ALUÍZIO ANTONIO FERNANDES DA SILVA

Extensões ideais de classes de operadores multilineares e polinômios homogêneos entre espaços de Banach

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2018

ALUÍZIO ANTONIO FERNANDES DA SILVA

Extensões ideais de classes de operadores multilineares e polinômios homogêneos entre espaços de Banach

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

S586e
2018

Silva, Aluízio Antonio Fernandes da, 1992-
Extensões ideais de classes de operadores multilineares e polinômios homogêneos entre espaços de Banach / Aluízio Antonio Fernandes da Silva. - 2018.
85 f.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Disponível em: http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.163
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Banach, Espaços de - Teses. 3. Polinômios - Teses. 4. Analise funcional - Matemática - Teses. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo . II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Rejâne Maria da Silva – CRB6/1925

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Aluízio Antonio Fernandes da Silva.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11612MAT001.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Extensões ideais de classes de operadores multilineares e polinômios homogêneos entre espaços de Banach.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 22 de fevereiro de 2018, às 10:00hs, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves UFAM - Universidade Federal do Amazonas	Thiago Rodrigo Alves
Profa. Dra. Kuo Po Ling UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Kuo Po Ling

Uberlândia-MG, 22 de fevereiro de 2018.

Dedicatória

Dedico aos meus familiares e amigos.

E assim foi o funeral do alto Heitor, domador de cavalos.

Agradecimentos

Agradeço à minha família, em particular à minha mãe Luciana, aos meus pais Edimar e João Batista e meus irmãos Edimar Filho, Ariel e Otávio.

Ao meu orientador, Geraldo Botelho, por ter me dado a honra de ver um matemático de verdade em ação.

Aos meus amigos de matemática: Ueslei, Richard, Julian, Gabriel, Paulo Victor, Leonardo, Augusto, José Henrique, Davidson, José Lucas, Wagner, Alexandre, Ewerton, Magna, Guilherme, Suélen, Luís, Rejiane, Jéssica etc, etc.

Aos professores da Universidade Federal de Uberlândia: Ana Carla Piantella, Rosana Jafelice, Victor Neumann, Mário Castro, Geraldo Botelho, Guilherme Tizziotti, Vinícius Fávaro etc, etc.

Ao professor Thiago Rodrigo Alves e professora Kuo Po Ling por aceitarem o convite para compor a banca deste trabalho e pelas correções e sugestões dadas.

SILVA, A. A. F. *Extensões ideais de classes de operadores multilineares e polinômios homogêneos entre espaços de Banach.* 2018. 85 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estabelecer condições necessárias e suficientes para que uma classe de operadores multilineares contínuos tomando valores em espaços de Banach pertencentes a uma determinada classe seja estendível a um ideal de operadores multilineares (multi-ideal) e, ainda mais, mostrar como estender uma classe estendível. Três aplicações deste resultado de extensão são fornecidas: (i) Provamos que a classe dos operadores multilineares contínuos quase-$\tau(p)$-somantes tomando valores em espaços duais é estendível se, e somente se, essa classe coincide isometricamente com a classe dos operadores multilineares contínuos $\tau(p)$-somantes; (ii) Construímos um ideal de operadores n-lineares contínuos a partir de um ideal de funcionais $(n+1)$-lineares contínuos e estudamos propriedades deste ideal de operadores; (iii) Provamos que a classe dos operadores multilineares contínuos sequencialmente w^*-compactos tomando valores em espaços duais não é estendível a um multi-ideal. Finalmente, construímos praticamente as mesmas definições, resultados e demonstrações para o caso de classes de polinômios homogêneos contínuos.

Palavras-chave: Espaços de Banach, ideais de operadores multilineares e de polinômios homogêneos, teorema de extensão, operadores multilineares e polinômios homogêneos quase-$\tau(p)$-somantes, operadores multilineares e polinômios homogêneos sequencialmente w^*-compactos.

SILVA, A. A. F. *Ideal extensions of classes of multilinear operators and homogeneous polynomials between Banach spaces.* 2018. 85 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The main goal of this work is to establish necessary and sufficient conditions for a class of continuous multilinear operators taking values in Banach spaces belonging to a certain class to be extendible to an ideal of multilinear operators (multi-ideal) and, moreover, to show how to extend an extendible class. Three applications of this extension result are provided: (i) It is proved that the class of quasi-$\tau(p)$-summing multilinear operators taking values in dual spaces is extendible if and only if this class coincides isometrically with the class of $\tau(p)$-summing multilinear operators; (ii) Starting with an ideal of $(n+1)$-linear functionals, we construct an ideal of n-linear operators and study the main properties of the resulting ideal; (iii) The class of w^*-sequentially compact multilinear operators taking values in dual spaces is proved not to be extendible to a multi-ideal. Finally, almost the same definitions, results and proofs are obtained for the case of classes of continuous homogeneous polynomials.

Keywords: Banach spaces, ideals of multilinear operators and homogeneous polynomials, quasi-$\tau(p)$-summing multilinear operators and homogeneous polynomials, sequentially w^*-compact multilinear operators and homogeneous polynomials.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\\|\cdot\\|$ ou $\\|\cdot\\|_E$	norma em um espaço normado E
$(E, \\|\cdot\\|)$	espaço normado E com a norma $\\|\cdot\\|$
$\|\cdot\|$	módulo
$U_1, \ldots, U_n, U, V$	espaços vetoriais
$E_1, \ldots, E_n, E, F$	espaços vetoriais, espaços normados ou espaços de Banach
$G_1, \ldots, G_n, G, H, D$	espaços de Banach
B_E	bola unitária fechada unitária do espaço normado E
$\mathcal{BAN}$	classe de todos os espaços de Banach
$[A]$	subespaço gerado pelo conjunto A
$\dim(U)$	dimensão do espaço vetorial U
A^n	produto cartesiano do conjunto A n-vezes
$x_n \xrightarrow{n} x$	a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para x
$L(U; V)$	espaço dos operadores lineares entre os espaços vetoriais U e V
$\mathcal{L}(E; F)$	espaço dos operadores lineares contínuos entre os espaços normados E e F
U^*	dual algébrico do espaço vetorial U
E'	dual topológico do espaço normado E
E''	bidual topológico do espaço normado E
$E^{(n)}$	n-ésimo dual topológico do espaço normado E
$\ker(u)$	núcleo do operador linear u
T'	operador adjunto de T
T''	operador biadjunto de T
$T^{(n)}$	operador n-ésimo adjunto de T
$\ell_p (1 \leq p < \infty)$	espaço das sequências de escalares absolutamente p-somáveis
ℓ_∞	espaço das sequências de escalares limitadas
c_0	espaço das sequências de escalares que convergem para zero
J_E	mergulho canônico do espaço normado E em seu bidual E''

$\sigma(E, E')$ ou w	topologia fraca do espaço normado E
$x_n \xrightarrow{w} x$	a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge na topologia fraca para x
$\overline{A}^{w}$	fecho na topologia fraca do conjunto A
$\sigma(E', E)$ ou w^*	topologia fraca-estrela do espaço dual E'
$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$	a sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge na topologia fraca-estrela para φ
$\overline{A}^{w^*}$	fecho na topologia fraca-estrela do conjunto A
$\mathrm{Im}(U)$	imagem de um conjunto U pela aplicação $u \colon U \longrightarrow V$
$(\mathcal{I}, \\|\cdot\\|_{\mathcal{I}}), (\mathcal{J}, \\|\cdot\\|_{\mathcal{J}})$	ideais normados de operadores lineares contínuos
$L(U_1, \ldots, U_n; V)$	espaço dos operadores n-lineares de $U_1 \times \cdots \times U_n$ em V
$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$	espaço dos operadores n-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F
$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b$	operador multilinear contínuo dado por $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b$, onde $\varphi_j \in E_j'$ e $b \in F$
id_E	operador identidade definido em E
t, u, v	operadores lineares contínuos
A, B	operadores multilineares contínuos
e_n	n-ésimo vetor unitário canônico $e_n = (0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots)$
S_n	conjunto das permutações dos n primeiros números naturais
$\mathcal{L}^s({}^nE; F)$	espaço dos operadores n-lineares contínuos simétricos de E^n em F
$P({}^nE; F)$	espaço dos polinômios n-homogêneos de E em F
$\mathcal{P}({}^nE; F)$	espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos de E em F
$\varphi^n \otimes b$	polinômio homogêneo contínuo dado por $\varphi^n \otimes b(x) = \varphi(x)^n \cdot b$, onde $\varphi \in E'$ e $b \in F$
P, Q	polinômios homogêneos contínuos
$\widehat{A}$	polinômio homogêneo associado ao operador multilinear A, definido por $\widehat{A}(x) = A(x, \ldots, x)$
$\check{P}$	correspondente multilinear simétrico do polinômio homogêneo P
A^s	operador obtido de $A \in \mathcal{L}({}^nE; F)$ dado por $A^s(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$
$(\mathcal{M}, \\|\cdot\\|_{\mathcal{M}})$	ideal normado de operadores multilineares ou multi-ideal normado
$\mathcal{M}^n$	$\bigcup_{E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}} \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$
$(\mathcal{F}, \\|\cdot\\|_{\mathcal{F}})$	ideal normado de funcionais multilineares
$\mathcal{F}^n$	$\bigcup_{E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN}} \mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$

$(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$	ideal normado de polinômios homogêneos
$\mathcal{Q}^n$	$\bigcup_{E,F\in\mathcal{BAN}} \mathcal{Q}(^nE;F)$
$\mathcal{L}(\mathcal{I})$	classe de operadores multilineares obtida através do método da fatoração a partir do ideal $\mathcal{I}$
$[\mathcal{I}]$	classe de operadores multilineares obtida através do método da linearização a partir do ideal $\mathcal{I}$
$(\widetilde{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{M}}})$	$\widetilde{\mathcal{M}} = \{P : \check{P} \in \mathcal{M}\}$ onde $\|P\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} = \|\check{P}\|_{\mathcal{M}}$
$(\widehat{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}})$	$\widehat{\mathcal{M}} = \{\widehat{A} : A \in \mathcal{M}\}$ onde $\|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = \inf\{\|A\|_{\mathcal{M}} : \widehat{A} = P \text{ e } A \in \mathcal{M}\}$
$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B} \subset \mathcal{BAN}$
$(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$	$\mathfrak{B}$ classe normada (Banach) de operadores multilineares
$\mathfrak{D}_1$	classe admissível dos espaços de Banach duais
$\mathfrak{D}_{2n}$	classe admissível dos espaços de Banach duais de ordem superior
$\mathfrak{M}$	classe admissível dos espaços de Banach com a propriedade da extensão métrica
$\mathcal{L}_{q\tau(p)}$	classe dos operadores multilineares contínuos quase-$\tau(p)$-somantes
$\mathcal{L}_{\tau(p)}$	classe dos operadores multilineares contínuos $\tau(p)$-somantes
$\mathcal{K}$	classe dos operadores lineares contínuos compactos
$\mathcal{W}$	classe dos operadores lineares contínuos fracamente compactos
$\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$	classe dos operadores multilineares contínuos compactos
$\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$	classe dos operadores multilineares contínuos fracamente compactos
$\mathcal{L}_{\mathcal{W}^*}$	classe dos operadores multilineares contínuos w^*-compactos
$\mathcal{L}^n_{w^*sc}$	classe dos operadores n-lineares contínuos sequencialmente w^*-compactos
$\mathcal{L}_{(s;r_1,\ldots,r_n)}$	classe dos operadores multilineares contínuos absolutamente $(s;r_1,\ldots,r_n)$-somantes
$(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$	classe normada (Banach) de polinômios homogêneos
$\mathcal{P}_{q\tau(p)}$	classe dos polinômios homogêneos contínuos quase-$\tau(p)$-somantes
$\mathcal{P}_{\tau(p)}$	classe dos polinômios homogêneos contínuos $\tau(p)$-somantes
$\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$	classe dos polinômios homogêneos contínuos compactos
$\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$	classe dos polinômios homogêneos contínuos fracamente compactos
$\mathcal{P}_{\mathcal{W}^*}$	classe dos polinômios homogêneos contínuos w^*-compactos
$\mathcal{P}^n_{w^*sc}$	classe dos polinômios n-homogêneos contínuos sequencialmente w^*-compactos

Sumário

Introdução

Em linhas gerais, a Análise Funcional Linear trata dos operadores lineares contínuos entre espaços normados, em particular entre espaços de Banach. E, por isso, resgata o que a Álgebra Linear apresenta no âmbito linear e a Topologia Geral apresenta no âmbito da continuidade, permitindo uma associação desses conceitos e, o que é bem sabido, um ganho mútuo nas possibilidades de utilização e resultados dessas duas teorias.

Uma das subáreas mais frutíferas da Análise Funcional é o estudo dos ideais de operadores lineares contínuos entre espaços de Banach, teoria esta sistematizada por A. Pietsch na década de 1970. Os ideais de operadores são classes de operadores lineares contínuos entre espaços de Banach que se comportam de maneira similar aos ideais da Álgebra na seguinte propriedade, chamada de propriedade de ideal:

Se $u\colon E \longrightarrow F$ é um elemento do ideal $\mathcal{I}$, então para quaisquer operadores lineares contínuos $v\colon G \longrightarrow E$ e $t\colon F \longrightarrow H$, a composta $t \circ u \circ v\colon G \longrightarrow H$ pertence a $\mathcal{I}$.

Uma das consequências naturais do sucesso da teoria de ideais de operadores lineares é a extensão da teoria para operadores não-lineares. Um primeiro passo nessa direção foi tomado pelo próprio A. Pietsch em 1983, que no artigo [16] esboça uma teoria de ideais de operadores multilineares, também chamados multi-ideais. Tais ideais de operadores multilineares são classes de operadores multilineares contínuos entre espaços de Banach. E aqui a propriedade de ideal se transforma em:

Se $u_j\colon G_j \longrightarrow E_j$ com $j = 1, \ldots, n$ e $t\colon F \longrightarrow H$ são operadores lineares contínuos e $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é um operador n-linear contínuo e pertence ao multi-ideal $\mathcal{M}$, então a composta $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\colon G_1 \times \cdots \times G_n \longrightarrow H$ também pertence a $\mathcal{M}$.

A adaptação dessa ideia para classes de polinômios homogêneos é imediata.

No artigo [6], Botelho e Mujica se dedicam ao seguinte problema: dada uma classe de operadores lineares contínuos assumindo valores em espaços de Banach pertencentes a certa classe, quais são as condições mínimas sobre essa classe para que ela seja estendível a um ideal de operadores lineares contínuos? E nesse trabalho os autores conseguem caracterizar as classes que são estendíveis e, ainda mais, mostrar como estender uma classe estendível. E como aplicação do resultado de extensão, eles trabalham primeiramente com a estendibilidade da classe dos operadores lineares quase-$\tau(p)$-somantes, depois constroem um ideal de operadores lineares a partir de um ideal de funcionais bilineares e, por fim, concluem pela não estendibilidade da classes dos operadores lineares, tomando valores em espaços duais, que são sequencialmente w^*-compactos.

Nesta dissertação nos propusemos a investigar a mesma questão da estendibilidade e mesmas aplicações do resultado de extensão para classes de operadores multilineares contínuos e polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach.

Descrevemos agora como o trabalho está organizado. Para possibilitar uma boa leitura do texto, escrevemos no primeiro capítulo os conceitos e resultados básicos da Análise Funcional Linear e ideais de operadores lineares que serão usados no decorrer do texto. Porém, por se tratar de uma parte básica, nos atentamos, na maioria dos casos, apenas às definições e aos enunciados dos resultados, disponibilizando as devidas referências para as demonstrações. Neste ponto, as principais referências utilizadas foram [7] e [14].

No segundo capítulo, apresentamos definições e resultados, geralmente sem demonstração, referentes aos operadores multilineares e polinômios homogêneos, tendo como referências principais os trabalhos de dissertação [1] e [18]. Tais conceitos podem ser vistos como um primeiro passo rumo à Análise Funcional não-linear. Apresentamos também definições e resultados, com demonstração na maioria dos casos, salvo aqueles que são encontrados na literatura com certa facilidade, relativos a ideais de operadores multilineares e polinômios homogêneos. E, ainda neste capítulo, chamamos atenção para uma pergunta que nos surgiu de forma bem espontânea durante o desenvolvimento do trabalho e que acabou se mostrando um problema em aberto. Vale a pena dizer que, em relação a esse ponto, apresentamos um contra-exemplo, tanto quanto sabemos pela primeira vez, para um resultado de [12]. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [4] e [9].

No terceiro capítulo apresentamos o resultado principal do nosso trabalho, o Teorema de Extensão, que vai nos dizer em quais e únicas condições e como podemos estender uma classe de operadores multilineares contínuos tomando valores em espaços de Banach pertencentes a uma certa classe a um multi-ideal. De posse desse resultado, uma pergunta óbvia que surge é se essa extensão é única; e mostramos de imediato que a unicidade não pode ser garantida. Abordamos também o teorema de extensão como um processo de envoltória, dentro da perspectiva dos procedimentos de envoltória regular e injetiva serem casos particulares do que construímos. Aqui a principal referência foi [6].

No Capítulo 4 apresentamos algumas aplicações do Teorema de Extensão. No primeiro instante estudamos a estendibilidade da classe dos operadores quase-$\tau(p)$-somantes. O resultado é que essa estendibilidade é equivalente à igualdade isométrica desta classe com a classe dos operadores $\tau(p)$-somantes. Como essa última pergunta é um problema em aberto, concluímos que a estendibilidade da classe dos operadores quase-$\tau(p)$-somantes é também um problema em aberto. A seguir descrevemos um método que nos permite construir um ideal de operadores n-lineares a partir de um ideal de funcionais $(n+1)$-lineares. E fechamos o capítulo abordando a estendibilidade da classe dos operadores tomando valores em espaços duais que são sequencialmente w^*-compactos. O resultado principal nesta direção é que essa classe não é estendível a um ideal de operadores. Aqui a principal referência foi [6].

No quinto e último capítulo, nossa proposta é apresentar o Teorema de Extensão e suas aplicações agora para o caso de classes de polinômios homogêneos. Como muitas definições, resultados e demonstrações do caso polinomial podem ser facilmente adaptados do caso multilinear, para evitar repetições desnecessárias, optamos por omitir as demonstrações que são facilmente adaptadas do caso multilinear e nos concentrar nas particularidades do caso polinomial.

Aluízio Antonio Fernandes da Silva
Uberlândia-MG, 22 de fevereiro de 2018.

Capítulo 1

Preliminares

Os objetos de estudo centrais da Análise Funcional são os operadores lineares contínuos entre espaços normados, em particular entre espaços de Banach. Sendo assim, nada mais natural do que iniciar essa dissertação com as notações, definições e resultados clássicos da Análise Funcional que, frequentemente, serão usados no decorrer do texto. Resultados com pouco uso serão introduzidos em momento oportuno. Na construção dessa parte do capítulo, a principal referência usada foi o livro [7].

Abordaremos também neste capítulo alguns resultados da teoria geral de ideais de operadores, que foi introduzida por A. Pietsch na década de 1970 com o intuito de unificar o estudo de várias classes especiais de operadores lineares que vinham sendo estudadas separadamente. Para isso, a principal referência foi a dissertação [14].

Letras maiúsculas representarão, salvo menção contrária, espaços vetoriais (normados) sobre o corpo $\mathbb{K}$, que pode ser o corpo $\mathbb{R}$ dos reais ou $\mathbb{C}$ dos complexos. Denotaremos por $\mathcal{BAN}$ a classe de todos os espaços normados sobre $\mathbb{K}$ que são completos com suas respectivas normas, isto é, a classe de todos os espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Usaremos o símbolo B_E para denotar a bola unitária fechada no espaço normado E, mais explicitamente, $B_E := \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$.

Para uma leitura cômoda, revisitaremos as notações e os conceitos descritos acima, entre outros.

1.1 Análise Funcional linear

Todos os espaços vetoriais são sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.1. Seja E um espaço vetorial. Uma *norma* sobre E é uma aplicação

$$\|\cdot\|_E \colon E \longrightarrow [0,+\infty),\ x \longmapsto \|x\|_E,$$

que satisfaz as seguintes condições:
(i) $\|x\|_E \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
(ii) $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$;
(iii) $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ para todos $x, y \in E$ (desigualdade triangular).

Neste caso, o par $(E, \|\cdot\|_E)$ é chamado de espaço vetorial normado ou, simplesmente, espaço normado. Quando não houver perigo de ambiguidade, escreveremos $\|\cdot\|$ no lugar de $\|\cdot\|_E$.

Definição 1.2. Um espaço normado E é chamado de *espaço de Banach* quando for completo na métrica

$$d(x,y) = \|x - y\|,\ x, y \in E,$$

chamada de métrica induzida pela norma. A classe de todos os espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ será denotada por $\mathcal{BAN}$.

Definição 1.3. Seja A um subconjunto do espaço vetorial E. O subespaço de E formado por todas as combinações lineares finitas de elementos de A, com coeficientes em $\mathbb{K}$, será denotado por $[A]$ e chamado *subespaço gerado por* A.

Definição 1.4. A dimensão de um espaço vetorial E será denotada por $\dim(E)$.

Definição 1.5. Dado um conjunto A, denotaremos o produto cartesiano de A por A n vezes por A^n, isto é, $A \times \overset{n}{\cdots} \times A = A^n$.

Definição 1.6. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ e $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados. Para $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, definimos

$$\begin{aligned}
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 &= \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|; \\
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p &= (\|x_1\|^p + \cdots + \|x_n\|^p)^{1/p}; \\
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty &= \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}.
\end{aligned}$$

Proposição 1.7. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ e $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Então $E_1 \times \cdots \times E_n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as seguintes operações:*
- *Dados $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, definimos*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

- *Dados $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos*

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Além disso, as funções $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_\infty$ são normas em $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Demonstração. Veja [18, Proposição 2.3]. □

Definição 1.8. Dado um espaço normado E, a *topologia da norma* em E, denotada por τ_E ou τ quando não houver risco de confusão, é a topologia gerada pela métrica da Definição 1.2.

Denotaremos sequências em um espaço normado E por $(x_n)_{n=1}^\infty$. Na maior parte do texto usaremos a notação $x_n \longrightarrow x$ para indicar que a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge para x no espaço normado E, porém, em alguns momentos será necessário utilizar a notação $x_n \overset{n}{\longrightarrow} x$ para que fique claro que a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge para x em E quando o índice n tende para ∞.

Definição 1.9. Seja V um espaço vetorial. Duas *normas* em V são *equivalentes* se definem a mesma topologia em V.

Proposição 1.10. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ e $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados.*
(a) As normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_\infty$ são equivalentes em $E_1 \times \cdots \times E_n$.
(b) Se $E_1, \ldots, E_n$ são espaços de Banach, então $E_1 \times \cdots \times E_n$ é um espaço de Banach com qualquer uma das três normas da letra (a).

Demonstração. Veja [18, Proposição 2.6]. □

Proposição 1.11. *Sejam E e F espaços normados e $u \colon E \longrightarrow F$ um operador linear. São equivalentes:*
(a) u é lipschitziano.
(b) u é uniformemente contínuo.
(c) u é contínuo.
(d) u é contínuo na origem.
(e) Existe $c \geq 0$ tal que $\|u(x)\|_F \leq c\|x\|_E$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Veja [7, Teorema 2.1.1]. $\square$

Denotamos por $\mathcal{L}(E;F)$ o *conjunto de todos os operadores lineares contínuos entre os espaços normados E e F*. Não é muito díficil mostrar que $\mathcal{L}(E;F)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar de funções e que a expressão

$$\|u\| := \sup_{x\in B_E} \|u(x)\|_F = \inf\{c>0 : \|u(x)\|_F \le c\|x\|_E \text{ para todo } x\in E\}$$

define uma norma em $\mathcal{L}(E;F)$. Mais ainda, se $F \in \mathcal{BAN}$, então $(\mathcal{L}(E;F), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach (veja [7, Proposição 2.1.4]). Quando $F=\mathbb{K}$, no lugar de $\mathcal{L}(E;\mathbb{K})$ escrevemos E' e chamamos este espaço de *dual topológico de E*, ou simplesmente *dual de E*, e seus elementos de *funcionais lineares contínuos*. Como $\mathbb{K}$ é completo, segue que E' é sempre Banach.

Quando estivermos interessados apenas na parte algébrica dos operadores, denotaremos o *espaço dos operadores lineares entre os espaços vetoriais U e V* por $L(U;V)$. Quando $V=\mathbb{K}$, escrevemos $L(U;\mathbb{K}) = U^*$ e chamamos este espaço de *dual algébrico de U*, e seus elementos de *funcionais lineares*.

Os operadores lineares contínuos bijetores que possuem inversa contínua representam uma classe especial de operadores e são chamados de *isomorfismos* ou *isomorfismos topológicos*. Quando existir um isomorfismo $u\colon E \longrightarrow F$ entre os espaços normados E e F, diremos que E e F são *isomorfos*. Se o isomorfismo u for uma isometria, isto é, $\|u(x)\| = \|x\|$ para todo $x\in E$, diremos que u é um *isomorfismo isométrico*, e neste caso dizemos que E e F são *isomorfos isometricamente*.

Proposição 1.12. *Sejam V um espaço vetorial e $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funcionais lineares em V tais que $\bigcap_{i=1}^{n} ker(\varphi_i) \subset ker(\varphi)$. Então existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\varphi_i$.*

Demonstração. Veja [7, Lema 6.3.5]. $\square$

Proposição 1.13. *Sejam E, F e G espaços normados. Se $u\in\mathcal{L}(E;G)$ e $v\in\mathcal{L}(G;F)$, então $v\circ u \in \mathcal{L}(E;F)$ e*

$$\|v\circ u\| \le \|v\|\cdot\|u\|.$$

Demonstração. De

$$\|v\circ u(x)\| = \|v(u(x))\| \le \|v\|\cdot\|u(x)\| \le \|v\|\cdot\|u\|\cdot\|x\|$$

para todo $x\in E$, tem-se $\|v\circ u\| \le \|v\|\cdot\|u\|$. $\square$

Definição 1.14. Sejam E, F espaços normados e $T\in\mathcal{L}(E;F)$ um operador linear contínuo. Definimos o operador $T'\colon F' \longrightarrow E'$ por

$$T'(\varphi)(x) = \varphi(T(x)),$$

para todos $x\in E$ e $\varphi \in F'$. O operador T' é chamado *adjunto*, ou *dual*, ou *transposto*, de T.

Proposição 1.15. *Seja $T\in\mathcal{L}(E;F)$. Então $T'\in\mathcal{L}(F';E')$ e $\|T'\| = \|T\|$. Mais ainda, se T é um isomorfismo (isométrico), então T' também é um isomorfismo (isométrico).*

Demonstração. Veja [7, Proposição 4.3.11]. $\square$

A seguir exibiremos uma lista de espaços formados por sequências de escalares que são clássicos em Análise Funcional, sendo $p\ge 1$:

$$\ell_p := \left\{ (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} : \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j\in\mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p < +\infty \right\},$$

$$\ell_\infty := \left\{(\lambda_j)_{j=1}^\infty : \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } (\lambda_j)_{j=1}^\infty \text{ é limitada}\right\},$$

$$c_0 := \left\{(\lambda_j)_{j=1}^\infty : \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0\right\}.$$

Em ℓ_p definimos a norma

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

e em ℓ_∞ a norma

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|.$$

Em [7] mostra-se que ℓ_p e ℓ_∞ são espaços de Banach com as normas definidas acima. Mais ainda, mostra-se também que c_0 é subespaço fechado de ℓ_∞ e, daí, Banach. Os vetores canônicos $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ definidos como as sequências que na j-ésima entrada tomam valor 1 e zero nas demais, para todo $j \in \mathbb{N}$, pertencem a $\ell_p \cap \ell_\infty$ para todo p. Em determinadas situações esses vetores serão representados por e^j.

Proposição 1.16. *Os espaços ℓ_1 e $(c_0)'$ são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade*

$$b = (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1 \longmapsto \varphi_b \in (c_0)',\ \varphi_b((a_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty a_j b_j \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^\infty \in c_0.$$

Demonstração. Veja [7, Proposição 4.2.3]. ☐

Proposição 1.17. *Os espaços ℓ_∞ e $(\ell_1)'$ são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade*

$$b = (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty \longmapsto \varphi_b \in (\ell_1)',\ \varphi_b((a_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty a_j b_j \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1.$$

Demonstração. Veja [7, Proposição 4.2.1]. ☐

Proposição 1.18. *Para todo espaço normado E, o operador linear*

$$J_E \colon E \longrightarrow E'',\ J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in E',$$

é uma isometria, chamado de mergulho canônico de E em E''.

Demonstração. Veja [7, Proposição 4.3.1]. ☐

Definição 1.19. Um espaço normado E é dito *reflexivo* se o mergulho canônico $J_E \colon E \longrightarrow E''$ for sobrejetor, ou seja, $J_E(E) = E''$. Neste caso, J_E é um isomorfismo isométrico.

Proposição 1.20. *Sejam E e F espaços normados e $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Então u'' é uma extensão de u a E'' no sentido de que $u'' \circ J_E = J_F \circ u$. Em particular, $u'' \circ J_E(E) \subset J_F(F)$.*

Demonstração. Veja [14, Proposição 3.1.5]. ☐

Teorema 1.21 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre $\mathbb{K}$ e seja $\varphi \colon G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} \colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Veja [7, Corolário 3.1.3]. ☐

Proposição 1.22. *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$, e $x \in E$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

Demonstração. Veja [7, Corolário 3.1.5]. $\square$

Proposição 1.23. *Dado E um espaço normado, então $(J_E)' \circ J_{E'} = id_{E'}$.*

Demonstração. Dado $\varphi \in E'$, para todo $x \in E$ temos

$$(J_E)' \circ J_{E'}(\varphi)(x) = (J_E)'(J_{E'}(\varphi))(x) = J_{E'}(\varphi)(J_E(x)) = J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

daí, $(J_E)' \circ J_{E'}(\varphi) = \varphi = id_{E'}(\varphi)$ implicando $(J_E)' \circ J_{E'} = id_{E'}$. $\square$

Definição 1.24. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço normado E. Diz-se que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$:

(a) *converge* para $x \in E$ se a sequência das somas parciais $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)_{n=1}^{\infty}$ converge para x. Neste caso escrevemos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

(b) é *absolutamente convergente* se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

(c) é *incondicionalmente convergente* se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente, qualquer que seja a permutação (função bijetora) $\sigma \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Proposição 1.25. *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço normado E.*
(a) Toda série absolutamente convergente em E é incondicionalmente convergente.
(b) Toda série absolutamente convergente em E é convergente.
(c) E é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja [7, Proposição 10.1.4]. $\square$

Definição 1.26. A *topologia fraca* de um espaço normado E, denotada por $\sigma(E, E')$ ou w, é a topologia gerada, no sentido de [7, Definição 6.1.2], pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E'$.

Quando uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergir para $x \in E$ na topologia fraca de E, denotaremos este fato por $x_n \xrightarrow{w} x$ e diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge fracamente* para x. Denotaremos o fecho de um conjunto $A \subset E$ em relação à topologia fraca por $\overline{A}^{w}$. Se um subconjunto $K \subset E$ for compacto em relação à topologia fraca de E, diremos que K é *fracamente compacto* ou w-compacto em E. De forma análoga, a partir de agora sempre que utilizarmos as palavras *fraca* e *fracamente* estaremos nos referindo à topologia fraca do espaço no qual estivermos trabalhando.

Proposição 1.27. *Seja E um espaço normado. Então:*
(a) Dada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E, então $x_n \xrightarrow{w} x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$.
(b) A topologia fraca $\sigma(E; E')$ é de Hausdorff.
(c) Se $x_n \longrightarrow x$ em E, então $x_n \xrightarrow{w} x$

Demonstração. Veja [7, Teorema 6.2.2 e Corolário 6.2.3]. $\square$

Usaremos a notação w-w-contínuo para indicar que um operador $u \colon E \longrightarrow F$ é contínuo nas topologias fracas dos espaços normados E e F, respectivamente.

No dual topológico E' de um espaço normado E, além da topologia da norma e da topologia fraca, podemos definir uma terceira topologia, apresentada a seguir.

Definição 1.28. Seja E um espaço normado. A *topologia fraca-estrela* em E', denotada por $\sigma(E', E)$ ou w^*, é a topologia gerada, no sentido de [7, Definição 6.1.2], pelas funções pertencentes ao conjunto $J_E(E) = \{J_E(x) : x \in E\}$, isto é, pelas funções $\varphi \in E' \longmapsto J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \in \mathbb{K}$, onde $x \in E$.

Quando uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ convergir para $\varphi \in E'$ na topologia fraca-estrela de E', denotaremos este fato por $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ e diremos que $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge fraca-estrela* para φ. O fecho de um conjunto $A \subset E'$ em relação à topologia fraca-estrela será denotado por $\overline{A}^{w^*}$. Se um subconjunto $K \subset E'$ for compacto em relação à topologia fraca-estrela de E', diremos que K é *fraca-estrela compacto* ou w^*-compacto em E'. De forma análoga, a partir de agora sempre que utilizarmos a palavra *fraca-estrela* estaremos nos referindo à topologia fraca-estrela do espaço dual no qual estivermos trabalhando.

Proposição 1.29. *Seja E um espaço normado. Então:*
(a) Dada $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E', então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ se, e somente se, $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$.
(b) A topologia fraca-estrela $\sigma(E'; E)$ é de Hausdorff.
(c) Se $\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi$ em E', então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Demonstração. Veja [7, Teorema 6.3.2, Proposição 6.3.3]. □

Segue facilmente do item *(a)* da proposição acima que se $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ em E', então toda subsequência de $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para φ na topologia fraca-estrela. A notação w^*-w^*-contínuo será usada para indicar que um operador $u \colon E' \longrightarrow F'$ é contínuo nas topologias fraca-estrela de E' e F', respectivamente, e as notações w-w^*-contínuo e w^*-w-contínuo seguem a mesma ideia.

Proposição 1.30. *Sejam $E, F \in \mathcal{BAN}$ e $T \in \mathcal{L}(F'; E')$. O operador T é w^*-w^*-contínuo se, e somente se, existe $u \in \mathcal{L}(E; F)$ tal que $u' = T$.*

Demonstração. Veja [14, Lema 3.1.7]. □

Definição 1.31. Dado um espaço dual E' de um certo espaço normado E, dizemos que o *conjunto $A \subset E'$ é sequencialmente w^*-compacto* se toda sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ possui subsequência w^*-convergente para algum elemento de A.

Proposição 1.32 (Teorema de Josefson-Nissenzweig)**.** *Todo espaço de Banach dual de dimensão infinita admite uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \xrightarrow{w^*} 0$ e $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Veja [8, Capítulo XII]. □

Definição 1.33. Um espaço normado E tem a *propriedade de Schur* (ou E é um *espaço de Schur*) se todas as sequências fracamente convergentes em E são convergentes em norma.

Um estudo detalhado da propriedade de Schur pode ser encontrado em [10].

Teorema 1.34 (Teorema de Schur)**.** *Em ℓ_1 uma sequência converge fracamente se, e somente se, converge na topologia da norma.*

Demonstração. Veja [7, Teorema 6.2.12]. □

Definição 1.35. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço normado E é *fracamente de Cauchy* se para todo $\varphi \in E'$ a sequência $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ for de Cauchy (ou, equivalentemente, convergente) em $\mathbb{K}$.

Proposição 1.36. *Dado E um espaço de Banach, então E é um espaço de Schur se, e somente se, toda sequência fracamente de Cauchy em E é convergente.*

Demonstração. Veja [10, Teorema 2.1.8]. $\square$

Teorema 1.37 (Teorema de Goldstine)**.** *Seja E um espaço de Banach. Então $J_E(B_E)$ é denso em $B_{E''}$ na topologia fraca-estrela $\sigma(E'';E')$ de E''.*

Demonstração. Veja [7, Teorema 8.4.7]. $\square$

Definição 1.38. Sejam E e F espaços normados. Diremos que o espaço E contém uma *cópia isomorfa* do espaço F se existe um subespaço vetorial G de E topologicamente isomorfo a F.

O resultado a seguir é muito usado na teoria dos operadores absolutamente somantes, mas sua demonstração não é fácil de ser encontrada. Por isso apresentaremos uma demonstração.

Lema 1.39. *Se $p \geq 1$ e $F \in \mathcal{BAN}$, então*

$$\sup_{y'' \in B_{F''}} \sum_{j=1}^{m} |y''(y_j')|^p = \sup_{y \in B_F} \sum_{j=1}^{m} |y_j'(y)|^p$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ e $y_1', \ldots, y_m' \in F'$.

Demonstração. De imediato,

$$\sup_{y \in B_F} \sum_{j=1}^{m} |y_j'(y)|^p = \sup_{y \in B_F} \sum_{j=1}^{m} |J_F(y)(y_j')|^p \leq \sup_{y'' \in B_{F''}} \sum_{j=1}^{m} |y''(y_j')|^p.$$

Para a desigualdade contrária, sejam $m \in \mathbb{N}$, $y_1', \ldots, y_m' \in F'$ e $y'' \in B_{F''}$. Pelo Teorema de Golsdstine (Teorema 1.37) sabemos que $B_{F''} = \overline{J_F(B_F)}^{w*}$. Daí, existe uma rede $(y_\alpha)_{\alpha \in I} \subset B_F$ de modo que $J_F(y_\alpha) \xrightarrow{w*} y''$. Logo,

$$z'(y_\alpha) = J_F(y_\alpha)(z') \xrightarrow{\alpha} y''(z')$$

para todo $z' \in F'$, em particular,

$$y_j'(y_\alpha) = J_F(y_\alpha)(y_j') \xrightarrow{\alpha} y''(y_j')$$

para $j = 1, \ldots, m$. Como as funções módulo e potência são contínuas e o limite da soma de um número finito de redes convergentes é igual à soma dos limites das redes, temos

$$\sum_{j=1}^{m} |y_j'(y_\alpha)|^p = \sum_{j=1}^{m} |J_F(y_\alpha)(y_j')|^p \xrightarrow{\alpha} \sum_{j=1}^{m} |y''(y_j')|^p.$$

Com isso,

$$\sum_{j=1}^{m} |y''(y_j')|^p \in \overline{\left\{ \sum_{j=1}^{m} |y_j'(y)|^p : y \in B_F \right\}},$$

o que implica que

$$\sum_{j=1}^{m} |y''(y_j')|^p \leq \sup \overline{\left\{ \sum_{j=1}^{m} |y_j'(y)|^p : y \in B_F \right\}} = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{m} |y_j'(y)|^p : y \in B_F \right\}.$$

Portanto,

$$\sup_{y'' \in B_{F''}} \sum_{j=1}^{m} |y''(y_j')|^p \leq \sup_{y \in B_F} \sum_{j=1}^{m} |y_j'(y)|^p,$$

e temos a igualdade desejada. $\square$

Usaremos agora o lema que acabamos de demonstrar para provar igualdades que serão usadas mais adiante.

Proposição 1.40. *Se $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$, então*

$$\sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y''' \in B_{F'''}}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'''(y_j'')|^p = \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y_j''(y')|^p$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j'' \in F''$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.

Demonstração. Dados $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j'' \in F''$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y''' \in B_{F'''}}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'''(y_j'')|^p &= \sup_{x_i' \in B_{E_i'}} \sup_{y''' \in B_{F'''}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'''(y_j'')|^p \\
&= \sup_{x_i' \in B_{E_i'}} \sup_{y''' \in B_{F'''}} \sum_{j=1}^{m} |y''' \left(x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y_j''\right)|^p \\
&\overset{(*)}{=} \sup_{x_i' \in B_{E_i'}} \sup_{y' \in B_{F'}} \sum_{j=1}^{m} |(x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y_j'')(y')|^p \\
&= \sup_{x_i' \in B_{E_i'}} \sup_{y' \in B_{F'}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y_j''(y')|^p \\
&= \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y_j''(y')|^p,
\end{aligned}$$

onde a igualdade (*) segue do Lema 1.39. ☐

Proposição 1.41. *Se $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $E, F \in \mathcal{BAN}$, então*

$$\sup_{\substack{x' \in B_{E'} \\ y''' \in B_{F'''}}} \sum_{j=1}^{m} |x'(x_j)^n \cdot y'''(y_j'')|^p = \sup_{\substack{x' \in B_{E'} \\ y' \in B_{F'}}} \sum_{j=1}^{m} |x'(x_j)^n \cdot y_j''(y')|^p$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$ e $y_j'' \in F''$ com $j = 1, \ldots, m$.

Demonstração. Dados $m \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$ e $y_j'' \in F''$ com $j = 1, \ldots, m$, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{x' \in B_{E'} \\ y''' \in B_{F'''}}} \sum_{j=1}^{m} |x'(x_j)^n \cdot y'''(y_j'')|^p &= \sup_{x' \in B_{E'}} \sup_{y''' \in B_{F'''}} \sum_{j=1}^{m} |x'(x_j)^n \cdot y'''(y_j'')|^p \\
&= \sup_{x' \in B_{E'}} \sup_{y''' \in B_{F'''}} \sum_{j=1}^{m} |y'''(x'(x_j)^n \cdot y_j'')|^p \\
&\overset{(*)}{=} \sup_{x' \in B_{E'}} \sup_{y' \in B_{F'}} \sum_{j=1}^{m} |(x'(x_j)^n \cdot y_j'')(y')|^p \\
&= \sup_{x \in B_{E'}} \sup_{y' \in B_{F'}} \sum_{j=1}^{m} |x'(x_j)^n \cdot y_j''(y')|^p
\end{aligned}$$

$$= \sup_{\substack{x' \in B_{E'} \\ y' \in B_{F'}}} \sum_{j=1}^{m} |x'(x_j)^n \cdot y_j''(y')|^p,$$

onde a igualdade (*) segue do Lema 1.39. $\square$

Teorema 1.42 (Teorema de Eberlein-Smulian). *Um subconjunto K de um espaço de Banach é fracamente compacto se, e somente se, toda sequência em K admite subsequência fracamente convergente em K.*

Demonstração. Veja [8, Capítulo III]. $\square$

Teorema 1.43 (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Para todo espaço normado E, a bola $B_{E'}$ é compacta na topologia fraca-estrela w^* de E'.*

Demonstração. Veja [7, Teorema 6.3.9]. $\square$

Corolário 1.44. *Dados um espaço normado E e A um subconjunto limitado de E', então $\overline{A}^{w^*}$ é w^*-compacto.*

Demonstração. Com efeito, dado $A \subset E'$ limitado então existe um conveniente escalar $\lambda > 0$ tal que $A \subset \lambda B_{E'}$. Daí,

$$\overline{A}^{w^*} \subset \overline{\lambda B_{E'}}^{w^*} = \lambda \overline{B_{E'}}^{w^*}.$$

Pelo Teorema 1.43, $\lambda \overline{B_{E'}}^{w^*}$ é w^*-compacto, pois $\overline{B_{E'}}^{w^*}$ é w^*-compacto, visto que $B_{E'}$ é w^*-compacto e w^* é Hausdorff. Segue que $B_{E'}$ é w^*-fechado, ou seja, $B_{E'} = \overline{B_{E'}}^{w^*}$. Portanto, $\overline{A}^{w^*}$ é um w^*-fechado dentro de um w^*-compacto, donde segue $\overline{A}^{w^*}$ é w^*-compacto. $\square$

1.2 Ideais de operadores lineares

Relembre que um operador linear $u\colon U \longrightarrow V$ entre os espaços vetoriais U e V tem *posto finito* se sua imagem tem dimensão finita. Ao longo da dissertação denotaremos a imagem de um conjunto U por uma aplicação u por $\mathrm{Im}(U)$.

Definição 1.45. Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que para quaisquer espaços de Banach E e F, as componentes

$$\mathcal{I}(E; F) := \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I}$$

satisfazem:
(1) $\mathcal{I}(E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$ que contém os operadores lineares contínuos de posto finito.
(2) A propriedade de ideal: se $v \in \mathcal{L}(G; E)$, $u \in \mathcal{I}(E; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$ sendo $G, H \in \mathcal{BAN}$, então $t \circ u \circ v \in \mathcal{I}(G; H)$.

Além disso, se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}\colon \mathcal{I} \longrightarrow [0, +\infty)$ satisfazendo:
(a) A função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita à componente $\mathcal{I}(E; F)$ é uma norma para todos espaços de Banach E e F.
(b) O operador $id_{\mathbb{K}}\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, dado por $id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda$, é tal que $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$.
(c) Se $v \in \mathcal{L}(G; E)$, $u \in \mathcal{I}(E; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$ então

$$\|t \circ u \circ v\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|v\|,$$

dizemos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal normado de operadores lineares.* Se todas as componentes $\mathcal{I}(E; F)$ são subespaços normados completos relativamente a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, dizemos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal de Banach de operadores lineares.* E ainda, dizemos que o ideal $\mathcal{I}$ é um *ideal fechado* se todas as componentes $\mathcal{I}(E; F)$ são subespaços fechados de $\mathcal{L}(E; F)$ em relação à norma usual ou do sup.

Proposição 1.46. *Dados $E, F \in \mathcal{BAN}$ e $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores lineares, então $\|u\| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}$ para todo $u \in \mathcal{I}(E; F)$.*

Demonstração. Veja [14, Proposição 2.1.4(a)]. □

Definição 1.47. Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores lineares. Dado $u \in \mathcal{L}(E; F)$, dizemos que $u \in \mathcal{I}^{dual}(E; F)$ se $u' \in \mathcal{I}(F'; E')$, e neste caso definimos

$$\|u\|_{\mathcal{I}^{dual}} = \|u'\|_{\mathcal{I}}.$$

Proposição 1.48. *Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado (Banach) de operadores lineares, então $(\mathcal{I}^{dual}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{dual}})$ é um ideal normado (Banach) de operadores lineares.*

Demonstração. Veja [14, Teoremas 3.2.1, 3.2.3 e 3.2.4]. □

Proposição 1.49. *Dados $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ e $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{J}})$ ideais normados (Banach) de operadores lineares, definindo*

$$\mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E; F) = \{u \in \mathcal{L}(E; F) : u \in \mathcal{I}(E; F) \text{ e } u \in \mathcal{J}(E; F)\},$$

e

$$\|u\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} = \max\{\|u\|_{\mathcal{I}}, \|u\|_{\mathcal{J}}\},$$

então $(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}})$ é um ideal normado (Banach) de operadores lineares.

Demonstração. Dados $E, F \in \mathcal{BAN}$, da definição de ideal normado de operadores lineares os únicos itens que não são imediatos são que a função $\|\cdot\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}}$ é uma norma em $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E; F)$ e a desigualdade de ideal. Verificaremos esses dois pontos.
(I) $\|\cdot\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}}$ é uma norma em $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E; F)$:
(i) Obviamente, se $u \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E; F)$ então $\|u\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} \geq 0$. Como $0 \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E; F)$, temos $\|0\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} = 0$. Dado $u \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E; F)$ tal que $\|u\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} = 0$, temos $\|u\|_{\mathcal{I}} = \|u\|_{\mathcal{J}} = 0$, o que implica que $u = 0$.
(ii) Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E; F)$ temos

$$\begin{aligned}\|\lambda u\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} &= \max\{\|\lambda u\|_{\mathcal{I}}, \|\lambda u\|_{\mathcal{J}}\} = \max\{|\lambda| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}}, |\lambda| \cdot \|u\|_{\mathcal{J}}\} = |\lambda| \cdot \max\{\|u\|_{\mathcal{I}}, \|u\|_{\mathcal{J}}\} \\ &= |\lambda| \cdot \|u\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}}.\end{aligned}$$

(iii) Dados $u, v \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E; F)$ temos

$$\begin{aligned}\|u + v\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} &= \max\{\|u + v\|_{\mathcal{I}}, \|u + v\|_{\mathcal{J}}\} \leq \max\{\|u\|_{\mathcal{I}} + \|v\|_{\mathcal{I}}, \|u\|_{\mathcal{J}} + \|v\|_{\mathcal{J}}\} \\ &\leq \max\{\|u\|_{\mathcal{I}}, \|u\|_{\mathcal{J}}\} + \max\{\|v\|_{\mathcal{I}}, \|v\|_{\mathcal{J}}\} = \|u\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} + \|v\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}}.\end{aligned}$$

(II) Dados $G, H \in \mathcal{BAN}$, $v \in \mathcal{L}(G; E)$, $u \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$ sabemos que $t \circ u \circ v \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}(G; H)$ e ainda

$$\begin{aligned}\|t \circ u \circ v\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} &= \max\{\|t \circ u \circ v\|_{\mathcal{I}}, \|t \circ u \circ v\|_{\mathcal{J}}\} \leq \max\{\|t\| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|v\|, \|t\| \cdot \|u\|_{\mathcal{J}} \cdot \|v\|\} \\ &= \|t\| \cdot \max\{\|u\|_{\mathcal{I}}, \|u\|_{\mathcal{J}}\} \cdot \|v\| = \|t\| \cdot \|u\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} \cdot \|v\|.\end{aligned}$$

Para a completude de $\|\cdot\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}}$ em $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E; F)$ quando $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ é completa em $\mathcal{I}(E; F)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ é completa em $\mathcal{J}(E; F)$, seja $(u_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E; F)$ uma sequência tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} < +\infty$. Disso segue que $(u_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{I}(E; F)$, $(u_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{J}(E; F)$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|_{\mathcal{I}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|_{\mathcal{J}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} < +\infty.$$

Pela Proposiçâo 1.25 existem $u \in \mathcal{I}(E;F)$ e $v \in \mathcal{J}(E;F)$ tais que

$$\sum_{k=1}^{j} u_k \xrightarrow{j} u \text{ em } (\mathcal{I}(E;F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}}) \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{j} u_k \xrightarrow{j} v \text{ em } (\mathcal{J}(E;F), \|\cdot\|_{\mathcal{J}}).$$

Pela Proposição 1.46,

$$\sum_{k=1}^{j} u_k \xrightarrow{j} u \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{j} u_k \xrightarrow{j} v \quad \text{em} \quad (\mathcal{L}(E;F), \|\cdot\|).$$

Portanto, $u = v \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E;F)$ e, além disso,

$$\left\| \sum_{k=1}^{j} u_k - u \right\|_{\mathcal{I}\cap\mathcal{J}} = \max \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{j} u_k - u \right\|_{\mathcal{I}}, \left\| \sum_{k=1}^{j} u_k - v \right\|_{\mathcal{J}} \right\} \xrightarrow{j} 0,$$

ou seja, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} u_j = u \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E;F)$ e, daí, $(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}(E;F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}\cap\mathcal{J}})$ é completo, novamente pela Proposição 1.25. $\square$

O leitor poderá encontrar mais informações, exemplos e resultados sobre ideais de operadores no trabalho de dissertação [14].

Capítulo 2

Ideais de operadores multilineares e polinômios homogêneos

Neste capítulo apresentamos definições e resultados, geralmente sem demonstração (mas com referências para as demonstrações), referentes aos operadores multilineares e polinômios homogêneos, tendo como referências principais os trabalhos de dissertação [18] e [1]. Tais conceitos podem ser considerados como o primeiro passo rumo à Análise Funcional não linear.

No capítulo anterior citamos a teoria abstrata de ideais de operadores lineares, e, em 1983, o próprio Pietsch generalizou o conceito de ideais de operadores para operadores multilineares, e tal ideia pode ser imediatamente adaptada para polinômios homogêneos. Neste sentido, também apresentaremos definições e resultados, com demonstrações na maioria dos casos, salvo aqueles que são encontrados na literatura com certa facilidade, para ideais de operadores multilineares e polinômios homogêneos. Neste ponto, as principais referências utilizadas foram [9] e [4].

E ainda, além de todo conteúdo desenvolvido, chamamos atenção para a Observação 2.59 que é uma pergunta que nos surgiu de forma natural no desenvolvimento do trabalho e acabou se mostrando um problema em aberto.

2.1 Operadores multilineares

Definição 2.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_n$ e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dizemos que um *operador* $A\colon U_1 \times \cdots \times U_n \longrightarrow V$ é *n-linear* ou *multilinear* se é linear em cada uma das variáveis, ou seja,

$$A(x_1, \ldots, \lambda x_i + x_i', \ldots, x_n) = \lambda A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + A(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)$$

para quaisquer $x_i, x_i' \in U_i$ com $i = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $V = \mathbb{K}$, dizemos que A é um *funcional n-linear ou multilinear.*

O *conjunto de todos os operadores n-lineares de $U_1 \times \cdots \times U_n$ em V* é denotado por $L(U_1, \ldots, U_n; V)$. É fácil verificar que as operações de adição e multiplicação por escalar usuais de aplicações fazem de $L(U_1, \ldots, U_n; V)$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

Exemplo 2.2. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_n$ e V espaços vetoriais, $\varphi_1 \in U_1^*, \ldots, \varphi_n \in U_n^*$ e $b \in V$. O operador

$$A\colon U_1 \times \cdots \times U_n \longrightarrow V,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto A(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b,$$

é claramente n-linear. Uma combinação linear finita de operadores n-lineares deste tipo é chamada de *operador n-linear de tipo finito.* A forma geral de um operador n-linear de tipo finito de $U_1 \times \ldots \times U_n$ em V é então

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_1^j(x_1) \cdots \varphi_n^j(x_n) \cdot b_j$$

sendo $\varphi_i^j \in U_i^*$ e $b_j \in V$ para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, k$ com $k \in \mathbb{N}$.

Denotaremos por $L_f(U_1, \ldots, U_n; V)$ o *conjunto de todos os operadores n-lineares de tipo finito de $U_1 \times \cdots \times U_n$ em V*. Por sua própria definição, é claro que $L_f(U_1, \ldots, U_n; V)$ é subespaço vetorial de $L(U_1, \ldots, U_n; V)$.

Nosso próximo exemplo mostra que em dimensão finita todos os operadores multilineares são de tipo finito.

Exemplo 2.3. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_n$ espaços vetoriais de dimensão finita e V um espaço vetorial. Então

$$L(U_1, \ldots, U_n; V) = L_f(U_1, \ldots, U_n; V).$$

A demonstração segue facilmente considerando bases algébricas (de Hamel) dos espaços $U_1, \ldots,$ U_n (veja, por exemplo, [18, Exemplo 1.3]).

Agora, se algum dos espaços vetoriais que constituem o produto cartesiano domínio tiver dimensão infinita, existem operadores multilineares que não são de tipo finito. Isso é o que diz o exemplo a seguir.

Exemplo 2.4. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_n$ espaços vetoriais e $\varphi_1 \in U_1^*, \ldots, \varphi_{n-1} \in U_{n-1}^*$ funcionais lineares não nulos. Defina

$$A \colon U_1 \times \cdots \times U_n \longrightarrow U_n,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto A(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \cdot x_n.$$

Então $A \in L(U_1, \ldots, U_n; U_n)$, e se $\dim(U_n) = +\infty$, então $A \notin L_f(U_1, \ldots, U_n; U_n)$ (veja, por exemplo, [18, Exemplo 1.4]).

Até o momento, estudamos os operadores multilineares entre espaços vetoriais do ponto de vista algébrico. Quando os espaços envolvidos são espaços normados, faz sentido e é útil distinguir dentro do conjunto dos operadores multilineares aqueles que são contínuos, e esse é o nosso próximo passo.

Dados $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados, considerando em $E_1 \times \cdots \times E_n$ qualquer uma das três normas equivalentes apresentadas na Definição 1.6, podemos considerar os operadores multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F que são contínuos. No próximo resultado vamos caracterizá-los.

Proposição 2.5. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados. Para cada operador $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, as afirmações seguintes são equivalentes.*
(a) A é contínuo.
(b) A é contínuo na origem.
(c) Existe uma constante $c \geq 0$ tal que $\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.
(d) $\|A\| := \sup \{\|A(x_1, \ldots, x_n)\| : x_j \in B_{E_j}$ para todo $j = 1, \ldots, n\} < +\infty$.

Demonstração. Veja [18, Proposição 2.7]. □

Proposição 2.6. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados. Considere o operador multilinear contínuo $A \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$.*
(a) $\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.
(b) $\|A\| = \inf \{c \geq 0 : \|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n\}$.

Demonstração. Veja [18, Proposição 2.8]. $\square$

Definição 2.7. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados. Denotaremos o *conjunto dos operadores multilineares contínuos de* $E_1 \times \cdots \times E_n$ *em* F por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se $E_1 = \cdots = E_n = E$ escrevemos $\mathcal{L}(^nE; F)$.

Proposição 2.8. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ *e* F *espaços normados.*
(a) $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *é espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$.
(b) A função $A \longmapsto \|A\|$ *é uma norma em* $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.
(c) Se F *é espaço de Banach, então* $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *com a norma do item (b) também é espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [18, Proposições 2.10 e 2.11]. $\square$

Exemplo 2.9. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados. Considere $\varphi_1 \in E_1', \ldots, \varphi_n \in E_n'$ e $b \in F$. Defina

$$\begin{aligned} \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \colon E_1 \times \cdots \times E_n &\longrightarrow F \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b)(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b. \end{aligned}$$

De acordo com [18, Exemplo 2.14], $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e

$$\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b\| = \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \cdot \|b\|.$$

Definição 2.10. Denotaremos por $\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ gerado pelos operadores do tipo que acabamos de apresentar, isto é,

$$\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; F) = [\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b : \varphi_j \in E_j' \text{ para } j = 1, \ldots, n \text{ e } b \in F].$$

Os elementos de $\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; F)$ são chamados de *operadores multilineares contínuos de tipo finito.*

Proposição 2.11. *Sejam* $E_1, \ldots, E_n$ *espaços normados. Considere* $\varphi_1 \in E_1', \ldots, \varphi_{n-1} \in E_{n-1}'$ *com* $\varphi_j \neq 0$ *para* $j = 1, \ldots, n-1$. *Defina*

$$\begin{aligned} A \colon E_1 \times \cdots \times E_{n-1} \times E_n &\longrightarrow E_n \\ (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) &\longmapsto A(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \cdot x_n, \end{aligned}$$

então $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; E_n)$ *e* $A \notin \mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; E_n)$.

Demonstração. Veja [18, Exemplo 2.16]. $\square$

Apresentaremos um exemplo que nos possibilitará criar vários operadores multilineares contínuos que não são de tipo finito, para tanto precisaremos do resultado a seguir.

Proposição 2.12. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$, $s, r_1, \ldots, r_n \in (0, +\infty]$ *tais que* $\frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n}$. *Se* $(\xi_j^1)_{j=1}^\infty \in \ell_{r_1}, \ldots, (\xi_j^n)_{j=1}^\infty \in \ell_{r_n}$, *então* $(\xi_j^1 \cdots \xi_j^n)_{j=1}^\infty \in \ell_s$ *e, além disso,*

$$\|(\xi_j^1 \cdots \xi_j^n)_{j=1}^\infty\|_s \leq \|(\xi_j^1)_{j=1}^\infty\|_{r_1} \cdots \|(\xi_j^n)_{j=1}^\infty\|_{r_n}.$$

Essa desigualdade é conhecida como *desigualdade generalizada de Hölder para sequências.*

Demonstração. Veja [2, Teorema 1.1]. $\square$

Exemplo 2.13. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_n$ e s números reais nas condições da proposição anterior. A proposição garante que o operador

$$A\colon \ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_n} \longrightarrow \ell_s,\ \left((\xi_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (\xi_j^n)_{j=1}^\infty\right) \longmapsto A\left((\xi_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (\xi_j^n)_{j=1}^\infty\right) = (\xi_j^1 \cdots \xi_j^n)_{j=1}^\infty,$$

está bem definido. Vejamos que $A \in \mathcal{L}(\ell_{r_1}, \ldots, \ell_{r_n}; \ell_s)$, $\|A\| = 1$ e A não é de tipo finito. De fato o operador A é multilinear, pois

$$\begin{aligned} A&\left((\xi_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (\xi_j^i)_{j=1}^\infty + \lambda(\eta_j^i)_{j=1}^\infty, \ldots, (\xi_j^n)_{j=1}^\infty\right) = A\left((\xi_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (\xi_j^i + \lambda\eta_j^i)_{j=1}^\infty, \ldots, (\xi_j^n)_{j=1}^\infty\right) \\ &= \left(\xi_j^1 \cdots (\xi_j^i + \lambda\eta_j^i) \cdots \xi_j^n\right)_{j=1}^\infty = \left(\xi_j^1 \cdots \xi_j^i \cdots \xi_j^n\right)_{j=1}^\infty + \lambda\left(\xi_j^1 \cdots \eta_j^i \cdots \xi_j^n\right)_{j=1}^\infty \\ &= A\left((\xi_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (\xi_j^i)_{j=1}^\infty, \ldots, (\xi_j^n)_{j=1}^\infty\right) + \lambda \cdot A\left((\xi_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (\eta_j^i)_{j=1}^\infty, \ldots, (\xi_j^n)_{j=1}^\infty\right), \end{aligned}$$

para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(\xi_j^i)_{j=1}^\infty, (\eta_j^i)_{j=1}^\infty \in \ell_{r_i}$ com $i = 1, \ldots, n$. Da desigualdade generalizada de Hölder para sequências,

$$\left\|A\left((\xi_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (\xi_j^n)_{j=1}^\infty\right)\right\|_s = \left\|\left(\xi_j^1 \cdots \xi_j^n\right)_{j=1}^\infty\right\|_s \leq 1 \cdot \left\|(\xi_j^1)_{j=1}^\infty\right\|_{r_1} \cdots \left\|(\xi_j^n)_{j=1}^\infty\right\|_{r_n}$$

sempre que $(\xi_j^i)_{j=1}^\infty \in \ell_{r_i}$ com $i = 1, \ldots, n$. Logo, A é contínuo e $\|A\| \leq 1$. Considere $e^1 = (1, 0, 0, \ldots)$ o vetor canônico pertencente a ℓ_{r_i} com $i = 1, \ldots, n$. Temos $\|e^1\|_{r_i} = 1$ e

$$\left\|A\left(e^1, \ldots, e^1\right)\right\|_s = \left\|e^1\right\|_s = 1,$$

logo, $\|A\| = 1$. Seja δ_{ij}, com $i, j \in \mathbb{N}$, o delta de Kronocker, isto é, $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Supondo que A seja de tipo finito, existem $p \in \mathbb{N}$, $\varphi_1^k \in (\ell_{r_1})', \ldots, \varphi_n^k \in (\ell_{r_n})'$ e $b_k \in \ell_s$ com $k = 1, \ldots, p$, tais que $A = \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_1^k \otimes \cdots \otimes \varphi_n^k \otimes b_k$. Neste caso, $\mathrm{Im}(A) \subset [b_1, \ldots, b_p] \subset \ell_s$. Mas, veja que os vetores canônicos $e^i = (e_j^i)_{j=1}^\infty = (\delta_{ij})_{j=1}^\infty$ pertencem a $\mathrm{Im}(A)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Com maior razão, $e^i \in \ell_{r_1} \cap \cdots \cap \ell_{r_n}$ e

$$A(e^i, \ldots, e^i) = (\delta_{ij} \cdots \delta_{ij})_{j=1}^\infty = (\delta_{ij}^n)_{j=1}^\infty = (\delta_{ij})_{j=1}^\infty = e^i.$$

Portanto, $\mathrm{Im}(A)$ contém um subconjunto linearmente independente infinito, a saber, $\{e^i : i \in \mathbb{N}\}$, o que é absurdo visto que $\mathrm{Im}(A)$ estaria contido em $[b_1, \ldots, b_n]$. Logo, A não pode ser de tipo finito, completando o raciocínio.

Definição 2.14. Sejam E e F espaços normados e $n \in \mathbb{N}$. Um *operador multilinear* $A \in L(^nE; F)$ é dito *simétrico* se

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

para todos $(x_1, \ldots, x_n) \in E \times \overset{n}{\cdots} \times E$ e $\sigma \in S_n$, onde S_n é o conjunto das permutações dos n primeiros números naturais.

Os conjuntos dos operadores multilineares simétricos e dos operadores multilineares simétricos contínuos são denotados por $L^s(^nE; F)$ e $\mathcal{L}^s(^nE; F)$, respectivamente. Mais ainda, não é difícil verificar que os conjuntos $L^s(^nE; F)$ e $\mathcal{L}^s(^nE; F)$ são subespaços vetoriais de $L(^nE; F)$ e $\mathcal{L}(^nE; F)$, pela ordem.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in L(^nE; F)$, então para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ e cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$, usaremos a notação

$$Ax_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} = A(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{\alpha_m})$$

para todo $n \geq 1$.

Proposição 2.15. *Sejam E e F espaços normados e $n \in \mathbb{N}$. Para cada $A \in L(^nE; F)$ defina A^s por*

$$A^s(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Então as seguintes propriedades são satisfeitas.
(a) $A^s \in L^s(^nE; F)$.
(b) $A^s = A$ se, e somente se, $A \in L^s(^nE; F)$.
(c) $(A^s)^s = A^s$.
(d) O operador $s\colon L(^nE; F) \longrightarrow L^s(^nE; F)$ definido por $s(A) = A^s$ é linear.
(e) Se $x \in E$, então $Ax^n = A(x, \overset{n}{\ldots}, x) = A^s(x, \overset{n}{\ldots}, x) = A^s x^n$.

Demonstração. Veja [1, Proposição 1.1.6]. □

Proposição 2.16. *Sejam E, F espaços vetoriais, $n \in \mathbb{N}$ e $A \in L^s(^nE; F)$. Então para todos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$ temos a fórmula*

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n,$$

que é denominada fórmula de polarização.

Demonstração. Veja [12, páginas 6-7]. □

Corolário 2.17. *Se $A, B \in L^s(^nE; F)$ são tais que $Ax^n = Bx^n$ para todo $x \in E$, então $A = B$.*

Demonstração. Com efeito, pela fórmula de polarização, dois operadores simétricos que coincidem nos elementos da diagonal são iguais. □

Definição 2.18. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, G_1, \ldots, G_n, F, H \in \mathcal{BAN}$, $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $t \in \mathcal{L}(F; H)$ e $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \ldots, n$. Definimos o operador

$$t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\colon G_1 \times \cdots \times G_n \longrightarrow H$$

por

$$(t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))(x_1, \ldots, x_n) = t(A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))),$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$.

Proposição 2.19. *O operador $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)$ definido acima é multilinear, contínuo e $\|t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\| \leq \|t\| \cdot \|A\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|$.*

Demonstração. Como os operadores $t, u_1, \ldots, u_n$ são lineares e A é multilinear verifica-se facilmente que $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)$ é multilinear. Mais ainda, para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$,

$$\begin{aligned}
\|(t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))(x_1, \ldots, x_n)\| &= \|t(A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)))\| \\
&\leq \|t\| \cdot \|A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))\| \\
&\leq \|t\| \cdot \|A\| \cdot \|u_1(x_1)\| \cdots \|u_n(x_n)\| \\
&\leq \|t\| \cdot \|A\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|.
\end{aligned}$$

Logo, o operador A é contínuo, e ainda,

$$\|t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\| \leq \|t\| \cdot \|A\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

□

Proposição 2.20. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_{m+n}$ e F espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, considere o operador*

$$\Phi\colon L(E_1, \ldots, E_{m+n}; F) \longrightarrow L(E_1, \ldots, E_m; L(E_{m+1}, \ldots, E_{m+n}; F)),\ A \longmapsto \Phi(A) = \widetilde{A},$$

onde

$$\widetilde{A}\colon E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow L(E_{m+1}, \ldots, E_{m+n}; F),\ (x_1, \ldots, x_m) \longmapsto \widetilde{A}(x_1, \ldots, x_m),$$

é definido por

$$\widetilde{A}(x_1, \ldots, x_n)\colon E_{m+1} \times \cdots \times E_{m+n} \longrightarrow F,\ (x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \longmapsto A(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_{m+n}).$$

Então:
(a) O operador Φ é um isomorfismo algébrico entre os espaços vetoriais $L(E_1, \ldots, E_{m+n}; F)$ e $L(E_1, \ldots, E_m; L(E_{m+1}, \ldots, E_{m+n}; F))$.
(b) Se $E_1, \ldots, E_{m+n}$ e F são espaços normados, então o isomorfismo Φ do item (a) induz um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{m+n}; F)$ e $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; \mathcal{L}(E_{m+1}, \ldots, E_{m+n}; F))$.

Demonstração. Veja [18, Proposição 2.12]. □

Corolário 2.21. *Usando a notação $\overset{[i]}{\ldots}$ para indicar que a i-ésima coordenada não está envolvida, para $i = 1, \ldots, n$, o operador*

$$I_i\colon \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_i; \mathcal{L}(E_1, \overset{[i]}{\ldots}, E_n; F)),$$

dado por

$$I_i(A)(x_i)(x_1, \overset{[i]}{\ldots}, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n),$$

é um isomorfismo isométrico. Se $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é simétrica, então $I_1(A) = I_2(A) = \cdots = I_n(A)$, e neste caso escrevemos $I(A)$ ao invés de $I_i(A)$. Para o caso $n = 1$ fazer sentido definimos $\mathcal{L}(^0E; F) = F$ e neste caso I é a aplicação identidade em $\mathcal{L}(E; F)$.

Demonstração. Veja [4]. □

2.2 Polinômios homogêneos

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$p_n\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ p_n(\lambda) = \lambda^n,$$

está bem definida e satisfaz a condição

$$p_n(\lambda\alpha) = \lambda^n p_n(\alpha) \text{ para todos } \alpha, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Por causa dessa última igualdade, essa função é chamada de *polinômio n-homogêneo*. É claro que, ao substituirmos $\mathbb{K}$ por um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, essa função não mais está bem definida. Para suprir a falta deste tipo de funções entre espaços vetoriais, consideramos a seguinte definição:

Definição 2.22. Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $P\colon E \longrightarrow F$ é denominada um *polinômio n-homogêneo* ou *polinômio homogêneo de grau n* se existir um operador $A \in L(^nE; F)$ de modo que $P(x) = Ax^n$ para todo x em E. Quando não houver dúvidas de qual índice n estamos trabalhando, falaremos polinômio homogêneo ou, simplesmente, polinômio.

Note que, para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$,

$$P(\lambda x) = A(\lambda x, \ldots, \lambda x) = \lambda^n A(x, \ldots, x) = \lambda^n P(x),$$

o que justifica o nome de *polinômio n-homogêneo* dado a esses operadores.

Note também que os polinômios 1-homogêneos são exatamente os operadores lineares.

É fácil ver que o conjunto constituído pelos polinômios n-homogêneos $P\colon E \longrightarrow F$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de aplicações. Denotaremos esse espaço por $P(^nE;F)$. Não obstante, também é imediato que o conjunto dos polinômios n-homogêneos contínuos é um subespaço vetorial de $P(^nE;F)$, subespaço este que será denotado por $\mathcal{P}(^nE;F)$.

Definição 2.23. Para cada $P \in P(^nE;F)$, definamos

$$\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : x \in B_E\}.$$

Esse número associado a P será chamado de *norma de P*, pois mais tarde provaremos que sob determinadas condições a relação $P \longmapsto \|P\|$ é uma norma.

Observação 2.24. A notação $\|\cdot\|$ aparece tanto referente a aplicações multilineares quanto a polinômios homogêneos, a situação de cada contexto deixa claro a que se refere.

Proposição 2.25. *Sejam E, F espaços normados e $n \in \mathbb{N}$. Para cada $A \in L(^nE;F)$ considere o operador dado por*

$$\widehat{A}\colon E \longrightarrow F,\ x \longmapsto \widehat{A}(x) = Ax^n = A(x, \overset{n}{\ldots}, x).$$

Então a correspondência $A \longmapsto \widehat{A}$ induz um isomorfismo algébrico entre os espaços $L^s(^nE;F)$ e $P(^nE;F)$. Além disso,

$$\|\widehat{A}\| \le \|A\| \le \frac{n^n}{n!} \cdot \|\widehat{A}\|.$$

Demonstração. Veja [1, Proposição 1.2.2]. $\square$

Observação 2.26. Da Proposição 2.25 segue que para todo polinômio $P \in P(^nE;F)$ existe um único operador multilinear simétrico $A \in L^s(^nE;F)$ satisfazendo

$$Ax^n = P(x)$$

para todo $x \in E$, nesse caso denotaremos $\check{P} := A$.

No próximo resultado, vamos caracterizar os polinômios homogêneos contínuos.

Proposição 2.27. *Sejam E, F espaços normados, $n \in \mathbb{N}$ e $P \in P(^nE;F)$. As seguintes condições são equivalentes.*
(a) P é contínuo.
(b) $\|P\| < +\infty$.
(c) Existe $c \ge 0$ tal que $\|P(x)\| \le c \cdot \|x\|^n$ para todo $x \in E$.
(d) $\check{P}$ é contínuo.

Demonstração. Veja [1, Proposição 1.2.7]. $\square$

Proposição 2.28. *Sejam E, F espaços normados e $n \in \mathbb{N}$. Então $(\mathcal{P}(^nE;F), \|\cdot\|)$ é espaço normado.*

Demonstração. Veja [1, Proposição 1.2.8]. $\square$

Analogamente ao caso dos operadores multilineares, dado $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ então $\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^n$ para todo x em E, e, daí, conseguimos a seguinte caracterização para a norma de um polinômio homogêneo contínuo:

$$\|P\| = \inf\{c \geq 0 : \|P(x)\| \leq c \cdot \|x\|^n \text{ para todo } x \in E\}.$$

Proposição 2.29. *A correspondência $A \longmapsto \widehat{A}$ definida na Proposição 2.25 induz um isomorfismo topológico entre os espaços normados $\mathcal{L}^s(^nE;F)$ e $\mathcal{P}(^nE;F)$.*

Demonstração. Veja [1, Proposição 1.2.9]. □

Proposição 2.30. *Sejam E um espaço normado e F um espaço de Banach. Então o espaço normado $(\mathcal{P}(^nE;F), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [1, Proposição 1.2.10]. □

Proposição 2.31. *Sejam E um espaço normado e F um espaço de Banach. Então $\mathcal{L}^s(^nE;F)$ é espaço de Banach.*

Demonstração. De fato, pela proposição anterior $\mathcal{P}(^nE;F)$ é espaço de Banach e pela Proposição 2.29 ele é topologicamente isomorfo a $\mathcal{L}^s(^nE;F)$, daí, $\mathcal{L}^s(^nE;F)$ também é completo. □

Proposição 2.32. *Sejam E, F espaços normados e $m, n \in \mathbb{N}$. Então o espaço normado $\mathcal{P}(^nE;\mathcal{P}(^mE;F))$ contém uma cópia isomorfa do espaço normado $\mathcal{P}(^{n+m}E;F)$ por meio da seguinte aplicação:*

$$\Phi\colon \mathcal{P}(^{n+m}E;F) \longrightarrow \mathcal{P}(^nE;\mathcal{P}(^mE;F)),\ P \longmapsto \Phi(P) = \widetilde{P},$$

onde

$$\widetilde{P}\colon E \longrightarrow \mathcal{P}(^mE;F),\ x \longmapsto \widetilde{P}(x)(y) = \check{P}x^ny^m.$$

Demonstração. Veja [1, Proposição 1.2.12]. □

Exemplo 2.33. Dados E, F espaços normados, $\varphi \in E'$ e $b \in F$, definindo o operador

$$A\colon E^n \longrightarrow F,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto A(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \cdot b$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, então $A \in \mathcal{L}^s(^nE;F)$ e a partir do operador A definimos o polinômio homogêneo

$$P\colon E \longrightarrow F,\ P(x) = Ax^n$$

para todo $x \in E$, ou seja, $P(x) = (\varphi(x))^n \cdot b$ para todo $x \in E$. Como o operador A é contínuo temos P contínuo, isto é, $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$. Dessa forma, dados $p \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in E'$ e $b_1, \ldots, b_p \in F$, considerando $P'(x) = \sum_{j=1}^{p} (\varphi_j(x))^n \cdot b_j$ para todo $x \in E$ temos $P' \in \mathcal{P}(^nE;F)$, pois $\mathcal{P}(^nE;F)$ é espaço vetorial.

Definição 2.34. Um polinômio como o que foi construído no exemplo anterior é chamado de *polinômio homogêneo contínuo de tipo finito*. O conjunto dos polinômios homogêneos contínuos de tipo finito, denotado por $\mathcal{P}_f(^nE;F)$, é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE;F)$.

Daremos agora um exemplo mostrando que nem todo polinômio homogêneo contínuo é de tipo finito.

Exemplo 2.35. À luz do que foi apresentado no Exemplo 2.13, sejam $n \in \mathbb{N}$ e $r, s \in \mathbb{R}$ tais que $r, s \in (0, +\infty]$ e $r = n \cdot s$. Definimos

$$P\colon \ell_r \longrightarrow \ell_s,\ (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \longmapsto P\left((\xi_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(\xi_j \overset{n}{\cdots} \xi_j\right)_{j=1}^{\infty} = \left(\xi_j^n\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Tomando o operador

$$A\colon \ell_r \times \overset{n}{\cdots} \times \ell_r \longrightarrow \ell_s,\ \left((\xi_j^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (\xi_j^n)_{j=1}^{\infty}\right) \longmapsto A\left((\xi_j^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (\xi_j^n)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(\xi_j^1 \cdots \xi_j^n\right)_{j=1}^{\infty},$$

então $A \in \mathcal{L}(^n\ell_r; \ell_s)$, e ainda,

$$P\left((\xi_j)_{j=1}^{\infty}\right) = A\left((\xi_j)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (\xi_j)_{j=1}^{\infty}\right) = A\left((\xi_j)_{j=1}^{\infty}\right)^n,$$

para todo $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r$. Logo, P é um polinômio homogêneo contínuo, isto é, $P \in \mathcal{P}(^n\ell_r; \ell_s)$. Supondo que P seja de tipo finito, existem $p \in \mathbb{N}$, $\varphi_k \in (\ell_r)'$ e $b_k \in \ell_s$ com $k = 1, \ldots, p$ satisfazendo $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} (\varphi_k(x))^n \cdot b_k$ para todo $x \in \ell_r$. Com isso, $\mathrm{Im}(P) \subset [b_1, \ldots, b_p] \subset \ell_s$. Veja que os vetores canônicos $e^i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$ pertencem a $\mathrm{Im}(P)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Com efeito, $e^i \in \ell_r$ e

$$P(e^i) = \left(\delta_{ij} \overset{n}{\cdots} \delta_{ij}\right)_{j=1}^{\infty} = \left(\delta_{ij}^n\right)_{j=1}^{\infty} = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty} = e^i.$$

Logo, $\mathrm{Im}(P)$ não pode estar contido em um espaço de dimensão finita pois contém $\{e^i : i \in \mathbb{N}\}$, que é um conjunto linearmente independente e infinito. Portanto, P não é de tipo finito. Mais ainda, de

$$\left\|P\left((\xi_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_s = \left\|\left(\xi_j \overset{n}{\cdots} \xi_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_s \leq 1 \cdot \left\|(\xi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_r \overset{n}{\cdots} \left\|(\xi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_r$$

para todo $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r$, temos $\|P\| \leq 1$. Considerando o vetor canônico $e^i = (1, 0, 0, \ldots)$, então $\|e^i\|_r = 1$ e

$$\left\|P(e^i)\right\|_s = \left\|e^i\right\|_s = 1.$$

Daí, $\|P\| = 1$, ou seja, P é um polinômio que não é de tipo finito e tem norma 1.

Definição 2.36. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $G, E, F, H \in \mathcal{BAN}$, $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$, $u \in \mathcal{L}(G; E)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Definimos o operador

$$t \circ P \circ u\colon G \longrightarrow H,\ x \longmapsto (t \circ P \circ u)(x) = t(P(u(x))).$$

Proposição 2.37. *O operador $t \circ P \circ u$ definido acima é um polinômio homogêneo contínuo com $\|t \circ P \circ u\| \leq \|t\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^n$.*

Demonstração. Como $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$, existe $A \in \mathcal{L}(^nE; F)$ de modo que $\widehat{A} = P$. Pela Proposição 2.19, o operador $t \circ A \circ (u, \overset{n}{\ldots}, u)$ é multilinear e contínuo. Vejamos que $(t \circ A \circ (u, \overset{n}{\ldots}, u))^\wedge = t \circ P \circ u$, com efeito, dado $x \in G$,

$$(t \circ P \circ u)(x) = t(P(u(x))) = t(A(u(x), \overset{n}{\ldots}, u(x))) = (t \circ A \circ (u, \overset{n}{\ldots}, u))(x, \overset{n}{\ldots}, x).$$

Logo, $t \circ P \circ u$ é polinômio homogêneo contínuo, e ainda,

$$\begin{aligned}\|t \circ P \circ u\| &= \sup_{x \in B_G} \|(t \circ P \circ u)(x)\| = \sup_{x \in B_G} \|t(P(u(x)))\| \leq \sup_{x \in B_G} \{\|t\| \cdot \|P(u(x))\|\} \\ &\leq \sup_{x \in B_G} \{\|t\| \cdot \|P\| \cdot \|u(x)\|^n\} \leq \sup_{x \in B_G} \{\|t\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^n \cdot \|x\|^n\} = \|t\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^n.\end{aligned}$$

□

Proposição 2.38. *Seja E um espaço normado. Considere $\varphi \in E'$ e defina*

$$P\colon E \longrightarrow E,\ x \longmapsto P(x) = \varphi(x)^{n-1} \cdot x.$$

Então $P \in \mathcal{P}(^nE; E)$.

Demonstração. Aplique a Proposição 2.11 observando que $P = \widehat{A}$, onde

$$A\colon E \times \overset{n}{\cdots} \times E \longrightarrow E,\ (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \longmapsto A(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{n-1}) \cdot x_n.$$

□

Proposição 2.39. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, E, F espaços normados, $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ e G subespaço vetorial de F tal que $P(E) \subset G$. Então, definindo*

$$P'\colon E \longrightarrow G,\ x \longmapsto P'(x) = P(x),$$

temos $P' \in \mathcal{P}(^nE; G)$ e $\|P'\| = \|P\|$.

Demonstração. Como G é subespaço de F, da fórmula de polarização (Proposição 2.16) segue que a imagem de $\check{P}$ está contida em G. Podemos então considerar o operador

$$A\colon E^n \longrightarrow G\ ,\ A(x_1, \ldots, x_n) = \check{P}(x_1, \ldots, x_n).$$

É claro que A é n-linear, contínuo e $\widehat{A} = P'$, de onde segue que $P' \in \mathcal{P}(^nE; G)$. A igualdade das normas é óbvia. □

2.3 Ideais de operadores multilineares

Definição 2.40. Um *ideal de operadores multilineares* ou, simplesmente, um *multi-ideal*, é uma subclasse $\mathcal{M}$ da classe de todos os operadores multilineares contínuos entre espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ tal que para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n, F$ as componentes

$$\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \cap \mathcal{M}$$

satisfazem as seguintes condições:
(1) $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ que contém os operadores n-lineares de tipo finito.
(2) A propriedade de ideal: dados $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ com $j = 1, \ldots, n$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$ para $G_1, \ldots, G_n$ e H espaços de Banach, então $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{M}(G_1, \ldots, G_n; H)$.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times \cdots \times G_n \arrow[d, "u_1", "u_n"'] \arrow[rrd, "t\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n)\in\mathcal{M}"] & & \\
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "A\in\mathcal{M}"] & F \arrow[r, "t"] & H
\end{tikzcd}$$

Para cada n fixo,

$$\mathcal{M}^n := \bigcup_{E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}} \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

é chamado de ideal de operadores n-lineares.

Definição 2.41. Um *ideal normado (respectivamente, quasi-normado) de operadores multilineares* $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ ou, simplesmente, um *multi-ideal normado (quasi-normado)*, é um multi-ideal $\mathcal{M}$ munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que:
(1) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ restrita a $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é uma norma (respectivamente, quasi-norma) para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n, F$ e todo $n \in \mathbb{N}$.
(2) O operador multilinear contínuo de tipo finito $A_n \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $A_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ é tal que $\|A_n\|_{\mathcal{M}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(3) A desigualdade de ideal: se $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ com $j = 1, \ldots, n$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

Ainda, se cada par $(\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é espaço normado completo, então $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é *multi-ideal de Banach* (respectivamente, *quasi-Banach*). Além disso, $\mathcal{M}$ é *multi-ideal fechado* se $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ é multi-ideal de Banach.

De maneira análoga, se $n \in \mathbb{N}$, sob as condições acima, dizemos que $\mathcal{M}^n$ é um *ideal normado* ou *ideal de Banach* (respectivamente, *quasi-normado* ou *quasi-Banach*) de operadores n-lineares.

Observação 2.42. Geralmente, ao invés de usarmos o símbolo $\mathcal{M}^n$ usaremos simplesmente $\mathcal{M}$, mas o contexto deixará claro a que conceito estamos nos referindo.

Proposição 2.43. *Se $\mathcal{M}$ é um multi-ideal, então $\mathcal{M}$ munido com a norma do sup, isto é, $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$, é um multi-ideal normado.*

Demonstração. Verificando os itens:
(I) Como $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ para todos $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços de Banach e $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, então $(\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F), \|\cdot\|)$ é espaço normado.
(II) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Daí,

$$\|A\| = \sup_{\substack{\lambda_j \in B_{\mathbb{K}} \\ 1 \leq j \leq n}} |A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| = \sup_{\substack{\lambda_j \in B_{\mathbb{K}} \\ 1 \leq j \leq n}} |\lambda_1 \cdots \lambda_n| = \sup_{\substack{\lambda_j \in B_{\mathbb{K}} \\ 1 \leq j \leq n}} |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| = 1.$$

(III) Vimos na Proposição 2.19 que se $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \ldots, n$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\| \leq \|t\| \cdot \|A\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

Logo, $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ é multi-ideal normado. □

Proposição 2.44. *Sejam $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$ e $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um muti-ideal normado. Então*
(a) $\|A\| \leq \|A\|_{\mathcal{M}}$ para todo operador $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$.
(b) $\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b\|_{\mathcal{M}} = \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \cdot \|b\|$ para todos $\varphi_1 \in E_1', \ldots, \varphi_n \in E_n'$ e $b \in F$.

Demonstração. Veja [18, Proposição 4.18]. □

Em [12, Theorem 2.2] está enunciado que a segunda desigualdade da Proposição 2.25 vale para todos os operadores multilineares, mesmo os não simétricos. E não se trata de um erro de digitação, pois a demonstração apresentada explicita o tratamento dos operadores não-simétricos. Apresentamos a seguir, como uma contribuição original desta dissertação, uma demonstração de que isso não é verdade, mesmo restringindo aos operadores pertencentes a um multi-ideal, nem com a constante $\frac{n^n}{n!}$ e nem com nenhuma outra constante.

Proposição 2.45. *Sejam $\mathcal{M}$ um multi-ideal, $n \geq 2$, E, F espaços de Banach com $dim(E) \geq 2$ e $F \neq \{0\}$. Então não existe $c > 0$, que poderia depender de $\mathcal{M}$, n, E e F, de modo que $\|A\| \leq c \cdot \|\widehat{A}\|$ para todo $A \in \mathcal{M}(^n E; F)$.*

Demonstração. Como $\dim(E) \geq 2$, então $\dim(E') \geq 2$, e portanto existem $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$ linearmente independentes. Pela Proposição 1.12, $\ker(\varphi_2) \not\subset \ker(\varphi_1)$, o que garante a existência de $y_2 \in \ker(\varphi_2)$ e $y_2 \notin \ker(\varphi_1)$. Tome $z \in F$, $\|z\| = 1$, e $0 \neq \varphi \in E'$. Definindo

$$A \colon E \times \overset{n}{\cdots} \times E \longrightarrow F$$

por

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi(x_3) \cdots \varphi(x_n) - \varphi_1(x_2)\varphi_2(x_1)\varphi(x_3) \cdots \varphi(x_n)) \cdot z,$$

temos $A \in \mathcal{M}(^n E; F)$, pois A é operador multilinear, contínuo e de tipo finito. Veja que o polinômio $\widehat{A}$ associado a A é o polinômio nulo pois $\widehat{A}(x) = A(x, \overset{n}{\ldots}, x) = 0$ para todo $x \in E$, e portanto $\|\widehat{A}\| = 0$. Como $\varphi \neq 0$, existe $y \in E$ tal que $\varphi(y) = 1$; e como $\varphi_2 \neq 0$ (pois é linearmente independente com φ_1), existe $y_1 \notin \ker(\varphi_2)$. De

$$\begin{aligned} A(y_1, y_2, y, \ldots, y) &= (\varphi_1(y_1)\varphi_2(y_2)\varphi(y) \cdots \varphi(y) - \varphi_1(y_2)\varphi_2(y_1)\varphi(y) \cdots \varphi(y)) \cdot z \\ &= -\varphi_1(y_2)\varphi_2(y_1) \cdot z \neq 0, \end{aligned}$$

segue que $A \neq 0$ e, portanto, $\|A\| > 0$. Se existisse uma constante $c = c(n, \mathcal{M}, E, F) > 0$ nas condições do enunciado, teríamos

$$0 < \|A\| \leq c \cdot \|\widehat{A}\| = c \cdot 0 = 0.$$

Essa contradição prova que tal constante não existe. $\square$

Definição 2.46. Um *ideal de funcionais multilineares* é uma subclasse $\mathcal{F}$ da classe de todos os funcionais multilineares contínuos entre espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ tal que para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n$ as componentes

$$\mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) := \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) \cap \mathcal{F}$$

satisfazem as seguinte condições:
(1) $\mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$ que contém os funcionais n-lineares de tipo finito.
(2) A propriedade de ideal: dados $A \in \mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ com $j = 1, \ldots, n$, e $t \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; \mathbb{K})$ para $G_1, \ldots, G_n$ espaços de Banach, então $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{F}(G_1, \ldots, G_n; \mathbb{K})$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo,

$$\mathcal{F}^n := \bigcup_{E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN}} \mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n, \mathbb{K})$$

é chamado de *ideal de funcionais n-lineares.*

Definição 2.47. Um *ideal normado de funcionais multilineares* $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ é um ideal de funcionais multilineares $\mathcal{F}$ munido de uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{F}} \colon \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que:
(1) $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ restrita a $\mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$ é uma norma para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n$ e todo $n \in \mathbb{N}$.
(2) O funcional multilinear contínuo $A_n \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $A_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ é tal que $\|A_n\|_{\mathcal{F}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{K}$.

(3) A desigualdade de ideal: se $A \in \mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ com $j = 1, \ldots, n$, e $t \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; \mathbb{K})$, então

$$\|t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathcal{F}} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{F}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

Ainda, se cada par $(\mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ é espaço normado completo, então $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ é *ideal de Banach de funcionais multilineares.* Além disso, $\mathcal{F}$ é *ideal fechado de funcionais* se $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$ é ideal de Banach de funcionais multilineares.

De maneira análoga, se $n \in \mathbb{N}$, sob as condições acima, dizemos que $\mathcal{F}^n$ é um *ideal normado (Banach, fechado) de funcionais n-lineares.*

Observação 2.48. (i) Geralmente, ao invés de usarmos o símbolo $\mathcal{F}^n$ usaremos simplesmente $\mathcal{F}$, mas o contexto deixará claro a que conceito estamos nos referindo.
(ii) Chamando de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ a restrição de um ideal normado (Banach) de operadores n-lineares $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ às suas componentes que tomam valores em $\mathbb{K}$, então $(\mathcal{M}_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um ideal normado (Banach) de funcionais multilineares.

2.4 Ideais de polinômios homogêneos

Definição 2.49. Um *ideal de polinômios homogêneos* ou, simplesmente, um *ideal de polinômios*, é uma subclasse $\mathcal{Q}$ da classe de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ tal que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach E e F, as componentes

$$\mathcal{Q}(^nE; F) := \mathcal{P}(^nE; F) \cap \mathcal{Q}$$

satisfazem as seguintes condições:
(1) $\mathcal{Q}(^nE; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE; F)$ que contém os polinômios n-homogêneos contínuos de tipo finito.
(2) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{Q}(^nE; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$ para G e H espaços de Banach, então a composição $t \circ P \circ u \in \mathcal{Q}(^nG; H)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo,

$$\mathcal{Q}^n := \bigcup_{E, F \in \mathcal{BAN}} \mathcal{Q}(^nE; F)$$

é chamado de *ideal de polinômios n-homogêneos.*

Definição 2.50. Um *ideal normado (respectivamente, quasi-normado) de polinômios homogêneos* $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é um ideal de polinômios $\mathcal{Q}$ munido de uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \colon \mathcal{Q} \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que:
(1) $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ restrita a $\mathcal{Q}(^nE; F)$ é uma norma (respectivamente, quasi-norma) para quaisquer espaços de Banach E e F e todo $n \in \mathbb{N}$.
(2) O polinômio homogêneo contínuo de tipo tinito $P_n \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $P_n(\lambda) = \lambda^n$ é tal que $\|P_n\|_{\mathcal{Q}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(3) A desigualdade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{Q}(^nE; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}} \leq \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|u\|^n.$$

Mais ainda, se cada par $(\mathcal{Q}(^nE; F), \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é espaço normado completo, então $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é *ideal de Banach de polinômios.* Além disso, $\mathcal{Q}$ é *ideal fechado de polinômios* se $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|)$ é ideal de Banach de polinômios.

De maneira análoga, se $n \in \mathbb{N}$, sob as condições acima, dizemos que $\mathcal{Q}^n$ é um *ideal normado (respectivamente, quasi-normado, Banach, fechado) de polinômios n-homogêneos.*

Observação 2.51. Geralmente, ao invés de usarmos o símbolo $\mathcal{Q}^n$ usaremos simplesmente $\mathcal{Q}$, mas o contexto deixará claro a que conceito estamos nos referindo.

Proposição 2.52. *Se $\mathcal{Q}$ é um ideal de polinômios, então $\mathcal{Q}$ com a norma do sup $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|)$ é ideal normado de polinômios.*

Demonstração. Verificando os itens:
(I) Como $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{P}(^nE;F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach E e F e $\mathcal{Q}(^nE;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE;F)$, então $(\mathcal{Q}(^nE;F), \|\cdot\|)$ é espaço normado.
(II) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $P\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $P(\lambda) = \lambda^n$. Daí,

$$\|P\| = \sup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}} |P(\lambda)| = \sup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}} |\lambda^n| = 1.$$

(III) Vimos na Proposição 2.37 que se $u \in \mathcal{L}(G;E)$, $P \in \mathcal{Q}(^nE;F)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$, então

$$\|t \circ P \circ u\| \leq \|t\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^n.$$

Logo, $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|)$ é ideal normado de polinômios. □

A seguir vamos apresentar dois métodos descritos por Pietsch [16] que geram multi-ideais e ideais de polinômios a partir de ideais de operadores.

Definição 2.53. (O método da fatoração) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, E, F$ espaços de Banach e $\mathcal{I}$ um ideal de operadores.
(a) Dado $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, dizemos que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F)$, ou que A é de tipo $\mathcal{L}(\mathcal{I})$, se existem espaços de Banach $G_1, \ldots, G_n$, operadores $u_j \in \mathcal{I}(E_j; G_j)$ com $j = 1, \ldots, n$, e $B \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$ tais que $A = B \circ (u_1, \ldots, u_n)$.

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "u_1", "u_n"'] & F \\ G_1 \times \cdots \times G_n \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

E ainda, se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado de operadores e $A \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F)$, definimos

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} = \inf \|B\| \cdot \|u_1\|_{\mathcal{I}} \cdots \|u_n\|_{\mathcal{I}},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as possíveis fatorações $A = B \circ (u_1, \ldots, u_n)$ com u_j pertencente a $\mathcal{I}$.
(b) Dado $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$, dizemos que $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}(^nE;F)$, ou que P é de tipo $\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}$, se $\check{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(^nE;F)$. E ainda, se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é ideal normado de operadores e $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}(^nE;F)$, definimos

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}} = \inf \{\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} : \widehat{A} = P \text{ e } A \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(^nE;F)\}.$$

Na próxima definição, I_i denota a aplicação do Corolário 2.21.

Definição 2.54. (O método da linearização) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, E, F$ espaços de Banach e $\mathcal{I}$ um ideal de operadores.
(a) Dado $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, dizemos que $A \in [\mathcal{I}](E_1, \ldots, E_n; F)$, ou que é de tipo $[\mathcal{I}]$, se $I_i(A) \in \mathcal{I}(E_i; \mathcal{L}(E_1, \overset{[i]}{\cdots}, E_n; F))$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Em particular, se $A \in \mathcal{L}(^nE;F)$ e é simétrico, $A \in [\mathcal{I}](^nE;F)$ se $I(A) \in \mathcal{I}(E; \mathcal{L}(^{n-1}E;F))$. E ainda, se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é ideal normado de operadores e $A \in [\mathcal{I}](E_1, \ldots, E_n; F)$, definimos

$$\|A\|_{[\mathcal{I}]} = \max \{\|I_1(A)\|_{\mathcal{I}}, \ldots, \|I_n(A)\|_{\mathcal{I}}\}.$$

(b) Dado $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$, dizemos que $P \in \mathcal{P}_{[\mathcal{I}]}(^nE;F)$ ou que P é de tipo $P_{[\mathcal{I}]}$ se $\check{P} \in [\mathcal{I}](^nE;F)$, isto é, se $I(\check{P}) \in \mathcal{I}(E;\mathcal{L}(^{n-1}E;F))$. E ainda, se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é ideal normado de operadores e $P \in \mathcal{P}_{[\mathcal{I}]}(^nE;F)$, definimos

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{[\mathcal{I}]}} = \|\check{P}\|_{[\mathcal{I}]} = \|I(\check{P})\|_{\mathcal{I}}.$$

Proposição 2.55. *Seja $\mathcal{I}$ um multi-ideal de operadores.*
(a) $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ e $[\mathcal{I}]$ são multi-ideais e $\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}$ e $\mathcal{P}_{[\mathcal{I}]}$ são ideais de polinômios homogêneos.
(b) $\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \subset \mathcal{P}_{[\mathcal{I}]}$.
(c) Se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado de operadores, então, para todo $n \in \mathbb{N}$ e E, F espaços de Banach, as componentes $\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}(^nE;F)$ e $\mathcal{P}_{[\mathcal{I}]}(^nE;F)$ são subespaços fechados de $\mathcal{P}(^nE;F)$.
(d) Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é ideal normado de operadores, então $(\mathcal{L}(\mathcal{I}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})})$ (resp. $(\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}})$) é um multi-ideal quasi-normado (resp. ideal quasi-normado de polinômios homogêneos) e $([\mathcal{I}], \|\cdot\|_{[\mathcal{I}]})$ (resp. $(\mathcal{P}_{[\mathcal{I}]}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{[\mathcal{I}]}})$) é multi-ideal normado (resp. ideal normado de polinômios homogêneos).

Demonstração. Veja [4]. □

Proposição 2.56. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, E, F espaços de Banach e $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal normado de polinômios.*
(a) $\|P\| \leq \|P\|_{\mathcal{Q}}$ para todo $P \in \mathcal{Q}(^nE;F)$.
(b) $\|\varphi^n \otimes b\|_{\mathcal{Q}} = \|\varphi\|^n \cdot \|b\|$ para todos $\varphi \in E'$ e $b \in F$.

Demonstração. (a) Sejam $P \in \mathcal{Q}(^nE;F)$, $x \in B_E$ e $\varphi \in B_{F'}$. Consideremos as aplicações

$$P_0 \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ \lambda \longmapsto P_0(\lambda) = \lambda^n,$$

e

$$\varphi \circ P \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes x) \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ \lambda \longmapsto (\varphi \circ P \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes x))(\lambda) = \varphi(P(\lambda x)).$$

Provemos que

$$\varphi \circ P \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes x) = \varphi(P(x))P_0.$$

Com efeito, dado $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\varphi(P(x))P_0)(\lambda) = \varphi(P(x))P_0(\lambda) = \varphi(P(x))\lambda^n = \varphi(\lambda^n P(x)) = \varphi(P(\lambda x)) = (\varphi \circ P \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes x))(\lambda).$$

Agora, observe que,

$$\begin{aligned} |\varphi(P(x))| &= |\varphi(P(x))| \cdot \|P_0\|_{\mathcal{Q}} = \|\varphi(P(x))P_0\|_{\mathcal{Q}} = \|\varphi \circ P \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes x)\|_{\mathcal{Q}} \\ &\leq \|\varphi\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|id_{\mathbb{K}} \otimes x\| = \|\varphi\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|x\| \leq \|P\|_{\mathcal{Q}}. \end{aligned}$$

Segue que $|\varphi(P(x))| \leq \|P\|_{\mathcal{Q}}$ para quaisquer $x \in B_E$ e $\varphi \in B_{F'}$. Daí, e pelo Teorema de Hahn-Banach na forma da Proposição 1.22,

$$\|P\| = \sup_{x \in B_E} \|P(x)\| = \sup_{x \in B_E} \sup_{\varphi \in B_{F'}} |\varphi(P(x))| \leq \|P\|_{\mathcal{Q}}.$$

(b) Dados $\varphi \in E'$ e $b \in F$, considere o polinômio homogêneo contínuo de tipo finito

$$\varphi^n \otimes b \colon E \longrightarrow F,\ x \longmapsto (\varphi^n \otimes b)(x) = \varphi(x)^n \cdot b.$$

Como $\varphi^n \otimes b \in \mathcal{Q}(^nE;F)$, usando o item (a) temos

$$\|\varphi^n \otimes b\| = \|\varphi\|^n \cdot \|b\| \leq \|\varphi^n \otimes b\|_{\mathcal{Q}}.$$

Por outo lado, sendo $P_0\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ como na demonstração do item (a), vejamos que

$$\varphi^n \otimes b = (id_{\mathbb{K}} \otimes b) \circ P_0 \circ \varphi.$$

De fato, dado $x \in E$,

$$((id_{\mathbb{K}} \otimes b) \circ P_0 \circ \varphi)(x) = (id_{\mathbb{K}} \otimes b)(P_0(\varphi(x))) = (id_{\mathbb{K}} \otimes b)(\varphi(x)^n) = \varphi(x)^n \cdot b = (\varphi^n \otimes b)(x).$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^n \cdot \|b\| = \|\varphi^n \otimes b\| \leq \|\varphi^n \otimes b\|_{\mathcal{Q}} &= \|(id_{\mathbb{K}} \otimes b) \circ P_0 \circ \varphi\|_{\mathcal{Q}} \\ \leq \|id_{\mathbb{K}} \otimes b\| \cdot \|P_0\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|\varphi\|^n &= \|\varphi\|^n \cdot \|b\|, \end{aligned}$$

provando (b). $\square$

Veremos, nos próximos dois resultados, como gerar ideais de polinômios a partir de um multi-ideal dado.

Proposição 2.57. *Seja $\mathcal{M}$ um multi-ideal.*
(a) A classe de polinômios definida por $\widetilde{\mathcal{M}} := \{P : \check{P} \in \mathcal{M}\}$ é um ideal de polinômios.
(b) Se $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um multi-ideal normado, então $(\widetilde{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{M}}})$ é ideal normado de polinômios, onde $\|P\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} := \|\check{P}\|_{\mathcal{M}}$ para todo $P \in \widetilde{\mathcal{M}}$.
(c) Se $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é multi-ideal de Banach, então $(\widetilde{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{M}}})$ é ideal de Banach de polinômios.
(d) Se $\mathcal{M}$ é multi-ideal fechado, então $\widetilde{\mathcal{M}}$ é ideal fechado de polinômios.

Demonstração. (a) Verificando os itens:
(I) Dados $n \in \mathbb{N}$, E, F espaços de Banach, então a componente $\widetilde{\mathcal{M}}(^nE;F) = \mathcal{P}(^nE;F) \cap \widetilde{\mathcal{M}}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE;F)$, com efeito:
(i) Sendo 0_1 o polinômio nulo e 0_2 o operador multilinear nulo, então $0_1 \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE;F)$ pois $0_2 \in \mathcal{M}(^nE;F)$ é simétrico e $\widehat{0_2} = 0_1$.
(ii) Sejam $P_1, P_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE;F)$. Então $\check{P}_1, \check{P}_2 \in \mathcal{M}(^nE;F)$ e, daí,

$$(P_1 + P_2)^\vee = \check{P}_1 + \check{P}_2 \in \mathcal{M}(^nE;F),$$

pois a correspondência $\mathcal{L}^s(^nE;F) \longrightarrow \mathcal{P}(^nE;F)$ é isomorfismo topológico. Logo, $P_1 + P_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE;F)$.
(iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $P \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE;F)$. Então $\check{P} \in \mathcal{M}(^nE;F)$ e, daí,

$$(\lambda P)^\vee = \lambda \check{P} \in \mathcal{M}(^nE;F).$$

Logo, $\lambda P \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE;F)$ e, com isso, $\widetilde{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é subespaço de $\mathcal{P}(^nE;F)$.
(II) Sejam $\varphi \in E'$ e $b \in F$. Vamos mostrar que o polinômio

$$\varphi^n \otimes b\colon E \longrightarrow F,\ x \longmapsto (\varphi^n \otimes b)(x) = \varphi(x)^n \cdot b$$

pertence a $\widetilde{\mathcal{M}}(^nE;F)$. Com efeito, o operador multilinear contínuo

$$\varphi \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes \varphi \otimes b\colon E^n \longrightarrow F,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (\varphi \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes \varphi \otimes b)(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \cdot b$$

é simétrico, de tipo finito e $(\varphi \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes \varphi \otimes b)^\wedge = \varphi^n \otimes b$. Com isso, $\varphi^n \otimes b \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE;F)$, e, como $\widetilde{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é subespaço vetorial, temos que $\widetilde{\mathcal{M}}(^nE;F)$ contém os polinômios homogêneos contínuos de tipo finito.

(III) Sejam G, H espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Vamos provar que $(t \circ P \circ u)^\vee = t \circ \check{P} \circ (u, \overset{n}{\dots}, u)$. Para isso tome $x^n = (x, \overset{n}{\dots}, x) \in G^n$ e veja que

$$\begin{aligned}(t \circ P \circ u)^\vee(x, \overset{n}{\dots}, x) &= (t \circ P \circ u)^\vee x^n = (t \circ P \circ u)(x) = t(P(u(x))) \\ &= t(\check{P}u(x)^n) = t(\check{P}(u(x), \overset{n}{\dots}, u(x))) = (t \circ \check{P} \circ (u, \overset{n}{\dots}, u))(x, \overset{n}{\dots}, x),\end{aligned}$$

mostrando que $(t \circ P \circ u)^\vee$ e $t \circ \check{P} \circ (u, \overset{n}{\dots}, u)$ coincidem nos elementos da diagonal de G^n. Como $t \circ \check{P} \circ (u, \overset{n}{\dots}, u)$ é simétrico, do Corolário 2.17 segue que $(t \circ P \circ u)^\vee = t \circ \check{P} \circ (u, \overset{n}{\dots}, u) \in \mathcal{M}(^nG; H)$. Portanto, $t \circ P \circ u \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nG; H)$, provando a propriedade de ideal. Está provado que $\widetilde{\mathcal{M}}$ é ideal de polinômios.

(b) Pelo item (a) já sabemos que $\widetilde{\mathcal{M}}$ é ideal de polinômios. Verifiquemos os outros itens.
(I) $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{M}}}$ é uma norma em $\widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F)$.
(i) Dado $P \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F)$, obviamente $\|P\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} = \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \geq 0$. Temos $\|0_1\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} = \|0_2\|_{\mathcal{M}} = 0$. Tomando $P \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F)$ tal que $\|P\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} = 0$, temos $\|\check{P}\|_{\mathcal{M}} = 0$ e $\check{P} = 0_2$, logo $P = 0_1$.
(ii) Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $P \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F)$,

$$\|\lambda P\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} = \|(\lambda P)^\vee\|_{\mathcal{M}} = \|\lambda \check{P}\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \cdot \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \cdot \|P\|_{\mathcal{M}}.$$

(iii) Dados $P_1, P_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F)$,

$$\|P_1 + P_2\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} = \|(P_1 + P_2)^\vee\|_{\mathcal{M}} = \|\check{P}_1 + \check{P}_2\|_{\mathcal{M}} \leq \|\check{P}_1\|_{\mathcal{M}} + \|\check{P}_2\|_{\mathcal{M}} = \|P_1\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} + \|P_2\|_{\widetilde{\mathcal{M}}}.$$

Logo, $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{M}}}$ é uma norma em $\widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F)$.
(II) Definindo o polinômio homogêneo contínuo $P_n \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $P_n(\lambda) = \lambda^n$, veja que o operador multilinear $A \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ é contínuo, simétrico e $\widehat{A} = P_n$. Segue que $\check{P} = A$, e daí,

$$\|P\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} = \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{\mathcal{M}} = 1.$$

(III) Dados G, H espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$,

$$\begin{aligned}\|t \circ P \circ u\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} &= \|(t \circ P \circ u)^\vee\|_{\mathcal{M}} = \|t \circ \check{P} \circ (u, \overset{n}{\dots}, u)\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|t\| \cdot \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \cdot \|u\| \overset{n}{\cdots} \|u\| = \|t\| \cdot \|P\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} \cdot \|u\|^n.\end{aligned}$$

Portanto, $(\widetilde{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{M}}})$ é um ideal normado de polinômios homogêneos.

(c) Considerando a componente $\widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F) \subset \mathcal{P}(^nE; F)$, vamos mostrar que $(\widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F), \|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{M}}})$ é espaço normado completo sempre que $(\mathcal{M}(^nE; F), \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ for completo. Para isso seja $(P_j)_{j=1}^\infty \subset \widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F)$ uma sequência de Cauchy, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\check{P}_m - \check{P}_n\|_{\mathcal{M}} = \|(P_m - P_n)^\vee\|_{\mathcal{M}} = \|P_m - P_n\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} < \varepsilon \text{ sempre que } m, n \geq n_0.$$

Portanto, $(\check{P}_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}(^nE; F)$ é de Cauchy e, logo, convergente, digamos $\check{P}_j \xrightarrow{j} A \in \mathcal{M}(^nE; F)$ na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$. Pela Proposição 2.44, $\check{P}_j \xrightarrow{j} A$ em $(\mathcal{L}(^nE; F), \|\cdot\|)$. Como $(\check{P}_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{L}^s(^nE; F)$ e $\mathcal{L}^s(^nE; F)$ é Banach (Proposição 2.31), segue que $A \in \mathcal{L}^s(^nE; F)$. Com isso, podemos nos perguntar se $(P_j)_{j=1}^\infty$ converge para $\widehat{A} \in \widetilde{\mathcal{M}}(^nE; F)$ na norma $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{M}}}$. E isto de fato ocorre:

$$\|P_j - \widehat{A}\|_{\widetilde{\mathcal{M}}} = \|(P_j - \widehat{A})^\vee\|_{\mathcal{M}} = \|\check{P}_j - A\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{j} 0.$$

Portanto, a sequência $(P_j)_{j=1}^{\infty} \subset \breve{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é convergente e o espaço $(\breve{\mathcal{M}}(^nE;F), \|\cdot\|_{\breve{\mathcal{M}}})$ é Banach, o que implica que $(\breve{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\breve{\mathcal{M}}})$ é ideal de Banach de polinômios.

(d) Se $\mathcal{M}$ é multi-ideal fechado, por definição $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ é multi-ideal de Banach. Pelo item (c), $(\breve{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_1)$ é ideal de Banach de polinômios onde $\|P\|_1 = \|\check{P}\|$ para todo $P \in \breve{\mathcal{M}}$. Pela Proposição 2.52, $(\breve{\mathcal{M}}, \|\cdot\|)$ é ideal normado de polinômios. Como $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em $\mathcal{P}(^nE;F)$ (Proposição 2.25), também o são em $\breve{\mathcal{M}}(^nE;F)$. Segue que $(\breve{\mathcal{M}}, \|\cdot\|)$ é ideal de Banach de polinômios, isto é, $\breve{\mathcal{M}}$ é ideal fechado de polinômios. $\square$

Proposição 2.58. *Seja $\mathcal{M}$ um multi-ideal.*
(a) A classe de polinômios definida por $\widehat{\mathcal{M}} := \{\widehat{A} : A \in \mathcal{M}\}$ é um ideal de polinômios.
(b) Se $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um multi-ideal normado, então $(\widehat{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}})$ é ideal normado de polinômios, onde $\|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}} := \inf\{\|A\|_{\mathcal{M}} : \widehat{A} = P \text{ e } A \in \mathcal{M}\}$ para todo $P \in \widehat{\mathcal{M}}$.
(c) Se $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é multi-ideal de Banach, então $(\widehat{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}})$ é ideal de Banach de polinômios.

Demonstração. (a) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e E, F espaços de Banach.
(I) A componente $\widehat{\mathcal{M}}(^nE;F) := \mathcal{P}(^nE;F) \cap \widehat{\mathcal{M}}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE;F)$, com efeito:
(i) Chamando de 0_1 o polinômio nulo e de 0_2 o operador multilinear nulo, temos que $0_1 \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$ pois $0_2 \in \mathcal{M}(^nE;F)$ e $\widehat{0_2} = 0_1$.
(ii) Considere $P_1, P_2 \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$. Daí, existem $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(^nE;F)$ satisfazendo $\widehat{A_1} = P_1$ e $\widehat{A_2} = P_2$. Logo,

$$P_1 + P_2 = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = (A_1 + A_2)^\wedge \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F),$$

pois a correspondência $A \longmapsto \widehat{A}$ é linear e $A_1 + A_2 \in \mathcal{M}(^nE;F)$.
(iii) Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $P \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$, existe $A \in \mathcal{M}(^nE;F)$ de modo que $\widehat{A} = P$. Daí,

$$\lambda P = \lambda \widehat{A} = (\lambda A)^\wedge \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F),$$

pois $\lambda A \in \mathcal{M}(^nE;F)$ e a correspondência $A \longmapsto \widehat{A}$ é linear. Portanto, $\widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é subespaço de $\mathcal{P}(^nE;F)$.
(II) Dados $\varphi \in E'$ e $b \in F$, definimos

$$\varphi^n \otimes b \colon E \longrightarrow F,\ x \longmapsto (\varphi^n \otimes b)(x) = \varphi(x)^n \cdot b.$$

O operador

$$A := \varphi \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes \varphi \otimes b \colon E^n \longrightarrow F,\ (\varphi \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes \varphi \otimes b)(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \cdot b,$$

é multilinear, contínuo e de tipo finito, logo, $A \in \mathcal{M}(^nE;F)$ e, ainda, $\widehat{A} = \varphi^n \otimes b$. Com isso, $\varphi^n \otimes b \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$ e, como $\widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é subespaço vetorial, segue que $\widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$ contém os polinômios homogêneos contínuos de tipo finito.
(III) Agora, para a propriedade de ideal, sejam G, H espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(G;E)$, $P \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$. Daí, existe $A \in \mathcal{M}(^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$. Pela Proposição 2.37,

$$t \circ P \circ u = t \circ \widehat{A} \circ u = (t \circ A \circ (u, \overset{n}{\ldots}, u))^\wedge,$$

e pela propriedade de ideal de $\mathcal{M}$, $t \circ A \circ (u, \overset{n}{\ldots}, u) \in \mathcal{M}(^nG;H)$. Portanto, $t \circ P \circ u \in \widehat{\mathcal{M}}(^nG;H)$.

(b) Verifiquemos os itens.
(I) A função $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}}$ é uma norma em $\widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$, de fato:
(i) Dado $P \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$, obviamente $\|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}} \geq 0$. Como $0_2 \in \mathcal{M}(^nE;F)$ e $\widehat{0_2} = 0_1$, então $\|0_1\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = 0$, pois $\|0_2\|_{\mathcal{M}} = 0$. Seja $P \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$ tal que $\|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = 0$. Pela propriedade de

ínfimo, existe uma sequência $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(^nE;F)$ satisfazendo $\widehat{A_j} = P$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\|A_j\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{j} 0$. Como $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ é uma norma, temos $A_j \xrightarrow{j} 0_2$ em $(\mathcal{M}(^nE;F), \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$. Logo, $A_j \xrightarrow{j} 0_2$ em $(\mathcal{L}(^nE;F), \|\cdot\|)$, visto que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}}$. Daí,

$$\widehat{A_j} = P \xrightarrow{j} \widehat{0_2} = 0_1,$$

pois a correspondência $A \in (\mathcal{L}(^nE;F), \|\cdot\|) \longmapsto \widehat{A} \in (\mathcal{P}(^nE;F), \|\cdot\|)$ é contínua (Proposição 2.25). Segue que $P = 0_1$.

(ii) Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $P \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$. Então $\lambda P \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$, e ainda,

$$\begin{aligned}
\|\lambda P\|_{\widehat{\mathcal{M}}} &= \inf\left\{\|B\|_{\mathcal{M}} : \widehat{B} = \lambda P \text{ e } B \in \mathcal{M}(^nE;F)\right\} \\
&= \inf\left\{\left\|\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot B\right\|_{\mathcal{M}} : \left(\frac{1}{\lambda} \cdot B\right)^{\wedge} = P \text{ e } \frac{1}{\lambda} \cdot B \in \mathcal{M}(^nE;F)\right\} \\
&= |\lambda| \cdot \inf\left\{\left\|\frac{1}{\lambda} \cdot B\right\|_{\mathcal{M}} : \left(\frac{1}{\lambda} \cdot B\right)^{\wedge} = P \text{ e } \frac{1}{\lambda} \cdot B \in \mathcal{M}(^nE;F)\right\} = |\lambda| \cdot \|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}},
\end{aligned}$$

para $\lambda \neq 0$. Se $\lambda = 0$, então $\|0 \cdot P\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = \|0_1\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = 0 = 0 \cdot \|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}}$.

(iii) Sejam $P_1, P_2 \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$. Sabemos que $P_1 + P_2 \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$, e ainda,

$$\begin{aligned}
\|P_1 + P_2\|_{\widehat{\mathcal{M}}} &= \inf\{\|B\|_{\mathcal{M}} : \widehat{B} = P_1 + P_2 \text{ e } B \in \mathcal{M}(^nE;F)\} \\
&\leq \inf\{\|A_1 + A_2\|_{\mathcal{M}} : \widehat{A_1} = P_1,\ \widehat{A_2} = P_2 \text{ e } A_1, A_2 \in \mathcal{M}(^nE;F)\} \\
&\leq \inf\{\|A_1\|_{\mathcal{M}} + \|A_2\|_{\mathcal{M}} : \widehat{A_1} = P_1,\ \widehat{A_2} = P_2 \text{ e } A_1, A_2 \in \mathcal{M}(^nE;F)\} \\
&= \inf\{\|A_1\|_{\mathcal{M}} : \widehat{A_1} = P_1 \text{ e } A_1 \in \mathcal{M}(^nE;F)\} + \\
&\quad + \inf\{\|A_2\|_{\mathcal{M}} : \widehat{A_2} = P_2 \text{ e } A_2 \in \mathcal{M}(^nE;F)\} = \|P_1\|_{\widehat{\mathcal{M}}} + \|P_2\|_{\widehat{\mathcal{M}}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\widehat{\mathcal{M}}(^nE;F), \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}})$ é espaço normado.

(II) Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$P \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ \lambda \longmapsto P(\lambda) = \lambda^n.$$

Então $P \in \widehat{\mathcal{M}}(^n\mathbb{K};\mathbb{K})$, pois é de tipo finito e, por definição,

$$\|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = \inf\{\|A\|_{\mathcal{M}} : \widehat{A} = P \text{ e } A \in \mathcal{M}(^n\mathbb{K};\mathbb{K})\}.$$

Verifiquemos que $\|A\|_{\mathcal{M}} \geq 1$ para todo $A \in \mathcal{M}(^n\mathbb{K};\mathbb{K})$ tal que $\widehat{A} = P$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \inf\{c \geq 0 : |A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| \leq c \cdot |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| \text{ para todo } \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ com } j = 1, \ldots, n\} \\
&\geq \inf\{c \geq 0 : |A(\lambda, \overset{n}{\ldots}, \lambda)| \leq c \cdot |\lambda|^n,\ \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } \lambda \neq 0\} \\
&= \inf\{c \geq 0 : |\lambda^n \cdot A(1, \overset{n}{\ldots}, 1)| \leq c \cdot |\lambda|^n,\ \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } \lambda \neq 0\} \\
&= \inf\{c \geq 0 : |A(1, \overset{n}{\ldots}, 1)| \leq c\} = \inf\{c \geq 0 : |P(1)| \leq c\} = \inf\{c \geq 0 : 1 \leq c\} = 1,
\end{aligned}$$

logo, $\|A\|_{\mathcal{M}} \geq \|A\| \geq 1$. Considerando,

$$A \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

então $A \in \mathcal{M}(^n\mathbb{K};\mathbb{K})$, $\widehat{A} = P$ e $\|A\|_{\mathcal{M}} = 1$. Portanto, $\|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = 1$.

(III) Para a desigualdade de ideal, sejam G, H espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(G;E)$, $P \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$. Sabemos que $t \circ P \circ u \in \widehat{\mathcal{M}}(^nG;H)$, e ainda,

$$\|t \circ P \circ u\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = \inf\{\|B\|_{\mathcal{M}} : \widehat{B} = t \circ P \circ u \text{ e } B \in \mathcal{M}(^nG;H)\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \inf\{\|t \circ A \circ (u, \overset{n}{\ldots}, u)\|_{\mathcal{M}} : \widehat{A} = P \text{ e } A \in \mathcal{M}(^nE;F)\}\\
&\leq \inf\{\|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} \cdot \|u\|^n : \widehat{A} = P \text{ e } A \in \mathcal{M}(^nE;F)\}\\
&= \|t\| \cdot \|u\|^n \cdot \inf\{\|A\|_{\mathcal{M}} : \widehat{A} = P \text{ e } A \in \mathcal{M}(^nE;F)\}\\
&= \|t\| \cdot \|u\|^n \cdot \|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = \|t\| \cdot \|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}} \cdot \|u\|^n.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\widehat{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}})$ é ideal normado de polinômios.

(c) Pelo item (b) já sabemos que $(\widehat{\mathcal{M}}(^nE;F), \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}})$ é espaço normado e para verificar que também é completo quando $(\mathcal{M}(^nE;F), \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é completo, pela Proposição 1.25 basta verificar que toda série absolutamente convergente é convergente. Dados $(P_j)_{j=1}^{\infty} \subset \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$ satisfazendo $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|P_j\|_{\widehat{\mathcal{M}}} < +\infty$ e $\varepsilon > 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $A_j \in \mathcal{M}(^nE;F)$ tal que $\widehat{A_j} = P_j$ e $\|A_j\|_{\mathcal{M}} \leq (1+\varepsilon) \cdot \|P_j\|_{\widehat{\mathcal{M}}}$, donde

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{M}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} (1+\varepsilon) \cdot \|P_j\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = (1+\varepsilon) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j\|_{\widehat{\mathcal{M}}} < +\infty.$$

Novamente pela Proposição 1.25, $A := \sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}(^nE;F)$ e afirmamos que $\widehat{A} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j$. Com efeito, como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ e $\left\|\sum\limits_{k=1}^{j} A_k - A\right\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{j} 0$, então $\left\|\sum\limits_{k=1}^{j} A_k - A\right\| \xrightarrow{j} 0$ e

$$\widehat{A} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right)^{\wedge} = \left(\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} A_k\right)^{\wedge} = \lim_{j\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{j} A_k\right)^{\wedge} = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \widehat{A_k} = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} P_k = \sum_{j=1}^{\infty} P_j,$$

pois a correspondência $A \in \mathcal{L}(^nE;F) \longmapsto \widehat{A} \in \mathcal{P}(^nE;F)$ é contínua e linear. Logo, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j \in \widehat{\mathcal{M}}(^nE;F)$, como queríamos. □

Observação 2.59. Pelo resultado obtido na Proposição 2.57 é natural também perguntar se $\mathcal{M}$ fechado implica em $\widehat{\mathcal{M}}$ fechado, e, por incrível que pareça, para essa pergunta não temos uma resposta, seja ela afirmativa ou negativa. Apesar de ser uma pergunta muito natural, ainda permanece como um problema em aberto.

Vimos que dado um multi-ideal $\mathcal{M}$ podemos construir dois ideais de polinômios, $\widetilde{\mathcal{M}}$ e $\widehat{\mathcal{M}}$. Como pode ser visto em [9], existe uma situação em que esses dois ideais coincidem. Para apresentarmos em qual condição isto ocorre, vamos construir em detalhes o que pode ser encontrado no artigo citado.

Proposição 2.60. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach. Definindo para cada $j = 1, \ldots, n$,*

$$Q_j\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_j,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto Q_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j,$$

e

$$I_j\colon E_j \longrightarrow E_1 \times \cdots \times E_n,\ x_j \longmapsto I_j(x_j) = (0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0),$$

então Q_j e I_j são lineares e contínuas.

Demonstração. A demonstração é imediata. □

Proposição 2.61. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach, $Q_1, \dots, Q_n$ e $I_1, \dots, I_n$ como na proposição anterior.*
(a) A aplicação

$$\begin{aligned} Q_{E_1,\dots,E_n;F} \colon \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) &\longrightarrow \mathcal{L}^s({}^n(E_1 \times \cdots \times E_n); F) \\ A &\longmapsto Q_{E_1,\dots,E_n;F}(A) = \sqrt{n!} \cdot [A \circ (Q_1, \dots, Q_n)]^s \end{aligned}$$

dada por

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{n!} \cdot [A \circ (Q_1, \dots, Q_n)]^s\right)((x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, (x_1^n, \dots, x_n^n)) \\ &\qquad = \sqrt{n!} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} A \circ (Q_1, \dots, Q_n)((x_1^1, \dots, x_n^1)_\sigma, \dots, (x_1^n, \dots, x_n^n)_\sigma) \end{aligned}$$

para todos $(x_1^j, \dots, x_n^j) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ com $j = 1, \dots, n$, onde $(x_1^j, \dots, x_n^j)_\sigma$ é a n-upla resultante da ação da permutação $\sigma \in S_n$ nas n-posições da n-upla $(x_1^j, \dots, x_n^j)$, está bem definida.
(b) O operador

$$\begin{aligned} I_{E_1,\dots,E_n;F} \colon \mathcal{L}^s({}^n(E_1 \times \cdots \times E_n); F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \\ B &\longmapsto I_{E_1,\dots,E_n;F}(B) = \sqrt{n!} \cdot [B \circ (I_1, \dots, I_n)], \end{aligned}$$

dado por

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{n!} \cdot [B \circ (I_1, \dots, I_n)]\right)(x_1, \dots, x_n) &= \sqrt{n!} \cdot B(I_1(x_1), \dots, I_n(x_n)) \\ &= \sqrt{n!} \cdot B((x_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, x_n)) \end{aligned}$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, está bem definido.
(c) Para todo $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$,

$$I_{E_1,\dots,E_n;F} \circ Q_{E_1,\dots,E_n;F}(A) = A.$$

Demonstração. (a) Dado $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, então

$$A \circ (Q_1, \dots, Q_n) \in \mathcal{L}({}^n(E_1 \times \cdots \times E_n); F),$$

e tomando a sua simetrização temos

$$[A \circ (Q_1, \dots, Q_n)]^s \in \mathcal{L}^s({}^n(E_1 \times \cdots \times E_n); F),$$

portanto, $Q_{E_1,\dots,E_n;F}$ está bem definido.

(b) Dado $B \in \mathcal{L}^s({}^n(E_1 \times \cdots \times E_n); F)$, obviamente $B \circ (I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, logo, $I_{E_1,\dots,E_n;F}$ está bem definido.

(c) Dado $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, para todo $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ temos

$$\begin{aligned} &(I_{E_1,\dots,E_n;F} \circ Q_{E_1,\dots,E_n;F}(A))(x_1, \dots, x_n) \\ &\qquad = (I_{E_1,\dots,E_n;F}(Q_{E_1,\dots,E_n;F}(A)))(x_1, \dots, x_n) \\ &\qquad = \left(I_{E_1,\dots,E_n;F}\left(\sqrt{n!}(A \circ (Q_1, \dots, Q_n))\right)^s\right)(x_1, \dots, x_n) \\ &\qquad = \left(\sqrt{n!} \cdot \sqrt{n!}(A \circ (Q_1, \dots, Q_n))^s \circ (I_1, \dots, I_n)\right)(x_1, \dots, x_n) \\ &\qquad = (n!(A \circ (Q_1, \dots, Q_n))^s)(I_1(x_1), \dots, I_n(x_n)) \end{aligned}$$

$$= (n!(A\circ(Q_1,\dots,Q_n))^s)((x_1,0,\dots,0),(0,x_2,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,x_n))$$
$$= n!\left(\frac{1}{n!}\cdot\sum_{\sigma\in S_n} A\circ(Q_1,\dots,Q_n)((x_1,0,\dots,0)_\sigma,\dots,(0,\dots,0,x_n)_\sigma)\right)$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n} A\circ(Q_1,\dots,Q_n)((x_1,0,\dots,0)_\sigma,\dots,(0,\dots,0,x_n)_\sigma) = A(x_1,\dots,x_n),$$

pois $Q_j((0,\dots,0,x_j,0,\dots,0)_\sigma) = 0$ se $\sigma(j)\neq j$ para todo $j=1,\dots,n$, logo, a única permutação $\sigma\in S_n$ que sobra na somatória é a identidade, visto que $A(z_1,\dots,z_n)=0$ se algum $z_j=0$. O resultado segue. $\square$

Definição 2.62. Sejam $n\in\mathbb{N}$, $E_1,\dots,E_n,F$ espaços de Banach e $\sigma\in S_n$. Definimos

$$\Phi_\sigma\colon \mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;F)\longrightarrow\mathcal{L}(E_{\sigma(1)},\dots,E_{\sigma(n)};F),\ \Phi_\sigma(A)(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = A(x_1,\dots,x_n).$$

Um *multi-ideal* $\mathcal{M}$ é chamado *simétrico* se $\Phi_\sigma(A)\in\mathcal{M}$ para toda $\sigma\in S_n$ sempre que $A\in\mathcal{M}$.

No próximo resultado temos $E_1=\cdots=E_n=E_{\sigma(1)}=\cdots=E_{\sigma(n)}=E$, sendo a diferenciação do mesmo espaço necessária pela permutação da ordem em que os elementos associados a ele aparecem.

Proposição 2.63. *Seja $\mathcal{M}$ um multi-ideal. São equivalentes:*
(a) $\mathcal{M}$ é simétrico.
(b) Se $A\in\mathcal{M}$, então $A^s\in\mathcal{M}$.
(c) $\widecheck{\mathcal{M}}=\widehat{\mathcal{M}}$.

Demonstração. (a) $\Longrightarrow$ (b) Sejam $n\in\mathbb{N}$, E,F espaços de Banach e $A\in\mathcal{M}(^nE;F)$. Por hipótese, $\Phi_\sigma(A)\in\mathcal{M}(^nE;F)$ para toda $\sigma\in S_n$, daí

$$A^s = \frac{1}{n!}\cdot\sum_{\sigma\in S_n}\Phi_\sigma(A)\in\mathcal{M}(^nE;F).$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) Sejam $n\in\mathbb{N}$, E,F espaços de Banach e $\sigma\in S_n$. Definindo

$$V_\sigma\colon E_{\sigma(1)}\times\cdots\times E_{\sigma(n)}\longrightarrow E_1\times\cdots\times E_n,\ (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})\longmapsto V_\sigma(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = (x_1,\dots,x_n),$$

então V_σ é linear e isometria, logo, contínuo. Vejamos que se $B\in\mathcal{L}^s(^n(E_1\times\cdots\times E_n);F)$, então

$$\Phi_\sigma\circ I_{E_1,\dots,E_n;F}(B) = I_{E_{\sigma(1)},\dots,E_{\sigma(n)};F}(B\circ(V_\sigma,\dots,V_\sigma)).$$

De fato,

$$(I_{E_{\sigma(1)},\dots,E_{\sigma(n)};F}(B\circ(V_\sigma,\dots,V_\sigma)))(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$$
$$= \left(\sqrt{n!}\cdot B\circ(V_\sigma,\dots,V_\sigma)\circ(I_{\sigma(1)},\dots,I_{\sigma(n)})\right)(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$$
$$= \left(\sqrt{n!}\cdot B\circ(V_\sigma\circ I_{\sigma(1)},\dots,V_\sigma\circ I_{\sigma(n)})\right)(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$$
$$= \sqrt{n!}\cdot B(V_\sigma\circ I_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}),\dots,V_\sigma\circ I_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})) \overset{(*)}{=} \sqrt{n!}\cdot B(I_1(x_1),\dots,I_n(x_n))$$
$$= \left(\sqrt{n!}\cdot B\circ(I_1,\dots,I_n)\right)(x_1,\dots,x_n) = (I_{E_1,\dots,E_n;F}(B))(x_1,\dots,x_n)$$
$$= (\Phi_\sigma(I_{E_1,\dots,E_n;F}(B)))(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = (\Phi_\sigma\circ(I_{E_1,\dots,E_n;F})(B))(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}),$$

para todo $(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})\in E_{\sigma(1)}\times\cdots\times E_{\sigma(n)}$, onde (*) segue da simetria de B. Logo,

$$\Phi_\sigma\circ I_{E_1,\dots,E_n;F}(B) = I_{E_{\sigma(1)},\dots,E_{\sigma(n)};F}(B\circ(V_\sigma,\dots,V_\sigma))$$

sempre que $B \in \mathcal{L}^s({}^n(E_1 \times \cdots \times E_n); F)$. Agora tome $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) = \mathcal{M}({}^nE; F)$. Então $B := \sqrt{n!}(A \circ (Q_1, \ldots, Q_n))^s \in \mathcal{M}({}^n(E_1 \times \cdots \times E_n); F)$, pois pela propriedade de ideal $A \circ (Q_1, \ldots, Q_n) \in \mathcal{M}$ e por hipótese $(A \circ (Q_1, \ldots, Q_n))^s \in \mathcal{M}({}^n(E_1 \times \cdots \times E_n); F)$. Daí, pela Proposição 2.61 e pela propriedade de ideal,

$$\begin{aligned}\Phi_\sigma(A) &= \Phi_\sigma(I_{E_1,\ldots,E_n;F}(B)) = I_{E_{\sigma(1)},\ldots,E_{\sigma(n)};F}(B \circ (V_\sigma, \ldots, V_\sigma)) \\ &= \sqrt{n!} \cdot B \circ (V_\sigma, \ldots, V_\sigma) \circ (I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(n)}) \\ &= \sqrt{n!} \cdot B \circ (V_\sigma \circ I_{\sigma(1)}, \ldots, V_\sigma \circ I_{\sigma(n)}) \in \mathcal{M}(E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(n)}; F) = \mathcal{M}({}^nE; F).\end{aligned}$$

Portanto, $\Phi_\sigma(A) \in \mathcal{M}({}^nE; F)$ para toda $\sigma \in S_n$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) De imediato temos $\widecheck{\mathcal{M}} \subset \widehat{\mathcal{M}}$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, E, F espaços de Banach e $P \in \widehat{\mathcal{M}}({}^nE; F)$. Existe $A \in \mathcal{M}({}^nE; F)$ tal que $\widehat{A} = P$, mas veja que $\widehat{A^s} = \widehat{A} = P$, A^s é simétrico e por hipótese $A^s \in \mathcal{M}({}^nE; F)$, logo $\check{P} = A^s \in \mathcal{M}({}^nE; F)$ e, daí, $P \in \widecheck{\mathcal{M}}({}^nE; F)$. Com isso, $\widecheck{\mathcal{M}} = \widehat{\mathcal{M}}$.

(c) $\Longrightarrow$ (b) Sejam $n \in \mathbb{N}$, E, F espaços de Banach e $A \in \mathcal{M}({}^nE; F)$. Pela definição, $P := \widehat{A} \in \widehat{\mathcal{M}}({}^nE; F) = \widecheck{\mathcal{M}}({}^nE; F)$, daí $\check{P} \in \mathcal{M}({}^nE; F)$. Mas $\widehat{A^s} = P$ e é simétrico, implicando $A^s = \check{P} \in \mathcal{M}({}^nE; F)$, completando a demonstração. $\square$

O corolário a seguir fornece uma resposta parcial, com a hipótese adicional do ideal ser simétrico, para a pergunta formulada na Observação 2.59.

Corolário 2.64. *Se $\mathcal{M}$ é um multi-ideal fechado e simétrico, então $\widehat{\mathcal{M}}$ é ideal fechado de polinômios.*

Demonstração. De fato, como $\mathcal{M}$ é simétrico e fechado, então $\widehat{\mathcal{M}} = \widecheck{\mathcal{M}}$ pela Proposição 2.63 e $\widecheck{\mathcal{M}}$ é fechado pela Proposição 2.57. Segue que $\widehat{\mathcal{M}}$ também é fechado. $\square$

Definição 2.65. Um multi-ideal normado $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é dito *fortemente simétrico* se é simétrico e $\|A\|_{\mathcal{M}} = \|\Phi_\sigma(A)\|_{\mathcal{M}}$ para todos $\sigma \in S_n$ e $A \in \mathcal{M}$.

Proposição 2.66. *Se o multi-ideal normado $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é fortemente simétrico, então $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}} = \|\cdot\|_{\widecheck{\mathcal{M}}}$.*

Demonstração. Pelas hipóteses já sabemos que $\widehat{\mathcal{M}} = \widecheck{\mathcal{M}}$ e $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}} \leq \|\cdot\|_{\widecheck{\mathcal{M}}}$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, E, F espaços de Banach e $P \in \widehat{\mathcal{M}}({}^nE; F) = \widecheck{\mathcal{M}}({}^nE; F)$. Vamos verificar que

$$\|P\|_{\widecheck{\mathcal{M}}} = \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \leq \|B\|_{\mathcal{M}}$$

para todo $B \in \mathcal{M}({}^nE; F)$ tal que $\widehat{B} = P$. De fato, dado B nestas condições, então $B^s \in \mathcal{M}({}^nE; F)$ pois $\mathcal{M}$ é simétrico e $P = \widehat{B^s}$, logo,

$$\begin{aligned}\|\check{P}\|_{\mathcal{M}} = \|B^s\|_{\mathcal{M}} &= \left\| \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \Phi_\sigma(B) \right\|_{\mathcal{M}} \leq \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \|\Phi_\sigma(B)\|_{\mathcal{M}} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \|B\|_{\mathcal{M}} \\ &= \frac{1}{n!} \cdot n! \cdot \|B\|_{\mathcal{M}} = \|B\|_{\mathcal{M}}.\end{aligned}$$

Portanto, $\|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \leq \|B\|_{\mathcal{M}}$. Com isso,

$$\|P\|_{\widecheck{\mathcal{M}}} \leq \inf\{\|B\|_{\mathcal{M}} : \widehat{B} = P \text{ e } B \in \mathcal{M}({}^nE; F)\} = \|P\|_{\widehat{\mathcal{M}}}.$$

Daí, $\|\cdot\|_{\widecheck{\mathcal{M}}} \leq \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}}$, o que nos garante a igualdade $\|\cdot\|_{\widecheck{\mathcal{M}}} = \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}}}$. $\square$

Capítulo 3

O Teorema de Extensão

Neste capítulo apresentamos o resultado principal do nosso trabalho, Teorema 3.10, o qual chamamos de teorema de extensão, que vai nos dizer em quais e únicas condições e como podemos estender, de acordo com nossa proposta de extensão, uma classe de operadores multilineares contínuos tomando valores em espaços de Banach de uma certa classe a um multi-ideal. De posse desse resultado, uma pergunta óbvia que surge é se essa extensão é única. A Seção 3.2 é devotada à demonstração de que tal unicidade não pode ser garantida. Na Seção 3.3 abordamos o teorema de extensão como um processo de envoltória, dentro da perspectiva dos procedimentos de envoltória regular e injetiva serem casos particulares do que construímos.

Este capítulo é uma extensão para o caso de multi-ideais do que foi feito em [6] para o caso de ideais de operadores. Apesar de serem adaptações multilineares dos resultados lineares feitos em [6], os resultados apresentados neste capítulo (e no próximo) são inéditos. Conforme o leitor poderá comprovar, a passagem do caso linear para o caso multilinear envolve algumas dificuldades técnicas, que serão tratadas aqui com cuidado.

3.1 Axiomas e resultado principal

Na próxima definição, vamos dizer o que entendemos por estender uma classe de operadores multilineares contínuos tomando valores em espaços de Banach de uma certa classe a um multi-ideal. Nosso entendimento é que se trata de uma definição bem natural.

Verificamos que ambas as palavras *estendível* e *extensível* são dicionarizadas na língua portuguesa. Na necessidade de escolher uma delas, optamos por *estendível*.

Definição 3.1. Seja $\mathfrak{B}$ uma subclasse da classe $\mathcal{BAN}$ de todos os espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$.
(a) Uma $\mathfrak{B}$-*classe normada (de Banach)* de operadores multilineares $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ é uma correspondência que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $(E_1, \ldots, E_n, F) \in (\mathcal{BAN})^n \times \mathfrak{B}$, associa um subespaço vetorial $\mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; F)$ de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ munido com uma norma (norma completa) $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$.
(b) Uma $\mathfrak{B}$-classe normada (de Banach) de operadores multilineares $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ é dita ser *estendível* se existe um multi-ideal normado (de Banach) $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ tal que

$$\mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; F) = \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) \text{ e } \|\cdot\|_{\mathcal{A}} = \|\cdot\|_{\mathcal{M}}$$

em $\mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; F)$ para todos $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN}$ e $F \in \mathfrak{B}$. Neste caso dizemos que o multi-ideal $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ *estende* (ou é uma extensão) da classe $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$.

Agora vamos estabelecer condições que provaremos serem necessárias e suficientes para que uma classe seja estendível. Exemplos virão logo a seguir.

Definição 3.2. Seja $\mathfrak{B} \subset \mathcal{BAN}$ uma subclasse.
(a) A classe $\mathfrak{B}$ é chamada de *admissível* se existe uma correspondência

$$E \in \mathcal{BAN} \longmapsto (\widetilde{E}, i_E),$$

onde $\widetilde{E} \in \mathfrak{B}$ e $i_E \colon E \longrightarrow \widetilde{E}$ é uma injeção métrica satisfazendo:
(i) Para $F, G \in \mathcal{BAN}$ e $v \in \mathcal{L}(F; G)$ existe $\widetilde{v} \in \mathcal{L}(\widetilde{F}; \widetilde{G})$ de modo a $i_G \circ v = \widetilde{v} \circ i_F$ e $\|\widetilde{v}\| = \|v\|$.
(ii) Para todo $E \in \mathfrak{B}$ existe $k_E \in \mathcal{L}(\widetilde{E}; E)$ tal que $\|k_E\| = 1$ e $k_E \circ i_E = id_E$.

(b) Seja $\mathfrak{B}$ uma classe admissível. Uma $\mathfrak{B}$-classe normada (de Banach) de operadores multilineares $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ é um *$\mathfrak{B}$-ideal normado (de Banach)* de operadores multilineares se as seguintes condições são satisfeitas:
(i) Para todos $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN}$ e $F \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; F)$ contém os operadores multilineares de tipo finito e $\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b\|_{\mathcal{A}} = \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \cdot \|b\|$ para quaisquer $\varphi_j \in E_j'$ com $j = 1, \ldots, n$, e $b \in F$.
(ii) Para todos $n \in \mathbb{N}$, $D_1, \ldots, D_n, E_1, \ldots, E_n, F, G \in \mathcal{BAN}$, $A \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F})$, $u_j \in \mathcal{L}(D_j; E_j)$ para $j = 1, \ldots, n$, e $t \in \mathcal{L}(F, G)$, então $\widetilde{t} \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{A}(D_1, \ldots, D_n; \widetilde{G})$ e

$$\|\widetilde{t} \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathcal{A}} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{A}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

(iii) Se $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN}$, $F \in \mathfrak{B}$, $A \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $B \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F})$, então $i_F \circ A \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F})$, $\|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}} = \|A\|_{\mathcal{A}}$ e $k_F \circ B \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

O próximo resultado, que será importante na demonstração da não unicidade da extensão, nos mostra que podemos construir $\mathfrak{B}$-ideais facilmente.

Proposição 3.3. *Sejam $\mathfrak{B}$ uma classe admissível de espaços de Banach e $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um multi-ideal normado (Banach). Então a classe*

$$\mathcal{M}(\mathfrak{B}) := \{\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) : n \in \mathbb{N},\ E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN} \text{ e } F \in \mathfrak{B}\},\ \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})} := \|\cdot\|_{\mathcal{M}},$$

é um $\mathfrak{B}$-ideal normado (Banach) de operadores multilineares. Mais ainda, $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é uma extensão de $(\mathcal{M}(\mathfrak{B}), \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})})$.

Demonstração. Pela definição, é claro que $(\mathcal{M}(\mathfrak{B}), \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})})$ é uma $\mathfrak{B}$-classe normada (Banach) de operadores multilineares. As condições (b)(i), (ii) e as partes qualitativas de (iii) da Definição 3.2 seguem imediatamente do fato de $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ ser multi-ideal. Para a parte quantitativa da condição (iii), dados $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN}$, $F \in \mathfrak{B}$ e $A \in \mathcal{M}(\mathfrak{B})(E_1, \ldots, E_n; F)$, temos

$$\begin{aligned}\|i_F \circ A\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})} &= \|i_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \leq \|i_F\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})} = \|A\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|k_F \circ i_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \leq \|k_F\| \cdot \|i_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|i_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|i_F \circ A\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})},\end{aligned}$$

provando que $\|i_F \circ A\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})} = \|A\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})}$. Logo, $(\mathcal{M}(\mathfrak{B}), \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})})$ é um $\mathfrak{B}$-ideal normado (Banach) de operadores multilineares. A segunda afirmação é imediata. □

Nos exemplos a seguir, apresentamos algumas classes de Banach admissíveis.

Exemplo 3.4. Seja $\mathfrak{D}_1$ a classe de todos os espaços de Banach duais, isto é,

$$\mathfrak{D}_1 = \{E' : E \text{ é espaço de Banach}\}.$$

Definindo $\widetilde{E} = E''$, $i_E = J_E$, $\widetilde{v} = v''$ e $k_{E'} = (J_E)'$, segue facilmente que $\mathfrak{D}_1$ é uma classe admissível. Basta ver que J_E é injeção métrica (Proposição 1.18), $\|(J_E)'\| = 1$ (Proposição 1.15) e $(J_E)' \circ J_{E'} = id_{E'}$ (Proposição 1.23).

Exemplo 3.5. Os duais de ordem superior de um espaço de Banach E e de um operador v são definidos indutivamente por $E^{(n+1)} = (E^{(n)})'$ e $v^{(n+1)} = (v^{(n)})'$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nesta representação, $E^{(0)} = E$, $E^{(1)} = E'$, $E^{(2)} = E''$, $E^{(3)} = E'''$ e assim por diante, e $v^{(0)} = v$, $v^{(1)} = v'$, $v^{(2)} = v''$, $v^{(3)} = v'''$ e assim por diante. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a classe

$$\mathfrak{D}_{2n} = \{E^{(2n)} : E \in \mathcal{BAN}\}$$

é admissível com a correspondência $E \longmapsto \widetilde{E} = E^{(2n)}$, e operadores

$$i_E = J_{E^{(2(n-1))}} \circ J_{E^{(2(n-2))}} \circ \cdots \circ J_{E^{(2\cdot 2)}} \circ J_{E''} \circ J_E,$$

$$k_{E^{(2n)}} = (J_{E^{(2n-1)}})' \circ (J_{E^{(2n+2\cdot 1-1)}})' \circ \cdots \circ (J_{E^{(2n+2(n-2)-1)}})' \circ (J_{E^{(2n+2(n-1)-1)}})',$$

$$\widetilde{v} = v^{(2n)} \in \mathcal{L}(\widetilde{F};\widetilde{G}),$$

para todos $E \in \mathcal{BAN}$ e $v \in \mathcal{L}(F;G)$.

Em particular, $\mathfrak{D}_2 = \{E'' : E \in \mathcal{BAN}\}$, $i_E = J_E$, $k_{E''} = (J_{E'})'$ e para $v \in \mathcal{L}(F;G)$, $\widetilde{v} = v'' \in \mathcal{L}(F'';G'')$.

Para verificarmos essa afirmação, vamos considerar a seguinte simbologia: $\widetilde{E}_n$, i_E^n, $k_{E^{(2n)}}^n$, $\widetilde{v}_n$; onde o índice $n \in \mathbb{N}$ serve apenas para indicar em qual ordem dual estamos trabalhando. Vamos demonstrar por indução sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ temos $\mathfrak{D}_2 = \{E^{(2)} : E \in \mathcal{BAN}\}$. Dados $E, F, G \in \mathcal{BAN}$ e $v \in \mathcal{L}(F;G)$, então $i_E^1 = J_E \colon E \longrightarrow \widetilde{E}_1 = E^{(2)}$ é injeção métrica, $\widetilde{v}_1 = v^{(2)} \in \mathcal{L}(\widetilde{F}_1;\widetilde{G}_1)$ é tal que $\widetilde{v}_1 \circ i_F^1 = i_G^1 \circ v$ e $\|v\| = \|\widetilde{v}_1\|$ e $k_{E^{(2)}}^1 = (J_{E^{(1)}})' \in \mathcal{L}(E^{(4)};E^{(2)})$ é tal que $k_{E^{(2)}}^1 \circ i_{E^{(2)}}^1 = id_{E^{(2)}}$ e $\|k_{E^{(2)}}^1\| = 1$. Logo, $\mathfrak{D}_2$ é classe admissível. Suponha que a afirmação seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que também é válida para $n+1$. Dado $E \in \mathcal{BAN}$, o operador

$$i_E^{n+1} = J_{E^{(2n)}} \circ (J_{E^{(2(n-1))}} \circ \cdots \circ J_{E^{(2)}} \circ J_E) = J_{E^{(2n)}} \circ i_E^n \colon E \longrightarrow \widetilde{E}_{n+1} = E^{(2(n+1))}$$

é linear e injeção métrica de E em $\widetilde{E}_{n+1}$ (pois é a composta de injeções métricas), e

$$\begin{aligned}\left\|i_E^{n+1}\right\| &= \|J_{E^{(2n)}} \circ i_E^n\| = \sup_{x \in B_E} \|J_{2^{(2n)}} \circ i_E^n(x)\| = \sup_{x \in B_E} \|J_{E^{(2n)}}(i_E^n(x))\| = \sup_{x \in B_E} \|i_E^n(x)\| \\ &= \|i_E^n\| \overset{(1)}{=} 1,\end{aligned}$$

onde (1) segue da hipótese de indução. Dados $F, G \in \mathcal{BAN}$ e $v \in \mathcal{L}(F;G)$,

$$\widetilde{v}_{n+1} = v^{(2(n+1))} = (v^{(2n)})'' \colon \widetilde{F}_{n+1} \longrightarrow \widetilde{G}_{n+1},$$

$$\widetilde{v}_{n+1} \in \mathcal{L}\left(\widetilde{F}_{n+1};\widetilde{G}_{n+1}\right),$$

$$\|\widetilde{v}_{n+1}\| = \left\|\left(v^{(2n)}\right)''\right\| \overset{(2)}{=} \left\|v^{(2n)}\right\| = \|\widetilde{v}_n\| \overset{(1)}{=} \|v\|$$

e

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_{n+1} \circ i_F^{(n+1)} &= \left(v^{(2n)}\right)'' \circ (J_{F^{(2n)}} \circ J_{F^{(2(n-1))}} \circ \cdots \circ J_{F^{(2)}} \circ J_F) \\ &= \left(\left(v^{(2n)}\right)'' \circ J_{F^{(2n)}}\right) \circ (J_{F^{(2(n-1))}} \circ \cdots \circ J_{F^{(2)}} \circ J_F) \\ &\overset{(3)}{=} \left(J_{G^{(2n)}} \circ v^{(2n)}\right) \circ (J_{F^{(2(n-1))}} \circ \cdots \circ J_{F^{(2)}} \circ J_F) \\ &= \left(J_{G^{(2n)}} \circ v^{(2n)}\right) \circ i_F^n = J_{G^{(2n)}} \circ \left(v^{(2n)} \circ i_F^n\right) \\ &= J_{G^{(2n)}} \circ (\widetilde{v}_n \circ i_F^n) \overset{(1)}{=} J_{G^{(2n)}} \circ (i_G^n \circ v) \\ &= J_{G^{(2n)}} \circ J_{G^{(2(n-1))}} \circ \cdots \circ J_{G^{(2)}} \circ J_G \circ v = i_G^{n+1} \circ v,\end{aligned}$$

onde (1) vem da hipótese de indução, (2) da Proposição 1.15 e (3) da Proposição 1.20.

Dado $H^{(2(n+1))} \in \mathfrak{D}_{2(n+1)}$, por definição

$$\begin{aligned} k^{n+1}_{H^{(2(n+1))}} &= \left(J_{H^{(2(n+1)-1)}}\right)' \circ \left(J_{H^{(2(n+1)+2\cdot 1-1)}}\right)' \circ \cdots \circ \left(J_{H^{(2(n+1)+2((n+1)-2)-1)}}\right) \circ \left(J_{H^{(2(n+1)+2((n+1)-1)-1)}}\right)' \\ &= \left(J_{H^{(2n+1)}}\right)' \circ \left(J_{H^{(2n+3)}}\right)' \circ \cdots \circ \left(J_{H^{(4n-1)}}\right)' \circ \left(J_{H^{(4n+1)}}\right)' \end{aligned}$$

é tal que $k^{n+1}_{H^{(2(n+1))}} \in \mathcal{L}\left(\widetilde{H^{(2(n+1))}_{n+1}}; H^{(2(n+1))}\right)$, onde

$$\widetilde{H^{(2(n+1))}_{n+1}} = H^{(2(n+1)+2(n+1))} = H^{(2\cdot 2(n+1))}.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} k^{n+1}_{H^{(2(n+1))}} \circ i^{n+1}_{H^{(2(n+1))}} &\overset{(4)}{=} \left(J_{H^{(2n+1)}}\right)' \circ \left(J_{H^{(2n+3)}}\right)' \circ \cdots \circ \left(J_{H^{(4n-1)}}\right)' \circ \left(J_{H^{(4n+1)}}\right)' \circ \\ &\quad \circ J_{H^{(4n+2)}} \circ J_{H^{(4n)}} \circ \cdots \circ J_{H^{(2n+4)}} \circ J_{H^{(2n+2)}} \\ &\overset{(5)}{=} \left(J_{H^{(2n+1)}}\right)' \circ \left(J_{H^{(2n+3)}}\right)' \circ \cdots \circ \left(J_{H^{(4n-1)}}\right)' \circ id_{H^{(4n+2)}} \circ \\ &\quad \circ J_{H^{(4n)}} \circ \cdots \circ J_{H^{(2n+4)}} \circ J_{H^{(2n+2)}} \\ &\overset{(6)}{=} \left(J_{H^{(2n+1)}}\right)' \circ \left(J_{H^{(2n+3)}}\right)' \circ \cdots \circ \left(J_{H^{(4n-1)}}\right)' \circ J_{H^{(4n)}} \circ \cdots \circ J_{H^{(2n+4)}} \circ J_{H^{(2n+2)}} \\ &= id_{H^{(2n+2)}} = id_{H^{(2(n+1))}}, \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} 1 = \left\| id_{H^{(2(n+1))}} \right\| &= \left\| k^{n+1}_{H^{(2(n+1))}} \circ i^{n+1}_{H^{(2(n+1))}} \right\| \leq \left\| k^{n+1}_{H^{(2(n+1))}} \right\| \cdot \left\| i^{n+1}_{H^{(2(n+1))}} \right\| = \left\| k^{n+1}_{H^{(2(n+1))}} \right\| \\ &= \left\| \left(J_{H^{(2n+1)}}\right)' \circ \cdots \circ \left(J_{H^{(4n+1)}}\right)' \right\| \leq \left\| \left(J_{H^{(2n+1)}}\right)' \right\| \cdots \left\| \left(J_{H^{(4n+1)}}\right)' \right\| = 1, \end{aligned}$$

com isso, $\left\| k^{n+1}_{H^{(2(n+1))}} \right\| = 1$, onde (5) segue da Proposição 1.23, (4) de

$$H^{(2(n+1))} \overset{J_{H^{(2(n+1))}}}{\longrightarrow} H^{(2(n+2))} \overset{J_{H^{(2(n+2))}}}{\longrightarrow} \cdots \longrightarrow H^{(2\cdot 2n)} \overset{J_{H^{(2\cdot 2n)}}}{\longrightarrow} H^{(2(2n+1))} \overset{J_{H^{(2(2n+1))}}}{\longrightarrow} H^{(2\cdot 2(n+1))},$$

$$i^{n+1}_{H^{(2(n+1))}} = J_{H^{(4n+2)}} \circ J_{H^{(4n)}} \circ \cdots \circ J_{H^{(2n+4)}} \circ J_{H^{(2n+2)}} \colon H^{(2(n+1))} \longrightarrow H^{(2\cdot 2(n+1))}$$

e (6) de

$$J_{H^{(4n-1)}} \colon H^{(4n-1)} \longrightarrow H^{(4n+1)} \;,\; \left(J_{H^{(4n-1)}}\right)' \colon H^{(4n+2)} \longrightarrow H^{(4n)}.$$

Portanto, $\mathfrak{D}_{2n}$ é uma classe admissível para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para darmos mais um exemplo de classe admissível, vejamos algumas definições e exemplos que podem ser encontrados em [15].

Definição 3.6. (a) Um espaço de Banach F possui a *propriedade da extensão métrica* se para toda injeção métrica $i_{E_0} \in \mathcal{L}(E_0; E)$ e todo operador $S_0 \in \mathcal{L}(E_0; F)$ existe $S \in \mathcal{L}(E; F)$ tal que $S_0 = S \circ i_{E_0}$ e $\|S_0\| = \|S\|$.

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "S_0"] \arrow[d, "i_{E_0}"'] & F \\ E \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

(b) Seja Γ um conjunto de índices. Definimos

$$\ell_\infty(\Gamma) := \left\{ (\lambda_j)_{j\in\Gamma} : \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \Gamma \text{ e } \sup_{j\in\Gamma} |\lambda_j| < +\infty \right\},$$

e

$$\|(\lambda_j)_{j\in\Gamma}\|_{\ell_\infty(\Gamma)} := \sup_{j\in\Gamma} |\lambda_j|$$

para toda família $(\lambda_j)_{j\in\Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$.

Proposição 3.7. *Seja Γ um conjunto de índices.*
(a) $\ell_\infty(\Gamma)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com as operações usuais (coordenada a coordenada) de adição e multiplicação por escalar.
(b) A função $\|\cdot\|_{\ell_\infty(\Gamma)}$ é uma norma em $\ell_\infty(\Gamma)$.
(c) O par $\big(\ell_\infty(\Gamma), \|\cdot\|_{\ell_\infty(\Gamma)}\big)$ é um espaço de Banach.
(d) $\ell_\infty(\Gamma)$ possui a propriedade da extensão métrica.
(e) Os espaços da forma $\ell_\infty(\Gamma)$ são os únicos que possuem a propriedade da extensão métrica.

Demonstração. Veja [15]. □

Proposição 3.8. *Seja E um espaço de Banach. Tomando $B_{E'}$ como um conjunto de índices, temos*

$$\ell_\infty(B_{E'}) = \left\{ (\lambda_\varphi)_{\varphi\in B_{E'}} : \lambda_\varphi \in \mathbb{K} \textit{ para todo } \varphi \in B_{E'} \textit{ e } \sup_{\varphi\in B_{E'}} |\lambda_\varphi| < +\infty \right\}.$$

O operador

$$I_E\colon E \longrightarrow \ell_\infty(B_{E'}),\ x \longmapsto I_E(x) = (\varphi(x))_{\varphi\in B_{E'}}$$

é uma injeção métrica.

Demonstração. Pelo Teorema de Hahn-Banach na forma da Proposição 1.22 temos

$$\|I_E(x)\|_{\ell_\infty(B_{E'})} = \sup_{\varphi\in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\| < +\infty$$

para todo $x \in E$, mostrando que I_E está de fato bem definida e que é uma isometria. Da linearidade de cada $\varphi \in B_{E'}$ segue a linearidade de I_E. □

Exemplo 3.9. Seja $\mathfrak{M}$ a classe de todos os espaços de Banach com a propriedade da extensão métrica. Para todo espaço de Banach E, defina $\widetilde{E} = \ell_\infty(B_{E'})$ e tome a injeção métrica $I_E\colon E \longrightarrow \ell_\infty(B_{E'})$ da proposição anterior. Para $F, G \in \mathcal{BAN}$ e $v \in \mathcal{L}(F;G)$, pela propriedade da extensão métrica de $\ell_\infty(B_{G'})$ existe $\widetilde{v} \in \mathcal{L}(\ell_\infty(B_{F'}); \ell_\infty(B_{G'}))$ tal que $I_G \circ v = \widetilde{v} \circ I_F$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "v"] \arrow[d, "I_F"'] & G \arrow[r, "I_G"] & \ell_\infty(B_{G'}) \\
\ell_\infty(B_{F'}) \arrow[urr, "\widetilde{v}"'] & &
\end{tikzcd}$$

e

$$\|\widetilde{v}\| = \|I_G \circ v\| = \sup_{x\in B_F} \|(I_G \circ v)(x)\| = \sup_{x\in B_F} \|I_G(v(x))\| = \sup_{x\in B_F} \|v(x)\| = \|v\|.$$

E dado $H \in \mathfrak{M}$, pela propriedade da extensão métrica de H, existe $k_H \in \mathcal{L}(\widetilde{H}; H)$ tal que $id_H = k_H \circ I_H$ e $\|k_H\| = \|id_H\| = 1$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "id_H"] \arrow[d, "I_H"'] & H \\ \ell_\infty(B_{H'}) \arrow[ur, "k_H"'] & \end{tikzcd}$$

Portanto, a classe $\mathfrak{M}$ é admissível.

A seguir enunciamos e demonstramos o teorema de extensão, que é o resultado principal do nosso trabalho e que caracteriza as classes de operadores que podem ser estendidas e mostra como uma classe estendível pode ser estendida.

Teorema 3.10 (Teorema de Extensão)**.** *Seja $\mathfrak{B}$ uma classe admissível de espaços de Banach. As seguintes condições são equivalentes para uma $\mathfrak{B}$-classe normada (Banach) de operadores multilineares $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$.*
(a) $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ é um $\mathfrak{B}$-ideal normado (Banach) de operadores multilineares.
(b) Definindo

$$\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F) := \left\{A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) : i_F \circ A \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F})\right\}$$

$$e \ \ \|A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} := \|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}},$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$, então $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}})$ é um multi-ideal normado (Banach) que estende $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$.
(c) A classe $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ é estendível.

Demonstração. (a) $\Longrightarrow$ (b) Primeiro vamos verificar que $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}})$ é um multi-ideal normado (Banach). Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$.
(I) $\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$:
(i) $0 \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$, pois $0 \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $0 = i_F \circ 0 \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F})$.
(ii) Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Temos $A_1 + A_2 \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e

$$i_F \circ (A_1 + A_2) = i_F \circ A_1 + i_F \circ A_2 \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F}),$$

pois $\mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F})$ é subespaço vetorial. Daí, $A_1 + A_2 \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$.
(iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Temos $\lambda A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $i_F \circ (\lambda A) = \lambda(i_F \circ A) \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F})$, pois $\mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F})$ é subespaço vetorial. Daí, $\lambda A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$.
(II) $\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}$ contém os operadores multilineares de tipo finito: com efeito, dados $\varphi_1 \in E_1', \ldots, \varphi_n \in E_n'$ e $b \in F$, $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e

$$\begin{aligned}(i_F \circ (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b))(x_1, \ldots, x_n) &= i_F(\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot i_F(b) \\ &= (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes i_F(b))(x_1, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Portanto,

$$i_F \circ (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b) = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes i_F(b) \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F}),$$

pois é de tipo finito e, consequentemente, $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Como $\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial, segue que ele contém os operadores de tipo finito.

(III) A função $\|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}}$ é uma norma em $\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$:
(i) Obviamente $\|A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Considerando $0 \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$, temos

$$\|0\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|i_F \circ 0\|_{\mathcal{A}} = \|0\|_{\mathcal{A}} = 0.$$

Dado $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$ de modo que $\|A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}} = 0$, então $i_F \circ A = 0$, e como i_F é injeção métrica, temos $A = 0$, pois

$$\|A(x_1,\ldots,x_n)\| = \|i_F(A(x_1,\ldots,x_n))\| = \|0(x_1,\ldots,x_n)\| = 0$$

para todo $(x_1,\ldots,x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.
(ii) Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Temos,

$$\|\lambda A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|i_F \circ (\lambda A)\|_{\mathcal{A}} = \|\lambda(i_F \circ A)\|_{\mathcal{A}} = |\lambda| \cdot \|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}} = |\lambda| \cdot \|A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}}.$$

(iii) Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Temos,

$$\begin{aligned}\|A_1 + A_2\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} &= \|i_F \circ (A_1 + A_2)\|_{\mathcal{A}} = \|i_F \circ A_1 + i_F \circ A_2\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \|i_F \circ A_1\|_{\mathcal{A}} + \|i_F \circ A_2\|_{\mathcal{A}} = \|A_1\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} + \|A_2\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}}.\end{aligned}$$

(IV) Seja $A\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $A(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Obviamente $A = id_{\mathbb{K}} \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes id_{\mathbb{K}} \otimes 1$, então $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(^n\mathbb{K};\mathbb{K})$ pois é de tipo finito. Além do mais,

$$\begin{aligned}\|A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} &= \|i_{\mathbb{K}} \circ A\|_{\mathcal{A}} = \|i_{\mathbb{K}} \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes id_{\mathbb{K}} \otimes 1)\|_{\mathcal{A}} \\ &= \|id_{\mathbb{K}} \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes id_{\mathbb{K}} \otimes i_{\mathbb{K}}(1)\|_{\mathcal{A}} = \|id_{\mathbb{K}}\| \overset{n}{\cdots} \|id_{\mathbb{K}}\| \cdot \|i_{\mathbb{K}}(1)\| = 1.\end{aligned}$$

(V) Para a propriedade e desigualdade de ideal, sejam $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$, $u_j \in \mathcal{L}(D_j;E_j)$ para $j = 1,\ldots,n$, e $t \in \mathcal{L}(F;G)$ com $D_1,\ldots,D_n,G \in \mathcal{BAN}$. Pela definição de $\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}$ temos $i_F \circ A \in \mathcal{A}(E_1,\ldots,E_n;\widetilde{F})$. Pela condição (b)(iii) da Definição 3.2 de classe admissível segue que

$$\begin{aligned}i_G \circ (t \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n)) &= (i_G \circ t) \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n) = (\widetilde{t} \circ i_F) \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n) \\ &= \widetilde{t} \circ (i_F \circ A) \circ (u_1,\ldots,u_n) \in \mathcal{A}(D_1,\ldots,D_n;\widetilde{G})\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|t \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} &= \|i_G \circ (t \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n))\|_{\mathcal{A}} = \|\widetilde{t} \circ (i_F \circ A) \circ (u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \|t\| \cdot \|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\| = \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|,\end{aligned}$$

logo, $t \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n) \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(D_1,\ldots,D_n;G)$ e

$$\|t \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

Portanto, $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}})$ é multi-ideal normado. Caso $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ seja Banach, vamos verificar que $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}})$ também é. Considere $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$ uma sequência satisfazendo $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} < +\infty$. Por definição, $(i_F \circ A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}(E_1,\ldots,E_n;\widetilde{F})$ e $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|i_F \circ A_j\|_{\mathcal{A}} < +\infty$, logo, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} i_F \circ A_j$ é convergente em $\mathcal{A}$, digamos

$$\sum_{k=1}^{j} i_F \circ A_k \overset{j}{\longrightarrow} A \in \mathcal{A}(E_1,\ldots,E_n;\widetilde{F}).$$

Veja que $A_j(E_1 \times \cdots \times E_n) \subset F$ e, daí,

$$(i_F \circ A_j)(E_1 \times \cdots \times E_n) = i_F(A_j(E_1 \times \cdots \times E_n)) \subset i_F(F)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, como $i_F(F)$ é Banach, podemos definir $A' \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; i_F(F))$ por $A' \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow i_F(F)$ dado por $A'(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Considerando o isomorfismo isométrico $i_F^{-1} \colon i_F(F) \longrightarrow F$, podemos tomar o operador $i_F^{-1} \circ A' \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Além disso, pela maneira com que definimos A' temos $A = i_F \circ i_F^{-1} \circ A' \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F})$, o que implica que $i_F^{-1} \circ A' \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{j} A_k - i_F^{-1} \circ A' \right\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} &= \left\| i_F \circ \left(\sum_{k=1}^{j} A_k - i_F^{-1} \circ A' \right) \right\|_{\mathcal{A}} \\
&= \left\| i_F \circ \left(\sum_{k=1}^{j} A_k \right) - i_F \circ (i_F^{-1} \circ A') \right\|_{\mathcal{A}} \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{j} i_F \circ A_k - A \right\|_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\ j\ } 0.
\end{aligned}$$

Segue que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j = i_F^{-1} \circ A'$ em $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F), \| \cdot \|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}})$, provando que esse espaço é completo.

Verificaremos agora que o multi-ideal normado $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}, \| \cdot \|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}})$ é uma extensão da classe $\mathfrak{B}$-ideal normada $(\mathcal{A}, \| \cdot \|_{\mathcal{A}})$. Sejam $H \in \mathfrak{B}$, $A \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; H)$ e $B \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; H)$. Pela condição (b)(iii) da Definição 3.2 temos $i_F \circ A \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{H})$ e $\|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}} = \|A\|_{\mathcal{A}}$, de onde concluímos que $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; H)$ e $\|A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|A\|_{\mathcal{A}}$. Pela definição de $\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}$ temos $i_F \circ B \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{H})$ e $\|B\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|i_F \circ B\|_{\mathcal{A}}$. Considerando a condição (b)(iii) novamente, segue que $B = k_F \circ (i_F \circ B) \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; H)$ e $\|B\|_{\mathcal{A}} = \|i_F \circ B\|_{\mathcal{A}} = \|B\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}}$.

A implicação (b) $\Longrightarrow$ (c) é imediata.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Por hipótese, existe um multi-ideal normado (Banach) $(\mathcal{M}, \| \cdot \|_{\mathcal{M}})$ de modo que $\mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; F) = \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\| \cdot \|_{\mathcal{A}} = \| \cdot \|_{\mathcal{M}}$ em $\mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; F)$ para todos $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN}$ e $F \in \mathfrak{B}$. Logo, devemos verificar apenas a parte quantitativa da condição (b)(iii). Para tanto, dados $F \in \mathfrak{B}$ e $A \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; F)$, temos

$$\begin{aligned}
\|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}} &= \|i_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \leq \|i_F\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{\mathcal{A}} = \|A\|_{\mathcal{M}} = \|id_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \\
&= \|k_F \circ i_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \leq \|k_F\| \cdot \|i_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|i_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}},
\end{aligned}$$

daí, $\|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}} = \|A\|_{\mathcal{A}}$. Portanto, $(\mathcal{A}, \| \cdot \|_{\mathcal{A}})$ é um $\mathfrak{B}$-ideal normado (Banach) de operadores multilineares, completando a demonstração do teorema. ☐

3.2 Não unicidade da extensão

De posse do teorema de extensão, uma pergunta natural que surge é se nossa extensão é única. E a resposta é não. Para mostrar isso, construiremos o conceito de envoltória regular de um multi-ideal e exibiremos duas extensões distintas para o mesmo $\mathfrak{B}$-ideal de operadores.

A definição a seguir é uma adaptação do caso linear, mas, tanto quanto sabemos, ainda não havia sido considerada no caso multilinear.

Definição 3.11. Sejam $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um multi-ideal normado, $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$. Dado um operador multilinear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, dizemos que $A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ se $J_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F'')$. Neste caso definimos $\|A\|_{\mathcal{M}^{reg}} = \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}}$ para todo $A \in \mathcal{M}^{reg}$.

A próxima proposição nos permite chamar $\mathcal{M}^{reg}$ de *envoltória regular de* $\mathcal{M}$.

Proposição 3.12. *Seja* $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ *um multi-ideal normado (Banach).*
(a) $(\mathcal{M}^{reg}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}})$ *é multi-ideal normado (Banach).*
(b) $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}}) \subset (\mathcal{M}^{reg}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}})$*, isto é,* $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{reg}$ *e* $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}}$.
(c) $(\mathcal{M}^{reg})^{reg} = \mathcal{M}^{reg}$ *isometricamente.*
(d) Considerando a classe admissível $\mathfrak{D}_1 = \{E' : E$ *é espaço de Banach*$\}$ *(Exemplo 3.4) e o* $\mathfrak{D}_1$*-ideal normado (Banach) de operadores multilineares dado por*

$$\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1) = \{\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) : n \in \mathbb{N},\ E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN} \text{ e } F \in \mathfrak{D}_1\} \text{ e } \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)} = \|\cdot\|_{\mathcal{M}},$$

(Proposição 3.3), então $(\mathcal{M}^{reg}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}})$ *é uma extensão de* $(\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1), \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)})$.

Demonstração. (a) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$.
(I) $\mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$:
(i) $0 \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$, pois $0 \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $J_F \circ 0 = 0 \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F'')$.
(ii) Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Daí, $A_1 + A_2 \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$, pois $A_1 + A_2 \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $J_F \circ (A_1 + A_2) = J_F \circ A_1 + J_F \circ A_2 \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F'')$.
(iii) Sejam $A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Daí, $\lambda A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$, pois $\lambda A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $J_F \circ (\lambda A) = \lambda(J_F \circ A) \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F'')$.
(II) Os operadores de tipo finito pertencem a $\mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$: com efeito, dados $\varphi_1 \in E_1', \ldots, \varphi_n \in E_n'$ e $b \in F$, temos $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e

$$\begin{aligned}(J_F \circ (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b))(x_1, \ldots, x_n) &= J_F(\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot J_F(b) \\ &= (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes J_F(b))(x_1, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Logo,

$$J_F \circ (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b) = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes J_F(b) \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F'')$$

é de tipo finito e, daí, pertence a $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F'')$, o que implica que $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots E_n; F)$. Então $\mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots E_n; F)$ contém os operadores de tipo finito, pois é espaço vetorial.
(III) A função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}}$ é uma norma em $\mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$.
(i) Para todo $A \in \mathcal{M}^{reg}$, obviamente $\|A\|_{\mathcal{M}^{reg}} = \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \geq 0$. Considerando $0 \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$, então $\|0\|_{\mathcal{M}^{reg}} = \|J_F \circ 0\|_{\mathcal{M}} = \|0\|_{\mathcal{M}} = 0$. Dado $A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ de modo que $\|A\|_{\mathcal{M}^{reg}} = \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = 0$, temos $J_F \circ A = 0$ e, como J_F é injeção métrica, $A = 0$ necessariamente, visto que

$$\|A(x_1, \ldots, x_n)\| = \|J_F(A(x_1, \ldots, x_n))\| = \|(J_F \circ A)(x_1, \ldots, x_n)\| = \|0(x_1, \ldots, x_n)\| = 0,$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.
(ii) Sejam $A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos,

$$\|\lambda A\|_{\mathcal{M}^{reg}} = \|J_F \circ (\lambda A)\|_{\mathcal{M}} = \|\lambda(J_F \circ A)\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \cdot \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}^{reg}}.$$

(iii) Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Temos,

$$\begin{aligned}\|A_1 + A_2\|_{\mathcal{M}^{reg}} &= \|J_F \circ (A_1 + A_2)\|_{\mathcal{M}} = \|J_F \circ A_1 + J_F \circ A_2\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|J_F \circ A_1\|_{\mathcal{M}} + \|J_F \circ A_2\|_{\mathcal{M}} = \|A_1\|_{\mathcal{M}^{reg}} + \|A_2\|_{\mathcal{M}^{reg}}.\end{aligned}$$

(IV) Definindo $A\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ por $A(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, então $A \in \mathcal{M}^{reg}({}^n\mathbb{K};\mathbb{K})$ pois é de tipo finito, e ainda,

$$\begin{aligned}(id_{\mathbb{K}} \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes id_{\mathbb{K}} \otimes J_{\mathbb{K}}(1))(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) &= id_{\mathbb{K}}(\lambda_1)\cdots id_{\mathbb{K}}(\lambda_n)\cdot J_{\mathbb{K}}(1) = \lambda_1\cdots\lambda_n \cdot J_{\mathbb{K}}(1)\\ &= J_{\mathbb{K}}(\lambda_1\cdots\lambda_n) = (J_{\mathbb{K}}\circ A)(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),\end{aligned}$$

para todo $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Logo, $J_{\mathbb{K}} \circ A = id_{\mathbb{K}} \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes id_{\mathbb{K}} \otimes J_{\mathbb{K}}(1)$ é de tipo finito e

$$\|A\|_{\mathcal{M}^{reg}} = \|J_{\mathbb{K}}\circ A\|_{\mathcal{M}} = \|id_{\mathbb{K}} \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes id_{\mathbb{K}} \otimes J_{\mathbb{K}}(1)\|_{\mathcal{M}} = \|id_{\mathbb{K}}\| \overset{n}{\cdots} \|id_{\mathbb{K}}\|\cdot\|J_{\mathbb{K}}(1)\| = 1.$$

(V) Para a propriedade e desigualdade de ideal, sejam $G_1,\ldots,G_n,H \in \mathcal{BAN}$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j;E_j)$ para $j=1,\ldots,n$, $t \in \mathcal{L}(F;H)$ e $A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Como $J_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1,\ldots,E_n;F'')$ e pela propriedade de ideal de $\mathcal{M}$, temos

$$\begin{aligned}J_H\circ(t\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n)) &= (J_H\circ t)\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n) = (t''\circ J_F)\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n)\\ &= t''\circ(J_F\circ A)\circ(u_1,\ldots,u_n) \in \mathcal{M}(G_1,\ldots,G_n;H'')\end{aligned}$$

e, com isso, $t\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n) \in \mathcal{M}^{reg}(G_1,\ldots,G_n;H)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\|t\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathcal{M}^{reg}} &= \|J_H\circ(t\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n))\|_{\mathcal{M}} = \|t''\circ(J_F\circ A)\circ(u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathcal{M}}\\ &\le \|t''\|\cdot\|J_F\circ A\|_{\mathcal{M}}\cdot\|u_1\|\cdots\|u_n\| = \|t\|\cdot\|A\|_{\mathcal{M}^{reg}}\cdot\|u_1\|\cdots\|u_n\|.\end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{M}^{reg},\|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}})$ é multi-ideal normado. Caso $(\mathcal{M},\|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ seja Banach, vamos mostrar que $(\mathcal{M}^{reg},\|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}})$ também é. Seja $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^{reg}(E_1,\ldots,E_n;F)$ uma sequência satisfazendo $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\|A_j\|_{\mathcal{M}^{reg}} < +\infty$. Por definição, temos $(J_F\circ A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(E_1,\ldots,E_n;F'')$ e $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\|J_F\circ A_j\|_{\mathcal{M}} < +\infty$, logo, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} J_F\circ A_j$ é convergente em $\mathcal{M}$, digamos

$$\sum_{k=1}^{j} J_F\circ A_k \overset{j}{\longrightarrow} A \in \mathcal{M}(E_1,\ldots,E_n;F'').$$

Veja que $A_j(E_1\times\cdots\times E_n) \subset F$ e, daí, $(J_F\circ A_j)(E_1\times\cdots\times E_n) = J_F(A_j(E_1\times\cdots\times E_n)) \subset J_F(F)$ para todo $j\in\mathbb{N}$. Logo, como $J_F(F)$ é Banach, podemos tomar $A' \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;J_F(F))$ dado por

$$A'\colon E_1\times\cdots\times E_n \longrightarrow J_F(F),\ A'(x_1,\ldots,x_n) = A(x_1,\ldots,x_n),$$

e considerar o operador $J_F^{-1}\circ A' \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ (como já fizemos antes, estamos considerando o isomorfismo isométrico $J_F^{-1}\colon J_F(F)\longrightarrow F$). Além disso, pela maneira com que definimos A' temos $A = J_F\circ J_F^{-1}\circ A' \in \mathcal{M}(E_1,\ldots,E_n;F'')$, e portanto $J_F^{-1}\circ A' \in \mathcal{M}^{reg}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Ainda,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{j} A_k - J_F^{-1}\circ A'\right\|_{\mathcal{M}^{reg}} &= \left\|J_F\circ\left(\sum_{k=1}^{j} A_k - J_F^{-1}\circ A'\right)\right\|_{\mathcal{M}}\\ &= \left\|J_F\circ\left(\sum_{k=1}^{j} A_k\right) - J_F\circ(J_F^{-1}\circ A')\right\|_{\mathcal{M}}\\ &= \left\|\sum_{k=1}^{j} J_F\circ A_k - A\right\|_{\mathcal{M}} \overset{j}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

provando que $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = J_F^{-1} \circ A' \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ em $(\mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F), \| \cdot \|_{\mathcal{M}^{reg}})$, o que nos permite concluir que esse espaço é completo.

(b) Provemos que $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$. Seja $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e, pela propriedade de ideal de $\mathcal{M}$, $J_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F'')$, logo, $A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e, consequentemente, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{reg}$. Para a desigualdade das normas,

$$\|A\|_{\mathcal{M}^{reg}} = \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \leq \|J_F\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{\mathcal{M}},$$

o que implica que $\| \cdot \|_{\mathcal{M}^{reg}} \leq \| \cdot \|_{\mathcal{M}}$.

(c) Pelo item (b), $\mathcal{M}^{reg} \subset (\mathcal{M}^{reg})^{reg}$ e $\|\cdot\|_{(\mathcal{M}^{reg})^{reg}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}}$. Dado $A \in (\mathcal{M}^{reg})^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$, então $J_F \circ A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F'')$ e, daí, $J_{F''} \circ J_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F^{(iv)})$. Note que

$$J_F \circ A = id_{F''} \circ J_F \circ A = (J_{F'})' \circ J_{F''} \circ J_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F''),$$

pela propriedade de ideal de $\mathcal{M}$ e por $(J_{F'})' \circ J_{F''} = id_{F''}$ (Proposição 1.23). Portanto, $A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$, donde segue que $(\mathcal{M}^{reg})^{reg} \subset \mathcal{M}^{reg}$. E ainda,

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathcal{M}^{reg}} &= \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|(J_{F'})' \circ J_{F''} \circ J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|(J_{F'})'\| \cdot \|J_{F''} \circ J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|J_{F''} \circ J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{(\mathcal{M}^{reg})^{reg}}. \end{aligned}$$

Com isso, $\| \cdot \|_{\mathcal{M}^{reg}} \leq \| \cdot \|_{(\mathcal{M}^{reg})^{reg}}$ e temos as igualdades dos multi-ideais e das normas.

(d) Pela definição e pelo item (b), temos $\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1) \subset \mathcal{M}^{reg}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)}$ em todas as componentes de $\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN}$, $F' \in \mathfrak{D}_1$ e $A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F')$. Então $J_{F'} \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F''')$ e, pela propriedade de ideal de $\mathcal{M}$,

$$A = id_{F'} \circ A = (J_F)' \circ J_{F'} \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F') = \mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)(E_1, \ldots, E_n; F'),$$

provando que $\mathcal{M}^{reg} = \mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)$ em todas as componentes de $\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)$. Pela desigualdade de ideal de $\mathcal{M}$,

$$\|A\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)} = \|A\|_{\mathcal{M}} = \|(J_F)' \circ J_{F'} \circ A\|_{\mathcal{M}} \leq \|(J_F)'\| \cdot \|J_{F'} \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|J_{F'} \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{\mathcal{M}^{reg}},$$

logo, $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}}$. Portanto, $(\mathcal{M}^{reg}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}})$ é uma extensão de $(\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1), \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)})$. □

Definição 3.13. Um multi-ideal normado $(\mathcal{M}, \| \cdot \|_{\mathcal{M}})$ é dito *regular* se $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{reg}$ isometricamente.

Exemplo 3.14. Existem multi-ideais normados não regulares. Por exemplo, o multi-ideal de Banach dos operadores nucleares (veja [11]) é não regular, pois sua componente linear, ou seja, o ideal dos operadores lineares nucleares, não é regular (veja [15]).

Proposição 3.15. *Seja $(\mathcal{M}, \| \cdot \|_{\mathcal{M}})$ um multi-ideal normado não regular. Então $(\mathcal{M}, \| \cdot \|_{\mathcal{M}})$ e $(\mathcal{M}^{reg}, \| \cdot \|_{\mathcal{M}^{reg}})$ são extensões distintas do $\mathfrak{D}_1$-ideal normado $(\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1), \| \cdot \|_{\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)})$.*

Demonstração. Com efeito, pelas Proposições 3.3 e 3.12, $(\mathcal{M}, \| \cdot \|_{\mathcal{M}})$ e $(\mathcal{M}^{reg}, \| \cdot \|_{\mathcal{M}^{reg}})$ são extensões do $\mathfrak{D}_1$-ideal normado $(\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1), \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)})$ e distintas pois $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é não regular. □

3.3 A extensão como envoltória

Assim como temos a envoltória regular, podemos também pensar em outro tipo de envoltória, por exemplo, a envoltória injetiva, que, mais uma vez, é definida como no caso linear.

Definição 3.16. Sejam $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um multi-ideal normado, $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$. Dado $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, dizemos que $A \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$ se

$$I_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'})),$$

onde $I_F \colon F \longrightarrow \ell_\infty(B_{F'})$ é a injeção métrica da Proposição 3.8. Neste caso definimos $\|A\|_{\mathcal{M}^{inj}} = \|I_F \circ A\|_{\mathcal{M}}$ para todo $A \in \mathcal{M}^{inj}$.

A próxima proposição nos permite chamar $\mathcal{M}^{inj}$ de *envoltória injetiva de* $\mathcal{M}$.

Proposição 3.17. *Seja* $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ *um multi-ideal normado (Banach).*
(a) $(\mathcal{M}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{inj}})$ *é multi-ideal normado (Banach).*
(b) $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}}) \subset (\mathcal{M}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{inj}})$*, isto é,* $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{inj}$ *e* $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^{inj}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}}$.
(c) $(\mathcal{M}^{inj})^{inj} = \mathcal{M}^{inj}$ *isometricamente.*

Demonstração. (a) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$.
(I) $\mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$:
(i) $0 \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$, pois $0 \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $I_F \circ 0 = 0 \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'}))$.
(ii) Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Daí, $A_1 + A_2 \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$, pois $A_1 + A_2 \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $I_F \circ (A_1 + A_2) = I_F \circ A_1 + I_F \circ A_2 \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'}))$.
(iii) Sejam $A \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Daí, $\lambda A \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$, pois $\lambda A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $I_F \circ (\lambda A) = \lambda(I_F \circ A) \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'}))$.
(II) Dados $\varphi_1 \in E_1', \ldots, \varphi_n \in E_n'$ e $b \in F$, temos $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e

$$\begin{aligned}(I_F \circ (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b))(x_1, \ldots, x_n) &= I_F(\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot I_F(b) \\ &= (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes I_F(b))(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Logo,

$$I_F \circ (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b) = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes I_F(b) \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'}))$$

é de tipo finito e, daí, pertence a $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'}))$, o que implica que $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Portanto, $\mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$ contém os operadores tipo finito, pois é espaço vetorial.
(III) A função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^{inj}}$ é uma norma em $\mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$:
(i) Para todo $A \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$, obviamente $\|A\|_{\mathcal{M}^{inj}} = \|I_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \geq 0$. Tomando $0 \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$, então $\|0\|_{\mathcal{M}^{inj}} = \|I_F \circ 0\|_{\mathcal{M}} = \|0\|_{\mathcal{M}} = 0$. Dado $A \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$ de modo que $\|A\|_{\mathcal{M}^{inj}} = \|I_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = 0$, temos $I_F \circ A = 0$ e, como I_F é injeção métrica, $A = 0$ necessariamente, pois

$$\|A(x_1, \ldots, x_n)\| = \|I_F(A(x_1, \ldots, x_n))\| = \|(I_F \circ A)(x_1, \ldots, x_n)\| = \|0(x_1, \ldots, x_n)\| = 0$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.
(ii) Sejam $A \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos,

$$\|\lambda A\|_{\mathcal{M}^{inj}} = \|I_F \circ (\lambda A)\|_{\mathcal{M}} = \|\lambda(I_F \circ A)\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \cdot \|I_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}^{inj}}.$$

(iii) Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Temos,

$$\|A_1 + A_2\|_{\mathcal{M}^{inj}} = \|I_F \circ (A_1 + A_2)\|_{\mathcal{M}} = \|I_F \circ A_1 + I_F \circ A_2\|_{\mathcal{M}}$$

$$\leq \|I_F \circ A_1\|_{\mathcal{M}} + \|I_F \circ A_2\|_{\mathcal{M}} = \|A_1\|_{\mathcal{M}^{inj}} + \|A_2\|_{\mathcal{M}^{inj}}.$$

(IV) Definindo $A\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ por $A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, então $A \in \mathcal{M}^{inj}({}^n\mathbb{K}; \mathbb{K})$ pois é de tipo finito, e ainda,

$$\begin{aligned}(id_{\mathbb{K}} \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes id_{\mathbb{K}} \otimes I_{\mathbb{K}}(1))(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) &= id_{\mathbb{K}}(\lambda_1) \cdots id_{\mathbb{K}}(\lambda_n) \cdot I_{\mathbb{K}}(1) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot I_{\mathbb{K}}(1) \\ &= I_{\mathbb{K}}(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = (I_{\mathbb{K}} \circ A)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\end{aligned}$$

para todo $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Logo, $I_{\mathbb{K}} \circ A = id_{\mathbb{K}} \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes id_{\mathbb{K}} \otimes I_{\mathbb{K}}(1)$ é de tipo finito e,

$$\|A\|_{\mathcal{M}^{inj}} = \|I_{\mathbb{K}} \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|id_{\mathbb{K}} \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes id_{\mathbb{K}} \otimes I_{\mathbb{K}}(1)\|_{\mathcal{M}} = \|id_{\mathbb{K}}\| \cdots \|id_{\mathbb{K}}\| \cdot \|I_{\mathbb{K}}(1)\| = 1.$$

(V) Para a propriedade e desigualdade de ideal, sejam $G_1, \ldots, G_n, H \in \mathcal{BAN}$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \ldots, n$, $t \in \mathcal{L}(F; H)$ e $A \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Como $\ell_\infty(B_{H'})$ possui a propriedade da extensão métrica, existe $B \in \mathcal{L}\left(\ell_\infty(B_{F'}); \ell_\infty(B_{H'})\right)$ tal que $B \circ I_F = I_H \circ t$ e ainda $\|B\| = \|I_H \circ t\| = \|t\|$.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[d, "u_1"'] & \times \cdots \times & G_n \arrow[d, "u_n"'] & & & \\
E_1 & \times \cdots \times & E_n \arrow[r, "A"] & F \arrow[r, "t"] \arrow[d, "I_F"'] & H \arrow[r, "I_H"] & \ell_\infty(B_{H'}) \\
& & & \ell_\infty(B_{F'}) \arrow[urr, "B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Daí,

$$\begin{aligned}I_H \circ (t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)) &= (I_H \circ t) \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) = (B \circ I_F) \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \\ &= B \circ (I_F \circ A) \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{M}(G_1, \ldots, G_n; \ell_\infty(B_{H'})),\end{aligned}$$

pela propriedade de ideal de $\mathcal{M}$ e por $I_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'}))$. Portanto, $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{M}^{inj}(G_1, \ldots, G_n; H)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\|t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathcal{M}^{inj}} &= \|I_H \circ (t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))\|_{\mathcal{M}} = \|B \circ (I_F \circ A) \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathcal{M}} \\ &\overset{(*)}{\leq} \|B\| \cdot \|I_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\| = \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}^{inj}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|,\end{aligned}$$

onde (*) segue pela desigualdade de ideal de $\mathcal{M}$. Portanto, $(\mathcal{M}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{inj}})$ é multi-ideal normado. Caso $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ seja Banach, vamos verificar que $(\mathcal{M}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{inj}})$ também é. Seja $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$ uma sequência satisfazendo $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{M}^{inj}} < +\infty$. Por definição, $(I_F \circ A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'}))$ e $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|I_F \circ A_j\|_{\mathcal{M}} < +\infty$, logo, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} I_F \circ A_j$ é convergente em $\mathcal{M}$, digamos

$$\sum_{k=1}^{j} I_F \circ A_k \xrightarrow{j} A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'})).$$

Veja que $A_j(E_1 \times \cdots \times E_n) \subset F$, e daí $(I_F \circ A_j)(E_1 \times \cdots \times E_n) = I_F(A_j(E_1 \times \cdots \times E_n)) \subset I_F(F)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $I_F(F)$ é Banach, podemos tomar $A' \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; I_F(F))$ dado por

$$A'\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow I_F(F),\ A'(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n),$$

e considerar a aplicação $I_F^{-1} \circ A' \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ (como sempre estamos considerando o isomorfismo isométrico $I_F^{-1}\colon I_F(F) \longrightarrow F$). Além disso, pela maneira com que definimos A'

temos $A = I_F \circ I_F^{-1} \circ A' \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'}))$, logo $I_F^{-1} \circ A' \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{j} A_k - I_F^{-1} \circ A' \right\|_{\mathcal{M}^{inj}} &= \left\| I_F \circ \left(\sum_{k=1}^{j} A_k - I_F^{-1} \circ A' \right) \right\|_{\mathcal{M}} \\
&= \left\| I_F \circ \left(\sum_{k=1}^{j} A_k \right) - I_F \circ \left(I_F^{-1} \circ A' \right) \right\|_{\mathcal{M}} \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{j} I_F \circ A_k - A \right\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{j} 0,
\end{aligned}$$

provando que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j = I_F^{-1} \circ A'$ em $(\mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F), \| \cdot \|_{\mathcal{M}^{inj}})$. Isso prova que esse espaço é completo.

(b) Seja $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e, pela propriedade de ideal de $\mathcal{M}$, $I_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'}))$, logo, $A \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Isso prova que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{inj}$. Para a desigualdade das normas, veja que

$$\|A\|_{\mathcal{M}^{inj}} = \|I_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \leq \|I_F\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{\mathcal{M}}$$

(c) Pelo item (b), $\mathcal{M}^{inj} \subset (\mathcal{M}^{inj})^{inj}$ e $\|\cdot\|_{(\mathcal{M}^{inj})^{inj}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{inj}}$. Seja $A \in (\mathcal{M}^{inj})^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então $I_F \circ A \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'}))$, e daí

$$I_{\ell_\infty(B_{F'})} \circ I_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{(\ell_\infty(B_{F'}))'})).$$

Pela propriedade da extensão métrica de $\ell_\infty(B_{F'})$, existe $B \in \mathcal{L}(\ell_\infty(B_{(\ell_\infty(B_{F'}))'}); \ell_\infty(B_{F'}))$ de modo que $B \circ I_{\ell_\infty(B_{F'})} = id_{\ell_\infty(B_{F'})}$ e $\|B\| = \|id_{\ell_\infty(B_{F'})}\| = 1$

$$\begin{tikzcd}
\ell_\infty(B_{F'}) \arrow[r, "id_{\ell_\infty(B_{F'})}"] \arrow[d, "I_{\ell_\infty(B_{F'})}"'] & \ell_\infty(B_{F'}) \\
\ell_\infty(B_{(\ell_\infty(B_{F'}))'}) \arrow[ur, "B"'] &
\end{tikzcd}$$

Agora,

$$I_F \circ A = id_{\ell_\infty(B_{F'})} \circ I_F \circ A = B \circ I_{\ell_\infty(B_{F'})} \circ I_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; \ell_\infty(B_{F'})),$$

pela propriedade de ideal de $\mathcal{M}$. Portanto, $A \in \mathcal{M}^{inj}(E_1, \ldots, E_n; F)$, e daí $(\mathcal{M}^{inj})^{inj} \subset \mathcal{M}^{inj}$. Para finalizar,

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\mathcal{M}^{inj}} &= \|I_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|B \circ I_{\ell_\infty(B_{F'})} \circ I_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \leq \|B\| \cdot \|I_{\ell_\infty(B_{F'})} \circ I_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \\
&= \|I_{\ell_\infty(B_{F'})} \circ I_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|I_F \circ A\|_{\mathcal{M}^{inj}} = \|A\|_{(\mathcal{M}^{inj})^{inj}}.
\end{aligned}$$

Com isso, $\| \cdot \|_{\mathcal{M}^{inj}} \leq \| \cdot \|_{(\mathcal{M}^{inj})^{inj}}$ e temos as igualdades dos multi-ideais e das normas. $\square$

Veremos a seguir que nosso processo de extensão pode ser visto como um processo de envoltória, no sentido de que ele generaliza os procedimentos de envoltória regular e injetiva.

Definição 3.18. Dada $\mathfrak{B}$ uma classe admissível, denotamos o espaço e os operadores associados ao espaço de Banach E pela classe $\mathfrak{B}$ por $\widetilde{E}_{\mathfrak{B}}$, $i_E^{\mathfrak{B}}$, $k_E^{\mathfrak{B}}$ e $\widetilde{v}_{\mathfrak{B}}$. Dadas duas classes admissíveis $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$, dizemos que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$ se $\{\widetilde{E}_{\mathfrak{B}} : E \in \mathcal{BAN}\} \subset \{\widetilde{E}_{\mathfrak{C}} : E \in \mathcal{BAN}\}$, $\widetilde{E}_{\mathfrak{B}} = \widetilde{E}_{\mathfrak{C}}$ e $i_E^{\mathfrak{B}} = i_E^{\mathfrak{C}}$ para todo $E \in \mathcal{BAN}$, $k_H^{\mathfrak{B}} = k_H^{\mathfrak{C}}$ para todo $H \in \mathfrak{B}$ e $\widetilde{v}_{\mathfrak{B}} = \widetilde{v}_{\mathfrak{C}}$ para todo operador linear v.

Observação 3.19. Se $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ são classes admissíveis tais que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$ e $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ é um $\mathfrak{C}$-ideal normado (Banach) de operadores multilineares, é claro que a restrição de $\mathcal{A}$ às componentes formadas por operadores tomando valores em espaços de $\mathfrak{B}$, isto é,

$$\{(\mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; F); \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) : n \in \mathbb{N},\ E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN} \text{ e } F \in \mathfrak{B}\}$$

é um $\mathfrak{B}$-ideal normado (Banach) de operadores multilineares. Então podemos falar, sem ambiguidade, de $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}})$ e $(\mathcal{A}^{\mathfrak{C}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{C}-ext}})$.

Definição 3.20. Dados uma classe admissível $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}$-ideais normados de operadores multilineares $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1})$ e $(\mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$, dizemos que $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}) \subset (\mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$ se $\mathcal{A}_1(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \mathcal{A}_2(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_1} = \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2}$ em $\mathcal{A}_1(E_1, \ldots, E_n; F)$ para todos $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN}$ e $F \in \mathfrak{B}$.

Proposição 3.21. *(a) Sejam $\mathfrak{B}$ uma classe admissível e $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ um $\mathfrak{B}$-ideal normado de operadores multilineares. Então:*
(a1) $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \subset (\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(\mathfrak{B}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(\mathfrak{B})})$.
(a2) Denotando a restrição de $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}})$ a $\mathfrak{B}$ ainda por $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}})$, temos $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext})^{\mathfrak{B}-ext} = \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}$ isometricamente.
(b) Se $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ são classes admissíveis tais que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$ e $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ é um $\mathfrak{C}$-ideal normado de operadores multilineares, então $\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext} \subset \mathcal{A}^{\mathfrak{C}-ext}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{C}-ext}}$ em $\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}$.
(c) Se $\mathfrak{B}$ é uma classe admissível e $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1})$ e $(\mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$ são $\mathfrak{B}$-ideais normados de operadores multilineares tais que $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}) \subset (\mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$, então $(\mathcal{A}_1^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1^{\mathfrak{B}-ext}}) \subset (\mathcal{A}_2^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2^{\mathfrak{B}-ext}})$.

Demonstração. (a1) A verificação é imediata, basta lembrar que $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}})$ é uma extensão de $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ e que $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(\mathfrak{B}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(\mathfrak{B})})$ é $\mathfrak{B}$-ideal normado (Proposição 3.3).

(a2) Como $(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}})$ é um multi-ideal normado, a sua restrição a $\mathfrak{B}$ é um $\mathfrak{B}$-ideal normado, logo podemos pensar na extensão da extensão $((\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext})^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext})^{\mathfrak{B}-ext}})$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$ e $A \in (\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext})^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $i_F \circ A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F}) = \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F})$. Daí, $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e

$$\|A\|_{(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext})^{\mathfrak{B}-ext}} = \|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}} = \|A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}}.$$

Tomando $B \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$, então $B \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $i_F \circ B \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F}) = \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F})$. Logo, $B \in (\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext})^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e

$$\|B\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|i_F \circ B\|_{\mathcal{A}} = \|i_F \circ B\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|B\|_{(\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext})^{\mathfrak{B}-ext}}.$$

Portanto, temos a igualdade isométrica das extensões.

(b) Seja $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $i_F^{\mathfrak{B}} \circ A \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F}_{\mathfrak{B}})$. Como $i_F^{\mathfrak{B}} = i_F^{\mathfrak{C}}$ e $\widetilde{F}_{\mathfrak{B}} = \widetilde{F}_{\mathfrak{C}}$, temos $i_F^{\mathfrak{C}} \circ A \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; \widetilde{F}_{\mathfrak{C}})$ e

$$\|A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|i_F^{\mathfrak{B}} \circ A\|_{\mathcal{A}} = \|i_F^{\mathfrak{C}} \circ A\|_{\mathcal{A}} = \|A\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{C}-ext}}.$$

Portanto, $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{C}-ext}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{\mathfrak{C}-ext}}$ em $\mathcal{A}^{\mathfrak{B}-ext}$.

(c) Devemos verificar que $\mathcal{A}_1^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F) \subset \mathcal{A}_2^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_1^{\mathfrak{B}-ext}} = \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2^{\mathfrak{B}-ext}}$ em $\mathcal{A}_1^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$ para todos $n \in \mathbb{N}$, $E_1,\ldots,E_n,F \in \mathcal{BAN}$. Seja $A \in \mathcal{A}_1^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Então $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e

$$i_F \circ A \in \mathcal{A}_1(E_1,\ldots,E_n;\widetilde{F}) \subset \mathcal{A}_2(E_1,\ldots,E_n;\widetilde{F}).$$

Logo, $A \in \mathcal{A}_2^{\mathfrak{B}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e

$$\|A\|_{\mathcal{A}_1^{\mathfrak{B}-ext}} = \|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}_1} = \|i_F \circ A\|_{\mathcal{A}_2} = \|A\|_{\mathcal{A}_2^{\mathfrak{B}-ext}}.$$

□

Proposição 3.22. *Seja $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um multi-ideal normado.*
(a) Se $\mathfrak{D}_1$ é a classe admissível dos espaços de Banach duais (Exemplo 3.4), então $\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)^{\mathfrak{D}_1-ext} = \mathcal{M}^{reg}$ isometricamente.
(b) Se $\mathfrak{M}$ é a classe admissível dos espaços de Banach com a propriedade da extensão métrica (Exemplo 3.9), então $\mathcal{M}(\mathfrak{M})^{\mathfrak{M}-ext} = \mathcal{M}^{inj}$ isometricamente.

Demonstração. Dados $n \in \mathbb{N}$, $E_1,\ldots,E_n,F \in \mathcal{BAN}$, veja que

$$A \in \mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)^{\mathfrak{D}_1-ext}(E_1,\ldots,E_n;F) \Longleftrightarrow$$

$$A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F) \text{ e } J_F \circ A \in \mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)(E_1,\ldots,E_n;F'') = \mathcal{M}(E_1,\ldots,E_n;F'') \Longleftrightarrow$$
$$A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1,\ldots,E_n;F).$$

E ainda,

$$\|A\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)^{\mathfrak{D}_1-ext}} = \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)} = \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{\mathcal{M}^{reg}}.$$

Segue que $\mathcal{M}^{reg} = \mathcal{M}(\mathfrak{D}_1)^{\mathfrak{D}_1-ext}$ isometricamente.

E também

$$A \in \mathcal{M}(\mathfrak{M})^{\mathfrak{M}-ext}(E_1,\ldots,E_n;F) \Longleftrightarrow$$

$$A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F) \text{ e } I_F \circ A \in \mathcal{M}(\mathfrak{M})(E_1,\ldots,E_n;\ell_\infty(B_{F'})) = \mathcal{M}(E_1,\ldots,E_n;\ell_\infty(B_{F'})) \Longleftrightarrow$$
$$A \in \mathcal{M}^{inj}(E_1,\ldots,E_n;F).$$

E ainda,

$$\|A\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{M})^{\mathfrak{M}-ext}} = \|I_F \circ A\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{M})} = \|I_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{\mathcal{M}^{inj}}.$$

Segue que $\mathcal{M}^{inj} = \mathcal{M}(\mathfrak{M})^{\mathfrak{M}-ext}$ isometricamente. □

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações do teorema de extensão. No primeiro instante estudamos a estendibilidade da classe dos operadores quase-$\tau(p)$-somantes, uma pergunta ainda em aberto, e caracterizamos essa possível estendibilidade com a igualdade isométrica da classe destes operadores com a classe dos operadores $\tau(p)$-somantes, também uma pergunta em aberto. Isto é, mostramos que a igualdade das duas classes é equivalente à estendibilidade da classe menor. Isso pode ser o caminho para provar a igualdade (ou não) das duas classes. Em seguida mostramos um método que nos permite construir um ideal de operadores n-lineares a partir de um ideal de funcionais $(n+1)$-lineares. E fechamos o capítulo abordando a estendibilidade da classe dos operadores sequencialmente w^*-compactos, concluindo que esta classe não é estendível a um ideal de operadores. Aqui a principal referência utilizada foi [6].

Um ponto interessante é que na primeira e terceira aplicações do teorema de extensão o leitor pode perceber a importância de trabalharmos com subclasses da classe $\mathcal{BAN}$ de todos os espaços de Banach, usando o conceito de classes admissíveis, pois nas duas classes de operadores abordadas os operadores não são definidos para quaisquer espaços de Banach no contradomínio.

4.1 Operadores quase-$\tau(p)$-somantes

Os operadores multilineares $\tau(p)$-somantes foram introduzidos por X. Mujica em [13]. Em [5], para obter a representação dos funcionais no espaço dos operadores multilineares $\sigma(p)$-nucleares, os autores introduzem a classe dos operadores multilineares quase-$\tau(p)$-somantes tomando valores em espaços duais, cujas componentes são formalmente maiores que as componentes do multi-ideal dos operadores $\tau(p)$-somantes. No final do artigo, os autores enunciam o problema se essas duas classes coincidem ou não. Em [6], no qual este trabalho de dissertação é baseado, os autores aplicam o teorema de extensão (caso linear) para mostrar que os espaços dos operadores lineares quase-$\tau(p)$-somantes e $\tau(p)$-somantes são isomorfos isometricamente se, e somente se, a classe dos operadores quase-$\tau(p)$-somantes é estendível. O objetivo desta seção é verificar que a mesma caracterização também é válida no caso de operadores multilineares.

Como dito acima, a próxima definição foi introduzida em [5].

Definição 4.1. Para $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$ e $p \geq 1$, um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F')$ é dito *quase-$\tau(p)$-somante* se existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left|A\left(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}\right)\left(y_j\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|x_1'\left(x_{1,j}\right) \cdots x_n'\left(x_{n,j}\right) \cdot y'(y_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j \in F$ com $i = 1, \ldots, n$, e $j = 1, \ldots, m$. Denotamos o ínfimo de todas as constantes $c \geq 0$ possíveis por $\|A\|_{q\tau(p)}$ e a classe desses operadores por $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$.

Provemos duas propriedades que usaremos mais tarde.

Lema 4.2. *(a) O ínfimo na definição de $\|\cdot\|_{q\tau(p)}$ é assumido.*
(b) $\|A\| \leq \|A\|_{q\tau(p)}$ para todo $A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$.

Demonstração. (a) Dados $A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$ e $\varepsilon > 0$, existe $c \geq 0$ de modo que $\|A\|_{q\tau(p)} \leq c < (1+\varepsilon) \cdot \|A\|_{q\tau(p)}$ e

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |A(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j \in F$ com $i = 1, \ldots, n$, e $j = 1, \ldots, m$. Daí,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m} |A(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq c \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &< (1+\varepsilon) \cdot \|A\|_{q\tau(p)} \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0^+$,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |A(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|A\|_{q\tau(p)} \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j \in F$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.
(b) Seja $A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$. Sabemos que

$$\|A\| = \inf\{c \geq 0 : \|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\| \text{ para todo } x_j \in E_j \text{ com } j = 1, \ldots, n\},$$

e ainda, para $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$,

$$\|A(x_1, \ldots, x_n)\| = \inf\{c \geq 0 : |A(x_1, \ldots, x_n)(y)| \leq c \cdot \|y\| \text{ para todo } y \in F\}.$$

Tomando $m = 1$ na definição de operador quase-$\tau(p)$-somante,

$$|A(x_1, \ldots, x_n)(y)| \leq \|A\|_{q\tau(p)} \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} |x_1'(x_1) \cdots x_n'(x_n) \cdot y'(y)| = \|A\|_{q\tau(p)} \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\| \cdot \|y\|,$$

para todos $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ e $y \in F$. Daí,

$$\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \|A\|_{q\tau(p)} \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|,$$

o que nos permite concluir que $\|A\| \leq \|A\|_{q\tau(p)}$. □

Proposição 4.3. *Para $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$, $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F')$ e $\|\cdot\|_{q\tau(p)}$ é uma norma em $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$.*

Demonstração. Vejamos que $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F')$:
(i) Claramente o operador nulo $0\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F')$ é quase-$\tau(p)$-somante.
(ii) Dados $A_1,A_2\in\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$, para todos $m\in\mathbb{N}$, $x_{i,j}\in E_i$ e $y_j\in F$ com $i=1,\ldots,n$ e $j=1,\ldots,m$, pelo Lema 4.2(a),

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|A_1(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\|A_1\|_{q\tau(p)}\cdot\sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'}\\ y'\in B_{F'}}}\left(\sum_{j=1}^{m}|x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\text{ e}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|A_2(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\|A_2\|_{q\tau(p)}\cdot\sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'}\\ y'\in B_{F'}}}\left(\sum_{j=1}^{m}|x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Consideremos as seguintes m-uplas de números reais:

$$a=(|A_1(x_{1,1},\ldots,x_{n,1})(y_1)|,|A_1(x_{1,2},\ldots,x_{n,2})(y_2)|,\ldots,|A_1(x_{1,m},\ldots,x_{n,m})(y_m)|)\text{ e}$$
$$b=(|A_2(x_{1,1},\ldots,x_{n,1})(y_1)|,|A_2(x_{1,2},\ldots,x_{n,2})(y_2)|,\ldots,|A_2(x_{1,m},\ldots,x_{n,m})(y_m)|).$$

Como $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $\mathbb{R}^m$, a desigualdade triangular nos garante que $\|a+b\|_p\le\|a\|_p+\|b\|_p$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m}|(A_1+A_2)(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\sum_{j=1}^{m}|A_1(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)+A_2(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le\left(\sum_{j=1}^{m}(|A_1(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|+|A_2(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\|a+b\|_p\le\|a\|_p+\|b\|_p\\
&=\left(\sum_{j=1}^{m}|A_1(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{m}|A_2(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le\|A_1\|_{q\tau(p)}\cdot\sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'}\\ y'\in B_{F'}}}\left(\sum_{j=1}^{m}|x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\\
&\quad+\|A_2\|_{q\tau(p)}\cdot\sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'}\\ y'\in B_{F'}}}\left(\sum_{j=1}^{m}|x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\|A_1\|_{q\tau(p)}+\|A_2\|_{q\tau(p)}\right)\cdot\sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'}\\ y'\in B_{F'}}}\left(\sum_{j=1}^{m}|x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $A_1+A_2\in\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$ e

$$\|A_1+A_2\|_{q\tau(p)}\le\|A_1\|_{q\tau(p)}+\|A_2\|_{q\tau(p)}.$$

(iii) Dados $A\in\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$ e $\lambda\in\mathbb{K}$, segue imediatamente da definição que $\lambda A\in\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$.
Portanto, $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F')$.

Verifiquemos que $\|\cdot\|_{q\tau(p)}$ é uma norma em $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$:
(i) É claro que $\|A\|_{q\tau(p)} \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$. Observe que se $A=0$, então $\|A\|_{q\tau(p)}=0$. Agora se $\|A\|_{q\tau(p)}=0$, então dados $(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$ e $y\in F$, tomando $m=1$ na definição de operador quase-$\tau(p)$-somante, temos

$$0 \leq |A(x_1,\ldots,x_n)(y)| \leq \|A\|_{q\tau(p)} \cdot \sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'} \\ y'\in B_{F'}}} |x_1'(x_1)\cdots x_n'(x_n)\cdot y'(y)| = 0.$$

Portanto, $A(x_1,\ldots,x_n)(y)=0$ para todos $(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$ e $y\in F$, o que implica que $A=0$.
(ii) Dados $\lambda\in\mathbb{K}$ e $A\in\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$, $\|\lambda A\|_{q\tau(p)}$ é, por definição, igual ao ínfimo de todas as constantes $c\geq 0$ satisfazendo

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |(\lambda A)(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\cdot \sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'} \\ y'\in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $m\in\mathbb{N}$, $x_{i,j}\in E_i$ e $y_j\in F$ com $i=1,\ldots,n$ e $j=1,\ldots,m$. Observe que essa acontece para $\lambda\neq 0$ se, e somente se,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |A(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c}{|\lambda|}\cdot \sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'} \\ y'\in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $m\in\mathbb{N}$, $x_{i,j}\in E_i$ e $y_j\in F$ com $i=1,\ldots,n$ e $j=1,\ldots,m$. Com isso, $\|\lambda A\|_{q\tau(p)} = |\lambda|\cdot\|A\|_{q\tau(p)}$. O caso $\lambda=0$ é óbvio.
(iii) A desigualdade triangular foi provada no item (ii) da verificação de subespaço vetorial.

Portanto, $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F'),\|\cdot\|_{q\tau(p)})$ é espaço normado. □

No próximo resultado provaremos uma caracterização da norma $\|\cdot\|_{q\tau(p)}$ que será útil na demonstração da completude do espaço $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F'),\|\cdot\|_{q\tau(p)})$.

Proposição 4.4. *Para todo* $A\in\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$,

$$\|A\|_{q\tau(p)} = \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{m} |A(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} : m\in\mathbb{N},\ x_{i,j}\in E_i,\ y_j\in F \text{ com } i=1,\ldots,n,\right.$$

$$\left. j=1,\ldots,m,\ \text{e} \sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'} \\ y'\in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1\right\}.$$

Demonstração. Chame de β o supremo que aparece no enunciado. Para todos $m\in\mathbb{N}$, $x_{i,j}\in E_i$ e $y_j\in F$ com $i=1,\ldots,n$ e $j=1,\ldots,m$, pelo Lema 4.2(a),

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |A(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|A\|_{q\tau(p)}\cdot \sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'} \\ y'\in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, para $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j \in F$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, tal que

$$\sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1$$

vale que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |A(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|A\|_{q\tau(p)}.$$

Disso segue que $\beta \leq \|A\|_{q\tau(p)}$. Tome $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j \in F$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, tal que

$$k := \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} > 0.$$

Então

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left| A\left(x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{n,j}\right) \left(\frac{y_j}{k} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \beta,$$

pois

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| x_1'\left(x_{1,j}\right) \cdot x_2'(x_{2,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'\left(\frac{y_j}{k} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad = \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\frac{1}{k^p} \cdot \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad = \frac{1}{k} \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1.
\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |A(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \beta \cdot k = \beta \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vejamos que essa desigualdade ocorre mesmo para vetores tais que

$$k = \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Com efeito, se $k = 0$, então

$$0 \leq \|x_{1,j}\| \cdots \|x_{n,j}\| \cdot \|y_j\| = \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|$$

$$\leq \sup_{\substack{x'_i \in B_{E'_i} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x'_1(x_{1,j}) \cdots x'_n(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = k = 0,$$

o que implica que para todo $j = 1, \ldots, m$, existe pelo menos um vetor dentre $x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}, y_j$ que é o vetor nulo. Logo, $A(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(y_j) = 0$ e então $|A(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(y_j)| = 0$. Com isso,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |A(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \leq \beta \cdot 0$$

$$= \beta \cdot \sup_{\substack{x'_i \in B_{E'_i} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x'_1(x_{1,j}) \cdots x'_n(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, essa desigualdade ocorre para toda escolha de vetores. Portanto, $\|A\|_{q\tau(p)} \leq \beta$, completando a demonstração. $\square$

Proposição 4.5. *O espaço normado* $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F'), \|\cdot\|_{q\tau(p)})$ *é completo.*

Demonstração. Seja $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$ uma sequência de Cauchy. Pelo Lema 4.2(b),

$$\|A_j - A_k\| \leq \|A_j - A_k\|_{q\tau(p)} \xrightarrow{j,k} 0,$$

logo a sequência $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $(\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F'), \|\cdot\|)$ e, daí, convergente, digamos $A_j \xrightarrow{j} A$ em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F')$. Além disso, como $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$, existe uma constante $c \geq 0$ tal que $\|A_j\|_{q\tau(p)} \leq c$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para provarmos que $A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$ sejam $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j \in F$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Lembrando que a convergência na norma do sup implica na convergência pontual, de

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{m} |A(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l)|^p &= \sum_{l=1}^{m} \left| \left(\lim_{j\to\infty} A_j(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l}) \right)(y_l) \right|^p \\
&= \sum_{l=1}^{m} \left| \lim_{j\to\infty} A_j(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l) \right|^p = \sum_{l=1}^{m} \lim_{j\to\infty} |A_j(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l)|^p \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{l=1}^{m} |A_j(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l)|^p \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \|A_j\|_{q\tau(p)}^p \cdot \sup_{\substack{x'_i \in B_{E'_i} \\ y' \in B_{F'}}} \sum_{l=1}^{m} |x'_1(x_{1,l}) \cdots x'_n(x_{n,l}) \cdot y'(y_l)|^p \\
&\leq \lim_{j\to\infty} c^p \cdot \sup_{\substack{x'_i \in B_{E_i} \\ y' \in B_{F'}}} \sum_{l=1}^{m} |x'_1(x_{1,l}) \cdots x'_n(x_{n,l}) \cdot y'(y_l)|^p \\
&= c^p \cdot \sup_{\substack{x'_i \in B_{E'_i} \\ y' \in B_{F'}}} \sum_{l=1}^{m} |x'_1(x_{1,l}) \cdots x'_n(x_{n,l}) \cdot y'(y_l)|^p,
\end{aligned}$$

e elevando os dois membros a $\frac{1}{p}$ segue que $A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$. Por outro lado, dados $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j \in F$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, de modo que

$$\sup_{\substack{x'_i \in B_{E'_i} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{l=1}^{m} |x'_1(x_{1,l}) \cdots x'_n(x_{n,l}) \cdot y'(y_l)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1,$$

sabemos que para todos $j, k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{l=1}^{m} |(A_j - A_k)(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|A_j - A_k\|_{q\tau(p)} \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{l=1}^{m} |x_1'(x_{1,l}) \cdots x_n'(x_{n,l}) \cdot y'(y_l)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|A_j - A_k\|_{q\tau(p)}.$$

Daí, fixado $j \in \mathbb{N}$ e fazendo $k \longrightarrow \infty$ obtemos

$$\left(\sum_{l=1}^{m} |A_j(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l) - A(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{m} \left|A_j(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l) - \lim_{k\to\infty} A_k(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{m} \left|\lim_{k\to\infty} (A_j(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l) - A_k(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l))\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{l=1}^{m} |(A_j - A_k)(x_{1,l}, \ldots, x_{n,l})(y_l)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{k\to\infty} \|A_j - A_k\|_{q\tau(p)},$$

sempre que

$$\sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{l=1}^{m} |x_1'(x_{1,l}) \cdots x_n'(x_{n,l}) \cdot y'(y_l)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1.$$

Pela Proposição 4.4,

$$\|A_j - A\|_{q\tau(p)} \leq \lim_{k\to\infty} \|A_j - A_k\|_{q\tau(p)},$$

e daí

$$0 \leq \lim_{j\to\infty} \|A_j - A\|_{q\tau(p)} \leq \lim_{j,k\to\infty} \|A_j - A_k\|_{q\tau(p)} = 0.$$

Portanto, $\lim_{j\to\infty} A_j = A$ em $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$, provando que $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F'), \|\cdot\|_{q\tau(p)})$ é espaço de Banach. $\square$

O próximo conceito é a generalização multilinear, introduzida em [13], dos operadores lineares $\tau(p)$-somantes de [15].

Definição 4.6. Para $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F \in \mathcal{BAN}$, um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F')$ é dito ser $\tau(p)$-*somante* se existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |y_j''(A(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y_j''(y')|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j'' \in F''$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Denotamos o ínfimo de todas as constantes $c \geq 0$ possíveis por $\|A\|_{\tau(p)}$ e a classe desses operadores por $\mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$.

Vejamos que $\mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F') \subset \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$ com $\|\cdot\|_{q\tau(p)} \leq \|\cdot\|_{\tau(p)}$. Com efeito, tomando $A \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$ temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m} |A(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{m} |J_F(y_j)(A(x_{1,j},\ldots,x_{n,j}))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c\cdot \sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'}\\ y'\in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot J_F(y_j)(y')|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= c\cdot \sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'}\\ y'\in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j \in F$ com $i = 1,\ldots,n$ e $j = 1,\ldots,m$.

Vejamos também que, caso F seja um espaço de Banach reflexivo, então

$$\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F') = \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F') \ \text{ isometricamente :}$$

dados $B \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$, $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j'' \in F''$ com $i = 1,\ldots,n$ e $j = 1,\ldots,m$, pela sobrejetividade do mergulho canônico $J_F\colon F \longrightarrow F''$ existem $y_1,\ldots,y_m \in F$ tais que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m} |y_j''(B(x_{1,j},\ldots,x_{n,j}))|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{m} |J_F(y_j)(B(x_{1,j},\ldots,x_{n,j}))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} |B(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|B\|_{q\tau(p)}\cdot \sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'}\\ y'\in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|B\|_{q\tau(p)}\cdot \sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'}\\ y'\in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot J_F(y_j)(y')|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|B\|_{q\tau(p)}\cdot \sup_{\substack{x_i'\in B_{E_i'}\\ y'\in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j})\cdots x_n'(x_{n,j})\cdot y_j''(y')|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Daí, $B \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$ e $\|B\|_{\tau(p)} \leq \|B\|_{q\tau(p)}$.

O problema que segue em aberto é se $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F') = \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F')$ isometricamente para todos $E_1,\ldots,E_n,F \in \mathcal{BAN}$. Usando o teorema de extensão, daremos uma condição necessária e suficiente para que tal igualdade ocorra.

Teorema 4.7. $\mathcal{L}_{q\tau(p)} = \mathcal{L}_{\tau(p)}$ *isometricamente se, e somente se, a classe* $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}, \|\cdot\|_{q\tau(p)})$ *é estendível.*

Demonstração. Pela Proposição 4.5, $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}, \|\cdot\|_{q\tau(p)})$ é uma $\mathfrak{D}_1$-classe Banach de operadores multilineares. Então, pelo teorema de extensão (Teorema 3.10) ela é estendível se, e somente se, é um $\mathfrak{D}_1$-ideal Banach de operadores multilineares. Verifiquemos que $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}, \|\cdot\|_{q\tau(p)})$ satisfaz todas as condições de ser $\mathfrak{D}_1$-ideal de operadores, exceto a seguinte:

$$A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F') \Longrightarrow J_{F'} \circ A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F''') \text{ e } \|A\|_{q\tau(p)} = \|J_{F'} \circ A\|_{q\tau(p)}.$$

Provemos que, de fato, as demais condições são verificadas:
(i) Dados $\varphi_1 \in E_1' \backslash \{0\}, \ldots, \varphi_n \in E_n' \backslash \{0\}$ e $b' \in F' \backslash \{0\}$, considere o operador $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b' \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F')$. De

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} |(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b')(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(y_j)|^p \\
&\quad = \sum_{j=1}^{m} |(\varphi_1(x_{1,j}) \cdots \varphi_n(x_{n,j}) \cdot b')(y_j)|^p = \sum_{j=1}^{m} |\varphi_1(x_{1,j}) \cdots \varphi_n(x_{n,j}) \cdot b'(y_j)|^p \\
&\quad = \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\|\varphi_1\|}{\|\varphi_1\|} \cdot \varphi_1(x_{1,j}) \cdots \frac{\|\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} \cdot \varphi_n(x_{n,j}) \cdot \frac{\|b'\|}{\|b'\|} \cdot b'(y_j) \right|^p \\
&\quad = \|\varphi_1\|^p \cdots \|\varphi_n\|^p \cdot \|b'\|^p \cdot \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}(x_{1,j}) \cdots \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}(x_{n,j}) \cdot \frac{b'}{\|b'\|}(y_j) \right|^p \\
&\quad \leq \|\varphi_1\|^p \cdots \|\varphi_n\|^p \cdot \|b'\|^p \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p
\end{aligned}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j \in F$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, elevando a $\frac{1}{p}$ dos dois lados obtemos $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b' \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$ e

$$\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b'\|_{q\tau(p)} \leq \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \cdot \|b'\| = \|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b'\|,$$

logo,

$$\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b'\|_{q\tau(p)} = \|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b'\|.$$

Veja que se algum $\varphi_i = 0$ ou $b' = 0$, então o mesmo ocorre obviamente. Portanto o espaço $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$ contém os operadores multilineares de tipo finito com igualdade das normas $\|\cdot\|_{q\tau(p)}$ e $\|\cdot\|$ nos operadores de tipo finito de posto 1.
(ii) Sejam $G_1, \ldots, G_n, H$ espaços de Banach, $u_l \in \mathcal{L}(G_l; E_l) \backslash \{0\}$ com $l = 1, \ldots, n$, $A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F'')$ e $t \in \mathcal{L}(F; H) \backslash \{0\}$. De,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} |(t'' \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))(z_{1,j}, \ldots, z_{n,j})(w_j')|^p \\
&\quad = \sum_{j=1}^{m} |t''(A(u_1(z_{1,j}), \ldots, u_n(z_{n,j})))(w_j')|^p = \sum_{j=1}^{m} |A(u_1(z_{1,j}), \ldots, u_n(z_{n,j}))(t'(w_j'))|^p \\
&\quad \overset{(*)}{\leq} \|A\|_{q\tau(p)}^p \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y'' \in B_{F''}}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(u_1(z_{1,j})) \cdots x_n'(u_n(z_{n,j})) \cdot y''(t'(w_j'))|^p \\
&\quad = \|A\|_{q\tau(p)}^p \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y'' \in B_{F''}}} \sum_{j=1}^{m} |(x_1' \circ u_1)(z_{1,j}) \cdots (x_n' \circ u_n)(z_{n,j}) \cdot (y'' \circ t')(w_j')|^p \\
&\quad = \|A\|_{q\tau(p)}^p \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y'' \in B_{F''}}} \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\|u_1\|}{\|u_1\|} \cdot (x_1' \circ u_1)(z_{1,j}) \cdots \frac{\|u_n\|}{\|u_n\|} \cdot (x_n' \circ u_n)(z_{n,j}) \cdot \frac{\|t'\|}{\|t'\|} \cdot (y'' \circ t')(w_j') \right|^p
\end{aligned}$$

$$= \|A\|^p_{q\tau(p)} \cdot \|u_1\|^p \cdots \|u_n\|^p \cdot \|t'\|^p \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y'' \in B_{F''}}} \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{x_1' \circ u_1}{\|u_1\|}(z_{1,j}) \cdots \frac{x_n' \circ u_n}{\|u_n\|}(z_{n,j}) \cdot \frac{y'' \circ t'}{\|t'\|}(w_j') \right|^p$$

$$\overset{(**)}{\leq} \|A\|^p_{q\tau(p)} \cdot \|u_1\|^p \cdots \|u_n\|^p \cdot \|t'\|^p \cdot \sup_{\substack{z_i' \in B_{G_i'} \\ w'' \in B_{H''}}} \sum_{j=1}^{m} |z_1'(z_{1,j}) \cdots z_n'(z_{n,j}) \cdot w''(w_j')|^p$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $z_{i,j} \in G_i$ e $w_j' \in H'$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, onde (*) segue do Lema 4.2(a) e (**) de

$$\left\| \frac{x_i' \circ u_i}{\|u_i\|} \right\| = \frac{1}{\|u_i\|} \cdot \|x_i' \circ u_i\| \leq \frac{1}{\|u_i\|} \cdot \|x_i'\| \cdot \|u_i\| \leq 1$$

para $i = 1, \ldots, n$, e

$$\left\| \frac{y'' \circ t'}{\|t'\|} \right\| = \frac{1}{\|t'\|} \cdot \|y'' \circ t'\| \leq \frac{1}{\|t'\|} \cdot \|y''\| \cdot \|t'\| \leq 1.$$

Elevando a $\frac{1}{p}$ ambos os lados, obtemos $t'' \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(G_1, \ldots, G_n; H'')$ e

$$\|t'' \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{q\tau(p)} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{q\tau(p)} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

(iii) Sejam $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{BAN}$, $F' \in \mathfrak{D}_1$ e $B \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F''')$. Verifiquemos que $(J_F)' \circ B \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$. De

$$\sum_{j=1}^{m} |((J_F)' \circ B)(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(y_j)|^p$$

$$= \sum_{j=1}^{m} |(J_F)'(B(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}))(y_j)|^p = \sum_{j=1}^{m} |B(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(J_F(y_j))|^p$$

$$\leq \|B\|^p_{q\tau(p)} \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y''' \in B_{F'''}}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'''(J_F(y_j))|^p$$

$$= \|B\|^p_{q\tau(p)} \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y''' \in B_{F'''}}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot (y''' \circ J_F)(y_j)|^p$$

$$\leq \|B\|^p_{q\tau(p)} \cdot \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'(y_j)|^p$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j \in F$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, elevando a $\frac{1}{p}$ ambos os lados, obtemos $(J_F)' \circ B \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F')$.

Provamos então que para $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}, \|\cdot\|_{q\tau(p)})$ ser $\mathfrak{D}_1$-ideal de operadores falta apenas a condição:

$$A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F') \Longrightarrow J_{F'} \circ A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F''') \text{ e } \|A\|_{q\tau(p)} = \|J_{F'} \circ A\|_{q\tau(p)}.$$

Pelo teorema de extensão, $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}, \|\cdot\|_{q\tau(p)})$ é estendível se, e somente se, tal condição se cumpre. Pela Proposição 1.40,

$$\sup_{\substack{x_i \in B_{E_i'} \\ y' \in B_{F'}}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y_j''(y')|^p = \sup_{\substack{x_i' \in B_{E_i'} \\ y''' \in B_{F'''}}} \sum_{j=1}^{m} |x_1'(x_{1,j}) \cdots x_n'(x_{n,j}) \cdot y'''(y_j'')|^p$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_{i,j} \in E_i$ e $y_j'' \in F''$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Disso segue que, para algum $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F')$, é verdade que

$$J_{F'} \circ A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F''') \Longleftrightarrow A \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F').$$

De fato, basta notar que

$$(J_{F'} \circ A)(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})(y_j'') = J_{F'}(A(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}))(y_j'') = y_j''(A(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})),$$

e usar a definição de operadores quase-$\tau(p)$-somantes e $\tau(p)$-somantes. Note ainda que a igualdade

$$\|J_{F'} \circ A\|_{q\tau(p)} = \|A\|_{\tau(p)}$$

segue diretamente da observação feita, pois uma constante $c \geq 0$ satisfaz a condição do operador quase-$\tau(p)$-somante $J_{F'} \circ A$ se, e somente se, satisfaz a condição da aplicação $\tau(p)$-somante A. Portanto, $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}, \| \cdot \|_{q\tau(p)})$ é estendível se, e somente se,

$$A \in \mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F') \Longrightarrow A \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, \ldots, E_n; F') \text{ e } \|A\|_{q\tau(p)} = \|A\|_{\tau(p)},$$

isto é, se, e somente se, $\mathcal{L}_{q\tau(p)} = \mathcal{L}_{\tau(p)}$ isometricamente, como queríamos. □

4.2 O ideal de operadores n-lineares gerado por um ideal de funcionais $(n+1)$-lineares

Como segunda aplicação do teorema de extensão, construiremos um procedimento para gerar ideais de operadores n-lineares a partir de um ideal de funcionais $(n+1)$-lineares. E quando tomamos $n = 1$, mostraremos que esse procedimento está relacionado com o método usado para gerar ideais de operadores bilineares a partir de um ideal de operadores lineares, descrito em [16].

O leitor perceberá que, nesta seção, as definições para o caso multilinear não são adaptadas tão imediatamente do caso linear apresentado no artigo [6]. Nesta aplicação do teorema de extensão tivemos que dar algumas soluções para que a generalização multilinear do caso linear feito em [6] funcione.

Dados $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}$ espaços de Banach, para cada $\sigma \in S_{n+1}$ considere o isomorfismo isométrico

$$T_\sigma \colon \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; E_{n+1}') \longrightarrow \mathcal{L}(E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(n)}, E_{\sigma(n+1)}; \mathbb{K})$$

$$T_\sigma(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, x_{\sigma(n+1)}) = A(x_1, \ldots, x_n)(x_{n+1}).$$

A definição a seguir, apesar de tecnicamente complicada, foi a única que encontramos de maneira que a generalização multilinear do caso linear de [6] funcione.

Definição 4.8. Dados $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}$ espaços de Banach e $\sigma \in S_{n+1}$, considere:

$$F_1^\sigma, \ldots, F_{n+1}^\sigma \text{ sendo } F_{\sigma^{-1}(n+1)}^\sigma = E_{n+1}'' \text{ e } F_j^\sigma = E_{\sigma(j)} \text{ para } j \neq \sigma^{-1}(n+1);$$

$$v_{\sigma^{-1}(n+1)}^\sigma = J_{E_{n+1}} \text{ e } v_j^\sigma = id_{E_{\sigma(j)}} \text{ para } j \neq \sigma^{-1}(n+1).$$

Um ideal normado de funcionais $(n+1)$-lineares $(\mathcal{F}, \| \cdot \|_{\mathcal{F}})$ é dito *pré-regular* se para todo $A \in \mathcal{L}(F_1^\sigma, \ldots, F_{n+1}^\sigma; \mathbb{K})$ tal que $A \circ (v_1^\sigma, \ldots, v_{n+1}^\sigma) \in \mathcal{F}(E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(n+1)}; \mathbb{K})$, então $A \in \mathcal{F}(F_1^\sigma, \ldots, F_{n+1}^\sigma; \mathbb{K})$ e $\|A \circ (v_1^\sigma, \ldots, v_{n+1}^\sigma)\|_{\mathcal{F}} = \|A\|_{\mathcal{F}}$ para toda $\sigma \in S_{n+1}$.

Teorema 4.9. *Seja* $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ *um ideal normado (Banach) de funcionais* $(n+1)$*-lineares pré-regular. Dados* $E_1, \ldots, E_{n+1}$ *espaços de Banach e* $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; E_{n+1})$*, dizemos que* $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E_{n+1})$ *se* $T_\sigma(J_{E_{n+1}} \circ A) \in \mathcal{F}(F_1^\sigma, \ldots, F_{n+1}^\sigma; \mathbb{K})$ *para toda* $\sigma \in S_{n+1}$*, onde* $F_{\sigma^{-1}(n+1)}^\sigma = E'_{n+1}$ *e* $F_j^\sigma = E_{\sigma(j)}$ *para* $j \neq \sigma^{-1}(n+1)$*. Neste caso, definimos*

$$\|A\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}} = \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(J_{E_{n+1}} \circ A)\|_{\mathcal{F}}.$$

Então $(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}})$ *é um ideal normado (Banach) de operadores* n*-lineares.*

Demonstração. Considere a classe admissível $\mathfrak{D}_2$ dos espaços de Banach biduais (Exemplo 3.5). Dizemos que o operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$ pertence a $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$ se $T_\sigma(A) \in \mathcal{F}(F_1^\sigma, \ldots, F_{n+1}^\sigma; \mathbb{K})$ para toda $\sigma \in S_{n+1}$ onde $F_{\sigma^{-1}(n+1)}^\sigma = E'_{n+1}$ e $F_j^\sigma = E_{\sigma(j)}$ para $j \neq \sigma^{-1}(n+1)$ com

$$\|A\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} = \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(A)\|_{\mathcal{F}}.$$

Provemos que $(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}})$ é um $\mathfrak{D}_2$-ideal normado (Banach) de operadores n-lineares:
(I) Obviamente $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$, basta observar que T_σ é isomorfismo isométrico.
(II) $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ é uma norma em $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$:
(i) É imediato que $\|A\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$ e $\|0\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} = 0$. Agora, dado $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$ tal que $\|A\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} = 0$, então $T_\sigma(A) = 0$ para toda $\sigma \in S_{n+1}$, e como T_σ é linear e injetor, segue que $A = 0$.
(ii) Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$. Temos

$$\begin{aligned}\|\lambda A\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} &= \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(\lambda A)\|_{\mathcal{F}} = \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|\lambda \cdot T_\sigma(A)\|_{\mathcal{F}} = \max_{\sigma \in S_{n+1}} |\lambda| \cdot \|T_\sigma(A)\|_{\mathcal{F}} \\ &= |\lambda| \cdot \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(A)\|_{\mathcal{F}} = |\lambda| \cdot \|A\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}.\end{aligned}$$

(iii) Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$. Temos

$$\begin{aligned}\|A_1 + A_2\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} &= \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(A_1 + A_2)\|_{\mathcal{F}} = \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(A_1) + T_\sigma(A_2)\|_{\mathcal{F}} \overset{(*)}{=} \|T_\gamma(A_1) + T_\gamma(A_2)\|_{\mathcal{F}} \\ &\leq \|T_\gamma(A_1)\|_{\mathcal{F}} + \|T_\gamma(A_2)\|_{\mathcal{F}} \leq \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(A_1)\|_{\mathcal{F}} + \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(A_2)\|_{\mathcal{F}} \\ &= \|A_1\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} + \|A_2\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}},\end{aligned}$$

onde, em (*), $\gamma \in S_{n+1}$ é tomada de forma conveniente.
(III) Provemos que se $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ é completo, então $(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}})$ é completo. Para isso seja $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$ tal que $\sum\limits_{j=1}^\infty \|A_j\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} < +\infty$. Disso segue que $(T_\sigma(A_j))_{j=1}^\infty \subset \mathcal{F}(F_1^\sigma, \ldots, F_{n+1}^\sigma; \mathbb{K})$ e ainda $\sum\limits_{j=1}^\infty \|T_\sigma(A_j)\|_{\mathcal{F}} \leq \sum\limits_{j=1}^\infty \|A_j\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} < +\infty$ para toda $\sigma \in S_{n+1}$. Logo, para cada $\sigma \in S_{n+1}$ existe $B_\sigma \in \mathcal{F}(F_1^\sigma, \ldots, F_{n+1}^\sigma; \mathbb{K})$ tal que

$$\sum_{k=1}^{j} T_\sigma(A_k) \xrightarrow{j} B_\sigma \text{ em } (\mathcal{F}(F_1^\sigma, \ldots, F_{n+1}^\sigma; \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\mathcal{F}}).$$

Como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{F}}$, a convergência acima também ocorre na norma do sup, e daí

$$\sum_{k=1}^{j} A_k = T_\sigma^{-1}\left(\sum_{k=1}^{j} T_\sigma(A_k)\right) \xrightarrow{j} T_\sigma^{-1}(B_\sigma) \text{ na norma do sup.}$$

Disso segue que $T_\sigma^{-1}(B_\sigma) = T_\gamma^{-1}(B_\gamma) =: B \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$ para todos $\sigma, \gamma \in S_{n+1}$. Veja que $B \in \mathcal{A}_\mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$, pois $T_\sigma(B) = B_\sigma \in \mathcal{F}(F_1^\sigma, \ldots, F_{n+1}^\sigma; \mathbb{K})$ para toda $\sigma \in S_{n+1}$. Além disso, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j = B$ em $\mathcal{A}_\mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$ pois

$$\left\| \sum_{k=1}^{j} A_k - B \right\|_{\mathcal{A}_\mathcal{F}} = \max_{\sigma \in S_{n+1}} \left\| T_\sigma \left(\sum_{k=1}^{j} A_k - B \right) \right\|_\mathcal{F} = \max_{\sigma \in S_{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^{j} T_\sigma(A_k) - B_\sigma \right\|_\mathcal{F} \xrightarrow{j} 0.$$

Portanto, $(\mathcal{A}_\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_\mathcal{F}})$ é uma $\mathfrak{D}_2$-classe normada (Banach) de operadores n-lineares.

Condição 3.2(b)(i): Dados $\varphi_1 \in E'_1, \ldots, \varphi_n \in E'_n, x''_{n+1} \in E''_{n+1}$, considere o operador $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes x''_{n+1} \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_n; E''_{n+1})$. Devemos mostrar que $T_\sigma(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes x''_{n+1}) \in \mathcal{F}(F_1^\sigma, \ldots, F_{n+1}^\sigma; \mathbb{K})$ para toda $\sigma \in S_{n+1}$. Trabalharemos com a permutação $\sigma = (2, 1, n+1, 4, 5, \ldots, n, 3)$, considerando $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ e $x'_{n+1} \in E'_{n+1}$, e o leitor perceberá que o mesmo raciocínio se aplica a qualquer outra permutação. De

$$\begin{aligned}
&T_\sigma(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes x''_{n+1})(x_2, x_1, x'_{n+1}, x_4, x_5, \ldots, x_n, x_3) \\
&\quad = (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes x''_{n+1})(x_1, \ldots, x_n)(x'_{n+1}) = (\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot x''_{n+1})(x'_{n+1}) \\
&\quad = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot x''_{n+1}(x'_{n+1}) \cdot 1 \\
&\quad = \varphi_2(x_2) \cdot \varphi_1(x_1) \cdot x''_{n+1}(x'_{n+1}) \cdot \varphi_4(x_4) \cdot \varphi_5(x_5) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot \varphi_3(x_3) \cdot 1 \\
&\quad = (\varphi_2 \otimes \varphi_1 \otimes x''_{n+1} \otimes \varphi_4 \otimes \varphi_5 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes \varphi_3 \otimes 1)(x_2, x_1, x'_{n+1}, x_4, x_5, \ldots, x_n, x_3),
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
&T_\sigma(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes x''_{n+1}) \\
&\quad = \varphi_2 \otimes \varphi_1 \otimes x''_{n+1} \otimes \varphi_4 \otimes \varphi_5 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes \varphi_3 \otimes 1 \in \mathcal{F}(E_2, E_1, E'_{n+1}, E_4, E_5, \ldots, E_n, E_3; \mathbb{K}),
\end{aligned}$$

pois é de tipo finito, o que implica que $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes x''_{n+1} \in \mathcal{A}_\mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$ e

$$\begin{aligned}
\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes x''_{n+1}\|_{\mathcal{A}_\mathcal{F}} &= \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes x''_{n+1})\|_\mathcal{F} \\
&\overset{(*)}{=} \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \cdot \|x''_{n+1}\| \cdot |1| = \|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes x''_{n+1}\|,
\end{aligned}$$

onde (*) segue do fato de que quando aplicamos T_σ em $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes x''_{n+1}$, apenas alteramos a ordem em que os vetores $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, x''_{n+1}$ aparecem no produto tensorial. Portanto, $\mathcal{A}_\mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$ contém os operadores de tipo finito, com igualdade das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\mathcal{F}}$ nos tensores elementares.

Condição 3.2(b)(ii): Sejam $A \in \mathcal{A}_\mathcal{F}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \ldots, n$, e $t \in \mathcal{L}(E_{n+1}; G_{n+1})$. Devemos mostrar que

$$T_\sigma(t'' \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)) \in \mathcal{F}(H_1^\sigma, \ldots, H_{n+1}^\sigma; \mathbb{K})$$

para toda $\sigma \in S_{n+1}$, onde $H^\sigma_{\sigma^{-1}(n+1)} = G'_{n+1}$ e $H_j^\sigma = G_{\sigma(j)}$ para $j \neq \sigma^{-1}(n+1)$. Assim como antes, trabalharemos com a permutação $\sigma = (2, 1, n+1, 4, 5, \ldots, n, 3)$, tomando $(z_1, \ldots, z_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$ e $z'_{n+1} \in G'_{n+1}$. De

$$\begin{aligned}
&T_\sigma(t'' \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))(z_2, z_1, z'_{n+1}, z_4, z_5, \ldots, z_n, z_3) \\
&\quad = (t'' \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))(z_1, \ldots, z_n)(z'_{n+1}) = t''(A(u_1(z_1), \ldots, u_n(z_n)))(z'_{n+1}) \\
&\quad = A(u_1(z_1), \ldots, u_n(z_n))(t'(z'_{n+1})) \\
&\quad = T_\sigma(A)(u_2(z_2), u_1(z_1), t'(z'_{n+1}), u_4(z_4), u_5(z_5), \ldots, u_n(z_n), u_3(z_3))
\end{aligned}$$

$$= T_\sigma(A) \circ (u_2, u_1, t', u_4, u_5, \ldots, u_n, u_3)(z_2, z_1, z'_{n+1}, z_4, z_5, \ldots, z_n, z_3),$$

pela propriedade e desigualdade de ideal de $\mathcal{F}$, temos

$$\begin{aligned} &T_\sigma(t'' \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)) \\ &\quad = T_\sigma(A) \circ (u_2, u_1, t', u_4, u_5, \ldots, u_n, u_3) \in \mathcal{F}(G_2, G_1, G'_{n+1}, G_4, G_5, \ldots, G_n, G_3; \mathbb{K}) \end{aligned}$$

e

$$\|T_\sigma(t'' \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))\|_{\mathcal{F}} \leq \|T_\sigma(A)\|_{\mathcal{F}} \cdot \|u_2\| \cdot \|u_1\| \cdot \|t'\| \cdot \|u_4\| \cdot \|u_5\| \cdots \|u_n\| \cdot \|u_3\|.$$

Portanto, $t'' \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(G_1, \ldots, G_n; G''_{n+1})$ e

$$\begin{aligned} \|t'' \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} &= \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(t'' \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))\|_{\mathcal{F}} \\ &\leq \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(A)\|_{\mathcal{F}} \cdot \|t\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\| \\ &= \|t\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\| \cdot \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(A)\|_{\mathcal{F}} \\ &= \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|. \end{aligned}$$

Condição 3.2(b)(iii): Sejam $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E''_{n+1})$ e $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E^{(iv)}_{n+1})$. Devemos mostrar que $T_\sigma(J_{E''_{n+1}} \circ A) \in \mathcal{F}(G^\sigma_1, \ldots, G^\sigma_{n+1}; \mathbb{K})$ para toda $\sigma \in S_{n+1}$, onde $G^\sigma_{\sigma^{-1}(n+1)} = E'''_{n+1}$ e $G^\sigma_j = E_{\sigma(j)}$ para $j \neq \sigma^{-1}(n+1)$. Mais uma vez trabalharemos com a permutação $\sigma = (2, 1, n+1, 4, 5, \ldots, n, 3)$. Dados $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ e $x'_{n+1} \in E'_{n+1}$, de

$$\begin{aligned} &T_\sigma(J_{E''_{n+1}} \circ A) \circ (id_{E_2}, id_{E_1}, J_{E'_{n+1}}, id_{E_4}, id_{E_5}, \ldots, id_{E_n}, id_{E_3})(x_2, x_1, x'_{n+1}, x_4, x_5, \ldots, x_n, x_3) \\ &\quad = T_\sigma(J_{E''_{n+1}} \circ A)(x_2, x_1, J_{E'_{n+1}}(x'_{n+1}), x_4, x_5, \ldots, x_n, x_3) \\ &\quad = (J_{E''_{n+1}} \circ A)(x_1, \ldots, x_n)(J_{E'_{n+1}}(x'_{n+1})) = J_{E''_{n+1}}(A(x_1, \ldots, x_n))(J_{E'_{n+1}}(x'_{n+1})) \\ &\quad = J_{E'_{n+1}}(x'_{n+1})(A(x_1, \ldots, x_n)) = A(x_1, \ldots, x_n)(x'_{n+1}) \\ &\quad = T_\sigma(A)(x_2, x_1, x'_{n+1}, x_4, x_5, \ldots, x_n, x_3), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} &T_\sigma(J_{E''_{n+1}} \circ A) \circ (id_{E_2}, id_{E_1}, J_{E'_{n+1}}, id_{E_4}, id_{E_5}, \ldots, id_{E_n}, id_{E_3}) \\ &\qquad = T_\sigma(A) \in \mathcal{F}(E_2, E_1, E'_{n+1}, E_4, E_5, \ldots, E_n, E_3; \mathbb{K}), \end{aligned}$$

e como $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ é pré-regular, resulta que

$$T_\sigma(J_{E''_{n+1}} \circ A) \in \mathcal{F}(E_2, E_1, E'''_{n+1}, E_4, E_5, \ldots, E_n, E_3; \mathbb{K}) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \|T_\sigma(J_{E''_{n+1}} \circ A)\|_{\mathcal{F}} &= \|T_\sigma(J_{E''_{n+1}} \circ A) \circ (id_{E_2}, id_{E_1}, J_{E'_{n+1}}, id_{E_4}, id_{E_5}, \ldots, id_{E_n}, id_{E_3})\|_{\mathcal{F}} \\ &= \|T_\sigma(A)\|_{\mathcal{F}}, \end{aligned}$$

donde concluímos que $J_{E''_{n+1}} \circ A \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; E^{(iv)}_{n+1})$ e

$$\|J_{E''_{n+1}} \circ A\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} = \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(J_{E''_{n+1}} \circ A)\|_{\mathcal{F}} = \max_{\sigma \in S_{n+1}} \|T_\sigma(A)\|_{\mathcal{F}} = \|A\|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}.$$

Agora devemos mostrar que $T_\sigma((J_{E'_{n+1}})' \circ B) \in \mathcal{F}(F^\sigma_1, \ldots, F^\sigma_{n+1}; \mathbb{K})$ para toda $\sigma \in S_{n+1}$. Considerando mais uma vez a permutação $\sigma = (2, 1, n+1, 4, 5, \ldots, n, 3)$, dados $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ e $x'_{n+1} \in E'_{n+1}$, de

$$T_\sigma((J_{E'_{n+1}})' \circ B)(x_2, x_1, x'_{n+1}, x_4, x_5, \ldots, x_n, x_3) = ((J_{E'_{n+1}})' \circ B)(x_1, \ldots, x_n)(x'_{n+1})$$

$$= (J_{E'_{n+1}})'(B(x_1,\ldots,x_n))(x'_{n+1}) = B(x_1,\ldots,x_n)(J_{E'_{n+1}}(x'_{n+1}))$$
$$= T_\sigma(B)(x_2,x_1,J_{E'_{n+1}}(x'_{n+1}),x_4,x_5,\ldots,x_n,x_3)$$
$$= T_\sigma(B)\circ(id_{E_2},id_{E_1},J_{E'_{n+1}},id_{E_4},id_{E_5},\ldots,id_{E_n},id_{E_3})(x_2,x_1,x'_{n+1},x_4,x_5,\ldots,x_n,x_3),$$

e pela propriedade de ideal de $\mathcal{F}$,

$$T_\sigma((J_{E'_{n+1}})'\circ B)$$
$$= T_\sigma(B)\circ(id_{E_2},id_{E_1},J_{E'_{n+1}},id_{E_4},id_{E_5},\ldots,id_{E_n},id_{E_3})\in\mathcal{F}(E_2,E_1,E'_{n+1},E_4,E_5,\ldots,E_n,E_3),$$

o que implica que $(J_{E'_{n+1}})'\circ B\in\mathcal{A}_\mathcal{F}(E_1,\ldots,E_n;E''_{n+1})$.

De tudo isso segue que $(\mathcal{A}_\mathcal{F},\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\mathcal{F}})$ é um $\mathfrak{D}_2$-ideal normado (Banach) de operadores n-lineares e, pelo Teorema de Extensão, $(\mathcal{A}_\mathcal{F}^{\mathfrak{D}_2-ext},\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\mathcal{F}^{\mathfrak{D}_2-ext}})=(\mathcal{M}_\mathcal{F},\|\cdot\|_{\mathcal{M}_\mathcal{F}})$ é um ideal normado (Banach) de operadores n-lineares. Note que, dado $A\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;E_{n+1})$,

$$\begin{aligned}A\in\mathcal{A}_\mathcal{F}^{\mathfrak{D}_2-ext}(E_1,\ldots,E_n;E_{n+1}) &\Longleftrightarrow J_{E_{n+1}}\circ A\in\mathcal{A}_\mathcal{F}(E_1,\ldots,E_n;E''_{n+1})\\ &\Longleftrightarrow T_\sigma(J_{E_{n+1}}\circ A)\in\mathcal{F}(F_1^\sigma,\ldots,F_{n+1}^\sigma;\mathbb{K}) \text{ para toda } \sigma\in S_{n+1}\\ &\Longleftrightarrow A\in\mathcal{M}_\mathcal{F}(E_1,\ldots,E_n;E_{n+1})\end{aligned}$$

com

$$\|A\|_{\mathcal{A}_\mathcal{F}^{\mathfrak{D}_2-ext}}=\|J_{E_{n+1}}\circ A\|_{\mathcal{A}_\mathcal{F}}=\max_{\sigma\in S_{n+1}}\|T_\sigma(J_{E_{n+1}}\circ A)\|_\mathcal{F}=\|A\|_{\mathcal{M}_\mathcal{F}}.$$

$\square$

Como aplicação do teorema que acabamos de provar, tomando $n=1$, o símbolo $\mathcal{M}_\mathcal{F}$ faz sentido sempre que $\mathcal{F}$ for um ideal de funcionais bilineares. Se $\mathcal{F}$ é um ideal de operadores bilineares, então o conjunto $\mathcal{F}_\mathbb{K}$ de suas componentes a valores escalares é um ideal de funcionais bilineares. Então podemos considerar o ideal de operadores lineares $\mathcal{M}_{\mathcal{F}_\mathbb{K}}$, que denotaremos simplesmente por $\mathcal{M}_\mathcal{F}$.

Retomando o método da linearização (Definição 2.54) usado para gerar ideais de operadores bilineares a partir de um ideal de operadores lineares (veja [16]), dado um ideal normado (Banach) de operadores lineares $(\mathcal{I},\|\cdot\|_\mathcal{I})$, dizemos que o operador bilinear $A\in\mathcal{L}(E_1,E_2;F)$ pertence a $[\mathcal{I}](E_1,E_2;F)$ se $I_1(A)\in\mathcal{I}(E_1;\mathcal{L}(E_2;F))$ e $I_2(A)\in\mathcal{I}(E_2;\mathcal{L}(E_1;F))$ e, neste caso, definimos

$$\|A\|_{[\mathcal{I}]}=\max\{\|I_1(A)\|_\mathcal{I},\|I_2(A)\|_\mathcal{I}\}.$$

Sabemos que $([\mathcal{I}],\|\cdot\|_{[\mathcal{I}]})$ é um ideal normado (Banach) de operadores bilineares. Considerando os isomorfismos isométricos canônicos

$$T_1\colon\mathcal{L}(E;F'')\longrightarrow\mathcal{L}(E,F';\mathbb{K}) \text{ e } T_2\colon\mathcal{L}(E;F'')\longrightarrow\mathcal{L}(F',E;\mathbb{K}),$$

afirmamos que as aplicações

$$\mathcal{L}(E;F'')\xrightarrow{T_1}\mathcal{L}(E,F';\mathbb{K})\xrightarrow{I_1}\mathcal{L}(E;F'')$$

são uma a inversa da outra. Com efeito, dados $x\in E$, $y'\in F'$, $A\in\mathcal{L}(E,F';\mathbb{K})$ e $u\in\mathcal{L}(E;F'')$ temos

$$(I_1\circ T_1)(u)(x)(y')=I_1(T_1(u))(x)(y')=T_1(u)(x,y')=u(x)(y')=id_{\mathcal{L}(E;F'')}(u)(x)(y')$$

e

$$(T_1\circ I_1)(A)(x,y')=T_1(I_1(A))(x,y')=I_1(A)(x)(y')=A(x,y')=id_{\mathcal{L}(E,F';\mathbb{K})}(A)(x,y').$$

Da mesma forma, as aplicações

$$\mathcal{L}(E;F'') \xrightarrow{T_2} \mathcal{L}(F',E;\mathbb{K}) \xrightarrow{I_2} \mathcal{L}(E;F'')$$

são uma a inversa da outra. Para a próxima proposição sugerimos ao leitor retomar os resultados das Proposições 3.12, 1.48 e 1.49.

Proposição 4.10. *Dado* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *um ideal normado de operadores lineares, então*

$$(\mathcal{M}_{[\mathcal{I}]}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_{[\mathcal{I}]}}) = (\mathcal{I}^{reg} \cap \mathcal{I}^{dual}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{reg}\cap\mathcal{I}^{dual}}).$$

Demonstração. Veja que, dado $u \in \mathcal{L}(E;F)$, então $u \in \mathcal{M}_{[\mathcal{I}]}(E;F)$ se, e somente se, $T_1(J_F \circ u) \in [\mathcal{I}](E,F';\mathbb{K})$ e $T_2(J_F \circ u) \in [\mathcal{I}](F',E;\mathbb{K})$ com

$$\|u\|_{\mathcal{M}_{[\mathcal{I}]}} = \max\{\|T_1(J_F \circ u)\|_{[\mathcal{I}]}, \|T_2(J_F \circ u)\|_{[\mathcal{I}]}\},$$

se, e somente se, $I_1(T_1(J_F \circ u)) = J_F \circ u \in \mathcal{I}(E;F'')$, $I_2(T_1(J_F \circ u)) \in \mathcal{I}(F';E')$, $I_1(T_2(J_F \circ u)) \in \mathcal{I}(F';E')$ e $I_2(T_2(J_F \circ u)) = J_F \circ u \in \mathcal{I}(E;F'')$ com

$$\|T_1(J_F \circ u)\|_{[\mathcal{I}]} = \max\{\|J_F \circ u\|_{\mathcal{I}}, \|I_2(T_1(J_F \circ u))\|_{\mathcal{I}}\} \text{ e}$$

$$\|T_2(J_F \circ u)\|_{[\mathcal{I}]} = \max\{\|I_1(T_2(J_F \circ u))\|_{\mathcal{I}}, \|J_F \circ u\|_{\mathcal{I}}\}.$$

Dados $\varphi \in F'$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned} I_2(T_1(J_F \circ u))(\varphi)(x) &= T_1(J_F \circ u)(x,\varphi) = (J_F \circ u)(x)(\varphi) = (J_F(u(x)))(\varphi) = \varphi(u(x)) \\ &= u'(\varphi)(x), \end{aligned}$$

donde segue que $I_2(T_1(J_F \circ u)) = u'$ e, da mesma forma, $I_1(T_2(J_F \circ u)) = u'$. Com isso, $u \in \mathcal{M}_{[\mathcal{I}]}(E;F)$ se, e somente se, $J_F \circ u \in \mathcal{I}(E;F'')$ e $u' \in \mathcal{I}(F';E')$ com

$$\|u\|_{\mathcal{M}_{[\mathcal{I}]}} = \max\{\|J_F \circ u\|_{\mathcal{I}}, \|u'\|_{\mathcal{I}}\},$$

ou, em outras palavras, se, e somente se, $u \in \mathcal{I}^{reg} \cap \mathcal{I}^{dual}(E;F)$ com $\|u\|_{\mathcal{M}_{[\mathcal{I}]}} = \|u\|_{\mathcal{I}^{reg}\cap\mathcal{I}^{dual}}$, como queríamos. □

Essa última proposição é interessante pois permite entender o que ocorre no processo

$$\mathcal{I} \xrightarrow{(1)} [\mathcal{I}] \xrightarrow{(2)} \mathcal{M}_{[\mathcal{I}]} = \mathcal{I}^{reg} \cap \mathcal{I}^{dual},$$

onde (1) é o método da linearização e (2) é o método do Teorema 4.9, observando que partindo de $\mathcal{I}$ chegamos em $\mathcal{I}^{reg} \cap \mathcal{I}^{dual}$.

4.3 Operadores sequencialmente w^*-compactos

Dois dos ideais de operadores (lineares) mais importantes são os ideais dos operadores compactos e fracamente compactos: um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é:
• *Compacto*, e neste caso escrevemos $u \in \mathcal{K}(E;F)$, se $\overline{u(B_E)}$ é compacto em F;
• *Fracamente compacto*, e neste caso escrevemos $u \in \mathcal{W}(E;F)$, se $\overline{u(B_E)}$ é fracamente compacto em F (note que, como o conjunto $u(B_E)$ é convexo, tanto faz considerar o fecho fraco ou o fecho em norma).

As classes $\mathcal{K}$ e $\mathcal{W}$ têm grande importância na teoria dos espaços de Banach, e no nosso contexto interessa o fato de que ambas são ideais fechados de operadores (veja, por exemplo, [14, Proposições 2.3.5 e 4.1.4]). Normalmente é mais fácil verificar se um operador é compacto

ou fracamente compacto usando compacidade sequencial:
• Como em espaços métricos um conjunto é compacto se, somente se, é sequencialmente compacto, um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset E$, a sequência $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}$ tem subsequência convergente em F;
• Pelo Teorema de Eberlein-Smulian, um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é fracamente compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset E$, a sequência $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}$ tem subsequência fracamente convergente em F.

Para maiores detalhes, veja, por exemplo, [7, Proposição 7.2.3] e [14, Proposição 2.5.3].

Esses dois ideais foram naturalmente estendidos para o âmbito multilinear: um operador $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é:
• *Compacto*, e neste caso escrevemos $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{K}}(E_1,\ldots,E_n;F)$, se $\overline{A(B_{E_1}\times\cdots\times B_{E_n})}$ é compacto em F, ou, equivalentemente, dadas sequências limitadas $(x_j^1)_{j=1}^{\infty} \subset E_1,\ldots,(x_j^n)_{j=1}^{\infty} \subset E_n$, a sequência $(A(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^{\infty}$ tem subsequência convergente em F.
• *Fracamente compacto*, e neste caso escrevemos $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}(E_1,\ldots,E_n;F)$, se $\overline{A(B_{E_1}\times\cdots\times B_{E_n})}^{w}$ é fracamente compacto em F, ou, equivalentemente, dadas sequências limitadas $(x_j^1)_{j=1}^{\infty} \subset E_1,\ldots,(x_j^n)_{j=1}^{\infty} \subset E_n$, a sequência $(A(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^{\infty}$ tem subsequência fracamente convergente em F.

Assim como no caso linear, classes $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ são multi-ideais fechados (veja, por exemplo, [19, Exemplo 2.4.2]). Como toda sequência que converge em norma também converge fracamente, tem-se $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$.

Pensando na topologia fraca-estrela, $\sigma(F',F)$ ou w^*, em um espaço dual F', é natural definir um operador $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F')$ como sendo *w^*-compacto*, ou $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}^*}(E_1,\ldots,E_n;F')$, se $\overline{A(B_{E_1}\times\cdots\times B_{E_n})}^{w^*}$ é w^*-compacto em F'. Mas, como $A(B_{E_1}\times\cdots\times B_{E_n})$ é limitado, pelo Corolário 1.44 segue que $\overline{A(B_{E_1}\times\cdots\times B_{E_n})}^{w^*}$ é w^*-compacto em F' para todo $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F')$, isto é,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{W}^*}(E_1,\ldots,E_n;F') = \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F')$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1,\ldots,E_n,F$. Portanto, $\mathcal{L}_{\mathcal{W}^*}$ não é uma classe que valha a pena ser estudada.

Entretanto, é sabido que na topologia fraca-estrela, compacidade não é equivalente a compacidade sequencial (em particular, a topologia fraca-estrela não é induzida por uma métrica e não existe versão do Teorema de Eberlein-Smulian para a topologia fraca-estrela). Por isso, a seguinte definição faz sentido:

Definição 4.11. Dados $n \in \mathbb{N}$, $E_1,\ldots,E_n,F \in \mathcal{BAN}$ e $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F')$, dizemos que A é *sequencialmente w^*-compacto*, e neste caso escrevemos $A \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(E_1,\ldots,E_n;F')$, se para todas sequências limitadas $(x_j^1)_{j=1}^{\infty} \subset E_1,\ldots,(x_j^n)_{j=1}^{\infty} \subset E_n$, a sequência $(A(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^{\infty}$ tem subsequência w^*-convergente em F'.

Como toda sequência que converge fracamente também é fraca-estrela convergente temos

$$\mathcal{L}^n_{\mathcal{K}} \subset \mathcal{L}^n_{\mathcal{W}} \subset \mathcal{L}^n_{w^*sc}$$

em todas as componentes tomando valores em espaços duais. Daí, a classe dos operadores sequencialmente w^*-compactos é grande no sentido de que contém todos os operadores compactos e fracamente compactos que tomam valores em espaços duais. Além disso, o operador identidade de E' é sequencialmente w^*-compacto sempre que a bola unitária fechada de E' é sequencialmente w^*-compacta; em particular quando E é separável, ou reflexivo ou quando E' não contém cópia de ℓ_1 (veja [8, Capítulo XIII]). Por outro lado, essa classe não é tão grande assim: os operadores identidade de $\ell_\infty(\Gamma)$, para todo conjunto não-enumerável Γ, e de E', sempre que E contém uma cópia de ℓ_∞, falham em ser sequencialmente w^*-compactos, pois nesses casos a bola unitária fechada de $\ell_\infty(\Gamma)$ e E' não são sequencialmente w^*-compactas. No Teorema 4.13 daremos um exemplo de operador n-linear que não pertence a $\mathcal{L}^n_{w^*sc}$. Sendo assim, a classe $\mathcal{L}^n_{w^*sc}$ é uma classe interessante de ser estudada, e como terceira aplicação do teorema de extensão mostraremos nesta seção que ela não é estendível a um ideal de operadores n-lineares. Começamos com o seguinte resultado:

Proposição 4.12. *Seja $\mathfrak{D}_1$ a classe admissível dos espaços de Banach duais do Exemplo 3.4. Para todo $n \in \mathbb{N}$:*
(a) $\mathcal{L}^n_{w^*sc}$ é $\mathfrak{D}_1$-classe normada de operadores n-lineares com a norma do sup.
(b) Para $\mathcal{L}^n_{w^*sc}$ ser $\mathfrak{D}_1$-ideal normado de operadores n-lineares com a norma do sup falta apenas a parte referente à injeção métrica da condição (b)(iii) da Definição 3.2.

Demonstração. (a) Vejamos que $\mathcal{L}^n_{w^*sc}(E_1,\ldots,E_n;F')$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F')$:
(i) Obviamente $0 \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(E_1,\ldots,E_n;F')$.
(ii) Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(E_1,\ldots,E_n;F')$. Dadas $(x_j^1)_{j=1}^\infty \subset E_1,\ldots,(x_j^n)_{j=1}^\infty \subset E_n$ sequências limitadas, como A_1 é sequencialmente w^*-compacto, existe uma subsequência $(A_1(x^1_{j_k},\ldots,x^n_{j_k}))_{k=1}^\infty$ w^*-convergente. Como $(x^1_{j_k})_{k=1}^\infty,\ldots,(x^n_{j_k})_{k=1}^\infty$ são limitadas e A_2 também é sequencialmente w^*-compacto, existe uma subsequência $(A_2(x^1_{j_{k_l}},\ldots,x^n_{j_{k_l}}))_{l=1}^\infty$ w^*-convergente. Como subsequência de sequência w^*-convergente é também w^*-convergente e como a soma de duas sequências w^*-convergentes é também w^*-convergente, segue que

$$((A_1+A_2)(x^1_{j_{k_l}},\ldots,x^n_{j_{k_l}}))_{l=1}^\infty = ((A_1)(x^1_{j_{k_l}},\ldots,x^n_{j_{k_l}}))_{l=1}^\infty + ((A_2)(x^1_{j_{k_l}},\ldots,x^n_{j_{k_l}}))_{l=1}^\infty$$

é w^*-convergente, o que implica que $A_1 + A_2 \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(E_1,\ldots,E_n;F')$.
(iii) Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(E_1,\ldots,E_n;F')$ claramente $\lambda A \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(E_1,\ldots,E_n;F')$.

Como não há nada a provar para a norma do sup, está completa a demonstração do item (a).

(b) Condição 3.2(b)(i): Como $\mathcal{L}^n_{\mathcal{K}}(E_1,\ldots,E_n;F') \subset \mathcal{L}^n_{w^*sc}(E_1,\ldots,E_n;F')$ para todos espaços de Banach $E_1,\ldots,E_n,F$, e como $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ é multi-ideal, segue que $\mathcal{L}^n_{w^*sc}$ contém os operadores de tipo finito.

Condição 3.2(b)(ii): Sejam $A \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(E_1,\ldots,E_n;F'')$, $u_j \in \mathcal{L}(D_j;E_j)$ com $j = 1,\ldots,n$ e $t \in \mathcal{L}(F;G)$. Dadas $(x_j^1)_{j=1}^\infty \subset D_1,\ldots,(x_j^n)_{j=1}^\infty \subset D_n$ sequências limitadas, as sequências $(u_1(x_j^1))_{j=1}^\infty \subset E_1,\ldots,(u_n(x_j^n))_{j=1}^\infty \subset E_n$ também são limitadas pois operadores lineares contínuos levam conjuntos limitados em conjuntos limitados. E como A é sequencialmente w^*-compacto, existe uma subsequência $(A(u_1(x^1_{j_k}),\ldots,u_n(x^n_{j_k})))_{k=1}^\infty$ w^*-convergente. Do fato do operador t'' ser w^*-w^*-contínuo (Proposição 1.30), segue que $(t''(A(u_1(x^1_{j_k}),\ldots,u_n(x^n_{j_k}))))_{k=1}^\infty$ é w^*-convergente em G'', o que prova que $t'' \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n) \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(D_1,\ldots,D_n;G'')$.

Falta apenas provar a parte da condição 3.2(b)(iii) referente à projeção. Para isso, sejam $B \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(E_1,\ldots,E_n;F''')$ e $(x_j^1)_{j=1}^\infty \subset E_1,\ldots,(x_j^n)_{j=1}^\infty \subset E_n$ sequências limitadas. Como B é sequencialmente w^*-compacto, existe uma subsequência $(B(x^1_{j_k},\ldots,x^n_{j_k}))_{k=1}^\infty$ w^*-convergente em F'''. Por $(J_F)'$ ser w^*-w^*-contínuo (Proposição 1.30), a sequência $((J_F)'(B(x^1_{j_k},\ldots,x^n_{j_k})))_{k=1}^\infty$ é w^*-convergente em F', o que garante que $(J_F)' \circ B \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(E_1,\ldots,E_n;F')$. □

Teorema 4.13. *A classe dos operadores n-lineares sequencialmente w^*-compactos $\mathcal{L}^n_{w^*sc}$ assumindo valores em espaços de Banach duais não é estendível a um ideal de operadores n-lineares.*

Demonstração. Pelo Teorema de Extensão, a classe $(\mathcal{L}^n_{w^*sc}, \|\cdot\|)$ é estendível se, e somente se, ela é um $\mathfrak{D}_1$-ideal normado de operadores n-lineares. Das propriedades de $\mathcal{L}^n_{w^*sc}$ que checamos na proposição anterior, para ela ser $\mathfrak{D}_1$-ideal falta somente a parte da condição 3.2(b)(iii) referente à injeção métrica. Vejamos que esta parte não vale sempre. Para isso considere $E = c_0$. Então $E' = \ell_1$ e $E'' = \ell_\infty$ (a menos de isomorfismos isométricos), e E é um espaço de Banach de dimensão infinita tal que E' é espaço de Schur (Teorema 1.34), e a bola unitária fechada de E' é sequencialmente w^*-compacta (pois E é separável). Seja $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ a sequência dos vetores unitários canônicos em ℓ_1. Provemos que $e_j \xrightarrow{w^*} 0$ em ℓ_1: dado $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0$, usando a expressão do isomorfismo isométrico entre c_0' e ℓ_1 (Proposição 1.16), segue que

$$e_j((\lambda_k)_{k=1}^{\infty}) = \lambda_j \xrightarrow{j} 0.$$

Como $\|e_j\|_1 = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, a sequência $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de Josefson-Nissenzweig em ℓ_1. Tomando o funcional $\varphi = (1, 1, 1, \dots) \in \ell_\infty = \ell_1'$, veja que $\varphi(e_j) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ (aqui estamos usando a expressão do isomorfismo da Proposição 1.17). Agora, considerando o funcional $\varphi \in \ell_\infty = E''$, definimos o operador

$$A\colon E' \times \overset{n}{\cdots} \times E' \longrightarrow E',\ (x_1', \dots, x_n') \longmapsto A(x_1', \dots, x_n') = \varphi(x_1') \cdots \varphi(x_{n-1}') \cdot x_n'.$$

Então $A \in \mathcal{L}(^nE'; E')$ pela Proposição 2.11. Vamos mostrar em seguida que $A \in \mathcal{L}_{w^*sc}^n(^nE'; E')$ mas $J_{E'} \circ A \notin \mathcal{L}_{w^*sc}^n(^nE'; E''')$. Dadas sequências limitadas $({x'}_{j,1})_{j=1}^{\infty}, \dots, ({x'}_{j,n})_{j=1}^{\infty} \subset E'$, como a bola unitária fechada de E' é sequencialmente w^*-compacta, existem um subconjunto infinito N_1 de $\mathbb{N}$ e y_n' em E' tais que a subsequência $({x'}_{j,n})_{j \in N_1}$ é w^*-convergente para y_n' em E'. Como a sequência $(\varphi({x'}_{j,1}))_{j \in N_1}$ é limitada em $\mathbb{K}$, existem um subconjunto infinito $N_2 \subset N_1$ e um escalar λ_1 tais que a subsequência $(\varphi({x'}_{j,1}))_{j \in N_2}$ converge para λ_1. E, ainda, como a sequência $(\varphi({x'}_{j,2}))_{j \in N_2}$ é limitada em $\mathbb{K}$, existem um subconjunto $N_3 \subset N_2$ e um escalar λ_2 tais que a subsequência $(\varphi({x'}_{j,2}))_{j \in N_3}$ converge para λ_2. Aplicando esse raciocínio um número finito de vezes, construímos subsequências $({x'}_{j,1})_{j \in N_2}, \dots, ({x'}_{j,n-1})_{j \in N_n}$ com $N_n \subset \cdots \subset N_2$ e escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tais que

$$\varphi({x'}_{j,1}) \xrightarrow{j} \lambda_1, \dots, \varphi({x'}_{j,n-1}) \xrightarrow{j} \lambda_{n-1}.$$

Afirmamos que a subsequência $(\varphi({x'}_{j,1}) \cdots \varphi({x'}_{j,n-1}) \cdot {x'}_{j,n})_{j \in N_n}$ é w^*-convergente para $\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} \cdot y_n'$ em E': de fato, para todo $x \in E$,

$$\lim_{j \in N_n} \varphi({x'}_{j,1}) \cdots \varphi({x'}_{j,n-1}) \cdot x_{j,n}'(x) = \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} \cdot y_n'(x),$$

pois, em $\mathbb{K}$, limite do produto é igual ao produto dos limites. Com isso, $A \in \mathcal{L}_{w^*sc}^n(^nE'; E')$. Veja que

$$J_{E'} \circ A(x_1', \dots, x_n') = J_{E'}(A(x_1', \dots, x_n')) = J_{E'}(\varphi(x_1') \cdots \varphi(x_{n-1}') \cdot x_n').$$

Suponha que $J_{E'} \circ A$ seja sequencialmente w^*-compacto. Como a sequência $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada, existem uma subsequência $(e_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ e $x''' \in E'''$ tais que

$$J_{E'}(\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k}) = J_{E'} \circ A(e_{j_k}, \dots, e_{j_k}) \xrightarrow{w^*} x'''.$$

Daí,

$$x''(\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k}) = J_{E'}(\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k})(x'') \xrightarrow{k} x'''(x'')$$

para todo $x'' \in E''$. Segue que $(x''(\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k}))_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy para todo $x'' \in E''$, isto é, $(\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência fracamente de Cauchy em $E' = \ell_1$. Lembrando que sequências fracamente de Cauchy em espaços de Schur são convergentes em norma (Proposição 1.36), existe $x' \in E'$ de modo que $\lim\limits_{j} \varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k} = x'$ na norma de E', o que implica que $\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k} \xrightarrow{w^*} x'$ em E'. Como $\varphi(e_j) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos $e_{j_k} \xrightarrow{w^*} x'$ em E'. Como já provamos que $e_j \xrightarrow{w^*} 0$ em $E' = \ell_1$, segue que $x' = 0$, donde concluímos que $e_{j_k} \xrightarrow{k} 0$ em norma. Mas isso é claramente um absurdo, pois $\|e_j\|_1 = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, $J_{E'} \circ A \notin \mathcal{L}_{w^*sc}^n(^nE'; E''')$, completando a demonstração de que a classe $\mathcal{L}_{w^*sc}^n$ não é estendível. $\square$

Capítulo 5

O caso polinomial

Nossa proposta neste último capítulo é apresentar o teorema de extensão e suas aplicações agora para o caso de polinômios homogêneos. E como dito anteriormente, muitas definições, resultados e demonstrações do caso polinomial podem ser facilmente adaptados do caso multilinear. Por isso, para evitar repetições desnecessárias, focaremos nas diferenças do caso polinomial para o caso multilinear, e omitiremos os detalhes das demonstrações que são adaptações imediatas do caso multilinear (nesses casos apenas mencionaremos que a demonstração é análoga no caso multilinear).

5.1 Teorema de Extensão

Nesta seção apresentamos a versão polinomial do teorema de extensão, que vai nos dizer em quais e únicas condições (e como) podemos estender, de acordo com nossa proposta de extensão, uma classe de polinômios homogêneos contínuos tomando valores em espaços de Banach pertencentes a uma certa classe a um ideal de polinômios homogêneos. Como no caso multilinear, mostraremos que não há unicidade da extensão. E também abordaremos o Teorema de Extensão como um processo de envoltória, no sentido de os procedimentos de envoltória regular e injetiva serem casos particulares do que construímos.

5.1.1 Axiomas e resultado principal

Na próxima definição dizemos o que entendemos por estender uma classe de polinômios homogêneos contínuos tomando valores em espaços de Banach de uma certa classe a um ideal de polinômios homogêneos. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que essa é uma definição bem natural.

Definição 5.1. Seja $\mathfrak{B}$ uma subclasse da classe $\mathcal{BAN}$ de todos os espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$.
(a) Uma $\mathfrak{B}$-*classe normada (Banach) de polinômios homogêneos* $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ é uma correspondência tal que para todos $n \in \mathbb{N}$ e $(E, F) \in \mathcal{BAN} \times \mathfrak{B}$ associa um subespaço vetorial $\mathcal{O}(^nE; F)$ de $\mathcal{P}(^nE; F)$ munido com uma norma (norma completa) $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$.
(b) Uma $\mathfrak{B}$-classe normada (Banach) de polinômios $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ é dita ser *estendível* se existe um ideal normado (Banach) de polinômios $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ tal que $\mathcal{O}(^nE; F) = \mathcal{Q}(^nE; F)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{O}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ em $\mathcal{O}(^nE; F)$ para todos $n \in \mathbb{N}$, $E \in \mathcal{BAN}$ e $F \in \mathfrak{B}$. Neste caso dizemos que o ideal $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ *estende* (ou é uma *extensão*) da classe $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$.

Agora vamos dar as condições mínimas para nossa proposta de extensão. Relembre a definição de classe admissível de espaços de Banach (Definição 3.2(a)).

Definição 5.2. Seja $\mathfrak{B} \subset \mathcal{BAN}$ uma classe admissível. Uma $\mathfrak{B}$-classe normada (Banach) de polinômios $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ é um *$\mathfrak{B}$-ideal normado (Banach) de polinômios* se as seguintes condições são satisfeitas:
(i) Para todos $n \in \mathbb{N}$, $E \in \mathcal{BAN}$ e $F \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{O}(^nE; F)$ contém os polinômios de tipo finito e $\|\varphi^n \otimes b\|_{\mathcal{O}} = \|\varphi\|^n \cdot \|b\|$ para todos $\varphi \in E'$ e $b \in F$.
(ii) Para todos $n \in \mathbb{N}$, $D, E, F, G \in \mathcal{BAN}$, $P \in \mathcal{O}(^nE; \widetilde{F})$, $u \in \mathcal{L}(D; E)$ e $t \in \mathcal{L}(F; G)$, tem-se $\widetilde{t} \circ P \circ u \in \mathcal{O}(^nD; \widetilde{G})$ e

$$\|\widetilde{t} \circ P \circ u\|_{\mathcal{O}} \leq \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{O}} \cdot \|u\|^n.$$

(iii) Se $n \in \mathbb{N}$, $E \in \mathcal{BAN}$ e $F \in \mathfrak{B}$, $P \in \mathcal{O}(^nE; F)$ e $Q \in \mathcal{O}(^nE; \widetilde{F})$, então $i_F \circ P \in \mathcal{O}(^nE; \widetilde{F})$, $\|i_F \circ P\|_{\mathcal{O}} = \|P\|_{\mathcal{O}}$ e $k_F \circ Q \in \mathcal{O}(^nE; F)$.

O próximo resultado, que é utilizado na demonstração da não unicidade da extensão, nos mostra que podemos construir $\mathfrak{B}$-ideais facilmente.

Proposição 5.3. *Sejam $\mathfrak{B}$ uma classe admissível de espaços de Banach e $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal normado (Banach) de polinômios. Então a classe*

$$\mathcal{Q}(\mathfrak{B}) = \{\mathcal{Q}(^nE; F) : n \in \mathbb{N},\ E \in \mathcal{BAN} \text{ e } F \in \mathfrak{B}\},\ \|\cdot\|_{\mathcal{Q}(\mathfrak{B})} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}},$$

é um $\mathfrak{B}$-ideal normado (Banach) de polinômios. Mais ainda, $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é uma extensão de $(\mathcal{Q}(\mathfrak{B}), \|\cdot\|_{\mathcal{Q}(\mathfrak{B})})$.

Demonstração. A demonstração segue facilmente adaptando a demonstração feita na Proposição 3.3. □

A seguir apresentamos o teorema de extensão, que caracteriza as classes de polinômios que podem ser estendidas e mostra como uma classe estendível pode ser estendida.

Teorema 5.4 (Teorema de Extensão)**.** *Seja $\mathfrak{B}$ uma classe admissível de espaços de Banach. As seguintes condições são equivalentes para uma $\mathfrak{B}$-classe normada (Banach) de polinômios homogêneos $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$.*
(a) $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ é um $\mathfrak{B}$-ideal normado (Banach) de polinômios.
(b) Definindo

$$\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}(^nE; F) = \{P \in \mathcal{P}(^nE; F) : i_F \circ P \in \mathcal{O}(^nE; \widetilde{F})\} \text{ e } \|P\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|i_F \circ P\|_{\mathcal{O}},$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $E, F \in \mathcal{BAN}$, então $(\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}})$ é um ideal normado (Banach) de polinômios que estende $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$.
(c) A classe $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ é estendível.

Demonstração. O leitor perceberá que a demonstração segue facilmente adaptando a demonstração feita no Teorema 3.10, exceto a parte da completude de $(\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}})$ quando $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ é completo na implicação $(a) \Rightarrow (b)$. Verifiquemos então esta parte. Caso $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ seja Banach, considere $E, F \in \mathcal{BAN}$ e $(P_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}(^nE; F)$ uma sequência satisfazendo $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|P_j\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}} < +\infty$. Por definição, $(i_F \circ P_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{O}(^nE; \widetilde{F})$ e $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|i_F \circ P_j\|_{\mathcal{O}} < +\infty$, o que implica que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} i_F \circ P_j$ converge em $(\mathcal{O}(^nE; \widetilde{F}), \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$, digamos

$$\sum_{k=1}^{j} i_F \circ P_k \xrightarrow{j} P \in \mathcal{O}(^nE; \widetilde{F}).$$

Veja que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $P_j(E) \subset F$ e daí $(i_F \circ P_j)(E) = i_F(P_j(E)) \subset i_F(F)$. Com isso, como $i_F(F)$ é Banach, podemos considerar a aplicação

$$P' \colon E \longrightarrow i_F(F) \ , \ P'(x) = P(x).$$

Pela Proposição 2.39, $P' \in \mathcal{P}(^nE; i_F(F))$, e portanto $i_F^{-1} \circ P' \in \mathcal{P}(^nE; F)$ (como antes, estamos considerando o isomorfismo isométrico $i_F^{-1} \colon i_F(F) \longrightarrow F$). Como $i_F \circ (i_F^{-1} \circ P') = P \in \mathcal{O}(^nE; \widetilde{F})$, temos $i_F^{-1} \circ P' \in \mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}(^nE; F)$ e $\sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j = i_F^{-1} \circ P'$ na norma $\| \cdot \|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}}$, pois

$$\left\| \sum_{k=1}^{j} P_k - i_F^{-1} \circ P' \right\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}} = \left\| i_F \circ \left(\sum_{k=1}^{j} P_k - i_F^{-1} \circ P' \right) \right\|_{\mathcal{O}} = \left\| \sum_{k=1}^{j} i_F \circ P_k - P \right\|_{\mathcal{O}} \xrightarrow{j} 0.$$

□

5.1.2 Não unicidade da extensão

Provaremos nesta seção, como fizemos no caso multilinear, que nem sempre a extensão é única. E para mostrarmos isto, vamos construir o conceito de envoltória regular de um ideal de polinômios e exibir uma situação em que há duas extensões distintas para o mesmo $\mathfrak{B}$-ideal de polinômios.

Definição 5.5. Sejam $(\mathcal{Q}, \| \cdot \|_{\mathcal{Q}})$ um ideal normado de polinômios, $n \in \mathbb{N}$ e $E, F \in \mathcal{BAN}$. Dado $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ dizemos que $P \in \mathcal{Q}^{reg}(^nE; F)$ se $J_F \circ P \in \mathcal{Q}(^nE; F'')$. Neste caso definimos $\|P\|_{\mathcal{Q}^{reg}} = \|J_F \circ P\|_{\mathcal{Q}}$ para todo $P \in \mathcal{Q}^{reg}$.

A próxima proposição nos permite chamar $\mathcal{Q}^{reg}$ de *envoltória regular* de $\mathcal{Q}$.

Proposição 5.6. *Seja $(\mathcal{Q}, \| \cdot \|_{\mathcal{Q}})$ um ideal normado (Banach) de polinômios homogêneos.*
(a) $(\mathcal{Q}^{reg}, \| \cdot \|_{\mathcal{Q}^{reg}})$ é ideal normado (Banach) de polinômios.
(b) $(\mathcal{Q}, \| \cdot \|_{\mathcal{Q}}) \subset (\mathcal{Q}^{reg}, \| \cdot \|_{\mathcal{Q}^{reg}})$, isto é, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{reg}$ e $\| \cdot \|_{\mathcal{Q}^{reg}} \leq \| \cdot \|_{\mathcal{Q}}$.
(c) $(\mathcal{Q}^{reg})^{reg} = \mathcal{Q}^{reg}$ isometricamente.
(d) Considerando a classe admissível de espaços de Banach duais $\mathfrak{D}_1 = \{E' : E \in \mathcal{BAN}\}$ (Exemplo 3.4) e o $\mathfrak{D}_1$-ideal normado (Banach) de polinômios homogêneos dado por

$$\mathcal{Q}(\mathfrak{D}_1) = \{\mathcal{Q}(^nE; F) : n \in \mathbb{N}, \ E \in \mathcal{BAN} \ e \ F \in \mathfrak{D}_1\} \ e \ \| \cdot \|_{\mathcal{Q}(\mathfrak{D}_1)} = \| \cdot \|_{\mathcal{Q}},$$

(Proposição 5.3), então $(\mathcal{Q}^{reg}, \| \cdot \|_{\mathcal{Q}^{reg}})$ é uma extensão de $(\mathcal{Q}(\mathfrak{D}_1), \| \cdot \|_{\mathcal{Q}(\mathfrak{D}_1)})$.

Demonstração. O leitor perceberá que a demonstração segue facilmente adaptando a demonstração feita na Proposição 3.12, exceto a completude de $(\mathcal{Q}^{reg}, \| \cdot \|_{\mathcal{Q}^{reg}})$ no item (a) quando $(\mathcal{Q}, \| \cdot \|_{\mathcal{Q}})$ for completo. Verifiquemos então essa completude. Caso $(\mathcal{Q}, \| \cdot \|_{\mathcal{Q}})$ seja Banach, considere $E, F \in \mathcal{BAN}$ e $(P_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{Q}^{reg}(^nE; F)$ uma sequência satisfazendo $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|P_j\|_{\mathcal{Q}^{reg}} < +\infty$. Por definição, $(J_F \circ P_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{Q}(^nE; F'')$ e $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|J_F \circ P_j\|_{\mathcal{Q}} < +\infty$, donde segue que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} J_F \circ P_j$ converge em $(\mathcal{Q}(^nE; F''), \| \cdot \|_{\mathcal{Q}})$, digamos

$$\sum_{k=1}^{j} J_F \circ P_k \xrightarrow{j} P \in \mathcal{Q}(^nE; F'').$$

Veja que $P_j(E) \subset F$, e daí $(J_F \circ P_j)(E) = J_F(P_j(E)) \subset J_F(F)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Com isso, como $J_F(F)$ é Banach, podemos considerar a aplicação

$$P' \colon E \longrightarrow J_F(F) \ , \ P'(x) = P(x).$$

Pela Proposição 2.39, $P' \in \mathcal{P}(^nE; J_F(F))$, o que implica que $J_F^{-1} \circ P' \in \mathcal{P}(^nE;F)$ (como sempre estamos considerando o isomorfismo isométrico $J_F^{-1}\colon J_F(F) \longrightarrow F$). Como $J_F \circ (J_F^{-1} \circ P') = P \in \mathcal{Q}(^nE;F'')$, temos $J_F^{-1} \circ P' \in \mathcal{Q}^{reg}(^nE;F)$ e $\sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j = J_F^{-1} \circ P'$ na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{reg}}$, pois

$$\left\|\sum_{k=1}^{j} P_k - J_F^{-1} \circ P'\right\|_{\mathcal{Q}^{reg}} = \left\|J_F \circ \left(\sum_{k=1}^{j} P_k - J_F^{-1} \circ P'\right)\right\|_{\mathcal{Q}} = \left\|\sum_{k=1}^{j} J_F \circ P_k - P\right\|_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{j} 0.$$

□

Definição 5.7. O ideal normado de polinômios homogêneos $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é dito *regular* se $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{reg}$ isometricamente.

Exemplo 5.8. Existem ideais normados de polinômios não regulares. Por exemplo, o ideal de Banach dos polinômios homogêneos nucleares (veja, por exemplo, [19]) é não regular, pois sua componente linear, ou seja, o ideal dos operadores lineares nucleares, não é regular (veja [15]).

Corolário 5.9. *Seja $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal normado de polinômios não regular. Então $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ e $(\mathcal{Q}^{reg}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{reg}})$ são extensões distintas do $\mathfrak{D}_1$-ideal normado $(\mathcal{Q}(\mathfrak{D}_1), \|\cdot\|_{\mathcal{Q}(\mathfrak{D}_1)})$.*

Demonstração. Com efeito, pelas Proposições 5.3 e 5.6, $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ e $(\mathcal{Q}^{reg}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{reg}})$ são extensões do $\mathfrak{D}_1$-ideal normado $(\mathcal{Q}(\mathfrak{D}_1), \|\cdot\|_{\mathcal{Q}(\mathfrak{D}_1)})$ e distintas pois $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é não regular. □

5.1.3 A extensão como envoltória

Assim como temos a envoltória regular, podemos também pensar em outro tipo de envoltória, por exemplo a envoltória injetiva, que é definida como nos casos linear e multilinear.

Definição 5.10. Sejam $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal normado de polinômios homogêneos, $n \in \mathbb{N}$ e $E, F \in \mathcal{BAN}$. Dado $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$, dizemos que $P \in \mathcal{Q}^{inj}(^nE;F)$ se $I_F \circ P \in \mathcal{Q}(^nE; \ell_\infty(B_{F'}))$, onde $I_F\colon F \longrightarrow \ell_\infty(B_{F'})$ é a injeção métrica da Proposição 3.8. Neste caso, definimos $\|P\|_{\mathcal{Q}^{inj}} = \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}}$ para todo $P \in \mathcal{Q}^{inj}$.

A próxima proposição nos permite chamar $\mathcal{Q}^{inj}$ de *envoltória injetiva* de $\mathcal{Q}$.

Proposição 5.11. *Seja $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal normado (Banach) de polinômios homogêneos.*
(a) $(\mathcal{Q}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}})$ é ideal normado (Banach) de polinômios homogêneos.
(b) $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}) \subset (\mathcal{Q}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}})$, isto é, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{inj}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$.
(c) $(\mathcal{Q}^{inj})^{inj} = \mathcal{Q}^{inj}$ isometricamente.

Demonstração. O leitor perceberá que a demonstração segue facilmente adaptando a demonstração feita na Proposição 3.17, exceto a completude de $(\mathcal{Q}^{inj}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}})$ no item (a), quando $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é completo. Verifiquemos essa completude. Caso $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ seja Banach, considere $E, F \in \mathcal{BAN}$ e $(P_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{Q}^{inj}(^nE;F)$ uma sequência satisfazendo $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|P_j\|_{\mathcal{Q}^{inj}} < +\infty$. Por definição, temos $(I_F \circ P_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{Q}(^nE; \ell_\infty(B_{F'}))$ e $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|I_F \circ P_j\|_{\mathcal{Q}} < +\infty$, o que implica que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} I_F \circ P_j$ converge em $(\mathcal{Q}(^nE; \ell_\infty(B_{F'})), \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$, digamos

$$\sum_{k=1}^{j} I_F \circ P_k \xrightarrow{j} P \in \mathcal{Q}(^nE; \ell_\infty(B_{F'})).$$

Veja que $P_j(E) \subset F$ e, daí, $(I_F \circ P_j)(E) = I_F(P_j(E)) \subset I_F(F)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Com isso, como $I_F(F)$ é Banach, podemos considerar a aplicação

$$P' \colon E \longrightarrow I_F(F)\ ,\ P'(x) = P(x).$$

Pela Proposição 2.39, $P' \in \mathcal{P}(^nE; I_F(F))$, donde segue que $I_F^{-1} \circ P' \in \mathcal{P}(^nE; F)$ (estamos considerando o isomorfismo isométrico $I_F^{-1} \colon I_F(F) \longrightarrow F$). Como $I_F \circ (I_F^{-1} \circ P') = P \in \mathcal{Q}(^nE; \ell_\infty(B_{F'}))$, temos $I_F^{-1} \circ P' \in \mathcal{Q}^{inj}(^nE; F)$ e $\sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j = I_F^{-1} \circ P'$ na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{inj}}$, pois

$$\left\| \sum_{k=1}^{j} P_k - I_F^{-1} \circ P' \right\|_{\mathcal{Q}^{inj}} = \left\| I_F \circ \left(\sum_{k=1}^{j} P_k - I_F^{-1} \circ P' \right) \right\|_{\mathcal{Q}} = \left\| \sum_{k=1}^{j} I_F \circ P_k - P \right\|_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{j} 0.$$

□

Veremos em seguida que nosso processo de extensão pode ser visto como um processo de envoltória, no sentido de que ele generaliza os procedimentos de envoltória regular e injetiva.

Observação 5.12. Se $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ são classes admissíveis (no sentido da Definição 3.18) tais que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$ e $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ é um $\mathfrak{C}$ ideal normado (Banach) de polinômios homogêneos, é claro que a restrição de $\mathcal{O}$ a componentes formadas por polinômios tomando valores em espaços de $\mathfrak{B}$, isto é,

$$\{(\mathcal{O}(^nE; F); \|\cdot\|_{\mathcal{O}}) : n \in \mathbb{N},\ E \in \mathcal{BAN} \text{ e } F \in \mathfrak{B}\}$$

é um $\mathfrak{B}$-ideal normado (Banach) de polinômios homogêneos. Então podemos falar, sem ambiguidade, de $(\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}})$ e $(\mathcal{O}^{\mathfrak{C}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{C}-ext}})$.

Definição 5.13. Dados uma classe admissível $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}$-ideais normados de polinômios homogêneos $(\mathcal{O}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{O}_1})$ e $(\mathcal{O}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{O}_2})$, dizemos que $(\mathcal{O}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{O}_1}) \subset (\mathcal{O}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{O}_2})$ se $\mathcal{O}_1(^nE; F) \subset \mathcal{O}_2(^nE; F)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{O}_1} = \|\cdot\|_{\mathcal{O}_2}$ em $\mathcal{O}_1(^nE; F)$ para todos $n \in \mathbb{N}$, $E \in \mathcal{BAN}$ e $F \in \mathfrak{B}$.

Proposição 5.14. *(a) Sejam $\mathfrak{B}$ uma classe admissível e $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ um $\mathfrak{B}$-ideal normado de polinômios homogêneos.*
(a1) $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}}) \subset (\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}(\mathfrak{B}), \|\cdot\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}(\mathfrak{B})})$.
(a2) Denotando a restrição de $(\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}})$ a $\mathfrak{B}$ ainda por $(\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}})$, temos $(\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext})^{\mathfrak{B}-ext} = \mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}$ isometricamente.
(b) Se $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ são classes admissíveis tais que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$ e $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ é um $\mathfrak{C}$-ideal normado de polinômios homogêneos, então $\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext} \subset \mathcal{O}^{\mathfrak{C}-ext}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}} = \|\cdot\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{C}-ext}}$ em $\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-ext}$.
(c) Se $\mathfrak{B}$ é uma classe admissível e $(\mathcal{O}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{O}_1})$ e $(\mathcal{O}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{O}_2})$ são $\mathfrak{B}$-ideais normados de polinômios homogêneos tais que $(\mathcal{O}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{O}_1}) \subset (\mathcal{O}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{O}_2})$, então $(\mathcal{O}_1^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}_1^{\mathfrak{B}-ext}}) \subset (\mathcal{O}_2^{\mathfrak{B}-ext}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}_2^{\mathfrak{B}-ext}})$.

Demonstração. A demonstração segue facilmente adaptando a demonstração feita na Proposição 3.21. □

Proposição 5.15. *Seja $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal normado de polinômios homogêneos.*
(a) Se $\mathfrak{D}_1$ é a classe admissível dos espaços de Banach duais (Exemplo 3.4), então $\mathcal{Q}(\mathfrak{D}_1)^{\mathfrak{D}_1-ext} = \mathcal{Q}^{reg}$ isometricamente.
(b) Se $\mathfrak{M}$ é a classe admissível dos espaços de Banach com a propriedade da extensão métrica (Exemplo 3.9), então $\mathcal{Q}(\mathfrak{M})^{\mathfrak{M}-ext} = \mathcal{Q}^{inj}$ isometricamente.

Demonstração. A demonstração segue facilmente adaptando a demonstração feita na Proposição 3.22. □

5.2 Aplicações

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações do teorema de extensão no caso polinomial. Primeiramente, caracterizaremos a estendibilidade da classe dos polinômios quase-$\tau(p)$-somantes com a igualdade isométrica da classe destes polinômios com a classe dos polinômios $\tau(p)$-somantes. Em seguida, na subseção 5.2.2 construiremos, a partir de um ideal de funcionais 3-lineares, um ideal de polinômios 2-homogêneos. É importante mencionar que nesta subseção não conseguimos adaptar o caso multilinear para o caso polinomial e, por isso, o que faremos será uma aplicação da construção já feita no caso multilinear para o caso polinomial. E, finalmente, abordaremos a estendibilidade da classe dos polinômios sequencialmente w^*-compactos, concluindo que esta classe não é estendível a um ideal de polinômios. Terminaremos o capítulo, e a dissertação, dando uma nova demonstração da não estendibilidade da classe dos operadores multilineares sequencialmente w^*-compactos.

Ressaltamos novamente, baseados na primeira e terceira aplicações do teorema de extensão polinomial, a importância de trabalharmos com subclasses da classe $\mathcal{BAN}$ de todos os espaços de Banach, usando o conceito de classes admissíveis, pois, nas duas classes de polinômios abordadas, os polinômios não são definidos para quaisquer espaços de Banach no contradomínio.

5.2.1 Polinômios quase-$\tau(p)$-somantes

O problema da igualdade ou não das classes de operadores lineares/multilineares $\tau(p)$-somantes e quase-$\tau(p)$-somantes está descrito na Seção 4.1. Faremos aqui o caso polinomial do principal resultado provado naquela seção, isto é, provaremos que as classes dos polinômios n-homogêneos $\tau(p)$-somantes e quase-$\tau(p)$-somantes coincidem se, e somente se, a classe dos polinômios quase-$\tau(p)$-somantes é estendível a um ideal de polinômios.

A próxima definição é uma adaptação na definição de operadores multilineares quase-$\tau(p)$-somantes introduzida em [5].

Definição 5.16. Para $n \in \mathbb{N}$, $E, F \in \mathcal{BAN}$ e $p \geq 1$, um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}(^nE; F')$ é dito ser *quase-$\tau(p)$-somante* se existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |P(x_j)(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \sup_{\substack{x' \in B_{E'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x'(x_j)^n \cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$ e $y_j \in F$ com $j = 1, \ldots, m$. Denotamos o ínfimo de todas as constantes $c \geq 0$ possíveis por $\|P\|_{q\tau(p)}$ e a classe desses polinômios por $\mathcal{P}_{q\tau(p)}(^nE; F')$.

As duas propriedades a seguir são provadas como feito na demonstração do Lema 4.2:

Lema 5.17. *(a) O ínfimo na definição de $\|\cdot\|_{q\tau(p)}$ é assumido, isto é,*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |P(x_j)(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|P\|_{q\tau(p)} \cdot \sup_{\substack{x' \in B_{E'} \\ y' \in B_{F'}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x'(x_j)^n \cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

para todos $P \in \mathcal{P}_{q\tau(p)}(^nE; F')$, $m \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$ e $y_j \in F$ com $j = 1, \ldots, m$.
(b) $\|P\| \leq \|P\|_{q\tau(p)}$ para todo $P \in \mathcal{P}_{q\tau(p)}(^nE; F')$.

Proposição 5.18. *Para $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $E, F \in \mathcal{BAN}$, $\mathcal{P}_{q\tau(p)}(^nE; F')$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE; F')$ e $\|\cdot\|_{q\tau(p)}$ é uma norma em $\mathcal{P}_{q\tau(p)}(^nE; F')$.*

Demonstração. A demonstração segue facilmente adaptando a demonstração feita na Proposição 4.3. $\square$

O próximo resultado fornece uma caracterização da norma $\|P\|_{q\tau(p)}$ que será útil na demonstração da completude de $(\mathcal{P}_{q\tau(p)}, \|\cdot\|_{q\tau(p)})$.

Proposição 5.19. *Para todo $P \in \mathcal{P}_{q\tau(p)}(^nE; F')$,*

$$\|P\|_{q\tau(p)} = \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{m}|P(x_j)(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} : m \in \mathbb{N},\ x_j \in E,\ y_j \in F \text{ com}\right.$$

$$\left. j = 1, \ldots, m \text{ e } \sup_{\substack{x' \in B_{E'} \\ y' \in B_{F'}}}\left(\sum_{j=1}^{m}|x'(x_j)^n \cdot y'(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1\right\}.$$

Demonstração. A demonstração segue facilmente adaptando a demonstração feita na Proposição 4.4. $\square$

Proposição 5.20. *O espaço normado $(\mathcal{P}_{q\tau(p)}(^nE; F'), \|\cdot\|_{q\tau(p)})$ é completo.*

Demonstração. A demonstração segue facilmente adaptando a demonstração feita na Proposição 4.5, usando a Proposição 5.19 no lugar da Proposição 4.4. $\square$

A próxima definição foi introduzida em [13].

Definição 5.21. Para $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $E, F \in \mathcal{BAN}$, um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE; F')$ é dito ser $\tau(p)$-*somante* se existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|y_j''(P(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \sup_{\substack{x' \in B_{E'} \\ y' \in B_{F'}}}\left(\sum_{j=1}^{m}|x'(x_j)^n \cdot y_j''(y')|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$ e $y_j'' \in F''$ com $j = 1, \ldots, m$. Denotamos o ínfimo de todas as constantes $c \geq 0$ possíveis por $\|P\|_{\tau(p)}$ e a classe desses polinômios por $\mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE; F')$.

De imediato temos $\mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE; F') \subset \mathcal{P}_{q\tau(p)}(^nE; F')$ com $\|\cdot\|_{q\tau(p)} \leq \|\cdot\|_{\tau(p)}$. E, além disso, caso F seja um espaço de Banach reflexivo, vale que $\mathcal{P}_{q\tau(p)}(^nE; F') = \mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE; F')$ isometricamente.

A dúvida que surge é se $\mathcal{P}_{q\tau(p)}(^nE; F') = \mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE; F')$ isometricamente para todos $n \in \mathbb{N}$, $E, F \in \mathcal{BAN}$. Usando o teorema de extensão polinomial deste capítulo, obtemos uma condição necessária e suficiente para que tal igualdade ocorra.

Teorema 5.22. *$\mathcal{P}_{q\tau(p)} = \mathcal{P}_{\tau(p)}$ isometricamente se, e somente se, a classe $(\mathcal{P}_{q\tau(p)}, \|\cdot\|_{q\tau(p)})$ é estendível.*

Demonstração. A demonstração segue facilmente adaptando a demonstração feita no Teorema 4.7, usando a igualdade da Proposição 1.40 onde se usava a Proposição 1.41. $\square$

5.2.2 O ideal de polinômios 2-homogêneos gerado por um ideal de funcionais 3-lineares

Apesar de várias tentativas, não conseguimos adaptar para o caso polinomial a construção feita na Seção 4.2 para o caso multilinear. A dificuldade básica é a inexistência de uma versão para polinômios dos isomorfismos isométricos T_σ lá considerados. Outra dificuldade é que, quando tentamos trabalhar com o correspondente multilinear simétrico $\check{P}$ de um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE; E'')$ e usar os isomorfismos T_σ, não conseguimos voltar para o caso polinomial, pois no produto cartesiano do domínio aparece, além do espaço E, seu dual E', e por isso não conseguimos falar em polinômio homogêneo. Diante dessas dificuldades, o máximo que conseguimos fazer, e que será descrito nesta seção, foi aplicar para polinômios o que foi construído naquela seção para o caso $n = 2$.

Dado um ideal normado (Banach) de funcionais 3-lineares pré-regular $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$, sabemos construir pelo Teorema 4.9 um ideal normado (Banach) de operadores bilineares $(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}})$. E a partir desse ideal de operadores bilineares podemos construir, usando as Proposições 2.57 e 2.58, dois ideais normados (Banach) de polinômios 2-homogêneos, a saber $(\overset{\smile}{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}}, \|\cdot\|_{\overset{\smile}{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}}})$ e $(\widehat{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}}, \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}}})$. O que buscamos nesta seção são condições que garantam a igualdade desses dois ideais de polinômios 2-homogêneos.

Dados $E_1 = E_2 = E, E_3 \in \mathcal{BAN}$ e $P \in \mathcal{P}(E_1, E_2; E_3)$, por um lado temos

$$\begin{aligned} P \in \overset{\smile}{M}_{\mathcal{F}}(E_1, E_2; E_3) &\iff \check{P} \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(E_1, E_2; E_3) \\ &\iff T_\sigma(J_{E_3} \circ \check{P}) \in \mathcal{F}(F_1^\sigma, F_2^\sigma, F_3^\sigma; \mathbb{K}) \text{ para todo } \sigma \in S_3, \\ &\qquad \text{onde } F_{\sigma^{-1}(3)}^\sigma = E_3' \text{ e } F_j^\sigma = E_{\sigma(j)} \text{ para } j \neq \sigma^{-1}(3), \end{aligned}$$

e

$$\|P\|_{\overset{\smile}{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}}} = \|\check{P}\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}} = \max_{\sigma \in S_3} \|T_\sigma(J_{E_3} \circ \check{P})\|_{\mathcal{F}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P \in \widehat{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}}(E_1, E_2; E_3) &\iff \text{existe } A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(E_1, E_2; E_3) \text{ tal que } \widehat{A} = P \\ &\iff \text{existe } A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; E_3) \text{ tal que } T_\sigma(J_{E_3} \circ A) \in \mathcal{F}(F_1^\sigma, F_2^\sigma, F_3^\sigma; \mathbb{K}) \\ &\qquad \text{para toda } \sigma \in S_3, \text{ onde } F_{\sigma^{-1}(3)}^\sigma = E_3' \text{ e } F_j^\sigma = E_{\sigma(j)} \text{ para } j \neq \sigma^{-1}(3) \\ &\qquad \text{e } \widehat{A} = P, \end{aligned}$$

e

$$\|P\|_{\widehat{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}}} = \inf\{\|A\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}} : \widehat{A} = P \text{ e } A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}\} = \inf\left\{\max_{\sigma \in S_3} \|T_\sigma(J_{E_3} \circ A)\|_{\mathcal{F}} : \widehat{A} = P \text{ e } A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}\right\}.$$

Pela Proposição 2.63 sabemos que $\overset{\smile}{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}} = \widehat{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}}$ se, e somente se, $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ é simétrico. O que buscamos então são condições suficientes sobre o ideal $\mathcal{F}$ para que essa igualdade ocorra. A partir de agora, o conteúdo desta subseção é inédito.

Definição 5.23. Dizemos que um ideal de funcionais 3-lineares $\mathcal{F}$ é *simétrico em duas variáveis* se, para todos $E, F \in \mathcal{BAN}$, as seguintes condições se verificam:
(i) Se $A \in \mathcal{F}(E, E, F'; \mathbb{K})$, então $A_3 \in \mathcal{F}(E, E, F'; \mathbb{K})$, onde $A_3(x_1, x_2, y') = A(x_2, x_1, y')$ para todos $x_1, x_2 \in E$ e $y' \in F'$.
(ii) Se $A \in \mathcal{F}(E, F', E; \mathbb{K})$ então $A_2 \in \mathcal{F}(E, F', E; \mathbb{K})$, onde $A_2(x_1, y', x_2) = A(x_2, y', x_1)$ para todos $x_1, x_2 \in E$ e $y' \in F'$.
(iii) Se $A \in \mathcal{F}(F', E, E; \mathbb{K})$, então $A_1 \in \mathcal{F}(F', E, E; \mathbb{K})$, onde $A_1(y', x_1, x_2) = A(y', x_2, x_1)$ para todos $x_1, x_2 \in E$ e $y' \in F'$.

Para exibir um exemplo de ideal de funcionais 3-lineares simétrico em duas variáveis, apresentaremos o multi-ideal dos operadores absolutamente $(s; r_1, \ldots, r_n)$-somantes. Sejam $p \geq 1$ e $E \in \mathcal{BAN}$. Por $\ell_p(E)$ denotamos o espaço de Banach de todas sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset E$ que são absolutamente p-somáveis, isto é, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < +\infty$, munido com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

E por $\ell_p^w(E)$ denotamos o espaço de Banach das sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset E$ fracamente p-somáveis, isto é, $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(\mathbb{K})$ para todo $\varphi \in E'$, munido com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p.$$

Definição 5.24. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $s, r_1, \ldots, r_n \in [1, \infty]$, $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n)_{j=1}^{\infty}) \in \ell_s(F)$ para todas sequências $(x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{r_k}^w(E_k)$ com $k = 1, \ldots, n$, então A é dito ser *absolutamente* $(s; r_1, \ldots, r_n)$*-somante*. O espaço desses operadores é denotado por $\mathcal{L}_{(s;r_1,\ldots,r_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Para maiores detalhes, veja, por exemplo, [3]. A caracterização a seguir será útil para obtermos o exemplo desejado.

Proposição 5.25. *Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então A é absolutamente $(s; r_1, \ldots, r_n)$-somante se, e somente se, existe uma constante $c \geq 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x_j^1 \in E_1, \ldots, x_j^n \in E_n$ com $j = 1, \ldots, k$,*

$$\|(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^{k}\|_s \leq c \cdot \prod_{m=1}^{n} \|(x_j^m)_{j=1}^{k}\|_{w,r_m}.$$

Neste caso, se o ínfimo das constantes $c \geq 0$ que satisfazem a desigualdade é denotado por $\|A\|_{as,(s;r_1,\ldots,r_n)}$, então $(\mathcal{L}_{(s;r_1,\ldots,r_n)}(E_1, \ldots, E_n; F), \|\cdot\|_{as,(s;r_1,\ldots,r_n)})$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja [3, Theorem 1.2(ii)]. $\square$

Exemplo 5.26. Dados $s, r_1, r_2, r_3 \in [1, \infty]$, é bem conhecido que $\mathcal{L}_{(s;r_1,r_2,r_3)}$ é um ideal de Banach de operadores 3-lineares, e portanto suas componentes a valores escalares é um ideal de Banach de funcionais 3-lineares. A caracterização enunciada acima deixa claro que este ideal é simétrico em duas variáveis (basta observar que no produtório à direita podemos alterar a ordem dos fatores).

Chegamos ao resultado principal desta subseção:

Teorema 5.27. *Se $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ é um ideal de funcionais 3-lineares pré-regular simétrico em duas variáveis, então $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{F}}$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.63 basta mostrar que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ é um ideal simétrico, ou seja, dados $E_1 = E_2 = E, E_3 \in \mathcal{BAN}$ então $A^t \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(E_1, E_2; E_3)$ sempre que $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(E_1, E_2; E_3)$. Para isso seja $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(E_1, E_2; E_3)$. Então $T_\sigma(J_{E_3} \circ A) \in \mathcal{F}(F_1^\sigma, F_2^\sigma, F_3^\sigma; \mathbb{K})$ para toda $\sigma \in S_3$, onde $F_{\sigma^{-1}(3)}^\sigma = E_3'$ e $F_j^\sigma = E_{\sigma(j)}$ para $j \neq \sigma^{-1}(3)$. Faremos as contas para A^t considerando as permutações (132) e (321); o leitor perceberá que os outros casos são análogos. Usando que $\mathcal{F}$ é ideal simétrico em duas variáveis, temos, por um lado:

$$\left[T_{(132)}(J_{E_3} \circ A)\right]_2 (x_1, x_3', x_2) = T_{(132)}(J_{E_3} \circ A)(x_2, x_3', x_1) = J_{E_3}(A(x_2, x_1))(x_3')$$

$$= J_{E_3}(A^t(x_1,x_2))(x_3') = T_{(132)}(J_{E_3}\circ A^t)(x_1,x_3',x_2),$$

para todos $x_1, x_2 \in E$ e $x_3' \in E_3'$. Disso segue que $T_{(132)}(J_{E_3}\circ A^t) = \left[T_{(132)}(J_{E_3}\circ A)\right]_2 \in \mathcal{F}(E_1, E_3', E_2; \mathbb{K})$. E por outro lado,

$$\begin{aligned}\left[T_{(321)}(J_{E_3}\circ A)\right]_1(x_3',x_2,x_1) &= T_{(321)}(J_{E_3}\circ A)(x_3',x_1,x_2) = J_{E_3}(A(x_2,x_1))(x_3')\\ &= J_{E_3}(A^t(x_1,x_2))(x_3') = T_{(321)}(J_{E_3}\circ A^t)(x_3',x_2,x_1),\end{aligned}$$

para todos $x_1, x_2 \in E$ e $x_3' \in E_3'$. Disso segue que $T_{(321)}(J_{E_3}\circ A^t) = \left[T_{(321)}(J_{E_3}\circ A)\right]_1 \in \mathcal{F}(E_3', E_2, E_1; \mathbb{K})$. Portanto, $A^t \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(E_1, E_2; E_3)$, como queríamos. $\square$

5.2.3 Polinômios sequencialmente w^*-compactos

À luz da discussão feita no preâmbulo da Seção 4.3 no âmbito polinomial, dizemos que um polinômio n-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é:
• *Compacto*, e neste caso escrevemos $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^nE; F)$, se $\overline{P(B_E)}$ é compacto em F, ou, equivalentemente, dada uma sequência limitada $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E, a sequência $(P(x_j))_{j=1}^\infty$ tem subsequência convergente em F.
• *Fracamente compacto*, e neste caso escrevemos $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^nE; F)$, se $\overline{P(B_E)}^w$ é fracamente compacto em F, ou, equivalentemente, dada uma sequência limitada $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E, a sequência $(P(x_j))_{j=1}^\infty$ tem subsequência fracamente convergente em F.

Essas classes foram muito estudadas e é bem conhecido que são ideais fechados de polinômios (veja [19, Seção 3.4.2]). Como toda sequência que converge em norma também converge fracamente, então obviamente $\mathcal{P}_{\mathcal{K}} \subset \mathcal{P}_{\mathcal{W}}$.

Pensando na topologia fraca-estrela, $\sigma(F', F)$ ou w^*, de um espaço dual F', é natural definir um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE; F')$ como sendo *w^*-compacto*, ou $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{W}^*}(^nE; F')$, se $\overline{P(B_E)}^{w^*}$ é w^*-compacto em F'. Mas, como $P(B_E)$ é limitado, pelo Corolário 1.44 segue que $\overline{P(B_E)}^{w^*}$ é w^*-compacto em F' para todo $P \in \mathcal{P}(^nE; F')$. Disso segue que $\mathcal{P}_{\mathcal{W}^*} = \mathcal{P}$ nas componentes tomando valores em espaços duais. Portanto, $\mathcal{P}_{\mathcal{W}^*}$ não é uma classe que valha a pena ser estudada.

Relembrando que, na topologia fraca-estrela, compacidade não é equivalente a compacidade sequencial, podemos definir:

Definição 5.28. Dados $n \in \mathbb{N}$, $E, F \in \mathcal{BAN}$ e $P \in \mathcal{P}(^nE; F')$, dizemos que P é *sequencialmente w^*-compacto*, ou $P \in \mathcal{P}^n_{w^*sc}(^nE; F')$, se para toda sequência limitada $(x_j)_{j=1}^\infty \subset E$, a sequência $(P(x_j))_{j=1}^\infty$ tem subsequência w^*-convergente em F'.

Como toda sequência que converge fracamente também é fraca-estrela convergente, temos $\mathcal{P}^n_{\mathcal{K}} \subset \mathcal{P}^n_{\mathcal{W}} \subset \mathcal{P}^n_{w^*sc}$ nas componentes tomando valores em espaços duais. Na demonstração do Teorema 5.30 exibimos um exemplo de polinômio n-homogêneo que não pertence a $\mathcal{P}^n_{w^*sc}$.

Proposição 5.29. *Seja $\mathfrak{D}_1$ a classe admissível dos espaços de Banach duais do Exemplo 3.4. Para todo $n \in \mathbb{N}$:*
(a) $\mathcal{P}^n_{w^*sc}$ é $\mathfrak{D}_1$-classe normada de polinômios n-homogêneos com a norma do sup.
(b) Para $\mathcal{P}^n_{w^*sc}$ ser $\mathfrak{D}_1$-ideal normado de polinômios n-homogêneos com a norma do sup falta apenas a parte referente à injeção métrica da condição (b)(iii) da Definição 5.2.

Demonstração. A demonstração segue facilmente adaptando a demonstração feita na Proposição 4.12. $\square$

Apesar da demonstração do próximo teorema ser uma adaptação da demonstração do Teorema 4.13, apresentaremos sua demonstração em detalhes. Faremos isso pois, em seguida, obteremos o Teorema 4.13 como consequência do resultado abaixo, e por isso precisa estar claro que este tem uma demonstração independente.

Teorema 5.30. *A classe dos polinômios n-homogêneos sequencialmente w^*-compactos $\mathcal{P}^n_{w^*sc}$ assumindo valores em espaços de Banach duais não é estendível a um ideal de polinômios n-homogêneos.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.4, a classe $(\mathcal{P}^n_{w^*sc}, \|\cdot\|)$ é estendível se, e somente se, ela é um $\mathfrak{D}_1$-ideal normado de polinômios n-homogêneos. Pela Proposição 5.29, par $\mathcal{P}^n_{w^*sc}$ ser $\mathfrak{D}_1$-ideal falta somente a parte da condição 3.2(b)(iii) referente à injeção métrica. Verificaremos que esta parte nem sempre vale. Considere $E = c_0$. Então $E' = \ell_1$ e $E'' = \ell_\infty$ isometricamente, E é um espaço de Banach de dimensão infinita tal que E' é espaço de Schur (Teorema 1.34) e a bola unitária fechada de E' é sequencialmente w^*-compacta pois E é separável. Seja $(e_j)_{j=1}^\infty$ a sequência dos vetores unitários canônicos em ℓ_1. Vejamos que $e_j \xrightarrow{w^*} 0$ em ℓ_1: com efeito, para todo $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \in c_0$,

$$e_j((\lambda_k)_{k=1}^\infty) = \lambda_j \xrightarrow{j} 0,$$

pela expressão do isomorfismo isométrico entre c_0' e ℓ_1 (Proposição 1.16). Como $\|e_j\|_1 = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, $(e_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência de Josefson-Nissenzweig em ℓ_1. Tomando o funcional $\varphi = (1,1,1,\ldots) \in \ell_\infty$, note que $\varphi(e_j) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ (Proposição 1.17). Agora, considerando o funcional $\varphi \in E''$, definimos o polinômio

$$P\colon E' \longrightarrow E' \ , \ P(x') = \varphi(x')^{n-1} \cdot x'.$$

Então $P \in \mathcal{P}(^nE'; E')$ pela Proposição 2.38. Mostraremos que $P \in \mathcal{P}^n_{w^*sc}(^nE'; E')$ mas $J_{E'} \circ P \notin \mathcal{P}^n_{w^*sc}(^nE'; E''')$. Dada $(x'_j)_{j=1}^\infty \subset E'$ uma sequência limitada, como a bola unitária fechada de E' é sequencialmente w^*-compacta, existe uma subsequência $(x'_{j_k})_{k=1}^\infty$ w^*-convergente para certo x' em E'. E ainda, como a sequência $(\varphi(x'_{j_k}))_{k=1}^\infty$ é limitada em $\mathbb{K}$, existem uma subsequência $(x'_{j_{k_l}})_{l=1}^\infty$ e um escalar λ tal que a subsequência $(\varphi(x'_{j_{k_l}}))_{l=1}^\infty$ converge para λ. Afirmamos que a subsequência $(\varphi(x'_{j_{k_l}})^{n-1} \cdot x'_{j_{k_l}})_{l=1}^\infty$ é w^*-convergente para $\lambda^{n-1} \cdot x'$ em E': de fato, para todo $x \in E$,

$$\lim_{l\to\infty} \varphi(x'_{j_{k_l}})^{n-1} \cdot x'_{j_{k_l}}(x) = \lambda^{n-1} \cdot x'(x),$$

pois em $\mathbb{K}$ o limite do produto é igual ao produto dos limites. Com isso, $P \in \mathcal{P}^n_{w^*sc}(^nE'; E')$. Veja que

$$J_{E'} \circ P(x') = J_{E'}(P(x')) = J_{E'}(\varphi(x')^{n-1} \cdot x').$$

Suponha que $J_{E'} \circ P$ seja sequencialmente w^*-compacto. Por $(e_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência limitada, existem uma subsequência $(e_{j_k})_{k=1}^\infty$ e $x''' \in E'''$ tais que

$$J_{E'}(\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k}) = J_{E'} \circ P(e_{j_k}) \xrightarrow{w^*} x''',$$

logo

$$x''(\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k}) = J_{E'}(\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k})(x'') \xrightarrow{k} x'''(x'')$$

para todo $x'' \in E''$. Daí, $(x''(\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k}))_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy para todo $x'' \in E''$, isto é, $(\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k})_{k=1}^\infty$ é uma sequência fracamente de Cauchy em $E' = \ell_1$. Lembrando que sequências fracamente de Cauchy em espaços de Schur são convergentes em norma (Proposição 1.36), existe $x' \in E'$ de modo que $\lim\limits_k \varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k} = x'$ na norma de E', o que implica que $\varphi(e_{j_k})^{n-1} \cdot e_{j_k} \xrightarrow{w^*} x'$ em E'. Como $\varphi(e_j) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos $e_{j_k} \xrightarrow{w^*} x'$ em E'. Daí, $x' = 0$ e $e_{j_k} \xrightarrow{k} 0$ na norma de E', o que é um absurdo pois $\|e_j\|_1 = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, $J_{E'} \circ P \notin \mathcal{P}^n_{w^*sc}(^nE'; E''')$ e a classe $\mathcal{P}^n_{w^*sc}$ não é estendível. □

O seguinte lema, além de seu interesse próprio, será útil a seguir. Tanto quanto sabemos, este resultado também é inédito.

Lema 5.31. *Seja $P \in \mathcal{P}(^nE; F')$. Então $P \in \mathcal{P}^n_{w^*sc}(^nE; F')$ se, e somente se, $\check{P} \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(^nE; F')$.*

Demonstração. Provaremos a implicação $P \in \mathcal{P}^n_{w^*sc}(^nE; F') \Longrightarrow \check{P} \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(^nE; F')$ no caso $n = 2$, e o leitor perceberá que o caso geral segue usando o mesmo argumento, porém, com notação bem mais carregada. Sejam $P \in \mathcal{P}^2_{w^*sc}(^2E; F')$ e $(x_j^1)_{j=1}^\infty, (x_j^2)_{j=1}^\infty \subset E$ sequências limitadas. Como a sequência $(x_j^1 + x_j^2)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada, existem um subconjunto infinito N_1 de $\mathbb{N}$ e uma subsequência $(x_j^1 + x_j^2)_{j\in\mathbb{N}_1}$ tais que $(P(x_j^1 + x_j^2))_{j\in\mathbb{N}_1}$ é w^*-convergente em F'. E como a sequência $(x_j^1 - x_j^2)_{j\in N_1}$ também é limitada, existem um subsconjunto infinito N_2 de N_1 e uma subsequência $(x_j^1 - x_j^2)_{j\in N_2}$ tais que $(P(x_j^1 - x_j^2))_{j\in N_2}$ é w^*-convergente em F'. E como a sequência $(-x_j^1 + x_j^2)_{j\in N_2}$ também é limitada, existem um subsconjunto infinito N_3 de N_2 e uma subsequência $(-x_j^1 + x_j^2)_{j\in N_3}$ tais que $(P(-x_j^1 + x_j^2))_{j\in N_3}$ é w^*-convergente em F'. Por fim, como a sequência $(-x_j^1 - x_j^2)_{j\in N_3}$ também é limitada, existem um subsconjunto infinito N_4 de N_3 e uma subsequência $(-x_j^1 - x_j^2)_{j\in N_4}$ tais que $(P(-x_j^1 - x_j^2))_{j\in N_4}$ é w^*-convergente em F'. Pela fórmula de polarização (Proposição 2.16), para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\check{P}(x_j^1, x_j^2) &= \frac{1}{2! \cdot 2^2} \cdot \sum_{\varepsilon_j=\pm1} \varepsilon_1\varepsilon_2\check{P}(\varepsilon_1 x_j^1 + \varepsilon_2 x_j^2)^2 = \frac{1}{8} \cdot \sum_{\varepsilon_j=\pm1} \varepsilon_1\varepsilon_2 P(\varepsilon_1 x_j^1 + \varepsilon_2 x_j^2) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left[P(x_j^1 + x_j^2) - P(x_j^1 - x_j^2) - P(-x_j^1 + x_j^2) + P(-x_j^1 - x_j^2)\right].\end{aligned}$$

Como subsequência de sequência w^*-convergente é também w^*-convergente e como a soma de um número finito de sequências w^*-convergentes é também w^*-convergente, segue que a sequência $(\check{P}(x_j^1, x_j^2))_{j\in N_4}$ é w^*-convergente em F', o que implica que $\check{P} \in \mathcal{L}^2_{w^*sc}(^nE; F')$.

Para a implicação contrária, seja $P \in \mathcal{P}(^nE; F')$ tal que $\check{P} \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(^nE; F')$ e seja $(x_j)_{j=1}^\infty \subset E$ uma sequência limitada. Como $(x_j, \ldots, x_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência limitada em E^n, existe uma subsequência $((x_{j_k}, \overset{n}{\ldots}, x_{j_k}))_{k=1}^\infty$ tal que $(\check{P}x_{j_k}^n)_{k=1}^\infty = (P(x_{j_k}))_{k=1}^\infty$ é w^*-convergente em F'. Segue que $P \in \mathcal{P}^n_{w^*sc}(^nE; F')$. □

A seguir exibimos uma segunda demonstração do Teorema 4.13.

Teorema 5.32. *A classe dos operadores n-lineares sequencialmente w^*-compactos $\mathcal{L}^n_{w^*sc}$ tomando valores em espaços de Banach duais não é estendível a um ideal de operadores n-lineares.*

Demonstração. Suponha que a classe $(\mathcal{L}^n_{w^*sc}, \|\cdot\|)$ seja estendível. Então existe um ideal normado de operadores n-lineares $(\mathcal{M}^n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^n})$ que estende $(\mathcal{L}^n_{w^*sc}, \|\cdot\|)$. Da Proposição 2.57 sabemos que $(\widetilde{\mathcal{M}}^n, \|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{M}}^n})$ é ideal normado de polinômios n-homogêneos. Vejamos que $\mathcal{P}^n_{w^*sc}(^nE; F') = \widetilde{\mathcal{M}}^n(^nE; F')$ para todos $E, F \in \mathcal{BAN}$. Com efeito,

$$P \in \mathcal{P}^n_{w^*sc}(^nE; F') \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \check{P} \in \mathcal{L}^n_{w^*sc}(^nE; F') \Longleftrightarrow \check{P} \in \mathcal{M}^n(^nE; F') \Longleftrightarrow P \in \widetilde{\mathcal{M}}^n(^nE; F'),$$

onde (*) segue do lema anterior. Isso implica que $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ é uma extensão de $\mathcal{P}^n_{w^*sc}$, o que é um absurdo pois esta classe não é estendível pelo Teorema 5.30. □

Referências Bibliográficas

[1] T. R. Alves, *Polinômios dominados entre espaços de Banach,* Dissertação de Mestrado, UFU, 2011.

[2] D. T. Araújo, *Desigualdade de Hölder generalizada com normas mistas e aplicações,* Dissertação de Mestrado, UFPB, 2016.

[3] G. Botelho, *Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials,* Proc. of the Royal Irish Acad. **97**A (1997), no. 2, 145-153.

[4] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators,* Note Mat. **25** (2005/06), no. 1, 69-102.

[5] G. Botelho e X. Mujica, *The space of $\sigma(p)$-nuclear linear and multilinear operators and their duals,* Linear Algebra Appl. **519** (2017), 219-237.

[6] G. Botelho e X. Mujica, *Ideal extensions of classes of linear operators,* preprint.

[7] G. Botelho; D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional,* Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[8] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces,* Springer, 1984.

[9] K. Floret e D. García, *On ideals of polynomials and multilinear mappings between Banach spaces,* Arch. Math. (Basel) **81** (2003), no. 3, 300-308.

[10] J. L. P. Luiz, *A propriedade de Schur em espaços de Banach,* Dissertação de Mestrado, UFU, 2017.

[11] M. C. Matos, *On multilinear mappings of nuclear type*, Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid **6** (1993), 61–81.

[12] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach spaces,* Dover Publications, 2010.

[13] X. Mujica, *$\tau(p;q)$-summing mappings and the domination theorem*, Port. Math. (N.S.) **65** (2008), no. 2, 211-226.

[14] G. M. R. Pereira, *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach,* Dissertação de Mestrado, UFU, 2012.

[15] A. Pietsch, *Operator Ideals,* North Holland, 1980.

[16] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals,* Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, Leipzig Teubner Texte Math. **62** (1983), 185-199.

[17] L. G. Polac, *O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach,* Dissertação de Mestrado, UFU, 2013.

[18] A. R. Silva, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição,* Dissertação de Mestrado, UFU, 2010.

[19] E. R. Torres, *Hiper-Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios Homogêneos em Espaços de Banach,* Tese de Doutorado, USP, 2015.