Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Licenciatura em Matemática

TÓPICOS DE TOPOLOGIA ALGÉBRICA E O GRUPO FUNDAMENTAL DO CÍRCULO

Layana Oliveira Sousa

Uberlândia-MG

2018

Layana Oliveira Sousa

TÓPICOS DE TOPOLOGIA ALGÉBRICA E O GRUPO FUNDAMENTAL DO CÍRCULO

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Paula Tremura Galves

Uberlândia-MG

2018

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Coordenação do Curso de Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Uberlândia, 12 de julho de 2018

BANCA EXAMINADORA

Ana Paula Tremura Galves

Profa. Dra. Ana Paula Tremura Galves

Prof. Dr. Germano Abud de Rezende

Ligia Laís Fêmina

Profa. Dra. Ligia Laís Fêmina

Uberlândia-MG

2018

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me abençoado e me dado forças para superar as dificuldades.

Aos meus pais, pelo amor, apoio, incentivo e por acreditar em mim.

A minha orientadora que tive a oportunidade de conhecer e, com ela, aprender muito.

Agradeço à minha família, amigos e a todos que, direta ou indiretamente, me ajudaram e contribuíram para o término deste ciclo.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos o estudo introdutório ao grupo fundamental, que pode ser uma ferramenta importante para responder uma das principais perguntas da topologia: se dois espaços (ou superfícies) são ou não homeomorfos. Inicialmente, abordamos conceitos básicos de espaços topológicos necessários para o estudo seguinte: homotopia entre aplicações e, mais precisamente, entre caminhos. Posteriormente, verificamos que as classes de equivalência formadas por caminhos fechados homotópicos fornecem uma estrutura específica de grupo para cada espaço. Num segundo momento, calculamos o grupo fundamental do círculo unitário (S^1). Também apresentamos, utilizando as ferramentas citadas, uma demonstração para o Teorema Fundamental da Álgebra.

Palavras-chave: Espaços topológicos. Grupo fundamental. Homotopia.

Abstract

In this work, we present the introductory study to the fundamental group, which can be an important tool to answer one of the main questions of topology: if two spaces (or surfaces) are homeomorphic or not. Initially, we approach basics concepts of topological spaces necessary for the following study: homotopy between applications and, more precisely, between paths. Subsequently, we verify that the equivalence classes formed by homotopic closed paths provide a group-specific structure for each space. In a second moment, we calculate the fundamental group of the unit circle (S^1). We also present, using the mentioned tools, a demonstration for the Fundamental Theorem of Algebra.

Keywords: Topological Spaces. Fundamental Group. Homotopy.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A matemática é uma das áreas do conhecimento mais brilhantes e antigas da história e é uma área que sempre se renova. Ela trabalha com números, quantidades, mas também com construções abstratas não quantitativas. A Topologia, de modo geral, trabalha com esses aspectos qualitativos e não quantitativos de matemática.

Henri Poincaré (1854-1912) foi um grande matemático francês. Teve uma das mais importantes contribuições para a matemática, estando entre os primeiros contribuintes para a Topologia. Em 1895, a área foi consolidada, quando Poincaré teve seu artigo, dedicado exclusivamente para a Topologia, publicado, sendo considerado o primeiro da história.

Topologia é o ramo da matemática que estuda os espaços topológicos, que estão presentes em vários outros ramos da matemática. Isto a faz uma das áreas mais unificadoras da matemática. Tal área pode, intuitivamente, ser definida como o estudo de técnicas para conseguir imagens algébricas de espaços topológicos. Geralmente, estas imagens são grupos e as aplicações contínuas entre os espaços topológicos são projetadas sobre homomorfismos entre grupos. Ou seja, dado um espaço topológico X associamos a ele um grupo $G(X)$ e dada uma aplicação contínua $f : X \to Y$ associamos a essa aplicação um homomorfismo de grupos $G(f) : G(X) \to G(Y)$ satisfazendo algumas propriedades. Com isto, pode-se resolver problemas da Topologia através da Álgebra.

Um dos mais simples e mais importantes tópicos da Topologia Algébrica é o grupo fundamental, denotado por $\pi_1(X, x_0)$, o qual cria uma imagem algébrica do espaço de laços (caminhos fechados) em um espaço X, baseados em um ponto $x_0 \in X$, usando a ideia de homotopia de caminhos. Quando o espaço X é conexo por caminhos esse grupo é denotado simplesmente por $\pi_1(X)$.

O grupo fundamental de um espaço X, denotado por $\pi_1(X, x_0)$, pode ser definido de modo que seus elementos são laços (caminhos fechados) em X, começando e terminando em um determinado ponto base $x_0 \in X$, mas dois tais laços são vistos como determinando o mesmo elemento do grupo fundamental se um laço pode ser deformado continuamente no outro dentro do espaço.

Este tipo de tratamento matemático é capaz de fornecer observações e propriedades referentes a grupos, o que não seria possível anteriormente. Tomando o grupo quociente de homotopia por caminhos em um espaço topológico, os quais começam e terminam em um escolhido ponto base, teremos um grupo com a operação produto entre caminhos, o grupo fundamental.

Este grupo é um invariante topológico, no sentido de que se dois espaços são homeomorfos, então os respectivos grupos fundamentais são isomorfos.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é estudar alguns conceitos básicos de espaços topológicos. Em seguida, trabalhar com a teoria de homotopia - ferramenta essencial para o estudo do grupo fundamental e, por fim, estudar com mais detalhes o grupo fundamental e suas particularidades, incluindo alguns resultados relacionados a ele e, como aplicação, calcular o grupo fundamental do círculo S^1 e apresentar uma demonstração para o Teorema Fundamental da Álgebra usando teoria de homotopia.

Capítulo

2

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, definiremos topologia, espaços topológicos, conjuntos abertos e fechados de um espaço topológico qualquer, homeomorfismo e continuidade de aplicações. Tais conceitos são necessários para atingirmos o objetivo principal do trabalho que é o estudo de um outro ramo da topologia que é a topologia algébrica, na qual estuda-se diferentes formas de associar a um determinado espaço topológico uma estrutura algébrica. Para tanto, usaremos as referências [1], [5] e [8].

2.1 Espaços topológicos

Definição 2.1.1 *Seja X um conjunto não vazio e considere uma coleção τ de subconjuntos de X. τ é uma topologia em X se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$*;*

(ii) *a união arbitrária de elementos de τ pertence a τ;*

(iii) *a interseção finita de elementos de τ pertence a τ.*

Assim, dizemos que o par (X, τ) é um ***espaço topológico****. Os elementos de τ são chamados conjuntos abertos de X e cada elemento de X é denominado ponto. Quando não houver dúvida em relação a topologia, denotaremos apenas pelo conjunto X para fazer referência a este espaço.*

Exemplo 2.1.2 *Consideremos as seguintes coleções de subconjuntos de* $X = \{a, b, c, d, e\}$*:*

- $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$
- $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$
- $\tau_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}$

A coleção τ_1 é uma topologia em X, já que satisfaz as três propriedades da definição anterior. Já τ_2 não é, pois o conjunto

$$\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \tau_2$$

não satisfazendo assim, a condição (ii) da definição. A coleção τ_3 também não é uma topologia em X, pois o conjunto

$$\{a, c, d\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, d\} \notin \tau_3$$

portanto, não satisfaz a condição (iii) da definição.

Exemplo 2.1.3 *A coleção* $\tau = \{\emptyset, X\}$ *é uma topologia chamada topologia discreta ou topologia trivial.*

Exemplo 2.1.4 *Se* $\mathcal{B}$ *é a coleção de todos os intervalos abertos na reta real* $(a, b) = \{x \,|\, a < x < b\}$*, então a topologia gerada por* $\mathcal{B}$ *é chamada topologia usual na reta real. Essa topologia usual de* $\mathbb{R}$ *é a chamada topologia induzida por uma relação de ordem em* $\mathbb{R}$*.*

Definição 2.1.5 *Seja* X *um espaço topológico. Um subconjunto* A *de* X *é um conjunto fechado quando seu complementar é aberto.*

Exemplo 2.1.6 *A coleção*

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

define uma topologia em $X = \{a, b, c, d, e\}$*. Os subconjuntos fechados de* X *são* $\emptyset$*,* X*,* $\{b, c, d, e\}$*,*$\{a, b, e\}$*,*$\{b, e\}$*,*$\{a\}$*, pois são os complementares dos abertos de* X*. Podemos notar* *que há subconjuntos de X que são simultaneamente abertos e fechados, tal como $\{b, c, d, e\}$, assim como existem aqueles que não são abertos nem fechados, como $\{a, b\}$.*

2.2 Aplicações Contínuas

Nesta seção, veremos uma definição de continuidade incluindo aquelas dadas sobre a reta, o plano e o espaço. Daí veremos algumas propriedades das aplicações contínuas, onde muitas são generalizações diretas de conceitos vistos em Análise.

Definição 2.2.1 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é contínua se para cada subconjunto aberto A de Y, o conjunto $U = f^{-1}(A)$ é um subconjunto aberto de X.*

Observação 2.2.2 *O conjunto $f^{-1}(A)$ representa todos os pontos $x \in X$, tais que $f(x) \in A$.*

Podemos observar, pela definição, que a continuidade de aplicações não depende apenas da aplicação f, mas também das topologias especificadas no domínio e no contradomínio de f. Logo, uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ pode ser contínua ou não, dependendo das topologias definidas em X e Y. Daí dizemos que f é contínua relativamente às topologias em X e Y.

Exemplo 2.2.3 *Seja $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ uma topologia em $X = \{a, b, c, d\}$ e seja $\tau^* = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z, w\}\}$ uma topologia em $Y = \{x, y, z, w\}$. Dadas as aplicações $f : X \longrightarrow Y$ definida por*

$$f(a) = y,\ f(b) = z,\ f(c) = w \ \text{e}\ f(d) = z$$

e $g : X \longrightarrow Y$ definida por

$$g(a) = x,\ g(b) = x,\ g(c) = z \ \text{e}\ g(d) = w,$$

temos que f é contínua, pois a imagem inversa de cada elemento de τ^* em Y é um elemento de τ em X. Já g não é contínua, pois $\{y, z, w\} \in \tau^*$, mas sua imagem inversa $\{c, d\} \notin \tau$.

Lema 2.2.4 (Lema da Colagem) *Sejam X e Y espaços topológicos, $X = A \cup B$ onde A e B são fechados em X. Sejam $f : A \longrightarrow Y$ e $g : B \longrightarrow Y$ aplicações contínuas. Se $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$, então a aplicação $h : X \longrightarrow Y$, dada por $h(x) = f(x)$, se $x \in A$, e $h(x) = g(x)$, se $x \in B$, é contínua.*

Demonstração. Seja C um subconjunto fechado de Y. Temos que $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup \cup g^{-1}(C)$. Sabemos que f é contínua, então $f^{-1}(C)$ é fechado em A, logo, é fechado em X [1] pois A é fechado em X. Analogamente, temos que $g^{-1}(C)$ é fechado em B e, assim, fechado em X. Portanto, $h^{-1}(C)$ é fechado em X, pois é a união de dois fechados. ∎

Observação 2.2.5 *Este lema também contempla o caso de A e B serem conjuntos abertos de X.*

Exemplo 2.2.6 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida da seguinte forma*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \leq 0, \\ \dfrac{x}{2}, & se\ x \geq 0. \end{cases}$$

Cada sentença desta aplicação é uma aplicação contínua e seus valores coincidem na interseção de seus domínios, que são dois conjuntos fechados cuja união é igual ao domínio de f. Logo, pelo Lema da Colagem, f é contínua.

Definição 2.2.7 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação bijetora. Se a aplicação f e a aplicação inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ são contínuas, então f é chamada de $homeomorfismo$.*

A condição de que f^{-1} seja contínua significa que para cada conjunto aberto U de X, a imagem inversa de U mediante a aplicação $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ é aberto em Y. Porém, a imagem inversa de U com relação a aplicação f^{-1} é o mesmo que a imagem direta de U mediante a aplicação f. Por isso, outro modo de definir um homeomorfismo, é verificar que em uma correspondência bijetora $f : X \longrightarrow Y$, ocorre que $f(U)$ é aberto em Y se, e somente se, U é aberto em X.

[1]Isso ocorre devido ao Teorema 17.3 de [8], p. 95. Este teorema diz que: Dado Y, um subespaço de X. Se A é fechado em Y e Y é fechado em X, então A é fechado em X.

Desta forma, um homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ proporciona uma correspondência bijetiva, não somente entre X e Y, mas também entre os abertos e os abertos de Y. Em consequência, qualquer propriedade de X que se expresse completamente em termos da topologia de X (ou seja, em termos dos conjuntos abertos de X) dá, via f, a propriedade no espaço Y. Chamamos esta propriedade de **propriedade topológica de** X.

Exemplo 2.2.8 *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 3x + 1$. *Temos que* f *é um homeomorfismo.*

De fato, definindo $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *onde* $g(y) = \dfrac{1}{3}(y-1)$, *podemos verificar que* $f(g(y)) = y$ *e* $g(f(x)) = x$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$. *Segue que* f *é bijetora e* $g = f^{-1}$, *ou seja, é sua inversa.* f *e* g *são contínuas, por serem aplicações polinomiais em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.9 *Seja* S^1 *o círculo de raio 1 e centro* $(0,0)$, *subespaço de* $\mathbb{R}^2$, *e seja* $f : [0,1) \longrightarrow S^1$ *a aplicação definida por* $f(t) = (cos\, 2\pi t, sen\, 2\pi t)$. *Pelas propriedades das aplicações trigonométricas,* f *é bijetora e contínua, porém a sua inversa* f^{-1} *não é contínua. A imagem, mediante* f, *do conjunto aberto* $U = [0, 1/4) = [0,1) \cap (-1, 1/4)$ *do domínio, por exemplo, não é aberto em* S^1, *visto que não há nenhum aberto* C *do* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $C \cap S^1 =$ $= f(U)$, *daí segue que* f *não é um homeomorfismo, como mostra a figura abaixo.*

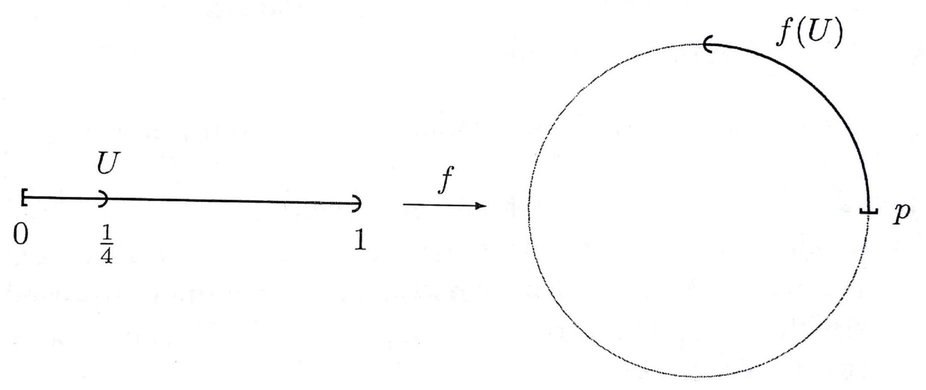

Figura 2.1: Exemplo onde f não é um homeomorfismo.

Observação 2.2.10 *Este Exemplo 2.2.9, mostra que uma aplicação bijetora pode ser contínua sem ser um homeomorfismo.*

2.3 Espaços Conexos

Definição 2.3.1 *Um espaço topológico X é conexo se não existem $A \subset X$ e $B \subset X$, abertos, disjuntos e não vazios, tais que $X = A \cup B$. Caso contrário, X é dito desconexo.*

Um espaço topológico X é conexo quando X e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos de X que são simultaneamente abertos e fechados.

A ideia de conexidade pode ser expressa, também, por meio de caminhos definidos em um espaço topológico.

Definição 2.3.2 *Um caminho num espaço topológico X é uma aplicação contínua $f : [x_0, x_1] \longrightarrow X$, onde $[x_0, x_1]$ é um intervalo fechado em $\mathbb{R}$. Se $f(x_0) = x$ e $f(x_1) = y$, então f é um caminho de x para y, onde x é o ponto inicial e y é o ponto final.*

Definição 2.3.3 *Um conjunto $A \subset X$ é conexo por caminhos se, para cada dois pontos x, y de A, existe um caminho $f : [x_0, x_1] \longrightarrow A$ de x para y, ou de y para x.*

Exemplo 2.3.4 *A reta $\mathbb{R}$ é conexa pois, para quaisquer dois pontos dela é possível ligá-los pela própria reta.*

Exemplo 2.3.5 *O espaço perfurado definido por $\mathbb{R}^n - 0$ é conexo por caminhos se $n > 1$, mas se $n = 1$, $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ não é conexo por caminhos.*

Um subconjunto S de um espaço topológico X é um subconjunto conexo quando, com a topologia induzida de X, S é um espaço topológico conexo.

Proposição 2.3.6 *Todo espaço topológico conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração. Seja X um espaço conexo por caminhos e suponhamos, por absurdo, que exista em X um subconjunto aberto e fechado A, com $A \neq X$ e $A \neq \emptyset$. Tomando um ponto $a \in A$ e um ponto $b \in X - A$, existiria um caminho $f : I \longrightarrow X$ com $f(0) = a$ e $f(1) = b$. O conjunto $A \cap f(I)$ seria aberto e fechado em $f(I)$, diferente de $f(I)$, porque $b \notin A$, e não vazio, pois $a \in A \cap f(I)$. Contradizendo que $f(I)$ seja conexo, demonstrando assim a proposição. ∎

Capítulo

3

Homotopia

Neste capítulo abordaremos noções básicas sobre homotopia entre aplicações e, mais precisamente, entre caminhos. Posteriormente, analisaremos que as classes de equivalência formadas por caminhos fechados homotópicos fornece uma estrutura específica de grupo para cada espaço, que é a ferramenta essencial para o estudo do grupo fundamental, o qual será estudado no capítulo seguinte.

Em todos os resultados e definições deste e do próximo capítulo, o símbolo I representa o intervalo compacto $[0,1]$. Utilizamos no capítulo as referências [3], [4], [7] e [9].

3.1 Espaços Homotópicos

Intuitivamente, podemos pensar na homotopia como uma deformação de um objeto (uma superfície, por exemplo) por meio de uma aplicação contínua entre espaços topológicos.

Definição 3.1.1 *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que f e g são homotópicas quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \longrightarrow Y$, tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$.*

A aplicação H é dita uma homotopia entre f e g e, será representada por $f \simeq g$.

Podemos imaginar uma homotopia como uma família a um parâmetro de aplicações contínuas de X em Y. Se pensarmos no parâmetro x como representante do tempo, então a homotopia H descreve uma deformação contínua da aplicação f na aplicação g, quando x varia de 0 a 1.

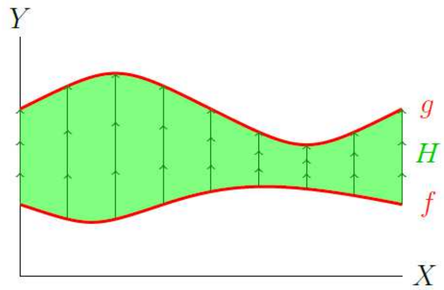

Figura 3.1: Homotopia entre as aplicações f e g.

Definição 3.1.2 *Dois espaços topológicos X e Y são homotópicos se existem aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow Y$, tais que $g \circ f \simeq I_X$ e $f \circ g \simeq I_Y$, onde I_X e I_Y são aplicações identidade em X e Y, respectivamente. A aplicação g é chamada inversa homotópica de f e assim, dizemos que os espaços X e Y têm o mesmo tipo de homotopia.*

Quando X é homotópico a Y denotamos por $X \simeq Y$.

Observe que, quando dois espaços X e Y são homeomorfos, existe uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$, tal que $f^{-1} \circ f \simeq I_X$ e $f \circ f^{-1} \simeq I_Y$. Isso mostra que dois espaços serem homeomorfos é mais forte do que serem homotópicos.

Lema 3.1.3 *Homotopia é uma relação de equivalência sobre o conjunto das aplicações contínuas de X em Y.*

Demonstração. É necessário verificar se a relação de homotopia é reflexiva, simétrica e transitiva.

- *Reflexiva.* Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua e a aplicação $H : X \times I \longrightarrow Y$ é dada por $H(x, t) = f(x)$, para todo $t \in I$, então H é contínua e $H(x, 0) = H(x, 1) = f(x)$, para todo $x \in X$.

  Portanto, $f \simeq f$.

- *Simétrica.* Se $f \simeq g$, então existe uma aplicação contínua $H : X \times I \longrightarrow Y$, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Vamos considerar $\bar{H} : X \times I \longrightarrow Y$, dada por $\bar{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$.

Logo, $\bar{H}$ é contínua e $\bar{H}(x,0) = H(x,1) = g(x)$ e $\bar{H}(x,1) = H(x,0) = f(x)$, para todo $x \in X$.

Portanto, $g \simeq f$.

- *Transitiva.* Se $f \simeq g$ e $g \simeq h$, então existem aplicações contínuas $H, K : X \times I \longrightarrow Y$, tais que $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, $K(x,0) = g(x)$ e $K(x,1) = h(x)$, para todo $x \in X$.

  Vamos considerar $L : X \times I \longrightarrow Y$ dada por

$$L(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ K(x,2t-1), & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

  Note que $\left(x, \dfrac{1}{2}\right)$ pertence ao domínio de H e de K, e para $t = \dfrac{1}{2}$, temos

$$H(x,2t) = H(x,1) = g(x) = K(x,0) = K(x,2t-1).$$

  Logo, L está bem definida e pelo Lema da Colagem, é contínua. Além disso,

$$L(x,0) = H(x,0) = f(x) \text{ e } L(x,1) = K(x,1) = h(x).$$

  Portanto, L é uma homotopia entre f e h. ■

Exemplo 3.1.4 (Homotopia linear) *Seja X um espaço vetorial e $Y \subset E$, onde E é um espaço vetorial normado. Dadas aplicações contínuas $f : X \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ e suponhamos que, para todo $x \in X$, o segmento de reta $[f(x), g(x)]$ esteja em Y. Então, tomando $H : X \times I \longrightarrow Y$, dada por*

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x),$$

define uma homotopia entre f e g, chamada de homotopia linear.

Em particular, toda aplicação contínua é homotópica a aplicação identicamente nula.

De fato, considere $f : X \to Y$ contínua e $H : X \times I \longrightarrow Y$, dada pela equação $H(x,t) = (1-t)f(x)$. Logo, H é contínua, $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = 0$, para todo $x \in X$.

Portanto, $f \simeq 0$.

Exemplo 3.1.5 *Seja* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *a esfera unitária n-dimensional. Dadas duas aplicações contínuas* $f, g : X \longrightarrow S^n$, *se* $f(x) \neq -g(x)$, *para todo* $x \in X$ *(isto é,* $f(x)$ *e* $g(x)$ *nunca são pontos antípodas), então* $f \simeq g$.

De fato, nestas condições, vale $(1-t)f(x) + tg(x) \neq 0$, *para todo* $t \in I$ *e todo* $x \in X$, *pois* $(1-t)f(x) + tg(x) = 0$ *se* $t = \dfrac{1}{2}$ *e* $f(x) = -g(x)$. *Mas, por hipótese,* $f(x) \neq -g(x)$, *para todo* $x \in X$.

Assim, obtemos uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow S^n$, *entre* f *e* g, *onde* H *é definida da seguinte forma*

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{||(1-t)f(x) + tg(x)||}.$$

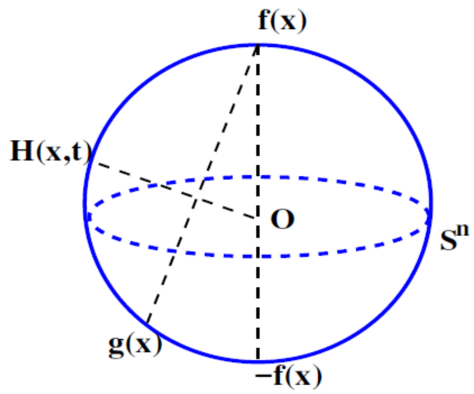

Figura 3.2: Quando t varia entre 0 e 1, $H(x,t)$ descreve o arco de círculo máximo que liga $f(x)$ a $g(x)$.

Exemplo 3.1.6 *Se* n *é ímpar, então a aplicação antípoda* $\alpha : S^n \longrightarrow S^n$, *dada por* $\alpha(x) = -x$, *é homotópica à identidade* $id : S^n \longrightarrow S^n$.

De fato, tomando $n = 2k-1$, *temos que* $S^n \subset \mathbb{R}^{2k}$ *e podemos considerar cada ponto* $z = (x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_k, y_k)$ *de* S^n *como* $z = (z_1, ..., z_k)$ *de números complexos* $z_j = x_j + i.y_j$, *tais que* $|z_1|^2 + \cdots + |z_k|^2 = 1$.

Agora, para cada número complexo $u \in S^1$, *de módulo 1, e cada vetor* $z = (z_1, ..., z_k) \in S^n$, *definiremos* $u.z \in S^n$ *por* $u.z = (u.z_1, ..., u.z_k)$. *Dessa forma,* $H : S^n \times I \to S^n$, *dada por* $H(z,t) = e^{t\pi i}.z$, *é uma homotopia entre a aplicação antípoda* $\alpha(z) = -z$ *e a aplicação identidade de* S^n, *lembrando que* $e^{t\pi i} = cos(t\pi) + i.sen(t\pi)$.

Exemplo 3.1.7 *O disco com 2 buracos tem o mesmo tipo de homotopia do subespaço Y de $\mathbb{R}^3$, apresentado na Figura 3.3.*

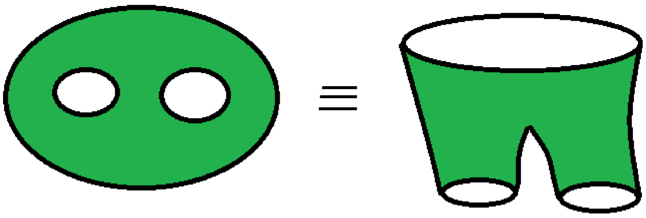

Figura 3.3: Disco e calça.

Exemplo 3.1.8 *A coroa circular e a circunferência S^1 tem o mesmo tipo de homotopia.*

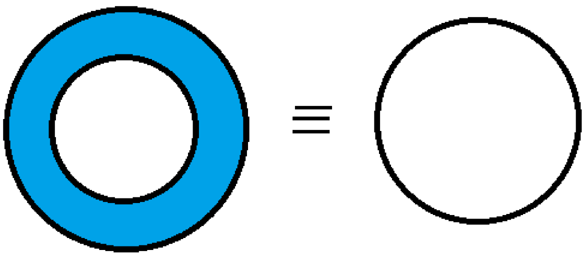

Figura 3.4: Coroa circular e S^1.

Exemplo 3.1.9 *O Toro menos um ponto, $T^2 - \{p\}$, tem o mesmo tipo de homotopia da união de duas circunferências tangentes. Para visualizar isso, inicialmente consideraremos o fato que o toro pode ser obtido de uma região quadrangular identificando os lados, como mostra a Figura 3.5.*

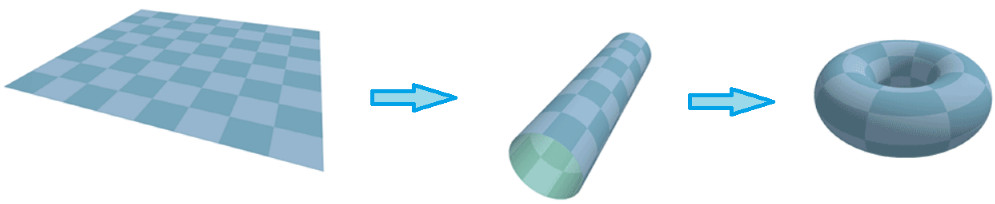

Figura 3.5: Toro obtido por uma região quadrangular.

Logo, $T^2 - \{p\}$ pode ser visto como uma região quadrangular menos um ponto. A homotopia requerida pode ser visualizada geometricamente na Figura 3.6.

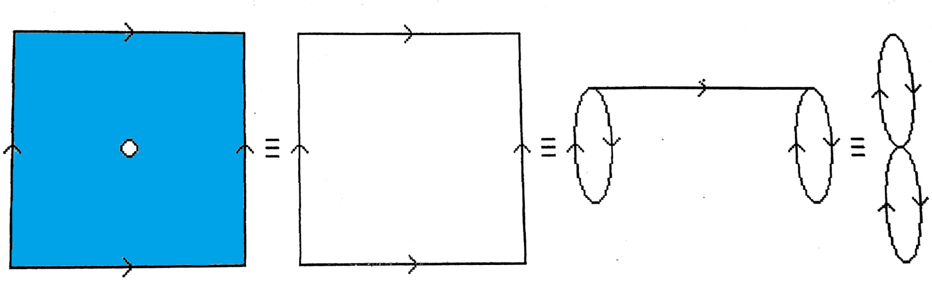

Figura 3.6: Toro menos um ponto e duas circunferências tangentes.

3.2 Espaço Contrátil

Um espaço topológico X é contrátil quando ele tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

Proposição 3.2.1 *Seja X um espaço topológico. X é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade $id : X \longrightarrow Y$ é homotópica a uma aplicação constante $X \longrightarrow X$.*

Demonstração. Suponhamos que X é contrátil. Se $f : X \longrightarrow \{p\}$ é uma equivalência homotópica e $g : \{p\} \longrightarrow X$ é inversa homotópica de f, então $g \circ f \simeq id_X$. Temos que $g \circ f$ é uma aplicação constante, mostrando assim o que queríamos.

Por outro lado, se id_X é homotópica a uma aplicação constante, então id_X e a constante são equivalências homotópicas, uma inversa da outra. Portanto, X é contrátil. ∎

Corolário 3.2.2 *Um espaço contrátil X é conexo por caminhos.*

Demonstração. Se H é uma homotopia entre id_X e a aplicação constante $X \longrightarrow \{p\}$, para todo $p \in X$. Logo, para cada ponto $x \in X$, a correspondência $t \longrightarrow H(x,t)$ é o que define um caminho que liga x a p. ∎

Exemplo 3.2.3 $\mathbb{R}^n$ *é contrátil, pois considere a aplicação $H : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(x,t) = tx$. Note que $H(x,0) = 0$, $H(x,1) = x = id_{\mathbb{R}^n}(x)$ e H é contínua, portanto H é uma homotopia entre a aplicação identidade $id_{\mathbb{R}^n}$ e a aplicação nula, mostrando que* $\mathbb{R}$ *é contrátil.*

3.3 Homotopia de Caminhos

Veremos agora um caso particular de homotopia, a homotopia de caminhos, a qual será útil na definição de grupo fundamental.

Definição 3.3.1 (Caminho) *Seja X um espaço topológico. Um caminho entre x_0 e x_1 em X, é uma aplicação contínua $u : [0,1] \longrightarrow X$, tal que $u(0) = x_0$ e $u(1) = x_1$.*

Definição 3.3.2 *Dois caminhos $u, v : I \longrightarrow X$ são homotópicos, se possuem o mesmo ponto inicial x_0 e o mesmo ponto final x_1 e existe uma aplicação contínua $H : I \times I \longrightarrow X$, tal que $H(0,t) = x_0$, $H(1,t) = x_1$, $H(s,0) = u(s)$, $H(s,1) = v(s)$, para todo $s, t \in I$.*

Se u e v são caminhos homotópicos, denotamos por $u \simeq v$.

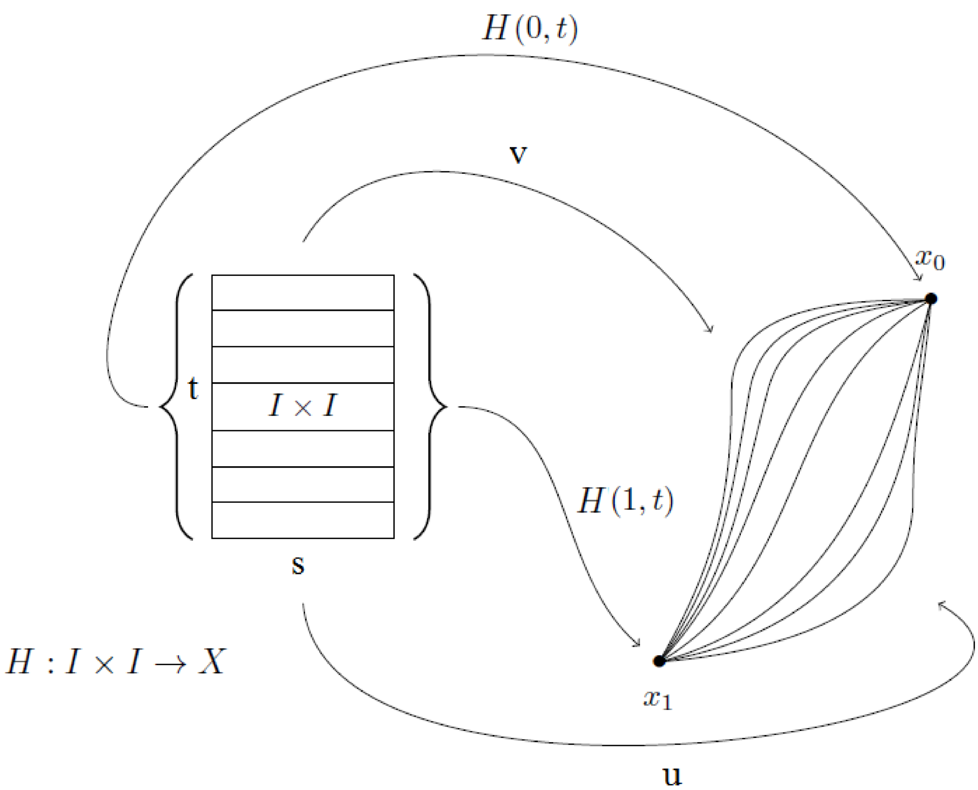

Figura 3.7: Homotopia de caminhos.

Definição 3.3.3 (Caminho fechado) *Um caminho $u : [0,1] \longrightarrow X$ é um caminho fechado em x_0 se $u(0) = u(1) = x_0$.*

Observação 3.3.4 *Dois caminhos fechados u e v são homotópicos se satisfazem a definição anterior. Então, como são caminhos fechados, $H(s,0) = H(s,1) = x_0$.*

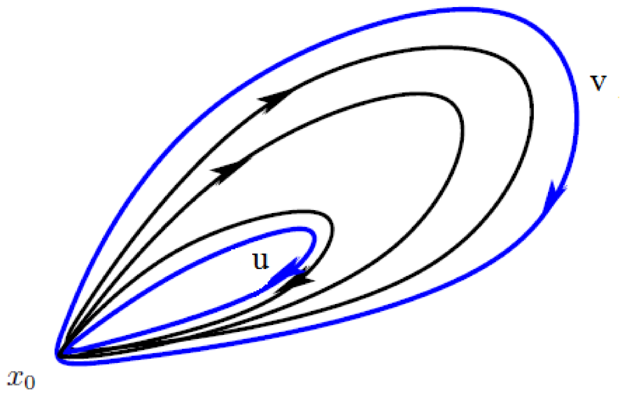

Figura 3.8: Homotopia de caminhos fechados

A relação de homotopia de caminhos também é uma relação de equivalência, satisfazendo assim as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. A demonstração é similar à que foi feita no Lema 3.1.3.

Definição 3.3.5 *Seja X um espaço topológico. Um conjunto $A \subset X$ é convexo se, para todo par de ponto $x, y \in A$, o segmento de reta $[x, y]$ está inteiramente contido em A.*

Exemplo 3.3.6 *Seja A um subespaço convexo do $\mathbb{R}^n$. Se $u, v : I \longrightarrow A$ são caminhos com as mesmas extremidades, isto é, $u(0) = v(0) = x_0$ e $u(1) = v(1) = x_1$, então $u \simeq v$.*

De fato, basta definir a aplicação $H : I \times I \longrightarrow X$ por $H(s,t) = (1-t)u(s) + tv(s)$. Então H é contínua, já que caminhos são aplicações contínuas,

$$H(s,0) = u(s),\ H(s,1) = v(s),\ H(0,t) = (1-t)u(0) + tv(0) = (1-t)x_0 + tx_0 = x_0,$$
$$H(1,t) = (1-t)u(1) + tv(1) = (1-t)x_1 + tx_1 = x_1,\ \forall s,t \in I.$$

Portanto, H é uma homotopia entre u e v.

Definição 3.3.7 *Seja $u : I \longrightarrow X$ um caminho que vai de x_0 a x_1. O caminho inverso de u é denotado por u^{-1} e definido por:*

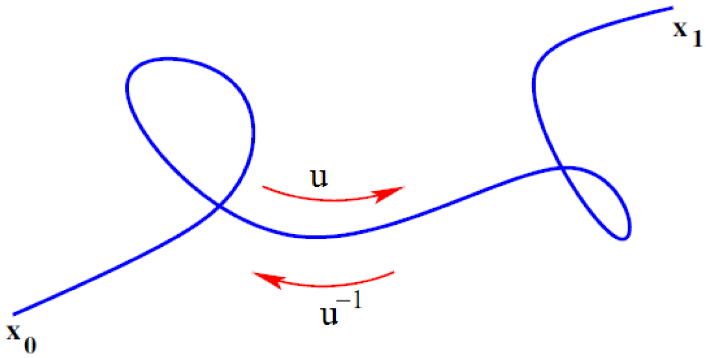

Figura 3.9: Caminho inverso.

$$\begin{aligned} u^{-1} : I &\longrightarrow \quad X \\ t &\longrightarrow \quad u(1-t) \end{aligned}$$

Note que u^{-1} tem o mesmo percurso que u, mas se inicia em x_1 e termina em x_0.

Indicaremos por $\alpha = [u]$ a classe de homotopia do caminho $u : I \longrightarrow X$, ou seja, o conjunto de todos os caminhos em X que possuem as mesmas extremidades que u e que são homotópicos a u com extremos fixos durante a homotopia. A classe de homotopia do caminho constante e_x, tal que $e_x(s) = x$, para todo $s \in I$, será denotada por $\varepsilon_x = [e_x]$.

Definição 3.3.8 *Sejam u um caminho em X de x_0 a x_1 e v um caminho em X de x_1 a x_2. Definimos o produto u por v como o caminho $u * v : I \to X$ dado por*

$$(u * v)(s) = \begin{cases} u(2s), & s \in [0, 1/2], \\ v(2s-1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Então, podemos definir o produto como sendo o caminho que percorre primeiro u e depois v.

A aplicação $u * v$ está bem definida, pois para $t = \dfrac{1}{2}$, $u(2t) = u(1) = x_1 = v(0) = $ $= v(2t-1)$. Além disso, pelo Lema da Colagem, $u * v$ é contínua. Segue, então que, $u * v$ é um caminho de x_0 para x_2, isto é, que começa em $u(0)$ e termina em $v(1)$.

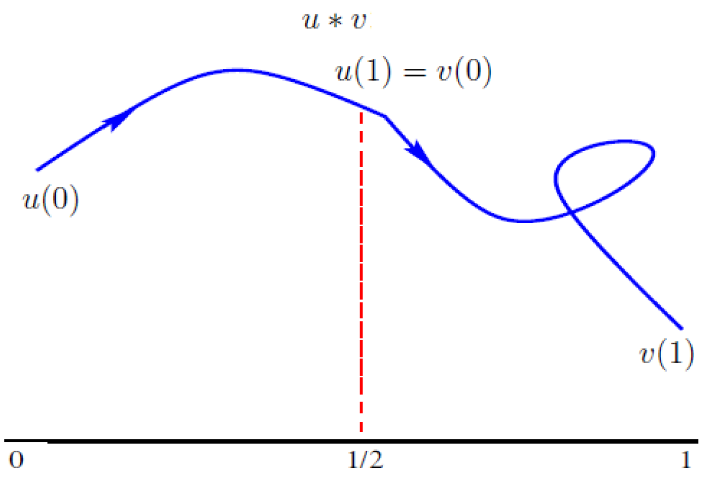

Figura 3.10: Produto $u * v$.

Proposição 3.3.9 *Sejam $u, u' : I \to X$ caminhos em X de x_0 a x_1 e $v, v' : I \to X$ caminhos em X de x_1 a x_2. Se $u \simeq u'$ e $v \simeq v'$, então $u * v \simeq u' * v'$.*

Demonstração. Sejam $F : u \simeq u'$ e $G : v \simeq v'$ duas homotopias por caminhos. Definamos $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & s \in [0,1/2], \\ G(2s-1,t), & s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

A aplicação H está bem definida, pois para $s = \dfrac{1}{2}$ tem-se

$$F(2s,t) = F(1,t) = x_1 = G(0,t) = G(2-1,t)$$

e é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso,

- $H(s,0) = F(2s,0) = u(2s)$ para $s \in [0,1/2]$ e $H(s,0) = G(2s-1,0) = v(2s-1)$ para $s \in [1/2,1]$, em que $u(1) = x_1 = v(0)$. Assim, $H(s,0) = (u * v)(s)$;
- $H(s,1) = F(2s,1) = u'(2s)$ para $s \in [0,1/2]$ e $H(s,1) = G(2s-1,1) = v'(2s-1)$ para $s \in [1/2,1]$, em que $u'(1) = x_1 = v'(0)$. Assim, $H(s,1) = (u' * v')(s)$;
- $H(0,t) = F(0,t) = x_0$ e $H(1,t) = G(1,t) = x_2$.

Portanto, $u * v \simeq u' * v'$.

■

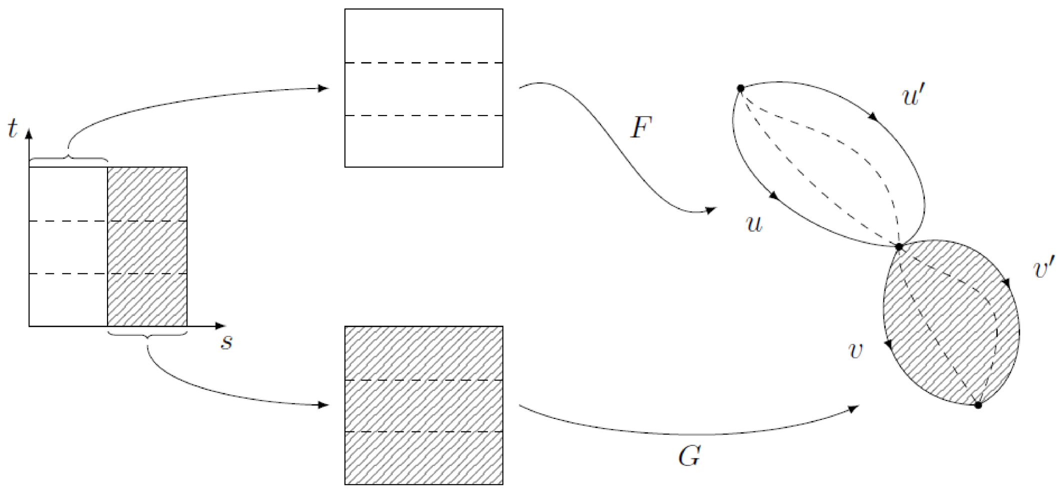

Figura 3.11: Representação para $u * v \simeq u' * v'$.

Definição 3.3.10 *Seja $\alpha = [u]$ a classe de homotopia por caminhos em X com início em x_0 e fim em x_1, e $\beta = [v]$ a classe de homotopia por caminhos em X com início em x_1 e fim em x_2. O produto dessas classes é definido por $[u * v] = [u] * [v] = \alpha * \beta$.*

Pela Proposição 3.3.9 verifica-se que $[u * v]$ não depende da escolha de $u \in \alpha$ e $v \in \beta$, isto é, o produto sobre as classes de homotopia de caminhos está bem definido. Além disso, este produto satisfaz propriedades semelhantes aos axiomas de grupo.

Proposição 3.3.11 *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e H uma homotopia por caminhos em X entre u e v. Então $u \circ H$ é uma homotopia por caminhos em Y entre $f \circ u$ e $f \circ v$.*

Demonstração. Sabemos que H é contínua por ser uma homotopia e $f \circ u$ e $f \circ v$ são também contínuas por serem composições de aplicações contínuas. Notemos que

- $(f \circ H)(s, 0) = f(H(s, 0)) = f(u(s)) = (f \circ u)(s)$,
- $(f \circ H)(s, 1) = f(H(s, 1)) = f(v(s)) = (f \circ v)(s)$,
- $(f \circ H)(0, t) = f(H(0, t)) = f(x_0) = y_0$,
- $(f \circ H)(1, t) = f(H(1, t)) = f(x_1) = y_1$.

Portanto, $f \circ u \simeq f \circ v$. ■

Proposição 3.3.12 *Se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua e se u e v são caminhos em*

X com $u(1) = v(0)$, então

$$f \circ (u * v) = (f \circ u) * (f \circ v).$$

Demonstração. Seja $w = u * v$ o caminho em X, dado por

$$w(s) = \begin{cases} u(2s), & s \in [0, 1/2]; \\ v(2s-1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Segue que $(f \circ u) * (f \circ v)$ é o caminho em Y, definido por

$$(f \circ w)(s) = \begin{cases} (f \circ u)(2s), & s \in [0, 1/2]; \\ (f \circ v)(2s-1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Portanto, $f \circ (u * v) = (f \circ u) * (f \circ v)$. ■

Teorema 3.3.13 *Sejam $\alpha = [u]$, $\beta = [v]$ e $\gamma = [w]$. A operação $*$ sobre as classes de homotopia por caminhos em um espaço topológico X possui as seguintes propriedades:*

a) ***Associativa.*** *Se $\alpha * (\beta * \gamma)$ estiver bem definida, então $(\alpha * \beta) * \gamma$ estará bem definida e são iguais.*

b) ***Neutro à direita e à esquerda.*** *Sejam $x \in X$ e o caminho constante $e_x : I \longrightarrow X$, tal que $e_x(s) = x$ para todo $s \in I$. Se u é um caminho em X de x_0 para x_1, então*

$$\alpha * \varepsilon_{x_1} = \alpha \text{ e } \varepsilon_{x_0} * \alpha = \alpha.$$

c) ***Inversos.*** *Se u é um caminho em X de x_0 para x_1 e u^{-1} é o caminho inverso de u, então $\alpha * \alpha^{-1} = \varepsilon_{x_0}$ e $\alpha^{-1} * \alpha = \varepsilon_{x_1}$.*

Demonstração. **a) Associativa.** Inicialmente descreveremos $(u * v) * w$

$$((u * v) * w)(s) = \begin{cases} (u * v)(2s), & s \in [0, 1/2], \\ w(2s-1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases} = \begin{cases} u(4s), & s \in [0, 1/4], \\ v(4s-1), & s \in [1/4, 1/2], \\ w(2s-1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

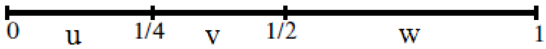

Figura 3.12: Diagrama para $(u * v) * w$.

Ilustramos este caminho pelo diagrama:

Analogamente descreveremos $u * (v * w)$

$$(u * (v * w))\,(s) = \begin{cases} u(2s), & s \in [0, 1/2], \\ (v * w)(2s - 1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases} = \begin{cases} u(2s), & s \in [0, 1/2], \\ v(4s - 2), & s \in [1/2, 3/4], \\ w(4s - 3), & s \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Ilustramos este caminho pelo diagrama:

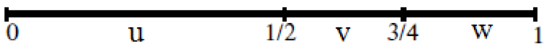

Figura 3.13: Diagrama para $u * (v * w)$.

Para determinarmos uma homotopia entre $(u*v)*w$ e $u*(v*w)$, juntemos os esquemas anteriores, como na Figura 3.14.

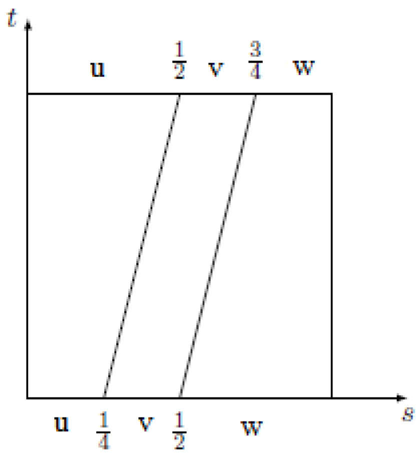

Figura 3.14: Homotopia entre $(u * v) * w$ e $u * (v * w)$.

A representação algébrica do segmento de extremidades $\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$ e $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ é $s = \dfrac{t+1}{4}$ e o de extremidades $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\dfrac{3}{4}, 1\right)$ é $s = \dfrac{t+2}{4}$. Assim, para $t \in I$ temos

- $u\left(a_1(s)\right)$ para $s \in \left[0, \dfrac{t+1}{4}\right]$;
- $u\left(a_2(s)\right)$ para $s \in \left[\dfrac{t+1}{4}, \dfrac{t+2}{4}\right]$;
- $u\left(a_3(s)\right)$ para $s \in \left[\dfrac{t+2}{4}, 1\right]$;

onde a_1, a_2 e a_3 são homeomorfismos definidos por:

- $a_1 : \left[0, \dfrac{t+1}{4}\right] \to I$, $a_1(s) = \dfrac{4s}{t+1}$;
- $a_2 : \left[\dfrac{t+1}{4}, \dfrac{t+2}{4}\right] \to I$, $a_2(s) = 4s - t - 1$;
- $a_3 : \left[\dfrac{t+2}{4}, 1\right] \to I$, $a_3(s) = \dfrac{t-4s+2}{t-2}$.

Desta forma, definimos a homotopia $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} u\left(\frac{4s}{t+1}\right), & s \in [0, (t+1)/4], \\ v(4s-1-t), & s \in [(t+1)/4, (t+2)/4], \\ w\left(\frac{t-4s+2}{t-2}\right), & s \in [(t+2)/4, 1]. \end{cases}$$

A aplicação H está bem definida, pois para $s = \dfrac{t+1}{4}$ tem-se $u\left(\dfrac{4s}{t+1}\right) = u(1) = $ $= x_1 = v(0) = v(4s-1-t)$ e para $s = \dfrac{t+2}{4}$ tem-se $v(4s-1-t) = v(1) = x_2 = w(0) = $ $= w\left(\dfrac{t-4s+2}{t-2}\right)$ e, é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso,

$$H(s,0) = \begin{cases} u(4s), & s \in [0, 1/4], \\ v(4s-1), & s \in [1/4, 1/2], \\ w(2s-1), & s \in [1/2, 1], \end{cases} = \begin{cases} (u * v)(2s), & s \in [0, 1/2], \\ w(2s-1), & s \in [1/2, 1], \end{cases}$$

$= ((u * v) * w)(s),\ s \in I.$

$$H(s,1) = \begin{cases} u(2s), & s \in [0, 1/2], \\ v(4s-2), & s \in [1/2, 3/4], \\ w(4s-3), & s \in [3/4, 1], \end{cases} = \begin{cases} u(2s), & s \in [0, 1/2], \\ (v * w)(2s-1), & s \in [1/2, 1], \end{cases}$$

$= (u * (v * w))\,(s),\ \ s \in I.$

$$H(0,t) = u(0) = x_0 \ \text{ e } \ H(1,t) = w(1) = x_3.$$

Portanto, $(u * v) * w \simeq u * (v * w)$.

b) Neutro à direita e à esquerda. Inicialmente, mostremos que a operação $*$ admite neutro à direita, ou seja, $u \simeq u * e_{x_1}$.

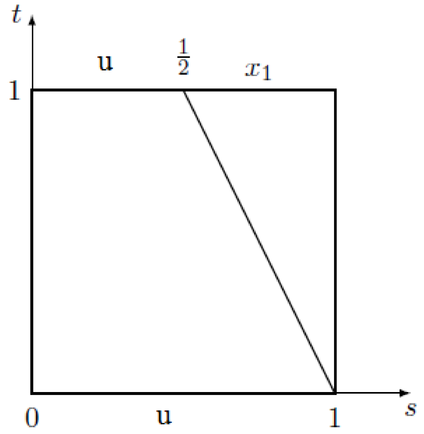

Figura 3.15: Homotopia entre u e $u * e_{x_1}$.

Pela Figura 3.15 temos $s = \dfrac{2-t}{2}$ como a representação algébrica do segmento de extremidades $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ e $(1,0)$. Dessa forma, para $t \in I$ temos $u(a(s))$, para $s \in \left[0, \dfrac{2-t}{2}\right]$, em que a é o homeomorfismo

$$a : \left[0, \frac{2-t}{2}\right] \to I,\ a(s) = \frac{2s}{2-t}.$$

Assim, definimos a homotopia $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} u\left(\frac{2s}{2-t}\right), & s \in [0, (2-t)/2], \\ x_1, & s \in [(2-t)/2, 1]. \end{cases}$$

A aplicação H está bem definida, pois para $s = \dfrac{2-t}{2}$ tem-se $u\left(\dfrac{2s}{2-t}\right) = u(1) = x_1$ e, é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso,

$$H(s,0) = \begin{cases} u(s), & s \in [0,1], \\ x_1, & s = 1, \end{cases} = u(s),\ s \in I.$$

$$H(s,1) = \begin{cases} u(2s), & s \in [0,1/2], \\ x_1, & s \in [1/2,1], \end{cases} = \begin{cases} u(2s), & s \in [0,1/2], \\ e_{x_1}(2s-1), & s \in [1/2,1], \end{cases} = (u * e_{x_1})(s),\ s \in I.$$

$$H(0,t) = u(0) = x_0 \text{ e } H(1,t) = x_1.$$

Portanto, $u \simeq u * e_{x_1}$.

Mostremos agora que a operação $*$ admite neutro à esquerda, ou seja, $u \simeq e_{x_0} * u$.

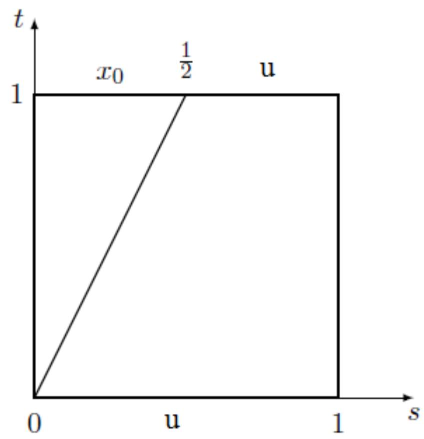

Figura 3.16: Homotopia entre u e $e_{x_0} * u$.

Pela Figura 3.16 temos $s = \dfrac{t}{2}$ como a representação algébrica do segmento de extremidades $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ e $(0,0)$. Dessa forma, para $t \in I$ temos $u(a(s))$, para $s \in \left[\dfrac{t}{2}, 1\right]$, em que a é o homeomorfismo

$$a : \left[\frac{t}{2}, 1\right] \to I,\ a(s) = \frac{t-2s}{t-2}.$$

Assim, definimos a homotopia $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} x_0, & s \in [0,t/2], \\ f\left(\frac{t-2s}{t-2}\right), & s \in [t/2,1]. \end{cases}$$

A aplicação H está bem definida, pois para $s = \dfrac{t}{2}$ tem-se $x_0 = u(0) = u\left(\dfrac{t-2s}{t-2}\right)$ e, é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso,

$$H(s,0) = \begin{cases} x_0, & s = 0, \\ u(s), & s \in [0,1], \end{cases} = u(s),\ s \in I.$$

$$H(s,1) = \begin{cases} x_0, & s \in [0,1/2], \\ u(2s-1), & s \in [1/2,1], \end{cases} = \begin{cases} e_{x_0}(2s), & s \in [0,1/2], \\ u(2s-1), & s \in [1/2,1], \end{cases} = (e_{x_0} * u)(s),\ s \in I.$$

$$H(0,t) = x_0 \text{ e } H(1,t) = u(1) = x_1.$$

Portanto, $u \simeq e_{x_0} * u$.

c) Inverso. Mostremos que u^{-1} é o inverso de u. Para isso, mostremos que $\alpha * \alpha^{-1} = \varepsilon_{x_0}$ e $\alpha^{-1} * \alpha = \varepsilon_{x_1}$.

Inicialmente, mostremos que $\alpha * \alpha^{-1} = \varepsilon_{x_0}$. Para isso, definimos a homotopia $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} u(2ts), & s \in [0,1/2], \\ u(2t(1-s)), & s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

H está bem definida, pois para $s = \dfrac{1}{2}$ tem-se $u(2st) = u(t) = u(2t(1-s))$ e, é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso,

$$H(s,0) = u(0) = x_0 = e_{x_0}(s),\ s \in I.$$

$$H(s,1) = \begin{cases} u(2s), & s \in [0,1/2], \\ u(2(1-s)) = u^{-1}(2s-1), & s \in [1/2,1]. \end{cases} = (u * u^{-1})(s),\ s \in I.$$

$$H(0,t) = H(1,t) = u(0) = x_0.$$

Portanto, $e_{x_0} \simeq u * u^{-1}$.

Agora mostremos que $\alpha^{-1} * \alpha = \varepsilon_{x_1}$. Para isso, definimos a homotopia $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} u^{-1}(2ts), & s \in [0,1/2], \\ u^{-1}(2t(1-s)), & s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

H está bem definida, pois para $s = \dfrac{1}{2}$ tem-se $u^{-1}(2st) = u^{-1}(t) = u^{-1}(2t(1-s))$ e, é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso,

$$H(s,0) = u^{-1}(0) = x_1 = e_{x_1}(s),\ s \in I.$$

$$H(s,1) = \begin{cases} u^{-1}(2s), & s \in [0,1/2], \\ u^{-1}(2(1-s)) = u(2s-1), & s \in [1/2,1]. \end{cases} = (u^{-1} * u)(s),\ s \in I.$$

$$H(0,t) = H(1,t) = u^{-1}(0) = x_1.$$

Portanto, $e_{x_1} \simeq u^{-1} * u$. ■

Capítulo

4

Grupo Fundamental

Neste capítulo, será apresentado o estudo do grupo fundamental por meio da teoria de homotopia. Mostraremos que o grupo fundamental do círculo é isomorfo ao grupo aditivo dos números inteiros e, por fim, será apresentada uma das aplicações do grupo fundamental do círculo, a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Para tanto, utilizamos as referências [2], [4], [7] e [9].

4.1 Grupo Fundamental

O conjunto das classes de homotopia por caminhos em um espaço X com a operação $*$ não é um grupo, porque o produto entre dois elementos deste conjunto não está sempre definido. Porém, se tivermos um ponto $x_0 \in X$, denominado ponto base, que sirva como início e fim de um conjunto de caminhos deste espaço, o impedimento acima é excluído e o conjunto de classes de homotopia por caminhos baseados em x_0 será um grupo com a operação $*$, denominado grupo fundamental de X.

Definição 4.1.1 *Sejam X um espaço topológico e x_0 um ponto de X. O conjunto das classes de homotopia de caminhos para caminhos fechados com base em x_0, com a operação $*$, é chamado grupo fundamental de X relativo ao ponto base x_0 e denotado por $\pi_1(X, x_0)$.*

Definição 4.1.2 *Sejam $(G, *)$ e $(G', \cdot)$ grupos. Uma aplicação $f : G \longrightarrow G'$ é um homomorfismo, se para todo $x, y \in G$, tem-se $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$. Dizemos que f é* *um isomorfismo se f é um homomorfismo bijetor.*

Dados dois caminhos fechados u e v com base em x_0, o produto $u*v$ está sempre definido e é um caminho fechado baseado em x_0. Segue do Teorema 3.3.13 que a operação $*$, quando restrita ao conjunto das classes de homotopia de caminhos, satisfaz os axiomas de grupo.

Definição 4.1.3 *Um caminho, em um espaço topológico, com mesma origem e fim em um determinado ponto base x_0, é dito laço com base em x_0.*

Proposição 4.1.4 *Seja γ uma das classes de homotopia de caminhos em X, que ligam x_0 a x_1. Definamos a aplicação $\overline{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ por: $\overline{\gamma} = \gamma * \alpha * \gamma^{-1}$. Essa aplicação $\overline{\gamma}$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja γ uma das classes de homotopia de caminhos que ligam x_0 a x_1. Se $\alpha \in \pi_1(X, x_1)$, então $\gamma * \alpha * \gamma^{-1} \in \pi_1(X, x_0)$. A aplicação $\overline{\gamma}$ está bem definida, pois depende apenas do fato de $*$ ser bem definida.

Para mostrarmos que $\overline{\gamma}$ é um isomorfismo, devemos mostrar que é um homomorfismo e também uma aplicação bijetora.

Homomorfismo: Considerando $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_1)$,

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}(\alpha) * \overline{\gamma}(\beta) &= (\gamma * \alpha * \gamma^{-1}) * (\gamma * \beta * \gamma^{-1}) \\ &= \gamma * \alpha * (\gamma^{-1} * \gamma) * \beta * \gamma^{-1} \\ &= \gamma * \alpha * \beta * \gamma^{-1}. \end{aligned}$$

$$\overline{\gamma}(\alpha * \beta) = \gamma * \alpha * \beta * \gamma^{-1}.$$

Logo,

$$\overline{\gamma}(\alpha) * \overline{\gamma}(\beta) = \overline{\gamma}(\alpha * \beta).$$

Portanto, $\overline{\gamma}$ é um homomorfismo.

Bijetora: Agora para mostrar que é bijetora, mostraremos que $((\overline{\gamma})^{-1})$ é o inverso de $\overline{\gamma}$.

Seja $\delta \in \pi_1(X, x_0)$,

$$\begin{aligned}(\overline{\gamma})^{-1}(\delta) &= \gamma^{-1} * \delta * (\gamma^{-1})^{-1}\\ &= \gamma^{-1} * \delta * \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}((\overline{\gamma})^{-1}(\delta)) &= \gamma * (\gamma^{-1} * \delta * \gamma) * \gamma^{-1}\\ &= (\gamma * \gamma^{-1}) * \delta * (\gamma * \gamma^{-1})\\ &= \delta\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $(\overline{\gamma})^{-1}(\overline{\gamma}(\delta)) = \delta$.

Portanto, $\overline{\gamma}$ é bijetora e assim é um isomorfismo. ■

Corolário 4.1.5 *Se X é conexo por caminhos e x_0 e x_1 são pontos de X, então os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.*

Demonstração. Tomando x_0 e x_1 pontos do espaço conexo X, tem-se sempre um caminho γ de x_0 a x_1 em X e um laço u com ponto base x_0. Pela definição de $\overline{\gamma}$, temos que a cada $\alpha = [u]$ em $\pi_1(X, x_0)$ teremos o correspondente $\overline{\gamma}(\alpha) \in \pi_1(X, x_1)$. Mas $\overline{\gamma}$ é um isomorfismo, o que segue o resultado. ■

O isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$, mencionado no corolário acima, depende dos caminhos escolhidos (variando a classe γ, o isomorfismo $\overline{\gamma}$ varia também). Porém, quando $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano, o isomorfismo independe do caminho, ou seja, duas classes quaisquer γ e δ, ligando x_0 a x_1, definem o mesmo isomorfismo: $\overline{\gamma} = \overline{\delta}$.

De fato, neste caso, para todo $\alpha \in \pi_1(X, x_1)$, vale:

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}(\alpha) &= \gamma * \alpha * \gamma^{-1}\\ &= \gamma * \delta^{-1} * \delta * \alpha * \delta^{-1} * \delta * \gamma^{-1}\\ &= \gamma * \delta^{-1} * \delta * \gamma^{-1} * \delta * \alpha * \delta^{-1}\\ &= \gamma * \gamma^{-1} * \delta * \alpha * \delta^{-1}\\ &= \delta * \alpha * \delta^{-1}\\ &= \overline{\delta}(\alpha)\end{aligned}$$

pois $\delta * \alpha * \delta^{-1}$ e $\delta * \gamma^{-1}$, pertencendo ambas ao grupo abeliano $\pi_1(X, x_0)$, comutam.

Segue destas condições e do Corolário 4.1.5 que, sendo X um espaço topológico conexo por caminhos com $\pi_1(X, x_0)$ abeliano para algum $x_0 \in X$, o grupo $\pi_1(X, x_1)$ também será abeliano, seja qual for o ponto base $x_1 \in X$, ou seja, mudar o ponto base em um espaço conexo por caminhos não altera o grupo fundamental.

Exemplo 4.1.6 *Considere o grupo fundamental* $\pi_1(\mathbb{R}^n, (0, ..., 0))$, *temos que ele é igual ao conjunto unitário* $\{[e_x]\}$, *onde* e_x *é a aplicação constante, cuja imagem é o ponto* $(0, ..., 0)$. *De fato, seja* $H(s,t) = (1-t)u(s)$ *uma aplicação de* $I \times I$ *para* $\mathbb{R}^n$, H *é contínua e* $H(s, 0) = u(s)$, $H(s, 1) = (0, ..., 0)$, *para todo* s.

Portanto, $H(s, 1) = e_x(s)$ *e* $H(0,t) = H(1,t) = (0, ..., 0)$, *sendo assim uma homotopia entre* u *e* e_x *para qualquer laço com este ponto base.*

Logo, a única classe de equivalência de laços é $[e_x]$.

De modo geral, no espaço euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$, *para qualquer ponto* $(x_1, ..., x_n)$, *o grupo fundamental* $\pi_1(X, (x_1, ..., x_n))$ *consiste do conjunto unitário* $\{[e_x]\}$ *em qualquer subconjunto convexo* X *de* $\mathbb{R}^n$, *onde* e_x *é um caminho constante com imagem* $(x_1, ..., x_n)$. *Basta tomar a homotopia linear entre os laços com base em* $(x_1, ..., x_n)$ *e o caminho constante* e_x.

Neste caso, dizemos que $\pi_1(X, (x_1, ..., x_n))$ *é o grupo fundamental trivial.*

Em particular, a bola unitária B^n *em* $\mathbb{R}^n$, *dada por* $B^n = \{x \,|\, x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$ *tem grupo fundamental trivial.*

4.2 Homomorfismo Induzido

Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua que leva o ponto x_0 de X no ponto y_0 de Y. Se u é um caminho fechado em X com base em x_0, então $f \circ u : I \longrightarrow Y$ é um caminho fechado em Y com base em y_0. A correspondência $u \mapsto f \circ u$ dá origem a uma nova aplicação que leva $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(Y, y_0)$, chamada homomorfismo induzido por uma aplicação contínua.

Definição 4.2.1 *Seja* $f : X \longrightarrow Y$ *uma aplicação contínua. Definimos o homomorfismo induzido por* f, *relativo ao ponto base* x_0, *como a aplicação* $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$, *com* $y_0 = f(x_0)$, *dada por* $f_\sharp(\alpha) = [f \circ u]$, *onde* $\alpha = [u]$.

A aplicação está bem definida, pois se H é uma homotopia de caminhos entre os laços u e v baseados em x_0, então $H(s,0) = u(s)$, $H(s,1) = v(s)$ e $H(0,t) = H(1,t) = x_0$. Mas, $f \circ H : I \times I \longrightarrow (Y, y_0)$ é uma homotopia entre $f \circ u$ e $f \circ v$, pois $(f \circ H)(s,0) =$ $= (f \circ u)(s)$, $(f \circ H)(s,1) = (f \circ v)(s)$ e $(f \circ H)(0,t) = (f \circ H)(1,t) = y_0$, e é contínua por ser composição de aplicações contínuas.

Agora para provar que $f_\sharp$ é um homomorfismo, vamos tomar $[u]$ e $[v] \in \pi_1(X, x_0)$, assim

$$f_\sharp([u] * [v]) = f_\sharp([u * v]) = [f \circ (u * v)] = [(f \circ u) * (f \circ v)] = [f \circ u] * [f \circ v] = f_\sharp([u]) * f_\sharp([v]).$$

Portanto, $f_\sharp([u] * [v]) = f_\sharp([u]) * f_\sharp([v])$.

Teorema 4.2.2 *Se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ são duas aplicações contínuas, e $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ e $g_\sharp : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0)$, com $y_0 = f(x_0)$ e $z_0 = g(y_0)$, são os homomorfismos induzidos por tais aplicações, então $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$. Além disso, se $id : X \longrightarrow X$ é aplicação identidade, então $id_\sharp : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ é o homomorfismo identidade.*

Demonstração. Seja $\alpha = [u]$. Por definição,

$$(g \circ f)_\sharp(\alpha) = [(g \circ f) \circ u] = [g \circ (f \circ u)] = g_\sharp([f \circ u]) = g_\sharp(f_\sharp(\alpha)) = (g_\sharp \circ f_\sharp)(\alpha).$$

Portanto, $(g \circ f)_\sharp(\alpha) = (g_\sharp \circ f_\sharp)(\alpha)$ e $id_\sharp(\alpha) = [id \circ u]$. Como id é a aplicação identidade, $id_\sharp(\alpha) = [id \circ u] = [u] = \alpha$, ou seja, $id_\sharp : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ é o homomorfismo identidade. ■

Segue da definição e do teorema apresentados anteriormente, que espaços homeomorfos possuem grupos fundamentais isomorfos. Mais precisamente, se $h : X \longrightarrow Y$ for um homeomorfismo, então $h_\sharp : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$, com $y_0 = h(x_0)$, é isomorfismo.

De fato, seja $h^{-1} : Y \longrightarrow X$ a inversa de h. Então, $h_\sharp^{-1} \circ h_\sharp = (h^{-1} \circ h)_\sharp = id_\sharp$, onde id é identidade de X e $h_\sharp \circ h_\sharp^{-1} = (h \circ h^{-1})_\sharp = id'_\sharp$, onde id' é a identidade de Y. Como $id_\sharp$ e $id'_\sharp$ são os homomorfismos identidade dos grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$, respectivamente, então $h_\sharp^{-1}$ é o inverso de $h_\sharp$.

4.3 Espaços Simplesmente Conexos

Um espaço topológico X é dito simplesmente conexo quando é conexo por caminhos e, para todo $x_0 \in X$, tem-se $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$, isto é, $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial (formado por um elemento).

Em outras palavras, para todo caminho fechado $u : I \longrightarrow X$, com base em x_0, temos que $u \simeq e_{x_0}$. Ou ainda, podemos dizer que X é conexo por caminhos e todo caminho fechado $u : I \longrightarrow X$ é livremente homotópico a um caminho constante.

Proposição 4.3.1 *Em um espaço simplesmente conexo, dois caminhos quaisquer com as mesmas extremidades fixas são homotópicos.*

<u>*Demonstração.*</u> Sejam $u, v : I \longrightarrow X$ dois caminhos de x_0 para x_1. Então $u * v^{-1}$ está definido e é um caminho fechado com base em x_0. Como, por hipótese, X é simplesmente conexo, $u * v^{-1}$ é homotópico ao caminho fechado constante em x_0, isto é, $u * v^{-1} \simeq e_{x_0}$. Então, $u \simeq (u * v^{-1}) * v \simeq e_{x_0} * v \simeq v$. Portanto, $u \simeq v$. ■

O objetivo agora, é mostrar que, quando $n > 1$, a esfera unitária S^n é simplesmente conexa. Para isso, necessitamos de algumas ferramentas apresentadas a seguir.

Sejam $u : I \longrightarrow X$ um caminho e $\varphi : I \longrightarrow I$ uma parametrização de I, isto é, uma aplicação contínua, tal que $\varphi(\partial I) \subset \partial I$. Tal parametrização φ é dita positiva quando $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$, negativa quando $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(1) = 0$, e trivial quando $\varphi(0) = \varphi(1)$.

O caminho $v = u \circ \varphi : I \longrightarrow X$ chama-se uma reparametrização do caminho u.

Proposição 4.3.2 *Seja $v = u \circ \varphi$ uma reparametrização do caminho $u : I \longrightarrow X$. Se a parametrização φ for positiva, então $v \simeq u$, se for negativa, tem-se $v \simeq u^{-1}$, se for trivial, temos $v \simeq e_x$.*

<u>*Demonstração.*</u> Pelo Exemplo 3.3.6, dois caminhos em I são homotópicos (com extremidades fixas) se, e somente se, tem a mesma origem e o mesmo fim. Sejam $i, j : I \longrightarrow I$ dadas por $i(s) = s$ e $j(s) = 1 - s$. Temos, então, $\varphi \simeq i, \varphi \simeq j$ ou $\varphi \simeq e_x$, onde e_x é uma constante, conforme φ seja uma reparametrização positiva, negativa ou trivial. Segue que $u \circ \varphi \simeq u \circ i = u$, $u \circ \varphi \simeq u \circ j = u^{-1}$ ou $u \circ \varphi \simeq e_x$, respectivamente. ■

Corolário 4.3.3 *Dados um caminho $u : I \longrightarrow X$ e pontos $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$, seja, para cada $i = 1, 2, \cdots, k$, $u_i : I \longrightarrow X$ o caminho "parcial", definido por $u_i = (u| [s_{i-1}, s_i]) \circ \varphi$, onde $\varphi : I \longrightarrow [s_{i-1}, s_i]$ é o homeomorfismo linear crescente. Então, fazendo $v = u_1 u_2 u_3 \cdots u_k$, temos $v \simeq u$.*

Lema 4.3.4 *Seja $u : I \longrightarrow S^n$ um caminho, tal que $u(I) \neq S^n$. Então, $u \simeq e_{x_0}$, se $u(0) = u(1) = x_0$, e $u \simeq w$, onde $w : I \longrightarrow S^n$ é um caminho injetivo, se $u(0) \neq u(1)$.*

Demonstração. Como $u(I) \neq S^n$, existe $p \in S^n - u(I)$. Seja $\varphi : S^n - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção estereográfica[2]. Então, como $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo, $\varphi \circ u : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é homotópico (com extremos fixos) a uma constante ou a um segmento de reta (parametrizado injetivamente), conforme u seja fechado ou não. O mesmo ocorre com $u = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ u)$. ■

Lema 4.3.5 *Todo caminho $u : I \longrightarrow S^n$ é homotópico (com extremos fixos) a um caminho $v : I \longrightarrow S^n$ tal que $v(I) \neq S^n$.*

Demonstração. Devido a continuidade uniforme de u, podemos obter pontos $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$ de tal forma que, tomando $I_i = [s_{i-1}, s_i]$, tenhamos $u(I_i) \neq S^n$ para todo $i = 1, \cdots, k$. Pelo Corolário 4.3.3, temos $u \simeq u_1 u_2 \cdots u_k$, onde cada $u_i : I \longrightarrow S^n$ é uma parametrização de $u|I_i$, com $u_i(I) = u(I_i)$. Pelos lemas anteriores, temos $u_i \simeq v_i$, onde a imagem $v_i(I)$ é um fechado com interior vazio em S^n. Fazendo $v = v_1 v_2 \cdots v_k$, temos que $u \simeq u_1 u_2 \cdots u_k \simeq v_1 v_2 \cdots v_k = v$ e a imagem $v(I) = v_1(I) \cup \cdots \cup v_k(I)$ é uma reunião finita de fechados com interior vazio em S^n. Segue, então, que $v(I)$ tem interior vazio. Em particular $v(I) \neq S^n$. ■

Proposição 4.3.6 *Se $n > 1$, a esfera S^n é simplesmente conexa.*

Demonstração. Pelo Lema 4.3.5, todo caminho fechado em S^n é homotópico a um caminho fechado, cuja imagem não é toda S^n. Este último caminho, pelo Lema 4.3.4, é homotópico a uma constante. Logo, S^n é simplesmente conexa. ■

Proposição 4.3.7 *O grupo fundamental de um produto cartesiano $X \times Y$ é isomorfo ao produto cartesiano dos grupos fundamentais de X e Y. Mais precisamente, se*

[2]Para maiores detalhes ver [8], Teorema 59.3.

$p : X \times Y \longrightarrow X$ e $q : X \times Y \longrightarrow Y$ são as projeções naturais, então $\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, dado por $\varphi(\alpha) = (p_\sharp(\alpha), q_\sharp(\alpha))$, é um isomorfismo.

<u>*Demonstração.*</u> Um caminho fechado $w : I \longrightarrow X \times Y$, com base no ponto (x_0, y_0), tem a forma $w(s) = (u(s), v(s))$, onde $u = p \circ w$ é um caminho fechado em X, com base em x_0 e $v = q \circ w$ é fechado com base em $y_0 \in Y$. Dado, também, $w'(s) = (u'(s), v'(s))$, temos $w \simeq w'$ se, e somente se, $u \simeq u'$ e $v \simeq v'$. De fato, uma homotopia de caminhos H entre w e w' tem a forma $H(s,t) = (F(s,t), G(s,t))$, onde F e G são homotopias de caminhos entre u e u', v e v', respectivamente. Daí resulta a proposição. ■

Corolário 4.3.8 *Se X e Y são simplesmente conexos, então o produto cartesiano $X \times Y$ é simplesmente conexo.*

Proposição 4.3.9 *Todo espaço contrátil é simplesmente conexo.*

<u>*Demonstração.*</u> Como X é contrátil, existe $x_0 \in X$ e uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow X$, tal que $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = x_0$, para todo $x \in X$, e $H(x_0, s) = x_0$, para todo $s \in I$.

Primeiro mostraremos que X é conexo por caminhos e depois que $\pi_1(X)$ é um grupo trivial.

Sejam y_1, $y_2 \in X$.

$$\begin{aligned} u : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto u(t) = H(y_1, t) \end{aligned}$$

é um caminho ligando y_1 a x_0 e

$$\begin{aligned} v : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto v(t) = H(y_2, t) \end{aligned}$$

é um caminho ligando y_2 a x_0.

Logo, $u * v^{-1}$ é um caminho que liga y_1 a y_2, ou seja, X é conexo por caminhos.

Agora, seja $\alpha = [u] \in \pi_1(X, x_0)$, isomorfo a $\pi_1(X)$. Considerando a composição de aplicações

$$\begin{array}{rcccl} K: I \times I & \longrightarrow & X \times I & \longrightarrow & X \\ (t,s) & \longrightarrow & (u(t),s) & \longrightarrow & H(u(t),s) \end{array}$$

Temos que K, definida por $K(t,s) = H(u(t),s)$ é uma homotopia entre u e e_{x_0}.
De fato, K é contínua, pois é composição de aplicações contínuas. Além disso,

$$\begin{cases} K(t,0) = H(u(t),0) = u(t); \\ K(t,1) = H(u(t),1) = x_0; \\ K(0,s) = K(1,s) = x_0, \forall s \in I. \end{cases}$$

Logo, todo laço em X baseado em x_0 é homotópico ao laço constante e_{x_0}.
Então, $\alpha = [e_{x_0}] = 0$.
Portanto, $\pi_1(X)$ é isomorfo ao $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$. ■

4.4 Grupo Fundamental da S^1

O objetivo é mostrar que existe um isomorfismo entre os grupos $\pi_1(S^1)$ e $\mathbb{Z}$. Para isso, necessitamos de alguns resultados e definições.

Considerando a aplicação exponencial $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, tal que $p(t) = e^{2\pi i t} = cos\,(2\pi t) + {}$ $+\, i sen\,(2\pi t)$, temos que:

i. p é contínua;

ii. $p(n) = 1$ se, e somente se, $n \in \mathbb{Z}$;

iii. $p(t_1 + t_2) = p(t_1) \cdot p(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

iv. $p(t + n) = p(t)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $t \in \mathbb{R}$;

v. para todo $n \in \mathbb{Z}$, a restrição $p_| : [n, n+1) \longrightarrow S^1$ é uma bijeção.

Intuitivamente, p enrola cada intervalo $[n, n+1)$ exatamente uma vez sobre S^1.

Definição 4.4.1 (Levantamento de caminho e homotopia) ***(a)*** *Seja* $\sigma : I \longrightarrow S^1$ *um caminho. Um caminho* $\widetilde{\sigma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que* $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$ *é denominado levantamento de* *caminho σ à reta real.*

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\widetilde{\sigma}"] \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3ex] & S^1 \end{tikzcd}$$

(b) *Se $H : I \times I \longrightarrow S^1$ é uma homotopia, então uma aplicação contínua $\widetilde{H} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $p \circ \widetilde{H} = H$ é denominada um levantamento da homotopia H.*

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3ex] & S^1 \end{tikzcd}$$

Exemplo 4.4.2 (Levantamento de caminhos) *Seja $\sigma : I \longrightarrow S^1$, tal que $\sigma(t) = e^{6\pi i t}$, isto é, σ é um caminho que dá exatamente 3 voltas em torno de S^1, iniciando no ponto 1. O caminho $\widetilde{\sigma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\widetilde{\sigma}(t) = 3t$ é um levantamento de σ, pois $(p \circ \widetilde{\sigma})(t) = p(3t) =$ $= e^{2\pi i(3t)} = e^{6\pi i t} = \sigma(t)$.*

Proposição 4.4.3 ***(a)*** *Se $\sigma : I \longrightarrow S^1$ é um caminho em S^1 com ponto inicial 1, então existe um único levantamento $\widetilde{\sigma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ com ponto inicial 0.*
(b) *Se $F : I \times I \longrightarrow S^1$ é uma homotopia tal que $F(0,0) = 1$, então existe um único levantamento $\widetilde{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\widetilde{F}(0,0) = 0$.*

Demonstração. A demonstração detalhada pode ser encontrada em [6], página 70. Neste trabalho, apresentaremos apenas uma ideia da prova de cada item.

(a) Consiste em dividir $I = [0,1]$ em subintervalos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, e definir continuamente $\widetilde{\sigma}$ nos subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$, usando σ e inversas locais de p.
(b) Dividindo $I \times I$ em subretângulos $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ e aplicando-se o mesmo raciocínio, demonstramos. ■

Definição 4.4.4 (Grau de um caminho fechado u) *Seja u um caminho fechado em S^1 com ponto base 1. Pela proposição anterior, existe exatamente um levantamento $\widetilde{u}$ de u com ponto inicial 0. Temos que $\widetilde{u}(1) \in \mathbb{Z}$, pois $p(\widetilde{u(1)}) = (p \circ \widetilde{u}(1)) = u(1) = 1$. Então definimos grau de u como sendo o inteiro $\widetilde{u}(1)$. Denotamos por grau(u).*

Exemplo 4.4.5 *Considere $u = \sigma$, onde σ é como no exemplo de levantamento de caminhos, ou seja, σ dá três voltas na S^1. Então u é um caminho fechado em S^1 e $\widetilde{u}(1) = 3.1 = 3$. Logo, grau$(u) = 3$.*

Intuitivamente, podemos pensar no *grau*(u) como sendo a quantidade de voltas que o caminho u dá em S^1.

Proposição 4.4.6 *Sejam u e v dois caminhos em S^1 com ponto base $x_0 = 1$. Então $u \simeq v$ se, e somente se, grau$(u) =$ grau(v).*

Demonstração. Sejam $\widetilde{u}$ e $\widetilde{v}$ os levantamentos de u e $v \in \mathbb{R}$, respectivamente, tendo ponto inicial 0. Suponhamos que $u \simeq v$ e que $H : I \times I \longrightarrow S^1$ é uma homotopia, tal que

$$\begin{cases} H(t,0) = u(t),\ H(t,1) = v(t), \forall t \in I; \\ H(0,s) = H(1,s) = 1, \forall s \in I. \end{cases}$$

Pelo item (b) da Proposição 4.4.3, existe um levantamento $\widetilde{H} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\widetilde{H}(0,0) = 0$ e $p \circ \widetilde{H} = H$. Então $p(\widetilde{H}(1,s)) = H(1,s) = 1$, para todo $s \in I$, e portanto $\widetilde{H}(1,s) \in \mathbb{Z}$, para todo $s \in I$. Visto que $\widetilde{H}(1,\_)$ é contínua e I é conexo, $\widetilde{H}(1,\_)$ deve ser uma aplicação constante, isto é, existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ (fixo), tal que $\widetilde{H}(1,s) = k_0$, para todo $s \in \mathbb{Z}$. Sejam

$$\begin{cases} \widetilde{u}(t) = \widetilde{H}(t,0); \\ \widetilde{v}(t) = \widetilde{H}(t,1). \end{cases}$$

Podemos ver que $\widetilde{u}$ e $\widetilde{v}$ são os levantamentos de u e v, respectivamente, com ponto inicial 0 (pela unicidade do levantamento). Assim, $grau(u) = \widetilde{u}(1) = \widetilde{H}(1,0) = k_0 = \widetilde{H}(1,1) =$ $= \widetilde{v}(1) = grau(v)$.

Reciprocamente, suponhamos que $grau(u) = grau(v)$, ou seja, $\widetilde{u}(1) = \widetilde{v}(1)$. Definimos uma aplicação $\widetilde{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(t,s) = (1-s)\widetilde{u}(t) + s\widetilde{v}(t)$. Podemos ver que F é uma homotopia (em $\mathbb{R}$) entre $\widetilde{u}$ e $\widetilde{v}$ e que $p \circ F : I \times I \longrightarrow S^1$ é uma homotopia entre u e v como caminhos fechados em S^1. Portanto, $u \simeq v$. ■

Teorema 4.4.7 *O grupo fundamental de S^1 é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos inteiros.*

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} \partial : \pi_1(S^1, 1) &\longrightarrow \quad \mathbb{Z} \\ [u] &\longrightarrow \quad \partial([u]) = grau(u). \end{aligned}$$

i. Pela proposição anterior, ∂ está bem definida e é injetora.

ii. ∂ é sobrejetora, pois para todo $n \in \mathbb{Z}$, o caminho fechado $\gamma : I \longrightarrow S^1$, tal que $\gamma(t) = e^{(2\pi n i t)}, \forall\ t \in I$, tem como levantamento o caminho $\widetilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\widetilde{\gamma}(t) = nt, \forall\ t \in I$, e portanto $\partial([\gamma]) = \widetilde{\gamma}(t) = nt$. Para $t = 1$, $\partial([\gamma]) = \widetilde{\gamma}(1) = n$.

iii. Vejamos que ∂ é um homomorfismo. Sejam $[u]$ e $[v]$ em $\pi_1(S^1, 1)$. Se $\widetilde{u}$ e $\widetilde{v}$ são respectivamente os levantamentos de u e v com ponto inicial 0, então podemos ver que o caminho definido por

$$g(t) = \begin{cases} \widetilde{u}(2t), \ \ se\ 0 \leq t \leq 1/2; \\ \widetilde{u}(1) + \widetilde{v}(2t-1), \ \ se\ 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases}$$

é o levantamento de $u * v$ com ponto inicial 0. Dessa forma,

$$\partial([u] * [v]) = \partial([u * v]) = g(1) = \widetilde{u}(1) + \widetilde{v}(2-1) = \widetilde{u}(1) + \widetilde{v}(1) = \partial([u]) + \partial([v]).$$

Portanto, ∂ é um isomorfismo. ■

Exemplo 4.4.8 *Considerando o cilindro fechado* $C = S^1 \times [a,b] \subset \mathbb{R}^3$.

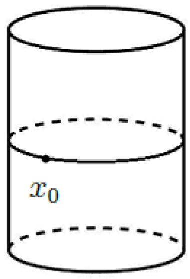

Figura 4.1: $C = S^1 \times [a,b] \subset \mathbb{R}^3$.

$\pi_1(C) = \pi_1(S^1 \times [a,b]) = \pi_1(S^1) \times \pi_1([a,b])$ *é isomorfo a* $\mathbb{Z} \times \{0\}$*, que é isomorfo a* $\mathbb{Z}$.

Portanto, $\pi_1(C)$ *é isomorfo a* $\mathbb{Z}$.

Exemplo 4.4.9 *Seja* $X = T^2$*, o toro.* X *pode ser identificado ao produto* $S^1 \times S^1$*. Então,* $\pi_1(X) = \pi_1(S^1 \times S^1)$ *é isomorfo a* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

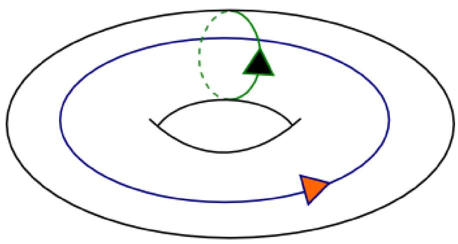

Figura 4.2: Toro identificado ao produto $S^1 \times S^1$.

4.5 Grupo Fundamental de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Teorema 4.5.1 *Seja* $x_0 \in S^1$*. A inclusão* $j : (S^1, x_0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0)$ *induz um isomorfismo do grupo fundamental.*

Demonstração. Seja $r : (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0) \longrightarrow (S^1, x_0)$ uma aplicação contínua definida por $r(x) = \dfrac{x}{||x||}$, em que $||x||$ denota a distância de x à origem $(0,0)$ do plano $\mathbb{R}^2$, a qual chamamos norma de x. Mostremos que $r_\sharp$ é o inverso de $j_\sharp$. Vamos considerar a composição

$$(S^1, x_0) \overset{j}{\hookrightarrow} (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0) \xrightarrow{r} (S^1, x_0).$$

Esta composição é igual à aplicação identidade em S^1, isto é, $r \circ j = id$, com $id : (S^1, x_0) \to (S^1, x_0)$. Portanto, pelo Teorema 4.2.2, $r_\sharp \circ j_\sharp = id_\sharp$, tal que $id_\sharp$ é o homomorfismo identidade em $\pi_1(S^1, x_0)$. Para mostrar que $j_\sharp \circ r_\sharp$ é o homomorfismo identidade em $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0)$, vamos tomar $[u] \in \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0)$, de onde segue que $(j_\sharp \circ r_\sharp)([u]) = j_\sharp(r_\sharp[u]) = [j \circ r \circ u]$.

Agora tomando $v = j \circ r \circ u$, então $v : I \to (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0)$, será um laço em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ baseado em x_0, definido por

$$v(s) = \frac{u(s)}{||u(s)||},$$

ilustrada na figura abaixo:

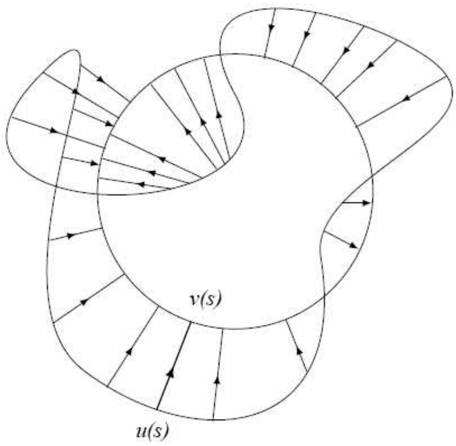

Figura 4.3: Normalização de uma curva ao redor da origem.

Mostraremos agora que v é homotópico por caminhos a u. Para isso, vamos definir $H : I \times I \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por

$$H(s,t) = t\frac{u(s)}{||u(s)||} + (1-t)u(s).$$

Como $H(s,0) = u(s)$, $H(s,1) = v(s)$, $H(0,t) = H(1,t) = x_0$, logo u é homotópico por caminhos a v. Mas $(j_\sharp \circ r_\sharp)([u]) = [v]$ e consequentemente $(j_\sharp \circ r_\sharp)([u]) = [u]$.

Portanto,

$$j_\sharp : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0)$$

é um isomorfismo induzido por j no grupo fundamental. ■

A demonstração deste teorema está correta, porque foi possível deformar o caminho u em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, no caminho $r \circ u$ em S^1. Uma outra forma de visualizar esta demonstração é notar que podemos deformar o espaço $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ no espaço S^1, traçando segmentos de retas com pontos extremos em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e S^1, tais que as retas correspondentes aos segmentos passem por $(0,0)$. Assim, o caminho u é deformado no caminho $r \circ u$; a esta deformação denominamos **retração por deformação forte** de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ em S^1. Analisar a demonstração dessa forma nos leva a uma generalização do Teorema 4.5.1, que é o teorema a seguir:

Teorema 4.5.2 *Seja $x_0 \in S^{n-1}$. A inclusão $j : (S^{n-1}, x_0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n - 0, x_0)$ induz um isomorfismo do grupo fundamental.*

Definição 4.5.3 *Seja A um subespaço de X. Dizemos que A é um retrato de X, se existir uma aplicação contínua $r : X \to A$, tal que $r(x) = x$, para todo $x \in A$. A aplicação r é denominada retração de X em A.*

Proposição 4.5.4 *Se A é um retrato de X, então o homomorfismo de grupos fundamentais induzido pela inclusão $j : A \hookrightarrow X$ é injetor.*

Demonstração. Como A é um retrato de X, existe uma retração $r : X \to A$ em que $r(x) = x$, para todo $x \in A$. Logo,

$$(r \circ j)(a) = r(j(a)) = r(a) = a = id_A(a).$$

Assim, $(r \circ j)_\sharp = (id_{(A,a)})_\sharp = id_{\pi_1(A,a)}$. Portanto, $j_\sharp$ é uma aplicação injetora. ■

Definição 4.5.5 *Seja A um subespaço de X. Então A é denominado um retrato por deformação forte de X, se existir uma aplicação contínua $H : X \times I \to X$, tal que*

$$\begin{cases} H(x,0) = x, \forall x \in X; \\ H(x,1) \in A, \forall x \in X; \\ H(a,t) = a, \forall a \in A \text{ e } t \in I. \end{cases}$$

A aplicação H é chamada de retração por deformação forte.

Em outras palavras, o espaço A é um retrato por deformação forte de X, se X puder ser deformado gradualmente em A, com cada ponto de A permanecendo fixo durante a deformação.

Exemplo 4.5.6 *A aplicação $H : (\mathbb{R}^n - 0) \times I \to (\mathbb{R}^n - 0)$ definida por*

$$H(x,t) = t\frac{x}{||x||} + (1-t)x$$

é uma retração por deformação forte do $\mathbb{R}^n - 0$ no S^{n-1}, já que

$$\begin{cases} H(x,0) = 0\dfrac{x}{||x||} + (1-0)x = x, \forall x \in \mathbb{R}^n - 0; \\ H(x,1) = 1\dfrac{x}{||x||} + (1-1)x = \dfrac{x}{||x||} \in S^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}^n - 0; \\ H\left(\dfrac{x}{||x||}, t\right) = t\dfrac{\frac{x}{||x||}}{\left|\left|\frac{x}{||x||}\right|\right|} + (1-t)\dfrac{x}{||x||} = \dfrac{x}{||x||} \in S^{n-1}, \forall t \in I. \end{cases}$$

Teorema 4.5.7 *Seja A um retrato por deformação forte de X e $x_0 \in A$. Então a inclusão $j : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ induz um isomorfismo do grupo fundamental.*

<u>*Demonstração.*</u> Como A é um retrato por deformação forte de X, existe uma retração por deformação forte $H : X \times I \to X$, tal que

$$\begin{cases} H(x,0) = x = id_X(x), \forall x \in X; \\ H(x,1) \in A, \forall x \in X; \\ H(a,t) = a, \forall a \in A, \forall t \in I. \end{cases}$$

Seja $r : (X, x_0) \to (A, x_0)$ a aplicação definida por $r(x) = H(x,1)$ e seja a composição

$$A \overset{j}{\hookrightarrow} X \overset{r}{\to} A \overset{j}{\hookrightarrow} X.$$

Queremos mostrar que $j_\sharp : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ é isomorfismo induzido por j do grupo fundamental. Para isso, devemos mostrar que

i. $(r \circ j)_\sharp = id_{\pi_1(A,x_0)}$. De fato, $(r \circ j)(a) = r(j(a)) = r(a) = H(a,1) = a = id_A(a)$, ou seja, $r \circ j = id_{(A,x_0)}$.

Portanto, $(r \circ j)_\sharp = (id_{(A,x_0)})_\sharp = id_{\pi_1(A,x_0)}$.

ii. $(j \circ r)_\sharp = id_{\pi_1(X,x_0)}$. De fato, temos $(j \circ r)(x) = j(r(x)) = j(H(x,1)) = j(a) = a = = H(x,1) = r(x)$. Consequentemente,

$$\begin{cases} H(x,0) = id_X(x); \\ H(x,1) = r(x) = (j \circ r)(x); \\ H(x_0,t) = x_0 = id_X(x_0) = (j \circ r)(x_0). \end{cases}$$

Portanto, $j \circ r$ é isomorfo à $id_{(X,x_0)}$, daí $(j \circ r)_\sharp = (id_{(X,x_0)})_\sharp = id_{\pi_1(X,x_0)}$. ■

Exemplo 4.5.8 *Seja C o eixo z do $\mathbb{R}^3$. Considerando o espço $\mathbb{R}^3 - C$, o plano $(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \times \{0\}$ é um retrato por deformação forte de $\mathbb{R}^3 - C$, pois existe a aplicação contínua $H : (\mathbb{R}^3 - C) \times I \to \mathbb{R}^3 - C$ definida por*

$$H(x,y,z,t) = (x,y,(1-t)z), \ \textit{tal que}\ x \neq 0, y \neq 0$$

que é uma retração por deformação forte. De fato, temos

$$\begin{cases} H(x,,y,z,0) = (x,y,z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - C; \\ H(x,y,0,t) = (x,y,0), \forall (x,y,0) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \times \{0\}, \forall t \in I; \\ H(x,y,z,1) = (x,y,0), \forall (x,y,0) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \times \{0\}, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - C. \end{cases}$$

O lema a seguir tem grande importância na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, ele será usado nas etapas 2 e 3 da demonstração deste teorema.

Lema 4.5.9 *Seja $f : S^1 \to X$ uma aplicação contínua. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

i. *f é homotopicamente nula;*

ii. *f se estende para uma aplicação contínua $g : B^2 \to X$;*

iii. *$f_\sharp$ é o homomorfismo trivial do grupo fundamental.*

Proposição 4.5.10 *A aplicação inclusão $j : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ não é homotopicamente nula. A aplicação identidade $id : S^1 \to S^1$ não é homotopicamente nula.*

Demonstração. De fato, pelo Exemplo 4.5.6, existe uma retração por deformação de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ em S^1. Pelo Teorema 4.5.1,

$$j_\sharp : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x_0)$$

é um isomorfismo. Logo, $j_\sharp$ é injetora e portanto não trivial. Pelo Teorema 4.2.2, $id_\sharp$ é o homomorfismo identidade, consequentemente $id_\sharp$ não é trivial.

Portanto, das equivalências do Lema 4.5.9, segue o resultado que queríamos. ■

4.6 Teorema Fundamental da Álgebra

Na teoria dos números complexos, um resultado básico diz que toda equação polinomial

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{4.6.1}$$

de grau n com coeficientes complexos tem n raízes complexas (a menos da multiplicidade de suas raízes). Este resultado é uma consequência do Teorema Fundamental da Álgebra, ele nos diz que a equação (4.6.1) tem pelo menos uma raíz complexa. A demonstração deste teorema pode ser feita de várias maneiras, uma delas é usando a teoria de homotopia e grupo fundamental da S^1 que foram desenvolvidos neste trabalho e é nesse sentido que faremos a demontração deste.

Teorema 4.6.1 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Uma equação polinomial*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

de grau n (inteiro positivo) com coeficientes complexos tem pelo menos uma raíz complexa.

Demonstração. Para melhor entendimento, iremos dividir em quatro etapas.

Etapa 1: Consideremos a aplicação $f : S^1 \longrightarrow S^1$, dada por $f(z) = z^n$, onde z é um número complexo e $|z| = 1$. Provemos que o homomorfismo induzido por f, $f_\sharp : \pi_1(S^1, b_0) \longrightarrow \pi_1(S^1, b_0)$ em que $b_0 = (1, 0)$, é uma aplicação injetora.

Seja $p_0 : I \longrightarrow S^1$ o laço em S^1, sendo b_0 o ponto base, definido por

$$p_0(s) = e^{(2\pi is)} = (cos2\pi s, sen2\pi s).$$

Sua imagem pela aplicação $f_\sharp$ tem como um dos seus representantes, o laço em S^1 baseado em b_0

$$f(p_0(s)) = (e^{2\pi is})^n = (cos2\pi ns, sen2\pi ns).$$

Tomando o recobrimento $p : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (S^1, b_0)$, definido por $p(x) = (cos\, 2\pi x, sen\, 2\pi x)$, segue que os levantamentos dos laços p_0 e $f \circ p_0$ com início em 0 são, respectivamente, os caminhos $\tilde{p_0}(s) = s$ e $(\widetilde{f \circ p_0})(s) = ns$. Dessa forma, pelo isomorfismo $\phi : \pi_1(S^1, b_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$, o laço p_0 corresponde ao inteiro 1 enquanto o laço $f \circ p_0$ corresponde ao inteiro n. Assim, $f_\sharp$ é injetora.

Etapa 2: Mostremos que se $g : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é a aplicação $g(z) = z^n$, tal que $|z| = 1$, então g não é homotopicamente nula.

A aplicação g é igual a aplicação f da primeira etapa, composta com a aplicação inclusão $j : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Como vimos, $f_\sharp$ é injetora. Note que S^1 é um retrato de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, pelo Exemplo 4.5.6. Consequentemente, pela Proposição 4.5.4, $j_\sharp$ é injetora. Além disso, pelo Teorema 4.2.2, $g_\sharp = j_\sharp \circ f_\sharp$. Segue então que, $g_\sharp$ é injetora por ser composição de injetoras. Logo, $g_\sharp$ não é trivial. Portanto, pelo Lema 4.5.9, g não é homotopicamente nula.

Etapa 3: Vamos provar agora um caso especial do teorema. Dada a equação polinomial

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \tag{4.6.2}$$

suponhamos que $|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1$.

Agora, mostremos que a equação (4.6.2) tem raíz dentro da bola unitária B^2. Para isso, vamos supor que não há raíz. Dessa forma, consideraremos a aplicação $k : B^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, definida por

$$k(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Se h é a restrição de k a S^1, segue que h se estende a uma aplicação da bola unitária B^2 em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Assim, pelo Lema 4.5.9, h é homotopicamente nula.

Por outro lado, a aplicação $H : S^1 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, dada por

$$H(z,t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)$$

é uma homotopia entre g e h.

De fato, H é contínua, $H(z,0) = z^n = g(z)$, $H(z,1) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = h(z)$ e está bem definida, já que não é igual a zero em nenhum momento, pois

$$\begin{aligned} |H(z,t)| &\geq |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)| \\ &\geq 1 - t(|a_{n-1}z^{n-1}| + \cdots + |a_0|) \\ &= 1 - t(|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|) > 0. \end{aligned}$$

Porém, g ser homotópica a h é um absurdo, pois g não é homotopicamente nula e h é. Logo, a equação $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ tem pelo menos uma raíz na bola unitária B^2.

Etapa 4: Agora provaremos o caso geral. Seja a equação polinomial

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0. \tag{4.6.3}$$

Observe que se $|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1$, recaímos no caso especial provado na Etapa 3.

Caso contrário, $|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| \geq 1$. Nesse caso, seja c um número real positivo e tomando $z = cy$, temos que

$$(cy)^n + a_{n-1}(cy)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

ou, se dividirmos toda a equação por c^n, obtemos

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{c} y^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{c^n} = 0. \tag{4.6.4}$$

Se a equação (4.6.4) possui uma raíz $y = y_0$, então a equação original (4.6.3) possui uma raíz $z_0 = cy_0$.

Agora, tomando um c suficientemente grande, afim de que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{c}\right| + \left|\frac{a_{n-2}}{c^2}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{c^n}\right| < 1,$$

por exemplo, tomando $c = 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$, temos

$$\frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|}{c} < 1 \ \text{ ou } \ \left|\frac{a_{n-1}}{c}\right| + \cdots + \left|\frac{a_1}{c}\right| + \left|\frac{a_0}{c}\right| < 1,$$

consequentemente

$$\left|\frac{a_{n-1}}{c}\right| + \left|\frac{a_{n-2}}{c^2}\right| + \left|\frac{a_{n-3}}{c^3}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{c^n}\right| < 1,$$

ou seja, nossa equação original (4.6.3) recaiu no caso particular da Etapa 3 da demonstração. Portanto, a equação

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

sempre admitirá pelo menos uma raíz no campo dos números complexos, provando enfim o teorema. ■

Vale observar que a demonstração anterior foi feita considerando um polinômio mônico, porém é válida para qualquer polinômio de grau $n > 0$, pois caso o polinômio não seja mônico, dividimos o mesmo pelo coeficiente dominante.

Conclusão

Quando se estuda um determinado espaço topológico é, em geral, simples trabalhar com isomorfismos de espaços conhecidos. Ao longo do estudo foi desenvolvida a topologia algébrica que possibilita a comparação a um invariante topológico, o grupo fundamental. O mais simples exemplo de grupo fundamental é o grupo fundamental do círculo, objetivo deste trabalho. Esse grupo fundamental é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros, o que nos permitiu, junto com a teoria de homotopia, provar o Teorema Fundamental da Álgebra, que é um teorema de grande importância na matemática.

A topologia, apesar de ser um dos ramos recentes da Matemática, e mesmo com seu valor já estudado e demonstrado por vários pesquisadores, ela quase não é contemplada, explorada no curso de Matemática. Então, foi uma experiência única poder aprender um pouco sobre a homotopia, o Grupo Fundamental e suas propriedades.

As referências utilizadas foram de extrema necessidade para a compreensão de cada uma das etapas deste trabalho, tendo como maior referência os livros do Munkres, [8] e [9].

De fato, concluímos o estudo dos tópicos previstos e alcançamos os objetivos estimados para o término deste ciclo.

Referências Bibliográficas

[1] DOMINGUES, H. H. **Espaços métricos e introdução à topologia**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1982.

[2] FANTI, E.L.C.; ANDRADE, M.G.C. **Grupo fundamental - uma visão geométrica**. 1996, 42 p. Notas de seminários No. 09 - Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, UNESP, São José do Rio Preto, 1996.

[3] LIBARDI, A. K. M.; VIEIRA, J. P.; MELO, T. **Invariantes topológicos**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.

[4] LIMA, E. L. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1998.

[5] LIMA, E. L. **Elementos de topologia geral**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

[6] LYRA, C. B. **Grupo fundamental e revestimentos**. 7º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1969.

[7] MARQUES, J.D.O. **O Teorema Fundamental da Álgebra via Teoria de Homotopia**. 2016. 63 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista - UNESP, Rio Claro - São Paulo, 2016.

[8] MUNKRES, J.R. **Topology**. New Jersey: Prentice Hall, 2ª edição, 2000.

[9] MUNKRES, J.R. **Elements of algebraic topology**. New York: The Benjamin - - Cummings Publishing Company, 1984.