

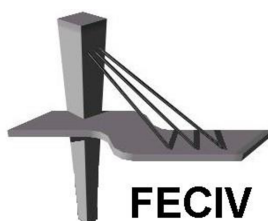


UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

### **Estudo do comportamento de almofadas elastoméricas sob vigas pré-moldadas e análise da estabilidade lateral após a montagem**

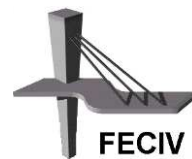
LEANDRO CESAR DOS REIS  
UBERLÂNDIA, 17 DE SETEMBRO DE 2018



**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**  
**Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil**



**Leandro Cesar dos Reis**

**ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE ALMOFADAS ELASTOMÉRICAS  
SOB VIGAS PRÉ-MOLDADAS E ANÁLISE DA ESTABILIDADE LATERAL  
APÓS A MONTAGEM**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas e Construção Civil.

**Orientadora: Profa. Dra. Maria Cristina Vidigal de Lima**

UBERLÂNDIA, 17 DE SETEMBRO DE 2018.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

R377e  
2018      Reis, Leandro Cesar dos, 1991-  
Estudo do comportamento de almofadas elastoméricas sob vigas pré-moldadas e análise da estabilidade lateral após a montagem [recurso eletrônico] / Leandro Cesar dos Reis. - 2018.

Orientador: Maria Cristina Vidigal de Lima.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1220>  
Inclui bibliografia.  
Inclui ilustrações.

1. Engenharia civil. 2. Concreto pré-moldado. 3. Vigas de concreto. I. Lima, Maria Cristina Vidigal de (Orient.) II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

---

CDU: 624

Maria Salete de Freitas Pinheiro - CRB6/1262



ATA

**ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL - PPGEC**

ATA Nº: 226/2018

**CANDIDATO:** Leandro Cesar dos Reis      **Nº. Matrícula:** 11622ECV007

**ORIENTADOR:** Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Cristina Vidigal de Lima

**TÍTULO:** “Estudo do comportamento de almofadas elastoméricas sob vigas pré-moldadas e a análise da estabilidade lateral após a montagem”.

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Estruturas e Construção Civil

**LINHA DE PESQUISA:** Estruturas

**PROJETO DE PESQUISA:** Estudo analítico e numérico do comportamento de vigas pré-moldadas de concreto durante as fases transitórias considerando o efeito das imperfeições geométricas

**DATA DA DEFESA:** 17 de setembro de 2018

**LOCAL:** Sala de Projeções Prof. Celso Franco de Gouvêa, bloco 1Y.

**HORÁRIO INÍCIO/TÉRMINO:** 09h00min às 11h00min

Reuniu-se na **Sala de Projeções Prof. Celso Franco de Gouvêa, bloco 1Y - Campus Santa Mônica** da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do PPGEC, assim composta pelos professores doutores: **Eliane Regina Flores de Oliveira – FECIV/UFU; Fábio Martin Rocha – ICTE/UFTM e Maria Cristina Vidigal de Lima – FECIV/UFU**, orientadora do discente. Ressalta-se que o aluno e todos os membros da banca participaram in loco.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa **Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Cristina Vidigal de Lima**, apresentou a Comissão Examinadora e concedeu ao discente a palavra para a exposição do trabalho. A seguir, a senhora presidente concedeu a palavra aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, a Banca, em sessão secreta, atribuiu os conceitos finais. Em face do resultado obtido, a Banca Examinadora considerou o candidato **aprovado**. Esta defesa de Dissertação de Mestrado Acadêmico é parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre. O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU. Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos e foi lavrada a presente ata que após lida e aprovada foi assinada pela Banca Examinadora.

**Membros titulares:**

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Cristina Vidigal de Lima – FECIV/UFU

Prof. Dr. Fábio Martin Rocha – ICTE/UFTM

Uberlândia, 17 de setembro de 2018.



Documento assinado eletronicamente por **Maria Cristina Vidigal de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 17/09/2018, às 10:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eliane Regina Flores Oliveira, Professor(a) do Magistério Superior**, em 17/09/2018, às 11:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fabio Martin Rocha, Usuário Externo**, em 17/09/2018, às 11:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0690955** e o código CRC **89A429E1**.

*Agradeço a Deus pelo dom da  
ciência, aos meus pais pelo apoio  
nesses dois anos de muito  
esforço, aos meus irmãos e  
amigos pelo companheirismo.*

# AGRADECIMENTOS

À Deus que é fonte de todo conhecimento, sabedoria e ciência. À Nossa Senhora da Abadia que sempre me concede muitas graças.

À minha orientadora Maria Cristina pelo empenho e compreensão com que me auxiliou nesses anos. Ao professor Francisco que me ajudou na parte de modelagem numérica. À minha família, meus pais Antônio e Rita e meus irmãos Diego e Tiago, que me apoiaram nessa dura caminhada.

Aos meus amigos de Uberlândia, que foram bons companheiros no dia-a-dia desta jornada, na faculdade, nos bares e na academia. Aos meus amigos de Santa Juliana, pelas festas e cervejadas, e que estão sempre dispostos a ajudar nas adversidades. Ao pessoal do grupo Kairós que me mostrou uma maneira diferente de enxergar os problemas da vida.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Civil, que forneceram o apoio necessário à realização da pesquisa.

À CAPES pelo apoio financeiro.

**REIS, L. C.** *Estudo do comportamento de almofadas elastoméricas sob vigas pré-moldadas e análise da estabilidade lateral após a montagem.* Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, 2018. 139p.

## RESUMO

Vigas de concreto pré-moldado apoiadas sobre almofadas de apoio estão sujeitas a falhas por instabilidade lateral que dependem de vários fatores, entre eles o vão da viga, as imperfeições iniciais, principalmente a excentricidade lateral inicial, e das condições das almofadas de apoio, no que diz respeito às rigidezes e às dimensões. Neste trabalho, desenvolveu-se modelos numéricos no ANSYS Workbench 18.0 para as vigas sobre essas almofadas, de forma a avaliar as cargas limite de instabilidade e a rigidez à rotação das almofadas em várias combinações de vão, seção da viga e excentricidade lateral. Com isso, buscou-se também avaliar o levantamento da viga sobre os apoios e a variação das rigidezes para cada situação. Por fim, foram analisadas as variações na carga limite considerando mudanças nas dimensões das mesas superior e inferior da viga. Os modelos propostos representaram adequadamente as vigas sobre as almofadas pois o comportamento obtido foi validado por estudos experimentais da literatura. O aumento nos vãos e nas imperfeições iniciais provocam uma diminuição na força limite de tombamento. O levantamento da viga sobre as almofadas é agravado conforme aumentam as excentricidades laterais e depende também da compressão inicial que a viga exerce sobre a almofada. Nos casos analisados, a diminuição da rigidez ao giro é em torno de 37% para a situação mais crítica, com vão ( $L$ ) de 40 m e excentricidade de  $L/300$ , com perda de contato variando entre 50% e 60%. A variação das larguras das mesas superior e inferior, que resulta em diferentes momentos de inércia laterais, tendem a alterar a força limite de tombamento. O aumento da inércia lateral em torno de 35% resulta no acréscimo de 24% para a força limite para os casos analisados neste trabalho.

**Palavras chave:** Instabilidade lateral. Tombamento. Almofadas de apoio elastoméricas. Vigas pré-moldadas.



**REIS, L. C.** *Evaluation of the behavior of elastomeric bearing pads under precast girders and analysis of lateral instability conditions after erection.* Msc Dissertation, College of Civil Engineering, Federal University of Uberlândia, 2018. 139p.

## ABSTRACT

Precast concrete girders on bearing pads are subjected to instability depending on several variables such as span length, initial imperfections, especially initial lateral sweep, and bearing pads behavior, regarding to stiffnesses and dimensions. On this work, numerical models are developed in the ANSYS Workbench 18.0 in order to assess the instability limit loads and the rotational stiffnesses of the pads in many combinations of span length, cross section of the girder and lateral sweep. Then, it was also evaluated the lift off phenomenon of the girder on the supports and the variation of stiffnesses in which situation. Finally, the variations of the limit loads considering changes in the bottom and top flanges dimensions is considered. The proposed models properly represented the girders over the bearing pads once the behavior are validated by experimental studies of the literature. The increase in spans and initial imperfections causes a decrease in the rollover limit load. The lift off effect is aggravated as the lateral eccentricities increase and also depends on the initial compression of the bearing pad. In the analyzed combinations, the reduction of the rotational stiffness is about 37% for the critical situation, which span length about 40 m and lateral sweep of  $L/300$ , with loss of contact between 50% and 60%. Variations of top and bottom flanges width, changing lateral moments of inertia, tend to vary the rollover limit load. Increasing the lateral inertia in about 35% results in an increase of 24% for the limit load for the cases analyzed in this study.

**Keywords:** Lateral instability. Rollover. Elastomeric bearing pads. Precast concrete girders.

# SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 .....	11
INTRODUÇÃO.....	11
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	11
1.2 JUSTIFICATIVA .....	16
1.3 OBJETIVOS .....	17
1.4 METODOLOGIA.....	18
1.5 DIVISÃO DO TRABALHO .....	19
 CAPÍTULO 2 .....	 20
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	20
2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	20
2.2 ESTUDOS SOBRE INSTABILIDADE LATERAL .....	20
 CAPÍTULO 3 .....	 43
ALMOFADAS DE APOIO ELASTOMÉRICAS: VERIFICAÇÕES E MODELAGEM .....	43
3.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES .....	43
3.2 CARACTERÍSTICAS DAS ALMOFADAS DE APOIO ELASTOMÉRICAS .....	43
3.3 DETERMINAÇÃO DAS RIGIDEZES DAS ALMOFADAS.....	48
3.4 MODELAGEM UTILIZANDO ELEMENTOS SÓLIDOS .....	64
3.5 MODELO SIMPLIFICADO DA ALMOFADA.....	71
 CAPÍTULO 4 .....	 79
MODELAGEM NUMÉRICA DE VIGAS SOBRE APOIOS ELÁSTICOS .....	79
4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	79
4.2 MODELAGEM DE VIGAS SOBRE APOIOS ELASTOMÉRICOS .....	81
 CAPÍTULO 5 .....	 92
ANÁLISES PARAMÉTRICAS .....	92
5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	92
5.2 RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	94

CAPÍTULO 6 .....	110
ESTUDO SOBRE RIGIDEZ EFETIVA DAS ALMOFADAS .....	110
6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	110
6.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	112
 CAPÍTULO 7 .....	 119
INFLUÊNCIA DO MOMENTO DE INÉRCIA LATERAL SOBRE A CAPACIDADE DE CARGA DAS VIGAS.....	 119
7.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	119
7.2 DETERMINAÇÃO DAS RIGIDEZES DA ALMOFADA .....	123
7.3 AVALIAÇÃO DA ESTABILIDADE COM VARIAÇÃO DAS MESAS .....	125
 CAPÍTULO 8 .....	 134
CONCLUSÕES .....	134
8.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	134
 REFERÊNCIAS .....	 137

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Vigas longas e esbeltas de concreto pré-moldado estão sujeitas a falhas por instabilidade lateral. Essa instabilidade pode ocorrer durante as fases de transporte, içamento ou após a colocação da viga sobre o apoio, antes da concretagem das travessas de apoio (contraventamento lateral). Diversas causas podem influenciar para que a instabilidade ocorra. Dentre elas estão a esbeltez da peça (REVATHI; MENON, 2007; GIRIJA; MENON, 2011), imperfeições geométricas (HILL; DICK; TADROS, 2009), condições de transporte (MAST, 1993), de içamento (LIMA, 2002; KRAHL, 2014) e de apoio temporário da viga (KRAHL, 2014; CONSOLAZIO; HAMILTON, 2012; HURFF; KAHN, 2012a; HARPER; CONSOLAZIO, 2013).

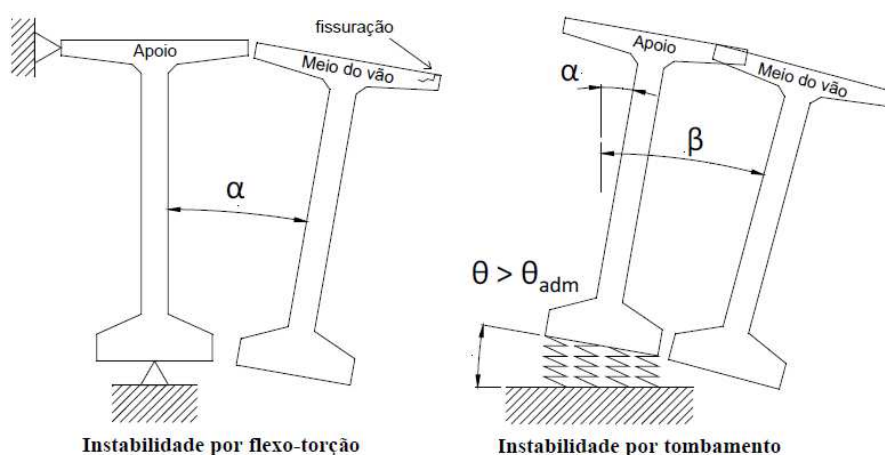
Falhas por instabilidade podem representar riscos para as pessoas envolvidas na construção devido à natureza repentina na qual a falha pode ocorrer. Além disso, falhas por instabilidade de vigas de concreto pré-moldado e protendido durante a construção podem causar um impacto econômico negativo devido ao custo associado à falha da viga, resultando no atraso da construção, danos aos equipamentos e potencial fechamento das rodovias sobre as quais o viaduto esteja sendo construído (HURFF, 2010).

Há duas formas de instabilidade lateral: instabilidade por flexo-torção e instabilidade por tombamento. A instabilidade por flexo-torção ocorre nos casos onde a viga é travada lateralmente nos apoios. Falhas por torção com flexão lateral possuem uma baixa probabilidade de acontecer quando a viga já está posicionada na estrutura, porém, durante o içamento, a viga é menos estável e está sujeita a este tipo de instabilidade (GERMÁN, 2015).

Segundo Germán (2015) o tombamento controla o fenômeno da instabilidade para os casos onde a viga não é fixada lateralmente. Isto inclui as vigas apoiadas sobre almofadas de elastômero que, mesmo oferecendo certa restrição à rotação, podem não impedir a viga de tombar.

Segundo Krahel (2014), a principal diferença entre a instabilidade por tombamento e a flambagem por flexo-torção é que no tombamento a ruptura pode acontecer no regime elástico da viga. Já na flambagem por flexo-torção, a ruptura é provocada pelo giro relativo entre o apoio e o meio do vão, que pode provocar fissuração no concreto e consequente redução das rigidezes à flexão lateral e torção. Nestes casos, deve ser considerada a não-linearidade física do concreto na determinação da carga crítica. A Figura 1 mostra a diferença entre os dois modos de instabilidade.

Figura 1 – Diferença entre instabilidade por flexo-torção e instabilidade por tombamento



Fonte: Krahel (2014)

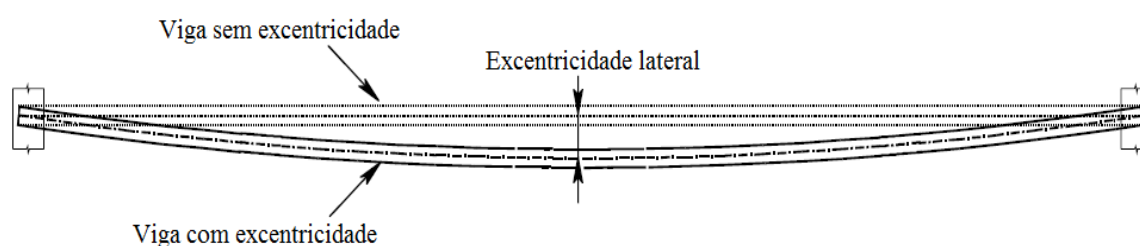
Quanto mais esbeltas forem as vigas, mais significantes são os efeitos da instabilidade lateral. Segundo Revathi e Menon (2007), os efeitos da esbeltez das vigas se manifestam na forma de desvios laterais e torção, levando a possíveis falhas repentinas por instabilidade. Segundo Hurff e Kahn (2012b), o aumento na resistência do concreto e nos diâmetros dos cabos de protensão possibilita a utilização de vigas de concreto mais longas e altas, resultando numa esbeltez maior, gerando, consequentemente, maior probabilidade de que uma falha de estabilidade ocorra nos elementos pré-moldados durante as fases transitórias.

Um outro fator que pode levar a problemas de instabilidade lateral é a imperfeição geométrica, que surge durante a concretagem da viga pré-moldada. As imperfeições resultam

em excentricidades que deslocam o centro de massa do elemento e, consequentemente, a resultante do peso próprio da viga em relação aos apoios. Esse deslocamento do peso provoca um momento na viga, que pode levar ao tombamento da mesma (HILL; DICK; TADROS, 2009; HURFF; KAHN, 2012b).

Segundo Consolazio e Hamilton (2007), a excentricidade é definida como a curvatura horizontal da viga que geralmente ocorre como resultado de formas desalinhadas e/ou aplicação de força de protensão com leve excentricidade lateral. Também pode ser resultado das condições de armazenamento e estocagem da viga, da falta de prumo ou devido aos efeitos da temperatura, quando as vigas são expostas à radiação solar em somente uma das faces (Figura 2).

Figura 2 – Excentricidade lateral da viga



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007)

Para Germán (2015), as condições da almofada de apoio também podem afetar a estabilidade das vigas. Portanto, entender o comportamento da estabilidade em vigas de concreto protendido, incluindo imperfeições no apoio (almofadas de apoio) e na viga e seu efeito no desempenho estrutural, é de suma importância para garantir a segurança no manuseio de tais vigas.

As almofadas de apoio de elastômero são usadas em pontes para suportarem vigas de concreto pré-moldado. O custo inicial e a facilidade de instalação, além de custos baixos de manutenção, fazem das almofadas de apoio uma alternativa bastante interessante, quando comparados com os outros apoios existentes (HEYMSFIELD; MCDONALD; AVENT, 2001).

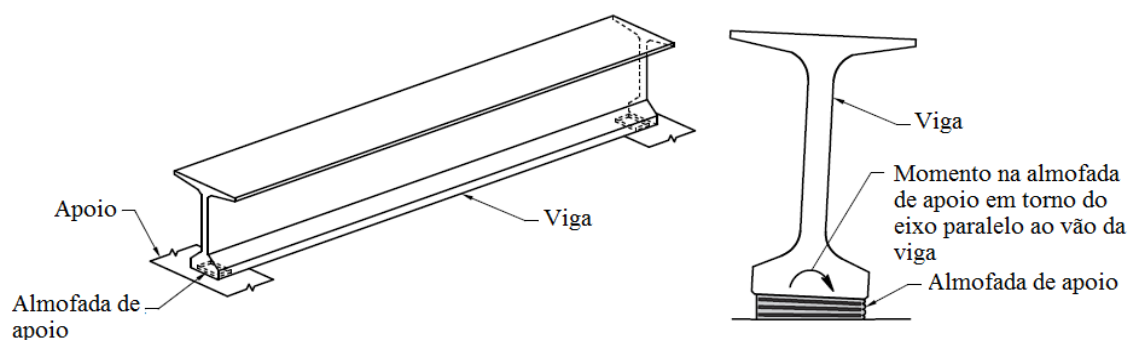
As almofadas de apoio são projetadas para suportarem as cargas verticais de compressão e permitirem a movimentação horizontal da viga devido às ações de expansão térmica, cargas móveis, encurtamento elástico do concreto, rotações da viga e mudanças ao longo do tempo

do concreto (retração e fluência) (YAZDANI; EDDY; CAI, 2000; CONSOLAZIO; HAMILTON, 2012). Quando bem dimensionado, o elastômero deve voltar à sua forma original, sem deformações plásticas, na ausência de qualquer carga (YAZDANI; EDDY; CAI, 2000).

A utilização de apoios elastoméricos na construção de pontes proporciona vantagens consideráveis de custo e manutenção. Porém, se utilizadas almofadas com rigidezes inadequadas, principalmente ao giro, a viga tende a girar sobre estes apoios, provocando, inicialmente, o levantamento (“*lift-off*”) da viga em uma das extremidades do apoio. Este fenômeno resulta num carregamento não uniforme da almofada, que pode gerar uma rotação adicional da viga, caso o conjunto não encontre equilíbrio, levando, em último caso, à falha por tombamento.

Segundo Consolazio e Hamilton (2012), o peso próprio da viga é gradualmente aplicado na almofada de apoio durante o posicionamento da viga. Antes da concretagem do tabuleiro, a viga pode se tornar instável e rotacionar em torno do eixo paralelo à viga, como mostrado na Figura 3.

Figura 3 – Momento em torno do eixo paralelo à viga



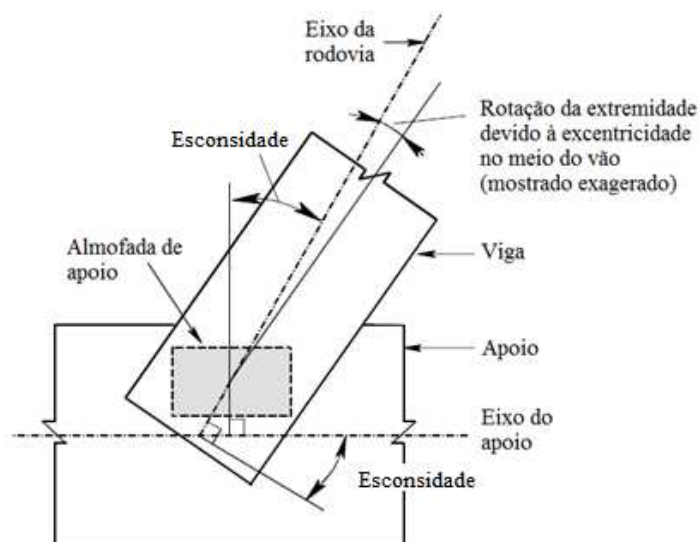
Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

O giro da almofada sobre o apoio pode ser provocado pela excentricidade inicial da viga ou por uma excentricidade referente ao desalinhamento existente entre o eixo da viga e o eixo do apoio, provocada pelo posicionamento inadequado da viga.

Algumas características geométricas do elemento estrutural e do apoio podem agravar os efeitos que levam ao tombamento da viga. Uma dessas características é a esconsidade, que é o ângulo entre o eixo longitudinal da viga com o eixo longitudinal do apoio (Figura 4). Há

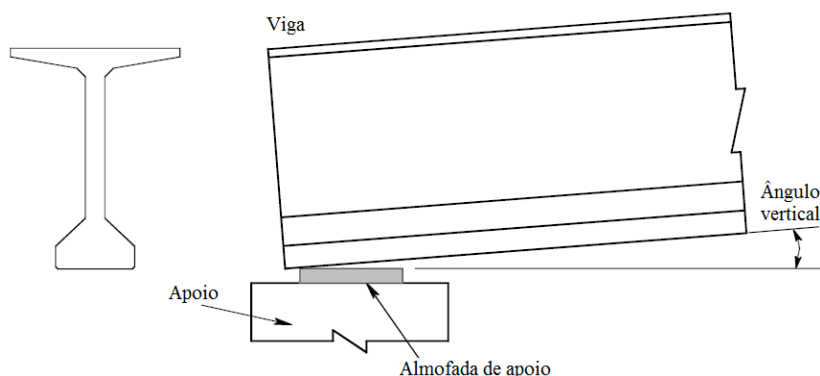
ainda o ângulo vertical referente à contraflecha da viga provocada pela força de protensão ou por condições de projeto (Figura 5).

Figura 4 – Esconsidade



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007)

Figura 5 – Ângulo vertical entre viga e apoio



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007)

Neste trabalho, é estudado o fenômeno de instabilidade por tombamento pois, segundo Hurff (2010), para situações de viga simplesmente apoiada sobre almofadas de apoio, sem travamento das extremidades, é esperado que o tombamento ocorra antes da instabilidade por torção e flexão lateral.

Dentre as diversas variáveis que aumentam a probabilidade de ocorrência de problemas de instabilidade, é estudada a influência da seção transversal da viga e das dimensões das mesas inferior e superior, o que altera a posição do seu centro de massa e da inércia em relação ao



eixo de menor inércia. Também são considerados neste estudo os vãos das vigas, a presença de excentricidade devida às imperfeições iniciais e as características das almofadas de apoio elastoméricas, principalmente a rigidez ao giro.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

A ocorrência de falhas por instabilidade pode resultar em danos físicos e materiais. A Figura 6 mostra um acidente ocorrido no Arizona – EUA em 2007 onde houve o tombamento de nove vigas. Segundo o relatório do acidente (OESTERLE et. al, 2007), uma das vigas tombou quando apoiada somente nos aparelhos de apoio, sem restrição ao giro, e provocou o colapso progressivo das demais, sendo as causas prováveis atribuídas às excentricidades por imperfeição inicial, efeito de temperatura, efeito de fluência e posicionamento da almofada de apoio.

Figura 6 – Acidente no Arizona (EUA)



Fonte: OESTERLE (2007)

Já a Figura 7 mostra um acidente ocorrido na região de Uberlândia - MG, durante a construção de um viaduto na BR-365, em 2014. Durante o posicionamento de uma viga sobre a estrutura, houve o colapso das demais que já haviam sido posicionadas. Cada viga tem 35 m e peso aproximado de 60 toneladas. Este acidente provocou a morte de um funcionário de 27 anos que auxiliava na montagem.

Figura 7 – Acidente na BR 365, próximo à Uberlândia - MG



Fonte: Pontal em foco (disponível em <<http://pontalemfoco.com.br/destaque-noticias/obras-de-viaduto-entre-ituiutaba-e-uberlandia-e-paralisada-pela-2a-vez/>>)

Devido aos danos decorrentes de falhas por instabilidade, torna-se necessário estudar as variáveis que influenciam neste problema. Como análises experimentais são difíceis e onerosas de serem feitas, e pela falta de equações analíticas precisas, este trabalho será feito por análises numéricas utilizando o método dos elementos finitos e, para validação do modelo, o comportamento das vigas é comparado a ensaios experimentais encontrados na literatura.

### 1.3 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é analisar o problema da instabilidade lateral de vigas pré-moldadas sobre apoios elásticos, considerando as imperfeições geométricas, os vãos, a esconsidade dos apoios e a contribuição da largura das mesas superior e inferior na segurança durante a montagem.

Os objetivos específicos podem ser agrupados como segue:

- Analisar as respostas numéricas da modelagem de almofadas de apoio elastoméricas, bem como estimar as rigidezes à compressão e a rotação;
- Considerar a influência da esconsidade do aparelho de apoio, devida à presença da excentricidade lateral inicial, na rigidez da almofada à flexão lateral;

- Realizar análises paramétricas para avaliar o efeito da excentricidade e do vão na carga limite de tombamento e na rigidez efetiva das almofadas de apoio;
- Estudar a influência do aumento da largura das mesas inferior e superior, contribuindo com o aumento da segurança ao tombamento de vigas sobre apoios elásticos.

## 1.4 METODOLOGIA

Este trabalho é composto por análises numéricas de vigas apoiadas em almofadas de apoio de elastômero. Os modelos das almofadas e das vigas são validados por ensaios experimentais encontrados na literatura. São feitas análises paramétricas para avaliar o comportamento em relação aos parâmetros referentes aos vãos, excentricidades laterais e seções das vigas. É analisada também a influência das dimensões das mesas superior e inferior sobre a estabilidade das vigas.

Todas as análises numéricas desenvolvidas neste trabalho foram realizadas no programa computacional ANSYS, utilizando elementos sólidos e de molas para as simulações do problema da instabilidade lateral de vigas pré-moldadas sobre apoios elásticos. Os tipos de elementos e ligações utilizados nas modelagens serão descritos de forma detalhada nos capítulos 3 e 4.

São desenvolvidas análises considerando a não-linearidade geométrica das almofadas de apoio, que é resultado do fenômeno de levantamento da viga sobre a almofada (*“lift-off”*). A não-linearidade física da almofada de apoio é considerada por meio de molas com rigidez longitudinal variável ao longo da posição da almofada e que trabalham exclusivamente sob compressão. A consideração de rigidez diferente em cada mola fornece resultados muito próximos aos que levam em conta a não-linearidade física do elastômero. Em relação ao concreto, foi adotado comportamento linear elástico.

Como ação que produz deslocamento, são considerados o peso-próprio combinado com uma única força concentrada no meio do vão ou por duas forças concentradas aplicadas no terço do vão. As condições de contorno são representadas por meio de elementos sólidos sobre molas, com comportamento exclusivo de compressão, sem apresentar capacidade de absorção de força de tração. A viga é modelada com elementos sólidos, com curvatura inicial.

## 1.5 DIVISÃO DO TRABALHO

Este trabalho é constituído por 8 capítulos. No primeiro capítulo é feita uma introdução sobre o problema da instabilidade lateral em vigas. Também são apresentados a metodologia e os objetivos do trabalho. O capítulo 2 contém a revisão bibliográfica sobre instabilidade lateral, principalmente no que se refere ao tombamento.

No capítulo 3 são mostrados alguns modelos utilizados para representar as almofadas de apoio. Neste capítulo, também são propostos modelos numéricos para representar a almofada de apoio. Os modelos são comparados com estudos encontrados na literatura. No capítulo 4 é feita a modelagem de vigas sobre as almofadas de apoio modeladas no capítulo 3. O comportamento das vigas é validado com resultados de ensaios experimentais de Hurff (2010) e Consolazio e Hamilton (2012).

As análises paramétricas, considerando a variação no vão e na excentricidade lateral inicial, bem como o estudo sobre o levantamento (*“lift off”*) da viga sobre a almofada são realizadas no capítulo 5. De maneira geral, são consideradas duas situações: a primeira é chamada de situação inicial, e refere-se ao comportamento da viga sobre as almofadas com a consideração da aplicação do peso próprio sobre o modelo. A segunda situação é denominada situação limite e diz respeito à aplicação de uma força no meio do vão, até que seja atingido um valor limite pré-estabelecido, conforme o deslocamento lateral no meio do vão.

No capítulo 6 são determinadas as rigidezes efetivas das almofadas de apoio para as situações inicial e limite e é feito um estudo sobre a variação dessas rigidezes com a variação das imperfeições iniciais. No capítulo 7 é feita uma avaliação sobre a influência da variação das mesas superior e inferior sobre o comportamento da instabilidade em vigas de concreto sobre almofadas de apoio de elastômeros. Por fim, o capítulo 8 apresenta as conclusões e as considerações finais do presente trabalho.

## **CAPÍTULO 2**

### **REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

#### **2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS**

Diversos autores propuseram modelos para representarem as almofadas de apoio e as vigas a fim de avaliar o comportamento destas em relação à instabilidade lateral. As variáveis consideradas nas análises de instabilidade podem ser internas, referentes às características geométricas do elemento estrutural e do apoio (excentricidade inicial, vão, esconsidade, ângulo vertical referente à contraflecha de protensão, dimensões e rigidez da almofada de apoio) ou externas, referentes às ações que provocam a instabilidade, como a radiação térmica, que interfere na excentricidade inicial, e a ação do vento.

Neste capítulo, são mostrados alguns estudos realizados com o objetivo de avaliar a instabilidade lateral em diferentes situações. Os modelos utilizados pelos autores são aqui descritos de forma simplificada e, nos capítulos seguintes, conforme a necessidade, são apresentados de forma detalhada.

#### **2.2 ESTUDOS SOBRE INSTABILIDADE LATERAL**

Yazdani, Eddy e Cai (2000) avaliaram o comportamento de vigas de concreto apoiadas sobre almofadas de apoio elastoméricas, buscando quantificar o efeito de restrição que estas almofadas fornecem para as vigas, comparando com resultados de ensaios de campo. Inicialmente, foi necessário criar um modelo para representar as almofadas de apoio classificadas no FDOT (*Florida Department of Transportation*) para obter as rigidezes dessas almofadas. Para isso, os autores utilizaram a ferramenta ANSYS Workbench 18.0 para simular as almofadas. As almofadas de apoio foram modeladas com elementos sólidos, representando as camadas de elastômero, das chapas de aço e das placas rígidas. O

comportamento do neoprene e das chapas de aço foi assumido como elástico. Com isso, aplicou-se esforços de compressão, cisalhamento e momento para determinar as rigidezes equivalentes. As rigidezes obtidas também foram comparadas com equações analíticas apresentadas pelos autores. As formulações e a metodologia são abordadas com mais detalhes no capítulo 3.

Por fim, os autores modelaram trechos de vigas sobre as almofadas de apoio. Nesta etapa, as almofadas foram remodeladas para reduzir o número de elementos e o tempo de processamento. As almofadas de apoio foram modeladas como elementos de mola (COMBIN14) e a rigidez total da almofada de apoio foi dividida em cada mola, dependendo da área de influência de cada mola (mola de canto, de extremidade e de centro). A viga de concreto foi modelada com elementos sólidos (SOLID65), que possui 8 nós e cada nó possui três graus de liberdade de translação. Foi considerado também o concreto trabalhando somente na fase elástica. Os autores fizeram este estudo pois as condições de contato entre a almofada de apoio e a viga podem afetar o comportamento da viga de concreto. Além disso, a AASHTO (1996 *apud* YAZDANI; EDDY; CAI, 2000) afirma que as forças impostas pela almofada de apoio sobre a subestrutura é função da rigidez da almofada e da flexibilidade da subestrutura e que tais forças devem ser incorporadas no projeto dos elementos da subestrutura. Entretanto, não há tais especificações de incorporar o efeito da almofada no dimensionamento das vigas, o que resulta em pontes mais rígidas do que o previsto.

Os valores obtidos pela modelagem numérica de Yazdani, Eddy e Cai (2000) para rigidez das almofadas ficaram próximos aos valores obtidos pelas especificações da AASHTO (1996 *apud* YAZDANI; EDDY; CAI, 2000). Ao considerar o efeito da almofada sobre as vigas, os autores observaram um pequeno aumento de rigidez dessas vigas, levando à menores deslocamentos no meio do vão e a menores tensões de tração na viga. Porém, estes valores não foram significativos.

Burgoyne e Stratford (2001) propuseram uma equação de equilíbrio para encontrar o peso próprio no qual ocorre flambagem (Equação 1). Com a equação, é obtida a força crítica que provoca flambagem de uma viga perfeita (sem excentricidade lateral inicial).

$$(wL)_{cr}^2 \frac{L^3}{120 \cdot EI_y} + (wL)_{cr} y_b - 2K = 0 \quad (1)$$

Em que  $(wL)_{cr}$  é o peso total que causa a flambagem;  $w$  é o peso próprio da viga por unidade de comprimento;  $L$  é o vão da viga;  $E$ , o módulo de elasticidade do concreto;  $I_y$ , o momento de inércia na direção de menor inércia;  $y_b$  é a altura do centroide da viga em relação a mesa inferior e  $K$  é a rigidez à rotação da almofada de apoio.

Para considerar as imperfeições iniciais, deve-se utilizar a equação proposta por Southwell (Equação 2), que leva em conta o deslocamento lateral inicial. Com esta equação, desenha-se a curva de força limite  $\times$  deslocamento lateral e determina-se a força para a qual ocorre o tombamento (BURGOYNE; STRATFORD, 2001).

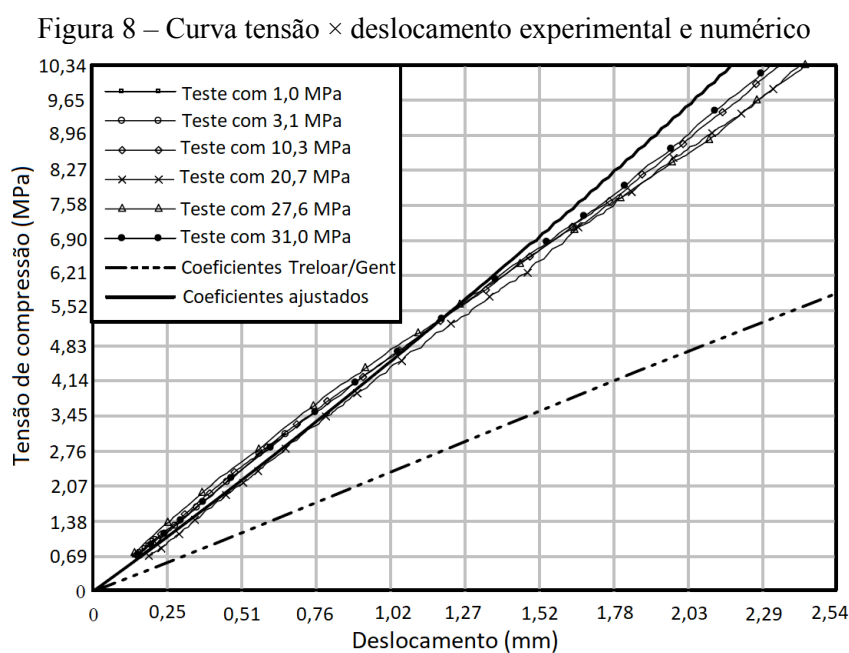
$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{w}{w_{cr}}} \quad (2)$$

Ainda segundo os autores, a viga, quando posicionada sobre apoios flexíveis, tende a girar. Com isso, uma componente do peso próprio atua sobre o eixo de menor inércia, que provoca um deslocamento lateral neste sentido. Se a almofada não oferece rigidez adequada, este deslocamento pode provocar a flambagem da viga. Vale ressaltar que geralmente as vigas apresentam imperfeições iniciais, que podem provocar efeitos de 2ª ordem, e é a curvatura associada com estes deslocamentos laterais que podem levar à fissuração do concreto. Isto resulta na redução da rigidez no eixo de menor inércia, que pode levar ao colapso repentino da viga.

Estas equações podem ser utilizadas para determinar a carga de flambagem de vigas apoiadas sobre almofadas de elastômero. A rigidez dessas almofadas pode ser facilmente calculada e esta exerce grande influência sobre a rotação da viga e sobre o aumento de tensões que podem levar à fissuração do concreto (BURGOYNE; STRATFORD, 2001).

Consolazio e Hamilton (2007) estudaram a instabilidade em vigas de concreto durante a construção. Análises experimentais e numéricas foram feitas sobre as almofadas de apoio e sobre o conjunto viga-almofadas. Como variáveis, os autores consideram a seção transversal da viga, o comprimento do vão, a esconsidade, a contraflecha de protensão, a excentricidade inicial, a fluência da almofada de apoio e a rigidez do travamento na extremidade da viga.

Nas análises experimentais das almofadas de apoio, os autores obtiveram curvas de tensão de compressão  $\times$  deslocamento vertical. Essas análises experimentais serviram para ajustar os coeficientes para o modelo desenvolvido para a almofada de apoio tipo B do Departamento de Transporte da Florida – FDOT (Figura 8).



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007)

Com os coeficientes ajustados, a curva obtida pelo modelo numérico se aproximou com bastante precisão das curvas experimentais. Com isso, foram determinadas as rigidezes à compressão, ao cisalhamento e ao giro. Nestas análises, aplicou-se uma força distribuída ao longo da viga, representando o peso próprio, seguida da aplicação de outro carregamento distribuído, até que a instabilidade ocorresse.

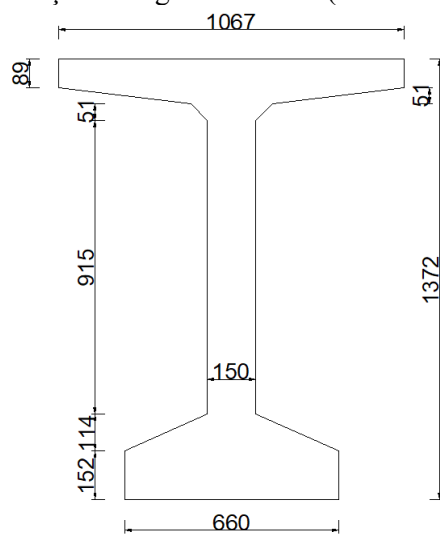
De acordo com Consolazio e Hamilton (2007), a carga de instabilidade é influenciada pela seção da viga, pelo vão e pela combinação da escuridade com o ângulo vertical devido à contraflecha de protensão. Isto porque a escuridade e o ângulo vertical provoca um carregamento não uniforme da almofada, que resulta na redução da rigidez ao giro da almofada, levando à falha por instabilidade. Já a fluência da almofada não interferiu nas cargas limites das vigas.

Hurff (2010) realizou análises experimentais e analíticas sobre os problemas de flexo-torção e de tombamento. Para estudar o problema da flexo-torção, o autor ensaiou seis vigas



retangulares esbeltas com travamento nos apoios. O autor realizou também uma análise não-linear geométrica para prever as cargas máximas de instabilidade. Em relação ao tombamento, o autor ensaiou uma viga com a seção padronizada PCI BT-54 (Figura 9). Em ambos os casos, o carregamento aplicado na viga foi uma força vertical concentrada no meio do vão.

Figura 9 – Seção da viga PCI BT-54 (dimensões em mm)



Fonte: Adaptado de Hurff (2010)

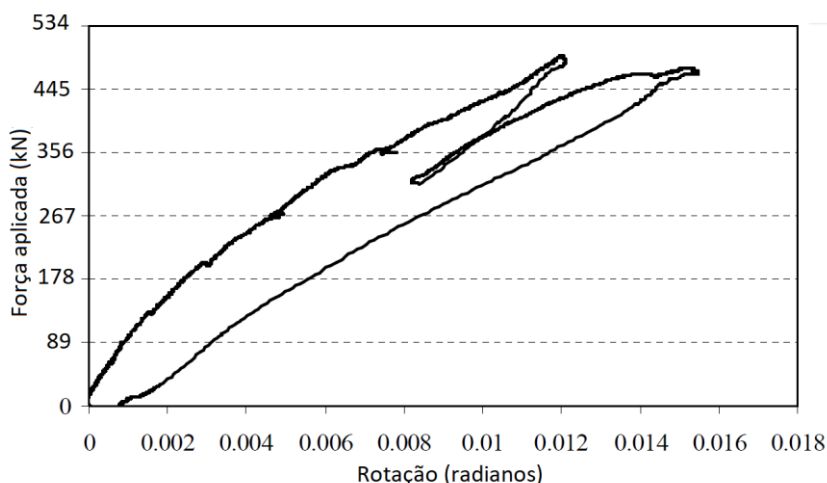
Também foi objeto de estudo a influência das imperfeições iniciais sobre a instabilidade lateral. Foram feitas análises experimentais das almofadas de apoio, para determinar as rigidezes à rotação e à compressão, e a influência dessas na instabilidade.

O efeito da temperatura sobre as vigas de concreto também é significativo. Quando o sol aquece mais uma das faces da viga, o gradiente térmico que surge tende a causar uma curvatura na viga. Em relação à PCI BT-54, Hurff (2010) ainda estudou as variações na excentricidade lateral devidas à radiação solar.

Nas análises sobre a PCI BT-54, o autor obteve as curvas de força no meio do vão  $\times$  rotação no meio do vão e nos apoios para duas aplicações de carga. Na primeira, a viga apresentou rotações muito maiores que as esperadas. A causa dessa rotação excessiva foi o fato de a face inferior da viga apresentar leve curvatura, o que provocou uma rotação inicial grande. Já na segunda aplicação da carga, após reparar a face inferior da viga para que ela ficasse plana, o ensaio foi repetido e determinou-se a força limite de tombamento, cujo valor foi de

463 kN. A curva do segundo carregamento é de grande importância para validação do modelo que será apresentado neste trabalho. A Figura 10 mostra os resultados obtidos pelo autor.

Figura 10 – Curva de força no meio do vão  $\times$  rotação no meio do vão

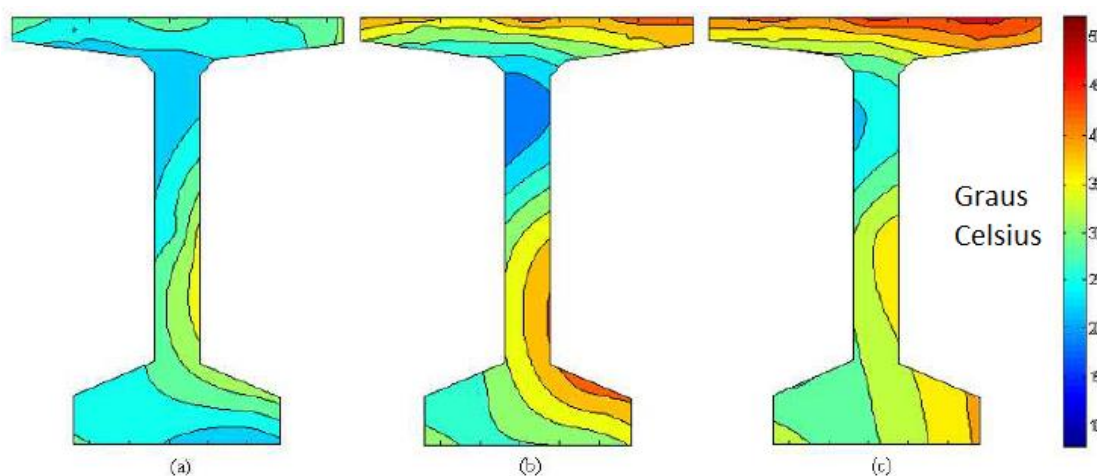


Fonte: Adaptado de Hurff (2010)

Além das rotações, o autor fez também análises de deformações. A viga não apresentou fissuração durante o ensaio, o que mostra que a consideração de comportamento linear do concreto nas análises de tombamento é adequada.

Quando a viga estava estocada no pátio da fábrica, Hurff (2010) mediu a variação na excentricidade inicial ao longo do dia para avaliar a influência da radiação solar sobre a viga. O autor mediu aumentos na excentricidade devido à radiação térmica na ordem de 10 a 15 mm, que representavam de 31% a 48% do limite máximo permitido pelo PCI para a viga analisada (BT-54). A Figura 11 mostra a variação térmica na seção transversal da viga para um dos dias analisados.

Figura 11 – Variação da temperatura na seção da viga ao longo do dia



Fonte: Adaptado de Hurff (2010)

Lee e Kalkan (2012) propuseram equações analíticas para determinar o gradiente térmico vertical e lateral atuante em vigas de concreto. Os resultados obtidos com as equações foram comparados com resultados de gradientes térmicos medidos em uma viga durante um ano, além de checados com o gradiente térmico fornecido pela AASHTO (2012). Por fim, os autores fizeram uma análise numérica bidimensional para determinarem os diferenciais de temperatura para quatro vigas de seção padrão da AASHTO-PCI.

Os esforços provocados pelos diferenciais de temperatura em uma seção transversal causam deslocamentos laterais e verticais que podem influenciar na estabilidade da viga. Lee e Kalkan (2012) fornecem equações para determinar os deslocamentos ao longo do vão de uma viga. Os valores obtidos com essas equações são comparados com valores obtidos por uma análise com elementos finitos de um modelo tridimensional da viga BT-1600 com 30 metros de vão.

Ainda segundo os autores, as vigas expostas aos esforços térmicos podem gerar distribuições não lineares de temperatura nas vigas. As variáveis consideradas foram a temperatura do ar, a radiação solar e a velocidade do vento. Estas variações na temperatura ao longo da seção podem resultar em deslocamentos laterais que podem contribuir para a ocorrência de instabilidade lateral da viga posicionada, antes da concretagem do tabuleiro. Por isso, o autor propõe equações para determinar o gradiente térmico vertical e o gradiente térmico lateral. Este último é dividido em três equações. A primeira diz respeito ao gradiente térmico lateral na mesa superior, a segunda refere-se ao gradiente na alma e a terceira, à mesa inferior. Com

os gradientes térmicos, pode-se obter numericamente os esforços provocados em vigas de concreto e, por fim, calcula-se os deslocamentos laterais para avaliar a estabilidade da viga.

Os valores dos gradientes térmicos obtidos analiticamente e numericamente por Lee e Kalkan (2012) corresponderam bem aos valores medidos experimentalmente. As deformações obtidas analiticamente e numericamente da viga BT-1600 ficaram bastante próximas entre si e a deformação medida no meio do vão correspondeu à aproximadamente 50% do limite fornecido pelo PCI de 1 cm a cada 3 m de vão, o que significa que as ações térmicas atuante na viga podem aumentar a probabilidade de ocorrência de instabilidade lateral durante a construção.

Quanto à temperatura, Lee (2012) avaliou o comportamento de vigas de concreto considerando os efeitos da variação térmica e das imperfeições iniciais, estas últimas representadas pelas excentricidades laterais e pela contraflecha de protensão. A análise incluiu também o comportamento não linear físico e geométrico das almofadas de apoio.

A não linearidade da almofada foi considerada utilizando-se uma rigidez bilinear para cada mola que a compõe. Também foram adotadas rigidezes diferentes para as molas de canto, de extremidade e de centro. O comportamento das molas também foi limitado para trabalhar somente à compressão. Isto serve para considerar o efeito do levantamento (“*lift-off*”) da almofada.

Lee (2012) dividiu suas análises em três partes. A primeira avaliou a variação de um gradiente térmico aplicado sobre a seção transversal da viga, numa análise 2D. A segunda parte consistiu em aplicar sobre um modelo tridimensional de quatro seções de vigas da AASHTO-PCI forças de protensão e excentricidades laterais para levar os deslocamentos e tensões correspondentes para a terceira parte da análise. Finalmente, o autor incluiu num mesmo modelo, também tridimensional, os deslocamentos obtidos nas análises anteriores, além de incluir a almofada de apoio, para avaliar o comportamento da viga sob todas essas variáveis.

Em suas análises, Lee (2012) obteve deslocamentos excessivos considerando todas as variáveis de estudo, o que, segundo o autor, pode ser um indicativo de possível falha por instabilidade lateral.

Consolazio e Hamilton (2012) testaram experimentalmente as almofadas A, B e C da AASHTO (Tabela 1) para determinarem as rigidezes à rotação para estas almofadas. Os autores ainda realizaram um ensaio em escala real de uma viga apoiada sobre almofadas e obtiveram curvas de força  $\times$  deslocamento lateral no meio do vão e de momento  $\times$  rotação. Foi desenvolvido ainda um modelo numérico por elementos finitos onde a viga foi representada por elementos de barra na altura do centroide e as almofadas de apoio por elementos de mola axiais e torcionais.

Tabela 1 – Tipo e dimensões das almofadas de apoio

	Tipo da almofada		
	A	B	C
<b>Largura da almofada (mm)</b>	279,4	355,6	304,8
<b>Comprimento da almofada (mm)</b>	609,6	609,6	584,2
<b>Altura da almofada (mm)</b>	48,4	65,0	65,0
<b>Número de chapas de aço</b>	3	4	4

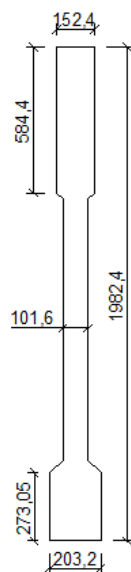
Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

Na análise experimental das almofadas de apoio, os autores criaram curvas de momento  $\times$  rotação para avaliar a influência da esconsidade e do ângulo vertical na rigidez à rotação da almofada. Para considerar a esconsidade, utilizou a almofada alinhada (zero de esconsidade) e com ângulo de 45°. Em relação ao ângulo vertical, utilizou a configuração sem sua presença e com ângulo de 0,02 e 0,04 radianos.

As curvas de momento  $\times$  rotação nas almofadas de apoio mostraram comportamento linear no início e não-linear depois de certo ponto. Isto é devido à perda de contato entre o dispositivo de ensaio e a almofada de apoio em uma das extremidades. A presença de esconsidade e ângulo vertical provoca uma redução significativa na rigidez ao giro da almofada. Para uma das almofadas, essa redução atingiu o valor de 86%. A esconsidade sozinha provoca uma redução considerável da rigidez ao giro. A influência do ângulo vertical, quando presente sem esconsidade, segundo os autores, é inconclusiva (CONSOLAZIO; HAMILTON, 2012).

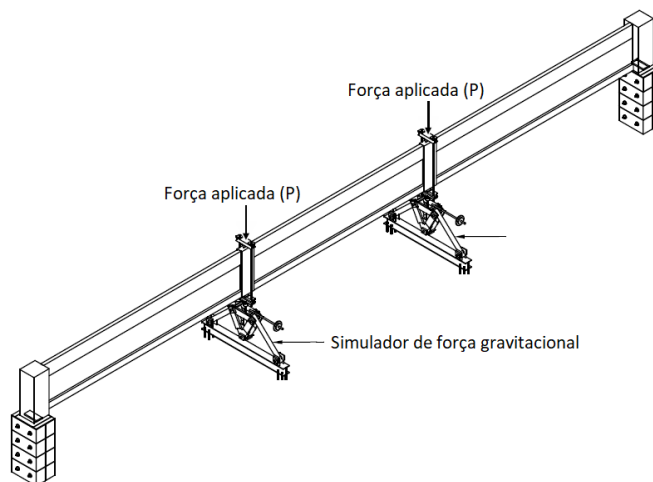
Em relação aos ensaios da viga sobre almofadas de apoio, os autores utilizaram uma viga protendida dividida em três segmentos cuja seção é derivada da FBT 78 (*Florida bulb-tee* 78) e é mostrada na Figura 12. A viga foi posicionada sobre a almofada tipo A. Os esforços aplicados sobre o modelo foram o peso próprio da viga e duas forças concentradas nos terços do vão (Figura 13).

Figura 12 – Seção transversal da viga (dimensões em mm)



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

Figura 13 – Configuração do ensaio



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

Como variáveis do ensaio, adotou-se quatro configurações de esconsidade e ângulo vertical combinados (Tabela 2).

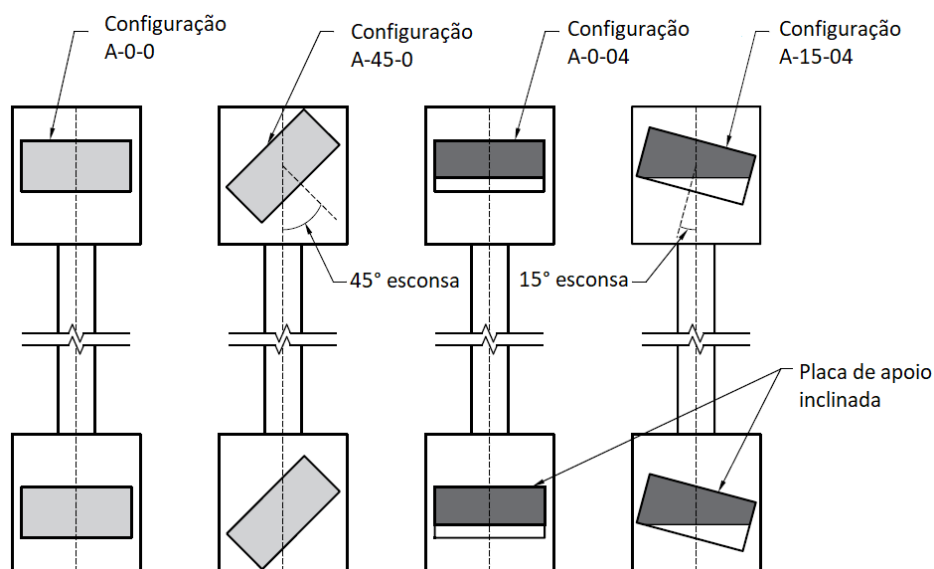
Tabela 2 - Configuração do ensaio

Configuração do teste	Ângulo de esconsidade (graus)	Ângulo vertical (rad)	Número de testes realizados
A-0-0	0	0	3
A-45-0	45	0	2
A-0-04	0	0,04	3
A-15-04	15	0,04	1

Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

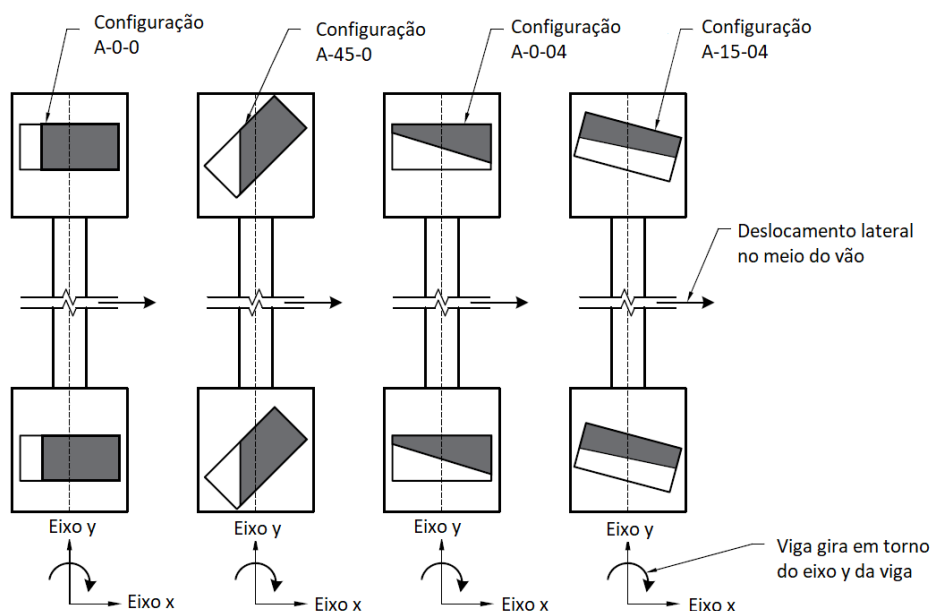
A Figura 14 mostra a distribuição da pressão sobre a almofada no início do experimento e a Figura 15 mostra a distribuição das pressões no final do experimento.

Figura 14 – Carregamento na almofada no início do teste



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

Figura 15 – Carregamento na almofada no final do teste

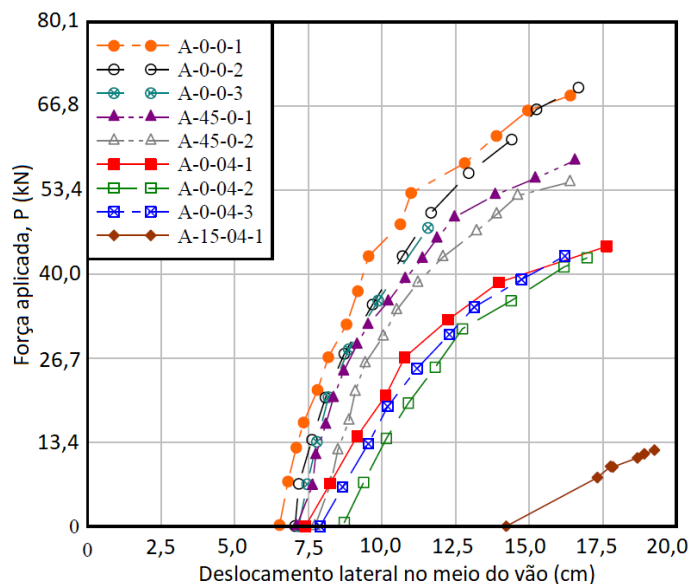


Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

As curvas de força aplicada  $\times$  deslocamento lateral no meio do vão é mostrado nas Figuras Figura 16 e Figura 17. Na Figura 16, a distância entre o eixo vertical e o início da curva

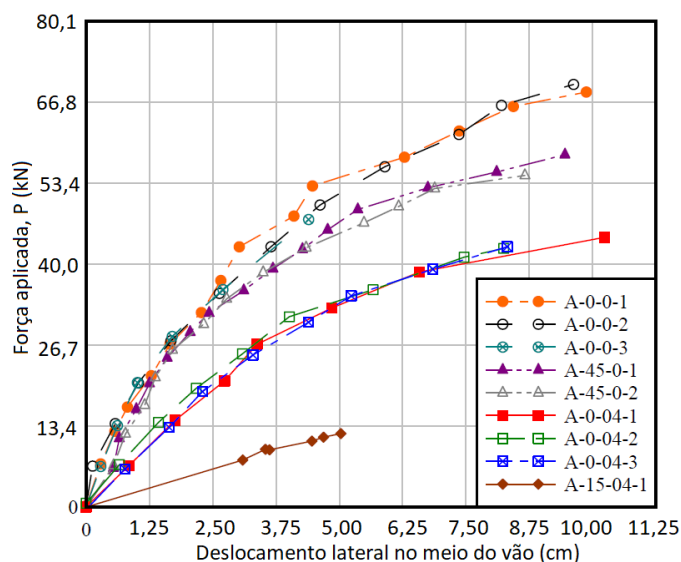
representa a excentricidade lateral inicial devido ao peso próprio para cada configuração. Já na Figura 17, essas excentricidades iniciais foram omitidas.

Figura 16 – Curva força  $\times$  deslocamento absoluto no meio do vão



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

Figura 17 – Curva força  $\times$  deslocamento incremental no meio do vão



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

A Tabela 3 mostra as cargas de flambagem para três configurações ensaiadas. Esta carga de flambagem foi considerada como sendo a força onde a inclinação da reta é 1/10 da inclinação inicial (Figura 18). Pelas análises realizadas, observa-se que a presença de escuridade e ângulo vertical provoca uma redução na carga de flambagem e, portanto, a presença destas



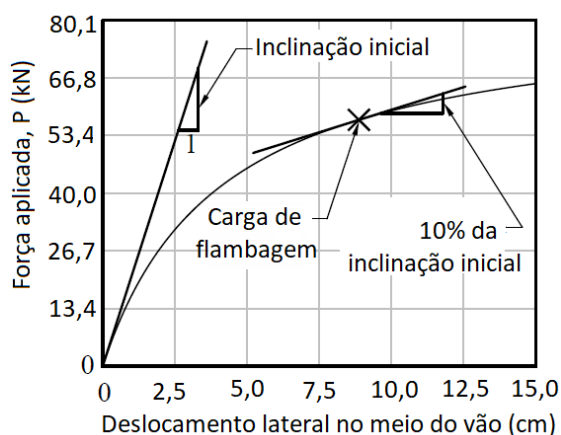
variáveis deve ser avaliada sempre em relação à estabilidade da viga. Para a configuração A-15-04 não foi possível obter o resultado de carga de flambagem pelo método dos 10%, porque a viga apresentou uma excentricidade inicial muito elevada e a viga simplesmente tombou com o peso próprio, antes da aplicação das forças concentradas (HARPER; CONSOLAZIO, 2012).

Tabela 3 – Resultado das cargas de flambagem

Configuração do teste	Ângulo de esconsidade (graus)	Ângulo vertical (rad)	Carga de flambagem (kN)
A-0-0	0	0	68,5
A-45-0	45	0	57,0
A-0-04	0	0,04	52,5

Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

Figura 18 – Definição da carga de flambagem (para a configuração A-45-0)



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

Harper e Consolazio (2013) buscaram métodos de determinar a rigidez da almofada de apoio, à compressão e à rotação, através da modelagem numérica. Os autores propuseram modelos diferentes para determinar cada tipo de rigidez e compararam os resultados obtidos pelos modelos com resultados experimentais. Os autores modelaram as almofadas tipos A, B e C cujas dimensões são mostradas na Tabela 1.

Para determinar a rigidez à compressão da almofada, os autores desenvolveram um modelo composto por elementos sólidos representando cada camada da almofada e o esforço aplicado sobre o modelo foi uma força aplicada nos nós da almofada. Mediu-se os deslocamentos referentes às forças aplicadas e, pelo gráfico de carga  $\times$  deslocamento, obteve-se a rigidez à compressão do modelo.

Para determinar a rigidez à rotação, foi proposto um elemento composto por uma grelha apoiada em molas. As molas utilizadas no modelo trabalham somente à compressão, para que seja considerado o comportamento não linear das almofadas de apoio, resultado do levantamento (“*lift off*”) da viga sobre a almofada. A rigidez de cada mola foi calculada em função da rigidez à compressão obtida nas análises iniciais dos autores e com base na sua posição em relação ao centro da almofada.

Os esforços considerados no modelo foi uma força inicial de compressão, referente ao peso próprio da viga, e um momento aplicado em etapas. Foram consideradas diferentes forças iniciais de compressão para cada tipo de almofada. Por fim, foram desenhadas as curvas de momento  $\times$  rotação para cada combinação de tipos de almofada, força inicial e momento. Foram feitos ensaios considerando, e não considerando, a presença de ângulo vertical de inclinação entre a almofada e a viga.

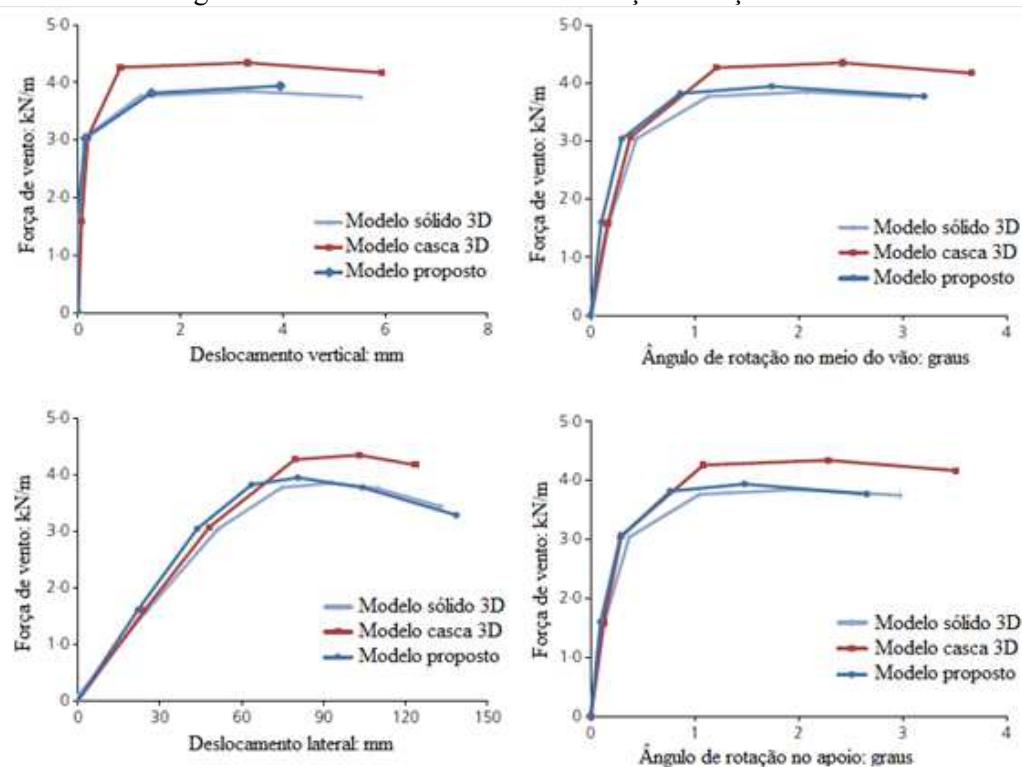
Os resultados de rigidez à compressão e à rotação obtidos pelo método numérico proposto por Harper e Consolazio (2013) foram comparados com resultados experimentais obtidos para as almofadas. A curva de carga  $\times$  deslocamento mostrou um comportamento linear e as curvas de momento  $\times$  rotação tiveram um comportamento não linear. Nas análises de Harper e Consolazio (2013), observou-se que o modelo proposto captura de forma bastante próxima os valores das rigidezes da almofada, quando comparados com a rigidez experimental.

Os autores ainda fizeram curvas de momento por rotação para almofadas com inclinação entre a almofada e a viga. Os resultados obtidos pelo modelo dos autores se mostraram conservadores quando comparados aos valores experimentais, mas, de acordo com os autores, o modelo ainda é adequado para cálculos de estabilidade de vigas.

Lee et al. (2017) fizeram uma avaliação da instabilidade lateral de vigas apoiadas em almofadas elásticas com a consideração da força de vento. Os autores propuseram um modelo simplificado onde a viga é representada por elementos de barras e a almofada é representada por um elemento rígido apoiado por elementos de molas com módulo de elasticidade bilinear. A rigidez à compressão de cada mola foi calculada usando a área de influência de cada uma.

Lee et al. (2017) compararam as curvas de força de vento por deslocamento vertical e força de vento por deslocamento lateral do seu modelo com os resultados obtidos pela modelagem através de elementos sólidos e através de elementos de casca. A Figura 19 mostra os resultados obtidos pelos autores para o deslocamento vertical, deslocamento lateral, rotação no meio do vão e rotação no apoio em relação à força de vento.

Figura 19 – Resultados obtidos em relação à força de vento



Fonte: Adaptado de Lee et. al (2017)

Por fim, os autores propõem uma equação analítica derivada da equação de Burgoyne e Stratford (2001), com a diferença de incluir termos referentes à força de vento, para determinar a carga limite de instabilidade considerando a ação do vento que, segundo os autores, é considerado um dos principais fatores que levam à instabilidade lateral da viga.

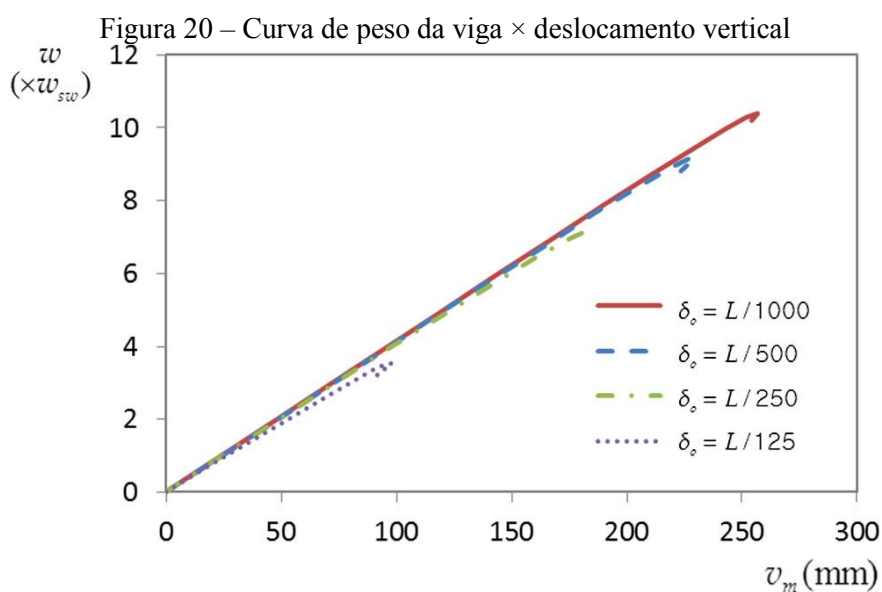
Lee (2017) usou o modelo proposto por Lee et al. (2017) para avaliar o fenômeno da instabilidade lateral de vigas apoiadas em almofadas de elastômero com a presença de excentricidade inicial. A análise do autor consistiu na determinação da carga limite em que ocorre o tombamento da viga. O autor determinou a carga limite para as vigas da série BT da AASHTO. A Tabela 4 mostra as dimensões de cada seção.

Tabela 4 - Dimensões das vigas BT

Propriedades	BT-54	BT-63	BT-72
H (mm)	1372	1600	1829
Área (mm <sup>2</sup> )	425160	460000	494834
I <sub>x</sub> (mm <sup>4</sup> )	$1,12 \times 10^{11}$	$1,63 \times 10^{11}$	$2,27 \times 10^{11}$
I <sub>y</sub> (mm <sup>4</sup> )	$1,70 \times 10^{10}$	$1,70 \times 10^{10}$	$1,71 \times 10^{10}$
J (mm <sup>4</sup> )	$3,78 \times 10^9$	$4,04 \times 10^9$	$4,31 \times 10^9$

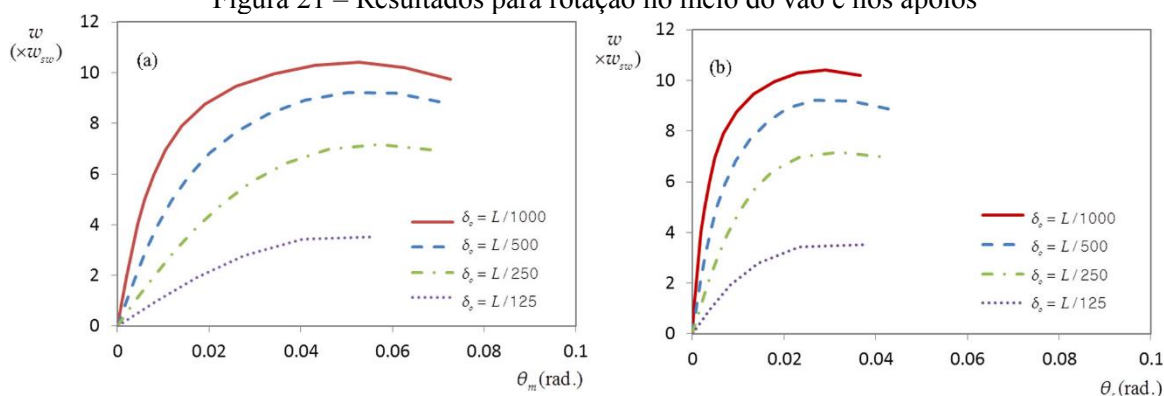
Fonte: Lee (2017)

A carga crítica foi obtida usando uma análise de autovalor para as três vigas da AASHTO e para diferentes valores de excentricidade lateral ( $L/1000$ ,  $L/500$ ,  $L/250$  e  $L/125$ ) onde  $L$  é o vão da viga. A Figura 20 mostra a curva de peso da viga  $\times$  deslocamento vertical no meio do vão. Lee (2017) avaliou o aumento da rotação no meio do vão e nos apoios com o aumento da carga crítica ( $w$ ). A Figura 21 mostra as curvas de carga  $\times$  rotação para a viga BT-63. O valor de  $w$  depende de  $w_{sw}$ , que é o peso próprio da viga, por unidade de comprimento.



Fonte: Lee (2017)

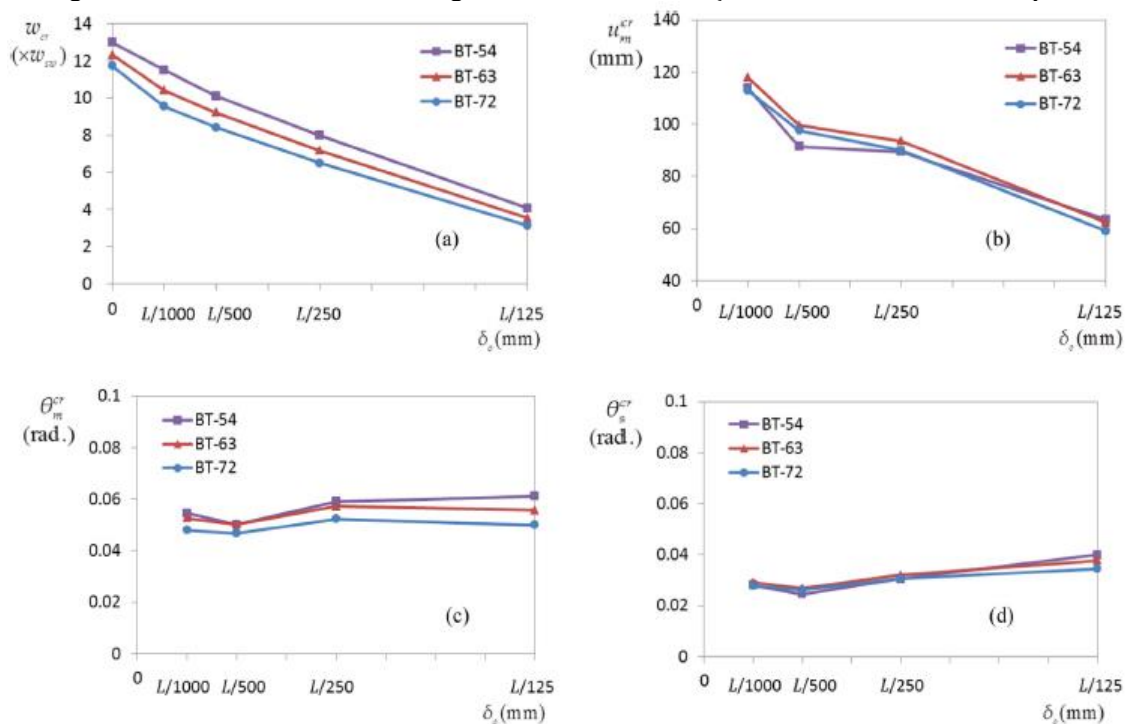
Figura 21 – Resultados para rotação no meio do vão e nos apoios



Fonte: Lee (2017)

Lee (2017) também avaliou a variação dos valores de carga crítica, de deslocamento lateral crítico e de rotação crítica no meio do vão e nos apoios para os diferentes valores de excentricidade lateral. As curvas estão representadas na Figura 22. Ainda segundo o autor, a instabilidade lateral é fortemente influenciada pela excentricidade inicial, pela esbeltez da viga e pelas condições de apoio. Por isso, o autor considera vãos de 35 a 45 metros e a utilização de várias seções transversais de vigas justificou-se para considerar uma variação na taxa de esbeltez da viga. Com os resultados das análises numéricas, o autor propõe uma equação analítica para auxiliar na verificação da estabilidade lateral de vigas.

Figura 22 – Valores críticos de carga, deslocamento, rotação no meio do vão e nos apoios

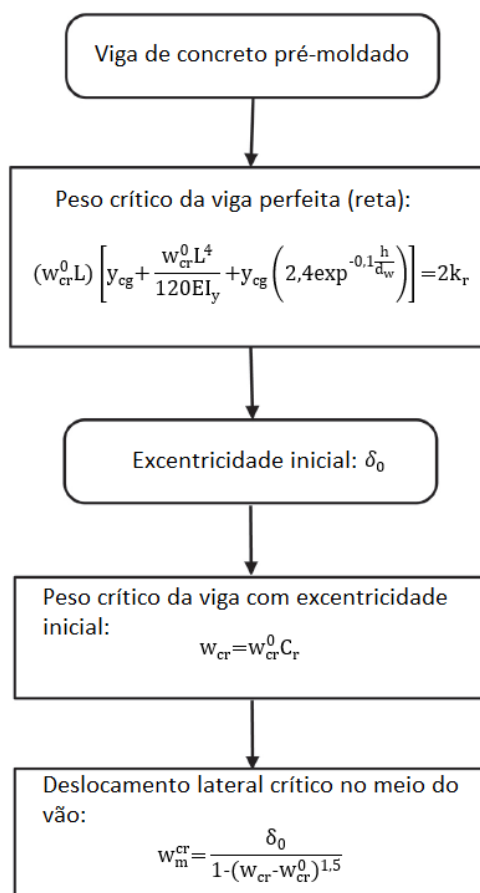


Fonte: Lee (2017)

Segundo o autor, o peso crítico da viga diminui significativamente com o aumento na excentricidade inicial. Para determinar o peso crítico e os máximos deslocamentos, é necessário que seja feita uma análise numérica não-linear. Entretanto, o autor propõe uma equação analítica para que possa ser calculado o peso crítico considerando a excentricidade inicial.

Os resultados obtidos com a equação analítica proposta pelo autor ficaram bastante próximos dos valores encontrados na análise numérica. Porém, os resultados analíticos e numéricos não são comparados com resultados experimentais, o que gera dúvidas em relação à veracidade dos resultados. Por fim, os valores de deslocamento lateral e peso crítico devem ser usados como valores de referência para conservar a estabilidade lateral e à torção da viga com excentricidades iniciais sobre apoios elásticos e, para isso, o autor fornece um fluxograma para auxiliar na avaliação da estabilidade lateral de vigas (Figura 23).

Figura 23 – Fluxograma para determinação do peso e dos deslocamentos críticos

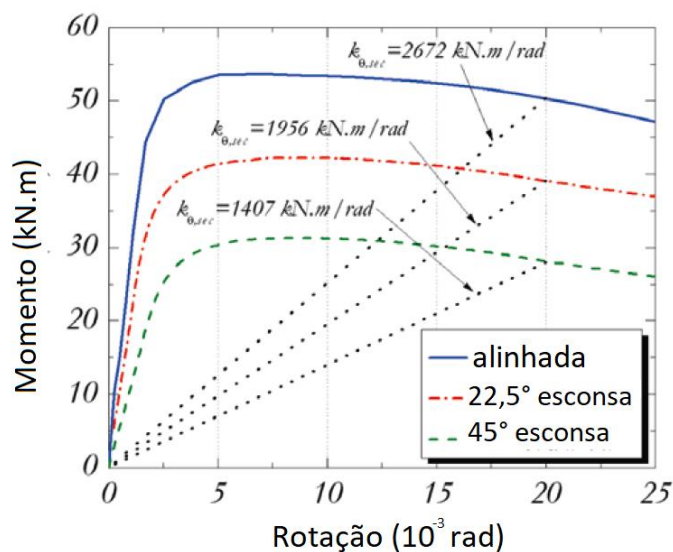


Fonte: Adaptado de Lee (2017)

Vale ressaltar que as análises de Lee et al. (2017) e Lee (2017) não fazem uma comparação dos valores obtidos pelos modelos com valores experimentais encontrados na literatura. Lee et al. (2017) faz uma comparação entre três modelos numéricos, um formado por elementos de barras, outro por elementos de casca e o terceiro por elementos sólidos, porém isso não significa que o modelo adotado seja condizente com os valores reais esperados. Em Lee (2017), o autor não apresenta a validação do modelo e deve ser observado que o autor obteve valores de rotações limite no meio do vão da ordem de 0,05 rad (Figura 22) e, em várias literaturas, esta rotação gira em torno de 0,02 rad.

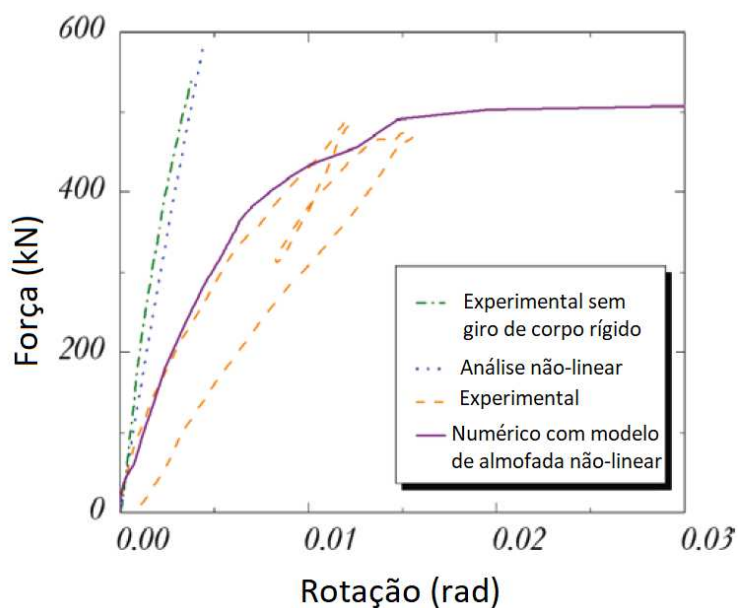
Krahl, Carrazedo e El Debs (2017) realizaram duas análises numéricas para obter os valores de carga crítica de instabilidade. A primeira foi uma análise não-linear geométrica, cujo modelo foi formado por elementos de barra para representar a viga e as almofadas de apoio foram representadas por elementos rígidos de barra que ligam elementos de mola. As almofadas de apoio foram consideradas com comportamento não-linear físico e geométrico. A segunda análise utilizou um modelo de autovalor simplificado. Neste modelo, as almofadas foram substituídas por uma mola torcional, cuja rigidez utilizada foi a rigidez secante obtida pelo modelo de grelha. Esta rigidez secante também foi utilizada para obter as cargas de instabilidade por três equações analíticas encontradas na literatura e apresentada pelos autores.

Inicialmente, foi feita uma curva de força  $\times$  deslocamento vertical para calibrar a rigidez não-linear das molas em relação à almofada de apoio. Depois, foi obtida a rigidez secante para almofadas alinhadas e com ângulo de 22,5° e 45°. A rigidez secante foi obtida aplicando uma força de compressão de 162 kN na almofada e, em seguida, aplicou-se um momento. A rigidez secante foi determinada considerando-se uma rotação de 0,020 rad (Figura 24).

Figura 24 – Curva momento  $\times$  rotação para o modelo de almofada alinhada e esconsa

Fonte: Adaptado de Krah, Carrazedo e El Debs (2017)

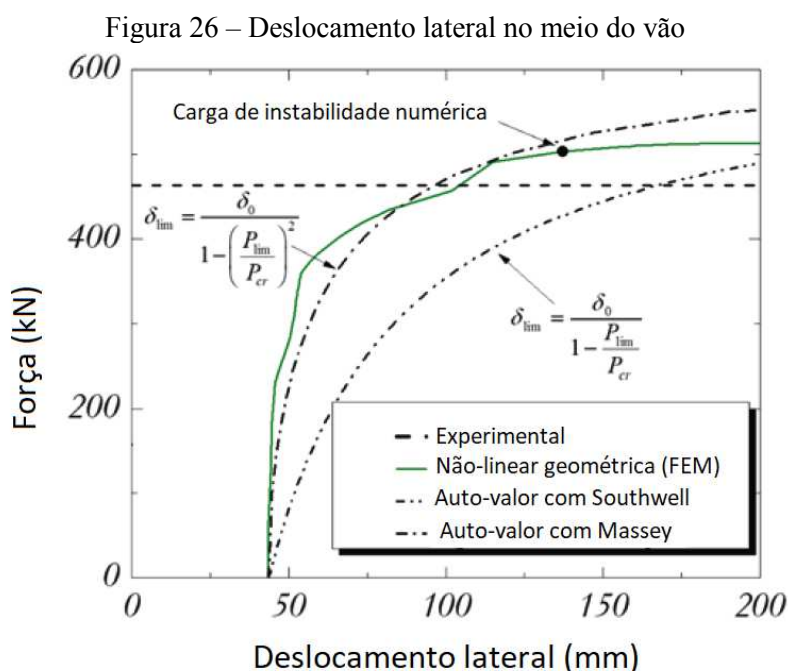
O modelo proposto por Krah, Carrazedo e El Debs (2017) foi comparado com as análises experimentais de Hurff e Khan (2012) e, para isso, foram traçadas as curvas de força  $\times$  rotação no meio do vão com e sem o giro de corpo rígido da viga (Figura 25) e de força  $\times$  deslocamento lateral (Figura 26). O esforço aplicado no modelo foi uma força concentrada no meio do vão.

Figura 25 – Curva momento  $\times$  rotação para a viga PCI BT-54

Fonte: Adaptado de Krah, Carrazedo e El Debs (2017)



Utilizou-se também as equações de Southwell e de Massey (apud Krahl et. al, 2017) para obter as curvas de força  $\times$  deslocamento lateral e comparar com os valores experimentais e numéricos.



Fonte: Adaptado de Krahl, Carrazedo e El Debs (2017)

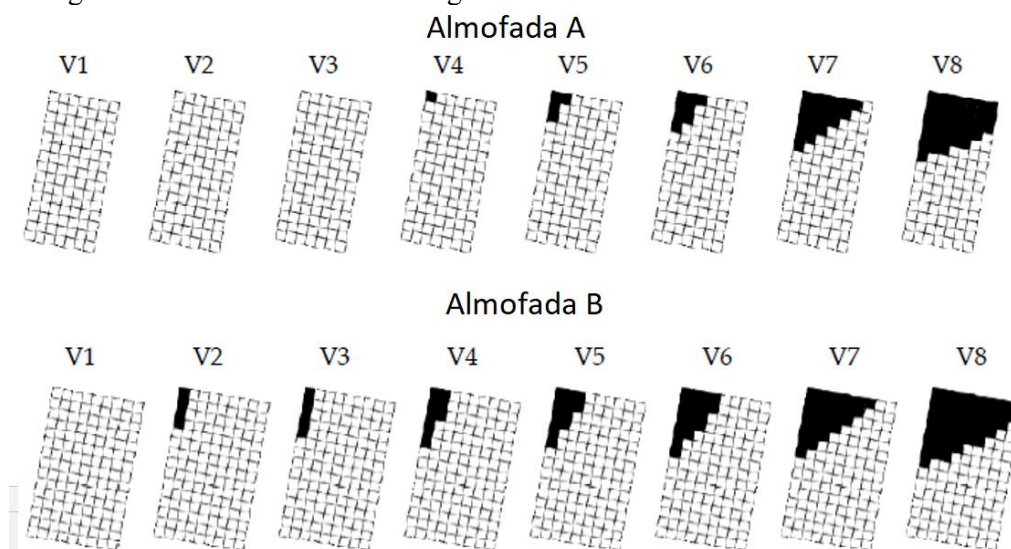
Krahl, Carrazedo e El Debs (2017) também compararam os resultados obtidos pelas análises numéricas com os valores experimentais de Consolazio e Hamilton (2012). O carregamento aplicado nestas análises foram duas forças concentradas aplicadas nos terços do vão, conforme as análises experimentais utilizadas como referência. Por fim, foi feito um estudo paramétrico para a viga PCI BT-54 alterando o módulo de elasticidade do concreto, a largura da mesa superior, a excentricidade inicial, a rotação do apoio e o comprimento do vão. A consideração da não-linearidade dos apoios resultou em um valor de carga de instabilidade bastante próximo ao valor de Hurff e Kahn (2012). A utilização de uma rigidez secante na análise por autovalor também resultou em valores aceitáveis de carga de instabilidade. A adoção de uma rotação de 0,020 radianos como rotação limite de instabilidade é bastante aceitável. Das variáveis utilizadas pelos autores, somente o módulo de elasticidade do concreto não resultou em diferenças significativas na carga de instabilidade.

Cardoso e Lima (2018) realizaram uma análise não-linear geométrica e não-linear geométrica e física para avaliar a ocorrência da perda de contato para uma viga de 32 m de

vão com excentricidades variando de 10 a 180 mm no meio do vão e diferentes valores para a resistência do concreto ( $f_{ck} = 27,5, 45,0$  e  $90,0$  MPa), apoiadas sobre dois tipos de almofadas (tipo A: 610 x 280 mm e tipo B: 610 x 356 mm). A viga utilizada pelas autoras foi a viga de seção padronizada AASHTO Tipo IV. A única ação considerada nas análises foi o peso próprio da viga. Foi determinada a rigidez ao giro para as almofadas de apoio levando em consideração a esconsidade resultante da excentricidade inicial. Essa rigidez foi determinada pelo quociente entre o momento resultante e a rotação resultante na almofada obtidos das análises numéricas.

Segundo Cardoso e Lima (2018) a não-linearidade geométrica desenvolvida nas análises leva em conta o efeito exclusivo de compressão das molas, que representam as almofadas de apoio, e a não-linearidade física leva em consideração a perda de capacidade resistente do concreto em caso de fissuração. Vale observar que uma viga de concreto pré-moldado é dimensionada para não fissurar nas fases transitórias. Porém, devido ao transporte, içamento ou condição de apoio temporário, antes da concretagem das transversinas, podem ocorrer deformações excessivas que levam à fissuração e diminuição da rigidez da viga.

Na análise não-linear geométrica, Cardoso e Lima (2018) observam que a perda de contato entre a viga e as almofadas é mais significativa para as vigas com menor resistência à compressão. Nos casos em que há maiores ângulos de esconsidade, a rigidez ao giro da almofada resulta em valores menores. A atuação de momentos nas duas direções, resultado da esconsidade, diminui a capacidade da almofada resistir ao giro de corpo rígido da viga, influenciando negativamente na estabilidade da viga. A consideração da não-linearidade física do concreto não resultou em diferenças significativas nos deslocamentos verticais e horizontais e na rigidez ao giro da almofada. A Figura 27 mostra os resultados da viga apoiada sobre as almofadas A e B para o concreto de 90 MPa.

Figura 27 – Perda de contato da viga com  $f_{ck} = 90$  MPa com as almofadas A e B

Fonte: Adaptado de Cardoso e Lima (2018).

No trabalho de Cardoso e Lima (2018), é interessante notar que o levantamento foi mais expressivo nas vigas apoiadas sobre a almofada B, que apresenta maior dimensão e maior rigidez à compressão, do que nas vigas apoiadas sobre a almofada A. Isto pode ter ocorrido pois na almofada A, que possui menor rigidez à compressão, o afundamento devido ao peso da viga é maior, portanto, a viga pode girar mais até que o levantamento ocorra.

## **CAPÍTULO 3**

# **ALMOFADAS DE APOIO ELASTOMÉRICAS: VERIFICAÇÕES E MODELAGEM**

### **3.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES**

Nas análises de instabilidade lateral, as almofadas de apoio de elastômero têm um papel importante na garantia da estabilidade da viga, fornecendo a resistência ao giro para evitar que a viga tombe do apoio. Portanto, torna-se necessário conhecer e determinar as características relevantes das almofadas de apoio.

Neste capítulo, serão mostradas as características básicas das almofadas de apoio e serão mostrados estudos de alguns autores que buscaram métodos para determinar as rigidezes das almofadas de apoio. São propostos também dois modelos para obter as rigidezes à compressão, ao cisalhamento e à rotação das almofadas de apoio: um composto por elementos sólidos, somente, e outro composto por elementos sólidos apoiados em elementos de molas. Cada um dos modelos, os elementos e os materiais serão mostrados com detalhes nas seções seguintes.

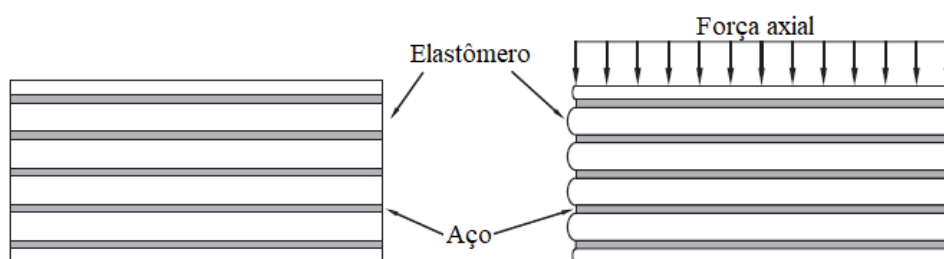
### **3.2 CARACTERÍSTICAS DAS ALMOFADAS DE APOIO ELASTOMÉRICAS**

De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas ABNT NBR 9062:2017 – Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado – as almofadas de apoio podem ser simples, quando constituídas de uma única camada de elastômero, e fretadas, quando

constituídas de camadas de elastômero intercaladas com chapas metálicas solidarizadas por vulcanização ou colagem especial.

Segundo Harper e Consolazio (2013) as almofadas de elastômero são quase completamente incompressíveis, e elas tendem a expandir lateralmente para preservar seu volume quando sujeitas a forças de compressão. Entretanto, em uma almofada fretada, as chapas de aço são rígidas o suficiente para restringir o movimento do neoprene na interface chapa de aço / neoprene. Como resultado, as camadas de neoprene tendem a abaular nas extremidades da almofada quando esta é comprimida (Figura 28).

Figura 28 – Abaulamento das camadas de elastômero devido à força de compressão



Fonte: Adaptado de Harper e Consolazio (2013)

Uma consequência deste abaulamento da camada de elastômero é a distribuição não uniforme das tensões normais na almofada. As tensões de compressão no centro da almofada são maiores porque é necessário deslocar uma quantidade maior de elastômero para ocorrer o abaulamento. Já próximo às extremidades, esse confinamento é menor, portanto necessita-se de uma menor força para provocar o abaulamento (HARPER; CONSOLAZIO, 2013).

Para uma mesma espessura de elastômero, a que tem mais chapas de aço possui uma rigidez à compressão maior, pois as chapas de aço impedem o elastômero de abaular na região de contato entre os dois. Portanto, quanto mais chapas de aço, maior a rigidez à compressão da almofada. Para levar em conta o aumento da rigidez com o aumento do número de placas, a ABNT NBR 9062:2017 leva em conta o fator de forma da almofada, definido como a razão entre a área carregada e a área livre para abaular (Equação 3).

$$S = \frac{a \cdot b}{2 \cdot h_i \cdot (a + b)} \quad (\text{ABNT NBR 9062:2017}) \quad (3)$$

Em que  $a$  e  $b$  são as medidas do elastômero e  $h_i$  é a espessura de cada camada do elastômero.

A Norma Europeia *British Standard* – BS – EN 1337-3:2005 (*Structural bearings – part 3: Elastomeric bearings*) também fornece uma equação para o cálculo do fator de forma:

$$S = \frac{a \cdot b}{2 \cdot t_e \cdot (a + b)} \quad (\text{EURONORMA EN 1337}) \quad (4)$$

Em que  $a \cdot b$ , para aparelhos fretados, é a área efetiva do aparelho, ou seja, a área comum entre o elastômero e a chapa de aço, excluindo os cobrimentos laterais. Para aparelhos simples, é a área plana do elastômero, sem descon siderações; sendo que  $t_e = 1 \cdot t_i$  para camadas internas de apoios fretados,  $1,4 \cdot t_i$  para camadas externas de apoios fretados e  $1,8 \cdot t_i$  para aparelhos simples, sendo  $t_i$  a espessura real da camada de elastômero.

Outra característica importante dos apoios elastoméricos é o módulo de deformação transversal ( $G$ ). Seu valor pode ser obtido através de ensaios experimentais do elastômero. Na falta de ensaios, a ABNT NBR 9062:2017 permite que sejam adotados valores desse módulo correspondentes à dureza do elastômero. Segundo Yazdani, Eddy e Cai (2000), as almofadas de apoio são especificadas de acordo com a dureza do elastômero porque o teste de dureza é rápido e simples.

A Tabela 5 mostra os valores do módulo  $G$  em função da dureza indicados pela ABNT NBR 9062:2017 e pela BS EN 1337-3:2005.

Tabela 5 - Relação Dureza x Módulo  $G$

Dureza	Módulo $G$ (MPa) (ABNT NBR 9062:2017)	Módulo $G$ (MPa) (BS EN 1337-3:2005)
50	0,8	0,7
60	1,0	0,9
70	1,2	1,15

Fonte: ABNT NBR 9062:2017; BS EN 1337-3 (2007)

Por fim, deve-se determinar o módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) da almofada, cujo valor é necessário na determinação das rigidezes teóricas das almofadas de apoio. O módulo  $E$ , que pode ser obtido pela *Load and Resistance Factor Design* (LRFD) da *American Association of State Highway and Transportation Officials* (AASHTO) pela Equação 5.

$$E_C = 4,8GS^2 \quad (\text{AASHTO LRFD, 2012}) \quad (5)$$

Em que  $G$  é o módulo de deformação transversal e  $S$  é o fator de forma da almofada.

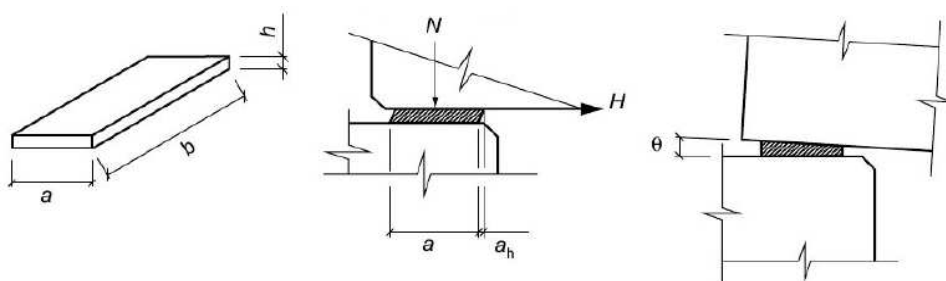
Segundo a ABNT NBR 9062:2017, para as almofadas de apoio, deve-se fazer verificações dos limites de tensão de compressão e cisalhamento, dos limites de deformação por compressão (afundamento) e por cisalhamento. Deve-se ainda verificar a ocorrência de deslizamento e do não levantamento da borda menos comprimida da almofada. Por fim, deve-se fazer a verificação da estabilidade da almofada.

Em relação ao limite de tensão de compressão, a norma estabelece um valor de 7 MPa para as almofadas simples e os seguintes valores para as almofadas fretadas:

- Para  $a \leq 15$ ;  $\sigma_k = 8,0$  MPa
- Para  $15 < a \leq 20$ ;  $\sigma_k = 11,0$  MPa
- Para  $20 < a \leq 30$ ;  $\sigma_k = 12,5$  MPa
- Para  $a \geq 30$ ;  $\sigma_k = 15,0$  MPa

Em que  $a$  é a menor dimensão em planta do aparelho de apoio (Figura 29), expressa em centímetros (cm).

Figura 29 – Parâmetros referentes ao aparelho de apoio



Fonte: ABNT NBR 9062:2017

A condição de não levantamento da borda menos carregada das almofadas simples é que as tangentes das rotações  $\theta_g$  (longa duração), impostas pelas cargas permanentes e  $\theta_q$  (curta duração), imposta pelas cargas acidentais, devem verificar a mais desfavorável das condições a seguir (todos os esforços são característicos):

a) Condição 1:

$$\operatorname{tg} \theta_g < \frac{2h_1}{a} \quad (6)$$

$$h_l = \frac{h\sigma_g}{10GS + 2\sigma_g} \quad (7)$$

Em que  $a$  é a menor dimensão em planta da almofada;  $h$  é a altura da camada de elastômero;  $\sigma_g$  é a tensão devida à carga permanente (Equação 8);  $G$  é o módulo de deformação transversal do elastômero (MPa) e  $S$  é o fator de forma (Equação 3).

$$\sigma_g = \frac{N_g}{(a-a_H)b} \quad (8)$$

Em que  $N_g$  é a carga permanente;  $a$  e  $b$  é a menor e maior dimensão em planta da almofada, respectivamente;  $a_H$  é o deslocamento lateral devido à força horizontal e  $h$  é a altura da almofada de elastômero.

b) Condição 2:

$$\text{tg}\theta_g + 1,5\text{tg}\theta_q < \frac{2h_2}{a} \quad (9)$$

$$h_2 = \frac{h\sigma_{g+q}}{10GS + 2\sigma_{g+q}} \quad (10)$$

Em que  $\sigma_{g+q}$  é a tensão devida às cargas permanente e acidental juntas (Equação 11).

$$\sigma_{g+q} = \frac{N_g + N_q}{(a-a_H)b} \quad (11)$$

Em que  $N_q$  é a carga acidental.

A condição de não levantamento da borda menos carregada das almofadas fretadas é que as tangentes das rotações  $\theta_g$ , impostas pelas cargas permanentes e  $\theta_q$ , imposta pelas cargas acidentais, devem verificar a mais desfavorável das condições a seguir:

a) Condição a:

$$\text{tg}\theta_g < \frac{6\Sigma h_{li}}{a'} \quad (12)$$

$$h_{li} = \frac{h_i\sigma_g}{4GS_i^2 + 3\sigma_g} \quad (13)$$



$$\sigma_g = \frac{N_g}{(a' - a'_H)b'} \quad (14)$$

$$S_i = \frac{a'b'}{2h_i(a' + b')} \quad (15)$$

Em que  $a'$  e  $b'$  são as dimensões da almofada menos o cobrimento lateral;  $h_i$  é a altura de cada camada de elastômero;  $S_i$  é o fator de forma de cada camada e  $a'_H$  é o deslocamento lateral devido à força horizontal menos o cobrimento lateral.

b) Condição b:

$$\text{tg}\theta_g + 1,5\text{tg}\theta_q < \frac{6\Sigma h_{2i}}{a} \quad (16)$$

$$h_{2i} = \frac{h_i \sigma_{g+q}}{4GS_i^2 + 3\sigma_{g+q}} \quad (17)$$

Onde:

$$\sigma_{g+q} = \frac{N_g + N_q}{(a' - a'_H)b'} \quad (18)$$

### 3.3 DETERMINAÇÃO DAS RIGIDEZES DAS ALMOFADAS

As almofadas cintadas possuem uma rigidez maior que a almofada simples por causa das chapas de aço solidarizadas com o neoprene. Segundo Harper e Consolazio (2013), as chapas de aço são consideradas praticamente rígidas, pois o módulo de elasticidade do aço é muito maior que o módulo do neoprene. Como resultado, a rigidez do conjunto é equivalente às rigidezes de cada camada individual da almofada combinadas em série. Para determinar a rigidez axial da almofada, cada camada individual de neoprene é modelada e os resultados são combinados.

A estimativa da rigidez da almofada de apoio é necessária nos projetos de pontes, para verificação da estabilidade da viga e para dimensionar a própria almofada. As rigidezes à compressão e à rotação das almofadas são difíceis de estimar por causa das deformações

complexas do elastômero, que é um material praticamente incompressível, com coeficiente de Poisson  $\nu > 0,49$  (HARPER; CONSOLAZIO, 2013).

A maioria das fórmulas para o cálculo de rigidez provém de análises experimentais e numéricas. Na literatura, encontra-se duas formas de modelagem numérica da almofada. Uma usa elementos sólidos para representar a almofada, e a outra usa modelos simplificados de grelha. A seguir, serão descritos alguns modelos numéricos para o entendimento do comportamento das almofadas de apoio apresentados na literatura técnica.

### 3.3.1 Yazdani, Eddy e Cai (2000)

Yazdani, Eddy e Cai (2000) determinaram as rigidezes das almofadas de apoio especificadas pelo *Florida Department of Transportation – FDOT* (Departamento de Transporte da Florida), cujas dimensões são apresentadas na Tabela 6.

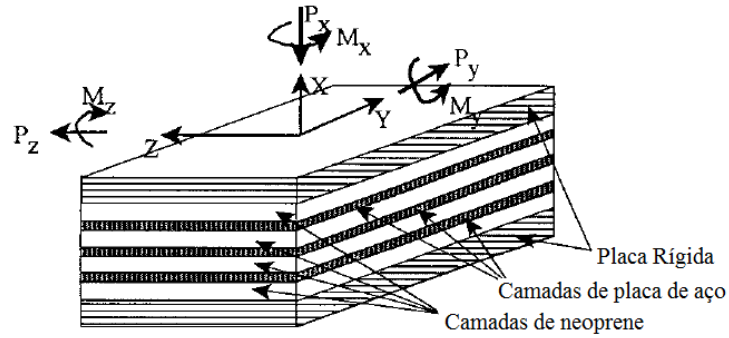
Tabela 6 - Dimensões das almofadas de apoio especificadas pelo FDOT

Parâmetro	II/II	III/III	IV/IV	V/V, VI e Viga seção T
<b>Comprimento (mm)</b>	204	178	230	254
<b>Largura (mm)</b>	356	458	458	610
<b>Área (mm<sup>2</sup>)</b>	72625	81524	105350	154940
<b>Espessura do elastômero (mm)</b>				
<b>Camadas internas</b>	8,75	7,75	10,75	12,75
<b>Camadas externas</b>	6,00	6,00	6,00	6,00
<b>Fator de forma</b>				
<b>Camadas internas</b>	7,4	8,3	7,1	7,0
<b>Camadas externas</b>	10,8	10,7	12,8	14,9
<b>Fator de forma ponderado por almofada</b>	8,8	9,3	9,1	9,6

Fonte: Adaptado de Yazdani, Eddy e Cai (2000).

As rigidezes foram calculadas através da modelagem das almofadas utilizando o programa computacional ANSYS. Como ilustrado na Figura 30, as almofadas foram consideradas como sendo restringidas por placas rígidas na face superior e inferior. O comportamento físico do neoprene e das placas de aço foram consideradas em regime elástico-linear. Os eixos e os esforços utilizados neste equacionamento também são mostrados na Figura 30.

Figura 30 – Forças e momentos para a análise por MEF



Fonte: Adaptado de Yazdani, Eddy e Cai (2000)

Yazdani, Eddy e Cai (2000) fornecem as equações para determinar as rigidezes à compressão, ao cisalhamento e à rotação. Essas equações dependem da espessura da camada de elastômero, da área da almofada, do módulo de elasticidade e do módulo de deformação transversal. Os autores também fornecem as equações para determinar as rigidezes pelo MEF.

$$k_x = \frac{EA}{H} = \frac{P_x}{\Delta_x} \quad (19)$$

A Equação 19 fornece a rigidez à compressão ( $k_x$ ) da almofada, em kN/mm. O segundo termo é a equação teórica para obter a rigidez, em que  $E$  é o módulo de elasticidade da almofada (MPa),  $A$  é a área da almofada ( $m^2$ ),  $H$  é a espessura total da almofada, em mm, excluindo as chapas de aço. O terceiro termo da equação é a forma de obter a rigidez através da análise numérica, que será feita através do programa ANSYS Workbench 17, em que  $P_x$  é a força axial atuante na almofada, em kN, e  $\Delta_x$  é o deslocamento vertical devido à força axial, em mm.

$$k_y = \frac{GA}{H} = \frac{P_y}{\Delta_y} \quad (20)$$

$$k_z = \frac{GA}{H} = \frac{P_z}{\Delta_z} \quad (21)$$

As Equações 20 e 21 fornecem as rigidezes ao cisalhamento na direção y ( $k_y$ ) e na direção z ( $k_z$ ), respectivamente, em kN/mm. O segundo termo das equações é a forma teórica de determinar as rigidezes, em que  $G$  é o módulo de deformação transversal da almofada, em

MPa. O terceiro termo das equações são aqueles usados na análise por MEF para obter a rigidez, em que  $P_y$  e  $P_z$  são as forças horizontais, em kN, na direção y e z, respectivamente e  $\Delta_y$  e  $\Delta_z$  são os deslocamentos horizontais devidos às forças horizontais, nas direções y e z, em mm.

$$k_{Rx} = \frac{EI_x}{H} = \frac{M_x}{\Delta_{Ry}} \quad (22)$$

$$k_{Ry} = \frac{EI_y}{H} = \frac{M_y}{\Delta_{Ry}} \quad (23)$$

$$k_{Rz} = \frac{EI_z}{H} = \frac{M_z}{\Delta_{Rz}} \quad (24)$$

As Equações 22, 23 e 24 fornecem as rigidezes à rotação em torno de x ( $k_{Rx}$ ), y ( $k_{Ry}$ ) e z ( $k_{Rz}$ ) em kN.mm/rad, respectivamente. O segundo termo das equações refere-se à equação teórica, em que E é o módulo de elasticidade da almofada, em kN/mm<sup>2</sup>,  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são os momentos de inércia, em mm<sup>4</sup>, em torno dos eixos x, y e z, respectivamente. O terceiro termo das equações são usados na análise por MEF, em que  $M_x$  é a torção em torno de x e  $M_y$  e  $M_z$  são os momentos em torno de y e z, em kN.mm, e  $\Delta_{Rx}$ ,  $\Delta_{Ry}$  e  $\Delta_{Rz}$  são as rotações devidas aos momentos, em radianos.

A Tabela 7 mostra os valores das rigidezes, através da análise por MEF, obtidos por Yazdani, Eddy e Cai (2000). Para o neoprene, os autores consideraram um coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de 0,4985, módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) de 2,28 MPa e o módulo de deformação transversal ( $G$ ) de 0,76 MPa. Para o aço, utilizou-se coeficiente de Poisson de 0,3, módulo E de 199.938 MPa e módulo G de 79.285 MPa.

Tabela 7 - Resultados de rigidez obtidos por Yazdani, Eddy e Cai (2000)

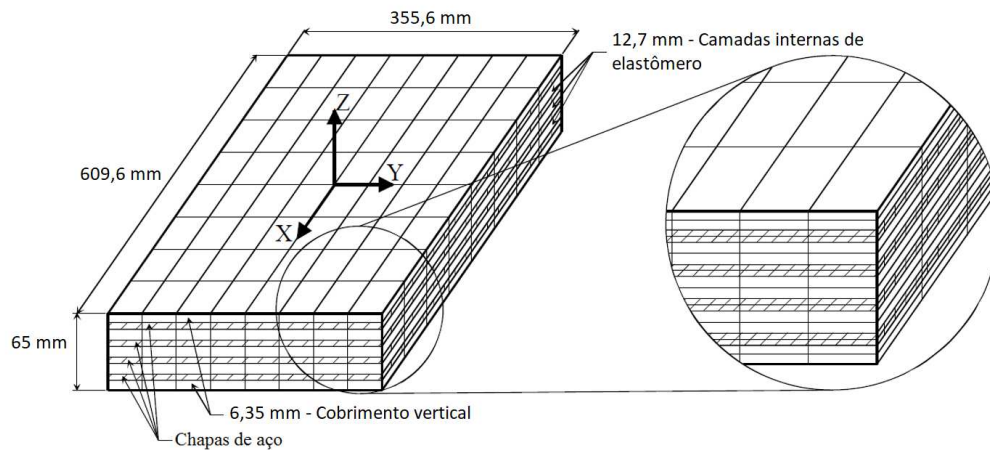
Rigidez (kN/mm)	Almofada especificada pelo FDOT			
	II	III	IV	V
$k_x$	622	748	792	1042
$k_y$	1,87	2,25	2,39	3,09
$k_z$	1,87	2,25	2,39	3,09
$k_{Rx}$	40,7	70,2	81,0	177,0
$k_{Ry}$	$2,16 \times 10^6$	$1,98 \times 10^6$	$3,50 \times 10^6$	$5,60 \times 10^6$
$k_{Rz}$	$6,58 \times 10^6$	$1,31 \times 10^7$	$1,39 \times 10^7$	$3,24 \times 10^7$

Fonte: Adaptado de Yazdani, Eddy e Cai (2000).

### 3.3.2 Consolazio e Hamilton (2007)

Consolazio e Hamilton (2007) determinaram a rigidez à compressão, cisalhamento, rotação e à torção da almofada tipo B da FDOT através de análise numérica pelo MEF pelo programa ADINA. Os autores realizaram uma análise considerando elementos sólidos com 27 nós cada elemento. A Figura 31 ilustra o modelo utilizado pelo autor.

Figura 31 – Modelo da almofada de apoio



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007)

Foi considerado comportamento linear elástico para as chapas de aço, com módulo de elasticidade ( $E$ ) de aproximadamente 200.000 MPa e coeficiente de Poisson de 0,3. Os autores utilizaram o modelo de *Ogden* para representar as camadas de elastômero. Este modelo utiliza 6 parâmetros ( $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ ), cujos valores são fornecidos pelos autores.

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0,6180 \text{ (MPa)} & \alpha_1 &= 1,3 \\ \mu_2 &= 0,001177 \text{ (MPa)} & \alpha_2 &= 5,0 \\ \mu_3 &= -0,45981 \text{ (MPa)} & \alpha_3 &= -2,0\end{aligned}$$

Além disso, deve ser inserido um parâmetro de incompressibilidade ( $d$ ), que depende do valor do módulo de compressibilidade bulk ( $k$ ).

$$d = \frac{2}{k} \quad (25)$$

O valor do módulo bulk ( $k$ ) é obtido pela Equação 26.

$$k = \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \quad (26)$$

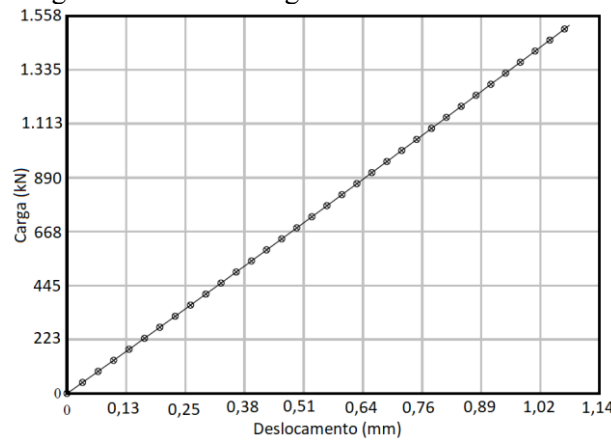
Em que  $\nu$  é o coeficiente de Poisson (fornecido por Consolazio e Hamilton (2007) como sendo 0,49962) e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal, fornecido pelos mesmos autores, conforme a Equação 27.

$$G = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \mu_n \alpha_n \quad (27)$$

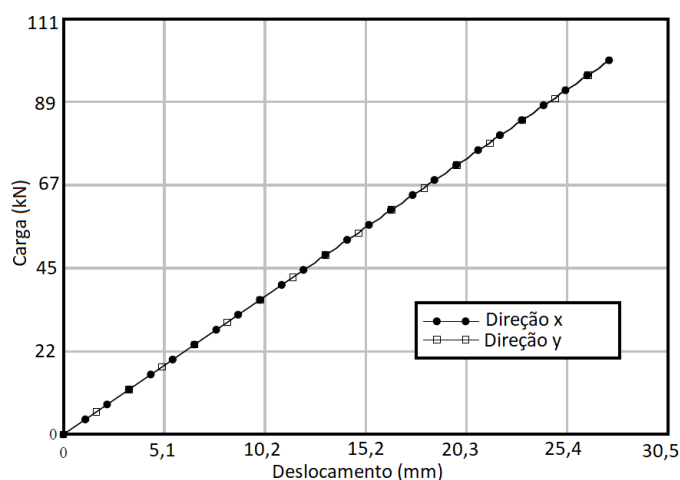
Das equações (26) e (27), obtém-se os valores de 1137 MPa e 0,864 MPa para  $K$  e  $G$ , respectivamente.

Na análise de Consolazio e Hamilton (2007), a rigidez à compressão da almofada ( $k_z$ ) de apoio foi determinada através da aplicação de uma carga vertical crescente sobre o topo do aparelho. Foi desenhado o gráfico de carga em função do deslocamento (Figura 32) e a inclinação dessa reta representa a rigidez à compressão. Este valor obtido foi de 1360 kN/mm. A rigidez ao cisalhamento ( $k_x$ ,  $k_y$ ) foi determinada pela aplicação de cargas laterais no topo do aparelho na direção  $x$  e na direção  $y$ , respectivamente. Na Figura 33, a curva de carga em função do deslocamento é apresentada. Dos resultados encontrados, a rigidez ao cisalhamento da almofada foi determinada como 3,67 kN/mm.

Figura 32 – Curva carga × deslocamento vertical

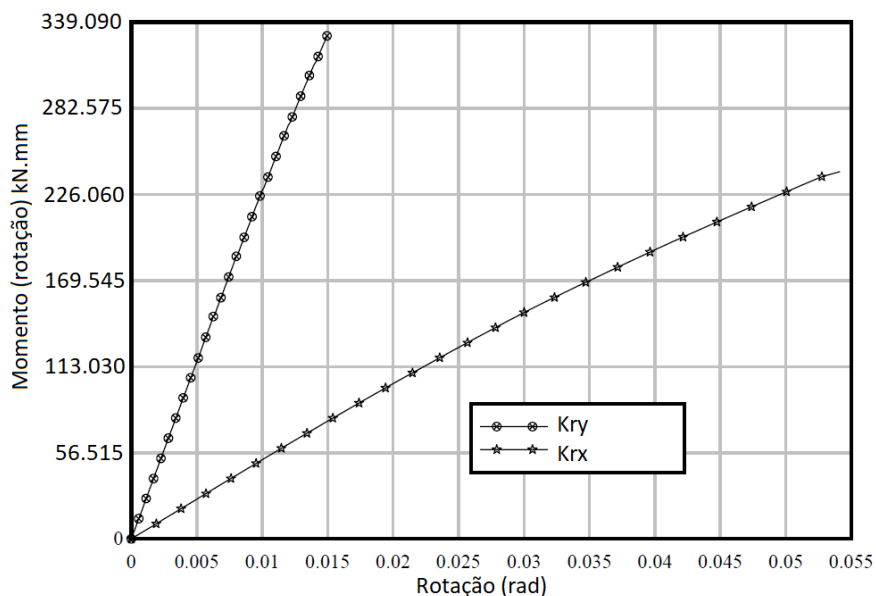


Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007)

Figura 33 – Curva carga  $\times$  deslocamento lateral

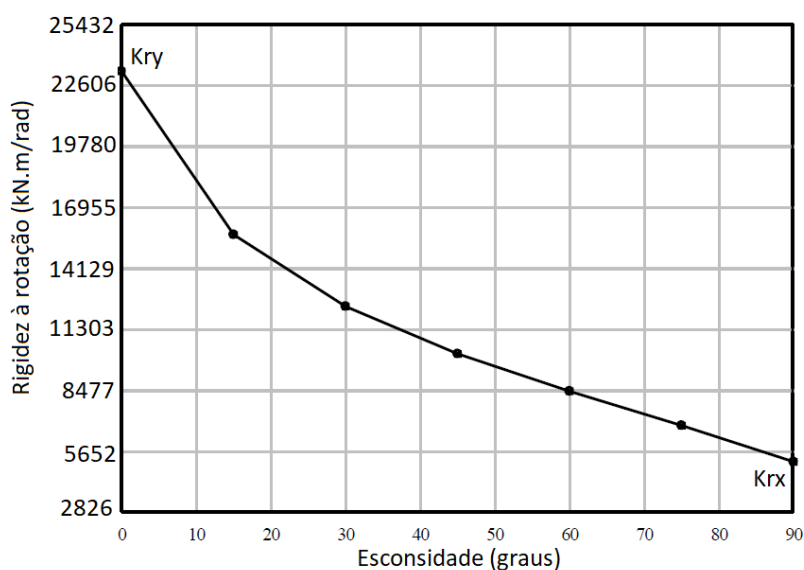
Fonte: Adaptado de Hamilton e Consolazio (2007)

Ainda na análise do autor, para determinar a rigidez à rotação ( $k_{Rx}$ ,  $k_{Ry}$ ), foi aplicado um momento crescente no topo do aparelho em torno do eixo x e do eixo y, respectivamente. O gráfico momento em função da rotação está ilustrado na Figura 34. Pela análise dos elementos finitos, a rigidez rotacional em torno do eixo x ( $k_{Rx}$ ) e do eixo y ( $k_{Ry}$ ) da almofada de apoio foi determinada como  $2,33 \times 10^7$  kN.mm/rad e  $5,18 \times 10^6$  kN.mm/rad. A Figura 35 mostra a variação da rigidez à rotação em função do ângulo de esconsidade, que vai de  $0^\circ$  ( $k_{Ry}$ ) até  $90^\circ$  ( $k_{Rx}$ ).

Figura 34 – Curva momento de rotação  $\times$  rotação

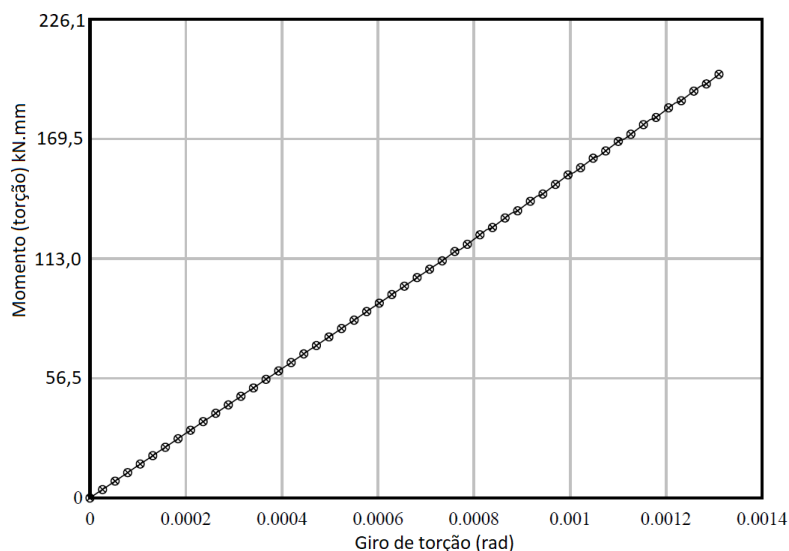
Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007)

Figura 35 – Variação da rigidez à rotação



Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007)

Por fim, a rigidez à torção da almofada foi determinada através da aplicação de um momento de torção no topo do aparelho. A curva do momento de torção em função da rotação está ilustrada na Figura 36, sendo a rigidez à torção da almofada de apoio determinada e igual a  $1,53 \times 10^5 \text{ kN}\cdot\text{mm}/\text{rad}$ .

Figura 36 – Curva de momento de torção  $\times$  giro de torção

Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007)

Dos valores de rigidezes obtidos na análise de Consolazio e Hamilton (2007), observou-se que a rigidez ao cisalhamento resultou em um valor muito abaixo da rigidez à compressão, o que é benéfico, pois, no projeto de pontes, deve-se permitir a livre deformação na direção



longitudinal da viga, não gerando ações horizontais na estrutura devido aos efeitos de temperatura, retração ou encurtamento do concreto. Os autores ainda fizeram uma comparação dos valores de rigidezes obtidos pela análise numérica com valores encontrados na literatura (Tabela 8) para almofadas similares, mas não idênticas, às utilizadas por Consolazio e Hamilton (2007).

Tabela 8 - Comparação dos valores de rigidez

Fonte dos dados	Compressão Kz (kN/mm)	Cisalhamento Kx (kN/mm)	Cisalhamento Ky (kN/mm)	Torção Krz (kN×mm/rad)	Rotação Krx (kN×mm/rad)	Rotação Kry (kN×mm/rad)
Consolazio e Hamilton (2007) – análise por MEF 356×610×67 (mm), 4 chapas	1,36E+03	3,68E+00	3,68E+00	1,53E+05	5,19E+06	2,33E+07
Yazdani – análise por MEF 254×610×37,5 (mm), 3 chapas	1,04E+03	3,08E+00	3,08E+00	1,77E+02	5,61E+06	3,24E+07
Yazdani – segundo AASHTO 1996 254×610×37,5 (mm), 3 chapas	1,31E+03	n/a	3,14E+00	n/a	7,04E+06	n/a
NCHRP-449 – análise por MEF 229×356×44,5 (mm), 2 chapas, NR100	2,07E+02	9,60E-01	9,60E-01	n/a	1,39E+05	n/a
NCHRP-449 – análise por MEF 229×356×44,5 (mm), 2 chapas, NEO100	2,10E+02	9,58E-01	9,58E-01	n/a	1,55E+05	n/a
NCHRP-449 – análise por MEF 229×356×44,5 (mm), 2 chapas, NR200	3,80E+02	1,82E+00	1,82E+00	n/a	2,64E+05	n/a
NCHRP-449 – análise por MEF 229×356×44,5 (mm), 2 chapas, NEO200	4,40E+02	2,08E+00	2,08E+00	n/a	3,94E+05	n/a

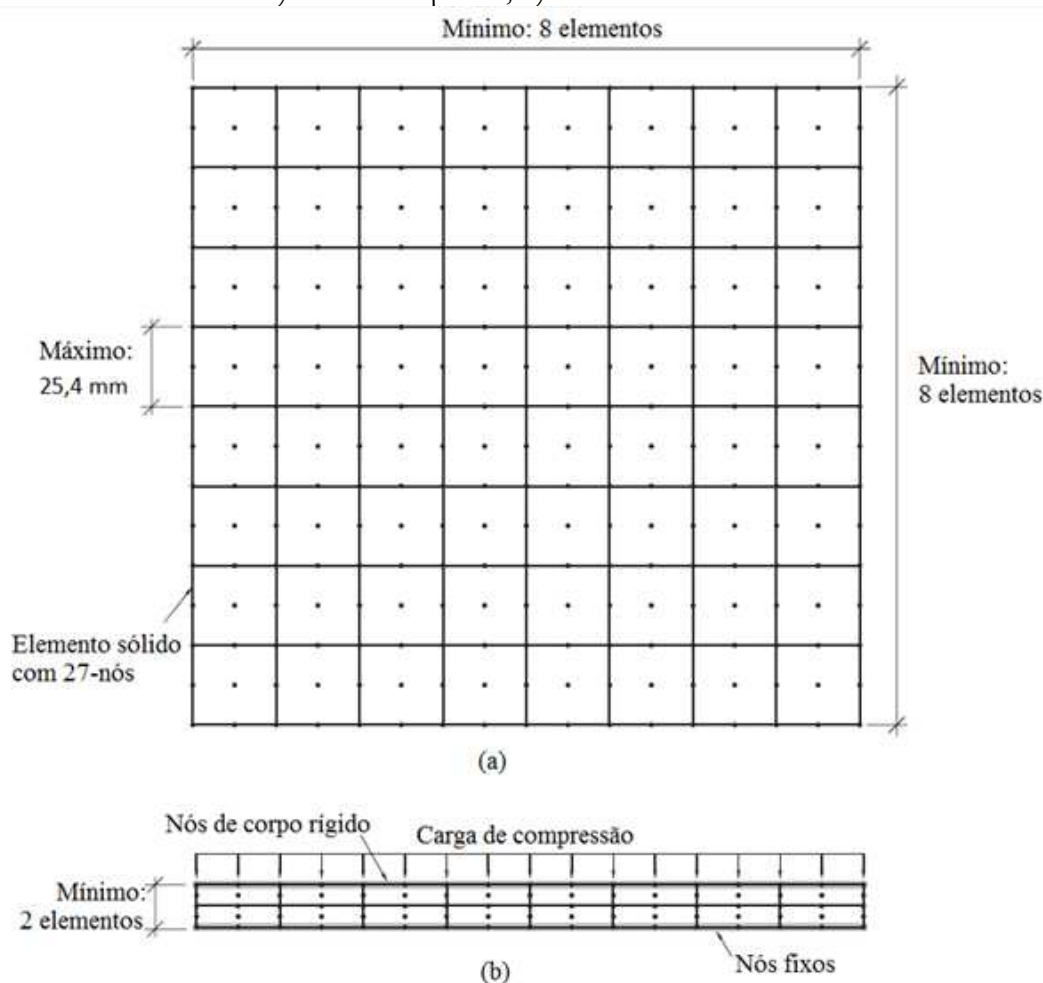
Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2007)

### 3.3.3 Harper e Consolazio (2013)

Harper e Consolazio (2013) desenvolveram dois modelos diferentes para determinar as rigidezes à compressão e à rotação das almofadas de apoio tipo A, B e C classificadas do Departamento de Transporte da Florida (*Florida Department of Transportation* – FDOT). O modelo para determinação da rigidez à compressão é composto por elementos sólidos com 27 nós cada elemento. Os autores especificam que, ao se utilizar elementos sólidos, cada camada da almofada (camada interna e externa) deve ser modelada com, no máximo, 25,4 mm de largura em planta e com pelo menos duas camadas em corte. A Figura 37 mostra esta especificação dos autores.

Figura 37 – Modelo da almofada de apoio

a) Vista em planta, b) Vista em corte



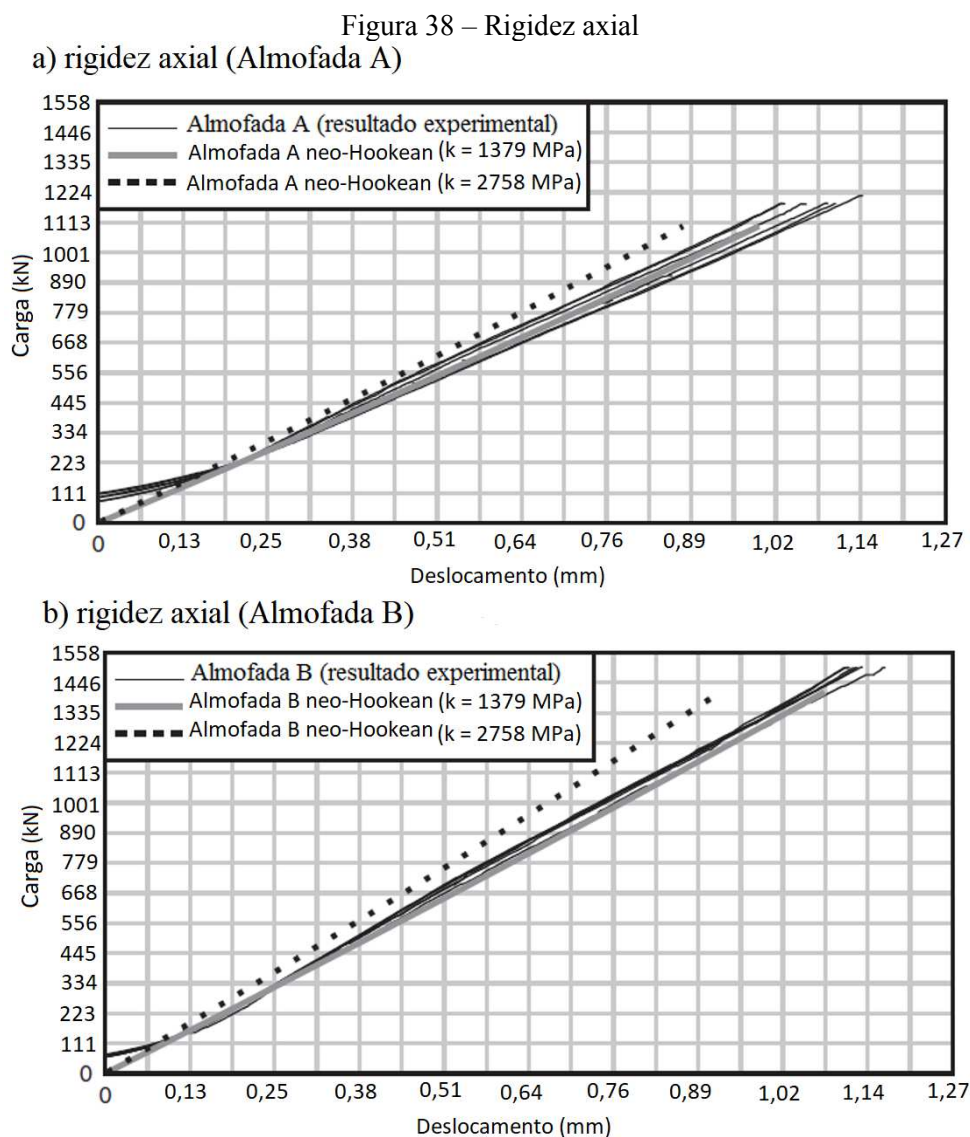
Fonte: Adaptado de Harper e Consolazio (2013)

A modelagem do elastômero que compõe a almofada foi feita utilizando um material hiperelástico denominado *neo-Hookean*, que depende do valor do módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) e do parâmetro de incompressibilidade ( $d$ ). Este último depende do módulo bulk ( $k$ ), conforme a Equação 33, que foi considerado com o valor de 1379 MPa e de 2758 MPa. O material *neo-Hookean* é uma forma simplificada do modelo de *Mooney-Rivlin*, que depende de dois parâmetros ( $C10$  e  $C01$ ), onde:

$$G=2(C10+C01) \quad (28)$$

Onde  $G$  é o módulo de deformação transversal. Este material também necessita de um valor para o parâmetro de incompressibilidade que é obtido pela Equação 25.

O resultado da rigidez axial obtida pelo método numérico proposto por Harper e Consolazio (2013) foi comparado com resultados experimentais para dois tipos de almofadas de apoio, conforme ilustra a Figura 38. Para a almofada A, a rigidez obtida foi de aproximadamente 1.099.100 N/mm e, para a almofada B, 1.251.500 N/mm.



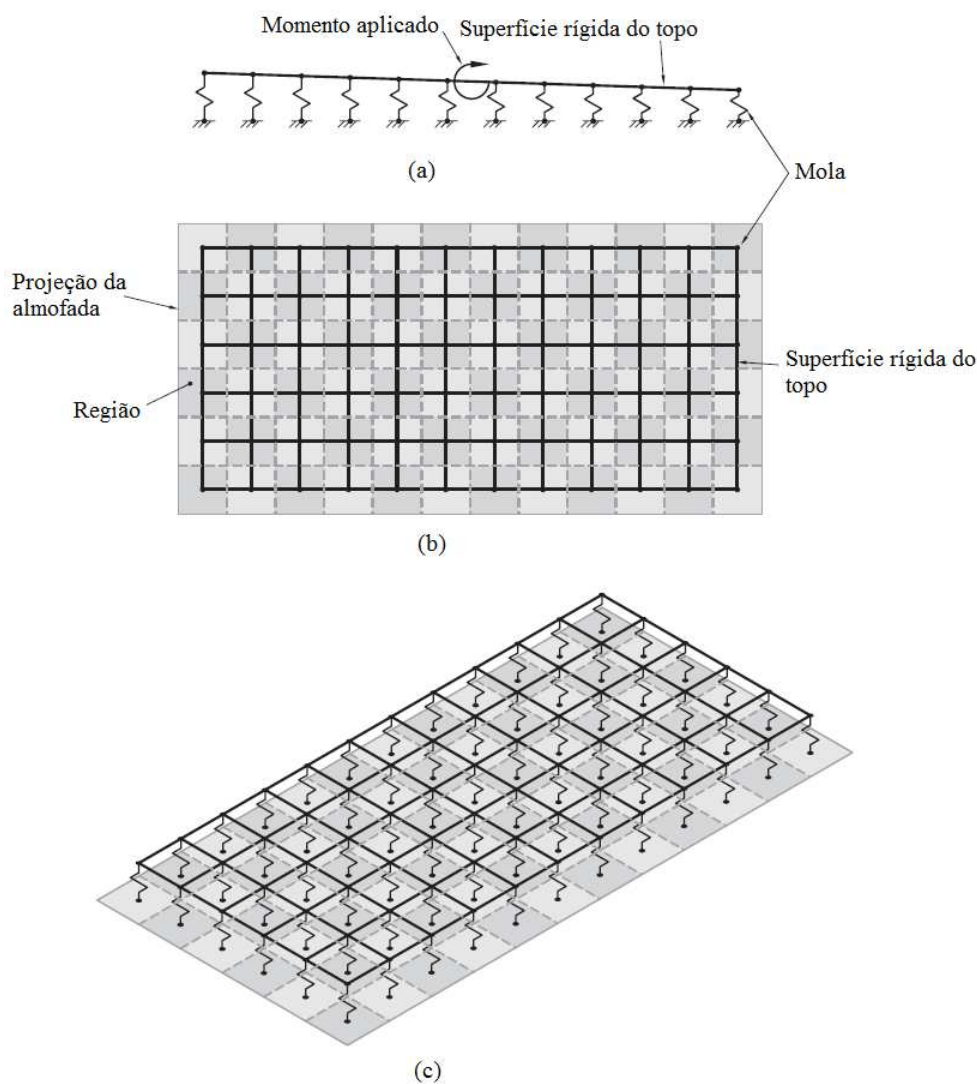
Fonte: Adaptado de Harper e Consolazio (2013)

Já a rigidez à rotação da almofada de apoio foi estimada através da utilização de um modelo de grelha simplificado, que divide a almofada em regiões retangulares e cada região é modelada com uma mola, que possui a rigidez equivalente da região. Foram utilizadas molas que trabalham somente à compressão, para levar em conta o efeito da perda de contato entre almofada e viga (“*lift off*”). Inicialmente, a viga deve ser submetida à uma tensão de compressão, que representa o peso próprio da viga e, após isto, é aplicado um momento

crescente na superfície do topo da viga (Figura 39), e a inclinação da curva momento por rotação representa a rigidez à rotação da almofada (HARPER; CONSOLAZIO, 2013).

Figura 39 – Modelo simplificado de grelha da almofada de apoio

a) vista lateral, b) vista em planta, c) vista em três dimensões

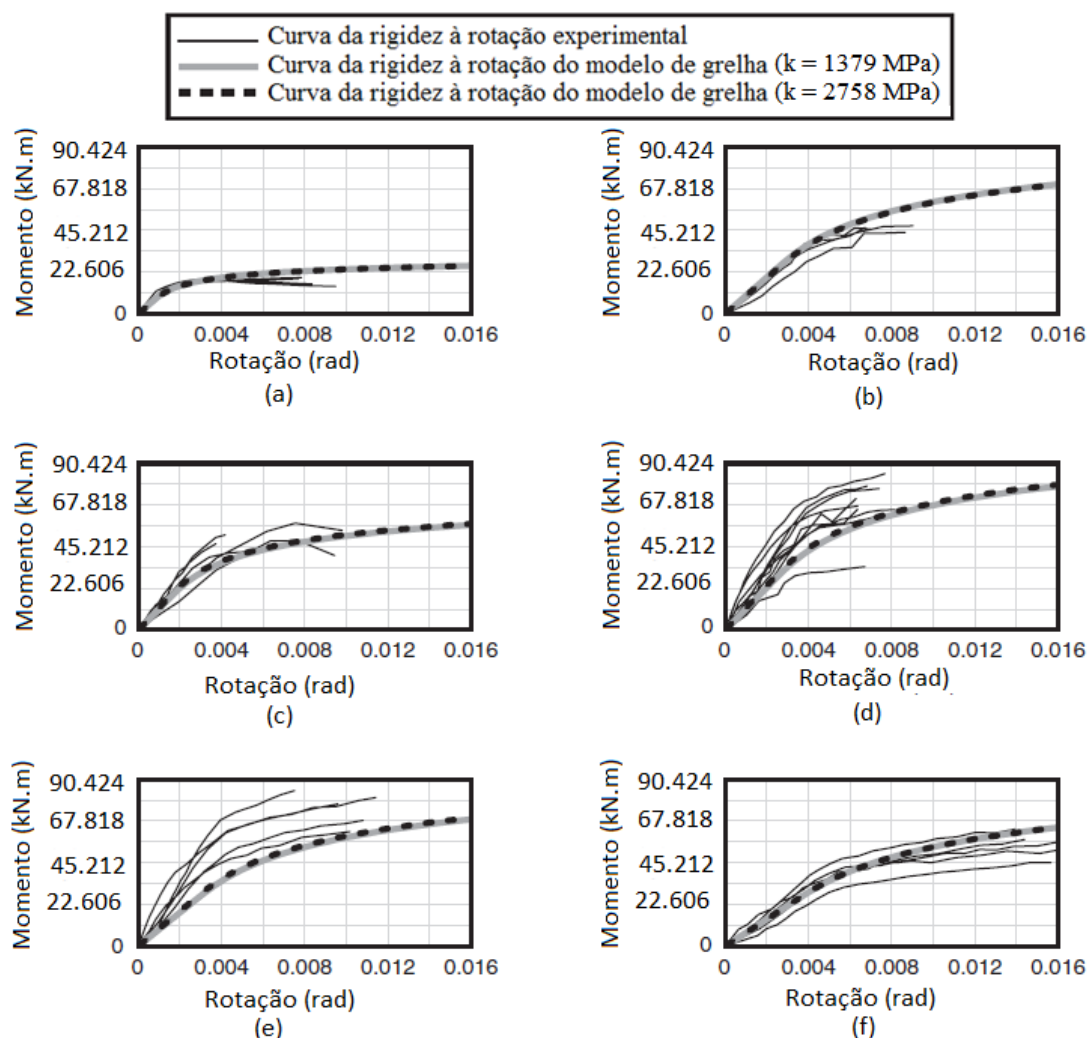


Fonte: Adaptado de Harper e Consolazio (2013)

Os resultados obtidos numericamente foram comparados com vários valores obtidos experimentalmente para cada almofada. Foram feitos ensaios levando em conta ou não a presença de ângulo vertical de inclinação entre a almofada e a viga. A Figura 40 mostra a comparação entre o modelo sem inclinação para dois valores do módulo *bulk* ( $k$ ) entre a almofada e a viga e as análises experimentais (HARPER; CONSOLAZIO, 2013).

Figura 40 – Comparação da rigidez à rotação da almofada entre modelo numérico e análise experimental

- a) almofada A, força de compressão de 118 kN; b) almofada A, força de compressão de 412 kN;  
c) almofada B, força de compressão de 300 kN; d) almofada B, força de compressão de 449 kN;  
e) almofada C, força de compressão de 430 kN; f) almofada C, força de compressão de 430 kN



Fonte: Adaptado de Harper e Consolazio (2013)

Na análise de Harper e Consolazio (2013), observou-se que as curvas obtidas pelo modelo proposto representam, de forma bastante aceitável, as curvas obtidas experimentalmente.

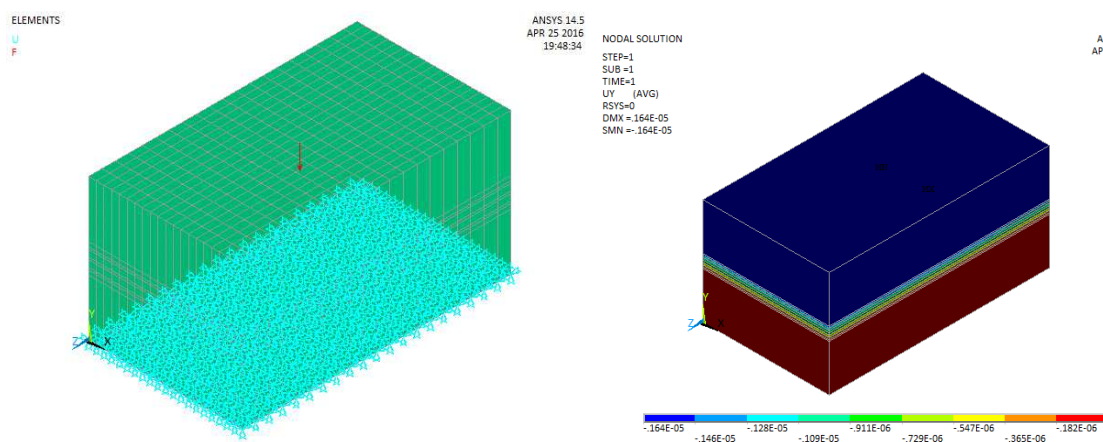
Os autores ainda fizeram curvas de momento por rotação para almofadas com inclinação entre a almofada e a viga. Os resultados obtidos pelo modelo dos autores se mostraram conservadores quando comparados aos valores experimentais, mas, de acordo com os autores, o modelo ainda é adequado para cálculos de estabilidade de vigas.

### 3.3.4 Cardoso e Lima (2016)

Cardoso e Lima (2016) determinaram as rigidezes da almofada tipo II do *Florida Department of Transportation* (FDOT), que possui dimensões em planta de 204 x 356 mm e espessura de 38,5 mm. Esta almofada possui quatro camadas de elastômero intercaladas com três chapas de aço. Para as rigidezes, modelou-se a almofada utilizando o elemento SOLID65 com comportamento elástico linear para representar as camadas de elastômero e de chapa de aço da almofada de apoio. Para o aço, foi adotado módulo de elasticidade de 199.938 MPa e coeficiente de Poisson de 0,3. O elastômero foi modelado com módulo de elasticidade de 2,28 MPa e coeficiente de Poisson de 0,4985.

A Figura 41 mostra o modelo e o esforço aplicado sobre a almofada para determinação da rigidez à compressão. A Tabela 9 mostra os resultados obtidos de rigidez à compressão da almofada, que foram compatíveis aos valores de referência utilizados pelas autoras.

Figura 41 – Modelo utilizado pelas autoras



Fonte: Cardoso e Lima (2016)

Tabela 9 - Resultados das rigidezes

RIGIDEZ	ANSYS (almofada 204 × 356 × 38,5 (mm) com 3 chapas de aço)
À compressão axial – $k_y$ (kN/mm)	6,06E+02
Ao cisalhamento em $z$ – $k_z$ (kN/mm)	1,87E+00
Ao cisalhamento em $x$ – $k_x$ (kN/mm)	1,87E+00
Ao momento fletor em torno de $z$ – $k_{Rz}$ (kNmm/rad)	2,15E+06
Ao momento fletor em torno de $x$ – $k_{Rx}$ (kNmm/rad)	6,54E+06

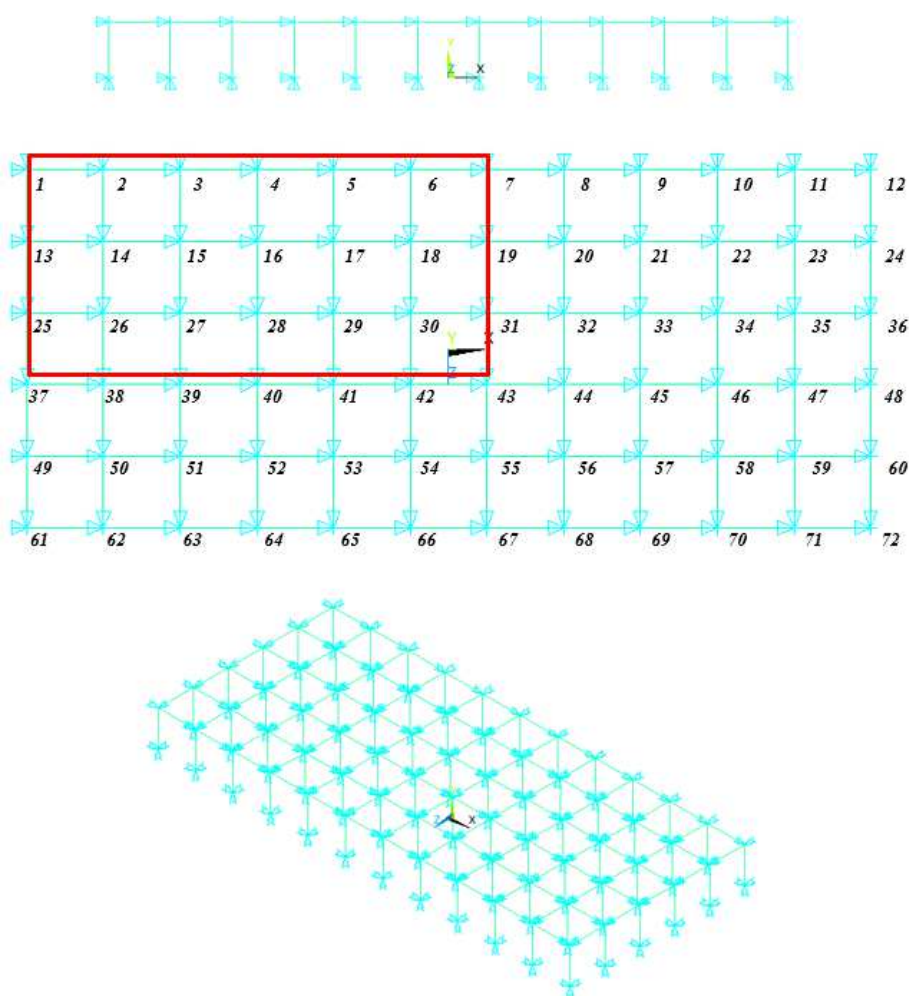
Fonte: Cardoso e Lima (2016)



### 3.3.5 Cardoso (2017)

Para análise de instabilidade lateral, Cardoso (2017) modelou as almofadas tipo A e B utilizadas por Harper e Consolazio (2013), utilizando o programa ANSYS Mechanical APDL. Partindo da rigidez à compressão axial já conhecida da almofada, modelou-se a almofada como uma grelha com 72 molas. Para as molas, utilizou-se o elemento LINK180 com possibilidade de receber somente esforços de compressão. Para a grelha rígida, utilizou-se o elemento BEAM188 (Figura 42). Os nós das molas foram travados à translação na parte inferior e à translação em X e Z na parte superior.

Figura 42 – Modelo de grelha

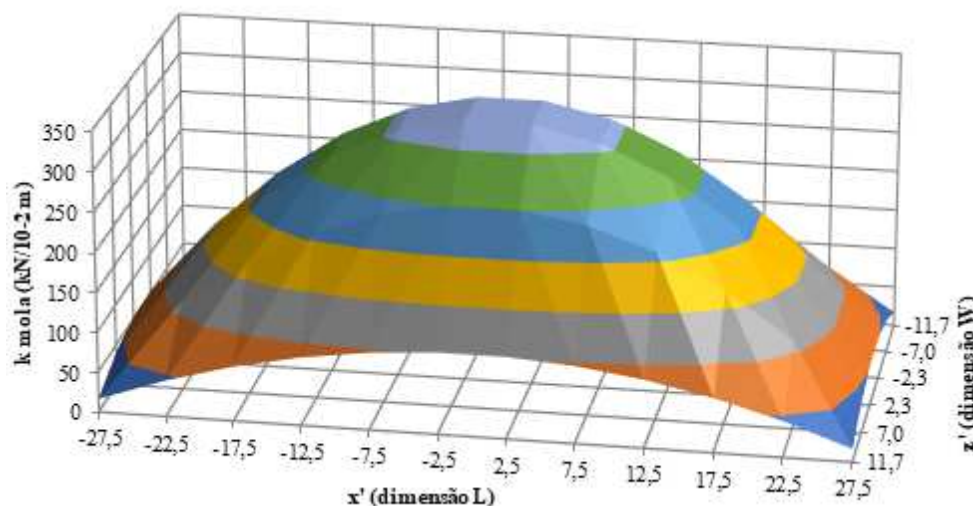


Fonte: Cardoso (2017)

A Figura 43 mostra a distribuição das rigidezes nas molas que representam a almofada, mostrando que o centro da almofada, devido ao efeito de confinamento, tem uma maior solicitação do que nas extremidades da almofada. O diagrama mostrado na Figura 43 foi

obtido ao se denhar uma região 3D considerando os valores das tensões obtidas dividindo-se as forças resultantes em cada mola que compõe a almofada pela sua área de influência.

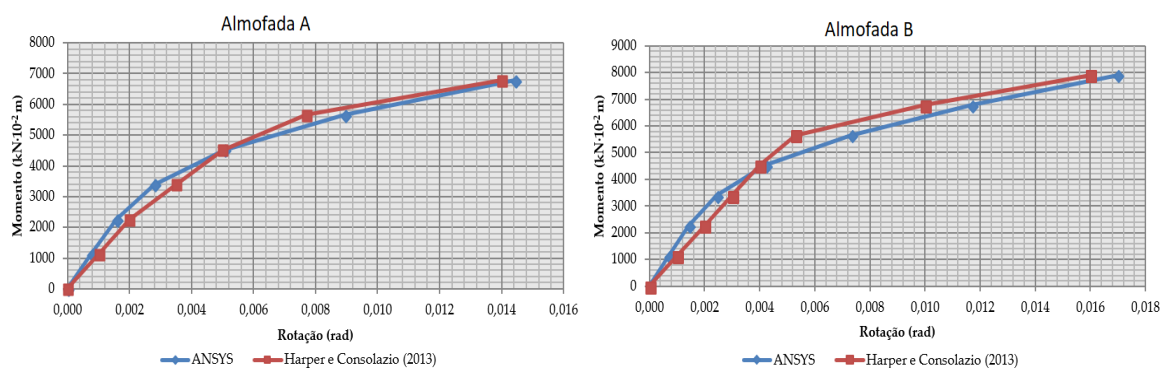
Figura 43 – Rigidez à compressão nas molas



Fonte: Cardoso (2017)

As curvas de momento  $\times$  rotação obtidas por Cardoso (2017) são mostradas na Figura 44.

Figura 44 – Curva momento  $\times$  rotação para almofadas A e B



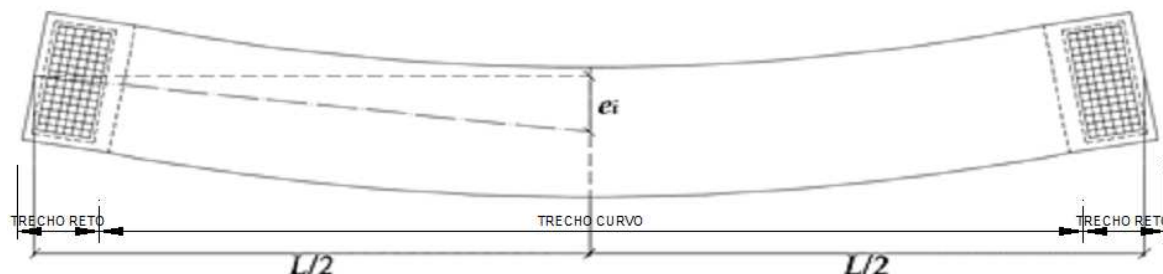
Fonte: Cardoso (2017)

Na modelagem de Cardoso (2017), os nós das grelhas referentes às almofadas de apoio foram unidos aos nós da viga, para proporcionar um trabalho em conjunto dos dois. Para garantir a ligação desses nós, a viga foi concebida como um arco entre dois segmentos retos sob os quais estavam as almofadas, para que os nós da viga coincidisse exatamente com os nós da grelha. Com isso, os eixos das almofadas foram levemente rotacionados para acompanhar



a curvatura da viga, o que elimina o efeito da pequena escurvidade resultado da excentricidade inicial. A Figura 45 mostra essa situação.

Figura 45 – Representação do modelo da viga

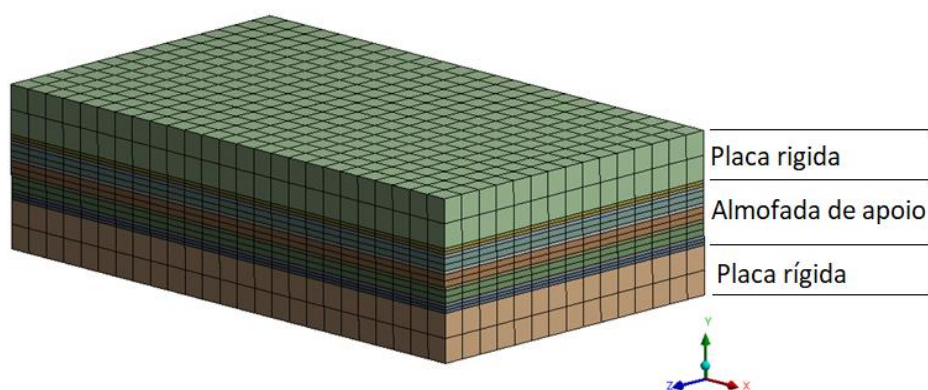


Fonte: Cardoso (2017)

### 3.4 MODELAGEM UTILIZANDO ELEMENTOS SÓLIDOS

Com base nos modelos com elementos sólidos utilizados por Consolazio e Hamilton (2007) e Harper e Consolazio (2013), é modelada a almofada utilizada pelo primeiro autor, com a utilização de elementos sólidos (SOLID186) no programa *ANSYS Workbench* 17. Esta modelagem faz parte do trabalho de Reis e Lima (2017). A Figura 46 mostra o modelo utilizado pelos autores. A Tabela 10 mostra as dimensões da almofada de apoio.

Figura 46 – Modelo da almofada de apoio



Fonte: Autor (2018)

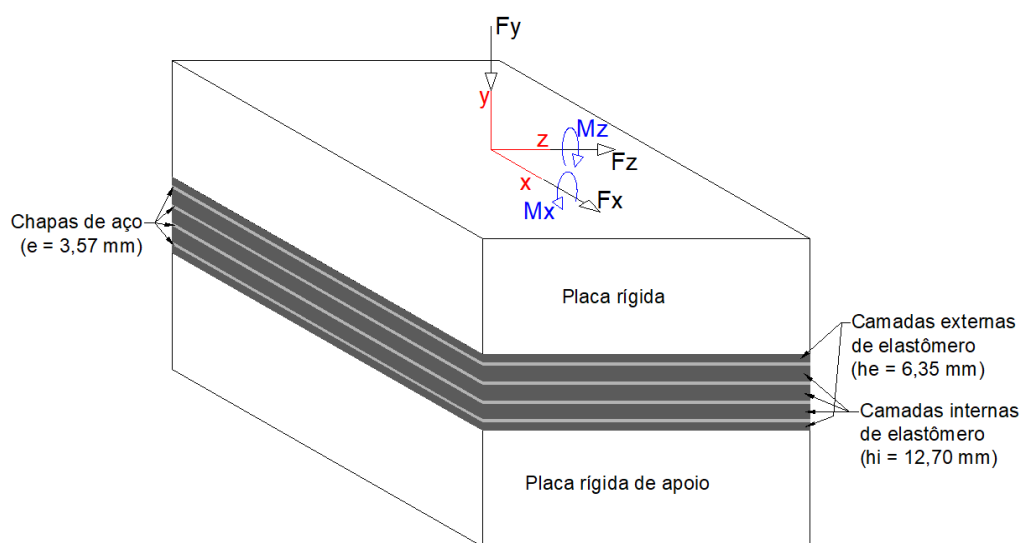
Tabela 10 - Características da almofada de apoio

Dimensões da almofada	
Largura	356
Comprimento	610
Altura	65
Espessura do elastômero (mm)	
Camadas internas (3)	12,70
Camadas externas (2)	6,35
Fator de forma	
Camadas internas	8,85
Camadas externas	17,70
Fator de forma ponderado	11,06

Fonte: Adaptado de Reis e Lima (2017)

Para determinar as rigidezes, foram aplicados forças e momentos. Mediram-se os deslocamentos e rotações correspondentes para cada esforço. A Figura 47 mostra os esforços que foram aplicados sobre o modelo. As forças concentradas ( $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ ) foram de 1 kN e os momentos ( $M_z$  e  $M_x$ ), 1 kN·m.

Figura 47 – Esforços aplicados sobre o modelo

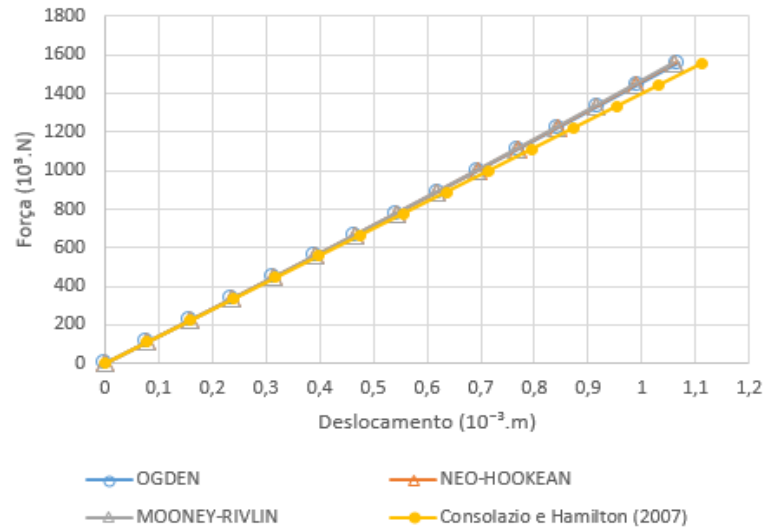


Fonte: Adaptado de Reis e Lima (2017)

Para representar o elastômero, que tem comportamento hiperelástico, pode-se utilizar três modelos diferentes, *Neo-hookean*, *Ogden* e *Mooney-Rivlin*. Segundo Reis e Lima (2017), os três modelos de materiais resultaram em valores bastante próximos entre si e em comparação à Consolazio e Hamilton (2007). As Figuras de 37 a 39 mostram que as curvas são praticamente coincidentes, portanto, para comparar com outros autores, foi escolhido o

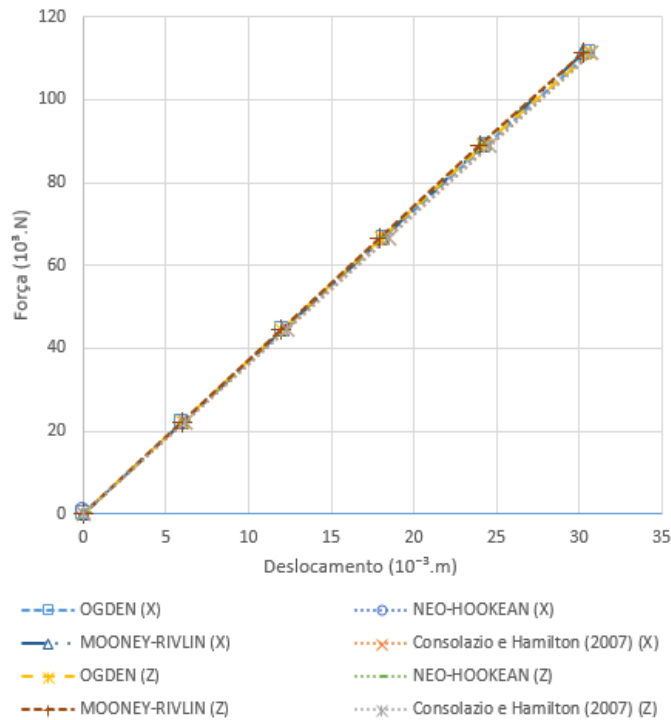
material *Neo-Hookean*, que depende apenas do módulo de deformação transversal ( $G$ ) e do parâmetro de incompressibilidade ( $d$ ) que depende do módulo *bulk* ( $K$ ).

Figura 48 – Curva Força de compressão × deslocamento vertical

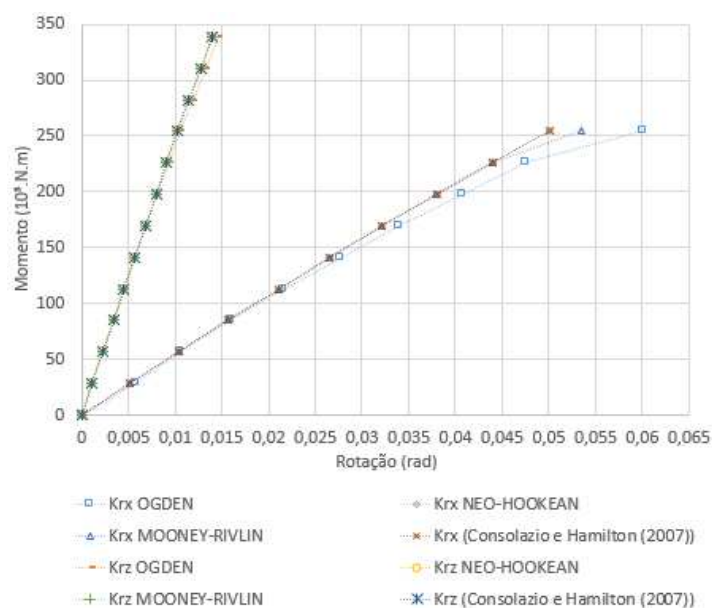


Fonte: Reis e Lima (2017)

Figura 49 – Curva Força cisalhante × deslocamento horizontal



Fonte: Reis e Lima (2017)

Figura 50 – Curva Momento  $\times$  Rotação

Fonte: Reis e Lima (2017)

Com o modelo utilizado por Reis e Lima (2017), modelou-se as almofadas utilizadas por Yazdani, Eddy e Cai (2000), Muscarella e Yura (1995), Hurff (2010) e Cardoso (2016). Comparou-se os resultados obtidos pelo modelo numérico com os valores fornecidos pelos autores e com os valores calculados pelas Equações 19, 21, 23 e 24. A Tabela 11 mostra as dimensões das almofadas dos autores, com o cálculo do fator de forma (Equação 3) e do módulo de elasticidade almofadas (Equação 5). Na Tabela 12 à Tabela 15 têm-se os resultados obtidos, que incluem também os valores de Consolazio e Hamilton (2007).

Tabela 11 – Dimensões das almofadas, fator de forma e módulo de elasticidade

	L mm	W mm	hri (interna) mm	hri (externa) mm	hrt mm	S (interna)	S (externa)	S (média)	Ec (MPa)
Yazdani II	204	356	8,75	6	29,5	7,41	10,81	8,79	282
Yazdani III	178	458	7,75	6	27,5	8,27	10,68	9,32	317
Yazdani IV	230	458	10,75	6	33,5	7,12	12,76	9,14	305
Yazdani V	254	610	12,75	6	37,5	7,03	14,94	9,56	334
Muscarella	229	356	11,125	11,125	44,5	6,26	6,26	6,26	143
Muscarella	229	356	6,357	6,357	44,5	10,96	10,96	10,96	438
Consolazio e Hamilton	356	610	12,7	6,35	50,8	8,85	17,70	11,06	446
Hurff	356	610	12,04	12,04	60,2	9,34	9,34	9,34	318
Cardoso	280	610	12,7	6,35	38,1	7,56	15,11	10,07	370

Fonte: Reis e Lima (2017)

Tabela 12 - Resultados de rigidez à compressão

<b>RIGIDEZ À COMPRESSÃO</b>						
	ky (teórico) (kN/mm)	ky (autores) (kN/mm)	ky (ANSYS) (kN/mm)	Diferença (teórico/autores)	Diferença (teórico/ansys)	Diferença (autores/ansys)
Yazdani II	6,94E+02	6,22E+02	6,81E+02	10%	2%	-10%
Yazdani III	9,40E+02	7,48E+02	8,79E+02	20%	6%	-18%
Yazdani IV	9,58E+02	7,92E+02	8,25E+02	17%	14%	-4%
Yazdani V	1,38E+03	1,04E+03	1,03E+03	24%	25%	1%
Muscarella	2,62E+02	2,22E+02	2,24E+02	15%	14%	-1%
Muscarella	8,03E+02	5,45E+02	6,90E+02	32%	14%	-27%
Consolazio e Hamilton	1,91E+03	1,36E+03	1,40E+03	29%	27%	-3%
Hurff	1,15E+03	1,04E+03	9,83E+02	9%	14%	6%
Cardoso	1,66E+03	1,10E+03	1,28E+03	34%	23%	-16%

Fonte: Adaptado de Reis e Lima (2017)

Tabela 13 – Resultados de rigidez ao cisalhamento em z

<b>RIGIDEZ AO CISALHAMENTO EM Z</b>						
	kz (calculado) (kN/mm)	kz (autores) (kN/mm)	kz (ANSYS) (kN/mm)	Diferença (teórico/autores)	Diferença (teórico/ansys)	Diferença (autores/ansys)
Yazdani II	1,87E+00	1,87E+00	1,85E+00	0%	1%	1%
Yazdani III	2,25E+00	2,25E+00	2,22E+00	0%	1%	1%
Yazdani IV	2,39E+00	2,39E+00	2,37E+00	0%	1%	1%
Yazdani V	3,14E+00	3,09E+00	3,11E+00	2%	1%	-1%
Muscarella	1,19E+00	1,09E+00	1,17E+00	8%	2%	-7%
Muscarella	1,19E+00	1,17E+00	1,18E+00	1%	1%	-1%
Consolazio e Hamilton	3,70E+00	3,68E+00	3,67E+00	0%	1%	0%
Hurff	2,34E+00	NA	2,33E+00	-	1%	-
Cardoso	3,41E+00	NA	3,38E+00	-	1%	-

Fonte: Reis e Lima (2017)

Tabela 14 - Resultados de rigidez à rotação em torno de z

RIGIDEZ À ROTAÇÃO EM TORNO DE Z							
	I <sub>z</sub> (mm <sup>4</sup> )	kr <sub>z</sub> (calculado) (kN.mm/rad)	kr <sub>z</sub> (autores) (kN.mm/rad)	kr <sub>z</sub> (ANSYS) (kN.mm/rad)	Diferença (teórico/ autores)	Diferença (teórico/ ansys)	Diferença (autores/ ansys)
Yazdani II	7,67E+08	7,33E+06	6,58E+06	3,76E+06	8%	47%	43%
Yazdani III	1,43E+09	1,64E+07	1,31E+07	9,79E+06	18%	39%	25%
Yazdani IV	1,84E+09	1,68E+07	1,39E+07	8,06E+06	15%	51%	42%
Yazdani V	4,80E+09	4,28E+07	3,24E+07	1,96E+07	22%	53%	40%
Muscarella	8,61E+08	2,77E+06	NA	1,12E+06	-	52%	-
Muscarella	8,61E+08	8,48E+06	NA	3,69E+06	-	48%	-
Consolazio e Hamilton	6,73E+09	5,92E+07	2,33E+07	2,49E+07	64%	62%	-7%
Hurff	6,73E+09	3,56E+07	3,24E+07	1,57E+07	-10%	47%	51%
Cardoso	5,30E+09	5,15E+07	NA	2,33E+07	-	53%	-

Fonte: Reis e Lima (2017)

Tabela 15 - Resultados de rigidez à rotação em torno de x

RIGIDEZ À ROTAÇÃO EM TORNO DE X							
	I <sub>x</sub> (mm <sup>4</sup> )	kr <sub>x</sub> (calculado) (kN.mm/rad)	kr <sub>x</sub> (autores) (kN.mm/rad)	kr <sub>x</sub> (ANSYS) (kN.mm/rad)	Diferença (teórico/ autores)	Diferença (teórico/ ansys)	Diferença (autores/ ansys)
Yazdani II	2,52E+08	2,41E+06	2,16E+06	7,29E+05	8%	69%	66%
Yazdani III	2,15E+08	2,48E+06	1,98E+06	6,61E+05	18%	73%	67%
Yazdani IV	4,64E+08	4,23E+06	3,50E+06	1,08E+06	15%	74%	69%
Yazdani V	8,33E+08	7,41E+06	5,60E+06	1,57E+06	22%	78%	72%
Muscarella	3,56E+08	1,15E+06	4,44E+05	3,01E+05	54%	69%	32%
Muscarella	3,56E+08	3,51E+06	8,37E+05	1,01E+06	71%	66%	-20%
Consolazio e Hamilton	2,29E+09	2,02E+07	5,18E+06	5,41E+06	77%	76%	-5%
Hurff	2,29E+09	1,21E+07	NA	3,20E+06	-	68%	-
Cardoso	1,12E+09	1,08E+07	NA	2,45E+06	-	77%	-

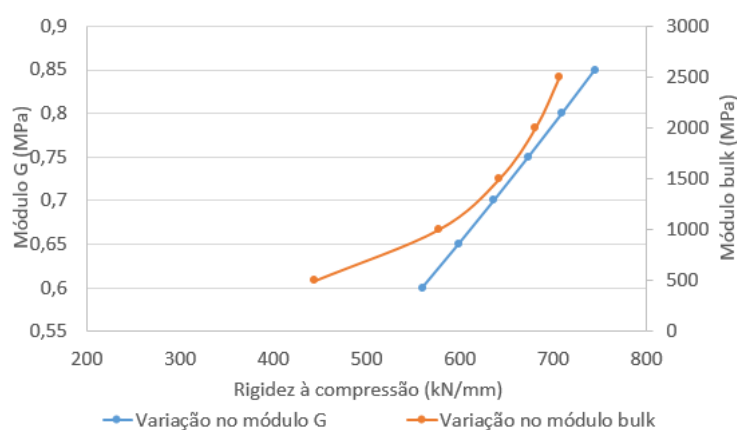
Fonte: Reis e Lima (2017)

Reis e Lima (2017) observaram que, quando utilizado o mesmo modelo para as outras almofadas, os valores de rigidez à compressão e da rigidez ao cisalhamento resultaram em valores adequados. Portanto, o modelo composto por elementos sólidos é útil na determinação das rigidezes à compressão e ao cisalhamento. Porém, os valores de rigidez à rotação não ficaram próximos dos valores de referência. Um dos motivos pode ser o fato de que o modelo utilizado não leva em conta o levantamento “*lift off*” da almofada. Ou seja, a

almofada do modelo pode ter fornecido certa resistência quando solicitada à tração, o que não ocorre na realidade.

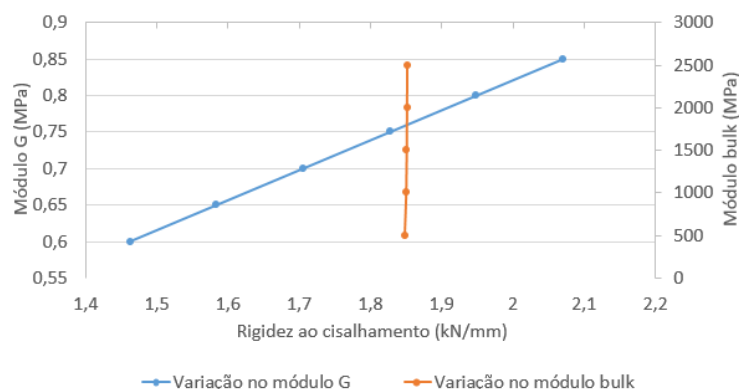
Além disso, os resultados podem ter sido diferentes pelo fato de não se conhecer com precisão todos os valores do módulo de deformação transversal ( $G$ ) e do módulo *bulk* ( $k$ ) usados pelos autores, que são necessários como parâmetros do material *neo-hookean*. Foi adotado um valor de 0,76 MPa para o módulo  $G$  das almofadas e de 2000 MPa para o módulo  $k$ . Os autores avaliaram ainda a influência desses dois parâmetros ( $G$  e  $k$ ) na variação da rigidez à rotação da almofada utilizada em Yazdani, Eddy e Cai (2000) e concluíram que pequenas alterações nestes valores resultam em uma mudança significativa no valor da rigidez à compressão (Figura 51), ao cisalhamento (Figura 52) e à rotação (Figura 53).

Figura 51 – Variação da rigidez à compressão



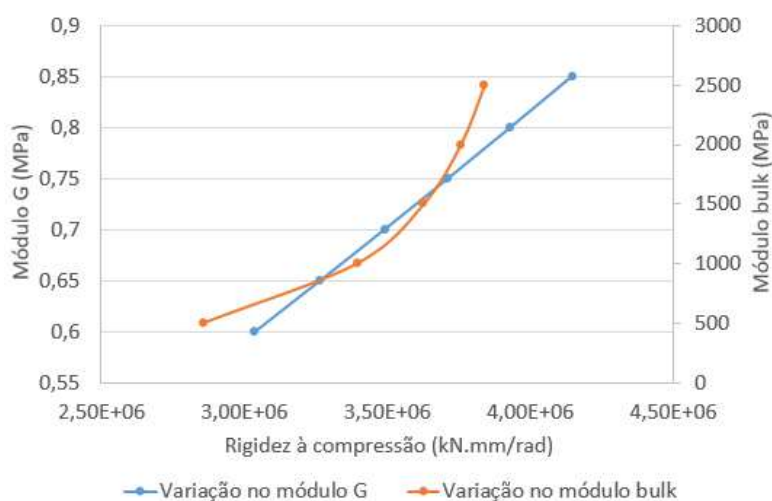
Fonte: Reis e Lima (2017)

Figura 52 – Variação da rigidez ao cisalhamento



Fonte: Reis e Lima (2017)

Figura 53 – Variação da rigidez à rotação

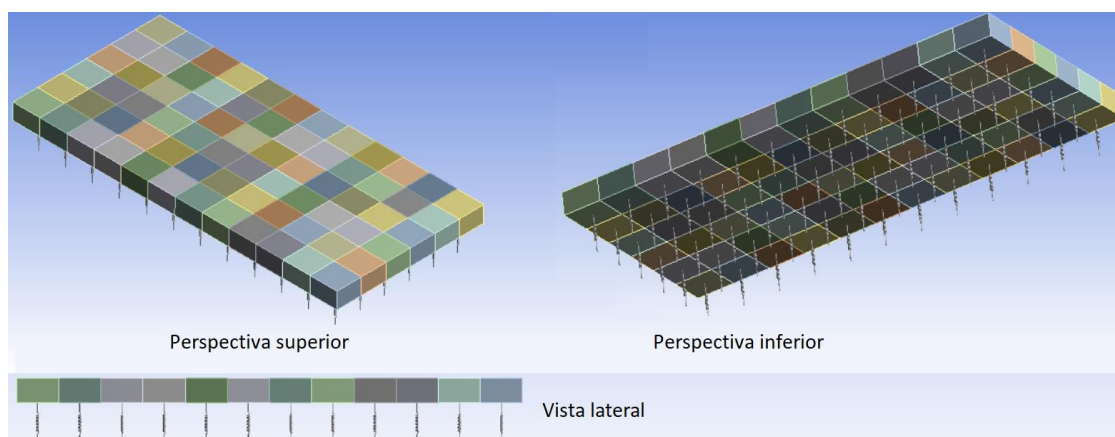


Fonte: Reis e Lima (2017)

### 3.5 MODELO SIMPLIFICADO DA ALMOFADA

Como a instabilidade lateral depende da rigidez à rotação, uma vez que é ela quem fornece a restrição ao momento de tombamento, e da não linearidade geométrica da almofada, torna-se necessário criar um modelo de forma a obter melhor comportamento à rotação da almofada de apoio. Com este objetivo, foi proposto um modelo simplificado, como o modelo de grelha utilizado por Harper e Consolazio (2013), com a diferença de que, ao invés de ser modelada uma grelha para unir as molas, o modelo é composto de elementos sólidos e de molas, conforme ilustra a Figura 54.

Figura 54 – Modelo proposto com sólidos e molas



Fonte: Autor (2018)



A utilização de elementos sólidos permite que a malha da viga e a malha da almofada possa ser criada de forma independente, pois a ligação dos dois elementos não se dá pela união dos nós, e sim pela ligação entre as faces de cada elemento. Isto possibilita a consideração do alinhamento entre as almofadas e da esconsidade provocada pela excentricidade lateral, aproximando mais o modelo da realidade. No modelo, a almofada de apoio foi dividida em 72 partes, sendo cada parte um elemento do tipo SOLID186, que possui 20 nós e três graus de liberdade em cada nó (translação em X, Y e Z). Estes elementos sólidos foram considerados como rígidos, com módulo de elasticidade de  $1 \times 10^8$  MPa, para eliminar a probabilidade de flexão da almofada.

Na Figura 54, observa-se que as molas são ligadas aos elementos sólidos pelas faces desses elementos. Esta ligação é feita como uma ligação remota (“*remote attachment*”), pois as extremidades das molas não se conectam diretamente aos nós dos elementos sólidos. Optou-se por esta configuração para que os elementos sólidos tivessem as mesmas dimensões da almofada de apoio e para que as posições das molas se mantivessem as mesmas em relação ao modelo de grelha.

Em relação às molas, a rigidez longitudinal de cada uma depende da sua posição em relação ao centro da almofada e da rigidez à compressão da almofada. Deve-se fazer esta consideração para levar em conta o efeito do confinamento do elastômero na parte central da almofada. A Equação 29 é fornecida por Harper e Consolazio (2013) para determinação das rigidezes individuais de cada mola. A rigidez à compressão, quando não conhecida, pode ser estimada pela Equação 19 ou pela modelagem com elementos sólidos conforme 3.3. Para considerar o efeito do levantamento “*lift-off*” da almofada, as molas trabalham somente à compressão.

$$k_{mola}(x', z') = A_{região} \cdot \left( \frac{k_{almofada}}{A_{almofada}} \right) \cdot [1 - (x')^2] \cdot [1 - (z')^2] \quad (29)$$

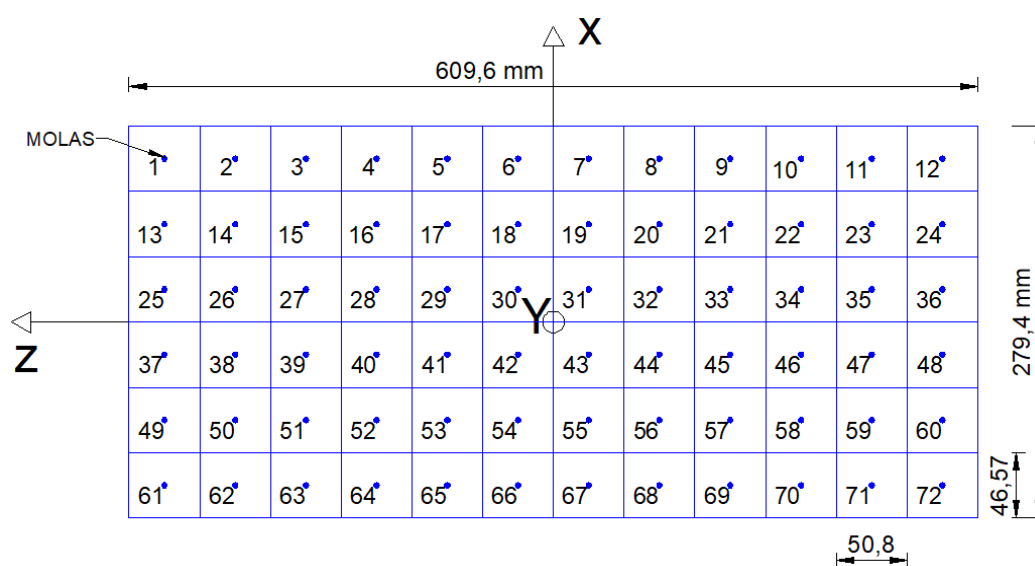
Em que  $k_{mola}(x', z')$  é o valor de rigidez da mola;  $A_{região}$  é a área da região da mola;  $k_{almofada}$  é a rigidez à compressão da almofada e  $A_{almofada}$  é a área da almofada e  $x'$  e  $z'$  são as coordenadas normalizadas da almofada.

Para validar o modelo, foram modeladas as almofadas A e B do FDOT e reproduziu-se os ensaios experimentais de Harper e Consolazio (2013), que consistiu na aplicação de uma tensão vertical inicial na almofada com posterior aplicação de momento em torno do eixo de maior inércia da almofada. Para a almofada A, a tensão vertical inicial foi de 0,69 MPa e 2,41 MPa que, considerando a área da almofada (0,61 x 0,28 m), representa uma força de compressão de 118 kN e 412 kN, respectivamente. Para a almofada B, a tensão vertical foi de 1,38 MPa e 2,07 MPa que, devido à dimensão da almofada (0,61 x 0,356 m), resultam numa força de compressão de 300 kN e 449 kN, respectivamente.

Os resultados obtidos para o modelo foram comparados aos resultados do modelo numérico de Harper e Consolazio (2013) e do modelo numérico de Cardoso (2017), que também reproduziu partes dos ensaios experimentais citados anteriormente (tensão vertical de 2,41 MPa para a almofada A e de 2,07 MPa para a almofada B).

A primeira etapa consiste em determinar as rigidezes das molas que constituem a almofada. O aparelho de apoio A foi dividido em 72 elementos iguais, com dimensões em planta de 46,57 x 50,8 mm, conforme ilustra a Figura 55. Como a almofada é simétrica em relação ao eixo X e Z, foi determinada a rigidez das molas do primeiro quadrante (molas 1 a 6, 13 a 18 e 25 a 30), pois os demais valores são obtidos pela simetria.

Figura 55 – Almofada A



Fonte: Autor (2018)

No cálculo da rigidez longitudinal de cada mola, a rigidez à compressão da almofada foi adotada como a mesma obtida por Harper e Consolazio (2013), para diminuir as variáveis no modelo. Portanto, a rigidez axial da almofada A é de 1.099.100 N/mm. A área da região, que é a área em planta do elemento finito que é parte da almofada, de dimensões  $46,57 \times 50,8$  mm, vale 2.366 mm<sup>2</sup>. A área total da almofada é 170.322 mm<sup>2</sup>. As coordenadas dependem da posição da mola. A Tabela 16 mostra o cálculo das rigidezes de cada mola no primeiro quadrante da almofada.

Tabela 16 - Cálculo das rigidezes das molas (Almofada A)

Mola	Z (mm)	Z'	X (mm)	X'	kmola (N/mm)
1	279,415	0,917	116,417	0,833	744,6
2	228,615	0,750	116,417	0,833	2040,3
3	177,815	0,583	116,417	0,833	3076,9
4	127,015	0,417	116,417	0,833	3854,4
5	76,215	0,250	116,417	0,833	4372,8
6	25,415	0,083	116,417	0,833	4632,0
13	279,400	0,917	69,850	0,500	1828,7
14	228,600	0,750	69,850	0,500	5008,9
15	177,800	0,583	69,850	0,500	7553,1
16	127,000	0,417	69,850	0,500	9461,3
17	76,200	0,250	69,850	0,500	10733,4
18	25,400	0,083	69,850	0,500	11369,5
25	279,400	0,917	23,283	0,167	2370,5
26	228,600	0,750	23,283	0,167	6493,0
27	177,800	0,583	23,283	0,167	9791,1
28	127,000	0,417	23,283	0,167	12264,6
29	76,200	0,250	23,283	0,167	13913,7
30	25,400	0,083	23,283	0,167	14738,2

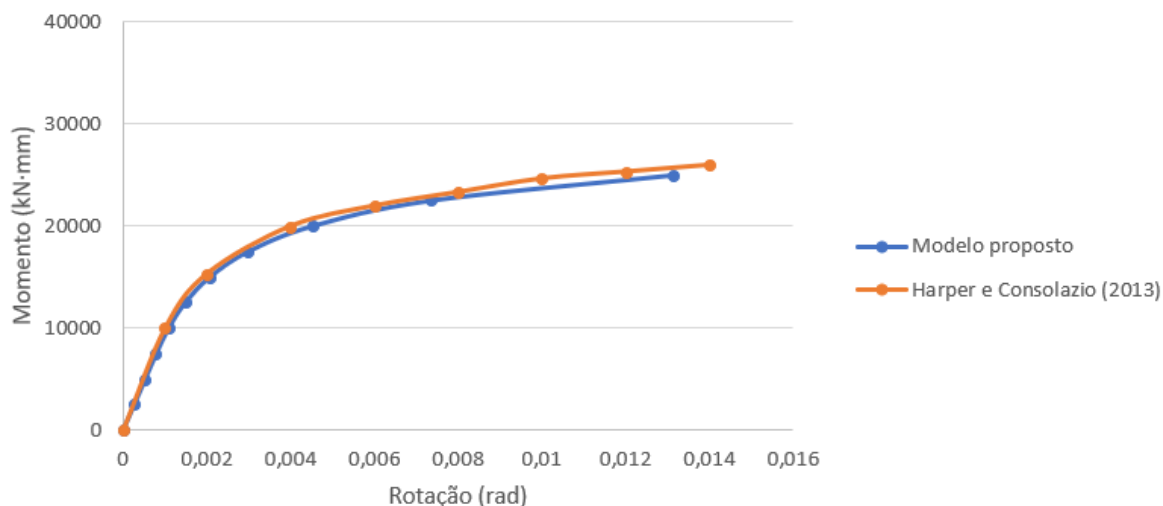
Fonte: Autor (2018)

Depois da determinação das rigidezes de cada mola, aplicou-se momentos na almofada de modo a obter a rotação da almofada. Com isso, foi desenhado o gráfico de momento  $\times$  rotação e a curva foi comparada com as curvas obtidas por Harper e Consolazio (2013) e Cardoso (2017).

Foram aplicadas forças de compressão de 118 kN e 412 kN sobre a almofada, que, multiplicadas pela área da almofada, correspondem às tensões de 0,69 MPa e 2,41 MPa utilizadas por Harper e Consolazio (2013). As curvas de Momento  $\times$  Rotação para a

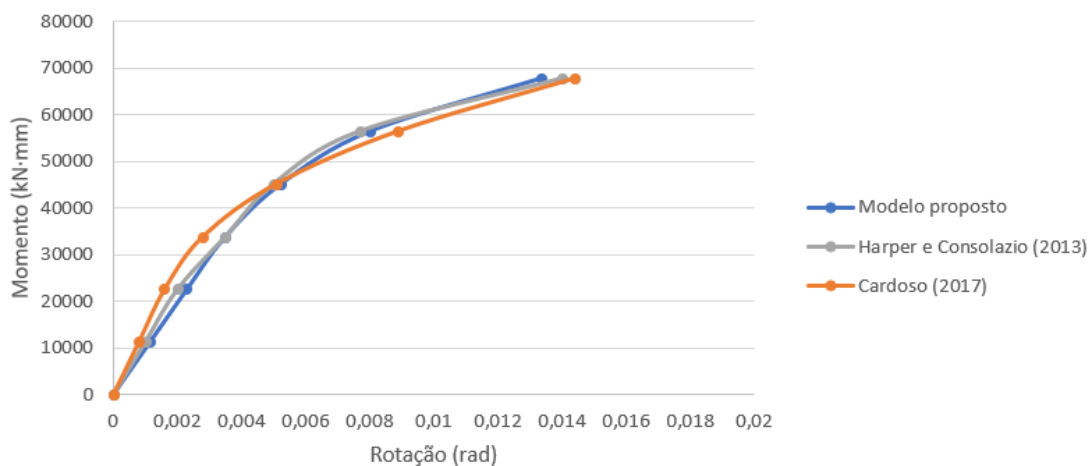
almofada A com força inicial de compressão de 118 kN é mostrada na Figura 56 e a Figura 57 mostra a curva para força de compressão de 412 kN.

Figura 56 – Curva Momento  $\times$  Rotação para almofada A e força de compressão de 118 kN



Fonte: Autor (2018)

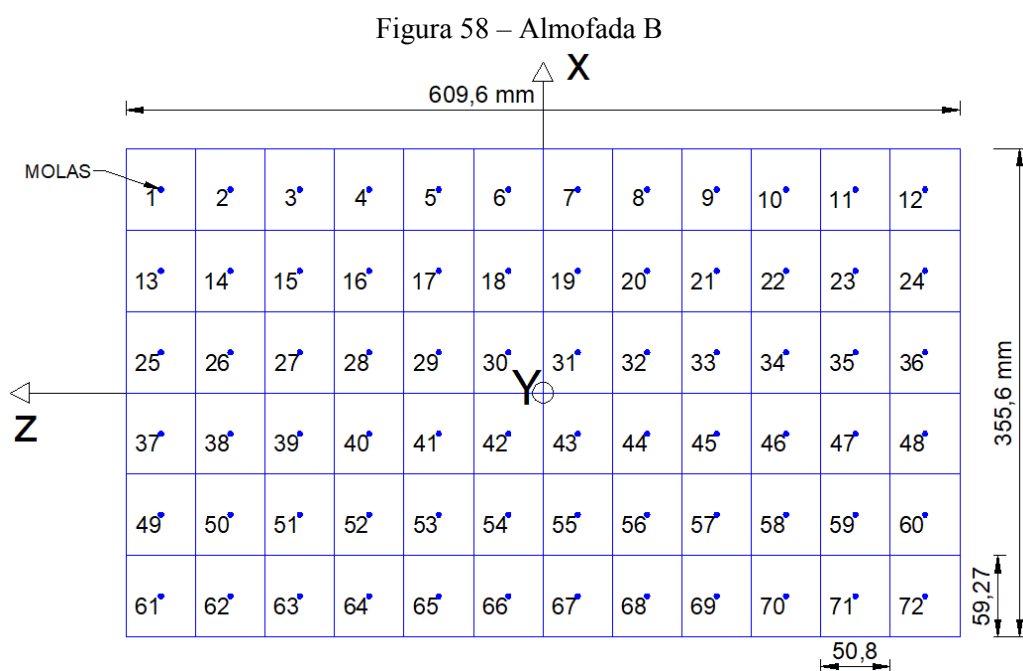
Figura 57 – Curva Momento  $\times$  Rotação para almofada A e força de compressão de 412 kN



Fonte: Autor (2018)

Da mesma forma, foi modelada a almofada B. O aparelho de apoio B também foi dividido em 72 partes iguais, com dimensões em planta de  $59,27 \times 50,8$  mm. Na determinação da rigidez longitudinal das molas, foi adotada a rigidez à compressão de Harper e Consolazio (2013), cujo valor é de 1.251.500 N/mm. A área da região vale 3.011 mm<sup>2</sup>. A área da almofada é 216.774 mm<sup>2</sup>. As coordenadas dependem da posição da mola. A Figura 58 mostra

a as dimensões da almofada B e a Tabela 17 contém os valores das rigidezes de cada mola de um dos quadrantes da almofada, pois nos demais quadrantes a rigidez é simétrica.



Fonte: Autor (2018)

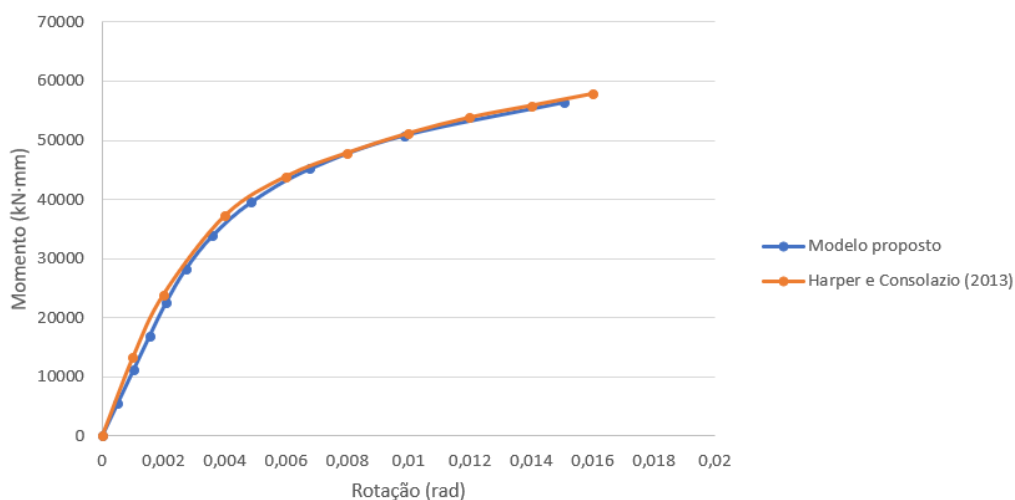
Tabela 17 - Cálculo das rigidezes das molas (Almofada B)

Mola	Z (mm)	Z'	X (mm)	X'	kmola (N/mm)
1	279,400	0,917	148,167	0,832	852,6
2	228,600	0,750	148,167	0,832	2335,5
3	177,800	0,583	148,167	0,832	3521,8
4	127,000	0,417	148,167	0,832	4411,5
5	76,200	0,250	148,167	0,832	5004,6
6	25,400	0,083	148,167	0,832	5301,2
13	279,400	0,917	88,900	0,499	2083,8
14	228,600	0,750	88,900	0,499	5707,7
15	177,800	0,583	88,900	0,499	8606,9
16	127,000	0,417	88,900	0,499	10781,2
17	76,200	0,250	88,900	0,499	12230,8
18	25,400	0,083	88,900	0,499	12955,6
25	279,400	0,917	29,633	0,166	2699,3
26	228,600	0,750	29,633	0,166	7393,8
27	177,800	0,583	29,633	0,166	11149,4
28	127,000	0,417	29,633	0,166	13966,1
29	76,200	0,250	29,633	0,166	15843,9
30	25,400	0,083	29,633	0,166	16782,8

Fonte: Autor (2018)

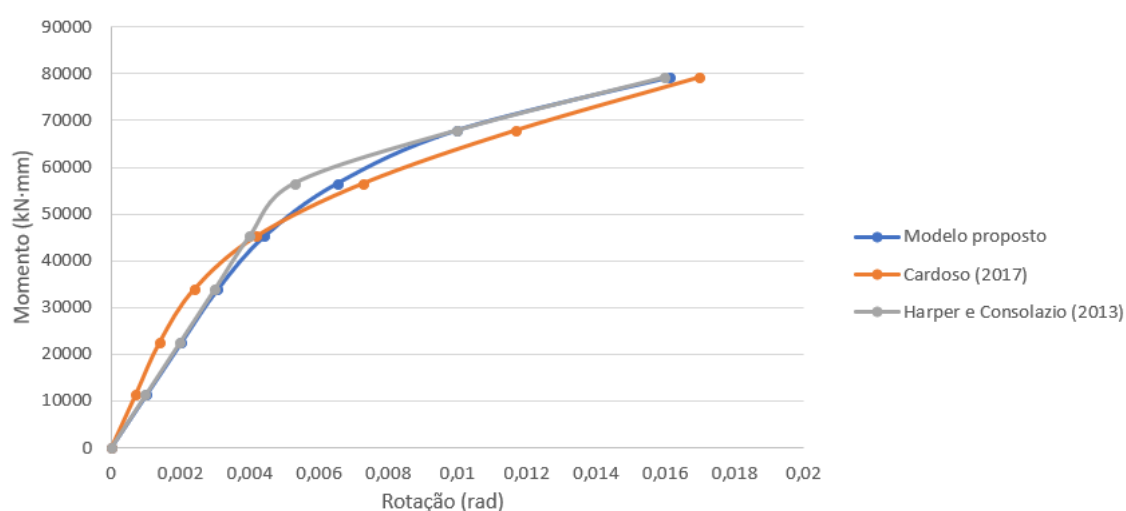
Depois da determinação das rigidezes longitudinais de cada mola, aplicou-se momentos na almofada de modo a obter a rotação da almofada. Com isso, foi desenhada a curva de momento  $\times$  rotação para a almofada B com força de compressão inicial de 300 kN (Figura 59) que foi comparada com a curva de Harper e Consolazio (2013). A curva de momento  $\times$  rotação para a almofada B com força de compressão de 449 kN é mostrada na Figura 60 e esta foi comparada com as curvas de Harper e Consolazio (2013) e Cardoso (2017).

Figura 59 – Curva Momento  $\times$  Rotação para almofada B e força de compressão de 300 kN



Fonte: Autor (2018)

Figura 60 – Curva Momento  $\times$  Rotação para almofada B e força de compressão de 449 kN



Fonte: Autor (2018)

O modelo proposto forneceu resultados bastante próximos às quatro curvas obtidas pelo modelo de Harper e Consolazio (2013) e para as duas curvas de Cardoso (2017), lembrando que as curvas de Harper e Consolazio (2013) foram comparadas às curvas experimentais obtidas pelos próprios autores, o que valida as curvas do modelo proposto pelo presente estudo. A principal diferença entre o modelo proposto neste trabalho com o modelo de Harper e Consolazio (2013) é que no primeiro são utilizados elementos sólidos para unir as molas e no segundo são utilizados elementos de barra para fazer esta união. A vantagem de utilizar elementos sólidos é que o contato entre a viga e a almofada é feito pelas faces dos elementos que os compõe, evitando a necessidade de coincidir os nós da almofada com os nós da viga para efetuar a ligação entre eles.

Com o modelo numérico validado para almofada B, são desenvolvidas as análises de instabilidade lateral em vigas pré-moldadas, apoiadas sobre esta almofada, nos capítulos seguintes deste trabalho.

# CAPÍTULO 4

## MODELAGEM NUMÉRICA DE VIGAS SOBRE APOIOS ELÁSTICOS

### 4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A modelagem numérica das vigas pelo método dos elementos finitos pode ser concebida de três formas: com elementos de barra (“*beam*”), de placa (“*shell*”) e de elementos sólidos (“*solid*”). A utilização de elementos de placa não é muito comum nas análises de estabilidade de vigas. Somente o trabalho de Lee et al. (2017) apresenta uma modelagem com este tipo de elemento para avaliar a instabilidade de vigas sujeitas à ação de vento.

Elementos finitos de barra são mais comuns devido à sua baixa quantidade de nós, o que leva a um menor gasto computacional. Diversos autores utilizaram este tipo de elemento em suas análises, tais como: Consolazio e Hamilton (2007), Consolazio e Hamilton (2012), Lee et al. (2017) e Krah, Carrazedo e El Debs (2017). A utilização de elementos de barra geralmente resulta em estruturas hipostáticas, com condições de contorno insuficientes para encontrar o equilíbrio do modelo. Para eliminar este problema, deve-se adicionar condições de contorno no modelo para que possa ser encontrada uma solução. Portanto, deve-se avaliar e escolher condições de contorno adicionais com bastante cuidado, para que não influencie no correto comportamento do modelo, levando a resultados fora da realidade.

Por fim, as vigas podem ser representadas por elementos sólidos. A desvantagem na utilização de elementos sólidos é que a quantidade de nós e elementos é consideravelmente maior, necessitando de maior tempo e gasto computacional nas simulações. Yazdani, Eddy e Cai (2000) e Cardoso (2018) utilizaram elementos sólidos em suas análises. Em todos os



tipos de elementos deve-se utilizar uma malha otimizada, de modo a reduzir o gasto computacional e manter os resultados dentro de um limite aceitável. Ressalta-se que, com elementos sólidos, esta otimização é mais significativa.

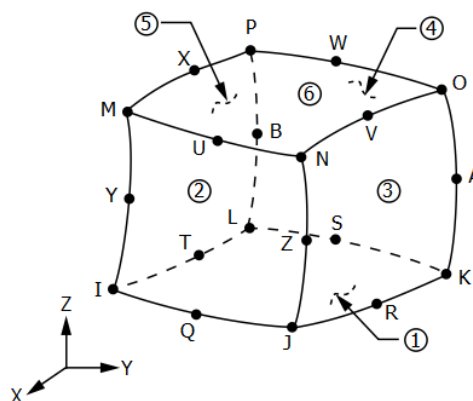
Toda modelagem numérica deve, sempre que possível, ser comparada a resultados experimentais de forma a validar o modelo, para que os resultados sejam mais confiáveis. Com este objetivo, são modeladas, inicialmente, as vigas utilizadas em Hurff (2010) e em Consolazio e Hamilton (2012).

Em relação à Hurff (2010), é traçada a curva dada pela relação força  $\times$  rotação no meio do vão e comparados os valores obtidos no modelo com os valores obtidos pela análise experimental do autor. Por fim, é encontrada a carga limite de tombamento. Para este modelo são feitas avaliações em relação à malha adequada para obter resultados aceitáveis.

Consolazio e Hamilton (2012) fizeram uma análise experimental de uma viga apoiada sobre almofadas de apoio e apresentam curvas de força  $\times$  deslocamento lateral no meio do vão e, por estas curvas, determinam a carga limite de tombamento. Neste trabalho, é modelada numericamente a viga sem escuridade e sem ângulo vertical do apoio, para fins de comparação com os valores obtidos em Consolazio e Hamilton (2012).

Para as análises numéricas desenvolvidas neste trabalho são utilizados elementos sólidos tridimensionais para representar as vigas, que são designados por SOLID186 (Figura 61), e que possuem 20 nós com três graus de liberdade cada nó (translação em X, Y e Z).

Figura 61 – Elemento SOLID186



Fonte: ANSYS 18.0

## 4.2 MODELAGEM DE VIGAS SOBRE APOIOS ELASTOMÉRICOS

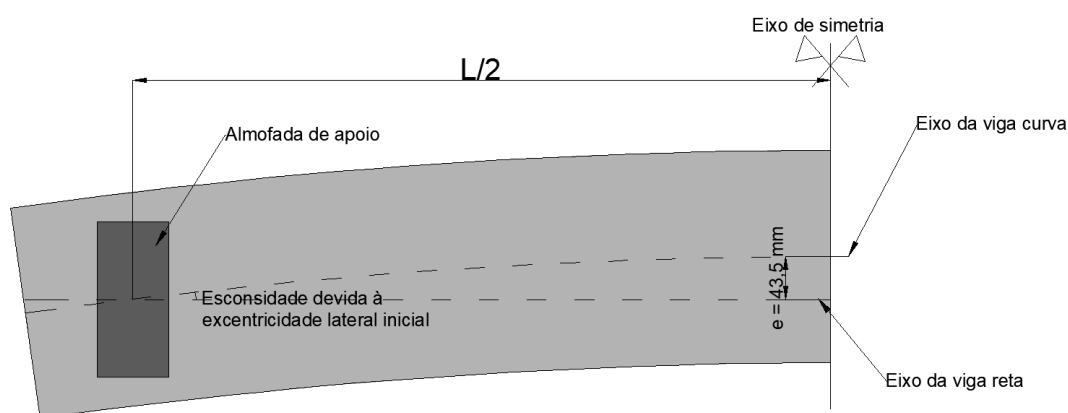
### 4.2.1 Modelagem da Viga BT-54

#### 4.2.1.1 Considerações sobre as variáveis e análise de malha

Para representar a situação real, o modelo deve ser desenvolvido de forma a obter resultados próximos aos das análises experimentais. A viga ensaiada por Hurff (2010) tem 30,5 m de vão e é apoiada sobre as almofadas de apoio de elastômero do tipo B (Tabela 1). A seção da viga é mostrada na Figura 9. A rigidez vertical total da almofada utilizada na determinação das rigidezes longitudinais de cada mola componente da almofada foi a rigidez fornecida por Hurff (2010) de 1.040 kN/mm. A rigidez de cada mola foi obtida pela Equação 29. As características do modelo da almofada são as mesmas descritas no Capítulo 3. Para o concreto, adotou-se comportamento elástico linear, com módulo de elasticidade de 30,8 GPa e coeficiente de Poisson de 0,22, conforme valores fornecidos por Hurff (2010).

Em seus ensaios, Hurff (2010) mediu a excentricidade lateral inicial no meio do vão para a viga BT-54. O valor médio medido foi de 43,5 mm e, portanto, esta será a excentricidade adotada no modelo. Usualmente, as almofadas são posicionadas de forma alinhada à subestrutura e também em relação à viga. Como a viga apresenta uma curvatura lateral, surge, portanto, um ângulo (escondidade) entre o eixo da almofada e da viga, que também está incluído no modelo. Será considerada também a simetria da viga em relação à seção do meio do vão, o que reduz o gasto computacional do modelo (Figura 62).

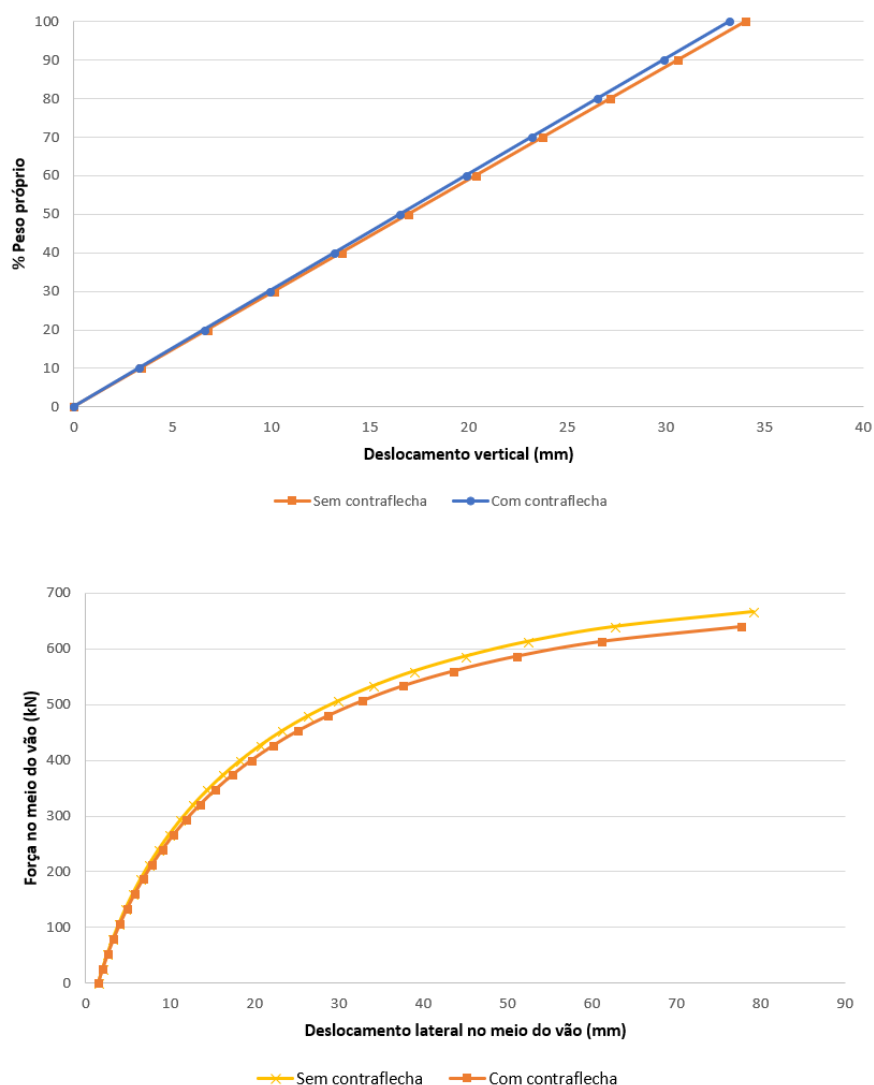
Figura 62 – Modelo da viga



Fonte: Autor (2018)

A viga ensaiada por Hurff (2010) também possui contraflecha devida à força de protensão e é certo que, devido à curvatura proveniente dessa contraflecha, ocorre, ao posicionar a viga sobre a almofada de apoio, um carregamento não uniforme da almofada de apoio. Porém, como as análises de Hurff (2010) não se limita somente ao peso próprio, mas à força aplicada no meio do vão, a contraflecha é desconsiderada no modelo. Para avaliar se essa retirada interfere nos resultados obtidos com o modelo, é modelada a viga BT-54 e são desenhadas as curvas de % Peso próprio  $\times$  deslocamento vertical e de Força concentrada no meio do vão  $\times$  deslocamento lateral (Figura 63).

Figura 63 – Análise da influência da contraflecha

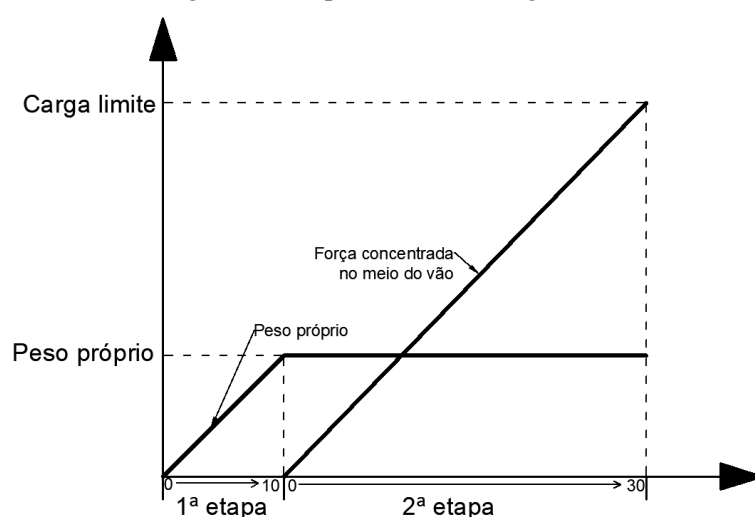


Fonte: Autor (2018)

Pela Figura 63, observa-se que a presença da contraflecha, pelas condições de contorno propostas, não exerce influência significativa sobre o modelo. Portanto, a contraflecha é desconsiderada neste estudo.

Os esforços considerados no modelo são o peso próprio da viga e uma força concentrada no meio do vão que é aplicada até que não haja solução numérica pelo método dos elementos finitos (ANSYS). A análise é dividida em duas etapas. Na primeira, é aplicado o peso próprio da viga em 10 passos de carga e, na segunda etapa, é aplicada a força concentrada no meio do vão, até que se atinja a carga limite de tombamento (Figura 64).

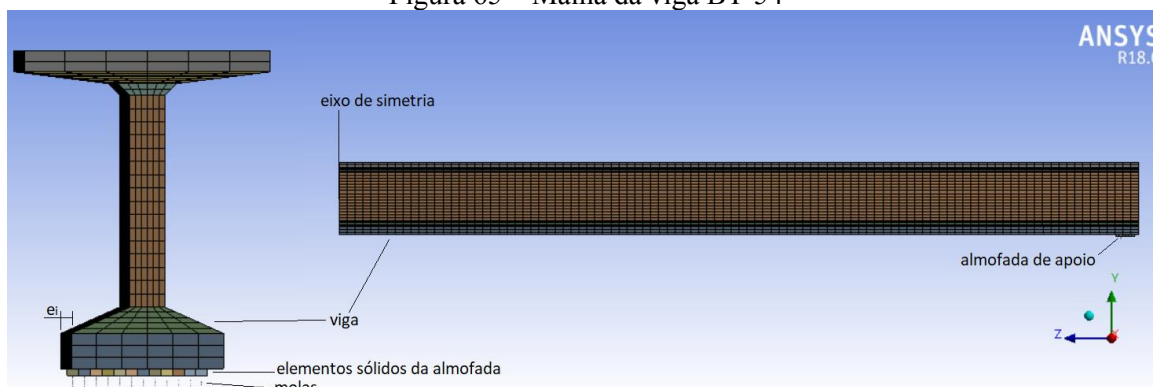
Figura 64 – Aplicação do carregamento



Fonte: Autor (2018)

A malha utilizada em cada viga é obtida de forma a manter bons resultados com o menor gasto computacional possível. Foram testadas configurações de malhas mais refinadas e mais robustas do que a malha adotada. Portanto, optou-se por utilizar a malha mostrada na Figura 65 para a viga AASHTO BT-54 de Hurff (2010). Foi adotada dimensão média de 60 mm para os elementos e, no sentido longitudinal, a viga foi dividida em 100 elementos de aproximadamente 150 mm.

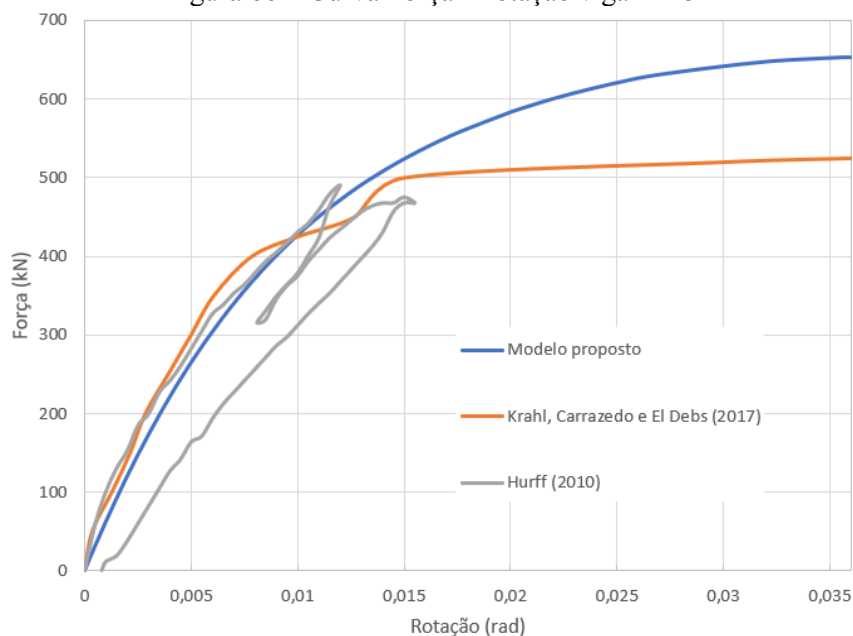
Figura 65 – Malha da viga BT-54



Fonte: Autor (2018)

#### 4.2.1.2 Resultados e discussão

Com as condições de contorno e os carregamentos descritos anteriormente, é desenhada a curva de Força aplicada  $\times$  rotação no meio do vão para a viga BT-54 (Figura 66). Como comparação, é mostrada a curva experimental de Hurff (2010) e a curva numérica obtida por Krah, Carrazedo e El Debs (2017).

Figura 66 – Curva Força  $\times$  rotação viga BT-54

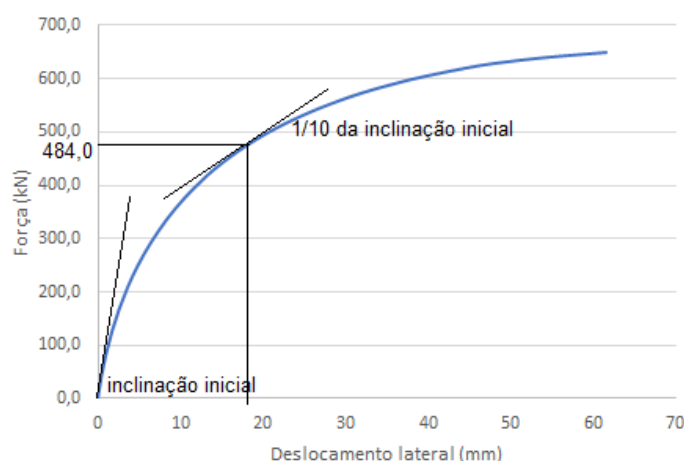
Fonte: Autor (2018)

Pela Figura 66 observa-se que o comportamento inicial das curvas é bastante similar. Em relação à carga limite, pode ser adotado o valor onde o modelo perde equilíbrio e não encontra solução numérica. Isto ocorre com uma carga de 650,0 kN que, em comparação aos

valores de Hurff (2010) (463,0 kN) e Krahll, Carrazedo e El Debs (2017) (503,3 kN), resulta em diferenças de 40,4% e 29,1%, respectivamente. Adotando-se uma rotação máxima de 0,020 radianos, obtém-se um valor de aproximadamente para a carga limite de 590,0 kN. Este valor, em comparação aos valores de Hurff (2010) e Krahll, Carrazedo e El Debs (2017), resulta em diferenças de 27,4% e 17,2%, respectivamente.

Pode-se ainda desenhar a curva de força aplicada  $\times$  deslocamento lateral no meio do vão (Figura 67). Segundo Consolazio e Hamilton (2012), pode-se adotar como carga limite de tombamento o ponto onde a inclinação tangente à curva é 1/10 da inclinação tangente no início da curva (mostrado na Figura 18).

Figura 67 – Curva Força  $\times$  Deslocamento lateral no meio do vão

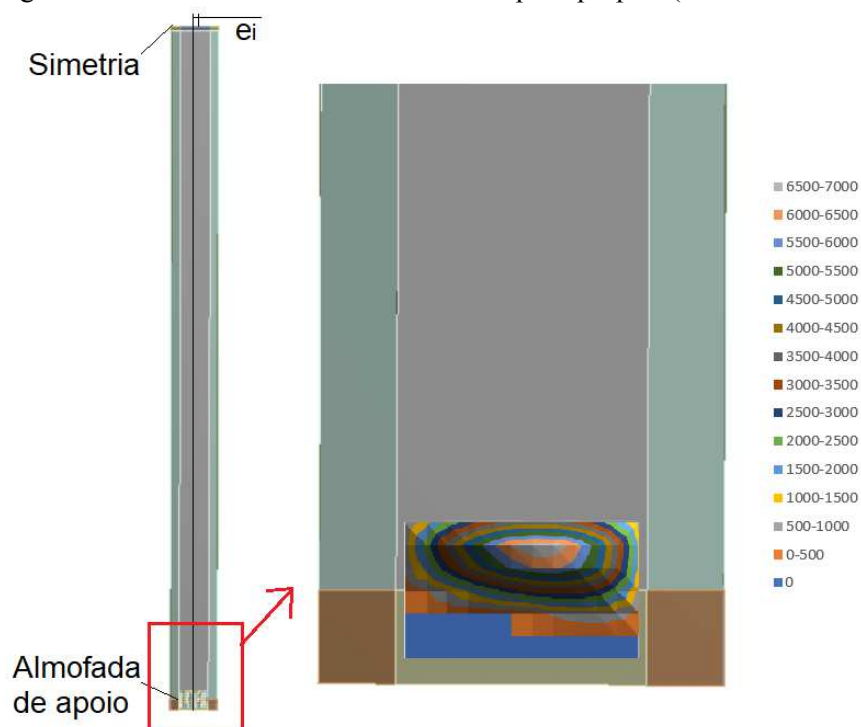


Fonte: Autor (2018)

Pela Figura 67 obtém-se uma carga limite de aproximadamente 484,0 kN que, em comparação aos valores de Hurff (2010) (463,0 kN) e Krahll, Carrazedo e El Debs (2017) (503,3 kN), resulta em diferenças de 4,5% e 3,8%, respectivamente. Portanto, é considerado como carga limite o valor obtido pelo critério da inclinação da curva de força  $\times$  deslocamento lateral no meio do vão, conforme Consolazio e Hamilton (2012).

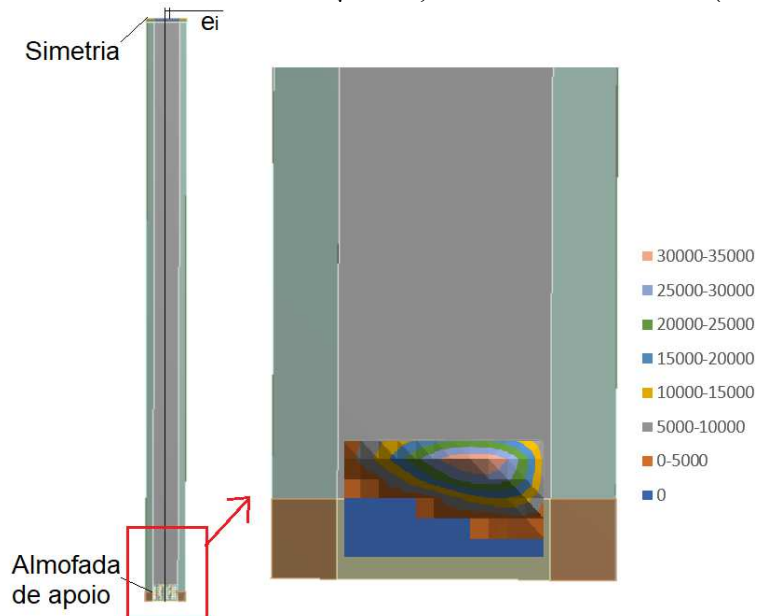
Na Figura 68, são mostrados os esforços resultantes nas molas após a aplicação do peso próprio e na Figura 69, são mostradas as resultantes das molas no ponto onde é aplicada a carga limite. Estas resultantes são importantes nos cálculos de rigidez à rotação efetiva das almofadas que serão feitos posteriormente neste trabalho.

Figura 68 – Resultante nas molas devido ao peso próprio (resultante em N)



Fonte: Autor (2018)

Figura 69 – Resultante nas molas em rotação = 0,020 rad no meio do vão (resultante em N)



Fonte: Autor (2018)

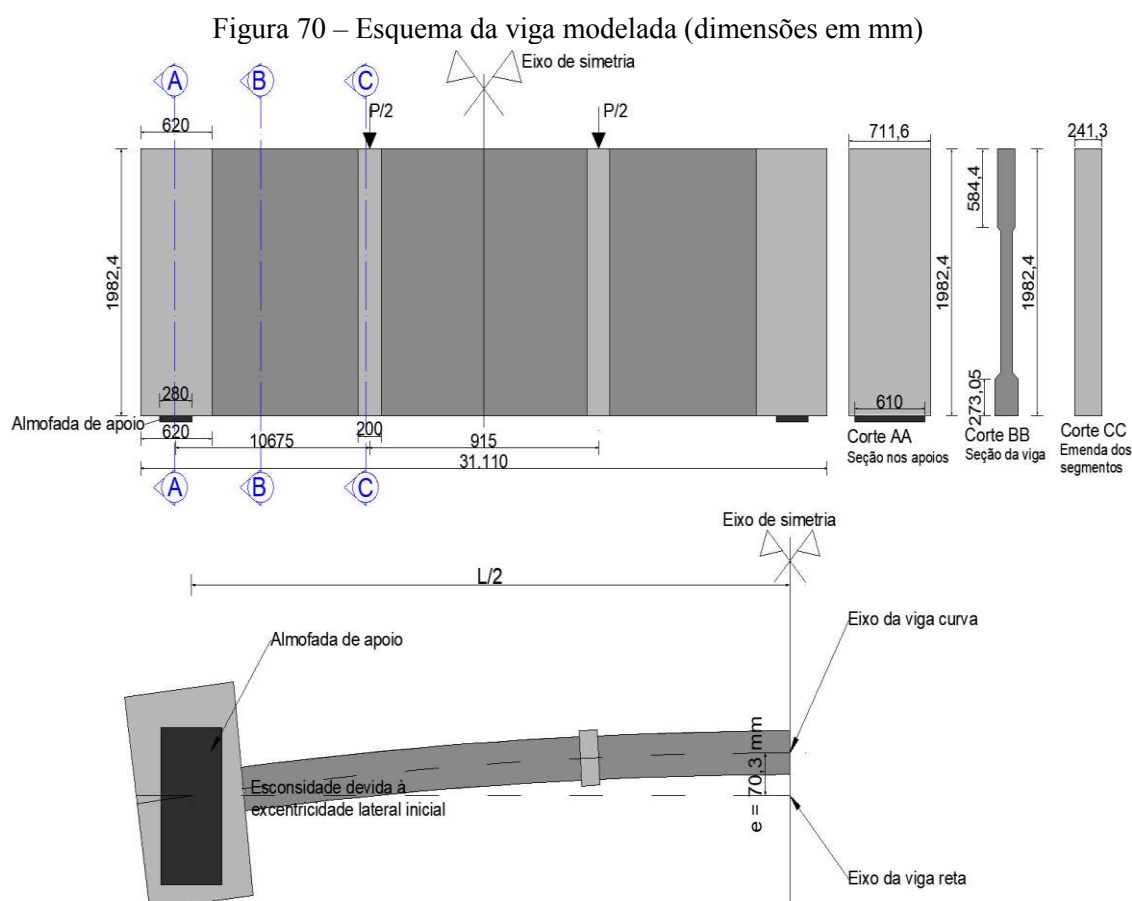
Como esperado, no ponto onde a instabilidade ocorre, a perda de contato entre a viga e o apoio é maior. Além disso, o centro da resultante na almofada também se desloca, alterando a rigidez à rotação da almofada de apoio. Portanto, deve-se obter valores de rigidez à rotação

levando-se em conta a excentricidade lateral inicial para obter melhor precisão na determinação da carga limite de tombamento.

## 4.2.2 Modelagem da viga de Consolazio e Hamilton (2012)

### 4.2.2.1 Considerações sobre as variáveis e análise de malha

A viga ensaiada por Consolazio e Hamilton (2012) também foi modelada e foram comparados os valores de carga limite de instabilidade e de deslocamento lateral no meio do vão. A viga possui vão de 31,11 metros e é apoiada sobre almofadas de apoio de elastômero do tipo A (Tabela 1). Os esforços aplicados sobre o modelo tratam-se de duas forças concentradas aplicadas nos terços dos vãos. Foi desconsiderada a contraflecha devida à protensão do modelo e foi utilizada uma excentricidade lateral inicial de 70,3 mm. O esquema da viga é mostrado na Figura 70.



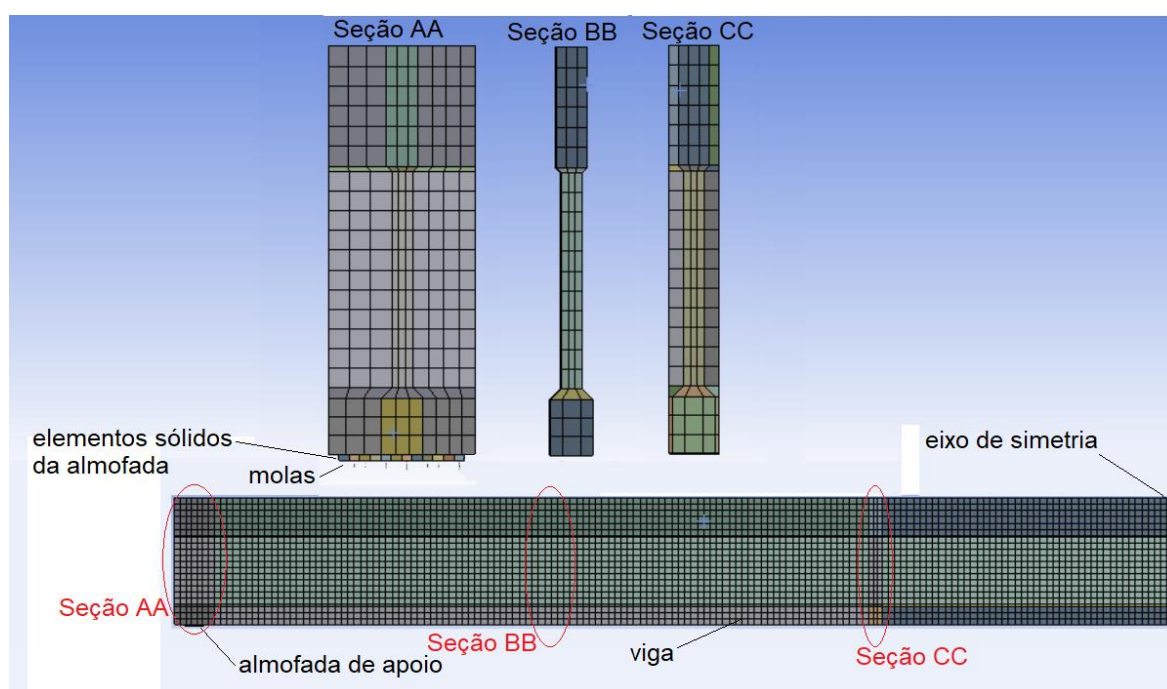
Fonte: Autor (2018)



As características do modelo da almofada são as mesmas descritas no Capítulo 3. Para o concreto, adotou-se comportamento elástico linear, com módulo de elasticidade de 35,4 GPa e coeficiente de Poisson de 0,25.

A malha utilizada em cada viga foi obtida de forma a manter bons resultados com o menor gasto computacional possível. Foram testadas configurações de malhas mais refinadas e mais robustas do que a malha adotada. Portanto, optou-se por utilizar a malha mostrada na Figura 71 para a viga ensaiada por Consolazio e Hamilton (2012).

Figura 71 – Malha da viga modelada

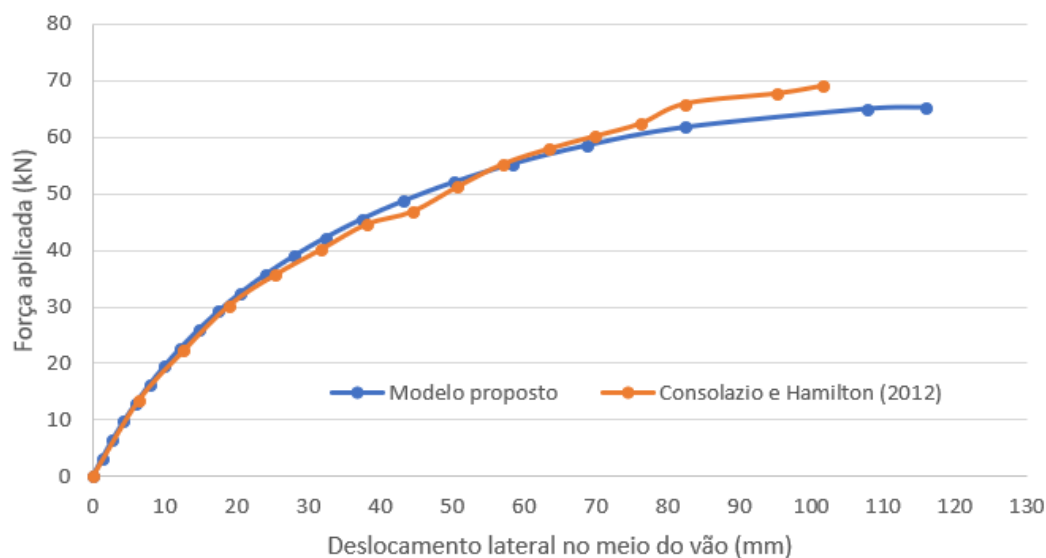


Fonte: Autor (2018)

#### 4.2.2.2 Resultados e discussão

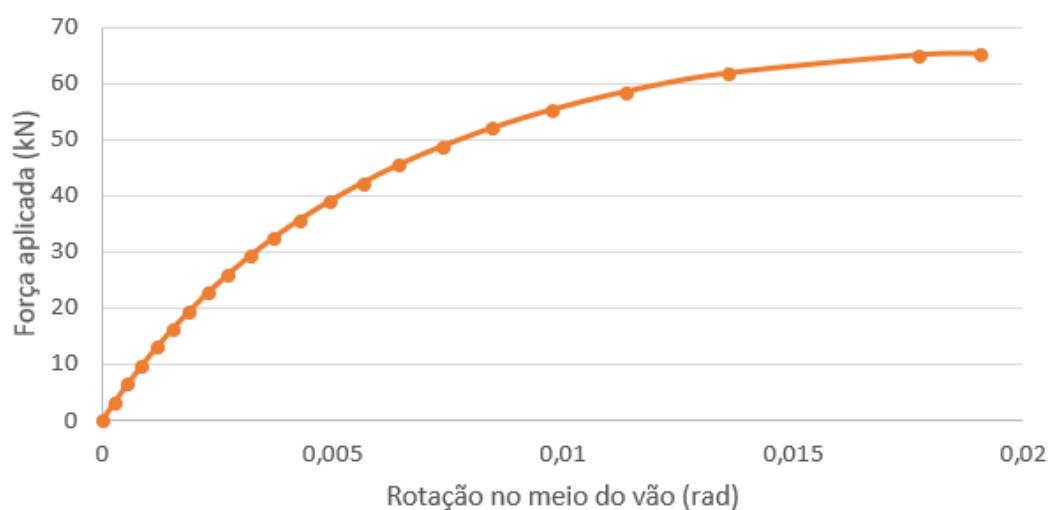
Com as condições de contorno e os carregamentos descritos anteriormente, é traçada a curva de Força aplicada  $\times$  deslocamento lateral no meio do vão para a viga modelada, que é comparada com uma das curvas experimentais de Consolazio e Hamilton (2012). A curva é mostrada na Figura 72. Em relação à rotação no meio do vão, a Figura 73 mostra a curva de Força aplicada  $\times$  rotação no meio do vão.

Figura 72 –Força × deslocamento lateral no meio do vão



Fonte: Autor (2018)

Figura 73 –Força aplicada × Rotação no meio do vão



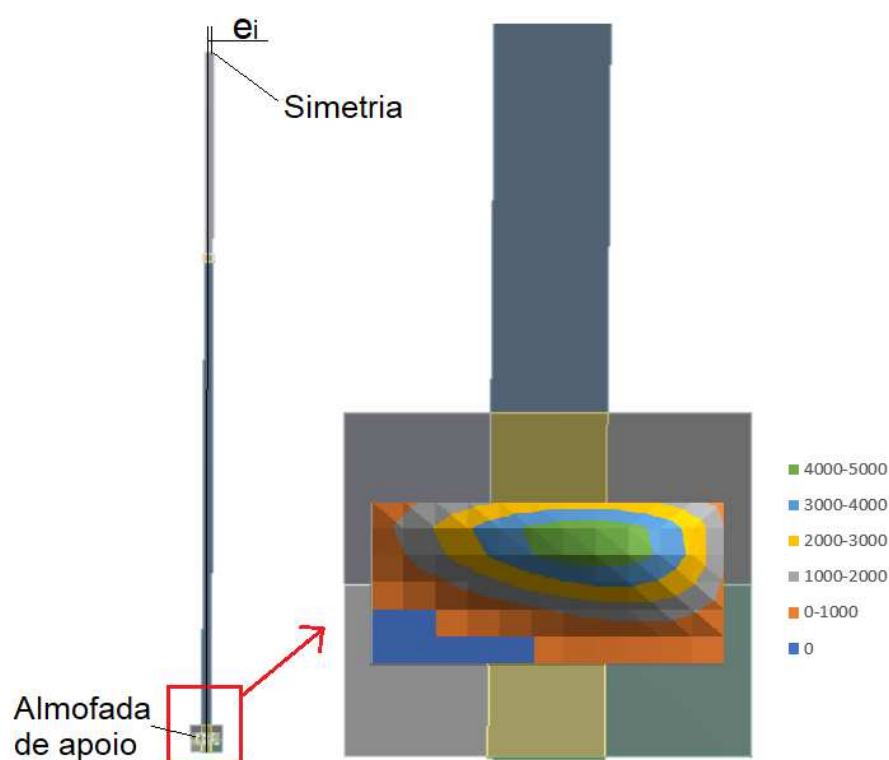
Fonte: Autor (2018)

Pelas Figura 72, observa-se que as curvas são praticamente coincidentes. Em relação à carga limite, adotando-se o valor onde o modelo perde equilíbrio e não encontra solução numérica, obtém-se uma carga limite de 65,3 kN, que, em comparação ao valor de Consolazio e Hamilton (2012) (68,5 kN), resulta numa diferença de 4,7%. Além disso, a Figura 73 mostra que a carga limite de 65,3 kN provoca uma rotação de 0,019 radianos, que é praticamente o valor limite de 0,020 radianos. Adotando-se o critério proposto por Consolazio e Hamilton (2012), de adotar como carga limite o ponto onde a inclinação da reta tangente é igual a 1/10

da inclinação inicial, obtém-se um valor de carga limite de 61,5 kN. Este valor, em comparação ao valor de Consolazio e Hamilton (2012), resulta em uma diferença de 10,2%.

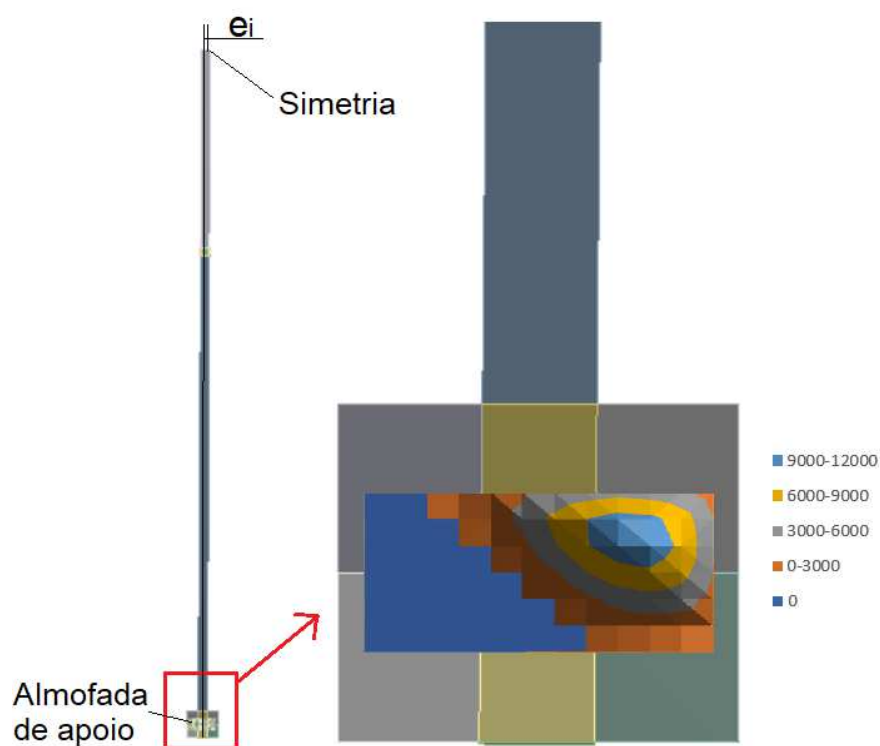
Na Figura 74 são mostrados os esforços resultantes nas molas após a aplicação do peso próprio e na Figura 75 são ilustradas as resultantes das molas no ponto o modelo não encontra equilíbrio. Estas resultantes são importantes nos cálculos de rigidez à rotação efetiva das almofadas que são apresentados posteriormente neste trabalho.

Figura 74 – Resultante nas molas devido ao peso próprio (resultante em N)



Fonte: Autor (2018)

Figura 75 – Resultante nas molas no ponto de carga limite



Fonte: Autor (2018)

Pela Figura 74, observa-se que houve uma pequena perda de contato entre a almofada e a viga. Já na situação de instabilidade mostrada na Figura 75 é visível que a perda de contato é significativa. Nota-se também um deslocamento da reação de apoio sobre a almofada, o que altera a rigidez ao giro da almofada conforme o carregamento é aplicado.

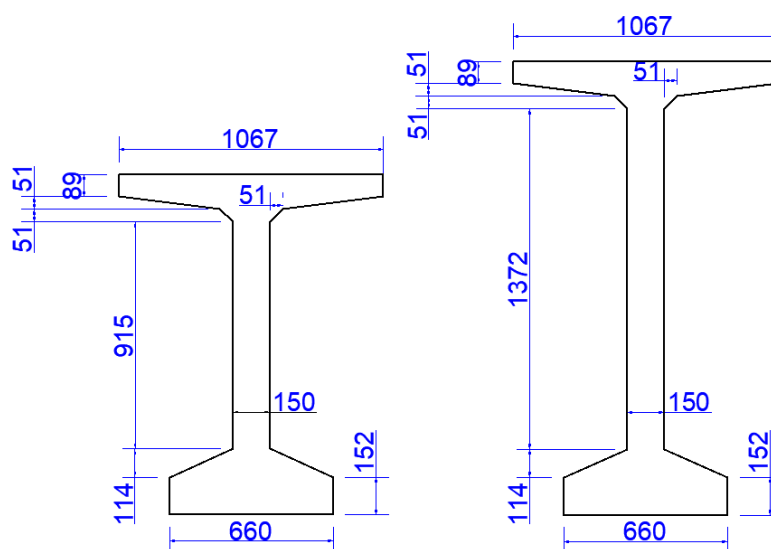
# CAPÍTULO 5

## ANÁLISES PARAMÉTRICAS

### 5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para avaliar a variação na força limite e a influência que a excentricidade lateral inicial e o comprimento do vão exercem sobre o levantamento da viga sobre a almofada, foram modeladas 32 vigas, sendo 16 vigas com a seção padrão da AASHTO BT-54 e 16 com a seção padrão BT-72. As dimensões das seções são mostradas na Figura 76.

Figura 76 – Seção das vigas BT-54 (esquerda) e BT-72 (direita) – dimensões em mm



Fonte: Autor (2018)

Foram considerados vãos de 25, 30, 35 e 40 metros e 4 excentricidades ( $L/1000$ ,  $L/700$ ,  $L/500$  e  $L/300$ , sendo  $L$  o vão da viga). Os valores das excentricidades para cada caso são mostrados na Tabela 18.

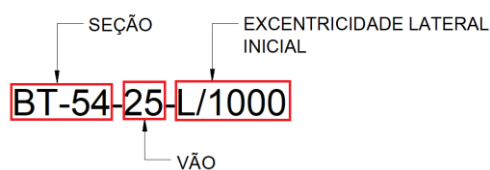
Tabela 18 – Variáveis adotadas para as vigas BT-54 e BT-72

		Excentricidade (mm)			
		L/1000	L/700	L/500	L/300
Vão (m)	25	25	35,7	50	83,3
	30	30	43,5	60	100
	35	35	50	70	116,7
	40	40	57,1	80	133,3

Fonte: Autor (2018)

A nomenclatura utilizada para representar as vigas é mostrada na Figura 77. Pela nomenclatura, a viga BT-54-25-L/1000 refere-se à viga de seção BT-54, com 25 metros de vão e excentricidade lateral inicial de L/1000, ou seja, 25 mm. Quando o terceiro termo, referente à excentricidade, não for citado, significa que, na análise, estão sendo consideradas as quatro excentricidades para a mesma viga com o mesmo vão.

Figura 77 – Nomenclatura utilizada



Fonte: Autor (2018)

Neste capítulo e no seguinte são consideradas duas situações nas análises de levantamento (“*lift off*”) e de rigidez das almofadas de apoio. A primeira situação, refere-se ao posicionamento da viga sobre as almofadas, ou seja, o único esforço considerado é o peso próprio. Esta situação é chamada de situação inicial. Na segunda situação, considera-se, além do peso próprio, a aplicação da força limite no meio do vão, que pode representar um fator de segurança ou outras ações externas sobre a viga. Esta situação é denominada como situação limite. Portanto, ao decorrer deste e dos próximos capítulos, as duas situações de carregamento são estas aqui descritas.

No modelo, considera-se que as vigas estão apoiadas sobre as almofadas de apoio do tipo B (Tabela 1). A rigidez vertical total da almofada utilizada na determinação das rigidezes longitudinais de cada mola componente da almofada foi a rigidez fornecida por Hurff (2010) de 1.040 kN/mm. A rigidez de cada mola foi obtida pela Equação 29. As características do modelo da almofada são as mesmas descritas no Capítulo 3.

Para o concreto, adotou-se comportamento elástico linear, com módulo de elasticidade de 30,8 GPa e coeficiente de Poisson de 0,22. A configuração da malha e a sequência de aplicação dos esforços são as mesmas utilizadas no capítulo 4.

Para cada combinação de variáveis, são desenhadas as curvas de Força  $\times$  Rotação no meio do vão e de Força  $\times$  Deslocamento lateral no meio do vão. A força limite para cada modelo é obtida como sendo a força em que a inclinação da reta tangente ao ponto da curva é 1/10 da inclinação inicial, conforme Consolazio e Hamilton (2012). Com os valores das forças limites, são desenhados os gráficos de Força limite  $\times$  Vão.

São apresentadas também as forças resultantes sobre as almofadas de apoio para cada caso, e é mostrada também a perda de contato entre a viga e a almofada para cada combinação de variáveis considerando as duas situações de carregamento descritas anteriormente. Esta perda também é mostrada em valores percentuais. Com a força resultante e a área carregada, calcula-se a tensão de compressão sobre a almofada para comparar aos valores limites da ABNT NBR 9062:2017.

Como a ocorrência do levantamento também depende da força da compressão inicial da almofada de apoio, também é feita uma avaliação do levantamento considerando uma variação na rigidez à compressão inicial da almofada, que altera a rigidez longitudinal de cada mola componente da almofada. Para avaliar a influência da rigidez à compressão são consideradas, além da rigidez de 1042 kN/mm, outras duas rigidezes verticais para a almofada tipo B: uma de 800 kN/mm e outra de 1300 kN/mm.

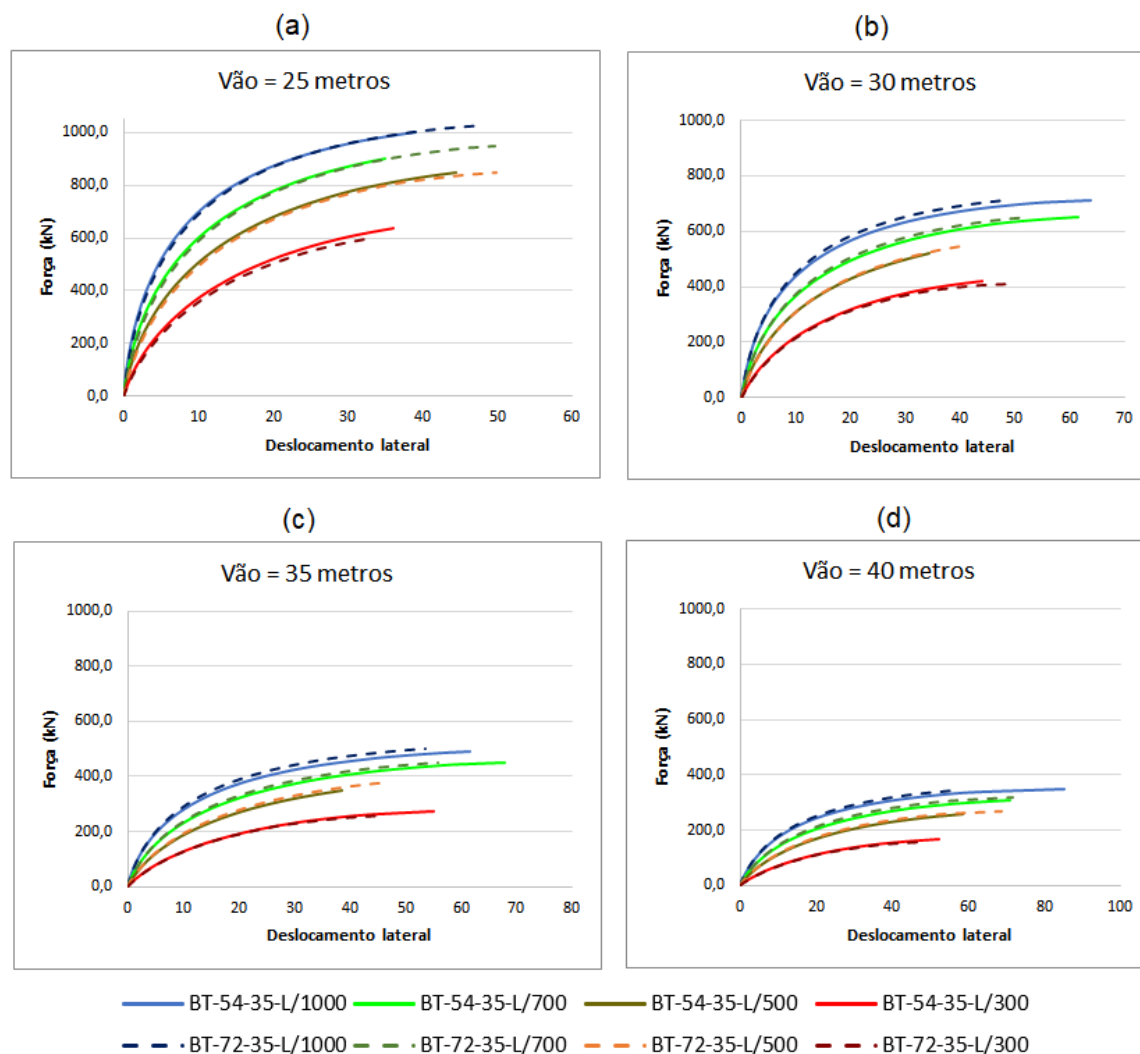
## **5.2 RESULTADOS E DISCUSSÃO**

### **5.2.1 Avaliação do deslocamento lateral e da rotação no meio do vão**

Inicialmente, são desenhados os gráficos de Força  $\times$  Deslocamento lateral no meio do vão, que fornecem os valores de força limite para cada configuração do modelo, e de Força  $\times$  Rotação no meio do vão, que permite avaliar as máximas rotações para as vigas em estudo. Vale ressaltar que essas curvas consideram somente a força aplicada no meio do vão, ou seja, os deslocamentos e as rotações provocados pelo peso próprio são desconsiderados nestes gráficos

A Figura 78 mostra os gráficos de Força  $\times$  Deslocamento lateral no meio do vão. As curvas foram divididas por vão, sendo que a Figura 78a refere-se à viga com 25 m de vão, a Figura 78b, à viga com 30 m, a Figura 78c, à viga de 35 m e, por fim, a Figura 78d, que representa a viga com 40 m de vão.

Figura 78 – Gráfico de Força  $\times$  Deslocamento lateral no meio do vão



Fonte: Autor (2018)

Pela Figura 78, observa-se que, para os quatro vãos adotados e para as duas seções analisadas, a mudança da seção da viga não influencia significativamente no deslocamento lateral no meio do vão, apesar das curvas da BT-72 mostrarem um desempenho levemente melhor. Isto ocorre pelo fato do momento de inércia lateral das duas seções não variarem entre si de forma considerável (Tabela 19), pois a única diferença entre as duas seções é a altura da viga, mais especificamente a altura da alma, que influencia pouco no momento de



inércia lateral. Observa-se também que, conforme a excentricidade aumenta, maior é o deslocamento lateral para a mesma força aplicada no meio do vão.

Tabela 19 - Momento de inércia das vigas

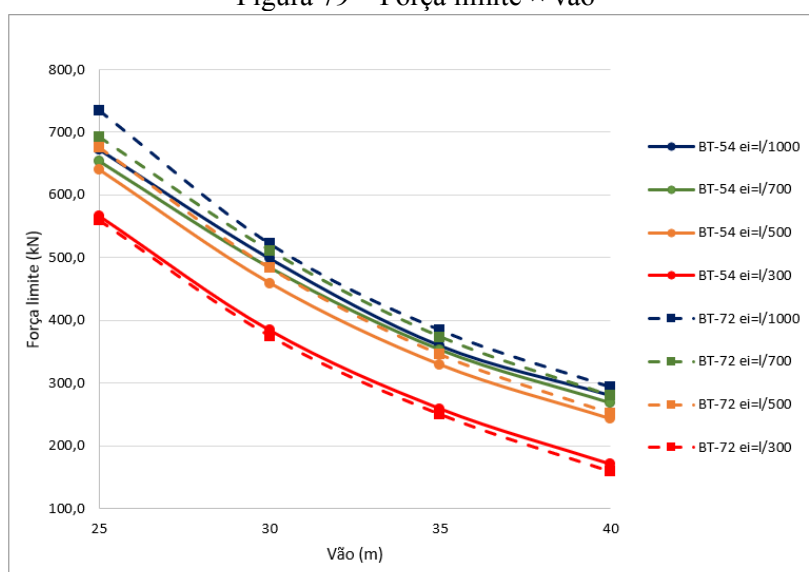
	Momento de inércia (mm <sup>4</sup> )	Diferença (%)
<b>Viga BT-54</b>	1,551E+10	0,829%
<b>Viga BT-72</b>	1,564E+10	

Fonte: Autor (2018)

A força limite é obtida pelas curvas de Força × Deslocamento lateral no meio do vão, conforme a inclinação da reta tangente à curva. A Figura 79 e a Quando comparadas as curvas de força limite × vão para as duas seções diferentes, com mesmo vão e mesma excentricidade, nota-se que as vigas com a seção BT-72 possuem uma força limite maior do que as vigas com seção BT-54. Porém, para as vigas com excentricidade de  $L/300$ , a diferença entre as forças limites são mínimas, o que indica que esta excentricidade é bastante desfavorável e que, por isso, a mudança na seção não influencia na força limite.

Tabela 20 mostram a força limite para cada configuração de seção, vão e excentricidade das vigas. Para a mesma excentricidade, observa-se que a força limite diminui conforme aumenta o vão. A força limite também diminui conforme aumenta a excentricidade lateral inicial, tendo as vigas com excentricidade de  $L/300$  valores de força limite bem abaixo das demais.

Figura 79 – Força limite × vão



Fonte: Autor (2018)

Quando comparadas as curvas de força limite  $\times$  vão para as duas seções diferentes, com mesmo vão e mesma excentricidade, nota-se que as vigas com a seção BT-72 possuem uma força limite maior do que as vigas com seção BT-54. Porém, para as vigas com excentricidade de  $L/300$ , a diferença entre as forças limites são mínimas, o que indica que esta excentricidade é bastante desfavorável e que, por isso, a mudança na seção não influencia na força limite.

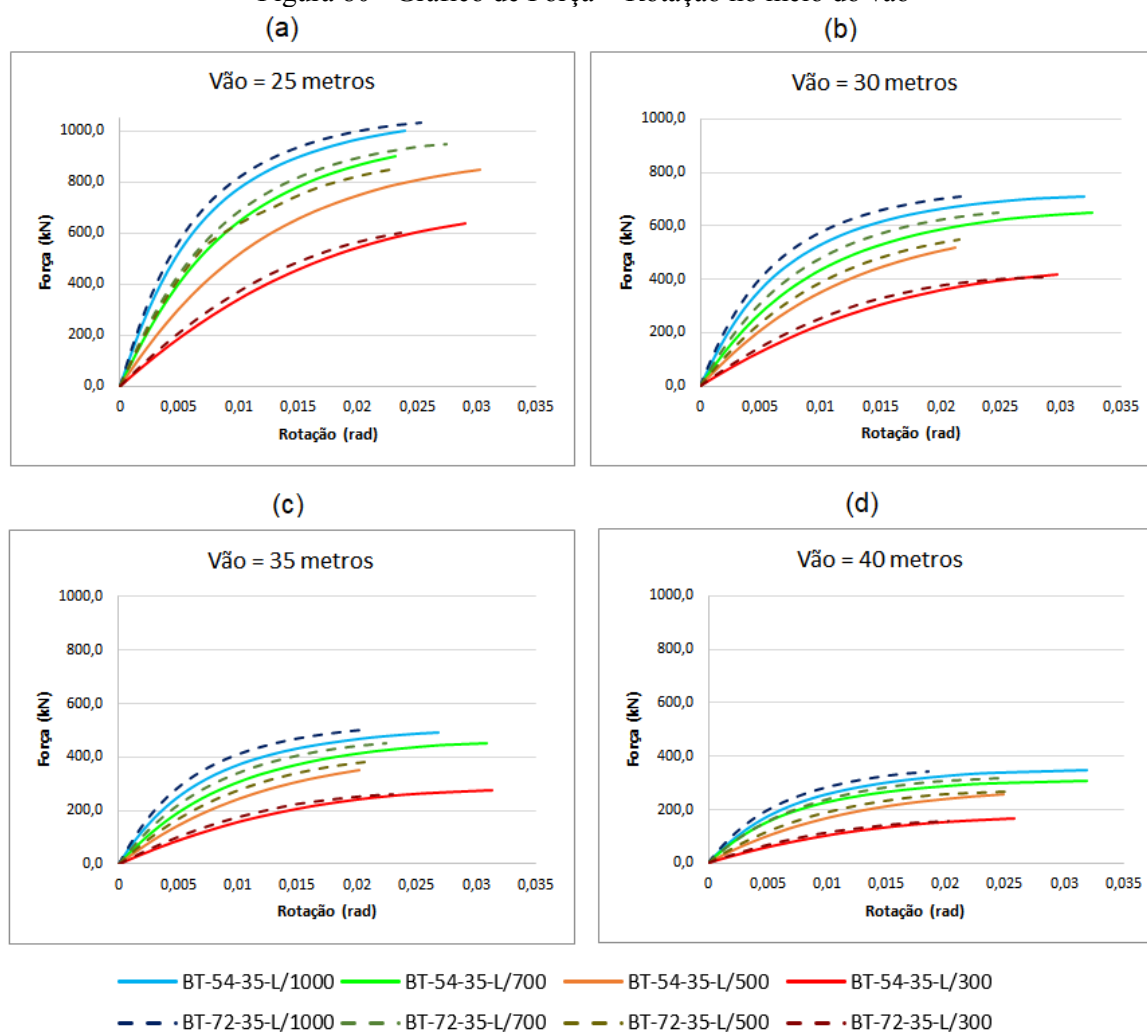
Tabela 20 - Força limite para cada configuração de seção, vão e excentricidade

BT-54			BT-72		
Vão (m)	Excentricidade	Força limite (kN)	Vão (m)	Excentricidade	Força limite (kN)
25	L/1000	672,7	25	L/1000	735,0
	L/700	653,3		L/700	691,7
	L/500	640,0		L/500	675,0
	L/300	566,7		L/300	560,0
30	L/1000	498,7	30	L/1000	522,7
	L/700	484,0		L/700	511,0
	L/500	459,3		L/500	483,3
	L/300	384,0		L/300	375,0
35	L/1000	359,3	35	L/1000	385,0
	L/700	353,3		L/700	373,3
	L/500	329,0		L/500	345,8
	L/300	258,5		L/300	249,6
40	L/1000	280,0	40	L/1000	294,3
	L/700	268,7		L/700	279,5
	L/500	242,7		L/500	252,0
	L/300	170,0		L/300	158,2

Fonte: Autor (2018)

A Figura 80 mostra as curvas de Força  $\times$  Rotação no meio do vão para as vigas analisadas e é dividida em quatro gráficos, em que cada um representa o comportamento para um vão diferente.

Na Figura 80 observa-se que, para todos os vãos, as curvas de Força  $\times$  Rotação no meio do vão com melhor comportamento referem-se à viga com seção BT-72 e excentricidade lateral inicial de  $L/1000$ , sendo  $L$  o vão da viga. As vigas com pior comportamento, são as BT-54 com excentricidade de  $L/300$ . Em relação à rotação, a mudança de seção influencia o comportamento da viga de maneira mais destacada.

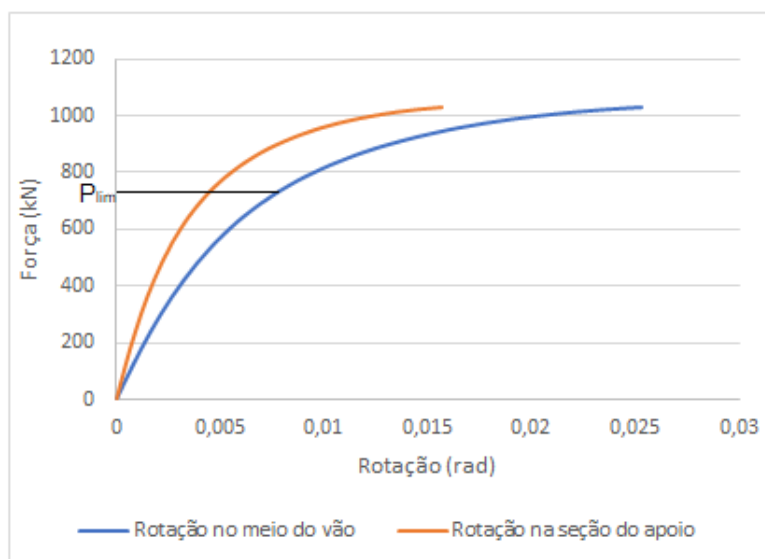
Figura 80 - Gráfico de Força  $\times$  Rotação no meio do vão

Fonte: Autor (2018)

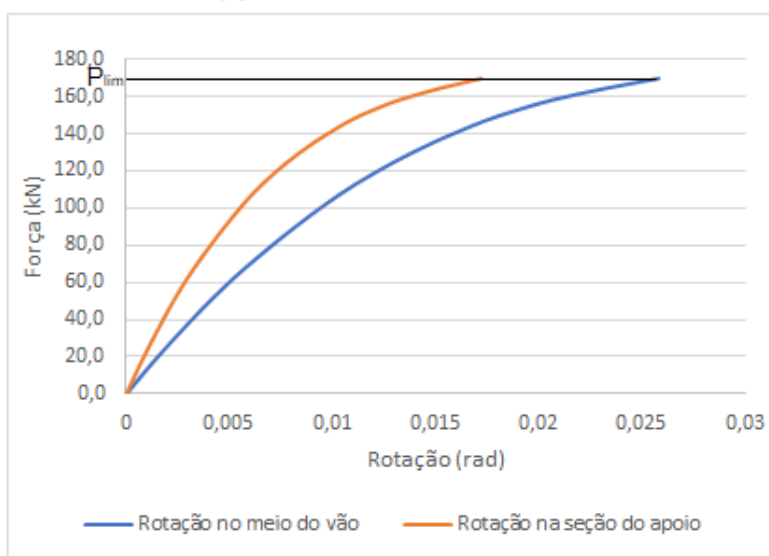
A Figura 81 mostra as curvas de Força  $\times$  Rotação no meio do vão e nos apoios para a viga com melhor comportamento (BT-72-25-L/1000, que refere-se à BT-72, com 25 m de vão e excentricidade lateral inicial de L/1000) e para a viga BT-54-40-L/300 (BT-54, vão de 40 m e excentricidade de L/300). A rotação no apoio representa o giro de corpo rígido da viga e a diferença entre a rotação no meio do vão e a rotação do apoio, representa o giro por torção da viga. Na Figura 81a, a rotação de corpo rígido representa aproximadamente 57,5% do giro total no meio do vão da viga BT-72-25-L/1000 no ponto onde é aplicada a força limite. Na Figura 81b, o giro de corpo rígido representa 66,7% da rotação no meio do vão da viga. Portanto, conclui-se que o giro por torção, que representa em média 40% do giro da viga, exerce influência sobre o giro total da viga que pode levar a falhas por tombamento.

Figura 81 – Curvas de Força  $\times$  Rotação

(a) BT-72-25-L/1000



(b) BT-54-40-L/300



Fonte: Autor (2018)

Deve-se destacar ainda o fato de que o concreto foi considerado com comportamento elástico linear. Caso as tensões ultrapassem o limite de tração do concreto, haveria a formação de fissuras e consequente redução da inércia da seção, o que levaria a giros maiores. Porém, há ainda o fato de que as vigas, principalmente as mais esbeltas, são protendidas e considera-se que elas não fissurem nas fases de pré-serviço. Esta protensão minimizaria, portanto, as probabilidades de fissuração do concreto.

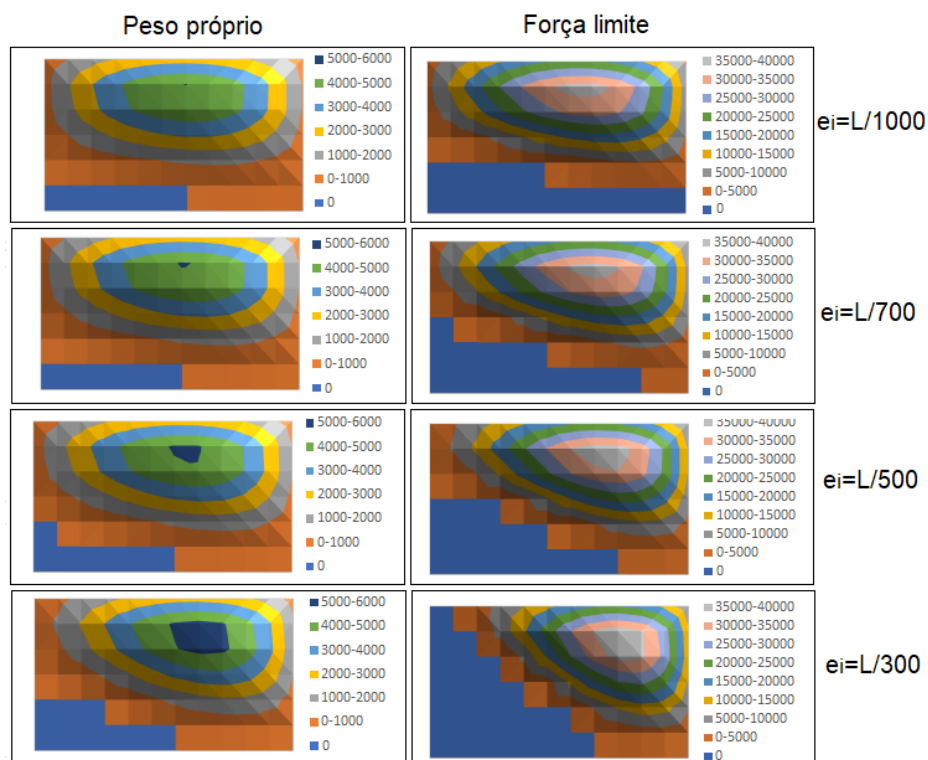
### 5.2.2 Avaliação do levantamento da viga sobre as almofadas

Nas análises de instabilidade lateral, é de grande importância a avaliação da ocorrência do levantamento (“*lift off*”) da viga sobre as almofadas, pois este levantamento é o responsável pela não-linearidade geométrica da almofada, que pode resultar numa rigidez ao giro da almofada inferior à necessária para garantir o equilíbrio da viga durante as fases de pré-serviço.

Para avaliar este comportamento, as almofadas de apoio foram modeladas como sendo um conjunto de molas, sendo que as especificidades do modelo das almofadas foram mostradas de maneira detalhada no capítulo referente às almofadas. Vale ressaltar que as molas do modelo trabalham somente à compressão e, portanto, as molas tracionadas apresentam reação igual a zero e representam a região onde ocorre o levantamento da viga.

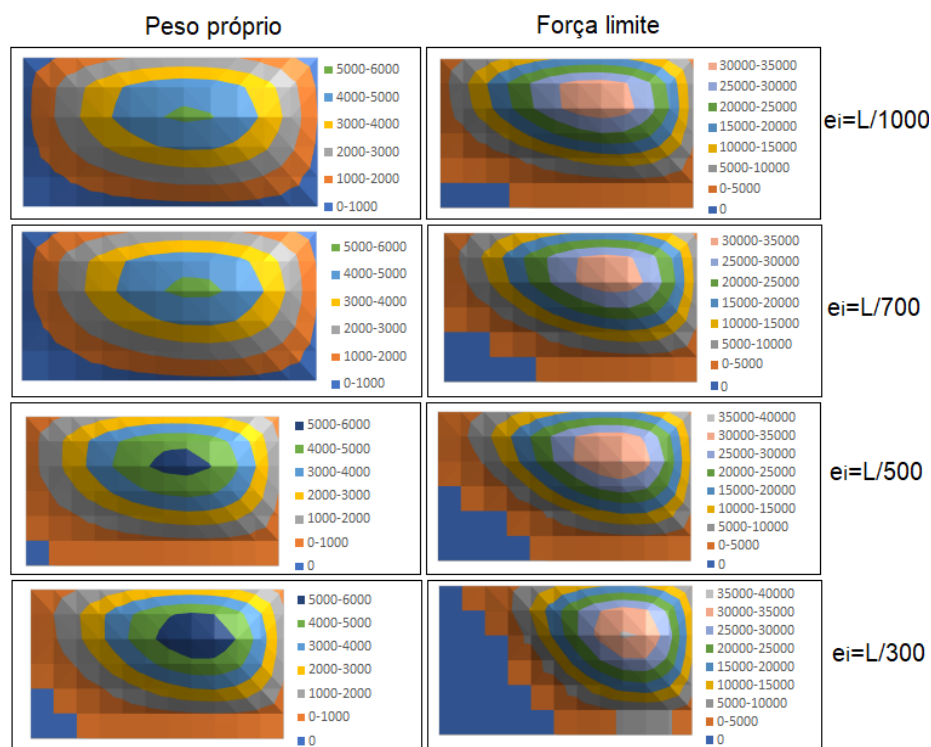
O levantamento foi analisado nas duas situações descritas anteriormente (situação inicial e limite). Da Figura 82 à Figura 89 são mostradas as almofadas para as duas seções padrão da AASHTO nas duas situações consideradas. As Figura 82 e Figura 83 referem-se às vigas BT-54 e BT-72 com 25 m de vão, respectivamente. Na mesma sequência (BT-54 e BT-72), as Figura 84 e Figura 85 referem-se ao vão de 30 m, as Figura 86 e Figura 87, ao vão de 35 m e as Figura 88 e Figura 89 referem-se ao vão de 40 m.

Figura 82 – Carregamento na almofada da viga BT-54-25



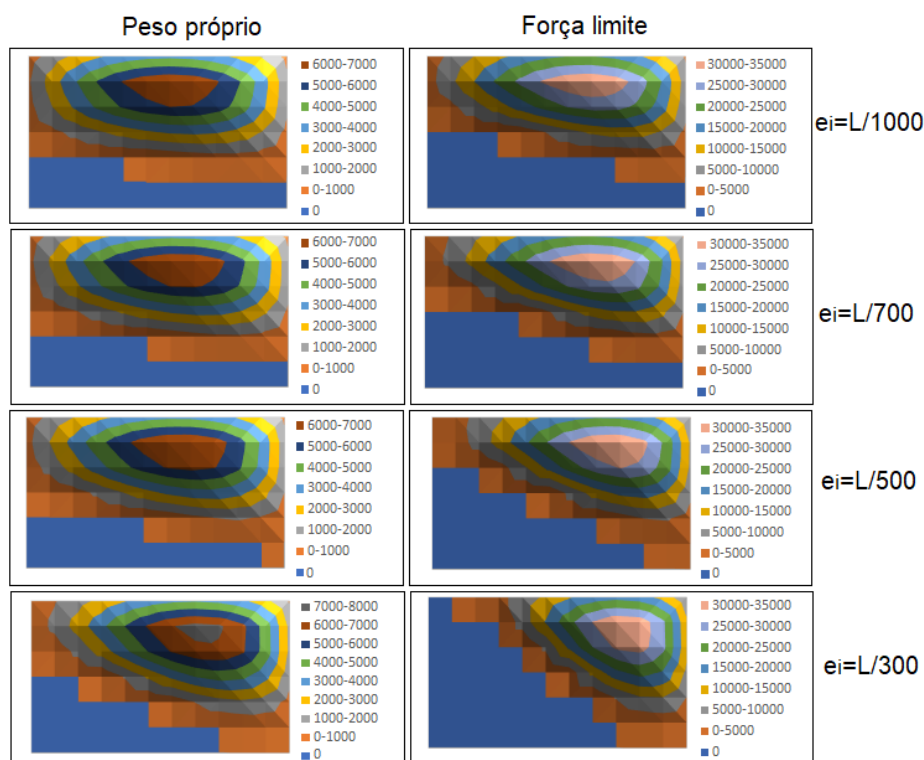
Fonte: Autor (2018)

Figura 83 – Carregamento na almofada da viga BT-72-25



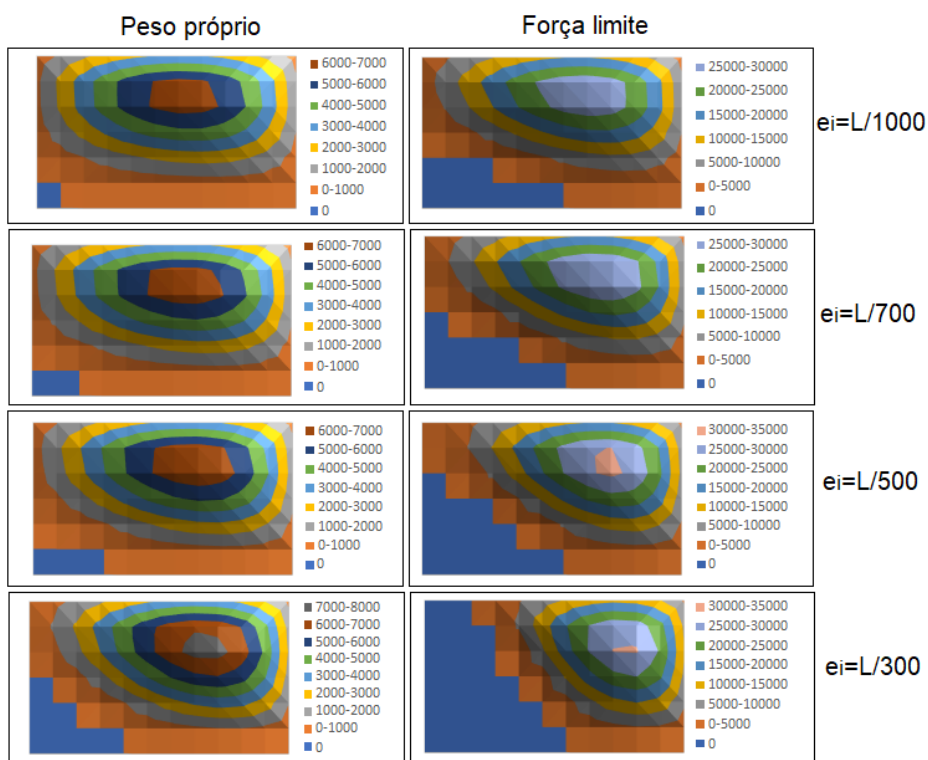
Fonte: Autor (2018)

Figura 84 – Carregamento na almofada da viga BT-54-30



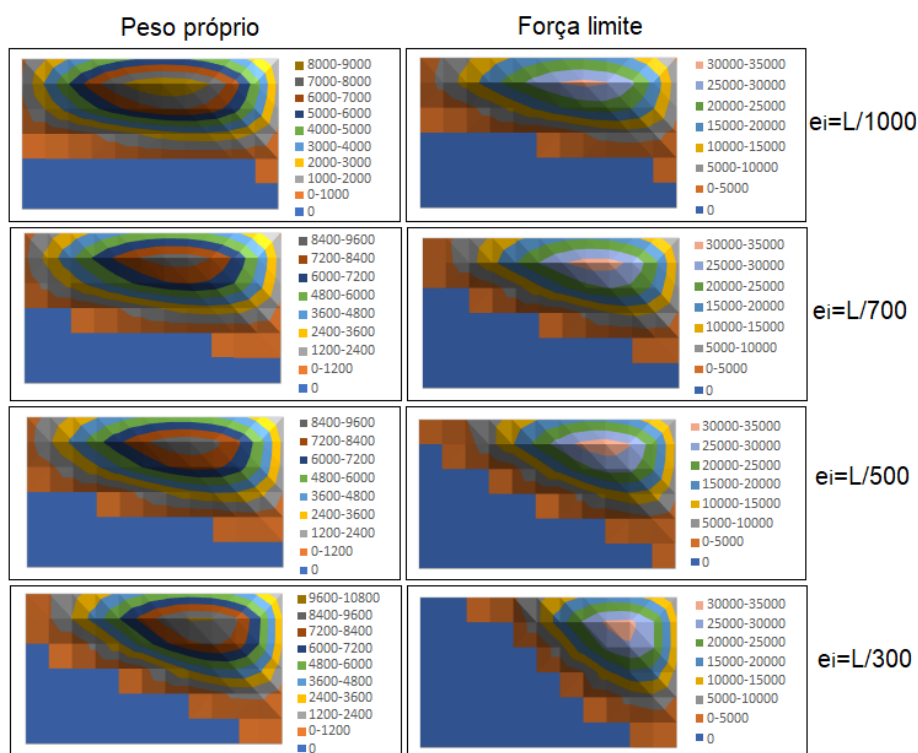
Fonte: Autor (2018)

Figura 85 – Carregamento na almofada da viga BT-72-30



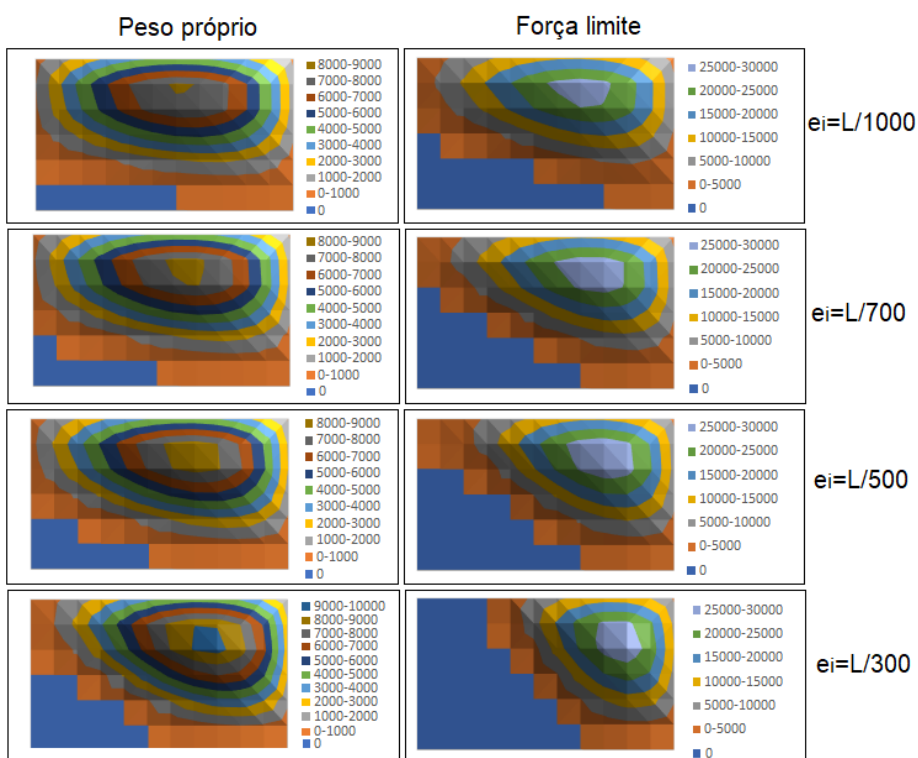
Fonte: Autor (2018)

Figura 86 – Carregamento na almofada da viga BT-54-35



Fonte: Autor (2018)

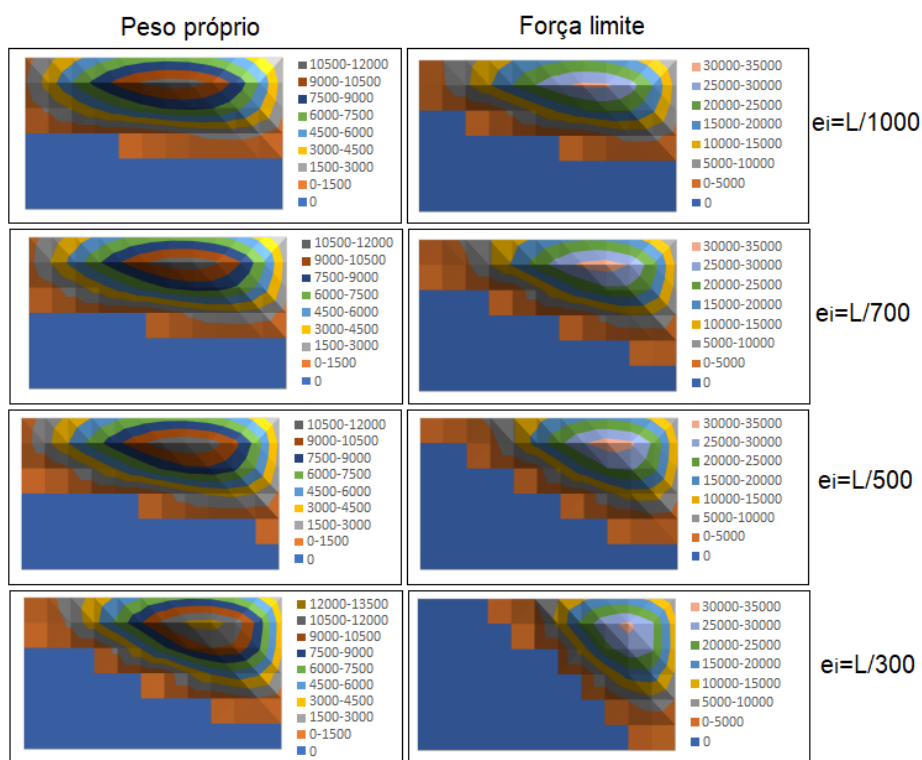
Figura 87 – Carregamento na almofada da viga BT-72-35



Fonte: Autor (2018)

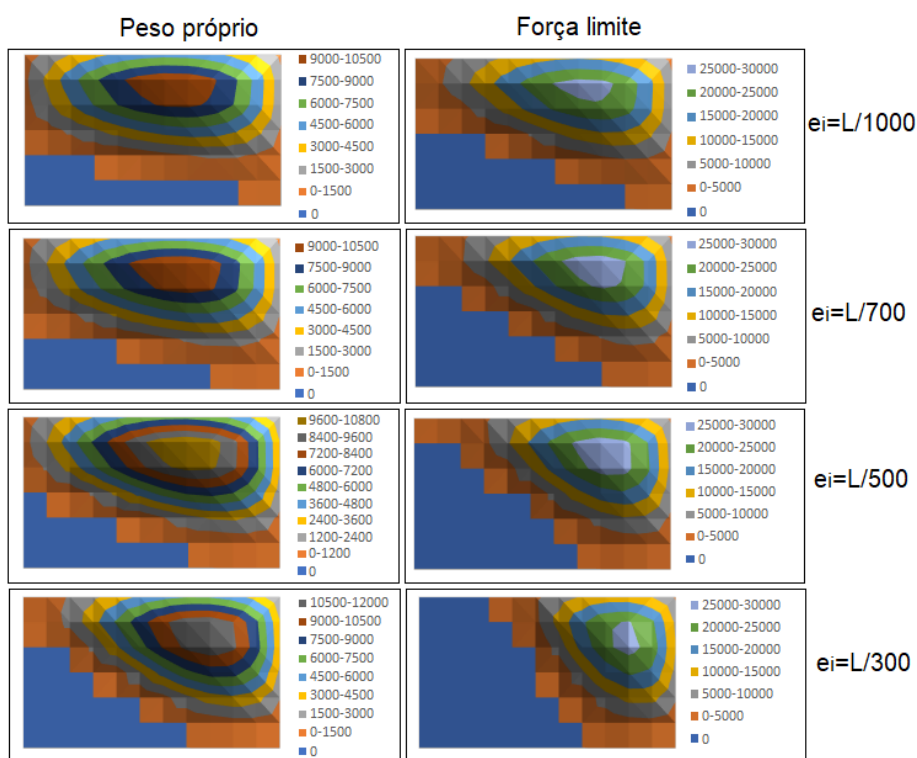


Figura 88 – Carregamento na almofada da viga BT-54-40



Fonte: Autor (2018)

Figura 89 – Carregamento na almofada da viga BT-72-40



Fonte: Autor (2018)

Analisando as figuras, observa-se que somente para a viga BT-72 com vão de 25 metros e excentricidade lateral inicial de  $L/1000$  e  $L/700$  não houve alguma perda de contato entre a almofada e a viga. As figuras também mostram a variação das resultantes nas molas e é possível observar que a reação resultante dos carregamentos impostos não se encontra no centro da almofada, o que é esperado devido às excentricidades laterais iniciais. Estes deslocamentos da reação resultante provocam momentos sobre a almofada que resultam em variações nas rigidezes ao giro. Isto será melhor detalhado no capítulo seguinte, que trata somente da rigidez ao giro das almofadas de apoio.

Outra consequência da perda de contato é que a força aplicada na almofada já não é distribuída em toda a área da almofada, o que resulta em tensões de compressão maiores sobre a área carregada das almofadas, e este carregamento não deve ultrapassar os limites impostos pela norma ABNT NBR 9062:2017. A força aplicada sobre a almofada refere-se ao peso próprio, na situação inicial, e ao peso próprio somado à força limite de cada caso.

Em relação ao limite de tensão de compressão, conforme a ABNT NBR 9062:2017, a tensão máxima para a almofada de apoio, cujas dimensões são  $35,6 \times 61,0$  cm, é de 15,0 MPa. A Tabela 21 mostra os valores das perdas de contato devido ao peso próprio e a tensão de compressão resultante que atua sobre a região carregada da almofada. Por fim, a Tabela 22 mostra a perda de contato devido ao peso próprio e a força limite e as tensões de compressão atuantes nas almofadas.

Tabela 21 - Tensão de compressão resultante na almofada

Viga	Perda de contato (peso próprio)	Área restante (cm <sup>2</sup> )	Peso próprio sobre a almofada (kN)	Tensão de compressão com peso próprio (MPa)
BT-54-25-L/1000	9,72%	1956,99	132,6	0,68
BT-54-25-L/700	11,11%	1926,88	132,6	0,69
BT-54-25-L/500	12,50%	1896,77	132,6	0,70
BT-54-25-L/300	16,67%	1806,45	132,6	0,73
BT-54-30-L/1000	23,61%	1655,91	158,6	0,96
BT-54-30-L/700	25,00%	1625,80	158,6	0,98
BT-54-30-L/500	25,00%	1625,80	158,6	0,98
BT-54-30-L/300	26,39%	1595,70	158,6	0,99
BT-54-35-L/1000	33,33%	1445,16	184,8	1,28
BT-54-35-L/700	33,33%	1445,16	184,8	1,28
BT-54-35-L/500	34,72%	1415,05	184,8	1,31
BT-54-35-L/300	34,72%	1415,05	184,8	1,31
BT-54-40-L/1000	40,28%	1294,62	211,3	1,63
BT-54-40-L/700	41,67%	1264,51	211,3	1,67
BT-54-40-L/500	41,67%	1264,51	211,3	1,67
BT-54-40-L/300	44,44%	1204,30	211,3	1,75
BT-72-25-L/1000	0,00%	2167,74	154,1	0,71
BT-72-25-L/700	0,00%	2167,74	154,1	0,71
BT-72-25-L/500	1,39%	2137,63	154,1	0,72
BT-72-25-L/300	6,94%	2017,20	154,1	0,76
BT-72-30-L/1000	2,78%	2107,52	184,2	0,87
BT-72-30-L/700	4,17%	2077,42	184,2	0,89
BT-72-30-L/500	6,94%	2017,20	184,2	0,91
BT-72-30-L/300	13,89%	1866,66	184,2	0,99
BT-72-35-L/1000	9,72%	1956,99	214,5	1,10
BT-72-35-L/700	11,11%	1926,88	214,5	1,11
BT-72-35-L/500	12,50%	1896,77	214,5	1,13
BT-72-35-L/300	20,83%	1716,13	214,5	1,25
BT-72-40-L/1000	19,44%	1746,23	245,0	1,40
BT-72-40-L/700	19,44%	1746,23	245,0	1,40
BT-72-40-L/500	20,83%	1716,13	245,0	1,43
BT-72-40-L/300	30,56%	1505,37	245,0	1,63

Fonte: Autor (2018)

Tabela 22 - Tensão de compressão resultante na almofada

Viga	Peso próprio da almofada (kN)	Perda de contato (carga limite)	Área restante (cm²)	Força limite (kN)	Força total aplicada sobre a almofada (kN)	Tensão de compressão com força total (MPa)
BT-54-25-L/1000	132,6	26,39%	1595,70	672,7	805,3	5,05
BT-54-25-L/700	132,6	25,00%	1625,80	653,3	786,0	4,83
BT-54-25-L/500	132,6	27,78%	1565,59	640,0	772,6	4,94
BT-54-25-L/300	132,6	37,50%	1354,84	566,7	699,3	5,16
BT-54-30-L/1000	158,6	34,72%	1415,05	498,7	657,3	4,65
BT-54-30-L/700	158,6	36,11%	1384,94	484,0	642,6	4,64
BT-54-30-L/500	158,6	36,11%	1384,94	459,3	618,0	4,46
BT-54-30-L/300	158,6	47,22%	1144,08	384,0	542,6	4,74
BT-54-35-L/1000	184,8	41,67%	1264,51	359,3	544,1	4,30
BT-54-35-L/700	184,8	43,06%	1234,41	353,3	538,1	4,36
BT-54-35-L/500	184,8	44,44%	1204,30	329,0	513,8	4,27
BT-54-35-L/300	184,8	54,17%	993,55	258,5	443,3	4,46
BT-54-40-L/1000	211,3	47,22%	1144,08	280,0	491,3	4,29
BT-54-40-L/700	211,3	50,00%	1083,87	268,7	479,9	4,43
BT-54-40-L/500	211,3	51,39%	1053,76	242,7	453,9	4,31
BT-54-40-L/300	211,3	59,72%	873,12	170,0	381,3	4,37
BT-72-25-L/1000	154,1	6,94%	2017,20	735,0	889,1	4,41
BT-72-25-L/700	154,1	12,50%	1896,77	691,7	845,7	4,46
BT-72-25-L/500	154,1	16,67%	1806,45	675,0	829,0	4,59
BT-72-25-L/300	154,1	33,33%	1445,16	560,0	714,1	4,94
BT-72-30-L/1000	184,2	15,28%	1836,56	522,7	706,9	3,85
BT-72-30-L/700	184,2	19,44%	1746,23	511,0	695,2	3,98
BT-72-30-L/500	184,2	26,39%	1595,70	483,3	667,6	4,18
BT-72-30-L/300	184,2	40,28%	1294,62	375,0	559,2	4,32
BT-72-35-L/1000	214,5	23,61%	1655,91	385,0	599,5	3,62
BT-72-35-L/700	214,5	27,78%	1565,59	373,3	587,8	3,75
BT-72-35-L/500	214,5	31,94%	1475,27	345,8	560,3	3,80
BT-72-35-L/300	214,5	47,22%	1144,08	249,6	464,1	4,06
BT-72-40-L/1000	245,0	30,56%	1505,37	294,3	539,3	3,58
BT-72-40-L/700	245,0	34,72%	1415,05	279,5	524,5	3,71
BT-72-40-L/500	245,0	40,28%	1294,62	252,0	497,0	3,84
BT-72-40-L/300	245,0	50,00%	1083,87	158,2	403,2	3,72

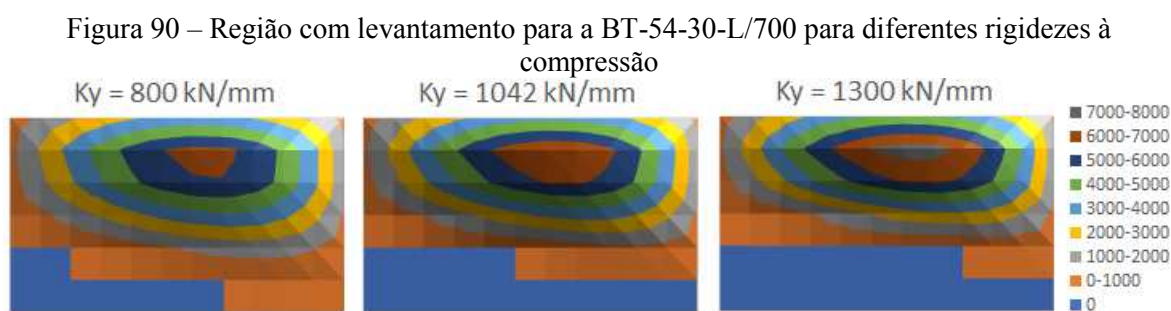
Fonte: Autor (2018)

Pelas Tabelas 21 e 22 observa-se que o levantamento provoca uma redução significativa da área carregada em alguns casos, chegando à 44,44% de redução da área devido ao peso próprio e 59,72% de redução devido ao peso próprio e à força limite. Em nenhum caso a tensão de compressão atinge o limite imposto pela ABNT NBR 9062:2017.

A maior tensão de compressão referente ao peso próprio é de 1,75 MPa e refere-se à viga BT-54-40-L/300. Considerando somente o peso próprio, a tensão de compressão tende a subir, conforme aumenta o vão e a excentricidade. Isto ocorre porque, para um mesmo vão, a força devida ao peso próprio é constante e o aumento da excentricidade diminui a área carregada.

Ao incluir a força limite, a maior tensão de compressão é de 5,16 MPa e refere-se à viga BT-54-25-L/300. Nesta situação, a tensão não tende a aumentar necessariamente com o aumento do vão e da excentricidade porque, nas situações onde a perda de contato é elevada, o que diminui a área, a força limite tem um valor consideravelmente pequeno, o que diminui também a força sobre a almofada. Este valor consideravelmente menor de força limite é resultado justamente da não linearidade geométrica da almofada que leva ao tombamento da viga com baixos carregamentos impostos.

Finalmente, é avaliada a ocorrência de levantamento considerando a variação na rigidez à compressão ( $K_y$ ) das almofadas. A Figura 90 mostra os valores das reações sobre a almofada de apoio do tipo B, para a viga BT-54-30-L/700. Na região em azul, na parte inferior da almofada, alguns valores das resultantes nas molas são iguais a zero, o que representa a região onde houve o levantamento da viga sobre a almofada.



Fonte: Autor (2018)

Analisando a Figura 90, nota-se que a rigidez vertical, que resulta na compressão inicial sobre a almofada, influencia no levantamento da viga. Percebe-se que uma rigidez à compressão maior não resulta em uma situação mais favorável em relação à estabilidade da viga. Em percentual, o levantamento da viga sobre a almofada com rigidez de 800 kN/mm é de 15,3%. Em relação à almofada com rigidez de 1042 kN/mm, esta perda de contato é de 25% e em relação à rigidez de 1300 kN/mm, a perda de contato foi de 30,6%. Ao variar a

rigidez de 800 kN/mm para 1300 kN/mm, a perda de contato passou de 15,3% para 30,6%, exatamente o dobro de levantamento. Portanto, ao dimensionar aparelhos de apoio, deve-se considerar uma rigidez à compressão suficiente para permitir um maior giro da viga sem que haja nem levantamento e nem um afundamento excessivo.

# CAPÍTULO 6

## ESTUDO SOBRE RIGIDEZ EFETIVA DAS ALMOFADAS

### 6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo, são feitas análises em relação à rigidez ao giro das almofadas de apoio. A rigidez ao giro é importante na avaliação da instabilidade lateral das vigas, quando a única restrição ao giro é fornecida pelas almofadas de apoio. São feitas análises da variação da rigidez considerando a aplicação da força concentrada no meio do vão. Também é avaliada a redução da rigidez com o aumento da excentricidade no meio do vão.

As vigas utilizadas nestas análises são as mesmas utilizadas no capítulo 5, considerando as mesmas seções (BT-54 e BT-72) e combinações de vãos e excentricidades. Para o concreto, adotou-se comportamento elástico linear, com módulo de elasticidade de 30,8 GPa, coeficiente de Poisson de 0,22 e resistência à compressão de 84,05 MPa. A rigidez efetiva ao giro é determinada pela Equação 30, para as duas situações consideradas neste trabalho.

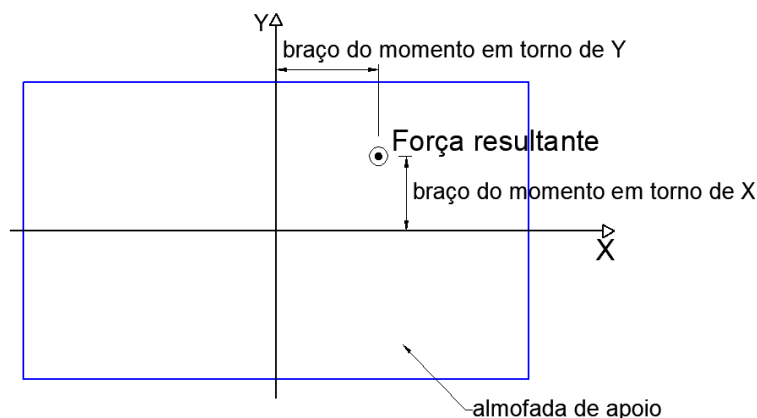
$$K_{\theta} = \frac{M}{\theta} \quad (30)$$

Em que  $K_{\theta}$  é a rigidez ao giro da almofada;  $M$  é o momento em torno do eixo considerado; e  $\theta$  é a rotação da almofada.

O momento é determinado multiplicando-se a força resultante na almofada pela excentricidade devido ao carregamento não uniforme da almofada. A Figura 91 mostra os braços de momento para determinação dos momentos em torno dos eixos X e Y adotados.

A rotação é determinada pelo modelo numérico, dividindo-se o alongamento das molas em duas extremidades pela distância entre si. Com as demais variáveis determinadas, calcula-se a rigidez ao giro da almofada. A rigidez que afeta a estabilidade das vigas é a referente ao giro em torno do eixo Y. A rigidez em relação ao eixo X diz mais respeito ao carregamento não linear provocado pelas flechas no meio do vão.

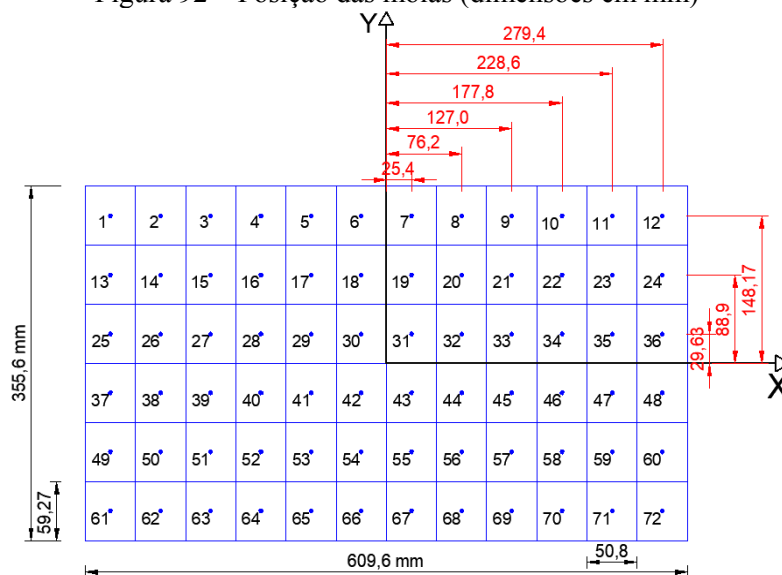
Figura 91 – Esquema para determinação dos momentos



Fonte: Autor (2018)

A posição da força aplicada em relação ao centro da almofada é determinada multiplicando-se cada resultante de cada mola pela sua distância em relação ao eixo considerado, X ou Y (Figura 92) e divide-se o valor obtido pela força resultante total.

Figura 92 – Posição das molas (dimensões em mm)



Fonte: Autor (2018)



A avaliação da variação da rigidez é feita de três formas. A primeira é feita com cada combinação de variáveis separadamente e busca avaliar a alteração da rigidez com a aplicação da força concentrada no meio do vão. A segunda análise é feita para cada vão e seção e são avaliadas as variações das rigidezes com o aumento da excentricidade lateral inicial em cada caso. Por fim, para a viga BT-54 com 30 metros de vão, são calculadas as rigidezes considerando variação na rigidez à compressão da almofada de apoio do tipo B, que altera as rigidezes longitudinais de cada mola, conforme capítulo 3.

## 6.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Inicialmente, considera-se a aplicação do peso próprio da viga, que provoca uma rotação da almofada em torno dos seus dois eixos. Com isso, calcula-se a rigidez ao giro da almofada neste ponto. Por fim, somado ao peso próprio, é aplicada a força limite sobre o modelo. Novamente a rigidez ao giro é determinada e será mostrada a diferença entre as duas situações.

A Tabela 23 mostra a diferença resultante da aplicação da força concentrada no meio do vão sobre as rigidezes efetivas em torno dos eixos X e Y. Na Tabela 23, a abreviação “pp” se refere ao peso próprio e “limite” refere-se à situação com peso próprio e com a aplicação da força limite no meio do vão.

Ao avaliar os valores mostrados na Tabela 23, observa-se que as rigidezes tendem a diminuir conforme aplica-se a força limite no meio do vão. Porém, para as vigas BT-72-25-L/1000 e BT-72-25-L/700, nota-se que não houve redução, e sim um aumento da rigidez ao giro das almofadas. É certo que o aumento na compressão inicial da almofada provoca um aumento na rigidez ao giro. Portanto, supõe-se que os ganhos com essa compressão inicial são mais significativos do que as perdas provocadas pelo acréscimo do giro da almofada devido à força aplicada no meio do vão.

Tabela 23 - Diferenças entre rigidezes da almofada

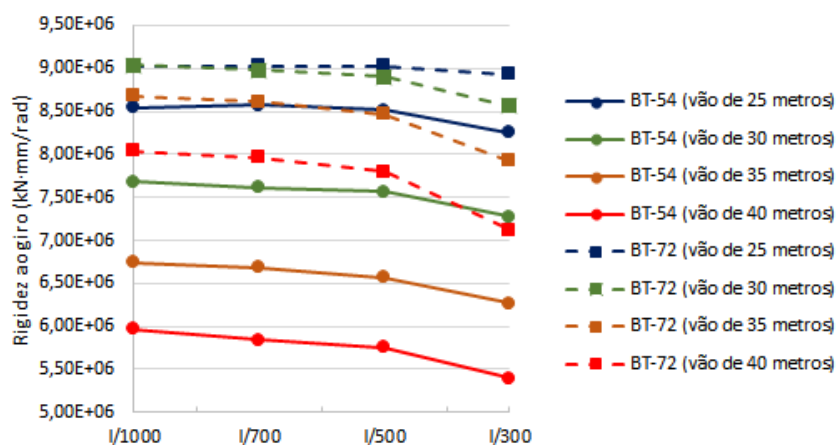
Viga	K $\theta$ y (pp) (kN×mm/rad)	K $\theta$ y (limite) (kN×mm/rad)	Redução (%)	K $\theta$ x (pp) (kN×mm/rad)	K $\theta$ x (limite) (kN×mm/rad)	Redução (%)
BT-54-25-L/1000	8,54E+06	8,10E+06	5,18%	3,12E+06	2,98E+06	4,52%
BT-54-25-L/700	8,58E+06	7,97E+06	7,11%	3,11E+06	2,91E+06	6,38%
BT-54-25-L/500	8,52E+06	7,69E+06	9,73%	3,07E+06	2,77E+06	9,97%
BT-54-25-L/300	8,26E+06	6,69E+06	18,97%	2,96E+06	2,34E+06	20,98%
BT-54-30-L/1000	7,69E+06	6,91E+06	10,16%	2,86E+06	2,55E+06	10,94%
BT-54-30-L/700	7,62E+06	6,76E+06	11,30%	2,83E+06	2,46E+06	13,07%
BT-54-30-L/500	7,56E+06	6,47E+06	14,46%	2,79E+06	2,32E+06	16,66%
BT-54-30-L/300	7,27E+06	5,38E+06	26,10%	2,63E+06	1,90E+06	27,72%
BT-54-35-L/1000	6,74E+06	6,00E+06	10,95%	2,50E+06	2,18E+06	12,89%
BT-54-35-L/700	6,68E+06	5,81E+06	13,10%	2,48E+06	2,09E+06	15,68%
BT-54-35-L/500	6,57E+06	5,47E+06	16,71%	2,43E+06	1,95E+06	19,84%
BT-54-35-L/300	6,27E+06	4,31E+06	31,25%	2,26E+06	1,56E+06	31,13%
BT-54-40-L/1000	5,97E+06	5,25E+06	12,15%	2,17E+06	1,87E+06	13,91%
BT-54-40-L/700	5,85E+06	4,97E+06	15,03%	2,14E+06	1,78E+06	16,95%
BT-54-40-L/500	5,76E+06	4,51E+06	21,65%	2,10E+06	1,64E+06	21,77%
BT-54-40-L/300	5,39E+06	3,41E+06	36,84%	1,93E+06	1,28E+06	33,61%
BT-72-25-L/1000	9,03E+06	9,55E+06	-5,81%	3,19E+06	3,40E+06	-6,29%
BT-72-25-L/700	9,03E+06	9,35E+06	-3,57%	3,19E+06	3,31E+06	-3,71%
BT-72-25-L/500	9,03E+06	8,95E+06	0,80%	3,19E+06	3,13E+06	1,90%
BT-72-25-L/300	8,94E+06	7,53E+06	15,73%	3,15E+06	2,56E+06	18,86%
BT-72-30-L/1000	9,04E+06	8,86E+06	1,99%	3,20E+06	3,19E+06	0,51%
BT-72-30-L/700	8,98E+06	8,55E+06	4,79%	3,19E+06	3,04E+06	4,67%
BT-72-30-L/500	8,90E+06	7,99E+06	10,18%	3,16E+06	2,79E+06	11,81%
BT-72-30-L/300	8,57E+06	6,41E+06	25,24%	3,01E+06	2,19E+06	27,16%
BT-72-35-L/1000	8,68E+06	8,06E+06	7,22%	3,14E+06	2,93E+06	6,80%
BT-72-35-L/700	8,61E+06	7,70E+06	10,57%	3,10E+06	2,74E+06	11,72%
BT-72-35-L/500	8,47E+06	7,12E+06	15,94%	3,04E+06	2,48E+06	18,28%
BT-72-35-L/300	7,92E+06	5,38E+06	32,17%	2,78E+06	1,89E+06	32,25%
BT-72-40-L/1000	8,05E+06	7,22E+06	10,33%	2,96E+06	2,61E+06	11,77%
BT-72-40-L/700	7,96E+06	6,82E+06	14,28%	2,92E+06	2,42E+06	16,91%
BT-72-40-L/500	7,80E+06	6,14E+06	21,26%	2,83E+06	2,15E+06	24,11%
BT-72-40-L/300	7,13E+06	4,51E+06	36,65%	2,49E+06	1,64E+06	34,33%

Fonte: Autor (2018)

Outra forma de avaliação da rigidez é em relação ao aumento da excentricidade para um mesmo vão e mesma seção. Para isso, são desenhadas as curvas de Rigidez ao giro  $\times$  excentricidade no meio do vão. A Figura 93 mostra a redução da rigidez efetiva na direção Y e a Figura 94 mostra a redução da rigidez na direção X, considerando a situação inicial. A rigidez em Y refere-se à flexão lateral da viga, e a rigidez em X, à flexão vertical da viga. A

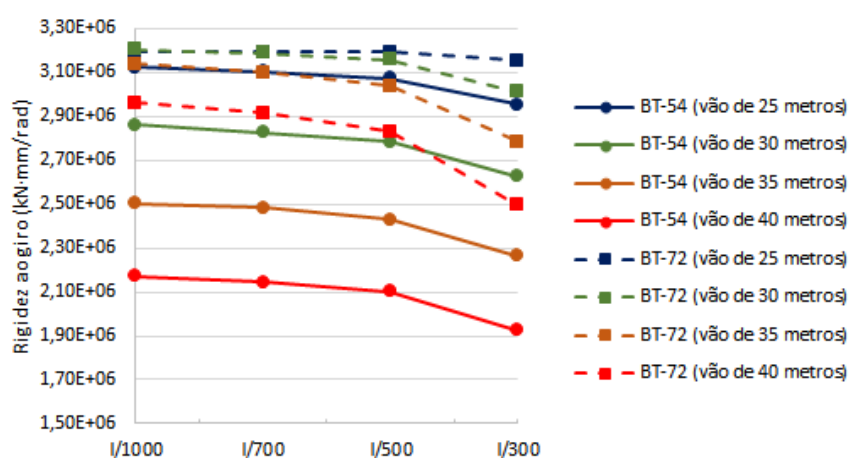
Figura 95 mostra a redução da rigidez na direção Y e a Figura 96, na direção X, para a situação limite.

Figura 93 – Rigidez efetiva em torno de Y  $\times$  excentricidade no meio do vão (situação inicial)



Fonte: Autor (2018)

Figura 94 – Rigidez efetiva em torno de X  $\times$  excentricidade no meio do vão (situação inicial)



Fonte: Autor (2018)

Analisando as figuras referentes ao estado inicial (com aplicação do peso próprio), observa-se que as rigidezes diminuem com o aumento da excentricidade para todos os casos. Considerando a rigidez em torno de Y, que é a que afeta a estabilidade das vigas, nota-se que, para o vão de 25 m, a redução na rigidez não é tão destacada. Já para os vãos maiores, principalmente para o vão de 40 m, a redução é significativa. A Tabela 24 mostra a redução em porcentagem da rigidez para a situação inicial entre a viga com excentricidade de L/1000 e a viga com excentricidade de L/300.

Tabela 24 - Redução da rigidez na situação inicial

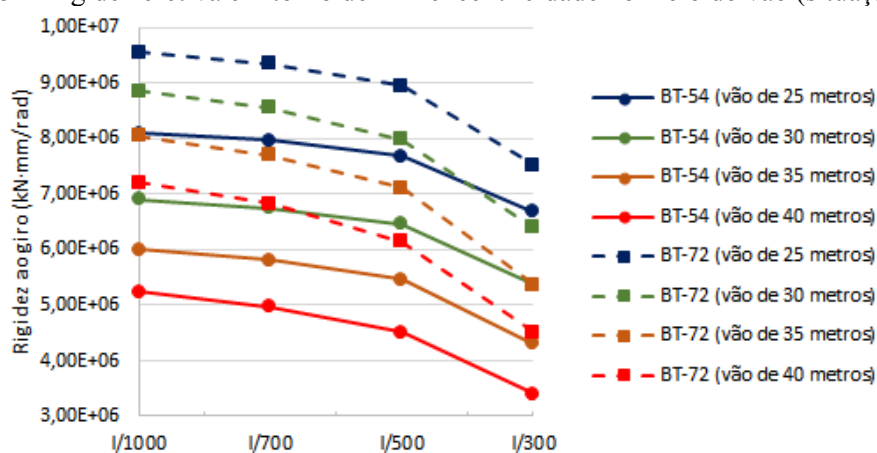
Viga	Rigidez em torno de Y	Rigidez em torno de X
BT-54-25	3%	5%
BT-54-30	5%	8%
BT-54-35	7%	10%
BT-54-40	10%	11%
BT-72-25	1%	1%
BT-72-30	5%	6%
BT-72-35	9%	11%
BT-72-40	11%	16%

Fonte: Autor (2018)

Nota-se que a rigidez em torno de Y, para os vãos de 25 metros tiveram uma pequena redução. Já para o vão de 40 metros, a rigidez reduz em 10% para a viga BT-54 e em 11% para a BT-72, que pode, em casos extremos, levar à falha por instabilidade lateral das vigas.

Ao se comparar os valores de rigidez considerando a situação limite, observa-se que a rigidez reduz de maneira considerável para todos os vãos. Há esta diferença entre a situação inicial e a situação limite porque o momento gerado na situação limite, que considera o peso próprio mais a força concentrada no meio do vão, é muito maior que o momento gerado somente pelo peso próprio na situação inicial. A Figura 95 e a Figura 96 mostram a redução de rigidez em torno de Y e X, respectivamente, para esta situação limite. A Tabela 25 também mostra a redução em percentual.

Figura 95 – Rigidez efetiva em torno de Y × excentricidade no meio do vão (situação limite)



Fonte: Autor (2018)

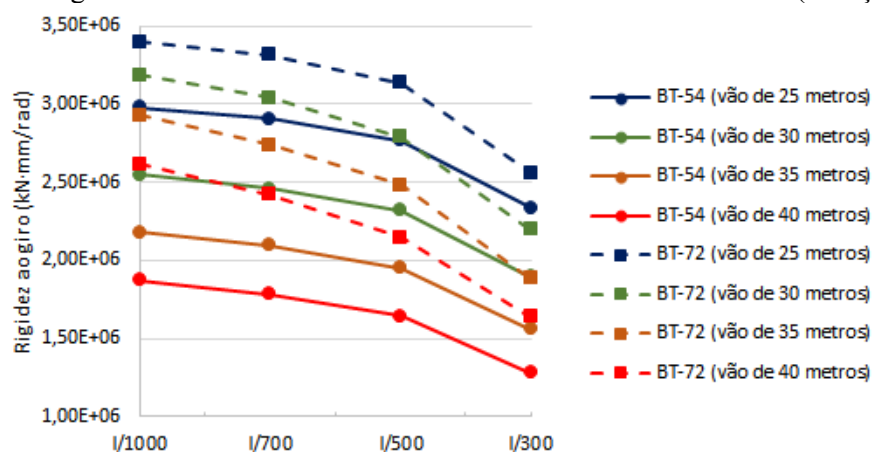
Figura 96 – Rigidez efetiva em torno de X  $\times$  excentricidade no meio do vão (situação limite)

Tabela 25 - Redução da rigidez na situação limite

Viga	Rigidez em torno de Y	Rigidez em torno de X
BT-54-25	17%	22%
BT-54-30	22%	26%
BT-54-35	28%	28%
BT-54-40	35%	32%
BT-72-25	21%	25%
BT-72-30	28%	31%
BT-72-35	33%	36%
BT-72-40	37%	37%

Fonte: Autor (2018)

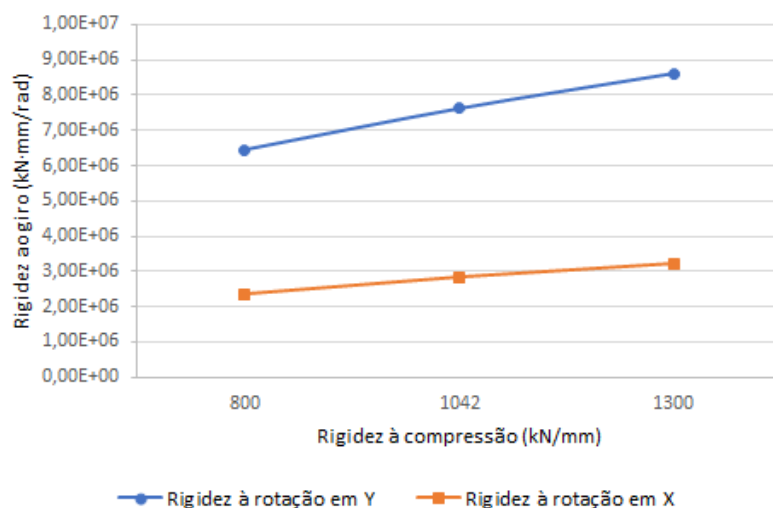
Pela Tabela 25, observa-se que a menor redução na rigidez em torno de Y é de 17%, para a viga BT-54 e que, para os vãos maiores, esta redução é maior que 30%. Apesar desta redução ser significativa, o que certamente aumentaria a probabilidade de ocorrência de falhas por instabilidade, este tipo de carregamento, com uma força concentrada no meio do vão, não é esperado que aconteça em uma situação real, pois a instabilidade nesses casos ocorre somente com o peso próprio aplicado.

Portanto, considerando somente o peso próprio, conclui-se que a excentricidade reduz a rigidez de forma proeminente somente para os vãos maiores. Supõe-se também que esta redução não foi maior pelo fato da inércia em torno do eixo de menor inércia da viga ter um valor elevado, devido às dimensões das mesas superior e inferior.

Por fim, são determinadas as rigidezes ao giro efetivas considerando uma variação na rigidez à compressão da almofada. A rigidez à compressão altera a rigidez longitudinal de cada mola e a compressão inicial que existe devido ao peso próprio, que envolve o levantamento da almofada. A rigidez à compressão da almofada tipo B utilizada foi de 1042 kN/mm. Este valor foi utilizado para a almofada em todas as análises paramétricas realizadas até aqui. Para avaliar a influência da rigidez à compressão são consideradas, além da rigidez já utilizada, outras duas rigidezes verticais: uma de 800 kN/mm e outra de 1300 kN/mm.

A Figura 97 mostra a variação da rigidez em torno de Y e X, considerando somente o peso próprio, para as três rigidezes à compressão da almofada e a Tabela 26 mostra o valor numérico. Observa-se que a rigidez à rotação aumenta conforme aumenta a rigidez à compressão, o que é o esperado. Porém, deve-se enfatizar que uma rigidez à compressão ou à rotação elevada não indica que o levantamento não irá ocorrer, pois ocorre justamente o oposto. Sendo assim, a compressão inicial devida ao peso próprio é de elevada importância na prevenção do levantamento (“*lift off*”) da viga sobre a almofada.

Figura 97 – Variação da rigidez à rotação



Fonte: Autor (2018)

Tabela 26 - Rigidez à rotação considerando variação na rigidez à compressão

Rigidez à compressão (kN/mm)	800	1042	1300
Rigidez em Y (kN·mm/rad)	6,44E+06	7,62E+06	8,62E+06
Rigidez em X (kN·mm/rad)	2,35E+06	2,83E+06	3,23E+06

Fonte: Autor (2018)

Neste capítulo, foram avaliadas as rigidezes ao giro para diversas combinações de vão e excentricidade lateral inicial. Essas rigidezes tendem a diminuir conforme o vão e a excentricidade são aumentados. Considerando a situação inicial para o vão de 40 m e excentricidade variando de  $L/1000$  para  $L/300$ , a rigidez ao giro da almofada na direção Y para a viga BT-54 reduziu 11% e para a viga BT-72 reduziu 10%. Portanto, o aumento na excentricidade tende a diminuir a rigidez da almofada o que reduz na capacidade da força limite. Fixando a excentricidade lateral inicial em  $L/1000$  e variando o vão de 25 m para 40 m, tem-se uma redução da rigidez Y de 30% e de 11% para as vigas BT-54 e BT-72, respectivamente.

Em relação à variação da rigidez à compressão da almofada, ao se diminuir a rigidez à compressão de 1042 kN/mm para 800 kN/mm, obteve-se uma redução da rigidez ao giro em torno de Y de 15,5%. Aumentando-se a rigidez à compressão de 1042 kN/mm para 1300 kN/mm, o aumento da rigidez ao giro em torno de Y foi de 11,6%. Portanto, deve-se adotar uma almofada com rigidez à compressão que suporte as tensões impostas sobre a almofada durante a vida útil da estrutura e que tenha um afundamento dentro do limite estabelecido pela ABNT NBR 9062:2017.

# **CAPÍTULO 7**

## **INFLUÊNCIA DO MOMENTO DE INÉRCIA LATERAL NA FORÇA LIMITE**

### **7.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS**

Em alguns casos de falhas por instabilidade, nota-se que as esbeltezes das vigas eram elevadas. Portanto, este capítulo trata da avaliação em relação à esbeltez da viga, mais precisamente sobre a influência das relações geométricas das mesas e em relação à altura da viga (BT-54 e BT-72), cujas seções são mostradas na Figura 76. Neste capítulo, é considerada a viga com vão de 30 metros e excentricidade lateral de 43,5 mm no meio do vão ( $L/700$ ). A viga está apoiada na almofada de apoio tipo B e sujeita a uma força concentrada aplicada no meio do vão.

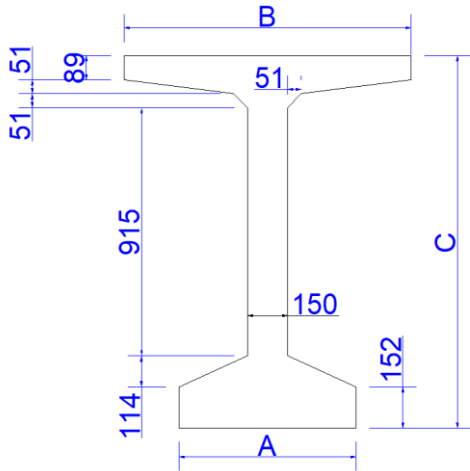
Para o concreto, adotou-se comportamento elástico linear, com módulo de elasticidade de 30,8 GPa, coeficiente de Poisson de 0,22 e resistência à compressão de 84,05 MPa. A almofada de apoio é considerada como um sólido apoiado sobre molas. Cada mola tem uma rigidez longitudinal que depende da rigidez à compressão da almofada e que varia de acordo com a sua posição na almofada. Nas análises anteriores, considerou-se que a rigidez à compressão da almofada é de 1.042 kN/mm, que é a rigidez obtida no ensaio experimental em Hurff (2010). Aqui, a rigidez à compressão é calculada numericamente, considerando a almofada constituída por elementos sólidos, conforme modelo descrito em 3.4.

São considerados seis valores para a mesa superior, cinco para a mesa inferior e dois para a altura (referente à altura das vigas BT-54 e BT-72). A Figura 98 mostra as dimensões fixas das vigas. A Tabela 27, além das dimensões adotadas na análise de variação da mesa inferior,



mostra também os valores de altura do centroide, área da seção transversal e do momento de inércia na direção do eixo de menor inércia. As seções transversais são mostradas na Figura 99. Em relação à variação da mesa superior, as dimensões e as demais variáveis são mostradas na Tabela 28 e na Figura 100.

Figura 98 – Dimensões da seção da viga (mm)



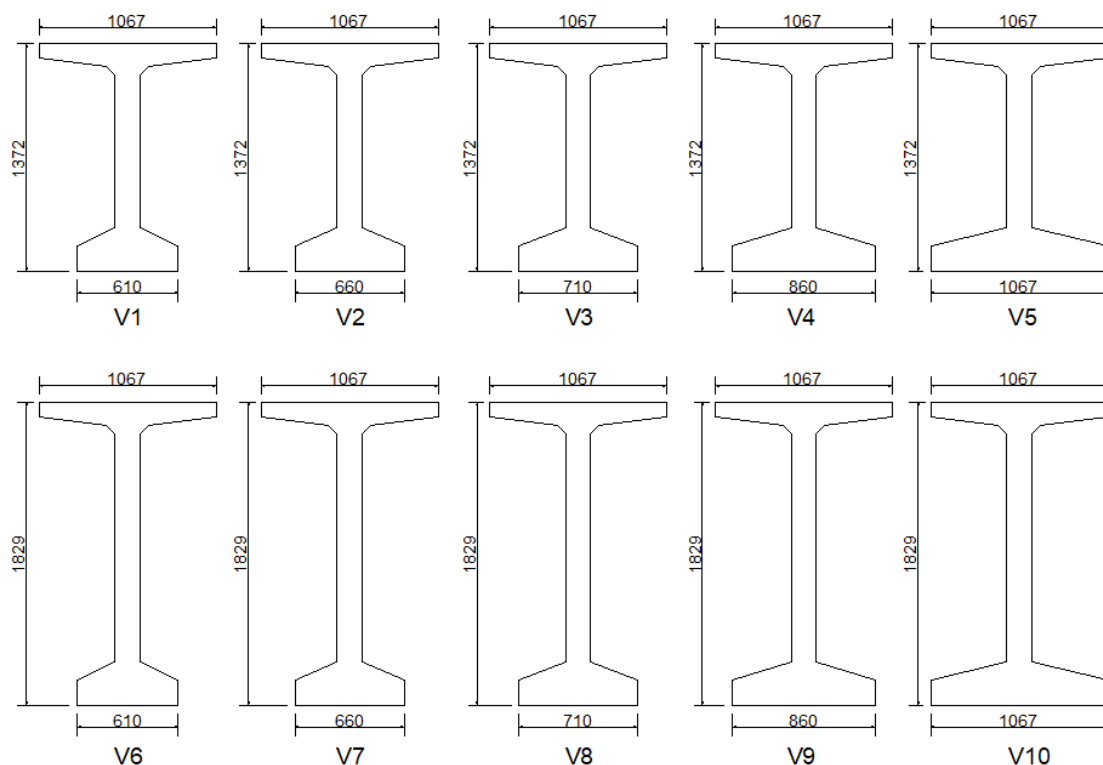
Fonte: Autor (2018)

Tabela 27 – Dimensões para análise de variação da mesa inferior

Viga	Mesa inferior (mm) (A)	Mesa superior (mm) (B)	Altura (mm) (C)	Altura do centroide (mm)	Área (mm <sup>2</sup> )	Momento de inércia lateral (mm <sup>4</sup> )
V1	610	1067	1372	717,8	412138,5	1,46E+10
V2	660			702,7	422588,5	1,55E+10
V3	710			688,3	433038,5	1,66E+10
V4	860			649,1	464388,5	2,09E+10
V5	1067			602,9	507651,5	2,97E+10
V6	610		1829	948,4	480688,5	1,47E+10
V7	660			930,5	491138,5	1,56E+10
V8	710			913,4	501588,5	1,67E+10
V9	860			866,0	532938,5	2,10E+10
V10	1067			809,0	576201,5	2,99E+10

Fonte: Autor (2018)

Figura 99 – Seção transversal com variação da largura da mesa inferior (medidas em mm)



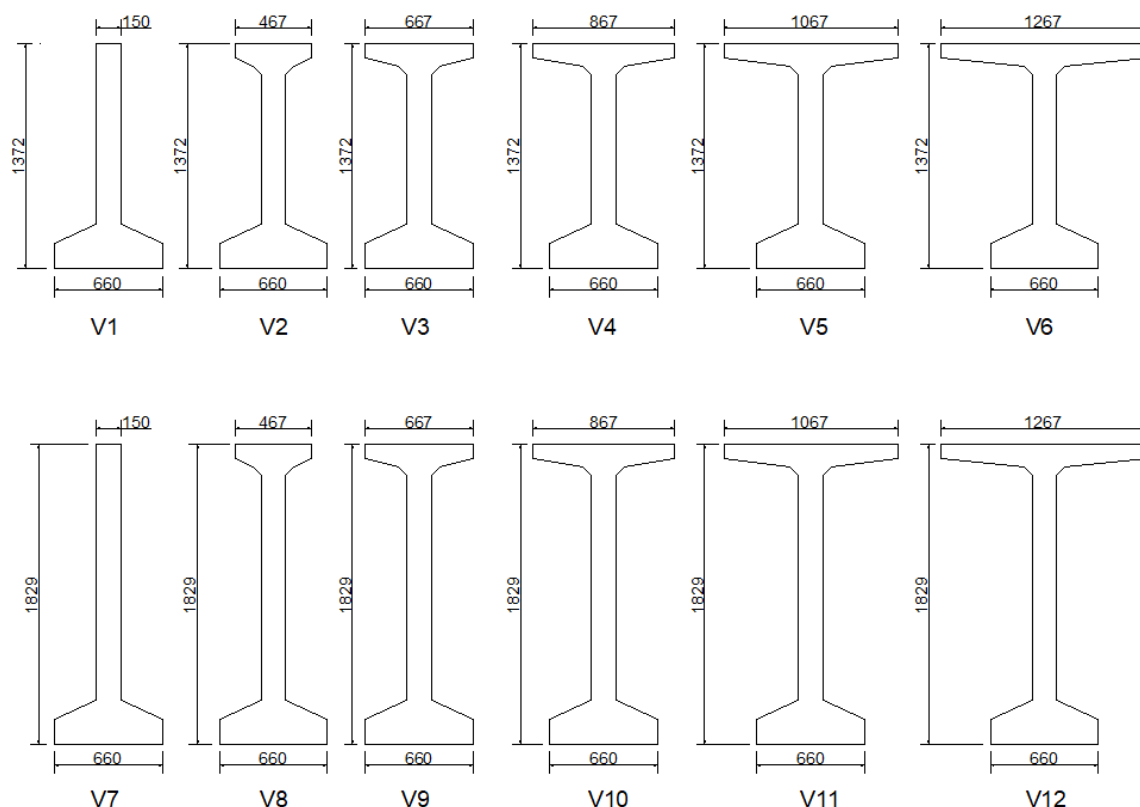
Fonte: Autor (2018)

Tabela 28 – Dimensões para análise de variação da mesa superior

Viga	Mesa inferior (mm)	Mesa superior (mm)	Altura (mm)	Altura do centroide (mm)	Área (mm <sup>2</sup> )	Momento de inércia lateral (mm <sup>4</sup> )
V1	660	150 (Sem mesa superior)	1372	488,5	312390,0	4,83E+09
V2		467		584,1	353888,5	5,79E+09
V3		667		628,4	376788,5	7,51E+09
V4		867		667,7	399688,5	1,06E+10
V5		1067		702,7	422588,5	1,55E+10
V6		1267		734,1	445488,5	2,26E+10
V7		150 (Sem mesa superior)	1829	688,6	380940,0	4,96E+09
V8		467		793,9	422438,5	5,92E+09
V9		667		844,1	445338,5	7,64E+09
V10		867		889,4	468238,5	1,07E+10
V11		1067		930,5	491138,5	1,56E+10
V12		1267		968,0	514038,5	2,27E+10

Fonte: Autor (2018)

Figura 100 – Seção transversal com variação na mesa superior (medidas em mm)



Fonte: Autor (2018)

Como a estabilidade da viga depende do momento de inércia em torno do eixo de menor inércia (inércia lateral), supõe-se que um aumento na largura das mesas leve a uma maior segurança quanto à estabilidade da viga e que uma redução das mesas tenha o efeito oposto. Ou seja, com o aumento da inércia lateral, espera-se que a carga limite seja maior. O objetivo das análises desenvolvidas a seguir neste capítulo é, portanto, o de quantificar a influência da variação da carga limite em função das dimensões das mesas e da inércia lateral.

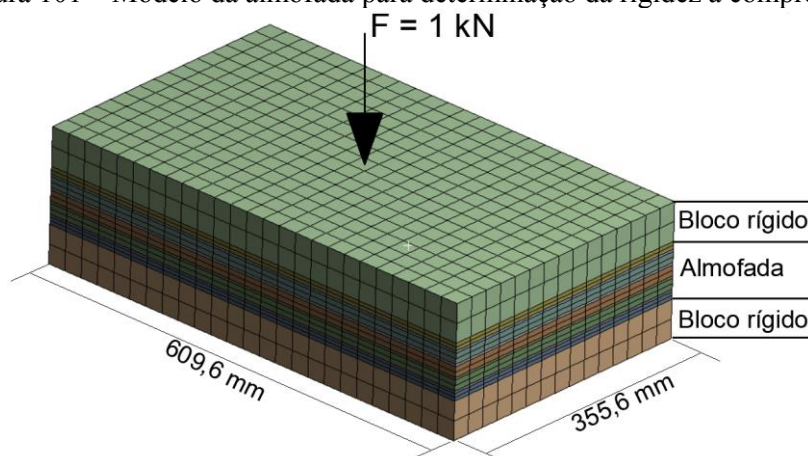
Em relação às análises, são feitas duas avaliações. A primeira é em relação ao deslocamento lateral no meio do vão em função da força aplicada. Como visto anteriormente, com esta análise pode-se obter a força limite que é o ponto onde a inclinação da reta tangente à curva de força  $\times$  deslocamento lateral se torna igual a 10% da inclinação tangente inicial. Portanto, para cada simulação, é obtida uma força limite. Espera-se que com o aumento da rigidez lateral (momento de inércia em relação ao eixo de menor inércia) a força limite também aumente. Para isso, são comparadas as forças limite para cada situação, em função da largura da mesa em estudo, que é a segunda avaliação deste capítulo.

## 7.2 DETERMINAÇÃO DAS RIGIDEZES DA ALMOFADA

Nas análises de estabilidade, deve-se conhecer, principalmente, as rigidezes à compressão e à rotação das almofadas de apoio. Quando a viga é apoiada sobre almofadas de apoio, é em função da rigidez à compressão que ocorre o afundamento da almofada sob o peso da viga, que é chamado aqui de compressão inicial, que, como visto no capítulo 5, influencia no levantamento (“*lift off*”) da viga sobre as almofadas.

De maneira geral, a rigidez à compressão pode ser obtida através de equações analíticas, de ensaios experimentais ou por modelos numéricos. Aqui é utilizado, para determinar esta rigidez, o modelo apresentado na Seção 3.4 deste trabalho, com a almofada representada por elementos sólidos e o modelo *Neo-Hookean* com parâmetros  $G$  e  $d$  de 0,70 MPa e 0,001/MPa, para o elastômero. Para as chapas de aço internas da almofada, é adotado comportamento elástico-linear, com módulo de elasticidade de 200.000 MPa e coeficiente de Poisson de 0,3. A Figura 101 mostra o esquema do modelo da almofada e a Tabela 29 mostra o valor da rigidez à compressão obtida para uma força de 1 kN aplicada sobre a área superior do bloco rígido, que distribui o carregamento sobre a almofada.

Figura 101 – Modelo da almofada para determinação da rigidez à compressão



Fonte: Autor (2018)

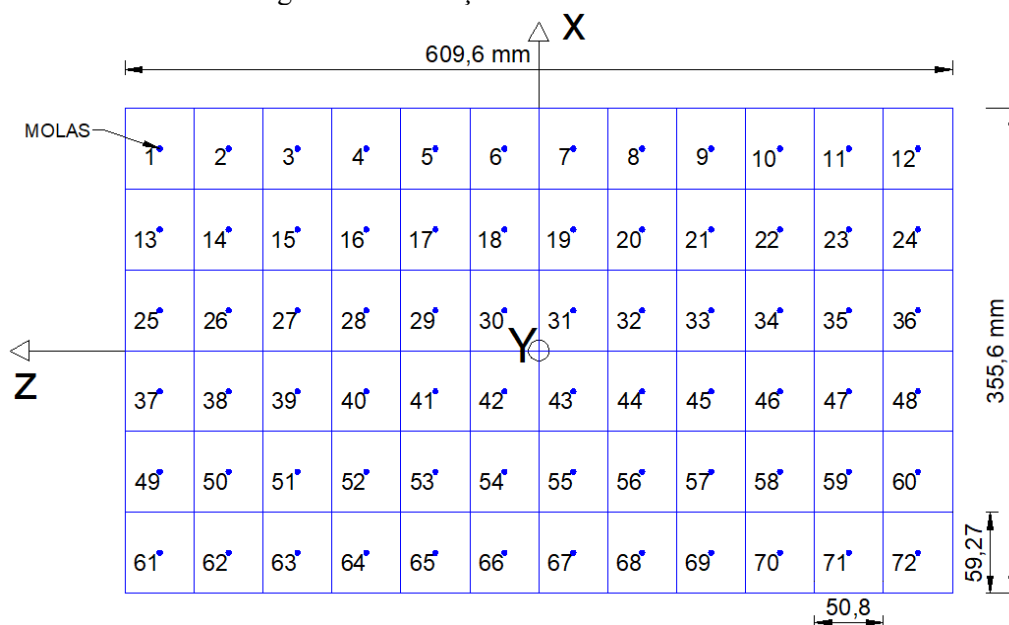
Tabela 29 - Rigidez à compressão

Força (kN)	Deslocamento (mm)	Rigidez à compressão (kN/mm)
F = 1,0	$\Delta z = 0,00095882$	$K_y = 1.043$

Fonte: Autor (2018)

Com a rigidez à compressão da almofada, são calculadas as rigidezes longitudinais de cada mola, sendo que as molas no centro da almofada possuem rigidez maior que as almofadas nos cantos. A variação na rigidez e o comportamento exclusivo à compressão, sem reações de apoio sob tração, permite de forma simplificada representar o comportamento não-linear físico da almofada de apoio. A Figura 102 mostra a posição de cada mola e a Tabela 30 contém a rigidez de cada mola em função da rigidez à compressão. As rigidezes são calculadas para um quadrante e, nos outros quadrantes, a rigidez é obtida pela simetria entre os eixos X e Z.

Figura 102 – Posição das molas na almofada



Fonte: Autor (2018)

Tabela 30 - Cálculo das rigidezes das molas da almofada

Mola	A <sub>região</sub> (mm <sup>2</sup> )	A <sub>almofada</sub> (mm <sup>2</sup> )	K <sub>almofada</sub> (N/mm)	Z (mm)	Z'	X (mm)	X'	K <sub>mola</sub> (N/mm)
1	3011	216774	1043000	279,400	0,917	148,167	0,832	710,6
2	3011	216774	1043000	228,600	0,750	148,167	0,832	1946,4
3	3011	216774	1043000	177,800	0,583	148,167	0,832	2935,0
4	3011	216774	1043000	127,000	0,417	148,167	0,832	3676,5
5	3011	216774	1043000	76,200	0,250	148,167	0,832	4170,9
6	3011	216774	1043000	25,400	0,083	148,167	0,832	4418,0
13	3011	216774	1043000	279,400	0,917	88,900	0,499	1736,6
14	3011	216774	1043000	228,600	0,750	88,900	0,499	4756,8
15	3011	216774	1043000	177,800	0,583	88,900	0,499	7173,0
16	3011	216774	1043000	127,000	0,417	88,900	0,499	8985,1
17	3011	216774	1043000	76,200	0,250	88,900	0,499	10193,2
18	3011	216774	1043000	25,400	0,083	88,900	0,499	10797,2
25	3011	216774	1043000	279,400	0,917	29,633	0,166	2249,6
26	3011	216774	1043000	228,600	0,750	29,633	0,166	6162,0
27	3011	216774	1043000	177,800	0,583	29,633	0,166	9291,9
28	3011	216774	1043000	127,000	0,417	29,633	0,166	11639,4
29	3011	216774	1043000	76,200	0,250	29,633	0,166	13204,3
30	3011	216774	1043000	25,400	0,083	29,633	0,166	13986,8

Fonte: Autor (2018)

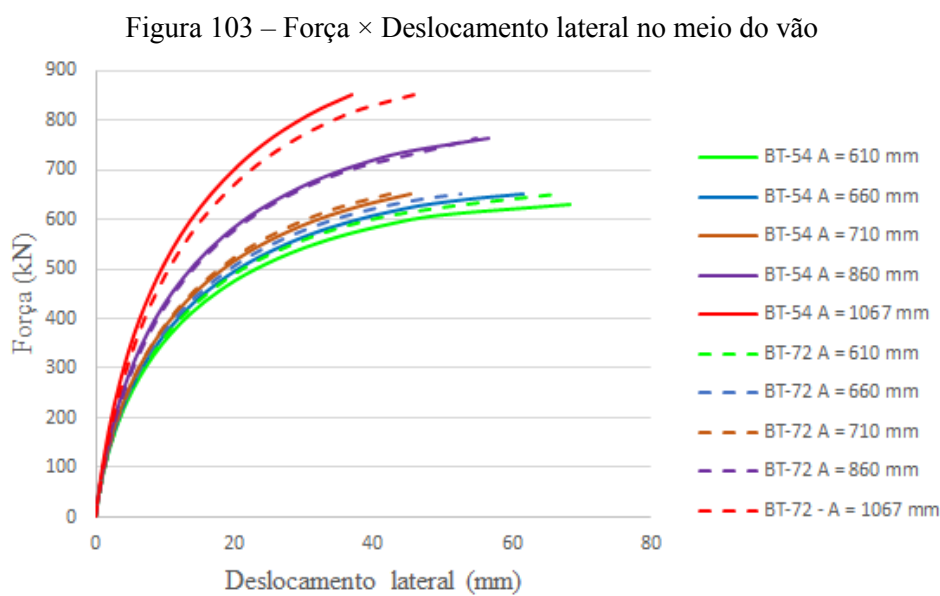
Com as rigidezes das molas que representam a almofada, modela-se a viga sobre as almofadas e passa-se para a avaliação da estabilidade em função da largura da mesa. Inicialmente é feita uma avaliação considerando a variação na mesa inferior. Por fim, são feitas avaliações considerando mudanças na mesa superior.

## 7.3 AVALIAÇÃO DA ESTABILIDADE COM VARIAÇÃO DAS MESAS

### 7.3.1 Variação da largura da mesa inferior

A função básica da mesa inferior é a de servir de abrigo para as bainhas de protensão e da armadura passiva e serve de base para apoiar a viga sobre as almofadas de apoio, visto que, na fase de serviço, esta parte de concreto está tracionada e não contribui consideravelmente para a resistência aos esforços de tração. Portanto, a largura ideal para a mesa inferior é aquela suficiente para alocar as armaduras e que tenha largura pouco maior que a almofada de apoio. No caso da viga BT-54, a largura da mesa inferior é de 660 mm e a largura da almofada de apoio é de 609,6 mm.

Para avaliar a influência da mesa inferior, não é conveniente adotar um valor para ela que seja menor que a dimensão da almofada. Portanto, a largura mínima da mesa inferior adotada é de 610 mm e a máxima é de 1067 mm (coincide com a largura da mesa superior). A Figura 103 mostra as curvas de Força  $\times$  Deslocamento lateral no meio do vão para os parâmetros analisados.



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 103, percebe-se que o aumento na mesa inferior melhora o comportamento da viga em relação aos deslocamentos laterais no meio do vão. Observa-se também que, pelo comportamento semelhante entre as curvas para a viga BT-54 e para a BT-72, o aumento da altura da viga não influencia de forma considerável no deslocamento lateral da viga. Como o aumento da altura da viga não aumenta a inércia lateral de forma considerável, é esperado que a estabilidade da viga para as duas alturas tenha um comportamento similar.

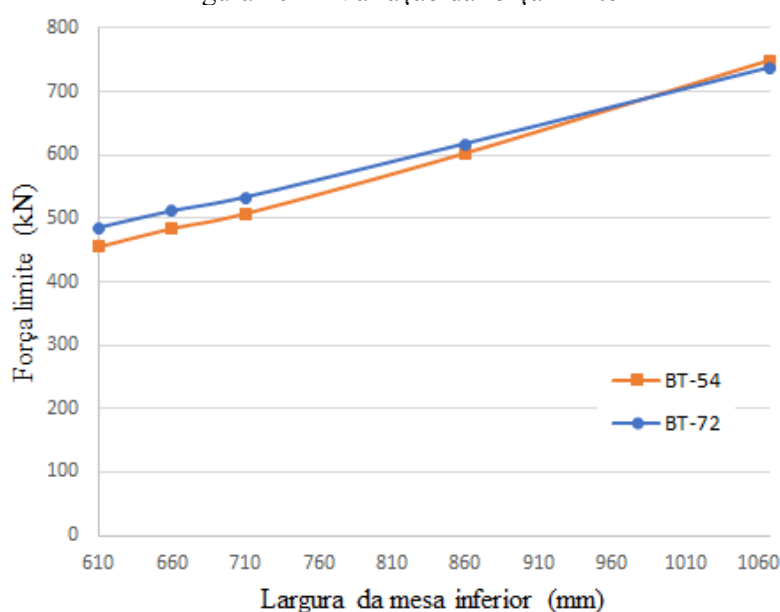
Também são determinadas as forças limite para cada dimensão da mesa inferior. O valor dessas forças e a relação entre a força limite ( $F_{lim}$ ) e a força limite de referência ( $F_{ref}$ ) que representa a força limite para a largura padrão da mesa inferior da viga são mostradas na Tabela 31. A Figura 104 mostra o comportamento da força limite com o aumento da largura da mesa inferior.

Tabela 31 – Força limite considerando o aumento na mesa inferior

Largura da mesa inferior (mm)	BT-54		BT-72	
	Força limite (kN)	$F_{lim}/F_{ref}$	Força limite (kN)	$F_{lim}/F_{ref}$
610	455	0,94	484,4	0,95
660	484	1,00	511	1,00
710	507,3	1,05	532,5	1,04
860	602,4	1,24	617	1,21
1067	747,8	1,55	736,7	1,44

Fonte: Autor (2018)

Figura 104 – Variação da força limite

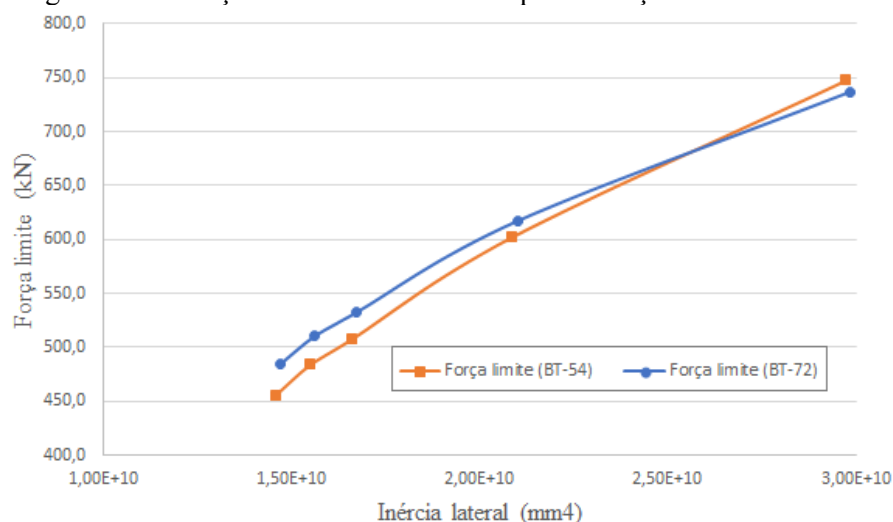


Fonte: Autor (2018)

Observa-se, na Tabela 31 e na Figura 104, que os valores da força limite aumentam de forma praticamente linear com o aumento da mesa inferior. Quanto maior a inércia lateral, maior é a segurança contra a instabilidade da viga. No caso mais desfavorável, com largura da mesa inferior de 610 mm, houve uma redução de 6% da força limite para a viga BT-54 e 5% para a BT-72. Como a margem de redução da mesa inferior é pequena, de 660 mm para 610 mm, espera-se que esta redução não seja, de fato, elevada. Em relação ao caso mais favorável, com largura da mesa inferior igual a 1267 mm, houve um aumento da força limite de 55% para a BT-54 e de 44% para a BT-72. Pode-se ainda desenhar a curva de força limite  $\times$  inércia lateral (Figura 106/Figura 105).



Figura 105 – Força limite × inércia lateral para variação na mesa inferior



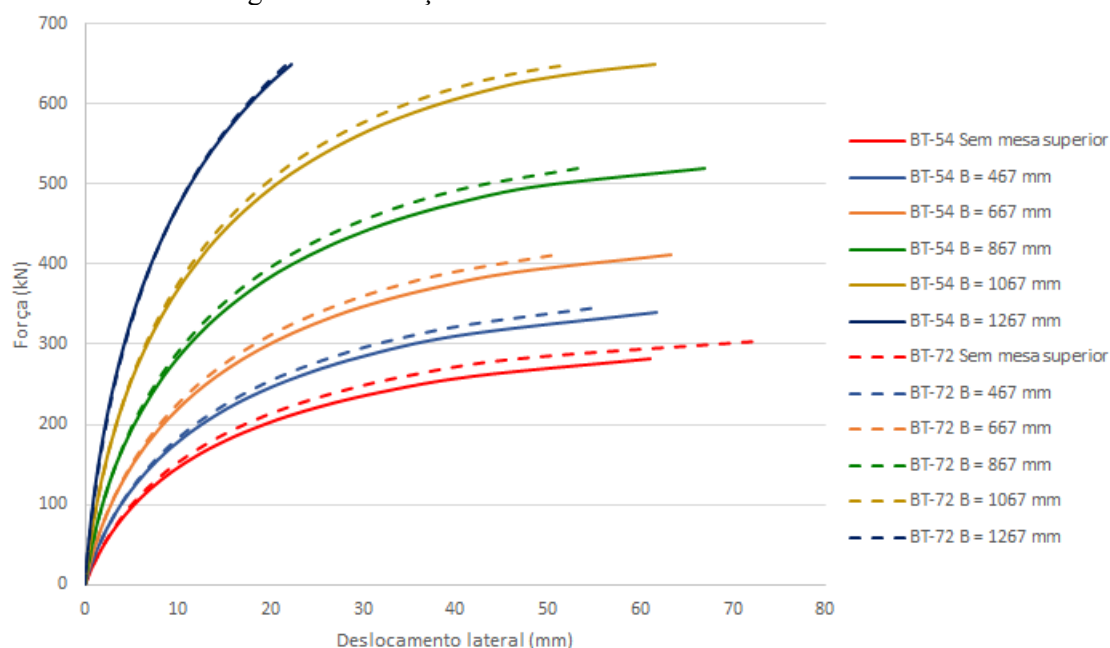
Fonte: Autor (2018)

Nota-se que a força limite aumenta conforme aumenta a inércia lateral. Apesar da melhora em relação à força limite ser considerável com a variação da mesa inferior, não é construtivamente ou estruturalmente viável utilizar uma mesa inferior tão larga, visto que ela não contribui na resistência às tensões de tração na fase de utilização.

### 7.3.2 Variação da largura da mesa superior

Em relação à mesa superior, a variação nas suas dimensões pode ser mais acentuada que na mesa inferior. Portanto, adotou-se desde a situação onde não há mesa superior (largura da mesa igual à largura da alma) até uma largura de 1267 mm. A Figura 106 mostra o gráfico de força × deslocamento lateral no meio do vão, que serve de base para determinação das forças limites para cada caso e posterior avaliação dos resultados.

Figura 106 – Força × Deslocamento lateral no meio do vão



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 106, a curva para as vigas com mesa superior com 1267 mm de largura foi desenhada até a força de 650 kN. Optou-se por não aplicar valores maiores no modelo por não ser necessário na determinação da força limite pelo método descrito anteriormente. Percebe-se que, em relação aos deslocamentos laterais, a utilização de uma viga mais alta não influencia de maneira considerável no aumento da estabilidade da viga. Isto porque o aumento da altura da viga não implica necessariamente em aumento da inércia lateral da viga. Já em relação ao aumento da largura da mesa superior, percebe-se uma melhora no que diz respeito à estabilidade da viga.

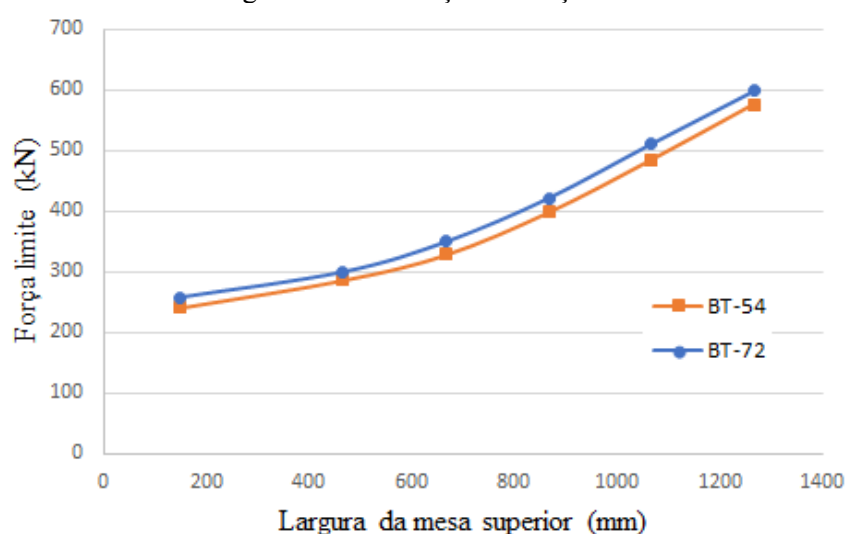
A Tabela 32 mostra os valores das forças limite ( $F_{lim}$ ) e a relação entre essas e a força limite de referência ( $F_{ref}$ ) que representa a largura padrão da mesa superior da viga. A Figura 107 mostra o comportamento da força limite com o aumento da largura da mesa superior.

Tabela 32 – Força limite considerando o aumento na mesa superior

Largura da mesa superior (mm)	BT-54		BT-72	
	Força limite (kN)	$F_{lim}/F_{ref}$	Força limite (kN)	$F_{lim}/F_{ref}$
150	241,1	0,50	257,4	0,50
467	286,4	0,59	299,5	0,59
667	328,1	0,68	349,3	0,68
867	397,7	0,82	421,4	0,82
1067	484	1,00	511	1,00
1267	575,2	1,19	598,4	1,17

Fonte: Autor (2018)

Figura 107 – Variação da força limite

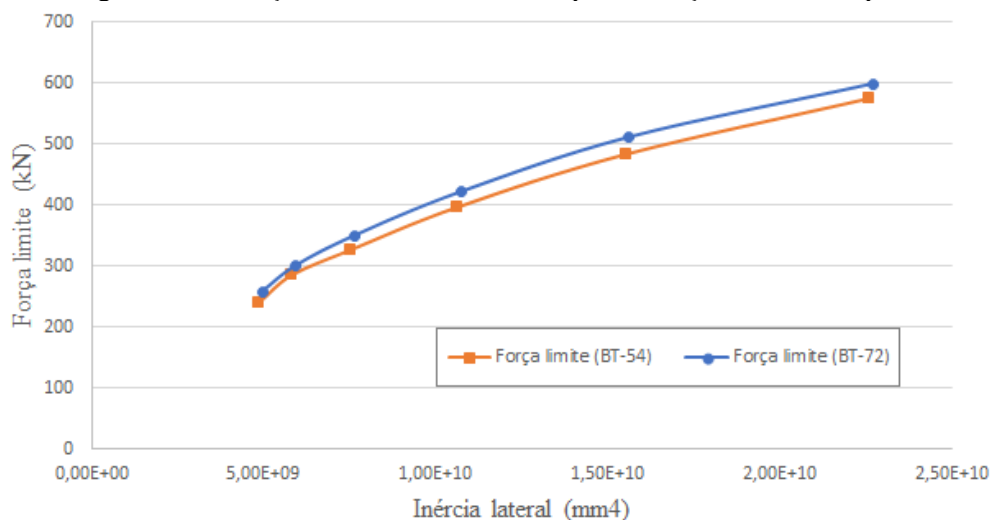


Fonte: Autor (2018)

O aumento da largura da mesa superior provoca um aumento considerável da força limite e, portanto, da estabilidade da viga. Na situação onde não há mesa superior, a força limite diminui, sendo de 241,1 kN para a BT-54, que é 50% da força limite considerando a seção com dimensões padrão. A redução em percentual para a viga BT-72 também foi de 50%. A força limite reduz de 511,0 kN para 257,4 kN. Já um aumento de 20 cm na largura da mesa superior resulta num aumento de 19 kN e 17 kN para as vigas BT-54 e BT-72, respectivamente.

A Figura 108 mostra a curva de inércia lateral  $\times$  força limite considerando a variação na mesa superior e constata-se que a força limite aumenta conforme aumenta a inércia lateral, e este aumento não é um aumento linear.

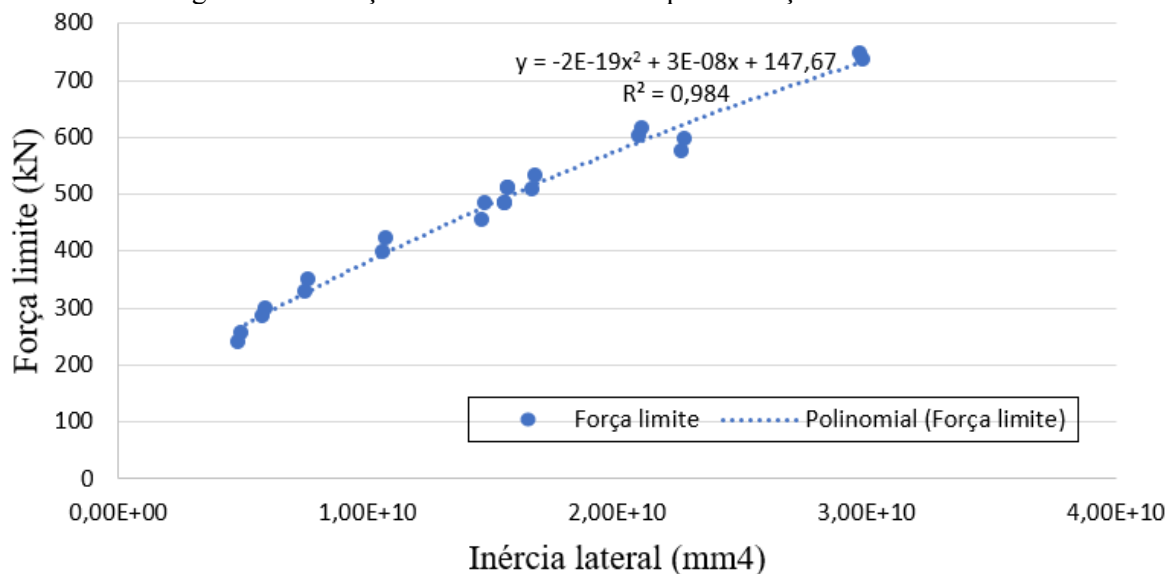
Figura 108 – Força limite × inércia lateral para variação na mesa superior



Fonte: Autor (2018)

Por fim, é desenhada a curva de força limite × inércia lateral para todos os valores estudados neste capítulo, tanto para variação na mesa superior, quanto para variação na mesa inferior (Figura 109).

Figura 109 – Força limite × inércia lateral para variação nas duas mesas



Fonte: Autor (2018)

A Figura 109 indica a tendência de aumento da força limite em função do aumento do momento de inércia lateral, independente de qual mesa contribua para o aumento dessa inércia. É desenhada também uma linha de tendência com uma função polinomial de grau 2 para representar os valores obtidos. O valor do coeficiente de determinação ( $R^2$ ) para a

função de aproximação em relação aos dados obtidos pelo modelo é de 98,4%, ou seja, a função consegue representar bem os valores. Com isso, pode-se estimar a força limite para a viga BT-54 com excentricidade lateral inicial de  $L/700$  para outros valores de inércia lateral, dentro dos limites avaliados neste trabalho.

Para a seção BT-54, considerando as dimensões padrões, tem-se que a largura da mesa inferior (A) é de 660 mm, a altura (B), 1372 mm e a largura da mesa superior (C), 1067 mm. A inércia lateral dessa seção é de  $1,55 \times 10^{10} \text{ mm}^4$ . Aumentando a largura da mesa inferior em 200 mm (100 mm para cada lado), C igual a 860 mm, a inércia lateral passa a ser  $2,09 \times 10^{10} \text{ mm}^4$  (34,8% maior que a inércia inicial). Já o aumento de 200 mm para a largura da mesa superior (C = 1267 mm), resulta numa inércia lateral de  $2,26 \times 10^{10} \text{ mm}^4$  (45,8% maior que a inércia inicial). Em termos de área, o acréscimo da dimensão da mesa inferior resulta numa área de 0,46 m<sup>2</sup> e da mesa superior, 0,45 m<sup>2</sup>. A área da seção com dimensões padrão é de 0,42 m<sup>2</sup>. Analisando somente a questão da inércia lateral, o aumento na mesa superior parece ser melhor, pois resulta numa área menor e em uma inércia maior em comparação à seção com aumento da mesa inferior. Vale lembrar que a altura da mesa inferior (114 mm) é maior que a altura da mesa superior (89). Por isso a área resultante foi maior com o aumento da mesa inferior.

Ao analisar as forças limite, também para a seção BT-54, o aumento da largura da mesa inferior em 200 mm resulta numa força limite de 602,4 kN, que é 24% maior que a rigidez da seção inicial (484,0 kN). Fazendo o aumento de 200 mm para a largura da mesa superior (C = 1267 mm), tem-se uma força limite de 575,2 kN que representa um aumento de 19%. Observa-se que, por mais que o aumento na mesa inferior resulte numa inércia menor, o ganho em relação à força limite é superior.

Considerando o que foi analisado e incluindo o fato de que, na situação de içamento, uma mesa superior maior é mais desvantajosa em relação à instabilidade lateral, pois aumenta a posição do centro de gravidade da seção, conclui-se que um aumento da largura na mesa inferior é mais indicado do que um aumento na mesa superior, para melhorar a estabilidade da viga contra falhas por instabilidade.

Além disso, uma mesa inferior maior permite que seja utilizada uma almofada com maiores dimensões, o que favorece mais ainda a estabilidade da viga. Uma almofada com dimensão

perpendicular ao eixo longitudinal da viga maior resulta num aumento do momento de inércia da almofada na direção lateral que, combinado com uma adequada rigidez à compressão, minimiza o efeito do levantamento da viga e melhora na estabilidade da viga nas situações de pré-serviço.

## CAPÍTULO 8

## CONCLUSÕES

### 8.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De maneira geral, o presente trabalho buscou criar modelos de vigas sobre almofadas de apoio de elastômero de forma a obter informações sobre o comportamento da rigidez das almofadas de apoio elastoméricas em diversas situações, bem como os vãos e a variação na excentricidade lateral inicial altera a estabilidade das vigas. Foi avaliado também o problema de levantamento da viga quando o giro desta sobre a almofada atinge valores excessivos. Por fim, buscou-se avaliar a influência da carga limite considerando a variação nas mesas inferior e superior da viga BT-54. De maneira detalhada, pode-se concluir que:

- a) Em relação aos modelos para representar as almofadas de apoio, o modelo constituído por elementos sólidos é adequado para determinar a rigidez à compressão e ao cisalhamento das almofadas de apoio. O valor obtido da rigidez à compressão da almofada B utilizada no capítulo 7 foi de 1.043 kN/mm e a rigidez de referência, utilizada em Hurff (2010), foi de 1.042 kN/mm, ou seja, houve uma diferença de 0,1%.
- b) O modelo simplificado da almofada de apoio que considera elementos sólidos sobre molas mostrou-se bastante adequado para obter as curvas de momento  $\times$  rotação das almofadas de apoio. Este modelo permite, desta forma, obter o comportamento não-linear da almofada por meio da consideração de diferentes rigidezes longitudinais somente à compressão para as molas, dependendo da sua posição.
- c) O modelo de viga constituído por elementos sólidos apoiado sobre o modelo simplificado da almofada de apoio foi comparado com dois ensaios experimentais:

Hurff (2010) e Consolazio e Hamilton (2012). Em relação ao primeiro, comparando-se a curva de força aplicada  $\times$  rotação no meio do vão, observa-se que a força limite obtida resulta em um valor superior àqueles obtidos experimentalmente. Porém, utilizando o critério da inclinação da curva de força aplicada  $\times$  deslocamento lateral, o valor de força limite obtido foi de 484,0 kN que, comparados aos 463,0 kN de Hurff (2010), resulta numa diferença de 4,5%. Por fim, o modelo da viga de Consolazio e Hamilton (2012) também forneceu um valor próximo da força limite (61,5kN), que difere do valor experimental (68,5kN) em 10,2%. Portanto, conclui-se que o modelo é adequado para representar uma viga apoiada sobre almofadas elastoméricas e que o critério da inclinação da reta tangente à curva de força  $\times$  deslocamento lateral no meio do vão é suficiente para determinar as forças limite de tombamento.

- d) As análises paramétricas buscaram avaliar as variações da força limite e do levantamento das vigas conforme são alterados as imperfeições iniciais e os vãos. Em relação à força limite, observa-se que o aumento na excentricidade e no vão provocam redução dessas forças. Em relação à altura da viga, que foi considerada utilizando-se duas seções padrão da AASHTO (BT-54 e BT-72), a influência que esta exerce sobre a instabilidade lateral não é significativa.
- e) O levantamento da viga sobre as almofadas é de extrema importância na avaliação da estabilidade das vigas. Observou-se que, para evitar que o levantamento aconteça, não basta somente utilizar uma almofada com rigidez maior. Pelo contrário, conclui-se que a rigidez maior provocou um maior levantamento da viga sobre as almofadas. Isto porque uma rigidez menor permite que a compressão inicial da almofada pelo peso da viga seja maior, o que permite uma rotação maior para a viga até o momento onde o levantamento ocorre. Portanto, conclui-se que, para evitar o levantamento, deve-se adotar uma almofada com rigidez suficiente para que a compressão inicial favoreça a não ocorrência do levantamento, sem que ocorra também um afundamento maior que o permitido pela norma ABNT NTR 9062:2017. Ainda em relação às vigas analisadas, mesmo nas que tiveram uma perda de contato de 50% entre a viga e a almofada, a tensão de compressão na área resultante não ultrapassou o limite imposto pela norma brasileira de 15,0 MPa.
- f) Este trabalho buscou determinar as rigidezes efetivas das almofadas de apoio nas situações inicial e limite de carregamento. Observou-se que a rigidez à rotação diminuiu com o aumento da excentricidade e que esta redução chegou a 16% em



alguns casos considerando o peso próprio. Na situação limite, a redução devido à excentricidade chegou à 37%. Constatou-se também que a rigidez à rotação passando da situação inicial para a situação limite diminuiu em quase todos os casos. Nesta análise, o aumento no giro da almofada tende a diminuir a rigidez e o aumento na força aplicada no meio do vão tende a provocar uma compressão maior na almofada. Portanto, em quase todos os casos o aumento no giro foi mais desfavorável que o aumento na compressão inicial da almofada devido ao aumento da força aplicada.

- g) No capítulo 7 foi constatado que a inércia lateral que rege a estabilidade da viga. Considerou-se várias dimensões para as mesas inferior e superior da viga para avaliar a variação da carga limite com a variação das mesas. Foi possível obter também uma carga limite em função da inércia lateral da seção. O aumento da largura da mesa inferior em 200 mm mostra um ganho de 24%, em relação à força limite para a seção com dimensões padrão, e o mesmo aumento para a mesa superior resulta num ganho de 19%.

Ainda há muito o que avaliar em relação à instabilidade lateral. Como sugestão para trabalhos futuros, pode-se buscar o aprimoramento do modelo utilizado neste trabalho, de forma a obter curvas ainda mais precisas em relação aos ensaios experimentais existentes.

A variação na rigidez efetiva é, de certa forma, determinante na avaliação da estabilidade das vigas. Pode-se, portanto, realizar pesquisas mais aprofundadas, preferencialmente experimentais, em relação às rigidezes efetivas das almofadas para que estas possam ser determinadas de forma analítica para auxiliar engenheiros durante o projeto de vigas pré-moldadas.

## REFERÊNCIAS

AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS (AASHTO). **Load and Resistance Factor Design (LRFD). Bridge Design Specifications**. 6 ed. Washington, D.C., 2012.

ANSYS. v. 18.0. ANSYS, Inc.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9062**. Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. Rio de Janeiro, 2017.

BRITISH STANDARD. EN 1337-3. **Structural bearings**. Part 3 – Elastomeric Bearings. 2005.

BURGOYNE, C. J.; STRATFORD, T. J. Lateral instability of long-span prestressed concrete beams on flexible bearings. **The Structural Engineer**. London, v. 79, n. 6, p. 23 – 26, March 2001.

CARDOSO, M. T. S. A. **Instabilidade lateral de vigas pré-moldadas sobre apoios elastoméricos considerando o efeito das imperfeições geométricas**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, FECIV, Universidade Federal de Uberlândia, 2017.

CARDOSO, M. T. S. A.; LIMA, M. C. V. Determinação numérica de rigidezes de almofada de apoio fretado em análise tridimensional no ANSYS. In: SIMPÓSIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA, 1., 2016, Curitiba. **Anais do 1º Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia**. Curitiba, PR: Setor de Tecnologia da UFPR, 2016. p. 46-51.

CARDOSO, M. T. S. A.; LIMA, M. C. V. Physical and geometrical non-linear behavior of precast beams on elastomeric supports. **Ibracon Structures and Materials Journal**. São Paulo, v. 11, n. 7, p. 183 – 202, February 2018.

<http://dx.doi.org/10.1590/s1983-41952018000100010>

CONSOLAZIO, G. R.; HAMILTON, H. R. **Lateral bracing of long-span Florida bulb-tee-girders**. Structures Research Report 2007/52290. University of Florida, Gainesville, jul., 2007.

CONSOLAZIO, G. R.; HAMILTON, H. R.; BEERY, M. S. **Experimental validation of bracing recommendations for long-span concrete girders**. Structure Research Report 2012/72909-74040. University of Florida, Gainesville, dec., 2012.

GERMÁN, V. H. **Lateral stability analysis of long precast prestressed concrete beams**. 2015. 93 f. Tesi de Màster (Enginyeria d'estructures i construcció) – Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2015.

GIRIJA, K.; MENON, D. Reduction in flexural strength in rectangular RC beams due to slenderness. **Engineering Structures**. Guildford, v. 33, n. 8, p. 2398 – 2406, August 2011. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.04.014>

HEYMSFIELD, E.; MCDONALD, J.; AVENT, R. R. Neoprene Bearing Pad Slippage at Louisiana Bridges. **Journal of Bridge Engineering**. New York, v. 6, n. 1, p. 30 – 36, February, 2001. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2001\)6:1\(30\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2001)6:1(30))

HARPER, Z. S.; CONSOLAZIO G. R. Calculation Method for Quantifying Axial and Roll Stiffnesses of Rectangular Steel-Reinforced Elastomeric Bridge Bearing Pads. **Transportation Research Record**. Washington, v. 2331, n. 1, p. 3 – 13, 2013. <https://doi.org/10.3141/2331-01>

HILL, C. D.; DICK, J. S.; TADROS, M. K. PCI Advisory on I-Girder Stability during Handling and Construction. **Aspire Magazine**. Chicago, v. 3, n. 1, p. 38 – 40, 2009.

HURFF, J. B. **Stability of Precast Prestressed Concrete Bridge Girder Considering Imperfections and Termal Effects**. Dissertation. 2010. 483 f. (Degree Doctor of Philosophy) – School of Civil and Environmental Engineering. Georgia Institute of Technology, Georgia, 2010.

HURFF, J. B.; KANH, L. F. Rollover stability of precast, prestressed concrete bridge girders with flexible bearings. **PCI Journal**. Chicago, v. 57, n. 12, p. 96 – 107, Fall, 2012a. <https://doi.org/10.15554/pcij.09012012.96.107>

HURFF, J. B.; KAHN, L. F. Lateral-Torsional Buckling of Structural Concrete Beams: Experimental and Analytical Study. **Journal of Structural Engineering**. New York, v. 138, n. 9, p. 1138 – 1148, September, 2012b. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000542](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000542)

KRAHL, P. A. **Instabilidade lateral de vigas pré-moldadas em situações transitórias**. 2014. 208 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

KRAHL, P. A.; CARRAZEDO, R.; EL DEBS, M. K. Rollover stability of precast concrete beams supported by elastomeric bearing pads. **Ibracon structures and materials journal**. São Paulo, v. 10, n. 6, p. 1192 – 1204, December 2017. <http://dx.doi.org/10.1590/s1983-41952017000600005>

LEE, J. H. Evaluation of the Lateral Stability of Precast Beams on an Elastic Bearing Support with a Consideration of the Initial Sweep. **Engineering Structures**, v. 143, n. 1, p. 101 – 112, July, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.04.006>

LEE, J. H. Behavior of Precast Prestressed Concrete Bridge Girders Involving Thermal Effects and Initial Imperfections During Construction. **Engineering Structures**, v. 42, n. 1, p. 1 – 8, October, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.04.003>

LEE, J. H.; KALKAN, I. Analysis of Thermal Environmental Effects on Precast, Prestressed Concrete Bridge Girders: Temperature Differentials and Thermal Deformations. **Advances in Structural Engineering**, v. 15, n. 3, p. 447 – 459, March 2012  
<https://doi.org/10.1260/1369-4332.15.3.447>

LEE, J.; KALKAN, I.; LEE, J. J.; CHEUNG, J. H. Rollover Instability of Precast Girders Subjected to Wind Load. **Magazine of Concrete Research**, v. 69, n. 2, p.68 – 83, January, 2017.  
<https://doi.org/10.1680/jmacr.16.00187>

LIMA, M. C. V. **Contribuição ao estudo da instabilidade lateral de vigas pré-moldadas**. 2002. 179 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

MAST, R. F. Lateral stability of long prestressed concrete beams – Part 2. **PCI Journal**, v. 38, n. 1, jan.-feb., 1993.  
<https://doi.org/10.15554/pcij.01011993.70.88>

MUSCARELLA, J. V.; YURA, J. A. **An experimental study on elastomeric bridge bearings with design recommendations**. Technical Report n. FHWA/TX-98/1304-3. Texas Department of Transportation. 1995.

OESTERLE, R. G.; SHEEHAN, M. J.; LOTFI, H. R.; CORLEY, W. G.; ROLLER, J. J. **Investigation of red mountain freeway bridge girder collapse**. Arizona Department of Transportation, Bridge Group, Skokie, Illinois. CTL Group Project No. 262291, nov., 2007.

REIS, L. C.; LIMA, M. C. V. Modelagem numérica de almofadas de apoio elastoméricas com elementos sólidos no ANSYS. In: SIMPÓSIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA, 2., 2017, Curitiba. **Anais do 2º Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia**. Curitiba, PR: Setor de Tecnologia da UFPR, 2016. p. 283 – 290.

REVATHI, P.; MENON, D. Slenderness Effects in Reinforced Concrete Beams. **ACI Structural Journal**. Detroit, v. 104, n. 4, p. 412 – 419, July 2007.

YAZDANI, N.; EDDY, S. CAI, C. S. Effect of Bearing Pads on Precast Prestressed Concrete Bridges. **Journal of Bridge Engineering**. Reston, v. 5, n. 3, p. 224 - 232, 2000.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2000\)5:3\(224\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2000)5:3(224))