

LUCAS VIEIRA DIAS SOUSA

**APLICAÇÃO DO *NONLINEAR ENERGY SINK* (NES) NO
CONTROLE PASSIVO DA INSTABILIDADE EM
HELICÓPTERO COM ANISOTROPIA**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2018

LUCAS VIEIRA DIAS SOUSA

**APLICAÇÃO DO *NONLINEAR ENERGY SINK* (NES) NO
CONTROLE PASSIVO DA INSTABILIDADE EM HELICÓPTERO COM
ANISOTROPIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Sanches

Uberlândia - MG

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

S725a Sousa, Lucas Vieira Dias, 1990-
2018 Aplicação do Nonlinear Energy Sink (NES) no controle passivo da
instabilidade em helicóptero com anisotropia / Lucas Vieira Dias Sousa.
- 2018.

178 f. : il.

Orientador: Leonardo Sanches.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1159>

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Helicópteros - Aerodinâmica -
Teses. 3. Anisotropia - Teses. I. Sanches, Leonardo. II. Universidade
Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Maria Salete de Freitas Pinheiro – CRB6/1262



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA



ALUNO: Lucas Vieira Dias Sousa

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11612EMC011

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

LINHA DE PESQUISA: Dinâmica de Sistemas Mecânicos

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:

“Aplicação do *Nonlinear Energy Sink* (NES) no Controle Passivo da Instabilidade em Helicóptero com Anisotropia”

ORIENTADOR: Prof. Dr. Leonardo Sanches

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada no Anfiteatro A do Bloco 5O, Campus Santa Mônica, em 14 de junho de 2018, às 14:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Leonardo Sanches	UFU
Prof. Dr. Valder Steffen Júnior	UFU
Prof. Dr. Flávio Donizeti Marques	USP

Uberlândia, 14 de junho de 2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Federal de Uberlândia, a Faculdade de Engenharia Mecânica e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela oportunidade concedida de aprimorar e aprofundar meus conhecimentos através deste curso. Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Leonardo Sanches, pela orientação. Aos órgãos que fomentam a pesquisa na UFU: CNPQ, CAPES e FAPEMIG. E aos meus colegas do laboratório LMest.

SOUSA, L. V. D., **Aplicação do *Nonlinear Energy Sink* (NES) no Controle Passivo da Instabilidade em Helicóptero com Anisotropia**. 2018. 167 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RESUMO

Durante o procedimento de pouso ou decolagem, helicópteros com rotores de pás articuladas podem apresentar um comportamento dinâmico instável, conhecido como ressonância solo. A ocorrência deste fenômeno pode comprometer a integridade estrutural da aeronave e a segurança de seus ocupantes. Modelos físicos-matemáticos foram desenvolvidos visando mapear as regiões de instabilidade. O modelo denominado de isotrópico considera as mesmas propriedades mecânicas entre as pás, enquanto que no modelo anisotrópico, as propriedades são diferentes. Esta última consideração leva ao aparecimento de novas regiões de instabilidade em relação ao caso isotrópico, o que dificulta o seu controle. O acoplamento de um absorvedor dinâmico não linear, *Nonlinear Energy Sink* (NES), ao modelo isotrópico, se mostrou eficiente quanto ao controle do fenômeno. Porém, o que necessita ser respondido é: teria o NES projetado a capacidade de controlar também as instabilidades presentes no sistema anisotrópico? A resposta para esta pergunta vem através da aplicação do Método das Múltiplas Escalas (MME). Com este método, as equações analíticas que representam o *Slow Invariant Manifold* (SIM0) e o *Super Slow Invariant Manifold* (SIM1) são obtidas. A interação entre estas curvas captura os efeitos que a não linearidade provoca na dinâmica do sistema, possibilitando inferir sobre o seu comportamento. A validação do modelo obtido com MME foi feita mediante métodos de integração numérica. Os resultados demonstram a potencialidade do NES no controle da instabilidade em helicópteros com rotores anisotrópicos.

Palavras Chave: Fenômeno Ressonância Solo, Nonlinear Energy Sink, Dinâmica não linear, Rotores Anisotrópicos, Método das Múltiplas Escalas.

SOUSA, L. V. D., **Application of a Nonlinear Energy Sink (NES) for the Passive Control of Instability on Helicopter with Anisotropic Rotor**. 2018. 167 f. Master Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

ABSTRACT

During landing or take-off procedures, helicopters with articulated blade rotors can show an unstable response, known as ground resonance. The occurrence of this phenomenon may compromise the structural integrity of the aircraft and the crew's safety. Physical-mathematical models were developed to map the instability zones. The isotropic model considers that all blades have the same mechanical properties, while the anisotropic model concerns different properties between blades. The last model leads to the appearance of new instability regions, as compared with the isotropic one, and it hinders the aircraft control. The addition of a nonlinear dynamical absorber, Nonlinear Energy Sink (NES), into the helicopter has demonstrated to be efficient in controlling this phenomenon. However, there is the need to answer if the NES designed for the isotropic case can also control the instabilities presented in the anisotropic system? For answering this question, the Method of Multiple Scale (MME) is used. Through this method, analytical equations representing the Slow Invariant Manifold (SIM0) and the Super Slow Invariant Manifold (SIM1) are obtained. The interaction between these curves captures the nonlinear effects from the NES on the dynamics of the anisotropic helicopter. The obtained results are validated using a numerical integration method and they could highlight the potential applicability of NES to control the helicopter instability with anisotropic rotor.

Keywords: Ground Resonance Phenomenon, Nonlinear Energy Sink, Nonlinear Dynamics, Anisotropic Rotor, Method of Multiple Scales.

Lista de Figuras

1.1	Quantidade de acidentes nos últimos 10 anos (CENIPA, 2017).	2
1.2	Classificação dos acidentes ocorridos nos últimos 10 anos (CENIPA, 2017).	3
1.3	Percentual de acidentes por segmento nos últimos 10 anos (CENIPA, 2017).	4
1.4	Representação esquemática da cabeça do rotor, adaptado de Watkinson (2003).	5
2.1	Representação esquemática do modelo isotrópico do helicóptero. . . .	12
2.2	Representação esquemática da fixação da pá na cabeça do rotor. . . .	15
2.3	Configurações dos modos do rotor - Coordenas de Coleman	20
2.4	Análise de estabilidade do helicóptero durante o FRS: (a) Evolução da parte real do autovalor e (b) Evolução da parte imaginária do autovalor.	22
2.5	Evolução da parte imaginária do autovalor - Identificação dos modos instáveis.	24
2.6	Integração temporal - $\Omega = 45Hz$: (a) Deslocamento da fuselagem e (b) Deslocamento do rotor - Coleman.	25
2.7	Regiões de instabilidade devido a presença da anisotropia na primeira pá.	30
2.8	Regiões de instabilidade devido a presença da anisotropia na primeira pá.	31
3.1	Modelo dinâmico do helicóptero com NES acoplado à fuselagem.	35
3.2	Evolução do autovalores: MMS (curva azul) e numérico (curva tracejada).	56

3.3	Identificação dos <i>Fold Points</i> na curva SIM0. Região estável (linha contínua), Região instável (linha pontilhada)	61
3.4	Análise da interação das variedades invariantes no comportamento do sistema dinâmico. Linha azul: curva SIM0 e Linha vermelha: curva SIM1.	62
3.5	Resposta do helicóptero com o NES submetido ao FRS, $\Omega_c = 4,6615 Hz$. (a) Resposta da Fuselagem; (b) Resposta do NES.	65
3.6	Relação entre as curvas SIM0 e SIM1 para frequência de rotação $\Omega_c = 4,6615 Hz$	65
3.7	Regime de supressão do FRS para frequência de rotação $\Omega_c = 4,6615 Hz$	66
3.8	Comparação entre os valores da resposta temporal do helicóptero com o NES e os valores do <i>fold point</i> da esquerda e do ponto de equilíbrio da direita, $\Omega_c = 4,6615 Hz$. (a) Resposta da Fuselagem; (b) Resposta do NES.	66
3.9	Resposta do helicóptero com o NES submetido ao FRS, $\Omega_c = 4,6615 Hz$ e $\delta = -0,15915 Hz$. (a) Resposta da Fuselagem; (b) Resposta do NES.	67
3.10	Relação entre as curvas SIM0 e SIM1 para frequência de rotação $\Omega_c = 4,6615 Hz$ e $\delta = -0,15915 Hz$	68
3.11	Resposta do helicóptero com o NES submetido ao FRS, $\Omega_c = 4,6615 Hz$ e $\delta = 0,15915 Hz$. (a) Resposta da Fuselagem; (b) Resposta do NES.	68
3.12	Relação entre as curvas SIM0 e SIM1 para frequência de rotação $\Omega_c = 4,6615 Hz$ e $\delta = 0,15915 Hz$	69
4.1	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = 0 Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.	84
4.2	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = 0 Hz$	84
4.3	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = 0.15915 Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.	85

4.4	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = 0.15915 Hz$	85
4.5	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = -0.15915 Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.	86
4.6	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = -0.15915 Hz$	86
4.7	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = 0 Hz$	88
4.8	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = 0.15915 Hz$	88
4.9	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = -0.15915 Hz$	89
4.10	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = 0 Hz$	89
4.11	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = 0.15915 Hz$	90
4.12	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = -0.15915 Hz$	90
4.13	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = 0 Hz$	91
4.14	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = 0.15915 Hz$	92
4.15	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = -0.15915 Hz$	92
4.16	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = 0 Hz$	93
4.17	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = 0.15915 Hz$	93

4.18	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = -0.15915 Hz$	94
4.19	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = 0 Hz$	94
4.20	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = 0.15915 Hz$	95
4.21	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = -0.15915 Hz$	95
4.22	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = 0 Hz$	96
4.23	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = 0.15915 Hz$	96
4.24	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$, $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = -0.15915 Hz$	97
4.25	Síntese dos resultados. (Azul: resposta em regime permanente do sistema converge a zero; Vermelho: resposta fortemente modulada do tipo <i>canard explosion</i> ; Laranja: resposta fortemente modulada porém com menor transferência de energia; Verde: resposta fracamente modulada.)	98
4.26	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$ e $\delta = 0 Hz$	99
4.27	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$ e $\delta = 0.15915 Hz$	99
4.28	Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$ e $\delta = -0.15915 Hz$	100
4.29	Máxima amplitude da fuselagem do modelo anisotrópico com NES para diferentes combinações de Ω e $\Delta\sigma$	101
A.1	Configurações dos modos do rotor - Coordenadas de Coleman	117

B.1	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = 0Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.	147
B.2	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = 0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.	148
B.3	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = -0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Res- posta do NES.	148
B.4	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = 0Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.	149
B.5	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = 0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.	150
B.6	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = -0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.	150
B.7	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = 0Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.	151
B.8	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = 0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.	152
B.9	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = -0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Res- posta do NES.	152
B.10	Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$, $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = 0Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.	153

- B.11 Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$,
 $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = 0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta
do NES. 154
- B.12 Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$,
 $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = -0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta
do NES. 154
- B.13 Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$,
 $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = 0Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do
NES. 155
- B.14 Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$,
 $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = 0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta
do NES. 156
- B.15 Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$,
 $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = -0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Res-
posta do NES. 156
- B.16 Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$,
 $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = 0Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES. 157
- B.17 Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$,
 $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = 0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta
do NES. 158
- B.18 Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615Hz$,
 $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = -0.15915Hz$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta
do NES. 158

Lista de Tabelas

A.1	Valores adotados para o modelo do helicóptero.	159
A.2	Parâmetros adotados para o NES.	160

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

$A_n(T_0, T_1)$	- Amplitude modal do n-ésimo modo
a	- excentricidade do rotor
b	- distância do centro de massa da pá até a sua fixação no rotor
c_{bk}	- coeficiente de amortecimento da k-ésima pá
c_f	- coeficiente de amortecimento da fuselagem
c_t	- coeficiente de amortecimento do NES
$I_{z_{bk}}$	- momento de inércia da k-ésima pá
K	- $1 + \mu$
k_{bk}	- coeficiente de rigidez torcional da k-ésima pá
k_f	- coeficiente de rigidez da fuselagem
k_{nl}	- coeficiente de rigidez não linear do NES
m_{bk}	- massa da k-ésima pá
m_f	- massa da fuselagem
m_t	- massa do NES
N_ϵ	- número de escalas de tempo
N_b	- número total de pás no rotor
r_{ak}	- $a r_{bk}$
r_{bk}	- razão entre o momento estático sobre a inércia de rotação lead-lag total
r_{ca}	- razão entre o fator de amortecimento do NES sobre a massa total do helicóptero
r_{ck}	- razão entre o fator de amortecimento da k-ésima pá sobre a inércia total
r_{cf}	- razão entre o fator de amortecimento da fuselagem sobre a massa total do helicóptero
r_{mk}	- razão entre o momento estático sobre da k-ésima pá sobre a massa total do helicóptero
T_0, T_1, \dots	- escalas de tempo do método das múltiplas escalas
$\{U_n\}$	- autovetor pela direita do n-ésimo modo
$\{V\}$	- autovetor pela esquerda do n-ésimo modo
$\{W\}$ e $\{S\}$	- autovetores associados ao modo instável
$x(t)$	- deslocamento da fuselagem
(X_0, Y_0, Z_0)	- sistemas de coordenadas inercial
(x, y, z)	- sistemas de coordenadas móvel
$z(t)$	- deslocamento relativo entre a fuselagem e o NES

Símbolos Gregos

ϵ	-	parâmetro de perturbação
ζ	-	ângulo entre a pá e o eixo \vec{x} do sistema de coordenadas móvel
η	-	razão entre a perturbação na rigidez de uma das pás sobre a inércia total
λ	-	razão entre a rigidez não linear do NES sobre a massa total do helicóptero
μ	-	razão entre a massa do NES sobre a massa total do helicóptero
ρ	-	autovalor
ρ_M	-	autovalor com maior valor na parte real
ρ_m	-	autovalor com menor valor na parte real
σ	-	perturbação na rigidez de uma das pás
$\tau_0(t)$	-	coordenada de Coleman coletivo
$\tau_d(t)$	-	coordenada de Coleman diferencial
$\tau_{1c}(t)$	-	coordenada de Coleman cosseno
$\tau_{1s}(t)$	-	coordenada de Coleman seno
$\phi_k(t)$	-	deslocamento angular da k-ésima pá
Ω	-	velocidade de rotação do rotor
ω_{bk}	-	frequência natural lead-lag da k-ésima pá
ω_f	-	frequência natural da fuselagem
ω_n	-	autovalor do sistema

Lista de Abreviações

<i>ADV</i>	-	Absorvedor Dinâmico de Vibrações
<i>ANAC</i>	-	Agência Nacional de Aviação Civil
<i>CENIPA</i>	-	Centro Nacional de Investigação e Prevenção de Acidentes Aeronáuticos
<i>CG</i>	-	Centro de Gravidade
<i>EASA</i>	-	<i>European Aviation Safety Agency</i>
<i>FAA</i>	-	<i>Federal Aviation Administration</i>
<i>FRS</i>	-	Fenômeno de Ressonância Solo
<i>IAM</i>	-	Inspeção Anual de Manutenção
<i>MME</i>	-	<i>Método das Múltiplas Escalas</i>
<i>NES</i>	-	<i>Nonlinear Energy Sink</i>
<i>SIM0</i>	-	<i>Slow Invariant Manifold</i>
<i>SIM1</i>	-	<i>Super Slow Invariant Manifold</i>
<i>TET</i>	-	<i>Target Energy Sink</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Fenômeno de Ressonância Solo	3
1.2	<i>Nonlinear Energy Sink</i> - NES	7
1.3	Objetivos do Trabalho	8
1.4	Estrutura da Dissertação	9
2	MODELAGEM DINÂMICA E ANÁLISE DE ESTABILIDADE	11
2.1	Modelo Dinâmico	13
2.2	Helicóptero com Rotor Isotrópico	16
2.2.1	Análise de Estabilidade	21
2.2.2	Conclusão	24
2.3	Helicóptero com Rotor Anisotrópico	26
2.3.1	Análise da Estabilidade	29
2.3.2	Conclusão	32
3	MODELO ISOTRÓPICO COM O NES	33
3.1	Modelo Isotrópico com NES	34
3.2	Método das Múltiplas Escalas	38
3.2.1	Ordem ϵ^0	42
3.2.2	Ordem ϵ^1	44
3.2.3	Solução Ordem ϵ^0	46
3.2.4	Solução Ordem ϵ^1	48
3.3	Análise do Comportamento do Helicóptero com o NES	60

3.4	Conclusão	69
4	MODELO ANISOTRÓPICO COM O NES	71
4.1	Modelo Anisotrópico com o NES	72
4.2	Método das Múltiplas Escalas	75
4.2.1	Ordem ϵ^0	79
4.2.2	Ordem ϵ^1	79
4.2.3	Solução Ordem ϵ^0 e ϵ^1	79
4.3	Resultados	82
4.3.1	Caso 1 $\rightarrow \Delta\sigma = 0\%$	83
4.3.2	Caso 2 $\rightarrow \Delta\sigma = \pm 10\%$	87
4.3.3	Caso 3 $\rightarrow \Delta\sigma = \pm 20\%$ e $\Delta\sigma = \pm 30\%$	87
4.3.4	Síntese das Respostas do Helicóptero Anisotrópico com NES através do MME	97
4.3.5	Variação das Curvas SIM0 e SIM1 em função da anisotropia	97
4.3.6	Influência do NES no comportamento dinâmico do modelo ani- sotrópico	100
4.4	CONCLUSÕES	102
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	103
6	REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	106
APÊNDICES		
A	EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	113
A.1	MODELO ISOTRÓPICO E SEM NES	113
A.1.1	Posicionamento dos Componentes do Helicóptero	114
A.1.2	Trabalho e Energia	115
A.1.3	Transformada de Coleman	116
A.1.4	Equação do Movimento	118
A.2	MODELO ISOTRÓPICO COM NES	130

A.2.1	Transformada de Coleman	134
A.3	MODELO ANISOTRÓPICO SEM NES	137
A.3.1	Transformada de Coleman	139
A.4	MODELO ANISOTRÓPICO COM NES	141
A.4.1	Transformada de Coleman	144
B	RESULTADOS DO MODELO ANISOTRÓPICO DO HELICÓPTERO	147
B.1	Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = -10\%$	147
B.2	Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = 10\%$	149
B.3	Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = -20\%$	151
B.4	Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = 20\%$	153
B.5	Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = -30\%$	155
B.6	Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = 30\%$	157
 ANEXOS		
A	VALORES PARA O MODELO DO HELICÓPTERO	159
B	TEORIA DE FLOQUET	161

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Nos dias de hoje, a aviação tem sido um meio de transporte de passageiros e cargas muito utilizado devido a sua agilidade e praticidade. Em grandes centros urbanos, os helicópteros têm o seu papel de destaque, se consolidando na prestação de serviços de transporte e resgate de civis, dentre outros. O aumento da demanda por este tipo de serviço, faz com que os órgãos reguladores, a Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), no Brasil, a *Federal Aviation Administration* (FAA), nos Estados Unidos, e a *European Aviation Safety Agency* (EASA), na Europa, implementem normas rigorosas para de operação e manutenção dessas aeronaves. No Brasil, por exemplo, para que um modelo de aeronave opere em território nacional é necessário passar por um árduo processo de certificação. Além disso, quando uma aeronave é certificada e entra em operação, é obrigatório o envio periódico de relatórios informando os detalhes da sua manutenção - Inspeção Anual de Manutenção (IAM).

Quando um acidente aéreo ocorre, o órgão brasileiro responsável pela investigação e catalogação desses acidentes é o Centro de Investigações e Prevenção de Acidentes Aeronáuticos (CENIPA). Em seu último relatório [CENIPA \(2017\)](#), foram notificados a ocorrência de 211 acidentes envolvendo helicópteros entre os anos de 2005 e 2015, Figura 1.1. Os anos de maior ocorrência foram em 2011 e 2012, tendo respectivamente 31 e 29 acidentes. Em média, foram cerca de 22 ocorrências anuais

no período de dez anos.

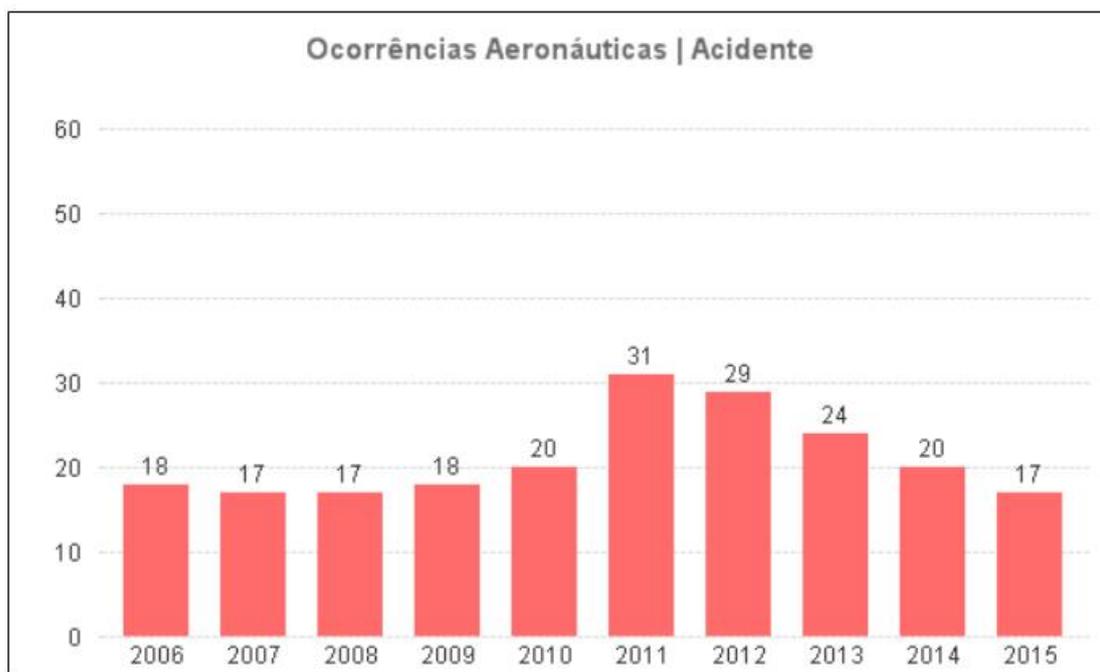


Figura 1.1: Quantidade de acidentes nos últimos 10 anos (CENIPA, 2017).

Além disso, todos esses acidentes são classificados pelo seu tipo de ocorrência, Figura 1.2. Dentre os diversos motivos, por apresentarem maiores índices, destacam-se quatro, a saber: perda de controle em voo, falha do motor em voo, colisão em voo com obstáculos e perda de controle no solo. Todos eles podem estar associados às condições de operação e manutenção da aeronave e à experiência do piloto. Outro dado importante, trazido pelo relatório do CENIPA, é a apresentação dos seguimentos da aviação em que ocorreram os acidentes, Figura 1.3. É notório que a aviação particular e a de instrução são os principais responsáveis pelos acidentes aéreos envolvendo helicópteros, obtendo quase 70% dos índices. A experiência, em horas de voo, adquirida pelos pilotos destes segmentos influencia significativamente nos números de acidentes.

A falta de experiência dos pilotos propicia que o helicóptero seja submetido a condições de operação críticas em que não é mais possível controlar a aeronave em solo ou durante o voo. Um fenômeno bastante conhecido e estudado atualmente é o fenômeno de ressonância solo (FRS). Classificado como um dos fenômenos causadores da perda de controle em solo, Figura 1.2, o FRS pode ser o responsável pela

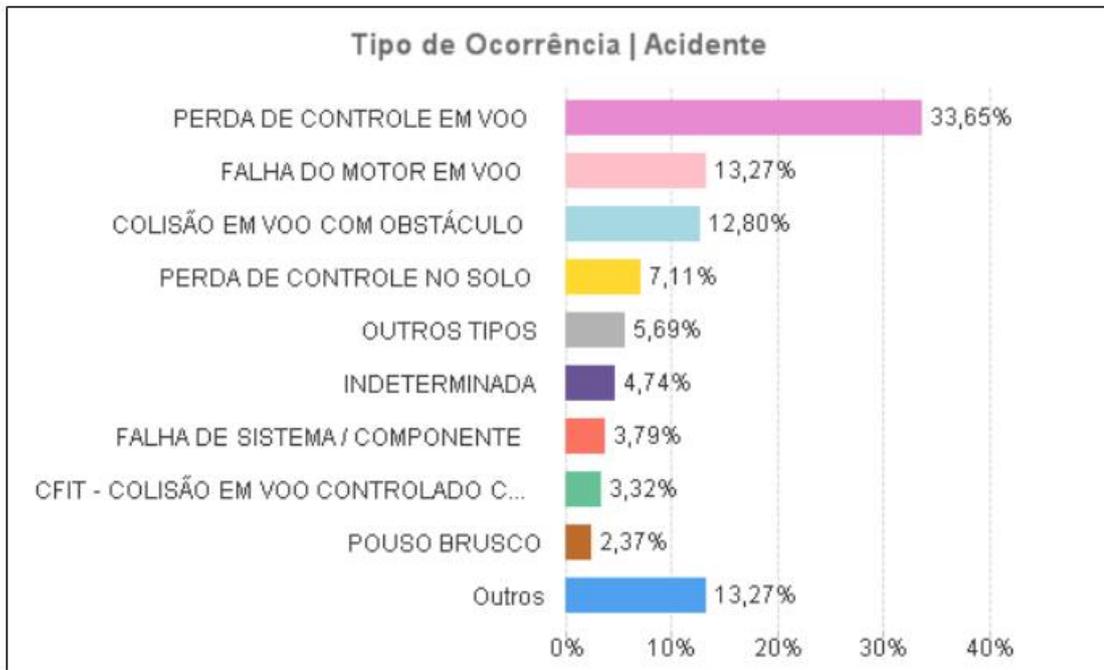


Figura 1.2: Classificação dos acidentes ocorridos nos últimos 10 anos (CENIPA, 2017).

perda de controle do helicóptero durante o procedimento de pouso e decolagem. Consequentemente, é importante compreender o motivo do surgimento do FRS, para que assim seja possível controlar o comportamento da aeronave. Ao longo do texto, estes aspectos serão explorados e detalhados.

1.1 Fenômeno de Ressonância Solo

Na década de 40, quando se passou a observar e estudar os acidentes aéreos envolvendo helicópteros, percebeu-se um comportamento muito particular em alguns testes (Coleman e Feingold, 1957). Foi observado que durante pousos e decolagens, dependendo das condições de operação, os helicópteros apresentavam um comportamento instável que poderiam levar ao seu colapso estrutural. Um fator comum entre os acidentes é a presença de um rotor com pás articuladas ou flexíveis.

Aplicado em determinados tipos de helicópteros, o rotor com pás articuladas é constituído por um conjunto de eixo-pás responsáveis pela sustentação em voo. A presença de uma articulação no acoplamento das pás com a cabeça do rotor pode dar liberdade de movimentação às pás em três direções. A Figura 1.4 apresenta os

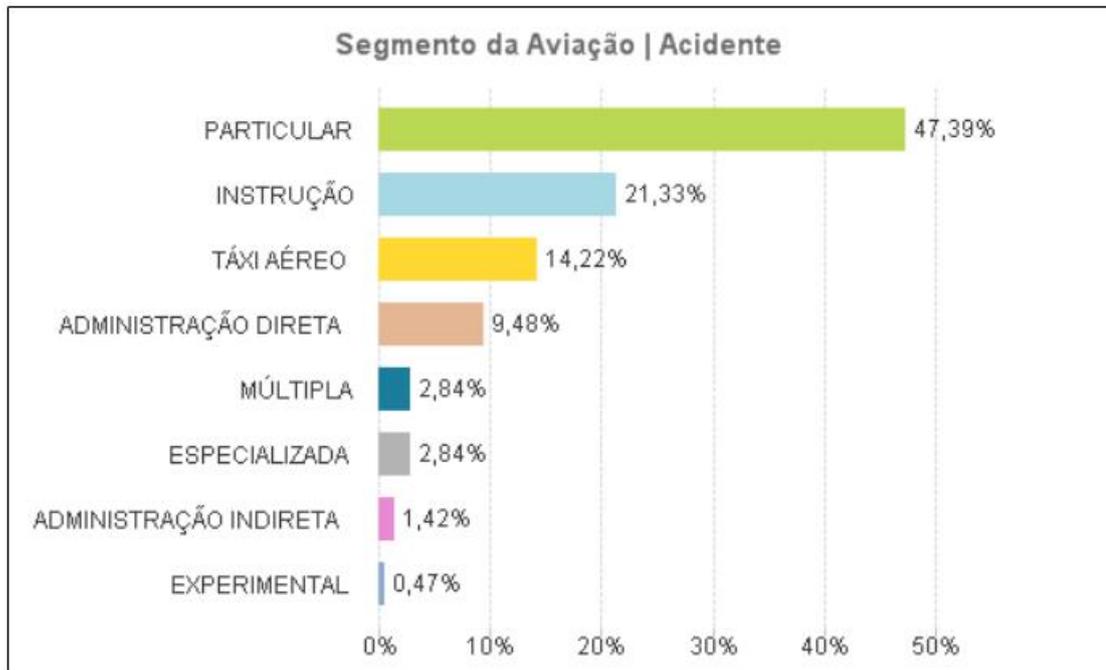


Figura 1.3: Percentual de acidentes por segmento nos últimos 10 anos (CENIPA, 2017).

eixos em que esses movimentos são possíveis: *lead-lag*, *flap*, e *pitch*.

O movimento de rotação em torno do eixo *lead-lag* faz com que a pá tenha deslocamento angular de avanço e recuo em relação a sua posição de equilíbrio, sendo que esse movimento ocorre totalmente no plano horizontal (plano do rotor). Quando a pá gira em torno do eixo *flap*, realiza-se um deslocamento angular no plano vertical, que também é conhecido como batimento. Por fim, quando a pá gira em torno do eixo *pitch*, formando um ângulo com o plano horizontal, tem-se o movimento conhecido como arfagem. Como cada pá é fixa à cabeça do rotor através de articulações distintas, o movimento apresentado por cada um delas são independentes entre si.

O emprego deste tipo de rotor nos projetos aeronáuticos tem como objetivo reduzir o peso estrutural dos helicópteros. Caso as pás fossem engastadas ao rotor, elas necessitariam possuir uma maior rigidez na região de conexão para resistir aos esforços aerodinâmicos. Porém, quando as pás tem liberdade de rotacionar em torno do seu ponto fixação, não há mais a necessidade de reforçar a região do engaste devido à redução dos esforços de momento na raiz da pá. Isto proporciona uma pá mais leve, e portanto, uma aeronave mais leve. Todavia, a redução da rigidez no ponto de fixação das pás ao rotor trouxe consigo efeitos dinâmicos indesejados.

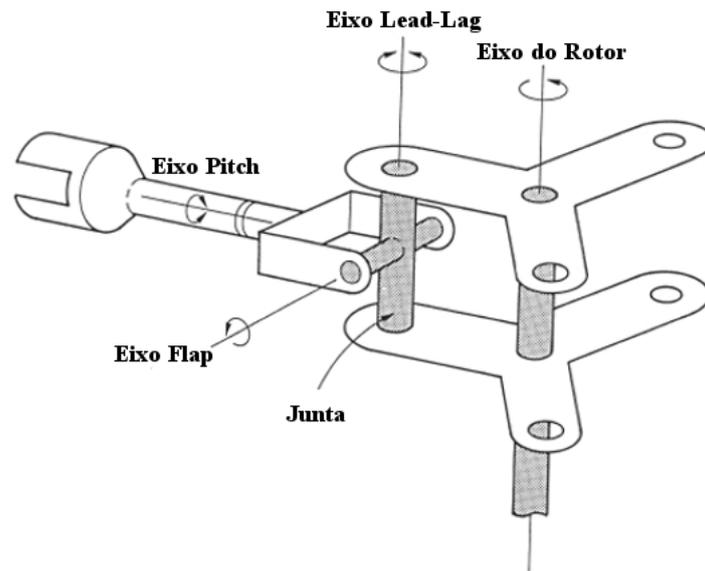


Figura 1.4: Representação esquemática da cabeça do rotor, adaptado de [Watkinson \(2003\)](#).

Um dos fenômenos decorrentes da existência de pás articuladas ou flexíveis, ficou conhecido como ressonância solo e foi estudado primeiramente por [Coleman e Feingold \(1957\)](#). Nesta ocasião, identificou-se que o comportamento de oscilação das pás, em determinadas velocidades de rotação, provocava o deslocamento do centro de massa do rotor, gerando um desbalanceamento dinâmico. Por consequência, este desbalanceamento dinâmico consiste em uma fonte de excitação da fuselagem. Quando a frequência de oscilação dessa força coincide com a frequência natural da fuselagem, uma condição de ressonância será atendida e grandes deslocamentos serão obtidos. Parte da energia de vibração da fuselagem é transmitida de volta às pás, ampliando ainda mais os seus deslocamentos, e conseqüentemente, aumentando o deslocamento do centro de massa do rotor (nível de desbalanceamento dinâmico). A repetição cíclica destes fatos geram um crescimento exponencial dos níveis de vibração da aeronave e, em um curto período de tempo, chega-se a grandes deslocamentos capazes de provocar o colapso estrutural da aeronave ([Ganiev e Pavlov, 1973](#); [Johnson, 2012](#)).

Durante o desenvolvimento das equações para o estudo do FRS apresentadas por [Coleman e Feingold \(1957\)](#), considera-se todas as pás com as mesmas

propriedades mecânicas e geométricas, denominado neste trabalho de um rotor isotrópico. Além deste aspecto, despreza-se os efeitos aerodinâmicos nas pás, reduzindo a complexidade das equações através da eliminação de termos periódicos.

Após Coleman, [Hooper \(1959\)](#) analisou o FRS para diferentes combinações do rotor e amortecimento da fuselagem. [Donham et al. \(1969\)](#) reformularam as equações do movimento considerando os efeitos aerodinâmicos e visando identificar as instabilidades devido a dois tipos de ressonância: ar e solo. Além destes autores, [Lytwyn et al. \(1971\)](#) contribuíram para os fenômenos de ressonância ar e solo.

O uso das equações linearizadas na predição das regiões instáveis devido ao FRS foram amplamente exploradas e se mostraram eficazes. Porém, outros métodos para análise da estabilidade em sistemas dinâmicos também foram implementados, como por exemplo o método de Floquet.

Aplicando a teoria de Floquet foi possível analisar sistemas dinâmicos que apresentam equações diferenciais com termos periódicos. [Peters e Hohenemser \(1971\)](#) utilizam esse método para analisar as regiões de estabilidade de um rotor de helicóptero. [Hammond \(1974\)](#) identifica as zonas de instabilidade através de Floquet em um rotor de pás articuladas cujos valores de amortecimento nas pás são diferentes. Já [Wang e Chopra \(1992\)](#) aplicam Floquet para analisar a influência das regiões de instabilidade quando uma ou mais pás do rotor apresenta(am) massa(s) desbalanceada(s), diferentes valores de rigidezes e ausência de amortecimento. [Sanches et al. \(2011\)](#) identificam que a presença da anisotropia pode gerar novas regiões de instabilidade.

Levando em consideração os efeitos aerodinâmicos, [Gandhi \(1997\)](#); [Gandhi e Malovrh \(1999\)](#) analisaram a influência da anisotropia nas propriedades mecânicas e aerodinâmicas das pás de um rotor com pás articuladas. A desigualdade no comprimento das pás e em suas propriedades de massa e rigidez *lead-lag* se mostraram favoráveis quanto a evitar a instabilidade do sistema; por outro lado, a rigidez no movimento de batimento (*flap*), o amortecimento e a aerodinâmica não apresentaram influência significativa no comportamento instável do sistema.

Os efeitos da não linearidade na dinâmica do helicóptero durante o FRS foram explorados por [Robinson et al. \(1998, 2004a,b\)](#); [Flowers e Tongue \(1988\)](#); [Janowski e Tongue \(1988\)](#); [Kunz \(2000\)](#). Em alguns destes trabalhos já se identifica que os métodos de perturbação foram usados para capturar os efeitos da não linearidade na dinâmica do sistema.

Para se controlar o FRS, geralmente, busca-se aumentar o amortecimento da fuselagem e do rotor ([Done, 1974](#)), e/ou modifica-se a rigidez *lead-lag* das pás do rotor ou a rigidez da fuselagem. Além disso, [Krysinski e Malburet \(2009\)](#) aplicaram o controle ativo buscando controlar a instabilidade no FRS.

Dentre outros métodos estudados e utilizados para controlar o fenômeno, destaca-se a aplicação de um absorvedor dinâmico não linear de vibração. Esse dispositivo é conhecido como *Nonlinear Energy Sink* (NES) e tem se mostrado promissor e robusto para controlar ressonâncias e instabilidades.

1.2 *Nonlinear Energy Sink* - NES

O NES é um sistema dinâmico constituído de uma massa (proporcionalmente pequena quando comparada com a massa do sistema principal), uma forte rigidez cúbica e um amortecimento viscoso. Seu princípio de atuação tem como base o conceito *Targeted Energy Transfer* (TET) ([Vakakis et al., 2008](#)), que consiste em direcionar a energia do sistema principal para um secundário, de forma que a energia capturada por este último não realize o caminho inverso. E uma vez capturada pelo sistema secundário (NES), a energia é então dissipada pelo amortecimento presente.

O NES tem sido aplicado no controle de vibração ([Vakakis et al., 2008](#)), na redução de ruído ([Bellet et al., 2010](#)) e no controle do *flutter* ([Lee et al., 2007a,b](#)). Além disso, utilizou-se o Método das Múltiplas Escala (MME) para compreender a influência do NES no controle do *flutter* ([Gendelman et al., 2010](#)).

[Gendelman e Bar \(2010\)](#) analisam a influência do NES na resposta de um oscilador de Van der Pol auto-excitado. A maneira em que a não linearidade interage com o sistema principal pode ocasionar diferentes níveis de modulação da resposta

do sistema. Devido ao princípio do TET, busca-se que o NES induza uma resposta fortemente modulada no sistema principal (Starosvetsky e Gendelman, 2008), conhecida também como *Canard Explosion*.

Luongo e Zulli (2014) analisaram o efeito do NES em um sistema de múltiplos graus de liberdade, alimentando a ideia de aplicar o NES ao modelo do helicóptero. Bergeot et al. (2016) aplicam o NES à fuselagem, enquanto Bergeot et al. (2017); Pafume-Coelho (2017) aplicam o NES nas pás do helicóptero para controle do fenômeno de ressonância solo. Porém, nestes casos, a aplicação do NES é avaliada apenas em modelos isotrópicos do helicóptero.

1.3 Objetivos do Trabalho

A indústria aeronáutica sempre busca a segurança da tripulação e dos seus passageiros durante a operação de uma aeronave, portanto compreender o FRS nos helicópteros se faz necessário. Dessa forma, é a partir do conhecimento do fenômeno e de suas características que se propõem uma solução assertiva para o problema.

Como o helicóptero é submetido a diversos esforços e variações climáticas durante o voo, seus componentes podem se desgastar provocando uma alteração nas suas propriedades mecânicas. Assim, estudar apenas o caso do rotor isotrópico (quando as propriedades de massa, rigidez e amortecimento das pás são iguais) não é suficiente para prever as regiões de instabilidade provocadas pelo FRS em um caso real. Assim, é necessário compreender a dinâmica do helicóptero e suas regiões de instabilidade quando as pás apresentam variação nas suas propriedades - caso anisotrópico.

Visto que a presença da anisotropia pode proporcionar um aumento das regiões de instabilidade, dentre as possíveis formas de controle aplicáveis, o NES surge como uma alternativa. Devido a sua capacidade de sintonizar com a frequência de oscilação do sistema principal, esse dispositivo consegue atuar em diversas situações ao qual o helicóptero é submetido.

Quando aplicado ao modelo isotrópico do helicóptero, o NES se mostrou

capaz de suprimir a instabilidade devido ao FRS (Bergeot et al., 2016, 2017; Pafume-Coelho, 2017). Mas o que ainda não foi respondido é: seria o NES capaz de atuar em um helicóptero apresentando anisotropia, uma vez que este foi projetado para o caso isotrópico? Caso a resposta seja positiva, este conseguirá suprimir as novas regiões de instabilidade? Este trabalho tem como objetivo esclarecer esta questão, estudando a influência do NES no comportamento dinâmico do modelo de um helicóptero com anisotropia em uma de suas pás.

Para responder o questionamento e compreender a influência da não linearidade na dinâmica do sistema principal, aplica-se o Método das Múltiplas Escalas (MME). Desenvolve-se uma metodologia para obter a equação analítica que rege a dinâmica do helicóptero, e valida-se os resultados através de um método de integração numérica.

1.4 Estrutura da Dissertação

Este trabalho é estruturado em cinco capítulos, sendo o primeiro deles este capítulo introdutório.

Capítulo 2

Este capítulo introduz conceitualmente os dois modelos dinâmicos do helicóptero: isotrópico e o anisotrópico. A partir das equações do movimento obtidas para cada modelo, avalia-se as suas respectivas regiões de instabilidade. Com a ajuda da transformada de Coleman, os termos periódicos das equações do movimento são eliminados, podendo-se analisar a estabilidade através da evolução dos autovalores do sistema. No modelo anisotrópico, mesmo aplicando a transformada de Coleman, não é possível retirar os termos periódicos devido a presença da anisotropia. Por isso, as regiões sob influência do FRS foram identificadas através do método de Floquet. Uma análise da influência do amortecimento estrutural na supressão da instabilidade também é feita.

Capítulo 3

Neste capítulo o NES é acoplado ao modelo isotrópico do helicóptero. O MME é apresentado, e para que a sua aplicação consiga capturar os efeitos da não linearidade do sistema, realiza-se escalonamento das variáveis presentes nas equações do movimento. Toda a metodologia é desenvolvida para compreender a dinâmica do sistema ao longo da região instável devido ao FRS. Como resultado, são obtidas duas equações analíticas que regem a dinâmica do sistema. Denominadas de *Slow Invariant Manifold* (SIM0) e *Super-Slow Invariant Manifold* (SIM1), estas curvas têm a capacidade de prever o comportamento do sistema ao se analisar a interação entre elas. Valida-se os resultados através da resposta do sistema obtida por integração numérica.

Capítulo 4

Neste capítulo o NES é acoplado ao modelo anisotrópico do helicóptero. Aplica-se a mesma metodologia desenvolvida no Capítulo 3 e chega-se às curvas SIM0 e SIM1 correspondentes ao sistema dinâmico. Através da interação destas curvas, analisa-se diversos casos de anisotropia contidos dentro da região de instabilidade e verifica-se a capacidade das curvas em preverem a dinâmica do sistema. Por fim, é explorada a capacidade do NES em suprimir a instabilidade do sistema, ao longo de toda a faixa de operação do rotor, através da integração numérica.

Capítulo 5

São apresentadas neste capítulo as conclusões obtidas ao longo do desenvolvimento da pesquisa e, também, as perspectivas futuras geradas a partir deste trabalho.

CAPÍTULO II

MODELAGEM DINÂMICA E ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Sabendo que o FRS ocorre devido à coalescência entre um modo da fuselagem com um modo do rotor, o modelo avaliado por [Sanches et al. \(2011\)](#) representa satisfatoriamente bem o comportamento do helicóptero durante esse fenômeno. Este modelo, que foi baseado nos modelos clássicos da literatura sobre o assunto ([Coleman e Feingold, 1957](#); [Wang e Chopra, 1992](#)), e considera apenas dois dos principais componentes da aeronave para a representação do fenômeno: a fuselagem e o rotor principal.

O modelo físico do helicóptero utilizado neste trabalho é ilustrado na [Figura 2.1](#). Este considera a fuselagem como um corpo rígido capaz de realizar movimentos de translação no plano horizontal. Isto se deve ao fato da interação que a fuselagem tem com o rotor durante o FRS. Em uma análise, sob uma perspectiva superior da aeronave, o CG da fuselagem se desloca/translada quando submetido aos efeitos dos esforços dinâmicos provindos do rotor. Além disso, a propriedade de inércia da fuselagem engloba toda a massa da parte estrutural do helicóptero e dos componentes nela fixada. As propriedades de rigidez e amortecimento são, basicamente, aquelas fornecidas pelo trem de pouso, quando este se encontra em contato com o solo.

Já para o rotor do helicóptero, a influência dos esforços aerodinâmicos no

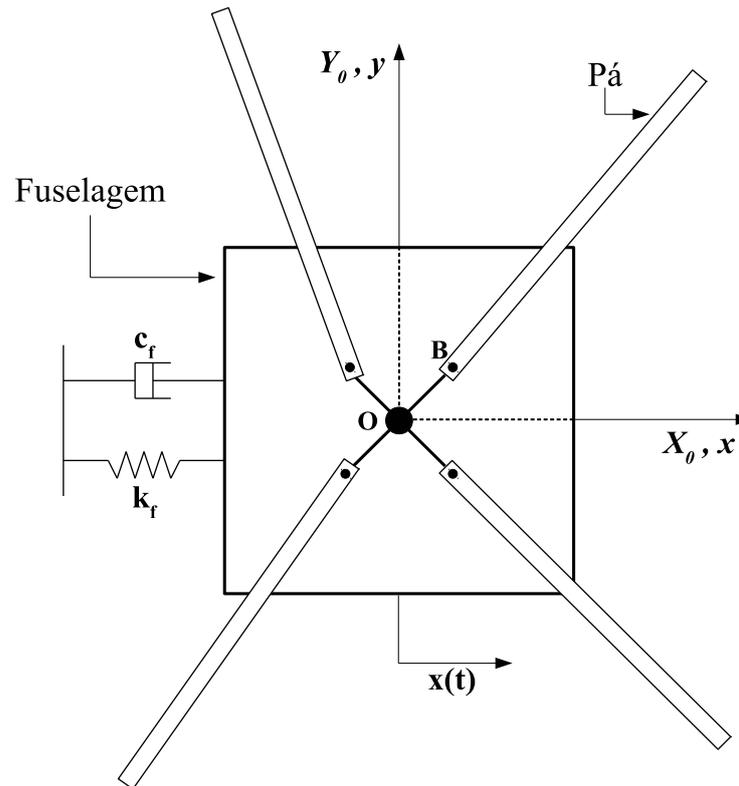


Figura 2.1: Representação esquemática do modelo isotrópico do helicóptero.

comportamento dinâmico das pás podem ser negligenciados uma vez que o FRS acontece para baixas frequências de rotação do rotor. Estes eventos estão associados principalmente aos procedimentos de pouso e decolagem. Uma vez que o modelo proposto despreza os efeitos aerodinâmicos, as oscilações de *batimento* e *arfagem* também são desprezadas. Neste sentido, apenas o movimento de *lead-lag* - avanço e recuo das pás no plano de rotação é admitido.

Esta seção dedica-se a obter as equações do movimento que representam matematicamente a física do sistema durante a ocorrência do fenômeno de instabilidade. Este modelo matemático é obtido através da aplicação das equações de Lagrange. Além disso, apenas pequenos deslocamentos serão considerados, fato que permitirá a linearização dos termos trigonométricos envolvendo os graus de liberdade do sistema dinâmico. Vale ressaltar que mesmo utilizando deste procedimento de linearização, as equações de movimento são dadas por equações diferenciais com coeficientes trigonométricos.

Para eliminar os termos periódicos presentes nas equações do movimento,

utiliza-se a Transformada de Coleman. Este método realiza uma mudança de coordenada, transformando as coordenadas que descrevem o sistema. Ao invés de utilizar os deslocamentos angulares das pás descritos no referencial rotativo, usa-se coordenadas generalizadas que representam a dinâmica do conjunto das pás, todas representadas em um referencial inercial (Bir, 2008). Admitindo esta transformação de variáveis, as novas equações do movimento podem ser analisadas com ferramentas clássicas da literatura. A determinação das fronteiras de estabilidade são calculadas através da análise do problema de autovalor do sistema dinâmico.

Vale ressaltar que, em virtude das considerações realizadas acerca das propriedades mecânicas e/ou geométricas das pás, tem-se os modelos de rotores de helicópteros denominados isotrópicos e anisotrópicos. O modelo isotrópico considera que todas as pás que compõem o rotor têm as mesmas propriedades mecânicas e geométricas. Em contrapartida, os modelos anisotrópicos consideram que algumas destas propriedades não são as mesmas para uma ou mais de suas pás.

A consideração de rotores isotrópicos é uma idealização ou uma particularização dos modelos de rotores. Pode-se dizer que um helicóptero tem as propriedades das suas pás idênticas assim que este foi fabricado, com a presença de elementos mecânicos novos. Ao decorrer da utilização da aeronave e em virtude de processos e carregamentos aleatórios em cada uma das pás, diferentes mecanismos de degradação podem surgir. Isto implica que as propriedades mecânicas entre duas pás podem não ser mais idênticas.

2.1 Modelo Dinâmico

Ao se definir o modelo de um sistema dinâmico, espera-se que as equações do movimento consigam representar, de forma satisfatória, a dinâmica do sistema real. Desta forma, as hipóteses que sustentam o desenvolvimento do modelo dinâmico do helicóptero estão sumarizadas abaixo:

- A fuselagem é considerada como um corpo rígido;

- Os efeitos aerodinâmicos na dinâmica das pás são desprezados;
- As pás apresentam apenas oscilações de *lead-lag*, rotações das pás descritas no plano do rotor;
- O eixo, que liga o rotor à fuselagem, é considerado rígido;

A Figura 2.1 ilustra o modelo adotado para a representação do FRS. É considerado que fuselagem possui massa m_f e se desloca apenas na direção do eixo \vec{x} . A rigidez k_f e o coeficiente de amortecimento viscoso c_f , proporcionados pelo contato do trem de pouso com o solo, são associados ao deslocamento da fuselagem na direção \vec{x} .

A origem do sistema de coordenadas inerciais (X_0, Y_0, Z_0) presume que o helicóptero se encontra na posição de equilíbrio. Dessa forma, posiciona-se a origem do sistema de coordenadas coincidindo com a posição do centro de massa da fuselagem O .

O rotor é composto por um eixo rígido e um conjunto de N_b pás. Este eixo é posicionado acima do centro de massa da fuselagem. A k -ésima pá possui massa m_{bk} e momento de inércia $I_{z_{bk}}$, calculado a partir do eixo \vec{z} posicionado no centro de massa da pá. As propriedades de rigidez angular e coeficiente de amortecimento viscoso, consideradas na articulação que conecta a k -ésima pá ao centro do rotor, são definidas por k_{bk} e c_{bk} , respectivamente.

A Figura 2.2 ilustra a disposição da k -ésima pá fixa à cabeça do rotor no ponto B . A excentricidade do rotor, definida pela distância do centro do rotor até o ponto de fixação da pá B , é dada por a . O raio de giração da pá é caracterizado pela distância do centro de massa da pá até o ponto de giro, essa distância é representada por b .

Um sistema de coordenadas móvel (x, y, z) é posicionado no centro da cabeça do rotor, de forma que seus eixos estejam paralelos aos eixos do sistema de coordenadas inercial. Além disso, o sistema de coordenadas móveis rotaciona em torno do seu eixo z com a mesma velocidade angular do rotor Ω .

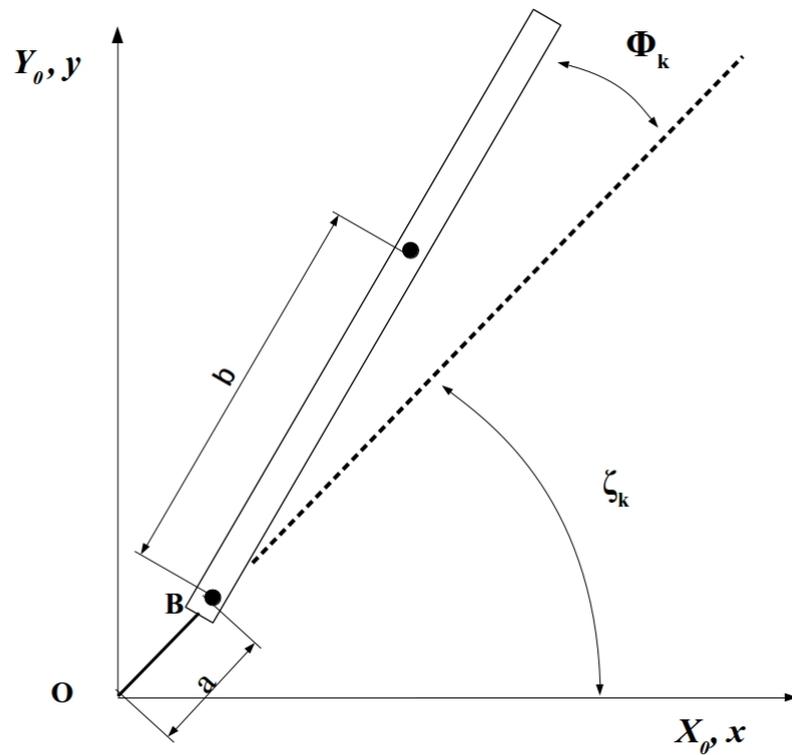


Figura 2.2: Representação esquemática da fixação da pá na cabeça do rotor.

Cada pá tem a liberdade de rotacionar entorno do ponto B , que caracteriza o movimento de *lead-lag* - $\phi_k(t)$ - movimento de avanço e recuo da pá definido no plano do rotor. O ângulo $\zeta_k = \frac{2\pi(k-1)}{N_b}$ define o ângulo em que o ponto B da k -ésima pá tem em relação ao eixo x do sistema de coordenadas móvel. Este mesmo ponto pode ser definido em relação ao sistema de coordenadas inercial, uma vez que o sistema de coordenadas móvel apresenta velocidade angular constante Ω . Portanto, a posição angular da pá é dado agora por $\psi_k = \Omega t + \zeta_k$.

A dinâmica do helicóptero para a representação do fenômeno de ressonância solo pode ser descrita à partir das seguintes coordenadas generalizadas $q = \{x(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t)\}$. No entanto, devido às coordenadas de deslocamento angular das pás de *lead-lag* serem descritas em um referencial móvel (rotativo), as equações do movimento tornam-se equações diferenciais com coeficientes periódicos. O tratamento destas equações exige técnicas dedicadas a este tipo de problema, como por exemplo, teoria de Floquet (Gökçek, 2004).

Uma alternativa para a simplificação das equações do movimento, através

da eliminação do seu caráter periódico, é representar a dinâmica do rotor (coletivo de pás) ao invés de tratar cada pá de maneira individualizada. Para isto, uma metodologia para tratamento de sistemas dinâmicos rotativos com várias pás é empregada (Sanches et al., 2011; Bramwell et al., 2001). Esta transformação de variáveis é denominada de Transformada de Coleman.

As equações do movimento são obtidas a partir do método de energia, equação de Lagrange, com base no modelo físico. A determinação das energias cinéticas e potenciais para a representação do fenômeno de ressonância solo estão detalhadas no Apêndice A.

As seções subsequentes dedicarão-se às particularidades do modelo da aeronave, considerando rotores em configurações isotrópicas e anisotrópicas. As seções 2.2 e 2.3 são responsáveis por definir os modelos físicos adotados para a determinação da dinâmica do helicóptero com rotor isotrópico e anisotrópico, respectivamente, seguidos de suas equações do movimento proveniente de cada modelo. Nas seções 2.2.1 e 2.3.1 são analisados as regiões de instabilidades provenientes de cada modelo, e por fim, são apresentadas as devidas conclusões.

2.2 Helicóptero com Rotor Isotrópico

Esta seção dedica-se ao modelo dinâmico de helicópteros com rotor em configuração isotrópica. Isto implica que as propriedades mecânicas das pás serão idênticas, ou seja, $k_{bk} = k_b$, $I_{zbk} = I_{zb}$, $m_{bk} = m_b$, para $k = 1..N_b$. Os detalhes para o desenvolvimento destas equações podem ser vistos no Apêndice A, mais especificamente na seção (A.1.4).

A equação do movimento resultante do modelo isotrópico é apresentada pela Equação 2.1. A matriz $[M_i]$ é composta pelas inércias de cada elemento considerado no modelo em sua diagonal principal, como cada equação do movimento foi normalizada pelos seus respectivos termos de inércia, a diagonal principal apresenta apenas valores unitários. Além disso, os termos $-2rm$ e $-rb$ são responsáveis pela existência do acoplamento de massa entre a fuselagem e o rotor. A matriz $[C_i]$ contém,

em sua diagonal principal, os termos associados ao amortecimento viscoso. A matriz $[G_i]$ é constituída pelos termos giroscópicos presentes fora da diagonal principal. Já a matriz $[K_i]$ contém os termos associados à rigidez de cada elemento, mas uma vez que as equações foram normalizadas pela massa, estes termos se transformam nas frequências naturais de cada elemento do sistema ω_f^2 e ω_b^2 . Também, ocorre o aparecimento de termos associados à velocidade angular do rotor Ω . Por fim, o vetor $\{F_i\}$ apresenta as forças externas atuantes no sistema.

$$[M_i] \{\ddot{p}\} + [[C_i] + [G_i]] \{\dot{p}\} + [K_i] \{p\} = \{F_i\} \quad (2.1)$$

onde:

- Coordenadas $\{p\}$

$$\{p\} = \{x(t), \tau_{1c}(t), \tau_{1s}(t), \tau_0(t), \tau_d(t)\}^T$$

- Matriz de massa $[M_i]$

$$[M_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2rm & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -rb & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C_i]$

$$[C_i] = \begin{bmatrix} rcf & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rcb & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rcb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rcb & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rcb \end{bmatrix}$$

- Matriz giroscópica $[G_i]$

$$[G_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega & 0 & 0 \\ 0 & -2\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K_i]$

$$[K_i] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 ra - \Omega^2 + \omega_b^2 & \Omega rcb & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega rcb & \Omega^2 ra - \Omega^2 + \omega_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^2 ra + \omega_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2 ra + \omega_b^2 \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_i\}$

$$\{F_i\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

As variáveis $\tau_{1c}(t)$, $\tau_{1s}(t)$, $\tau_0(t)$, $\tau_d(t)$ indicam as coordenadas de Coleman, Apêndice A.1.3, que representam os modos cosseno, seno, coletivo e diferencial do rotor do helicóptero, respectivamente. Cada um destes modos está associado a uma determinada forma em que as pás estão dispostas, conforme indicado na Figura 2.3. Vale ressaltar que os modos coletivo e diferencial não produzem o deslocamento do centro de gravidade do rotor em relação ao eixo de rotação, enquanto que para os modos cosseno e seno isto não é verdade.

Os parâmetros presentes na Equação 2.1 são expressos em função das propriedades mecânicas e geométricas do helicóptero. Estes são determinados por:

$$\begin{aligned} rm_k &= \frac{b m_{bk}}{m_f + \sum_{k=1}^{Nb} m_{bk}} & rb_k &= \frac{b m_{bk}}{b^2 m_{bk} + Iz_{bk}} \\ ra_k &= a rb_k & rc_f &= \frac{c_f}{m_f + \sum_{k=1}^{Nb} m_{bk}} \\ rc_{bk} &= \frac{c_{bk}}{b^2 m_{bk} + Iz_{bk}} & \omega_f^2 &= \frac{k_f}{m_f + \sum_{k=1}^{Nb} m_{bk}} \\ \omega_{bk}^2 &= \frac{k_{bk}}{b^2 m_{bk} + Iz_{bk}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

A variável rm_k representa a razão entre o momento estático da pá em relação a massa total do sistema e o fator rb_k demonstra a razão entre o momento estático da k -ésima pá em relação ao seu momento de inércia de rotação total. Os fatores rc_f e rc_{bk} calculam, respectivamente, a razão entre o coeficiente de amortecimento da

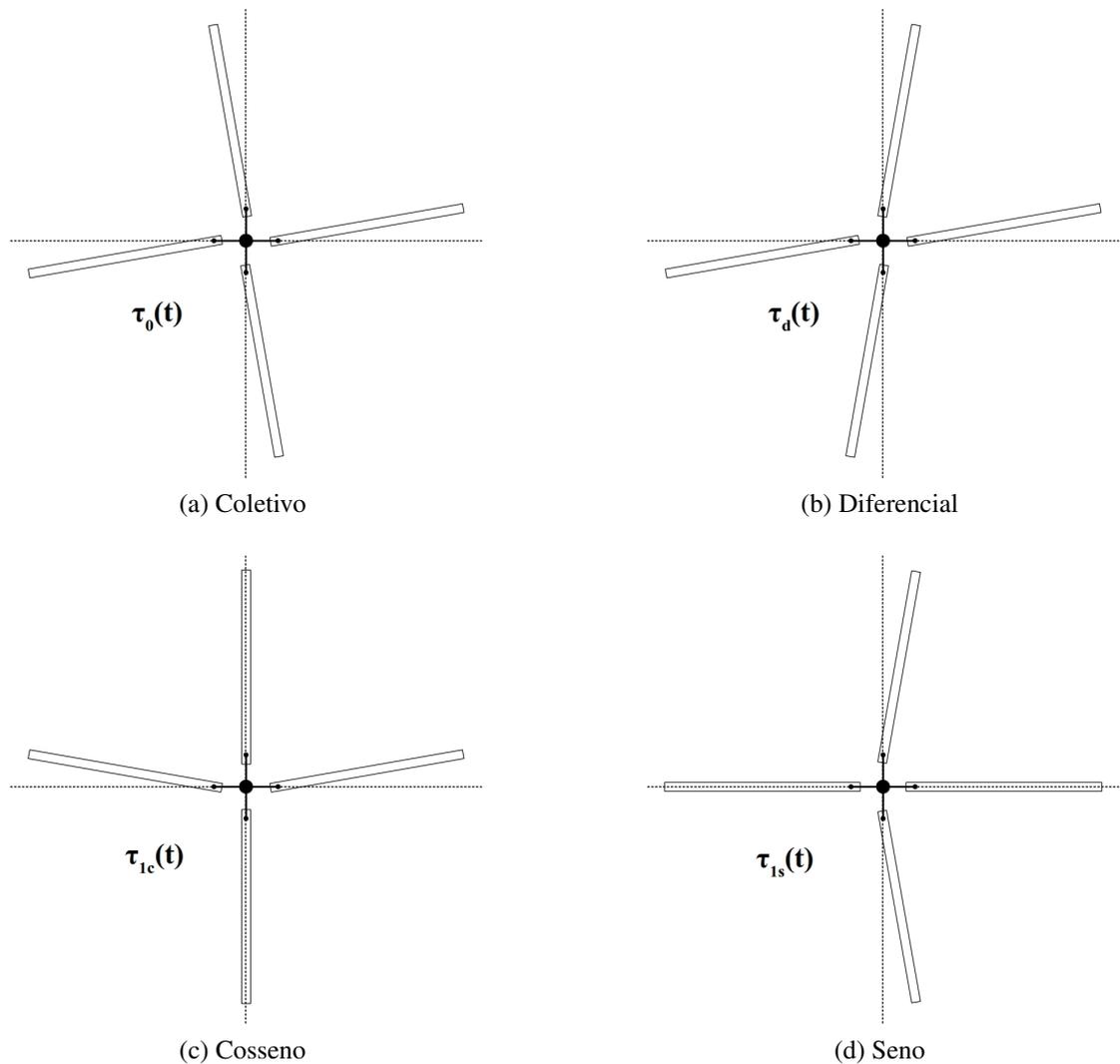


Figura 2.3: Configurações dos modos do rotor - Coordenadas de Coleman

fuselagem com a massa total do helicóptero e a razão entre o coeficiente de amortecimento da k -ésima pá e seu momento de inércia de rotação. A frequência natural da fuselagem é dada por ω_f^2 , já a frequência natural relativa ao movimento de *lead-lag* da k -ésima pá é definida por ω_{bk}^2 .

Vale ressaltar que o modelo isotrópico considera iguais, para cada uma das pás, as propriedades de massa m_{bk} , momento de inércia I_{bk} , rigidez k_{bk} e amortecimento c_{bk} . Conseqüentemente, não há a necessidade do índice k para diferenciar as suas propriedades dinâmicas.

Como os termos periódicos foram retirados da equação do movimento, a análise da estabilidade do sistema pode ser determinada através da análise dos auto-

valores. Este estudo é realizado na próxima seção.

2.2.1 Análise de Estabilidade

A análise da estabilidade do helicóptero é de fundamental importância para a identificação da(s) faixa(s) de velocidade(s) de rotação Ω em que o FRS ocorre. Para essa análise serão adotados os parâmetros do helicóptero apresentados no Anexo A. A partir destes valores, os parâmetros presentes nas matrizes da Equação 2.1 podem ser calculados através da Equação 2.2.

$$\begin{aligned} rm &= 0,0263 \text{ m} & \omega_f &= 6,0\pi \text{ rad/s} \\ rb &= 0,1740 \text{ 1/m} & \omega_b &= 3,0\pi \text{ rad/s} \\ rc_f &= 0,0038 \text{ 1/s} & ra &= 0,0348 \\ rc_b &= 0,0019 \text{ 1/s} & & \end{aligned}$$

Determinados os valores dos coeficiente na equação do movimento, avalia-se numericamente os autovalores do sistema dinâmico para cada velocidade de rotação Ω adotada. Identifica-se a instabilidade observando a parte real dos autovalores ρ . Quando $\Re(\rho) > 0$, o sistema apresenta resposta temporal divergente, fato que identifica a sua instabilidade e, portanto, a ocorrência do fenômeno ressonância solo. Caso contrário, se $\Re(\rho) < 0$, o sistema tem resposta temporal convergente, consequentemente, é assintoticamente estável. A parte imaginária do autovalor indica uma determinada frequência natural do sistema. Vale ressaltar que para cada autovalor associa-se uma frequência e um modo natural de vibração. As informações obtidas pelo autovalor são de vital importância para a identificação da região de instabilidade e dos modos responsáveis por ela.

Afim de avaliar a região de instabilidade do helicóptero com um rotor isotrópico, variou-se a velocidade angular Ω do rotor de 0 a 10 Hz. A Figura 2.4 apresenta evolução da parte real e imaginária dos autovalores do sistema em função da velocidade de rotação Ω .

Percebe-se, na Figura 2.4a, que um dos modos do sistema apresenta valores de $\Re(\rho)$ maiores que zero no intervalo de Ω entre 4,54 e 4,98 Hz. Portanto, para quaisquer valores de Ω dentro deste intervalo, o helicóptero terá oscilações instáveis.

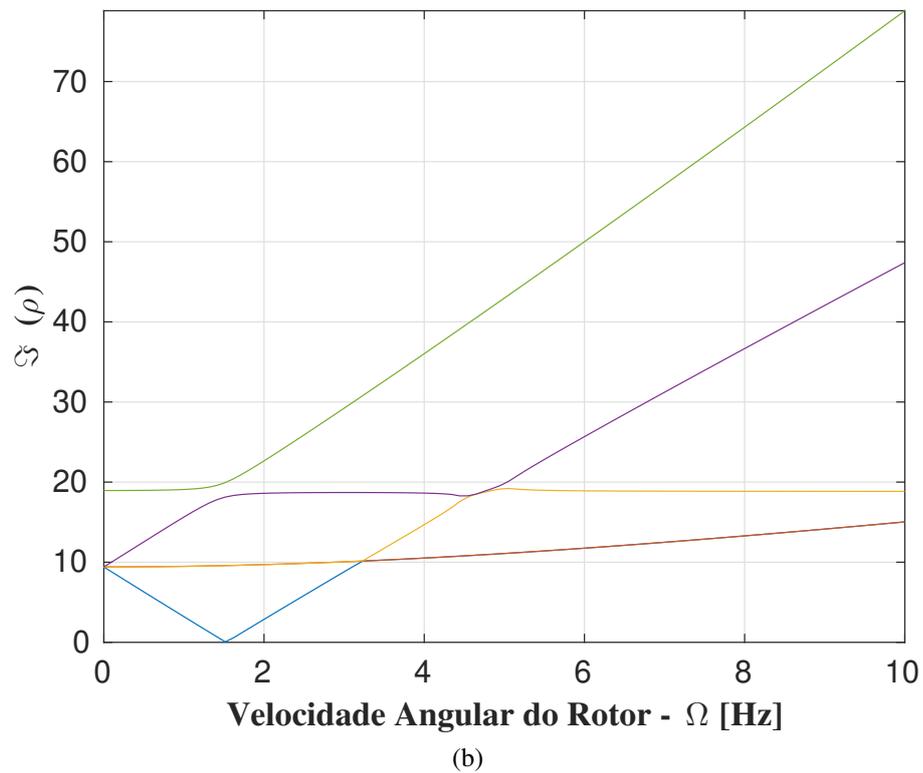
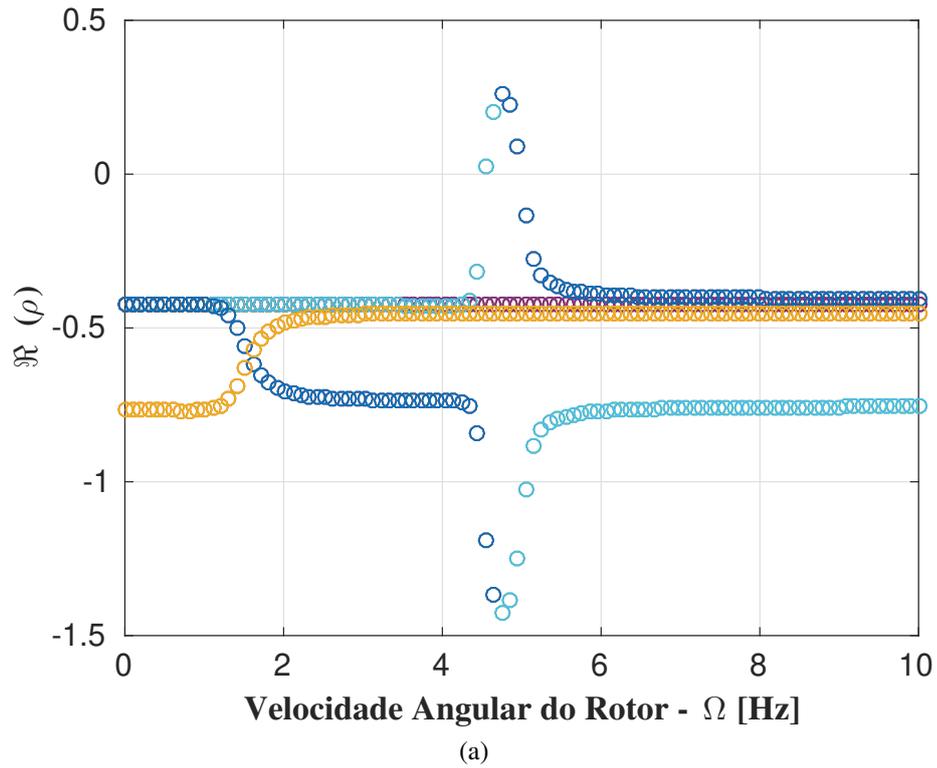


Figura 2.4: Análise de estabilidade do helicóptero durante o FRS: (a) Evolução da parte real do autovalor e (b) Evolução da parte imaginária do autovalor.

Isto caracteriza a ocorrência do FRS para sistemas lineares.

Observando o diagrama de Campbell, Figura 2.4b, nota-se que existe uma

aproximação entre duas curvas no intervalo de 4,54 a 4,98 Hz. É possível identificar quais são os modos envolvidos na instabilidade através da Figura 2.5, que foi obtida desconsiderando o amortecimento na equação do movimento, Equação 2.1. Esta última figura apresenta a evolução da frequência natural dos modos da fuselagem e dos modos progressivo, regressivo e coletivo; todos descritos em função da velocidade de rotação Ω . Observando dentro do intervalo de 4,54 a 4,98 Hz, onde o FRS existe, ocorre a interseção entre as curvas do modo da fuselagem com o modo regressivo do rotor. Este fenômeno, nada mais é, que a coalescência entre estes dois modos de vibração do sistema.

Sanches (2011) mostra que o modo regressivo do rotor é resultado da interação entre os modos seno e cosseno, ambos apresentados na Figura 2.3. Consequentemente, o modo regressivo do rotor provoca o aparecimento de uma massa desbalanceada provocada pelo deslocamento do CG do rotor em relação ao seu eixo de rotação. Já o modo de vibração da fuselagem corresponde ao seu movimento oscilatório ao longo da direção \vec{x} . Não é difícil de evidenciar que a interação entre estes dois modos no helicóptero gera uma condição de auto-excitação entre os modos, provocando assim a instabilidade do sistema.

Outra forma de verificar a instabilidade do helicóptero é através da resposta temporal do sistema. Considerando valores de Ω dentro do intervalo da região de instabilidade, como por exemplo $\Omega = 4,75 Hz$, o histograma das coordenadas generalizadas do sistemas são apresentados na Figura 2.6. Estes resultados foram obtidos a partir da integração numéricas das equações de movimento utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

A partir da Figura 2.6 é possível avaliar que, tanto a resposta temporal da fuselagem ($x(t)$), quanto a resposta do rotor ($\tau_{1c}(t), \tau_{1s}(t)$), ambas divergem no tempo. Porém, os modos $\tau_d(t)$ e $\tau_0(t)$ não apresentam comportamento temporal divergente, e portanto eles não colaboram com a instabilidade do helicóptero durante o FRS.

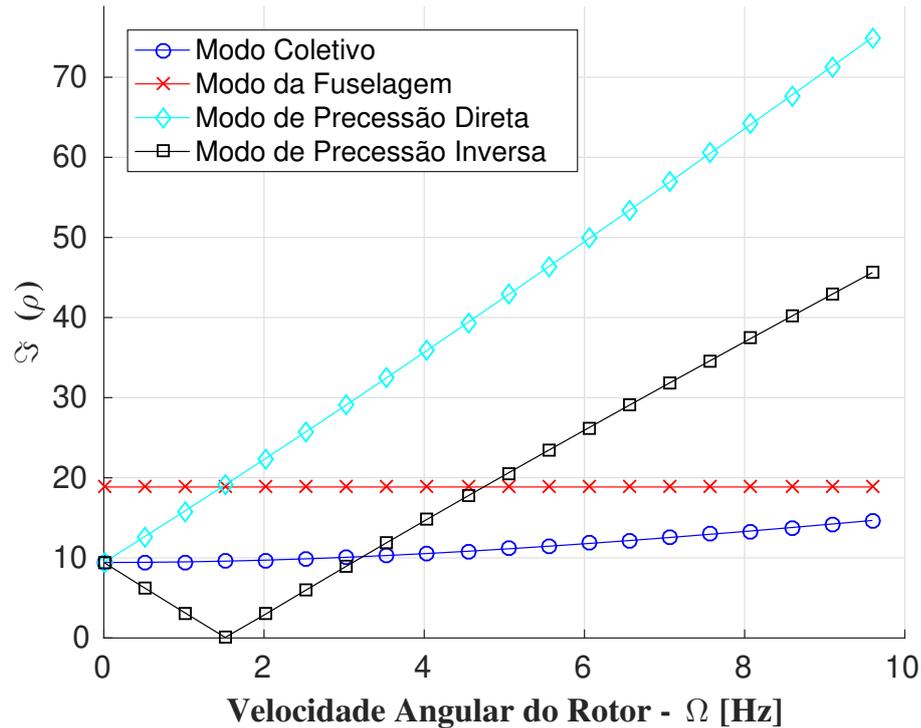


Figura 2.5: Evolução da parte imaginária do autovalor - Identificação dos modos instáveis.

2.2.2 Conclusão

A análise do modelo dinâmico do helicóptero é um passo inicial importante para identificar certas características do FRS. Utilizar as coordenadas de Coleman é uma forma eficiente de conseguir retirar os termos periódicos presentes na equação do movimento do sistema isotrópico. Isso viabiliza a determinação das fronteiras de instabilidade através da análise dos autovalores.

Uma região de instabilidade pode ser encontrada devido a coalescência entre dois modos do helicóptero. No caso em questão, esta região está compreendida para valores de Ω entre 4,54 e 4,98 Hz.

A compreensão da dinâmica do sistema e a identificação de regiões instáveis, estimula a investigação de métodos de controle que atenuam ou eliminam completamente a instabilidade. Um desses métodos é a aplicação do NES no modelo dinâmico do helicóptero. Isso será estudado com mais detalhes no próximo capítulo.

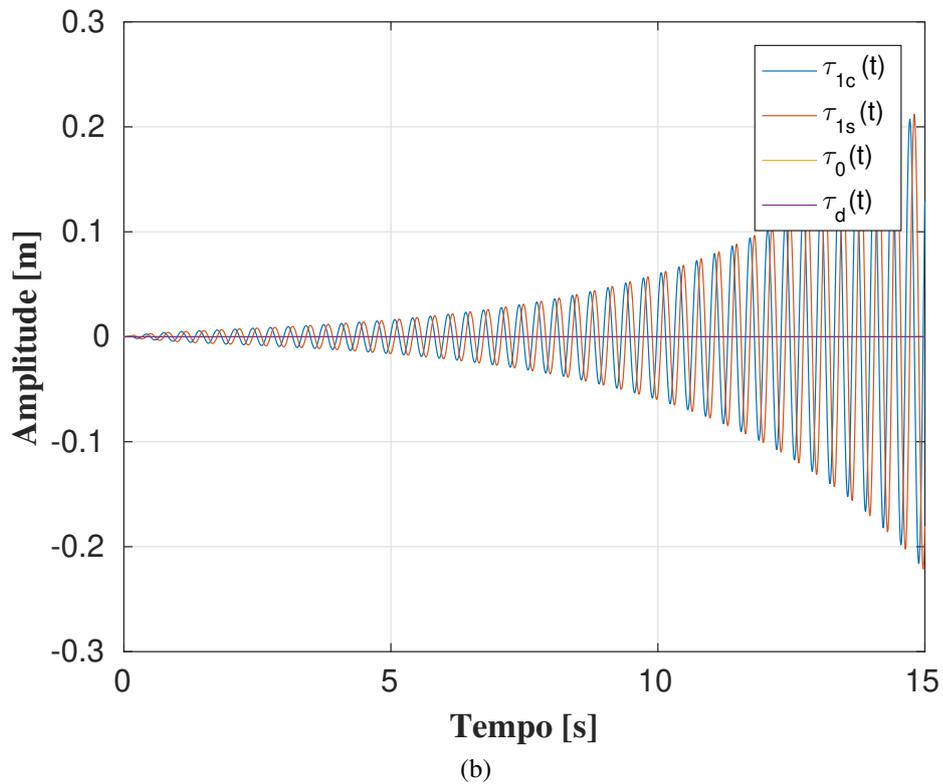
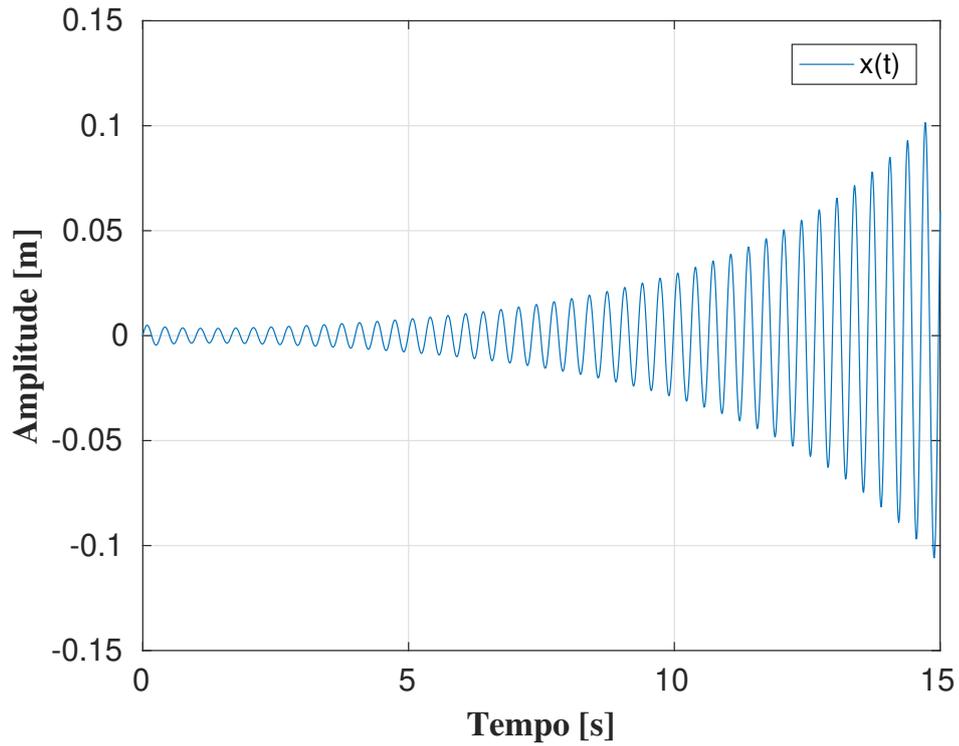


Figura 2.6: Integração temporal - $\Omega = 45Hz$: (a) Deslocamento da fuselagem e (b) Deslocamento do rotor - Coleman.

2.3 Helicóptero com Rotor Anisotrópico

Os materiais utilizados em engenharia podem não apresentar as mesmas propriedades mecânicas ao longo de toda sua dimensão. Segundo [Callister Jr \(2007\)](#), um material é anisotrópico quando existem imperfeições em seu arranjo cristalográfico, isso altera as suas propriedades estruturais dependendo da direção em que são analisadas. Além disso, outros fatores podem contribuir para a presença da anisotropia, sendo muitas das vezes, variáveis não controladas durante o seu processo de fabricação. A formação de micro-trincas, bolhas ou até mesmo a presença de impurezas são resultados deste processo. Como consequência da presença dessas imperfeições, ocorre a redução da vida útil do material, além da alteração de suas propriedades. Esse é o principal motivo dos fabricantes acrescentarem uma incerteza ao valor nominal das propriedades do material.

Outro fator considerado, é a mudança das propriedades mecânicas do material devido aos esforços sofridos durante a sua utilização. O fenômeno de encruamento é um exemplo disso. Dependendo da carga aplicada, o material pode passar de sua fase elástica e se deformar plasticamente, alterando a sua estrutura cristalina ([Callister Jr, 2007](#)). Desgastes, folgas e fatores intempéricos também influenciam nas propriedades mecânicas de qualquer material. Portanto, existem diversas variáveis que fazem o modelo isotrópico não ser o ideal quando aplicado na prática.

No caso do helicóptero, o modelo isotrópico considera iguais todas as propriedades mecânicas e geométricas das pás. Contudo, essa consideração não pode ser realizada para um helicóptero real. Principalmente os componentes responsáveis por induzir a rigidez no movimento de rotação de *lead-lag* das pás, eles podem apresentar propriedades mecânicas diferentes entre si que são provenientes de diversos fatores, deste sua fabricação até as condições de uso em que são submetidos. Certamente, a alteração desta propriedade afeta o comportamento dinâmico do rotor do helicóptero e podem ter impactos severos na avaliação do comportamento instável. Por isso, torna-se necessário analisar a influência da anisotropia no comportamento dinâmico do helicóptero durante o FRS devido a variação da rigidez das pás.

Este trabalho analisará a alteração da propriedade de rigidez em apenas uma das pás no modelo do helicóptero apresentado anteriormente na Figura 2.1 da seção 2.2. Para a inserção da anisotropia, considera-se para a rigidez da primeira pá, $k = 1$ a adição de uma perturbação σ responsável por alterar o valor desta propriedade. Matematicamente essa influência pode ser vista segundo a Equação 2.3. As demais pás possuem rigidezes iguais, conforme a Equação 2.4.

$$k_{b1} = k_b + \sigma \quad (2.3)$$

$$k_{b2} = k_{b3} = k_{b4} = k_b \quad (2.4)$$

Todas as outras considerações realizadas na seção 2.2 são mantidas e aplicadas para a obtenção do modelo matemático para helicópteros com rotor anisotrópico. No Apêndice A está detalhado as expressões das energias cinéticas e potenciais, assim como todo o desenvolvimento realizado para a obtenção das equações do movimento representadas na Equação 2.5. Sendo que as matrizes $[M_a]$, $[C_a]$ e $[G_a]$ são respectivamente idênticas às matrizes $[M_i]$, $[C_i]$ e $[G_i]$ da Equação 2.1. Porém, o que difere as equações do movimento do caso isotrópico com o anisotrópico é a matriz de rigidez $[K_a]$, pois devido a presença da anisotropia η surgem diversos termos periódicos na matriz.

$$[M_a] \{\ddot{p}\} + [[C_a] + [G_a]] \{\dot{p}\} + [K_a] \{p\} = \{F_a\} \quad (2.5)$$

onde:

- Matriz de massa $[M_a]$

$$[M_a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2rm & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -rb & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C_a]$

$$[C_a] = \begin{bmatrix} rcf & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rcb & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rcb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rcb & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rcb \end{bmatrix}$$

- Matriz giroscópica $[G_a]$

$$[G_a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega & 0 & 0 \\ 0 & -2\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K_a]$

$$[K_a] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\eta \cos(2\Omega t) - \Omega^2 + \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} & \frac{1}{4}\eta \sin(2\Omega t) + rc b \Omega & \frac{1}{2}\cos(\Omega t)\eta & -\frac{1}{2}\cos(\Omega t)\eta \\ 0 & \frac{1}{4}\eta \sin(2\Omega t) - rc b \Omega & -\frac{1}{4}\eta \cos(2\Omega t) - \Omega^2 + \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} & \frac{1}{2}\sin(\Omega t)\eta & -\frac{1}{2}\sin(\Omega t)\eta \\ 0 & \frac{1}{4}\cos(\Omega t)\eta & \frac{1}{4}\sin(\Omega t)\eta & \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} & -\frac{\eta}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4}\cos(\Omega t)\eta & -\frac{1}{4}\sin(\Omega t)\eta & -\frac{\eta}{4} & \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_a\}$

$$\{F_a\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sendo: $\eta = \frac{\sigma}{I_b + b^2 m_b}$.

Comparando as Equações 2.1 e 2.5, percebe-se que a diferença entre elas é o acréscimo dos termos periódicos na matriz de K_a , induzidos pela anisotropia σ . Além disso, nota-se que a transformada de Coleman não é suficiente para eliminar estes termos.

2.3.1 Análise da Estabilidade

A análise de estabilidade é realizada a partir da equação do movimento obtida para o modelo anisotrópico, Equação 2.5. Contudo, a presença de termos periódicos, mesmo após a aplicação do método de Coleman, inviabiliza a análise da instabilidade através dos autovalores, que são apenas válidos para sistemas dinâmicos lineares autônomos (ou seja, sem a dependência temporal dos seus coeficientes/parâmetros).

Uma alternativa a este problema é a utilização do método de Floquet, que é apresentado no Anexo B. Este método permite analisar a estabilidade de um sistema linear periódico baseando-se na transformada de Lyapunov (Gökçek, 2004). Isto permite a obtenção de um sistema linear autônomo. Portanto, o método de Floquet se torna uma importante ferramenta capaz de identificar as regiões de instabilidade, como apresentado por Sanches et al. (2014).

As Figuras 2.7 e 2.8 mostram as regiões de instabilidade devido a anisotropia existente em uma das pás considerando o helicóptero sem e com amortecimento, respectivamente. Para o modelo sem amortecimento, os valores rcf e rcb são admitidos zeros, enquanto que para o caso com amortecimento, os valores seguem os mesmos considerados na seção 2.2. O símbolo \triangle indica o início da região de instabilidade, enquanto que \circ representa o seu final.

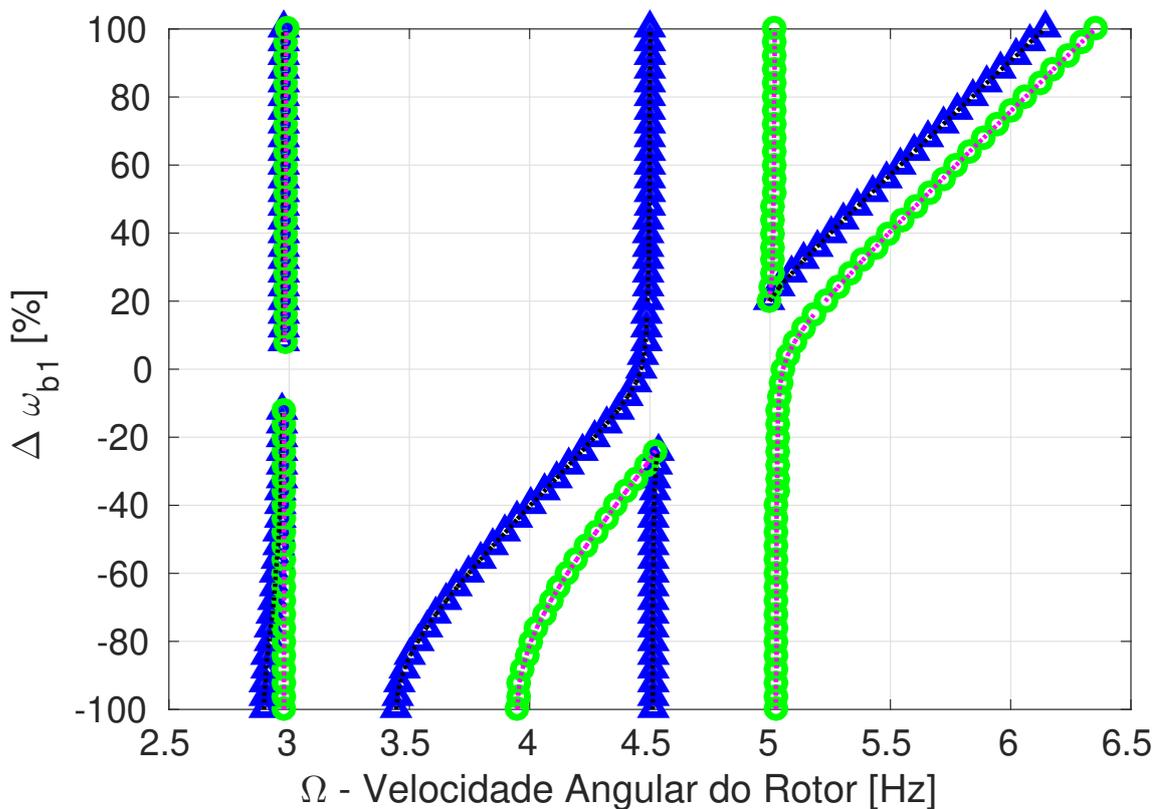


Figura 2.7: Regiões de instabilidade devido a presença da anisotropia na primeira pá.

Comparando o resultado da análise da estabilidade do modelo anisotrópico, Figura 2.7, com o resultado obtido para o sistema isotrópico, Figura 2.4, percebe-se

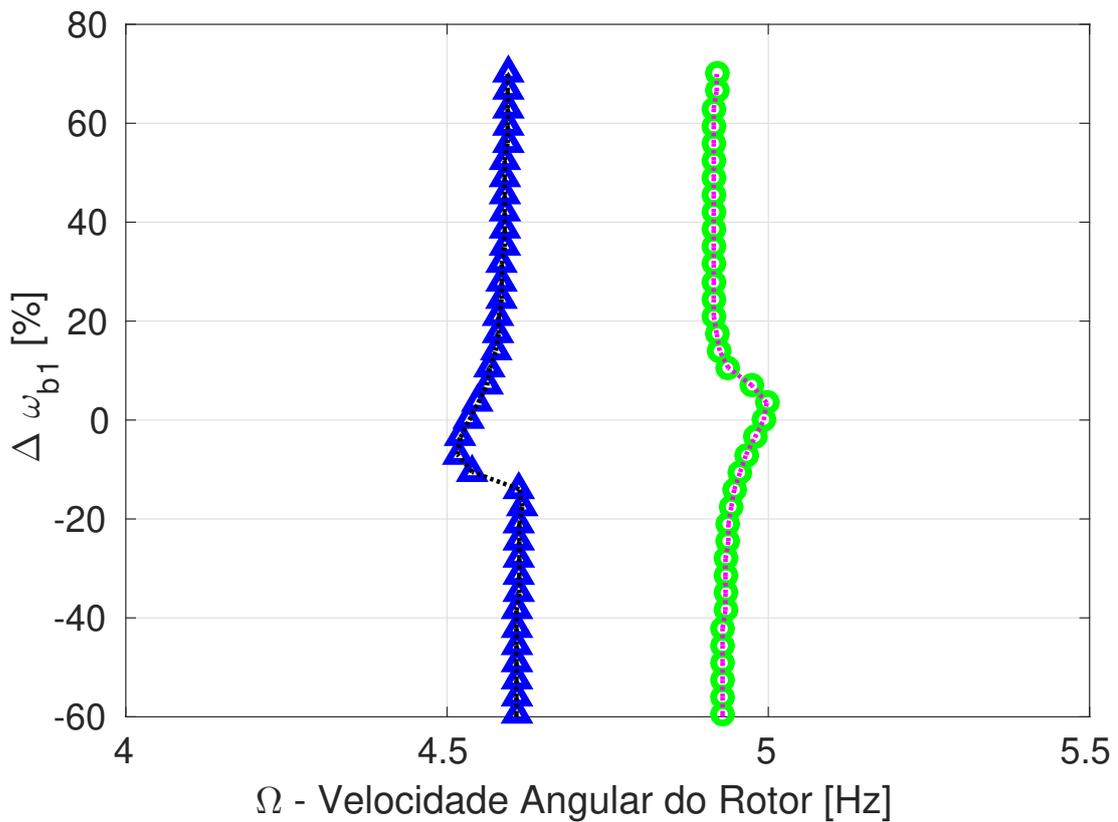


Figura 2.8: Regiões de instabilidade devido a presença da anisotropia na primeira pá.

que a influência da anisotropia propicia o surgimento de novas regiões de instabilidade. Quando não há a influência da anisotropia, $\sigma = 0$ ou $\Delta\omega_{b1} = 0$, existe apenas uma região instabilidade definida entre 4.5 e 5 Hz. Este resultado se aproxima dos valores encontrados para o sistema isotrópico. Porém a medida que se induz o efeito da anisotropia, novas regiões de instabilidade surgem. Estas novas regiões são entretanto sensíveis à presença de amortecimento no modelo dinâmico, conforme ilustrado na Figura 2.8 aonde há apenas uma zona de instabilidade (faixa vertical delimitada entre os símbolos \triangle e \circ).

Define-se como ramo principal a região de instabilidade entre 4.5 e 5 Hz. A partir deste ramo, bifurcam-se dois outros ramos, definidos como secundários. Os ramos secundários tem sua região de instabilidade dependentes do valor de perturbação (anisotropia) considerada. Além das já mencionadas, o modelo do helicóptero também apresenta uma região de instabilidade em uma pequena faixa de velocidade do rotor em torno de 3 Hz.

Isso é um fator preocupante quando se considera a segurança da tripulação durante a operação de pouso e decolagem do helicóptero. A possibilidade da aeronave entrar em colapso devido o FRS aumenta consideravelmente por causa da anisotropia.

Neste caso, fica evidente a necessidade de implementação de um dispositivo ao helicóptero que seja capaz de controlar o FRS em todas as regiões de instabilidade apresentadas. Além disso, verificar se o dispositivo adicionado à aeronave não cause a existência de outras regiões de instabilidade.

2.3.2 Conclusão

Analisando as regiões de instabilidade encontradas pelo método de Floquet, identifica-se que a presença da anisotropia influencia significativamente no comportamento dinâmico da aeronave, quando em contato com o solo. O aumento das regiões de instabilidade, proporciona riscos maiores de acidentes durante o procedimento de pouso e decolagem. Portanto, visando a manutenção da integridade estrutural do helicóptero e a segurança do voo, métodos de controle da instabilidade são bem-vindos.

Existe a necessidade de que o dispositivo aplicado para controle seja capaz de atuar em todas as faixas de frequências e anisotropia possíveis. Como alternativa para solução desse problema, será estudado a influência do NES no comportamento dinâmico do helicóptero, verificando se ele é capaz de suprimir as instabilidades apresentadas pelos modelos isotrópico e anisotrópico.

CAPÍTULO III

MODELO ISOTRÓPICO COM O NES

Como analisado no capítulo anterior, o fenômeno de ressonância solo em helicópteros é caracterizado pela coalescência entre dois modos de vibração da aeronave, causando o aparecimento de regiões de instabilidade em determinadas regiões de operação Ω . Vale ressaltar que o surgimento de anisotropia no rotor provoca o surgimento de novas regiões de instabilidade.

Neste sentido, torna-se interessante estudar a influência de dispositivos capazes de controlar/suprimir essa instabilidade. Dentre os métodos existentes, destacam-se dois: o Absorvedor Dinâmico Linear de Vibração (ADV), e o *Nonlinear Energy Sink* (NES) (Korenev e Reznikov, 1993; Vakakis et al., 2008). Ambos atendem ao propósito, porém possuem particularidades diferentes. O primeiro é capaz de suprimir por completo a vibração na frequência sintonizada (Del Claro et al., 2016), contudo se o sistema apresentar uma ampla região de instabilidade, ele não será capaz de atuar em toda faixa de operação necessária. Já o NES, um absorvedor dinâmico com rigidez puramente não linear, tem capacidade de estabilizar o comportamento do sistema dinâmico instável, induzindo a surgimento de um ciclo de relaxação (Gendelman e Bar, 2010; Luongo e Zulli, 2012). Diferentemente do ADV, o NES consegue atuar em uma ampla faixa de frequência, tornando a sua aplicação viável devido a sua ro-

bustez. Isso é visto quando [Pafume-Coelho \(2017\)](#) compara a influência do ADV e do NES no comportamento dinâmico de um helicóptero, quando estes são acoplados na articulação das pás com a cabeça do rotor.

A característica do NES em atuar em uma ampla faixa de frequência, se dá devido a sua capacidade de ressonar em conjunto com qualquer modo do sistema (linear) principal ([Vakakis et al., 2008](#)). Assim, o NES sempre estará sintonizado na frequência da resposta do sistema principal, porém a transferência de energia (ativação do NES) só ocorrerá quando o helicóptero atingir um determinado nível de energia.

Este capítulo vem para esclarecer como o comportamento dinâmico de um helicóptero com rotor isotrópico é influenciado com a presença do NES acoplado à sua fuselagem. Para isso, as novas equações do movimento do fenômeno de ressonância solo com o NES acoplado à aeronave são desenvolvidas. As análises das equações de movimento não lineares são realizadas através de um método assintótico, o Método das Múltiplas Escalas (MME). Ao final, os resultados obtidos com este método será avaliados e comparados com a resposta temporal do sistema dinâmico obtida por métodos matemáticos de integração numérica.

3.1 Modelo Isotrópico com NES

Partindo do sistema dinâmico adotado no Capítulo 2, acrescenta-se o NES à fuselagem do modelo do helicóptero com rotor isotrópico, conforme ilustrado na Figura 3.1.

A disposição do NES na aeronave é determinada com o intuito de capturar a energia do sistema principal e dissipá-la. Neste sentido, justifica-se o NES acoplado à fuselagem e com movimentos ao longo do eixo \vec{x} , determinados por $z(t)$. O absorvedor dinâmico não linear (NES) possui massa m_t e o seu acoplamento com a fuselagem se dá através de um elemento de rigidez não linear k_{nl} e um amortecimento viscoso c_t . Vale ressaltar que o deslocamento $z(t)$ do NES é o deslocamento relativo entre a fuselagem e o NES, de forma que $z(t) = 0$ indica da deformação da mola k_{nl} .

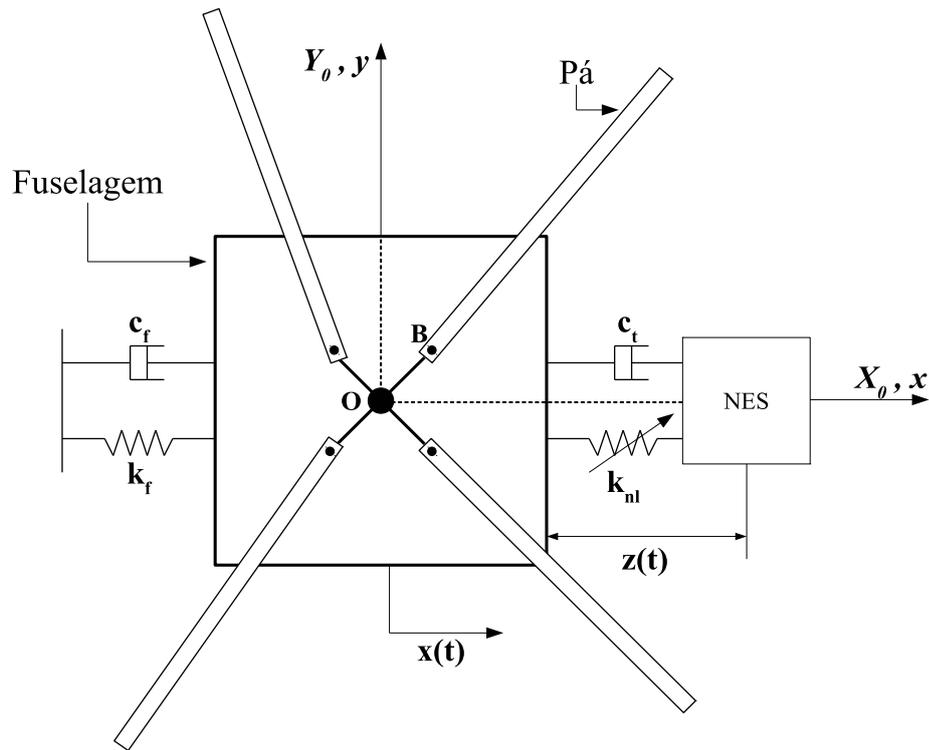


Figura 3.1: Modelo dinâmico do helicóptero com NES acoplado à fuselagem.

As equações do movimento são obtidas com base no modelo físico isotrópico descrito no capítulo 2, porém acrescentado os termos das energias cinética e potencial, e da função de dissipação viscosa de Rayleigh, provenientes da adição do NES no sistema dinâmico. Considerando que todas as propriedades dinâmicas das pás são isotrópicas, ou seja, $m_{bk} = m_b$, $k_{bk} = k_b$, $c_{bk} = c_b$ e $Iz_{bk} = Iz_b$, sendo $k = 1 \dots 4$, obtém-se a equação do movimento conforme apresentado no Apêndice A. O resultado pode ser visto na Equação 3.1. Além do aumento da ordem das matrizes, devido o acoplamento do NES através de uma rigidez não linear cúbica, a Equação 3.1 se difere da Equação 2.1 em dois fatores: o acoplamento de massa existente entre a fuselagem e o NES em $[M_{an}]$, e a presença de uma matriz de rigidez não linear $[K_{nlan}]$ que está associada ao deslocamento cúbico das coordenadas generalizadas $\{p\}$.

$$[M_{an}] \{\ddot{p}\} + [[C_{an}] + [G_{an}]] \{\dot{p}\} + [K_{an}] \{p\} + [K_{nlan}] \{p^3\} = \{F_{extan}\} \quad (3.1)$$

onde:

- Coordenadas $\{p\}$

$$\{p\} = \{x(t), \tau_{1c}(t), \tau_{1s}(t), \tau_0(t), \tau_d(t), z(t)\}^T$$

- Matriz de massa $[M_{an}]$

$$[M_{an}] = \begin{bmatrix} \mu + 1 & 0 & -2rm & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -rb & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C_{an}]$

$$[C_{an}] = \begin{bmatrix} rcf & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rcb & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rcb & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rcb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rcb & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -rca \end{bmatrix}$$

- Matriz giroscópica $[G_{an}]$

$$[G_{an}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K_{an}]$

$$[K_{an}] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 ra - \Omega^2 + \omega_b^2 & \Omega rcb & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega rcb & \Omega^2 ra - \Omega^2 + \omega_b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^2 ra + \omega_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2 ra + \omega_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez não linear $[K_{nlan}]$

$$[K_{nlan}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_{extan}\}$

$$\{F_{extan}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vale destacar o surgimento de novos parâmetros nas equações do movimento, Equação 3.1, além daqueles definidos anteriormente na Equação 2.2. Estes são:

$$\mu = \frac{m_t}{m_f + 4m_b} \quad rca = \frac{c_t}{m_f + 4m_b} \quad \lambda = \frac{k_{nl}}{m_f + 4m_b} \quad (3.2)$$

O parâmetro μ está associado à razão de massas do absorvedor dinâmico não linear em relação a do helicóptero. Os parâmetros rca e λ estão relacionados ao nível de amortecimento e da não linearidade considerada no NES. A determinação dos parâmetros ótimos para o dimensionamento correto do absorvedor dinâmico não linear é um dos grandes desafios. Uma das alternativas propostas por [Luongo e Zulli \(2012\)](#); [Gendelman e Bar \(2010\)](#) para a análise do sistema dinâmico com o NES é avaliar a interação entre variedades invariantes rápida e lenta, ambas obtidas com a aplicação do método das múltiplas escalas.

3.2 Método das Múltiplas Escalas

O Método das Múltiplas Escalas (MME) é um método assintótico capaz de fornecer solução analítica aproximada para sistemas não lineares e com coeficientes periódicos ([Nayfeh, 2011](#); [Nayfeh e Mook, 2008](#)). Sua versatilidade, faz do método uma ferramenta poderosa para analisar o comportamento dinâmico do helicóptero quando acoplado ao NES. Vale destacar que a presença da não linearidade no modelo dinâmico impossibilita a aplicação dos métodos adotados no Capítulo 2 para determinar as suas regiões de instabilidade. Além do mais, sua aplicação pode ser vista em diversos trabalhos visando a análise de sistemas dinâmicos não lineares ([Lakrad e Belhaq, 2002](#); [Michon et al., 2008](#); [Shad et al., 2011](#); [Salahshoor et al., 2016](#)).

O referido método consiste em expressar qualquer função de dependência temporal t como sendo função de novas escalas de tempo. Estas novas escalas de tempo, genericamente denominada por T_n , estão relacionadas com a variável temporal t por meio da relação:

$$T_n = \epsilon^n t, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, N_\epsilon \quad (3.3)$$

É importante destacar a independência entre as diferentes escalas de tempo T_n . Usualmente menciona-se que a escala de tempo T_0 está relacionada à dinâmica rápida do sistema dinâmico, enquanto que $T_n, n \in [1, \dots, N_\epsilon]$ está associada à escala de tempo lenta. Além disso, o parâmetro de ponderação ϵ é considerado um valor bem menor que 1 e N_ϵ indica a máxima ordem da escala de tempo considerada.

Sendo assim, uma solução aproximada para o problema dinâmico não linear da Equação 3.1 é composta por uma expansão de funções do tipo

$$\begin{aligned} \{p(t)\} &= \epsilon^0 \{p_0(T_0, T_1, \dots, T_{N_\epsilon})\} + \epsilon^1 \{p_1(T_0, T_1, \dots, T_{N_\epsilon})\} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{N_\epsilon} \epsilon^n \{p_n(T_0, T_1, \dots, T_{N_\epsilon})\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

As funções $\{p_0(T_0, T_1, \dots, T_{N_\epsilon})\}$ e $\{p_1(T_0, T_1, \dots, T_{N_\epsilon})\}$ admitidas na Equação 3.4 são linearmente independentes em função do parâmetro ϵ . Ou seja, o grande detalhe deste método está na sutileza em saber como se pondera os termos presentes nas equações em função de ϵ , de forma que as funções supracitadas consigam capturar os efeitos da não linearidade na resposta dinâmica do sistema.

Neste trabalho, os termos não lineares, os de acoplamento dinâmico inercial entre fuselagem e rotor, e os de dissipação (amortecimento) são ponderados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mu &= \epsilon \tilde{\mu} & rm &= \epsilon r\tilde{m} \\ rb &= \epsilon r\tilde{b} & rc_f &= \epsilon r\tilde{c}_f \\ rc_b &= \epsilon r\tilde{c}_b & rc_a &= \epsilon r\tilde{c}_a \end{aligned} \quad (3.5)$$

sendo, $\epsilon = \mu$.

Em sistemas dinâmicos com a aplicação de NES para controle da amplitude de vibração, Luongo e Zulli (2012) propõem reescalar as variáveis dinâmicas conforme

a Equação 3.6.

$$\{p(t)\} = \sqrt{\epsilon} \{\tilde{p}(t)\} = \sqrt{\epsilon} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\tau}_{1c}(t) \\ \tilde{\tau}_{1s}(t) \\ \tilde{\tau}_0(t) \\ \tilde{\tau}_d(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Uma vez que as relações na Equação 3.6 forem substituídas nas equações do movimento, os termos não lineares são consequentemente reescalados para diferentes ordens de ϵ . Além disso, considera-se que a velocidade de rotação do rotor Ω é composta por uma frequência central Ω_c e um perturbação $\tilde{\delta}$ ponderada por ϵ , Equação 3.7. Isto permitirá capturar os efeitos das variações induzidas na velocidade do rotor, $\tilde{\delta}$, na resposta do comportamento dinâmica não linear do helicóptero com NES nas proximidades da região instável.

$$\Omega = \Omega_c + \epsilon \tilde{\delta} \quad (3.7)$$

Substituindo as Equações 3.5-3.7 na Equação 3.1, obtêm-se as Equações 3.8 e 3.9. A primeira corresponde às equações de movimento do sistema principal, enquanto que a segunda trata da dinâmica do NES.

$$\left[\hat{M} \right] \{\ddot{\tilde{p}}\} + \left[\left[\hat{C} \right] + \left[\hat{G} \right] \right] \{\dot{\tilde{p}}\} + \left[\hat{K} \right] \{\tilde{p}\} + \epsilon [K_{nlc}] \{\tilde{p}^3\} = \epsilon \tilde{\mu} \{R\} \ddot{\tilde{z}}(t) \quad (3.8)$$

$$\epsilon \tilde{\mu} \tilde{\tilde{p}} \{R\}^T - \epsilon \tilde{\mu} \ddot{\tilde{z}}(t) - \epsilon \tilde{r} c_a \dot{\tilde{z}}(t) - \epsilon \lambda \tilde{z}^3 = 0 \quad (3.9)$$

onde:

- Coordenadas $\{\tilde{p}\}$

$$\{\tilde{p}\} = \{\tilde{x}(t), \tilde{\tau}_{1c}(t), \tilde{\tau}_{1s}(t), \tilde{\tau}_0(t), \tilde{\tau}_d(t)\}^T$$

- $\{R\}$

$$\{R\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

- Matriz de massa $[\hat{M}]$

$$[\hat{M}] = \begin{bmatrix} K & 0 & -2\epsilon r\tilde{m} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -r\tilde{b}\epsilon & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo $K = 1 + \mu$.

- Matriz de amortecimento $[\hat{C}]$

$$[\hat{C}] = \begin{bmatrix} \epsilon r\tilde{c}_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r\tilde{c}_b\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r\tilde{c}_b\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\tilde{c}_b\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r\tilde{c}_b\epsilon \end{bmatrix}$$

- Matriz giroscópica $[\hat{G}]$

$$[\hat{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tilde{\delta}\epsilon + 2\Omega_c & 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{\delta}\epsilon - 2\Omega_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[\hat{K}]$

$$\left[\hat{K} \right] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \iota & \tilde{r}\tilde{c}_b \epsilon (\tilde{\delta} \epsilon + \Omega_c) & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{r}\tilde{c}_b \epsilon (\tilde{\delta} \epsilon + \Omega_c) & \iota & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\delta} \epsilon (\tilde{\delta} \epsilon + 2 \Omega_c) ra + \omega_B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\delta} \epsilon (\tilde{\delta} \epsilon + 2 \Omega_c) ra + \omega_B^2 \end{bmatrix}$$

sendo $\iota = \tilde{\delta}^2 (ra - 1) \epsilon^2 + 2 \tilde{\delta} \Omega_c (ra - 1) \epsilon - \Omega_c^2 + \omega_B^2 \mathbf{e} \omega_B^2 = \omega_b^2 + ra \Omega_c^2$.

Observa-se na Equação 3.8 a presença dos termos ϵ^1 e ϵ^2 em alguns termos nas matrizes que são provenientes das ponderações realizadas. Quanto à Equação 3.9, observa-se que todos os termos estão ponderados por ϵ^1 .

Afim de determinar e compreender a resposta dinâmica do helicóptero com NES, definiu-se uma expansão assintótica para $\{\tilde{p}(t)\}$ considerando diferentes escalas de tempo. Neste sentido, admite $N_\epsilon = 1$ para as Equações 3.3 e 3.4. Desta forma:

$$\{\tilde{p}(t)\} = \epsilon^0 \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} + \epsilon^1 \{\tilde{p}_1(T_0, T_1)\} + \mathcal{O}(2) \quad (3.10)$$

Substituindo a Equação 3.10 nas Equações 3.8 e 3.9, agrupam-se os termos de cada equação em função das diferentes potências de ϵ . Sabendo que o desenvolvimento assintótico proposto para o sistema é composto por termos que vão até a ordem ϵ^1 , desprezam-se os demais de ordem superior.

3.2.1 Ordem ϵ^0

Coletando os termos que estão associados a ordem ϵ^0 se tem o sistema linear associado:

$$[M_0] D_0^2 \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} + [[C_0] + [G_0]] D_0 \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} + [K_0] \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} = 0 \quad (3.11)$$

onde:

- $D_0(*) = \frac{\partial}{\partial T_0}(*)$ corresponde à derivada parcial da função em relação à T_0 ;

- Coordenadas $\{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\}$

$$\{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} = \{\tilde{x}_0(T_0, T_1), \tilde{\tau}_{1c0}(T_0, T_1), \tilde{\tau}_{1s0}(T_0, T_1), \tilde{\tau}_{00}(T_0, T_1), \tilde{\tau}_{d0}(T_0, T_1)\}^T$$

- Matriz de massa $[M_0]$

$$[M_0] = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C_0]$

$$[C_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz giroscópica $[G_0]$

$$[G_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega_c & 0 & 0 \\ 0 & -2\Omega_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K_0]$

$$[K_0] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_c^2 + \omega_B^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_c^2 + \omega_B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_B^2 \end{bmatrix}$$

Na matriz de massa $[M_0]$, o parâmetro K é definido por $1 + \mu$. Além disso, pode-se observar nas equações dinâmicas na ordem ϵ^0 são compostas apenas por termos lineares e sem a presença de acoplamento dinâmico entre a fuselagem e o rotor. O único acoplamento dinâmico existente é dado pelos efeitos giroscópicos entre as variáveis τ_{1s0} e τ_{1c0} (modos seno e cosseno do rotor, Figura 2.3). Vale destacar que as equações do absorvedor dinâmico de vibração não linear não aparecem nas equações à ϵ^0 .

3.2.2 Ordem ϵ^1

Os termos associados à ϵ^1 determinam as equações dinâmicas nesta ordem. Estas são constituídas pelos termos de acoplamento entre fuselagem e rotor, fuselagem e NES, o amortecimento, e a perturbação na velocidade angular do rotor δ :

$$\begin{aligned} [M_0] D_0^2 \{\tilde{p}_1(T_0, T_1)\} + [[C_0] + [G_0]] D_0 \{\tilde{p}_1(T_0, T_1)\} + [K_0] \{\tilde{p}_1(T_0, T_1)\} = \\ - [M_1] D_0^2 \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} - [[C_1] + [G_1]] D_0 \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} - [K_1] \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} - \\ 2[M_0] D_0 D_1 \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} - [[C_0] + [G_0]] D_1 \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} + \tilde{\mu} D_0^2 z_0(T_0, T_1) \{R\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\approx \{R\}^T D_0^2 \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} - \tilde{\mu} D_0^2 z_0(T_0, T_1) - \tilde{r} \tilde{c}_a D_0 z_0(T_0, T_1) - \lambda z_0(T_0, T_1)^3 = 0 \quad (3.13)$$

onde:

- $D_1(*) = \frac{\partial}{\partial T_1} (*)$ é a derivada parcial da função em relação a T_1 ;
- Coordenadas $\{\tilde{p}_1(T_0, T_1)\}$

$$\{\tilde{p}_1(T_0, T_1)\} = \{\tilde{x}_1(T_0, T_1), \tilde{\tau}_{1c1}(T_0, T_1), \tilde{\tau}_{1s1}(T_0, T_1), \tilde{\tau}_{01}(T_0, T_1), \tilde{\tau}_{d1}(T_0, T_1)\}^T$$

- Matriz de massa $[M_1]$

$$[M_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2r\tilde{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r\tilde{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C_1]$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} r\tilde{c}_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r\tilde{c}_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r\tilde{c}_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\tilde{c}_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r\tilde{c}_b \end{bmatrix}$$

- Matriz giroscópica $[G_1]$

$$[G_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tilde{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K_1]$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\tilde{\delta} ra \Omega_c - 2\epsilon \Omega_c & \tilde{r}c_b \Omega_c & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{r}c_b \Omega_c & 2\tilde{\delta} ra \Omega_c - 2\tilde{\delta} \Omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\tilde{\delta} ra \Omega_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tilde{\delta} ra \Omega_c \end{bmatrix}$$

É importante ressaltar que apenas a Equação 3.13 apresenta termos não lineares. Além disso, as matrizes $[M_1]$, $[G_1]$ e $[K_1]$ apresentam os termos de acoplamento dinâmico, amortecimento e perturbação na velocidade angular do rotor.

3.2.3 Solução Ordem ϵ^0

A solução genérica de uma equação diferencial de segunda ordem em relação à T_0 , Equação 3.11, é expressa por:

$$\{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} = \sum_{n=1}^5 A_n(T_1) \{U_n\} e^{j\omega_n T_0} + cc \quad (3.14)$$

onde:

- $j^2 = -1$;
- ω_n é o n -ésimo autovalor do sistema;
- $\{U_n\}$ é o autovetor pela direita correspondente ao n -ésimo autovalor;
- $A_n(T_0, T_1)$ é a amplitude modal do n -ésimo modo.

Resolvendo o problema de autovalor e autovetor pela direita da Equação 3.11, tem-se:

- Modo da translação da fuselagem

$$j\omega_1 = j\frac{\omega_f}{\sqrt{K}} \rightarrow \{U_1\} = \begin{Bmatrix} -j\frac{\sqrt{K}}{\omega_f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Modo regressivo do rotor

$$j\omega_2 = j(\Omega_c - \omega_B) \rightarrow \{U_2\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\Omega_c - \omega_B} \\ -j\frac{1}{\Omega_c - \omega_B} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Modo progressivo do rotor

$$j\omega_3 = j(\Omega_c + \omega_B) \rightarrow \{U_3\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\Omega_c + \omega_B} \\ -j\frac{1}{\Omega_c + \omega_B} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Modo coletivo do rotor

$$j\omega_4 = j\omega_5 = j\omega_B \rightarrow \{U_4\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j\frac{1}{\omega_b} \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} \quad \{U_5\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j\frac{1}{\omega_b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

O FRS ocorre devido a coalescência entre o modo da fuselagem ω_1 e do modo regressivo do rotor ω_2 . Desta forma, conforme discutido no Capítulo 2, evidencia-se que durante o fenômeno $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega_f}{\sqrt{K}}$. Tratando-se do sistema na ordem ϵ^0 , Equação 3.11, o FRS ocorrerá quando a frequência de rotação do rotor Ω_c for tal que ocorrerá a interseção destes modos, Figura 2.5, ou seja, quando $\omega_2 = \omega_1$. Logo, a resposta do sistema dada pela Equação 3.14 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} = & (A_1(T_1)\{U_1\} + A_2(T_1)\{U_2\}) e^{j\omega_1 T_0} + A_3(T_1)\{U_3\} e^{j\omega_3 T_0} + \\ & (A_4(T_1)\{U_4\} + A_5(T_1)\{U_5\}) e^{j\omega_4 T_0} + cc \end{aligned} \quad (3.15)$$

sendo cc os respectivos termos complexo-conjugados.

3.2.4 Solução Ordem ϵ^1

Durante a ocorrência do FRS, a estabilidade do modelo do helicóptero com NES pode ser analisada através da relação entre suas respectivas amplitudes de movimento. Estas amplitudes representadas no plano (sub-espço) de fase $x(t) - z(t)$, obtém-se as curvas *Slow Invariant Manifold* - variedade invariante lenta (SIM0) e *Super Slow Invariant Manifold* - variedade invariante super lenta (SIM1) (Gendelman e Bar, 2010). A análise dos pontos de interseção destas curvas permite prever como o sistema dinâmico se comportará. Na sequência, será apresentado como as curvas SIM0 e SIM1 são obtidas e como são avaliados o comportamento dinâmico do sistema para diferentes casos.

Slow Invariant Manifold - SIM0

A curva SIM0 é obtida a partir da Equação 3.13, substituindo nela a resposta $\{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\}$ encontrada na ordem ϵ^0 , Equação 3.15. O resultado é,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} D_0^2 \tilde{z}_0(T_0, T_1) + \tilde{r} \tilde{c}_a D_0 \tilde{z}_0(T_0, T_1) + \lambda \tilde{z}_0(T_0, T_1)^3 = \\ -j \simeq \frac{\omega_f}{\sqrt{K}} A_1(T_1) e^{j \frac{\omega_f}{\sqrt{K}} T_0} + j \simeq \frac{\omega_f}{\sqrt{K}} \bar{A}_1(T_1) e^{-j \frac{\omega_f}{\sqrt{K}} T_0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Considerando que o NES é um dispositivo que sempre estará sintonizado na frequência da resposta do sistema principal, presume-se que:

$$\tilde{z}_0(T_0, T_1) = Z(T_1) e^{j \frac{\omega_f}{\sqrt{K}} T_0} + \bar{Z}(T_1) e^{-j \frac{\omega_f}{\sqrt{K}} T_0} \quad (3.17)$$

Substituindo a Equação 3.17 na Equação 3.16, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \lambda (\bar{Z}(T_1))^3 e^{\frac{-3j\omega_f T_0}{\sqrt{K}}} + \left(3\lambda Z(T_1) (\bar{Z}(T_1))^2 + \frac{j\omega_f \bar{A}_1(T_1) \tilde{\mu}}{\sqrt{K}} - \right. \\
& \left. \frac{\omega_f^2 \bar{Z}(T_1) \tilde{\mu}}{K} - \frac{j\tilde{r}c_a \bar{Z}(T_1) \omega_f}{\sqrt{K}} \right) e^{\frac{-j\omega_f T_0}{\sqrt{K}}} + (3\lambda (Z(T_1))^2 \bar{Z}(T_1) - \\
& \left. \frac{j\tilde{\mu} A_1(T_1) \omega_f}{\sqrt{K}} - \frac{\omega_f^2 Z(T_1) \tilde{\mu}}{K} + \frac{j\omega_f Z(T_1) \tilde{r}c_a}{\sqrt{K}} \right) e^{\frac{j\omega_f T_0}{\sqrt{K}}} + \\
& \lambda (Z(T_1))^3 e^{\frac{3j\omega_f T_0}{\sqrt{K}}} = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Sabendo que o FRS do sistema principal se dá na frequência de rotação Ω_c quando $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega_f}{\sqrt{K}}$, coleta-se os termos que estão em função de $e^{j\frac{\omega_f T_0}{\sqrt{K}}}$, Equação 3.19.

A partir do método do Balanceamento Harmônico (MBH) (Luongo e Zulli, 2012), pode-se obter a relação entre as amplitudes $Z(T_1)$ e $A_1(T_1)$ coletando os termos que estão em função de $e^{j\frac{\omega_f T_0}{\sqrt{K}}}$ da Equação 3.18. Esta relação, mostrada na Equação 3.19, determinará posteriormente a variedade invariante lenta SIM0.

$$3\lambda (Z(T_1))^2 \bar{Z}(T_1) - \frac{j\tilde{\mu} A_1(T_1) \omega_f}{\sqrt{K}} - \frac{\omega_f^2 Z(T_1) \tilde{\mu}}{K} + \frac{j\omega_f Z(T_1) \tilde{r}c_a}{\sqrt{K}} = 0 \tag{3.19}$$

As amplitudes complexas $Z(T_1)$ e $A_1(T_1)$ são passadas para a forma polar,

$$\begin{aligned}
A_1 &= W_1 A_a e^{j b_a T_1} \\
Z &= A_z e^{j b_z T_1}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde W_1 está associado ao autovetor pela direita do modo instável do sistema principal $\{W\}$. Vale destacar que as variáveis A_a , A_z , b_a e b_z são compostas de valores reais, apenas.

Substituindo a Equação 3.20 na Equação 3.19 e separando os termos reais dos imaginários, duas equações serão obtidas. A partir destas equações, coletam-se os termos trigonométricos, conforme indicado nas Equações 3.21 e 3.22.

$$\sin(\gamma(T_1)) = \frac{\omega_f A_a \left(3 K^{3/2} A_z^2 \Re(W_1) \lambda - \sqrt{K} \Re(W_1) \omega_f^2 + \omega_f \Im(W_1) K \tilde{r}c_a \right)}{A_z \left(9 K^2 (A_z)^4 \lambda^2 - 6 K (A_z)^2 \lambda \omega_f^2 + \omega_f^4 + K \tilde{r}c_a^2 \omega_f^2 \right)} \quad (3.21)$$

$$\cos(\gamma(T_1)) = \frac{\omega_f A_a (T_1) \left(3 K^2 (A_z)^2 \Im(W_1) \lambda - K^{3/2} \Re(W_1) \tilde{r}c_a \omega_f - K \Im(W_1) \omega_f^2 \right)}{\sqrt{K} A_z \left(9 K^2 (A_z)^4 \lambda^2 - 6 K (A_z (T_1, T_2))^2 \lambda \omega_f^2 + \omega_f^4 + K \tilde{r}c_a^2 \omega_f^2 \right)} \quad (3.22)$$

onde $\gamma(T_1) = b_a T_1 - b_z T_1$.

Aplicando a relação de identidade trigonométrica dada pela Equação 3.23, chega-se na expressão que governa a curva SIM0, Equação 3.24.

$$\sin(\gamma(T_1))^2 + \cos(\gamma(T_1))^2 = 1 \quad (3.23)$$

$$X_a = \frac{\alpha_3 \lambda^2 X_z^3 + \alpha_2 \lambda X_z^2 + \alpha_1 X_z}{\omega_f^2} \quad (3.24)$$

onde $X_a = A_a^2$, $X_z = A_z^2$ e

$$\alpha_1 = \frac{\omega_f^2 + K \tilde{r}c_a^2}{K \left((\Re(W_1))^2 + (\Im(W_1))^2 \right)}$$

$$\alpha_2 = \frac{-6}{(\Re(W_1))^2 + (\Im(W_1))^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{9 K}{\omega_f^2 \left((\Re(W_1))^2 + (\Im(W_1))^2 \right)}$$

Denominados de *fold points*, os pontos de máximo e mínimo da curva SIM0 são obtidos quando a derivada da Equação 3.24 em relação a X_z é zero, Equação 3.25.

$$\frac{d X_a}{d X_z} = \frac{3 \alpha_3 \lambda^2 X_z^2 + 2 \alpha_2 \lambda X_z + \alpha_1}{\omega_f^2} = 0 \quad (3.25)$$

Resolvendo a Equação 3.25, tem-se:

$$X_z = \frac{1}{3} \frac{-\alpha_2 \pm \sqrt{-3\alpha_3\alpha_1 + \alpha_2^2}}{\alpha_3\lambda} \quad (3.26)$$

Os pares das coordenadas dos *fold points* (X_z e X_a) são definidos pelas Equações 3.26 e 3.27, de maneira que X_a é obtido através da substituição do valor dado pela Equação 3.26 na Equação 3.24. Portanto,

$$X_a = \frac{1}{27} \frac{(\mp\alpha_2 + \sqrt{-3\alpha_3\alpha_1 + \alpha_2^2}) (\pm 6\alpha_3\alpha_1 - \alpha_2^2 + \alpha_2\sqrt{-3\alpha_3\alpha_1 + \alpha_2^2})}{\alpha_3^2\lambda^{\approx 2}} \quad (3.27)$$

Baseado no valor discriminante da raiz na Equação 3.27, chega-se no valor crítico do rc_a , uma vez que X_a e X_z são valores reais. O valor crítico do rc_a é dado por:

$$-3\alpha_3\alpha_1 + \alpha_2^2 > 0 \quad \rightarrow \quad rc_a < rc_{a\text{crit}} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}\omega_f^{\approx}}{\sqrt{K}} \quad (3.28)$$

Super Slow Invariant Manifold - SIM1

As soluções de $\{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\}$ e \tilde{z}_0 , Equações 3.15 e 3.17, são substituídas na Equação 3.12. O resultado, apresentado na Equação 3.29,

$$[M_0] D_0^2 \{\tilde{p}_1(T_0, T_1)\} + [G_0] D_0 \{\tilde{p}_1(T_0, T_1)\} + [K_0] \{\tilde{p}_1(T_0, T_1)\} = -(f(\{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\}, Z) + cc) \quad (3.29)$$

considera que

$$f(\{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\}, Z) = f_{\omega_{1,2}} e^{j\omega_1 T_0} + f_{\omega_3} e^{j\omega_3 T_0} + f_{\omega_{4,5}} e^{j\omega_4 T_0}$$

onde:

$$f_{\omega_{1,2}} = (-\omega_1^2 [M_1] + j \omega_1 [G_1] + [K_1]) (\{U_1\} A_1 + \{U_2\} A_2) + \\ (j 2 [M_0] \omega_1 + [G_0]) (\{U_1\} D_1 A_1 + \{U_2\} D_1 A_2) - \omega_1^2 \tilde{\mu} R Z$$

$$f_{\omega_3} = (-\omega_3^2 [M_1] + j \omega_3 [G_1] + [K_1]) \{U_3\} A_3 + (j 2 [M_0] \omega_3 + [G_0]) \{U_3\} D_1 A_3$$

$$f_{\omega_{4,5}} = (-\omega_4^2 [M_1] + j \omega_4 [G_1] + [K_1]) (\{U_4\} A_4 + \{U_5\} A_5) + \\ (j 2 [M_0] \omega_4 + [G_0]) (\{U_4\} D_1 A_4 + \{U_5\} D_1 A_5)$$

A condição de solvabilidade da Equação 3.29 impõem que os termos ressonantes de f_{ω_n} sejam ortogonais aos seus autovetores pela esquerda $\{V_n\}$ do correspondente modo de vibração associado ao mesmo harmônico ω_n (Luongo et al., 2002). Desta forma, a determinação dos autovetores pela esquerda do sistema na Equação 3.29 é idêntico ao da Equação 3.11. Têm-se:

- Modo da fuselagem - autovetor pela esquerda

$$j \omega_1 = j \frac{\omega_f}{\sqrt{K}} \quad \rightarrow \quad \{V_1\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{K} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Modo regressivo do rotor - autovetor pela esquerda

$$j \omega_2 = j(\Omega_c - \omega_B) \quad \rightarrow \quad \{V_2\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -j \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Modo progressivo do rotor - autovetor pela esquerda

$$j \omega_3 = j(\Omega_c + \omega_B) \rightarrow \{V_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -j \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Modo coletivo do rotor - autovetor pela esquerda

$$j \omega_4 = j \omega_5 = j \omega_B \rightarrow \{V_4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{V_5\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Como os termos ressonantes $e^{j \omega_1 T_0}$ estão associados aos dois autovetores pela esquerda $\{V_1\}$ e $\{V_2\}$, têm-se duas condições de solvabilidade: $\{V_1\}^H f_{\omega_{1,2}} = 0$ e $\{V_2\}^H f_{\omega_{1,2}} = 0$, respectivamente. O termo H indica a transposta hermitiana.

As duas condições de solvabilidade podem ser reescritas através das seguintes equações,

$$\begin{aligned} \{V_1\}^T [(-\omega_1^2 [M_1] + j \omega_1 [G_1] + [K_1]) (\{U_1\} A_1 + \{U_2\} A_2) + \\ (j 2 [M_0] \omega_1 + [G_0]) (\{U_1\} D_1 A_1 + \{U_2\} D_1 A_2) - \omega_1^2 \tilde{\mu} R Z] = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \{V_2\}^T [(-\omega_1^2 [M_1] + j \omega_1 [G_1] + [K_1]) (\{U_1\} A_1 + \{U_2\} A_2) + \\ (j 2 [M_0] \omega_1 + [G_0]) (\{U_1\} D_1 A_1 + \{U_2\} D_1 A_2) - \omega_1^2 \tilde{\mu} R Z] = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Das Equações 3.30 e 3.31 escritas no formato matricial, obtém-se a Equação 3.32. Inicialmente, tem-se que:

$$[Y] \begin{Bmatrix} D_1 A_1 \\ D_1 A_2 \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} + \{V_1\}^T \omega_1^2 \tilde{\mu} \begin{Bmatrix} Z \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que conduz à

$$\begin{Bmatrix} D_1 A_1 \\ D_1 A_2 \end{Bmatrix} = [Y]^{-1} [N] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} + [Y]^{-1} \{V_1\}^T \omega_1^2 \tilde{\mu} \begin{Bmatrix} Z \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

onde:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \{V_1\}^T (j 2 \omega_1 [M_0] + [G_0]) \{U_1\} & \{V_1\}^T (j 2 \omega_1 [M_0] + [G_0]) \{U_1\} \\ \{V_2\}^T (j 2 \omega_1 [M_0] + [G_0]) \{U_2\} & \{V_2\}^T (j 2 \omega_1 [M_0] + [G_0]) \{U_2\} \end{bmatrix}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \{V_1\}^T (-\omega_1^2 [M_1] + j \omega_1 [G_1] + [K_1]) \{U_1\} & \{V_1\}^T (-\omega_1^2 [M_1] + j \omega_1 [G_1] + [K_1]) \{U_1\} \\ \{V_2\}^T (-\omega_1^2 [M_1] + j \omega_1 [G_1] + [K_1]) \{U_2\} & \{V_2\}^T (-\omega_1^2 [M_1] + j \omega_1 [G_1] + [K_1]) \{U_2\} \end{bmatrix}$$

Ao substituir as expressões de $[M_0]$, $[M_1]$, $[G_0]$, $[G_1]$, $[K_1]$, ω_1 , $\{U_1\}$ e $\{V_1\}$ na Equação 3.32, tem-se que:

$$[Y]^{-1} [N] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\tilde{r}c_f}{K} & \frac{j \tilde{r} \tilde{m} \omega_f}{K^{3/2}} \\ \frac{-j \omega_f^2 \tilde{r} \tilde{b}}{\sqrt{K} (4 \Omega_c \sqrt{K} - 4 \omega_f)} & -\frac{2 \left((j \tilde{r} a - j) \tilde{\delta} + \frac{\tilde{r} c_b}{2} \right) \Omega_c \sqrt{K} + 2 \left(j \tilde{\delta} - \frac{\tilde{r} c_b}{2} \right) \omega_f}{2 \Omega_c \sqrt{K} - 2 \omega_f} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$[Y]^{-1} \{V_1\}^T \omega_1^2 \tilde{\mu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\omega_f^2}{K^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

É importante ressaltar que a Equação 3.32 trata da interação dinâmica entre os modos de vibração da fuselagem (A_1) com o modo regressivo do rotor (A_2), uma vez que as equações na ordem ϵ^1 já levam em conta os efeitos de acoplamento dinâmico entre a fuselagem e o rotor. Observa-se também que esta dinâmica é influenciada pela amplitude do NES (Z). Fica evidente à partir da análise realizada no Capítulo 2, para o caso do helicóptero sem o NES, que o resultado da interação entre os modos da fuselagem e o rotor gera instabilidade. A compreensão deste modo instável com a

dinâmica do NES é o principal objetivo desta seção.

Com o objetivo de reduzir o sistema dado pela Equação 3.32 para um novo sistema de apenas uma única equação que contenha a informação da instabilidade durante o FRS, Equação 3.38, determina-se os autovalores e autovetores do sistema linear associado da Equação 3.32.

Os autovalores obtidos são denominados por ρ_M e ρ_m , onde ρ_M possui a parte real maior que ρ_m . Dessa forma, o modo responsável pela resposta divergente do sistema será o ρ_M , uma vez que apresentará parte real positiva na região de instabilidade. A Figura 3.2 mostra a evolução dos autovalores em função da velocidade angular do rotor. Nesta figura há a comparação entre os autovalores estimados analiticamente pelo MME com os autovalores obtidos numericamente (Figura 2.4).

O acréscimo de massa da fuselagem ($M_0(1, 1) = 1 + \mu$) por conta do acoplamento com NES, provoca uma diminuição na sua frequência natural (avaliada pela Equação 3.11). Isto resulta, por consequência, uma velocidade de rotação crítica do rotor menor do que a observada no centro da região instável do modelo isotrópico sem o NES ($\Omega = 4,75Hz$ na Figura 2.4), ao invés de $4,66Hz$ avaliado com a MME na Figura 3.2.

Observa-se na Figura 3.2 que mesmo havendo uma defasagem entre as curvas, existe uma região instável em comum entre o MME e o numérico. Isso mostra que o MME pode identificar regiões instáveis entre $4,537 < \Omega < 4,87$ Hz.

Associado ao autovalor ρ_M se tem os autovetores pela direita $\{W\}$ e pela esquerda $\{S\}$.

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

A partir dos autovetores $\{W\}$ e $\{S\}$ associados ao modo instável, a Equação 3.32 pode ser reduzida para uma única expressão que está associada à amplitude A

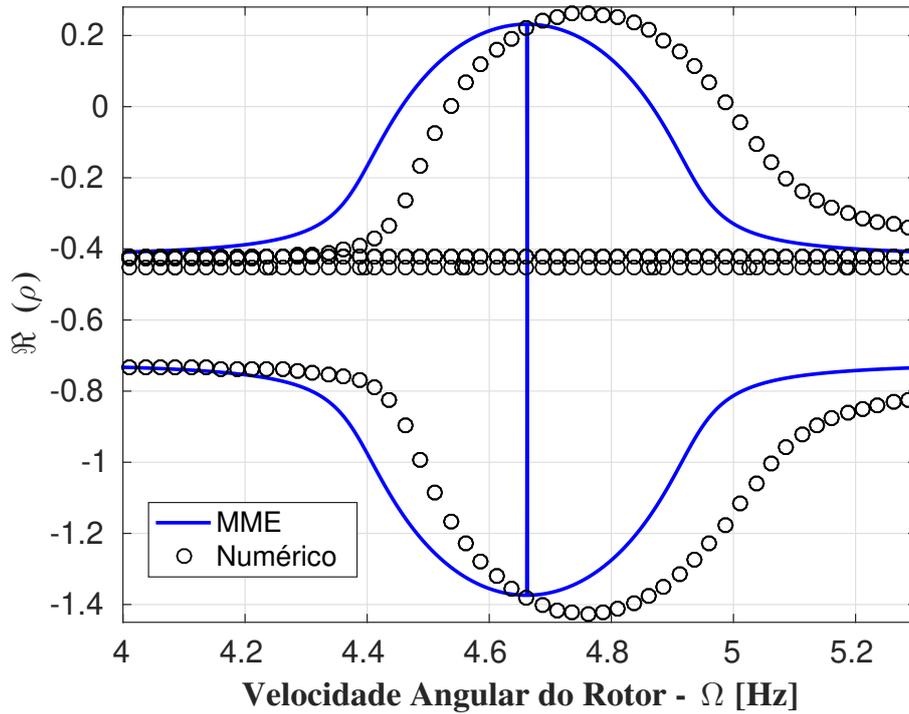


Figura 3.2: Evolução do autovalores: MMS (curva azul) e numérico (curva tracejada).

do modo instável . Essa relação é apresentada pela Equação 3.37.

$$\begin{Bmatrix} s_1 & s_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} D_1 A = \begin{Bmatrix} s_1 & s_2 \end{Bmatrix} [Y]^{-1} [N] \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} A + \begin{Bmatrix} s_1 & s_2 \end{Bmatrix} [Y]^{-1} \{V_1\}^T \omega_1^2 \tilde{\mu} \begin{Bmatrix} Z \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

uma vez que,

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix}$$

Desenvolvendo a Equação 3.37, obtém-se a Equação 3.38.

$$D_1 A + \beta_1 A + \beta_0 Z = 0 \quad (3.38)$$

onde:

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \frac{S_1 \tilde{\omega}_f^2}{K^2 (S_1 W_1 + S_2 W_2)}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{S_1 W_1 + S_2 W_2} \left(S_1 \left(\frac{1}{2} \frac{\tilde{r}c_f W_1}{K} - \frac{j r \tilde{m} \omega_f W_2}{K^{3/2}} \right) + S_2 \left(\frac{j \omega_f^2 \tilde{r} b W_1}{\sqrt{K} (4 \Omega_c \sqrt{K} - 4 \omega_f)} + \frac{\left(2 \left((j r a - j) \tilde{\delta} + \frac{\tilde{r}c_b}{2} \right) \Omega_c \sqrt{K} + 2 \left(j \tilde{\delta} - \frac{\tilde{r}c_b}{2} \right) \omega_f \right) W_2}{2 \Omega_c \sqrt{K} - 2 \omega_f} \right) \right)$$

As amplitudes complexas A e Z são passadas para a forma polar seguindo as relações apresentadas pela Equação 3.39. Ao aplicar essa relação na Equação 3.38 juntamente com desenvolvendo das relações trigonométricas necessárias, chega-se na Equação 3.40.

$$\begin{aligned} A &= A_a e^{j b_a T_1} \\ Z &= A_z e^{j b_z T_1} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} A_z \Re(\beta_0) \cos(\gamma(T_1)) - j A_z \Re(\beta_0) \sin(\gamma(T_1)) + j A_z \Im(\beta_0) \cos(\gamma(T_1)) + \\ A_z \Im(\beta_0) \sin(\gamma(T_1)) + j A_a \frac{d}{dT_1} b_A(T_1) + A_a \Re(\beta_1) + j A_a \Im(\beta_1) = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $\gamma(T_1) = b_a(T_1) - b_z(T_1)$.

Substituindo as Equações 3.21 e 3.22 na Equação 3.40, separa-se a parte real, Equação 3.41, da parte imaginária, Equação 3.42.

$$\frac{d}{dT_1} A_a(T_1) = \frac{N_{real}}{\sqrt{K} (9 K^2 A_z^4 \lambda^2 - 6 \tilde{\mu} K A_z^2 \lambda \omega_f^2 + \omega_f^2 (\tilde{\mu}^2 \omega_f^2 + K \tilde{r}c_a^2))} \quad (3.41)$$

$$\frac{d}{dT_1} b_A(T_1) = \frac{N_{imag}}{\sqrt{K} (9 K^2 A_z^4 \lambda^2 - 6 \tilde{\mu} K A_z^2 \lambda \omega_f^2 + \omega_f^2 (\tilde{\mu}^2 \omega_f^2 + K \tilde{r}c_a^2))} \quad (3.42)$$

onde:

$$\begin{aligned}
N_{real} = & 3 A_a \left(\frac{1}{3} \omega_f^2 (6 \Re(\beta_1) \tilde{\mu} A_z^2 \lambda + (-\tilde{r}c_a \Re(\beta_1) + \tilde{\mu} (\Im(W_1) \Im(\beta_0) - \right. \\
& \Re(W_1) \Re(\beta_0))) \tilde{r}c_a) K^{3/2} - 3 K^{5/2} \Re(\beta_1) A_z^4 \lambda^2 + \\
& \omega_f \tilde{\mu} \left(-\frac{1}{3} \tilde{\mu} \Re(\beta_1) \sqrt{K} \omega_f^3 + \right. \\
& \left. \left. K \left(K A_z^2 \lambda - \frac{1}{3} \omega_f^2 \tilde{\mu} \right) (\Im(W_1) \Re(\beta_0) + \Re(W_1) \Im(\beta_0)) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{imag} = & -\omega_f^2 (-6 \tilde{\mu} \Im(\beta_1) A_z^2 \lambda + \tilde{r}c_a (\tilde{r}c_a \Im(\beta_1) + \tilde{\mu} (\Im(W_1) \Re(\beta_0) + \\
& \Re(W_1) \Im(\beta_0))) K^{3/2} - 3 K^{5/2} \Im(\beta_1) A_z^4 \lambda^2 + \\
& \omega_f \tilde{\mu} \left(-\frac{1}{3} \tilde{\mu} \Im(\beta_1) \sqrt{K} \omega_f^3 + \right. \\
& \left. \left. K \left(K A_z^2 \lambda - \frac{1}{3} \omega_f^2 \tilde{\mu} \right) (\Im(W_1) \Im(\beta_0) - \Re(W_1) \Re(\beta_0)) \right) \right)
\end{aligned}$$

A parte real da Equação 3.40 traz consigo a informação da amplitude do sistema principal, enquanto a parte imaginária disponibiliza a sua fase. Juntas conseguem caracterizar o comportamento do sistema principal na ordem ϵ^1 . Porém, para a compreensão da instabilidade a informação trazida pela parte real é suficiente, visto que, esta carrega valores físicos do deslocamento. Portanto, para evitar simplificar a solução do problema, trabalhar-se-á apenas com a Equação 3.41.

Multiplicando a Equação 3.41 por $2 A_a$, tem-se:

$$\frac{d}{dT_1} X_a(T_1) = \frac{2 X_a (9 \lambda^2 H_1 X_z^2 + 3 \tilde{\mu} \lambda H_2 X_z + H_3)}{\sqrt{K} (9 K^2 \lambda^2 X_z^2 - 6 \tilde{\mu} K \lambda \omega_f^2 X_z + \omega_f^2 (\tilde{\mu}^2 \omega_f^2 + K \tilde{r}c_a^2))} \quad (3.43)$$

onde:

$$\begin{aligned}
X_a &= A_a^2 \\
X_z &= A_z^2 \\
H_1 &= -\Re(\beta_1) K^{5/2} \\
H_2 &= 2 \Re(\beta_1) K^{3/2} \omega_f^2 + K^2 \Re(\beta_0) \Im(W_1) \omega_f + K^2 \Im(\beta_0) \Re(W_1) \omega_f \\
H_3 &= -\tilde{\mu} \Re(\beta_0) \Re(W_1) K^{3/2} \tilde{r} c_a \omega_f^2 + K^{3/2} \tilde{\mu} \Im(\beta_0) \Im(W_1) \tilde{r} c_a \omega_f^2 - \\
&\quad K \tilde{\mu}^2 \Re(\beta_0) \Im(W_1) \omega_f^3 - \tilde{\mu}^2 \Im(\beta_0) \Re(W_1) K \omega_f^3 - \\
&\quad \tilde{\mu}^2 \Re(\beta_1) \sqrt{K} \omega_f^4 - K^{3/2} \Re(\beta_1) \tilde{r} c_a^2 \omega_f^2
\end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio da Equação 3.43 ocorrem quando $\frac{dX_a}{dT_1} = 0$, obtendo a Equação 3.44.

$$9 \lambda^2 H_1 X_z^2 + 3 \tilde{\mu} \lambda H_2 X_z + H_3 = 0 \quad (3.44)$$

Além da solução trivial, a Equação 3.44 apresenta as seguintes soluções:

$$X_{z0} = 0 \quad (3.45a)$$

$$X_{z1} = \frac{1}{6} \frac{-\mu H_2 + \sqrt{\mu^2 H_2^2 - 4 H_1 H_3}}{H_1 \lambda} \quad (3.45b)$$

$$X_{z2} = -\frac{1}{6} \frac{\mu H_2 + \sqrt{\mu^2 H_2^2 - 4 H_1 H_3}}{H_1 \lambda} \quad (3.45c)$$

Da equação da curva SIM0, Equação 3.24, isola-se X_z^2 , Equação 3.46.

$$X_z^2 = \frac{-\alpha_2 \lambda X_z^2 + X_a \tilde{\mu}^2 - \alpha_1 X_z}{X_z \alpha_3 \lambda^2} \quad (3.46)$$

A partir da substituição da relação dada pela SIM0, Equação 3.46, na relação de equilíbrio (Equação 3.44) da equação de solvabilidade da ordem ϵ^1 , tem-se a expressão que determina a variedade invariante super lenta (SIM1). Esta é expressa por:

$$X_a = \frac{(9 \lambda \alpha_2 H_1 - 3 \tilde{\mu} \lambda \alpha_3 H_2) X_z^2 + (9 \alpha_1 H_1 - \alpha_3 H_3) X_z}{9 H_1 \tilde{\mu}^2} \quad (3.47)$$

A determinação dos pontos de equilíbrio da curva SIM1, e consequentemente, do cruzamento entre as curvas SIM1 e SIM0 são determinados através das raízes da Equação 3.44, que definem o valor de X_z . Ao aplica-los na Equação 3.47 ou 3.24, determina-se o valor do X_a correspondente nas curvas SIM0 e SIM1, respectivamente.

Analisa-se a estabilidade dos pontos de equilíbrio da variedade invariante super lenta SIM1 aplicando na Equação 3.43 os valores encontrados para X_z , e verificando o sinal da derivada $\frac{d}{dT_1} X_a(T_1)$. Caso $\frac{d}{dT_1} X_a(T_1) < 0$ o ponto é estável, caso contrário é instável.

3.3 Análise do Comportamento do Helicóptero com o NES

A metodologia apresentada no tópico anterior desenvolve uma forma de compreender o comportamento de um sistema dinâmico não linear, mais especificamente sobre o fenômeno de ressonância solo em helicópteros com NES e rotores isotrópicos. A metodologia proposta baseia-se no MME para a compreensão dinâmica de sistemas através da avaliação das curvas SIM1 e SIM0, juntamente com a localização e estabilidade dos pontos de equilíbrio encontrados.

Sabe-se que o NES, quando projetado de maneira correta, tem a capacidade de capturar a energia do sistema principal (helicóptero) e dissipá-la. Neste sentido, respostas fortemente moduladas através de um regime de relaxação são impostas ao sistema principal através do absorvedor dinâmico projetado (Starosvetsky e Gendelman, 2008). Esse fenômeno é melhor compreendido observando a curva SIM0, Figura 3.3. Nela é possível identificar os *Fold Points*, que são os pontos de máximo e mínimo calculados pelas Equações 3.26 e 3.27. Estes pontos delimitam uma região de pontos instáveis na curva SIM0, todos indicados por através de linha tracejada (Gendelman e Bar, 2010). Vale ressaltar que as linhas contínuas na Figura 3.3 indicam pontos estáveis da SIM0.

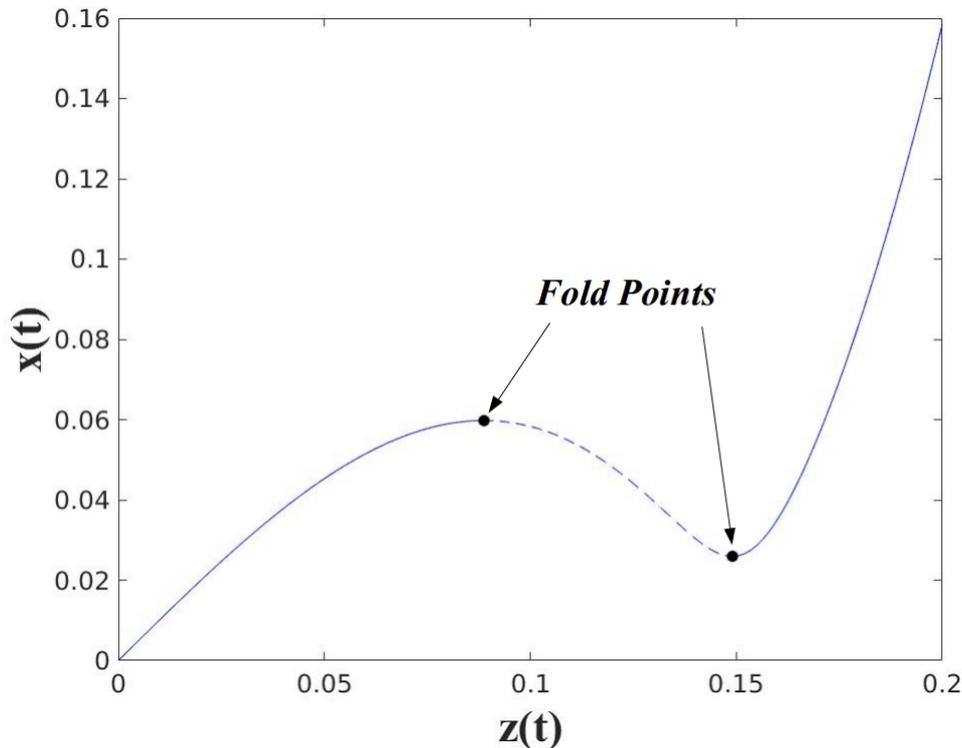


Figura 3.3: Identificação dos *Fold Points* na curva SIM0. Região estável (linha contínua), Região instável (linha pontilhada)

A compreensão do comportamento dinâmico do sistema através da SIM0 pode ser feita da seguinte maneira. Por se tratar de um sistema instável, imagine uma partícula que percorra a curva SIM0 saindo da origem do sistema de coordenadas e indo na direção do ponto A (Figura 3.4). Ao chegar no ponto A, devido à presença de pontos instáveis após ele, a partícula salta para o ponto estável em B. Este salto para o ponto B, ou seja, um aumento significativo nas amplitudes em $Z(t)$, representa a ativação do absorvedor não linear de vibração. Da mesma forma, o mecanismo de dissipação de energia pelo NES ativado, a tendência é reduzir a amplitude do sistema principal, caminhando para em direção ao ponto C. Ao chegar em C, devido à presença dos pontos instáveis, este ocasionará o salto da partícula em direção ao ponto D. Este salto para o ponto D implica na desativação do NES e, portanto, o término da dissipação de energia. Sendo assim, o sistema entrará em um regime de relaxação provocando um comportamento cíclico, conhecido como *Canard Explosion* (Gendelman e Bar, 2010). Posteriormente, serão discutidas algumas condições para

a ocorrência deste regime.

Além da compreensão dos *Fold points* no SIM0, é importante avaliar a interação entre as variedades invariantes SIM0 e SIM1, através das Equações 3.24 e 3.43, respectivamente. Quando o NES é devidamente projetado para atuar em uma situação de instabilidade, observa-se que essas curvas se interceptam em três pontos (Pafume-Coelho, 2017), Figura 3.4. Estes pontos, que foram calculados através das Equações 3.24 e 3.45, determinam as condições de equilíbrio do sistema dinâmico não linear e sua estabilidade é verificada pela Equação 3.43. No caso da Figura 3.4, os três pontos de equilíbrio são instáveis. Por conveniência, este trabalho padroniza a estabilidade dos pontos de equilíbrio como sendo: \times instável, \circ estável.

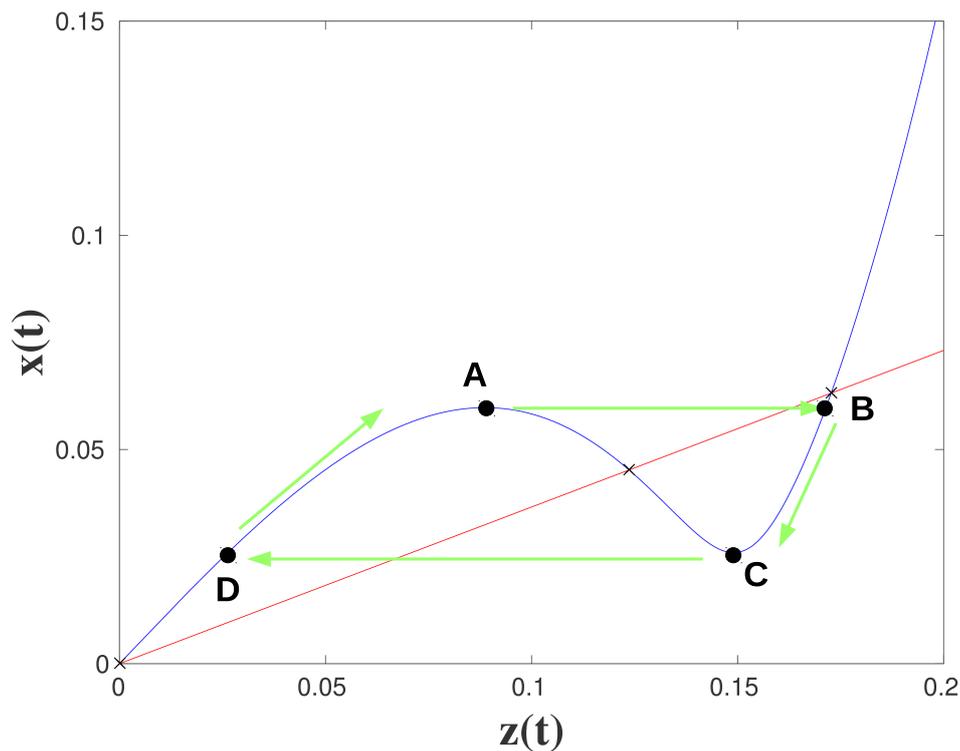


Figura 3.4: Análise da interação das variedades invariantes no comportamento do sistema dinâmico. Linha azul: curva SIM0 e Linha vermelha: curva SIM1.

Como mencionado anteriormente, a relação entre as amplitudes de deslocamento da fuselagem $x(t)$ e do NES $z(t)$ tende a acompanhar a variedade invariante, para as situações com pequenas condições iniciais. Para garantir que as respostas dinâmicas do sistema estejam envolvidas no ciclo de relaxação (passagem pelos pontos

A, B, C e D), faz-se necessário avaliar que:

- O ponto B (projeção do ponto A no ramo direito da SIM0) esteja abaixo do ponto de equilíbrio instável deste mesmo ramo. Isto garante que a trajetória no plano de fase representado na Figura 3.4 caminhe em direção ao ponto C assim que "saltar" do ponto A;
- O ponto de equilíbrio central, localizado entre os pontos A e C, deve ser instável. Isto garante que as respostas não tenham uma convergência assintótica para este ponto. De maneira análoga, avalia-se o ponto de equilíbrio localizado no canto inferior esquerdo do plano $x - z$;

Vale ressaltar que estas condições são necessárias para a ocorrência do ciclo de relaxação, porém não são suficientes. Além disso, as curvas SIM0 e SIM1 estão relacionadas aos parâmetros do NES e dos níveis de amortecimento do sistema principal (μ , rc_a , λ , rc_f e rc_b), principalmente. Logo, pode-se obter diversas configurações entre as variedades invariantes, o que interfere diretamente no comportamento do sistema (Gendelman e Bar, 2010). Porém, é importante mencionar que os parâmetros do NES devem ser selecionados visando uma resposta fortemente modulada para a condição crítica de velocidade de rotação do rotor.

A partir da análise dos trabalhos de (Pafume-Coelho, 2017; Bergeot et al., 2016, 2017) e de simulações realizadas, os parâmetros definidos para o NES, afim de se obter os ciclos de relaxações, foram:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{m_t}{m_f + 4m_b} = 0.05 \\ \tilde{rc}_a &= \frac{1}{6} \frac{\sqrt{3} \mu w_f}{\sqrt{K}} \\ \lambda &= \frac{k_t}{m_f + 4m_b} = 10^3 [1/(m^2 s^2)]\end{aligned}\tag{3.48}$$

Com base nos valores obtidos para o projeto do NES, estes foram aplicados no modelo do helicóptero com rotor isotrópico. A Figura 3.5 ilustra a resposta forte-

mente modulada obtida (*Canard explosion*). Vale destacar que as respostas temporais são obtidas considerando o helicóptero na condição crítica do FRS ($\Omega = 4.6615$ Hz). As curvas SIM0 e SIM1, avaliadas à partir das Equações 3.24 e 3.47, estão representadas na Figura 3.6. Os pontos de equilíbrios, pontos de intersecção entre SIM0 e SIM1, são destacados na Figura 3.6 e estes são avaliados como instáveis, Equação 3.43. Tem-se, portanto, um caso semelhante ao apresentado na Figura 3.4. Isso possibilita verificar que a resposta do helicóptero poderá apresentar um ciclo de relaxação caso haja energia suficiente para a ativação do NES. Este fato é verificado avaliando as respostas temporais do helicóptero sobrepostas às variedades invariantes representadas no plano de fase $x - z$, conforme mostrado na Figura 3.7. Pode-se avaliar que os resultados numéricos e as curvas SIM0 e SIM1 (MME) apresentam uma boa correlação entre si quando comparados.

Vale destacar, ainda na Figura 3.7, que os *fold points* (da esquerda e da direita) podem ser utilizados na previsão do comportamento dinâmico do helicóptero com NES. A Figura 3.8 apresenta a sobreposição respostas temporais e as amplitudes em x e z dos *fold points* da esquerda e direita, afim de comparação. Avalia-se que as amplitudes (x, z) dos *fold points* preveem com certa precisão as amplitudes de vibração do helicóptero com NES. Vale a pena salientar que os *fold points* são determinados a partir da curva SIM0 e esta é dependente somente dos parâmetros do NES. Logo, à partir de uma amplitude de vibração desejada, é possível avaliar os parâmetros do NES que possibilitem este requisito. No entanto, é necessário avaliar a interação entre as duas curvas afim de garantir a existência de oscilações fortemente modulada.

Outro resultado interessante de ser apresentado é o comportamento do sistema ao longo da faixa de instabilidade, ou seja, para outros valores de velocidades do rotor. Comparando a parte real dos autovalores obtidas pelo MME e o numérico, verificou-se que a região em comum compreendida pelas duas curvas varia de $4,537 < \Omega < 4,87$ Hz. Através do MME foi identificado, na Figura 3.2, que essa região está compreendida entre $4,455 \leq \Omega \leq 4,87$ Hz e uma frequência central de

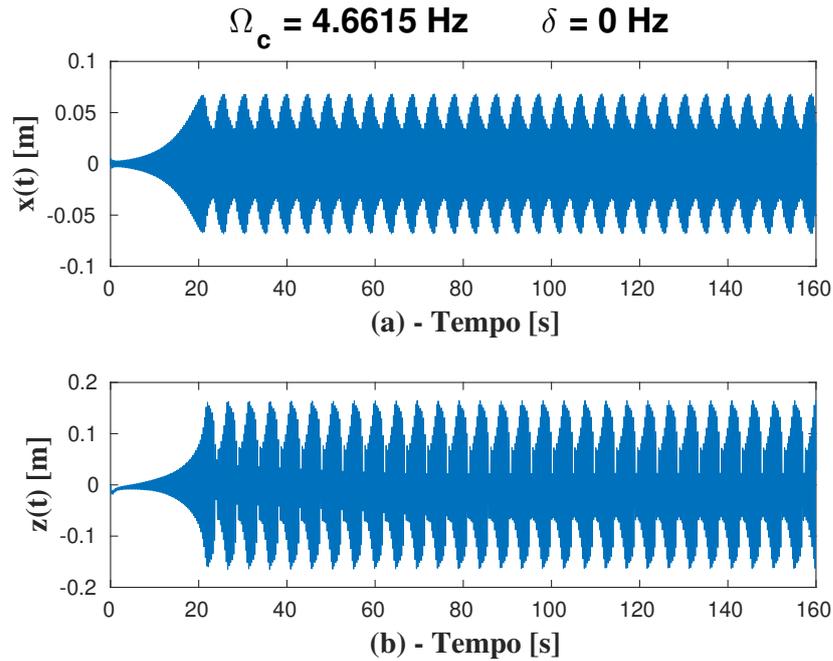


Figura 3.5: Resposta do helicóptero com o NES submetido ao FRS, $\Omega_c = 4,6615 \text{ Hz}$. (a) Resposta da Fuselagem; (b) Resposta do NES.

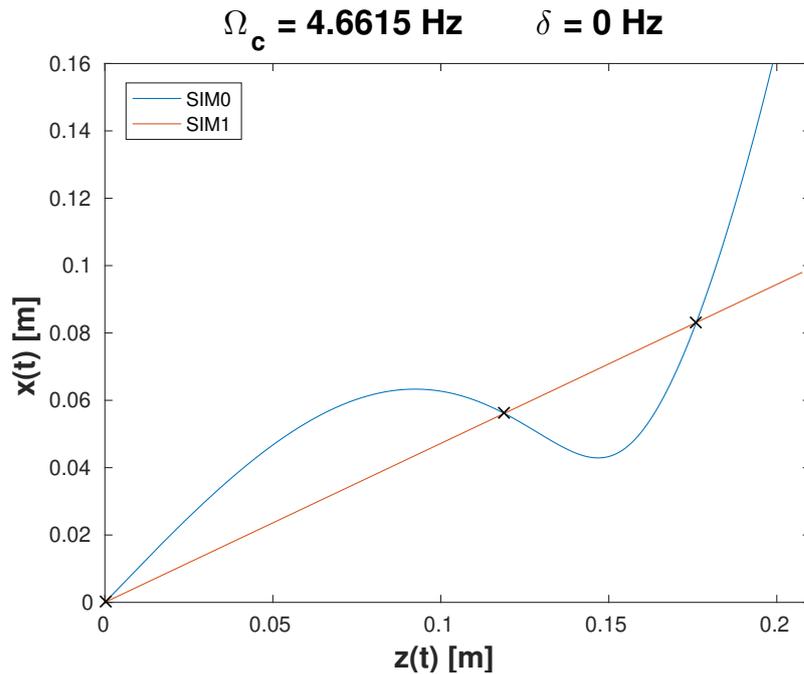


Figura 3.6: Relação entre as curvas SIM0 e SIM1 para frequência de rotação $\Omega_c = 4,6615 \text{ Hz}$.

$\Omega_c = 29,28 \text{ rad/s} \approx 4,66 \text{ Hz}$, enquanto que, a partir de uma análise numérica da evolução dos autovalores das equações originais, esta região de instabilidade está contida no intervalo $4,537 \leq \Omega \leq 4,987 \text{ Hz}$. Além disso, verificou-se na Figura 3.7 que a presença do NES, acoplado ao modelo isotrópico, é suficiente para suprimir a resposta divergente para a velocidade angular crítica da região de instabilidade, onde ocorre o

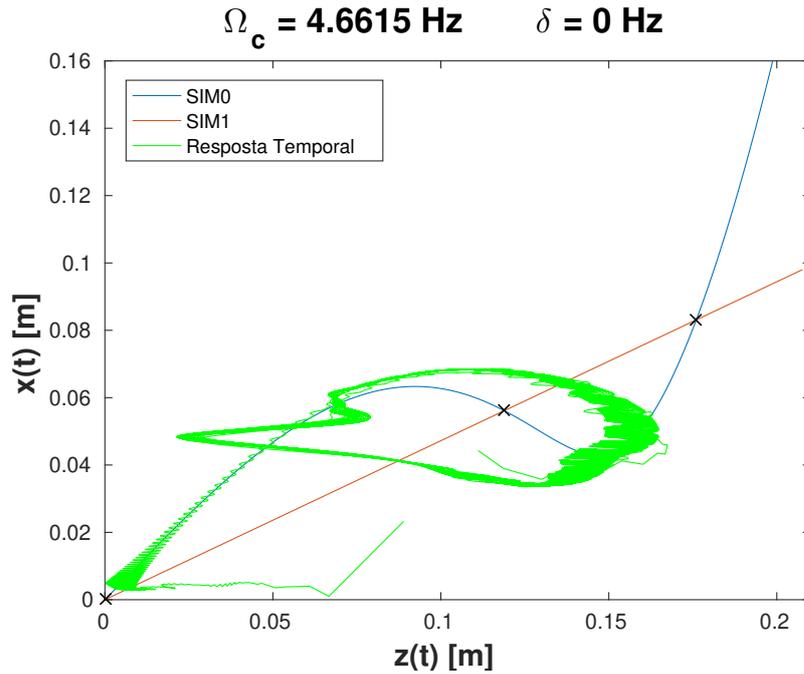


Figura 3.7: Regime de supressão do FRS para frequência de rotação $\Omega_c = 4,6615 \text{ Hz}$.

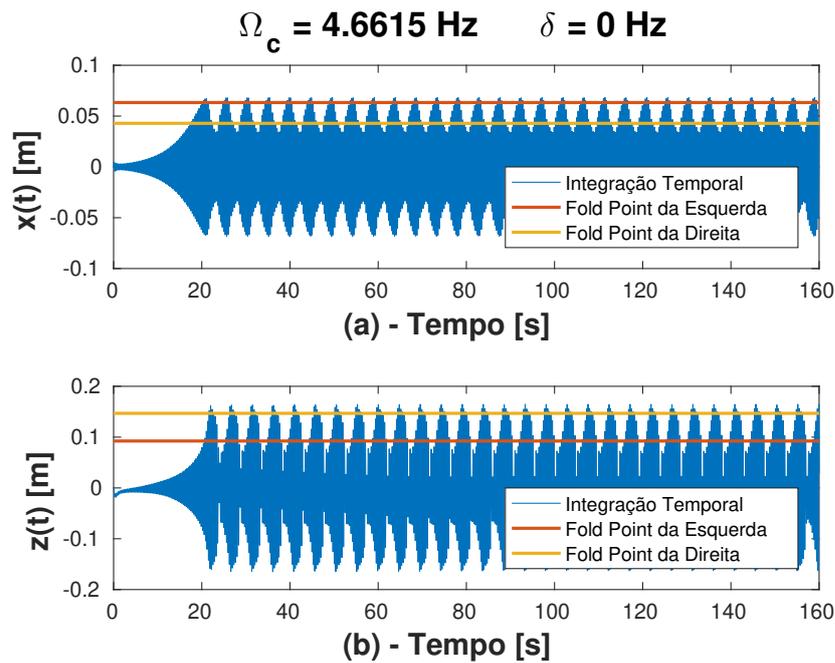


Figura 3.8: Comparação entre os valores da resposta temporal do helicóptero com o NES e os valores do *fold point* da esquerda e do ponto de equilíbrio da direita, $\Omega_c = 4,6615 \text{ Hz}$. (a) Resposta da Fuselagem; (b) Resposta do NES.

presença do maior valor da parte real dos autovalores. Sendo assim, afim de avaliar a eficiência do NES para outros valores de velocidades angulares, serão analisados as respostas para $\Omega = \Omega_c \pm \delta = \Omega_c \pm 1 \text{ rad/s}$.

Para o primeiro caso, adota-se $\delta = -1 \text{ rad/s} = -0,15915 \text{ Hz}$. Seus resulta-

dos são apresentados nas Figuras 3.9 e 3.10. Percebe-se que as respostas temporal da fuselagem e do NES são convergentes em regime permanente. Isso pode ser explicado devido ao fato do aparecimento do ponto de equilíbrio, $(x, z)=(0, 0)$, ser estável (Figura 3.10). Ao acrescentar a perturbação $\delta = -0,15915 Hz$ na MME, o sistema principal sai da sua região de instabilidade, o que faz a resposta em regime permanente convergir a zero.

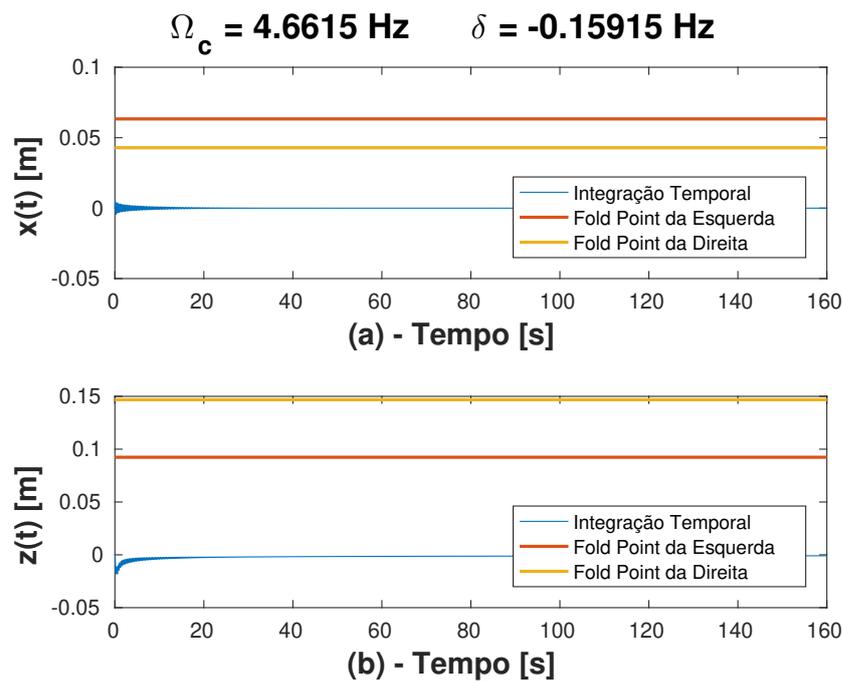


Figura 3.9: Resposta do helicóptero com o NES submetido ao FRS, $\Omega_c = 4,6615 Hz$ e $\delta = -0,15915 Hz$. (a) Resposta da Fuselagem; (b) Resposta do NES.

Para o segundo caso, adota-se $\delta = 1 rad/s = 0,15915 Hz$, proporcionando uma resposta fortemente modulada, conforme visto na Figura 3.11. Isso ocorre porque o sistema se encontra na região de instabilidade, assim o NES é ativado e a interação entre as curvas SIM0 e SIM1 proporcionam uma forte modulação da resposta dos sistemas, Figura 3.12. Comparativamente às oscilações de relaxação vistas na Figura 3.7 para $\delta = 0$, observa-se que o acréscimo de energia introduzido pelo aumento da velocidade do rotor propiciaram maiores amplitudes de vibração. Além disso, é possível claramente observar que as respostas temporais (curvas em verde) caminham para o ponto C (*fold point* direito, Figura 3.4) logo que se "agarra" ao ramo direito da SIM0.

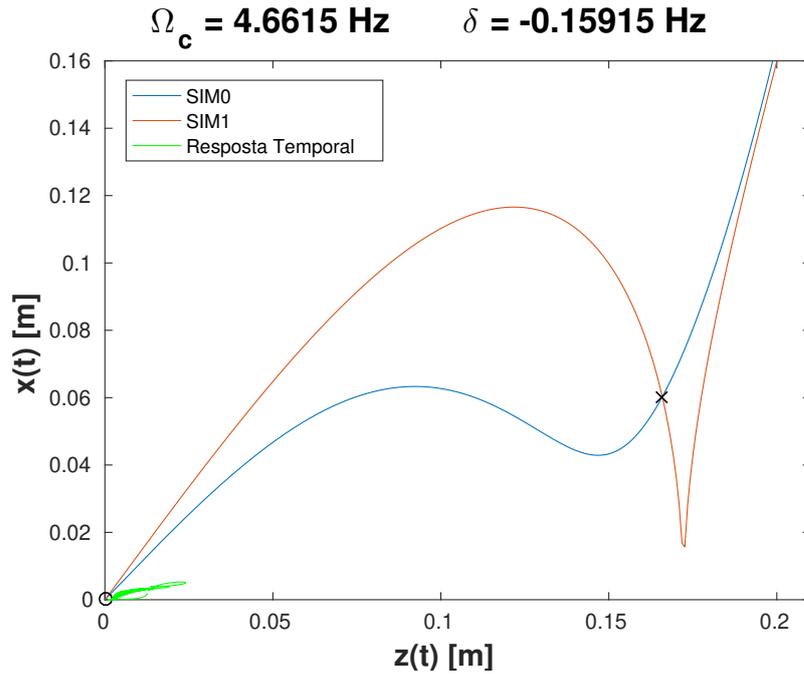


Figura 3.10: Relação entre as curvas SIM0 e SIM1 para frequência de rotação $\Omega_c = 4,6615 \text{ Hz}$ e $\delta = -0,15915 \text{ Hz}$.

Tanto no primeiro quanto no segundo caso, percebe-se uma distorção na curva SIM1. Isso ocorre devido a influência do $\tilde{\delta}$ na variável β_1 da Equação 3.38, conseqüentemente, os valores de H_1 , H_2 e H_3 da Equação 3.47 são alterados de forma a evidenciar a parábola.

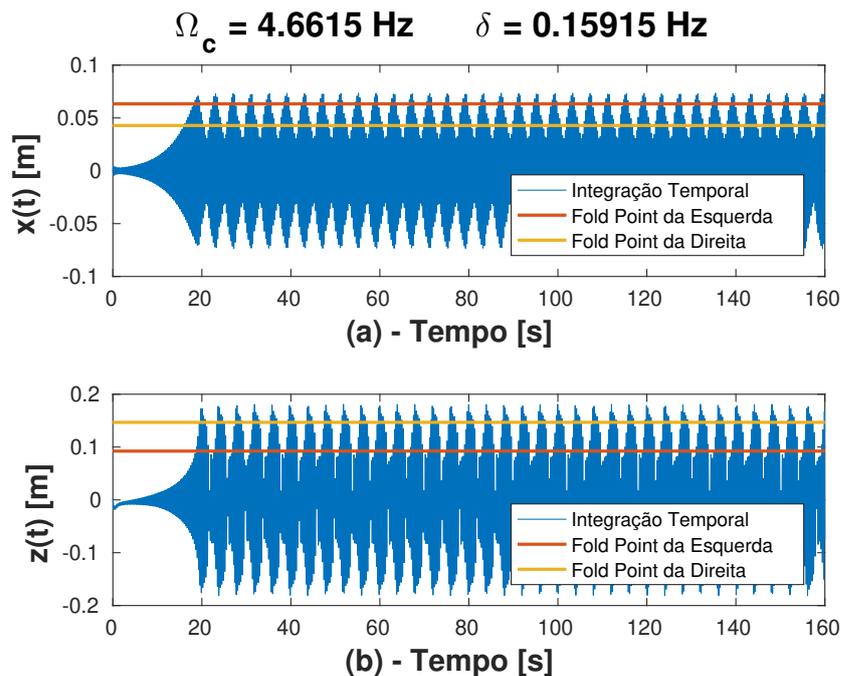


Figura 3.11: Resposta do helicóptero com o NES submetido ao FRS, $\Omega_c = 4,6615 \text{ Hz}$ e $\delta = 0,15915 \text{ Hz}$. (a) Resposta da Fuselagem; (b) Resposta do NES.

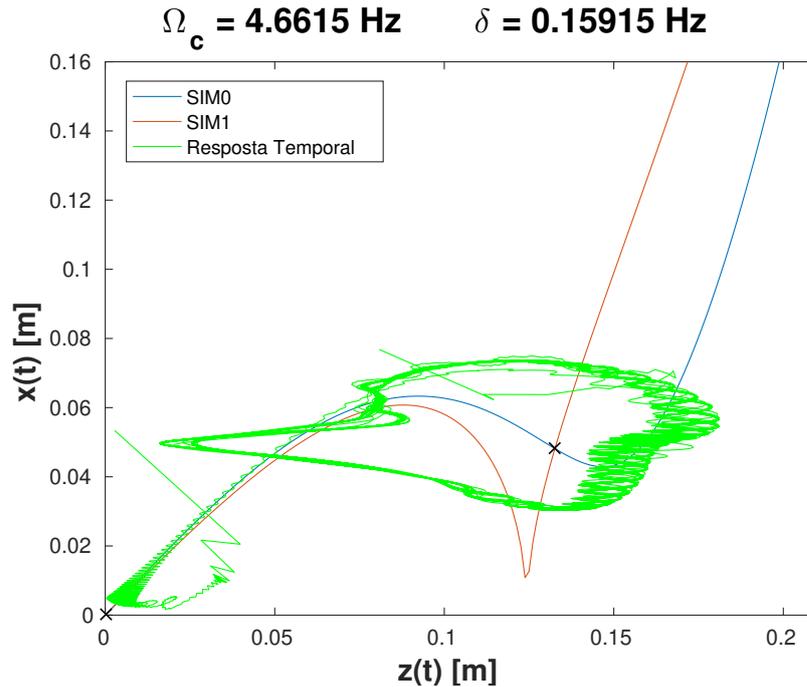


Figura 3.12: Relação entre as curvas SIM0 e SIM1 para frequência de rotação $\Omega_c = 4,6615 \text{ Hz}$ e $\delta = 0,15915 \text{ Hz}$.

Pode-se concluir que o absorvedor dinâmico NES é capaz de controlar a instabilidade do helicóptero em uma região de velocidades angulares descritas em torno de Ω_c , levando ao aparecimento de respostas fortemente moduladas. Além disso, como os parâmetros do NES não foram alterados em nenhum dos casos, os valores das amplitudes dos *fold points* são os mesmos. Conseqüentemente, as respostas fortemente moduladas do sistema tenderão a apresentar níveis de amplitude regidos pela interação entre as curvas SIM0 e SIM1.

3.4 Conclusão

O entendimento da influência do NES no comportamento do modelo isotrópico do helicóptero é visto através do MME. Este método viabiliza a obtenção das curvas SIM0 e SIM1, juntamente com a compreensão da estabilidade dos seus pontos de equilíbrio. Assim, é possível estimar a relação entre a resposta do sistema principal com a do NES, e portanto, verificar se os parâmetros adotados para o NES proporcionarão um ciclo de relaxação do tipo *Canard Explosion*.

Para validar todo o procedimento realizado no MME, realizou-se a integração

numérica para a obtenção da resposta do sistema dinâmico. As respostas temporais da fuselagem e do NES foram comparadas graficamente com as curvas SIM0 e SIM1. Isto permitiu uma boa predição dos níveis de amplitude do sistema dinâmico, assim como avaliar a condição de existência dos ciclos de relaxação. Além disso, verificou-se que o NES consegue atuar, controlando a instabilidade, para vários valores de Ω considerados ao longo da região instável do FRS.

Portanto, os parâmetros avaliados para o NES são apropriados para o controle do FRS do modelo isotrópico do helicóptero. Na sequência, será verificado se o NES dimensionado para o modelo isotrópico consegue também controlar as regiões de instabilidade apresentadas para o helicóptero com um rotor anisotrópico.

CAPÍTULO IV

MODELO ANISOTRÓPICO COM O NES

Como avaliado no Capítulo 2, o modelo anisotrópico para o rotor do helicóptero provoca o aumento das regiões de instabilidade do FRS. Por consequência, em função do nível de anisotropia e amortecimento presentes no helicóptero, estas regiões de instabilidade podem evoluir. Vale ressaltar que a propriedade de rigidez da pá sofre influência de desgaste, fadiga, folgas, fatores intempéricos, entre outros. As variações do valor de rigidez em uma das pás, rotor anisotrópico, pode inviabilizar a aplicação de alguma técnica de controle em específico. Por exemplo, para casos aonde um absorvedor dinâmico linear de vibração foi aplicado no controle de instabilidade, novas regiões são geradas se alguma propriedade do sistema dinâmico evoluir (Pafume-Coelho, 2017).

No Capítulo 3, foi visto que a aplicação do NES no controle do FRS foi bem sucedida, controlando a instabilidade da aeronave ao longo da região apresentada pelo modelo isotrópico. Devido a sua capacidade de se auto-sintonizar à frequência de oscilação do sistema principal, criou-se o interesse em saber se o mesmo NES projetado para o caso isotrópico teria a mesma eficiência considerando um modelo anisotrópico.

Portanto, este capítulo propõe esclarecer se o NES projetado para o caso

isotrópico é capaz de suprimir a instabilidade presente no modelo anisotrópico. Para isso, é apresentado o modelo dinâmico que considera o NES acoplado ao helicóptero com variação da rigidez de uma de suas pás. Aplica-se o MME para a obtenção das curvas SIM0 e SIM1, e assim, estimar o comportamento do sistema. Por fim, os resultados são validados comparando com as respostas dinâmicas encontradas numericamente.

4.1 Modelo Anisotrópico com o NES

O modelo dinâmico aqui adotado se baseia nas considerações realizadas na seção 2.3, juntamente com o incremento do NES à fuselagem. A disposição esquemática dos elementos do modelo pode ser vista na Figura 3.1.

Do modelo físico anisotrópico, obtém-se nas equações do movimento. O desenvolvimento do modelo matemático é apresentado no Apêndice A, e tem como resultado a Equação 4.1. Onde a matriz $[M_{an}]$ possui em sua diagonal principal os termos associado à inércia do sistema, e fora dela os elementos de acoplamento de massa entre fuselagem-rotor e fuselagem-NES. As matrizes $[C_{an}]$ e $[G_{an}]$ contém respectivamente os termos associados ao amortecimento viscoso e os parâmetros de acoplamento giroscópico. A presença da anisotropia na rigidez de uma das pás proporciona o surgimento dos termos periódicos, associados a η , na matriz $[K_{an}]$. Além disso, a matriz $[K_{nlan}]$ surge devido ao acoplamento do NES com a fuselagem por uma rigidez puramente cúbica. Por fim, o vetor $\{F_{extan}\}$ indica que não há forças externas atuando no sistema.

$$[M_{an}] \{\ddot{p}\} + [[C_{an}] + [G_{an}]] \{\dot{p}\} + [K_{an}] \{p\} + [K_{nlan}] \{p^3\} = \{F_{extan}\} \quad (4.1)$$

onde:

- Coordenadas $\{p\}$

$$\{p\} = \{x(t), \tau_{1c}(t), \tau_{1s}(t), \tau_0(t), \tau_d(t), z(t)\}^T$$

- Matriz de massa $[M_{an}]$

$$[M_{an}] = \begin{bmatrix} \mu + 1 & 0 & -2rm & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -rb & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C_{an}]$

$$[C_{an}] = \begin{bmatrix} rcf & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rcb & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rcb & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rcb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rcb & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -rca \end{bmatrix}$$

- Matriz giroscópica $[G_{an}]$

$$[G_{an}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K_{an}]$

$$[K_{an}] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\eta \cos(2\Omega t) - \Omega^2 + \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} & \frac{1}{4}\eta \sin(2\Omega t) + rcb\Omega & \frac{1}{2}\cos(\Omega t)\eta & -\frac{1}{2}\cos(\Omega t)\eta & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\eta \sin(2\Omega t) - rcb\Omega & -\frac{1}{4}\eta \cos(2\Omega t) - \Omega^2 + \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} & \frac{1}{2}\sin(\Omega t)\eta & -\frac{1}{2}\sin(\Omega t)\eta & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\cos(\Omega t)\eta & \frac{1}{4}\sin(\Omega t)\eta & \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} & -\frac{\eta}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\cos(\Omega t)\eta & -\frac{1}{4}\sin(\Omega t)\eta & -\frac{\eta}{4} & \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez não linear $[K_{nlan}]$

$$[K_{nlan}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_{extan}\}$

$$\{F_{extan}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vale destacar que o parâmetro η é obtido à partir da seguinte expressão:

$$\eta = \frac{\sigma}{I_b + b^2 m_b} \quad (4.2)$$

onde σ representa o nível de anisotropia avaliado na primeira pás, uma vez que $k_{b1} = k_b + \sigma$, enquanto que as rigidezes nas outras pás são consideradas $k_{bi} = k_b, i = 2..N_b$.

4.2 Método das Múltiplas Escalas

Seguindo a mesma metodologia apresentada na seção 3.2, a aplicação do MME consiste em expressar o tempo t em função de novas variáveis temporais independentes $(T_0, T_1, \dots, T_{N_\epsilon})$ e ponderadas entre si ϵ , Equação 3.3. Além disso, a solução do problema dinâmico não linear é aproximada por uma expansão de funções, definida pela Equação 3.4.

Visto que o MME é um método de aproximação assintótico, é necessário realizar a ponderação de certos termos da Equação 4.1 para capturar, assintoticamente, a influência da anisotropia no comportamento dinâmico do helicóptero com NES. Esta etapa é primordial para que a resposta aproximada obtida se aproxime da real. Neste sentido, os termos da Equação 4.1 são ponderados conforme apresentado na Equação 4.3.

$$\begin{aligned}
 \mu &= \epsilon \tilde{\mu} & rm &= \epsilon r\tilde{m} \\
 rb &= \epsilon r\tilde{b} & rc_f &= \epsilon r\tilde{c}_f \\
 rc_b &= \epsilon r\tilde{c}_b & rc_a &= \epsilon r\tilde{c}_a \\
 \eta &= \epsilon \tilde{\eta}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo, $\epsilon = \mu$. Vale destacar que, com exceção do termo de anisotropia η , a mesma estratégia adotada no Capítulo 3 foi utilizada para a escolha dos termos ponderados por ϵ : termos de acoplamento dinâmico entre fuselagem, rotor e NES, e termos de amortecimento.

A introdução do NES ao helicóptero tem a função de controlar a amplitude da resposta do sistema principal. Para este tipo de aplicação, Luongo e Zulli (2012) recomenda reescalar as variáveis $\{p\}$, conforme a Equação 4.4

$$\{p\} = \sqrt{\epsilon} \{\tilde{p}\} = \sqrt{\epsilon} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\tau}_{1c}(t) \\ \tilde{\tau}_{1s}(t) \\ \tilde{\tau}_0(t) \\ \tilde{\tau}_d(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

O valor da velocidade de rotação do rotor Ω tem influência nos esforços centrífugos e nos termos de acoplamento giroscópico, Equação 4.1. Visando refinar a análise do comportamento dinâmico nas proximidades de uma dada velocidade Ω_c , introduz-se uma perturbação $\tilde{\delta}$, conforme Equação 4.5.

$$\Omega = \Omega_c + \epsilon \tilde{\delta} \quad (4.5)$$

Aplicando as considerações dadas pelas Equações 4.3, 4.4 e 4.5 na Equação 4.1, tem-se as Equações 4.6 e 4.7. A primeira corresponde à equação do movimento do sistema principal e a segunda está relacionada à dinâmica do NES. Importante destacar que a perturbação em Ω (Equação 4.5) não foi considerada para os termos periódicos.

$$[\hat{M}] \{\ddot{\tilde{p}}\} + \left[[\hat{C}] + [\hat{G}] \right] \{\dot{\tilde{p}}\} + [\hat{K}] \{\tilde{p}\} + \epsilon [K_{nlc}] \{\tilde{p}^3\} = \epsilon \tilde{\mu} \{R\} \ddot{\tilde{z}}(t) \quad (4.6)$$

$$\text{ffl} \simeq \{\tilde{p}\} \{R\}^T - \text{ffl} \simeq \ddot{\tilde{z}}(t) - \text{ffl} \tilde{r} \tilde{c}_a \dot{\tilde{z}}(t) - \epsilon \lambda \tilde{z}(t)^3 = 0 \quad (4.7)$$

onde:

- Coordenadas $\{\tilde{p}\}$

$$\{\tilde{p}\} = \{\tilde{x}(t), \tilde{\tau}_{1c}(t), \tilde{\tau}_{1s}(t), \tilde{\tau}_0(t), \tilde{\tau}_d(t)\}^T$$

- $\{R\}$

$$\{R\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

- Matriz de massa $[\hat{M}]$

$$[\hat{M}] = \begin{bmatrix} K & 0 & -2\epsilon r\tilde{m} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{r}\tilde{b}\epsilon & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[\hat{C}]$

$$[\hat{C}] = \begin{bmatrix} \epsilon r\tilde{c}_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{r}\tilde{c}_b\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{r}\tilde{c}_b\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{r}\tilde{c}_b\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{r}\tilde{c}_b\epsilon \end{bmatrix}$$

- Matriz giroscópica $[\hat{G}]$

$$[\hat{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tilde{\delta}\epsilon + 2\Omega_c & 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{\delta}\epsilon - 2\Omega_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[\hat{K}]$

$$\left[\hat{K} \right] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & kk_{2,2} & kk_{2,3} & \frac{1}{2} \epsilon \tilde{j} \cos(\Omega_c t) & -\frac{1}{2} \epsilon \tilde{j} \cos(\Omega_c t) \\ 0 & kk_{3,2} & kk_{3,3} & \frac{1}{2} \epsilon \tilde{j} \sin(\Omega_c t) & -\frac{1}{2} \epsilon \tilde{j} \sin(\Omega_c t) \\ 0 & \frac{1}{4} \epsilon \tilde{j} \cos(\Omega_c t) & \frac{1}{4} \epsilon \tilde{j} \sin(\Omega_c t) & \chi & -\frac{1}{4} \epsilon \tilde{j} \\ 0 & -\frac{1}{4} \epsilon \tilde{j} \cos(\Omega_c t) & -\frac{1}{4} \epsilon \tilde{j} \sin(\Omega_c t) & -\frac{1}{4} \epsilon \tilde{j} & \chi \end{bmatrix}$$

sendo:

$$\begin{aligned} kk_{2,2} &= \frac{1}{4} \epsilon \tilde{j} \cos(2 \Omega_c t) + \chi - \epsilon^2 \tilde{\delta}^2 - 2 \epsilon \tilde{\delta} \Omega_c - \Omega_c^2 \\ kk_{2,3} &= \frac{1}{4} \epsilon \tilde{j} \sin(2 \Omega_c t) + \epsilon^2 \tilde{r} \tilde{c}_b \tilde{\delta} + \epsilon \tilde{r} \tilde{c}_b \Omega_c \\ kk_{3,2} &= \frac{1}{4} \epsilon \tilde{j} \sin(2 \Omega_c t) - \epsilon^2 \tilde{r} \tilde{c}_b \tilde{\delta} - \epsilon \tilde{r} \tilde{c}_b \Omega_c \\ kk_{3,3} &= -\frac{1}{4} \epsilon \tilde{j} \cos(2 \Omega_c t) + \chi - \epsilon^2 \tilde{\delta}^2 - 2 \epsilon \tilde{\delta} \Omega_c - \Omega_c^2 \\ \chi &= \epsilon^2 \tilde{\delta}^2 r a + 2 \epsilon \tilde{\delta} r a \Omega_c + \omega_B^2 + \frac{1}{4} \epsilon \tilde{j} \end{aligned}$$

Realizadas as devidas considerações e ponderações, as Equações 4.6 e 4.7 estão aptas à aplicação do MME. Portanto, introduz-se nelas as escalas de tempo (Equações 4.8) e uma solução assintótica dada pela Equação 4.9.

$$T_n = \epsilon^n t, \quad \text{para } n = 0, 1. \quad (4.8)$$

$$\{\tilde{p}(t)\} = \epsilon^0 \{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\} + \epsilon^1 \{\tilde{p}_1(T_0, T_1)\} \quad (4.9)$$

Após a introdução das novas variáveis, os termos das equações são agrupados em função da ordem de ϵ . Respeitando a ordem adotada para a expansão da Equação 4.9, seleciona-se apenas os termos associados à ordem ϵ^0 e ϵ^1 . Os demais termos, relacionados à ordens superiores, são desprezados. Vale destacar que, em virtude das ponderações serem praticamente iguais à análise do helicóptero para rotores

isotrópicos e com NES, têm-se que o desenvolvimento das equações das variedades invariantes SIM0 e SIM1 para o caso anisotrópico é muito similar ao apresentado no Capítulo 3. Sendo assim, serão abordados apenas os resultados que se alteraram em relação ao desenvolvimento anterior.

4.2.1 Ordem ϵ^0

A equação obtida para a ordem ϵ^0 é exatamente a mesma apresentada na Equação 3.11. Devido às ponderações realizada, este sistema apresenta apenas os termos correspondentes ao sistema linear associado do helicóptero, porém desconsiderando o desacoplamento dinâmico entre fuselagem e rotor.

4.2.2 Ordem ϵ^1

Selecionando os termos associados a ordem ϵ^1 , as equações obtidas têm os mesmos termos apresentados nas Equações 3.12 e 3.13, diferenciando apenas a matriz de rigidez $[K_1]$ que é dada por:

- Matriz de rigidez $[K_1]$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\tilde{j}\cos(2\Omega_c T_0) - 2\tilde{\delta}(ra-1)\Omega_c - \frac{\tilde{j}}{4} & -\frac{1}{4}\tilde{j}\sin(2\Omega_c T_0) - \tilde{r}\tilde{c}_b\Omega_c & -\frac{1}{2}\tilde{j}\cos(\Omega_c T_0) & \frac{1}{2}\tilde{j}\cos(\Omega_c T_0) \\ 0 & -\frac{1}{4}\tilde{j}\sin(2\Omega_c T_0) + \tilde{r}\tilde{c}_b\Omega_c & \frac{1}{4}\tilde{j}\cos(2\Omega_c T_0) - 2\tilde{\delta}(ra-1)\Omega_c - \frac{\tilde{j}}{4} & -\frac{1}{2}\tilde{j}\sin(\Omega_c T_0) & \frac{1}{2}\tilde{j}\sin(\Omega_c T_0) \\ 0 & -\frac{1}{4}\tilde{j}\cos(\Omega_c T_0) & -\frac{1}{4}\tilde{j}\sin(\Omega_c T_0) & -\frac{\tilde{j}}{4} - 2\tilde{\delta}ra\Omega_c & \frac{\tilde{j}}{4} \\ 0 & \frac{1}{4}\tilde{j}\cos(\Omega_c T_0) & \frac{1}{4}\tilde{j}\sin(\Omega_c T_0) & \tilde{j}/4 & -\frac{\tilde{j}}{4} - 2\tilde{\delta}ra\Omega_c \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

É importante notar que, decorrente da consideração de anisotropia no rotor, a matriz K_1 apresenta termos trigonométricos além da dependência do termo $\tilde{\eta}$ que está relacionado ao nível de dissimilaridade de rigidez considerada.

4.2.3 Solução Ordem ϵ^0 e ϵ^1

Devido os termos da ordem ϵ^0 serem iguais tanto para o modelo isotrópico quanto anisotrópico, a resolução completa dessa ordem pode ser vista na seção 3.2.3.

As análises das equações ϵ^1 para as obtenções das expressões para as variedades invariantes seguem as mesmas desenvolvidas no Capítulo 3. Isto se deve em virtude das expressões serem idênticas, com exceção da matriz de rigidez $[K_1]$.

Slow Invariant Manifold - SIM0

No Capítulo 3, durante as análises das equações para a ordem ϵ^1 , a Equação 3.12 permitiu extrair a expressão da variedade invariante super lenta (SIM1), enquanto que a partir da Equação 3.13, determinou-se a expressão para SIM0. Para essa última, em virtude de estar relacionada à equação dinâmica do NES, a presença da anisotropia não altera os termos, portanto todo o raciocínio desenvolvido nas Equações 3.16 até 3.28 permanece inalterado. Levando a concluir que, a equação governante da curva SIM0 é definida pela Equação 3.24.

Super Slow Invariant Manifold - SIM1

O procedimento aplicado para a obtenção da curva SIM1 não sofre grandes alterações para o caso anisotrópico. Pois o que causa a variação no resultado final é a presença da anisotropia associada aos termos periódico na matriz $[K_1]$, acoplando todos os graus de liberdade do rotor.

Substituindo as respostas de $\{\tilde{p}_0(T_0, T_1)\}$, Equação 3.15, e $\tilde{z}_0(T_0, T_1)$, Equação 3.17, na Equação 3.12 e considerando que o valor de $[K_1]$ é dado pela Equação 4.10, chega-se na Equação 3.29. Posteriormente, utilizando-se dos autovetores pela esquerda do modo da fuselagem e do modo regressivo do rotor, determinam-se as condições de solvabilidade, Equações 3.30 e 3.31. As condições de solvabilidade podem ser expressas na forma matricial, conforme Equação 3.32.

Ao substituir os valores de $[M_0]$, $[M_1]$, $[G_0]$, $[G_1]$, $[K_1]$, ω_1 , $\{U_1\}$ e $\{V_1\}$ na Equação 3.32, tem-se:

$$[Y]^{-1} [N] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\tilde{r}c_f}{K} & \frac{j r \tilde{m} \omega_f}{K^{3/2}} \\ -\frac{j \omega_f^2 \tilde{r}b}{\sqrt{K}(4\sqrt{K}\Omega_c - 4\omega_f)} & \frac{((-8jra + 8j)\tilde{\delta} - 4\tilde{r}c_b)\Omega_c - j\tilde{j}}{8\sqrt{K}\Omega_c - 8\omega_f} \sqrt{K} - 8 \left(j\tilde{\delta} - \frac{\tilde{r}c_b}{2} \right) \omega_f \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$[Y]^{-1} \{V_1\}^T \omega_1^2 \tilde{\mu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\omega_f^2}{K^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Ao determinar os autovalores, ρ_M e ρ_m , da Equação 4.11, identifica-se qual é o modo responsável pela instabilidade observando o sinal da parte real, de forma semelhante ao apresentado na Figura 3.2. O modo que apresenta valores positivos para cada condição de anisotropia aplicada, tem o seu autovalor identificado como ρ_M . Na sequência, os autovetores pela direita e pela esquerda de ρ_M são calculados e representados, respectivamente, pelas Equações 3.35 e 3.36 .

As amplitudes A_1 e A_2 na Equação 3.32 estão relacionadas com a amplitude modal A do modo instável através do autovetor pela direita $\{W\}$, conforme mostrado na Equação 3.2.4. Substituindo essa consideração na Equação 3.32 e pré multiplicando-a pelo autovetor pela esquerda, chega-se na Equação 3.37. Como resultado desta operação, obtêm-se a redução do sistema de duas equações para um novo com apenas uma, conforme mostrado na Equação 4.13. Esta nova equação relaciona as amplitudes do modo instável e o NES.

$$D_1 A + \beta_1 A + \beta_0 Z = 0 \quad (4.13)$$

com,

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \frac{S_1 \tilde{\omega}_f^2}{K^2 (S_1 W_1 + S_2 W_2)}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{S_1 W_1 + S_2 W_2} \left(S_1 \left(\frac{1}{2} \frac{\tilde{r}c_f W_1}{K} - \frac{j r \tilde{m} \omega_f W_2}{K^{3/2}} \right) + S_2 \left(\frac{j \omega_f^2 \tilde{r}b W_1}{\sqrt{K} (4 \sqrt{K} \Omega_c - 4 \omega_f)} + \frac{\left(\left((8 j r a - 8 j) \tilde{\delta} + 4 \tilde{r}c_b \right) \Omega_c + j \tilde{j} \right) \sqrt{K} + 8 \left(j \tilde{\delta} - \frac{\tilde{r}c_b}{2} \right) \omega_f}{8 \sqrt{K} \Omega_c - 8 \omega_f} W_2 \right) \right)$$

Em seguida, passa-se as amplitudes A e Z da Equação 4.13 para a forma polar, Equação 3.39, e aplica-se as relações trigonométricas necessárias para se chegar na Equação 3.40. Separando a parte real da imaginária, tem-se as Equações 3.41 e 3.42 respectivamente.

Trabalhando apenas com a parte real, a Equação 3.41 é multiplicada por $2 A_a$, gerando a Equação 3.43. Desta equação, consegue-se analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio ao aplicar a condição $\frac{d}{dT_1} X_a(T_1) = 0$, Equações 3.44. Os valores de X_z encontrados, Equação 3.45, podem ser substituídos na Equação 3.24, e assim, determinar os respectivos valores de X_a .

Por fim, a curva SIM1 é obtida ao aplicar a Equação 3.46, que é uma derivação da Equação 3.24, na Equação 3.44, chegando assim, na Equação 3.47.

4.3 Resultados

Trabalhos anteriores divulgados na comunidade científica demonstram forte capacidade de controlar fenômenos dinâmicos instáveis por meio da aplicação de uma classe específica de absorvedores dinâmicos não lineares, denominados NES (*Non-linear Energy Sink*). As oscilações de relaxação impostas pelo absorvedor não linear podem levar o sistema dinâmico à amplitudes limitadas. Trabalhos já estiveram debruçados sob a aplicação de NES em helicópteros e este demonstrou ter capacidade de controlar o FRS. Entretanto, sabe-se que a introdução de anisotropia em rotores de helicópteros induz ao surgimento de novas regiões de instabilidade. Este trabalho tem

como objetivo avaliar os efeitos da anisotropia no fenômeno de ressonância solo em helicópteros com NES.

A verificação da influência da anisotropia no comportamento dinâmico do sistema foi realizada admitindo níveis de dissimilaridade (σ) compreendidos entre $-30\% \leq \sigma \leq 30\%$ do valor da rigidez nominal k_b das pás. Vale destacar que a anisotropia foi considerada em apenas uma das pás. Para uma melhor compreensão do efeito da anisotropia, avaliou-se ainda o comportamento dinâmico do helicóptero para diferentes valores de velocidade angular. Avaliou-se o comportamento do sistema nas proximidades da frequência central Ω_c , através da perturbação δ , semelhantemente ao que foi realizado no capítulo anterior.

Para facilitar a compreensão dos resultados, esta seção será dividida em quatro tópicos, que abordam a influência da anisotropia no comportamento dinâmico do helicóptero. Além disso, visando verificar se a presença do NES é capaz de suprimir a região de instabilidade provocada pelo FRS, será aplicado uma perturbação δ na velocidade de rotação do rotor.

4.3.1 Caso 1 $\rightarrow \Delta\sigma = 0\%$

Na ausência da anisotropia no rotor do helicóptero, a resposta obtida é idêntica a resposta apresentada pelo modelo isotrópico com NES, Figuras 4.1 até 4.4. Dessa forma quando $\delta = 0 Hz$ e $\delta = 0.15915 Hz$ o sistema principal apresenta uma resposta fortemente modulada, pois, nestas configurações, a velocidade de operação do rotor se encontra dentro da região de instabilidade provocada pelo FRS. Assim, observando as Figuras 4.2 e 4.4, percebe-se que o aumento da energia em conjunto com a influência da curva SIM0 na dinâmica no sistema faz com que a relação entre as amplitudes da fuselagem e do NES passe pelos *fold points*. Isso é visto na resposta temporal, Figuras 4.1 e 4.3.

Já quando $\delta = -0.15915 Hz$, a velocidade do rotor não mais induz o FRS, pois esta condição está fora da região de instabilidade. Logo, o amortecimento presente no helicóptero é capaz de dissipar a energia do sistema, levando a resposta, em

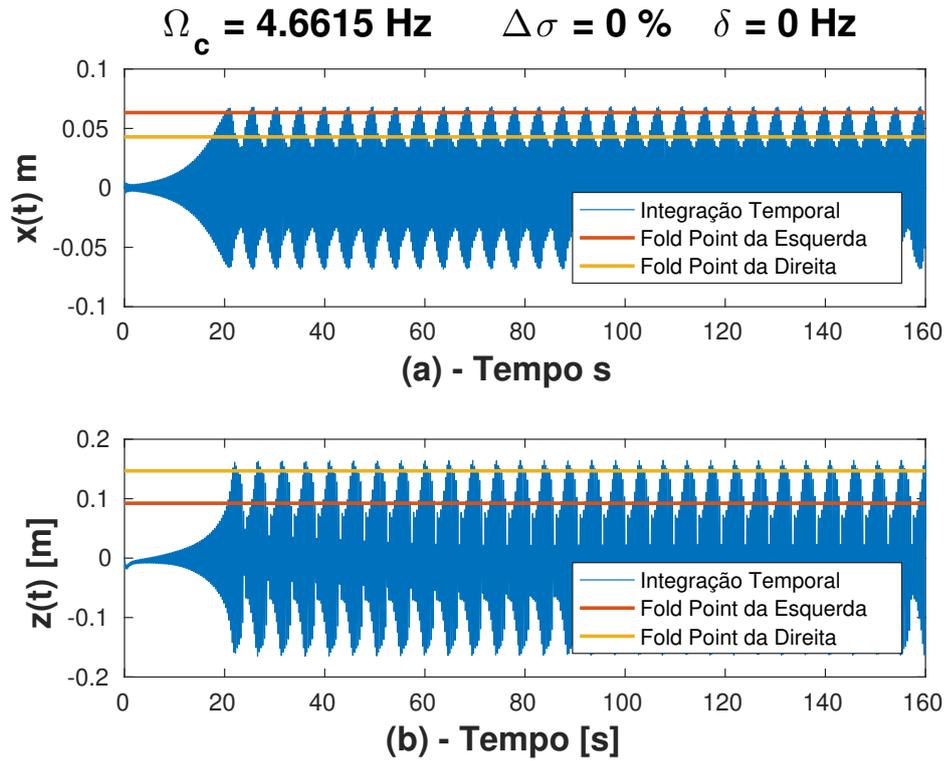


Figura 4.1: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

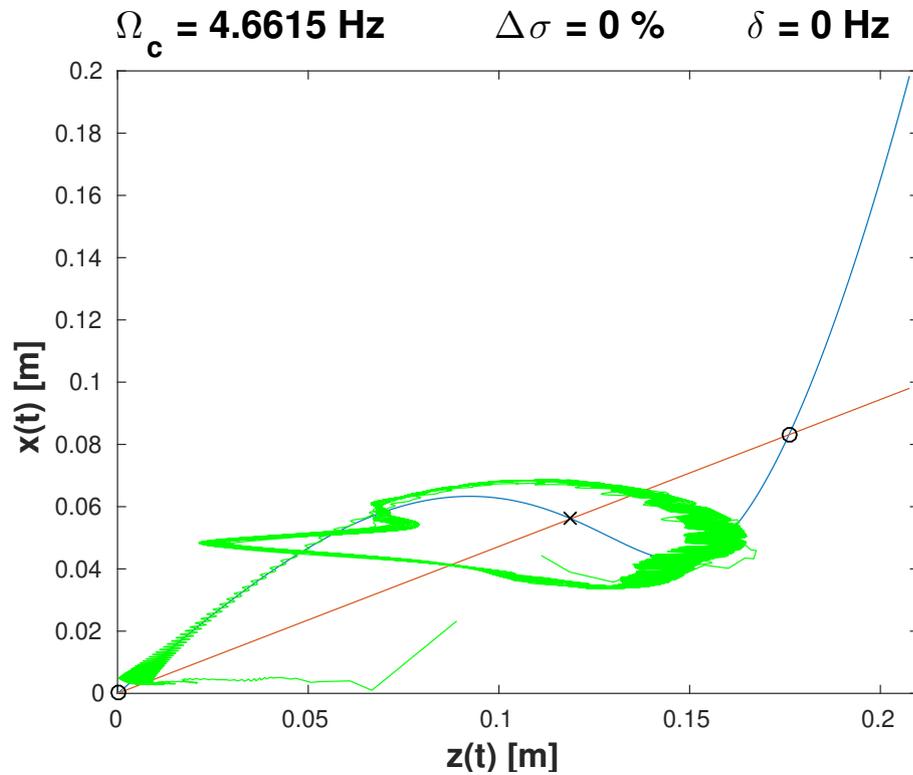


Figura 4.2: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$.

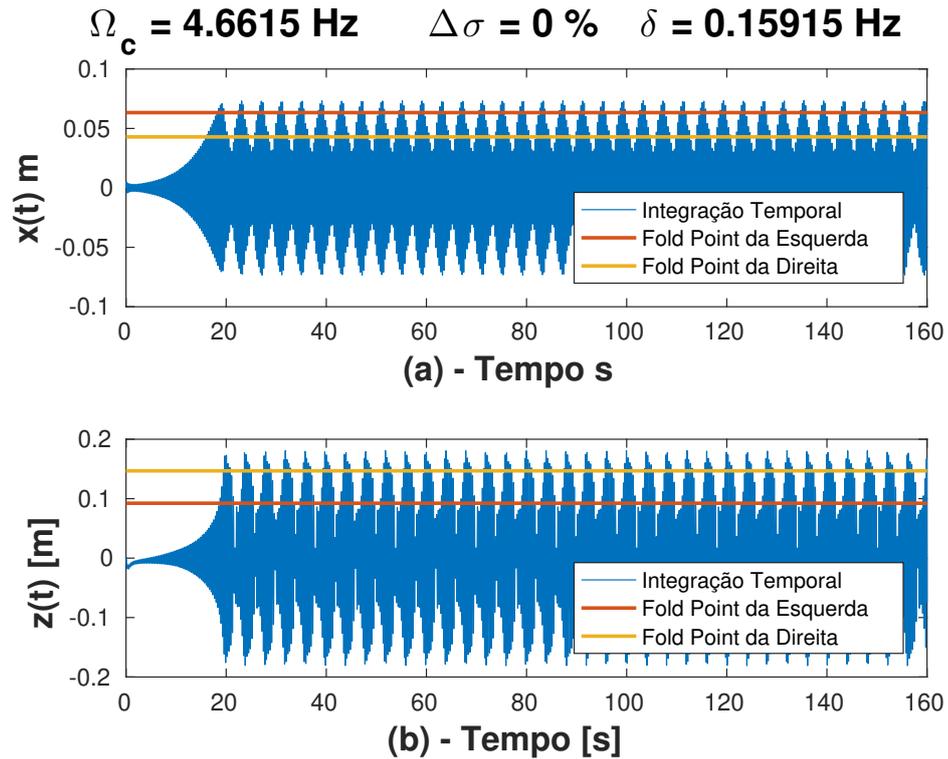


Figura 4.3: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

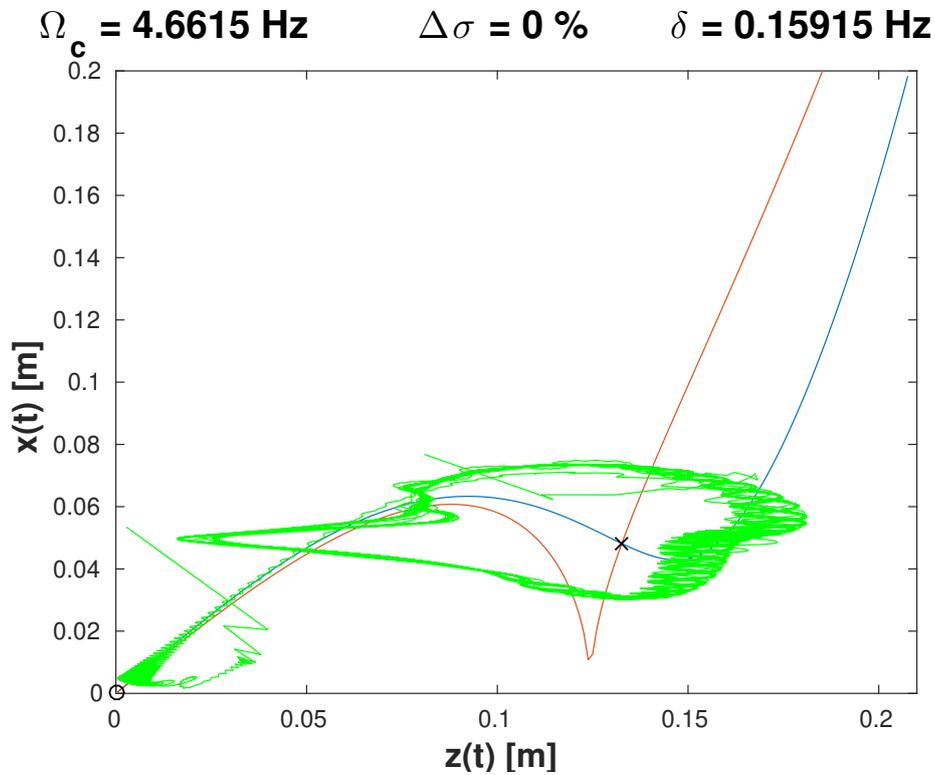


Figura 4.4: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$.

regime permanente, a zero.

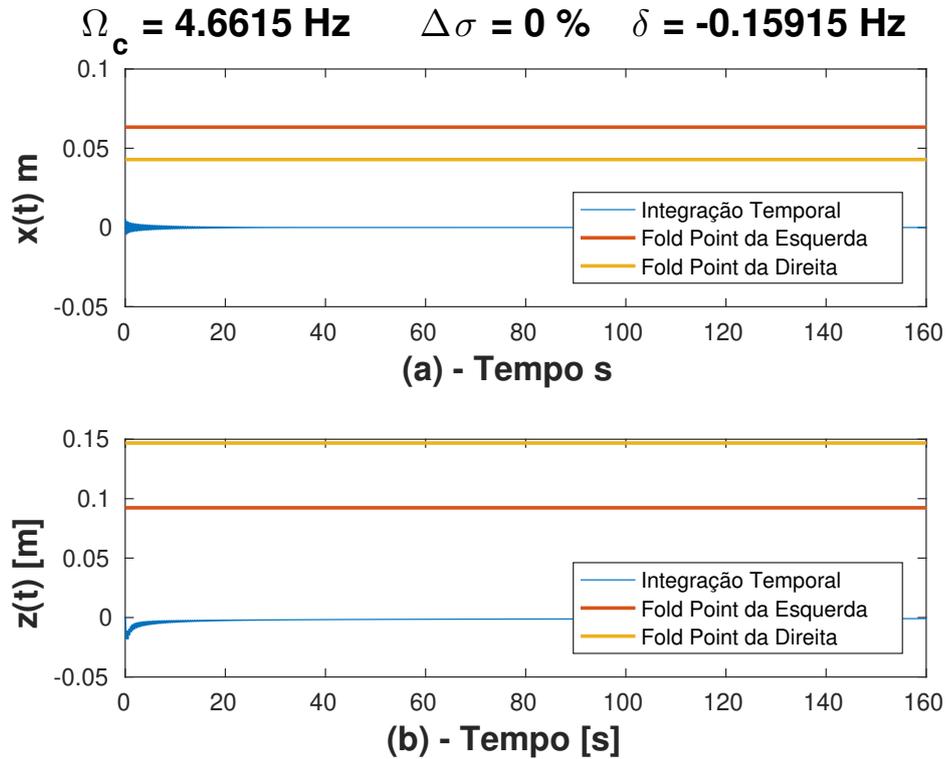


Figura 4.5: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

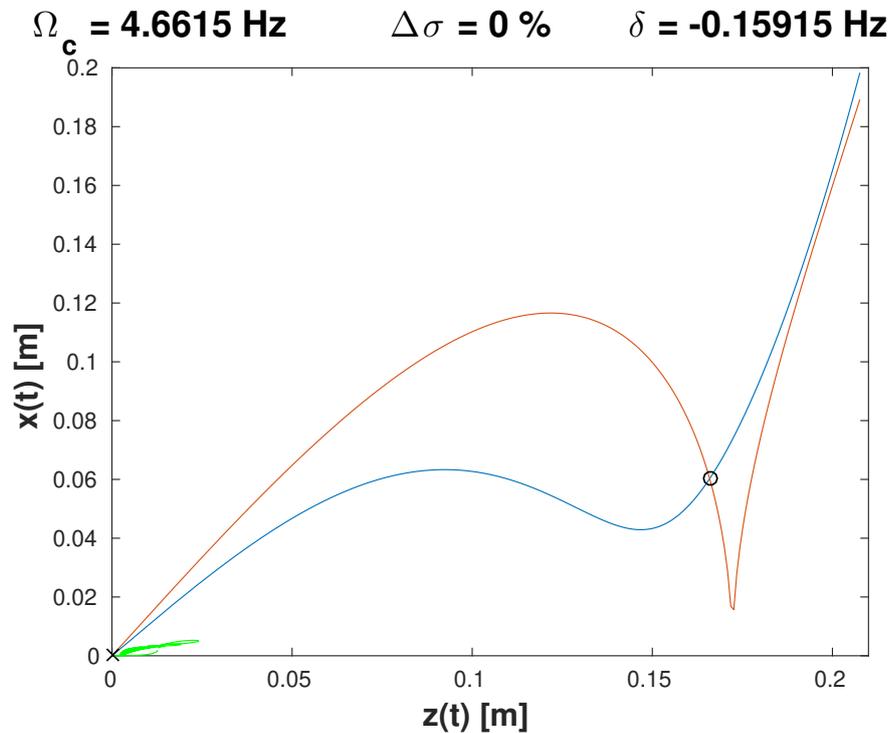


Figura 4.6: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 0\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$.

Uma vez entendido que a resposta temporal do helicóptero pode ser interpretada também pela curva em verde nos gráficos das curvas SIM0 e SIM1, as demais respostas temporais serão apresentadas no Apêndice B.

4.3.2 Caso 2 $\rightarrow \Delta\sigma = \pm 10\%$

Quando uma das pás do helicóptero apresenta uma variação em sua rigidez de $\pm 10\%$ de seu valor nominal k_b , pode-se notar uma semelhança entre o comportamento deste sistema dinâmico com o caso anterior. Para perturbações em Ω de $\delta = 0\text{ Hz}$ ou $\delta = 0.15915\text{ Hz}$, o sistema estará sob influência do FRS, apresentando uma resposta fortemente modulada, Figuras B.1, B.2, B.4 e B.5 do Apêndice B. Observa-se nestas figuras, ciclos de relaxação bem definidos que passam pelos *fold points*, Figuras 4.7, 4.8, 4.10 e 4.11. Assim, o nível de energia é controlado, proporcionando com que amplitudes de deslocamento máximas de ambos os sistemas, apresentem valores próximos ao dos *fold points*. Já no caso de $\delta = -0.15915\text{ Hz}$, o sistema se encontra fora da região de instabilidade, logo, em regime permanente, a resposta converge para a posição de equilíbrio estática, Figuras 4.9 e 4.12.

Pode-se observar, que quando $\delta = 0\text{ Hz}$ a curva SIM1 começa a apresentar uma ligeira curvatura, induzida pelo acréscimo/decrécimo de rigidez em uma das pás.

4.3.3 Caso 3 $\rightarrow \Delta\sigma = \pm 20\%$ e $\Delta\sigma = \pm 30\%$

Ao inserir uma anisotropia de $\pm 20\%$ e $\pm 30\%$ no modelo, Figuras 4.13 até 4.24, percebe-se que em alguns casos o comportamento do sistema já não é mais previsto através das curvas SIM0 e SIM1. Isso já era esperado, pois o MME é um método de aproximação que consegue obter uma resposta analítica aproximada para um determinado caso. A medida em que se busca generalizar, analisando casos fora da região de aproximação assintótica, a análise tende a não ser mais representativa. Isso é explicado ao observar as curvas SIM0 e SIM1. É possível perceber que o comportamento do sistema continua sendo influenciado pela curva SIM0, porém os pontos de equilíbrio obtidos pela interseção entre as duas curvas já não mais influenciam no

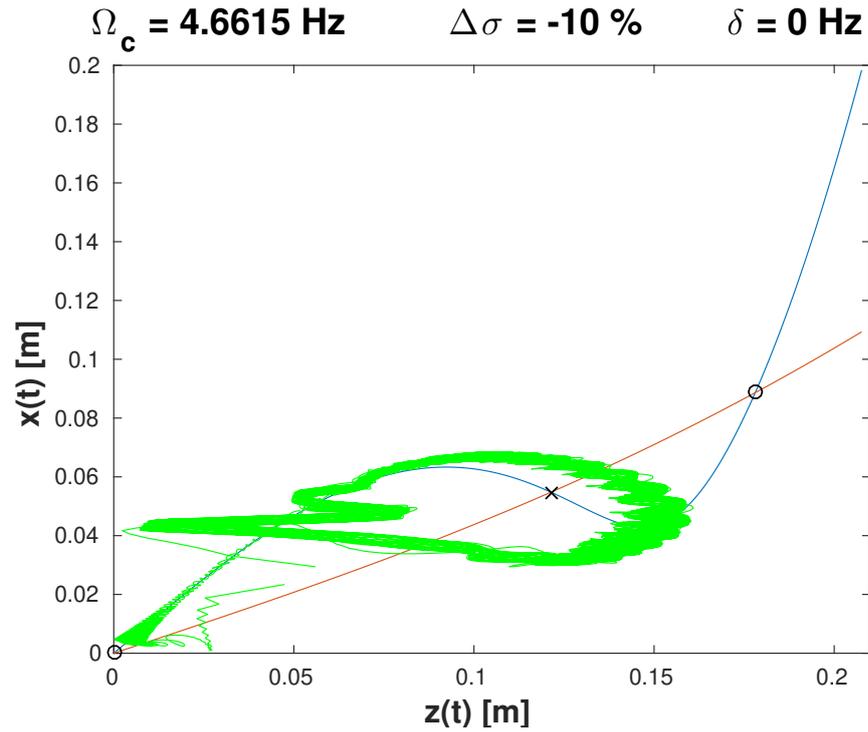


Figura 4.7: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$.

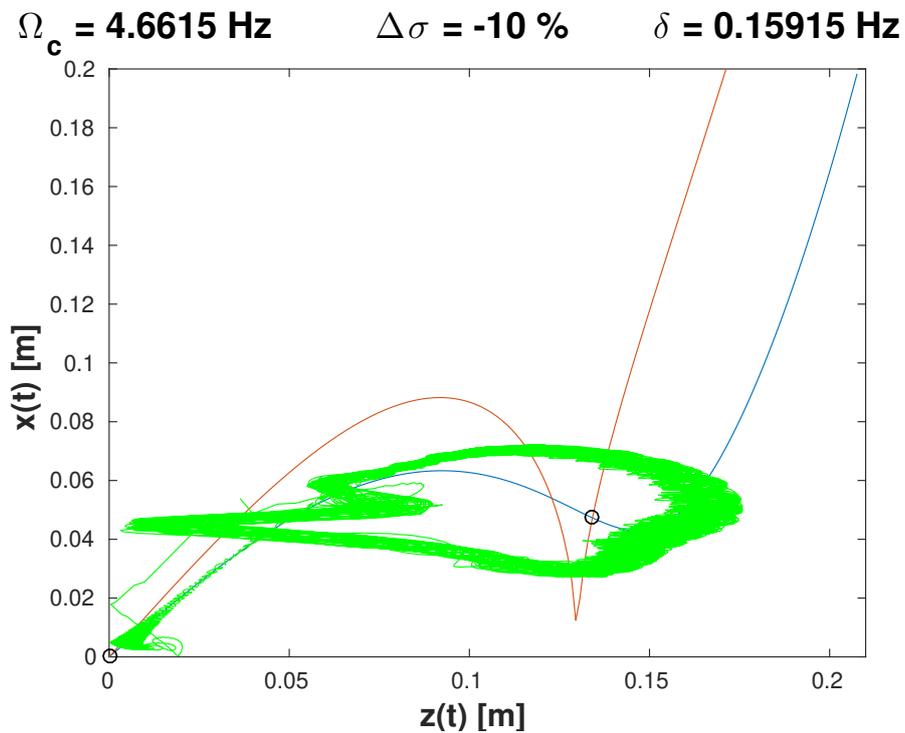


Figura 4.8: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$.

comportamento dos sistemas.

Quando o helicóptero apresenta níveis de anisotropia de $\Delta\sigma = -20\%$ e

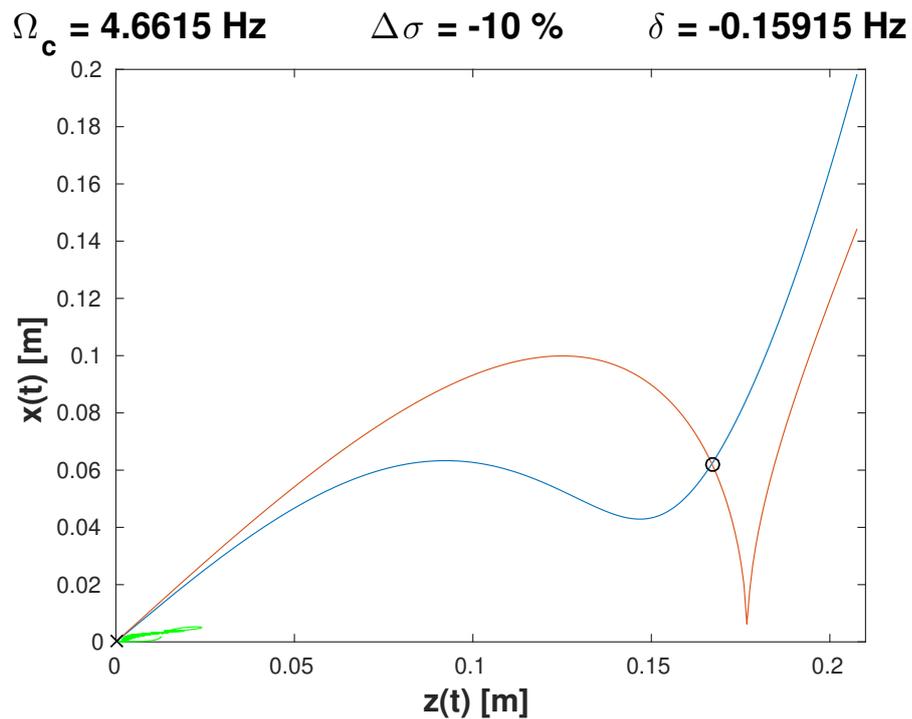


Figura 4.9: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$.

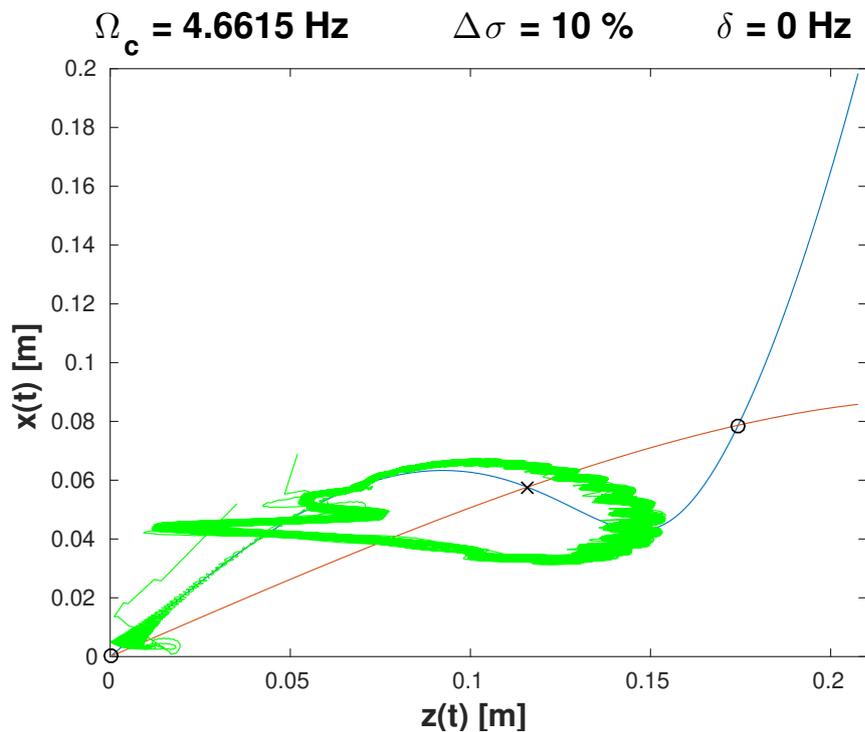


Figura 4.10: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$.

$\Delta\sigma = -30\%$, e sem perturbação na velocidade do rotor $\delta = 0 \text{ Hz}$, Figuras [B.7](#), [B.13](#), [4.13](#) e [4.19](#), o comportamento do sistema passa a ser regido pela sua capacidade em

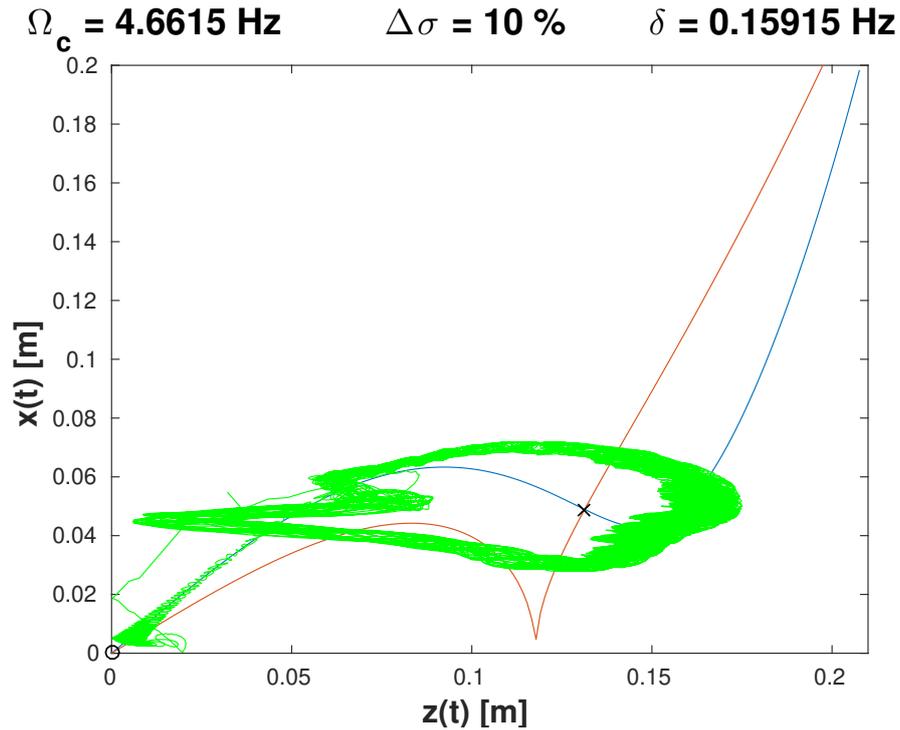


Figura 4.11: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$.

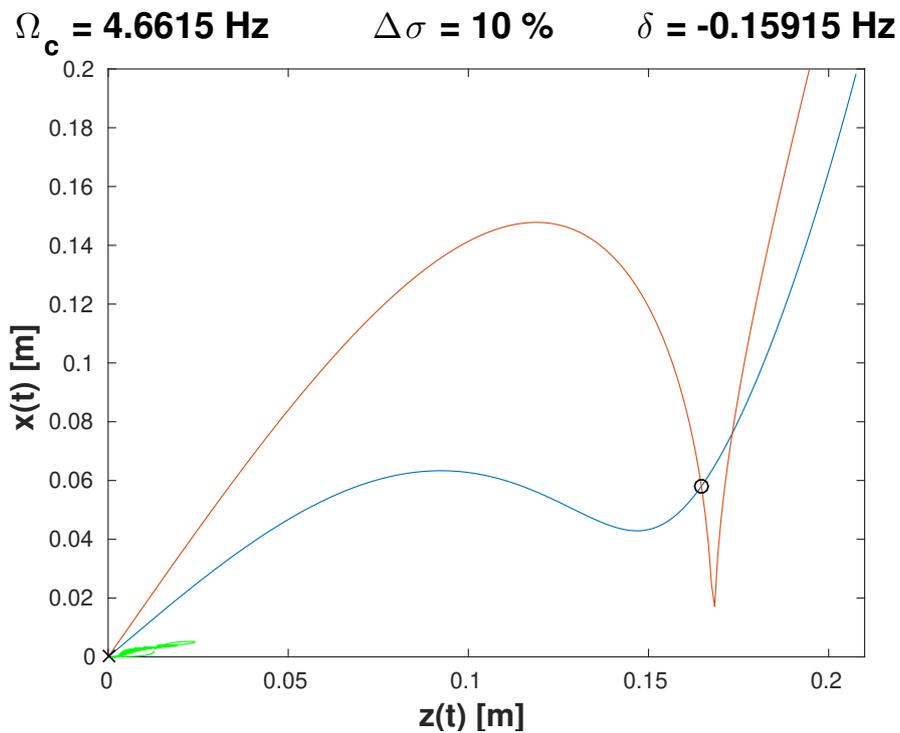


Figura 4.12: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$.

dissipar a energia adquirida no FRS sem passar pelo ciclo de relaxação. Consequentemente, a relação entre as amplitudes das respostas dos sistemas passa a orbitar

em um determinado ponto da curva SIM0, proporcionando uma resposta fracamente modulada induzida pela não linearidade. Isso leva a resposta temporal a manter níveis de amplitude quase que constantes. Em contrapartida, ao observar as Figuras B.10, B.16, 4.16 e 4.22, para os casos de $\Delta\sigma = 20\%$ e $\Delta\sigma = 30\%$ com $\delta = 0 \text{ Hz}$, percebe-se que o incremento de energia vindo do FRS é maior. Isso força a existência de um ciclo de relaxação para que a energia do sistema principal seja transmita ao NES e dissipada por ele. Porém, nestes casos não há mais uma resposta do tipo *canard explosion*, e esse ciclo de relaxação é classificado neste trabalho como uma resposta fortemente modulada com baixa transferência de energia.

Ao introduzir uma perturbação na velocidade do rotor de $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$, as respostas do helicóptero e do NES são fortemente moduladas para dos os casos de anisotropia tratados nesta seção, Figuras B.8, B.11, B.14, B.17, 4.14, 4.17, 4.20 e 4.23. Identifica-se que todos passam pelos *fold points* caracterizando a *canard explosion*.

Por fim, quando $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$, a resposta do sistema converge à valores próximos de zero, uma vez que nesta situação o helicóptero já não mais está sob influência do FRS.

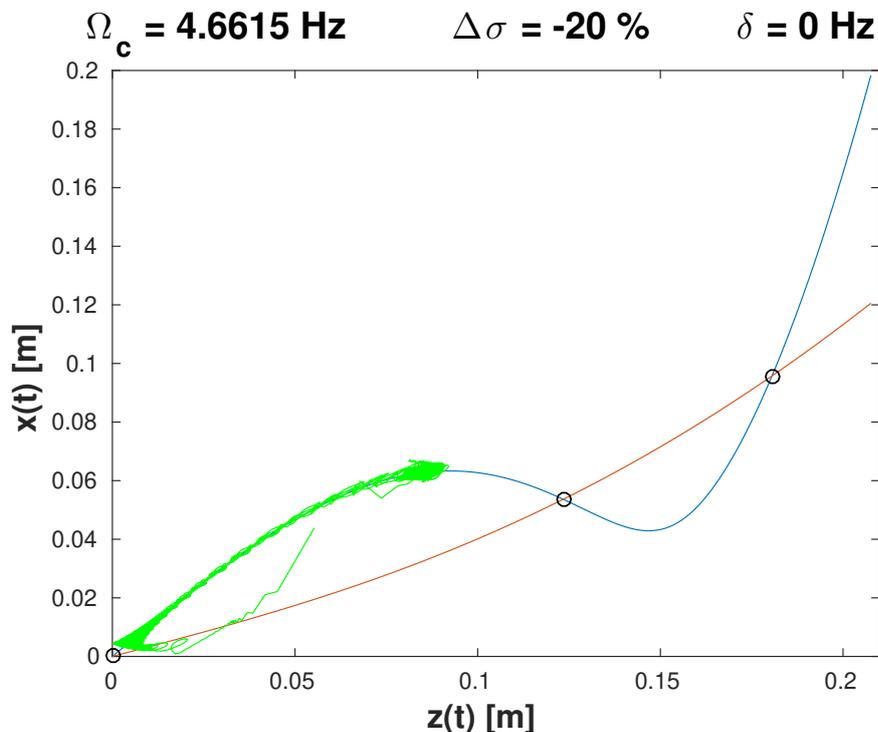


Figura 4.13: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$.

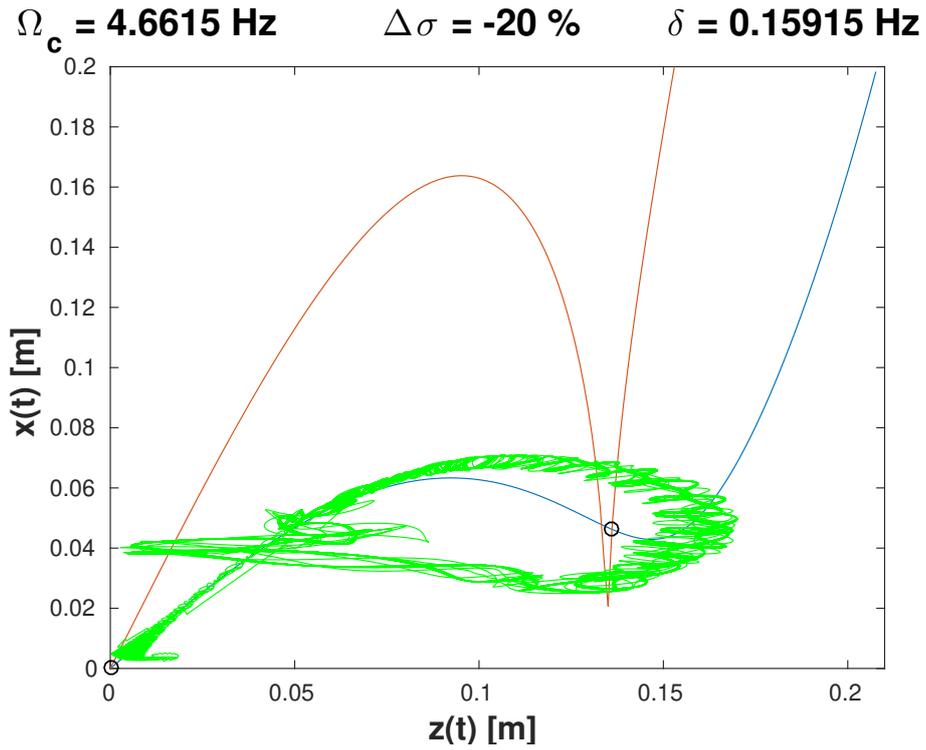


Figura 4.14: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$.

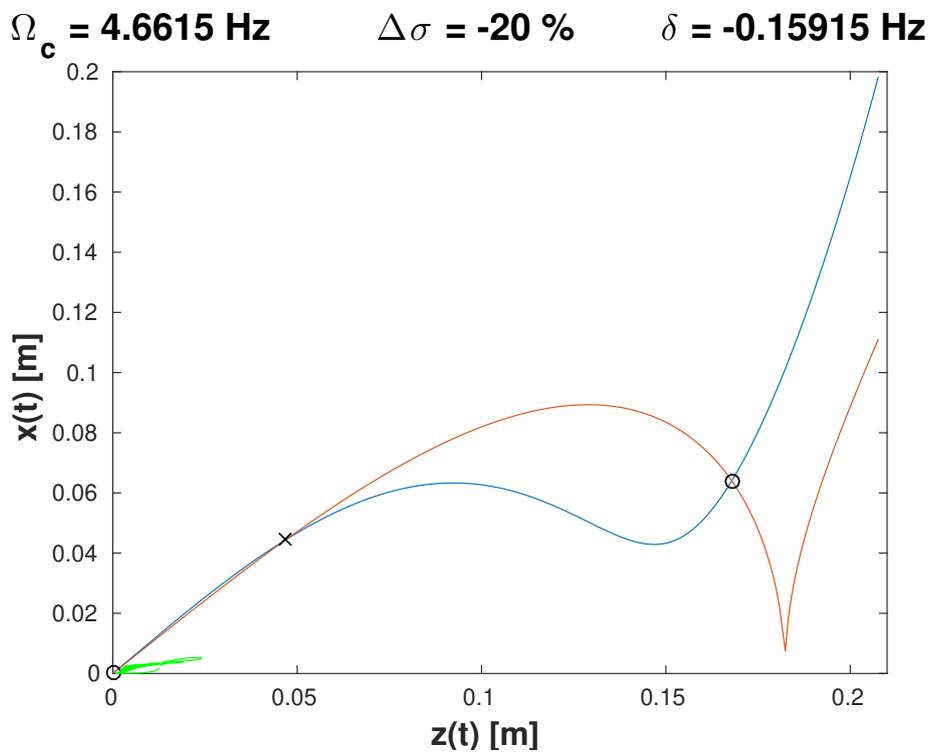


Figura 4.15: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$.

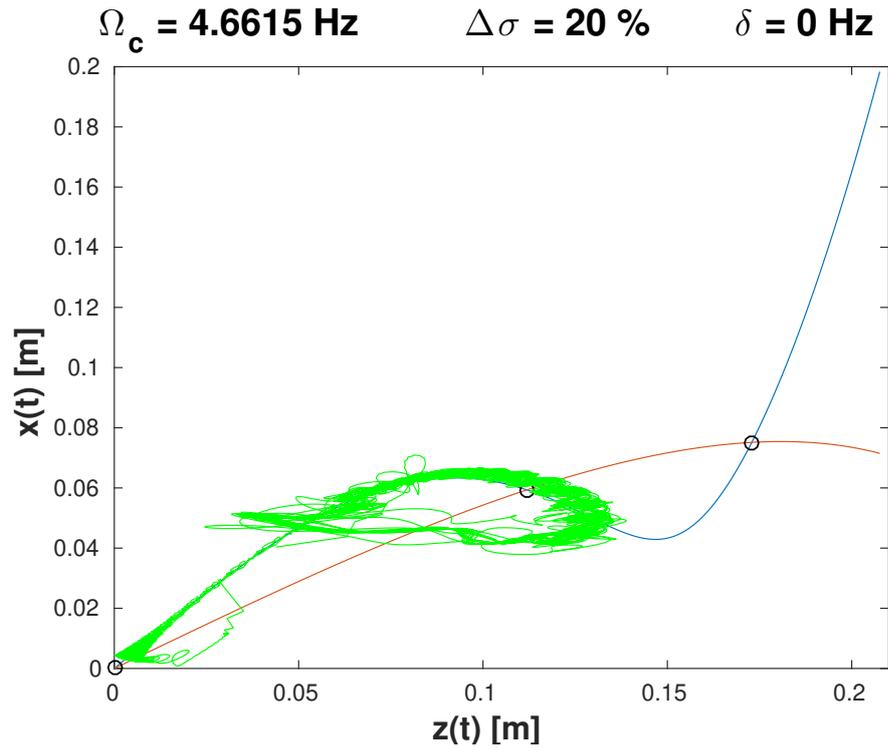


Figura 4.16: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$.

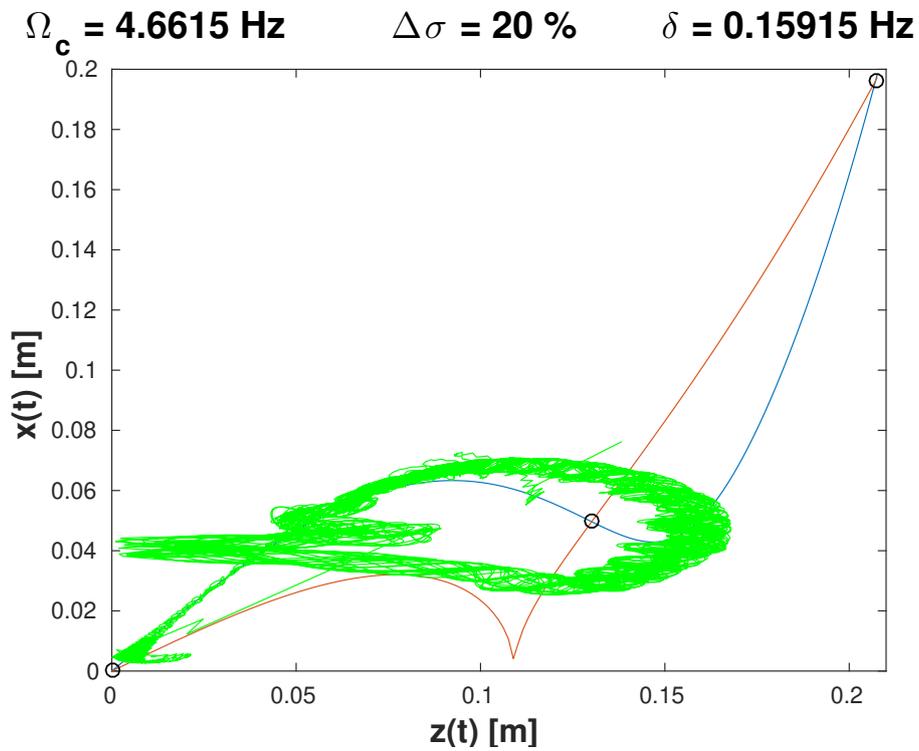


Figura 4.17: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$.

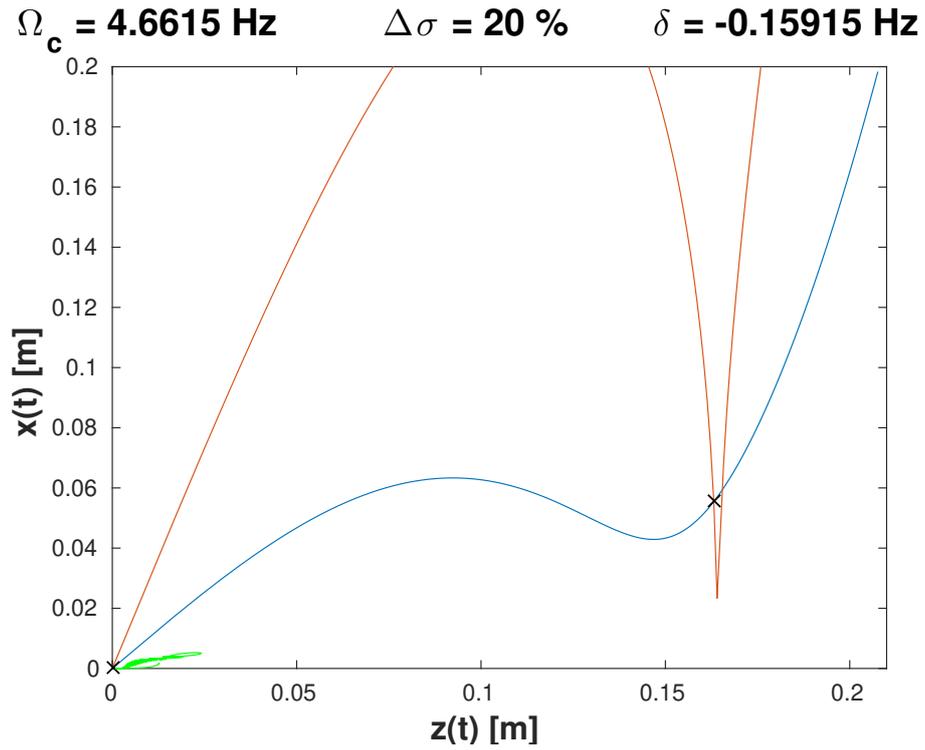


Figura 4.18: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$.

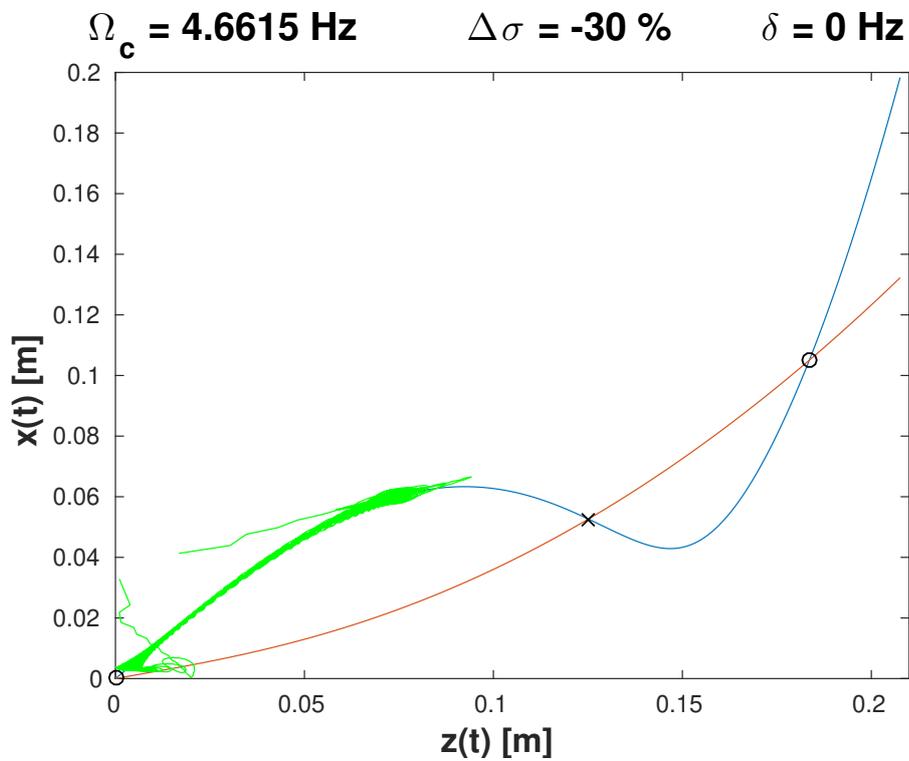


Figura 4.19: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$.

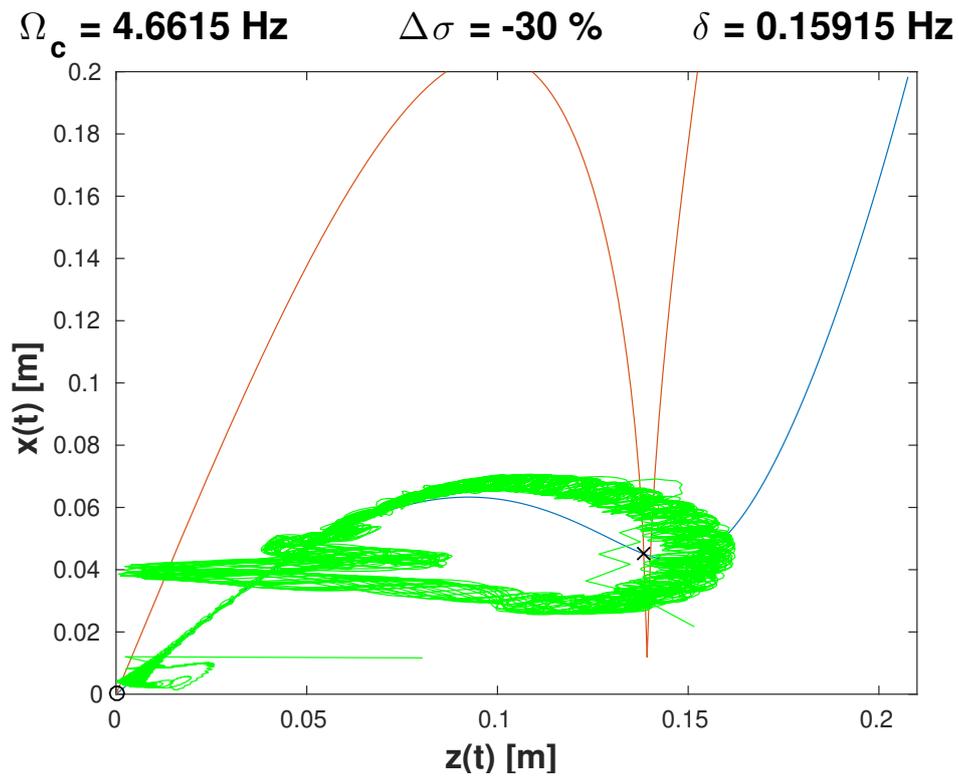


Figura 4.20: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$.

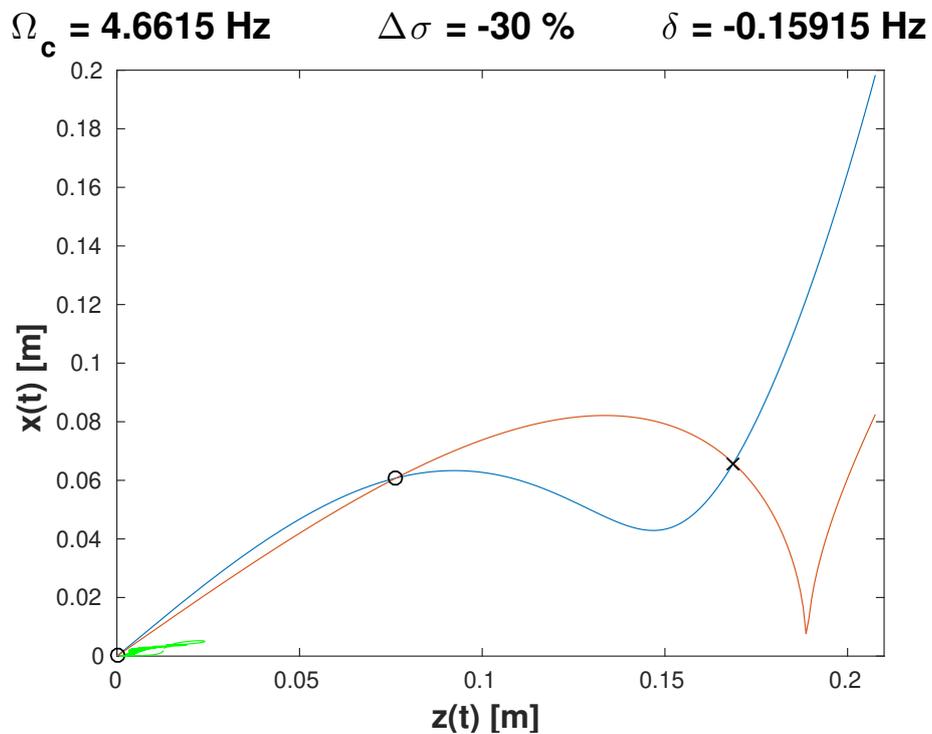


Figura 4.21: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$.

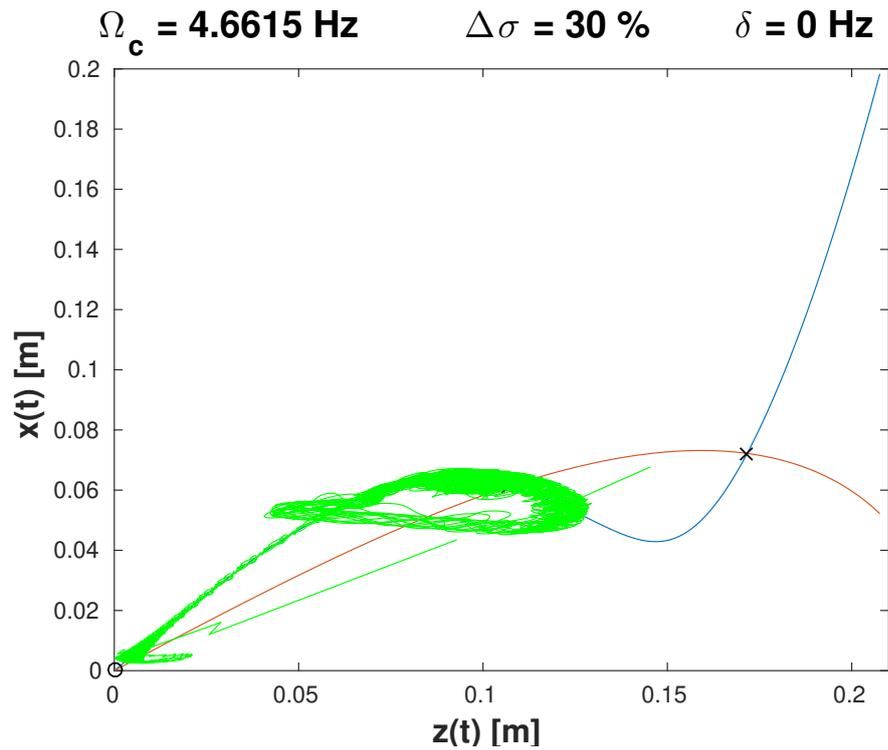


Figura 4.22: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$.

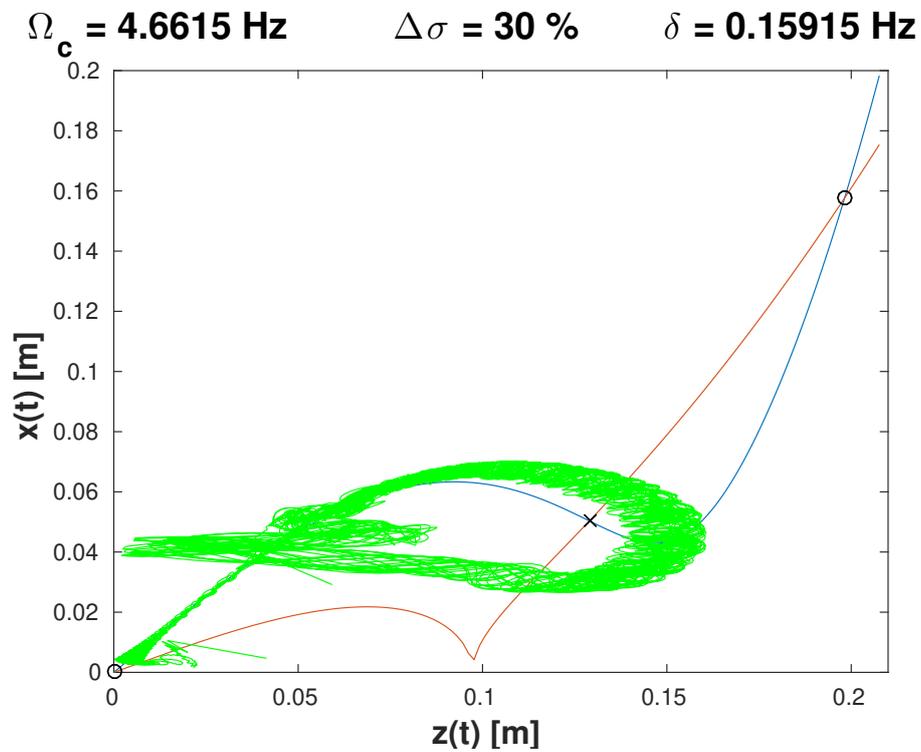


Figura 4.23: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$.

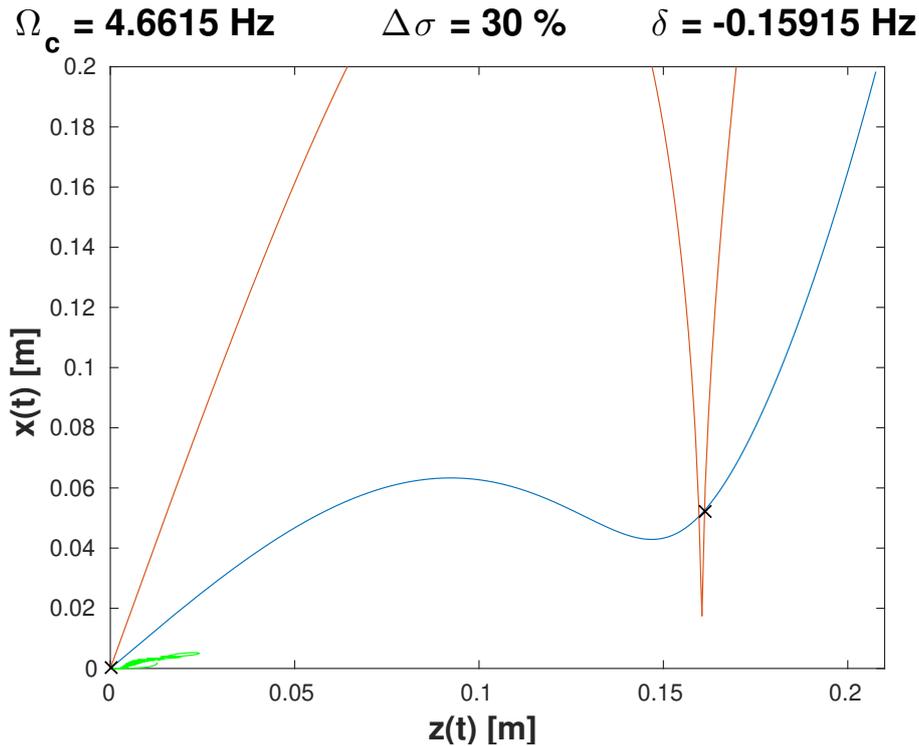


Figura 4.24: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$.

4.3.4 Síntese das Respostas do Helicóptero Anisotrópico com NES através do MME

Para sintetizar os tipos de respostas obtidas ao analisar a dinâmica do helicóptero anisotrópico com o NES, os resultados adquiridos através do MME são classificados na Figura 4.25.

Os casos classificados em vermelho indicam uma resposta fortemente modulada do tipo *canard explosion*, os em azul ocorrem quando a resposta em regime permanente do sistema converge a zero. Em laranja são os casos onde a resposta do sistema apresenta uma forte modulação, porém com menor transferência de energia se comparado com a *canard explosion*. E por último, em verde, tem-se uma resposta fracamente modulada que orbita próximo ao *fold point* da esquerda.

4.3.5 Variação das Curvas SIM0 e SIM1 em função da anisotropia

Observando figuras apresentadas nas seções anteriores é possível identificar que o formato da curva SIM0 não se altera em função da anisotropia e da pertur-

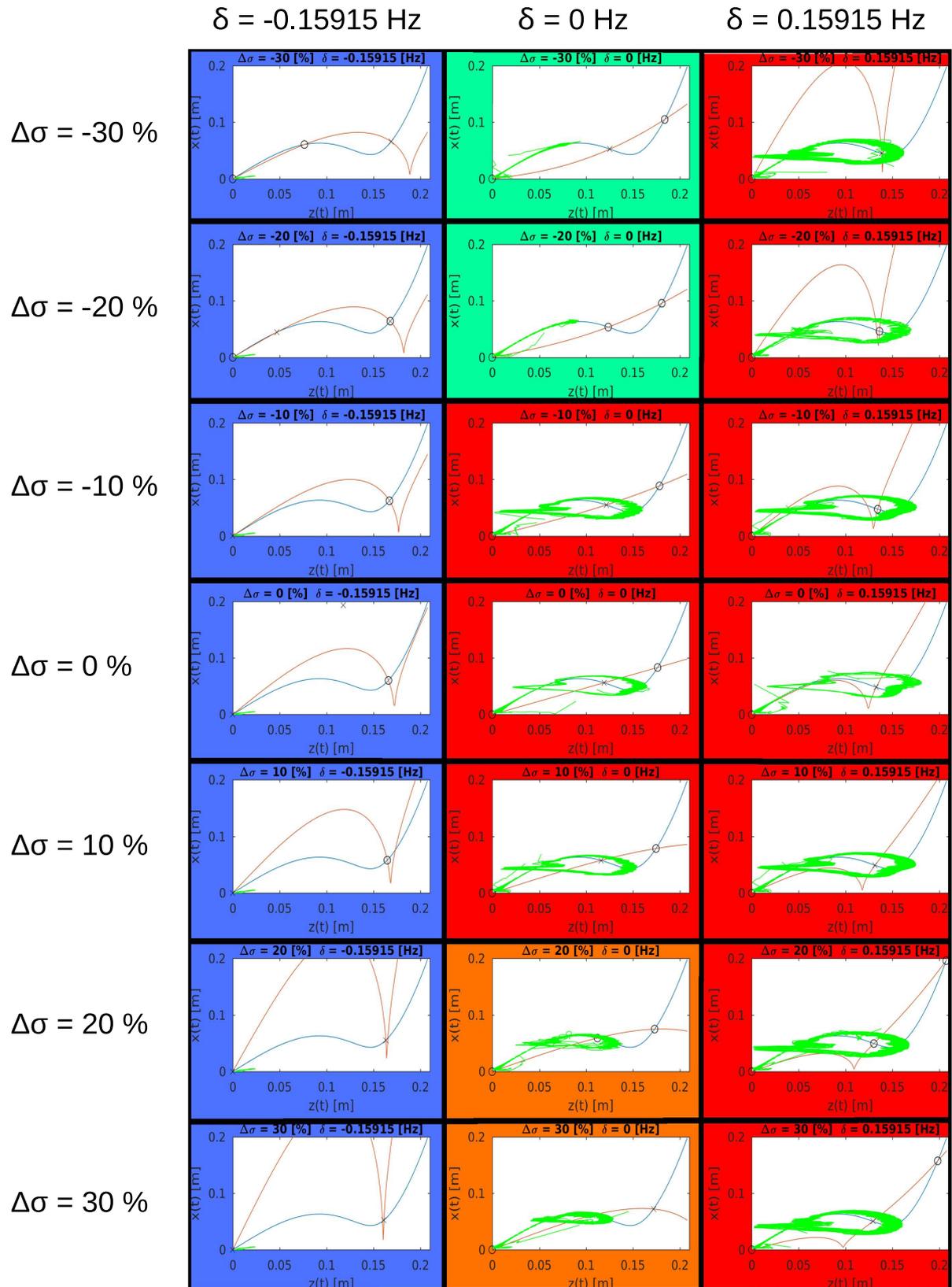


Figura 4.25: Síntese dos resultados. (Azul: resposta em regime permanente do sistema converge a zero; Vermelho: resposta fortemente modulada do tipo *canard explosion*; Laranja: resposta fortemente modulada porém com menor transferência de energia; Verde: resposta fracamente modulada.)

bação na velocidade do rotor, porém a curva SIM1 sofre influência. Para facilitar essa visualização são apresentados as Figuras 4.26 a 4.28

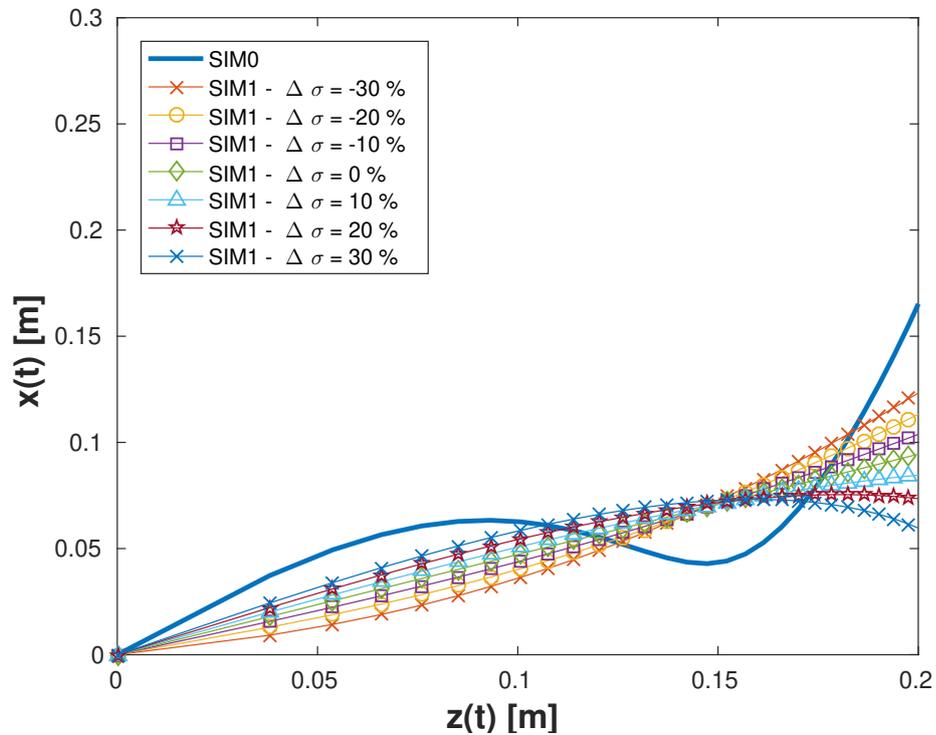


Figura 4.26: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$.

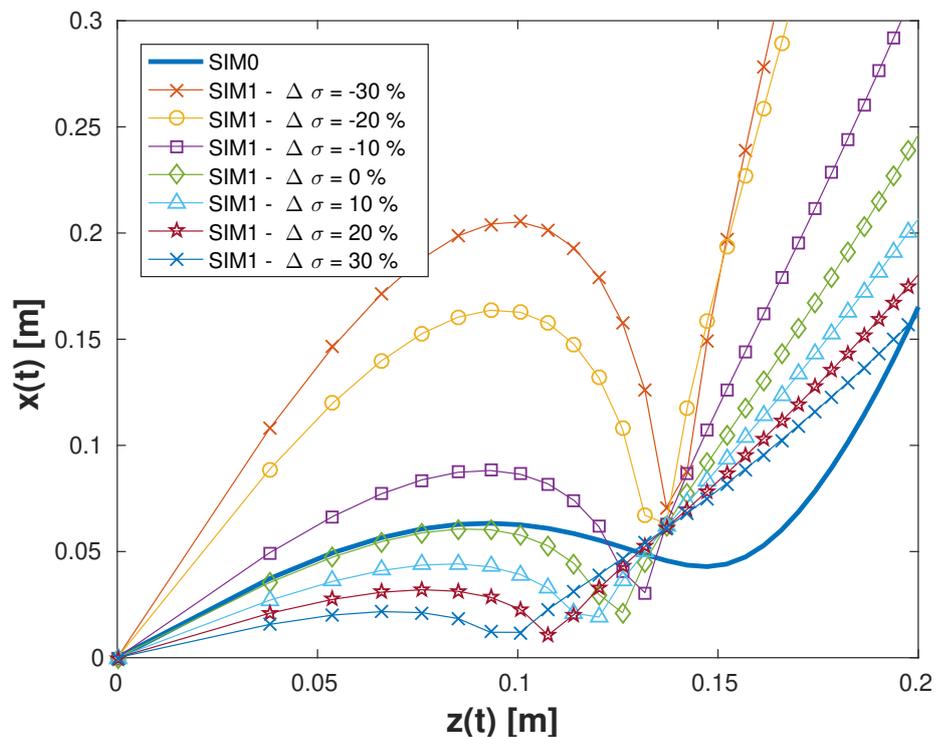


Figura 4.27: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$.

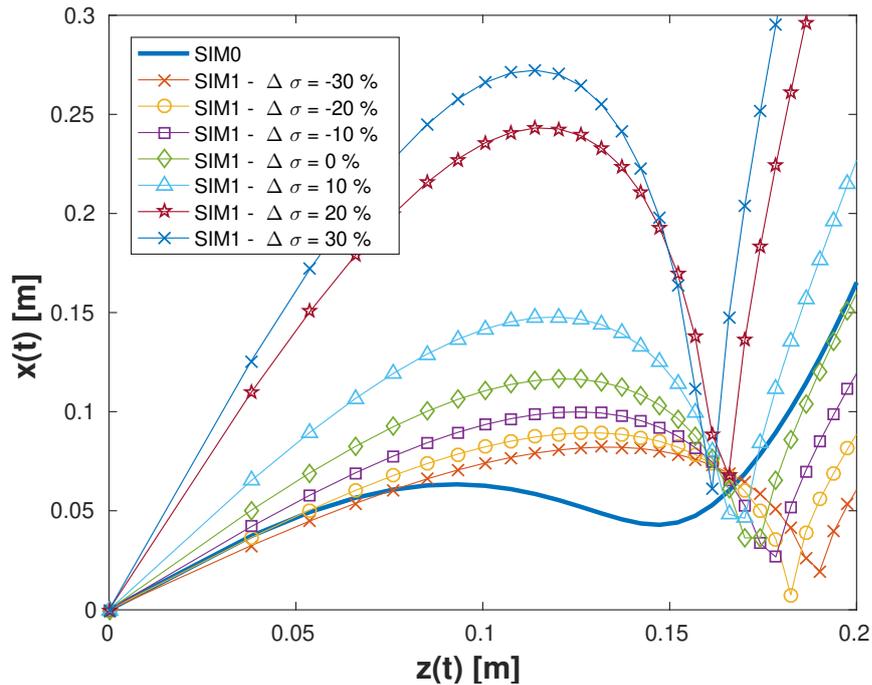


Figura 4.28: Curvas SIM do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 Hz$ e $\delta = -0.15915 Hz$.

Visualmente, percebe-se que a influência da perturbação na velocidade do rotor é mais significativa do que a influência da anisotropia. Uma vez que, todo o desenvolvimento realizado para se chegar na curva SIM1 levou em consideração que o rotor operaria na velocidade de crítica obtida para o sistema linear associado, ou seja, quando o modo regressivo do rotor e o modo da fuselagem possuem o mesmo autovalor. Portanto, a medida em que se afasta desta frequência de rotação, as simplificações matemáticas realizadas passam a não valer. Consequentemente, os pontos de equilíbrio não possuem a mesma influência no comportamento do sistema, impossibilitando a previsão da resposta.

4.3.6 Influência do NES no comportamento dinâmico do modelo anisotrópico

Para verificar a capacidade do NES em controlar a instabilidade no modelo anisotrópico do helicóptero, realizou-se a integração numérica, via ode45 (Runge-Kutta de quarta ordem), para diferentes combinações de Ω e $\Delta\sigma$ de forma varrer toda a região de instabilidade verificada, Figura 2.8. A partir das respostas temporais obtidas, coletou-se a máxima amplitude após o sistema entrar em regime permanente

(verificado quando $t \rightarrow 200s$). Os valores da máxima amplitude de deslocamento da fuselagem para as diferentes combinações de parâmetros (Ω , $\Delta\sigma$) estão mostrados, Figura 4.29.

Os parâmetros utilizados foram:

- Condições iniciais: $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.1, 0, 0, 0, 0, 0]$;
- Tempo de integração: de 0 a 200 segundos.
- Ω varia de 4.3 a 5.3 Hz com um passo de 0.01 Hz;
- $\Delta\sigma$ varia de -90% à 100% de k_b com passo de 0.95% ;

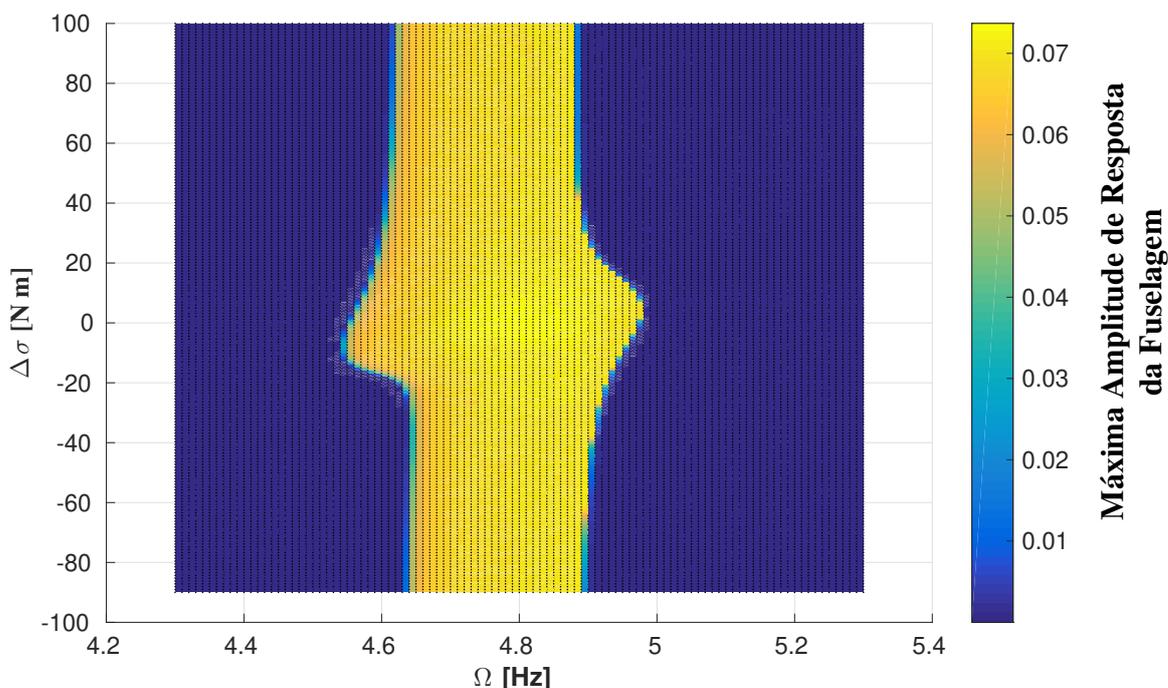


Figura 4.29: Máxima amplitude da fuselagem do modelo anisotrópico com NES para diferentes combinações de Ω e $\Delta\sigma$.

O resultado dado pela Figura 4.29 mostra que toda a região de instabilidade apresentada pelo modelo anisotrópico, Figura 2.8, foi controlada dentro da faixa de variação de anisotropia entre $\Delta\sigma = \pm 80\%$. A faixa central (em amarelo) mostra que a resposta do sistema para estas condições não converge a zero. Como avaliado ao longo deste trabalho nas seções anteriores, essa amplitude está controlada e é influenciada pela curva SIM0 (que não varia sob influência da anisotropia ou da variação

de Ω). Além disso, as amplitudes encontradas para a fuselagem ao longo da zona do FRS (faixa amarela) estão próximas da amplitude determinada pelo *fold point* da esquerda. Estas amplitudes são obtidas para respostas forte ou fracamente moduladas, conforme ilustrados nas Figuras 4.2 e B.7, respectivamente.

4.4 CONCLUSÕES

A compreensão da influência do NES no comportamento dinâmico do modelo anisotrópico do helicóptero é de extrema importância para uma possível aplicação desse dispositivo em uma aeronave. Os resultados obtidos mostram que o NES projetado para o modelo isotrópico do helicóptero consegue atuar suprimindo a instabilidade do sistema nas situações em que uma de suas pás apresente variação de rigidez, além de se mostrar eficaz para uma ampla faixa de velocidade de operação do rotor.

Além disso, o método matemático aplicado para a obtenção das curvas SIM0 e SIM1 se mostrou eficiente apenas para o primeiro, pois a curva SIM0 não se altera nos diversos casos estudados. Já o segundo, mostra-se sensível aos fatores de perturbação. Assim, os pontos de equilíbrio obtidos na interseção das curvas já não influenciam na dinâmica do helicóptero. Portanto, a anisotropia consegue interferir no modelo matemático desenvolvido pelo MME, necessitando recorrer a outras ferramentas para verificar se o NES é atuante em toda faixa de operação do rotor.

Por fim, caso se deseje observar e compreender a dinâmica do helicóptero com o NES será necessário aprimorar o modelo matemático aplicado neste trabalho, generalizando a análise a todas as faixas de velocidade de operação do rotor.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A perda de controle nos helicópteros, devido ao FRS, pode ocasionar sérios acidentes durante o procedimento de pouso e decolagem neste tipo de aeronave, comprometendo a segurança do voo e dos seus ocupantes. Há o interesse, portanto, da indústria aeronáutica em controlar os efeitos desse fenômeno, uma vez que impactos negativos são difundidos com a ocorrência de um acidente aéreo.

Os primeiros estudos do FRS englobaram apenas modelos dinâmicos isotrópicos, para que as equações do movimento fossem simplificadas, facilitando o mapeamento da região de instabilidade. Porém, na prática, dificilmente as propriedades mecânicas de um helicóptero são isotrópicas, já que todos os componentes da aeronave estão sujeitos a apresentar problemas de fabricação, folgas e se desgastar ao longo do uso, dentre outros.

Gradualmente, com o avanço tecnológico e o interesse em compreender os efeitos da ressonância solo trazidos pela presença da anisotropia no rotor do helicóptero, diversos métodos foram utilizados visando identificar o seu comportamento instável. Aliado a isso, buscou-se meios para o controle deste fenômeno, dentre os quais, destaca-se o NES.

Induzindo a uma resposta fortemente modulada no modelo isotrópico do helicóptero, o NES se mostrou eficaz no controle do FRS. Isso induziu a seguinte

pergunta: será que o NES projetado para o caso isotrópico também consegue atuar quando o helicóptero apresentar anisotropia, e se atua consegue suprimir as regiões de instabilidade? Na tentativa de responder esse questionamento, este trabalho comparou os dois casos: isotrópico e anisotrópico.

Na primeira análise, onde se caracterizou as regiões de instabilidade dos modelos, identificou-se que o modelo anisotrópico apresenta mais regiões de instabilidades que o isotrópico. O aparecimento das novas regiões instáveis é influenciado, principalmente, pelo nível de anisotropia apresentado em uma das pás. Porém, para o nível de amortecimento aplicado no modelo, essas novas regiões instáveis são suprimidas. Portanto, tanto os modelos isotrópicos quanto anisotrópicos avaliados neste trabalhos apresentam apenas uma região de instabilidade compreendida entre $4.54 \leq \Omega \leq 4.98$ Hz. A delimitação da região de análise facilita a aplicação do MME para identificação dos efeitos da não linearidade (NES) na dinâmica do helicóptero.

Acoplando o NES ao modelo isotrópico do helicóptero, verifica-se que a resposta da fuselagem se torna fortemente modulada. Isso se dá devido ao efeito da não linearidade, e através do MME é possível compreender como o helicóptero interage com NES. Analisando a interação entre as curvas SIM0 e SIM1, juntamente com os pontos de equilíbrio, é possível prever o comportamento do sistema. Vale destacar que as oscilações fortemente moduladas são alteradas em função da velocidade de rotação do rotor em análise.

Ao abordar o caso em que o NES é acoplado ao modelo anisotrópico, utiliza-se MME com o objetivo de compreender a dinâmica do sistema, capturando os efeitos da anisotropia nas curvas SIM0 e SIM1. A avaliação numérica destes resultados mostram que a metodologia adotada é apropriada apenas para níveis de $\pm 10\%$ de anisotropia. Para valores fora deste intervalo, fica-se difícil a previsão do comportamento dinâmico pela análise das variedades invariantes. Além disso, verificou-se que em função do nível de anisotropia considerado, as amplitudes de relaxação podem variar entre si. Contudo, as amplitudes máximas obtidas nas respostas do helicóptero, ao longo de toda a região instável, apresentaram valores próximos ao do *fold point* da

esquerda. Uma análise numérica foi realizada com as equações do movimento (sem aplicação do MME) com o intuito de inferir sobre a eficiência do NES para um grande domínio de anisotropia. Determinou-se através desta análise que o NES é capaz de induzir o helicóptero à uma amplitude limitada de vibração, suprimindo os efeitos da instabilidade, tanto para rotores isotrópicos e anisotrópicos.

Através das conclusões obtidas neste estudo, ressalta-se que este trabalho é responsável por contribuir no entendimento da dinâmica do helicóptero com NES sujeito ao FRS. Isso ocorre, principalmente, para a situação em que o NES é acoplado ao helicóptero com anisotropia. Além disso, verificou-se que a aplicação da metodologia desenvolvida para a compreensão da dinâmica do helicóptero isotrópico com o NES, através do MME, é também viável para o modelo anisotrópico em determinados níveis de anisotropia. Outra contribuição é a certeza de que o NES consegue atuar em todos os níveis de anisotropia dentro das condições adotadas neste trabalho. Como resultado destas contribuições, será redigido um artigo para publicação em revista internacional especializada afim de divulgar estas informações.

A compreensão dos efeitos do NES na dinâmica do helicóptero ainda precisa ser melhor estudada, e novos trabalhos podem contribuir para isso. A seguir, são apresentados as sugestões de trabalhos futuros:

- Aumentar o número de pás com anisotropia no modelo e verificar a influência disso na dinâmica do helicóptero com o NES;
- Propor o acoplamento de mais de um NES à fuselagem;
- Propor a fixação do NES em outras partes do helicóptero;
- Propor a fixação de mais de um NES em diversas partes do helicóptero;

CAPÍTULO VI

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- Bellet, R., Cochelin, B., Herzog, P., e Mattei, P.-O. (2010). Experimental study of targeted energy transfer from an acoustic system to a nonlinear membrane absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 329(14):2768–2791. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.01.029>.
- Bergeot, B., Bellizzi, S., e Cochelin, B. (2016). Passive suppression of helicopter ground resonance instability by means of a strongly nonlinear absorber. *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, 3(3):271–298. DOI: <https://doi.org/10.12989/aas.2016.3.3.271>.
- Bergeot, B., Bellizzi, S., e Cochelin, B. (2017). Passive suppression of helicopter ground resonance using nonlinear energy sinks attached on the helicopter blades. *Journal of Sound and Vibration*, 392:41–55. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.12.039>.
- Bir, G. (2008). Multiblade coordinate transformation and its application to wind turbine analysis. Em *ASME Wind Energy Symposium*, pgs. 1–15. URL: <https://www.nrel.gov/docs/fy08osti/42553.pdf>.

- Bramwell, A. R., Balmford, D., e Done, G. (2001). *Bramwell's helicopter dynamics*. Elsevier. ISBN: 9780080528304.
- Callister Jr, W. D. (2007). *Materials science and engineering : an introduction*. John Wiley & Sons, 7^o edition. ISBN: 9780470120323.
- CENIPA (2017). *Helicópteros - Sumário Estatístico*.
- Coleman, R. P. e Feingold, A. M. (1957). Theory of self-excited mechanical oscillations of helicopter rotors with hinged blades. *NACA Report 1351*, 6(13). URL: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930084623.pdf>.
- Del Claro, V. T. S. et al. (2016). Concepção e avaliação numérica e experimental de um absorvedor dinâmico de vibrações termicamente sintonizável. URL: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/18666>.
- Done, Q. (1974). A simplified approach to helicopter ground resonance. *The Aeronautical Journal*, 78(761):204–208. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0001924000036691>.
- Donham, R., Cardinale, S., e Sachs, I. (1969). Ground and air resonance characteristics of a soft in-plane rigid-rotor system. *Journal of the American Helicopter Society*, 14(4):33–41. DOI: <https://doi.org/10.4050/JAHS.14.33>.
- Flowers, G. T. e Tongue, B. H. (1988). Nonlinear rotorcraft analysis using symbolic manipulation. *Applied Mathematical Modelling*, 12(2):154–160. DOI: [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(88\)90006-6](https://doi.org/10.1016/0307-904X(88)90006-6).
- Gandhi, F. (1997). Concepts for damperless aeromechanically stable rotors. Em *Presented of the Royal Aeronautical Society Innovations in Rotorcraft Technology Conference, London, UK, June*, pgs. 24–25.
- Gandhi, F. e Malovrh, B. (1999). Influence of balanced rotor anisotropy on helicopter aeromechanical stability. *AIAA journal*, 37(10):1152–1160. DOI: <https://doi.org/10.2514/2.600>.

- Ganiev, R. e Pavlov, I. (1973). The theory of ground resonance of helicopters. *Soviet Applied Mechanics*, 9(5):505–510. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00884711>.
- Gendelman, O. e Bar, T. (2010). Bifurcations of self-excitation regimes in a van der pol oscillator with a nonlinear energy sink. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 239(3):220 – 229. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2009.10.020>.
- Gendelman, O. V., Vakakis, A. F., Bergman, L. A., e McFarland, D. M. (2010). Asymptotic analysis of passive nonlinear suppression of aeroelastic instabilities of a rigid wing in subsonic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 70(5):1655–1677. DOI: <https://doi.org/10.1137/090754819>.
- Gökçek, C. (2004). Stability analysis of periodically switched linear systems using floquet theory. *Mathematical Problems in Engineering*, 2004(1):1–10. DOI: <https://doi.org/10.1155/S1024123X04401069>.
- Hammond, C. (1974). An application of floquet theory to prediction of mechanical instability. *Journal of the American Helicopter Society*, 19(4):14–23. DOI: <https://doi.org/10.4050/JAHS.19.14>.
- Hooper, W. (1959). Helicopter ground resonance: The effect of rotor and fuselage damping. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 31(2):32–39. DOI: <https://doi.org/10.1108/eb033077>.
- Janowski, M. e Tongue, B. (1988). Construction and analysis of a simplified non-linear ground resonance model. *Journal of sound and vibration*, 122(2):233–241. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(88\)80351-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(88)80351-1).
- Johnson, W. (2012). *Helicopter theory*. Courier Corporation. ISBN: 0486682307.
- Korenev, B. G. e Reznikov, L. M. (1993). *Dynamic vibration absorbers: theory and technical applications*. John Wiley & Sons. ISBN: 047192850X.

- Krysinski, T. e Malburet, F. (2009). *Instabilité mécanique: contrôles actifs et passifs*. Hermes science publication-Lavoisier.
- Kunz, D. (2000). Nonlinear analysis of helicopter ground resonance. Em *41st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, pg. 1690. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2000-1690>.
- Lakrad, F. e Belhaq, M. (2002). Periodic solutions of strongly non-linear oscillators by the multiple scales method. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4):677 – 700. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5145>.
- Lee, Y., Vakakis, A., Bergman, L., McFarland, D. M., e Kerschen, G. (2007a). Suppression aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 1: Theory. *AIAA journal*, 45(3):693–711. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.24062>.
- Lee, Y. S., Kerschen, G., McFarland, D. M., Hill, W. J., Nickkawde, C., Strganac, T. W., Bergman, L. A., e Vakakis, A. F. (2007b). Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 2: experiments. *AIAA journal*, 45(10):2391–2400. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.28300>.
- Luongo, A., Di Egidio, A., e Paolone, A. (2002). Multiple scale bifurcation analysis for finite-dimensional autonomous systems. *Recent Research Developments in Sound and Vibration*, 1:161–201. HAL ID: hal-00812537, URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00812537>.
- Luongo, A. e Zulli, D. (2012). Dynamic analysis of externally excited nes-controlled systems via a mixed multiple scale/harmonic balance algorithm. *Nonlinear Dynamics*, 70(3):2049–2061. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-012-0597-6>.
- Luongo, A. e Zulli, D. (2014). Aeroelastic instability analysis of nes-controlled systems via a mixed multiple scale/harmonic balance method. *Journal of Vibration and Control*, 20(13):1985–1998. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546313480542>.

- Lytwyn, R., Miao, W., e Woitsch, W. (1971). Airborne and ground resonance of hingeless rotors. *Journal of the American Helicopter Society*, 16(2):2–9. DOI: <https://doi.org/10.4050/JAHS.16.2>.
- Michon, G., Manin, L., Parker, R. G., e Dufour, R. (2008). Duffing oscillator with parametric excitation: analytical and experimental investigation on a belt-pulley system. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3(3):031001. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2908160>.
- Nayfeh, A. H. (2011). *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons. ISBN: 978-3-527-61845-3.
- Nayfeh, A. H. e Mook, D. T. (2008). *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons. DOI: <https://doi.org/10.1002/9783527617586>.
- Pafume-Coelho, J. (2017). *Contrôle Passif Nonlinéaire du Phénomène de Résonance Sol des Hélicoptères*. PhD thesis, Université de Toulouse.
- Peters, D. A. e Hohenemser, K. H. (1971). Application of the floquet transition matrix to problems of lifting rotor stability. *Journal of the American Helicopter Society*, 16(2):25–33. DOI: <https://doi.org/10.4050/JAHS.16.25>.
- Robinson, C., King, R., e Wood, E. (2004a). Non-linear simulation of coupled rotor-fuselage response using symbolically derived equations of motion. part 1: derivation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 218(1):1–9. DOI: <https://doi.org/10.1177/095441000421800101>.
- Robinson, C., King, R., e Wood, E. (2004b). Non-linear simulation of coupled rotor-fuselage response using symbolically derived equations of motion. part 2: confirmation and illustrative cases. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 218(1):11–22. DOI: <https://doi.org/10.1177/095441000421800102>.

- Robinson, C., Wood, E., e King, R. (1998). Full nonlinear simulation of coupled rotor/fuselage response using symbolically derived equations of motion. Em *AHS International, Annual Forum, 54 th, Washington, DC*, pgs. 785–799.
- Salahshoor, E., Ebrahimi, S., e Maasoomi, M. (2016). Nonlinear vibration analysis of mechanical systems with multiple joint clearances using the method of multiple scales. *Mechanism and Machine Theory*, 105:495 – 509. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.07.020>.
- Sanches, L. (2011). *Résonance sol des hélicoptères: modélisation dynamique, analyse paramétrique de la robustesse et validation expérimentale*. PhD thesis, Toulouse, ISAE. URL: https://depozit.isae.fr/theses/2011/2011_Sanches_Leonardo.pdf.
- Sanches, L., Michon, G., Berlioz, A., e Alazard, D. (2011). Instability zones for isotropic and anisotropic multibladed rotor configurations. *Mechanism and Machine Theory*, 46(8):1054 – 1065. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2011.04.005>.
- Sanches, L., Michon, G., Berlioz, A., e Alazard, D. (2014). Response and instability prediction of helicopter dynamics on the ground. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 65:213–225. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.04.003>.
- Shad, M. R., Michon, G., e Berlioz, A. (2011). Modeling and analysis of nonlinear rotordynamics due to higher order deformations in bending. *Applied Mathematical Modelling*, 35(5):2145 – 2159. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.11.043>.
- Starosvetsky, Y. e Gendelman, O. (2008). Strongly modulated response in forced 2dof oscillatory system with essential mass and potential asymmetry. *Physica D: Non-linear Phenomena*, 237(13):1719 – 1733. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.01.019>.

- Vakakis, A., Gendelman, O., Bergman, L., McFarland, D., Kerschen, G., e Lee, Y. (2008). *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9130-8>.
- Wang, J. e Chopra, I. (1992). Dynamics of helicopters in ground resonance with and without blade dissimilarities. Em *Dynamics Specialists Conference*, pg. 2108. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.1992-2108>.
- Watkinson, J. (2003). *Art of the Helicopter*. Elsevier Science. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-5715-0.X5000-5>.

APÊNDICE A

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

A.1 MODELO ISOTRÓPICO E SEM NES

A partir do modelo físico de um sistema dinâmico, é possível obter um modelo matemático capaz por representar a dinâmica do sistema. Considerando que o sistema é holonômico, ou seja, as restrições impostas ao sistema não variam com o tempo, a equação de Lagrange propõem a obtenção das equações do movimento através da energia presente e do trabalho realizado pelo sistema, Equação A.1.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = Q_n \quad (\text{A.1})$$

onde:

- L , conhecido como Lagrangiano, é dado pela energia cinética T e energia potencial U :

$$L = T - U$$

- q_n corresponde a coordenada generalizada;
- Q_n é o trabalho virtual das forças não conservativas:

$$Q_n = \frac{\partial W_{nc}}{\partial \delta q_n} = \frac{\partial (F_{nc} \delta q_n)}{\partial \delta q_n}$$

A.1.1 Posicionamento dos Componentes do Helicóptero

O primeiro passo a ser feito é a identificação das coordenadas necessárias para a caracterização da posição de cada elemento do modelo. Considera-se apenas um grau de liberdade na fuselagem. Esse movimento corresponde a sua translação na direção do eixo \vec{X}_0 , descrito por $x(t)$.

Já a posição das pás podem ser descritas com base em dois referenciais: o móvel e o inercial. Sabendo que o número de pás é dado por $N_b = 4$, analisa-se a posição da k -ésima pá através do referencial móvel (x, y, z) , sendo k o índice que identifica o número da pá. Sua posição é dada pelo ângulo de rotação da pá em relação a sua posição de equilíbrio $\phi_k(t)$ e pelo ângulo ζ_k formado entre ponto B da k -ésima pá com o eixo x do sistema de coordenadas móvel, Figura 2.2. A Equação A.2 apresenta o valor de ζ_k .

$$\zeta_k = \frac{2\pi(k-1)}{N_b}, \quad k = 1 \dots 4 \quad (\text{A.2})$$

Passando a Equação A.2 para o sistema de coordenadas inercial, temos:

$$\psi_k = \Omega t + \zeta_k, \quad k = 1 \dots 4 \quad (\text{A.3})$$

Descrevendo a posição da k -ésima pá a partir do sistema de coordenadas inercial (X_0, Y_0, Z_0) , tem-se a Equação A.4:

$$x_{bk} = x(t) + a \cos(\psi_k(t)) + b \cos(\psi_k(t) + \phi_k(t)) \quad (\text{A.4a})$$

$$y_{bk} = a \sin(\psi_k(t)) + b \sin(\psi_k(t) + \phi_k(t)) \quad (\text{A.4b})$$

Uma vez descrito o posicionamento de cada componente do sistema, verifica-se que são necessárias apenas cinco coordenadas para descrever completamente a dinâmica do sistema, são elas:

$$\{q\} = \{x(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t)\}^T \quad (\text{A.5})$$

A.1.2 Trabalho e Energia

A energia cinética depende apenas da velocidade em que cada componente do sistema se encontra, seu cálculo é dado pela Equação A.6,

$$T = \sum_{n=1}^{N_c} \frac{m_n \dot{q}_n^2}{2} \quad (\text{A.6})$$

onde, N_c é o número total de elementos considerados no modelo, m_n é a massa do elemento do sistema cujo o comportamento é descrito pela n -ésima coordenada generalizada, q_n . Sua derivada com respeito ao tempo, \dot{q}_n , indica a sua velocidade.

Já a energia potencial depende somente da posição de cada elemento em relação a uma força de campo conservativa. Com base nisso, existem diversos tipos de campo que são considerados em engenharia, entre eles: campo magnético, campo gravitacional e campo elástico. Considerando que o sistema não sofre influência de nenhum campo magnético e a dinâmica do helicóptero não apresenta deslocamentos na direção de Z_0 , a energia potencial elétrica e gravitacional são desconsideradas. Portanto, considera-se somente a energia potencial elástica. Esta última é obtida segundo a Equação A.7,

$$dU_n = F_n dq_n \quad (\text{A.7})$$

onde, F_n é a força de campo que influencia na variação da posição dq_n do n -ésimo elemento.

Considerando que a força promovida pela rigidez associada ao elemento é linear, do tipo

$$F_n = k_n q_n$$

a energia potencial elástica é dada pela Equação A.8. Porém, caso a rigidez tenha comportamento não linear cúbico, do tipo

$$F_{nl} = k_{nl} q_n^3$$

a energia potencial elástica é obtida através da Equação A.9

$$U = \sum_{n=1}^{N_c} \frac{k_n q_n^2}{2} \quad (\text{A.8})$$

$$U = \sum_{n=1}^{N_c} \frac{k_{nl} q_n^4}{4} \quad (\text{A.9})$$

onde, k_n corresponde a rigidez linear do n -ésimo elemento e k_{nl} a rigidez não linear.

O trabalho virtual das forças não conservativas é:

$$W_{nc} = \sum_{n=1}^{N_c} F_{nc} \delta q_n \quad (\text{A.10})$$

onde, F_{nc} é a força não conservativa.

Tendo definidos a energia cinética e potencial do sistema e o trabalho das forças não conservativas, obtém-se as equações do movimento através da Equação

A.1. Representando matricialmente o resultado, tem-se:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [G] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F_{ext}\} \quad (\text{A.11})$$

A.1.3 Transformada de Coleman

A transformada de Coleman tem como objetivo converter as coordenadas de rotação $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ em coordenadas fixas ao rotor $(\tau_0, \tau_d, \tau_{1c}, \tau_{1s})$, eliminando assim, os termos periódicos da equação do movimento. Estas novas coordenadas correspondem à configuração coletiva, diferencial, cosseno e seno que o rotor pode apresentar, elas são ilustradas na Figura A.1. Pode-se observar que as configurações coletiva e diferencial são simétricas e as configurações cosseno e seno são assimétricas.

Cada coordenada generalizada ligada a rotação de uma das pás $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$, é reescrita conforme a Equação A.12. A velocidade e aceleração angular, $\dot{\phi}_k$ e $\ddot{\phi}_k$, são obtidas derivando a Equação A.12.

$$\phi_k = \tau_0 + \tau_{1c} \cos(\psi_k) + \tau_{1s} \sin(\psi_k) + \tau_d (-1)^k, \quad k = 1 \dots 4 \quad (\text{A.12})$$

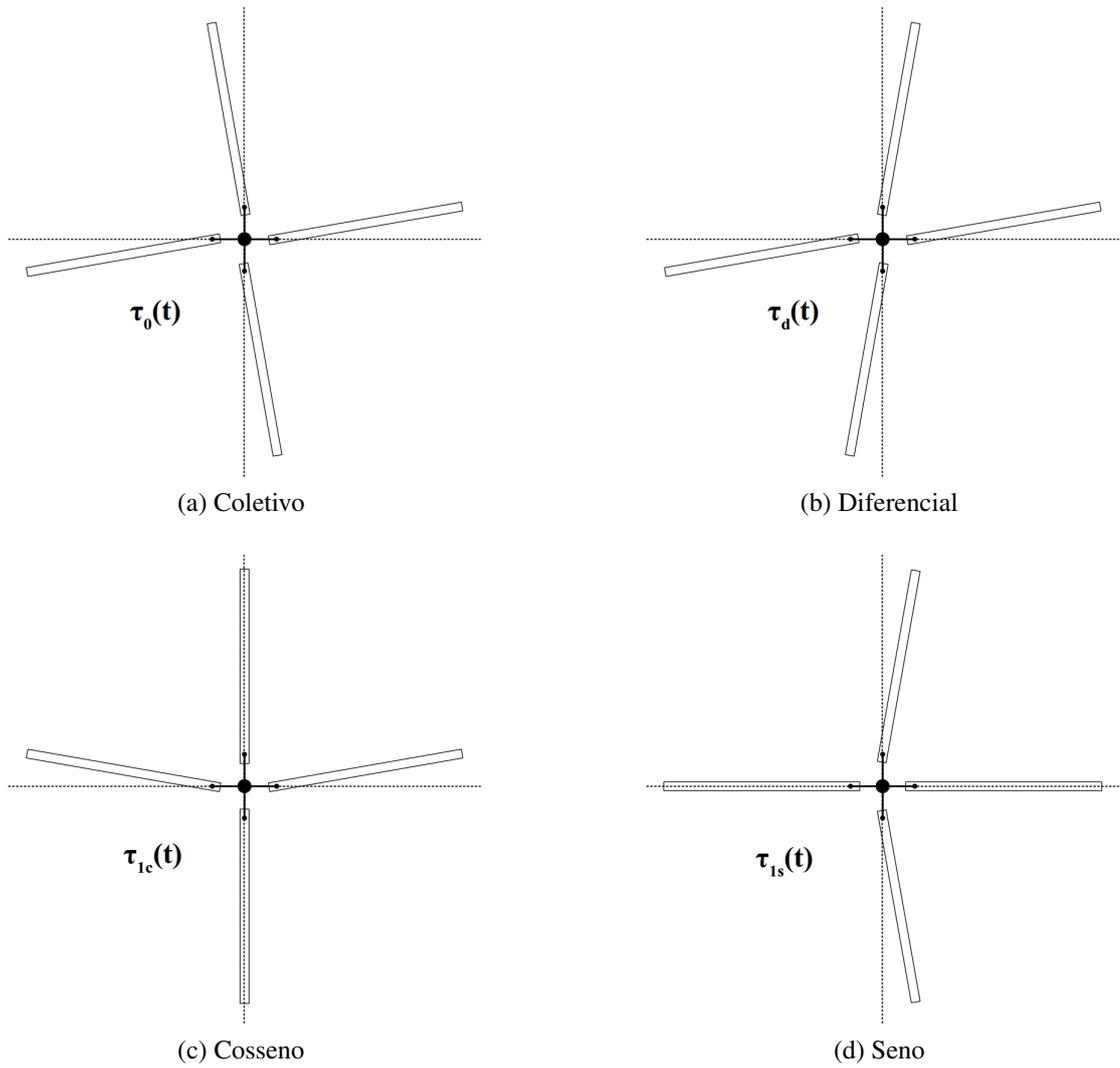


Figura A.1: Configurações dos modos do rotor - Coordenadas de Coleman

Onde:

$$\tau_0 = \frac{1}{Nb} \sum_{k=1}^{Nb} Eq.(A.11)_{k+1} \quad (A.13a)$$

$$\tau_{1c} = \frac{2}{Nb} \sum_{k=1}^{Nb} Eq.(A.11)_{k+1} \cos(\psi_k) \quad (A.13b)$$

$$\tau_{1s} = \frac{2}{Nb} \sum_{k=1}^{Nb} Eq.(A.11)_{k+1} \sin(\psi_k) \quad (A.13c)$$

$$\tau_d = \frac{1}{Nb} \sum_{k=1}^{Nb} Eq.(A.11)_{k+1} (-1)^k \quad (A.13d)$$

A.1.4 Equação do Movimento

A energia cinética e potencial do sistema são calculados pelas Equações A.6 e A.8, os resultados são apresentados pelas Equações A.14 e A.15.

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} m_f \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{1}{2} m_{bk} \left(\frac{d}{dt} x(t) - a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t)) - \right. \\
 & b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t) + \phi_k(t)) \left. \right)^2 + \frac{1}{2} m_{bk} \left(a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t)) + \right. \\
 & \left. b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t) + \phi_k(t)) \right)^2 + \frac{1}{2} I_{bk} \left(\frac{d}{dt} \phi_k(t) \right)^2
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$U = \frac{1}{2} k_f (x(t))^2 + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{1}{2} k_{bk} \phi_k(t)^2 \tag{A.15}$$

O trabalho das forças não conservativas é dado por:

$$W_{nc} = -c_f \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \delta x + - \sum_{k=1}^{Nb} c_{bk} \left(\frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \delta \phi_k \tag{A.16}$$

Por consequência, o Lagrangiano fica:

$$L = T - U$$

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} m_f \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{1}{2} m_{bk} \left(\frac{d}{dt} x(t) - a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t)) - \right. \\
& b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t) + \phi_k(t)) \left. \right)^2 + \frac{1}{2} m_{bk} \left(a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t)) + \right. \\
& b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t) + \phi_k(t)) \left. \right)^2 + \frac{1}{2} I_{bk} \left(\frac{d}{dt} \phi_k(t) \right)^2 - \\
& \left(\frac{1}{2} k_f (x(t))^2 + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{1}{2} k_{bk} \phi_k(t)^2 \right)
\end{aligned}
\tag{A.17}$$

Em seguida, aplica-se a Equação A.17 na Equação A.1 para cada variável generalizada, temos:

- Fuselagem $\rightarrow x(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x(t)} = \frac{\partial W_{nc}}{\partial \delta x(t)}
\tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
& (m_{b_2} + m_{b_3} + m_{b_4} + m_{b_1} + m_f) \frac{d^2}{dt^2} x(t) - m_{b_1} b (\sin(\Omega t) \cos(\phi_1(t)) + \\
& \cos(\Omega t) \sin(\phi_1(t))) \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) - m_{b_2} b (-\sin(\Omega t) \sin(\phi_2(t)) + \\
& \cos(\Omega t) \cos(\phi_2(t))) \frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) + m_{b_3} b (\cos(\Omega t) \sin(\phi_3(t)) + \\
& \sin(\Omega t) \cos(\phi_3(t))) \frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) + m_{b_4} b (\cos(\Omega t) \cos(\phi_4(t)) - \\
& \sin(\Omega t) \sin(\phi_4(t))) \frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) + \left(-m_{b_1} b \cos(\phi_1(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 - \right. \\
& 2 m_{b_1} b \cos(\phi_1(t)) \Omega \frac{d}{dt} \phi_1(t) + m_{b_2} b \sin(\phi_2(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 + \\
& 2 m_{b_2} b \sin(\phi_2(t)) \Omega \frac{d}{dt} \phi_2(t) + m_{b_3} b \cos(\phi_3(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 + \\
& 2 m_{b_3} b \cos(\phi_3(t)) \Omega \frac{d}{dt} \phi_3(t) - m_{b_4} b \sin(\phi_4(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 - \\
& 2 m_{b_4} b \sin(\phi_4(t)) \Omega \frac{d}{dt} \phi_4(t) - \Omega^2 (m_{b_1} b \cos(\phi_1(t)) - m_{b_3} b \cos(\phi_3(t)) - \\
& m_{b_2} b \sin(\phi_2(t)) + m_{b_4} b \sin(\phi_4(t)) + a(m_{b_1} - m_{b_3})) \cos(\Omega t) + \\
& \left(m_{b_1} b \sin(\phi_1(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right)^2 + 2 m_{b_1} b \sin(\phi_1(t)) \Omega \frac{d}{dt} \phi_1(t) + \right. \\
& m_{b_2} b \cos(\phi_2(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) \right)^2 + 2 m_{b_2} b \cos(\phi_2(t)) \Omega \frac{d}{dt} \phi_2(t) - \\
& m_{b_3} b \sin(\phi_3(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) \right)^2 - 2 m_{b_3} b \sin(\phi_3(t)) \Omega \frac{d}{dt} \phi_3(t) - \\
& m_{b_4} b \cos(\phi_4(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) \right)^2 - 2 m_{b_4} b \cos(\phi_4(t)) \Omega \frac{d}{dt} \phi_4(t) + \\
& \Omega^2 (m_{b_2} b \cos(\phi_2(t)) - m_{b_4} b \cos(\phi_4(t)) + m_{b_1} b \sin(\phi_1(t)) - m_{b_3} b \sin(\phi_3(t)) + \\
& a(m_{b_2} - m_{b_4})) \sin(\Omega t) + c_f \frac{d}{dt} x(t) + k_f x(t) = 0
\end{aligned} \tag{A.19}$$

• **Pá 1** $\rightarrow \phi_1(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_1(t)} = \frac{\partial W_{nc}}{\partial \delta \phi_1(t)} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
& b m_{b1} \left(a \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) - \Omega \right) \sin(\Omega t) - \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) \cos(\Omega t + \phi_1(t)) - \\
& b m_{b1} \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) + a \cos(\Omega t) \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) - \Omega \right) \right) \sin(\Omega t + \phi_1(t)) + \\
& (b^2 m_{b1} + I_{b1}) \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) + k_{b1} \phi_1(t) + c_{b1} \frac{d}{dt} \phi_1(t) = 0
\end{aligned} \tag{A.21}$$

• **Pá 2** $\rightarrow \phi_2(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_2(t)} = \frac{\partial W_{nc}}{\partial \delta \phi_2(t)} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
& b m_{b2} \left(-\frac{d^2}{dt^2} x(t) + a \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) - \Omega \right) \sin(\Omega t) \right) \cos(\Omega t + \phi_2(t)) - \\
& b m_{b2} \left(a \cos(\Omega t) \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_2(t) - \Omega \right) - \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{d}{dt} \phi_2(t) \right) \sin(\Omega t + \phi_2(t)) + \\
& (b^2 m_{b2} + I_{b2}) \frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) + k_{b2} \phi_2(t) + c_{b2} \frac{d}{dt} \phi_2(t) = 0
\end{aligned} \tag{A.23}$$

• **Pá 3** $\rightarrow \phi_3(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_3(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_3(t)} = \frac{\partial W_{nc}}{\partial \delta \phi_3(t)} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
& b m_{b3} \left(a \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) - \Omega \right) \sin(\Omega t) + \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{d}{dt} \phi_3(t) \right) \cos(\Omega t + \phi_3(t)) - \\
& b m_{b3} \left(-\frac{d^2}{dt^2} x(t) + a \cos(\Omega t) \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_3(t) - \Omega \right) \right) \sin(\Omega t + \phi_3(t)) + \\
& (b^2 m_{b3} + I_{b3}) \frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) + k_{b3} \phi_3(t) + c_{b3} \frac{d}{dt} \phi_3(t) = 0
\end{aligned} \tag{A.25}$$

- Pá 4 $\rightarrow \phi_4(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_4(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_4(t)} = \frac{\partial W_{nc}}{\partial \delta \phi_4(t)} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} & b m_{b_4} \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) + a \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) - \Omega \right) \sin(\Omega t) \right) \cos(\Omega t + \phi_4(t)) - \\ & b m_{b_4} \left(a \cos(\Omega t) \Omega \left(\frac{d}{dt} \phi_4(t) - \Omega \right) + \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{d}{dt} \phi_4(t) \right) \sin(\Omega t + \phi_4(t)) + \quad (\text{A.27}) \\ & (b^2 m_{b_4} + I_{b_4}) \frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) + k_{b_4} \phi_4(t) + c_{b_4} \frac{d}{dt} \phi_4(t) = 0 \end{aligned}$$

Considerando pequenos deslocamentos as equações do movimento, Equações [A.19](#), [A.21](#), [A.23](#), [A.25](#) e [A.27](#), podem ser linearizadas, considerando:

$$\sin(\phi_k) = \phi_k \quad (\text{A.28a})$$

$$\cos(\phi_k) = 1 \quad (\text{A.28b})$$

o resultado dessa linearização é apresentado pelas Equações [A.29](#) até [A.33](#):

- Fuselagem $\rightarrow x(t)$

$$\begin{aligned} & (m_{b_2} + m_{b_3} + m_{b_4} + m_{b_1} + m_f) \frac{d^2}{dt^2} x(t) - m_{b_1} b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) \right) \sin(\Omega t) - \\ & m_{b_2} b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) \right) \cos(\Omega t) + m_{b_3} b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) \right) \sin(\Omega t) + \\ & m_{b_4} b \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) \right) \cos(\Omega t) + c_f \frac{d}{dt} x(t) - 2 \cos(\Omega t) m_{b_1} b \Omega \frac{d}{dt} \phi_1(t) + \\ & 2 \sin(\Omega t) m_{b_2} b \Omega \frac{d}{dt} \phi_2(t) + 2 \cos(\Omega t) m_{b_3} b \Omega \frac{d}{dt} \phi_3(t) - \quad (\text{A.29}) \\ & 2 \sin(\Omega t) m_{b_4} b \Omega \frac{d}{dt} \phi_4(t) - \Omega^2 (-m_{b_2} b \phi_2(t) + m_{b_4} \phi_4(t)) b + \\ & (m_{b_1} - m_{b_3}) (a + b) \cos(\Omega t) + \Omega^2 (m_{b_1} b \phi_1(t) - b \phi_3(t)) m_{b_3} + \\ & (m_{b_2} - m_{b_4}) (a + b) \sin(\Omega t) + k_f x(t) = 0 \end{aligned}$$

- Pá 1 $\rightarrow \phi_1(t)$

$$\begin{aligned}
& (b^2 m_{b1} + I_{b1}) \frac{d^2}{dt^2} \phi_1(t) - m_{b1} b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \sin(\Omega t) + \\
& c_{b1} \frac{d}{dt} \phi_1(t) + \phi_1(t) (\Omega^2 a b m_{b1} + k_{b1}) = 0
\end{aligned} \tag{A.30}$$

• **Pá 2** $\rightarrow \phi_2(t)$

$$\begin{aligned}
& (b^2 m_{b2} + I_{b2}) \frac{d^2}{dt^2} \phi_2(t) - m_{b2} b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \cos(\Omega t) + \\
& c_{b2} \frac{d}{dt} \phi_2(t) + \phi_2(t) (\Omega^2 a b m_{b2} + k_{b2}) = 0
\end{aligned} \tag{A.31}$$

• **Pá 3** $\rightarrow \phi_3(t)$

$$\begin{aligned}
& (b^2 m_{b3} + I_{b3}) \frac{d^2}{dt^2} \phi_3(t) + m_{b3} b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \sin(\Omega t) + \\
& c_{b3} \frac{d}{dt} \phi_3(t) + \phi_3(t) (\Omega^2 a b m_{b3} + k_{b3}) = 0
\end{aligned} \tag{A.32}$$

• **Pá 4** $\rightarrow \phi_4(t)$

$$\begin{aligned}
& (b^2 m_{b4} + I_{b4}) \frac{d^2}{dt^2} \phi_4(t) + m_{b4} b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \cos(\Omega t) + \\
& c_{b4} \frac{d}{dt} \phi_4(t) + \phi_4(t) (\Omega^2 a b m_{b4} + k_{b4}) = 0
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Para melhor compreensão, reescreve-se as equações do movimento na forma matricial, Equação [A.34](#).

$$[M] \{\ddot{u}\} + [[C] + [G]] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F_{ext}\} \tag{A.34}$$

onde:

• Coordenadas generalizadas $\{u\}$

$$\{u\} = \{x(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t)\}^T$$

- Matriz de massa $[M]$:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & -\sin(\Omega t) rm_1 & -\cos(\Omega t) rm_1 & \sin(\Omega t) rm_3 & \cos(\Omega t) rm_4 \\ -\sin(\Omega t) rb_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\Omega t) rb_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\Omega t) rb_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\Omega t) rb_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C]$

$$[C] = \begin{bmatrix} rc_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rc_{b1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rc_{b2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rc_{b3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rc_{b4} \end{bmatrix}$$

- Matriz de acoplamento giroscópico $[G]$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \cos(\Omega t) \Omega rm_1 & 2 \sin(\Omega t) \Omega rm_2 & 2 \cos(\Omega t) \Omega rm_3 & -2 \sin(\Omega t) \Omega rm_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K]$

$$[K] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & \sin(\Omega t) \Omega^2 r m_1 & \cos(\Omega t) \Omega^2 r m_2 & -\sin(\Omega t) \Omega^2 r m_3 & -\cos(\Omega t) \Omega^2 r m_4 \\ 0 & \Omega^2 r a_1 + \omega_{b1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 r a_2 + \omega_{b2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^2 r a_3 + \omega_{b3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2 r a_4 + \omega_{b4}^2 \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_{ext}\}$

$$\{F_{ext}\} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 (a + b) ((-r m_1 + r m_3) \cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) (r m_2 - r m_4)) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considerando que $Nb = 4$ e $k = 1 \dots Nb$, as variáveis presentes nas matrizes [M], [G], [K] e no vetor $\{F_{ext}\}$, são dadas por:

- $r m_k = \frac{b m_{bk}}{m_f + \sum_{k=1}^{Nb} m_{bk}}$
- $r b_k = \frac{b m_{bk}}{b^2 m_{bk} + I z_{bk}}$
- $r a_k = a r b_k$
- $r c_f = \frac{c_f}{m_f + \sum_{k=1}^{Nb} m_{bk}}$
- $r c_{bk} = \frac{c_{bk}}{b^2 m_{bk} + I z_{bk}}$
- $\omega_f^2 = \frac{k_f}{m_f + \sum_{k=1}^{Nb} m_{bk}}$
- $\omega_{bk}^2 = \frac{k_{bk}}{b^2 m_{bk} + I z_{bk}}$

A variável rm_k representa a razão entre o momento estático da pá em relação a massa total do sistema e o fator rb_k demonstra a razão entre o momento estático da k -ésima pá em relação ao seu momento de inércia de rotação total. Os fatores rc_f e rc_{bk} calculam, respectivamente, a razão entre o coeficiente de amortecimento da fuselagem com a massa total do helicóptero e a razão entre o coeficiente de amortecimento da k -ésima pá e seu momento de inércia de rotação. A frequência natural da fuselagem é dada por ω_f^2 , já a frequência natural relativa ao movimento de *lead-lag* da k -ésima pá é definida por ω_{bk}^2 .

O modelo isotrópico considera iguais, para cada uma das pás, as propriedades de massa m_{bk} , momento de inércia I_{bk} , rigidez k_{bk} e amortecimento c_{bk} . Consequentemente, não há a necessidade do índice k para diferenciar as suas propriedades dinâmicas. Aplicando essa consideração na Equação A.34, temos:

- Matriz de massa $[M]$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & -\sin(\Omega t) rm & -\cos(\Omega t) rm & \sin(\Omega t) rm & \cos(\Omega t) rm \\ -\sin(\Omega t) rb & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\Omega t) rb & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\Omega t) rb & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\Omega t) rb & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C]$

$$[C] = \begin{bmatrix} rc_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rc_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rc_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rc_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rc_b \end{bmatrix}$$

- Matriz de acoplamento giroscópico $[G]$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \cos(\Omega t) \Omega r m & 2 \sin(\Omega t) \Omega r m & 2 \cos(\Omega t) \Omega r m & -2 \sin(\Omega t) \Omega r m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K]$

$$[K] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & \sin(\Omega t) \Omega^2 r m & \cos(\Omega t) \Omega^2 r m & -\sin(\Omega t) \Omega^2 r m & -\cos(\Omega t) \Omega^2 r m \\ 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_{ext}\}$

$$\{F_{ext}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Transformada de Coleman

Após aplicar a transformação das coordenadas, Equações A.12 e A.13, na equação do movimento linearizada, chega-se que as novas coordenadas são:

$$\{p\} = \{x(t), \tau_{1c}(t), \tau_{1s}(t), \tau_0(t), \tau_a(t)\}^T$$

Com isso, a Equação A.34 é reescrita e seu resultado é apresentado pela Equação A.35.

$$[M_c] \{\ddot{p}\} + [[C_c] + [G_c]] \{\dot{p}\} + [K_c] \{p\} = \{F_c\} \quad (\text{A.35})$$

onde:

- Matriz de massa $[M_c]$

$$[M_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2rm & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -rb & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C_c]$

$$[C_c] = \begin{bmatrix} rcf & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rcb & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rcb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rcb & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rcb \end{bmatrix}$$

- Matriz giroscópica $[G_c]$

$$[G_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega & 0 & 0 \\ 0 & -2\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K_c]$

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 ra - \Omega^2 + \omega_b^2 & \Omega rcb & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega rcb & \Omega^2 ra - \Omega^2 + \omega_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^2 ra + \omega_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2 ra + \omega_b^2 \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_c\}$

$$\{F_c\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, consegue-se eliminar os termos periódicos da equação do movimento do modelo isotrópico do helicóptero.

A.2 MODELO ISOTRÓPICO COM NES

Com base no modelo apresentado pela Figura 3.1, aumenta-se um grau de liberdade no sistema devido o acoplamento do NES na fuselagem.

Obtendo a energia potencial e cinética deste sistema se chega nas Equações A.36 e A.37.

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} m_f \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{1}{2} m_{bk} \left(\frac{d}{dt} x(t) - a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t)) - \right. \\
 & \left. b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t) + \phi_k(t)) \right)^2 + \\
 & \frac{1}{2} m_{bk} \left(a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t)) + b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t) + \right. \\
 & \left. \phi_k(t)) \right)^2 + \frac{1}{2} I b_k \left(\frac{d}{dt} \phi_k(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_t \left(\frac{d}{dt} x(t) - \frac{d}{dt} z(t) \right)^2
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$U = \frac{1}{2} k_f (x(t))^2 + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{1}{2} k_{bk} (\phi_k(t))^2 + \frac{1}{4} k_{nl} (z(t))^4 \tag{A.37}$$

O trabalho das forças não conservativas é dado pela Equação .

$$\begin{aligned}
 W_{nc} = & - c_f \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \delta_x - \sum_{k=1}^{Nb} c b_k \left(\frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \delta_k + \\
 & c_t \left(\frac{d}{dt} z(t) \right) \delta_z
 \end{aligned} \tag{A.38}$$

Aplicando as Equações A.36 e A.37 no Lagrangiano, temos:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} m_f \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \sum_{k=1}^{Nb} \frac{1}{2} m_{bk} \left(\frac{d}{dt} x(t) - a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t)) - \right. \\
& b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \sin(\psi_k(t) + \phi_k(t)) \left. \right)^2 + \\
& \frac{1}{2} m_{bk} \left(a \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t)) + \right. \\
& b \left(\frac{d}{dt} \psi_k(t) + \frac{d}{dt} \phi_k(t) \right) \cos(\psi_k(t) + \phi_k(t)) \left. \right)^2 + \\
& \frac{1}{2} I b_k \left(\frac{d}{dt} \phi_k(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_t \left(\frac{d}{dt} x(t) - \frac{d}{dt} z(t) \right)^2 - \frac{1}{2} k_f (x(t))^2 - \\
& \sum_{k=1}^{Nb} \frac{1}{2} k_{bk} (\phi_k(t))^2 - \frac{1}{4} k_{nl} (z(t))^4
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Aplicando as mesmas considerações de isotropia das pás adotadas no o modelo isotrópico, as equações do movimento são obtidas através da Equação A.1 e linearizadas segundo a Equação A.28. Seu resultado é apresentado no formato matricial conforme a Equação A.40.

$$[M] \{\ddot{u}\} + [[C] + [G]] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} + [K_{nl}] \{u^3\} = \{F_{ext}\} \tag{A.40}$$

onde:

- Coordenadas generalizadas $\{u\}$

$$\{u\} = \{x(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t), z(t)\}^T$$

- Matriz de massa $[M]$

$$[M] = \begin{bmatrix} K & -\sin(\Omega t) rm & -\cos(\Omega t) rm & \sin(\Omega t) rm & \cos(\Omega t) rm & -\mu \\ -\sin(\Omega t) rb & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\Omega t) rb & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\Omega t) rb & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos(\Omega t) rb & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C]$

$$[C] = \begin{bmatrix} rc_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rc_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rc_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rc_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rc_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -rca \end{bmatrix}$$

- Matriz de acoplamiento giroscópico $[G]$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \cos(\Omega t) \Omega rm & 2 \sin(\Omega t) \Omega rm & 2 \cos(\Omega t) \Omega rm & -2 \sin(\Omega t) \Omega rm & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K]$

$$[K] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & \sin(\Omega t) \Omega^2 r m & \cos(\Omega t) \Omega^2 r m & -\sin(\Omega t) \Omega^2 r m & -\cos(\Omega t) \Omega^2 r m & 0 \\ 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez não linear $[K_{nl}]$

$$[K_{nl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_{ext}\}$

$$\{F_{ext}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

As novas variáveis presentes na Equação [A.40](#) são:

- $\mu = \frac{m_t}{m_f + 4m_b}$
- $K = 1 + \mu$
- $rca = \frac{c_t}{m_f + 4m_b}$
- $\lambda = \frac{k_{nl}}{m_f + 4m_b}$

A variável μ representa a relação entre a massa do NES com a massa total da aeronave. Da mesma forma, rca e λ indicam, respectivamente, a razão entre o fator de amortecimento do NES com a massa total do helicóptero e a razão entre a rigidez não linear com a massa total.

A.2.1 Transformada de Coleman

Aplicando a transformada de Coleman, Equações A.12 e A.13, na equação do movimento, Equação A.40, chega-se no seguinte resultado:

$$[M_c] \{\ddot{p}\} + [[C_c] + [G_c]] \{\dot{p}\} + [K_c] \{p\} + [K_{nlc}] \{p^3\} = \{F_{extc}\} \quad (\text{A.41})$$

onde:

- Coordenadas $\{p\}$

$$\{p\} = \{x(t), \tau_{1c}(t), \tau_{1s}(t), \tau_0(t), \tau_d(t)z(t)\}^T$$

- Matriz de massa $[M_c]$

$$[M_c] = \begin{bmatrix} \mu + 1 & 0 & -2rm & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -rb & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C_c]$

$$[C_c] = \begin{bmatrix} rcf & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rcb & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rcb & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rcb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rcb & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -rca \end{bmatrix}$$

- Matriz giroscópica $[G_c]$

$$[G_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K_c]$

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 ra - \Omega^2 + \omega_b^2 & \Omega rcb & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega rcb & \Omega^2 ra - \Omega^2 + \omega_b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^2 ra + \omega_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2 ra + \omega_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez não linear $[K_{nlc}]$

$$[K_{nlc}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_{extc}\}$

$$\{F_{extc}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A.3 MODELO ANISOTRÓPICO SEM NES

A anisotropia considerada no modelo do helicóptero está associada com a variação da rigidez em uma de suas pás, que é indicada por uma perturbação σ . Adotando que a anisotropia está presente apenas na primeira pá, $k = 1$, sua rigidez pode ser expressa como:

$$k_{b1} = k_b + \sigma \quad (\text{A.42})$$

e as demais rigidezes associadas as outras pás são:

$$k_{b2} = k_{b3} = k_{b4} = k_b \quad (\text{A.43})$$

Aplicando essas considerações na Equação A.34, verifica-se que a presença da anisotropia influencia somente na matriz de rigidez $[K]$, Equação A.44.

$$[M] \{\ddot{u}\} + [[C] + [G]] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F_{ext}\} \quad (\text{A.44})$$

onde:

- Matriz de massa $[M]$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & -\sin(\Omega t) rm & -\cos(\Omega t) rm & \sin(\Omega t) rm & \cos(\Omega t) rm \\ -\sin(\Omega t) rb & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\Omega t) rb & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\Omega t) rb & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\Omega t) rb & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C]$

$$[C] = \begin{bmatrix} rc_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rc_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rc_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rc_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rc_b \end{bmatrix}$$

- Matriz de acoplamento giroscópico $[G]$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \cos(\Omega t) \Omega rm & 2 \sin(\Omega t) \Omega rm & 2 \cos(\Omega t) \Omega rm & -2 \sin(\Omega t) \Omega rm \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K]$

$$[K] = \begin{bmatrix} I_f^2 & rm \Omega^2 \sin(\Omega t) & rm \Omega^2 \cos(\Omega t) & -rm \Omega^2 \sin(\Omega t) & -rm \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ 0 & \Omega^2 ra + I_b^2 + \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 ra + I_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^2 ra + I_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2 ra + I_b^2 \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_{ext}\}$

$$\{F_{ext}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Considerando que η é a razão entre a variável de perturbação σ e a momento de inércia no ponto de rotação:

- $\eta = \frac{\sigma}{I_b + b^2 m_b}$

A.3.1 Transformada de Coleman

Aplicando a transformada de Coleman, Equações A.12 e A.13, na Equação A.44, chega-se no seguinte na Equação A.45.

$$[M_c] \{\ddot{p}\} + [[C_c] + [G_c]] \{\dot{p}\} + [K_c] \{p\} = \{F_c\} \quad (\text{A.45})$$

onde:

- Matriz de massa $[M_c]$

$$[M_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2rm & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -rb & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C_c]$

$$[C_c] = \begin{bmatrix} rcf & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rcb & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rcb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rcb & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rcb \end{bmatrix}$$

- Matriz giroscópica $[G_c]$

$$[G_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega & 0 & 0 \\ 0 & -2\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K_c]$

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\eta \cos(2\Omega t) - \Omega^2 + \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} & \frac{1}{4}\eta \sin(2\Omega t) + rcb\Omega & \frac{1}{2}\cos(\Omega t)\eta & -\frac{1}{2}\cos(\Omega t)\eta \\ 0 & \frac{1}{4}\eta \sin(2\Omega t) - rcb\Omega & -\frac{1}{4}\eta \cos(2\Omega t) - \Omega^2 + \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} & \frac{1}{2}\sin(\Omega t)\eta & -\frac{1}{2}\sin(\Omega t)\eta \\ 0 & \frac{1}{4}\cos(\Omega t)\eta & \frac{1}{4}\sin(\Omega t)\eta & \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} & -\frac{\eta}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4}\cos(\Omega t)\eta & -\frac{1}{4}\sin(\Omega t)\eta & -\frac{\eta}{4} & \omega_B^2 + \frac{\eta}{4} \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_c\}$

$$\{F_c\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ao aplicar a transformada de Coleman na equação do movimento do modelo anisotrópico, percebe-se a existência de termos periódicos associados a presença da anisotropia na matriz de rigidez, porém os termos periódicos das matrizes de massa e de amortecimento são eliminados.

A.4 MODELO ANISOTRÓPICO COM NES

Acoplando o NES e considerando as propriedades de massa m_{bk} , momento de inércia I_{bk} e amortecimento c_{bk} iguais para todas as pás, salvo a exceção da variação de rigidez em uma das pás, Equações A.42 e A.43, chega-se nas equações do movimento a aplicando a Equação A.38 e A.39 na Equação A.1. Linearizando o resultado segundo a Equação A.28, obtém-se:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [[C] + [G]] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} + [K_{nl}] \{u^3\} = \{F_{ext}\} \quad (\text{A.46})$$

onde:

- Coordenadas generalizadas $\{u\}$

$$\{u\} = \{x(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t), z(t)\}^T$$

- Matriz de massa $[M]$

$$[M] = \begin{bmatrix} K & -\sin(\Omega t) rm & -\cos(\Omega t) rm & \sin(\Omega t) rm & \cos(\Omega t) rm & -\mu \\ -\sin(\Omega t) rb & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\Omega t) rb & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\Omega t) rb & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos(\Omega t) rb & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C]$

$$[C] = \begin{bmatrix} rc_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rc_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rc_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rc_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rc_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -rca \end{bmatrix}$$

- Matriz de acoplamiento giroscópico $[G]$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \cos(\Omega t) \Omega rm & 2 \sin(\Omega t) \Omega rm & 2 \cos(\Omega t) \Omega rm & -2 \sin(\Omega t) \Omega rm & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez $[K]$

$$[K] = \begin{bmatrix} \omega_f^2 & \sin(\Omega t) \Omega^2 r m & \cos(\Omega t) \Omega^2 r m & -\sin(\Omega t) \Omega^2 r m & -\cos(\Omega t) \Omega^2 r m & 0 \\ 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 + \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2 r a + \omega_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez não linear $[K_{nl}]$

$$[K_{nl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_{ext}\}$

$$\{F_{ext}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A.4.1 Transformada de Coleman

Aplicando a transformada de Coleman, Equações A.12 e A.13, na Equação A.46, chega-se na Equação A.47.

$$[M_c] \{\ddot{p}\} + [[C_c] + [G_c]] \{\dot{p}\} + [K_c] \{p\} + [K_{nlc}] \{p^3\} = \{F_{extc}\} \quad (\text{A.47})$$

onde:

- Coordenadas $\{p\}$

$$\{p\} = \{x(t), \tau_{1c}(t), \tau_{1s}(t), \tau_0(t), \tau_d(t)z(t)\}^T$$

- Matriz de massa $[M_c]$

$$[M_c] = \begin{bmatrix} \mu + 1 & 0 & -2rm & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -rb & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

- Matriz de amortecimento $[C_c]$

$$[C_c] = \begin{bmatrix} rcf & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rcb & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rcb & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rcb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rcb & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -rca \end{bmatrix}$$

- Forças externas $\{F_{extc}\}$

$$\{F_{extc}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

APÊNDICE B

RESULTADOS DO MODELO ANISOTRÓPICO DO HELICÓPTERO

Neste apêndice, são apresentados os gráficos mencionados no Capítulo 4, onde é discutido os resultados obtidos para o modelo anisotrópico.

B.1 Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = -10\%$

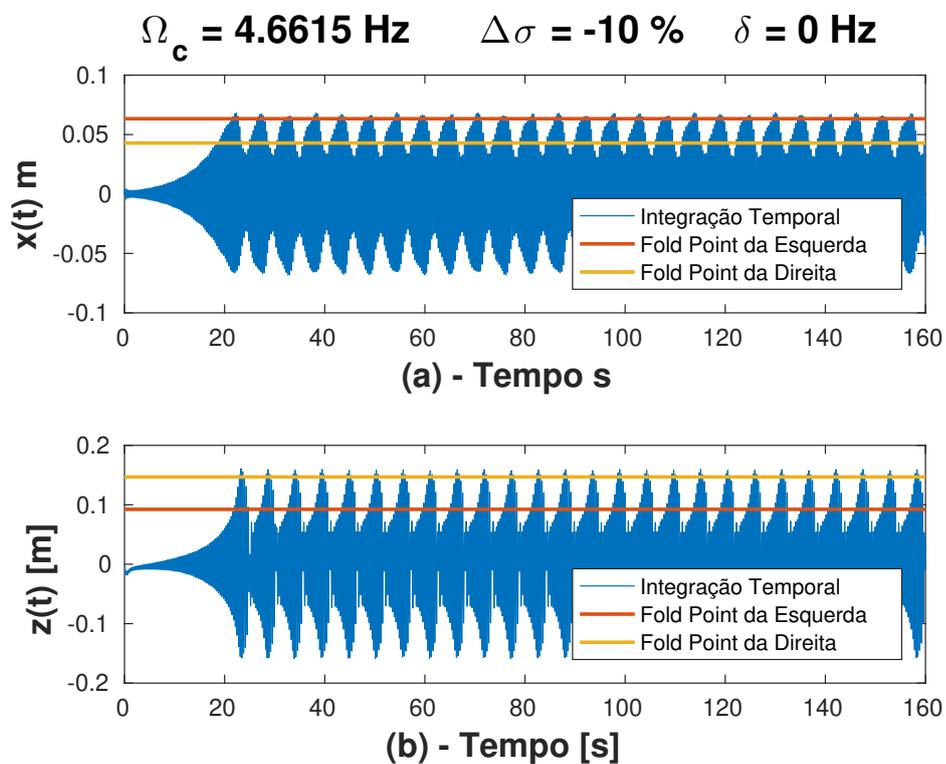


Figura B.1: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

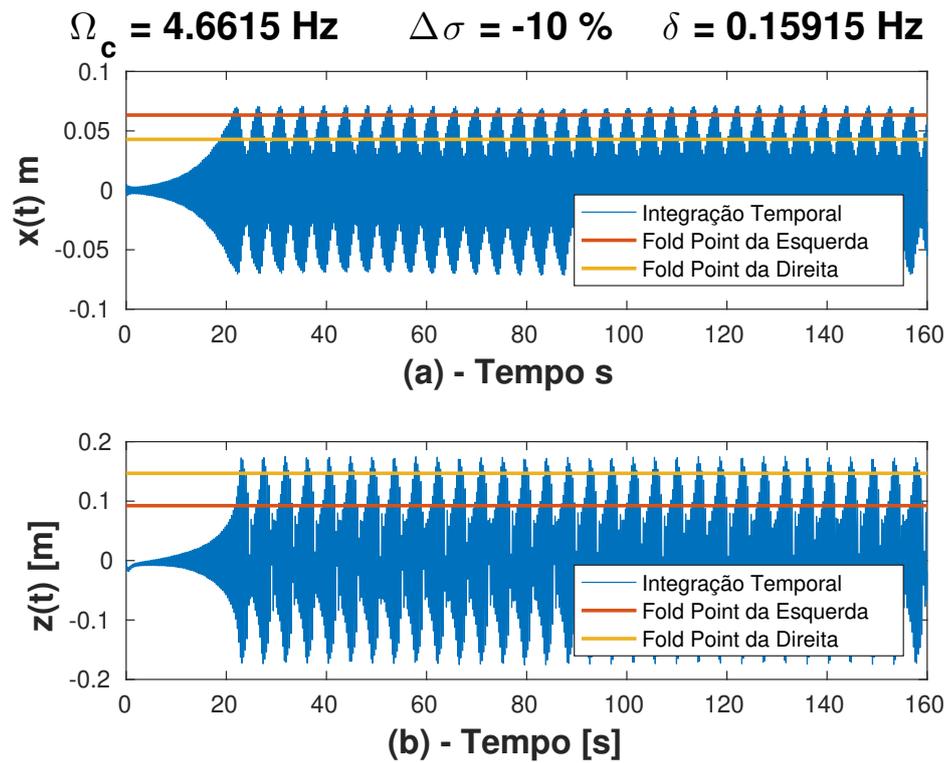


Figura B.2: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

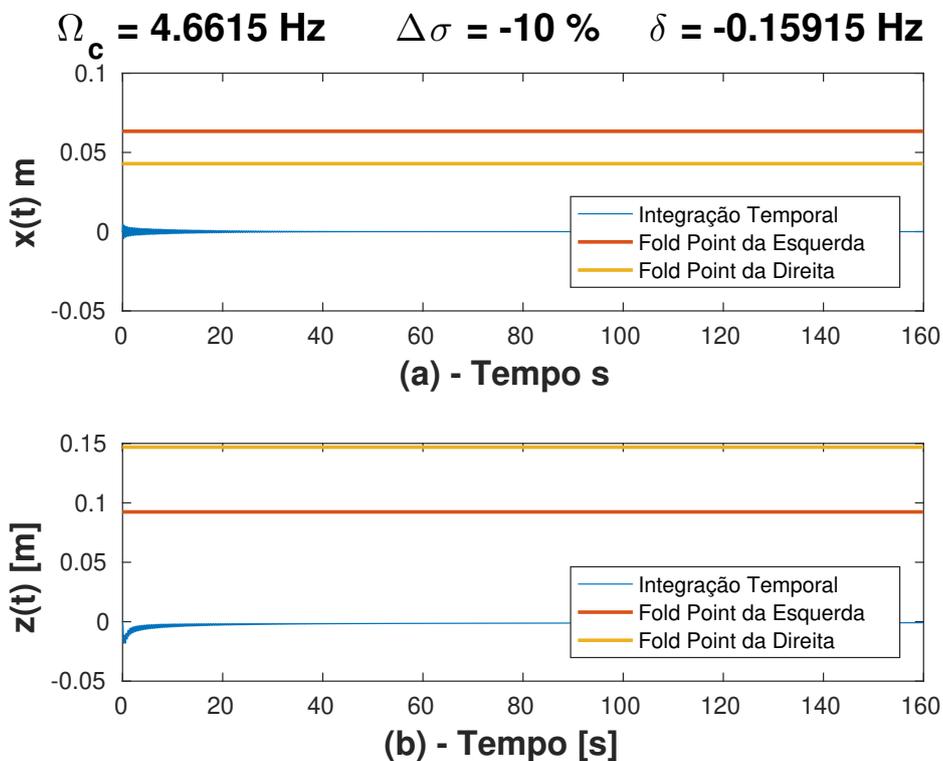


Figura B.3: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -10\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

B.2 Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = 10\%$

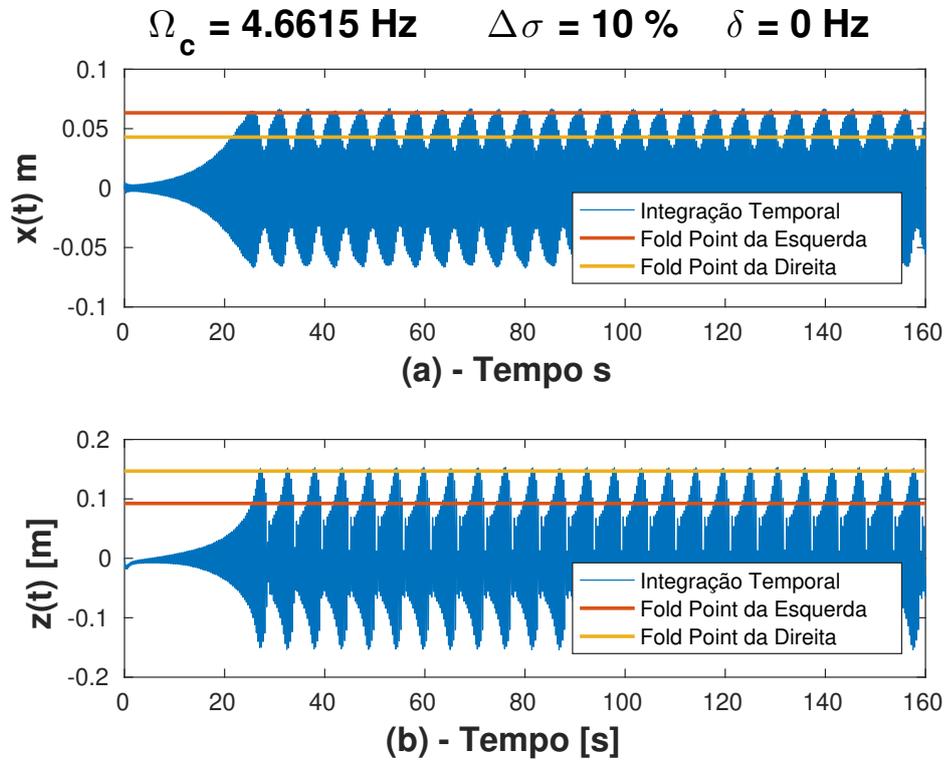


Figura B.4: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

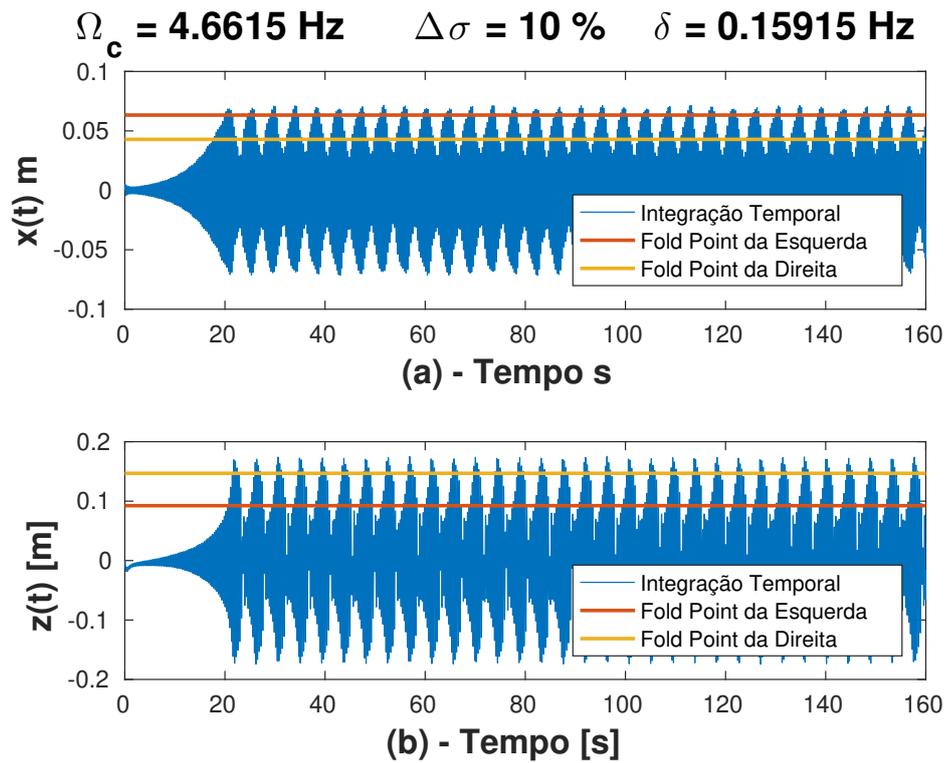


Figura B.5: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

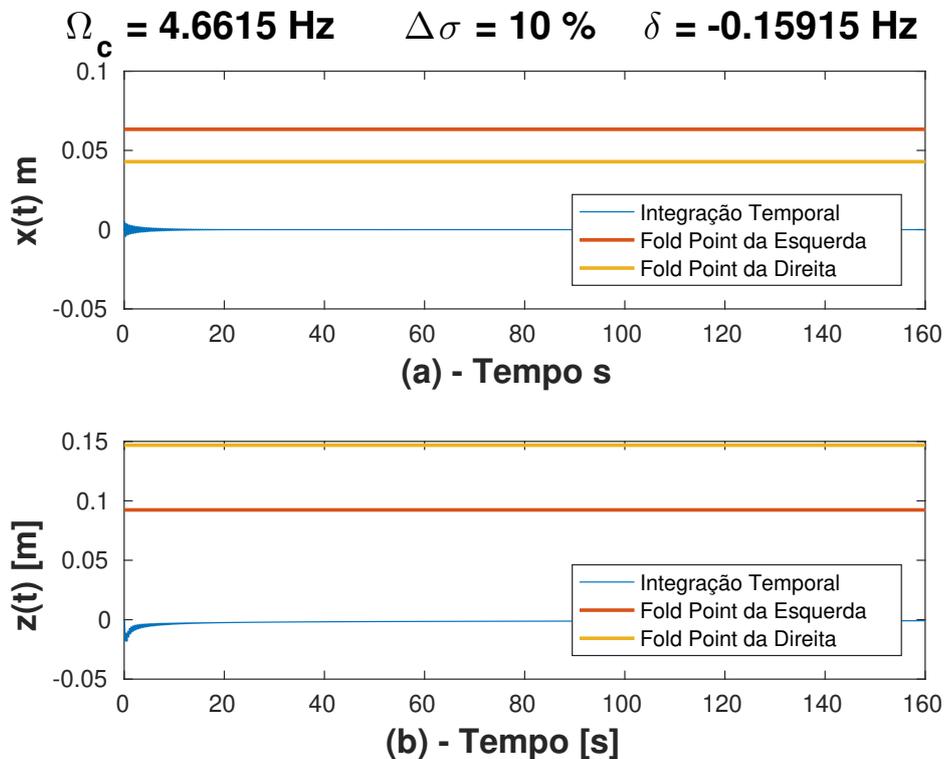


Figura B.6: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 10\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

B.3 Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = -20\%$

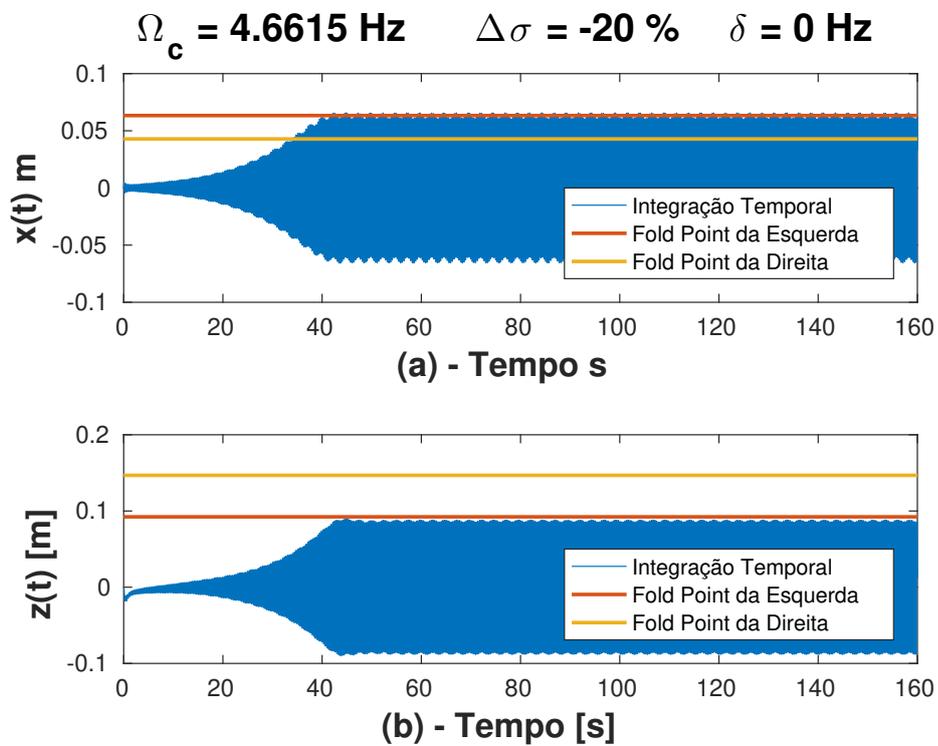


Figura B.7: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

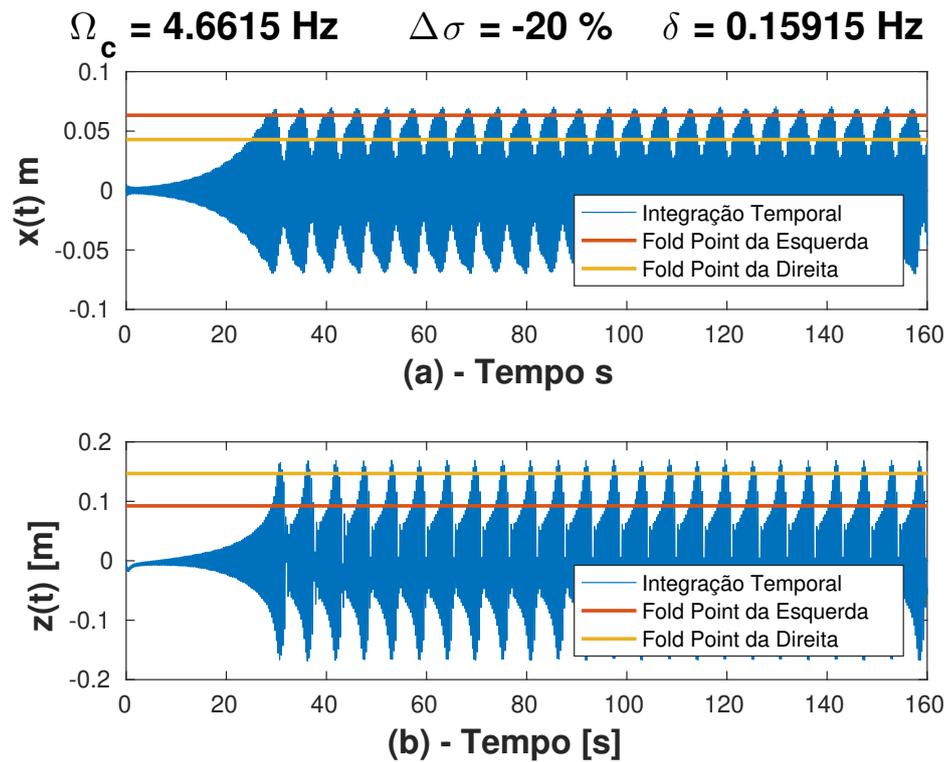


Figura B.8: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

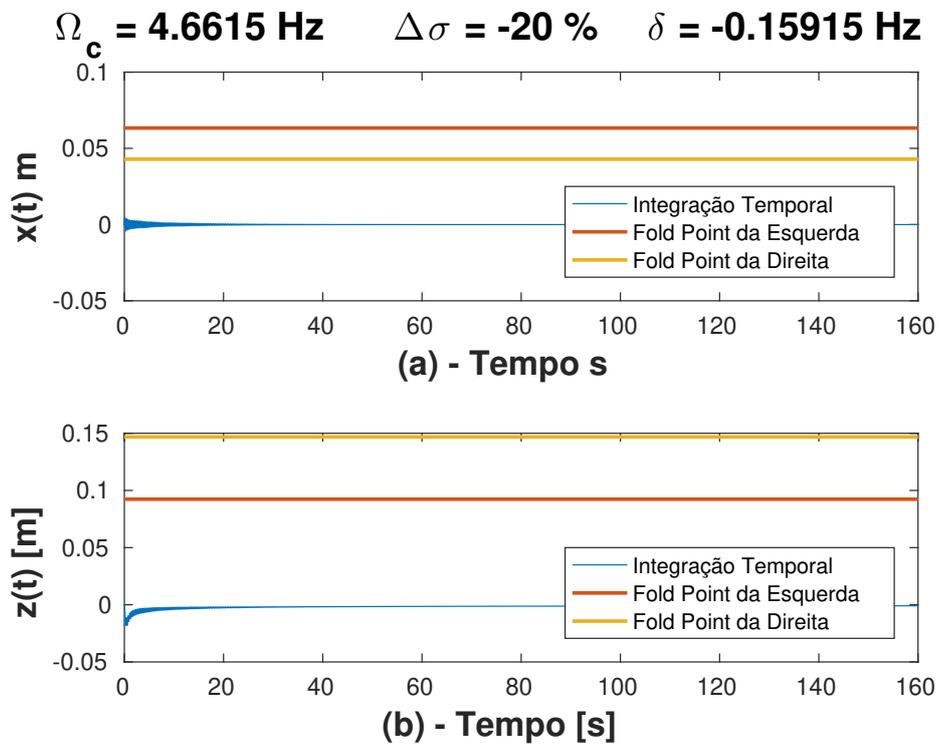


Figura B.9: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -20\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

B.4 Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = 20\%$

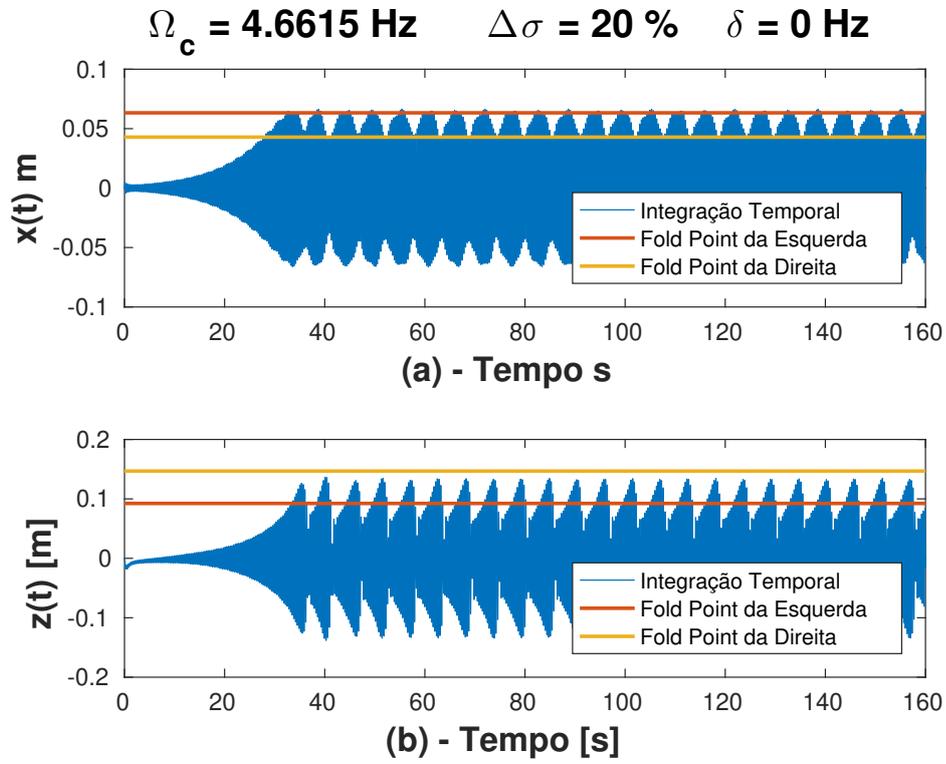


Figura B.10: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

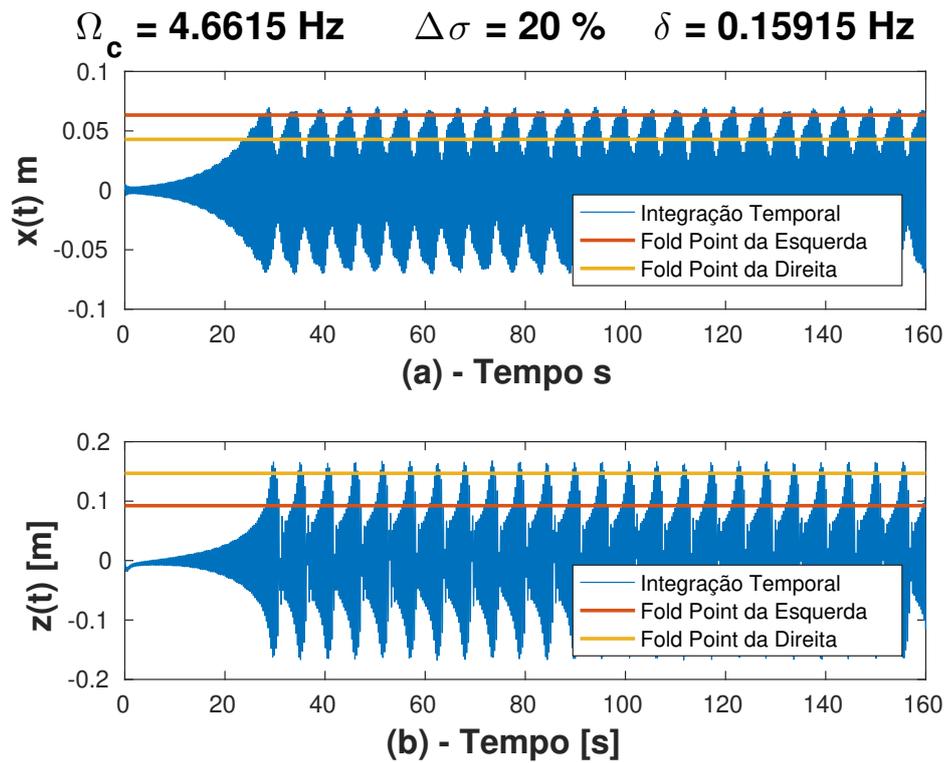


Figura B.11: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

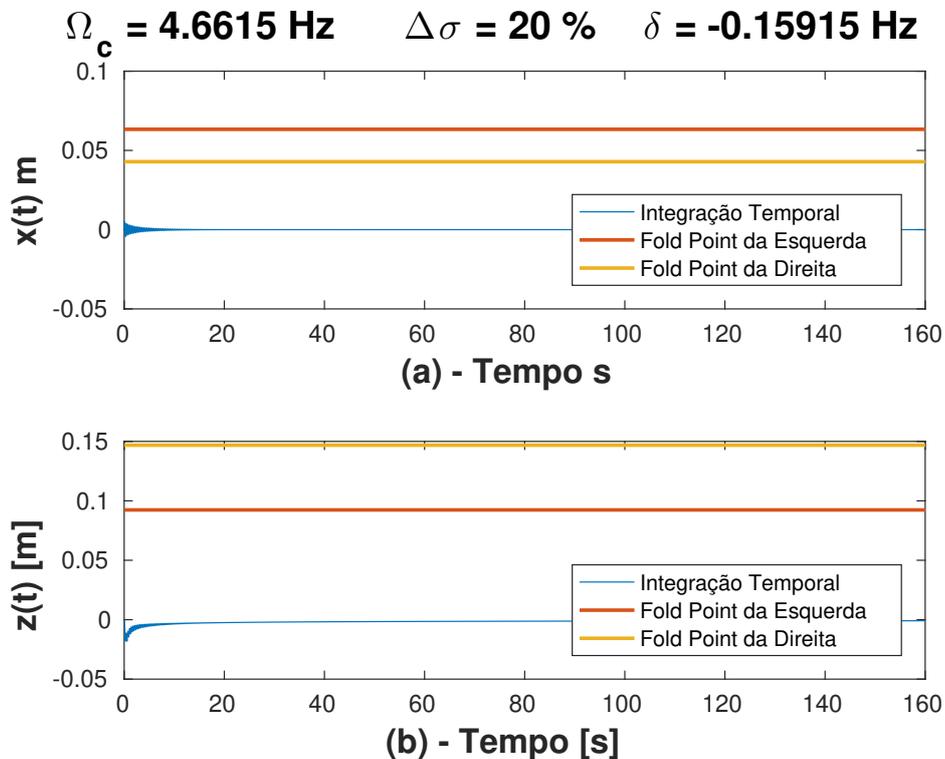


Figura B.12: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 20\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

B.5 Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = -30\%$

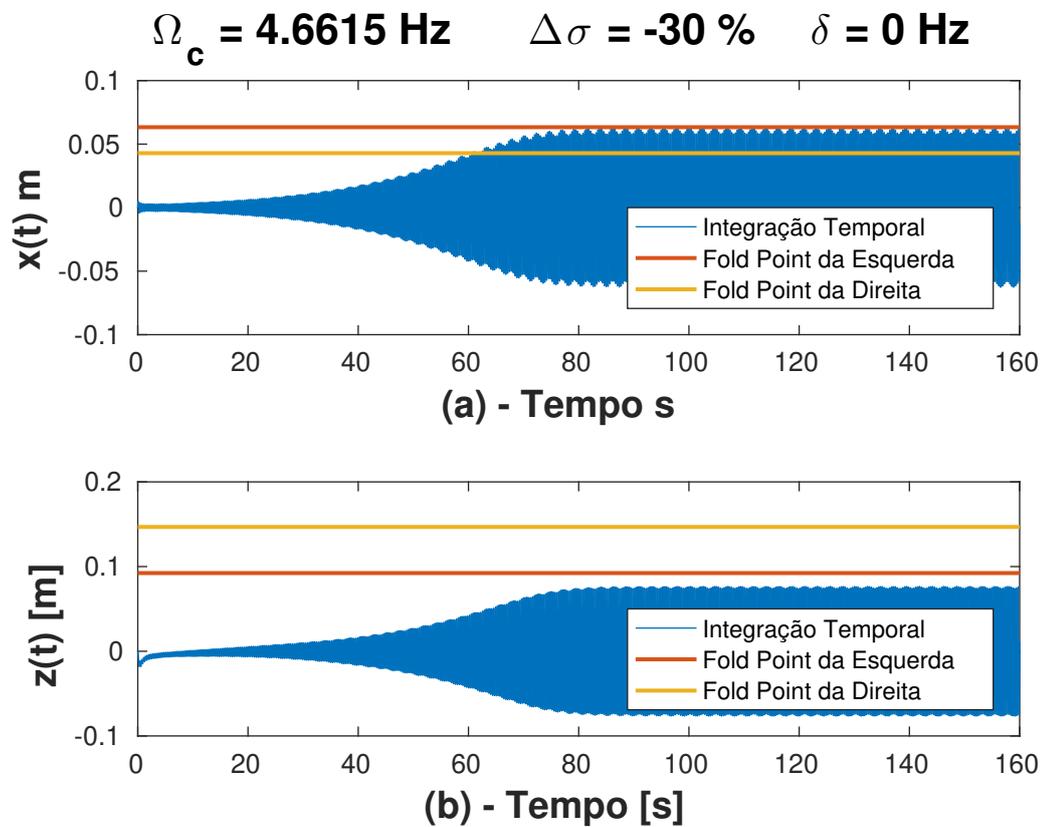


Figura B.13: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

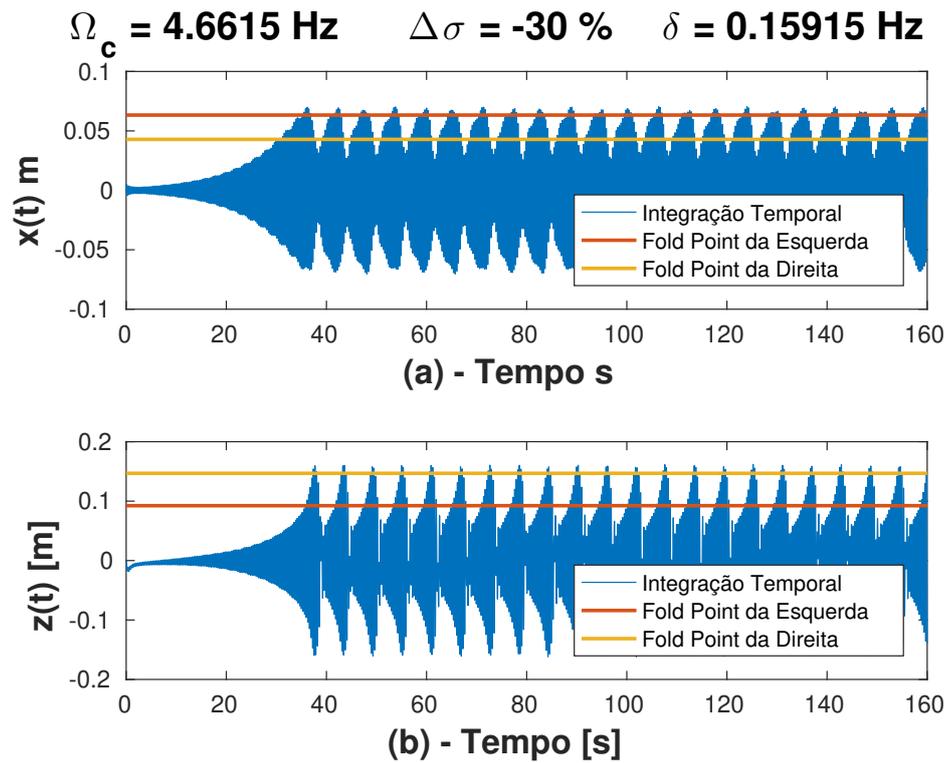


Figura B.14: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

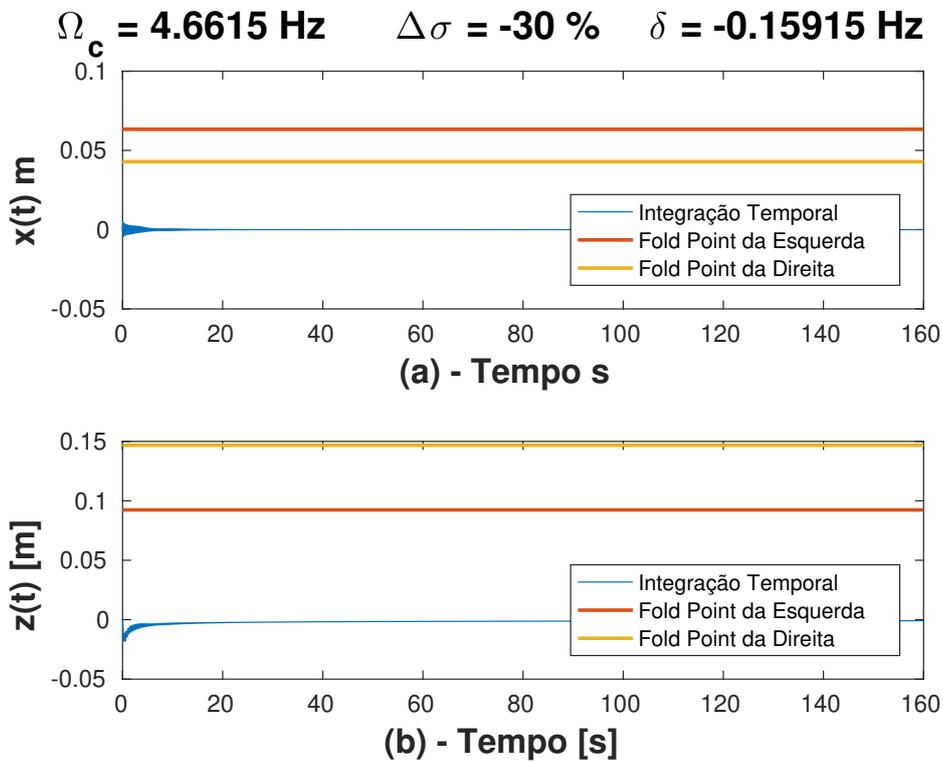


Figura B.15: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = -30\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

B.6 Variação da anisotropia $\rightarrow \Delta\sigma = 30\%$

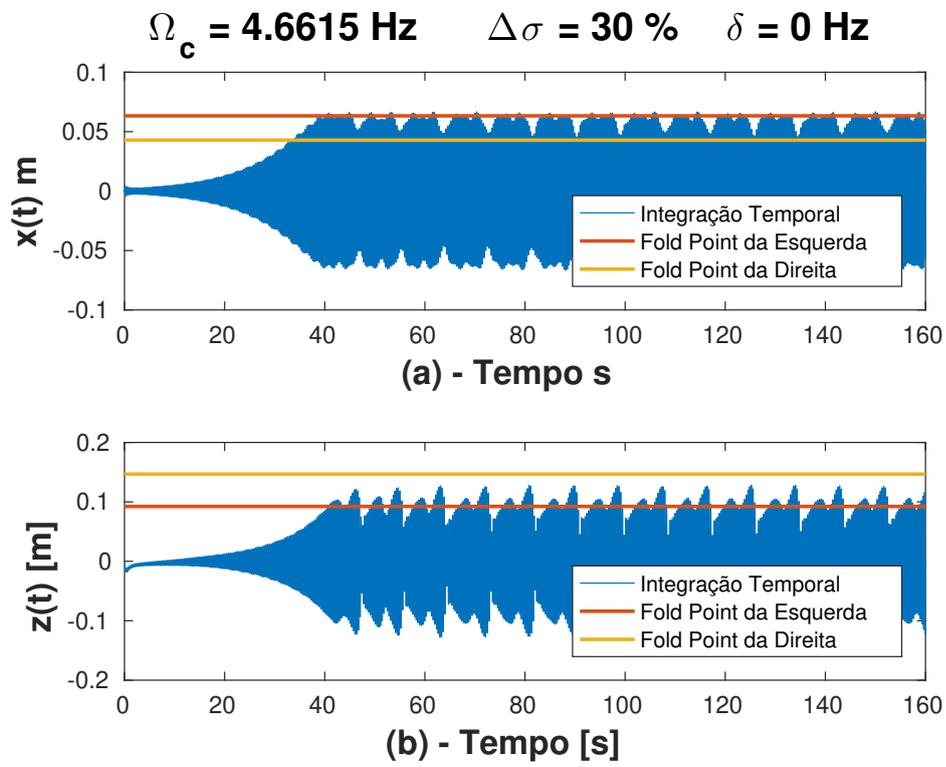


Figura B.16: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = 0 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

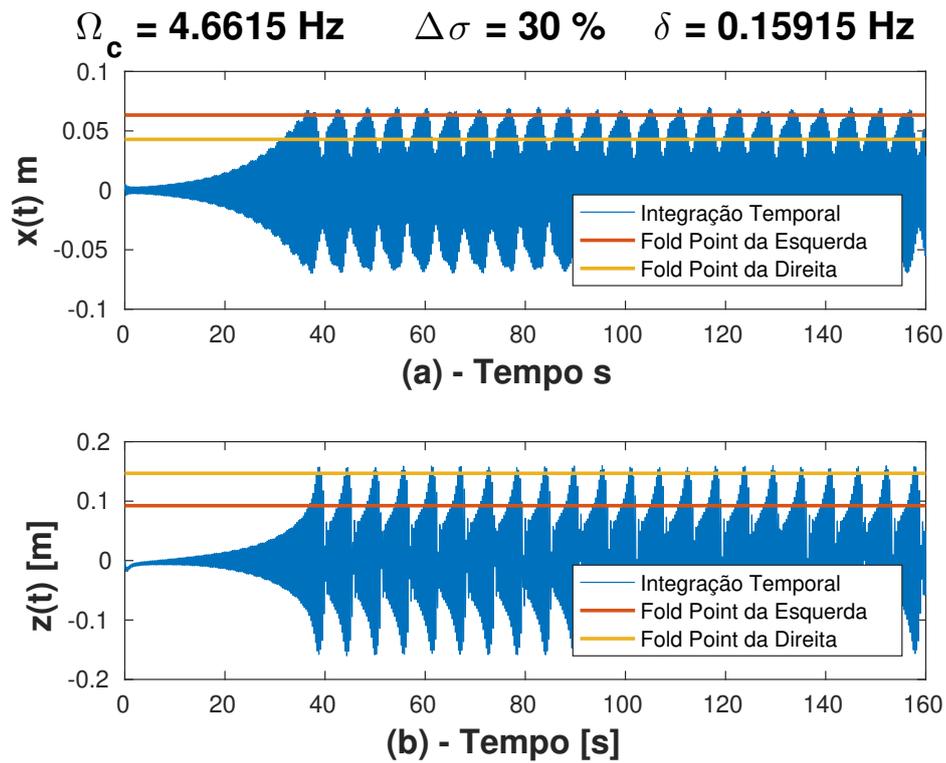


Figura B.17: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = 0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

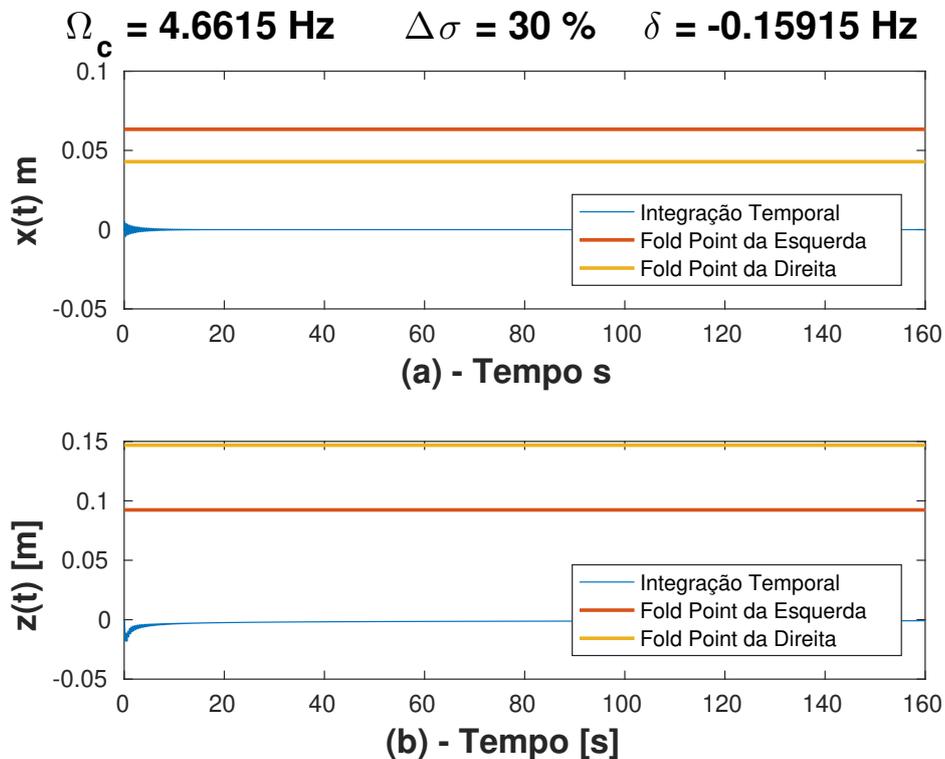


Figura B.18: Resposta temporal do modelo anisotrópico do helicóptero, $\Omega_c = 4.6615 \text{ Hz}$, $\Delta\sigma = 30\%$ e $\delta = -0.15915 \text{ Hz}$ - (a) Resposta da fuselagem, (b) Resposta do NES.

ANEXO A

VALORES PARA O MODELO DO HELICÓPTERO

Os valores adotados como padrão do modelo do helicóptero foram retirados da tese [Sanches \(2011\)](#) e são apresentados na Tabela [A.1](#).

Tabela A.1: Valores adotados para o modelo do helicóptero.

Fuselagem	Rotor		
$m_f = 2092.9 \text{ kg}$	$m_{bk} = 31.9 \text{ kg}$	$a = 0.2 \text{ m}$	$b = 2.5 \text{ m}$
$\omega_f = 6.0\pi \text{ rad/s}$	$\omega_{bk} = 3.0\pi \text{ rad/s}$	$Iz_{bk} = 259 \text{ kg} \times \text{m}^2$	

Os valores do fator de amortecimento da fuselagem ξ_f e do fator de amortecimento das pás ξ_{bk} são dados por:

- $\xi_f = 0.04$;
- $\xi_{bk} = 0.045$.

Os parâmetros considerados para NES são dados pela Tabela [A.2](#).

Tabela A.2: Parâmetros adotados para o NES.

NES
$\mu = \frac{m_t}{m_f + 4m_b} = 0.05$
$\tilde{r}c_{crit} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3} \mu w_f}{\sqrt{K}}$
$\tilde{r}c_a = 0.5 \tilde{r}c_{crit}$
$rc_a = \frac{\tilde{r}c_a}{\epsilon}$
$\lambda = \frac{k_t}{m_f + 4m_b} = 10^3 N / (kg \cdot m^3)$

ANEXO B

TEORIA DE FLOQUET

Considere uma equação diferencial de segunda ordem do tipo:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [G] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (\text{B.1})$$

Representando em espaço de estado a Equação B.1, tem-se:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t), \quad t > t_0 \quad (\text{B.2a})$$

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad (\text{B.2b})$$

onde $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^n$ é a matriz de espaço de estado com termos periódicos, ou seja,

$$\mathbf{A}(t + T) = \mathbf{A}(t) \quad (\text{B.3})$$

e

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_6 & \mathbb{I}_6 \\ -M^{-1}(t)K(t) & -M^{-1}(t)G(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$\mathbf{v}(t)$ é a variável de estado.

De acordo com a teoria de Floquet a matriz de transição ϕ que relaciona $\mathbf{v}(t_0)$ e $\mathbf{v}(t)$ é definida como:

$$\phi(t, t_0) = \mathbf{P}(t, t_0)e^{\mathbf{Q}(t-t_0)} \quad (\text{B.5})$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz constante e $\mathbf{P}(t, t_0)$ é uma matriz não singular que satisfaz $\mathbf{P}(T, t_0)$ e $\mathbf{P}(t_0, t_0) = \mathbb{I}$.

A matriz de monodromy \mathbf{R} , Equação B.8, fornece um critério de estabilidade através da análise dos seus autovalores. Se todos eles forem menores que um, então a Equação B.1 é definida como estável.

$$\mathbf{R}(t, t_0) = \phi(t_0 + T, t_0) = e^{\mathbf{Q}T} \quad (\text{B.6})$$

Na maioria dos casos a matriz \mathbf{R} não pode ser determinada analiticamente. Mesmo assim, \mathbf{R} pode ser aproximado se assumir que o sistema dado pela Equação B.1 é expresso na forma de um sistema linear com mudanças periódicas (Gökçek, 2004) definidas por:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}(t_0 + kh)\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}(t_k)\mathbf{v}(t) \quad \forall \quad t \in [t_0 + lT + kh, t_0 + lT + (k+1)h] \quad (\text{B.7})$$

para $l = 0, 1, 2, \dots$ e $t \geq t_0$. Além disso, $h = \frac{T}{n_h}$ é uma amostra do tempo, $k = 0, 1, 2, \dots, n_h - 1$ e n_h são inteiros positivos. Assumindo que o sistema é linearmente invariante no tempo durante a amostra de tempo h .

Assim, a matriz de monodromy \mathbf{R}_c de um sistema mudado periodicamente, Equação B.7, pode ser dada por n_h integrações sucessivas e aproximações de \mathbf{R} em \mathbf{R}_c .

$$\mathbf{R} \approx \mathbf{R}_c = \prod_{k=0}^{n_h-1} e^{\mathbf{A}(t_k)h} = e^{\mathbf{A}(t_{n_h})h} \dots e^{\mathbf{A}(t_k)h} \dots e^{\mathbf{A}(t_0)h} \quad (\text{B.8})$$