

**IZABELA BATISTA DA SILVA**

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE TRINCAS  
TRANSVERSAIS NO COMPORTAMENTO ESTÁTICO  
E DINÂMICO DE EIXOS FLEXÍVEIS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2018**

*Página intencionalmente deixada em branco.*

**IZABELA BATISTA DA SILVA**

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE TRINCAS TRANSVERSAIS NO  
COMPORTAMENTO ESTÁTICO E DINÂMICO DE EIXOS FLEXÍVEIS**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavalini Jr.

Co-orientador: Prof. Dr. Valder Steffen Jr.

**UBERLÂNDIA - MG**

**2018**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

S586  
2018  
Silva, Izabela Batista da, 1990-  
Análise da influência de trincas transversais no comportamento  
estático e dinâmico de eixos flexíveis / Izabela Batista da Silva. - 2018.  
53 f. : il.

Orientador: Aldemir Aparecido Cavalini Junior.

Coorientador: Valder Steffen Junior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1112>

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Máquinas - Manutenção e  
reparos - Teses. 3. Máquinas - Monitoramento - Teses. 4. Método dos  
elementos finitos - Teses. I. Cavalini Junior, Aldemir Aparecido, 1983-  
II. Steffen Junior, Valder. III. Universidade Federal de Uberlândia.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

---

CDU: 621



**ALUNO:** Izabela Batista da Silva

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 11612EMC007

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Mecânica dos Sólidos e Vibrações

**LINHA DE PESQUISA:** Dinâmica de Sistemas Mecânicos

**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA:** NÍVEL MESTRADO

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:**

*“Análise da Influência de Trincas Transversais no Comportamento Estático e Dinâmico de Eixos Flexíveis”*

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavalini Jr.

**COORIENTADOR:** Prof. Dr. Valder Steffen Jr.

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada na sala 313 do Bloco 1M, Campus Santa Mônica, em 29 de março de 2018, às 14 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

<b>NOME</b>	<b>ASSINATURA</b>
Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavalini Junior (Orientador)	UFU
Prof. Dr. Valder Steffen Júnior (Coorientador)	UFU
Prof. Dr. Leonardo Sanches	UFU
Prof. Dr. Tobias Souza Morais	UFU
Profª. Drª. Katia Lucchesi Cavalca Dedini	UNICAMP

Uberlândia, 29 de março de 2018

*À minha família*

## AGRADECIMENTOS

Diante de todo conhecimento agregado e da possibilidade de concluir mais uma etapa da minha carreira acadêmica, venho primeiramente agradecer a Deus por ter permitido minha entrada e permanência neste prestigiado curso.

Agradeço também ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade concedida, pela estrutura e recursos disponibilizados.

À minha família, em especial à minha mãe Glaucilane, minha avó Milaneza e minha irmã landra que apesar da distância, sempre me apoiaram em todas as minhas escolhas.

Aos colegas e amigos do laboratório que direta ou indiretamente me ajudaram com meus experimentos e compartilharam seus conhecimentos comigo.

Agradeço imensamente ao meu orientador e coorientador Aldemir Ap Cavalini Jr e Valder Steffen Jr por tudo o que me ensinaram e por todo tempo dedicado à minha pesquisa. A participação de vocês foi de grande importância para o desenvolvimento e para conclusão desta dissertação. É um privilégio estar em meio aos mais brilhantes professores e uma grande honra fazer parte do grupo de pesquisas em Dinâmica de Rotação.

Ao meu namorado e companheiro de vida pela compreensão, paciência e por todo auxílio dado.

Por fim, agradeço aos órgãos de fomento: o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por meio do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia - Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT - EIE), a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG).

*Página intencionalmente deixada em branco.*



SILVA, I. B., **Análise da influência de trincas transversais no comportamento estático e dinâmico de eixos flexíveis**. 2018. 53 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

## RESUMO

O monitoramento da integridade estrutural de máquinas rotativas têm sido uma importante ferramenta na indústria, garantindo condições de operação seguras para estes equipamentos. Uma técnica comumente empregada para esta finalidade se baseia na construção de modelos matemáticos que permitem a análise do sistema. Esta abordagem tem ganhado ainda mais destaque devido à capacidade de detectar pequenas alterações em parâmetros físicos, como por exemplo a redução de rigidez provocada pela existência de trincas transversais em eixos. Visto que a presença de trincas pode ocasionar falhas em máquinas rotativas e, conseqüentemente, gastos desnecessários, a presente dissertação propõe avaliar o comportamento estático e dinâmico de um sistema disco-eixo-mancal a fim de verificar a influência de uma trinca aberta com diferentes severidades sobre o sistema rotativo. Dois modelos de elementos finitos foram desenvolvidos nos ambientes MatLab® (modelo 1D) e Ansys® (modelo 3D), sendo que as respostas obtidas por estes modelos foram comparadas com resultados experimentais. A trinca foi inserida no modelo 1D a partir da flexibilidade adicional calculada através das relações da mecânica da fratura linear. Para isso, foram utilizados os conceitos de taxa de liberação de energia de deformação, fator de intensificação de tensão e o teorema de Castigliano. No modelo 3D a trinca foi simulada por meio de um corte realizado na seção transversal do eixo. Ajustes no comprimento do elemento finito com trinca foram necessários para aproximar os resultados do modelo 1D e experimentais.

---

*Palavras Chave: Eixos Flexíveis; Trincas Transversais; Modelos de Elementos Finitos; Comportamentos Estático e Dinâmico.*

*Página intencionalmente deixada em branco.*

SILVA, I. B Analysis of The Influence of Transversal Cracks on the Static and Dynamic Behavior in Flexible Shafts. 2018. 53 f. M.Sc. Dissertation - Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

## ABSTRACT

The structural health monitoring of rotating machines has been an important tool in the industry, providing safe operating conditions for these equipments. A commonly used technique for this purpose is based on the construction of mathematical models that allow the analyses of the system. This approach has gained even more prominence due to the ability to detect small changes in physical parameters, such as stiffness reduction as caused by the existence of cracks in shafts. Since the occurrence of cracks may cause failures in rotating machines and, consequently, unnecessary expenses, this work proposes to evaluate the static and dynamic behavior of a disc-shaft-bearing system in order to verify the influence of an open crack with different severities. Two finite element models were developed in MatLab® (1D) and Ansys® (3D model) environments and the obtained responses were compared with experimental results. A crack was inserted into the 1D model from the additional flexibility calculated through the the linear fracture mechanics theory. In this context, the concepts of deformation energy release rate, stress intensification factor, and Castigliano's theorem were used. Regarding the 3D model, the crack was simulated by means of a saw cut included in the cross section of the shaft. The length of the finite element with a crack was modified to approximate the results of the 1D model and experimental ones.

---

*Keywords: Flexible Shafts; Transversal Cracks; Finite Element Models; Static and Dynamic Behaviors*

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Exemplos de máquinas rotativas. ....	5
Figura 3.1 - Graus de liberdade (GDL) associados ao elemento finito construído para representar o eixo (Fonte: Cavalini Jr. (2013)). ....	16
Figura 3.2 - Representação de um ponto arbitrário B (Fonte: Lalanne e Ferraris (1998)). ....	20
Figura 3.3 - Representação do elemento de disco (Fonte: Cavalini Jr. (2013)). ....	23
Figura 3.4 - Formas de incorporar o disco ao eixo em elementos finitos (Fonte: Lalanne e Ferraris (1998)). ....	25
Figura 3.5 - Coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal (Fonte: Cavalini Jr. (2013)). ....	25
Figura 3.6 - Coordenadas relativas à massa de desbalanceamento (Fonte: Cavalini Jr. (2013)). ....	27
Figura 4.1 - Representação do elemento de trinca (Fonte: Cavalini Jr. (2013)). ....	31
Figura 4.2 - Modos de carregamentos aplicados à uma trinca (Fonte: Anderson (2005)). ....	32
Figura 5.1 - Bancada de testes utilizada na obtenção dos resultados experimentais. ....	40
Figura 5.2 - Perfil do eixo de aço utilizado para bancada experimental. ....	40
Figura 5.3 - Disco utilizado na montagem da bancada experimental. ....	41
Figura 5.4 - Conjuntos FRM <sup>®</sup> modelo Y203 V22. ....	41
Figura 5.5 - Descrição dos componentes constituintes do conjunto FRM <sup>®</sup> (Fonte: Catálogo de Produtos FRM <sup>®</sup> ). ....	42

Figura 5.6 - Microrretífica Dremel® 3000 e acoplamento de eixo flexível (Fonte: Dremel®). .....	43
Figura 5.7 - Disco de corte abrasivo utilizado. ....	43
Figura 5.8 - Estrutura utilizada para fixação e manuseio da ferramenta de corte. ....	44
Figura 5.9 - Corte para simulação de uma trinca com 20% de profundidade. ....	44
Figura 5.10 - Vista dos extensômetros colados nas proximidades da trinca. ....	45
Figura 5.11 - Posições angulares dos extensômetros em função da direção de abertura da trinca. ....	45
Figura 5.12 - Representação da bancada de testes e suas dimensões em mm. ....	46
Figura 5.13 - Equipamento de aquisição de dados de deformação ADS 2000 (Fonte: Catálogo de produtos LYNX®) .....	46
Figura 5.14 - Teste com carga progressiva para verificar o comportamento dos extensômetros. ....	47
Figura 5.15 - Martelo PCB Piezotronics®. ....	47
Figura 5.16 - Representação de como foram obtidas as FRFs. ....	48
Figura 6.1 - Modelo em elementos finitos da bancada experimental. ....	50
Figura 6.2 - Variação dos coeficientes de rigidez em coordenadas fixas $k_F(1,1) = k_{11}$ , $k_F(2,2) = k_{22}$ e $k_F(1,2) = k_{12}$ em função da posição angular para o eixo. ....	50
Figura 6.3 - Modelo 3D desenvolvido em Ansys®. ....	51
Figura 6.4 - Refinamento da malha na região da trinca. ....	52
Figura 6.5 - Trinca de 20% de profundidade inserida no modelo 3D. ....	52
Figura 6.6 - Trinca de 50% de profundidade inserida no modelo 3D. ....	53
Figura 6.7 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção X para o eixo sem dano). ....	54
Figura 6.8 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção Z para o eixo sem dano). ....	54
Figura 6.9 - Modos de vibrar do eixo segundo modelo 1D. ....	55

Figura 6.10 - Modos de vibrar do eixo segundo modelo 3D.....	55
Figura 6.11 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção X para o eixo com trinca de 20% de profundidade). .....	56
Figura 6.12 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção Z para o eixo com trinca de 20% de profundidade). .....	56
Figura 6.13 - FRF experimental para 1ª frequência natural (força de impacto ao longo da direção X para o eixo com trinca de 20% de profundidade). .....	57
Figura 6.14 - FRF experimental para 2ª frequência natural (força de impacto ao longo da direção Z para o eixo com trinca de 20% de profundidade). .....	57
Figura 6.15 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção X para o eixo com trinca de 50% de profundidade). .....	58
Figura 6.16 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção Z para o eixo com trinca de 50% de profundidade). .....	58
Figura 6.17 - FRF experimental para 1ª frequência natural (força de impacto ao longo da direção X para o eixo com trinca de 50% de profundidade). .....	59
Figura 6.18 - FRF experimental para 2ª frequência natural (força de impacto ao longo da direção Z para o eixo com trinca de 50% de profundidade). .....	60
Figura 6.19 - Variação da 1ª e 2ª frequência natural com a posição angular do eixo. ....	60
Figura 6.20 - Medidas de deformação do eixo sem dano. ....	61
Figura 6.21 - Erros Relativos dos Modelos 1D e 3D para o eixo sem dano. ....	62
Figura 6.22 - Medidas de deformação do eixo com trinca de 20% de profundidade. ....	63
Figura 6.23 - Erros Relativos dos Modelos 1D e 3D referentes às deformações do eixo com trinca de 20% de profundidade. ....	64
Figura 6.24 - Medidas de deformação do eixo com trinca de 50% de profundidade. ....	65

Figura 6.25 - Erros Relativos dos Modelos 1D e 3D referentes às deformações do eixo com trinca de 50% de profundidade. ....	66
Figura A1.1 - Fluxograma descritivo do processo de Evolução Diferencial (Fonte: Cavalini Jr. (2013)). ....	80



## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Propriedades do eixo .....	40
Tabela 5.2 - Propriedades do disco.....	41
Tabela 5.3 - Propriedades de rigidez e amortecimento dos mancais.....	42
Tabela 6.1 - Relação entre a profundidade de trinca e o comprimento do elemento de trinca .....	51
Tabela 6.2 - Comparação dos valores das frequências naturais obtidas para o eixo sem danos.....	53
Tabela 6.3- Comparação dos valores das frequências naturais obtidas para o eixo com 50% de trinca. ....	59
Tabela A1.1 - Esquemas de mutação do método DE (Fonte: Cavalini Jr. (2013))....	81

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_c$	Área trincada da seção transversal do elemento de eixo
$B$	Ponto arbitrário no eixo
$C$	Centro geométrico do eixo
$D$	Diâmetro do eixo
$D$	Matriz de amortecimento
$D_D$	Matriz do efeito giroscópico do disco
$D_g$	Matriz do efeito giroscópico
$D_S$	Matriz do efeito giroscópico do eixo
$E$	Módulo de Elasticidade
$F_m$	Vetor das forças produzidas pelos mancais
$F_{mu}$	Força de sustentação desenvolvida pelo mancal na direção $X$
$F_{mw}$	Força de sustentação desenvolvida pelo mancal na direção $Z$
$F_u$	Vetor de forças de desbalanceamento
$F_{unbX}$	Forças de desbalanceamento na direção $X$
$F_{unbZ}$	Forças de desbalanceamento na direção $Z$
$G$	Módulo de cisalhamento
$I$	Momento de inércia de área do eixo
$I_{Dx}$	Momento de inércia de massa referente ao eixo $X$
$I_{Dy}$	Momento de inércia de massa referente ao eixo $Y$
$I_{Dz}$	Momento de inércia de massa referente ao eixo $Z$
$J$	Função densidade de energia de deformação
$K$	Matriz de rigidez
$K_{ce}$	Matriz de rigidez nodal para o elemento com trinca
$K_{CEXY}$	Matriz de rigidez do eixo livre - plano $XY$
$K_{CEZY}$	Matriz de rigidez do eixo livre - plano $ZY$
$K_e$	Matriz obtida da inversão da flexibilidade total nodal
$K_{open}$	Matriz de rigidez do elemento com trinca
$K_{XY}$	Matriz de rigidez do eixo engastado - plano $XY$
$K_{ZY}$	Matriz de rigidez do eixo engastado - plano $ZY$

$\mathbf{K}_{st}$	Matriz de enrijecimento do disco quando em regime transiente
$K_{ij}, K_{Iii}$ e $K_{IIIi}$	Fatores intensificadores de tensão
$L$	Comprimento do elemento de eixo
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
$M_D$	Massa do disco
$\mathbf{M}_D$	Matriz de massa do disco
$\mathbf{M}_S$	Matriz clássica de massa do eixo
$\mathbf{M}_T$	Matriz do efeito secundário da inércia de rotação
$\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$	Vetores dos coeficientes das funções de forma
$P_{1-12}$	Carregamentos atuantes no eixo
$Q_i$	Esforços generalizados
$R$	Sistema de coordenadas rotativas
$R_0$	Sistema de coordenadas fixas
$S$	Área de sessão transversal do eixo
$S_r$	Área reduzida de sessão transversal do eixo
$T$	Soma das energias cinéticas
$T_D$	Energia cinética do disco
$T_S$	Energia cinética do eixo
$T_U$	Energia cinética da massa de desbalanceamento
$\mathbf{T}_\theta$	Matriz de transformação para coordenadas fixas
$U$	Soma das energias de deformação
$U^0$	Energia de deformação do elemento de eixo sem trinca
$U^c$	Energia de deformação adicional devido à presença da trinca
$\mathbf{V}$	Vetor velocidade da massa de desbalanceamento
$V$	Para todo volume
$X, Y$ e $Z$	Eixos de coordenadas fixas do plano cartesiano
$\mathbf{W}$	Força peso (das partes girantes)
$\mathbf{c}$	Matriz de flexibilidade adicional nodal
$c_{ij}$	Coefficientes de flexibilidade adicional
$\mathbf{c}_{ce}$	Matriz de flexibilidade total nodal
$\mathbf{c}_o$	Matriz de flexibilidade nodal para o elemento sem trinca
$d$	Distância do ponto ao eixo geométrico do eixo
$d_{ij}$	Coefficientes de amortecimento dos mancais
$h_d$	Largura do disco

$\mathbf{k}_R$	Matriz de rigidez nodal para a trinca aberta, em coordenadas rotativas
$\mathbf{k}_F$	Matriz de rigidez nodal para a trinca aberta, em coordenadas fixas
$k_{ij}$	Coefficientes de rigidez dos mancais
$m_u$	Massa de desbalanceamento
$\mathbf{q}$	Vetor de deslocamentos nodais do eixo
$\mathbf{q}_D$	Vetor de deslocamentos nodais do disco
$\mathbf{q}_i$	Coordenadas generalizadas
$\mathbf{q}_u$	Vetor de deslocamentos nodais na direção $X$
$\mathbf{q}_{unb}$	Vetor de deslocamentos nodais da massa de desbalanceamento
$\mathbf{q}_w$	Vetor de deslocamentos nodais na direção $Z$
$t$	Tempo
$u$	Deslocamento na direção $X$
$u^*$	Deslocamento na direção $x$ em coordenadas rotativas
$x, y$ e $z$	Eixos de coordenadas rotativas do plano cartesiano
$w$	Deslocamento na direção $Z$
$w^*$	Deslocamento na direção $z$ em coordenadas rotativas
$\Omega$	Velocidade de rotação
$\alpha$	Profundidade da trinca transversal
$\alpha_x$	Profundidade da trinca transversal infinitesimal
$\varepsilon$	Deformação normal
$\phi$	Ângulo de Rotação em relação ao eixo $Y$
$\varphi$	Ângulo de Rotação em relação ao eixo $Z$
$\theta$	Ângulo de Rotação em relação ao eixo $X$
$\vartheta_Y$	Parâmetro de cisalhamento
$\rho$	Densidade
$\sigma$	Tensão normal
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\omega_x$	Velocidades instantâneas na direção $X$
$\omega_y$	Velocidades instantâneas na direção $Y$
$\omega_z$	Velocidades instantâneas na direção $Z$

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## SUMÁRIO

<b>AGRADECIMENTOS</b> .....	<b>vii</b>
<b>RESUMO</b> .....	<b>ix</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>xi</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>xiii</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	<b>xvii</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	<b>xix</b>
<b>SUMÁRIO</b> .....	<b>xxiii</b>
<b>CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 Contribuições do estudo.....	2
1.2 Organização da Dissertação .....	4
<b>CAPÍTULO II: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>5</b>
2.1 Máquinas Rotativas e Contexto Histórico.....	5
2.4 Detecção e Monitoramento de Trincas Baseados em Modelos Numéricos.....	8
2.4.1 <i>Estudo de Detecção Através dos Princípios da Mecânica da Fratura</i> .....	8
2.4.2 <i>Técnicas Baseadas nos Sinais de Vibração</i> .....	10
2.4.3 <i>Técnicas Baseadas em Testes Modais</i> .....	11
2.4.4 <i>Métodos Não-Tradicionais</i> .....	13
<b>CAPÍTULO III: COMPORTAMENTO DINÂMICO DE MÁQUINAS ROTATIVAS</b> .....	<b>15</b>
3.1 Modelagem dos elementos constituintes do rotor .....	16
3.1.1 <i>Eixo</i> .....	16
3.1.2 <i>Disco</i> .....	22
3.1.3 <i>Mancais</i> .....	25
3.1.4 <i>Massa de Desbalanceamento</i> .....	26
<b>CAPÍTULO IV: COMPORTAMENTO DINÂMICOS DE TRINCAS TRANSVERSAIS</b> .....	<b>29</b>

4.1 Flexibilidade Adicional Introduzida pela Trinca.....	30
4.2 Modelo para Trinca aberta.....	36
<b>CAPÍTULO V: PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL.....</b>	<b>39</b>
5.1 Bancada de Testes.....	39
5.2 Ferramentas e Equipamentos do Processo de Simulação da Trinca.....	43
5.3 Procedimentos e Equipamentos da Análise Estática .....	44
5.4 Procedimentos e Equipamentos da Análise Dinâmica .....	47
<b>CAPÍTULO VI: RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS .....</b>	<b>49</b>
6.1 Modelo 1D .....	49
6.2 Modelo 3D .....	51
6.3 Validação dos modelos 1D e 3D .....	53
6.4 Análise Estática Através das Medidas de Deformação do Eixo .....	59
<b>CAPÍTULO VII: CONCLUSÃO .....</b>	<b>67</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>71</b>
<b>ANEXO I: OTIMIZAÇÃO HEURÍSTICA PELO MÉTODO EVOLUÇÃO DIFERENCIAL</b> <b>.....</b>	<b>79</b>
A1.1 Descrição do Método .....	79
A1.2 Formulação Matemática.....	80



# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

Muito tem sido visto sobre os avanços em pesquisas na área de máquinas rotativas. Segundo Ferreira (2010), um grande desafio associado à manutenção destes equipamentos relaciona-se à capacidade de identificar quando e, possivelmente, em que local da máquina uma falha vai ocorrer.

A NBR 5462 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1994) define o termo defeito como *“qualquer desvio de uma característica de um item em relação aos seus requisitos”* diferentemente de falha que é o *“término da capacidade de um item desempenhar a função requerida”*.

Um caso especial de falha em componentes mecânicos deste segmento se dá em eixos flexíveis com a ocorrência de defeitos como trincas transversais. Estes componentes estão sujeitos à ação de diversos tipos de carregamentos que favorecem o aumento da concentração de tensões em locais de descontinuidades geométricas (MUSZYNSKA, 1994).

Muszynska (2005) ainda afirma que a detecção de uma trinca em sua fase inicial e a previsão do seu comportamento são capazes de evitar falhas dispendiosas da máquina e paralisações subsequentes de plantas inteiras.

Os Estados Unidos gastaram mais de \$ 600 bilhões com manutenção industrial em 1981 e estima-se que esse valor tenha dobrado nos últimos 20 anos (Heng et al., 2009). No Brasil, segundo dados levantados pela Abraman (Associação Brasileira de Manutenção e Gestão de Ativos), 4,5% do PIB é movimentado por empresas do setor de manutenção. Neste contexto, inúmeras técnicas de detecção e identificação de danos ganharam destaques devido à aplicação em casos industriais, uma vez que o efeito econômico decorrente de paradas não planejadas ou danos catastróficos motiva a busca por soluções preventivas.

Os sistemas de SHM (*Structural Health Monitoring*), como exemplificam Farrar e Worden (2007), são uma estratégia interessante e viável em muitos casos e consistem na

observação de uma estrutura ou sistema mecânico ao longo do tempo. Para isso é realizada a extração de dados e informações associadas às mudanças das características sensíveis aos danos e a análise estatística para determinar o estado atual da saúde estrutural do sistema. Ao serem associados a modelos matemáticos capazes de descrever, reproduzir e prever as condições de operação anormais ou não seguras, competem diretamente com testes não destrutivos utilizados nos planos de manutenção.

Bachschild, Pennacchi; Tanzi (2010) apontam que as técnicas de SHM baseadas em medições de sinais de vibração são vastamente utilizadas na identificação de trincas em eixos de máquinas rotativas, visto que a redução da rigidez local do eixo produz alterações no comportamento dinâmico do sistema.

De acordo com Dimarogonas (1996), com o uso das relações da mecânica da fratura linear entre a função densidade de energia de deformação e o fator de intensificação de tensão, bem como o teorema de Castigliano, é possível calcular a flexibilidade local da região da trinca, e posteriormente a variação da rigidez associada.

Com o intuito de contribuir com as pesquisas nesta área, este trabalho se justifica no sentido de ampliar a compreensão sobre o tema e busca avaliar as influências que a presença de uma trinca pode exercer sobre o comportamento estático e dinâmico de eixos de máquinas rotativas.

Propõe-se comparar os resultados experimentalmente e, a partir de dois modelos de elementos finitos, sendo um modelo 1D desenvolvido em MatLab® e, um modelo 3D desenvolvido no programa Ansys®. Para isso, um sistema disco-eixo-mancal é usado. No modelo 1D, a trinca é inserida por meio do cálculo da matriz de flexibilidade adicional proposta por Papadopoulos e Dimarogonas (1987). Para o modelo 3D, a trinca é simulada com um corte na seção transversal do eixo. Nas análises dinâmicas são apresentadas funções de resposta em frequência (FRFs) para as condições de eixo sem danos, com uma trinca de 20% e 50% de profundidade. Para as análises estáticas, considerando as mesmas condições de eixo saudável e com danos, o campo de deformação da região próxima à trinca foi medido com o uso de extensômetros elétricos.

## **1.1 Contribuições do estudo**

A Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (FEMEC-UFU), através do Laboratório de Mecânica de Estruturas “José Eduardo Tannús Reis” (LMEst) tem contribuído de forma significativa em pesquisas realizadas nas diversas áreas da

dinâmica de máquinas rotativas. Especificamente, trabalhos importantes sobre técnicas de monitoramento da integridade estrutural foram desenvolvidos.

Burbano (2005) apresentou um estudo do comportamento dinâmico de um rotor com trinca no regime transiente, tanto na parada como na partida, por meio de um modelo numérico, com alguns ensaios experimentais em bancada de laboratório.

Tsuruta (2008) avaliou o uso de uma técnica de monitoramento baseada no conceito de impedância eletromecânica para a detecção e quantificação de danos causados por impactos de baixa energia em placas de material composto.

Moura Júnior (2008), ainda nesta vertente, avaliou o uso de sistemas de monitoramento da integridade estrutural aplicados em componentes aeronáuticos e espaciais.

Em sua tese de doutorado, Morais (2010) avaliou o efeito de não-linearidades causadas por trincas transversais em eixos de máquinas rotativas e estudou a aplicação de atuadores eletromagnéticos no controle do processo de fadiga de eixos.

Ainda através do uso impedância eletromecânica, Palomino (2012) propôs identificar danos pequenos em estruturas simples, avaliando as diversas métricas de dano.

Cavalini Jr (2013) propôs duas técnicas de monitoramento da integridade estrutural com o objetivo de identificar trincas transversais em eixos. O primeiro método, baseado no comportamento não-linear da trinca, e o segundo baseado na impedância eletromecânica. Três modelos de trincas foram abordados em suas análises que contaram com simulação computacional e validação experimental.

Um método de deslocamento efetivo em frequência foi desenvolvido por Rabelo (2014) para compensar as medições de impedância devido a mudanças resultantes de flutuações da temperatura ambiente. Rabelo (2017) desenvolveu também técnicas de normalização de dados para compensação das perdas de informação provocadas pelas mudanças nas condições ambientais ou operacionais quando do monitoramento da integridade estrutural através da impedância eletromecânica.

Vários outros trabalhos sobre controle de vibração, utilização de mancais hidrodinâmicos e magnéticos, além de investigações sobre o uso de materiais compostos em eixos de máquinas rotativas têm sido desenvolvidos continuamente pelo grupo LMEst, cujos objetivos incluem o ensino e a pesquisa aplicados aos estudos do comportamento estático e dinâmico de estruturas, com foco nos rotores inteligentes.

## 1.2 Organização da Dissertação

Esta dissertação foi estruturada com 7 Capítulos e um Anexo, sendo o primeiro Capítulo destinado à abordagem geral do tema, contendo justificativas e contextualização, além da apresentação dos objetivos propostos.

No Capítulo II é feito um levantamento bibliográfico com ênfase na evolução histórica e nas pesquisas mais relevantes da área. São ressaltados alguns temas conceituais e técnicas mais utilizadas na detecção de falhas em máquinas rotativas.

No Capítulo III são apresentadas as equações que descrevem o comportamento de eixos flexíveis quando em conjunto com os demais elementos que compõem um rotor. A formulação das equações para inclusão da trinca nestes sistemas é mostrada no Capítulo IV.

A bancada de testes utilizada para análises comparativas e os parâmetros referentes às suas propriedades e dimensões são descritos no Capítulo V.

O Capítulo VI discorre sobre os modelos implementados na plataforma MatLab® e no Ansys®, além das considerações feitas para estes modelos e apresenta os resultados experimentais em comparação aos provenientes dos modelos. As conclusões e sugestões para trabalhos futuros são discutidas no Capítulo VII. As referências citadas ao longo do texto são apresentadas na sequência.

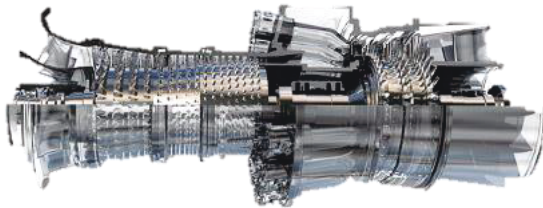
Por fim, o Anexo I descreve brevemente a técnica de otimização evolutiva utilizada para o ajuste dos modelos.

## CAPÍTULO II

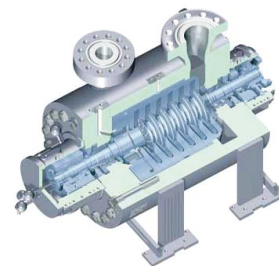
### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 Máquinas Rotativas e Contexto Histórico

No âmbito da Engenharia Mecânica, as máquinas rotativas representam uma vasta e importante classe de equipamentos usadas no transporte de fluidos, geração de energia, propulsão de aeronaves, dentre diversas outras aplicações, com a finalidade de transformar energia elétrica em mecânica ou o contrário (MUSZYNSKA, 2005). Alguns exemplos são apresentados na Fig. 2.1.



a) GE 9E - Turbina a gás (2012 General Electric Company®)



b) STC-SV Siemens - Compressor (Siemens AG®)

Figura 2.1 - Exemplos de máquinas rotativas.

Uma definição baseada nas características dos rotores é apresentada por Lalanne e Ferraris (1998) e por Ishida e Yamamoto (2012). Estes autores descrevem máquinas rotativas como aquelas que possuem os seguintes elementos principais: discos de formatos diversos, eixos normalmente circulares cujos diâmetros podem variar com a posição longitudinal e rolamentos situados em diversas posições ao longo do eixo. É possível ainda classificar as máquinas rotativas em função da deformação do eixo rotativo em operação. Quando se pode

desprezar estas deformações, os mesmos autores classificam os rotores como rígidos. Ao passo que, se as deformações do eixo são consideradas, os rotores são chamados de flexíveis. Embora a maioria dos eixos presentes em máquinas rotativas tenha seção transversal circular, outras geometrias podem ser utilizadas de acordo com a aplicação, como por exemplo, eixos quadrados empregados como eixos de transmissão em sistema de transporte, tais como as esteiras e alguns tipos de geradores de energia elétrica.

Por sua ampla utilização na indústria, o bom funcionamento de máquinas rotativas tem sido um objetivo bastante buscado, principalmente quando sua operação correta e manutenção implicam diminuição de custos e eventuais perdas devidas a paradas não planejadas. Neste sentido, Muszynska (2005) afirma que o estudo da dinâmica de rotação se torna fundamental para a compreensão do comportamento das máquinas rotativas e engloba uma grande variedade de fenômenos físicos que podem interferir no desempenho destas máquinas.

Historicamente, sabe-se que os primeiros estudos em dinâmica de rotação datam do final do século XIX, época em que Rankine (1869) concluiu erroneamente que as máquinas rotativas não conseguiriam operar acima de uma determinada velocidade. Contribuições importantes surgiram também devido aos problemas associados às turbinas de alta velocidade de Gustaf de Laval (1894). Posteriormente, extensivos trabalhos numéricos e experimentais com eixos complexos foram realizados por Dunkerley (1894) que apresentou o termo velocidade crítica como sendo uma velocidade de operação em que o rotor apresenta grandes amplitudes de vibração. Além disso, desenvolveu um método numérico capaz de calcular a menor frequência natural de rotores que foi comprovado teoricamente por Jeffcott (1919).

Segundo Vance; Zeidan; Murphy (2010), a maioria das investigações em dinâmica de rotação foram motivadas por problemas de funcionamento ou falhas. Atualmente, as falhas nem sempre são associadas à defeitos de fabricação. Muitas vezes elas surgem apenas pela falta de conhecimento específico sobre o funcionamento do rotor em condições específicas. Dessa forma, muitos relatórios e análises publicadas auxiliaram a comunidade de engenharia no aprimoramento dessas máquinas com base nos conhecimentos adquiridos e na solução de problemas até então com causas desconhecidas. No entanto, Vance; Zeidan; Murphy (2010) afirmam que a indústria se tornou competitiva e passou a manter certas descobertas em sigilo, e exemplificam o caso ocorrido com a *General Electric Review* cujos artigos foram de fundamental importância para o desenvolvimento das máquinas rotativas no início dos anos 1900 e depois desapareceram na década de 1950.

Visto que as causas das falhas em equipamentos, de maneira geral, se enquadram em alguns tópicos como projeto do componente, seleção inadequada de materiais, defeitos e

imperfeições presentes nos materiais, defeitos de fabricação, instalação e montagem, além de erros provenientes na manutenção e montagem dos equipamentos, e que se não previstos ou detectados a tempo podem acarretar em quebras, acidentes ou perdas irreparáveis comprometendo não só o financeiro de uma produção mas também a segurança de uma instalação (AFFONSO, 2006).

Affonso (2006) ainda reitera que o aparecimento de falhas em máquinas rotativas pode ocorrer em diversos componentes, principalmente em eixos, cuja função principal é suportar os demais componentes ou transmitir torque de uma parte a outra. Além de serem submetidos a condições de operação variadas, os eixos rotativos ficam sujeitos a carregamentos combinados de tração, torção ou flexão. Affonso (2006) afirma que a maioria das falhas ocorridas em eixos são devido à fratura por fadiga, originadas em pontos de concentração de tensão, normalmente associados a trincas.

Broberg (1999) define trinca como uma separação de material por abertura ou deslizamento, cuja distância de separação (espessura) é menor que o comprimento (profundidade). Observa-se que o crescimento de uma trinca por fadiga ou a fratura frágil ocorre perpendicularmente à direção do esforço principal de tensão, ao passo que uma fratura dúctil se dá na direção do maior esforço de cisalhamento. Além dos esforços submetidos, observa-se ainda que tensões e choques térmicos, devido ao fluido de trabalho, são capazes de iniciar a propagação de uma fissura em máquinas como turbinas a vapor e a gás.

Em função das necessidades da indústria, os testes não destrutivos foram e ainda são vastamente utilizados na manutenção de equipamentos para detecção e monitoramento da severidade de danos existentes. Dentre eles, citam-se os procedimentos de inspeção visual direta, raio X e Gama, ensaio de líquido penetrante, análise por ultrassom, ensaio por partículas magnéticas e por emissão acústica, e outros (BACHSCHMID; PENNACCHI; TANZI, 2010). No entanto, estes métodos provaram ser caros, uma vez que resultados satisfatórios dependem de inspeções detalhadas e periódicas e dispendiam do tempo de parada das máquinas.

Alternativamente, um esforço significativo em pesquisas tem se concentrado no desenvolvimento métodos capazes de detectar danos através do monitoramento contínuo e em tempo real de sistemas. No intuito de minimizar e evitar que falhas repentinas possam ocorrer, as técnicas como o Monitoramento da Integridade Estrutural (do inglês *Structural Health Monitoring - SHM*) surgiram como uma ferramenta promissora e se baseiam no uso integrado de sensores, materiais inteligentes, transmissão de dados e a capacidade de processamento computacional para que através dos sinais de vibração possam ser capazes de detectar trincas e outros defeitos. Balageas; Fritzen; Guemes (2006) relatam que o uso de técnicas SHM podem diminuir em até 40% o tempo gasto numa inspeção de aeronaves

militares como exemplo, além de permitir uma maior confiabilidade, segurança e desempenho de equipamentos. Assim, são evidentes as vantagens do ponto de vista econômico e operacional, que tornam essa técnica atrativa.

As técnicas de SHM, segundo Cavalini Jr (2013), em conjunto com uso de modelos matemáticos representativos, ganharam cada vez mais destaque na detecção de trincas, uma vez que conduzem a resultados satisfatórios mesmo quando o dano ocorre em lugares inacessíveis como é o caso de trincas de subsuperfície ou mesmo quando elas são incipientes. Nestes casos é observado a variação de parâmetros como a rigidez do sistema para indicar existência da trinca. Além disso, são utilizados os princípios da mecânica da fratura linear como uma metodologia auxiliar na construção dos modelos.

## **2.4 Detecção e Monitoramento de Trincas Baseados em Modelos Numéricos**

### *2.4.1 Estudo de Detecção Através dos Princípios da Mecânica da Fratura*

Apesar de ser uma área de grande importância para a indústria, os estudos acerca da mecânica da fratura tiveram seu início em meados do século XX. Sabe-se que antes da Segunda Guerra Mundial, esta ciência era praticamente inexistente, mas desde então amadureceu e vem sendo amplamente discutida pela comunidade acadêmica e industrial (ANDERSON, 2005).

Bachschmid; Pennacchi; Tanzi (2010) descrevem as principais áreas que se enquadram nas pesquisas sobre mecânica da fratura, são elas: a propagação de trincas, a direção de propagação e a velocidade de propagação. É interessante ressaltar que muitas estruturas possuem trincas que são consideradas inofensivas e não apresentam riscos de fratura, ao contrário daquelas que se encontram em zonas de grandes tensões, estas sim devem ser monitoradas constantemente e geram riscos aos equipamentos.

Importantes estudos foram desenvolvidos pelo grupo de pesquisas do *Naval Research Laboratory*, liderado pelo Dr. G. R. Irwin após os subseqüentes problemas de fraturas ocorridas nos navios americanos do programa *Liberty* durante a Segunda Guerra Mundial. A partir na energia de Griffith, Irwin (1956) desenvolveu o conceito de taxa de liberação de energia, e posteriormente utilizando a teoria de Westergaard (1939), desenvolveu uma técnica semi-inversa para analisar as tensões e deslocamentos nas proximidades da ponta de uma trinca aguda, que poderiam ser descritos por uma única constante relacionada à taxa de liberação de energia ( $G$ ). Este parâmetro mais tarde tornou-se conhecido como Fator de Intensificação de Tensão (do inglês *Stress- Intensity Factor - SIF*) (ANDERSON, 2005).



A partir da associação da taxa de liberação de energia com a redução de flexibilidade local produzida por uma trinca em vigas prismáticas, diversos outros trabalhos foram publicados. Dimarogonas (1970) descreveu por meio de resultados experimentais a diferença entre as rigidezes ao longo de duas direções perpendiculares em eixos na presença de trincas transversais. Seguindo a mesma metodologia, este autor também apresentou uma formulação para caracterizar o comportamento dinâmico de trincas em vigas retangulares.

Henry e Okah-Avae (1976) estudaram a influência do peso do eixo no seu comportamento dinâmico considerando a inclusão de uma trinca e avaliaram a resposta deste sistema ao desbalanceamento. Mayes e Davies (1976) desenvolveram um critério baseado nos níveis de vibração para detecção de trincas em eixos de turbogeradores. Gasch (1976) utilizou um simples mecanismo para simular as não linearidades inseridas em eixos rotativos devido à abertura e fechamento da trinca.

Desde então, diversas pesquisas sobre trincas transversais em eixos rotativos foram realizadas. Ressalta-se que o termo transversal indica que a superfície da trinca é ortogonal ao eixo de rotação do eixo. Foram também relatados outros tipos de trincas, como as oblíquas, apesar de trincas transversais serem de maior ocorrência em máquinas rotativas já que as tensões de flexão axial são predominantes (BACHSCHMID; PENNACCHI; TANZI, 2010).

Grabowski (1980) utilizou uma análise modal para investigar o comportamento vibratório de rotores de turbinas na presença de trincas transversais.

Posteriormente, Mayes e Davies (1984) propuseram um método em elementos finitos, capaz de prever a resposta vibratória de um sistema horizontal de eixos acoplados, no qual trincas transversais foram detectadas antes da falha total do sistema. Foi considerado um movimento de abertura e fechamento de trinca chamado de *breathing*. Uma avaliação experimental também foi realizada. Gasch (1993) apresentou um estudo sobre estabilidade de eixos desbalanceados e com trincas transversais utilizando o modelo de trinca apresentado por ele em 1976 (conhecido como *hinge model*). Neste modelo, diferentemente do modelo proposto por Mayes e Davies (1984), considerou-se o movimento de abertura e fechamento da trinca de forma abrupta

O acoplamento entre as vibrações longitudinais e de flexão de um rotor com uma trinca transversal aberta foi numericamente abordado por Papadopoulos e Dimarogonas (1987). Este tipo de trinca introduz no sistema um comportamento semelhante ao de um rotor com diferentes momentos de inércia ao longo de duas direções perpendiculares. O acoplamento entre as vibrações torcionais e de flexão devido à inclusão do cisalhamento foi também mostrado por Papadopoulos e Dimarogonas (1987) e Ostachowicz e Krawczuk (1992).

Papadopoulos e Dimarogonas (1988) descreveram o acoplamento entre as vibrações longitudinais e de flexão de um rotor, porém reduzindo a matriz de flexibilidade local do

elemento de trinca para 2x2. Neste caso, o eixo é submetido apenas à uma força axial e um momento fletor.

Outras análises teóricas são apresentadas por Nelson e Nataraj (1986), que utilizaram uma expansão da série de Fourier para representar a variação de rigidez do elemento de eixo com trinca. Seus resultados foram comparados à trabalhos anteriores (analíticos e experimentais) de Grabowski (1980).

Trabalhos voltados para detecção de trincas em tempo real foram desenvolvidos por Imam et al. (1989), Ratan; Baruh; Rodrigues (1996), Seibold e Weinert (1996), dentre outros.

Grandes avanços foram obtidos com intuito de inovar as técnicas de SHM aplicadas em eixos rotativos. Sabnavis et al. (2004) subdivide as técnicas mais comumente pesquisadas em 3 categorias: aquelas baseadas nos sinais de vibração, baseadas em análise modal e as baseadas em métodos não tradicionais. Nas subseções a seguir serão apresentados alguns dos mais relevantes trabalhos em cada categoria.

#### *2.4.2 Técnicas Baseadas nos Sinais de Vibração*

As técnicas baseadas nos sinais de vibração associadas às técnicas SHM, têm sido amplamente investigadas e ganharam grande visibilidade na comunidade acadêmica e industrial.

Muszynska (1996) se contrapôs à ideia de que apenas o controle dos níveis de vibração utilizados pela indústria seria necessário para manutenção dos rotores. A autora propôs a utilização de métodos para avaliar a distribuição de tensão nos rotores como auxílio na detecção de possíveis problemas relacionados.

Seibold e Weinert (1996) desenvolveram um algoritmo de identificação no domínio do tempo chamado de Filtro de Kalman Extendido. Neste caso, um banco de filtros é construído para localização da trinca e a determinação de sua profundidade durante a operação normal do rotor.

Bently e Muszynska (1986) afirmaram que as respostas de vibração com mais informações para a detecção de trincas incipientes em eixos são as respostas laterais síncronas 1X e as respostas laterais 2X. Outros autores como Saavedra e Cuitiño (2002), Green e Casey (2003) e Penny e Friswell (2003) consideram que apenas o componente 2X quando excitado pela metade da primeira velocidade crítica de precessão direta pode ser um indicador para identificação de trincas em eixos rotativos.

Além dos componentes harmônicos 1X e 2X, Ishida e Yamamoto (2012) afirmam que as mudanças nos componentes 3X, 1/2X e 3/2X, dependendo da direção e amplitude do desbalanceamento, podem ser observadas para determinar a presença de trincas.

O estudo da órbita em eixos com trincas transversais é apresentado por Sinou e Lees (2005). Os autores afirmam que a presença de distorções e a formação de um “laço” duplo ou um “laço” interno nas órbitas são características observadas quando o rotor apresenta uma trinca. Além disso, a relação entre a profundidade da trinca e a amplitudes das órbitas são investigadas quando a velocidade de rotação se iguala à metade da velocidade crítica de precessão direta.

Kulesza e Sawicki (2010) propuseram um novo método para detecção de trinca em rotores baseado no aumento do modelo do sistema. Neste caso, um observador de estados de um grau de liberdade foi incorporado nas equações do movimento da máquina rotativa. As estimativas de suas duas variáveis de estado atuam como indicadores da presença da trinca.

Técnicas usando modelos 3D criados no programa ABAQUS® também foram utilizadas por alguns pesquisadores, como Hassan; Bruni; Carboni (2016). Os autores avaliaram o uso dos sinais de vibração em simulações de eixos ferroviários com trincas. Bachschmid; Pennacchi; Tanzi (2003) também utilizaram um modelo 3D construído no mesmo ambiente para comparação de resultados do comportamento estático obtidos por outros modelos numéricos.

Liong e Proppe (2013) avaliaram a perda de rigidez de um eixo com trinca transversal considerando o mecanismo *breathing* e um método de zona coesiva (do inglês *Cohesive Zone Model* - CZM) como uma alternativa ao SIF em um modelo 3D.

Investigações experimentais e teóricas sobre a detecção de trincas e o comportamento dinâmico de rotores utilizando um método de decomposição empírica (do inglês *Empirical Mode Decomposition* - EMD) foi apresentado por Guo; Yan; Yang (2017). Os mesmos autores observaram distorções da órbita durante a passagem por  $1/3$  e por  $1/2$  da velocidade de rotação, comparando o caso de um eixo com e sem trinca.

#### 2.4.3 Técnicas Baseadas em Testes Modais

As técnicas baseadas no domínio modal incluem observações das mudanças que ocorrem nas características do sistema, tais como a forma dos modos de vibrar e as frequências naturais do sistema.

Hamid et al. (1994) desenvolveram dois modelos matemáticos para o estudo dos parâmetros modais de um rotor com trinca, um modelo baseado no método de Rayleigh-Ritz e outro de elementos finitos. As frequências naturais e os deslocamentos da linha elástica foram avaliados em função da localização e profundidade da trinca.

Uma análise acerca das mudanças da frequência natural de um rotor numa condição estática devido à presença da trinca é abordada por Dong; Chen; Zou (2004). Eles notaram

que existe uma relação entre a redução da frequência natural e a proximidade da trinca com os pontos antinodais dos modos de vibrar. Quanto mais próxima de um ponto antinodal, maior será a redução da frequência natural. Os autores também mostraram que é possível, com o modelo contínuo apresentado em seu trabalho, identificar a posição da trinca a partir da comparação entre os modos de vibrar do eixo com e sem trinca.

Modelos analíticos e numéricos devem ser representativos, para que possam ser utilizados no monitoramento de componentes ou máquinas rotativas. Sendo assim, testes experimentais modais podem ser empregados para a validação dos dados obtidos pelos modelos. Alguns trabalhos que utilizam essa metodologia serão apresentados na sequência.

Collins; Plaut; Wauer (1991) avaliaram o comportamento dinâmico de rotores com trincas transversais usando excitações externas na forma de pulsos axiais. Três profundidades de trinca (10%, 20% e 30%) foram avaliadas considerando a resposta de vibração vertical sob excitação periódica externa. Os autores concluíram que ocorre um aumento não linear na amplitude da resposta de vibração com o aumento da profundidade da trinca. Darpe; Gupta; Chawla (2003) realizaram testes experimentais com excitação axial na forma de pulsos periódicos em eixos com e sem trinca. Os autores confirmaram a ocorrência do acoplamento entre as vibrações longitudinais e de flexão do eixo na presença do dano.

Uma visão geral dos desenvolvimentos mais recentes, assim como as vantagens e desvantagens acerca dos modelos e das técnicas modais mais comumente empregadas, são dadas por Bucher e Ewins (2001) e Lees; Sinha; Friswell (2009).

Sawicki et al. (2011) fez uso de excitação externa auxiliar através de mancais ativos magnéticos para detectar a presença de trincas em eixos rotativos. A aplicação de uma excitação sinusoidal em eixos trincados, gerou no espectro de frequências, harmônicos que são combinações da velocidade de rotação do rotor e da frequência de excitação. Esta informação foi usada para evidenciar a presença de trinca no eixo do rotor analisado.

Ong; Rahman; Ismail (2014) utilizaram dados experimentais obtidos em uma análise modal para identificar posição e severidade de uma trinca. Neste caso, foi utilizado um algoritmo que se baseia na sensibilidade modal ou na alteração de rigidez local do sistema.

Zhao; DeSmidt; Yao (2014) mostraram investigações sobre o comportamento de eixos com trincas transversais com comportamento *breathing* considerando diferentes amplitudes de excitação harmônica. Os autores afirmam que em baixas velocidades de rotação, a excitação axial harmônica tende a influenciar de maneira mais significativa o comportamento da trinca. Para velocidades de rotação maiores, esse comportamento é afetado pela amplitude da força harmônica aplicada.

Uma metodologia semelhante foi utilizada no desenvolvimento de uma técnica para detecção de trincas apresentada por Lu et al. (2017). Os autores avaliaram descontinuidades

introduzidas pela trinca no modo de deflexão característico (do inglês *Characteristic Deflection Shape* - CDS) do sistema. Este modo é obtido a partir das respostas do rotor em condição de operação. Neste trabalho foi utilizada a decomposição em valores singulares (do inglês *Singular Value Decomposition*) no domínio da frequência para obter o CDS. De forma a evitar as interferências produzidas pelas diferenças da área de seção transversal do eixo, foram usados os CDSs nas frequências super-harmônicas.

#### 2.4.4 Métodos Não-Tradicionais

Técnicas não-tradicionais são aquelas que não se encaixam em nenhuma das duas classes descritas. Sampaio e Nicoletti (2016) afirmam que técnicas não-tradicionais podem levar em consideração informações do domínio no tempo ou frequência para detectar e identificar trincas em eixos rotativos. Como exemplo, tem-se os métodos de otimização, rede neural artificial, transformada de *wavelet*, dentre outras.

O uso de Algoritmo Genético na identificação de trincas é apresentado em He; Guo; Chu (2001) como uma alternativa para solução do problema inverso associado à detecção da trinca. A solução do problema foi obtida minimizando a função objetivo considerada, sendo esta, a diferença entre a resposta de vibração experimental e a calculada para uma configuração de trinca. Apesar do sucesso obtido na detecção da trinca, observou-se um custo computacional elevado, ultrapassando 10 horas de simulação mesmo para pequenas populações iniciais do Algoritmo Genético.

Castejón et al. (2015) aplicaram a teoria da transformada discreta de *wavelet* e análises de multi-resolução (do inglês - *Multiresolution Analysis*) em sinais de vibração como ferramentas para determinar características padrões em eixos rotativos com trincas transversais. A técnica se mostrou eficiente mesmo para trincas incipientes.

Sampaio e Nicoletti (2016) utilizam para a detecção de trincas em máquinas rotativas a técnica da entropia aproximada (do inglês *Approximate Entropy* - ApEn), também classificada como uma metodologia não-tradicional devido ao processamento de sinal não convencional envolvido. O ApEn se baseia na determinação de um valor estatístico que quantifica a irregularidade de uma série temporal. Esse valor, obtido por um algoritmo aplicado aos dados, é amplamente utilizado nas áreas de biologia e medicina para extrair informações de sinais relacionado à presença e características da patologia.

Nasiri; Khosravani; Weinberg (2017) apresentaram uma série de discussões sobre o uso de inteligência artificial (do inglês *Artificial Intelligence* - AI) em quatro subáreas da mecânica da fratura e suas aplicações em sistemas mecânicos: modo de falha e identificação do mecanismo de falha, detecção e diagnóstico de danos e falhas, detecção de falha e erros, e diagnóstico e parâmetros mecânicos de fratura. Dentro destas subáreas são empregados

diferentes tipos de métodos de AI, cinco deles foram abordados: Rede Bayesiana, Redes Neurais Artificiais, Algoritmo Genético, Lógica Fuzzi e Raciocínio Baseado em Casos.

## CAPÍTULO III

### COMPORTAMENTO DINÂMICO DE MÁQUINAS ROTATIVAS

Modelos matemáticos para estimar a posição e profundidade de trincas em eixos rotativos têm sido vastamente utilizados ao longo dos anos por diversos autores, como já descritos em tópicos anteriores. Dentre as metodologias empregadas, a que têm ganhado maior destaque é o método dos elementos finitos devido às suas aplicabilidades e facilidade de implementação. Neste capítulo será apresentada a formulação para a representação matemática dos componentes mais comuns de uma máquina rotativa.

Nesta formulação, as equações que descrevem o comportamento dinâmico de um rotor são obtidas a partir das energias envolvidas (cinética e de deformação) e do trabalho virtual das forças externas para cada componente do sistema (LALANNE; FERRARIS, 1998).

Considera-se que o rotor é composto por um eixo flexível, um disco rígido acoplado e suportado por mancais de rolamento. A Eq. (3.1) é uma equação diferencial que descreve numericamente o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa (LALANNE; FERRARIS, 1998).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{D} + \Omega\mathbf{D}_g]\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \dot{\Omega}\mathbf{K}_{st}]\mathbf{q} = \mathbf{W} + \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_m \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{D}$  é a matriz de amortecimento (amortecimento proporcional devidamente somado ao amortecimento associado aos mancais),  $\mathbf{D}_g$  é a matriz do efeito giroscópico,  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez e  $\mathbf{K}_{st}$  representa o enrijecimento do sistema quando em regime transiente (matrizes obtidas pelo método dos elementos finitos). Todas estas matrizes são associadas às partes girantes da máquina, tais como o disco e o eixo. O vetor de deslocamentos é representado por  $\mathbf{q}$  e a velocidade de rotação é dada por  $\Omega$ .  $\mathbf{W}$  representa

a força peso,  $\mathbf{F}_u$  as forças de desbalanceamento e  $\mathbf{F}_m$  é o vetor das forças produzidas pelos mancais a fim de suportar o eixo.

### 3.1 Modelagem dos elementos constituintes do rotor

Para determinar as matrizes associadas à energia cinética ( $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}_g$  e  $\mathbf{K}_{st}$ ) e à energia de deformação ( $\mathbf{K}$ ) é necessário primeiro avaliar as energias provenientes de cada elemento separadamente e aplicá-las nas equações de Lagrange (Eq. (3.2)).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i} = Q_i \quad (3.2)$$

onde  $T$  representa a soma das energias cinéticas,  $U$  é a energia de deformação do eixo e  $Q_i$  representa os esforços generalizados.

#### 3.1.1 Eixo

O eixo é modelado como uma viga de seção transversal circular e com diâmetro constante. Considera-se que o elemento de eixo possui tamanho  $L$ , dois nós e oito graus de liberdade, sendo quatro deslocamentos ( $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w_1$  e  $w_2$ ) e quatro rotações ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ ) conforme ilustra a Fig. 3.1. As coordenadas fixas são representadas por  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e o elemento é caracterizado pelas suas energias cinética e de deformação.

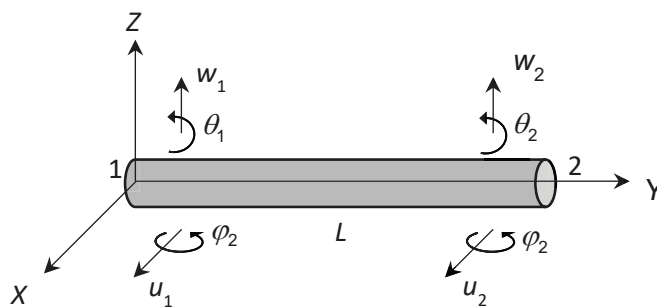


Figura 3.1 - Graus de liberdade (GDL) associados ao elemento finito construído para representar o eixo (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).

Segundo Lalanne e Ferraris (1998), a relação entre os deslocamentos e as rotações podem ser expressas conforme as Eqs. (3.3) e (3.4).



$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.3)$$

$$\varphi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.4)$$

O vetor de deslocamentos nodais pode, portanto, ser escrito conforme a Eq. (3.5).

$$\mathbf{q} = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \varphi_2\}^t \quad (3.5)$$

Os deslocamentos em função dos eixos correspondentes  $X$  e  $Z$ , podem ser separados em dois vetores de acordo com as Eqs. (3.6) e (3.7).

$$\mathbf{q}_u = \{u_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ \varphi_2\}^t \quad (3.6)$$

$$\mathbf{q}_w = \{w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2\}^t \quad (3.7)$$

O campo de deslocamentos transversais dentro do elemento é criado a partir de um polinômio de terceiro grau. Assim,

$$u = \mathbf{N}_1 \mathbf{q}_u \quad (3.8)$$

$$w = \mathbf{N}_2 \mathbf{q}_w \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  são os vetores dos coeficientes das funções de forma do elemento de viga em flexão e são apresentados pelas Eqs. (3.10) e (3.11).

$$\mathbf{N}_1 = \left\{ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \quad -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \quad \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right\} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{N}_2 = \left\{ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \quad y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \quad -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right\} \quad (3.11)$$

A energia cinética do eixo pode então ser obtida através da Eq. (3.12).

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho l L \Omega^2 + 2\rho l \Omega \int_0^L \dot{\phi} \theta dy \quad (3.12)$$

onde,  $\rho$  é a densidade,  $S$  é a área de sessão transversal do eixo e  $I$  é o momento de inércia de área.

Substituindo as Eqs. (3.8) a (3.11) na Eq. (3.12), obtém-se a energia cinética para o eixo na sua forma compacta, conforme mostra a Eq. (3.13).

$$\begin{aligned} T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{\mathbf{q}}_u^t \mathbf{N}_1^t \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^t \mathbf{N}_2^t \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}}_w) dy + \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left( \dot{\mathbf{q}}_u^t \frac{d\mathbf{N}_1^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_1}{dy} \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^t \frac{d\mathbf{N}_2^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \dot{\mathbf{q}}_w \right) dy + \\ & + \rho l L \Omega^2 - 2\rho l \Omega \int_0^L \dot{\mathbf{q}}_u^t \frac{d\mathbf{N}_1^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \dot{\mathbf{q}}_w dy \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aplicando a equação de Lagrange (Eq. (3.2)) na equação da energia cinética do eixo, chega-se à expressão apresentada na Eq. (3.14).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_s}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T_s}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_T) \ddot{\mathbf{q}} + \Omega \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}} + \Omega \dot{\mathbf{K}}_{st} \mathbf{q} \quad (3.14)$$

onde as matrizes  $\mathbf{M}_s$ ,  $\mathbf{M}_T$ ,  $\mathbf{D}_s$  e  $\mathbf{K}_{st}$  são apresentadas nas Eqs. (3.15) a (3.18).

$$\mathbf{M}_s = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{M}_T = \frac{\rho l}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{\rho l}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{K}_{st} = \frac{\rho l}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde a matriz  $\mathbf{M}$  da Eq. (3.1) é resultado da soma das matrizes  $\mathbf{M}_s$  e  $\mathbf{M}_T$ .

A energia de deformação para o eixo simétrico é obtida com base nas tensões ( $\sigma$ ) e deformações ( $\varepsilon$ ) desenvolvidas. De acordo com a Fig. 3.2, pode-se definir a deformação longitudinal mostrada na Eq. (3.19) de um ponto arbitrário  $B$  no eixo.

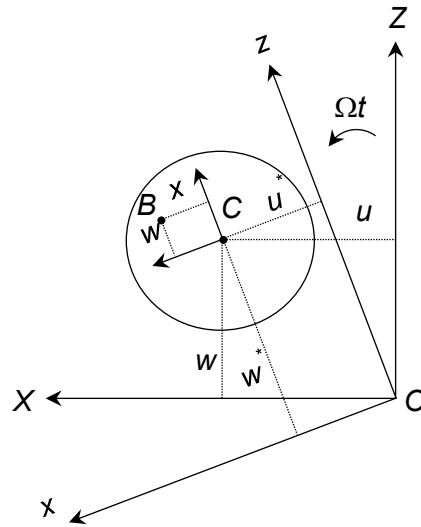


Figura 3.2 - Representação de um ponto arbitrário B (Fonte: Lalanne e Ferraris (1998)).

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (3.19)$$

onde  $u$  e  $w$  são os deslocamentos em coordenadas fixas relacionados aos eixos  $X$  e  $Z$ , respectivamente,  $u^*$  e  $w^*$  são os deslocamentos para as coordenadas rotativas  $x$  e  $z$  respectivamente (veja as Eqs. (3.20) e (3.21)).

$$u^* = u \cos(\Omega t) - w \sin(\Omega t) \quad (3.20)$$

$$w^* = u \sin(\Omega t) + w \cos(\Omega t) \quad (3.21)$$

A Energia de deformação para o eixo pode ser calculada a partir da Eq. (3.22).

$$U = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon^t \sigma dV \quad (3.22)$$

Através da relação entre tensão e deformação da Lei de Hooke (veja a Eq. (3.23)), pode-se reescrever a Eq. (3.22), conforme mostra a Eq. (3.24).

$$\sigma = E \varepsilon \quad (3.23)$$

$$U = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon^t \varepsilon dV \quad (3.24)$$

Substituindo a Eq. (3.19) na Eq. (3.24), obtém-se:

$$\begin{aligned} U &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left( -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[ x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \end{aligned} \quad (3.25)$$

De acordo com Lalanne e Ferraris (1998), ao considerar a simetria da sessão transversal do eixo com respeito as direções  $X$  e  $Z$ , e as relações de momentos de inércia de área conforme apresentado pela Eq. (3.26), a Eq. (3.25) é reescrita como a Eq. (3.27).

$$\begin{aligned} I_x &= \int_S z^2 dS & \int_S xz dS &= 0 \\ I_z &= \int_S x^2 dS \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.27)$$

Considerando que  $I_x = I_z = I$  e substituindo as Eqs. (3.8) a (3.11), (3.20) e (3.21) na Eq. (3.27), chega-se à expressão da energia de deformação apresentada na Eq. (3.28), onde os efeitos da força axial não estão sendo levados em conta.

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \mathbf{q}_u^t \frac{d^2 \mathbf{N}_1^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \mathbf{q}_u + \mathbf{q}_w^t \frac{d^2 \mathbf{N}_2^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \mathbf{q}_w \right] dy \quad (3.28)$$

Aplicando a equação de Lagrange (Eq. (3.2)) na Eq. (3.28), conforme mostra a Eq. (3.29), obtém-se a matriz de rigidez apresentada pela Eq. (3.30).

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Kq} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{K} = k_L \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4 + \vartheta_Y)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2 - \vartheta_Y)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4 + \vartheta_Y)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2 - \vartheta_Y)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2 - \vartheta_Y)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4 + \vartheta_Y)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2 - \vartheta_Y)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4 + \vartheta_Y)L^2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde  $k_L$  é dado pela Eq. (3.31) e  $\vartheta_Y$  pela Eq. (3.32).

$$k_L = \frac{EI}{(1 + \vartheta_Y)L^3} \quad (3.31)$$

$$\vartheta_Y = \frac{12EI}{GS_r L^2} \quad (3.32)$$

sendo  $S_r$  a área reduzida da sessão transversal e  $G$  é o módulo de cisalhamento, dado pela Eq. (3.33) em função do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.33)$$

Esta matriz de rigidez (matriz  $\mathbf{K}$ ) leva em consideração o cisalhamento nas seções transversais durante a flexão, conforme o modelo de viga de Timoshenko.

### 3.1.2 Disco

O disco é representado conforme ilustra a Fig. 3.3 e é assumido como sendo rígido. Portanto apenas sua energia cinética é avaliada no modelo 1D do sistema.

O sistema de coordenadas fixas ( $R_0$ ) continua sendo representado pelos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e o sistema de coordenadas rotativas ( $R$ ) posicionado no centro no disco, representado pelos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Com quatro graus de liberdade, dois deslocamentos laterais ( $u$  e  $w$ ) e duas rotações ( $\theta$  e  $\varphi$ ), o vetor de deslocamentos nodais é representado pela Eq. (3.34).

$$\mathbf{q}_D = \{u \ w \ \theta \ \varphi\}^t \quad (3.34)$$

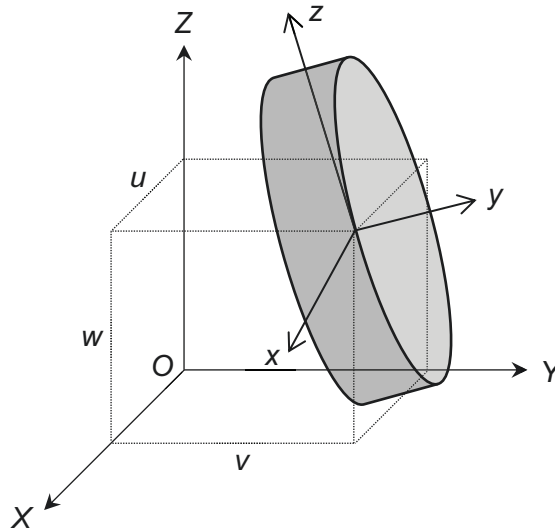


Figura 3.3 - Representação do elemento de disco (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).

Conforme Lalanne e Ferraris (1998) demonstra, a energia cinética para o elemento de disco pode ser calculada segundo a Eq. (3.35).

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (3.35)$$

onde  $m_D$  é a massa do disco,  $I_{Dx}$ ,  $I_{Dy}$  e  $I_{Dz}$  representam os momentos de inércia e  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  são as velocidades angulares (Eq. (3.36)), todos em relação aos eixos de coordenadas rotativas (x, y e z).

$$\boldsymbol{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

A Eq. (3.35) pode ainda ser simplificada como mostra a Eq. (3.37), assumindo que o disco é simétrico ( $I_{Dx} = I_{Dz} = I_D$ ), que os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  são suficientemente pequenos.

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_D (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\phi}\theta) \quad (3.37)$$

O efeito giroscópico é representado pelo termo  $I_{Dy}\Omega\dot{\varphi}\theta$ . Aplicando as equações de Lagrange (Eq. (3.2)) na energia cinética do disco, obtém-se a expressão apresentada pela Eq. (3.38).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \mathbf{q}_D} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_D + \Omega \mathbf{D}_D \dot{\mathbf{q}}_D + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{Dt} \mathbf{q}_D \quad (3.38)$$

onde as matrizes  $\mathbf{M}_D$ ,  $\mathbf{D}_D$  e  $\mathbf{K}_{Dt}$  são descritas pelas Eqs. (3.39) a (3.41).

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{D}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{K}_{Dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

sendo a matriz  $\mathbf{D}_g$  da Eq. (3.1) o resultado da soma das matrizes  $\mathbf{D}_S$  e  $\mathbf{D}_D$  nos graus de liberdade correspondentes.

Segundo Lalanne e Ferraris (1998), o disco pode ser incorporado no modelo de elementos finitos com três diferentes configurações, conforme mostra a Fig. 3.4.

Na primeira assume-se que o disco não altera a rigidez do eixo e as características de inércia do disco são concentradas no nó correspondente ao elemento finito do eixo. Na segunda, o disco altera a rigidez do eixo. O raio do eixo é acrescido em  $h_d/2$ , onde  $h_d$  corresponde à espessura do disco. As características do disco são concentradas no nó 2 (veja a Fig. 3.4). Se a espessura do disco for suficientemente grande, as características de inércia do disco devem ser distribuídas nos três nós, como mostra a configuração III. No presente trabalho, a configuração II foi utilizada para acoplar o disco ao eixo do sistema em análise.



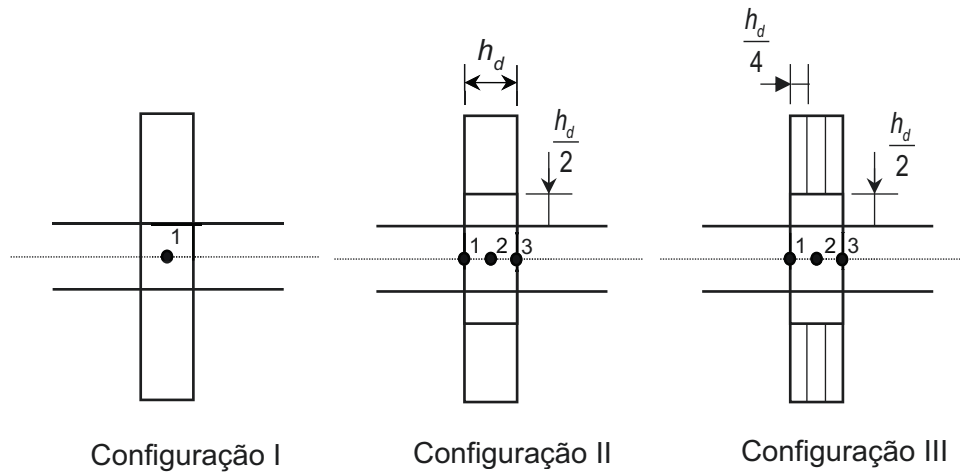


Figura 3.4 - Formas de incorporar o disco ao eixo em elementos finitos (Fonte: Lalanne e Ferraris (1998)).

### 3.1.3 Mancais

Assume-se que os mancais são de rolamento e possuem coeficientes de rigidez e amortecimento viscoso (Fig. 3.5). Estes coeficientes devem ser determinados através da solução de um problema inverso onde o resultado de simulações computacionais são aproximados de respostas de vibração experimentais do sistema em análise. Neste trabalho, a solução do problema inverso é realizada por um método de otimização chamado de Evolução Diferencial (do inglês *Differential Evolution* - DE) e será melhor apresentado no Anexo I.

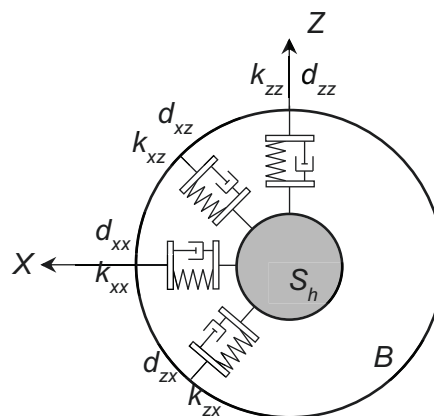


Figura 3.5 - Coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).

O trabalho virtual das forças produzidas pelos mancais e atuantes sobre o eixo pode ser escrito como mostra a Eq. (3.42).

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w \\ & -d_{xx}\dot{u}\delta u - d_{xz}\dot{w}\delta u - d_{zz}\dot{w}\delta w - d_{zx}\dot{u}\delta w \end{aligned} \quad (3.42)$$

A Eq. (3.42) pode também ser simplificada conforme a Eq. (3.43).

$$\delta W = F_{mu}\delta u + F_{mw}\delta w \quad (3.43)$$

onde  $F_{mu}$  e  $F_{mw}$  são as forças generalizadas e são expressas na forma matricial como mostra a Eq. (3.44).

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{mw} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xz} \\ d_{zx} & d_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

A Eq. (3.44) pode ser escrita de forma expandida com os graus de liberdade utilizados na formulação do elemento finito de eixo (graus de liberdade de um dos nós do elemento), conforme apresenta a Eq. (3.45).

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{m\theta} \\ F_{mw} \\ F_{m\varphi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{xx} & 0 & d_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{zx} & 0 & d_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

### 3.1.4 Massa de Desbalanceamento

A força de desbalanceamento é definida por uma massa  $m_u$  situada a uma distância  $d$  do centro geométrico do eixo que por sua vez têm coordenadas  $(u, w)$  em relação ao ponto  $O$ , conforme ilustra a Fig. 3.6. A massa  $m_u$  é assumida como sendo muito menor que a massa do rotor. A energia cinética  $T_U$  da massa  $m_u$  pode então ser calculada conforme mostra a Eq. (3.46).

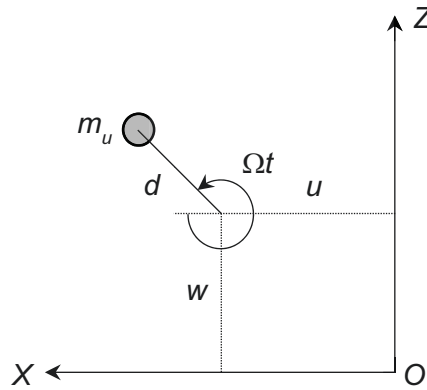


Figura 3.6 - Coordenadas relativas à massa de desbalanceamento (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \sin(\Omega t) - 2\Omega \dot{w} d \cos(\Omega t)) \quad (3.46)$$

onde o termo  $\Omega^2 d^2$  é constante e não tem influência nas equações. Assim, a expressão da energia cinética é escrita como:

$$T_u \approx m_u \Omega d (\dot{u} \sin(\Omega t) - \dot{w} \cos(\Omega t)) \quad (3.47)$$

O vetor de deslocamentos nodais para a massa de desbalanceamento é composto apenas pelos deslocamentos laterais, conforme mostra a Eq. (3.48).

$$\mathbf{q}_{unb} = \{u \ w\}^t \quad (3.48)$$

A Eq. (3.49) é resultado da aplicação das equações de Lagrange (veja a Eq. (3.2)) sobre a energia cinética da massa de desbalanceamento.

$$\frac{dT_u}{dt} \left( \frac{\partial T_u}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{unb}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial \mathbf{q}_{unb}} = \begin{bmatrix} -m_u d \dot{\Omega} \sin(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -m_u d \dot{\Omega} \cos(\Omega t) + m_u d \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

As forças de desbalanceamento nas direções X e Z podem então ser descritas como mostra a Eq. (3.50).

$$\begin{bmatrix} F_{unbx} \\ F_{unbz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_u d \dot{\Omega} \sin(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -m_u d \dot{\Omega} \cos(\Omega t) + m_u d \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## CAPÍTULO IV

### COMPORTAMENTO DINÂMICOS DE TRINCAS TRANSVERSAIS

Dependendo do tipo de trinca, diferentes mecanismos podem ser inseridos no modelo de elementos finitos do rotor e diferentes efeitos são então evidenciados. Sabnavis et al. (2004) fazem uma classificação das trincas quanto sua geometria e efeitos associados. Citam-se:

- Trincas transversais: são trincas perpendiculares ao eixo. Mais comuns e mais graves, pois reduzem a seção transversal e enfraquecem o rotor. Elas introduzem uma flexibilidade adicional devido à energia de deformação concentrada na proximidade da extremidade da trinca;
- Trincas longitudinais: são trincas paralelas à direção longitudinal do eixo;
- Trincas oblíquas: são trincas que possuem inclinação em relação ao eixo longitudinal do rotor. Influenciam no comportamento de torção de uma maneira bastante semelhante ao efeito das trincas transversais no comportamento lateral do eixo;
- Trincas *breathing*: trincas que se abrem quando submetidas a tensões de tração e se fecham quando submetidas a tensões de compressão. Esse comportamento resulta em não linearidades induzidas no comportamento vibratório do rotor;
- Trincas abertas: também chamadas de entalhes, permanecem sempre abertas e são mais fáceis de se reproduzir em laboratório. São conhecidas também como trincas *open*;
- Trincas de superfície: são trincas que se localizam na superfície do eixo. Normalmente, podem ser detectados por técnicas como líquido penetrante ou a inspeção visual;
- Trincas de subsuperfície: são trincas que não aparecem na superfície. Para serem detectadas é preciso a utilização de técnicas como ultrassom, raio X ou partículas magnéticas.

Para a simulação do comportamento da trinca, uma flexibilidade adicional do eixo é considerada no elemento finito que contém o dano. Grande parte dos modelos de trinca utilizam os princípios da mecânica da fratura linear para calcular a flexibilidade adicional mencionada. Dentre eles, citam-se o modelo de Gasch (1993), Mayes (Mayes e Davies, 1984) que se baseiam no mecanismo *breathing* para trincas transversais, além do modelo para trinca aberta (Papadopoulos e Dimarogonas, 1987). Os modelos que apresentam o comportamento *breathing*, devem incorporar a flexibilidade adicional em função da abertura da trinca, que pode ser de forma gradual (modelo de Mayes) ou de forma abrupta (modelo de Gasch). Ferreira (2010) explica que diferentemente do modelo de trinca que permanece sempre aberta (trinca aberta), o *breathing* representa o fenômeno através do qual são observadas aberturas e fechamentos consecutivos da trinca em função do carregamento cíclico a ela imposta e do próprio peso do eixo. Além dos conceitos da mecânica da fratura linear, esses modelos utilizam funções matemáticas que caracterizam essa condição.

Os princípios e o desenvolvimento teórico para a matriz de flexibilidade adicional devido à trinca foram desenvolvidos primeiramente por Dimarogonas e Paipetis (1986) para vigas retangulares e posteriormente estendidas à eixos circulares por Papadopoulos e Dimarogonas (1983). Os passos para a obtenção dessa matriz segundo esses autores serão apresentados na seção seguinte.

#### 4.1 Flexibilidade Adicional Introduzida pela Trinca

Considere um elemento de eixo com seis graus de liberdade por nó, de comprimento  $L$  e diâmetro  $D$ , contendo uma trinca transversal de profundidade  $\alpha$ , sujeito a carregamentos  $P_1$  e  $P_7$  (forças axiais),  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_8$  e  $P_9$  (forças cisalhantes),  $P_4$  e  $P_{10}$  (momentos de torção),  $P_5$ ,  $P_6$ ,  $P_{11}$  e  $P_{12}$  (momentos fletores), como mostra a Fig. 4.1.

Segundo Darpe; Gupta; Chawla (2004), o deslocamento ao longo da  $i$ -ésima coordenada pode ser determinado pelo segundo teorema de Castigliano conforme mostra a Eq. (4.1).

$$u_i = \frac{dU}{dP_i} \quad (4.1)$$

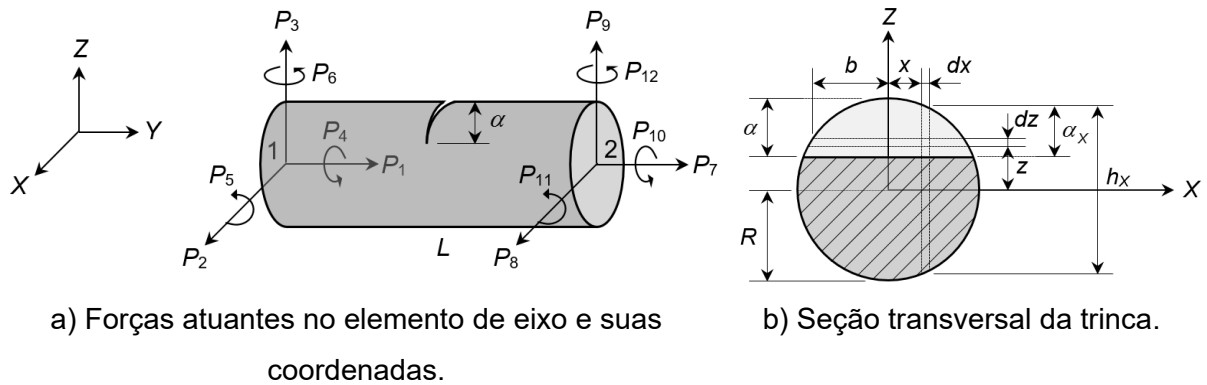


Figura 4.1 - Representação do elemento de trinca (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).

onde  $U$  é a energia de deformação total dada pela Eq. (4.2).

$$U = U^0 + U^c \quad (4.2)$$

sendo  $U^0$  é a energia de deformação do elemento de eixo sem trinca e  $U^c$  é a energia de deformação adicional devido à presença da trinca. Logo, a Eq. (4.1) pode ser reescrita conforme a Eq. (4.3).

$$u_i = \frac{\partial U^0}{\partial P_i} + \frac{\partial U^c}{\partial P_i} \quad (4.3)$$

Considerando as forças atuantes no elemento de eixo, a energia de deformação adicional devido à trinca  $U^c$  é representada conforme os conceitos da mecânica da fratura pela Eq. (4.4).

$$U^c = \int_{A_c} J(A_c) dA_c \quad (4.4)$$

onde  $J(A_c)$  é a função densidade de energia de deformação sobre a área do elemento correspondente à seção que contém a trinca (área não hachurada da Fig. 4.1) e é expressa conforme mostra a Eq. (4.5).

$$U^c = \int_{A_c} \frac{1-\nu}{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^6 K_{ii} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^6 K_{iii} \right)^2 + (1+\nu) \left( \sum_{i=1}^6 K_{iii} \right)^2 \right] dA_c \quad (4.5)$$

onde  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  e  $K_{III}$  são os fatores de intensificação de tensão para o modo I de tração, modo II de cisalhamento e modo III de torção, respectivamente, segundo ilustra a Fig. 4.2.

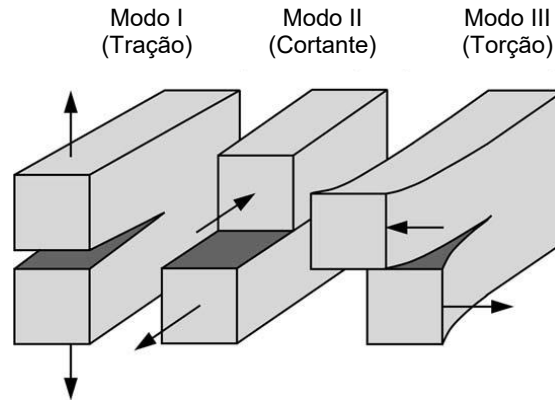


Figura 4.2 - Modos de carregamentos aplicados à uma trinca (Fonte: Anderson (2005)).

Os SIFs dependem da geometria do eixo e do modo de carregamento, podendo ser escritos conforme a Eq. (4.6) (ANDERSON, 2005).

$$K_{mi} = \sigma_i \sqrt{\pi \alpha_x} F_j \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) \quad (4.6)$$

onde as tensões na trinca,  $\sigma_i$ , são representadas pelas resultantes dos esforços aplicados pelas forças  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) e  $F_j$  ( $j = 1, 2, II$  e  $III$ ) são as funções de forma que dependem de  $\alpha_x$  (profundidade da trinca) e do diâmetro de um elemento infinitesimal de eixo (Fig. 4.1).

A flexibilidade adicional devido à presença da trinca é dada pela Eq. (4.7).

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U^c}{\partial P_i \partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[ \int_{A_c} J(A_c) dA_c \right] \quad (4.7)$$

Papadopoulos e Dimarogonas (1987) ressaltam que os SIFs são calculados na literatura considerando uma tira de espessura unitária. Como o valor da densidade de energia é escalar, é permissível integrá-lo ao longo de toda trinca assumindo que a profundidade da trinca é variável e os SIFs dados para uma faixa elementar.

O cálculo para a obtenção dos SIFs é mostrado pela Eq. (4.8), conforme descrito por Papadopoulos e Dimarogonas (1987).



$$\begin{aligned}
K_{I1} &= \sigma_1 \sqrt{\pi \alpha_x} F_1 \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) & \sigma_1 &= \frac{P_1}{\pi R^2} \\
K_{I5} &= \sigma_5 \sqrt{\pi \alpha_x} F_2 \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) & \sigma_5 &= \left( \frac{4P_5}{\pi R^4} \right) \sqrt{(R^2 - x^2)} \\
K_{I6} &= \sigma_6 \sqrt{\pi \alpha_x} F_1 \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) & \sigma_4 &= \left( \frac{4P_6}{\pi R^4} \right) x \\
K_{I2} &= K_{I3} = K_{I4} = 0 \\
K_{II3} &= \sigma_{II3} \sqrt{\pi \alpha_x} F_{II} \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) & \sigma_{II3} &= \frac{kP_3}{\pi R^2} \\
K_{II4} &= \sigma_{II4} \sqrt{\pi \alpha_x} F_{II} \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) & \sigma_{II4} &= \left( \frac{2P_4}{\pi R^4} \right) x \\
K_{II1} &= K_{II2} = K_{II5} = K_{II6} = 0 \\
K_{III2} &= \sigma_{III2} \sqrt{\pi \alpha_x} F_{III} \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) & \sigma_{III2} &= \frac{kP_2}{\pi R^2} \quad k = \frac{6(1+\nu)}{(7+6\nu)} \\
K_{III4} &= \sigma_{III4} \sqrt{\pi \alpha_x} F_{III} \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) & \sigma_{III4} &= \left( \frac{2P_4}{\pi R^4} \right) \sqrt{(R^2 - x^2)} \\
K_{III1} &= K_{III3} = K_{III5} = K_{III6} = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Os fatores de forma  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_{II}$  e  $F_{III}$  são apresentados na Eq. (4.9).

$$\begin{aligned}
F_1 \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) &= \sqrt{\left( \frac{\tan \lambda}{\lambda} \right)} \left[ \frac{0.752 + 2.02(\alpha_x / h_x) + 0.37(1 - \sin \lambda)^3}{\cos \lambda} \right] \\
F_2 \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) &= \sqrt{\left( \frac{\tan \lambda}{\lambda} \right)} \left[ \frac{0.923 + 0.199(1 - \sin \lambda)^4}{\cos \lambda} \right] \\
F_{II} \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) &= \frac{1.122 - 0.561(\alpha_x / h_x) + 0.085(\alpha_x / h_x)^2 + 0.18(\alpha_x / h_x)^3}{\sqrt{[1 - (\alpha_x / h_x)]}} \\
F_{III} \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) &= \left( \sqrt{\left( \frac{\tan \lambda}{\lambda} \right)} \right) \\
\lambda &= \frac{\pi \alpha_x}{2h_x}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Substituindo as Eqs. (4.8) e (4.9) nas Eqs. (4.5) e (4.6), obtém-se os termos de flexibilidade adimensionais mostrados pela Eq. (4.10).

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{11} &= \frac{ER}{1-\nu^2} c_{11} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x} F_1^2(\bar{z}/\bar{h}_x) d\bar{x}d\bar{z} \\
\bar{c}_{15} &= \frac{ER^2}{1-\nu^2} c_{15} = \frac{8}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{z} \sqrt{(1-\bar{x}^2)} F_1(\bar{z}/\bar{h}_x) F_2(\bar{z}/\bar{h}_x) d\bar{x}d\bar{z} \\
\bar{c}_{16} &= \frac{ER^2}{1-\nu^2} c_{16} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x} \bar{z} F_1^2(\bar{z}/\bar{h}_x) d\bar{x}d\bar{z} \\
\bar{c}_{22} &= \frac{ER}{1-\nu^2} c_{22} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{z} F_{III}^2(\bar{z}/\bar{h}_x) d\bar{x}d\bar{z} \\
\bar{c}_{24} &= \frac{ER^2}{1-\nu^2} c_{24} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \sqrt{(1-\bar{x}^2)} \bar{z} F_{III}^2(\bar{z}/\bar{h}_x) d\bar{x}d\bar{z} \\
\bar{c}_{33} &= \frac{ER}{1-\nu^2} c_{33} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{z} F_{II}^2(\bar{z}/\bar{h}_x) d\bar{x}d\bar{z} \\
\bar{c}_{34} &= \frac{ER^2}{1-\nu^2} c_{34} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x} \bar{z} F_{II}^2(\bar{z}/\bar{h}_x) d\bar{x}d\bar{z} \\
\bar{c}_{44} &= \frac{ER^3}{1-\nu^2} c_{34} = \frac{8}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x}^2 \bar{z} F_{II}^2(\bar{z}/\bar{h}_x) + (1+\nu)(1-\bar{x}^2) \bar{z} F_{III}^2(\bar{z}/\bar{h}_x) d\bar{x}d\bar{z} \\
\bar{c}_{55} &= \frac{ER^3}{1-\nu^2} c_{55} = \frac{32}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{z} (1-\bar{x}^2) F_2^2(\bar{z}/\bar{h}_x) d\bar{x}d\bar{z} \\
\bar{c}_{56} &= \frac{ER^3}{1-\nu^2} c_{56} = \frac{32}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x} \bar{z} \sqrt{(1-\bar{x}^2)} F_1(\bar{z}/\bar{h}_x) F_2(\bar{z}/\bar{h}_x) d\bar{x}d\bar{z} \\
\bar{c}_{66} &= \frac{ER^3}{1-\nu^2} c_{66} = \frac{16}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x}^2 \bar{z} F_1^2(\bar{z}/\bar{h}_x) d\bar{x}d\bar{z}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= x/R \\
\bar{z} &= z/R \\
\bar{h}_x &= h_x/R \\
\bar{b} &= b/R \\
\bar{\alpha}_x &= \alpha_x/R
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Os limites das integrais da Eq. (4.10) podem ser calculados como mostra a Eq. (4.12).

$$\begin{aligned}
b &= \sqrt{[R^2 - (R - \alpha)^2]} \\
\bar{b} &= \sqrt{[1 - (1 - \bar{\alpha})^2]} \\
\alpha_x &= \frac{h_x}{2} - (R - \alpha) = \sqrt{(R^2 - x^2)} - (R - \alpha) \\
\bar{\alpha}_x &= \frac{\bar{h}_x}{2R} - \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) = \sqrt{(1 - \bar{x}^2)} - (1 - \bar{\alpha}) \\
h_x &= 2\sqrt{(R^2 - x^2)} \\
\bar{h}_x &= 2\sqrt{(1 - \bar{x}^2)}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

A matriz de flexibilidade nodal (Eq. (4.13)) para o elemento finito com trinca é dada pela soma da matriz de flexibilidade adicional nodal  $\mathbf{c}$ , apresentada pela Eq. (4.14), com a matriz de flexibilidade nodal  $\mathbf{c}_o$  do elemento sem trinca, conforme mostra Papadopoulos e Dimarogonas (1987).

$$\mathbf{c}_{ce} = [\mathbf{c}_o] + [\mathbf{c}] \tag{4.13}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{15} & \bar{c}_{16} \\ & \bar{c}_{22} & 0 & \bar{c}_{24} & 0 & 0 \\ & & \bar{c}_{33} & \bar{c}_{34} & 0 & 0 \\ & & & \bar{c}_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \bar{c}_{55} & \bar{c}_{56} \\ [sim. & & & & & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

O elemento finito adotado neste trabalho para representar o eixo possui dois nós com quatro GDLs por nó, conforme apresentado na seção 3.1.1. Logo, desconsiderando as forças axiais  $P_1$ ,  $P_7$  e os momentos  $P_4$ , e  $P_{10}$  da Fig.4.1, além dos modos de carregamento II e III (ver em Fig. 4.2) por serem menos expressivos comparados ao modo de carregamento I, a flexibilidade adicional nodal inserida no elemento de eixo devido à trinca expressa pela Eq. (4.15) é representada somente pelos coeficientes  $c_{55}$ ,  $c_{56}$  e  $c_{66}$ .

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & \bar{c}_{55} & \bar{c}_{56} \\ \text{sim.} & & & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Da mesma forma reduz-se a matriz de flexibilidade nodal do elemento sem trinca em conformidade com os GDLs utilizados conforme mostra a Eq. (4.16).

$$\mathbf{c}_o = \begin{bmatrix} \frac{L}{3} \left( 1 + \frac{\rho_Y}{4} \right) & 0 & 0 & -\frac{L}{2} \\ & \frac{L}{3} \left( 1 + \frac{\rho_Y}{4} \right) & \frac{L}{2} & 0 \\ & & L & 0 \\ \text{sim.} & & & L \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

## 4.2 Modelo para Trinca aberta

No modelo que considera uma trinca constantemente aberta, os coeficientes obtidos da inversão direta da matriz de flexibilidade nodal (Eq. (4.17)). são utilizados na formulação da matriz de rigidez da trinca (Eq. 4.18)).

$$\mathbf{K}_{ce} = \mathbf{c}_{ce}^{-1} \quad (4.17)$$

Desta forma é possível determinar a matriz de rigidez nodal para a trinca aberta, em coordenadas rotativas, através dos coeficientes  $\mathbf{K}_{ce}(1,1)$  e  $\mathbf{K}_{ce}(2,2)$  que são associados às rigidezes nas direções  $x$  e  $z$  no plano da trinca conforme apresentado pela Eq. (4.18).

$$\mathbf{k}_R = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ce}(1,1) & 0 \\ 0 & K_{ce}(2,2) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Segundo Darpe; Gupta; Chawla (2004), as transformações relativas ao sistema de coordenadas rotativas para fixas devem ser feitas conforme a Eq. (4.19). A matriz de transformação que utilizada para relacionar os sistemas de coordenadas é mostrada na Eq. (4.20).

$$\mathbf{k}_F = [\mathbf{T}_\theta][\mathbf{k}_R][\mathbf{T}_\theta]^t \quad (4.19)$$

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

onde  $\theta$  é a posição angular do eixo, dada pela velocidade de rotação  $\Omega$  multiplicado pelo tempo  $t$ . As matrizes de rigidez para eixo engastado em flexão pura nos planos XY e ZY assumem a forma apresentada pela Eq. (4.21).

$$\mathbf{K}_{XY} = \begin{bmatrix} k_F(1,1) & K_{ce}(1,4) \\ K_{ce}(4,1) & K_{ce}(4,4) \end{bmatrix} = \frac{12EI}{L^3(1+\vartheta_Y)} \begin{bmatrix} k_F(1,1) & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{(4+\vartheta_Y)}{12} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{K}_{ZY} = \begin{bmatrix} k_F(2,2) & K_{ce}(2,3) \\ K_{ce}(3,2) & K_{ce}(3,3) \end{bmatrix} = \frac{12EI}{L^3(1+\vartheta_Y)} \begin{bmatrix} k_F(2,2) & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{(4+\vartheta_Y)}{12} \end{bmatrix}$$

Para se obter as matrizes de rigidez do eixo livre (para cada plano) a partir das matrizes de rigidez do eixo engastado (Eq. (4.21)) faz-se uma nova transformação, conforme é mostrada na Eq. (4.22).

$$\mathbf{K}_{CEXY} = \frac{12EI}{L^3(1+\vartheta_Y)} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ L & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_F(1,1) & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{(4+\vartheta_Y)}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & L & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{K}_{CEZY} = \frac{12EI}{L^3(1+\vartheta_Y)} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_F(2,2) & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{(4+\vartheta_Y)}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez do elemento trincado, assumindo a trinca aberta ( $\mathbf{K}_{open}$  - Eq. (4.23)) de ordem  $8 \times 8$  é construída alocando os coeficientes de  $\mathbf{K}_{CEXY}$  e  $\mathbf{K}_{CEZY}$  conforme a ordem dos GDLs do eixo adotados (ver em Eq. (3.5)).

$$\mathbf{K}_{open} = \begin{bmatrix} K_{CEXY}(1,1) & 0 & 0 & K_{CEXY}(1,2) & K_{CEXY}(1,3) & 0 & 0 & K_{CEXY}(1,4) \\ 0 & K_{CEZY}(1,1) & K_{CEZY}(1,2) & 0 & 0 & K_{CEZY}(1,3) & K_{CEZY}(1,4) & 0 \\ 0 & K_{CEZY}(2,1) & K_{CEZY}(2,2) & 0 & 0 & K_{CEZY}(2,3) & K_{CEZY}(2,4) & 0 \\ K_{CEXY}(2,1) & 0 & 0 & K_{CEXY}(2,2) & K_{CEXY}(2,3) & 0 & 0 & K_{CEXY}(2,4) \\ K_{CEXY}(3,1) & 0 & 0 & K_{CEXY}(3,2) & K_{CEXY}(3,3) & 0 & 0 & K_{CEXY}(3,4) \\ 0 & K_{CEZY}(3,1) & K_{CEZY}(3,1) & 0 & 0 & K_{CEZY}(3,3) & K_{CEZY}(3,4) & 0 \\ 0 & K_{CEZY}(4,1) & K_{CEZY}(4,1) & 0 & 0 & K_{CEZY}(4,3) & K_{CEZY}(4,4) & 0 \\ K_{CEXY}(4,1) & 0 & 0 & K_{CEXY}(4,2) & K_{CEXY}(3,3) & 0 & 0 & K_{CEXY}(4,4) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

A hipótese de uma trinca aberta leva a um comportamento dinâmico semelhante ao de um rotor com momentos de inércia diferentes ao longo de duas direções perpendiculares. A trinca *breathing* assume momentos de inércia que variam como função da posição angular do eixo.

## CAPÍTULO V

### PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Neste capítulo são apresentados os detalhes acerca da construção da bancada para os testes experimentais. Inicialmente são mostradas as partes que compõem o sistema, suas características e propriedades. Em seguida são descritos os procedimentos e equipamentos utilizados para a avaliação do comportamento estático do eixo, através das medidas de deformação no entorno de uma trinca e os procedimentos e equipamentos para a avaliação do comportamento dinâmico, por meio de medidas de FRFs. Estes testes foram reproduzidos para diferentes profundidades de trinca, mantendo sempre as mesmas condições de contorno do sistema.

#### 5.1 Bancada de Testes

A Fig. 5.1 mostra a bancada de testes utilizada nos experimentos deste trabalho. Trata-se de um sistema em balanço composto por um eixo, um disco e dois mancais de rolamento. Inicialmente este sistema é assumido como saudável e posteriormente um corte é inserido na seção transversal para simular uma trinca. As propriedades físicas e geométricas do eixo (Fig. 5.2) são apresentadas na Tab. 5.1.

O disco rígido de aço está posicionado em uma das extremidades do eixo com auxílio de uma bucha cônica BLG® modelo BH304. O disco ainda conta com furos rosqueados (rosca M3) espaçados em 10° e distantes a 68 mm do centro do disco, conforme mostra a Fig. 5.3. Suas propriedades e dimensões são fornecidas na Tab. 5.2.

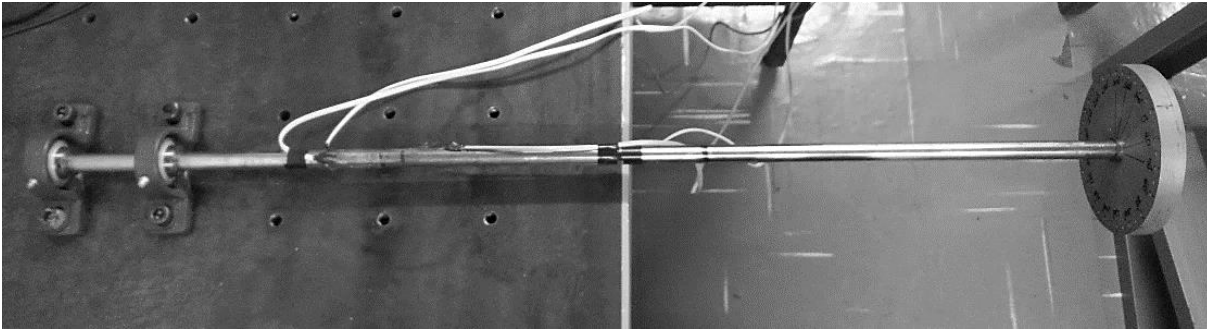


Figura 5.1 - Bancada de testes utilizada na obtenção dos resultados experimentais.

Tabela 5.1 - Propriedades do eixo

Parâmetros	Valores
Comprimento (m)	1.005
Diâmetro (m)	0.017
Densidade (Kg/m <sup>3</sup> )	7850
Módulo de Elasticidade (GPa)	205
Coefficiente de Poisson (-)	0.3



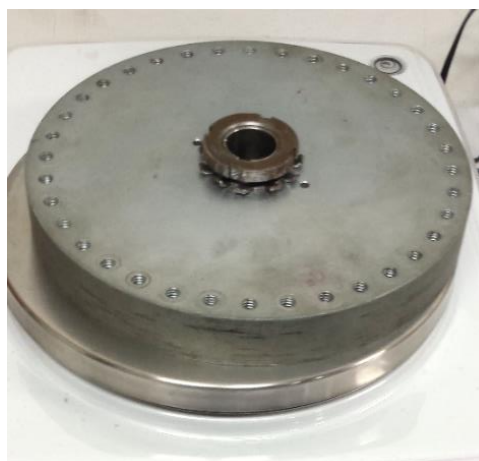
Figura 5.2 - Perfil do eixo de aço utilizado para bancada experimental.

Os mancais são de rolamento FRM<sup>®</sup> modelo Y203 (que são uma combinação de um rolamento blindado com única carreira de esferas e um mancal de ferro fundido), conforme apresentados nas Fig. 5.4 e 5.5.





a) Disco sem bucha



b) Disco com a bucha cônica BLG®

Figura 5.3 - Disco utilizado na montagem da bancada experimental.

Tabela 5.2 - Propriedades do disco

Parâmetros	Valores
Espessura (m)	0.02
Diâmetro interno (m)	0.017
Diâmetro externo (m)	0.150
Densidade (Kg/m <sup>3</sup> )	7850
Módulo de Young (GPa)	205
Coefficiente de Poisson (-)	0.3



Figura 5.4 - Conjuntos FRM® modelo Y203 V22.

## Características do conjunto FRM

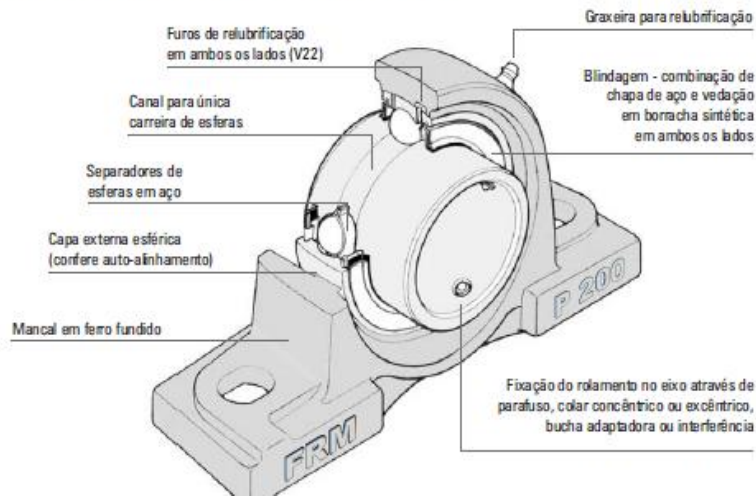


Figura 5.5 - Descrição dos componentes constituintes do conjunto FRM® (Fonte: Catálogo de Produtos FRM®).

As propriedades de rigidez e amortecimento desse conjunto (ver em Tab. 5.3) e o amortecimento proporcional ( $\gamma$  e  $\beta$ ;  $\mathbf{D}_p = \gamma\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ ) adicionado à matriz  $\mathbf{D}$  foram determinadas através da solução de um típico problema inverso através do método heurístico Evolução Diferencial desenvolvido por Storn e Price (1995) - este método de otimização é abordado em detalhes no Anexo I. Neste caso, o objetivo é minimizar a função apresentada pela Eq. (5.1).

$$DE_{OF} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\|FRF_{exp, i, j} - FRF_{num, i, j}\|}{\|FRF_{exp, i, j}\|} \quad (5.1)$$

onde  $N$  é o número de FRFs utilizadas no processo,  $n_p$  é o número de pontos avaliados das FRFs, ressalta-se que neste trabalho apenas os pontos próximos aos picos foram utilizados para comparação,  $FRF_{num}$  são as FRFs obtidas a partir do modelo 1D e a  $FRF_{exp}$  são as curvas experimentais correspondentes. Ressalta-se que as FRFs numéricas são obtidas através da resolução da equação do movimento (Eq. (3.1)) no domínio da frequência.

Tabela 5.3 - Propriedades de rigidez e amortecimento dos mancais

	Rigidez (N/m)	Amortecimento (Ns/m)	Amortecimento Proporcional	
$k_{xx} / b_1$	$1.30 \times 10^7$	$d_{xx} / b_1$	$5.13 \times 10^2$	$\gamma$ 1.00
$k_{zz} / b_1$	$2.50 \times 10^8$	$d_{zz} / b_1$	$5.00 \times 10^4$	$\beta$ $1.00 \times 10^{-5}$
$k_{xx} / b_2$	$3.35 \times 10^7$	$d_{xx} / b_2$	$9.75 \times 10^2$	
$k_{xx} / b_2$	$1.00 \times 10^8$	$d_{zz} / b_2$	$9.75 \times 10^3$	

## 5.2 Ferramentas e Equipamentos do Processo de Simulação da Trinca

A fim de simular uma trinca no eixo, foram feitos cortes transversais com diferentes profundidades utilizando uma microrretífica Dremel® 3000 (veja a Fig. 5.6). Neste caso, foi utilizado um disco de corte abrasivo de óxido de alumínio, com 38 mm de diâmetro e 0.5 mm de espessura, conforme mostrado na Fig. 5.7.



Figura 5.6 - Microrretífica Dremel® 3000 e acoplamento de eixo flexível (Fonte: Dremel®).



Figura 5.7 - Disco de corte abrasivo utilizado.

O processo de usinagem foi realizado através da fixação da microrretífica em uma estrutura posicionada lateralmente ao eixo, com mobilidade vertical para o manuseio do equipamento, como apresenta a Fig. 5.8. A escolha desse processo de usinagem foi limitada à impossibilidade de retirar o eixo de sua posição, de forma a manter o sistema nas mesmas condições iniciais, evitando assim um falso diagnóstico por meio da alteração de parâmetros.

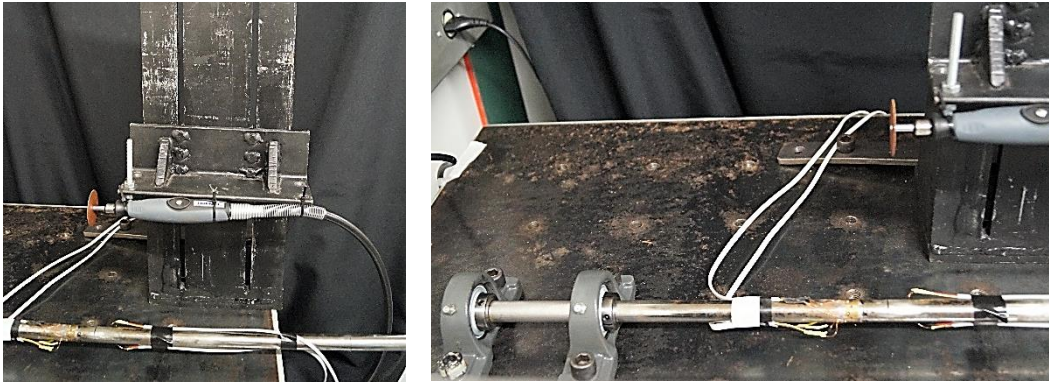


Figura 5.8 - Estrutura utilizada para fixação e manuseio da ferramenta de corte.

Inicialmente, um corte com aproximadamente 20% de profundidade foi efetuado. Posteriormente este corte foi estendido à 50% do diâmetro do eixo. Devido às características dimensionais do disco de corte e a correta operação do equipamento, mantendo a velocidade de rotação constante e uma boa precisão do avanço, foi possível simular a trinca com um corte regular de 1 mm de espessura, conforme mostra na Fig. 5.9.



Figura 5.9 - Corte para simulação de uma trinca com 20% de profundidade.

### 5.3 Procedimentos e Equipamentos da Análise Estática

Para a avaliação do comportamento estático do sistema foram utilizados cinco extensômetros elétricos, modelo EXCEL® PA-09-125AA-120L, com um fator de sensibilidade de 2.06. Desta forma, foram avaliadas as deformações no entorno do eixo, mais especificadamente nas proximidades da trinca. A Fig. 5.10 exemplifica como os extensômetros foram dispostos ao redor do eixo.



Figura 5.10 - Vista dos extensômetros colados nas proximidades da trinca.

Os extensômetros foram colados no eixo conforme mostra a Fig. 5.11, sendo quatro extensômetros (numerados de 1 a 4) posicionados à 310 mm do início do eixo e um extensômetro (número 5) posicionado abaixo da trinca à 340 mm do início do eixo. A Fig. 5.12 mostra a localização dos extensômetros ao redor do eixo.

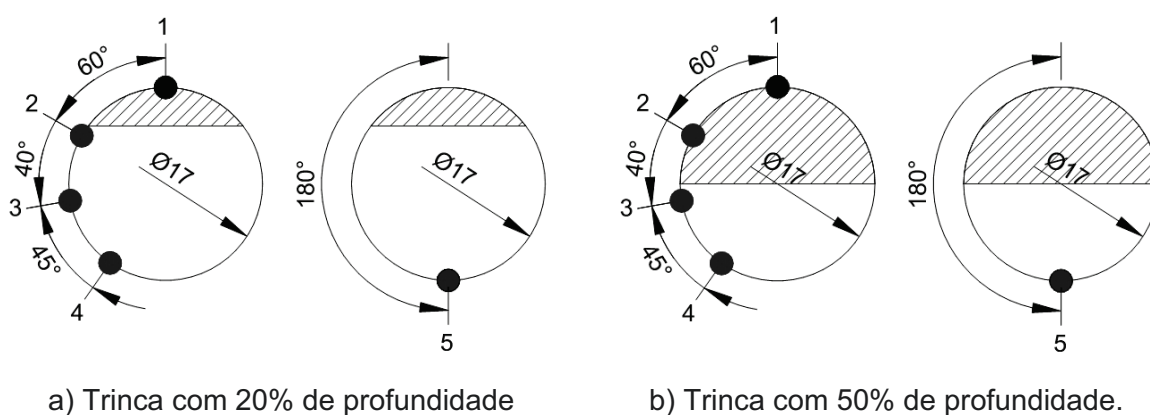


Figura 5.11 - Posições angulares dos extensômetros em função da direção de abertura da trinca.

As deformações foram obtidas a partir da aplicação de uma carga estacionária na extremidade do eixo para seis posições angulares do sistema saudável e 19 posições para o eixo com trinca (rotação de 20° em 20°). Como equipamento de aquisição das deformações foi utilizado o ADS 2000 da LYNX®, como apresentado na Fig. 5.13.

A conexão dos extensômetros aos canais correspondentes do ADS 2000 seguiu as configurações para ¼ de ponte (120Ω).

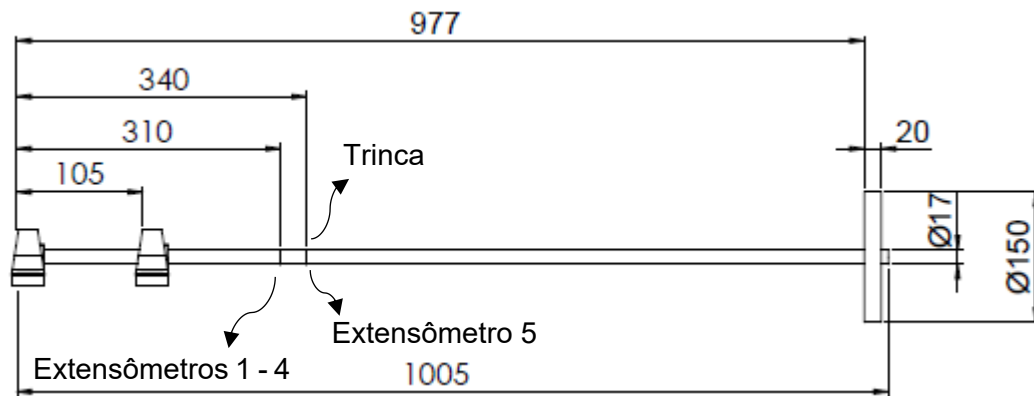


Figura 5.12 - Representação da bancada de testes e suas dimensões em mm.

Em seguida, foi realizado um processo de calibração dos extensômetros pelo software Lynx® AqDados 7.02. É importante ressaltar que para a calibração o eixo não deve estar sob a ação de cargas, e neste caso um contrapeso é aplicado na posição do disco. Foi também definida uma faixa de leitura em  $\mu\text{S}$  (micro strains).



Figura 5.13 - Equipamento de aquisição de dados de deformação ADS 2000 (Fonte: Catálogo de produtos LYNX®)

A fim de verificar o funcionamento dos extensômetros, um ensaio com carregamento progressivo (carga inicial de aproximadamente 0.5 Kg à carga final de 3.5 Kg) no eixo sem trinca foi realizado. Como esperado, um comportamento linear para as deformações pôde ser observado (veja a Fig. 5.14).

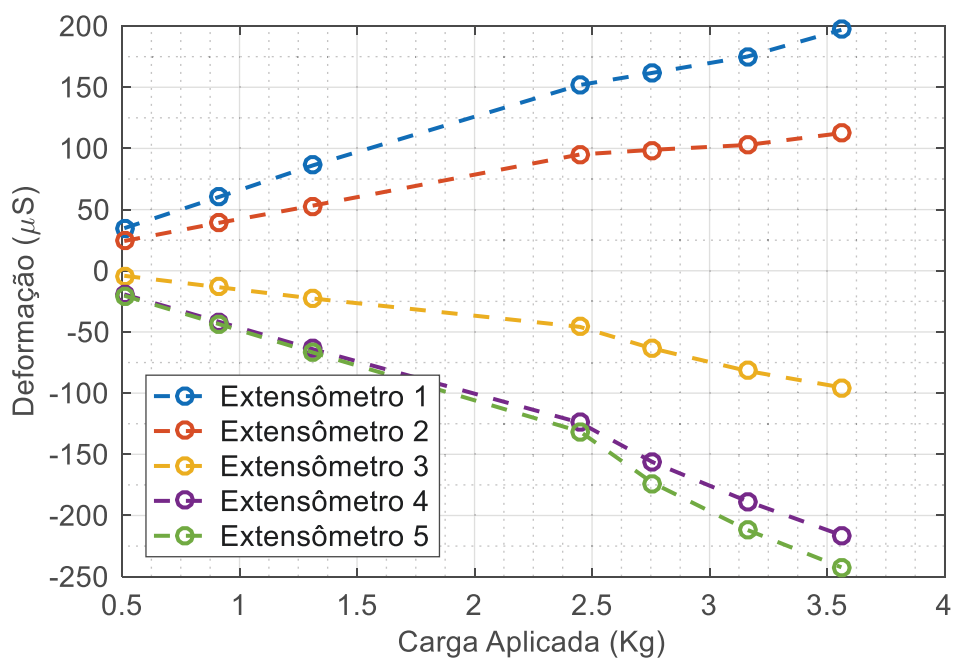


Figura 5.14 - Teste com carga progressiva para verificar o comportamento dos extensômetros.

#### 5.4 Procedimentos e Equipamentos da Análise Dinâmica

O comportamento dinâmico do eixo foi avaliado através de FRFs. As FRFs foram obtidas a partir de impactos aplicados no disco ao longo das direções X e Z, separadamente. Os impactos foram aplicados por um martelo instrumentado com célula de carga da PCB Piezotronics® (modelo 086C01) (ver em Fig. 5.15).



Figura 5.15 - Martelo PCB Piezotronics®.

Foi utilizado um acelerômetro da PCB Piezotronics® (modelo 352C22) posicionado à 610 mm do início do eixo e ao longo da mesma direção das forças de impacto ( $X$  e  $Z$ ), o que resultou em duas FRFs. Para a obtenção das mesmas, utilizou-se o analisador dinâmico de sinais da Agilent® (modelo 35670A), com a média de 20 sinais, numa faixa de aquisição de 0 a 100 Hz e com resolução de 800 linhas (passo de 0.125 Hz).

Ressalta-se que para o ajuste do modelo 1D de elementos finitos e a determinação dos parâmetros desconhecidos do mancal, foram feitas comparações entre as FRFs numéricas e experimentais, conforme mostrado pela Eq. (5.1).

A Fig. 5.16 ilustra o esquema dos ensaios dinâmicos para obtenção das FRFs.



Figura 5.16 - Representação de como foram obtidas as FRFs.

Foram também avaliadas as FRFs experimentais obtidas para diferentes posições angulares do eixo com a trinca de 50% de profundidade, comprovando a existência de uma assimetria na rigidez do eixo devido a trinca. Para isso, dois acelerômetros da PCB Piezotronics® foram posicionados ao longo das direções  $X$  e  $Z$ , com impacto sempre aplicado na direção  $Z$ . As FRFs foram medidas com variações de  $45^\circ$  resultando em 16 FRFs (as direções dos acelerômetros e dos impactos foram mantidas durante todos os testes).



## CAPÍTULO VI

### RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS

Neste capítulo são descritos os modelos numéricos 1D e 3D utilizados, assim como as considerações e parâmetros que foram empregados na construção dos mesmos. São também apresentados os resultados referentes às análises estáticas e dinâmicas realizadas no sistema. A análise dinâmica é realizada através da comparação entre as FRFs numéricas e experimentais do eixo sem danos e com trinca de 20% e 50% de profundidade. Na análise estática, a comparação entre as medidas de deformação no entorno da trinca é efetuada para as mesmas condições estruturais.

#### 6.1 Modelo 1D

A Fig. 6.1 apresenta o modelo 1D de elementos finitos para o sistema proposto e segue a configuração da bancada de testes apresentada no Capítulo V. Este modelo foi construído utilizando a formulação desenvolvida pelo Capítulo III, assumindo que o eixo é flexível e o disco é rígido. Neste caso, 38 elementos finitos de eixo foram utilizados. Os mancais foram inseridos nos nós #2 e #6, a trinca posicionada no elemento 14 (entre os nós #14 e #15) e o disco acoplado ao nó #37. As propriedades de cada elemento foram inseridas seguindo os dados apresentados na seção 5.1.

O modelo de trinca adotado seguiu a formulação apresentada no Capítulo IV, considerando a mesma aberta. A variação dos coeficientes de rigidez nas coordenadas fixas  $X$  e  $Z$  é evidenciada com a inclusão de uma trinca ao eixo, conforme mostrado pela Fig. 6.2. Ao comparar a condição de eixo sem trinca (Fig. 6.2(a)) com as condições de eixo com trinca de 20% de profundidade (Fig. 6.2(b)) e 50% de profundidade (Fig. 6.2(c)).

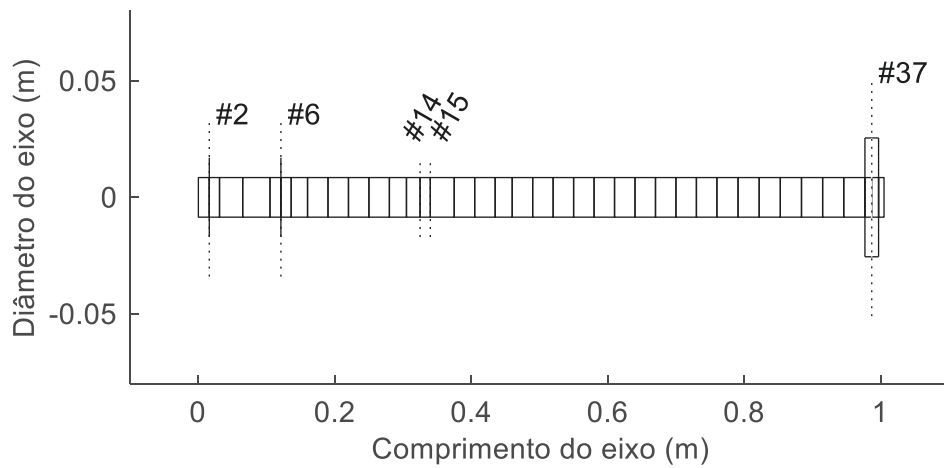
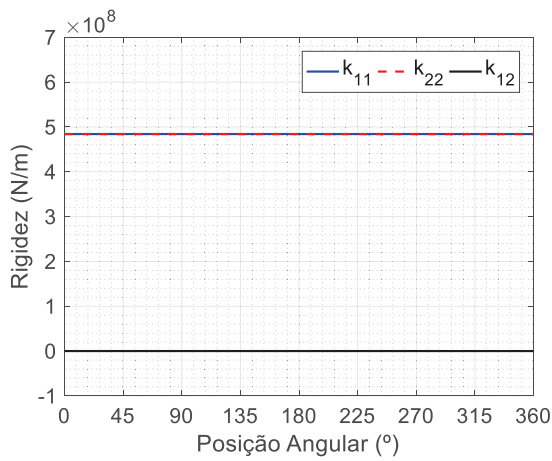
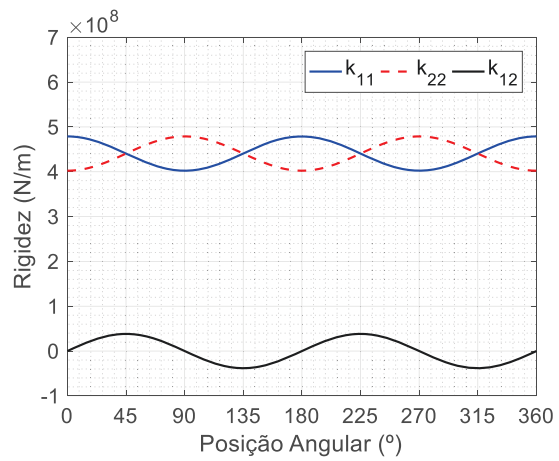


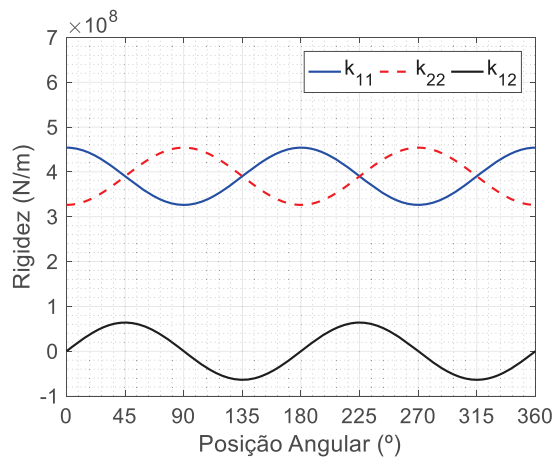
Figura 6.1 - Modelo em elementos finitos da bancada experimental.



a) Eixo sem dano



b) Eixo com trinca de 20% de profundidade



c) Eixo com trinca de 50% de profundidade

Figura 6.2 - Variação dos coeficientes de rigidez em coordenadas fixas  $k_F(1,1) = k_{11}$ ,  $k_F(2,2) = k_{22}$  e  $k_F(1,2) = k_{12}$  em função da posição angular para o eixo.

O tamanho do elemento de trinca no modelo 1D foi avaliado mediante à melhor aproximação correspondente aos resultados experimentais. A Tab. 6.1 apresenta a faixa de tamanho para o elemento de eixo com trinca no qual se obteve o menor erro relativo. Esse resultado corrobora com os resultados apresentados por Bachschmid; Pennacchi; Tanzi (2010) sobre a relação entre a profundidade de trinca e o comprimento do elemento associado a ela. Quanto maior a profundidade da trinca, maior deve ser o elemento finito correspondente.

Tabela 6.1 - Relação entre a profundidade de trinca e o comprimento do elemento de trinca

Profundidade de trinca ( $a/D$ ) (%)	Comprimento do elemento de trinca (m)
20	0.010-0.020
50	0.035-0.045

## 6.2 Modelo 3D

A Fig. 6.3 mostra o modelo 3D de elementos finitos para a bancada de testes desenvolvido no ambiente Ansys®. Neste caso, os mancais foram inseridos através de conexões do tipo *Body Ground (Bearing)*, que representam elementos elásticos bidimensionais usados para limitar o movimento relativo em determinadas direções. Semelhante a um sistema mola-amortecedor, a conexão *Bearing* possui características estruturais de rigidez e amortecimento. Os valores utilizados nestes parâmetros foram obtidos através da solução do problema inverso já mencionado (veja a Tab. 5.3).

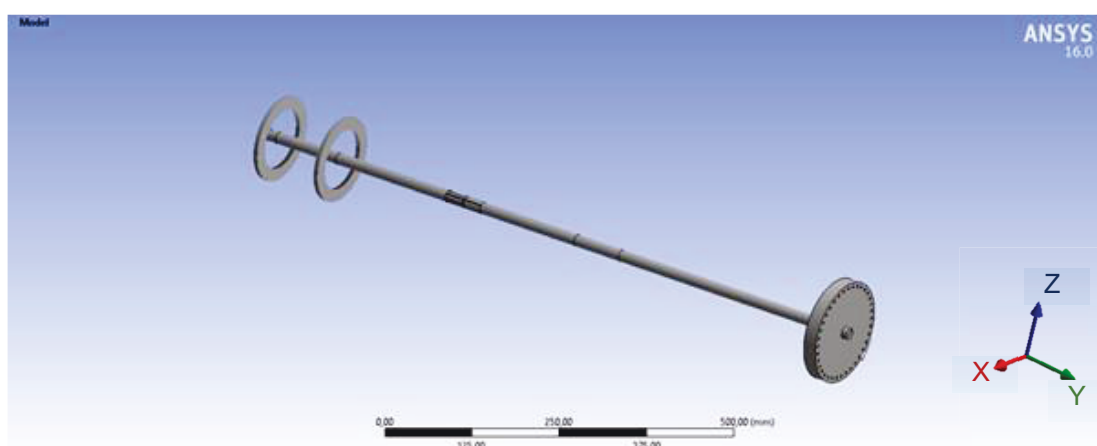


Figura 6.3 - Modelo 3D desenvolvido em Ansys®.

No eixo como um todo, foi criada uma malha através do método de varredura *sweep* com elementos sólidos hexaédricos e tetraédricos. Na região próxima à trinca a malha foi refinada para um tamanho de elemento igual a 1 mm, conforme apresentado pela Fig. 6.4.

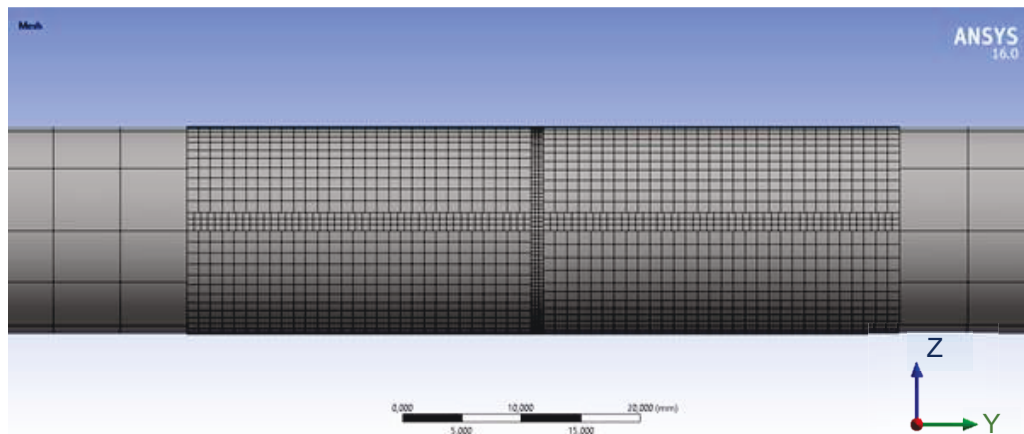


Figura 6.4 - Refinamento da malha na região da trinca.

Para comparação com os resultados experimentais do eixo trincado e com os resultados do modelo implementado em MatLab® (modelo 1D), um corte transversal foi incluído no eixo (profundidades de 20% e 50 % do diâmetro do eixo; veja as Figs.6.5 e 6.6). O modelo sem dano foi discretizado em 59117 elementos, enquanto os modelos com trinca de 20% e 50% de profundidade foram discretizados em 49713 e 47553 elementos, respectivamente.

As medidas de deformação foram obtidas através da solução estrutural estática com objetos tipo *Strain Probes* posicionados no eixo em conformidade com os extensômetros utilizados na bancada de testes.

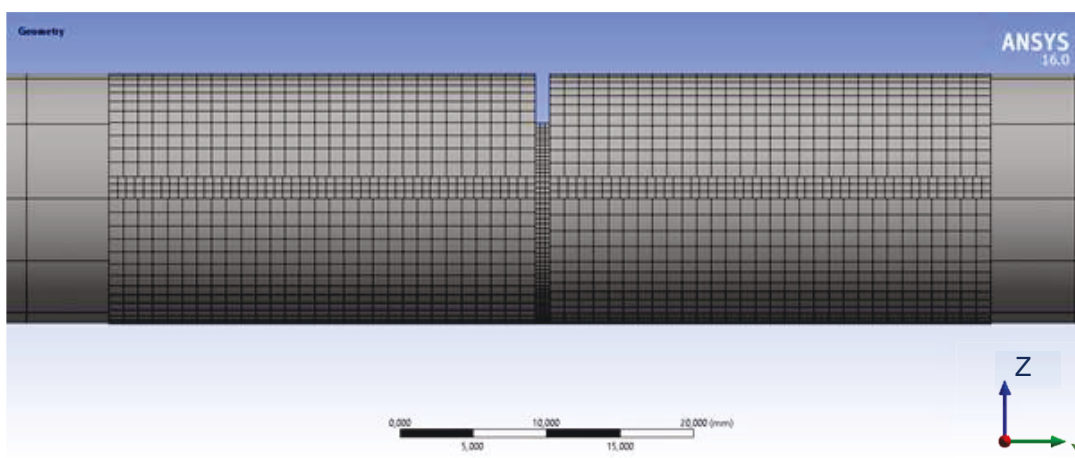


Figura 6.5 - Trinca de 20% de profundidade inserida no modelo 3D.

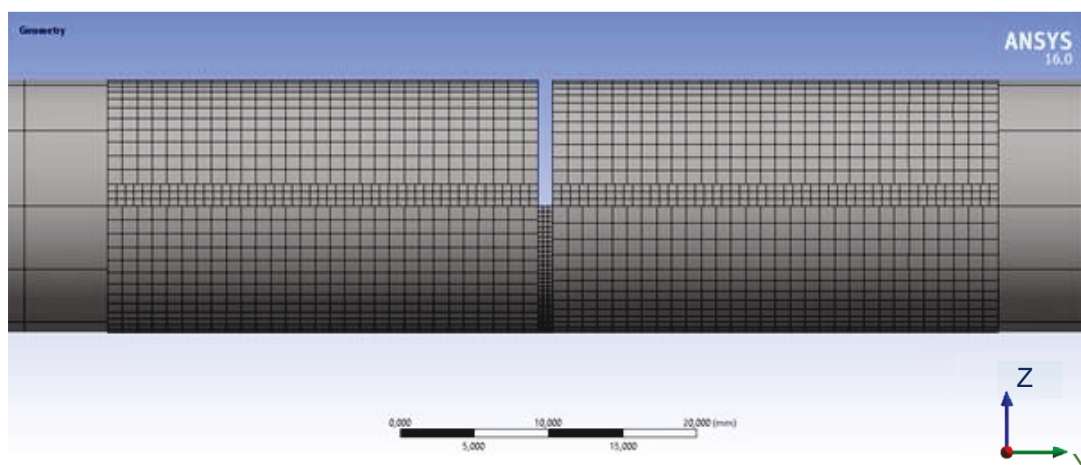


Figura 6.6 - Trinca de 50% de profundidade inserida no modelo 3D.

### 6.3 Validação dos modelos 1D e 3D

Uma vez construídos os modelos 1D e 3D, foi necessário ajustá-los a partir das FRFs experimentais do eixo sem trinca. Os resultados para os parâmetros dos mancais obtidos no ajuste são apresentados na Tab. 5.3. É importante ressaltar que o ajuste foi feito com base no modelo 1D. Os coeficientes de rigidez e amortecimentos identificados foram posteriormente incorporados no modelo 3D. As FRFs obtidas ao longo das direções horizontal e vertical (resposta medida na mesma direção que é aplicado o impacto) são mostradas pelas Figs. 6.7 e 6.8, respectivamente. As frequências naturais obtidas experimentalmente e pelos modelos 1D e 3D são mostradas na Tab. 6.2. Observa-se uma semelhança entre os resultados numéricos do modelo 1D e os experimentais, mostrando sua representatividade. O modelo 3D não apresentou uma boa correspondência com os dados experimentais na segunda e quarta frequências naturais.

Tabela 6.2 - Comparação dos valores das frequências naturais obtidas para o eixo sem danos

Frequência Natural (Hz)	Experimental	Modelo 1D	Erro (%)	Modelo 3D	Erro (%)
1ª (Direção X)	5.25	5.25	0.00	5.25	0.00
2ª (Direção Z)	5.375	5.375	0.00	6.00	11.62
3ª (Direção X)	64.00	64.00	0.00	63.50	0.76
4ª (Direção Z)	64.25	64.25	0.00	67.25	4.46

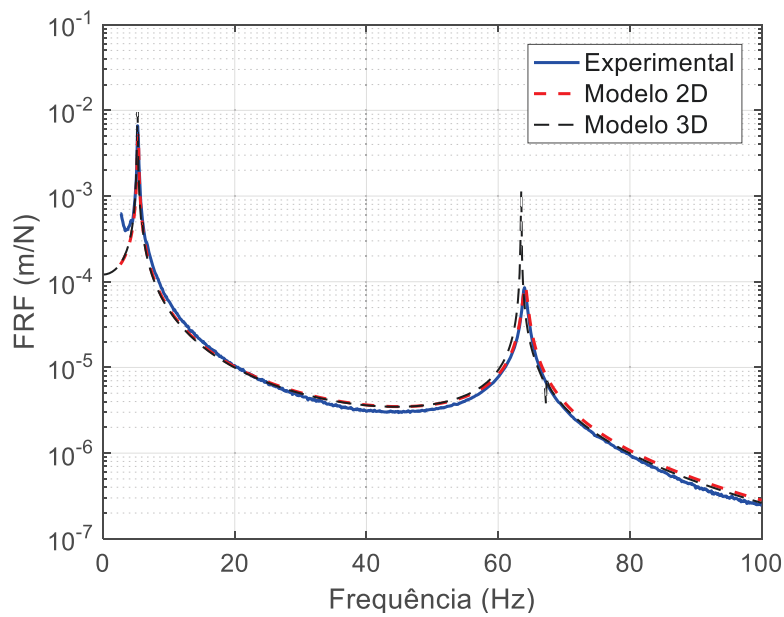


Figura 6.7 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção X para o eixo sem dano).

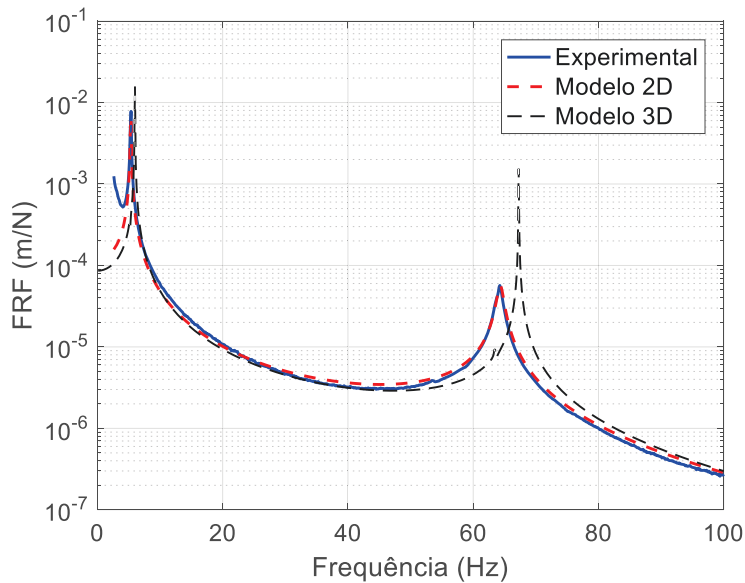


Figura 6.8 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção Z para o eixo sem dano).

Os erros referentes à diferença entre os resultados numéricos com o experimental são também mostrados na Tab. 6.2. Os modos de vibrar para a bancada de testes associados às frequências naturais apresentadas pelos modelos 1D e 3D são mostrados nas Figs. 6.9 e 6.10, respectivamente. Como esperado, as formas modais obtidas pelos dois modelos são similares.

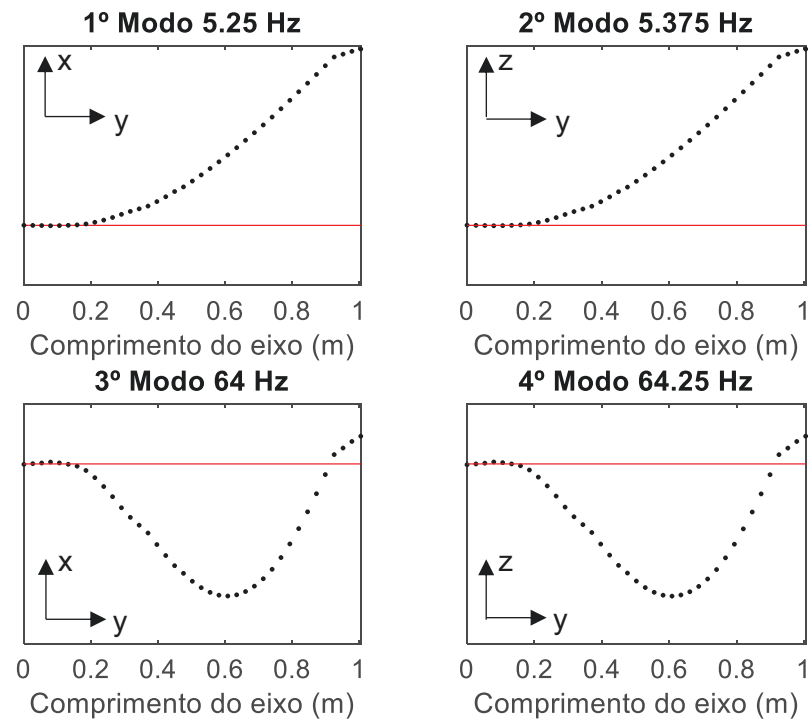


Figura 6.9 - Modos de vibrar do eixo segundo modelo 1D.

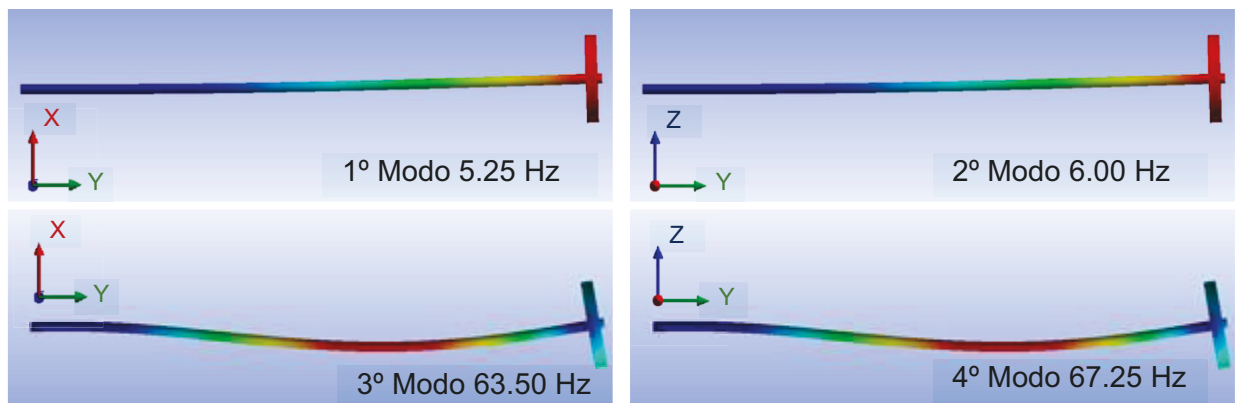


Figura 6.10 - Modos de vibrar do eixo segundo modelo 3D.

Ao inserir a trinca com 20% de profundidade no eixo, novas FRFs foram medidas como mostra as Figs. 6.11 e 6.12. Era esperado uma alteração quanto às frequências naturais do sistema, no entanto nenhuma mudança foi observada em nenhum dos modelos apresentados. Para verificar se a resolução em frequência utilizada teria influenciado o resultado, FRFs experimentais foram medidas na banda de 0 a 12.5 Hz com resolução de 0.0156 Hz. Desta forma, observou-se as mesmas frequências naturais para os casos com e sem trinca (veja as Figs. 6.13 e 6.14).

É interessante ressaltar que para esta configuração, uma discreta mudança nas amplitudes diferencia os gráficos da configuração sem dano.

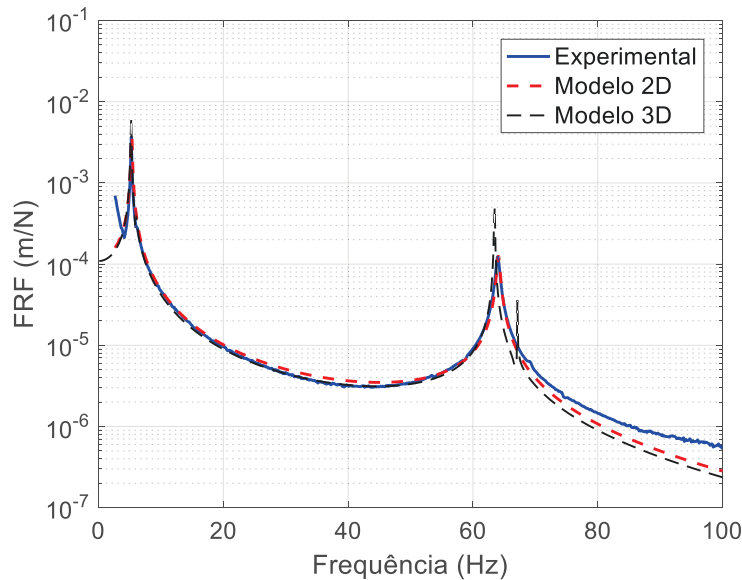


Figura 6.11 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção X para o eixo com trinca de 20% de profundidade).

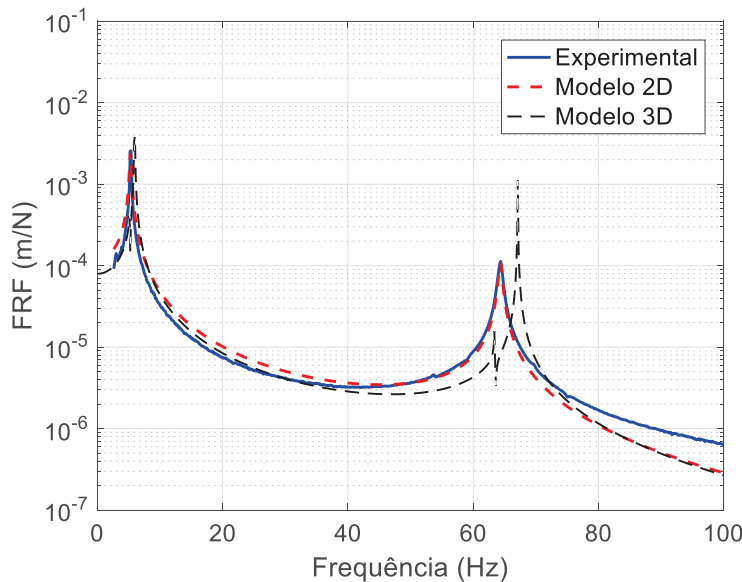


Figura 6.12 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção Z para o eixo com trinca de 20% de profundidade).

As Figs. 6.15 e 6.16 mostram as FRFs obtidas para o sistema com uma trinca de 50% de profundidade. Note que nesta configuração pequenas diferenças podem ser observadas devido à redução de 2.38% e 2.32% quanto à primeira e segunda frequência natural



experimental seguida pelos modelos 1D e 3D. No entanto nenhuma alteração é verificada quanto à terceira e quarta frequência natural (veja a Tab. 6.3).

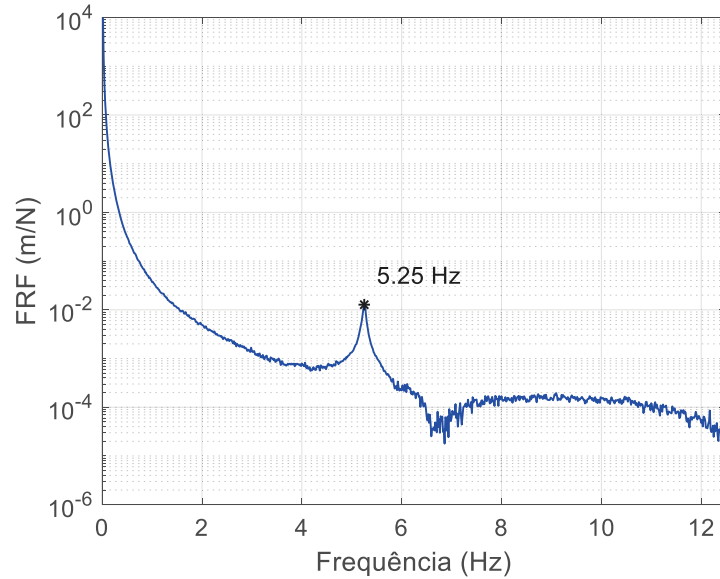


Figura 6.13 - FRF experimental para 1ª frequência natural (força de impacto ao longo da direção X para o eixo com trinca de 20% de profundidade).

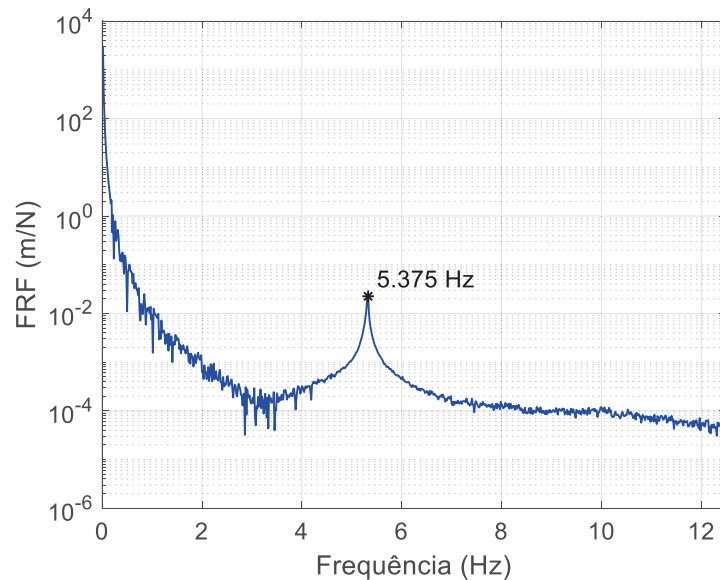


Figura 6.14 - FRF experimental para 2ª frequência natural (força de impacto ao longo da direção Z para o eixo com trinca de 20% de profundidade).

Como realizado para a trinca com 20% de profundidade, novas FRFs foram medidas para a faixa de frequência de 0 a 12.5 Hz com resolução de 0.0156 Hz. Os resultados obtidos são apresentados pelas Figs. 6.17 e 6.18.

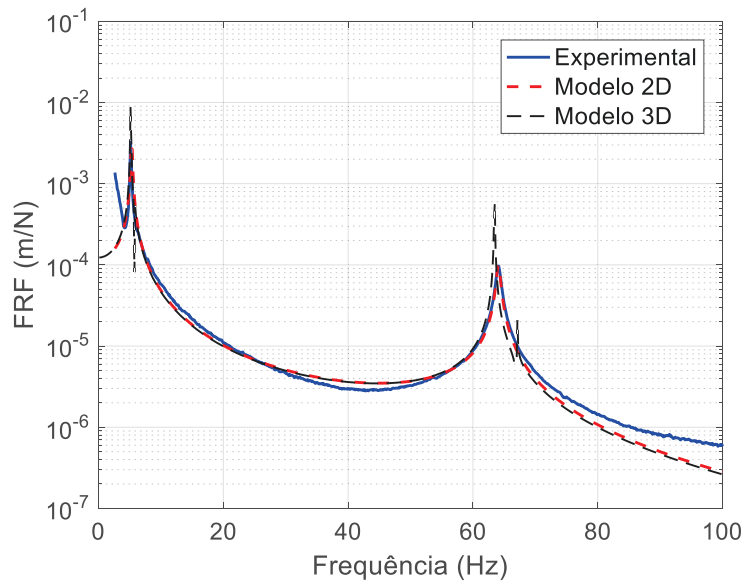


Figura 6.15 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção X para o eixo com trinca de 50% de profundidade).

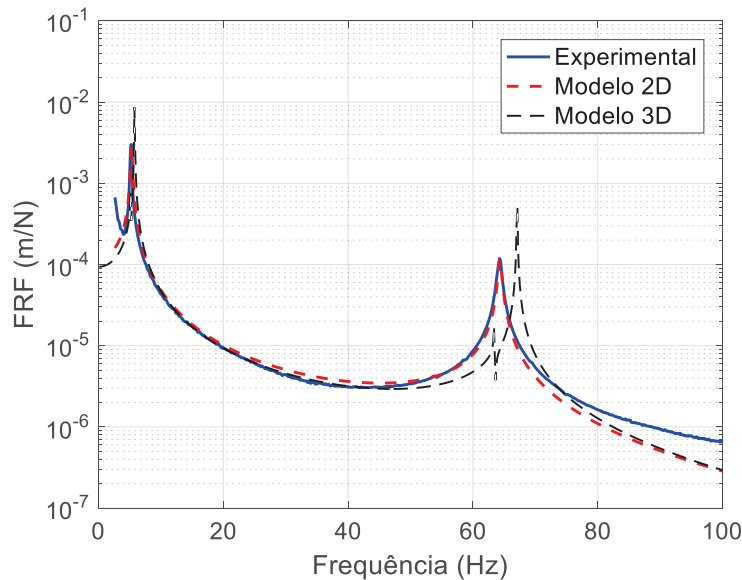


Figura 6.16 - Comparação entre a FRF experimental com as obtidas pelos modelos 1D e 3D (força de impacto ao longo da direção Z para o eixo com trinca de 50% de profundidade).

A Fig. 6.19 mostra a variação da primeira e segunda frequência natural do sistema, obtidas experimentalmente, em função da posição angular do eixo. Neste caso, a trinca com 50% de profundidade está presente no sistema. É possível observar que ocorre uma flutuação nos valores das frequências naturais como esperado, uma vez que em eixos simétricos axiais sem defeitos as frequências naturais devem ser independentes da posição angular.

Tabela 6.3- Comparação dos valores das frequências naturais obtidas para o eixo com 50% de trinca.

Frequência Natural (Hz)	Experimental	Modelo 1D	Erro (%)	Modelo 3D	Erro (%)
1ª (Direção X)	5.125	5.125	0.00	5.125	0.00
2ª (Direção Z)	5.25	5.25	0.00	5.75	9.52
3ª (Direção X)	64.00	64.00	0.00	63.50	0.78
4ª (Direção Z)	64.25	64.25	0.00	67.125	4.47

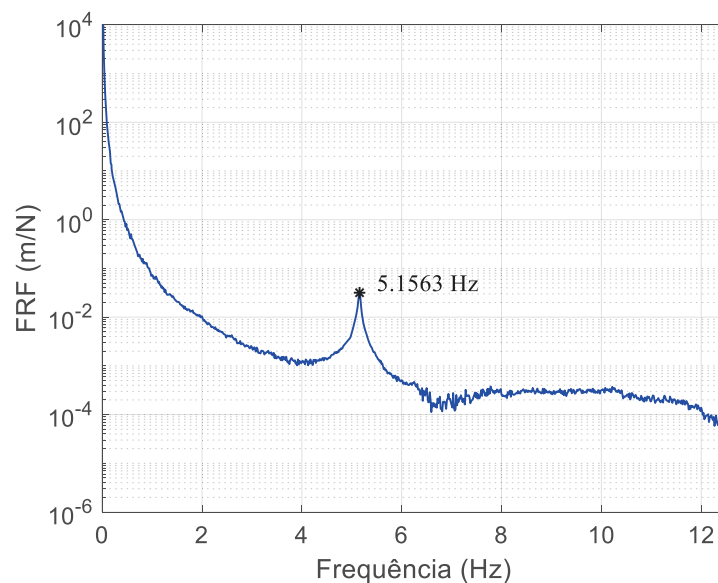


Figura 6.17 - FRF experimental para 1ª frequência natural (força de impacto ao longo da direção X para o eixo com trinca de 50% de profundidade).

#### 6.4 Análise Estática Através das Medidas de Deformação do Eixo

A Fig. 6.20 mostra a comparação entre as medidas experimentais de deformação obtidas pelos extensômetros dispostos conforme apresentado no Capítulo V e as medidas obtidas pelos modelos 1D e 3D para a configuração de eixo sem dano. Foram avaliadas sete posições angulares do eixo. O ângulo 0° indica que a trinca (ainda a ser inserida) e o extensômetro 1 estão voltados para cima. Os demais ângulos considerados seguiram sentido horário com relação a rotação do eixo. O peso do disco foi utilizado como carga estacionária. Neste caso um contrapeso de mesma magnitude foi aplicado para calibração dos extensômetros.

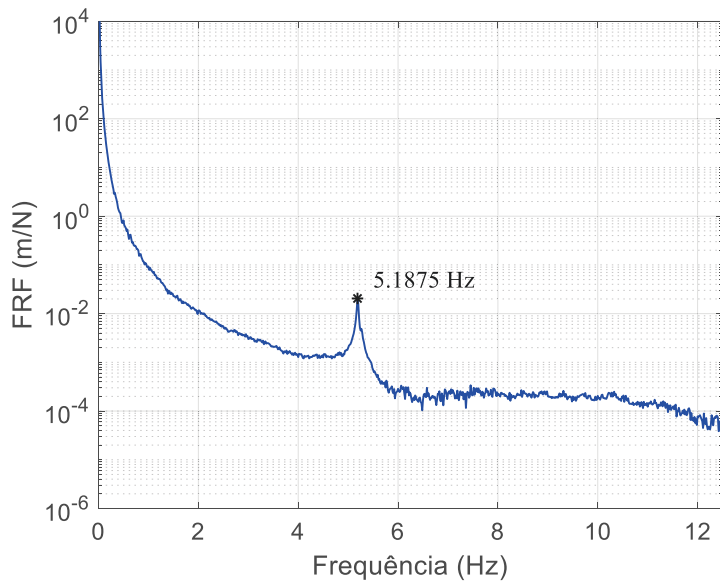


Figura 6.18 - FRF experimental para 2ª frequência natural (força de impacto ao longo da direção Z para o eixo com trinca de 50% de profundidade).

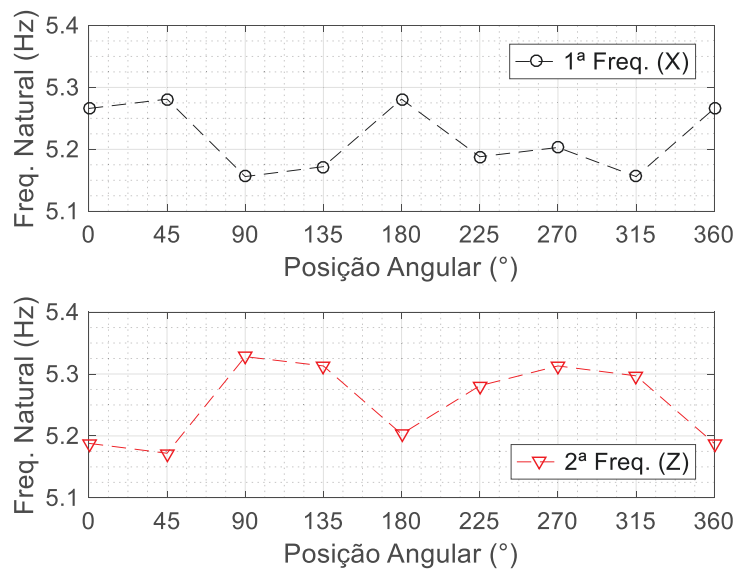
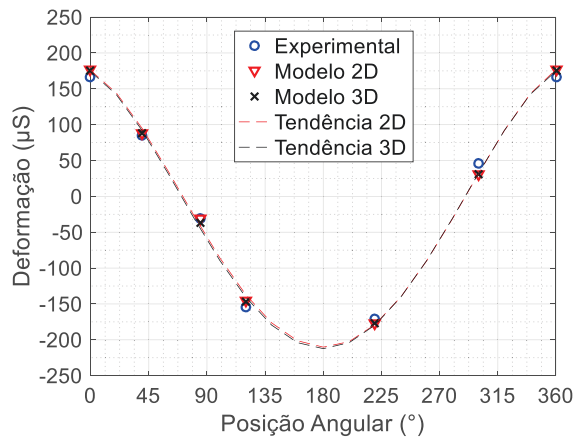


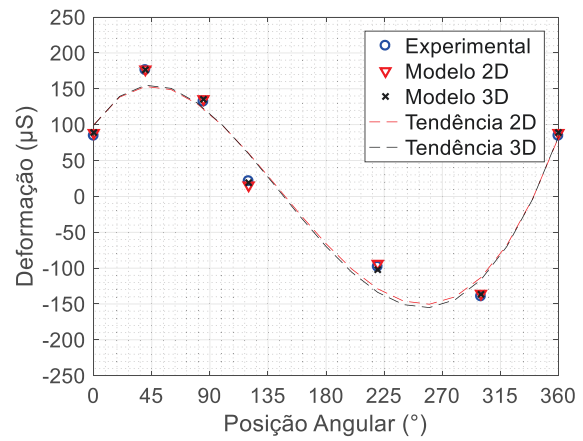
Figura 6.19 - Variação da 1ª e 2ª frequência natural com a posição angular do eixo.

Na Fig. 6.21 são mostrados os erros relativos das deformações obtidas pelos modelos 1D e 3D com referência aos valores experimentais. Algumas medidas apresentaram erros de até 45% que podem ser explicados pela alta sensibilidade dos extensômetros e pela ordem de deformação obtida ( $10^{-6}$ ). Para as análises dos modelos com uma trinca de 20% de profundidade, um número maior de medidas se fez necessário. A Fig. 6.22 apresenta os

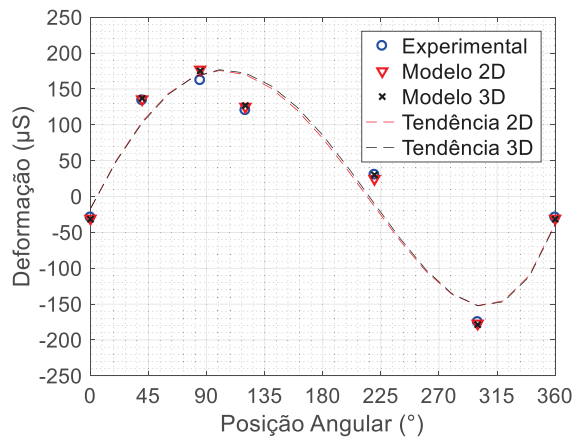
resultados para esta configuração e os erros dos modelos 1D e 3D referentes aos valores experimentais é mostrado na Fig. 6.23.



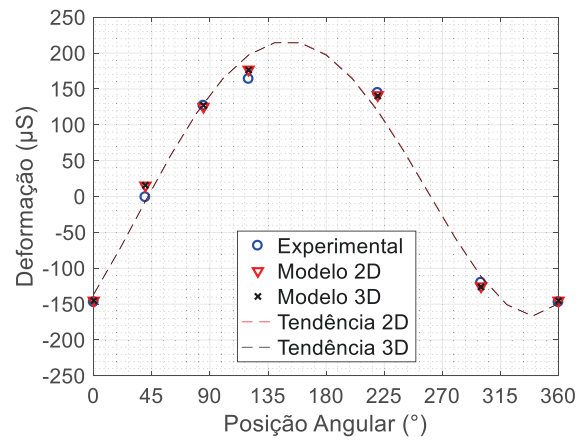
a) Extensômetro 1



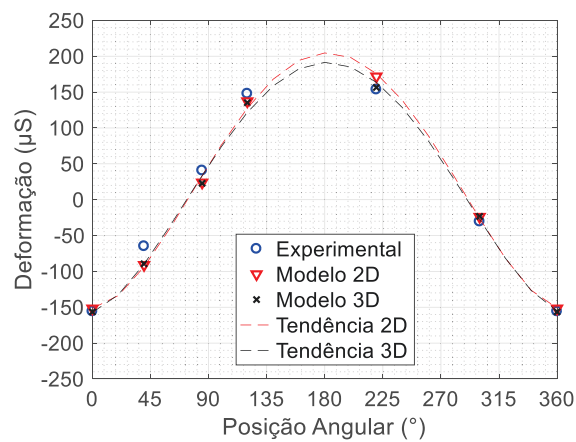
b) Extensômetro 2



c) Extensômetro 3



d) Extensômetro 4



e) Extensômetro 5

Figura 6.20 - Medidas de deformação do eixo sem dano.

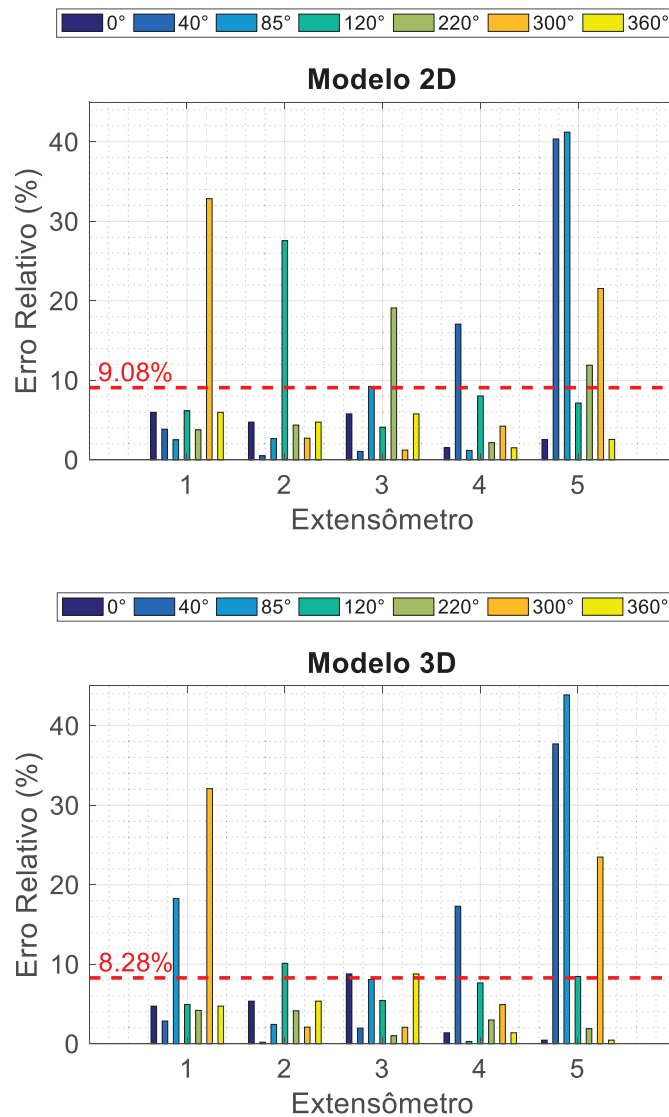
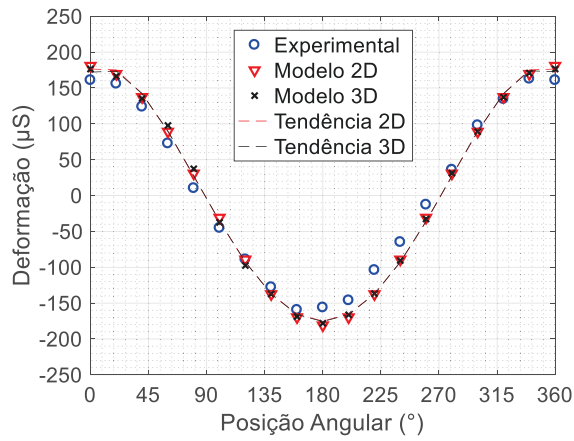


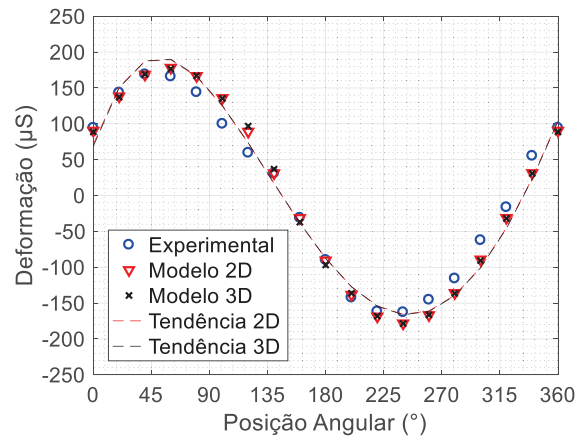
Figura 6.21 - Erros Relativos dos Modelos 1D e 3D para o eixo sem dano.

A Fig. 6.24 mostra as medidas de deformação obtidas para a o eixo com trinca de 50% de profundidade. Note que diferenças ainda maiores são evidenciadas devido aos efeitos não lineares predominantes nesta condição, principalmente no extensômetro 5 que está localizado na região oposta à trinca.

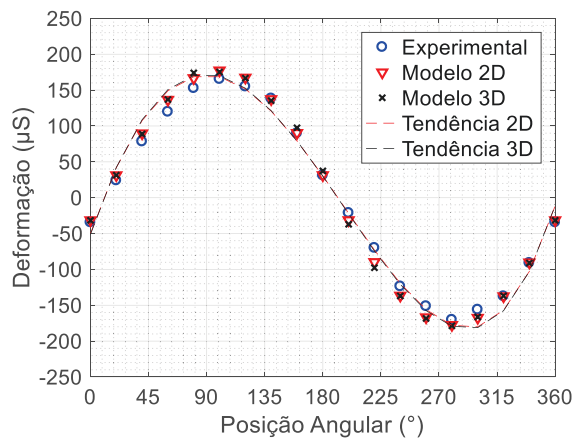
O modelo 1D assume uma distribuição de tensão e deformação mais próximo ao comportamento linear, portanto seus resultados não são satisfatórios para representação do comportamento da trinca com severidades nesta proporção. No modelo 3D os efeitos não lineares e térmicos são mais significantes, por isso os resultados são mais próximos aos experimentais. A Fig. 6.25 mostra os erros relativos dos modelos numéricos comparados aos valores experimentais.



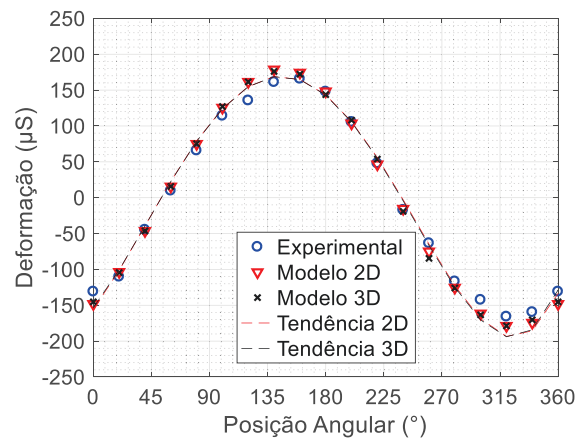
a) Extensômetro 1



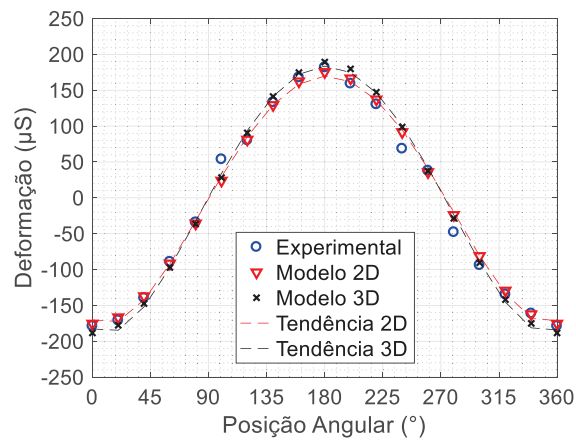
b) Extensômetro 2



c) Extensômetro 3



d) Extensômetro 4



e) Extensômetro 5

Figura 6.22 - Medidas de deformação do eixo com trinca de 20% de profundidade.

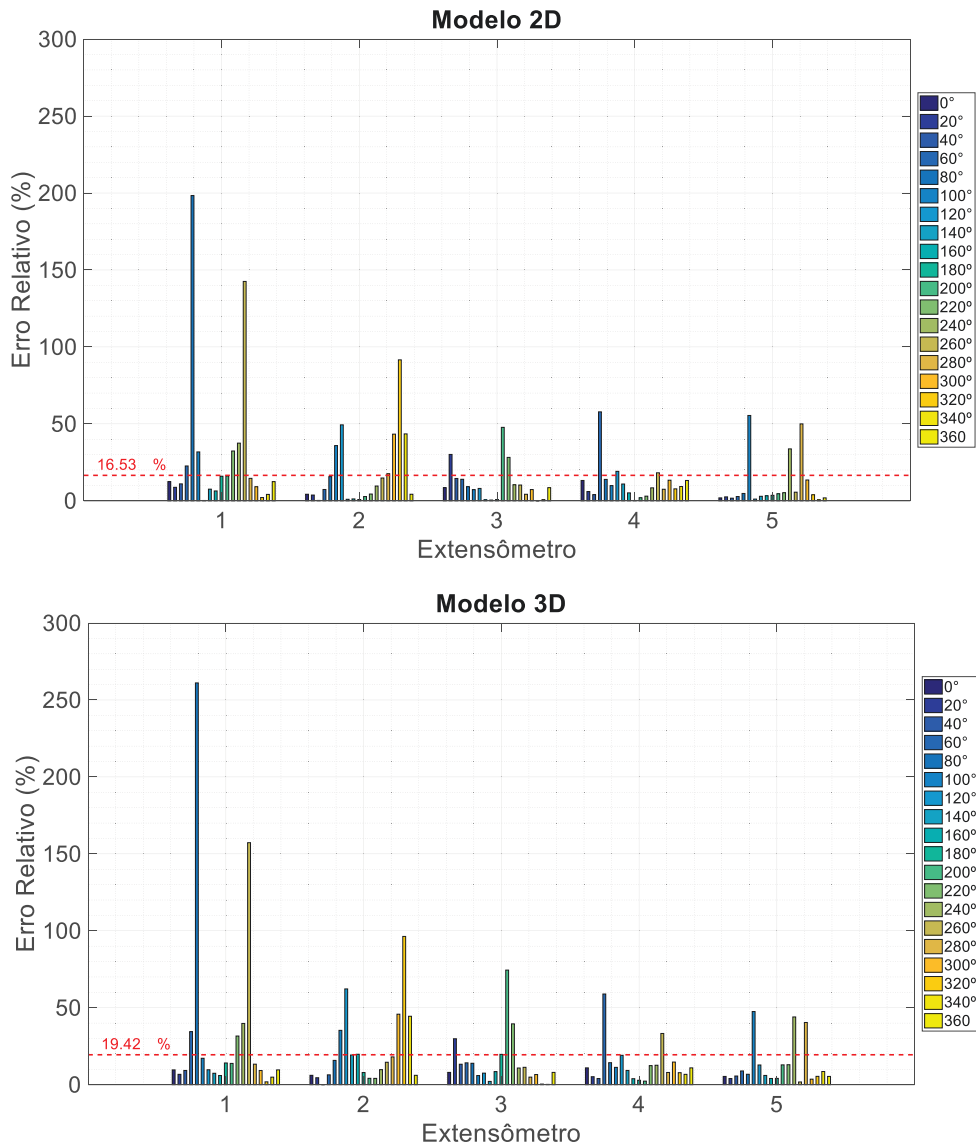
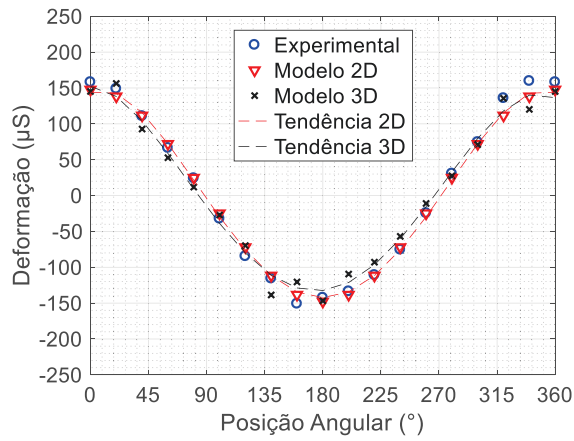


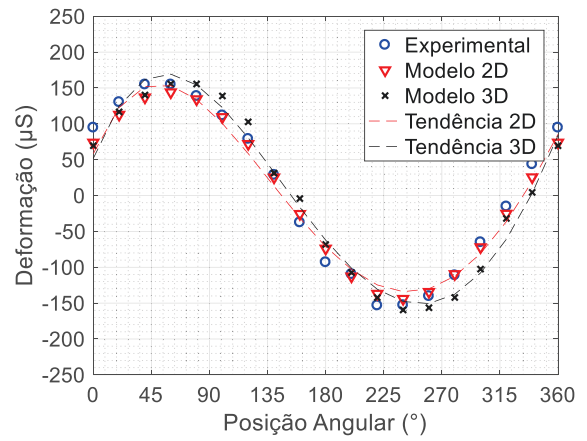
Figura 6.23 - Erros Relativos dos Modelos 1D e 3D referentes às deformações do eixo com trinca de 20% de profundidade.

Note que a trinca com 50% de profundidade apresenta valores de erros mais elevados que para o dano com 20% de profundidade. Resultados semelhantes são apresentados por Bachschmid; Pennacchi; Tanzi (2010).

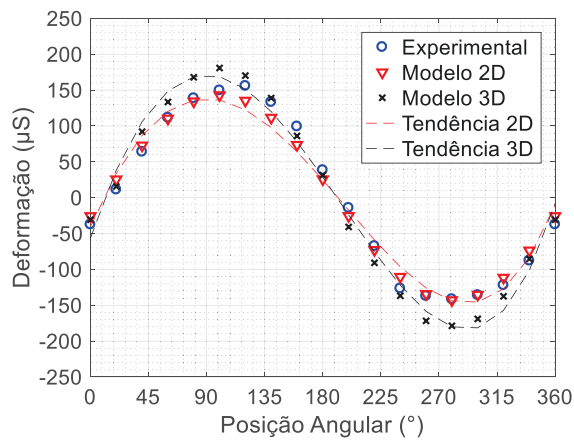




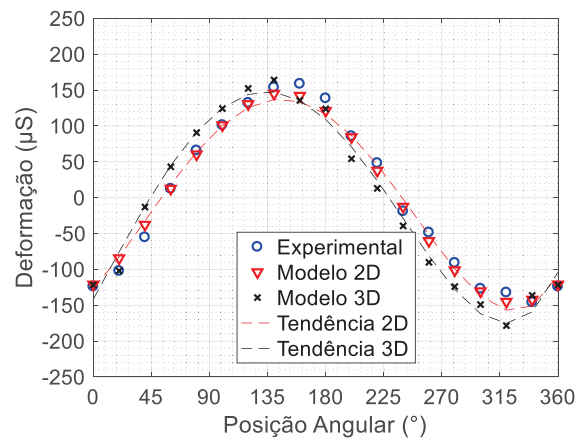
a) Extensômetro 1



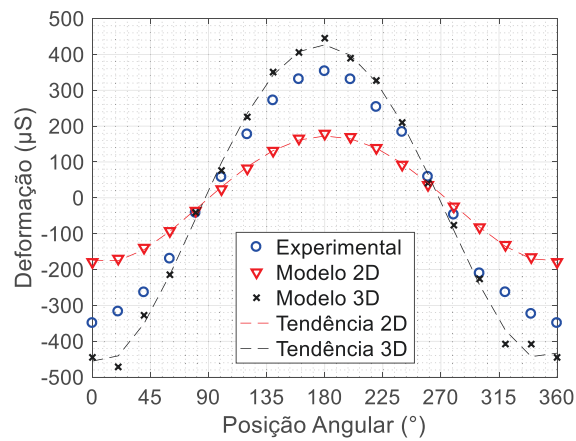
b) Extensômetro 2



c) Extensômetro 3



d) Extensômetro 4



e) Extensômetro 5

Figura 6.24 - Medidas de deformação do eixo com trinca de 50% de profundidade.

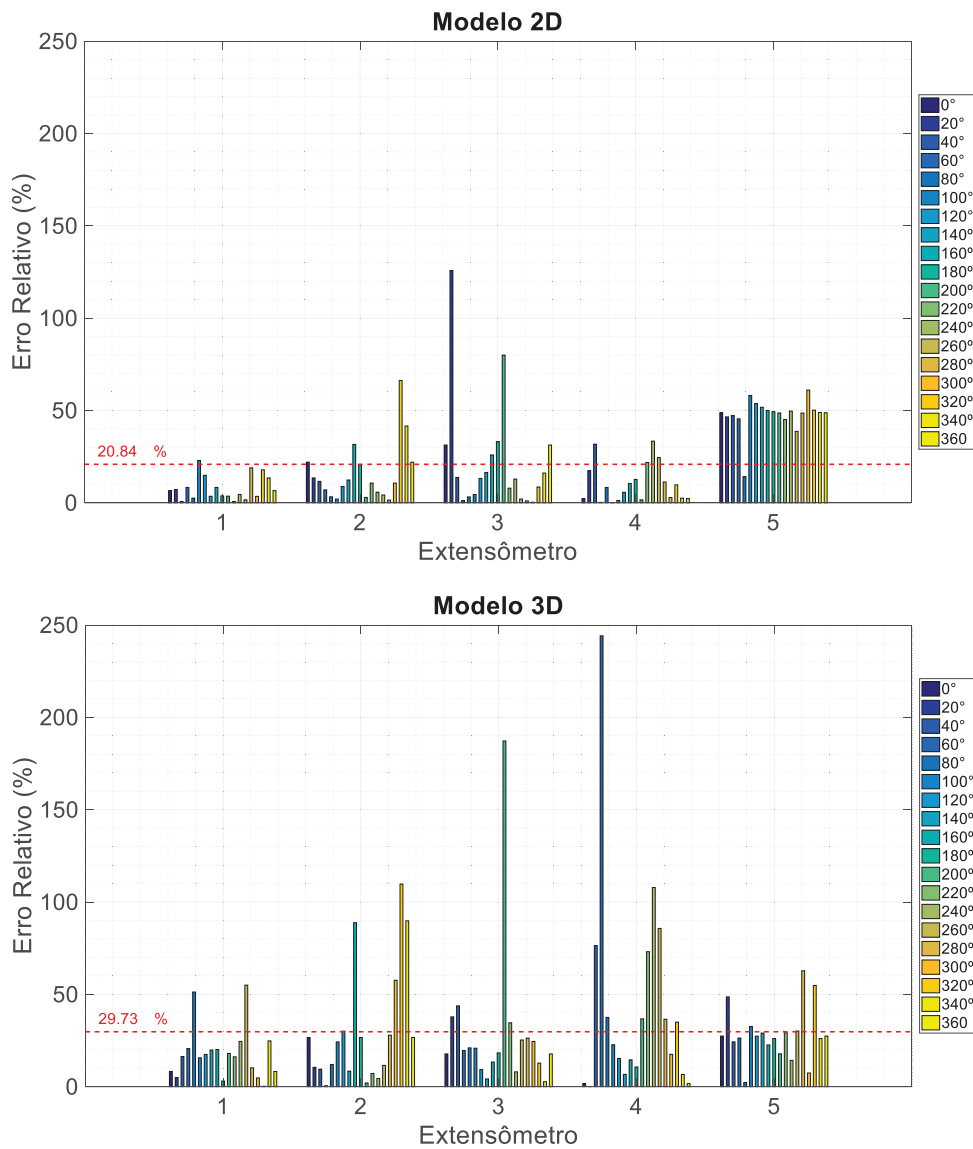


Figura 6.25 - Erros Relativos dos Modelos 1D e 3D referentes às deformações do eixo com trinca de 50% de profundidade.

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÃO

Este trabalho trouxe como proposta a avaliação do comportamento estático e dinâmico de eixos flexíveis quando da presença de trincas transversais abertas. Uma revisão bibliográfica é apresentada e compreende o contexto histórico em que se insere o tema, os principais trabalhos científicos desenvolvidos ao longo dos anos, além das principais técnicas de identificação de trincas utilizadas em máquinas rotativas com ênfase nas que se utilizam de técnicas de *SHM*, sinais de vibração, análise modal e técnicas não convencionais. A formulação matemática que descreve o comportamento de máquinas rotativas foi apresentada em elementos finitos, bem como a metodologia para a inclusão de uma trinca ao sistema.

Dois modelos de elementos finitos desenvolvidos em ambiente MatLab® (modelo 1D) e com o programa Ansys® (modelo 3D) foram detalhados, sendo as respostas geradas por estes modelos comparadas com resultados experimentais obtidos de uma bancada de testes composta por um eixo, um disco e um conjunto de mancais de rolamentos. As propriedades de rigidez e amortecimento dos mancais foram determinadas pelo método heurístico Evolução Diferencial a partir da comparação de FRFs numéricas (obtidas do modelo 1D) e experimentais. A trinca foi incluída ao modelo 1D através da formulação da matriz de flexibilidade adicional desenvolvida por Papadopoulos e Dimarogonas (1987). Já para o modelo 3D, a trinca resulta de um corte ao longo da seção transversal do eixo.

O comportamento dinâmico do sistema foi analisado através das medidas das FRFs obtidas ao longo das direções *X* e *Z* para várias configurações do eixo, a saber: sem dano, com trinca de 20% e com trinca de 50% de profundidade. Nesta análise, os resultados do modelo 1D se mostraram bastante similares aos experimentais, o que demonstra sua representatividade. Os resultados do modelo 3D se mostraram um pouco mais distantes dos dados experimentais. Contudo, é importante ressaltar que os coeficientes de rigidez e

amortecimento dos mancais incorporados no modelo 3D foram obtidos a partir de um ajuste realizado com base no modelo 1D, o que pode ter trazido alguma distorção. Dos resultados obtidos para esta análise, conclui-se que trincas incipientes podem não alterar as frequências naturais do sistema de maneira perceptível. No entanto, trincas mais profundas provocam uma redução maior da rigidez local e, conseqüentemente, se verifica uma alteração nas frequências naturais do sistema.

Através da avaliação experimental foi possível verificar que a presença da trinca influencia a mudança da frequência natural em função da posição angular em que ela se encontra.

As análises estáticas contaram com o uso de cinco extensômetros elétricos localizados no entorno da trinca para medições do campo de deformação. Seis posições angulares foram observadas para o eixo saudável e dezenove para o eixo com trinca de 20% e 50% de profundidade. Ressalta-se que os modelos numéricos apresentaram boa correspondência quanto à tendência observada para a condição de eixo saudável.

Ao ser inserida no eixo uma trinca com 20% de profundidade, poucas diferenças são notadas quanto à amplitude das deformações experimentais. Os modelos numéricos apresentaram erros mais acentuados com respeito aos valores experimentais, o que pode ser explicado pela alta sensibilidade dos extensômetros e pela ordem de grandeza das deformações (micro deformações).

Para a condição de trinca com 50% de profundidade, observa-se um aumento das deformações medidas. Os resultados numéricos do modelo 1D, apesar de seguir uma mesma tendência, se distanciam dos experimentais devido à presença predominante de não linearidades que não são previstas por esse modelo. O modelo 3D apresentou valores mais próximos para o extensômetro 5 comparado ao modelo 1D, uma vez que considera tanto os efeitos térmicos como os não lineares.

Tendo em vista que o objetivo principal desta dissertação é voltado para o entendimento sobre os efeitos de trincas transversais abertas em eixos flexíveis, propõe-se como trabalhos futuros análises destinadas ao desenvolvimento de técnicas de identificação ou de monitoramento destes defeitos em rotores em operação. Propõe-se também uma comparação entre os modelos de trinca que consideram o mecanismo de *breathing*.

Durante a realização deste trabalho, as seguintes publicações foram realizadas:

SILVA, I. B.; CAVALINI JR, A. A.; STEFFEN JR, V., Uma Revisão Sobre o Comportamento Dinâmico de Trincas Transversais em Eixos Rotativos. Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Uberlândia, dez. 2016.

SILVA, I. B.; CAVALINI JR, A. A.; MORAIS, T. S; STEFFEN JR, V., Análise numérica e experimental de trincas em eixos baseada nas respostas estáticas e dinâmicas do sistema. Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Uberlândia, set. 2017.

SILVA, I. B.; MORAIS, T. S; CAVALINI JR, A. A.; STEFFEN JR, V., Numerical and Experimental Analysis of a Cracked Shaft Based on Static and Dynamic Responses. ABCM International Congress of Mechanical Engineering – COBEM 2017. Curitiba, dez. 2017.

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFFONSO, L. O. A. **Machinery Failure Analysis Handbook: Sustain Your Operations and Maximize Uptime**. Gulf Publishing Company Houston, Texas, 2006. 308p.

ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. 3.ed. Taylor & Francis Group, 2005. 640p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5462: Confiabilidade e Manutenibilidade**. Rio de Janeiro. 1994.

BACHSCHMID, N.; PENNACCHI, P.; TANZI, E. Transverse Crack Modeling and Validation in Rotor Systems, Including Thermal Effects. **International Journal of Rotating Machinery**. V.9(2), p. 113-126, 2003. <https://doi.org/10.1155/S1023621X03000101>.

BACHSCHMID, N.; PENNACCHI, P.; TANZI, E. **Cracked Rotors: A Survey on Static and Dynamic Behaviour Including Modelling and Diagnosis**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. 399p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-01485-7>.

BALAGEAS, D.; FRITZEN, C. P.; GÜEME, A. **Structural Health Monitoring**. ISTE - Wiley, 2006. 496p.

BENTLHY, D. E.; MUSZYNSKA, A. Detection of Rotor Cracks. **Turbomachinery and Pump Symposia**. Texas, p. 129-140, 1986.

BROBERG, K. B. **Cracks and Fracture**. 1.ed. Academic Press, 1999. 752p.

BUCHER, I.; EWINS, D. J. Modal Analysis and Testing of Rotating Structures. **Phil. Trans. R. Soc. Lond. A**. V.359, p. 61-93, jan. 2001. <https://doi.org/10.1098/rsta.2000.0714>.

BURBANO, C. E. R. **Diagnóstico de falhas em máquinas rotativas**. 2005. 117 f. Dissertação de Mestrado- Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

CASTEJÓN, C.; GARCÍA-PRADA, J. C.; GÓMEZ, M. J.; MENESES, J. Automatic Detection of Cracked Rotors Combining Multiresolution Analysis and Artificial Neural Networks. **Journal of Vibration and Control**. V.21, p. 3047-3060, fev. 2015. <https://doi.org/10.1177/1077546313518816>.

CAVALINI JR, A. A. **Detecção e Identificação de Trincas Transversais Incipientes em Eixos Horizontais Flexíveis de Máquinas Rotativas**. 2013. 235f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

COLLINS, K. R.; PLAUT, R. H.; WAUER, J. Detection of Cracks in Rotating Timoshenko Shafts Using Axial Impulses. **Journal of Vibration and Acoustics**. V. 113, p. 74-78, jan. 1991. <https://doi.org/10.1115/1.2930158>.

DARPE, A. K.; GUPTA, K.; CHAWLA, A. Coupled Bending, Longitudinal and Torsional Vibrations of a Cracked Rotor. **Journal of Sound and Vibration**. V.269, p. 33-60, jan. 2004. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00003-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00003-8).

DARPE, A. K.; GUPTA, K.; CHAWLA, A. Experimental Investigations of the Response of a Cracked Rotor to Periodic Axial Excitation. **Journal of Sound and Vibration**. V. 260, p. 265-286, fev. 2003. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)00944-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)00944-6).

DAVIES, W. G. R.; MAYES, I. W. The Vibrational Behavior of a Multi-Shaft, Multi-Bearing System in the Presence of a Propagating Transverse Crack. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design**. V.106(1), p. 146-153, jan. 1984. <https://doi.org/10.1115/1.3269143>.

DIMAROGONAS, A.D. PAIPETIS, S. A. **Analytical Methods in Rotor Dynamics**. Elsevier, 1986. 230p.

DIMAROGONAS, A. D. A Brief History of Rotor Dynamics. In.: **Proceedings of the International Conference on Rotating Machine Dynamics - ROTORDYNAMICS '92**. Springer-Verlag, 1992. [https://doi.org/10.1007/978-1-4471-1979-1\\_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-1979-1_1).



DIMAROGONAS, A.D. Dynamic Response of Cracked Rotors. **General Electric Co Internal Report. Schenectady**. Nova Yorque, 1970.

DIMAROGONAS, A.D. Vibration of Cracked Structures: A State of The Art Review. **Engineering Fracture Mechanics**. V.55, p. 831-857, nov. 1996.  
[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)00175-8](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)00175-8).

DONG, G. M.; CHEN, J.; ZOU, J. Parameter Identification of a Rotor with an Open Crack. **European Journal of Mechanics A/Solids**. V.23, p. 325-333, abr. 2004.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2003.11.003>.

DUNKERLEY, S. On the Whirling and Vibration of Shaft. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. v. 195, n. 1, p. 279-359, 1894.  
<https://doi.org/10.1098/rsta.1894.0008>.

FARRAR, C. R.; WORDEN, K. An Introduction to Structural Health Monitoring. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**. V.365, p. 303-315, fev. 2007.  
<https://doi.org/10.1098/rsta.2006.1928>.

FERREIRA, B. F. **Detecção de Trincas em Eixos Rotativos Através de Medição de Vibrações**. 2010. 101f. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, Brasília.

GASCH, R. Dynamic Behavior of a Simple Rotor with a Cross-Sectional Crack. **Vibrations in Rotating Machinery**. Paper C178/76, p. 123-128, 1976.

GASCH, R. A Survey of the Dynamic Behaviour of a Simple Rotating Shaft with a Transverse Crack. **Journal of Sound and Vibration**. V.160, p. 313-332, 1993.  
<https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1026>.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**. MA: Addison-Wesley, 1989.

GRABOWSKI, B. The Vibrational Behavior of a Turbine Rotor Containing a Transverse Crack. **Journal of Mechanical Design**. V. 102, p. 140-146, jan. 1980.  
<https://doi.org/10.1115/1.3254704>.

GREEN, I.; CASEY, C. Crack Detection in a Rotor Dynamic System by Vibration Monitoring - Part I: Analysis. **Proceedings of ASME Turbo Expo / Power for Land, Sea, and Air**. Atlanta, v.4, p. 569-582, jun. 2003.

GUO, C.; YAN, J.; YANG, W. Crack detection for a Jeffcott rotor with a transverse crack: an experimental investigation. **Mechanical Systems and Signal Processing**. V.83, p. 260-271, jan. 2017. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.06.011>.

HAMID, L.; PIAUD, J. B.; PASTOREL, H.; MANSOUR, W. M.; MASSOUD, M. Modal Parameters for Cracked Rotors: Models and Comparisons. **Journal of Sound and Vibration**. V. 172(2), p. 265-278, ago. 1994.

HASSAN, M.; BRUNI, S.; CARBONI, M. Crack Detection in Railway Axle Using Horizontal and Vertical Vibration Measurements. **7th IET Conference on Railway Condition Monitoring 2016 (RCM 2016)**. Birmingham, set. 2016.

HE, Y.; GUO, D. CHU, F. Using Genetic Algorithms and Finite Element Methods to Detect Shaft Crack for Rotor-Bearing System. **Mathematics and Computers in Simulation**. V.57, p.95-108, ago. 2001.

HENG, A.; ZHANG, S.; TAN, A. C. C.; MATHEW, J. Rotating Machinery Prognostics: State of the Art, Challenges and Opportunities. **Mechanical Systems and Signal Processing**. V.23, p. 724-739, abr. 2009. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.06.009>.

HENRY, T. A.; OKAH-AVAE, B. E. Vibrations in Cracked Shafts. In: **Conference Proceedings Vibrations in Rotating Machinery**; London Inst. Mech. E. Conf. p. 15-19, 1976.

IMAM, I; AZZARO, S. H.; BANKERT, R. J.; SCHEIBEL, J. Development of an On-Line Rotor Crack Detection and Monitoring System. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design**. V. 111, p. 241-250, jul. 1989. <https://doi.org/10.1115/1.3269848>.

IRWIN, G. R. **Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys**. Naval Research Laboratory. Washington, DC, 20375-5320, mar.1956.

ISHIDA, Y.; YAMAMOTO, T. **Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications**. 2.ed. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2012. 474p.

JEFFCOTT, H. H. The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighbourhood of a Whirling Speed. **Philosophical Magazine and Journal of Science**. V.37, p. 304-314, 1919. <https://doi.org/10.1080/14786440308635889>.

KULESZA, Z.; SAWICKI, J. T. Auxiliary State Variables for Rotor Crack Detection. **Journal of Vibration and Control**. V.17(6), p. 857–872, out. 2010. <https://doi.org/10.1177/1077546309360050>.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics Prediction in Engineering**. John Wiley & Sons INC, 1998. 266p.

LAVAL, C. G. **Steam Turbine**. U. S. Patent No 522,066. 26 Jun. 1894.

LEES, A. W.; SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I. Model-Based Identification of Rotating Machines. **Mechanical Systems and Signal Processing**. V.23, p. 1884-1893, ago. 2009.

LIONG, R. T.; PROPPE, C. Finite Element Multibody Simulation of a Breathing Crack in a Rotor with a Cohesive Zone Model. **ISRN Mechanical Engineering**. V. 2013, p. 1-10, 2013. <https://doi.org/10.1155/2013/249035>.

LOBATO, F. S.; STEFFEN JR, V. Engineering System Design with Multi-Objective Differential Evolution. In: **Proceedings of the 19th international congress of mechanical engineering**. 2007.

LOBATO, F. S.; GONÇALVES, M. S.; JAHN, B.; CAVALINI JR., A. A.; STEFFEN, V. Reliability-Based Optimization Using Differential Evolution and Inverse Reliability Analysis for Engineering System Design. **Journal of Optimization Theory and Applications**. V.174(3), p. 894-926, set. 2017. <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1063-x>.

LU, Z.; DONG, D.; OUYANG, H.; CAO, S.; HUA, C. Localization of Breathing Cracks in Stepped Rotors Using Superharmonic Characteristic Deflection Shapes Based on Singular Value Decomposition in Frequency Domain. **Fatigue Fract Eng Mater Struct**. V.40, p.1825-1837. <https://doi.org/10.1111/ffe.12601>.

MAYES, I. W.; DAVIES, W. G. R. The Vibrational Behavior of a Rotating Shaft System Containing a Transverse Crack. In **Vibrations in Rotating Machinery - Inst. Mech. E. Conference**, London, p. 53-65, 1976.

MAYES, I. W.; DAVIES, W. G. R. Analysis of the Response of a Multi-Rotor-Bearing System Containing a Transverse Crack in a Rotor. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design**. V.106(1), p. 139-145, jan. 1984. <https://doi.org/10.1115/1.3269142>.

MORAIS, T. S. **Contribuição ao Estudo de Máquinas Rotativas na presença de Não-Linearidades**. 2010. 173 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

MOURA JÚNIOR, J. R. V. **Uma Contribuição aos Sistemas de Monitoramento de Integridade Estrutural Aplicada a Estruturas Aeronáuticas e Espaciais**. 2008. 286 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

MUSZYNSKA, A. **Rotordynamics**. CRC Press, 2005. 1128p. <https://doi.org/10.1201/9781420027792>.

MUSZYNSKA, A. Stress in Rotating and Laterally Vibrating Machinery Rotors. **IMechE C500/069**. p. 769-778, 1996.

MUSZYNSKA, A. Vibrational Diagnostics of Rotating Machinery Malfunctions. **International Journal of Rotating Machinery**. V.1, p. 237-266, jan. 1994. <https://doi.org/10.1155/S1023621X95000108>.

NASIRI, S.; KHOSRAVANI, M. R.; WEINBERG, K. Fracture Mechanics and Mechanical Fault Detection by Artificial Intelligence Methods: A review. **Engineering Failure Analysis**. V.81, p. 270-293, nov. 2017. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2017.07.011>.

NELSON, H. D.; NATARAJ, C. C. The Dynamics of a Rotor System with a Cracked Shaft. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design**. V.108(2), p. 189-196, 1986. <https://doi.org/10.1115/1.3269321>.

ONG, Z. C.; RAHMAN, A. G. A.; ISMAIL, Z. Determination of Damage Severity on Rotor Shaft Due to Crack Using Damage Index Derived from Experimental Modal Data. **Experimental Techniques**. V.38, p. 18-30, set./out. 2014. <https://doi.org/10.1111/j.1747-1567.2012.00823.x>.

OSTACHOWICZ, W. M.; KRAWCZUK M. Coupled torsional and bending vibrations of a rotor with an open crack. **Applied Mechanics / Springer-Verlag**. V.62, p. 191-201, 1992.

PALOMINO, L. V. **Técnicas de Inteligência Artificial Aplicadas ao Método de Monitoramento de Integridade Estrutural Baseado na Impedância Eletromecânica para Monitoramento de Danos em Estruturas Aeronáuticas**. 2012. 215 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

PAPADOPOULOS, C. A.; DIMAROGONAS, A. D. Vibration of Cracked Shafts in Bending. **Journal of Sound and Vibration**. V.91, p. 583-593, dez. 1983. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(83\)90834-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(83)90834-9).

PAPADOPOULOS, C. A.; DIMAROGONAS, A. D. Coupled Longitudinal and Bending Vibrations of a Rotating Shaft with an Open Crack. **Journal of Sound and Vibration**. V.117(I), p. 81-93, jan. 1987. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(87\)90437-8](https://doi.org/10.1016/0022-460X(87)90437-8).

PAPADOPOULOS, C. A.; DIMAROGONAS, A. D. Coupled Vibration of Cracked Shafts. **ASME Design Technical Conference**. Montreal, v.18-2, p. 7-11, set. 1989.

PAPADOPOULOS, C. A.; DIMAROGONAS, A. D. Coupling of bending and torsional vibration of a cracked Timoshenko shaft. **Ingenieur-Archi / Springer-Verlag**. V. 57, p. 257-266, 1987.

PENNY, J. E. T. P.; FRISWELL, M. I. Simplified Modelling of Rotor Crack. **Key Engineering Materials**. V.245-246, p. 223-232, jul. 2003. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.245-246.223>.

RABELO, D. S. **Monitoramento de Integridade Estrutural Baseado na Técnica da Impedância Eletromecânica Incorporando Compensação do Efeito da Variação da Temperatura**. 2014. 118 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia. <https://doi.org/10.14393/ufu.te.2017.1>.

RABELO, D. S. **Técnicas Avançadas de Normalização de Dados Aplicadas ao Método de Monitoramento de Integridade Estrutural Baseado em Impedância Eletromecânica.** 2017. 164 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RATAN, S.; BARUH, H.; RODRIGUEZ, J. On-Line Identification and Location of Rotor Cracks. **Journal of Sound and Vibration.** V.194(1), p. 67-82, 1996. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0344>.

RANKINE, W. J. M. On the thermal energy of molecular vortices. **Philosophical Magazine and Journal of Science.** V.4, p. 211-221, 1869. <https://doi.org/10.1017/S0370164600046551>.

SAAVEDRA, P. N.; CUITIÑO, L. A. Vibration Analysis of Rotor for Crack Identification. **Journal of Vibration and Control.** V.8, p.51-67, 2002. <https://doi.org/10.1177/1077546302008001526>.

SABNAVIS, G.; KIRK, R. G.; KASARDA, M.; QUINN, D. Cracked Shaft Detection and Diagnostics: A Literature Review. **The Shock and Vibration Digest.** V.36, p. 287-296, jul. 2004. <https://doi.org/10.1177/0583102404045439>.

SAMPAIO, D. L.; NICOLETTI, R. Detection of Cracks in Shafts with the Approximated Entropy Algorithm. **Mechanical Systems and Signal Processing.** V. 72-73, p. 286-302, mar. 2016. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.10.026>.

SAWICKI, J. T.; FRISWELL, M. I.; KULESZA, Z.; WROBLEWSKI, A.; LEKKI, J. D. Detecting Cracked Rotors Using Auxiliary Harmonic Excitation. **Journal of Sound and Vibration.** V.330, p. 1365-1381, mar. 2011. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.10.006>.

SEIBOLD, S.; WEINERT, K. A Time Domain Method for the Localization of Cracks in Rotors. **Journal of Sound and Vibration.** V.195(1), p. 57-73, 1996. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0403>.

SINOUE, J. J.; LEES, A. W. The influence of Cracks in Rotating Shafts. **Journal of Sound and Vibration.** V.285, p. 1015–1037, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.09.008>.

STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution: a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. **International Computer Science Institute.** V.12, p. 1-16, 1995.

TSURUTA, K. M. **Monitoramento de integridade estrutural de materiais compostos sujeitos a impactos empregando a técnica da impedância eletromecânica**. 2008. 138 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

VANCE, J.; ZEIDAN, F.; MURPHY, B. **Machinery Vibration and Rotordynamics**. John Wiley & Sons, 2010. 416p. <https://doi.org/10.1002/9780470903704>.

ZHAO, J.; DESMIDT, H. A.; YAO, W. Nonlinear Dynamics of Breathing Cracked Jeffcott Rotor Under Axial Excitation. **ASME 2014 Dynamic Systems and Control Conference**. San Antonio, v.1, out. 2014. <https://doi.org/10.1115/DSCC2014-6119>.

WESTERGAARD, H. M. Bearing Pressures and Cracks. **Journal of Applied Mechanics**. V.6, p. A49-53, 1939.

## ANEXO I

### OTIMIZAÇÃO HEURÍSTICA PELO MÉTODO EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

O método de otimização utilizado no presente trabalho conhecido como Evolução Diferencial (do inglês *Differential Evolution* - DE) foi desenvolvido por Storn e Price (1995) e utiliza procedimentos derivados dos processos biológicos, tais como a herança genética, mutação, seleção natural e cruzamento.

Segundo Lobato e Steffen (2007), o DE é uma versão melhorada do Algoritmo Genético de Goldberg (GA) (Goldberg, 1989). Ao contrário do GA simples que usa codificação binária para representar parâmetros dos problemas, o DE é um algoritmo de busca direta baseado em população simples, utilizado para otimização de funções com valores reais dos parâmetros. Estes autores ainda citam como vantagens deste método, a estrutura simples, facilidade de uso, velocidade e robustez (habilidade em evitar soluções de mínimo local).

#### A1.1 Descrição do Método

Apesar de utilizar conceitos que se assemelham aos algoritmos genéticos, o DE apresenta uma concepção puramente matemática, baseada em operações vetoriais (Cavalini Jr., 2013). Os principais dados de controle no DE são: o tamanho da população ( $N_p$ ), a constante de cruzamento ( $p_c$ ), e o peso aplicado ao diferencial aleatório (fator de escala -  $F_{DE}$ ). Normalmente,  $N_p$  que é composto por indivíduos, também chamados de vetores, deve ser de 5 a 10 vezes a dimensão (número de variáveis em um vetor) do problema. Quanto ao  $F_{DE}$ , assume-se que o mesmo está numa faixa entre 0.4 e 1.0. Inicialmente o valor de 0.5 para  $F_{DE}$  pode ser imposto, então  $F_{DE}$  e/ou  $N$  são aumentados se a população convergir prematuramente (LOBATO; STEFFEN, 2007).

Basicamente, um conjunto inicial de vetores é gerado aleatoriamente e deve cobrir todo o espaço de busca previamente especificado. Em seguida, o DE executa a operação de



mutação adicionando um vetor de diferença ponderada entre dois indivíduos para um terceiro. Então, os indivíduos que sofreram a mutação, realizarão um cruzamento discreto com os indivíduos da última geração correspondente para produzir a prole (descendentes) e posteriormente uma seleção entre os indivíduos mais aptos é efetuada (LOBATO et al., 2017). A Fig. A1.1 apresenta um fluxograma ilustrativo com os passos para formulação de um algoritmo de DE.

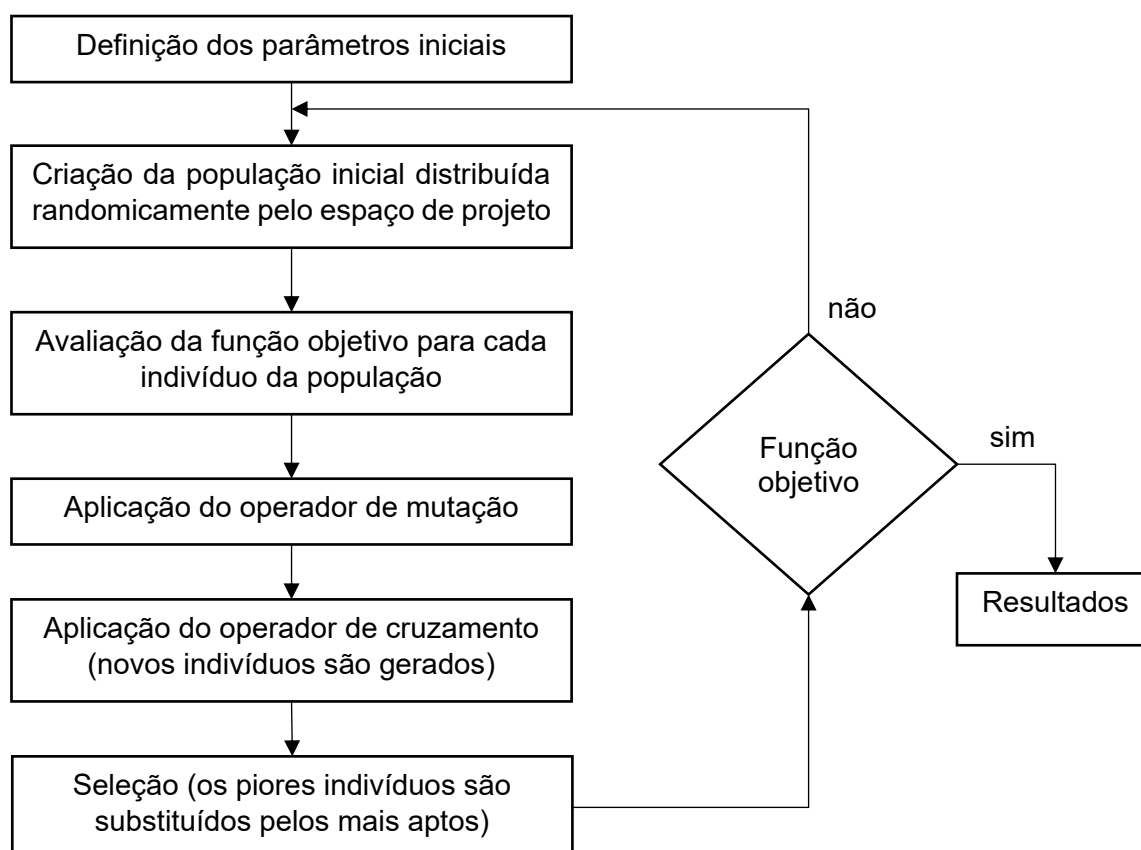


Figura A1.1 - Fluxograma descritivo do processo de Evolução Diferencial (Fonte: Cavalini Jr. (2013)).

## A1.2 Formulação Matemática

Conforme apresenta Cavalini Jr. (2013), inicialmente a população inicial  $\mathbf{P}_{DE}$  com  $mi$  indivíduos é gerada como mostrado na Eq. (A1.1).

$$\mathbf{P}_{DE} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{mi}]^t \quad (\text{A1.1})$$

onde  $\mathbf{x}_{mi} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t$  é o vetor das  $n$  variáveis de projeto do indivíduo  $mi$ .

Cada indivíduo  $\mathbf{x}_{mi}$  da população inicial (Eq. (A1.2)) é determinado a partir dos limites inferiores  $l^l(\mathbf{x}_{mi})$  e superiores  $l^u(\mathbf{x}_{mi})$  definidos previamente, além de um vetor constituído de ruído branco  $\mathbf{R}_{noise}$  (distribuição normal no intervalo  $[0, 1]$ ).

$$\mathbf{x}_{mi} = l^l(\mathbf{x}_{mi}) + \mathbf{R}_{noise} [l^u(\mathbf{x}_{mi}) - l^l(\mathbf{x}_{mi})] \quad (\text{A1.2})$$

A mutação dos indivíduos pode ser realizada por diferentes formas. Cavalini Jr. (2013) descreve algumas possibilidades para operação de mutação, simplificadas pela Tab. A1.1. Esta operação, que resulta em um vetor  $\mathbf{x}_{trial}$ , pode utilizar um vetor aleatoriamente escolhido entre os membros da população atual tipo “rand” -  $\mathbf{x}_{rand}$ , ou utilizar um vetor associado à melhor função de adaptação (*Fitness*) tipo “best” -  $\mathbf{x}_{best}$ . Nesta dissertação foi utilizado o esquema tipo “rand / 1”.

Tabela A1.1 - Esquemas de mutação do método DE (Fonte: Cavalini Jr. (2013))

Tipo	Equação de Mutação	Alvo	População
best / 1	$\mathbf{x}_{trial} = \mathbf{x}_{best} + F_{DE} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$	$\mathbf{x}_{best}$	mi>3
rand / 1	$\mathbf{x}_{trial} = \mathbf{x}_{rand} + F_{DE} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$	$\mathbf{x}_{rand}$	mi>3
rand to best / 2	$\mathbf{x}_{trial} = \mathbf{x}_{mi} + F_{DE} (\mathbf{x}_{best} - \mathbf{x}_{mi} + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$	$\mathbf{x}_{best}$	mi>5
rand / 2	$\mathbf{x}_{trial} = \mathbf{x}_{rand} + F_{DE} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)$	$\mathbf{x}_{rand}$	mi>5

A aplicação do operador de cruzamento é realizada como mostra a Eq. (A1.3). Algumas das variáveis de projeto do genitor principal (alvo da Tab. A1.1) são incorporados ao vetor  $\mathbf{x}_{trial}$  segundo uma determinada probabilidade de cruzamento  $CR_{DE}$  que deve ser menor que 1 (CAVALINI JR., 2013)), neste trabalho este parâmetro foi fixado em 0.5.

$$\mathbf{x}_{trial} = \begin{cases} \mathbf{x}_{trialM}, & rand[0,1] < CR_{DE} \\ \mathbf{x}_{trial} & \end{cases} \quad (\text{A1.3})$$

onde  $\mathbf{x}_{trialM}$  é o vetor com algumas variáveis de projeto que sofreram mutação.