

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

ALVARO DANIEL HERRERA ARROYO

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE UMA AERONAVE MULTI-ROTOR NÃO
CONVENCIONAL**

UBERLÂNDIA

2018

Alvaro Daniel Herrera Arroyo

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE UMA AERONAVE MULTI-ROTOR NÃO
CONVENCIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação em
Engenharia Mecatrônica da Faculdade de
Engenharia Mecânica da Universidade
Federal de Uberlândia, como parte dos
requisitos para a obtenção do grau de
**BACHAREL em ENGENHARIA
MECATRÔNICA.**

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Sanches

UBERLÂNDIA

2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, à minha família, à minha namorada e aos meus amigos e professores que fizeram parte da minha trajetória acadêmica ao longo da graduação. Acredito que por mais que este projeto fosse um sonho para mim, ele não se concretizaria sem o auxílio e guia de todos vocês. Agradeço também à Universidade Federal de Uberlândia e ao Brasil por ter me dado esta oportunidade de me superar, sonhar alto e demonstrar o que eu sou capaz de realizar. Mesmo em condições de adversidade, uma única oportunidade como a que me foi dada pelo programa PEC-G pôde mudar minha vida e me fornecer as ferramentas necessárias para lavrar meu caminho profissional.

RESUMO

O presente trabalho trata sobre a modelagem dinâmica de uma aeronave não tripulada e não convencional, que possui características de sustentação híbrida. Através da alteração da orientação angular do conjunto asa + rotor, em relação à linha de referência da fuselagem, com capacidade de decolar verticalmente e prosseguir em voo de cruzeiro. A aeronave pode ser definida como um VTOL (*Vertical Take Off and Landing*, por sua siglas em inglês) que utiliza superfícies aerodinâmicas e vários rotores. Com três rotores coaxiais capazes de girar independentemente em relação ao resto do corpo, isto torna a aeronave um veículo de morfologicamente variável e assimétrico. Sua dinâmica é definida a partir dos princípios da Mecânica Clássica e das relações aerodinâmicas pertinentes. Um modelo 3D no software de CAD (Computing Aided Design) SolidWorks® é realizado para obter suas relações de massa e inércia. Para análise do modelo dinâmico, as equações do movimento são linearizadas em torno de duas condições de equilíbrio distintas na forma de espaço de estados. A primeira condição refere-se ao voo pairado no ar (hover) e a segunda trata de um voo em modo cruzeiro, no qual a aeronave precisa se manter a uma velocidade conhecida para gerar suficiente sustentação nas suas superfícies aerodinâmicas. O uso de rotores coaxiais permite desprezar os efeitos giroscópicos causados pelo giro de cada um dos rotores em relação ao resto do corpo. Por fim, avaliou-se o comportamento dinâmico e os critérios de estabilidade da aeronave para cada uma das condições de equilíbrio por meio de algoritmos implementados na plataforma MATLAB. Através da análise da resposta dinâmica temporal aos diferentes comandos da aeronave, foi possível constatar que esta é instável naturalmente e que requer de comandos para restabelecer sua condição de equilíbrio.

Palavras-chave: Multi-rotor. VANT. Rotor Coaxial. Modelagem Dinâmica. Mecânica do Voo. Tilt-rotor.

ABSTRACT

The following work refers to the dynamic modelling of an unconventional unmanned air vehicle (UAV) that possesses hybrid lifting characteristics. It is able to change the angular orientation of a wing-rotor set, when referred to the fuselage reference line, which allows it to take off in a vertical path and then proceed flight horizontally on cruiser mode. The aircraft can be so defined as VTOL (*Vertical Take Off and Landing*) which employs aerodynamic surfaces and propellers to produce lifting. The use of three coaxial-rotors that tilt independently from the rest of the aircraft's body, turns the aircraft into a morphologically variable and asymmetric vehicle. The dynamic equations are defined from Classic Mechanics principles and the required aerodynamics' assumptions. A 3D model is produced in the CAD (*Computing Aided Design*) software SolidWorks® in order to obtain mass and inertia characteristics. To analyze the dynamic model, the aircraft's equations of motion are linearized into two different steady-state conditions and set into the form of state-spaces. The first steady-state condition refers to hover and the second one is thought as being the cruiser mode flight, in which the aircraft needs to maintain a certain flight speed to produce enough lifting on it's wings. The use of coaxial rotors allows to neglect gyroscopic effects caused by the tilt of each rotor with respect to the rest of the body. Finally, the dynamic behavior and stability criteria were evaluated for each one of the steady-state conditions with an algorithm implementation in the MATLAB® platform. The analysis of the aircraft's dynamic response to the possible aircraft's commands showed that it is a naturally unstable vehicle with the need of command inputs to reestablish a steady-state condition.

Key-words: Multi-rotor. UAV. Coaxial Rotor. Dynamic Modelling. Flight Mechanics. Tilt-rotor.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	i
Lista de Abreviaturas e Siglas	ii
Lista de Tabelas	iv
Lista de Símbolos	v
1. Introdução.....	1
2. Objetivo	4
3. Esboço Inicial	5
4. Modelo Dinâmico	6
4.1 Sistemas de Referência.....	6
4.2 Equações de Força e Momento.....	11
4.2.1 Reação devido às forças	11
4.2.2 Reação devido aos momentos	12
4.2.2.1 Obtenção dos momentos e produtos de inércia	15
4.2.2.2 Obtenção das variações temporais do tensor de inércia da aeronave	34
4.2.3 Definição das Forças Externas.....	36
4.2.3.a Força Gravitacional.....	36
4.2.3.b Força Aerodinâmica das semi-asas.....	37
4.2.3.c Força de Arrasto da Fuselagem	40
4.2.3.d Força de Tração	40
4.2.4 Definição dos Momentos Externos	45
4.2.4.a Efeito Giroscópio das Hélices	45
4.2.4.b Momentos devido à força de tração dos rotores coaxiais.....	50
4.2.4.c Momentos Aerodinâmicos devido as duas semi-asas	52

4.2.4.d Torque devido ao desbalanceamento de rotação.....	53
4.2.5 Equações Cinemáticas	57
4.2.6 Equações Finais do Movimento.....	59
5. Concepção 3D da Aeronave.....	62
5.1 Concepção da semi-asa	63
5.2 Concepção dos rotores coaxiais.....	66
5.3 Concepção da fuselagem	67
6. Linearização do Modelo Dinâmico.....	70
6.1 Linearização em Condição de Voo Pairado.....	71
6.1.1 Equações SSE - Modo Voo Pairado.....	72
6.1.2 Equações PLDE - Modo Voo Pairado.....	74
6.2 Linearização em Condição de Voo Cruzeiro	78
6.2.1 Equações SSE - Modo Voo Cruzeiro	79
6.2.2 Equações PLDE - Modo Voo Cruzeiro	80
7. Comportamento Dinâmico do Sistema	90
7.1 Comportamento dinâmico em modo voo pairado	91
7.2 Comportamento dinâmico em modo voo cruzeiro	100
8. Conclusão.....	114
Bibliografia.....	116
APÊNDICE I	118
APÊNDICE II	121

APÊNDICE III 123

APÊNDICE IV 128

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - VTOL não tripulados	1
Figura 2 - V-22 "Osprey"	2
Figura 3 - Configuração tricóptero	2
Figura 4 - Exemplo de um rotor coaxial, montado sobre o helicóptero Sikorsky X2.3	
Figura 5 - Concepção inicial da aeronave.....	5
Figura 6 - Sistema de referência fixo ao corpo/fuselagem da aeronave.....	6
Figura 7 - Sistemas de referência dos rotores laterais.	7
Figura 8 - Sistemas de referência das semi-asas.....	8
Figura 9 - Sistema dos ventos.....	9
Figura 10 - Ângulo de inclinação do rotor direito e do rotor esquerdo	10
Figura 11 - Vista traseira do ângulo de inclinação do rotor traseiro.	10
Figura 12 - Condição de não simetria.	14
Figura 13 - Centro de gravidade de cada componente em relação ao centro de gravidade conjunto	15
Figura 14 - Plano de simetria $X_{w1}Y_{w1}$ de uma semi-asa.	27
Figura 15 - Modelo de disco atuador.....	42
Figura 16 - Resultado final da concepção de uma semi-asa.	64
Figura 17 - Vista superior da semi-asa.	64
Figura 18 - Vista de perfil da semi-asa.	64
Figura 19 - Curvas dos coeficientes aerodinâmicos do perfil NACA-0009.....	65
Figura 20 - Rotor coaxial frontal $R1$ ou $R2$	66
Figura 21 - Rotor Coaxial traseiro $R3$	67
Figura 22 - Distribuição interna dos componentes dentro da fuselagem.....	67
Figura 23 - Formato final da fuselagem	68
Figura 24 - Concepção final da aeronave.	69
Figura 25 - Vista superior da aeronave com suas semi-asas inclinadas	69
Figura 26 - Sistemas de referencia na aeronave final.....	91

Figura 27 - Vista lateral da aeronave em modo de voo pairado.....	92
Figura 28 - Resposta dinâmica à entrada de $\phi E1$ como impulso para o modo de voo pairado.	94
Figura 29 - Resposta dinâmica à entrada de $\phi E2$ como impulso para o modo de voo pairado.	95
Figura 30 - Resposta dinâmica à entrada de $\phi E3$ como impulso para o modo de voo pairado.	96
Figura 31 - Resposta dinâmica à entrada de $TR1$ como impulso para o modo de voo pairado.	97
Figura 32 - Resposta dinâmica à entrada de $TR2$ como impulso para o modo de voo pairado.	98
Figura 33 - Resposta dinâmica à entrada de $TR3$ como impulso para o modo de voo pairado.	99
Figura 34 - Vista lateral da aeronave em modo de voo cruzeiro.....	101
Figura 35 - Resposta dinâmica à entrada de $\phi E1$ como impulso para modo de voo cruzeiro.....	104
Figura 36 - Resposta dinâmica à entrada de $\phi E2$ como impulso para modo de voo cruzeiro.....	105
Figura 37 - Resposta dinâmica quando $\phi E1$ e $\phi E2$ começam com 1° de variação, desde a condição inicial de equilíbrio para modo de voo cruzeiro.....	106
Figura 38 - Resposta dinâmica à entrada de $\phi E3$ como impulso para modo de voo cruzeiro.....	108
Figura 39 - Resposta dinâmica à entrada de $TR1$ como impulso para modo de voo cruzeiro.....	109
Figura 40 - Resposta dinâmica à entrada de $TR2$ como impulso para modo de voo cruzeiro.....	110
Figura 41 - Resposta dinâmica quando $TR1$ e $TR2$ começam com $0,2 N$ de variação, desde a condição inicial de equilíbrio para modo de voo cruzeiro.....	111
Figura 42 - Resposta dinâmica à entrada de $TR3$ como impulso para modo de voo cruzeiro.....	112

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAD	Computed Aided Design (desenho assistido por computador)
CAE	Computed Aided Engineering (engenharia assistida por computador)
CAM	Computed Aided Mathematics (matemática assistida por computador)
CAS	Control Augmentation System (sistema de controle aprimorado)
CFD	Computational Fluid Dynamics (dinâmica de fluídos computacional)
FPV	First Person View (visão em primeira pessoa)
PLDE	Perturber Linear Differential Equations (equações diferenciais lineares perturbadas)
SAS	Stability Augmentation System (sistema de estabilidade aprimorada)
SSE	Steady State Equations (equações de regime permanente)
VTOL	Vertical Take Off and Landing (decolagem e pouso vertical)

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Lista de Equipamentos	62
Tabela 2 - Características de Operação do motor Brushless 2212-920 Kv:.....	90
Tabela 3 - Variáveis das Matrizes do Espaço de Estados para o Modo Voo Pairado	91
Tabela 4 -Variáveis das Matrizes do Espaço de Estados para o Modo Voo Cruzeiro	100

LISTA DE SÍMBOLOS

- α - Ângulo de ataque da aeronave
- α_{W_i} - Ângulo de ataque da i-ésima semi-asa
- β - Raio da hélice
- ϕ - Ângulo de rolagem (em torno de x)
- Φ_{E_i} - Ângulo de inclinação do i-ésimo rotor coaxial
- θ - Ângulo de arfagem (em torno de y)
- $\vec{\theta}$ - Vetor de coordenadas angulares de Euler
- ψ - Ângulo de guinada (em torno de z)
- ρ - Densidade
- $\vec{\omega}$ - Velocidade angular em relação ao sistema fixo ao corpo
- Ω_i - Velocidade de rotação da i-ésima hélice
- \vec{a} - Vetor aceleração
- \vec{A} - Vetor de exemplo para referir a variação de um vetor qualquer ao referencial inercial
- A_D - Área do disco atuador
- A_{f_x} - Área projetada da aeronave, normal ao eixo x
- A_{f_y} - Área projetada da aeronave, normal ao eixo y
- A_{f_z} - Área projetada da aeronave, normal ao eixo z
- AR_{W_i} - Razão de alongamento da i-ésima semi-asa
- b - Constante auxiliar do momentos por desbalanceamento das hélices
- B - Sistema fixo ao centro gravitacional da aeronave

- $C_{l_{W_i}}$ - Coeficiente de sustentação da i-ésima semi-asa
- $C_{l_{0W_i}}$ - Coeficiente de sustentação da i-ésima semi-asa para ângulo de ataque nulo
- $C_{l_{\alpha W_i}}$ - Coeficiente de sustentação por ângulo de ataque da i-ésima semi-asa
- $C_{d_{W_i}}$ - Coeficiente de arrasto da i-ésima semi-asa
- $C_{d_{0W_i}}$ - Coeficiente de arrasto parasita da i-ésima semi-asa
- C_{d_x} - Coeficiente de arrasto da área projetada da aeronave, normal ao eixo x
- C_{d_y} - Coeficiente de arrasto da área projetada da aeronave, normal ao eixo y
- C_{d_z} - Coeficiente de arrasto da área projetada da aeronave, normal ao eixo z
- C_{D_h} - Coeficiente de arrasto da hélice
- C_Q - Coeficiente de torque
- C_T - Coeficiente de tração
- dm - Diferencial de massa
- D_{W_i} - Força de arrasto atuante na i-ésima semi-asa
- e - Coeficiente de Oswald
- \vec{F} - Vetor do somatório das forças externas
- \vec{F}_A - Vetor final das forças aerodinâmicas
- $\vec{F}_{A_{W_i}}$ - Vetor de força aerodinâmica atuante na i-ésima semi-asa
- \vec{F}_D - Vetor força de arrasto da fuselagem
- \vec{F}_G - Vetor de força gravitacional
- F_x - Componente x do somatório das forças externas
- F_y - Componente y do somatório das forças externas
- F_z - Componente z do somatório das forças externas
- g - Aceleração gravitacional

- \vec{H} - Vetor momento angular
- i - Corrente elétrica no motor brushless
- i_0 - Corrente elétrica a vazio do motor brushless
- I - Sistema Inercial fixo à Terra
- I_{prop} - Momento de inércia da hélice
- I_{xxF_b} - Momento de inércia em x da fuselagem
- $I_{xxW_{i_b}}$ - Momento de inércia em x da i-ésima semi-asa vista desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $I_{xxW_{i_{w_i}}}$ - Momento de inércia em x da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema fixo a ela
- $I_{xxW_{i_{P_{b_i}}}}$ - Momento de inércia em x da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $I_{xxR_{i_b}}$ - Momento de inércia em x do i-ésimo rotor coaxial visto desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $I_{xxR_{i_{P_{b_i}}}}$ - Momento de inércia em x do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $I_{xxR_{i_{r_i}}}$ - Momento de inércia em x do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema fixo a ele
- $I_{xyW_{i_b}}$ - Produto de inércia em xy da i-ésima semi-asa vista desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $I_{xyW_{i_{w_i}}}$ - Produto de inércia xy da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema fixo a ela
- $I_{xyW_{i_{P_{b_i}}}}$ - Produto de inércia em xy da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $I_{xyR_{i_b}}$ - Produto de inércia em xy do i-ésimo rotor coaxial visto desde o sistema fixo ao corpo da aeronave

- $I_{xyR_iP_{bi}}$ - Produto de inércia em xy do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $I_{xyR_i r_i}$ - Produto de inércia xy do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema fixo a ele
- $I_{xzW_{ib}}$ - Produto de inércia em xz da i-ésima semi-asa vista desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $I_{xzW_{iw_i}}$ - Produto de inércia xz da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema fixo a ela
- $I_{xzW_{iP_{bi}}}$ - Produto de inércia em xz da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $I_{xzR_{ib}}$ - Produto de inércia em xz do i-ésimo rotor coaxial visto desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $I_{xzR_{iP_{bi}}}$ - Produto de inércia em xz do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $I_{xzR_{i r_i}}$ - Produto de inércia xz do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema fixo a ele
- I_{yyF_b} - Momento de inércia em y da fuselagem
- $I_{yyW_{ib}}$ - Momento de inércia em y da i-ésima semi-asa vista desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $I_{yyW_{iw_i}}$ - Momento de inércia em y da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema fixo a ela
- $I_{yyW_{iP_{bi}}}$ - Momento de inércia em y da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $I_{yyR_{ib}}$ - Momento de inércia em y do i-ésimo rotor coaxial visto desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $I_{yyR_{iP_{bi}}}$ - Momento de inércia em y do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave

- $I_{yyR_{i r_i}}$ - Momento de inércia em y do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema fixo a ele
- $I_{yzW_{i b}}$ - Produto de inércia em yz da i-ésima semi-asa vista desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $I_{yzW_{i w_i}}$ - Produto de inércia yz da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema fixo a ela
- $I_{yzW_{i P_{b_i}}}$ - Produto de inércia em yz da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $I_{yzR_{i b}}$ - Produto de inércia em yz do i-ésimo rotor coaxial visto desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $I_{yzR_{i P_{b_i}}}$ - Produto de inércia em yz do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $I_{yzR_{i r_i}}$ - Produto de inércia yz do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema fixo a ele
- I_{zzF_b} - Momento de inércia em z da fuselagem
- $I_{zzW_{i b}}$ - Momento de inércia em z da i-ésima semi-asa vista desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $I_{zzW_{i w_i}}$ - Momento de inércia em z da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema fixo a ela
- $I_{zzW_{i P_{b_i}}}$ - Momento de inércia em z da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $I_{zzR_{i b}}$ - Momento de inércia em z do i-ésimo rotor coaxial visto desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $I_{zzR_{i P_{b_i}}}$ - Momento de inércia em z do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $I_{zzR_{i r_i}}$ - Momento de inércia em z do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema fixo a ele
- J_{A_b} - Tensor de inércia total da aeronave

- J_{F_b} - Tensor de inércia da fuselagem
- $J_{W_{i_b}}$ - Tensor de Inércia da i-ésima semi-asa vista desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $J_{W_{i_{w_i}}}$ - Tensor de Inércia da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema fixo a ela
- $J_{W_{i_{P_{b_i}}}}$ - Tensor de Inércia da i-ésima semi-asa vista desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $J_{R_{i_b}}$ - Tensor de Inércia do i-ésimo rotor coaxial visto desde o sistema fixo ao corpo da aeronave
- $J_{R_{i_{P_{b_i}}}}$ - Tensor de Inércia do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema paralelo ao corpo da aeronave
- $J_{R_{i_{r_i}}}$ - Tensor de Inércia do i-ésimo rotor coaxial visto desde seu respectivo sistema fixo a ele
- K_E - Constante de tensão por velocidade de rotação
- k_d - Constante auxiliar de arrasto
- K_t - Constante de torque por corrente
- K_τ - Constante de torque por tração
- L_{W_i} - Força de sustentação atuante na i-ésima semi-asa
- m_{R_i} - Massa do i-ésimo rotor coaxial
- m_{W_1} - Massa da i-ésima semi-asa
- m - Massa da aeronave
- \vec{M} - Vetor do somatório dos momentos externos
- $\vec{M}_{A_{W_1}}$ - Momento aerodinâmico
- $M_{AC_{W_i}}$ - Momento aerodinâmico do perfil aerodinâmico da i-ésima semi-asa
- \vec{M}_{T_R} - Momento devido às forças de tração
- M_x - Componente x do somatório dos momentos externos
- M_y - Componente y do somatório dos momentos externos
- M_z - Componente z do somatório dos momentos externos

- P - Velocidade angular em torno de x do sistema fixo ao corpo
- PB - Sistema Paralelo ao sistema fixo ao corpo da aeronave
- P_{bm} - Potência consumida pelo motor brushless
- Q - Velocidade angular em torno de y do sistema fixo ao corpo
- Q_{bm} - Torque produzido por um motor brushless
- \vec{r} - Vetor posição
- r_i - Sistema fixo ao i-ésimo rotor coaxial
- \vec{r}_{ACW_i} - Vetor posição do centro de gravidade da i-ésima semi-asa em relação ao centro de gravidade da aeronave
- \vec{r}_{R_i} - Vetor posição do centro de gravidade do i-ésimo rotor coaxial em relação ao centro de gravidade da aeronave
- R - Velocidade angular em torno de z do sistema fixo ao corpo
- R_m - Resistência interna do motor brushless
- $Rot_{y_{w_i}}$ - Rotação em torno de y do sistema fixo à i-ésima semi-asa
- $Rot_{-y_{r_i}}$ - Rotação em torno de -y do sistema fixo ao i-ésimo rotor coaxial
- $Rot_{-x_{r_3}}$ - Rotação em torno de -x do sistema fixo ao terceiro rotor coaxial
- $R_{xyz}|_I^B$ - Matriz de transformação do sistema inercial para o sistema fixo ao corpo
- R_1 - Rotor coaxial direito
- R_2 - Rotor coaxial esquerdo
- R_3 - Rotor coaxial traseiro
- S - Sistema dos ventos
- $S_{A_{w_i}}$ - Área projetada da i-ésima semi-asa
- \vec{T} - Vetor força de Tração
- T_{bm} - Tração produzida por um único motor brushless
- \vec{T}_G - Torque giroscópico
- T_{R_i} - Tração do i-ésimo rotor coaxial

- $\vec{\tau}_{C_{DR_i}}$ - Vetor de momento de contra torque da i-ésima hélice
- $\vec{\tau}_{D_{R_i}}$ - Vetor de momento de arrasto da i-ésima hélice
- $\vec{\tau}_{(D+C_D)_{R_i}}$ - Vetor de momento de arrasto mais momento de contra torque da i-ésima hélice
- U - Velocidade linear na direção x do sistema fixo ao corpo
- v_h - Velocidade induzida pelo disco atuador
- \vec{V} - Vetor velocidade no sistema referencial do corpo
- V - Velocidade linear na direção y do sistema fixo ao corpo
- V_A - Velocidade axial do vento no disco atuador
- V_{bm} - Tensão elétrica sobre o motor brushless
- V_h - Velocidade tangencial na ponta da hélice
- V_∞ - Velocidade relativa dos ventos
- w_i - Sistema fixo à i-ésima semi-asa coaxial
- W - Velocidade linear na direção y do sistema fixo ao corpo
- X_b - Coordenada x do sistema fixo ao corpo da aeronave
- X_I - Coordenada x do sistema inercial
- X_{w_i} - Coordenada x do sistema fixo à i-ésima semi-asa
- $X_{P_{b_i}}$ - Coordenada x do sistema paralelo ao corpo da aeronave
- X_{r_i} - Coordenada x do sistema fixo ao i-ésimo rotor coaxial
- X_{R_i} - Coordenada em x do centro de gravidade do i-ésimo rotor coaxial em relação ao centro de gravidade da aeronave
- X_S - Coordenada x do sistema dos ventos
- Y_b - Coordenada y do sistema fixo ao corpo da aeronave
- Y_I - Coordenada y do sistema inercial
- Y_{w_i} - Coordenada y do sistema fixo à i-ésima semi-asa

- $Y_{P_{b_i}}$ - Coordenada y do sistema paralelo ao corpo da aeronave
- Y_{r_i} - Coordenada y do sistema fixo ao i-ésimo rotor coaxial
- Y_{R_i} - Coordenada em y do do centro de gravidade i-ésimo rotor coaxial em relação ao centro de gravidade da aeronave
- Z_b - Coordenada z do sistema fixo ao corpo da aeronave
- Z_I - Coordenada z do sistema inercial
- $Z_{P_{b_i}}$ - Coordenada z do sistema paralelo ao corpo da aeronave
- Z_{w_i} - Coordenada z do sistema fixo à i-ésima semi-asa
- Z_{r_i} - Coordenada z do sistema fixo ao i-ésimo rotor coaxial
- z_{R_i} - Coordenada em z do centro de gravidade do i-ésimo rotor coaxial em relação ao centro de gravidade da aeronave
- Z_S - Coordenada z do sistema dos ventos

1. Introdução

Em pouco menos de uma década, o mundo viu surgir veículos aéreos não tripulados (VANT's) para uso civil com diferentes características em relação à forma de sustentação empregada para mantê-los no ar. Entre os mais comuns se destacam dois tipos: os VANT's de asa fixa, que proporcionam uma dinâmica semelhante à dos aviões, e os VANT's de asa rotativa mais comumente conhecidos como Drones e que se caracterizam por ter semelhança com a dinâmica de um helicóptero. Dentre as aeronaves de asa rotativa surgiram os multi-rotor que nada mais são veículos que fazem uso de vários rotores para gerar sustentação e comandar a aeronave (BOUABDALLAH, 2007). Se bem existe um estudo em constante evolução para estas duas classes de aeronaves quando se refere ao seu comando e controle, ultimamente tem surgido uma tendência de misturar a capacidade de sustentação em movimento das aeronaves de asa fixa, com a estabilidade e versatilidade que aeronaves multi-rotor proporcionam. As pesquisas de MIKAMI (2015) e THEYS (2016) (Figura 1) apresentam modelos de veículos aéreos não tripulados com capacidade de levantar voo verticalmente (conhecido como VTOL) e que possuem uma superfície aerodinâmica que gera sustentação quando o veículo atinge uma determinada velocidade.



Figura 1 - VTOL não tripulados. Fonte: (MIKAMI, 2015) e (THEYS, 2016).

É importante ressaltar que MIKAMI (2015) considera a aeronave com a capacidade de inclinação das suas superfícies aerodinâmicas e rotores, enquanto THEYS (2016) apresenta uma superfície aerodinâmica inicialmente na vertical e este muda para uma condição de voo exclusivamente horizontal através da rotação de todo o corpo da aeronave. De todas as formas, em ambas as pesquisas ressalta-se a condição de simetria que a aeronave mantém ao longo da sua operação, o que permite a simplificação do modelo dinâmico.

Durante a década dos anos oitenta, o governo americano em parceria com a companhia aeroespacial Boeing® desenvolveram o projeto de uma aeronave tripulada que integrasse as características de um multi-rotor e de um avião. O projeto foi conhecido como V-22 "Osprey" e, apesar do seu historial de erros e acertos, a marinha americana dos Estados Unidos faz uso desta aeronave como sua "insígnia" nos dias de hoje (Figura 2).



Figura 2 - V-22 “Osprey”. Fonte: (www.boeing.com/defense/v-22-osprey/. Acessado em: 26 out. 2017).

Este veículo difere dinamicamente dos veículos apresentados por MIKAMI (2015) e THEYS (2016) devido a que possui um grande rotor na extremidade de cada semi-asa que tem a capacidade de se inclinar em relação ao plano horizontal do corpo e das semi-asas da aeronave para fazê-la decolar verticalmente e posteriormente avançar para frente. É com base nesta aeronave e as ideias propostas por MIKAMI (2015), ONEN (2015) e SERVAIS (2015) que surge a inspiração do projeto apresentado neste trabalho.

As pesquisas de ONEN (2015) e SERVAIS (2015) mostram a configuração multi-rotor “tricóptero” (Figura 3) na qual os três rotores da aeronave giram num mesmo sentido, o que induz um momento contrário ao sentido de giro dos rotores no corpo da aeronave. Isto exige o uso de um servo-motor para inclinar o rotor traseiro e controlar a guinada do veículo.

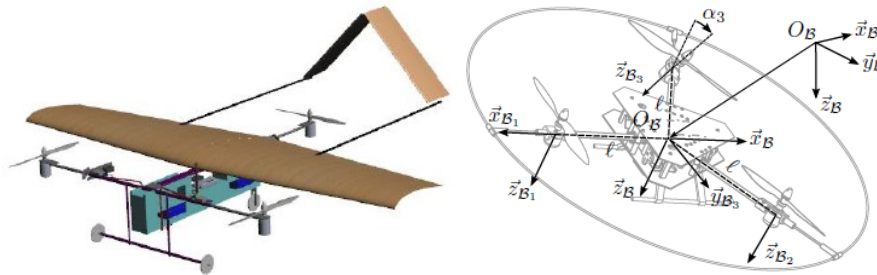


Figura 3 - Configuração tricóptero não convencional (esquerda) e tricóptero com inclinação de rotores (direita).
Fonte: (ONEN, 2015), (SERVAIS, 2015).

Com base nesta característica dinâmica e tomando como exemplo o projeto proposto pela companhia aeroespacial Lock Heed Martin® no seu helicóptero tripulado Sikorsky X2 (Figura 4) é considerado o uso de rotores em configuração “coaxial” para anular aos pares o momento induzido por cada rotor (já que cada rotor gira em sentido contrário em torno de um mesmo eixo) e gerar força de tração em um mesmo sentido, assim como é estudado por COLEMAN (1997).



Figura 4 - Exemplo de um rotor coaxial, montado sobre o helicóptero Sikorsky X2. (www.defensereview.com. Acessado em: 20 abr. 2017).

O motivo para estudar a dinâmica de um veículo que integre as características dinâmicas das aeronaves dos projetos e pesquisas citadas acima, é o de ir um passo a mais na evolução ou criação de aeronaves não tripuladas mais versáteis e controláveis. Que possam decolar verticalmente, se deslocar em alta velocidade horizontalmente (gerando sustentação nas suas superfícies aerodinâmicas) e ter a capacidade de atingir e manter diferentes condições de equilíbrio dinâmico ao longo da sua operação, por meio do uso de técnicas de controle que levem em consideração a dinâmica de uma aeronave de formato variável devido ao deslocamento relativo entre as partes que a conformam e que permitem a aplicação de comandos com o fim de controlá-la.

Os possíveis movimentos de uma máquina é o que se entende por graus de liberdade e que é amplamente estudado na área da Robótica, mesmo quando o movimento seja relativo entre as partes do sistema. É devido a isto que, com o surgimento de projetos como o que é aqui proposto, interligados à área aeronáutica, surgem áreas de estudo como a descrita pela Universidade da Pensilvânia no seu curso “*Robotics: Aerial Robotics*” [<https://pt.coursera.org/learn/robotics-flight>. Acessado em: 8 jun. 2017>]. Sendo a área da robótica muito relacionada ao âmbito de trabalho de um Engenheiro Mecatrônico.

2. Objetivo

O propósito desta monografia é a modelagem e o estudo da mecânica do voo de uma aeronave não tripulada capaz de integrar as características dinâmicas de um multi-rotor e as de uma aeronave convencional. Isto é possível uma vez que as semi-asas e o rotor de cauda podem rotacionar em relação ao seu eixo longitudinal, possibilitando a alteração da direção da força propulsiva do grupo moto-propulsor (rotores coaxiais). Esta adaptação morfológica permite a aeronave diferentes configurações de equilíbrio, a saber: voo pairado e voo cruzeiro, por exemplo. A partir de um levantamento dos seus possíveis equipamentos, pode-se obter uma previsão das massas e inércias através de um modelo realizado em software CAD. Por fim, avaliar o comportamento e a estabilidade do sistema em duas condições de equilíbrio dinâmico distintas.

3. Esboço Inicial:

De forma a exemplificar como seria o modelo inicial da aeronave, foi elaborado no software CAD SolidWorks® um desenho de uma aeronave genérica que auxiliaria na definição dos diferentes sistemas de coordenadas requeridas para definir a posição relativa de cada componente da aeronave. A Figura 5 apresenta esta ideia inicial. Vale ressaltar que este esboço não levou em consideração propriedades de massa. O conceito inicial apresenta uma fuselagem composta por um corpo central e três “braços”, nos quais, no final de cada um, está acoplado um rotor coaxial capaz de girar. Ambos discos de hélices estão devidamente acoplados ao eixo do motor de forma a produzir força de tração em um mesmo sentido mesmo girando em sentidos contrários.

Os braços da aeronave tem, em sua concepção inicial, a aparência de uma treliça, mas poderiam ser pensados simplesmente como tubos conectores ou superfícies aerodinâmicas rígidas em relação ao corpo central da fuselagem.



Figura 5 - Concepção inicial da aeronave.

4. Modelo Dinâmico:

4.1 - Sistemas de Coordenadas ou Referências:

Serão considerados oito referenciais principais de referência de coordenadas e três referenciais auxiliares:

- **Referenciais principais de referência:**

- **Referencial Inercial “I”:**

Referencial fixo a terra com a coordenada Z_I apontando para o núcleo/centro da Terra. X_I aponta para o Norte e Y_I para o Leste.

- **Referencial fixo ao corpo “B”:**

Referencial que tem por origem o centro de gravidade da aeronave. X_b aponta do centro para o “nariz” da aeronave, ao longo da linha considerada “referencial”. Esta linha pode ser escolhida como linha da “corda” da aeronave ou ao longo do “chão/base” da aeronave. O eixo Y_b é considerado saindo do centro para a “asa-direita” e o eixo Z_b é considerado do centro para baixo da aeronave, conforme a regra da mão direita (Figura 6).

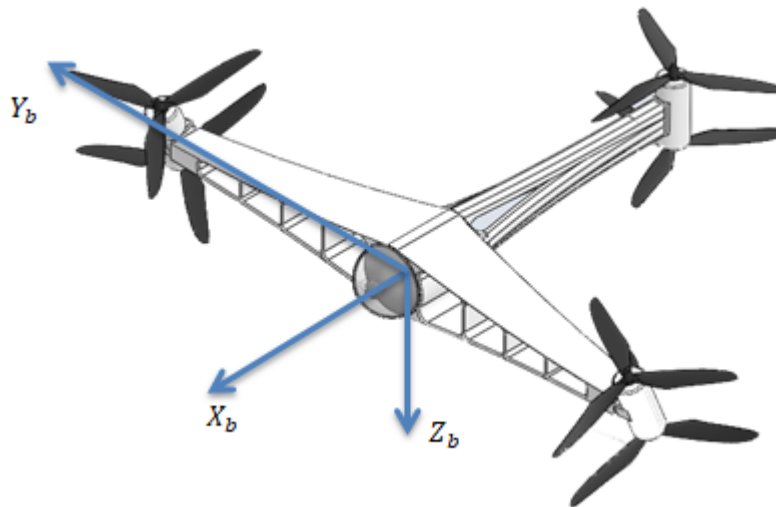


Figura 6 - Sistema de referência fixo ao corpo/fuselagem da aeronave.

- **Referencial fixo a cada rotor “ r_i ” (três sistemas de referência):**

Referencial que tem por origem o centro de gravidade de cada rotor coaxial. Para os rotores coaxiais 1 e 2 (direito e esquerdo), a coordenada X_{r_i} ($i = 1, 2, 3$) aponta axialmente no mesmo sentido do vetor tração do rotor, o vetor Y_{r_i} aponta no mesmo sentido que Y_b , isto quer dizer que são paralelos. Finalmente o eixo Z_{r_i} aponta ortogonalmente a X_{r_i} e Y_{r_i} , de acordo com a regra da mão direita (Figura 7).

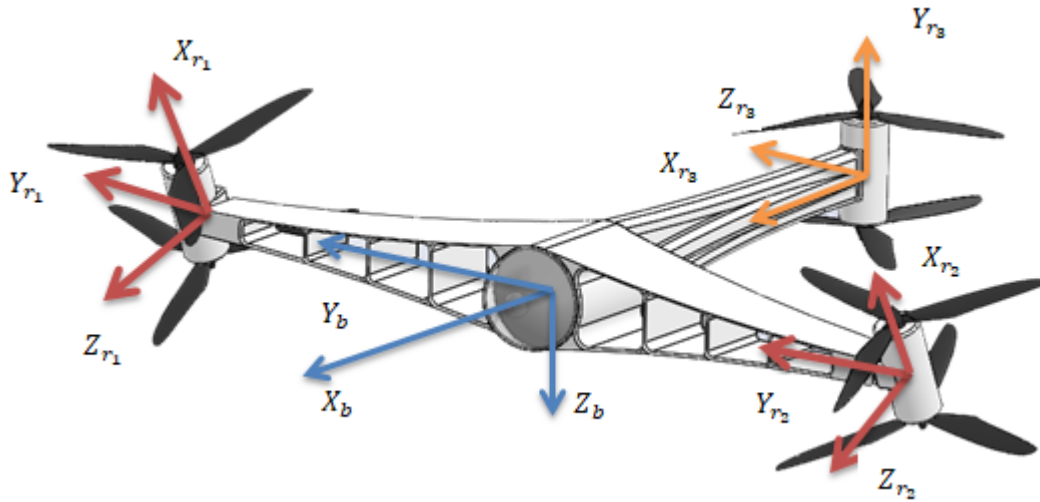


Figura 7 - Sistemas de referência dos rotores laterais.

Já para o rotor coaxial 3 (traseiro), seu eixo X_{r_3} aponta no mesmo sentido de X_b , isto quer dizer que são paralelos. O vetor Y_{r_3} aponta axialmente no sentido do vetor tração do rotor coaxial 3, de tal forma que quando o rotor encontra-se “deitado” Y_{r_3} torna-se paralelo a Y_b . Já o vetor Z_{r_3} é orientado ortogonalmente de acordo à regra da mão direita (figura 7).

- **Referencial fixo a cada semi-asa “ w_i ” (dois sistemas de referência):**

Tomando como referência a aeronave proposta por MIKAMI (2015), o conceito prévio da aeronave foi mudado para que cada semi-asa girasse solidariamente com seu respectivo rotor coaxial (Figura 8). Esta configuração permite ter um mesmo ângulo de ataque de cada semi-asa igual ao ângulo de ataque que cada rotor lateral teria e, desta forma, o fluxo de ar vindo do rotor para o bordo de ataque da semi-asa seria sempre o mesmo, independentemente da angulação na qual o rotor estiver inclinado (o ângulo de ataque da semi-asa/rotor é diferente do ângulo de inclinação da semi-asa/rotor). O referencial fixo em cada semi-asa tem como origem o seu centro de gravidade. Os vetores base destes referenciais ($X_{w_1}, Y_{w_1}, Z_{w_1}$) e ($X_{w_2}, Y_{w_2}, Z_{w_2}$) são constantemente paralelos aos vetores base dos seus respectivos rotores coaxiais R_1 ($X_{r_1}, Y_{r_1}, Z_{r_1}$) e R_2 ($X_{r_2}, Y_{r_2}, Z_{r_2}$). Desta forma, quando considerados os dois

componentes solidários (semi-asa e rotor coaxial) existe um ângulo nulo entre seus vetores X_{w_j} e X_{r_j} (com $j = 1, 2$).

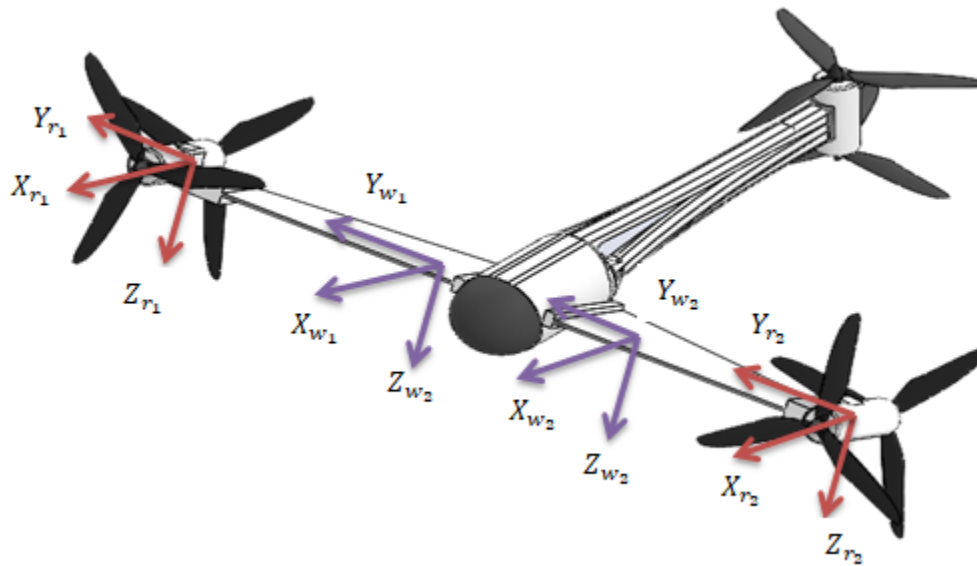


Figura 8 - Sistemas de referência das semi- asas, com segundo modelo da aeronave.

- **Referencial dos ventos “S”:**

Referencial orientado de igual forma que o fixo ao corpo e com a mesma origem, com a diferença de que os eixos X_s e Z_s encontram-se inclinados de um ângulo α que representa o ângulo de ataque da aeronave (Figura 9, com α mostrado positivo). Este sistema é útil para definir as forças de sustentação e arrasto (neste caso, exclusivamente para as semi- asas do Drone) as quais são função da direção do vento relativo à aeronave.

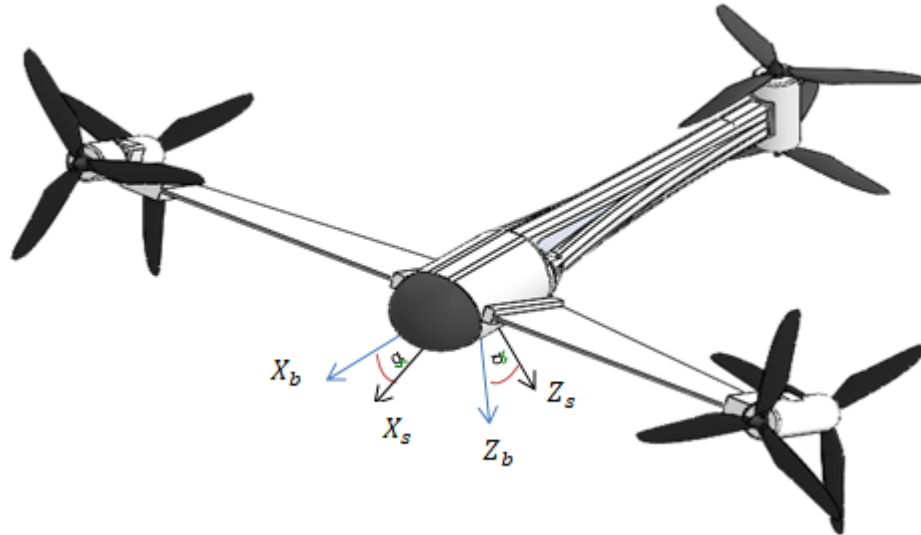


Figura 9 - Sistema de referência dos ventos.

- **Sistemas de Referência Auxiliares:**

- **Referencial paralelo ao corpo “PB” (cinco sistemas de referência):**

Referencial que tem por origem o centro de gravidade de cada rotor (ou de cada semi-asa) e que não é fixo ao mesmo. Isto quer dizer que a base composta pelos vetores $X_{P_{b_i}}$, $Y_{P_{b_i}}$ e $Z_{P_{b_i}}$ ($i = 1, 2, 3$) é paralela à base composta pelos vetores X_b , Y_b e Z_b (referencial baricentro B). O propósito destes sistemas de referência auxiliares é o de projetar os vetores da base fixa a cada rotor (X_{r_i} , Y_{r_i} e Z_{r_i}), ou semi-asa (X_{w_j} , Y_{w_j} e Z_{w_j}), sobre sistemas de referência que sejam paralelos (respectivamente) ao referencial fixo ao centro de gravidade da aeronave. Permitindo definir possíveis variações de inércia, assim como projetar vetores de força, e trasladá-los através do teorema de Huygens-Steiner para o sistema fixo ao corpo. Entende-se que entre o sistema de referência fixo a um rotor coaxial (ou semi-asa) e seu respectivo sistema de referência paralelo ao corpo, existirá um ângulo ϕ_{E_i} (Figuras 10 e 11). Sendo este o ângulo de “tilt” ou rotação de cada rotor coaxial ou semi-asa.

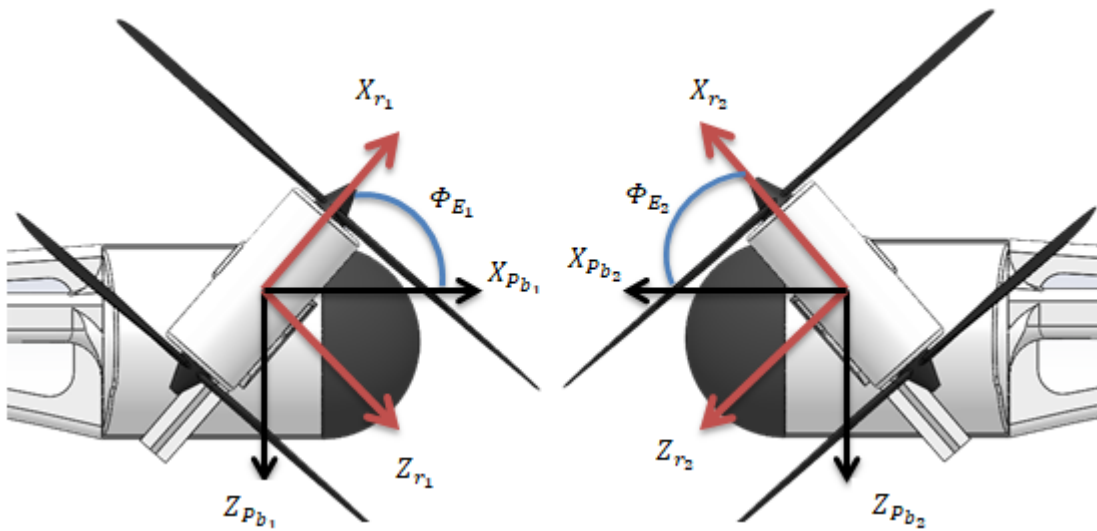


Figura 10 - Ângulo de inclinação rotor direito (esquerda) e do rotor esquerdo (direita).

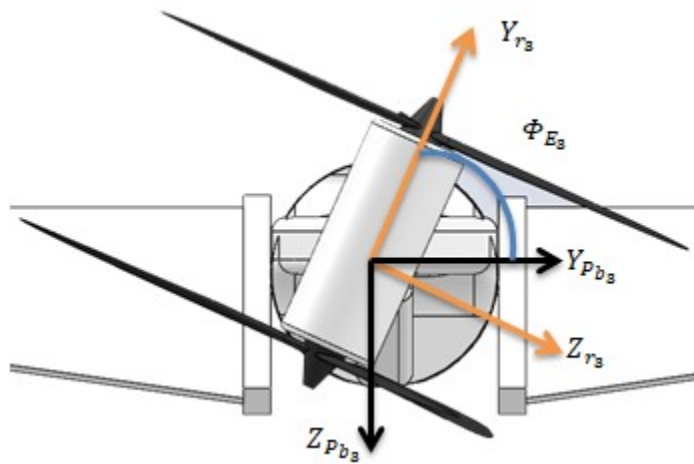


Figura 11 - Vista traseira do ângulo de inclinação do rotor traseiro.

Os ângulos de Euler serão utilizados para descrever a orientação da aeronave definida originalmente no referencial fixo ao corpo (X_b , Y_b e Z_b), em relação ao sistema de referência inercial (X_I , Y_I e Z_I).

4.2 Equações de Força e Momento:

De acordo com YECHOUT (2003, equação 4.31), a velocidade linear da aeronave definida no sistema de referência fixo ao corpo é descrita pelo seguinte vetor: $\vec{V} = [U \ V \ W]^T$. Por outro lado, o vetor velocidade angular da aeronave é descrito no sistema fixo ao corpo e é dado por: $\vec{\omega} = [P \ Q \ R]^T$, com P, Q e R sendo as velocidades angulares em torno dos eixos X_b , Y_b e Z_b , respectivamente, e estas velocidades serão consideradas positivas de acordo com a regra da mão direita aplicada sobre cada um dos eixos do corpo.

O vetor força externa é contemplado inicialmente como sendo: $\vec{F} = [F_x \ F_y \ F_z]^T$. Vale a pena ressaltar que todas as forças que conformarão este último vetor deverão ser descritas no mesmo sistema de referência B fixo ao corpo. Por outro lado o vetor de momentos externos será contemplado inicialmente como: $\vec{M} = [M_x \ M_y \ M_z]^T$ e, da mesma forma, todos os momentos que conformarão o vetor de momentos externos deverão ser descritos no sistema de referência B . Assim como foi proposto para as velocidades angulares, os momentos serão considerados positivos de acordo com a regra da mão direita aplicada sobre cada um dos eixos do corpo.

O motivo de descrever forças, velocidades e momentos no sistema fixo ao corpo B , é o de tentar simplificar a variação de momentos e produtos de inércia da aeronave, já que se estes fossem descritos em um sistema inercial, estariam sujeitos a uma variação temporal em função da orientação da aeronave em relação ao sistema fixo à Terra.

De acordo com HIBBELER (2004, equação 20.6), a derivada temporal de qualquer vetor \vec{A} observado no referencial inercial (X_I, Y_I, Z_I) é igual à taxa temporal de mudança do vetor \vec{A} observado no referencial de translação-rotação (X_b, Y_b, Z_b), mais $\vec{\Omega} \times \vec{A}$, a mudança de \vec{A} provocada pela rotação do sistema (X_b, Y_b, Z_b). Isto é, $\vec{\Omega}$ produz uma mudança na direção de \vec{A} , vista desde o referencial (X_I, Y_I, Z_I). Ou seja:

$$\dot{\vec{A}} = \left(\dot{\vec{A}} \right)_{X_b Y_b Z_b} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (4.2,1)$$

4.2.1 Reação devido às forças:

De acordo com YECHOUT (2003, equação 4.29) e podendo-se assumir uma massa constante para a aeronave, é possível de escrever a segunda lei de Newton da seguinte forma:

$$m \left[\frac{d(\vec{V})}{dt} \right]_I = m \vec{a}_I = \vec{F} \quad (4.2.1,1)$$

Sabe-se que a segunda lei de Newton apenas é válida com respeito ao referencial inercial. Porém, as equações podem ser expressas no sistema de referência fixo ao corpo. Se as equações são expressas no sistema de referência fixo ao corpo, o fato do sistema estar girando com respeito a um referencial inercial deve ser levado em conta. Isto é possível graças à aplicação da equação (4.2,1).

$$(\vec{a}_I)_B = (\vec{V})_B + (\vec{\omega})_B \times (\vec{V})_B \quad (4.2.1,2)$$

Portanto,

$$(\vec{a}_I)_B = \begin{bmatrix} \dot{U} + QW - RV \\ \dot{V} + RU - PW \\ \dot{W} + PV - QU \end{bmatrix}_B \quad (4.2.1,3)$$

Então, o vetor força será dado por:

$$m \begin{bmatrix} \dot{U} + QW - RV \\ \dot{V} + RU - PW \\ \dot{W} + PV - QU \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}_B = \vec{F}_B \quad (4.2.1,4)$$

Já que o lado esquerdo da equação (4.2.1,4) foi representado no corpo, o lado direito (forças) deverá também ser representado de igual maneira mais adiante.

4.2.2 Reação devido aos momentos:

Pela segunda lei de Newton, a soma de momentos será igual à massa do sistema vezes a variação instantânea do momento angular no tempo:

$$m \left[\frac{d(\vec{H})}{dt} \right]_I = \vec{M} \quad (4.2.2,1)$$

Considerando um elemento de massa finita da aeronave, a posição do mesmo pode ser descrita pelo seguinte vetor:

$$\vec{r}_{dm} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (4.2.2,2)$$

(Com $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sendo os vetores unitários do sistema fixo no corpo)

Aplicando a equação (4.2,1)

$$\left[\frac{d(\vec{r}_{dm})}{dt} \right]_I = \vec{V}_{dm} = \left[\frac{d(\vec{r}_{dm})}{dt} \right]_B + (\vec{\omega})_B \times \vec{r}_{dm} \quad (4.2.2,3)$$

Assumindo inicialmente como um corpo rígido, $\left[\frac{d(\vec{r}_{dm})}{dt} \right]_B = 0$, já que \vec{r}_{dm} é assumido como constante.

Portanto, resolvendo o produto vetorial que resta na equação (4.2.2,3), tem-se:

$$\vec{V}_{dm} = \begin{bmatrix} Qz - Ry \\ Rx - Pz \\ Py - Qx \end{bmatrix} \quad (4.2.2,4)$$

Portanto, o momento angular do elemento de massa dm será:

$$d(\vec{H}_{dm}) = \vec{r}_{dm} \times (dm\vec{V}_{dm}) \quad (4.2.2,5)$$

Substituindo as equações (4.2.2,2) e (4.2.2,4) em (4.2.2,5) e resolvendo,

$$d(\vec{H}_{dm}) = \begin{bmatrix} P(y^2 + z^2)dm - Qxydm - Rxzdm \\ Q(x^2 + z^2)dm - Ryzdm - Pxydm \\ R(x^2 + y^2)dm - Pxzdm - Qyzdm \end{bmatrix} \quad (4.2.2,6)$$

Integrando esta última equação em função da massa e separando os termos:

$$\vec{H}_{dm} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int yx dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int yz dm \\ - \int zx dm & - \int zy dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (4.2.2,7)$$

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$$

Observa-se que a última matriz da equação (4.2.2,7) é exatamente o tensor de inércia da aeronave.

Agora, devido à capacidade dos rotores girarem em torno da aeronave (tilt) é possível perceber que o tensor de inércia será variável em função do tempo e em função da posição dos ângulos ϕ_{E_i} ($i = 1, 2, 3$). Isto quer dizer que a aeronave pode não manter uma condição de simetria (em relação aos eixos centrais da aeronave) durante o voo (Figura 12).

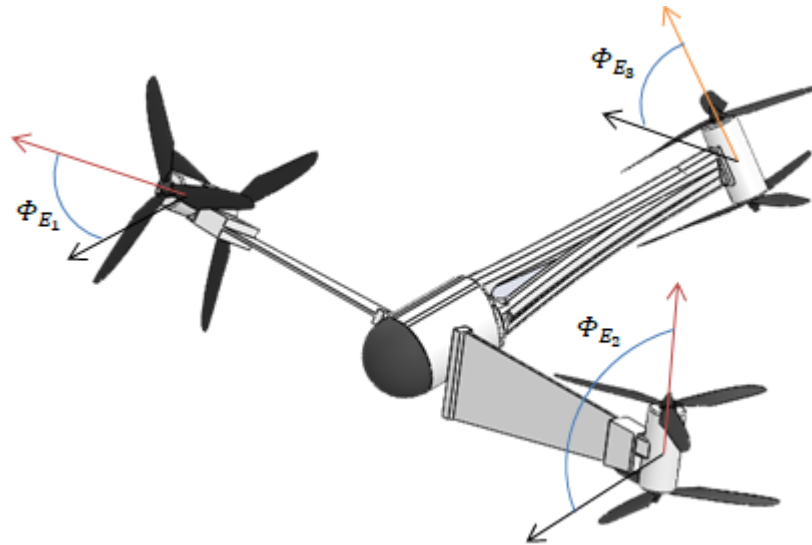


Figura 12 - Condição de não simetria.

Por tanto, para achar uma expressão que defina o tensor de inércia, o procedimento utilizado será determinar os momentos e produtos de inércia de cada um dos rotores ou semi-asas em seus respectivos sistemas de referência fixos a eles (X_{r_i} , Y_{r_i} e Z_{r_i} ou X_{w_j} , Y_{w_j} e Z_{w_j}) para depois, por meio dos seus respectivos ângulos de rotação ϕ_{E_i} ($i = 1, 2, 3$), transferir as inércias aos sistemas de referência paralelos ao referencial fixo no corpo ($X_{P_{b_i}}$, $Y_{P_{b_i}}$ e $Z_{P_{b_i}}$). Adicionalmente, conhecendo a distância do C.G. da aeronave como “conjunto” (fuselagem + asa direita + asa esquerda + rotor-coaxial direito + rotor-coaxial esquerdo + rotor-coaxial traseiro) a cada um dos centros de gravidade dos diferentes componentes (asa direita, asa esquerda, rotor-coaxial direito, rotor-coaxial esquerdo e rotor-coaxial traseiro), onde é possível colocar um referencial auxiliar paralelo ($X_{P_{b_i}}$, $Y_{P_{b_i}}$ e $Z_{P_{b_i}}$) ao sistema de referência fixo ao corpo (X_b , Y_b e Z_b), será possível aplicar o teorema de Huygens-Steiner. Obtendo assim os momentos e produtos de inércia da aeronave completa, em função dos ângulos de rotação dos rotores. A Figura 13 mostra a posição dos centros de gravidade dos diferentes componentes da aeronave.

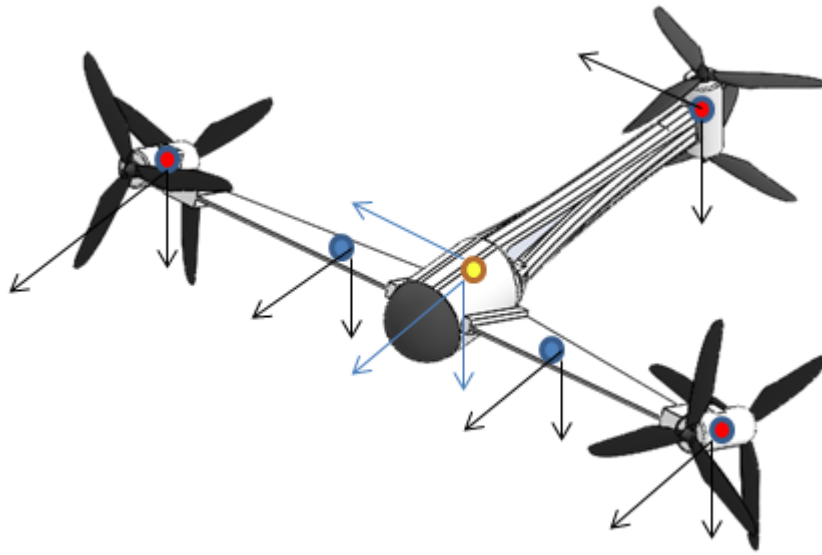


Figura 13 - Centro de gravidade de cada componente em relação ao centro de gravidade conjunto, com um sistema auxiliar paralelo ao corpo fixo em cada um.

4.2.2.1 - Obtenção dos momentos e produtos de inércia para o tensor de inércia da aeronave:

As figuras 10 e 11 permitem observar a relação entre os sistemas de referência fixos aos rotores e os sistemas de referência auxiliares paralelos ao sistema fixo ao corpo da aeronave. Ressalta-se que não será apresentada a relação para o rotor-coaxial R_2 dado que é análogo àquela do rotor coaxial R_1 .

Com a ajuda de um software CAD (i.e. SolidWorks) é possível determinar os produtos e momentos de inércia referentes a cada rotor coaxial R_i de acordo com seus respectivos vetores base $(X_{r_i}, Y_{r_i}$ e $Z_{r_i})$, que conformam o sistema de referência fixo a ele. Por tanto, conhecendo os produtos e momentos de inércia deste componente e considerando que sejam dados pela seguinte relação no tensor de inércia referente ao sistema r_i (fixo ao rotor):

$$\begin{aligned}
J_{R_{i r_i}} &= \begin{bmatrix} I_{xx R_{i r_i}} & -I_{xy R_{i r_i}} & -I_{xz R_{i r_i}} \\ -I_{yx R_{i r_i}} & I_{yy R_{i r_i}} & -I_{yz R_{i r_i}} \\ -I_{zx R_{i r_i}} & -I_{zy R_{i r_i}} & I_{zz R_{i r_i}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \int (y_{r_i}^2 + z_{r_i}^2) dm & -\int x_{r_i} y_{r_i} dm & -\int x_{r_i} z_{r_i} dm \\ -\int y_{r_i} x_{r_i} dm & \int (x_{r_i}^2 + z_{r_i}^2) dm & -\int y_{r_i} z_{r_i} dm \\ -\int z_{r_i} x_{r_i} dm & -\int z_{r_i} y_{r_i} dm & \int (x_{r_i}^2 + y_{r_i}^2) dm \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2.2.1,1}$$

onde $(x_{r_i}, y_{r_i}$ e $z_{r_i})$ representam as coordenadas de um ponto qualquer do rotor coaxial R_i definido no seu respectivo sistema de referência fixo a ele. É possível de transferir os produtos e tensores de inércia definidos no referencial fixo ao rotor para o sistema auxiliar paralelo ao corpo. Isto é feito por meio de matrizes de rotação únicas para cada rotor coaxial.

- Para rotor R_1 :

$$Rot_{-Y_{r_1}(\phi_{E_1})} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{E_1} & 0 & -\sin \phi_{E_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi_{E_1} & 0 & \cos \phi_{E_1} \end{bmatrix} \tag{4.2.2.1,2}$$

Portanto, seja um ponto definido no referencial fixo ao rotor com as coordenadas $(x_{r_1}, y_{r_1}$ e $z_{r_1})$, o mesmo pode ser definido nas coordenadas do sistema auxiliar $(x_{P_{b_1}}, y_{P_{b_1}}$ e $z_{P_{b_1}})$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_1}} \\ y_{P_{b_1}} \\ z_{P_{b_1}} \end{bmatrix} = Rot_{-Y_{r_1}(\phi_{E_1})} \begin{bmatrix} x_{r_1} \\ y_{r_1} \\ z_{r_1} \end{bmatrix} \tag{4.2.2.1,3}$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_1}} \\ y_{P_{b_1}} \\ z_{P_{b_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{E_1} & 0 & -\sin \phi_{E_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi_{E_1} & 0 & \cos \phi_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r_1} \\ y_{r_1} \\ z_{r_1} \end{bmatrix} \tag{4.2.2.1,4}$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_1}} \\ y_{P_{b_1}} \\ z_{P_{b_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{r_1} \cos \phi_{E_1} - z_{r_1} \sin \phi_{E_1} \\ y_{r_1} \\ x_{r_1} \sin \phi_{E_1} + z_{r_1} \cos \phi_{E_1} \end{bmatrix} \tag{4.2.2.1,5}$$

- Para o rotor R_2 :

$$Rot_{-Y_{r_2}(\Phi_{E_2})} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{E_2} & 0 & -\sin \Phi_{E_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_{E_2} & 0 & \cos \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,6)$$

Da mesma forma, considerando um ponto definido no sistema de referência fixo ao rotor com as coordenadas $(x_{r_2}, y_{r_2}$ e $z_{r_2})$, o mesmo pode ser definido nas coordenadas do referencial auxiliar $(x_{P_{b_2}}, y_{P_{b_2}}$ e $z_{P_{b_2}})$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_2}} \\ y_{P_{b_2}} \\ z_{P_{b_2}} \end{bmatrix} = Rot_{-Y_{r_2}(\Phi_{E_2})} \begin{bmatrix} x_{r_2} \\ y_{r_2} \\ z_{r_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,7)$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_2}} \\ y_{P_{b_2}} \\ z_{P_{b_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{E_2} & 0 & -\sin \Phi_{E_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_{E_2} & 0 & \cos \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r_2} \\ y_{r_2} \\ z_{r_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,8)$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_2}} \\ y_{P_{b_2}} \\ z_{P_{b_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{r_2} \cos \Phi_{E_2} - z_{r_2} \sin \Phi_{E_2} \\ y_{r_2} \\ x_{r_2} \sin \Phi_{E_2} + z_{r_2} \cos \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,9)$$

- Para o rotor R_3 :

$$Rot_{X_{r_3}(\Phi_{E_3})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Phi_{E_3}) & -\sin(\Phi_{E_3}) \\ 0 & \sin(\Phi_{E_3}) & \cos(\Phi_{E_3}) \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,10)$$

Da mesma forma, considerando um ponto definido no sistema de referência fixo ao rotor com as coordenadas $(x_{r_3}, y_{r_3}$ e $z_{r_3})$, o mesmo pode ser definido nas coordenadas do referencial auxiliar $(x_{P_{b_3}}, y_{P_{b_3}}$ e $z_{P_{b_3}})$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_3}} \\ y_{P_{b_3}} \\ z_{P_{b_3}} \end{bmatrix} = Rot_{X_{r_3}(\Phi_{E_3})} \begin{bmatrix} x_{r_3} \\ y_{r_3} \\ z_{r_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,11)$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b3}} \\ y_{P_{b3}} \\ z_{P_{b3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Phi_{E3}) & -\sin(\Phi_{E3}) \\ 0 & \sin(\Phi_{E3}) & \cos(\Phi_{E3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r3} \\ y_{r3} \\ z_{r3} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,12)$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b3}} \\ y_{P_{b3}} \\ z_{P_{b3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{r3} \\ y_{r3} \cos \Phi_{E3} - z_{r3} \sin \Phi_{E3} \\ y_{r3} \sin \Phi_{E3} + z_{r3} \cos \Phi_{E3} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,13)$$

Considera-se que os rotores R_1 e R_2 possuem matrizes de rotação negativa em torno dos eixos Y_{r_1} e Y_{r_2} de ângulos Φ_{E_1} e Φ_{E_2} , respectivamente (figura 10). Estes ângulos, em relação ao sistema de referência fixo ao corpo, são considerados negativos. Já no caso do rotor R_3 , considera-se que este possui uma matriz de rotação positiva em torno do eixo X_{r_3} de um ângulo Φ_{E_3} negativo. Esta convenção foi adotada de tal forma que os três ângulos de inclinação tenham o mesmo sinal (negativo) quando forem substituídos por valores numéricos.

Considerando que o tensor de inércia de cada rotor no seu respectivo sistema de referência auxiliar seja dado por:

$$J_{R_i P_{b_i}} = \begin{bmatrix} I_{xx R_i P_{b_i}} & -I_{xy R_i P_{b_i}} & -I_{xz R_i P_{b_i}} \\ -I_{yx R_i P_{b_i}} & I_{yy R_i P_{b_i}} & -I_{yz R_i P_{b_i}} \\ -I_{zx R_i P_{b_i}} & -I_{zy R_i P_{b_i}} & I_{zz R_i P_{b_i}} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,14)$$

$$= \begin{bmatrix} \int (y_{P_{b_i}}^2 + z_{P_{b_i}}^2) dm & -\int x_{P_{b_i}} y_{P_{b_i}} dm & -\int x_{P_{b_i}} z_{P_{b_i}} dm \\ -\int y_{P_{b_i}} x_{P_{b_i}} dm & \int (x_{P_{b_i}}^2 + z_{P_{b_i}}^2) dm & -\int y_{P_{b_i}} z_{P_{b_i}} dm \\ -\int z_{P_{b_i}} x_{P_{b_i}} dm & -\int z_{P_{b_i}} y_{P_{b_i}} dm & \int (x_{P_{b_i}}^2 + y_{P_{b_i}}^2) dm \end{bmatrix}$$

Para cada produto e momento de inércia, substituindo em (4.2.2.1,14) as relações entre coordenadas no sistema r_i e o respectivo P_{b_i} , apresentadas nas equações (4.2.2.1,5), (4.2.2.1,9) e (4.2.2.1,13), temos:

- Rotor R_1 :

$$I_{xx R_1 P_{b1}} = I_{xx R_1 r_1} (\cos \Phi_{E1})^2 + I_{zz R_1 r_1} (\sin \Phi_{E1})^2 \quad (4.2.2.1,15)$$

$$I_{yy R_1 P_{b1}} = I_{yy R_1 r_1} \quad (4.2.2.1,16)$$

$$I_{zzR_1P_{b1}} = I_{zzR_{1r_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{xxR_{1r_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 \quad (4.2.2.1,17)$$

$$I_{xyR_1P_{b1}} = 0 \quad (4.2.2.1,18)$$

$$I_{yzR_1P_{b1}} = 0 \quad (4.2.2.1,19)$$

$$I_{xzR_1P_{b1}} = \frac{1}{2} (I_{zzR_{1r_1}} - I_{xxR_{1r_1}}) \frac{\sin(2\Phi_{E_1})}{2} \quad (4.2.2.1,20)$$

Portanto, o tensor de inércia do rotor coaxial R_1 definido num sistema paralelo ao referencial fixo ao corpo da aeronave será:

$$J_{R_1P_{b1}} = \begin{bmatrix} I_{xxR_{1r_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{zzR_{1r_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 & 0 & -\frac{1}{2} (I_{zzR_{1r_1}} - I_{xxR_{1r_1}}) \frac{\sin(2\Phi_{E_1})}{2} \\ 0 & I_{yyR_{1r_1}} & 0 \\ -\frac{1}{2} (I_{zzR_{1r_1}} - I_{xxR_{1r_1}}) \frac{\sin(2\Phi_{E_1})}{2} & 0 & I_{zzR_{1r_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{xxR_{1r_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,21)$$

- Rotor R_2 :

$$I_{xxR_2P_{b2}} = I_{xxR_{2r_2}} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{zzR_{2r_2}} (\sin \Phi_{E_2})^2 \quad (4.2.2.1,22)$$

$$I_{yyR_2P_{b2}} = I_{yyR_{2r_2}} \quad (4.2.2.1,23)$$

$$I_{zzR_2P_{b2}} = I_{zzR_{2r_2}} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{xxR_{2r_2}} (\sin \Phi_{E_2})^2 \quad (4.2.2.1,24)$$

$$I_{xyR_2P_{b2}} = 0 \quad (4.2.2.1,25)$$

$$I_{yzR_2P_{b2}} = 0 \quad (4.2.2.1,26)$$

$$I_{xzR_2P_{b2}} = \frac{1}{2} \left(I_{zzR_2r_2} - I_{xxR_2r_2} \right) \frac{\sin(2\Phi_{E_2})}{2} \quad (4.2.2.1,27)$$

Portanto, o tensor de inércia do rotor coaxial R_2 definido num sistema paralelo ao referencial fixo ao corpo da aeronave será:

$$\mathbf{J}_{R_2P_{b2}} = \begin{bmatrix} I_{xxR_2r_2} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{zzR_2r_2} (\sin \Phi_{E_2})^2 & 0 & -\frac{1}{2} \left(I_{zzR_2r_2} - I_{xxR_2r_2} \right) \frac{\sin(2\Phi_{E_2})}{2} \\ 0 & I_{yyR_2r_2} & 0 \\ -\frac{1}{2} \left(I_{zzR_2r_2} - I_{xxR_2r_2} \right) \frac{\sin(2\Phi_{E_2})}{2} & 0 & I_{zzR_2r_2} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{xxR_2r_2} (\sin \Phi_{E_2})^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,28)$$

- Rotor R_3 :

$$I_{xxR_3P_{b3}} = I_{xxR_3r_3} \quad (4.2.2.1,29)$$

$$I_{yyR_3P_{b3}} = I_{yyR_3r_3} (\cos \Phi_{E_3})^2 + I_{zzR_3r_3} (\sin \Phi_{E_3})^2 \quad (4.2.2.1,30)$$

$$I_{zzR_3P_{b3}} = I_{zzR_3r_3} (\cos \Phi_{E_3})^2 + I_{yyR_3r_3} (\sin \Phi_{E_3})^2 \quad (4.2.2.1,31)$$

$$I_{yzR_3P_{b3}} = \frac{1}{2} \left(I_{zzR_3r_3} - I_{yyR_3r_3} \right) \sin(2\Phi_{E_3}) \quad (4.2.2.1,32)$$

$$I_{xyR_3P_{b3}} = 0 \quad (4.2.2.1,33)$$

$$I_{xzR_3P_{b3}} = 0 \quad (4.2.2.1,34)$$

Portanto, o tensor de inércia do rotor coaxial R_3 definido num sistema paralelo ao referencial fixo ao corpo da aeronave será:

$$J_{R_3 P_{b_3}} = \begin{bmatrix} I_{xx_{R_3 r_3}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_{R_3 r_3}} (\cos \Phi_{E_3})^2 + I_{zz_{R_3 r_3}} (\sin \Phi_{E_3})^2 & -\frac{1}{2} (I_{zz_{R_3 r_3}} - I_{yy_{R_3 r_3}}) \sin(2\Phi_{E_3}) \\ 0 & -\frac{1}{2} (I_{zz_{R_3 r_3}} - I_{yy_{R_3 r_3}}) \sin(2\Phi_{E_3}) & I_{zz_{R_3 r_3}} (\cos \Phi_{E_3})^2 + I_{yy_{R_3 r_3}} (\sin \Phi_{E_3})^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,35)$$

Agora, já que os momentos e produtos de inércia de cada um dos rotores são referentes a eixos paralelos aos eixos do corpo, é possível aplicar o teorema dos eixos paralelos (Huygens-Steiner) para referenciar os produtos e momentos de inércia de cada um dos rotores aos eixos de inércia do corpo principal.

Considerando que para os três rotores R_1 , R_2 e R_3 existam distâncias dx_{R_i} , dy_{R_i} e dz_{R_i} entre os eixos do sistema fixo ao C.G. do corpo (B) e os eixos do sistema auxiliar paralelo ao corpo P_{b_i} (referente a cada rotor). A relação das coordenadas entre as origens destes dois referenciais será:

$$\begin{bmatrix} x_{R_{ib}} \\ y_{R_{ib}} \\ z_{R_{ib}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P_{b_i}} \\ y_{P_{b_i}} \\ z_{P_{b_i}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{R_i} \\ y_{R_i} \\ z_{R_i} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,36)$$

Com $(x_{P_{b_i}}, y_{P_{b_i}}, z_{P_{b_i}})$ representando as coordenadas de um ponto qualquer do rotor coaxial R_i , tomando como referência o sistema P_{b_i} . Por outro lado, $(x_{R_i}, y_{R_i}, z_{R_i})$ representa as coordenadas da posição, constante no espaço, da origem do sistema P_{b_i} , tomando como referência o sistema fixo ao corpo da aeronave B . Consequentemente, $(x_{R_{ib}}, y_{R_{ib}}, z_{R_{ib}})$ representa as coordenadas de um ponto qualquer do rotor R_i referenciado à origem do referencial fixo ao corpo.

$$\begin{bmatrix} x_{R_{ib}} \\ y_{R_{ib}} \\ z_{R_{ib}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P_{b_i}} + x_{R_i} \\ y_{P_{b_i}} + y_{R_i} \\ z_{P_{b_i}} + z_{R_i} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,37)$$

Ressalta-se que para o rotor R_3 , considera-se que o valor de y_{R_3} é assumido como nulo dado que se assume o eixo $X_{P_{b_3}}$ sempre alinhado com o eixo X_b (figuras 11 e 13).

O tensor de inércia do rotor R_i observado desde o referencial fixo ao corpo B terá a forma:

$$J_{R_{ib}} = \begin{bmatrix} I_{xxR_{ib}} & -I_{xyR_{ib}} & -I_{xzR_{ib}} \\ -I_{yxR_{ib}} & I_{yyR_{ib}} & -I_{yzR_{ib}} \\ -I_{zxR_{ib}} & -I_{zyR_{ib}} & I_{zzR_{ib}} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,38)$$

$$= \begin{bmatrix} \int (y_{R_{ib}}^2 + z_{R_{ib}}^2) dm & -\int x_{R_{ib}} y_{R_{ib}} dm & -\int x_{R_{ib}} z_{R_{ib}} dm \\ -\int y_{R_{ib}} x_{R_{ib}} dm & \int (x_{R_{ib}}^2 + z_{R_{ib}}^2) dm & -\int y_{R_{ib}} z_{R_{ib}} dm \\ -\int z_{R_{ib}} x_{R_{ib}} dm & -\int z_{R_{ib}} y_{R_{ib}} dm & \int (x_{R_{ib}}^2 + y_{R_{ib}}^2) dm \end{bmatrix}$$

Por tanto, para cada rotor R_i e substituindo a equação (4.2.2.1,37) em (4.2.2.1,38), aparecerá em cada produto e momento de inércia os produtos e momentos de inércia referentes ao sistema P_{b_i} . Por sua vez, estes valores poderão ser substituídos pelas expressões que aparecem nas equações (4.2.2.1,15) até (4.2.2.1,35).

Uma vez aplicado o teorema dos eixos paralelos para cada sistema P_{b_i} , chega-se nas seguintes expressões:

- Rotor coaxial R_1 :

$$I_{xxR_{1b}} = I_{xxR_{1r_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{zzR_{1r_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 + (y_{R_1}^2 + z_{R_1}^2) M_{R_1} \quad (4.2.2.1,39)$$

$$I_{yyR_{1b}} = I_{yyR_{1r_1}} + (x_{R_1}^2 + z_{R_1}^2) M_{R_1} \quad (4.2.2.1,40)$$

$$I_{zzR_{1b}} = I_{zzR_{1r_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{xxR_{1r_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 + (x_{R_1}^2 + y_{R_1}^2) M_{R_1} \quad (4.2.2.1,41)$$

$$I_{xyR_{1b}} = x_{R_1} y_{R_1} M_{R_1} \quad (4.2.2.1,42)$$

$$I_{yzR_{1b}} = y_{R_1} z_{R_1} M_{R_1} \quad (4.2.2.1,43)$$

$$I_{xzR_{1b}} = \frac{1}{2} (I_{zzR_{1r_1}} - I_{xxR_{1r_1}}) \sin(2\Phi_{E_1}) + x_{R_1} z_{R_1} M_{R_1} \quad (4.2.2.1,44)$$

Por tanto, o tensor de inércia final do rotor coaxial R_1 , referido ao sistema fixo ao corpo será:

$$J_{R1b} = \begin{bmatrix} I_{xxR1r1} (\cos \Phi_{E1})^2 + I_{zzR1r1} (\sin \Phi_{E1})^2 + (y_{R1}^2 + z_{R1}^2) M_{R1} & -x_{R1} y_{R1} M_{R1} & -\frac{1}{2} (I_{zzR1r1} - I_{xxR1r1}) \sin(2\Phi_{E1}) + x_{R1} z_{R1} M_{R1} \\ -x_{R1} y_{R1} M_{R1} & I_{yyR1r1} + (x_{R1}^2 + z_{R1}^2) M_{R1} & -y_{R1} z_{R1} M_{R1} \\ -\frac{1}{2} (I_{zzR1r1} - I_{xxR1r1}) \sin(2\Phi_{E1}) + x_{R1} z_{R1} M_{R1} & -y_{R1} z_{R1} M_{R1} & I_{zzR1r1} (\cos \Phi_{E1})^2 + I_{xxR1r1} (\sin \Phi_{E1})^2 + (x_{R1}^2 + y_{R1}^2) M_{R1} \end{bmatrix}$$

(4.2.2.1,45)

- Rotor coaxial R_2 :

$$I_{xxR2b} = I_{xxR2r2} (\cos \Phi_{E2})^2 + I_{zzR2r2} (\sin \Phi_{E2})^2 + (y_{R2}^2 + z_{R2}^2) M_{R2} \quad (4.2.2.1,46)$$

$$I_{yyR2b} = I_{yyR2r2} + (x_{R2}^2 + z_{R2}^2) M_{R2} \quad (4.2.2.1,47)$$

$$I_{zzR2b} = I_{zzR2r2} (\cos \Phi_{E2})^2 + I_{xxR2r2} (\sin \Phi_{E2})^2 + (x_{R2}^2 + y_{R2}^2) M_{R2} \quad (4.2.2.1,48)$$

$$I_{xyR2b} = x_{R2} y_{R2} M_{R2} \quad (4.2.2.1,49)$$

$$I_{yzR2b} = y_{R2} z_{R2} M_{R2} \quad (4.2.2.1,50)$$

$$I_{xzR2b} = \frac{1}{2} (I_{zzR2r2} - I_{xxR2r2}) \sin(2\Phi_{E2}) + x_{R2} z_{R2} M_{R2} \quad (4.2.2.1,51)$$

$$J_{R2b} = \begin{bmatrix} I_{xxR2r2} (\cos \Phi_{E2})^2 + I_{zzR2r2} (\sin \Phi_{E2})^2 + (y_{R2}^2 + z_{R2}^2) M_{R2} & -x_{R2} y_{R2} M_{R2} & -\frac{1}{2} (I_{zzR2r2} - I_{xxR2r2}) \sin(2\Phi_{E2}) + x_{R2} z_{R2} M_{R2} \\ -x_{R2} y_{R2} M_{R2} & I_{yyR2r2} + (x_{R2}^2 + z_{R2}^2) M_{R2} & -y_{R2} z_{R2} M_{R2} \\ -\frac{1}{2} (I_{zzR2r2} - I_{xxR2r2}) \sin(2\Phi_{E2}) + x_{R2} z_{R2} M_{R2} & -y_{R2} z_{R2} M_{R2} & I_{zzR2r2} (\cos \Phi_{E2})^2 + I_{xxR2r2} (\sin \Phi_{E2})^2 + (x_{R2}^2 + y_{R2}^2) M_{R2} \end{bmatrix}$$

(4.2.2.1,52)

- Rotor coaxial R_3

$$I_{xxR_{3b}} = I_{xxR_{3r_3}} + (Z_{R_2}^2) M_{R_3} \quad (4.2.2.1,53)$$

$$I_{yyR_{3b}} = I_{yyR_{3r_3}} (\cos \Phi_{E_3})^2 + I_{zzR_{3r_3}} (\sin \Phi_{E_3})^2 + (x_{R_3}^2 + z_{R_3}^2) M_{R_3} \quad (4.2.2.1,54)$$

$$I_{zzR_{3b}} = I_{zzR_{3r_3}} (\cos \Phi_{E_3})^2 + I_{yyR_{3r_3}} (\sin \Phi_{E_3})^2 + (x_{R_3}^2) M_{R_3} \quad (4.2.2.1,55)$$

$$I_{xyR_{3b}} = 0 \quad (4.2.2.1,57)$$

$$I_{yzR_{3b}} = \frac{1}{2} (I_{zzR_{3r_3}} - I_{yyR_{3r_3}}) \sin(2\Phi_{E_3}) \quad (4.2.2.1,58)$$

$$I_{xzR_{3b}} = x_{R_3} z_{R_3} M_{R_3} \quad (4.2.2.1,59)$$

$$J_{R_{3b}} = \begin{bmatrix} I_{xxR_{3r_3}} + (Z_{R_2}^2) M_{R_3} & 0 & -x_{R_3} z_{R_3} M_{R_3} \\ 0 & I_{yyR_{3r_3}} (\cos \Phi_{E_3})^2 + I_{zzR_{3r_3}} (\sin \Phi_{E_3})^2 + (x_{R_3}^2 + z_{R_3}^2) M_{R_3} & -\frac{1}{2} (I_{zzR_{3r_3}} - I_{yyR_{3r_3}}) \sin(2\Phi_{E_3}) \\ -x_{R_3} z_{R_3} M_{R_3} & -\frac{1}{2} (I_{zzR_{3r_3}} - I_{yyR_{3r_3}}) \sin(2\Phi_{E_3}) & I_{zzR_{3r_3}} (\cos \Phi_{E_3})^2 + I_{yyR_{3r_3}} (\sin \Phi_{E_3})^2 + (x_{R_3}^2) M_{R_3} \end{bmatrix}$$

$$(4.2.2.1,60)$$

Por tanto, até agora temos definido como os momentos e produtos de inércia de cada rotor coaxial R_i variam em função dos seus respectivos ângulos de inclinação (tilt) Φ_{E_i} . Conseqüentemente, o tensor de inércia da aeronave completa variará em função destes ângulos. Adicionalmente aos tensores de inércia encontrados até agora, devem ser levados em consideração também o tensor de inércia referente à “fuselagem” ou corpo da aeronave e os tensores de inércia referentes a cada semi-asa. No primeiro caso, para os momentos e produtos de inércia da fuselagem, estes podem ser estimados a partir do auxílio de um software CAD (i.e. SolidWorks), assim como foi feito para estimar os momentos e produtos de inércia de cada rotor coaxial R_i quando referidos ao seu respectivo sistema de referência fixo a ele (r_i). Neste caso, os produtos e momentos de inércia podem ser obtidos diretamente sobre o referencial fixo ao C.G. da aeronave (B) dado que a fuselagem não tem nenhuma inclinação relativa a este sistema de referência. Desta forma, o tensor de inércia da fuselagem será:

$$\mathbf{J}_{F_b} = \begin{bmatrix} I_{xxF_b} & 0 & -I_{xzF_b} \\ 0 & I_{yyF_b} & 0 \\ -I_{xzF_b} & 0 & I_{zzF_b} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,60)$$

Observa-se nesta última equação que alguns produtos de inércia aparecem como nulos. Isto se deve ao plano de simetria ($X_b Z_b$) que a fuselagem possui, de acordo com a figura 6.

Já para o caso dos tensores de inércia referentes a cada semi-asa, para serem obtidos, deverá ser realizado o mesmo procedimento que foi feito para referenciar os produtos e momentos de inércia de cada rotor coaxial em relação ao referencial fixo ao corpo da aeronave. Desta forma, pretende-se novamente determinar os produtos e momentos de inércia de cada semi-asa W_i ($i = 1,2$) desde um sistema de referência fixo à semi-asa e que tem por origem o centro de gravidade deste componente (w_i), para depois, por meio dos ângulos de inclinação Φ_{E_i} , transferir estes momentos e produtos a um sistema auxiliar paralelo ao corpo da aeronave (P_{b_i}). Uma vez referenciados a estes referenciais auxiliares, será aplicado novamente o teorema de Huygens-Steiner para transferir os produtos e momentos de inércia de cada semi-asa para o referencial fixo ao corpo da aeronave (B).

Como foi feito para o procedimento de cada rotor coaxial, será aqui descrito brevemente como foi realizado o equacionamento. Assim como foi feito para cada rotor, deverá relacionar-se o referencial fixo à asa com um sistema auxiliar, centrado no C.G. da asa, que seja paralelo sempre ao sistema de referência fixo ao corpo (B) (figura 13). Convenientemente, chama-se este sistema auxiliar de P_{b_i} novamente.

- **Semi-Asa W_1 :**

A semi-asa W_1 , considerada como à “direita” da aeronave, terá um giro em torno do eixo Y_{w_1} (analogamente a R_1). Por tanto, um ponto qualquer sobre a semi-asa que tenha as coordenadas ($x_{w_1}, y_{w_1}, z_{w_1}$), observadas desde o referencial w_1 fixo ao centro de gravidade da semi-asa, será relacionado às coordenadas ($x_{P_{b_1}}, y_{P_{b_1}}, z_{P_{b_1}}$) através de uma matriz de rotação:

$$Rot_{-Y_{w_1}(\Phi_{E_1})} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{E_1} & 0 & -\sin \Phi_{E_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_{E_1} & 0 & \cos \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,61)$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_1}} \\ y_{P_{b_1}} \\ z_{P_{b_1}} \end{bmatrix} = Rot_{-Y_{w_1}(\Phi_{E_1})} \begin{bmatrix} x_{w_1} \\ y_{w_1} \\ z_{w_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,62)$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_1}} \\ y_{P_{b_1}} \\ z_{P_{b_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{E_1} & 0 & -\sin \Phi_{E_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_{E_1} & 0 & \cos \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{w_1} \\ y_{w_1} \\ z_{w_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,63)$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_1}} \\ y_{P_{b_1}} \\ z_{P_{b_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{w_1} \cos \Phi_{E_1} - z_{w_1} \sin \Phi_{E_1} \\ y_{w_1} \\ x_{w_1} \sin \Phi_{E_1} + z_{w_1} \cos \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,64)$$

Sabendo que o tensor de inércia da asa no sistema auxiliar paralelo ao corpo será dado por:

$$\begin{aligned} J_{W_{1P_{b_1}}} &= \begin{bmatrix} I_{xx}W_{1P_{b_1}} & -I_{xy}W_{1P_{b_1}} & -I_{xz}W_{1P_{b_1}} \\ -I_{yx}W_{1P_{b_1}} & I_{yy}W_{1P_{b_1}} & -I_{yz}W_{1P_{b_1}} \\ -I_{zx}W_{1P_{b_1}} & -I_{zy}W_{1P_{b_1}} & I_{zz}W_{1P_{b_1}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int (y_{P_{b_1}}^2 + z_{P_{b_1}}^2) dm & -\int x_{P_{b_1}}y_{P_{b_1}} dm & -\int x_{P_{b_1}}z_{P_{b_1}} dm \\ -\int y_{P_{b_1}}x_{P_{b_1}} dm & \int (x_{P_{b_1}}^2 + z_{P_{b_1}}^2) dm & -\int y_{P_{b_1}}z_{P_{b_1}} dm \\ -\int z_{P_{b_1}}x_{P_{b_1}} dm & -\int z_{P_{b_1}}y_{P_{b_1}} dm & \int (x_{P_{b_1}}^2 + y_{P_{b_1}}^2) dm \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.2.1,65)$$

Seja o tensor de inércia referente ao sistema de referência fixo à semi-asa (w_1) determinado através dos produtos e momentos de inércia obtidos através do auxílio de um software CAD (i.e. SolidWorks).

$$\begin{aligned} J_{W_{1w_1}} &= \begin{bmatrix} I_{xx}W_{1w_1} & -I_{xy}W_{1w_1} & -I_{xz}W_{1w_1} \\ -I_{yx}W_{1w_1} & I_{yy}W_{1w_1} & -I_{yz}W_{1w_1} \\ -I_{zx}W_{1w_1} & -I_{zy}W_{1w_1} & I_{zz}W_{1w_1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int (y_{w_1}^2 + z_{w_1}^2) dm & -\int x_{w_1}y_{w_1} dm & -\int x_{w_1}z_{w_1} dm \\ -\int y_{w_1}x_{w_1} dm & \int (x_{w_1}^2 + z_{w_1}^2) dm & -\int y_{w_1}z_{w_1} dm \\ -\int z_{w_1}x_{w_1} dm & -\int z_{w_1}y_{w_1} dm & \int (x_{w_1}^2 + y_{w_1}^2) dm \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.2.1,66)$$

Observa-se que será necessário apenas substituir a equação (4.2.2.1,64) em cada produto e momento de inércia presente em (4.2.2.1,65).

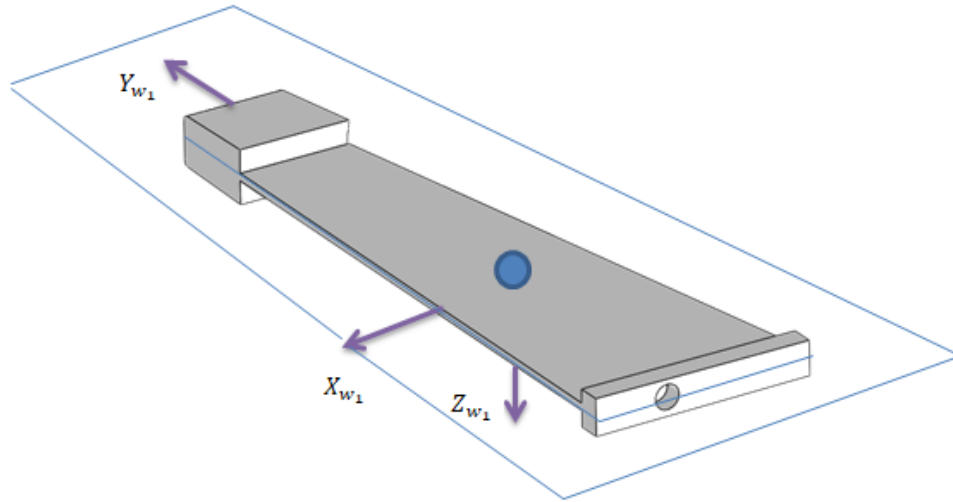


Figura 14 - Plano de simetria $X_{w_1}Y_{w_1}$ de uma semi-asa.

Com auxílio da Figura 14, onde é possível de perceber um plano de simetria $X_{w_1}Y_{w_1}$, chega-se nas seguintes relações:

$$I_{xxW_{1P_{b1}}} = I_{xxW_{1w_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{zzW_{1w_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 \quad (4.2.2.1,66)$$

$$I_{yyW_{1P_{b1}}} = I_{yyW_{1w_1}} \quad (4.2.2.1,67)$$

$$I_{zzW_{1P_{b1}}} = I_{zzW_{1w_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{xxW_{1w_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 \quad (4.2.2.1,68)$$

$$I_{xyW_{1P_{b1}}} = I_{xyW_{1w_1}} \cos \Phi_{E_1} \quad (4.2.2.1,69)$$

$$I_{yzW_{1P_{b1}}} = I_{xyW_{1w_1}} \sin \Phi_{E_1} \quad (4.2.2.1,70)$$

$$I_{xzW_{1P_{b1}}} = \frac{1}{2} (I_{zzW_{1w_1}} - I_{xxW_{1w_1}}) \sin(2\Phi_{E_1}) \quad (4.2.2.1,71)$$

Por tanto, o tensor de inércia da primeira semi-asa, referido a um sistema paralelo ao sistema fixo ao corpo, terá a forma:

$$J_{W_1 P_{b1}} = \begin{bmatrix} I_{xx_{W_1 w_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{zz_{W_1 w_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 & -I_{xy_{W_1 w_1}} \cos \Phi_{E_1} & -\frac{1}{2} (I_{zz_{W_1 w_1}} - I_{xx_{W_1 w_1}}) \sin(2\Phi_{E_1}) \\ -I_{xy_{W_1 w_1}} \cos \Phi_{E_1} & I_{yy_{W_1 w_1}} & -I_{xy_{W_1 w_1}} \sin \Phi_{E_1} \\ -\frac{1}{2} (I_{zz_{W_1 w_1}} - I_{xx_{W_1 w_1}}) \sin(2\Phi_{E_1}) & -I_{xy_{W_1 w_1}} \sin \Phi_{E_1} & I_{zz_{W_1 w_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{xx_{W_1 w_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,72)$$

- **Semi-Asa W_2 :**

A semi-asa W_2 , considerada como à “esquerda” da aeronave, terá um giro em torno do eixo Y_{w_2} (analogamente a R_2). Por tanto, um ponto qualquer sobre a semi-asa que tenha as coordenadas $(x_{w_2}, y_{w_2}, z_{w_2})$, observadas desde o sistema de referência w_2 fixo ao centro de gravidade da semi-asa, será relacionado às coordenadas $(x_{P_{b_2}}, y_{P_{b_2}}, z_{P_{b_2}})$ através de uma matriz de rotação:

$$Rot_{-Y_{w_2}(\Phi_{E_2})} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{E_2} & 0 & -\sin \Phi_{E_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_{E_2} & 0 & \cos \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,73)$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_2}} \\ y_{P_{b_2}} \\ z_{P_{b_2}} \end{bmatrix} = Rot_{-Y_{w_2}(\Phi_{E_2})} \begin{bmatrix} x_{w_2} \\ y_{w_2} \\ z_{w_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,74)$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_2}} \\ y_{P_{b_2}} \\ z_{P_{b_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{E_2} & 0 & -\sin \Phi_{E_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_{E_2} & 0 & \cos \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{w_2} \\ y_{w_2} \\ z_{w_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,75)$$

$$\begin{bmatrix} x_{P_{b_2}} \\ y_{P_{b_2}} \\ z_{P_{b_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{w_2} \cos \Phi_{E_2} - z_{w_2} \sin \Phi_{E_2} \\ y_{w_2} \\ x_{w_2} \sin \Phi_{E_2} + z_{w_2} \cos \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,76)$$

Sabendo que o tensor de inércia da asa no sistema auxiliar paralelo ao corpo será dado por:

$$\begin{aligned}
J_{W_{2P_{b2}}} &= \begin{bmatrix} I_{xx}W_{2P_{b2}} & -I_{xy}W_{2P_{b2}} & -I_{xz}W_{2P_{b2}} \\ -I_{yx}W_{2P_{b2}} & I_{yy}W_{2P_{b2}} & -I_{yz}W_{2P_{b2}} \\ -I_{zx}W_{2P_{b2}} & -I_{zy}W_{2P_{b2}} & I_{zz}W_{2P_{b2}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \int (y_{P_{b2}}^2 + z_{P_{b2}}^2) dm & -\int x_{P_{b2}}y_{P_{b2}} dm & -\int x_{P_{b2}}z_{P_{b2}} dm \\ -\int y_{P_{b2}}x_{P_{b2}} dm & \int (x_{P_{b2}}^2 + z_{P_{b2}}^2) dm & -\int y_{P_{b2}}z_{P_{b2}} dm \\ -\int z_{P_{b2}}x_{P_{b2}} dm & -\int z_{P_{b2}}y_{P_{b2}} dm & \int (x_{P_{b2}}^2 + y_{P_{b2}}^2) dm \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2.2.1,77}$$

Seja o tensor de inércia referente ao referencial fixo à semi-asa (w_2) determinado através dos produtos e momentos de inércia obtidos através do auxílio de um software CAD (i.e. SolidWorks).

$$\begin{aligned}
J_{W_{2w_2}} &= \begin{bmatrix} I_{xx}W_{2w_2} & -I_{xy}W_{2w_2} & -I_{xz}W_{2w_2} \\ -I_{yx}W_{2w_2} & I_{yy}W_{2w_2} & -I_{yz}W_{2w_2} \\ -I_{zx}W_{2w_2} & -I_{zy}W_{2w_2} & I_{zz}W_{2w_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \int (y_{w_2}^2 + z_{w_2}^2) dm & -\int x_{w_2}y_{w_2} dm & -\int x_{w_2}z_{w_2} dm \\ -\int y_{w_2}x_{w_2} dm & \int (x_{w_2}^2 + z_{w_2}^2) dm & -\int y_{w_2}z_{w_2} dm \\ -\int z_{w_2}x_{w_2} dm & -\int z_{w_2}y_{w_2} dm & \int (x_{w_2}^2 + y_{w_2}^2) dm \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2.2.1,78}$$

Substituindo as coordenadas determinadas em (4.2.2.1,76) na equação (4.2.2.1,77), são obtidas as seguintes equações:

$$I_{xx}W_{2P_{b2}} = I_{xx}W_{2w_2} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{zz}W_{2w_2} (\sin \Phi_{E_2})^2 \tag{4.2.2.1,79}$$

$$I_{yy}W_{2P_{b2}} = I_{yy}W_{2w_2} \tag{4.2.2.1,80}$$

$$I_{zz}W_{2P_{b2}} = I_{zz}W_{2w_2} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{xx}W_{2w_2} (\sin \Phi_{E_2})^2 \tag{4.2.2.1,81}$$

$$I_{xy}W_{2P_{b2}} = I_{xy}W_{2w_2} \cos \Phi_{E_2} \tag{4.2.2.1,82}$$

$$I_{yzW_2P_{b2}} = I_{xyW_2w_2} \sin \Phi_{E_2} \quad (4.2.2.1,83)$$

$$I_{xzW_2P_{b2}} = \frac{1}{2} \left(I_{zzW_2w_2} - I_{xxW_2w_2} \right) \sin(2\Phi_{E_2}) \quad (4.2.2.1,84)$$

Por tanto, o tensor de inércia da segunda semi-asa, referido a um sistema paralelo ao sistema fixo ao corpo, terá a forma:

$$J_{W_2P_{b2}} = \begin{bmatrix} I_{xxW_2w_2} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{zzW_2w_2} (\sin \Phi_{E_2})^2 & -I_{xyW_2w_2} \cos \Phi_{E_2} & -\frac{1}{2} (I_{zzW_2w_2} - I_{xxW_2w_2}) \sin(2\Phi_{E_2}) \\ -I_{xyW_2w_2} \cos \Phi_{E_2} & I_{yyW_2w_2} & -I_{xyW_2w_2} \sin \Phi_{E_2} \\ -\frac{1}{2} (I_{zzW_2w_2} - I_{xxW_2w_2}) \sin(2\Phi_{E_2}) & -I_{xyW_2w_2} \sin \Phi_{E_2} & I_{zzW_2w_2} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{xxW_2w_2} (\sin \Phi_{E_2})^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,85)$$

Agora, já que se têm os momentos e produtos de inércia de cada semi-asa referentes a sistemas paralelos ao sistema fixo ao corpo, é possível aplicar o teorema de Huygens-Steiner (eixos paralelos) e assim obter as seguintes equações dos produtos e momentos de inércia das semi-asa W_1 e W_2 , quando observados desde o sistema de referência fixo ao corpo (B):

- **Semi-Asa W_1 :**

$$I_{xxW_{1b}} = I_{xxW_{1w_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{zzW_{1w_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 + (y_{W_1}^2 + z_{W_1}^2) M_{W_1} \quad (4.2.2.1,86)$$

$$I_{yyW_{1b}} = I_{yyW_{1w_1}} + (x_{W_1}^2 + z_{W_1}^2) M_{W_1} \quad (4.2.2.1,87)$$

$$I_{zzW_{1b}} = I_{zzW_{1w_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{xxW_{1w_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 + (x_{W_1}^2 + y_{W_1}^2) M_{W_1} \quad (4.2.2.1,88)$$

$$I_{xyW_{1b}} = I_{xyW_{1w_1}} \cos \Phi_{E_1} + x_{W_1} y_{W_1} M_{W_1} \quad (4.2.2.1,89)$$

$$I_{yzW_{1b}} = I_{xyW_{1w_1}} \sin \Phi_{E_1} + y_{W_1} z_{W_1} M_{W_1} \quad (4.2.2.1,90)$$

$$I_{xzW_{1b}} = \frac{1}{2} \left(I_{zzW_{1w_1}} - I_{xxW_{1w_1}} \right) \sin(2\Phi_{E_1}) + x_{W_1} z_{W_1} M_{W_1} \quad (4.2.2.1,91)$$

(Os tensores de inércia finais de cada uma das duas semi-asas serão apresentados juntos)

- **Semi-Asa W_2 :**

$$I_{xxW_{2b}} = I_{xxW_{2w_2}} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{zzW_{2w_2}} (\sin \Phi_{E_2})^2 + (y_{W_2}^2 + z_{W_2}^2) M_{W_2} \quad (4.2.2.1,92)$$

$$I_{yyW_{2b}} = I_{yyW_{2w_2}} + (x_{W_2}^2 + z_{W_2}^2) M_{W_2} \quad (4.2.2.1,93)$$

$$I_{zzW_{1b}} = I_{zzW_{1w_1}} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{xxW_{1w_1}} (\sin \Phi_{E_1})^2 + (x_{W_1}^2 + y_{W_1}^2) M_{W_1} \quad (4.2.2.1,94)$$

$$I_{xyW_{2b}} = I_{xyW_{2w_2}} \cos \Phi_{E_2} + x_{W_2} y_{W_2} M_{W_2} \quad (4.2.2.1,95)$$

$$I_{yzW_{2b}} = I_{xyW_{2w_2}} \sin \Phi_{E_2} + y_{W_2} z_{W_2} M_{W_2} \quad (4.2.2.1,96)$$

$$I_{xzW_{2b}} = \frac{1}{2} \left(I_{zzW_{2w_2}} - I_{xxW_{2w_2}} \right) \sin(2\Phi_{E_2}) + x_{W_2} z_{W_2} M_{W_2} \quad (4.2.2.1,97)$$

Por tanto, os tensores de inércia finais das duas semi-asas W_1 e W_2 , referidos ao sistema fixo ao corpo serão:

$$\begin{aligned}
& + I_{zzW_1W_1} (\sin \Phi_{E_1})^2 + (y_{W_1}^2 + z_{W_1}^2) M_{W_1} \\
& \cos \Phi_{E_1} - x_{W_1} y_{W_1} M_{W_1} \\
& - I_{xxW_1W_1} \sin(2\Phi_{E_1}) - x_{W_1} z_{W_1} M_{W_1}^{W_2b} = \left[\begin{array}{l} I_{xxW_2W_2} \cos \Phi_{E_2} + I_{yyW_1W_1} \left(\frac{-I_{xyW_1W_1} \cos \Phi_{E_1} - x_{W_1} y_{W_1} M_{W_1}}{I_{yyW_1W_1} + (x_{W_1}^2 + z_{W_1}^2) M_{W_1}} \right) + (y_{W_2}^2 + z_{W_2}^2) M_{W_2} \\ -I_{xyW_2W_2} \cos \Phi_{E_2} - x_{W_2} y_{W_2} M_{W_2} \\ I_{yyW_2W_2} + (x_{W_2}^2 + z_{W_2}^2) M_{W_2} \\ -I_{xyW_2W_2} \sin \Phi_{E_2} + y_{W_2} z_{W_2} M_{W_2} - y_{W_2} z_{W_2} M_{W_2} \\ I_{zzW_2W_2} \end{array} \right] \begin{array}{l} M_{W_1} \\ M_{W_2} \\ M_{W_1} \\ M_{W_1} \\ M_{W_2} \end{array} \left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \left(I_{zzW_2W_2} - I_{xxW_2W_2} \right) \sin \\ -I_{xyW_2W_2} \sin \Phi_{E_2} + y_{W_2} z_{W_2} \\ \left(\cos \Phi_{E_2} \right)^2 + I_{xxW_2W_2} \left(\sin \right) \end{array} \right. \\
\end{aligned}$$

$$(4.2.2.1,98)$$

$$(4.2.2.1,99)$$

Uma vez conseguidos os tensores de inércia de cada componente da aeronave (rotor coaxial R_1 , rotor coaxial R_2 , rotor coaxial R_3 , fuselagem, semi-asa W_1 e semi-asa W_2) referentes ao sistema de referência fixo ao corpo (B), basta apenas somá-los para obter assim o tensor final total:

Das equações dos tensores de inércia de cada componente, tem-se:

$$\begin{aligned} J_{A_b}(\Phi_{E_1}, \Phi_{E_2}, \Phi_{E_3}) &= J_{R_{1b}}(\Phi_{E_1}) + J_{R_{2b}}(\Phi_{E_2}) + J_{R_{3b}}(\Phi_{E_3}) + J_{F_b} \\ &+ J_{W_{1b}}(\Phi_{E_1}) + J_{W_{2b}}(\Phi_{E_2}) \end{aligned} \quad (4.2.2.1,100)$$

A matriz J_{A_b} da equação (4.2.2.1,100) representa então o tensor de inércia final da aeronave em função dos ângulos de inclinação Φ_{E_i} ($i = 1, 2, 3$).

Por tanto:

$$\begin{aligned} J_{A_b} &= \begin{bmatrix} I_{xxA_b} & -I_{xyA_b} & -I_{xzA_b} \\ -I_{yxA_b} & I_{yyA_b} & -I_{yzA_b} \\ -I_{zxA_b} & -I_{zyA_b} & I_{zzA_b} \end{bmatrix} \\ &= J_{R_{1b}}(\Phi_{E_1}) + J_{R_{2b}}(\Phi_{E_2}) + J_{R_{3b}}(\Phi_{E_3}) + J_{F_b} \\ &+ J_{W_{1b}}(\Phi_{E_1}) + J_{W_{2b}}(\Phi_{E_2}) \end{aligned} \quad (4.2.2.1,101)$$

Agora, retomando o procedimento na equação (4.2.2,7):

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xxA_b} & -I_{xyA_b} & -I_{xzA_b} \\ -I_{yxA_b} & I_{yyA_b} & -I_{yzA_b} \\ -I_{zxA_b} & -I_{zyA_b} & I_{zzA_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (4.2.2.1,102)$$

$$\vec{H}_b = \begin{bmatrix} PI_{xxA_b} - QI_{xyA_b} - RI_{xzA_b} \\ -PI_{yxA_b} + QI_{yyA_b} - RI_{yzA_b} \\ -PI_{zxA_b} - QI_{zyA_b} + RI_{zzA_b} \end{bmatrix} \quad (4.4.2.1,103)$$

Observamos que na equação (4.4.2.1,103), nenhum dos produtos de inércia é nulo. Isto quer dizer que estamos considerando que a aeronave pode estar em uma condição assimétrica.

4.2.2.2 - Obtenção das variações temporais do tensor de inércia da aeronave:

Da equação (4.2.2,1):

$$m \left[\frac{d(\vec{H})}{dt} \right]_I = \vec{M} \quad (4.2.2.2,1)$$

Para determinar as reações da aeronave aos momentos externos, deverá ser obtida a variação do momento angular no tempo. Porém, apenas é conhecida pela equação (4.4.2.1,103) a expressão do momento angular referente ao referencial fixo ao corpo da aeronave. Para ser possível de aplicar a terceira lei de Newton (expressa na equação (4.4.2.2,1)) será necessário aplicar a relação apresentada na equação (4.2,1), só que desta vez para o momento angular.

Desta forma:

$$\left(\left[\frac{d(\vec{H})}{dt} \right]_I \right)_b = \left[\frac{d(\vec{H})}{dt} \right]_b + \vec{\omega}_b \times \vec{H}_b \quad (4.2.2.2,2)$$

Derivando a equação (4.4.2.1,103) no tempo, temos:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d(\vec{H})}{dt} \right]_b \\ \therefore & = \begin{bmatrix} \dot{P}I_{xxA_b} - \dot{Q}I_{xyA_b} - \dot{R}I_{xzA_b} + P \left(\dot{I}_{xxA_b} \right) - Q \left(\dot{I}_{xyA_b} \right) - R \left(\dot{I}_{xzA_b} \right) \\ -\dot{P}I_{yxA_b} + \dot{Q}I_{yyA_b} - \dot{R}I_{yzA_b} - P \left(\dot{I}_{yxA_b} \right) + Q \left(\dot{I}_{yyA_b} \right) - R \left(\dot{I}_{yzA_b} \right) \\ -\dot{P}I_{zxA_b} - \dot{Q}I_{zyA_b} + \dot{R}I_{zzA_b} - P \left(\dot{I}_{zxA_b} \right) - Q \left(\dot{I}_{zyA_b} \right) + R \left(\dot{I}_{zzA_b} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.2.2,3)$$

O que é equivalente a:

$$\left[\frac{d(\vec{H})}{dt} \right]_b = \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xxA_b} & -I_{xyA_b} & -I_{xzA_b} \\ -I_{yxA_b} & I_{yyA_b} & -I_{yzA_b} \\ -I_{zxA_b} & -I_{zyA_b} & I_{zzA_b} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.2,4)$$

$$+ \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{(I_{xxA_b})} & -\dot{(I_{xyA_b})} & -\dot{(I_{xzA_b})} \\ -\dot{(I_{yxA_b})} & \dot{(I_{yyA_b})} & -\dot{(I_{yzA_b})} \\ -\dot{(I_{zxA_b})} & -\dot{(I_{zyA_b})} & \dot{(I_{zzA_b})} \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{d(\vec{H})}{dt} \right]_b = \vec{\omega} \cdot J_{A_b} + \vec{\omega} \cdot \dot{J}_{A_b} \quad (4.2.2.2,5)$$

Entende-se que da equação anterior será necessário determinar a variação do tensor de inercia J_{A_b} no tempo. Este equacionamento está disponível no Apêndice I (para os rotores coaxiais) e no Apêndice II (para as semi-asas). Com a intenção de manter o desenvolvimento simplificado, não serão colocadas as equações expandidas das variações temporais dos momentos e produtos de inércia aqui. Porém, sua versão “simplificada”, apresentada na equação (4.2.2.2,4), será carregada ao longo do desenvolvimento daqui para frente.

Agora, o produto vetorial da equação (4.2.2.2,2) será:

$$\therefore \vec{\omega}_b \times \vec{H}_b = \begin{bmatrix} QR(I_{zzA_b} - I_{yyA_b}) + (R^2 - Q^2)I_{yzA_b} + PRI_{xyA_b} - PQI_{xzA_b} \\ PR(I_{xxA_b} - I_{zzA_b}) + (P^2 - R^2)I_{xzA_b} + PQI_{yzA_b} - QRI_{xyA_b} \\ PQ(I_{yyA_b} - I_{xxA_b}) + (Q^2 - P^2)I_{xyA_b} + QRI_{xzA_b} - PRI_{yzA_b} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.2,6)$$

Por tanto, somando as equações (4.2.2.2,4) e (4.2.2.2,6), obtemos:

$$\left(\left[\frac{d(\vec{H})}{dt} \right]_I \right)_b = \left[\frac{d(\vec{H})}{dt} \right]_b + \vec{\omega}_b \times \vec{H}_b \quad (4.2.2.2,7)$$

$$\begin{aligned} & \left(\left[\frac{d(\vec{H})}{dt} \right]_I \right)_b \\ &= \begin{bmatrix} \dot{P}I_{xx_{Ab}} + P(\dot{I}_{xx_{Ab}}) - Q(\dot{I}_{xy_{Ab}}) - R(\dot{I}_{xz_{Ab}}) + QR(I_{zz_{Ab}} - I_{yy_{Ab}}) + (PR - \dot{Q})I_{xy_{Ab}} + (R^2 - Q^2)I_{yz_{Ab}} - (PQ + \dot{R})I_{xz_{Ab}} \\ \dot{Q}I_{yy_{Ab}} + Q(\dot{I}_{yy_{Ab}}) - P(\dot{I}_{xy_{Ab}}) - R(\dot{I}_{yz_{Ab}}) + PR(I_{xx_{Ab}} - I_{zz_{Ab}}) - (QR + \dot{P})I_{xy_{Ab}} + (PQ - \dot{R})I_{yz_{Ab}} + (P^2 - R^2)I_{xz_{Ab}} \\ \dot{R}I_{zz_{Ab}} + R(\dot{I}_{zz_{Ab}}) - P(\dot{I}_{xz_{Ab}}) - Q(\dot{I}_{yz_{Ab}}) + PQ(I_{yy_{Ab}} - I_{xx_{Ab}}) + (Q^2 - P^2)I_{xy_{Ab}} - (PR + \dot{Q})I_{yz_{Ab}} + (QR - \dot{P})I_{xz_{Ab}} \end{bmatrix} \\ &= \vec{M} \end{aligned} \quad (4.2.2.2,8)$$

Agora, uma vez determinadas as reações às forças externas (equação (4.2.1,4)) e os momentos externos (equação (4.2.2.2,8)), o seguinte passo será definir quais serão estas forças e momentos externos que atuam sobre a aeronave.

4.2.3 - Definição das Forças Externas:

a. Força Gravitacional:

Definida sobre o sistema de referência Inercial, a força peso tem o seguinte formato (agindo apenas em Z_I):

$$\vec{F}_{G_I} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}_I \quad (4.2.3,1)$$

Com o uso da matriz de transformação/rotação (de I para B) descrita pelos ângulos de Euler (YECHOUT, 2003, equação 4.20):

$$R_{xyz}|_I^B = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \sin \phi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \psi \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \sin \phi \cos \psi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.2.3,2)$$

Chega-se à expressão devido à força gravidade, agindo e sendo observada no corpo:

$$\vec{F}_{G_B} = R_{xyz}|_I^B \cdot \vec{F}_{G_I} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \sin \phi \cos \theta \\ mg \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}_B \quad (4.2.3,3)$$

Na equação acima se ressalta que não aparecem termos com ψ devido a que o vetor força de gravidade independe de ψ .

b. Força Aerodinâmica das semi-asas:

Deve-se destacar que cada semi-asa tem giro independente da outra. Isto quer dizer que, se bem a aeronave possuirá um único ângulo de ataque, devido a que cada asa possuirá um ângulo de incidência (neste caso, o próprio ângulo de giro/tilt) independente, então o ângulo de ataque de uma semi-asa α_{W_i} poderá ser diferente do ângulo de ataque da outra semi-asa. Por tanto, para cada semi-asa, o vetor força será definido originalmente no referencial dos ventos:

$$\vec{F}_{AW_i}^S = \begin{bmatrix} -D_{W_i} \\ 0 \\ -L_{W_i} \end{bmatrix}_S \quad (4.2.3,4)$$

O subscrito A_{W_i} refere-se à força aerodinâmica agindo na i-ésima semi-asa. Já o sobrescrito S refere-se a que a força aerodinâmica está sendo observada originalmente no referencial dos ventos.

Por tanto, para definir a força aerodinâmica no sistema fixo ao corpo, os vetores deverão ser girados em torno do eixo Y_{W_i} (analogamente a como foi feito para os rotores coaxiais R_1 e R_2).

$$Rot_{-Y_{W_1(\alpha)}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.2.3,5)$$

$$\vec{F}_{AW_i}^B = Rot_{-Y_{W_1(\alpha)}} \vec{F}_{AW_i}^S \quad (4.2.3,6)$$

$$\vec{F}_{AW_i}^B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_{W_i} \\ 0 \\ -L_{W_i} \end{bmatrix}_S \quad (4.2.3,7)$$

$$\vec{F}_{AW_i}^B = \begin{bmatrix} -D_{W_i} \cos \alpha + L_{W_i} \sin \alpha \\ 0 \\ -D_{W_i} \sin \alpha - L_{W_i} \cos \alpha \end{bmatrix}_B \quad (4.2.3,8)$$

A força de sustentação aerodinâmica é dada pela seguinte equação:

$$L_{W_i} = \frac{1}{2} C_{l_{W_i}} \rho S_{AW_i} V_{\infty}^2 \quad (4.2.3,9)$$

Com S_{AW_i} sendo a área da semi-asa. O coeficiente de sustentação $C_{l_{W_i}}$ é:

$$C_{l_{W_i}} \approx C_{l_{0W_i}} + C_{l_{\alpha_{W_i}}} \cdot \alpha_{W_i} \quad (4.2.3,10)$$

Na equação (4.2.3,10), $C_{l_{W_i}}$ é aproximado por uma equação de primeira ordem (região linear da curva C_l por α) devido a que se considera aceitável a possibilidade de que o ângulo de ataque da semi-asa não chegue no seu ângulo máximo de stall. Por outro lado, cabe ressaltar que α_{W_i} é entendido como o ângulo de ataque que a semi-asa enxerga, o mesmo é dado pela seguinte relação:

$$\alpha_{W_i} = (\alpha - \phi_{E_i}) \quad (4.2.3,11)$$

Para a consideração do ângulo de ataque da semi-asa não chegar ao ângulo máximo de stall, assume-se que durante uma operação de voo para frente, quando as semi-asas tiverem pequenos ângulos de inclinação (ϕ_{E_i}), o vetor velocidade relativa do vento terá como componente principal a velocidade da aeronave e qualquer outra componente de rajada de vento poderá ser considerada pequena ou desprezível.

Na equação (4.2.3,11) ϕ_{E_i} leva um sinal negativo na frente devido à convenção adotada para os três ângulos de inclinação. De tal forma que, para um ângulo de ataque da aeronave positivo (figura 9), com uma inclinação negativa como valor de ϕ_{E_i} , o sinal negativo tornaria positivo o valor escolhido para ϕ_{E_i} , resultando na soma dos ângulos α e ϕ_{E_i} .

Agora, considerando que a força e coeficiente de arrasto sejam dados de forma análoga à força e coeficiente de sustentação:

$$D_{W_i} = \frac{1}{2} C_{d_{W_i}} \rho S_{A_{W_i}} V_{\infty}^2 \quad (4.2.3,12)$$

$$C_{d_{W_i}} \approx C_{d_{o_{W_i}}} + \left(\frac{1}{\pi e AR_{W_i}} \right) C_{l_{W_i}}^2 \quad (4.2.3,13)$$

Com e e AR_{W_i} , o fator de Oswald e o Alongamento da semi-asa, respectivamente.

Portanto, as forças aerodinâmicas totais devido as duas semi-asas serão:

$$\vec{F}_A^B = \vec{F}_{AW_1}^B + \vec{F}_{AW_2}^B = \vec{F}_A \quad (4.2.3,14)$$

$$\vec{F}_A = \begin{bmatrix} -D_{W_1} \cos \alpha + L_{W_1} \sin \alpha \\ 0 \\ -D_{W_1} \sin \alpha - L_{W_1} \cos \alpha \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} -D_{W_2} \cos \alpha + L_{W_2} \sin \alpha \\ 0 \\ -D_{W_2} \sin \alpha - L_{W_2} \cos \alpha \end{bmatrix}_B \quad (4.2.3,15)$$

$$\vec{F}_A = \begin{bmatrix} -(D_{W_1} + D_{W_2}) \cos \alpha + (L_{W_1} + L_{W_2}) \sin \alpha \\ 0 \\ -(D_{W_1} + D_{W_2}) \sin \alpha - (L_{W_1} + L_{W_2}) \cos \alpha \end{bmatrix}_B \quad (4.2.3,16)$$

c. Força de Arrasto da Fuselagem:

O arrasto devido à viscosidade do fluido sobre uma superfície de formato fixo (fuselagem) pode ser simplificado de tal forma que a força de arrasto seja proporcional ao vetor velocidade da aeronave, levando em consideração uma constante de arrasto que possui componentes X, Y e Z:

$$\vec{F}_D^B = -k_d V_B^2 = \begin{bmatrix} -k_{d_x} \cdot U^2 \\ -k_{d_y} \cdot V^2 \\ -k_{d_z} \cdot W^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.3,17)$$

$$\begin{bmatrix} k_{d_x} \\ k_{d_y} \\ k_{d_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho A_{f_x} C_{d_x} \\ \frac{1}{2} \rho A_{f_y} C_{d_y} \\ \frac{1}{2} \rho A_{f_z} C_{d_z} \end{bmatrix} \quad (4.2.3,18)$$

Com A_{f_x} , A_{f_y} , A_{f_z} como sendo as áreas projetadas da fuselagem nos diferentes eixos coordenados fixos ao corpo e C_{d_x} , C_{d_y} , C_{d_z} os seus respectivos coeficientes de arrasto.

d. Força de Tração:

Para o primeiro rotor R_1 , sua força de tração é definida no sistema de referência fixo a ele (r_1) de acordo com a figura 10:

$$\vec{T}_{R_1}^{r_1} = \begin{bmatrix} T_{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.3,19)$$

$$\vec{T}_{R_1}^B = Rot_{-Y_{r_1}(\Phi_{E_1})} \vec{T}_{R_1}^{r_1} \quad (4.2.3,20)$$

$$\vec{T}_{R_1}^B = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{E_1} & 0 & -\sin \Phi_{E_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_{E_1} & 0 & \cos \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.3,21)$$

$$\vec{T}_{R_1}^B = \begin{bmatrix} T_{R_1} \cos \Phi_{E_1} \\ 0 \\ T_{R_1} \sin \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.3,22)$$

Analogamente para o rotor R_2 :

$$\vec{T}_{R_2}^{r_2} = \begin{bmatrix} T_{R_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.3,23)$$

$$\vec{T}_{R_2}^B = Rot_{-Y_{r_2}(\Phi_{E_2})} \vec{T}_{R_2}^{r_2} \quad (4.2.3,24)$$

$$\vec{T}_{R_2}^B = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{E_2} & 0 & -\sin \Phi_{E_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_{E_2} & 0 & \cos \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{R_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.3,25)$$

$$\vec{T}_{R_2}^B = \begin{bmatrix} T_{R_2} \cos \Phi_{E_2} \\ 0 \\ T_{R_2} \sin \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.3,26)$$

Para o rotor R_3 , de acordo com a figura 11:

$$\vec{T}_{R_3}^{r_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.3,27)$$

$$\vec{T}_{R_3}^B = Rot_{X_{r_3}(\Phi_{E_3})} \vec{T}_{R_3}^{r_3} \quad (4.2.3,28)$$

(Rotação de acordo com o apresentado na equação (4.2.2.1,11))

$$(4.2.3,29)$$

$$\vec{T}_{R_3}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi_{E_3} & -\sin \Phi_{E_3} \\ 0 & \sin \Phi_{E_3} & \cos \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{T}_{R_3}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ T_{R_3} \cos \Phi_{E_3} \\ T_{R_3} \sin \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.3,30)$$

Por tanto, a tração total da aeronave será definida pela soma das equações (4.2.3,22), (4.2.3,26) e (4.2.3,30):

$$\vec{T}_R = \begin{bmatrix} T_{R_1} \cos \Phi_{E_1} + T_{R_2} \cos \Phi_{E_2} \\ T_{R_3} \cos \Phi_{E_3} \\ T_{R_1} \sin \Phi_{E_1} + T_{R_2} \sin \Phi_{E_2} + T_{R_3} \sin \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.3,31)$$

Para definir uma expressão de T_{R_i} existem diferentes metodologias. Neste caso, foi escolhido o modelo de “Disco Atuador” proposto por Rankine-Freud em 1865 que descreve um fluxo de ar unidirecional como é visto na Figura 15. Este método, se bem é considerado simples, é comumente utilizado para descrever as condições iniciais de um rotor.

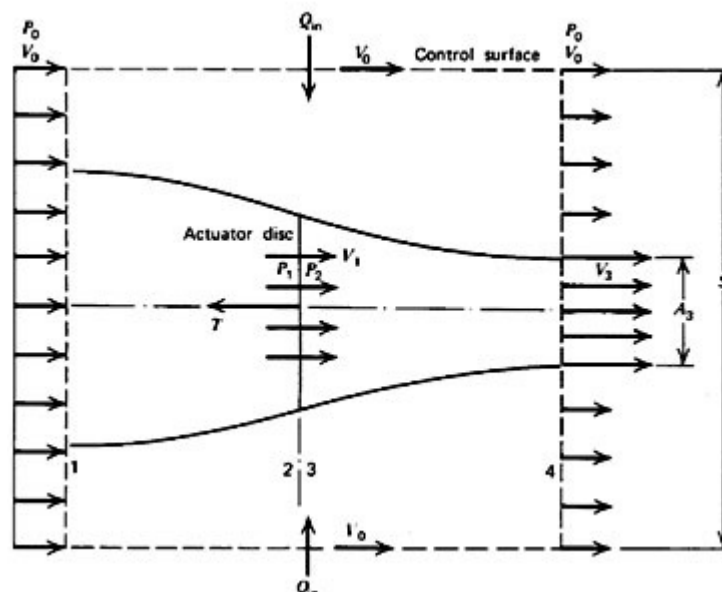


Figura 15 - Modelo de disco atuador. (<http://web.mit.edu/16.unified/www/SPRING/propulsion/notes/node86.html>. Acessado em: 13 out. 2017)

Entre as características mais relevantes deste modelo, está a consideração de que o fluxo estará contido dentro de uma superfície de controle na qual não haverá troca de massa fora dos limites laterais do fluxo. Adicionalmente é considerado que o ar é incompressível e que a velocidade que o rotor induz sobre o fluxo de ar é aproximada como uma relação dada pela diferença de pressão entre os pontos 2 e 3 (figura 15). O modelo de disco atuador da Figura 15 é aplicado para cada um dos dois mono-rotores que conformam um rotor-coaxial.

Para uma condição onde o fluxo entra com uma velocidade relativa, a velocidade induzida sobre o fluxo devido ao rotor é dada pela expressão:

$$v_h = \frac{V_A + \sqrt{V_A^2 + \frac{2T}{\rho A_D}}}{2} \quad (4.2.3,32)$$

Nesta equação, T representa a tração gerada por um único rotor, A_D representa a área do disco formado pelo giro da hélice do rotor e V_A representa a velocidade de entrada do fluxo. Adicionalmente, para uma condição sem velocidade de entrada (voo pairado ou decolagem) a expressão (4.2.3,32) se reduz para:

$$v_h = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_D}} \quad (4.2.3,33)$$

Agora para determinar a relação entre força de tração, velocidade induzida pelo rotor e velocidade de giro do rotor são consideradas as expressões que aproximam o funcionamento elétrico de um motor brushless (sem escovas), comumente utilizados na atualidade em aeronaves multi-rotor. Como descrito por MACHINI (2016), o torque produzido pelo motor (Q_{bm}) é relacionado à corrente de entrada e à corrente inicial do motor quando este não está sobre a ação uma carga (a vazio).

$$Q_{bm} = K_t(i - i_0) \quad (4.2.3,34)$$

Com K_t como a constante de proporcionalidade entre o torque e a corrente. Já a tensão que é aplicada ao motor leva em conta outra constante de proporcionalidade e uma perda resistiva:

$$V_{bm} = iR_m + K_E\Omega \quad (4.2.3,35)$$

Com K_E como a constante de proporcionalidade entre a tensão e a velocidade de rotação Ω do motor e R_m como sendo apenas a resistência interna do motor. Com estas duas últimas equações escreve-se a potência elétrica consumida pelo motor:

$$P_{bm} = iV = \frac{(Q_{bm} + K_t i_0)(K_t i_0 R_m + Q_{bm} R_m + K_t K_E \Omega)}{K_t^2} \quad (4.2.3,36)$$

Assumindo uma resistência interna do motor desprezível e que $Q_{bm} \gg K_t i_0$, a potência do motor brushless pode ser simplificada:

$$P_{bm} \sim \frac{K_E}{K_t} \Omega Q_{bm} \quad (4.2.3,37)$$

Se forem considerados a força de tração e o torque em função dos coeficientes de empuxo e de torque como MAGNUSSON (2014):

$$T_{bm} = C_T \rho \beta^4 \pi \Omega^2 \quad , \quad Q_{bm} = C_Q \rho \beta^5 \pi \Omega^2 \quad (4.2.3,38)$$

Com T_{bm} e C_T , a força de tração e seu coeficiente de tração e, Q_{bm} e C_Q , como o torque e seu coeficiente de torque. Dividindo o torque pela tração e assumindo que esta relação seja constante:

$$K_\tau \sim \frac{Q_{bm}}{T_{bm}} = \frac{C_Q}{C_T} \beta \quad (4.2.3,39)$$

Isolando em (4.2.3,39) Q_{bm} e substituindo em (4.2.3,37). Adicionalmente compreendendo que a potência que o motor consome é dado pela multiplicação entre a tração e a velocidade que o rotor induz sobre o fluxo, temos:

$$P_{bm} = \frac{K_E}{K_t} K_\tau T_{bm} \Omega = T_{bm} v_h = T_{bm} \frac{V_A + \sqrt{V_A^2 + \frac{2T_{bm}}{\rho A_D}}}{2} \quad (4.2.3,40)$$

Se igualarmos o segundo e o último termo, será possível de chegar na relação entre velocidade de rotação por tração:

$$\Omega = \frac{K_t}{K_E K_\tau} \frac{V_A + \sqrt{V_A^2 + \frac{2T_{bm}}{\rho A_D}}}{2} \quad (4.2.3,41)$$

De acordo com MORBIDI (2016), K_t e K_E são exatamente iguais. Portanto, a última equação simplifica-se em:

$$\Omega = \left(\frac{1}{K_\tau}\right) \frac{V_A + \sqrt{V_A^2 + \frac{2T_{bm}}{\rho A_D}}}{2} \quad (4.2.3,42)$$

Adicionalmente, é possível isolar a tração do motor da equação (4.2.3,42), obtendo:

$$T_{bm} = 2\rho A_D (K_\tau^2 \Omega^2 - K_\tau \Omega V_A) \quad (4.2.3,43)$$

4.2.4 - Definição dos Momentos Externos:

a. Efeito Giroscópio das Hélices:

O efeito giroscópio proveniente da alteração da direção da quantidade de movimento das hélices gera um torque em torno do centro de gravidade da aeronave. Desta forma, a quantidade de momento angular de cada hélice, em relação ao seu eixo de rotação, pode ser escrito por:

$$\vec{H}_{prop} = I_{prop} \cdot \Omega_i \quad (4.2.4,1)$$

Com $i = 1, 2, 3, \dots, 6$

I_{prop} é o momento de inércia da hélice i em relação a seu eixo de rotação e Ω_i é a sua respectiva velocidade de rotação. Por tanto, a quantidade de momento angular para, por exemplo, o rotor coaxial R_1 será:

$$\vec{H}_{R_1 prop(r_1)} = (I_{prop_1} \cdot \Omega_1 + I_{prop_2} \cdot \Omega_2) \vec{i}_{r_1} = \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \quad (4.2.4,2)$$

Observa-se que este momento angular está definido sobre o eixo X_{r_1} (figuras 8-10).

Por tanto, o momento angular da hélice em relação ao corpo da aeronave será obtido através da matriz de rotação $Rot_{-Y_{r_1}(\Phi_{E_1})}$.

$$\vec{H}_{R_1prop(p_{b_1})} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{E_1} & 0 & -\sin \Phi_{E_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_{E_1} & 0 & \cos \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.4,3)$$

$$\vec{H}_{R_1prop(p_{b_1})} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_1} \\ 0 \\ \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,4)$$

Então, o torque gerado é obtido derivando temporalmente a equação (4.2.4,4) da seguinte forma (equação (4.2,1)):

$$\begin{aligned} \vec{T}_{G_1} = \dot{\vec{H}}_{R_1prop(B)} &= \dot{\vec{H}}_{R_1prop(p_{b_1})} \\ &= \frac{d\vec{H}_{R_1prop(p_{b_1})}}{dt} + (\vec{\omega} + \vec{\Phi}_{E_1}) \times \vec{H}_{R_1prop(p_{b_1})} \end{aligned} \quad (4.2.4,5)$$

Observa-se que dentro do parêntese, no produto vetorial, não somente está sendo levada em consideração a velocidade angular da aeronave $\vec{\omega}$, mas também a taxa de variação do ângulo de tilt do rotor coaxial R_1 , dada por $\vec{\Phi}_{E_1}$. Isto se deve à velocidade relativa entre a aeronave conjunta e o rotor.

Agora, considerando que a inércia I_{prop} seja constante, temos:

$$\therefore \frac{d\vec{H}_{R_1prop(p_{b_1})}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i)}{dt} \cos \Phi_{E_1} + \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \frac{d \cos \Phi_{E_1}}{dt} \\ 0 \\ \frac{d \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i)}{dt} \sin \Phi_{E_1} + \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \frac{d \sin \Phi_{E_1}}{dt} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,6)$$

$$\frac{d\vec{H}_{R_1prop(p_{b_1})}}{dt} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \cos \Phi_{E_1} - \dot{\Phi}_{E_1} \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_1} \\ 0 \\ \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \sin \Phi_{E_1} + \dot{\Phi}_{E_1} \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,7)$$

$$\therefore (\vec{\omega} + \vec{\dot{\Phi}}_{E_1}) \times \vec{H}_{R_1prop(p_{b_1})} = \begin{bmatrix} P \\ Q + \dot{\Phi}_{E_1} \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_1} \\ 0 \\ \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,8)$$

Resolvendo o produto vetorial, obtém-se:

$$\therefore (\vec{\omega} + \vec{\dot{\Phi}}_{E_1}) \times \vec{H}_{R_1prop(p_{b_1})} = \begin{bmatrix} (Q + \dot{\Phi}_{E_1}) \cdot \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_1} \\ (R \cos \Phi_{E_1} - P \sin \Phi_{E_1}) \cdot \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \\ -(Q + \dot{\Phi}_{E_1}) \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,9)$$

Substituindo (4.2.4,7) e (4.2.4,9) em (4.2.4,5):

$$\therefore \vec{T}_{G_1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \cos \Phi_{E_1} - \dot{\Phi}_{E_1} \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_1} + (Q + \dot{\Phi}_{E_1}) \cdot \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_1} \\ (R \cos \Phi_{E_1} - P \sin \Phi_{E_1}) \cdot \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \\ \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \sin \Phi_{E_1} + \dot{\Phi}_{E_1} \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_1} - (Q + \dot{\Phi}_{E_1}) \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,10)$$

Os índices 1 e 2do somatório na equação (4.2.4,10) fazem referência ao primeiro e segundo motor brushless que, juntos, conformam o rotor coaxial. Para o rotor coaxial R_2 , o procedimento para achar \vec{T}_{G_2} (o torque devido ao efeito giroscópico das hélices do segundo rotor coaxial) é análogo ao que foi feito para o primeiro rotor coaxial. Isto levaria à seguinte equação:

$$\therefore \vec{T}_{G_2} = \begin{bmatrix} \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \cos \Phi_{E_2} - \dot{\Phi}_{E_2} \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_2} + (Q + \dot{\Phi}_{E_2}) \cdot \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_2} \\ (R \cos \Phi_{E_2} - P \sin \Phi_{E_2}) \cdot \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \\ \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \sin \Phi_{E_2} + \dot{\Phi}_{E_2} \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_2} - (Q + \dot{\Phi}_{E_2}) \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,11)$$

Ressaltando que nesta última equação, o valor de i será referente às hélices 3 e 4, que conformam o rotor coaxial R_2 .

Para o rotor coaxial R_3 , o procedimento é diferente:

$$\vec{H}_{R_3prop(r_3)} = (I_{prop_5} \cdot \Omega_5 + I_{prop_6} \cdot \Omega_6) \vec{j}_{r_3} = \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \quad (4.2.4,12)$$

Ressaltando que nesta última equação, o valor de i será referente às hélices 5 e 6, que conformam o rotor coaxial R_3 .

O momento angular da hélice em relação ao corpo da aeronave será obtido através da matriz de rotação $Rot_{X_{r_3}(\Phi_{E_3})}$ (como foi explicado na equação (4.2.2.1,11)).

$$\vec{H}_{R_3prop(p_{b_3})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi_{E_3} & -\sin \Phi_{E_3} \\ 0 & \sin \Phi_{E_3} & \cos \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.4,13)$$

$$\vec{H}_{R_3prop(p_{b_3})} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_3} \\ \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,14)$$

$$\therefore \vec{T}_{G_3} = \vec{H}_{R_3prop(p_{b_3(B)})} = \vec{H}_{R_3prop(p_{b_3})} = \frac{d\vec{H}_{R_3prop(p_{b_3})}}{dt} + (\vec{\omega} + \vec{\Phi}_{E_3}) \times \vec{H}_{R_3prop(p_{b_3})} \quad (4.2.4,15)$$

$$\therefore \frac{d\vec{H}_{R_3prop(p_{b_3})}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i)}{dt} \cos \Phi_{E_3} + \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \frac{d \cos \Phi_{E_3}}{dt} \\ \frac{d \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i)}{dt} \sin \Phi_{E_3} + \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \frac{d \sin \Phi_{E_3}}{dt} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,16)$$

$$\frac{d\vec{H}_{R_3prop(p_{b_3})}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \cos \Phi_{E_3} - \dot{\Phi}_{E_3} \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_3} \\ \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \sin \Phi_{E_3} + \dot{\Phi}_{E_3} \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,17)$$

$$\therefore (\vec{\omega} + \vec{\Phi}_{E_3}) \times \vec{H}_{R_3prop(p_{b_3})} = \begin{bmatrix} P + \dot{\Phi}_{E_3} \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_3} \\ \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,18)$$

Resolvendo o produto vetorial, obtém-se:

$$\therefore (\vec{\omega} + \dot{\Phi}_{E_3}) \times \vec{H}_{R_3prop}(P_{b_3}) = \begin{bmatrix} (Q \sin \Phi_{E_3} - R \cos \Phi_{E_3}) \cdot \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \\ -(P + \dot{\Phi}_{E_3}) \cdot \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_3} \\ (P + \dot{\Phi}_{E_3}) \cdot \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,19)$$

Substituindo (4.2.4,17) e (4.2.4,19) em (4.2.4,15):

$$\therefore \vec{T}_{G_3} = \begin{bmatrix} (Q \sin \Phi_{E_3} - R \cos \Phi_{E_3}) \cdot \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \\ \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \cos \Phi_{E_3} - \dot{\Phi}_{E_3} \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_3} - (P + \dot{\Phi}_{E_3}) \cdot \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_3} \\ \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \sin \Phi_{E_3} + \dot{\Phi}_{E_3} \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_3} + (P + \dot{\Phi}_{E_3}) \cdot \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,20)$$

b. Momentos devido à força de tração dos rotores coaxiais:

Para o primeiro rotor coaxial R_1 , olhando para a equação (4.2.2.1,36) e com o auxílio da figura 13, lembramos que existe um vetor posição $\vec{R}_1^B = [x_{R_1} \ y_{R_1} \ z_{R_1}]^T$, que descreve a posição fixa no espaço do centro de gravidade de R_1 com relação ao centro de gravidade da aeronave. Por tanto, o momento produzido graças à tração do primeiro rotor coaxial será dado por:

$$\vec{M}_{T_{R_1}} = \vec{R}_1^B \times \vec{T}_{R_1}^B \quad (4.2.4,21)$$

$$\vec{M}_{T_{R_1}} = \begin{bmatrix} x_{R_1} \\ y_{R_1} \\ z_{R_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{R_1} \cos \phi_{E_1} \\ 0 \\ T_{R_1} \sin \phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,22)$$

Resolvendo o produto vetorial da equação (4.2.4,22):

$$\vec{M}_{TR_1} = \begin{bmatrix} y_{R_1} T_{R_1} \sin \phi_{E_1} \\ (z_{R_1} \cos \phi_{E_1} - x_{R_1} \sin \phi_{E_1}) T_{R_1} \\ -y_{R_1} T_{R_1} \cos \phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,23)$$

Analogamente para \vec{M}_{TR_2} :

$$\vec{M}_{TR_2} = \begin{bmatrix} x_{R_2} \\ y_{R_2} \\ z_{R_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{R_2} \cos \phi_{E_2} \\ 0 \\ T_{R_2} \sin \phi_{E_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,24)$$

Resolvendo o produto vetorial da equação (4.2.4,24):

$$\vec{M}_{TR_2} = \begin{bmatrix} y_{R_2} T_{R_2} \sin \phi_{E_2} \\ (z_{R_2} \cos \phi_{E_2} - x_{R_2} \sin \phi_{E_2}) T_{R_2} \\ -y_{R_2} T_{R_2} \cos \phi_{E_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,25)$$

Por tanto, para o terceiro rotor R_3 (traseiro):

$$\vec{M}_{TR_3} = \vec{R}_3^B \times \vec{T}_{R_3}^B \quad (4.2.4,26)$$

$$\vec{M}_{TR_3} = \begin{bmatrix} x_{R_3} \\ 0 \\ z_{R_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ T_{R_3} \cos \phi_{E_3} \\ T_{R_3} \sin \phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,27)$$

Nesta última equação ressalta-se que a posição y_{R_3} é considerada nula já que se assume que o C.G de R_3 estará alinhado com o eixo Y_B da aeronave e, por tanto, não haverá posição relativa em Y entre os eixos Y_B e $Y_{P_{b_3}}$.

Resolvendo o produto vetorial de (4.2.4,27):

$$\vec{M}_{T_{R_3}} = \begin{bmatrix} -z_{R_3} T_{R_3} \cos \phi_{E_3} \\ -x_{R_3} T_{R_3} \sin \phi_{E_3} \\ x_{R_3} T_{R_3} \cos \phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,28)$$

Finalmente, somando as equações (4.2.4,23), (4.2.4,25) e (4.2.4,28), é obtido o vetor de momentos externos devido à tração dos três rotores coaxiais:

$$\vec{M}_{T_R} = \begin{bmatrix} y_{R_1} T_{R_1} \sin \phi_{E_1} + y_{R_2} T_{R_2} \sin \phi_{E_2} - z_{R_3} T_{R_3} \cos \phi_{E_3} \\ (z_{R_1} \cos \phi_{E_1} - x_{R_1} \sin \phi_{E_1}) T_{R_1} + (z_{R_2} \cos \phi_{E_2} - x_{R_2} \sin \phi_{E_2}) T_{R_2} - x_{R_3} T_{R_3} \sin \phi_{E_3} \\ -y_{R_1} T_{R_1} \cos \phi_{E_1} - y_{R_2} T_{R_2} \cos \phi_{E_2} + x_{R_3} T_{R_3} \cos \phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,29)$$

Nesta última equação, entende-se que a primeira linha representará a influência na rolagem, a segunda representará a influência na arfagem e a terceira representará a influência na guinada.

c. Momentos Aerodinâmicos devido as duas semi-asa:

Assim como foi feito para os rotores coaxiais, sabe-se que existirá o vetor posição para o centro de gravidade de cada semi-asa. Desta forma tem-se para a primeira semi-asa:

$$\vec{M}_{A_{W_1}} = \vec{M}_{AC_{W_1}} + \vec{r}_{AC_{W_1}}^B x \vec{F}_{A_{W_1}}^B \quad (4.2.4,30)$$

Sendo $\vec{r}_{AC_{W_1}}^B$ o vetor posição desde o centro aerodinâmico da semi-asa até o centro de gravidade da aeronave. Por outro lado, $\vec{M}_{AC_{W_1}}$ representa o momento aerodinâmico da semi-asa devido ao tipo de perfil aerodinâmico utilizado para sua superfície.

$$\vec{M}_{A_{W_1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{AC_{W_1}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{W_1} \\ y_{W_1} \\ z_{W_1} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} -D_{W_1} \cos \alpha + L_{W_1} \sin \alpha \\ 0 \\ -D_{W_1} \sin \alpha - L_{W_1} \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.2.4,31)$$

Resolvendo o produto vetorial da equação acima e somando:

$$\vec{M}_{AW_1} = \begin{bmatrix} -y_{W_1}(D_{W_1} \sin \alpha + L_{W_1} \cos \alpha) \\ M_{AC_{W_1}} + x_{W_1}(D_{W_1} \sin \alpha + L_{W_1} \cos \alpha) + z_{W_1}(-D_{W_1} \cos \alpha + L_{W_1} \sin \alpha) \\ -y_{W_1}(-D_{W_1} \cos \alpha + L_{W_1} \sin \alpha) \end{bmatrix} \quad (4.2.4,32)$$

Por tanto, para a segunda semi-asa W_2 , o procedimento é idêntico. Chegando finalmente na equação:

$$\vec{M}_{AW_2} = \begin{bmatrix} -y_{W_2}(D_{W_2} \sin \alpha + L_{W_2} \cos \alpha) \\ M_{AC_{W_2}} + x_{W_2}(D_{W_2} \sin \alpha + L_{W_2} \cos \alpha) + z_{W_2}(-D_{W_2} \cos \alpha + L_{W_2} \sin \alpha) \\ -y_{W_2}(-D_{W_2} \cos \alpha + L_{W_2} \sin \alpha) \end{bmatrix} \quad (4.2.4,33)$$

d. Torque devido ao desbalanceamento de rotação:

O torque proveniente do desbalanceamento entre o giro das hélices é descrito da seguinte maneira (MACHINI, 2016):

Segundo ASSELIN (1965) a força de arrasto atuante na hélice e sua rotação pode ser formulada por:

$$F_{D_j}^{r_i} = \frac{1}{2} \rho C_{D_{h_j}} A_{h_j} V_{h_j}^2 \quad (4.2.4,34)$$

Sendo nesta última equação $j = 1, 2, 3, \dots, 6$ o índice da hélice e $i = 1, 2, 3$ o índice de a qual sistema de referência fixo ao rotor coaxial essa hélice corresponde. A_{h_j} é a área da secção transversal da hélice e V_{h_j} é a velocidade relativa da hélice em relação ao vento.

Considerando que o torque seja dado por:

$$\vec{\tau}_{D_j}^{r_i} = \left(\frac{1}{2} \rho C_{D_{h_j}} A_{h_j} V_{h_j}^2 \beta_j \right) \vec{i}_{r_i} \text{ ou } \left(\frac{1}{2} \rho C_{D_{h_j}} A_{h_j} V_{h_j}^2 \beta_j \right) \vec{j}_{r_i} \quad (4.2.4,35)$$

Com β_j como o raio da j-ésima hélice e \vec{l}_{r_i} ou \vec{j}_{r_i} representando o vetor unitário na direção X ou Y do referencial fixo ao respectivo rotor (r_i).

$$\vec{\tau}_{D_j}^{r_i} = \left(\frac{1}{2} \rho C_{D_{h_j}} A_{h_j} (\Omega_j \beta_j)^2 \beta_j \right) \vec{l}_{r_i} \quad (4.2.4,36)$$

$$\vec{\tau}_{D_j}^{r_i} = (b_j \Omega_j^2) \vec{l}_{r_i} \quad (4.2.4,37)$$

Com b uma constante que engloba: $b_j = \left(\frac{1}{2} \rho C_{D_j} A_{h_j} \beta_j^3 \right)$.

Por tanto, considerando que todas as 6 hélices sejam iguais, $b_j = b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b_6 = b$, então:

$$\vec{\tau}_{D_j}^{r_i} = b(\Omega_j^2) \vec{l}_{r_i} \quad (4.2.4,38)$$

Dado que aos pares as hélices são solidárias a um mesmo eixo do respectivo rotor coaxial, teremos:

$$\vec{\tau}_{D_1}^{r_1} = b(\Omega_1^2) \vec{l}_{r_1} \text{ e } \vec{\tau}_{D_2}^{r_1} = -b(\Omega_2^2) \vec{l}_{r_1} \quad (4.2.4,39)$$

Entende-se que na equação acima Ω_1 e Ω_2 giram em sentidos opostos:

$$\vec{\tau}_{D_{R_1}}^{r_1} = \vec{\tau}_{D_1}^{r_1} + \vec{\tau}_{D_2}^{r_1} = [b(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)] \vec{l}_{r_1} \quad (4.2.4,40)$$

Analogamente para o rotor R_2 :

$$\vec{\tau}_{D_{R_2}}^{r_2} = \vec{\tau}_{D_3}^{r_2} + \vec{\tau}_{D_4}^{r_2} = [b(\Omega_3^2 - \Omega_4^2)] \vec{l}_{r_2} \quad (4.2.4,41)$$

E para o rotor R_3 :

$$\vec{\tau}_{DR_3}^{r_3} = \vec{\tau}_{D_1}^{r_3} + \vec{\tau}_{D_2}^{r_3} = [b(\Omega_5^2 - \Omega_6^2)]\vec{J}_{r_3} \quad (4.2.4,42)$$

Agora, de acordo com FOGELBERG (2013), um torque inercial contrário a τ_D será gerado devido à variação da quantidade de movimento angular das hélices e pode ser escrito como:

$$\vec{\tau}_{CD_j}^{r_i} = (I_{prop_j} \dot{\Omega}_j) \vec{l}_{r_i} \text{ ou } \vec{\tau}_{CD_j}^{r_i} = (I_{prop_j} \dot{\Omega}_j) \vec{J}_{r_i} \quad (4.2.4,43)$$

Novamente, considerando hélices iguais, $I_{prop_1} = I_{prop_2} = I_{prop_3} = \dots = I_{prop_6} = I_{prop}$ (momento de inércia de cada hélice), temos:

$$\vec{\tau}_{CDR_1}^{r_1} = [I_{prop}(\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2)]\vec{l}_{r_1} \quad (4.2.4,44)$$

$$\vec{\tau}_{CDR_2}^{r_2} = [I_{prop}(\dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4)]\vec{l}_{r_2} \quad (4.2.4,45)$$

$$\vec{\tau}_{CDR_3}^{r_3} = [I_{prop}(\dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4)]\vec{l}_{r_3} \quad (4.2.4,46)$$

Agora, já que os torques devido ao arrasto estão definidos nos seus respectivos sistemas de referência fixos aos rotores coaxiais (r_1, r_2, r_3), será necessário aplicar uma matriz de transformação/rotação em cada um, a fim de referenciá-los ao corpo.

Por tanto, para os torques devido ao arrasto:

$$\vec{\tau}_{DR_1}^B = Rot_{-Y_{r_1}(\phi_{E_1})} \vec{\tau}_{D_1}^{r_1} \quad (4.2.4,47)$$

$$\vec{\tau}_{DR_1}^B = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{E_1} & 0 & -\sin \Phi_{E_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_{E_1} & 0 & \cos \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.4,48)$$

$$\vec{\tau}_{DR_1}^B = \begin{bmatrix} b(\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \cos \Phi_{E_1} \\ 0 \\ b(\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \sin \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,49)$$

Analogamente para $\vec{\tau}_{DR_2}^B$:

$$\vec{\tau}_{DR_2}^B = \begin{bmatrix} b(\Omega_3^2 - \Omega_4^2) \cos \Phi_{E_2} \\ 0 \\ b(\Omega_3^2 - \Omega_4^2) \sin \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,50)$$

Para $\vec{\tau}_{DR_3}^B$:

$$\vec{\tau}_{DR_3}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi_{E_3} & -\sin \Phi_{E_3} \\ 0 & \sin \Phi_{E_3} & \cos \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b(\Omega_5^2 - \Omega_6^2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.4,51)$$

$$\vec{\tau}_{DR_3}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ b(\Omega_5^2 - \Omega_6^2) \cos \Phi_{E_3} \\ b(\Omega_5^2 - \Omega_6^2) \sin \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,52)$$

Para os torques inerciais contrários:

$$\vec{\tau}_{CDR_1}^B = Rot_{-Y_{r_1}(\Phi_{E_1})} \vec{\tau}_{CDR_1}^{r_1} \quad (4.2.4,53)$$

$$\vec{\tau}_{CDR_1}^B = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{E_1} & 0 & -\sin \Phi_{E_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_{E_1} & 0 & \cos \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_M(\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.4,54)$$

$$\vec{\tau}_{C_{DR_1}}^B = \begin{bmatrix} I_M(\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2) \cos \Phi_{E_1} \\ 0 \\ I_M(\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2) \sin \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,55)$$

Analogamente para $\vec{\tau}_{C_{DR_2}}^B$:

$$\vec{\tau}_{C_{DR_2}}^B = \begin{bmatrix} I_{prop}(\dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) \cos \Phi_{E_2} \\ 0 \\ I_{prop}(\dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) \sin \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,56)$$

∴

$$\vec{\tau}_{C_{DR_3}}^B = Rot_{X_{r_3}(\Phi_{E_3})} \vec{\tau}_{C_{DR_3}}^{r_3} \quad (4.2.4,57)$$

$$\vec{\tau}_{C_{DR_3}}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi_{E_3} & -\sin \Phi_{E_3} \\ 0 & \sin \Phi_{E_3} & \cos \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_M(\dot{\Omega}_5 - \dot{\Omega}_6) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.4,58)$$

$$\vec{\tau}_{C_{DR_3}}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{prop}(\dot{\Omega}_5 - \dot{\Omega}_6) \cos \Phi_{E_3} \\ I_{prop}(\dot{\Omega}_5 - \dot{\Omega}_6) \sin \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,59)$$

Finalmente, reagrupando:

$$\vec{\tau}_{(D+C_D)R_1}^B = \begin{bmatrix} b(\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \cos \Phi_{E_1} + I_{prop}(\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2) \cos \Phi_{E_1} \\ 0 \\ b(\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \sin \Phi_{E_1} + I_{prop}(\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2) \sin \Phi_{E_1} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,60)$$

$$\vec{\tau}_{(D+C_D)R_2}^B = \begin{bmatrix} b(\Omega_3^2 - \Omega_4^2) \cos \Phi_{E_2} + I_{prop}(\dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) \cos \Phi_{E_2} \\ 0 \\ b(\Omega_3^2 - \Omega_4^2) \sin \Phi_{E_2} + I_{prop}(\dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) \sin \Phi_{E_2} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,61)$$

$$\vec{\tau}_{(D+C_D)R_3}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ b(\Omega_5^2 - \Omega_6^2) \cos \Phi_{E_3} + I_{prop}(\dot{\Omega}_5 - \dot{\Omega}_6) \cos \Phi_{E_3} \\ b(\Omega_5^2 - \Omega_6^2) \sin \Phi_{E_3} + I_{prop}(\dot{\Omega}_5 - \dot{\Omega}_6) \sin \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4,62)$$

4.2.5 - Equações Cinemáticas

A equação (4.2.3,2) introduziu brevemente a matriz de transformação de um vetor definido no referencial inercial e levado para o sistema de referência fixo ao corpo de uma aeronave. Esta equação foi utilizada para projetar a força gravitacional sobre os eixos correspondentes da aeronave. Ela é replicada uma vez mais aqui por conveniência (YECHOUT, 2003, equação 4.20):

$$R_{xyz|I}^B = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \sin \phi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \psi \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \sin \phi \cos \psi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.2.5,1)$$

Os ângulos de Euler são ângulos que definem a inclinação da aeronave quando observada desde um referencial inercial (atitude da aeronave). Como YECHOUT (2003) define nas suas equações 4.72-4.79, se for colocado um sistema paralelo ao referencial inercial, com o centro de gravidade da aeronave como a origem deste sistema de referência, é possível obter uma relação de transformação entre as componentes da velocidade de rotação definidas no corpo $\vec{\omega}$ e o vetor variação temporal dos ângulos de Euler $\vec{\dot{\theta}}$.

A velocidade de rotação da aeronave é definida pelo vetor:

$$\omega = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (4.2.5,2)$$

A variação temporal dos ângulos de Euler será definida como:

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.2.5,3)$$

Sendo ϕ , θ e ψ definidos como rolagem, arfagem e guinada, respectivamente. É necessário notar que a variação dos ângulos de Euler na equação (4.2.5,3) não é igual ao vetor velocidade de rotação do corpo, expresso na equação (4.2.5,2).

$$\vec{\omega} \neq \vec{\dot{\theta}} \quad (4.2.5,4)$$

Porém, através de uma série de rotações como é explicado por YECHOUT (2003), é possível de obter uma relação entre estes dois vetores:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \dot{\psi} + \dot{\phi} \\ \sin \phi \cos \theta \dot{\psi} + \cos \phi \dot{\theta} \\ \cos \phi \cos \theta \dot{\psi} - \sin \phi \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.2.5,5)$$

4.2.6 - Equações Finais do Movimento

Uma vez obtidas as equações finais de cada uma das forças e de cada um dos momentos, é possível de agrupá-las com as equações das reações da aeronave às forças e momentos externos e obter assim suas equações finais que definem o modelo dinâmico da aeronave respeitando a segunda lei de Newton-Euler, descrita sobre o referencial fixo ao corpo B . Adicionalmente, acrescentando a equação (4.2.5,5) que define as relações cinemáticas do modelo, completa-se o modelo dinâmico.

Equações Finais de Força:

$$\begin{aligned} m \begin{bmatrix} \dot{U} + QW - RV \\ \dot{V} + RU - PW \\ \dot{W} + PV - QU \end{bmatrix}_B &= \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \sin \phi \cos \theta \\ mg \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(D_{W_1} + D_{W_2}) \cos \alpha + (L_{W_1} + L_{W_2}) \sin \alpha \\ 0 \\ -(D_{W_1} + D_{W_2}) \sin \alpha - (L_{W_1} + L_{W_2}) \cos \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \rho A_{f_x} k_{d_x} \cdot U^2 \\ -\frac{1}{2} \rho A_{f_y} k_{d_y} \cdot V^2 \\ -\frac{1}{2} \rho A_{f_z} k_{d_z} \cdot W^2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} T_{R_1} \cos \Phi_{E_1} + T_{R_2} \cos \Phi_{E_2} \\ T_{R_3} \cos \Phi_{E_3} \\ T_{R_1} \sin \Phi_{E_1} + T_{R_2} \sin \Phi_{E_2} + T_{R_3} \sin \Phi_{E_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.6,1)$$

Equações Finais de Momento:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 & \dot{P}I_{xx_{Ab}} + P(I_{xx_{Ab}}) - Q(I_{xy_{Ab}}) - R(I_{xz_{Ab}}) + QR(I_{zz_{Ab}} - I_{yy_{Ab}}) + (PR - \dot{Q})I_{xy_{Ab}} + (R^2 - Q^2)I_{yz_{Ab}} - (PQ + \dot{R})I_{xz_{Ab}} \\
 & \dot{Q}I_{yy_{Ab}} + Q(I_{yy_{Ab}}) - P(I_{xy_{Ab}}) - R(I_{yz_{Ab}}) + PR(I_{xx_{Ab}} - I_{zz_{Ab}}) - (QR + \dot{P})I_{xy_{Ab}} + (PQ - \dot{R})I_{yz_{Ab}} + (P^2 - R^2)I_{xz_{Ab}} \\
 & \dot{R}I_{zz_{Ab}} + R(I_{zz_{Ab}}) - P(I_{xz_{Ab}}) - Q(I_{yz_{Ab}}) + PQ(I_{yy_{Ab}} - I_{xx_{Ab}}) + (Q^2 - P^2)I_{xy_{Ab}} - (PR + \dot{Q})I_{yz_{Ab}} + (QR - \dot{P})I_{xz_{Ab}}
 \end{aligned} \right] \\
 & = \left[\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \cos \Phi_{E_1} - \dot{\Phi}_{E_1} \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_1} + (Q + \dot{\Phi}_{E_1}) \cdot \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_1} \\
 & \quad (R \cos \Phi_{E_1} - P \sin \Phi_{E_1}) \cdot \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \\
 & \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \sin \Phi_{E_1} + \dot{\Phi}_{E_1} \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_1} - (Q + \dot{\Phi}_{E_1}) \sum_{i=1}^2 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_1}
 \end{aligned} \right] \\
 & + \left[\begin{aligned}
 & \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \cos \Phi_{E_2} - \dot{\Phi}_{E_2} \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_2} + (Q + \dot{\Phi}_{E_2}) \cdot \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_2} \\
 & \quad (R \cos \Phi_{E_2} - P \sin \Phi_{E_2}) \cdot \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \\
 & \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \sin \Phi_{E_2} + \dot{\Phi}_{E_2} \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_2} - (Q + \dot{\Phi}_{E_2}) \sum_{i=3}^4 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_2}
 \end{aligned} \right] \tag{4.2.6,2} \\
 & + \left[\begin{aligned}
 & \quad (Q \sin \Phi_{E_3} - R \cos \Phi_{E_3}) \cdot \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \\
 & \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \cos \Phi_{E_3} - \dot{\Phi}_{E_3} \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_3} - (P + \dot{\Phi}_{E_3}) \cdot \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \sin \Phi_{E_3} \\
 & \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \sin \Phi_{E_3} + \dot{\Phi}_{E_3} \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_3} + (P + \dot{\Phi}_{E_3}) \sum_{i=5}^6 (I_{prop_i} \cdot \Omega_i) \cos \Phi_{E_3}
 \end{aligned} \right] \\
 & + \left[\begin{aligned}
 & y_{R_1} T_{R_1} \sin \phi_{E_1} + y_{R_2} T_{R_2} \sin \phi_{E_2} - z_{R_3} T_{R_3} \cos \phi_{E_3} \\
 & (z_{R_1} \cos \phi_{E_1} - x_{R_1} \sin \phi_{E_1}) T_{R_1} + (z_{R_2} \cos \phi_{E_2} - x_{R_2} \sin \phi_{E_2}) T_{R_2} - x_{R_3} T_{R_3} \sin \phi_{E_3} \\
 & -y_{R_1} T_{R_1} \cos \phi_{E_1} - y_{R_2} T_{R_2} \cos \phi_{E_2} + x_{R_3} T_{R_3} \cos \phi_{E_3}
 \end{aligned} \right] \\
 & + \left[\begin{aligned}
 & -y_{W_1} (D_{W_1} \sin \alpha + L_{W_1} \cos \alpha) \\
 & M_{AC_{W_1}} + x_{W_1} (D_{W_1} \sin \alpha + L_{W_1} \cos \alpha) + z_{W_1} (-D_{W_1} \cos \alpha + L_{W_1} \sin \alpha) \\
 & -y_{W_1} (-D_{W_1} \cos \alpha + L_{W_1} \sin \alpha)
 \end{aligned} \right] \\
 & + \left[\begin{aligned}
 & -y_{W_2} (D_{W_2} \sin \alpha + L_{W_2} \cos \alpha) \\
 & M_{AC_{W_2}} + x_{W_2} (D_{W_2} \sin \alpha + L_{W_2} \cos \alpha) + z_{W_2} (-D_{W_2} \cos \alpha + L_{W_2} \sin \alpha) \\
 & -y_{W_2} (-D_{W_2} \cos \alpha + L_{W_2} \sin \alpha)
 \end{aligned} \right] \\
 & + \left[\begin{aligned}
 & b (\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \cos \Phi_{E_1} + I_{prop} (\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2) \cos \Phi_{E_1} \\
 & 0 \\
 & b (\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \sin \Phi_{E_1} + I_{prop} (\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2) \sin \Phi_{E_1}
 \end{aligned} \right] \\
 & + \left[\begin{aligned}
 & b (\Omega_3^2 - \Omega_4^2) \cos \Phi_{E_2} + I_{prop} (\dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) \cos \Phi_{E_2} \\
 & 0 \\
 & b (\Omega_3^2 - \Omega_4^2) \sin \Phi_{E_2} + I_{prop} (\dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) \sin \Phi_{E_2}
 \end{aligned} \right] \\
 & + \left[\begin{aligned}
 & 0 \\
 & b (\Omega_5^2 - \Omega_6^2) \cos \Phi_{E_3} + I_{prop} (\dot{\Omega}_5 - \dot{\Omega}_6) \cos \Phi_{E_3} \\
 & b (\Omega_5^2 - \Omega_6^2) \sin \Phi_{E_3} + I_{prop} (\dot{\Omega}_5 - \dot{\Omega}_6) \sin \Phi_{E_3}
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

Com as equações (4.2.6,1) (forças), (4.2.6,2) (momentos) e (4.2.5,5) (relações cinemáticas) tem-se um problema de nove incógnitas e nove equações. Isto o torna um problema possível de ser resolvido e determinado.

5. Concepção 3D da Aeronave

Já que não existem ou talvez não seja fácil de encontrar aeronaves não tripuladas com as características apresentadas até agora para este projeto e que possuam um conceito relativamente próximo ao esboço original da aeronave mostrado nas figuras 8 até 13, para ter uma noção mais realista de como se comportaria esta classe de aeronave, foram levantados vários equipamentos eletrônicos que dessem à aeronave a capacidade de cumprir com os requisitos citados embaixo e que propiciassem uma noção do peso total da aeronave:

- Ser remotamente tripulada desde uma perspectiva de “primeira pessoa” (First Person View - FPV, por suas siglas em inglês). Isto requer uma câmera e um transmissor de vídeo;
- Ter a capacidade de transmitir e receber dados de comando e telemetria, através um transmissor de telemetria;
- Possuir um micro controlador embarcado capaz de processar dados e auxiliar no comando, estabilidade e controle da aeronave (Stability Augmentation System SAS ou Control Augmentation System CAS (YECHOUT, 2003));
- Ter motores capazes de sustentar toda a estrutura e equipamentos da aeronave.

Depois de uma pesquisa em diversos sites na internet, forma escolhidos os seguintes equipamentos:

Tabela 1 - Lista de Equipamentos

Componentes	Quantidade	Tensão [V]	Corrente [mA]	Potência [W]	Massa Unidade [g]	Massa Total [g]	Dimensões [mm]
Câmera GoPro Hero 4	1	3,8	1160	4,4	152	152	41x59x21
XOSD Transmissor de Vídeo	1	5	750	0,5	41	41	70,60x35,70x21,50
XLRS D1 Transmissor de Controle e Telemetria	1	5	960	1	32	32	70,60x35,70x16,20
PixHawk 2 (Micro Controlador)	1	4,4	500	2,5	60	60	81,5x50x50
MultiStar 2212 -920 Kv (Motor Brushless)	6	KV(RPM/V): 920	5400	NA	54	324	
Master Airscrew 10 x 5 (Hélice)	6	NA	NA	NA	12,8	76,8	10" (Diâmetro)
Turnigy Multistar 30 Amp Brushless ESC 2-6S V2.0	6	2 - 4S LiPo	30000 (máx)	Depende	35	210	41x24x3,5

Turnigy TGY-390DMH High Performance DS/MG Servo 5.4kg /	3	5	0,8	NA	22,5	67,5	29x13x30
Lipo 25C ZIPPY 5800mAh 3S (Bateria)	1	11,1 (3S)	5800 mAh - 25C Constant / 35C Burst	Depende	411	411	153x45x29
Estrutura+Cabeamento						1000	
Massa Total [g]:						2374,3	

Observa-se que na Tabela 1 estão previstos a câmera, um transmissor de vídeo, um micro controlador embarcado, seis motores brushless (cada um com uma capacidade de gerar 1,4 Kg de força), seis controladores de velocidade ESC (um para cada motor), três servomotores para inclinar os rotores coaxiais e uma bateria de 11,1 V que é capaz de fornecer até 25 vezes sua capacidade de corrente em regime de consumo constante e até 35 vezes em regime máximo de descarga (por pouco tempo). Adicionalmente, cada controlador de velocidade é capaz de suportar uma demanda de corrente vinda de cada motor de até 30 A.

Conhecendo os dados de massa e dimensões de comprimento de cada componente, foi elaborado o desenho CAD 3D das partes da aeronave com o software SolidWorks® e posteriormente suas partes foram integradas para gerar o desenho final do veículo aéreo não tripulado. Ressalta-se que não foram realizados estudos estruturais sobre as partes da aeronave e que é necessário fazer uma análise aprofundada neste tema se, como objetivo futuro, for proposta a construção deste veículo aéreo.

5.1 - Concepção da semi-asa:

Com base na massa total da soma dos componentes, mais uma estimativa de 1000 gramas de massa adicional devido à estrutura e cabeamento do sistema, chega-se a um valor aproximado de 2,5 Kg de massa total (considerando ainda uma margem de erro). É com base neste valor de massa e seu correspondente peso que foram dimensionadas as semi-asas. Para isto, foi imposto que aeronave fosse capaz de atingir uma velocidade máxima aproximada de $100 \frac{Km}{h}$ ($\sim 27,78 \frac{m}{s}$), onde as semi-asas deveriam ser capazes de sustentar quase integralmente o peso da aeronave nesta condição de velocidade.

Começando pela semi-asa da aeronave, ela é apresentada nas Figuras 16 até 18. A mesma é composta por um interior de isopor, revestida por uma camada de 1 mm de fibra de carbono e sua longarina é feita de um tubo oco de fibra de carbono de 12 mm de diâmetro por 1 mm de espessura. O resultado final da asa é apresentado abaixo:

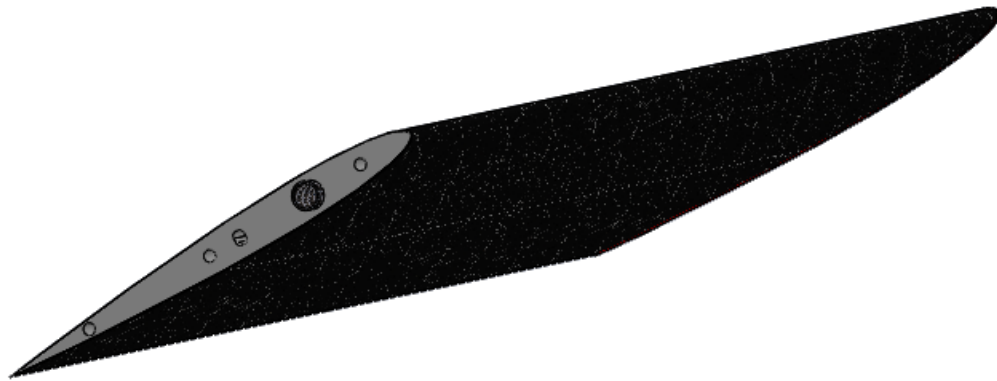


Figura 16 - Resultado final da concepção de uma semi-asa.

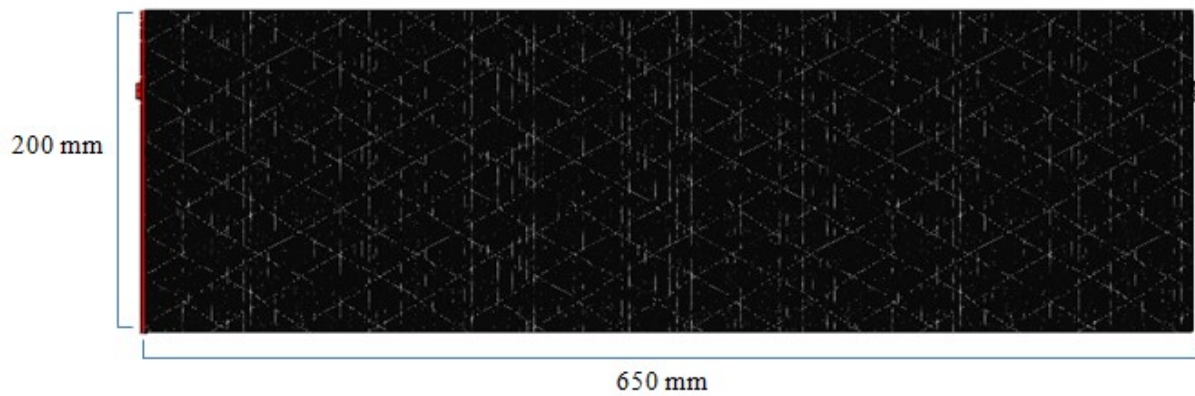


Figura 17 - Vista superior da semi-asa.



Figura 18 - Vista de perfil da semi-asa.

A figura 18 mostra o perfil simétrico NACA-0009 que foi escolhido para a semi-asa. Este perfil em particular foi escolhido por ser considerado um dos melhores perfis simétricos com relação ao coeficiente de sustentação e arrasto por ângulo de ataque. A Figura 19 apresenta as curvas dos coeficientes aerodinâmicos para este perfil.

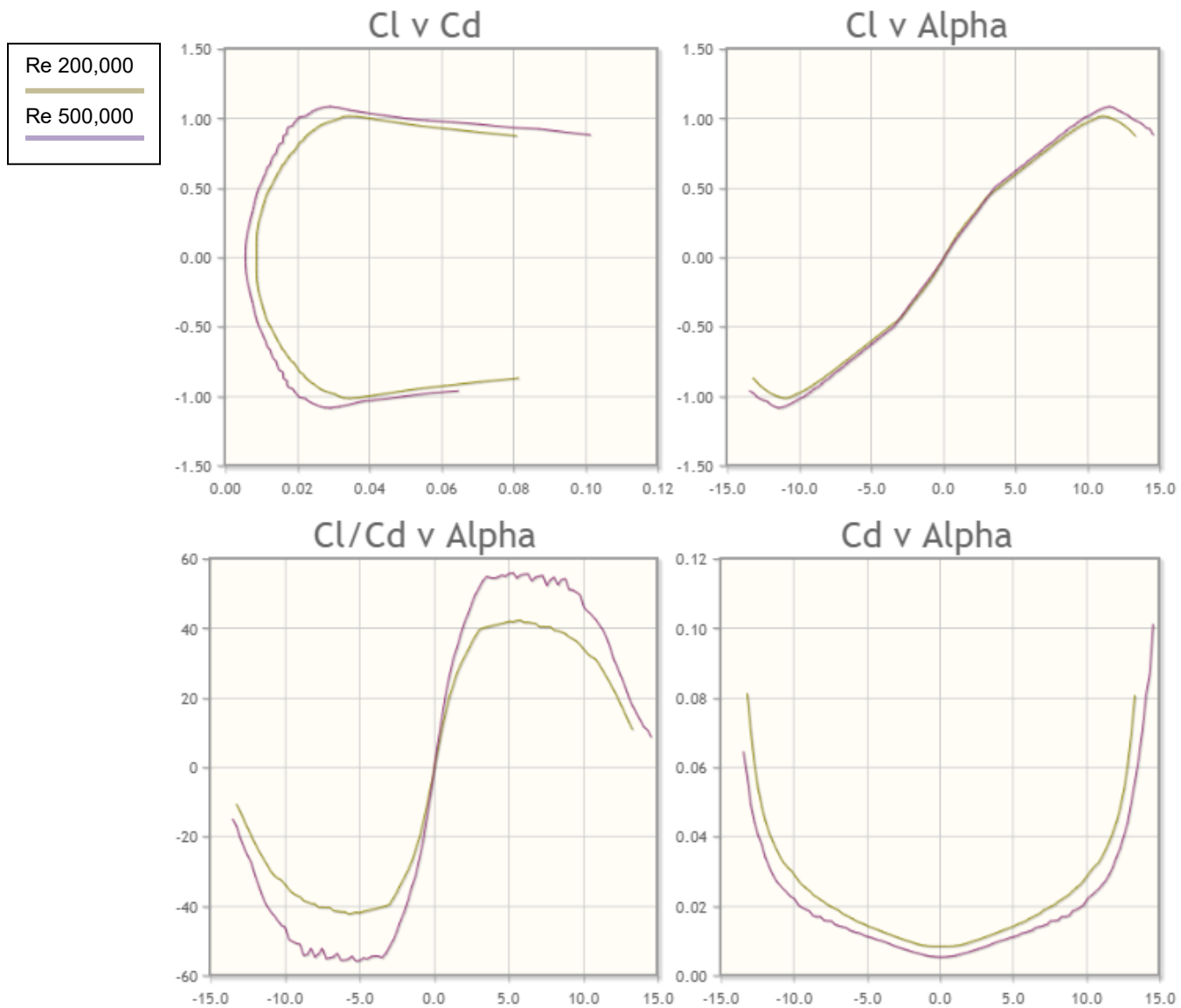


Figura 19 - Curvas dos coeficientes aerodinâmicos do perfil NACA-0009. (<http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=n0009sm-il>, Acessado em 09 dez. 2017).

Na figura 19 foram plotadas duas curvas com números de Reynolds entre 200.000 e 500.000 (a aeronave deverá operar em aproximadamente 300.000). Observa-se que o coeficiente de arrasto deste perfil simétrico é relativamente baixo para ângulos de ataque entre 0 e 10 graus. Da mesma forma a relação coeficiente de sustentação por ângulo de ataque apresenta um valor relativamente alto e próximo de $C_{l_{\alpha_w}} \sim 4,4787 \frac{1}{rad}$ (já considerada a conversão do coeficiente 2D para 3D). Adicionalmente, na curva CL v Alpha, é possível observar que o ângulo máximo de stall deste perfil é de aproximadamente 10 graus.

5.2 - Concepção dos rotores coaxiais:

Considerando que os motores brushless de um rotor coaxial frontal deverão estar ligados à lateral da semi-asa, foi desenhada a estrutura mostrada na Figura 20 para um rotor coaxial frontal. Esta figura mostra um motor brushless MultiStar 2212 -920 Kv em cada extremidade do rotor. Além disto, foi pensado que para cada motor, seu respectivo controlador de velocidade (ESC) devia estar colocado sobre a mesma estrutura dos motores para evitar que os controladores de velocidade fossem colocados sobre as semi-asa.

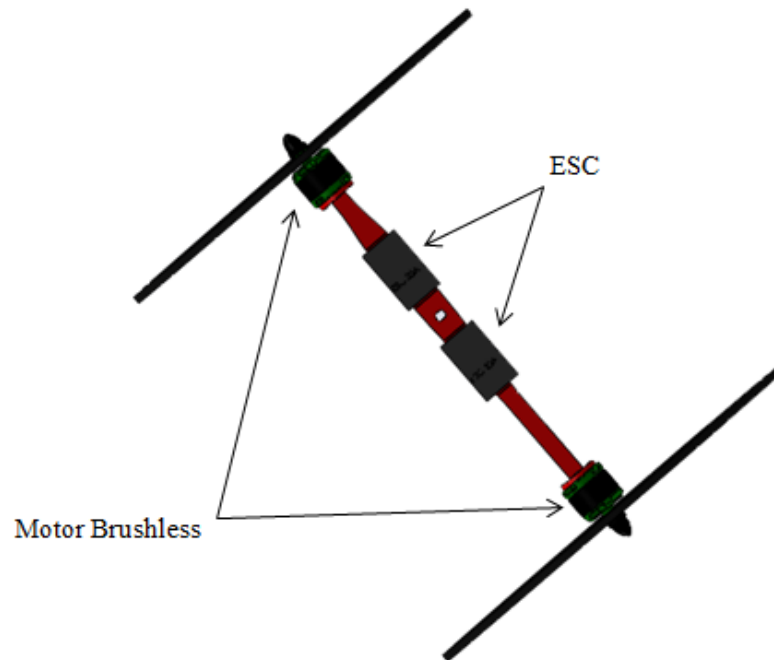


Figura 20 - Rotor coaxial frontal (R_1 ou R_2).

Já no rotor coaxial traseiro (Figura 21), os controladores de velocidade dos motores traseiros iriam colocados sobre a parte traseira da fuselagem ou “boom” (Figura 24).

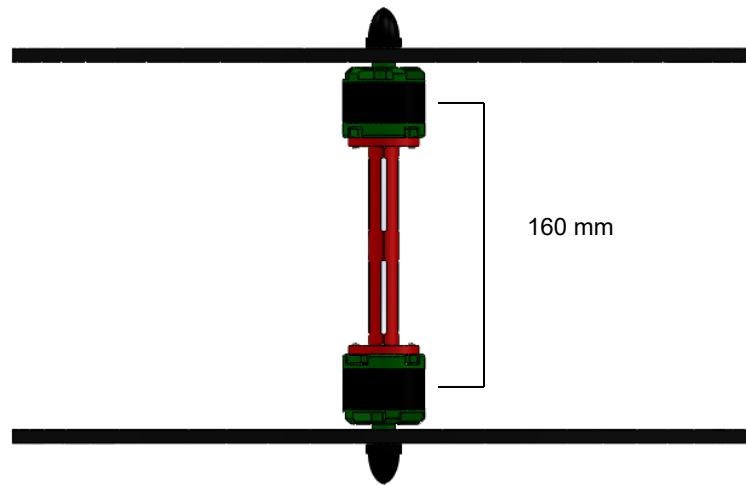


Figura 21 - Rotor Coaxial traseiro (R_3).

5.3 - Concepção da fuselagem:

A Figura 22 mostra como os componentes internos à fuselagem ficaram distribuídos:

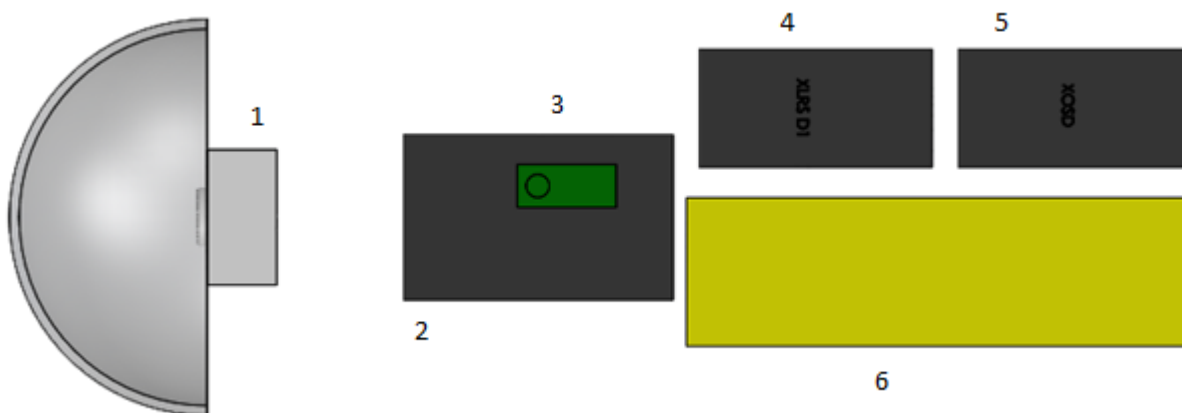


Figura 22 - Distribuição interna dos componentes dentro da fuselagem.

- 1 - Câmera GoPro Hero 4;
- 2 - Micro controlador PixHawk 2;
- 3 - Servo motor esquerdo (em verde, há outro atrás do micro controlador embarcado);
- 4 - Transmissor de comando e telemetria;
- 5 - Transmissor de vídeo;
- 6 - Bateria.

A fuselagem final, com os componentes dentro dela é apresentada na Figura 23. Ela possui um formato cilíndrico com uma calota semi-esférica de acrílico na frente para proteger a câmera e os componentes internos, além de diminuir o arrasto aerodinâmico sobre ela.

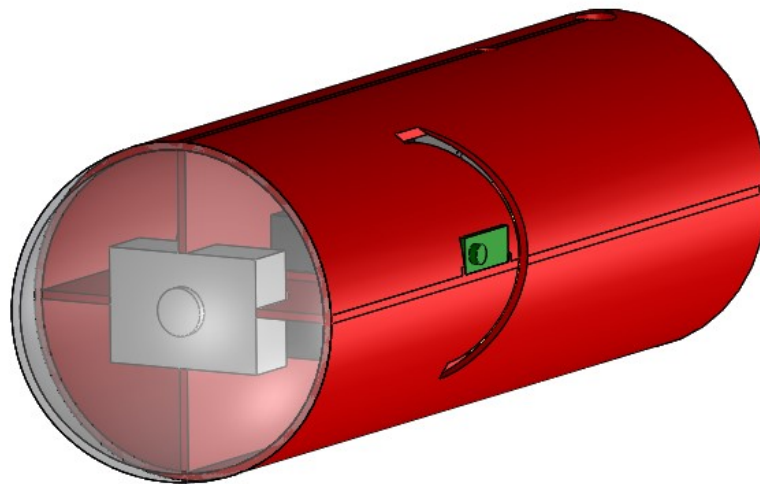


Figura 23 - Formato final da fuselagem com os componentes eletrônicos internos a ela.

O diâmetro da fuselagem na figura 23 é de 120 mm. Vale notar que para todas as figuras do desenho 3D da aeronave, os componentes estruturais em cor vermelha foram pensados para serem impressos em ABS através de uma impressora 3D.

O desenho final da aeronave, com todas as suas partes integradas é apresentado na figura abaixo (Figura 24):

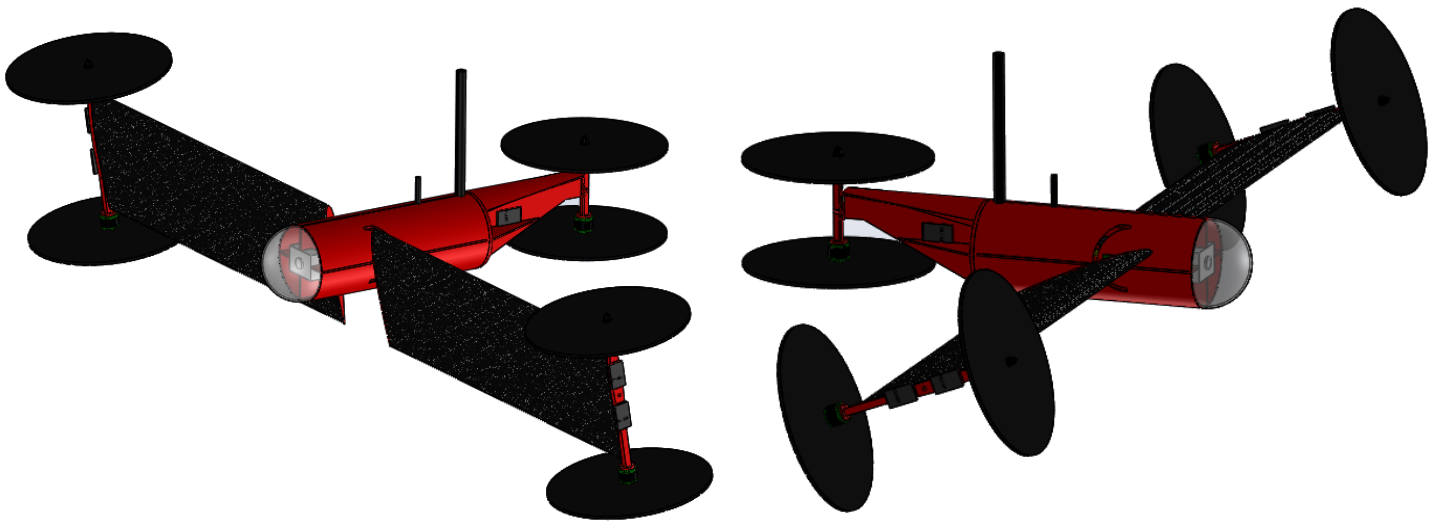


Figura 24 - Concepção final da aeronave.

Observa-se na figura anterior que as hélices foram desenhadas como discos rígidos de aproximadamente 25 cm de diâmetro (a hélice escolhida foi APC-10x5"). Isto se deve à consideração feita sobre o modelo aerodinâmico do rotor descrito como um disco atuador (mostrado na figura 15). Adicionalmente, sobre a fuselagem podem ser vistas duas antenas. A maior é a antena de 2,4 GHz para transmissão de vídeo e a menor é uma antena de 900 MHz para transmissão de dados por telemetria. A Figura 25 mostra as dimensões de comprimento e largura da aeronave.

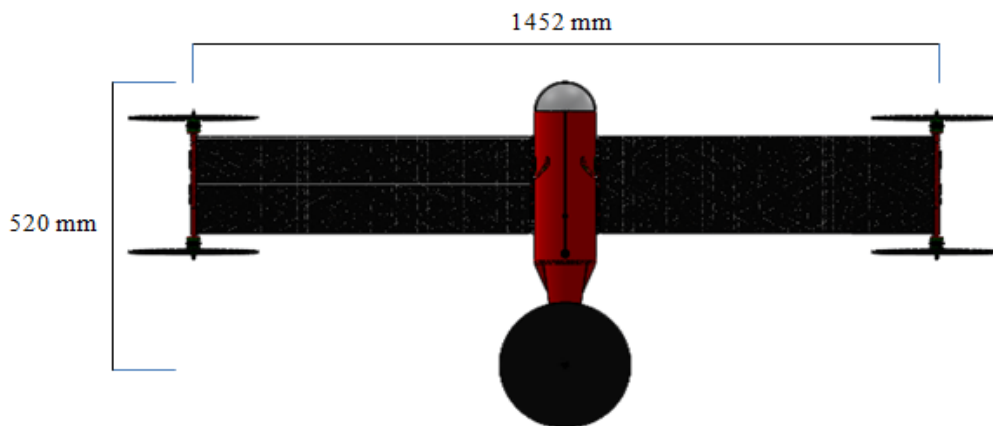


Figura 25 - Vista superior da aeronave com suas semi-asas inclinadas para frente.

Finalmente, a figura 25 mostra a vista superior da aeronave com 1452 mm de envergadura desde o centro do rotor coaxial esquerdo até o centro do rotor coaxial direito e 520 mm de comprimento desde o bico da aeronave até o centro do rotor coaxial traseiro.

6. Linearização do Modelo Dinâmico:

As últimas três equações apresentadas no modelo dinâmico mostram o comportamento dinâmico da aeronave ao em função do tempo. Porém, estas equações apresentam um alto grau de não-linearidade e podem dificultar o entendimento do comportamento, estabilidade e controle do sistema. Por padrão, para facilitar esta análise, as equações de força, momento e relações cinemáticas são linearizadas quando se assume uma condição de partida ou condição inicial de equilíbrio dinâmico (com acelerações nulas) e a partir da qual esta condição pode ser levemente perturbada. Para chegar nesta relação linearizada, foram seguidos os passos descritos por (YECHOUT, 2003, capítulo 6):

Passo 1 - Cada variável é substituída por $A = A_0 + a$, onde A representa a variável a ser substituída, A_0 sua condição inicial e a representa a pequena perturbação desde a condição inicial;

Passo 2 - Uma vez substituídas as variáveis, as equações deverão ser expandidas com a multiplicação entre variáveis e o uso de identidades trigonométricas;

Passo 3 - Assume-se que a perturbação de variáveis angulares ($a = \varphi$) é pequena o suficiente como para considerar as seguintes relações trigonométricas: $\cos a \approx 1$, $\sin a \approx a$ (em radianos);

Passo 4 - Assume-se que o produto de pequenas perturbações é desprezível frente ao resto de variáveis (exemplo: seja b outra variável de pequena perturbação, então $ab \approx 0$);

Passo 5 - Da equação obtida no passo 4, se subtrai a equação original com suas variáveis com o subscrito inicial 0 (A_0). A equação com os subscritos iniciais é chamada de “equação de estado/condição estável” ou “SSE” (Steady State Equation, por suas siglas em inglês). A equação resultante da subtração entre a equação obtida no passo 4 e a SSE, será a equação diferencial linearizada com as variáveis de perturbação (a) como incógnitas ou “PLDE” (Perturbed Linear Differential Equations, por suas siglas em inglês).

Agora, para analisar o comportamento da aeronave, foram escolhidas duas condições de operação diferentes. A primeira correspondente à condição de voo pairado (hover) e a segunda como a condição de voo em cruzeiro, na qual a aeronave precisa de uma velocidade conhecida para gerar sustentação nas suas superfícies aerodinâmicas. Para ambas as condições, o uso do software CAE/CAM (Computed Aided Engineering/Computed Aided Mathematics) Maple® facilitou a obtenção das equações SSE e PLDE, a partir de condições iniciais impostas. Ressalta-se que a aplicação dos passos descritos acima foi realizada por separado em cada um dos componentes que conformam as equações (4.2.6,1) (forças), (4.2.6,2) (momentos) e (4.2.5,5) (relações cinemáticas). Isto é devido uma vez que as equações de momento e de forças são consideravelmente grandes e realizar o procedimento de linearização em cada delas, separadamente, auxilia na visualização e entendimento da simplificação em cada passo executado.

6.1 - Linearização em Condição de Voo Pairado:

As condições iniciais para o voo pairado foram as seguintes:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 = * & U_0 = 0 & V_0 = 0 & W_0 = 0 \\ P_0 = 0 & Q_0 = 0 & R_0 = 0 & \phi_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 & \psi_0 = 0 & \phi_{E_{1_0}} = -\frac{\pi}{2} & \phi_{E_{2_0}} = -\frac{\pi}{2} \\ \phi_{E_{3_0}} = -\frac{\pi}{2} & \dot{U}_0 = 0 & \dot{V}_0 = 0 & \dot{W}_0 = 0 \\ \dot{P}_0 = 0 & \dot{Q}_0 = 0 & \dot{R}_0 = 0 & \end{bmatrix} \quad (6.1,1)$$

Observa-se que todas as acelerações e velocidades (lineares e angulares), inicialmente são nulas e, para os ângulos de inclinação $\phi_{E_{i_0}}$ são outorgados valores negativos como foi assumido como padrão no modelo dinâmico. Estes valores são iguais a $-\frac{\pi}{2}$ radianos, pois para a condição de voo pairado no ar, os três rotores estarão inicialmente inclinados para cima. Adicionalmente, o valor do ângulo de ataque inicial $\alpha_0 = *$ é desconsiderado devido a que tanto forças e momentos aerodinâmicos nesta condição de operação (modo de voo pairado) são assumidos como desprezíveis.

Por último, as acelerações de giro dos ângulos de inclinação de rotores e asas $\dot{\phi}_{E_i}$, assim como também as acelerações da rotação da hélice de cada rotor $\dot{\Omega}_i$ são consideradas nulas. O modelo dinâmico descrito na seção 4 leva em consideração estas acelerações que impactarão diretamente na variação dos tensores de inércia (apêndices I e II), assim como também nos momentos giroscópios e momentos devido ao desbalanceamento das hélices. Com esta consideração, a variação dos tensores de inércia se torna nula.

Como condição inicial para a velocidade de giro das hélices Ω_i , foi assumido que para cada par de hélices de um mesmo conjunto de rotor coaxial R_i , a velocidade de giro da hélice superior sempre seria igual em módulo e contrária ao sentido de rotação da hélice inferior. Já que os três rotores coaxiais apontam para cima, assume-se que as seis hélices terão o módulo Ω_0 como condição inicial, porém os sentidos serão contrários aos pares. Esta consideração é aplicada tanto para condição inicial quanto para as variáveis perturbadas da rotação das hélices. Isto é:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{1_0} = -\Omega_{2_0} & \Omega_{3_0} = -\Omega_{4_0} & \Omega_{5_0} = -\Omega_{6_0} \\ d\Omega_1 = -d\Omega_2 & d\Omega_3 = -d\Omega_4 & d\Omega_5 = -d\Omega_6 \end{bmatrix} \quad (6.1,2)$$

Sendo $d\Omega_i$ a variável perturbada da i -ésima hélice e lembrando que os índices 1 e 2 correspondem ao rotor coaxial R_1 (direito), 3 e 4 correspondem ao rotor coaxial R_2 (esquerdo) e 5 e 6 correspondem ao rotor coaxial R_3 (traseiro). A consideração mostrada na equação acima permitirá anular os efeitos de momentos giroscópicos causados pelo giro dos rotores e de momentos devido ao desbalanceamento das hélices, pois assume-se que as hélices se balancearão aos pares durante a operação da aeronave.

Aplicando os passos 1-5, são obtidas as equações SSE e PLDE para o modo de voo pairado.

6.1.1 - Equações SSE - Modo Voo Pairado:

Relações de Força:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg - (T_{R_1} + T_{R_2} + T_{R_3}) \end{bmatrix} \quad (6.1.1,1)$$

Nesta última equação, aplicando a relação descrita na equação (4.2.3,43) e considerando uma velocidade relativa sobre a hélice (V_A) como nula, é possível de relacionar a tração que cada hélice deverá gerar com sua respectiva velocidade de giro:

$$T_{bm_i} = 2\rho A_D (K_\tau^2 \Omega_i^2) = \frac{T_{R_i}}{2} \quad (6.1.1,2)$$

Lembrando que T_{bm} se refere à tração de um único motor brushless, e um rotor coaxial consiste de dois destes motores.

Simplificando a equação (6.1.1,1) e entendendo que soma da força de tração de cada rotor coaxial deverá ser igual à força peso, chega-se na seguinte relação:

$$T_{R_i} = \frac{mg}{3} = T_{R_0} \quad (6.1.1,3)$$

Já que se assume que $T_{R_1} = T_{R_2} = T_{R_3}$. Neste caso, com uma massa total de aproximadamente 2,5 Kg, o valor de T_{R_0} para cada rotor coaxial será de aproximadamente 8,175 N de força de tração. Isto quer dizer que cada mono-rotor (o rotor coaxial possui dois mono-rotores brushless) deverá produzir ~ 4,0875 N de força de tração.

Relações de Momento:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ X_{R_1} T_{R_1} + X_{R_2} T_{R_2} + X_{R_3} T_{R_3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.1,4)$$

Olhando para a equação anterior e com a ajuda da figura 13, entende-se que a distância do centro de gravidade da aeronave até o centro de gravidade de cada rotor coaxial frontal é única. Ou seja, $X_{R_1} = X_{R_2}$. Adicionalmente, na condição inicial de voo pairado, aplicando a equação (6.1.1,3):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_{R_0} (2X_{R_1} + X_{R_3}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.1,5)$$

Isto quer dizer que para manter uma condição de equilíbrio em modo de voo pairado, os três rotores deverão aportar com a mesma quantidade de força de tração para vencer a força de gravidade e, adicionalmente, a distância do centro de gravidade da aeronave até o centro de gravidade do rotor traseiro deverá ser duas vezes a distância do C.G. da aeronave até um dos rotores coaxiais frontais (em sentido contrário, obedecendo à referência descrita na figura 6).

6.1.2 - Equações PLDE - Modo Voo Pairado:

Relações de Força:

$$\begin{bmatrix} m\dot{u} \\ m\dot{v} \\ m\dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \, d\theta \\ mg \, d\phi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{R_0}(d\phi_{E_1} + d\phi_{E_2}) \\ T_{R_0}d\phi_{E_1} \\ -(dT_{R_1} + dT_{R_2} + dT_{R_3}) \end{bmatrix} \quad (6.1.2,1)$$

Com $d\phi_{E_i}$ como a perturbação da inclinação de um rotor coaxial ou semi-asa e $dT_{R_{i1}}$ como a perturbação de força de tração de um rotor coaxial.

Relações de Momento:

Para a simplificação dos momentos foi assumido que as distâncias do C.G. da aeronave até o C.G. de cada rotor frontal (ou semi-asa) teria as seguintes condições: $X_{R_1} = X_{R_2}$, $Y_{R_1} = -Y_{R_2}$, $X_{W_1} = X_{W_2}$, $Y_{W_1} = -Y_{W_2}$. De acordo com a figura 6, o centro de gravidade do rotor coaxial esquerdo R_2 estará à mesma distância do rotor coaxial direito R_1 , mas um estará em sentido contrário ao outro ao longo do eixo Y fixo ao corpo. O mesmo se aplica às duas semi-asas.

Reações da Aeronave aos Momentos Externos:

$$\begin{bmatrix} (I_{xxF_b} + I_{xxR_3r_3} + 2I_{zzR_1r_1} + 2I_{zzW_1w_1} + m_{R_3}Z_{R_3}^2 + 2m_{R_1}Y_{R_1}^2 + 2m_{R_1}Z_{R_1}^2 + 2m_{W_1}Y_{W_1}^2 + 2m_{W_1}Z_{W_1}^2) \dot{p} & 0 & -(2m_{W_1}X_{W_1}Z_{W_1} + 2m_{R_1}X_{R_1}Z_{R_1} + m_{R_3}X_{R_3}Z_{R_3}) \dot{r} \\ 0 & \dot{q} (I_{yyF_b} + 2I_{yyR_1r_1} + 2I_{yyW_1w_1} + I_{zzR_3r_3} + 2m_{R_1}X_{R_1}^2 + m_{R_3}X_{R_3}^2 + 2m_{R_1}Z_{R_1}^2 + m_{R_3}Z_{R_3}^2 + 2m_{W_1}X_{W_1}^2 + 2m_{W_1}Z_{W_1}^2) & 0 \\ -(2m_{W_1}X_{W_1}Z_{W_1} + 2m_{R_1}X_{R_1}Z_{R_1} + m_{R_3}X_{R_3}Z_{R_3}) \dot{p} & 0 & (I_{zzF_b} + I_{yyR_3r_3} + 2I_{xxR_1r_1} + 2I_{xxW_1w_1} + 2m_{R_1}X_{R_1}^2 + 2m_{R_1}Y_{R_1}^2 + m_{R_3}X_{R_3}^2 + m_{R_3}Y_{R_3}^2 + 2m_{W_1}X_{W_1}^2 + 2m_{W_1}Y_{W_1}^2) \dot{r} \end{bmatrix}$$

(6.1.2,2)

A matriz (6.1.2,2) pode ser reescrita de uma forma simplificada como a multiplicação de uma matriz de inércia vezes um vetor:

$$\begin{bmatrix} I_{H11} & 0 & I_{H13} \\ 0 & I_{H22} & 0 \\ I_{H31} & 0 & I_{H33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \sum M \quad (6.1.2,3)$$

Com I_H como indicador da matriz inercial de voo pairado (hover).

Momentos de Tração:

$$\begin{bmatrix} Y_{R_1}(dT_{R_2} - dT_{R_1}) - Z_{R_3}T_{R_0}d\phi_{E_3} \\ X_{R_1}(dT_{R_1} + dT_{R_2}) + X_{R_3}dT_{R_3} + Z_{R_1}T_{R_0}(d\phi_{E_1} + d\phi_{E_2}) \\ Y_{R_1}T_{R_0}(d\phi_{E_2} - d\phi_{E_1}) + X_{R_3}T_{R_0}d\phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (6.1.2,4)$$

Relações Cinemáticas:

$$\begin{bmatrix} d\phi \\ d\theta \\ d\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (6.1.2,5)$$

Com as equações PLDE de força, momento e relações cinemáticas é possível obter um sistema matricial da seguinte forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6.1.2,6)$$

Onde x representa as variáveis de estado do sistema dinâmico (velocidades e ângulos) e u representa as entradas ou comandos. Serão nove variáveis de estado e seis variáveis de comando.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad e \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (6.1.2,7)$$

$$u = \begin{bmatrix} dT_{R_1} \\ dT_{R_2} \\ dT_{R_3} \\ d\phi_{E_1} \\ d\phi_{E_2} \\ d\phi_{E_3} \end{bmatrix} \quad (6.1.2,8)$$

Portanto, manipulando a soma e multiplicação das matrizes de força, momentos e relações cinemáticas obtêm-se as matrizes A e B do sistema matricial (6.1.2,6):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.2,9)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{T_{R_0}}{m} & \frac{T_{R_0}}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T_{R_0}}{m} \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ -Y_{R_1}(I_H^{-1})_{11} & Y_{R_1}(I_H^{-1})_{11} & 0 & -Y_{R_1}T_{R_0}(I_H^{-1})_{13} & Y_{R_1}T_{R_0}(I_H^{-1})_{13} & (X_{R_3}(I_H^{-1})_{13} - Z_{R_3}(I_H^{-1})_{11})T_{R_0} \\ X_{R_1}(I_H^{-1})_{22} & X_{R_1}(I_H^{-1})_{22} & X_{R_3}(I_H^{-1})_{22} & Z_{R_1}T_{R_0}(I_H^{-1})_{22} & Z_{R_1}T_{R_0}(I_H^{-1})_{22} & 0 \\ -Y_{R_1}(I_H^{-1})_{31} & Y_{R_1}(I_H^{-1})_{31} & 0 & -Y_{R_1}T_{R_0}(I_H^{-1})_{33} & Y_{R_1}T_{R_0}(I_H^{-1})_{33} & (X_{R_3}(I_H^{-1})_{33} - Z_{R_3}(I_H^{-1})_{31})T_{R_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(6.1.2,10)$$

A relação apresentada pela equação (6.1.2,6) e as matrizes A e B permitem trabalhar sobre o modelo dinâmico na forma de espaço de estados. As variáveis de entrada serão as trações e inclinações dos rotores coaxiais e como variáveis de estado terão as velocidades lineares, as velocidades angulares e os ângulos de Euler no sistema de referência do corpo B.

6.2 - Linearização em Condição de Voo Cruzeiro:

Para linearizar o modelo dinâmico na condição de equilíbrio em voo cruzeiro, foi seguido o procedimento análogo ao descrito anteriormente. Porém, as condições iniciais mudaram.

$$\left[\begin{array}{cccc} \alpha_0 = 0 & U_0 = U_c & V_0 = 0 & W_0 = 0 \\ P_0 = 0 & Q_0 = 0 & R_0 = 0 & \phi_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 & \psi_0 = 0 & \phi_{E_{1_0}} = -\frac{\pi}{60} & \phi_{E_{2_0}} = -\frac{\pi}{60} \\ \phi_{E_{3_0}} = -\frac{\pi}{2} & \dot{U}_0 = 0 & \dot{V}_0 = 0 & \dot{W}_0 = 0 \\ \dot{P}_0 = 0 & \dot{Q}_0 = 0 & \dot{R}_0 = 0 & \end{array} \right] \quad (6.2,1)$$

Nesta condição de voo o ângulo de ataque inicial foi considerado nulo e os ângulos de inclinação dos rotores frontais foram impostos em 3° (de acordo com a convenção de ângulos negativos adotada para estes ângulos). Já a inclinação do rotor traseiro foi mantida em 90°. O perfil aerodinâmico das semi-asas foi considerado como simétrico (portanto, $C_{l_{0W_i}} \sim 0$ e $M_{ACW_1} \sim 0$). Além disto, era necessário descobrir o valor para a velocidade na direção longitudinal da aeronave para ela manter a sustentação necessária nas suas semi-asas. Para isto foi necessário achar as equações de equilíbrio dinâmico SSE do modo cruzeiro.

6.2.1 - Equações SSE - Modo Voo Cruzeiro:

Relações de Força:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} - \left[k_{d_x} + \frac{\rho S_{A_{W_1}} (3600 A R_{W_1} e C_{d_{0W_1}} + \pi C_{l_{\alpha_{W_1}}^2})}{3600 A R_{W_1} e} \right] U_c^2 + T_{0_f} \\ 0 \\ mg - \frac{\rho S_{A_{W_1}} C_{l_{\alpha_{W_1}} \pi}}{60} U_c^2 - \left(\frac{\pi}{60} \right) T_{0_f} - T_{0_t} \end{pmatrix} \quad (6.2.1,1)$$

Relações de Momento:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left[\frac{\rho S_{A_{W_1}} (60 A R_{W_1} e \pi X_{W_1} C_{l_{\alpha_{W_1}}} - 3600 Z_{W_1} C_{d_{0W_1}} A R_{W_1} e - \pi Z_{W_1} C_{l_{\alpha_{W_1}}^2})}{3600 A R_{W_1} e} \right] U_c^2 + \left(\frac{\pi}{60} X_{R_1} + Z_{R_1} \right) T_{0_f} + (X_{R_3}) T_{0_t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.1,2)$$

Observa-se que nesta última equação só aparecem termos da semi-asa 1 (direita), isto se deve ao fato de que ambas as semi-asas compartilham as mesmas características geométricas e aerodinâmicas.

Nas equações acima, U_c representa a velocidade na qual a aeronave deverá voar para gerar suficiente sustentação nas suas semi-asas e vencer seu próprio peso. Adicionalmente, T_{0_f} e T_{0_t} representam as trações frontais e traseiras iniciais que a aeronave deverá exercer para manter o equilíbrio. Se for resolvido o sistema de equações nas equações (6.2.1,1) e (6.2.1,2) (somatório de forças em X, somatório de forças em Z e momentos em Y), serão achado estes três valores descritos. Então, de modo a simplificar, aparecem apenas termos com índices "1", mas que já levam em conta a soma de termos de ambas as semi-asas.

6.2.2 - Equações PLDE - Modo Voo Cruzeiro:

Reações da aeronave às Forças Externas:

$$\begin{bmatrix} m\dot{u} \\ m(\dot{v} + U_c r) \\ m(\dot{w} - U_c q) \end{bmatrix} = \sum F \quad (6.2.2,1)$$

Força Gravitacional:

$$\begin{bmatrix} -mg \, d\theta \\ mg \, d\phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.2,2)$$

Força de Arrasto da Fuselagem:

$$\begin{bmatrix} -2k_{d_x} U_c u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.2,3)$$

Forças Aerodinâmicas:

Para a linearização do modelo, a variação do ângulo de ataque foi aproximado assumindo que fosse possível expressá-la da seguinte maneira: $d\alpha \sim \frac{w}{U_c}$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \left[\frac{(3600C_{d_{0W_1}} AR_{W_1} e + \pi C_{l_{\alpha W_1}}^2) \rho S_{AW_1} U_c}{1800 AR_{W_1} e} \right] u + \left[\frac{(\pi C_{l_{\alpha W_1}} AR_{W_1} e - 2C_{l_{\alpha W_1}}^2) \rho S_{AW_1} U_c}{60 AR_{W_1} e} \right] w + \left(\frac{\rho S_{AW_1} U_c^2 C_{l_{\alpha W_1}}^2}{60 AR_{W_1} e} \right) d\phi_{E_1} + \left(\frac{\rho S_{AW_1} U_c^2 C_{l_{\alpha W_1}}^2}{60 AR_{W_1} e} \right) d\phi_{E_2} \\ 0 \\ - \left(\frac{\rho S_{AW_1} U_c C_{l_{\alpha W_1}} \pi}{30} \right) u - \left[\frac{(3600C_{d_{0W_1}} AR_{W_1} e + 3600C_{l_{\alpha W_1}} AR_{W_1} e + \pi C_{l_{\alpha W_1}}^2)}{3600 AR_{W_1} e} \right] w + \left(\frac{\rho S_{AW_1} U_c^2 C_{l_{\alpha W_1}}}{2} \right) d\phi_{E_1} + \left(\frac{\rho S_{AW_1} U_c^2 C_{l_{\alpha W_1}}}{2} \right) d\phi_{E_2} \end{array} \right\}$$

$$(6.2.2,4)$$

Força de Tração:

$$\left[\begin{array}{c} dT_{R_1} + dT_{R_2} + \left(\frac{\pi T_{0f}}{120}\right) d\phi_{E_1} + \left(\frac{\pi T_{0f}}{120}\right) d\phi_{E_2} \\ T_{0t} d\phi_{E_3} \\ -\left(\frac{\pi}{60}\right) dT_{R_1} - \left(\frac{\pi}{60}\right) dT_{R_2} - dT_{R_3} + \left(\frac{T_{0f}}{2}\right) d\phi_{E_1} + \left(\frac{T_{0f}}{2}\right) d\phi_{E_2} \end{array} \right] \quad (6.2.2.5)$$

Reações da Aeronave aos Momentos Externos:

$$\begin{aligned}
 & + 2I_{xxR_1r_1} + 2I_{xxW_1w_1} + m_{R_3}Z_{R_3}^2 + 2m_{R_1}Y_{R_1}^2 + 2m_{R_1}Z_{R_1}^2 + 2m_{W_1}Y_{W_1}^2 + 2m_{W_1}Z_{W_1}^2 \Big) \dot{p} = 0 \left(\frac{\pi I_{zzW_1w_1}}{30} + \frac{\pi I_{zzR_1r_1}}{30} - \frac{\pi I_{xxW_1w_1}}{30} - \frac{\pi I_{xxR_1r_1}}{30} 2m_{W_1}X_{W_1}Z_{W_1} - 2m_{R_1}X_{R_1}Z_{R_1} - m_{R_3}X_{R_3}Z_{R_3} \right) \dot{r} \\
 & 0 \quad \dot{q} \left(I_{yyF_b} + 2I_{yyR_1r_1} + 2I_{yyW_1w_1} + I_{zzR_3r_3} + 2m_{R_1}X_{R_1}^2 + m_{R_3}X_{R_3}^2 + 2m_{R_1}Z_{R_1}^2 + m_{R_3}Z_{R_3}^2 + 2m_{W_1}X_{W_1}^2 + 2m_{W_1}Z_{W_1}^2 \right) = 0 \\
 & - \frac{\pi I_{xxW_1w_1}}{30} - \frac{\pi I_{xxR_1r_1}}{30} 2m_{W_1}X_{W_1}Z_{W_1} - 2m_{R_1}X_{R_1}Z_{R_1} - m_{R_3}X_{R_3}Z_{R_3} \Big) \dot{p} = 0 \left(I_{zzF_b} + I_{yyR_3r_3} + 2I_{zzR_1r_1} + 2I_{zzW_1w_1} + 2m_{R_1}X_{R_1}^2 + 2m_{R_1}Y_{R_1}^2 + m_{R_3}X_{R_3}^2 + m_{R_3}Y_{R_3}^2 + 2m_{W_1}X_{W_1}^2 + 2m_{W_1}Y_{W_1}^2 \right)
 \end{aligned}$$

(6.2.2,6)

A matriz (6.2.2,6) pode ser reescrita de uma forma simplificada como a multiplicação de uma matriz de inércia vezes um vetor:

$$\begin{bmatrix} I_{C_{11}} & 0 & I_{C_{13}} \\ 0 & I_{H_{22}} & 0 \\ I_{C_{31}} & 0 & I_{C_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \sum M \quad (6.2.2,7)$$

Com I_C como indicador da matriz inercial de cruzeiro.

Momentos Aerodinâmicos:

Para a linearização do modelo, a variação do ângulo de ataque foi aproximado assumindo que fosse possível expressá-la da seguinte maneira: $d\alpha \sim \frac{w}{U_c}$

$$M_A = \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix} \quad (6.2.2,8)$$

Com:

$$M_{Ax} = \left[\left(\frac{\rho S_{AW_1} U_c^2 Y_{W_1} C_{l_{\alpha W_1}}}{2} \right) d\phi_{E_1} - \left(\frac{\rho S_{AW_1} U_c^2 Y_{W_1} C_{l_{\alpha W_1}}}{2} \right) d\phi_{E_2} \right] \quad (6.2.2,9)$$

$$M_{Ay} = \left[(M_{A_{u-q}})u + (M_{A_{w-q}})w + (M_{A_{d\phi_{E_1-q}}})d\phi_{E_1} + (M_{A_{d\phi_{E_2-q}}})d\phi_{E_2} \right] \quad (6.2.2,10)$$

Tal que:

$$M_{A_{u-\dot{q}}} = \left[\frac{\rho S_{A_{W_1}} U_c \left(60 X_{W_1} \pi C_{l_{\alpha_{W_1}}} A R_{W_1} e - 3600 Z_{W_1} C_{d_{0_{W_1}}} A R_{W_1} e - Z_{W_1} \pi C_{l_{\alpha_{W_1}}}^2 \right)}{1800 A R_{W_1} e} \right] \quad (6.2.2,11)$$

$$M_{A_{w-\dot{q}}} = \left[\frac{\rho S_{A_{W_1}} U_c \left(60 Z_{W_1} \pi C_{l_{\alpha_{W_1}}} A R_{W_1} e + 3600 X_{W_1} C_{d_{0_{W_1}}} A R_{W_1} e + 3600 X_{W_1} C_{l_{\alpha_{W_1}}} A R_{W_1} e + X_{W_1} \pi C_{l_{\alpha_{W_1}}}^2 - 120 Z_{W_1} C_{l_{\alpha_{W_1}}}^2 \right)}{3600 A R_{W_1} e} \right] \quad (6.2.2,12)$$

$$M_{A_{d\phi_{E_1-\dot{q}}}} = \left[\frac{\rho S_{A_{W_1}} U_c \left(Z_{W_1} C_{l_{\alpha_{W_1}}}^2 - 30 X_{W_1} C_{l_{\alpha_{W_1}}} U_c A R_{W_1} e \right)}{60 A R_{W_1} e} \right] \quad (6.2.2,13)$$

$$M_{A_{d\phi_{E_2-\dot{q}}}} = \left[\frac{\rho S_{A_{W_1}} U_c \left(Z_{W_1} C_{l_{\alpha_{W_1}}}^2 - 30 X_{W_1} C_{l_{\alpha_{W_1}}} U_c A R_{W_1} e \right)}{60 A R_{W_1} e} \right] \quad (6.2.2,14)$$

$$M_{A_z} = \left[- \left(\frac{\rho S_{A_{W_1}} U_c^2 Y_{W_1} C_{l_{\alpha_{W_1}}}^2}{60 A R_{W_1} e} \right) d\phi_{E_1} + \left(\frac{\rho S_{A_{W_1}} U_c^2 Y_{W_1} C_{l_{\alpha_{W_1}}}^2}{60 A R_{W_1} e} \right) d\phi_{E_2} \right] \quad (6.2.2,15)$$

Momentos de Tração:

$$\left[\begin{array}{l} - \left(\frac{\pi Y_{R_1}}{60} \right) dT_{R_1} + \left(\frac{\pi Y_{R_1}}{60} \right) dT_{R_2} + \left(\frac{Y_{R_1} T_{0f}}{2} \right) d\phi_{E_1} - \left(\frac{Y_{R_1} T_{0f}}{2} \right) d\phi_{E_2} - (Z_{R_3} T_{0t}) d\phi_{E_3} \\ \left(\frac{\pi X_{R_1}}{60} + Z_{R_1} \right) dT_{R_1} + \left(\frac{\pi X_{R_1}}{60} + Z_{R_1} \right) dT_{R_2} + \left(\frac{\pi Z_{R_1} T_{0f}}{120} - \frac{X_{R_1} T_{0f}}{2} \right) d\phi_{E_1} + \left(\frac{\pi Z_{R_1} T_{0f}}{120} - \frac{X_{R_1} T_{0f}}{2} \right) d\phi_{E_2} + X_{R_3} dT_{R_3} \\ - Y_{R_1} dT_{R_1} + Y_{R_1} dT_{R_2} - \left(\frac{\pi Y_{R_1} T_{0f}}{120} \right) d\phi_{E_1} + \left(\frac{\pi Y_{R_1} T_{0f}}{120} \right) d\phi_{E_2} + (X_{R_3} T_{0t}) d\phi_{E_3} \end{array} \right] \quad (6.2.2,16)$$

Finalmente, para montar as matrizes A e B da equação de espaço de estados (6.1.2,6), é necessário realizar várias operações matriciais e trabalhar estas matrizes com os elementos de cada matriz de forças e momentos PLDE (apresentados acima) de forma simplificada. Sendo assim, observa-se que em todas as matrizes de força ou de momento, cada linha da matriz tem coeficientes multiplicando uma variável de estado (x) ou uma variável de comando (u). Desta forma, assim como foi apresentado nas equações (6.2.2,11) até (6.2.2,14), para simplificar os coeficientes dos momentos aerodinâmicos, cada coeficiente de uma determinada matriz foi substituído por outra variável seguindo a seguinte regra:

- **Para coeficientes de força:**

$$F_{k_1-k_2-k_3} \quad (6.2.2,17)$$

Tal que:

$k_1 = G, Df, A, T$ ($G =$ gravidade, $Df =$ Arrasto de fuselagem, $A =$ aerodinâmica e $T =$ tração);

$$k_2 = [u, v, w, p, q, r, \phi, \theta, \psi, dT_{R_1}, dT_{R_2}, dT_{R_3}, d\phi_{E_1}, d\phi_{E_2}, d\phi_{E_3}];$$

$$k_3 = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}].$$

Desta forma se, por exemplo: $k_1 = T$, $k_2 = d\phi_{E_1}$ e $k_3 = \dot{u}$, a variável apresentada acima deve ser lida de esquerda para direita da seguinte forma:

$$F_{T-d\phi_{E_1}-\dot{u}} \quad (6.2.2,18)$$

“Coeficiente da força de tração (F_T) devido à variação do ângulo de inclinação do primeiro rotor coaxial ($d\phi_{E_1}$) (direito), agindo sobre a aceleração longitudinal da aeronave (\dot{u})”.

Se observarmos com atenção à equação (6.2.2,5) da força de tração PLDE, observaríamos que o coeficiente apresentado na equação (6.2.2,18) é de fato:

$$F_{T_d\phi_{E_1}\dot{u}} = \left(\frac{\pi T_{0f}}{120} \right) \quad (6.2.2,19)$$

Já que este coeficiente pertence à primeira linha da força de tração que representa a influência desta força sobre a aceleração linear (\dot{u}) e este coeficiente multiplica de fato $d\phi_{E_1}$.

Portanto, de forma geral, k_1 indica a qual força o coeficiente se refere. k_2 indica qual é a variável de estado ou de comando que multiplica este coeficiente e k_3 indicará sobre qual variável de estado esse coeficiente em particular está agindo.

- **Para coeficientes de momento:**

$$M_{k_1-k_2-k_3} \quad (6.2.2,20)$$

Tal que:

$$k_1 = A, T \quad (A = \text{aerodinâmica e } T = \text{tração});$$

$$k_2 = [u, v, w, p, q, r, \phi, \theta, \psi, dT_{R_1}, dT_{R_2}, dT_{R_3}, d\phi_{E_1}, d\phi_{E_2}, d\phi_{E_3}];$$

$$k_3 = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}].$$

Desta forma se, por exemplo: $k_1 = A$, $k_2 = u$ e $k_3 = \dot{q}$, a varável apresentada acima deve ser lida de esquerda para direita da seguinte forma:

$$M_{A_u_q} \quad (6.2.2,21)$$

“Coeficiente do momento aerodinâmico (M_A) devido à variação da velocidade longitudinal (u), agindo sobre a aceleração de arfagem da aeronave (\dot{q})”.

Este coeficiente já foi visto na equação (6.2.2,11):

$$M_{A_{.u.\dot{q}}} = \left[\frac{\rho S_{AW_1} U_c \left(60 X_{W_1} \pi C_{l_{\alpha W_1}} AR_{W_1} e - 3600 Z_{W_1} C_{d_{0W_1}} AR_{W_1} e - Z_{W_1} \pi C_{l_{\alpha W_1}}^2 \right)}{1800 AR_{W_1} e} \right] \quad (6.2.2,22)$$

Portanto, “mapeando” coeficientes de força ou momento que tenham expressões muito grandes com a técnica apresentada acima, é possível obter uma expressão literal para as matrizes A e B mais compacta:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} (F_{A_{.u.\dot{u}}} - 2k_{d_x} U_c) & 0 & \frac{F_{A_{.w.\dot{u}}}}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_c & g & 0 & 0 \\ \frac{F_{A_{.u.\dot{w}}}}{m} & 0 & \frac{F_{A_{.w.\dot{w}}}}{m} & 0 & U_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{A_{.u.\dot{q}}}(I_C^{-1})_{22} & 0 & M_{A_{.w.\dot{q}}}(I_H^{-1})_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.2,23)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{F_{T,dT_{R_1},\dot{u}}}{m} \quad \frac{F_{T,dT_{R_2},\dot{u}}}{m} \quad 0 \quad \frac{1}{m} (F_{A,d\phi_{E_1},\dot{u}} + F_{T,d\phi_{E_1},\dot{u}}) \quad \frac{1}{m} (F_{A,d\phi_{E_2},\dot{u}} + F_{T,d\phi_{E_2},\dot{u}}) \quad 0 \\
& \qquad \qquad \qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{F_{T,d\phi_{E_3},\dot{v}}}{m} \\
& \frac{F_{T,dT_{R_1},\dot{w}}}{m} \quad \frac{F_{T,dT_{R_2},\dot{w}}}{m} \quad \frac{F_{T,dT_{R_3},\dot{w}}}{m} \quad \frac{1}{m} (F_{A,d\phi_{E_1},\dot{w}} + F_{T,d\phi_{E_1},\dot{w}}) \quad \frac{1}{m} (F_{A,d\phi_{E_2},\dot{w}} + F_{T,d\phi_{E_2},\dot{w}}) \quad 0 \\
{}_3M_{T,dT_{R_1},\dot{r}} \quad & [(I_C^{-1})_{11} M_{T,dT_{R_2},\dot{p}} + (I_C^{-1})_{13} M_{T,dT_{R_2},\dot{r}}] \quad 0 \quad [(I_C^{-1})_{11} (M_{A,d\phi_{E_1},\dot{p}} + M_{T,d\phi_{E_1},\dot{p}}) + (I_C^{-1})_{13} (M_{A,d\phi_{E_1},\dot{r}} + M_{T,d\phi_{E_1},\dot{r}})] \quad [(I_C^{-1})_{11} (M_{A,d\phi_{E_2},\dot{p}} + M_{T,d\phi_{E_2},\dot{p}}) + (I_C^{-1})_{13} (M_{A,d\phi_{E_2},\dot{r}} + M_{T,d\phi_{E_2},\dot{r}})] \quad [(I_C^{-1})_{11} M_{T,d\phi_{E_3},\dot{p}} + \\
& (I_C^{-1})_{22} M_{T,dT_{R_1},\dot{q}} \quad (I_C^{-1})_{22} M_{T,dT_{R_2},\dot{q}} \quad (I_C^{-1})_{22} M_{T,dT_{R_2},\dot{q}} \quad (I_H^{-1})_{22} (M_{A,d\phi_{E_1},\dot{q}} + M_{T,d\phi_{E_1},\dot{q}}) \quad (I_H^{-1})_{22} (M_{A,d\phi_{E_2},\dot{q}} + M_{T,d\phi_{E_2},\dot{q}}) \quad 0 \\
{}_3M_{T,dT_{R_1},\dot{r}} \quad & [(I_C^{-1})_{31} M_{T,dT_{R_2},\dot{p}} + (I_C^{-1})_{33} M_{T,dT_{R_2},\dot{r}}] \quad 0 \quad [(I_C^{-1})_{31} (M_{A,d\phi_{E_1},\dot{p}} + M_{T,d\phi_{E_1},\dot{p}}) + (I_C^{-1})_{33} (M_{A,d\phi_{E_1},\dot{r}} + M_{T,d\phi_{E_1},\dot{r}})] \quad [(I_C^{-1})_{31} (M_{A,d\phi_{E_2},\dot{p}} + M_{T,d\phi_{E_2},\dot{p}}) + (I_C^{-1})_{33} (M_{A,d\phi_{E_2},\dot{r}} + M_{T,d\phi_{E_2},\dot{r}})] \quad [(I_C^{-1})_{31} M_{T,d\phi_{E_3},\dot{p}} + \\
& \qquad \qquad \qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
& \qquad \qquad \qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
& \qquad \qquad \qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{aligned}$$

(6.2.2,24)

Com $(I_C^{-1})_{ij}$ representando um elemento da matriz inversa da inercial I_C .

Finalmente nas matrizes A e B do voo cruzeiro, as relações cinemáticas para o modo cruzeiro foram consideradas iguais daquelas do modo voo pairado:

Relações Cinemáticas:

$$\begin{bmatrix} d\dot{\phi} \\ d\dot{\theta} \\ d\dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (6.2.2,25)$$

7. Comportamento Dinâmico do Sistema:

Finalmente, com as matrizes A e B de ambos os modos de voo (Pairado e Cruzeiro), é possível montar uma relação de espaço de estados (equação (6.1.2,6)). Esta forma de descrever a dinâmica de um sistema permite avaliar o seu comportamento ao longo do tempo com a ajuda de softwares de integração numérica como MATLAB®.

As condições iniciais de tração para ambas as condições de voo podem ser relacionadas à equação (4.2.3,43) para achar a rotação necessária de cada rotor em função da tração requerida na condição de voo determinada.

$$T_{bm} = 2\rho A_D (K_t^2 \Omega^2 - K_t \Omega V_A) \quad (7,1)$$

A tabela a seguir mostra as características escolhidas para o motor brushless de acordo com o modelo CAD apresentado na seção 5 e de acordo com a pesquisa sobre hélices MATTHEW.H (2015) da qual foram retirados os valores para os coeficiente de tração e de torque devido ao uso e teste da mesma hélice pensada para esta aeronave: APC-10x5".

Tabela 2 - Características de Operação do motor Brushless 2212-920 Kv:

$\rho = 1,1937 \frac{Kg}{m^3}$	$\beta = 0,127 \text{ m}$	$C_Q = 4,4 \text{ e-}3$	$C_T = 0,05397$
--------------------------------	---------------------------	-------------------------	-----------------

Com as condições da tabela anterior e isolando Ω na equação (7,1) chega-se nas rotações necessárias para cada rotor.

Já tendo um modelo de massa, inércia e características geométricas da aeronave graças ao desenho 3D desta na seção 5, são achadas as expressões numéricas das matrizes A e B de cada condição de voo e então aplicada a relação de espaço de estados no software MATLAB®. As tabelas 3 e 4 apresentam os valores para cada uma das variáveis presentes nas matrizes A e B.

Para ter um melhor entendimento do comportamento dinâmico da aeronave, será apresentada a Figura 26, similar àquela exposta na figura 7:

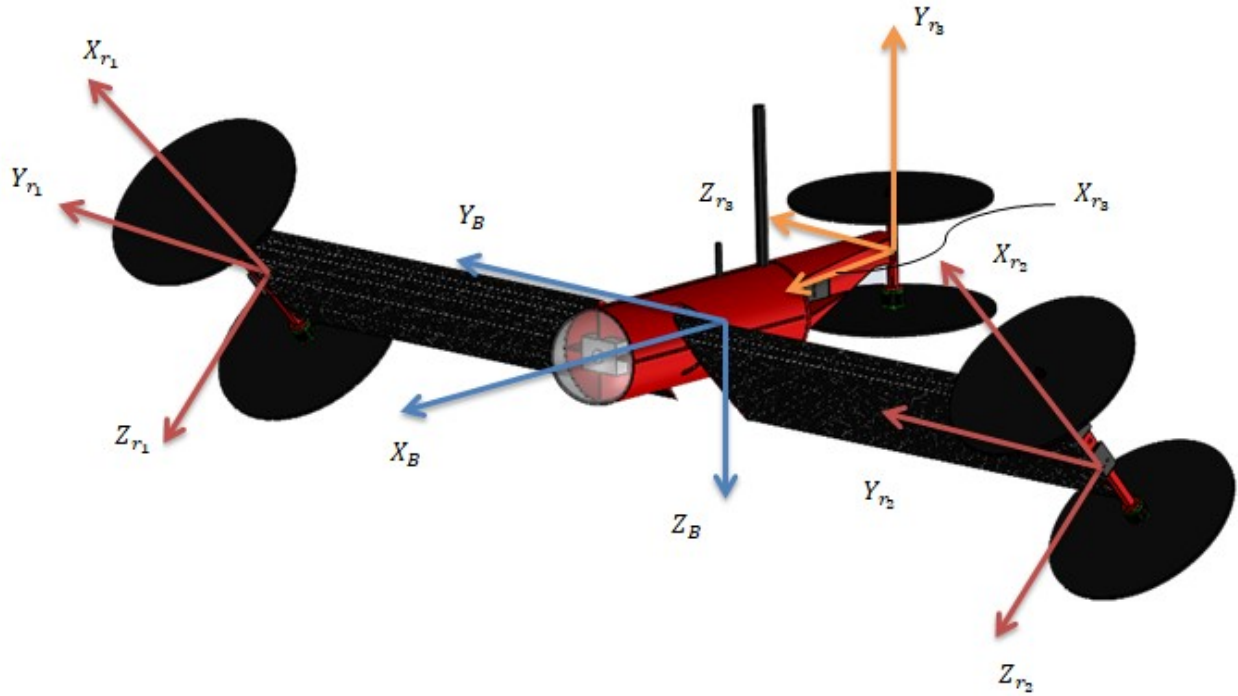


Figura 26 - Sistemas de referencia na aeronave final.

7.1 - Comportamento dinâmico em modo voo pairado:

Os valores das variáveis presentes nas matrizes A e B para o modo de voo pairado são apresentados a seguir:

Tabela 3 - Variáveis das Matrizes do Espaço de Estados para o Modo Voo Pairado

$m = 2,5 \text{ Kg}$	$Y_{W_1} = 0,389 \text{ m}$	$I_{yyW_1W_1} = 0,0035 \text{ Kg m}^2$
$m_{R_1} = 0,242 \text{ Kg}$	$Z_{W_1} = 0,020 \text{ m}$	$I_{zzW_1W_1} = 0,0586 \text{ Kg m}^2$
$m_{R_3} = 0,147 \text{ Kg}$	$X_{R_3} = -0,278 \text{ m}$	$I_{xxR_3r_3} = 0,0042 \text{ Kg m}^2$
$m_{W_1} = 0,248 \text{ Kg}$	$Y_{R_3} = 0 \text{ m}$	$I_{yyR_3r_3} = 0,0037 \text{ Kg m}^2$
$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$Z_{R_3} = -0,035 \text{ m}$	$I_{zzR_3r_3} = 0,0042 \text{ Kg m}^2$

$X_{R_1} = 0,139 \text{ m}$	$I_{xx_{R_1 r_1}} = 0,0037 \text{ Kg m}^2$	$I_{xx_{F_b}} = 0,0032 \text{ Kg m}^2$
$Y_{R_1} = 0,721 \text{ m}$	$I_{yy_{R_1 r_1}} = 0,0108 \text{ Kg m}^2$	$I_{yy_{F_b}} = 0,0205 \text{ Kg m}^2$
$Z_{R_1} = 0,034 \text{ m}$	$I_{zz_{R_1 r_1}} = 0,0108 \text{ Kg m}^2$	$I_{zz_{F_b}} = 0,0192 \text{ Kg m}^2$
$X_{W_1} = 0,139 \text{ m}$	$I_{xx_{W_1 w_1}} = 0,0551 \text{ Kg m}^2$	$T_{R_0} = 8,175 \text{ N}$

Observa-se que na tabela 3 aparecem apenas índices 1 e 3. Isto se deve a que, como foi explicado previamente, as características dos rotores coaxiais frontais e semi-asas são idênticas e já foram levadas em conta no resultado das equações linearizadas. Adicionalmente, apenas Y_{R_1} e Y_{W_1} diferem de Y_{R_2} e Y_{W_2} apenas por um sinal negativo, que também já foi levado em consideração. Vale a pena notar que se manteve a imposição de equilíbrio dinâmico da equação (6.1.1,5), que estabelece que em condição de voo pairado, o módulo de X_{R_3} deverá ser duas vezes maior que X_{R_1} (Figura 27).

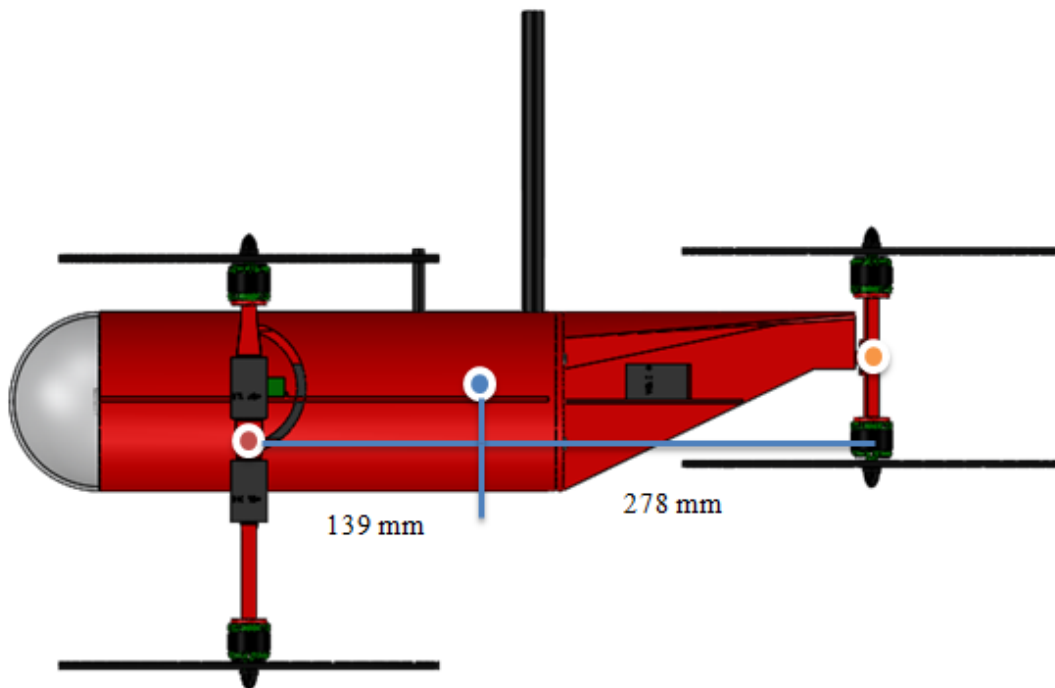


Figura 27 - Vista lateral da aeronave em modo de voo pairado.

- **Rotação em Voo Parado:**

Com uma condição de vento relativo nulo sobre os motores ($V_A = 0$) e aplicando a equação (7,1):

$$T_{bm_i} = \frac{mg}{6} = \frac{T_{R_0}}{2} \rightarrow \Omega_i \sim 2300 \text{ RPM ou } 241 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (7.1,1)$$

Com $i = 1, 2, 3, \dots, 6$.

Substituindo os valores presentes na tabela 3 dentro das equações (6.1.2,9) e (6.1.2,10) teremos as expressões numéricas das matrizes A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9,81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.1,2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3,27 & 3,27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,27 \\ -0,4 & -0,4 & -0,4 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5216 & 1,5216 & 0 & -0,0888 & 0,0888 & 0,5689 \\ 1,6438 & 1,6438 & -3,2877 & 3,3142 & 3,3142 & 0 \\ -0,0109 & 0,0109 & 0 & -8,2923 & 8,2923 & -3,1930 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.1,3)$$

Executando o algoritmo presente no Apêndice III, são achadas as respostas dinâmicas da aeronave a entradas na forma de impulsos. Ressalta-se que não foi aplicado nenhum comando de controle sobre as respostas dinâmicas. As figuras a seguir mostram o resultado obtido.

- Entrada Impulso ϕ_{E1} :

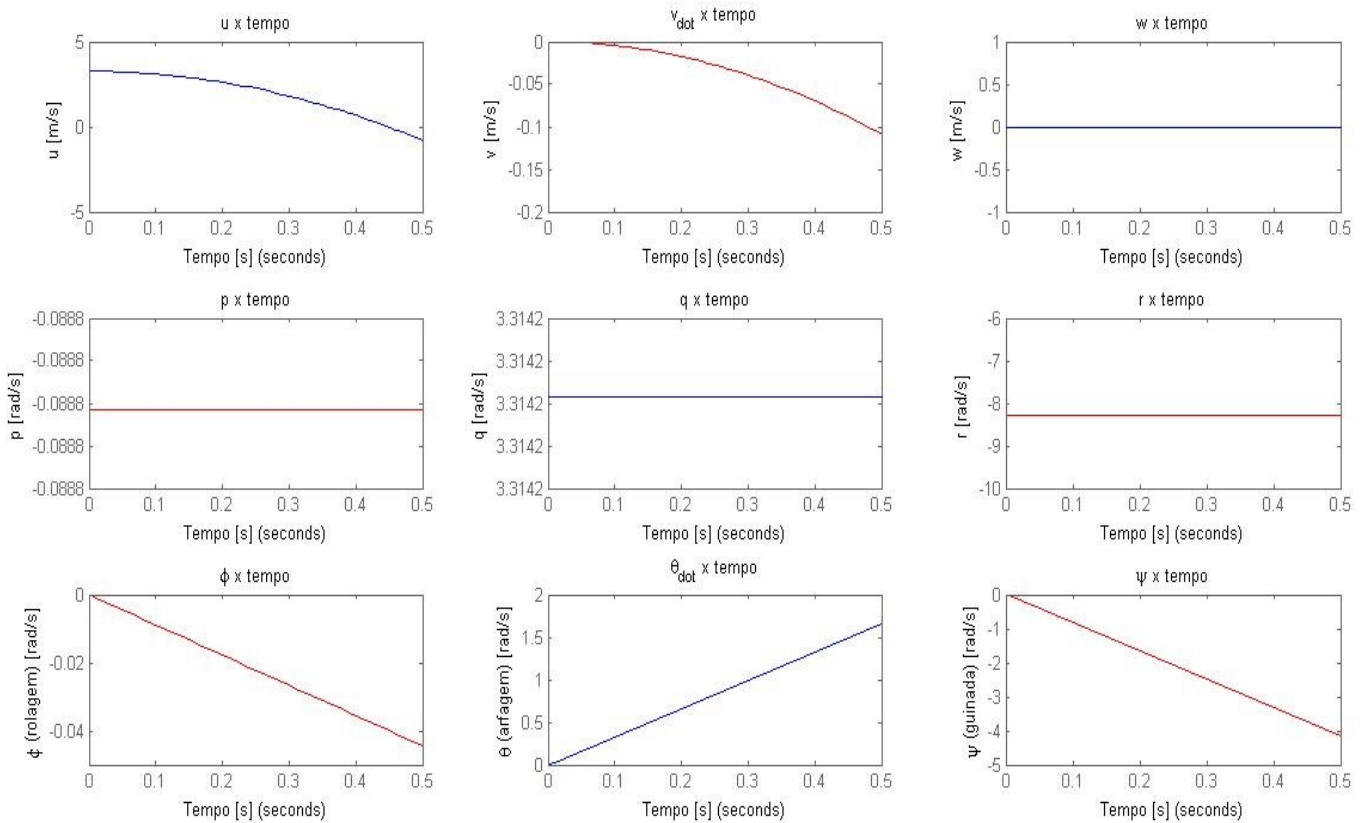


Figura 28 - Resposta dinâmica à entrada de ϕ_{E1} como impulso para o modo de voo pairado.

A Figura 28 apresenta a resposta dinâmica da aeronave à ϕ_{E1} como entrada impulso. As curvas em azul estão relacionadas exclusivamente ao movimento longitudinal, enquanto que as vermelhas estão relacionadas ao movimento latero-direcional. Deve ser lembrado que para a condição de voo pairado, a aeronave encontra-se originalmente com inclinação dos rotores coaxiais frontais de -90° em relação ao plano $X_B Y_B$ (figura 26), além disto, no modelo dinâmico foi considerado que todo ângulo de inclinação de um rotor seria negativo acima do plano $X_B Y_B$. Portanto, observando a Figura 28, entende-se que um impulso ou inclinação rápida do rotor coaxial direito em torno do eixo Y_{T1} no sentido de fazer decrescer seu ângulo de inclinação (de -90° para $|\phi_{E1}| < 90^\circ$), causará primeiramente uma guinada no sentido negativo da rotação em torno do eixo Z do corpo de acordo com a regra da mão direita (figura 26), adicionalmente, observando a figura 27, é possível ver que haverá uma arfagem positiva (tendendo a levantar o nariz da aeronave) devido à distância relativa em Z entre o C.G. da aeronave e o C.G. do rotor coaxial R_1 , porém observa-se também uma rolagem negativa na figura 28 mesmo quando na equação (6.1.2,4), onde se tem as relações de momentos de tração, a variação de ϕ_{E1} não influencia diretamente sobre \dot{p} . Isto se deve a um momento

giroscópico aparecendo sobre o eixo X_B devido a uma rotação positiva sobre Y_B e outra negativa sobre Z_B , que de acordo com a regra da mão direita, gerará um momento negativo sobre o terceiro eixo ortogonal. Por sua vez, esta rotação negativa que tende a inclinar a semi-asa esquerda para baixo, faz aparecer uma aceleração negativa em v . Adicionalmente, observa-se a perturbação na aceleração inicial e decadente longitudinal u , devido à arfagem positiva.

- **Entrada Impulso ϕ_{E_2} :**

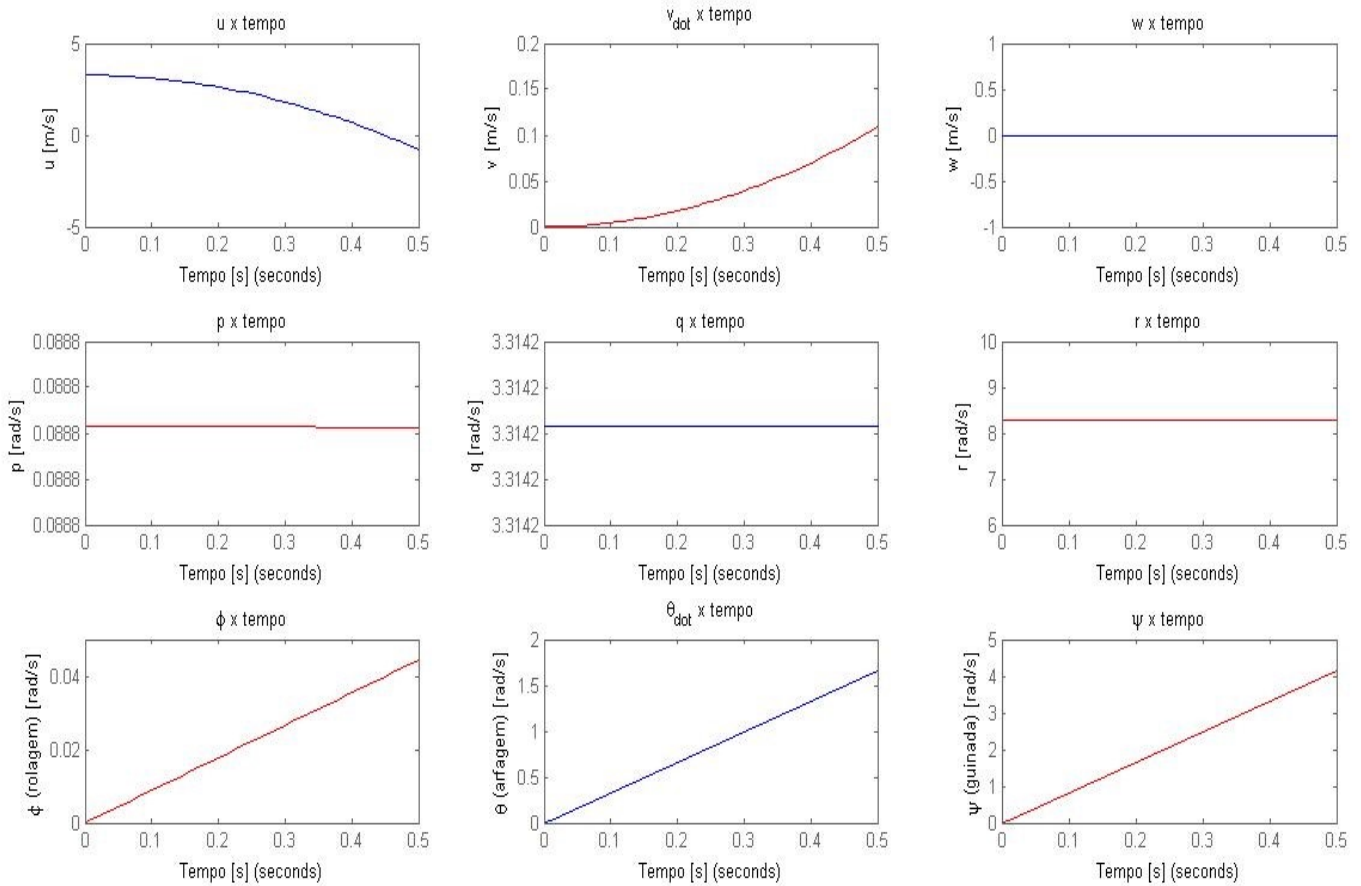


Figura 29 - Resposta dinâmica à entrada de ϕ_{E_2} como impulso para o modo de voo pairado.

A Figura 29 apresenta a resposta dinâmica da aeronave à ϕ_{E_2} como entrada impulso. A análise neste caso é semelhante ao da figura 28, só que desta vez a guinada positiva e a arfagem ainda positiva, causam uma rotação positiva e então a aeronave tenderá a ir para a direita. Ou seja, $v +$.

- Entrada Impulso ϕ_{E_3} :

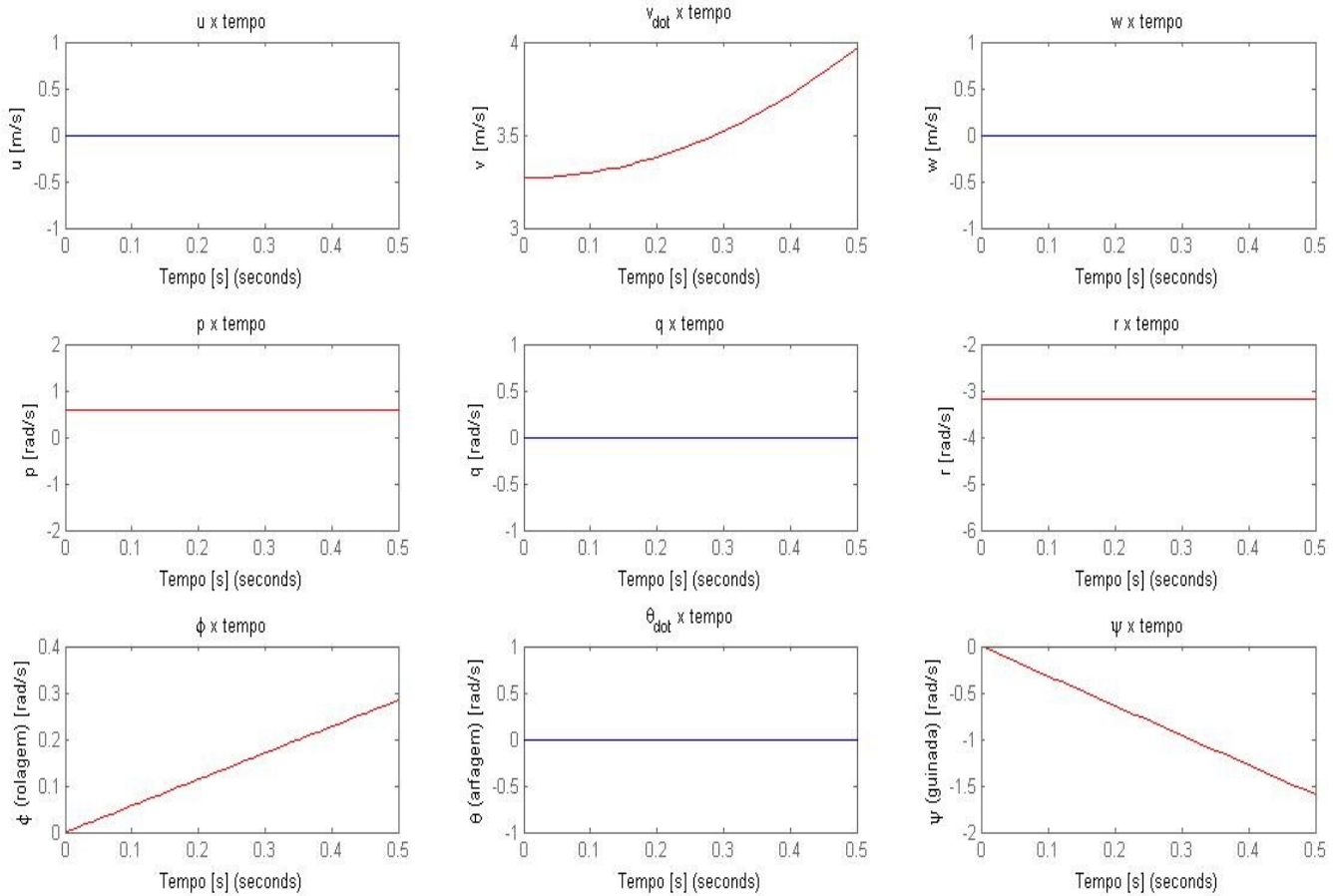


Figura 30 - Resposta dinâmica à entrada de ϕ_{E_3} como impulso para o modo de voo pairado.

A Figura 30 apresenta a resposta dinâmica da aeronave à ϕ_{E_3} como entrada impulso. Para um impulso no sentido de decrescer a inclinação original de -90° para $|\phi_{E_3}| < 90^\circ$ do rotor coaxial traseiro, causará primeiramente uma componente de aceleração no sentido da semi-asa direita ($v +$) e adicionalmente gerará uma guinada negativa em torno de Z_B . Também, pela distância relativa em Z entre o C.G. da aeronave e o C.G. do rotor coaxial traseiro (Tabela 3) aparecerá uma rolagem positiva em torno de X_B . Com estas duas rotações simultâneas, seria esperada uma arfagem positiva devido ao efeito giroscópico presente nas figuras 28 e 29. Porém, este não foi o caso e o modelo linear não representou este fenômeno.

- **Entrada Impulso T_{R_1} :**

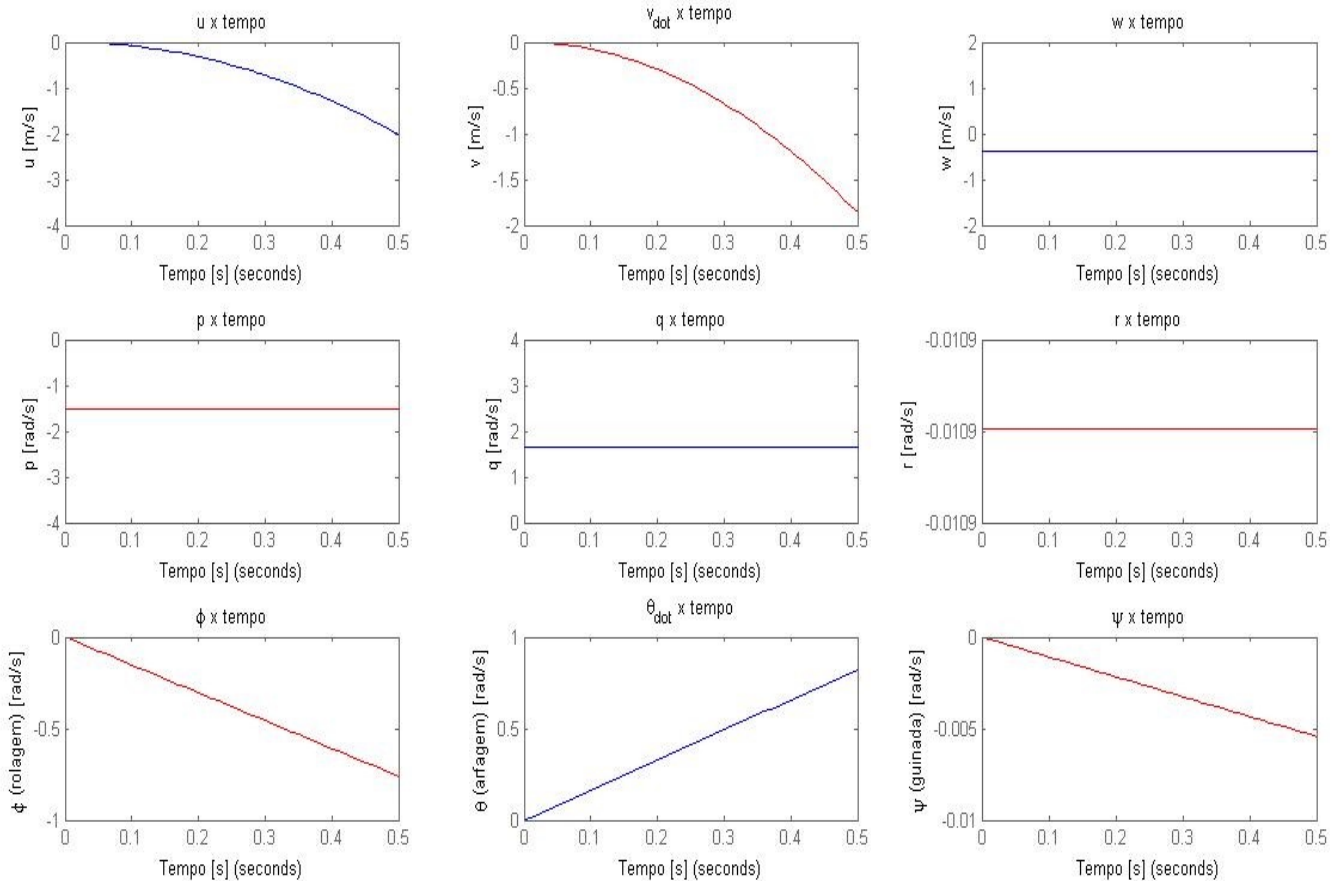


Figura 31 - Resposta dinâmica à entrada de T_{R_1} como impulso para o modo de voo pairado.

A Figura 31 apresenta a resposta dinâmica da aeronave à T_{R_1} como entrada impulso. Neste caso observa-se primeiramente a rolagem negativa em torno de X_B , o qual faz sentido se o rotor direito está sendo acelerado no modo de voo pairado. Além disto, devido à distância relativa em X entre o C.G. da aeronave e o C.G. de um rotor frontal, aparece uma arfagem positiva e, destas duas rotações, aparece por efeito giroscópico uma terceira rotação (guinada) em torno de Z_B negativa, de acordo com a regra da mão direita. Por sua vez, observa-se uma leve perturbação na aceleração para cima ($w -$) da aeronave. Isto quer dizer que a aeronave está enxergando uma aceleração “para cima dela” ao longo do eixo Z_B por causa da tração. Devido à rolagem e guinada negativas, ela enxerga também uma aceleração negativa em v e devido à arfagem positiva, a aeronave também enxerga uma aceleração “para trás”. Isto é, $u -$.

- **Entrada Impulso T_{R_2} :**

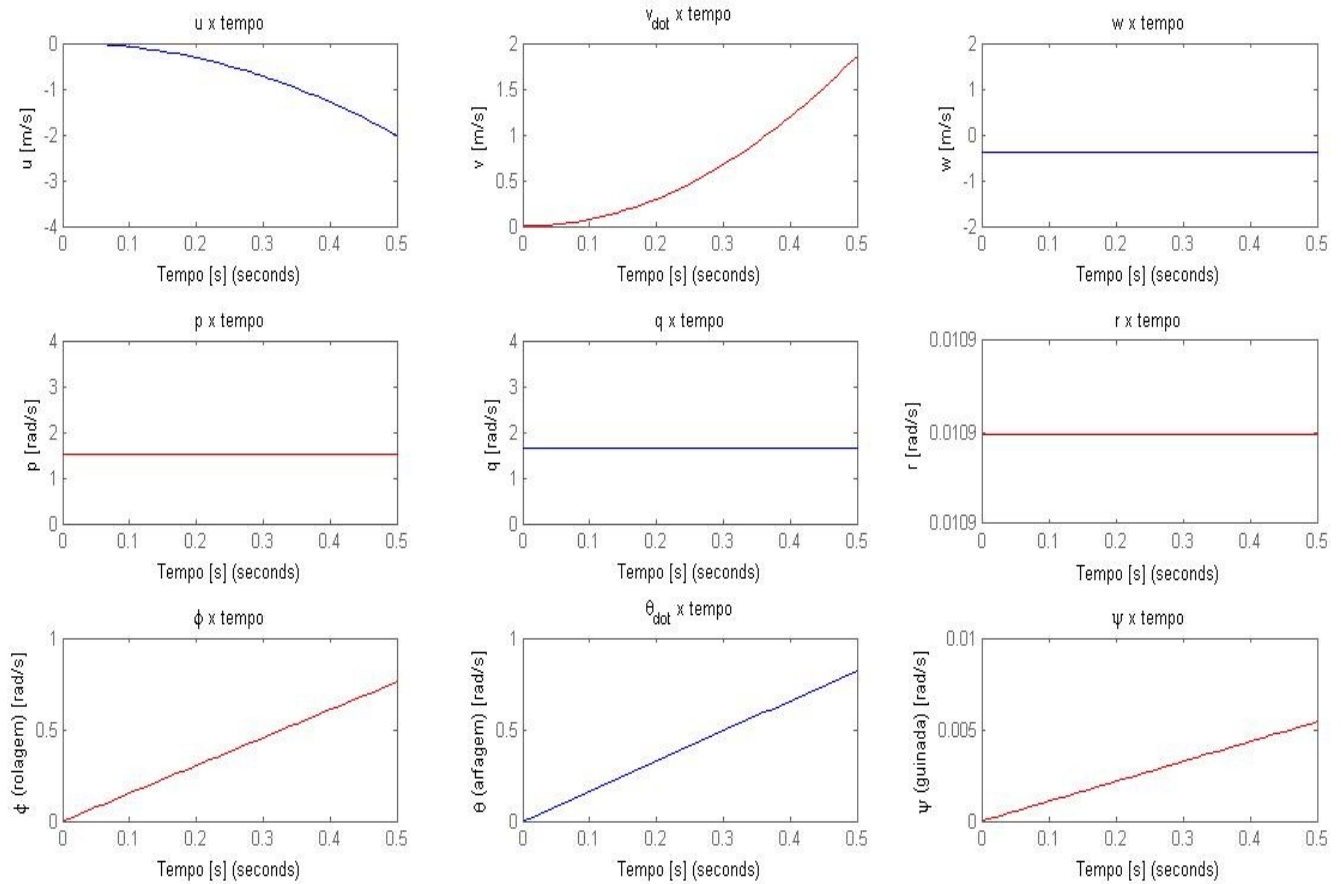


Figura 32 - Resposta dinâmica à entrada de T_{R_2} como impulso para o modo de voo pairado.

A Figura 32 apresenta a resposta dinâmica da aeronave à T_{R_2} como entrada impulso. Semelhante e análoga à resposta dinâmica da figura 31, uma variação de força de tração no rotor coaxial esquerdo ocasionará uma rolagem positiva, uma guinada positiva e uma consequente guinada positiva. Ainda, haverá uma aceleração negativa em u devido à arfagem, uma aceleração positiva em v devido à rolagem positiva e guinada positiva e uma variação na aceleração da aeronave “para cima” devido ao aumento de tração.

- **Entrada Impulso T_{R_3} :**

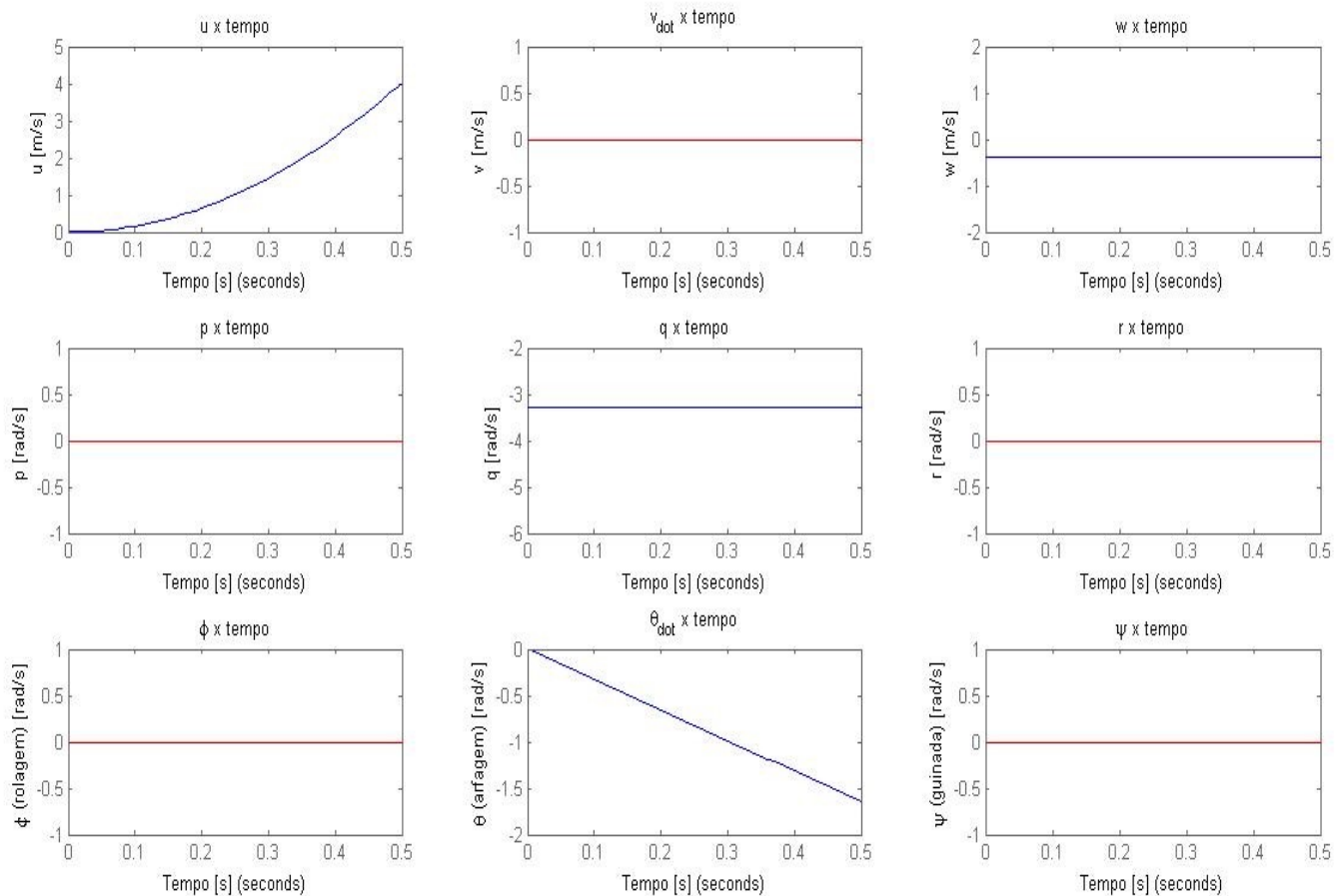


Figura 33 - Resposta dinâmica à entrada de T_{R_3} como impulso para o modo de voo pairado.

A Figura 33 apresenta a resposta dinâmica da aeronave à T_{R_3} como entrada impulso. A variação na força de tração do rotor traseiro causará uma arfagem negativa (tendendo a abaixar o nariz da aeronave), uma aceleração positiva em u devido à própria arfagem negativa e, logicamente, o impulso de tração acelerará negativamente (para cima) a aeronave ao longo do seu eixo Z .

Por fim, entende-se que as Figs. 28-32 mostram respostas divergentes frente a um comando impulsivo. Outra forma utilizada para avaliar o comportamento dinâmico deste sistema (em modo voo pairado) foi resolvendo o problema de autovalores e autovetores no software MATLAB. Os resultados mostraram que todos os nove (nove devido ao número variáveis de estado) autovalores deram nulos. Isto se entende fisicamente como um sistema sem modos oscilantes e amortecidos, no qual a aeronave se comporta com um corpo rígido.

Isto implica que a aeronave terá aceleração linear ou angular após uma perturbação, na qual não há nenhuma força ou momento que restaure a condição de equilíbrio da aeronave.

A matriz de autovetores da condição de voo pairado foi a seguinte (cada coluna representa um auto-vetor):

$$Auto - vetores = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.1,5)$$

7.2 - Comportamento dinâmico em modo voo cruzeiro:

Os valores das variáveis presentes nas matrizes A e B para o modo de voo cruzeiro são apresentados a seguir:

Tabela 4 -Variáveis das Matrizes do Espaço de Estados para o Modo Voo Cruzeiro

$m = 2,5 \text{ Kg}$	$Z_{R_3} = -0,023 \text{ m}$	$U_c = 26,06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$m_{R_1} = 0,242 \text{ Kg}$	$I_{xx_{R_1 r_1}} = 0,0037 \text{ Kg m}^2$	$T_{0_f} = 5,2 \text{ N}$
$m_{R_3} = 0,147 \text{ Kg}$	$I_{yy_{R_1 r_1}} = 0,0108 \text{ Kg m}^2$	$T_{0_t} = 3,88 \text{ N}$
$m_{W_1} = 0,248 \text{ Kg}$	$I_{zz_{R_1 r_1}} = 0,0108 \text{ Kg m}^2$	$\rho = 1,1937 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$
$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$I_{xx_{W_1 w_1}} = 0,0551 \text{ Kg m}^2$	$C_{d_x} = 0,7$
$X_{R_1} = 0,090 \text{ m}$	$I_{yy_{W_1 w_1}} = 0,0035 \text{ Kg m}^2$	$A_{f_x} = 0,0113 \text{ m}^2$
$Y_{R_1} = 0,721 \text{ m}$	$I_{zz_{W_1 w_1}} = 0,0586 \text{ Kg m}^2$	$S_{A_{W_1}} = 0,1306 \text{ m}^2$

$Z_{R_1} = -0,001 \text{ m}$	$I_{xx_{R_3r_3}} = 0,0042 \text{ Kg m}^2$	$C_{l_{\alpha_{W_1}}} = 4,4787 \frac{1}{\text{rad}}$
$X_{W_1} = 0,104 \text{ m}$	$I_{yy_{R_3r_3}} = 0,0037 \text{ Kg m}^2$	$C_{d_{0W_1}} = 0,015$
$Y_{W_1} = 0,389 \text{ m}$	$I_{zz_{R_3r_3}} = 0,0042 \text{ Kg m}^2$	$AR_{W_1} = 3,265$
$Z_{W_1} = -0,002 \text{ m}$	$I_{xx_{F_b}} = 0,0032 \text{ Kg m}^2$	$e = 0,8531$
$X_{R_3} = -0,180 \text{ m}$	$I_{yy_{F_b}} = 0,0205 \text{ Kg m}^2$	
$Y_{R_3} = 0 \text{ m}$	$I_{zz_{F_b}} = 0,0192 \text{ Kg m}^2$	

Comparando as tabelas 3 e 4, observamos que os momentos de inércia não mudam já que estes são referentes aos sistemas de referência fixos a cada componente. Além disto, vemos que as distâncias relativas entre o C.G. da aeronave e os centros de gravidade dos rotores e semi-asas mudaram. No caso dos rotores e semi-asas frontais, suas distâncias longitudinais diminuíram e suas distâncias verticais ultrapassaram por milímetros a distância até o C.G. da aeronave, tornando-se negativas. Já a distância do C.G. do corpo até o centro de gravidade do rotor coaxial traseiro diminuiu na mesma proporção e manteve a relação de ser duas vezes maior que a distância dos rotores dianteiros até o centro de gravidade da aeronave (Figura 34).

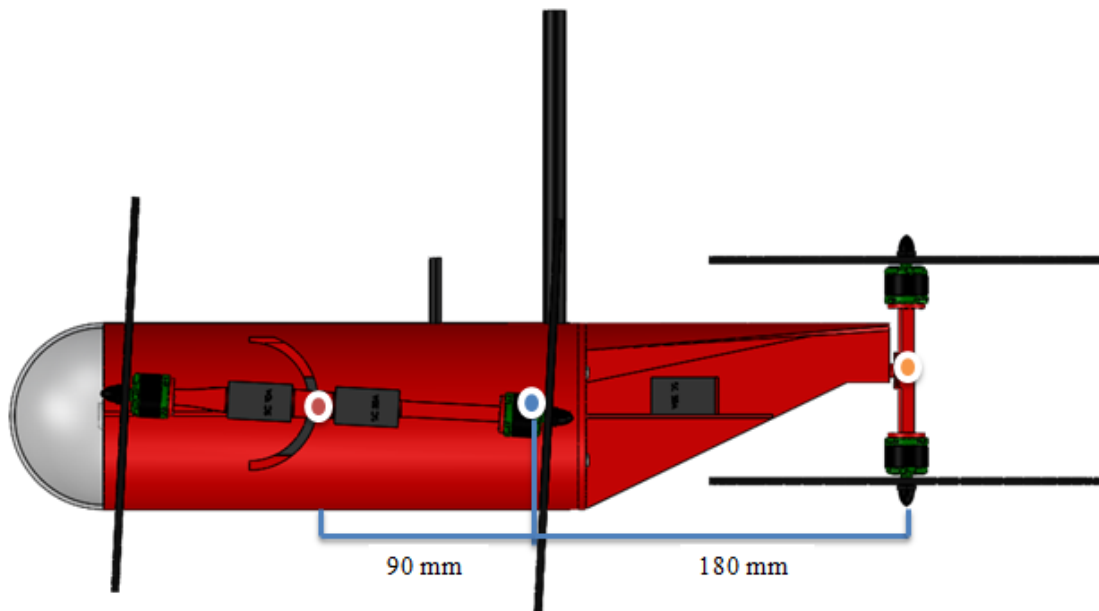


Figura 34 - Vista lateral da aeronave em modo de voo cruzeiro.

- **Rotação em Voo Cruzeiro:**

Resolvendo o sistema de equações na condição de equilíbrio para o voo cruzeiro proposto pelas equações (6.2.1,1) e (6.2.1,2) são determinados os valores necessários para a velocidade inicial em modo cruzeiro, a força de tração necessária total nos rotores da frente (T_{0_f}) e a força de tração necessária total no rotor traseiro (T_{0_t}).

Com base nos dados do projeto na Tabela 4, foram achados os seguintes valores para velocidade cruzeiro, tração frontal e tração traseira:

$$U_c = 26,06 \frac{m}{s}, \quad T_{0_f} = 5,2 \text{ N}, \quad T_{0_t} = 3,88 \text{ N} \quad (7.2,1)$$

A velocidade achada para o voo em modo cruzeiro pode parecer relativamente alta, porém, como foi explicado na seção 5, a aeronave foi pensada para atingir velocidades perto dos $100 \frac{Km}{h}$. Então esta velocidade não está muito longe da concepção inicial do projeto.

Com uma condição de vento relativo sobre os motores da frente de $V_A \sim U_c = 26,06 \frac{m}{s}$ e vento relativo nulo sobre os motores traseiros:

$$T_{bm_{f_i}} = \frac{T_{0_f}}{4} = 1,3 \text{ N} \rightarrow \Omega_{f_i} \sim 24.447 \text{ RPM ou } 2.560 \frac{rad}{s} \quad (7.2,2)$$

com $i = 1, 2, 3, 4$ (só para os quatro motores frontais). É interessante observar que o valor requerido para a rotação dos rotores da frente é exageradamente alto mesmo quando a tração requerida é baixa. Isto se deve à velocidade cruzeiro na qual a aeronave deve se manter para conseguir equilíbrio dinâmico com os três graus de inclinação impostos nas semi-asas. Na prática, esta rotação está muito além das capacidades do motor brushless escolhido inicialmente (2212-920 Kv) que tem um limite de rotação aproximado em 10000 RPM. Para trabalhos futuros seria necessário reavaliar o motor a ser utilizado.

Já para os motores no rotor coaxial traseiro:

$$T_{bm_{t_j}} = \frac{T_{0_t}}{2} = 1,94 \text{ N} \rightarrow \Omega_{t_j} \sim 3.692 \text{ RPM ou } 387 \frac{rad}{s} \quad (7.2,3)$$

Com $j = 5, 6$ (Só para os dois motores traseiros). Observa-se que a rotação requerida para cada motor brushless traseiro está dentro dos limites possíveis de operação.

Substituindo os valores presentes na tabela 4 dentro das equações (6.1.2,9) e (6.1.2,10) teremos as expressões numéricas das matrizes A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -0,1594 & 0 & 0,0795 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9,81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -26,0577 & 9,81 & 0 & 0 \\ -0,6255 & 0 & -6,0039 & 0 & 26,0577 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,4151 & 0 & 23,1450 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.2,4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0 & 3,0941 & 3,0941 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5512 \\ -0,0209 & -0,0209 & 0,4 & 78,866 & 78,866 & 0 \\ -0,0816 & 0,0816 & 0 & 171,6354 & -171,6354 & 0,201 \\ 0,059 & 0,059 & -2,6618 & -303,5413 & -303,5413 & 0 \\ -1,435 & 1,435 & 0 & -6,2829 & 6,2829 & -1,3844 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.2,5)$$

Executando o algoritmo presente no Apêndice IV, são achadas as respostas dinâmicas da aeronave a entradas na forma de impulsos. Ressalta-se que não foi aplicado nenhum comando de controle sobre as respostas dinâmicas. As figuras a seguir mostram o resultado obtido.

- **Entrada Impulso ϕ_{E_1} e ϕ_{E_2} :**

A diferença do modelo de voo pairado, aqui serão apresentadas juntas as figuras de impulso para os ângulos de inclinação frontais.

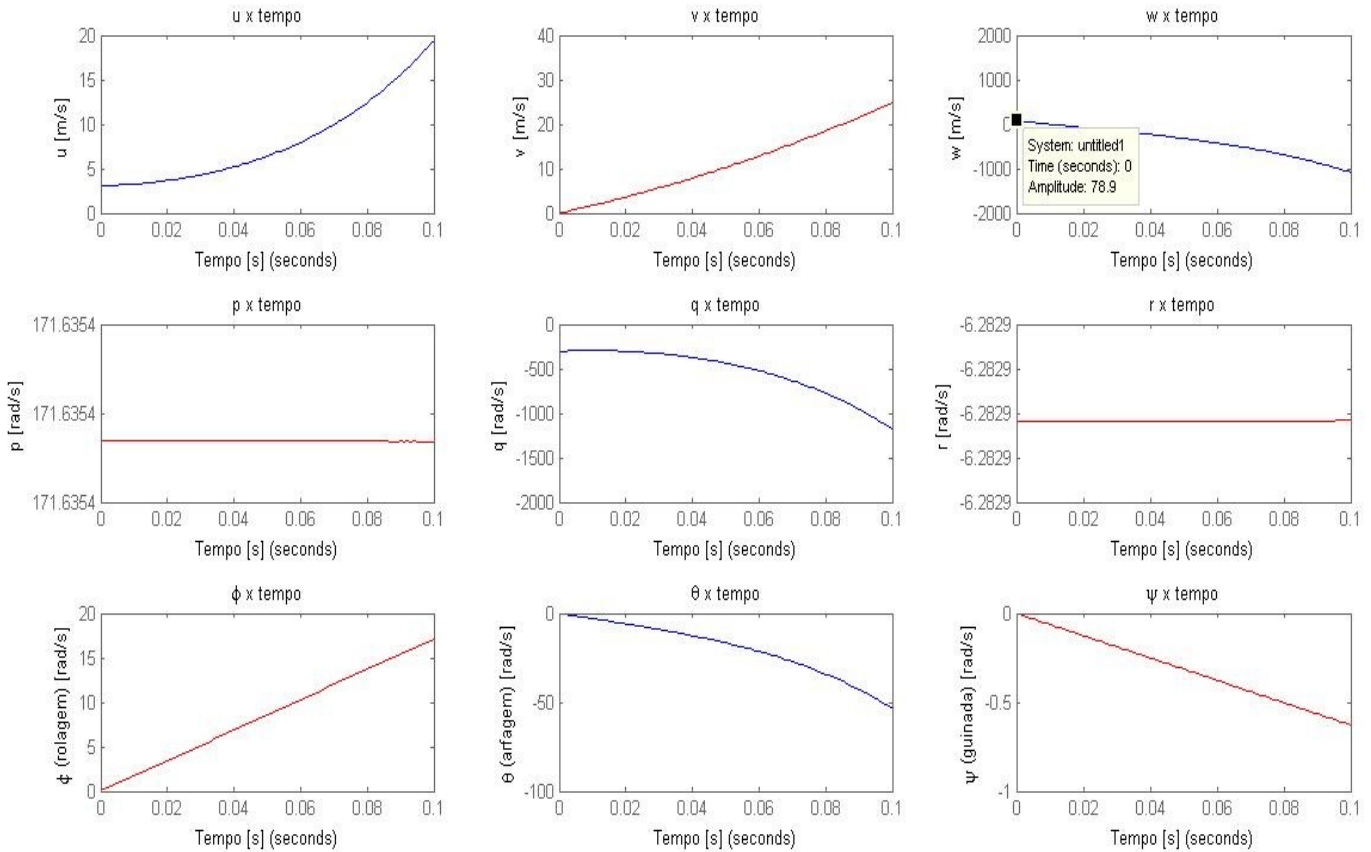


Figura 35 - Resposta dinâmica à entrada de ϕ_{E_1} como impulso para modo de voo cruzeiro.

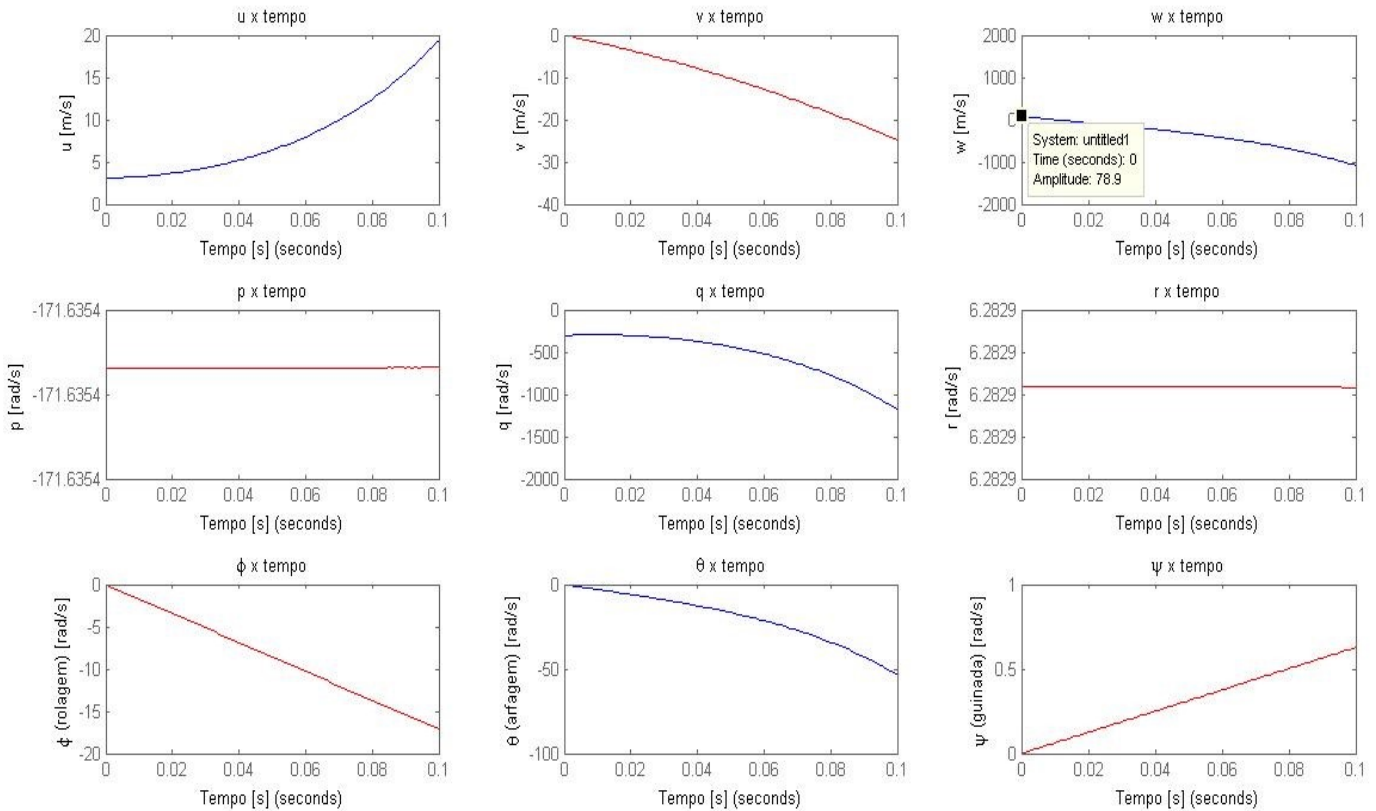


Figura 36 - Resposta dinâmica à entrada de ϕ_{E_2} como impulso para modo de voo cruzeiro.

As Figura 35 e 36 apresentam a resposta dinâmica da aeronave à entradas ϕ_{E_1} e ϕ_{E_2} como impulsos. Observando as figuras 35 e 36, vemos que ao gerar um impulso de $|\phi_{E_i}| < 90^\circ$ e inclinar um único rotor desde seu estado inicial de -90° , o efeito dinâmico é bem expressivo.

Para o caso da entrada impulsiva ϕ_{E_1} (figura 35) vemos que como o ângulo de inclinação do rotor direito diminuiu (então o ângulo de ataque da semi-asa direita também): Primeiramente, a componente longitudinal da força de tração do rotor direito aumentará (enquanto a componente vertical diminuirá), isto gera um aumento na aceleração longitudinal u , seguido de uma guinada negativa em torno do eixo Z_B que causará que a aeronave enxergue aceleração linear pela direita ($v +$). Já que o ângulo de ataque da semi-asa direita diminuiu, a sua força de sustentação também deverá ter diminuído, o que ocasiona uma falta de sustentação na semi-asa direita e que, por consequência, gera uma rolagem positiva em torno de X_B (no sentido da semi-asa direita) que também contribui para a aceleração linear pela direita. Finalmente, a própria falta de sustentação para frente do C.G. da aeronave, fará ela arfar negativamente (com o nariz da aeronave inclinando para baixo) em torno de Y_B e, se bem a aeronave enxerga no começo uma aceleração linear positiva no sentido vertical w devido à queda inicial de sustentação, devido à arfagem negativa a aeronave começará a enxergar uma aceleração vertical negativa ($w -$) vinda por cima da aeronave.

Para o caso da entrada impulsiva ϕ_{E_2} (figura 36) vemos que como o ângulo de inclinação do rotor esquerdo diminuiu (então o ângulo de ataque da semi-asa esquerda diminuiu também): Primeiramente, a componente longitudinal da força de tração do rotor esquerdo aumentará (enquanto a componente vertical diminuirá), isto gera um aumento na aceleração longitudinal u , seguido de uma guinada positiva em torno do eixo Z_B que causará que a aeronave enxergue aceleração linear pela esquerda ($v -$). Já que o ângulo de ataque da semi-asa esquerda diminuiu, a sua força de sustentação também deverá ter diminuído, o que ocasiona uma falta de sustentação na semi-asa esquerda e que, por consequência, gera uma rolagem negativa em torno de X_B (no sentido da semi-asa esquerda) que também contribui para a aceleração linear pela esquerda. Finalmente, a própria falta de sustentação para frente do C.G. da aeronave, fará ela arfar negativamente (com o nariz da aeronave inclinando para baixo) em torno de Y_B e, se bem a aeronave enxerga no começo uma aceleração linear positiva no sentido vertical w devido à queda inicial de sustentação, devido à arfagem negativa a aeronave começará a enxergar uma aceleração vertical negativa ($w -$) vinda por cima da aeronave.

Para tentar entender melhor este fenômeno, foi reproduzida a resposta dinâmica no tempo do sistema quando ele tem como condições iniciais nas variáveis ϕ_{E_1} e ϕ_{E_2} uma variação de um grau de inclinação, partindo da condição de equilíbrio de 3° . Ou seja, o sistema já começaria com 2° (negativos de acordo ao padrão estabelecido) na inclinação de ambas semi-asas. A Figura 37 mostra este resultado.

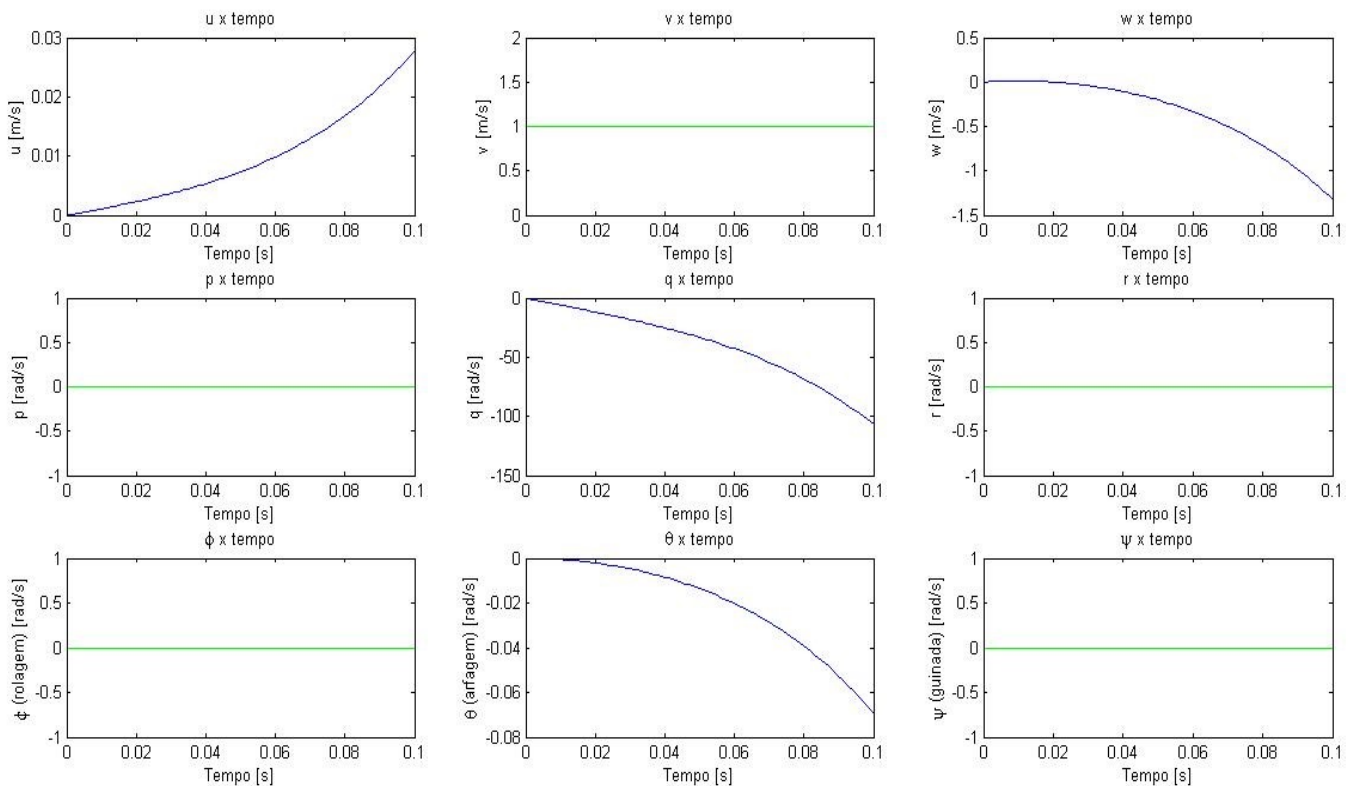


Figura 37 - Resposta dinâmica quando ϕ_{E_1} e ϕ_{E_2} começam com 1° de variação, desde a condição inicial de equilíbrio para modo de voo cruzeiro.

Observa-se na figura acima que com ambas as inclinações começando a 2°, menor inclinação daquela na qual foi estabelecido o equilíbrio dinâmico, há uma leve e crescente aceleração longitudinal $u +$, como também uma leve e crescente aceleração vertical para cima (negativa) devido à arfagem negativa produzida pela falta de sustentação em ambas as semi-asas. Adicionalmente já não há guinada, nem rolagem ou aceleração lateral.

- Entrada Impulso ϕ_{E_3} :

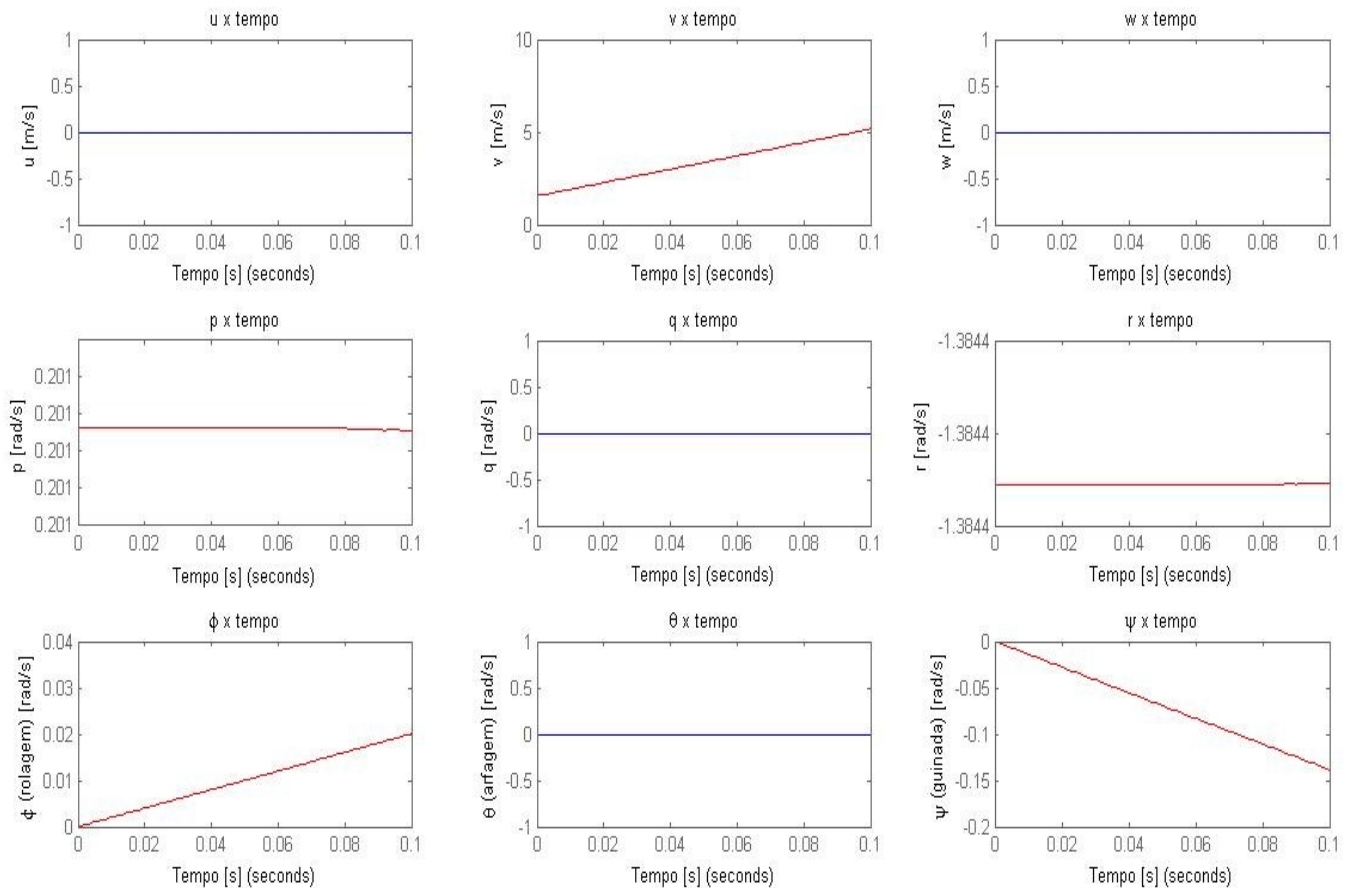


Figura 38 - Resposta dinâmica à entrada de ϕ_{E_3} como impulso para modo de voo cruzeiro.

A Figura 38 mostra a resposta dinâmica da aeronave à entrada ϕ_{E_3} como um impulso. Assim como foi visto para a resposta dinâmica de ϕ_{E_3} como impulso no modo de voo pairado, uma inclinação que leve o rotor traseiro da sua condição inicial de -90° para $|\phi_{E_3}| < 90^\circ$, causará uma aceleração para a direita da aeronave $v +$, uma guina negativa e uma rolagem positiva. Porém, mais uma vez, não é possível observar variação ou efeito na arfagem da aeronave para esta condição de entrada.

- Entrada Impulso T_{R_1} e T_{R_2} :

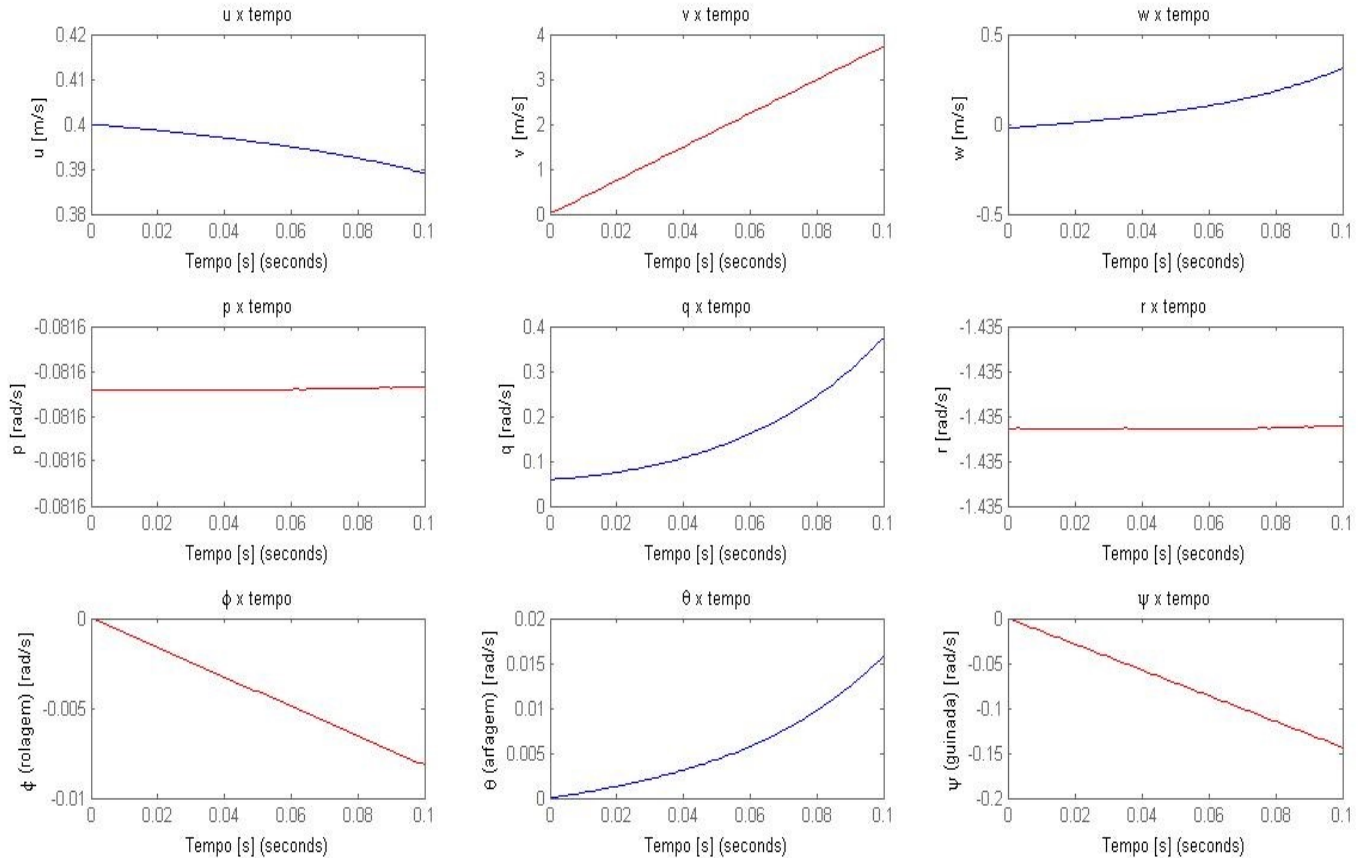


Figura 39 - Resposta dinâmica à entrada de T_{R_1} como impulso para modo de voo cruzeiro.

A resposta dinâmica ao impulso de T_{R_1} (Figura 39) mostra uma guinada negativa e uma arfagem positiva, as quais fazem sentido se o rotor coaxial direito acelerar já que o vetor de tração do rotor direito encontra-se para a direita, para frente e para baixo do C.G. da aeronave. Adicionalmente observa-se que aparece uma leve aceleração de rolagem negativa, provavelmente decorrente do efeito giroscópico (da guinada negativa e da arfagem positiva) e devido do aumento de sustentação na semi-asa direita. Observa-se também que há um leve salto na aceleração longitudinal u da aeronave que se torna decrescente ao longo do tempo e uma aceleração lateral crescente v ao longo do tempo também. Provavelmente isto se deva à influência da guinada negativa, ocasionando que a aeronave gire e viaje pelo ar por alguns instantes diagonalmente, fazendo com que o corpo enxergue componentes de aceleração tanto longitudinal quanto lateralmente. A aceleração crescente no sentido positivo de w é devido a que a aeronave está enxergando uma aceleração no sentido positivo de Z_B pois ela não só está viajando diagonalmente, como também o faz enquanto rola negativamente e arfa positivamente. Expondo a base ou “barriga” da aeronave ao vento relativo e à trajetória.

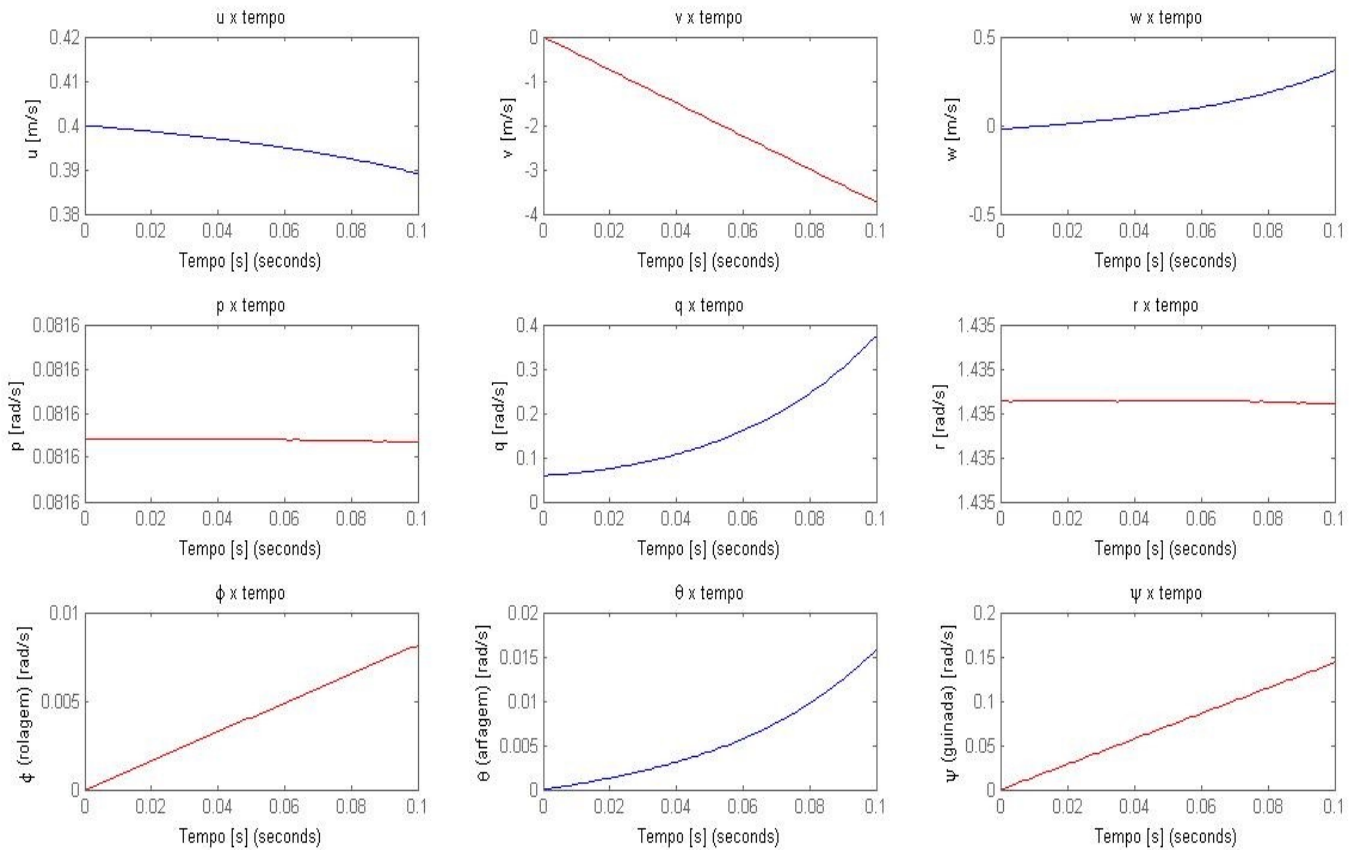


Figura 40 - Resposta dinâmica à entrada de T_{R_2} como impulso para modo de voo cruzeiro.

Analogamente como foi apresentada na figura 39, a Figura 40 mostra uma aceleração do rotor esquerdo, onde aprecia-se uma guinada positiva, uma arfagem positiva e uma leve rolagem positiva. Porém, novamente faz sentido pensar que a aeronave está acelerando diagonalmente, mas desta vez para a esquerda, enquanto rola e arfa positivamente expondo a base da aeronave ao vento relativo. Gerando uma aceleração no sentido positivo de Z_B .

Para ter uma melhor avaliação sobre a atuação da variação de tração dos rotores frontais sobre a dinâmica da aeronave em condição cruzeiro, foi plotada a resposta dinâmica do sistema quando ambos rotores começam $0,2 N$ acima da condição de equilíbrio de $T_{0_f} = 5,2 N$.

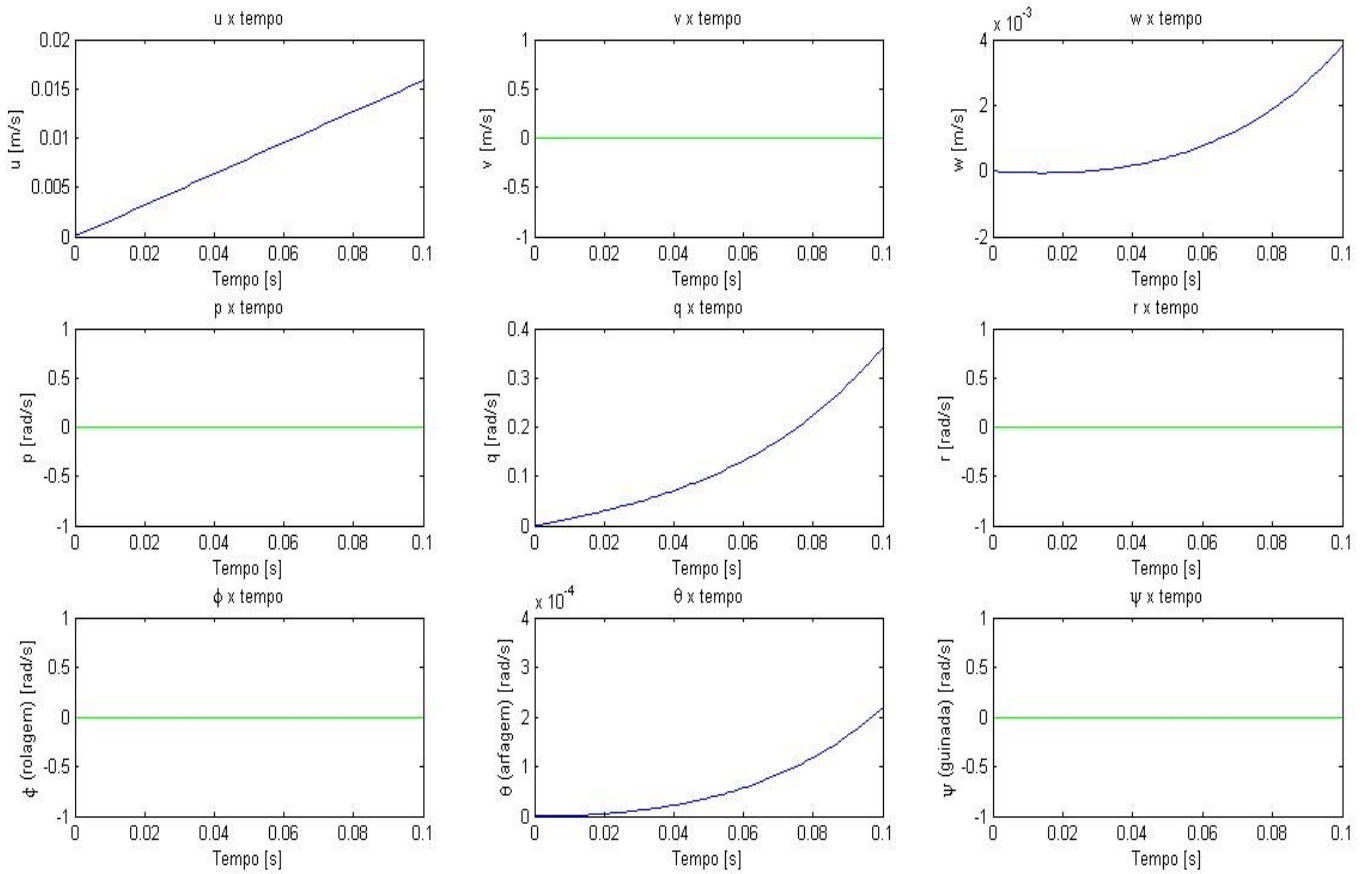


Figura 41 - Resposta dinâmica quando T_{R_1} e T_{R_2} começam com 0,2 N de variação, desde a condição inicial de equilíbrio para modo de voo cruzeiro.

Observa-se que se ambos os rotores frontais forem variados da mesma quantidade de força de tração gerada (Figura 41), a aeronave enxergará apenas componentes longitudinais com um leve crescimento da aceleração longitudinal do corpo u e uma gradativa arfagem positiva que, como consequência, deixará exposta a “barriga” da aeronave ao vento relativo, gerando uma aceleração positiva sobre o eixo Z_B do corpo.

- **Entrada Impulso T_{R_3} :**

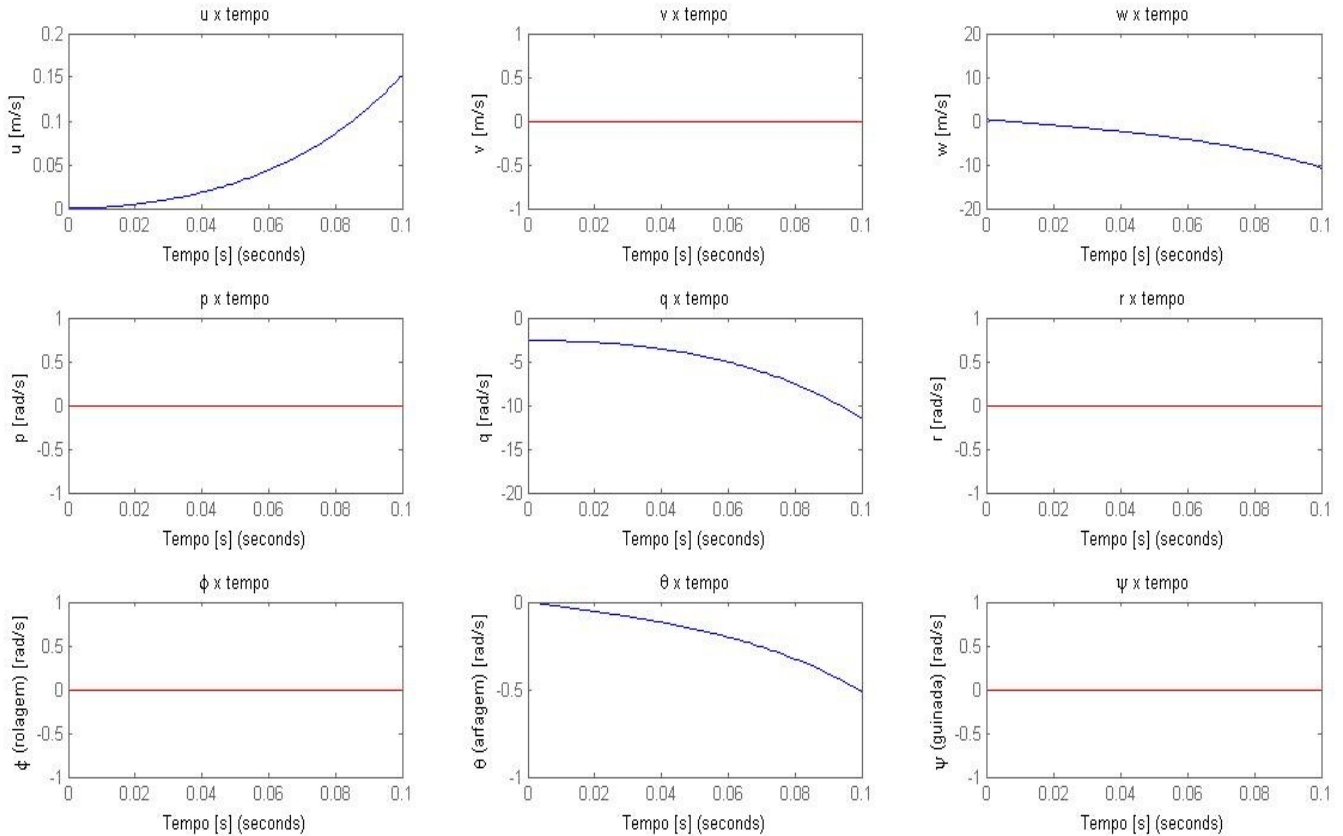


Figura 42 - Resposta dinâmica à entrada de T_{R_3} como impulso para modo de voo cruzeiro.

Finalmente, a Figura 42 mostra a resposta ao impulso da variação da força de tração do rotor traseiro. Semelhantemente como no caso do voo pairado, uma variação na tração traseira gerará uma arfagem negativa (tendendo a abaixar o bico da aeronave), um gradativo crescimento na aceleração w no sentido negativo de Z_B (pois “as costas” da aeronave irão ficando “expostas” ao vento relativo) e uma aceleração positiva em u . Sem haver consequências sobre os movimentos latero-direcionais.

Por fim, com o objetivo de avaliar a estabilidade do sistema, foram achados os autovalores que definem a condição de voo cruzeiro e os resultados foram os seguintes:

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} -27,7557 \\ 21,7208 \\ -0,1312 \\ 0,0027 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.2,6)$$

Da equação (7.2,3), observa-se que quatro dos nove autovalores deram diferente de zero. Sendo dois deles positivos (que quer dizer que aeronave possui dois modos instáveis) e dois deles negativos (que quer dizer que a aeronave possui dois modos estáveis). As figuras 35 até 42 reforçam que a aeronave é instável, pois frente a uma resposta impulsiva, suas variáveis de estados divergem no tempo.

A matriz de autovetores da condição de voo cruzeiro foi a seguinte (cada coluna representa um auto-vetor):

$$\text{Auto - vetores} = \begin{bmatrix} 0,006 & -0,0125 & 0,9946 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0,7675 & 0,6846 & -0,1038 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6406 & 0,7281 & 0,0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0231 & 0,0335 & 0,0173 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,0383 & \end{bmatrix} \quad (7.2,7)$$

Como comentário final da seção 7, prestando atenção no intervalo de tempo das figuras correspondentes à resposta dinâmica devido ao comando impulsivo das suas variáveis de entrada, tanto para condição de voo pairado, quanto para a condição de voo cruzeiro, observa-se que foi plotado apenas intervalos de tempo iguais ou menores a meio segundo. Isto se deve a que originalmente os resultados apresentados nas figuras divergiam muito mesmo em questão de uns poucos segundos. Portanto foi escolhido cortar o tempo de amostragem das figuras do modo de voo pairado para 0,5 segundos e o tempo de amostragem das figuras do modo de voo cruzeiro para 0,1 segundos. Isto quer dizer que a resposta dinâmica da aeronave é extremamente “agressiva” especialmente quando existe a deflexão de uma semi-asa. Provavelmente devido ao seu tamanho em relação ao resto do corpo e também devido à velocidade na qual foi considerada a condição de equilíbrio do modo cruzeiro. Para trabalhos futuros seria necessário reavaliar as dimensões da aeronave e sua velocidade máxima de voo.

8. Conclusão

O projeto apresentado neste trabalho representou um verdadeiro desafio, devido a que o foco dele foi o desenvolvimento do modelo dinâmico de uma aeronave inexistente, até agora. Foi necessário fazer uma ampla pesquisa bibliográfica de diversas fontes para ir montando aos poucos as equações que definissem a dinâmica de uma aeronave não tripulada, não convencional e ainda com a possibilidade de ser assimétrica durante sua operação. Uma aeronave como a que foi pensada neste projeto pode ter infinitas aplicações e, ainda mais, a metodologia de como esta aeronave foi sendo concebida pode servir de guia para futuros trabalhos.

Como objetivo principal foi proposto o desenvolvimento da dinâmica de uma aeronave multi-rotor que integrasse a sustentação de rotores mais superfícies aerodinâmicas. Este objetivo foi cumprido com a elaboração do equacionamento dinâmico apresentado na seção 4, onde são apresentados os sistemas de referência necessários para mapear as coordenadas de um determinado componente e trazê-las a um referencial comum a todos os componentes móveis, integrados ao corpo central da aeronave. Adicionalmente, foram apresentadas as reações da aeronave às forças e momentos externos, levando em consideração tensores de inércia, assimetria geométrica do corpo da aeronave e ainda, a variação temporal dos tensores inerciais. Para as forças e momentos foram consideradas as influências devido à tração de motores, efeito gravitacional, forças de arrasto sobre a fuselagem, influência de forças aerodinâmicas sobre as semi-asas, efeitos giroscópios e momentos ocasionados pelo desbalanceamento das hélices da aeronave. Adicionalmente, para ter uma ideia mais real do conceito deste projeto, foram levantadas as características de massa e comprimento dos componentes eletrônicos necessários para cumprir com os requisitos hipotéticos dispostos na seção 5. Um modelo 3D da aeronave foi então desenhado com o software CAD SolidWorks® para ter uma noção de massa e inércia da aeronave montada e obter as características necessárias para elaborar um modelo linear da dinâmica do sistema em duas condições de operação distintas: em modo de Voo Pairado (hover) e em modo de Voo Cruzeiro, como é apresentado na seção 6. Por fim, através de um modelo de espaço de estados e com o uso do software MATLAB®, foram elaborados vários gráficos na seção 7, mostrando o comportamento da aeronave às perturbações das variáveis de comando. Sendo estas as inclinações e forças de tração de cada um dos rotores da aeronave, totalizando seis variáveis de comando. Permitindo desta forma avaliar o comportamento e estabilidade da aeronave. Portanto, considera-se cumprido o desafio proposto.

Avaliando o equacionamento dinâmico do sistema, foi deixada de lado a variação temporal dos tensores de inércia, pois estes eram dependentes da velocidade de giro dos ângulos de inclinação dos rotores, a qual era desconhecida e foi desprezada. Portanto, para ter uma noção mais real do comportamento dinâmico de uma aeronave com capacidade de inclinar seus rotores (tilt-rotor), é necessário levar em consideração esta velocidade para trabalhos futuros, seja como uma constante previamente conhecida através de testes experimentais ou como mais uma variável de comando.

O modelo aerodinâmico adotado foi bastante básico, mas permitiu ter uma boa noção do comportamento das semi-asas sobre a dinâmica da aeronave. Fica proposto o aperfeiçoamento deste modelo aerodinâmico através do uso de técnicas de CFD (*Computational Fluid Dynamics*) para obter parâmetros aerodinâmicos de sustentação e arrasto, especialmente considerando que esta aeronave foi pensada originalmente para assumir várias condições de equilíbrio no ar. Isto quer dizer que ela deverá ser capaz de mudar

sua dinâmica de um multi-rotor, exclusivamente, para uma aeronave que tire o máximo de proveito das suas superfícies aerodinâmicas. O estudo da aerodinâmica dos rotores sobre as semi-asas permitirá avaliar diferentes configurações. Desde o modelo inicial mostrado na seção 3, passando pelo modelo com as duas semi-asas com giro solidário aquele dos rotores, até uma configuração com superfícies de comando no bordo de fuga de uma semi-asa, como flaps, ailerons ou flaperons.

O conceito do uso de rotores coaxiais, com duas hélices independentes girando em sentidos contrários, mas provendo de um único vetor de força, permitiu desprezar os efeitos giroscópios do giro dos rotores em relação ao resto do corpo. Da mesma forma, assumindo que um rotor coaxial tivesse dois rotores que anulassem seus torques entre eles, permitiu considerar uma aeronave na qual nunca haveria desbalanceamento entre o giro das suas hélices. Este tipo de rotor está sendo cada vez mais utilizado na indústria aeronáutica e, porque não, poderia ser estudado a fundo para ter ampla aplicabilidade em aeronaves não tripuladas de pequeno porte. Isto permitiria ter um modelo mais real da tração e torque gerados pelo rotor. Além de permitir entender e levar em conta o consumo de potência na operação desta classe de aeronave. Para este trabalho foi considerado apenas o modelo de “Disco-Atuador” de Rankine-Froed para modelar o comportamento aerodinâmico do rotor coaxial como se fosse um único rotor. Mas talvez seja necessário conceber um novo modelo da interação entre o fluxo passando por ambos os rotores que conformam um rotor coaxial.

Por fim, o trabalho aqui desenvolvido serve como ponto de partida para a aplicação de técnicas de controle para esta classe de aeronave já que foi possível perceber na seção 7, que este veículo se caracteriza por ser bastante instável e requerer de comandos para restaurar sua condição de equilíbrio. Através do modelo linear da aeronave, é possível aplicar técnicas de controle linear ou digital, uma vez que forem obtidas todas as funções de transferência entre as diferentes combinações de variáveis de comando como entradas e variáveis de estado como saídas. Adicionalmente, a possibilidade dinâmica de mudar de estados, de uma aeronave como a que foi elaborada neste trabalho, exige de um controle adaptativo que provavelmente precise considerar a não linearidade do sistema. Portanto, estudos sobre a aplicação de controle não linear sobre a dinâmica deste VANT ficam em prontidão para futuros trabalhos.

Bibliografia

- Anil Sami Onen, Levent Cevher, Murat Senipek, Talha Mutlu, Osman Gungor, Ismail Ozdemir. 2015. *Modeling and Controller Design of a VTOL UAV*. Denver, Colorado: ICUAS;
- Asselin, Mario. 1995. *An Introduction to Aircraft Performance*. Reston, Virginia: AIAA;
- Bernard Etkin, Lloyd Duff Reid. *Dynamics of Flight Stability and Control*. 3. ed. USA. Jhon Wiley & Sons, Inc. 1995;
- B. Theys, G. De Vos, J. De Schutter. 2016. *A Control Approach for Transitioning VTOL UAVs with Continuously Varying Transition Angle and Controlled by Differential Thrust*. Arlington, Virginia: ICUAS;
- Colin P. Coleman. 1997. *A Survey of Theoretical and Experimental Coaxial Rotor Aerodynamic Research*. NASA Technical Paper 3675. Ames Research Center, Moffet Field, California, USA.;
- Etienne Servais, Brigitte d'Andréa-Novel and Hugues Mounier. 2015. *Ground Control of a Hybrid Tricopter*. Denver, Colorado: ICUAS;
- Fabio Morbidi, Roel Cano, David Lara. 2016. *Minimum-Energy Path Generation for a Quadrotor UAV*. Stockholm, Sweden: ICRA;
- Felipe Machini. 2016. *Modelagem, Simulação e Controle de uma Aeronave Multirrotores*. 79f. Trabalho de Conclusão de Curso - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil. 2016;
- Fogelberg, Johan. 2013. *Navigation and Autonomous Control of a Hexacopter in Indoor Environments*. Lund, Sweden: Lund University;
- J. Gordon Leishman. *Principles of Helicopter Aerodynamics*. 2. ed. New York, New York. Cambridge University Press. 2006;
- Magnusson, Tobias. 2014. *Attitude Control of a Hexarotor*. Linköping, Sweden: Linköping Universitet;
- Matthew H. McCrink and James W. Gregory. 2015. *Blade Element Momentum Modeling of Low-Re Small UAS Electric Propulsion System*. Dallas, Texas: AIAA;
- Mostafa Moussid, Adil Sayouti, Hicham Medromi. 2015. *Dynamic Modeling and Control of a HexaRotor using Linear and Nonlinear Methods*. Foundation of Computer Science FCS, New York, USA: IJAIS;
- R. C. Hibbeler. *Dinâmica: Mecânica para Engenharia*. 10. ed. São Paulo, Brasil. Pearson Education Brasil. 2004;
- Samir Bouabdallah. 2007. *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. Lausanne, Sweden: École Polytechnique Fédérale de Lausanne;

Takahito Mikami, Kenji Uchiyama. 2015. *Design of Flight Control System for Quad Tilt-Wing UAV*. Denver, Colorado, USA: ICUAS;

Thomas R. Yechout. *Introduction to Aircraft Flight Mechanics*. 1. ed, Reston, Virginia, USA. AIAA Education Series. 2003

< <http://www.boeing.com/defense/v-22-osprey/>>. Acessado em 26 out. 2017;

<<https://www.lockheedmartin.com/us/products/x2-helicopter-technology-demonstrator.html/>>. Acessado em 14 set. 2017;

Vijay Kumar. University of Pennsylvania < <https://pt.coursera.org/learn/robotics-flight>>. Acessado em 8 jun. 2017;

< www.defensereview.com>. Acessado em 20 abr. 2017.

APÊNDICE I - Variação dos tensores de inércia dos rotores coaxiais, previamente definidos no referencial fixo ao corpo da aeronave (B):

- **Rotor Coaxial R_1 :**

Partindo da equação do tensor de inércia do rotor R_1 no sistema fixo ao corpo (convenientemente apresentado novamente a seguir):

$$J_{R_1b} = \begin{bmatrix} I_{xxR_1r_1} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{zzR_1r_1} (\sin \Phi_{E_1})^2 + (y_{R_1}^2 + z_{R_1}^2) M_{R_1} & -x_{R_1} y_{R_1} M_{R_1} & -\frac{1}{2} (I_{zzR_1r_1} - I_{xxR_1r_1}) \sin(2\Phi_{E_1}) + x_{R_1} z_{R_1} M_{R_1} \\ -x_{R_1} y_{R_1} M_{R_1} & I_{yyR_1r_1} + (x_{R_1}^2 + z_{R_1}^2) M_{R_1} & -y_{R_1} z_{R_1} M_{R_1} \\ -\frac{1}{2} (I_{zzR_1r_1} - I_{xxR_1r_1}) \sin(2\Phi_{E_1}) + x_{R_1} z_{R_1} M_{R_1} & -y_{R_1} z_{R_1} M_{R_1} & I_{zzR_1r_1} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{xxR_1r_1} (\sin \Phi_{E_1})^2 + (x_{R_1}^2 + y_{R_1}^2) M_{R_1} \end{bmatrix}$$

(1.a,1)

Derivando o tensor de inércia J_{R_1b} no tempo, assim como cada um dos elementos dentro da matriz (1.a,1) (os produtos e momentos de inércia), tem-se:

$$\dot{J}_{R_1b} = \begin{bmatrix} -2I_{xxR_1r_1} \cos \Phi_{E_1} \sin \Phi_{E_1} \dot{\Phi}_{E_1} + 2I_{zzR_1r_1} \cos \Phi_{E_1} \sin \Phi_{E_1} \dot{\Phi}_{E_1} & 0 & -(I_{zzR_1r_1} - I_{xxR_1r_1}) \cos(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -(I_{zzR_1r_1} - I_{xxR_1r_1}) \cos(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} & 0 & -2I_{zzR_1r_1} \cos \Phi_{E_1} \sin \Phi_{E_1} \dot{\Phi}_{E_1} + 2I_{xxR_1r_1} \cos \Phi_{E_1} \sin \Phi_{E_1} \dot{\Phi}_{E_1} \end{bmatrix}$$

(1.a,2)

$$\dot{J}_{R_1b} = \begin{bmatrix} (I_{zzR_1r_1} - I_{xxR_1r_1}) \sin(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} & 0 & -(I_{zzR_1r_1} - I_{xxR_1r_1}) \cos(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -(I_{zzR_1r_1} - I_{xxR_1r_1}) \cos(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} & 0 & (I_{xxR_1r_1} - I_{zzR_1r_1}) \sin(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} \end{bmatrix} \quad (1.a,3)$$

- **Rotor Coaxial R_2 :**

Partindo da equação do tensor de inércia do rotor R_2 no sistema fixo ao corpo (convenientemente apresentado novamente a seguir):

$$J_{R_2b} = \begin{bmatrix} I_{xxR_2r_2} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{zzR_2r_2} (\sin \Phi_{E_2})^2 + (y_{R_2}^2 + z_{R_2}^2) M_{R_2} & -x_{R_2} y_{R_2} M_{R_2} & -\frac{1}{2} (I_{zzR_2r_2} - I_{xxR_2r_2}) \sin(2\Phi_{E_2}) + x_{R_2} z_{R_2} M_{R_2} \\ -x_{R_2} y_{R_2} M_{R_2} & I_{yyR_2r_2} + (x_{R_2}^2 + z_{R_2}^2) M_{R_2} & -y_{R_2} z_{R_2} M_{R_2} \\ -\frac{1}{2} (I_{zzR_2r_2} - I_{xxR_2r_2}) \sin(2\Phi_{E_2}) + x_{R_2} z_{R_2} M_{R_2} & -y_{R_2} z_{R_2} M_{R_2} & I_{zzR_2r_2} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{xxR_2r_2} (\sin \Phi_{E_2})^2 + (x_{R_2}^2 + y_{R_2}^2) M_{R_2} \end{bmatrix}$$

(1.a,3)

Derivando o tensor de inércia J_{R_2b} no tempo, assim como cada um dos elementos dentro da matriz (1.a,3) (os produtos e momentos de inércia), tem-se:

$$\dot{J}_{R_2b} = \begin{bmatrix} -2I_{xxR_2r_2} \cos \Phi_{E_2} \sin \Phi_{E_2} \dot{\Phi}_{E_2} + 2I_{zzR_2r_2} \cos \Phi_{E_2} \sin \Phi_{E_2} \dot{\Phi}_{E_2} & 0 & -(I_{zzR_2r_2} - I_{xxR_2r_2}) \cos(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -(I_{zzR_2r_2} - I_{xxR_2r_2}) \cos(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} & 0 & -2I_{zzR_2r_2} \cos \Phi_{E_2} \sin \Phi_{E_2} \dot{\Phi}_{E_2} + 2I_{xxR_2r_2} \cos \Phi_{E_2} \sin \Phi_{E_2} \dot{\Phi}_{E_2} \end{bmatrix}$$

(1.a,4)

$$\dot{J}_{R_2b} = \begin{bmatrix} (I_{zzR_2r_2} - I_{xxR_2r_2}) \sin(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} & 0 & -(I_{zzR_2r_2} - I_{xxR_2r_2}) \cos(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -(I_{zzR_2r_2} - I_{xxR_2r_2}) \cos(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} & 0 & (I_{xxR_2r_2} - I_{zzR_2r_2}) \sin(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} \end{bmatrix} \quad (1.a,5)$$

- **Rotor Coaxial R_3 :**

Partindo da equação do tensor de inércia do rotor R_3 no sistema fixo ao corpo (convenientemente apresentado novamente a seguir):

$$J_{R_3b} = \begin{bmatrix} I_{xxR_3r_3} + (z_{R_3}^2) M_{R_3} & 0 & -x_{R_3} z_{R_3} M_{R_3} \\ 0 & I_{yyR_3r_3} (\cos \Phi_{E_3})^2 + I_{zzR_3r_3} (\sin \Phi_{E_3})^2 + (x_{R_3}^2 + z_{R_3}^2) M_{R_3} & -\frac{1}{2} (I_{zzR_3r_3} - I_{yyR_3r_3}) \sin(2\Phi_{E_3}) \\ -x_{R_3} z_{R_3} M_{R_3} & -\frac{1}{2} (I_{zzR_3r_3} - I_{yyR_3r_3}) \sin(2\Phi_{E_3}) & I_{zzR_3r_3} (\cos \Phi_{E_3})^2 + I_{yyR_3r_3} (\sin \Phi_{E_3})^2 + (x_{R_3}^2) M_{R_3} \end{bmatrix}$$

(1.a,6)

Derivando o tensor de inércia J_{R_3b} no tempo, assim como cada um dos elementos dentro da matriz a.3.1 (os produtos e momentos de inércia), tem-se:

$$\dot{J}_{R_3b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2I_{yyR_3r_3} \cos \Phi_{E_3} \sin \Phi_{E_3} \dot{\Phi}_{E_3} + 2I_{zzR_3r_3} \cos \Phi_{E_3} \sin \Phi_{E_3} \dot{\Phi}_{E_3} & -(I_{zzR_3r_3} - I_{yyR_3r_3}) \cos(2\Phi_{E_3}) \dot{\Phi}_{E_3} \\ 0 & -(I_{zzR_3r_3} - I_{yyR_3r_3}) \cos(2\Phi_{E_3}) \dot{\Phi}_{E_3} & -2I_{zzR_3r_3} \cos \Phi_{E_3} \sin \Phi_{E_3} \dot{\Phi}_{E_3} + 2I_{yyR_3r_3} \cos \Phi_{E_3} \sin \Phi_{E_3} \dot{\Phi}_{E_3} \end{bmatrix}$$

(1.a,7)

$$\dot{J}_{R_3b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (I_{zzR_3r_3} - I_{yyR_3r_3}) \sin(2\Phi_{E_3}) \dot{\Phi}_{E_3} & -(I_{zzR_3r_3} - I_{yyR_3r_3}) \cos(2\Phi_{E_3}) \dot{\Phi}_{E_3} \\ 0 & -(I_{zzR_3r_3} - I_{yyR_3r_3}) \cos(2\Phi_{E_3}) \dot{\Phi}_{E_3} & (I_{yyR_3r_3} - I_{zzR_3r_3}) \sin(2\Phi_{E_3}) \dot{\Phi}_{E_3} \end{bmatrix} \quad (1.a,8)$$

Observa-se que as matrizes dos tensores de inércia variantes no tempo para cada um dos rotores coaxiais R_i , apresentadas nas equações (1.a,3), (1.a,5) e (1.a,8), são então função apenas da posição do seu respectivo ângulo de inclinação Φ_{E_i} e da variação deste ângulo no tempo $\dot{\Phi}_{E_i}$.

APÊNDICE II - Variação dos tensores de inércia das semi-asas, previamente definidos no referencial fixo ao corpo da aeronave (B):

• **Semi-Asa W_1 :**

Partindo da equação do tensor de inércia do rotor W_1 no sistema fixo ao corpo (convenientemente apresentado novamente a seguir):

$$J_{W_1b} = \begin{bmatrix} I_{xxW_1w_1} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{zzW_1w_1} (\sin \Phi_{E_1})^2 + (y_{W_1}^2 + z_{W_1}^2) M_{W_1} & -I_{xyW_1w_1} \cos \Phi_{E_1} - x_{W_1} y_{W_1} M_{W_1} & -\frac{1}{2} (I_{zzW_1w_1} - I_{xxW_1w_1}) \sin(2\Phi_{E_1}) - x_{W_1} z_{W_1} M_{W_1} \\ -I_{xyW_1w_1} \cos \Phi_{E_1} - x_{W_1} y_{W_1} M_{W_1} & I_{yyW_1w_1} + (x_{W_1}^2 + z_{W_1}^2) M_{W_1} & -I_{xyW_1w_1} \sin \Phi_{E_1} + y_{W_1} z_{W_1} M_{W_1} - y_{W_1} z_{W_1} M_{W_1} \\ -\frac{1}{2} (I_{zzW_1w_1} - I_{xxW_1w_1}) \sin(2\Phi_{E_1}) - x_{W_1} z_{W_1} M_{W_1} & -I_{xyW_1w_1} \sin \Phi_{E_1} + y_{W_1} z_{W_1} M_{W_1} - y_{W_1} z_{W_1} M_{W_1} & I_{zzW_1w_1} (\cos \Phi_{E_1})^2 + I_{xxW_1w_1} (\sin \Phi_{E_1})^2 + (x_{W_1}^2 + y_{W_1}^2) M_{W_1} \end{bmatrix}$$

(1.b,1)

Derivando o tensor de inércia J_{W_1b} no tempo, assim como cada um dos elementos dentro da matriz (1.b,1) (os produtos e momentos de inércia), tem-se:

$$\dot{J}_{W_1b} = \begin{bmatrix} -2I_{xxW_1w_1} \cos \Phi_{E_1} \sin \Phi_{E_1} \dot{\Phi}_{E_1} + 2I_{zzW_1w_1} \cos \Phi_{E_1} \sin \Phi_{E_1} \dot{\Phi}_{E_1} & I_{xyW_1w_1} \dot{\Phi}_{E_1} \sin \Phi_{E_1} & -(I_{zzW_1w_1} - I_{xxW_1w_1}) \cos(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} \\ I_{xyW_1w_1} \dot{\Phi}_{E_1} \sin \Phi_{E_1} & 0 & -I_{xyW_1w_1} \dot{\Phi}_{E_1} \cos \Phi_{E_1} \\ -(I_{zzW_1w_1} - I_{xxW_1w_1}) \cos(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} & -I_{xyW_1w_1} \dot{\Phi}_{E_1} \cos \Phi_{E_1} & -2I_{zzW_1w_1} \cos \Phi_{E_1} \sin \Phi_{E_1} \dot{\Phi}_{E_1} + 2I_{xxW_1w_1} \cos \Phi_{E_1} \sin \Phi_{E_1} \dot{\Phi}_{E_1} \end{bmatrix}$$

(1.b,2)

$$\dot{J}_{W_1b} = \begin{bmatrix} (I_{zzW_1w_1} - I_{xxW_1w_1}) \sin(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} & I_{xyW_1w_1} \dot{\Phi}_{E_1} \sin \Phi_{E_1} & -(I_{zzW_1w_1} - I_{xxW_1w_1}) \cos(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} \\ I_{xyW_1w_1} \dot{\Phi}_{E_1} \sin \Phi_{E_1} & 0 & -I_{xyW_1w_1} \dot{\Phi}_{E_1} \cos \Phi_{E_1} \\ -(I_{zzW_1w_1} - I_{xxW_1w_1}) \cos(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} & -I_{xyW_1w_1} \dot{\Phi}_{E_1} \cos \Phi_{E_1} & (I_{xxW_1w_1} - I_{zzW_1w_1}) \sin(2\Phi_{E_1}) \dot{\Phi}_{E_1} \end{bmatrix}$$

(1.b,3)

- **Semi-Asa W_2 :**

Partindo da equação do tensor de inércia do rotor W_2 no sistema fixo ao corpo (convenientemente apresentado novamente a seguir):

$$J_{W_2b} = \begin{bmatrix} I_{xxW_2w_2} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{zzW_2w_2} (\sin \Phi_{E_2})^2 + (y_{W_2}^2 + z_{W_2}^2) M_{W_2} & -I_{xyW_2w_2} \cos \Phi_{E_2} - x_{W_2} y_{W_2} M_{W_2} & -\frac{1}{2} (I_{zzW_2w_2} - I_{xxW_2w_2}) \sin(2\Phi_{E_2}) - x_{W_2} z_{W_2} M_{W_2} \\ -I_{xyW_2w_2} \cos \Phi_{E_2} - x_{W_2} y_{W_2} M_{W_2} & I_{yyW_2w_2} + (x_{W_2}^2 + z_{W_2}^2) M_{W_2} & -I_{xyW_2w_2} \sin \Phi_{E_2} + y_{W_2} z_{W_2} M_{W_2} - y_{W_2} z_{W_2} M_{W_2} \\ -\frac{1}{2} (I_{zzW_2w_2} - I_{xxW_2w_2}) \sin(2\Phi_{E_2}) - x_{W_2} z_{W_2} M_{W_2} & -I_{xyW_2w_2} \sin \Phi_{E_2} + y_{W_2} z_{W_2} M_{W_2} - y_{W_2} z_{W_2} M_{W_2} & I_{zzW_2w_2} (\cos \Phi_{E_2})^2 + I_{xxW_2w_2} (\sin \Phi_{E_2})^2 + (x_{W_2}^2 + y_{W_2}^2) M_{W_2} \end{bmatrix}$$

(1.b,4)

Derivando o tensor de inércia J_{W_2b} no tempo, assim como cada um dos elementos dentro da matriz (1.b,4) (os produtos e momentos de inércia), tem-se:

$$\dot{J}_{W_2b} = \begin{bmatrix} -2I_{xxW_2w_2} \cos \Phi_{E_2} \sin \Phi_{E_2} \dot{\Phi}_{E_2} + 2I_{zzW_2w_2} \cos \Phi_{E_2} \sin \Phi_{E_2} \dot{\Phi}_{E_2} & I_{xyW_2w_2} \dot{\Phi}_{E_2} \sin \Phi_{E_2} & -(I_{zzW_2w_2} - I_{xxW_2w_2}) \cos(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} \\ I_{xyW_2w_2} \dot{\Phi}_{E_2} \sin \Phi_{E_2} & 0 & -I_{xyW_2w_2} \dot{\Phi}_{E_2} \cos \Phi_{E_2} \\ -(I_{zzW_2w_2} - I_{xxW_2w_2}) \cos(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} & -I_{xyW_2w_2} \dot{\Phi}_{E_2} \cos \Phi_{E_2} & -2I_{zzW_2w_2} \cos \Phi_{E_2} \sin \Phi_{E_2} \dot{\Phi}_{E_2} + 2I_{xxW_2w_2} \cos \Phi_{E_2} \sin \Phi_{E_2} \dot{\Phi}_{E_2} \end{bmatrix}$$

(1.b,5)

$$\dot{J}_{W_2b} = \begin{bmatrix} (I_{zzW_2w_2} - I_{xxW_2w_2}) \sin(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} & I_{xyW_2w_2} \dot{\Phi}_{E_2} \sin \Phi_{E_2} & -(I_{zzW_2w_2} - I_{xxW_2w_2}) \cos(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} \\ I_{xyW_2w_2} \dot{\Phi}_{E_2} \sin \Phi_{E_2} & 0 & -I_{xyW_2w_2} \dot{\Phi}_{E_2} \cos \Phi_{E_2} \\ -(I_{zzW_2w_2} - I_{xxW_2w_2}) \cos(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} & -I_{xyW_2w_2} \dot{\Phi}_{E_2} \cos \Phi_{E_2} & (I_{xxW_2w_2} - I_{zzW_2w_2}) \sin(2\Phi_{E_2}) \dot{\Phi}_{E_2} \end{bmatrix}$$

(1.b,6)

Observa-se novamente que a variação dos tensores de inércia das semi-asas é apenas função do seu respectivo ângulo de inclinação Φ_{E_i} e da variação no tempo deste ângulo $\dot{\Phi}_{E_i}$. Portanto, tanto para os rotores coaxiais, quanto para as semi-asas poderia ser levado em consideração a variação do tensor de inércia total da aeronave se fossem somadas as matrizes de variação temporal dos tensores de inércia de cada componente sempre que os ângulos de inclinação e suas velocidades angulares fossem conhecidas.

APÊNDICE III - Algoritmo de Avaliação Dinâmica para o Modo de Voo Pairado (Hover):

```
close all;
clear all;
clc;

%%
%ESTE PROGRAMA AVALIA O COMPORTAMENTO DINÂMICO DA AERONAVE EM MODO DE VOO
%PAIRADO (HOVER)

%%
%Matriz [A]:
g = 9.81;

A = [0 0 0 0 0 0 0 -g 0;...
     0 0 0 0 0 0 g 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 1 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 1 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 1 0 0 0];

%%
%Dados de Tração Inicial:

rho = 1.112;
r = 10*0.0254/2;
AD = pi*r^2;
Ct = 0.05397;
Cq = 4.4*10^-3;
ktau = Cq*r/Ct;%Cq*rho*A*r^3;
KS = (ktau);
omega_0 = 5772.5*(2*pi/60); %rad/seg

C1 = 4*(KS^2)*rho*AD*(omega_0^2);

%%
%Massa, Momentos de Inércia e Distâncias necessárias:

MF = 1373.15*(10^-3);
IxxFB = 3223315.84*(10^-3)*(10^-6);
IyyFB = 20527812.09*(10^-3)*(10^-6);
IzzFB = 19248004.68*(10^-3)*(10^-6);

MR3 = 147.32 *(10^-3);
IxxR3r3 = 4225300.00*(10^-3)*(10^-6);
IyyR3r3 = 3680087.81*(10^-3)*(10^-6);
IzzR3r3 = 4225304.99*(10^-3)*(10^-6);
XR3 = -278*(10^-3);
YR3 = 0;
```



```

ZR3 = -34.96*(10^-3);

MR1 = 242.30*(10^-3);
IxxR1r1 = 3681392.33*(10^-3)*(10^-6);
IyyR1r1 = 10751047.81*(10^-3)*(10^-6);
IzzR1r1 = 10750911.00*(10^-3)*(10^-6);
XR1 = 139*(10^-3);
YR1 = 721*(10^-3);
ZR1 = 34.28*(10^-3);

MR2 = 242.30*(10^-3);
IxxR2r2 = 3681392.33*(10^-3)*(10^-6);
IyyR2r2 = 10751047.81*(10^-3)*(10^-6);
IzzR2r2 = 10750911.00*(10^-3)*(10^-6);
XR2 = 139*(10^-3);
YR2 = -721*(10^-3);
ZR2 = 34.28*(10^-3);

MW1 = 247.5*(10^-3);
IxxW1w1 = 55111658.27*(10^-3)*(10^-6);
IyyW1w1 = 3527892.65*(10^-3)*(10^-6);
IzzW1w1 = 58579831.41*(10^-3)*(10^-6);
XW1 = 139*(10^-3);
YW1 = 389.04*(10^-3);
ZW1 = 19.37*(10^-3);

MW2 = 247.5*(10^-3);
IxxW2w2 = 55111658.27*(10^-3)*(10^-6);
IyyW2w2 = 3527892.65*(10^-3)*(10^-6);
IzzW2w2 = 58579831.41*(10^-3)*(10^-6);
XW2 = 139*(10^-3);
YW2 = -389.04*(10^-3);
ZW2 = 19.37*(10^-3);

MT = MF+MR1+MR2+MR3+MW1+MW2;

Ih =
[ (IxxFB+IxxR3r3+2*IzzR1r1+2*IzzW1w1+MR3*ZR3^2+2*MR1*YR1^2+2*MR1*ZR1^2+2*MW1*Y
W1^2+2*MW1*ZW1^2) 0 -(2*MW1*XW1*ZW1+2*MR1*XR1*ZR1+MR3*XR3*ZR3); ...
0
(2*MR1*XR1^2+MR3*XR3^2+2*MR1*ZR1^2+MR3*ZR3^2+2*MW1*XW1^2+2*MW1*ZW1^2+IyyFB+2*
IyyR2r2+2*IyyW1w1+IzzR3r3) 0; ...
-(MR3*XR3*ZR3+2*MW1*XW1*ZW1+2*MR1*XR1*ZR1) 0
(2*MR1*YR1^2+MR3*YR3^2+2*MW1*XW1^2+2*MW1*YW1^2+2*MR1*XR1^2+MR3*XR3^2+IzzFB+2*
IxxR1r1+IyyR3r3+2*IxxW1w1) ];

InvIh = inv(Ih);

%%
TR0 = MT*g/3;

%%
%%Matriz [B]:

FB1 = [0 0 0 TR0 TR0 0; ...

```

```

    0 0 0 0 0 TR0;...
    -1 -1 -1 0 0 0];

FB1 = (1/MT)*FB1;

MB1 = [-YR1 YR1 0 0 0 -TR0*ZR3;...
        XR1 XR1 XR3 TR0*ZR1 TR0*ZR1 0;...
        0 0 0 -YR1*TR0 YR1*TR0 XR3*TR0];

MB1 = Ih\MB1;

B = zeros(9,6);

B(1:3,:) = FB1;
B(4:6,:) = MB1;

%%
%Matriz [C]:

C = eye(9);

%%
%Matriz [D]:

D = zeros(9,6);

%%
%TIME RESPONSE:

%Condições Iniciais:

IniC.u = 0;
IniC.v = 0;
IniC.w = 0;
IniC.p = 0;
IniC.q = 0;
IniC.r = 0;
IniC.phi = 0;
IniC.teta = 0;
IniC.psi = 0;

x0 = [IniC.u; IniC.v; IniC.w; IniC.p; IniC.q; IniC.r; IniC.phi; IniC.teta;
IniC.psi];

%INPUTS:

Inp.TR1 = 0;
Inp.TR3 = 0;
Inp.TR5 = 0;
Inp.sigmaE1 = 0*(pi/180);
Inp.sigmaE2 = 0*(pi/180);
Inp.sigmaE3 = 0*(pi/180);

```

```

u = [Inp.TR1; Inp.TR3; Inp.TR5; Inp.sigmaE1; Inp.sigmaE2; Inp.sigmaE3];
uf = [Inp.TR1; Inp.TR3; Inp.TR5; Inp.sigmaE1; Inp.sigmaE2; Inp.sigmaE3];

```

```

[t,x]=ode45(@(t,x) odesys(t,A,B,x,u),(1:0.1:180),x0);

```

```

figure(1)
subplot(3,3,1),plot(t,x(:,1))
title('u x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('u [m/s]');
subplot(3,3,2),plot(t,x(:,2))
title('v x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('v [m/s]');
subplot(3,3,3),plot(t,x(:,3))
title('w x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('w [m/s]');
subplot(3,3,4),plot(t,radtodeg(x(:,4)))
title('p x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('p [deg/s]');
subplot(3,3,5),plot(t,radtodeg(x(:,5)))
title('q x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('q [deg/s]');
subplot(3,3,6),plot(t,radtodeg(x(:,6)))
title('r x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('r [deg/s]');
subplot(3,3,7),plot(t,radtodeg(x(:,7)))
title('\phi x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\phi (rolagem) [deg/s]');
subplot(3,3,8),plot(t,radtodeg(x(:,8)))
title('\theta x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\theta (arfagem) [deg/s]');
subplot(3,3,9),plot(t,radtodeg(x(:,9)))
title('\psi x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\psi (guinada) [deg/s]');

```

```

%%

```

```

t_test = 0:0.01:0.5;
[Num,Den] = ss2tf(A,B,C,D,3);

```

```

figure(2)
subplot(3,3,1),impz(tf(Num(1,:),Den),t_test)
title('u x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('u [m/s]');
subplot(3,3,2),impz(tf(Num(2,:),Den),t_test,'r')

```

```

title('v_d_o_t x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('v [m/s]');
subplot(3,3,3),impulse(tf(Num(3,:),Den),t_test)
title('w x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('w [m/s]');
subplot(3,3,4),impulse(tf(Num(4,:),Den),t_test,'r')
title('p x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('p [rad/s]');
subplot(3,3,5),impulse(tf(Num(5,:),Den),t_test)
title('q x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('q [rad/s]');
subplot(3,3,6),impulse(tf(Num(6,:),Den),t_test,'r')
title('r x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('r [rad/s]');
subplot(3,3,7),impulse(tf(Num(7,:),Den),t_test,'r')
title('\phi x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\phi (rolagem) [rad/s]');
subplot(3,3,8),impulse(tf(Num(8,:),Den),t_test)
title('\theta_d_o_t x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\theta (arfagem) [rad/s]');
subplot(3,3,9),impulse(tf(Num(9,:),Den),t_test,'r')
title('\psi x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\psi (guinada) [rad/s]');

%%
%SPACE-STATE MODEL:

SYS = ss(A,B,C,D);

%%
%Analise de estabilidade através dos autovetores e autovalores:
lambda = eig(A)
[auto_vect,auto_val] = eig(A);

```

APÊNDICE IV - Algoritmo de Avaliação Dinâmica para o Modo de Cruzeiro:

```
close all;
clear all;
clc;

%%
%ESTE PROGRAMA AVALIA O COMPORTAMENTO DINÂMICO DA AERONAVE EM MODO DE VOO
%CUZEIRO

%%
%Dados de tração e massa inicial:

alpha_w = 3*pi/180;
ARw = 6.53/2;
rho = 1.1937;
Aw = 2*0.653*0.2;

semiAw = Aw/2;

Cl_alpha_w_2D = 5.7296;
Cl_alpha_w_3D = Cl_alpha_w_2D/(1 + (Cl_alpha_w_2D/(pi*ARw)));
Cl_0_w = 0;

Cl_w = Cl_0_w + Cl_alpha_w_3D*alpha_w;

Cd_0_2D = 0.015;
Cd_0_3D = Cd_0_2D/(1 + (Cd_0_2D/(pi*ARw)));
ew = 1.78*(1-0.045*ARw^0.68)-0.64;
Cd_w = Cd_0_3D + (Cl_w^2)/(pi*ew*ARw);

m = 2.5;
g = 9.81;

Cd_f = 0.7;
Af = pi*0.06^2;

kdx = 0.5*rho*Cd_f*Af;

Ct = 0.05397;
r = 10*0.0254/2;
Ad = pi*r^2;
Cq = 4.4*10^-3;
ktau = Cq*r/Ct;%Cq*rho*A*r^3;

KS = (ktau);

%COEFICIENTES DAS MATRICES:

A11 = -(kdx + (rho*semiAw*(3600*ARw*ew*Cd_0_3D +
pi*Cl_alpha_w_3D^2)))/(3600*ew*ARw);
```

```

A12 = 1;
A13 = 0;
B1 = 0;

A21 = (rho*semiAw*pi*Cl_alpha_w_3D)/60;
A22 = pi/60;
A23 = 1;
B2 = m*g;

%%
%MASSA E RELAÇÕES DE POSIÇÃO:

%Massa, Momentos de Inércia e Distâncias necessárias:

MF = 1373.15*(10^-3);
IxxFB = 3223315.84*(10^-3)*(10^-6);
IyyFB = 20527812.09*(10^-3)*(10^-6);
IzzFB = 19248004.68*(10^-3)*(10^-6);

MR3 = 147.32 *(10^-3);
IxxR3r3 = 4225300.00*(10^-3)*(10^-6);
IyyR3r3 = 3680087.81*(10^-3)*(10^-6);
IzzR3r3 = 4225304.99*(10^-3)*(10^-6);
XR3 = (-278+2*49.34)*(10^-3);
YR3 = 0;
ZR3 = -23.21*(10^-3);

MR1 = 242.30*(10^-3);
IxxR1r1 = 3681392.33*(10^-3)*(10^-6);
IyyR1r1 = 10751047.81*(10^-3)*(10^-6);
IzzR1r1 = 10750911.00*(10^-3)*(10^-6);
XR1 = (139-49.34)*(10^-3);
YR1 = 721*(10^-3);
ZR1 = -0.72*(10^-3); %Praticamente nulo de acordo com o desenho no SolidWorks

MR2 = 242.30*(10^-3);
IxxR2r2 = 3681392.33*(10^-3)*(10^-6);
IyyR2r2 = 10751047.81*(10^-3)*(10^-6);
IzzR2r2 = 10750911.00*(10^-3)*(10^-6);
XR2 = (139-49.34)*(10^-3);
YR2 = -721*(10^-3);
ZR2 = -0.72*(10^-3); %Praticamente nulo de acordo com o desenho no SolidWorks

MW1 = 247.5*(10^-3);
IxxW1w1 = 55111658.27*(10^-3)*(10^-6);
IyyW1w1 = 3527892.65*(10^-3)*(10^-6);
IzzW1w1 = 58579831.41*(10^-3)*(10^-6);
XW1 = (139-35.1)*(10^-3);
YW1 = 389.04*(10^-3);
ZW1 = -1.42*(10^-3); %Praticamente nulo de acordo com o desenho no SolidWorks

MW2 = 247.5*(10^-3);
IxxW2w2 = 55111658.27*(10^-3)*(10^-6);
IyyW2w2 = 3527892.65*(10^-3)*(10^-6);
IzzW2w2 = 58579831.41*(10^-3)*(10^-6);

```

```

XW2 = (139-35.1)*(10^-3);
YW2 = -389.04*(10^-3);
ZW2 = -1.42*(10^-3); %Praticamente nulo de acordo com o desenho no SolidWorks

MT = MF+MR1+MR2+MR3+MW1+MW2;

A31 = (rho*semiAw*(60*ARw*XW1*pi*C1_alpha_w_3D*ew - 3600*ZW1*Cd_0_3D*ew*ARw -
pi*ZW1*C1_alpha_w_3D^2))/(3600*pi*ew*ARw);
A32 = ((pi/60)*XR1+ZR1);
A33 = (XR3);
B3 = 0;

A_SSE = [A11 A12 A13;...
         A21 A22 A23;...
         A31 A32 A33];

B_SSE = [B1; B2; B3];

X_SSE = A_SSE\B_SSE;

U0 = sqrt(X_SSE(1));
T0f = X_SSE(2);
T0t = X_SSE(3);

%%
%ROTAÇÕES:

omega_5 = ((1/KS)*(sqrt((T0t/2)/(2*rho*Ad))))*(60/(2*pi)); %[RPM]
omega_3 = ((1/KS)*(U0 + sqrt((U0^2) + (2*T0f/4)/(rho*Ad)))/2)*(60/(2*pi));
%[RPM]
omega_1 = omega_3;

%%
Lw1 = 0.5*rho*C1_w*semiAw*(U0^2);

dMA1 = -2*( (Lw1*XW1/(0.5*rho*(U0^2)*semiAw*0.2)) - (2*XW1/0.2)*C1_w +
(2*ZW1/0.2)*Cd_w)*(0.5*rho*(U0^2)*semiAw*0.2);

aux1_sum_FX = A11*X_SSE(1) + A12*X_SSE(2) + A13*X_SSE(3) - B1;
aux1_sum_FZ = A21*X_SSE(1) + A22*X_SSE(2) + A23*X_SSE(3) - B2;
aux1_sum_MY = A31*X_SSE(1) + A32*X_SSE(2) + A33*X_SSE(3) - B3;

%%
%Martiz Inercial:

Icr =
[(IxxFB+IxxR3r3+2*IxxR1r1+2*IxxW1w1+MR3*ZR3^2+2*MR1*YR1^2+2*MR1*ZR1^2+2*MW1*Y
W1^2+2*MW1*ZW1^2) 0 (IzzW1w1*(pi/30)+IzzR1r1*(pi/30)-IxxW1w1*(pi/30)-
IxxR1r1*(pi/30)-2*MW1*XW1*ZW1-2*MR1*XR1*ZR1-MR3*XR3*ZR3);...

```

```

0
(2*MR1*XR1^2+MR3*XR3^2+2*MR1*ZR1^2+MR3*ZR3^2+2*MW1*XW1^2+2*MW1*ZW1^2+IyyFB+2*
IyyR1r1+2*IyyW1w1+IzzR3r3) 0; ...
(IzzR1r1*(pi/30)+IzzW1w1*(pi/30)-IxxW1w1*(pi/30)-IxxR1r1*(pi/30)-
2*MW1*XW1*ZW1-2*MR1*XR1*ZR1-MR3*XR3*ZR3) 0
(2*MR1*YR1^2+2*MW1*YW1^2+MR3*YR3^2+2*MR1*XR1^2+MR3*XR3^2+2*MW1*XW1^2+2*IzzW1w
1+IyyR3r3+IzzFB+2*IzzR1r1)];

InvIcr = inv(Icr);
%%
%Matriz de Força Aerodinâmica:
FA_u_u = -(rho*semiAw*U0*(3600*Cd_0_3D*ew*ARw +
pi*Cl_alpha_w_3D^2))/(1800*ew*ARw);
FA_w_u = (rho*semiAw*U0*(Cl_alpha_w_3D*pi*ARw*ew -
2*Cl_alpha_w_3D^2))/(60*ew*ARw);
FA_phiE1_u = rho*semiAw*(U0^2)*(Cl_alpha_w_3D^2)/(60*ew*ARw);
FA_phiE2_u = rho*semiAw*(U0^2)*(Cl_alpha_w_3D^2)/(60*ew*ARw);

FA_u_w = -(rho*semiAw*Cl_alpha_w_3D*pi*U0)/30;
FA_w_w = -(rho*semiAw*U0*(3600*Cd_0_3D*ew*ARw + 3600*Cl_alpha_w_3D*ew*ARw +
pi*Cl_alpha_w_3D^2))/(3600*ew*ARw);
FA_phiE1_w = (rho*semiAw*Cl_alpha_w_3D*(U0^2))/2;
FA_phiE2_w = (rho*semiAw*Cl_alpha_w_3D*(U0^2))/2;

FA_A = [FA_u_u 0 FA_w_u 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0;...
FA_u_w 0 FA_w_w 0 0 0 0 0 0];

FA_B = [0 0 0 FA_phiE1_u FA_phiE2_u 0;...
0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 FA_phiE1_w FA_phiE2_w 0];...

%%
%Matriz de Força de Tração:

FT_TR1_u = 1;
FT_TR2_u = 1;
FT_phiE1_u = (T0f*pi)/120;
FT_phiE2_u = (T0f*pi)/120;

FT_phiE3_v = T0t;

FT_TR1_w = -(pi)/60;
FT_TR2_w = -(pi)/60;
FT_TR3_w = 1;
FT_phiE1_w = T0f/2;
FT_phiE2_w = T0f/2;

FT_A = zeros(3,9);
FT_B = [FT_TR1_u FT_TR2_u 0 FT_phiE1_u FT_phiE2_u 0;...
0 0 0 0 0 FT_phiE3_v;...
FT_TR1_w FT_TR2_w FT_TR3_w FT_phiE1_w FT_phiE2_w 0];

%%
%MATRIZ DE FORÇA GRAVITACIONAL:

```



```

FG_A = [0 0 0 0 0 0 0 -m*g 0;...
        0 0 0 0 0 0 m*g 0 0;...
        0 0 0 0 0 0 0 0 0];

%%
%MATRIZ DE FORÇA DE ARRASTO DA FUSSELAGEM:

FDF_A = [(-2*kdx*U0) 0 0 0 0 0 0 0 0;...
         0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
         0 0 0 0 0 0 0 0 0];

%%
%MATRIZ AF:

AF = FA_A + FT_A + FG_A + FDF_A;
AF(2,6) = AF(2,6)-m*U0;
AF(3,5) = AF(3,5)+m*U0;
AF = (1/m)*AF;

%%
%MATRIZ BF:

BF = (1/m)*(FA_B + FT_B);

%%
%MATRIZ DE MOMENTOS AERODINÂMICOS:

MA_phiE1_p = (YW1*rho*semiAw*C1_alpha_w_3D*(U0^2))/2;
MA_phiE2_p = -(YW1*rho*semiAw*C1_alpha_w_3D*(U0^2))/2;

MA_u_q = (rho*semiAw*U0*(60*XW1*C1_alpha_w_3D*pi*ew*ARw -
3600*ZW1*Cd_0_3D*ew*ARw - ZW1*pi*C1_alpha_w_3D^2))/(1800*ew*ARw);
MA_w_q = (rho*semiAw*U0*(60*ZW1*C1_alpha_w_3D*pi*ew*ARw +
3600*XW1*Cd_0_3D*ew*ARw + 3600*XW1*C1_alpha_w_3D*ew*ARw +
XW1*pi*C1_alpha_w_3D^2 - 120*ZW1*C1_alpha_w_3D^2))/(3600*ew*ARw);
MA_phiE1_q = (rho*semiAw*U0*(ZW1*(C1_alpha_w_3D^2)-
30*XW1*C1_alpha_w_3D*U0*ew*ARw))/(60*ew*ARw);
MA_phiE2_q = (rho*semiAw*U0*(ZW1*(C1_alpha_w_3D^2)-
30*XW1*C1_alpha_w_3D*U0*ew*ARw))/(60*ew*ARw);

MA_phiE1_r = -(rho*semiAw*(U0^2)*YW1*(C1_alpha_w_3D^2))/(60*ew*ARw);
MA_phiE2_r = (rho*semiAw*(U0^2)*YW1*(C1_alpha_w_3D^2))/(60*ew*ARw);

MA_A = [0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
        MA_u_q 0 MA_w_q 0 0 0 0 0 0;...
        0 0 0 0 0 0 0 0 0];
MA_B = [0 0 0 MA_phiE1_p MA_phiE2_p 0;...
        0 0 0 MA_phiE1_q MA_phiE2_q 0;...
        0 0 0 MA_phiE1_r MA_phiE2_r 0];

%%
%MATRIZ DE MOMENTOS DE TRAÇÃO:

MT_TR1_p = -(pi*YR1)/60;

```

```

MT_TR2_p = (pi*YR1)/60;
MT_phiE1_p = (YR1*T0f)/2;
MT_phiE2_p = -(YR1*T0f)/2;
MT_phiE3_p = -ZR3*T0t;

MT_TR1_q = ((pi*XR1)/60)+ZR1;
MT_TR2_q = ((pi*XR1)/60)+ZR1;
MT_TR3_q = XR3;
MT_phiE1_q = ((pi*ZR1*T0f)/120 - (XR1*T0f)/2);
MT_phiE2_q = ((pi*ZR1*T0f)/120 - (XR1*T0f)/2);

MT_TR1_r = -YR1;
MT_TR2_r = YR1;
MT_phiE1_r = -(pi*YR1*T0f)/120;
MT_phiE2_r = (pi*YR1*T0f)/120;
MT_phiE3_r = XR3*T0t;

MT_A = zeros(3,9);
MT_B = [MT_TR1_p MT_TR2_p 0 MT_phiE1_p MT_phiE2_p MT_phiE3_p;...
        MT_TR1_q MT_TR2_q MT_TR3_q MT_phiE1_q MT_phiE2_q 0;...
        MT_TR1_r MT_TR2_r 0 MT_phiE1_r MT_phiE2_r MT_phiE3_r];

%%
%%MATRIZ AM:
AM = Icr\(MA_A + MT_A);
%%
%%MATRIZ BM:
BM = Icr\(MA_B + MT_B);

%%
%%Matriz [A]:
A_RC = [0 0 0 1 0 0 0 0 0;...
        0 0 0 0 1 0 0 0 0;...
        0 0 0 0 0 1 0 0 0];

A = zeros(9,9);

A(1:3,:) = AF;
A(4:6,:) = AM;
A(7:9,:) = A_RC;

%%
%%Matriz [B]:

B = zeros(9,6);

B(1:3,:) = BF;
B(4:6,:) = BM;

%%
%%Matriz [C]:

```

```

C = eye(9);

%%
%Matriz [D]:

D = zeros(9,6);

%%
%SPACE-STATE MODEL:

SYS_Cr = ss(A,B,C,D);

%%
%TIME RESPONSE:

%Condições Iniciais:

IniC.u = 0;
IniC.v = 0;
IniC.w = 0;
IniC.p = 0;
IniC.q = 0;
IniC.r = 0;
IniC.phi = 0;
IniC.teta = 0;
IniC.psi = 0;

x0 = [IniC.u; IniC.v; IniC.w; IniC.p; IniC.q; IniC.r; IniC.phi; IniC.teta;
IniC.psi];

%INPUTS:

Inp.TR1 = 0.2;
Inp.TR2 = 0.2;
Inp.TR3 = 0;
Inp.sigmaE1 = 0;
Inp.sigmaE2 = 0;
Inp.sigmaE3 = 0;

u = [Inp.TR1; Inp.TR2; Inp.TR3; Inp.sigmaE1; Inp.sigmaE2; Inp.sigmaE3];

[t,x]=ode45(@(t,x) odesys(t,A,B,x,u),(0:0.001:0.1),x0);

figure(1)
subplot(3,3,1),plot(t,x(:,1))
title('u x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('u [m/s]');
subplot(3,3,2),plot(t,x(:,2),'g')
title('v x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('v [m/s]');
subplot(3,3,3),plot(t,x(:,3))
title('w x tempo')

```

```

xlabel('Tempo [s]');
ylabel('w [m/s]');
subplot(3,3,4),plot(t,radtodeg(x(:,4)), 'g')
title('p x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('p [rad/s]');
subplot(3,3,5),plot(t,radtodeg(x(:,5)))
title('q x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('q [rad/s]');
subplot(3,3,6),plot(t,radtodeg(x(:,6)), 'g')
title('r x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('r [rad/s]');
subplot(3,3,7),plot(t, (x(:,7)), 'g')
title('\phi x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\phi (rolagem) [rad/s]');
subplot(3,3,8),plot(t, (x(:,8)))
title('\theta x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\theta (arfagem) [rad/s]');
subplot(3,3,9),plot(t, (x(:,9)), 'g')
title('\psi x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\psi (guinada) [rad/s]');

%%

t_test = 0:0.001:0.1;
[Num,Den] = ss2tf(A,B,C,D,2);

figure(2)
subplot(3,3,1),impulse(tf(Num(1,:),Den),t_test)
title('u x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('u [m/s]');
subplot(3,3,2),impulse(tf(Num(2,:),Den),t_test, 'r')
title('v x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('v [m/s]');
subplot(3,3,3),impulse(tf(Num(3,:),Den),t_test)
title('w x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('w [m/s]');
subplot(3,3,4),impulse(tf(Num(4,:),Den),t_test, 'r')
title('p x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('p [rad/s]');
subplot(3,3,5),impulse(tf(Num(5,:),Den),t_test)
title('q x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('q [rad/s]');
subplot(3,3,6),impulse(tf(Num(6,:),Den),t_test, 'r')
title('r x tempo')

```

```

xlabel('Tempo [s]');
ylabel('r [rad/s]');
subplot(3,3,7),impulse(tf(Num(7,:),Den),t_test,'r')
title('\phi x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\phi (rolagem) [rad/s]');
subplot(3,3,8),impulse(tf(Num(8,:),Den),t_test)
title('\theta x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\theta (arfagem) [rad/s]');
subplot(3,3,9),impulse(tf(Num(9,:),Den),t_test,'r')
title('\psi x tempo')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('\psi (guinada) [rad/s]');

%%
%Análise de estabilidade através dos autovetores e autovalores:
lambda = eig(A)
[auto_vect,auto_val] = eig(A);

```

