**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**
**FACULDADE DE MATEMÁTICA**

AMANDA COUTO DA COSTA

# ALGUMAS POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DA ÁREA DO CÍRCULO

**UBERLÂNDIA-MG**

**2018**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**
**FACULDADE DE MATEMÁTICA**

AMANDA COUTO DA COSTA

# ALGUMAS POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DA ÁREA DO CÍRCULO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à disciplina TCC II, do Curso de Matemática, da Universidade Federal de Uberlândia, sob a orientação da Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco Matos, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de licenciada em Matemática.

**UBERLÂNDIA**
**2018**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

# ALGUMAS POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DA ÁREA DO CÍRCULO

Amanda Couto da Costa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à disciplina TCC II, do Curso de Matemática, da Universidade Federal de Uberlândia, sob a orientação da Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco Matos, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Aprovação em:

**Banca Examinadora:**

Drª. Fabiana Fiorezi de Marco  Assinatura: ____________________
Instituição: Universidade Federal de Uberlândia

Dr.ª. Maria Teresa Menezes de Freitas  Assinatura: ____________________
Instituição: Universidade Federal de Uberlândia

Dr. Germano Abud  Assinatura: ____________________
Instituição: Universidade Federal de Uberlândia

# Dedicatória

*Dedico esse trabalho a Deus, aos meus pais Urbano e Aparecida e ao meu irmão Gustavo pelo apoio, amor e carinho em minha vida.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me sustentado e dado forças em todos os momentos de minha vida, pois o mérito de todas minhas conquistas com certeza deve-se a Ele, o Senhor de minha vida.

À querida e dedicada orientadora Prof.ª Dr.ª Fabiana Fiorezi de Marco Matos, pelo acolhimento, por em meios aos desafios da pesquisa me auxiliar e dizer palavras de encorajamento e de persistência. Foi muito enriquecedor a aprendizado que tive com ela em relação ao papel do professor como educador e pesquisador.

Aos meus pais, Aparecida e Urbano, e ao meu irmão, que me apoiaram a seguir sempre em frente, dos meus objetivos e projetos. Sou muito grata pelo amor e por estarem sempre do meu lado.

Ao professor Antônio Carlos por me ajudar emprestando livros para meus estudos e, ao professor Marcos Bronzi por me auxiliar com sugestões de como se fazer o cálculo da área do círculo.

Ao professor Daniel Cariello, por me ajudar na parte da história da matemática, por me indicar materiais e a me explicar de modo mais profundo sobre o nexo conceitual da fórmula da área do círculo.

Aos meus professores Arlindo José de Souza Junior, Fabiana Fiorezi de Marco Matos e Maria Teresa Menezes de Freitas das minhas disciplinas de estágio, por todo aprendizado que possibilitaram na minha formação como professora de matemática

À Prof.ª Janaina Aparecida de Freitas, pelo apoio que me deu para o desenvolvimento das aulas com seus alunos e por seu apoio durante a ministração da aula.

À Escola Municipal Professor Sérgio de Oliveira Marquez, por me possibilitarem o desenvolvimento deste estudo.

Aos alunos, que carinhosamente e com grande entusiasmo se envolveram na atividade proposta.

Não poderia deixar de dedicar meus estudos à João Pedro da Ponte, Regina Célia Grando, Dario Fiorentini e Manoel Oriosvaldo de Moura por todos os estudos que fazem parte do que sou, hoje, enquanto professora-pesquisadora e por tantos outros estudos que estão por vir.

Com certeza, essa experiência me proporcionou grandes aprendizados na minha formação como futura professora de matemática, educadora, pesquisadora, no desenvolvimento da minha escrita de textos e artigos, e na minha concepção sobre o ensinar matemática.

# Resumo

Neste trabalho é apresentada um estudo desenvolvido na Universidade Federal de Uberlândia-UFU, em torno de duas perspectivas metodológicas: A Aula Investigativa e a Atividade de Ensino. O estudo em questão teve o intuito de responder a seguinte pergunta: Quais as diferenças e semelhanças entre a aula investigativa e a atividade de ensino no trabalho com o conceito matemático: área do círculo, para alunos de Ensino Fundamental? Os objetivos deste estudo foram: a) analisar os impactos que a investigação matemática e a atividade de ensino podem proporcionar no ensino da área do círculo; b) fazer um estudo comparativo entre essas duas metodologias; c) promover melhorias das práticas metodológicas do professor em sala de aula; e, d) realizar uma proposição efetiva dessas duas propostas do ambiente escolar, para assim haver uma análise da teoria com a prática de ensino. Foi desenvolvida uma atividade de ensino sobre a área do círculo, utilizando elementos da história da matemática e o jogo como recurso desencadeador de uma situação-problema, bem como uma aula investigativa sobre a área do círculo, com a utilização de material manipulável, com estudantes do 9ºano do ensino fundamental. Almeja-se que os relatos e análises discorridas nesse texto, possam ser de grande contribuição para a formação de professores e para o aperfeiçoamento do ensino da Matemática.

**Palavras-chave:** Atividade de Ensino, Aula Investigativa, Ensino fundamental, Área do círculo, História da matemática, Jogo no ensino da matemática.

# Abstract

This paper presents a study developed at the Federal University of Uberlândia-UFU, around two methodological perspectives: The Investigative Class and the Teaching Activity. The study in question was intended to answer the following question: What are the differences and similarities between the investigative class and the teaching activity in the work with the mathematical concept: area of the circle, for Elementary School students? The objectives of this research were: a) to analyze the impacts that the mathematical investigation and the teaching activity can provide in the teaching of the area of the circle; b) make a comparative study between these two methodologies; c) to promote improvements in the methodological practices of teachers in the classroom; and, d) to make an effective proposal of these two proposals of the school environment, in order to have an analysis of the theory with the practice of teaching. A teaching activity was developed on the area of the circle, using elements of the history of mathematics and the game as a resource triggering a problem situation, as well as an investigative class on the circle area, using manipulative material with students of the 9th grade of elementary school. It is hoped that the reports and analyzes discussed in this text can be of great contribution to the training of teachers and to the improvement of the teaching of Mathematics.



**Keywords:** Teaching Activity, Investigative Classroom, Elementary School, Circle Area, History of Mathematics, Game in Teaching Mathematics.

# Lista de figuras

# Lista de quadros

# Lista de siglas

**AOE**: Atividade Orientadora de Ensino.

**AE:** Atividade de Ensino.

**BNCC:** Base Nacional Comum Curricular

**E.F:** Ensino Fundamental.

**PCN:** Parâmetros Curriculares Nacionais.

**TCC:** Trabalho de Conclusão de Curso.

**UFU:** Universidade Federal de Uberlândia.

# Sumário

# Introdução

A Matemática é o alfabeto que Deus usou para construir o universo.
Galileu Galilei

Esse Trabalho de Conclusão do Curso (TCC), busca identificar semelhanças e diferenças entre duas propostas metodológicas e a abordagem delas em torno do ensino da área de uma região circular. A escolha desse tema surgiu devido a uma atividade realizada na disciplina de Estágio 2, onde foi ministrada uma aula investigativa (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006), sobre a Área do Círculo. A partir dessa experiência, foi gerado grande interesse em estudar de forma profunda, outras estratégias de ensino e seu efeito no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, em particular, com um conceito associado à geometria, a área do círculo.

Nos anos finais do ensino fundamental, é notória, a dificuldade dos alunos em conteúdos vinculados à geometria. Sobre essa realidade, os autores Almoulouc, Monrique e Campo (2004) apontam que:

> Apesar de a geometria ser um ramo importante da Matemática, por servir principalmente de instrumento para outras áreas do conhecimento, professores do ensino fundamental apontam problemas relacionados tanto ao seu ensino quanto à sua aprendizagem. Talvez por isso solicitem, sempre que questionados a respeito do ensino de geometria, cursos de extensão que fazem reflexões de suas práticas pedagógicas (p.94).

Lorenzato (1995), aponta algumas razões para o problema do ensino da geometria, como por exemplo: i) falta de preparo de alguns professores, em relação aos conhecimentos geométricos necessários para ensinar alguns conteúdos de matemática; e, ii) a omissão de alguns docentes, por causa da “exagerada” importância que desempenha para eles, o livro didático. Segundo esse autor, muitos docentes em suas práticas de aulas, se limitam a utilização desse recurso, por conveniência ou descrédito em relação ao sistema educacional, que os submetem a uma grande jornada de trabalho.

Mediante ao contato com as realidades do ensino fundamental durante a graduação e também nas experiências como estudante, foi possível perceber que muitos docentes desenvolvem um ensino de geometria, baseado na mera utilização de fórmulas. Em relação a esse fato, Fainguelernt (1995) ressalta que o docente precisa ter a preocupação em construir um “caminho” para a dedução dessas fórmulas. As autoras Almeida e CostaCurta (2010) apontam a relevância e a importância do professores proporem em suas aulas, situações que propiciem uma “integração dos conceitos algébricos com os conceitos aritméticos.” (p.16).

Muniz (2004) faz ponderações relevantes sobre esse assunto. Ele explica que a geometria surgiu devido a necessidades em problemas como: demarcação de terras, prevenção do estoque de água e construção de instrumentos de trabalhos e propõe que no ensino atual os docentes façam um resgate da motivação cultural para o surgimento dos conceitos relacionados à geometria, tendo como suporte os registros da história da Matemática.

É baseado em todas essas considerações acima, que pretende-se abordar o conceito da área do círculo, não de uma forma meramente aplicativa, como pode-se perceber nas experiências vivenciadas nos Estágios Supervisionados, mas de forma significativa ao aluno.

Diante do exposto, o presente trabalho teve como enfoque o seguinte questionamento:

*Quais as diferenças e semelhanças entre a aula investigativa e a atividade de ensino no trabalho com o conceito matemático: área do círculo, para alunos de Ensino Fundamental?*

Com base no que foi exposto, o objetivo central desse estudo foi identificar semelhanças e diferenças entre essas duas propostas metodológicas e a abordagem delas em torno do ensino de uma região circular. E como objetivos específicos pretendeu-se:

- Analisar os impactos que a aula investigativa e a atividade de ensino podem proporcionar no ensino da área do círculo.
- Compreender a resolução de problemas dentro dessas duas perspectivas metodológicas.
- Realizar uma proposição de aula das duas propostas metodológicas no ambiente escolar e fazer uma análise entre a teoria com a prática de ensino.

Em relação à organização, esse trabalho está subdivido da seguinte forma:

Na seção 1, há um diálogo com referências teóricas relacionadas aos pressupostos teóricos, sobre Atividade Ensino (MOURA, 2010) e Aula Investigativa (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006) e realizada uma análise de semelhanças e diferenças entre essas duas perspectivas metodológicas e sua relação com a resolução de problemas.

A seção 2, irá abordar o jogo como recurso desencadeador de um problema e suas possibilidades no ensino da Matemática.

Na seção 3, é abordada uma discussão acerca da proposta que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), apresentam em relação ao trabalho sobre a área do círculo, além de um resgate histórico de como as civilizações primitivas, em especial, os egípcios calculavam a área do círculo e as possíveis interpretações de especialistas, sobre esse assunto.

Na seção 4, encontra-se a descrição da proposta da aula investigativa e da atividade de ensino.

A seção 5, contém a análise dos resultados obtidos e exposição dos desafios a resposta da questão norteadora, dos caminhos percorridos até a efetibilidade da ação e, por fim, uma reflexão sobre o processo de ensinar Matemática e da importância do professor assumir o papel de educador pesquisador.

Espera-se que esse trabalho tenha contribuição para a prática de professores, venha possibilitar o avanço do ensino de uma Matemática de forma significativa que aproxime o aluno de sua realidade, além de poder auxiliar os docentes com ideias de situações de ensino nas quais todos possam vivenciar momentos significativos na abordagem do conceito da área do círculo.

## Seção 1. Atividade de Ensino e Aula Investigativa na Resolução de problemas: Semelhanças e diferenças.

Nessa seção, são discorridas reflexões acerca da resolução de problemas no ensino da Matemática e abordados aspectos relacionados à Atividade de Ensino e à Aula Investigativa.

### 1.1. A Resolução de Problemas e a Matemática

Na humanidade, sempre houve a necessidade de se resolver problemas do cotidiano. Como Polya (1997, p.2) afirma:

> Resolver problemas é da própria natureza humana. Podemos caracterizar o homem como o 'animal que resolve problemas'; seus dias são preenchidos com aspirações não imediatamente alcançáveis. A maior parte de nosso pensamento consciente é sobre problemas; quando não nos entregamos a simples contemplação, ou devaneios, nossos pensamentos estão voltados para algum fim.

A Matemática pode ter surgido nesse panorama, como ferramenta auxiliadora da humanidade para resolução de questões ligadas a vida, como por exemplo, a representação de quantidades, a repartição igualitária de terras, a criação de unidades de medida dentre outros conceitos ligados a matemática. Em relação a esse fato, Marco (2004, p.10) alega:

> Concordamos com Caraça (2000), quando afirma que o homem, constantemente, depara-se com dilemas – diante dos problemas históricos que deram origem aos conceitos matemáticos como o caso da criação dos números racionais – e terá que elaborar processos que o leve a soluções satisfatórias.

No âmbito da Educação Matemática, segundo Onunchic (1999), houve diferentes movimentos que surgiram em torno de concepções a respeito da resolução de problemas. Para uma maior compreensão de como foi todo esse processo, discorreremos acerca desse assunto, fazendo ao final, uma breve análise.

No texto "Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas", Onunchic (1999) aborda que, com o advento da industrialização, surgiu-se a necessidade de técnicos para fazerem operações com as máquinas, e isso exigia possuir alguns conhecimentos matemáticos. Devido a esse panorama, a matemática ensinada nas escolas caracterizava-se por uma preocupação com o treino de habilidades, um processo mecânico que não levava em consideração a compreensão dos conceitos.

Em vista disso, a autora relata que, foram surgindo outros movimentos educacionais, com novas concepções que criticavam algumas questões do modelo de ensino da Matemática vigente naquele momento. Algumas tendências vigoraram por algum tempo, outras de forma breve, e ainda há traços marcantes de algumas delas até os dias de hoje.

Onunchic (1999) alega que o surgimento da temática da resolução de problemas na Matemática, teve início, em meio as buscas de formas, que pudessem auxiliar os alunos a entenderem o que estava sendo ensinado. Autores como Andrade (1998), apontam que o primeiro fundamento teórico, em relação a esse assunto, foi a partir da edição do livro "A arte de resolver problemas", de George Poyla, em 1995. O modelo de resolução de problemas por ele elaborado, sugeria os seguintes processos: i) Compreensão do problema; ii) estabelecimento de um plano de ação; iii) execução do plano de ação; iv) retrospecto.

Além disso, o autor Andrade (1998) afirma que naquela época, muitos pesquisadores como Blomm e Broder, defendiam que o ensino de problemas deveria ser tratado com foco nas estratégias de resolução, com o objetivo de obter um bom desempenho na solução final.

> Esses pesquisadores, para melhor captarem suas estratégias de resolução estudaram processos de resolução utilizados por estudantes bem sucedidos. Para que isso fosse possível os alunos deveriam pensar em voz alta durante o processo. Com base em suas pesquisas defenderiam que o ensino de resolução de problemas deveria centrar na estratégias para se resolver problemas [...] (ANDRADE,1998, p.74).

Nos anos 70, a autora Onunchic (1999) relata que, a resolução de problemas foi ganhando destaque no ensino da Matemática, e, foi nesse momento, que nos EUA, promulgou-se o documento: *"An Agenda for Action Recommendations for School Mathematics"* que convocava todos os interessados, para buscar uma melhor educação para a matemática para todos. Nesse documento recomendava-se que resolver problemas deveria ser o "foco da matemática escolar dos anos 80", e que as habilidades na resolução de problemas seria o indicador da eficiência de uma pessoa, na competência de matemática.

Ainda segundo essa autora, nessa mesma época, continuaram-se os estudos sobre a resolução de problemas, porém com o enfoque nas estratégias de resolução. Apesar disso, a situação da aprendizagem dos alunos não melhorou, pois ainda continuavam sem compreender o que era ensinado.

> Essa falta de concordância ocorreu possivelmente pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de resolução de problemas ser o foco da matemática escolar. (ONUNCHIC, 1999, p.206).

Schoreder e Lester (1989), e outros pesquisadores, defendiam três formas de abordar a resolução de problemas: a) Ensinar **sobre** a resolução de problemas; b) ensinar **à** resolver problemas e; c) ensinar a matemática **através** da resolução de problemas. A primeira, diz respeito, ao ensino sobre o que é resolução de problemas; e a segunda, se refere, ao ensino de estratégias para chegar a uma solução e, a última , aborda a resolução de problemas como meio para situações que promovam a formalização de um determinado conceito matemático. Analisando cada uma delas, percebe-se que essas três formas se sobrepõe tendo em vista, que o objetivo não é somente aprender Matemática resolvendo problemas, mas aprender matemática para a resolução de problemas.

Onunchic (1999) alega que a partir da década de 90, começaram a surgir autores que começaram a defender novas formas de se trabalhar com a resolução de problemas. Um desses, foi Andrade (1998), que expôs o pensamento de que a resolução de problemas pode ser tratada como algo mais abrangente, um meio para o ensino da Matemática.

A própria autora Onunchic (1999, p. 207), relata que para ela o problema deve ser olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento, no qual "os problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos, antes de sua apresentação na linguagem formal".

> Ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não só como um propósito de se aprender matemática, mas também, como uma primeiro passo para se fazer isso.

O que podemos concluir de todo esse contexto histórico é que o modo como o ensino de problemas era trabalhado, tinha e tem relação, com a concepção de cada um sobre o que é um problema.

Para os que defendiam a resolução de problemas, a partir de estratégias de resolução descritas por Poyla (1978), é possível perceber que o problema, para eles, se limitava a resolução de um exercício matemático. Já, para aqueles que viam a resolução de problemas como uma metodologia (ANDRADE, 1998), percebiam que o problema seria um "instrumento" utilizado pelo professor para abordar um conceito, de forma que o aluno pudesse fazer relações da situação exposta com sua realidade.

É perceptível a grande contribuição que Poyla (1978), teve no aspecto da resolução de problemas, mas o que defende-se nesse texto é que a resolução de problemas é muito mais abrangente do que o que ele propôs, pois não se resume à busca de estratégias de resolução de problemas, mas sim como defende Andrade (1998), como uma metodologia de ensino que dê suporte ao professor para criar situações que permitam a aprendizagem.

## 1.2. Um estudo sobre Atividade de Ensino e Aula Investigativa

Para a compreensão sobre o que é aula de investigação (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006) será discorrido, no primeiro momento, sobre a classificação segundo o autor, de um problema e de um exercício. Será exposto acerca da investigação matemática e como, a partir de suas características, se desenvolve uma aula investigativa.

Segundo Ponte (2005, p. 3), a aprendizagem na matemática está relacionada ao:

> [...] desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem conhecimento de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando ideias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo.

Ainda o autor afirma, que essa aprendizagem resulta de dois fatores: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam. Porém ele faz a seguinte observação:

> Nesta perspectiva, ensinar e aprender são independentes – o professor pode ensinar sem que os alunos aprendam. Mas também se pode assumir a perspectiva oposta – se os alunos não aprenderam, é porque o professor não ensinou (PONTE, 2005, p.2).

Essa ideia sobre atividade do aluno, está relacionada, segundo Ponte, Fonseca e Brunheira (1999), a atividade do matemático. Em ambos, há bastante diferenças como o grau de conhecimentos por exemplo, mas a atividade em si de se resolver algum tipo de problemas pode ser segundo ele, equivalentes.

> Ou seja, será possível estabelecer um paralelo entre a atividade do matemático e a actividade do aluno na aula de Matemática? Obviamente que os conhecimentos que o matemático possui, os processos de que faz uso, o grau de especialização que atinge, o tempo e o interesse que dedica à sua actividade são em dimensão incomparáveis com os do aluno. No entanto, a actividade de resolução de problemas de ambos pode ser equivalente quanto à sua natureza. Hadamard (1945) refere, por exemplo, que a análise do trabalho de um aluno que resolve um problema pode revelar apenas a existência de "uma diferença de grau, uma diferença de nível" (p. 104) em relação ao trabalho de invenção do matemático (PONTE, FONSECA e BRUNHEIRA, 1999, p.1).

Ainda acerca da atividade em sala de aula, Ponte (2005) afirma que para desenvolvê-la, é preciso que o professor formule tarefas adequadas. Segundo Ponte (2005), as tarefas são o que definem o ensino da Matemática na sala de aula. Essas podem ser classificadas como: i) **fechadas:** aquelas onde é claramente dito o que é dado e o que está sendo pedido; e, ii) **abertas:** aquelas que possuem um grau de indeterminação significativo no que é dado ou/e no que é pedido.

Esta classificação pode ser estruturada na seguinte figura:


**Fig. 1 - Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura**
**Fonte:** Ponte (2005, p.8)

Para o autor, os exercícios e problemas são tarefas fechadas, ou seja, no qual são claros os dados da questão e o que é pedido. A grande diferença é que na resolução dos exercícios, o aluno aplica diretamente os conhecimentos e técnicas que adquire sem grande esforço cognitivo. Já os problemas exigem reflexões, questionamentos e tomadas de decisões, ou seja, são os que não possuem um processo imediato para resolução de uma questão. Percebe-se que essa definição de Ponte (2005) se aproxima à de Polya (1962):

> Pólya (1962) procurou também descortinar o significado de problema, num sentido amplo, fazendo distinção entre o problema em si e o processo de resolução. Uma pessoa tem um problema quando procura "conscientemente uma certa acção apropriada para obter um objectivo claramente concebido mas não atingível de maneira imediata." (Vol. I, p. 117) (p.2).

A exploração e a investigação para Ponte (2005), são tarefas abertas, que nem sempre é claro onde se quer chegar. Em ambas tarefas, os alunos irão analisar eventos ou situações em relação a matemática. A grande diferença é em relação ao grau de desafio da resolução. Se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planejamento, estaremos perante uma tarefa de exploração. Caso contrário, será uma investigação.

Investigar na Matemática, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.13) significa: "descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades."

Uma investigação se desenvolve em torno de um ou mais problemas propostos pelo professor. Ainda, segundo o autor, quando se depara com um problema, o objetivo natural é resolvê-lo. Porém, a investigação matemática não se atenta apenas para isso, mas em descobrir alguma relação ou propriedade existente. Um exemplo disso, relatado pelo autor, foi da experiência do português Carlos Braumann com seu aluno. Ele calculou as raízes de vários números complexos e ao somar essas raízes percebeu que a soma era nula, e, através disso, encontrou uma nova propriedade que era verdadeira.

Além disso, Ponte, Fonseca e Brunheira (1999), fazem diferenças entre a investigação e a resolução de problemas (POLYA, 1962). Ele alega:

> [...] na resolução de problemas tal como é entendida inicialmente, o objectivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objectivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida mas não se sabe qual será o ponto de chegada. (p.6)

Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), definem 4 momentos principais na investigação matemática:

> **1º)** Reconhecimento do problema e a formulação de questões.
> **2º)** Organização dos dados e formulação de hipóteses.
> **3º)** Realização de testes.
> **4º)** Justificação e avaliação do resultado do raciocínio.

Para esses autores, a investigação matemática pode ser classificada como um tipo de atividade que pode ser desenvolvida dentro da sala de aula e que pode-se desenvolver em 3 fases: i) Introdução da tarefa: a proposta da atividade pode ser feita de forma oral ou escrita; ii) Realização da investigação: pode ser individual, aos pares ou com toda turma; iii) Discussão dos resultados: momento em que os alunos relatam o trabalho realizado.

A aula de investigação, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), é desenvolvida de modo que o professor seja mediador da atividade e proponha questionamentos aos alunos que os levem a resolver o problema e a atingir o objetivo da aula.

> Com a intervenção do professor, a investigação na sala de aula pode ser desencadeada e assim permanecer. Porém, se os alunos não tiverem seu apoio e acompanhamento, a exploração iniciada não pode prosseguir para as demais etapas. (LAMONATO, PASSOS, 2011, p.65).

Em relação à atividade de ensino, uma das primeiras coisas que Moura (2010) expõe é acerca do processo de aprendizagem. Ele concorda com Vigotski (2001), de que o desenvolvimento é dependente não apenas das aptidões e habilidades biológicas do indivíduo- (atividade individual), mas também das condições culturais que ele se encontra- (atividade coletiva). Como Moura (2010, p. 208) diz: “É neste movimento do social ao individual que se dá a apropriação de conceitos e significações, ou seja, dá-se a apropriação da experiência social da humanidade”.

Moura também alega que é durante a atividade, no coletivo, que as pessoas se apropriam de significados culturais e criam um sentido pessoal para aquilo que fazem.

Um exemplo dado por Moura (2010), é do sapateiro. Os momentos de produção dos sapatos, levaram o artesão a pensar em como medir, quais ferramentas e materiais deveria utilizar, e qual a melhor forma para fazer o sapato. Todos esses conhecimentos adquiridos pelo sapateiro não podem ser compreendidos por um indivíduo que apenas compra o sapato, pois o mesmo, não teve uma participação nos momentos da elaboração e confecção dos sapatos.

A história da humanidade também passou por um processo semelhante. No Egito, com as inundações do rio Nilo, muitos perdiam suas terras. Devido a esse fato, era necessário haver uma nova delimitação das terras de forma igualitária, para que no momento do cálculo dos impostos das terras, que eram arrecadados para o Faraó, não houvesse injustiça. Esses problemas das enchentes do Nilo, e das demarcação de terras, deu origem a um dos conceitos matemáticos muito utilizados em nosso dia a dia: as frações. (RODRIGUES, 2015).

Diante desses exemplos, Moura (2010), propõe que na escola se busque trabalhar com os conceitos de forma que os alunos possam desenvolver um significado individual e possam compreender como foi historicamente a sua construção e sua contribuição nas atividades humanas do dia a dia.

> Entender a escola como o lugar social privilegiado para a apropriação de conhecimentos produzidos historicamente passa necessariamente por assumir que a ação do professor deve estar organizada intencionalmente para esse fim. (MOURA, 2010, p. 212).

Moura (2010), também propõe o ensino da Matemática por meio da "Atividade Orientadora de Ensino". Ela se compõe em duas partes: a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem. Observe o esquema abaixo:

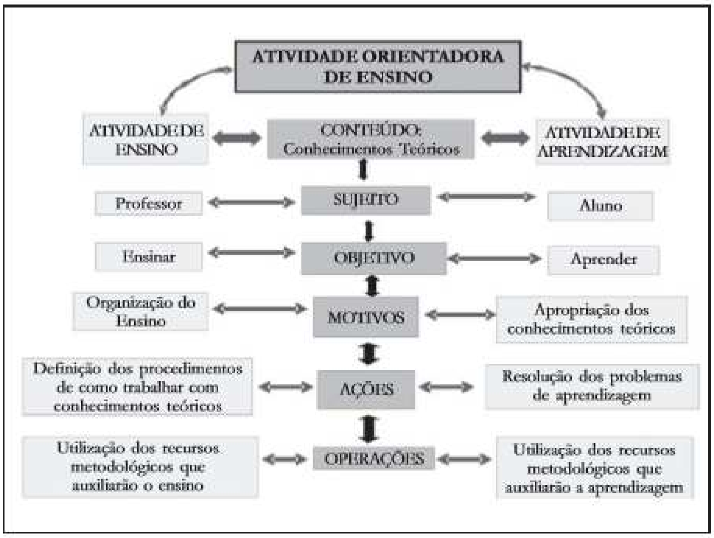


**Fig. 2- AOE: Relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem**
**Fonte:** Moura (2010, p.219)

A **atividade de ensino**, no esquema acima, se refere ao processo de organização do ensino pelo professor na ação de ensinar, e essa organização perpassa desde a definição dos objetivos de suas aulas, definição de procedimentos para abordar o conceito, até a escolha de recursos didáticos a serem utilizados.

A **atividade de aprendizagem**, se refere ao processo de aprendizagem dos alunos na compreensão dos conteúdos, da relação dos conceitos com seu cotidiano da estratégia da resolução dos problemas propostos.

Em função desses entendimentos, Moura (2010, p.217), alega que:

> A AOE mantém a estrutura de atividade proposta por Leontiev ao indicar uma necessidade (apropriação da cultura), um motivo real (apropriação do conhecimento historicamente acumulado), objetivos (ensinar e aprender) e propõe ações que considerem as condições objetivas da instituição escolar.

Para o autor, há um fator central que colabora para o desenvolvimento das atividades: no caso do professor, é a necessidade de ensinar, e, por parte do aluno, a necessidade se aprender.

Na atividade de ensino pode ser, inserida a situação desencadeadora aprendizagem.

> Na Atividade Orientadora de Ensino as necessidades, motivos, objetivos, ações e operações do professor e dos estudantes se mobilizam inicialmente por meio da situação desencadeadora de aprendizagem. Esta é organizada pelo professor a partir dos seus objetivos de ensino que, como dissemos, se traduzem em conteúdos a serem apropriados pelos estudantes no espaço de aprendizagem. (MOURA, 2010, p. 221).

A situação desencadeadora de aprendizagem segundo Moura (2010), se refere à proposição de uma atividade que tenha como intuito, mobilizar os alunos mediante ao problema proposto de forma que eles, tenham dentro do processo, uma razão ou uma necessidade que gerou uma motivação para ele participar do que foi proposto.

Essa necessidade está diretamente ligada com a relação que o próprio aluno faz com o problema apresentado. Se o aluno percebe que a situação apresentada exige dele uma solução imediata, então, a questão central da situação foi um problema para ele. Caso contrário, o aluno perceba que a situação proposta pelo professor não foi um problema, ele não se mobilizará e não estará em atividade e, portanto, não houve aprendizagem.

Ainda, segundo o autor, o fato do aluno participar voluntariamente da atividade, está intimamente ligado, com as relações que o mesmo faz da situação proposta com suas atividades do cotidiano.

Por meio das intervenções do professor por meio dos questionamentos, os alunos formularão conclusões e conseguirão chegar à construção de um conceito, que então poderá ser formalizado pelo professor.

> Essas ações, por sua vez, ao serem desencadeadas, considerarão as condições objetivas para o desenvolvimento da atividade: as condições materiais que permitem a escolha dos recursos metodológicos, os sujeitos cognoscentes, a complexidade do conteúdo em estudo e o contexto cultural que emoldura os sujeitos e permite as interações sócio-afetivas no desenvolvimento das ações que visam o objetivo da atividade - a apropriação de certo conteúdo e do modo geral de ação de aprendizagem (MOURA, 2010, p. 221).

Tendo em vista, a importância do aluno em fazer relação da situação proposta com sua cultura, o autor expõe a necessidade que também haja, durante o processo da atividade, o resgate de elementos da história da Matemática que foram importantes para a formação do conceito matemático trabalhado em questão.

> A situação desencadeadora de aprendizagem deve contemplar a gênese do conceito, ou seja, a sua essência; ela deve explicitar a necessidade que levou a humanidade à construção do referido conceito, como foram aparecendo os problemas e as necessidades humanas em determinada atividade e como os homens foram elaborando as soluções ou sínteses no seu movimento lógico-histórico (MOURA, 2010, p. 223).

O desenvolvimento dessa atividade é feito de modo coletivo, podendo haver no início momentos individuais, porém a maior parte sendo feita em grupos.

> Na Atividade Orientadora de Ensino, a solução da situação problema pelos estudantes deve ser realizada na coletividade. Isso se dá quando aos indivíduos são proporcionadas situações que exijam o compartilhamento das ações na resolução de uma determinada situação que surge em certo contexto (MOURA, 2010, p. 224).

A partir dessas considerações, pode-se fazer o seguinte quadro indicando possíveis aproximações entre as duas propostas metodológicas:

**Quadro 1- Aproximações entre AOE e Aula Investigativa**

| | **Atividade Orientadora de Ensino** | **Aula Investigativa** |
|---|---|---|
| **Papel do professor** | Mediador | Mediador |
| **Utilização da história da Matemática** | Necessariamente | Não necessariamente |
| **Foco principal** | Análise se o problema foi uma necessidade ao aluno, caso contrário, o aluno não esteve em atividade e não houve problema | Análise do problema pelos alunos |
| **Formas de disposição dos alunos** | Coletiva | Individual ou Coletiva |

**Fonte:** Elaboração da autora

Temos assim, alguns indícios de semelhanças e diferenças em relação à perspectiva da aula investigativa e a atividade de ensino. Em ambas, há a presença do professor orientando a atividade com questionamentos.

Enquanto a atividade investigativa pode ser feita tanto de modo individual quanto em grupos, na atividade de ensino trabalha-se de forma coletiva, tendo em vista que todos temos limitações e que, assim, como foi na construção da cultura, ideias compartilhadas e complementadas com os outros, resultam numa melhor forma de se alcançar um objetivo.

Além disso, pode-se perceber que a atividade investigativa está centrada na resolução de um problema matemático e, a atividade de ensino é mais abrangente, pois analisa a relação entre a relação existente entre o aluno e o problema, percebendo como o indivíduo age em determinada situação proposta, definindo se para ele houve um problema ou não. Este fato é o que realmente o mobiliza para participar de determinada proposta e em buscar caminhos para encontrar uma solução.

Percebe-se que a atividade de ensino tem como questão primordial os conhecimentos culturais e, por isso, precisa haver o resgate de elementos da história da Matemática envolvidos na construção de um determinado conceito. Na aula investigativa, não se trabalha, necessariamente com a história da matemática, as estratégias de resolução de problemas são o enfoque principal dessa perspectiva.

É importante ressaltar que a breve análise aqui realizada não tem o objetivo de sobrepor uma perspectiva sobre a outra, mas sim de compreender como se dá o processo de ensino nas duas metodologias quais as semelhanças e diferenças existentes e, como suas características influenciam no processo de aprendizagem do aluno em matemática.

# Seção 2. O Jogo como recurso desencadeador de uma situação de aprendizagem

Nesse capítulo será abordada a utilização do jogo no ensino da Matemática, e seu papel como desencadeador de um conceito, conforme proposto por Moura (2010).

## 2.1. O Jogo no ensino da Matemática

No mundo educacional, muitas dificuldades são encontradas no que diz respeito ao ensino da Matemática. Acerca desse fato, Fiorentini e Miorin (1990) afirmam que, o aluno se depara com uma Matemática totalmente distante de seu cotidiano e complexa, exteriorizando uma certa repulsa pelo conteúdo trabalhado. Em contrapartida, os professores estão cada vez mais desanimados por não obterem resultados satisfatórios.

Mediante esse contexto, esses autores afirmam que muitos docentes buscam novos recursos ou materiais, visando que os mesmos possam reverter esse quadro tão alarmante. Uma problemática é:

> O professor nem sempre tem clareza das razões fundamentais pelas quais os materiais ou jogos são importantes para o ensino-aprendizagem da matemática e, normalmente são necessários, e em que momento devem ser usados (FIORENTINI, e, MIORIN, 1990, p.1).

Ainda sobre esse fato, os autores ponderam que:

> [...] costuma-se justificar a importância desses elementos apenas pelo caráter "motivador" ou pelo fato de se ter "ouvido falar" que o ensino da matemática tem de partir do concreto ou, ainda, porque através deles as aulas ficam mais alegres e os alunos passam a gostar da matemática (p.1).

Apesar disso, não podemos desconsiderar que os jogos não podem servir como instrumento auxiliar no ensino da Matemática. Ao analisar as necessidades e atividades do ser humano, percebe-se que muitas tem um caráter lúdico. Como Grando (2000, p.1) afirma:

> As atividades lúdicas são inerentes ao ser humano. Cada grupo étnico apresenta sua forma particular de ludicidade, sendo que o jogo se apresenta como um objeto cultural. Por isso, encontramos uma variedade infinita de jogos, nas diferentes culturas e em qualquer momento histórico.

Ainda, essa mesma autora, afirma, que no caso da criança uma das suas principais atividades, envolve justamente o brincar, e o jogo pode ser um recurso em sala de aula, utilizado com o intuito de integrar o ensino da matemática com as necessidades básicas infantis. Como

Grando (2000, p.20) pondera: “o jogo se apresenta como uma atividade dinâmica que vem satisfazer uma necessidade da criança, dentre outras, de "movimento", ação”.

Vemos então, que não é o jogo em si que pode colaborar ou não com o processo de aprendizagem, ou seja,

> O professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem, estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina (FIORENTINI, e, MIORIN, 1990, p.4).

Marco (2004), aponta que o importante é a maneira como o professor utilizará os recursos didáticos, para promover momentos enriquecedores de aprendizagem de matemática para os alunos. Uma dessas maneiras é por meio da exploração do jogo para a resolução de problemas. Para isso, o professor precisa ter objetivos claros do que pretende atingir, ou seja, o conceito matemático que pretende ensinar, caso contrário a utilização desse recurso se limita ao “jogo pelo jogo”.

> Os jogos têm suas vantagens no ensino da Matemática desde que o professor tenha objetivos claros do que pretende atingir com a atividade proposta. Não concordamos com o fato de que o jogo, propiciando simulação de problemas, exija soluções imediatas, como defendem os PCN´s. Entendemos que as situações vivenciadas durante a partida levam o jogador a planejar as próximas jogadas para que tenha um melhor aproveitamento. Ressaltamos que isso só ocorrerá se houver intervenções pedagógicas por parte do professor. (MARCO, 2004, p.43).

Moura (1991) afirma, também, que a má utilização do recurso do jogo no ensino pode colaborar para que o mesmo perca seu papel em relação a ludicidade.

> Ao tomarmos o jogo como ferramenta do ensino, ele passa a ter novas dimensões, e é isto que nos obriga a classificá-lo considerando o papel que pode desempenhar no processo de aprendizagem. O jogo pode, ou não, ser jogo no ensino. Ele pode ser tão maçante quanto a resolução de uma lista de expressões numéricas: perde a ludicidade. No entanto, resolver uma expressão numérica também pode ser lúdico, dependendo da forma como é conduzido o trabalho. O jogo deve ser jogo do conhecimento, e isto é sinônimo de movimento do conceito e de desenvolvimento (MOURA, 1991, p.49).

Em relação a utilização do jogo no ensino da matemática, Grando (2000) define sete momentos principais e essenciais, que são: familiarização do jogo, reconhecimento das regras, jogar para garantir as regras, intervenção pedagógica verbal, registro do jogo, intervenção escrita, e, jogar com competência.

O primeiro momento, diz respeito, ao contato dos alunos com o jogo, para o conhecimento de seu material. O segundo trata do esclarecimento das regras do jogo, para sua compreensão e para o bom funcionamento do jogo. O terceiro, alia-se ao quarto momento, onde os alunos passam a jogar; o professor verifica se todos compreenderam a regra, fazendo intervenções orais.

No quinto momento, devem ser realizados pelos alunos, o registro das informações ou até mesmo a tradução das percepções dos alunos para a linguagem matemática. Após isso, vem o importante momento no qual o professor propõe problemas por escrito sobre situações possíveis do jogo e, aproveita o material utilizado para explorar e investigar com os alunos, o conteúdo matemático previamente planejado durante a elaboração da aula. E, por fim, depois de todo esse processo, o último momento é aquele onde os alunos jogam novamente utilizando todo aprendizado que obtiveram.

## 2.2. O papel do jogo como recurso "disparador" de conceitos

Conforme Moura (1991), como na resolução de problemas, podemos classificar o jogo como recurso de ensino de duas maneiras: os jogos como desencadeadores de aprendizagem e os jogos de verificação. A diferença não está no jogo em si, mas na forma como ele será utilizado em sala de aula pelo professor. O jogo de verificação refere-se aqueles que são utilizados para a fixação de um conteúdo.

> O primeiro se diz respeito aqueles que não permitem a solução espontânea imediata, isto é, que exigem do aluno o estabelecimento de um plano de ação, com a busca de conhecimentos anteriores, através da comparação com situações semelhantes à proposta ou da síntese de conhecimentos anteriores, de modo que haja uma ruptura no conhecimento anterior. No segundo grupo estão aqueles problemas cuja solução deve ser buscada no emprego das definições e algoritmos discutidos em aula. São problemas que chamaríamos de aplicações, pois para resolvê-los é necessário apenas recorrer a referências anteriores, como, por exemplo, os apontamentos de aula (MOURA, 1991, p.49).

O jogo como desencadeador de conceitos (MOURA, 1991), refere-se à intencionalidade do docente para utilizá-lo como introdutor ou disparador de um conceito matemático. É importante ressaltar que ação da intervenção pedagógica com o jogo só poderá ter um resultado satisfatório se o professor fizer intervenções durante todo o trabalho com esse material, verificando e dialogando sobre as necessidades daqueles que estão aprendendo.

Para a melhor compreensão do desenvolvimento do jogo como desencadeador é apresentada uma comparação entre o jogo e a resolução de problemas no ensino, segundo Moura (1991).

Uma das primeiras semelhanças que o autor destaca é a respeito da necessidade do indivíduo tanto numa situação de jogo quanto na resolução de um problema. O aluno só irá jogar se nele houver um desejo, assim como só irá resolver um problema se tiver uma situação desafiadora que o incentive e desenvolva a consciência da necessidade de se achar uma solução. Além dos motivos do indivíduo, existem os motivos externos que o mobilizam a jogar ou a resolver um problema. No primeiro caso, o conflito existente é a competição e, no segundo, é a resolução.

A segunda semelhança está no processo de desenvolvimento da proposta como mostrado no esquema abaixo:

Problema → Problema desencadeador → Construção do conceito → Aplicação do conceito

Jogo → Jogo desencadeador → Reinvenção do jogo → Descoberta de estruturas

Quanto à resolução de problemas segundo Poyla (1945) e, quanto ao trabalho com o jogo, conforme Moura (1991), há também algumas semelhanças entre as etapas que constituem cada uma dessas situações.

**Quadro 2- Etapas da resolução de problemas e do jogo**

| **ETAPAS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO POLYA (1978)** | **ETAPAS DO JOGO SEGUNDO MOURA (1991)** |
|---|---|
| • Compreensão do problema<br>• Estabelecimento de um plano<br>• Execução do plano<br>• Retrospecto | • Compreensão do jogo<br>• Estabelecimento de estratégias<br>• Execução das jogadas<br>• Avaliação do jogo |

**Fonte:** Elaboração da autora

Assim, tomando por análise a resolução de problemas discutida na literatura, percebe-se que nem sempre na vida cotidiana, o aluno segue as etapas sugeridas por Poyla (1978) para se resolver alguma questão. Por exemplo, no caso de uma pessoa que perdeu um ônibus para ir à escola. Se, caso, não tiver um compromisso inadiável é provável que ela se mantenha com calma. Caso ela tenha uma prova, por exemplo, esse impasse lhe gerará uma necessidade que precisará de imediato ser resolvida. Mediante a esses fatores, o indivíduo buscará caminhos para solucionar seu problema, seja tentando pegar outro ônibus, ou ligando para alguém, dentre tantas outras possibilidades. Na vida real nem sempre o indivíduo seguirá as etapas sugeridas por Poyla (1978), para a resolução de um problema.

Isso também ocorre na resolução de problemas em sala de aula, pois nem sempre o aluno utilizada essas etapas sugeridas por Poyla (1978), por exemplo, pelo simples fato de aquele “problema” proposto pelo professor, ser para o aluno um “pseudo problema” (MOISÉS, 1999), mais conhecido como exercício.

Já na utilização do jogo, segundo Moura (1991), percebe-se uma outra forma de trabalhar a resolução de um problema, já que em primeiro lugar, é importante o professor procurar gerar uma necessidade no aluno, de querer jogar e, se possível, de vencer a partida. Por outro lado, as estratégias possibilitarão o desenvolvimento de caminhos para chegar ao objetivo final, e nesse momento também é o qual o professor pode, por meio das jogadas dos alunos, fazer questionamentos e explorar conceitos matemáticos.

Claro, que a necessidade do aluno pode também não estar ligada apenas durante o momento do jogo, mas por exemplo, na construção do próprio material. A necessidade do aluno, nesse caso, seria construir o tabuleiro para poder jogar; e, é nesse momento que o docente pode intervir buscando indagar os alunos sobre os caminhos para se fazer isso, fazendo as intervenções necessárias para direcionar para o conceito matemático desejado. A avaliação se dá, tanto no momento do aluno pensar no que ele fez de errado nos momentos das jogadas, ou processo escolhido para a confecção do tabuleiro que pode não ter sido viável.

Percebe-se, então, que o recurso do jogo integra dois fatores importantes: i) a possibilidade de gerar uma necessidade ao aluno, para que veja a situação do jogo como um problema que ele precisa resolver, e, ii) propiciar uma aprendizagem de modo prazerosa.

# Seção 3. Parâmetros Curriculares Nacionais, Base Nacional Curricular Comum e a história da Matemática: um estudo sobre a área do círculo

Nessa seção, serão analisadas as orientações que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) e a Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2017), trazem para o ensino da área do círculo. Será feito também uma exposição de como algumas sociedades primitivas calculavam a área do círculo; e as possíveis interpretações para esses resultados. Para a compreensão de como desenvolver uma atividade de ensino, utilizando aspectos da história da Matemática será apresentada uma proposta de uma aula, utilizando o jogo Mancala como disparador de conceitos. Essa proposta estará disponível nos anexos.

## 3.1. Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são documentos norteadores de propostas educacionais, e buscam orientar, sugerir e exemplificar maneiras de como introduzir ou abordar conteúdos em sala de aula, de forma mais clara e que colabore com um ensino de qualidade.

Nos PCN de Matemática (BRASIL, 1998), não há um bloco direcionado exclusivamente para o ensino da área do círculo, mas apenas um tópico e de forma breve: Orientações Didáticas para 3º e 4º Ciclo: Espaço e forma.

Em relação ao conteúdo, área do círculo, o PCN (BRASIL, 1998) discorre sobre a importância da exploração de aspectos históricos ligados à geometria, e, nesse caso, cita um exemplo de como os egípcios prescreviam o cálculo da área de uma região circular:

> Se te dizem para calculares a área de uma porção de terra circular, cujo diâmetro é de 9 varas, como farás para calcular sua superfície? Calcularás assim: deves subtrair 1 do diâmetro, que é a nona parte dela. Restam 8 varas; deves, então multiplicar 8 vezes 8, o que resulta 64. Vês que a superfície é de 6 kha (60) e 4 setat. Como se pode observar nessa segunda situação, o processo utilizado consiste em subtrair 1/9 do diâmetro e em elevar o resultado ao quadrado. Tal cálculo dá para $\pi$ um valor de 3,1605 (BRASIL,1998 , p.128).

A suposição para os egípcios chegarem a esses resultados era por:

> [...] procedimentos gráficos: no primeiro caso, transformando o triângulo em um retângulo equivalente e, no caso do círculo, inscrevendo-o em um quadrado. Nesse caso, parece que o cálculo era feito por aproximações com a ajuda dos 4 triângulos determinados pela inscrição (BRASIL, 1998, p.128).

Apesar dessas informações, percebe-se que o documento é bem superficial em relação ao detalhadamento dos resultados que os egípcios chegaram, deixando uma grande lacuna de como saber mais profundamente sobre esse processo e como utilizar esses fatos históricos na organização de uma aula relacionada a essa temática.

### 3.2. Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).

Na BNCC (BRASIL, 2017), na parte de Matemática, há uma introdução que apresenta as unidades temáticas: Números e operações, estatística e probabilidade, grandezas e medidas, geometria.

Em relação a parte da geometria, a BNCC (BRASIL, 2017), faz as seguintes observações:

> [...] sim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área (p.270).
> A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau (p.270).

Percebe-se que nessa parte, a BNCC (BRASIL, 2017), faz uma consideração importante que a geometria não pode se limitar a aplicação de fórmulas. Em relação a questão da área, ainda cita de forma breve, que na história da matemática alguns povos faziam a comparação de áreas de figuras planas.

Em relação a área do círculo, a única observação que encontramos no documento é:

> Nessa fase da escolaridade, os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos, e as de volumes de prismas e de cilindros (BRASIL, 2017, p.271).

Observa-se que no documento, propõe-se que os alunos determinem fórmulas da área do círculo, mas não apresenta maneiras de como fazer isso. Além disso, percebe-se que apesar da BNCC (BRASIL, 2017) propor não limitar o cálculo de áreas por meio de fórmulas, não oferece nenhuma orientação de como fazer isso no caso, em especial, da área do círculo, deixando uma lacuna no entendimento sobre a sugestão apresentada de "equivalência de áreas" utilizada por gregos e mesopotâmios poderia valer para encontrar uma área de uma região circular.

Outra análise importante a se fazer é que no PCN (BRASIL, 1998), houve um melhor detalhadamento de como ensinar aos alunos a entender uma região circular, e, deram breves exemplos de como alguns povos fizeram isso na antiguidade, enquanto que na BNCC (BRASIL, 2017), isso não ocorre.

### 3.3. A área do círculo na história da Matemática

O círculo é uma das formas geométricas mais utilizadas no cotidianos da sociedade, desde os primórdios da civilização. Sobre esse fato, no livro, "Explorando a geometria através da Matemática e da Etnomatemática", as autoras Gaspar, Mauro e Campos (2004) ponderam que:

> O círculo é uma das formas geométricas que aparece em várias civilizações e sociedades associada a rituais religiosos, a astronomia, a arquitetura ou tecelagem. Ele é considerado por alguns historiadores da matemática como o símbolo mais antigo desenhado pelo homem e sua origem remonta à pré-história. (p.4).

Segundo as autoras, muitas maneiras foram encontradas para o cálculo da área do círculo, porém a maioria foram métodos para o cálculo, um pouco complexos, devido ao fato de serem registros da época a qual era dada a importância ao rigor da formalização dos conceitos matemáticos em detrimento das matemáticas desenvolvidas no contexto cultural, que eram feitas sem justificação muito consistente. Apesar de haver poucos registros sobre a área do círculo nos primórdios da civilização, existem relatos bastante interessantes sobre a civilização egípcia, no papiro de Rhind que é um dos documentos que retrata registros da Matemática egípcia.

> O papiro Rhind foi descoberto por volta de 1850 provavelmente nas ruínas de uma pequena construção próxima ao templo mortuário de Ramssés II em Tebas. Foi trazido para Luxor por Alexander Henry Rhind. Após a morte de Rhind o papiro foi comprado pelo Museu Britânico em 1865. Hoje ele é formado por um rolo contendo 14 folhas de papiros com cerca de 40 cm de largura e 23 cm de altura, coladas em um de seus lados perfazendo 513 cm de comprimento mas parece que o rolo original continha 20 folhas. Também é conhecido como papiro Ahmose ou papiro Ahmes em razão de ter sido copiado por volta de 1650 a.C. pelo escriba Ahmose segundo o qual é a cópia de trabalhos mais antigos. Provavelmente trata-se de um registro dos conhecimentos de Imhotep, o lendário físico e arquiteto da época do faraó Djozer da 3a. Dinastia. Ele contém 87 problemas e suas soluções e é considerado a fonte da matemática egípcia mais compreensiva (GASPAR, MAURO e CAMPOS, 2004, p.6).

O método que os egípcios usavam para calcular a área do círculo, aparece nos problemas 41, 42, 43, 48 e 50 do papiro de Rhind. Um desses problemas é apresentado na imagem abaixo:

Neste problema o escriba inclui um círculo com inscrições hieráticas. [Figura 3].

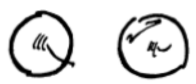

**Figura 3**

**Solução apresentada pelo escriba**:

Remova 1/9 do diâmetro, o restante é 8.

Multiplique 8 por 8; perfaz 64. Portanto, a área é 64.

Assim, podemos inferir que o método usado pelo escriba para calcular a área do círculo pode ser:

"Subtraia do diâmetro sua nona parte e eleve o restante ao quadrado. Esta é sua área."

Em outras palavras o escriba estaria usando a fórmula

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left[\left(\frac{8}{9}\right)d\right]^2$$

onde **d** é o diâmetro do círculo.

**Fig. 3 - Solução egípcia de um problema envolvendo a área do círculo**
**Fonte:** Gaspar, Mauro e Campos (2004, p.8)

Segundo Gaspar, Mauro e Campos (2004), não há de fato um conhecimento sobre o motivo de egípicos realizaram esses cálculos, mas há sim possíveis interpretações de historiadores do porquê eles faziam esses cálculos para achar a área de uma região circular. As suposições existentes envolvem a análise da decoração das paredes que poderia, por exemplo, ter a forma de um octógono. A partir daí, os egípcios poderiam calcular aproximando a área do octógono à área do círculo. Outra interpretação, poderia ser associada com o jogo "mancala", um jogo africano, de estratégias. As autoras , ainda citam,  algumas observações de Gerdes sobre esse jogo:

> Segundo Gerdes, por se tratar de um jogo de estratégias seria natural que um dos participantes enquanto esperasse pelo término da jogada do outro, brincasse com suas peças podendo dentre outras coisas "formar", "transformar" e "contar" padrões geométricos (GASPAR, MAURO e CAMPOS, 2004, p.13).

Entretanto, estudos recentes feitos por Peralta (2014) fazem uma crítica as interpretações dos historiadores sobre o processo do cálculo da área do círculo. O autor ressalta que muitos historiadores,  na tentativa de compreender o processo descrito no Papiro de Rhind, buscaram na matemática atual formas de explicar como poderia ter sido esse processo. Porém, de fato, a matemática dos egípcios não era a mesma de hoje, e por isso não pode-se afirmar que faziam os cálculos de uma região circular a partir de uma fórmula que tinha o diâmetro ou raio, pois nem mesmo, é possível afirmar qual era a ideia para esses povos do que seria uma diâmetro de um círculo.

O que segundo Peralta (2014) podemos ter certeza é que os egípcios naquela época já conseguiam fazer observações em relação ao quadrado e o círculo, que poderiam haver duas áreas uma circular e outra quadrangular que possuíam aproximadamente a mesma medida, e isso, provavelmente, seria o fator que colaborou para dimensionarem a medida da superfície de uma região circular.

> Sobre o conceito de círculo concluímos que: i ) não existe nenhuma definição teórica que explique como o círculo era construído; ii) o círculo seria concebido como uma figura redonda e interna a um quadrado circunscrito; iii) o lado do quadrado circunscrito seria o diâmetro do círculo; iv) somente o diâmetro era usado como parâmetro de descrição de um círculo; e, v) não usavam nem o raio nem o perímetro para caracterizar um círculo. (PERALTA, 2014, p.17).

Percebe-se que existem poucos registros na história da matemática sobre o motivo que povos egípcios calculavam a área do círculo fazendo aqueles procedimentos e como eles conseguiram achar um modo padrão para descobrir a área de uma região circular. Mas mesmo assim, com o pouco material que se tem, é possível que docente consiga, organizar uma aula articulando elementos da história da matemática, analisando com os alunos que figuras de formatos diferentes podem ter mesma área, como os egípcios perceberam, nas suas atividades do dia a dia ou, possivelmente, como citado anteriormente, com o contato de algum jogo que tinham na época.

## Seção 4. Desenvolvimento do estudo

### 4.1. Uma aula investigativa com os alunos

Nesse tópico, será apresentada uma situação de ensino-vivenciada no 1º semestre de 2017, vinculada ao Programa Institucional De Bolsa de Iniciação à Docência[1] (PIBID). É importante ressaltar, que essa aula foi realizada muito antes do início do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) e, a partir dessa experiência, surgiu o interesse em estudar outras metodologias de ensino. Será feita a descrição dessa atividade conforme explicitado no trabalho de Costa e Oliveira (2017).

#### 4.1.1. Conhecendo as turmas

O desenvolvimento da primeira proposta ocorreu no mês de junho de 2017 e foi desenvolvida com três turmas de 9º ano do ensino fundamental, em uma escola municipal de Uberlândia/MG, onde era desenvolvido o projeto do PIBID. A duração da atividade em cada sala foi de: 1 aula de 50 minutos.

#### 4.1.2. Momento da aula

Ao iniciar a aula, foi pedido aos alunos que formassem 5 grupos e definissem um representante. Foram entregues os seguintes materiais: folha sulfite, compasso, tesoura e barbante. A proposta foi feita em grupos, para facilitar a quantidade de material utilizado e para permitir uma interação com os colegas. É importante ressaltar que essa atividade, poderia ser realizada de maneira individual se fosse desejado pelo professor.

##### 4.1.2.1. Proposta da atividade

Foi explicado de forma oral, a proposta da atividade. O problema central era descobrir uma fórmula geral para o cálculo da área do círculo. Naquele momento, de fato, os alunos não tinham a compreensão de um processo imediato para se chegar ao objetivo final, nem mesmo qual seria a resposta final. E foi assim que iniciou- se nossa investigação sob a orientação da professora.

---

[1] O PIBID é uma Política Nacional de Formação de Professores do Ministério da Educação (MEC) que visa proporcionar aos discentes na primeira metade do curso de licenciatura uma aproximação prática com o cotidiano das escolas públicas de educação básica e com o contexto em que elas estão inseridas. O programa concede bolsas a alunos de licenciatura participantes de projetos de iniciação à docência desenvolvidos por instituições de educação superior (IES) em parceria com as redes de ensino.

#### 4.1.2.2. Realização da Investigação

A atividade foi realizada de forma eu a licencianda apresentava os passos para os alunos, e eles realizavam o eu era pedido. Foi solicitado aos grupos, que construíssem, com o compasso um círculo de raio r = 3cm e, que calculassem o comprimento da circunferência, utilizado a fórmula $2\pi r$ . Devido ao pouco tempo para o desenvolvimento da proposta, muitos alunos utilizaram a calculadora. Observou-se que nenhum dos alunos teve dificuldade em calcular o comprimento da circunferência, pois já haviam visto esse conteúdo anteriormente em sala de aula. Os alunos fizeram no caderno o registro desses dados.

Depois disso, foram cortados dois barbantes do mesmo comprimento da circunferência de raio 3cm. Um dos barbantes foi colado em volta da circunferência desenhada e o outro pedaço deixado separadamente, pois seria utilizado posteriormente pelos alunos. Após isso, foi pedido aos alunos para cortarem mais barbantes de tamanhos diferentes para construir circunferências concêntricas cada vez menores que seriam coladas dentro do círculo de raio 3 cm. A cada barbante cortado eram feitas cópias do mesmo tamanho que eram deixadas separadamente, para serem utilizadas durante o processo.

Durante a realização dessa tarefa, foi questionado por que eles não poderiam somente rodar o barbante inteiro, sem cortar, para formar as circunferências. Um dos alunos, respondeu que se não fosse feito dessa maneira não seriam formadas circunferências. A licencianda falou que poderia ser feito dessa forma, mas que os alunos precisavam seguir os passos solicitados. Mesmo sem nenhuma instrução do próximo passo, muitos alunos começaram a alinhar os barbantes que tinham ficado separados de modo a formar um triângulo. O interessante desse fato é que justamente o que os estudantes fizeram era o próximo passo a ser sugerido. A figura abaixo mostra um dos trabalhos dos alunos:

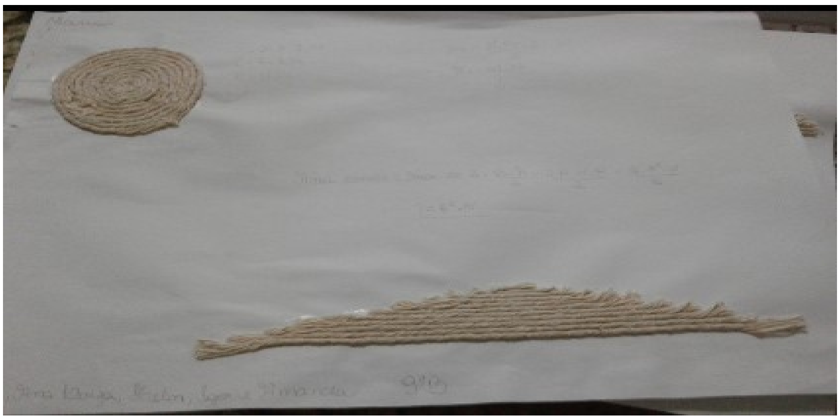

**Fig. 4 - Atividade produzida pelos alunos**
**Fonte:** Costa e Oliveira (2014, p.5)

Para os que ainda não haviam feito, foi orientado para alinharem os barbantes do maior para o menor.

#### 4.1.2.3. Discussão dos resultados

Mediante a proposta, foram encaminhados os seguintes diálogos:

**Licencianda:** *Qual foi a figura formada?*
**Resposta dos grupos:** *Um triângulo.*
**Licencianda:** *Qual a relação existente entre a área do círculo e o triângulo?*
**Resposta dos grupos:** *Que a área do círculo era igual a área do triângulo.*
**Licencianda:** *Por que podemos afirmar isso?*
**Apenas alguns responderam:** *Porque eles tem a mesma quantidade de barbante.*

Diante do exposto, pode-se afirmar que a sala chegou à conclusão que a área do círculo era igual a área do triângulo, pela construção feita, e, que calculando a área do triângulo, seria descoberto a área do círculo. Então, foi questionado:

**Licencianda:** *Como calculamos a área do triângulo?*
**Resposta dos grupos:** $A = \frac{(\boldsymbol{Base})*(\boldsymbol{Altura})}{\mathbf{2}}$.
**Licencianda:** *A base do triângulo corresponde a que elemento do círculo?*
**Alguns alunos do grupo disseram:** *Ao seu comprimento do círculo de raio 3 cm.*
**Licencianda:** *E a altura?*

Esse foi o momento que os alunos tiveram mais dificuldade. Para a orientação dos mesmos, foi proposto que imaginassem um corte feito no círculo até o centro da circunferência de raio 3 $cm$, construída no início. Eles perceberam que se fosse esticado cada barbante, seria formado o triângulo que tinham construído anteriormente, e que a altura do triângulo correspondia a o raio do círculo maior.

A partir dessa observação foram feitos os seguintes cálculos pela professora no quadro:

$$Base = Comprimento\ do\ círculo\ de\ raio\ r\ de\ 3\ cm = 18{,}84\ cm.$$

$$Altura = Raio = 3\ cm.$$

Então:

$$Área\ do\ círculo = Área\ do\ triângulo = \frac{Base*Altura}{2} = \frac{18{,}84*3}{2} = 28{,}26\ cm^2.$$

Mediante isso, os alunos foram questionados de como ficaria a fórmula da área do círculo para uma circunferência de raio R qualquer.

A licencianda, então, fez o mesmo processo:

$$Base = Comprimento\ do\ círculo\ de\ raior\ R\ cm = 2\pi R\ cm.$$
$$Altura = Raio = R\ cm.$$

Então:

$$Área\ do\ círculo = Área\ do\ triângulo = \frac{Base * Altura}{2} = \frac{2\pi R * R}{2} = \pi r^2 cm^2.$$

#### 4.1.2.4. Avaliação da aula investigativa

A atividade realizada com as turmas dos 9º anos, teve resultados positivos, tendo em vista que a maioria dos alunos conseguiu chegar à conclusão desejada. Percebe-se que essa aula foi uma aula investigativa (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006), pois os alunos participaram da atividade investigativa de dedução da área do círculo.

Além disso, a participação dos alunos em grupo foi um fator de extrema importância para o alcance dos objetivos, uma vez que cada um foi complementando as ideias acerca dos questionamentos que eram propostos pela professora.

## 4.2. Experiência com uma atividade de ensino

Nesse tópico, será apresentada uma atividade de ensino desenvolvida no mês de março de 2018, em uma escola municipal na cidade de Uberlândia, com os alunos dos 9º anos A e B, do Ensino Fundamental. A escolha dessa escola, foi por ser uma escola na qual a licencianda já estava familiarizada, pois havia participado do projeto do PIBID. Ela conversou com a professora, que havia sido sua supervisora no PIBID, sobre a proposta de aula que precisava desenvolver para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Ela, de muito bom grado, concordou e disse que era possível realizar a proposta com sua turma.

Com objetivo de preservar a identidade da professora, será utilizada apenas a primeira letra do seu nome: J.

### 4.2.1. Uma prática coletiva

O trabalho coletivo é muito importante entre os docentes. Damiani (2008), aponta a necessidade de haver um compartilhamento de experiências, de ideias, de trabalho em conjunto entre os professores, para que as práticas de ensino possam ser aperfeiçoadas. A professora J. além de ter sido supervisora da licencianda do PIBID, é uma docente que busca desenvolver atividades diferenciadas, como por exemplo, um projeto de arte, no qual ela relaciona a pintura africana com a matemática. A professora J. também acredita na importância do trabalho coletivo entre os professores e no compartilhamento de experiências. Esse aspecto colaborou muito no desenvolvimento da proposta, pois ela fez sugestões em vários momentos do desenvolvimento da mesma e, com certeza, essa experiência foi um aprendizado tanto para ela como para a licencianda.

### 4.2.2. Conhecendo as turmas

No planejamento inicial, pretendia-se realizar a atividade com apenas uma das turmas, devido ao tempo que havia sido destinado para o desenvolvimento da proposta. Porém, quando definiu-se com a professora J., a data para a realização dessa aula, ela solicitou que fosse desenvolvida nos dois 9$^{os}$ anos, por entender a importância de não excluir nenhum aluno da proposta.

Em relação aos alunos, o contato estabelecido com as salas foi em momentos durante o projeto do PIBID na escola, nos quais a licencianda trabalhava com aula extraclasse com esses mesmos alunos. Mesmo assim, a licencianda perguntou à professora J. como eram os alunos nas aulas de Matemática. Segundo a professora, os alunos são participativos e envolvidos. Em cada sala haviam 28 alunos, na faixa etária dos 13 à 14 anos.

Em uma das salas, havia um aluno com deficiência visual. A licencianda já o conhecia de outros espaços sociais que foram frequentados em comum. A professora J. propôs de fazer uma reunião para poder planejar alguma forma de incluir esse aluno na proposta, porém devido às dificuldades de horário e da data da aula estar próxima, não foi possível. Apesar disso, e da falta de experiência da licencianda com alunos especiais, esta elaborou uma forma de incluir o aluno na discussão da turma, como também no momento do jogo que seria realizado naquele dia.

Com objetivo de preservar a identidade do aluno com deficiência visual, se fará apenas a abreviação da primeira letra do seu nome: R.

### 4.2.3. Atividade de ensino desenvolvida nesse estudo

A proposta da atividade de ensino foi:

**<u>I. Construção do tabuleiro do Shisima</u>**

**Conteúdo:** Área do Círculo.

**Material:** Papel cartão, e peças circulares feitas de E.V.A.

**Observação:** O tabuleiro precisaria ter uma área de aproximadamente 530 cm$^2$.

**Objetivo inicial:** Confeccionar o tabuleiro do Shisima.

**Objetivos específicos:** 1) Possibilitar que os estudantes percebam que para a confecção do tabuleiro do jogo, eles precisariam:

**a)** Encontrar uma forma de desenhar o tabuleiro na forma de octógono, lembrando que poderiam utilizar apenas os materiais entregues e o lápis para fazer o desenho do tabuleiro.

**b)** Perceber que, apesar de existir formas de se fazer isso, o octógono do tabuleiro é regular, ou seja, possui os 8 lados congruentes, logo sem uma régua ficaria difícil fazer esse desenho.

**c)** Buscar uma figura plana, que tenha a área próxima à do octógono, nesse caso o círculo, para auxiliar no desenho do octógono.

**d)** Perceber que para desenharem um círculo 530 $cm^2$ precisariam saber como faz o cálculo da área do círculo.

**e)** Perceber que o contorno do octógono se aproxima do contorno do círculo, e que o segmento que parte do centro até o lado do octógono (apótema), se aproxima do raio.

**Conclusão:** Partindo do pressuposto da história da matemática, a ideia intuitiva que os egípcios utilizaram para o cálculo da área do círculo foi a da comparação com uma área que fosse próxima à do círculo. Percebe-se que o elemento fundamental para achar a área do círculo se resume em: i) buscar uma figura conhecida que tenha a área próxima a círculo; ii) perceber nessas duas figuras quais elementos estão relacionados**.**

Logo, se os alunos conseguiriam fazer isso, o objetivo seria **satisfeito.**

**Observação**: Para encontrar a fórmula da área do círculo, seria necessário ainda fazer uma manipulação algébrica na fórmula do octógono para transformar na fórmula da área do círculo. Porém de imediato, já teriam-se as seguintes hipóteses:

**Hipóteses: 1)** Os alunos não saberiam fazer a transposição da relação encontrada entre os elementos do círculo e do octógono para a fórmula do octógono, por não terem nenhuma experiência com esse tipo de atividade, além desse tipo de dedução ser considerada pela licencianda, muito abstrata para alunos de ensino fundamental, mesmo de 9º ano.

**2)** Os alunos não teriam o conhecimento da fórmula de polígonos para se calcular a área do octógono, porém no momento que fosse feita a comparação entre o octógono e o círculo seria apresentada a fórmula da área do octógono.

### 4.2.4. Momento da aula - 9º A

A aula foi realizada na sala de aula, no 1º e no 4º horários.

No primeiro horário, a professora J., apresentou a licencianda aos alunos e disse que iria desenvolver uma atividade naquele dia, com o jogo africano Shisima.

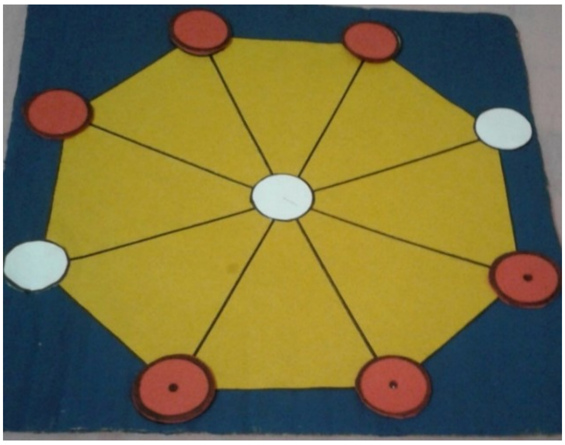

**Fig. 5- Tabuleiro do jogo: Shisima.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

Foi pedido para os alunos formarem grupos, e foi entregue para cada grupo , um papel cartão e as peças circulares feitas de EVA. Enquanto os alunos se organizavam, foi entregue ao aluno R., o tabuleiro do Shisima, já montado, mas com algumas modificações realizadas pela licencianda.

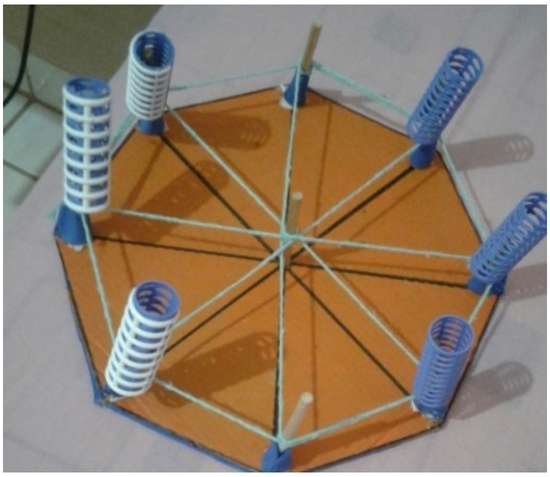

**Fig. 6 - Tabuleiro adaptado do Shisima.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

Ao perguntar â professora de apoio do aluno R. sobre a confecção do jogo, esta respondeu que talvez teria ficado melhor se tivesse sido colocado os barbantes não suspensos como estava, pois assim o aluno conseguiria por meio do tato, manipular melhor o jogo. Este foi mais um momento de formação para a licencianda, uma vez que não tinha experiência com sala de aula, nem com alunos com deficiência visual.

Os alunos estavam muito empolgados para saber como fazia para jogar, porém havia um problema inicial:

**Problema inicial dos alunos** (MOURA, 2010): Os alunos necessitavam confeccionar o tabuleiro para poder jogar. Todos os alunos estavam interessados em descobrir como se jogava, por isso ficaram mobilizados para participar da construção do material.

**i) Familiarização com o material** (GRANDO, 2000): Nesse momento foi feito o reconhecimento do material com os alunos. Foi explicado, que o formato do tabuleiro é o de uma figura fechada, limitada por segmentos de reta, que não se cruzam, exceto em suas extremidades. A professora J. perguntou os alunos:

> **Professora:** Qual o nome que é dado, na matemática, a uma figura fechada, limitada por segmentos de reta, que não se cruzam, exceto em suas extremidades?
> **Resposta dos alunos:** Um polígono.
> **Professora:** Quantos lados esse polígono tem?
> **Resposta dos alunos:** 8 lados.
> **Professora:** O que podemos dizer da medida dos seus lados desse octógono do tabuleiro?
> **Resposta de alguns alunos:** São iguais professora!

A professora foi complementado que os triângulos desenhados dentro do octógono eram isósceles, ou seja, possuem apenas dois lados de mesma medida.

#### 4.2.4.1. Momento da confecção do Shisima

**a) Construção do tabuleiro:** Os estudantes foram solicitados a discutirem em grupo e buscarem ideias de como construir o tabuleiro, utilizando somente o material entregue. Não poderiam utilizar outra ferramenta como régua, por exemplo. Além disso, eles deveriam registrar as conclusões do grupo em uma folha.

**b) Apresentação das soluções encontradas**: Nesse momento, cada grupo expôs suas sugestões oralmente para a turma, lendo o que tinham escrito no papel. Segue a explicação dada pelos grupos.

> **Grupo 1:** *Pensamos, professora, em primeiro desenhar um asterisco.*
> **Licencianda:** *Por que um asterisco?*
> **Grupo 1:** *Porque percebemos que as retas que foram desenhadas dentro do octógono tinham esse mesmo formato.*
> **Licencianda:** Não são retas, são segmentos de reta. *E depois, o que fizeram?*
> **Grupo 1:** *Depois ligamos os pontos.*
> **Licencianda:** *Vocês escreveram que os segmentos tinham que ser proporcionais. O que significa isso?*
> **Grupo 1:** *Que cada segmento precisaria ter a mesma medida.*

> **Escrita dos alunos no papel:** "Fazer um asterístico com retas proporcionais. Depois ligue os pontos".

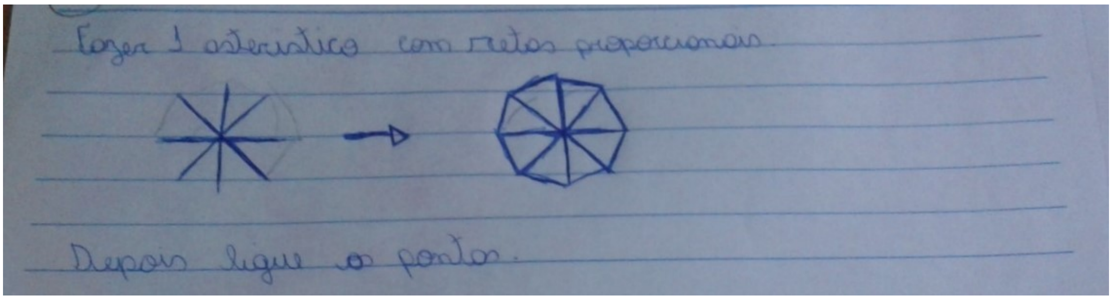


**Fig. 7- Registro do grupo 1, do 9º A.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**Grupo 2:** *Pensamos em pegar as bolinhas, colocar espaçadas de modo que ao ligar umas às outras formasse o octógono.*

**Escrita dos alunos no papel:** "Com auxílio das bolinhas".

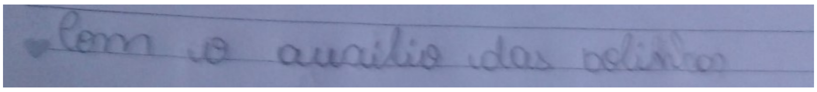


**Fig. 8- Registro do grupo 2, do 9º A.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

***Grupo 3:*** Professora, pegamos as bolinhas e colocamos no papel cartão na forma de um octógono e depois desenhamos.

**Escrita dos alunos no papel:**
" 1. Marcar as bolinhas na forma de um octógono.
2. Desenhar a mão livre".

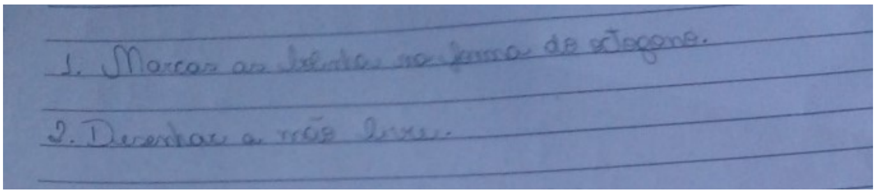


**Fig. 9- Registro do grupo 3 do 9º A.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**Grupo 4:** *Fizemos igual aos dois grupos anteriores, pegamos as bolinhas, tentamos colocar de forma a formar um octógono e depois ligamos.*

**Escrita dos alunos no papel:** "Usando as bolinhas para fazer um formato de um octógono, temos contornamos".

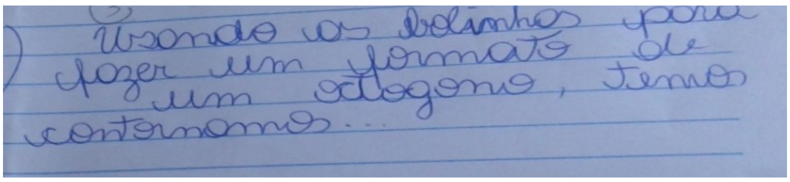


**Fig. 10- Registro do grupo 4, do 9º A.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**Grupo 5:** *Pensamos assim: Pegamos nosso lápis e utilizamos como régua. Fizemos três pontos e construímos um triângulo. Ai desenhamos mais 7 triângulos, de forma a ter um octógono.*

**Escrita dos alunos no papel:**
"Usar o lápis como régua;
Fazer pontos e depois liga-los;
Fazer triângulos regulares (8 para ser exato) todos juntos e fazer o octógono".

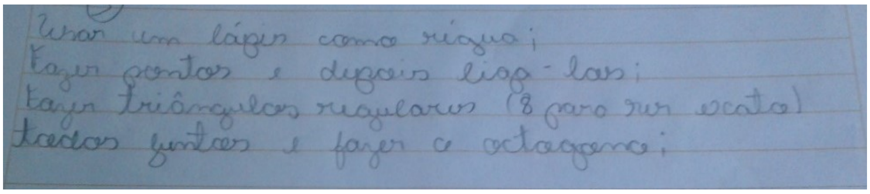

**Fig. 11 - Registro do grupo 5, do 9º A.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**Grupo 6:** *Pegamos as bolinhas e colocamos espaçadas e depois ligamos.*

**Escrita dos alunos no papel:**
"Colocar primeiro as bolinhas para depois fazer as linhas."

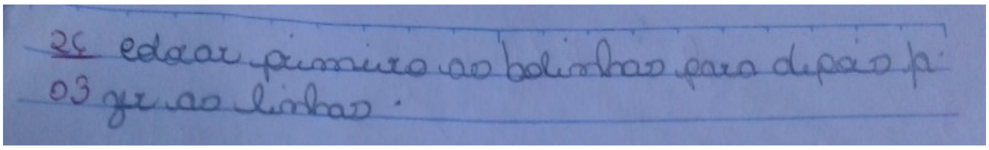

**Fig. 12 - Registro do grupo 6, do 9º A.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**c) Verificação dos resultados:** Após esse momento, a licencianda analisou com a sala, as alternativas sugeridas pelos grupos.

**Grupo 1. Ideia geral:** Fazer um asterisco e ligar os pontos.

**Licencianda:** *E ai turma o que acharam da proposta feita por esse grupo? É um caminho bom e viável?*

Toda a turma achou que sim. Então foi indagado:

**Licencianda:** *O caminho encontrado pelo grupo foi bem interessante, mas será que as retas desenhadas para fazer o asterisco são da mesma medida?*
**Grupo 1:** *Sim, porque tentamos utilizar a linha do caderno como base.*
**Licencianda:** *Mas pensemos: quando fossemos desenhar no papel cartão no qual não há linhas, poderia ocorrer da medida de um segmento ficar maior que a outra, já que não podemos utilizar a régua para conferir a medida ou para desenhar como garantir que quando fosse ligado os pontos os lados do octógono ficariam da mesma medida?*

Os alunos concluíram que realmente, poderia haver casos de isso acontecer e não conseguirem que os lados do octógono fossem da mesma medida.

**Grupo 2, 3, 4 6. Ideia geral:** Utilização da bolinhas para fazer o contorno do octógono e depois ligar-lás.

> **Licencianda:** *Quatro grupos tiveram basicamente a mesma ideia. É uma solução bem interessante, porém existe um problema. Como ter certeza que os espaços entre as bolinhas eram iguais? Necessariamente precisariam ser, pois esses espaços seriam onde estariam desenhados os lados do octógono e seus lados são todos de mesma medida.*
> Os alunos concordaram que isso poderia ser um problema na construção do tabuleiro.

**Grupo 5. Ideia geral:** Utilização do lápis como régua, ou seja, como "unidade de medida".

> **Licencianda:** *Muito interessante essa proposta!!! Realmente, se com o lápis fosse desenhado dois segmentos formando 90° e os outros dois formando 45° tendo que a medida dos segmentos seriam a medida do tamanho do lápis, poderia dar certo. Porém, estabeleci como condição que só poderiam ser utilizados os materiais entregues por mim e o lápis apenas para riscar os segmentos.*

Foram parabenizados todos os grupos, pelas variadas e brilhantes ideias. Porém, foi feito uma reflexão com os alunos que mesmo assim, algumas estratégias deixariam dúvidas, se os lados do octógono iriam ter a mesma medida.

A licencianda, sugeriu aos alunos que pensassem em alguma figura (triângulos, retângulos) que auxiliasse na construção do tabuleiro. Nesse momento, ela pediu o auxílio do aluno R. para que ajudasse toda turma a resolver essa questão.

Para ao aluno R. foi entregue, nesse momento, as 3 figuras abaixo feitas de EVA:

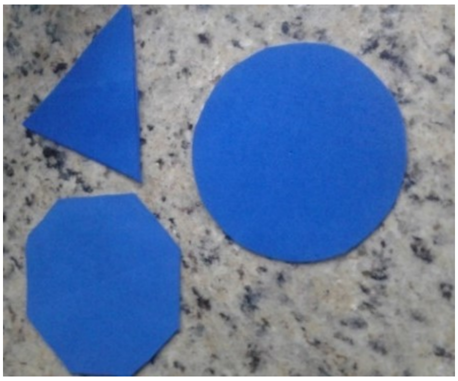

**Fig. 13 – Modelo das figuras utilizadas de EVA.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

Após o momento de contato de R. com as figuras, foi pedido para que mostrasse para a turma qual das figuras (círculo ou triângulo) ao ser colocada em cima do octógono, deixaria menos espaço sem ser preenchido. Ele apresentou o círculo, e, então, foi concluído que a área do círculo se aproximava do octógono.

Como a área do círculo era **próxima** a do octógono, foi explicado que eles poderiam desenhar o círculo e a partir dele buscar uma forma de desenhar o octógono. Nesse momento, foi feita uma pergunta por um dos alunos.

> **Aluno A:** *Professora, pode utilizar o compasso?*
> **Licencianda:** *Não.*
> **Licencianda:** *Turma, a área, ou seja, o espaço dentro do círculo desenhado tem que medir aproximadamente 530 $cm^2$, pois foi estipulado que o tamanho do tabuleiro deveria ter essa medida. Vocês conseguiriam fazer isso com o compasso?*
> **Turma:** *Não.*
> **Aluno A:** *Uai! como vamos então descobrir isso? Está muito difícil.*
> **Licencianda:** *Se eu tivesse pedido para vocês desenharem um quadrado com área 100 $cm^2$, como vocês fariam?*
> **Aluno B:** *Desenharíamos um quadrado com lado 10 cm.*
> **Licencianda:** *Por que?*

Os alunos não conseguiam explicar porque o quadrado teria lado 10 cm. Foi então o momento que a professora J, lembrou aos alunos a fórmula do quadrado e que assim eles conseguiriam saber que o lado precisaria ser 10 cm.

Foi, então, proposto aos alunos que assim como no quadrado, eles precisariam descobrir como calcular a área do círculo. Antes deles fazerem isso, foi revisado no quadro, os principais elementos do círculo: seu raio e o seu contorno, ou seja, seu comprimento, que era calculado pela fórmula $2\pi r$. A partir disso, foi pedido para os alunos tentarem ver que relações os elementos do octógono tinham com os do círculo.

#### 4.2.4.2. Propostas dos grupos

Foi analisado o que os grupos fizeram e como pensaram. Somente dois grupos conseguiram esboçar alguma coisa, o restante ficou um pouco confuso nessa parte.

> **Grupo 1:** *Professora, pensamos assim: a área do octógono mede 530 $cm^2$, dividimos por 8, e achamos 66,25 $cm^2$.*
> **Licencianda:** *O que significa 66,25 $cm^2$?*
> **Grupo 1:** *Não conseguimos entender bem o que fizemos.*
> **Licencianda:** *Vocês acharam a área de cada triângulo desenhado dentro do octógono.*
>
> **Escrita do grupo no papel:** "A área total do octógono é 530 $cm^2$, com tem 8 triângulos, dividimos por 8 que é 66,25 $cm^2$".

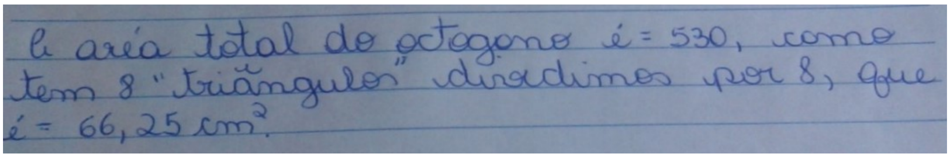


**Fig. 14 –Outro registro do grupo 1, do 9º A.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**Grupo 3:** *Professora, pensamos assim: a área do círculo mede 530 $cm^2$. Uma maneira de calcular a área do octógono seria A=* $\frac{8*b*h}{2}$*. Como a área do círculo é igual poderíamos utilizar a mesma fórmula.*
**Licencianda:** *No círculo há base? Há altura? Quais são os elementos do círculo?*
**Grupo 3:** *Hum, o raio.*

Escrita do grupo no papel*:* Medir todos os ângulos".

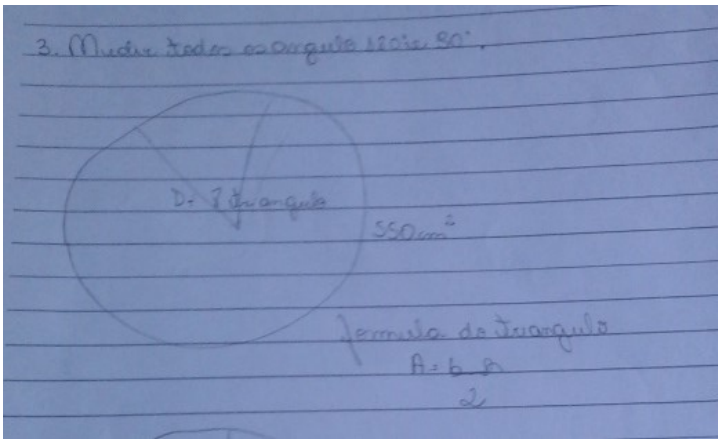


**Fig.15 – Outro registro do grupo 3, do 9º A.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

O objetivo não era que os alunos deduzissem a fórmula, pois como foi explicado acima, os alunos não teriam conhecimento suficiente e nem algum tipo de experiência que os auxiliasse a fazer essa dedução. O objetivo era que, já que os alunos perceberam que a área do octógono era próxima à do círculo, identificassem que o perímetro do octógono se aproximava do contorno do círculo e, que a medida do centro do octógono até seu lado (apótema), aproximava da medida do raio.

Além disso, o horário estava ao final e, então, a licencianda explicou o objetivo da atividade e que queria que os alunos chegassem a essa conclusão que o perímetro do octógono se aproximava do comprimento do círculo e que a apótema de aproximava da medida do raio.

A licencianda fez os seguintes passos no quadro:

$$O\ tabuleiro\ do\ jogo\ \acute{e}\ da\ forma\ de\ um\ oct\acute{o}gono(\ um\ pol\acute{i}gono)\ regular\ .$$

<u>Relação fundamental para o cálculo da área do círculo</u>**:**

$$\acute{a}rea\ do\ oct\acute{o}gono \cong \acute{a}rea\ do\ c\acute{i}rculo\ ;$$

$$per\acute{i}metro\ do\ oct\acute{o}gono\ \cong comprimento\ do\ c\acute{i}rculo\ ;$$

$$ap\acute{o}tema \cong raio;$$

Fazendo a dedução formal matematicamente temos:

$$\acute{A}rea\ do\ pol\acute{i}gono\ regular = \frac{p*a}{2}, sendo\ a = ap\acute{o}tema\ .$$

A área do octógono pode ser calculada por essa fórmula. Como a área do octógono é próxima à do círculo, poderia-se, fazer as seguintes substituições:

$$p \cong 2\pi r, \qquad sendo\ r = raio\ do\ c\acute{i}rculo$$

$$a \cong r$$

$$\acute{a}rea\ do\ octogono \cong \frac{p*a}{2} \cong \frac{2\pi r * r}{2} \cong \boldsymbol{\pi r^2},$$

que é a área do círculo.

No quarto horário, a licencianda analisou com os alunos a fórmula do círculo que ela mostrou na aula anterior. Ela explicou que nessa fórmula a única coisa que variava era o raio, pois o *pi* é um número irracional, e, portanto, é uma constante. A partir dessas considerações, a sala compreendeu que para se desenhar o círculo de área 530 $cm^2$, bastava desenhar com o um círculo de raio 13 cm, aproximadamente. Nesse momento, permitiu os alunos, a utilização do compasso.

A construção do octógono se deu mediante aos seguintes passos:

**1º)** Desenhe com o compasso um círculo de raio 13 cm.

**2º)** Trace uma linha, chamada diâmetro, atravessando o centro do círculo;

**3º)** Trace outro diâmetro, de modo que as duas linhas formem uma cruz. Essas duas linhas são perpendiculares uma à outra;

**4º)** Trace mais dois diâmetros, cada um deles no meio do espaço que ficou entre os anteriores;

**5º)** Ligue os pontos finais dos diâmetros com linhas retas para que formem um octógono. Apague o círculo.

**Fig. 16 - Tabuleiro do Shisima confeccionado por um dos grupos.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**ii) Reconhecimento das regras do jogo** (GRANDO, 2000): Após a realização dessas etapas, foi explicado oralmente as regras do jogo. As regras eram as seguintes:

1. Coloque as peças no tabuleiro, três de cada lado.
2. Um jogador, de cada vez, mexe uma de suas peças na linha até o próximo ponto vazio, seguem-se revezando-se.
3. Não é permitido saltar-se por cima de uma peça.
4. Cada jogador tenta colocar as suas três peças em linha reta.
5. O primeiro a colocar as três peças em linha reta ganha o jogo.
6. Os jogadores devem-se revezar para iniciar o jogo.
7. Ganha o jogo quem conseguir colocar três peças da mesma cor em uma fileira.
8. Se a mesma sequência de movimentos for repetida três vezes, o jogo acaba empatado, isto é, não há vencedor nem perdedor.

O objetivo do jogo é que as peças fiquem alinhadas, ou seja, em linha reta, mas não pode fazer o mesmo movimento 3 vezes, senão o jogo fica empatado. Os alunos se interessaram muito mais do que era esperado, pois por ser um jogo que possui alguma semelhança com o jogo da velha, talvez pudessem perder o entusiasmo após algum tempo. E não foi isso que ocorreu.

**iii) Intervenção verbal** (GRANDO, 2000): Durante o jogo, a licencianda fez intervenções verbais, para auxiliar os grupos em suas jogadas. O aluno R., jogou com os colegas do seu grupo e, aparentemente, não apresentou dificuldades, porém a compreensão da fórmula da área do círculo não foi compreendida por ele, pois seria necessário uma outra forma de abordagem.

#### 4.2.4.3. Avaliação da atividade de ensino

Algumas observações, podem ser destacadas dessa experiência:

- O entusiasmo dos alunos em jogar, fez com que eles se envolvessem na atividade, pois necessitavam construir o tabuleiro para jogarem o jogo Shisima.
- Pela experiência realizada, constatou-se que 2 horários foram insuficientes para a realização da proposta.
- No 1º horário, uma das dificuldades encontradas foi um pouco da conversa paralela em momentos da discussão com a turma.
- O aluno R. participou parcialmente da atividade, e ajudou a sala a compreender que a área do octógono era próxima à do círculo, possibilitando encontrar um caminho alternativo para a confecção do tabuleiro.
- Entretanto o objetivo da atividade, não foi satisfeito, pois os alunos não conseguiram intuitivamente perceber que o perímetro do octógono de aproximava do comprimento do círculo nem que o apótema se aproximava do raio.
- A provável causa dos alunos não terem chegado ao objetivo da atividade, pode ter sido pelo mal direcionamento pela licencianda, ou seja, a necessidade das perguntas serem mais claras. Os alunos pensaram que tinham que fazer toda dedução da fórmula do círculo, quando na verdade, o objetivo era que apenas identificassem relações entre os elementos do octógono e do círculo.
- Como não houve pelos alunos, a compreensão do objetivo da atividade, podemos dizer que houve a **atividade de ensino**, mas **não** houve **atividade de aprendizagem** (MOURA, 2010).

### 4.2.5. Momento da aula - 9º B

A aula foi realizada na sala de aula, no terceiro e quinto horários. Uma observação importante a fazer é que antes da aula nessa sala, houve um horário vago no qual a professora J. e a licencianda conversaram sobre a aula, para que quando fosse ministrada a aula no 9º B, ela auxiliasse a licencianda como aprofundar de forma a alcançar o objetivo da proposta. E isso, ajudou bastante, tendo um resultado bem positivo, como será explicado posteriormente.

No terceiro horário, a professora J. apresentou para os alunos a licencianda e explicou que seria trabalhado um jogo africano chamado Shisima, que tem como objetivo colocar as peças alinhadas. Para a realização da atividade, foi pedido que os alunos fizessem grupos.

Os alunos estavam muito empolgados para saber como fazia para jogar. Porém, havia um problema inicial:

**Problema inicial dos alunos** (MOURA, 2010): Eles necessitavam confeccionar o tabuleiro para poder jogar. Todos os alunos estavam interessados em descobrir como se jogava, por isso participaram da construção do material. Os alunos dessa sala estavam tão empolgados para descobrir como se jogava, que queriam já no início saber como se jogava. A licencianda explicou de modo sucinto, o objetivo do jogo. Devido a experiência na outra sala, a licencianda desenvolveu uma dinâmica mais lenta, para que as discussões fossem mais proveitosas e as análises feitas de modo mais calmo.

**i) Familiarização do material** (GRANDO, 2000): Nesse momento, foi feito o reconhecimento do material com os alunos. Foi explicado, que o formato do tabuleiro é o de uma figura fechada, limitada por segmentos de reta, que não se cruzam, exceto em suas extremidades. A professora J., então, perguntou os alunos:

> **Professora:** Qual o nome que é dado, na matemática, a uma figura fechada, limitada por segmentos de reta, que não se cruzam, exceto em suas extremidades?
> **Resposta dos alunos:** Um polígono.
> **Professora:** Quantos lados esse polígono tem?
> **Resposta dos alunos:** 8 lados.
> **Professora:** Sabemos que esse polígono é regular. O que podemos então dizer da medida dos seus lados?

Alguns alunos não lembravam o que significava ser regular, mas a professora J. lembrou o conteúdo dizendo que para um polígono ser regular todos seus lados devem possuir a mesma medida. Além disso, foi complementado que os triângulos desenhados dentro do octógono eram isósceles, ou seja, possuíam apenas dois lados iguais.

### 4.2.5.1. Momento da confecção do Shisima:

**a) Construção do tabuleiro:** Os estudantes foram solicitados a dialogarem em grupo e buscarem ideias de como construir o tabuleiro, utilizando somente o material entregue. Não poderiam utilizar outra ferramenta como régua, por exemplo. Além disso, eles deveriam registrar as conclusões do grupo em uma folha.

**b) Apresentação das soluções encontradas**: Nesse momento, cada grupo expôs suas sugestões oralmente para a turma, lendo o que tinham escrito no papel.

**Grupo 1:** *Professora, pegamos as peças, e colocamos elas no papel cartão espaçadas, de modo a formar um octógono. Depois só, fizemos retas nos espaços vazios.*

**Escrita do grupo no papel:** "Nos desenharíamos tomando base as peças que nos foram entregues. "

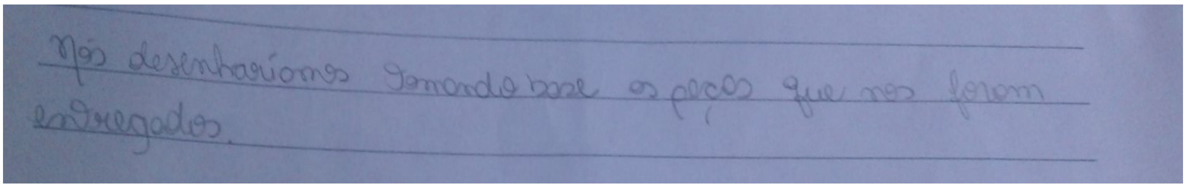


**Fig. 17 – Registro do grupo 1, do 9º B.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**Grupo 2:** *Fizemos o mesmo que o outro grupo, utilizamos as bolinhas para desenhar o octógono.*

**Escrita do grupo no papel:** "auxílio das bolinhas"

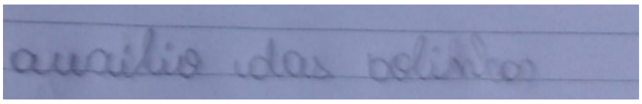


**Fig. 18 –Registro do grupo 2, do 9º B.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**Grupo 3:** *Professora, nós elaboramos alguns passos para fazer o desenho. Primeiro, fazer uma linha na vertical e outra na horizontal formando uma cruz e depois fazer duas linhas na diagonal.*
**Licencianda:** *E porque vocês fizeram isso?*
**Grupo 3:** *Por causa das retas que foram traçadas dentro do octógono.*
**Professora J.:** *Segmentos que se chama, retas não possuem um início nem um fim.*
**Grupo 3:** *Verdade!!!*

**Escrita do grupo no papel:** "Faça uma linha vertical e outra horizontal cruzando uma com a outra formando uma cruz. Faça duas linhas na diagonal cruzando-as com as primeiras linhas".

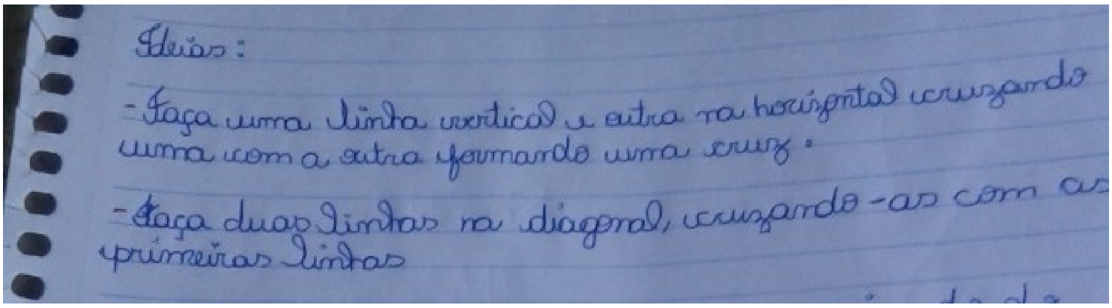


**Fig. 19 - Registro do grupo 3, do 9º B.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**Grupo 4:** *Professora, então pensamos em fazer uma dobradura.*
**Professora J.:** *Nossa turma, olha que interessante !!! Explique mais pra gente.*
**Licencianda:** *Interessante!!! Explique com detalhes pra gente.*
**Grupo 4:** *Pegamos o papel cartão dobramos a diagonal e formamos um quadrado*
**Licencianda:** *Mas o papel não é retangular? Como vocês fizeram isso?*
**Grupo 4:** *Então pegamos o lado menor do papel para ser o lado de nosso quadrado, ai dobramos fazendo uma diagonal.*
**Licencianda:** *Ahh, ok. O que mais?*
**Grupo 4:** *Fizemos mesma coisa três vezes, passando pelo centro e depois com essas retas prontas, desenhamos o octógono.*

**Escrita do grupo no papel:** "Passo 1- Dobrar a diagonal formando um quadrado, Corte o que sobrar. Passo 2- repita essa dobradura em 3 ângulos diferentes. Todos se encontram num ponto central. Com as bases retas prontas já pode fazer o octógono".

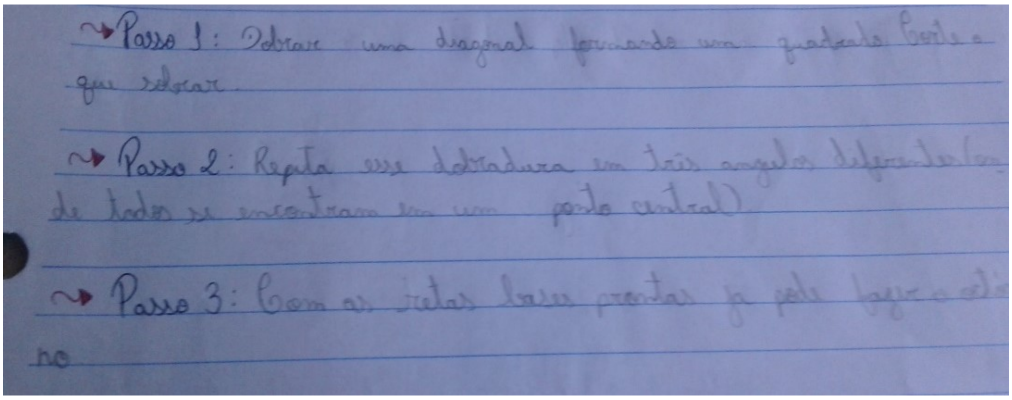
Passo 1: Dobrar uma diagonal formando um quadrado Corte o que sobrar.
Passo 2: Repita esse dobradura em três angulos diferentes (com de todos se encontram em um ponto central)
Passo 3: Com as retas bases prontas ja pode fazer o octógono

**Fig. 20 - Registro do grupo 4, do 9º B.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**Grupo 5:** *Também fizemos também dobraduras, pelo mesmo jeito delas. Só que ao final dobramos para dentro quatro triângulos para assim obtermos o octógono.*
**Licencianda e professora J.:** *Interessante!!!*

**Escrita do grupo no papel:** "Pegue uma folha como rascunho e forme um quadrado. Dobre os quatro lados para dentro. Desenhe um circulo fora e trace as linhas de acordo com o ponto"

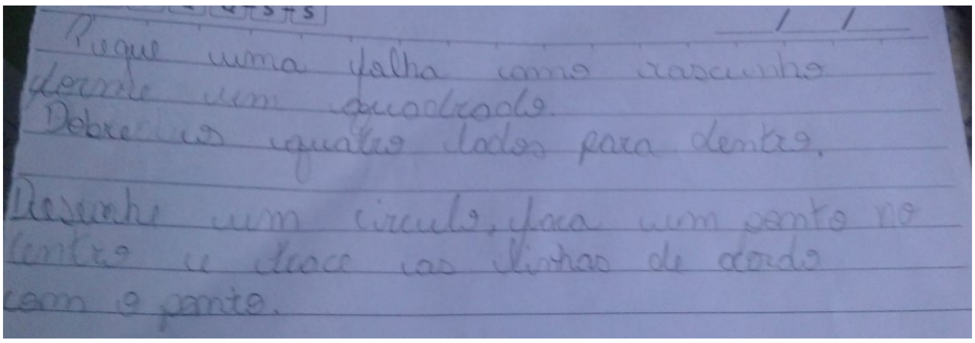
Pegue uma folha como rascunho forme um quadrado.
Dobre os quatro lados para dentro.
Desenhe um circulo, faça um ponto no centro e trace as linhas de acordo com o ponto.

**Fig.21-Registro do grupo 5, do 9º B.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

**c) Verificação dos resultados:** Após esse momento, a licencianda analisou com a sala, as alternativas sugeridas pelos grupos.

**Grupo 1 / Grupo 2. Ideia geral:** Desenhar o octógono, utilizando as peças circulares do jogo.

> **Licencianda:** *E ai turma o que acharam da proposta feita por esse grupo? É um caminho bom e viável?*

Toda a turma achou que sim. Então foi indagado:

> **Licencianda:** *Mas pensemos: como poderíamos saber com 100% de certeza que o espaçamento das bolinhas era o mesmo? Não poderia ocorrer um erro de alguns cm? Alguém tem alguma ideia de ter certeza disso sem a utilização da régua?*

Ninguém conseguiu sugerir uma outra ideia. Foi dialogado, que até poderia ser possível se utilizássemos outra coisa como o palmo como padrão de medida, mas poderia acarretar um pouco de tempo já que teria que ser o palmo somente de uma pessoa e que ela teria que fazer isso em todos os grupos.

**Grupo 3. Ideia geral:** Fazer uma cruz e traçar as diagonais.

> **Licencianda:** *É uma boa proposta, como a anterior, porém poderia haver uma possibilidade de ocorrer que os segmentos não tivessem a mesma medida, ou até mesmo os ângulos não estarem demarcados corretamente. Vejamos é possível construir o octógono dessa forma, mas devido à falta de instrumentos poderia também ter a possibilidade de ocorrer esses erros.*

**Grupo 4 / Grupo 5. Ideia geral:** Fazer dobraduras para construir o octógono.

> **Licencianda:** *Vamos analisar com calma. O grupo 4 acertou corretamente os passos das dobraduras para construir o quadrado e fazer as diagonais. Só que quando foram desenhar os lados do octógono, ficou visível que os lados não tinham a mesma medida, foi um erro de medição. O grupo 5, também fez os passos corretamente, porém houve um problema no passo final. Analisemos comigo, pessoal. Os 4 triângulos dobrados para dentro pelo grupo são iguais?*
> **Aluna A:** *Não professora dá pra ver que ficou diferente !!!*
> **Licencianda:** *Por isso não conseguiu-se formar um octógono com os lados iguais.*
> **Aluna B:** *Professora, ainda não estou convencida, acho que dá pra fazer o octógono desse jeito que o grupo propôs. Olha se antes de fazermos as dobraduras igual o grupo fez, pegássemos a folha e fizéssemos vários quadradinhos e depois fizéssemos as dobraduras, não ficaria um octógono regular?*
> **Licencianda:** *Não sei, teríamos que fazer. Claro não descartamos essa hipótese que as dobraduras podem auxiliar a construir um octógono regular, elas podem. Só que no caso do grupo, foi explicado porque não deu certo.*
> **Aluna B:** *Ah...*

**Licencianda:** *Gente, vimos soluções muito inovadoras, propostas por vocês, mas será que não teria outra forma uma forma mais viável de fazer isso, mediante a limitação do material que pode ser utilizado para fazer a atividade?*
**Turma:** *Ah ai não sei...*
**Licencianda:** *Será que não haveria alguma figura que poderia auxiliar na construção do octógono? Alguma que no qual o octógono tivesse a área próxima dessa figura?*
**Alguns alunos:** *O círculo professora!!!!*

Nesse momento, a licencianda desenhou um círculo e um octógono no quadro. Ela fez os seguintes questionamentos:

**Licencianda:** *Como chamamos na matemática o segmento que sai do centro e vai até a borda do círculo?*
**Resposta da turma**: *Raio.*
**Licencianda:** *Lembrem-se que existem vários segmentos que fazem isso no círculo, ou seja, todo o segmento que sai do centro até a borda é chamado de raio. Esse é um dos elementos do círculo, e além desse temos o contorno do círculo o qual chamamos de comprimento do círculo e é calculado pela fórmula* :$2\pi r$.
**Licencianda:** *No octógono, os seus elementos são: O seu contorno que chamamos de perímetro. Além disso conseguimos dentro do octógono formar 8 triângulos isósceles congruentes, que são de mesma medida.*
**Licencianda:** *Isso que fiz agora, foi somente uma revisão de algumas coisas que vocês já sabiam e uma complementação disso. O que quero agora é que cada grupo, descubra uma relação entre os elementos do octógono com os elementos do círculo.*

Alguns grupos estavam com dificuldade então a licencianda conversou com a turma.

**Licencianda:** *Turma, alguns estão com dificuldade. Vou explicar de novo. Vimos que os elementos do círculo são o raio e comprimento do círculo e do octógono temos seu perímetro e os triângulos dentro dele. Para uma melhor compreensão, vou entregar o compasso e numa folha de rascunho os grupos desenharão o círculo e dentro dele tentarão desenhar o octógono. Me chamem quando terminarem. Entenderam?*
**Resposta da turma**: *Sim.*

**d) Análise dos resultados:** Nesse momento, a licencianda passou de grupo em grupo para ver o que tinham feito.

**Grupo 1**: *Desenhamos professora.*
**Licencianda:** *Vocês conseguiram perceber alguma coisa?*
**Grupo 1:** *Dois dos lados de cada triângulo eram o raio do círculo.*
**Licencianda:** *Mais alguma coisa?*
**Grupo 1**: *Não!*
**Licenciada:** *O que dá pra perceber do perímetro do octógono e do contorno do círculo?*
**Grupo 1:** *perímetro?*
**Licencianda:** *O perímetro é a junção dos lados do octógono.*
**Grupo 1:** *Ahhh as beiradas...*
**Licencianda:** *Podemos dizer que sim!*
**Grupo 1:** *As beiradas do octógono estão se aproximando do círculo.*

**Licencianda:** *Ahh, registrem essas conclusões no papel.*
**Licencianda:** *E ai pessoal chegaram em alguma conclusão?*
**Grupo 4:** *Não.*
**Licencianda:** *Me expliquem então como fizeram o desenho.*
**Grupo 4**: *Pegamos o compasso, e desenhamos um círculo. Ai depois traçamos os diâmetros e desenhamos o octógono.*
**Licenciada:** *O que podemos dizer dos lados do triângulo dentro do octógono? Esse segmento não é um segmento que traçamos do centro até a borda do círculo?*
**Grupo 4:** *Sim.*
**Licencianda:** *Como chamamos isso na matemática?*
**Grupo 4:** *De raio. Ah então sempre dois lados do triângulo serão o raio!!!*
**Licencianda:** *Isso!*
**Grupo 4:** *As beiradas do octógono estão se aproximando do círculo.*
**Licencianda:** *Ahh, registrem essas conclusões no papel.*

Nesse momento terminou o horário e ainda a licencianda não havia atendido todos os grupos.

No quinto horário, a licencianda atendeu o grupo 3. Eles tinham tido as mesmas conclusões dos grupos anteriores em relação ao raio do círculo. Tinha vindo uma senhora da escola dar uns avisos, e por causa disso, perdemos um pouco de tempo, e não foi possível discutir com os outros dois grupos com mais calma. A licencianda então analisou com a sala, a conclusão de dois grupos.

**Licencianda:** *Por causa do tempo pessoal, vamos ver o que os grupos conseguiram fazer. Grupo 1, o que vocês concluíram?*
**Grupo 1:** *Que as beiradas do octógono se aproximam do contorno do círculo.*
**Licencianda:** *Turma, isso quer dizer que o perímetro do octógono tem quase a mesma medida do contorno do círculo. Se pegássemos um barbante, e colocássemos em volta do comprimento do círculo que é contorno, e envolta do perímetro do octógono, se medíssemos com a régua veríamos que essas medidas seriam muito próximas.*
**Grupo 4:** *Pegamos o compasso, e desenhamos um círculo. Ai depois traçamos os diâmetros e desenhamos o octógono. Dois lados do triângulo são o raio do círculo, porque são linhas traçadas do centro até sua borda.*
**Licencianda:** *Pessoal, ainda existe uma coisa que vocês não perceberam e acho que é porque vocês não desenharam. Se eu traçasse a altura desses triângulos que estão dentro do octógono, o que poderíamos falar dessa medida?*
**Turma:** *Não sei.*
**Licencianda:** *Será que ela seria próxima da do raio?*
**Aluno D:** *Sim porque é o segmento que saiu do centro só que não encosta na beirada do círculo.*
**Licencianda:** *Muito bem!!!*
**Licencianda:** *Em todo polígono, a medida que sai do centro até seu lado chamamos de apótema. Vamos escrever então nossas conclusões.*

Foi escrito no quadro, o seguinte:

$$O\ tabuleiro\ do\ jogo\ é\ da\ forma\ de\ um\ octógono(\ um\ polígono)\ regular\ .$$
$$Percebe - se\ \ que\ a\ área\ do\ octógono \cong área\ do\ círculo$$
$$e\ também\ que:$$
$$p = perímetro\ do\ octógono, \quad p \cong 2\pi r, \qquad sendo\ r = raio\ do\ círculo$$
$$a \cong r$$

**Licencianda:** *Pessoal, octógono do tabuleiro é um polígono regular de 8 lados e logo sua área pode ser calculado pela seguinte fórmula:*

$$Área\ do\ polígono\ regular \cong \frac{p*a}{2}, sendo\ a = apótema.$$

**Licencianda:** *Mas chegamos que o seu perímetro se aproxima do círculo, e que a apótema se aproxima do raio, como essas medidas são próximas, podemos substituir o perímetro pela comprimento do círculo e a apótema pelo raio. Isso se escreve assim:*

$$área\ do\ octógono \cong \frac{p*a}{2} \cong \frac{2\pi r*r}{2} \cong \pi r^2.$$

$Portanto,$

$$Área\ do\ Círculo = \boldsymbol{\pi r^2}.$$

**Licencianda** *:Compreenderam o que eu fiz?*
**Turma:** *Sim!*
**Aluno A:** *Quer dizer que fórmula do círculo é essa?*
**Professora J.**: *Vamos olhar aqui gente!!! A fórmula é o raio ao quadrado vezes pi que é um número irracional, que tem infinitas casas depois da vírgula. Ou seja, a única coisa que precisamos saber é o raio.*
**Licencianda:** *Isso, então se tivéssemos 4 círculos de tamanhos diferentes ´só precisaríamos saber o raio. Calcularíamos pela fórmula sua área e o valor seria diferente porque o raio é diferente.*
**Licencianda:** *Agora gente teremos como fazer octógono. Primeiro teremos que desenhar o círculo com área de 530 $cm^2$, para isso utilizaremos o compasso, mas precisamos saber seu raio.*
**Professora J.:** *Mas agora que temos a fórmula da área fica mais fácil pois com ela podemos descobrir o raio.*

A professora J. fez no quadro as seguintes contas no quadro:

$Sendo\ a\ área\ do\ circular\ 530\ cm^2\ temos:$

$$\boldsymbol{\pi r^2 = 530} \Rightarrow \boldsymbol{r^2} = \frac{530}{3{,}14}\, cm^2.$$

**Professora J.:** *Pessoal façam essa conta na calculadora pra mim.*
**Aluno B:** *Professora, deu 168,78980889172.*
**Professora J.:** *A gente não acabou de ver que podemos aproximar as coisas?*
**Turma**: *sim!*

**Professora J.:** *Então vamos 168,78980889172 de 169, pois esses dois números estão pertos. Qual a raiz de 169?*
**Turma:** *13.*
**Professora J.:** *Muito bem, nossa raio é 13 cm. Desenhem um círculo de 13 cm no papel cartão.*

Logo em seguida, os alunos pegaram o compasso, marcaram o raio de 13 cm, desenharam o círculo, traçaram as diagonais e desenharam o octógono.

**i) Reconhecimento das regras do jogo** (GRANDO, 2000): Após isso, foi explicado as regras do jogo que são:

1. Coloque as peças no tabuleiro, três de cada lado.
2. Um jogador, de cada vez, mexe uma de suas peças na linha até o próximo ponto vazio, seguem-se revezando-se.
3. Não é permitido saltar-se por cima de uma peça.
4. Cada jogador tenta colocar as suas três peças em linha reta.
5. O primeiro a colocar as três peças em linha reta ganha o jogo.
6. Os jogadores devem-se revezar para iniciar o jogo.
7. Ganha o jogo quem conseguir colocar três peças da mesma cor em uma fileira.
8. Se a mesma sequência de movimentos for repetida três vezes, o jogo acaba empatado, isto é, não há vencedor nem perdedor.

Foi dito oralmente as regras e para uma maior compreensão a professora J. e a licencianda simularam uma partida, para os alunos perceberem as estratégias do jogo.

**ii) Intervenção verbal** (GRANDO, 2000): Os alunos utilizaram o restante do horário, para jogar. A intervenção das jogadas foi feita à medida que a professora J. e a licencianda percebiam alguma dificuldade dos alunos. Um dos grupos, relatou que quando terminou o horário, eles tentaram desenhar o tabuleiro e jogar uma partida, mesmo que sem conhecerem as regras do jogo. Houveram alunos que gostaram tanto do jogo que pediram mais um papel cartão para fazer outro tabuleiro.

**Fig. 22 –Momento do jogo de um dos grupos.**
**Fonte:** Arquivos da própria autora.

#### 4.2.5.2. Avaliação da atividade de ensino

Algumas observações, podem ser tiradas dessa experiência:

- O entusiasmo dos alunos em jogar, fez com que eles se envolvessem na atividade, pois necessitavam construir o tabuleiro para jogarem o jogo Shisima.
- Pela experiência realizada, constatou-se que 2 horários foram insuficientes para a realização da proposta.
- Percebeu-se que a adoção de uma dinâmica mais lenta, possibilitou que a atividade de ensino fosse desenvolvida de um modo melhor.
- O auxílio da professora J. na atividade, foi de grande importância.
- As propostas feitas pelos alunos para a construção do octógono foram exclusivamente dos alunos, não houve nenhuma orientação da parte docente.
- Houve, a utilização de elementos da história da matemática, no momento da comparação da área do círculo com a área do octógono.
- A confecção do jogo foi a situação utilizada para promover desencadeamento da necessidade de descobrir uma forma para o cálculo da área do círculo.
- Grande parte dos alunos dessa sala, conseguiram, por meio dos questionamentos feitos pela licencianda, chegar ao objetivo desejado. Portanto, pode-se inferir que houve **atividade de ensino** e **atividade de aprendizagem**. Portanto, houve **Atividade Orientadora de Ensino** (MOURA, 2010).

# Seção 5. Considerações finais

## 5.1. Reflexões sobre o estudo

### 5.1.1. Aula Investigativa e Atividade de Ensino: Teoria e Prática

Nesse estudo se propôs analisar as semelhanças e diferenças entre a aula investigativa e a atividade de ensino no conteúdo da área do círculo. A partir da análise teórica, foi constatado várias características relacionadas a: **papel do professor, utilização da história da matemática, foco principal, formas de disposição dos alunos: em grupo ou individual.**

Em relação as formas de disposição, pode-se observar que em ambos os relatos, ou seja, tanto da aula investigativa quanto da atividade de ensino, o trabalho em grupo possibilitou uma discussão mais enriquecedora.

Em relação ao papel do professor, em ambos os relatos, foi o de organizador da proposta. A diferença que se percebe é que na aula investigativa, o papel da professora teve que ser também de direcionadora da proposta, pois ela precisava dizer quais eram os passos a serem seguidos, uma vez que os alunos não conseguiam fazer essa relação sozinhos.

Na atividade de ensino, o papel da professora foi o de orientadora e os alunos conseguiram fazer boa parte da proposta sozinhos, cabendo só ao final a professora fazer a conclusão final, tendo em vista, que os alunos não tinham conhecimento suficiente para fazer a dedução matematicamente.

Além disso, na aula investigativa, o direcionamento do professor aos alunos ocorreu de um modo que o docente já conseguisse "prever", de certa forma, a maioria dos questionamentos dos estudantes, uma vez que a proposta se compunha de passos que a própria docente elaborou para a serem executados pelo grupo.

Na atividade de ensino, as soluções dadas pelos alunos foram variadas e criativas e, exigiu um cuidado, e até mesmo uma reflexão do próprio professor, para pensar, como, quais questionamentos fazer para orientar para o objetivo principal.

O foco da aula investigativa foi no problema de achar uma fórmula para a área do círculo. Não houve para os alunos um motivo próprio, individual para fazerem a atividade, a não ser a aceitação da proposta do professor. Já na atividade de ensino, o enfoque do problema no caso dos alunos, foi confeccionar o tabuleiro para poder aprender jogar um jogo no qual eles desconheciam as estratégias.

Em relação a história da matemática, na atividade de ensino não houve uma utilização explicita dos elementos da matemática, pois já que haviam registros insuficientes de fatos históricos em relação a área do círculo. Foi utilizado de modo implícito, na atividade, a ideia de comparações de áreas que os egípcios faziam na antiguidade.

Na aula investigativa, foi utilizado o uso de material concreto como barbante. Na atividade de ensino, o recurso utilizado foi o jogo, e a forma manuseada permitiu a ludicidade (GRANDO, 2000) da atividade. Além disso, o jogo não foi um mero recurso, foi utilizado como disparador de um conceito (MOURA, 2010), para desenvolver uma situação que permitisse a abordagem do conceito: área do círculo.

Na atividade de ensino, pode-se perceber que os conceitos matemáticos na atividade foram muitos: área, ângulos, aproximações, comparações, justificações por dobraduras, busca por elementos que ajudassem a falta de um recurso métrico: nesse caso a régua. Percebe-se que foram muitos elementos matemáticos que foram desenvolvidos com os alunos em duas aulas, para conseguir chegar na área do círculo. Já na atividade investigativa, os conceitos matemáticos abordados foram: comparação, aproximação, área.

Infere-se dessas considerações, que limitar-se a explorar um problema matemático, limita-se a quantidade de conceitos abordados, buscar um contexto diferente, permite relacionar mais conceitos matemáticos, e perceber na prática sua utilização.

## 5.2. Contribuições desse estudo

Em relação a formação da licencianda, esse ensaio de pesquisa contribuiu no desenvolvimento de habilidades como a iniciativa de estar em uma sala de aula com o olhar de pesquisadora, na produção de artigos, no conhecimento de metodologias e recursos que possam auxiliar o professor nas suas atividade pedagógica.

Sabe-se que o trabalho de educador, é árduo, porém muito gratificante e pode propiciar grandes aprendizados. Espera-se que esse estudo possa ajudar professores de Matemática nas suas práticas de ensino e alunos a perceberem uma matemática, não enrijecida, acabada, mas em constante movimento, um instrumento da humanidade para soluções de problemas ligados à necessidades da vida.

## Referências

ANDRADE, Silvanio de. **Ensino-Aprendizagem da Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas na sala de aula.** Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 1998.

ALMEIDA, Deise Cíntia Camilo de; COSTACURTA, Mirtes Simone. **Atividades lúdicas para o ensino e aprendizagem da geometria nos anos finais do ensino fundamental.** Relatório de pesquisa (Graduação em Matemática). Universidade Comunitária da Região de Chapecó, Chapecó-SC, 2010.

ALMOULOUD, Saddo Ag; MANRIQUE, Ana Lúcia; CAMPO, Tânia Maria Mendonça. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência envolvendo professores e alunos. In: **Revista Brasileira de Educação,** p. 94 - 210, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, Brasília, 1998. In: http//:portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matemática.pdf. Acesso em 14/06/2018.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEF, Brasília, 2017. In: http//:basenacionalcomum.mec.gov/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site. Acesso em:14/06/2018.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática.** Editora Gradiva. 2000.

COSTA, Amanda Couto; OLIVEIRA, Janaina Aparecida de. Investigação Matemática sobre a Área do Círculo. In: **Anais do VII Encontro Mineiro de Investigação na Escola**, trabalhos completos, nº 64, 2017.

DAMIANI, Magda Floriana. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. In: **Revista Educar**, Editora UFPR, n. 31, p. 213-230, Curitiba, 2008.

FAINGUELERNT, Kaufmam Estela. O ensino da geometria no 1º e 2º graus. In: **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, Blumenau, ano III, n. 4, p. 45-53, 1995.

FIORENTINI, Dario. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil.** In: *Revista Zetetiké,* Ano 3- nº 4, 1994.

FIORENTINI, Dario; MIORIN, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática.** In: **Boletim da SBEM-SP,** n.7, de julho-agosto de 1990.

GASPAR, Maria Teresa; MAURO, Suseli; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. **Explorando a geometria através da Matemática e da Etnomatemática**. In: **Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática** – Minicurso - GT 7 - Formação de professores que ensinam Matemática, 2004.

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese (doutorado), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2000.

LAMONATO, Maisa; PASSOS, Carmen Lúcia Bracaglion. Discutindo Resolução de Problemas e Exploração-Investigação Matemática: Reflexos para o Ensino da Matemática. In: **Revista Zetetiké**. FE/Unicamp-v.19, n.36- jul/ dez 2011.

LONREZATO, Sérgio. Por que não ensinar geometria? In: **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática,** Blumenau, n. 4, p. 3-13, jan./jun. 1995.

MARCO, Fabiana Fiorezi de. **Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de Matemática no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2004. p.141.

MOISÉS, Roberto Péricles. **A resolução de problemas na perspectiva histórico/lógica: o problema em movimento.** Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação, USP, São Paulo, SP, 1999.

MOURA, Manoel Orisvaldo de. Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. In: **Revista Diálogo Educ**., Curitiba, v.10, n. 29, p.205-229, jan./abr.2010.

__________. **O Jogo e a Construção do Conhecimento Matemático.** Editora:Ieenica, Série Ideias, nº 10, São Paulo, 1991.

MUNIZ, Cristiano A. Explorando a Geometria da orientação e do deslocamento. In: **GESTAR II**, TP6, p. 80-102, 2004.

ONUCHIC, Lordes de la Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas, São Paulo: Editora UNESP, p. 199-218, 1999.

PERALTA, Ivan Andrés Saavedra. **Análise do conceito de círculo e da existência do número π na matemática egípcia da antiguidade.** Universidade Estadual de Campinas, 2014. In: http://www.academia.edu/8210078/01Analise_Pi_Final14Jul_Resumo_Revista_Atual.

POLYA, George. **Mathematical Discovery**; Editora: New York: Wiley, 1962.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**, Editora Interciência, 1978.

POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, Stephen & REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Editora Autêntica, 1ª edição. 2ª reimpressão, 2006.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em Matemática. In: **O professor e o desenvolvimento curricular.** Editora: GTT, Lisboa: APM, 2005, (pp.11-34).

PONTE, João Pedro da; BRUNHEIRA, Lina; FONSECA, Helena. **As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática**. Editora Lisboa: APM, 1999.

RODRIGUES, Carolina Inocente. **Uma proposta de ensino de frações no 6º ano do Ensino Fundamental a partir da perspectiva histórico-cultural.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal de Uberlândia, 2015.

SCHROEDER, Thomas L.; LESTER, Frank Jr. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) (**New Directions for Elementary School Mathematics. NCTM**) p.31-42,1989.

VYGOTSKY, Lev Semyonovich. **A formação social da mente**. Livraria Martins Fontes, Editora Ltda., São Paulo, 1991.

**Anexo: Uma proposta de aula utilizando o jogo Mancala**

**1ª Maneira:**

Será apresentado aqui uma possível proposta de aula com o jogo Mancala, tendo como base, a utilização fatos históricos que propiciem o desenvolvimento de situações desencadeadoras de ensino. É importante ressaltar, que essa proposta de aula não foi realizada, pois exige-se muito tempo, o qual não havia no presente momento.

A aula pode ser dividida em partes, de acordo com Grando (2000): contato com o jogo e suas regras, momento de "jogar por jogar", exploração de situações propostas pelo professor, registro das informações; e, por fim, jogar com competência.

No primeiro momento, o professor faz uma breve explicação sobre a origem do jogo Mancala, dentro da cultura africana. Após esse momento, o professor solicita aos alunos para se agruparem em duplas e entrega para cada uma, o tabuleiro do jogo com as peças. Logo depois, explica que o objetivo do jogo é recolher o maior número de peças.

*"O jogo começa em geral com 4 pedras em cada cova do mancala. Sua jogada consiste em escolher um buraco, retirar suas fichas e distribui-las pelos outros buracos, uma por buraco, no sentido anti-horário (em algumas versões do jogo, no sentido horário). Quando você passa por sua mancala, você deixa uma pedra nela como se fosse um buraco normal. Mas a mancala do adversário você pula.Se a última pedra distribuída cair na sua própria mancala, você joga de novo. E se ela cair em um dos seus buracos e ele estiver vazio, você leva para sua mancala não apenas essa pedra, mas todas as pedras que estiverem no buraco adversário exatamente oposto. Quando os 6 buracos de um jogador estão vazios, o adversário coloca todas as pedras que estiverem na sua metade do tabuleiro em sua mancala. Somam-se então as pedras e quem tiver mais vence."*

No segundo momento, o professor explora com os alunos uma situação-problema com o jogo e apresenta um tabuleiro do jogo Mancala no qual suas covas fossem de tamanhos diferentes, como a figura abaixo:

**Fig. 23 –Tabuleiro do Mancala adaptado**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

Nesse momento, pode ser analisado com os alunos possibilidade de ser jogado o jogo do Mancala tendo covas de tamanhos diferentes. Para os alunos responderem com justificativas bem fundamentadas, o professor explica que para resolver esse problema, um dos caminhos seria descobrindo o tamanho de cada cova. Pode ser feito os seguintes questionamentos aos alunos:

**Professora:** Olhando a figura vocês saberiam estimar o tamanho da superfície de cada cova?
**Resposta Esperada**: Não sei, medindo com a régua, etc.
**Professora:** Qual a primeira coisa que precisaríamos fazer para fazer esse cálculo?
**Resposta Esperada**: Estabelecer uma unidade de medida.
**Professora:** Poderíamos utilizar a bolinha como unidade de medida?
**Resposta Esperada**: Sim.
**Professora:** Então como acharíamos a medida da superfície ( área) de cada cova?
**Resposta Esperada:** Contando as bolinhas dentro de cada cova.

A imagem abaixo, retrata essa situação:

**Fig. 24 – Imagem da situação proposta.**
**Fonte:** Arquivo da própria autora.

Pedir para, após as análises dos alunos, registrarem os resultados na seguinte tabela abaixo:

**Quadro 3- Registro dos resultados**

| Covas | Diâmetro | Áreas |
|---|---|---|
| 1ª | 3 | 7 |
| 2ª | 5 | 19 |
| 3ª | 7 | 38 |
| 4ª | 9 | 63 |

**Fonte:** Arquivo da própria autora.

Explicar aos alunos que a área da quarta cova é 63 e poderíamos aproximar para 64.

Nesse momento, o professor entrega as 64 bolinhas para os alunos e pergunta para eles se conseguiríamos construir outra figura plana (triângulos ou círculos) a qual coubesse a mesma quantidade de bolinhas que cabe na quarta cova. Caso os alunos não conseguissem chegar a alguma conclusão, poderia perguntar:

**Professora:** Com 64 bolinhas conseguiríamos construir um quadrado? Qual a medida do seu lado?
**Resposta Esperada**: Sim, um quadrado de lado 8 , pois teriam 8 bolinhas no seu lado.
**Professora:** O que podemos dizer da área do quadrado do 4° círculo?
**Resposta Esperada:** São iguais.

Analisar com os alunos que o lado do quadrado com o diâmetro do círculo são proporcionais. Pode-se representar matematicamente essa relação, fazendo a divisão do lado pelo diâmetro, sendo escrito da seguinte forma:

$$\frac{l}{d} = \frac{8}{9} \Rightarrow l = \frac{8}{9}\,d.$$

Como a área do quadrado é igual da do círculo teríamos a seguinte relação:

$$A_{círculo} = A_{quadrado} = l^2.$$

Como $l = \frac{8}{9}\,d$, fazendo as substituições teríamos:

$$A_{círculo} = \frac{8}{9}\,d^2,$$

que é a fórmula que os egípcios provavelmente utilizavam para o cálculo de uma área circular. Uma observação importante, é que teríamos como transformar essa fórmula para seu padrão usual que utilizamos hoje, basta substituir o diâmetro por 2 vezes r.

**2ª Maneira:**

Como foi exposto acima, poderia ser apresentado aos alunos um tabuleiro de Mancala com covas de diferentes tamanhos, a diferença é que uma das covas estaria coberta. Por meio das bolinhas, seria calculado a área de cada cova. Porém, seria apresentado a seguinte questão:

**Professora:** Como saber o tamanho da cova coberta, uma vez que não poderíamos colocar as bolinhas dentro dela?

Após o momento de discussão dos grupos, e análises das sugestões dos alunos, caso eles não chegassem a algum resultado, seria sugerido que procurassem alguma relação entre as áreas das covas que eles já tinham descoberto e o raio ao quadrado. O objetivo é que os alunos, por meio dessa investigação, percebam que ao dividir a área pelo raio ao quadrado sempre chega-se a um mesmo valor, que nesse caso, é o número *pi*.

A partir desse momento, seria analisado se essa relação também valeria para a cova coberta. Como os alunos não saberiam o tamanho do raio da cova coberta, seria proposto de denominassem apenas o valor de *r,* e de modo análogo a área, já que seu valor também é desconhecido. Dessa forma teríamos a seguinte relação:

$$\frac{A_{covacoberta}}{r^2} = 3{,}14 \Rightarrow A_{covacoberta} = 3{,}14 * r^2,$$

que é a fórmula da área do círculo.