

MARCO AURÉLIO MATOS JÚNIOR

MODELO NÃO-LINEAR DE UMA VIGA DE MATERIAL COMPOSTO



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2018

MARCO AURÉLIO MATOS JÚNIOR

Orientador

Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Jr

MODELO NÃO-LINEAR DE UMA VIGA DE MATERIAL COMPOSTO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação
em Engenharia Mecânica da
Universidade Federal de Uberlândia,
como parte dos requisitos para
obtenção do título de BACHAREL em
ENGENHARIA MECANICA

UBERLÂNDIA – MG

2018

MODELO NÃO-LINEAR DE UMA VIGA DE MATERIAL COMPOSTO

Projeto de conclusão de curso **APROVADO**
pelo Colegiado do Curso de Graduação em
Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia
Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Jr
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. João Marcelo Vedovoto
Universidade Federal de Uberlândia

MSc. Vergílio Toreza Silingardi Del Claro
Universidade Federal de Uberlândia

UBERLÂNDIA - MG

2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, amigos e namorada pelo apoio durante esses anos de graduação.

Agradeço também ao meu orientador o professor Aldemir por ter me auxiliado durante todo o trabalho e por ter tido a paciência de me ensinar e esperar quando foi necessário.

Agradeço ao PETMEC (Programa de Educação Tutorial da FEMEC), onde tive a oportunidade de trabalhar por dois anos, período no qual aprendi muito e tive a oportunidade de conhecer amigos que levo até os dias de hoje.

Agradeço a UFU por ter proporcionado o intercâmbio para a França que foi muito importante para minha formação, onde pude aprender uma nova língua e viver experiências únicas.

MATOS JR, M. A. **Modelo Não-Linear de uma Viga de Material Composto**. 2018.
Projeto de Fim de Curso, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia

RESUMO

O presente trabalho visa apresentar uma formulação capaz de representar o comportamento estático de uma viga de material composto e comparar com resultados apresentados na literatura. Foi utilizada a teoria de viga de Euler-Bernoulli para analisar o comportamento não linear geométrica baseado na hipótese de que os planos de secção perpendiculares ao plano médio permanecem planos e rígidos. Isso nos leva a negligenciar o efeito de Poisson e as tensões de cisalhamento transversal o que trás consequências negativas para a exatidão do modelo porém simplifica as análises.

Palavras Chave: Não-Linear, Material Composto, Anisotrópico, Elementos Finitos.

MATOS JR, M. A. **Non Linear Model of a Composite Material Beam**. 2018. Conclusion of Course Project, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

ABSTRACT

The present work aims to develop a formulation capable of accurately representing the static behavior of a composite material beam and compare with results provided in the literature. The Euler-Bernoulli beam theory was used to analyze the behavior of geometric non-linearity based on the hypothesis that the section planes perpendicular to the median plane remain flat and rigid. This leads us to neglect the Poisson effect and the transverse shear stresses, which brings negative consequences to the accuracy of the model but simplifies the analysis.

Keywords: Non Linear, Composite, Anisotropic, Finit Elements.

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

- u Deslocamento na direção x .
- u_0 Deslocamento na direção x proveniente da matriz de rigidez linear de materiais anisotrópicos.
- v Deslocamento na direção y .
- w Deslocamento na direção z .
- w_0 Deslocamento na direção z proveniente da matriz de rigidez linear de materiais anisotrópicos.
- G_{12} Módulo de elasticidade transversal do sentido 1 em relação ao sentido 2.
- E_1 Módulo de elasticidade no sentido da fibra.
- E_2 Módulo de elasticidade no sentido perpendicular à fibra.
- δW Trabalho interno.
- z Posição em relação a espessura da viga.

Símbolos Gregos

- ν_{12} Coeficiente de Poisson no sentido 1 em relação ao sentido 2.
- ν_{21} Coeficiente de Poisson no sentido 2 em relação ao sentido 1.
- $\varphi(k)$ Ângulo das fibras de cada camada (k) em relação ao eixos do plano cartesiano adotado
- ε_{ij} Deformação no sentido i em relação ao sentido j .
- ϕ e ψ Funções de forma.
- \bar{Q}_{ij} Componentes da matriz de rigidez transformada das camadas.
- σ_{ij} Componentes do vetor de tensão

Lista de Figuras

Figura 1: Modelagem da viga.....	13
Figura 2: Representação da viga de material composto	15
Figura 3: Representação da viga	17
Figura 4: Procedimento realizado no experimento de referência	28
Figura 5: Resultados obtidos para $F = 7,08$ N e 10 elementos	29
Figura 6: Resultados obtidos para $F = 7,08$ N e 20 elementos.....	29
Figura 7: Resultados obtidos para $F = 7,08$ N e 40 elementos	30
Figura 8: Resultados obtidos para $F = 7.08$ N e 50 elementos	30
Figura 9: Resultados obtidos para $F = 7.08$ N e 100 elementos	31
Figura 10: Resultados para $F = 7,08$ N	31
Figura 11: Resultados de referência para $F = 7,08$ N.....	32
Figura 12: Resíduo da função objetivo em função da força aplicada.....	33

Sumário

1. Introdução.....	10
2. Formulação teórica.....	12
2.1 Formulação pela Deformação	13
2.2 Formulação Variacional.....	16
2.3 Formulação de elementos finitos.....	19
2.4 Matriz de rigidez não linear para materiais anisotrópicos.....	20
2.5 Matriz de rigidez linear para materiais anisotrópicos.....	24
2.6 Solução do Sistema não linear de equações	25
3. Resultados e Discussão	28
4. Conclusões.....	35
5. Referências Bibliográficas	36

1. Introdução

Os materiais compostos são cada vez mais estudados e suas características peculiares são cada vez mais necessárias e desejadas para aplicações diversas, como por exemplo pás de rotores e turbinas, quadros de bicicletas, componentes estruturais de embarcações, em diversas áreas do setor automotivo, e com o passar do tempo para cada vez mais aplicações serão viáveis.

A análise dinâmica de estruturas construídas com esse tipo de material se mostra um desafio, pois muitas vezes seu comportamento não respeita as formulações clássicas o que torna necessário o desenvolvimento e o aprimoramento dos modelos matemáticos para que seja possível realizar algum tipo de predição confiável. Prever o comportamento desses materiais e simulá-lo é um exemplo de estado da arte no ramo de análise vibracional e esse trabalho tenta realizar algum progresso em relação a isso basicamente introduzindo efeitos de não-linearidade na matriz de rigidez de um rotor simulado em elementos-finitos.

A não-linearidade surge naturalmente na realidade, mas é possível com base em suposições e hipóteses reduzir grande parte dos problemas a problemas lineares. Soluções lineares podem ser obtidas com considerável facilidade e menor custo computacional quando comparadas a soluções não-lineares. Em muitos casos, suposições de linearidade levam a uma idealização razoável do comportamento do sistema. No entanto, em alguns casos, a suposição de linearidade pode resultar em uma aproximação irreal da resposta porém, em alguns casos, a análise não linear é a única opção que pode produzir resultados satisfatórios.

Materiais compostos são naturalmente anisotrópicos pois são compostos de diferentes materiais e camadas que na maioria dos casos possuem orientações de fibras diferentes, propriedades físicas diferentes, isso faz com que as propriedades do material composto sejam diferentes se medidas em diferentes orientações o que muda a forma como as propriedades gerais deste material são calculadas o que também apresenta um desafio no modelamento físico e matemático deste tipo de material.

Um modelo numérico para estruturas feitas em material composto dividido em camadas baseado em uma teoria geométrica não-linear de casca foi desenvolvido por Guttman et al [1]. Em Murali et al. [3], foram investigados sistematicamente os erros de discretização que aparecem unicamente em uma formulação de vigas não-lineares devido à presença de termos derivados não-lineares no termo de deformação da

membrana. Krawczyk et al. [4] desenvolveu um modelo de feixe de camadas para análise de elementos finitos não-lineares geométricos de feixes laminados com interação de camada parcial. Jun et al. [5] desenvolveu uma matriz de rigidez dinâmica exata de uma viga de material compósito laminado uniforme baseada na teoria de deformação de cisalhamento trigonométrico. Blair et al. [6] usaram a teoria de Euler-Bernoulli para desenvolver formulações de vigas divididas em elementos finitos com incluindo a não-linearidade geométrica, incluindo acoplamento de flexão-torção no contexto de grandes deformações. Reddy [8] deduziu uma formulação não linear de vigas isotrópicas utilizando a teoria de Euler Bernoulli e a teoria de Timoshenko para formular o comportamento cinemático de vigas utilizando o princípio do deslocamento virtual para formular as equações de equilíbrio.

O intuito do trabalho é desenvolver uma formulação simples para prever o comportamento desse tipo de material e no futuro aprimorar a formulação com melhores suposições e hipóteses. O desenvolvimento dessas fórmulas pode ajudar a prever melhor o comportamento desse tipo de material em uma aplicação mais crítica, podendo ser tirado melhor proveito de suas características, ou mesmo viabilizar uma maior aplicação dos mesmos em diversas situações onde ainda não é utilizado.

2. Formulação teórica

Basicamente, existem quatro diferentes teorias clássicas sobre o comportamento cinemático de vigas: teoria de vigas de Euler-Bernoulli (EBT) que negligencia as tensões de cisalhamento transversais, a teoria de vigas de Timoshenko (TBT), que toma em conta as tensões de cisalhamento transversais da forma mais simples, a teoria de vigas de segunda ordem (SOBT), e a teoria de vigas de terceira ordem (HOBT), que adiciona termos no campo de deslocamentos assumido. Assim como desenvolvido em Khdeir e Reddy [9], temos a forma geral no campo de deslocamentos assumido expressado por:

$$u(x, z) = u_0(x) + z \left[c_0 \frac{dw_0}{dx} + c_1 \phi_x(x) \right] + c_2 z^2 \psi_x(x) + c_3 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \left[\phi_x(x) + \frac{dw_0}{dx} \right] \quad (1)$$

$$v(x, z) = 0 \quad (2)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3)$$

onde

- u Deslocamento na direção x .
- u_0 Deslocamento na direção x proveniente da matriz de rigidez linear de materiais anisotrópicos.
- v Deslocamento na direção y .
- w Deslocamento na direção z .
- w_0 Deslocamento na direção z proveniente da matriz de rigidez linear de materiais anisotrópicos.
- ϕ e ψ Funções de forma.

Como o modelo escolhido é o de Euler-Bernoulli, negligenciamos o efeito de Poisson e as tensões de cisalhamento transversais pois consideramos a hipótese de

que os planos de secção perpendiculares ao plano médio permanecem planos e rígidos (veja Fig. 1).

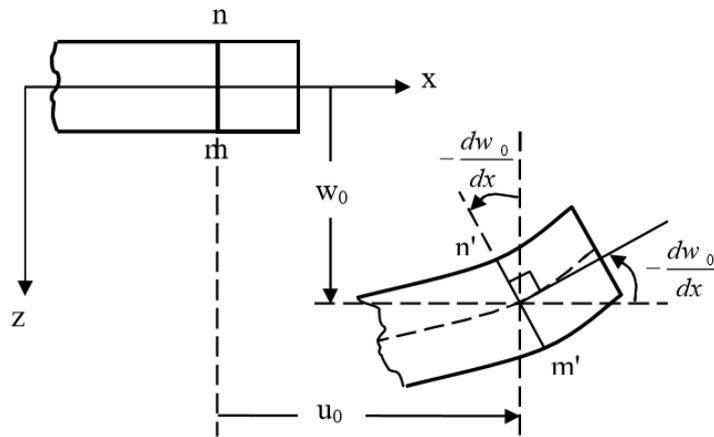


Figura 1: Modelagem da viga (Abass e Elshafei [18]).

Para isso substituímos as seguintes constantes, $c_0 = -1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, na forma geral no campo de deslocamentos, Eq. (1), que toma a forma:

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{dw_0}{dx} \quad (4)$$

$$v(x, z) = 0 \quad (5)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (6)$$

2.1 Formulação pela Deformação

A forma geral das relações de deformação-deslocamento na notação contraída pode ser expressa da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right), \quad i, j, m = 1.2.3 \quad (7)$$

onde as deformações u_1 , u_2 e u_3 são, u , v e w , respectivamente, as direções x_1 , x_2 e x_3 , são x , y e z , respectivamente, e os componentes de tensão ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} , ε_{13} , ε_{23} e ε_{12} são ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , ε_{xz} , ε_{yz} e ε_{xy} , respectivamente.

Para vigas onde o comprimento é muito grande em comparação com as outras duas dimensões, tanto ε_{yy} como ε_{xy} são assumidos iguais a zero de acordo com Ferdinand P. Beer [12]. De acordo com a hipótese de Kirchhoff, os componentes de tensão ε_{zz} , ε_{xz} e ε_{yz} são desprezados. Aplicando estas suposições na Eq. (7), a única deformação diferente de zero é a deformação axial ε_{xx} .

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (8)$$

Omitindo termos de grande deformação exceto o quadrado de $\frac{dw_0}{dx}$, a deformação axial pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \quad (9)$$

onde $\frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2$ é o termo não linear. A Eq. (9) pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + z \varepsilon_{xx}^1 \quad (10)$$

onde ε_{xx}^0 é a deformação do plano médio e ε_{xx}^1 é a curvatura do plano médio na direção x . Substituindo temos:

$$\varepsilon_{xx}^0 = \left[\frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right], \varepsilon_{xx}^1 = \frac{d^2 w_0}{dx^2} \quad (11)$$

Para o comportamento elástico linear de materiais isotrópicos, a lei de Hooke pode ser escrita como:

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \quad (12)$$

Para materiais anisotrópicos transversos essa relação toma a seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \bar{Q}_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (13)$$

onde σ_{ij} e ε_{ij} são os componentes dos vetores de tensão e deformação, \bar{Q}_{ij} são os componentes da matriz de rigidez transformada das camadas. Para o nosso caso, σ_{xx} é a única deformação não nula, logo, como em Gibson [10], temos:

$$\sigma_{xx} = \bar{Q}_{11} \cdot \varepsilon_{xx} \quad (14)$$

O cálculo de \bar{Q}_{11} , para cada camada (k), é dado por:

$$\bar{Q}_{11}(k) = q_{11} \cdot c(k)^4 + q_{22} \cdot s(k)^4 + 2 \cdot (q_{12} + 2 \cdot q_{66}) \cdot c(k)^2 s(k)^2 \quad (15)$$

onde de acordo com a Fig. 2, temos:

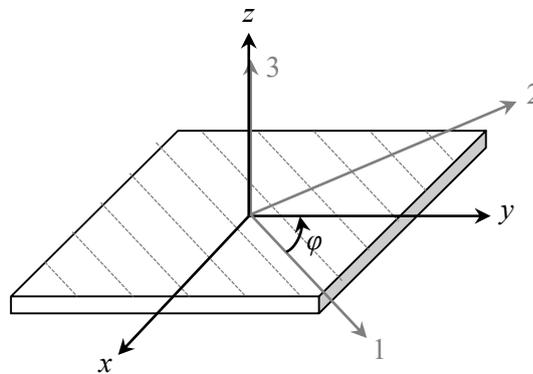


Figura 2: Representação da viga de material composto.

$$q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (16)$$

$$q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (17)$$

$$q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (18)$$

$$q_{66} = G_{12} \quad (19)$$

$$c(k) = \text{cosseno}[\varphi(k)] \quad (20)$$

$$s(k) = \text{seno}[\varphi(k)] \quad (21)$$

onde

E_1 é o módulo de elasticidade no sentido da fibra.

E_2 é o módulo de elasticidade no sentido perpendicular à fibra.

ν_{12} é o coeficiente de Poisson no sentido 1 em relação ao sentido 2.

ν_{21} é o coeficiente de Poisson no sentido 2 em relação ao sentido 1.

G_{12} é o módulo de elasticidade transversal do sentido 1 em relação ao 2.

$\varphi(k)$ é o ângulo das fibras de cada camada (k) em relação ao eixos do plano cartesiano adotado.

2.2 Formulação Variacional

O princípio do trabalho virtual será usado para formular as equações de equilíbrio,

$$\delta W = \delta W_I - \delta W_E = 0 \quad (22)$$

onde δW_I é o trabalho virtual interno, em outras palavras a energia de deformação virtual armazenada na viga devido à tensão a que ela esta submetida, e δW_E é o trabalho realizado pelos carregamentos externos,

$$\delta W_I = \int_v \delta \varepsilon_{ij} \cdot \sigma_{ij} \cdot dv \quad (23)$$

onde v é o volume da viga,

$$\delta W_E = \int_0^L q(x) \delta w_0(x) dx + \int_0^L f(x) \delta u_0(x) dx + N \delta u_0(x_N) + P \delta w_0(x_P) + M \delta \theta_0(x_M) \quad (24)$$

onde $q(x)$ é a carga transversal distribuída, $f(x)$ é a carga axial distribuída, N , P , M são as cargas axiais, transversais e de momento, tais como na Fig. 3. $\delta u_0(x)$, δw_0 e $\delta \theta_0(x)$ são os deslocamentos axiais, transversais e rotacionais virtuais, respectivamente, e $\delta \theta_0(x) = \left(-\frac{d\delta w_0(x)}{dx}\right)$.

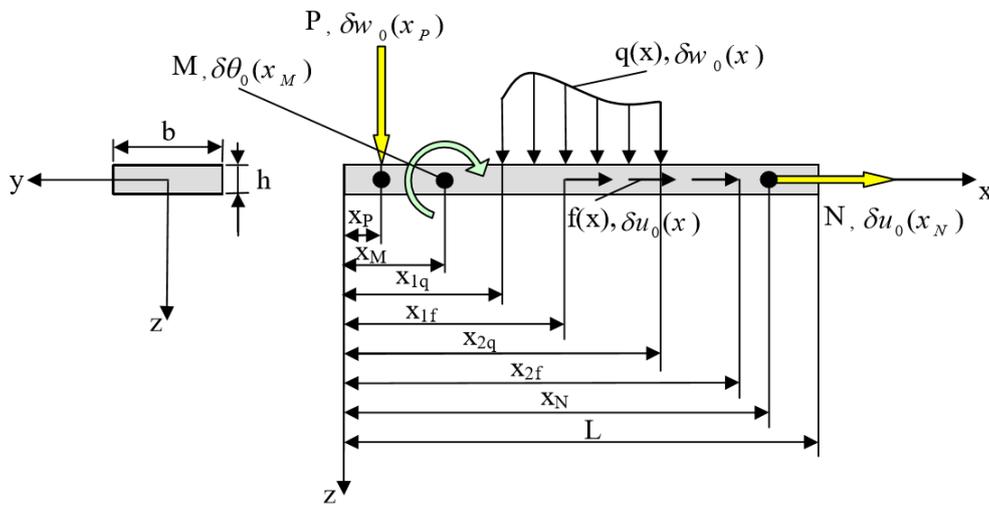


Figura 3: Representação da viga (Abass e Elshafei [18]).

Ao substituir os valores de tensão e deformação, Eq. (13), Eq. (9), e realizando a integração do trabalho virtual interno, temos:

$$\delta W = \int_0^L \int_A \delta \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dA dx \quad (25)$$

$$\delta W = \int_0^L \int_A (\delta \varepsilon_{xx}^0 + z \delta \varepsilon_{xx}^1) \sigma_{xx} dA dx \quad (26)$$

$$\delta W = \int_0^L \int_A (\delta \varepsilon_{xx}^0 + z \delta \varepsilon_{xx}^1) \bar{Q}_{11} \cdot \varepsilon_{xx} dA dx \quad (27)$$

$$\delta W = \int_0^L \int_A (\delta \varepsilon_{xx}^0 + z \delta \varepsilon_{xx}^1) \bar{Q}_{11} \cdot (\varepsilon_{xx}^0 + z \varepsilon_{xx}^1) dA dx \quad (28)$$

$$\delta W = \int_0^L \int_A \bar{Q}_{11} [(\delta \varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{xx}^0) + z(\delta \varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{xx}^1 + \delta \varepsilon_{xx}^1 \varepsilon_{xx}^0) + z^2(\delta \varepsilon_{xx}^1 \varepsilon_{xx}^1)] dA dx \quad (29)$$

$$\delta W = \int_0^L \int_A [A_{11} (\delta \varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{xx}^0) + B_{11} (\delta \varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{xx}^1 + \delta \varepsilon_{xx}^1 \varepsilon_{xx}^0) + D_{11} (\delta \varepsilon_{xx}^1 \varepsilon_{xx}^1)] dx \quad (30)$$

onde $(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_A (\bar{Q}_{11})_k (1, z, z^2) dA$. A_{ij} são os componentes da matriz de rigidez extensiva, D_{ij} são os componentes da matriz de rigidez flexional, B_{ij} são os componentes de rigidez combinada do laminado e $(\bar{Q}_{ij})_k$ são os componentes da matriz de rigidez transformada da késima lamina, baseados em Gibson [10] e dados por:

$$A_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (\bar{Q}_{11})_k dydz = b \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{11})_k (z_k - z_{(k-1)}) \quad (31)$$

$$B_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (\bar{Q}_{11})_k z dydz = \frac{1}{2} b \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{11})_k (z_k^2 - z_{(k-1)}^2) \quad (32)$$

$$D_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (\bar{Q}_{11})_k z^2 dydz = \frac{1}{3} b \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{11})_k (z_k^3 - z_{(k-1)}^3) \quad (33)$$

Tomando a variação dos componentes de tensão dada pela Eq. (10):

$$\delta \varepsilon_{xx}^0 = \left[\frac{d\delta u_0}{dx} + \frac{dw_0}{dx} \frac{d\delta w_0}{dx} \right] \quad (34)$$

$$\delta \varepsilon_{xx}^1 = -\frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} \quad (35)$$

Substituindo na fórmula do trabalho virtual interno, Eq. (30), tem-se:

$$\delta W_I = \int_0^L \left[\begin{array}{l} A_{11} \left[\frac{d\delta u_0}{dx} \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) + \frac{d\delta w_0}{dx} \frac{dw_0}{dx} \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) \right] \\ -B_{11} \left[\frac{d\delta u_0}{dx} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + \frac{d\delta w_0}{dx} \left(\frac{dw_0}{dx} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + \frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) \right] \\ +D_{11} \left[\frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) \right] \end{array} \right] dx \quad (36)$$

2.3 Formulação de elementos finitos

O deslocamento de uma viga submetida a alongamento axial é dado por Yildirm, Sancaktar e Kiral [15].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (37)$$

Resolvendo a equação governante acima e aplicando as condições de contorno, temos:

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^2 u_j \psi_j = [\psi_1 \ \psi_2] \{u\} \quad (38)$$

$$\psi_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (39)$$

$$\psi_2 = \frac{x}{L} \quad (40)$$

$$\{u\}^T = [u_1 \ u_2] \quad (41)$$

A equação governante de uma viga sob flexão pura é dada por Robbins e Reddy [16].

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (42)$$

Resolvendo a equação acima e impondo as condições de contorno nodal, obtém-se a Eq. (43), baseada em Bendary, El Shafei e Riad [17].

$$w_0(x) = \sum_{j=1}^4 \Delta_j \phi_j = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4] \{\Delta\} \quad (43)$$

onde $\{\Delta\}^T = [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 \ \Delta_4] = [w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2]$ e as funções de forma tomam a seguinte forma:

$$\phi_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (44)$$

$$\phi_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{2x^3}{L^2} \quad (45)$$

$$\phi_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (46)$$

$$\phi_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (47)$$

O vetor de deslocamentos nodais do elemento $\{d\}$ é dado por:

$$\{d\}^T = [u_1 \ \Delta_1 \ \Delta_2 \ u_2 \ \Delta_3 \ \Delta_4] \quad (48)$$

2.4 Matriz de rigidez não linear para materiais anisotrópicos

Tomando a variação da Eq. (38) e Eq. (46), então substituindo as funções de forma na Eq. (36), podemos obter o seguinte:

$$\delta W_I = \int_0^L \left[\begin{array}{l} A_{11} \left\{ \begin{array}{l} \delta u_i \frac{d\psi_i}{dx} \left[\sum_{j=1}^2 u_j \frac{d\psi_j}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dw_0}{dx} \sum_{J=1}^4 \Delta_J \frac{d\phi_J}{dx} \right] \\ + \delta \Delta_I \frac{d\phi_I}{dx} \frac{dw_0}{dx} \left[\sum_{j=1}^4 u_j \frac{d\psi_j}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dw_0}{dx} \sum_{J=1}^4 \Delta_J \frac{d\phi_J}{dx} \right] \end{array} \right\} \\ -B_{11} \left\{ \begin{array}{l} \delta u_i \frac{d\psi_i}{dx} \left[\sum_{j=1}^4 \Delta_J \frac{d^2\phi_J}{dx^2} \right] + \delta \Delta_I \frac{d\phi_I}{dx} \left[\frac{dw_0}{dx} \sum_{j=1}^4 \Delta_J \frac{d^2\phi_J}{dx^2} \right] \\ + \delta \Delta_I \frac{d^2\phi_I}{dx^2} \left[\sum_{j=1}^2 \frac{d\psi_j}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dw_0}{dx} \sum_{J=1}^4 \Delta_J \frac{d\phi_J}{dx} \right] \\ + D_{11} \left\{ \delta \Delta_I \frac{d^2\phi_I}{dx^2} \sum_{j=1}^4 \Delta_J \frac{d^2\phi_J}{dx^2} \right\} \end{array} \right\} \end{array} \right] \quad (49)$$

onde $i, j = 1, 2$ e $I, J = 1, 2, 3, 4$. Com isso, temos:

δW_I

$$= \left\{ \begin{array}{l} \delta u_i \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \left[\int_0^L A_{11} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \right] u_j \\ + \sum_{j=1}^4 \left[\frac{1}{2} \int_0^L A_{11} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} \frac{dw_0}{dx} dx - \int_0^L B_{11} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d^2\phi_j}{dx^2} dx \right] \Delta_j \end{array} \right\} \\ \delta \Delta_i \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \left[\int_0^L A_{11} \frac{dw_0}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx - \int_0^L B_{11} \frac{d^2\phi_i}{dx^2} \frac{d\psi_j}{dx} dx \right] u_j \\ + \sum_{j=1}^4 \left[\frac{1}{2} \int_0^L A_{11} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx - \int_0^L B_{11} \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d^2\phi_j}{dx^2} dx \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^L B_{11} \frac{d^2\phi_i}{dx^2} \frac{dw_0}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx + \int_0^L D_{11} \frac{d^2\phi_i}{dx^2} \frac{d^2\phi_j}{dx^2} dx \right] \Delta_j \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (50)$$

O trabalho virtual interno pode ser expresso em forma de matriz como:

$$\delta W_I = [\{\delta u\}^T \ \{\delta \Delta\}^T] [K]_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \{u\}_{2 \times 1} \\ \{\Delta\}_{4 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

onde a matriz de rigidez K é descrita como:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K^{11}]_{2 \times 2} & [K^{12}]_{2 \times 4} \\ [K^{21}]_{4 \times 2} & [K^{22}]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (52)$$

e seus coeficientes são:

$$K_{ij}^{11} = \int_0^L A_{11} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \quad (53)$$

$$K_{ij}^{12} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(A_{11} \frac{dw_0}{dx} \right) \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx - \int_0^L B_{11} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d^2\phi_j}{dx^2} dx \quad (54)$$

$$K_{ij}^{21} = \int_0^L \left(A_{11} \frac{dw_0}{dx} \right) \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx - \int_0^L B_{11} \frac{d^2\phi_i}{dx^2} \frac{d\psi_j}{dx} dx \quad (55)$$

$$K_{IJ}^{22} = \frac{1}{2} \int_0^L A_{11} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \frac{d\phi_I}{dx} \frac{d\phi_J}{dx} dx - \int_0^L B_{11} \frac{d\phi_I}{dx} \frac{d^2\phi_J}{dx^2} dx \quad (56)$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^L B_{11} \frac{d^2\phi_I}{dx^2} \frac{dw_0}{dx} \frac{d\phi_J}{dx} dx + \int_0^L D_{11} \frac{d^2\phi_I}{dx^2} \frac{d^2\phi_J}{dx^2} dx$$

Substituindo o valor de $w_0(x)$ em função das funções de forma, surgirá um termo quadrado em u_j e Δ_j , o que leva a formar um sistema de equações algébricas de segunda ordem não linear. Assim, para resolver este sistema deve-se fazer iteração assumindo um valor inicial de $w_0(x)$, então calcula-se a matriz de rigidez correspondente $[K]$, Eq. (52). O valor corrigido de $w_0(x)$ dos deslocamentos nodais do elemento calculado $\{d\}$ é assim obtido, Eq. (48). O processo iterativo se repete e o novo valor de $w_0(x)$ é substituído na matriz de rigidez. Assim, o deslocamento nodal pode ser novamente calculado até que o sistema de equações converja e alcance a precisão requerida.

Note que a matriz de rigidez é uma matriz assimétrica, ou seja, $[K^{12}]^T \neq [K^{21}]$. Como marcado acima, $[K^{12}]$ contém o fator $\frac{1}{2}$, e $[K^{21}]$ não, Eq. (55). Para torná-la simétrica, ou seja, $[K^{12}]^T = [K^{21}]$ é necessário dividir a deformação linear $\frac{du_0}{dx}$, na Eq. (36), em duas partes iguais, conforme o seguinte, Reddy [8];

$$\delta W_I = \int_0^L \left[\begin{array}{l} A_{11} \left[\frac{d\delta u_0}{dx} \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) + \frac{d\delta w_0}{dx} \frac{dw_0}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) \right] \\ -B_{11} \left[\frac{d\delta u_0}{dx} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + \frac{d\delta w_0}{dx} \left(\frac{dw_0}{dx} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + \frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) \right] \\ +D_{11} \left[\frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) \right] \end{array} \right] dx \quad (57)$$

$$\delta W_I = \int_0^L \left[\begin{array}{l} A_{11} \left[\frac{d\delta u_0}{dx} \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) + \frac{d\delta w_0}{dx} \frac{dw_0}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) \right] \\ -B_{11} \left[\frac{d\delta u_0}{dx} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + \frac{d\delta w_0}{dx} \left(\frac{dw_0}{dx} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + \frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) \right] \\ +D_{11} \left[\frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) \right] \end{array} \right] dx \quad (58)$$

Substituindo as funções de forma no trabalho virtual interno:

$$\delta W_I = \int_0^L \left[\begin{array}{l} A_{11} \left\{ \begin{array}{l} \delta u_i \frac{d\psi_i}{dx} \left[\sum_{j=1}^2 u_j \frac{d\psi_j}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dw_0}{dx} \sum_{J=1}^4 \Delta_J \frac{d\phi_J}{dx} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \delta \Delta_I \frac{d\phi_I}{dx} \frac{dw_0}{dx} \sum_{j=1}^2 u_j \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \delta \Delta_I \frac{d\phi_I}{dx} \sum_{J=1}^4 \Delta_J \frac{d\phi_J}{dx} \left[\frac{du_0}{dx} + \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] \right\} \\ -B_{11} \left\{ \begin{array}{l} \delta u_i \frac{d\psi_i}{dx} \left[\sum_{J=1}^4 \Delta_J \frac{d^2\phi_J}{dx^2} \right] + \delta \Delta_I \frac{d\phi_I}{dx} \left[\frac{dw_0}{dx} \sum_{J=1}^4 \Delta_J \frac{d^2\phi_J}{dx^2} \right] \\ + \delta \Delta_I \frac{d^2\phi_I}{dx^2} \left[\sum_{j=1}^2 \frac{d\psi_j}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dw_0}{dx} \sum_{J=1}^4 \Delta_J \frac{d\phi_J}{dx} \right] \\ + D_{11} \left\{ \delta \Delta_I \frac{d^2\phi_I}{dx^2} \sum_{J=1}^4 \Delta_J \frac{d^2\phi_J}{dx^2} \right\} \end{array} \right\} \right] dx \quad (59)$$

O trabalho virtual interno pode ser expresso em forma de matriz como:

$$\delta W_I = [\{\delta u\}^T \quad \{\delta \Delta\}^T] [\bar{K}]_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \{u\}_{2 \times 1} \\ \{\Delta\}_{4 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

E a matriz de rigidez se torna:

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}^{11}]_{2 \times 2} & [\bar{K}^{12}]_{2 \times 4} \\ [\bar{K}^{21}]_{4 \times 2} & [\bar{K}^{22}]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (61)$$

que é simétrica. Com isso, os coeficientes da matriz de rigidez simétrica são:

$$\bar{K}_{ij}^{11} = \int_0^L A_{11} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \quad (62)$$

$$\bar{K}_{ij}^{12} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(A_{11} \frac{dw_0}{dx} \right) \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\phi_J}{dx} dx - \int_0^L B_{11} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d^2\phi_J}{dx^2} dx \quad (63)$$

$$\bar{K}_{IJ}^{21} = \frac{1}{2} \int_0^L A_{11} \left[\frac{du_0}{dx} + \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\phi_I}{dx} \frac{d\phi_J}{dx} dx - \int_0^L B_{11} \frac{d\phi_I}{dx} \frac{dw_0}{dx} \frac{d^2\phi_J}{dx^2} dx \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{IJ}^{22} &= \frac{1}{2} \int_0^L A_{11} \left[\frac{du_0}{dx} + \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\phi_I}{dx} \frac{d\phi_J}{dx} dx - \int_0^L B_{11} \frac{d\phi_I}{dx} \frac{dw_0}{dx} \frac{d^2\phi_J}{dx^2} dx \quad (65) \\ &- \frac{1}{2} \int_0^L B_{11} \frac{d^2\phi_I}{dx^2} \frac{dw_0}{dx} \frac{d\phi_J}{dx} dx + \int_0^L D_{11} \frac{d^2\phi_I}{dx^2} \frac{d^2\phi_J}{dx^2} dx \end{aligned}$$

Dessa forma, temos $[K^{12}] = [K^{21}]$ o que torna a matriz simétrica.

No caso da matriz simétrica $u_0(x)$, $w_0(x)$ devem ser conhecidos de uma iteração anterior para calcular a matriz de rigidez subsequente. Dessa forma conseguimos resolver as equações de equilíbrio para os deslocamentos nodais $\{d\}$, e repetir o processo de iteração.

2.5 Matriz de rigidez linear para materiais anisotrópicos

Omitindo o termo não linear $\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2$ da expressão da deformação longitudinal, Eq. (8), a deformação linear será expressa por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2w_0}{dx^2} \quad (66)$$

Isso resulta em omitir todos os termos não-lineares nos coeficientes da matriz de rigidez, com isso temos:

$$\bar{K}_{ij}^{11} = K_{ij}^{11} = \int_0^L A_{11} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \quad (67)$$

$$\bar{K}_{ij}^{12} = K_{ij}^{12} = - \int_0^L B_{11} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d^2\phi_j}{dx^2} dx \quad (68)$$

$$\bar{K}_{Ij}^{21} = - \int_0^L B_{11} \frac{d^2\phi_I}{dx^2} \frac{d\psi_j}{dx} dx \quad (69)$$

$$\bar{K}_{IJ}^{22} = - \int_0^L B_{11} \frac{d\phi_I}{dx} \frac{d^2\phi_J}{dx^2} dx + \int_0^L D_{11} \frac{d^2\phi_I}{dx^2} \frac{d^2\phi_J}{dx^2} dx \quad (70)$$

Resolvendo essas equações temos a matriz abaixo:

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{L} & 0 & -\frac{B_{11}}{L} & -\frac{A_{11}}{L} & 0 & \frac{B_{11}}{L} \\ 0 & 12\frac{D_{11}}{L^3} & 6\frac{D_{11}}{L^2} & 0 & -12\frac{D_{11}}{L^3} & 6\frac{D_{11}}{L^2} \\ -\frac{B_{11}}{L} & 6\frac{D_{11}}{L^2} & 4\frac{D_{11}}{L} & \frac{B_{11}}{L} & -6\frac{D_{11}}{L^2} & 2\frac{D_{11}}{L} \\ -\frac{A_{11}}{L} & 0 & \frac{B_{11}}{L} & \frac{A_{11}}{L} & 0 & -\frac{B_{11}}{L} \\ 0 & -12\frac{D_{11}}{L^3} & -6\frac{D_{11}}{L^2} & 0 & 12\frac{D_{11}}{L^3} & -6\frac{D_{11}}{L^2} \\ \frac{B_{11}}{L} & 6\frac{D_{11}}{L^2} & 2\frac{D_{11}}{L} & -\frac{B_{11}}{L} & -6\frac{D_{11}}{L^2} & 4\frac{D_{11}}{L} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Essa matriz ser importante pois é com ela que são obtidos os valores iniciais para $u_0(x)$ e $w_0(x)$.

2.6 Solução do Sistema não linear de equações

Após a montagem da matriz de rigidez global da viga, por adição dos termos de nós iguais, e dos vetores de força é gerado um sistema não linear de equações tal que:

$$[K_g(\{d_g\})]\{d_g\} = \{F_g\} \quad (72)$$

onde $[K_g(\{d_g\})]$ é a matriz de rigidez global, que é função do vetor de deslocamento nodal global desconhecido $\{d_g\}$ e $\{F_g\}$ é o vetor de força global.

Este sistema não linear deve ser resolvido para obter os deslocamentos nodais $\{d_g\}$. Dois métodos foram utilizados neste estudo: a iteração direta e os métodos iterativos de Newton-Raphson.

No procedimento de iteração direta, a solução na ($r^{\text{ésima}}$) iteração é determinada a partir do seguinte conjunto montado de equações:

$$\{d_g\}^{(r)} = [K_g(\{d\}^{(r-1)})]^{-1}\{F_g\} \quad (73)$$

Onde a matriz de rigidez global é determinada usando o vetor de deslocamento nodal da iteração anterior $\{d\}^{(r-1)}$.

Para o procedimento de Newton Raphson a equação linearizada dos elementos toma a forma:

$$\{d_g\}^{(r)} = \{d_g\}^{(r-1)} - [T(\{d_g\}^{(r-1)})]^{-1} \{R(\{d_g\}^{(r-1)})\} \quad (74)$$

onde o termo residual é:

$$\{R(\{d_g\}^{(r-1)})\} = (K_g\{d_g\}^{(r-1)}) - \{F_g\} \quad (75)$$

E a matriz tangente de rigidez $[T(\{d_g\}^{(r-1)})]$ de cada elemento é calculado segundo:

$$[T(\{d_g\}^{(r-1)})] = \left(\frac{\partial \{R(\{d_g\})\}}{\partial \{d_g\}} \right)^{(r-1)} \quad (76)$$

A matriz tangente de rigidez associada a teoria de vigas de Euler-Bernoulli é dada por:

$$[T_{ij}^{11}] = [K_{ij}^{11}] \quad (77)$$

$$[T_{ij}^{12}] = [K_{ij}^{12}] \quad (78)$$

$$[T_{ij}^{21}] = [K_{ij}^{21}] \quad (79)$$

$$[T_{ij}^{22}] = [K_{ij}^{22}] + \int_0^L A_{11} \left(\frac{du_0}{dx} + \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) \frac{d\phi_I}{dx} \frac{d\phi_J}{dx} dx \quad (80)$$

Em ambos os métodos, direto e Newton Raphson, a primeira iteração pode ser calculada usando a matriz de rigidez linear, isto é, assumir $\{d_g\}^{(r-1)} = 0$ e calcular $\{d_g\}^{(r)}$ usando a Eq. (71) ou Eq. (73). Em seguida, calcula-se o resíduo e repete-se o processo de iteração até obter um resultado pequeno o suficiente. Na solução exata, o resíduo é igual a zero.

Durante a solução, a iteração direta e o método de Newton-Raphson às vezes não são capazes de convergir para uma determinada solução. Nesses casos a função *fminsearch* do MATLAB® foi usada para o processo de iteração visando obter os resultados propostos.

3. Resultados Numéricos

Para realizar o estudo foram utilizados os *softwares* MATLAB® e MAPLE® na tentativa de reproduzir os resultados obtidos por Abass e Elshafei [18]. Dessa forma, os parâmetros adotados, dados pelo artigo de referência, para a viga de material composto da Fig. 4 são apresentados na Tab. 1.

Tabela 1: Parâmetros de referência.

Comprimento (L)	500 mm
Largura (b)	20 mm
Espessura (h)	2,35 mm
E_1	39,8 Gpa
E_2	37,9 Gpa
G_{12}	1,9027 Gpa
$\nu_{12} = \nu_{21}$	0,14
Número de camadas	8
Ângulos das fibras	$[0^\circ]_8$
Carregamento (P)	Varia de 0,5 N a 12,5 N
Local de aplicação do carregamento	400 mm do ponto de fixação
Densidade	1227,565 kg/m ³



Figura 4: Procedimento realizado no experimento de referência (Abass e Elshafei [18]).

Foi analisada a força de 7.08 N no sentido do eixo Z, conforme Figura 3, em uma viga e em condições como descreve a Tabela 1. Dessa forma obtivemos os seguintes resultados. Para $F = 7,08 N$, temos:

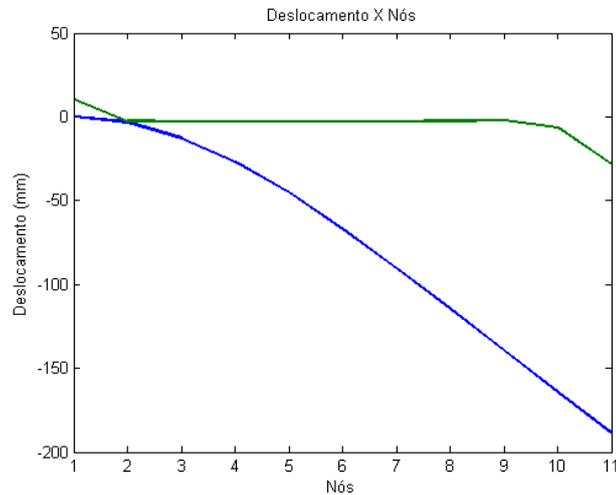


Figura 5: Resultados obtidos para $F = 7,08 N$ e 10 elementos (Linha verde: modelo não linear para materiais anisotrópicos; Linha azul: modelo linear para materiais anisotrópicos).

$$x_{\text{máx}}(10 \text{ elementos})_{F=7.08N} = -28,4604 \text{ mm}$$

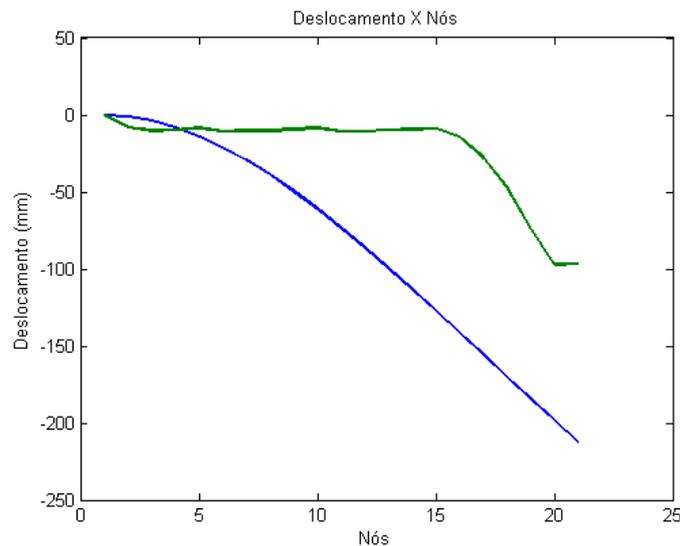


Figura 6: Resultados obtidos para $F = 7,08 N$ e 20 elementos (Linha verde: modelo não linear para materiais anisotrópicos; Linha azul: modelo linear para materiais anisotrópicos).

$$x_{\text{máx}}(20 \text{ elementos})_{F=7.08N} = -97,1598 \text{ mm}$$

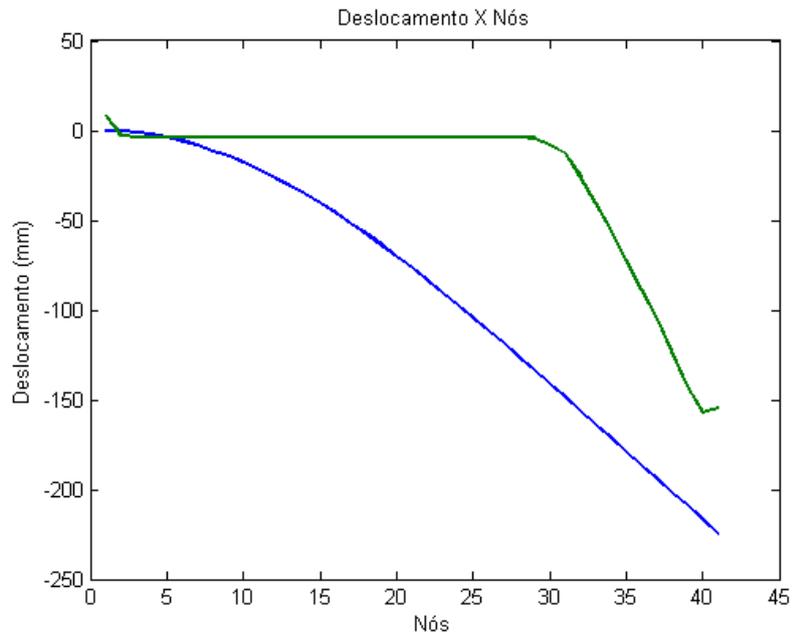


Figura 7: Resultados obtidos para $F = 7,08 N$ e 40 elementos (Linha verde: modelo não linear para materiais anisotrópicos; Linha azul: modelo linear para materiais anisotrópicos).

$$x_{\text{máx}}(40 \text{ elementos})_{F=7.08N} = -157,1640 \text{ mm}$$

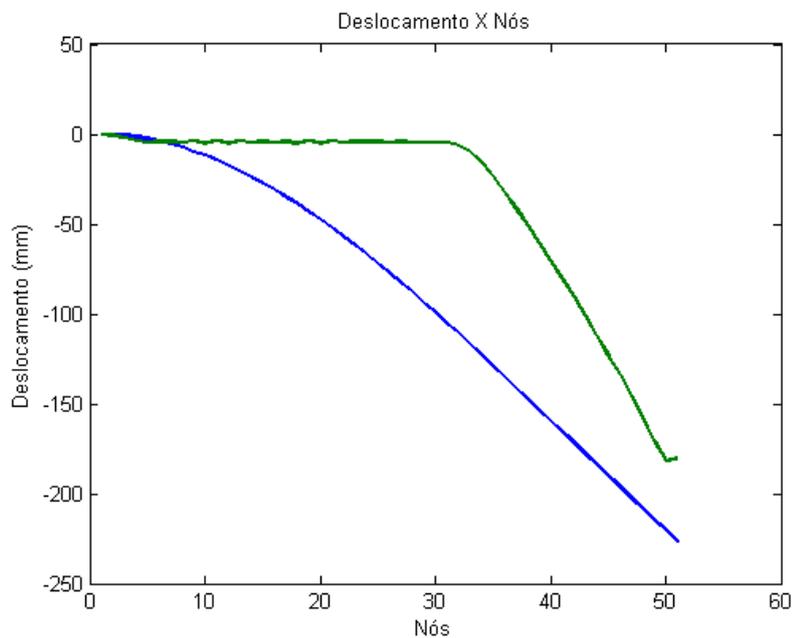


Figura 8: Resultados obtidos para $F = 7.08 N$ e 50 elementos (Linha verde: modelo não linear para materiais anisotrópicos; Linha azul: modelo linear para materiais anisotrópicos).

$$x_{\text{máx}}(50 \text{ elementos})_{F=7.08N} = -181,6917 \text{ mm}$$

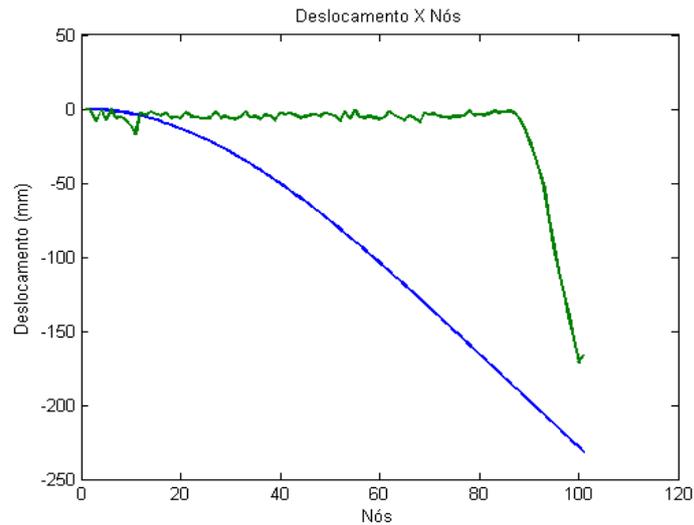


Figura 9: Resultados obtidos para $F = 7.08 N$ e 100 elementos (Linha verde: modelo não linear para materiais anisotrópicos; Linha azul: modelo linear para materiais anisotrópicos).

$$x_{\text{máx}}(100 \text{ elementos})_{F=7.08N} = -171,1246 \text{ mm}$$

Após isso é possível compor um gráfico onde que compara o deslocamento máximo obtido pelas abordagens linear e não-linear com o resultado de referência obtido por Abass e Elshafei [18]. Dessa forma, temos a Fig. 10 e Fig. 11.

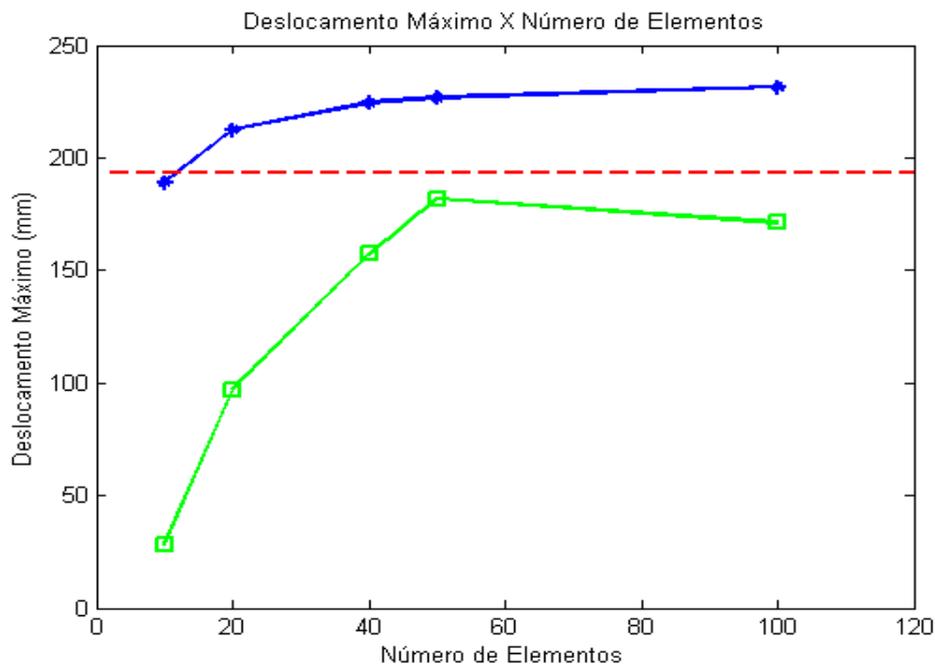


Figura 10: Resultados para $F = 7,08 N$. (Linha verde: modelo não linear para materiais anisotrópicos; Linha azul: modelo linear para materiais anisotrópicos; Linha vermelha: resultado experimental).

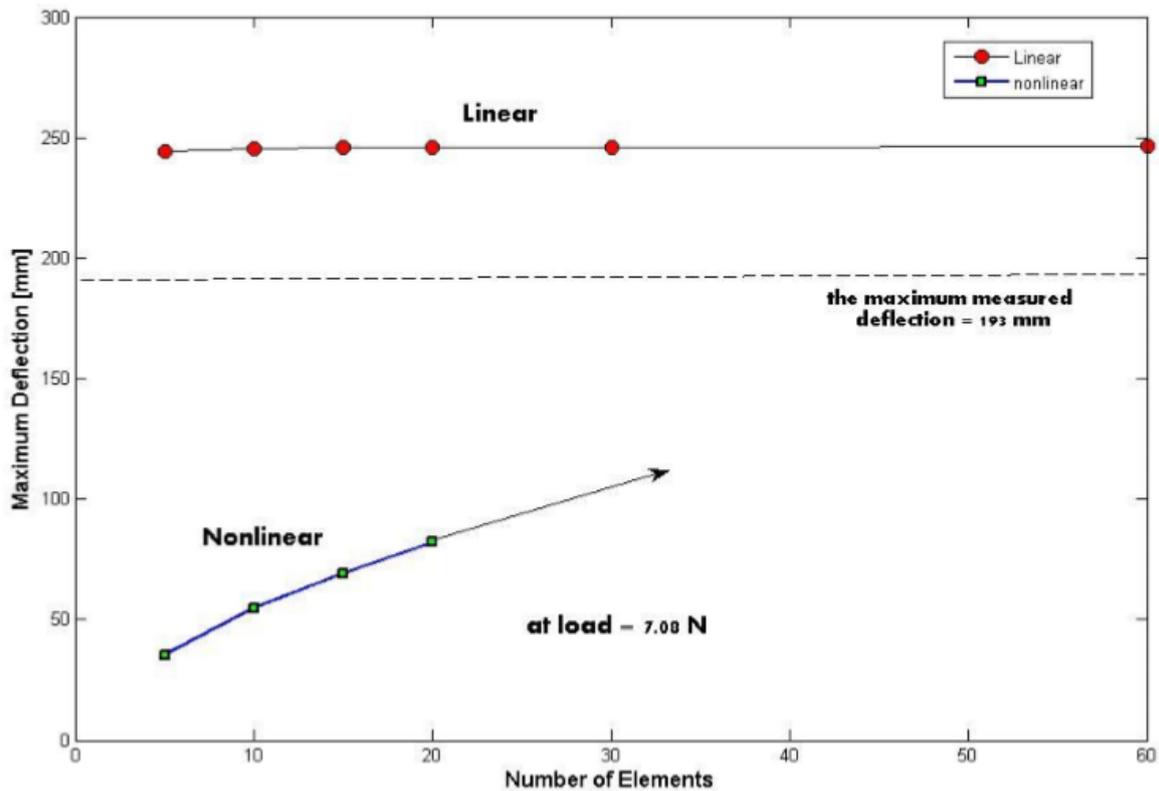


Figura 11: Resultados de referência para $F = 7,08 \text{ N}$ (Abass e Elshafei [18]).

É possível ver através das Fig. 10 e Fig. 11 que a medida que aumentamos o número de elementos o resultado se aproxima mais de um resultado plausível e converge para um resultado que não se altera de forma significativa mesmo se aumentarmos o número de elementos. Vale ressaltar que para a obtenção dos resultados foi necessário a utilização da função “fminsearch” do MATLAB®, pois o método de Newton Raphson não se mostrou convergente.

As diferenças entre os resultados da referência e os do presente trabalho se devem principalmente aos métodos de resolução que utilizamos (fminsearch ao invés de fsolve).

Outra conclusão que pode ser extraída do modelo desenvolvido é que quanto maior a força aplicada menor será a exatidão do mesmo o que pode ser mostrado pela Fig. 12.

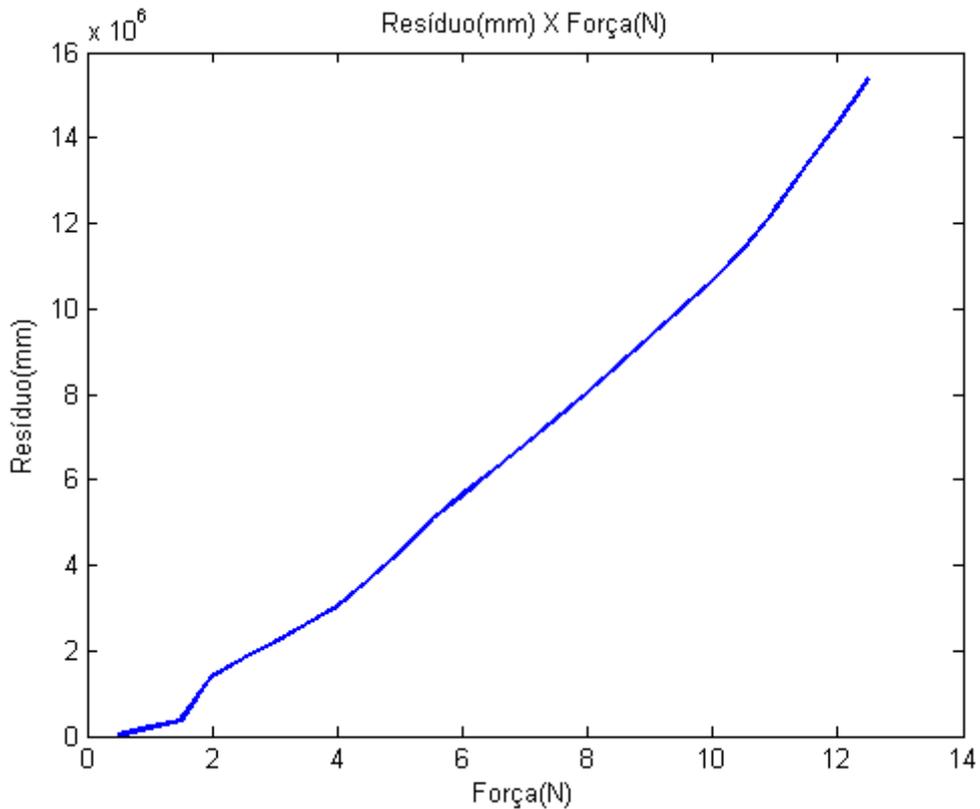


Figura 12: Resíduo da função objetivo em função da força aplicada.

Isso corrobora com a conclusão que a teoria de Euler Bernoulli é insuficiente para estimar as deflexões maiores, porque negligencia o efeito de Poisson e as tensões de cisalhamento transversais. Isso pois a viga desenvolve forças internas que resistem à deformação, e a magnitude das forças internas aumenta com o aumento do carregamento, assim como a deformação, dessa forma o erro relativo obtido pelo método cresce com o aumento da força, como pode ser visto na Fig. 12. Outro aspecto importante a ser considerado no resultados é o formato da curva que não possui grande fidelidade com a realidade (ver Fig. 5, 6, 7, 8 e 9), devido as limitações do modelo adotado e também pelas limitações dos métodos de convergência utilizados que não foram os melhores disponíveis na literatura, porém estes são relativamente mais simples e com custo computacional menor o que foi uma escolha tomada pelo estudo.

Portanto, é necessário para melhorar a exatidão dos resultados, principalmente para carregamentos elevados, incluir as tensões de cisalhamento na formulação não-linear, e melhorar os métodos iterativos utilizados. Os modelos de

viga de Timoshenko e de ordens superiores fornecem uma hipótese que melhor se adapta a realidade observada.

Ainda assim, como é possível observar os resultados numéricos encontrados no presente trabalho se aproximam muito dos resultados experimentais encontrados por Abass e El- Shafei [18], o que dá confiabilidade para nossos programas, ao menos para a faixa de dados analisada.

4. Conclusões

Podemos ver uma diferença entre o encontrado pelo experimento físico referência e os resultados numéricos obtidos pela nosso métodos, isso se deve as simplificações e hipóteses utilizadas (já explicadas anteriormente). Dessa forma o método se mostrou ineficaz de representar com exatidão o comportamento não linear de vigas de materiais anisotrópicos para todas as forças testadas (apesar de ter se aproximado com certo grau de exatidão para a força de 7,08 N, em valor mas não no formato da curva), isso mostra que a teoria de Euler Bernoulli é insuficiente para estimar as deflexões maiores, porque negligencia o efeito de Poisson e as tensões de cisalhamento transversais. Por isso, é necessário incluir tensão de cisalhamento na análise não-linear geométrica. Contudo, o presente estudo possui validade ao passo que serve de base para futuros desenvolvimentos e aprimoramentos para dessa forma representar com maior exatidão o comportamento real desse tipo de material.

Uma possível melhoria que não inclui alterar a formulação proposta seria aprimorar o processo de convergência utilizando um método mais poderoso e robusto como uma evolução diferencial por exemplo.

5. Referências Bibliográficas

- [1] F. GUTTMANN, W. WAGNER, L. MEYER, AND P. WRIGGERS, "A nonlinear composite shell element with continuous interlaminar shear stresses," *Computational Mechanics*, Vol. 13, pp. 175-188, 1993.
- [2] B. OMIDVAR A. GHORBANPOOR, " Nonlinear FE Solution for Thin-Walled Open-Section Composite Beams," *Journal of Structural Engineering*, Vol. 122, November 1996, pp. 1369-1378, 1996.
- [3] R MURALI AND G PRATHAP, *Field-consistency Aspects of Locking in a Geometrically Nonlinear Beam Formulation*, CSIR Centre for Mathematical Modelling and Computer Simulation, RR CM 0601, 2006.
- [4] P. KRAWCZYK, F. FREY, AND A.P. ZIELINSKI, " Large deflections of laminated beams with interlayer slips: Part 1: model development," *Engineering Computations*, Vol. 24, pp. 17 – 32, 2007.
- [5] LI JUN, AND HUA HONGXING, " dynamic stiffness analysis of a laminated composite beams using trigonometric shear deformation theory," *Composite Structures*, Vol. 89, Issue 3, pp. 433-442, July 2009.
- [6] MAXWELL BLAIR, AND ALFRED G. STRIZ, "Finite Element Beam Assemblies with Geometric Bend-Twist Coupling," AIAA, 2008.
- [7] YAGCI, BARIS; FILIZ, SINAN; ROMERO, LOUIS L.; Ozdoganlar, O. BurakThis, "A spectralTchebychev technique for solving linear and nonlinear beam equations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 321, Issue 1-2, pp. 375-404, 2009.
- [8] J. N. REDDY, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, Oxford.
- [9] A.A. KHDEIR AND J. N. REDDY, "An exact Solution for the Bending of Thin and Thick Cross-ply Laminated Beams", *Composite Structure*, Vol. 37, pp. 195-203, 1997.

- [10] RONALD F. GIBSON, Principles of Composite Material Mechanics, McGraw– Hill Inc., New York, 1994.
- [11] WILLIAM H., SAUL A. TEUKOLSKY, WILLIAM T. VETTERLING, AND BRAIN P. FLANNERY, Numerical Recipes in Fortran, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [12] LOGAN, D.L., A First Course in the Finite Element Method, PWS-KENT, 1992.
- [13] DAVID H. ALLEN, AND WALTER E. HAISLER, Introduction to Aerospace Structural Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1985, pp. 250-328
- [14] FERDLANAND P. BEER, AND E. RUSSELL JOHNSTON, Jr., Mechanics of Materials, McGraw- Hill International Book Company, Auckland, 1981.
- [15] YILDIRM V., SANCAKTAR, E. AND KIRAL, E., “Comparison Of The In-Plane Natural Frequencies of Symmetric Cross-Ply Laminated Beams Based on The Bernoulli-Euler and Timoshenko Beam Theories”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 66, pp. 410-417 (1999).
- [16] ROBBINS, D. H., AND REDDY, J. N., “Analysis of Piezoelectrically Actuated Beams Using a Layer-Wise Displacement Theory,” Computers & Structures, Vol. 41, No. 2, pp. 265-279, 1991.
- [17] BENDARY L. M., EL SHAFEI M. A. AND RIAD A. M., “Finite Element Model of a Smart Isotropic Beam with Distributed Piezoelectric Actuators,” Proceeding of the 13th International AMME Conference, MTC, 27-29 May, 2008.
- [18] BENDARY L. M., EL SHAFEI M. A., “Linear and Nonlinear Finite Element Modeling of Advanced Isotropic and Anisotropic Beams Part I: Euler Bernoulli Theory”, 13th International Conference on AEROSPACE SCIENCES & AVIATION TECHNOLOGY, ASAT- 13, 26 – 28 May, 2009.