

**PAULO COSTA PORTO DE FIGUEIREDO BARBOSA**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO  
DINÂMICO DE EIXOS DE MATERIAL COMPOSTO  
EM MÁQUINAS ROTATIVAS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2018**

*Página intencionalmente deixada em branco.*

**PAULO COSTA PORTO DE FIGUEIREDO BARBOSA**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE EIXOS DE  
MATERIAL COMPOSTO EM MÁQUINAS ROTATIVAS**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavalini Jr.

Co-orientador: Prof. Dr. Valder Steffen Jr.

**UBERLÂNDIA - MG**

**2018**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

B238a      Barbosa, Paulo Costa Porto de Figueiredo, 1991-  
2018      Análise do comportamento dinâmico de eixos de material composto  
em máquinas rotativas / Paulo Costa Porto de Figueiredo Barbosa. -  
2018.

43 f. : il.

Orientador: Aldemir Aparecido Cavalini Junior.

Coorientador: Valder Steffen Junior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1121>

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Materiais compostos - Teses. I.  
Cavalini Junior, Aldemir Aparecido, 1983- II. Steffen Junior, Valder. III.  
Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica. IV. Título.

---

CDU: 621

Maria Salete de Freitas Pinheiro – CRB6/1262



**ALUNO:** Paulo Costa Porto de Figueiredo Barbosa

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 11612EMC014

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Mecânica dos Sólidos e Vibrações

**LINHA DE PESQUISA:** Dinâmica de Sistemas Mecânicos

**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA:** NÍVEL MESTRADO

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:**

*“Análise do Comportamento Dinâmico de Eixos de Material Composto em Máquinas Rotativas”*

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavalini Jr

**COORIENTADOR:** Prof. Dr. Valder Steffen Jr

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada na sala 313, Bloco 1M, Campus Santa Mônica, em 29 de março de 2018, às 08:30 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

<b>NOME</b>	<b>ASSINATURA</b>
Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavalini Jr (Orientador)	UFU
Prof. Dr. Valder Steffen Jr (Coorientador)	UFU
Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima	UFU
Prof <sup>a</sup> . Dr <sup>a</sup> . Katia Lucchesi Cavalca Dedini	UNICAMP

Uberlândia, 29 de março de 2018

*À minha família e ao amor da minha vida*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por permitir a conclusão de mais uma etapa da minha vida.

Agradeço também aos meus orientadores Aldemir Ap Cavalini Jr e Valder Steffen Jr por tudo que me foi ensinado, pelo tempo dedicado e pela oportunidade dada.

À Izabela, pelo companheirismo em todos os momentos.

À minha família pelo constante apoio, que apesar da distância me incentivaram a seguir o meu próprio caminho.

Ao pessoal do LMEst, que se tornaram grandes amigos ao longo dessa jornada.

Ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade concedida, pela estrutura e recursos disponibilizados.

Por fim, agradeço aos órgãos de fomento: o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por meio do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia - Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT - EIE), a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG).

*Página intencionalmente deixada em branco.*



BARBOSA, P. C. P. F., **Análise do comportamento dinâmico de eixos de material composto em máquinas rotativas**. 2018. 43 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

## RESUMO

Os materiais compostos vêm sendo largamente utilizados em aplicações de engenharia nos últimos anos, tendo em vista suas muitas vantagens em relação aos materiais convencionalmente usados na engenharia. Seguindo esta tendência, pesquisadores em dinâmica de máquinas rotativas tem demonstrado interesse na substituição de eixos metálicos pelos compostos, resultando em maiores velocidades de operação, menor peso e maior eficiência estrutural, entre outros aspectos. Nesse sentido, alguns modelos foram propostos para a modelagem computacional de máquinas rotativas com eixos de material composto. Como contribuição deste trabalho, uma comparação entre modelos simplificados de viga para eixos de material composto é apresentada. Além disso, uma detalhada análise experimental para a verificação dos modelos implementados é realizada em termos de funções de resposta de frequência para a condição livre-livre do sistema. Considerando o sistema rotativo completo, as velocidades críticas do rotor, as amplitudes de vibração e a velocidade de instabilidade foram determinadas através de análises numéricas. Os resultados obtidos demonstram as vantagens da aplicação de eixos de material composto em máquinas rotativas, bem como a necessidade de investigações mais detalhadas acerca do sistema analisado.

*Página intencionalmente deixada em branco.*

BARBOSA, P. C. P. F., **Analysis of the dynamic behavior of composite shafts on rotating machines**. 2018. 43 f. M.Sc. Dissertation - Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

## ABSTRACT

Various applications of composite materials have been prominent in recent years, given their many advantages over the equivalent conventional engineering materials counterparts. Following this tendency, researches on the dynamics of rotating machine are demonstrated interesting in replace metallic by composite shafts, resulting in greater operation speeds, lower overall weight, and optimal structural efficiency, among other aspects. In this sense, some models have been proposed for the computational modeling of rotating machines with composite shafts. A comparison between simplified beam models for composite shafts is presented in this contribution. Also, a detailed experimental analyses and validation of the implemented models is carried out in terms of the frequency response functions for the free-free condition of the system. Regarding the studied rotating machine, the critical speeds, vibration amplitudes, transient motion, and instability thresholds were numerically determined. The obtained results demonstrated the advantages in applying shafts of composite material in rotating machines, as well as the need for more detailed investigations about the analyzed system.

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Componentes em materiais composto de um Boeing 787 (Fonte: Boeing® 2018). .....	7
Figura 3.1 - Graus de liberdade (GDLs) associados ao elemento finito construído para representar o eixo (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).	12
Figura 3.2 - Representação de um ponto arbitrário $B$ (Fonte: Lalanne e Ferraris (1998)).	15
Figura 3.3 - Representação do elemento de disco (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).	18
Figura 3.4 - Forma de se incorporar o disco ao eixo em elementos finitos (Fonte: Lalanne e Ferraris (1998)).	20
Figura 3.5 - Coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal (Fonte: Cavalini Jr. (2013)). .....	20
Figura 3.6 - Coordenadas relativas à massa de desbalanceamento (Fonte: Cavalini Jr. (2013)). .....	22
Figura 4.1 – Representação do elemento de Kelvin-Voigt (Fonte: Wasilkoski (2006)).	24
Figura 4.2 – Comportamento do elemento de Kelvin-Voigt quando submetido a uma tensão constante (Fonte: Wasilkoski (2006)).	24
Figura 4.3 – Representação esquemática da direção das fibras em relação ao sistema cartesiano adotado para o eixo (Fonte: Cavalini Jr et al. (2016)).	28
Figura 5.1 – Bancada de ensaio utilizada na primeira análise	33
Figura 5.2 – Eixo em material composto utilizado.	34
Figura 5.3 – Disco de alumínio com abraçadeira utilizado na bancada de testes.	35
Figura 5.4 – Acoplamento entre o motor elétrico e o eixo.	35
Figura 5.5 – Mancal com transdutores de força e rolamento auto compensador.	36
Figura 5.6 – Posições dos impactos e sensores consideradas para determinar as FRFs experimentais (1 impacto; 2 acelerômetro; 3 e 4 discos; 5 eixo; dimensões em metros).	36
Figura 5.7 – Modelo EF da bancada de testes #1.	37
Figura 5.8 – FRFs numéricas e experimental com excitação e resposta em $D_1$ – Direção $X$ . .....	39
Figura 5.9 – FRFs numéricas e experimental com excitação e resposta em $D_2$ – Direção $X$ . .....	39

Figura 5.10 – FRFs numéricas e experimental com excitação e resposta em $D_1$ – Direção Z. .....	39
Figura 5.11 – FRFs numéricas e experimental com excitação e resposta em $D_2$ – Direção Z. .....	40
Figura 5.12 – Órbitas numéricas e experimentais medidas nas posições dos mancais da bancada de testes.....	41
Figura 5.13 – Diagramas de Campbell do rotor.....	42
Figura 5.14 – Respostas de vibração determinadas no disco $D_1$ – Direção X. ....	43
Figura 5.15 – Respostas de vibração determinadas no disco $D_1$ – Direção Z. ....	43
Figura 5.16 – Respostas de vibração determinadas no disco $D_2$ – Direção X. ....	43
Figura 5.17 – Respostas de vibração determinadas no disco $D_2$ – Direção Z. ....	44
Figura 6.1 – Bancada de testes #2. ....	45
Figura 6.2 – Posições da excitação e sensores consideradas para determinar as FRFs do eixo (dimensões em metros). ....	46
Figura 6.3 – FRFs experimentais do eixo livre-livre considerando diferentes posições angulares.....	46
Figura 6.4 – FRFs numéricas e experimentais do eixo livre-livre. ....	47
Figura 6.5 – Bancada de testes #2 com disco acoplado ao eixo. ....	48
Figura 6.6 – Posições dos impactos e sensores consideradas para determinar as FRFs do eixo com disco acoplado (dimensões em metros). ....	48
Figura 6.7 – FRFs experimentais do eixo com disco acoplado considerando diferentes posições angulares.....	49
Figura 6.8 – FRFs numéricas e experimentais do eixo com disco acoplado. ....	49
Figura 6.9 – Bancada de testes #2 com disco e rolamento acoplados ao eixo.....	50
Figura 6.10 – Posições dos impactos e sensores consideradas para determinar as FRFs do eixo com disco e rolamento acoplados (dimensões em metros). ....	50
Figura 6.11 – FRFs experimentais do eixo com disco e rolamento acoplados considerando diferentes posições angulares.....	51
Figura 6.12 – FRFs numéricas e experimentais do eixo com disco e rolamento acoplados. ....	51
Figura 6.13 – Bancada de testes #2 com discos e rolamentos acoplados ao eixo. ....	52
Figura 6.14 – Posições dos impactos e sensores consideradas para determinar as FRFs do eixo com discos e rolamentos acoplados (dimensões em metros). ....	52
Figura 6.15 – FRFs experimentais do eixo com discos e rolamento acoplados considerando diferentes posições angulares.....	53
Figura 6.16 – FRFs numéricas e experimentais do eixo com discos e rolamentos acoplados. .....	53

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Propriedades geométricas do eixo. ....	34
Tabela 5.2 – Propriedades físicas e geométricas do disco. ....	35
Tabela 5.3 – Coeficientes de rigidez $k$ e amortecimento $d$ dos mancais. ....	37
Tabela 5.4 – Propriedades físicas otimizadas do eixo de material composto. ....	38
Tabela 5.5 – Frequências naturais e diferença entre o modelo e os resultados experimentais .....	40
Tabela 6.1 – Propriedades físicas otimizadas do eixo livre-livre. ....	47

*Página intencionalmente deixada em branco.*



## LISTA DE SÍMBOLOS

$C$	Centro geométrico do eixo
$D$	Diâmetro do eixo
$\mathbf{D}$	Matriz de amortecimento
$\mathbf{D}_D$	Matriz do efeito giroscópico do disco
$\mathbf{D}_g$	Matriz do efeito giroscópico
$\mathbf{D}_i$	Matriz de amortecimento interno
$\mathbf{D}_s$	Matriz do efeito giroscópico do eixo
$E$	Módulo de Elasticidade
$E_{eq}$	Módulo de elasticidade equivalente
$\mathbf{F}_m$	Vetor das forças produzidas pelos mancais
$\mathbf{F}_{mu}$	Força de sustentação desenvolvida pelo mancal na direção $X$
$\mathbf{F}_{mw}$	Força de sustentação desenvolvida pelo mancal na direção $Z$
$\mathbf{F}_u$	Vetor de forças de desbalanceamento
$F_{unbX}$	Forças de desbalanceamento na direção $X$
$F_{unbZ}$	Forças de desbalanceamento na direção $Z$
$G$	Módulo de cisalhamento
$G_{eq}$	Módulo de cisalhamento equivalente
$I$	Momento de inércia de área do eixo
$I_{Dx}$	Momento de inércia de massa referente ao eixo $X$
$I_{Dy}$	Momento de inércia de massa referente ao eixo $Y$
$I_{Dz}$	Momento de inércia de massa referente ao eixo $Z$
$J$	Momento de Inércia Polar
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{K}_i$	Matriz de rigidez adicional
$K_L$	Função densidade de energia de deformação
$k_L^\alpha$	Função densidade de energia de deformação amortecida
$L$	Comprimento do elemento de eixo
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
$\mathbf{M}_D$	Matriz de massa do disco
$M_D$	Massa do disco
$\mathbf{M}_s$	Matriz clássica de massa do eixo
$\mathbf{M}_T$	Matriz do efeito secundário da inércia de rotação
$\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$	Vetores dos coeficientes das funções de forma
$\mathbf{Q}$	Matriz de rigidez associada ao material composto

$Q_i$	Esforços generalizados
$Q^\psi$	Módulo de amortecido
$R$	Raio do eixo
$S$	Área de sessão transversal do eixo
$T$	Soma das energias cinéticas
$T_d$	Energia cinética do disco
$T_s$	Energia cinética do eixo
$T_U$	Energia cinética da massa de desbalanceamento
$U$	Soma das energias de deformação
$U_{1-5}$	Combinações lineares da matriz de propriedades elásticas
$W$	Força peso das partes girantes
$X, Y$ e $Z$	Coordenadas fixas do plano cartesiano
$d_{ij}$	Coefficientes de amortecimento dos mancais
$k_{ij}$	Coefficientes de rigidez dos mancais
$m_u$	Massa de desbalanceamento
$q$	Vetor de deslocamentos nodais do eixo
$q_D$	Vetor de deslocamentos nodais do disco
$q_i$	Coordenadas generalizadas
$q_u$	Vetor de deslocamentos nodais na direção $X$
$q_{unb}$	Vetor de deslocamentos nodais da massa de desbalanceamento
$q_w$	Vetor de deslocamentos nodais na direção $Z$
$t$	Espessura do eixo
$tp$	Espessura da camada
$u$	Deslocamento na direção $X$
$u^*$	Deslocamento na direção $x$ em coordenadas rotativas
$w$	Deslocamento na direção $Z$
$w^*$	Deslocamento na direção $z$ em coordenadas rotativas
$x, y$ e $z$	Coordenadas rotativas do plano cartesiano
$\Omega$	Velocidade de rotação
$\alpha$	Tempo de relaxação
$\varepsilon$	Deformação
$\dot{\varepsilon}$	Velocidade de deformação
$\varphi$	Angulo de rotação em relação ao eixo $Z$
$\gamma$	Deformação cisalhante
$\eta$	Viscosidade
$\lambda$	Taxa de relaxação
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\theta$	Angulo de rotação em relação ao eixo $X$

$\theta_p$	Angulo de orientação da fibra
$\vartheta_y$	Parâmetro de cisalhamento
$\rho$	Densidade
$\sigma$	Tensão atuante
$\sigma_0$	Tensão constante
$\tau$	Tensão de cisalhamento
$\omega_x$	Velocidades instantâneas na direção X
$\omega_y$	Velocidades instantâneas na direção Y
$\omega_z$	Velocidades instantâneas na direção Z
$\psi$	Capacidade de amortecimento específico

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## SUMÁRIO

<b>AGRADECIMENTOS.....</b>	<b>vii</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>ix</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>xi</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>xiii</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>xv</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS.....</b>	<b>xvii</b>
<b>CAPÍTULO I: Introdução .....</b>	<b>1</b>
1.1 Contextualização .....	1
1.2 Contribuições do estudo .....	2
1.2 Organização da Dissertação.....	4
<b>CAPÍTULO II: Revisão Bibliográfica .....</b>	<b>5</b>
2.1 Histórico de Máquinas Rotativas .....	5
2.2 Material Composto em Máquinas Rotativas .....	6
<b>CAPÍTULO III: Modelo Matemático de Rotores.....</b>	<b>11</b>
3.1 Equação do Movimento .....	11
3.2 Eixo.....	12
3.3 Disco.....	18
3.4 Mancais .....	20
3.5 Massa de Desbalanceamento.....	21
<b>CAPÍTULO IV: Modelagem do eixo de material composto .....</b>	<b>23</b>
4.1 Equação do Movimento .....	23
4.2 Métodos de Homogeneização.....	27
4.2.1 Formulação Matemática do Modelo EMBT .....	29
4.2.2 Formulação Matemática do Modelo SHBT .....	31

<b>CAPÍTULO V: Bancada de Testes #1</b> .....	<b>33</b>
5.1 Bancada de Testes .....	33
5.2 Ajuste dos Modelos Matemáticos.....	36
5.3 Simulações Numéricas .....	42
<b>CAPÍTULO VI: Bancada de Testes #2</b> .....	<b>45</b>
6.1 Eixo Livre .....	45
6.2 Eixo com Disco Acoplado.....	48
6.3 Eixo com Disco e Rolamento Acoplados.....	50
6.4 Eixo com Discos e Rolamentos Acoplados .....	52
<b>CAPÍTULO VII: Conclusão</b> .....	<b>55</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>59</b>

# CAPÍTULO I

## Introdução

### 1.1 Contextualização

Os materiais compostos podem ser definidos como um sistema constituído por duas ou mais fases numa escala macroscópica com o objetivo de que suas propriedades e comportamento mecânico sejam superiores às dos materiais que o compõem (DANIEL; ISHAI, 1994). O uso destes materiais vem crescendo ao longo dos anos, principalmente na indústria naval, aeronáutica e automobilística, pois possibilita a obtenção de características adequadas para cada aplicação. Além disso, apresentam ótima relação resistência/peso, ductilidade, rigidez, resistência a corrosão e possibilitam a fabricação de peças com geometria complexa. Uma das áreas de grande interesse na utilização deste tipo de material é a dinâmica de máquinas rotativas. Segundo Silveira (2001), eixos de material composto são uma solução viável para atenuar problemas inerentes aos eixos metálicos.

Para máquinas rotativas que operam em condições subcríticas (rotores rígidos), o baixo peso dos eixos de material composto permite uma aceleração e desaceleração mais rápida (BRUSH, 1999). Em operações supercríticas (rotores flexíveis), onde as vibrações associadas a flexão do eixo, tensões dinâmicas, estabilidade e fadiga são significantes, as técnicas de fabricação de componentes em materiais compostos permitem a customização e alteração de propriedades mecânicas. Isso pode ser feito através de mudanças como, por exemplo, a quantidade de camadas e a orientação das fibras, alterando assim as velocidades críticas convenientemente de acordo com a velocidade de operação requerida (GUPTA, 2015).

Outros efeitos como o amortecimento interno, característico da natureza viscoelástica da matriz, podem atenuar as amplitudes de vibração quando o sistema passa por velocidades críticas. Contudo, também podem levar à instabilidade do sistema (SILVEIRA, 2001). Em rotores com eixo metálico, a influência do amortecimento interno pode ser omitida na maioria dos casos, ao contrário de rotores com eixo de material composto onde o amortecimento interno pode ser até duas vezes maior (WETTERGREEN; OLSSON, 1996).

Neste contexto, a caracterização do amortecimento interno e seus efeitos é fundamental para projetos de máquinas rotativas com eixos de material composto. A principal dificuldade neste procedimento consiste na avaliação dos parâmetros físicos que possibilitam a correta predição de instabilidades com suficiente precisão (SINO, 2007).

Para a simulação numérica de rotores com eixo de material composto é necessário utilizar hipóteses simplificadoras sem, no entanto, descaracterizar o comportamento dinâmico do sistema. Diferentes formulações baseadas na teoria de vigas homogêneas e teoria de cascas vêm sendo propostas para a análise de eixos de material composto. Em grande parte das aplicações o método dos elementos finitos é utilizado.

## 1.2 Contribuições do estudo

Como o número de pesquisas que envolvem validação experimental ainda é relativamente pequeno, este trabalho tem o objetivo de contribuir com as investigações sobre a utilização de eixos compostos em máquinas rotativas através de análises numéricas e experimentais. Uma abordagem acerca do comportamento dinâmico do sistema por meio de Funções de Resposta em Frequência (FRFs) é realizada e dois modelos numéricos são comparados quanto à sua capacidade de prever as respostas do sistema.

Um dos modelos avaliados nesta dissertação foi proposto por Singh e Gupta (1994). O modelo EMBT (*Equivalent Modulus Beam Theory*) foi desenvolvido a partir da teoria de estratificação e é associado a empilhamentos simétricos e balanceados, sendo determinados módulos de elasticidade e cisalhamento equivalentes. O outro modelo utilizado é conhecido como SHBT (*Simplified Homogenized Beam Theory*), proposto por Sino (2007). Este modelo se baseia na homogeneização direta da rigidez e amortecimento interno do eixo, podendo ser aplicado para qualquer orientação e sequência de empilhamento, além de levar em consideração a distância de cada camada ao eixo neutro.

É importante ressaltar que o eixo utilizado nas análises numéricas e experimentais desta dissertação possui vinte camadas com diferentes orientações, sendo a camada externa entrecruzada com orientação de fibra  $0^\circ / 90^\circ$ . Este eixo é constituído por fibra de carbono de tecelagem simples, incorporada em uma matriz de resina epóxi.

Existem muitas técnicas para fabricação de materiais compostos, como por exemplo a laminação manual, modelagem em contínuo (pultrusão), modelagem por transferência de resina, entre outras. A técnica comumente utilizada para manufatura de eixos é o bobinamento (veja a Fig. 1.1). Para isso, fibras de carbono ou fibras de vidro são bobinadas em mandril, produzindo eixos tubulares. Normalmente a espessura da parede de um eixo de material



composto compreende  $n$ -camadas, onde cada camada possui as fibras contínuas orientadas em uma determinada direção. O laminado é obtido empilhando as camadas em uma ordem particular (MENDONÇA ET AL., 2017; GUPTA, 2015).

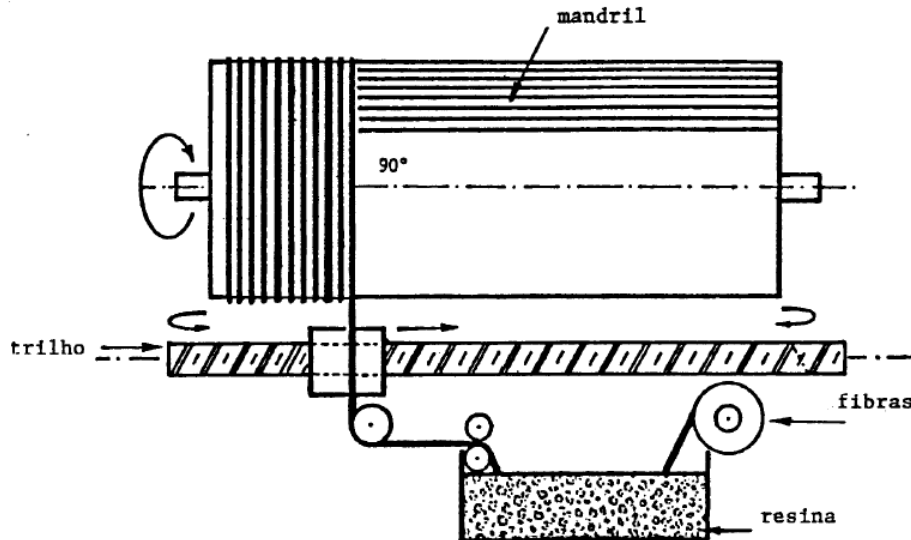


Figura 1.1 – Bobinamento em mandril (Disponível em: <http://fabricacaodecompositos.blogspot.com.br/2012/06/moldagem-por-centrifugacao.html> Acesso em mar. 2018).

O laboratório de mecânica de estruturas LMEst da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia vem contribuindo ao longo dos anos com os estudos sobre máquinas rotativas, sendo Steffen Jr (1981) o primeiro artigo científico publicado pelo laboratório nessa área. Vários trabalhos foram desenvolvidos por pesquisadores do LMEst na modelagem e análise dinâmica de materiais compostos. A linha de pesquisa empregando eixos de material composto em máquinas rotativas é relativamente nova no laboratório. Na linha das pesquisas em materiais inteligentes, que é o caso do eixo de material composto, recentemente Alves (2015) propôs um sistema controle passivo e semiativo de vibrações em rotores horizontais flexíveis usando liga com memória de forma na suspensão. Investigações experimentais e numéricas foram realizadas. Silva (2015) apresentou o modelo de um rotor com eixo de material composto, derivado das equações de Lagrange e do método de Rayleigh-Ritz. Além disso, investigou a representatividade do modelo através da comparação entre os resultados numéricos e experimentais obtidos. Cavalini Jr et al. (2016) analisou numericamente a velocidade de instabilidade de um eixo de material composto vazado. Um modelo de homogeneização foi usado no contexto de uma investigação numérica em Cavalini Jr et al. (2017).

### 1.3 Organização da Dissertação

Assim sendo, este trabalho é organizado da seguinte forma:

- i.* Capítulo I: fez-se uma introdução sobre o assunto, mostrando a justificativa e o objetivo do trabalho;
- ii.* Capítulo II: mostra um pouco do histórico de máquinas rotativas, da caracterização de material composto através de métodos de homogeneização, evidenciando seu uso em eixos, e introduz a modelagem do amortecimento interno;
- iii.* Capítulo III: apresenta o modelo numérico em elementos finitos usado para simulação do comportamento dinâmico de um rotor;
- iv.* Capítulo IV: descreve matematicamente a modelagem do eixo em material composto e os métodos de homogeneização usados para determinar as propriedades mecânicas de tal eixo;
- v.* Capítulo V: consiste na descrição da bancada de testes #1, além de apresentar uma discussão acerca dos resultados obtidos experimentalmente comparados aos resultados numéricos para a avaliação dos modelos EMBT e SHBT descritos nesta dissertação;
- vi.* Capítulo VI: é avaliada uma nova análise do comportamento do eixo sob uma condição livre-livre, averiguando as influências exercidas por cada elemento constituinte do rotor;
- vii.* Capítulo VII: descreve as conclusões do trabalho e perspectivas futuras.

## CAPÍTULO II

### Revisão Bibliográfica

#### 2.1 Histórico de Máquinas Rotativas

Segundo a ISO (*International Organization for Standardization*), uma máquina rotativa é composta por um eixo suportado por mancais que o permite girar livremente em torno de um eixo de coordenadas fixo no espaço.

As máquinas rotativas têm hoje grande importância em diversas áreas, alguns exemplos são: turbinas a vapor, turbinas a gás e motores elétricos. O interesse por esse tipo de máquina surgiu principalmente após a primeira revolução industrial devido as máquinas a vapor. Os primeiros estudos sobre esse assunto tratavam dos conceitos fundamentais da dinâmica de rotação e a tentativa de superar problemas técnicos. Ishida e Yamamoto (2012) fazem um apanhado histórico sobre o assunto, sendo que a primeira publicação em dinâmica de rotação data de 1869, onde Rankine (1869) escreve sobre força centrífuga de eixo com movimento rotativo. Neste caso, o autor concluiu erroneamente que haveria uma velocidade máxima de rotação permitida dependente dos parâmetros físicos do rotor, chamada posteriormente de velocidade crítica por Dunkerley (1894). Dunkerley (1894) propôs uma equação empírica para o cálculo da menor velocidade crítica de um rotor.

Utilizando uma turbina a vapor de um estágio, De Laval (1894) mostrou que é possível operar em velocidades superiores a velocidade crítica. Lawaczeck (1907), conforme citado por Ishida e Yamamoto (2012), desenvolveu uma técnica de balanceamento para reduzir amplitudes de vibração do sistema, minimizando o desbalanceamento geométrico. Uma importante contribuição para a teoria fundamental da dinâmica de rotação foi apresentada por Jeffcott (1919).

Campbell (1924), engenheiro da *General Electric*, investigando detalhadamente vibrações em turbinas a vapor, apresentou o conhecido Diagrama de Campbell. Stodola (1924) foi o primeiro a utilizar a teoria de vigas de Euler-Bernoulli para representar de forma

simplificada uma máquina rotativa. Newkirk e Taylor (1925) investigaram as amplitudes de vibração de uma máquina rotativa com mancais hidrodinâmicos. Newkirk (1927) mostrou o fenômeno de precessão direta. Uma investigação a respeito de fenômenos não estacionários durante a passagem por velocidades críticas em um rotor Jeffcott foi feita por Lewis (1932). Smith (1933) foi o precursor de estudos com máquinas rotativas assimétricas. Uma técnica de balanceamento utilizando dois planos foi desenvolvida por Thearle (1934). Taylor (1940) e Foote; Poritsky; Slade (1943) avaliaram o comportamento dinâmico de rotores assimétricos.

Prohl (1945) utilizou o método das matrizes de transferência, desenvolvido por Myklestad (1944) para prever as frequências naturais, modos de vibrar e as respostas ao desbalanceamento de uma máquina rotativa. Yamamoto (1955) trabalhou com o efeito das ressonâncias em rotores. Federn (1957) desenvolveu técnicas de balanceamento para rotores flexíveis. Bishop e Gladwell (1959) propuseram o método de balanceamento modal.

Com o advento dos computadores, Goodman (1964) incorporou o método dos mínimos quadrados ao método dos coeficientes de influência para o balanceamento de máquinas rotativas. Eshleman e Eubanks (1969) incluíram os efeitos da inércia rotacional, cisalhamento e o efeito giroscópico na equação do movimento de rotores. Ruhl e Booker (1972) aplicaram pela primeira vez o método dos elementos finitos às máquinas rotativas. A área mais recente dentro da dinâmica de rotação é o uso de mancais magnéticos para suportar o eixo sem contato. Schweitzer (1975) publicou seus estudos a respeito do assunto e Nonami (1985) utilizou o controle ativo nos mancais para diminuir a resposta ao desbalanceamento no rotor.

Lees e Friswell (1997) descreveram uma ampla revisão do estado da arte em técnicas de diagnóstico de falhas, especialmente no que se refere às máquinas rotativas. Swanson; Powell; Weissman (2005) apresentaram um trabalho associado à caracterização de propriedades como velocidades críticas, modos de vibrar, além de evidenciar os aspectos que influenciam seu comportamento vibratório.

As pesquisas mais recentes, amparadas pelo avanço da tecnologia que permitiu o aumento exponencial da capacidade de processamento dos computadores, apresentam técnicas de análise, simulação e projeto de máquinas rotativas com alta complexidade, como é o caso dos equipamentos com eixos de material composto.

## **2.2 Material Composto em Máquinas Rotativas**

Um material composto é constituído por duas ou mais fases, onde uma fase é geralmente descontínua e mais rígida, chamada de reforço, a fase menos rígida é contínua, chamada de matriz.

Apesar de sua aplicação industrial ter início com o uso de plásticos reforçados em aeronaves e componentes elétricos em 1942, existem relatos da utilização de materiais compostos no Egito antigo com tijolos reforçados com palha. Os materiais compostos de alto rendimento como a fibra de carbono, foram incorporados em componentes de aeronaves em 1968. A partir da década de 70 passaram a ser utilizados também na indústria automotiva, em artigos esportivos, na bioengenharia, entre outros segmentos (DANIEL; ISHAI, 1994). A Fig. 2.1 ilustra uma aplicação de material composto em diversos componentes de uma aeronave comercial.



Figura 2.1 – Componentes em materiais composto de um Boeing 787 (Fonte: Boeing® 2018).

No caso das máquinas rotativas, os materiais compostos são hoje utilizados em pás e eixos de transmissão de helicópteros, pás de turbinas eólicas, eixos de transmissão em automóveis e eixos de separadores centrífugos. Isto se deve muito a possibilidade de alterar suas propriedades mecânicas para cada aplicação. Assim, um maior entendimento acerca do comportamento mecânico destes materiais é necessário.

Os eixos de material composto foram inicialmente projetados para operar em velocidades subcríticas. Os primeiros estudos foram direcionados para solucionar requisitos de projetos e problemas de aplicação prática. O primeiro trabalho sobre o assunto data de 1970. Zinberg e Symonds (1970) investigaram numericamente um eixo de transmissão do rotor de cauda de um helicóptero produzido em boro/epóxi e determinaram as suas velocidades críticas. Neste caso, o eixo foi assumido como um tubo de parede fina. Worgan e Smith (1978) e Yates e Rezin (1979) depositaram patentes a respeito de eixos de transmissão subcríticos em material composto.

Houve um grande avanço nas pesquisas destinadas a aplicação destes materiais no setor automotivo com Kliger e Yates (1980). Os autores apresentaram um estudo sobre eixos de transmissão compostos incluindo as técnicas e custos de fabricação, suas vantagens e desvantagens. Fatores qualitativos também foram considerados no estudo realizado, como experiência, confiabilidade e simplicidade do projeto.

Bauchau (1983) otimizou o projeto de eixos de material composto. Lim e Darlow (1986) investigaram a possibilidade de operações supercríticas a fim de se obter uma redução do peso dos rotores. Dos Reis et al. (1987) mostraram que a sequência de empilhamento altera o valor das velocidades críticas. Utilizando modelos analíticos (MEF – Método dos Elementos Finitos) para um eixo de material composto de parede fina.

Houve também um grande avanço no setor aeronáutico com Hetherington; Kraus; Darlow (1990). Os autores demonstraram a viabilidade da utilização de eixos de transmissão compostos supercríticos em helicópteros. Neste caso, a massa do sistema da cauda da aeronave foi reduzida em 60%. Kim e Bert (1993) fizeram uma análise teórica para determinar as velocidades críticas de um rotor utilizando os princípios da teoria de cascas (ST – *Shell Theory*) para modelar o eixo de material composto.

Singh e Gupta (1994) desenvolveram dois modelos para eixos de material composto, o EMBT e o ST, ambos levando em consideração o amortecimento interno. Os mesmos autores e Ghoneim e Lawrie (2007) utilizaram o MEF (teoria de vigas de Timoshenko) e o método dos modos assumidos para estudar a influência dos parâmetros constitutivos sobre a rigidez e amortecimento do eixo. De maneira geral, o EMBT é um modelo simplificado que leva a bons resultados para laminados simétricos e balanceados. Para laminados assimétricos ou antissimétricos as respostas do comportamento do rotor podem ser imprecisas.

Sino (2007) desenvolveu o modelo de viga equivalente SHBT onde é levado em consideração o amortecimento interno do material. Neste modelo, o amortecimento interno é considerado através do modelo reológico de Kelvin-Voigt. Sino (2007) ainda afirma que o SHBT pode ser utilizado para sequências de empilhamento simétricos, antissimétricos e até mesmo assimétricos, diferentemente do EMBT que apresenta limitações para configurações assimétricas. O SHBT foi comparado a diversas outras teorias por Sino (2008). Gupta (2014) faz uma revisão sobre as pesquisas desenvolvidas na área de eixo em material composto. Este autor descreveu as teorias utilizadas para análise dinâmica modelagem, trabalhos experimentais e utilização de técnicas de otimização para fabricação de eixo.

Os modelos utilizados nesta dissertação (EMBT e SHBT) são baseados na teoria clássica de laminados. Segundo Tsai (1988), a Teoria Clássica dos Laminados (TCL) compreende as análises de tensão e deformação para determinar o comportamento macromecânico de laminados a partir da combinação do comportamento individual de cada

camada. Assume-se nesta teoria uma perfeita adesão entre as camadas, deslocamento na interface de duas camadas adjacentes contínuo e variação linear do deslocamento ao longo da espessura de cada camada. Ainda segundo este autor, toda formulação da TCL é aplicada para determinar a matriz de rigidez correspondente ao conjunto das camadas do material.

Jones (1999) afirma ainda que a principal limitação da TCL se relaciona ao fato da matriz de rigidez para uma camada ser considerada constante. Propriedades como gradiente de temperatura e/ou umidade através da camada são negligenciados na modelagem para a redução do custo computacional.

Apesar da simplicidade, as teorias de viga equivalente (EMBT e SHBT) levam a bons resultados para determinadas condições de operação do sistema. Modelos dinâmicos mais representativos consideram a ST.

A influência do amortecimento interno em rotores com eixo de material composto vem sendo o tema de diversas pesquisas. Jacquet-Richardet et al. (2010) afirmam que o amortecimento interno desta classe de eixos pode aumentar a instabilidade do sistema. O mesmo autor cita o trabalho de Newkirk (1924), engenheiro da *General Electric*, que mostrou a contribuição do amortecimento interno no aumento das amplitudes de vibração de rotores quando a velocidade de rotação é próxima à primeira velocidade crítica. Por isso uma modelagem adequada das características mecânicas do material composto é necessária.

Segundo Wattergreen (1996), o amortecimento interno é causado por um ciclo de histerese no material que surge como resultado da deformação do eixo, sendo assim classificado como amortecimento histórico. Devido às dificuldades de se caracterizar este tipo de amortecimento, o amortecimento interno é constantemente tratado como amortecimento viscoso equivalente para o caso de uma excitação harmônica.

Chandra et al. (1999) relata que a maior fonte de dissipação de energia em materiais compostos é devido à natureza viscoelástica da matriz polimérica, pois esta apresenta simultaneamente características viscosas e elásticas.

*Página intencionalmente deixada em branco.*



## CAPÍTULO III

### Modelo Matemático de Rotores

#### 3.1 Equação do Movimento

Neste capítulo será apresentada a formulação das matrizes elementares que constituem o modelo matemático do sistema construído usando o Método dos Elementos Finitos (MEF). Através deste modelo é possível avaliar o comportamento de máquinas rotativas numericamente. A Eq. (3.1) apresenta a equação diferencial que representa o comportamento dinâmico de um sistema de rotor flexível (LALANNE; FERRARIS, 1998).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{D} + \Omega\mathbf{D}_g]\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \dot{\Omega}\mathbf{K}_{st}]\mathbf{q} = \mathbf{W} + \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_m \quad (3.1)$$

sendo  $\mathbf{M}$  a matriz de massa,  $\mathbf{D}$  a matriz de amortecimento (amortecimento proporcional devidamente somado ao amortecimento associado aos mancais),  $\mathbf{D}_g$  a matriz do efeito giroscópico,  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez e  $\mathbf{K}_{st}$  representa o enrijecimento do sistema quando em regime transiente (matrizes obtidas pelo método dos elementos finitos). Todas estas matrizes são associadas às partes girantes da máquina, tais como o disco e o eixo. O vetor de deslocamentos é representado por  $\mathbf{q}$  e a velocidade de rotação é dada por  $\Omega$ .  $\mathbf{W}$  representa a força peso,  $\mathbf{F}_u$  as forças de desbalanceamento e  $\mathbf{F}_m$  é o vetor das forças produzidas pelos mancais a fim de suportar o eixo.

Para a determinação dos termos da Eq. (3.1) é necessário avaliar cada elemento separadamente. O eixo é caracterizado pelas energias cinética e de deformação, o disco é caracterizado pela energia cinética, os mancais são modelados a partir do trabalho virtual e a massa de desbalanceamento é caracterizada pela sua energia cinética. As energias e trabalho virtual associados são aplicados nas equações de Lagrange (veja a Eq. (3.2)) para determinar a equação do movimento da máquina rotativa.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i} = Q_i \quad (3.2)$$

sendo  $T$  e  $U$  as somas das energias cinéticas e de deformação, respectivamente.  $Q_i$  representa os esforços generalizados.

### 3.2 Eixo

O eixo é modelado como uma viga de seção transversal circular e com diâmetro constante. Considera-se que o elemento de eixo possui tamanho  $L$ , dois nós e oito graus de liberdade, sendo quatro deslocamentos ( $u_1, u_2, w_1$  e  $w_2$ ) e quatro rotações ( $\theta_1, \theta_2, \varphi_1$  e  $\varphi_2$ ) conforme ilustra a Fig. 3.1.

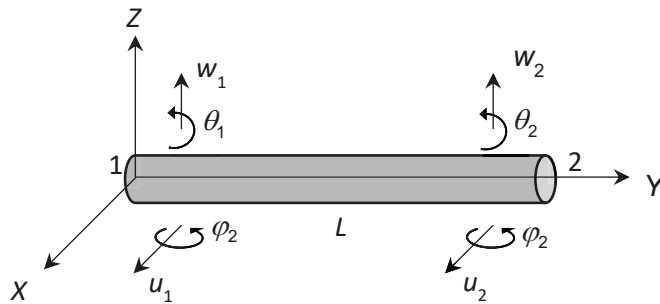


Figura 3.1 - Graus de liberdade (GDLs) associados ao elemento finito construído para representar o eixo (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).

Conforme Lalanne e Ferraris (1998) demonstram, a relação entre os deslocamentos e as rotações podem ser expressas conforme a Eq. (3.3).

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varphi &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Os vetores de deslocamentos nodais podem ser escritos conforme a Eq. (3.4).

$$\mathbf{q} = \{u_1, w_1, \theta_1, \varphi_1, u_2, w_2, \theta_2, \varphi_2\}^t \quad (3.4)$$

Os deslocamentos nos planos XY e YZ são dados pela Eq. (3.5).

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_u &= \{u_1 \varphi_1 u_2 \varphi_2\}^t \\ \mathbf{q}_w &= \{w_1 \theta_1 w_2 \theta_2\}^t\end{aligned}\quad (3.5)$$

O campo de deslocamentos transversais ao longo do elemento é criado a partir de um polinômio de terceiro grau e tem a forma apresentada pela Eq. (3.6).

$$\begin{aligned}u &= \mathbf{N}_1 \mathbf{q}_u \\ w &= \mathbf{N}_2 \mathbf{q}_w\end{aligned}\quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  são as funções de forma de um elemento de viga em flexão e são determinadas pela Eq. (3.7).

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_1 &= \left\{ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \quad -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \quad \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right\} \\ \mathbf{N}_2 &= \left\{ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \quad y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \quad -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right\}\end{aligned}\quad (3.7)$$

A energia cinética para o eixo pode então ser obtida através da Eq. (3.8).

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho l L \Omega^2 + 2\rho l \Omega \int_0^L \dot{\varphi} \dot{\theta} dy \quad (3.8)$$

sendo  $\rho$  a densidade,  $S$  a área de sessão transversal do eixo e  $I$  o momento de inércia de área para o eixo.

Substituindo as Eqs. (3.6) e (3.7) na Eq. (3.8) obtém-se a energia cinética para o eixo, na sua forma compacta conforme mostra a Eq. (3.9).

$$\begin{aligned}T_s &= \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{\mathbf{q}}_u^t \mathbf{N}_1^t \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^t \mathbf{N}_2^t \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}}_w) dy + \\ &\quad + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left( \dot{\mathbf{q}}_u^t \frac{d\mathbf{N}_1^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_1}{dy} \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^t \frac{d\mathbf{N}_2^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \dot{\mathbf{q}}_w \right) dy + \\ &\quad + \rho l L \Omega^2 - 2\rho l \Omega \int_0^L \dot{\mathbf{q}}_u^t \frac{d\mathbf{N}_1^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \dot{\mathbf{q}}_w dy\end{aligned}\quad (3.9)$$

Aplicando as equações de Lagrange (veja a Eq. (3.2)), chega-se então à expressão apresentada na Eq. (3.10).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_s}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T_s}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_r) \ddot{\mathbf{q}} + \Omega \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}} + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{st} \mathbf{q} \quad (3.10)$$

onde as matrizes massa do eixo  $\mathbf{M}_s$ , matriz do efeito secundário da inercia de rotação do eixo  $\mathbf{M}_r$ , a matriz do efeito giroscópico do eixo  $\mathbf{D}_s$  e enrijecimento do rotor quando em regime transiente  $\mathbf{K}_{st}$  são apresentadas nas Eqs. (3.11) a (3.14), respectivamente.

$$\mathbf{M}_s = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{M}_r = \frac{\rho l}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{\rho l}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{K}_{st} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

sendo a matriz  $\mathbf{M}$  da Eq. (3.1) o resultado das somas das matrizes  $\mathbf{M}_S$  e  $\mathbf{M}_T$ .

A energia de deformação para o eixo durante o movimento é obtida com base na análise de tensões  $\sigma$  e deformações  $\varepsilon$ . Considerando o eixo como simétrico, assume-se que  $C$  é o centro geométrico do eixo,  $u$  e  $w$  são os deslocamentos em coordenadas fixas relacionados aos eixos  $X$  e  $Z$ , respectivamente, e  $u^*$  e  $w^*$  são os deslocamentos para as coordenadas rotativas  $x$  e  $z$ , respectivamente, conforme ilustra a Fig. 3.2. Pode-se definir a deformação longitudinal de um ponto arbitrário  $B$  conforme mostra a Eq. (3.15).

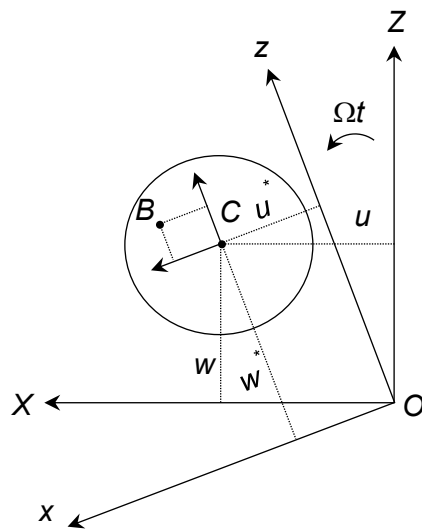


Figura 3.2 - Representação de um ponto arbitrário  $B$  (Fonte: Lalanne e Ferraris (1998)).

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (3.15)$$

onde  $u^*$  e  $w^*$  são apresentados pela Eq. (3.16).

$$\begin{aligned} u^* &= u \cos(\Omega t) - w \sin(\Omega t) \\ w^* &= u \sin(\Omega t) + w \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

A energia de deformação para o eixo desprezando o esforço axial é obtida a partir da Eq. (3.17).

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^t \sigma dV \quad (3.17)$$

Através da relação entre tensão e deformação da Lei de Hooke (veja a Eq. (3.18)), pode-se reescrever a Eq. (3.17) conforme mostra a Eq. (3.19).

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.18)$$

$$U = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon^t \varepsilon dV \quad (3.19)$$

Substituindo a Eq. (3.15) na Eq. (3.19), obtém-se:

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left( -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (3.20)$$

Expandindo a Eq. (3.20) chega-se à Eq. (3.21).

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[ x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (3.21)$$

Considerando a simetria da sessão transversal do eixo com respeito às direções X e Z e aplicando os conceitos de momento de inércia (Eqs. (3.22) e (3.23), a Eq. (3.21) pode ser expressa conforme mostra a Eq. (3.24).

$$I = \int_S x^2 ds = \int_S z^2 ds \quad (3.22)$$

$$\int_S xz ds = 0 \quad (3.23)$$

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.24)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade do eixo.

Substituindo as Eqs. (3.6) e (3.7) na Eqs. (3.16), reescreve-se a Eq. (3.24) conforme mostra a Eq. (3.25).

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \mathbf{q}_u^t \frac{d^2 \mathbf{N}_1^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \mathbf{q}_u + \mathbf{q}_w^t \frac{d^2 \mathbf{N}_2^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \mathbf{q}_w \right] dy \quad (3.25)$$

Aplicando a equação de Lagrange (veja a Eq. (3.2)) na Eq. (3.25), conforme mostra a Eq. (3.26), obtém-se a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  apresentada pela Eq. (3.27). Esta matriz de rigidez leva em consideração o efeito do cisalhamento nas seções transversais durante a flexão, conforme o modelo de viga de Timoshenko.

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{K} = k_L \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

onde  $k_L$  é dado pela Eq. (3.28) e  $\vartheta_\gamma$  (teoria de viga de Timoshenko) é dado pela Eq. (3.29).

$$k_L = \frac{EI}{(1 + \vartheta_\gamma)L^3} \quad (3.28)$$

$$\vartheta_Y = \frac{12EI}{GS_r L^2} \quad (3.29)$$

sendo  $S_r$  a área reduzida da sessão transversal e  $G$  o módulo de cisalhamento.

### 3.3 Disco

O disco é representado conforme ilustra a Fig. 3.3 e é assumido como sendo rígido. O sistema de coordenadas fixas  $R_0$  é representado pelos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  (veja a Fig. 3.1) e o sistema de coordenadas móveis  $R$  é representado pelos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  (posicionado no centro no disco). Com quatro GDLs, dois deslocamentos laterais ( $u$  e  $w$ ) e duas rotações ( $\theta$  e  $\varphi$ ), o vetor de deslocamentos nodais é representado pela Eq. (3.30).

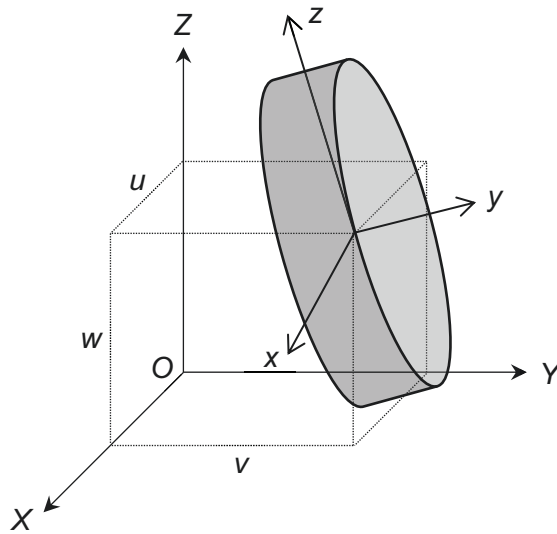


Figura 3.3 - Representação do elemento de disco (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).

$$\mathbf{q}_D = \{u \ w \ \theta \ \varphi\}^t \quad (3.30)$$

Conforme Lalanne e Ferraris (1998), a energia cinética para o elemento de disco pode ser calculada segundo a Eq. (3.31).

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (3.31)$$



sendo  $m_D$  a massa do disco,  $I_{Dx}$ ,  $I_{Dy}$  e  $I_{Dz}$  representam os momentos de inércia em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  são as velocidades angulares (veja a Eq. (3.32)), também em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

$$\boldsymbol{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

A Eq. (3.31) pode ainda ser simplificada como mostra a Eq. (3.33), assumindo que o disco é simétrico ( $I_{Dx} = I_{Dz} = I_D$ ) e que os ângulos de rotação  $\theta$  e  $\phi$  são suficientemente pequenos.

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_D (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\phi}\theta) \quad (3.33)$$

onde o efeito giroscópico é representado pelo termo  $I_{Dy}\Omega\dot{\phi}\theta$ .

Aplicando a Eq. (3.33) nas equações de Lagrange, obtém-se a Eq. (3.34).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \mathbf{q}_D} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_D + \Omega \mathbf{D}_D \dot{\mathbf{q}}_D + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{Dt} \mathbf{q}_D \quad (3.34)$$

onde as matrizes de massa do disco  $\mathbf{M}_D$ , efeito giroscópico  $\mathbf{D}_D$  e enrijecimento do disco devido ao regime transiente  $\mathbf{K}_{Dt}$  são descritas pelas Eqs. (3.35) a (3.37), respectivamente.

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{D}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{K}_{Dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

sendo a matriz  $\mathbf{D}_g$  da Eq. (3.1) o resultado da soma das matrizes  $\mathbf{D}_S$  e  $\mathbf{D}_D$  nos graus de liberdade correspondentes.

Segundo Lalanne e Ferraris (1998), o disco pode ser incorporado no modelo assumindo que o mesmo não altera a rigidez do eixo e suas características de inércia são concentradas no nó correspondente ao elemento finito do eixo, conforme mostra a Fig. 3.4.

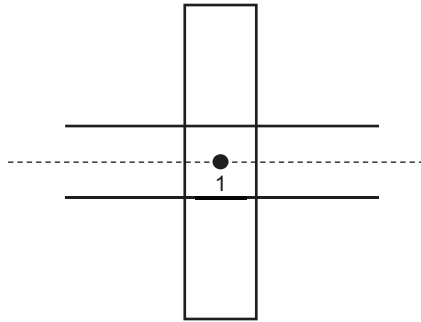


Figura 3.4 - Forma de se incorporar o disco ao eixo em elementos finitos (Fonte: Lalanne e Ferraris (1998)).

### 3.4 Mancais

Assume-se que os mancais são mancais de rolamento e possuem componentes de rigidez e amortecimento viscoso, como mostra a Fig. 3.5.

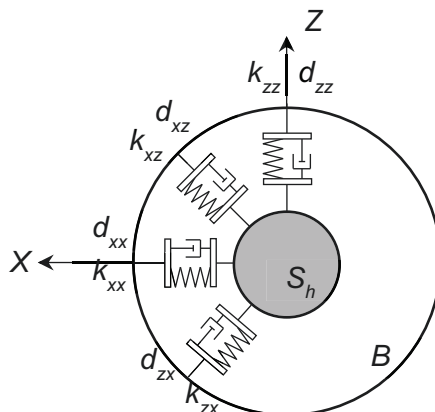


Figura 3.5 - Coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).

O trabalho virtual das forças atuantes dos mancais sobre o eixo pode ser escrito como mostra a Eq. (3.38).

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w \\ & -d_{xx}\dot{u}\delta u - d_{xz}\dot{w}\delta u - d_{zz}\dot{w}\delta w - d_{zx}\dot{u}\delta w \end{aligned} \quad (3.38)$$

A Eq. (3.38) pode também ser simplificada conforme apresenta a Eq. (3.39).

$$\delta W = F_{mu}\delta u + F_{mw}\delta w \quad (3.39)$$

onde  $F_{mu}$  e  $F_{mw}$  são as forças generalizadas e escritas na forma matricial como mostra a Eq. (3.40).

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{mw} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xz} \\ d_{zx} & d_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

A Eq. (3.40) pode ser escrita de forma expandida com os GDLs utilizados na formulação do elemento finito de eixo (GDLs de um dos nós do elemento), conforme apresenta a Eq. (3.41).

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{m\theta} \\ F_{mw} \\ F_{m\varphi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{xx} & 0 & d_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{zx} & 0 & d_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

### 3.5 Massa de Desbalanceamento

A força de desbalanceamento é definida por uma massa  $m_u$  situada a uma distância  $d$  do centro geométrico do eixo, que por sua vez têm coordenadas  $u$  e  $w$ , conforme ilustra a Fig. 3.6. A massa  $m_u$  é assumida como sendo muito menor que a massa do rotor. A energia cinética  $T_u$  da massa  $m_u$  (Eq. (3.42)) pode ser calculada utilizando o vetor velocidade obtido com base na sua posição em coordenadas móveis.

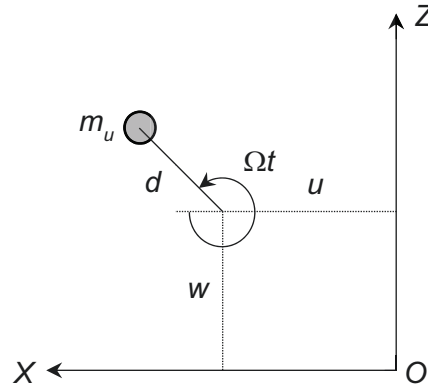


Figura 3.6 - Coordenadas relativas à massa de desbalanceamento (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \sin(\Omega t) - 2\Omega \dot{w} d \cos(\Omega t)) \quad (3.42)$$

onde o termo  $\Omega^2 d^2$  é constante e não tem influência nas equações. Assim, a expressão da energia cinética é escrita como:

$$T_u \approx m_u \Omega d (\dot{u} \sin(\Omega t) - \dot{w} \cos(\Omega t)) \quad (3.43)$$

Para a massa de desbalanceamento, o vetor de deslocamentos nodais é composto apenas pelos deslocamentos laterais conforme mostra a Eq. (3.44).

$$\mathbf{q}_{unb} = \{u \ w\}^t \quad (3.44)$$

A Eq. (3.46) é obtida a partir da aplicação das equações de Lagrange sobre a Eq. (3.43).

$$\frac{dT_u}{dt} \left( \frac{\partial T_u}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{unb}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial \mathbf{q}_{unb}} = \begin{bmatrix} -m_u d \dot{\Omega} \sin(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -m_u d \dot{\Omega} \cos(\Omega t) + m_u d \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

As forças de desbalanceamentos nas direções X e Z podem então ser descritas como mostra a Eq. (3.46).

$$\begin{bmatrix} F_{unbx} \\ F_{unbz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_u d \dot{\Omega} \sin(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -m_u d \dot{\Omega} \cos(\Omega t) + m_u d \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

## CAPÍTULO IV

### Modelagem do eixo de material composto

#### 4.1 Equação do Movimento

Neste capítulo será apresentada a formulação das matrizes elementares que constituem o modelo matemático do eixo de material composto construído usando o MEF. A Eq. (4.1) apresenta a equação diferencial que representa o comportamento dinâmico de um sistema de rotor flexível (SINO, 2007).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{D} + \Omega\mathbf{D}_g + \mathbf{D}_i]\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \dot{\Omega}\mathbf{K}_{st} + \Omega\mathbf{K}_i]\mathbf{q} = \mathbf{W} + \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_m \quad (4.1)$$

onde as matrizes  $\mathbf{D}_i$  e  $\mathbf{K}_i$  são, respectivamente, as matrizes de amortecimento interno e rigidez adicionais devido ao material composto. As outras matrizes e vetores apresentados na Eq. (4.1) são equivalentes as apresentadas na Eq. (3.1).

Como mencionado, o amortecimento interno presente nos eixos de material composto é tratado como amortecimento viscoso equivalente. Em sua modelagem, é representado por um sólido viscoelástico linear através da utilização do modelo reológico de Kelvin-Voigt (SINO, 2007), como mostra a Fig. 4.2. O elemento representativo desta abordagem consiste numa associação em paralelo de uma mola e um amortecedor. A mola representa a fração elástica da deformação (seguindo a lei de Hooke) e o amortecedor é assumido como sendo linear com uma tensão resultante expressa em função da taxa de deformação.

A relação entre a tensão  $\sigma$  e a deformação  $\varepsilon$  do modelo de Kelvin-Voigt é dada por:

$$\sigma = E\varepsilon + \underbrace{\eta\dot{\varepsilon}}_B \quad \begin{cases} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

sendo  $\eta$  viscosidade e  $\dot{\varepsilon}$  a velocidade de deformação.

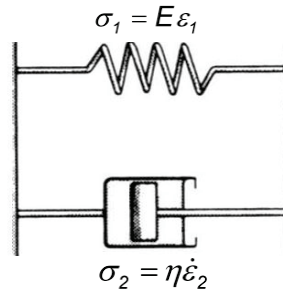


Figura 4.1 – Representação do elemento de Kelvin-Voigt (Fonte: Wasilkoski (2006)).

A Fig. 4.2 mostra o comportamento característico da deformação no tempo quando o modelo de Kelvin-Voigt é submetido a uma tensão constante  $\sigma_0$ , denominado fluência. Esse fenômeno é representado matematicamente pela Eq. (4.3).

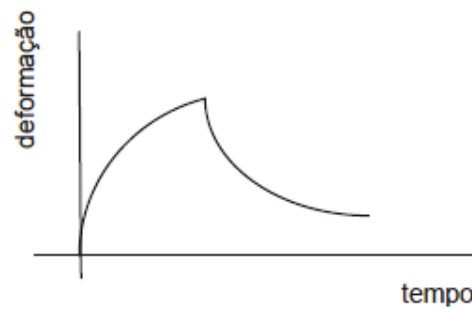


Figura 4.2 – Comportamento do elemento de Kelvin-Voigt quando submetido a uma tensão constante (Fonte: Wasilkoski (2006)).

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (4.3)$$

sendo  $\lambda$  a taxa de relaxação ( $\lambda = E / \eta$ ). O tempo de relaxação  $\alpha$  associado à característica mecânica do amortecimento do material é obtido como mostra a Eq. (4.4).

$$\alpha = \frac{\eta}{E} \quad (4.4)$$

Assim, o trabalho virtual dos efeitos dissipativos provenientes do amortecimento interno pode ser formulado, como mostra a Eq. (4.5).

$$\delta W = \int_0^L \int_S \sigma \delta \epsilon dS dy \quad (4.5)$$

Substituindo o termo  $B$  da Eq. (4.2) na Eq. (4.5), obtém-se a Eq. (4.6).

$$\delta W = \int_0^L \int_S \alpha E \dot{\varepsilon} \delta \varepsilon dS dy \quad (4.6)$$

onde  $\dot{\varepsilon}$  e  $\delta \varepsilon$  são dados pela Eqs. (4.7) e (4.8).

$$\dot{\varepsilon} = -x \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \quad (4.7)$$

$$\delta \varepsilon = -x \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} \quad (4.8)$$

Assim, o trabalho virtual pode ser reescrito em função das Eqs. (4.7) e (4.8) conforme mostra a Eq. (4.9).

$$\delta W = \int_0^L \int_S \alpha E \left( -x \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \right) \left( -x \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (4.9)$$

Expandindo a Eq. (4.9) tem-se:

$$\delta W = \int_0^L \int_S \alpha E \left[ x^2 \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} + xz \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} + xz \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (4.10)$$

Neste caso,  $\dot{u}^*$  e  $\dot{w}^*$  são dados pela Eq. (4.11).

$$\begin{aligned} \dot{u}^* &= \dot{u} \cos(\Omega t) - u \Omega \sin(\Omega t) - \dot{w} \sin(\Omega t) - w \Omega \cos(\Omega t) \\ \dot{w}^* &= \dot{u} \sin(\Omega t) + u \Omega \cos(\Omega t) + \dot{w} \cos(\Omega t) + w \Omega \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $\dot{u}$ ,  $\dot{w}$  e  $\dot{\phi}$  são apresentados pela Eq. (4.12).

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_u \\ \dot{w} &= \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}}_w \end{aligned} \quad (4.12)$$

sendo  $\dot{\mathbf{q}}_u$  e  $\dot{\mathbf{q}}_w$  a derivada temporal dos vetores mostrados na Eq. (3.5).

Novamente, devido à simetria do eixo (veja as Eqs. (3.22) e (3.23)), a Eq. (4.10) passa a ser escrita como:

$$\delta W = \alpha EI \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} \right] dy \quad (4.13)$$

Substituindo as Eqs. (3.16) e (4.11) na Eq. (4.13), obtém-se a Eq. (4.14).

$$\delta W = \alpha EI \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \Omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \Omega \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} \right] dy \quad (4.14)$$

Utilizando a Eq. (4.12) e (4.12) na Eq. (3.44), chega-se à Eq. (3.45).

$$\delta W = \alpha EI \int_0^L \left[ \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} + \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \right) \dot{\mathbf{q}} + \Omega \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} - \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \right) \mathbf{q} \right] \delta \mathbf{q} dy \quad (4.15)$$

A Eq. (4.15) pode ser simplificada conforme apresenta a Eq. (4.16).

$$\delta W = -F_i^t \delta \mathbf{q} \quad (4.16)$$

onde  $F_i^t$  é a força generalizada devido ao amortecimento interno, dada pela Eq. (4.17)

$$F_i = -\alpha EI \int_0^L \left[ \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} + \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \right) \dot{\mathbf{q}} + \Omega \left( \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} - \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \right) \mathbf{q} \right] dy \quad (4.17)$$

As matrizes  $\mathbf{D}_i$  e  $\mathbf{K}_i$  da Eq. (4.1) são obtidas a partir da Eq. (4.17), como mostra as Eqs. (4.18) e (4.19), respectivamente. Esta matriz de rigidez leva em consideração o efeito do cisalhamento interno, conforme o modelo de viga de Timoshenko, a formulação detalhada destas matrizes é apresentada em Sino (2007).



$$\mathbf{D}_i = K_L^\alpha \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{K}_i = K_L^\alpha \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 6L & 0 & 0 & -(4 + \vartheta_\gamma)L^2 & -6L & 0 & 0 & -(2 - \vartheta_\gamma)L^2 \\ 0 & 6L & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 6L & 0 & 0 & -(2 - \vartheta_\gamma)L^2 & -6L & 0 & 0 & -(4 + \vartheta_\gamma)L^2 \\ 0 & 6L & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde  $K_L^\alpha$  é dado pela Eq. (3.50).

$$K_L^\alpha = \frac{\alpha EI}{(1 + \vartheta_\gamma)L^3} \quad (4.20)$$

Para determinação das propriedades mecânicas necessárias para o cálculo das matrizes relacionadas ao eixo de material composto (matrizes  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}_i$  e  $\mathbf{K}_i$  da Eq. (4.1)), considera-se as formulações baseadas na teoria de vigas homogêneas, ou seja, por meio dos métodos de homogeneização (EMBT e SHBT).

## 4.2 Métodos de Homogeneização

A Fig. 4.3 mostra uma representação esquemática acerca da direção das fibras de uma camada do material composto considerado nesta dissertação. O sistema cartesiano adotado segue as direções inerciais consideradas para o eixo de rotor (veja a Fig. 3.1). Os eixos 1, 2 e 3 são ortotrópicos e associados com a direção das fibras, a direção transversal as fibras e perpendicular à camada, respectivamente. O ângulo  $\theta_p$  representa a orientação das fibras em cada camada.

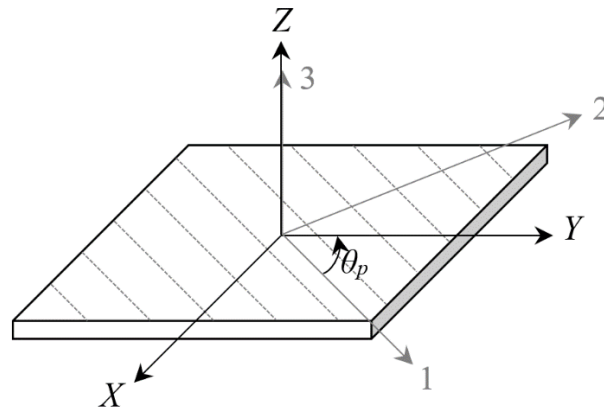


Figura 4.3 – Representação esquemática da direção das fibras em relação ao sistema cartesiano adotado para o eixo (Fonte: Cavalini Jr et al. (2016)).

O material composto quando assumido como ortotrópico pode ser caracterizado por 9 constantes elásticas independentes. Caso um dos planos apresente simetria, o material ortotrópico passa a ser chamado de transversalmente isotrópico e apenas 5 constantes são necessárias para caracterizá-lo.

A partir destas hipóteses e assumindo que cada camada do eixo utilizado nesta dissertação possui parede fina, ou seja, está em uma condição de estado plano de tensão, a matriz de rigidez que representa suas características mecânicas é reduzida conforme mostrado na Eq. (4.21).

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

sendo  $E$ ,  $G$  e  $\nu$  (coeficiente de Poisson) associados com as direções 1 e 2 da Fig. 4.3.

Desta forma, os métodos de homogeneização EMBT e SHBT foram empregados para obter valores equivalentes das propriedades elásticas do eixo. Estes parâmetros são usados no cálculo da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  do eixo apresentada na Eq. (4.1). O efeito do amortecimento interno é incluído nas matrizes  $\mathbf{D}_i$  e  $\mathbf{K}_i$  igualmente através de propriedades equivalentes como pode ser visto a seguir.

#### 4.2.1 Formulação Matemática do Modelo EMBT

O modelo baseado em EMBT foi desenvolvido por Singh e Grupta (1994) a partir da teoria de estratificação associada aos empilhamentos simétricos e balanceados. Nesta abordagem, são determinados o módulo de elasticidade equivalente  $E_{eq}$  e o módulo de cisalhamento equivalente  $G_{eq}$ , como mostra as Eqs. (4.22) e (4.23). Para isso, o momento de inércia  $I$  e a área da seção transversal  $S$  do eixo são determinados (Eqs. (4.24) e (4.25)).

$$E_{eq} = \frac{[4(U_1 - U_5)(U_5 - U_3\mu) - \beta^2 U_2^2]}{U_1 - \beta U_2 + \mu U_3} \quad (4.22)$$

$$G_{eq} = U_5 - \mu U_3 \quad (4.23)$$

$$I = \frac{\pi}{4}(R^4 - R_i^4) \quad (4.24)$$

$$S = \pi(R^2 - R_i^2) \quad (4.25)$$

onde  $U_{1-5}$  são as combinações lineares (invariantes) da matriz de propriedades elásticas do eixo (Eq. (4.21)) mostrados nas Eqs. (4.26) à (4.30). Os termos  $\mu$  e  $\beta$  são expressos nas Eqs. (4.31) e (4.32) e correspondem à contribuição da direção de cada camada,  $R$  é o raio do externo do eixo e  $R_i$  é o raio interno do eixo.

$$U_1 = \frac{3}{8}Q_{11} + \frac{3}{8}Q_{22} + \frac{1}{4}Q_{12} + \frac{1}{2}Q_{66} \quad (4.26)$$

$$U_2 = \frac{4}{8}(Q_{11} - Q_{22}) \quad (4.27)$$

$$U_3 = \frac{1}{8}Q_{11} + \frac{1}{8}Q_{22} - \frac{1}{4}Q_{12} - \frac{1}{2}Q_{66} \quad (4.28)$$

$$U_4 = \frac{1}{8}Q_{11} + \frac{1}{8}Q_{22} + \frac{3}{4}Q_{12} - \frac{1}{2}Q_{66} \quad (4.29)$$

$$U_5 = \frac{1}{8}Q_{11} + \frac{1}{8}Q_{22} - \frac{1}{4}Q_{12} - \frac{1}{2}Q_{66} \quad (4.30)$$

$$\mu = \sum_{p=1}^N \frac{t_p}{t} \cos(2\theta_p) \quad (4.31)$$

$$\beta = \sum_{p=1}^N \frac{t_p}{t} \cos(4\theta_p) \quad (4.32)$$

sendo  $t_p$  a espessura da camada  $p$ ,  $t$  é a espessura total do eixo vazado,  $\theta_p$  representa o ângulo de orientação da fibra em cada camada (veja a Fig. 4.3) e  $N$  é o número total de camadas do eixo.

O módulo de elasticidade equivalente amortecido  $\alpha E_{eq}$  (usado nas matrizes  $\mathbf{D}_i$  e  $\mathbf{K}_i$ ) é calculado pela Eq. (4.33) para cada camada do estratificado. Assim, as combinações lineares (Eqs. (4.35) à (4.39)) da matriz de propriedades elásticas amortecida  $\mathbf{Q}^\psi$  da Eq. (4.34) são utilizadas.

$$\alpha E_{eq} = \frac{[4(U_1^\psi - U_5^\psi)(U_5^\psi - U_3^\psi \gamma) - \beta^2 U_2^{\psi 2}]}{U_1^\psi - \beta U_2^\psi + \gamma U_3^\psi} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{Q}^\psi = \begin{bmatrix} \psi_{11}Q_{11} & \psi_{11}Q_{12} & 0 \\ \psi_{22}Q_{12} & \psi_{22}Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{12}Q_{66} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Podendo os chamados coeficientes de amortecimento específicos  $\psi_{11}$ ,  $\psi_{22}$  e  $\psi_{12}$  serem determinados através de métodos de otimização e resultados experimentais.

$$U_1^\psi = \frac{3}{8}Q_{11}^\psi + \frac{3}{8}Q_{22}^\psi + \frac{1}{4}Q_{12}^\psi + \frac{1}{2}Q_{66}^\psi \quad (4.35)$$

$$U_2^\psi = \frac{4}{8}(Q_{11}^\psi - Q_{22}^\psi) \quad (4.36)$$

$$U_{33}^\psi = \frac{1}{8}Q_{11}^\psi + \frac{1}{8}Q_{22}^\psi - \frac{1}{4}Q_{12}^\psi - \frac{1}{2}Q_{66}^\psi \quad (4.37)$$

$$U_4^{\nu} = \frac{1}{8}Q_{11}^{\nu} + \frac{1}{8}Q_{22}^{\nu} + \frac{3}{4}Q_{12}^{\nu} - \frac{1}{2}Q_{66}^{\nu} \quad (4.38)$$

$$U_5^{\nu} = \frac{1}{8}Q_{11}^{\nu} + \frac{1}{8}Q_{22}^{\nu} - \frac{1}{4}Q_{12}^{\nu} - \frac{1}{2}Q_{66}^{\nu} \quad (4.39)$$

#### 4.2.2 Formulação Matemática do Modelo SHBT

Este método desenvolvido por Sino (2007) se baseia na homogeneização direta do produto  $EI_{eq}$ ,  $GS_{eq}$  e  $\alpha EI_{eq}$ . Este método pode ser aplicado para qualquer orientação e sequência de empilhamento. Além disso, leva em consideração a distância de cada camada ao eixo neutro. Para calcular a rigidez à flexão equivalente se faz uso da Eq. (4.40).

$$EI_{eq} = \sum_{p=1}^N E_y^p I^p \quad I^p = \frac{\pi}{4} (R_p^4 - R_{p-1}^4) \quad (4.40)$$

onde  $E_y^p$  é dado pela Eq. (4.41),  $I^p$  é o momento de inércia de área da seção transversal da camada,  $R_{p-1}$  é o raio interno da camada  $R_p$  é o raio externo.

$$E_y^p = \left[ \frac{\cos^4(\theta_p)}{E_1} + \frac{\sin^4(\theta_p)}{E_2} + \cos^2(\theta_p) \sin^2(\theta_p) \left( \frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) \right]^{-1} \quad (4.41)$$

A rigidez ao cisalhamento equivalente é mostrada na Eq. (4.42).

$$GS_{eq} = \sum_{p=1}^N G_{12}^p S^p \quad S^p = \pi (R_p^2 - R_{p-1}^2) \quad (4.42)$$

onde  $G_{12}^p$  é dado pela Eq. (4.43).

$$G_{12}^p = \left[ 4 \cos^2(\theta_p) \sin^2(\theta_p) \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + 2 \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) + \frac{(\cos^2(\theta_p) - \sin^2(\theta_p))^2}{G_{12}} \right]^{-1} \quad (4.43)$$

Para obtenção da rigidez à flexão equivalente amortecida utiliza-se a Eq. (4.44).

$$\alpha EI_{eq} = \sum_{p=1}^N \tilde{E}_y^p I^p \quad (4.44)$$

Nesta formulação, a matriz e propriedades estáticas amortecida é representada pela Eq. (4.45).

$$\mathbf{Q}^\psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} \mathbf{Q}_{11} & \psi_{11} \nu_{21} \mathbf{Q}_{11} & 0 \\ \psi_{22} \nu_{12} \mathbf{Q}_{11} & \psi_{22} \mathbf{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{12} \mathbf{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Para considerar a orientação de cada camada é necessário realizar uma mudança no referencial da matriz  $\mathbf{Q}^\psi$ , conforme mostrado na Eq. (4.46).

$$\bar{\mathbf{Q}}^\psi = \mathbf{T} \mathbf{Q}^\psi \mathbf{T}^t$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta_p) & \sin^2(\theta_p) & 2 \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \\ \sin^2(\theta_p) & \cos^2(\theta_p) & -2 \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \\ -\sin(\theta_p) \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) & \cos^2(\theta_p) - \sin^2(\theta_p) \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

onde a inversa da matriz  $\bar{\mathbf{Q}}^\psi$  é utilizada na determinação do módulo de elasticidade equivalente amortecido (veja a Eq. (4.47)).

$$\mathbf{C} = [\bar{\mathbf{Q}}^\psi]^{-1} \quad (4.47)$$

$$\tilde{E}_y^p = [\mathbf{C}(2,2)]^{-1}$$

## CAPÍTULO V

### BANCADA DE TESTES #1

Este capítulo consiste na descrição da bancada de testes #1 utilizada para a avaliação dos modelos EMBT e SHBT descritos nesta dissertação. Além disso, são apresentados os resultados obtidos no ajuste do modelo de elementos finitos (modelo EF) do rotor através de funções de resposta em frequência (FRFs) experimentais do sistema. Ao final deste capítulo, simulações numéricas acerca do comportamento dinâmico do sistema são apresentadas, bem como as justificativas pelas quais os testes experimentais correspondentes não foram realizados.

#### 5.1 Bancada de Testes

A bancada de testes utilizada nesta análise é apresentada na Fig. 5.1. Trata-se de um sistema rotativo horizontal (SpectraQuest modelo MFS-RDS) fixado sobre uma mesa inercial.

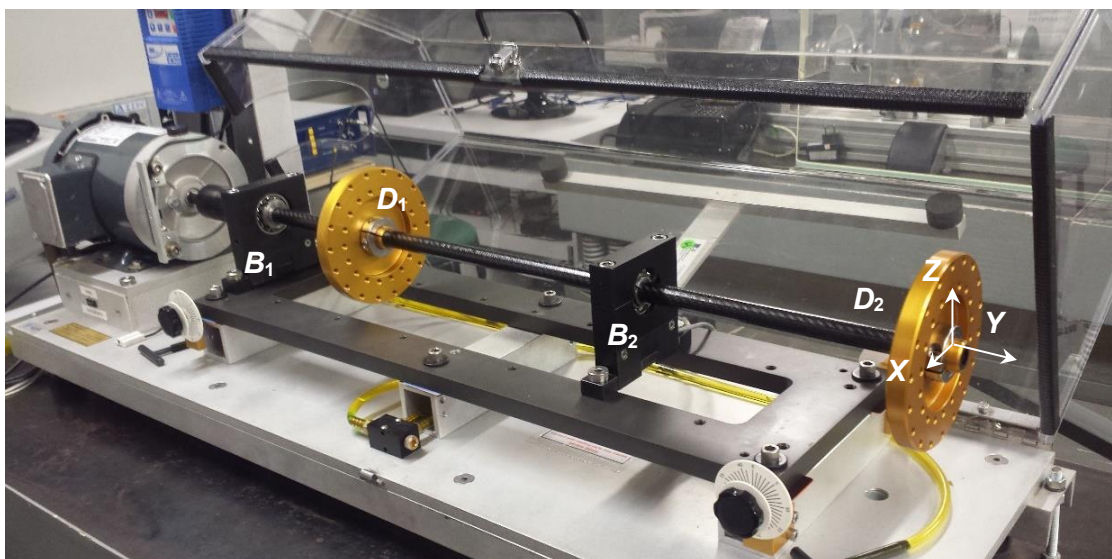


Figura 5.1 – Bancada de ensaio utilizada na primeira análise

A bancada de testes possui um eixo de material composto, dois discos de alumínio e dois mancais de rolamento. O eixo de material composto é mostrado na Fig. 5.2. Trata-se de um eixo vazado constituído por fibras de carbono de alta resistência pré-impregnadas com resina epóxi. O eixo possui 20 camadas com a seguinte sequência de empilhamento: [0 0 0 0 90 90 45 -45 0 0 0 45 -45 90 90 0 0 0 0 0/90]. As propriedades geométricas do eixo são mostradas na Tab. 5.1. As propriedades físicas como os módulos de elasticidade e cisalhamento não foram fornecidas pelo fabricante e foram identificados neste trabalho.

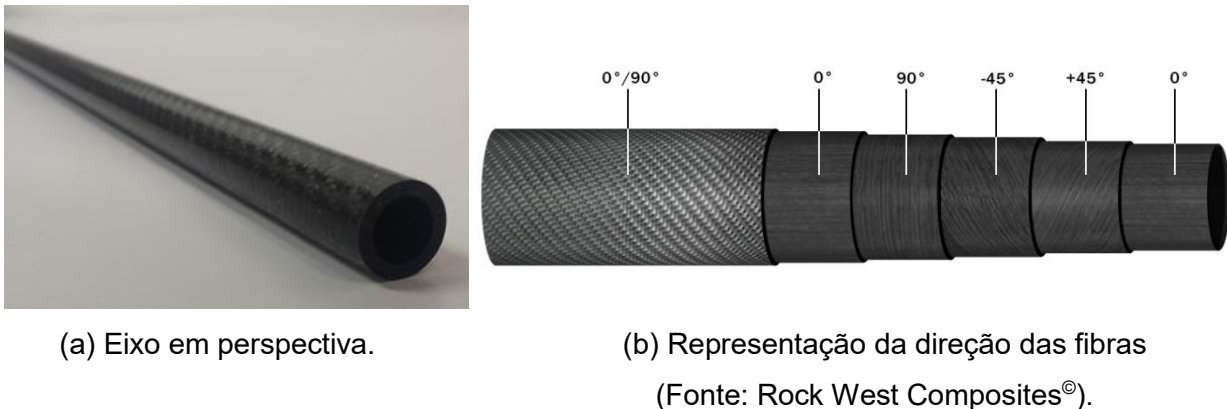


Figura 5.2 – Eixo em material composto utilizado.

Tabela 5.1 - Propriedades geométricas do eixo.

<i>Propriedades</i>	<i>Valores</i>
Comprimento (m)	0,907
Diâmetro Externo (m)	0,018
Diâmetro Interno (m)	0,0128
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	1677

A Fig. 5.3 mostra os discos da bancada de testes (alumínio). Suas propriedades físicas e geométricas são apresentadas na Tab. 5.2. É importante ressaltar que a fixação dos discos no eixo é feita através de abraçadeiras.

O acoplamento entre o motor elétrico de corrente alternada e o eixo é mostrado na Fig. 5.4. Trata-se do acoplamento flexível Rocom<sup>®</sup> de alumínio anodizado modelo DT000175-C.750-C.625.

A Fig. 5.5 mostra os mancais utilizados na bancada de testes. São mancais constituídos por transdutores de força (SpectraQuest modelo M-FTVH) capazes de medir carregamentos dinâmicos nas direções horizontal e vertical da máquina (X e Z, respectivamente). Neste caso, são utilizados rolamentos auto compensadores (Nachi modelo 1205C3i) com buchas cônicas BGL-KM5 para a fixação no eixo.



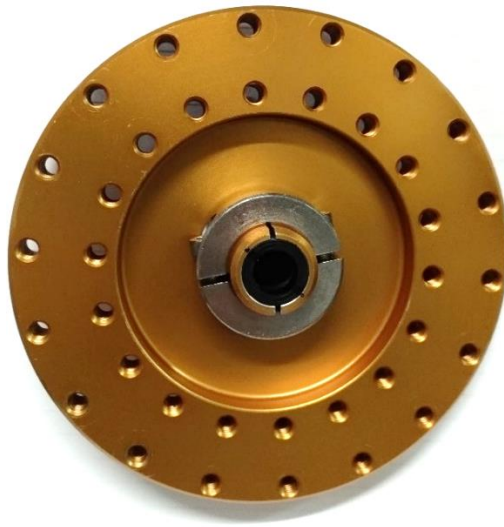


Figura 5.3 – Disco de alumínio com abraçadeira utilizado na bancada de testes.

Tabela 5.2 – Propriedades físicas e geométricas do disco.

<i>Propriedades</i>	<i>Valores</i>
Diâmetro externo (m)	0,150
Diâmetro interno (m)	0,018
Espessura (m)	0,016
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	2700
Módulo de Elasticidade (GPa)	69



Figura 5.4 – Acoplamento entre o motor elétrico e o eixo.

Para determinar os parâmetros desconhecidos da bancada mostrada na Fig. 5.1 (os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais), FRFs foram obtidas experimentalmente através de impactos aplicados, separadamente, ao longo das direções  $X$  e  $Z$  dos discos  $D_1$  e  $D_2$  (martelo instrumentado PCB® modelo 086C01) e dois acelerômetros (PCB® modelo 352C22) posicionados nos discos  $D_1$  e  $D_2$  ao longo da mesma

direção do impacto. Os sinais foram medidos pelo analisador de sinais Agilent® modelo 35670A.



Figura 5.5 – Mancal com transdutores de força e rolamento auto compensador.

. A Fig. 5.6 ilustra como as posições dos impactos e sensores consideradas para determinar as 4 FRFs experimentais.

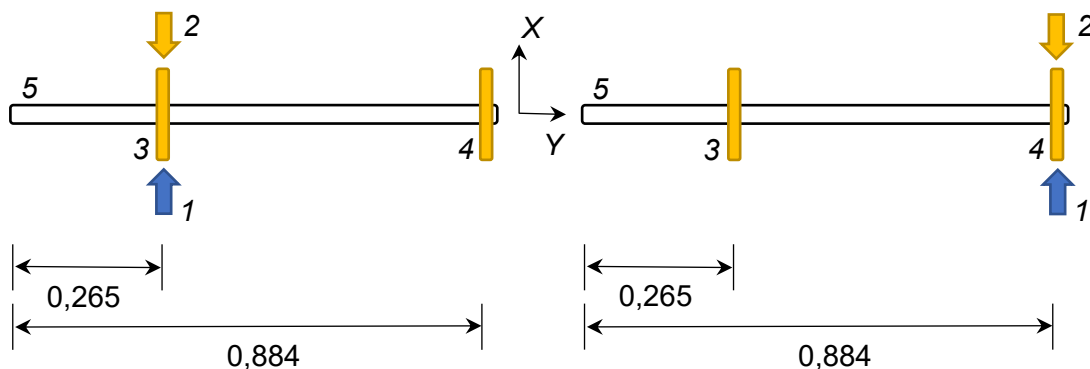


Figura 5.6 – Posições dos impactos e sensores consideradas para determinar as FRFs experimentais (1 impacto; 2 acelerômetro; 3 e 4 discos; 5 eixo; dimensões em metros).

## 5.2 Ajuste dos Modelos Matemáticos

A Fig. 5.7 apresenta o modelo EF da bancada de testes #1 utilizada nesta dissertação. Neste caso, o eixo de material composto é representado por 39 elementos finitos (teoria de viga de Timoshenko). Os dois discos de alumínio estão localizados nos nós #13 e #39 (discos  $D_1$  e  $D_2$ , respectivamente; veja a Fig. 5.1). O rotor é suportado pelos mancais da Fig. 5.5

localizados nos nós #4 e #27 (mancais  $B_1$  e  $B_2$ , respectivamente; veja a Fig. 5.1).

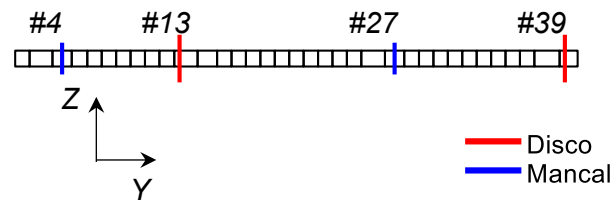


Figura 5.7 – Modelo EF da bancada de testes #1.

Para determinação dos parâmetros desconhecidos do modelo, um problema inverso foi resolvido através do método de otimização conhecido como Evolução Diferencial (do inglês Differential Evolution - DE), que foi desenvolvido por Storn e Price (1995) e utiliza procedimentos derivados dos processos biológicos, tais como a herança genética, mutação, seleção natural e cruzamento. Segundo Lobato e Steffen (2007), o DE é uma versão melhorada do Algoritmo Genético de Goldberg (GA) (Goldberg, 1989). A Eq. (5.1) mostra a função objetivo  $F$  utilizada. As Tabs. 5.3 e 5.4 mostram os resultados obtidos ao final do processo de minimização (coeficientes lineares dos mancais e parâmetros físicos do eixo, respectivamente), bem como o espaço de projeto associado com cada variável desconhecida.

$$F = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\|FRF_{exp, i, j} - FRF_{num, i, j}\|}{\|FRF_{exp, i, j}\|} \quad (5.1)$$

onde  $FRF_{exp}$  representa as FRFs experimentais e  $FRF_{num}$  são as FRFs determinadas pelo modelo EF da bancada. Sendo  $N$  o número de FRFs utilizadas no processo e  $n_p$  o número de pontos avaliados das FRFs,

Tabela 5.3 – Coeficientes de rigidez  $k$  e amortecimento  $d$  dos mancais.

Mancal – Coeficiente	Limite inferior	Valor ótimo	Limite superior
$B_1 - k_{xx}$ (N/m)	$1 \times 10^4$	$5,5 \times 10^5$	$1 \times 10^9$
$B_1 - k_{zz}$ (N/m)	$1 \times 10^4$	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^9$
$B_1 - d_{xx}$ (Ns/m)	$1 \times 10^2$	$5,5 \times 10^5$	$1 \times 10^9$
$B_1 - d_{zz}$ (Ns/m)	$1 \times 10^2$	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^9$
$B_2 - k_{xx}$ (N/m)	$1 \times 10^4$	$5 \times 10^3$	$1 \times 10^9$
$B_2 - k_{zz}$ (N/m)	$1 \times 10^4$	$5 \times 10^3$	$1 \times 10^9$
$B_2 - d_{xx}$ (Ns/m)	$1 \times 10^2$	$3 \times 10^3$	$1 \times 10^9$
$B_2 - d_{zz}$ (Ns/m)	$1 \times 10^2$	$3 \times 10^3$	$1 \times 10^9$

Tabela 5.4 – Propriedades físicas otimizadas do eixo de material composto.

<i>Propriedade</i>	<i>Limite inferior</i>	<i>Valor ótimo EMBT</i>	<i>Valor ótimo SHBT</i>	<i>Limite superior</i>
<i>Módulo de elasticidade 0° (GPa)</i>	70	85,52	117,92	140
<i>Módulo de elasticidade 90° (GPa)</i>	50	74,60	59,02	100
<i>Módulo de elasticidade 0°/90° (GPa)</i>	70	101,49	133,41	140
<i>Módulo de cisalhamento (GPa)</i>	4	10,89	10,84	12
<i>Módulo de cisalhamento 0°/90° (GPa)</i>	4	6,76	6,88	12
<i>Coefficiente de Poisson</i>	0,20	0,396	0,347	0,40
<i>Coefficiente de Poisson 0°/90°</i>	0,20	0,378	0,331	0,40
$\psi_{11}$	$1 \times 10^{-7}$	$5,3 \times 10^{-5}$	$4,3 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$
$\psi_{22}$	$1 \times 10^{-7}$	$1,52 \times 10^{-5}$	$8,23 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$
$\psi_{12}$	$1 \times 10^{-7}$	$1,23 \times 10^{-4}$	$2,9 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$

É importante ressaltar que os ajustes dos coeficientes lineares dos mancais e das propriedades físicas do eixo não foram realizados em um mesmo procedimento de otimização. Inicialmente, as propriedades da Tab. 5.4 foram determinadas para o eixo em uma condição livre-livre (sem discos e mancais acoplados). Neste caso, 150 indivíduos foram usados na população inicial do otimizador. O aparato experimental e os resultados obtidos para este caso são similares aos mostrados no Capítulo VI desta dissertação.

Posteriormente, o sistema foi montado (eixo, discos e mancais) e novas FRFs foram medidas, como mostra as curvas experimentais das Figs. 5.8 a 5.11. Estas medições foram utilizadas para determinar os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais. Neste caso, 100 indivíduos foram usados na população inicial do otimizador.

As Figs. 5.8 a 5.11 mostram as FRFs obtidas com os modelos EMBT e SHBT ajustados. As FRFs experimentais correspondentes são também apresentadas (20 a 200 Hz com resolução de 0,25 Hz). É possível observar que os resultados obtidos pelos modelos EMBT e SHBT são próximos. Além disso, apesar da proximidade das amplitudes, as frequências naturais numéricas estão distantes das experimentais. Esta diferença é mais evidente nas FRFs obtidas ao longo da direção X (veja as Figs. 5.8 e 5.9).

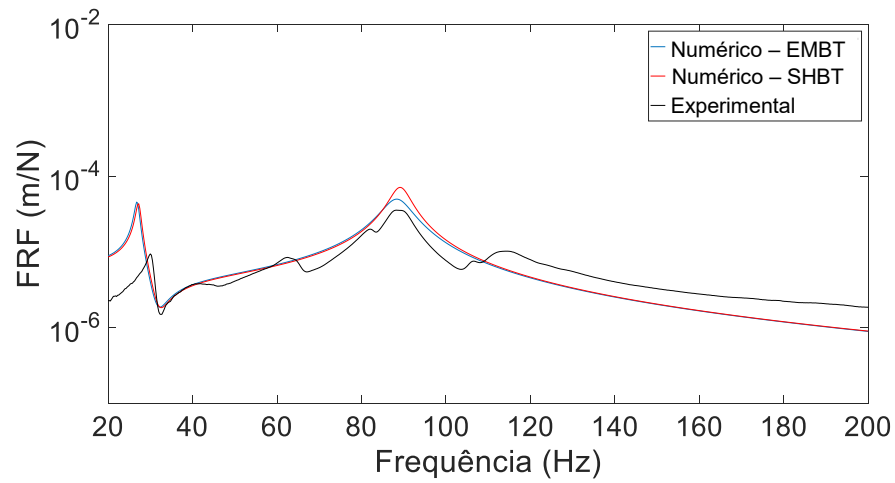


Figura 5.8 – FRFs numéricas e experimental com excitação e resposta em  $D_1$  – Direção X.

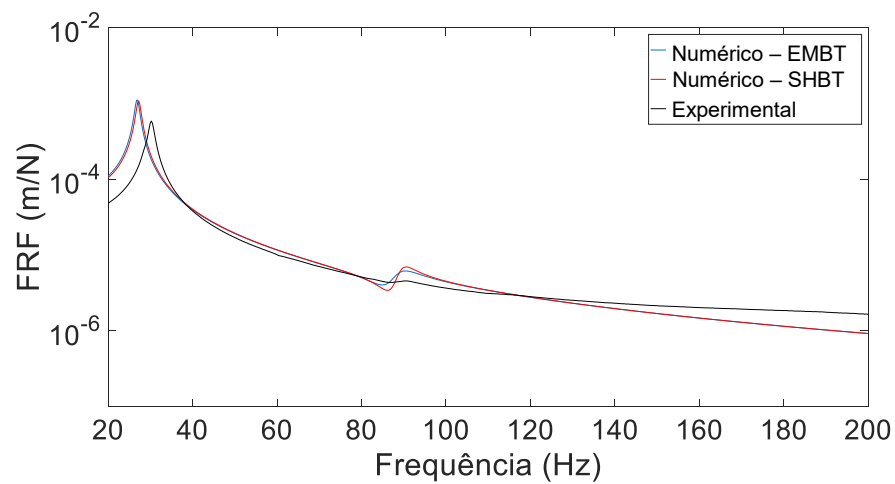


Figura 5.9 – FRFs numéricas e experimental com excitação e resposta em  $D_2$  – Direção X.

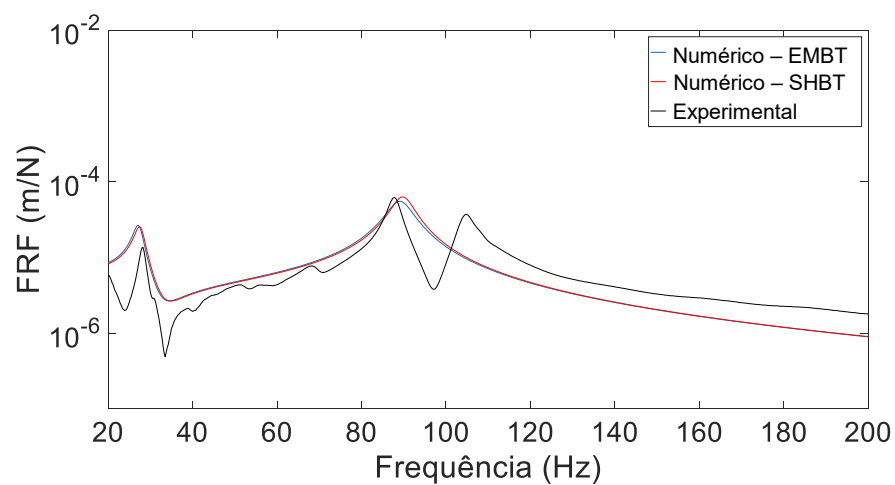


Figura 5.10 – FRFs numéricas e experimental com excitação e resposta em  $D_1$  – Direção Z.

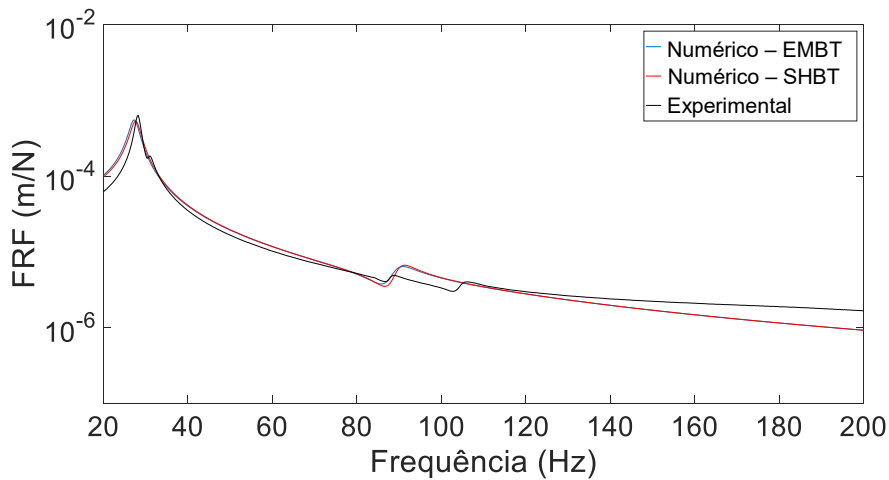


Figura 5.11 – FRFs numéricas e experimental com excitação e resposta em  $D_2$  – Direção Z.

A Tab. 5.5 mostra os valores das frequências naturais obtidos para cada um dos modelos adotados, os resultados experimentais e as diferenças percentuais associadas. Note que a diferença máxima chega a 10,83% (modelo EMBT).

Tabela 5.5 – Frequências naturais e diferença entre o modelo e os resultados experimentais

FRFs	1ª Frequência natural			2ª Frequência natural		
	Experimental (Hz)	EMBT (Hz)	SHBT (Hz)	Experimental (Hz)	EMBT (Hz)	SHBT (Hz)
Fig. 5.8	30,0	26,7 (10,83%)	27,2 (9,17%)	88,25	88,2 (0%)	89,2 (1,13%)
Fig. 5.9	28,2	27,0 (4,42%)	27,5 (2,65%)	87,75	89,0 (1,42%)	90,0 (2,56%)
Fig. 5.10	30,2	27,0 (10,74%)	27,2 (9,91%)	90,75	90,5 (0,27%)	90,5 (0,27%)
Fig. 5.11	28,2	27,2 (3,54%)	27,5 (2,65%)	88,75	91,0 (2,54%)	91,2 (2,82%)
Média da diferença	-	7,58%	5,91%	-	0,71%	1,84%

Os resultados obtidos com os ajustes demonstram limitações de representatividade dos modelos EMBT e SHBT, limitações evidenciadas pela distância entre as FRFs numéricas e experimentais. O mesmo pode ser observado nas respostas de vibração com a bancada de testes da Fig. 5.1 em operação. A Fig. 5.12 mostra as órbitas numéricas e experimentais medidas nas posições dos mancais da bancada de testes (720 rev/min). As respostas de vibração experimentais foram aproximadas pela relação entre as forças medidas pelos transdutores instalados nos mancais e os coeficientes de rigidez mostrados na Tab. 5.3.

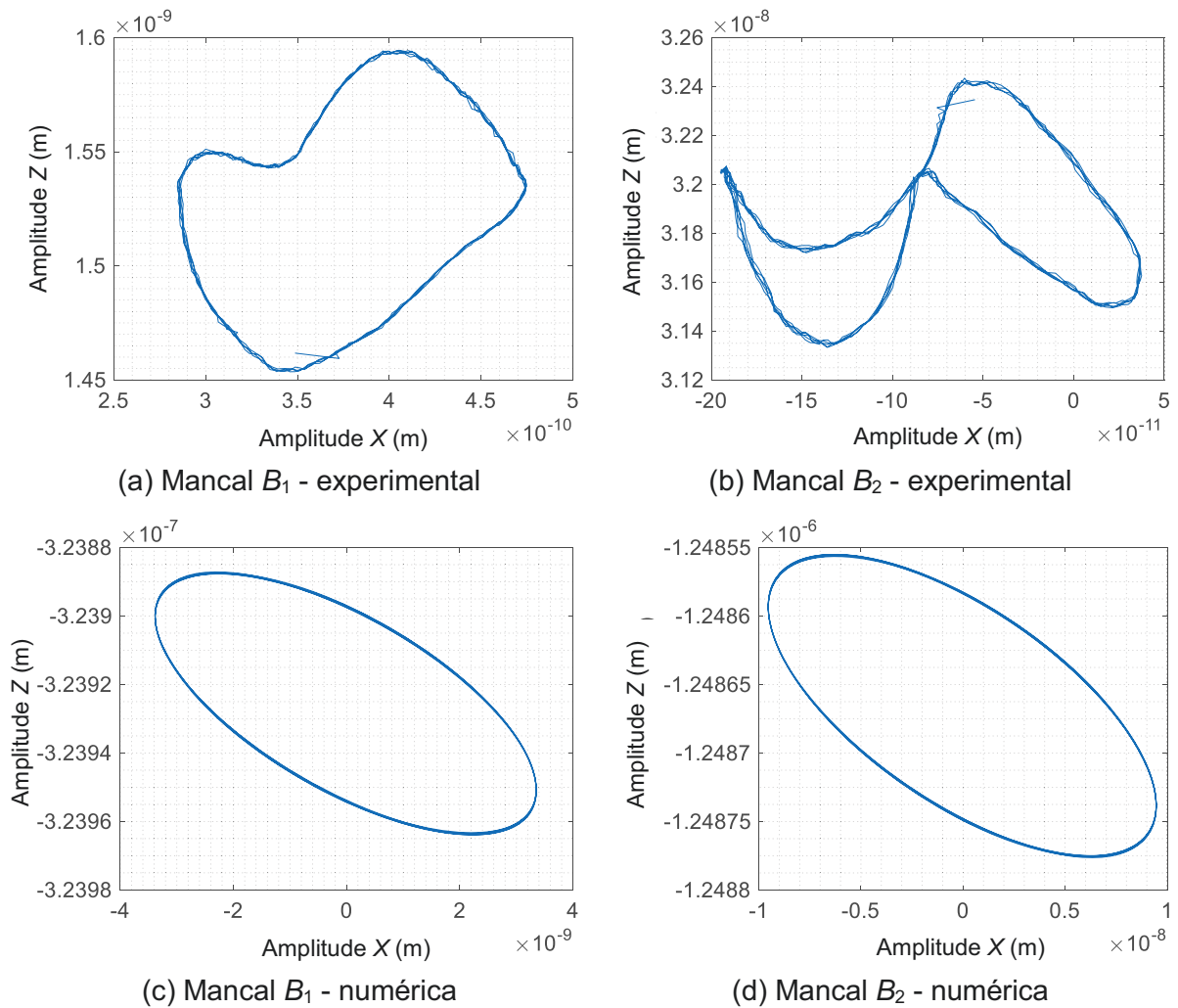


Figura 5.12 – Órbitas numéricas e experimentais medidas nas posições dos mancais da bancada de testes.

Neste contexto, mais investigações são necessárias para compreender os fenômenos associados ao eixo de material composto utilizado. A interação entre as partes da máquina rotativa, os efeitos da montagem do sistema e as consequências causadas por defeitos de fabricação do eixo de material composto são pontos que devem ser estudados. Por isso, uma segunda análise foi efetuada e seus resultados são mostrados no Capítulo VI.

Na próxima seção, são mostrados os resultados numéricos obtidos com os modelos EF ajustado da bancada de testes #1 (veja a Fig. 5.7). Desta forma, os diagramas de Campbell e as respostas ao desbalanceamento da máquina são mostrados considerando os ajustes realizados nos modelos EMBT e SHBT.

### 5.3 Simulações Numéricas

A Fig. 5.13 mostra os diagramas de Campbell determinados a partir dos modelos EMBT e SHBT ajustados. A primeira velocidade crítica de precessão direta obtida para o modelo EMBT foi 1390 rev/min, enquanto que para o SHBT foi 1320 rev/min. Note que os diagramas determinados são bastante similares. É importante ressaltar que, para o intervalo de análise, não foram encontradas as velocidades de instabilidade, Lalane e Ferraris (1998) definem instabilidade quando o movimento de vibração de vibração livre pode crescer indefinidamente sob certas condições iniciais. A velocidade de instabilidade é determinada analisando a parte real dos autovalores associados aos modos de vibrar do sistema.

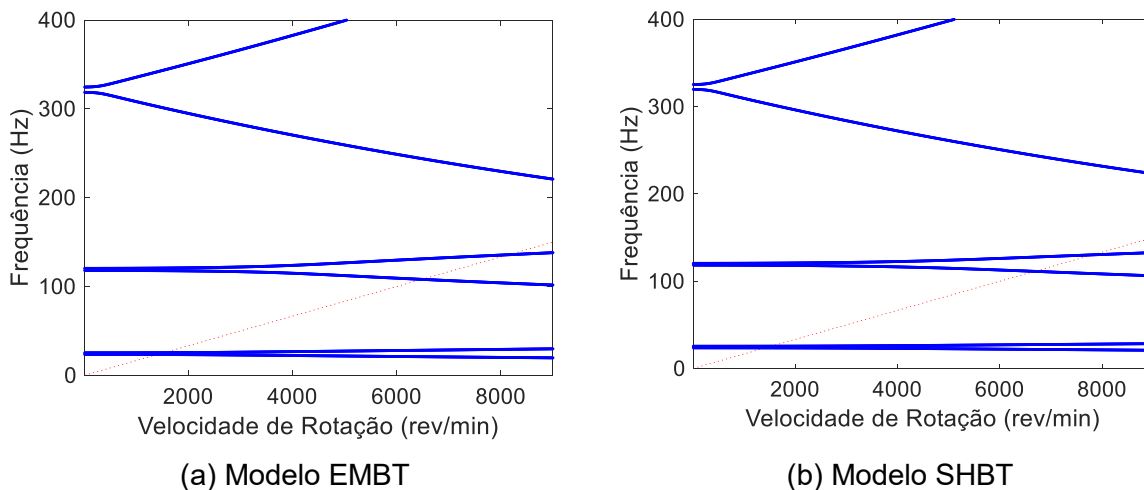
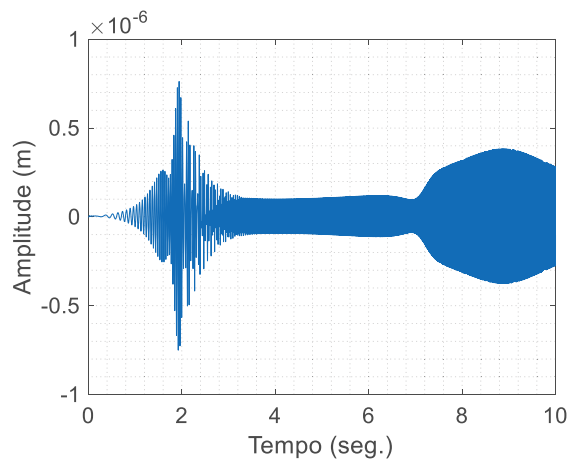


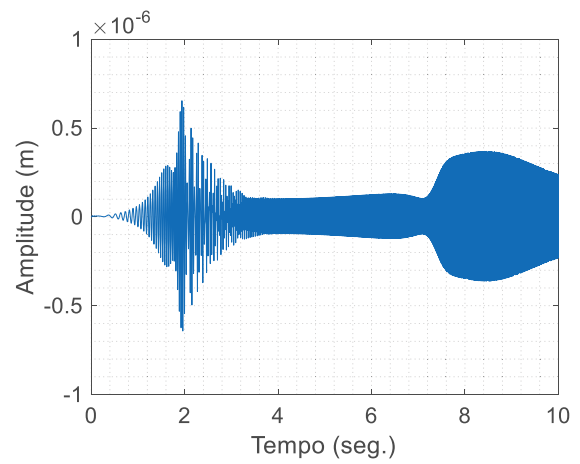
Figura 5.13 – Diagramas de Campbell do rotor.

As Figs. 5.14 e 5.15 mostram as respostas ao desbalanceamento determinadas pelos modelos EMBT e SHBT, respectivamente. Neste caso, o rotor é considerado operando em um *run-up* linear de 0 a 9000 rev/min em 10 segundos. São apresentadas as respostas de vibração obtidas no disco  $D_1$  do sistema ao longo das direções X e Z. As respostas de vibração correspondentes para o disco  $D_2$  são dadas pelas Figs. 5.16 e 5.17, respectivamente. Como esperado, não foram encontradas as velocidades de instabilidade neste intervalo.

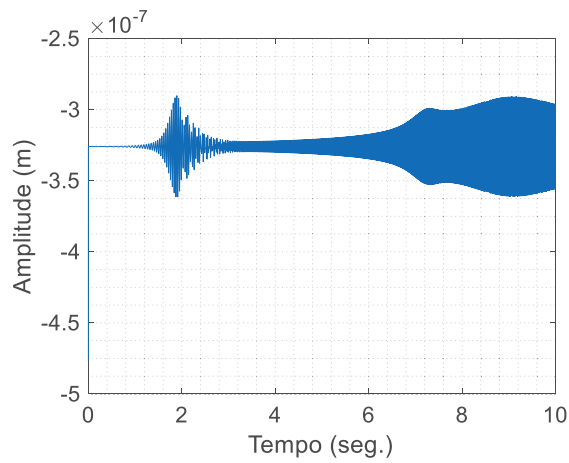




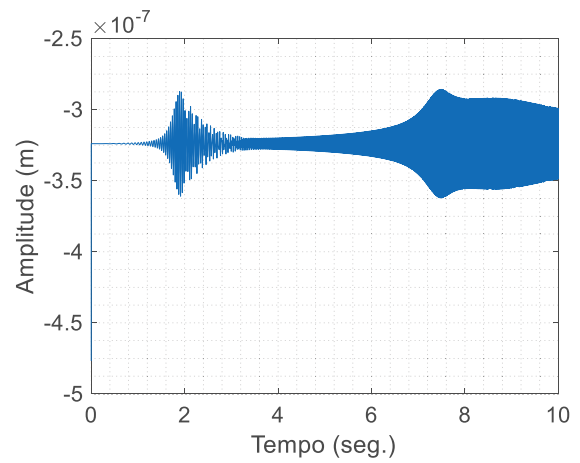
(a) Modelo EMBT



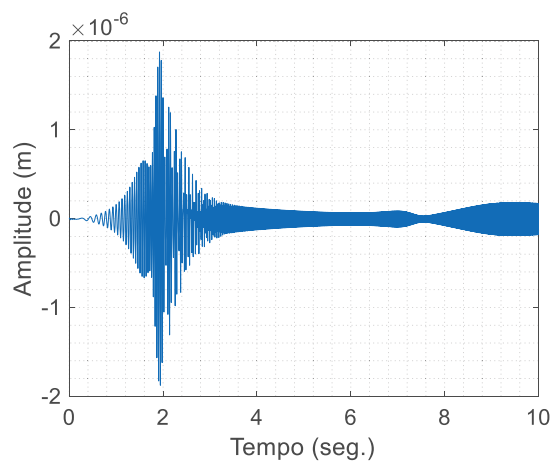
(b) Modelo SHBT

Figura 5.14 – Respostas de vibração determinadas no disco  $D_1$  – Direção X.

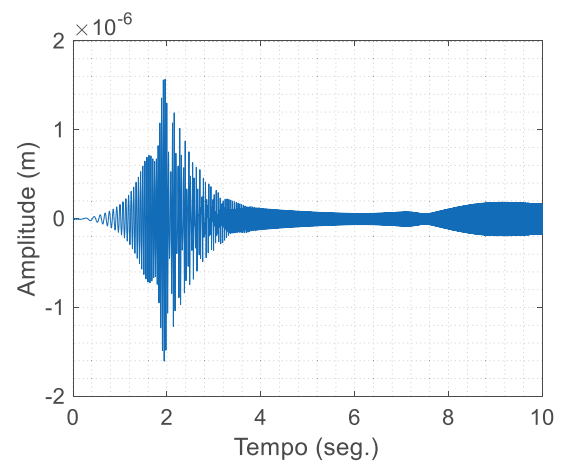
(a) Modelo EMBT



(b) Modelo SHBT

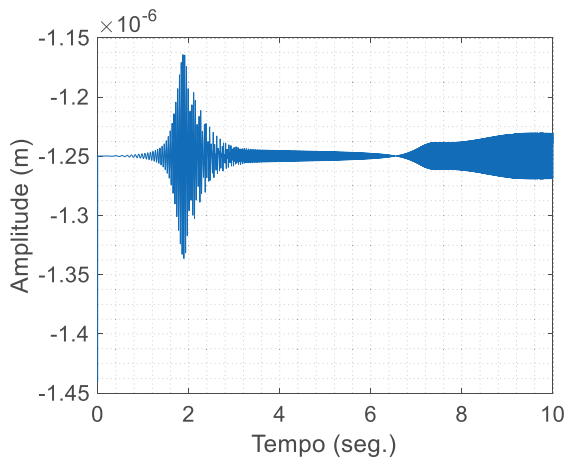
Figura 5.15 – Respostas de vibração determinadas no disco  $D_1$  – Direção Z.

(a) Modelo EMBT

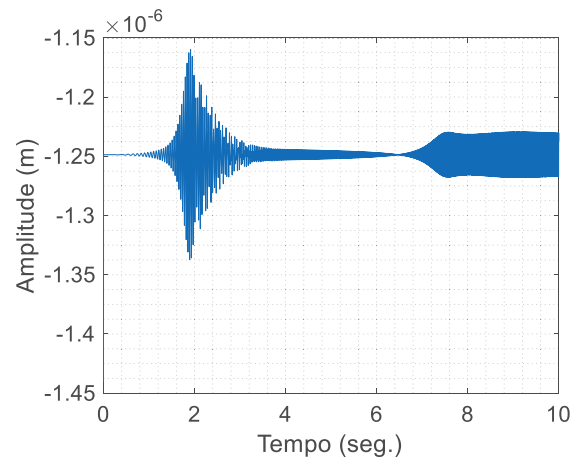


(b) Modelo SHBT

Figura 5.16 – Respostas de vibração determinadas no disco  $D_2$  – Direção X.



(a) Modelo EMBT



(b) Modelo SHBT

Figura 5.17 – Respostas de vibração determinadas no disco  $D_2$  – Direção Z.

## CAPÍTULO VI

### BANCADA DE TESTES #2

Devido às limitações verificadas nos modelos EMBT e SHBT ajustados, este capítulo apresenta uma análise mais abrangente do eixo de material composto e da contribuição de cada componente do sistema rotativo no comportamento dinâmico resultante. Assim sendo, FRFs são obtidas experimentalmente para o eixo na condição livre-livre. Os resultados são comparados com os modelos EMBT e SHBT ajustados para esta condição. A contribuição de cada componente do sistema rotativo é avaliada repetindo este procedimento.

#### 6.1 Eixo Livre

A Fig. 6.1 apresenta a bancada de testes #2 utilizada na avaliação da contribuição de cada componente no comportamento dinâmico do sistema. Neste caso, o eixo está suportado por fios de *nylon* (condição livre-livre para o movimento na direção  $X$ ). A Fig. 6.2 mostra as

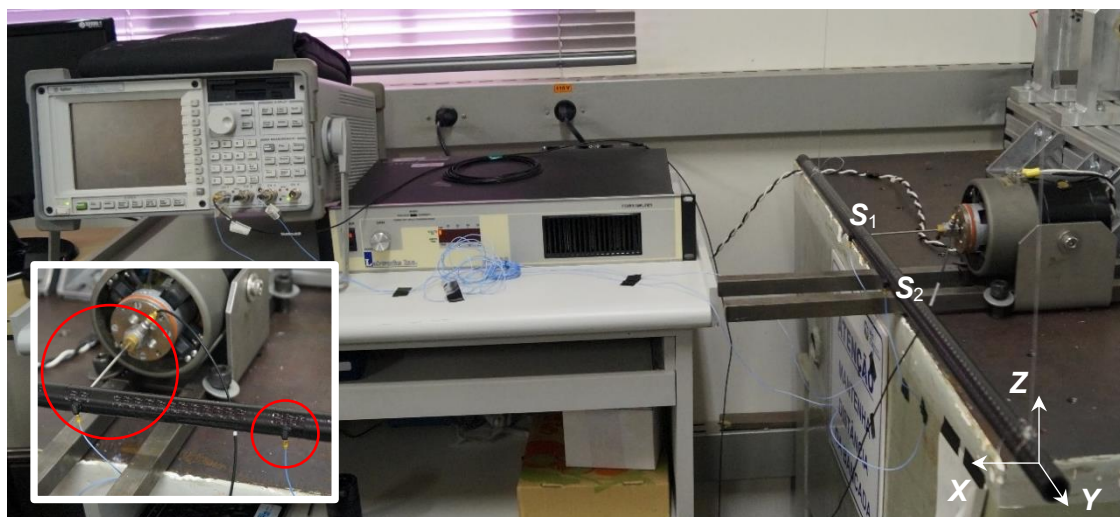


Figura 6.1 – Bancada de testes #2.

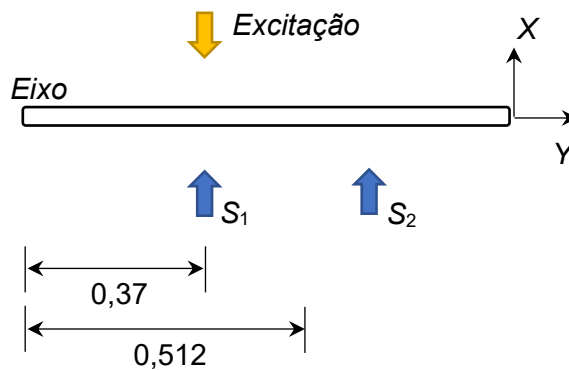


Figura 6.2 – Posições da excitação e sensores consideradas para determinar as FRFs do eixo (dimensões em metros).

posições do excitador eletrodinâmico e dos dois acelerômetros ( $S_1$  e  $S_2$ ; excitador e sensores dispostos na direção  $X$ ) utilizados para determinar as FRFs do sistema.

Foi utilizado um excitador eletrodinâmico Labworks® modelo ET-126, através do qual foi efetuada uma varredura de frequências com sinal de excitação senoidal. As respostas de vibração foram medidas utilizando acelerômetros PCB® modelo 352C22. Assim, duas FRFs foram obtidas através de um analisador dinâmico de sinais Agilent® modelo 35670A (10 Hz à 1 kHz com resolução de 0,618 Hz).

Inicialmente, FRFs foram obtidas considerando diferentes posições angulares do eixo ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ ), como mostra a Fig. 6.3. É importante ressaltar que o excitador e os acelerômetros foram mantidos na direção  $X$  em todos os testes. Note que as amplitudes dos dois primeiros picos mudaram com a posição angular do eixo, indicando uma possível assimetria no eixo. O mesmo efeito não é observado nas frequências naturais do sistema.

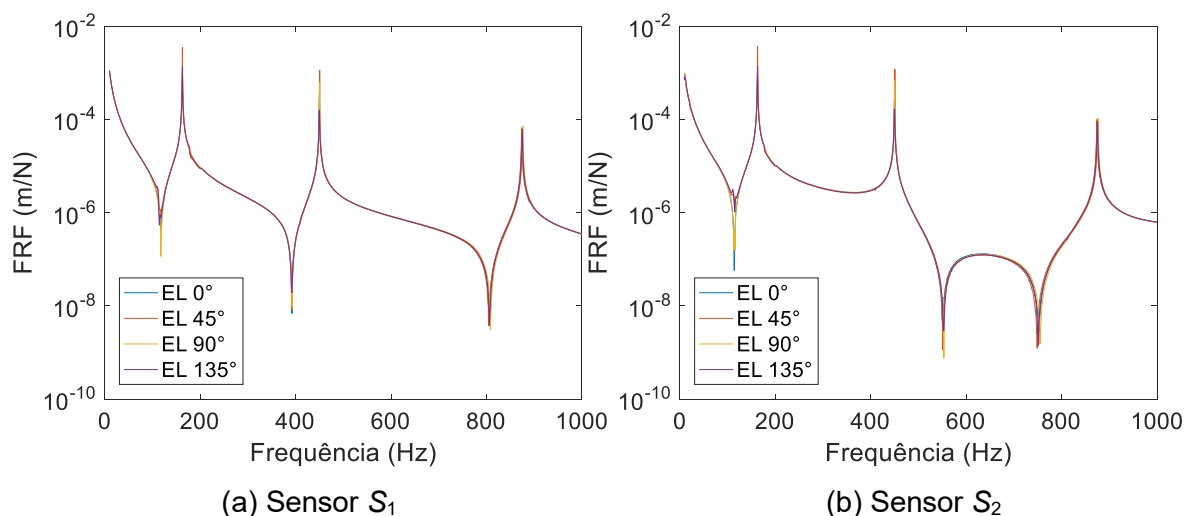


Figura 6.3 – FRFs experimentais do eixo livre-livre considerando diferentes posições angulares.

A comparação entre as FRFs experimentais e numéricas é apresentada na Fig. 6.4. Neste caso, as FRFs para o eixo na posição angular  $0^\circ$  são mostradas. Os modelos EMBT e SHBT foram ajustados seguindo o procedimento adotado no Capítulo V. Os resultados obtidos ao final dos procedimentos de ajuste são apresentados na Tab. 6.1, ressalta-se que foi efetuado um único procedimento de otimização considerando as FRFs para todas as configurações analisadas neste capítulo. É possível observar que os resultados numéricos e experimentais são próximos na faixa de frequências entre o primeiro e segundo modos de vibrar. Note que as amplitudes dos picos obtidas pelo modelo EMBT são próximas às experimentais. Veja que diferenças maiores em amplitude foram obtidas com o SHBT.

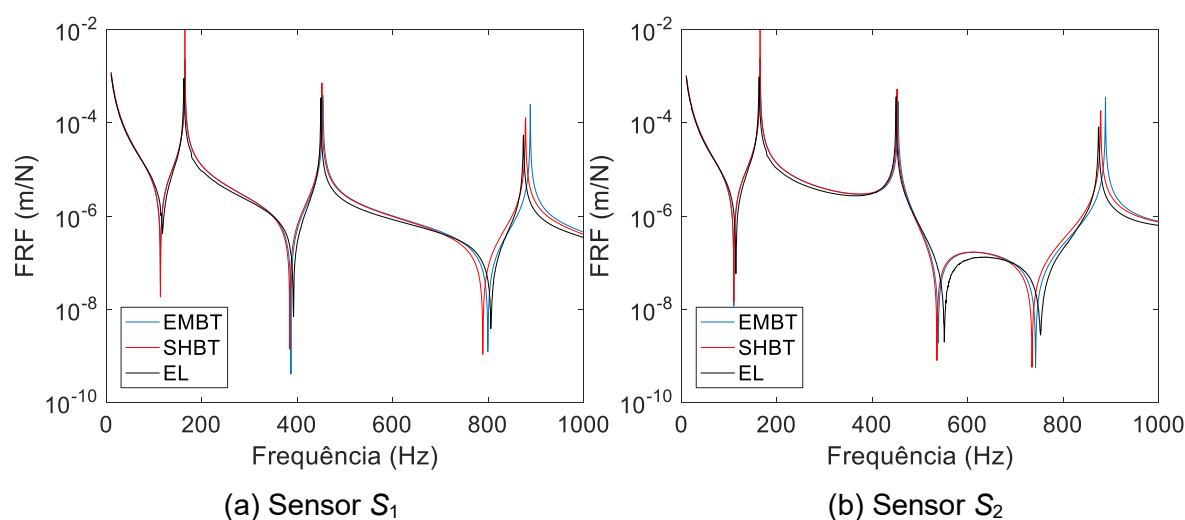


Figura 6.4 – FRFs numéricas e experimentais do eixo livre-livre.

Tabela 6.1 – Propriedades físicas otimizadas do eixo livre-livre.

<i>Propriedade</i>	<i>Limite inferior</i>	<i>Valor ótimo EMBT</i>	<i>Valor ótimo SHBT</i>	<i>Limite superior</i>
<i>Módulo de elasticidade <math>0^\circ</math> (GPa)</i>	70	93,98	109,32	140
<i>Módulo de elasticidade <math>90^\circ</math> (GPa)</i>	50	52,74	90,16	100
<i>Módulo de elasticidade <math>0^\circ/90^\circ</math> (GPa)</i>	70	106,81	104,97	140
<i>Módulo de cisalhamento (GPa)</i>	4	9,30	10,88	12
<i>Módulo de cisalhamento <math>0^\circ/90^\circ</math> (GPa)</i>	4	9,04	9,38	12
<i>Coefficiente de Poisson</i>	0,20	0,378	0,322	0,40
<i>Coefficiente de Poisson <math>0^\circ/90^\circ</math></i>	0,20	0,326	0,399	0,40
$\psi_{11}$	$1 \times 10^{-7}$	$6,95 \times 10^{-6}$	$1,55 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-3}$
$\psi_{22}$	$1 \times 10^{-7}$	$1,82 \times 10^{-5}$	$9,87 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$
$\psi_{12}$	$1 \times 10^{-7}$	$3,22 \times 10^{-4}$	$9,97 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$

## 6.2 Eixo com Disco Acoplado

A Fig. 6.5 apresenta a bancada de testes com um disco (veja a Fig. 5.3) acoplado na extremidade do eixo. A Fig. 6.6 mostra a posição do disco, bem como as posições do excitador eletrodinâmico e dos acelerômetros usados para determinar as FRFs da bancada nesta nova configuração.

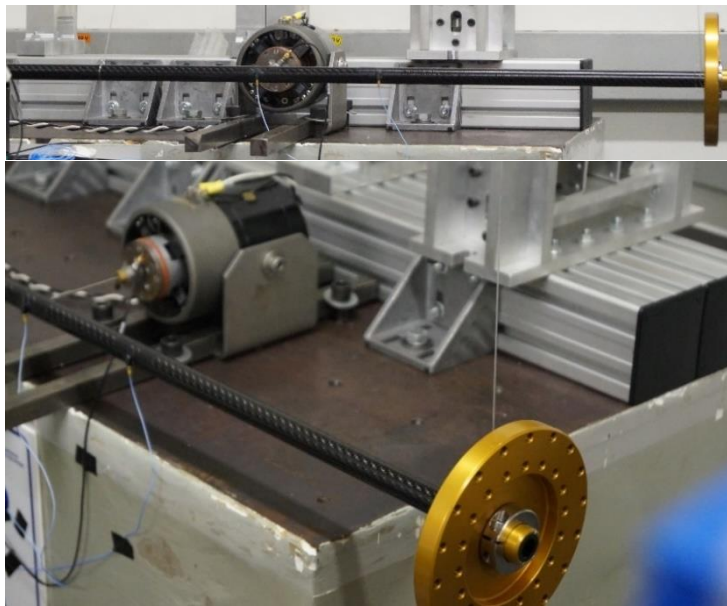


Figura 6.5 – Bancada de testes #2 com disco acoplado ao eixo.

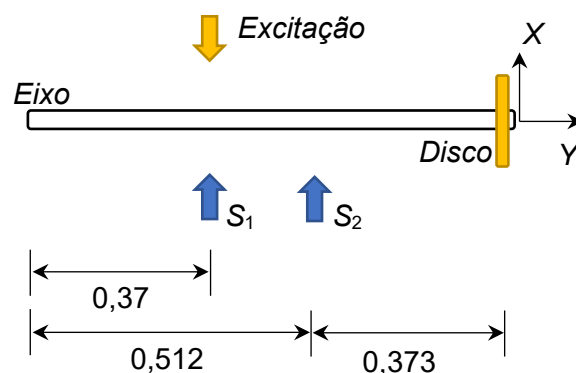


Figura 6.6 – Posições dos impactos e sensores consideradas para determinar as FRFs do eixo com disco acoplado (dimensões em metros).

Novamente, FRFs foram obtidas considerando diferentes posições angulares do eixo ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ ), como mostra a Fig. 6.7. Note que apenas a amplitude do pico associado a quarta frequência natural mudou com a posição angular do eixo. Este resultado indica que o efeito da assimetria destacado na Fig. 6.3 pode ser negligenciado. É possível observar ainda

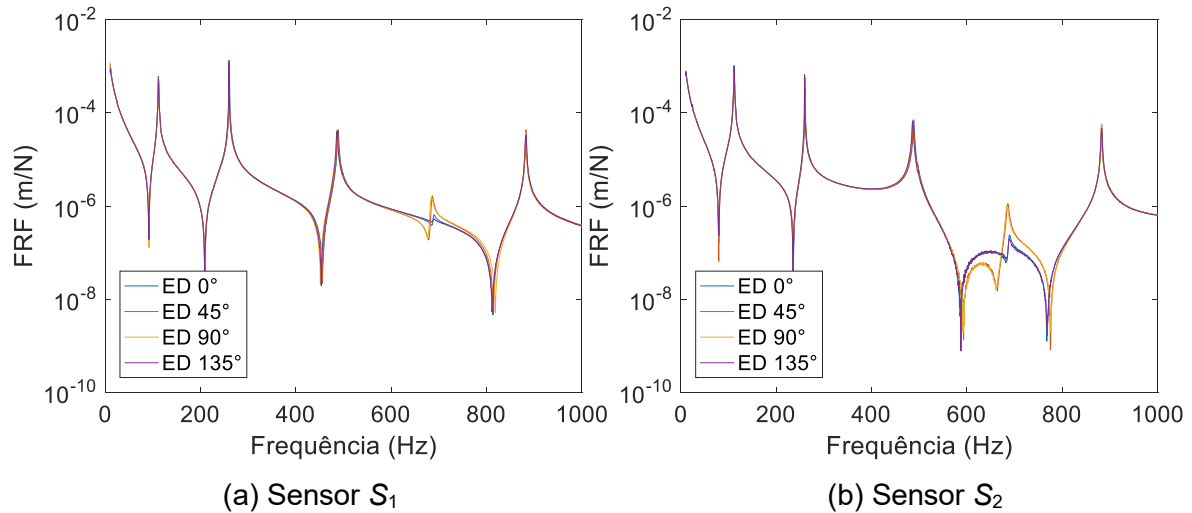


Figura 6.7 – FRFs experimentais do eixo com disco acoplado considerando diferentes posições angulares.

que mais frequências naturais surgiram na faixa analisada (compare as Figs. 6.7 e 6.3). Isto se deve ao acréscimo de massa associado ao acoplamento do disco no eixo.

A Fig. 6.8 apresenta a comparação entre as FRFs numéricas e experimentais. Note que, apesar da proximidade entre as FRFs numéricas, as FRFs numéricas e experimentais estão distantes. Neste caso, apenas o primeiro modo de vibrar foi ajustado satisfatoriamente. Acredita-se que o aperto realizado no eixo pela abraçadeira do disco alterou a distribuição de tensões na extremidade do eixo, o que não é contemplado pelos modelos adotados.

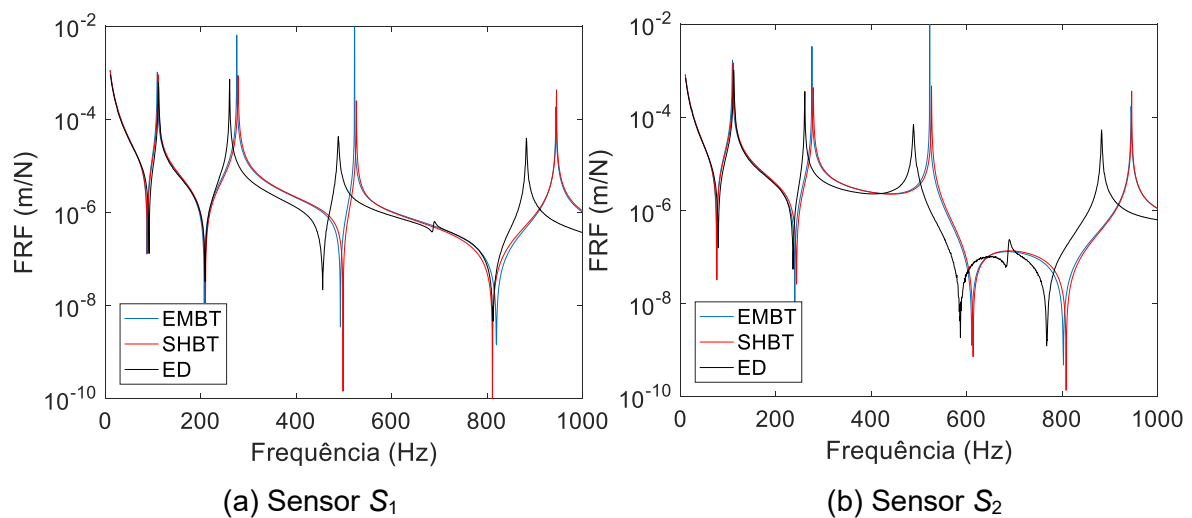


Figura 6.8 – FRFs numéricas e experimentais do eixo com disco acoplado.

### 6.3 Eixo com Disco e Rolamento Acoplados

A Fig. 6.9 apresenta a bancada de testes com um disco na extremidade do eixo e um rolamento (veja a Fig. 5.5) acoplados. A Fig. 6.10 mostra as posições do disco e rolamento inseridos no eixo, bem como as posições do excitador eletrodinâmico e dos acelerômetros utilizados para determinar as FRFs do sistema nesta nova configuração.

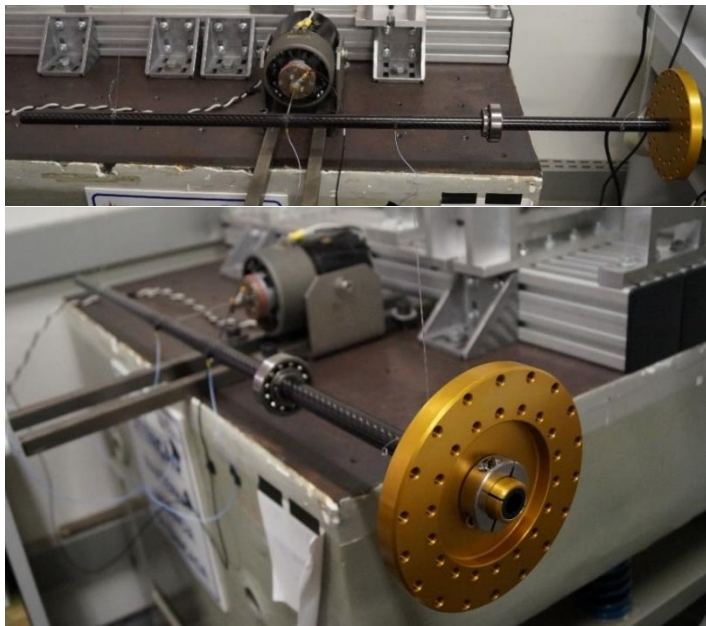


Figura 6.9 – Bancada de testes #2 com disco e rolamento acoplados ao eixo.

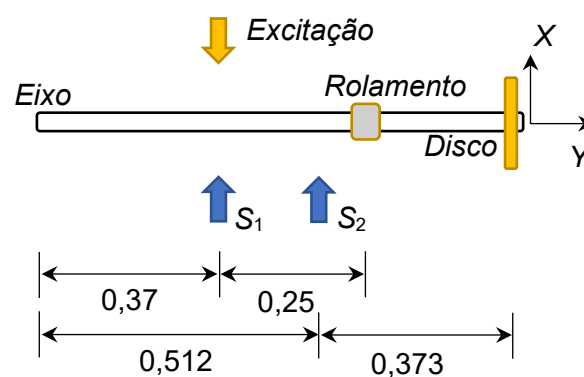


Figura 6.10 – Posições dos impactos e sensores consideradas para determinar as FRFs do eixo com disco e rolamento acoplados (dimensões em metros).

A Fig. 6.11 mostra as FRFs obtidas considerando diferentes posições angulares do eixo ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ ). Note que apenas a amplitude do pico da segunda frequência natural do sistema mudou com a posição angular do eixo. Assim sendo, este fato pode ser devido a



pequenas variações na posição do excitador ou acelerômetros com a mudança da posição angular do eixo. É possível observar a mudança das frequências naturais comparando estes resultados com os mostrados na Fig. 6.7. Claramente, isto se deve ao acréscimo de massa associado ao acoplamento do rolamento no eixo.

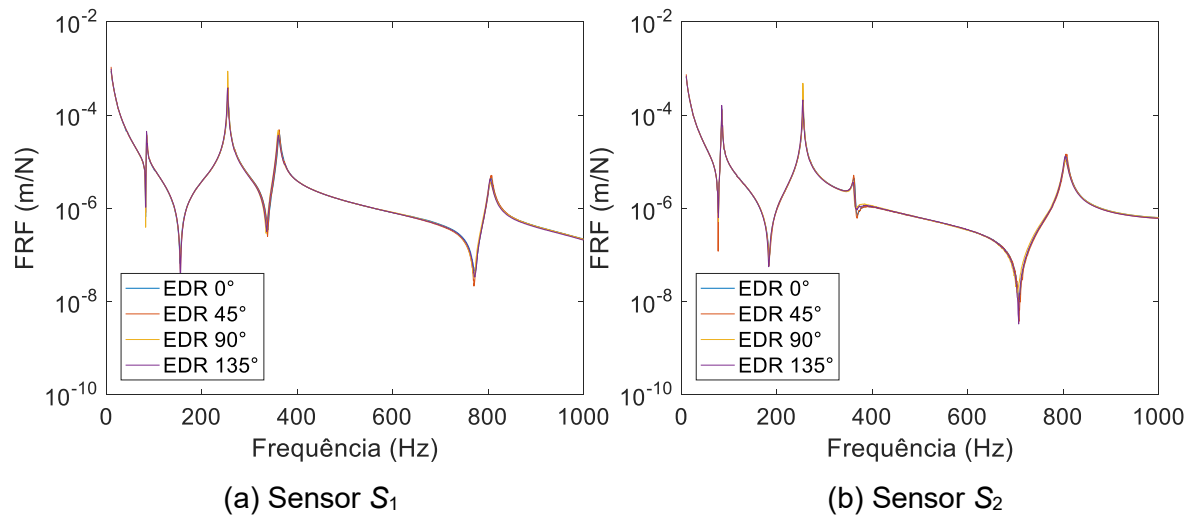


Figura 6.11 – FRFs experimentais do eixo com disco e rolamento acoplados considerando diferentes posições angulares.

A comparação entre as FRFs experimentais e numéricas é apresentada na Fig. 6.12. Da mesma forma que para o caso anterior, é possível observar que os modelos ajustados não foram capazes de representar o comportamento dinâmico da bancada.

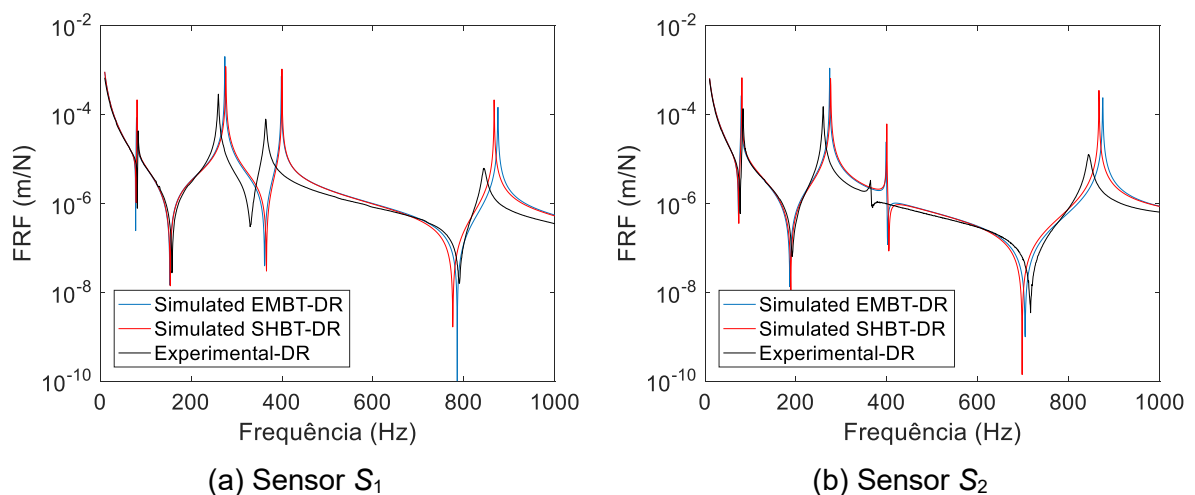


Figura 6.12 – FRFs numéricas e experimentais do eixo com disco e rolamento acoplados.

## 6.4 Eixo com Discos e Rolamentos Acoplados

A Fig. 6.13 apresenta a bancada de testes com dois discos e dois rolamentos acoplados no eixo. A Fig. 6.14 mostra as posições dos discos e rolamento inseridos no eixo, bem como as posições do excitador eletrodinâmico e dos dois acelerômetros utilizados para determinar as FRFs do sistema nesta nova configuração.

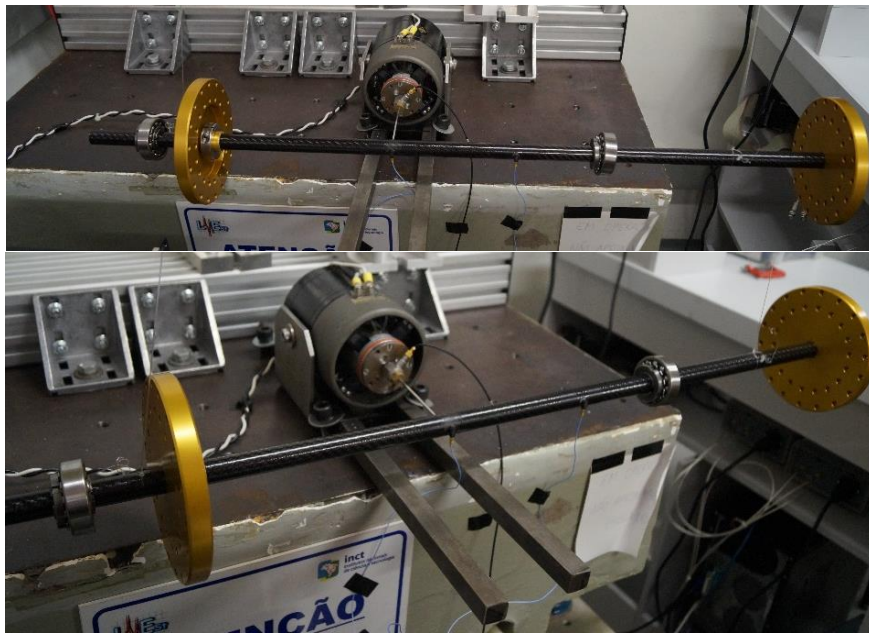


Figura 6.13 – Bancada de testes #2 com discos e rolamentos acoplados ao eixo.

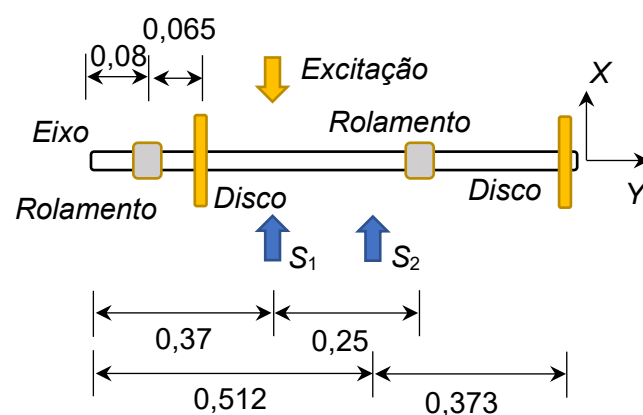


Figura 6.14 – Posições dos impactos e sensores consideradas para determinar as FRFs do eixo com discos e rolamentos acoplados (dimensões em metros).

A Fig. 6.15 mostra as FRFs obtidas considerando diferentes posições angulares do eixo ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ ). Neste caso, as amplitudes dos picos não mudaram com a posição

angular do eixo. Novamente é possível observar a mudança das frequências naturais obtidas comparando com os resultados anteriores.

A comparação entre as FRFs experimentais e numéricas é apresentada na Fig. 6.16. Neste caso, é possível observar que os modelos ajustados foram capazes de representar de maneira satisfatória as duas primeiras frequências naturais do conjunto. Contudo, diferenças nas amplitudes obtidas ainda podem ser observadas. Observou-se ainda, nos modelos numéricos, a aparição de frequências naturais inconsistentes com o resultado experimental.

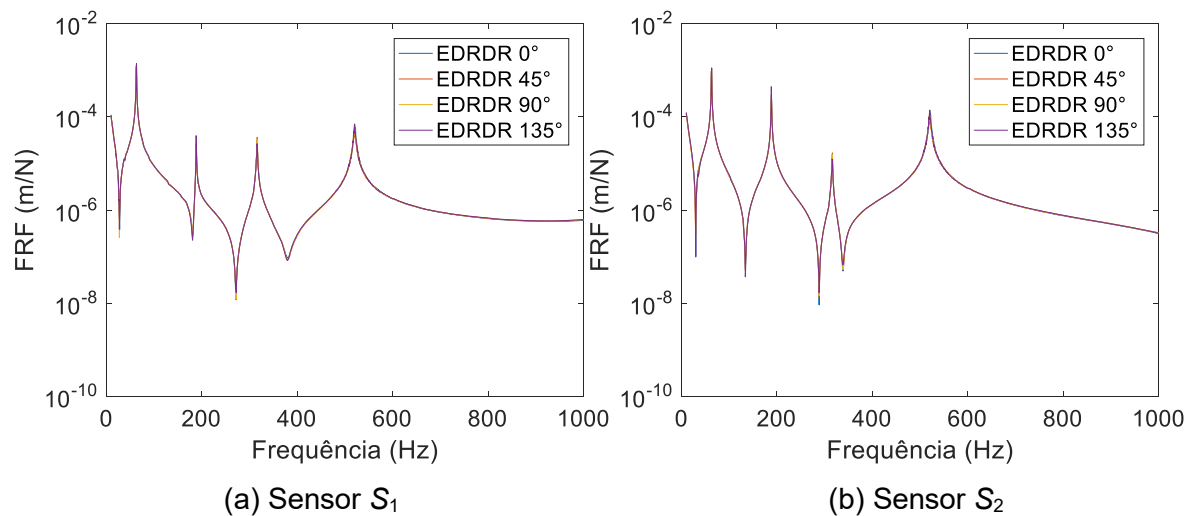


Figura 6.15 – FRFs experimentais do eixo com discos e rolamento acoplados considerando diferentes posições angulares.

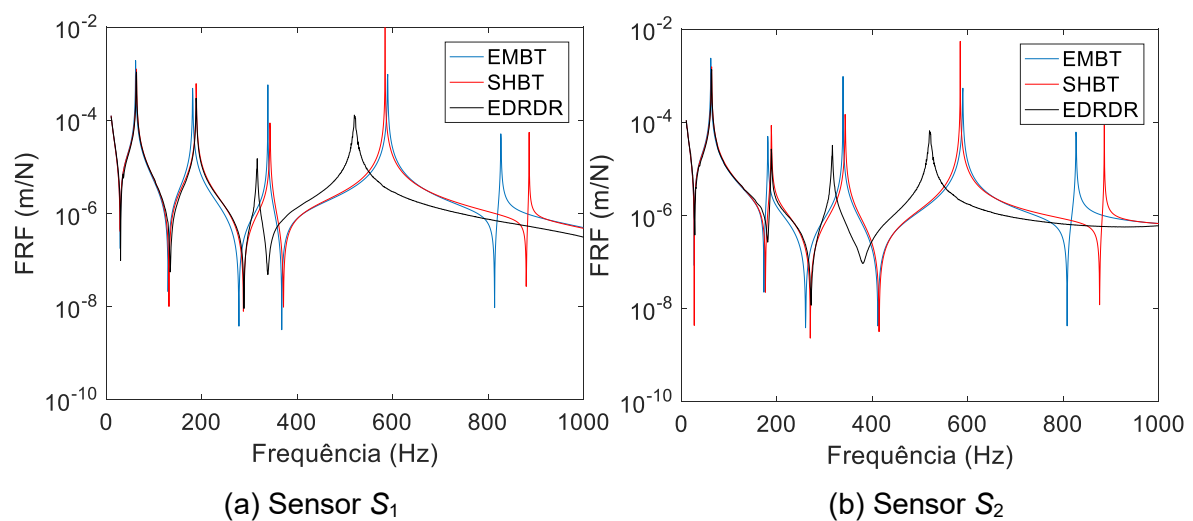


Figura 6.16 – FRFs numéricas e experimentais do eixo com discos e rolamentos acoplados.

Analisando os resultados obtidos, é possível observar que os modelos EMBT e SHBT se mostraram representativos apenas para o eixo sem discos e rolamentos acoplados (veja a Fig. 6.1). Para as outras configurações de bancada analisadas, apenas a primeira frequência natural se mostrou representativa. Gupta (2014), Sino (2007) e Gupta (1994) explicam que essa é uma limitação proveniente dos modelos de viga adotados neste trabalho. Segundo os autores, considerando o sistema rotativo completo, estes modelos são representativos para regimes de operação abaixo da primeira velocidade crítica, que está associada a primeira frequência natural do sistema.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÃO

Nesta dissertação foram abordadas as vantagens e limitações do uso de materiais compostos em máquinas rotativas visto o crescente interesse da indústria na aplicação destes materiais em componentes que exigem uma capacidade de desempenho elevada, além de redução de peso ou aumento de resistência mecânica. Faz-se necessários estudos detalhados através da caracterização e simulação do seu comportamento dinâmico por meio de modelos representativos para determinar com segurança as melhores configurações em determinadas aplicações.

A utilização de materiais compostos pode ser uma solução viável em eixos de máquinas rotativas, uma vez que a rigidez e a capacidade de amortecimento podem ser alteradas pela manipulação de suas propriedades, modificando, por exemplo, a quantidade de camadas ou a orientação das fibras. Essa manipulação permite a alteração das velocidades críticas em função da velocidade de operação.

Uma visão geral do contexto histórico e os avanços das principais pesquisas nesta área foram apresentadas. Foi mostrada também a formulação das equações que regem o comportamento de máquinas rotativas. A modelagem referente ao material composto se deu através da inclusão do amortecimento interno devido à natureza visco elástica da matriz polimérica, que neste material não pode ser omitida. Assim, na formulação matemática do elemento de eixo foi assumido o comportamento reológico de Kelvin-Voigt. No entanto, a simples inclusão da matriz de propriedades elásticas na formulação das energias e do trabalho virtual não é possível, já que o eixo é considerado transversalmente isotrópico e possui várias camadas. Para isso, foram utilizados dois modelos que se baseiam na teoria da homogeneização de vigas (modelos EMBT e SHBT), através dos quais são determinadas as propriedades mecânicas equivalentes para o eixo.

Inicialmente, a bancada de testes contou com dois discos de alumínio acoplados a um eixo de material composto com 20 camadas, sendo suportados por dois mancais transdutores

de força. Para esta bancada, FRFs numéricas (resultantes dos modelos EMBT e SHBT) e experimentais foram comparadas. A fim de obter os parâmetros desconhecidos dos mancais e do eixo, um método de otimização denominado Evolução Diferencial foi utilizado. Nesta análise, os modelos ajustados não representaram adequadamente o comportamento dinâmico do sistema. É possível que, durante o acoplamento dos demais elementos da máquina rotativa ao eixo tenha ocorrido delaminação, o que não é considerado pelos modelos de homogeneização, uma vez que estes assumem uma perfeita adesão entre as camadas. Além disso, possíveis não linearidades ocasionadas pelo transdutor de força do mancal e imperfeições geométricas de fabricação podem ter influenciado nos resultados.

Uma simulação numérica para esta configuração de bancada foi realizada e as respostas ao desbalanceamento obtidas pelos modelos EMBT e SHBT foram comparadas com as respostas experimentais do rotor operando em 720 rev/min. Os diagramas de Campbell simulados foram também apresentados. Foi mostrado que os modelos não conseguiram representar adequadamente o comportamento do rotor em operação. Uma nova verificação foi proposta a fim de investigar com detalhes cada etapa da montagem do rotor para diferentes posições angulares do eixo na condição livre-livre. As FRFs experimentais do eixo considerando cada elemento (discos e rolamentos) foram comparadas às FRFs numéricas. Nesta análise foi observado que os modelos são representativos apenas até a primeira frequência natural do sistema.

É interessante ressaltar que os modelos EMBT e SHBT utilizados nesta dissertação possuem limitações quando o rotor opera em regimes supercríticos. Uma forma de contornar este problema é utilizar modelos baseados na teoria de cascas (GUPTA, 2014). No entanto, estes modelos exigem um maior número de GDLs, o que ocasiona em um problema complexo de difícil implementação e alto custo computacional.

Segundo Gupta (2015), a maioria dos estudos disponíveis na literatura são essencialmente numéricos e há poucos resultados experimentais que confirmam e validam os efeitos associados à utilização de materiais compostos em máquinas rotativas. Desta forma, como contribuição, este trabalho apresentou abordagens numéricas e experimentais sobre o comportamento dinâmico de eixos de material composto em máquinas rotativas e evidenciou as limitações relacionadas às simplificações adotadas. Com isso, propõe-se para trabalho futuros a implementação de efeitos não lineares para a caracterização do amortecimento interno, além de avaliações numéricas mais aprofundadas em comparação com resultados experimentais com a máquina em diferentes condições de operação.

Durante este trabalho foram realizadas as seguintes publicações:

BARBOSA, P. C. P. F.; GUIMARÃES, T. A. M.; CAVALINI Jr, A. A; STEFFEN Jr, V. Análise Teórica do Comportamento Dinâmico de Eixos De Material Composto. In: Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica Faculdade de Engenharia Mecânica, 2016, Uberlândia. **Anais**.

BARBOSA, P. C. P. F.; GUIMARÃES, T. A. M.; CAVALINI Jr, A. A; STEFFEN Jr, V. Análise Comparativa entres os Modelos para Eixos em Material Composto. In: Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica Faculdade de Engenharia Mecânica, 27º, 2017, Uberlândia. **Anais**.

BARBOSA, P. C. P. F.; DEL CLARO, V. T. S.; CAVALINI Jr, A. A; STEFFEN Jr, V. A Comparison Between Composite Rotordynamics Modeling Theories. In: ABCM International Congress of Mechanical Engineering, 24th, 2017, Curitiba. **Anais**.

*Página intencionalmente deixada em branco.*



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, M. T. S. Controle de Vibrações em Máquinas Rotativas Usando Ligas com Memória de Forma. 2015. 150f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

BAUCHAU, O. A. Optimal Design of High Speed Rotating Graphite/Epoxy Shafts. **Journal of Composite Materials**, v. 17, p. 170-181, Mar. 1983.  
<https://doi.org/10.1177/002199838301700205>

BISHOP, R. E. D.; GLADWELL, G. M. L. The Vibration and Balancing of an Unbalanced Flexible Rotor. **Journal of Mechanical Engineering Science**. V.1, p. 66-77, jun. 1959.  
[https://doi.org/10.1243/JMES\\_JOUR\\_1959\\_001\\_010\\_02](https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1959_001_010_02)

BRUSH, M. Still Spinning After All These Years: A Profile of The Ultracentrifuge. **The Scientist**, v. 13, p. 16-18, Out. 1999.

CAMPBELL, W. **The Protecypion of Steam-Turbine Disk Wheels from Axial Vibrations**. General Electric Company. 1924, 67p.

CAVALINI JR, A. A. **Detecção e Identificação de Trincas Transversais Incipientes em Eixos Horizontais Flexíveis de Máquinas Rotativas**. 2013. 235f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

CAVALINI Jr, A. A.; GUIMARÃES, T. A.; DA SILVA, B. R. M. G.; STEFFEN Jr, V. Analysis of the Dynamic Behavior of a Rotating Composite Hollow Shaft. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 14, p. 1-16, 2017. <https://doi.org/10.1590/1679-78253168>

CAVALINI Jr, A. A; GUIMARÃES, T. A. M; STEFFEN Jr, V. Optimal Design of a Rotating Machine Containing A Composite Material Shaft. In: Brazilian Conference on Composite Materials, 2016, Gramado Rio de Janeiro. **Anais**.

CHANDRA, R.; SINGH, S. P.; GUPTA, K1. Damping Studies in Fiber-Reinforced Composites–A Review. **Composite Structures**, v. 46, p. 41-51, Set. 1999.

DA SILVA, B. R. M. G.; GUIMARÃES, T. A. M.; CAVALINI Jr, A. A; STEFFEN Jr, V. Experimental Investigation of a Rotating Composite Hollow Shaft. In: Meeting on Aeronautical Composite Materials and Structures, 2015, São Carlos. **Anais**.

DA SILVA, B. R. M. G.; GUIMARÃES, T. A. M.; CAVALINI Jr, A. A; STEFFEN Jr, V. Dynamic Behavior of a Rotating Composite Hollow Shaft. In: Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2015, Rio de Janeiro. **Anais**.

DANIEL, I. M.; ISHAI, O.; Daniel; I. M.; Daniel, I. **Engineering Mechanics of Composite Materials**. New York: Oxford University Press, 1994. 385p.

DE LAVAL, C. G. **Steam Turbine**. U. S. Patent No 522,066. 26 Jun. 1894.

DOS REIS, H. L. M.; GOLDMAN, R. B.; VERSTRATE, P. H. Thin-Walled Laminated Composite Cylindrical Tubes: Part III—Bending Analysis. **Journal of Composites, Technology and Research**, v. 9, p. 58-62, Jun. 1987.

DUNKERLEY, S. On the Whirling and Vibration of Shaft. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. v. 195, n. 1, p. 279-359, 1884.

ESHLEMAN, R.; EUBANKS, R. A. On the Critical of a Continuous Rotor. **Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry**. V.91, p.1180-1188, nov. 1969. <https://doi.org/10.1115/1.3591768>

FEDERN, K. Grundlagen Einer Systematischen Schwingungsentstörung Wellenelastischer Rotoren. **VDI Ber**. V.24, p.9-25, 1957.

FOOTE, W. R.; PORITSKY, H.; SLADE, J. J. Critical Speeds of a Rotor with Unequal Shaft Flexibilities Mounted in Bearings of Unequal flexibility. I. Vibration During Acceleration Through a Critical Speed. V.10, p.77-84, 1943.

GHONEIM, H.; LAWRIE, D. J. Dynamic Analysis of a Hyperbolic Composite Coupling. **Journal of sound and vibration**, v. 301, p. 43-58, Mar. 2007. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.09.013>

GOODMAN, T. P. A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections. **Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry**. V.83, p. 273-279, 1964.  
<https://doi.org/10.1115/1.3670532>

GUPTA, K. Composite Shaft Rotor Dynamics: An Overview. In: Proceedings of VETOMAC, X, 2015, Manchester. **Vibration Engineering and Technology of Machinery**. p. 79-94.

HETHERINGTON, P. L.; KRAUS, R. F.; DARLOW, M. S. Demonstration of a Supercritical Composite Helicopter Power Transmission Shaft. **Journal of the American Helicopter Society**, v. 35, p. 23-28, 1990.

ISHIDA, Y.; YAMAMOTO, T. **Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications**. 2.ed. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2012. 474p.

JACQUET-RICHARDET, G.; CHATELET, E; NOURI-BARANGER, T. Rotating Internal Damping in The Case of Composite Shafts. In: IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics, 2011, Dordrecht. **Springer**. p. 125-134.  
[https://doi.org/10.1007/978-94-007-0020-8\\_11](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0020-8_11)

JEFFCOTT, H. H. The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighbourhood of a Whirliny Speed. **Philosophical Magazine and Journal of Science**. V.37, p. 304-314, 1919.  
<https://doi.org/10.1080/14786440308635889>

JONES, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. Philadelphia: CRC press, 1998. 507p.

KIM, C.; BERT, C. W. Critical Speed Analysis of Laminated Composite, Hollow Drive Shafts. **Composites Engineering**, v. 3, n. 7-8, p. 633-643, 1993.  
[https://doi.org/10.1016/0961-9526\(93\)90087-Z](https://doi.org/10.1016/0961-9526(93)90087-Z)

KLIGER, H. S.; YATES, D. N.; DAVIS, G. CR. Economic and Manufacturing Considerations for Composite Driveshafts. **SAE Technical Paper**, 1980.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. Rotordynamics Prediction in Engineering. New York: J. Wiley and Sons, 1998 266p.

LEES, A. W.; FRISWELL, M. I. The Evaluation of Rotor Imbalance in Flexibly Mounted Machines. **Journal of Sound and Vibration**. V.208, p. 671-683, dec. 1997. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1260>

Lewis, F. M. Vibration During Acceleration Through a Critical Speed. **Vibration During Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics**, p. 253–261, 1932

LIM, J. W.; DARLOW, M. S. Optimal Sizing of Composite Power Transmission Shafting. **Journal of the American Helicopter Society**, v. 31, n. 1, p. 75-83, Jan 1986.

MENDONÇA, W. R. D. P.; DE MEDEIROS, E. C.; PEREIRA, A. L. R.; MATHIAS, M. H. The Dynamic Analysis of Rotors Mounted on Composite Shafts with Internal Damping. **Composite Structures**, v. 167, p. 50-62, Mai. 2017. <https://doi.org/10.4050/JAHS.31.75>

MYKLESTAD, N. O. A New Method for Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibrations of Airplane Wings and Other Types of Beams. **Journal of the Aeronautical Sciences**. V.2, p.153-162, 1944. <https://doi.org/10.2514/8.11116>

NEWKIRK, B. L. Shaft Rubbing. **Naval Engineers Journal**. V.39, p.114-120, 1927. <https://doi.org/10.1111/j.1559-3584.1927.tb04982.x>

NEWKIRK, B. L.; TAYLOR, H. D. Shaft Whirling Due Oil Action in Journal Bearing. **General Electric Company**. V.28, p. 559-568, ago. 1925.

NONAMI, K. Vibration Control of a Rotor by Active Bearings. **Trans. ASME**. V.31, p.2463-2472, 1985.

PROHL, M. A. A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors. **Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics**. V.12, p.142-148, 1945.

RANKINE, W. J. M. On the thermal energy of molecular vortices. **Philosophical Magazine and Journal of Science**. V.4, p. 211-221, 1869. <https://doi.org/10.1017/S0370164600046551>

RUHL, R. L.; BOOKER, J. F. A Finite element model for Distributed Parameter Turbo Rotor System. **Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry**. V.94, p. 126-132, 1972. <https://doi.org/10.1115/1.3428101>

SCHWEITZER, G. Stabilization of Self-Excited Rotor Vibrations by Active Dampers. **Dynamics of Rotors, Springer-Verlag**, p. 472-493, 1975.

SILVEIRA, M. E., **Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores em Eixos Bobinados**, 2001. 97 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

SINGH, S. P.; GUPTA, K. Free Damped Flexural Vibration Analysis of Composite Cylindrical Tubes Using Beam and Shell Theories. **Journal of Sound and Vibration**. v. 172, p. 171-190, 1994. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1168>

SINO, R. **Comportement Dynamique et Stabilité des Rotors**: Application aux Rotors Composites, 2007. 157 f. Tese de Doutorado, INSA de Lyon, Lyon.

SINO, R.; BARANGER, T. N.; CHATELET, E.; JACQUET, G. Dynamic Analysis of a Rotating Composite Shaft. **Composites Science and Technology**, v. 68, p. 337-345, Fev. 2008. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.06.019>

SMITH, D. M. The Motion of a Rotor Carried by a Flexible Shaft in flexible Bearings. **Proceedings of the Royal Society of London**. V.142, p.92-118, out. 1933. <https://doi.org/10.1098/rspa.1933.0158>

STEFFEN JR, V. Estudo Analítico e Experimental de Dinâmica de Rotores. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, v. 3, p. 3-8. 1981.

STODOLA, A. Dampf und Gas-Turbine. **Verlag von Julius Springer**, Berlin, 1924. (English Translation, Steam and Gas Turbines, McGraw-Hill, New York, 1927).

STORN, R.; PRICE, K. Differential Evolution: A Simple and Efficient Heuristic For Global Optimization Over Continuous Spaces. **Journal of Global Optimization**, V. 11, p. 341-359, 1997. <https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>

SWANSON, E.; POWELL, C. D.; WEISSMAN, S. A Practical Review of Rotating Machinery Critical Speeds and Modes. **Sound and vibration**. V.39, p. 16-17, mai. 2005.

TAYLOR, H. D. Critical Speed Behavior of Unsymmetrical Shafts. **Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics**. V.7, p.71-79, 1940.

THEARLE, E. L. Dynamic Balancing in the field. Trans. ASME, **Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics**. V.56, p. 745-753, 1934.

Tsai S. W. **Composites Design**. Dayton: Think composites. 1988, 700p.

WASILKOSKI, C. M. **Comportamento Mecânico dos Materiais Poliméricos**. 82 f. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

WETTERGREEN, H. L. Delamination in Composite Rotors. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 28, p. 523-527, 1997.  
[https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(96\)00152-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(96)00152-2)

WETTERGREEN, H.L.; OLSSON, K.O. Dynamic Instability of a Rotating Asymmetric Shaft with Internal Viscous Damping Supported in Anisotropic Bearings. **Journal of Sound and Vibration**, v. 195, p. 75-84, Ago. 1996.

WORGAN, G. P.; SMITH, D. R. **Carbon fiber drive shaft**. U.S. Patent n. 4,089,190. 16 Mai. 1978.

YAMAMOTO, T. On the Critical Speed of a Shaft of Sub-Harmonic Oscillation. **Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers**. V.21, p. 853-858, jan. 1955.  
<https://doi.org/10.1299/kikai1938.21.853>

YATES, D. N.; REZIN, D. B. **Carbon fiber reinforced composite drive shaft**. U.S. Patent n. 4,171,626. 23 out. 1979.

ZINBERG, H.; SYMONDS, M. F. The Development of An Advanced Composite Tail Rotor Driveshaft. In: 26th Annual National Forum of the American Helicopter Society, Jun 1970, Washington, **Anais**.