



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA QUÍMICA



Controle Preditivo Distribuído para Sistemas Não Lineares com Particionamento Automático

Rosiane Ribeiro Rocha
Uberlândia
2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA QUÍMICA



Controle Preditivo Distribuído para Sistemas Não Lineares com Particionamento Automático

Rosiane Ribeiro Rocha

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Química, Área de Concentração em Desenvolvimento de Processos Químicos.

Orientador: Prof. Dr. Luís Cláudio Oliveira Lopes

*Uberlândia
2018*

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

R672c Rocha, Rosiane Ribeiro, 1987-
2018 Controle preditivo distribuído para sistemas não lineares com
particionamento automático / Rosiane Ribeiro Rocha. - 2018.
264 f. : il.

Orientador: Luís Cláudio Oliveira Lopes.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Química.
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2018.784>
Inclui bibliografia.

1. Engenharia química - Teses. 2. Instalações da indústria química -
Teses. 3. Sistemas não lineares - Teses. 4. Controle preditivo - Teses. I.
Lopes, Luís Cláudio Oliveira. II. Universidade Federal de Uberlândia.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química. III. Título.

CDU: 66.0

Maria Salete de Freitas Pinheiro – CRB6/1262

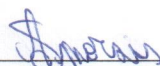
Controle Preditivo Distribuído para Sistemas Não Lineares com Particionamento Automático

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de doutor em Engenharia Química.

BANCA EXAMINADORA



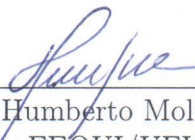
Prof. Dr. Luis Cláudio Oliveira Lopes
Orientador - PPGEQ - FEQUI/UFU



Prof. Dr. Aniel Silva de Moraes
FEELT/UFU



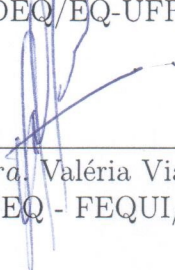
Prof. Dr. Flávio Vasconcelos da Silva
FEQ/UNICAMP



Prof. Dr. Humberto Molinar Henrique
FEQUI/UFU



Prof. Dr. Maurício Bezerra de Souza Júnior
DEQ/EQ-UFRJ



Prof. Dra. Valéria Viana Murata
PPGEQ - FEQUI/UFU

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por estar sempre ao meu lado, me abençoando e me dando forças para não desistir nas lutas mais difíceis.

Aos meus pais, João e Rosângela, que sempre fizeram mais por mim do que para si próprios.

Ao meu irmão, Raphael, pelo apoio e conselhos.

Ao meu noivo, Marcus Romano, pelo amor e apoio incondicional em todos os momentos.

Ao Professor Luís Cláudio Oliveira Lopes, pela orientação deste trabalho, pela compreensão e paciência nos momentos críticos e principalmente pela amizade e confiança.

Aos meus amigos e colegas de curso, Marina Braga, Natália Mazzarioli, Rafael Pereira e Diovanina Dimas pelo apoio, ajuda em todos os momentos e amizade sincera.

Aos meus sogros, Nahára e Waltênio e minha cunhada Luiza, por serem como uma segunda família para mim.

Aos meus amigos e companheiros do Laboratório de Otimização e Modelagem de Processos (LOM), pela força e incentivo.

Aos professores da Faculdade de Engenharia Química.

Aos professores e colegas de trabalho do Instituto Federal do Espírito Santo, pelo apoio e compreensão.

Aos membros da banca, *Prof. Dr. Aniel Silva de Moraes*, *Prof. Dr. Flávio Vasconcelos da Silva*, *Prof. Dr. Humberto Molinar Henrique*, *Prof. Dr. Maurício Bezerra de Souza Júnior* e *Prof. Dra. Valéria Viana Murata*, pelo enriquecimento deste trabalho.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa de estudos nos dois primeiros anos do doutorado.

Aos meus pais.

Resumo

O objetivo básico do controle de uma planta é o de garantir estabilidade e coordenar as várias interações existentes nos subsistemas que compõem a mesma. Os subsistemas de uma planta são em geral projetados de forma independente ou adicionados posteriormente com a evolução da planta instalada. Essas alterações em geral ocorrem motivadas por exigências de produção ou por regulamentação ambiental. A maioria das grandes plantas químicas implementam o controle descentralizado como estratégia de controle. Mas, para subsistemas com fortes interações, essa estratégia pode levar a um desempenho não aceitável. Por outro lado, o controle centralizado é capaz de abordar o problema de interação de forma ótima, mas com custos estruturais e organizacionais elevados, tornando tal estrutura de complexa atualização e manutenção. Uma estrutura que preserva a topologia e a flexibilidade do controle descentralizado ao mesmo tempo que oferece propriedades de estabilidade é o controle distribuído. Nessa estrutura de controle, as interações entre os subsistemas são modeladas e as informações entre os subsistemas são compartilhadas entre os mesmos. O presente trabalho apresenta contribuições para o estudo de controladores distribuídos para sistemas não lineares e de grande escala. São propostos quatro tipos de controle preditivo distribuído baseado em modelos (DMPC): DMPC localmente linearizado não cooperativo, DMPC localmente linearizado cooperativo, DMPC não linear não cooperativo e DMPC não linear cooperativo. As quatro propostas são para aplicação em processos não lineares, mas as duas primeiras utilizam o modelo linearizado localmente para predição das saídas e as duas últimas propostas fazem uso direto do modelo não linear. As propostas foram avaliadas em três estudos de casos distintos e seus desempenhos comparados com estratégias de controle centralizada e descentralizada e obtendo-se respostas satisfatórias para as propostas desenvolvidas.

Palavras-chave: *Controle Preditivo baseado em Modelo, Controle Distribuído, Decomposição de Modelos, Sistemas não lineares.*

Abstract

One of the main purposes of a control system of an industrial plant is to guarantee closed-loop stability and to coordinate the various existing interactions between its subsystems. Subsystems of a plant are usually designed independently or added later with the evolution of the installed plant. These changes usually occur motivated by production requirements or environmental regulations. Most large-scale systems implement the decentralized control as the control strategy of choice. However, for subsystems with strong interactions, this approach can lead to unacceptable performance. Furthermore, centralized control is able to address optimally the problem of interaction, but with high structural and organizational costs, making costly such a complex structure and upgrade maintenance. A structure that preserves the topology and flexibility of decentralized control and at the same time may offer a nominal closed-loop stability guarantee is the distributed control approach. In this control structure, the interactions between subsystems are modeled and information between the subsystems is shared between them. The present work presents contributions in the study of distributed controllers for nonlinear and large scale systems. Four types of Distributed Model Predictive Control (DMPC) are proposed: non-cooperative locally linearized DMPC, cooperative locally linearized DMPC, non-cooperative non-linear DMPC and cooperative non-linear DMPC. The four proposed controllers are for application in non-linear processes, but the first two use the locally linearized model to predict the outputs and the last two make direct use of the nonlinear model. The proposed controllers were evaluated in three different case studies and their performance compared to centralized and decentralized control strategies and satisfactory performance was obtained for the developed controllers.

Keywords: *Distributed control, Model predictive control, Decomposition models, Non-linear systems.*

LISTA DE FIGURAS

2.1	Horizonte móvel do controle preditivo baseado em modelo (adaptado de Seborg et al. (2004)).	12
2.2	Representação esquemática de um MPC centralizado (adaptado de Christofides et al. (2013)).	16
2.3	Representação MPC Descentralizado (adaptado de Christofides et al. (2013)).	18
2.4	Representação de um DMPC (adaptado de Christofides et al. (2013)). . . .	21
2.5	Representação de um DMPC não cooperativo sequencial (adaptado de Christofides et al. (2013)).	23
2.6	Representação de um DMPC não cooperativo paralelo (adaptado de Christofides et al. (2013)).	23
2.7	Representação genérica de um matriz A decomposta para diferentes valores de ϵ	31
3.1	Estrutura da proposta de DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	38
3.2	Representação por grafos orientados do sistema linear utilizado como exemplo.	41
3.3	Grafos orientados dos subsistemas resultantes do particionamento.	43
3.4	Estrutura da proposta de DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	49
3.5	Estrutura do processo de cooperação.	50
4.1	Estrutura da proposta de controle DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear.	54

4.2	Estrutura da proposta de controle DMPC não linear cooperativo.	64
5.1	Dois reatores em série com separador e reciclo (STEWART et al., 2011).	71
5.2	Trajetória de referência desejável para as variáveis controladas e manipuladas para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	77
5.3	Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	78
5.4	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	79
5.5	Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	80
5.6	Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	81
5.7	Número de iterações do DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado em cada instante de amostragem para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	82
5.8	Evolução dos valores da função objetivo do DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado no instante de amostragem $k = 11$ para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	82
5.9	Trajetória de referência desejável para as variáveis controladas e manipuladas para o estudo de caso 1 com restrição em Δu_i	87
5.10	Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 1 com restrição em Δu_i	88
5.11	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 1 com restrição em Δu_i	89
5.12	Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 1 com restrição em Δu_i	90
5.13	Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 1 com restrição em Δu_i	91
5.14	Trajetória de referência desejável para as (a) variáveis controladas e (b) manipuladas para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	95
5.15	Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	97
5.16	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	98
5.17	Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	99

5.18	Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	100
5.19	Respostas dinâmicas das variáveis (a) T_3 e (c) Q_3 com destaque nas respectivas ampliações de (b) da variável T_3 e de (d) da variável Q_3	103
5.20	Diagrama de fluxo do processo de alquilação de benzeno (CHILIN et al., 2012).	105
5.21	Trajetória de referência desejável para as variáveis controladas e manipuladas para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	116
5.22	Respostas dinâmicas das concentrações dos componentes na corrente de saída do processo no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	117
5.23	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	118
5.24	Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	119
5.25	Respostas dinâmicas das vazões manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	120
5.26	Respostas dinâmicas das variáveis (a) Q_1 e (c) F_1 com destaque nas respectivas ampliações de (b) da variável Q_1 e de (d) da variável F_1	121
5.27	Respostas dinâmicas das concentrações dos componentes na corrente de saída do processo no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i , com controle descentralizado com a mesma sintonia das outras estruturas.	123
5.28	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i , com controle descentralizado com a mesma sintonia das outras estruturas.	124
5.29	Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i , com controle descentralizado com a mesma sintonia das outras estruturas.	125
5.30	Respostas dinâmicas das vazões manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i , com controle descentralizado com a mesma sintonia das outras estruturas.	126
5.31	Respostas dinâmicas das concentrações dos componentes na corrente de saída do processo no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i e com garantia de estabilidade.	131
5.32	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i e com garantia de estabilidade.	132
5.33	Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i e com garantia de estabilidade.	133

5.34	Respostas dinâmicas das vazões manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i e com garantia de estabilidade.	134
A.1	Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	148
A.2	Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 1 com restrição em Δu_i	149
A.3	Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	150
A.4	Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	152
B.1	Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	154
B.2	Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 1 com restrição em Δu_i	155
B.3	Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	156
B.4	Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	158
D.1	Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	176
D.2	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	177
D.3	Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	178

D.4	Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	179
D.5	Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	181
D.6	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	182
D.7	Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	183
D.8	Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	184
D.9	Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	186
D.10	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	187
D.11	Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	188
D.12	Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	189
D.13	Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	191
D.14	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	192
D.15	Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	193

D.16	Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	194
D.17	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	196
D.18	Respostas dinâmicas das concentrações no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	197
D.19	Respostas dinâmicas dos calores no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	198
D.20	Respostas dinâmicas das vazões manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	199
D.21	Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	201
D.22	Respostas dinâmicas das concentrações no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	202
D.23	Respostas dinâmicas dos calores no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	203
D.24	Respostas dinâmicas das vazões manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	204
E.1	Esquema da distribuição dos subsistemas formados do o controle descentralizado para o estudo de caso 1.	209
E.2	Representação de um observador de Kalman (adaptado de Brown e Hwang (2012)).	220

LISTA DE TABELAS

1.1	Número de aplicações industriais de MPC lineares registrado até 1999 em algumas áreas (adaptado de Qin e Badgwell (2003)).	2
1.2	Número de aplicações industriais de MPC não lineares até 1999 em algumas áreas (adaptado de Qin e Badgwell (2003)).	3
5.1	Variáveis do processo do estudo de caso 1.	73
5.2	Parâmetros do modelo do estudo de caso 1.	73
5.3	Estados estacionários do sistema do estudo de caso 1.	74
5.4	Restrições nas entradas manipuladas do sistema para o estudo de caso 1. .	76
5.5	Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	83
5.6	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas H_1 , H_2 e H_3 para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	84
5.7	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas T_1 , T_2 e T_3 para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	84
5.8	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas F_{f1} , F_{f2} e F_R para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i . . .	85
5.9	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas Q_1 , Q_2 e Q_3 para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	85
5.10	Comparação entre os desempenhos dos controladores para as saídas controladas para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	86
5.11	Comparação entre os desempenhos dos controladores para as entradas manipuladas para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i	86

5.12	Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 1 com restrição em Δu_i	92
5.13	Parâmetros do modelo do estudo de caso 2.	93
5.14	Estados estacionários do sistema do estudo de caso 2.	93
5.15	Restrições nas entradas manipuladas do sistema do estudo de caso 2. . . .	95
5.16	Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	101
5.17	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas H_1 , H_2 e H_3 para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	101
5.18	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas T_1 , T_2 e T_3 para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	102
5.19	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas F_{f1} , F_{f2} e F_R para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	102
5.20	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas Q_1 , Q_2 e Q_3 para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	102
5.21	Comparação entre os desempenhos dos controladores para as saídas controladas para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	104
5.22	Comparação entre os desempenhos dos controladores para as entradas manipuladas para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	104
5.23	Variáveis do processo do estudo de caso 3.	111
5.24	Parâmetros do modelo do estudo de caso 3.	112
5.25	Estados estacionários do sistema do estudo de caso 3.	113
5.26	Restrições nas entradas manipuladas do sistema para o estudo de caso 3. . .	115
5.27	Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	127
5.28	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas T_1 , T_2 , T_3 , T_4 e T_5 para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i	128
5.29	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas C_{A4} , C_{B4} , C_{C4} e C_{D4} para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	128
5.30	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 e Q_5 para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	128
5.31	Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas F_1 , F_2 , F_4 e F_{10} para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i . . .	129

5.32	Comparação entre os desempenhos dos controladores para as saídas controladas para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	129
5.33	Comparação entre os desempenhos dos controladores para as entradas manipuladas para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i	130
D.1	Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	180
D.2	Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC localmente linearizado cooperativo.	185
D.3	Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	190
D.4	Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	195
D.5	Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	200
D.6	Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.	205
E.1	Sintonia dos observadores de Kalman utilizados nos controladores descentralizados para cada estudo de caso avaliado.	221

LISTA DE ABREVIATURAS

CSTR - *Continuous Stirred-Tank Reactor*, Reator Contínuo Perfeitamente Agitado

DCS - *Distributed Control Systems*, Sistemas de Controle Distribuído

DMC - *Dynamic Matrix Control*, Controle por Matriz Dinâmica

DMPC - *Distributed Model Predictive Control*, Controle Preditivo Distribuído baseado em Modelo

HIECON - *Hierarchical Constraint Control*, Controle de Restrição Hierárquico

IDCOM - *Identification and Command*, Identificação e Comando

IDCOM-M - *Multivariable Identification and Command*, Identificação Multivariável e Comando

IHMPC - *Infinite Horizon Model Predictive Control*, Controle Preditivo baseado em Modelo com Horizonte Infinito

LP - *Linear Programming*, Programação Linear

LSS - *Large Scale Systems*, Sistemas de Grande Escala

LTV - *Linear Time-variant*, Linear variante no tempo

MBP - *Model Based Control*, Controle baseado em Modelo

MIMO - *Multiple Input Multiple Output*, Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas

MPC - *Model Predictive Control*, Controle Preditivo baseado em Modelo

MPHC - *Model Predictive Heuristic Control*, Controle Preditivo Heurístico baseado em

Modelo

PID - *Proportional-Integral-Derivative*, Proporcional-Integral-Derivativo

QDMC - *Quadratic Dynamic Matrix Control*, Controle por Matriz Dinâmica Quadrática

QP - *Quadratic Programming*, Otimização Quadrática

RGA - *Relative Gain Array*, Matriz de Ganho Relativo

SMOC - *Shell Multivariable Optimizing Controller*, Controlador de Otimização Multivariável da Shell

SSE - *Sum of Squared Error*, Somatório dos Erros Quadráticos

SIMBOLOGIA

\mathbf{A} - Matriz dos estados na representação em espaço de estados

\mathbf{A}_{ii} - Matriz dos estados na representação em espaço de estados do subsistema i

\mathbf{B} - Matriz das entradas manipuladas na representação em espaço de estados

\mathbf{B}_{ii} - Matriz das entradas manipuladas na representação em espaço de estados do subsistema i

\mathbf{C} - Matriz das saídas controladas na representação em espaço de estados

\mathbf{C}_{ii} - Matriz das saídas controladas na representação em espaço de estados do subsistema i

H_p - Horizonte de predição

H_u - Horizonte de controle

H_w - Atraso do sistema

H_{pi} - Horizonte de predição do subsistema i

H_{ui} - Horizonte de controle do subsistema i

H_{wi} - Atraso do subsistema i

n - Número de estados do sistema

n_i - Número de estados do subsistema i

m - Número de entradas do sistema

m_i - Número de entradas do subsistema i

M - Número de subsistemas

\mathbf{x} - Vetor dos estados do sistema

$\hat{\mathbf{x}}$ - Vetor dos estados preditos do sistema

\mathbf{x}_i - Vetor dos estados do subsistema i

\mathbf{u} - Vetor das entradas ou variáveis manipuladas do sistema

$\hat{\mathbf{u}}$ - Vetor das entradas ou variáveis manipuladas preditas do sistema

\mathbf{u}_i - Vetor das entradas ou variáveis manipuladas do subsistema i

\mathbf{y} - Vetor das saídas controladas do sistema

$\hat{\mathbf{y}}$ - Vetor das saídas controladas preditas do sistema

\mathbf{y}_i - Vetor das saídas controladas do subsistema i

k - Instante de tempo no domínio discreto

V - Função objetivo do controle centralizado

V_i - Função objetivo do controlador do subsistema i

\mathbf{Q} - Matriz de ponderação para as saídas controladas

\mathbf{R} - Matriz de ponderação para as entradas manipuladas

\mathbf{W} - Matriz de ponderação para as taxas de mudanças das entradas manipuladas

\mathbf{r}_y - Trajetória de referência para as saídas controladas

\mathbf{r}_u - Trajetória de referência para as entradas manipuladas

\mathbf{u}_{min} - Vetor dos limites inferiores para as entradas manipuladas

\mathbf{u}_{max} - Vetor dos limites superiores para as entradas manipuladas

$\Delta\mathbf{u}$ - Vetor da taxa de variação das entradas manipuladas

$\Delta\mathbf{u}_{min}$ - Vetor dos limites inferiores para as taxas de variação das entradas manipuladas

$\Delta\mathbf{u}_{max}$ - Vetor dos limites superiores para as taxas de variação das entradas manipuladas

\mathbf{y}_{min} - Vetor dos limites inferiores para as saídas controladas

\mathbf{y}_{max} - Vetor dos limites superiores para as saídas controladas

SUMÁRIO

Resumo	ix
Abstract	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xix
Lista de Abreviaturas	xxiii
Simbologia	xxv
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	5
1.2 Estrutura da tese	6
2 Controle Preditivo Distribuído	7
2.1 Controle preditivo baseado em modelo	7
2.1.1 Modelo para predição	8
2.1.2 Função objetivo	9
2.1.3 Teoria do horizonte móvel	11
2.1.4 Histórico do MPC industrial	12

2.2	Tipos de controle	15
2.2.1	Controle centralizado	16
2.2.2	Controle descentralizado	18
2.2.3	Controle distribuído	20
2.3	Decomposição de sistema - estado da arte	29
3	DMPC Não Linear baseado no Modelo Localmente Linearizado	35
3.1	DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado	36
3.1.1	Particionamento do modelo localmente linearizado	38
3.1.2	Projeto do controlador não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado	45
3.2	DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado	48
3.2.1	Projeto do controlador cooperativo baseado no modelo localmente linearizado	49
4	DMPC Não Linear baseado nas Matrizes de Incidência do Modelo Não Linear	53
4.1	DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear	53
4.1.1	Particionamento baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear	55
4.1.2	Projeto do controlador não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear	62
4.2	DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear	63
4.2.1	Projeto do controlador cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear	64
5	Avaliação dos Controladores Distribuídos Propostos	67
5.1	Metodologia para avaliação e comparação das estratégias de controle	68
5.2	Estudo de caso 1	70
5.2.1	Descrição do processo - Estudo de caso 1	70
5.2.2	Análise do sistema - Estudo de caso 1	74
5.2.3	Resultados - Estudo de caso 1	76

5.3	Estudo de caso 2	92
5.3.1	Descrição do processo - Estudo de caso 2	92
5.3.2	Análise do sistema - Estudo de caso 2	94
5.3.3	Resultados - Estudo de caso 2	95
5.4	Estudo de caso 3	105
5.4.1	Descrição do processo - Estudo de caso 3	105
5.4.2	Análise do sistema - Estudo de caso 3	114
5.4.3	Resultados - Estudo de caso 3	115
5.5	DMPC não linear não cooperativo e cooperativo com estabilidade garantida	130
5.6	Análise dos resultados obtidos	134
6	Conclusões e Sugestões	137
	Referências Bibliográficas	139
	Apêndices	146
A	Evoluções das partições para o DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado	147
A.1	Estudo de caso 1	147
A.1.1	Cenário sem restrição na velocidade das entradas manipuladas . . .	147
A.1.2	Cenário com restrição na velocidade das entradas manipuladas . . .	149
A.2	Estudo de caso 2	150
A.3	Estudo de caso 3	151
B	Evoluções das partições para o DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado	153
B.1	Estudo de caso 1	153
B.1.1	Cenário sem restrição na velocidade das entradas manipuladas . . .	153
B.1.2	Cenário com restrição na velocidade das entradas manipuladas . . .	155
B.2	Estudo de caso 2	156
B.3	Estudo de caso 3	157

C	Partições geradas nos DMPCs não lineares	159
C.1	Estudos de casos 1 e 2	159
C.2	Estudo de caso 3	164
D	Análise da frequência de particionamento nas estruturas de controle DMPCs baseadas no modelo localmente linearizado	175
D.1	Estudo de caso 1	176
D.1.1	DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado .	176
D.1.2	DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado . . .	180
D.2	Estudo de caso 2	185
D.2.1	DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado .	185
D.2.2	DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado . . .	190
D.3	Estudo de caso 3	195
D.3.1	DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado .	195
D.3.2	DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado . . .	200
E	Formulação do Controle Descentralizado	207
E.1	Exemplo de aplicação	208
F	Linearização Sucessiva	223
G	Modelo de Predição	227
G.1	Modelo de Predição com Perturbações	227

CAPÍTULO 1

Introdução

O principal objetivo de um sistema de controle numa planta industrial é garantir a estabilidade em malha fechada, ao mesmo tempo em que aumenta a eficiência geral do processo. Além disso, o sistema de controle é uma ferramenta essencial para atingir níveis confiáveis em questões de segurança, meio ambiente, qualidade e lucratividade de um processo industrial. Entretanto, em plantas complexas, com elevado número de variáveis envolvidas e fortes interações entre elas, a aplicação de estratégias de controle clássicas nem sempre é suficiente para atingir os objetivos anteriormente citados.

Devido ao desenvolvimento significativo das ferramentas de análise de sistemas, ao aumento do desempenho computacional a baixo custo e ao desenvolvimento de métodos de identificação de sistemas, hoje é possível controlar sistemas de grande escala (LSS, do inglês, *Large Scale Systems*) e complexos, numa abordagem sistemática. Dentro deste contexto, o controle desses sistemas tem sido amplamente estudado especialmente para a questão de distribuição das tarefas de controle (Mesarovic et al. (2000); Sandell et al. (1978)).

O grande desafio no controle de sistemas de grande escala é a coordenação de todas as interações existentes entre os subsistemas que constituem a planta. Os subsistemas de uma planta geralmente são projetados de forma independente ou adicionados posteriormente com a evolução da planta já em operação. Essas mudanças geralmente ocorrem motivadas por requisitos de produção ou adequação às leis ambientais. Normalmente, as interações representam, por exemplo, uma rede de fluxo de material, de energia e/ou de informação. Essas ligações são necessárias para o reaproveitamento de material (reprocessamento) e/ou

para integração energética (STEWART et al., 2010).

À medida que os algoritmos numéricos computacionais e o poder computacional evoluem, o tipo e o tamanho das aplicações também se ampliam. Problemas que antes eram considerados intratáveis, do ponto de vista computacional, agora são possíveis. No entanto, para entender bem o potencial total dos sistemas de grande escala, especialmente no controle de processo, é necessário especificar como o sistema de grande escala é definido. Um sistema de grande escala tem muitos significados diferentes na literatura. Este conceito pode ser utilizado, como por exemplo, para definir um sistema que pode ser particionado em subsistemas.

Em uma estrutura de controle *feedback* clássico PID (do inglês, *Proportional Integral Derivative*), cada controlador atua sobre o erro para calcular a ação de controle. A estrutura de controle baseado em modelo (MBC, do inglês *Model Based Control*) utiliza diretamente um modelo do processo para calcular essas ações. Entre as técnicas MBC, a que vem sendo mais utilizada na indústria de processos é o controle preditivo baseado em modelo (MPC, do inglês, *Model Predictive Control*). O método MPC é utilizado tanto em aplicações lineares como em aplicações não lineares em diversos tipos de indústrias. Na Tabela (1.1) são apresentados exemplos de aplicações industriais de MPC lineares desenvolvidos pelas empresas *Aspen Technology*, *Honeywell Hi-Spec* e *Invensys*. Essas aplicações, mesmo antigas, denotam diferenças de abordagem entre as empresas (centralizada e descentralizada). Na Tabela (1.2) tem-se exemplos de aplicações industriais de MPC não lineares desenvolvidos pelas empresas *Adersa*, *Aspen Technology* e *Continental Controls*.

Tabela 1.1: Número de aplicações industriais de MPC lineares registrado até 1999 em algumas áreas (adaptado de Qin e Badgwell (2003)).

Área	<i>Aspen Technology</i>	<i>Honeywell Hi-Spec</i>	<i>Invensys</i>
Refinaria	1200	480	28
Petroquímica	450	80	20
Química	100	20	21
Papel e Celulose	18	-	-
Utilidades	-	-	4
Mineração/Metalurgia	8	7	16
Alimentos	-	-	10
Fornos	-	-	3
Não classificados	40	40	26
Maior aplicação	603×283	225×85	31×12

A Tabela (1.1) mostra ainda que a técnica MPC linear também é utilizada em problemas de grande dimensão, sendo o maior deles com 603 variáveis controladas e 283 variáveis manipuladas, utilizando um *software* desenvolvido pela *Aspen Technology*.

Tabela 1.2: Número de aplicações industriais de MPC não lineares até 1999 em algumas áreas (adaptado de Qin e Badgwell (2003)).

Área	<i>Adersa</i>	<i>Aspen Technology</i>	<i>Continental Controls</i>
Ar e Gás	-	-	18
Química	2	-	15
Polímeros	-	1	-
Utilidade	-	5	2
Não classificados	1	-	1

O MPC é um método interessante para aplicação em problemas difíceis de controle com entrada múltipla-saída múltipla (MIMO, do inglês *Multiple Input-Multiple Output*), em que existem interações significativas entre as entradas manipuladas e as saídas controladas. Diferentemente de outras estratégias de controle baseado em modelo, o MPC formula explicitamente restrições de desigualdade nas variáveis manipuladas e controladas, tais como limites inferior e superior ou limites de incrementos nessas variáveis. As ações de controle do MPC são calculadas baseadas num problema de otimização em relação ao seu desempenho. Então, o MPC pode ser prontamente integrado com estratégias de otimização em linha para otimizar o desempenho da planta. Além disso, essa estratégia de controle pode ser facilmente atualizada em linha para compensar mudanças nas condições do processo, restrições e/ou critérios de desempenho. Devido às vantagens apresentadas e à preferência industrial por trabalhar com MPC em processos químicos de grande dimensão e com restrições, essa será a opção utilizada neste trabalho para o estudo de algoritmos de controle distribuído.

Existem três tipos de estrutura de controle: a centralizada, a descentralizada e a distribuída. A estrutura descentralizada é a empregada na maioria dos processos de grande escala. No entanto, o desempenho dessa abordagem pode ser inaceitável em processos com fortes interações entre seus subsistemas. Isto é devido ao fato da estrutura descentralizada desprezar as interações existentes na planta. Por outro lado, o controle centralizado é capaz de resolver de forma ótima o problema das interações, mas torna a estrutura de controle complexa, com atualização e manutenção dispendiosas e elevados custos estruturais e organizacionais. Uma estrutura que preserva a topologia e a flexibilidade do controle descentralizado e, ao mesmo tempo, pode oferecer uma garantia nominal de estabilidade em malha fechada é a abordagem de controle distribuído. Nesta estrutura de controle, as interações entre os subsistemas são modeladas e informações dos subsistemas são compartilhadas entre eles (RAWLINGS; STEWART, 2008).

Os controladores centralizado e descentralizado representam os dois extremos limitantes em um projeto de controle. Apesar do controle centralizado levar em conta todas as interações possíveis, o controle descentralizado as ignora completamente. É necessário,

portanto, uma estrutura de controle alternativa que não tenha o custo de organização e manutenção do controle centralizado, mas pode dar um desempenho aceitável em sistemas de grande escala e alta interação.

Para projetar um controle capaz de abordar as questões supracitadas, é necessário:

Particionamento: Como decompor um sistema de grande escala em subsistemas com propriedades conhecidas, de modo a abordar o acoplamento estrutural da planta no problema de controle?

Comunicação: Como projetar o sistema de comunicação, conhecendo os subsistemas gerados no particionamento acima, de forma a não ter uma grande carga de comunicação e nem uma baixa carga de comunicação ao ponto de prejudicar consideravelmente o controle em malha fechada quando comparado ao desempenho da estrutura centralizada?

Desempenho: Como calcular as propriedades globais da lei de controle preditivo distribuído baseado em modelo (DMPC, do inglês, *Distributed Model Predictive Control*) com base no conjunto de subsistemas?

Na estrutura de controle distribuído clássico cada unidade distribuída contém um microcontrolador para aquisição de dados e controle (STOLEN; AS, 1999). As unidades são interligadas por uma rede para que haja troca de informações e o processamento é dividido por unidades independentes. Um sistema de controle distribuído apresenta várias vantagens, dentre elas destacam-se (JOTA, 1987):

- descentralização do controle (aumento da tolerância à falha, ou seja, a falha de uma estação não acarretará necessariamente a falha em todo o sistema de controle);
- maior flexibilidade na inserção e retirada de elementos (a expansibilidade e a redução do sistema se tornam mais fáceis e econômicas devido à sua característica modular).

Além dos aspectos supracitados, os sistemas modernos de controle distribuído (DCS, do inglês, *Distributed Control Systems*) apresentam estrutura de rede que permite a implementação de algoritmos de controle para um estratégia vertical (baseada numa escala de tempo ou tarefas) e horizontal (o controle de plantas inteiras). Devido às características e vantagens do controle distribuído, tal estrutura foi selecionada para estudo nesta tese.

Embora tenha havido várias sugestões sobre como particionar o modelo de um sistema de grande escala em subsistemas para aplicação de controladores DMPC baseando-se em argumentos físicos, informações sobre o comportamento dinâmico do processo ou considerações do *layout* da planta, como um controlador por unidade da planta, não existe uma estrutura geral e sistemática, que particione um sistema grande e complexo a partir

unicamente do modelo não linear da planta. Sem dúvida, este problema é muito difícil em toda a sua generalidade, pois a pesquisa nessa direção deve acompanhar o desenvolvimento de estratégias de comunicação ótimas, de modo que o tempo de avaliação do controlador, o uso da rede de comunicação e a estabilidade, desempenho e robustez em malha fechada sejam otimizados (CHRISTOFIDES et al., 2013).

O presente trabalho foi desenvolvido para trazer contribuições ao estudo de controladores distribuídos para sistemas de grande escala e para propor maneiras de decompor um sistema não linear em subsistemas menores para aplicação do controle distribuído. Neste trabalho são propostos quatro tipos distintos de controle DMPC para processos não lineares, destacados a seguir:

- DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado;
- DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado;
- DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear;
- DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear.

A seguir, apresenta-se o objetivo principal e os objetivos específicos desta tese.

1.1 Objetivos

Neste contexto, o objetivo geral desta tese é desenvolver estratégias de controle preditivo distribuído para aplicações em processos não lineares. Entre os objetivos específicos, destacam-se:

- Desenvolver uma estratégia de controle preditivo distribuído (não cooperativo e cooperativo) com particionamento baseado nos grafos orientados do modelo localmente linearizado da planta;
- Desenvolver uma estratégia de controle preditivo distribuído (não cooperativo e cooperativo) com particionamento baseado nos grafos orientados da matriz de incidência do modelo não linear da planta;
- Comparar as estratégias desenvolvidas com outros tipos de controle disponíveis (centralizado e descentralizado);
- Avaliar as estratégias desenvolvidas.

1.2 Estrutura da tese

A estrutura básica desta tese de doutorado possui o seguinte formato: O Capítulo 2 apresenta os aspectos gerais e histórico do MPC. Além disso, faz referência às principais características das principais estruturas de controle, destacando o controle distribuído e apresentando a revisão bibliográfica desta abordagem. Os Capítulos 3 e 4 apresentam os controles DMPC desenvolvidos nesta pesquisa, sendo que no Capítulo 3 tem-se os controladores baseados nos grafos orientados do modelo localmente linearizado da planta e no Capítulo 4 tem-se as estratégias baseadas nos grafos orientados da matriz de incidência do modelo não linear da planta. Os resultados de aplicações dos controladores desenvolvidos em 3 estudos de casos são apresentados no Capítulo 5, onde as metodologias desenvolvidas são comparadas com outras estratégias de controle (centralizada e descentralizada). Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões obtidas e as sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

Controle Preditivo Distribuído

Neste capítulo são apresentados o estado da arte e uma discussão sobre o Controle Preditivo Distribuído baseado em Modelo (DMPC), enfatizando as metodologias existentes e apresentando algumas aplicações reportadas na literatura. Primeiramente, para contextualização, será apresentada a fundamentação teórica do Controle Preditivo baseado em Modelo (MPC), bem como um breve histórico do desenvolvimento desta técnica, e em seguida serão apresentadas as metodologias de MPC existentes com foco nas estruturas distribuídas.

2.1 Controle preditivo baseado em modelo

A busca contínua pela realização de operações industriais mais rentáveis, atingindo índices elevados de qualidade com eficiência no consumo de energia, respeitando as leis ambientais e satisfazendo as altas demandas comerciais, possibilitou o surgimento do controle preditivo baseado em modelo (MPC). Sua primeira proposta ocorreu durante a década de 1970 (RICHALET et al., 1978) e se desenvolveu de forma considerável desde então.

Em certas aplicações industriais, é praticamente impossível atingir os objetivos almejados através de um clássico sistema de controle (como por exemplo, um controlador *feedback* PID). Atualmente, pode-se afirmar que o MPC é a estratégia de controle multivariável mais aplicada industrialmente nas diversas áreas, incluindo as indústrias químicas.

O MPC tem aplicabilidade em quase todos tipos de problemas de controle, incluindo aqueles que apresentam:

- grande número de variáveis manipuladas e controladas;
- restrições nas variáveis manipuladas e controladas;
- mudanças nos objetivos de controle;
- falhas em equipamentos (sensores/atuadores);
- atrasos no processo.

A principal característica dos controladores preditivos é que estes utilizam o comportamento futuro da planta para realizar os cálculos das ações ótimas de controle, baseando-se num critério de desempenho determinístico ou estocástico. As previsões são obtidas por meio de um modelo que representa o sistema. O que diferencia as diversas classes de controladores preditivos é basicamente o tipo de modelo utilizado.

O MPC não é uma técnica única, mas um conjunto de métodos de controle que se baseiam em alguns aspectos comuns:

- um modelo explícito do processo é utilizado para prever a saída do mesmo num determinado horizonte;
- as ações de controle são calculadas ao longo do horizonte projetado através da minimização de uma determinada função objetivo;
- o horizonte é móvel: em cada instante de amostragem, o horizonte é deslocado um passo à frente e aplica-se a ação de controle apenas naquele instante e desconsidera-se o restante das ações dentro do horizonte.

Cada um dos aspectos acima será detalhado nas próximas seções. O primeiro tema abordado será o modelo para predição das saídas do processo.

2.1.1 Modelo para predição

As medições atuais da planta e as previsões dos valores futuros das saídas controladas são a base para o cálculo das ações de controle. A partir de um modelo dinâmico é possível realizar as previsões. Normalmente utiliza-se um modelo linear empírico, como por exemplo, modelo de resposta ao degrau. Alternativamente, as funções de transferências e os

modelos em espaço de estados podem também ser empregados. Em processos com fortes não linearidades, pode ser necessário prever os valores futuros das saídas utilizando um modelo não linear dinâmico. Nesse tipo de abordagem não linear pode-se utilizar tanto o modelo físico como o empírico, tais como as redes neurais.

Neste trabalho, será utilizado o modelo em espaço de estados na sua forma discreta, com o seguinte formato:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (2.2)$$

em que $\hat{\mathbf{x}}$ representa o vetor n -dimensional contendo os estados preditos do processo; $\hat{\mathbf{u}}$, o vetor m -dimensional das entradas preditas e $\hat{\mathbf{y}}$, o vetor l -dimensional das saídas controladas. As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são as matrizes dos estados, das entradas manipuladas e das saídas controladas na representação em espaço de estados, respectivamente.

Em aplicações de MPC, é conveniente utilizar este modelo em outro formato, de tal maneira que possibilite a representação do comportamento do sistema em qualquer instante de amostragem quando tem-se os horizontes de predição (H_p) e de controle (H_u). Assim:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1+h|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k+h|k) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(k+h|k), \quad h = 0, 1, 2, \dots, H_p \quad (2.3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k+h|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+h|k) \quad (2.4)$$

em que, $\hat{\mathbf{x}}(k+1+h|k)$ representa os valores preditos do estado $\hat{\mathbf{x}}$ obtido num instante de amostragem qualquer quando h assume qualquer valor entre 0 e H_p . Desta forma, são realizadas H_p predições do comportamento do processo em cada instante de amostragem k .

A seguir será apresentado outro aspecto importante do MPC, que é a função objetivo utilizada no problema de otimização.

2.1.2 Função objetivo

Como dito anteriormente, o MPC constitui na verdade de um problema de otimização, e sua formulação baseia-se:

- na função objetivo em termos das variáveis de decisão do processo, que pode representar, por exemplo, o lucro, a produção, os custos, o consumo de energia ou em aplicações mais diretas em plantas industriais, as próprias ações de controle;

- no modelo do processo, que pode ser o modelo fenomenológico do processo, ou um modelo empírico;
- nas restrições impostas às variáveis do processo, tais como os limites superiores e inferiores para correto funcionamento dos atuadores.

De uma maneira geral, é usual definir a função objetivo como as normas quadráticas dos seguintes termos: erro em relação à trajetória de referência para as saídas controladas; erro em relação à trajetória de referência para as entradas manipuladas e do movimento dos controladores. Dessa forma, a função objetivo ($V(k)$) pode ser definida como:

$$\begin{aligned}
 V(k) = & \sum_{i=H_w}^{H_p} \|\hat{\mathbf{y}}(k+i|k) - \mathbf{r}_y(k+i|k)\|_{\mathbf{Q}(i)}^2 + \\
 & + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|\hat{\mathbf{u}}(k+i|k) - \mathbf{r}_u(k+i|k)\|_{\mathbf{R}(i)}^2 + \\
 & + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+i|k)\|_{\mathbf{W}(i)}^2
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

sendo H_w o atraso do processo, H_p o horizonte de predição e H_u o horizonte de controle. $\mathbf{Q}(i)$ é uma matriz de ponderação simétrica positiva definida para as saídas $\hat{\mathbf{y}}(k+i|k)$, $\mathbf{R}(i)$ é uma matriz de ponderação simétrica positiva definida para as entradas manipuladas $\hat{\mathbf{u}}(k+i|k)$ e $\mathbf{W}(i)$ é uma matriz de ponderação simétrica positiva semi-definida para as taxas de variação das entradas manipuladas, $\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+i|k)$.

Na função objetivo $V(k)$, o primeiro termo penaliza os desvios das saídas previstas e controladas $\hat{\mathbf{y}}(k+i|k)$ a partir de um vetor da trajetória de referência $\mathbf{r}_y(k+i|k)$. Mas, ela não começa a penalizar desvios em \mathbf{y} a partir de $\mathbf{r}_y(k+1|k)$ (caso $H_w > 1$), pois pode haver algum atraso entre a aplicação da entrada e seu efeito na saída. Logo a penalização inicia-se para valores de $i \geq H_w$. O segundo termo penaliza desvios das entradas manipuladas $\hat{\mathbf{u}}(k+i|k)$ a partir de um vetor da trajetória de referência $\mathbf{r}_u(k+i|k)$. Já o terceiro termo da função objetivo descrita na Equação (2.5), penaliza a taxa de variação sucessiva das entradas manipuladas. Supõe-se que $H_u \leq H_p$ e que $\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+i|k) = 0$ para $i \geq H_u$, de modo que $\hat{\mathbf{u}}(k+i|k) = \hat{\mathbf{u}}(k+H_u-i|k)$ para todo $i \geq H_u$. A Equação (2.5) só penaliza mudanças no vetor de entrada, mas não o seu valor.

Os horizontes de predição H_p e de controle H_u , o atraso do processo H_w , os pesos $\mathbf{Q}(i)$, $\mathbf{R}(i)$ e $\mathbf{W}(i)$, e as trajetórias de referência $\mathbf{r}_y(k+i|k)$ e $\mathbf{r}_u(k+i|k)$ afetam o comportamento da planta em malha fechada e a previsão do controlador MPC.

Além disso, o problema de otimização do controle preditivo baseado em modelo pode apresentar restrições. As restrições podem ser impostas nas entradas manipuladas e saídas

controladas do processo, definidas da seguinte forma:

$$u_i^{min}(k) \leq u_i(k+h|k) \leq \mathbf{u}_i^{max}(k), \quad h = 0, 1, \dots, H_u - 1 \quad \text{e} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.6)$$

$$\Delta u_i^{min}(k) \leq \Delta u_i(k+h|k) \leq \Delta u_i^{max}(k), \quad h = 0, 1, \dots, H_u - 1 \quad \text{e} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.7)$$

$$y_i^{min}(k+h) \leq \hat{y}_i(k+h|k) \leq y_i^{max}(k+h), \quad h = 1, 2, \dots, H_p \quad \text{e} \quad i = 1, \dots, n_y \quad (2.8)$$

As restrições tornam o problema de otimização mais complexo, podendo algumas vezes torná-lo inviável. As restrições que mais inviabilizam um problema de otimização deste tipo são as aquelas impostas sobre as saídas controladas. Portanto, em alguns casos é necessário o abrandamento destas restrições com a introdução de variáveis de folga, por exemplo.

A próxima seção aborda uma característica importante do controle preditivo baseado em modelo, que constitui a estratégia do horizonte móvel.

2.1.3 Teoria do horizonte móvel

A principal característica da abordagem do MPC consiste na teoria do horizonte móvel. Apesar de uma sequência H_u de ações de controle ser calculada em cada instante de amostragem, apenas a primeira ação é de fato implementada na planta. Em seguida, uma nova sequência é calculada no instante de amostragem seguinte, quando novas medições advindas da planta estão disponíveis. Este procedimento é repetido em cada instante de amostragem.

O objetivo do MPC é determinar uma sequência de ações do controlador, de modo que a resposta prevista se aproxime do *set-point*. A saída atual \mathbf{y} real, a saída predita $\hat{\mathbf{y}}$ e a entrada manipulada \mathbf{u} são mostradas na Figura (2.1). No instante atual de amostragem, denotado por k , a estratégia de MPC calcula um conjunto de H_u valores para as entradas $[\mathbf{u}(k+i-1), i = 1, 2, \dots, H_u]$. O conjunto consiste nas entradas atuais $\mathbf{u}(k)$, e $(H_u - 1)$ entradas futuras. A entrada é mantida constante após H_u . As entradas são calculadas de modo que o conjunto de saídas previstas até H_p ($[\hat{\mathbf{y}}(k+i), i = 1, 2, \dots, H_p]$) atinga a trajetória de referência. Como já dito anteriormente, os cálculos de controle são baseados na otimização de uma função objetivo.

Na próxima seção apresenta-se o histórico do MPC no âmbito industrial, com citação dos principais algoritmos desenvolvidos.

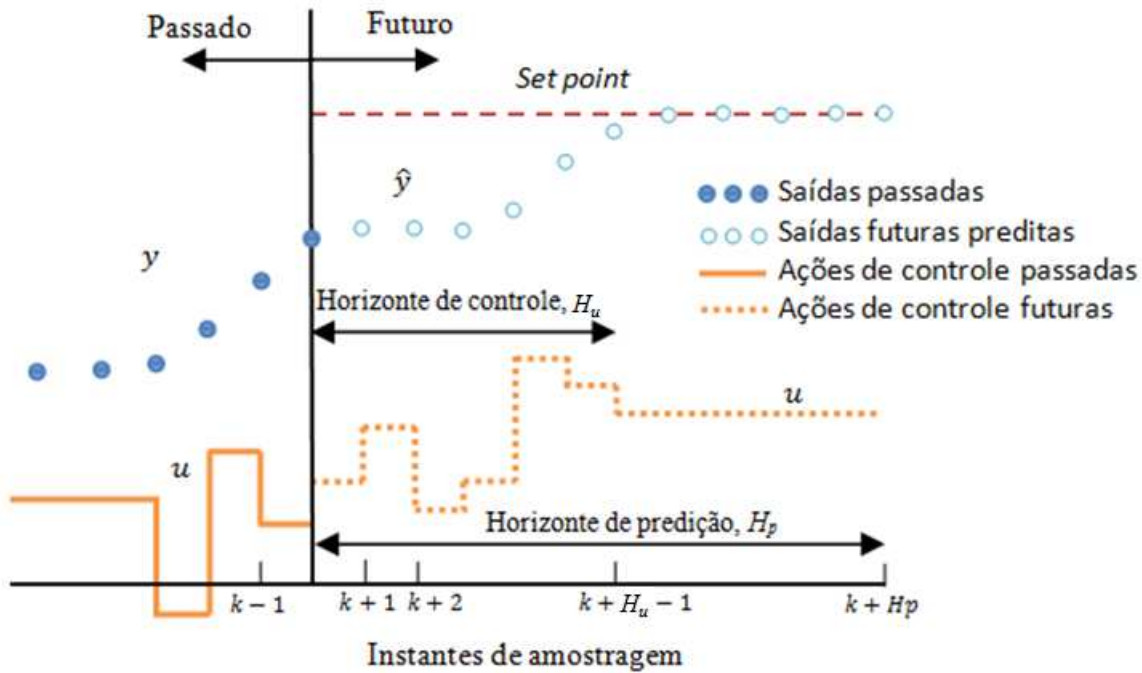


Figura 2.1: Horizonte móvel do controle preditivo baseado em modelo (adaptado de Seborg et al. (2004)).

2.1.4 Histórico do MPC industrial

Qin e Badgwell (2003) apresentam um breve histórico da tecnologia de controle do MPC aplicada na indústria. Algumas passagens apresentadas neste documento fazem referência a este trabalho.

Nos anos 1970 surgiu a primeira geração de MPC, quando pela primeira vez foi aplicado a estratégia conhecida como Controle Preditivo Heurístico baseado em Modelo (MPHC, do inglês, *Model Predictive Heuristic Control*), desenvolvida por Richalet et al. (1978). Esse trabalho resultou no *software* IDCOM (acrônimo de *Identification and Command*). As principais características deste *software* são:

- modelo linear de resposta ao impulso, como modelo de predição da planta;
- função objetivo do tipo quadrática, sujeita a um horizonte de predição finito;
- comportamento futuro das saídas especificado por trajetórias de referência;
- restrições nas entradas e saídas incluídas na formulação;
- ações de controle ótimas calculadas usando um algoritmo heurístico iterativo.

Paralelamente, Cutler e Ramaker (1980), engenheiros da *Shell Oil*, desenvolveram independentemente de Richalet et al. (1978) uma outra proposta de MPC, conhecida

como Controle por Matriz Dinâmica (DMC, do inglês, *Dynamic Matrix Control*). As principais características do DMC são:

- modelo linear de resposta ao degrau (modelo de convolução), como modelo de predição da planta;
- função objetivo quadrática sujeita a um horizonte de predição finito;
- saídas futuras da planta são especificadas para rastreamento do *set-point*;
- ações de controle ótimas calculadas como solução de um problema de mínimos quadrados.

A primeira geração de MPC foi marcada pelos algoritmos IDCOM e DMC. Eles tiveram grande impacto no controle de processos industriais naquela época e serviram para definir o paradigma inicial do MPC industrial. As dificuldades enfrentadas pelos controladores IDCOM e DMC em incorporar restrições do processo ao problema de controle levaram ao surgimento da segunda geração de controladores preditivos.

A segunda geração da estrutura MPC foi representada pelo Controle por Matriz Dinâmica Quadrática (QDMC, do inglês *Quadratic Dynamic Matrix Control*) desenvolvido por Garcia e Morshedi (1986), caracterizado por uma função não realizada nos algoritmos anteriores, que utiliza uma programação sistemática de restrições nas entradas e saídas do processo. Essa formulação aperfeiçoa o MPC na medida em que posiciona o problema de controle como um problema de otimização quadrática (QP, do inglês, *Quadratic Programming*), cuja solução pode ser obtida, eficientemente, por códigos de QP disponíveis. Além disso, nesta abordagem, foi introduzido o conceito de controle por faixas, em que o processo é controlado através de uma janela de operação. O algoritmo QDMC utiliza:

- modelo linear de resposta ao degrau, como modelo de predição da planta;
- função objetivo quadrática sujeita a um horizonte de predição finito;
- rastreamento de *set-point* para especificar as saídas futuras da planta
- fator de supressão de movimentos nas variáveis manipuladas;
- programação quadrática para calcular as entradas ótimas.

Novas deficiências do método MPC foram sendo descobertas pelos engenheiros de controle, à medida que ele foi sendo utilizado e os problemas de controle a serem resolvidos tornaram-se maiores e mais complexos. O algoritmo QDMC provia uma forma sistemática

de incorporar fortes restrições nas entradas e saídas, mas não havia uma forma clara para lidar com soluções inviáveis. Foi, também, se tornando cada vez mais difícil a tradução das especificações de controle em pesos relativos para uma única função objetivo. Mesmo quando um conjunto de pesos relativos podia ser encontrado, era preciso ter cuidado para se evitar problemas com soluções mal condicionadas.

Esse cenário motivou engenheiros da *Adersa*, *Setpoint Inc.* e *Shell* a desenvolverem um novo algoritmo de MPC. A versão disponível pela *Setpoint* foi chamada de IDCOM-M (acrônimo de *Multivariable Identification and Command*) e apresentada em 1988, enquanto a versão praticamente idêntica da *Adersa* era referenciada como Controle de Restrição Hierárquica (HIECON, do inglês *Hierarchical Constraint Control*). As principais características do IDCOM-M e HIECON são:

- modelo linear de resposta ao impulso utilizado como modelo de predição da planta;
- supervisor de controlabilidade verifica os subconjuntos mal condicionados da planta;
- função objetivo quadrática para as saídas e entradas;
- controle de um conjunto de pontos futuros para cada saída, escolhido a partir da trajetória de referência;
- um único movimento é calculado para cada entrada;
- as restrições podem ser fortes ou leves, sendo as fortes classificadas por ordem de prioridade.

No final dos anos 1980, engenheiros da *Shell Research* na França desenvolveram o Controlador de Otimização Multivariável da Shell (SMOC, do inglês, *Shell Multivariable Optimizing Controller*), o qual foi descrito como uma ponte entre a representação em espaço de estados e os algoritmos MPC. Eles pretendiam combinar as características de gerenciamento de restrições do MPC com a rica base de métodos de controle por realimentação da abordagem em espaço de estados. O algoritmo SMOC inclui várias características que são agora consideradas essenciais nos MPC atuais:

- modelos em espaço de estados que podem ser utilizados para representar todos os tipos de dinâmica linear (estável, instável e integradora);
- modelos explícitos de perturbação são utilizados para descrever distúrbios não medidos;
- filtro de Kalman é utilizado na estimação dos estados da planta e das perturbações não medidas a partir de saídas medidas;

- as variáveis controladas que aparecem na função objetivo são diferenciadas das variáveis de realimentação que são utilizadas na estimação dos estados;
- restrições nas entradas e saídas são impostas via programação quadrática.

Foi também a partir da difusão da tecnologia MPC que surgiram algumas propostas de análise de sua estabilidade. Na linha de desenvolver controladores MPC estáveis, Muske e Rawlings (1993) mostraram que para sistemas não integradores, quando o estado é medido e o horizonte de predição tende ao infinito, os MPC têm a estabilidade nominal garantida, independentemente dos parâmetros de sintonia. Eles desenvolveram um algoritmo de controle chamada de Controle Preditivo baseado em Modelo com Horizonte Infinito (IHMPC, do inglês *Infinite Horizon Model Predictive Control*), cuja estratégia principal consiste em converter o horizonte de predição infinito para um estado terminal equivalente cujo peso é obtido pela equação discretizada de Lyapunov. O algoritmo IHMPC foi adotado pelos acadêmicos como o paradigma dos anos de 1990, constituindo a terceira geração de MPC e ainda considerando a estabilidade como conceito central nos estudos de sistemas dinâmicos (Nikolaou (2001); Morari e Lee (1999)). Essa geração se distingue devido aos vários níveis de restrições desenvolvidas por vários mecanismos. A solução viável é procurada e direcionada para variações na planta em tempo real, fornecendo um rico conjunto de soluções para realimentação. Permite-se, deste modo, uma larga faixa de processos dinâmicos (estáveis, integradores e instáveis) e especificações de controle.

A quarta geração de MPC contempla preocupações como a consideração da incerteza e o controle robusto; otimização em múltiplos níveis direcionada para a priorização dos objetivos de controle; melhoria na tecnologia de identificação, dentre outras (Qin e Badgwell (1997) e Qin e Badgwell (2003)).

A seguir, tem-se o estado da arte dos diversos tipos de estruturas de controle.

2.2 Tipos de controle

Os sistemas de controle podem ser classificados em três tipos: centralizado, descentralizado ou distribuído. A seguir, cada tipo de estrutura de controle será tratado em maiores detalhes. A primeira a ser considerada é a estrutura centralizada de controle.

2.2.1 Controle centralizado

Na estrutura de controle centralizado, todas as informações disponíveis sobre a planta são tratadas em um único controlador central e todas as ações de controle são calculadas por ele. É evidente sua eficácia e aplicabilidade em diversos sistemas de controle, mas em algumas aplicações, a abordagem centralizada pode não ser a mais indicada. Alguns aspectos devem ser considerados no momento da escolha do tipo de estrutura a ser selecionada. Para uma planta simples e pequena, o controle central é a escolha perfeita. As distâncias físicas e a velocidade de comunicação não são questões críticas. Mas, numa aplicação complexa, esses aspectos podem comprometer a velocidade de resposta do controlador central e afetar seu desempenho. Além disso, devido ao elevado fluxo de informações e complexidade dos cálculos de controle, a estrutura centralizada pode demandar elevados custos operacionais. Outros problemas podem ocorrer em manutenções não planejadas de equipamentos, que pode comprometer o correto funcionamento do sistema de controle.

A Figura (2.2) é uma representação esquemática da abordagem do MPC centralizado para um sistema composto por dois subsistemas acoplados. No MPC centralizado, todas as entradas manipuladas do sistema de controle são otimizadas respeitando a função objetivo de um único problema de otimização.

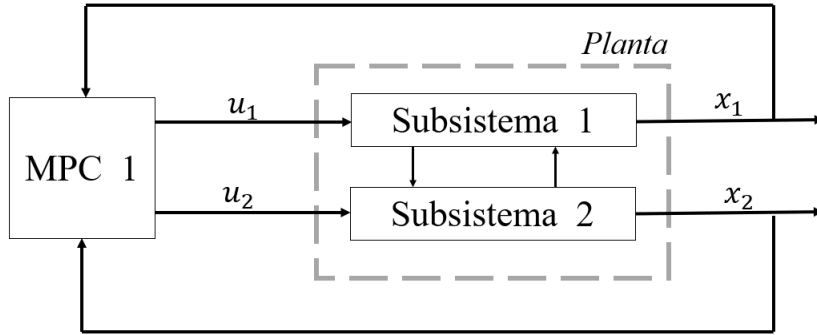


Figura 2.2: Representação esquemática de um MPC centralizado (adaptado de Christofides et al. (2013)).

Para apresentar uma possível formulação de um MPC centralizado não linear, considere primeiramente uma classe de sistemas não lineares amplamente utilizado na literatura composto de M subsistemas interconectados, em que cada um dos subsistemas pode ser descrito pelo seguinte modelo:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{si}(\mathbf{x})\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{k}_i(\mathbf{x})\mathbf{w}_i(t) \quad (2.9)$$

em que $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ e $\mathbf{w}_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$ representam os vetores das variáveis de estados, entradas e perturbações associadas ao subsistema i com $i = 1, \dots, M$, respectivamente. O vetor das perturbações $\mathbf{w} = [w_1^T \dots w_i^T \dots w_M^T]^T$ é considerado limi-

tado, tal que $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{W}$ com $\mathbf{W} := \{w \in \mathbb{R}^p : |w| \leq \beta, \beta > 0\}$. O vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ representa todos os estados do sistema não linear composto por M subsistemas, ou seja, $\mathbf{x} = [x_1^T \cdots x_i^T \cdots x_M^T]^T \in \mathbb{R}^n$. A dinâmica de \mathbf{x} pode ser descrita como a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^M \mathbf{g}_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{k}(\mathbf{x})\mathbf{w}(t) \quad (2.10)$$

em que $\mathbf{f} = [f_1^T \cdots f_i^T \cdots f_M^T]^T$, $\mathbf{g}_i = [\mathbf{0}^T \cdots g_{si}^T \cdots \mathbf{0}^T]^T$ em que $\mathbf{0}$ é uma matriz de zeros com dimensões apropriadas, \mathbf{k} é uma matriz composta de $k_i (i = 1, \dots, M)$ e zeros cuja expressão explícita é omitida por brevidade. Os M conjuntos de entradas são restritas para estar em M conjuntos convexos não vazios $U_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}, i = 1, \dots, M$, que são definidos como $U_i := \{u_i \in \mathbb{R}^{m_i} : |u_i| \leq u_i^{max}\}$, em que $u_i^{max}, i = 1, \dots, M$ são as magnitudes das restrições das entradas de uma maneira elementar. As funções \mathbf{f} , $\mathbf{g}_i, i = 1, \dots, M$ e \mathbf{k} são funções vetoriais localmente de Lipschitz e que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema nominal não forçado (isto é, o sistema da Equação (2.10) com $u_i(t) = 0, i = 1, \dots, M, \mathbf{w}(t) = 0$ para todo t) o que implica que $\mathbf{f}(0) = 0$.

Considere o controle do sistema representado pela Equação (2.10) e considerando que os estados deste sistema são medidos e estão disponíveis em cada instante de amostragem ($t_{k \geq 0}$) para o controlador. Em Garcia et al. (1989) tem-se uma formulação padrão do MPC centralizado:

$$\begin{aligned} & \min_{u_1, \dots, u_m \in S(T_s)} J(t_k) \\ & \text{sujeito a} \\ & \dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m g_i(\tilde{x})u_i(t) \\ & u_i(t) \in U_i, i = 1, \dots, m \\ & \tilde{x}(t_k) = x(t_k) \\ & \text{com} \\ & J(t_k) = \sum_{i=1}^m \int_{t_k}^{t_k+H_p} [\|\tilde{x}_i(\tau)\|_{Q_{ci}}^2 + \|u_i(\tau)\|_{R_{ci}}^2] d\tau \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que $S(T_s)$ é a família de funções constantes por partes com tempo de amostragem igual a T_s ; H_p é o horizonte de predição; Q_{ci} e R_{ci} são as matrizes simétricas de ponderação positivas definidas e $\tilde{x}_i, i = 1, \dots, m$ são as trajetórias preditas do subsistema nominal i com o estado inicial $x_i(t_k), i = 1, \dots, m$ no tempo t_k . O objetivo do MPC apresentado acima é alcançar a estabilização do sistema nominal da Equação (2.10) na origem, ou seja, em $(x, u) = (0, 0)$.

2.2.2 Controle descentralizado

A estrutura de controle descentralizado é caracterizada por apresentar um agente de controle em diferentes unidades da planta. Esses agentes tomam as suas decisões de forma independente um do outro. Não há negociação entre os agentes durante o processo de cálculo. As ideias para descentralizar e organizar hierarquicamente as ações de controle em sistemas de automação industrial remontam à década de 70 (Callier et al. (1976); Michel (1974); Michel e Rasmussen (1976); Sandell et al. (1978); Wang e Davison (1973)), mas tiveram limitações quanto a estabilidade do controle descentralizado de subsistemas interligados, de modo que o interesse desapareceu. Desde o final dos anos 90, por causa dos avanços nas técnicas de computação como a otimização convexa, o interesse no controle descentralizado ressurgiu (D’Andrea. (1998); Rotkowitz e Lall. (2006)) e formulações convexas foram desenvolvidas, embora limitadas à classes especiais de sistemas, como sistemas espacialmente invariantes (BAMIEH et al., 2002).

A Figura (2.3) apresenta um esquema de MPC descentralizado com dois subsistemas. Nota-se que a principal característica de uma abordagem de controle descentralizado é que não há comunicação entre os controladores nos diferentes locais da planta, ou seja, eles atuam de forma independente.

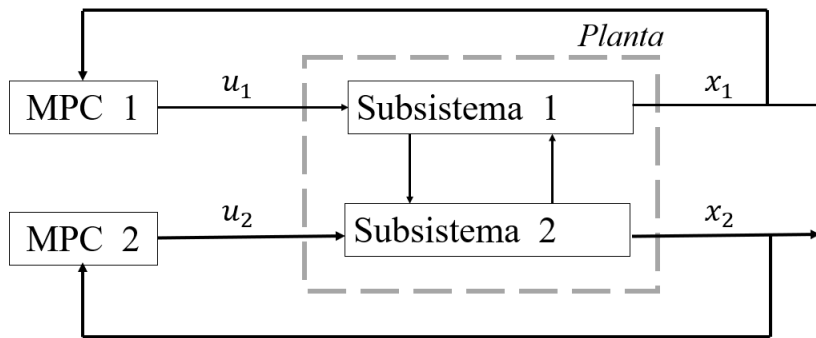


Figura 2.3: Representação MPC Descentralizado (adaptado de Christofides et al. (2013)).

Considere o controle do sistema representado pela Equação (2.10) e que os estados são mensuráveis e estão disponíveis para os controladores nos instantes de amostragem.

Um MPC descentralizado típico pode ser formulado da seguinte maneira.

$$\begin{aligned}
& \min_{u_i \in S(T_s)} J_i(t_k) \\
& \text{sujeito a} \\
& \dot{\tilde{x}}(t) = f_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-}(t)) + g_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-}(t))u_i(t) \\
& u_i(t) \in U_i \\
& \tilde{x}_i(t_k) = x_i(t_k) \\
& \text{com} \\
& J(t_k) = \int_{t_k}^{t_k+H_p} [||\tilde{x}_i(\tau)||_{Q_{ci}}^2 + ||u_i(\tau)||_{R_{ci}}^2] d\tau
\end{aligned} \tag{2.12}$$

em que $\mathbf{x}_{i-} = [\mathbf{0} \dots x_i \dots \mathbf{0}]^T$, J_i é a função objetivo utilizada por cada controlador local baseando-se nos seus respectivos estados e entradas manipuladas de cada subsistema.

Em Magni e Scattolini (2006) é apresentado um algoritmo de controle preditivo baseado em modelo com estrutura descentralizada com estabilizador para sistema não lineares no tempo discreto. Nenhuma informação é trocada entre os controladores locais presente na planta. Além disso, os autores apresentam a prova de estabilidade deste controle, que se baseia na inclusão de uma restrição contrativa na formulação do problema MPC. Na concepção deste MPC descentralizado, os autores consideram as interações entre os diferentes subsistemas como perturbações cuja magnitude dependia da norma dos estados do sistema. Os resultados apresentados pelo controle desenvolvido são satisfatórios para o estudo de caso apresentado e segundo os autores o algoritmo apresentado pode ser estendido para diferentes aplicações.

Sun e El-Farra (2008) desenvolveram uma estratégia de controle semi-descentralizada para plantas que apresentem perturbações, unidades interligadas e troca de informações através de uma rede de comunicação compartilhada. Nesta estrutura, cada unidade tem seu próprio sistema de controle local, que se comunica com o sistema supervisor da planta (e com outros sistemas locais) através de um meio de comunicação compartilhado. O objetivo dos autores foi projetar um sistema de controle integrado e elaborar estratégias de comunicação que garantissem a estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada. Além disso, os autores desejaram minimizar os custos com a comunicação, reduzindo a troca de informações entre os sistemas locais de controle, tanto quanto possível, sem contudo, sacrificar a estabilidade das unidades individuais e de toda a planta.

Os modelos de predição de cada subsistema em Sun e El-Farra (2008) são incorporados em cada unidade de controle local para fornecer uma estimativa da evolução das unidades vizinhas, quando as medidas não são transmitidas através da rede. Sensores instalados em cada unidade possibilitam a troca de informações e atualização dos estados, a fim de compensar as incertezas do modelo. Dessa forma é necessário determinar a frequência

mínima de comunicação cruzada entre cada um dos sistemas de controle. Tal cálculo se baseia no grau de incompatibilidade entre a dinâmica real das unidades e os modelos utilizados para descrevê-las.

Outra proposta de controle descentralizado é apresentada em Alessio et al. (2011), mas neste estudo o foco foi para processos lineares dinamicamente acoplados em larga escala e sujeitos a restrições de entrada. O modelo global do processo é decomposto em vários outros modelos menores (possivelmente sobrepostos) utilizados para as previsões locais. O grau de dissociação entre os submodelos representa um parâmetro ajustável do projeto: quanto menor o acoplamento dos submodelos, menores serão os esforços computacionais e os esforços com as transmissões das informações entre os controladores descentralizados, menor o desempenho global da malha de controle. Os critérios suficientes para analisar a estabilidade assintótica em malha fechada são fornecidos para sistemas assintoticamente estáveis em malha aberta com restrição nas entradas e para sistemas instáveis em malha aberta e sem restrições, sujeitos a possíveis falhas intermitentes de comunicação de dados medidos. A abordagem pode ser aplicada tanto para problemas servos como para problemas reguladores. Resultados satisfatórios são apresentados para um estudo de caso de grande dimensão.

Em um trabalho recente de Naghavi e Safavi (2017), é apresentado uma abordagem de controle MPC descentralizado com horizonte móvel finito para sistemas fisicamente distribuídos e compostos por diferentes subsistemas interconectados, com falhas múltiplas ocorrendo em instantes de tempo desconhecidos. A estratégia de controle apresentada é combinada com um método de aproximação *on-line* para lidar com as interações desconhecidas entre os subsistemas e as falhas. Esta estrutura é implementada em cada subsistema da planta através de uma abordagem DMPC sujeita a restrições. A prova de estabilidade é apresentada e um exemplo ilustrativo explica a estratégia proposta pelos autores.

Em geral, o desempenho global em malha fechada de um sistema de controle descentralizado é limitado por causa da escassez de informações disponíveis e falta de comunicação entre os diferentes controladores da planta. Isso favorece a utilização do controle distribuído, que é tema da próxima seção.

2.2.3 Controle distribuído

Em estruturas de controle distribuídas, informações são transmitidas entre os controladores locais de modo que cada um deles tem conhecimento do comportamento dos seus vizinhos. Como os controladores são projetados com MPC, as informações tipicamente transmitidas consistem nos comportamentos futuros das variáveis controladas ou dos va-

lores previstos para os estados calculados localmente, de modo que cada controlador pode prever os efeitos das interações ao longo do horizonte de predição considerado. Um esquema de um DMPC com dois controladores locais é apresentado na Figura (2.4).

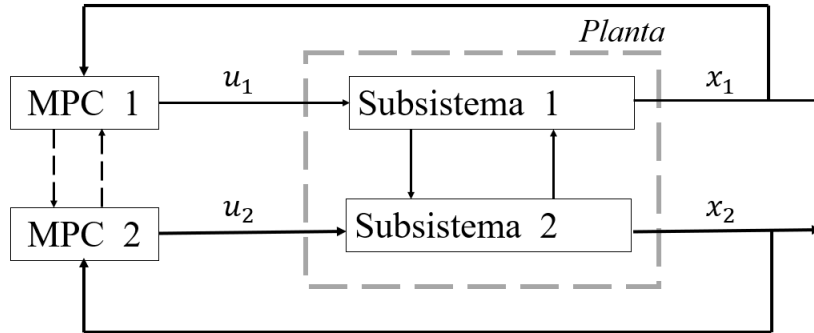


Figura 2.4: Representação de um DMPC (adaptado de Christofides et al. (2013)).

No exemplo representado na Figura (2.4) supõe-se que informações são transmitidas através dos controladores locais (MPC 1 e MPC 2). Os controladores MPC 1 e MPC 2 destinam-se ao controle dos subsistemas 1 e 2, respectivamente. Se a troca de informação entre estes controladores locais refere-se à evolução prevista dos estados locais (x_1 e x_2), qualquer controlador local necessita apenas conhecer a dinâmica do subsistema diretamente controlado por cada um. Caso contrário, se as ações de controle futuras (u_1 e u_2) são transmitidas, os reguladores locais devem conhecer os modelos dos outros subsistemas. Em qualquer caso, fica evidente que a transmissão e sincronização das informações têm grande impacto sobre o desempenho alcançável.

Quando é estabelecido algum nível de comunicação entre os diferentes controladores, tal como feito pela estrutura do controle preditivo distribuído (DMPC) é possível obter um melhor desempenho do sistema de controle em malha fechada. Dentro deste contexto, vários métodos de DMPC já foram propostos. Os artigos de Rawlings e Stewart (2008), Scattolini (2009) e Christofides et al. (2013) apresentam uma análise dos vários esquemas de DMPC em um nível conceitual. Algumas passagens aqui apresentadas fazem referência a estes trabalhos.

No que se refere aos algoritmos de DMPC disponíveis na literatura, uma classificação pode ser feita de acordo com a topologia da rede de comunicações, os diferentes protocolos de comunicação utilizados pelos controladores locais, e a função objetivo considerada no problema de otimização do controlador local (SCATTOLINI, 2009).

Segundo Scattolini (2009), quando as informações trocadas entre os controladores são transmitidas e recebidas a partir de cada controlador, os algoritmos de DMPC são ditos totalmente conectados. E quando, as informações são transmitidas e recebidas a partir de qualquer controlador local para um dado subconjunto dos outros, os algoritmos são ditos

parcialmente conectados. Os algoritmos parcialmente conectados podem ser convenientes quando se tem subsistemas fracamente acoplados. Neste cenário, limitar as informações transmitidas entre os subsistemas, não afeta significativamente o desempenho do sistema de controle.

A troca de informações entre os controladores locais pode ser feita de acordo com diferentes protocolos. Quando a informação é transmitida e recebida por cada controlador apenas uma vez em cada tempo de amostragem, os algoritmos são ditos não iterativos. Se for possível a transmissão e recebimento de informações muitas vezes ao longo do tempo de amostragem, os algoritmos são ditos iterativos.

Além disso, segundo a definição de Rawlings e Stewart (2008) existem dois tipos de algoritmos para a estratégia de controle preditivo distribuído: o DMPC cooperativo e o DMPC não cooperativo. Na estratégia cooperativa, cada controlador otimiza uma função objetivo global e na estratégia não cooperativa, cada controlador otimiza uma função objetivo local.

Existem dois tipos diferentes de DMPC não cooperativo: DMPC não cooperativo sequencial e o DMPC não cooperativo paralelo. Na abordagem sequencial, as ações de controle são calculadas em sequência, ou seja, o controlador $i + 1$ calcula suas ações depois do controlador i . Outros algoritmos, ainda na categoria de DMPC não cooperativos utilizam a abordagem paralela. Isto significa, que as ações de controle são calculadas paralelamente pelos controladores, isto é, ao mesmo tempo.

A pesquisa desenvolvida nesta tese engloba propostas de controle DMPC não cooperativas e cooperativas. Logo, um breve estado da arte para controladores distribuídos com essas estruturas será apresentado a seguir, iniciando com o DMPC não cooperativo

DMPC não cooperativo

No trabalho de Jia e Krogh (2002), os autores apresentam um algoritmo MPC parcialmente conectado. O método proposto descreve os efeitos das interações entre os subsistemas como perturbações agindo nos modelos locais. Os valores desses distúrbios podem ser previstos a partir das trajetórias dos estados preditos transmitidas entre os controladores locais.

Em Richards e How (2007), um algoritmo DMPC foi proposto para uma classe de sistemas desacoplados com restrições acopladas. Esta classe de sistema engloba uma parte importante de problemas práticos, incluindo, por exemplo, a manobra de um grupo de veículos que deverá percorrer um caminho, mantendo uma formação e/ou evitando colisões. Em Richards e How (2007), cada controlador é avaliado sequencialmente, o que

significa dizer que o controlador $i + 1$ é avaliado após o controlador i ou vice-versa. Este tipo de DMPC com estrutura sequencial por ser representado como é feito na Figura (2.5).

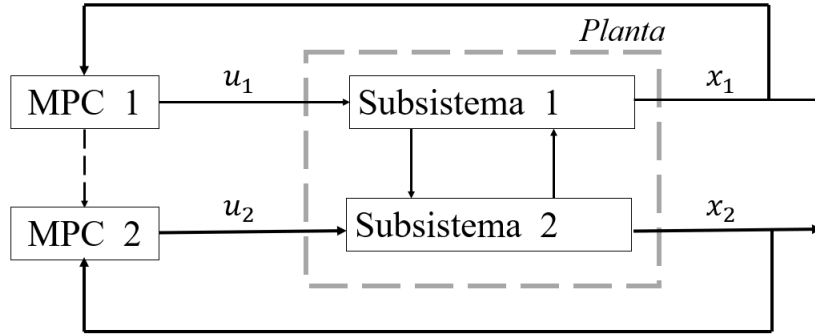


Figura 2.5: Representação de um DMPC não cooperativo sequencial (adaptado de Christofides et al. (2013)).

A maioria dos algoritmos na categoria de DMPC não cooperativo avaliam os controladores paralelamente, ou seja, ao mesmo tempo. Esses controladores podem ser avaliados para obter uma solução em cada instante de amostragem, apenas uma vez (controle não iterativo) ou mais de uma vez (controle iterativo). Um exemplo de arquitetura DMPC não cooperativo paralelo com dois controladores locais é mostrado na Figura (2.6)

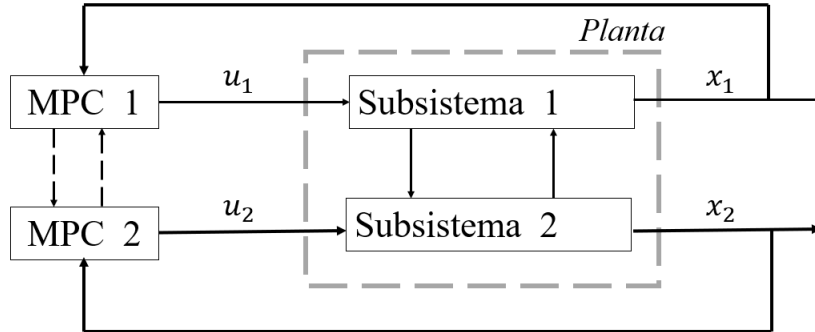


Figura 2.6: Representação de um DMPC não cooperativo paralelo (adaptado de Christofides et al. (2013)).

Entre os trabalhos sobre DMPC não cooperativo paralelo, tem-se o trabalho de Camponogara et al. (2002). Neste artigo, são apresentados métodos gerais de decomposição de problemas em larga escala e métodos para garantir a estabilidade dos vários agentes de controle quando ocorrem mudanças abruptas. O sistema controlado é composto por um número de subsistemas lineares e discretos no tempo sem restrições e sinais de entradas desacopladas, descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{M1} & \cdots & \mathbf{A}_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{B}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_M(k) \end{bmatrix}$$

O efeito do acoplamento dinâmico entre os estados vizinhos é considerado através de um modelo de predição com sinal de uma perturbação \mathbf{v} . Como exemplo, o modelo de predição usado pelo controlador j é

$$\mathbf{x}_j(k+i+1|k) = \mathbf{A}_{jj}\mathbf{x}_j(k+i|k) + \mathbf{B}_j\mathbf{u}_j(k+i|k) + \mathbf{K}_j\mathbf{v}_j(k+i|k) \quad (2.13)$$

em que $\mathbf{K}_j = [\mathbf{A}_{j,1} \ \dots \ \mathbf{A}_{j,j-1} \ \mathbf{A}_{j,j+1} \ \dots \ \mathbf{A}_{j,M}]$. As informações trocadas entre os agentes de controle no final de cada amostragem é a totalidade do vetor de estados preditos localmente. Em particular, o controlador j recebe o sinal:

$$\mathbf{v}_j(k+i|k) = \begin{bmatrix} x_1(k+i|k-1) \\ \vdots \\ x_{j-1}(k+i|k-1) \\ x_{j+1}(k+i|k-1) \\ \vdots \\ x_M(k+i|k-1) \end{bmatrix}$$

onde $x_s(k+i|k-1)$ é o estado predito pelo agente s no instante $k-1$. O sinal $\mathbf{v}_j(k+i|k)$ é usado pelo controlador j no instante k para estimar o efeito dos subsistemas vizinhos na Equação (2.13).

A restrição de estabilidade em malha fechada foi incluída na formulação do problema, através da inclusão de uma restrição de contração sobre a norma de $\mathbf{x}_j(k+1|k)$ em cada controlador local.

Em Keviczky et al. (2006), tem-se a proposta de um DMPC para sistemas com subsistemas dinamicamente desacoplados (uma classe de sistemas de relevância no contexto de sistemas multi-agentes), onde a função objetivo e as restrições combinam o comportamento dinâmico do sistema. O acoplamento no sistema é descrito utilizando um grafo em que cada subsistema é um nó. Os autores assumiram que cada subsistema pode trocar informações com um subconjunto de outros subsistemas. Com base nos resultados obtidos pelos autores, uma estrutura DMPC foi desenvolvida para controle e coordenação de equipes de veículos autônomos com resultados satisfatórios.

Em Farina e Scattolini (2011), tem-se um exemplo de algoritmo DMPC não cooperativo para sistemas discretos. O método apresentado pode considerar restrições de entrada e estado. Sob premissas suaves, a convergência do sistema em malha fechada é comprovada e não há necessidade que cada subsistema conheça os modelos dinâmicos que regem as trajetórias dos outros subsistemas da planta. Além disso, a transmissão de informações é limitada, na medida em que cada subsistema necessita apenas das trajetórias de referência dos estados pertencentes aos seus vizinhos.

Na próxima seção será detalhada a abordagem de DMPC cooperativo.

DMPC cooperativo

A estratégia de controle DMPC cooperativo apresenta uma função objetivo global como principal característica, e tal função é otimizada por cada um dos controladores locais presentes no sistema. Segundo Venkat et al. (2008), este tipo de estratégia de controle aumenta o desempenho do controle, pois considera localmente os efeitos das ações de controle de todos os subsistemas da rede. Na estrutura DMPC cooperativo, cada controlador considera os efeitos de todas as entradas manipuladas, através de uma função objetivo global. Em cada iteração, cada controlador otimiza a trajetória de suas ações de controle, assumindo que os valores das outras entradas são aqueles calculados na iteração anterior. Em seguida, os controladores compartilham as trajetórias ótimas encontradas e uma nova trajetória ótima é calculada como a soma ponderada delas. O processo iterativo só é concluído quando uma condição terminal é satisfeita. Um algoritmo típico de DMPC cooperativo utiliza a seguinte estratégia de implementação:

1. Em k , todos os controladores recebem os valores dos estados mensuráveis da planta, $\mathbf{x}(k)$;
2. Na iteração c ($c \geq 1$):
 - (a) Cada controlador calcula seu próprio conjunto de ações de controle baseando-se em $\mathbf{x}(k)$ e nas últimas ações dos outros controladores;
 - (b) Os controladores trocam informações e baseando-se nelas calculam as novas trajetórias para suas respectivas entradas manipuladas.
3. Se a condição terminal for satisfeita, cada controlador envia as ações calculadas para os respectivos atuadores; caso contrário, retorna-se à etapa 2 ($c \leftarrow c + 1$);
4. Quando novos valores dos estados mensuráveis da planta estão disponíveis, retorna-se à etapa 1 ($k \leftarrow k + 1$).

Nos últimos anos, muitos trabalhos foram desenvolvidos com base nessa estratégia de controle. A ideia de DMPC cooperativo foi primeiramente apresentada em Venkat et al. (2005) e depois desenvolvida em Rawlings e Stewart (2008).

Em Venkat et al. (2005), é apresentado pela primeira vez, um algoritmo DMPC cooperativo de natureza iterativa. Segundo os autores, a estrutura proposta apresenta garantia de estabilidade nominal e propriedades de desempenho. Neste trabalho, os controladores distribuídos trabalham de forma iterativa e cooperativa para alcançar um objetivo

de controle comum em todo o sistema. Além disso, as iterações intermediárias do algoritmo proposto são viáveis e os controladores estabilizam o sistema nominal em malha fechada. Essas duas características permitem que o usuário possa encerrar o algoritmo no final de cada instante de amostragem, mesmo que a convergência não tenha sido alcançada. O DMPC proposto apresenta realimentação da saída com um filtro de Kalman para estimativa de estado.

Em Venkat et al. (2008); Venkat et al. (2006) e Venkat et al. (2005) os autores propõem um algoritmo DMPC baseado num processo de cooperação entre os agentes de controle para aplicação em processos lineares. O modelo de predição utilizado é apresentado a seguir:

$$\mathbf{x}_{ii}(k+i) = \mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_{ii}(k) + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{u}_i(k) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{x}_{ij}(k+i) = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_{ij}(k) + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{u}_j(k) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{y}_i(k) = \sum_{j=1}^M \mathbf{C}_{ij}\mathbf{x}_{ij}(k) \quad (2.16)$$

O efeito das entradas do subsistema j no subsistema i é modelado pelo modelo de interação. Todos os modelos de interação são assumidos estáveis e as restrições nas entradas são assumidas desacopladas (por exemplo, saturação nas entradas).

A partir de uma formulação multiobjetivo, os autores distinguem o esquema de controle baseado em comunicação, em que cada controlador i tem o objetivo de otimizar seu próprio índice de desempenho local Φ_i e o esquema de controle baseado em cooperação, no qual cada controlador i tem a função de otimizar a soma ponderada $\sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi_j$ de todos os índices de desempenho, $0 \leq \alpha_j \leq 1$. Como os índices de desempenho dependem das decisões tomadas pelos outros controladores, a cada instante de tempo k , a sequência de iterações é adquirida antes de se calcular e de se implementar o vetor de entrada $\mathbf{u}(k)$. Em específico, em cada período de amostragem k e em cada iteração p as decisões anteriores $\mathbf{u}_{j \neq i}^{p-1}$ são transmitidas para o controlador i , para calcular a nova iteração \mathbf{u}_i^p . Com a abordagem baseada na comunicação, os autores mostram que se a sequência de iterações converge para um Equilíbrio de Nash e a convergência para o desempenho ótimo de controle (centralizado) é alcançada.

Outra abordagem DMPC para sistemas quadrados (o número de entradas igual ao número de saídas) é apresentado em Mercangoz e Doyle III (2007), cujos modelos locais

de previsão são:

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(k) + \sum_{j=1}^M \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(k) + \mathbf{w}_i(k) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{y}_i(k) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{v}_i(k) \quad (2.18)$$

A estimação dos estados, em cada tempo de amostragem, é realizada por um filtro distribuído e descentralizado de Kalman (DDKF), com base nos submodelos locais (2.17) e (2.18). A estrutura física da planta e o modelo matemático da mesma são utilizados para particionar o sistema e definir os nós de controle. Medições locais nos nós são usados para estimar os estados relevantes. Estas informações são então utilizadas nos cálculos de controle. Verificou-se que a comunicação entre os nós durante os cálculos de estimativa e controle proporcionam melhorias no desempenho dos controladores.

Os resultados de estabilidade e convergência não foram provados em Mercangoz e Doyle III (2007), mas os resultados experimentais para um sistema de quatro tanques são relatados para mostrar a eficiência da abordagem. Os resultados indicam que a estrutura proporciona melhoria significativa sobre os controladores MPC completamente descentralizados, e aproxima-se dos desempenhos de um sistema totalmente centralizado de controle.

No trabalho de Rawlings e Stewart (2008), os autores apresentam um DMPC cooperativo, no qual as funções objetivos locais dos MPCs são modificadas para atingir os objetivos de controle do sistema, garantir a estabilidade nominal do mesmo e obter um bom desempenho. Segundos os autores, apenas a modelagem das interações entre os subsistemas e a troca de informações das trajetórias não é suficiente para garantir a estabilidade em malha fechada. Por outro lado, a estratégia apresenta elevado grau de comunicação entre os controladores locais. Este amplo grau de comunicação é minimizado através do aproveitamento das estruturas das conexões entre os subsistemas.

Em Pannocchia et al. (2009), uma estratégia de controle DMPC cooperativo baseado em *Enumeração Parcial* é apresentada e pode ser aplicada para sistemas complexos e de grande escala. Neste trabalho, a estrutura cooperativa é utilizada para lidar de forma otimizada com restrições acopladas nas entradas.

Outro trabalho desenvolvido que aborda a estratégia de DMPC cooperativo é apresentado em Stewart et al. (2010). Neste artigo, o DMPC cooperativo pode ser aplicado para situações com qualquer número finito de subsistemas, sempre satisfazendo a uma condição de estabilidade. As principais características da estratégia de controle presente em (STEWART et al., 2010) são: restrições rígidas nas variáveis manipuladas são consideradas e respeitadas e os resultados são equivalentes à solução do controle centralizado.

Em Liu et al. (2010), duas propostas de DMPC cooperativo para sistemas não lineares de grande escala são apresentadas. Os controladores possuem, em cada instante de amostragem, o *feedback* do estado do processo e o modelo da planta. Na primeira proposta apresentada, os controladores utilizam uma estratégia de comunicação unidirecional, ou seja, estrutura sequencial. Cada controlador é avaliado apenas uma vez em cada instante de amostragem. Na segunda proposta, os controladores utilizam a comunicação bidirecional, ou seja, estrutura paralela. Em cada instante de amostragem, os controladores interagem para melhorar o desempenho em malha fechada. Em ambas propostas, a garantia de estabilidade do sistema em malha fechada é feita pela incorporação de uma restrição de estabilidade baseada em Lyapunov. As arquiteturas garantem estabilidade prática no sistema em malha fechada e desempenho ótimo.

No trabalho de Maestre et al. (2011), tem-se uma proposta de DMPC, em que os agentes são independentes, mas são capazes de se comunicar. Os controladores possuem acesso ao modelo e estado de apenas um dos outros subsistemas. Em cada instante de amostragem, os agentes fazem melhorias em uma função objetivo local, com base nas informações disponíveis. Além disso, os autores fornecem informações que garantem que o sistema de controle em malha fechada seja assintoticamente estável.

Em Stewart et al. (2011), um DMPC cooperativo é proposto para aplicação em sistemas não lineares. O controlador é não linear, não convexo e utiliza a projeção de gradiente e converge para pontos estacionários do sistema. Em cada iteração, o controlador melhora a função objetivo com intuito de estabilizar plantas.

Em Ferramosca et al. (2013), uma estratégia de controle DMPC cooperativo é proposto para rastrear as mudanças de *set-point* e pode ser aplicável a qualquer número finito de subsistemas. O controlador proposto é capaz de conduzir todo o sistema para qualquer *set-point* admissível de forma viável. O controlador assegura a convergência para o ótimo do controle centralizado, mesmo considerando restrições acopladas no problema de otimização.

No trabalho apresentado em Kong e Longo (2015), discute-se o projeto de um controlador DMPC cooperativo baseado em programação linear (LP, do inglês, *Linear Programming*) para sistemas lineares de grande escala com dinâmica acoplada e restrições de entrada desacopladas. É avaliada também a aplicabilidade da abordagem *Divide and Conquer* na estrutura DMPC cooperativo baseado-se em programação quadrática (QP, do inglês *Quadratic Programming*) para o caso baseado em LP.

Embora muitos esforços tenham sido feitos para desenvolver novos algoritmos de controle DMPC para uma implementação bem-sucedida desta abordagem, alguns questões cruciais do DMPC não foram adequadamente abordadas, como por exemplo a decom-

posição do sistema (XIE et al., 2016). A seguir será apresentado o estado da arte referente à decomposição de sistemas.

2.3 Decomposição de sistema - estado da arte

O modelo da planta é geralmente decomposto de acordo com a estrutura física da instalação ou com base em uma análise do modelo matemático, ou através da combinação de ambos. Quando um sistema é muito complexo, por apresentar muitos estados, entradas e saídas, o processo de decomposição baseado na intuição, percepção da estrutura física e/ou experiência, pode ser difícil ou até mesmo inviável. Neste contexto, o desenvolvimento de métodos sistemáticos de decomposição de sistemas, que extraíam informações a partir das equações de estado do modelo da planta são de grande aplicabilidade.

Decomposições deste tipo podem tirar proveito da estrutura das matrizes esparsas presentes no sistema e identificar estruturas escondidas que favorecem as simplificações conceituais e numéricas de controle e projeto de estimação. Desta forma, a decomposição de sistemas dinâmicos se favorece dos diversos e poderosos métodos matemáticos envolvidos na pesquisa de matrizes esparsas.

Existem vários métodos para decomposição de sistemas, um bom exemplo é a decomposição hierárquica LBT (do inglês *Lower Block Triangular*). Sezer e Siljak (1981) propuseram um procedimento baseado na teoria de grafos para decomposição de sistemas de grande escala em subsistemas interconectados de entradas realizáveis. A realização das entradas é um requisito fundamental para se garantir a controlabilidade do sistema. A pesquisa nessa área mostra que a teoria de grafos é uma poderosa ferramenta para decomposição de sistemas de grande escala.

Segundo o trabalho de Sezer e Siljak (1981), a decomposição LBT é realizada da seguinte forma. Considere um sistema de controle descrito como:

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.19)$$

em que, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ são os vetores dos estados e das entradas, respectivamente. O sistema \mathbf{S} pode ser associado à um grafo orientado $\mathbf{D} = (\mathbf{U} \cup \mathbf{X}, \mathbf{E})$, sendo $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ e $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, os conjuntos de vértices das entradas e estados, respectivamente. $(u_j, x_j) \in \mathbf{E}[(x_j, x_i) \in \mathbf{E}]$ se e somente se, a entrada u_j (estado x_j) pertencer à equação correspondente para \dot{x}_i na Equação (2.19). Assim, as matrizes de

adjacência e de acessibilidade de \mathbf{D} apresentam a seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{L} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

sendo \mathbf{E} e \mathbf{L} (\mathbf{P} e \mathbf{Q}) matrizes de interconexão entre estados e entradas (acessibilidade) de dimensões adequadas. Uma vez estabelecida a associação entre um grafo orientado \mathbf{D} e um dado sistema \mathbf{S} , o dígrafo \mathbf{D} pode ser utilizado para estudo das propriedades estruturais de \mathbf{S} .

O sistema \mathbf{S} da Equação (2.19) pode ser decomposto através da decomposição LBT, de tal forma que gere subsistemas hierarquicamente ordenados e descritos como

$$\mathbf{S}_k : \mathbf{x}_k = \sum_{j=1}^k \mathbf{A}_{kj} \mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^k \mathbf{B}_{kj} \mathbf{u}_j \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (2.21)$$

sendo $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ e $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{m_k}$, respectivamente, estados e entradas de \mathbf{S}_k , tal que, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_s}$, $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_s}$ e \mathbf{A}_{kj} , \mathbf{B}_{kj} matrizes de dimensões adequadas.

A decomposição da Equação (2.21) é obtida pela permutação de \mathbf{S}_k que transforma as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} da Equação (2.19) em matrizes de blocos triangulares compatíveis. Neste caso, a matriz de interconexão \mathbf{M} da Equação (2.20) tem a seguinte representação

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{E}_{n1} & \mathbf{E}_{n2} & \mathbf{E}_{n3} & \dots & \mathbf{E}_{nn} & \mathbf{L}_{n1} & \mathbf{L}_{n2} & \mathbf{L}_{n3} & \dots & \mathbf{L}_{nn} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Em termos de dígrafo associado $\mathbf{D} = (\mathbf{U} \cup \mathbf{X}, \mathbf{E})$, a permutação representada pela Equação (2.22) de \mathbf{S} corresponde à partição de \mathbf{D} em subgrafos $\mathbf{D}_k = (\mathbf{U}_k \cup \mathbf{X}_k, \mathbf{E}_k)$ identificados pelos pares $(\mathbf{E}_{kk}, \mathbf{L}_{kk})$ da Equação (2.22). Os subgrafos são dígrafos de subsistemas desacoplados que são definidos como:

$$\mathbf{S}_k^o : \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{kk} \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_{kk} \mathbf{u}_k \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (2.23)$$

que são obtidos a partir da Equação (2.21), quando $\mathbf{A}_{kj} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{B}_{kj} = \mathbf{0}$ para $j \neq k$.

Sezer e Siljak (1986) propuseram outro método bastante simples para decomposição de sistemas complexos em subsistemas interligados, com base na Teoria de Grafos. O método de decomposição Epsilon é adequado para análise de estabilidade através de funções de Lyapunov e aplicações em controle descentralizado. A ideia é a de associar um grafo a um

determinado sistema e desconectar as arestas correspondentes às interações mais fracas, menores que um fator ϵ , e identificar os subgrafos desconectados do grafo correspondente. Os componentes obtidos correspondem aos subsistemas com mútuo acoplamento maior ou igual a ϵ . Uma vez que os componentes de um grafo podem ser determinados como representações lineares, o algoritmo de decomposição ϵ é bastante simples.

A ideia básica da decomposição Epsilon é notavelmente simples. Dado uma matriz $\mathbf{A} = [a_{rs}]$ e o valor do parâmetro ϵ , sendo $\epsilon > 0$, todo elementos de \mathbf{A} que forem menor que ϵ em módulo (ou seja, $|a_{rs}| < \epsilon$) são considerados nulos.

A matriz esparsa resultante é então permutada para obter a forma de uma matriz diagonal de blocos, e todos elementos no mesmo bloco são considerados fortemente acoplados. Como pode-se verificar através da Figura (2.7), o resultado obtido pela aplicação

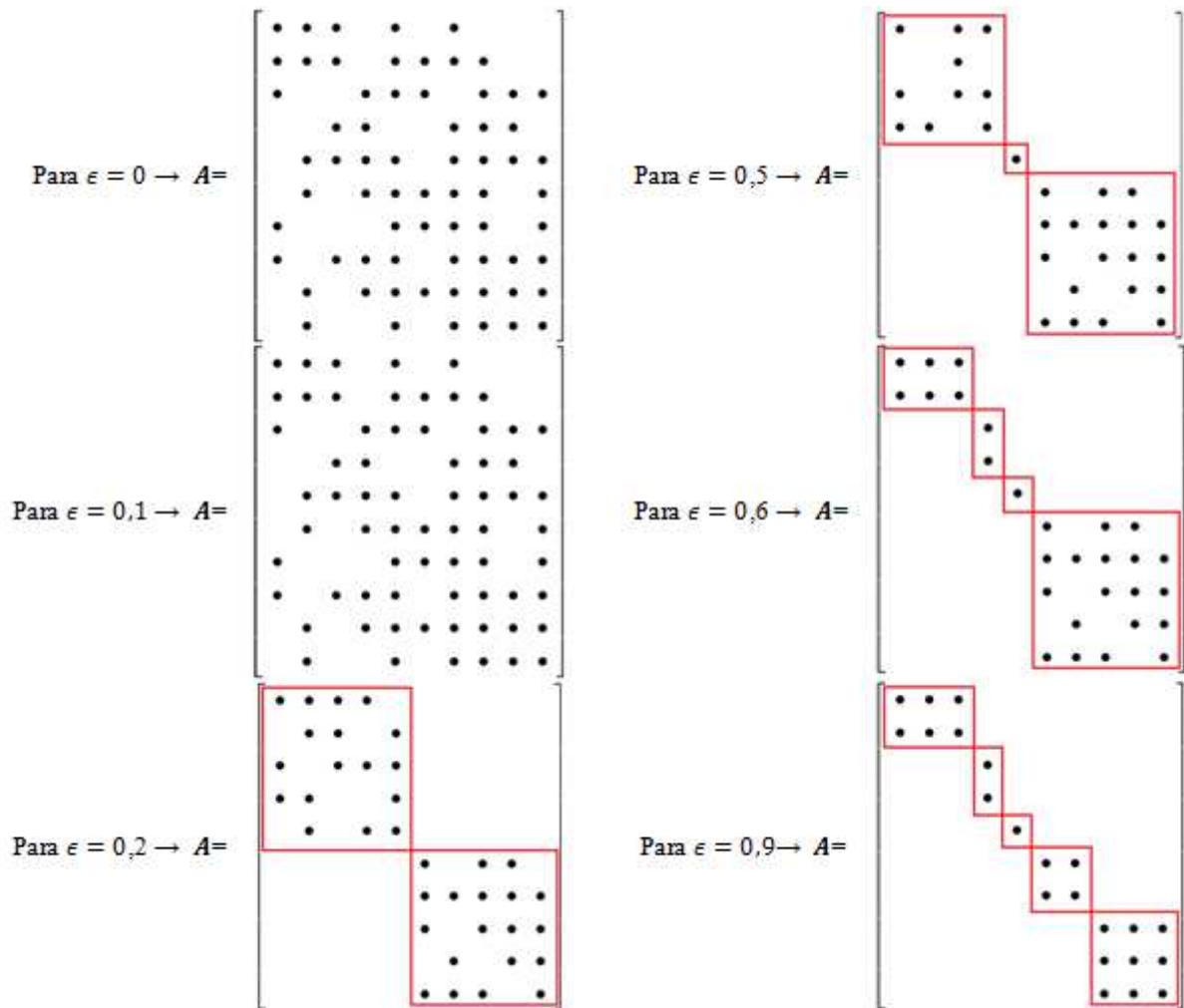


Figura 2.7: Representação genérica de um matriz A decomposta para diferentes valores de ϵ .

da Decomposição Epsilon irá depender do valor atribuído ao parâmetro ϵ . Naturalmente, com o aumento de ϵ , mais elementos são descartados e as diagonais em blocos se tornarão

menores. É, portanto necessário determinar um valor adequado para ϵ que irá identificar fortes acoplamentos, enquanto preserva a estrutura em blocos da matriz resultante.

Motee e Sayyar-Rodsari (2003) desenvolveram um algoritmo baseado numa métrica de desempenho para o particionamento ótimo de um sistema para posterior aplicação da tecnologia de MPC distribuído. Primeiramente, os autores definem uma matriz de ponderação para representar o sistema distribuído como um grafo orientado. Em seguida, desenvolveram uma formulação na qual um critério de desempenho em malha fechada é utilizado para particionar o sistema em subsistemas, que serão utilizados nos problemas locais de controle.

Zhang e Wang (2012) propuseram uma estratégia de controle distribuído preditivo baseado em modelo utilizando um novo método de particionamento de modelos. A partição é feita analisando a distribuição das entradas que serão manipuladas.

Considere o seguinte modelo em espaço de estados no tempo discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (2.25)$$

em que $\mathbf{x}(k) = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ refere-se ao vetor dos estados do processo; $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$ refere-se ao vetor de entradas do sistema ou variáveis manipuladas; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são as matrizes de estados e entradas, respectivamente. Supõe-se que o conjunto (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável e que as entradas do sistema podem ser decompostas em M entradas da seguinte forma:

$$\mathbf{u}(k) = [\mathbf{u}_1^T(k) \ \mathbf{u}_2^T(k) \ \dots \ \mathbf{u}_M^T(k)]^T \quad (2.26)$$

Partindo do pressuposto que, em um sistema, os estados são geralmente controlados por algumas entradas particulares, os autores definiram que:

Definição 1: O conjunto $\Omega_i = \{\alpha | B_{\alpha i} \neq 0, \alpha = 1, \dots, n\}$ em que $B_{\alpha i}$ é o elemento da α -ésima linha e i -ésima coluna da matriz de entradas \mathbf{B} . O conjunto de estados diretamente controlados pela entrada $u_i(k)$ pode ser descrito como $\{x_\alpha, \alpha \in \Omega_i\}$.

A Definição 1 é a base do método de partição de modelos apresentado no trabalho de Zhang e Wang (2012). O vetor compacto dos estados diretamente controlados pode ser escrito como $x_{d,i}(k)$, e então o modelo da planta pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{d,i}(k+1) = \mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_{d,i}(k) + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{u}_i(k) + \sum_{j=1(j \neq i)}^M (\mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_{d,j}(k) + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{u}_j(k)) \quad (2.27)$$

em que $i = 1, \dots, M$; $\mathbf{x}_{d,i}(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbf{u}_i(k) \in \mathbb{R}^{m_i}$ são os vetores de estados e de entradas do subsistema i no instante k , respectivamente; $\mathbf{x}_{d,j}(k)$, $\mathbf{u}_j(k)$ são os vetores de estados e de entradas do subsistema j , respectivamente.

Os estados calculados no instante k , $\mathbf{x}_{d,i}(k)$ do subsistema i são obtidos através de medições e informações advindas dos outros subsistemas.

Esse capítulo apresentou várias estratégias de controle preditivo distribuído. Outras alternativas propostas existem e podem ser encontradas nas referências destacadas nesse trabalho, como por exemplo o estudo de acoplamento entre modelos de resposta ao degrau baseando-se no critério de otimalidade de Nash (DU et al., 2001). No geral, há formulações em espaço de estados que dividem o problema global de controle preditivo, em subproblemas, e essas implementações locais podem trocar ou não informações entre si. Entretanto, na sua maioria, os sistemas são adotados como completamente desacoplados, e sem superposição de estados nos submodelos usados no particionamento para o controlador.

Existe ainda controladores preditivos distribuídos que se baseiam em partições dos modelos em espaço de estados de forma a que o problema seja tratado em uma formulação de única entrada e múltiplas saídas (SIMO, *single-input, multiple-output*), como o controlador proposto em Zhang e Wang (2012).

Nota-se ainda que a partição de Zhang e Wang (2012) não se aplica para os casos em que a matriz \mathbf{B} apresenta pelo menos uma coluna completa de números diferentes de zero. Nesses casos, o subsistema gerado seria o sistema completo da planta, pois todos estados seriam selecionados. Assim, as abordagens existentes podem não atender satisfatoriamente demandas de controle para situações de elevado grau de interação entre os subsistemas. Além, um controle preditivo distribuído concebido numa estratégia que aceita cooperação entre os subsistemas e que aceita superposição estrutural parece ser ainda necessário.

Assim, a criação de metodologias sistemáticas de partição de representações no espaço de estados de modelos lineares invariantes no tempo necessita de desenvolvimento e evolução. (ROCHA, 2014) propõe o particionamento de sistemas lineares com estados medidos e baseado no grafo orientado dos efeitos das variáveis manipuladas no espaço das saídas controladas e também pode ser aplicado em casos com fortes interações entre os subsistemas e em casos em que a matriz \mathbf{B} apresenta pelo menos uma coluna completa de número não nulos.

Sabe-se que a maioria das plantas industriais são de natureza não linear e o controle desse sistemas com essa característica é tratado em diversos trabalhos na literatura. Normalmente, quando o projetista deseja fazer o controle de um sistema não linear, primeiro

considera uma aproximação linear do sistema em torno de um estado estacionário. Deste modo, tem-se a vantagem de utilizar os inúmeros controladores lineares. No contexto em que a linearização não resulta em uma boa aproximação, o particionamento do modelo não linear e utilização dessa representação pode ser necessária. No contexto, de decomposição do modelo não linear para aplicações de controle de estrutura distribuída não foram encontrados métodos sistemáticos baseados na representação não linear da planta. Logo, essa área também necessita de atenção.

No contexto das diversas estruturas de controle apresentadas nessa breve revisão bibliográfica, a presente pesquisa foi desenvolvida para contribuir nos estudos e aplicações de controlares DMPC não cooperativos e cooperativos em processos não lineares. O cenário apresentado anteriormente motivou o desenvolvimento de duas propostas de controle DMPC utilizando o modelo do processo linearizado localmente. Além disso, outras duas propostas foram feitas com a utilização direta do modelo não linear. No geral, esta tese apresenta quatro propostas do controle DMPC, são elas:

- DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado;
- DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado;
- DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear;
- DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear.

As duas primeiras utilizam o modelo da planta localmente linearizado e serão apresentadas no Capítulo 3 e as duas últimas propostas, que utilizam diretamente o modelo não linear serão apresentadas no Capítulo 4. As metodologias de particionamento da planta são feitas de forma sistemática, baseando-se exclusivamente no modelo da planta e estrutura do controle. Nos próximos capítulos tem-se os detalhes das propostas desenvolvidas.

CAPÍTULO 3

DMPC Não Linear baseado no Modelo Localmente Linearizado

No presente capítulo, os controladores DMPC para sistemas não lineares baseados no modelo localmente linearizado da planta são apresentados, bem como o método de particionamento desenvolvido para decompor a planta em subsistemas para posterior aplicação dos DMPCs. Além disso, dois tipos de estruturas de controle DMPC são considerados, a estrutura não cooperativa e a cooperativa.

Considere um processo descrito pelo seguinte sistema de equações algébrico-diferenciais ordinárias não lineares:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor das variáveis de estados; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ refere-se ao vetor das variáveis manipuladas; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ é o vetor das variáveis controladas.

A partir do modelo apresentado, dois controladores DMPC foram desenvolvidos. São eles:

- DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado;
- DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Na próxima seção, tem-se a descrição do controlador DMPC não cooperativo localmente linearizado.

3.1 DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

O controlador DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para aplicação em processos não lineares, utiliza a metodologia de linearização sucessiva para posterior aplicação de um particionamento a partir do modelo localmente linearizado. Esta proposta se caracteriza pelas seguintes etapas:

Etapa 1: cálculo das trajetórias de referência para as saídas controladas e para as entradas manipuladas;

Etapa 2: linearização do modelo fenomenológico do sistema em torno do ponto $(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$;

Etapa 3: discretização do modelo considerando o tempo de amostragem (T_S) pré-definido;

Etapa 4: aplicação da metodologia de particionamento a partir do modelo linearizado e discreto (ver Seção 3.1.1);

Etapa 5: cálculo das ações de controle \mathbf{u}_k utilizando o algoritmo DMPC não cooperativo (ver Seção 3.1.2);

Etapa 6: implementação de \mathbf{u}_k obtido na planta não linear;

Etapa 7: medição ou estimação dos estados \mathbf{x}_k ;

Etapa 8: retorno à **Etapa 2** com novos \mathbf{u}_k e \mathbf{x}_k .

A **Etapa 1** da metodologia do controle proposta se concentra no cálculo das trajetórias de referência tanto para as saídas controladas (\mathbf{r}_y) como para entradas manipuladas (\mathbf{r}_u). Neste trabalho, essas trajetórias serão definidas através das seguintes equações:

$$\mathbf{r}_y(t+k) = \alpha_y \cdot \mathbf{r}_y(t+k-1) + (1-\alpha_y) \cdot \mathbf{sp}_y(t+k) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{r}_u(t+k) = \alpha_u \cdot \mathbf{r}_u(t+k-1) + (1-\alpha_u) \cdot \mathbf{sp}_u(t+k) \quad (3.4)$$

em que, \mathbf{sp}_y e \mathbf{sp}_u representam os valores de *set-point* (neste trabalho, são os estados estacionários desejados) para as saídas controladas e entradas manipuladas, respectiva-

mente; e os parâmetros α_y e α_u representam as velocidades de transição entre os estados estacionários, para as variáveis controladas e para as variáveis manipuladas, respectivamente. Esses parâmetros podem apresentar valores entre $[0, 1]$. Se esse parâmetro estiver próximo de 1, a transição entre os estados estacionários é lenta e quando está próximo de 0, a transição é rápida.

As **Etapas 2 e 3** se referem à linearização do modelo fenomenológico da planta e à posterior discretização do modelo linearizado. Para encontrar uma representação linear da planta, será necessário linearizar o modelo representado pelas Equações (3.1) e (3.2), gerando assim a seguinte representação local discreta:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}_{k-1}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_{k-1}\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (3.5)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}_{k-1}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}) \quad (3.6)$$

em que $\overline{(\cdot)}_k = (\cdot)_k - (\cdot)_{k-1}$; $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \cdots \ \bar{x}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor dos estados em variável desvio; $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$ refere-se ao vetor das entradas manipuladas em variável desvio; $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^l$ refere-se ao vetor das saídas controladas em variável desvio e

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) = \mathbf{A}_c^{-1} (e^{\mathbf{A}_c T_s} - \mathbf{I}) \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (3.7)$$

em que T_s representa o tempo de amostragem utilizado na discretização do modelo; $\mathbf{A}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathbf{C}_{k-1} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ são as matrizes discretizadas no tempo $k-1$ das variáveis de estados, entradas e saídas, respectivamente, e $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz dos estados no tempo contínuo. As versões linearizadas localmente das matrizes são utilizadas pelos controladores preditivos distribuídos e lidam com as diferenças entre os submodelos e a planta como distúrbios no sistema. O processo de linearização sucessiva aplicado ao modelo não linear é apresentado em maiores detalhes no Anexo A.

A **Etapla 4** se caracteriza pelo processo de particionamento da representação linear e discreta do modelo. A metodologia utilizada se baseia em grafos orientados do modelo linearizado localmente. Na Seção 3.2.1 é detalhada e exemplificada essa abordagem.

Na **Etapla 5** tem-se o cálculo das ações de controle utilizando o algoritmo DMPC não cooperativo. O projeto do controlador será apresentado na Seção 3.1.2.

As **Etapas 6, 7 e 8** representam a implementação das ações de controle na planta e posterior medição ou estimação dos novos estados. A partir desse ponto é possível retornar à **Etapla 2** para inicialização de um novo ciclo no próximo instante de amostragem. A Figura (3.1) representa através de um esquema simplificado, a proposta de controle DMPC não cooperativo que utiliza o modelo linearizado da planta.

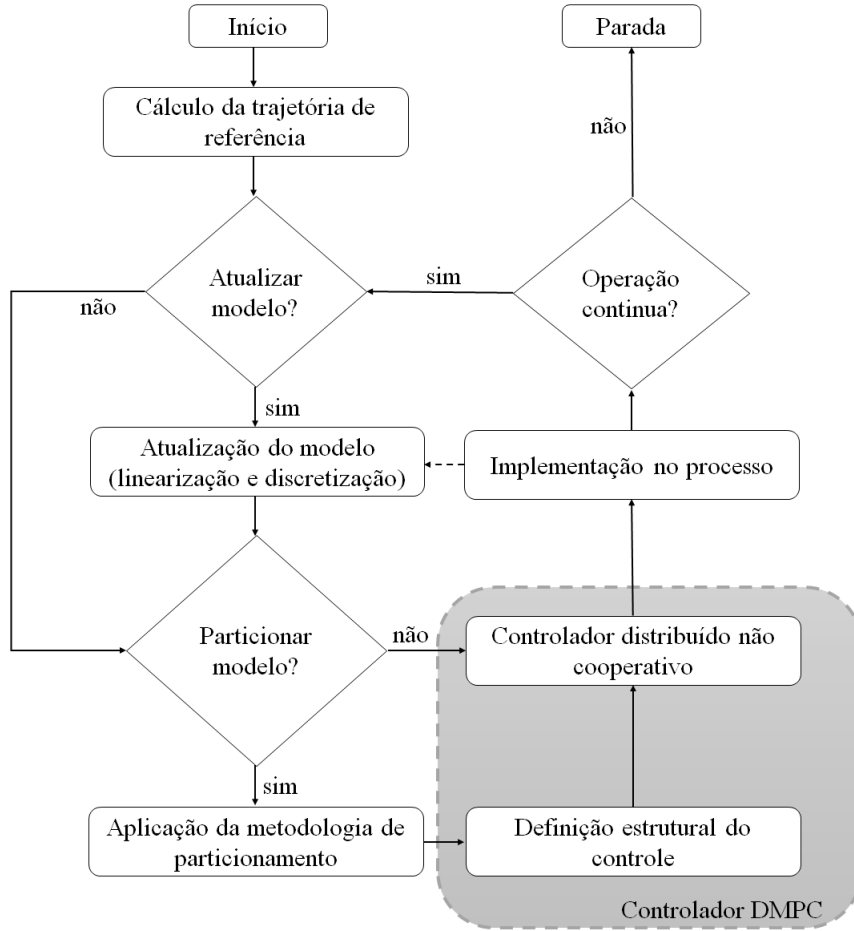


Figura 3.1: Estrutura da proposta de DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Nota-se pela Figura (3.1), que os processos de atualização e particionamento do modelo podem ser etapas não obrigatórias em cada instante de amostragem. Isto quer dizer, que o usuário pode definir previamente, a frequência em que o modelo da planta será atualizado e particionamento.

Na próxima seção tem-se o detalhamento do particionamento utilizado pela abordagem descrita anteriormente.

3.1.1 Particionamento do modelo localmente linearizado

No controlador DMPC não cooperativo localmente linearizado, a decomposição do modelo da planta é realizada com base nos grafos orientados dos efeitos das variáveis manipuladas no espaço das saídas controladas. Esta metodologia de particionamento é uma extensão ao particionamento proposto em Rocha (2014).

Primeiramente, verifica-se quais saídas cada entrada afeta, posteriormente, o efeito

estado-saída é avaliado. Existem dois níveis de efeitos, o efeito direto e o efeito indireto. É preciso considerar primeiramente os efeitos diretos mais dominantes, e se eles não são explícitos no modelo, em seguida, a seleção é baseada no efeito indireto de todas as entradas sobre as saídas controladas especificadas.

A partição é calculada em cada instante de amostragem a partir das matrizes \mathbf{A}_{k-1} , \mathbf{B}_{k-1} e \mathbf{C}_{k-1} do modelo linearizado das Equações (3.5) e (3.6). Para simplificar a nomenclatura o índice $k - 1$ será omitido nas seguintes etapas nesta seção do trabalho.

Considere o seguinte modelo controlável linear variante no tempo (LTV, do inglês *linear time-variant*) do sistema dado por:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{A}_c^{-1} (e^{\mathbf{A}_c T_s} - \mathbf{I}) \mathfrak{f} \quad (3.8)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{g} \quad (3.9)$$

sendo que $\bar{\mathbf{x}}(k) = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos estados em variável desvio, $(\)_k = (\)_k - (\)_{k-1}$; $\bar{\mathbf{u}}(k) \in \mathbb{R}^m$ refere-se ao vetor das variáveis manipuladas em variável desvio; $\bar{\mathbf{y}}(k) \in \mathbb{R}^l$ refere-se ao vetor das saídas controladas em variável desvio; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ são das matrizes no tempo discreto das variáveis de estados, de entradas e de saídas controladas, respectivamente, e $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz no tempo contínuo dos estados (ROCHA; OLIVEIRA-LOPES, 2015, 2016a, 2016b).

Considere as seguintes definições (1-3):

Definição 1: Defina-se um conjunto $\varphi_i = \{\alpha | \mathbf{B}_{\alpha i} \neq 0, \alpha = 1, \dots, n\}$, em que $\mathbf{B}_{\alpha i}$ é o elemento da α -ésima linha e i -ésima coluna da matriz \mathbf{B} . O conjunto $\vartheta_i = \{x_\alpha, \alpha \in \varphi_i\}$ representa os estados diretamente afetados pela entrada u_i .

Definição 2: Defina-se um conjunto $\xi_i = \{\alpha | \mathbf{A}_{\alpha i} \neq 0, \alpha = 1, \dots, n\}$, em que $\mathbf{A}_{\alpha i}$ é o elemento da α -ésima linha e i -ésima coluna da matriz \mathbf{A} . O conjunto $\rho_i = \{x_\alpha, \alpha \in \xi_i\}$ representa os estados diretamente afetados pelo estado x_i , formando assim a matriz estrutural dos estados \mathbf{P} (matriz com 1 onde existe interação entre estados e 0 caso contrário).

Definição 3: Defina-se um conjunto π_i com os estados que devem ser incluídos no submodelo $M\pi_i$. Cada submodelo $M\pi_i$ será definido baseando-se no mapeamento de cada estado pertencente ao conjunto ϑ_i e ρ_i que afete o espaço das saídas (baseando-se na matriz \mathbf{C}).

O passa-a-passo do algoritmo que implementa a estratégia de decomposição é mostrado a seguir:

Etapa 1: construir uma representação por grafos orientados a partir das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} do modelo localmente linearizado;

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,181 & 0 \\ 0 & 0,181 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A representação por grafos orientados para esse sistema linear pode ser visualizado na Figura (3.2).

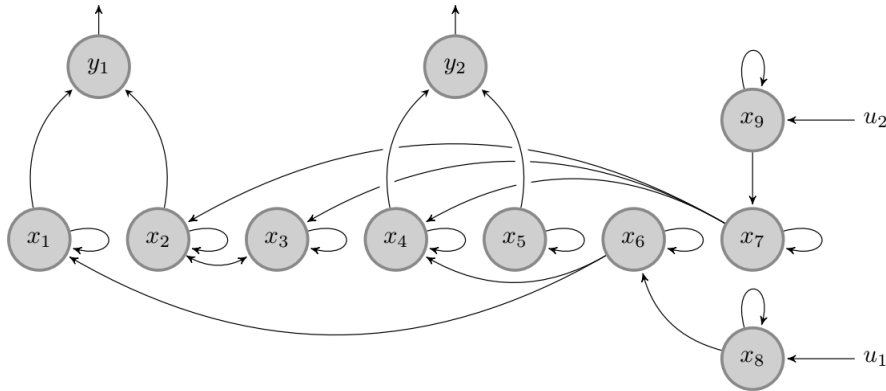


Figura 3.2: Representação por grafos orientados do sistema linear utilizado como exemplo.

A partir da representação por grafos orientados presente na Figura (3.2) será possível realizar o particionamento do sistema, seguindo o passo-a-passo citado anteriormente.

Etapa 1: Geração da Figura (3.2)

Etapa 2: Criação dos conjuntos φ_i e ϑ_i :

- $\varphi_1 = \{8\} \Rightarrow \vartheta_1 = \{x_8\}$
- $\varphi_2 = \{9\} \Rightarrow \vartheta_2 = \{x_9\}$

Criação dos conjuntos ξ_i e ρ_i :

- $\xi_1 = \{1\} \Rightarrow \rho_1 = \{x_1\}$
- $\xi_2 = \{2, 3\} \Rightarrow \rho_2 = \{x_2, x_3\}$
- $\xi_3 = \{2, 3\} \Rightarrow \rho_3 = \{x_2, x_3\}$
- $\xi_4 = \{4\} \Rightarrow \rho_4 = \{x_4\}$
- $\xi_5 = \{5\} \Rightarrow \rho_5 = \{x_5\}$
- $\xi_6 = \{1, 4, 6\} \Rightarrow \rho_6 = \{x_1, x_4, x_6\}$
- $\xi_7 = \{2, 3, 4, 7\} \Rightarrow \rho_7 = \{x_2, x_3, x_4, x_7\}$
- $\xi_8 = \{6, 8\} \Rightarrow \rho_8 = \{x_6, x_8\}$
- $\xi_9 = \{7, 9\} \Rightarrow \rho_9 = \{x_7, x_9\}$

Nota-se pela **Etapa 2** que a entrada u_1 afeta apenas o estado x_8 e a entrada u_2 afeta o x_9 . Além disso, para as interações entre estados tem-se que os estados x_1 , x_4 e x_5 interagem apenas com si próprios. Os estados x_2 e x_3 interagem com si próprios e entre eles. O estado x_6 interage com ele mesmo e com x_1 e x_4 . O estado x_7 interage com ele mesmo e com x_2 , x_3 e x_4 . O estado x_8 com ele mesmo e com x_6 . E por último, o estado x_9 interage com si próprio e com x_7 .

Etapa 3: Criação dos conjuntos π_i . Para isso é necessário avaliar quais estados afetam as saídas controladas. Isso será feito a partir da matriz **C**. Por essa matriz, nota-se que a saída controlada y_1 é afetada diretamente pelos estados x_1 e x_2 e a saída y_2 é afetada pelos estados x_4 e x_5 . Nota-se que as entradas manipuladas não afetam diretamente nenhum destes estados (afetam apenas x_8 e x_9), portanto, deve-se considerar os efeitos indiretos até que a entrada afete os estados que afetam as saídas controladas. A seguir os conjunto π_i gerados:

- $\pi_1 = \{x_1, x_6, x_8\}$
- $\pi_2 = \{x_4, x_7, x_9\}$

Aos conjuntos acima deve-se acrescentar o estado x_2 ao conjunto π_1 e o estado x_5 ao conjunto π_2 , já que a saída y_1 é formada pelos estados x_1 e x_2 e a saída y_2 é formada pelos estados x_4 e x_5 . Considerando, que a saída y_1 será controlada pela entrada u_1 e a saída y_2 pela entrada u_2 e para que as saídas controladas por cada subsistema tenha os estados que as afetam, o que gera os seguinte novos conjuntos:

- $\pi_1 = \{x_1, x_2, x_6, x_8\}$

- $\pi_2 = \{x_4, x_5, x_7, x_9\}$

Etapa 4: Inclusão no conjunto $M\pi_i$, os elementos pertencentes ao conjunto π_i e entrada correspondente, o que gera:

- $M\pi_1 = \{u_1\} \Rightarrow \{x_1, x_2, x_6, x_8\}$
- $M\pi_2 = \{u_2\} \Rightarrow \{x_4, x_5, x_7, x_9\}$

A **Etapa 5** não é necessária neste exemplo, pois os conjuntos criados na etapa anterior não são idênticos. Logo, os únicos subsistemas gerados são aqueles apresentados na **Etapa 4**. Na Figura (3.3) tem-se os grafos orientados dos dois subsistemas gerados a partir do particionamento proposto.

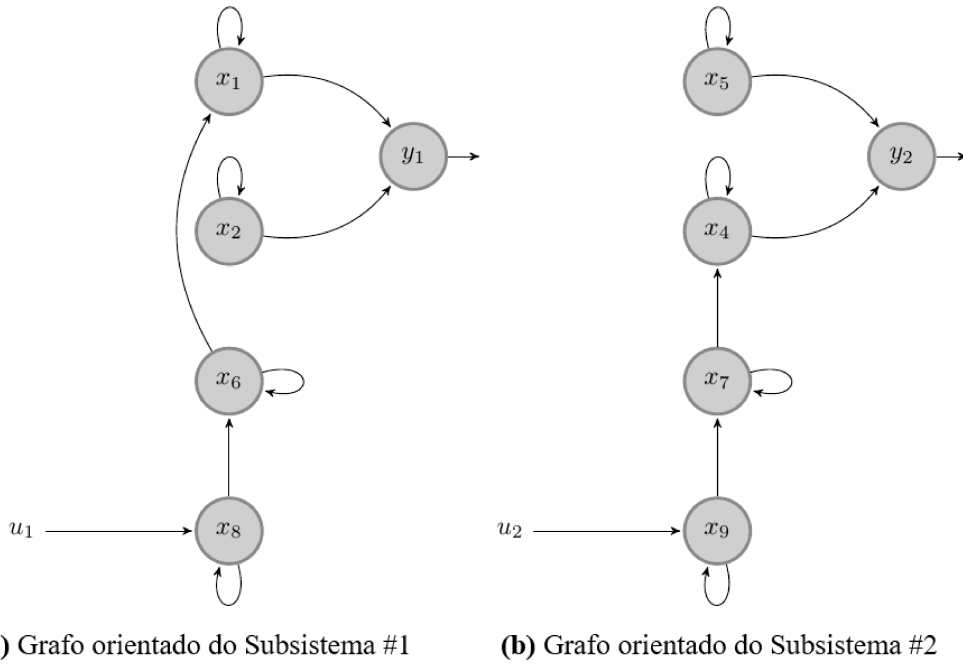


Figura 3.3: Grafos orientados dos subsistemas resultantes do particionamento.

Os subsistemas gerados apresentam os seguintes submodelos:

Submodelo do Subsistema #1:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_6(k+1) \\ x_8(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7165 & 0 & -0,2835 & 0 \\ 0 & 0,863 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_6(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,181 \end{bmatrix} u_1(k)$$

$$y_1(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_6(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix}$$

Submodelo do Subsistema #2:

$$\begin{bmatrix} x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_7(k+1) \\ x_9(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6703 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1653 & 0,8647 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_7(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,181 \end{bmatrix} u_2(k)$$

$$y_1(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_7(k) \\ x_9(k) \end{bmatrix}$$

A **Etapa 6** consiste na preocupação em gerar subsistemas controláveis, e para que isto ocorra, deve-se avaliar a matriz de controlabilidade do subsistema criado. Se o *rank* desta matriz for igual ao número de estados desse subsistema, ele é dito controlável. Caso contrário, deve-se acrescentar novos estados ao subsistema, até que a condição de controlabilidade seja satisfeita. Para o exemplo utilizado, tem-se que o *rank* da matriz de controlabilidade é 4 tanto para o submodelo do subsistema #1 como para o submodelo do subsistema #2, o que definem ambos como controláveis.

Na próxima subseção será apresentado o projeto do controlador não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

3.1.2 Projeto do controlador não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

Neste trabalho, as interações entre subsistemas são tratadas como perturbações. Considere:

$$\mathbf{d}_i(k) = \sum_{j=1(j \neq i)}^M \mathbf{A}_{ij} \bar{\mathbf{x}}_j(k) + \mathbf{B}_{ij} \bar{\mathbf{u}}_j(k) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{h}_i(k) = \sum_{j=1(j \neq i)}^M \mathbf{C}_{ij} \bar{\mathbf{x}}_j(k) \quad (3.13)$$

O i -ésimo modelo distribuído do sistema nas Equações (3.5) e (3.6) pode ser transformado na seguinte representação:

$$\bar{\mathbf{x}}_{d,i}(k+1) = \mathbf{A}_{ii} \bar{\mathbf{x}}_{d,i}(k) + \mathbf{B}_{ii} \bar{\mathbf{u}}_i(k) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{d}_i(k) \quad (3.14)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{d,i}(k) = \mathbf{C}_{ii} \bar{\mathbf{x}}_{d,i}(k) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{h}_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.15)$$

em que $\mathbf{d}_i(k)$ e $\mathbf{h}_i(k)$ representam perturbações a partir dos outros subsistemas; as funções $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$ e $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_{k-1})$ representam os valores das funções \mathbf{f} e \mathbf{g} nos pontos $(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$ e (\mathbf{x}_{k-1}) , pertencentes ao subsistema i , respectivamente. Novamente, o índice $k-1$ não será exibido nas equações nesta seção, mas é preciso lembrar que a representação local do modelo em espaço de estados foi obtida pelo processo de linearização ao redor da condição $(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$. Para cada subsistema, supõe-se que o modelo nominal das Equações (3.14) e (3.15) pode ser descrito como:

$$\bar{\mathbf{x}}_{n,i}(k+1) = \mathbf{A}_{ii} \bar{\mathbf{x}}_{n,i}(k) + \mathbf{B}_{ii} \bar{\mathbf{u}}_{n,i}(k) \quad (3.16)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{n,i}(k) = \mathbf{C}_{ii} \bar{\mathbf{x}}_{n,i}(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.17)$$

A predição das saídas controladas é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Y}}_i(k|k) &= \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Psi}_i \bar{\mathbf{x}}_i(k|k) + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Theta}_i \mathbf{\Delta} \bar{\mathbf{U}}_i(k|k) + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Upsilon}_i \bar{\mathbf{u}}_i(k-1|k) + \\ &+ \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Xi}_i \mathbf{d}_i(k|k) + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{f}_i(k-1|k) + \mathbf{\Phi}_i \mathbf{g}_i(k|k) + \mathbf{\Phi}_i \mathbf{h}_i(k|k) \end{aligned} \quad (3.18)$$

em que,

$$\mathbf{\Psi}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ii} \\ \mathbf{A}_{ii}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ii}^{H_{p_i}} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ii} & \cdots & 0 \\ \mathbf{A}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{B}_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{H_{pi}-1} \mathbf{A}_{ii}^j \mathbf{B}_{ii} & \cdots & \sum_{j=0}^{H_{pi}-H_{ui}} \mathbf{A}_{ii}^j \mathbf{B}_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\Upsilon_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ii} \\ \mathbf{A}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{B}_{ii} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{H_{pi}-1} \mathbf{A}_{ii}^j \mathbf{B}_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} \\ \mathbf{A}_{ii}\mathbf{C}_{ii} + \mathbf{C}_{ii} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{H_{pi}-1} \mathbf{A}_{ii}^j \mathbf{C}_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1i} \\ \mathbf{A}_{ii}\mathbf{C}_{ii} + \mathbf{I}_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{H_{pi}-1} \mathbf{A}_{ii}^j \mathbf{I}_{1i} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{C}_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

e

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1i} \\ \mathbf{I}_{1i} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{1i} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

A metodologia utilizada para a obtenção do modelo de predição descrito pela Equação (3.18), pode ser vista em detalhes no Apêndice G. A função objetivo utilizada neste

trabalho considera os erros nas saídas controladas e nas entradas manipuladas em relação às respectivas trajetórias de referência para cada uma dessas variáveis e também considera as variações sucessivas das entradas manipuladas. A função objetivo pode ser representada como:

$$\begin{aligned}
 J_i(k) = & \sum_{j=H_{w_i}}^{H_{p_i}} \|\bar{\mathbf{y}}_i(k+j|k) - \mathbf{r}_{y_i}(k+j)\|_{\mathbf{Q}_i(j)}^2 + \\
 & + \sum_{j=0}^{H_{u_i}-1} \|\Delta \bar{\mathbf{u}}_i(k+j|k)\|_{\mathbf{W}_i(j)}^2 + \\
 & + \sum_{j=0}^{H_{u_i}-1} \|\bar{\mathbf{u}}_i(k+j|k) - \mathbf{r}_{u_i}(k+j)\|_{\mathbf{R}_i(j)}^2
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

em que $\mathbf{Q}_i > 0$, $\mathbf{W}_i \geq 0$ e $\mathbf{R}_i \geq 0$ são as matrizes de ponderação das saídas controladas, das entradas manipuladas e das variações sucessivas das entradas manipuladas, respectivamente; \mathbf{r}_{y_i} e \mathbf{r}_{u_i} são as trajetórias de referência para as saídas controladas e para as entradas manipuladas, respectivamente. A função objetivo é penalizada no horizonte de predição no período $H_{w_i} \leq j \leq H_{p_i}$.

O objetivo é projetar um algoritmo DMPC para calcular uma sequência para as entradas manipuladas com base nos estados e entradas do sistema. As entradas de controle obtidas garantem a convergência assintótica em malha fechada para as trajetórias de referência e a função objetivo local é mínima. O controlador DMPC proposto utiliza o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{u}_i(k+j|k), j=0, \dots, H_{u_i}-1} J_i(k) \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \bar{\mathbf{Y}}_i(k|k) = \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Psi}_i \bar{\mathbf{x}}_i(k|k) + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Theta}_i \Delta \bar{\mathbf{U}}_i(k|k) + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Upsilon}_i \bar{\mathbf{u}}_i(k-1|k) + \\
 & + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Xi}_i \mathbf{d}_i(k|k) + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{f}_i(k-1|k) + \mathbf{\Phi}_i \mathbf{g}_i(k|k) + \mathbf{\Phi}_i \mathbf{h}_i(k|k) \\
 & \mathbf{x}_i(k|k) = \mathbf{x}_i(k) \\
 & \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{i0} \\
 & \mathbf{u}_i(k+j|k) \in \mathbf{\Lambda}, j = 0, \dots, H_{u_i} - 1
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

em que $\mathbf{\Lambda}$ é o espaço viável das entradas. Baseando-se no horizonte móvel, apenas a primeira ação é de fato implementada na planta. Então, se o número de entradas da planta for m , só serão utilizados as primeiras m linhas do vetor $\Delta \bar{\mathbf{U}}_i(k)_{opt}$, o que pode ser representado da seguinte forma:

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_i(k)_{opt} = [\mathbf{I}_m, \quad \mathbf{0}_m, \quad \dots, \mathbf{0}_m] \Delta \bar{\mathbf{U}}_i(k)_{opt} \tag{3.28}$$

em que \mathbf{I}_m é uma matriz identidade de tamanho $m \times m$ e $\mathbf{0}_m$ é uma matriz de zeros de

tamanho $m \times m$.

Na próxima seção, será apresentada a proposta de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

3.2 DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

O presente controle DMPC para aplicação em processos não lineares, utiliza as seguintes etapas na sua abordagem:

Etapa 1: cálculo das trajetórias de referência para as saídas controladas e para as entradas manipuladas;

Etapa 2: linearização do modelo fenomenológico do sistema em torno do ponto $(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$;

Etapa 3: discretização do modelo considerando o tempo de amostragem (T_S) pré-definido;

Etapa 4: aplicação da metodologia de particionamento a partir do modelo linearizado e discreto (ver Seção 3.1.1);

Etapa 5: cálculo das ações de controle \mathbf{u}_k utilizando o algoritmo DMPC cooperativo (ver Seção 3.2.1);

Etapa 6: implementação de \mathbf{u}_k obtido na planta não linear;

Etapa 7: medição ou estimação dos estados \mathbf{x}_k ;

Etapa 8: retorno à **Etapa 2** com novos \mathbf{u}_k e \mathbf{x}_k .

Nota-se que a diferença se concentra no processo de cálculo das ações de controle, ou seja, a diferença está na **Etapa 5**. Para enfatizar essa diferença, a Figura (3.4) representa a estrutura da proposta de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado. Vale ressaltar que tanto o processo de linearização e discretização a partir do modelo fenomenológico, quanto a metodologia de decomposição são idênticos ao do controle anterior.

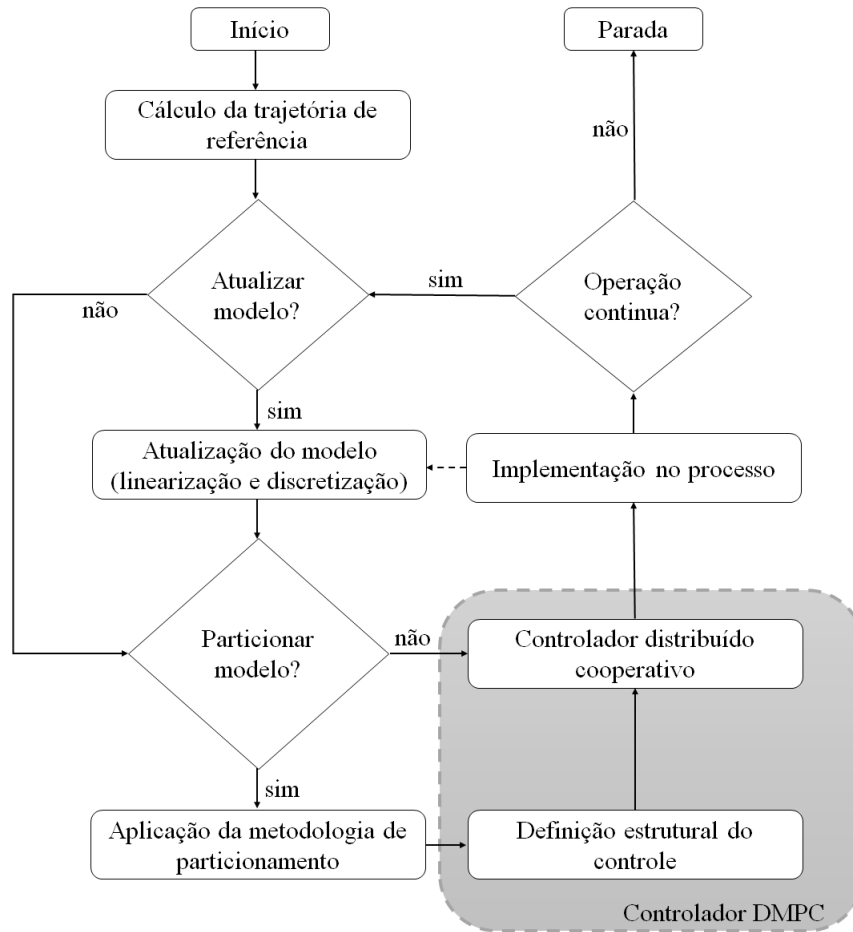


Figura 3.4: Estrutura da proposta de DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Na próxima subseção tem-se a apresentação do projeto do controlador utilizado na proposta de DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

3.2.1 Projeto do controlador cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

O processo de cooperação no cálculo das ações de controle de uma estrutura de controle distribuído, permite a troca de informações entre os subsistemas durante o mesmo instante de amostragem. As informações de outros subsistemas estão presentes para cada controlador.

Nesta seção, a estrutura cooperativa utilizada no controle DMPC cooperativo é apresentada em detalhes. A Figura (3.5) apresenta uma representação simplificada deste tipo de abordagem.

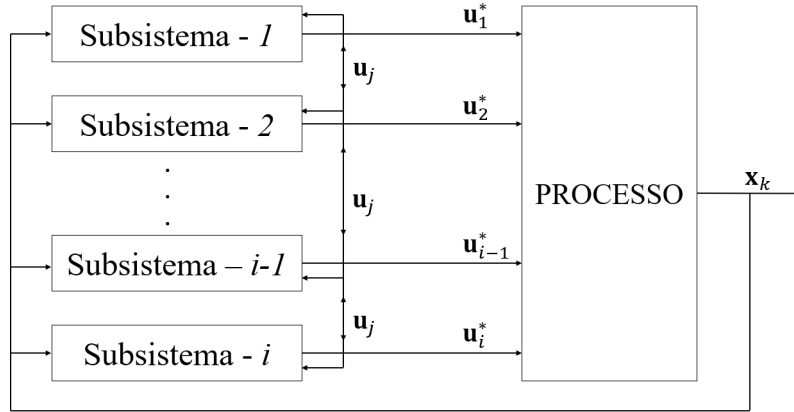


Figura 3.5: Estrutura do processo de cooperação.

Neste tipo de controle, existe um controlador responsável pela tomada de decisão em cada subsistema i . Cada subsistema i é composto por l_i saídas controladas e m_i entradas manipuladas. Lembrando que a seleção dessas variáveis é feito pelo particionamento.

Em cada instante de amostragem, todos os controladores recebem os valores das medidas dos estados mensuráveis (\mathbf{x}_k) advindos da planta e iniciam um processo iterativo para determinar suas respectivas trajetórias ótimas de suas ações de controle. Esta etapa é realizado através de uma função objetivo local, para se ter uma estimativa inicial das ações a serem calculadas. Tal etapa caracteriza a primeira iteração. Feita a estimativa inicial, os subsistemas trocam informações entre si e inicia-se a segunda iteração, em que se utiliza uma função objetivo global, que inclui os efeitos de todas as ações de controle, incluindo as dos outros subsistemas. Cada controlador é responsável por incluir os efeitos de suas entradas na função objetivo global. As informações trocadas entre os subsistemas permitem que cada controlador conheça os modelos e as ações de controle geradas pelos outros controladores da planta. No processo cooperativo, em cada iteração, cada controlador usa os valores das ações dos outros controladores obtidas na iteração anterior e seus respectivos modelos para otimizar sua própria trajetória de controle. Quando a condição terminal é satisfeita, finalizando o processo iterativo, cada controlador envia suas ações de controle otimizadas para os atuadores presentes na planta. Na Figura (3.5), a trajetória ótima alcançada por cada controlador é identificada por um * (asterisco) sobrescrito.

A metodologia do processo cooperativo pode ser esquematizado da seguinte forma:

1. Na primeira iteração ($c = 1$):
 - (a) Cada controlador recebe, os valores mensuráveis ou estimados dos estados (\mathbf{x}_k);
 - (b) Cada controlador calcula suas respectivas trajetórias de suas ações de controle utilizando uma função objetivo local;

- (c) As trajetórias calculadas por cada controlador são compartilhadas entre eles;
2. Nas iterações subsequentes ($c > 1$):
- (a) Cada controlador calcula uma nova trajetória de suas ações de controle utilizando uma função objetivo global e as trajetórias calculadas anteriormente de seus vizinhos;
 - (b) A condição de convergência é avaliada: Se for satisfeita, cada controlador envia para os atuadores, as ações ótimas calculadas (\mathbf{u}^*); se não for satisfeita, retorna-se para **Etapa 2** ($c \leftarrow c + 1$).

O problema de otimização local utilizado por cada controlador na primeira iteração é idêntica aquele utilizado na proposta de DMPC linear não cooperativo. O problema de otimização, bem como a função objetivo global utilizada nas outras iterações serão apresentados a seguir:

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{u}_i(k+j|k), j=0, \dots, H_{ui}-1} J(k) = \sum_i J_i(k) \\
& \text{sujeito a} \\
& \bar{\mathbf{Y}}_i(k|k) = \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Psi}_i \bar{\mathbf{x}}_i(k|k) + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Theta}_i \Delta \bar{\mathbf{U}}_i(k|k) + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Upsilon}_i \bar{\mathbf{u}}_i(k-1|k) + \\
& + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Xi}_i \mathbf{d}_i(k|k) + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{f}_i(k-1|k) + \mathbf{\Phi}_i \mathbf{g}_i(k|k) + \mathbf{\Phi}_i \mathbf{h}_i(k|k) \\
& \mathbf{x}_i(k|k) = \mathbf{x}_i(k) \\
& \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{i0} \\
& \mathbf{x}(k+j|k) \in X, j > 0 \\
& \mathbf{x}(k+H_u|k) \in X_f, \\
& \mathbf{u}_i(k+j|k) \in \mathbf{\Lambda}_i, j = 0, \dots, H_{ui}-1, \\
& \mathbf{u}_l(k+j|k) = \mathbf{u}_l(k+j|k)^{c-1}, l \neq i
\end{aligned} \tag{3.29}$$

com

$$\begin{aligned}
J_i(k) = & \sum_{j=H_{wi}}^{H_{pi}} \|\bar{\mathbf{y}}_i(k+j|k) - \mathbf{r}_{y_i}(k+j)\|_{\mathbf{Q}_i(j)}^2 + \\
& + \sum_{j=0}^{H_{ui}-1} \|\bar{\mathbf{u}}_i(k+j|k) - \mathbf{r}_{u_i}(k+j)\|_{\mathbf{R}_i(j)}^2 + \\
& + \sum_{j=0}^{H_{ui}-1} \|\Delta \bar{\mathbf{u}}_i(k+j|k)\|_{\mathbf{W}_i(j)}^2 + \|\mathbf{x}(k+H_{ui})\|_{\mathbf{P}_i}^2
\end{aligned} \tag{3.30}$$

As propriedades de estabilidade são garantidas pelo conjunto terminal $X_f \subseteq X$ e o custo terminal $V_f = \|\mathbf{x}(k+H_{ui})\|_{\mathbf{P}_i}^2$. Para o cenário sem restrições é desejável estabilizar o sistema com a lei de controle $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(k)$, isto é, $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ é estável. Neste trabalho o ganho \mathbf{K} é solução de um problema de controle linear quadrático (LQ) com horizonte

infinito com os mesmos pesos \mathbf{Q} e \mathbf{R} utilizados na última equação. Então, se \mathbf{P} for a solução da equação de Lyapunov:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) - \mathbf{P} = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \quad (3.31)$$

é possível o conjunto $V_f = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ e $X_f = \{\mathbf{x} | \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq d\}$, em que d é um pequeno valor positivo escolhido para que $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(k)$ para qualquer $\mathbf{x} \in X_f$.

No próximo capítulo, tem-se as propostas de DMPC não linear baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear, bem como os detalhes do particionamento do sistema a partir do modelo não linear da planta.

CAPÍTULO 4

DMPC Não Linear baseado nas Matrizes de Incidência do Modelo Não Linear

No presente capítulo, os controladores DMPC para sistemas não lineares baseados nas matrizes de incidência do modelo não linear da planta são apresentadas, bem como o método de particionamento desenvolvido para decompor a planta em subsistemas para posterior aplicação dos DMPCs. Além disso, os controles são formulados nas estruturas não cooperativa e cooperativa. São elas:

- DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear;
- DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear.

Na próxima seção, tem-se a proposta de DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear.

4.1 DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear

O presente controlador DMPC apresenta as seguintes etapas na sua abordagem:

Etapa 1: cálculo das trajetórias de referência para as saídas controladas e para as entradas manipuladas;

Etapa 2: aplicação da metodologia de particionamento a partir do modelo não linear da planta (ver Seção (4.1.1));

Etapa 3: cálculo das ações de controle \mathbf{u}_k utilizando o algoritmo DMPC não cooperativo (ver Seção (4.1.2));

Etapa 4: implementação de \mathbf{u}_k obtido na planta não linear;

Etapa 5: medição ou estimação dos estados \mathbf{x}_k ;

Etapa 6: retorno à **Etapa 2** com novos \mathbf{u}_k e \mathbf{x}_k .

A Figura (4.1) representa um esquema da proposta de controle DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear, que utiliza o método de particionamento a partir do modelo não linear da planta.

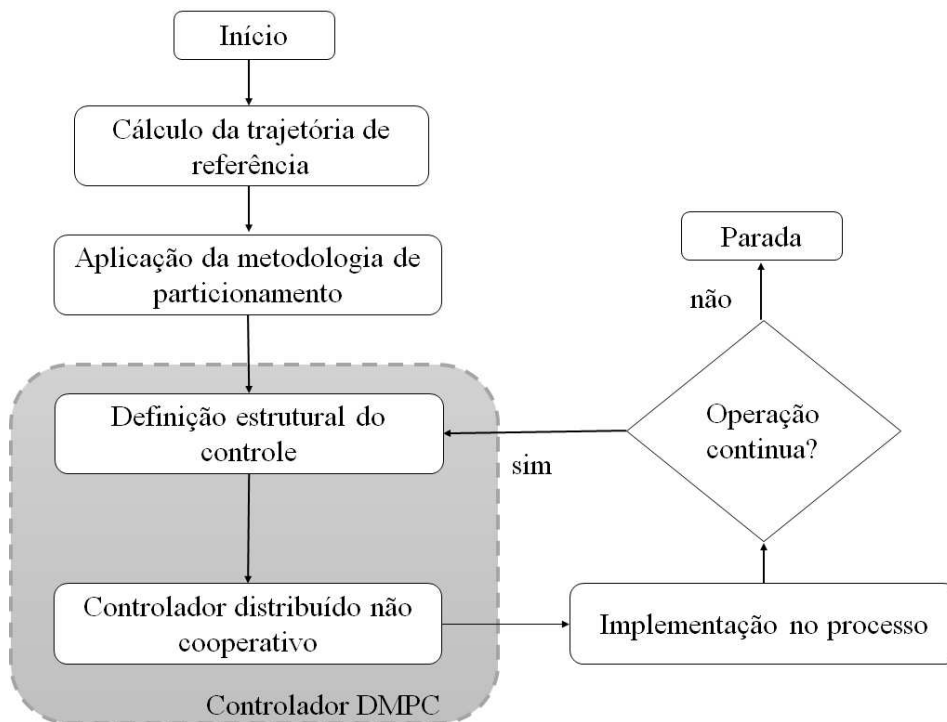


Figura 4.1: Estrutura da proposta de controle DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear.

Nota-se pela Figura (4.1), que não há atualização do modelo, já que o particionamento é feito a partir da representação não linear da planta e que esse modelo não muda ao longo do tempo de operação, não necessitando assim de atualização.

Na próxima seção, o particionamento a partir do modelo não linear, considerando as

matrizes de incidência dos estados, entradas e saídas do processo, será apresentado em detalhes.

4.1.1 Particionamento baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear

No controle DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência é utilizada uma nova abordagem de particionamento. Este particionamento é efetuado a partir do modelo não linear da planta. Considere o seguinte modelo fenomenológico genérico:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor dos n estados da planta; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ refere-se ao vetor das m entradas manipuladas; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ é o vetor das l variáveis controladas do processo.

Nesta abordagem, o particionamento é aplicado diretamente no modelo não linear do processo. Para a sua realização, considere as seguintes definições:

Definição 1: Defina-se a matriz de incidência para as entradas manipuladas (\mathbf{E}), identificando em cada $\dot{x}_i = \mathbb{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, para $i = 1, \dots, n$ do modelo fenomenológico, qual entrada afeta \dot{x}_i . Se houver efeito, o elemento da matriz $e_{ij} = 1$, caso contrário $e_{ij} = 0$, em que e_{ij} é o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz de incidência para as entradas manipuladas, \mathbf{E} .

Definição 2: Defina-se a matriz de incidência para os estados (\mathbf{S}), identificando em cada $\dot{x}_i = \mathbb{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, para $i = 1, \dots, n$ do modelo fenomenológico, qual estado afeta \dot{x}_i . Se houver efeito, o elemento $s_{ij} = 1$, caso contrário, $s_{ij} = 0$, em que s_{ij} é o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz de incidência para os estados, \mathbf{S} .

Definição 3: Defina-se a matriz de incidência para as saídas controladas (\mathbf{C}), identificando em cada $y_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, para $k = 1, \dots, l$ do modelo fenomenológico, qual estado afeta y_k . Se houver efeito, o elemento $c_{kj} = 1$, caso contrário $c_{kj} = 0$, em que c_{kj} é o elemento da k -ésima linha e j -ésima coluna da matriz de incidência para as saídas controladas, \mathbf{C} .

Definição 4: Defina-se o conjunto $\gamma_j = \{\alpha | e_{\alpha j} = 1, \alpha = 1, \dots, n\}$, em que $e_{\alpha j}$ é o elemento da α -ésima linha e j -ésima coluna da matriz \mathbf{E} . O conjunto $\Gamma_j = \{x_\alpha, \alpha \in \gamma_j\}$ representa os estados diretamente afetados pela entrada u_j .

Definição 5: Defina-se o conjunto $v_j = \{\alpha | s_{\alpha j} = 1, \alpha = 1, \dots, n\}$, em que $s_{\alpha j}$ é o elemento da α -ésima linha e j -ésima coluna da matriz \mathbf{S} . O conjunto $\Upsilon_j = \{x_\alpha, \alpha \in v_j\}$

representa os estados diretamente afetados pelo estado x_j .

Definição 6: Defina-se o conjunto ω_j com os comportamentos dinâmicos dos estados ($\dot{x}_i = \mathbb{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$) que devem ser incluídos no submodelo $M\omega_j$. Cada submodelo $M\omega_j$ será definido baseando-se no mapeamento de cada estado pertencente ao conjunto γ_j e que afeta o espaço das saídas (a partir da matriz \mathbf{C} definida previamente). Se qualquer saída controlada não é diretamente afetada por qualquer entrada, o conjunto v_j deve ser adicionado ao submodelo, contemplando assim os efeitos indiretos. Esta configuração garante que o método de particionamento seja baseado nos efeitos de cada entrada nas saídas controladas.

A metodologia de particionamento é baseada nas Definições (1-5). O algoritmo com o passo-a-passo para a introdução da estratégia de decomposição é dado como segue:

Etapa 1: criar os conjuntos γ_j e v_j (e os conjuntos Γ_j e Υ_j). Γ_j baseia-se na matriz de incidência das entradas manipuladas \mathbf{E} . Υ_j baseia-se na matriz de incidência dos estados \mathbf{S} ;

Etapa 2: criar o conjunto ω_j com os estados pertencentes ao conjunto Γ_j que diretamente afetam o espaço das saídas, se houver alguma saída que não seja atingida diretamente por nenhuma entrada, considerar os efeitos indiretos, a partir dos conjuntos v_j e Υ_j ;

Etapa 3: incluir no submodelo $M\{\omega_j\}$, os elementos pertencentes ao conjunto ω_j e entrada correspondente;

Etapa 4: agrupar os submodelos $M\{\omega_i\}$ e $M\{\omega_j\}$ (para $i \neq j$) se ω_i e ω_j forem conjuntos idênticos. Criar o novo conjunto de entradas pela junção das entradas u_i e u_j ;

Etapa 5: verificar se o submodelo $M\{\omega_i\}$ é controlável, caso contrário elementos adicionais (estados) devem ser incluídos em ω_i até que esta restrição seja satisfeita.

O processo de particionamento descrito irá gerar submodelos $M\{\omega_i\}$ do seguinte tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbb{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) \quad (4.4)$$

em que $i = 1, \dots, M$; $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ representa o vetor dos n_i estados; $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ refere-se ao vetor das m_i entradas manipuladas; $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{l_i}$ é o vetor das l_i variáveis controladas do subsistema $M\{\omega_i\}$

A seguir, tem-se um exemplo de aplicação da estratégia de particionamento para facilitar a compreensão da mesma.

Exemplo de aplicação da metodologia de particionamento

Considere o seguinte modelo genérico não linear:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, u_1, u_5); \quad x_1(0) = x_{10} \quad (4.5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_4, x_{10}, x_{11}, u_1, u_5); \quad x_2(0) = x_{20} \quad (4.6)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{10}, x_{11}, u_1, u_5); \quad x_3(0) = x_{30} \quad (4.7)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, u_1, u_2, u_5); \quad x_4(0) = x_{40} \quad (4.8)$$

$$\frac{dx_5}{dt} = f_5(x_1, x_5, u_3); \quad x_5(0) = x_{50} \quad (4.9)$$

$$\frac{dx_6}{dt} = f_6(x_1, x_2, x_5, x_6, x_8, u_3); \quad x_6(0) = x_{60} \quad (4.10)$$

$$\frac{dx_7}{dt} = f_7(x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, u_3); \quad x_7(0) = x_{70} \quad (4.11)$$

$$\frac{dx_8}{dt} = f_8(x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, u_3, u_4); \quad x_8(0) = x_{80} \quad (4.12)$$

$$\frac{dx_9}{dt} = f_9(x_5, x_9, u_5); \quad x_9(0) = x_{90} \quad (4.13)$$

$$\frac{dx_{10}}{dt} = f_{10}(x_6, x_9, x_{10}, x_{11}, u_5); \quad x_{10}(0) = x_{100} \quad (4.14)$$

$$\frac{dx_{11}}{dt} = f_{11}(x_7, x_9, x_{10}, x_{11}, u_5); \quad x_{11}(0) = x_{110} \quad (4.15)$$

$$\frac{dx_{12}}{dt} = f_{12}(x_8, x_9, x_{12}, u_5, u_6); \quad x_{12}(0) = x_{120} \quad (4.16)$$

$$y_1 = x_1 \quad (4.17)$$

$$y_2 = x_4 \quad (4.18)$$

$$y_3 = x_5 \quad (4.19)$$

$$y_4 = x_8 \quad (4.20)$$

$$y_5 = x_9 \quad (4.21)$$

$$y_6 = x_{12} \quad (4.22)$$

A **Etapa 1** consiste em criar os conjuntos γ_j , v_j e Γ_j e Υ_j , baseando-se nas matrizes de incidência **E** e **S**, respectivamente. A seguir os conjuntos gerados:

- $\gamma_1 = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \Gamma_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
- $\gamma_2 = \{4\} \Rightarrow \Gamma_2 = \{x_4\}$
- $\gamma_3 = \{5, 6, 7, 8\} \Rightarrow \Gamma_3 = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$
- $\gamma_4 = \{8\} \Rightarrow \Gamma_4 = \{x_8\}$
- $\gamma_5 = \{1, 2, 3, 4, 9, 10, 11\} \Rightarrow \Gamma_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}, x_{11}\}$
- $\gamma_6 = \{12\} \Rightarrow \Gamma_6 = \{x_{12}\}$
- $v_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow \Upsilon_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$
- $v_2 = \{2, 3, 4, 6\} \Rightarrow \Upsilon_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_6\}$
- $v_3 = \{3, 4, 7\} \Rightarrow \Upsilon_3 = \{x_3, x_4, x_7\}$
- $v_4 = \{2, 3, 4, 8\} \Rightarrow \Upsilon_4 = \{x_2, x_3, x_4, x_8\}$
- $v_5 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \Rightarrow \Upsilon_5 = \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$
- $v_6 = \{6, 7, 8, 10\} \Rightarrow \Upsilon_6 = \{x_6, x_7, x_8, x_{10}\}$
- $v_7 = \{7, 8, 11\} \Rightarrow \Upsilon_7 = \{x_7, x_8, x_{11}\}$
- $v_8 = \{6, 7, 8, 12\} \Rightarrow \Upsilon_8 = \{x_6, x_7, x_8, x_{12}\}$
- $v_9 = \{9, 10, 11\} \Rightarrow \Upsilon_9 = \{x_9, x_{10}, x_{11}\}$
- $v_{10} = \{2, 3, 10, 11\} \Rightarrow \Upsilon_{10} = \{x_2, x_3, x_{10}, x_{11}\}$
- $v_{11} = \{2, 3, 10, 11\} \Rightarrow \Upsilon_{11} = \{x_2, x_3, x_{10}, x_{11}\}$
- $v_{12} = \{4, 12\} \Rightarrow \Upsilon_{12} = \{x_4, x_{12}\}$

A **Etapa 2** consiste em criar os conjuntos ω_j , apresentados a seguir:

- $\omega_1 = \{x_1, x_4\}$
- $\omega_2 = \{x_4\}$
- $\omega_3 = \{x_5, x_8\}$
- $\omega_4 = \{x_8\}$

- $\omega_5 = \{x_1, x_4, x_9\}$
- $\omega_6 = \{x_{12}\}$

Nota-se a partir dos conjuntos ω_j gerados que todas as saídas controladas são afetadas por pelo menos uma entrada. A **Etapa 3** consiste em incluir no submodelo $M\{\omega_j\}$, os elementos dos conjuntos ω_j e entrada correspondente, o que gera os seguintes submodelos:

- $M\omega_1 : \{u_1\} \Rightarrow \{x_1, x_4\}$
- $M\omega_2 : \{u_2\} \Rightarrow \{x_4\}$
- $M\omega_3 : \{u_3\} \Rightarrow \{x_5, x_8\}$
- $M\omega_4 : \{u_4\} \Rightarrow \{x_8\}$
- $M\omega_5 : \{u_5\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_9\}$
- $M\omega_6 : \{u_6\} \Rightarrow \{x_{12}\}$

Analisando os conjuntos ω_i e ω_j (para $i \neq j$), nota-se que não há conjuntos idênticos. Logo a **Etapa 4** é desnecessária. A seguir, os submodelos $M\{\omega_i\}$ gerados por esse particionamento:

Submodelo $M\omega_1$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, u_1, u_5) \quad x_1(0) = x_{10} \\ \frac{dx_4}{dt} &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, u_1, u_2, u_5) \quad x_4(0) = x_{40} \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_4 \end{aligned}$$

Submodelo $M\omega_2$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_4}{dt} &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, u_1, u_2, u_5) \quad x_4(0) = x_{40} \\ y_1 &= x_4 \end{aligned}$$

Submodelo $M\omega_3$:

$$\begin{aligned}\frac{dx_5}{dt} &= f_5(x_1, x_5, u_3) & x_5(0) &= x_{50} \\ \frac{dx_8}{dt} &= f_8(x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, u_3, u_4) & x_8(0) &= x_{80} \\ y_1 &= x_5 \\ y_2 &= x_8\end{aligned}$$

Submodelo $M\omega_4$:

$$\begin{aligned}\frac{dx_8}{dt} &= f_8(x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, u_3, u_4) & x_8(0) &= x_{80} \\ y_1 &= x_8\end{aligned}$$

Submodelo $M\omega_5$:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, u_1, u_5) & x_1(0) &= x_{10} \\ \frac{dx_4}{dt} &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, u_1, u_2, u_5) & x_4(0) &= x_{40} \\ \frac{dx_9}{dt} &= f_9(x_5, x_9, u_5) & x_9(0) &= x_{90} \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_4 \\ y_3 &= x_9\end{aligned}$$

Submodelo $M\omega_6$:

$$\begin{aligned}\frac{dx_{12}}{dt} &= f_{12}(x_8, x_9, x_{12}, u_5, u_6) & x_{12}(0) &= x_{120} & x_8(0) &= x_{80} \\ y_1 &= x_8\end{aligned}$$

Na próxima subseção tem-se a apresentação do projeto do controlador utilizado na proposta de controle DMPC não linear não cooperativo.

4.1.2 Projeto do controlador não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear

Como apresentado anteriormente, o particionamento descrito gera submodelos do tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbb{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \quad (4.23)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) \quad (4.24)$$

em que $i = 1, \dots, M$; $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ representa o vetor dos n_i estados; $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ refere-se ao vetor das m_i entradas manipuladas; $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{l_i}$ é o vetor das l_i variáveis controladas do subsistema $M \{\omega_i\}$

A função objetivo utilizada nesta proposta também considera os erros nas saídas controladas e nas entradas manipuladas em relação às respectivas trajetórias de referência para cada uma dessas variáveis. Além disso, também considera as variações sucessivas das entradas manipuladas. Na equação a seguir, tem-se a representação da função objetivo em questão:

$$\begin{aligned} J_i(k) = & \sum_{j=H_{w_i}}^{H_{p_i}} \|\bar{\mathbf{y}}_i(k+j|k) - \mathbf{r}_{y_i}(k+j)\|_{\mathbf{Q}_i(j)}^2 + \\ & + \sum_{j=0}^{H_{u_i}-1} \|\Delta \bar{\mathbf{u}}_i(k+j|k)\|_{\mathbf{W}_i(j)}^2 + \\ & + \sum_{j=0}^{H_{u_i}-1} \|\bar{\mathbf{u}}_i(k+j|k) - \mathbf{r}_{u_i}(k+j)\|_{\mathbf{R}_i(j)}^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

em que $\mathbf{Q}_i > 0$, $\mathbf{W}_i \geq 0$ e $\mathbf{R}_i \geq 0$ são as matrizes de ponderação das saídas controladas, das entradas manipuladas e das variações sucessivas das entradas manipuladas, respectivamente; \mathbf{r}_{y_i} e \mathbf{r}_{u_i} são as trajetórias de referência para as saídas controladas e para as entradas manipuladas, respectivamente. A função objetivo é penalizada no horizonte de predição no período $H_{w_i} \leq j \leq H_{p_i}$.

O objetivo é projetar um algoritmo DMPC para calcular uma sequência para as entradas manipuladas com base nos estados e entradas do sistema. As entradas de controle obtidas garantem a convergência assintótica em malha fechada para as trajetórias de referência e a função objetivo local é mínima. O controlador DMPC não linear proposto

utiliza o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
 & \min_{u_i(k+j|k), j=0, \dots, H_{u_i}-1} J_i(k) \\
 & \text{sujeito às Equações (4.23 - 4.24)} \\
 & \mathbf{y}_i(k+j|k) \in Y, j > 0 \\
 & \mathbf{y}_i(k+H_{pi}|k) \in Y_f \\
 & \mathbf{u}_i(k+j|k) \in \Lambda_i, j = 0, \dots, H_{u_i} - 1
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

em que Λ_i é o espaço viável das entradas do subsistema i .

Na próxima seção será apresentada a proposta de controle DMPC não linear com estrutura cooperativa.

4.2 DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear

O presente controle DMPC não linear apresenta a metodologia, caracterizada pelas seguintes etapas:

Etapas 1: cálculo das trajetórias de referência para as saídas controladas e para as entradas manipuladas;

Etapas 2: aplicação da metodologia de particionamento a partir do modelo não linear da planta (ver Seção 4.1.1);

Etapas 3: cálculo das ações de controle \mathbf{u}_k utilizando o algoritmos DMPC cooperativo (ver Seção 4.2.1);

Etapas 4: implementação de \mathbf{u}_k obtidos na planta não linear;

Etapas 5: medição ou estimação dos estados \mathbf{x}_k ;

Etapas 6: retorno à **Etapas 2** com novos \mathbf{u}_k e \mathbf{x}_k .

A quarta proposta de Controle DMPC para aplicação em processos não lineares, utiliza boa parte da metodologia da última proposta, sendo que a única diferença está no cálculo das ações de controle. O particionamento é feito de forma idêntica ao controle DMPC não linear não cooperativo. O projeto do controlador DMPC não linear cooperativo está presente na seção (4.2.1). A Figura (4.2) representa um esquema da proposta de controle DMPC não linear cooperativo, que utiliza o método de particionamento a partir do modelo não linear da planta.

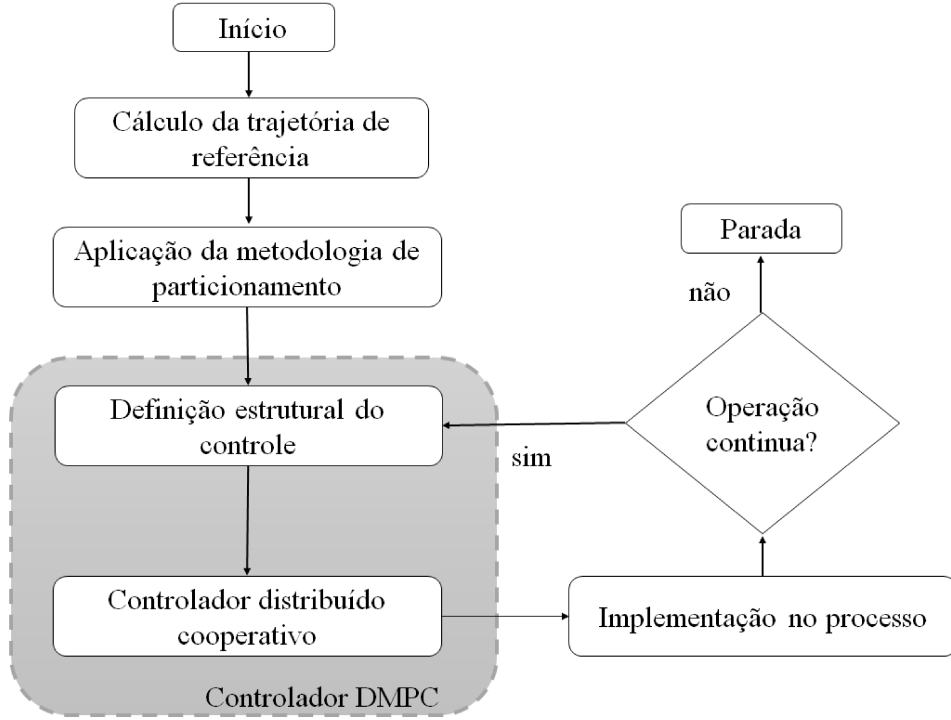


Figura 4.2: Estrutura da proposta de controle DMPC não linear cooperativo.

Nota-se pela Figura (4.2), assim como na proposta anterior, não há atualização do modelo, já que o particionamento é feito a partir da representação não linear da planta e que esse modelo não muda ao longo do tempo de operação, não necessitando assim de atualização. A seguir, o projeto do controlador utilizado no DMPC em questão.

4.2.1 Projeto do controlador cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear

O processo cooperativo utilizado pelo controlador em questão é similar ao realizado pelo controlador DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, a diferença está no modelo utilizado para predição, que é um modelo não linear. Logo, isto irá alterar o problema de otimização efetuado pelo controlador. A seguir, tem-se a descrição desse problema de otimização.

$$\begin{aligned}
 & \min_{u_i(k+j|k), j=0, \dots, H_{ui}-1} J(k) = \sum_i J_i(k) \\
 & \text{sujeito às Equações (4.23 - 4.24)} \\
 & \mathbf{y}_i(k+j|k) \in Y, j > 0 \\
 & \mathbf{y}_i(k+H_{pi}|k) \in Y_f \\
 & \mathbf{u}_i(k+j|k) \in \mathbf{\Lambda}_i, j = 0, \dots, H_{ui} - 1 \\
 & \mathbf{u}_l(k+j|k) = \mathbf{u}_l(k+j|k)^{c-1}, \forall l \neq i
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

em que Λ_i é o espaço viável das entradas do subsistema i e com:

$$\begin{aligned}
 J_i(k) = & \sum_{j=H_{w_i}}^{H_{p_i}} \|\bar{\mathbf{y}}_i(k+j|k) - \mathbf{r}_{y_i}(k+j)\|_{\mathbf{Q}_i(j)}^2 + \\
 & + \sum_{j=0}^{H_{u_i}-1} \|\bar{\mathbf{u}}_i(k+j|k) - \mathbf{r}_{u_i}(k+j)\|_{\mathbf{W}_i(j)}^2 + \\
 & + \sum_{j=0}^{H_{u_i}-1} \|\Delta \bar{\mathbf{u}}_i(k+j|k)\|_{\mathbf{R}_i(j)}^2
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

No próximo capítulo, tem-se os resultados obtidos com a aplicação das propostas de controle desenvolvidas em três estudos de casos distintos.

CAPÍTULO 5

Avaliação dos Controladores Distribuídos Propostos

Neste capítulo, tem-se os resultados das simulações dinâmicas realizadas para avaliar o desempenho dos controladores desenvolvidos neste trabalho. As estruturas de controle projetadas, bem como os clássicos controles centralizado e descentralizado serão aplicados em três estudos de casos distintos. Vale lembrar aqui que são quatro tipos diferentes de DMPCs propostos nesta tese, são eles:

- DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado;
- DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado;
- DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear;
- DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear.

Na próxima seção deste capítulo, tem-se a metodologia para avaliação e comparação das estratégias de controle consideradas nesta tese.

5.1 Metodologia para avaliação e comparação das estratégias de controle

Nesta seção tem-se a descrição das análises efetuadas para comparação das estratégias de controle em cada estudo de caso, bem como a métrica utilizada para avaliação dos sistemas de controle. Como já dito anteriormente, a avaliação será realizada em três estudos de casos distintos e em cada exemplo serão feitas as seguintes análises:

- avaliação das estratégias DMPCs, comparando-as com as abordagens de controle centralizada e descentralizada (a formulação do controle descentralizado é apresentada no Apêndice E);
- avaliação do impacto no desempenho do controle quando altera-se a frequência de aplicação da metodologia de particionamento nas estratégias DMPCs localmente linearizadas com estrutura cooperativo e não cooperativo;
- avaliação do tempo de processamento de cada estratégia de controle;
- avaliação do desempenho de cada estratégia proposta e do controle descentralizado em relação ao controle centralizado.

Em cada estudo de caso serão considerados restrições nos limites superiores e inferiores na operação das variáveis manipuladas e excepcionalmente no primeiro estudo de caso será considerado também um outro cenário, em que restrições nas variações sucessivas das entradas manipuladas estão presentes. Para cada estudo de caso serão apresentados os seguintes resultados:

- as respostas dinâmicas das saídas controladas;
- as respostas dinâmicas das entradas manipuladas;
- a comparação do tempo de processamento de cada estratégia de controle;
- a comparação do desempenho de cada estratégia de controle;
- a evolução do particionamento para o DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado (Apêndice A), bem como as partições ocorrentes;
- a evolução do particionamento para o DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado (Apêndice B), bem como as partições ocorrentes;

- o processo de geração do particionamento para os DMPCs baseados nas matrizes de incidência do modelo não linear (Apêndice C);
- os resultados da análise da frequência de aplicação da metodologia de particionamento nas estratégias DMPCs baseadas no modelo localmente linearizadas (Apêndice D);

A comparação do desempenho entre as estratégias de controle será realizada através do somatório dos erros quadráticos (SSE, do inglês *Sum of Squared Errors*) tanto para as saídas controladas, como para as entradas manipuladas. Este somatório para as variáveis controladas foi calculado segundo a seguinte equação:

$$SSE_y = \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{sp})^2 \quad (5.1)$$

em que, N representa o número total de amostras coletadas, ou seja, o número total de instantes de amostragem; \mathbf{y}_i representa os valores reais das saídas e \mathbf{y}_{sp} , os seus respectivos valores desejados. O somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas foi calculado através da seguinte equação:

$$SSE_u = \sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{sp})^2 \quad (5.2)$$

em que, \mathbf{u}_i representa os valores reais das entradas manipuladas implementados na planta e \mathbf{u}_{sp} , os valores desejados para essas variáveis.

Com intuito de avaliar o desempenho das estratégias de controle descentralizada e as versões distribuídas em relação à estrutura de controle centralizada, índices de desempenho foram considerados para viabilizar essa comparação. O índice I_y se refere ao critério de comparação para as saídas controladas e o índice I_u se refere ao critério de comparação para as entradas manipuladas. Estes índices podem ser calculados da seguinte forma:

$$I_y = \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{sp})^2 / \mathbf{y}_{sp}^2 \quad (5.3)$$

$$I_u = \sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{sp})^2 / \mathbf{u}_{sp}^2 \quad (5.4)$$

em que, os termos \mathbf{y}_{sp}^2 e \mathbf{u}_{sp}^2 nos denominadores de I_y e I_u respectivamente, tornam estes índices adimensionais e possibilita uma comparação entre todas as saídas controladas e todas as entradas manipuladas.

O tempo de processamento dos cálculos dos controladores foi registrado com intuito de promover outro tipo de comparação entre as estruturas de controle avaliadas. Para tal é necessário fornecer algumas características do computador utilizado nas simulações. A seguir encontram-se tais informações:

Processador: Intel®Core™ i7-45100U CPU @ 2,00GHz

Memória RAM: 2 x 8GB DDR3 @ 1600MHz

Sistema Operacional: Windows 10 Home 64 bits

Software de Simulação: Scilab (5.5.2) 64 bits

Os tempos de amostragem para os estudos de casos avaliados neste trabalho foram selecionados utilizando o método de Nyquist Shannon. As simulações utilizaram o otimizador IPOpt 0.2 e o integrador lsoda.

Nas próximas seções, encontram-se os resultados dos três estudos de casos avaliados nesta tese. O primeiro exemplo, corresponde a um sistema reacional constituído de dois reatores seguidos de um separador, sendo este sistema de grande dimensão. O segundo exemplo, representa o mesmo avaliado anteriormente, mas numa versão de menor dimensão. O terceiro e último estudo de caso, representa o processo industrial de alquilação de benzeno para produção de etilbenzeno. A seguir, tem-se a descrição do processos e os resultados para o primeiro estudo de caso.

5.2 Estudo de caso 1

5.2.1 Descrição do processo - Estudo de caso 1

Neste estudo de caso, considere a planta mostrada na Figura (5.1) e apresentada em Stewart et al. (2011). A planta consiste em dois reatores perfeitamente agitados (CSTR, do inglês, *Continuous Stirred-tank Reactor*) em série, onde correntes puras de reagente A entram nos reatores e uma reação de primeira ordem converte o reagente A no produto B. O produto B desejado é perdido através de uma reação paralela de primeira ordem que forma o subproduto C. Após os dois reatores existe um separador tipo *flash*, onde o subproduto destilado é dividido e parte deste redirecionado ao primeiro reator.

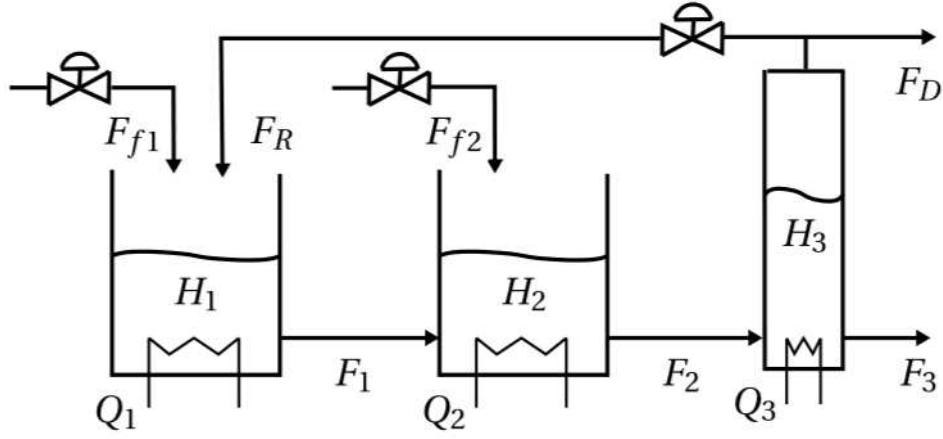


Figura 5.1: Dois reatores em série com separador e reciclo (STEWART et al., 2011).

O modelo foi adaptado de Stewart et al. (2011), resultando nas seguintes equações:

CSTR-1:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{\rho A_1} (F_{f1} + F_R - F_1) \quad (5.5)$$

$$\frac{dx_{A1}}{dt} = \frac{1}{\rho A_1 H_1} [F_{f1}(x_{A0} - x_{A1}) + F_R(x_{AR} - x_{A1})] - k_{A1}x_{A1} \quad (5.6)$$

$$\frac{dx_{B1}}{dt} = \frac{1}{\rho A_1 H_1} [F_{f1}(x_{B0} - x_{B1}) + F_R(x_{BR} - x_{B1})] + k_{A1}x_{A1} - k_{B1}x_{B1} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} = & \frac{1}{\rho A_1 H_1} [F_{f1}(T_0 - T_1) + F_R(T_R - T_1)] + \\ & - \frac{1}{c_P} (k_{A1}x_{A1}\Delta H_A + k_{B1}x_{B1}\Delta H_B) + \frac{Q_1}{\rho A_1 c_P H_1} \end{aligned} \quad (5.8)$$

CSTR-2:

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{\rho A_2} (F_{f2} + F_1 - F_2) \quad (5.9)$$

$$\frac{dx_{A2}}{dt} = \frac{1}{\rho A_2 H_2} [F_{f2}(x_{A0} - x_{A2}) + F_1(x_{A1} - x_{A2})] - k_{A2}x_{A2} \quad (5.10)$$

$$\frac{dx_{B2}}{dt} = \frac{1}{\rho A_2 H_2} [F_{f2}(x_{B0} - x_{B2}) + F_1(x_{B1} - x_{B2})] + k_{A2}x_{A2} - k_{B2}x_{B2} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{dt} = & \frac{1}{\rho A_2 H_2} [F_{f2}(T_0 - T_2) + F_1(T_1 - T_2)] + \\ & - \frac{1}{c_P} (k_{A2}x_{A2}\Delta H_A + k_{B2}x_{B2}\Delta H_B) + \frac{Q_2}{\rho A_2 c_P H_2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

SEPARADOR:

$$\frac{dH_3}{dt} = \frac{1}{\rho A_3} (F_2 - F_D - F_R - F_3) \quad (5.13)$$

$$\frac{dx_{A3}}{dt} = \frac{1}{\rho A_3 H_3} [F_2(x_{A2} - x_{A3}) + F_D(x_{A3} - x_{AR}) + F_R(x_{A3} - x_{AR})] \quad (5.14)$$

$$\frac{dx_{B3}}{dt} = \frac{1}{\rho A_3 H_3} [F_2(x_{B2} - x_{B3}) + F_D(x_{B3} - x_{BR}) + F_R(x_{B3} - x_{BR})] \quad (5.15)$$

$$\frac{dT_3}{dt} = \frac{1}{\rho A_3 H_3} [F_2(T_2 - T_3) + F_D(T_3 - T_R) + F_R(T_3 - T_R)] + \frac{Q_3}{\rho A_3 c_P H_3} \quad (5.16)$$

As vazões são definidas como:

$$F_i = k_{vi} H_i \quad (5.17)$$

e as constantes de reação:

$$k_{Ai} = k_A \exp \left(-\frac{E_A}{RT_i} \right) \quad (5.18)$$

$$k_{Bi} = k_B \exp \left(-\frac{E_B}{RT_i} \right) \quad (5.19)$$

em que para qualquer $i \in I_{1:3}$. A vazão de reciclo e os percentuais satisfazem as seguintes equações:

$$F_D = 0,01 F_R \quad (5.20)$$

$$x_{AR} = \frac{\alpha_A x_{A3}}{\bar{x}_3} \quad (5.21)$$

$$x_{BR} = \frac{\alpha_B x_{B3}}{\bar{x}_3} \quad (5.22)$$

$$\bar{x}_3 = \alpha_A x_{A3} + \alpha_B x_{B3} + \alpha_C x_{C3} \quad (5.23)$$

$$x_{C3} = (1 - x_{A3} - x_{B3}) \quad (5.24)$$

A definição das variáveis utilizadas no modelo podem ser encontradas na Tabela (5.1) e na Tabela (5.2) tem-se os parâmetros do modelo. A Tabela (5.3) mostra os estados estacionários do sistema considerados neste trabalho.

Tabela 5.1: Variáveis do processo do estudo de caso 1.

H_1, H_2, H_3	Alturas de líquido em cada equipamento
x_{A1}, x_{B1}, x_{C1}	Composições percentuais de A , B e C no CSTR-1
x_{A2}, x_{B2}, x_{C2}	Composições percentuais de A , B e D no CSTR-2
x_{A3}, x_{B3}, x_{C3}	Composições percentuais de A , B e C na saída inferior do separador
x_{AR}, x_{BR}, x_{CR}	Composições percentuais de A , B e C na saída superior do separador
x_{A0}, x_{B0}	Composições percentuais de A e B nas correntes de alimentação
F_{f1}, F_{f2}	Correntes de alimentação de A puro nos CSTR-1 e CSTR-2
T_0	Temperatura das correntes de alimentação
T_R	Temperatura da corrente de reciclo
F_1, F_2, F_3	Correntes efluentes em cada equipamento
F_D	Corrente efluente do processo
F_R	Corrente de reciclo do separador para o CSTR-1
ρ	Densidade da mistura reacional
c_p	Calor específico da mistura reacional
$\Delta H_A, \Delta H_B$	Calores das reações
A_1, A_2, A_3	Áreas das seções transversais de cada equipamento
T_1, T_2, T_3	Temperaturas em cada equipamento
Q_1, Q_2, Q_3	Entradas externas de calor/refrigerante para cada equipamento
k_{A1}, k_{B1}	Constantes de reação no CSTR-1
k_{A2}, k_{B2}	Constantes de reação no CSTR-2

Tabela 5.2: Parâmetros do modelo do estudo de caso 1.

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
A_1	3	m^2	k_A	2	$1/min$
A_2	3	m^2	k_B	0,18	$1/min$
A_3	1	m^2	E_A/R	300	K
ρ	1000	kg/m^3	E_B/R	250	K
c_P	5	$kJ/(kg.K)$	ΔH_A	-200	kJ/kg
K_{v1}	1020	$kg/(m.min)$	ΔH_B	-50	kJ/kg
K_{v2}	1020	$kg/(m.min)$	α_A	1,5	-
K_{v3}	1020	$kg/(m.min)$	α_B	1,5	-
x_{A0}	1	%	α_C	2,0	-
x_{B0}	0	%	T_0	313	K

Tabela 5.3: Estados estacionários do sistema do estudo de caso 1.

1° Estado Estacionário ($ss1$)	2° Estado Estacionário ($ss2$)
$H_{1ss1} = 0,706 \text{ m}$	$H_{1ss2} = 0,423 \text{ m}$
$x_{A1ss1} = 0,210$	$x_{A1ss2} = 0,177$
$x_{B1ss1} = 0,626$	$x_{B1ss2} = 0,650$
$T_{1ss1} = 348,107 \text{ K}$	$T_{1ss2} = 350,958 \text{ K}$
$H_{2ss1} = 1,176 \text{ m}$	$H_{2ss2} = 0,541 \text{ m}$
$x_{A2ss1} = 0,150$	$x_{A2ss2} = 0,101$
$x_{B2ss1} = 0,597$	$x_{B2ss2} = 0,605$
$T_{2ss1} = 350,660 \text{ K}$	$T_{2ss2} = 354,553 \text{ K}$
$H_{3ss1} = 0,939 \text{ m}$	$H_{3ss2} = 0,351 \text{ m}$
$x_{A3ss1} = 0,200$	$x_{A3ss2} = 0,142$
$x_{B3ss1} = 0,796$	$x_{B3ss2} = 0,851$
$T_{3ss1} = 350,670 \text{ K}$	$T_{3ss2} = 354,651 \text{ K}$
$F_{f1ss1} = 480,000 \text{ kg/min}$	$F_{f1ss2} = 240,000 \text{ kg/min}$
$Q_{1ss1} = 60,000 \text{ kJ/min}$	$Q_{1ss2} = 180,000 \text{ kJ/min}$
$F_{f2ss1} = 480,000 \text{ kg/min}$	$F_{f2ss2} = 120,000 \text{ kg/min}$
$Q_{2ss1} = 60,000 \text{ kJ/min}$	$Q_{2ss2} = 210,000 \text{ kJ/min}$
$F_{Rss1} = 240,000 \text{ kg/min}$	$F_{Rss2} = 192,000 \text{ kg/min}$
$Q_{3ss1} = 60,000 \text{ kJ/min}$	$Q_{3ss2} = 270,000 \text{ kJ/min}$

As saídas controladas e as entradas manipuladas são indicadas, respectivamente:

$$\mathbf{y} = [H_1, \quad T_1, \quad H_2, \quad T_2, \quad H_3, \quad T_3]^T \quad (5.25)$$

$$\mathbf{u} = [F_{f1}, \quad Q_1, \quad F_{f2}, \quad Q_2, \quad F_R, \quad Q_3]^T \quad (5.26)$$

Para verificar a dificuldade de controle desse processo, bem como justificar a seleção dos pares (entrada-saída) para o controle descentralizado, será apresentado na próxima seção uma análise do condicionamento do modelo linearizado da planta, bem como uma análise das matrizes do ganho relativo (RGA, do inglês *Relative Gain Array*) nos estados estacionários $ss1$ e $ss2$.

5.2.2 Análise do sistema - Estudo de caso 1

Nesta seção serão verificadas algumas características do sistema em questão, que são importantes para o controle do mesmo. São elas: estabilidade do sistema em malha

aberta, condicionamento do modelo linearizado nos estados estacionários e as matrizes RGAs nos estados estacionários utilizadas na seleção do pareamento das variáveis para controle descentralizado. As matrizes \mathbf{A} do modelo discreto e linearizado em torno dos estados estacionários $ss1$ e $ss2$ apresentam todos os autovalores dentro do círculo unitário. Logo pode-se afirmar que o sistema é estável em malha aberta nos pontos considerados. O número de condicionamento no estado estacionário $ss1$ é igual a 3809 e no estado estacionário $ss2$ é igual a 23407, o que caracteriza mau condicionamento do sistema nestes pontos. Para que um sistema apresente bom condicionamento o valor do número de condicionamento deve ser menor que 10 (SEBORG et al., 2004). Seria usual, com um número de condicionamento tão elevado, fazer uma reavaliação do controle e seleção de outras variáveis controladas e manipuladas, mas isso não será feito neste trabalho e os controladores desenvolvidos serão testados nessa condição. A seguir, tem-se as matrizes RGA em $ss1$ e em $ss2$:

$$\mathbf{RGA}_{ss1} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,01 & 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 \\ -0,06 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,06 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,01 & 0,00 & -0,01 \\ 0,06 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,94 & 0,00 \\ 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,01 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{RGA}_{ss2} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,01 & 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 \\ -0,06 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,06 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,01 & 0,00 & -0,01 \\ 0,06 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,94 & 0,00 \\ 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,01 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Analisando as matrizes \mathbf{RGA}_{ss1} e \mathbf{RGA}_{ss2} e utilizando a metodologia de pareamento da literatura de controle (mais detalhes em Seborg et al. (2004)) é possível fazer a seleção dos pares (entrada e saída) necessária para o controle totalmente descentralizado que será utilizado neste trabalho. Os pares selecionados são: $F_{f1} - H_1$, $Q_1 - T_1$, $F_{f2} - H_2$, $Q_2 - T_2$, $F_R - H_3$ e $Q_3 - T_3$.

A seguir, tem-se os resultados obtidos para o estudo de caso.

5.2.3 Resultados - Estudo de caso 1

Neste estudo de caso, serão avaliadas duas situações distintas. A primeira considera a situação sem restrições na variação sucessiva das entradas manipuladas (Δu_i). Já a segunda situação considera restrições deste tipo. A seguir o caso sem restrição em Δu_i .

Cenário sem restrição na velocidade das entradas manipuladas

A primeira situação aqui considerada será aquela em que não há restrições na variação sucessiva das entradas manipuladas (Δu_i). As restrições impostas na operação do processo concentram-se apenas nos limites inferiores e superiores dessas variáveis. Na Tabela (5.4) tem-se as restrições para as entradas que necessitam ser satisfeitas.

Tabela 5.4: Restrições nas entradas manipuladas do sistema para o estudo de caso 1.

Entrada u_i	Valor Mínimo	Valor Máximo	Unidade
Ff_1	0	500	kg/min
Q_1	0	500	kJ/min
Ff_2	0	500	kg/min
Q_2	0	500	kJ/min
F_R	0	500	kg/min
Q_3	0	500	kJ/min

O objetivo de controle é manter as variáveis manipuladas e controladas mais próxima possível das trajetórias de referência pré-estabelecidas. A seguir tem-se as equações que representam as trajetórias de referências escolhidas para esse trabalho, tanto para as saídas controladas (\mathbf{r}_y) como para as entradas manipuladas (\mathbf{r}_u):

$$\mathbf{r}_y(t+k) = \alpha_y \cdot \mathbf{r}_y(t+k-1) + (1-\alpha_y) \cdot \mathbf{sp}_y(t+k) \quad (5.29)$$

$$\mathbf{r}_u(t+k) = \alpha_u \cdot \mathbf{r}_u(t+k-1) + (1-\alpha_u) \cdot \mathbf{sp}_u(t+k) \quad (5.30)$$

em que, \mathbf{sp}_y e \mathbf{sp}_u representam os valores de *set-point* (neste trabalho, o estado estacionário desejado) para as saídas controladas e entradas manipuladas, respectivamente; e α_y e α_u representam as velocidades de transição entre os estados estacionários para as saídas controladas e para as entradas manipuladas, respectivamente. Neste estudo de caso, considerou-se α_y e α_u iguais a 0,5, o que representa uma transição gradual entre os estados estacionários. Na Figura (5.2) tem-se uma representação simplificado das trajetórias desejáveis para variáveis controladas e manipuladas.

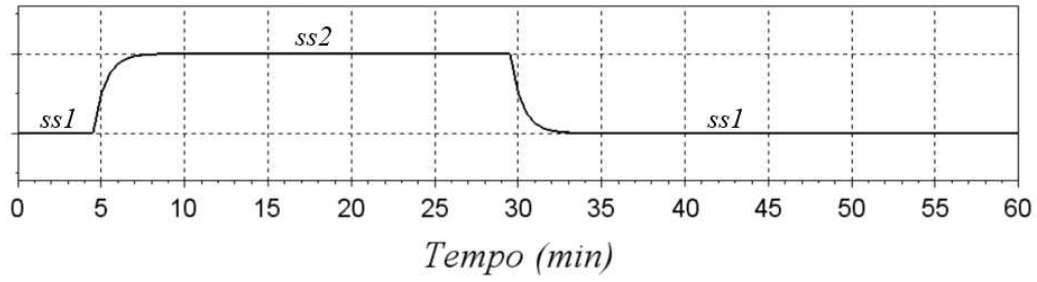


Figura 5.2: Trajetória de referência desejável para as variáveis controladas e manipuladas para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Pela trajetória de referência apresenta na Figura (5.2), deseja-se que o controle mantenha as variáveis controladas e manipuladas no estado estacionário 1 (*ss1*) até o instante de tempo igual a 5 min e a partir deste instante leve o processo ao estado estacionário 2 (*ss2*) de maneira gradual e o mantenha neste ponto até o instante de tempo igual a 30 min, quando deverá retornar ao estado estacionário 1 e mantê-lo neste ponto até o instante de tempo igual a 60 min, quando o tempo considerado de operação da planta finaliza.

Com relação aos parâmetros de sintonia inerentes aos controladores preditivos baseados em modelo, tem-se as seguintes escolhas para as matrizes de ponderação e horizontes de predição e de controle:

$$\mathbf{Q} = 10 \cdot \mathbf{I}_{n_y \times n_y}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_{m \times m}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{I}_{m \times m}$$

$$H_p = 5$$

$$H_u = 5$$

lembrando que, n_y representa o número de saídas controladas; m , o número de entradas manipuladas e a matriz \mathbf{I} representa a matriz identidade. Além dos parâmetros já citados, vale ressaltar que o tempo de amostragem escolhido neste estudo de caso foi igual a $T_s = 0,5$ min. Essa escolha baseou-se na dinâmica mais rápida, entre todas as dinâmicas das variáveis envolvidas quando a operação da planta encontra-se em malha aberta.

A seguir são apresentados os resultados dinâmicos para as saídas controladas (Figuras (5.3) e (5.4)) e os resultados dinâmicos para as entradas manipuladas (Figuras (5.5) e (5.6)).

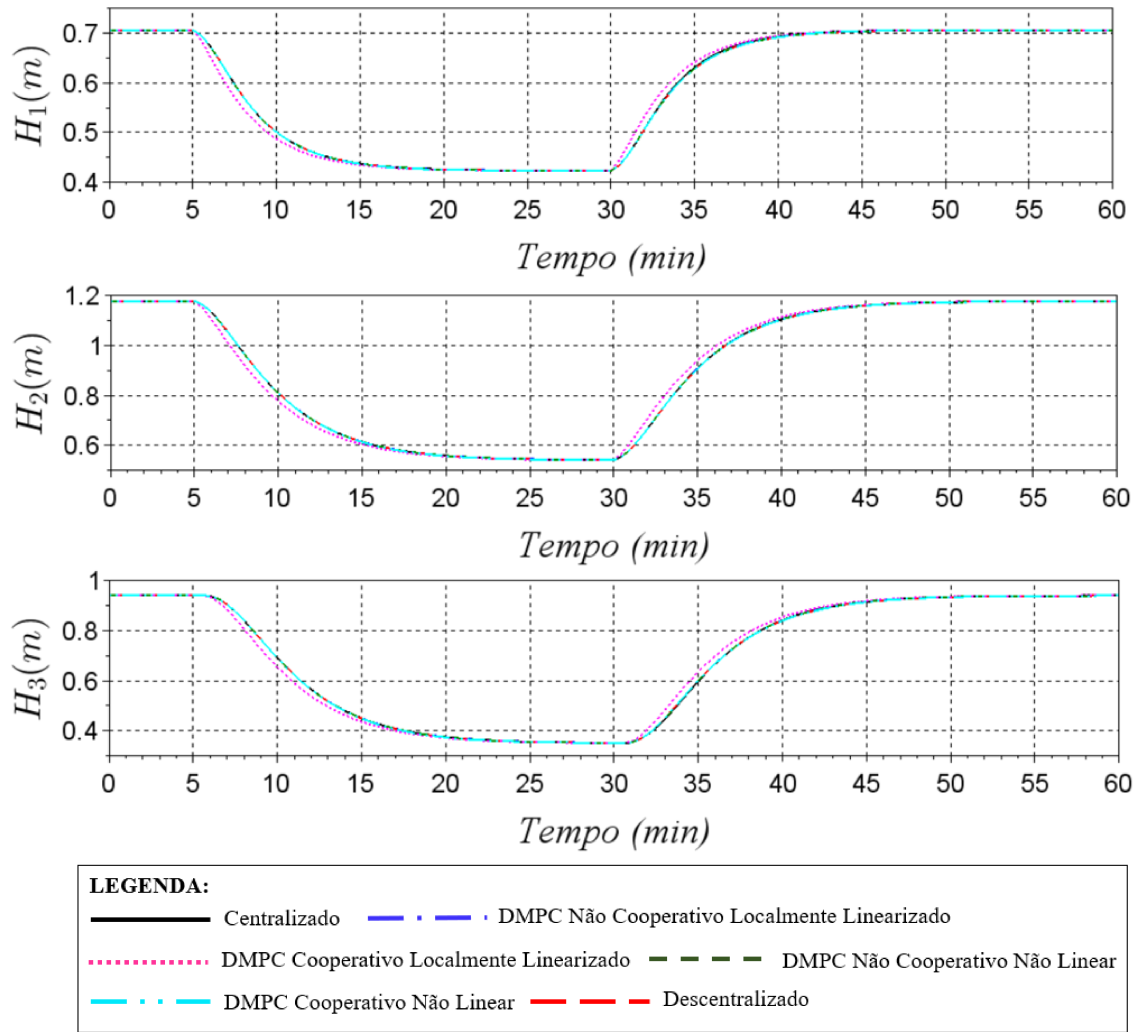


Figura 5.3: Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

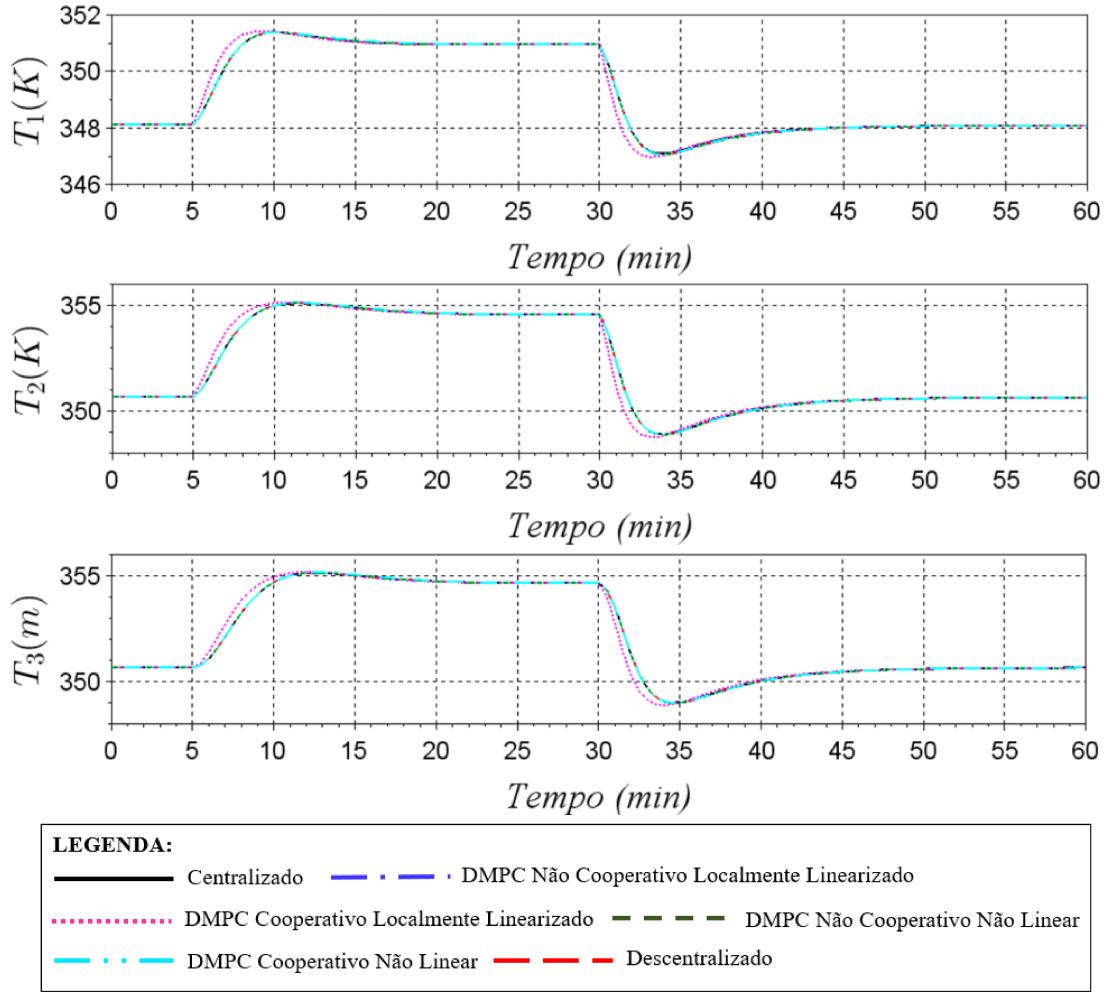


Figura 5.4: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

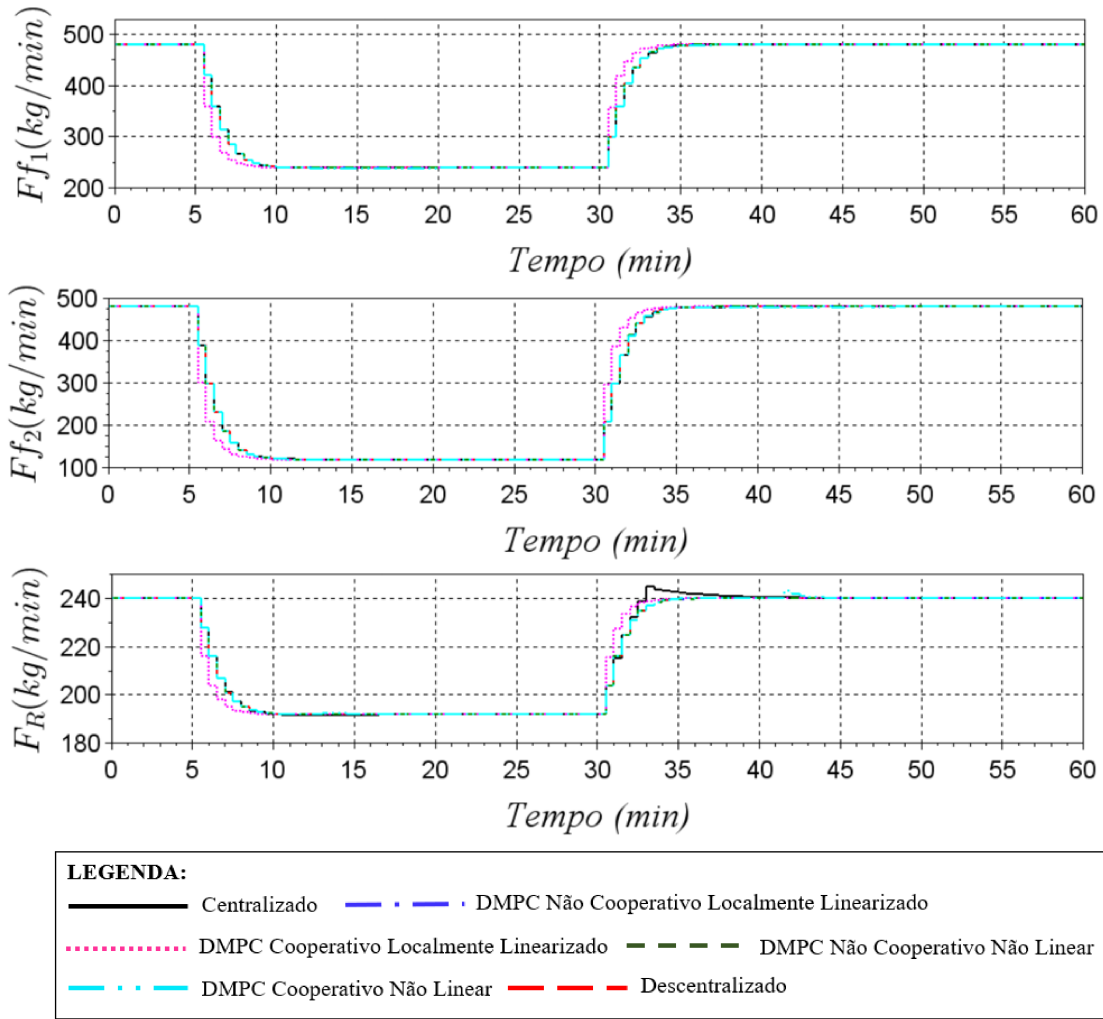


Figura 5.5: Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

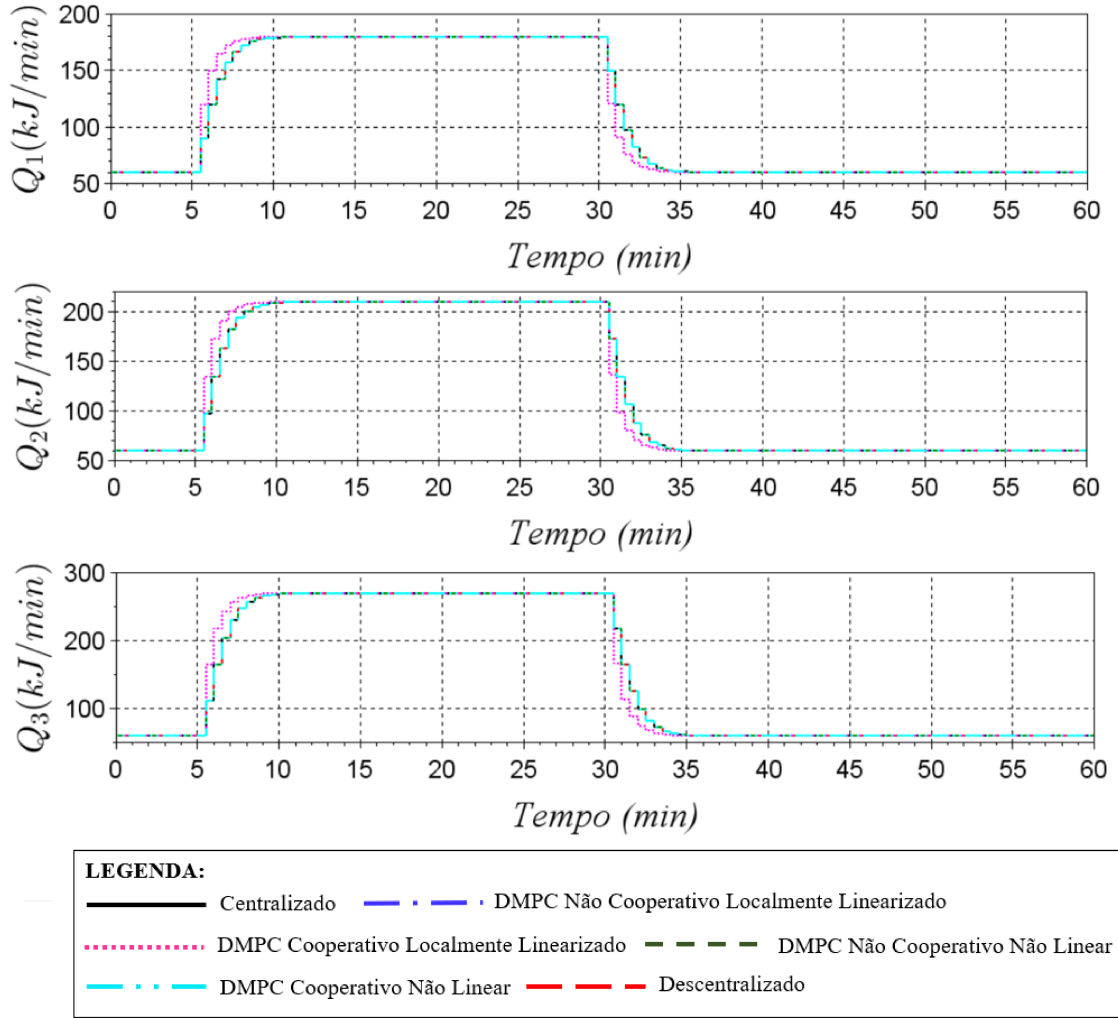


Figura 5.6: Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Nota-se que as respostas obtidas para as dinâmicas das saídas controladas e entradas manipuladas são equivalentes, exceto as respostas obtidas pelo DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, que se distanciam um pouco das outras estruturas de controle. A trajetória obtida pelo DMPC cooperativo localmente linearizado é o que mais se aproxima da trajetória de referência pré-estabelecida para as variáveis. Isto se deve ao fato da presença do processo iterativo nesta abordagem, que só finaliza quando se atinge um critério de parada pré-definido, resultando numa boa aproximação em relação à trajetória de referência. Para exemplificar o processo iterativo do DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, que resulta na minimização da função objetivo, considere as Figuras (5.7) e (5.8), que mostram o número de iterações efetuados em cada instante de amostragem e a evolução do valor da função objetivo para essa estrutura no instante de amostragem igual a $k = 11$, respectivamente.

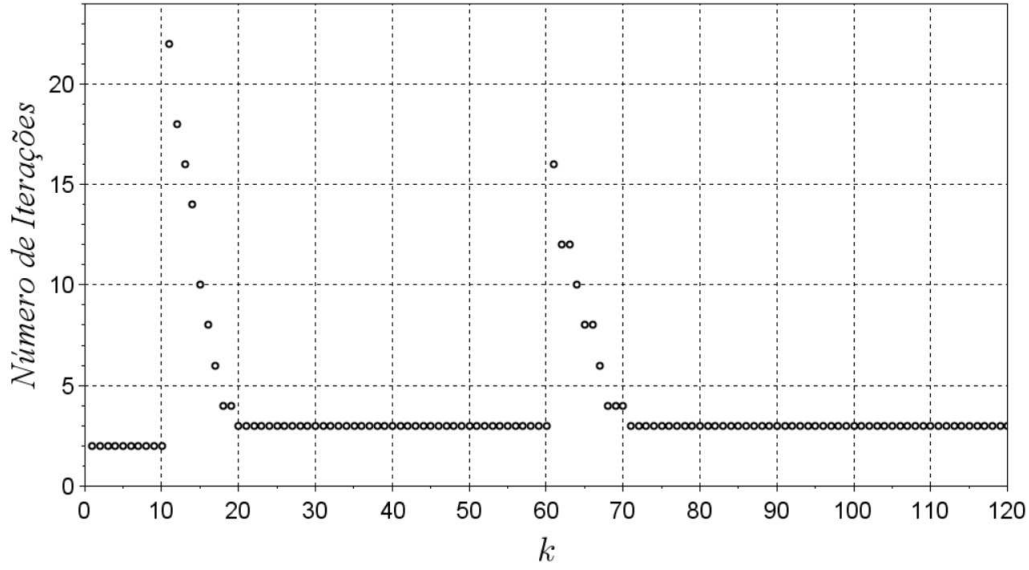


Figura 5.7: Número de iterações do DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado em cada instante de amostragem para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

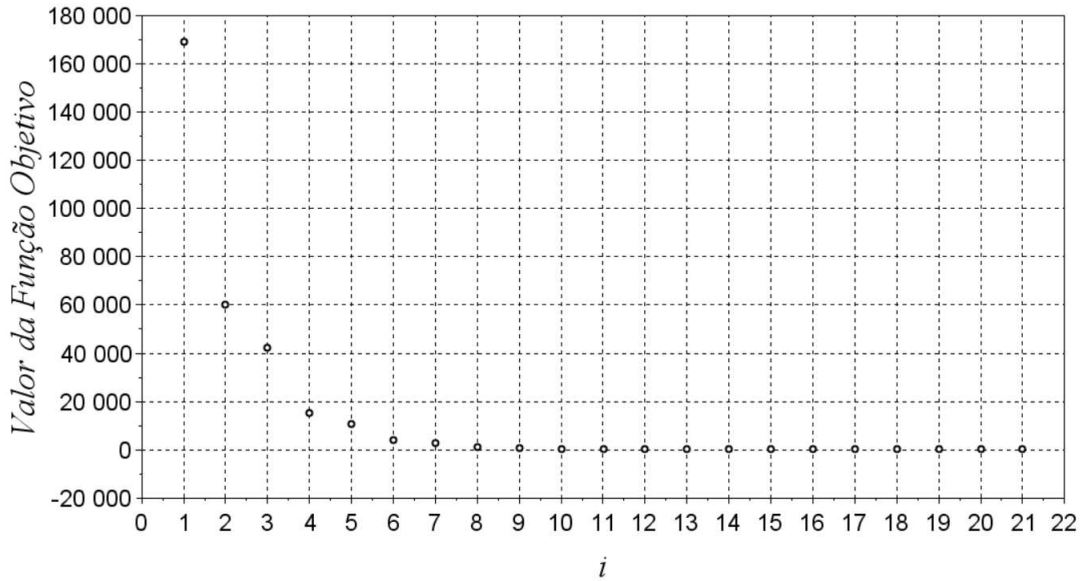


Figura 5.8: Evolução dos valores da função objetivo do DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado no instante de amostragem $k = 11$ para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Nota-se pela Figura (5.7), que o número de iterações realizadas pelo controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado aumenta nos instantes de tempo em que houve mudança nas trajetórias de referência. Isto já era esperado, pois nesses instantes, a dificuldade nos cálculos das ações aumentam consideravelmente. A Figura (5.8), mostra a evolução do valor da função objetivo nas 21 iterações executadas no instante de amostragem $k = 11$, ilustrando dessa forma como o processo de cooperação

entre os controladores se desenvolve, com o objetivo de minimizar os erros (tanto das saídas controladas como das entradas manipuladas) para encontrar uma solução de controle satisfatória. Nota-se pela Figura (5.8) acima que nas últimas iterações do processo cooperativo, a função objetivo chega a assumir valores próximos a zero, o que significa que as ações de controle calculadas por essa estrutura estão próximas das trajetórias de referência. A seguir, na Tabela (5.5) tem-se os tempos de processamento dos cálculos dos controladores.

Tabela 5.5: Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	Tempo total (s)	Tempo máximo (s)
Centralizado	201,46	7,69
Descentralizado	61,80	1,08
DMPC Não Cooperativo Linearizado	41,61	1,27
DMPC Cooperativo Linearizado	404,21	4,66
DMPC Não Cooperativo Não Linear	95,27	2,09
DMPC Cooperativo Não Linear (i=5)	938,76	8,66

Na Tabela (5.5) tem-se o tempo total e o tempo máximo de processamento em um determinado instante de amostragem. O tempo total corresponde ao somatório dos tempos de cálculo de todos controladores presente na malha e ao longo de todo o tempo de operação considerado. Avaliar o tempo total de processamento é interessante para comparar as estratégias de controle. Já o tempo máximo representa o tempo de processamento de todos os controladores no instante de amostragem em que os eles executaram os cálculos de forma mais lenta. Isto é interessante para avaliar se as estratégias ultrapassam o tempo de amostragem, que neste estudo de caso é igual $T_s = 30$ segundos. Analisando esses resultados, nota-se que o DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado é a estratégia mais rápida e o DMPC cooperativa baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear é o que apresenta maior gasto de tempo em seus cálculos. Em termos do tempo máximo, nota-se que todos os tipos de controle são viáveis.

O valor apresentado para o DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear considera uma limitação no número máximo de iterações permitidas igual a 5. Isto foi necessário, pois caso não houvesse essa restrição o tempo total chegaria a 75247,36 segundos, muito acima do tempo de operação avaliado (60 minutos), inviabilizando assim tal aplicação. Mesmo com essa limitação do número de iterações, não houve perdas consideráveis no desempenho do mesmo. A seleção do limite máximo de iterações permitidas foi baseada em uma análise dos valores da função objetivo ao longo das iterações e de todos os instantes de amostragem, e constatou-se que a partir da

quinta iteração, os valores da função objetivo já estavam próximas de zero, na maioria dos instantes de amostragem.

As Tabelas (5.6) e (5.7) apresentam uma comparação entre os diversos tipos de controle analisados neste trabalho, através do somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas. A Tabela (5.6) se refere às alturas de líquido (H_1 , H_2 e H_3) em cada equipamento e a Tabela (5.7) se refere as temperaturas controladas (T_1 , T_2 e T_3). As Tabelas (5.8) e (5.9) apresentam o SSE para as entradas manipuladas. A Tabela (5.8) faz referência as vazões mássicas manipuladas na planta (F_{f1} , F_{f2} e F_R) e a Tabela (5.9) se refere aos calores do processo (Q_1 , Q_2 e Q_3).

Tabela 5.6: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas H_1 , H_2 e H_3 para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_y para H_1, H_2 e H_3
Centralizado	10,18
Descentralizado	10,17
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	10,17
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	8,76
DMPC Não Cooperativo Não Linear	10,17
DMPC Cooperativo Não Linear	10,18

Tabela 5.7: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas T_1 , T_2 e T_3 para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_y para T_1, T_2 e T_3
Centralizado	174,32
Descentralizado	176,82
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	176,79
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	146,67
DMPC Não Cooperativo Não Linear	176,65
DMPC Cooperativo Não Linear	176,87

Tabela 5.8: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas F_{f1} , F_{f2} e F_R para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_u para F_{f1}, F_{f2} e F_R
Centralizado	280689
Descentralizado	280746
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	280682
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	128067
DMPC Não Cooperativo Não Linear	280654
DMPC Cooperativo Não Linear	280822

Tabela 5.9: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas Q_1 , Q_2 e Q_3 para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_u para Q_1, Q_2 e Q_3
Centralizado	119997
Descentralizado	120001
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	119999
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	54750
DMPC Não Cooperativo Não Linear	119996
DMPC Cooperativo Não Linear	119999

Analisando os resultados apresentados nas tabelas acima, nota-se que é possível comprovar numericamente, o que já foi constatado através da análise gráfica: as respostas obtidas pelas estratégias de controle em questão, são equivalentes, exceto para o controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, que obteve uma resposta mais próxima da desejada e definida pela trajetória de referência. Vale ressaltar aqui, que não houve uma preocupação em otimizar as sintonias dos controladores. Se isso fosse executado de forma minuciosa, seria possível obter para o controle centralizado, a melhor solução possível de controle, já que o mesmo tem o maior número de informações advindas da planta, e o modelo utilizado por este é o mais próximo do real.

Com intuito de avaliar o desempenho das estratégias de controle descentralizada e as distribuídas com relação a versão centralizada do controle, utilizou-se os I_y e I_u , já citados anteriormente no início deste capítulo. Lembrando que, o índice I_y se refere ao critério de comparação para as saídas controladas e o índice I_u se refere ao critério de comparação para as entradas manipuladas. As Tabelas (5.10) e (5.11), representam essa comparação de desempenhos, avaliando os índices I_y e I_u , respectivamente.

Tabela 5.10: Comparação entre os desempenhos dos controladores para as saídas controladas para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	I_y	Desempenho
Centralizado	32,34	-
Descentralizado	32,33	$\uparrow 0,03\%$
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	32,33	$\uparrow 0,03\%$
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	27,72	$\uparrow 14,28\%$
DMPC Não Cooperativo Não Linear	32,33	$\uparrow 0,03\%$
DMPC Cooperativo Não Linear	32,30	$\uparrow 0,11\%$

Tabela 5.11: Comparação entre os desempenhos dos controladores para as entradas manipuladas para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	I_u	Desempenho
Centralizado	12,28	-
Descentralizado	12,29	$\downarrow 0,06\%$
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	12,29	$\downarrow 0,06\%$
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	4,39	$\uparrow 64,23\%$
DMPC Não Cooperativo Não Linear	12,29	$\downarrow 0,06\%$
DMPC Cooperativo Não Linear	12,29	$\downarrow 0,06\%$

Analisando as duas últimas tabelas, nota-se que, para as saídas controladas houve um aumento no desempenho do DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado de cerca de 14% em relação ao controle centralizado. Para as entradas manipuladas, o aumento foi maior que 64%. O desempenho das outras estruturas são equivalentes e próximas do controle centralizado. Na próxima seção, avaliam-se as estruturas de controle em um cenário com restrição na variação sucessiva das variáveis manipuladas.

Cenário com restrição na velocidade das entradas manipuladas

A segunda situação considera restrições na variação sucessiva das entradas manipuladas (Δu_i). O valor máximo admitido para essa variação é 10 kg/min para as entradas que representam vazões (F_{f1} , F_{f2} e F_R) e 10 kJ/min para aquelas que representam calores (Q_1 , Q_2 e Q_3). A Figura (5.9) apresenta uma representação simplificada das trajetórias desejáveis para variáveis controladas e manipuladas nesta situação com restrição em Δu_i .

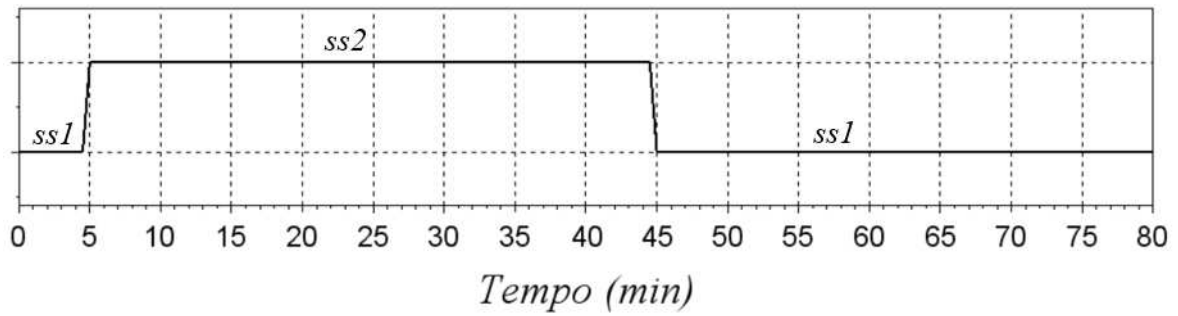


Figura 5.9: Trajetória de referência desejável para as variáveis controladas e manipuladas para o estudo de caso 1 com restrição em Δu_i .

A Figura (5.9) representa de forma simplificada a trajetória desejável para as variáveis controladas e manipuladas do processo. Nota-se que deseja-se que o controle mantenha as variáveis no estado estacionário 1 (*ss1*) até o instante de tempo igual a 5 min e a partir deste instante leve o processo ao estado estacionário 2 (*ss2*) de maneira rápida (α_y e α_u iguais a 0) e o mantenha neste ponto até o instante de tempo igual a 45 minutos, quando deverá retornar ao estado estacionário 1 e mantê-lo neste ponto até o instante de tempo igual a 60 minutos, quando o tempo considerado de operação da planta finaliza. Devido a presença da restrição no Δu_i nas variáveis manipuladas, optou-se por desconsiderar uma trajetória suave para as variáveis do processo, já que tal comportamento gradual já seria imposto indiretamente pela restrição adicional.

Com relação aos parâmetros de sintonia inerentes aos controladores preditivos baseados em modelo, tem-se as seguintes escolhas para as matrizes de ponderação e horizontes de predição e de controle:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= 100 \cdot \mathbf{I}_{n_y \times n_y} \\ \mathbf{R} &= \text{diag}([1; 1; 1; 1; 100; 1]) \\ \mathbf{W} &= \text{diag}([1; 1; 1; 1; 100; 1]) \\ H_p &= 5 \\ H_u &= 5 \end{aligned}$$

lembrando que, n_y representa o número de saídas controladas e a matriz \mathbf{I} representa a matriz identidade de dimensão n_y por n_y . Além disso, vale relembrar aqui que o tempo de amostragem escolhido neste cenário foi igual a $T_s = 0,5$ min. A seguir são apresentados os resultados dinâmicos para as saídas controladas (Figuras (5.10) e (5.11)) e os resultados dinâmicos para as entradas manipuladas (Figuras (5.12) e (5.13)).

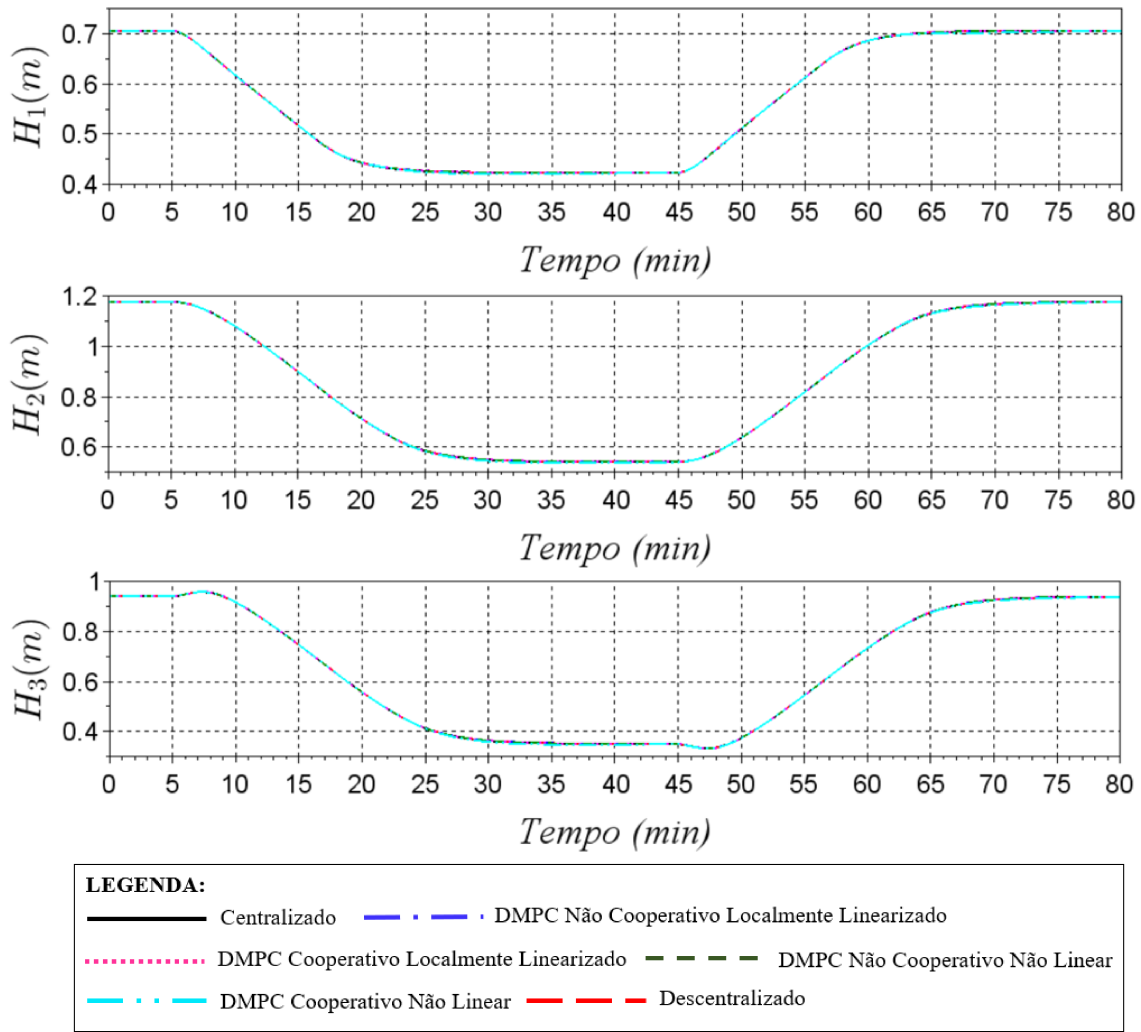


Figura 5.10: Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 1 com restrição em Δu_i .

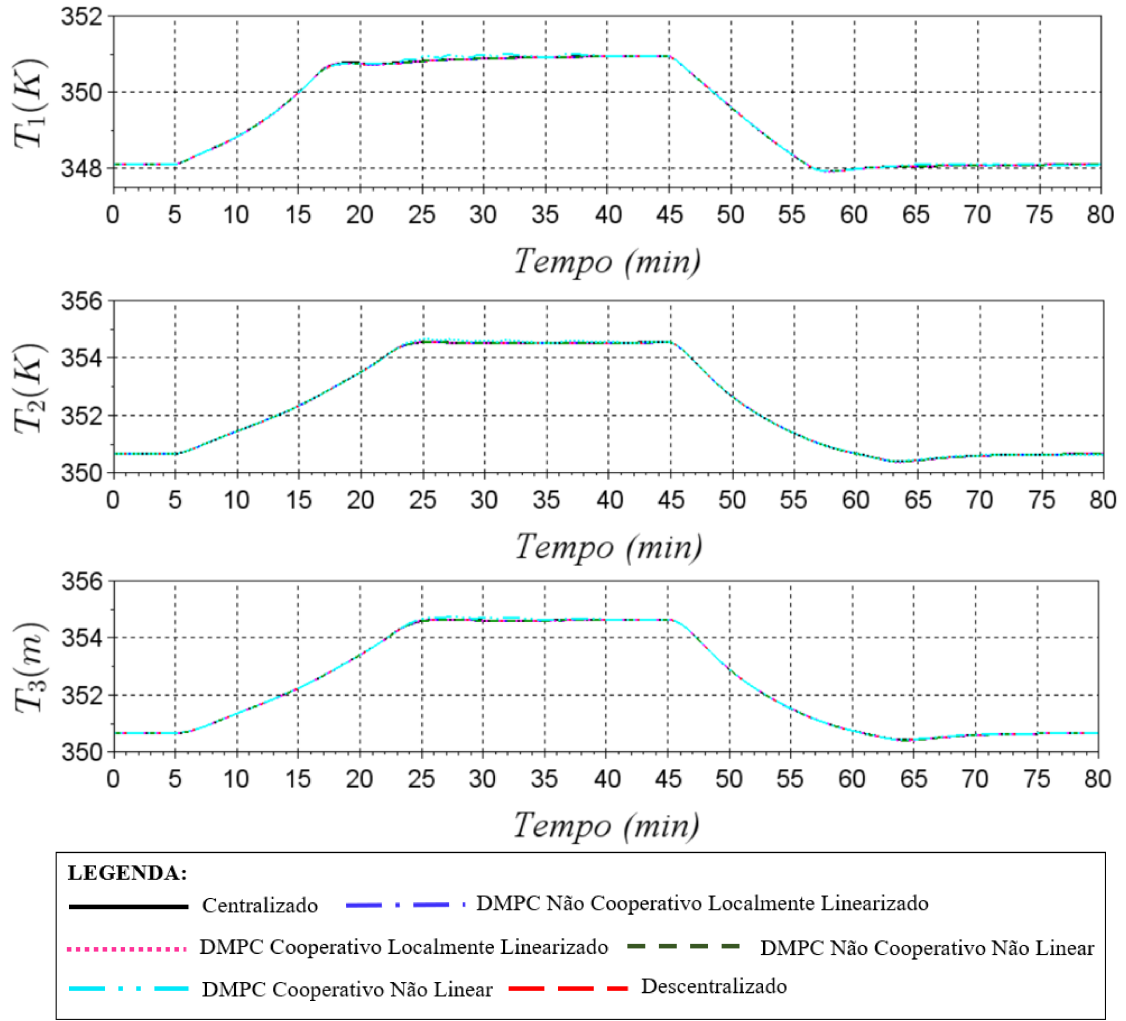


Figura 5.11: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 1 com restrição em Δu_i .

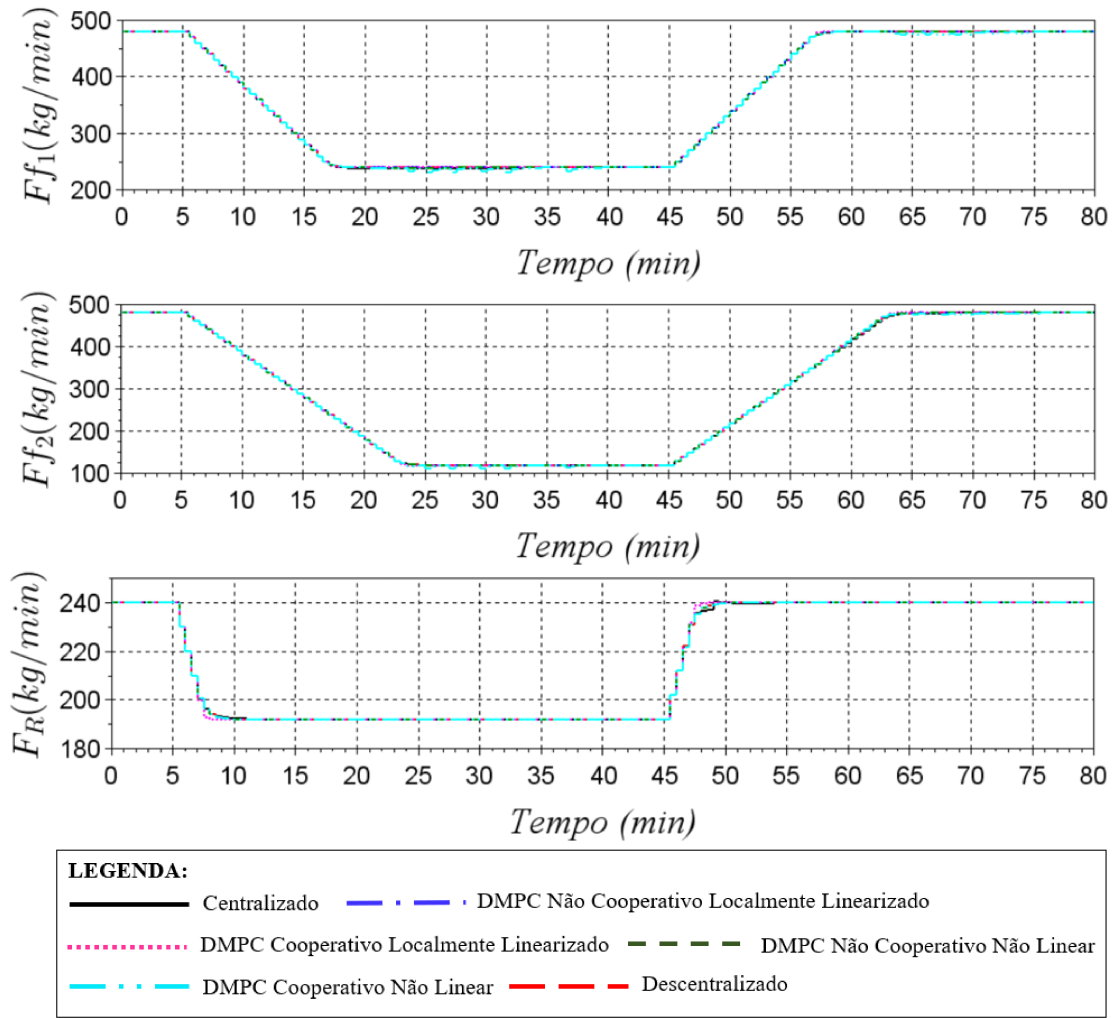


Figura 5.12: Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 1 com restrição em Δu_i .

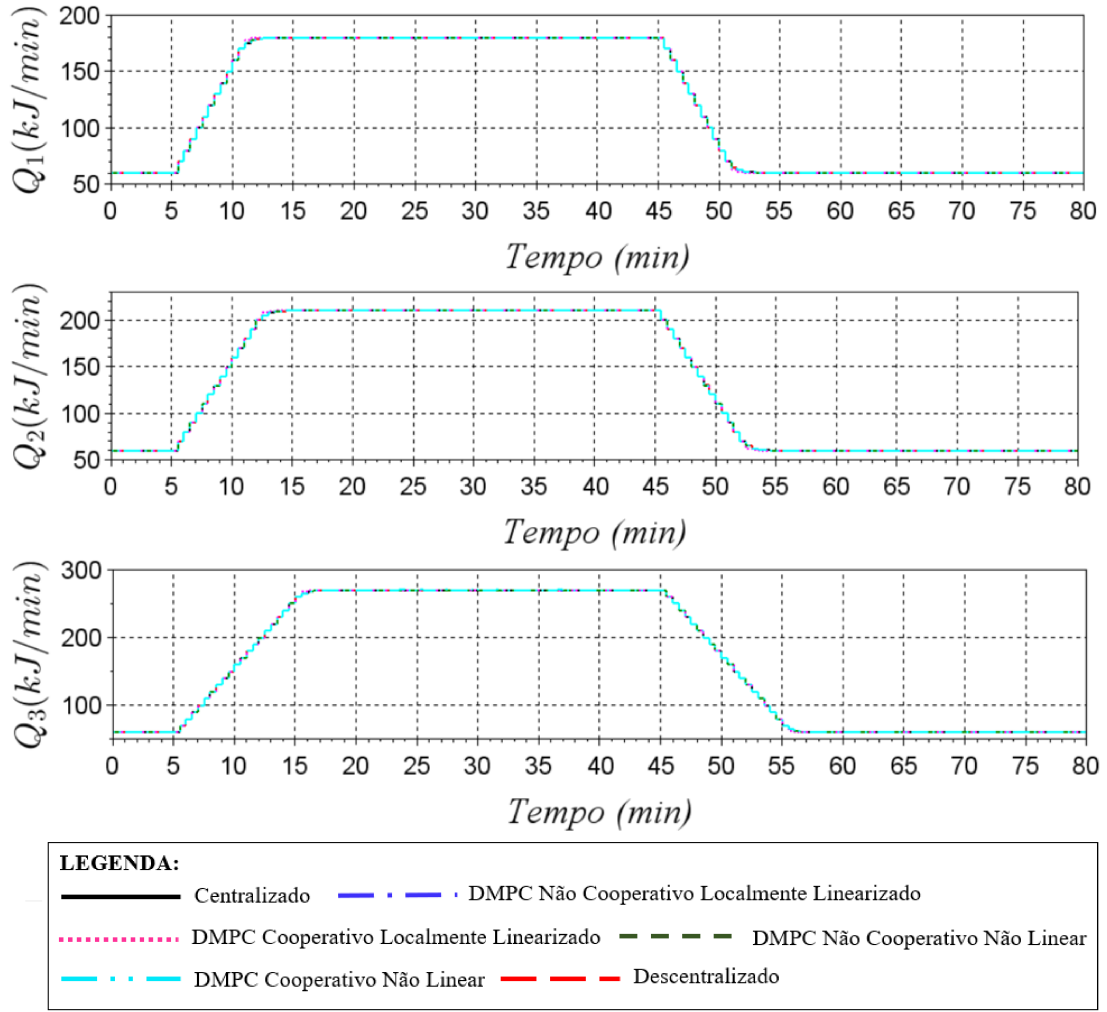


Figura 5.13: Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 1 com restrição em Δu_i .

Analisando as Figuras (5.10-5.13) nota-se que as respostas de todas as estruturas de controle são equivalentes e as curvas estão sobrepostas. Além disso, nota-se claramente que o controle neste cenário foi predominantemente definido pela restrição imposta em Δu_i . Apesar dos resultados obtidos serem equivalentes, a apresentação desses resultados é interessante para comprovar que os DMPCs propostos são capazes de lidar satisfatoriamente com restringimentos dessa natureza.

Devido às respostas dos controladores serem idênticas não se faz necessário fazer uma comparação entre os somatórios dos erros quadráticos e nem dos índices I_y e I_u para comparação com o controle centralizado. Pode-se afirmar que todos os controles obtiveram o mesmo desempenho. Mesmo assim, é interessante fazer uma comparação dos tempos de processamento dos cálculos, e isso é feito na Tabela (5.12).

Tabela 5.12: Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 1 com restrição em Δu_i .

Tipo de controle	Tempo total (s)	Tempo máximo (s)
Centralizado	1305,91	23,52
Descentralizado	59,42	0,74
DMPC Não Cooperativo Linearizado	43,58	0,59
DMPC Cooperativo Linearizado	487,98	5,58
DMPC Não Cooperativo Não Linear	134,33	1,68
DMPC Cooperativo Não Linear (i=5)	853,64	13,81

Nota-se que novamente o tipo de controle com menor tempo de processamento é o DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado. O controle DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear é o que apresenta maior tempo de processamento, mesmo com a limitação máxima de 5 iteração em cada instante de amostragem. Sem considerar tal restrição, o tempo total de processamento do DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear é igual a 112441,45 segundos, o que ultrapassa o tempo total de operação da planta (80 minutos). Vale ressaltar, que mesmo com a limitação de 5 iterações por instante de amostragem, não houve perdas significativas no desempenho deste controlador. Em termos do tempo máximo, todas as abordagens são praticáveis em uma situação real, já que nenhuma ultrapassa o tempo de amostragem definido ($T_s = 30$ segundos).

A seguir, tem-se a descrição do estudo de caso 2, bem como os resultados obtidos.

5.3 Estudo de caso 2

5.3.1 Descrição do processo - Estudo de caso 2

O estudo de caso 2 corresponde ao mesmo sistema apresentando no estudo de caso 1, mas com diferenças nas dimensões dos equipamentos diferentes e em alguns outros parâmetros do sistema. Os novos parâmetros considerados são apresentados na Tabela (5.13).

O estudo de caso em questão foi selecionado, pois a sua menor dimensão dificulta o seu controle. Em plantas de menor dimensão, as perturbações podem ter grandes impactos na dinâmica da planta. Esta característica é interessante quando deseja-se avaliar o desempenho de uma nova abordagem de controle. Na Tabela (5.14) tem-se os estados estacionários considerados neste estudo de caso.

Tabela 5.13: Parâmetros do modelo do estudo de caso 2.

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
A_1	0,02	m^2	k_A	2	$1/min$
A_2	0,02	m^2	k_B	0,18	$1/min$
A_3	0,01	m^2	E_A/R	100	K
ρ	600	kg/m^3	E_B/R	150	K
c_P	5	$kJ/(kg.K)$	ΔH_A	-200	kJ/kg
K_{v1}	8,5	$kg/(m.min)$	ΔH_B	-50	kJ/kg
K_{v2}	8,5	$kg/(m.min)$	α_A	1,0	-
K_{v3}	8,5	$kg/(m.min)$	α_B	1,0	-
x_{A0}	1	%	α_C	2,0	-
x_{B0}	0	%	T_0	313	K

Tabela 5.14: Estados estacionários do sistema do estudo de caso 2.

1° Estado Estacionário ($ss1$)	2° Estado Estacionário ($ss2$)
$H_{1ss1} = 0,706 \text{ m}$	$H_{1ss2} = 0,423 \text{ m}$
$x_{A1ss1} = 0,233$	$x_{A1ss2} = 0,194$
$x_{B1ss1} = 0,604$	$x_{B1ss2} = 0,570$
$T_{1ss1} = 345,516 \text{ K}$	$T_{1ss2} = 348,246 \text{ K}$
$H_{2ss1} = 1,176 \text{ m}$	$H_{2ss2} = 0,541 \text{ m}$
$x_{A2ss1} = 0,173$	$x_{A2ss2} = 0,118$
$x_{B2ss1} = 0,626$	$x_{B2ss2} = 0,598$
$T_{2ss1} = 348,250 \text{ K}$	$T_{2ss2} = 352,015 \text{ K}$
$H_{3ss1} = 0,939 \text{ m}$	$H_{3ss2} = 0,351 \text{ m}$
$x_{A3ss1} = 0,194$	$x_{A3ss2} = 0,134$
$x_{B3ss1} = 0,701$	$x_{B3ss2} = 0,677$
$T_{3ss1} = 348,300 \text{ K}$	$T_{3ss2} = 352,407 \text{ K}$
$F_{f1ss1} = 4,000 \text{ kg/min}$	$F_{f1ss2} = 2,000 \text{ kg/min}$
$Q_{1ss1} = 2,000 \text{ kJ/min}$	$Q_{1ss2} = 6,000 \text{ kJ/min}$
$F_{f2ss1} = 4,000 \text{ kg/min}$	$F_{f2ss2} = 1,000 \text{ kg/min}$
$Q_{2ss1} = 2,000 \text{ kJ/min}$	$Q_{2ss2} = 9,000 \text{ kJ/min}$
$F_{Rss1} = 2,000 \text{ kg/min}$	$F_{Rss2} = 1,600 \text{ kg/min}$
$Q_{3ss1} = 2,000 \text{ kJ/min}$	$Q_{3ss2} = 9,000 \text{ kJ/min}$

As saídas controladas e as entradas manipuladas são, assim como no estudo de caso

anterior, respectivamente:

$$\mathbf{y} = [H_1, T_1, H_2, T_2, H_3, T_3]^T \quad (5.31)$$

$$\mathbf{u} = [F_{f1}, Q_1, F_{f2}, Q_2, F_R, Q_3]^T \quad (5.32)$$

Na próxima seção, tem-se uma análise do sistema considerado no estudo de caso 2.

5.3.2 Análise do sistema - Estudo de caso 2

Nesta seção serão apresentadas algumas características do estado de caso 2. Essas características são interessante para o controle do mesmo. As matrizes \mathbf{A} do modelo discreto e linearizado em torno dos estados estacionários $ss1$ e $ss2$ apresentam todos os autovalores dentro do círculo unitário. Logo pode-se afirmar que o sistema é estável em malha aberta nos pontos considerados. O número de condicionamento deste sistema em $ss1$ é 7125946,5 e em $ss2$ é 17313438,0, o caracteriza mau condicionamento. Apesar disso, a estrutura do controle foi mantida e os controladores foram aplicados nesse estudo de caso. A seguir, tem-se as matrizes RGAs em $ss1$ e $ss2$:

$$\mathbf{RGA}_{ss1} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,17 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,17 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & -0,02 \\ 0,17 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,83 & 0,00 \\ 0,00 & -0,02 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,02 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$\mathbf{RGA}_{ss2} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,04 & 0,00 & -0,04 & 0,00 & 0,00 \\ -0,17 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,17 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,04 & 0,00 & -0,04 \\ 0,17 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,83 & 0,00 \\ 0,00 & -0,04 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,04 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Analisando as matrizes \mathbf{RGA}_{ss1} e \mathbf{RGA}_{ss2} e utilizando a metodologia de pareamento da literatura de controle é possível fazer a seleção dos pares (entrada e saída) utilizada no controle totalmente descentralizado. Os pares selecionados foram: $F_{f1} - H_1$, $Q_1 - T_1$, $F_{f2} - H_2$, $Q_2 - T_2$, $F_R - H_3$ e $Q_3 - T_3$.

Na próxima seção tem-se os resultados obtidos no estudo de caso 2.

5.3.3 Resultados - Estudo de caso 2

Neste estudo de caso, o cenário avaliado só considera restrições nos limites superiores e inferiores para as variáveis manipuladas e essas limitações estão presentes na Tabela (5.15).

Tabela 5.15: Restrições nas entradas manipuladas do sistema do estudo de caso 2.

Entrada u_i	Valor Mínimo	Valor Máximo	Unidade
Ff_1	0	10	kg/min
Q_1	0	10	kJ/min
Ff_2	0	10	kg/min
Q_2	0	10	kJ/min
F_R	0	10	kg/min
Q_3	0	10	kJ/min

O objetivo de controle é manter as entradas manipuladas e saídas controladas quanto mais próximas possíveis das suas respectivas trajetórias pré-definidas. A Figura (5.14) apresenta uma representação simplificada das trajetórias desejáveis para as variáveis controladas ($H_1, T_1, H_2, T_2, H_3, T_3$) e as variáveis manipuladas ($Ff_1, Q_1, Ff_2, Q_2, F_R, Q_3$)

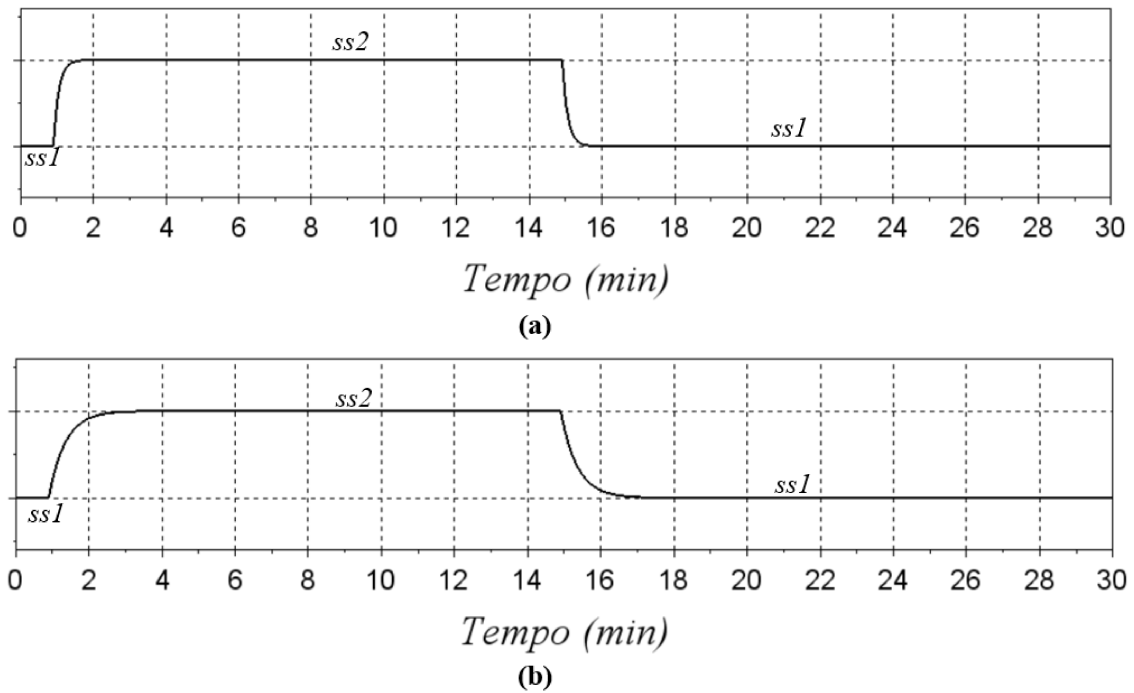


Figura 5.14: Trajetória de referência desejável para as (a) variáveis controladas e (b) manipuladas para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

A Figura (5.14) representa de forma simplificada as trajetórias desejáveis para as variáveis controladas e manipuladas do processo. Nota-se que deseja-se que o controle mantenha o processo no estado estacionário 1 (*ss1*) até o instante de tempo igual a 1 minuto e a partir deste momento leve o processo ao estado estacionário 2 (*ss2*) de maneira gradual ($\alpha_y = 0,5$ e $\alpha_u = 0,8$) e o mantenha neste ponto até o instante de tempo igual a 15 minutos, quando deverá retornar ao estado estacionário 1 e mantê-lo neste ponto até o instante de tempo igual a 30 minutos, quando o tempo considerado de operação da planta finaliza.

Com relação aos parâmetros de sintonia inerentes aos controladores preditivos baseados em modelo, tem-se as seguintes escolhas para as matrizes de ponderação e horizontes de predição e de controle:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \mathbf{I}_{n_y \times n_y} \\ \mathbf{R} &= 100 \cdot \mathbf{I}_{m \times m} \\ \mathbf{W} &= 10 \cdot \mathbf{I}_{m \times m} \\ H_p &= 5 \\ H_u &= 5\end{aligned}$$

O tempo de amostragem escolhido neste estudo de caso foi igual a $T_S = 0,1$ min. A seguir são apresentados os resultados dinâmicos para as saídas controladas (Figuras (5.15) e (5.16)) e os resultados dinâmicos para as entradas manipuladas (Figuras (5.17) e (5.18)).

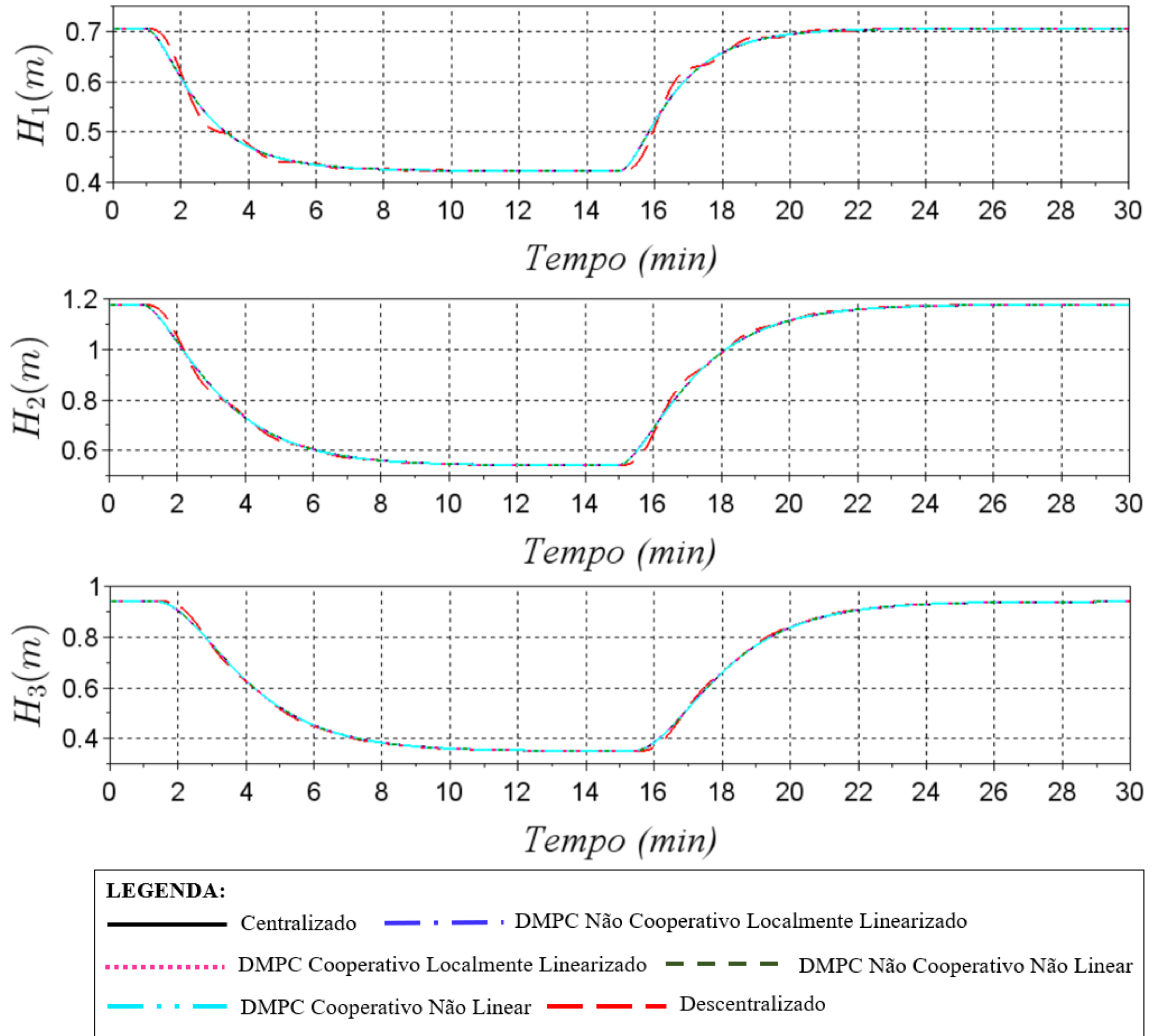


Figura 5.15: Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

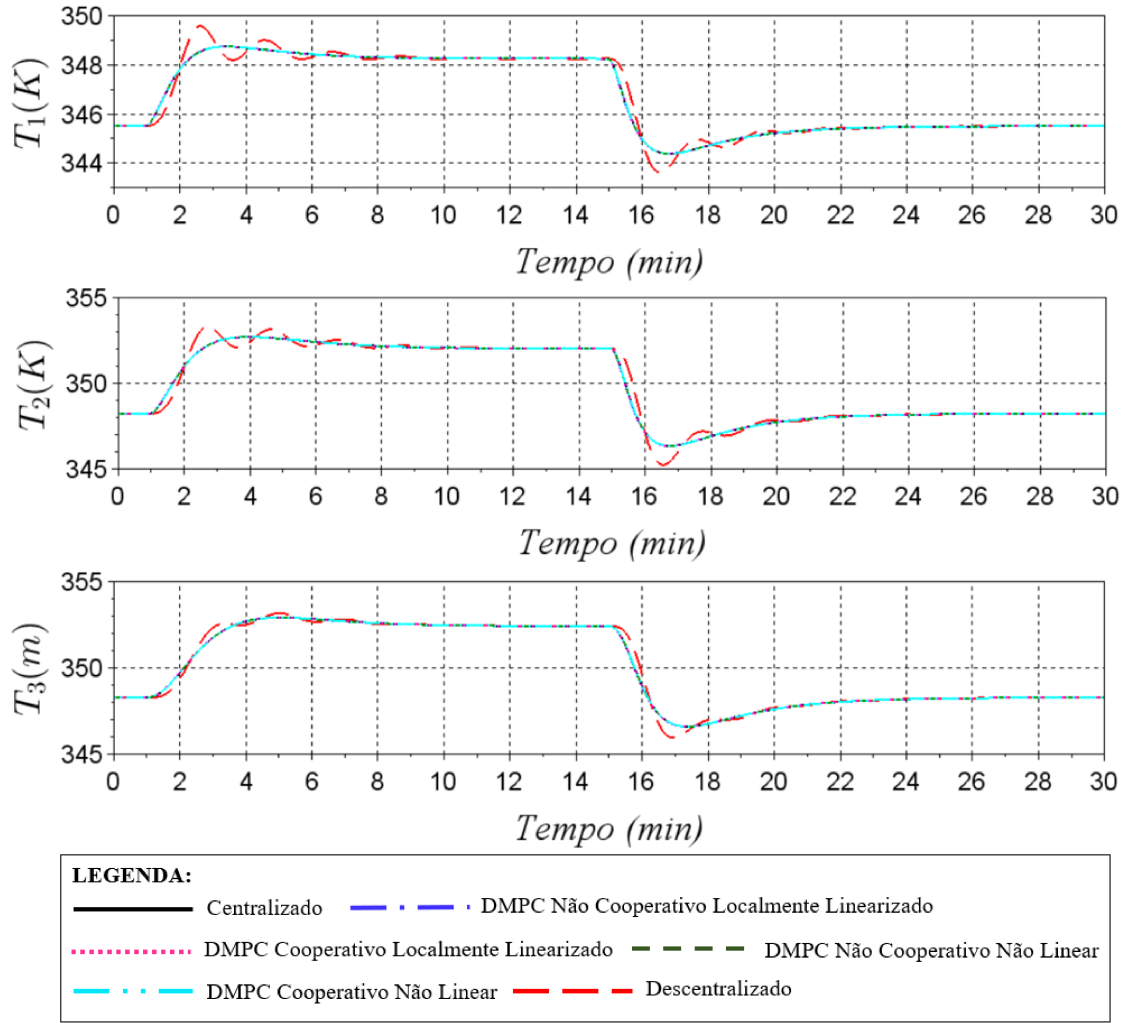


Figura 5.16: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

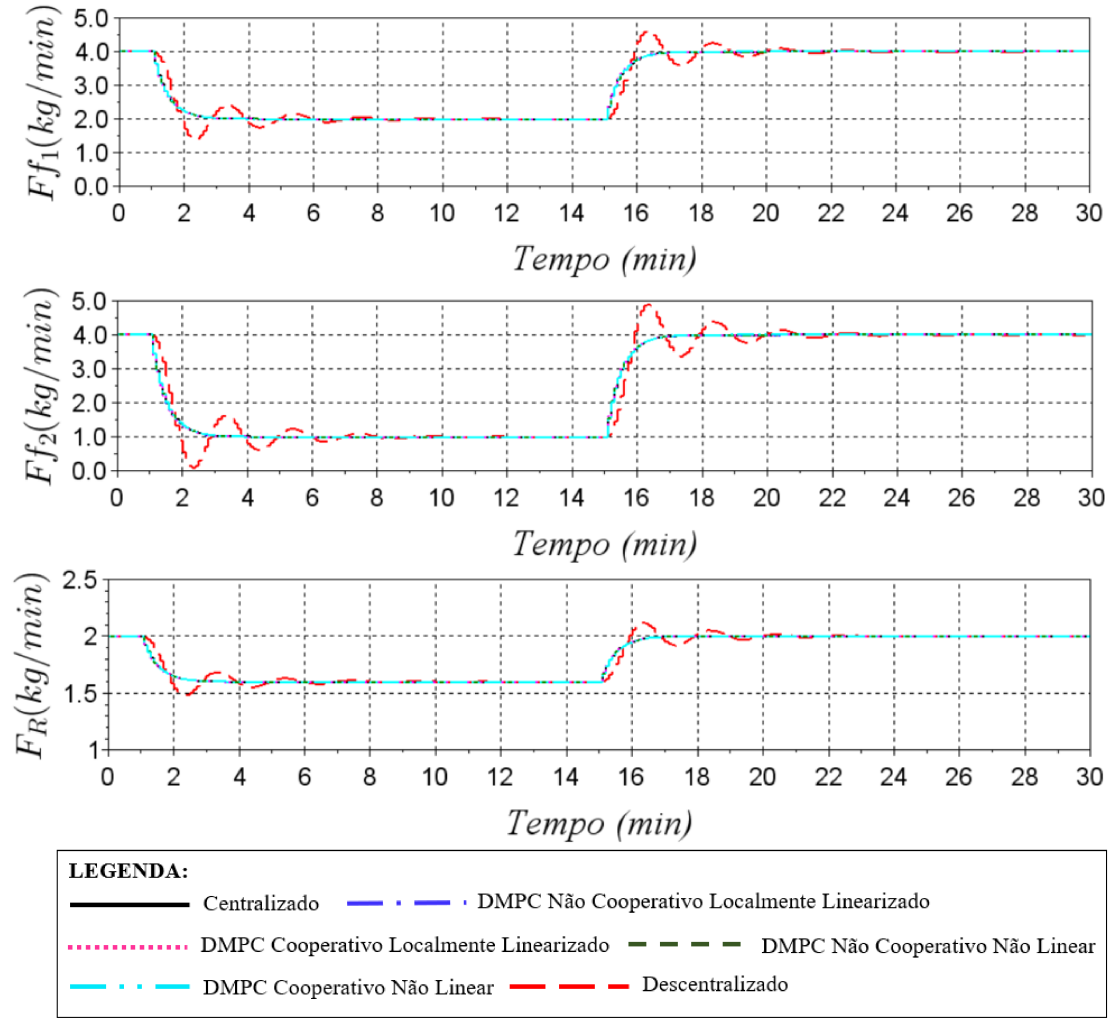


Figura 5.17: Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

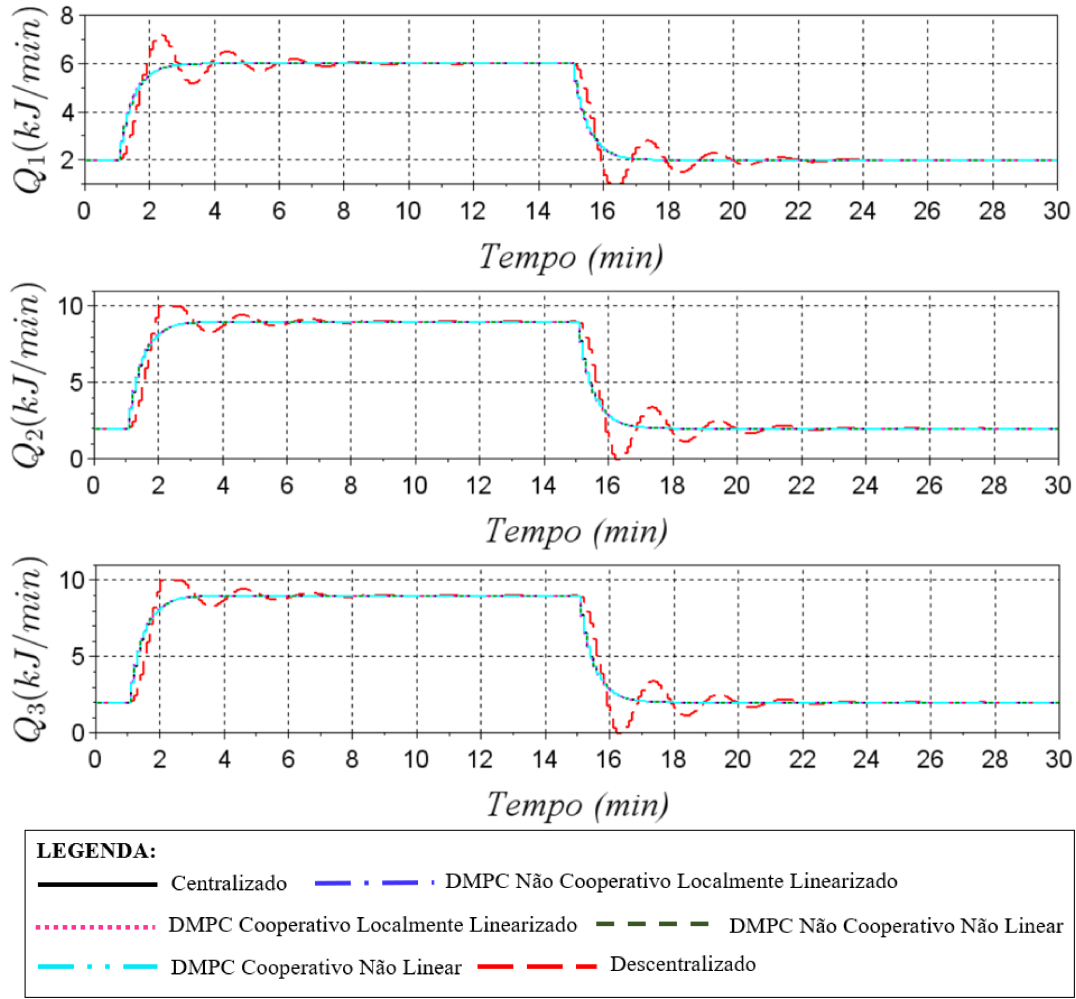


Figura 5.18: Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

A partir das últimas figuras, nota-se que as respostas obtidas pelos controle centralizado e as propostas de controle DMPC apresentam curvas coincidentes, o que mostra equivalência entre as respostas. Nota-se, que o controle descentralizado não tem uma resposta satisfatória, apresentando oscilações antes de estabilizar e em alguns pontos chega a alcançar os limites superiores e inferiores impostos para as entradas Q_2 e Q_3 . A Tabela (5.16) apresenta os tempos de processamento dos cálculos dos controladores.

Tabela 5.16: Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	Tempo total (s)	Tempo máximo (s)
Centralizado	228,96	2,97
Descentralizado	80,41	0,59
DMPC Não Cooperativo Linearizado	74,88	0,83
DMPC Cooperativo Linearizado	377,16	3,95
DMPC Não Cooperativo Não Linear	438,43	4,26
DMPC Cooperativo Não Linear (i=5)	1315,35	6,68

Neste estudo de caso, o controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado apresenta o menor tempo de processamento, seguido do controle descentralizado. O controle que demanda maior tempo para processamento de seus respectivos cálculos de controle é o DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear. O tempo apresentado na Tabela (5.16) para essa abordagem de controle é com o limite máximo de 5 iterações por instante de amostragem. Essa restrição não impactou consideravelmente o desempenho do mesmo. Caso não houve essa limitação, o tempo total de processamento deste controle seria aproximadamente 42036 segundos, ultrapassando assim, os 30 minutos de operação da planta considerados. Em termos do tempo máximo, nenhuma abordagem ultrapassa os 10 segundos do tempo de amostragem.

As Tabelas (5.17) e (5.18) apresentam uma comparação entre os diversos tipos de controle analisados neste trabalho, através do SSE_y . A Tabela (5.17) se refere às alturas de líquido (H_1 , H_2 e H_3) em cada equipamento e a Tabela (5.18) se refere às temperaturas controladas (T_1 , T_2 e T_3). As Tabelas (5.19) e (5.20) apresentam o SSE_u . A Tabela (5.19) faz referência às vazões mássicas manipuladas na planta (F_{f1} , F_{f2} e F_R) e a Tabela (5.20) se refere aos calores do processo (Q_1 , Q_2 e Q_3).

Tabela 5.17: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas H_1 , H_2 e H_3 para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_y para H_1 , H_2 e H_3
Centralizado	27,17
Descentralizado	22,72
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	27,16
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	27,00
DMPC Não Cooperativo Não Linear	27,17
DMPC Cooperativo Não Linear	27,19

Tabela 5.18: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas T_1 , T_2 e T_3 para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_y para T_1 , T_2 e T_3
Centralizado	521,98
Descentralizado	733,57
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	521,96
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	515,53
DMPC Não Cooperativo Não Linear	521,99
DMPC Cooperativo Não Linear	523,66

Tabela 5.19: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas F_{f1} , F_{f2} e F_R para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_u para F_{f1} , F_{f2} e F_R
Centralizado	3,33
Descentralizado	48,27
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	3,31
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	2,83
DMPC Não Cooperativo Não Linear	3,33
DMPC Cooperativo Não Linear	3,39

Tabela 5.20: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas Q_1 , Q_2 e Q_3 para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_u para Q_1 , Q_2 e Q_3
Centralizado	29,55
Descentralizado	358,88
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	29,55
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	25,35
DMPC Não Cooperativo Não Linear	29,55
DMPC Cooperativo Não Linear	29,55

Analisando os resultados apresentados nas últimas tabelas, nota-se que os erros cometidos pelos controle centralizado e as versões DMPC dos controles são próximos. A maior diferença se concentra nos erros cometidos pelo controle descentralizado. Apesar de apresentar menor somatório dos erros quadráticos para as variáveis H_1 , H_2 e H_3 , para todas as outras variáveis, os valores de SSE são consideravelmente maiores para a estrutura de

controle descentralizada. Mesmo que pequena, nota-se que há uma diminuição dos erros cometidos pelo DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado. Devido a escala dos gráficos gerados, não é possível detectar facilmente esta diferença. Para facilitar a visualização e comprovar que há diferenças nos comportamentos das variáveis entre o DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado e os outros controles distribuídos e o centralizado, considere a Figura (5.19), que traz duas ampliações nos gráficos apresentados anteriormente para as variáveis T_3 e Q_3 .

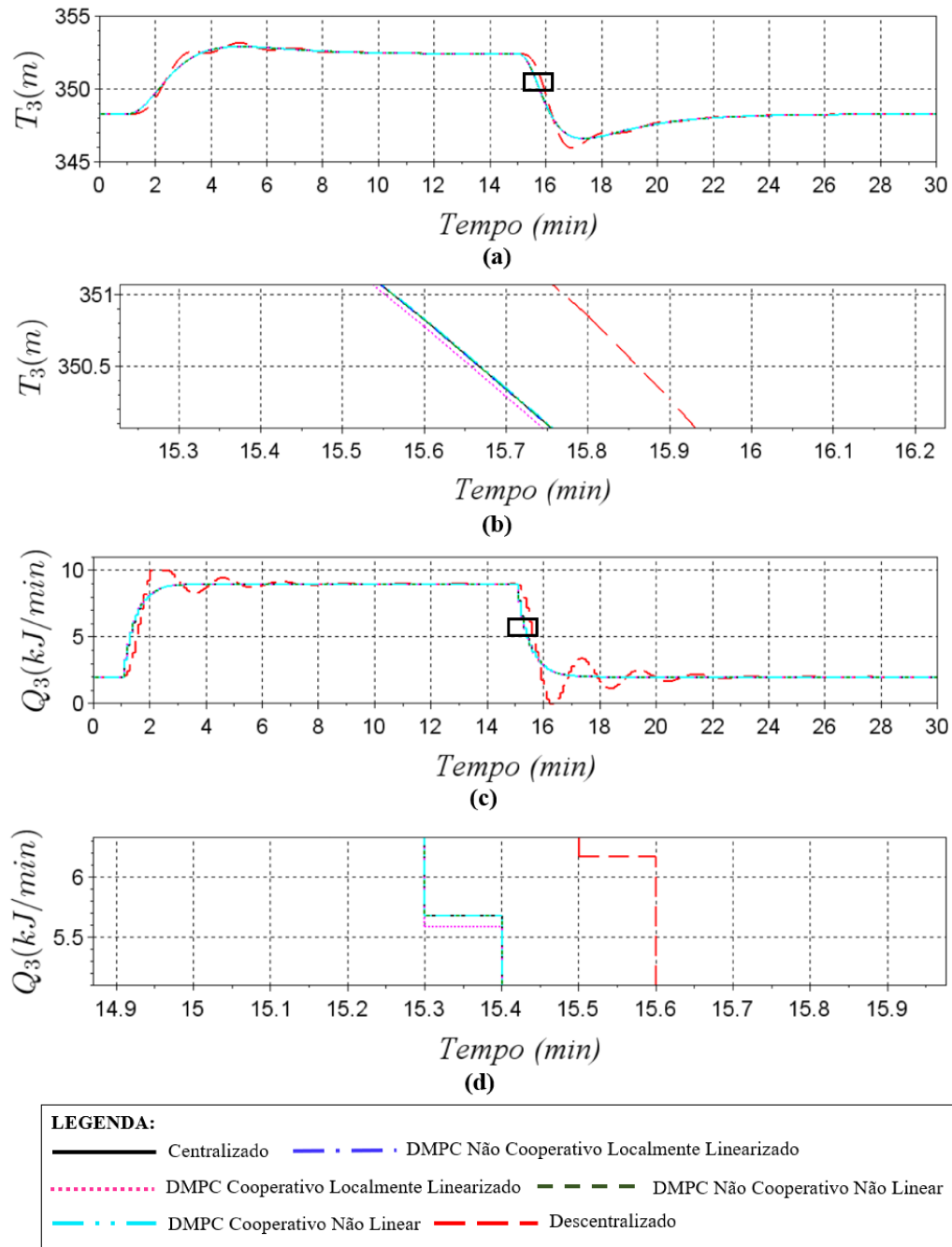


Figura 5.19: Respostas dinâmicas das variáveis (a) T_3 e (c) Q_3 com destaque nas respectivas ampliações de (b) da variável T_3 e de (d) da variável Q_3 .

Nota-se agora, a partir da Figura (5.19) que há diferenças nos comportamentos das variáveis para os diferentes tipos de controle analisados. Isto justifica as diferenças nos valores apresentados nas Tabelas (5.17-5.20). O controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado foi o que apresentou menores erros, ou seja, obteve respostas mais próximas às trajetórias de referência. Vale novamente ressaltar, que não houve uma preocupação em otimizar as sintonias dos controladores. Se isso fosse executado de forma meticulosa, seria possível obter para o controle centralizado, a melhor solução possível de controle.

O desempenho das estratégias de controle descentralizada e as distribuídas foram comparados com o controle centralizada, através dos índices I_y e I_u , já citados anteriormente. As Tabelas (5.21) e (5.22), representam essa comparação de desempenhos, avaliando os índices I_y e I_u , respectivamente.

Tabela 5.21: Comparação entre os desempenhos dos controladores para as saídas controladas para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	I_y	Desempenho
Centralizado	92,97	-
Descentralizado	94,72	↓ 1,88%
DMPC Localmente Linearizado Não Cooperativo	92,95	↑ 0,03%
DMPC Localmente Linearizado Cooperativo	92,41	↑ 0,60%
DMPC Não Linear Não Cooperativo	92,97	-
DMPC Não Linear Cooperativo	93,02	↓ 0,05%

Tabela 5.22: Comparação entre os desempenhos dos controladores para as entradas manipuladas para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	I_u	Desempenho
Centralizado	1,98	-
Descentralizado	43,88	↓ 2115,42%
DMPC Localmente Linearizado Não Cooperativo	1,98	↑ 0,15%
DMPC Localmente Linearizado Cooperativo	1,72	↑ 13,29%
DMPC Não Linear Não Cooperativo	1,98	-
DMPC Não Linear Cooperativo	1,99	↓ 0,58%

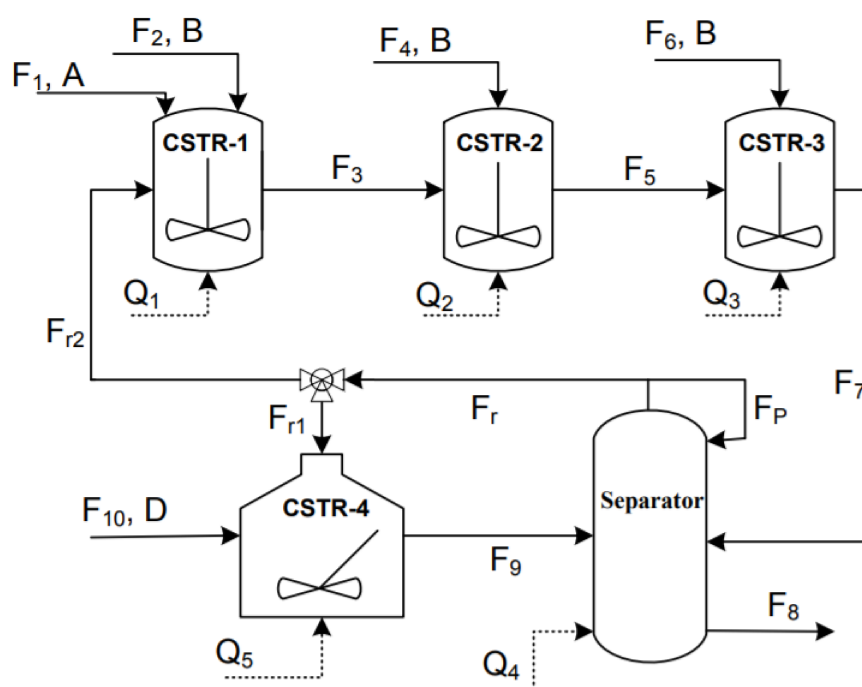
A partir das tabelas acima, nota-se que, para as saídas controladas houve um aumento no desempenho do DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado de cerca de 0,6% em relação ao controle centralizado. Para as entradas manipuladas, o aumento foi maior que 13%. Já para o controle descentralizado, é possível constatar uma pequena

perda de desempenho de aproximadamente 2% para as saídas controladas, mas para as entradas manipuladas, essa queda no desempenho é maior que 2000%, quando comparado com a estrutura centralizada de controle. Na próxima seção, tem-se o estudo de caso 3, que avalia os diferentes tipos de controle em um processo de alquilação de benzeno.

5.4 Estudo de caso 3

5.4.1 Descrição do processo - Estudo de caso 3

O estudo de caso 3 consiste no processo de alquilação de benzeno com etileno para produção de etilbenzeno e é representado na Figura (5.20). Este processo é amplamente utilizado na indústria petroquímica. A desidratação do produto produz estireno, que é o precursor do poliestireno e muitos outros copolímeros. Nas últimas duas décadas, vários métodos e resultados de simulação de alquilação de benzeno com catalisadores foram relatados na literatura. O modelo do processo de alquilação de benzeno apresentado aqui é baseado nos trabalhos de Hamid et al. (2004), Lee e Froment (2008), Perego e Ingallina (2004) e You et al. (2006). Em outros diversos trabalhos, tem-se a descrição e aplicação do processo para fins de controle, como por exemplo em Liu et al. (2010), Christofides et al. (2013) e Chilin et al. (2012).



O processo considerado neste trabalho consiste em quatro reatores CSTRs e um separador tipo *flash*, como apresentado na Figura (5.20). Os CSTR-1, CSTR-2 e CSTR-3 estão em série e são responsáveis pela alquilação de benzeno com etileno. O benzeno puro é alimentado a partir da corrente F_1 e o etileno puro é alimentado a partir das correntes F_2 , F_4 e F_6 . Duas reações catalíticas ocorrem em CSTR-1, CSTR-2 e CSTR-3. O benzeno (A) reage com o etileno (B) e produz o produto desejado etilbenzeno (C) (*reação 1*); o etilbenzeno pode ainda reagir com o etileno para formar 1,3-dietilbenzeno (D) (*reação 2*), um subproduto. O efluente de CSTR-3, incluindo os produtos e os reagentes remanescentes, é alimentado a um separador tanque tipo *flash*, onde a maioria do benzeno é separada por técnicas de vaporização e condensação, sendo retirado na parte superior do separador e reciclado de volta à planta. A corrente de produto que sai da parte inferior do tanque é removida. Uma porção do fluxo de reciclo é alimentado de volta ao CSTR-1 (Fr_2) e outra parte de corrente de reciclo é alimentada ao reator CSTR-4 (Fr_1) juntamente com uma corrente de 1,3-dietilbenzeno adicional (F_{10}) proveniente de um sistema de destilação adicional do processo de alquilação que não será considerado neste exemplo. No reator CSTR-4 ocorrem a reação 2 e a reação de transalquilação catalítica entre 1,3-dietilbenzeno (D) com benzeno(A) para produção de etilbenzeno(C) (*reação 3*). Todos os produtos químicos que saem do CSTR-4 passam pelo separador. Todos os materiais nas reações estão em fase líquida devido à alta pressão e seus volumes molares são considerados constantes.

As equações dinâmicas que descrevem o comportamento do processo em questão, obtidas pelos balanços de massa e energia a partir de hipóteses padrões de modelagem, são apresentadas a seguir:

CSTR-1:

$$\frac{dC_{A1}}{dt} = \frac{F_1C_{A0} + F_{r2}C_{Ar} - F_3C_{A1}}{V_1} - r_1(T_1, C_{A1}, C_{B1}) \quad (5.35)$$

$$\frac{dC_{B1}}{dt} = \frac{F_2C_{B0} + F_{r2}C_{Br} - F_3C_{B1}}{V_1} - r_1(T_1, C_{A1}, C_{B1}) - r_2(T_1, C_{B1}, C_{C1}) \quad (5.36)$$

$$\frac{dC_{C1}}{dt} = \frac{F_{r2}C_{Cr} - F_3C_{C1}}{V_1} + r_1(T_1, C_{A1}, C_{B1}) - r_2(T_1, C_{B1}, C_{C1}) \quad (5.37)$$

$$\frac{dC_{D1}}{dt} = \frac{F_{r2}C_{Dr} - F_3C_{D1}}{V_1} + r_2(T_1, C_{B1}, C_{C1}) \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} = & \frac{Q_1 + F_1C_{A0}H_A(T_{A0}) + F_2C_{B0}H_B(T_{B0})}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i1}C_{pi}V_1} + \\ & + \frac{\sum_i^{A,B,C,D} (F_{r2}C_{ir}H_i(T_4) - F_3C_{i1}H_i(T_1))}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i1}C_{pi}V_1} + \\ & + \frac{-\Delta H_{r1}r_1(T_1, C_{A1}, C_{B1}) - \Delta H_{r2}r_2(T_1, C_{B1}, C_{C1})}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i1}C_{pi}} \end{aligned} \quad (5.39)$$

CSTR-2:

$$\frac{dC_{A2}}{dt} = \frac{F_3C_{A1} - F_5C_{A2}}{V_2} - r_1(T_2, C_{A2}, C_{B2}) \quad (5.40)$$

$$\frac{dC_{B2}}{dt} = \frac{F_3C_{B1} + F_4C_{B0} - F_5C_{B2}}{V_2} - r_1(T_2, C_{A2}, C_{B2}) - r_2(T_2, C_{B2}, C_{C2}) \quad (5.41)$$

$$\frac{dC_{C2}}{dt} = \frac{F_3C_{C1} - F_5C_{C2}}{V_2} + r_1(T_2, C_{A2}, C_{B2}) - r_2(T_2, C_{B2}, C_{C2}) \quad (5.42)$$

$$\frac{dC_{D2}}{dt} = \frac{F_3C_{D1} - F_5C_{D2}}{V_2} + r_2(T_2, C_{B2}, C_{C2}) \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{dt} = & \frac{Q_2 + F_4C_{B0}H_B(T_{B0})}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i2}C_{pi}V_2} + \\ & + \frac{\sum_i^{A,B,C,D} (F_3C_{i1}H_i(T_1) - F_5C_{i2}H_i(T_2))}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i2}C_{pi}V_2} + \\ & + \frac{-\Delta H_{r1}r_1(T_2, C_{A2}, C_{B2}) - \Delta H_{r2}r_2(T_2, C_{B2}, C_{C2})}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i2}C_{pi}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

CSTR-3:

$$\frac{dC_{A3}}{dt} = \frac{F_5C_{A2} - F_7C_{A3}}{V_3} - r_1(T_3, C_{A3}, C_{B3}) \quad (5.45)$$

$$\frac{dC_{B3}}{dt} = \frac{F_5C_{B2} + F_6C_{B0} - F_7C_{B3}}{V_3} - r_1(T_3, C_{A3}, C_{B3}) - r_2(T_3, C_{B3}, C_{C3}) \quad (5.46)$$

$$\frac{dC_{C3}}{dt} = \frac{F_5C_{C2} - F_7C_{C3}}{V_3} + r_1(T_3, C_{A3}, C_{B3}) - r_2(T_3, C_{B3}, C_{C3}) \quad (5.47)$$

$$\frac{dC_{D3}}{dt} = \frac{F_5C_{D2} - F_7C_{D3}}{V_3} + r_2(T_3, C_{B3}, C_{C3}) \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_3}{dt} = & \frac{Q_3 + F_6C_{B0}H_B(T_{B0})}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i3}C_{pi}V_3} + \\ & + \frac{\sum_i^{A,B,C,D} (F_5C_{i2}H_i(T_2) - F_7C_{i3}H_i(T_3))}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i3}C_{pi}V_3} + \\ & + \frac{-\Delta H_{r1}r_1(T_3, C_{A3}, C_{B3}) - \Delta H_{r2}r_2(T_3, C_{B3}, C_{C3})}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i3}C_{pi}} \end{aligned} \quad (5.49)$$

SEPARADOR:

$$\frac{dC_{A4}}{dt} = \frac{F_7C_{A3} + F_9C_{A5} - F_rC_{Ar} - F_8C_{A4}}{V_4} \quad (5.50)$$

$$\frac{dC_{B4}}{dt} = \frac{F_7C_{B3} + F_9C_{B5} - F_rC_{Br} - F_8C_{B4}}{V_4} \quad (5.51)$$

$$\frac{dC_{C4}}{dt} = \frac{F_7C_{C3} + F_9C_{C5} - F_rC_{Cr} - F_8C_{C4}}{V_4} \quad (5.52)$$

$$\frac{dC_{D4}}{dt} = \frac{F_7C_{C3} + F_9C_{C5} - F_rC_{Cr} - F_8C_{C4}}{V_4} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_4}{dt} = & \frac{Q_4 + \sum_i^{A,B,C,D} (F_7C_{i3}H_i(T_3) + F_9C_{i5}H_i(T_5))}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i4}C_{pi}V_4} + \\ & + \frac{\sum_i^{A,B,C,D} (-M_iH_i(T_4) - F_8C_{i4}H_i(T_4) - M_iH_{vapi})}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i4}C_{pi}V_4} \end{aligned} \quad (5.54)$$

CSTR-4:

$$\frac{dC_{A5}}{dt} = \frac{F_{r1}C_{Ar} - F_9C_{A5}}{V_5} - r_3(T_5, C_{A5}, C_{B5}) \quad (5.55)$$

$$\frac{dC_{B5}}{dt} = \frac{F_{r1}C_{Br} + F_9C_{B5}}{V_5} - r_2(T_5, C_{A5}, C_{B5}) \quad (5.56)$$

$$\frac{dC_{C5}}{dt} = \frac{F_{r1}C_{Cr} - F_9C_{C5}}{V_5} - r_2(T_5, C_{B5}, C_{C5}) + 2r_3(T_5, C_{A5}, C_{D5}) \quad (5.57)$$

$$\frac{dC_{D5}}{dt} = \frac{F_{r1}C_{Dr} + F_{10}C_{D0} - F_9C_{D5}}{V_5} + r_2(T_5, C_{B5}, C_{C5}) - r_3(T_5, C_{A5}, C_{D5}) \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_5}{dt} = & \frac{Q_5 + F_{10}C_{D0}H_D(T_{D0})}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i5}C_{pi}V_5} + \\ & + \frac{\sum_i^{A,B,C,D} (F_{r1}C_{ir}H_i(T_4) - F_9C_{i5}H_i(T_5))}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i5}C_{pi}V_5} + \\ & + \frac{-\Delta H_{r2}r_2(T_5, C_{B5}, C_{C5}) - \Delta H_{r3}r_3(T_5, C_{A5}, C_{D5})}{\sum_i^{A,B,C,D} C_{i5}C_{pi}} \end{aligned} \quad (5.59)$$

em que r_1 , r_2 e r_3 são as taxas reacionais das reações 1, 2 e 3, respectivamente e H_i para $i = A, B, C, D$ são as entalpias dos reagentes. As taxas de reação são relacionadas com as concentrações dos reagentes e com a temperatura em cada reator conforme as seguintes equações:

$$r_1(T, C_A, C_B) = 0,084e^{\frac{-9502}{RT}} C_A^{0,32} C_B^{1,5} \quad (5.60)$$

$$r_2(T, C_B, C_C) = \frac{0,0850e^{\frac{-20643}{RT}} C_B^{2,5} C_C^{0,5}}{1 + k_{EB2}C_D} \quad (5.61)$$

$$r_3(T, C_A, C_D) = \frac{66,1e^{\frac{-61280}{RT}} C_A^{1,0218} C_D}{1 + k_{EB3}C_A} \quad (5.62)$$

em que

$$k_{EB2} = 0,152e^{\frac{-3933}{RT}} \quad (5.63)$$

$$k_{EB3} = 0,490e^{\frac{-50870}{RT}} \quad (5.64)$$

As capacidades térmicas das espécies são consideradas constantes e as entalpias molares

têm uma dependência linear com a temperatura da seguinte maneira:

$$H_i = H_{iref} + C_{pi}(T - T_{ref}), i = A, B, C, D \quad (5.65)$$

sendo $C_{pi}, i = A, B, C, D$, as capacidades térmicas. O modelo do separador tipo *flash* é desenvolvido sob o pressuposto de que a volatilidade relativa de cada espécie tem uma correlação linear com a temperatura do vaso dentro da faixa de temperatura de operação do tanque, conforme apresentado nas equações a seguir:

$$\alpha_A = 0,0449T_4 + 10 \quad (5.66)$$

$$\alpha_B = 0,0260T_4 + 10 \quad (5.67)$$

$$\alpha_C = 0,0065T_4 + 0,5 \quad (5.68)$$

$$\alpha_D = 0,0058T_4 + 0,25 \quad (5.69)$$

em que $\alpha_i, i = A, B, C, D$ representa as volatilidades relativas. Também foi considerado que há uma quantidade insignificante de reação ocorrendo no separador e uma fração do fluxo total condensado é reciclado de volta aos reatores. As seguintes equações algébricas modelam a composição do fluxo que sai pela parte superior do tanque em relação à composição do líquido que é retirado da parte inferior do tanque separador:

$$M_i = k \frac{\alpha_i(F_7C_{i3} + F_9C_{i5}) \sum_j^{A,B,C,D} (F_7C_{j3} + F_9C_{j5})}{\sum_j^{A,B,C,D} \alpha_j (F_7C_{j3} + F_9C_{j5})}, i = A, B, C, D \quad (5.70)$$

em que $M_i, i = A, B, C, D$ são as taxas de fluxo molar dos reagentes que saem pela parte superior do tanque e k é fração deste fluxo que é condensado e reciclado para os reatores. A partir de $M_i, i = A, B, C, D$, pode-se calcular as concentrações os reagentes nas correntes de reciclo como segue:

$$C_{ir} = \frac{M_i}{\sum_j^{A,B,C,D} M_j / C_{j0}}, i = A, B, C, D \quad (5.71)$$

em que $C_{j0}, j = A, B, C, D$ são as densidades molares dos reagentes puros. A condensação de vapor ocorre na parte superior do tanque e uma porção do líquido condensado retorna ao separador para manter a taxa de fluxo da corrente de reciclo a uma valor fixo. Considera-se que a temperatura do líquido condensado é a mesma que a temperatura do recipiente. A definições das variáveis utilizadas no modele podem ser encontradas na Tabela (5.23) e os valores dos parâmetros na Tabela (5.24).

Tabela 5.23: Variáveis do processo do estudo de caso 3.

$C_{A1}, C_{B1}, C_{C1}, C_{D1}$	Concentrações de A , B , C e D no CSTR-1
$C_{A2}, C_{B2}, C_{C2}, C_{D2}$	Concentrações de A , B , C e D no CSTR-2
$C_{A3}, C_{B3}, C_{C3}, C_{D3}$	Concentrações de A , B , C e D no CSTR-3
$C_{A4}, C_{B4}, C_{C4}, C_{D4}$	Concentrações de A , B , C e D no separador
$C_{A5}, C_{B5}, C_{C5}, C_{D5}$	Concentrações de A , B , C e D no CSTR-4
$C_{Ar}, C_{Br}, C_{Cr}, C_{Dr}$	Concentrações de A , B , C e D em F_r , F_{r1} , F_{r2}
T_1, T_2, T_3, T_4, T_5	Temperatura em cada equipamento
T_{ref}	Temperatura de referência
F_3, F_5, F_7, F_8, F_9	Corrente efluente em cada equipamento
$F_1, F_2, F_4, F_6, F_{10}$	Corrente de alimentação em cada equipamento
F_r, F_{r1}, F_{r2}	Taxas de fluxo de reciclo
$H_{vapA}, H_{vapB}, H_{vapC}, H_{vapD}$	Entalpias de vaporização de A , B , C e D
$H_{Aref}, H_{Bref}, H_{Cref}, H_{Dref}$	Entalpias de A , B , C e D em T_{ref}
$\Delta H_{r1}, \Delta H_{r2}, \Delta H_{r3}$	Calor das reações 1, 2 e 3
V_1, V_2, V_3, V_4, V_5	Volume de cada equipamento
Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5	Entradas externas de calor/refrigerante por equipamento
$C_{pA}, C_{pB}, C_{pC}, C_{pD}$	Calor específico de A , B , C e D na fase líquida
$\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C, \alpha_D$	Volatilidade relativas de A , B , C e D
$C_{A0}, C_{B0}, C_{C0}, C_{D0}$	Densidade molar dos componentes A , B , C e D puros
T_{A0}, T_{B0}, T_{D0}	Temperatura de alimentação dos componentes A , B e D
k	Fração da corrente superior do flash que é reciclada

Tabela 5.24: Parâmetros do modelo do estudo de caso 3.

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
F_2	$8,697 \cdot 10^{-3}$	m^3/s	F_r	0,012	m^3/s
F_{r1}	0,006	m^3/s	F_{r2}	0,006	m^3/s
V_1	1	m^3	V_2	1	m^3
V_3	1	m^3	V_4	3	m^3
V_5	1	m^3	H_{vapA}	$3,073 \cdot 10^4$	J/mol
H_{vapB}	$1,350 \cdot 10^4$	J/mol	H_{vapC}	$4,226 \cdot 10^4$	J/mol
H_{vapD}	$4,550 \cdot 10^4$	J/mol	C_{pA}	184,6	$J/(mol \cdot K)$
C_{pB}	59,1	$J/(mol \cdot K)$	C_{pC}	247	$J/(mol \cdot K)$
C_{pD}	301,3	$J/(mol \cdot K)$	ΔH_{r1}	$-1,539 \cdot 10^5$	J/mol
ΔH_{r1}	$-1,118 \cdot 10^5$	J/mol	ΔH_{r3}	$4,141 \cdot 10^5$	J/mol
H_{Aref}	$7,44 \cdot 10^4$	J/mol	H_{Bref}	$5,91 \cdot 10^4$	J/mol
H_{Cref}	$2,02 \cdot 10^4$	J/mol	H_{Dref}	$-2,89 \cdot 10^4$	J/mol
C_{A0}	$1,126 \cdot 10^4$	mol/m^3	C_{B0}	$2,028 \cdot 10^4$	mol/m^3
C_{C0}	8174	mol/m^3	C_{D0}	6485	mol/m^3
T_{ref}	450	K	T_{A0}	473	K
T_{B0}	473	K	T_{D0}	473	K
k	0,8				

As saídas controladas e as entradas manipuladas são, respectivamente:

$$\mathbf{y} = [T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, C_{A4}, C_{B4}, C_{C4}, C_{D4}]^T \quad (5.72)$$

$$\mathbf{u} = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, F_1, F_4, F_6, F_{10}]^T \quad (5.73)$$

A Tabela (5.25) mostra os estados estacionários do sistema considerados para o processo de alquilação de benzeno.

Tabela 5.25: Estados estacionários do sistema do estudo de caso 3.

1° Estado Estacionário ($ss1$)	2° Estado Estacionário ($ss2$)
$C_{A1ss1} = 8,208 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{A1ss2} = 8,279 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{B1ss1} = 0,015 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{B1ss2} = 0,015 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{C1ss1} = 0,619 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{C1ss2} = 0,599 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{D1ss1} = 0,462 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{D1ss2} = 0,441 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$T_{1ss1} = 5,739 \cdot 10^2 \text{ K}$	$T_{1ss2} = 5,516 \cdot 10^2 \text{ K}$
$C_{A2ss1} = 6,922 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{A2ss2} = 6,941 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{B2ss1} = 0,016 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{B2ss2} = 0,018 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{C2ss1} = 1,023 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{C2ss2} = 1,006 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{D2ss1} = 0,799 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{D2ss2} = 0,802 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$T_{2ss1} = 5,616 \cdot 10^2 \text{ K}$	$T_{2ss2} = 5,392 \cdot 10^2 \text{ K}$
$C_{A3ss1} = 5,773 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{A3ss2} = 5,750 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{B3ss1} = 0,017 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{B3ss2} = 0,019 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{C3ss1} = 1,393 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{C3ss2} = 1,379 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{D3ss1} = 1,094 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{D3ss2} = 1,115 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$T_{3ss1} = 5,466 \cdot 10^2 \text{ K}$	$T_{3ss2} = 5,243 \cdot 10^2 \text{ K}$
$C_{A4ss1} = 5,600 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{A4ss2} = 5,286 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{B4ss1} = 0,032 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{B4ss2} = 0,032 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{C4ss1} = 13,048 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{C4ss2} = 11,348 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{D4ss1} = 4,231 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{D4ss2} = 3,688 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$T_{4ss1} = 7,077 \cdot 10^2 \text{ K}$	$T_{4ss2} = 7,058 \cdot 10^2 \text{ K}$
$C_{A5ss1} = 4,881 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{A5ss2} = 4,555 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{B5ss1} = 0,001 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{B5ss2} = 0,001 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{C5ss1} = 3,857 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{C5ss2} = 4,101 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$C_{D5ss1} = 0,001 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$	$C_{D5ss2} = 0,002 \cdot 10^3 \text{ mol/m}^3$
$T_{5ss1} = 6,365 \cdot 10^2 \text{ K}$	$T_{5ss2} = 6,312 \cdot 10^2 \text{ K}$
$Q_{1ss1} = -4,4 \cdot 10^6 \text{ J/s}$	$Q_{1ss2} = -4,84 \cdot 10^6 \text{ J/s}$
$Q_{2ss1} = -4,6 \cdot 10^6 \text{ J/s}$	$Q_{2ss2} = -5,06 \cdot 10^6 \text{ J/s}$
$Q_{3ss1} = -4,7 \cdot 10^6 \text{ J/s}$	$Q_{3ss2} = -5,17 \cdot 10^6 \text{ J/s}$
$Q_{4ss1} = 9,2 \cdot 10^6 \text{ J/s}$	$Q_{4ss2} = 10,12 \cdot 10^6 \text{ J/s}$
$Q_{5ss1} = 5,9 \cdot 10^6 \text{ J/s}$	$Q_{5ss2} = 6,49 \cdot 10^6 \text{ J/s}$
$F_{1ss1} = 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$	$F_{1ss2} = 7,81 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$
$F_{4ss1} = 8,697 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$	$F_{4ss2} = 9,567 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$
$F_{6ss1} = 8,697 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$	$F_{6ss2} = 9,567 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$
$F_{10ss1} = 2,31 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$	$F_{6ss2} = 2,541 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

A seguir, na próxima seção, tem-se as características de estabilidade e número de condicionamento do modelo linearizado ao redor dos estados estacionários $ss1$ e $ss2$, bem como a análise feita a partir das matrizes de ganho relativos nesses pontos para selecionar os pares (entrada-saída) para a estratégia de controle descentralizada.

5.4.2 Análise do sistema - Estudo de caso 3

Assim como feito nos outros estudos de casos, nesta seção serão apresentadas algumas características do sistema em questão. As matrizes \mathbf{A} do modelo discreto e linearizado em torno dos estados estacionários $ss1$ e $ss2$ apresentam todos os autovalores dentro do círculo unitário. Logo pode-se afirmar que o sistema é estável em malha aberta nos pontos considerados. O número de condicionamento deste sistema em $ss1$ é 3549 e em $ss2$ é 3300, o que caracteriza mau condicionamento do mesmo. A seguir, tem-se as matrizes RGA em $ss1$ e em $ss2$:

$$\mathbf{RGA}_{ss1} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,01 & 0,99 & 0,00 & 0,00 & 0,03 & -0,04 & 0,01 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -43,04 & 42,02 & 0,08 & 1,93 \\ 0,00 & 0,00 & 0,01 & 0,00 & 0,00 & -20,57 & 20,78 & 0,79 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -5853,36 & 5884,11 & -28,75 & -0,99 \\ 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 5917,98 & -5945,91 & 28,87 & 0,06 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & -0,04 & 0,04 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{RGA}_{ss2} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,01 & 0,99 & 0,00 & 0,00 & 0,04 & -0,05 & 0,01 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -134,66 & 134,14 & -0,40 & 1,92 \\ 0,00 & 0,01 & 0,01 & 0,00 & 0,00 & -14,92 & 15,03 & 0,89 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -4170,80 & 4194,57 & -21,79 & -0,98 \\ 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 4321,37 & -4342,72 & 22,29 & 0,06 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & -0,04 & 0,036 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Analisando as matrizes \mathbf{RGA}_{ss1} e \mathbf{RGA}_{ss2} e utilizando a metodologia de pareamento da literatura de controle é possível fazer a seleção dos pares (entrada e saída) utilizada no controle totalmente descentralizado. Os pares selecionados para o controle descentralizado

foram: $Q_1 - T_1$, $Q_2 - T_2$, $Q_3 - T_3$, $Q_4 - T_4$, $Q_5 - T_5$, $F_1 - C_{D4}$, $F_4 - C_{C4}$, $F_6 - C_{B4}$, $F_{10} - C_{A4}$.

Na próxima seção tem-se os resultados de controle obtidos para o processo descrito anteriormente.

5.4.3 Resultados - Estudo de caso 3

Neste estudo de caso, os únicos limites impostos na operação do processo são os limites inferiores e superiores das variáveis manipuladas. Na Tabela (5.26) são apresentados essas restrições.

Tabela 5.26: Restrições nas entradas manipuladas do sistema para o estudo de caso 3.

Entrada u_i	Valor Mínimo	Valor Máximo	Unidade
Q_1	$-1,0 \cdot 10^7$	0	J/s
Q_2	$-1,0 \cdot 10^7$	0	J/s
Q_3	$-1,0 \cdot 10^7$	0	J/s
Q_4	0	$1,0 \cdot 10^7$	J/s
Q_5	0	$1,0 \cdot 10^7$	J/s
F_1	0	$1,0 \cdot 10^{-2}$	m^3/s
F_4	0	$1,0 \cdot 10^{-2}$	m^3/s
F_6	0	$1,0 \cdot 10^{-2}$	m^3/s
F_{10}	0	$1,0 \cdot 10^{-2}$	m^3/s

O objetivo de controle é manter as variáveis manipuladas e controladas o mais próximas possíveis das trajetórias de referências pré-estabelecidas, de acordo com as Equações (5.29) e (5.30). Os valores de α_y e α_u escolhidos são iguais a 0,5, o que solicita do controle, uma transição relativamente gradual entre os estados estacionários $ss1$ e $ss2$. A Figura (5.21) traz uma representação simplificada da trajetória desejável para as variáveis controladas e manipuladas.

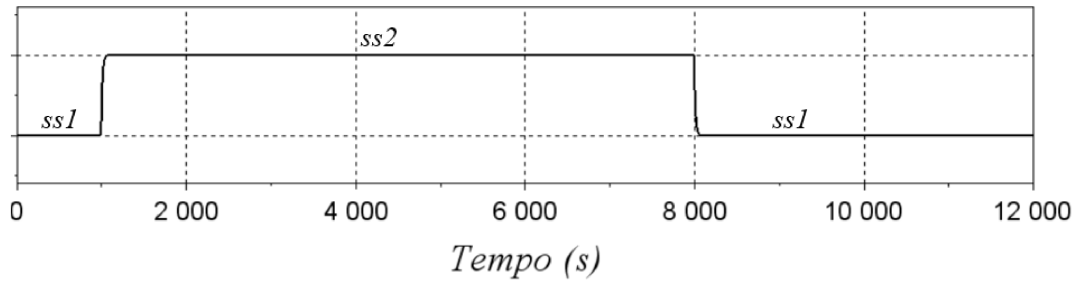


Figura 5.21: Trajetória de referência desejável para as variáveis controladas e manipuladas para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

Como já dito anteriormente, a Figura (5.21) representa de forma simplificada a trajetória desejável para as variáveis controladas e manipuladas do processo. Nota-se que deseja-se que o controle mantenha as variáveis em *ss1* até o instante de tempo igual a 1000 segundos e a partir deste instante deve levar o processo ao estado estacionário *ss2* de maneira gradual e o mantê-lo neste estado até o instante de tempo igual a 8000 segundos, quando deverá retornar ao estado estacionário *ss1* e mantê-lo neste estado até o instante de tempo igual a 12000 segundos, quando o tempo considerado de operação da planta finaliza. Com relação aos parâmetros de sintonia inerentes aos controladores escolhidos neste trabalho, tem-se as seguintes seleção para as matrizes de ponderação e horizontes de predição e de controle:

Controle Centralizado e DMPCs propostos:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{n_y \times n_y}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_{m \times m}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{I}_{m \times m}$$

$$H_p = 5$$

$$H_u = 5$$

Controle Descentralizado:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{n_y \times n_y}$$

$$\mathbf{R} = 1000 \cdot \mathbf{I}_{m \times m}$$

$$\mathbf{W} = 100 \cdot \mathbf{I}_{m \times m}$$

$$H_p = 5$$

$$H_u = 5$$

O tempo de amostragem escolhido neste estudo de caso foi igual a $T_S = 10$ s. Essa escolha baseou-se, como nos outros estudos de casos, na dinâmica mais rápida dentre todas as dinâmicas das variáveis controladas envolvidas quando a operação da planta encontra-se em malha aberta. A seguir são apresentados os resultados dinâmicos para as saídas controladas, nas Figuras (5.23) e (5.22) e os resultados dinâmicos para as entradas manipuladas nas Figuras (5.24) e (5.25).

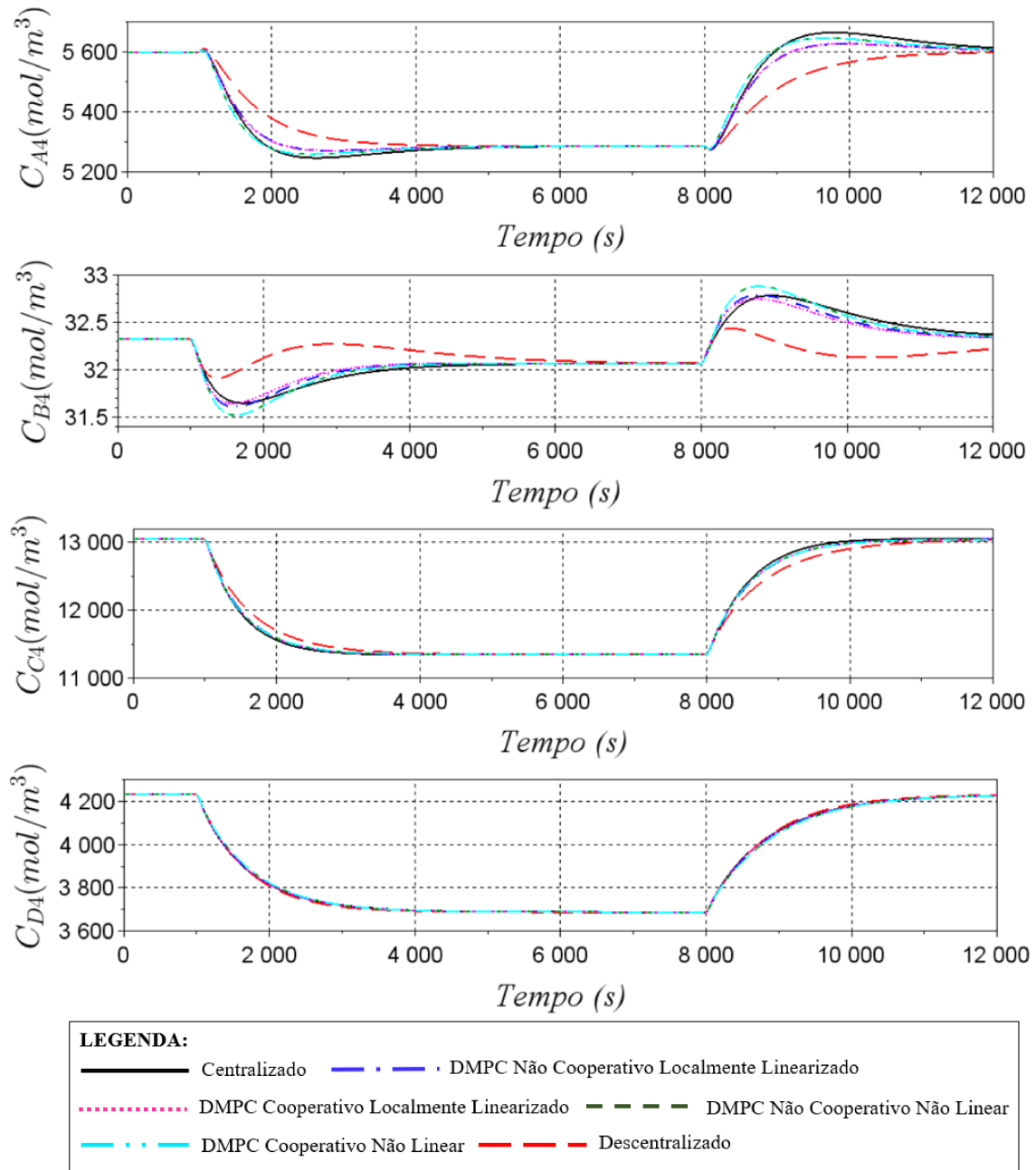


Figura 5.22: Respostas dinâmicas das concentrações dos componentes na corrente de saída do processo no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

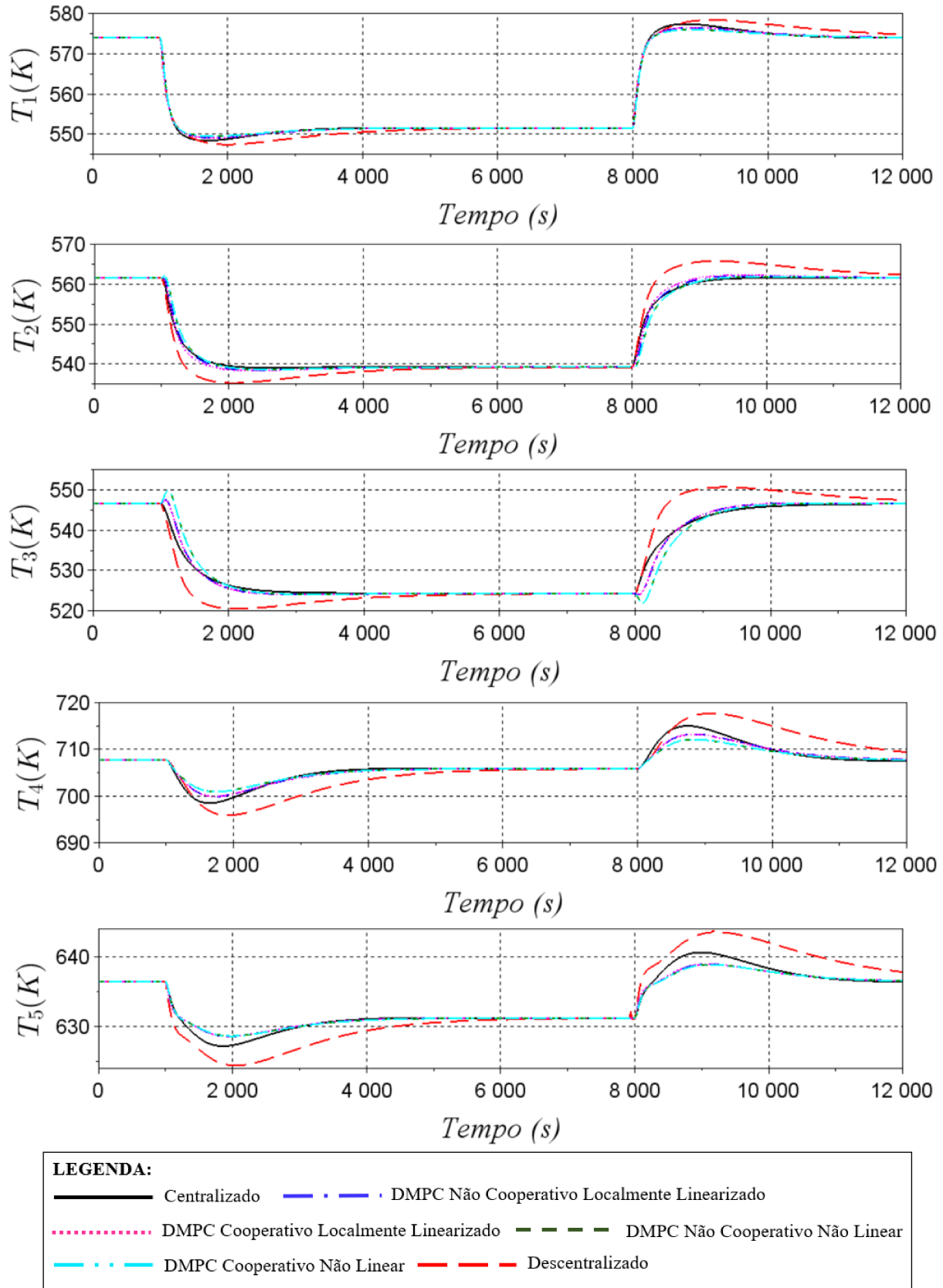


Figura 5.23: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

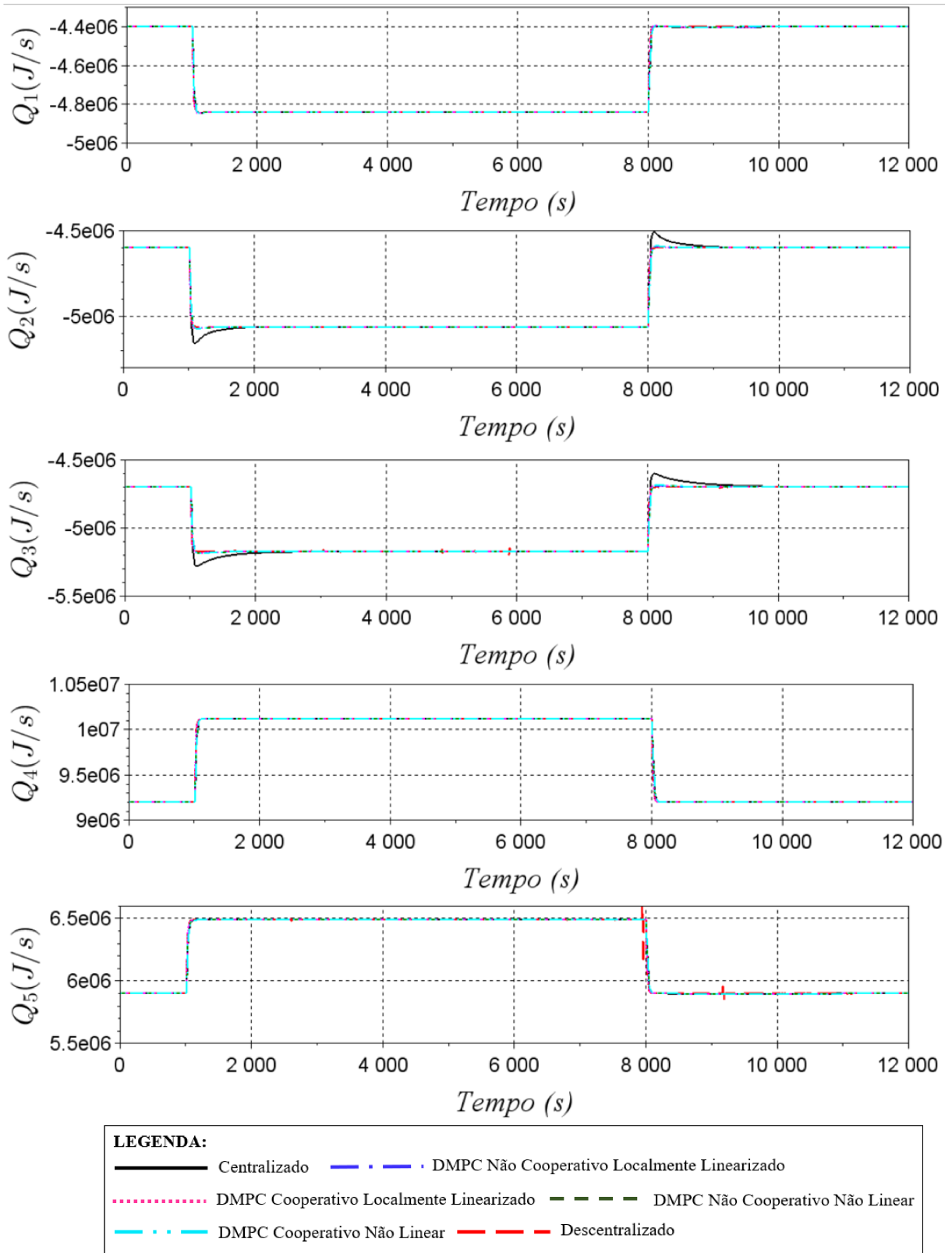


Figura 5.24: Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

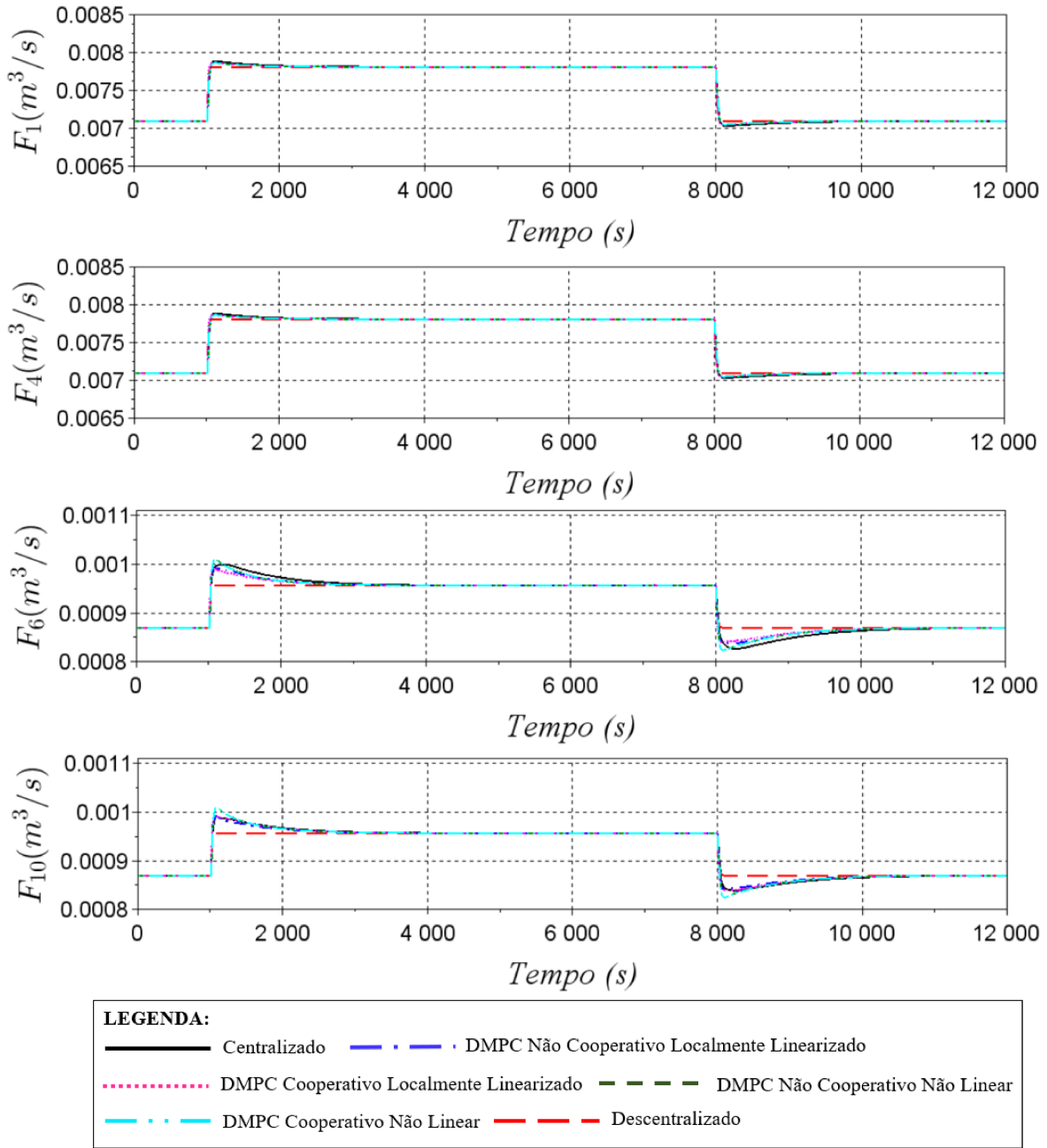


Figura 5.25: Respostas dinâmicas das vazões manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

Analisando as respostas dinâmicas obtidas pelas entradas manipuladas, tem-se a falsa impressão que as transições entres os estados estacionários foram de forma abruptas, mas isso se deve a escala dos gráficos. Com intuito de visualizar de forma correta como as transições se procedem, considere a Figura (5.26), que apresenta ampliações das dinâmicas das variáveis Q_1 e F_1 .

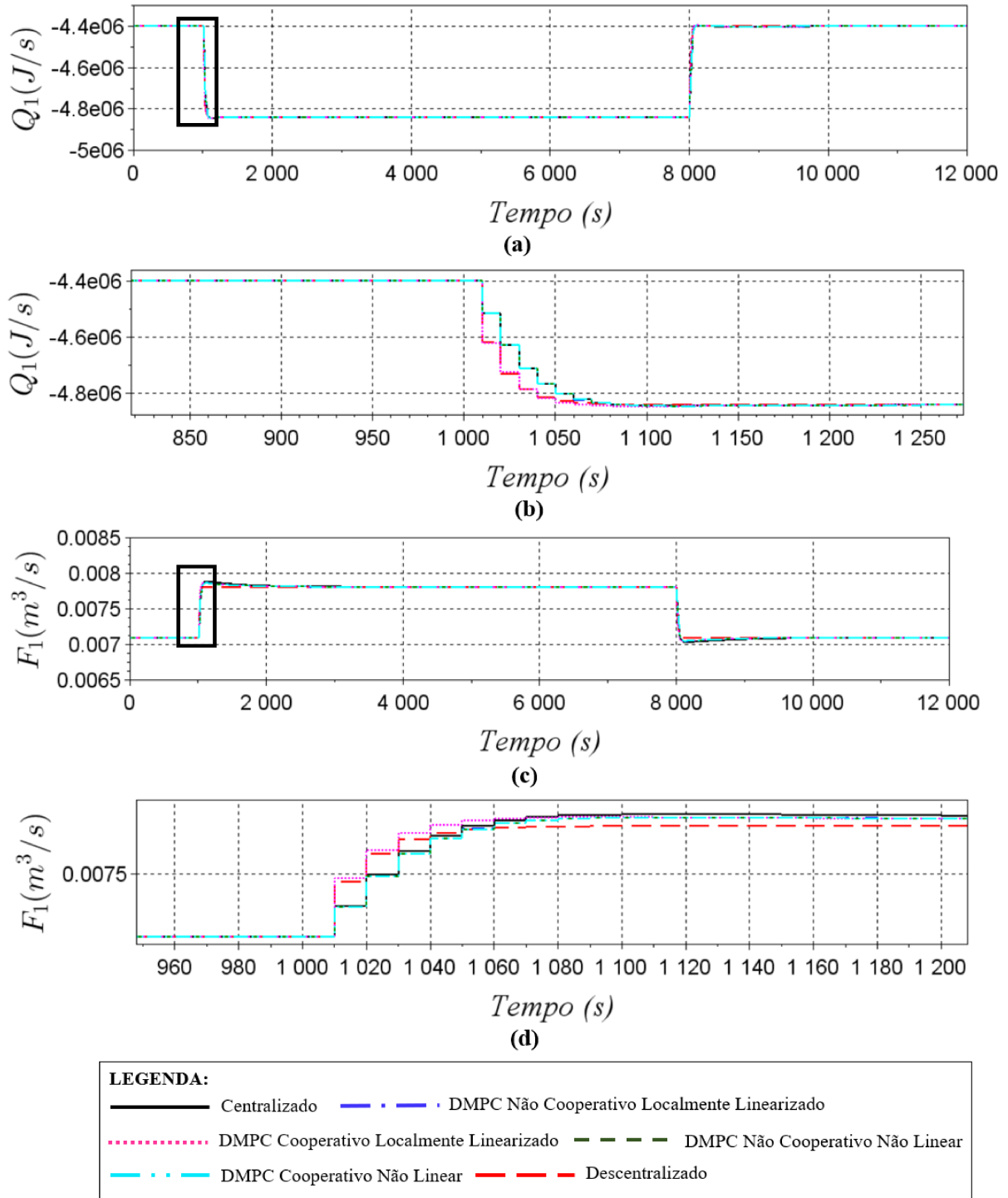


Figura 5.26: Respostas dinâmicas das variáveis (a) Q_1 e (c) F_1 com destaque nas respectivas ampliações de (b) da variável Q_1 e de (d) da variável F_1 .

A partir das Figuras (5.23-5.25), nota-se que o controle descentralizado apresenta um comportamento razoavelmente distante das outras estratégias de controle e que é o controle que mais demora para estabilizar nos estados estacionários. Além disso, nota-se que em alguns pontos, o controle descentralizado tem dificuldades de encontrar uma solução razoável para o controle e chega a sair consideravelmente da trajetória de referência

estabelecidas para as variáveis, como pode-se notar na dinâmica de Q_5 no instante de tempo de aproximadamente 8000 s. Vale ressaltar aqui, que o processo de sintonia do controle descentralizado foi o mais trabalhoso, pois foram necessários vários testes para conseguir uma resposta satisfatória para esse controle e mesmo assim não se obteve uma dinâmica totalmente adequada para o mesmo. Para exemplificar, considere a seguinte sintonia para o controle descentralizado (igual à utilizada pelos outros controladores):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{n_y \times n_y}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_{m \times m}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{I}_{m \times m}$$

$$H_p = 5$$

$$H_u = 5$$

A seguir são apresentados os resultados dinâmicos com o controle descentralizado com a sintonia apresentada acima. Nas Figuras (5.28) e (5.27) tem-se os resultados dinâmicos para as saídas controladas nas Figuras (5.29) e (5.30) para as entradas manipuladas.

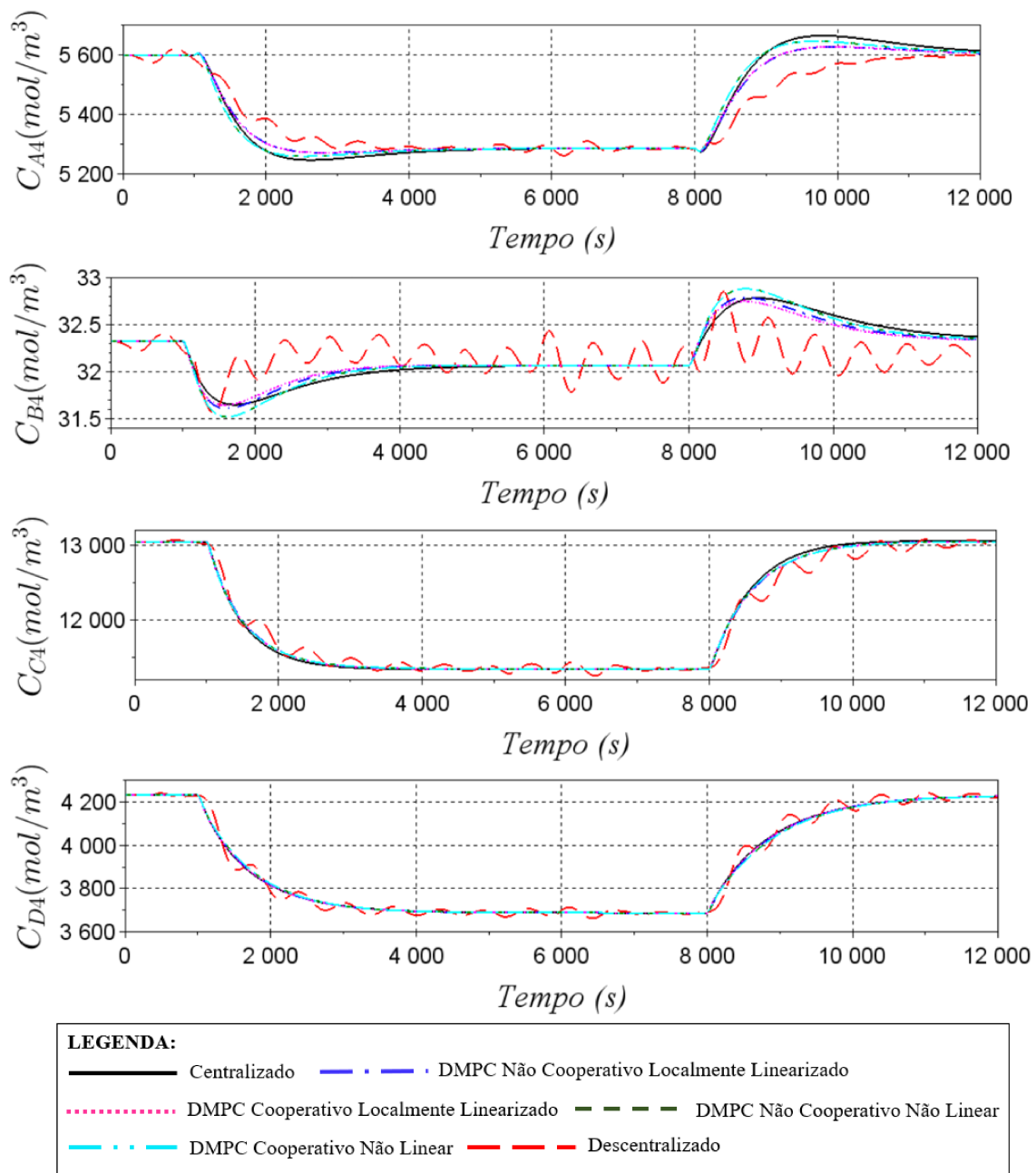


Figura 5.27: Respostas dinâmicas das concentrações dos componentes na corrente de saída do processo no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i , com controle descentralizado com a mesma sintonia das outras estruturas.

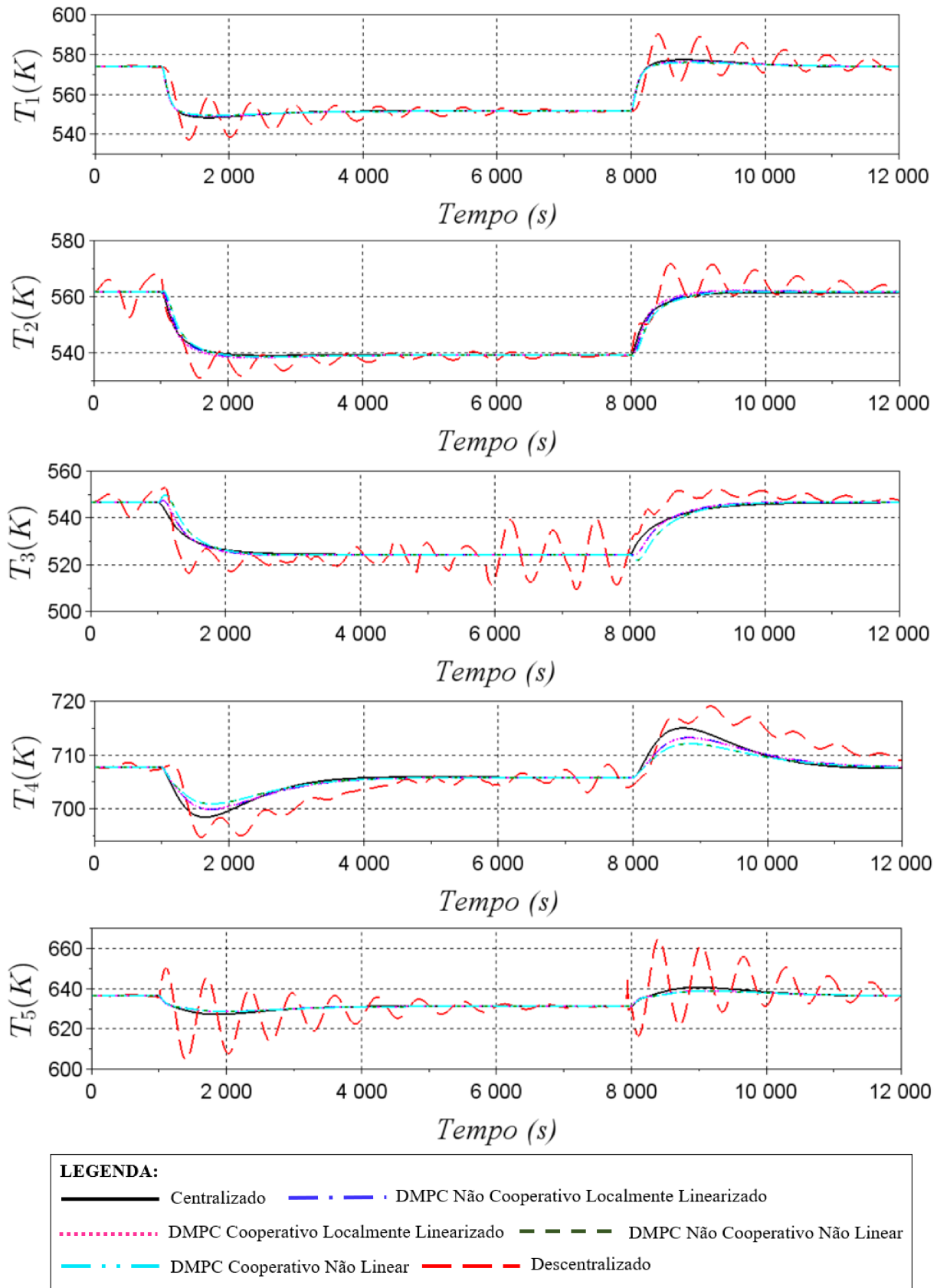


Figura 5.28: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i , com controle descentralizado com a mesma sintonia das outras estruturas.

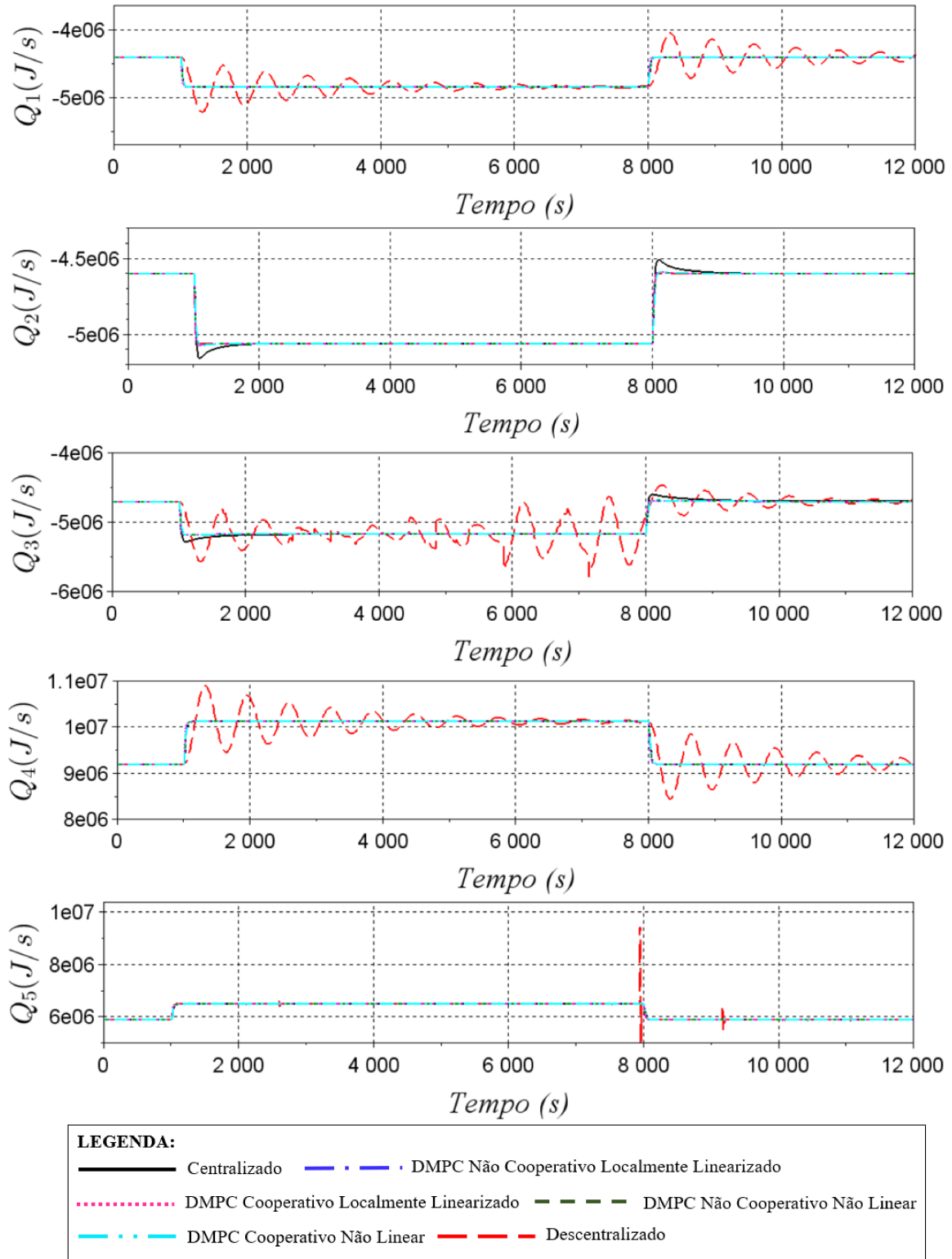


Figura 5.29: Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i , com controle descentralizado com a mesma sintonia das outras estruturas.

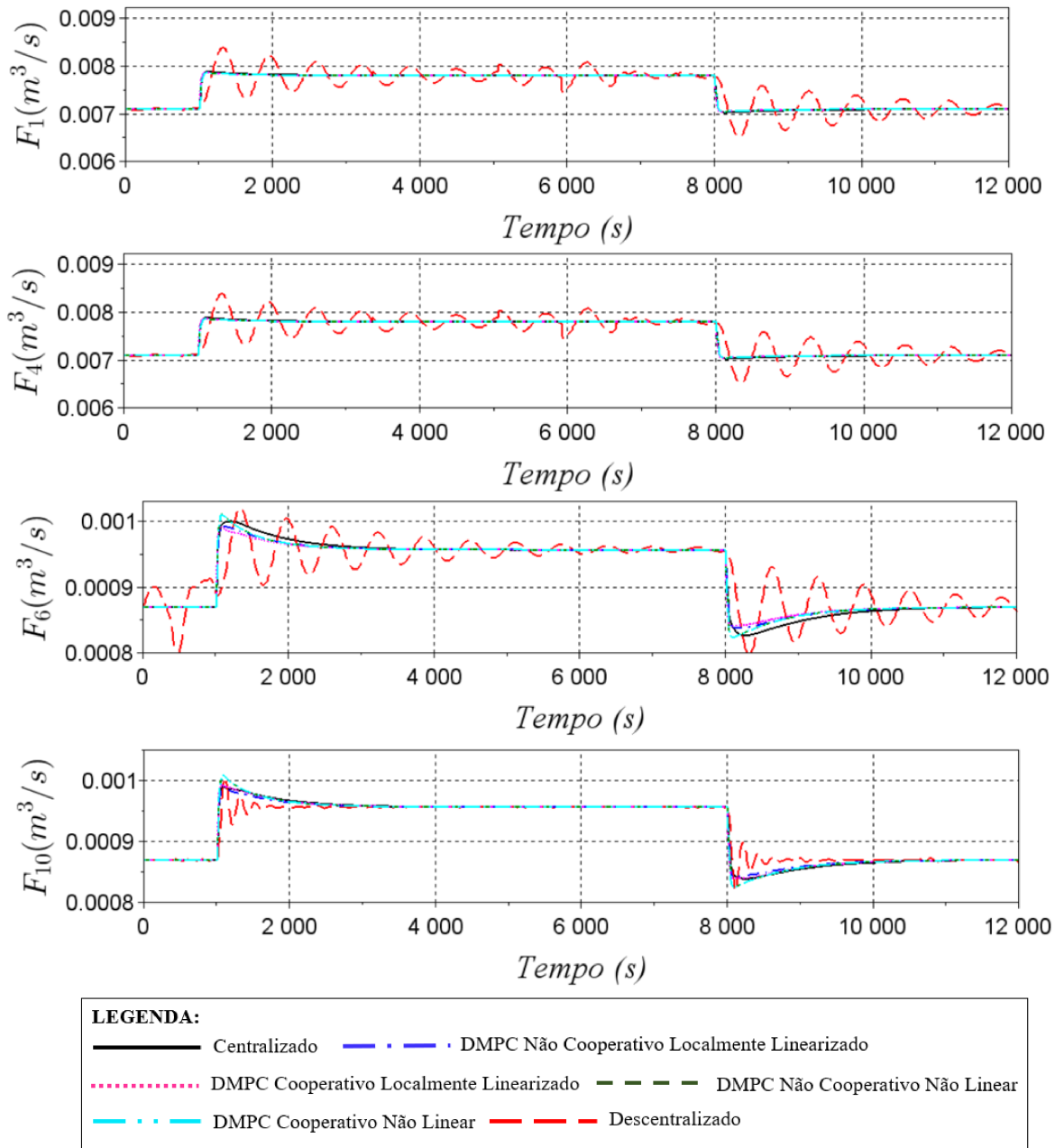


Figura 5.30: Respostas dinâmicas das vazões manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i , com controle descentralizado com a mesma sintonia das outras estruturas.

Nota-se pelas Figuras acima, que o controle descentralizado com a mesma sintonia que os outros controladores, não apresenta uma resposta satisfatória para o controle desse estudo de caso. Mas para título de comparação através do somatório do erro quadrático e para os índices de desempenho I_y e I_u , serão utilizados os resultados obtidos pela melhor sintonia considerada para o controle descentralizado. Apesar de não ter sido preocupação em otimizar a sintonia para todas as estruturas de controle, houve um cuidado em pelo menos obter uma resposta do controle que estabilizasse nos estados estacionários desejados.

A Tabela (5.27) apresenta os tempos de processamento dos cálculos dos controladores.

Tabela 5.27: Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	Tempo total (s)	Tempo máximo (s)
Centralizado	16239,51	67,79
Descentralizado	560,08	0,22
DMPC Não Cooperativo Linearizado	155,13	0,55
DMPC Cooperativo Linearizado	1435,44	6,12
DMPC Não Cooperativo Não Linear	10086,21	22,50
DMPC Cooperativo Não Linear (i=5)	15297,61	39,05

Ao analisar os tempos de processamento, nota-se que a controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado é aquele que apresenta menor tempo de processamento. A estratégia que demanda maior tempo de cálculo de suas respectivas ações de controle é o DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear. Em relação ao tempo máximo, os controladores centralizado, DMPC não cooperativo e cooperativo baseados nas matrizes de incidência do modelo não linear, não poderiam ser utilizados em uma aplicação real se fosse utilizado um controlador com desempenho de processamento igual ou inferior à máquina utilizada nas simulações aqui apresentadas, já que o tempo máximo é maior que o tempo de amostragem definido ($T_s = 10$ segundos). Esse cenário poderia ser revertido utilizando, por exemplo, algoritmos mais eficientes ou diminuindo a tolerância da variação sucessiva da função objetivo no processo cooperativo, mas com o cuidado de avaliar o impacto dessa redução no desempenho do controlador e verificar se a mesma é aceitável.

Vale lembrar aqui que o controlador DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear apresenta uma limitação de 5 iterações por instante de amostragem. Apesar dessa restrição, o desempenho do mesmo não foi afetado de forma significativa, mas diminuiu de forma considerável o tempo de processamento. Caso não houvesse tal restrição no processo de cooperação, o tempo total ultrapassaria 24968 segundos.

As Tabelas (5.28) e (5.29) apresentam uma comparação entre os diversos tipos de controle analisados neste trabalho, através do SSE_y . A Tabela (5.28) se refere às temperaturas em cada equipamento (T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5) e a Tabela (5.29) se refere às concentrações controladas (C_{A4}, C_{B4}, C_{C4} e C_{D4}). As Tabelas (5.30) e (5.31) apresentam o SSE_u . A Tabela (5.30) faz referência às vazões mássicas manipuladas na planta (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 e Q_5) e a Tabela (5.31) se refere aos calores do processo (F_1, F_4, F_6 e F_{10}).

Tabela 5.28: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas T_1 , T_2 , T_3 , T_4 e T_5 para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_y para T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5
Centralizado	55305,73
Descentralizado	85003,00
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	59499,16
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	56513,57
DMPC Não Cooperativo Não Linear	71569,62
DMPC Cooperativo Não Linear	71505,81

Tabela 5.29: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as saídas controladas C_{A4} , C_{B4} , C_{C4} e C_{D4} para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_y para C_{A4}, C_{B4}, C_{C4} e C_{D4}
Centralizado	$1,816 \cdot 10^8$
Descentralizado	$2,286 \cdot 10^8$
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	$1,910 \cdot 10^8$
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	$1,856 \cdot 10^8$
DMPC Não Cooperativo Não Linear	$1,868 \cdot 10^8$
DMPC Cooperativo Não Linear	$1,868 \cdot 10^8$

Tabela 5.30: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 e Q_5 para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_u para Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 e Q_5
Centralizado	$3,368 \cdot 10^{12}$
Descentralizado	$1,438 \cdot 10^{12}$
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	$2,665 \cdot 10^{12}$
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	$1,336 \cdot 10^{12}$
DMPC Não Cooperativo Não Linear	$2,669 \cdot 10^{12}$
DMPC Cooperativo Não Linear	$2,668 \cdot 10^{12}$

Tabela 5.31: Comparação entre o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas F_1 , F_2 , F_4 e F_{10} para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	SSE_u para F_1, F_2, F_4 e F_{10}
Centralizado	$1,5 \cdot 10^{-6}$
Descentralizado	$0,4 \cdot 10^{-6}$
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	$1,2 \cdot 10^{-6}$
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	$0,8 \cdot 10^{-6}$
DMPC Não Cooperativo Não Linear	$1,3 \cdot 10^{-6}$
DMPC Cooperativo Não Linear	$1,3 \cdot 10^{-6}$

Ao analisar as Tabelas (5.28) a (5.31), nota-se que o controle descentralizado apresenta maiores SSE para as saídas controladas e menores SSE para as entradas manipuladas. Isso ocorre devido à sintonia que foi necessária ser implantada na estratégia descentralizada para que a mesma, pelo menos obtivesse respostas que estabilizasse nos estados estacionários. Tal sintonia tem um peso bem mais severo nas entradas manipuladas em relação ao peso das saídas controladas, o que de certo modo favoreceu o controle descentralizado. Caso contrário, o erro cometido por essa estratégia chegaria a atingir valores de SSE_y de 231518,71 para T_1 , T_2 , T_3 , T_4 e T_5 e de $2,383 \cdot 10^8$ para C_{A4} , C_{B4} , C_{C4} e C_{D4} . Já para o somatório dos erros quadráticos para as entradas manipuladas (SSE_u), os valores seriam de $1,478 \cdot 10^{14}$ para Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 e Q_5 e de $5,8 \cdot 10^{-5}$ para F_1 , F_2 , F_4 e F_{10} . Os valores anteriormente apresentados se referem ao controle descentralizado com sintonia igual às outras estratégias de controle.

Assim como nos outros estudos de casos, os desempenhos das estratégias de controle descentralizada e as distribuídas foram comparados com o controle centralizada, através dos índices I_y e I_u , já citados no início deste capítulo. As Tabelas (5.32) e (5.33), representam essa comparação de desempenhos, avaliando os índices I_y e I_u , respectivamente.

Tabela 5.32: Comparação entre os desempenhos dos controladores para as saídas controladas para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	I_y	Desempenho
Centralizado	2,8701	-
Descentralizado	3,3042	↓ 15,13%
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	2,9693	↓ 3,45%
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	2,8840	↓ 0,48%
DMPC Não Cooperativo Não Linear	3,0208	↓ 5,25%
DMPC Cooperativo Não Linear	3,0208	↓ 5,25%

Tabela 5.33: Comparação entre os desempenhos dos controladores para as entradas manipuladas para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

Tipo de controle	I_u	Desempenho
Centralizado	0,5858	-
Descentralizado	0,0611	↑ 89,57%
DMPC Não Cooperativo Localmente Linearizado	0,3671	↑ 37,34%
DMPC Cooperativo Localmente Linearizado	0,3177	↑ 45,76%
DMPC Não Cooperativo Não Linear	0,5292	↑ 9,66%
DMPC Cooperativo Não Linear	0,5259	↑ 10,22%

Avaliando o índice I_y , nota-se que o controle descentralizado apresenta pior desempenho para as saídas controladas e o controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado é o que apresenta melhor resultado para esse índice. Quando analisa-se o índice referente as variáveis de entrada, o controle descentralizado é o que apresenta menor valor para esse índice e conseqüentemente melhor desempenho, mas vale ressaltar que esse desempenho foi alcançado devido a sintonia que favoreceu esse tipo de controle. Caso utilizasse a mesma sintonia das outras estratégias, haveria uma queda de desempenho de cerca de 956,12% para I_u e cerca de 35,44% para I_y do controle descentralizado em relação ao formato centralizado de controle.

Desconsiderando o controle descentralizado, pode-se afirmar que dentre todas as estratégias de controle distribuídas avaliadas, o DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado é o que obteve melhor desempenho em relação ao controle centralizado. Vale ressaltar que não houve uma preocupação em otimizar as sintonias dos controladores. Se isso fosse executado de forma cautelosa e minuciosa, o controle centralizado apresentaria a melhor resposta. A única preocupação foi em obter respostas aceitáveis de controle que ao menos estabilizasse nos pontos desejados de operação, em um determinado intervalo de tempo.

Na próxima seção será apresentado os resultados obtidos quando uma restrição de estabilidade foi adicionada aos problemas de controle das propostas DMPC não linear.

5.5 DMPC não linear não cooperativo e cooperativo com estabilidade garantida

Entre as diversas estratégias para tornar um algoritmo MPC robustamente estável, optou-se por utilizar uma restrição adicional ao problema de otimização com intuito de forçar

essa robustez. A restrição adicional é descrita pela seguinte equação:

$$J_{opt}(k-1) - J_{opt}(k) \leq 0 \quad (5.74)$$

em que J_{opt} representa o valor ótimo encontrado para o problema de controle. Nota-se, que deseja-se que a função objetivo seja decrescente ao longo dos instantes de amostragem considerados. Simulações foram efetuadas com intuito de avaliar o desempenho das propostas de controle DMPC não linear tanto para a estrutura não cooperativa como para a estrutura cooperativa.

A seguir são apresentados os resultados dinâmicos para as saídas controladas, nas Figuras (5.32) e (5.31) e os resultados dinâmicos para as entradas manipuladas nas Figuras (5.33) e (5.34).

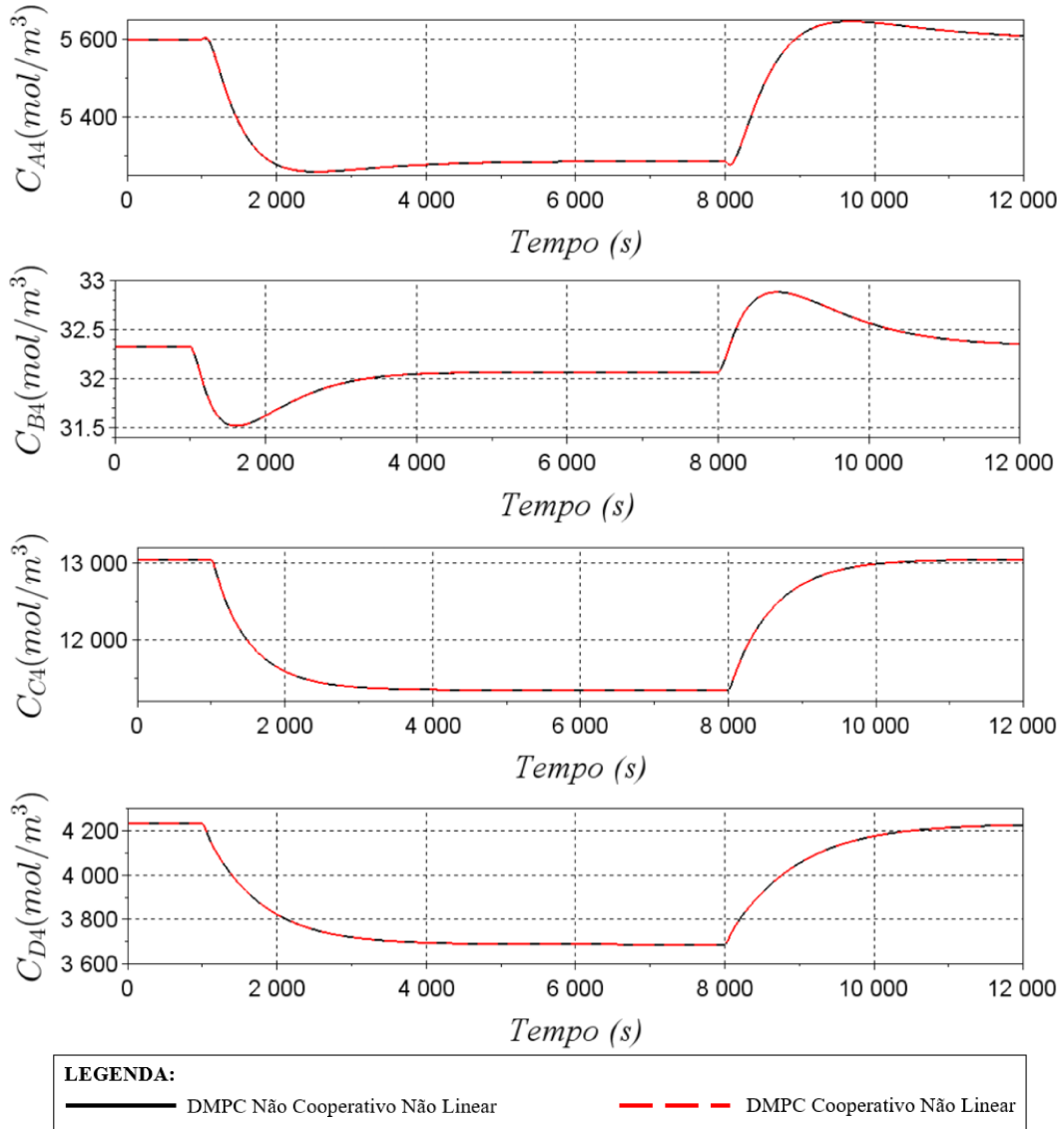


Figura 5.31: Respostas dinâmicas das concentrações dos componentes na corrente de saída do processo no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i e com garantia de estabilidade.

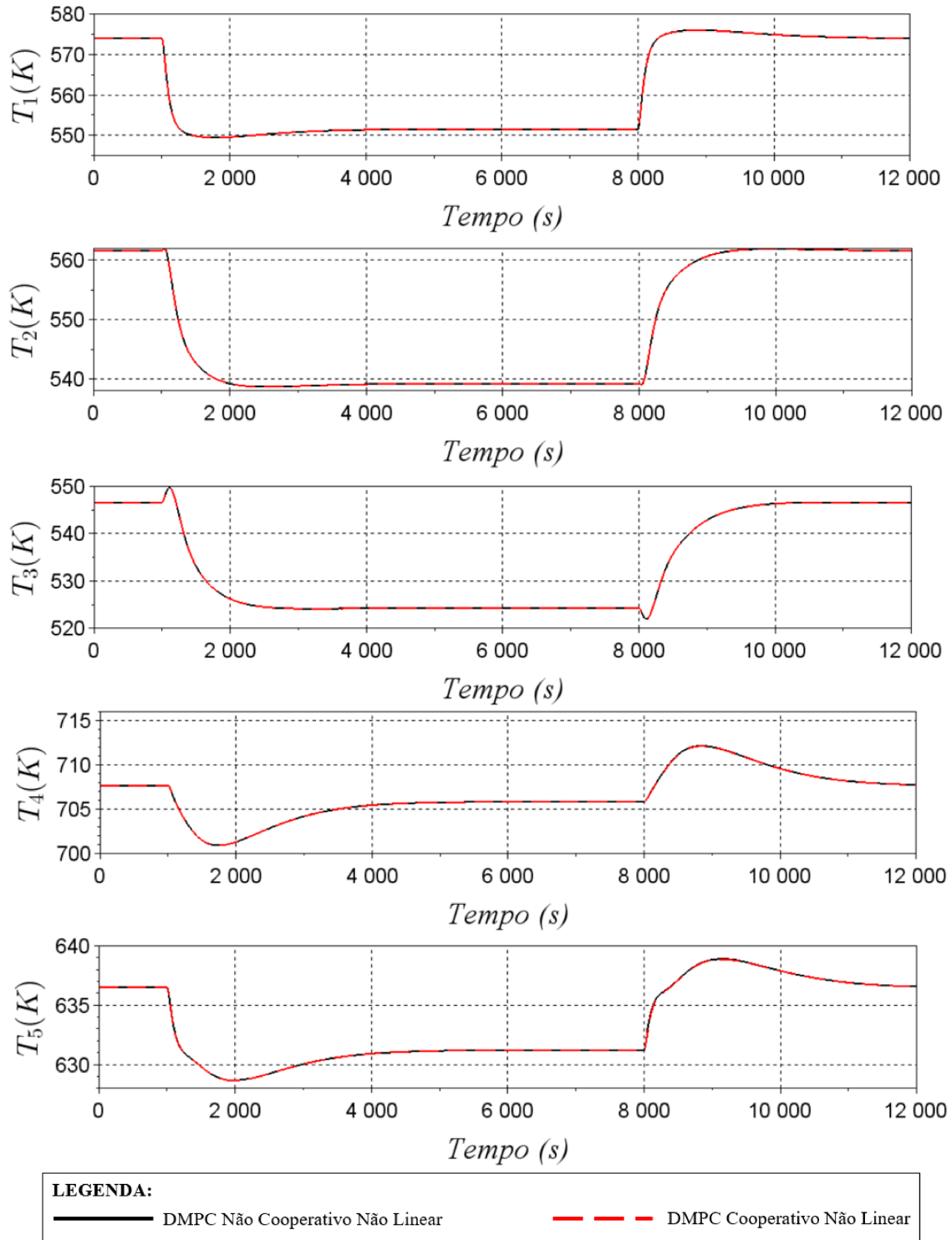


Figura 5.32: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i e com garantia de estabilidade.

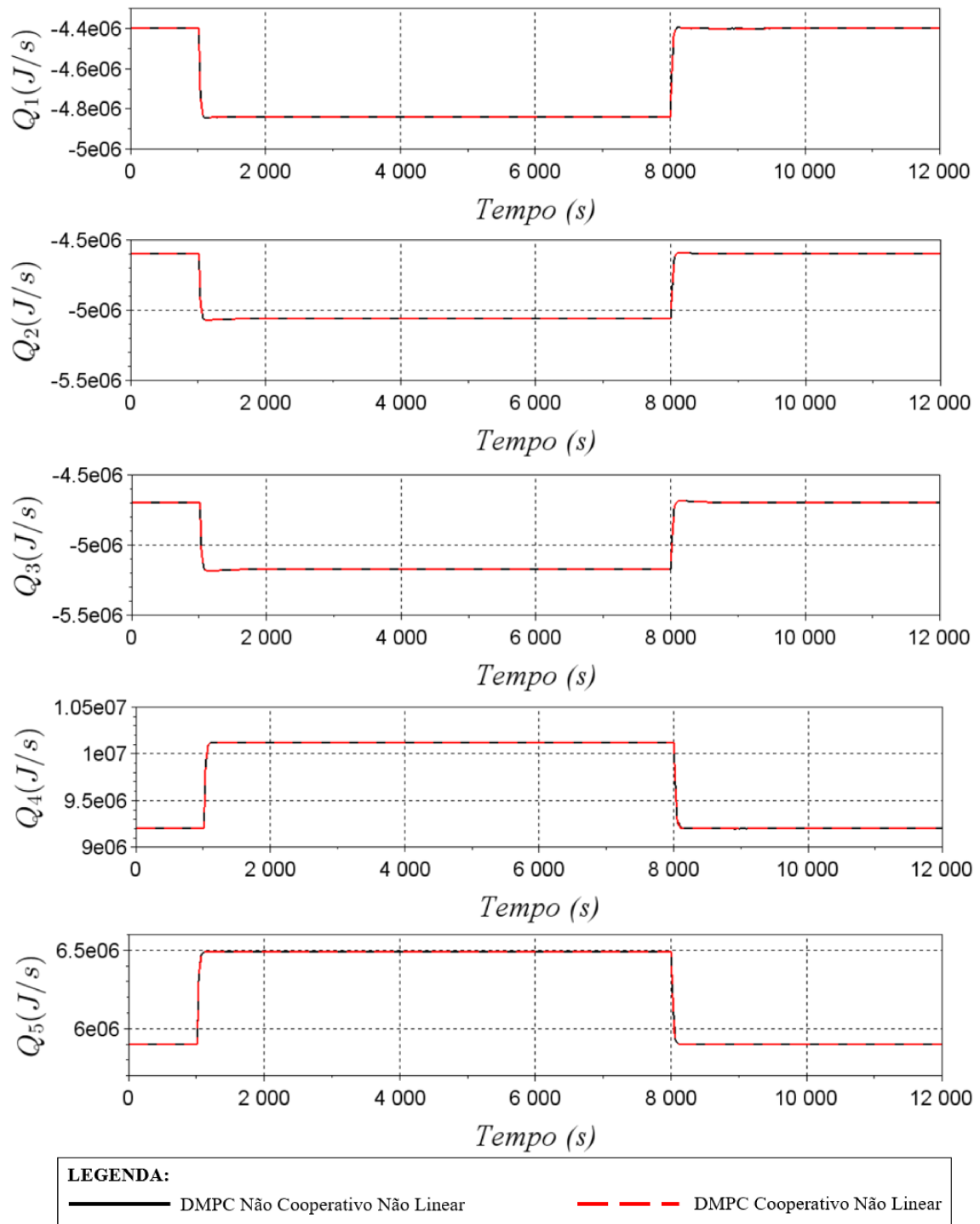


Figura 5.33: Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i e com garantia de estabilidade.

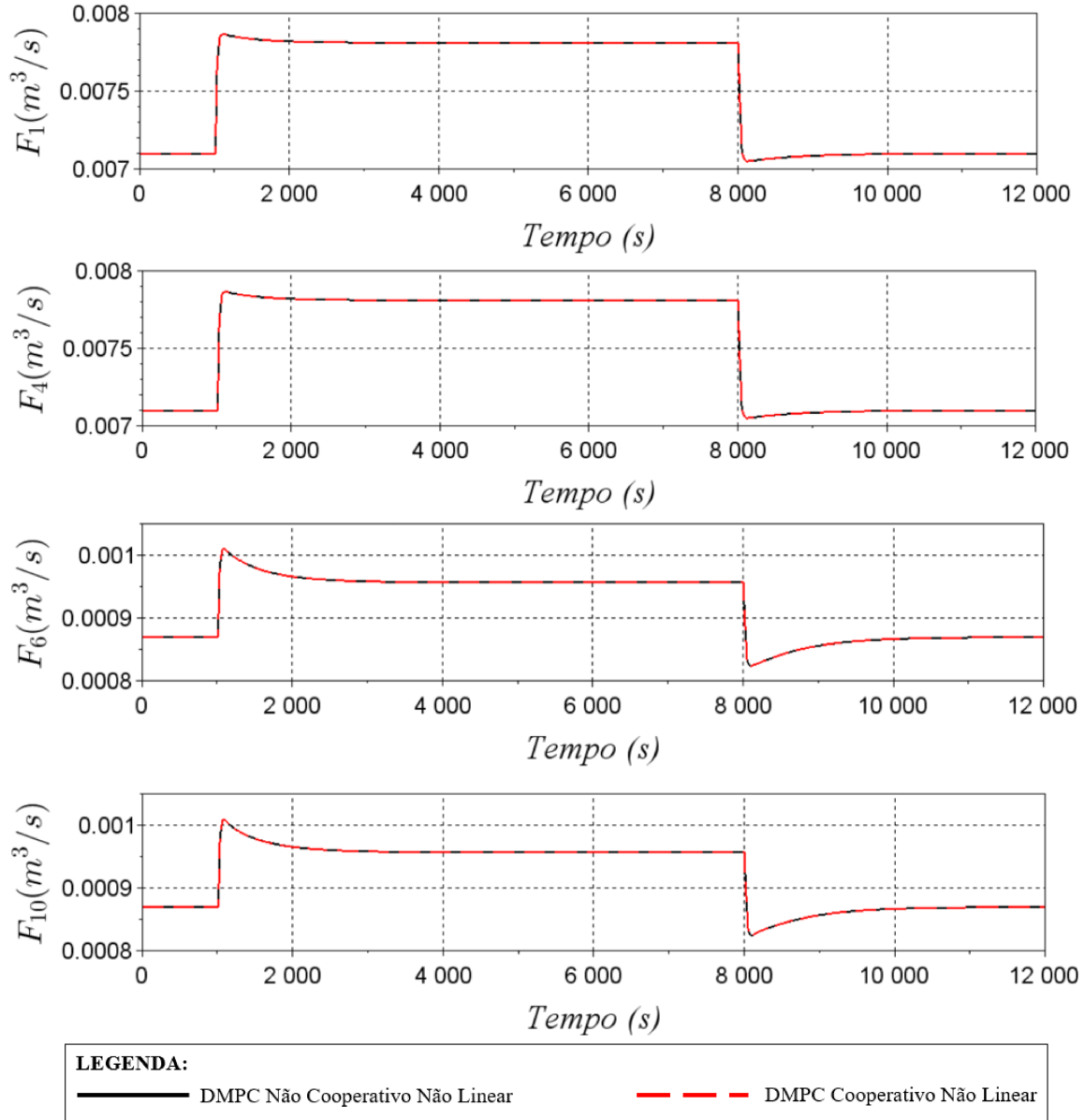


Figura 5.34: Respostas dinâmicas das vazões manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i e com garantia de estabilidade.

Analisando os resultados apresentados nos gráficos, nota-se que as respostas obtidas pelas duas propostas em questão são coincidentes e os resultados são idênticos aos obtidos nas simulações sem a restrição que impõe garantia de estabilidade. Na próxima seção será apresentada uma discussão geral dos resultados obtidos.

5.6 Análise dos resultados obtidos

Na presente seção será apresentada uma análise geral de todos os resultados obtidos nesta tese. Vale relembrar aqui que todos os estudos de casos considerados são mal condicio-

nados, o que dificulta muito o controle e apresenta dificuldade numérica. Apesar dessa característica, as propostas de controle desenvolvidas foram aplicadas nesses exemplos e as satisfatórias respostas obtidas indicam que estes controladores são eficientes e promissores.

Com relação ao tempo de processamento, a proposta de controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado é o que apresenta menor tempo de processamento, em todos os estudos de casos avaliados. Já o controle DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear é o que apresenta maior tempo de cálculo de suas respectivas ações de controle. Mas, constatou-se que é possível diminuir o tempo de processamento dessa abordagem limitando o número de iterações que podem ocorrer em cada instante de amostragem, mas com o cuidado de verificar se tal restrição tem impacto significativo no desempenho do mesmo.

Com relação ao desempenho dos controladores, pode-se afirmar, que para os estudos de casos avaliados, as propostas de controle desenvolvidas apresentam respostas satisfatórias. No geral, os controladores com estrutura cooperativa, apresentaram desempenho melhor ou equivalente quando comparados com as suas respectivas versões não cooperativas. No estudo de caso 1, por exemplo, a proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado é a que apresenta melhor desempenho entre todos os controles avaliados.

Os controladores desenvolvidos apresentaram respostas equivalentes ou próximas das obtidas pelo controle centralizado. Avaliando todos os aspectos considerados, pode-se afirmar para os estudos de casos considerados, que caso se deseje melhor desempenho sem preocupações com o tempo de processamento, o controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado é uma boa escolha, mas caso o tempo de processamento seja uma questão importante, o controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado é a escolha ideal, sem grandes perdas de desempenho.

CAPÍTULO 6

Conclusões e Sugestões

O presente trabalho propôs quatro novas estratégias de controle preditivo distribuído baseado em modelo (DMPC) para processos não lineares. São elas: DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, DMPC não cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear e DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear. As duas primeiras propostas utilizam um procedimento simples e promissor de decomposição de sistemas a partir do modelo localmente linearizado do processo e esta metodologia de particionamento foi adaptada a partir de Rocha (2014). As duas últimas propostas são baseadas em uma metodologia de particionamento a partir do modelo não linear da planta desenvolvida nesta pesquisa.

As técnicas de controle DMPC desenvolvidas neste trabalho apresentam resultados satisfatórios quando comparadas com outras técnicas de controle existentes, para os estudos de casos apresentados.

A partir das análises dos resultados obtidos nos estudos de casos avaliados, nota-se que em todos os exemplos, o controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado é o que apresenta menor tempo total de processamento dos cálculos de controle. Já o DMPC cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear é o que apresenta maior tempo.

Considerando o cenário com restrição na velocidade das variáveis manipuladas, avaliada no estudo de caso 1, os resultados indicam, que as estratégias de controle desenvolvidas

apresentam bons resultados para esse tipo de restrição.

No geral, em todos os estudos de casos avaliados, as propostas de controle desenvolvidas nesta tese, apresentaram respostas semelhantes às obtidas pelo controle centralizado, sendo a proposta DMPC cooperativa baseado no modelo localmente linearizado a com melhor desempenho quando comparada com a versão centralizada de controle. Além disso, o DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado apresentou menor esforço computacional entre todas as estratégias de controle avaliadas.

A partir da análise da frequência de aplicação da metodologia de particionamento nas propostas DMPCs baseadas no modelo localmente linearizado (apresentada no Apêndice D), pode-se afirmar que, para os estudos de casos avaliados nesta tese, que é possível diminuir o tempo de processamento ao diminuir a frequência de aplicação do particionamento, sem perder desempenho dos controladores.

Como sugestões para próximos trabalhos destacam-se:

- Aplicar as propostas de controle DMPC desenvolvidas em plantas experimentais;
- Avaliar as propostas de controle DMPC desenvolvidas em casos em que ocorram falhas no sistema;
- Avaliar as propostas de controle DMPC desenvolvidas em estudos de casos com observadores de estados;
- Propor outras sintonias dos controladores preditivos distribuídos analisados neste trabalho;
- Desenvolver outros métodos de particionamento de sistemas (lineares e não lineares);
- Desenvolver propostas de controle descentralizado;
- Estudar formas de diminuir o tempo de processamentos das ações de controle, principalmente para a proposta de controle DMPC cooperativo não linear.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALESSIO, A.; BARCELLI, D.; BEMPORAD, A. Decentralized model predictive control of dynamically coupled linear systems. *Journal of Process Control*, v. 21, n. 5, p. 705 – 714, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2010.11.003>>.
- BAMIEH, B.; PAGANINI, F.; DAHLEH., M. A. Distributed control of spatially invariant systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 47(7), p. 1091–1107, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.2002.800646>>.
- BRISTOL, E. On a new measure of interaction for multivariable process control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 11, n. 1, p. 133–134, 1966. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.1966.1098266>>.
- BROWN, R.; HWANG, P. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with Matlab Exercises*. United States of America: Wiley, 2012.
- CALLIER, F.; CHAN, W.; DESOER., C. Input-output stability theory of interconnected systems using decomposition techniques. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, v. 23(12), p. 714–729, 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TCS.1976.1084167>>.
- CAMPONOGARA, E.; JIA, D.; KROGH, B.; TALUKDAR, S. Distributed model predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, p. 44 – 52, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/37.980246>>.
- CHILIN, D.; LIU, J.; CHEN, X.; CHRISTOFIDES, P. D. Fault detection and isolation and fault tolerant control of a catalytic alkylation of benzene process. *Chemical Engineering Science*, v. 78, p. 155 – 166, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ces.2012.05.015>>.

- CHRISTOFIDES, P. D.; SCATTOLINI, R.; de la PEÑA, D. M.; LIU, J. Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions. *Computers & Chemical Engineering*, v. 51, n. 0, p. 21 – 41, 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compchemeng.2012.05.011>>.
- CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. *Joint Automatic Control Conference*, v. 17, p. 72, 1980.
- D'ANDREA., R. A linear matrix inequality approach to decentralized control of distributed parameter systems. In *Proceedings American Control Conference*, p. 1350–1354, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACC.1998.707015>>.
- DU, X.; XI, Y.; SHAOYUAN, L. Distributed model predictive control for large-scale systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. [s.n.], 2001. v. 4, p. 3142 – 3143. Arlington, VA. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACC.2001.946403>>.
- FARINA, M.; SCATTOLINI, R. Distributed non-cooperative MPC with neighbor-to-neighbor communication. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 44, n. 1, p. 404 – 409, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.01092>>.
- FERRAMOSCA, A.; LIMON, D.; ALVARADO, I.; CAMACHO, E. F. Cooperative distributed MPC for tracking. *Automatica*, v. 49, n. 4, p. 906 – 914, 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2013.01.019>>.
- GARCIA, C. E.; MORSHEDI, A. Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC). *Chemical Engineering Communications*, v. 46, n. 1-3, p. 73–87, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00986448608911397>>.
- GARCIA, C. E.; PRETT, D. M.; MORARI, M. Model predictive control: Theory and practice - a survey. *Automatica*, v. 25, n. 3, p. 335 – 348, 1989. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(89\)90002-2](https://doi.org/10.1016/0005-1098(89)90002-2)>.
- HAMID, G.; AHARI, J. S.; FARSHI, A.; MAJID, K. Modelling and simulation of benzene alkylation process reactors for production of ethylbenzene. *Petroleum and Coal*, v. 46, p. 55–63, 2004.
- JIA, D.; KROGH, B. Min-max feedback model predictive control for distributed control with communication. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference*. Anchorage, AK, USA: American Automatic Control Council, 2002. v. 6, p. 4507–4512. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACC.2002.1025360>>.
- JOTA, F. G. *The Application of Self-tuning Control Techniques to a Multivariable Process*. Tese (Doutorado) — University of Oxford, United States of America, 1987.

-
- KEVICZKY, T.; BORRELLI, F.; BALAS, G. J. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems. *Automatica*, v. 42, n. 12, p. 2105 – 2115, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.07.008>>.
- KONG, H.; LONGO, S. Cooperative distributed model predictive control via linear programming a divide and conquer approach. *IFAC-PapersOnLine*, v. 48, n. 23, p. 308 – 313, 2015. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315025847>>.
- LEE, W. J.; FROMENT, G. F. Ethylbenzene dehydrogenation into styrene: Kinetic modeling and reactor simulation. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 47, n. 23, p. 9183–9194, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/ie071098u>>.
- LEWIS, F.; VRABIE, D.; SYRMOS, V. *Optimal Control*. United States of America: Wiley, 2012.
- LIU, J.; CHEN, X.; de la PEÑA, D. M.; CHRISTOFIDES, P. D. Sequential and iterative architectures for distributed model predictive control of nonlinear process systems. *AIChE Journal*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 56, n. 8, p. 2137–2149, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACC.2010.5531004>>.
- MAESTRE, J.; de la PEÑA, D. M.; CAMACHO, E.; ALAMO, T. Distributed model predictive control based on agent negotiation. *Journal of Process Control*, v. 21, n. 5, p. 685 – 697, 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jprocont.2010.12.006>>.
- MAGNI, L.; SCATTOLINI, R. Stabilizing decentralized model predictive control of nonlinear systems. *Automatica*, v. 42, n. 7, p. 1231–1236, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2006.02.010>>.
- MERCANGOZ, M.; DOYLE III, F. J. Distributed model predictive control of an experimental four-tank system. *Journal of Process Control*, v. 17, n. 3, p. 297 – 308, 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jprocont.2006.11.003>>.
- MESAROVIC, M.; MACKO, D.; TAKAHARA, Y. *Theory of Hierarchical, Multilevel, Systems*. United States of America: Elsevier Science, 2000.
- MICHEL, A. Stability analysis of interconnected systems. *SIAM Journal on Control*, v. 12, p. 554–579, 1974. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0167-6911\(83\)90057-9](https://doi.org/10.1016/0167-6911(83)90057-9)>.
- MICHEL, A.; RASMUSSEN, R. Stability of stochastic composite systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 21, p. 89–94, 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.1976.1101131>>.

- MORARI, M.; LEE, J. H. Model predictive control: past, present and future. *Computers & Chemical Engineering*, v. 23, p. 667 – 682, 1999. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0098-1354\(98\)00301-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0098-1354(98)00301-9)>.
- MOTEE, N.; SAYYAR-RODSARI, B. Optimal partitioning in distributed model predictive control. *Proceedings of the American Control Conference*, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1242570>>.
- MUSKE, K. R.; RAWLINGS, J. B. Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, American Institute of Chemical Engineers, v. 39, n. 2, p. 262 – 287, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/aic.690390208>>.
- NAGHAVI, S. V.; SAFAVI, A. A. Decentralized model predictive control of interconnected nonlinear systems at the presence of faults over communication network. In: *2017 International Conference on Computer, Communications and Electronics (Comptelix)*. [s.n.], 2017. p. 101–106. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/COMPTELIX.2017.8003946>>.
- NIKOLAOU, M. Model predictive controllers: A critical synthesis of theory and industrial needs. In: . Houston: Academic Press, 2001. v. 26, p. 131 – 204. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0065-2377\(01\)26003-7](https://doi.org/10.1016/S0065-2377(01)26003-7)>.
- PANNOCCHIA, G.; WRIGHT, S. J.; STEWART, B. T.; RAWLINGS, J. B. Efficient cooperative distributed mpc using partial enumeration. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 42, n. 11, p. 607 – 612, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.3182/20090712-4-TR-2008.00098>>.
- PEREGO, C.; INGALLINA, P. Combining alkylation and transalkylation for alkylaromatic production. *Green Chem.*, The Royal Society of Chemistry, v. 6, p. 274–279, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1039/B403277M>>.
- QIN, S.; BADGWELL, T. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, v. 11, n. 7, p. 733 – 764, 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0967-0661\(02\)00186-7](https://doi.org/10.1016/S0967-0661(02)00186-7)>.
- QIN, S. J.; BADGWELL, T. A. An overview of industrial model predictive control technology. In: . [S.l.: s.n.], 1997. p. 232–256.
- RAWLINGS, J. B.; STEWART, B. T. Coordinating multiple optimization-based controllers: New opportunities and challenges. *Journal of Process Control*, v. 18, n. 9, p. 839 – 845, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2008.06.005>>.

- RICHALET, J.; RAULT, A.; TESTUD, J.; PAPON, J. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica*, v. 14, n. 5, p. 413 – 428, 1978. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(78\)90001-8](https://doi.org/10.1016/0005-1098(78)90001-8)>.
- RICHARDS, A.; HOW, J. P. Robust distributed model predictive control. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 80, n. 9, p. 1517–1531, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207170701491070>>.
- ROCHA, R. R. *Controle preditivo distribuído de processos lineares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Química, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Uberlândia, 2014.
- ROCHA, R. R.; OLIVEIRA-LOPES, L. C. Uma proposta de decomposição de sistemas lineares para DMPC. *Blucher Chemical Engineering Proceedings*, v. 1, n. 2, p. 12512 – 12519, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5151/chemeng-cobeq2014-1483-19070-141425>>.
- ROCHA, R. R.; OLIVEIRA-LOPES, L. C. A cooperative distributed model predictive control for nonlinear systems with automatic partitioning. In: *26th European Symposium on Computer Aided Process Engineering*. Elsevier, 2016. (Computer Aided Chemical Engineering, v. 38), p. 2205 – 2210. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-0-444-63428-3.50372-6>>.
- ROCHA, R. R.; OLIVEIRA-LOPES, L. C. A distributed model predictive controller for linear systems with automatic partitioning. In: *Proceedings of The 6th IASTED International Conference on Intelligent Systems and Control*. [s.n.], 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.2316/P.2016.841-045>>.
- ROTKOWITZ, M.; LALL, S. A characterization of convex problems in decentralized control. *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 51(2), p. 1984–1996, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.2005.860365>>.
- SANDELL, N.; VARAIYA, P.; ATHANS, M.; SAFONOV, M. Survey of decentralized control methods for large scale systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 23(2), p. 108–128, 1978. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.1978.1101704>>.
- SCATTOLINI, R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control - a review. *Journal of Process Control*, v. 19, n. 5, p. 723 – 731, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jprocont.2009.02.003>>.
- SEBORG, D.; EDGAR, T.; MELLICHAMP, D. *Process Dynamics and Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Incorporated, 2004. ISBN 9780471452461.

- SEZER, M.; SILJAK, D. Nested e-decompositions and clustering of complex systems. *Automatica*, v. 22, n. 3, p. 321 – 331, 1986. ISSN 0005-1098. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(86\)90030-0](https://doi.org/10.1016/0005-1098(86)90030-0)>.
- SEZER, M. E.; SILJAK, D. D. On structural decomposition and stabilization of large-scale control systems. *IEEE Transactions*, v. 26, p. 439 – 444, 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.1981.1102667>>.
- STEWART, B. T.; VENKAT, A. N.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J.; PANNOCCHIA, G. Cooperative distributed model predictive control. *Systems & Control Letters*, v. 59, n. 8, p. 460 – 469, 2010. ISSN 0167-6911. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.sysconle.2010.06.005>>.
- STEWART, B. T.; WRIGHT, S. J.; RAWLINGS, J. B. Cooperative distributed model predictive control for nonlinear systems. *Journal of Process Control*, v. 21, n. 5, p. 698 – 704, 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jprocont.2010.11.004>>.
- STOLEN, L.; AS, D. P. Distributed control system. *IEEE The 21st International Telecommunications Energy Conference*, p. 1 – 4, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/INTLEC.1999.794025>>.
- SUN, Y.; EL-FARRA, N. H. Quasi-decentralized model-based networked control of process systems. *Computers & Chemical Engineering*, v. 32, n. 9, p. 2016–2029, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compchemeng.2008.02.011>>.
- VENKAT, A. N.; HISKENS, I. A.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J. Distributed MPC strategies with application to power system automatic generation control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 16, n. 6, p. 1192–1206, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/tcst.2008.919414>>.
- VENKAT, A. N.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J. Stability and optimality of distributed model predictive control. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*. Seville, Spain: [s.n.], 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/CDC.2005.1583235>>.
- VENKAT, A. N.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J. Implementable distributed model predictive control with guaranteed performance properties. In: *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. Minneapolis, Minnesota, USA: [s.n.], 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACC.2006.1655424>>.
- WANG, S.; DAVISON, E. J. On the stabilization of decentralized control systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 18(5), p. 473–478, 1973. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.1973.1100362>>.

- XIE, L.; CAI, X.; CHEN, J.; SU, H. GA based decomposition of large scale distributed model predictive control systems. *Control Engineering Practice*, v. 57, p. 111 – 125, 2016. ISSN 0967-0661. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2016.08.016>>.
- YLINEN, R.; NIEMI, A. J.; IIVARINEN, T. A linear-quadratic-gaussian control algorithm for sulphide ore grinding. *Automatica*, v. 23, n. 3, p. 287 – 294, 1987. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098\(87\)90002-1](http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098(87)90002-1)>.
- YOU, H.; LONG, W.; PAN, Y. The mechanism and kinetics for the alkylation of benzene with ethylene. *Petroleum Science and Technology*, Taylor & Francis, v. 24, n. 9, p. 1079–1088, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1081/LFT-200053893>>.
- ZHANG, L.; WANG, J. Distributed model predictive control with a novel partition method. In: *31st Chinese Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 4108–4113.

APÊNDICE A

Evoluções das partições para o DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

A seguir serão apresentados as evoluções no particionamento para cada um dos estudos de casos avaliados nessa tese para o controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado. As primeiras evoluções do particionamento a serem apresentadas são as obtidas para o estudo de caso 1, tanto para o cenário sem restrição na velocidade das entradas manipuladas como para o cenário que considera restrições desse tipo.

A.1 Estudo de caso 1

A.1.1 Cenário sem restrição na velocidade das entradas manipuladas

A Figura (A.1) representa a evolução das partições ao longo do tempo considerado de operação da planta para o controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado do estudo de caso 1, no cenário que não considera restrições na velocidade das variáveis manipuladas, ou seja, não considera restrições na variação sucessiva dessas variáveis. Vale lembrar aqui, que o particionamento nesta técnica de controle foi

realizado em cada instante de amostragem, a partir do modelo linearizado em torno do ponto de operação $k - 1$.

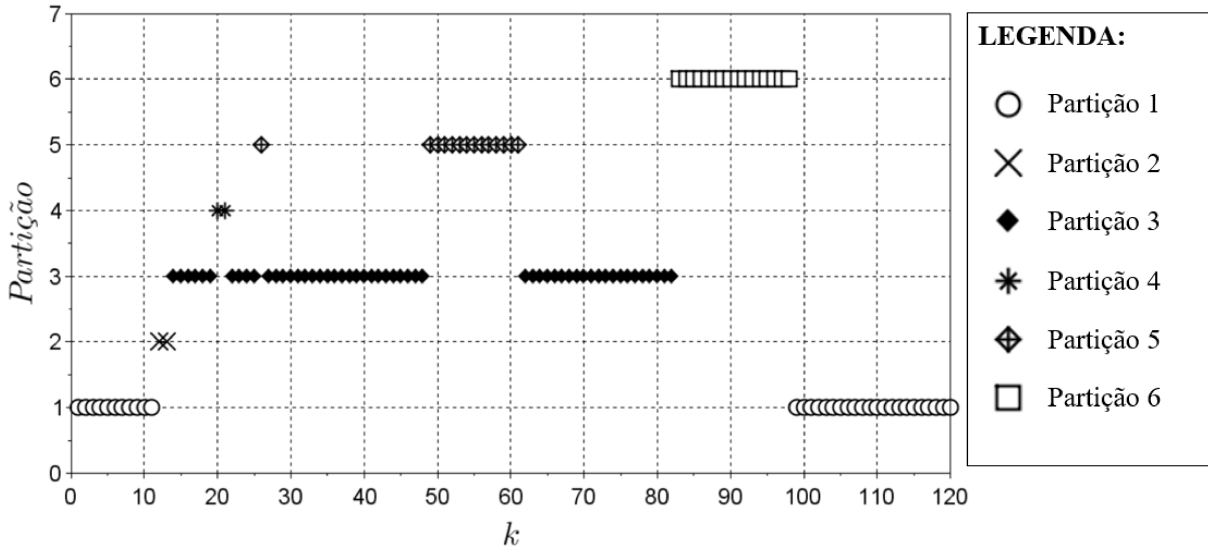


Figura A.1: Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Nota-se pela Figura (A.1) que ocorrem ao longo do tempo considerado de operação 6 tipos distintos de partições. Os diferentes grafos que geram as partições são apresentadas a seguir:

$$G_1: \{u_1\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_2: \{u_2\} \Rightarrow \{x_4\}$$

$$G_3: \{u_2\} \Rightarrow \{x_4 \text{ e } x_8\}$$

$$G_4: \{u_3\} \Rightarrow \{x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_5: \{u_4\} \Rightarrow \{x_8 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_6: \{u_5\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_9\}$$

$$G_7: \{u_5\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_9 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_8: \{u_5\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_9: \{u_6\} \Rightarrow \{x_4 \text{ e } x_{12}\}$$

Os 6 tipos de partições são mostradas a seguir, representando as variáveis controladas e manipuladas presentes em cada subsistema da estrutura DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado:

Partição 1: $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_6 \text{ e } G_9\}$

Partição 2: $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_7 \text{ e } G_9\}$

Partição 3: $\{G_1, G_3, G_4, G_5, G_8 \text{ e } G_9\}$

Partição 4: $\{G_1, G_3, G_4, G_5, G_7 \text{ e } G_9\}$

Partição 5: $\{G_1, G_3, G_4, G_5, G_6 \text{ e } G_9\}$

Partição 6: $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_8 \text{ e } G_9\}$

A seguir, tem-se a evolução do particionamento quando se considerou o cenário com restrições na variação sucessiva das variáveis manipuladas.

A.1.2 Cenário com restrição na velocidade das entradas manipuladas

A Figura (A.2) representa a evolução do particionamento ao longo do tempo de operação da planta para o controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado no estudo de caso 1 no cenário que considera restrições na velocidade das variáveis manipuladas.

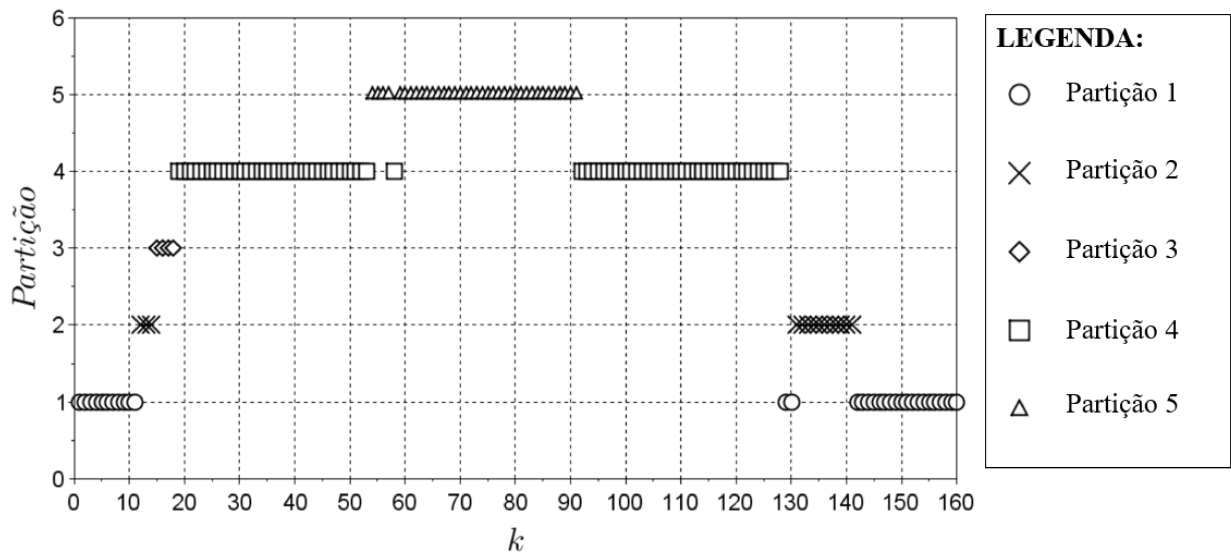


Figura A.2: Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 1 com restrição em Δu_i .

Nota-se pela Figura (A.2) que ocorrem 5 tipos distintos de partições. Os diferentes tipos de grafos que geram essas partições são apresentadas a seguir:

$$G_1: \{u_1\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_2: \{u_2\} \Rightarrow \{x_4\}$$

$$G_3: \{u_2\} \Rightarrow \{x_4 \text{ e } x_8\}$$

$$G_4: \{u_3\} \Rightarrow \{x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_5: \{u_4\} \Rightarrow \{x_8 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_6:\{u_5\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_9\}$$

$$G_7:\{u_5\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_8:\{u_6\} \Rightarrow \{x_4 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_9:\{u_6\} \Rightarrow \{x_{12}\}$$

Os 5 tipos de partições são mostradas a seguir:

Partição 1: $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_6 \text{ e } G_8\}$

Partição 2: $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_7 \text{ e } G_8\}$

Partição 3: $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_7 \text{ e } G_9\}$

Partição 4: $\{G_1, G_3, G_4, G_5, G_7 \text{ e } G_8\}$

Partição 5: $\{G_1, G_3, G_4, G_5, G_6 \text{ e } G_8\}$

Na próxima seção, tem-se a evolução das partições para o estudo de caso 2.

A.2 Estudo de caso 2

A Figura (A.3) representa a evolução das partições ao longo do tempo de operação da planta para o DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado do estudo de caso 2.

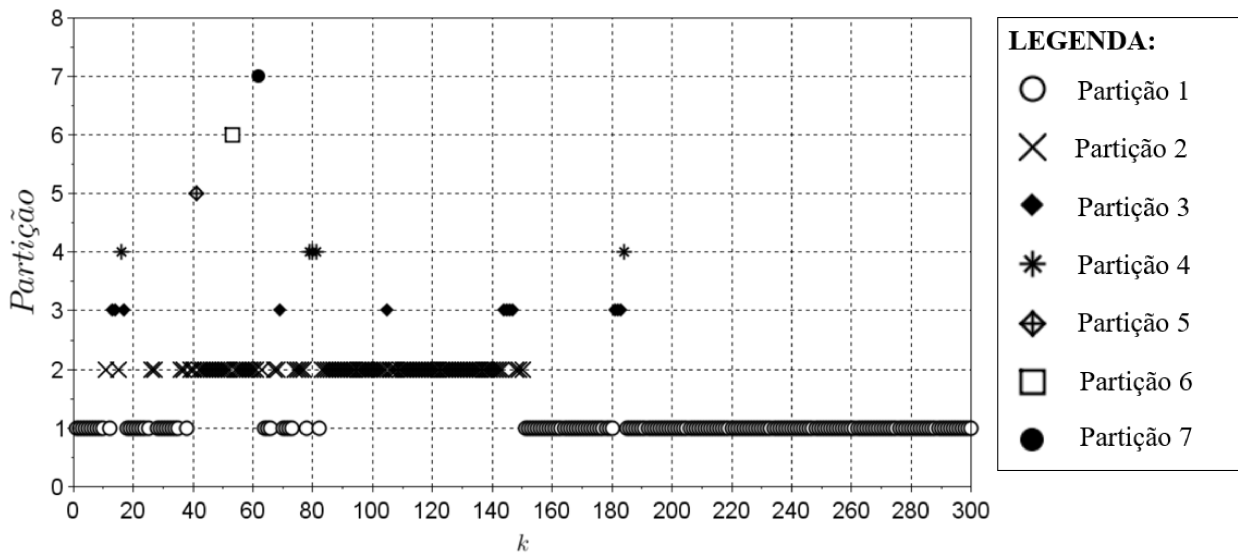


Figura A.3: Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

Nota-se pela Figura (A.3) que ocorrem 7 partições distintas. Os diferentes tipos de

grafos que geram as partições são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
G_1: \{u_1\} &\Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_{12}\} \\
G_2: \{u_2, u_4 \text{ e } u_6\} &\Rightarrow \{x_4, x_8, \text{ e } x_{12}\} \\
G_3: \{u_2, u_4, \text{ e } u_6\} &\Rightarrow \{x_4, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_4: \{u_3\} &\Rightarrow \{x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_5: \{u_3\} &\Rightarrow \{x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_{12}\} \\
G_6: \{u_4\} &\Rightarrow \{x_4, x_8 \text{ e } x_{12}\} \\
G_7: \{u_5\} &\Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_8: \{u_1 \text{ e } u_5\} &\Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_9: \{u_2 \text{ e } u_6\} &\Rightarrow \{x_4, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_{10}: \{u_6\} &\Rightarrow \{x_4, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_{11}: \{u_2 \text{ e } u_4\} &\Rightarrow \{x_4, x_8, x_9, \text{ e } x_{12}\}
\end{aligned}$$

Os 7 tipos de partições são mostradas a seguir, representando as variáveis controladas e manipuladas presentes em cada subsistema da estrutura DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado:

- Partição 1:** $\{G_1, G_2, G_5 \text{ e } G_7\}$
Partição 2: $\{G_2, G_4 \text{ e } G_8\}$
Partição 3: $\{G_1, G_2, G_4 \text{ e } G_7\}$
Partição 4: $\{G_2, G_5, \text{ e } G_8\}$
Partição 5: $\{G_3, G_4, \text{ e } G_8\}$
Partição 6: $\{G_4, G_6, G_8 \text{ e } G_9\}$
Partição 7: $\{G_4, G_8, G_{10} \text{ e } G_{11}\}$

A seguir, os resultados para o estudo de caso 3.

A.3 Estudo de caso 3

A Figura (A.4) representa a evolução das partições ao longo do tempo de operação da planta para o controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado do estudo de caso 3. Lembrando que nesse estudo de caso considerou-se o cenário que não há restrições na velocidade das variáveis manipuladas.

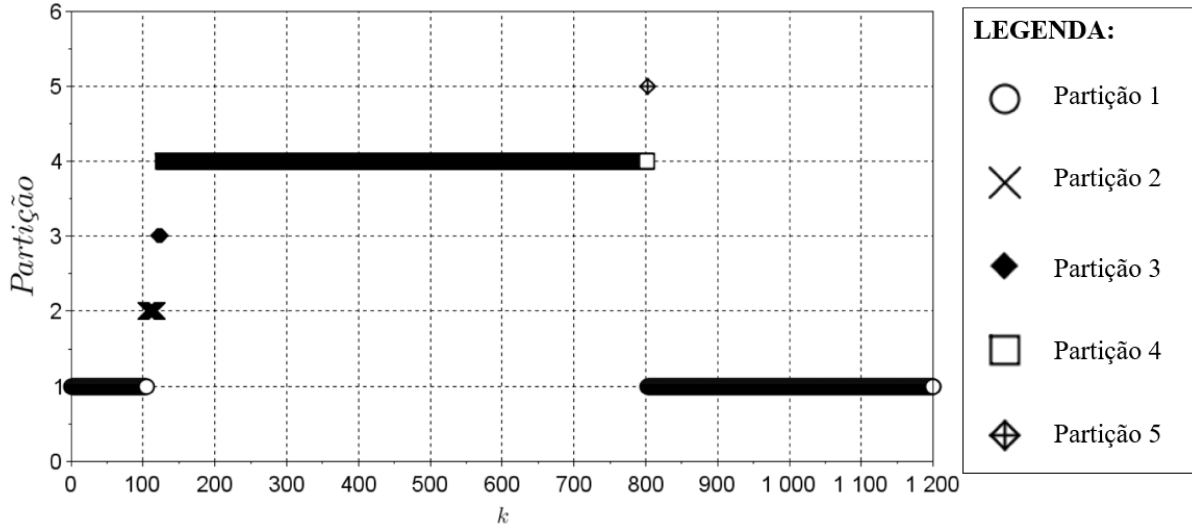


Figura A.4: Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

Nota-se pela Figura (A.4) que ocorrem ao longo do tempo de operação 5 tipos distintos de particionamento. Os diferentes tipos de grafos que geram as partições são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 G_1: \{u_6, u_7, u_8 \text{ e } u_9\} &\Rightarrow \{x_5, x_{10}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20} \text{ e } x_{25}\} \\
 G_2: \{u_1\} &\Rightarrow \{x_5, x_{10}, \text{ e } x_{15}\} \\
 G_3: \{u_1\} &\Rightarrow \{x_5, x_{10}, x_{15} \text{ e } x_{20}\} \\
 G_4: \{u_2\} &\Rightarrow \{x_{10}, x_{15}, x_{16} \text{ e } x_{20}\} \\
 G_5: \{u_2\} &\Rightarrow \{x_{10}, x_{15}, x_{16}, x_{17} \text{ e } x_{20}\} \\
 G_6: \{u_2\} &\Rightarrow \{x_{10}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{19} \text{ e } x_{20}\} \\
 G_7: \{u_3\} &\Rightarrow \{x_5, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20} \text{ e } x_{25}\} \\
 G_8: \{u_4\} &\Rightarrow \{x_5, x_{10}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20} \text{ e } x_{25}\} \\
 G_9: \{u_5\} &\Rightarrow \{x_5, x_{16}, x_{18}, x_{19}, x_{20} \text{ e } x_{25}\}
 \end{aligned}$$

Os 5 tipos de partições que representam as variáveis controladas e manipuladas presentes em cada subsistema da estrutura DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, são apresentados a seguir:

- Partição 1:** $\{G_1, G_2, G_4, G_7, G_8, \text{ e } G_9\}$
Partição 2: $\{G_1, G_2, G_5, G_7, G_8, \text{ e } G_9\}$
Partição 3: $\{G_1, G_2, G_6, G_7, G_8, \text{ e } G_9\}$
Partição 4: $\{G_1, G_3, G_6, G_7, G_8, \text{ e } G_9\}$
Partição 5: $\{G_1, G_3, G_5, G_7, G_8, \text{ e } G_9\}$

APÊNDICE B

Evoluções das partições para o DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

A seguir serão apresentados as evoluções no particionamento para cada um dos estudos de casos avaliados nessa tese para o controle proposto DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado. As primeiras evoluções do particionamento a serem apresentadas são as obtidas para o estudo de caso 1, tanto para o cenário sem restrição na velocidade das entradas manipuladas, como para o cenário que considera restrições dessa natureza.

B.1 Estudo de caso 1

B.1.1 Cenário sem restrição na velocidade das entradas manipuladas

A Figura (B.1) representa a evolução das partições ao longo do tempo de operação da planta para o controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado do estudo de caso 1, no cenário que não considera restrições na velocidade das variáveis manipuladas. Vale lembrar aqui, que o particionamento foi realizado em cada instante de amostragem, a partir do modelo linearizado em torno do ponto de operação $k - 1$.

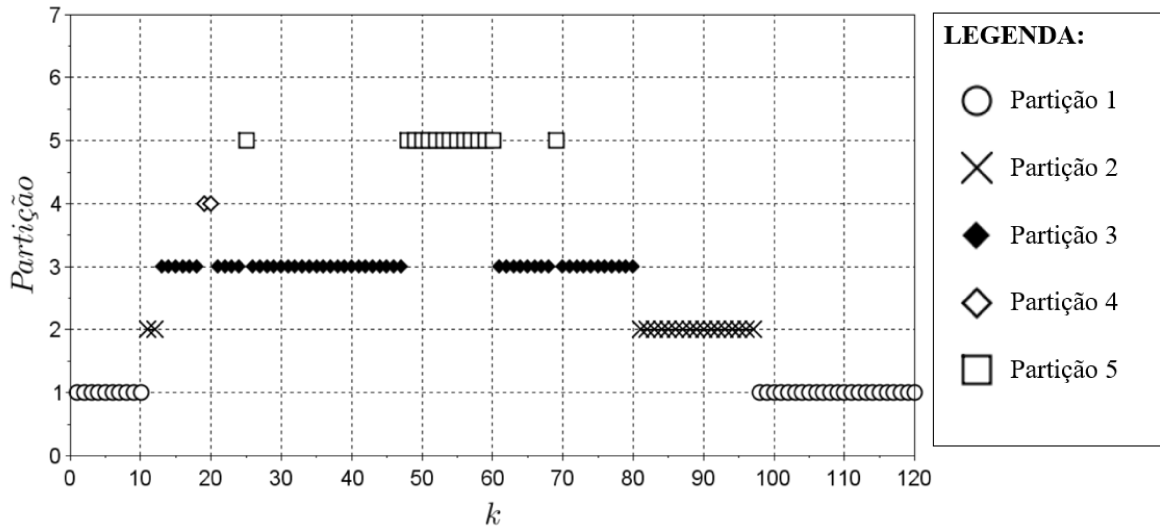


Figura B.1: Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i .

Nota-se pela Figura (B.1) que ocorrem ao longo do tempo de operação considerado 5 tipos distintos de particionamento. Os diferentes tipos de grafos que geram as partições são apresentadas a seguir:

$$G_1: \{u_1\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_2: \{u_2\} \Rightarrow \{x_4\}$$

$$G_3: \{u_2\} \Rightarrow \{x_4 \text{ e } x_8\}$$

$$G_4: \{u_3\} \Rightarrow \{x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_5: \{u_4\} \Rightarrow \{x_8 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_6: \{u_5\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_9\}$$

$$G_7: \{u_5\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_8: \{u_5\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_9 \text{ e } x_{12}\}$$

$$G_9: \{u_6\} \Rightarrow \{x_4 \text{ e } x_{12}\}$$

Os 5 tipos de partições são mostradas a seguir:

Partição 1: $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_6 \text{ e } G_9\}$

Partição 2: $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_7 \text{ e } G_9\}$

Partição 3: $\{G_1, G_3, G_4, G_5, G_7 \text{ e } G_9\}$

Partição 4: $\{G_1, G_3, G_4, G_5, G_8 \text{ e } G_9\}$

Partição 5: $\{G_1, G_3, G_4, G_5, G_6 \text{ e } G_9\}$

A seguir, a evolução obtida para o cenário que considera restrições na variação suces-

siva das entradas manipuladas.

B.1.2 Cenário com restrição na velocidade das entradas manipuladas

A Figura (B.2) representa a evolução das partições ao longo do tempo de operação da planta para o controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado do estudo de caso 1.

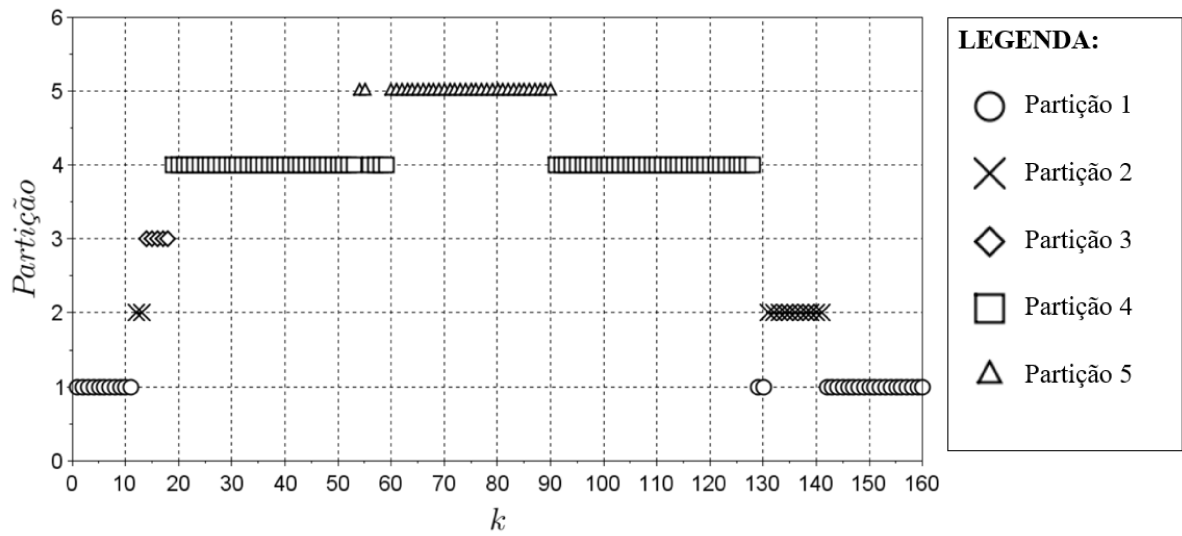


Figura B.2: Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 1 com restrição em Δu_i .

Nota-se pela Figura (B.2) que ocorrem ao longo do tempo de operação considerado 5 tipos distintos de particionamento. Os diferentes tipos de grafos que geram as partições são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 G_1: \{u_1\} &\Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_{12}\} \\
 G_2: \{u_2\} &\Rightarrow \{x_4\} \\
 G_3: \{u_2\} &\Rightarrow \{x_4 \text{ e } x_8\} \\
 G_4: \{u_3\} &\Rightarrow \{x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
 G_5: \{u_4\} &\Rightarrow \{x_8 \text{ e } x_{12}\} \\
 G_6: \{u_5\} &\Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_9\} \\
 G_7: \{u_5\} &\Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
 G_8: \{u_6\} &\Rightarrow \{x_4 \text{ e } x_{12}\} \\
 G_9: \{u_6\} &\Rightarrow \{x_{12}\}
 \end{aligned}$$

Os 5 tipos de partições, que representam as variáveis controladas e manipuladas presentes em cada subsistema da estrutura do DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, são apresentados a seguir:

Partição 1: $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_6 \text{ e } G_8\}$

Partição 2: $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_7 \text{ e } G_8\}$

Partição 3: $\{G_1, G_2, G_4, G_5, G_7 \text{ e } G_9\}$

Partição 4: $\{G_1, G_3, G_4, G_5, G_7 \text{ e } G_8\}$

Partição 5: $\{G_1, G_3, G_4, G_5, G_6 \text{ e } G_8\}$

Na próxima seção, tem-se a evolução do particionamento para estudo de caso 2.

B.2 Estudo de caso 2

A Figura (B.3) representa a evolução das partições ao longo do tempo de operação da planta para o controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado do estudo de caso 2, no cenário que não considera restrições na variação sucessiva dessas variáveis.

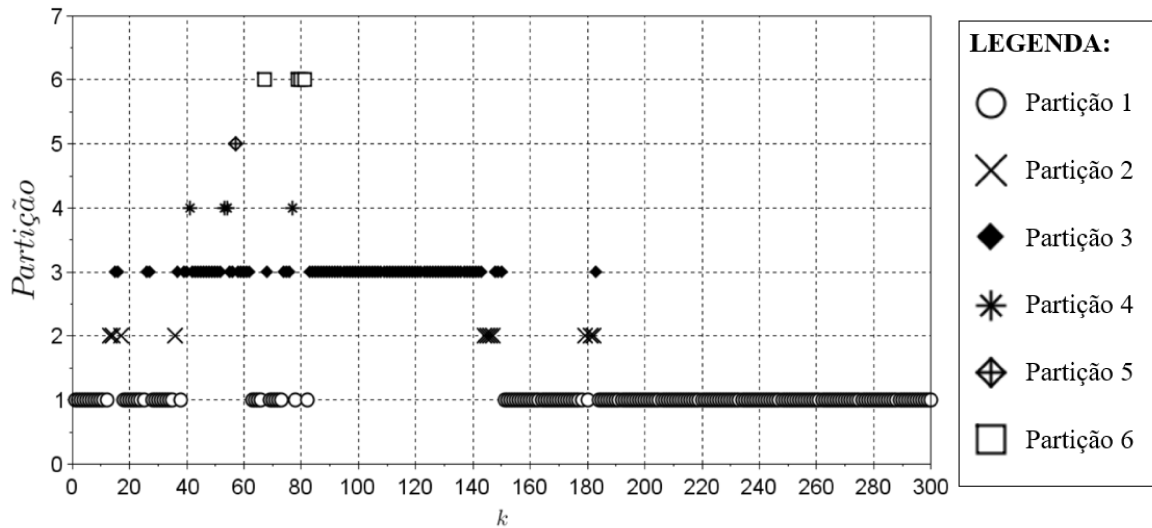


Figura B.3: Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i .

Nota-se pela Figura (B.3) que ocorrem 6 tipos distintos de partições. Os diferentes tipos de grafos que geram as partições são apresentadas a seguir:

$$G_1: \{u_1\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_{12}\}$$

$$\begin{aligned}
G_2: \{u_2, u_4 \text{ e } u_6\} &\Rightarrow \{x_4, x_8, \text{ e } x_{12}\} \\
G_3: \{u_2, u_4, \text{ e } u_6\} &\Rightarrow \{x_4, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_4: \{u_3\} &\Rightarrow \{x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_5: \{u_3\} &\Rightarrow \{x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_{12}\} \\
G_6: \{u_4\} &\Rightarrow \{x_4, x_8 \text{ e } x_{12}\} \\
G_7: \{u_5\} &\Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_8: \{u_1 \text{ e } u_5\} &\Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_9: \{u_2 \text{ e } u_6\} &\Rightarrow \{x_4, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_{10}: \{u_6\} &\Rightarrow \{x_4, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_{11}: \{u_1\} &\Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8, x_9 \text{ e } x_{12}\} \\
G_{12}: \{u_5\} &\Rightarrow \{x_1, x_4, x_5, x_8 \text{ e } x_{12}\}
\end{aligned}$$

Os 6 tipos de partições são mostradas a seguir:

- Partição 1:** $\{G_1, G_2, G_5 \text{ e } G_7\}$
Partição 2: $\{G_1, G_2, G_4 \text{ e } G_7\}$
Partição 3: $\{G_2, G_4 \text{ e } G_8\}$
Partição 4: $\{G_4, G_6, G_8 \text{ e } G_9\}$
Partição 5: $\{G_2, G_4, G_{11} \text{ e } G_{12}\}$
Partição 6: $\{G_2, G_5 \text{ e } G_8\}$

A seguir, tem-se a evolução das partições para o estudo de caso 3.

B.3 Estudo de caso 3

A Figura (B.4) representa a evolução das partições ao longo do tempo de operação da planta para o controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado no estudo de caso 3, no cenário que não considera restrições na velocidade das variáveis manipuladas.

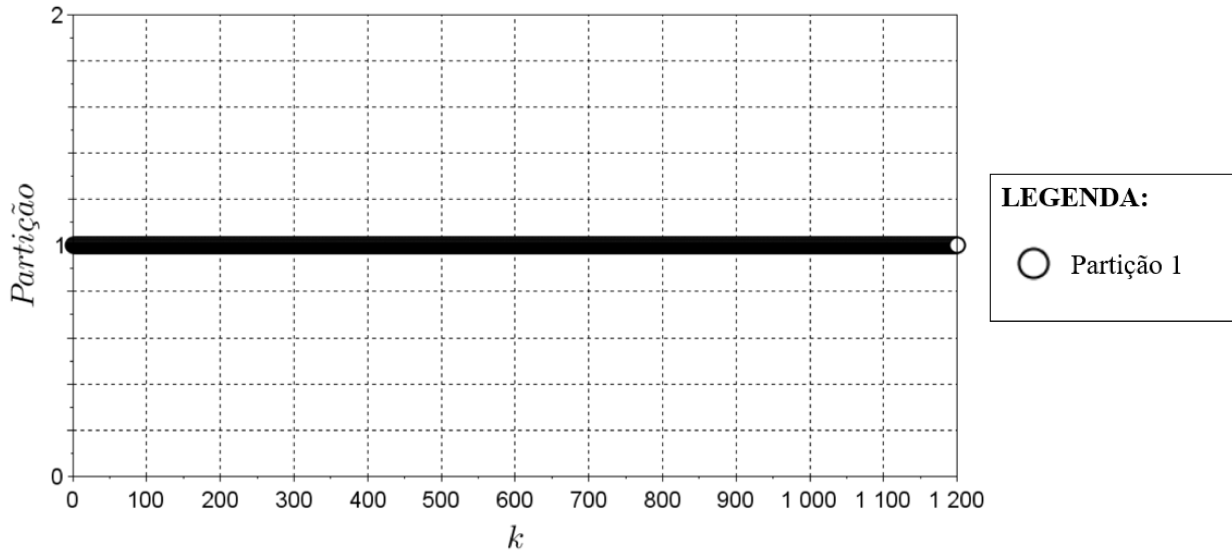


Figura B.4: Evolução das partições para a estrutura de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado para o estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i .

Nota-se pela Figura (B.4) que ocorre apenas um tipo de particionamento para o DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado. Os diferentes tipos de grafos que gera a partição são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned}
 G_1: \{u_6, u_7 \text{ e } u_8\} &\Rightarrow \{x_5, x_{10}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20} \text{ e } x_{25}\} \\
 G_2: \{u_1\} &\Rightarrow \{x_5, x_{10}, \text{ e } x_{15}\} \\
 G_3: \{u_2\} &\Rightarrow \{x_{10} \text{ e } x_{15}\} \\
 G_4: \{u_3\} &\Rightarrow \{x_{15} \text{ e } x_{20}\} \\
 G_5: \{u_4\} &\Rightarrow \{x_5, x_{20} \text{ e } x_{25}\} \\
 G_6: \{u_5\} &\Rightarrow \{x_{20} \text{ e } x_{25}\} \\
 G_7: \{u_9\} &\Rightarrow \{x_5, x_{10}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20} \text{ e } x_{25}\}
 \end{aligned}$$

O único tipo de partição é formada pelos seguintes grafos:

Partição 1: $\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 \text{ e } G_7\}$

APÊNDICE C

Partições geradas nos DMPCs não lineares

A metodologia de particionamento utilizado nos DMPCs não cooperativo e cooperativo baseado nas matrizes de incidência do modelo não linear, parte do modelo não linear da planta e independente do ponto de operação, este modelo não muda, gerando assim apenas um tipo de partição. Neste apêndice serão apresentados as partições geradas em cada estudo de caso. Vale lembrar aqui que o modelo utilizado nos estudos de casos 1 e 2 são idênticos. Logo o mesmo tipo de particionamento é gerado nestes exemplos, o que será apresentado na próxima seção.

C.1 Estudos de casos 1 e 2

A partir do modelo apresentado para os estudos de casos 1 e 2 no Capítulo 4 é possível identificar para cada dinâmica dos estados \dot{x}_i , os estados e entradas que tal comportamento é função. A seguir, tais dependências:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, u_1, u_5) \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_4, x_{10}, x_{11}, u_1, u_5) \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{10}, x_{11}, u_1, u_5) \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{dx_4}{dt} = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, u_1, u_2, u_5) \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{dx_5}{dt} = f_5(x_1, x_5, u_3) \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{dx_6}{dt} = f_6(x_1, x_2, x_5, x_6, x_8, u_3) \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{dx_7}{dt} = f_7(x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, u_3) \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{dx_8}{dt} = f_8(x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, u_3, u_4) \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{dx_9}{dt} = f_9(x_5, x_9, u_5) \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{dx_{10}}{dt} = f_{10}(x_6, x_9, x_{10}, x_{11}, u_5) \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{dx_{11}}{dt} = f_{11}(x_7, x_9, x_{10}, x_{11}, u_5) \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{dx_{12}}{dt} = f_{12}(x_8, x_9, x_{12}, u_5, u_6) \quad (\text{C.12})$$

$$y_1 = g_1(x_1) \quad (\text{C.13})$$

$$y_2 = g_2(x_4) \quad (\text{C.14})$$

$$y_3 = g_3(x_5) \quad (\text{C.15})$$

$$y_4 = g_4(x_8) \quad (\text{C.16})$$

$$y_5 = g_5(x_9) \quad (\text{C.17})$$

$$y_6 = g_6(x_{12}) \quad (\text{C.18})$$

A partir do modelo fenomenológico genérico acima, têm-se as seguintes matrizes de incidência para as entradas (**E**), estados (**S**) e saídas (**C**):

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.21})$$

A **Etapa 1** do particionamento consiste em criar os conjuntos γ_j , Γ_j , v_j e Υ_j ,

baseando-se nas matrizes de incidência \mathbf{E} e \mathbf{S} , respectivamente. A seguir os conjuntos gerados:

- $\gamma_1 = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \Gamma_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
- $\gamma_2 = \{4\} \Rightarrow \Gamma_2 = \{x_4\}$
- $\gamma_3 = \{5, 6, 7, 8\} \Rightarrow \Gamma_3 = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$
- $\gamma_4 = \{8\} \Rightarrow \Gamma_4 = \{x_8\}$
- $\gamma_5 = \{1, 2, 3, 4, 9, 10, 11\} \Rightarrow \Gamma_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}, x_{11}\}$
- $\gamma_6 = \{12\} \Rightarrow \Gamma_6 = \{x_{12}\}$
- $v_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow \Upsilon_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$
- $v_2 = \{2, 3, 4, 6\} \Rightarrow \Upsilon_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_6\}$
- $v_3 = \{3, 4, 7\} \Rightarrow \Upsilon_3 = \{x_3, x_4, x_7\}$
- $v_4 = \{2, 3, 4, 8\} \Rightarrow \Upsilon_4 = \{x_2, x_3, x_4, x_8\}$
- $v_5 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \Rightarrow \Upsilon_5 = \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$
- $v_6 = \{6, 7, 8, 10\} \Rightarrow \Upsilon_6 = \{x_6, x_7, x_8, x_{10}\}$
- $v_7 = \{7, 8, 11\} \Rightarrow \Upsilon_7 = \{x_7, x_8, x_{11}\}$
- $v_8 = \{6, 7, 8, 12\} \Rightarrow \Upsilon_8 = \{x_6, x_7, x_8, x_{12}\}$
- $v_9 = \{9, 10, 11\} \Rightarrow \Upsilon_9 = \{x_9, x_{10}, x_{11}\}$
- $v_{10} = \{2, 3, 10, 11\} \Rightarrow \Upsilon_{10} = \{x_2, x_3, x_{10}, x_{11}\}$
- $v_{11} = \{2, 3, 10, 11\} \Rightarrow \Upsilon_{11} = \{x_2, x_3, x_{10}, x_{11}\}$
- $v_{12} = \{4, 12\} \Rightarrow \Upsilon_{12} = \{x_4, x_{12}\}$

A **Etapa 2** consiste em criar os conjuntos ω_j , que para o exemplo em questão são:

- $\omega_1 = \{x_1, x_4\}$
- $\omega_2 = \{x_4\}$
- $\omega_3 = \{x_5, x_8\}$
- $\omega_4 = \{x_8\}$

$$\bullet \omega_5 = \{x_1, x_4, x_9\}$$

$$\bullet \omega_6 = \{x_{12}\}$$

Nota-se a partir dos conjuntos ω_j gerados que todas as saídas controladas são atingidas por pelo menos uma entrada. A **Etapla 3** consiste em incluir no submodelo $M\{\omega_j\}$ os elementos dos conjuntos ω_j e entrada correspondente, o que gera os seguintes submodelos:

$$\bullet M\omega_1 : \{u_1\} \Rightarrow \{x_1, x_4\}$$

$$\bullet M\omega_2 : \{u_2\} \Rightarrow \{x_4\}$$

$$\bullet M\omega_3 : \{u_3\} \Rightarrow \{x_5, x_8\}$$

$$\bullet M\omega_4 : \{u_4\} \Rightarrow \{x_8\}$$

$$\bullet M\omega_5 : \{u_5\} \Rightarrow \{x_1, x_4, x_9\}$$

$$\bullet M\omega_6 : \{u_6\} \Rightarrow \{x_{12}\}$$

Analisando os conjuntos ω_i e ω_j (para $i \neq j$), nota-se que não há conjuntos idênticos. Logo a **Etapla 4** é desnecessária. A seguir, os submodelos $M\{\omega_i\}$ gerados por esse particionamento:

Submodelo $M\omega_1$:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, u_1, u_5) \quad x_1(0) = x_{10} \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{dx_4}{dt} = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, u_1, u_2, u_5) \quad x_4(0) = x_{40} \quad (\text{C.23})$$

$$y_1 = x_1 \quad (\text{C.24})$$

$$y_2 = x_4 \quad (\text{C.25})$$

Submodelo $M\omega_2$:

$$\frac{dx_4}{dt} = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, u_1, u_2, u_5) \quad x_4(0) = x_{40} \quad (\text{C.26})$$

$$y_1 = x_4 \quad (\text{C.27})$$

Submodelo $M\omega_3$:

$$\frac{dx_5}{dt} = f_5(x_1, x_5, u_3) \quad x_5(0) = x_{50} \quad (\text{C.28})$$

$$\frac{dx_8}{dt} = f_8(x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, u_3, u_4) \quad x_8(0) = x_{80} \quad (\text{C.29})$$

$$y_1 = x_5 \quad (\text{C.30})$$

$$y_2 = x_8 \quad (\text{C.31})$$

Submodelo $M\omega_4$:

$$\frac{dx_8}{dt} = f_8(x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, u_3, u_4) \quad x_8(0) = x_{80} \quad (\text{C.32})$$

$$y_1 = x_8 \quad (\text{C.33})$$

Submodelo $M\omega_5$:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, u_1, u_5) \quad x_1(0) = x_{10} \quad (\text{C.34})$$

$$\frac{dx_4}{dt} = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{12}, u_1, u_2, u_5) \quad x_4(0) = x_{40} \quad (\text{C.35})$$

$$\frac{dx_9}{dt} = f_9(x_5, x_9, u_5) \quad x_9(0) = x_{90} \quad (\text{C.36})$$

$$y_1 = x_1 \quad (\text{C.37})$$

$$y_2 = x_4 \quad (\text{C.38})$$

$$y_3 = x_9 \quad (\text{C.39})$$

Submodelo $M\omega_6$:

$$\frac{dx_{12}}{dt} = f_{12}(x_8, x_9, x_{12}, u_5, u_6) \quad x_{12}(0) = x_{120} \quad x_8(0) = x_{80} \quad (\text{C.40})$$

$$y_1 = x_8 \quad (\text{C.41})$$

Na próxima seção será apresentado o procedimento para decomposição do modelo não linear para o estudo de caso 3.

C.2 Estudo de caso 3

A partir do modelo apresentado para o estudo de caso 3 no Capítulo 4 é possível identificar para cada dinâmica dos estados \dot{x}_i , os estados e entradas que cada comportamento é

função. A seguir, tais dependências:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_5, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.42})$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.43})$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, \dots, x_5, x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.44})$$

$$\frac{dx_4}{dt} = f_4(x_2, \dots, x_5, x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.45})$$

$$\frac{dx_5}{dt} = f_5(x_1, \dots, x_5, x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_1, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.46})$$

$$\frac{dx_6}{dt} = f_6(x_1, x_6, x_7, x_{10}, u_6, u_7) \quad (\text{C.47})$$

$$\frac{dx_7}{dt} = f_7(x_2, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, u_6, u_7) \quad (\text{C.48})$$

$$\frac{dx_8}{dt} = f_8(x_3, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, u_6, u_7) \quad (\text{C.49})$$

$$\frac{dx_9}{dt} = f_9(x_4, x_7, x_8, x_9, x_{10}, u_6, u_7) \quad (\text{C.50})$$

$$\frac{dx_{10}}{dt} = f_{10}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, u_2, u_6, u_7) \quad (\text{C.51})$$

$$\frac{dx_{11}}{dt} = f_{11}(x_6, x_{11}, x_{12}, x_{15}, u_6, u_7, u_8) \quad (\text{C.52})$$

$$\frac{dx_{12}}{dt} = f_{12}(x_7, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, u_6, u_7, u_8) \quad (\text{C.53})$$

$$\frac{dx_{13}}{dt} = f_{13}(x_8, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, u_6, u_7, u_8) \quad (\text{C.54})$$

$$\frac{dx_{14}}{dt} = f_{14}(x_9, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, u_6, u_7, u_8) \quad (\text{C.55})$$

$$\frac{dx_{15}}{dt} = f_{15}(x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, u_3, u_6, u_7, u_8) \quad (\text{C.56})$$

$$\frac{dx_{16}}{dt} = f_{16}(x_{11}, \dots, x_{16}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.57})$$

$$\frac{dx_{17}}{dt} = f_{17}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{17}x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.58})$$

$$\frac{dx_{18}}{dt} = f_{18}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{18}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.59})$$

$$\frac{dx_{19}}{dt} = f_{19}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{19}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.60})$$

$$\frac{dx_{20}}{dt} = f_{20}(x_{11}, \dots, x_{25}, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.61})$$

$$\frac{dx_{21}}{dt} = f_{21}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{25}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.62})$$

$$\frac{dx_{22}}{dt} = f_{22}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{25}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.63})$$

$$\frac{dx_{23}}{dt} = f_{23}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{25}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.64})$$

$$\frac{dx_{24}}{dt} = f_{24}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{25}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.65})$$

$$\frac{dx_{25}}{dt} = f_{25}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{25}, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.66})$$

$$y_1 = g_1(x_5) \quad (\text{C.67})$$

$$y_2 = g_2(x_{10}) \quad (\text{C.68})$$

$$y_3 = g_3(x_{15}) \quad (\text{C.69})$$

$$y_4 = g_4(x_{16}) \quad (\text{C.70})$$

$$y_5 = g_5(x_{17}) \quad (\text{C.71})$$

$$y_6 = g_6(x_{18}) \quad (\text{C.72})$$

$$y_7 = g_7(x_{19}) \quad (\text{C.73})$$

$$y_8 = g_8(x_{20}) \quad (\text{C.74})$$

$$y_9 = g_9(x_{25}) \quad (\text{C.75})$$

A partir do modelo fenomenológico acima, tem-se as seguintes matrizes de incidência para as entradas (**E**), estados (**S**) e saídas (**C**):

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.76})$$

[illegible]

[illegible]

A **Etapa 1** do particionamento consiste em criar os conjuntos γ_j , Γ_j , v_j e Υ_j , baseando-se nas matrizes de incidência **E** e **S**, respectivamente. A seguir os conjuntos gerados:

$$\bullet \gamma_1 = \{5\} \Rightarrow \Gamma_1 = \{x_5\}$$

$$\bullet \gamma_2 = \{10\} \Rightarrow \Gamma_2 = \{x_{10}\}$$

$$\bullet \gamma_3 = \{15\} \Rightarrow \Gamma_3 = \{x_{15}\}$$

$$\bullet \gamma_4 = \{20\} \Rightarrow \Gamma_4 = \{x_{20}\}$$

$$\bullet \gamma_5 = \{25\} \Rightarrow \Gamma_5 = \{x_{25}\}$$

$$\bullet \gamma_6 = \{1, 2, 3, \dots, 25\} \Rightarrow \Gamma_6 = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{25}\}$$

$$\bullet \gamma_7 = \{1, 2, 3, \dots, 25\} \Rightarrow \Gamma_7 = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{25}\}$$

$$\bullet \gamma_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, \dots, 25\} \Rightarrow \Gamma_8 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{25}\}$$

$$\bullet \gamma_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 16, \dots, 25\} \Rightarrow \Gamma_9 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{16}, \dots, x_{25}\}$$

$$\bullet v_1 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10\} \Rightarrow \Upsilon_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_{10}\}$$

$$\bullet v_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\} \Rightarrow \Upsilon_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_{10}\}$$

$$\bullet v_3 = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\} \Rightarrow \Upsilon_3 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_8, x_{10}\}$$

$$\bullet v_4 = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\} \Rightarrow \Upsilon_4 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_8, x_{10}\}$$

$$\bullet v_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\} \Rightarrow \Upsilon_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}\}$$

$$\bullet v_6 = \{6, 7, 8, 10, 11, 15\} \Rightarrow \Upsilon_6 = \{x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_{11}, x_{15}\}$$

$$\bullet v_7 = \{6, 7, 8, 9, 10, 12, 15\} \Rightarrow \Upsilon_7 = \{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{12}, x_{15}\}$$

$$\bullet v_8 = \{7, 8, 9, 10, 13, 15\} \Rightarrow \Upsilon_8 = \{x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{13}, x_{15}\}$$

$$\bullet v_9 = \{7, 8, 9, 10, 14, 15\} \Rightarrow \Upsilon_9 = \{x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{14}, x_{15}\}$$

$$\bullet v_{10} = \{6, 7, 8, 9, 10, 15\} \Rightarrow \Upsilon_{10} = \{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{15}\}$$

$$\bullet v_{11} = \{1, \dots, 5, 11, 12, 13, 15, \dots, 25\} \Rightarrow \Upsilon_{10} = \{x_1, \dots, x_5, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{15}, \dots, x_{25}\}$$

$$\bullet v_{12} = \{1, \dots, 5, 11, 12, \dots, 25\} \Rightarrow \Upsilon_{12} = \{x_1, \dots, x_5, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{25}\}$$

$$\bullet v_{13} = \{1, \dots, 5, 12, \dots, 25\} \Rightarrow \Upsilon_{13} = \{x_1, \dots, x_5, x_{12}, \dots, x_{25}\}$$

$$\bullet v_{14} = \{1, \dots, 5, 12, \dots, 25\} \Rightarrow \Upsilon_{14} = \{x_1, \dots, x_5, x_{12}, \dots, x_{25}\}$$

$$\begin{aligned}
\bullet v_{15} &= \{11, 12, 13, 14, 15, 20\} \Rightarrow \Upsilon_{15} = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{20}\} \\
\bullet v_{16} &= \{16, 20\} \Rightarrow \Upsilon_{16} = \{x_{16}, x_{20}\} \\
\bullet v_{17} &= \{17, 20\} \Rightarrow \Upsilon_{17} = \{x_{17}, x_{20}\} \\
\bullet v_{18} &= \{18, 20\} \Rightarrow \Upsilon_{18} = \{x_{18}, x_{20}\} \\
\bullet v_{19} &= \{19, 20\} \Rightarrow \Upsilon_{19} = \{x_{19}, x_{20}\} \\
\bullet v_{20} &= \{1, \dots, 5, 16, \dots, 25\} \Rightarrow \Upsilon_{20} = \{x_1, \dots, x_5, x_{16}, \dots, x_{25}\} \\
\bullet v_{21} &= \{1, \dots, 5, 16, \dots, 25\} \Rightarrow \Upsilon_{21} = \{x_1, \dots, x_5, x_{16}, \dots, x_{25}\} \\
\bullet v_{22} &= \{1, \dots, 5, 16, \dots, 25\} \Rightarrow \Upsilon_{22} = \{x_1, \dots, x_5, x_{16}, \dots, x_{25}\} \\
\bullet v_{23} &= \{1, \dots, 5, 16, \dots, 25\} \Rightarrow \Upsilon_{23} = \{x_1, \dots, x_5, x_{16}, \dots, x_{25}\} \\
\bullet v_{24} &= \{1, \dots, 5, 16, \dots, 25\} \Rightarrow \Upsilon_{24} = \{x_1, \dots, x_5, x_{16}, \dots, x_{25}\} \\
\bullet v_{25} &= \{20, \dots, 25\} \Rightarrow \Upsilon_{25} = \{x_{20}, \dots, x_{25}\}
\end{aligned}$$

A **Etapa 2** consiste em criar os conjuntos ω_j , que para o exemplo em questão são:

$$\begin{aligned}
\bullet \omega_1 &= \{x_5\} \\
\bullet \omega_2 &= \{x_{10}\} \\
\bullet \omega_3 &= \{x_{15}\} \\
\bullet \omega_4 &= \{x_{20}\} \\
\bullet \omega_5 &= \{x_{25}\} \\
\bullet \omega_6 &= \{x_5, x_{10}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{25}\} \\
\bullet \omega_7 &= \{x_5, x_{10}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{25}\} \\
\bullet \omega_8 &= \{x_5, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{25}\} \\
\bullet \omega_9 &= \{x_5, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{25}\}
\end{aligned}$$

Nota-se a partir dos conjuntos ω_j gerados que todas as saídas controladas são atingidas por pelo menos uma entrada. A **Etapa 3** consiste em incluir no submodelo M $\{\omega_j\}$ os elementos dos conjuntos ω_j e entrada correspondente, o que gera os seguintes submodelos:

$$\bullet M\omega_1 : \{u_1\} \Rightarrow \{x_5\}$$

- $M\omega_2 : \{u_2\} \Rightarrow \{x_{10}\}$
- $M\omega_3 : \{u_3\} \Rightarrow \{x_{15}\}$
- $M\omega_4 : \{u_4\} \Rightarrow \{x_{20}\}$
- $M\omega_5 : \{u_5\} \Rightarrow \{x_{25}\}$
- $M\omega_6 : \{u_6\} \Rightarrow \{x_5, x_{10}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{25}\}$
- $M\omega_7 : \{u_7\} \Rightarrow \{x_5, x_{10}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{25}\}$
- $M\omega_8 : \{u_8\} \Rightarrow \{x_5, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{25}\}$
- $M\omega_9 : \{u_9\} \Rightarrow \{x_5, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{25}\}$

Analisando os conjuntos ω_i e ω_j (para $i \neq j$), nota-se que há dois conjuntos idênticos ($M\omega_6$ e $M\omega_7$). Logo a **Etapa 4** é necessária, e consiste em agrupar os conjuntos idênticos. A seguir, os novos subsistemas gerados:

- $M\omega_1 : \{u_1\} \Rightarrow \{x_5\}$
- $M\omega_2 : \{u_2\} \Rightarrow \{x_{10}\}$
- $M\omega_3 : \{u_3\} \Rightarrow \{x_{15}\}$
- $M\omega_4 : \{u_4\} \Rightarrow \{x_{20}\}$
- $M\omega_5 : \{u_5\} \Rightarrow \{x_{25}\}$
- $M\omega_6 : \{u_6, u_7\} \Rightarrow \{x_5, x_{10}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{25}\}$
- $M\omega_7 : \{u_8\} \Rightarrow \{x_5, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{25}\}$
- $M\omega_8 : \{u_9\} \Rightarrow \{x_5, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{25}\}$

A seguir os submodelos $M\{\omega_i\}$ gerados por esse particionamento:

Submodelo $M\omega_1$:

$$\frac{dx_5}{dt} = f_5(x_1, \dots, x_4, x_5, x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_1, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.77})$$

$$y_1 = g_1(x_5) \quad (\text{C.78})$$

Submodelo $M\omega_2$:

$$\frac{dx_{10}}{dt} = f_{10}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, u_2, u_6, u_7) \quad (\text{C.79})$$

$$y_1 = g_2(x_{10}) \quad (\text{C.80})$$

Submodelo $M\omega_3$:

$$\frac{dx_{15}}{dt} = f_{15}(x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, u_3, u_6, u_7, u_8) \quad (\text{C.81})$$

$$y_1 = g_3(x_{15}) \quad (\text{C.82})$$

Submodelo $M\omega_4$:

$$\frac{dx_{20}}{dt} = f_{20}(x_{11}, \dots, x_{25}, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.83})$$

$$y_1 = g_8(x_{20}) \quad (\text{C.84})$$

Submodelo $M\omega_5$:

$$\frac{dx_{25}}{dt} = f_{25}(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.85})$$

$$y_1 = g_9(x_{25}) \quad (\text{C.86})$$

Submodelo $M\omega_6$:

$$\frac{dx_5}{dt} = f_5(x_1, \dots, x_5, x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_1, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.87})$$

$$\frac{dx_{10}}{dt} = f_{10}(x_1, \dots, x_{10}, u_2, u_6, u_7) \quad (\text{C.88})$$

$$\frac{dx_{15}}{dt} = f_{15}(x_6, \dots, x_{15}, u_3, u_6, u_7, u_8) \quad (\text{C.89})$$

$$\frac{dx_{16}}{dt} = f_{16}(x_{11}, \dots, x_{16}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.90})$$

$$\frac{dx_{17}}{dt} = f_{17}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{17}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.91})$$

$$\frac{dx_{18}}{dt} = f_{18}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{18}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.92})$$

$$\frac{dx_{19}}{dt} = f_{19}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{19}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.93})$$

$$\frac{dx_{20}}{dt} = f_{20}(x_{11}, \dots, x_{25}, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.94})$$

$$\frac{dx_{25}}{dt} = f_{25}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{25}, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.95})$$

$$y_1 = g_1(x_5) \quad (\text{C.96})$$

$$y_2 = g_2(x_{10}) \quad (\text{C.97})$$

$$y_3 = g_3(x_{15}) \quad (\text{C.98})$$

$$y_4 = g_4(x_{16}) \quad (\text{C.99})$$

$$y_5 = g_5(x_{17}) \quad (\text{C.100})$$

$$y_6 = g_6(x_{18}) \quad (\text{C.101})$$

$$y_7 = g_7(x_{19}) \quad (\text{C.102})$$

$$y_8 = g_8(x_{20}) \quad (\text{C.103})$$

$$y_9 = g_9(x_{25}) \quad (\text{C.104})$$

Submodelo $M\omega_7$:

$$\frac{dx_5}{dt} = f_5(x_1, \dots, x_5, x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_1, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.105})$$

$$\frac{dx_{15}}{dt} = f_{15}(x_6, \dots, x_{15}, u_3, u_6, u_7, u_8) \quad (\text{C.106})$$

$$\frac{dx_{16}}{dt} = f_{16}(x_{11}, \dots, x_{16}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.107})$$

$$\frac{dx_{17}}{dt} = f_{17}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{17}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.108})$$

$$\frac{dx_{18}}{dt} = f_{18}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{18}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.109})$$

$$\frac{dx_{19}}{dt} = f_{19}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{19}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.110})$$

$$\frac{dx_{20}}{dt} = f_{20}(x_{11}, \dots, x_{25}, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.111})$$

$$\frac{dx_{25}}{dt} = f_{25}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{25}, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.112})$$

$$y_1 = g_1(x_5) \quad (\text{C.113})$$

$$y_2 = g_3(x_{15}) \quad (\text{C.114})$$

$$y_3 = g_4(x_{16}) \quad (\text{C.115})$$

$$y_4 = g_5(x_{17}) \quad (\text{C.116})$$

$$y_5 = g_6(x_{18}) \quad (\text{C.117})$$

$$y_6 = g_7(x_{19}) \quad (\text{C.118})$$

$$y_7 = g_8(x_{20}) \quad (\text{C.119})$$

$$y_8 = g_9(x_{25}) \quad (\text{C.120})$$

Submodelo $M\omega_8$:

$$\frac{dx_5}{dt} = f_5(x_1, \dots, x_5, x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_1, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.121})$$

$$\frac{dx_{16}}{dt} = f_{16}(x_{11}, \dots, x_{16}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.122})$$

$$\frac{dx_{17}}{dt} = f_{17}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{17}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.123})$$

$$\frac{dx_{18}}{dt} = f_{18}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{18}, x_{20}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.124})$$

$$\frac{dx_{19}}{dt} = f_{19}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{19}, \dots, x_{24}, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.125})$$

$$\frac{dx_{20}}{dt} = f_{20}(x_{11}, \dots, x_{25}, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.126})$$

$$\frac{dx_{25}}{dt} = f_{25}(x_{11}, \dots, x_{14}, x_{20}, \dots, x_{25}, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9) \quad (\text{C.127})$$

$$y_1 = g_1(x_5) \quad (\text{C.128})$$

$$y_2 = g_4(x_{16}) \quad (\text{C.129})$$

$$y_3 = g_5(x_{17}) \quad (\text{C.130})$$

$$y_4 = g_6(x_{18}) \quad (\text{C.131})$$

$$y_5 = g_7(x_{19}) \quad (\text{C.132})$$

$$y_6 = g_8(x_{20}) \quad (\text{C.133})$$

$$y_7 = g_9(x_{25}) \quad (\text{C.134})$$

APÊNDICE D

Análise da frequência de particionamento nas estruturas de controle DMPCs baseadas no modelo localmente linearizado

Neste apêndice será avaliado o desempenho das propostas de controle DMPCs com particionamento a partir do modelo linearizado, em diferentes cenários. Nestas estruturas, o particionamento e atualização do modelo pode ser feito em cada instante de amostragem do processo a partir do modelo linearizado ao redor do ponto de operação anterior $k - 1$. Para verificar se tal atualização do modelo é necessária a todo tempo, simulações foram executadas considerando instantes distintos de execução de tal atualização. Essas análises foram feitas tanto para as estruturas de controle não cooperativas como para as cooperativas.

A análise de frequência de execução do particionamento do modelo foi feita considerando 5 tipos de cenários. São eles:

- Particionamento em cada instante de amostragem (Cenário 1);
- Particionamento a cada 5 instantes de amostragem (Cenário 2);
- Particionamento a cada 10 instantes de amostragem (Cenário 3);
- Particionamento a cada 15 instantes de amostragem (Cenário 4);

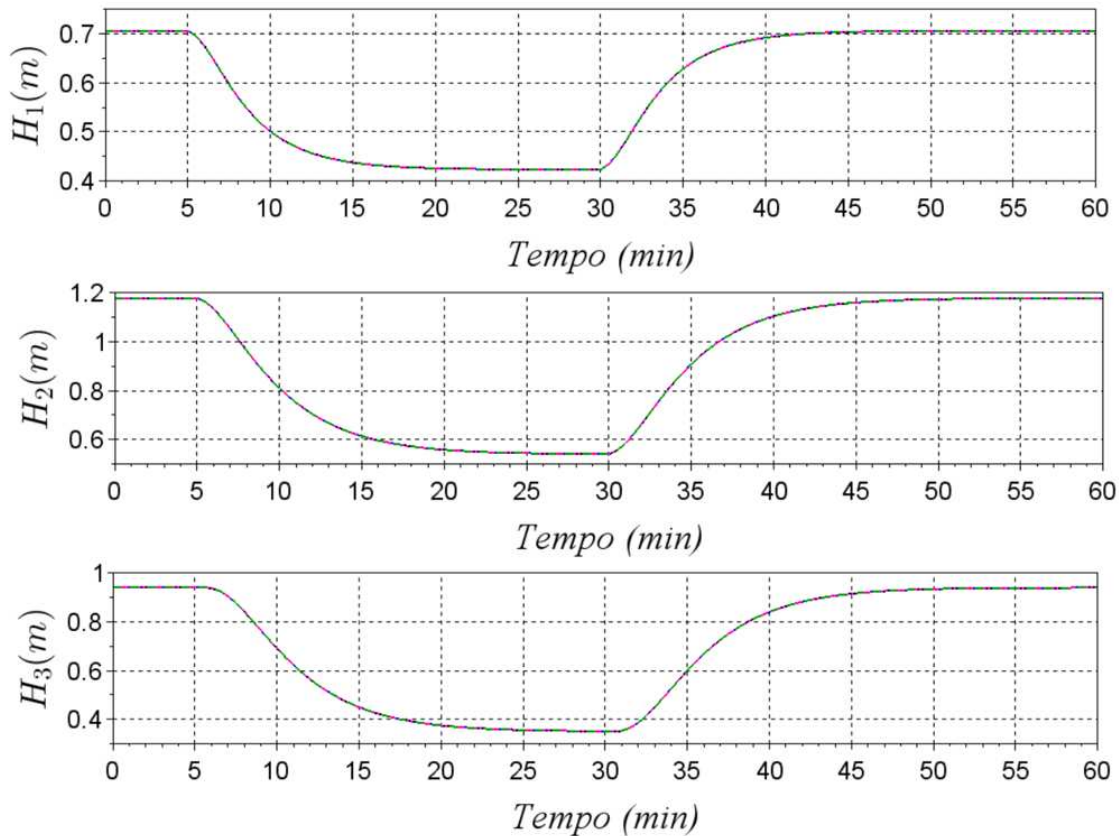
- Particionamento a cada 20 instantes de amostragem (Cenário 5);

Inicia-se na próxima seção, as análises para o estudo de caso 1.

D.1 Estudo de caso 1

D.1.1 DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

A seguir são apresentados os resultados dinâmicos para as saídas controladas (Figuras (D.1) e (D.2)) e os resultados dinâmicos para as entradas manipuladas (Figuras (D.3) e (D.4)).



LEGENDA:

— Cenário 1 — Cenário 2 — · — Cenário 3 ······ Cenário 4 - - - - - Cenário 5

Figura D.1: Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

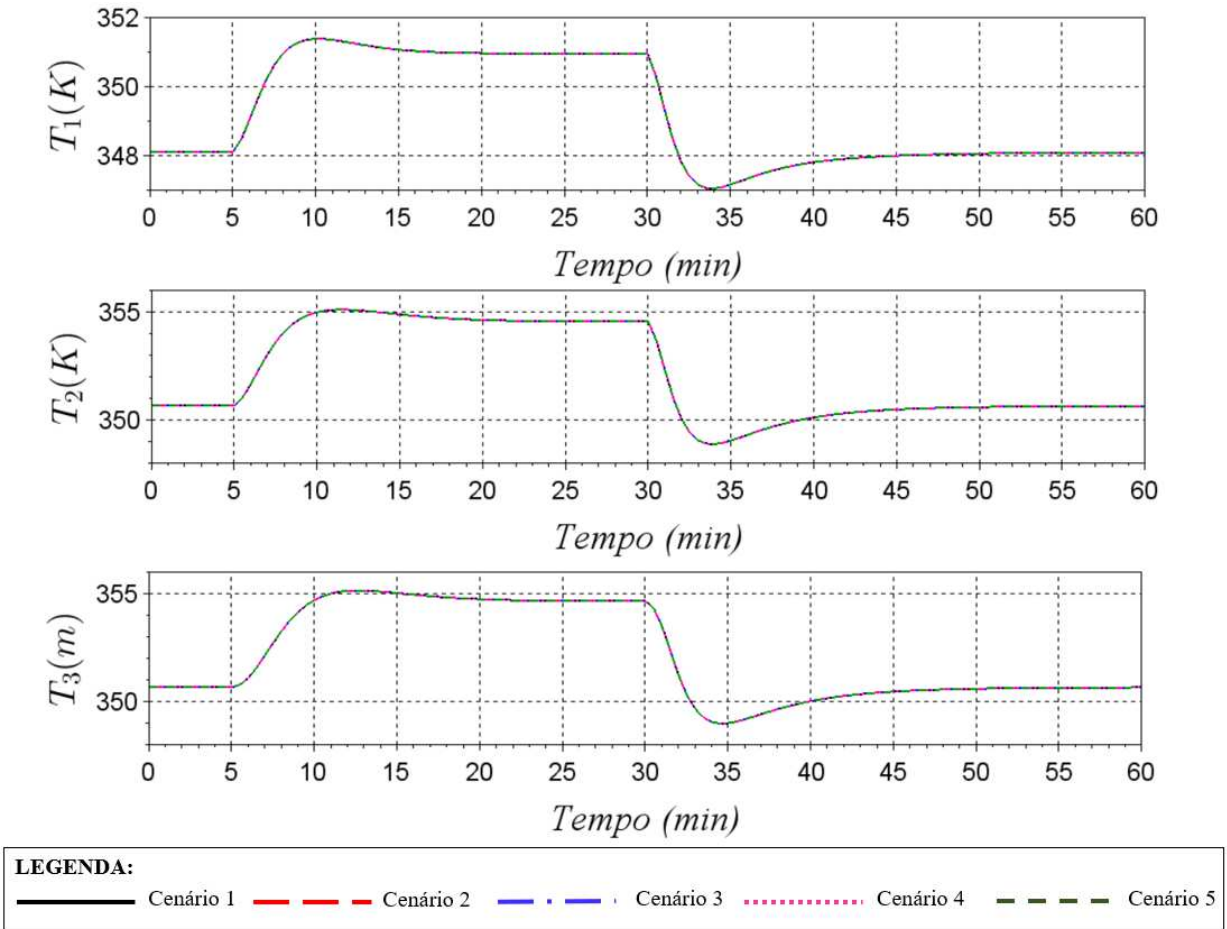
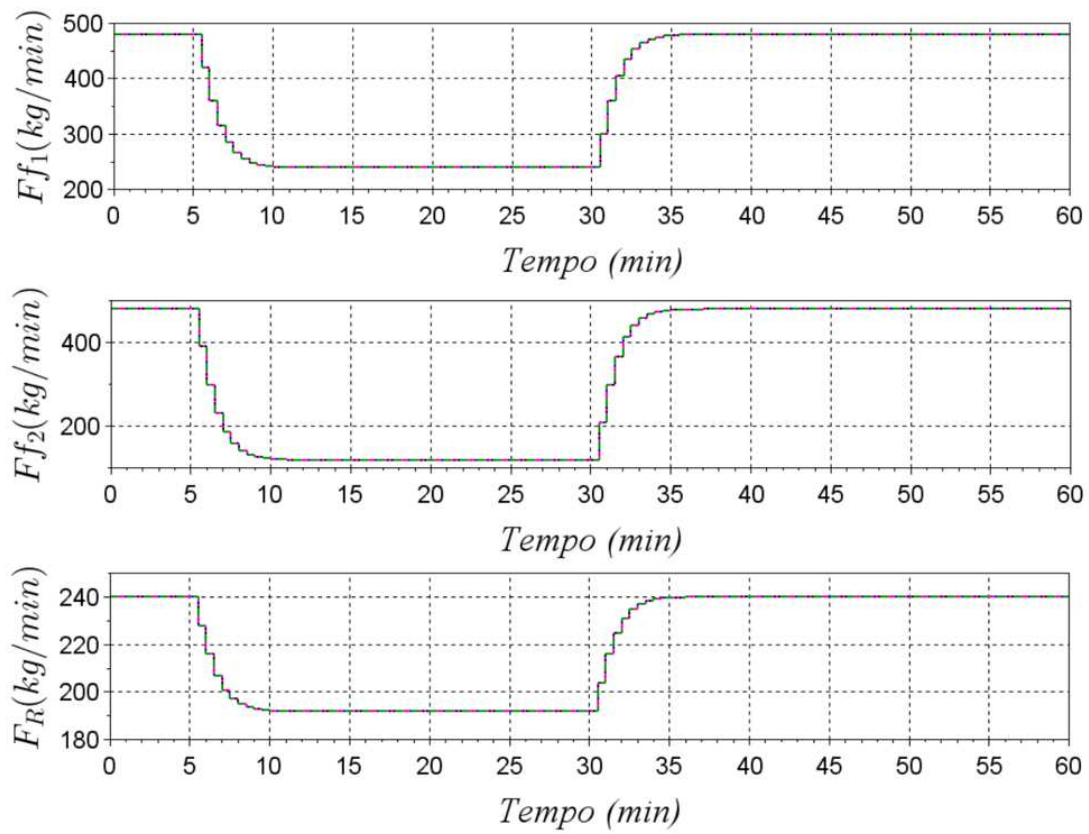


Figura D.2: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

**LEGENDA:**

— Cenário 1 — Cenário 2 - - - - - Cenário 3 Cenário 4 - - - - - Cenário 5

Figura D.3: Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

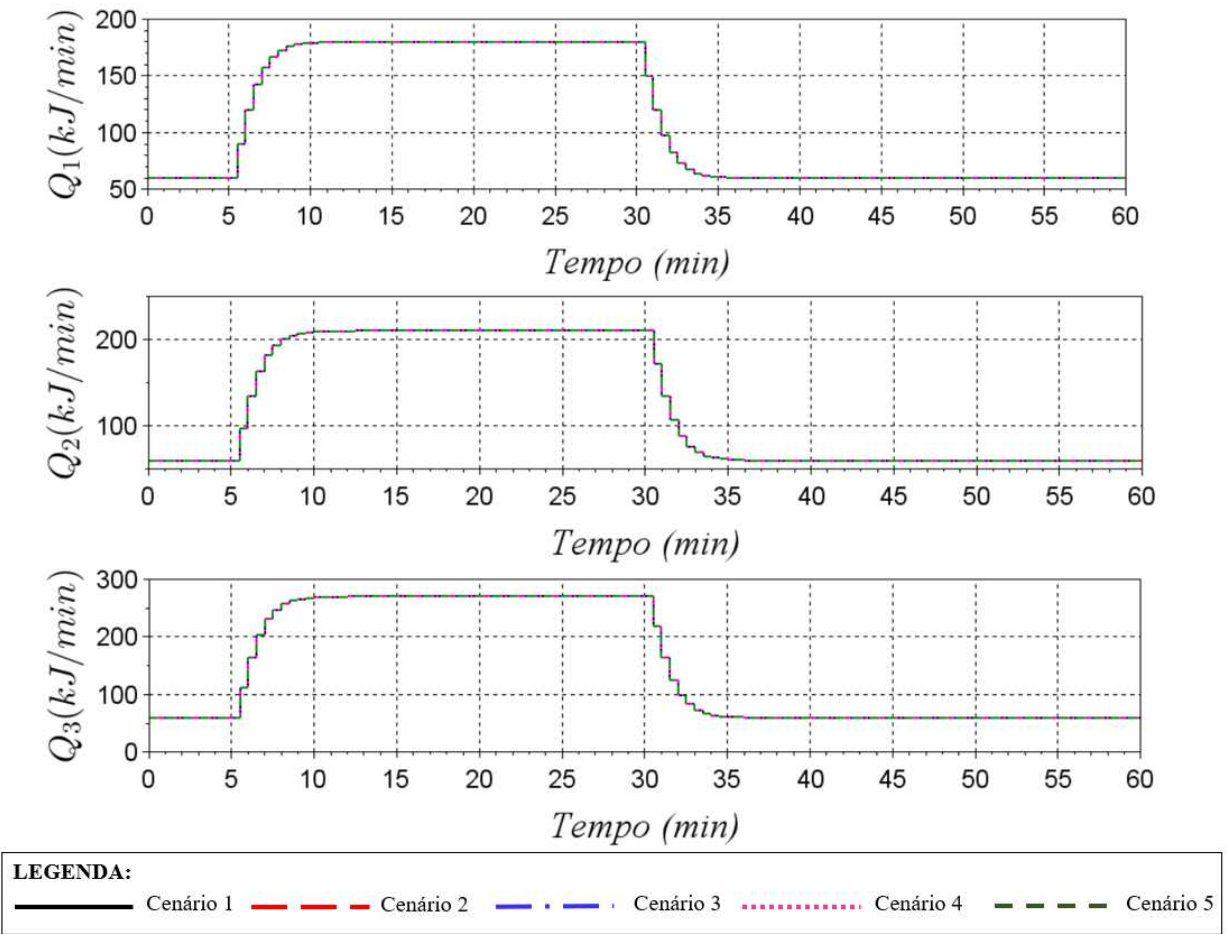


Figura D.4: Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Nota-se pelas Figuras acima, que as respostas obtidas nos diferentes cenários são equivalentes. Logo, para esse estudo de caso nas condições apresentadas e utilizando o DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, pode-se concluir que não há necessidade do particionamento e atualização do modelo serem feitos em cada instante de amostragem. Isto pode diminuir o tempo de processamento requerido no controle. Para avaliar isso, considere a Tabela (D.1) que apresenta o tempo de processamento para cada um dos cenários avaliados.

Tabela D.1: Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Tipo de controle	Tempo total (s)
Cenário 1	62,65
Cenário 2	60,72
Cenário 3	60,13
Cenário 4	59,88
Cenário 5	59,22

Analisando os tempos apresentados na Tabela acima, nota-se que pode haver uma diminuição do tempo de processamento de cerca de 5,46%, ao considerar o cenário 5 (particionamento a cada 20 instantes de amostragem) ao invés do cenário 1 (particionamento em todo instante de amostragem), sem perder desempenho no controle.

A seguir a mesma análise de frequência de particionamento será feita para o DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

D.1.2 DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

A mesma análise de frequência de particionamento apresentada na seção anterior também foi executada para a proposta de DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado. A seguir são apresentados os resultados dinâmicos para as saídas controladas (Figuras (D.5) e (D.6)) e os resultados dinâmicos para as entradas manipuladas (Figuras (D.7) e (D.8)).

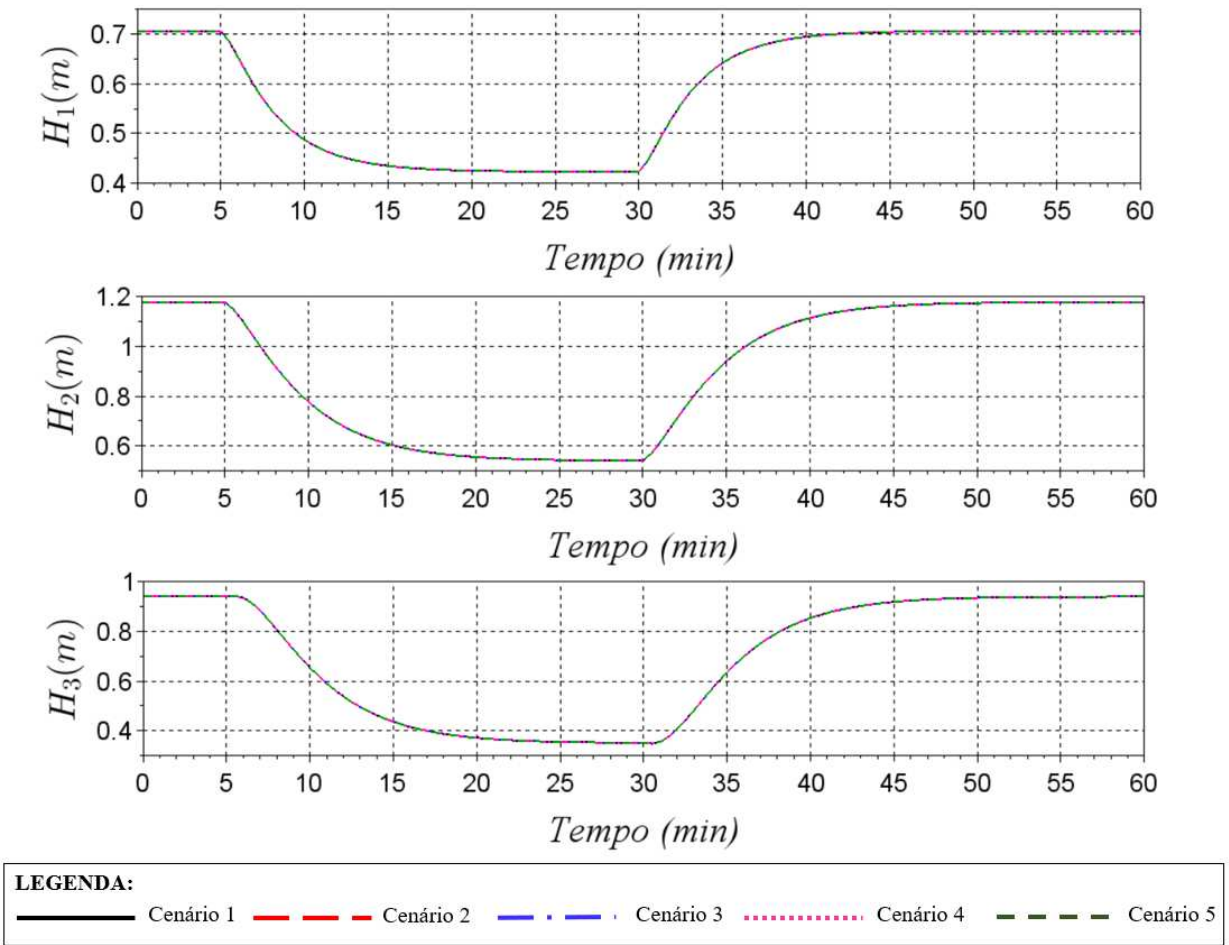
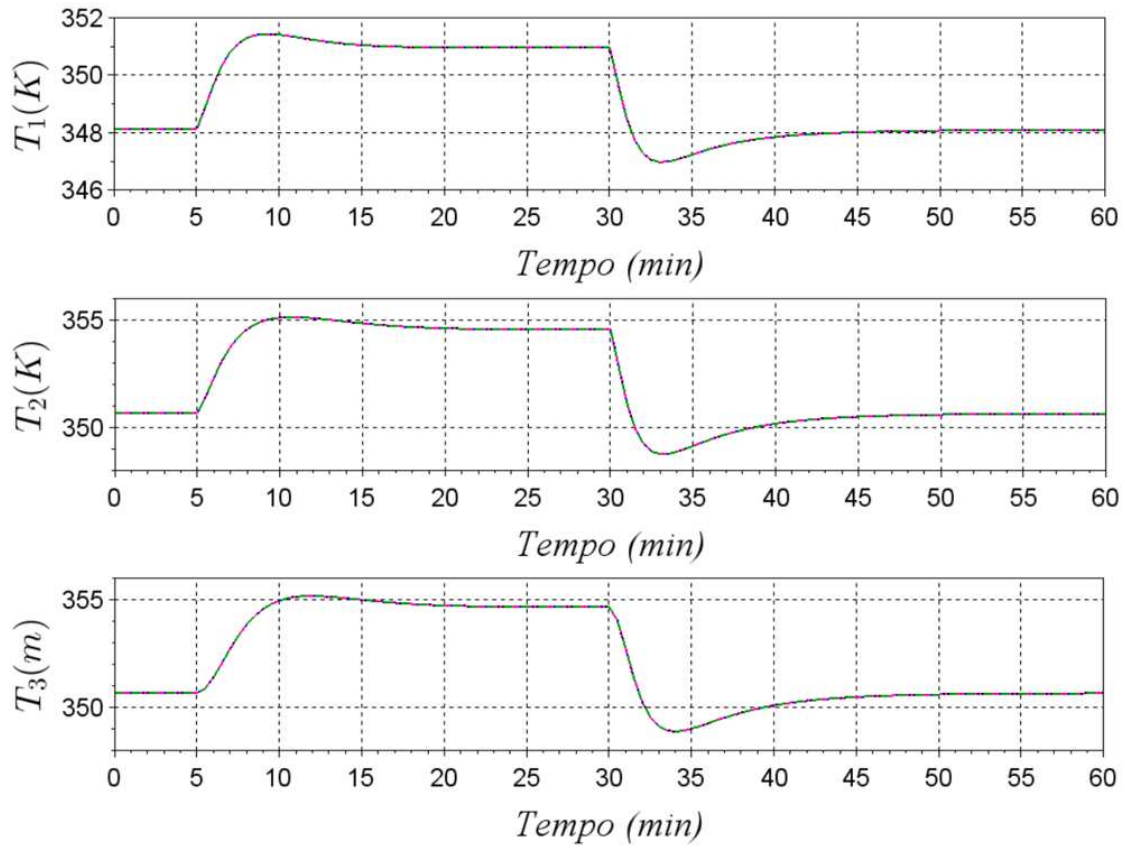
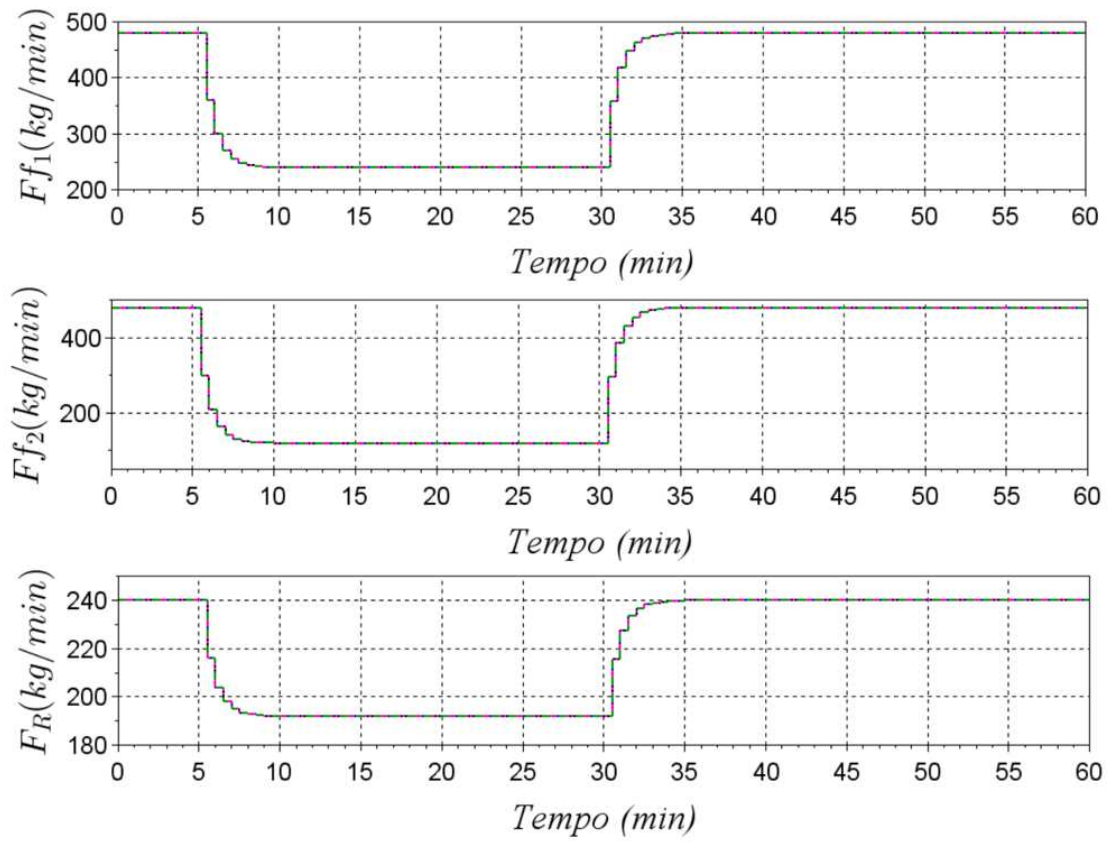


Figura D.5: Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

**LEGENDA:**

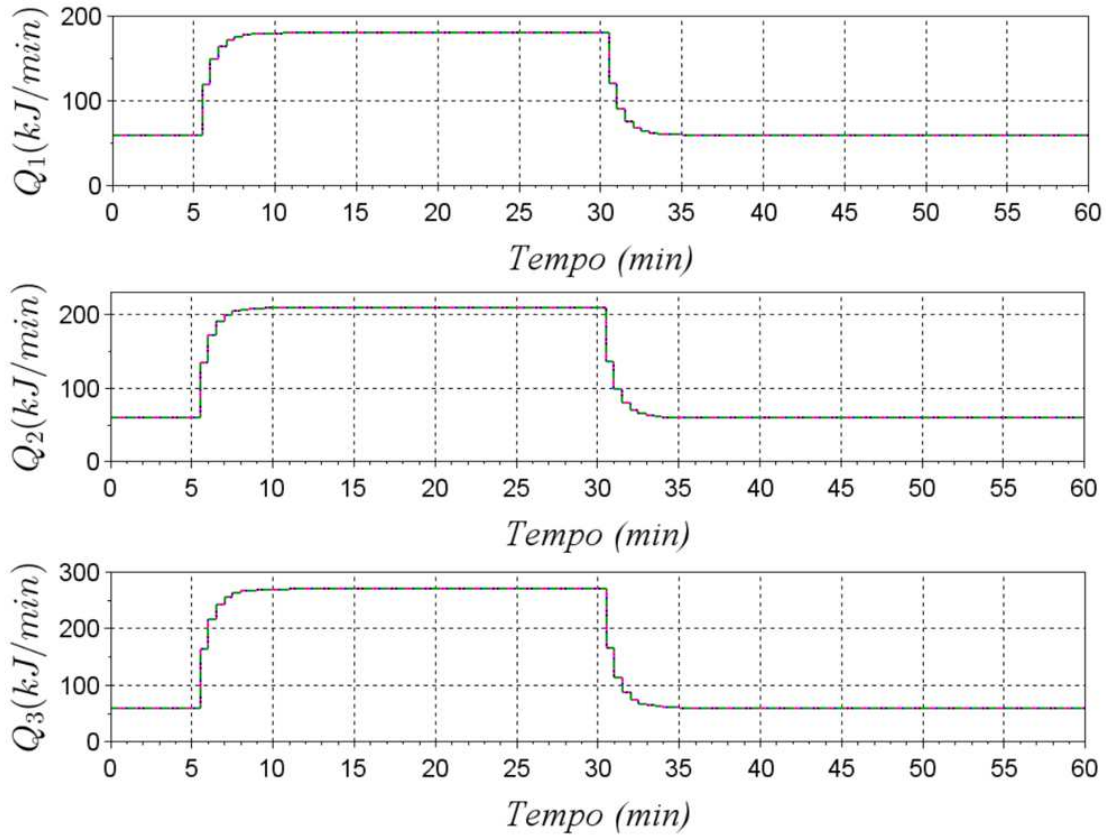
— Cenário 1 — Cenário 2 - - - Cenário 3 Cenário 4 - - - Cenário 5

Figura D.6: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.



LEGENDA:
 — Cenário 1 — Cenário 2 - - - Cenário 3 Cenário 4 - - - Cenário 5

Figura D.7: Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

**LEGENDA:**

— Cenário 1 — Cenário 2 — Cenário 3 Cenário 4 - - - - - Cenário 5

Figura D.8: Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Nota-se pelas Figuras acima, que as respostas obtidas nos diferentes cenários são semelhantes. Logo, para esse estudo de caso nas condições apresentadas e utilizando o DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, também pode-se concluir que não há necessidade do particionamento e atualização do modelo serem feitos em cada instante de amostragem. Isto pode diminuir o tempo de processamento requerido no controle, tal como pode ser observado na Tabela (D.2) que apresenta o tempo de processamento para cada um dos cenário avaliados.

Tabela D.2: Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 1 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC localmente linearizado cooperativo.

Tipo de controle	Tempo total (s)
Cenário 1	229,11
Cenário 2	227,93
Cenário 3	226,77
Cenário 4	226,13
Cenário 5	226,05

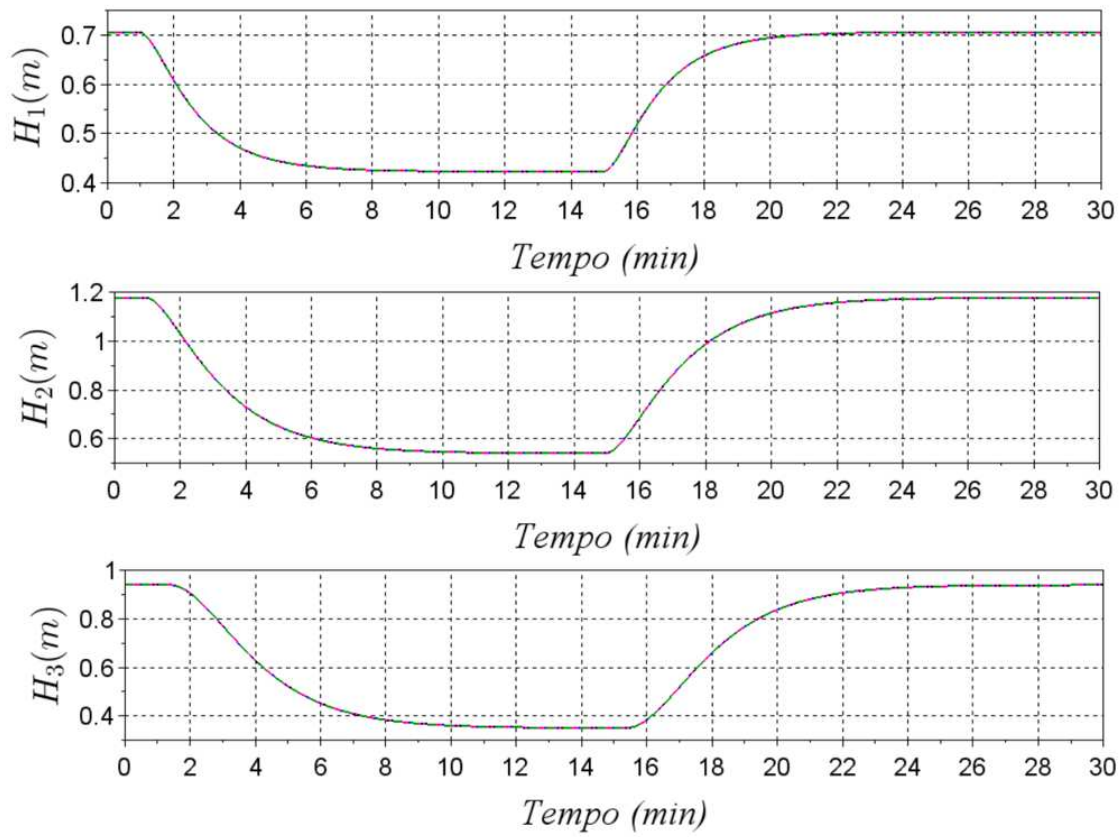
Analisando os tempos apresentados na Tabela acima, nota-se que pode haver uma diminuição do tempo de processamento de cerca de 1,33%, ao considerar o cenário 5 (particionamento a cada 20 instantes de amostragem) ao invés do cenário 1 (particionamento em todo instante de amostragem), sem perder desempenho no controle.

A seguir a mesma análise de frequência de particionamento será feita para o estudo de caso 2.

D.2 Estudo de caso 2

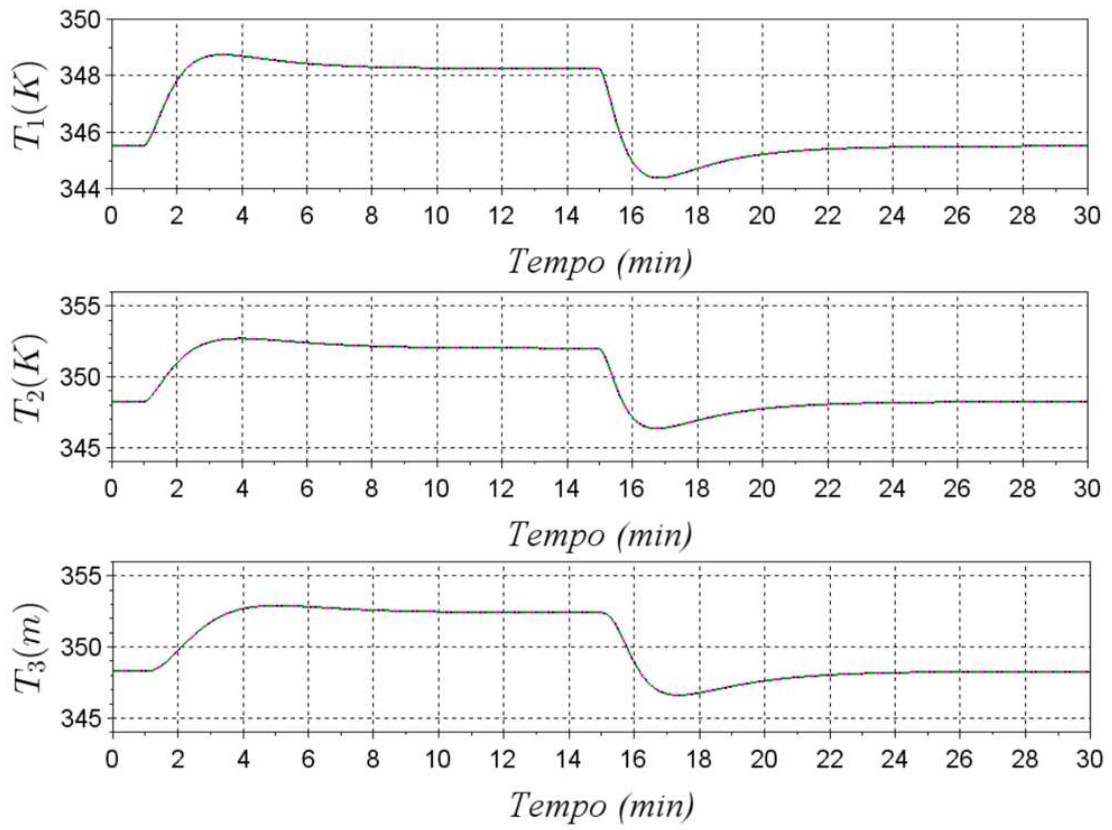
D.2.1 DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

A seguir são apresentados os resultados dinâmicos para as saídas controladas (Figuras (D.9) e (D.10)) e os resultados dinâmicos para as entradas manipuladas (Figuras (D.11) e (D.12)) para a análise de frequência de particionamento para estudo de caso 2 considerando a proposta de controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

**LEGENDA:**

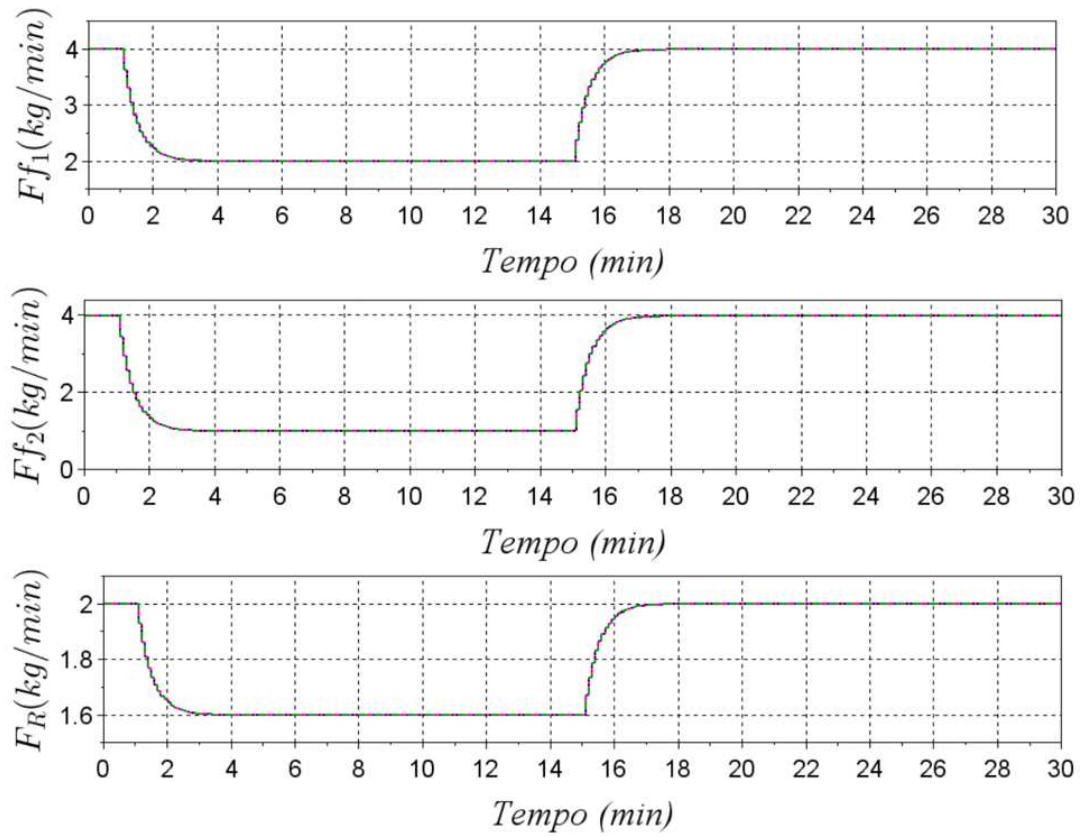
— Cenário 1 — Cenário 2 — Cenário 3 Cenário 4 - - - - - Cenário 5

Figura D.9: Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

**LEGENDA:**

— Cenário 1 — Cenário 2 - - - - - Cenário 3 Cenário 4 - - - - - Cenário 5

Figura D.10: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

**LEGENDA:**

— Cenário 1 — Cenário 2 — Cenário 3 Cenário 4 — Cenário 5

Figura D.11: Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

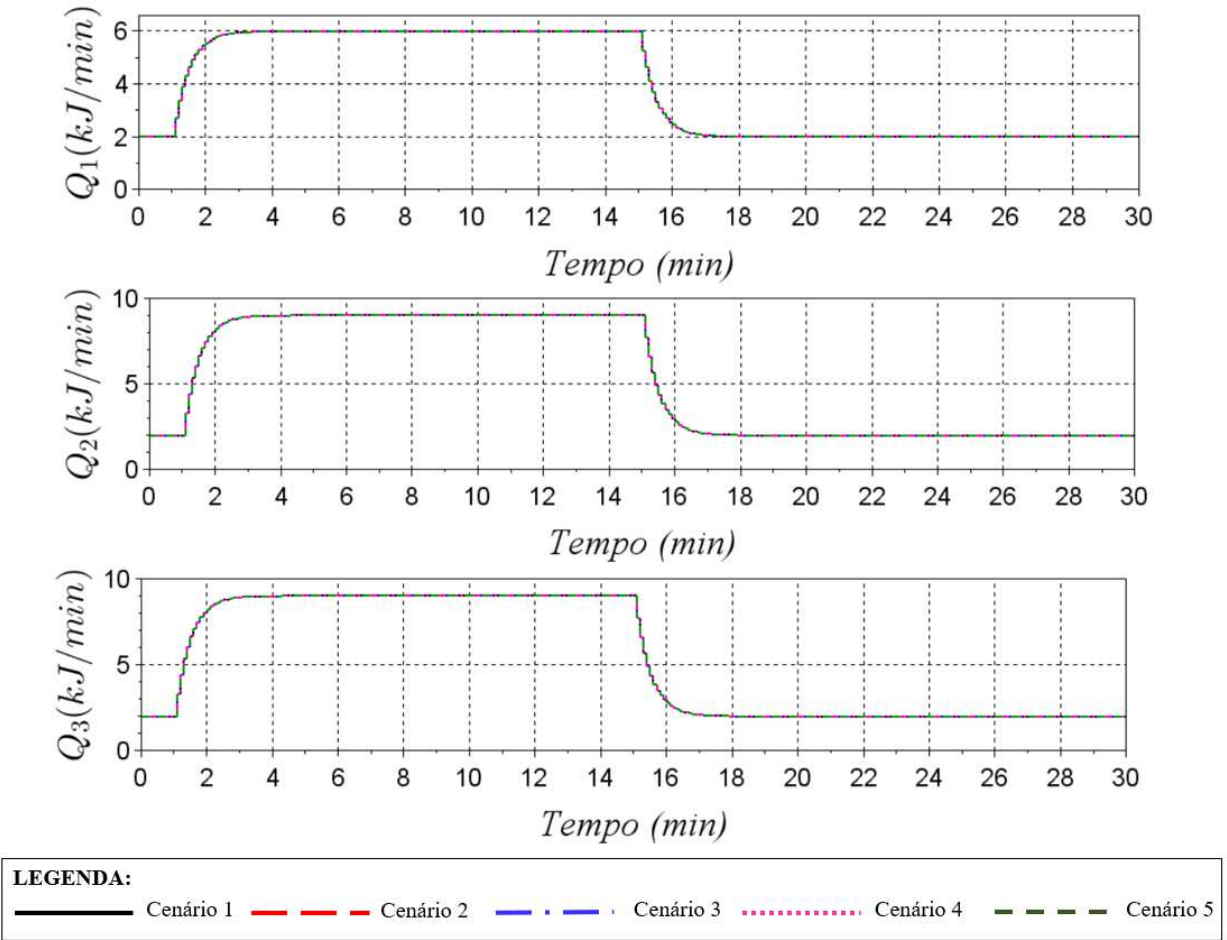


Figura D.12: Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Nota-se pelas Figuras acima, que as respostas obtidas nos diferentes cenários são equivalentes. Logo, para esse estudo de caso nas condições apresentadas e utilizando o DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, pode-se concluir que não há necessidade do particionamento e atualização do modelo ser feitos em cada instante de amostragem. Isto pode diminuir o tempo de processamento requerido no controle. Para avaliar isso, considere a Tabela (D.3) que apresenta o tempo de processamento para cada um dos cenários avaliados.

Tabela D.3: Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Tipo de controle	Tempo total (s)
Cenário 1	230,02
Cenário 2	156,77
Cenário 3	154,57
Cenário 4	139,09
Cenário 5	111,31

Analisando os tempos apresentados na Tabela acima, nota-se que pode haver uma diminuição do tempo de processamento de cerca de 51,61%, ao considerar o cenário 5 (particionamento a cada 20 instantes de amostragem) ao invés do cenário 1 (particionamento em todo instante de amostragem), sem perder desempenho no controle.

A seguir a mesma análise de frequência de particionamento será feita para o DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

D.2.2 DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

A seguir são apresentados os resultados dinâmicos para as saídas controladas (Figuras (D.13) e (D.14)) e os resultados dinâmicos para as entradas manipuladas (Figuras (D.15) e (D.16)) para a análise de frequência de particionamento para estudo de caso 2 considerando a proposta de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

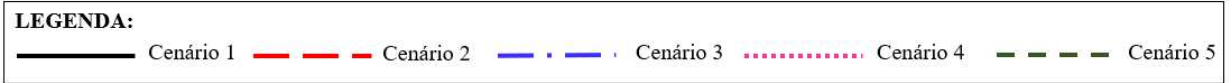
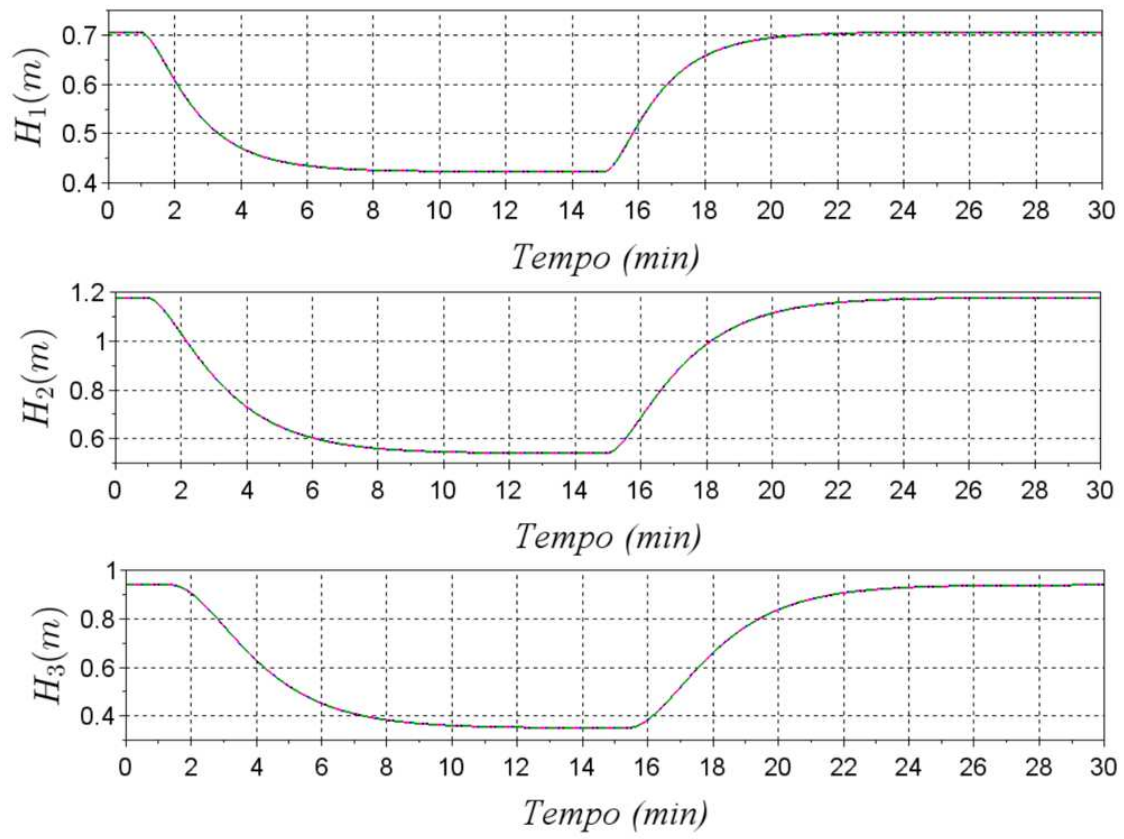
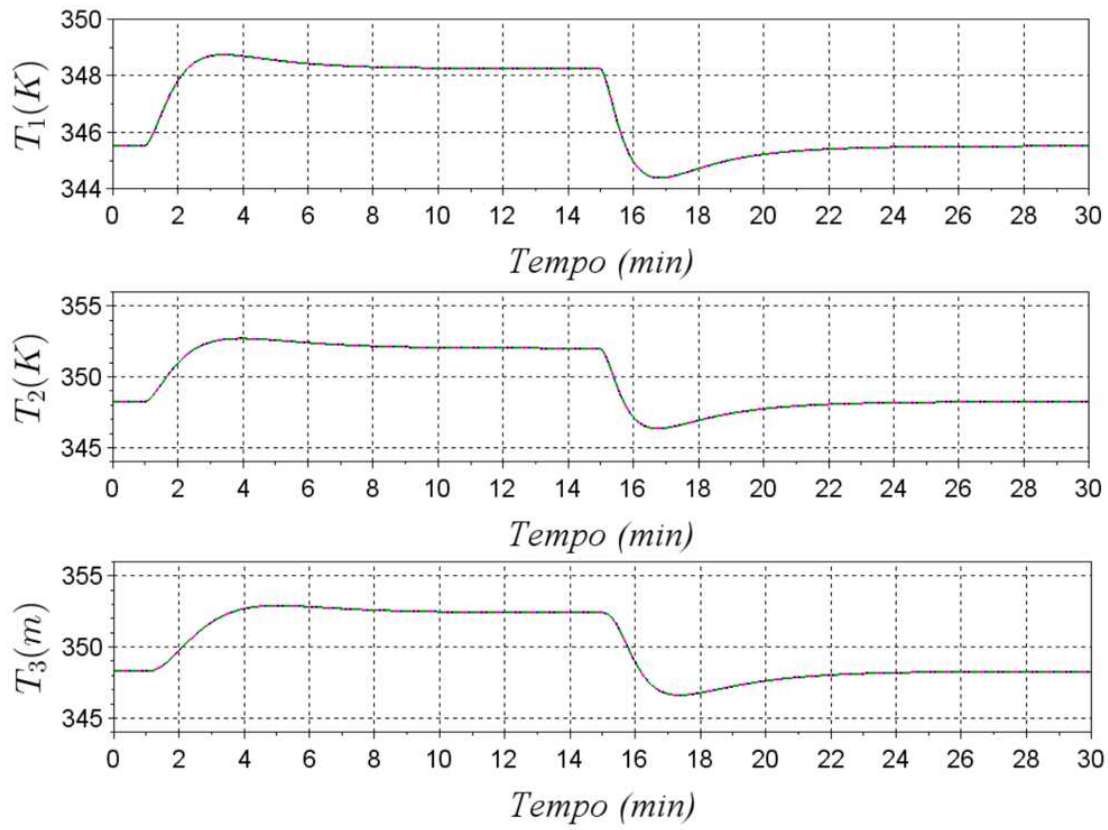
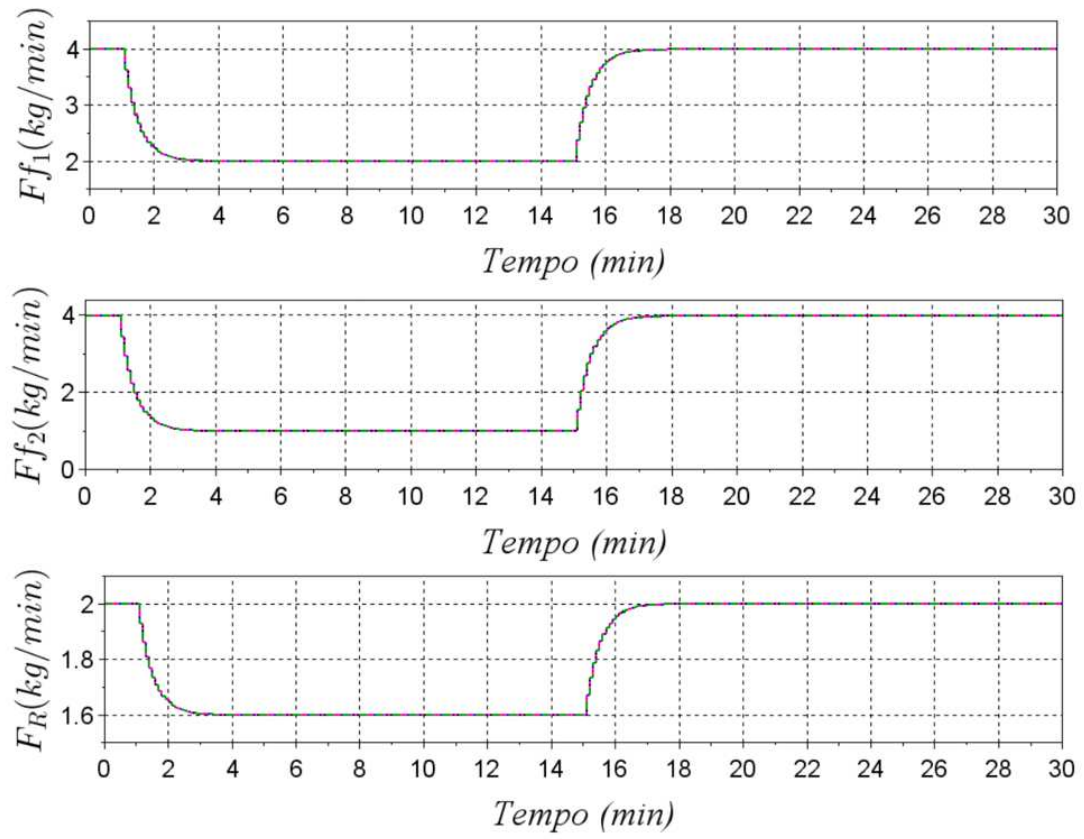


Figura D.13: Respostas dinâmicas das alturas de líquido em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

**LEGENDA:**

— Cenário 1 — Cenário 2 — Cenário 3 Cenário 4 - - - - - Cenário 5

Figura D.14: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

**LEGENDA:**

— Cenário 1 — Cenário 2 — Cenário 3 Cenário 4 — Cenário 5

Figura D.15: Respostas dinâmicas das vazões manipuladas no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

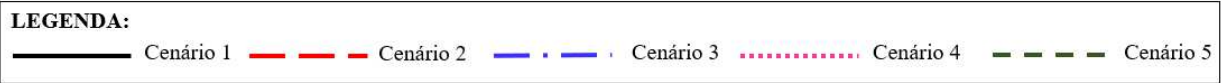
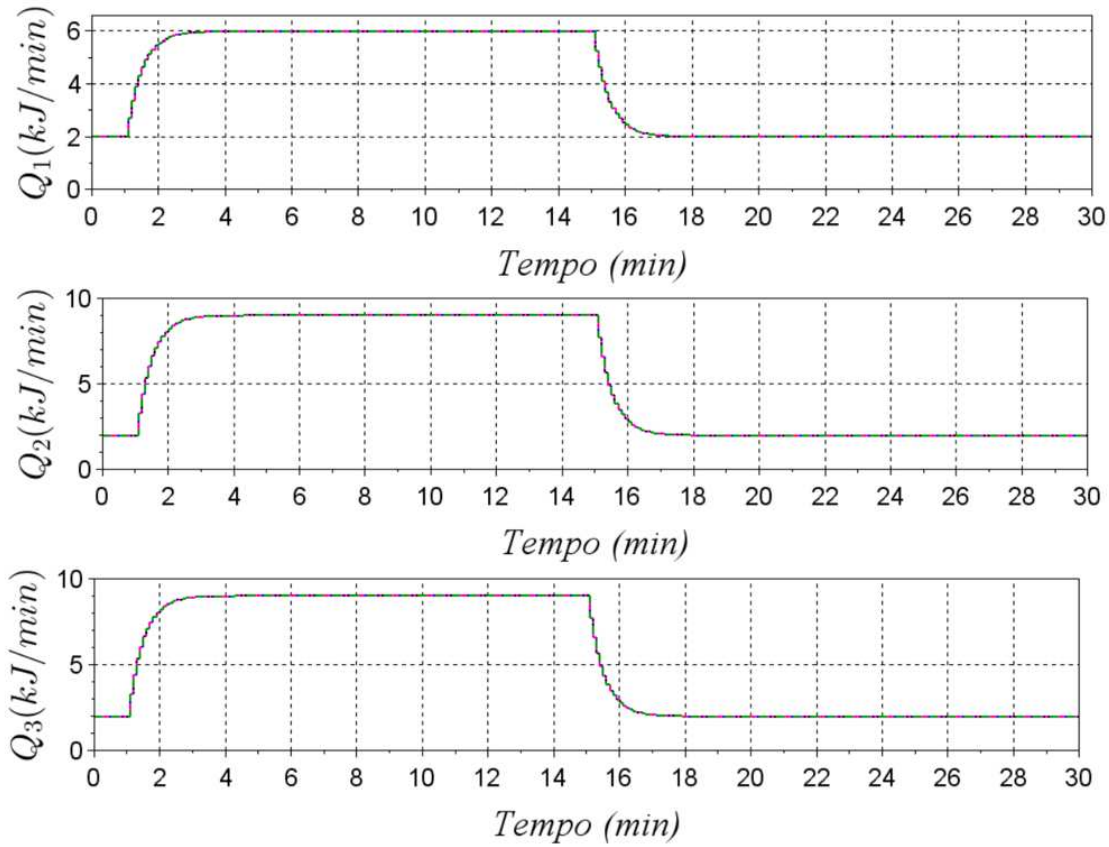


Figura D.16: Respostas dinâmicas dos calores manipulados no estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Nota-se pelas Figuras acima, que as respostas obtidas nos diferentes cenários são equivalentes. Logo, para esse estudo de caso nas condições apresentadas e utilizando o DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, pode-se concluir que não há necessidade do particionamento e atualização do modelo serem feitos em cada instante de amostragem. Isto pode diminuir o tempo de processamento requerido no controle. Para avaliar isso, considere a Tabela (D.4) que apresenta o tempo de processamento para cada um dos cenário avaliados.

Tabela D.4: Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Tipo de controle	Tempo total (s)
Cenário 1	590,14
Cenário 2	530,56
Cenário 3	511,97
Cenário 4	503,67
Cenário 5	485,23

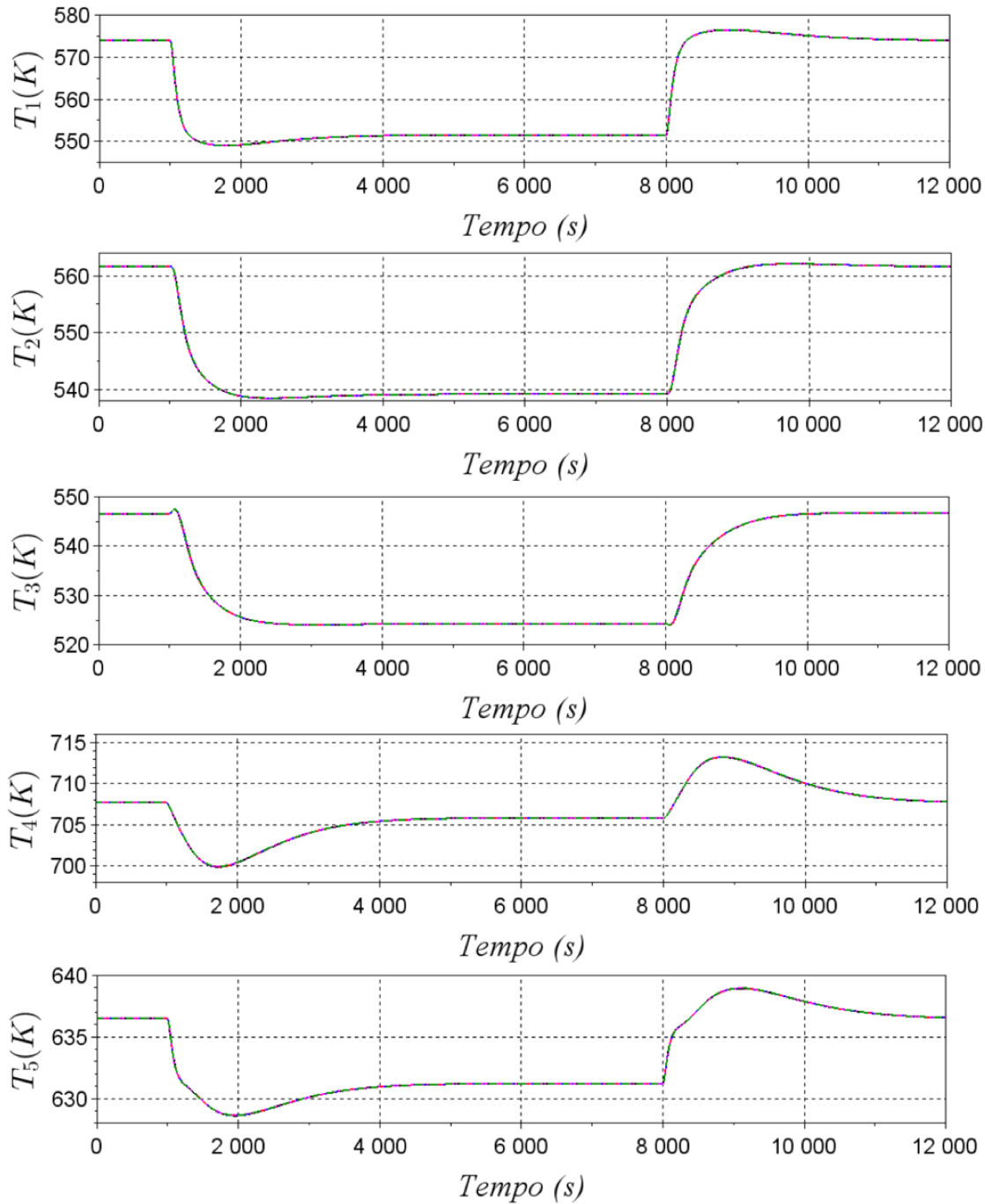
Analisando os tempos apresentados na Tabela acima, nota-se que pode haver uma diminuição do tempo de processamento de cerca de 17,78%, ao considerar o cenário 5 (particionamento a cada 20 instantes de amostragem) ao invés do cenário 1 (particionamento em todo instante de amostragem), sem perder desempenho no controle.

A seguir a mesma análise de frequência de particionamento será feita para o estudo de caso 3.

D.3 Estudo de caso 3

D.3.1 DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

A seguir são apresentados os resultados dinâmicos para as saídas controladas (Figuras (D.17) e (D.18)) e os resultados dinâmicos para as entradas manipuladas (Figuras (D.19) e (D.20)) para a análise de frequência de particionamento para estudo de caso 3 considerando a proposta de controle DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

**LEGENDA:**

— Cenário 1 - - - - - Cenário 2 - . - . - . Cenário 3 Cenário 4 - - - - - Cenário 5

Figura D.17: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

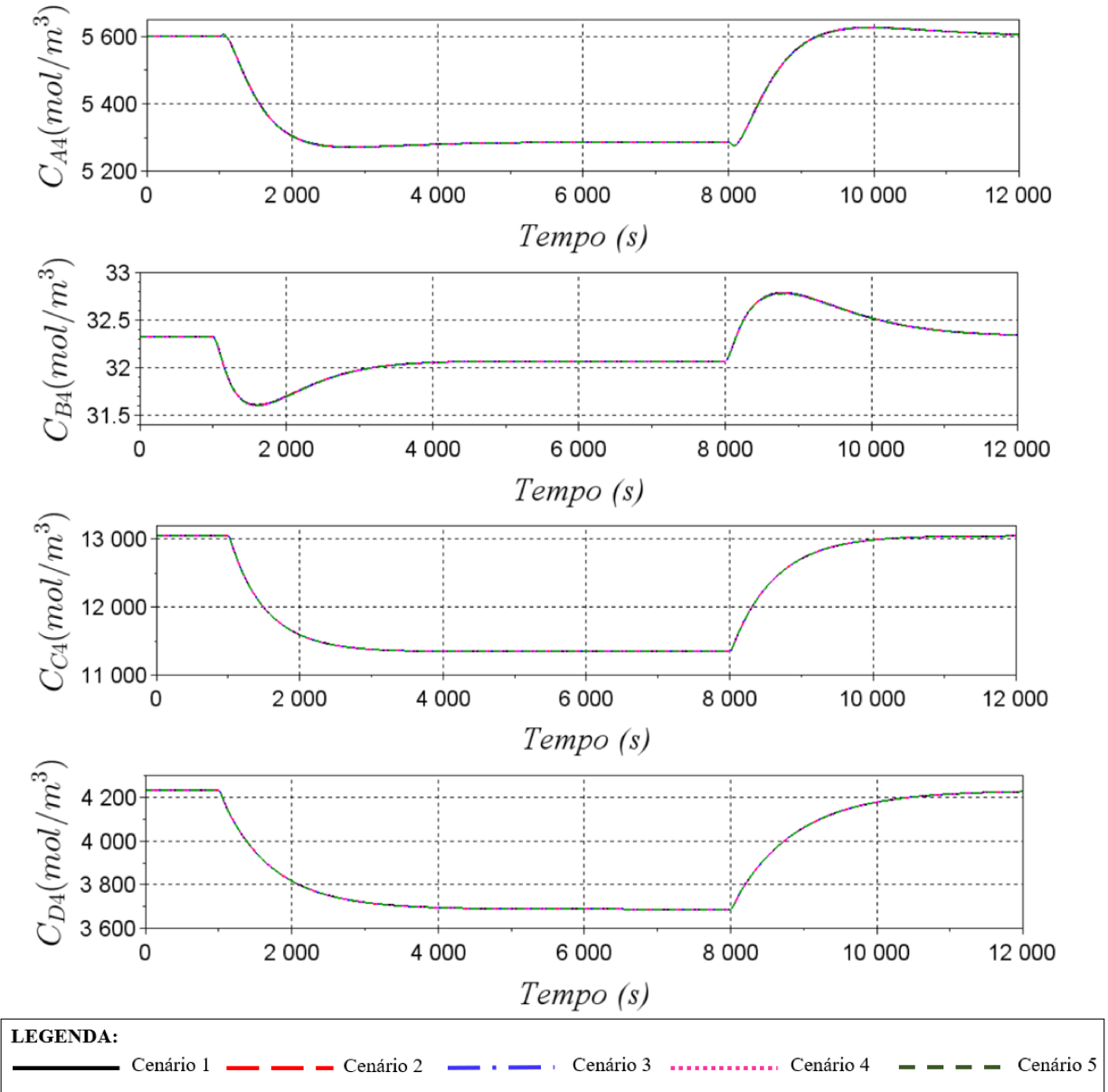


Figura D.18: Respostas dinâmicas das concentrações no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

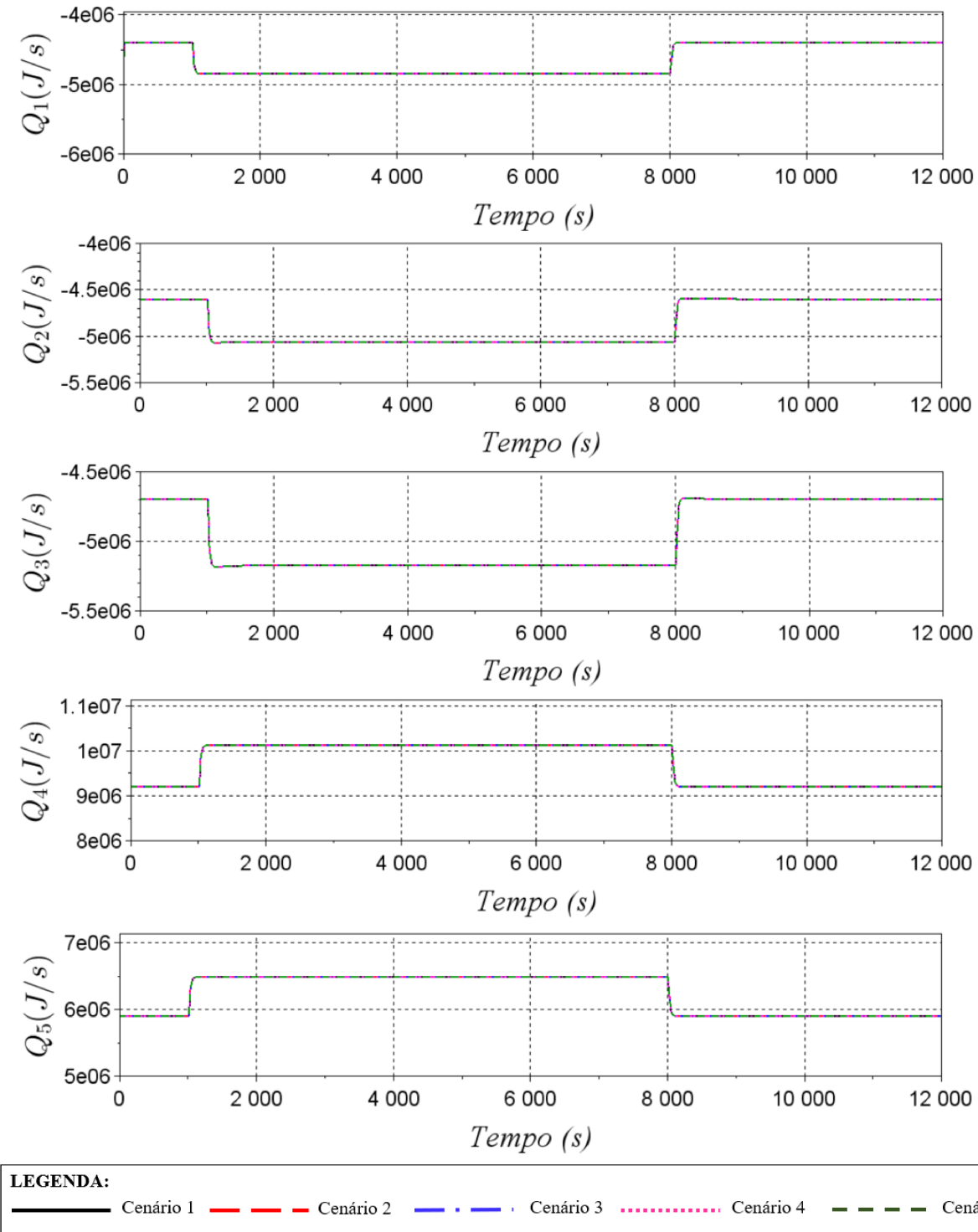


Figura D.19: Respostas dinâmicas dos calores no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

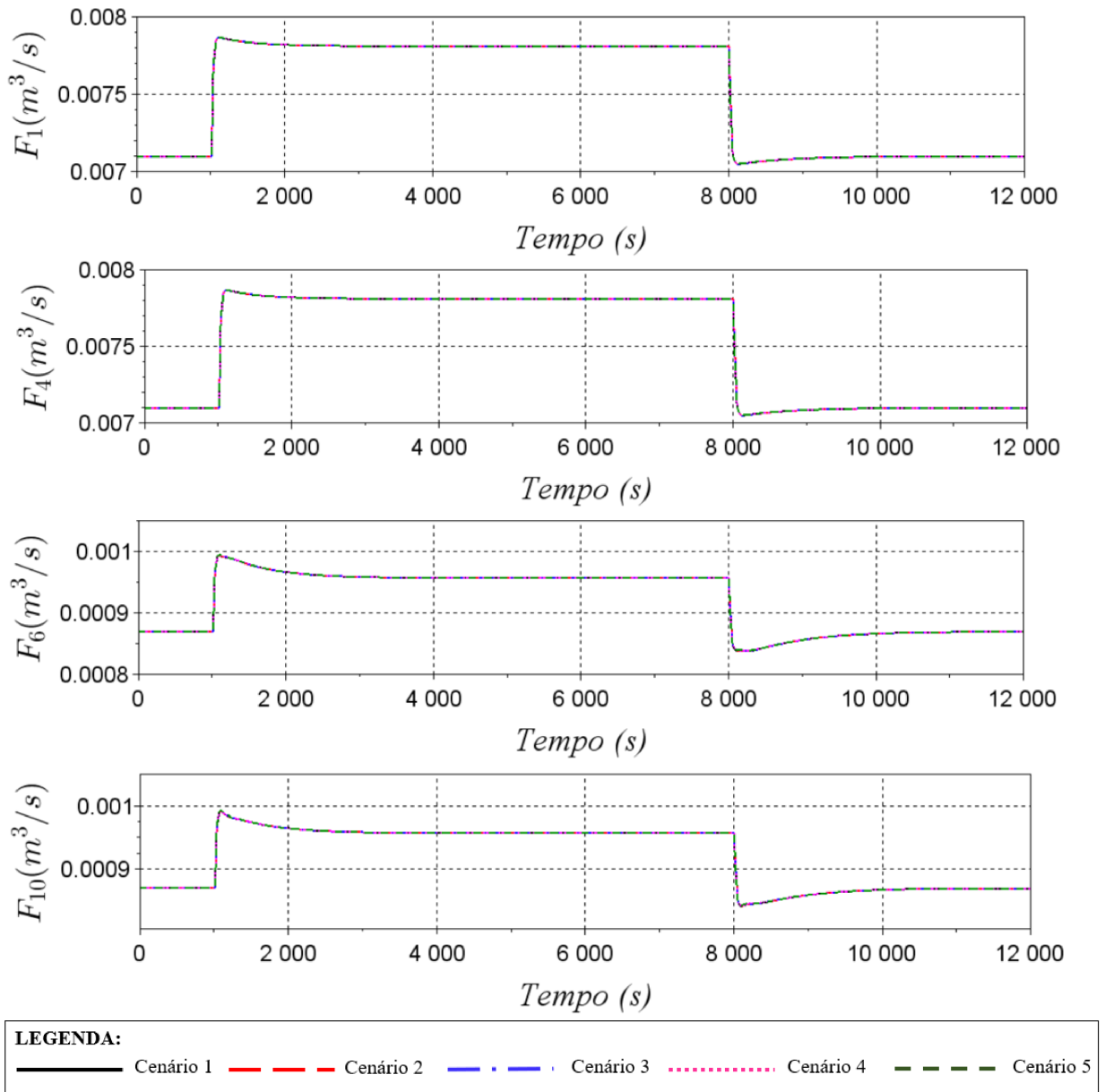


Figura D.20: Respostas dinâmicas das vazões manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Nota-se pelas Figuras acima, que as respostas obtidas nos diferentes cenários são equivalentes. Logo, para esse estudo de caso nas condições apresentadas e utilizando o DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, pode-se concluir que não há necessidade do particionamento e atualização do modelo serem feitos em cada instante de amostragem. Isto pode diminuir o tempo de processamento requerido no controle. Para avaliar isso, considere a Tabela (D.5) que apresenta o tempo de processamento para cada um dos cenários avaliados.

Tabela D.5: Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC não cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Tipo de controle	Tempo total (s)
Cenário 1	2887,91
Cenário 2	2763,19
Cenário 3	2738,55
Cenário 4	2735,99
Cenário 5	2038,41

Analisando os tempos apresentados na Tabela acima, nota-se que pode haver uma diminuição do tempo de processamento de cerca de 29,41%, ao considerar o cenário 5 (particionamento a cada 20 instantes de amostragem) ao invés do cenário 1 (particionamento em todo instante de amostragem), sem perder desempenho no controle.

D.3.2 DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado

A seguir são apresentados os resultados dinâmicos para as saídas controladas (Figuras (D.21) e (D.22)) e os resultados dinâmicos para as entradas manipuladas (Figuras (D.23) e (D.24)) para a análise de frequência de particionamento para estudo de caso 3 considerando a proposta de controle DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

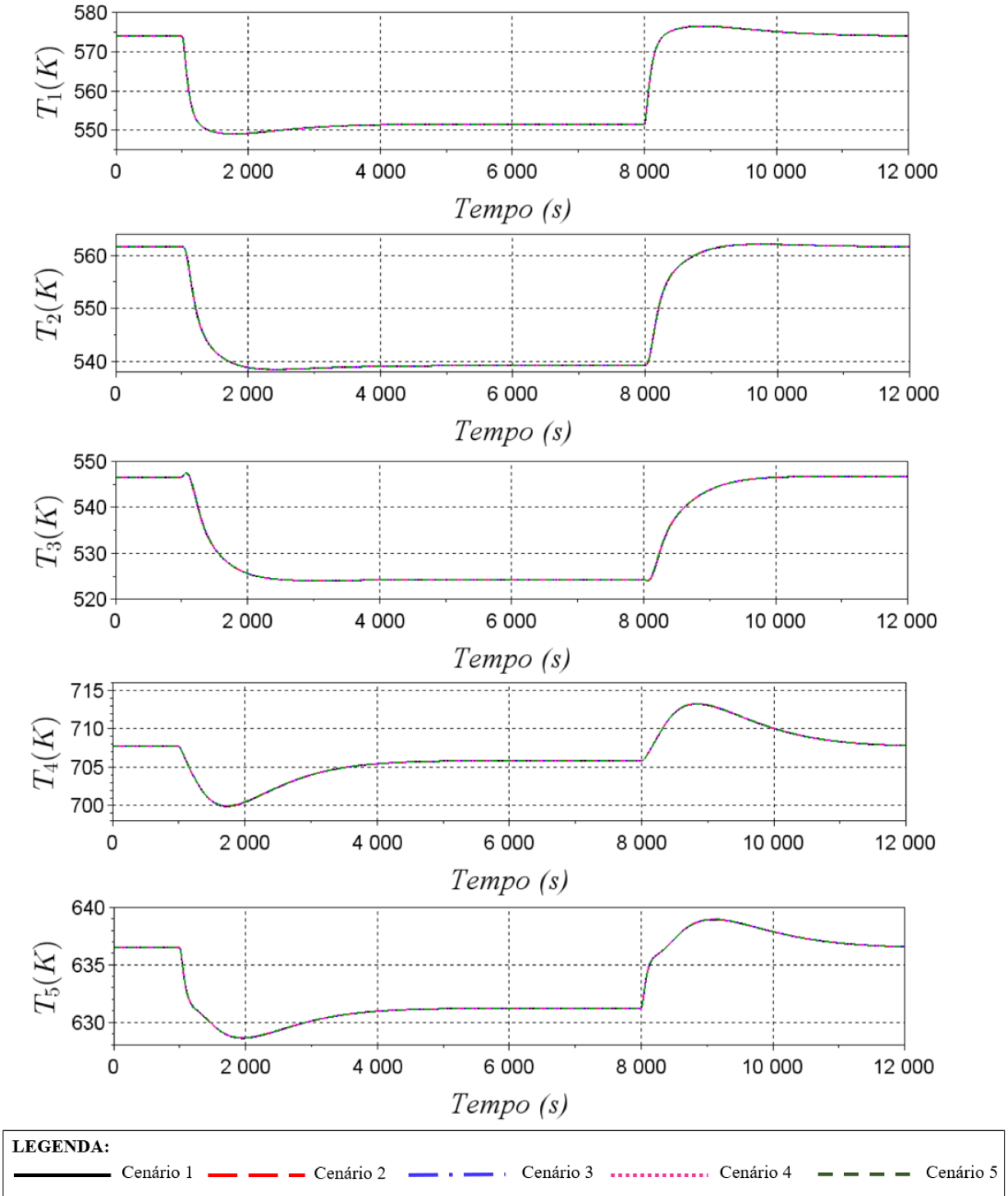


Figura D.21: Respostas dinâmicas das temperaturas em cada equipamento no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

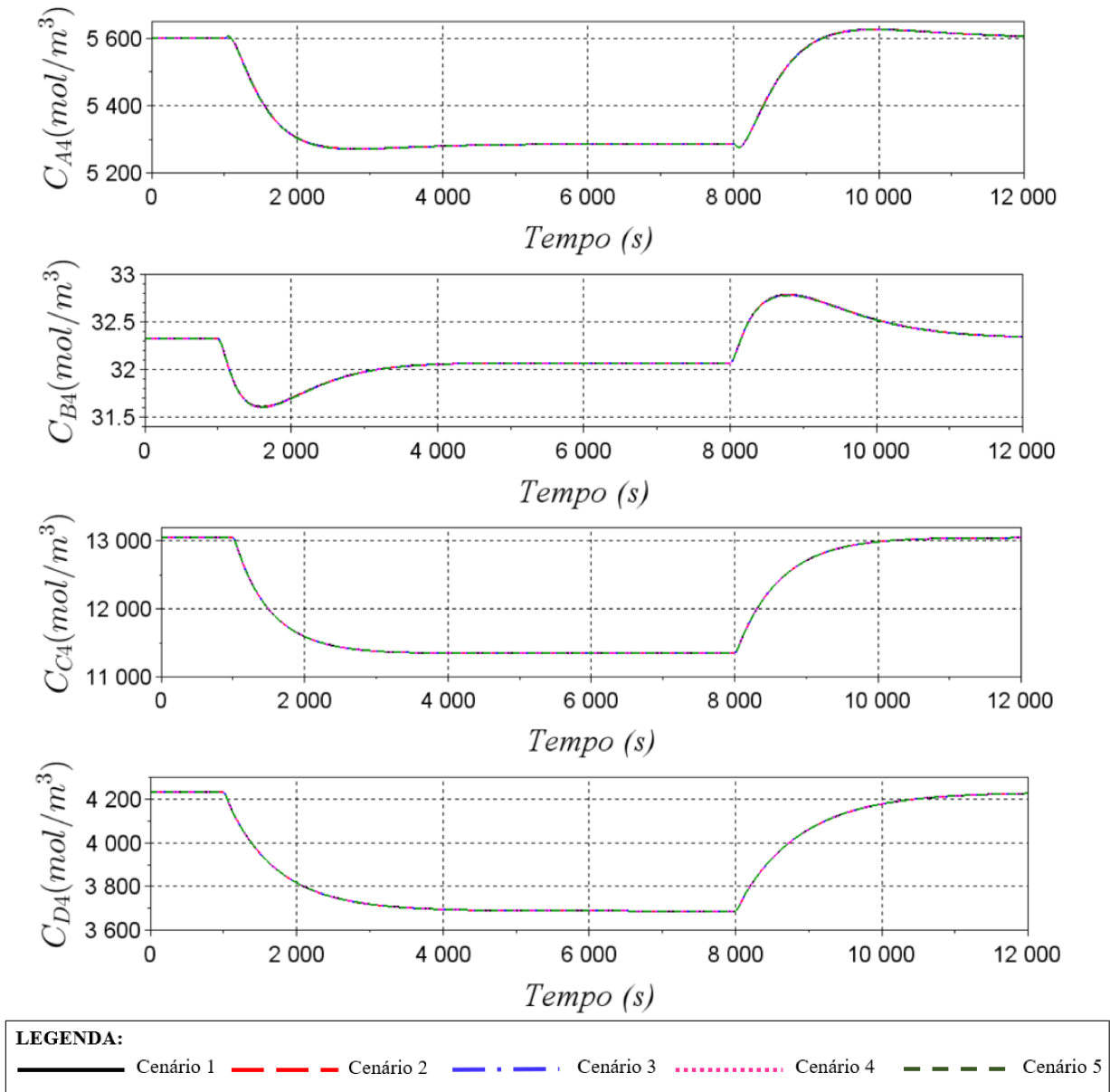


Figura D.22: Respostas dinâmicas das concentrações no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

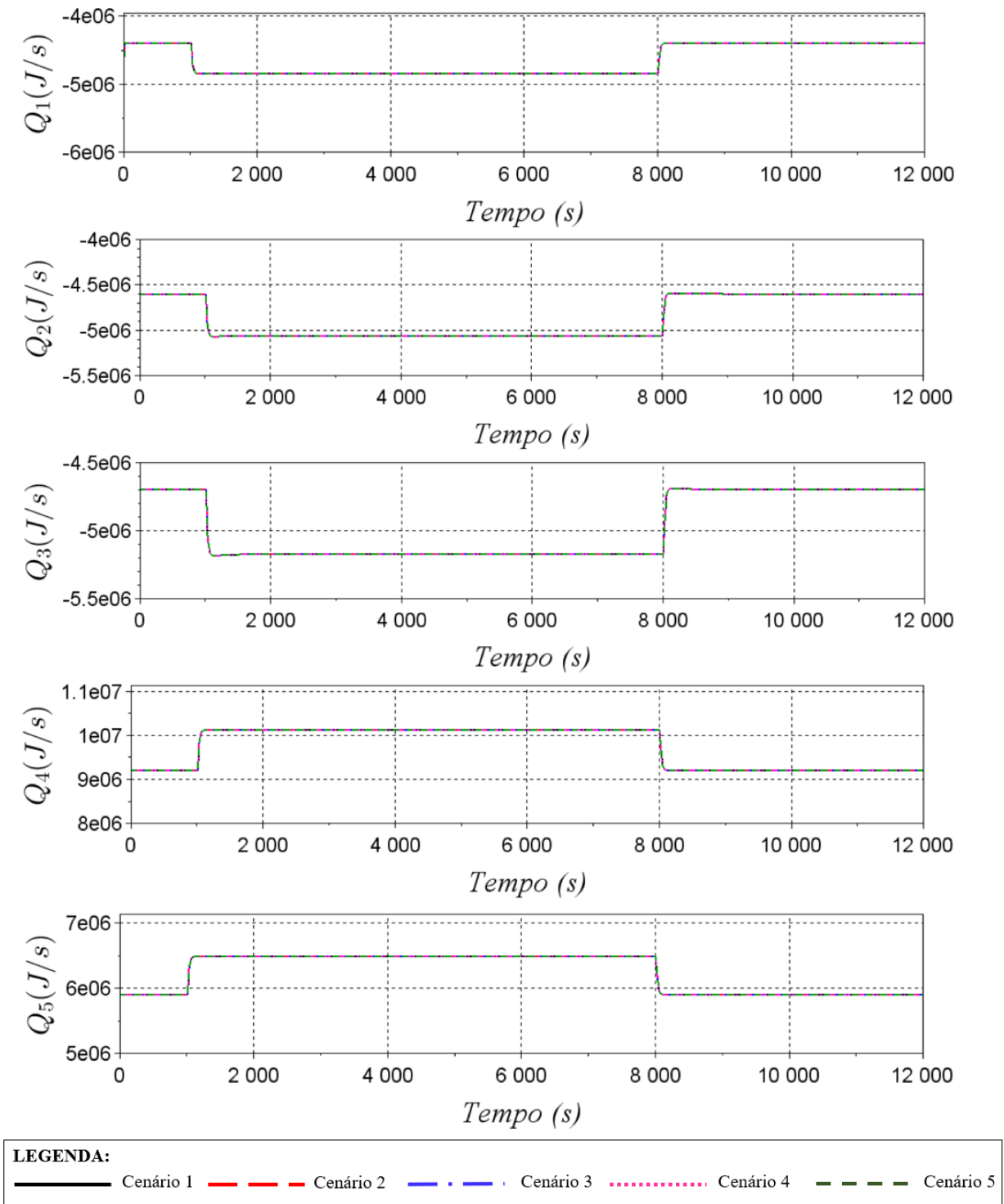


Figura D.23: Respostas dinâmicas dos calores no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

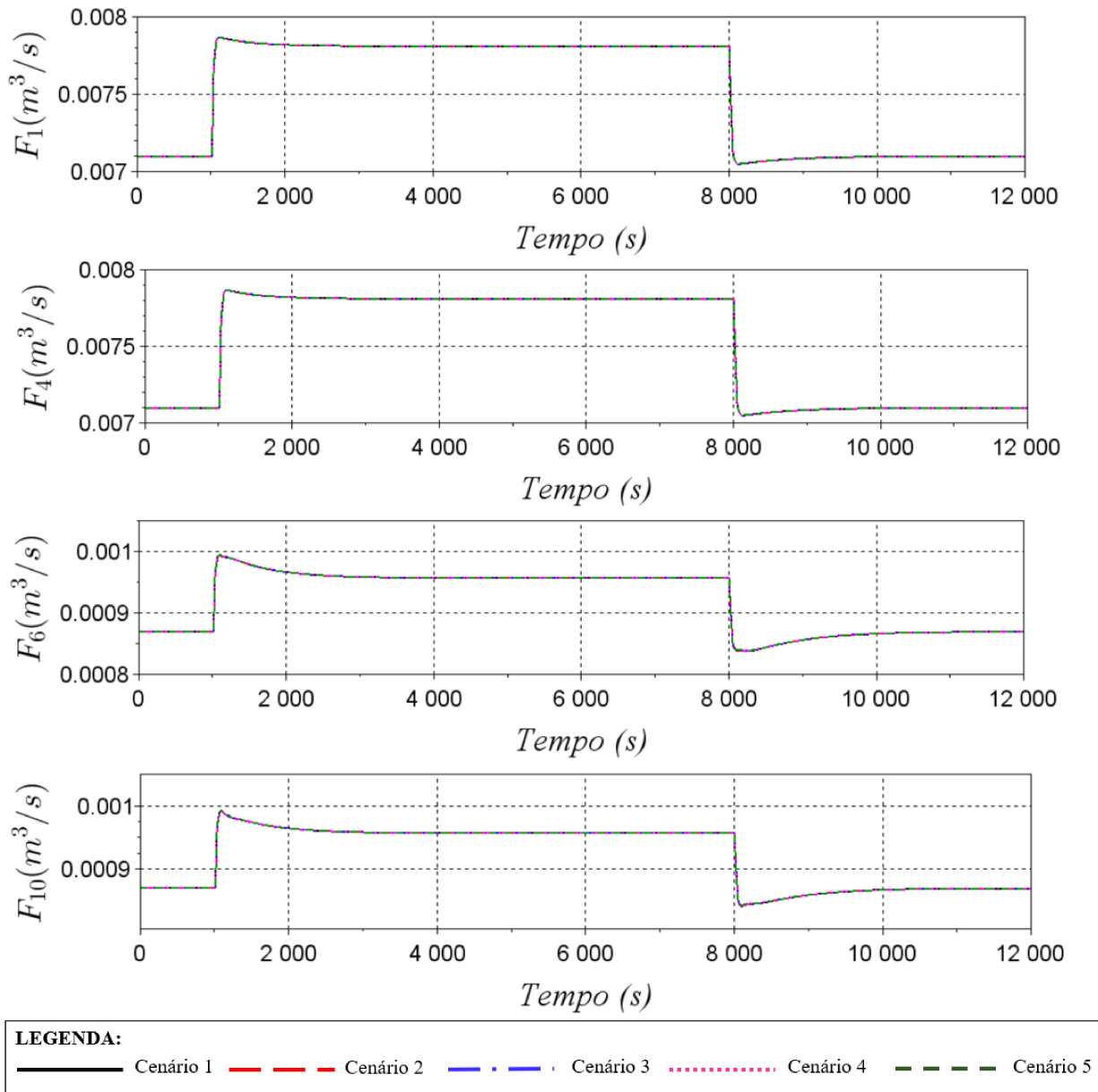


Figura D.24: Respostas dinâmicas das vazões manipulados no estudo de caso 3 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Nota-se pelas Figuras acima, que as respostas obtidas nos diferentes cenários são equivalentes. Logo, para esse estudo de caso nas condições apresentadas e utilizando o DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado, pode-se concluir que não há necessidade do particionamento e atualização do modelo serem feitos em cada instante de amostragem. Isto pode diminuir o tempo de processamento requerido no controle. Para avaliar isso, considere a Tabela (D.6) que apresenta o tempo de processamento para cada um dos cenário avaliados.

Tabela D.6: Comparação entre o somatório dos tempos de cálculo das ações de controle para o estudo de caso 2 sem restrição em Δu_i para análise da frequência de particionamento da proposta DMPC cooperativo baseado no modelo localmente linearizado.

Tipo de controle	Tempo total (s)
Cenário 1	3682,34
Cenário 2	3670,45
Cenário 3	3664,46
Cenário 4	3662,00
Cenário 5	3622,77

Analisando os tempos apresentados na Tabela acima, nota-se que pode haver uma diminuição do tempo de processamento de cerca de 1,62%, ao considerar o cenário 5 (particionamento a cada 20 instantes de amostragem) ao invés do cenário 1 (particionamento em todo instante de amostragem), sem perder desempenho no controle.

APÊNDICE E

Formulação do Controle Descentralizado

Neste anexo será apresentada a formulação do controle descentralizado utilizado nesta tese. A estrutura do mesmo é totalmente descentralizada, ou seja, uma única entrada controlando apenas uma única saída. A seleção do pareamento (entrada-saída) foi realizada com base nas matrizes de ganho relativo (RGA) nos estados estacionários utilizados em cada estudo de caso. Essa metodologia em questão foi desenvolvida por Bristol (1966), que consiste em uma abordagem sistemática para análise de problemas de controle de processos multivariáveis. Não é objetivo deste trabalho apresentar de forma detalhada essa metodologia, mas a mesma pode ser encontrada na literatura clássica de controle, como por exemplo em Seborg et al. (2004).

Após a análise das matrizes de ganho relativo nos estados estacionários do processo e feita a seleção do par de controle, as seguintes etapas são realizadas:

Etapas 1: Linearização do modelo em torno do estado estacionário e obtenção da representação em espaço de estados;

Etapas 2: Transformação do modelo em espaço de estados na sua respectiva representação por funções de transferências;

Etapas 3: Seleção da função de transferência correspondente ao par selecionado pelo método de Bristol (1966);

Etapas 4: Transformação da função de transferência obtida na etapa anterior na representação em espaço de estado;

Etapa 5: Discretização do modelo linearizado utilizando o tempo de amostragem pré-definido. Esse será o modelo utilizado por cada controlador local.

O modelo selecionado para cada controlador local na **Etapa 5** corresponde ao modelo que será utilizado para predição nos controladores preditivos locais. No método de controle descentralizado, cada controlador não terá acesso à todos os estados do sistema. Na verdade, cada controlador local terá acesso apenas ao valor medido de sua saída controlada, mesmo necessitando dos valores de alguns estados. Para resolver tal problema é necessário utilizar observadores para estimar os estados por meio da saída do sistema.

Os observadores de estados oferecem uma maneira eficaz de extrair informações do processo que são necessárias, mas não estão disponíveis ou não são confiáveis. Assim, esta técnica é empregada com o objetivo de obter medidas para os controladores da estrutura descentralizada que não estão acessíveis aos mesmos. Neste trabalho, optou-se por utilizar um observador de Kalman para cada controlador local. Para facilitar a compreensão, na seção a seguir, tem-se um exemplo de aplicação de todo o processo realizado no controle descentralizado para o estudo de caso 1 analisado nessa tese.

E.1 Exemplo de aplicação

Para ilustrar como o controle totalmente descentralizado foi aplicado, considere o estudo de caso 1. A partir das matrizes de ganho relativo obtidas nos estados estacionário *ss1* e *ss2*, foi possível fazer o seguinte pareamento (entrada-saída):

- $F_{f1} - H_1$
- $Q_1 - T_1$
- $F_{f2} - H_2$
- $Q_2 - T_2$
- $F_R - H_3$
- $Q_3 - T_3$

Isso significa por exemplo, que a entrada manipulada F_{f1} é responsável pelo controle da saída controlada H_1 e que a entrada Q_1 é responsável pelo controle da saída T_1 e assim sucessivamente. Logo, para esse estudo de caso, 6 subsistemas foram gerados, com um controlador local para cada um deles. Na Figura (E.1) é possível verificar a distribuição desses subsistemas.

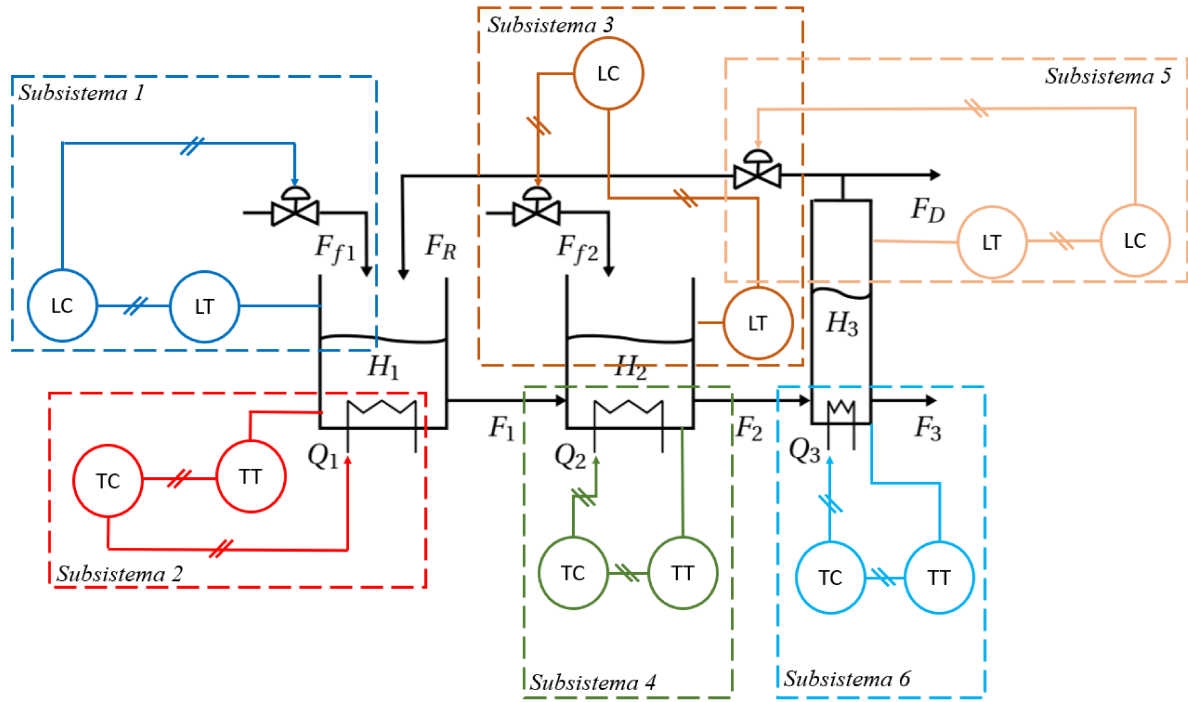


Figura E.1: Esquema da distribuição dos subsistemas formados do o controle descentralizado para o estudo de caso 1.

Na Figura acima, LC significa, controlador de nível; LT, transmissor de nível; TC, controlador de temperatura e TT, transmissor de temperatura. Além disso, considere que todos os controladores são do tipo preditivo baseado em modelo. O modelo linearizado em torno do estado estacionário 1, apresenta a seguinte representação em espaço de estados:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_C \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_C \mathbf{u}(t) \quad (\text{E.1})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_C \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_C \mathbf{u}(t) \quad (\text{E.2})$$

em que,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_1 - H_1^{ss} \\ T_1 - T_1^{ss} \\ H_2 - H_2^{ss} \\ T_2 - T_2^{ss} \\ H_3 - H_3^{ss} \\ T_3 - T_3^{ss} \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_{f1} - F_{f1}^{ss} \\ Q_1 - Q_1^{ss} \\ F_{f2} - F_{f2}^{ss} \\ Q_2 - Q_2^{ss} \\ F_R - F_R^{ss} \\ Q_3 - Q_3^{ss} \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} H_1 - H_1^{ss} \\ T_1 - T_1^{ss} \\ H_2 - H_2^{ss} \\ T_2 - T_2^{ss} \\ H_3 - H_3^{ss} \\ T_3 - T_3^{ss} \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{C1} & \mathbf{A}_{C2} \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

em que,

$$\mathbf{A}_{C1} = \begin{bmatrix} -0,71 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,49 & -2,21 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,39 & 1,50 & -0,82 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 20,76 & 59,90 & 1,17 & -0,70 & 0,00 & 0,00 \\ 0,71 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,71 & 0,00 \\ 0,04 & 0,43 & 0,00 & 0,00 & -0,22 & -2,21 \\ -0,01 & 0,00 & 0,42 & 0,00 & 0,16 & 1,50 \\ -1,65 & 0,00 & 0,00 & 0,42 & 9,45 & 60,03 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,42 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,03 & 1,77 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,11 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,06 & 0,00 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

e

$$\mathbf{A}_{C2} = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,25 & 0,04 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,13 & 0,35 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,24 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,82 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,17 & -0,70 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & -1,42 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,04 & -1,90 & -0,32 & 0,00 \\ 1,77 & 0,00 & 0,14 & -1,15 & -2,73 & 0,00 \\ 0,00 & 1,77 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -1,77 \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

$$\mathbf{B}_C = \begin{bmatrix} 0,08 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,08 & 0,00 \\ 0,09 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,01 & 0,00 \\ -0,07 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -3,84 & 0,02 & 0,00 & 0,00 & 0,33 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,08 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,06 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & -0,04 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & -2,50 & 0,01 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,17 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,02 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,07 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,04 \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

O próximo passo consiste em encontrar a representação do modelo acima na sua representação por funções de transferências, gerando um modelo com a seguinte estrutura:

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{E.10})$$

A partir do pareamento, deve-se selecionar a função de transferência que irá pertencer a cada subsistema e desconsiderar as outras, já que o controle em questão é totalmente descentralizado. Fazendo isso, a representação acima ficará com o seguinte formato:

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

em outras palavras, apenas a diagonal principal é selecionada e as interações são consideradas nulas. No subsistema 1 será utilizado a função de transferência G_{11} , no subsistema 2 será utilizado a função de transferência G_{22} e assim sucessivamente. A seguir, tem-se de forma explícita cada uma dessas funções de transferências selecionadas para cada subsistema:

Subsistema 1:

$$G_{11}(s) = \frac{H_1(s)}{F_{f1}(s)} = \frac{0,08}{0,71 + s} \quad (\text{E.12})$$

Subsistema 2:

$$G_{22} = \frac{T_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{T_3(s)}{Q_3(s)} = \frac{b_{11}s^{11} + b_{10}s^{10} + \dots + b_1s^1 + b_0}{a_{12}s^{12} + a_{11}s^{11} + \dots + a_1s^1 + a_0} \quad (\text{E.13})$$

em que: $b_0 = 0,28$; $b_1 = 2,92$; $b_2 = 13,19$; $b_3 = 34,65$; $b_4 = 58,76$; $b_5 = 67,53$; $b_6 = 53,71$; $b_7 = 29,57$; $b_8 = 11,06$; $b_9 = 2,68$; $b_{10} = 0,38$; $b_{11} = 0,02$; $a_0 = 6,76$; $a_1 = 84,79$; $a_2 = 466,38$; $a_3 = 1491,42$; $a_4 = 3095,33$; $a_5 = 4402,10$; $a_6 = 4407,96$; $a_7 = 3137,05$; $a_8 = 1577,40$; $a_9 = 547,31$; $a_{10} = 124,54$; $a_{11} = 16,70$ e $a_{12} = 1$.

Subsistema 3:

$$G_{33} = \frac{H_2(s)}{F_{f2}(s)} = \frac{0,08}{0,71 + s} \quad (\text{E.14})$$

Subsistema 4:

$$G_{44} = \frac{T_2(s)}{Q_2(s)} = \frac{T_3(s)}{Q_3(s)} = \frac{b_{11}s^{11} + b_{10}s^{10} + \dots + b_1s^1 + b_0}{a_{12}s^{12} + a_{11}s^{11} + \dots + a_1s^1 + a_0} \quad (\text{E.15})$$

em que: $b_0 = 0,17$; $b_1 = 1,75$; $b_2 = 7,9$; $b_3 = 20,77$; $b_4 = 35,22$; $b_5 = 40,48$; $b_6 = 32,20$; $b_7 = 17,73$; $b_8 = 6,63$; $b_9 = 1,61$; $b_{10} = 0,23$; $b_{11} = 0,01$; $a_0 = 6,76$; $a_1 = 84,79$; $a_2 = 466,38$; $a_3 = 1491,42$; $a_4 = 3095,33$; $a_5 = 4402,10$; $a_6 = 4407,96$; $a_7 = 3137,05$; $a_8 = 1577,40$; $a_9 = 547,31$; $a_{10} = 124,54$; $a_{11} = 16,70$ e $a_{12} = 1$.

Subsistema 5:

$$G_{55} = \frac{H_3(s)}{F_R(s)} = \frac{-0,24s - 0,17s^2}{0,71 + 2,51s + 2,83s^2 + s^3} \quad (\text{E.16})$$

Subsistema 6:

$$G_{66} = \frac{T_3(s)}{Q_3(s)} = \frac{b_{11}s^{11} + b_{10}s^{10} + \dots + b_1s^1 + b_0}{a_{12}s^{12} + a_{11}s^{11} + \dots + a_1s^1 + a_0} \quad (\text{E.17})$$

em que: $b_0 = 0,17$; $b_1 = 1,88$; $b_2 = 9,26$; $b_3 = 26,58$; $b_4 = 49,32$; $b_5 = 62,11$; $b_6 = 54,09$; $b_7 = 32,55$; $b_8 = 13,26$; $b_9 = 3,48$; $b_{10} = 0,53$; $b_{11} = 0,03$; $a_0 = 6,76$; $a_1 = 84,79$; $a_2 = 466,38$; $a_3 = 1491,42$; $a_4 = 3095,33$; $a_5 = 4402,10$; $a_6 = 4407,96$; $a_7 = 3137,05$; $a_8 = 1577,40$; $a_9 = 547,31$; $a_{10} = 124,54$; $a_{11} = 16,70$ e $a_{12} = 1$.

O próximo passo consiste em transformar as representações em funções de transferência acima em modelos em espaço de estados. Obtendo assim os seguintes modelos discretos:

Subsistema 1:

$$\hat{\mathbf{x}}_1(k+1) = \hat{\mathbf{A}}_{1D}\hat{\mathbf{x}}_1(k) + \hat{\mathbf{B}}_{1D}\mathbf{u}_1(k) \quad (\text{E.18})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_1(k) = \hat{\mathbf{C}}_{1D}\hat{\mathbf{x}}_1(k) + \hat{\mathbf{D}}_{1D}\mathbf{u}_1(k) \quad (\text{E.19})$$

em que,

$$\hat{\mathbf{A}}_{1D} = \begin{bmatrix} 0,93 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}}_{1D} = \begin{bmatrix} 0,03 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_{1D} = \begin{bmatrix} 0,29 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{D}}_{1D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.20})$$

Subsistema 2:

$$\hat{\mathbf{x}}_2(k+1) = \hat{\mathbf{A}}_{2D}\hat{\mathbf{x}}_2(k) + \hat{\mathbf{B}}_{2D}\mathbf{u}_2(k) \quad (\text{E.21})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_2(k) = \hat{\mathbf{C}}_{2D}\hat{\mathbf{x}}_2(k) + \hat{\mathbf{D}}_{2D}\mathbf{u}_2(k) \quad (\text{E.22})$$

em que,

$$\hat{\mathbf{A}}_{2D} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{2D_1} & \hat{\mathbf{A}}_{2D_2} \end{bmatrix} \quad (\text{E.23})$$

sendo,

$$\hat{\mathbf{A}}_{2D_1} = \begin{bmatrix} 0,93 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,10 & 1,03 & -0,06 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,68 & 0,31 & 0,73 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,70 & 0,40 & -0,73 & 0,63 & -0,08 & 0,00 \\ -0,11 & 0,07 & 0,16 & 0,40 & 0,98 & -0,01 \\ -0,12 & 0,05 & 0,13 & 0,40 & -0,12 & 0,93 \\ -0,19 & 0,09 & 0,06 & 0,38 & -0,18 & -0,17 \\ -0,06 & 0,04 & -0,02 & 0,17 & -0,17 & -0,21 \\ 0,17 & -0,11 & 0,00 & -0,21 & 0,00 & -0,04 \\ 0,13 & -0,07 & 0,00 & -0,14 & 0,01 & -0,03 \\ 0,06 & -0,02 & -0,01 & -0,04 & 0,01 & 0,00 \\ 0,13 & -0,07 & -0,02 & -0,11 & -0,02 & -0,02 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.24})$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{2D_2} = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,92 & 0,02 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,28 & 0,72 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,12 & -0,34 & 0,87 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,06 & -0,14 & -0,13 & 0,92 & 0,00 & 0,00 \\ -0,03 & -0,04 & -0,03 & -0,07 & 0,94 & 0,01 \\ -0,03 & -0,09 & -0,09 & -0,08 & -0,04 & 0,86 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.25})$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{2D} = \begin{bmatrix} -0,182 \\ 0,101 \\ -0,123 \\ 0,010 \\ -0,042 \\ -0,030 \\ -0,027 \\ -0,026 \\ 0,005 \\ 0,003 \\ 0,001 \\ 0,002 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.26})$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{2D} = \begin{bmatrix} -0,012 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.27})$$

e

$$\hat{\mathbf{D}}_{2D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.28})$$

Subsistema 3:

$$\hat{\mathbf{x}}_3(k+1) = \hat{\mathbf{A}}_{3D}\hat{\mathbf{x}}_3(k) + \hat{\mathbf{B}}_{3D}\mathbf{u}_3(k) \quad (\text{E.29})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_3(k) = \hat{\mathbf{C}}_{3D}\hat{\mathbf{x}}_3(k) + \hat{\mathbf{D}}_{3D}\mathbf{u}_3(k) \quad (\text{E.30})$$

em que,

$$\hat{\mathbf{A}}_{3D} = \begin{bmatrix} 0,93 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}}_{3D} = \begin{bmatrix} 0,03 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_{3D} = \begin{bmatrix} 0,29 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{D}}_{3D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.31})$$

Subsistema 4:

$$\hat{\mathbf{x}}_4(k+1) = \hat{\mathbf{A}}_{4D}\hat{\mathbf{x}}_4(k) + \hat{\mathbf{B}}_{4D}\mathbf{u}_4(k) \quad (\text{E.32})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_4(k) = \hat{\mathbf{C}}_{4D}\hat{\mathbf{x}}_4(k) + \hat{\mathbf{D}}_{4D}\mathbf{u}_4(k) \quad (\text{E.33})$$

em que,

$$\hat{\mathbf{A}}_{4D} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{4D_1} & \hat{\mathbf{A}}_{4D_2} \end{bmatrix} \quad (\text{E.34})$$

sendo,

$$\hat{\mathbf{A}}_{4D_1} = \begin{bmatrix} 0,93 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,11 & 1,03 & -0,06 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,68 & 0,31 & 0,73 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,71 & 0,41 & -0,71 & 0,66 & -0,04 & 0,00 \\ -0,04 & 0,03 & 0,23 & 0,43 & 0,95 & -0,01 \\ -0,12 & 0,05 & 0,13 & 0,40 & -0,12 & 0,93 \\ -0,17 & 0,09 & 0,03 & 0,37 & -0,28 & -0,27 \\ 0,10 & -0,04 & -0,05 & 0,16 & 0,04 & -0,02 \\ 0,17 & -0,11 & 0,00 & -0,21 & 0,02 & -0,04 \\ 0,13 & -0,07 & 0,00 & -0,14 & 0,03 & -0,13 \\ 0,07 & -0,02 & -0,01 & -0,05 & 0,01 & 0,00 \\ 0,12 & -0,06 & -0,02 & -0,10 & -0,01 & -0,02 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.35})$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{4D_2} = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,67 & 0,05 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,24 & 0,95 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,32 & -0,14 & 0,87 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,15 & -0,05 & -0,13 & 0,92 & 0,00 & 0,00 \\ -0,06 & 0,00 & -0,04 & -0,08 & 0,94 & 0,00 \\ -0,08 & -0,04 & -0,08 & -0,07 & -0,04 & 0,87 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.36})$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{4D} = \begin{bmatrix} -0,141 \\ 0,080 \\ -0,094 \\ 0,005 \\ -0,033 \\ -0,023 \\ -0,030 \\ -0,001 \\ 0,004 \\ 0,002 \\ 0,001 \\ 0,002 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.37})$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{4D} = \begin{bmatrix} -0,0097 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.38})$$

e

$$\hat{\mathbf{D}}_{4D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.39})$$

Subsistema 5:

$$\hat{\mathbf{x}}_5(k+1) = \hat{\mathbf{A}}_{5D}\hat{\mathbf{x}}_5(k) + \hat{\mathbf{B}}_{5D}\mathbf{u}_5(k) \quad (\text{E.40})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_5(k) = \hat{\mathbf{C}}_{5D}\hat{\mathbf{x}}_5(k) + \hat{\mathbf{D}}_{5D}\mathbf{u}_5(k) \quad (\text{E.41})$$

em que,

$$\hat{\mathbf{A}}_{5D} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,06 & 0,00 \\ -0,11 & 1,01 & 0,00 \\ 0,25 & 0,01 & 0,87 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}}_{5D} = \begin{bmatrix} -0,05 \\ -0,01 \\ 0,03 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_{5D} = \begin{bmatrix} 0,32 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.42})$$

e

$$\hat{\mathbf{D}}_{5D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.43})$$

Subsistema 6:

$$\hat{\mathbf{x}}_6(k+1) = \hat{\mathbf{A}}_{6D}\hat{\mathbf{x}}_6(k) + \hat{\mathbf{B}}_{6D}\mathbf{u}_6(k) \quad (\text{E.44})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_6(k) = \hat{\mathbf{C}}_{6D}\hat{\mathbf{x}}_6(k) + \hat{\mathbf{D}}_{6D}\mathbf{u}_6(k) \quad (\text{E.45})$$

em que,

$$\hat{\mathbf{A}}_{6D} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{6D_1} & \hat{\mathbf{A}}_{6D_2} \end{bmatrix} \quad (\text{E.46})$$

sendo,

$$\hat{\mathbf{A}}_{6D_1} = \begin{bmatrix} 0,84 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,14 & 1,03 & -0,05 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,72 & 0,21 & 0,83 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,84 & 0,32 & -0,54 & 0,74 & 0,00 & 0,00 \\ 0,14 & -0,06 & 0,36 & 0,50 & 0,84 & 0,00 \\ -0,08 & 0,01 & 0,11 & 0,26 & -0,17 & 0,97 \\ -0,21 & 0,05 & 0,10 & 0,36 & -0,34 & -0,15 \\ -0,06 & 0,03 & -0,01 & 0,10 & -0,20 & -0,13 \\ 0,19 & -0,08 & -0,03 & -0,20 & 0,05 & -0,03 \\ 0,16 & -0,04 & -0,02 & -0,13 & 0,05 & -0,01 \\ -0,02 & 0,02 & -0,01 & 0,03 & -0,01 & 0,01 \\ 0,13 & -0,04 & -0,04 & -0,10 & 0,01 & -0,02 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.47})$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{6D_2} = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,87 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,31 & 0,75 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,17 & -0,33 & 0,85 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,09 & -0,13 & -0,14 & 0,89 & 0,04 & 0,00 \\ 0,01 & 0,04 & 0,04 & -0,04 & 0,97 & 0,00 \\ -0,04 & -0,07 & -0,09 & -0,08 & 0,00 & 0,87 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.48})$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{6D} = \begin{bmatrix} -0,201 \\ 0,073 \\ -0,090 \\ 0,003 \\ -0,043 \\ -0,021 \\ -0,032 \\ -0,022 \\ -0,006 \\ -0,003 \\ 0,000 \\ -0,002 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.49})$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{6D} = \begin{bmatrix} -0,016 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.50})$$

Cada controlador da estrutura descentralizado, necessita de estados para seu modelo de predição. Esses estados não estão acessíveis para cada um deste controladores. Logo, será necessário utilizar estimadores de estados. Neste trabalho, optou-se por utilizar observadores de Kalman, sendo um observador para cada subsistema, totalizando 6 observadores para o exemplo em questão. Não é objetivo deste trabalho detalhar sobre esse tema, mas tal teoria pode ser encontrada também em diversos livros clássicos de controle, como por exemplo em Lewis et al. (2012) ou em Brown e Hwang (2012). Mas para exemplificar brevemente, o processo de estimação pode ser esquematizado como apresentado na Figura (E.2).

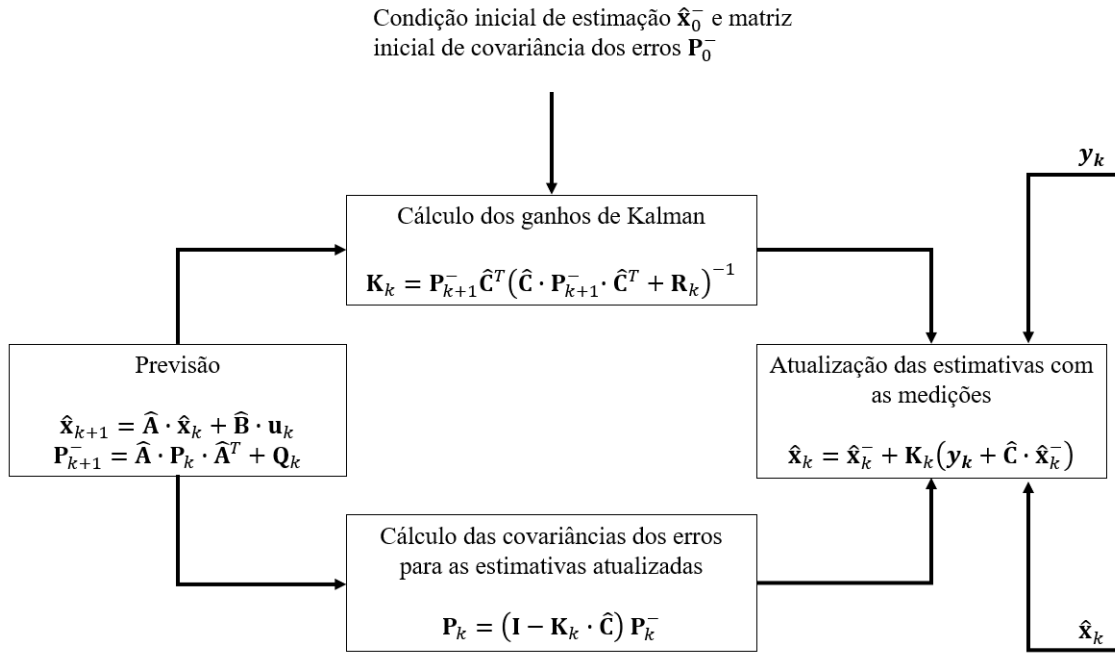


Figura E.2: Representação de um observador de Kalman (adaptado de Brown e Hwang (2012)).

Na Figura (E.2) os símbolos utilizados tem o seguinte significado:

$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ - Vetor dos estados preditos em $k + 1$;

$\hat{\mathbf{x}}_k$ - Vetor dos estados preditos em k ;

$\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ - Matrizes do modelo de predição;

\mathbf{u}_k - Vetor das entradas em k ;

\mathbf{Q}_k - Matriz de covariância para os ruídos de processo;

\mathbf{R}_k - Matriz de covariância para os ruídos de medição ou erro de medição;

\mathbf{P}_k - Matriz de covariância dos erros associados ao vetor de estado atualizado;

\mathbf{K}_k - Matriz de ganho de Kalman;

\mathbf{y}_k - Vetor das saídas medidas do processo.

Na Tabela (E.1), tem-se as sintonias selecionadas para as matrizes dos observadores de Kalman com dimensões adequadas para os três estudos de casos avaliados nesta tese.

Tabela E.1: Sintonia dos observadores de Kalman utilizados nos controladores descentralizados para cada estudo de caso avaliado.

Matriz	Estudo de Caso 1	Estudo de Caso 2	Estudo de Caso 3
\mathbf{P}_0^-	$\mathbf{I}_{n \times n}$	$1,0 \cdot 10^{-2} \cdot \mathbf{I}_{n \times n}$	$1,0 \cdot 10^{-2} \cdot \mathbf{I}_{n \times n}$
\mathbf{Q}_k	$\mathbf{I}_{n \times n}$	$1,0 \cdot 10^{-2} \cdot \mathbf{I}_{n \times n}$	$1,0 \cdot 10^{-2} \cdot \mathbf{I}_{n \times n}$
\mathbf{R}_k	$\mathbf{I}_{n_y \times n_y}$	$1,0 \cdot 10^{-2} \cdot \mathbf{I}_{n_y \times n_y}$	$1,0 \cdot 10^{-2} \cdot \mathbf{I}_{n_y \times n_y}$

A partir dos observadores de Kalman foi possível estimar os estados em cada instante de amostragem e possibilitar o controle do processo por meio do controle descentralizado.

APÊNDICE F

Linearização Sucessiva

Este Apêndice faz referência ao método da linearização sucessiva utilizado nesta tese. Considere um sistema não linear e dinâmico descrito pela seguinte equação geral:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (\text{F.1})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (\text{F.2})$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de estados estimados; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ refere-se ao vetor das variáveis manipuladas; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ é o vetor das variáveis controladas. A linearização da Equação (F.1) por meio da expansão em série de Taylor em torno do ponto $(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$, ou seja, ponto anterior ao ponto atual de observação $(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ do sistema resulta em:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}' + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}' + \mathbf{m}_{k-1}, \quad (\text{F.3})$$

em que as variáveis \mathbf{x}' , \mathbf{u}' e \mathbf{y}' são variáveis desvio em relação ao ponto imediatamente anterior ao ponto atual de operação. Considerando que o ponto de operação atual se encontra no instante k , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_k &= \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}, \\ \mathbf{u}'_k &= \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}, \\ \mathbf{y}'_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1}. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Como $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}'}{dt}$, a Equação (F.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}' + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}' + \mathbf{m}_{k-1} \quad (\text{F.5})$$

e

$$\mathbf{y}' = \mathbf{C}_{k-1}\mathbf{x}', \quad (\text{F.6})$$

com as matrizes $\mathbf{A}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathbf{C}_{k-1} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ dadas por:

$$\mathbf{A}_{k-1} = \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}=\mathbf{u}_{k-1}}, \quad (\text{F.7})$$

$$\mathbf{B}_{k-1} = \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}=\mathbf{u}_{k-1}}, \quad (\text{F.8})$$

$$\mathbf{C}_{k-1} = \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{k-1}}. \quad (\text{F.9})$$

Multiplicando a Equação (F.5) por $e^{-\mathbf{A}_{k-1}t}$:

$$e^{-\mathbf{A}_{k-1}t} \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = e^{-\mathbf{A}_{k-1}t} (\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}' + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}' + \mathbf{m}_{k-1}). \quad (\text{F.10})$$

Reorganizando os termos da Equação (F.10):

$$e^{-\mathbf{A}_{k-1}t} \frac{d\mathbf{x}'}{dt} - e^{-\mathbf{A}_{k-1}t} \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}' = e^{-\mathbf{A}_{k-1}t} \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}' + e^{-\mathbf{A}_{k-1}t} \mathbf{m}_{k-1}. \quad (\text{F.11})$$

A Equação (F.11) pode ser reduzida à seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} (e^{-\mathbf{A}_{k-1}t} \mathbf{x}') = e^{-\mathbf{A}_{k-1}t} (\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}' + \mathbf{m}_{k-1}), \quad (\text{F.12})$$

já que

$$e^{-\mathbf{A}_{k-1}t} \mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{A}_{k-1} e^{-\mathbf{A}_{k-1}t}.$$

A Equação (F.12) pode ser integrada de um tempo $t = t_k$ até um tempo $t = t_{k+1}$ considerando que neste intervalo o valor de \mathbf{u}' é constante, utilizando para isto um *hold* de ordem zero, que significa que no intervalo de amostragem ($t_k \rightarrow t_{k+1}$), \mathbf{u}' é mantido constante. Assim:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} d(e^{-\mathbf{A}_{k-1}t} \mathbf{x}') = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\mathbf{A}_{k-1}t} (\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}' + \mathbf{m}_{k-1}) dt. \quad (\text{F.13})$$

Como \mathbf{B}_{k-1} , \mathbf{u}' e \mathbf{m}_{k-1} são constantes no intervalo de integração (igual ao de amostragem, $t_k \rightarrow t_{k+1}$, a Equação (F.13) pode ser integrada, resultando em:

$$e^{-\mathbf{A}_{k-1}t_{k+1}}\mathbf{x}'_{k+1} - e^{-\mathbf{A}_{k-1}t_k}\mathbf{x}'_k = -\mathbf{A}_{k-1}^{-1}e^{-\mathbf{A}_{k-1}t_{k+1}}(\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}'_k + \mathbf{m}_{k-1}) + \mathbf{A}_{k-1}^{-1}e^{-\mathbf{A}_{k-1}t_k}(\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}'_k + \mathbf{m}_{k-1}). \quad (\text{F.14})$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (F.14) por \mathbf{A}_{k-1} :

$$\mathbf{A}_{k-1}e^{-\mathbf{A}_{k-1}t_{k+1}}\mathbf{x}'_{k+1} - \mathbf{A}_{k-1}e^{-\mathbf{A}_{k-1}t_k}\mathbf{x}'_k = (e^{-\mathbf{A}_{k-1}t_k} - e^{-\mathbf{A}_{k-1}t_{k+1}})(\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}'_k + \mathbf{m}_{k-1}). \quad (\text{F.15})$$

Multiplicando novamente ambos os lados da Equação (F.15) por $e^{\mathbf{A}_{k-1}t_{k+1}}$:

$$e^{\mathbf{A}_{k-1}t_{k+1}}\mathbf{A}_{k-1}e^{-\mathbf{A}_{k-1}t_{k+1}}\mathbf{x}'_{k+1} - e^{\mathbf{A}_{k-1}t_{k+1}}\mathbf{A}_{k-1}e^{-\mathbf{A}_{k-1}t_k}\mathbf{x}'_k = (e^{\mathbf{A}_{k-1}(t_{k+1}-t_k)} - \mathbf{I})(\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}'_k + \mathbf{m}_{k-1}). \quad (\text{F.16})$$

Isolando o termo \mathbf{x}'_{k+1} e sabendo que $\Delta t = t_{k+1} - t_k = \tau$ representa o tempo de amostragem, tem-se:

$$\mathbf{x}'_{k+1} = e^{\mathbf{A}_{k-1}\tau}\mathbf{x}'_k + (e^{\mathbf{A}_{k-1}t_{k+1}}\mathbf{A}_{k-1}e^{-\mathbf{A}_{k-1}t_{k+1}})^{-1}(e^{\mathbf{A}_{k-1}\tau} - \mathbf{I})(\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}'_k + \mathbf{m}_{k-1}). \quad (\text{F.17})$$

Como $e^{-\mathbf{A}_{k-1}t}\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{A}_{k-1}e^{-\mathbf{A}_{k-1}t}$ é válida

$$\mathbf{x}'_{k+1} = \underbrace{e^{\mathbf{A}_{k-1}\tau}}_{\Phi_{k-1}}\mathbf{x}'_k + \underbrace{\mathbf{A}_{k-1}^{-1}(e^{\mathbf{A}_{k-1}\tau} - \mathbf{I})\mathbf{B}_{k-1}}_{\Gamma_{k-1}}\mathbf{u}'_k + \underbrace{\mathbf{A}_{k-1}^{-1}(e^{\mathbf{A}_{k-1}\tau} - \mathbf{I})}_{\Omega_{k-1}}\mathbf{m}_{k-1}. \quad (\text{F.18})$$

Finalmente:

$$\mathbf{x}'_{k+1} = \Phi_{k-1}\mathbf{x}'_k + \Gamma_{k-1}\mathbf{u}'_k + \Omega_{k-1}\mathbf{m}_{k-1}, \quad (\text{F.19})$$

$$\mathbf{y}'_k = \mathbf{C}_{k-1}\mathbf{x}'_k. \quad (\text{F.20})$$

As Equações (F.19) e (F.20) estão em variável desvio em relação ao ponto imediatamente anterior ao de operação k . As relações para as variáveis desvio mostradas na Equação (F.4) são agora estendidas para serem substituídas nas referidas equações:

$$\mathbf{x}'_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \quad (\text{F.21})$$

$$\mathbf{u}'_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}, \quad (\text{F.22})$$

$$\mathbf{y}'_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1}. \quad (\text{F.23})$$

Substituindo as Equações (F.11-F.22) em (F.19):

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = \Phi_{k-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) + \Gamma_{k-1}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}) + \Omega_{k-1}\mathbf{m}_{k-1}. \quad (\text{F.24})$$

Isolando \mathbf{x}_{k+1} e agrupando os termos, chega-se a:

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{\Phi}_{k-1} + \mathbf{I})\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{u}_k - [\mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{\Omega}_{k-1}\mathbf{m}_{k-1}]. \quad (\text{F.25})$$

Da mesma forma, substituindo a Equação (F.23) em (F.20):

$$\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1} = \mathbf{C}_{k-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}). \quad (\text{F.26})$$

Isolando \mathbf{y}_k :

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_{k-1}\mathbf{x}_k + [\mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{C}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}]. \quad (\text{F.27})$$

APÊNDICE G

Modelo de Predição

G.1 Modelo de Predição com Perturbações

Considere o seguinte modelo linearizado ao redor do ponto $(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$ na representação em espaço de estados e na forma discreta, com medição de perturbações:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{d}_m(k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{h}(k)\end{aligned}$$

em que $\overline{(\quad)}_k = (\quad)_k - (\quad)_{k-1}$; $\mathbf{d}_m(k) = \bar{\mathbf{y}}_p(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)$. Substituindo $\bar{\mathbf{y}}_p(k) = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_p(k)$ e $\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k)$, o modelo fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{h}(k)\end{aligned}$$

os estados do vetor $\bar{\mathbf{x}}_p$ são medições reais da planta em variável desvio e os estados do vetor $\bar{\mathbf{x}}(k)$ são os preditos, também em variável desvio.

Neste trabalho, a ação de controle ótima obtida está na forma de $\Delta\bar{\mathbf{u}}(k)$. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) &= \bar{\mathbf{u}}(k) - \bar{\mathbf{u}}(k-1) \rightarrow \bar{\mathbf{u}}(k) = \Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \bar{\mathbf{u}}(k-1) \\ \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) &= \bar{\mathbf{u}}(k+1) - \bar{\mathbf{u}}(k)\end{aligned}$$

Reescrevendo as entradas $\bar{\mathbf{u}}(k)$ em função de $\Delta\bar{\mathbf{u}}(k)$, ao longo do horizonte de controle (H_c), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{u}}(k) &= \Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \bar{\mathbf{u}}(k-1) \\
 \bar{\mathbf{u}}(k+1) &= \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \bar{\mathbf{u}}(k) = \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \bar{\mathbf{u}}(k-1) \\
 \bar{\mathbf{u}}(k+2) &= \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+2) + \bar{\mathbf{u}}(k+1) = \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+2) + \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \Delta\bar{\mathbf{u}}(k) \\
 &\quad + \bar{\mathbf{u}}(k-1) \\
 &\vdots \\
 \bar{\mathbf{u}}(k+H_c) &= \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+H_c) + \bar{\mathbf{u}}(k+H_c-1) = \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+H_c) + \cdots + \Delta\bar{\mathbf{u}}(k) \\
 &\quad + \bar{\mathbf{u}}(k-1)
 \end{aligned}$$

Agora é possível reescrever o modelo de predição com base em $\Delta\bar{\mathbf{u}}(k)$ ao longo do horizonte de predição (H_p). Fica:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \\
 &\quad + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\
 \bar{\mathbf{x}}(k+2) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k+1) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \\
 &\quad + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\
 &= \mathbf{A}[\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})] + \\
 &\quad + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \\
 &\quad + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\
 &= \mathbf{A}^2\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{AB}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{AB}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{AB}_d\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \\
 &\quad + \mathbf{Af}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \\
 &\quad + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\
 &= \mathbf{A}^2\bar{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{AB} + \mathbf{B}]\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + [\mathbf{AB} + \mathbf{B}]\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \\
 &\quad + [\mathbf{AB}_d\mathbf{C} + \mathbf{B}_d\mathbf{C}](\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + [\mathbf{A} + \mathbf{I}]\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}(k+3) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k+2) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+2) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \\
&\quad + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\
&= \mathbf{A}[\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{AB} + \mathbf{B}]\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + [\mathbf{AB} + \mathbf{B}]\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \\
&\quad + [\mathbf{AB}_d\mathbf{C} + \mathbf{B}_d\mathbf{C}](\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + [\mathbf{A} + \mathbf{I}]\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})] + \\
&\quad + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+2) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \\
&\quad + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k+2) + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \\
&\quad + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\
&= \mathbf{A}^3\bar{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{AB} + \mathbf{B}]\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + [\mathbf{AB} + \mathbf{B}]\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \\
&\quad + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+2) + [\mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{AB} + \mathbf{B}]\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \\
&\quad + [\mathbf{A}^2\mathbf{B}_d\mathbf{C} + \mathbf{AB}_d\mathbf{C} + \mathbf{B}_d\mathbf{C}](\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \\
&\quad + [\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I}]\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\
&\vdots \\
\bar{\mathbf{x}}(k+Hp) &= \mathbf{A}^{Hp}\bar{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{A}^{Hp-1}\mathbf{B} + \dots + \mathbf{B}]\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) + \\
&\quad + [\mathbf{A}^{Hp-2}\mathbf{B} + \dots + \mathbf{B}]\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \dots + \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}}(k+Hp-1) + \\
&\quad + [\mathbf{A}^{Hp-1}\mathbf{B} + \dots + \mathbf{B}]\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \\
&\quad + [\mathbf{A}^{Hp-1}\mathbf{B}_d\mathbf{C} + \dots + \mathbf{B}_d\mathbf{C}](\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \\
&\quad + [\mathbf{A}^{Hp-1} + \dots + \mathbf{I}]\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})
\end{aligned}$$

Reescrevendo na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k+1) \\ \bar{\mathbf{x}}(k+2) \\ \bar{\mathbf{x}}(k+3) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{x}}(k+Hp) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{Hp} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{Hp-1}\mathbf{B} + \dots + \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{Hp-Hp}\mathbf{B} + \dots + \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\mathbf{u}}(k) \\ \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+1) \\ \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+2) \\ \vdots \\ \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+Hp-1) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{AB} + \mathbf{B} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{AB} + \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p-1}\mathbf{B} + \dots + \mathbf{B} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(k-1) + \\
\begin{bmatrix} \mathbf{B}_d\mathbf{C} \\ \mathbf{AB}_d\mathbf{C} + \mathbf{B}_d\mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p-1}\mathbf{B}_d\mathbf{C} + \dots + \mathbf{B}_d\mathbf{C} \end{bmatrix} (\bar{\mathbf{x}}_p(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \\
\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p-1} \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$$

As predições das saídas controladas z são obtidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{y}}(k+1|k) &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{h}(k) \\
\bar{\mathbf{y}}(k+2|k) &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k+2|k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{h}(k) \\
\bar{\mathbf{y}}(k+3|k) &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k+3|k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{h}(k) \\
&\vdots \\
\bar{\mathbf{y}}(k+H_p|k) &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k+H_p|k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{h}(k)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}(k+1|k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k+2|k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k+3|k) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{y}}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ \bar{\mathbf{x}}(k+2|k) \\ \bar{\mathbf{x}}(k+3|k) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{x}}(k+H_p|k) \end{bmatrix} + \\
+ \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}) + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{h}(k)$$

Portanto, chega-se a seguinte equação de predição para as saídas controladas:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Y}}(k|k) &= \mathbf{\Omega}\Psi\bar{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{\Omega}\Theta\Delta\bar{\mathbf{U}}(k|k) + \mathbf{\Omega}\Upsilon\bar{\mathbf{u}}(k-1|k) + \\ &+ \mathbf{\Omega}\Xi\mathbf{d}(k|k) + \mathbf{\Omega}\Gamma\mathbf{f}(k-1|k) + \Phi\mathbf{g}(k|k) + \Phi\mathbf{h}(k|k)\end{aligned}$$

em que

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p} \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{H_{pi}-1} \mathbf{A}^j \mathbf{B} & \cdots & \sum_{j=0}^{H_p-H_u} \mathbf{A}^j \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{AB} + \mathbf{B} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{H_p-1} \mathbf{A}^j \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \mathbf{C} \\ \mathbf{AB}_d \mathbf{C} + \mathbf{B}_d \mathbf{C} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{H_p-1} \mathbf{A}^j \mathbf{B}_d \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{AC} + \mathbf{I} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{H_p-1} \mathbf{A}^j \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$