

TELMO IRINEO ACOSTA VELLOZO

Análise em Variedades Topológicas



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2018

TELMO IRINEO ACOSTA VELLOZO

Análise em Variedades Topológicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Topologia Algébrica.

Orientador: Marcio Colombo Fenille.

UBERLÂNDIA - MG

Julho de 2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

- A185a
2018 Acosta Vellozo, Telmo Irineo, 1979-
 Análise em variedades topológicas / Telmo Irineo Acosta Vellozo. -
 2018.
 56 p. : il.
- Orientador: Marcio Colombo Fenille.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
 Programa de Pós-Graduação em Matemática.
 Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1162>
 Inclui bibliografia.
1. Matemática - Teses. 2. Variedades topológicas - Teses. 3.
 Variedades diferenciais - Teses. I. Fenille, Marcio Colombo. II.
 Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em
 Matemática. III. Título.

CDU: 51

Maria Salete de Freitas Pinheiro – CRB6/1262



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



ALUNO: Telmo Irineo Acosta Vellozo

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11712MAT009.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.




LINHA DE PESQUISA: Topologia Algébrica.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Análise em Variedades Topológicas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille.

Esta dissertação foi **aprovada** em defesa pública realizada na sala multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 18 de julho de 2018, às 9h, pela banca examinadora composta pelo(a)s signatário(a)s abaixo:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille UFU - Universidade Federal de Uberlândia (orientador)	
Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos UFSCar - Universidade Federal de São Carlos	
Profª. Dra. Ana Paula Tremura Galves UFU - Universidade Federal de Uberlândia	

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152, Campus Santa Mônica, 38400-902,
Uberlândia - Minas Gerais - Brasil

Agradecimentos

Agradeço principalmente à minha família e a meus amigos, pela compreensão e apoio. Ao meu orientador, pela sua paciência e disponibilidade em esclarecer minhas dúvidas da pesquisa, por seus conselhos e discussões construtivas sobre a pesquisa e demais assuntos. Aos membros da banca, pela gentileza de participar da avaliação deste trabalho.

Agradeço a Universidade Federal de Uberlândia pela boa recepção e os recursos fornecidos. À Faculdade de Matemática, por sempre estar disposta a resolver meus problemas. Aos meus professores, que tiveram importante contribuição na minha formação acadêmica. Aos meus colegas e amigos do mestrado, por muitos bons momentos dentro e fora do programa.

E finalmente, agradeço o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais – FAPEMIG, que foi essencial para a conclusão do curso de mestrado.

ACOSTA-VELLOZO, T.I. *Análise em Variedades Topológicas*. 2018. – ix + 56 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia–MG, Brasil.

Resumo

Esta dissertação consiste de estudo detalhado sobre uma série de resultados publicados nos últimos dez anos sobre aplicações entre variedades topológicas, com foco nas assim chamadas versões homológicas dos célebres teoremas da aplicação implícita e da aplicação inversa. Através de uma abordagem que envolve técnicas homológicas e diferenciais, apresentamos uma versão do teorema da aplicação inversa para aplicações diferenciáveis que não são necessariamente continuamente diferenciáveis. Como consequência, melhoramos a versão diferenciável conhecida do teorema da aplicação implícita e apresentamos um teorema de existência e unicidade para certas equações diferenciais ordinárias.

Palavras-chave: Orientação de variedades topológicas, grau de uma aplicação, teorema da aplicação implícita, teorema da aplicação inversa, formas locais das imersões e submersões.

ACOSTA-VELLOZO, T.I. *Analysis on Topological Manifolds*. 2018. – ix + 56 p. M.Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG, Brazil.

Abstract

This dissertation consists of a detailed study on a series of results published in the last ten years on maps between topological manifolds, with focus in the so called homological version of the famous inverse and implicit mapping theorem. With an approach which involves differential and homological techniques, we present a version of the inverse mapping theorem for differential maps which are not necessarily continuously differentiable. As a consequence, we improve the known differential version of the implicit mapping theorem and we present an existence and uniqueness theorem for certain differential equations.

Key-words: Orientation of topological manifolds, degree of maps, implicit mapping theorem, inverse mapping theorem, local imersions and submersions forms.

SUMÁRIO

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
1 Orientação de variedades topológicas	3
1.1 Variedades topológicas e orientação	3
1.2 O feixe de orientações	8
2 Grau de aplicações entre variedades topológicas	14
2.1 Classe fundamental e grau de aplicações	14
2.2 O grau local de uma aplicação discreta	20
2.3 Aplicações abertas e discretas	22
2.4 Persistência do sinal do grau local	24
2.5 O grau local de um aplicação diferenciável	25
3 Os Teoremas da Aplicação Implícita e da Aplicação Inversa	28
3.1 O Teorema da Aplicação Implícita para aplicações contínuas	28
3.2 O Teorema da Aplicação Inversa para aplicações contínuas	31
3.3 Teorema de Darboux para aplicações contínuas	33
4 Imersão e submersão topológicas	35
4.1 Sobre o grau de aplicações entre espaços produto	36
4.2 Forma local das submersões topológicas	39
4.3 Forma local das imersões topológicas	43

4.4	Equivalências entre os Teoremas da A. Implícita e da A. Inversa	45
5	Aplicações e extensões dos resultados	46
5.1	Versão diferenciável, mas não \mathcal{C}^1 , do Teorema da Aplicação Inversa	46
5.2	Existência e unicidade de solução para equações diferenciais	51
	Referências Bibliográficas	55

INTRODUÇÃO

É notório que os conceitos e os resultados que envolvem análise em variedades diferenciáveis têm sido muito importantes para o desenvolvimento não apenas da matemática mas também de outras ciências, sendo claro exemplo a física, que tem uma de suas grandes áreas, a relatividade geral, fortemente fundamentada sobre o conceito de variedade diferenciável, objeto a servir de modelo para o universo.

Dentre tantos motivos relevantes, tem-se que nas variedades diferenciáveis pode-se estender conceitos e resultados locais da análise nos espaços euclidianos – por exemplo, o conceito de diferencial de uma aplicação, os teoremas da aplicação implícita e da aplicação inversa, as formas locais das imersões e das submersões, etc. – e também conceitos globais, como o de orientabilidade e orientação, o de dimensão, etc.

Diante disso, é natural perguntar-se sobre quais conceitos e resultados da análise em variedades diferenciáveis podem ser estendidos para estruturas mais gerais.

Passo ousado, embora natural – ao menos para aqueles afeitos à área de topologia – é dispensar a diferenciabilidade e passar a considerar variedades topológicas. Com isso, perde-se a estrutura de fibrado tangente e, conseqüentemente, o conceito de diferencial de uma aplicação. Por outro lado, há recursos da teoria de homologia que permitem introduzir os conceitos de grau local de uma aplicação e o assim chamado fibrado ou feixe de orientações locais da variedade. Com esses conceitos, compensa-se, em alguma medida, a perda da diferenciabilidade e da estrutura linear fibrada sobre a variedade, com uma nova estrutura que ainda garante alguma conectividade entre topologia e álgebra.

Este trabalho revela e pormenoriza os avanços, neste sentido, propostos nas últimas décadas, com destaque aos resultados dos últimos dez anos; referimo-nos especialmente aos resultados de 2008 devidos a Biasi, Gutierrez e dos Santos [2], e aos resultados de Barreto, Fenille e Hartmann, publicados em 2016 em [1].

Em [2] os autores apresentam uma versão homológica do Teorema da Aplicação Implícita,

para aplicações entre variedades topológicas – ou seja, sem qualquer hipótese de diferenciabilidade – do qual decorrem versões homológicas e diferenciais do Teorema de Darboux, além de um teorema de existência de solução para certas equações diferenciais. Os principais resultados de [2] são apresentados nas Seções 3.1 e 3.3 deste texto.

Em [1], os autores apresentam uma versão homológica para o Teorema da Aplicação Inversa, para aplicações contínuas entre variedades topológicas – novamente sem qualquer hipótese de diferenciabilidade –. Além disso, introduzem novos conceitos de imersões e submersões topológicas e revelam as formas locais de tais aplicações. Os resultados de [1] constam integralmente deste texto, na Seção 3.2 e no Capítulo 4.

Antes do desenvolvimento dos resultados principais, apresentamos dois capítulos; o Capítulo 1 traz as construções e os resultados essenciais sobre orientação de variedades topológicas; o Capítulo 2 introduz os diferentes conceitos de grau de uma aplicação entre variedades topológicas, e cuidadosamente discute as relações entre eles e com outros conceitos de caráter topológico ou mesmo diferencial. Destacamos que alguns dos resultados apresentados no Capítulo 2, embora conhecidos, não possuem demonstrações publicadas; para eles, providenciamos provas detalhadas.

Como mencionado acima, os Capítulos 3 e 4 apresentam os resultados de [2] e de [1].

O Capítulo 5 traz resultados novos: através de uma abordagem que envolve as técnicas diferenciais clássicas e as técnicas homológicas desenvolvidas em [1] e [2] e exploradas em todo o texto, apresentamos uma versão do Teorema da Aplicação Inversa para aplicações diferenciáveis que não são necessariamente continuamente diferenciáveis. Como consequência, melhoramos a versão diferenciável do Teorema da Aplicação Implícita apresentada por Biasi, Gutierrez e dos Santos em [2]. Além disso, apresentamos um teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, que pode ser considerada uma versão do teorema de existência proposto em [2].

Do leitor deste texto espera-se conhecimento básico de topologia algébrica, especialmente teoria de homologia. Apenas aos leitores hábeis nos conceitos de orientação de variedades topológicas faculta-se a leitura a partir do Capítulo 2. A todos os outros recomenda-se a leitura desde o Capítulo 1, já que o texto está estruturado de modo que o único capítulo independente é o primeiro; todos os demais dependem dos anteriores.

CAPÍTULO 1

ORIENTAÇÃO DE VARIEDADES TOPOLÓGICAS

Neste capítulo inicial, apresentamos os conceitos e os resultados básicos e preliminares ao desenvolvimento do restante do texto. Trata-se dos conceitos de variedades topológicas e orientabilidade. São conceitos normalmente estudados em cursos de Topologia Algébrica, e que podem ser encontrados em muitos bons livros da área; baseamo-nos principalmente em [9]. Assumimos familiaridade com a teoria de homologia singular.

1.1 Variedades topológicas e orientação

Seja X um espaço topológico. Diz-se que X é uma *n -variedade topológica* se verifica as seguinte propriedades:

- i) X é Hausdorff;
- ii) X verifica o segundo axioma de enumerabilidade, ou seja, a topologia de X possui uma base enumerável;
- iii) X é localmente homeomorfo ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n , ou seja, para cada ponto $p \in X$, existem:
 - (a) um subconjunto aberto $U \subset X$ contendo p (i.e., uma vizinhança de p em X);
 - (b) um subconjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$; e
 - (c) um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$.

O par (U, φ) é chamado uma *carta local* para p em X .

Se (U, φ) é uma carta local para p em X , então existe uma bola aberta B^n em \mathbb{R}^n , de centro em p e contida em $V = \varphi(U)$. Então, o aberto $E^n = \varphi^{-1}(B^n)$ é uma vizinhança de p em X , homeomorfa a uma bola aberta do espaço \mathbb{R}^n .

Com isso, queremos dizer que todo ponto p de uma n -variedade topológica X possui uma vizinhança homeomorfa a uma bola aberta do espaço \mathbb{R}^n , o que chamaremos uma *vizinhança coordenada* de p em X .

Importa mencionar que uma variedade topológica é um espaço normal. Mais do que isso, é metrizável. Ademais, por ser localmente homeomorfa ao espaço euclidiando \mathbb{R}^n , toda n -variedade topológica, com $n \geq 1$, é localmente conexa e também localmente conexa por caminhos. Mais sobre variedades topológicas encontra-se em [16].

Uma *m -subvariedade topológica* ($m \leq n$) de uma n -variedade topológica X é um subespaço topológico Y de X que é uma m -variedade topológica.

Observamos que na definição de variedade topológica, diferentemente do que se faz na definição de *variedade diferencial* (que assumimos ser da familiaridade do leitor), não há qualquer exigência com relação à mudança de cartas locais.

Em todo o texto, uma variedade será, a menos que se especifique o contrário, uma variedade topológica, e uma aplicação entre variedades dada *a priori* será assumida contínua.

No restante desta seção, X será uma n -variedade topológica, com $n \geq 1$.

Nosso primeiro objetivo é introduzir as noções de orientabilidade e orientação de X . O roteiro abaixo inicia com alguns lemas técnicos e avança aos conceitos principais.

Lema 1.1 *Para qualquer ponto $x \in X$, tem-se $H_n(X, X - x) \approx \mathbb{Z}$.*

Prova: Seja U uma vizinhança coordenada de x em X , ou seja, uma vizinhança homeomorfa a uma bola aberta de \mathbb{R}^n . O fechado $X - U$ está contido no aberto $X - x$. Pelo Axioma da Excisão,

$$H_n(X, X - x) \approx H_n(U, U - x).$$

Como U é contrátil, a sequência exata de homologia do par $(U, U - x)$, a saber,

$$\cdots \rightarrow H_n(U) \rightarrow H_n(U, U - x) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(U - x) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(U) \rightarrow \cdots$$

fornece um isomorfismo

$$H_n(U, U - x) \approx \tilde{H}_{n-1}(U - x).$$

Como $U - x$ é homotopicamente equivalente a $(n - 1)$ -esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, segue-se que

$$\tilde{H}_{n-1}(U - x) \approx \mathbb{Z}.$$

□

A sequência de isomorfismos

$$H_n(X, X - x) \approx H_n(U, U - x) \approx \tilde{H}_{n-1}(U - x) \approx \tilde{H}_{n-1}(\Sigma^n),$$

onde Σ^n é uma $(n - 1)$ -esfera mergulhada em $U - x$, permite interpretar o grupo de homologia relativa $H_n(X, X - x)$ como a homologia da $(n - 1)$ -esfera.

Para ilustrar, considere o caso especial $n = 2$. Então Σ^1 é uma circunferência mergulhada em $U - x$ e o grupo $H_2(X, X - x) \approx H_1(\Sigma^1) \approx \mathbb{Z}$ possui dois geradores, que correspondem às duas orientações do laço Σ^1 . Escolher um desses geradores corresponde, intuitivamente, a escolher uma orientação de X sobre o ponto x .

Definição 1.2 Uma *orientação local* da n -variedade topológica X em um ponto $x \in X$ é um gerador do grupo cíclico infinito $H_n(X, X - x)$.

Para se definir a noção de orientação global de X , a intuição diz que devemos ter orientações de X em cada um de seus pontos, de tal modo que respeitem uma “coerência”. Isso não necessariamente é possível. No entanto, podemos sempre ter orientações “coerentes” numa vizinhança de um ponto.

Lema 1.3 (Lema da Continuação) Dado um elemento $\alpha_x \in H_n(X, X - x)$, existem uma vizinhança U de x e um elemento $\alpha \in H_n(X, X - U)$, tais que $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$, onde

$$j_x^U : H_n(X, X - U) \rightarrow H_n(X, X - x)$$

é o homomorfismo induzido pela inclusão natural $j : (X, X - U) \hookrightarrow (X, X - x)$.

Prova: Seja a um ciclo relativo representando α_x . Assim $a \in Z_n(X, X - x)$ e $\partial a \in S_{n-1}(X - x)$. Logo o suporte¹ $|\partial a|$ de ∂a é um subconjunto compacto de X contido em $X - x$, e assim $U = X - |\partial a|$ é uma vizinhança aberta de x .

Tome $\alpha \in H_n(X, X - U)$ como a classe de homologia de a relativa a $X - U$; isso faz sentido porque $|\partial a| \subset X - U$. Claramente $j_x^U(\alpha) = \alpha_x$. \square

Este lema nos diz que podemos escolher elementos $\alpha_y \in H_n(X, X - y)$ para y “próximo” de x (isto é, para $y \in U$), a partir do elemento α_x , pondo $\alpha_y = j_x^U(\alpha)$. Pensamos em α_x e α_y como sendo “coerente”, uma vez que eles provém do mesmo elemento $\alpha \in H_n(X, X - U)$. Chamamos α a *continuação* de α_x ao longo de U .

Prova-se mais.

¹Se σ é um q -simplexo singular, definimos o suporte $|\sigma|$ de σ como sendo sua imagem $\sigma(\Delta_q)$ sobre o q -simplexo padrão. Para uma q -cadeia $c = \sum_i \nu_i \sigma_i$, definimos $|c| = \cup_i |\sigma_i|$.

Lema 1.4 (Lema da Coerência) Se α_x gera $H_n(X, X - x)$, então U e α , conforme o Lema 1.3, podem ser escolhidos de tal modo que, para cada $y \in U$, o elemento α_y seja um gerador de $H_n(X, X - y)$.

Este lema segue do seguinte resultado mais forte:

Lema 1.5 (Lema da Constante Local) Toda vizinhança W de x contém uma vizinhança U de x tal que, para todo $y \in U$, o homomorfismo j_y^U é um isomorfismo; logo α_x tem única continuação em U .

Prova: Seja $V \subset W$ uma vizinhança coordenada de x . Seja $U \subset V$ um aberto menor, ainda contendo x e ainda homomorfismo a uma bola aberta de \mathbb{R}^n . Então, para qualquer $y \in U$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, X - U) & \xleftarrow[\approx]{exc} & H_n(V, V - U) & \xrightarrow[\approx]{} & \tilde{H}_{n-1}(V - U) \\ j_y^U \downarrow & & & & \downarrow \approx \\ H_n(X, X - y) & \xleftarrow[\approx]{exc} & H_n(V, V - y) & \xrightarrow[\approx]{} & \tilde{H}_{n-1}(V - y) \end{array}$$

no qual as setas horizontais da esquerda são isomorfismos induzidos por excisões, as setas horizontais da direita são isomorfismos provenientes das sequências exatas dos pares correspondentes, e a seta vertical da direita é o isomorfismo induzido pela inclusão (que é uma equivalência de homotopia). Segue da comutatividade do diagrama que j_y^U é um isomorfismo. \square

Definição 1.6 Dado um subespaço $U \subset X$, um elemento $\alpha \in H_n(X, X - U)$ com a propriedade que, para cada $y \in U$, o elemento $\alpha_y = j_y^U(\alpha)$ gera $H_n(X, X - y)$, é chamado uma *orientação local de X ao longo de U* .

Os Lemas 1.4 e 1.5 mostram que uma orientação local α_x de X em x , pode ser estendida de modo único a uma orientação local de X ao longo de uma vizinhança de x em X .

Se $V \subset U$ são subespaços de X ,

$$j_V^U : H_n(X, X - U) \rightarrow H_n(X, X - V)$$

denota o homomorfismo induzido pela inclusão natural. Se α é uma orientação local de X ao longo de U , então $j_V^U(\alpha)$ o é ao longo de V , já que para qualquer $y \in V$,

$$j_y^V(j_V^U(\alpha)) = j_y^U(\alpha).$$

Definiremos agora a noção de orientação global de X .

Definição 1.7 Suponha dados:

- i) Uma coleção de abertos $U_i \subset X$ que cobre X , e
- ii) Para cada i , uma orientação local $\alpha_i \in H_n(X, X - U_i)$ de X ao longo de U_i .

Chama-se a isto um *sistema de orientação para X* se a seguinte condição de compatibilidade é válida: para qualquer $x \in X$, se $x \in U_i \cap U_j$, então

$$\text{iii) } j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U_j}(\alpha_j).$$

Neste caso, uma orientação local é não-ambiguamente definida em cada $x \in X$ por:

$$\text{iv) } \alpha_x = j_x^{U_i}(\alpha_i), x \in U_i.$$

Dado outro sistema de orientação (V_k, β_k) para X , dizemos que ele define a mesma orientação que (U_i, α_i) se:

$$\text{v) } \alpha_x = \beta_x, \text{ para todo } x \in X.$$

Então uma *orientação global* de X é, por definição, uma classe de equivalência de sistemas de orientação para X , segundo a relação dada em v).

Dizemos que X é *orientável* se existe um sistema de orientação para X .

Proposição 1.8 *Uma subvariedade aberta de uma variedade orientável é ainda orientável. Consequentemente, uma variedade é orientável se, e somente se, todas as suas componentes conexas o são.*

Prova: Seja X uma n -variedade topológica orientável e seja $V \subset X$ uma subvariedade aberta de X . Seja (U_i, α_i) um sistema de orientação para X . Para cada $x \in V$, seja $\beta_x \in H_n(V, V - x)$ correspondendo a $\alpha_x \in H_n(X, X - x)$ via o isomorfismo excisão.

Pelo Lema 1.5, existe uma vizinhança V_x de x tal que $V_x \subset V \cap U_i$ para algum i , e tal que β_x tem uma única continuação a uma orientação local $\hat{\beta}_x$ de V ao longo de V_x . Podemos escolher V_x pequeno o suficiente para que $X - U_i$ esteja contido no interior de $X - V_x$. Então, para qualquer $y \in V_x$, o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(V, V - y) & \xrightarrow[\approx]{exc.} & H_n(X, X - y) \\ \uparrow j_y^{V_x} & & \uparrow j_y^{V_x} \\ H_n(V, V - V_x) & \xrightarrow[\approx]{exc.} & H_n(X, X - V_x) \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow j_y^{U_i} \\ H_n(X, X - U_i) \\ \swarrow j_{V_x}^{U_i} \end{array}$$

mostra que a orientação de V em y induzida por $\hat{\beta}_x$ é igual a β_y . Assim $(V_x, \hat{\beta}_x)$ é um sistema de orientação para V . Isto prova a primeira afirmação da proposição.

A segunda afirmação segue da primeira e do fato que as componentes conexas de variedades topológicas são abertas, já que são localmente conexas. \square

Os seguintes são simples mas muito importantes exemplos de variedades orientáveis.

Exemplo 1.9 Considere a n -esfera S^n , $n \geq 1$. Para qualquer $x \in S^n$, o homomorfismo

$$H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n, S^n - x),$$

da sequência exata do par $(S^n, S^n - x)$, é um isomorfismo, já que $S^n - x$ é contrátil. Tome a cobertura aberta de S^n consistindo do único aberto que é a própria S^n , e tome $\alpha_x \in H_n(S^n, S^n - x)$ correspondendo ao gerador $\alpha \in H_n(S^n)$ pelo isomorfismo acima. Então (S^n, α) é um sistema de orientação para S^n .

Exemplo 1.10 O espaço euclidiano \mathbb{R}^n é homeomorfo ao subespaço aberto $S^n - x$ de S^n , onde x é um ponto qualquer de S^n . Segue da Proposição 1.8 que, assim como S^n , também \mathbb{R}^n é orientável.

1.2 O feixe de orientações

Nesta seção, permanecemos com [9] como principal referência.

Seja X uma n -variedade topológica. Definimos

$$X^0 = \{(x, \alpha_x) : x \in X \text{ e } \alpha_x \in H_n(X, X - x)\},$$

e consideramos a aplicação projeção

$$p : X^0 \rightarrow X \quad \text{dada por} \quad p(x, \alpha_x) = x.$$

A seguir, providenciaremos uma topologia para X^0 de tal modo que $p : X^0 \rightarrow X$ seja uma aplicação de recobrimento. O espaço X^0 , uma vez topologizado, é chamado o *feixe de orientações de X* .

Para cada aberto $U \subset X$ e α_U uma orientação local de X ao longo de U , defina

$$\langle U, \alpha_U \rangle = \{(x, \alpha_x) : x \in U \text{ e } \alpha_x = j_x^U(\alpha_U)\}.$$

Lema 1.11 *Os subconjuntos $\langle U, \alpha_U \rangle \subset X^0$ formam uma base para uma topologia em X^0 , com respeito a qual $p : X^0 \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento.*

Prova: Seja $(x, \alpha_x) \in X^0$. Pelo Lema 1.3, $(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_U \rangle$ para algum U .

Suponha $(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle V, \alpha_V \rangle$, de modo que $x \in U \cap V$ e $j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x = j_x^V(\alpha_V)$. Pelo Lema 1.5 existe uma vizinhança W de x , com $W \subset U \cap V$, tal que, para cada $y \in W$,

$$j_y^W : H_n(X, X - W) \approx H_n(X, X - y).$$

Isto vale, em particular, para $y = x$. Seja α_W o único elemento de $H_n(X, X - W)$ tal que $j_x^W(\alpha_W) = \alpha_x$. Então é claro que $(x, \alpha_x) \in \langle W, \alpha_W \rangle$.

Afirmamos que $\langle W, \alpha_W \rangle \subset \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle V, \alpha_V \rangle$. Para provar isso, primeiro note que, da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X - U) & \xrightarrow{j_W^U} & H_n(X, X - W) \\ & \searrow j_x^U & \swarrow j_x^W \\ & H_n(X, X - x) & \end{array}$$

segue que $j_W^U(\alpha_U) = \alpha_W$. Analogamente $j_W^V(\alpha_V) = \alpha_W$. Agora, para cada $y \in W$, segue do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X - U) & \xrightarrow{j_W^U} & H_n(X, X - W) \\ & \searrow j_y^U & \swarrow j_y^W \\ & H_n(X, X - y) & \end{array}$$

que $j_y^U(\alpha_U) = \alpha_y$. Analogamente $j_y^V(\alpha_V) = \alpha_y$. Está provada a afirmação.

Agora provaremos que $p : X^0 \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento.

A continuidade de p é garantida pelo Lema 1.5.

Observe que cada fibra $p^{-1}(x)$ está em correspondência um-a-um com $H_n(X, X - x)$. Logo, também pelo Lema 1.5, dada uma vizinhança W de x , existe uma vizinhança U de x tal que para todo $y \in U$, j_y^U é um isomorfismo; então

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &= \left\{ (y, \alpha_y) : y \in U \text{ e } \alpha_y \in H_n(X, X - y) \right\} \\ &= \left\{ (y, j_y^U((j_x^U)^{-1}(\alpha))) : y \in U \text{ e } \alpha \in H_n(X, X - x) \right\} \\ &= \bigcup_{\alpha \in H_n(X, X - x)} \langle U, (j_x^U)^{-1}(\alpha) \rangle. \end{aligned}$$

Esta última reunião é disjunta, já que j_y^U é um isomorfismo para todo $y \in U$. Além disso, $p|_{\langle U, (j_x^U)^{-1}(\alpha) \rangle}$ é um homeomorfismo para cada $\alpha \in H_n(X, X - x)$. \square

Dada a n -variedade topológica X e seu feixe de orientações X^0 , defina uma aplicação

$$v : X^0 \rightarrow \mathbb{Z}_+$$

da seguinte forma: dado $(x, \alpha_x) \in X^0$, o elemento α_x é um múltiplo inteiro de um gerador de $H_n(X, X - x)$; o valor absoluto de tal múltiplo é independente da escolha do gerador; defina $v(x, \alpha_x)$ como sendo tal valor.

Assim, se α_x^1 e $-\alpha_x^1$ denotam os geradores de $H_n(X, X - x)$ correspondentes aos geradores 1 e -1 de \mathbb{Z} , respectivamente, então para

$$\alpha_x = m_x \cdot \alpha_x^1 = -m_x(-\alpha_x^1), \quad \text{definimos} \quad v(x, \alpha_x) = |m_x| = |-m_x|.$$

Lema 1.12 *Para cada inteiro $q > 0$, a pré-imagem $v^{-1}(q)$ é aberta em X^0 e a aplicação restrita $p|_{v^{-1}(q)} : v^{-1}(q) \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento a duas folhas.*

Prova: Seja $(x, \alpha_x) \in X^0$ tal que $v(x, \alpha_x) = q$, ou seja, $\alpha_x = m_x \alpha_x^1$ com $\alpha_x^1 \in H_n(X, X - x)$ gerador e $|m_x| = q$.

Escolha uma vizinhança W de x e um gerador α_W de $H_n(X, X - W)$ coerente com α_x^1 . Considere o aberto $\langle W, m_x \alpha_W \rangle$ de X^0 . Temos

$$j_x^W(m_x \alpha_W) = m_x j_x^W(\alpha_W) = m_x \alpha_x^1 = \alpha_x,$$

o que mostra que $(x, \alpha_x) \in \langle W, m_x \alpha_W \rangle$. Agora, se $(y, \alpha_y) \in \langle W, m_x \alpha_W \rangle$, então

$$\alpha_y = j_y^W(m_x \alpha_W) = m_x j_y^W(\alpha_W) = m_x \alpha_y^1,$$

o que mostra que $v(y, \alpha_y) = |m_x| = q$. Portanto, $\langle W, m_x \alpha_W \rangle$ é uma vizinhança de (x, α_x) contida em $v^{-1}(q)$.

Isto prova que $v^{-1}(q)$ é aberto em X^0 . O restante segue de resultado básico sobre aplicações de recobrimento; ver [16, Teorema 53.2]. \square

Observação 1.13 O subconjunto $v^{-1}(0) \subset X^0$ é também aberto em X^0 . Ademais, $p|_{v^{-1}(0)} : v^{-1}(0) \rightarrow X$ é um homeomorfismo. Ainda,

$$X^0 = \bigsqcup_{q \geq 0} v^{-1}(q).$$

Definição 1.14 Para qualquer subespaço $A \subset X$, uma aplicação contínua $s : A \rightarrow X^0$ tal que $p \circ s = \iota : A \hookrightarrow X$ a inclusão, é chamada uma *seção* de $p : X^0 \rightarrow X$ sobre A . A

condição $p \circ s = \iota$ pode ser escrita sob a forma do diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & X^0 \\ & \nearrow s & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{\iota} & X \end{array}$$

Uma seção definida em todo o espaço X é chamada uma *seção global*.

Por ser $p : X^0 \rightarrow X$ a projeção na primeira coordenada, se $s : A \rightarrow X^0$ é uma seção, então s é da forma $s(x) = (x, s'(x))$, para todo $x \in A$, com $s'(x) \in H_n(X, X - x)$.

O conjunto ΓA de todas as seções sobre A é um grupo abeliano, sob a operação de adição definida por

$$(s_1 + s_2)(x) = (x, s'_1(x) + s'_2(x)).$$

O zero deste grupo é a *seção nula* dada por $s(x) = (x, 0)$ para todo $x \in A$.

Proposição 1.15 *Existe uma seção global $s : X \rightarrow X^0$ aplicando X em $v^{-1}(1)$ se, e somente se, X é orientável. Mais geralmente, as orientações de X estão em correspondência um-a-um com tais seções.*

Prova: Seja $\{(U_i, \alpha_i)\}$ um sistema de orientação para X . Então, para $x \in X$, digamos $x \in U_i$, o elemento $\alpha_x = j_x^{U_i}(\alpha_i)$ é uma orientação local de X em x , e assim $v(x, \alpha_x) = 1$. Defina $s : X \rightarrow X^0$ por $s(x) = (x, \alpha_x)$. É claro que s aplica X em $v^{-1}(1)$. Além disso, uma vizinhança básica de (x, α_x) é exatamente da forma $\langle U_i, \alpha_i \rangle$, e temos que $s^{-1}(\langle U_i, \alpha_i \rangle) = U_i$. Isto prova que s é contínua e conclui a parte “se” da proposição.

Agora suponha que $s(x) = (x, s'(x))$ seja uma seção global de $s : X \rightarrow X^0$ que aplica X em $v^{-1}(1)$. Isto significa que, para cada $x \in X$, o elemento $s'(x)$ gera $H_n(X, X - x)$. Para cada $x \in X$, escolha, pelo Lema 1.5, uma vizinhança U_x de x tal que $j_x^{U_x}$ seja um isomorfismo e $j_x^{U_x}(\alpha_{U_x}) = s'(x)$. A coleção $\{(U_x, \alpha_{U_x})\}_{x \in X}$ é um sistema de orientação para X ; basta ver que se $x_3 \in U_{x_1} \cap U_{x_2}$ então $j_{x_1}^{U_{x_1}}(\alpha_{U_{x_1}}) = s'(x_3) = j_{x_2}^{U_{x_2}}(\alpha_{U_{x_2}})$. \square

Em função desta última proposição, faz sentido definir o que segue:

Definição 1.16 Para cada $A \subset X$, dizemos que X é *orientável ao longo de A* se existe uma seção sobre A aplicando A em $v^{-1}(1)$.

Proposição 1.17 *X é orientável ao longo de A se, e somente se, existe um homeomorfismo $\phi : p^{-1}(A) \rightarrow A \times \mathbb{Z}$ que torna comutativo o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(A) & \xrightarrow{\phi} & A \times \mathbb{Z} \\ & \searrow p & \swarrow \pi_1 \\ & A & \end{array}$$

no qual π_1 é a projeção sobre a primeira coordenada. Se este é o caso, então ΓA é isomorfo ao grupo de todas as funções contínuas de A em \mathbb{Z} . Assim, se A tem $k < \infty$ componentes, então $\Gamma A \approx \mathbb{Z}^k$.

Prova: Dada uma seção $s : A \rightarrow v^{-1}(1)$, para cada $x \in A$, $s'(x)$ é um gerador de $H_n(X, X - x)$. Se $(x, \alpha_x) \in p^{-1}(A)$, então existe um único $\lambda_x \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha_x = \lambda_x s'(x)$. Defina $\phi : p^{-1}(A) \rightarrow A \times \mathbb{Z}$ por $\phi(x, \alpha_x) = (x, \lambda_x)$, para cada $x \in A$. Se U é uma vizinhança de x na qual α_x tem uma única continuação α_U , então ϕ aplica $\langle U, \alpha_U \rangle$ bi-jetivamente sobre $U \times \{\lambda_x\}$. Logo ϕ é um homeomorfismo. Reciprocamente, dado ϕ , recuperamos $s : A \rightarrow v^{-1}(1)$ definindo $s(x) = \phi^{-1}(x, 1)$, para cada $x \in A$. \square

Para cada $A \subset X$, definimos um homomorfismo canônico

$$j_A : H_n(X, X - A) \rightarrow \Gamma A,$$

aplicando $\alpha \in H_n(X, X - A)$ na seção $j_A(\alpha) : A \rightarrow X^0$ definida por

$$j_A(\alpha)(x) = (x, j_x^A(\alpha)).$$

Vamos provar que a aplicação $j_A(\alpha)$ assim definida é realmente contínua.

Seja a um ciclo relativo representando α . Então $U = X - |\partial a|$ é um aberto em X contendo A . Seja $\alpha_U \in H_n(X, X - U)$ a classe de homologia de a relativa a $X - U$. Então $j_A^U : H_n(X, X - U) \rightarrow H_n(X, X - A)$ aplica α_U em α . Agora, dado $x \in A$, considere uma vizinhança V de x com $V \subset U$, tal que $j_x^A(\alpha)$ tem uma única continuação $\alpha_V \in H_n(X, X - V)$ sobre V . Segue do diagrama comutativo abaixo que $j_V^U(\alpha_U) = \alpha_V$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(X, X - U) & & \\
 & \swarrow j_A^U & \downarrow j_x^U & \searrow j_V^U & \\
 H_n(X, X - A) & & & & H_n(X, X - V) \\
 & \searrow j_x^A & \downarrow j_x^U & \swarrow \approx & \\
 & & H_n(X, X - x) & &
 \end{array}$$

(Note: The diagram shows a commutative triangle with an additional arrow. The top node is $H_n(X, X - U)$. The bottom-left node is $H_n(X, X - A)$. The bottom-right node is $H_n(X, X - V)$. The bottom-center node is $H_n(X, X - x)$. Arrows: $H_n(X, X - U) \xrightarrow{j_A^U} H_n(X, X - A)$, $H_n(X, X - U) \xrightarrow{j_V^U} H_n(X, X - V)$, $H_n(X, X - A) \xrightarrow{j_x^A} H_n(X, X - x)$, $H_n(X, X - V) \xrightarrow{j_x^V} H_n(X, X - x)$, and $H_n(X, X - U) \xrightarrow{j_x^U} H_n(X, X - x)$. There is also an arrow $H_n(X, X - V) \xrightarrow{\approx} H_n(X, X - x)$ labeled with j_x^V below it.)

Assim, para $x \in V \cap A$, temos $j_A(\alpha)(x) = (x, j_x^A(\alpha)) \in \langle V, \alpha_V \rangle$.

Como os conjuntos do tipo $\langle V, \alpha_V \rangle$ formam uma base de vizinhança para $(x, j_x^A(\alpha))$ em X^0 , segue que $j_A(\alpha)$ é contínua em $x \in A$.

Se $B \subset A$, temos o diagrama comutativo natural

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X - A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma A \\ j_B^A \downarrow & & \downarrow r \\ H_n(X, X - B) & \xrightarrow{j_B} & \Gamma B \end{array}$$

no qual a seta vertical da direita é o homomorfismo r que restringe uma seção sobre A a uma seção sobre B .

O teorema a seguir tem uma demonstração bastante longa, que requer uma construção em várias etapas e o estudo de diferentes casos. Como não utilizaremos as construções apresentada na demonstração, mas apenas o resultado em si, preferimos evitar a delonga de esmiuçar a prova, deixando indicado que ela pode ser encontrada em [9, p. 122–125].

Teorema 1.18 *Suponha $A \subset X$ fechado. Então:*

- (1) $H_k(X, X - A) = 0$ para $k > n$.
- (2) O homomorfismo $j_A : H_n(X, X - A) \rightarrow \Gamma A$ é injetor e sua imagem é o subgrupo $\Gamma_c A$ das seções sobre A com suporte compacto, isto é, $j_A : H_n(X, X - A) \approx \Gamma_c A$.

Em particular, $j_X : H_n(X) \approx \Gamma_c X$ e $H_k(X) = 0$ para $k > n$.

Nesse teorema, utilizamos a seguinte terminologia: Uma seção $s : A \rightarrow X^0$ é dita ter *suporte compacto* se ela coincide com a seção nula fora de um subconjunto compacto de A . Se A é compacto, então $\Gamma_c A = \Gamma A$ e, neste caso, $j_A : H_n(X, X - A) \approx \Gamma A$.

CAPÍTULO 2

GRAU DE APLICAÇÕES ENTRE VARIEDADES TOPOLÓGICAS

Neste capítulo, introduzimos os conceitos centrais para o desenvolvimento do restante do texto. Trata-se dos conceitos de grau de uma aplicação entre variedades topológicas: o grau sobre um subconjunto compacto do contra-domínio, o grau local em um ponto do domínio e também o grau de Brouwer.

A primeira seção do capítulo é baseada em [8, Capítulo VIII, §4]. As seções seguintes contêm os resultados que, de alguma maneira, conectam os conceitos de grau com o conceito de diferenciação.

2.1 Classe fundamental e grau de aplicações

Seja X uma n -variedade topológica, com $n \geq 1$, e seja X^0 o feixe de orientações de X , conforme introduzido na Seção 1.2. Considere a aplicação projeção

$$p : X^0 \rightarrow X \quad \text{dada por} \quad p(x, \alpha_x) = x.$$

Lembramos que X é orientável se, e somente se, existe uma seção global $s : X \rightarrow X^0$ de $p : X^0 \rightarrow X$, tal que $s(X) \subset v^{-1}(1)$, onde $v : X^0 \rightarrow \mathbb{Z}$ é a aplicação avaliação definida na Seção 1.2. Mais do que isso, as orientações de X estão em correspondência biunívoca com as seções globais de $p : X^0 \rightarrow X$.

Daqui em diante suporemos que X seja orientável e a seção $\zeta \in \Gamma X$ correspondente à orientação de X será, ela própria, chamada a *orientação* de X .

Dado $K \subset X$ compacto não vazio, existe um único elemento $\zeta_K \in H_n(X, X - K)$ que corresponde à restrição $\zeta|_K$ pelo isomorfismo revelado no Teorema 1.18, a saber,

$$j_K : H_n(X, X - K) \approx \Gamma K.$$

Portanto, o elemento ζ_K é caracterizado pela seguinte propriedade: para todo $x \in K$, o homomorfismo induzido pela inclusão de pares $j : (X, X - K) \hookrightarrow (X, X - x)$, que desde a Seção 1.1 convencionamos denotar

$$j_x^K : H_n(X, X - K) \rightarrow H_n(X, X - x),$$

aplica ζ_K sobre a orientação local α_x de X em x .

Definição 2.1 O elemento $\zeta_K \in H_n(X, X - K)$ é chamado a *classe fundamental de X ao longo de K* . Se a própria variedade X é compacta, então $\zeta_X \in H_n(X)$ está definido e chama-se a *classe fundamental de X* .

Observamos que se o compacto $K \subset X$ é conexo e não vazio, então $H_n(X, X - K) \approx \Gamma K \approx \mathbb{Z}$ e ζ_K é um gerador desse grupo.

No que segue, consideramos duas variedades orientáveis, que denotaremos por X e X' . Para um compacto $K \subset X$, utilizaremos a notação acima firmada, ou seja, ζ_K , para denotar a classe fundamental de X ao longo de K . Para a variedade X' , utilizaremos uma linha acima de ζ , isto é, dado um compacto $K' \subset X'$, denotaremos a classe fundamental de X' ao longo de K' por $\zeta'_{K'}$.

Definição 2.2 Seja $f : X' \rightarrow X$ uma aplicação contínua entre n -variedades orientáveis e seja $K \subset X$ compacto, conexo e não vazio, tal que $f^{-1}(K)$ seja compacto. Então o homomorfismo

$$f_* : H_n(X', X' - f^{-1}(K)) \rightarrow H_n(X, X - K)$$

aplica a classe fundamental $\zeta'_{f^{-1}(K)}$ a um múltiplo inteiro de ζ_K . Este inteiro é chamado *grau de f sobre K* e é denotado por $\deg_K f$. Em símbolos

$$f_*(\zeta'_{f^{-1}(K)}) = (\deg_K f) \zeta_K.$$

Se $K = \emptyset$, então $\deg_K f$ não é definido.

Exemplo 2.3 Os seguintes são exemplos simples, nos quais K é sempre um compacto não vazio:

- (1) Se $f^{-1}(K) = \emptyset$, então $\deg_K f = 0$.

- (2) Se $\iota : X' \rightarrow X$ é a inclusão de um subconjunto aberto X' de X (sobre a qual consideramos a orientação induzida pela de X), então $\deg_K \iota = 1$, para todo $K \subset X'$.
- (3) Se $f : X' \rightarrow X$ é um homeomorfismo de X' sobre um subconjunto aberto de X , então $\deg_K f = 1$ ou -1 para todo $K \subset f(X')$.

Há vezes em que é conveniente substituir a pré-imagem $f^{-1}(K)$ por um compacto maior, como segue.

Proposição 2.4 *Sejam $f : X' \rightarrow X$ e $K \subset X$ conforme a Definição 2.2. Seja $K' \subset X'$ um compacto contendo $f^{-1}(K)$. Então, o homomorfismo*

$$f_* : H_n(X', X' - K') \rightarrow H_n(X, X - K)$$

aplica a classe fundamental $\zeta'_{K'}$ em $(\deg_K f) \zeta_K$.

Prova: Considere o seguinte diagrama comutativo, no qual as setas horizontais são os isomorfismos dados pelo Teorema 1.18 e r é a aplicação restrição:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X', X' - K') & \xrightarrow[\approx]{j_{K'}} & \Gamma K' \\ j_{f^{-1}(K)}^{K'} \downarrow & & \downarrow r \\ H_n(X', X' - f^{-1}(K)) & \xrightarrow[\approx]{j_{f^{-1}(K)}} & \Gamma f^{-1}(K) \end{array}$$

Pela definição de classe fundamental, $j_{f^{-1}(K)}^{K'}(\zeta'_{K'}) = \zeta_{f^{-1}(K)}$. Agora, o homomorfismo f_* se fatora no triângulo comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(X', X' - K') & \xrightarrow{f_*} & H_n(X, X - K) \\ j_{f^{-1}(K)}^{K'} \downarrow & \nearrow f_* & \\ H_n(X', X' - f^{-1}(K)) & & \end{array}$$

Portanto f_* aplica $\zeta'_{K'}$ em $(\deg_K f) \zeta_K$. □

Também é importante, por vezes, considerar compactos contidos em K .

Proposição 2.5 *Sejam $f : X' \rightarrow X$ e $K \subset X$ como na Definição 2.2. Seja $L \subset K$ também compacto em X . Então o homomorfismo*

$$f_* : H_n(X', X' - f^{-1}(L)) \rightarrow H_n(X, X - L)$$

aplica a classe fundamental $\zeta'_{f^{-1}(L)}$ em $(\deg_K f) \zeta'_L$. Em particular $\deg_L f = \deg_K f$ para todo subconjunto compacto e conexo $L \neq \emptyset$ de K .

Prova: Considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(X', X' - f^{-1}(K)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(X, X - K) \\ j_{f^{-1}(L)}^{f^{-1}(K)} \downarrow & & \downarrow j_L^K \\ H_n(X', X' - f^{-1}(L)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(X, X - L) \end{array}$$

Por um lado, temos:

$$\zeta'_{f^{-1}(K)} \xrightarrow{f_*} (\deg_K f) \zeta_K \xrightarrow{j_L^K} (\deg_K f) \zeta_L.$$

Por outro lado, temos:

$$\zeta'_{f^{-1}(K)} \xrightarrow{j_{f^{-1}(L)}^{f^{-1}(K)}} \zeta'_{f^{-1}(L)} \xrightarrow{f_*} f_*(\zeta'_{f^{-1}(L)}).$$

Segue da comutatividade do diagrama que $f_*(\zeta'_{f^{-1}(L)}) = (\deg_K f) \zeta_L$. \square

A importância da condição de ser $f^{-1}(K)$ compacto, para o dado compacto K , nos leva à clássica definição de aplicação própria que, para constar, apresentamos:

Definição 2.6 Uma aplicação contínua $f : X' \rightarrow X$ é chamada uma *aplicação própria* se, para todo compacto $K \subset X$, a pré-imagem $f^{-1}(K)$ é compacta em X' .

São óbvios os seguintes exemplos: (i) todo homeomorfismo é uma aplicação própria; (ii) se X' é compacto, então toda aplicação contínua $f : X' \rightarrow X$ é própria.

Se $f : X' \rightarrow X$ é uma aplicação própria, então a condição expressa na Definição 2.2 é satisfeita para todo compacto $K \subset X$, motivo pelo qual, para todo tal compacto, está definido o grau $\deg_K f$.

Proposição 2.7 (O grau de uma aplicação própria) *Seja $f : X' \rightarrow X$ uma aplicação própria entre n -variedades orientáveis, com X conexa. Então o número inteiro $\deg_K f$ é o mesmo para todo subconjunto K compacto, conexo e não vazio de X . Este número é chamado o grau de f e é denotado $\deg(f)$. Para todo compacto $K \subset X$, seja ele conexo ou não, vale a identidade*

$$f_*(\zeta'_{f^{-1}(K)}) = \deg(f) \zeta_K.$$

Prova: Sejam K_1 e K_2 subconjuntos compactos de X . Então existe um compacto e conexo $K \subset X$ que contém K_1 e K_2 (cubra $K_1 \cup K_2$ com um número finito de fechados

homeomorfos a bolas fechadas e conecte-os por caminhos). Pela Proposição 2.5

$$f_*(\zeta'_{f^{-1}(K_i)}) = (\deg_K f) \zeta_{K_i} \text{ para } i = 1, 2.$$

Isto prova a proposição. \square

Observação 2.8 Segue dos resultados acima que:

- (1) O grau $\deg(f)$ está sempre definido se $f : X' \rightarrow X$ é uma aplicação contínua entre n -variedades orientáveis compactas. Neste caso, o número $\deg(f)$, também chamado o *grau de Brouwer* da aplicação f , caracteriza-se pela fórmula

$$f_*(\zeta_{X'}) = \deg(f) \zeta_X.$$

Ademais, importa mencionar que, neste contexto, o grau $\deg(\cdot)$ é invariante por homotopia, isto é, se $f_0, f_1 : X' \rightarrow X$ são homotópicas, então $\deg(f_0) = \deg(f_1)$.

- (2) Particularmente interessante é o caso de auto-aplicações da esfera S^n . É consequência do *Teorema da Classificação de Hopf* que as classes de homotopia das aplicações $f : S^n \rightarrow S^n$ estão em correspondência um-a-um com os inteiros, sendo a correspondência dada por $f \mapsto \deg(f)$; ver [12, Corolário 8.4, p. 56]. Noutras palavras, duas auto-aplicações da esfera S^n são homotópicas se e somente se têm o mesmo grau de Brouwer.
- (3) Se as n -variedades orientáveis são tais que X' é compacta mas X não é compacta, então toda aplicação contínua (e portanto própria) $f : X' \rightarrow X$ tem grau $\deg(f) = 0$. De fato, sendo compacta, a imagem $f(X')$ não pode ser toda a variedade X . Escolha $x_0 \in X - f(X')$ e considere o compacto $K_0 = \{x_0\} \subset X$. Então $f^{-1}(K_0) = \emptyset$, o que implica que $\deg_{K_0} f = 0$. Pela Proposição 2.7, $\deg(f) = 0$.
- (4) Se X' e X são n -variedades conexas orientáveis e $f : X' \rightarrow X$ é um homeomorfismo, então $\deg(f) = 1$ ou -1 . De acordo com estes casos, f é dita preservar ou inverter orientação, respectivamente.

Corolário 2.9 (Multiplicatividade do grau) *Sejam $f : X' \rightarrow X$ e $g : X'' \rightarrow X'$ aplicações entre n -variedades orientáveis. Suponha que g seja própria e que X' seja conexa. Seja $K \subset X$ compacto, conexo, não vazio e tal que $f^{-1}(K)$ é compacto. Então*

$$\deg_K(f \circ g) = \deg(g) \deg_K f.$$

Em particular, se f também é própria e X é conexa, então

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g).$$

Prova: A primeira afirmação segue das identidades

$$\begin{aligned} \deg_K(f \circ g)\zeta_K &= (f \circ g)_*(\zeta''_{(f \circ g)^{-1}(K)}) = (f_* \circ g_*)(\zeta''_{g^{-1}(f^{-1}(K))}) = \\ &= f_*(\deg(g)\zeta'_{f^{-1}(K)}) = \deg(g)f_*(\zeta'_{f^{-1}(K)}) = \deg(g)(\deg_K f)\zeta_K. \end{aligned}$$

A segunda afirmação segue da primeira e da última parte da Proposição 2.7. \square

Proposição 2.10 (Aditividade do grau) *Sejam $f : X' \rightarrow X$ e $K \subset X$ como na Definição 2.2. Suponha que X' seja uma reunião finita de abertos X'_1, \dots, X'_r de tal modo que os conjuntos $K_i = f^{-1}(K) \cap X'_i$ sejam mutuamente disjuntos, para $i = 1, \dots, r$. Considere as aplicações $f^i = f|_{X'_i} : X'_i \rightarrow X$. Então $f^{-1}(K)$ é a soma topológica $\bigsqcup_{i=1}^r K_i$, o que implica que cada K_i é compacto em X_i e, por conseguinte, o grau $\deg_K f^i$ está definido. Além disso,*

$$\deg_K f = \sum_{i=1}^r \deg_K f^i.$$

Prova: Considere o homomorfismo composto $\Phi = j_{x'}^{f^{-1}(K)} \circ \oplus_i l_*^i$ indicado na sequência abaixo, onde os homomorfismos l_*^i são induzidos pelas inclusões naturais e $x' \in f^{-1}(K)$:

$$\Phi : \bigoplus_{i=1}^r H_n(X'_i, X'_i - K'_i) \xrightarrow{\oplus_i l_*^i} H_n(X', X' - f^{-1}(K)) \xrightarrow{j_{x'}^{f^{-1}(K)}} H_n(X', X' - x').$$

Por meio de Φ , todas as componentes de $\oplus_i \zeta'_{K'_i}$ são aplicadas a zero, exceto a componente $\zeta'_{K'_j}$ para a qual se tem $x' \in K'_j$; tal componente é aplicada sobre a orientação local $\alpha'_{x'}$ de X' em x' . Portanto, para cada $x' \in f^{-1}(K)$, tem-se

$$j_{x'}^{f^{-1}(K)}(\oplus_i l_*^i(\oplus_i \zeta'_{K'_i})) = \alpha'_{x'}.$$

Segue da definição da classe fundamental que $\oplus_i l_*^i(\oplus_i \zeta'_{K'_i}) = \zeta'_{f^{-1}(K)}$. E temos:

$$\begin{aligned} (\deg_K f) \zeta_K &= f_*(\zeta'_{f^{-1}(K)}) = f_*(\oplus_i l_*^i(\oplus_i \zeta'_{K'_i})) = \oplus_i f_*^i(\oplus_i \zeta'_{K'_i}) = \\ &= \sum_{i=1}^r f_*^i(\zeta'_{K'_i}) = \sum_{i=1}^r (\deg_K f^i) \zeta_K = \left(\sum_{i=1}^r \deg_K f^i \right) \zeta_K. \end{aligned}$$

\square

Observação 2.11 A Proposição 2.10 revela um resultado especialmente importante quando consideramos o compacto K como sendo um conjunto unitário $K = \{x_0\}$, com pré-imagem finita $f^{-1}(x_0) = \{x'_1, \dots, x'_r\}$. Neste caso, podemos considerar abertos X'_1, \dots, X'_r em X , cada um contendo o respectivo ponto x'_i e nenhum dos demais. Assim sendo, temos que $K'_i = f^{-1}(K) \cap X'_i = \{x'_i\}$. A aplicação $f^i = f|_{X'_i} : X'_i \rightarrow X$ induz o homomorfismo

$$f_*^i : H_n(X'_i, X'_i - x'_i) \rightarrow H_n(X, X - x_0),$$

que determina o grau $\deg_{\{x_0\}} f^i$. Como $\deg_{\{x_0\}} f = \sum_{i=1}^r \deg_{\{x_0\}} f^i$, segue-se que o grau $\deg_{\{x_0\}} f$ pode ser entendido como o número de pontos de $f^{-1}(x_0)$, contados com multiplicidade. Isto ficará mais claro, na próxima seção, com a definição do grau de uma aplicação em um ponto de seu domínio.

2.2 O grau local de uma aplicação discreta

Diz-se que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, entre espaços topológicos, é *discreta no ponto* $x_0 \in X$, se existe uma vizinhança V de x_0 em X tal que $f(x) \neq f(x_0)$, para todo $x_0 \neq x \in V$, ou seja, $f^{-1}(f(x_0)) \cap V = \{x_0\}$.

Diz-se que f é *discreta* se ela é discreta em todo ponto $x \in X$.

Suponha que X e Y sejam n -variedades topológicas e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação discreta no ponto $x_0 \in X$; ponha $f(x_0) = y_0$. Seja V uma vizinhança coordenada (homeomorfa a uma n -bola aberta) de x_0 em X tal que $f^{-1}(f(x_0)) \cap V = \{x_0\}$. Então f define uma aplicação de pares

$$f : (V, V - x_0) \rightarrow (Y, Y - y_0).$$

Pelo Lema 1.1, ambos os grupos $H_n(V, V - x_0)$ e $H_n(Y, Y - y_0)$ são cíclicos infinitos. Sejam $\alpha_{x_0} \in H_n(V, V - x_0)$ e $\beta_{y_0} \in H_n(Y, Y - y_0)$ geradores desses grupos. Então, o homomorfismo induzido

$$f_* : H_n(V, V - x_0) \rightarrow H_n(Y, Y - y_0)$$

define (e é definido por) um número inteiro $\deg(f; x_0)$, satisfazendo a identidade

$$f_*(\alpha_{x_0}) = \deg(f; x_0) \cdot \beta_{y_0}.$$

A troca de cada gerador, α_{x_0} ou β_{y_0} , por seu oposto (também gerador do respectivo grupo), troca o sinal do inteiro $\deg(f; x_0)$. Logo, $\deg(f; x_0)$ depende da escolha dos geradores α_{x_0} ou β_{y_0} , mas seu valor absoluto não depende.

Portanto, supondo que X e Y sejam orientáveis e determinando-se que os geradores α_{x_0} e β_{x_0} sejam escolhidos como orientações locais induzidas pelas orientações (globais) fixadas de X e Y , respectivamente, o inteiro $\deg(f; x_0)$ fica unicamente definido.

Definição 2.12 Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre n -variedades topológicas orientáveis. Se f é discreta em $x_0 \in X$, o inteiro $\deg(f; x_0)$ acima definido chama-se o *grau local de f em x_0* . Se f não é discreta em $x_0 \in X$, dizemos que f tem grau local zero em x_0 e escrevemos $\deg(f; x_0) = 0$.

A proposição a seguir é consequência imediata da Proposição 2.10 e da Observação 2.11, e reforça a interpretação do grau $\deg_{\{y\}} f$ expressa naquela observação.

Proposição 2.13 *Sejam X e Y n -variedades conexas orientáveis e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Suponha que $y \in Y$ seja um ponto cuja pré-imagem $f^{-1}(y)$ é finita. Então f é discreta em cada ponto $x \in f^{-1}(y)$ e tem-se*

$$\deg_{\{y\}} f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg(f; x).$$

Apresentamos a seguir uma observação que auxilia na compreensão do grau local $\deg(f; x)$, expressando-o como o grau de Brouwer $\deg(\phi)$ de uma aplicação entre $(n-1)$ -esferas. Esta interpretação será utilizada nas próximas seções deste capítulo e também nos capítulos seguintes do texto.

Observação 2.14 (Interpretação do grau local como grau de Brouwer) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre n -variedades topológicas e suponha que f seja discreta em $x_0 \in X$. Sejam $V \subset X$ e $U \subset Y$ vizinhanças coordenadas (homeomorfismos a n -bolas abertas) de x_0 e de $y_0 = f(x_0)$, respectivamente, tais que

$$f(V) \subset U \quad \text{e} \quad f^{-1}(y_0) \cap V = \{x_0\}.$$

Seja $E^n \subset U$ um n -disco fechado mergulhado em Y , contendo y_0 em seu interior. Escolha um disco $D^n \subset V$ mergulhado em X , contendo x_0 em seu interior, e tal que $f(D^n) \subset E^n$. Então $f^{-1}(y_0) \cap D^n = \{x_0\}$ e a restrição de f define uma aplicação de pares

$$f : (D^n, D^n - x_0) \rightarrow (E^n, E^n - y_0),$$

cujo homomorfismo induzido em homologia, ou seja, $f_* : H_n(D^n, D^n - x_0) \rightarrow H_n(E^n, E^n - y_0)$, determina o (e é determinado pelo) grau $\deg(f; x_0)$.

A fronteira $S^{n-1} = \partial D^n$ é uma $(n-1)$ -esfera mergulhada em X , assim como $\Sigma^{n-1} = \partial E^n$ é uma $(n-1)$ -esfera mergulhada em Y . Considere a inclusão natural $l : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ e a retração radial (com relação a y_0) $r : E^n - y_0 \rightarrow \Sigma^{n-1}$. Por fim, considere a composição

$$\phi = r \circ f \circ l : S^{n-1} \hookrightarrow (D^n - x_0) \rightarrow (E^n - y_0) \rightarrow \Sigma^{n-1}.$$

Afirmamos que $\deg(f; x_0) = \deg(\phi)$, o grau de Brouwer de ϕ . Com efeito: isto segue da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(D^n, D^n - x_0) & \xrightarrow{f_*} & H_n(E^n, E^n - y_0) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ \tilde{H}_{n-1}(D^n - x_0) & & \tilde{H}_{n-1}(E^n - y_0) \\ \uparrow \approx l_* & & \approx \downarrow r_* \\ \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\phi_*} & \tilde{H}_{n-1}(\Sigma^{n-1}). \end{array}$$

Observamos que as setas verticais superiores são isomorfismos provenientes na sequência exata de homologia dos pares $(D^n, D^n - x_0)$ e $(E^n, E^n - y_0)$.

2.3 Aplicações abertas e discretas

Lembramos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita ser *aberta* se $f(A)$ é aberto em Y sempre que $A \subset X$ é aberto em X .

Nesta seção, para uma aplicação entre n -variedades orientáveis, relacionaremos a propriedade de ser aberta com a não nulidade do seu grau local em cada ponto.

Antes, porém, apresentamos um resultado bastante conhecido, mas para o qual não há uma prova suficientemente compreensível e acessível, apesar das inúmeras tentativas. Referimo-nos ao fato de existirem ao menos quatro provas, publicadas nos anos 1964, 1966, 1977 e 1996, que podem ser encontradas nos artigos [5], [21], [6] e [7], respectivamente.

O símbolo $\dim(\cdot)$ refere-se à *dimensão topológica*, conceito que pode ser encontrado, com construções distintas, em [13] e em [16].

Teorema 2.15 *Sejam X e Y n -variedades topológicas e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, aberta e discreta. Denote por B_f o conjunto dos pontos de X em que f não é um homeomorfismo local. Então $\dim(B_f) \leq n - 2$ e também $\dim(f(B_f)) \leq n - 2$.*

Este resultado é utilizado em [2] e será lembrado no Capítulo 3 deste texto.

Passemos aos resultados sobre o grau local de aplicações abertas. O primeiro deles, a seguir, é utilizado em [2], embora sem uma demonstração ou indicação de referência.

Proposição 2.16 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e discreta. Se $\deg(f; x) \neq 0$ para todo $x \in U$, então f é aberta.*

Prova: Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto aberto em U . Vamos provar que $f(A)$ é aberto em \mathbb{R}^n . Seja $y_0 \in f(A)$ e escolha $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = y_0$. Como f é discreta e A é aberto, existe um n -disco $D \subset A$ centrado em x_0 e tal que $D \cap f^{-1}(y_0) = \{x_0\}$. Seja $S = \partial D$ a $(n-1)$ -esfera correspondente à fronteira de D . Como f é contínua, a imagem $f(S)$ é um conjunto compacto e, portanto, fechado em \mathbb{R}^n . Além disso, $y_0 \in \mathbb{R}^n - f(S)$. Sendo este último um conjunto aberto, existe um n -disco $E \subset \mathbb{R}^n - f(S)$ com centro em y_0 .

Vamos provar que $\text{int}(E) \subset f(D)$, com o que se conclui a demonstração, pois teremos provado que $\text{int}(E)$ é uma vizinhança aberta de y_0 inteiramente contida em $f(A)$.

Seja $\Sigma = \partial E$ a $(n-1)$ -esfera correspondente à fronteira de E . Considere a retração radial $\mathbf{r}_0 : \mathbb{R}^n - y_0 \rightarrow \Sigma$. Então está bem definida e é contínua a composição

$$\varphi_0 = \mathbf{r}_0 \circ f|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}^n - y_0 \longrightarrow \Sigma.$$

A aplicação φ_0 é uma aplicação entre $(n-1)$ -esferas, e tem-se, pela Observação 2.14,

$$\deg(f; x_0) = \deg(\varphi_0).$$

Suponha que exista um ponto $y_1 \in \text{int}(E)$ tal que $y_1 \notin f(D)$. Seja $\mathbf{r}_1 : \mathbb{R}^n - y_1 \rightarrow \Sigma$ a retração radial com relação a y_1 . Como, em particular, $y_1 \notin f(S)$, está mais uma vez bem definida e é contínua a composição

$$\varphi_1 = \mathbf{r}_1 \circ f|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}^n - y_1 \longrightarrow \Sigma.$$

Como y_0 e y_1 estão na mesma componente por caminhos de $\mathbb{R}^n - f(S)$, é fácil ver que as aplicações φ_0 e φ_1 são homotópicas, o que implica, pela Observação 2.8, que

$$\deg(\varphi_1) = \deg(\varphi_0).$$

Por outro lado, como $y_1 \notin f(D)$, está bem definida e é contínua a composição

$$\psi_1 = \mathbf{r}_1 \circ f|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}^n - y_1 \longrightarrow \Sigma.$$

Claramente, a aplicação $\psi_1 : D \rightarrow \Sigma$ é uma extensão de $\varphi_1 : S \rightarrow \Sigma$ ao disco D , ou seja, $\varphi_1 = \psi_1 \circ l$, onde $l : S \hookrightarrow D$ é a inclusão natural. Isto implica que $\deg(\varphi_1) = 0$ e, conseqüentemente, $\deg(f; x_0) = 0$, o que está em contraposição com a hipótese da proposição. Portanto, $\text{int}(E) \subset f(D)$ e o resultado segue. \square

Devido ao seu caráter local, a Proposição 2.16 também é válida para aplicações entre n -variedades topológicas orientáveis.

2.4 Persistência do sinal do grau local

Sejam X e Y n -variedades topológicas orientáveis e seja $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Então f é uma aplicação discreta e própria, e o seu grau $\deg(f) = \pm 1$, conforme a Observação 2.8. Agora, pela Proposição 2.7, tem-se $\deg(f) = \deg_{\{y\}} f$, para todo $y \in Y$. Por outra parte, segue da Proposição 2.13 que, para cada $x \in X$, tem-se $\deg(f; x) = \deg_{\{f(x)\}} f$. Portanto, o grau $\deg(f; x)$ é o mesmo para todo $x \in X$.

Este fato generaliza-se no seguinte resultado:

Lema 2.17 *Seja $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo local entre n -variedades orientáveis. Se X é conexa, então o grau local $\deg(f; \cdot)$ é constante em X .*

Prova: Suponha que X seja conexa e sejam z_0 e z_1 pontos de X . Vamos provar que $\deg(f; z_0) = \deg(f; z_1)$. Por ser conexa e localmente conexa por caminhos, a variedade X é conexa por caminhos. Logo, existe um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ iniciando em z_0 e terminando em z_1 . Para cada x sobre a trajetória $\text{im}(\gamma)$ de γ , escolha uma vizinhança coordenada $U_x \subset X$ de x tal que $f|_{U_x} : U_x \rightarrow f(U_x)$ é um homeomorfismo.

Como os abertos U_x , com $x \in \text{im}(\gamma)$, cobrem o compacto $\text{im}(\gamma)$, podemos escolher $z_0 = x_1, x_2, \dots, x_k = z_1$ sobre $\text{im}(\gamma)$, de modo que U_{x_1}, \dots, U_{x_k} ainda cobrem $\text{im}(\gamma)$. Ademais, podemos supor que os índices $1, \dots, k$ estejam escolhidos de modo a indicar ordenação sobre a trajetória de γ , no sentido de $z_0 = x_1$ para $z_1 = x_k$, e que nenhum dos abertos U_{x_1}, \dots, U_{x_k} possa ser dispensado da cobertura de $\text{im}(\gamma)$. Então, como $\text{im}(\gamma)$ é um conjunto conexo, tem-se que $U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}} \neq \emptyset$ para $i = 1, \dots, k-1$.

Por construção, para cada $i = 1, \dots, k$, a aplicação $f|_{U_{x_i}} : U_{x_i} \rightarrow f(U_{x_i})$ é um homeomorfismo. Logo, pelo que observamos no início da seção, tem-se que $\deg(f; \cdot)$ é constante em cada U_{x_i} . Como, além disso, $U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}} \neq \emptyset$ para $i = 1, \dots, k-1$, segue-se que $\deg(f; \cdot)$ é constante sobre $\text{im}(\gamma)$. Em particular, $\deg(f; z_0) = \deg(f; z_1)$. \square

Consequência imediata do Lema 2.17 é que se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo local entre n -variedades, então a aplicação grau $\deg(f; \cdot) : X \rightarrow \mathbb{Z}$ é contínua, ou seja, é constante nas componentes de X .

O resultado a seguir foi originalmente demonstrado em [2].

Proposição 2.18 *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, aberta e discreta entre n -variedades conexas e orientáveis. Então, para cada $x \in X$, tem-se $\deg(f; x) \neq 0$. Além disso, $\deg(f; x)$ tem o mesmo sinal em todo $x \in X$.*

Prova: Seja B_f o conjunto dos pontos de X em que f não é um homeomorfismo local. Pelo Teorema 2.15, $\dim(B_f) \leq n - 2$, o que implica, por [13, Teorema IV 4, p. 48], que $X - B_f$ é conexo. Segue do Lema 2.17 que

$$\deg(f; x) = c, \text{ para todo } x \in X - B_f, \text{ com } c = 1 \text{ ou } c = -1. \quad (2.1)$$

Seja $x_0 \in B_f$ e ponha $y_0 = f(x_0)$. Como f é discreta e X é localmente compacta, podemos escolher uma vizinhança V de x_0 cujo fecho $\text{cl}(V)$ é compacto e tal que $f(x) \neq f(x_0)$ para todo $x_0 \neq x \in \text{cl}(V)$.

Como f é aberta e Y é localmente conexa e localmente compacta, existe uma vizinhança W de y_0 tal que $\text{cl}(W)$ é um subconjunto compacto e conexo de Y e

$$(f|_{\text{cl}(V)})^{-1}(\text{cl}(W)) = (f|_V)^{-1}(\text{cl}(W)) \subset V.$$

Além disso, $(f|_V)^{-1}(\text{cl}(W))$ é compacto e segue da Proposição 2.5 que

$$\deg_{\{y\}} f|_V = \deg_{\{y_0\}} f|_V, \text{ para todo } y \in \text{cl}(W). \quad (2.2)$$

Por outro lado, como $U = (f|_V)^{-1}(W)$ é um subconjunto aberto de X e f é aberta, temos que $f|_V(U) \subset \text{cl}(W)$ é um subconjunto aberto de Y . Ainda, como $Y - f(B_f)$ é denso em Y (pelo Teorema 2.15), existe $y_1 \in f|_V(U) - f(B_f)$. Além disso, segue da identidade (2.2) que $\deg_{\{y_1\}} f|_V = \deg_{\{y_0\}} f|_V$. Seja $(f|_V)^{-1}(y_1) = \{x_1, \dots, x_k\}$ em $X - B_f$ (esse conjunto é finito porque $\text{cl}(V)$ é compacto). Então, pelo Corolário 2.13,

$$\deg(f; x_0) = \deg_{\{y_0\}} f|_V = \deg_{\{y_1\}} f|_V = \sum_{x_i \in (f|_V)^{-1}(y_1)} \deg(f|_V; x_i). \quad (2.3)$$

Agora, como $x_i \in X - B_f$ para $i = 1, \dots, k$, segue da identidade (2.1) que $\deg(f; x_i) = c$ para $i = 1, \dots, k$. Então, segue da identidade (2.3) que $\deg(f; x_0) = kc$ e, ademais, $\deg(f; x)$ tem o mesmo sinal para todo $x \in X$. \square

Observe que a Proposição 2.18 é a recíproca da Proposição 2.16.

2.5 O grau local de um aplicação diferenciável

Nesta seção, demonstramos que o grau local de uma aplicação diferenciável em um ponto qualquer de seu domínio é igual ao sinal do determinante de sua derivada em tal ponto. Por tratar-se de resultado de caráter local, consideramos auto-aplicações do espaço euclidiano, ao invés de aplicações entre n -variedades diferenciáveis. Este resultado

é utilizado implicitamente por alguns autores, inclusive por Biasi, Gutierrez e dos Santos em [2], mas desconhecemos a existência de uma demonstração publicada.

O resultado será obtido como corolário de dois resultados preliminares. Antes de apresentá-los, explicamos o que chamamos de *senal* do determinante: dada uma matriz quadrada A , o *senal* de seu determinante, denotado por $\text{sgn}(\det A)$, é um dos inteiros -1 , 0 ou 1 , de acordo com ser o $\det A$ negativo, nulo ou positivo, respectivamente.

Proposição 2.19 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Se f é diferenciável em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e se $\det f'(x_0) \neq 0$, então f é discreta em x_0 e $\deg(f; x_0) = \deg(f'(x_0); 0) = \pm 1$.*

Prova: Sem perda de generalidade, ponhamos $x_0 = 0$ e $f(x_0) = 0$. Como $\det f'(0) \neq 0$, é positivo o número real

$$b = \frac{1}{2} \min_{\|x\|=1} \|f'(0) \cdot x\|.$$

Segue-se que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se $\|f'(0) \cdot x\| \geq 2b\|x\|$.

Como f é diferenciável em 0 , existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in B_\delta(0)$, vale

$$f(x) = f'(0) \cdot x + r(x), \quad \text{com} \quad \|r(x)\| \leq b\|x\|.$$

Segue-se que, para todo $x \in B_\delta(0)$,

$$\|f(x)\| = \|f'(0) \cdot x + r(x)\| \geq \|f'(0) \cdot x\| - \|r(x)\| \geq 2b\|x\| - b\|x\| = b\|x\|.$$

Isto prova que $f(x) \neq 0$ para todo $0 \neq x \in B_\delta(0)$, ou seja, $f^{-1}(0) \cap B_\delta(0) = \{0\}$, o que significa que f é discreta em 0 .

Por outra parte, temos também

$$\|f'(0) \cdot x - r(x)\| \geq \|f'(0) \cdot x\| - \|r(x)\| \geq b\|x\|.$$

Portanto, $\|f'(0) \cdot x - r(x)\| > 0$ para todo $0 \neq x \in B_\delta(0)$, o que significa que, para cada tal x , o segmento de reta conectando $f'(0) \cdot x$ e $r(x)$ não passa pela origem.

Segue-se que está bem definida e é contínua a aplicação de pares

$$F : (B_\delta(0) \times [0, 1], (B_\delta(0) - 0) \times [0, 1]) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$$

dada por $F(x, t) = f'(0) \cdot x + t \cdot r(x)$. Claramente, F é uma homotopia entre as aplicações de pares $f'(0) : (B_\delta(0), B_\delta(0) - 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ e $f : (B_\delta(0), B_\delta(0) - 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$.

Portanto, $\deg(f; 0) = \deg(f'(0); 0) = \pm 1$, sendo a última identidade devido ao fato de ser $f'(0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo. \square

Proposição 2.20 *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Então $\deg(T; 0) = \text{sgn}(\det T)$.*

Prova: Se $\det T = 0$, então T não é invertível e, consequentemente, T não é discreta na origem $0 \in \mathbb{R}^n$, do que segue, pela Definição 2.12, que $\deg(T; 0) = 0$.

Se $\det T \neq 0$, então T é um homeomorfismo e, portanto, $\deg(T; 0) = \pm 1$. Vamos provar que o sinal do grau $\deg(T; 0)$ é igual ao sinal do determinante $\det T$.

Seja $GL(n)$ o espaço das matrizes $n \times n$ invertíveis, munido da topologia herdada do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n^2} . Este espaço possui duas componentes por caminhos, $GL^+(n)$ e $GL^-(n)$, determinadas pelo sinal da função determinante, isto é,

$$GL^+(n) = \det^{-1}(0, +\infty) \quad \text{e} \quad GL^-(n) = \det^{-1}(-\infty, 0).$$

Suponha $\det T > 0$. Então $T \in GL^+(n)$, assim como a matriz identidade I . Logo, existe um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow GL^+(n)$ iniciando em I e terminando em T . Ambas, I e T , dão origem a aplicações de pares $I, T : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$. A aplicação

$$\Gamma : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{dada por} \quad \Gamma(x, t) = \gamma(t) \cdot x,$$

é contínua e verifica $\Gamma(x, 0) = I \cdot x$ e $\Gamma(x, 1) = T \cdot x$. Logo, Γ é uma homotopia entre I e T . Além disso, note-se que Γ aplica $(\mathbb{R}^n - 0) \times [0, 1]$ em $\mathbb{R}^n - 0$, e que a restrição $\Gamma| : (\mathbb{R}^n - 0) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n - 0$ é ainda uma homotopia. Portanto, I e T são homotópicas como auto-aplicações do par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$. Segue-se que

$$I_* = T_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0).$$

Como, além disso, I_* é o isomorfismo identidade, segue-se que $\deg(T; 0) = \deg(I; 0) = 1$.

Suponha agora $\det(T) < 0$. Procedendo da mesma maneira que acima, prova-se que $\deg(T; 0) = \deg(J; 0)$, onde $J \in GL^-(n)$ é a matriz obtida de I trocando o sinal do elemento da linha 1 e coluna 1. Noutros termos, $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o homeomorfismo que troca o sinal da primeira coordenada. A aplicação J restringe-se a uma auto-aplicação $\hat{J} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Segue da Observação 2.14 e de [22, Proposição 1.19] que $\deg(J; 0) = \deg(\hat{J}) = -1$. Portanto, também $\deg(T; 0) = -1$. \square

Corolário 2.21 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Se f é diferenciável em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\det f'(x_0) \neq 0$, então $\deg(f; x_0) = \text{sgn}(\det f'(x_0))$.*

Prova: Segue das Proposições 2.19 e 2.20. \square

CAPÍTULO 3

OS TEOREMAS DA APLICAÇÃO IMPLÍCITA E DA APLICAÇÃO INVERSA

Em cálculo avançado ou análise em variedades diferenciáveis, dois dos mais importantes e famosos teoremas são o Teorema da Aplicação Implícita e o Teorema da Aplicação Inversa. Além de serem muito elegantes, são muito reveladores e podem ser considerados teoremas multiuso, com consequências e aplicações em diversas áreas da matemática pura e aplicada. Não é à toa que a literatura matemática contém demonstrações diversas para estes resultados, e também algumas versões alternativas ou adaptações; ver [14]. Neste cenário, destacam-se as versões mais ousadas, no sentido de que abandonam o universo de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, ou mesmo o universo diferenciável, para dedicar-se ao caso meramente contínuo. Estamos falando da versão do Teorema da Aplicação Implícita apresentado em 2008 por Biasi, Gutierrez e dos Santos em [2], e da versão do Teorema da Aplicação Inversa apresentado em 2016 por Barreto, Fenille e Hartmann em [1]. Este capítulo é dedicado à apresentação desses dois resultados e de algumas consequências e aplicações.

3.1 O Teorema da Aplicação Implícita para aplicações contínuas

A versão clássica do Teorema da Aplicação Implícita estabelece que se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, e se, num dado ponto $(x_0, y_0) \in U$ tem-se $\det \partial_2 f(x_0, y_0) \neq 0$, então a equação $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ define implicitamente, numa vizinhança de x_0 , uma única aplicação $y = \varphi(x)$ de classe C^k .

Nesta seção, apresentamos o resultado principal de Biasi, Gutierrez e dos Santos publicado em [2], que se trata de uma versão do Teorema da Aplicação Implícita para aplicações contínuas, sem qualquer hipótese de diferenciabilidade. As condições exigidas são de caráter topológico e homológico.

Teorema 3.1 (Teorema da Aplicação Implícita) *Seja X um espaço Hausdorff localmente conexo por caminhos e sejam Y e Z n -variedades orientáveis. Seja $f : X \times Y \rightarrow Z$ uma aplicação contínua tal que, para todo $x \in X$, a aplicação $f_x : Y \rightarrow Z$, definida por $f_x(y) = f(x, y)$, é aberta e discreta. Suponha que, para algum $(x_0, y_0) \in X \times Y$, tenha-se $|\deg(f_{x_0}; y_0)| = 1$. Então existe uma vizinhança V de x_0 em X e uma aplicação contínua $\varphi : V \rightarrow Y$ tal que $f(x, \varphi(x)) = f(x_0, y_0)$ para todo $x \in V$.*

Prova: Seja $z_0 = f(x_0, y_0)$. Como Y é localmente compacto e f_{x_0} é uma aplicação discreta, podemos escolher uma vizinhança compacta $W \subset Y$ de y_0 tal que

$$(f_{x_0})^{-1}(z_0) \cap W = \{y_0\}. \quad (3.1)$$

Primeiro mostraremos que para qualquer vizinhança compacta $K \subset \text{int}(W)$ de y_0 , existe uma vizinhança V de x_0 tal que

$$(f_x|_W)^{-1}(z_0) \subseteq K, \text{ para todo } x \in V. \quad (3.2)$$

Suponha que para cada vizinhança V de x_0 exista $(x_V, y_V) \in V \times (W - K)$ tal que $f(x_V, y_V) = z_0$. Consideremos a rede $((x_V, y_V))_{V \in \Upsilon}$, onde Υ é a coleção das vizinhanças de x_0 , munida da ordem parcial: $V_1 \preceq V_2$ se $V_2 \subset V_1$. Desta forma, temos que $\lim x_V = x_0$ e, como (y_V) é uma rede no compacto $W - \text{int}(K)$, existe $y_1 \in W - \text{int}(K)$ que é limite de uma subrede de (y_V) . Mas como f é contínua, temos que $f(x_0, y_1) = z_0$, o que implica que $y_1 = y_0$, pela identidade (3.1), contradizendo o fato que $y_1 \in W - \text{int}(K)$. Portanto existe uma vizinhança V de x_0 que satisfaz a condição (3.2).

Escolha uma vizinhança compacta $K \subset \text{int}(W)$ de y_0 . Segue de (3.2) que para cada $x \in V$, a aplicação de pares $f_x : (W, W - K) \rightarrow (Z, Z - z_0)$ fica bem definida. Como X é localmente conexo por caminhos, podemos assumir que V seja uma vizinhança localmente conexa por caminhos de x_0 e, ainda mais, que para cada $x \in X$, existe um caminho γ em V de x_0 para x . Defina a homotopia de pares $H : (I \times W, I \times (W - K)) \rightarrow (Z, Z - z_0)$, com $I = [0, 1]$, dada por

$$H(t, y) = f(\gamma(t), y) = f_{\gamma(t)}(y). \quad (3.3)$$

Como W é compacto e H é uma homotopia própria entre $f_{x_0}|_W$ e $f_x|_W$, obtemos que $\deg_{\{z_0\}} f_x|_W = \deg_{\{z_0\}} f_{x_0}|_W$. Agora, como por definição $\deg_{\{z_0\}} f_{x_0}|_W = \deg(f_{x_0}; y_0)$ e,

por hipótese, $|\deg(f_{x_0}, y_0)| = 1$, obtemos que

$$|\deg_{\{z_0\}} f_x|_W| = |\deg_{\{z_0\}} f_{x_0}|_W| = |\deg(f_{x_0}, y_0)| = 1. \quad (3.4)$$

Como f_x é aberta e discreta, segue da Proposição 2.18 que $\deg(f_x; y) \neq 0$ e tem sempre o mesmo sinal, para todo $y \in Y$. Assim, se $(f_x|_W)^{-1}(z_0) = \{y_1, \dots, y_k\} \subset W$, com $k \geq 2$, temos

$$|\deg_{\{z_0\}} f_x|_W| = \left| \sum_{i=1}^k \deg(f_x; y_i) \right| = \sum_{i=1}^k |\deg(f_x; y_i)| > 1, \quad (3.5)$$

o que contradiz a identidade (3.4). Assim para cada $x \in V$, existe um único $y \in K$ tal que $(f_x|_W)^{-1}(z_0) = y$. Noutras palavras, para cada $x \in V$ existe um único $y = \varphi(x) \in K$ tal que $f_x(\varphi(x)) = f(x, \varphi(x)) = z_0$.

Vamos provar que a aplicação $\varphi : V \rightarrow K \subset Y$ é contínua. Seja A uma vizinhança de $y = \varphi(x)$ tal que $A \subset K$. Suponha que para qualquer vizinhança U de x , existe $x_U \in U$ tal que $\varphi(x_U) \in K - A$. Consideremos a rede $((x_U, \varphi(x_U)))_{U \in \Omega}$, onde Ω é a coleção das vizinhanças de x , munida da ordem parcial: $U_1 \preceq U_2$ se $U_2 \subset U_1$. Desta forma, temos que $\lim x_U = x$ e, como $(\varphi(x_U))$ é uma rede no compacto $K - A$, existe $y_2 \in K - A$ que é limite de uma subrede de $(\varphi(x_U))$. Assim (x, y_2) é o limite de uma subrede de $(x_U, \varphi(x_U))_{U \in \Omega}$. Como f é contínua e φ é dada implicitamente pela equação $f(x, \varphi(x)) = z_0$, temos que $f(x, y_2) = z_0$, o qual implica que $y = y_2$, contradizendo o fato que $y_2 \in K - A$. \square

O seguinte resultado, que também se encontra em [2], é um versão do Teorema da Aplicação Implícita que traz uma hipótese de diferenciabilidade, mas nenhuma exigência sobre a classe de diferenciabilidade. É muito interessante que este resultado surja como corolário da versão do Teorema da Aplicação Implícita para aplicações (meramente) contínuas, e não como aperfeiçoamento da versão para aplicações de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$.

Corolário 3.2 *Seja X um espaço Hausdorff localmente conexo por caminhos. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Suponha que, para cada $x \in X$, a aplicação $f_x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja diferenciável (mas não necessariamente de classe \mathcal{C}^1) e não possua pontos singulares. Então existe uma vizinhança V de x_0 e uma aplicação contínua $\varphi : V \rightarrow U$ tal que $f(x, \varphi(x)) = z_0$ para cada $x \in V$.*

Prova: Sendo cada $f_x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável e livre de pontos singulares, segue da Proposição 2.19 que cada f_x é uma aplicação discreta e verifica $|\deg(f_x; y)| = 1$ para todo $y \in U$. Isto implica, pela Proposição 2.16, que f_x é aberta para cada $x \in X$. Portanto, o resultado segue do Teorema 3.1. \square

Para finalizar esta seção, importa mencionar que em 2006, dois anos antes da publicação do Teorema 3.1, Biasi e dos Santos publicaram uma outra versão homológica do Teorema da Aplicação Implícita; trata-se do Teorema 2.1 de [3]. Naquela primeira versão, no entanto, com hipóteses um pouco mais gerais, não foi possível concluir sobre a continuidade da aplicação implícita φ ; provou-se apenas sua continuidade no ponto x_0 .

3.2 O Teorema da Aplicação Inversa para aplicações contínuas

A versão clássica do famoso Teorema da Aplicação Inversa estabelece que se uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida e de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, é tal que $f'(x_0)$ é invertível para um certo $x_0 \in U$, então f é um difeomorfismo local de classe \mathcal{C}^k em x_0 .

O principal resultado desta seção (Teorema 3.3), publicado em 2016 por Barreto, Fenille e Hartmann em [1], é uma versão do Teorema da Aplicação Inversa para aplicações contínuas. Nenhuma hipótese de diferenciabilidade é exigida, apenas condições topológicas e homológicas. Passemos ao resultado:

Teorema 3.3 (Teorema da Aplicação Inversa) *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, discreta e aberta entre n -variedades orientáveis e seja $x_0 \in X$ um ponto. Se $|\deg(f; x_0)| = 1$, então f é um homeomorfismo local em x_0 .*

Prova: Considere parametrizações

$$\varphi : A_\varphi \rightarrow U' \subset X \quad \text{e} \quad \psi : A_\psi \rightarrow V' \subset Y,$$

com A_φ e A_ψ subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n contendo a origem $0 \in \mathbb{R}^n$, tais que $\varphi(0) = x_0 \in U'$ e $\psi(0) = y_0 = f(x_0) \in V'$. Como f é contínua e discreta, podemos assumir que $U' \cap f^{-1}(y_0) = \{x_0\}$ e $f(U') \subset V'$.

Considere a composição $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : A_\varphi \rightarrow A_\psi$ e defina a aplicação $F : A_\psi \times A_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $F(\hat{x}, \hat{y}) = (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(\hat{y}) - \hat{x}$. Tem-se:

- i) $F(0, 0) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(0) = \psi^{-1} \circ f \circ (x_0) = \psi^{-1}(y_0) = 0$.
- ii) Como φ e ψ são homeomorfismos, a aplicação $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é contínua, aberta e discreta. Então, para todo $\hat{x} \in A_\varphi$, a aplicação contínua $F_{\hat{x}} : A_\psi \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $F_{\hat{x}}(\hat{y}) = F(\hat{x}, \hat{y})$ é aberta e discreta.
- iii) Particularmente, $F_0 : A_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por $F_0(\hat{y}) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(\hat{y})$ e temos que $F_0^{-1}(0) = 0$, do que segue que $\deg_{F_0(0)} F_0 = \deg(F_0; 0)$.

iv) Por propriedades básicas de grau tem-se:

$$\begin{aligned}\deg_{F_0(0)} F_0 &= \deg(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi; 0) \\ &= \deg(\psi^{-1}; 0) \deg(f; x_0) \deg(\varphi; 0) \\ &= \deg(f; x_0).\end{aligned}$$

Portanto, $|\deg_{F_0(0)} F_0| = |\deg(f; x_0)| = 1$.

Pelo Teorema 3.1, existe uma vizinhança $V'' \subset A_\psi$ de 0 e uma aplicação contínua $\xi : V'' \rightarrow A_\varphi$ tal que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \xi(\hat{x}) - \hat{x} = F(\hat{x}, \xi(\hat{x})) = 0$ para todo $\hat{x} \in V''$, o que implica

$$f \circ \varphi \circ \xi(\hat{x}) = \psi(\hat{x}) \quad \text{para todo } \hat{x} \in V''. \quad (3.6)$$

Como ψ é um homeomorfismo, segue que ξ é injetiva. Pelo Teorema da Invariança de Domínios (ver [4]), ξ aplica V'' homeomorficamente sobre sua imagem $\xi(V'') \subset A_\varphi$, que é aberta em \mathbb{R}^n .

Ponha $V = \psi(V'') \subset V'$ e $U = \varphi(\xi(V'')) \subset U'$. Note que U é um subconjunto aberto de X e V é um subconjunto aberto de Y . Considere a composição de homeomorfismos $g = \varphi \circ \xi \circ \psi^{-1} : V \rightarrow U$. Para cada $y \in V$, existe um único $\hat{x} \in V''$ tal que $y = \psi(\hat{x})$, e pela identidade (3.6) temos que

$$f \circ g(y) = f \circ \varphi \circ \xi \circ \psi^{-1}(y) = f \circ \varphi \circ \xi(\hat{x}) = \psi(\hat{x}) = y,$$

o que prova que $f \circ g(y) = y$ para todo $y \in V$. Como g é um homeomorfismo de V sobre U , a restrição da aplicação $f|_U : U \rightarrow V$ é também um homeomorfismo; aliás $f|_U$ é o homeomorfismo inverso de g . \square

Em [1], os autores apresentam uma segunda versão para o Teorema da Aplicação Inversa, desta vez para aplicações contínuas, abertas e discretas entre n -variedades que são grupos topológicos. Nesta versão, que apresentamos abaixo, utiliza-se a noção de grau de uma aplicação sobre um ponto de seu contra-domínio.

Teorema 3.4 (Teorema da Aplicação Inversa para grupos topológicos) *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, aberta e discreta entre duas n -variedades topológicas. Suponha que X e Y sejam grupos topológicos, e sejam $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0)$. Se $f^{-1}(y_0)$ é finito e $|\deg_{\{y_0\}} f| = 1$, então existe uma vizinhança V de y_0 e uma aplicação contínua $g : V \rightarrow X$, com $g(y_0) = x_0$, tal que $f \circ g(y) = y$ para todo $y \in V$.*

Prova: Consideremos a aplicação contínua $F : X \times Y \rightarrow Y$ definida por $F(x, y) = f(x) * y^{-1}$, onde $*$ é a operação do grupo topológico Y e y^{-1} é o inverso de y . Claramente

$F(x_0, y_0) = e$, a identidade de Y . Para cada $y \in Y$, definimos a aplicação $F_y : X \rightarrow Y$ por $F_y(x) = F(x, y)$. Como f é aberta e discreta, tem-se que F_y também é aberta e discreta para todo $y \in Y$. Além disso, $F^{-1}(e) = f^{-1}(y_0)$ é finito, e temos

$$|\deg_{\{e\}} F_{y_0}| = \left| \sum_{x \in F_{y_0}^{-1}(e)} \deg(F_{y_0}; x) \right| = \left| \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} \deg(f; x) \right| = 1.$$

Pelo Teorema 3.1, existem uma vizinhança V de y_0 em Y e uma aplicação contínua $g : V \rightarrow X$ tal que $F(g(y), y) = e$ para todo $y \in V$. Assim, $f(g(y)) * y^{-1} = e$ para todo $y \in V$, o que implica que $f \circ g(y) = y$ para todo $y \in V$. \square

3.3 Teorema de Darboux para aplicações contínuas

A versão clássica do Teorema de Darboux estabelece que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável com a propriedade que $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$, então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Mais geralmente, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então todos os valores reais entre $f'(a)$ e $f'(b)$ pertencem a imagem de f' ; ver [19, página 93]. Noutras palavras, para uma função que é a derivada de outra, vale o Teorema do Valor Intermediário, mesmo que a função não seja contínua.

A seguir, apresentamos várias versões do Teorema de Darboux, sendo a primeira delas uma versão homológica da qual decorrem as demais. Todos os resultados desta seção se devem a Biasi, Gutierrez e dos Santos e se encontram em [2].

Teorema 3.5 (Versão homológica do Teorema de Darboux) *Sejam X e Y duas n -variedades conexas orientáveis e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Suponha que sejam x_0 e x_1 pontos em X para os quais se tenha $\deg(f; x_0) < 0$ e $\deg(f; x_1) > 0$. Então existe x_2 em X tal que $\deg(f; x_2) = 0$.*

Prova: Se f não é discreta em algum $x \in X$, segue da Definição 2.12 que $\deg(f; x) = 0$. Por outro lado se f é discreta para todo $x \in X$ e $\deg(f; x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então, pela Proposição 2.16, f é aberta. Logo, pela Proposição 2.18, o grau $\deg(f; x)$ tem o mesmo sinal para todo $x \in X$, o que está em contradição com a hipótese. \square

Passamos a algumas versões diferenciáveis do Teorema de Darboux, sem a exigência de que as aplicações dadas sejam de classe \mathcal{C}^1 (hipótese que tornaria os resultados triviais).

Corolário 3.6 *Sejam X e Y duas n -variedades diferenciáveis, conexas e orientáveis, e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável. Suponha que x_0 e x_1 em X sejam tais que $\det f'(x_0) < 0$ e $\det f'(x_1) > 0$. Então f tem um ponto singular.*

Prova: Suponha que f não tenha pontos singulares, ou seja, que $\det f'(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Neste caso, conforme a Proposição 2.19, f é discreta e, para todo $x \in X$, tem-se $|\deg(f; x)| = 1 \neq 0$. Segue-se da Proposição 2.16 que f é aberta. Pela Proposição 2.18, o grau $\deg(f; x)$ tem sempre o mesmo sinal em todo ponto $x \in X$. Consequentemente, pelo Corolário 2.21, também $\det f'(x)$ tem o mesmo sinal em todo $x \in X$, o que está em contradição com a hipótese. \square

Corolário 3.7 *Seja X uma n -variedade diferenciável, conexa e orientável, e sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações diferenciáveis. Suponha que existam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x_0, x_1 \in M$ tais que*

$$\det(f'(x_0) - \alpha g'(x_0)) < 0 \quad \text{e} \quad \det(f'(x_1) - \alpha g'(x_1)) > 0.$$

Então, existe $x_2 \in M$ tal que $\det(f'(x_2) - \alpha g'(x_2)) = 0$.

Prova: É suficiente aplicar o Corolário 3.6 para a aplicação $h = f - \alpha g$. \square

Como consequência do Corolário 3.7 temos a seguinte versão do Teorema de Darboux para aplicações diferenciáveis de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n .

Corolário 3.8 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Suponha que existam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x_0, x_1 \in U$ tais que $\det(f'(x_0) - \alpha I) < 0$ e $\det(f'(x_1) - \alpha I) > 0$. Então, existe $x_2 \in U$ tal que $\det(f'(x_2) - \alpha I) = 0$, (isto é, α é um autovalor de $f'(x_2)$).*

Agora consideremos f e U como nas hipóteses do Corolário 3.8 e escrevamos $p_0(\lambda) = \det(f'(x_0) - \lambda I)$ e $p_1(\lambda) = \det(f'(x_1) - \lambda I)$. Sejam n_0 e n_1 em \mathbb{N} . Temos:

Corolário 3.9 *Sejam $x_0, x_1 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $p_0(\lambda) = q_0(\lambda)(\alpha - \lambda)^{n_0}$ e $p_1(\lambda) = q_1(\lambda)(\alpha - \lambda)^{n_1}$, onde $q_0(\lambda)$ e $q_1(\lambda)$ são polinômios não nulos. Suponha que n_0 seja ímpar e n_1 seja par. Se $q_0(\alpha)q_1(\alpha) > 0$, então existe $\delta > 0$ que satisfaz a seguinte condição: para cada $\lambda \in (\alpha, \alpha + \delta)$, existe $x_2 = x_2(\lambda)$ tal que $\det(f'(x_2) - \lambda I) = 0$.*

Prova: Como n_0 é ímpar e n_1 é par, temos que, para $\lambda > \alpha$ perto de α , os polinômios $p_0(\lambda)$ e $p_1(\lambda)$ têm sinais opostos. Segue do Corolário 3.8 que se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno e $\lambda \in (\alpha, \alpha + \delta)$, existe $x_2 = x_2(\lambda)$ tal que $p_2(\lambda) = \det(f'(x_2) - \lambda I) = 0$. \square

O Corolário também é válido no caso em que $q_0(\alpha)q_1(\alpha) < 0$ e $\lambda \in (\alpha - \delta, \alpha)$.

CAPÍTULO 4

IMERSÃO E SUBMERSÃO TOPOLÓGICAS

Aliados aos Teoremas da Aplicação Implícita e da Aplicação Inversa há dois outros teoremas clássicos, através dos quais se constrói (no universo de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$) um elo de equivalências entre os dois primeiros. Referimo-nos aos assim chamados Teorema da Forma Local das Imersões e Teorema da Forma Local das Submersões, ambos encontrados em [10, Capítulo 1] e em muitos outros livros de cálculo avançado, variedades diferenciáveis ou topologia diferencial. Essencialmente, estes teoremas revelam que: (i) toda imersão de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, se comporta localmente como uma inclusão, quer dizer, torna-se uma inclusão após uma apropriada mudança de coordenadas locais; (ii) toda submersão de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, se comporta localmente como uma projeção, quer dizer, escreve-se como uma projeção após uma apropriada mudança de coordenadas locais.

Os conceitos clássicos de imersão e submersões são expressos em termos das derivadas da aplicação dada. Contudo, existem conceitos análogos no universo topológico, ou seja, naquele em que das aplicações dadas exige-se apenas continuidade. Neste cenário mais geral encontram-se os conceitos de *imersão topológica* e *submersão topológica*, apresentados de forma didática em [15, p. 88–89].

Em [1], Barreto, Fenille e Hartmann apresentam um refinamento dos conceitos de imersão e submersão topológicas, definindo o que chamam imersões e submersões topológicas *retas* e *oblíquas*. De posse de tais conceitos, os autores demonstram versões topológicas para o Teorema da Forma Local das Imersões e o Teorema da Forma Local das Submersões. Este capítulo é dedicado a demonstração desses dois teoremas e algumas consequências e aplicações, todos constantes de [1].

4.1 Sobre o grau de aplicações entre espaços produto

É uma consequência da Fórmula de Künneth (ver [9, § 29] ou [11, § 3.B]) que, dadas aplicações $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ e $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ entre variedades topológicas orientáveis de mesma dimensão, tem-se

$$\deg(f_1 \times g_1; (x_1, x_2)) = \deg(f_1; x_1) \cdot \deg(f_2; x_2).$$

No entanto, se consideramos uma aplicação $f : X \times Y \rightarrow Y$ e definimos $F : X \times Y \rightarrow X \times Y$ por $F(x, y) = (x, f(x, y))$, então F não é uma aplicação produto e a Fórmula de Künneth não pode ser aplicada para expressar o grau de F .

Se X e Y são variedades diferenciáveis e $f : X \times Y \rightarrow Y$ é uma aplicação diferenciável, então a aplicação F definida como acima é também diferenciável. Além disso, se a derivada parcial $\partial_2 F(x_0, y_0)$ é não singular, então a matriz Jacobiana $F'(x_0, y_0)$ é também não singular; aliás,

$$\det F'(x_0, y_0) = \det \partial_2 F(x_0, y_0).$$

Este fato nos leva a pensar que se $\deg(f(x_0, \cdot); y_0) = \pm 1$, então $\deg(F; (x_0, y_0)) = \pm 1$; ou ainda mais, que

$$\deg(F; (x_0, y_0)) = \deg(f(x_0, \cdot); y_0).$$

De fato, é disso que se trata o principal resultado desta seção, que enunciamos e demonstramos após o lema abaixo.

Lema 4.1 *Seja $f : S^n \rightarrow S^n$ uma auto-aplicação contínua da n -esfera, seja $S^{n-1} \subset S^n$ o equador e sejam E_+^n e E_-^n os hemisférios fechados de S^n . Se E_+^n e E_-^n são invariantes por f , então a restrição de f a S^{n-1} dá origem a uma auto-aplicação contínua $f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ que verifica $\deg(f) = \deg(f|_{S^{n-1}})$.*

Prova: Não há dúvida sobre a boa definição e a continuidade de $f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$.

Sejam $p_N \in E_+^n$ e $p_S \in E_-^n$ os pólos norte e sul de S^n , respectivamente, e considere os abertos $U = S^n - \{p_N\}$ e $V = S^n - \{p_S\}$. Então U e V são abertos contráteis, $U \cap V$ é um aberto que se retrai por deformação forte sobre S^{n-1} e, além disso, $U \cup V = S^n$.

Segue-se da sequência de Mayer-Vietoris e de sua naturalidade que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{\approx} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ f_* \uparrow & & \uparrow f|_{S^{n-1}*} \\ H_n(S^n) & \xrightarrow{\approx} & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

é comutativo e suas setas horizontais são isomorfismos; aliás, são o mesmo isomorfismo. Portanto, $\deg(f) = \deg(f|_{S^{n-1}})$. \square

No que segue, B_r^k e D_r^k denotam a bola aberta e o disco (fechado) de raio r e centro na origem no espaço \mathbb{R}^k . Adicionalmente, $S_r^{k-1} = \partial D_r^k$ é a fronteira de D_r^k .

Proposição 4.2 *Sejam $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ um ponto. Considere as aplicações (contínuas) $f_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$, e $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, definida por $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Se f_{x_0} é discreta em y_0 , então F é discreta em z_0 e $\deg(F; z_0) = \deg(f_{x_0}; y_0)$.*

Prova: Sem perda de generalidade, podemos considerar $z_0 = (0, 0)$ e $f(z_0) = 0$. Primeiro provamos o resultado para $m = 1$. Em seguida, provamos o caso geral por indução em m .

Já que f é contínua e f_0 é discreta em 0, existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que

$$f((-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times B_{2\varepsilon}^n) \subset D_1^n \quad \text{e} \quad f_0^{-1}(0) \cap ((-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times B_{2\varepsilon}^n) = \{0\}.$$

Como $F(x, y) = (0, 0)$ força $x = 0$, temos que $F^{-1}(0, 0) \cap ((-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times B_{2\varepsilon}^n) = \{(0, 0)\}$, o que implica que F é discreta em $(0, 0)$.

Segue que f_0 induz uma aplicação do par $(D_\varepsilon^n, D_\varepsilon^n - 0)$ no par $(D_1^n, D_1^n - 0)$, cujo homomorfismo induzido $f_{0*} : H_n(D_\varepsilon^n, D_\varepsilon^n - 0) \rightarrow H_n(D_1^n, D_1^n - 0)$ determina o grau $\deg(f_0; 0)$. Considere a inclusão $l : S_\varepsilon^{n-1} \hookrightarrow D_\varepsilon^n$ e a retração radial $r : D_1^n - 0 \rightarrow S_1^{n-1}$. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(D_\varepsilon^n, D_\varepsilon^n - 0) & \xrightarrow{f_{0*}} & H_n(D_1^n, D_1^n - 0) \\ \partial \downarrow \approx & & \approx \downarrow \partial \\ \tilde{H}_{n-1}(D_\varepsilon^n - 0) & \xrightarrow{f_{0*}} & \tilde{H}_{n-1}(D_1^n - 0) \\ \iota_* \uparrow \approx & & \approx \downarrow r_* \\ \tilde{H}_{n-1}(S_\varepsilon^{n-1}) & \xrightarrow{\phi_* = r_* f_{0*} \iota_*} & \tilde{H}_{n-1}(S_1^{n-1}) \end{array}$$

Segue que $\deg(f_0; 0) = \deg(\phi)$.

Considere a suspensão SS_ε^{n-1} consistindo de todos os segmentos conectando os pontos da esfera $0 \times S_\varepsilon^{n-1} \subset 0 \times \mathbb{R}^n$ aos pontos $(-\varepsilon, 0)$ e $(\varepsilon, 0)$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Além disso, considere a suspensão análoga SD_ε^n , de modo que $SS_\varepsilon^{n-1} = \partial SD_\varepsilon^n$.

Obviamente, SS_ε^{n-1} é homeomorfo a n -esfera e SD_ε^n é homeomorfo ao $(n+1)$ -disco fechado, ambos contidos no $(n+1)$ -disco $K_\varepsilon^{n+1} = [-\varepsilon, \varepsilon] \times D_\varepsilon^n$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Também $K_1^{n+1} = [-\varepsilon, \varepsilon] \times D_1^n$ é homeomorfo ao $(n+1)$ -disco fechado em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, cuja fronteira Σ_1^n é homeomorfa a n -esfera. Claramente, temos uma retração (radial) $r : K_1^{n+1} - (0, 0) \rightarrow \Sigma_1^n$. Por construção

$$F(SD_\varepsilon^n) \subset K_\varepsilon^{n+1} \quad \text{e} \quad F(SS_\varepsilon^{n-1}) \subset F(SD_\varepsilon^n - (0, 0)) \subset K_1^{n+1} - (0, 0).$$

Como anteriormente, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
H_{n+1}(SD_\varepsilon^n, SD_\varepsilon^n - (0, 0)) & \xrightarrow{\bar{F}_*} & H_{n+1}(K_1^{n+1}, K_1^{n+1} - (0, 0)) \\
\partial \downarrow \approx & & \approx \downarrow \partial \\
\tilde{H}_n(SD_\varepsilon^n - (0, 0)) & \xrightarrow{F_*} & \tilde{H}_n(K_1^{n+1} - (0, 0)) \\
\approx \uparrow l_* & & \approx \downarrow r_* \\
\tilde{H}_n(SS_\varepsilon^{n-1}) & \xrightarrow{\Phi_* = r_* F_* l_*} & \tilde{H}_n(\Sigma_1^n)
\end{array}$$

Segue que $\deg(F; (0, 0)) = \deg(\Phi)$.

Agora, é fácil ver que S_ε^{n-1} corresponde ao equador $0 \times S_\varepsilon^{n-1} \subset SS_\varepsilon^{n-1}$ e S_1^{n-1} corresponde ao equador $0 \times S_1^{n-1} \subset \Sigma_1^n$. Além disso, como F mantém fixa a primeira coordenada, a composição

$$SS_\varepsilon^{n-1} \hookrightarrow (SD_\varepsilon^n - (0, 0)) \xrightarrow{F} K_1^{n+1} - (0, 0) \twoheadrightarrow \Sigma_1^n$$

leva o hemisfério fechado positivo (respectivamente o negativo) de SS_ε^{n-1} no hemisfério fechado positivo (respectivamente o negativo) de Σ_1^n . Além disso, como $F(0, y) = f_0(y)$, a restrição de F ao equador $0 \times S_\varepsilon^{n-1}$ corresponde a composição

$$S_\varepsilon^{n-1} \hookrightarrow D_\varepsilon^n - 0 \xrightarrow{f_0} D_1^n - 0 \twoheadrightarrow S_1^{n-1}.$$

Logo, o Lema 4.1 implica que $\deg(F; (0, 0)) = \deg(f_0; 0)$. Portanto, o resultado está provado para $m = 1$.

Agora provaremos o caso geral por indução em m . Suponha que o resultado seja válido para um determinado $m \geq 1$ e seja $f : \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Defina $F : \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^n$ por $F(x, y) = (x, f(x, y))$.

No que segue, consideramos a identificação natural $\mathbb{R}^{m+1} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ dada por

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow (x_0, (x_1, \dots, x_m)).$$

Para simplificar, para um dado ponto $x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, escrevemos $x^0 = (x_1, \dots, x_m)$, de modo que a identificação anterior fornece $\mathbb{R}^{m+1} \ni x \equiv (x_0, x^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Usando esta identificação, consideramos a origem em \mathbb{R}^{m+1} como $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Assim, temos a aplicação $f_{(0,0)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f_{(0,0)}(y) = f(0, 0, y)$.

Devemos provar que $\deg(F; (0, 0, 0)) = \deg(f_{(0,0)}; 0)$.

Defina $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ por $h(x_0, x^0, y) = (x^0, f(x_0, x^0, y))$ e, correspondendo à origem $0 \in \mathbb{R}$, considere a aplicação $h_0 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dada por $h_0(x^0, y) = h(0, x^0, y)$. Assim, $h_0(x^0, y) = (x^0, f(0, x^0, y))$ e a hipótese de indução implica que $\deg(h_0; (0, 0)) = \deg(f_{(0,0)}; 0)$.

Por outro lado, usando a identificação $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ no domínio e no contra-domínio da aplicação F , temos

$$F(x_0, x^0, y) = (x_0, x^0, f(x_0, x^0, y)) = (x_0, h(x_0, x^0, y)).$$

Então, a primeira parte da prova se aplica para a aplicação h e fornece a identidade $\deg(F; (0, 0, 0)) = \deg(h_0; (0, 0))$.

Portanto, $\deg(F; (0, 0, 0)) = \deg(f_{(0,0)}; 0)$, como queríamos provar. \square

4.2 Forma local das submersões topológicas

Nesta seção, estudamos aplicações contínuas, entre espaços euclidianos, que se comportam localmente como projeções. Como os conceitos aqui envolvidos são todos de caráter local, os resultados a seguir apresentados podem ser generalizados para aplicações entre variedades topológicas orientáveis.

Definição 4.3 Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^{p+q}$ (ou $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$) é chamado uma *p-fatia oblíqua* se satisfaz a seguinte propriedade de planicidade local: para cada ponto $z \in S$ existe uma vizinhança V de z em \mathbb{R}^{p+q} e um homeomorfismo $h : B_1^p \times B_1^q \rightarrow V$, tais que $h(0, 0) = z$ e $h(B_1^p \times 0) = V \cap S$.

Obviamente, a Definição 4.3 permanece a mesma se mudamos $B_1^p \times B_1^q$ por $B_{r_1}^p(c_1) \times B_{r_2}^q(c_2)$ para quaisquer raios positivos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e centros $c_1 \in \mathbb{R}^p$ e $c_2 \in \mathbb{R}^q$.

Observamos que uma *p-fatia oblíqua* $S \subset \mathbb{R}^{p+q}$ é uma *p-subvariedade* de \mathbb{R}^{p+q} . Por outro lado, uma *p-variedade* mergulhada em \mathbb{R}^{p+q} não é necessariamente uma *p-fatia oblíqua*. Por exemplo, um nó selvagem em \mathbb{R}^3 não é uma 1-fatia oblíqua (mas um nó suave o é). Sobre Teoria de Nós, consultar [18].

O gráfico de uma aplicação contínua $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$, com $U \subset \mathbb{R}^p$ aberto e conexo, é uma *p-fatia oblíqua* em $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

No que se segue, dada uma aplicação $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, consideramos a aplicação $f_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$.

Definição 4.4 Uma aplicação contínua $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada:

- (i) uma *submersão topológica reta* no ponto $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ se a aplicação f_{x_0} é discreta e $|\deg(f_{x_0}; y_0)| = 1$.
- (ii) uma *submersão topológica oblíqua* no ponto $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ se existe uma *n-fatia oblíqua* $S \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, contendo o ponto z_0 , tal que $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ é discreta e $|\deg(f|_S; z_0)| = 1$.

É claro que essa definição funciona também para uma aplicação $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida num subconjunto aberto básico $A \times B$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Observamos que uma submersão topológica reta é uma submersão topológica oblíqua (tomando $S = \{x_0\} \times \mathbb{R}^n$), mas o inverso não é verdadeiro; por exemplo, considere a aplicação contínua e aberta $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x$. Como f_0 é a aplicação constante zero $y \mapsto 0$, a aplicação f não é uma submersão topológica reta na origem $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. No entanto, se tomamos S como sendo a diagonal em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, então S é uma 1-fatia oblíqua e a aplicação restrita $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ é o homeomorfismo $(x, x) \mapsto x$, o que mostra que f é uma submersão topológica oblíqua em $(0, 0)$. Note-se que f é também uma submersão no sentido diferencial.

Para um exemplo mais interessante, considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f((x, y), z) = x^3(y^4 - z^2 + 1)$. Esta aplicação não é uma submersão topológica reta na origem (já que $f_{(0,0)}$ é a aplicação constante nula) nem uma submersão no sentido diferencial na origem (já que o vetor gradiente $\nabla f((0, 0), 0)$ é nulo). No entanto, f é uma submersão topológica oblíqua na origem. De fato, para a 1-fatia oblíqua $S = \{((x, x), x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, contendo a origem, a aplicação restrita $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ é o homeomorfismo $((x, x), x^2) \mapsto x^3$.

Através da versão clássica do Teorema da Forma Local das Submersões, é fácil ver que toda submersão $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 é uma submersão topológica oblíqua, por comportar-se localmente como uma projeção.

O seguinte teorema mostra que toda submersão topológica reta ou oblíqua comporta-se localmente como uma projeção; portanto, este teorema é uma versão do Teorema da Forma Local das Submersões para submersões topológicas retas ou oblíquas.

Teorema 4.5 (Forma local das submersões topológicas) *Seja $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma submersão topológica reta ou oblíqua em um ponto $z_0 = (x_0, y_0)$ e ponha $w_0 = f(z_0)$. Então existe uma vizinhança (básica) $V \times W$ de (x_0, w_0) em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $\varphi : V \times W \rightarrow Z$ sobre uma vizinhança Z de z_0 em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, tal que $f \circ \varphi(x, w) = w$ para todo $(x, w) \in V \times W$.*

Prova: Em princípio, supomos que f seja uma submersão topológica reta no ponto z_0 . Defina $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ por $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Então F é contínua, aberta e discreta e, pela Proposição 4.2, $|\deg(F; z_0)| = 1$. Pelo Teorema 3.3, F é um homeomorfismo local em z_0 . Portanto, existe uma vizinhança Z de z_0 em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, que é aplicada homeomorficamente por F numa vizinhança (básica) $V \times W$ de (x_0, w_0) em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Seja $\varphi : V \times W \rightarrow Z$ o homeomorfismo inverso de $F|_Z : Z \rightarrow V \times W$. Já que F mantém fixa a primeira coordenada, o homeomorfismo φ tem a mesma propriedade, de modo que $\varphi(x, w) = (x, \varphi_2(x, w))$ para todo $(x, w) \in V \times W$. Assim, para todo

$(x, w) \in V \times W$, temos

$$(x, w) = F \circ \varphi(x, w) = F(x, \varphi_2(x, w)) = (x, f(x, \varphi_2(x, w))) = (x, f \circ \varphi(x, w)).$$

Portanto, $f \circ \varphi(x, w) = w$ para todo $(x, w) \in V \times W$.

Agora, suponhamos que f seja uma submersão topológica oblíqua em z_0 . Tomamos uma n -fatia S , como na Definição 4.4, e um homeomorfismo $h : B_1^m(x_0) \times B_1^n(y_0) \rightarrow U$, sobre uma vizinhança U de z_0 em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, tal que $h(x_0, y_0) = z_0$ e $h(x_0 \times B_1^n(y_0)) = U \cap S$. Então a aplicação composta $f' = f \circ h : B_1^m(x_0) \times B_1^n(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma submersão topológica reta em (x_0, y_0) com $f'(x_0, y_0) = w_0$. Pela primeira parte da prova, existe uma vizinhança (básica) $V \times W$ de (x_0, w_0) in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $\varphi' : V \times W \rightarrow Z'$ sobre uma vizinhança $Z' \subset B_1^m(x_0) \times B_1^n(y_0)$ de z_0 , tal que $f' \circ \varphi'(x, w) = w$ para todo $(x, w) \in V \times W$. Seja $Z = h(Z')$. Então $\varphi = h \circ \varphi' : V \times W \rightarrow Z$ é um homeomorfismo sobre uma vizinhança de z_0 em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e temos que $f \circ \varphi(x, w) = w$ para todo $(x, w) \in V \times W$. \square

Em [15, página 89], o conceito de submersão topológica é apresentado como segue: Dados espaços topológicos X e Y , diz-se que uma aplicação contínua $\pi : X \rightarrow Y$ é uma *submersão topológica* se cada ponto de X pertence à imagem de uma *seção local* de π , isto é, à imagem de uma aplicação contínua $\sigma : U \rightarrow X$, com $U \subset Y$ aberto, tal que a composição $\pi \circ \sigma$ é a aplicação identidade de U .

O Teorema 4.5 implica que cada submersão topológica reta ou oblíqua $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma submersão topológica. De fato, dada uma submersão topológica reta ou oblíqua em um ponto (x_0, y_0) , com $f(x_0, y_0) = w_0$, tome um homeomorfismo $\varphi : V \times W \rightarrow Z$ como no Teorema 4.5. Então a aplicação $\sigma : V \rightarrow Z$ definida por $\sigma(x) = \varphi(x, w_0)$ é uma seção local para f cuja imagem contém (x_0, y_0) .

Apresentamos um exemplo para mostrar que o Teorema 4.5 funciona para aplicações diferenciáveis que não são submersões no sentido clássico. Considere a aplicação diferenciável e aberta $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y^3$. Então f não é uma submersão na origem, no sentido diferencial, e consequentemente a versão clássica do Teorema da Forma Local das Submersões não se aplica a f em $(0, 0)$. No entanto, a aplicação restrita $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $y \mapsto y^3$, e então f_0 é um homeomorfismo. Portanto, f é uma submersão topológica reta em $(0, 0)$ e o Teorema 4.5 se aplica.

O próximo teorema é uma versão do Teorema 3.1 para aplicações abertas entre espaços euclidianos. Devido ao seu caráter local, ele pode ser estendido para aplicações abertas entre variedades topológicas orientáveis. Observamos que o Teorema 3.1 não conclui sobre a unicidade da aplicação implícita, mas o Teorema 4.6 o faz. Portanto, neste resultado exige-se um pouco mais, mas também se conclui um pouco mais.

Teorema 4.6 *Sejam $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma submersão topológica reta num ponto $z_0 = (x_0, y_0)$, e ponha $w_0 = f(z_0)$. Então existem vizinhanças V de x_0 em \mathbb{R}^m e Z de z_0 em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, e uma única aplicação contínua $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para cada $x \in V$, tem-se $(x, \xi(x)) \in Z$ e $f(x, \xi(x)) = w_0$.*

Prova: Defina a aplicação $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\xi(x) = \varphi_2(x, w_0)$, onde φ_2 é como na primeira parte da prova do Teorema 4.5. Então ξ é contínua e temos que $(x, \xi(x)) = \varphi(x, w_0) \in Z$ para todo $x \in V$. Além disso, $f(x, \xi(x)) = f \circ \varphi(x, w_0) = w_0$ para todo $x \in V$.

Por outro lado, sendo F como na primeira parte da prova do Teorema 4.5, se $(x, y) \in Z$ e $f(x, y) = w_0$, então

$$(x, y) = \varphi \circ F(x, y) = \varphi(x, f(x, y)) = \varphi(x, w_0) = (x, \varphi_2(x, w_0)) = (x, \xi(x)),$$

de modo que $y = \xi(x)$, o que prova a unicidade da aplicação ξ . \square

O Teorema 4.6 não se estende para submersões topológicas oblíquas. De fato, considere a aplicação $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x$, a qual é uma submersão topológica oblíqua na origem $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Para cada aplicação contínua $\xi : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, temos que $f(x, \xi(x)) = x$, de modo que não existe uma tal aplicação ξ satisfazendo $f(x, \xi(x)) = 0$ para todo $x \in (-\delta, \delta)$. Portanto, o resultado do Teorema 4.6 não funciona para f .

Para finalizar esta seção, usamos as provas dos Teoremas 4.5 e 4.6 para destacar uma importante diferença técnica entre os dois conceitos de submersão introduzidos na Definição 4.4. Para ser específico, notamos que o fato essencial utilizado na primeira parte da prova do Teorema 4.5, assim como na prova do Teorema 4.6, é que a aplicação F é contínua, aberta e discreta e $|\deg(F; z_0)| = 1$. A próxima proposição relaciona esses fatos com os dois conceitos de submersões topológicas.

Proposição 4.7 *Seja $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e aberta, e considere $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definida por $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Seja $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ um ponto. Se F é discreta e $|\deg(F; z_0)| = 1$, então f é uma submersão topológica oblíqua no ponto z_0 . A recíproca é verdadeira se f é uma submersão topológica reta.*

Prova: Para provar a primeira parte da proposição, notamos que as provas dos Teoremas 4.5 e 4.6 funcionam com a hipótese “ F é aberta e discreta e $|\deg(F; z_0)| = 1$ ” no lugar da hipótese “ f é uma submersão topológica reta no ponto z_0 ”. Portanto, podemos assumir os resultados dos Teoremas 4.5 e 4.6.

Considere números reais positivos ε e δ tais que $B_\varepsilon^m(x_0) \subset V$ e $B_\delta^n(w_0) \subset W$. Defina $h : B_\varepsilon^m(x_0) \times B_\delta^n(w_0) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ por $h(x, w) = \varphi(x, w)$. Então h restringe-se a um homeomorfismo $h : B_\varepsilon^m(x_0) \times B_\delta^n(w_0) \rightarrow Z'$ sobre uma vizinhança $Z' \subset Z$ de $z_0 =$

$h(x_0, w_0)$. Consequentemente, $S = h(x_0 \times B_\delta^n(w_0))$ é uma n -fatia oblíqua tal que $z_0 \in S \subset U$. Além disso, cada ponto em S é da forma $h(x_0, w) = (x_0, \varphi_2(x_0, w))$ com $w \in B_\delta^n(w_0)$. Seja $h_1 : x_0 \times B_\delta^n(w_0) \rightarrow S$ o homeomorfismo obtido a partir de h pelas restrições óbvias de seu domínio e contra-domínio. Então $f|_S \circ h_1(x_0, w) = w$ para todo $w \in B_\delta^n(w_0)$. Segue que $f|_S$ é injetiva. Esclarecemos que $f|_S$ é aberta: dado um subconjunto aberto $A \subset S$, temos que $f|_S(A) = (f|_S \circ h_1)(h_1^{-1}(A)) = \pi_2(h_1^{-1}(A))$, onde $\pi_2 : B_\varepsilon^n(x_0) \times B_\delta^n(w_0) \rightarrow B_\delta^n(w_0)$ é a projeção na segunda coordenada; segue que $f|_S(A)$ é aberto em \mathbb{R}^n . Portanto, provamos que $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, aberta e injetiva, o que implica que $f|_S$, e então f , aplica S homeomorficamente sobre sua imagem $f|_S(S) = f(S)$ em \mathbb{R}^n .

A afirmação sobre a recíproca segue da Proposição 4.2. \square

A recíproca da Proposição 4.7 não é verdadeira, em geral, se f é uma submersão topológica oblíqua, mas não é uma submersão topológica reta. De fato: considere novamente a aplicação $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x$, que é uma submersão topológica oblíqua em $(0, 0)$, com respeito a 1-fatia oblíqua $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Já vimos que f não é uma submersão topológica reta. Agora, a aplicação correspondente $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é dada por $F(x, y) = (x, f(x, y)) = (x, x)$ e, portanto, F não é discreta.

4.3 Forma local das imersões topológicas

Nesta seção, estudamos aplicações contínuas, entre espaços euclidianos, que se comportam localmente como inclusões. Como os conceitos aqui envolvidos são todos de caráter local, os resultados podem ser generalizados para aplicações entre variedades topológicas orientáveis.

No que segue, $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção na primeira coordenada. Dados uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ e subconjuntos $A \subset X$ e $B \subset Y$ tais que $f(A) \subset B$, denotamos por $f|_A^B : A \rightarrow B$ a aplicação obtida de f pela óbvia restrição de seu domínio e de seu contra-domínio.

Definição 4.8 Uma aplicação contínua e discreta $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é chamada:

- (i) uma *imersão topológica reta* no ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se a aplicação composta $\pi_1 \circ f$ é aberta e discreta e $|\deg(\pi_1 \circ f; x_0)| = 1$.
- (ii) uma *imersão topológica oblíqua* no ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se existe uma vizinhança U de x_0 em \mathbb{R}^n e uma n -fatia oblíqua $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, com $f(U) \subset S$, tal que a aplicação $f|_U^S$ é aberta e discreta e $|\deg(f|_U^S; x_0)| = 1$.

Observe-se que f e $\pi_1 \circ f$ são ambas discretas se e somente se a pré-imagem por f de cada plano afim $\{x\} \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é discreto.

Uma imersão topológica oblíqua não é necessariamente uma imersão topológica reta. De fato: a aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (0, x)$ é uma imersão topológica oblíqua na origem $0 \in \mathbb{R}$, com respeito a 1-fatia oblíqua $S = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mas f não é uma imersão topológica reta, uma vez que $\pi_1 \circ f$ é a aplicação constante igual a zero. Por outro lado, uma imersão topológica reta é uma imersão topológica oblíqua, como mostramos na próxima proposição..

Proposição 4.9 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua e discreta. Se f é uma imersão topológica reta em $x_0 \in \mathbb{R}^n$, então f é uma imersão topológica oblíqua em x_0 .*

Prova: Por hipótese, a aplicação $\pi_1 \circ f$ é contínua, aberta e discreta e $|\deg(\pi_1 \circ f; x_0)| = 1$. Pelo Teorema 3.3, $\pi_1 \circ f$ aplica uma vizinhança U de x_0 em \mathbb{R}^n homeomorficamente sobre uma vizinhança V de $\pi_1 \circ f(x_0)$ em \mathbb{R}^n . Seja $\psi : V \rightarrow U$ o correspondente homeomorfismo inverso. Tome S como sendo a componente de $\pi_1^{-1}(V) \cap \text{im}(f)$ que contém $f(x_0)$. Então $S = f(U)$. Afirmamos que a aplicação restrita $f|_U^S : U \rightarrow S$ é um homeomorfismo, e assim $|\deg(f|_U^S; x_0)| = 1$. De fato: primeiro, note que $f|_U^S$ é claramente contínua; segundo, note que $f|_U^S$ é aberta, já que para um subconjunto aberto $A \subset U$, temos que $f|_U^S(A) = S \cap \pi_1^{-1}(\pi_1 \circ f(A))$; finalmente, note que $f|_U^S$ é uma bijeção cuja correspondente inversa é a aplicação $g : S \rightarrow U$ dada por $g(z) = \psi \circ \pi_1(z)$. Isto prova que f é uma imersão topológica oblíqua no ponto x_0 . \square

Uma vez que uma imersão de classe \mathcal{C}^1 (no sentido clássico) comporta-se localmente como uma inclusão, segue-se que uma tal aplicação é também uma imersão topológica oblíqua. O teorema a seguir mostra que também as imersões topológicas retas e oblíquas comportam-se localmente como inclusões; portanto, este teorema é uma versão do Teorema da Forma Local das Imersões para imersões topológicas retas e oblíquas.

Teorema 4.10 (Forma local das imersões topológicas) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ uma imersão topológica reta ou oblíqua no ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Então existem vizinhanças W de 0 em \mathbb{R}^n , U' de x_0 em \mathbb{R}^n e V' de $f(x_0)$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, e homeomorfismos $\psi : W \rightarrow U'$ e $\varphi : W \times B_1^m(0) \rightarrow V'$, tais que $\varphi^{-1} \circ f \circ \psi(x) = (x, 0)$ para todo $x \in W$.*

Prova: Seja U uma vizinhança de x_0 em \mathbb{R}^n e seja $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ uma n -fatia oblíqua, com $f(U) \subset S$, tal que a aplicação restrita $f|_U^S : U \rightarrow S$ é aberta e discreta e $|\deg(f|_U^S; x_0)| = 1$. Considere um homeomorfismo $h : B_1^n(0) \times B_1^m(0) \rightarrow V$ sobre uma vizinhança V de $f(x_0)$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $h(B_1^n(0) \times 0) = V \cap S$ e $h(0, 0) = f(x_0)$. Para nossos propósitos, podemos supor $f(U) \subset V$, e assim $f(U) \subset V \cap S$.

A aplicação composta $f' : U \rightarrow B_1^n(0)$ dada por $f'(x) = \pi_1 \circ h^{-1} \circ f(x)$ é contínua, aberta e discreta, aplica x_0 em 0 , e verifica $|\deg(f'; x_0)| = 1$. Pelo Teorema 3.3, f' aplica uma vizinhança $U' \subset U$ de x_0 homeomorficamente sobre uma vizinhança $W \subset B_1^n(0)$

de $0 \in \mathbb{R}^n$. Seja $\psi : W \rightarrow U'$ o homeomorfismo inverso correspondente. Considere o conjunto aberto $V' = h(W \times B_1^m(0)) \subset V$ e tome o homeomorfismo $\varphi : W \times B_1^m(0) \rightarrow V'$ como sendo o próprio h com as restrições óbvias no domínio e contra-domínio. Temos que $f(U') = \varphi(W \times 0) = V' \cap S$ e $\varphi^{-1}(f(U')) = W \times 0$. Além disso, $\pi_1 \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \psi(x) = f' \circ \psi(x) = x$ para todo $x \in W$. Portanto $\varphi^{-1} \circ f \circ \psi(x) = (x, 0)$ para todo $x \in W$. \square

Em [15, página 88], o conceito de imersão topológica é apresentado como segue: dados espaços topológicos X e Y , uma aplicação contínua $\iota : X \rightarrow Y$ é chamada uma *imersão topológica* se para cada ponto x de X existe uma vizinhança $U \subset X$ de x tal que $\iota|_U$ é um mergulho topológico, ou seja, um homeomorfismo sobre sua imagem.

Na prova do Teorema 4.10, está claro que $f|_U$ é um homeomorfismo sobre sua imagem, o que implica que se f é uma imersão topológica reta ou oblíqua, então f é uma imersão topológica no sentido de [15].

Para concluir, revelamos a aplicabilidade do Teorema 4.10 para uma aplicação diferenciável que não é uma imersão no sentido clássico. Considere a aplicação diferenciável e discreta $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x^3, x^3)$. Então f não é uma imersão na origem, no sentido diferencial, e consequentemente a versão clássica do Teorema da Forma Local das Imersões não se aplica a f no ponto 0. No entanto, $\pi_1 \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é o homeomorfismo $x \mapsto x^3$. Portanto, f é uma imersão topológica reta no ponto 0 e o Teorema 4.10 se aplica.

4.4 Equivalências entre os Teoremas da A. Implícita e da A. Inversa

Assim como as versões clássicas dos Teoremas da Aplicação Implícita e da Aplicação Inversa são equivalentes, também o são, sob adaptadas condições, as versões topológicas apresentadas nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente. É o que passamos a demonstrar, exatamente como apresentado em [1, Teorema 1.3].

Proposição 4.11 *Os Teoremas 3.1 e 3.3 são equivalentes, uma vez assumido no Teorema 3.1 que X seja uma variedade topológica orientável e a aplicação f seja aberta.*

Prova: Utilizamos diretamente o Teorema 3.1 para provar o Teorema 3.3. Por outra parte, como implicação direta do Teorema 3.3, provamos o Teorema 4.6. Este último, em sua versão estendida para variedades (que é verdadeira) é exatamente o Teorema 3.1 para aplicações abertas entre variedades topológicas. \square

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES E EXTENSÕES DOS RESULTADOS

Neste capítulo final, através de uma abordagem que envolve as técnicas diferenciais clássicas e as técnicas homológicas desenvolvidas em [1] e [2] e exploradas em todo o texto, apresentamos uma versão do Teorema da Aplicação Inversa para aplicações diferenciáveis que não são necessariamente de classe \mathcal{C}^1 , versão que ainda não se encontra na literatura. Como consequência, melhoramos a versão diferenciável do Teorema da Aplicação Implícita apresentada por Biasi, Gutierrez e dos Santos em [2]. Além disso, apresentamos um *teorema de existência e unicidade* para equações diferenciais ordinárias, que pode ser considerada uma versão do *teorema de existência* proposto em [2].

5.1 Versão diferenciável, mas não \mathcal{C}^1 , do Teorema da Aplicação Inversa

A versão clássica do Teorema da Aplicação Inversa, encontrada em todo bom livro de cálculo avançado ou análise em variedades, requer da aplicação dada que ela seja de classe \mathcal{C}^k , com $k \geq 1$. Por outra parte, no Teorema 3.3, a aplicação considerada pode ser apenas contínua, mas dela se exigem condições homológicas. Na versão do Teorema da Aplicação Inversa que apresentamos abaixo, pedimos que a aplicação dada seja diferenciável, mas não necessariamente de classe \mathcal{C}^1 , e a única condição sobre ela é de natureza puramente diferencial. O que pode ser mais interessante nesta versão é justamente o fato de ser uma versão intermediária – entre \mathcal{C}^0 e \mathcal{C}^1 – cuja demonstração inclui técnicas de natureza diferencial, mas utiliza de forma imprescindível à versão homológica.

Teorema 5.1 (Versão diferenciável do Teorema da Aplicação Inversa) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Se f não possui pontos singulares, então f é um difeomorfismo local.*

Prova: Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ conforme enunciado. Pela Proposição 2.19, f é discreta e $|\deg(f; x)| = 1$, para todo $x \in U$, e então, pela Proposição 2.16, f é aberta. Segue do Teorema 3.3 que f é um homeomorfismo local.

Para provar que f é um difeomorfismo local, seja $x_0 \in U$ e seja $V \subset U$ uma vizinhança de x_0 tal que $f|_V : V \rightarrow W = f(V)$ é um homeomorfismo. Seja $g : W \rightarrow V$ o homeomorfismo inverso de $f|_V$. Basta provar que g é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$.

Passo 1: *O quociente $\|g(y_0 + k) - g(y_0)\|/\|k\|$ é limitado para k suficientemente pequeno.* Com efeito: Como f é diferenciável em x_0 , podemos escrever

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Por ser contínua e não singular, a aplicação linear $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ assume um valor mínimo $2b > 0$ sobre a esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Logo,

$$\|f'(x_0) \cdot x\| \geq 2b\|x\| \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/\|h\| = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|r(h)\| \leq b\|h\| \quad \text{para } 0 < \|h\| < \delta.$$

Segue das duas últimas desigualdades que, para $0 < \|h\| < \delta$,

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| = \|f'(x_0) \cdot h + r(h)\| \geq \|f'(x_0) \cdot h\| - \|r(h)\| \geq 2b\|h\| - b\|h\| = b\|h\|.$$

Como V é aberto, podemos reduzir δ , se necessário, de modo que $x_0 + h \in V$, sempre que $0 \leq \|h\| < \delta$.

Como $g : W \rightarrow V$ é contínua, existe $\rho > 0$ tal que $g(B_\rho(y_0)) \subset B_\delta(x_0)$. Desta forma, se $k \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\|k\| < \rho$, então a imagem $g(y_0 + k) = x_0 + h_k$ para um único $h_k \in \mathbb{R}^n$, com $\|h_k\| < \delta$. Assim sendo, para $0 < \|k\| < \rho$, tem-se

$$\|k\| = \|y_0 + k - y_0\| = \|f(x_0 + h_k) - f(x_0)\| \geq b\|h_k\| = b\|x_0 + h_k - x_0\| = b\|g(y_0 + k) - g(y_0)\|.$$

Portanto,

$$\frac{\|g(y_0 + k) - g(y_0)\|}{\|k\|} \leq b^{-1} \quad \text{para } 0 < \|k\| < \rho.$$

Passo 2: A aplicação g é diferenciável em y_0 e $g'(y_0) = f'(x_0)^{-1}$. Com efeito: Para $k \in \mathbb{R}^n$, $0 < \|k\| < \rho$, defina

$$G(k) = \frac{g(y_0 + k) - g(y_0) - f'(x_0)^{-1} \cdot k}{\|k\|}.$$

Precisamos apenas provar que $\lim_{k \rightarrow 0} G(k) = 0$. Para tanto, observamos inicialmente que

$$G(k) = -f'(x_0)^{-1} \cdot \left(\frac{k - f'(x_0) \cdot (g(y_0 + k) - g(y_0))}{\|g(y_0 + k) - g(y_0)\|} \right) \frac{\|g(y_0 + k) - g(y_0)\|}{\|k\|}.$$

Como o fator $\|g(y_0 + k) - g(y_0)\|/\|k\|$ é limitado (pelo Passo 1) e a aplicação $f'(x_0)^{-1}$ é contínua (é linear), basta provar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k - f'(x_0) \cdot (g(y_0 + k) - g(y_0))}{\|g(y_0 + k) - g(y_0)\|} = 0.$$

Ponha $\Delta k = g(y_0 + k) - g(y_0)$. Então $y_0 + k = f(g(y_0 + k)) = f(g(y_0) + \Delta k) = f(x_0 + \Delta k)$ e, conseqüentemente, $k = f(x_0 + \Delta k) - f(x_0)$. Nestes termos, o limite acima torna-se

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta k) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta k}{\|\Delta k\|}.$$

Como g é contínua, $\Delta k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow 0$. Como, além disso, f é diferenciável em x_0 , o limite acima é igual a zero. \square

Diferentemente do que ocorre no Teorema da Aplicação Inversa para aplicações de classe \mathcal{C}^k , com $k \geq 1$, no Teorema 5.1 não é suficiente exigir que f seja não singular apenas num ponto x_0 para se concluir que f seja um difeomorfismo local neste ponto. É o que ilustramos com o exemplo a seguir.

Exemplo 5.2 Considere a aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(x) = x/2 + x^2 \sin(1/x) \quad \text{para} \quad x \neq 0.$$

Um cálculo elementar mostra que f é diferenciável, com derivada

$$f'(0) = 1/2 \quad \text{e} \quad f'(x) = 1/2 + 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \quad \text{para} \quad x \neq 0.$$

Segue da Proposição 2.19 (e pode ser verificado diretamente) que f é discreta em 0, ou seja, $f(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$ numa vizinhança de 0. No entanto, f não é injetora em qualquer vizinhança de 0. É o que passamos a demonstrar: Se f fosse injetora no

intervalo aberto $(-\varepsilon, \varepsilon)$, então, como $f'(0) > 0$, seria f estritamente crescente em tal intervalo. Contudo, para $\varepsilon < 1/4$ e qualquer $0 \neq x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tem-se

$$f'(x) = 1/2 + 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) < 1/2 + 2\varepsilon - \cos(1/x) < 1 - \cos(1/x).$$

É claro que existe um natural p tal que $x_p = 1/(2p\pi) \in (0, \varepsilon)$, e para tal ponto verifica-se $f'(x_p) < 0$, o que mostra que f não pode ser estritamente crescente em $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e, portanto, f não é injetora em qualquer vizinhança da origem.

Podemos explorar um pouco mais este exemplo. Observe que, para todo $k \geq p$, onde p é o natural do parágrafo anterior, tem-se que $x_k = 1/(2k\pi)$ verifica $f'(x_k) < 0$. Assim, temos construído explicitamente uma sequência $(x_k)_k$ no intervalo $(0, \varepsilon)$ tal que x_k converge para 0, mas $f'(x_k)$ não converge para $f'(0)$, já que cada $f'(x_k) < 0$ e $f'(0) = 1/2$.

Por outra parte, ainda para $\varepsilon < 1/4$ e qualquer $0 \neq x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tem-se

$$f'(x) = 1/2 + 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) > 1/2 - 2\varepsilon - \cos(1/x) > -\cos(1/x).$$

Assim, podemos encontrar uma sequência $(y_k)_k$ de pontos de $(0, \varepsilon)$, convergindo a 0, tal que $f'(y_k) > 0$ para todo k . Por conseguinte, uma vez que $f'(x)$ é contínua em $(0, \varepsilon)$, existe uma sequência $(z_k)_k$ de pontos de $(0, \varepsilon)$ tal que z_k converge a zero e $f'(z_k) = 0$ para todo z_k . Portanto, apesar de ser um ponto não singular para f , a origem é limite de uma sequência de pontos singulares.

Um exemplo semelhante, que apresentamos a seguir, ilustra a situação em que a versão \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, do Teorema da Aplicação Inversa não se aplica, pelo fato da derivada da aplicação envolvida não ser contínua, mas o Teorema 5.1 se aplica.

Exemplo 5.3 Considere a aplicação $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(0) = 0 \quad \text{e} \quad g(x) = 4x + x^2 \operatorname{sen}(1/x) \quad \text{para } x \neq 0.$$

Temos que g é diferenciável, com derivada

$$g'(0) = 4 \quad \text{e} \quad g'(x) = 4 + 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) \quad \text{para } x \neq 0.$$

Embora g' não seja contínua em 0, pode-se garantir que g' nunca se anula. Com efeito, para todo $0 \neq x \in (-1, 1)$, tem-se

$$g'(x) \geq 3 + 2x \operatorname{sen}(1/x) \geq 3 - 2x \geq 1.$$

Consequentemente, $g'(x) \geq 1$ para todo $x \in (-1, 1)$. Portanto, o Teorema 5.1 se aplica, e dele resulta que g é um difeomorfismo local.

A aplicação g deste último exemplo será lembrada e utilizada na Seção 5.2.

Na versão diferenciável (mas não \mathcal{C}^1) do Teorema da Aplicação Implícita apresentada no Corolário 3.2, para a função $y = \varphi(x)$, definida implicitamente pela equação $f(x, y) = z_0$, garante-se a continuidade, mas não a diferenciabilidade. Utilizando o Teorema 5.1, melhoramos o resultado do Corolário 3.2, no caso em que $X = \mathbb{R}^n$ (ou uma n -variedade diferenciável orientável), provando que a aplicação implícita φ é diferenciável.

Teorema 5.4 (Versão diferenciável do Teorema da Aplicação Implícita) *Seja $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ um aberto e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Suponha que o ponto $(x_0, y_0) \in U$ possua uma vizinhança $A \subset U$ com a propriedade que $\det \partial_2 f(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in A$. Então existe uma vizinhança V de x_0 em \mathbb{R}^m e uma única aplicação diferenciável $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(x, \varphi(x)) = f(x_0, y_0)$ para todo $x \in V$. Além disso, $\varphi(x_0) = y_0$ e, para cada $x \in V$, tem-se $\varphi'(x) = -[\partial_2 f(x, \varphi(x))]^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x))$.*

Prova: A prova segue exatamente as mesmas linhas daquela que se faz para aplicações de classe \mathcal{C}^k , com $k \geq 1$, utilizando, no momento devido, o Teorema 5.1 ao invés da versão clássica \mathcal{C}^k do Teorema da Aplicação Inversa. Para completude, apresentamos a prova.

Defina $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ por $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Então F é diferenciável e $\det F(x, y) = \det \partial_2 f(x, y)$, o que implica que F é não singular na vizinhança A de (x_0, y_0) . Pelo Teorema 5.1, F é um difeomorfismo local em (x_0, y_0) , ou seja, existe uma vizinhança $B \subset A$ de (x_0, y_0) tal que $F|_B : B \rightarrow F(B)$ é um difeomorfismo.

Reduzindo adequadamente a vizinhança B , podemos fazer com que $F(B)$ torne-se um aberto básico de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, ou seja, $F(B) = V \times W$, sendo $V \subset \mathbb{R}^m$ uma vizinhança de x_0 e $W \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança de $f(x_0, y_0)$.

Seja $G : V \times W \rightarrow B$ o difeomorfismo inverso de $F|_B$. Como F deixa fixa a primeira coordenada, G faz o mesmo e, portanto, G tem a forma $G(x, y) = (x, G_2(x, y))$. A aplicação $G_2 : V \times W \rightarrow B$ é diferenciável e, para cada $(x, w) \in V \times W$, tem-se $(x, w) = F \circ G(x, w) = (x, f(x, G_2(x, w)))$, donde $f(x, G_2(x, w)) = w$.

Ponha $z_0 = f(x_0, y_0)$ e defina $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\varphi(x) = G_2(x, z_0)$. Então φ é diferenciável e, para todo $x \in V$, tem-se $f(x, \varphi(x)) = z_0$. Isto prova a existência da aplicação φ conforme enunciado.

Para provar a unicidade, suponha que seja $h : V' \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, definida numa vizinhança $V' \subset \mathbb{R}^m$ de x_0 , satisfazendo $f(x, h(x)) = z_0$ para todo x em V' . Então, para todo $x \in V \cap V'$, tem-se $(x, h(x)) = G \circ F(x, h(x)) = G(x, f(x, h(x))) = G(x, z_0) = (x, G_2(x, z_0)) = (x, \varphi(x))$, donde $h(x) = \varphi(x)$.

A expressão enunciada para $\varphi'(x)$ segue da Regra da Cadeia. □

5.2 Existência e unicidade de solução para equações diferenciais

Em [2], os autores apresentam um *teorema de existência* (Corolário 4.3 de [2]) para equações diferenciais ordinárias, cuja demonstração baseia-se no Corolário 3.2 deste texto (Corolário 4.2 de [2]) e segue de aplicação direta do Teorema de Peano (Teorema 1.13 de [20]). Sendo este último um teorema apenas de existência, assim o é o resultado de [2].

A seguir, com pequeno endurecimento nas hipóteses do Corolário 4.3 de [2], e utilizando o Teorema 5.4 deste texto, criamos condições que permitem a aplicação do Teorema de Picard (Teorema 1.8 de [20]), com o que demonstramos um *teorema de existência e unicidade* para equações diferenciais ordinárias.

Para chegarmos ao teorema, precisamos introduzir alguns conceitos.

No que segue, dada uma aplicação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, denotamos por $\|T\|_{\max}$ a sua *norma do máximo* e por $\|T\|_{\min}$ a sua *quase-norma no mínimo* (ou *conorma*), ou seja,

$$\|T\|_{\max} = \max_{\|x\|=1} \|T \cdot x\| \quad \text{e} \quad \|T\|_{\min} = \min_{\|x\|=1} \|T \cdot x\|.$$

A norma do máximo $\|T\|_{\max}$ é uma medida da expansão máxima de T , enquanto que a pseudo-norma do mínimo $\|T\|_{\min}$ é uma medida na expansão mínima de T .

No caso especial em que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, tem-se que $\|T\|_{\min} \neq 0$ se e somente se T é invertível; e se este o caso e T^{-1} é a aplicação inversa de T , então (ver [17, Seção 4.1]):

$$\|T^{-1}\|_{\max} = \|T\|_{\min}^{-1}.$$

Seja U um aberto em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Dados uma aplicação diferenciável $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um subconjunto $V \subset U$, definimos

$$\mu_1(F; V) = \sup_{v \in V} \|\partial_1 F(v)\|_{\max} \quad \text{e} \quad \mu_2(F; V) = \inf_{v \in V} \|\partial_2 F(v)\|_{\min}.$$

Tem-se que $\mu_2(F; V)$ está sempre definido como um número real não negativo, ao passo que $\mu_1(F; V)$ pode não existir como número real, caso em que escrevemos $\mu_1(F; V) = \infty$.

Observação 5.5 Decorre das definições de μ_1 e μ_2 que:

- (i) $\mu_1(F; V) < \infty$ se e somente se a aplicação derivada parcial $\partial_1 F \in \mathcal{L}(U; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$ é limitada em V .
- (ii) Se $\mu_2(F; V) > 0$, então, para cada $v \in V$, a derivada parcial $\partial_2 F(v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ é

um isomorfismo, cujo isomorfismo inverso $\partial_2 F(v)^{-1}$ tem norma do máximo

$$\|\partial_2 F(v)^{-1}\|_{\max} = \|\partial_2 F(v)\|_{\min}^{-1} \leq \mu_2(F; V)^{-1},$$

do que resulta que a aplicação $\partial_2 F(\cdot)^{-1} : V \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ é limitada.

Definição 5.6 Diz-se que F tem *variação cruzada pseudo-limitada* no ponto $u_0 \in U$ se existe uma vizinhança $V \subset U$ de u_0 tal que $\mu_1(F; V) < \infty$ e $\mu_2(F; V) > 0$.

No que segue, consideramos a identificação natural de espaços $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n+1}$, de tal modo que um ponto w de um subespaço (aberto) W de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ possa ser escrito indistintamente como $w = ((t, x), y)$ ou como $w = (t, x, y)$. Contudo, estabelecemos que, dada uma aplicação diferenciável $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, escrevemos:

- $\partial_1 F(w)$ para denotar a derivada parcial de F com relação a (t, x) no ponto w ;
- $\partial_2 F(w)$ para denotar a derivada parcial de F com relação a y .

Teorema 5.7 (Existência e unicidade de solução para equações diferenciais) .

Seja $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ aberto e seja $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável que tem variação cruzada pseudo-limitada em $w_0 = (t_0, x_0, y_0) \in W$, com $F(w_0) = z_0$. Então existe e é unicamente definida, numa vizinhança de t_0 , a solução para a equação diferencial

$$F(t, x, x') = z_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = y_0.$$

Prova: Pelo Teorema 5.4, existe uma vizinhança $I \times V$ de (t_0, x_0) e uma única aplicação diferenciável $\varphi : I \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$, cujo gráfico está contido em W , tal que $\varphi(t_0, x_0) = y_0$ e $F(t, x, \varphi(t, x)) = z_0$ para todo $(t, x) \in I \times V$. Além disso, para cada $u = (t, x) \in I \times V$,

$$\varphi'(u) = -[\partial_2 F(u, \varphi(u))]^{-1} \cdot \partial_1 F(u, \varphi(u)).$$

Como F tem variação cruzada pseudo-limitada em w_0 e φ é contínua, podemos supor que o domínio $I \times V$ de φ seja pequeno o suficiente de modo que, para cada $u \in I \times V$, o ponto $(u, \varphi(u))$ pertença a uma vizinhança $W_0 \subset W$ de w_0 em que se verifique

$$\mu_1(F; W_0) = b_1 < \infty \quad \text{e} \quad \mu_2(F; W_0) = b_2 > 0.$$

Nestas condições, segue da Observação 5.5 que, para todo $u \in I \times V$, tem-se

$$\|\varphi'(u)\|_{\max} \leq \|[\partial_2 F(u, \varphi(u))]^{-1}\|_{\max} \cdot \|\partial_1 F(u, \varphi(u))\|_{\max} \leq b_2^{-1} b_1.$$

Isto prova que a aplicação derivada $\varphi' : I \times V \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é limitada e, portanto, a aplicação φ é lipschitziana. Pelo Teorema de Picard, a equação diferencial $x' = \varphi(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, possui uma única solução $x(t)$ numa vizinhança de t_0 , a qual, obviamente, satisfaz também $x'(t_0) = y_0$. \square

Exemplo 5.8 Seja $I = (-1, 1)$ e seja $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável, com

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad f(t, 0) \neq 0 \quad \text{para todo } t \neq 0.$$

Suponha que a aplicação derivada $f' : I^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ seja limitada numa vizinhança V de $(0, 0)$ em I^2 ; (e.g. se f é de classe \mathcal{C}^1). Considere a aplicação diferenciável $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida, como no Exemplo 5.3, por $g(0) = 0$ e $g(y) = 4y + y^2 \sin(1/y)$ para $y \neq 0$. Finalmente, considere a aplicação $F : I^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(t, x, y) = f(t, x) + g(y).$$

Então F é diferenciável (mas não de classe \mathcal{C}^1), com derivadas parciais

$$\partial_1 F(t, x, y) = f'(t, x) \quad \text{e} \quad \partial_2 F(t, x, y) = g'(y).$$

Como f' é limitada em V , tem-se $\mu_1(F; V \times I) < \infty$.

Por outro lado, segue do Exemplo 5.3 que $\|\partial_2 F(t, x, y)\| = |g'(y)| \geq 1$ para todo $(t, x, y) \in I^2 \times I$, o que implica que $\mu_2(F; V \times I) > 0$.

Portanto, F tem variação cruzada pseudo-limitada na origem $(0, 0, 0) \in I^2 \times I$.

Segue do Teorema 5.7 que a equação diferencial $F(t, x, x') = 0$ possui uma única solução $x = x(t)$, definida numa vizinhança $(-\varepsilon, \varepsilon)$ da origem, verificando $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$.

A hipótese $f(t, 0) \neq 0$ para $t \neq 0$ implica que a solução $x(t)$ não é trivial, isto é, não é a aplicação constante igual a zero.

Devido às boas propriedades da função g definida no Exemplos 5.3 e utilizada no Exemplo 5.8, podemos reutilizá-la para produzir exemplo similar a este último, invertendo o papel das funções f e g . É o que fazemos no exemplo a seguir. Por simplicidade, utilizamos uma equação diferencial autônoma.

Exemplo 5.9 Seja $I = (-1, 1)$ e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com $f(0) = 0$, satisfazendo a propriedade que, para alguma vizinhança $J \subset I$ de 0, tenha-se $\inf_{y \in J} |f'(y)| > 0$; (e.g. se f é de classe \mathcal{C}^1 e não possui ponto singular). Mais uma vez, seja $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida por $g(0) = 0$ e $g(x) = 4x + x^2 \sin(1/x)$ para $x \neq 0$. Finalmente, considere $F : I^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(t, x, y) = g(x) + f(y).$$

Então F é diferenciável (mas não de classe \mathcal{C}^1), com derivadas parciais

$$\partial_1 F(t, x, y) = (0, g'(x)) \quad \text{e} \quad \partial_2 F(t, x, y) = f'(y).$$

Temos $g'(0) = 4$ e $g'(x) = 4 + 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ para $x \neq 0$, do que segue que $1 \leq g'(x) \leq 7$ para todo $x \in I$. Consequentemente $\|\partial_1 F(t, x, y)\|_{\max} = |g'(x)| \leq 7$ para todo $(t, x, y) \in I^2 \times I$, o que mostra que $\mu_1(F; I^2 \times J) < \infty$.

Por outra parte, a hipótese $\inf_{y \in J} |f'(y)| > 0$ implica $\mu_2(F; I^2 \times J) > 0$.

Portanto, F tem variação cruzada pseudo-limitada na origem $(0, 0, 0) \in I^2 \times I$. Pelo Teorema 5.7, a equação diferencial $F(t, x, x') = 0$ possui uma única solução $x = x(t)$, definida numa vizinhança $(-\varepsilon, \varepsilon)$ da origem, verificando $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$.

Como g é um difeomorfismo local (Exemplo 5.3), a solução $x(t)$ não é trivial, isto é, não é a aplicação constante igual a zero.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Barreto, A. P., Fenille, M. C. and Hartmann L. *Inverse Mapping Theorem and Local Forms of Continuous Mappings*. Topology and its Applications 197 (2016), 10–20. <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2015.10.013>
- [2] Biasi, C., Gutierrez, C. and dos Santos, E. L. *The implicit function theorem for continuous functions*. Topological Methods in Nonlinear Analysis 32 no. 1 (2008), 177–185. <https://projecteuclid.org/euclid.tmna/1463150471>
- [3] Biasi, C. and dos Santos, E. L. *A Homological Version of the Implicit Function Theorem*. Semigroup Forum 72 (2006), 353–361. <https://doi.org.ez34.periodicos.capes.gov.br/10.1007/s00233-006-0601-x>
- [4] Brouwer, L. E. J. *Zur Invarianz des n -dimensionalen Gebiets*. Mathematische Annalen 72 (1912), 55–56. <http://eudml.org/doc/158534>
- [5] Chernavskii, A. V. *Finite-to-one open mappings of manifolds*. Matematicheskii Sbornik 107 no. 3 (1964), 357–369. <http://mi.mathnet.ru/eng/msb4483>
- [6] Church, P. T. *Discrete maps on manifolds*. Michigan Mathematical Journal 25 (1977), 351–357. <http://dx.doi.org/10.1307/mmj/1029002116>
- [7] Cristea, M. *Open discrete mappings in space*, Revue Roumaine des Mathematiques Pures et Appliquees 41 (1996), 592–605. <https://www.researchgate.net/publication/265937166>
- [8] Dold, A. *Lectures on Algebraic Topology*. Springer, 1980.
- [9] Greenberg, M. J. *Lectures on Algebraic Topology*. W. A. Benjamin, Inc., 1977.

- [10] Guillemin, V. and Pollack, A. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [11] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [12] Hu, S. T. *Homotopy Theory*. Academic Press, Inc., 1959.
- [13] Hurewicz, W. and Wallman, H. *Dimension theory*. Princeton university press Princeton, 1948.
- [14] Krantz, S. G. and Parks, H. R. *The Implicit Function Theorem: history, theory and applications*. Birkhäuser, 2002.
- [15] Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer Science and Business Media, 2003.
- [16] Munkres, J. R. *Topology*. Second edition. Prentice Hall, Inc., 2000.
- [17] Robinson, C. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. Second Edition. CCR Press, 1999.
- [18] Rolfsen, D. *Knots and Links*. AMS Chelsea Publishing, 2000.
- [19] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. Second edition. McGraw-Hill Book Company, 1964.
- [20] Sotomayor, J. *Equações Diferenciais Ordinárias*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [21] Väisälä, J. *Discrete open mappings on manifolds*. Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Seria A 392 (1966), 1–9. <http://www.acadsci.fi/mathematica/1967/no392pp01-10.pdf>
- [22] Vick, J. W. *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. Second edition. Springer-Verlag New York, Inc., 1994.