

VITOR CUNHA ANDRADE

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE UMA ALETA QUASI-
FRACTAL PARA APLICAÇÃO EM DISSIPADORES TÉRMICOS
AERONÁUTICOS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2018

VITOR CUNHA ANDRADE

AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE UMA ALETA QUASI-FRACTAL PARA APLICAÇÃO EM DISSIPADORES TÉRMICOS AERONÁUTICOS

Projeto de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **BACHAREL em ENGENHARIA AERONÁUTICA**.

Área de concentração: Transferência de Calor.

Orientadora: Profa. Dra. Priscila Ferreira Barbosa de Sousa

UBERLÂNDIA - MG

2018

AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE UMA ALETA QUASI-FRACTAL PARA APLICAÇÃO EM DISSIPADORES TÉRMICOS AERONÁUTICOS

Projeto de conclusão de curso **APROVADO** pelo Colegiado do Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Priscila Ferreira Barbosa de Sousa
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Gilmar Guimarães
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Thiago Augusto Machado Guimarães
Universidade Federal de Uberlândia

UBERLÂNDIA - MG

2018

A meu irmão.

AGRADECIMENTOS

Impreterivelmente, agradeço a meu irmão e a minha mãe pela anuência e préstimos que constituíram o sustentáculo de minha formação. Seus ensinamentos conduzirão meus passos por esta vida.

Gostaria de reconhecer e agradecer a minha orientadora, Profa. Dra. Priscila Ferreira Barbosa de Sousa, pela notória diligência e pelas inestimáveis contribuições que foram fundamentais para viabilizar a realização deste trabalho.

Por fim, estendo com apreço o meu agradecimento aos membros da Banca Examinadora pela deferência, reconhecimento e tempo despendido avaliando este trabalho.

Vitor Cunha Andrade

ANDRADE, Vitor. **Avaliação do Desempenho de uma Aleta Quasi-Fractal para Aplicação em Dissipadores Térmicos Aeronáuticos**. 2018. 53 p. Projeto de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

RESUMO

Os diferentes mecanismos de transferência de calor são conceitos fundamentais no projeto e operação de sistemas térmicos. Equipamento extensivamente utilizado em tais sistemas, o dissipador térmico é um tipo de trocador de calor projetado para intensificar a transferência de calor entre um objeto em estado sólido e um fluido adjacente através da utilização de superfícies estendidas, conhecidas como aletas. O problema do aumento de área superficial em corpos que possuem restrições volumétricas e de peso é recorrente na natureza. Uma solução comum e evidente para o problema é a utilização de formas definidas por aproximações de geometria fractal. Neste trabalho, foi desenvolvida uma análise comparativa, baseada em um modelo numérico computacional, para determinar o ganho de desempenho térmico de uma aleta de formato definido por aproximação fractal em relação a uma aleta de perfil retangular.

PALAVRAS-CHAVE: *fractal, condução de calor, dissipador térmico, trocador de calor, transferência de calor.*

ANDRADE, Vitor. **Performance Evaluation of a Quasi-Fractal Fin for Application in Aeronautical Heat Sinks**. 2018. 53 p. Graduation Project, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, Brazil.

ABSTRACT

The different mechanisms of heat transfer are fundamental concepts in the design and operation of thermal systems. Equipment extensively used in such systems, a heat sink is a type of heat exchanger designed to intensify the heat transfer between a solid-state object and an adjacent fluid via extended surfaces, known as fins. The problem of increasing surface area in bodies that have volumetric and weight restrictions is recurrent in nature. A common and evident solution to the problem is the use of shapes defined by approximations of fractal geometry. In this work, a comparative analysis, based on a numerical computational model, was carried out for the purpose of determining the thermal performance gain of a fin with shape defined by fractal approximation in relation to a rectangular profile fin.

KEYWORDS: *fractal, heat conduction, heat sink, heat exchanger, heat transfer.*

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Balanço de energia em um elemento diferencial de uma aleta | 16 |
| Figura 2 – Malha de elementos finitos bidimensional..... | 18 |
| Figura 3 – Aplicações típicas de trocadores de calor aeronáuticos | 20 |
| Figura 4 – Dissipador térmico AFC-CH1 (<i>Part Number</i> 08-07394) instalado em um filtro de óleo lubrificante CH48108-1 (<i>Part Number</i> 08-00907)..... | 21 |
| Figura 5 – Representação gráfica do Conjunto de Cantor..... | 23 |
| Figura 6 – Aproximação com quatro iterações do fractal gerado..... | 26 |
| Figura 7 – Medidas em milímetros: (a) aleta proposta (b) aleta retangular | 27 |
| Figura 8 – Esquema do modelo térmico referente à aleta proposta | 29 |
| Figura 9 – Esquema do modelo térmico referente à aleta de perfil retangular..... | 29 |
| Figura 10 – Metodologia adotada para implementação da solução numérica..... | 32 |
| Figura 11 – Trecho de código MATLAB [®] referente à criação de um modelo térmico em regime estacionário..... | 33 |
| Figura 12 – Trecho de código MATLAB [®] referente à declaração da matriz <i>gd</i> da aleta proposta | 33 |
| Figura 13 – Trecho de código MATLAB [®] referente a declaração da matriz <i>gd</i> da aleta de perfil retangular..... | 33 |
| Figura 14 – Trecho de código MATLAB [®] referente à decomposição de uma matriz <i>gd</i> em regiões mínimas..... | 33 |
| Figura 15 – Trecho de código MATLAB [®] referente à inclusão de um modelo geométrico em um modelo térmico em regime estacionário. | 34 |
| Figura 16 – Trecho de código MATLAB [®] referente à geração e à inserção da malha de elementos finitos no modelo térmico em regime estacionário da aleta proposta | 34 |
| Figura 17 – Trecho de código MATLAB [®] referente à geração e à inserção da malha de elementos finitos no modelo térmico em regime estacionário da aleta de perfil retangular | 34 |
| Figura 18 – Trecho de código MATLAB [®] referente à inserção das propriedades termofísicas do material das aletas a um modelo térmico em regime estacionário | 34 |
| Figura 19 – Trecho de código MATLAB [®] referente à inserção das condições de contorno do problema térmico aplicado à aleta proposta ao modelo térmico em regime estacionário | 35 |
| Figura 20 – Trecho de código MATLAB [®] referente à inserção das condições de contorno do problema térmico aplicado à aleta de perfil retangular ao modelo térmico em regime estacionário..... | 35 |

| | |
|---|----|
| Figura 21 – Trecho de código MATLAB [®] referente à criação de um modelo térmico em regime transiente..... | 35 |
| Figura 22 – Gráfico da distribuição de temperatura analítica ao longo da altura da aleta de perfil retangular obtida pela solução da forma geral da equação da energia para uma superfície estendida considerando a condição de temperatura prescrita na base | 37 |
| Figura 23 – Vista em detalhe da base da aleta de perfil retangular com a malha aplicada | 38 |
| Figura 24 – Simulação da distribuição de temperatura na aleta de perfil retangular obtida pelo Método dos Elementos Finitos considerando a condição de temperatura prescrita na base | 39 |
| Figura 25 – Gráfico da distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta de perfil retangular obtida pelo Método dos Elementos Finitos considerando a condição de temperatura prescrita na base..... | 40 |
| Figura 26 – Curva de erro absoluto da solução obtida pelo Método dos Elementos Finitos em relação à solução analítica | 40 |
| Figura 27 – Simulação da distribuição de temperatura na aleta de perfil retangular obtida pelo MEF considerando a condição de fluxo de calor prescrito na base..... | 42 |
| Figura 28 – Gráfico da distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta de perfil retangular obtida pelo MEF considerando a condição de fluxo de calor prescrito na base | 42 |
| Figura 29 – Avaliação comparativa entre as distribuições de temperatura na aleta de perfil retangular obtidas pela aplicação das condições de fluxo de calor e temperatura prescritas na base utilizando o Método dos Elementos Finitos | 43 |
| Figura 30 – Curva de erro absoluto entre as distribuições de temperatura na aleta de perfil retangular obtidas pela aplicação das condições de fluxo de calor e temperatura prescritas na base utilizando o Método dos Elementos Finitos | 44 |
| Figura 31 – Vista em detalhe da extremidade de um dos ramos superiores da aleta proposta | 45 |
| Figura 32 – Simulação da distribuição de temperatura na aleta de perfil retangular obtida pelo Método dos Elementos Finitos considerando a condição de fluxo de calor prescrito na base. | 46 |
| Figura 33 – Gráfico da distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta proposta obtida pela solução por Método dos Elementos Finitos considerando a condição de temperatura prescrita na base..... | 47 |
| Figura 34 – Variação da temperatura com o tempo na base da aleta de perfil retangular..... | 48 |
| Figura 35 – Variação da temperatura com o tempo na base da aleta proposta..... | 48 |
| Figura 36 – Renderizações do dissipador térmico baseado na aleta proposta e do dissipador térmico AFC-CH1, à esquerda e à direita, respectivamente..... | 49 |

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| 1 INTRODUÇÃO | 10 |
| 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 11 |
| 2.1 Conceitos básicos de transferência de calor | 11 |
| 2.1.1 Condução | 11 |
| 2.1.2 Convecção | 12 |
| 2.1.3 Radiação | 14 |
| 2.2 Transferência de calor em aletas..... | 15 |
| 2.3 Método dos Elementos Finitos em condução de calor | 17 |
| 2.4 Trocadores de calor aeronáuticos | 19 |
| 2.5 Geometria fractal..... | 21 |
| 2.6 Pavimentação do plano | 24 |
| 3 METODOLOGIA..... | 26 |
| 3.1 Modelagem geométrica | 26 |
| 3.2 Modelagem térmica | 28 |
| 3.3 Modelagem numérica | 31 |
| 4 RESULTADOS | 37 |
| 4.1 Validação da solução numérica bidimensional..... | 37 |
| 4.2 Análise comparativa: aleta proposta x aleta retangular | 41 |
| 5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS | 50 |
| REFERÊNCIAS | 51 |

1 INTRODUÇÃO

A evolução dos requisitos de gerenciamento térmico no projeto de aeronaves de transporte comercial de passageiros exige o desenvolvimento de trocadores de calor cada vez mais compactos, leves e com maior capacidade de transferência de calor. A energia liberada pela combustão e o atrito entre peças móveis em motores aeronáuticos torna alguns sistemas do grupo motopropulsor passíveis ao aumento excessivo de temperatura. Nesse sentido, os sistemas de refrigeração e lubrificação, se não projetados e controlados adequadamente, podem vir a comprometer a segurança operacional e reduzir a eficiência térmica em motores aeronáuticos.

Os avanços no desenvolvimento tecnológico de motores aeronáuticos mais eficientes estão limitados pela capacidade de resfriá-los. O cumprimento da resolução aprovada na 39ª Assembleia da Organização de Aviação Civil Internacional (OACI), que define as diretrizes regulatórias do programa de redução de emissões de dióxido de carbono para o transporte aéreo internacional, está relacionado à capacidade de continuamente aumentar a eficiência térmica em motores aeronáuticos. A pesquisa e o desenvolvimento serão peças-chave para a evolução tecnológica que será requerida pela OACI.

No Brasil, o campo de pesquisa sobre aplicação de geometria fractal no projeto de aletas é pouco explorado. A ocorrência de formas definidas por aproximações fractais são surpreendentemente comuns na natureza e algumas de suas propriedades geométricas, como a auto-similaridade e a dimensão fractal, se mostram promissoras para a pesquisa e desenvolvimento de dissipadores térmicos mais eficientes e compactos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentada uma revisão de livros, revistas e periódicos que abordam o tema estudado. São apresentados os princípios básicos de transferência de calor para análise de condução em superfícies estendidas. Em seguida, são abordados conceitos para implementação do Método dos Elementos Finitos para análise térmica e uma descrição geral de parâmetros de projeto de trocadores de calor aeronáuticos. Finalmente, são apresentados conceitos básicos de geometria fractal e pavimentação do plano utilizados para a proposição de uma aleta mais leve e de maior capacidade de dissipação térmica quando comparada a uma aleta de perfil retangular.

2.1 Conceitos básicos de transferência de calor

Para Incropera et al. (2008), transferência de calor, também referida simplesmente como calor, é energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperatura espacial. Sendo assim, ocorrerá transferência de calor sempre que houver diferença de temperatura entre dois ou mais corpos.

Os diferentes tipos de processos de transferência de calor são referidos por modos. O termo condução é utilizado para se referir ao modo que ocorre através de um meio estacionário, que pode ser sólido e/ou fluido, desde que exista uma diferença de temperatura espacial nesse meio. Como contraponto, utiliza-se o termo convecção para se referir ao processo de transferência de calor que ocorre entre uma superfície e um fluido em movimento, desde que ocorra uma diferença de temperatura entre estes. Já a radiação térmica é o processo de transferência de calor pela emissão de energia na forma de ondas eletromagnéticas, a qual ocorre em todos os corpos que apresentam temperatura absoluta não nula, mesmo sem a presença de meio interposto.

2.1.1 Condução

Para Çengel e Ghajar (2009), condução é o modo de transferência de calor que ocorre devido às interações entre partículas adjacentes que constituem uma substância. Em sólidos, a condução ocorre principalmente devido às vibrações moleculares e à energia transferida por elétrons livres, sendo a última mais significativa em materiais condutores. Em fluidos, a

condução ocorre principalmente devido às colisões entre as moléculas e ao movimento molecular aleatório, também referido por difusão.

A taxa de transferência de calor por condução em um meio depende do formato, do tipo de material e do gradiente de temperatura envolvidos. A *lei de Fourier* (1822) é a equação de taxa que governa o modo de condução e, para um modelo de condução unidimensional na direção x , é expressa na forma:

$$q''_{\text{cond}, x} = -k \frac{dT}{dx}, \quad (1)$$

onde $q''_{\text{cond}, x}$ é o fluxo de calor por condução na direção x (W/m^2) e corresponde a taxa de transferência de calor por unidade de área perpendicular a essa direção. A condutividade térmica ($\text{W}/(\text{m}\cdot\text{k})$), denotada pela letra k , é uma propriedade característica do material no qual ocorre condução que relaciona a transferência de calor através deste como o resultado de um gradiente de temperatura. O fato de a transferência de calor ocorrer da região de maior temperatura para a região de menor temperatura implica em um gradiente de temperatura negativo quando a transferência se dá na mesma orientação de x . Adotando o sinal negativo na equação (1), assegura-se que a taxa de transferência de calor seja uma grandeza positiva em tais casos.

2.1.2 Convecção

Segundo Incropera et al. (2008), a transferência de calor por convecção ocorre por meio de dois mecanismos. A difusão consiste na transferência de energia provocada pelo movimento molecular aleatório, enquanto a advecção é a transferência de energia pelo movimento de massa de fluido que ocorre em escala macroscópica. Devido ao fato de a difusão ocorrer também nas moléculas da massa de fluido em movimento macroscópico, a transferência total de calor resulta da combinação desses dois mecanismos, sendo o transporte cumulativo denominado convecção.

Considerando uma superfície e um fluido em escoamento sobre ela, tem-se por consequência o desenvolvimento de uma região no fluido denominada camada limite de velocidade. Nessa região, a velocidade varia de zero, no local de contato do fluido com a superfície, até um valor associado a velocidade do escoamento.

Assumindo que a superfície e o fluido em escoamento considerados apresentam temperaturas distintas, haverá uma região denominada camada limite térmica. Nessa região, a temperatura varia entre T_s , no local de contato entre a superfície e o fluido, até T_∞ , a temperatura associada a uma região do fluido suficientemente distante da superfície. O tamanho da camada limite térmica pode apresentar diferentes proporções em relação ao tamanho da camada limite de velocidade dependendo do sistema físico considerado, mas, em todo caso, a transferência de calor por convecção se dará da região de maior temperatura para a região de menor temperatura.

Ainda acerca da transferência de calor por convecção, há duas classificações determinadas pela natureza do escoamento do fluido. A convecção forçada é induzida por meios externos, como, por exemplo, compressores e bombas. Como contraponto, a convecção livre, também referida como convecção natural, é causada por forças de empuxo, geradas pela diferença de massa específica.

Além da transferência de calor por convecção na qual a modalidade de energia transferida é sensível, existem também processos de convecção por troca de calor latente, denominadas ebulição e condensação.

A *lei do resfriamento de Newton* (1701) é a equação que governa a transferência de calor por convecção e é escrita na forma:

$$q''_{\text{conv}} = h(T_s - T_\infty), \quad (2)$$

onde q''_{conv} é o fluxo de calor por convecção (W/m^2) e h é o coeficiente de transferência de calor por convecção ($\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$).

O coeficiente de transferência de calor por convecção é uma propriedade que depende do formato da superfície, da natureza e velocidade do escoamento, entre outras propriedades que afetam as condições na camada limite.

Alguns valores típicos do coeficiente de transferência de calor por convecção para condições de convecção natural e forçada são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Valores típicos do coeficiente de transferência de calor por convecção

| Processo | h ($W/m^2 \cdot k$) |
|-------------------------------|----------------------------|
| Convecção natural | |
| • Gases | 2 – 25 |
| • Líquidos | 50 – 1.000 |
| Convecção forçada | |
| • Gases | 25 – 250 |
| • Líquidos | 100 – 20.000 |
| Convecção com mudança de fase | |
| • Ebulição e condensação | 2.500 – 100.000 |

Fonte: Incropera et. al. (2008).

2.1.3 Radiação

Çengel e Ghajar (2009) definem radiação térmica como o modo de transferência de calor pelo qual energia na forma de ondas eletromagnéticas é emitida pela matéria, desde que esta esteja a uma temperatura absoluta não nula. A emissão decorre devido a alterações nas configurações eletrônicas nas partículas que constituem a matéria, ocorrendo tanto em sólidos quanto em fluidos. Diferentemente do que ocorre nos modos de condução e convecção, o transporte de energia associado à radiação térmica não requer a presença de um meio físico para ocorrer.

Poder emissivo, denotado pela letra E , é a taxa na qual energia é liberada pela superfície de um corpo por unidade de área (W/m^2). O radiador ideal, também referido por corpo negro, apresenta poder emissivo máximo, o qual pode ser determinado pela *lei de Stefan-Boltzmann* (1879):

$$E = \sigma T_s^4, \quad (3)$$

onde σ é a *constante de Stefan-Boltzmann* ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(m^2 \cdot K^4)$) e T_s é a temperatura absoluta (K) da superfície.

O poder emissivo de superfícies reais é menor que aquele emitido por um corpo negro, sendo expresso por:

$$E = \varepsilon \sigma T_s^4, \quad (4)$$

onde ε é a emissividade da superfície, cujo valores estão na faixa de $0 \leq \varepsilon \leq 1$, sendo a capacidade de emissão de energia por uma superfície em relação ao corpo negro.

A taxa na qual radiação térmica incide sobre uma superfície a partir de sua vizinha por unidade área é chamada irradiação. A parcela de irradiação que é absorvida pela superfície pode ser calculada por:

$$G_{\text{abs}} = \alpha G, \quad (5)$$

onde α é a absorvidade, cujo valores estão na faixa de $0 \leq \alpha \leq 1$.

A transferência de calor líquida por radiação é a diferença entre as taxas emitidas e absorvidas pela superfície de um corpo. Em aplicações nas quais as superfícies envolvidas apresentam temperaturas baixas a moderadas e emissividades baixas, notadamente superfícies metálicas polidas, a transferência de calor por radiação é geralmente ignorada.

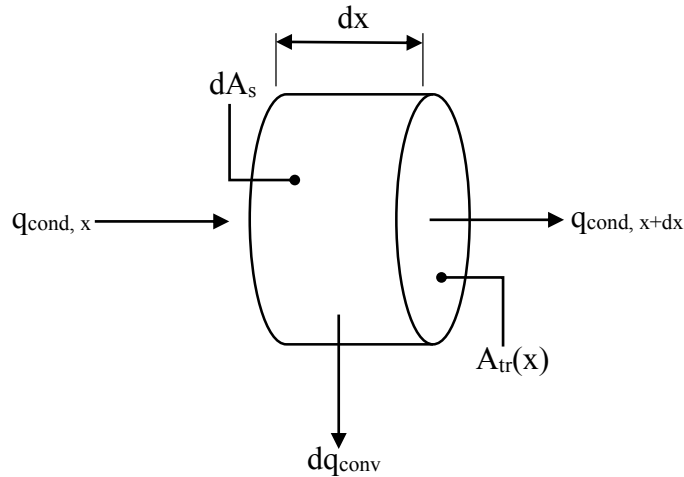
2.2 Transferência de calor em aletas

Incropera et al. (2008) descrevem aletas como superfícies estendidas utilizadas para intensificar a taxa de transferência de calor entre um sólido e um fluido. O processo de transferência de calor em aletas ocorre pelo modo de condução em seu interior e pelos modos de convecção e radiação em suas fronteiras. Ao se estenderem a partir da superfície de um sólido, aletas aumentam a área pela qual ocorre a transferência de calor por convecção.

A taxa de transferência de calor em uma aleta está relacionada à distribuição de temperatura ao longo de sua altura. Assim, a adoção de materiais de alta condutividade térmica contribui para minimizar a variação de temperatura ao longo da altura da aleta e, conseqüentemente, maximizar a taxa de transferência de calor.

Para determinar a transferência de calor através de uma aleta, é necessário conhecer a sua distribuição de temperatura. Assumindo as condições de condução unidimensional no interior de uma aleta e temperatura uniforme ao longo de sua espessura, propõe-se um balanço de energia no elemento diferencial da aleta conforme apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Balanço de energia em um elemento diferencial de uma aleta



Fonte: Próprio autor (2018).

Desprezando-se os efeitos de geração de calor na aleta, assim como a transferência de calor por radiação através da superfície, supondo condutividade térmica e coeficiente de transferência de calor por convecção constantes e aplicando-se a exigência de conservação da energia em um elemento diferencial, obtém-se:

$$q_{\text{cond}, x} = q_{\text{cond}, x+dx} + dq_{\text{conv}}. \quad (6)$$

A taxa de transferência de calor por condução em $x + dx$ é dada por:

$$q_{\text{cond}, x+dx} = q_{\text{cond}, x} + \frac{dq_{\text{cond}, x}}{dx} dx. \quad (7)$$

Aplicando a *lei de Fourier* (1822) na equação (7) obtém-se:

$$q_{\text{cond}, x+dx} = -kA_{\text{tr}} \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx} \left(A_{\text{tr}} \frac{dT}{dx} \right) dx, \quad (8)$$

onde A_{tr} é a área da seção transversal.

A taxa de transferência de calor por convecção no elemento diferencial é dada por:

$$dq_{\text{conv}} = h(T - T_{\infty}) dA_s, \quad (9)$$

onde dA_s é a área superficial do elemento diferencial.

Substituindo as equações (8) e (9) na equação (6), obtém-se:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_{tr}} \frac{dA_{tr}}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_{tr}} \frac{h dA_s}{k dx} \right) (T - T_{\infty}) = 0. \quad (10)$$

A solução da equação (10) considerando condições de contorno adequadas permite obter a distribuição de temperatura em uma aleta que, aplicada à *lei de Fourier* (1822), permite obter a taxa de transferência de calor por condução em qualquer ponto da mesma.

2.3 Método dos Elementos Finitos em condução de calor

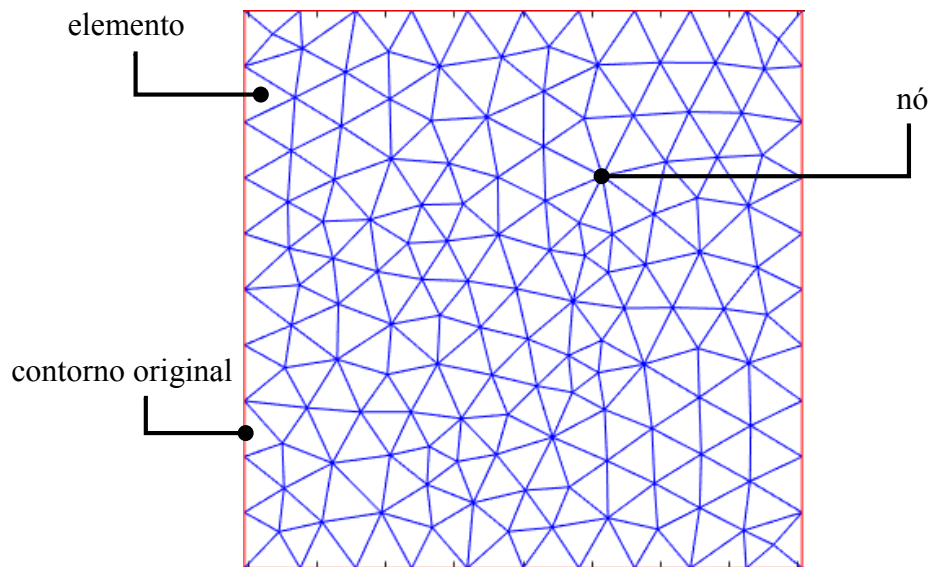
Métodos analíticos podem ser utilizados em casos particulares para se obter soluções exatas para problemas de condução de calor. Mas são comuns os problemas nos quais as geometrias, condições de contorno e/ou condições iniciais implicadas mostram-se impeditivas para a obtenção de tais soluções. Em muitos desses casos, o Método dos Elementos Finitos (MEF) pode ser utilizado para se obter soluções aproximadas, mas suficientemente exatas.

O MEF permite aproximar uma geometria complexa, que pode ser descrita como um domínio computacional, como a união de uma quantidade limitada de objetos geométricos mais simples. O método, então, aproxima em cada subdomínio gerado a Equação Diferencial Parcial (EDP) que governa o problema. Isso é feito utilizando equações cuja resolução pode ser efetuada de forma sistemática e comparativamente mais simples.

Os subdomínios obtidos por meio da discretização apresentam, portanto, dimensões finitas e são chamados de “elementos finitos”, diferentemente dos elementos utilizados no Cálculo Infinitesimal. É por esse motivo que CLOUGH (1960) utilizou pela primeira vez o intuitivo nome “Método dos Elementos Finitos”, ainda que fossem TURNER et al. (1956) os pioneiros na implementação computacional do método.

Aos pontos que conectam os elementos finitos gerados pela discretização é dado o nome “nós”, sendo o conjunto de elementos finitos e nós denominado “malha”, conforme é apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Malha de elementos finitos bidimensional



Fonte: Próprio autor (2018).

Para validar a exatidão de uma análise desenvolvida utilizando MEF, pode-se comparar resultados de soluções obtidas pelo método com resultados obtidos por solução exata, caso esta possa ser obtida, sendo que o primeiro depende do tipo e do tamanho dos elementos finitos adotados.

Além do elemento finito triangular, apresentado na Figura 2, os tipos mais comuns encontrados para geração automática de malha em softwares de Análise de Elementos Finitos (AEF) são os elementos quadrangulares, tetraédricos e hexaédricos.

A escolha adequada do tipo de elemento deve considerar não apenas a exatidão do resultado obtido pelo método, mas também a própria dimensão do objeto modelado. Elementos finitos triangulares, como os apresentados na Figura 2, apresentam grande flexibilidade para se ajustar a objetos bidimensionais de geometria complexa, o que os tornam mais adequados em aplicações planas que requerem malhas mais finas.

Pode-se demonstrar que a solução de um problema obtida pelo MEF converge à solução exata quando o tamanho dos elementos finitos tende a zero e, conseqüentemente, a quantidade de nós tende a infinito, desde que a malha seja consistente. A geração desse tipo de malha, entretanto, mostra-se impraticável. Adotando regras de refinamento adequadas, pode-se obter soluções aproximadas suficientemente exatas. Para aletas de dissipação térmica, Adhiya (2014) sugere pelo menos 4 elementos ao longo da altura e 3 elementos ao longo da espessura.

Entre as plataformas que utilizam o MEF como método numérico para obtenção de soluções para problemas de transferência de calor, Wilde (2018) destaca MATLAB[®], ANSYS[®] Workbench[™] e COMSOL Mutiphysics[®] como as principais opções disponíveis no mercado.

A *Partial Differential Equation Toolbox*[™] é uma ferramenta da plataforma MATLAB[®] que permite a geração automática de malhas bidimensionais e tridimensionais de elementos finitos, podendo também ser utilizada na discretização de equações. A partir do lançamento *R2017a* da plataforma MATLAB[®], a *Partial Differential Equation Toolbox*[™] incorpora funcionalidades específicas para análise térmica por elementos finitos, podendo ser utilizada para resolver problemas de transferência de calor envolvendo modos combinados.

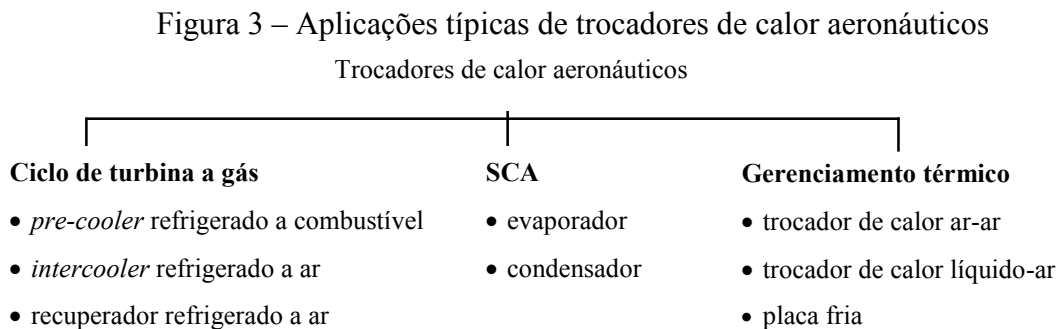
Em resumo, a abordagem pelo Método dos Elementos Finitos da *Partial Differential Equation Toolbox*[™]:

1. Descreve o domínio original do problema como um conjunto de elementos finitos.
2. Para cada elemento, aproxima a EDP que governa o problema térmico utilizando equações de solução comparativamente mais simples. Em seguida, aplica as condições de contorno nas fronteiras de cada elemento. Em problemas lineares estacionários nos quais os coeficientes não dependem da solução ou de seu gradiente, o resultado é um sistema linear de equações. Em problemas estacionários nos quais os coeficientes dependem da solução ou de seu gradiente, o resultado é um sistema de equações não lineares. Para problemas dependentes do tempo, o resultado é um conjunto de equações diferenciais ordinárias.
3. Estrutura as equações e condições de contorno resultantes em um sistema global de equações que modelam todo o problema.
4. Resolve o sistema resultante de equações algébricas ou equações diferenciais ordinárias utilizando, respectivamente, *solvers* lineares ou integração numérica por meio de suítes de funções nativas da própria plataforma MATLAB[®].

2.4 Trocadores de calor aeronáuticos

Um trocador de calor é um dispositivo projetado para transferir eficientemente calor entre duas ou mais substâncias. São utilizados em diversas atividades econômicas, como, por exemplo, nas indústrias de geração de energia, automotiva, refrigeração e aeronáutica. Especialmente na indústria aeronáutica, Sundén e Fu (2016) destacam que trocadores de calor são utilizados principalmente em ciclos de turbina a gás, Sistema de Controle Ambiental (SCA) e gerenciamento térmico de dispositivos eletrônicos.

A Figura 3 apresenta aplicações típicas de trocadores de calor aeronáuticos.



Fonte: Sundén e Fu (2016).

A classificação de trocadores de calor pode ser feita quanto ao processo de transferência de calor, características construtivas e arranjo de fluxo. Em geral, o projeto e o dimensionamento de trocadores de calor requerem consideração da taxa de transferência de calor, queda de pressão do fluido de trabalho, custo de fabricação, limites de operação, tamanho e peso. Na indústria aeronáutica, em particular, o peso e o tamanho estão entre os parâmetros de projeto e dimensionamento mais importantes.

Várias técnicas de aprimoramento de transferência de calor podem ser adotadas em trocadores de calor aeronáuticos para aumentar a área de transferência e/ou o coeficiente de transferência de calor. Em geral, o objetivo dessas técnicas é reduzir o tamanho de um trocador de calor para uma dada capacidade, aumentar a capacidade de um dado trocador de calor, ou reduzir a temperatura de aproximação, o que pode contribuir para a redução no consumo de combustível pela aeronave.

Técnicas de aprimoramento podem ser classificadas como passivas, quando não requerem fonte externa de energia para serem implementadas, ou ativas, quando requerem fonte externa para a sua implementação. Em geral, técnicas passivas empregam superfícies de geometria especiais, como, por exemplo, aletas, insertos, tubulações curvas e dispositivos de tensão superficial. Devido aos avanços tecnológicos em processos de fabricação, o emprego de geometrias complexas, obtidas por otimização de forma, tem aumentado em trocadores de calor.

Além das aplicações típicas apresentadas na Figura 3, trocadores de calor também são encontrados no sistema de lubrificação de aeronaves. Esse sistema tem como função distribuir óleo lubrificante entre partes móveis em dispositivos como caixas de transmissão e compressores para reduzir desgaste e emissão de ruído. O aumento excessivo de temperatura em tais dispositivos eleva a temperatura do óleo lubrificante, reduzindo sua viscosidade e

espessura do filme e causando aumento de fricção. Para resfriar o óleo lubrificante, combustível e ar podem ser utilizados como fluidos de trabalho pelos trocadores de calor encontrados nesse sistema.

A Figura 4 apresenta um trocador de calor passivo refrigerado a ar utilizado para resfriar óleo lubrificante em motores aeronáuticos a pistão.

Figura 4 – Dissipador térmico AFC-CH1 (*Part Number* 08-07394) instalado em um filtro de óleo lubrificante CH48108-1 (*Part Number* 08-00907)



Fonte: www.airwolf.com/aw/products/oil-filter-chiller (2015).

Esse tipo de trocador de calor, também chamado dissipador térmico, utiliza superfícies estendidas especificamente para intensificar a taxa de transferência de calor entre um objeto em estado sólido e um fluido adjacente.

2.5 Geometria fractal

O termo fractal foi empregado pela primeira vez por Mandelbrot (1975), quando na iminência de concluir sua primeira grande obra sobre o tema, identificou a necessidade de um termo que fizesse alusão à geometria com a qual buscava descrever de maneira exata as reais formas encontradas na natureza. A consulta a um dicionário de latim remeteu ao encontro do adjetivo *fractus*, derivado do verbo *frangere*, o qual significa fraturar. Dessa maneira, foi criado o termo fractal.

Após a publicação do trabalho de Mandelbrot (1975), a ocorrência de questionamentos relacionados à semelhança entre um objeto e a sua ampliação, ou redução, se tornou cada vez mais frequente na literatura científica.

Matematicamente, um fractal é um objeto geométrico que apresenta invariância de forma quando a escala, em que o mesmo é analisado, é alterada. O mesmo não ocorre, por exemplo, com uma circunferência, que parece ter a sua curvatura reduzida quando uma de suas partes é ampliada. As três principais propriedades que definem os fractais são a auto-similaridade, a complexidade infinita e a sua dimensão.

A auto-similaridade pode ser constatada quando um fragmento de uma forma geométrica — podendo ser um contorno, uma região plana ou um sólido geométrico — pode ser identificado como uma cópia do todo, porém em uma escala diferente.

A complexidade infinita está relacionada ao fato de que o processo que gera um objeto geométrico, que pode ser definido como sendo um fractal, é recursivo. Isso implica que, ao se executar um determinado processo, no transcorrer do próprio obtêm-se como subprocedimento o mesmo procedimento que foi anteriormente executado. Para a construção iterativa de um fractal definido por um procedimento matemático, existe um número infinito de iterações a serem executadas, obtendo-se assim uma estrutura de organização infinitamente complexa.

Diferente do que ocorre na Geometria Euclidiana — na qual um ponto apresenta dimensão zero, uma linha apresenta dimensão um, uma superfície apresenta dimensão dois e um sólido apresenta dimensão três — a dimensão de um fractal não corresponde necessariamente a um valor inteiro, podendo assumir valores fracionários.

Entre as diversas abordagens sobre dimensões fractais, a dimensão de Hausdorff (1918) é a mais utilizada, sendo expressa por:

$$d = \frac{\log N}{\log \frac{L}{n}}, \quad (11)$$

onde d denota a dimensão fractal, L é o comprimento da linha de construção fractal, n é definido como o número de partes em que a linha pode ser dividida em uma iteração p e N será o comprimento do segmento na iteração p , sendo $p \in \mathbb{N}$.

A geometria fractal pode ser apresentada através de casos clássicos, descrevendo as propriedades de auto-similaridade, a complexidade infinita e a sua dimensão. Entre estes, Nunes (2006) destaca o *Conjunto de Cantor*, o *Triângulo de Sierpinski*, e a *Curva de Koch*.

Cantor (1883) apresentou um exemplo de subconjunto infinito no intervalo unitário $[0, 1]$. A construção geométrica desse exemplo, conhecido hoje como *Conjunto de Cantor*, permite uma percepção do conceito que leva à estruturação de um fractal.

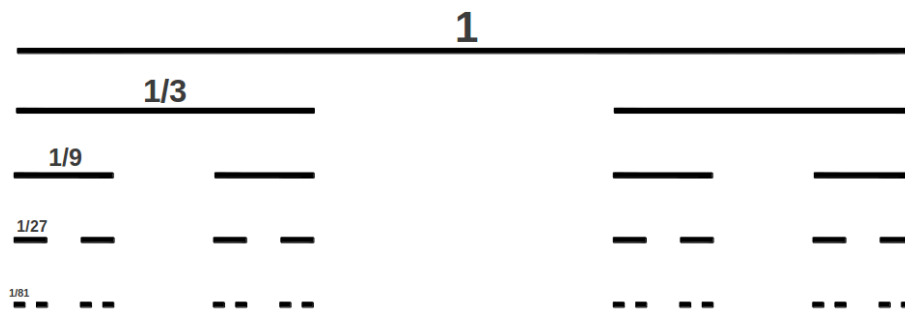
Considerando como objeto inicial o intervalo fechado $I_0 = [0, 1]$, fracionando-o em 3 subintervalos congruentes e desprezando o terço médio, obtém-se a união disjunta de dois subintervalos fechados, $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, de comprimento $\frac{1}{3}$ cada. Aplicando o mesmo procedimento aos subintervalos gerados anteriormente obtém-se $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ com 4 subintervalos congruentes de comprimento $\frac{1}{9}$ cada. A aplicação do mesmo procedimento aos 4 últimos subintervalos obtidos anteriormente resulta em 8 subintervalos de comprimento $\frac{1}{27}$ cada. A repetição indefinida do processo iterativo resulta em I_N , constituído pela união disjunta de 2^N subintervalos fechados de comprimento $\frac{1}{3^N}$ cada.

Assim, o *Conjunto de Cantor*, aqui designado por C , pode então ser definido como:

$$C = \bigcap_{N=1}^{\infty} I_N. \quad (12)$$

Sendo, portanto, o conjunto dos pontos não removidos após a retirada de infinitos intervalos abertos. Particularmente, o comprimento de C é menor que qualquer I_N cujo comprimento é $2^N \times (\frac{1}{3})^N = (\frac{2}{3})^N$. Como $\lim_{N \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^N = 0$, logo o *Conjunto de Cantor* apresenta comprimento zero.

Figura 5 – Representação gráfica do Conjunto de Cantor



Fonte: http://georgcantorbyelithompson.blogspot.com.br/2015_02_01_archive.html (2018).

Entre os fractais clássicos, o *Conjunto de Cantor* tem a menor dimensão fractal, aproximadamente 0,63, o que torna a sua construção geométrica promissora em aplicações

práticas que apresentam restrições significativas de quantidade de material para o preenchimento de um determinado espaço. O *Triângulo de Sierpinski* e a *Curva de Koch* têm dimensão fractal 1,59 e 1,16, respectivamente.

Uma versão multidimensional do *Conjunto de Cantor*, gerada quando há produto cartesiano de várias cópias desse conjunto, é conhecida como *Poeira de Cantor*. Isso implica que uma regra fixa de substituição geométrica, definida por um sistema de funções iteradas, pode ser utilizada para gerar um modelo fractal tridimensional.

2.6 Pavimentação do plano

Objeto de estudo da humanidade desde a Antiguidade, uma pavimentação do plano é o recobrimento deste por meio de um conjunto de polígonos, congruentes ou não, de modo que não existam lacunas, nem superposições.

A pavimentação regular é uma classe em que o conjunto contém apenas polígonos regulares congruentes e só é possível quando se utiliza triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos. De fato, para que um polígono regular pavimente um plano é necessário que a soma da medida dos ângulos internos em torno de cada vértice seja 360° .

Entre os três polígonos regulares possíveis para a pavimentação regular, o hexágono regular apresenta a maior eficiência de usabilidade de área. Essa propriedade é explorada, por exemplo, por várias espécies de abelhas que, ao construírem células hexagonais, utilizam a menor quantidade de cera para circunscrever um determinado espaço.

A eficiência de usabilidade de área de um hexágono regular pode ser comprovada trigonometricamente. Para um círculo de raio r inscrito em um hexágono regular de lado a , pode-se relacionar a área do círculo A_c e a área do hexágono A_h por meio do coeficiente:

$$\eta_h = \frac{A_c}{A_h}. \quad (13)$$

Sendo $\sin(30^\circ) = \frac{a}{2}$ e, aplicando o Teorema de Pitágoras, $r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$, tem-se que:

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}r. \quad (14)$$

Portanto, a área do hexágono regular e sua eficiência de usabilidade de área são dadas, respectivamente, por:

$$A_h = 12 \frac{\frac{a}{2}r}{2} = 2\sqrt{3}r^2 \quad (15)$$

e

$$\eta_h = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9069. \quad (16)$$

Essa mesma relação aplicada ao triângulo equilátero e ao quadrado fornece os valores 0,6045 e 0,7854, respectivamente.

A utilização de hexágonos regulares associada a uma regra fixa de substituição geométrica pode ser adotada para gerar um fractal através de um sistema de funções iteradas. Aplicando a expansão ternária, característica do *Conjunto de Cantor*, como a regra fixa de substituição geométrica desse sistema de funções iteradas, tem-se um fractal que combina baixa densidade de ocupação de área, que ocorre devido à pequena dimensão fractal, com alta eficiência de usabilidade da mesma, advinda da utilização de hexágonos regulares para geração do fractal. A pequena dimensão fractal decorrente da regra fixa de substituição adotada implica também em um amplo espaçamento relativo entre as partes auto-similares, uma característica desejável em projeto de dissipadores térmicos aletados. Dessa forma, ao adotar uma aproximação com um determinado número de iterações do fractal com as características apresentadas, tem-se um formato que pode ser utilizado para a proposição de uma aleta de dissipação térmica mais eficiente e leve quando comparada a uma aleta de formato convencional.

3 METODOLOGIA

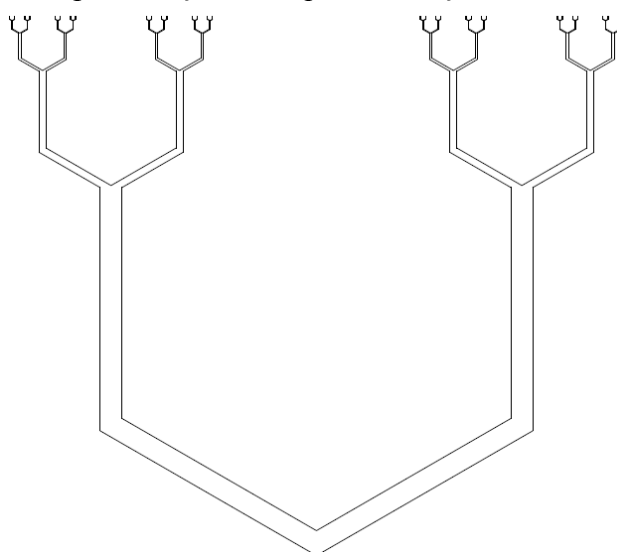
Este capítulo apresenta uma descrição do método adotado para obtenção da forma e características geométricas das aletas avaliadas. São apresentados esquemas dos modelos térmicos considerados e é abordada a formulação utilizada para calcular o fluxo de calor através das bases das aletas. Por fim, é descrita a implementação do Método dos Elementos Finitos adotado utilizando a *Partial Differential Equation Toolbox*TM da plataforma MATLAB[®].

3.1 Modelagem geométrica

A construção iterativa do fractal adotada neste trabalho tem início em uma bifurcação de simetria vertical com ângulo de abertura de 120° , ângulo interno do hexágono regular. A partir de cada uma das extremidades da bifurcação, são gerados dois segmentos retos verticais de mesmo comprimento e espessura dos segmentos da construção anterior. Esse objeto inicial é denominado inicializador.

A partir de cada uma das extremidades dos segmentos retos verticais, são gerados objetos semelhantes ao inicializador, mantendo-se os ângulos construtivos e reduzindo-se a espessura e comprimento dos segmentos a um terço a cada interação. A Figura 6 apresenta uma aproximação com quatro iterações do fractal gerado.

Figura 6 – Aproximação com quatro iterações do fractal gerado



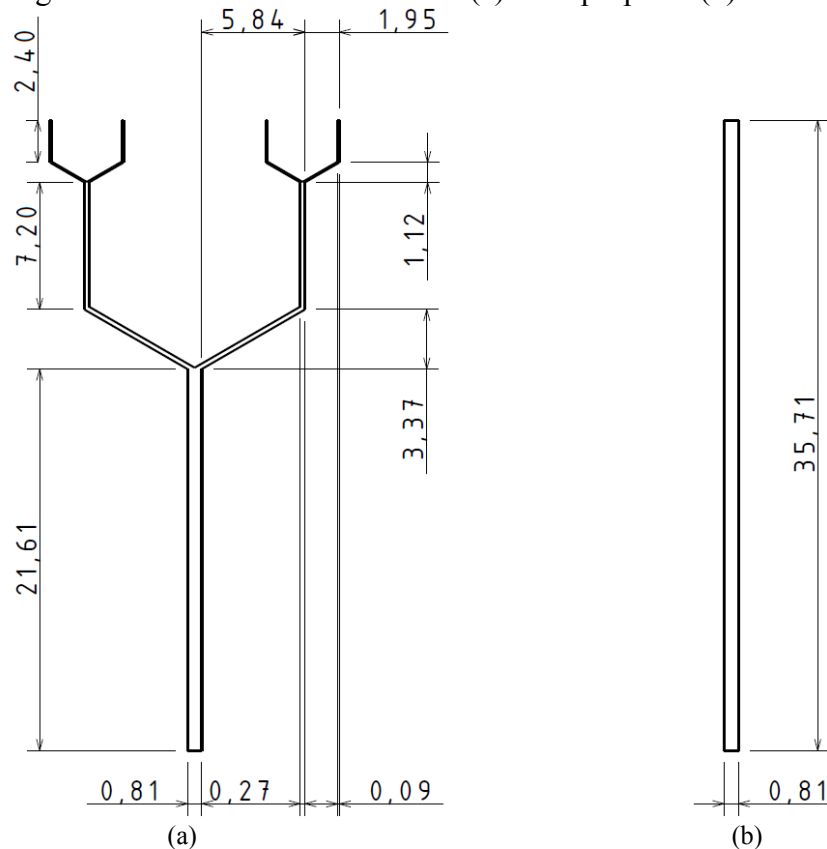
Fonte: Próprio autor (2018).

Considerando a espessura dos objetos gerados, verifica-se a cada iteração o fracionamento desta em três partes iguais, desprezando-se o terço médio e obtendo-se a união disjunta de duas frações, tal qual verifica-se na construção geométrica do *Conjunto de Cantor*.

Além do padrão construtivo apresentado pelo fractal gerado, foi determinado que a aleta proposta tivesse 0,81 mm de espessura em sua base e 35,71 mm de altura, tais como a altura e a espessura das aletas de perfil retangular do dissipador térmico aeronáutico AFC-CH1 (*Part Number 08-07394*) ilustrado na Figura 4, tomado como referência devido a sua aplicabilidade no resfriamento de óleo lubrificante da popular família de motores a pistão Lycoming O-360.

Na Figura 7, à esquerda, são apresentadas as medidas em milímetros da aleta proposta, resultante da confluência das considerações supracitadas. À direita, são apresentadas as medidas da aleta de perfil retangular do dissipador térmico aeronáutico AFC-CH1.

Figura 7 – Medidas em milímetros: (a) aleta proposta (b) aleta retangular



Fonte: Próprio autor (2018).

Ao se considerar a mesma espessura nas bases de ambas as aletas, assegura-se a mesma taxa de transferência de calor por condução através destas, uma vez que foi considerado o mesmo fluxo de calor, isto é, a taxa de transferência de calor por unidade de área, através das

bases. Além disso, ao se considerar a mesma altura em ambas as aletas, assegura-se que o dissipador térmico radial que utilize as aletas propostas possa ser instalado nas mesmas condições que o dissipador térmico aeronáutico AFC-CH1, uma vez que apresentariam o mesmo diâmetro externo.

3.2 Modelagem térmica

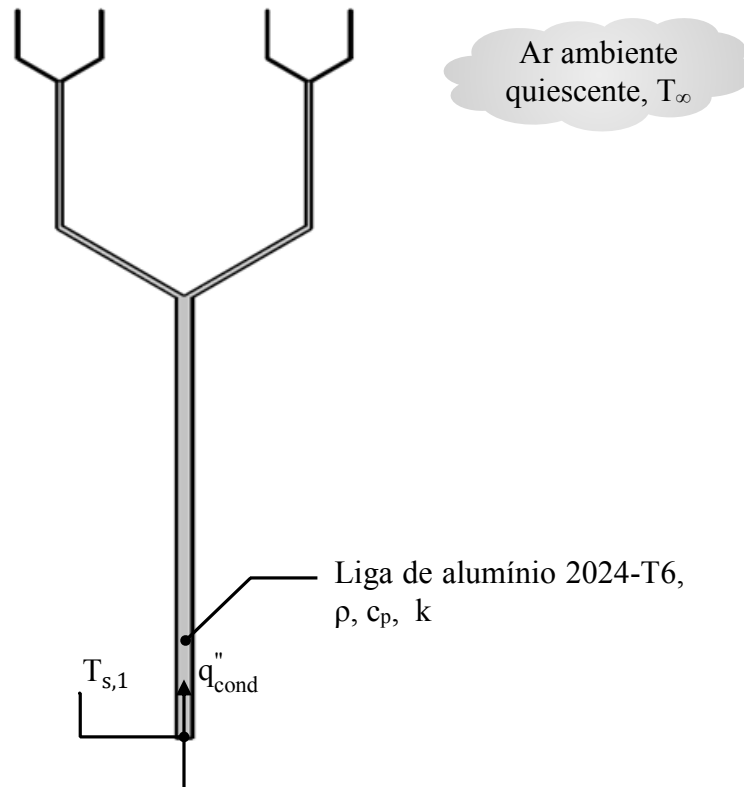
Para avaliar a influência do aumento da área superficial na troca de calor efetiva de uma aleta propõe-se uma análise numérica através de um problema térmico bidimensional. A análise de condução numérica bidimensional para determinar temperaturas e fluxo de calor foi desenvolvida por meio da solução da equação geral da difusão de calor sem termo fonte de energia associado à taxa de geração de energia térmica:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla(k\nabla T) + h(T_\infty - T) = 0, \quad (17)$$

onde ρ é a massa específica do material (kg/m^3), c_p é o calor específico ($\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$), k é a condutividade térmica ($\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$), h é o coeficiente convectivo ($\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$) e T_∞ é a temperatura ambiente (K).

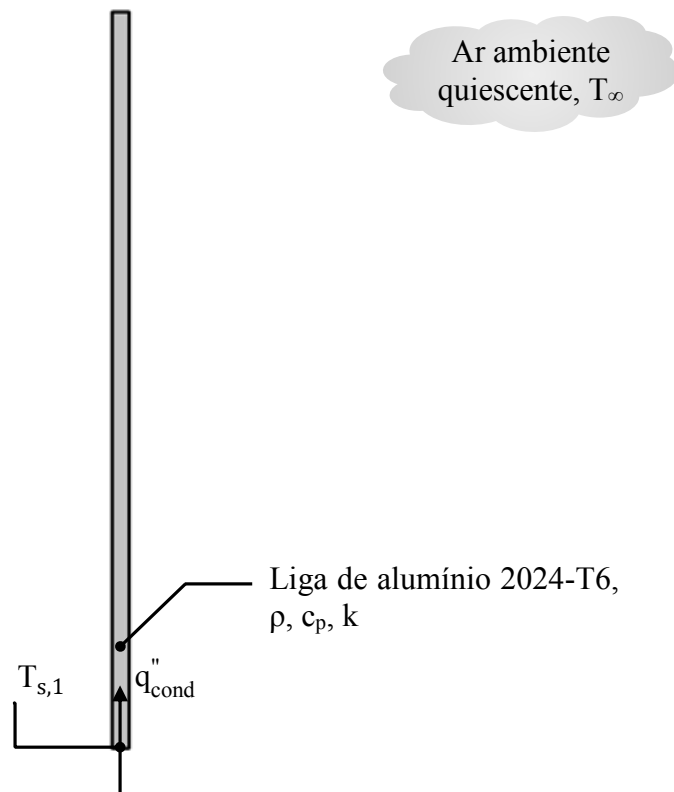
Os modelos térmicos para a aleta proposta e para a aleta de perfil retangular encontram-se esquematizados na Figura 8 e na Figura 9, respectivamente. Observa-se que a condição de contorno nas bases das aletas para os modelos desenvolvidos é de fluxo de calor. Para determinação de um fluxo de calor coerente, q''_{cond} , considera-se o problema térmico em regime permanente em que uma aleta de perfil retangular de liga de alumínio 2024-T6 (4,5% Cu, 1,5% Mg, 0,6% Mn), cujas propriedades termofísicas são: $\rho = 2,770 \text{ kg}/\text{m}^3$, $c_p = 875 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ e $k = 177 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, apresenta uma temperatura na base de $93,3^\circ\text{C}$ quando imersa em um meio convectivo a uma temperatura de $-18,53^\circ\text{C}$ com um coeficiente de convecção igual a $2 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$.

Figura 8 – Esquema do modelo térmico referente à aleta proposta



Fonte: Próprio autor (2018).

Figura 9 – Esquema do modelo térmico referente à aleta de perfil retangular



Fonte: Próprio autor (2018).

A liga de alumínio 2024-T6 foi adotada como material da aleta conforme especificado pelo fabricante do dissipador térmico aeronáutico AFC-CH1. A temperatura na base de 93,3°C foi adotada considerando informações fornecidas pelo fabricante desse dissipador referentes a um voo teste realizado por uma aeronave 8GCBC *Scout*, utilizando o dissipador na condição de cruzeiro. Assumiu-se a temperatura na base da aleta de perfil retangular como sendo a mesma temperatura do óleo lubrificante do motor no voo teste citado. Para determinação da temperatura ambiente de -18,53°C, foi adotado o modelo atmosférico ISA (*International Standard Atmosphere*), considerando a temperatura do ar atmosférico na altitude de 5.181,6 m, a altitude de cruzeiro da aeronave modelo 8GCBC *Scout*. Devido a condição de ar rarefeito que ocorre em tal altitude, o coeficiente de transferência de calor por convecção nas fronteiras de 2 W/(m²·K) foi adotado, sendo este o menor valor apresentado pelas correlações de Incropera et al. (2008) para convecção natural em gases e, portanto, condizente com a condição de ar rarefeito.

Aplicando-se a condição de temperatura prescrita na base da aleta de perfil retangular na solução da forma geral da equação da energia para uma superfície estendida em regime permanente é possível determinar a distribuição de temperatura e a taxa de transferência de calor por meio das equações (18) e (19), respectivamente:

$$\theta = \frac{\cosh m(L - x) + \frac{h}{mk} \sinh m(L - x)}{\cosh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh mL} \theta_b \quad (18)$$

e

$$q = \sqrt{h(2t + 2w)ktw} (T_b - T_\infty) \frac{\sinh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \cosh mL}{\cosh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh mL}, \quad (19)$$

onde m é dado pela equação (20), h é o coeficiente de transferência de calor por convecção, k é a condutividade térmica, T_b é a temperatura do óleo lubrificante, T_∞ é temperatura do meio e t , w e L são a espessura, largura e comprimento da aleta, respectivamente.

$$m = \sqrt{\frac{h(2t + 2w)}{ktw}}. \quad (20)$$

Assim, o fluxo de calor através da base pode ser calculado pela relação:

$$q''_{\text{cond}} = \frac{q}{tw}. \quad (21)$$

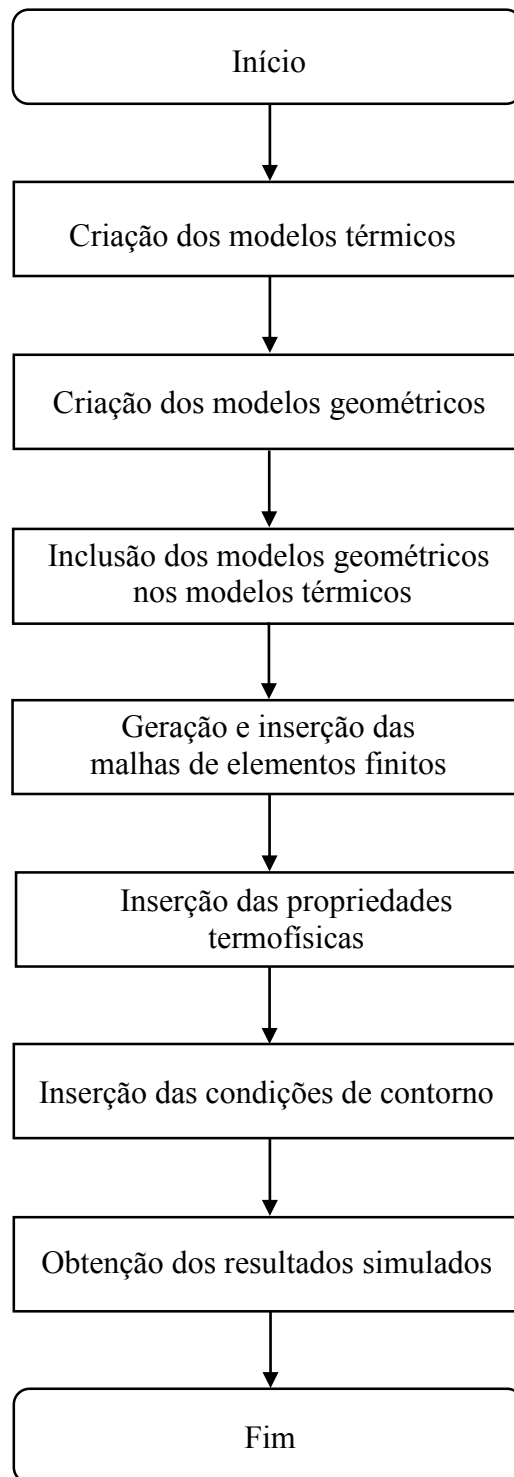
Para a análise comparativa do desempenho das aletas foi imposto o mesmo fluxo de calor em suas bases, a distribuição de temperatura resultante nas aletas é apresentada na próxima seção, bem como a análise dos resultados.

3.3 Modelagem numérica

Para solução da equação da difusão de calor via Método dos Elementos Finitos, considerando as relações constitutivas do material das aletas e satisfazendo as condições de contorno, utilizou-se a *Partial Differential Equation Toolbox*TM da plataforma MATLAB[®] que provê funções para solução de equações diferenciais parciais via análise de elementos finitos.

A metodologia adotada para implementação da solução numérica utilizando a *Partial Differential Equation Toolbox*TM encontra-se esquematizada na Figura 10. Inicialmente, foram criados os modelos térmicos e geométricos correspondentes à aleta proposta e à aleta de perfil retangular. Os modelos geométricos foram, então, incluídos nos respectivos modelos térmicos. Em seguida, foram geradas e inseridas as malhas de elementos finitos. As propriedades termofísicas e condições de contorno foram inseridas nos modelos térmicos para, finalmente, obter-se os resultados simulados.

Figura 10 – Metodologia adotada para implementação da solução numérica



Fonte: Próprio autor (2018).

Para criação dos modelos térmicos em regime estacionário, foi utilizada a função *createpde*, conforme apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Trecho de código MATLAB® referente à criação de um modelo térmico em regime estacionário

```
thermalmodels = createpde('thermal','steadystate');
```

Fonte: Próprio autor (2018)

A modelagem geométrica bidimensional das aletas foi feita pela declaração das matrizes *gd* (*geometry description*) que descrevem a posição dos vértices através de pontos no plano cartesiano. A declaração das matrizes *gd* referentes à aleta proposta e à aleta de perfil retangular é apresentada na Figura 12 e na Figura 13, respectivamente.

Figura 12 – Trecho de código MATLAB® referente à declaração da matriz *gd* da aleta proposta

```
r = [2 31 -0.406e-3 -0.406e-3 -6.250e-3 -6.250e-3 -8.198e-3...
-8.198e-3 -8.108e-3 -8.108e-3 -6.114e-3 -4.121e-3 -4.121e-3...
-4.031e-3 -4.031e-3 -5.979e-3 -5.979e-3 0 5.979e-3...
5.979e-3 4.031e-3 4.031e-3 4.121e-3 4.121e-3 6.114e-3...
8.108e-3 8.108e-3 8.198e-3 8.198e-3 6.250e-3 6.250e-3...
0.406e-3 0.406e-3 0 21.610e-3 24.984e-3 32.187e-3...
33.311e-3 35.712e-3 35.712e-3 33.363e-3 32.213e-3 33.363e-3...
35.712e-3 35.712e-3 33.311e-3 32.187e-3 25.140e-3 21.688e-3...
25.140e-3 32.187e-3 33.311e-3 35.712e-3 35.712e-3 33.363e-3...
32.213e-3 33.363e-3 35.712e-3 35.712e-3 33.311e-3 32.187e-3...
24.984e-3 21.610e-3 0];
gdm = r';
```

Fonte: Próprio autor (2018).

Figura 13 – Trecho de código MATLAB® referente a declaração da matriz *gd* da aleta de perfil retangular

```
r = [3 4 -.4065e-3 -.4065e-3 .4065e-3 .4065e-3 0 35.712e-3 35.712e-3 0];
gdm = r';
```

Fonte: Próprio autor (2018).

Para que o modelo *CSG* (*Constructive Solid Geometry*) das matrizes *gd* pudesse ser utilizado pelas funções da *Partial Differential Equation Toolbox™*, foi necessária a sua decomposição em um conjunto disjunto de regiões mínimas. Para tal, foi utilizada a função *decsg* que é apresentada na Figura 14.

Figura 14 – Trecho de código MATLAB® referente à decomposição de uma matriz *gd* em regiões mínimas.

```
g = decsg(gdm, 'R', ['R']');
```

Fonte: Próprio autor (2018).

A inclusão dos modelos geométricos bidimensionais das aletas nos respectivos modelos térmicos foi feita através da função *geometryFromEdges*. A Figura 15 apresenta a inclusão de um modelo geométrico em um modelo térmico em regime estacionário.

Figura 15 – Trecho de código MATLAB[®] referente à inclusão de um modelo geométrico em um modelo térmico em regime estacionário.

```
geometryFromEdges(thermalmodels,g);
```

Fonte: Próprio autor (2018).

A geração das malhas de elementos finitos e a sua inserção nos modelos térmicos foram feitas utilizando a função *generateMesh*. Adotou-se malhas de elementos triangulares por serem mais adequadas ao caso da aleta proposta, que apresenta geometria complexa e requer malha mais fina em seus ramos superiores. A regra de refinamento local adotada consistiu na geração de pelo menos 4 elementos ao longo da altura e 3 elementos ao longo da espessura, tal como sugere Adhiya (2014).

A Figura 16 e a Figura 17 apresentam o exemplo de aplicação da função *generateMesh* pra geração das malhas de elementos finitos da aleta proposta e da aleta de perfil retangular, respectivamente.

Figura 16 – Trecho de código MATLAB[®] referente à geração e à inserção da malha de elementos finitos no modelo térmico em regime estacionário da aleta proposta

```
msh = generateMesh(thermalmodels, 'Hmax', 2.8e-5)
```

Fonte: Próprio autor (2018).

Figura 17 – Trecho de código MATLAB[®] referente à geração e à inserção da malha de elementos finitos no modelo térmico em regime estacionário da aleta de perfil retangular

```
msh = generateMesh(thermalmodels, 'Hmax', 2.6e-4);
```

Fonte: Próprio autor (2018).

As propriedades termofísicas do material das aletas são inseridas aos modelos térmicos através da função *thermalProperties*, conforme mostra a Figura 18.

Figura 18 – Trecho de código MATLAB[®] referente à inserção das propriedades termofísicas do material das aletas a um modelo térmico em regime estacionário

```
thermalProperties(thermalmodels, 'ThermalConductivity', 177, ...  
                    'MassDensity', 2770, ...  
                    'SpecificHeat', 875);
```

Fonte: Próprio autor (2018).

Para inserção das condições de contorno fez-se uso da função *thermalBC*. Na Figura 19, as condições de contorno referentes ao problema térmico da aleta proposta são inseridas ao modelo térmico em regime estacionário, sendo a fronteira 27 correspondente à base da aleta, sujeita a condição de fluxo de calor imposto, e as demais correspondentes às fronteiras sujeitas a condição de convecção natural.

Figura 19 – Trecho de código MATLAB® referente à inserção das condições de contorno do problema térmico aplicado à aleta proposta ao modelo térmico em regime estacionário

```
thermalBC(thermalmodels, 'Edge', 27, 'HeatFlux', HeatFlux);
thermalBC(thermalmodels, 'Edge', [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15...
    16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 28 29 30 31], ...
    'ConvectionCoefficient', 2, ...
    'AmbientTemperature', -18.53);
```

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Figura 20, as condições de contorno referentes ao problema térmico da aleta de perfil retangular são inseridas no modelo térmico em regime estacionário, sendo a fronteira 4 correspondente a base da aleta, sujeita a condição de fluxo de calor imposto, e as demais correspondentes às fronteiras sujeitas à condição de convecção natural.

Figura 20 – Trecho de código MATLAB® referente à inserção das condições de contorno do problema térmico aplicado à aleta de perfil retangular ao modelo térmico em regime estacionário

```
thermalBC(thermalmodels, 'Edge', 4, ...
    'HeatFlux', HeatFlux);
thermalBC(thermalmodels, 'Edge', [1 2 3], ...
    'ConvectionCoefficient', 2, ...
    'AmbientTemperature', -18.53);
```

Fonte: Próprio autor (2018).

A metodologia referente ao desenvolvimento das análises em regime transiente é análoga àquela empregada no desenvolvimento das análises em regime estacionário, diferenciando-se desta apenas no segundo argumento da função *createpde*, conforme apresenta a Figura 21.

Figura 21 – Trecho de código MATLAB® referente à criação de um modelo térmico em regime transiente

```
thermalmodelT = createpde('thermal', 'transient');
```

Fonte: Próprio autor (2018).

Em posse do modelo numérico resultados simulados foram obtidos para avaliação comparativa das aletas, na próxima seção tais resultados serão apresentados.

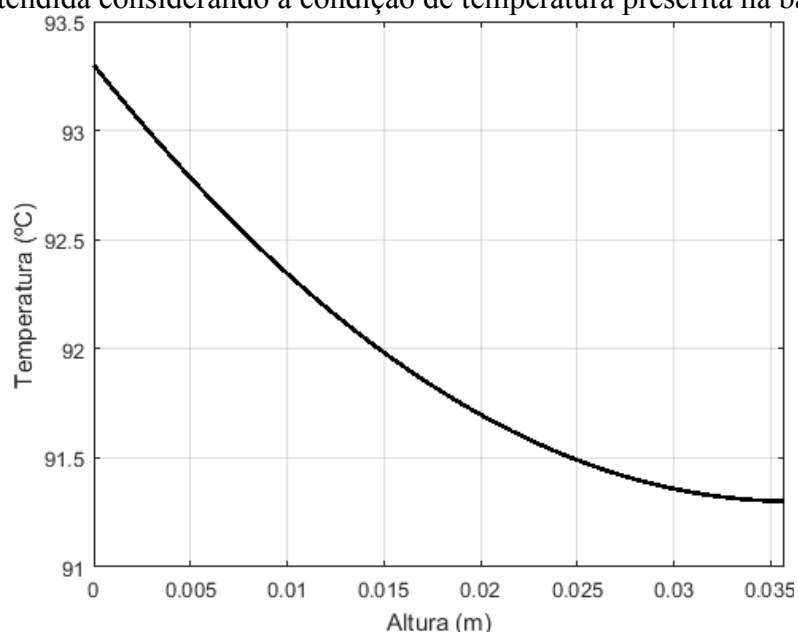
4 RESULTADOS

Neste capítulo é apresentada a validação da solução numérica bidimensional obtida. É apresentado o cálculo do fluxo de calor adotado como condição de contorno no desenvolvimento da análise comparativa das aletas. São apresentadas as simulações das distribuições de temperatura e os gráficos referentes às evoluções temporais da temperatura nas bases das aletas consideradas. Por fim, é apresentada uma avaliação comparativa do peso e área de superfície de dissipadores térmicos baseados na aletas proposta e na aleta de perfil retangular.

4.1 Validação da solução numérica bidimensional

Primeiramente para avaliar a confiabilidade da solução numérica fez-se uma comparação entre a solução numérica desenvolvida e a solução analítica para a distribuição de temperatura na aleta. Considerando a aleta de perfil retangular, calculou-se o termo m por meio da equação (20). Substituindo h , t , k e adotando w unitário, obteve-se $m = 84,5851 \text{ m}^{-1}$. A distribuição de temperatura pôde então ser calculada pela equação (18), sendo sua representação gráfica apresentada na Figura 22.

Figura 22 – Gráfico da distribuição de temperatura analítica ao longo da altura da aleta de perfil retangular obtida pela solução da forma geral da equação da energia para uma superfície estendida considerando a condição de temperatura prescrita na base



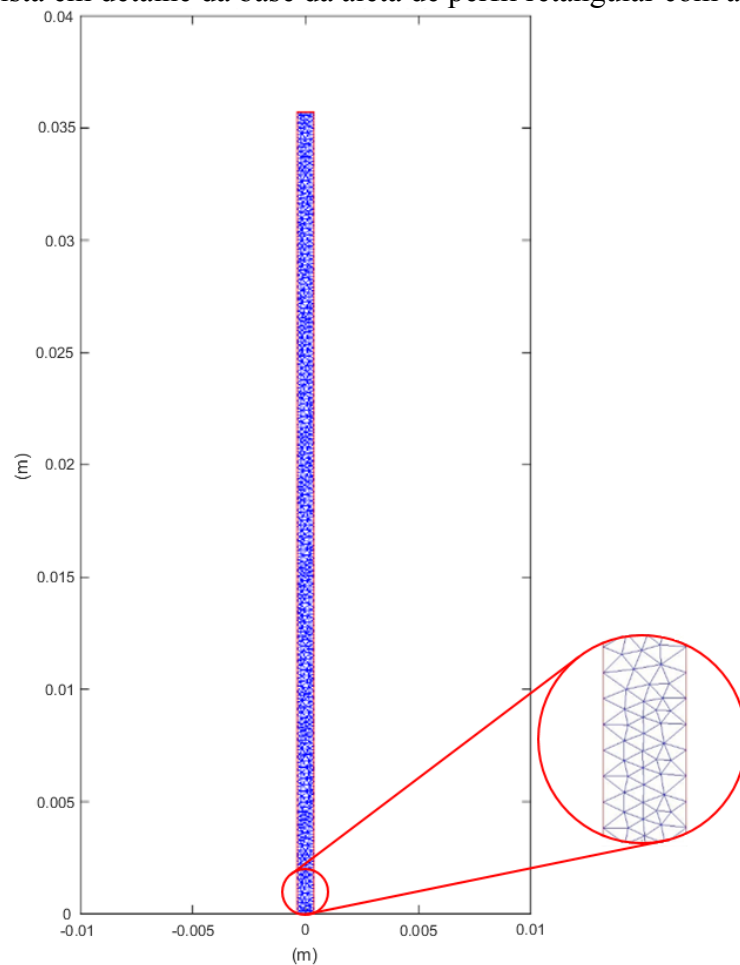
Fonte: Próprio autor (2018).

Ainda considerando a aleta de perfil retangular, adotou-se um modelo térmico bidimensional de elementos finitos em regime estacionário, seguido pela modelagem geométrica da aleta e geração da malha de elementos finitos para inclusão no modelo térmico adotado.

A malha de elementos finitos foi gerada adotando a regra de refinamento local para aletas de Adhiya (2014), resultando em um total de 3.510 elementos e 1446 nós gerados.

A Figura 23 mostra em detalhe a base da aleta de perfil retangular com a malha aplicada.

Figura 23 – Vista em detalhe da base da aleta de perfil retangular com a malha aplicada

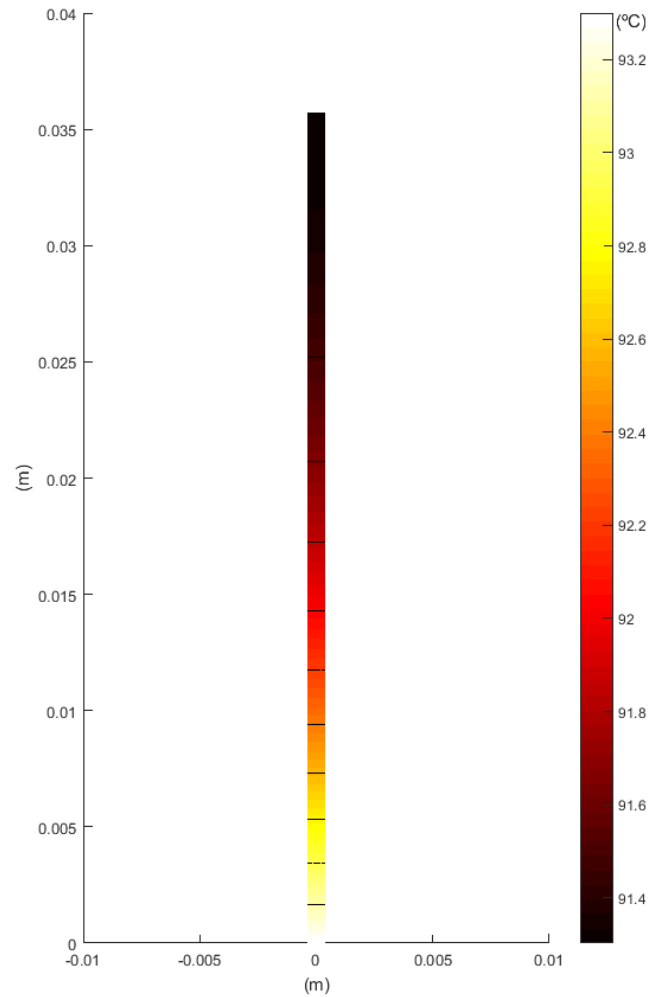


Fonte: Próprio autor (2018).

Em seguida, foram inseridas no modelo térmico de elementos finitos as propriedades termofísicas da liga de alumínio 2024-T6, a condição de temperatura prescrita na base da aleta, a temperatura ambiente e o coeficiente de transferência de calor por convecção nas fronteiras.

A Figura 24 apresenta a distribuição de temperatura na aleta de perfil retangular simulada pelo Método dos Elementos Finitos considerando a condição de temperatura prescrita na base.

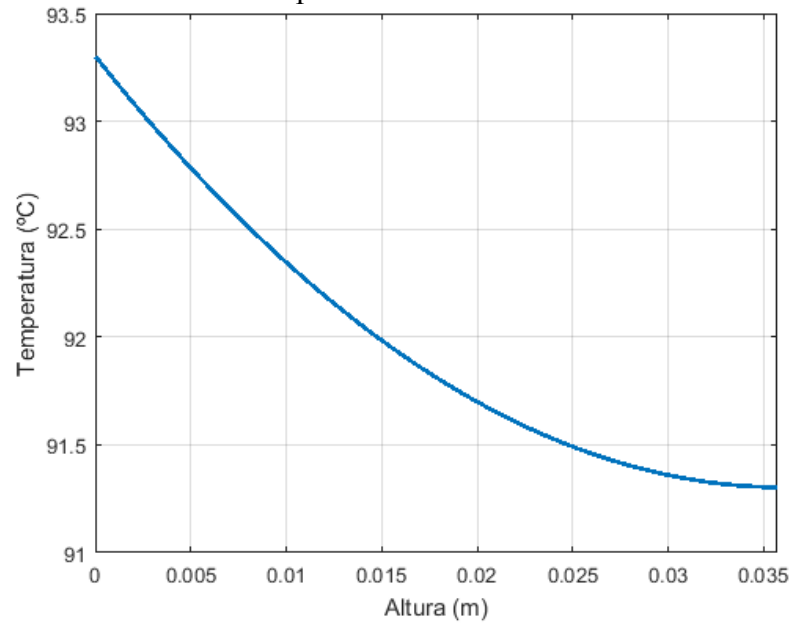
Figura 24 – Simulação da distribuição de temperatura na aleta de perfil retangular obtida pelo Método dos Elementos Finitos considerando a condição de temperatura prescrita na base



Fonte: Próprio autor (2018).

A representação gráfica da distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta de perfil retangular, obtida pelo Método dos Elementos Finitos e considerando a condição de temperatura prescrita na base, é apresentada na Figura 25.

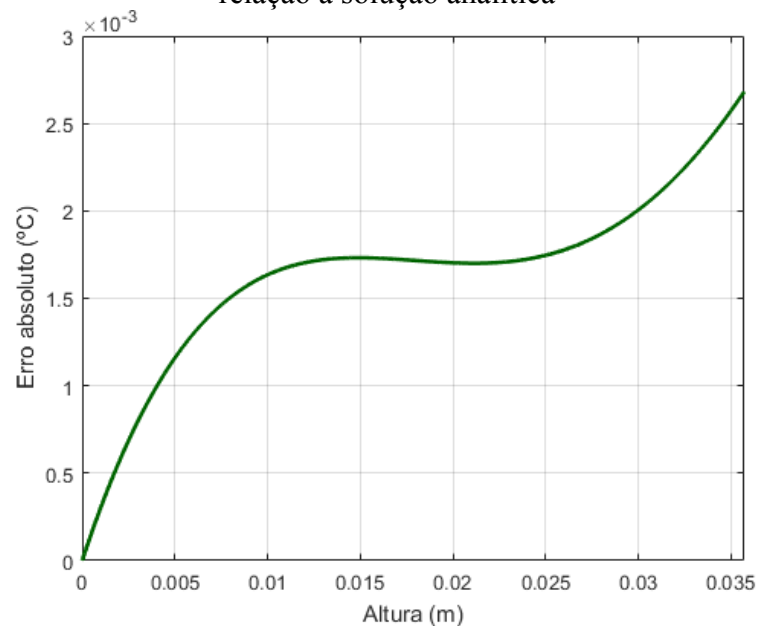
Figura 25 – Gráfico da distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta de perfil retangular obtida pelo Método dos Elementos Finitos considerando a condição de temperatura prescrita na base



Fonte: Próprio autor (2018).

Para avaliar a exatidão da solução obtida pelo Método dos Elementos Finitos adotado em relação à solução analítica, optou-se pela expressão da curva de erro absoluto, a qual é apresentada na Figura 26.

Figura 26 – Curva de erro absoluto da solução obtida pelo Método dos Elementos Finitos em relação à solução analítica



Fonte: Próprio autor (2018).

Observa-se uma boa aproximação do modelo numérico com a solução analítica o que garante a confiabilidade do modelo numérico adotado.

4.2 Análise comparativa: aleta proposta x aleta retangular

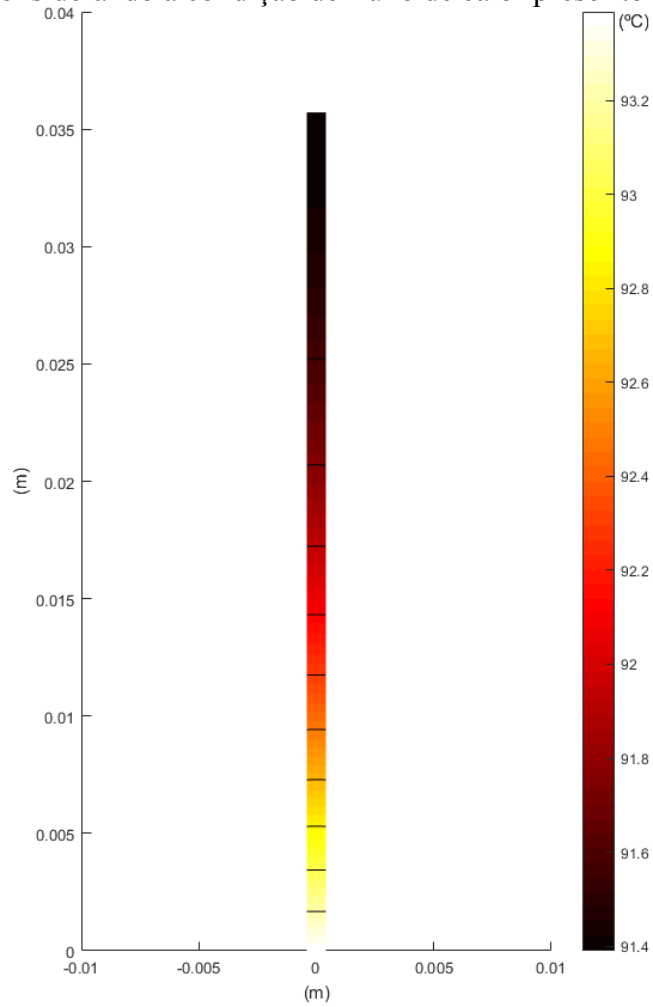
A aleta é um dissipador de calor, desta forma, para o desenvolvimento da análise comparativa de desempenho entre a aleta proposta neste trabalho e a aleta de perfil retangular, considera-se que na base das aletas um fluxo de calor de mesma intensidade é imposto, assim, a aleta que dissipar mais calor apresentará uma temperatura resultante menor.

Para determinação de um fluxo de calor coerente, considerou-se como referência de temperaturas uma descrição fornecida pelo fabricante do dissipador térmico aeronáutico AFC-CH1, referente a um voo teste realizado por uma aeronave modelo 8GCBC *Scout* operando instalada com o referido dissipador em voo em regime de cruzeiro.

Considerando uma aleta de perfil retangular, calculou-se a taxa de transferência de calor por meio da equação (19). Aplicando as condições de contorno, as propriedades termofísicas do material e as dimensões da aleta de perfil retangular à equação (19), determinou-se a taxa de transferência de calor de 15,9767 W através da base da aleta. O fluxo de calor através da base pôde então ser calculado pela relação apresentada na equação (21), obtendo-se $q''_{\text{cond}} = 19,6515 \text{ kW/m}^2$.

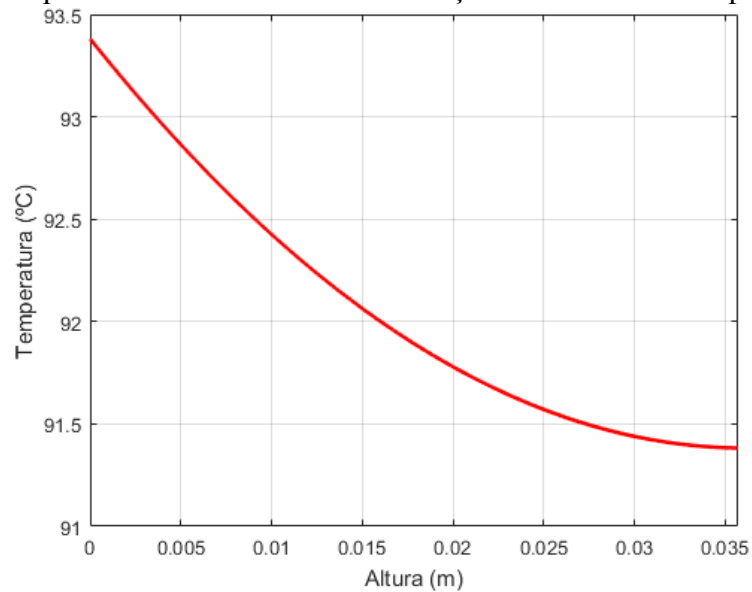
Na Figura 27 e na Figura 28 são apresentadas, respectivamente, a simulação da distribuição de temperatura na aleta de perfil retangular e o gráfico da variação de temperatura ao longo de sua altura, que foram obtidas pelo Método dos Elementos Finitos considerando a condição de fluxo de calor prescrito na base da referida aleta.

Figura 27 – Simulação da distribuição de temperatura na aleta de perfil retangular obtida pelo MEF considerando a condição de fluxo de calor prescrito na base



Fonte: Próprio autor (2018).

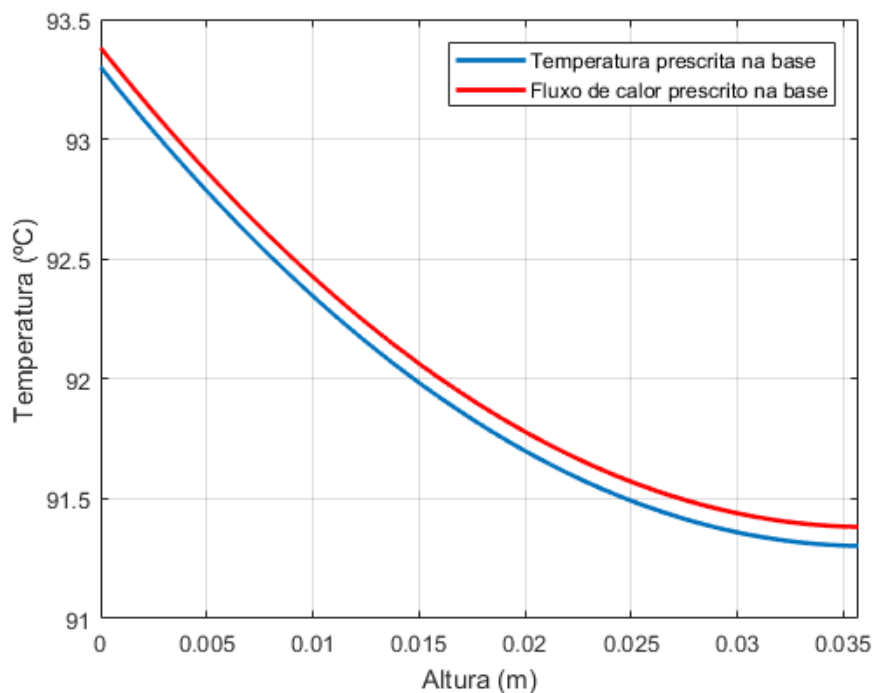
Figura 28 – Gráfico da distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta de perfil retangular obtida pelo MEF considerando a condição de fluxo de calor prescrito na base



Fonte: Próprio autor (2018).

Para avaliação comparativa da curva de distribuição de temperatura na aleta de perfil retangular, que foi obtida considerando a condição de fluxo de calor prescrito na base, é apresentado na Figura 29 o gráfico da sua sobreposição à curva referente a distribuição de temperatura obtida considerando a condição de temperatura prescrita na base.

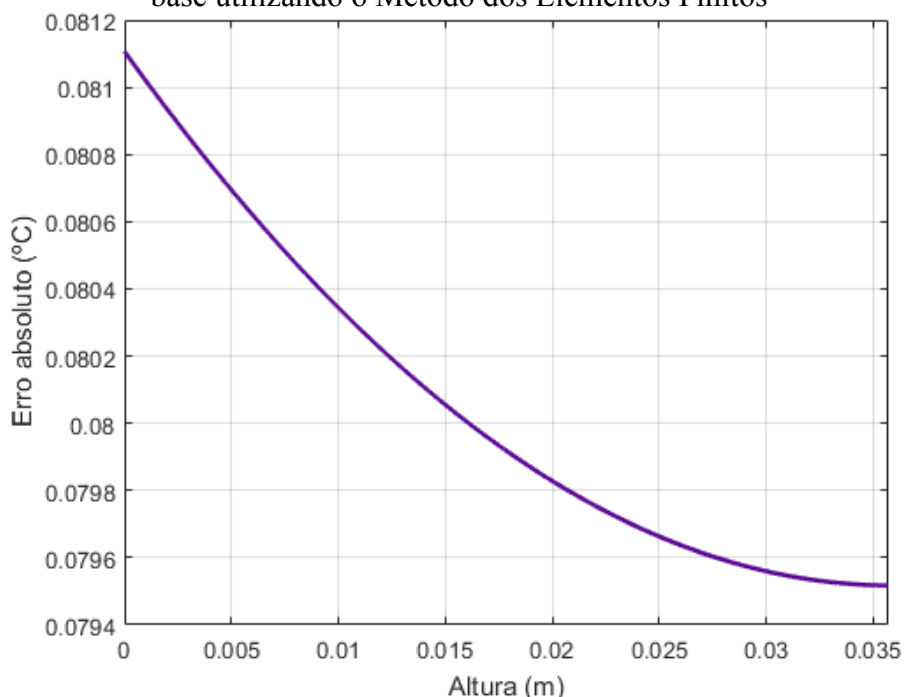
Figura 29 – Avaliação comparativa entre as distribuições de temperatura na aleta de perfil retangular obtidas pela aplicação das condições de fluxo de calor e temperatura prescritas na base utilizando o Método dos Elementos Finitos



Fonte: Próprio autor (2018).

A diferença entre as distribuições obtidas é apresentada na Figura 30 pela curva de erro absoluto.

Figura 30 – Curva de erro absoluto entre as distribuições de temperatura na aleta de perfil retangular obtidas pela aplicação das condições de fluxo de calor e temperatura prescritas na base utilizando o Método dos Elementos Finitos



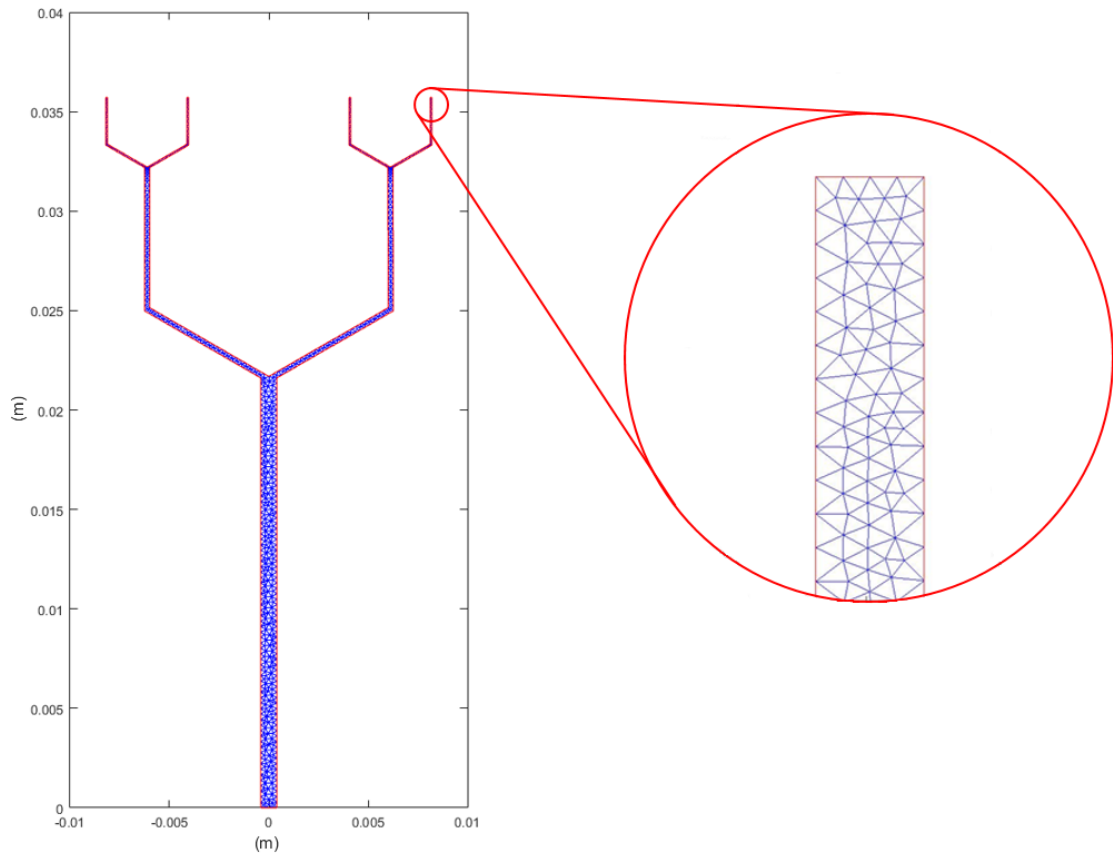
Fonte: Próprio autor (2018).

Verifica-se que a distribuição de temperatura obtida pela aplicação da condição de fluxo de calor prescrito na base da aleta de perfil retangular mostra-se próxima da distribuição obtida pela aplicação da condição de temperatura prescrita.

Para a análise da distribuição de temperatura na aleta proposta, adotou-se um procedimento análogo ao utilizado para obtenção da distribuição de temperatura na aleta de perfil retangular sujeita a condição de fluxo de calor imposto na base.

Adotando-se um modelo bidimensional em regime permanente, foi feita a modelagem geométrica da aleta proposta e foi gerada a malha de elementos finitos para inclusão no modelo térmico. Utilizou-se a mesma regra de refinamento de malha que foi adotada na análise da aleta de perfil retangular, resultando em um total de 301.170 elementos e 104.986 nós gerados. A Figura 31 mostra em detalhe a extremidade de um dos ramos superiores da aleta proposta.

Figura 31 – Vista em detalhe da extremidade de um dos ramos superiores da aleta proposta

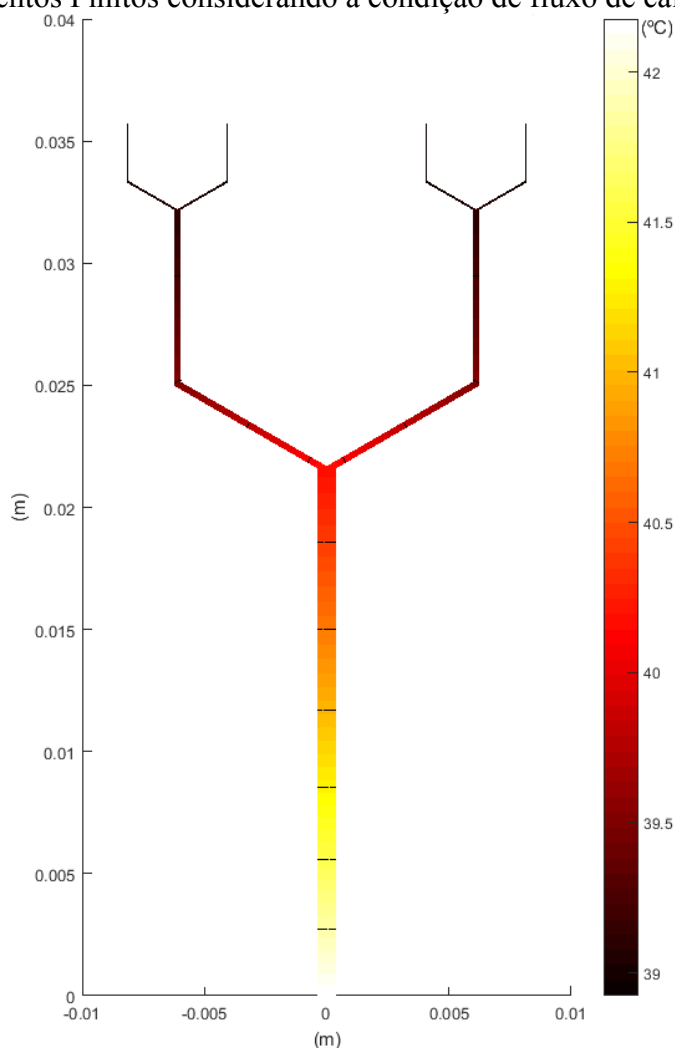


Fonte: Próprio autor (2018).

Para fins de comparação, foram atribuídas à aleta proposta as mesmas propriedades termofísicas do material da aleta de perfil retangular, assim como a mesma temperatura ambiente e o coeficiente de transferência de calor por convecção adotados em sua análise.

A Figura 32 apresenta a distribuição de temperatura na aleta proposta simulada pelo Método dos Elementos Finitos considerando a condição de fluxo de calor prescrito na base.

Figura 32 – Simulação da distribuição de temperatura na aleta de perfil retangular obtida pelo Método dos Elementos Finitos considerando a condição de fluxo de calor prescrito na base



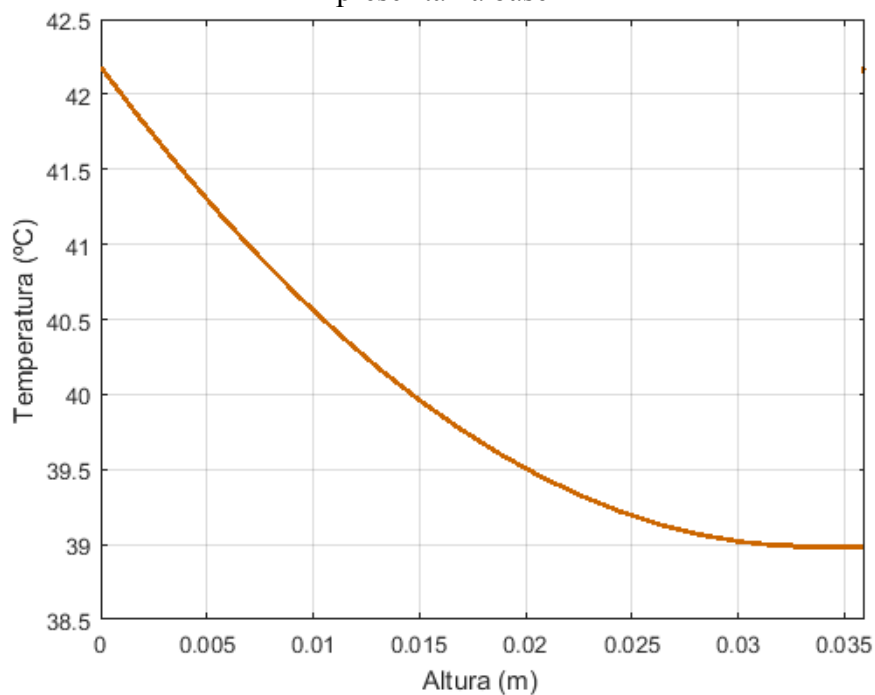
Fonte: Próprio autor (2018).

Observa-se na Figura 32 que a aleta proposta apresenta uma temperatura na base próxima de $42,2^{\circ}\text{C}$, o que implica em uma redução de aproximadamente $51,2^{\circ}\text{C}$ em relação à temperatura na base da aleta de perfil retangular obtida considerando fluxo de calor prescrito na base.

A faixa de temperaturas operacionais do óleo lubrificante recomendada pelo fabricante do motor modelo O-360-C1G, utilizado pela aeronave considerada neste trabalho, é de $73,89^{\circ}\text{C}$ a $104,44^{\circ}\text{C}$. Dessa forma, uma aeronave modelo 8GCBC *Scout* utilizando um dissipador térmico baseado na aleta proposta em voo de cruzeiro apresentaria subaquecimento de óleo lubrificante do motor.

A representação gráfica da distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta proposta, que foi obtida pelo Método dos Elementos Finitos e considerando a condição de fluxo de calor prescrito na base, é apresentada na Figura 33.

Figura 33 – Gráfico da distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta proposta obtida pela solução por Método dos Elementos Finitos considerando a condição de temperatura prescrita na base

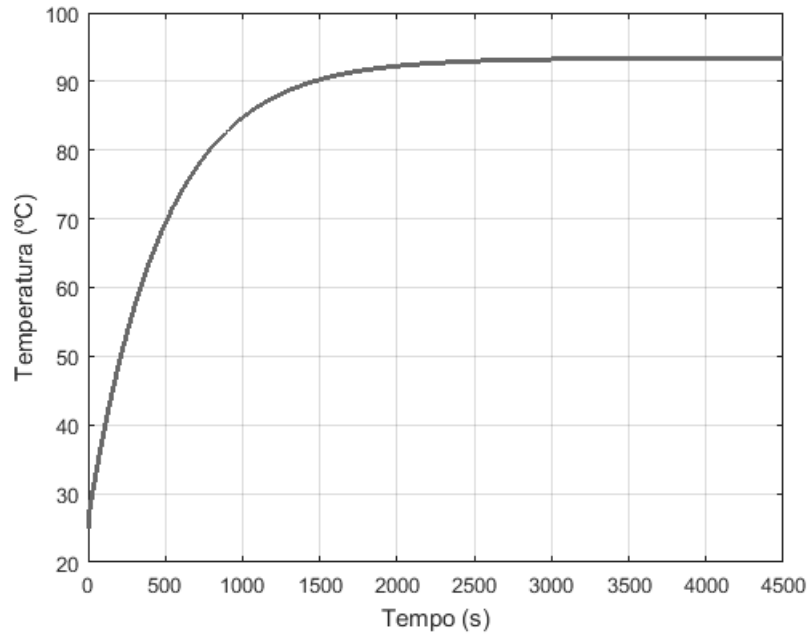


Fonte: Próprio autor (2018).

Utilizando-se de modelos em regime transiente, pôde-se avaliar a evolução da temperatura nas bases das aletas analisadas. Para tal, assumiu-se temperatura inicial de 25°C e foram adotadas as mesmas condições utilizadas nos modelos em regime permanente.

A Figura 34 mostra a evolução da temperatura na base da aleta de perfil retangular.

Figura 34 – Variação da temperatura com o tempo na base da aleta de perfil retangular

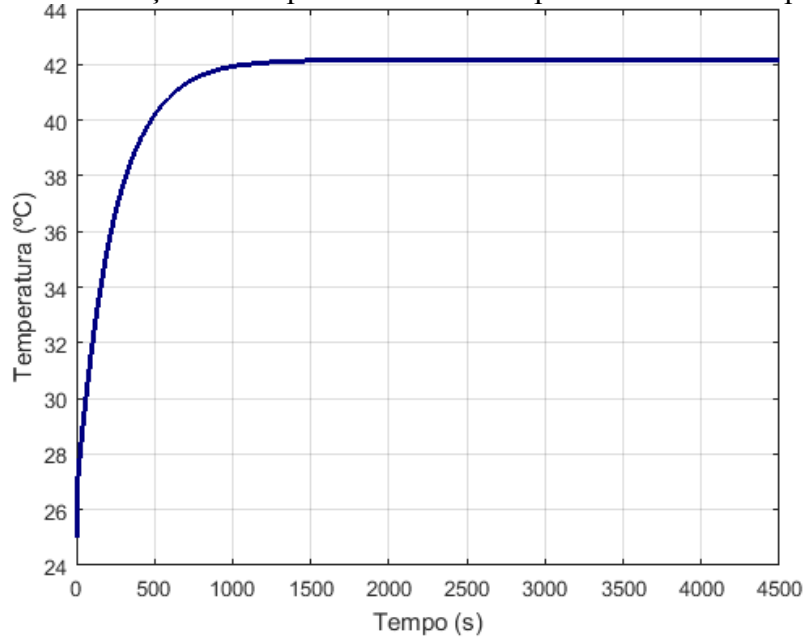


Fonte: Próprio autor (2018).

Da Figura 34, pode-se inferir que a temperatura final na base da aleta de perfil retangular é atingida em aproximadamente 3.000 segundos.

A evolução da temperatura na base da aleta proposta é apresentada na Figura 35.

Figura 35 – Variação da temperatura com o tempo na base da aleta proposta



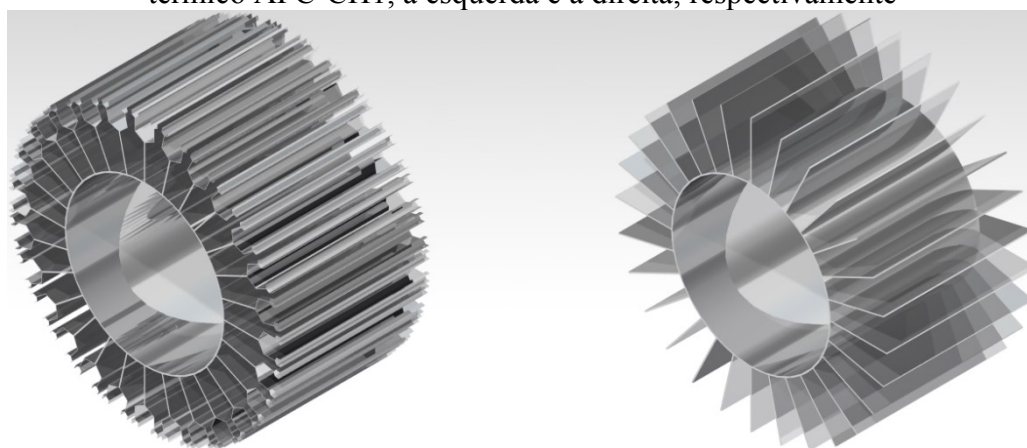
Fonte: Próprio autor (2018).

Pode-se observar que a temperatura final da aleta proposta é atingida em aproximadamente 1.500 segundos, cerca de 1.500 segundos a menos que o inferido para a aleta de perfil retangular.

Considerando a crescente necessidade de redução de peso em aeronaves comerciais, foi desenvolvida uma análise comparativa do peso do dissipador térmico de AFC-CH1 e de um dissipador térmico baseado na aleta proposta.

A Figura 36 apresenta renderizações do dissipador térmico baseado na aleta proposta e do dissipador térmico AFC-CH1, à esquerda e à direita, respectivamente.

Figura 36 – Renderizações do dissipador térmico baseado na aleta proposta e do dissipador térmico AFC-CH1, à esquerda e à direita, respectivamente



Fonte: Próprio autor (2018).

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos via CAE da análise comparativa de peso e área da superfície dos dissipadores térmicos avaliados.

Tabela 2. Análise comparativa de peso e área da superfície dos dissipadores térmicos avaliados

| Grandeza física | Dissipador baseado na aleta proposta | Dissipador AFC-CH1 | Diferença percentual (%) |
|--------------------------------------|---|---------------------------|---------------------------------|
| Peso (N) | 2,5524 | 2,7090 | -5,7807 |
| Área da superfície (m ²) | 0,4288 | 0,2573 | +66,6537 |

Fonte: Próprio autor (2018)

O dissipador térmico baseado na aleta proposta apresentou peso de 2,5524 N e área da superfície de 0,4288 m², enquanto o peso e área de superfície apresentados pelo dissipador AFC-CH1 foi 2,7090 N e 0,2573 m², respectivamente. Portanto, verifica-se que o dissipador proposto é 5,7807% mais leve e apresenta área da superfície 66,6537% maior quando comparado ao dissipador térmico AFC-CH1.

5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Apesar de formas definidas por aproximações fractais serem surpreendente comuns na natureza, o campo de pesquisa de aplicação de geometria fractal em Engenharia Térmica ainda mostra-se pouquíssimo explorado. A escolha por negligenciar a ação seletiva onipresente da natureza que sempre malogrou a negligência, além de insipiente, é fratricida.

Ao relacionar conceitos fundamentais da transferência de calor com objetos de geometria quasi-fractal, o estudo desenvolvido apresenta a proposição de um dissipador térmico aeronáutico mais leve e de maior capacidade de dissipação quando comparado a um dissipador baseado em aletas de perfil retangular.

Como contraponto à ordinariedade da utilização de plataformas de computação numérica no desenvolvimento de métodos iterativos para solução de problemas de transferência de calor, pôde-se verificar também a sua aplicabilidade na representação gráfica da evolução espaço-temporal da distribuição de temperatura em objetos multiformes. Desse modo, reafirmou-se a relevância de tais plataformas como métodos de validação alternativos e complementares aos softwares de simulação térmica.

A condição de subaquecimento do óleo lubrificante, verificada na análise da distribuição de temperatura da aleta proposta, assinala a sua aplicabilidade em condições ulteriores e que exigem maior capacidade de dissipação. De fato, o resultado obtido preludia a compacidade e robustez da solução obtida para possível aplicação em sistemas de lubrificação e refrigeração de motores aeronáuticos.

Atualmente, entre os principais fatores que impulsionam a pesquisa e desenvolvimento de novas soluções em formas construtivas em motores aeronáuticos são os aspectos econômicos de operação das grandes companhias aéreas. Entre estes, destaca-se a necessidade de redução de peso para aumento de *payload* e para redução do custo horário de operação.

REFERÊNCIAS

INCROPERA, Frank P. et. al. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. Tradução de Eduardo Mach Queiroz e Fernando Luiz Pellegrini Pessoa. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 650 p. Tradução de: Fundamentals of heat and mass transfer.

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J. **Transferência de Calor e Massa: uma abordagem prática**. Tradução de Fátima Aparecida de Moraes Lino. 4.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009. 906 p. Tradução de: Heat and Mass Transfer: A Practical Approach.

MANDELBROT, Benoît B. **Objetos Fractais: forma, acaso e dimensão**. Tradução de Carlos Fiolhais e Jose Luis Malaquias Lima. 4. ed. Porto: Gradiva, 1998. 304 p. Tradução de Les objets fractals: Forme, hasard et dimension.

NUNES, Raquel S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. 78 p. Tese (Mestrado em Ensino da Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006.

ASSIS, Thiago. A. et. al. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 30, n. 2, p. 1-10, set. 2008.

CANTOR, George F. L. P. **Foundations of a General Theory of Manifolds**. 1 ed. Tradução de Uwe Parpart. New York: Campaigner Publications, 1976. 28 p. Tradução de: Grundlagen einer Allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.

MONTESINOS-AMILIBIA, Jose M. **Classical Tessellations and Three-Manifolds**. 1 ed. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1987. 230 p.

SKEEL, Robert D.; BERZINS, Martin. A Method for the Spatial Discretization of Parabolic Equations in One Space Variable. **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, Philadelphia, v. 11, n. 1, p. 1-32, jan. 1990.

HAUSDORFF, Felix. Dimension und äußeres Maß. **Mathematische Annalen**. Göttingen, v. 79, n. 1-2, p. 157-179, 1918.

DE WILDE, Pieter. **Building Performance Analysis**. 1 ed. Hoboken: Wiley-Blackwell, 2018. 616 p.

MATHWORKS. Solving a Heat Transfer Problem With Temperature-Dependent Properties. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/examples/pde/mw/pde-ex30125242-solving-a-heat-transfer-problem-with-temperature-dependent-properties>>. Acesso em: 26 abr. 2018.

MATHWORKS. Partial Differential Equation Toolbox – Specify Boundary Conditions. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/pde/ug/steps-to-specify-a-boundary-conditions-object.html>>. Acesso em: 14 jun. 2018.

LYCOMING Engines. Operating in Cold Weather. Disponível em: <<https://www.lycoming.com/content/operating-cold-weather>>. Acesso em 26 abr. 2018.

AIRWOLF FILTER CORP. Oil Filter Chiller AFC-CH1. Disponível em: <<http://www.airwolf.com/aw/products/oil-filter-chiller>>. Acesso em 26 abr. 2018.

FOURIER, Jean B. J. **Théorie Analytique de la Chaleur**. 1 ed. Paris: Chez Firmin Didot, 1822. 639 p.

COHEN, Bernard. **Isaac Newton's Papers and Letters on Natural Philosophy and Related Documents**. 2 ed. Cambridge: Harvard University Press, 1978. 552 p.

STEFAN, J. Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur. **Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften**, Wien, v. 79,p. 391-428, 1879.

SUNDÉN, Bengt.; FU, Juan. **Heat Transfer in Aerospace Applications**. 1 ed. Cambridge: Academic Press, 2016. 265 p.

LAMPERT, Allison et. al. U.N. group agrees to aircraft standards to cut CO2 emissions. **Reuters**, Montreal, 8 fev. 2016. Disponível em: <<https://www.reuters.com/article/us-climatechange-aviation/u-n-group-agrees-to-aircraft-standards-to-cut-co2-emissions-idUSKCN0VH1XA>>. Acesso em 6 jun. 2018.