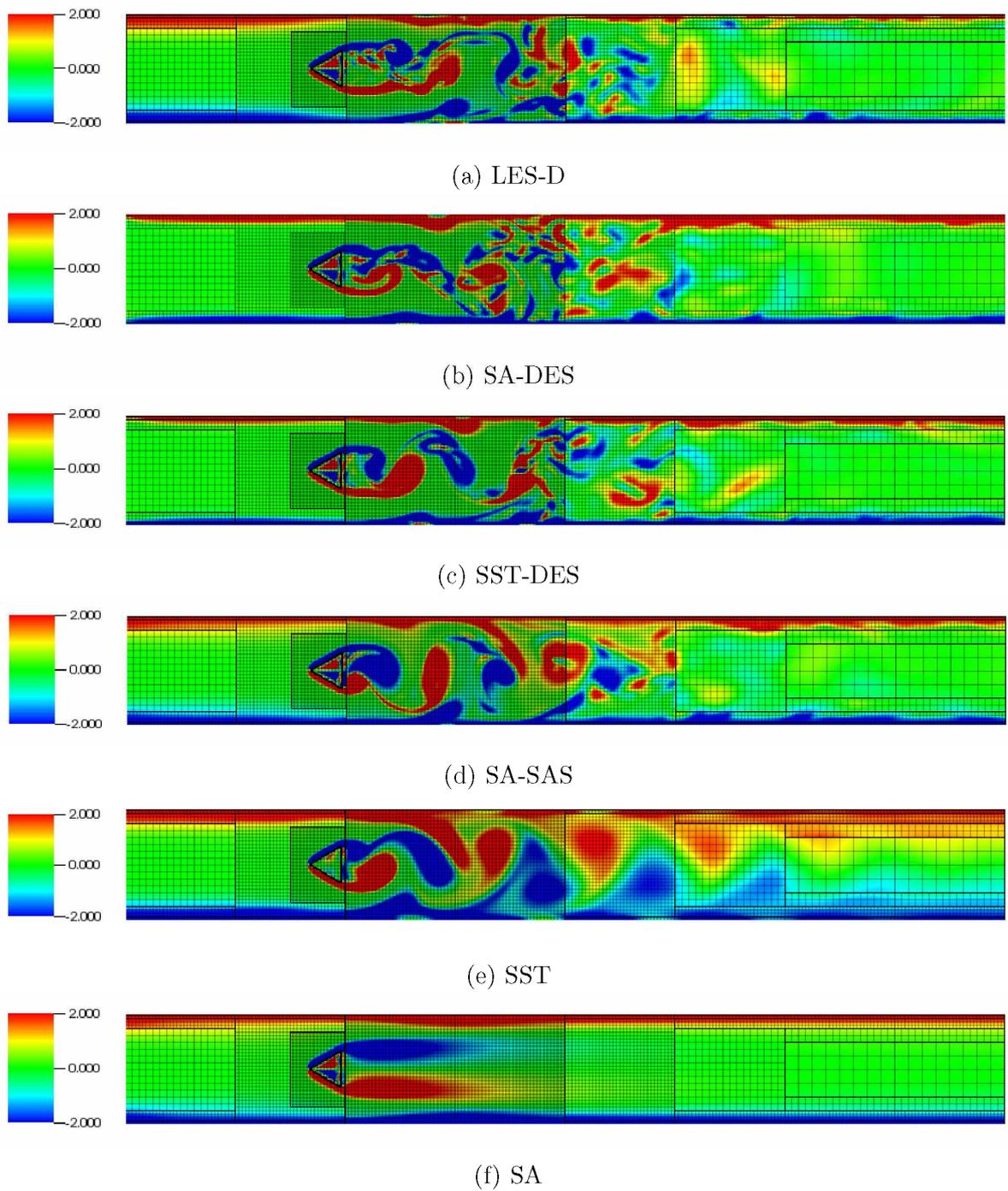


Figura 39 – Campos instantâneos de ω_z , no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-DES, SST-DES, SA-SAS, SST e SA.

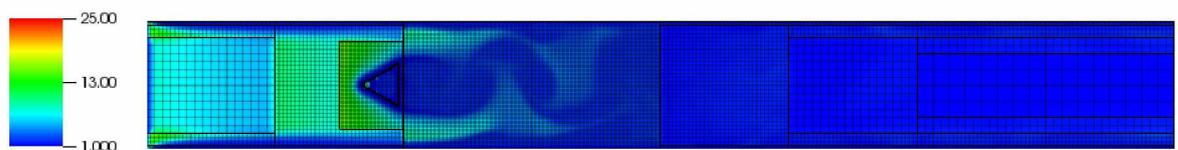


Figura 41 – Campos instantâneo do termo F^1_{DES} .

5.3.2 Velocidade média, RMS e componentes do tensor de Reynolds

O desempenho dos modelos foi avaliado, quantitativamente, em três estações de medição à jusante do prisma triangular, tomadas no plano $z/a = 1,5$, a saber $x/a = 0,375$, $x/a = 1,53$ e $x/a = 3,75$. Perfis médios para a componente u de velocidade são apresentados na Fig. 42. Na estação $x/a = 0,375$, o comportamento dos quatro modelos é bem similar. A região em déficit de quantidade de movimento linear foi subestimada por todos os modelos. Entretanto, observam-se performances melhores com os modelos SA, SST e SA-SAS nessa região.

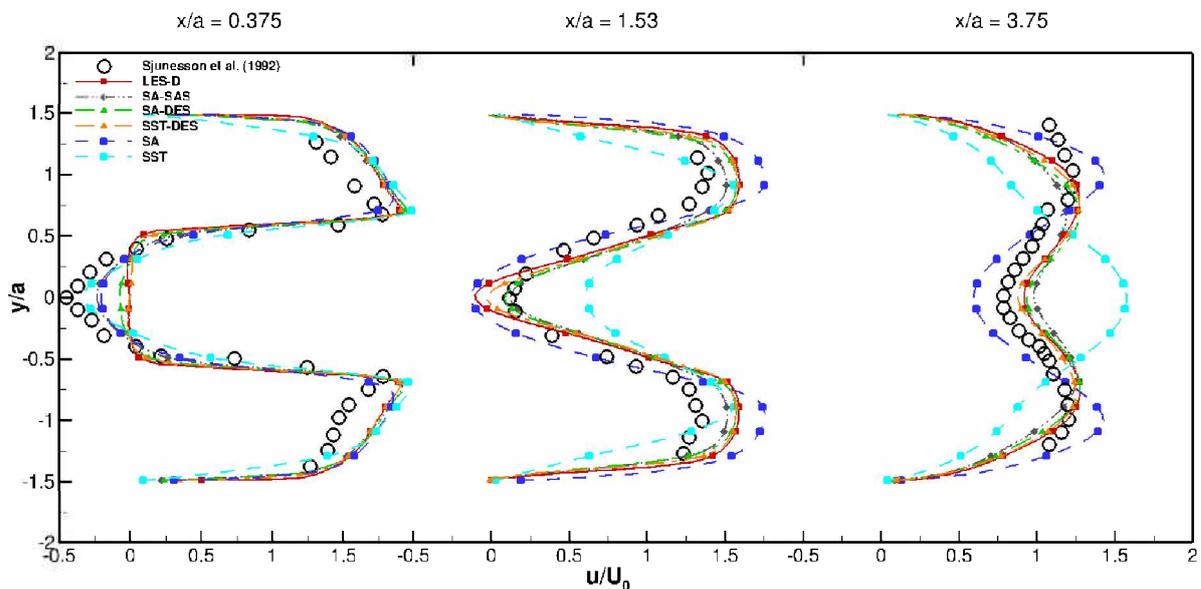


Figura 42 – Perfil médio para a componente u da velocidade em três estações à jusante do prisma triangular ($x/a = 0,375$, $x/a = 1,53$, $x/a = 3,75$), medido no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-SAS, SA-DES, SST-DES, SA, SST e o experimento material.

Na estação seguinte, $x/a = 1,53$, percebe-se uma lentidão no processo de difusão dos modelos SA, SST-DES e LES-D, ao passo que uma melhor concordância foi obtida pelos modelos SA-DES e SA-SAS. Obteve-se ainda com o modelo SST uma difusão excessiva para o perfil de velocidade média. Na última estação, $x/a = 3,75$, mais uma vez observam-se dificuldades no processo de difusão de todos os modelos. O modelo SA segue apresentando baixa difusão, enquanto que os demais modelos exibiram um perfil de velocidade mais difundido do que o observado experimentalmente, destacando-se a excessiva difusão observada com o modelo SST.

As maiores discrepâncias notadas nos resultados deste caso remetem ao RMS das componentes u e v da velocidade. Conforme exibido nas Fig. 43 e Fig. 44, na primeira estação de medição, não foi possível capturar corretamente as flutuações de velocidade com os modelos LES-D, SA-DES, SST-DES e SST. Embora tenha sido observado boa

concordância fora da região em déficit de quantidade de movimento linear, os picos de flutuação foram subestimados. Observa-se que o uso do modelo SA-SAS, por sua vez, possibilitou melhor resultado, em especial para o RMS da componente v .

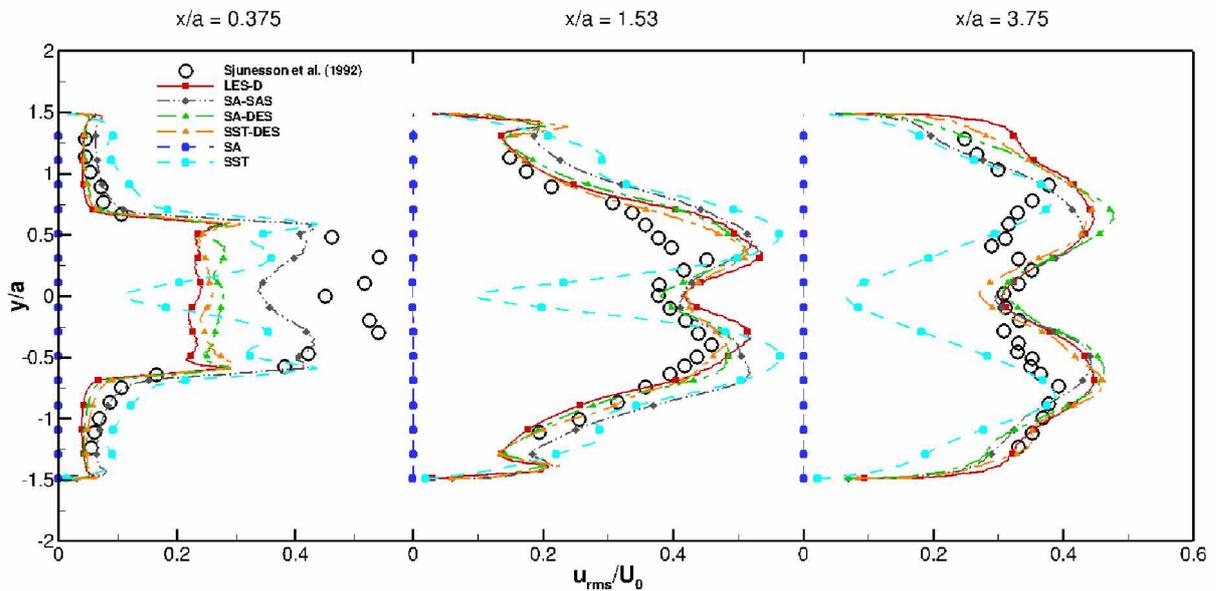


Figura 43 – Perfil de RMS para a componente u da velocidade em três estações à jusante do prisma triangular ($x/a = 0,375$, $x/a = 1,53$, $x/a = 3,75$), medido no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-SAS, SA-DES, SST-DES, SA, SST e o experimento material.

Na segunda estação, boa concordância foi obtida para os valores do RMS de v . Observa-se também, com excessão dos dados obtidos com o modelo SST, boa concordância para o RMS da componente u na porção inferior do domínio ($y < 0$), enquanto que o mesmo se distancia dos dados experimentais na região de $0,75 < y < 0$. Este comportamento também pode ser observado nos resultados obtidos por Menter & Egorov (2010), indicando um possível erro na medição dos dados durante o experimento material. Na estação $x/a = 3,75$ observou-se comportamento semelhante dos modelos LES-D, SA-DES, SST-DES e SA-SAS, apresentando baixa concordância com as medições do experimento material. Mais uma vez destaca-se a baixa concordância do modelo SST.

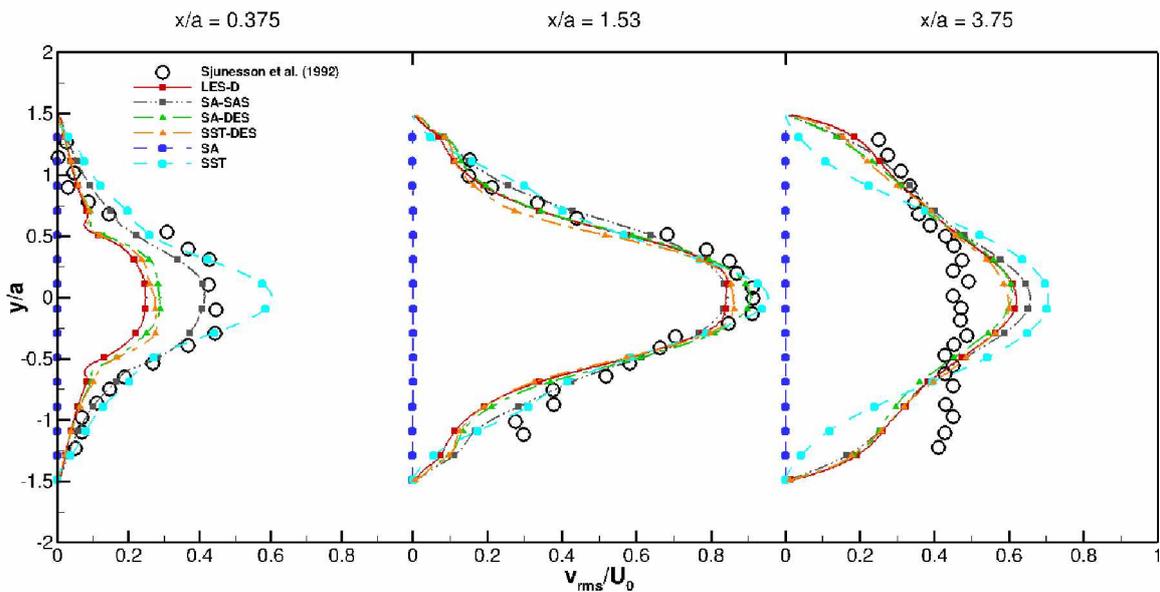


Figura 44 – Perfil de RMS para a componente v da velocidade em três estações à jusante do prisma triangular ($x/a = 0,375$, $x/a = 1,53$, $x/a = 3,75$), medido no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-SAS, SA-DES, SST-DES, SA, SST e o experimento material.

Os modelos LES-D, SA-DES, SST-DES, SA-SAS e SST conseguiram capturar, nas três estações de medição, as tendências da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds, apresentadas na Fig. 45. A diferença maior foi observada, mais uma vez, na primeira estação de medição. Nota-se que a componente $\overline{u'v'}$ foi subestimada com a utilização dos modelos LES-D, SA-DES e SST-DES, nas regiões próximas a $y = \pm 0,5$, e superestimada com a utilização do modelo SST. Uma melhor concordância com os dados do experimento material foi observada com o modelo SA-SAS.

Na Fig. 46 é apresentado o perfil médio para a componente u de velocidade ao longo de uma linha central à jusante do prisma triangular. Linhas verticais destacam a posição das três estações de medição ao longo do domínio que corroboram com as discussões feitas analisando os perfis médios apresentados na Fig. 35.

Na primeira estação (primeira marcação vertical) os valores médios de velocidade foram subestimados, obtendo-se por meio dos modelos SA, SST e SA-SAS um resultado melhor que os demais. Na segunda estação boa concordância foi observada, na região central, para os modelos SA-DES e SA-SAS, estando LES-D, SST-DES e SA subestimados. Por fim, a última marcação vertical realça a baixa concordância obtida para a velocidade média na estação $x/a = 3,75$. Conforme apresentado na Fig. 35, na região central do domínio, foram obtidas velocidades mais baixas daquelas verificadas no experimento material por meio do modelo SA, enquanto que, para os demais modelos, foram obtidas velocidades mais elevadas. Com exceção da primeira estação de medição, em todas as

demais regiões observa-se, os resultados obtidos com o modelo SST são superestimados.

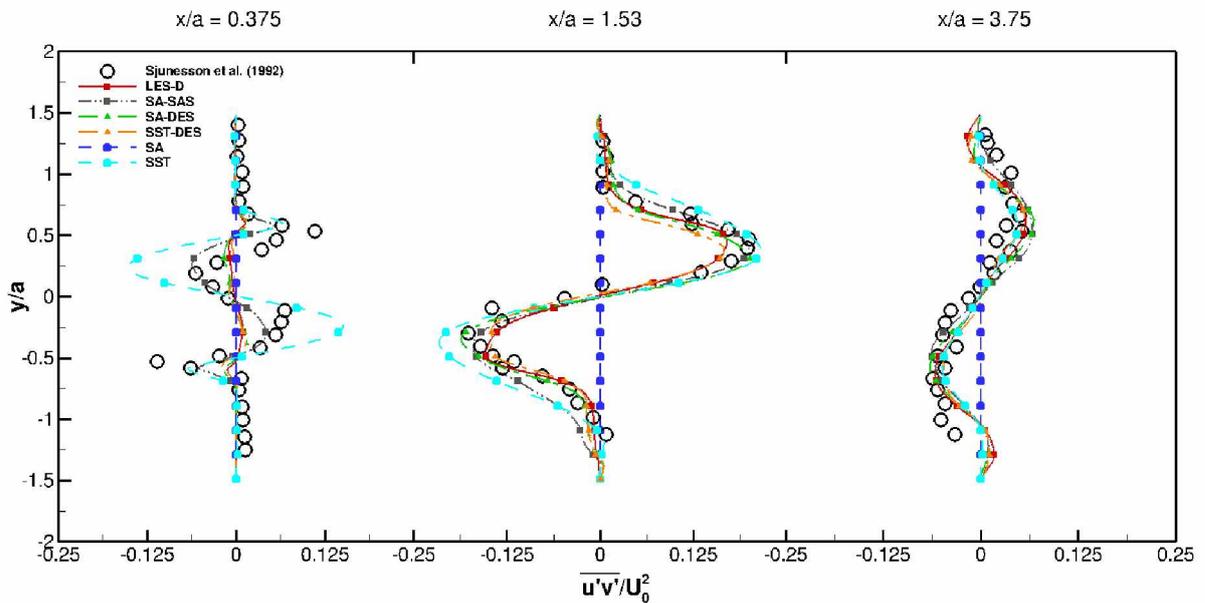


Figura 45 – Perfil da componente $\overline{u'v'}$ do tensor de Reynolds em três estações à jusante do prisma triangular ($x/a = 0,375$, $x/a = 1,53$, $x/a = 3,75$), medido no plano $z/a = 1,5$. Comparação entre os modelos LES-D, SA-SAS, SA-DES, SST-DES, SA, SST e o experimento material.

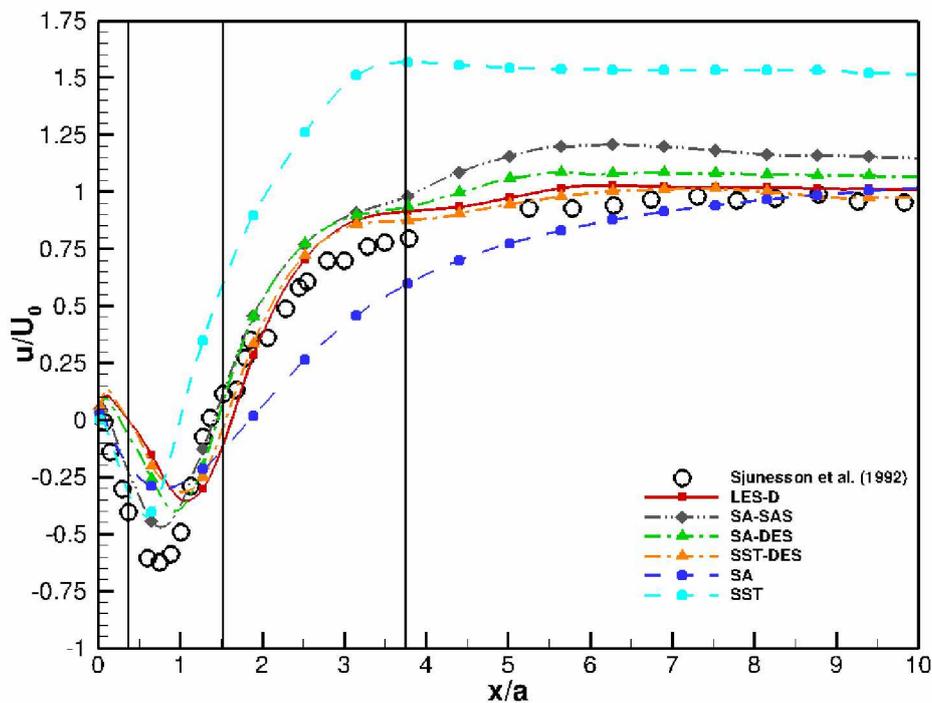


Figura 46 – Perfil médio da componente u de velocidade, à jusante do prisma triangular, ao longo do centro do domínio. Comparação entre os modelos LES-D, SA-SAS, SA-DES, SST-DES, SA, SST e o experimento material.

6 Conclusões e Perspectivas

Quatro metodologias híbridas URANS-LES de modelagem da turbulência foram implementadas e testadas no ambiente do código MFSim, desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFlab) da Universidade Federal de Uberlândia: o modelo SA-DES, proposto por Spalart *et al.* (1997), o modelo SA-SAS, proposto por Coder (2015), o modelo SST-DES, proposto por Strelets (2001) e o modelo SST-SAS, proposto por Menter & Egorov (2010). Para fins de comparação, foram utilizados os modelos puramente URANS de Spalart-Allmaras (SA) e $k - \omega$ SST (SST), além do modelo LES dinâmico (LES-D), proposto por Germano *et al.* (1991), Lilly (1992). Três casos distintos foram utilizados para avaliar o desempenho dos modelos híbridos.

Em um primeiro momento, foram realizadas simulações do escoamento na cavidade cúbica com tampa deslizante, em regime turbulento, caracterizado pelo número de Reynolds de 10.000. Nela, foram avaliados os comportamentos dos modelos SA-SAS e SST-SAS em relação aos modelos SA, SST e LES-D. Dados quantitativos foram confrontados com os dados do experimento material de Prasad & Koseff (1989), observando boa concordância. Dados qualitativos, como campos médios e iso-superfícies, evidenciaram a capacidade dos modelos SA-SAS e SST-SAS de capturar a física do problema.

Observou-se neste caso que valores mais baixos do que o esperado foram obtidos para a viscosidade turbulenta por meio do modelo SA-SAS. Dois aspectos podem ter influenciado neste resultado. Em primeiro lugar, em função da baixa eficiência do algoritmo de remalhagem do código MFSim em situações com presença de fronteira imersa, utilizou-se remalhagem adaptativa dinâmica apenas no caso da cavidade cúbica com tampa deslizante. Dessa forma, ainda é necessário investigar com cautela a influência da remalhagem adaptativa dinâmica no correto funcionamento do modelo SA-SAS.

Outro fator que merece atenção, e não está necessariamente desvinculado do primeiro, é a estratégia de amortecimento viscoso (HWN) utilizada no modelo de Coder (2015). Os baixos valores que se observam para a viscosidade turbulenta podem indicar que o modelo não recebeu uma informação correta acerca da frequência de corte do cálculo. Ou seja, o modelo SA-SAS pode ter fornecido um comprimento característico menor que o tamanho da malha. O próprio autor considera como não ideal a formulação utilizada para HWN do modelo SA-SAS. Uma alternativa seria o uso da formulação WALE-LES, proposta por Nicoud & Ducros (1999).

O segundo caso estudado foi o escoamento sobre um degrau descentente, com número de Reynolds característico de 5.000. O modelo SA-DES foi testado e comparado também com os modelos SA e LES-D. Os dados extraídos das simulações numéricas foram

comparados com aqueles obtidos no experimento material de Jovic & Driver (1994), bem como com os experimentos numéricos realizados por Le, Moin & Kim (1997), Spode (2006) e Melo (2017).

Foram observadas, em algumas regiões, discordâncias nos resultados, atribuídas a dois pontos distintos. O baixo refinamento da malha em algumas regiões no centro do canal prejudicou uma melhor concordância entre os resultados. Acredita-se que um ajuste do valor utilizado no critério de remalhagem seja suficiente para suprir a necessidade de malha nestas regiões. Discordâncias também foram observadas nas proximidades das paredes, região crítica para a modelagem DES. Para resolver este problema, o uso de funções de parede pode apresentar melhores resultados a curto prazo, uma vez que quaisquer mudanças significativas na malha do MFSim trariam grande impacto para os desenvolvimentos realizados no código.

É importante ressaltar que é possível utilizar malhas com *stretching* no código MFSim. Entretanto, dificuldades foram encontradas por este autor para trabalhar com esta técnica, devido ao baixo conhecimento da estrutura do código no início do presente trabalho. O MFSim tem sido utilizado, majoritariamente, com malhas de elementos cúbicos, sendo necessários maiores estudos com o uso de *stretching*, visando aumentar a compreensão de como se comportam os solucionadores, interpoladores e demais recursos existentes no ambiente do código nesta nova configuração de malha.

O segundo ponto diz respeito à falta de condição de contorno turbulenta na entrada do domínio. Identificou-se que, mesmo com a imposição de um perfil de velocidade desenvolvido, faz-se necessário também a imposição de condições de contorno turbulentas para a correta captura das flutuações de velocidade, principalmente, nas duas primeiras estações de medição. Simulações foram iniciadas para corrigir esta deficiência e, até o presente momento, apresentam bons resultados preliminares. Entretanto, como um maior tempo de simulação é necessário para a correta avaliação das estatísticas, este conteúdo não é contemplado no texto.

O último caso foi selecionado para avaliar o desempenho de ambas as modelagens híbridas. O escoamento ao redor do prisma triangular, experimentado por Sjunnesson, Henriksson & Lofstrom (1992) configura um problema com fortes instabilidades globais, que permitem aos modelos operarem em um modo submalha. A geometria do prisma dispensa ainda a utilização de refinamento em torno de sua superfície para a correta captura das informações, pois a solução da camada limite não é relevante neste caso, uma vez que o descolamento ocorre, impreterivelmente, nas bordas do prisma.

Os modelos SA-DES, SST-DES e SA-SAS, juntamente com os modelos SA, SST e LES-D, apresentaram resultados satisfatórios. Em especial, os bons resultados obtidos por meio do modelo SA-SAS afastam quaisquer suspeitas, que possam ter emergido dos baixos valores de viscosidade turbulenta apresentados na cavidade cúbica com tampa

deslizante, acerca da utilização da malha multinível. No caso do prisma triangular não foram observados valores discrepantes para a viscosidade turbulenta, indicando que a metodologia de HWN cumpriu o esperado, amortecendo estruturas menores que a frequência de corte da simulação.

Embora sua utilização não tenha sido reportada por outros autores que estudaram o escoamento sobre o prisma triangular, como Potturi, Patton & Edwards (2017), West, Groth & Hu (2017), Sankaran & Gallagher (2017), Wu *et al.* (2017), Wey (2017), o uso de uma condição de contorno turbulenta aparenta ser necessário para correta predição das flutuações de velocidade, principalmente na estação de medição mais próxima do anteparo.

Conclui-se ainda que a modelagem híbrida URANS-LES pode ser considerada uma ferramenta interessante na análise de escoamentos turbulentos no ambiente do código MFSim, se mostrando capaz de caracterizar estruturas turbilhonares com um comportamento mais próximo da metodologia LES do que a metodologia URANS. Em especial, o modelo SA-SAS apresentou bons resultados e, na visão deste autor, apresenta maior potencial de utilização dentro do código MFSim, uma vez que não tem dependência explícita da malha computacional, como os modelos SA-DES e SST-DES.

Como perspectivas, sugere-se a utilização continuada do modelo SA-SAS, bem como a sequência dos estudos acerca da implementação dos outros modelos SAS e DES, no código MFSim. O uso de malhas com *stretching* pode ser mais explorado, visando melhorar o desempenho dos modelos em regiões próximas a paredes. Adicionalmente, a implementação de funções de parede também é indicada para uma melhor caracterização destas regiões.

Tendo em vista a grande importância do cálculo da distância às paredes para os modelos URANS e URANS-LES, recomenda-se a otimização do algoritmo utilizado para este fim no ambiente do código MFSim, principalmente na rotina que avalia a distância em relação à fronteira imersa, visando reduzir os custos computacionais para a utilização da remalhagem adaptativa em conjunto com os modelos híbridos URANS-LES. Por fim, recomendam-se ainda estudos acerca do uso da escala de comprimento de von Karman, L_{vk} , como um critério de remalhagem para os modelos SAS, dado o potencial deste termo de identificar regiões críticas no escoamento.

Referências

- ALVES, M. A.; OLIVEIRA, P. J.; PINHO, F. T. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. 2003. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 41:47-75. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/flid.428>>.
- ANDRADE, J. R. Métodos de fronteira imersa para corpos esbeltos: implementação e validação. 2015. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/15015>>.
- Ansys FLUENT. Release 16.2. 2015. Theory Guide, ANSYS, Inc.
- ASCHER, U. M.; RUUTH, S. J.; WETTON, B. T. R. Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations. 1995. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 32, No. 3, pp. 797-823. Disponível em: <www.jstor.org/stable/2158449>.
- BARBI, F. *Experimentação numérica de bolhas em ascensão*. [s.n.], 2016. Tese(Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/18155>>.
- BARDINA, J. E.; HUANG, P. G.; COAKLEY, T. J. Turbulence modeling validation, testing and development. 1997. NASA Technical Memorandum 110446.
- BISTAFA, S. R. On the development of the navier-stokes equation by navier. 2018. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vol. 40, No. 2. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2017-0239>>.
- BOUSSINESQ, J. Essai sur la théorie des aux courants. 1877. *Mém. Acad. Sci. Paris*. XXII, 46.
- BUNGE, U.; MOCKETT, C.; THIELE, F. Guidelines for implementing detached-eddy simulation using different models. 2007. *Aerospace Science and Technology*. 11 376-385. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ast.2007.02.001>>.
- CHANG, S. K.; KIM, S.; SONG, C. H. Turbulent mixing in a rod bundle with vaned spacer grids: Oecd/nea-kaeri cfd benchmark exercise test. 2014. *Nucl. Eng. Des.*, 279:19-36. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2014.05.013>>.
- Clay Mathematics Institute. *Navier-Stokes Equation*. 2018. Disponível em: <<http://www.claymath.org/millennium-problems/navier%E2%80%93stokes-equation>>.
- CODER, J. G. A scale-adaptive variant of the spalart-allmaras eddy-viscosity model. 2015. *AIAA* 2015-2462. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.2015-2462>>.
- CONSTANTINESCU, G.; SQUIRES, K. D. Les and des investigations of turbulent flow over a sphere. 2000. *AIAA* 2000-0540. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/B:APPL.0000004937.34078.71>>.
- COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. 1967. *IBM J. Res. Dev.*, IBM Corp., Riverton, NJ, USA, Vol. 11, No. 2, pp.215-234. Disponível em: <<https://doi.org/10.1147/rd.112.0215>>.

COURTOIS, R. Simulation aux grandes échelles de l'écoulement dans un chambre de combustion en forme de marche descendante. 2005. Thèse de doctorat en Énergétique. Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris.

DAMASCENO, M. M. R. Desenvolvimento de uma modelagem para escoamentos reativos em malhas adaptativas do tipo bloco-estruturada. 2018. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/21483>>.

DAVIDSON, L.; PENG, S. H. Hybrid les-rans modelling: a one-equation sgs model combined with a $k-\omega$ model for predicting recirculation flows. 2003. Int. J. Numer. Meth. Fluids. 43:1003-1018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/fld.512>>.

DELCAYRE, F.; LESIEUR, M. Topological feature in the reattachment region of a backward facing step. 1997. First AFOSR International Conference on DNS and LES. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0045-7930\(96\)00047-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7930(96)00047-3)>.

FREIRE, A. P. S. Turbulência e seu desenvolvimento histórico. ABCM, 2002. Anais da I Escola de Primavera de Transição e Turbulência.

GASKELL, P. H.; LAU, A. K. C. Curvature compensated convective transport: Smart, a new boundedness preserving transport algorithm. 1988. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 8:617-641. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/fld.1650080602>>.

GERMANO, M.; PIOMELLI, U.; MOIN, P.; CABOT, W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. 1991. Phys. Fluids A 3, p. 1760. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.857955>>.

HAASE, W.; BRAZA, M.; REVELL, A. *DESider – A European Effort on Hybrid RANS-LES Modelling*. [S.l.]: Springer, 2009. (Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design). ISBN 978-3-540-92772-3.

JEONG, J.; HUSSAIN, F. On the identification of a vortex. 1995. Cambridge University Press, v.285, pp.69-94. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112095000462>>.

JOVIC, S.; DRIVER, D. M. Backward-facing step measurements at low reynolds number, $re_h = 5000$. 1994. NASA Technical Memorandum 108807.

LANGTRY, R. B.; MENTER, F. R. Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes. 2009. AIAA journal, vol. 47, no. 12, pp. 2894–2906. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/1.42362>>.

LE, H.; MOIN, P.; KIM, J. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. 1997. J. Fluid Mech., Vol. 330, pp.349-374. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112096003941>>.

LEONARD, A. Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows. 1974. Adv Geophys. 18A, 237-248. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0065-2687\(08\)60464-1](https://doi.org/10.1016/S0065-2687(08)60464-1)>.

LEONARD, B. P. Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities. 1988. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 8:1291-1318. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/fld.1650081013>>.

- LEONARD, B. P. The ultimate conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection. 1991. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 88:17-74. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90232-U](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90232-U)>.
- LESIEUR, M. *Turbulence in Fluids*. [S.l.]: Springer, 2008. 558 p. ISBN 978-1-4020-6434-0.
- LILLY, D. K. A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. 1992. *Phys. Fluids A* 4, p. 633. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.858280>>.
- MELO, R. R. *Modelagem e simulação de escoamentos turbulentos com efeitos térmicos, utilizando a metodologia da fronteira imersa e malha adaptativa*. [s.n.], 2017. Tese(Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/18667>>.
- MENTER, F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. 1994. *AIAA Journal*. 32(8), pp. 269-289. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.12149>>.
- MENTER, F. R. Best practice: Scale-resolving simulations in ansys cfd. 2012. ANSYS Germany GmbH.
- MENTER, F. R.; EGOROV, Y. A scale-adaptive simulation model using two-equation models. 2005. AIAA Paper 2005-1095. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.2005-1095>>.
- MENTER, F. R.; EGOROV, Y. Revisiting the turbulent scale equation. 2006. In: Meier G.E.A., Sreenivasan K.R., Heinemann HJ. (eds) IUTAM Symposium on One Hundred Years of Boundary Layer Research. Solid mechanics and its applications, vol 129. Springer, Dordrecht. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4150-1>>.
- MENTER, F. R.; EGOROV, Y. Formulation of the scale-adaptive simulation (sas) model during the desider project. In: Haase W., Braza M., Revell A. (eds) *DESider – A European Effort on Hybrid RANS-LES Modelling*, Springer, 2009.
- MENTER, F. R.; EGOROV, Y. The scale-adaptive simulation method for unsteady turbulent flow predictions. part 1: Theory and model description. 2010. *Flow Turbulence Combust* 85:113-138. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10494-010-9264-5>>.
- MENTER, F. R.; GARBARUK, A.; SMIRNOV, P.; COKLJAT, D.; MATHEY, F. Scale-adaptive simulation with artificial forcing. 2010. *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling*, NNFM 111, pp.235-246.
- MENTER, F. R.; KUNTZ, M.; BENDER, R. *A scale-adaptive simulation model for turbulent flow predictions*. [s.n.], 2003. AIAA Paper 2003-0767. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.2003-767>>.
- MENTER, F. R.; KUNTZ, M.; LANGTRY, R. Ten years of industrial experience of the sst turbulence model. 2003. *Turbulence Heat and Mass Transfer* 4, pag 624-632.
- MIKUZ, B.; TISELJ, I. Urans prediction of flow fluctuations in rod bundle with split-type spacer grid. 2017. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 64:10-22. Disponível em: <[10.1016/j.ijheatfluidflow.2017.01.008](https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2017.01.008)>.

- NICOUD, F.; DUCROS, F. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. 1999. *Flow Turbul. Combust.* 62, 183-200. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1009995426001>>.
- PENG, S. H.; DOERFFER, P.; HAASE, W. *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling*. [S.l.]: Springer, 2010. (Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design). ISBN 978-3-642-14167-6.
- POPE, S. B. *Turbulent flows*. 2000. Cambridge University Press. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9780511840531>>.
- POTTURI, A. S.; PATTON, C. H.; EDWARDS, J. R. Advanced les models for turbulent combustion. 2017. AIAA 2017-1792. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.2017-1792>>.
- PRASAD, A. K.; KOSEFF, J. R. Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow. 1989. *Physics Fluids*. (1) 208-219. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.857491>>.
- REYNOLDS, O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. 1894. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 186. 123-164.
- RIBEIRO NETO, H.; CAVALINI JR., A.; VEDOVOTO, J. M.; SILVEIRA-NETO, A.; RABE, D. A. Influence of seabed proximity on the vibration responses of a pipeline accounting for fluid-structure interaction. 2019. *Mech. Syst. Sign. Process.*, vol. 114, pp.224-238. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.05.017>>.
- ROTTA, J. C. Über eine methode zur berechnung turbulenter scherströmungen. 1968. Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen, Rep. 69 A14.
- SANKARAN, V.; GALLAGHER, T. P. Grid convergence in les of bluff body stabilized flames. 2017. AIAA 2017-1791. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.2017-1791>>.
- SHUR, M.; SPALART, P. R.; STRELETS, M.; TRAVIN, A. Detached-eddy simulation of an airfoil at high angle of attack. 1999. 4th International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements. Corsica, May 24-26, Elsevier, Amsterdam pp. 669-678. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-008043328-8/50064-3>>.
- SILVEIRA-NETO, A. *A turbulência nos fluidos*. [S.l.: s.n.], 2017. Apostila da Disciplina de Turbulência nos Fluidos do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Uberlândia.
- SILVEIRA-NETO, A.; GRAND, D.; MÉTAIS, O.; LESIEUR, M. A numerical investigation of the coherent structures of turbulence behind a backward-facing step. 1993. *Int. J. Fluid Mech.*, Vol.256, pp. 1-25. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112093002691>>.
- SJUNNESSON, A.; HENRIKSSON, R.; LOFSTROM, C. Cars measurements and visualization of reacting flows in bluff body stabilized flame. 1992. AIAA Paper. 92-3650. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.1992-3650>>.
- SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations. 1963. *Monthly Weather Review*, p. 99-164. Disponível em: <[https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1963\)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1963)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2)>.

SPALART, P. R.; ALLMARAS, S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA-92-0439*, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.1992-439>>.

SPALART, P. R.; ALLMARAS, S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. 1994. *La Recherche Aérospatiale*, Vol. 1, pp. 5-21. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.1992-439>>.

SPALART, P. R.; DECK, S.; SHUR, M. L.; SQUIRES, K. D.; STRELETS, M.; TRAVIN, A. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. 2006. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 20: 181-195. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00162-006-0015-0>>.

SPALART, P. R.; JOU, W.-H.; STRELETS, M.; ALLMARAS, S. R. Comments on the feasibility of les for wings, and on a hybrid rans/les approach. Greyden Press, Columbus, OH, August 4-8 1997. Pp. 137-147.

SPODE, C. Simulação de grandes escalas e simulação híbrida rans/les do escoamento sobre o degrau com condições de contorno turbulentas. 2006. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/15035>>.

STRELETS, M. Detached eddy simulation of massively separated flows. 2001. *AIAA Paper 2001-0879*. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.2001-879>>.

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. *A first course in turbulence*. [S.l.]: The MIT Press, 1972. 300 p. ISBN 978-0-262-20019-6.

TRAVIN, A.; SHUR, M.; SPALART, P. R.; STRELETS, M. Improvement of delayed detached-eddy simulations for les with wall modelling. 2006. *Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics. ECCOMAS CFD 2006*, Egmond aan Zee, The Netherlands.

TRAVIN, A.; SHUR, M.; STRELETS, M.; SPALART, P. R. Detached-eddy simulations past a circular cylinder. 1999. *Flow, Turbulence and Combustion.* 63, 293-313. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1009901401183>>.

VEDOVOTO, J. M. Mathematical and numerical modeling of turbulent reactive flows using a hybrid les/pdf methodology. 2011. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14704>>.

VEDOVOTO, J. M.; SERFATY, R.; Silveira Neto, A. Mathematical and Numerical Modeling of Turbulent Flows. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, scielo, v. 87, p. 1195 – 1232, 06 2015. ISSN 0001-3765. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0001-37652015000201195&nrm=iso>.

VEDOVOTO, J. M.; SILVEIRA NETO, A.; SILVA, L. F. F.; MURA, A. Influence of synthetic inlet turbulence on the prediction of low mach number flows. 2015. *Comput Fluids*, 106, pp.135-153. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.09.046>>.

VILLAR, M. M. Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais. 2007. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14664>>.

- VON TERZI, D.; FRÖHLICH, J. Hybrid les/rans methods for the simulation of turbulent flows. 2008. *Prog. Aerosp. Sci.* 44(5), 349-377. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2008.05.001>>.
- WALTERS, D. K.; COKLJAT, D. A three-equation eddy-viscosity model for reynolds-averaged navier-stokes simulations of transitional flow. 2008. *Journal of Fluids Engineering*, vol. 130, no. 12, p. 121401. Disponível em: <[doi:10.1115/1.2979230](https://doi.org/10.1115/1.2979230)>.
- WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K. Combined multi direct forcing immersed bounday method for simulating flows with moving particles. 2008. *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 34, pp. 283-302. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2007.10.004>>.
- WEST, J. P.; GROTH, C. P. T.; HU, J. T. C. Application of detached eddy simulation to a bluff body flame stabilizer in duct flow. 2017. AIAA 2017-1793. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.2017-1793>>.
- WEY, T. Model validation for propulsion - on the tfns and les subgrid models for a bluff body stabilized flame. 2017. AIAA 2017-1794.
- WIENKEN, W.; STILLER, J.; KELLER, A. A method to predict cavitation inception using large-eddy simulation and its application to the flow past a square cylinder. 2006. *J. Fluids Eng.*, 128:316–25. Disponível em: <[doi:10.1115/1.2170132](https://doi.org/10.1115/1.2170132)>.
- WILCOX, D. C. Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. 1988. *AIAA Journal*. Vol.26, No. 11, pp. 1299-1310. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.10041>>.
- WILCOX, D. C. *Turbulence Modeling for CFD*. [S.l.]: DCW Industries, Inc., 2006. ISBN 1928729088.
- WU, H.; MA, P. C.; LV, Y.; IHME, M. Mvp-workshop contribution: Modeling the volvo bluff body flame experiment and comparison of finite-volume and discontinuous-galerkin schemes. 2017. AIAA 2017-1573. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1707.05805>>.

APÊNDICE A – Transformação de variáveis

O ponto de partida para a transformação de variáveis é o modelo para o transporte das variáveis k e $\Phi = \sqrt{kL}$, chamado de KSKL (*K-Square-root KL*).

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = P_k - c_\mu^{3/4} \rho \frac{k^2}{\Phi} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \Phi)}{\partial x_j} = -\frac{\Phi}{k} P_k \left(\xi_1 - \xi_2 \left(\frac{L}{L_{vk}} \right)^2 \right) - \xi_3 \rho k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right). \quad (\text{A.2})$$

Tem-se neste modelo uma característica interessante para alguns escoamentos transientes, que resulta do uso da escala de comprimento de von Karman, L_{vk} . Sendo assim, é desejável incluir este termo em outras formulações URANS, como nos modelos $k - \epsilon$ e $k - \omega$. A transformação entre as escalas se dá através das relações

$$\omega = \frac{1}{c_\mu^{1/4}} \frac{k}{\Phi} \quad (\text{A.3})$$

e

$$\epsilon = k^2 \frac{c_\mu^{3/4}}{\Phi}. \quad (\text{A.4})$$

Derivando as relações dadas pelas Eqs.(A.3) e (A.4) obtemos, respectivamente, através da aplicação da regra da cadeia:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{c_\mu^{1/4}} \left(\frac{1}{\Phi} \frac{Dk}{Dt} - \frac{k}{\Phi^2} \frac{D\Phi}{Dt} \right), \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = c_\mu^{3/4} \left(\frac{2k}{\Phi} \frac{Dk}{Dt} - \frac{k^2}{\Phi^2} \frac{D\Phi}{Dt} \right). \quad (\text{A.6})$$

Reescrevendo as relações dadas pelas Eqs.(A.5) e (A.6), com auxílio das Eqs.(A.3) e (A.4), obtemos a derivada material de Φ em função, separadamente, de ω e ϵ como se segue:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{1}{c_\mu^{1/4}} \left(\frac{1}{\omega} \frac{Dk}{Dt} - \frac{k}{\omega^2} \frac{D\omega}{Dt} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} = c_\mu^{3/4} \left(\frac{2k}{\epsilon} \frac{Dk}{Dt} - \frac{k^2}{\epsilon^2} \frac{D\epsilon}{Dt} \right). \quad (\text{A.8})$$

De posse das Eqs.(A.7) e (A.8), mostra-se com algum algebrismo que, partindo da Eq.(A.2) e utilizando sempre que necessário as relações de transformação dadas pelas Eqs.(A.3) e (A.4), obtem-se as equações transformadas para a variável ω

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \omega}{\partial x_j} &= \frac{\omega}{k} P_k \left[1 - \zeta_1 + \zeta_2 \left(\frac{L}{L_{vk}} \right)^2 \right] - \rho \omega^2 \left(c_\mu - c_\mu^{1/4} \zeta_3 \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Phi} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + \frac{2\rho}{\sigma_\Phi} \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \frac{k}{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

e para a variável ϵ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \epsilon}{\partial x_j} &= \frac{\epsilon}{k} P_k \left[2 - \zeta_1 + \zeta_2 \left(\frac{L}{L_{vk}} \right)^2 \right] - \rho \frac{\epsilon^2}{k} \left(2 - \frac{\zeta_3}{c_\mu^{3/4}} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Phi} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) - \frac{2\rho c_\mu}{\sigma_\Phi} \left[\frac{k^4}{\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\epsilon}{k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\epsilon}{k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

APÊNDICE B – HWN damping

Para facilitar a dedução do limitante, retoma-se as equações de transporte utilizadas no modelo SST-SAS:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i k)}{\partial x_i} = P_k - \rho c_\mu k \omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right], \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \omega)}{\partial x_i} &= \alpha \rho S^2 - \rho \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right], \\ &+ 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + Q_{SAS} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde, o termo Q_{SAS} é dado por:

$$Q_{SAS} = \max \left[\rho \eta_2 \kappa S^2 \left(\frac{L}{L_{vk}} \right)^2 - C_{SAS} \frac{2\rho k}{\sigma_\Phi} \max \left(\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), 0 \right]. \quad (\text{B.3})$$

A estrutura do limitante é derivada a partir da análise da viscosidade turbulenta de equilíbrio do modelo SST-SAS. Sendo assim, assumindo equilíbrio entre os termos de acúmulo, ou seja, realizando o balanço entre os termos de transferência e transformação da energia cinética turbulenta, temos:

$$0 = P_k - \rho c_\mu k \omega, \quad (\text{B.4})$$

$$0 = \alpha \rho S^2 - \rho \beta \omega^2 + \rho \zeta_2 \kappa S^2 \left(\frac{L}{L_{vk}} \right)^2. \quad (\text{B.5})$$

Resulta da Eq.(B.4), utilizando o fato de que $P_k = \mu_t S^2$ e $\mu_t = \rho k / \omega$:

$$S^2 = c_\mu \omega^2. \quad (\text{B.6})$$

Sendo assim, utilizando a relação obtida na Eq.(B.6) na Eq.(B.5), obtemos a seguinte expressão para a escala de comprimento, L :

$$L^2 = L_{vk}^2 \frac{(\beta/c_\mu - \alpha)}{\zeta_2 \kappa}. \quad (\text{B.7})$$

Segundo apresentado por Menter & Egorov (2005) e Menter & Egorov (2009), a escala de comprimento L pode ser expressada da seguinte forma:

$$L = \frac{\sqrt{k}}{c_\mu^{0,25} \omega}. \quad (\text{B.8})$$

Fazendo uso da Eq.(B.8), podemos reescrever a Eq.(B.7) como se segue:

$$\mu_t^{eq} = \rho \left[\sqrt{\frac{(\beta/c_\mu - \alpha)}{\zeta_2 \kappa}} L_{vk} \right]^2 S. \quad (\text{B.9})$$

A Eq.(B.9) se assemelha à viscosidade turbulenta utilizada no modelo de fechamento LES proposto por Smagorinsky (1963), a saber:

$$\mu_t^{LES} = \rho (C_s \Delta)^2 S. \quad (\text{B.10})$$

Assim, é natural utilizar o modelo de fechamento de Smagorinsky como referência na formulação de um limitante do processo de amortecimento viscoso no modelo SST-SAS. O limitador, imposto no valor da escala de comprimento de von Karman, L_{vk} , deve impedir que o modelo SST-SAS retorne valores de viscosidade turbulenta menores do que os valores observados no modelo de Smagorinsky, ou seja,

$$\mu_t^{eq} \geq \mu_t^{LES}. \quad (\text{B.11})$$

Substituindo as Eqs.(B.9) e (B.10) na condição dada pela Eq.(B.11), obtemos o limitador do termo L_{vk} utilizado no modelo SST-SAS,

$$L_{vk} = C_s \sqrt{\frac{\zeta_2 \kappa}{(\beta/c_\mu - \alpha)}} \Delta. \quad (\text{B.12})$$