



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA**



**ESTUDO DA DINÂMICA DE PARTÍCULAS EM TAMBORES  
ROTATÓRIOS EMPREGANDO A ABORDAGEM NUMÉRICA  
LAGRANGEANA**

Rondinelli Moulin Lima

Uberlândia – MG

2017



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA**



**ESTUDO DA DINÂMICA DE PARTÍCULAS EM TAMBORES  
ROTATÓRIOS EMPREGANDO A ABORDAGEM NUMÉRICA  
LAGRANGEANA**

Rondinelli Moulin Lima

Orientadores:

Prof. Dr. Claudio Roberto Duarte

Prof. Dr. Marcos A. de Souza Barrozo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Química

Uberlândia – MG

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

L732e Lima, Rondinelli Moulin, 1991-  
2017 Estudo da dinâmica de partículas em tambores rotatórios  
empregando a abordagem numérica lagrangeana / Rondinelli Moulin  
Lima. - 2017.  
82 f. : il.

Orientador: Claudio Roberto Duarte.  
Coorientador: Marcos Antonio de Souza Barrozo.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química.  
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.98>  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia química - Teses. 2. Partículas - Teses. 3. Lagrange,  
Funções de - Teses. 4. Calibração - Teses. I. Duarte, Claudio Roberto,  
1975- II. Barrozo, Marcos Antonio de Souza. III. Universidade Federal  
de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química. IV.  
Título.

---

CDU: 66.0

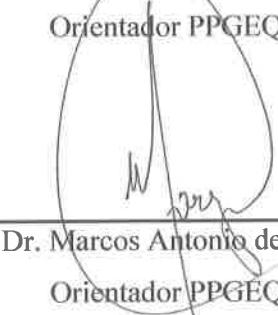
Maria Salete de Freitas Pinheiro – CRB6/1262

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA QUÍMICA, EM 18 DE JULHO DE 2017.

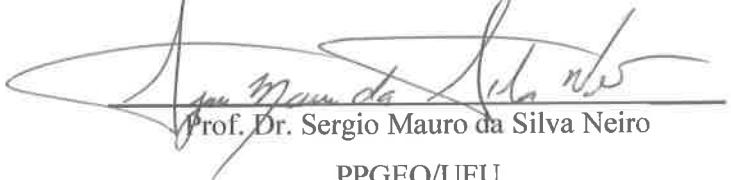
BANCA EXAMINADORA:

  
Prof. Dr. Cláudio Roberto Duarte

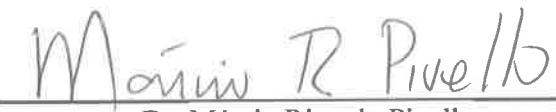
Orientador PPGEQ/UFU

  
Prof. Dr. Marcos Antonio de Souza Barrozo

Orientador PPGEQ/UFU

  
Prof. Dr. Sergio Mauro da Silva Neiro

PPGEQ/UFU

  
Dr. Márcio Ricardo Pivello

PPGEQ/UFU

  
Profª. Dr. Kássia Graciele dos Santos

UFTM

Dedico aos meus pais, Tarcísio e Nilcéia.

*“O cuidado pelos outros é a medida da grandeza de vocês”*

(Lucas 9.48)

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por todas as maravilhas que tem realizado em minha vida e pelo amparo nos momentos dificeis, por sempre ter me escutado e me ajudado.

A minha eterna gratidão, aos meus pais Tarcísio e Nilcéia, que mesmo na distância e nas dificuldades sempre me amaram e me apoiaram, não medindo esforços para que nada me faltasse.

Ao meu irmão Tarcísio, pelo companheirismo e por sempre ter me ajudado durante a minha vida, sendo um dos grandes responsáveis por este momento.

Aos meus orientadores Claudio Roberto Duarte e Marcos Antonio de Souza Barrozo, por todo auxílio e dedicação para a execução deste trabalho. Agradeço imensamente por compartilharem seus conhecimentos comigo e me ajudando, tanto pessoalmente quanto profissionalmente, a ser uma pessoa melhor.

Agradeço em especial aos meus amigos Suellen e Rodolfo pela paciência e por estarem sempre dispostos a ouvir e me ajudar com meus problemas. A contribuição de vocês, sem dúvida, foi essencial para a finalização deste trabalho, sou eternamente grato.

Aos companheiros de laboratório, Angélica, Geraldo, Gláucia, Lidja, Marcela, Marcio e Priscila, pela amizade e pelos momentos de risada e de descontração, tornando as estadias no laboratório muito mais prazerosas.

À Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia, a CAPES e o CNPQ pelos recursos oferecidos para a realização desse trabalho.

Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão desse trabalho.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	i
LISTA DE TABELAS .....	v
RESUMO .....	xi
ABSTRACT .....	xii
<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivo Geral.....	2
1.1.1 Objetivos Específicos.....	2
<b>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>3</b>
2.1 Tambor Rotatório e Regimes de Escoamento.....	3
2.2 Abordagem Numérica.....	10
2.2.1 Abordagem Euleriana – Fluidodinâmica Computacional ( <i>CFD</i> ) .....	10
2.2.2 Abordagem Lagrangeana – Método dos Elementos Discretos ( <i>DEM</i> ) .....	11
2.3 Parâmetros Numéricos .....	22
2.3.1 Coeficiente de Restituição.....	22
2.3.2 Coeficiente de Atrito .....	23
<b>CAPÍTULO 3 - MATERIAIS E MÉTODOS .....</b>	<b>27</b>
3.1 Medição experimental dos parâmetros numéricos.....	27
3.1.1 Coeficiente de Restituição.....	28
3.1.2 Coeficiente de Atrito Estático .....	30

3.1.3 Coeficiente de Atrito de Rolamento.....	32
3.2 Simulação da metodologia experimental utilizada para estimação dos parâmetros numéricos.....	34
3.3 Calibração dos parâmetros numéricos no DEM .....	37
3.4 Análise dos parâmetros numéricos no efeito <i>bulk</i> em um tambor rotatório .....	37
<b>CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>42</b>
4.1 Parâmetros Numéricos .....	42
4.1.1 Coeficiente de Restituição.....	42
4.1.2 Coeficiente de Atrito Estático .....	45
4.1.3 Coeficiente de Atrito de Rolamento.....	50
4.2 Análise dos parâmetros numéricos no efeito <i>bulk</i> em um tambor rotatório .....	54
<b>CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>71</b>
5.1 Conclusões .....	71
5.2 Sugestões de trabalhos futuros.....	72
<b>CAPÍTULO 6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>74</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Representação dos ângulos de repouso superior e inferior no regime de avalanche em um tambor rotatório.....	5
Figura 2.2: Representação das regiões ativa e passiva no regime de rolamento em um tambor rotatório (Santos, 2015).....	6
Figura 2.3: Representação dos tipos de centrifugação em um tambor rotatório – a) todas as partículas aderidas; b) somente a camada mais externa das partículas aderidas (Santos, 2015). .....	8
Figura 2.4: Publicações de trabalhos relacionados ao método dos elementos discretos nos últimos 10 anos.....	12
Figura 2.5: Algoritmo empregado nas simulações DEM (adaptado de O'Sullivan, 2011). ....	13
Figura 2.6: Modelo de contato mola-amortecedor (adaptado de SANTOS, 2015).....	15
Figura 2.7: Representação do deslocamento da onda de Rayleigh.....	19
Figura 2.8: Demonstração da colisão da partícula, antes e após o impacto. ....	22
Figura 2.9: Diagrama de forças dos experimentos utilizados para medição do coeficiente de atrito - a) plano horizontal; b) plano inclinado.....	24
Figura 2.10: Diagrama de forças de uma esfera em movimento. ....	26
Figura 3.1: Fluxograma global da metodologia empregada no presente trabalho.....	27
Figura 3.2: Fluxograma da medição experimental dos parâmetros numéricos. ....	28
Figura 3.3: Esferas de vidro utilizadas para medição dos parâmetros numéricos.....	28
Figura 3.4: Esquema do aparato experimental utilizado para medição do coeficiente de restituição. ....	29
Figura 3.5: Aparato experimental para medição do coeficiente de atrito estático. ....	30

Figura 3.6: Aglomerado de partículas. ....	31
Figura 3.7: Representação da camada de partículas fixas no plano inclinado para medição do coeficiente de atrito estático partícula-partículas. ....	31
Figura 3.8: Representação do esquema para medida do coeficiente de atrito estático partícula-parede na lixa P80.....	32
Figura 3.9: Rampa de lançamento utilizada para medição do coeficiente de atrito de rolamento: a) aparato experimental e b) dimensões geométricas. ....	32
Figura 3.10: Representação da medição do coeficiente de atrito de rolamento – a) chapa de aço; b) lixa P80.....	33
Figura 3.11: Simulação do aparato experimental para medição do coeficiente de atrito estático partícula-partícula – a) partícula agrupada; b) partículas soltas. ....	34
Figura 3.12: Simulação do aparato experimental para medição do coeficiente de atrito estático partícula-parede – a) partícula agrupada; b) partículas soltas. ....	34
Figura 3.13: Simulação do aparato experimental para medição do coeficiente de atrito de rolamento – a) partícula-partícula; b) partícula-parede. ....	35
Figura 3.14: Fluxograma para análise dos parâmetros numéricos no efeito bulk. ....	38
Figura 3.15: Representação do tambor rotatório operando em regime de rolamento - a) esquema demonstrativo da região ativa, passiva e da linha de referência utilizada na metodologia; b) demonstração da seleção de partícula no software EDEM.....	40
Figura 4.1: Influência da razão do diâmetro da partícula com a espessura da placa no coeficiente de restituição para impactos de esferas de vidro em placas de vidro e a curva teórica de acordo com o modelo de Zener (1941).....	44
Figura 4.2: Influência da razão do diâmetro da partícula com a espessura da placa no coeficiente de restituição para impactos de esferas de vidro em placas de aço e a curva teórica de acordo com o modelo de Zener (1941).....	44
Figura 4.3: Simulação do tambor rotatório para o grau de preenchimento de 18.81% e velocidade de rotação 1,45 rad/s - a) esfera de vidro; b) partículas de soja. ....	55

- Figura 4.4: Comparação dos perfis de velocidade normalizados da soja das simulações 14 e 25 com os valores experimentais – a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y.....57
- Figura 4.5: Perfis de velocidade normalizado das partículas de vidro para o grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 1,45 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y. ....59
- Figura 4.6: Perfis de velocidade normalizado das partículas de vidro para o grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 2,31 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y. ....60
- Figura 4.7: Perfis de velocidade normalizado das partículas de vidro para o grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 3,14 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y. ....60
- Figura 4.8: Perfis de velocidade normalizado das partículas de soja para o grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 0,71 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y. ....61
- Figura 4.9: Perfis de velocidade normalizado das partículas de soja para o grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 1,45 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y. ....62
- Figura 4.10: Perfis de velocidade normalizado das partículas de soja para o grau de preenchimento de 31,40% e velocidade de rotação de 0,71 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y. ....63
- Figura 4.11: Perfis de velocidade normalizado das partículas de soja para o grau de preenchimento de 31,40% e velocidade de rotação de 1,45 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y. ....64
- Figura 4.12: Simulação 14: Comparação dos perfis de velocidade normalizado da soja variando o grau de preenchimento de 18,81% para 31,40% - a) velocidade de rotação de 0,71 rad/s; b) velocidade de rotação de 1,45 rad/s.....65

Figura 4.13: Simulação 14: Comparaçao experimental dos perfis de velocidade normalizado da soja variando a velocidade de rotação de 0,71 para 1,45 rad/s - a) grau de preenchimento de 18,81%; b) grau de preenchimento de 31,40%.....	65
Figura 4.14: Representação dos diferentes regimes de escoamento, experimentais e numéricos, para esferas de vidro de 4,22 mm: grau de preenchimento de 18,81% e velocidades de rotação de 1,45, 4,08, 8,91 e 16,40 rad/s.....	68
Figura 4.15: Representação dos diferentes regimes de escoamento, experimentais e numéricos, para esferas de vidro de 4,22 mm: grau de preenchimento de 31,40% e velocidades de rotação de 1,45, 4,08, 8,91 e 16,40 rad/s.....	69

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Classificação dos regimes de escoamento em um tambor rotatório .....	4
Tabela 2.2: Valores de parâmetros DEM presentes em diferentes trabalhos da literatura.....	21
Tabela 3.1: Matriz do Planejamento Composto Central para interações partícula-partícula..	35
Tabela 3.2: Matriz do Planejamento Composto Central para interações partícula-parede. ....	35
Tabela 3.3: Condições utilizadas para a simulação das metodologias experimentais dos coeficientes de atrito estático e de rolamento no software EDEM®.....	36
Tabela 3.4: Matriz do Planejamento Composto Central utilizada para a calibração dos parâmetros numéricos no efeito bulk em um tambor rotatório. ....	39
Tabela 3.5: Número de esferas utilizadas na simulação DEM. ....	40
Tabela 3.6: Condições utilizadas para simulação da análise dos parâmetros numéricos no efeito bulk utilizando o software EDEM. ....	41
Tabela 4.1: Coeficiente de restituição da esfera de vidro para diferentes espessuras (L) de placas de vidro.....	42
Tabela 4.2: Coeficiente de restituição da esfera de vidro para diferentes espessuras (L) de placas de aço.....	43
Tabela 4.3: Valores de coeficiente de atrito estático experimental utilizando partículas soltas e agrupadas para diferentes superfícies. ....	45
Tabela 4.4: Planejamento Composto Central empregado na simulação, para análise das variáveis significativas das metodologias de partículas soltas e agrupadas para medição do coeficiente de atrito estático partícula-partícula. ....	46
Tabela 4.5: Variáveis significativas do Planejamento Composto Central empregado na simulação, para medição do coeficiente de atrito estático partícula-partícula nas metodologias de partículas soltas e agrupadas.....	46

Tabela 4.6: Planejamento Composto Central empregado na simulação, para análise das variáveis significativas das metodologias de partículas soltas e agrupadas para medição do coeficiente de atrito estático partícula-parede. ....	47
Tabela 4.7: Variáveis significativas do Planejamento Composto Central empregado na simulação, para medição do coeficiente de atrito estático partícula-parede nas metodologias de partículas soltas e agrupadas.....	48
Tabela 4.8: Coeficiente de atrito estático encontrado pelo processo de calibração do modelo DEM, para obter ângulo numérico semelhante ao ângulo experimental.....	49
Tabela 4.9: Valores experimentais de coeficiente de atrito de rolamento medido para diferentes superfícies.....	50
Tabela 4.10: Planejamento Composto Central empregado na simulação, para análise das variáveis significativas da metodologia para medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula. ....	51
Tabela 4.11: Variáveis significativas do Planejamento Composto Central empregado na simulação, para medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula. ....	51
Tabela 4.12: Planejamento Composto Central empregado na simulação, para análise das variáveis significativas da metodologia para medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-parede .....	52
Tabela 4.13: Variáveis significativas do Planejamento Composto Central empregado na simulação, para medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-parede.....	53
Tabela 4.14: Coeficiente de atrito de rolamento encontrado pelo processo de calibração do modelo DEM, para obter a distância numérica semelhante à distância experimental. ....	54
Tabela 4.15: Valores dos parâmetros medidos experimentalmente utilizados na simulação DEM. ....	55
Tabela 4.16: Simulações que melhor representaram os perfis de velocidade para as condições operacionais da soja e da esfera de vidro. ....	56

Tabela 4.17: Comparação entre os valores de parâmetros encontrados na simulação 14 com os medidos experimentalmente.....	58
Tabela 4.18: Influência do grau de preenchimento na espessura da camada ativa e passiva para a soja.....	66
Tabela 4.19: Ângulo de repouso referente a cada condição operacional. ....	66
Tabela 4.20: Influência da velocidade de rotação na espessura da camada ativa e passiva. ....	67

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	aceleração	$M^0 L^1 T^{-2}$
$d$	distância	$M^0 L^1 T^0$
$E^*$	módulo de Young equivalente	$M^1 L^{-1} T^{-2}$
$E_c$	módulo de Young da chapa	$M^1 L^{-1} T^{-2}$
$E_i$	módulo de Young da partícula i	$M^1 L^{-1} T^{-2}$
$E_j$	módulo de Young da partícula j	$M^1 L^{-1} T^{-2}$
$E_p$	módulo de Young da partícula	$M^1 L^{-1} T^{-2}$
$e$	coeficiente de restituição	$M^0 L^0 T^0$
$e_p$	coeficiente de restituição referente a colisão da partícula	$M^0 L^0 T^0$
$e_{pp}$	coeficiente de restituição partícula-partícula	$M^0 L^0 T^0$
$e_{pw}$	coeficiente de restituição partícula-parede	$M^0 L^0 T^0$
$f$	grau de preenchimento	$M^0 L^0 T^0$
$F$	força	$M^1 L^1 T^{-2}$
$F_{t,max}^d$	força tangencial máxima de amortecimento	$M^1 L^1 T^{-2}$
$F_f$	força de atrito	$M^1 L^1 T^{-2}$
$F_{ij}$	força entre a partícula i e j	$M^1 L^1 T^{-2}$
$F_n$	força normal	$M^1 L^1 T^{-2}$
$F_n^d$	força normal de amortecimento	$M^1 L^1 T^{-2}$
$Fr$	número de Froude	$M^0 L^0 T^0$
$F_t$	força tangencial	$M^1 L^1 T^{-2}$
$F_t^d$	força tangencial de amortecimento	$M^1 L^1 T^{-2}$
$g$	gravidade	$M^0 L^1 T^{-2}$
$G^*$	módulo de cisalhamento equivalente	$M^1 L^{-1} T^{-2}$
$G_i$	módulo de cisalhamento da partícula i	$M^1 L^{-1} T^{-2}$
$G_j$	módulo de cisalhamento da partícula j	$M^1 L^{-1} T^{-2}$
$h$	altura	$M^0 L^1 T^0$
$h_0$	altura inicial	$M^0 L^1 T^0$
$h_1$	altura final	$M^0 L^1 T^0$
$I_i$	momento de inercia da partícula i	$M^1 L^2 T^0$
$k_n$	rigidez normal do modelo linear	$M^1 L^0 T^{-2}$

$K_s$	troca de momento entre as fases sólida e fluida	$M^1L^0T^{-1}$
$k_t$	rigidez tangencial do modelo linear	$M^1L^0T^{-2}$
$L$	espessura da chapa	$M^0L^1T^0$
$m$	massa	$M^1L^0T^0$
$m^*$	massa equivalente	$M^1L^0T^0$
$m_i$	massa da partícula i	$M^1L^0T^0$
$m_i$	massa da partícula i	$M^1L^0T^0$
$m_j$	massa da partícula j	$M^1L^0T^0$
$P$	pressão	$M^1L^{-1}T^{-2}$
$P_s$	pressão de sólidos	$M^1L^{-1}T^{-2}$
$r$	raio da partícula	$M^0L^1T^0$
$R$	raio do tambor	$M^0L^1T^0$
$R^*$	raio de contato equivalente	$M^0L^1T^0$
$r_i$	raio da partícula i	$M^0L^1T^0$
$r_i$	raio da partícula j	$M^0L^1T^0$
$S_n$	rigidez normal do modelo não linear	$M^1L^0T^{-2}$
$S_t$	rigidez tangencial do modelo não linear	$M^1L^0T^{-2}$
$t$	tempo	$M^0L^0T^1$
$t_c$	tempo crítico	$M^0L^0T^1$
$\overline{\overline{T}}$	tensor tensão	$M^1L^{-1}T^{-2}$
$v$	velocidade da partícula	$M^0L^1T^{-1}$
$V$	velocidade característica	$M^0L^1T^{-1}$
$V_0$	velocidade inicial	$M^0L^1T^{-1}$
$V_1$	velocidade final	$M^0L^1T^{-1}$
$v_i$	velocidade da partícula i	$M^0L^1T^{-1}$
$v_n^{rel}$	velocidade relativa normal	$M^0L^1T^{-1}$
$v_t^{rel}$	velocidade relativa tangencial	$M^0L^1T^{-1}$
$\vec{v}_s$	vetor velocidade da fase sólida	$M^0L^1T^{-1}$
$\vec{v}_j$	vetor velocidade da fase fluida	$M^0L^1T^{-1}$
$x_i$	posição da partícula i	$M^0L^1T^0$
$x_j$	posição da partícula j	$M^0L^1T^0$
$W$	força peso	$M^1L^1T^{-2}$

## Símbolos gregos

$\alpha$	ângulo de inclinação do plano	$M^0L^0T^0$
$\alpha_f$	fração volumétrica da fase fluida	$M^0L^0T^0$
$\alpha_s$	fração volumétrica da fase sólida	$M^0L^0T^0$
$\beta$	coeficiente de amortecimento	$M^1L^0T^{-1}$
$\gamma$	razão entre diâmetro da partícula com espessura da chapa	$M^0L^0T^0$
$\delta_n$	sobreposição normal das partículas	$M^0L^1T^0$
$\delta_t$	sobreposição tangencial das partículas	$M^0L^1T^0$
$\theta_i$	posição angular de partícula i	$M^0L^0T^0$
$\theta_s$	ângulo de repouso dinâmico	$M^0L^0T^0$
$\lambda$	parâmetro inelástico	$M^0L^0T^0$
$\lambda_n$	coeficiente de amortecimento normal	$M^1L^0T^{-1}$
$\lambda_t$	coeficiente de amortecimento tangencial	$M^1L^0T^{-1}$
$\mu$	coeficiente de atrito	$M^0L^0T^0$
$\mu_k$	coeficiente de atrito cinético	$M^0L^0T^0$
$\mu_R$	coeficiente de atrito de rolamento	$M^0L^0T^0$
$\mu_{Rpp}$	coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula	$M^0L^0T^0$
$\mu_{Rpw}$	coeficiente de atrito de rolamento partícula-parede	$M^0L^0T^0$
$\mu_s$	coeficiente de atrito estático	$M^0L^0T^0$
$\mu_{spp}$	coeficiente de atrito estático partícula-partícula	$M^0L^0T^0$
$\mu_{spw}$	coeficiente de atrito estático partícula-parede	$M^0L^0T^0$
$\rho_c$	densidade da chapa	$M^1L^{-3}T^0$
$\rho_f$	densidade da fase fluída	$M^1L^{-3}T^0$
$\rho_p$	densidade da partícula	$M^1L^{-3}T^0$
$\rho_s$	densidade da fase sólida	$M^1L^{-3}T^0$
$\tau_{ij}$	torque entre a partícula i e j	$M^1L^2T^{-2}$
$\nu_c$	razão de Poisson da chapa	$M^0L^0T^0$
$\nu_i$	razão de Poisson da partícula i	$M^0L^0T^0$
$\nu_j$	razão de Poisson da partícula j	$M^0L^0T^0$
$\nu_p$	razão de Poisson da partícula	$M^0L^0T^0$
$\omega$	velocidade angular de rotação do tambor	$M^0L^0T^{-1}$
$\omega_c$	velocidade angular crítica de rotação do tambor	$M^0L^0T^{-1}$
$\omega_i$	velocidade angular da partícula i	$M^0L^1T^{-1}$

## RESUMO

A compreensão do comportamento das partículas no interior do tambor rotatório é fundamental para o melhoramento de sua eficiência. Por permitir o monitoramento individual de cada partícula, a abordagem numérica Lagrangeana é uma excelente ferramenta no auxílio de estudos em sistemas particulados. Desta forma, esse trabalho teve como propósito determinar as combinações dos parâmetros numéricos da abordagem Lagrangeana que melhor conseguissem representar a dinâmica das partículas no interior de um tambor rotatório, para diferentes tipos de materiais em diferentes condições operacionais. Foram testadas e validadas metodologias experimentais para a determinação dos coeficientes de restituição, atrito estático e atrito de rolamento, nas interações partícula-partícula e partícula-parede. Os valores encontrados experimentalmente destes coeficientes foram aplicados no modelo para verificar se seriam representativos em um efeito *bulk* no tambor rotatório. Foi realizado também um processo de calibração para determinar a melhor combinação de parâmetros e compará-la com os resultados dos coeficientes experimentais. Os aparelhos experimentais utilizados se apresentaram adequados para a medição de cada um dos coeficientes. Sendo que, o valor do coeficiente de restituição depende da espessura do material em que as partículas estão colidindo, enquanto para determinar o coeficiente de atrito estático de maneira correta é necessário a utilização das esferas agrupadas, para evitar o rolamento e garantir a medição correta do parâmetro. Os valores encontrados na calibração e os valores dos parâmetros medidos apresentaram uma boa concordância quando comparados com os dados experimentais e com a abordagem Euleriana reportados na literatura, para materiais de diferentes propriedades físicas em diferentes condições de operação. Eles também conseguiram descrever com sucesso os fenômenos de transição dos diferentes regimes de escoamento. Os valores encontrados no processo de calibração foram: 0,80 e 0,50 para o coeficiente de atrito estático, 0,03 e 0,06 para coeficiente de atrito de rolamento, partícula-partícula e partícula-parede respectivamente. Para os medidos experimentalmente os valores foram de 0,80 e 0,49 para o atrito estático partícula-partícula e partícula-parede e 0,011 e 0,054 para o atrito de rolamento partícula-partícula e partícula-parede, respectivamente. Os resultados foram próximos, mostrando que o processo de calibração conseguiu preservar os significados físicos dos parâmetros.

**Palavras-chave:** parâmetros numéricos, abordagem lagrangeana, dinâmica de partículas, calibração, tambor rotatório.

## ABSTRACT

The understanding of the behavior of the particles inside the rotating drum is fundamental for the improvement of its efficiency. By allowing the individual monitoring of each particle, the Lagrangean numerical approach is an excellent tool to aid studies in particulate systems. Thus, the purpose of this work was to determine the combinations of the numerical parameters of the Lagrangean approach that best represent the dynamics of the particles inside a rotating drum for different types of materials under different operating conditions. Experimental methodologies for the determination of the coefficients of restitution, static friction and rolling friction were tested and validated for particle-particle and particle-wall interactions. The experimental values of these coefficients were applied in the model to verify if they would be representative in a bulk effect in the rotatory drum. A calibration process was also performed to determine the best combination of parameters and to compare it with the results of the experimental coefficients. The experimental apparatus used was suitable for the measurement of each of the coefficients. Since the value of the coefficient of restitution depends on the thickness of the material in which the particles are colliding, while in order to determine the coefficient of static friction correctly it is necessary to use the glued spheres to avoid rolling and to ensure correct measurement of the parameter. The values found in the calibration and the values of the measured parameters showed good agreement when compared with the experimental data and the Eulerian approach reported in the literature, for materials of different physical properties under different operating conditions. These were also able to successfully describe the transitional phenomena of different flow regimes. The values found in the calibration process were: 0.80 and 0.50 for the coefficient of static friction, 0.03 and 0.06 for the coefficient of rolling friction, particle-particle and particle-wall respectively, while for the measured experimentally were 0.80 and 0.49 for particle-particle and particle-wall static friction and 0.011 and 0.054 for particle-particle and particle-wall friction respectively. The results were close, showing that the calibration process was able to preserve the physical meanings of the parameters.

**Key-words:** numerical parameters, lagrangean approach, particle dynamics, calibration, rotating drum.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Um dos grandes motivos da utilização de tambores rotatórios na indústria, deve-se a sua geometria relativamente simples, que consiste em uma estrutura cilíndrica horizontal e que gira em torno do seu próprio eixo. O fato de poder operar com elevada capacidade e além de possuir a facilidade de trabalhar com materiais de grandes faixas granulométricas e com variações expressivas em suas propriedades físicas, o torna um excelente equipamento para os processos de moagem, mistura, granulação, fermentação e secagem (TJAKRA *et al.*, 2012; SCATENA *et al.*, 2014), dentre outros.

Segundo Mellmann (2001), os parâmetros de projetos e as condições operacionais utilizadas são extremamente importantes para a compreensão do comportamento das partículas dentro dos tambores rotatórios. Internamente, o leito pode apresentar os seguintes regimes de escoamento: deslizamento, avalanche, rolamento, cascateamento, catarateamento e centrifugação, cada qual com suas características e funcionalidades.

Alguns trabalhos foram desenvolvidos ao longo dos anos com a finalidade de estudar escoamento das partículas em tambores rotatório (HENEIN *et al.*, 1983; MELLMANN, 2001; SHERITT *et al.*, 2003; SANTOS *et al.*, 2015). Paralelo a isso, métodos numéricos, como as abordagens Euleriana e Lagrangeana, ganharam muita importância no auxílio da compreensão de alguns fenômenos físicos e permitindo quebrar algumas barreiras que são impostas experimentalmente, desde as dificuldades de algumas medições, bem como por questões de segurança.

Na abordagem Euleriana as equações diferenciais de transferência de massa, energia e quantidade de movimento são resolvidas em um volume de controle que abrange ambas as fases, fluida e sólida, sendo estas tratadas como interpenetrantes e contínuas.

Na abordagem Lagrangeana, o Método dos Elementos Discreto (DEM) é uma técnica bem consolidada designada para pesquisas envolvendo comportamento de materiais granulares. Diferentemente da Euleriana, esta abordagem se destaca por permitir a visualização e utilização de partículas irregulares, pois o balanço de força é realizado individualmente em cada partícula, acompanhando-as contato por contato (JUST *et al.*, 2013). Com isso, é possível uma melhor compreensão acerca do

comportamento dinâmico das partículas no interior do tambor rotatório, facilitando estudo dos diferentes regimes de escoamento.

Além do alto custo computacional necessário para implementação do DEM, um outro problema está relacionado com a determinação dos parâmetros de entrada no modelo. De acordo com González-Montellano *et al.* (2012), a dificuldade da medição direta está no fato de que não existem procedimentos padronizados. Grima *et al.* (2011) e Coetzee (2017) afirmam que até então não foi proposto nenhuma metodologia padronizada para se determinar os parâmetros de entrada de um material.

Segundo Marigo e Stitt (2015), mesmo apresentando significados físicos, vários autores utilizam os parâmetros da modelagem como parâmetros de ajustes, adotando a combinação que melhor se adequa ao seu sistema e não levando em consideração se são fisicamente coerentes. Coetzee (2017) afirma que por causa disso mais de uma combinação de valores podem apresentar resultados satisfatórios, não garantindo que sua aplicação em um determinado processo será adequada quando aplicada em outros processos. O autor ainda destaca que um número relativamente pequeno de pesquisadores se concentram no desenvolvimento e validação de procedimentos de calibração dos parâmetros.

Dadas as informações que foram expostas, a seguir são apresentados os objetivos do trabalho.

## 1.1 Objetivo Geral

Este trabalho possui como objetivo geral estudar, por meio da abordagem Lagrangeana, os principais parâmetros referentes à dinâmica de partículas no interior de um tambor rotatório.

### 1.1.1 Objetivos Específicos

- Determinar e validar os parâmetros numéricos DEM a partir de uma abordagem experimental;
- Avaliar o efeito da variação das condições operacionais e dos parâmetros numéricos sobre a dinâmica do material;
- Investigar numericamente os diferentes regimes de escoamento das partículas no tambor rotatório e determinar a transição entre eles.

## CAPÍTULO 2

# REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentado o embasamento teórico referente aos principais conteúdos explorados nessa dissertação. Os temas abordados se referem ao tambor rotatório, regimes de escoamentos, abordagens numéricas e parâmetros numéricos, para uma melhor compreensão do leitor.

### 2.1 Tambor Rotatório e Regimes de Escoamento

Apesar dos tambores rotatórios possuírem uma geometria simples, o comportamento granular em seu interior é relativamente complexo. Uma eficiente aplicação desse sistema rotativo exige o conhecimento das taxas de transferência de massa, energia e quantidade movimento envolvidas em cada regime de “escoamento” do material granular (Santos; 2015).

O movimento do leito de partículas no tambor pode apresentar diversos regimes de escoamento como: deslizamento, avalanche, rolamento, cascataamento, catarateamento e centrifugação, que dependem do comprimento e do diâmetro do tambor, da velocidade de rotação, grau de preenchimento, características das partículas do leito e das propriedades friccionais do material particulado e da parede do tambor (Henien *et al.*, 1983).

No trabalho de Mellmann (2001), o autor apresenta um estudo aprofundado sobre os variados tipos de regimes de escoamento no tambor rotatório e os classifica de acordo com o grau de preenchimento ( $f$ ), coeficiente de atrito partícula-parede ( $\mu_{pw}$ ) e do número de Froude ( $Fr$ ). Este último é um adimensional que relaciona as forças centrífuga e gravitacional (Equação 2.1).

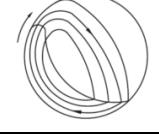
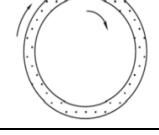
$$Fr = \frac{\omega^2 R}{g} \quad (2.1)$$

sendo  $\omega$ ,  $R$  e  $g$  a velocidade de rotação do tambor, o raio do tambor e a aceleração da gravidade, respectivamente.

No entanto, além deste adimensional as propriedades físicas do material também afetam a transição entre cada regime.

A Tabela 2.1 contém as faixas de transição do número de Froude identificadas pelo autor, levando em consideração sua aplicação industrial, o grau de preenchimento e coeficiente de atrito.

Tabela 2.1: Classificação dos regimes de escoamento em um tambor rotatório  
(adaptado de Mellmann, 2001).

Regimes	Padrão de Escoamento	Número de Froude	Grau de preenchimento	Coeficiente de atrito na parede	Aplicação
Deslizamento		$0 < F_r < 10^{-4}$	$f < 0,1$	$\mu_{p-w} < \mu_{p-w,c}$	-
Avalanche		$10^{-5} < F_r < 10^{-3}$			
Rolamento		$10^{-4} < F_r < 10^{-2}$	$f > 0,1$		Fornos rotatórios, reatores e resfriadores
Cascateamento		$10^{-3} < F_r < 10^{-1}$		$\mu_{p-w} > \mu_{p-w,c}$	
Catarateamento		$0,1 < F_r < 1$	$f > 0,2$		Moinhos de bola
Centrifugação		$F_r \geq 1$			-

Percebe-se pela Tabela 2.1 que a depender da aplicação industrial, alguns regimes de escoamento possuem uma maior faixa de utilização, quando comparados aos demais. Isso se deve a algumas peculiaridades presentes em cada regime e que serão destacadas a seguir.

### ❖ Regime de deslizamento

Por proporcionar um leito pseudo estático e consequentemente nenhum grau de mistura, o regime de deslizamento não apresenta aplicação industrial. O deslizamento é obtido quando o tambor opera à baixas velocidades de rotação e quando o coeficiente de atrito partícula-parede é inferior ao necessário para que as partículas se adiram à parede do tambor, mantendo-se assim na condição de leito deslizante (SANTOS, 2015; SHERITT *et. al.*, 2003).

### ❖ Regime de avalanche

O aumento do número de Froude, para algumas configurações de leito, leva ao regime de avalanche. Nesse regime, obtém-se dois ângulos de repouso, um superior e outro inferior.

Com o aumento da velocidade de rotação, e/ou do coeficiente de atrito da partícula na parede, o leito começa a se comportar como um corpo rígido e passa a ser carreado pela parede do tambor até um ângulo de repouso superior. Então, ocorre uma queda brusca do material granular, fazendo-o atingir um ângulo de repouso inferior, como apresentado na Figura 2.1 (DING *et al.*, 2001; MELLMAN, 2001; DING *et al.*, 2002).

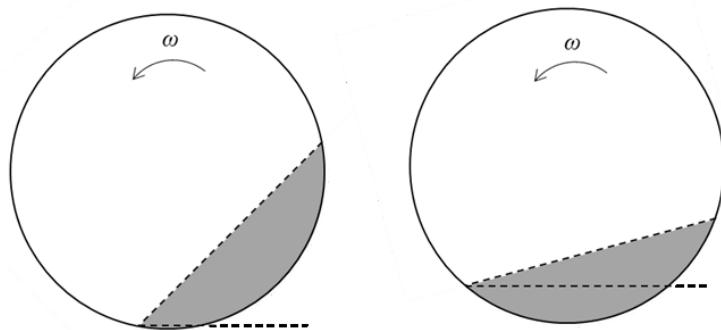


Figura 2.1: Representação dos ângulos de repouso superior e inferior no regime de avalanche em um tambor rotatório.

Sheritt *et al.* (2003) estudaram o efeito da velocidade de rotação e do grau de preenchimento no grau de mistura em um tambor rotatório operando em regime de avalanche. Eles concluíram que o aumento de ambas as variáveis faz com que haja uma diminuição da dispersão das partículas axialmente.

Ding *et al.* (2002) propuseram um modelo matemático para o tempo que o tambor leva para dar um giro completo do leito de partículas, na transição entre regimes de avalanche e rolamento. Os autores encontraram resultados satisfatórios de predição pelo modelo quando comparados com valores experimentais da literatura.

### ❖ Regime de rolamento

Com o incremento da velocidade de rotação do regime avalanche, ocorre um aumento da frequência de queda do leito do material e consequentemente uma diminuição gradativa da diferença entre os ângulos superior e inferior, até atingir uma angulação fixa e um fluxo uniforme, caracterizando assim o regime de rolamento (HEMA, 2003). De acordo com Mellmann (2001), para muitos processos industriais, como: mistura, granulação e secagem, esse escoamento é o preferido, pois mesmo para grandes taxas de fluxo de massa ele proporciona excelentes condições para transferência de calor e garante uma qualidade uniforme do produto.

Como pode ser visualizado na Figura 2.2, o movimento das partículas no regime de rolamento pode ser dividido nas regiões ativa e passiva. Na região passiva as partículas são arrastadas pela parede do tambor, se comportando como um corpo rígido. Ao longo da camada passiva a velocidade das partículas tende a diminuir, até atingir valores aproximadamente nulos. Nesse momento ocorre o ponto de inflexão do perfil de velocidade, transitioningando para a camada ativa. Essa região é localizada próxima à superfície do leito, onde as partículas rolam uma sobre as outras com maiores valores de velocidade e em sentido oposto ao da camada passiva (DING *et al.*, 2002; SANTOS *et al.*, 2013, SANTOS *et al.*; 2015).

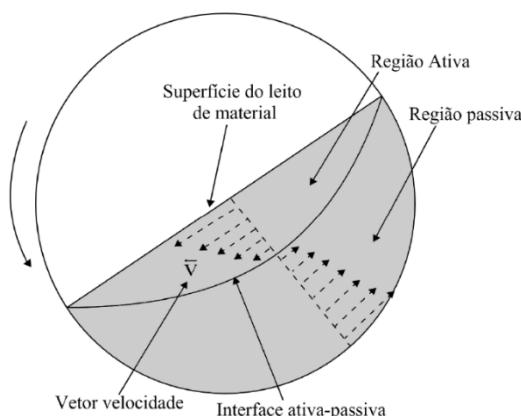


Figura 2.2: Representação das regiões ativa e passiva no regime de rolamento em um tambor rotatório (Santos, 2015).

Santos (2015) demonstrou quantitativamente a existência de uma diferença de comportamento das partículas em cada região (ativa e passiva), analisando o perfil de velocidade das partículas de soja em um tambor rotatório, no regime de rolamento em várias velocidades de rotação. Resultados semelhantes foram encontrados por Rezende (2017), onde foram medidos experimentalmente os perfis de velocidade para o café no regime de rolamento.

#### ❖ Regime de cascataemento

A transição entre os regimes de rolamento e cascataemento inicia-se quando a superfície do leito atinge um formato curvado semelhante ao de um grão de “feijão”. No regime de cascataemento, o aumento da velocidade de rotação faz com que o material seja carregado pela parede do tambor atingindo elevadas alturas e ângulos de repouso superiores ao do rolamento.

Segundo Yang *et al.* (2008), no regime de cascataemento as colisões das partículas ocorrem integralmente dentro do leito. Esse regime é o indicado para aplicações em fornos rotativos, já que promove alta taxa de mistura e de transferência de calor entre as partículas.

#### ❖ Regime de catarateamento

De acordo com Mellmann (2011), o catarateamento é obtido quando as partículas do leito são lançadas no espaço vazio do interior do tambor rotatório. Com o aumento da velocidade de rotação, aumenta-se o comprimento da trajetória das partículas formando um verdadeiro “véu” ao longo do diâmetro do tambor.

Lee *et al.* (2013) estudaram a relação entre segregação do fluxo axial e radial em casos de rugosidade assimétrica da parede. De acordo com os autores, a segregação axial aumenta quando o regime de escoamento passa do rolamento para o cascataemento ou catarateamento. Com o aumento do número de Froude, o atrito assimétrico da parede induz uma convecção axial mais forte. Já para o fluxo radial, as partículas ativas que são lançadas no interior do tambor induzem uma maior mistura do leito.

Heinen *et al.* (1983) propuseram um modelo matemático para transição entre os regimes de cascataemento-catarateamento, onde eles adotaram a suposição de que as partículas lançadas pelo tambor caem no meio ou além da superfície do leito.

### ❖ Regime de centrifugação

Por fim, quando o tambor rotatório atinge elevadas velocidades de rotação, as partículas se aderem à parede do cilindro caracterizando o regime de centrifugação.

Watanabe (1999) cita em seu trabalho que o regime centrifugação pode ser definido de duas formas. Na primeira, dita tradicional, onde a centrifugação é alcançada quando todas as partículas aderem à parede do tambor. A outra forma, que é adotada por ele, é quando somente a camada mais externa (primeira camada) das partículas se adere ao tambor, como apresentado na Figura 2.3b, necessitando-se assim de uma velocidade de rotação mais baixa para a transição catarateamento-centrifugação.

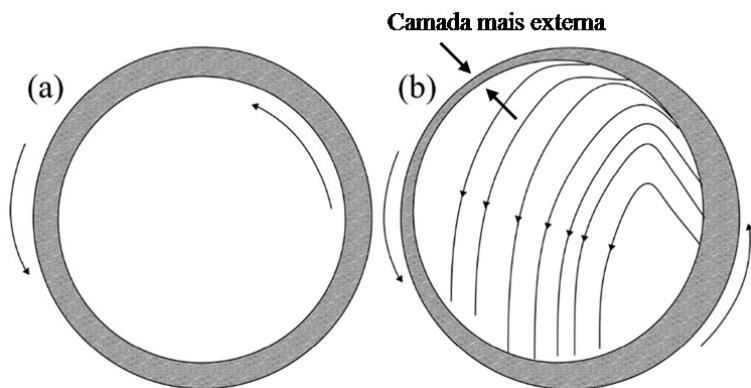


Figura 2.3: Representação dos tipos de centrifugação em um tambor rotatório – a) todas as partículas aderidas; b) somente a camada mais externa das partículas aderidas (Santos, 2015).

Um parâmetro importante para caracterização, projeto e otimização de tambores rotatórios é a velocidade crítica. Esse parâmetro corresponde à velocidade angular de rotação do tambor em que se atinge a condição de centrifugação. A mecânica newtoniana prevê que a centrifugação é obtida quando as forças gravitacional e centrípeta se equilibram. Assim, o número de Froude que é uma relação entre essas duas forças, torna-se unitário, e portanto, a velocidade crítica de rotação dada pela mecânica clássica é expressa pela Equação 2.2:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (2.2)$$

A Equação 2.2 tem sido modificada na literatura a fim de incorporar parâmetros referentes ao material particulado e condições operacionais. Por exemplo, Rose e Sullivan

(1957) inseriram o raio da partícula ( $r$ ) no equacionamento, conforme apresentado na Equação 2.3.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2g}{2R - 2r}} \quad (2.3)$$

Já Walton e Braun (1993) propuseram que, além da gravidade e do raio do tambor, a velocidade crítica de rotação depende do ângulo de repouso do material particulado ( $\theta_s$ ), chegando na Equação 2.4.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{R \operatorname{sen}(\theta_s)}} \quad (2.4)$$

Como apresentado na Equação 2.5, Ristow (1998) incorporou o grau de preenchimento ( $f$ ) na equação. Esse parâmetro corresponde ao percentual volumétrico ocupado pelo leito de partículas no interior do tambor sem rotação.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{R \sqrt{1-f}}} \quad (2.5)$$

Watanabe (1999) propôs um modelo, Equação 2.6, derivado do equacionamento de Ristow (1998) e Walton e Braum (1993), sendo  $\omega_c$  função do ângulo de repouso e do grau de preenchimento.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{R \operatorname{sen}(\theta_s) \sqrt{1-f}}} \quad (2.6)$$

Juarez *et al.* (2011), por meio de experimentos e simulações numéricas, propuseram uma modificação da equação de Watanabe (1999). Os autores adicionaram um adimensional que relaciona as densidades da fase sólida ( $\rho_s$ ) e da fase fluida ( $\rho_f$ ), conforme ilustra a Equação 2.7.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g(1-\rho_f/\rho_s)}{R \operatorname{sen}(\theta_s) \sqrt{1-f}}} \quad (2.7)$$

Vários autores têm utilizado de abordagens numéricas para ajudar em seus estudos com tambores rotatórios. As abordagens Euleriana e Lagrangeana estão sendo muito utilizadas com a finalidade de uma melhor compreensão da dinâmica das partículas no interior do equipamento.

## 2.2 Abordagem Numérica

Inicialmente, as abordagens numéricas apareceram como uma ferramenta de análise de problemas físicos em trabalhos científicos e, atualmente, com o avanço da capacidade de processamento e armazenamento dos computadores, as simulações se tornaram uma ferramenta poderosa para solução de importantes problemas reais aplicados a engenharia (MALISKA, 2004).

Inúmeros trabalhos envolvendo as abordagens Euleriana e Lagrangeana são reportados na literatura, seja para comparação com dados experimentais ou para uma melhor compreensão do comportamento das partículas no equipamento.

Huang *et al.* (2013) e Santos *et al.* (2016) utilizaram da abordagem Euleriana para estudar tanto a segregação axial quanto radial em tambores rotatórios. Delele *et al.* (2016) utilizaram da fluidodinâmica computacional (CFD) para analisar os efeitos da velocidade de rotação, do grau de preenchimento e do ângulo de repouso no comportamento das partículas no interior do equipamento, operando com alimentação contínua de sólidos.

A abordagem Lagrangeana foi utilizada por Yang *et al.* (2008) para estudar a movimentação do leito nos diferentes regimes de escoamento no tambor. Alchikh-Sulaiman *et al.* (2016), investigaram o índice de mistura para diferentes diâmetros de materiais, em vários graus de preenchimentos.

Ambos os métodos numéricos, Euleriano e Lagrangeano, serão melhor detalhados nos tópicos a seguir.

### 2.2.1 Abordagem Euleriana – Fluidodinâmica Computacional (*CFD*)

A Fluidodinâmica Computacional (CFD, do inglês *Computational Fluid Dynamics*), é um método numérico de resolução de equações de conservação de massa, momentum e energia. Por apresentarem variações no tempo e no espaço, o sistema de

EDP's que está relacionado aos problemas práticos, não possuem solução analítica conhecida, assim, algoritmos numéricos fornecem resultados em um tempo computacional razoável.

Na abordagem Euleriana as fases são tratadas como interpenetrantes e contínuas, fazendo uso do conceito de fração volumétrica. Então, para a fase fluida e granular a conservação de massa pode ser expressa pelas equações 2.8 e 2.9 respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f) + \nabla \cdot (\alpha_f \rho_f \vec{v}_f) = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \vec{v}_s) = 0 \quad (2.9)$$

Pela restrição da fração volumétrica, temos:

$$\alpha_f + \alpha_s = 1 \quad (2.10)$$

sendo os subscritos  $f$  e  $s$ , referentes a fase fluida e sólida, respectivamente. Enquanto  $\alpha$  é a fração volumétrica, o vetor velocidade e a densidade.

As Equações 2.11 e 2.12 representam a conservação da quantidade de movimento para a fase sólida e para a fase fluida, respectivamente.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f \vec{v}_f) + \nabla \cdot (\alpha_f \rho_f \vec{v}_f \vec{v}_f) + \alpha_f \rho_f \vec{v}_f \cdot \nabla \cdot \vec{s}_f + \alpha_f \rho_f \vec{v}_f \cdot \nabla \cdot \vec{\sigma}_{sf} + \alpha_f \rho_f \vec{v}_f \cdot \nabla \cdot \vec{\tau}_{sf} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s \vec{v}_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \vec{v}_s \vec{v}_s) + \alpha_s \rho_s \vec{v}_s \cdot \nabla \cdot \vec{s}_s + \alpha_s \rho_s \vec{v}_s \cdot \nabla \cdot \vec{\sigma}_{sf} + \alpha_s \rho_s \vec{v}_s \cdot \nabla \cdot \vec{\tau}_{sf} = 0 \quad (2.12)$$

sendo  $P$ ,  $P_s$ ,  $\bar{T}$  e  $K_{sf}$  a pressão termodinâmica, a pressão de sólidos, o tensor tensão e a troca de momento entre as fases sólida e fluida, respectivamente.

## 2.2.2 Abordagem Lagrangeana – Método dos Elementos Discretos (DEM)

O método dos elementos discretos (DEM, do inglês *Discrete Element Method*) foi originalmente proposto no trabalho Cundall e Strack (1979) em problemas envolvendo fraturas de rochas.

Atualmente o método vem sendo largamente utilizado para estudos em tambores rotatórios (CUNHA *et al.*, 2016; SANTOS *et al.*, 2016; KOMOSSA *et al.*, 2014;

KUMAR *et al.*, 2015), mistura e segregação (ALCHIKH-SULAIMAN *et al.*, 2016; LIU *et al.*, 2012; MARIGO *et al.*, 2012; REMY, *et al.*, 2011; XU *et al.*, 2010), silos (GONZÁLEZ-MONTELLANO *et al.*, 2011; NGUYEN *et al.*, 2009; WU *et al.*, 2009), produtos farmacêuticos (JUST *et al.*, 2013; KETTERHAGEN, 2011). Além dos processos citados anteriormente, o DEM vem sendo aplicado para diversas finalidades (JOHNSTONE, 2010). Como, por exemplo, na melhoria dos modelos de forças de contato, na representação de geometrias com contornos complexos, no desenvolvimento de melhores métodos de acoplamento com o CFD, na validação das pesquisas experimentais.

A Figura 2.4 demonstra o crescimento de publicações relacionadas a metodologia DEM. Os dados foram obtidos após pesquisa no site *science direct*, referente ao dia 27 de abril de 2017, utilizando como palavras chaves “*discrete element method*” e “*DEM simulations*”. Destaca-se que ainda nos primeiros quatro meses de 2017, o número de publicações é superior aos anos de 2007 a 2012 e já possui metade do número de 2016.

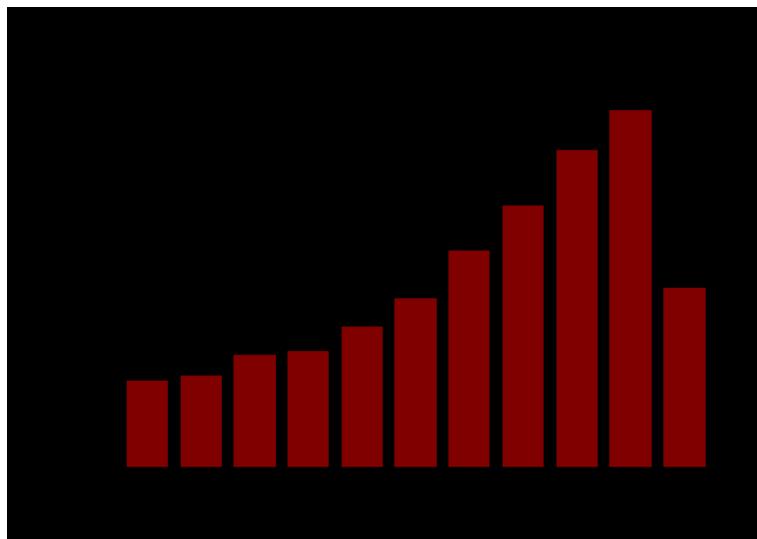


Figura 2.4: Publicações de trabalhos relacionados ao método dos elementos discretos nos últimos 10 anos.

O DEM utiliza como base um esquema numérico explícito em que as interações entre um número finito de partículas são acompanhadas contato por contato e o movimento dessas partículas é atualizado partícula por partícula. Isto é feito por meio de um algoritmo “*time-stepping*” em que, a mesma modelagem se repete em cada etapa do tempo e em cada partícula individualmente, e os resultados em cada etapa no tempo são

baseados nos resultados anteriores (MERENDINO, 2011; PENG, 2014). A Figura 2.5 representa de forma simplificada o círculo de cálculo do DEM.

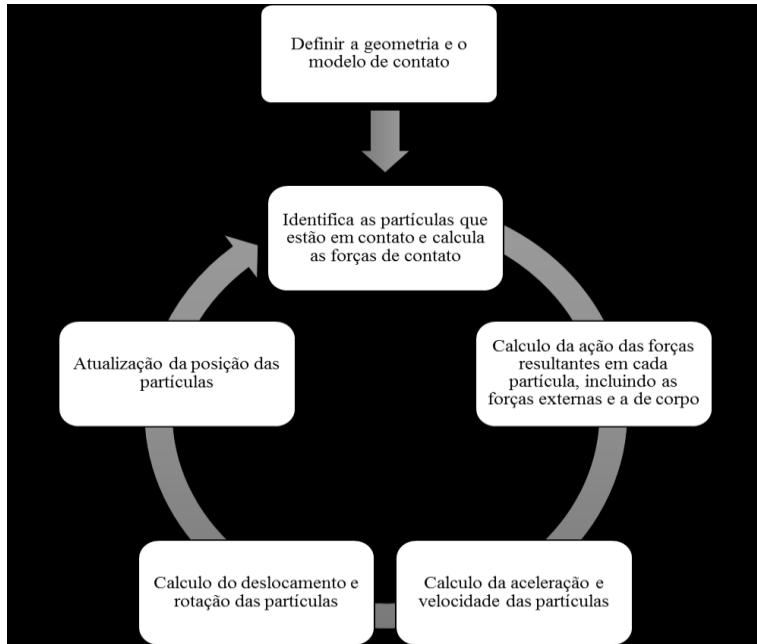


Figura 2.5: Algoritmo empregado nas simulações DEM (adaptado de O'Sullivan, 2011).

Os cálculos dos métodos dos elementos discretos se alternam entre a segunda lei de Newton e a lei da Força-Deslocamento. A lei da Força-Deslocamento é usada para encontrar as forças de contato de deslocamento, enquanto a segunda lei de Newton fornece o movimento da partícula como resultado das forças que atuam sobre ela. A aceleração é estimada pela força resultante dividida pela massa; já a velocidade e a posição são obtidas baseadas na posição anterior da partícula, como é descrito no equacionamento abaixo (CUNDALL e STRACK, 1979; PENG, 2014).

A segunda lei de Newton pode ser descrita conforme a Equação 2.13.

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_j F_{ij} \quad (2.13)$$

sendo  $m_i$ , a massa,  $v_i$  a velocidade da partícula  $i$ ,  $F_{ij}$  é a força entre as partículas  $i$  e  $j$ . No seu trabalho, Cundall e Strack (1979) destacam que forças de campo, como a gravitacional, podem ser adicionadas se desejado. Pela Equação 2.13 a velocidade e a posição ( $x_i$ ) são calculadas da seguinte forma:

$$v_i^{\frac{t+\Delta t}{2}} = v_i^{\frac{t-\Delta t}{2}} + \left( \sum_j F_{ij} \right) \Delta t \quad (2.14)$$

$$x_i^{\frac{t+\Delta t}{2}} = x_i^t + v_i^{\frac{t-\Delta t}{2}} \Delta t \quad (2.15)$$

A velocidade e a posição angular da partícula podem ser encontradas pelas seguintes equações:

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} = \sum_j \tau_{ij} \quad (2.16)$$

$$\omega_i^{\frac{t+\Delta t}{2}} = \omega_i^{\frac{t-\Delta t}{2}} + \left( \frac{\sum \tau_{ij}}{I_i} \right) \Delta t \quad (2.17)$$

$$\theta_i^{\frac{t+\Delta t}{2}} = \theta_i^t + \omega_i^{\frac{t-\Delta t}{2}} \Delta t \quad (2.18)$$

sendo  $I_i$ ,  $\omega_i$  e  $\theta_i$  o momento de inercia, a velocidade e a posição angular da partícula  $i$ , respectivamente e  $\tau_{ij}$  é o torque entre a partícula  $i$  e  $j$ .

Segundo Cundall e Strack (1979), o passo no tempo tem que ser escolhido de forma que este seja suficientemente pequeno a fim de garantir que, durante um único passo no tempo, as perturbações não se propaguem além das partículas que são vizinhas imediatas. Dessa forma, garante-se que os cálculos realizados só sofram influência das partículas que estão em contato.

No que diz respeito à interação entre duas partículas, duas abordagens são comumente utilizadas: a de esfera rígida e a de esfera macia. A abordagem de esfera rígida é mais limitada, pois só contabiliza colisões binárias, apresentando o conceito de impulso, onde as partículas apenas trocam momento através das colisões. Já na abordagem de esfera macia considera-se todo o processo de contato a partir das equações do movimento; por conta disso, essa é a abordagem mais utilizada em simulações DEM. Nesta abordagem, pequenas deformações são contabilizadas e é permitido que as partículas se sobreponham umas sobre as outras. É importante ressaltar que essas sobreposições são pequenas quando comparadas às dimensões das partículas e elas dependem da força de contato determinada pela lei do deslocamento. (CAMPOS, 2016; MERENDINO, 2011; HASSAMPOUR e PASHA; 2015; CUNDALL e STRACK, 1979, ZHU *et al.*, 2007).

Para o cálculo das forças de contato, existem dois tipos de modelos de contato elásticos: o modelo linear elástico e o modelo não-linear elástico. Os modelos lineares assumem uma relação linear entre a deformação e as forças de contato. Já os modelos não lineares são mais complexos e envolvem um maior embasamento teórico e se destacam por levarem em consideração o formato das partículas (DI RENZO e DI MAIO, 2004; TSUJI *et al.*, 1992; PENG, 2014; NASATO, 2011)

### 2.2.2.1 Modelo linear elástico

O modelo linear elástico mais utilizado é o proposto por Cundall e Strack (1979), e consistem em uma analogia a um sistema mola-amortecedor (*linear spring-dashpot model*). A Figura 2.6 demonstra as principais forças, normal ( $F_n$ ) e tangencial ( $F_t$ ), na modelagem mola-amortecedor (CLEARY, 2004; GUI *et al.*, 2013; HÖHNER *et al.*, 2014, TSUJI *et al.*, 1992).

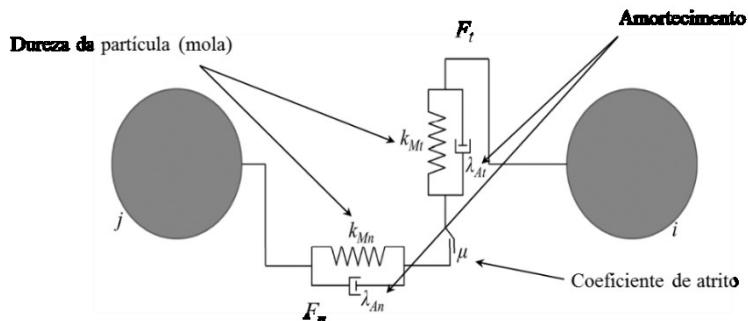


Figura 2.6: Modelo de contato mola-amortecedor (adaptado de SANTOS, 2015).

A força normal é dada pela seguinte equação:

$$F_n = -k_n \delta_n + \lambda_n v_n^{\rightarrow} \quad (2.19)$$

A força tangencial é dada por:

$$F_t = \begin{cases} -k_t \delta_n + \lambda_t v_t^{\rightarrow} & \text{se } |F_t| \leq \mu |F_n| \\ \mu F_n & \text{se } |F_t| > \mu |F_n| \end{cases} \quad (2.20)$$

sendo  $\delta$  a sobreposição das partículas,  $\lambda$  é o coeficiente de amortecimento,  $k$  a rigidez e  $v^{te}$  a velocidade relativa, os subscrito  $n$  e  $t$  são referentes aos contatos normais e tangenciais respectivamente.

O atrito cisalhante obedece a lei de Coulomb que considera o coeficiente de atrito ( $\mu$ ), o qual juntamente com a força de amortecimento são utilizados com a finalidade de dissipar a energia armazenada nas colisões.

O coeficiente de amortecimento e a rigidez da mola podem ser estimados usando propriedades dos materiais ou por ajuste. O coeficiente de amortecimento apresenta uma relação com o coeficiente de restituição referente à colisão da partícula ( $e_p$ ) e com a massa equivalente ( $m^*$ ) das partículas  $i$  e  $j$ , em que:

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{4m^*k_n}{1 + \left(\frac{\pi}{\ln e_p}\right)^2}} \quad (2.21)$$

$$m^* = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \quad (2.22)$$

Já a rigidez da mola é função da massa equivalente, da velocidade característica ( $V$ ) e do raio ( $R^*$ ) e do módulo de Young equivalentes ( $E^*$ ), esse último que por sua vez é dependente da razão de Poisson ( $\nu$ ):

$$k_n = \frac{16}{15} R^{\frac{1}{2}} E^* \left( \frac{15m^*V^2}{16R^{\frac{1}{2}}E^*} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_i}{E_i} + \frac{1-\nu_j}{E_j} \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \quad (2.25)$$

### 2.2.2.2 Modelo não linear elástico

O modelo não linear mais comumente utilizado no DEM é uma combinação da teoria de Hertz (1882), em que é empregado o contato elástico entre duas partículas na direção normal, com a de Mindlin e Deresiewicz (1953), sem deslizamento, que descreve

a força tangencial. Hertz propõe uma relação não linear entre a força normal e o deslocamento normal (DI RENZO e DI MAIO, 2004; EDEM Simulation, 2016; MERENDINO, 2011; THORNTON, 2015). A força normal ( $F_n$ ) é dada pela Equação 2.26 como função da sobreposição normal ( $\delta_n$ ), do raio de contato equivalente ( $R^*$ ) e do módulo de Young equivalente ( $E^*$ ):

$$F_n = \frac{4}{3} E^* \delta_n^{3/2} \sqrt{R^*} \quad (2.26)$$

O modelo de Hertz inclui o efeito da dissipação de energia com o termo que segue a lei do amortecimento viscoso (Bortolotti *et al.*, 2013; Cunha *et al.*, 2016). Então, a força normal de amortecimento ( $F_n^d$ ) depende do coeficiente de amortecimento ( $\beta$ ), da rigidez normal ( $S_n$ ), da velocidade relativa normal ( $v_n^{\text{rel}}$ ) e da massa equivalente ( $m^*$ ).

$$F_n^d = -2 \sqrt{\frac{5}{6}} \beta \sqrt{S_n m^*} v_n^{\text{rel}} \quad (2.27)$$

$$S_n = 2E^* \sqrt{R^* \delta_n} \quad (2.28)$$

$$\beta = \frac{\ln e_p}{\sqrt{\ln^2 e_p + \pi^2}} \quad (2.29)$$

A componente tangencial da força ( $F_t$ ) é uma função da sobreposição tangencial ( $\delta_t$ ) e da rigidez tangencial ( $S_t$ ):

$$F_t = -\delta_t S_t \quad (2.30)$$

$$S_t = 8G^* \sqrt{R^* \delta_n} \quad (2.31)$$

sendo  $G^*$  o módulo de cisalhamento equivalente, dado por:

$$\frac{1}{G^*} = \frac{2 - v_i}{G_i} + \frac{2 - v_j}{G_j} \quad (2.32)$$

Similar para a força normal de amortecimento, a força tangencial de amortecimento ( $F_t^d$ ) é dada pela seguinte equação:

$$F_t^d = -2\sqrt{\frac{5}{6}}\beta\sqrt{S_t m^*} v_t^{e*} \quad (2.33)$$

com  $v_t^{e*}$  a velocidade relativa tangencial

Limitada pela lei do atrito de Coulomb, a máxima força tangencial possível é uma função do coeficiente de atrito estático ( $\mu_s$ ) e da força normal ( $F_n$ ):

$$F_{t,\max}^d = \mu_s F_n \quad (2.34)$$

Quando o atrito de rolamento é importante, ele pode ser incluído no torque ( $\tau$ ), conforme Equação 2.35, sendo  $\mu_R$ ,  $\omega_i$  e  $r_i$  o coeficiente de atrito de rolamento, a velocidade angular e o raio da partícula respectivamente. Para partículas esféricas o uso do coeficiente de atrito de rolamento é muito importante (JUST *et al.*, 2013).

$$\tau_{ij} = -\mu_R F_n r_i \omega_i \quad (2.35)$$

### 2.2.2.3 Timestep

Como dito anteriormente, a determinação do passo de tempo adequado é de suma importância na solução do problema, visto que, no DEM a modelagem é aplicada individualmente partícula por partícula, se repetindo a cada passo de tempo. Portanto, o valor escolhido deve ser suficientemente pequeno, de modo que, durante um único passo no tempo, haja a garantia de que não haverá sobreposições excessivas de partículas e que os movimentos das partículas sejam afetados somente pela propagação das ondas de perturbação de sua vizinhança local (THORNTON, 2015; JOHNSTONE, 2010).

Para manter as simulações estáveis, o passo de tempo para a integração deve estar abaixo do passo de tempo crítico, que é determinado pelo número de Rayleigh (KAFUI *et al.*, 2002), dado pela Equação 2.36:

$$\Delta t_c = \frac{\pi r_{\min}}{0,163\nu + 0,8766} \sqrt{\frac{\rho_s}{G}} \quad (2.36)$$

Mesmo o tempo crítico sendo determinado pelo raio da menor esfera presente no sistema, para se ter uma segurança de que o tamanho das ondas de Rayleigh não ultrapasse o tamanho das partículas (Figura 2.7), garantindo que as trocas de informações aconteçam somente entre a vizinhança, a literatura recomenda a utilização de no máximo 20% do passo de tempo crítico estipulado pela equação.

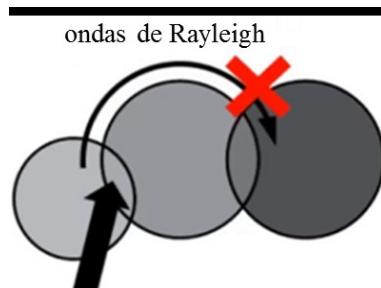


Figura 2.7: Representação do deslocamento da onda de Rayleigh.

#### 2.2.2.4 Calibração

O principal desafio na utilização do DEM é reproduzir de forma fidedigna o fenômeno físico real. Apesar de ser uma ferramenta extremamente promissora, o método esbarra em algumas complicações. De acordo com Marigo e Stitt (2015), uma das principais dificuldades da aplicação DEM em escala industrial está que, para uma representação viável dos processos industriais, são necessárias simulações em uma escala de tempo razoável e, devido ao alto custo computacional, os tempos típicos simulados na metodologia DEM são geralmente muito mais curtos. Ainda segundo os autores, outro problema está relacionado com a determinação de alguns parâmetros de entrada que o modelo necessita, tais como: densidade, módulo de cisalhamento, razão de Poisson e de algumas interações partícula-partícula e partícula-parede, como coeficientes de restituição e atrito. Assim, para se obter bons resultados é necessário o conhecimento sobre tais parâmetros.

Mesmo a simulação DEM exigindo poucos parâmetros de entrada, nem sempre estes podem ser medidos experimentalmente, o que é agravado para o caso de partículas irregulares (RACK *et al.*, 2016). Coetzee e Nel (2014) ressaltam que nem sempre a medição desses parâmetros irá garantir um comportamento exato quando aplicado ao

modelo. Chung e Ooi (2008) destacam que muitos estudos empregam valores de parâmetros sem uma explicação plausível. É extremamente importante que estes sejam selecionados de maneira correta para que os resultados da simulação se aproximem ao máximo dos dados obtidos via ensaios experimentais.

Na Tabela 2.2 apresenta os valores de alguns dos parâmetros de entrada dos modelos de força de contato utilizados nas simulações DEM, presentes na literatura. Nota-se que cada autor relatou diferentes combinações de valores para os coeficientes de restituição, atrito estático e atrito de rolamento, não havendo nenhuma analogia.

A literatura apresenta duas abordagens destinadas à calibração dos parâmetros de entrada do método dos elementos discretos (DEM) (COETZEE, 2017; MARIGO e STITT, 2015). Na primeira abordagem, chamada de “Abordagem de Calibração Bulk”, um experimento laboratorial é utilizado para medir as propriedades bulk do material e logo em seguida o mesmo procedimento é replicado numericamente. Os valores dos parâmetros DEM são alterados até que a resposta coincida com as propriedades bulk do material, que foram medidas experimentalmente. De acordo com Coetze (2017), um dos problemas dessa abordagem é que o experimento pode ser influenciado por mais de um parâmetro, podendo não apresentar significados físicos e, por causa disso, mais de uma combinação de valores poderá apresentar a mesma resposta. Eles ainda ressaltam que ao se alterar o experimento, outros valores dos parâmetros possivelmente serão mais representativos, ou seja, não existe uma garantia de que a calibração de uma aplicação será adequada para outra aplicação.

A segunda abordagem é chamada de “Abordagem de Medição Direta”, e os valores dos parâmetros de entrada são medidos individualmente de forma direta; porém algumas propriedades não são tão fáceis de medir, principalmente quando se trata de partículas irregulares. É importante enfatizar que mesmo as propriedades sendo medidas diretamente, não significa necessariamente que os valores serão representativos quando implementados no modelo DEM para diferentes aplicações (COETZEE, 2017; MARIGO e STITT, 2015).

Por fim, segundo Coetze (2017), frequentemente utiliza-se uma combinação entre as duas abordagens, visto que, propriedades como tamanho de partícula e densidade são medidas diretamente, enquanto outras propriedades como o coeficiente de atrito partícula-partícula, devido à dificuldade de medição, são determinadas pela outra abordagem.

Tabela 2.2: Valores de parâmetros DEM presentes em diferentes trabalhos da literatura.

Autores	Equipamento	Material	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	Coeficiente de Restituição	Coeficiente de Atrito Estático	Coeficiente de Atrito de Rolamento
Marigo e Stitt (2015)	Tambor rotatório	Óxido de alumínio <sup>1</sup>	1800 <sup>1</sup>	0,01 <sup>1,1</sup> , 0,85 <sup>1,2</sup>	0,25 <sup>1,1</sup> , 0,6 <sup>1,2</sup>	0,65 <sup>1,1</sup> , 0,65 <sup>1,2</sup>
		Acrílico <sup>2</sup>	1000 <sup>2</sup>			
González-Montellano <i>et al.</i> (2011)	Silo	Vidro <sup>1</sup>	2516 <sup>1</sup>	0,62 <sup>1,1</sup> , 0,75 <sup>1,3</sup>	0,30 <sup>1,1</sup> , 0,30 <sup>1,3</sup>	-
		Milho <sup>2</sup>	1163 <sup>2</sup>	0,67 <sup>2,2</sup> , 0,20 <sup>2,3</sup>	0,33 <sup>2,2</sup> , 0,12 <sup>2,3</sup>	
		Acrílico <sup>3</sup>				
Zhou <i>et al.</i> (2002)	Caixa de fluxo	Vidro <sup>1</sup>	2500 <sup>1</sup>	-	0,4 <sup>1,1</sup>	0,05 <sup>1,1</sup>
Börner <i>et al.</i> (2017)	Leito fluidizado	Óxido de Alumínio <sup>1</sup>	1040 <sup>1</sup>	0,735 <sup>1,1</sup> , 0,735 <sup>1,2</sup>	0,3 <sup>1,1</sup> , 0,3 <sup>1,2</sup>	0,01 <sup>1,1</sup> , 0,01 <sup>1,2</sup>
		Acrílico <sup>2</sup>				
Bian <i>et al.</i> (2017)	Moinho de bola	Aço <sup>1</sup>	7800 <sup>1</sup>	0,5 <sup>1,1</sup> , 0,4 <sup>1,2</sup>	0,5 <sup>1,1</sup> , 0,5 <sup>1,2</sup>	0,01 <sup>1,1</sup> , 0,01 <sup>1,2</sup>
		Acrílico <sup>2</sup>	1200 <sup>2</sup>			
Xiao <i>et al.</i> (2017)	Tambor rotatório	Plástico ABS <sup>1</sup>	1100 <sup>1</sup>	0,783 <sup>1,1</sup> , 0,981 <sup>1,2</sup> , 0,850 <sup>1,3</sup>	0,360 <sup>1,1</sup> , 0,382 <sup>1,2</sup> , 0,422 <sup>1,3</sup>	0,030 <sup>1,1</sup> , 0,021 <sup>1,2</sup> , 0,015 <sup>1,3</sup>
		Aço <sup>2</sup>	7850 <sup>2</sup>			
		Acrílico <sup>3</sup>	1190 <sup>3</sup>			
Kumar <i>et al.</i> (2015)	Tambor rotatório	Celulose Microcristalina <sup>1</sup>	1210 <sup>1</sup>	0,575 <sup>1,1</sup> , 0,800 <sup>1,2</sup>	0,176 <sup>1,1</sup> , 0,260 <sup>1,2</sup>	0,01 <sup>1,1</sup> , 0,01 <sup>1,2</sup>
		Aço <sup>2</sup>				

\* Os índices de 1 a 3 indicam os materiais e as interações entre eles.

## 2.3 Parâmetros Numéricos

### 2.3.1 Coeficiente de Restituição

De acordo com Domènech-Carbó (2013) e com Just *et al.* (2012), o coeficiente de restituição ( $e$ ), expresso pela Equação 2.37, é a razão entre as velocidades relativas posterior ( $V_1$ ) e anterior ( $V_0$ ) à colisão entre dois corpos (Figura 2.8). O seu valor representa a perda de energia durante a colisão e é utilizado na simulação para estimar a força de amortecimento normal e tangencial (TSUJI *et al.*, 1992).

$$e = \frac{V_1}{V_0} \quad (2.37)$$

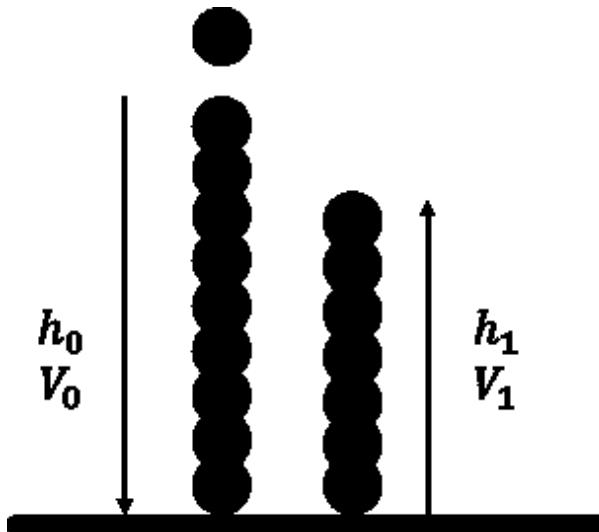


Figura 2.8: Demonstração da colisão da partícula, antes e após o impacto.

O valor do coeficiente de restituição varia entre 0 e 1, sendo dependente do tipo, do formato e da velocidade relativa no impacto e representa a quantidade de energia cinética que é conservada após o contato dos corpos. O valor nulo significa que ocorre a dissipação total da energia cinética, sendo característica de colisões perfeitamente inelásticas, enquanto o valor 1 é para colisões perfeitamente elásticas, onde não ocorre dissipação de energia (MACHADO, 2016; BERNSTEIN, 1977).

Segundo Aryaei *et al.* (2010), uma vez que a resistência do ar pode ser desprezada, a conservação da energia mecânica pode ser representada pela Equação 2.38:

$$e = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \quad (2.38)$$

sendo  $h_0$  e  $h_1$  a altura inicial e do rebote respectivamente.

De acordo com Marinack Jr. *et al.* (2013), o cálculo do coeficiente de restituição utilizando a equação das velocidades leva a resultados de simulação com flutuação nos resultados na ordem de 20%, enquanto ao se utilizar a altura, as variações foram menores que 1%.

Algumas propriedades podem influenciar os valores do coeficiente de restituição, como diâmetro das partículas, espessura da superfície de impacto, a velocidade de impacto, dentre outras. Raman (1920) realizou estudos envolvendo o impacto de esferas de aço de diferentes diâmetros em superfícies de vidro de várias espessuras, ele verificou que quanto maior a razão entre o diâmetro da partícula e a espessura da placa, maior é a dissipação de energia. Resultados semelhantes foram encontrados por Sondergaard (1990), para colisões de esferas de vidro e aço em uma superfície de acrílico.

Zener (1941) e Mueller *et al.* (2015) propuseram um modelo para medição do coeficiente de restituição como função apenas do parâmetro inelástico ( $\lambda$ ). Este parâmetro depende das propriedades dos materiais (densidade, modulo de Young e razão de Poisson), da geometria (diâmetro da esfera e espessura da placa) e da velocidade de impacto. Ambos os modelos apresentaram uma boa concordância quando comparados com os dados experimentais.

### 2.3.2 Coeficiente de Atrito

Amontons em 1699 formulou experimentalmente as duas leis clássicas do atrito, que são descritas a seguir:

1. A força de atrito é proporcional à carga aplicada.
2. A força de atrito é independente da área de contato aparente.

Tempos mais tarde, manuscritos de Leonardo da Vinci do ano de 1495 foram descobertos, onde haviam anotações semelhantes as leis de Amontons (POPOV, 2010; ASM HandBook, 1992). Em 1781, Coulomb, além de realizar experimentos de atrito e confirmar as leis propostas por Amontons e Da Vinci, propôs uma terceira lei, envolvendo

o atrito entre dois corpos sólidos, onde ele diz que quando a rugosidade da superfície é quebrada e o movimento é iniciado, a força de atrito é independente da velocidade de deslizamento. Assim, a força necessária para se retirar o corpo da inércia é maior que do que a força exigida para mantê-lo deslocando, levando a diferenciar dois tipos de atrito: o atrito estático e o atrito cinético (GOSH, 1988; POPOV, 2010).

### 2.3.2.1 Coeficiente de atrito estático e cinético

Dois experimentos simples, porém, muito utilizados na medição dos coeficientes de atrito são o plano horizontal (Figura 2.9a) e inclinado (Figura 2.9b), representados pela Figura 2.9 (GOSH, 1988).

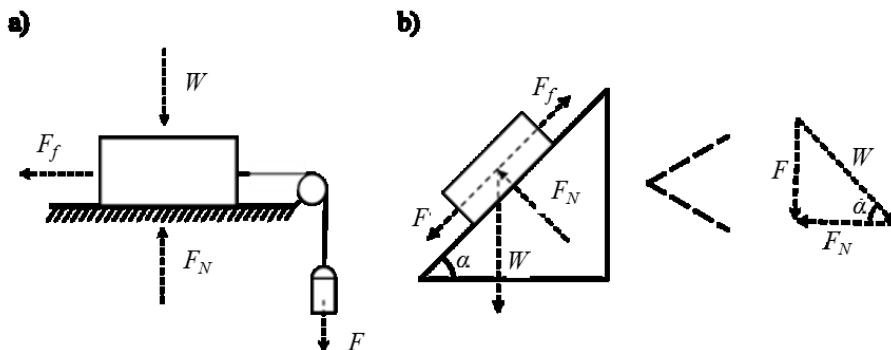


Figura 2.9: Diagrama de forças dos experimentos utilizados para medição do coeficiente de atrito - a) plano horizontal; b) plano inclinado.

O coeficiente de atrito cinético ( $\mu_k$ ) e estático ( $\mu_s$ ) no plano inclinado podem ser calculados da seguinte forma:

$$\mu_k = \operatorname{tg} \alpha - \frac{a}{g} \sec \alpha \quad (2.39)$$

$$\mu_s = \operatorname{tg} \alpha \quad (2.40)$$

sendo  $a$  aceleração do bloco,  $g$  a gravidade e  $\alpha$  a inclinação do plano.

Para plano horizontal, segue-se um raciocínio semelhante, onde o coeficiente de atrito cinético e estático são calculados como:

$$\mu_k = \frac{F}{mg} - \frac{a}{g} \quad (2.41)$$

$$\mu_s = \frac{F}{mg} \quad (2.42)$$

sendo que  $F$  é a força pela qual o dispositivo é puxado e  $m$  a massa do bloco.

Ray Chaudhuri e Hutchinson (2005) realizaram testes experimentais para a medição dos coeficientes de atrito utilizando os dois métodos descritos anteriormente. Para o coeficiente de atrito estático, o método do plano inclinado apresentou valores ligeiramente inferiores quando comparado com o plano horizontal. Segundo os autores isso acontece porque na inclinação pode ocorrer uma distribuição irregular das forças no corpo, fazendo que o movimento do bloco ocorra de forma precoce. Na análise do coeficiente de atrito cinético, os autores variaram os ângulos de inclinação e a carga aplicada e verificaram que independente das variações, os resultados encontrados foram parecidos, mas ao se comparar os dois métodos, o plano inclinado novamente apresentou valores próximos, porém menores ao do plano horizontal.

Chen *et al.* (2015) utilizaram do plano inclinado para medir o coeficiente de atrito cinético de esferas de vidro em cima de uma chapa de vidro, enquanto Li *et al.* (2005) realizaram análises dos mesmos materiais, porém com a metodologia do plano horizontal. Em ambos os trabalhos os autores destacaram que as esferas foram coladas umas nas outras a fim de evitar rolamento e assim garantir que elas deslizem sobre o plano. Assim como apresentado por Ray Chaudhuri e Hutchinson (2005), apesar dos resultados encontrados serem próximos, o plano horizontal apresentou um valor superior. É importante ressaltar a preocupação dos autores durante os experimentos em evitar o rolamento das esferas, visto que é mais fácil as esferas rolarem sobre a superfície ao invés de deslizarem, o que prejudicaria a análise do ( $\mu_s$ ) e nos introduzindo ao um novo tipo de atrito, o de rolamento.

### 2.3.2.2 Coeficiente de atrito de rolamento

Segundo a ASTM G194-08 (2013), o coeficiente de atrito de rolamento é a resistência causada ao movimento de rolamento de uma partícula esférica. Sabendo que existem a força normal atuando sobre o ponto de contato entre a partícula e a superfície e uma força necessária para mover o corpo de sua posição (Figura 2.10), a lei de Coulomb pode ser aplicada (MATUTTIS e CHEN, 2014), como escrito na Equação 2.43:

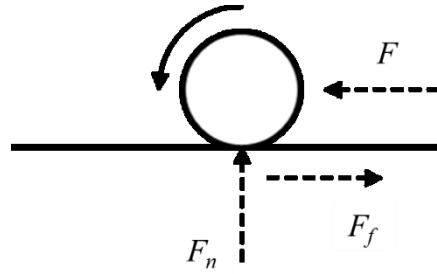


Figura 2.10: Diagrama de forças de uma esfera em movimento.

$$F_f = \mu_R F_n \quad (2.43)$$

Quando a análise passa a ser realizada para o rolamento de várias partículas em contato, o atrito passar ser representado em termos de torque:

$$\tau_r = \mu_R r F_n \quad (2.44)$$

onde  $\tau_r$  e  $r$  são o torque e o raio da partícula respectivamente.

O coeficiente de atrito de rolamento costuma ser, dependendo dos materiais, duas ou até três ordens de magnitude menor que os coeficientes de atrito estático e cinético. (ASM Handbook, 1992; MATUTTIS e CHEN, 2014).

## CAPÍTULO 3

### MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo a metodologia será discutida passo a passo, e visando uma melhor compreensão, os procedimentos foram divididos em quatro tópicos, como apresentado na Figura 3.1. Cada tópico será posteriormente desmembrado e discutido separadamente. Todo o trabalho foi realizado no Laboratório de Sistema Particulados da Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia (FEQUI/UFU).

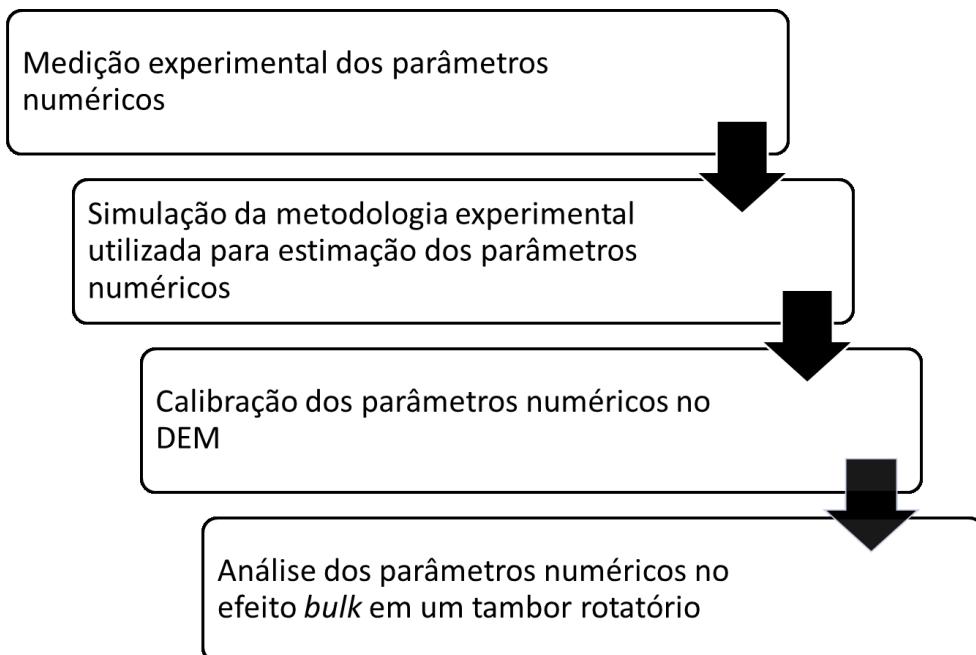


Figura 3.1: Fluxograma global da metodologia empregada no presente trabalho.

#### 3.1 Medição experimental dos parâmetros numéricos

A medição experimental dos parâmetros numéricos empregados na modelagem DEM, que são descritos na Figura 3.2, seguiu os procedimentos padrões descritos na literatura e cada medida foi realizada em quintuplicata. Nessa fase do estudo utilizou-se esferas de vidro (Figura 3.3) com diâmetro de 6,35 mm e densidade de  $2455 \pm 24 \text{ kg/m}^3$ .

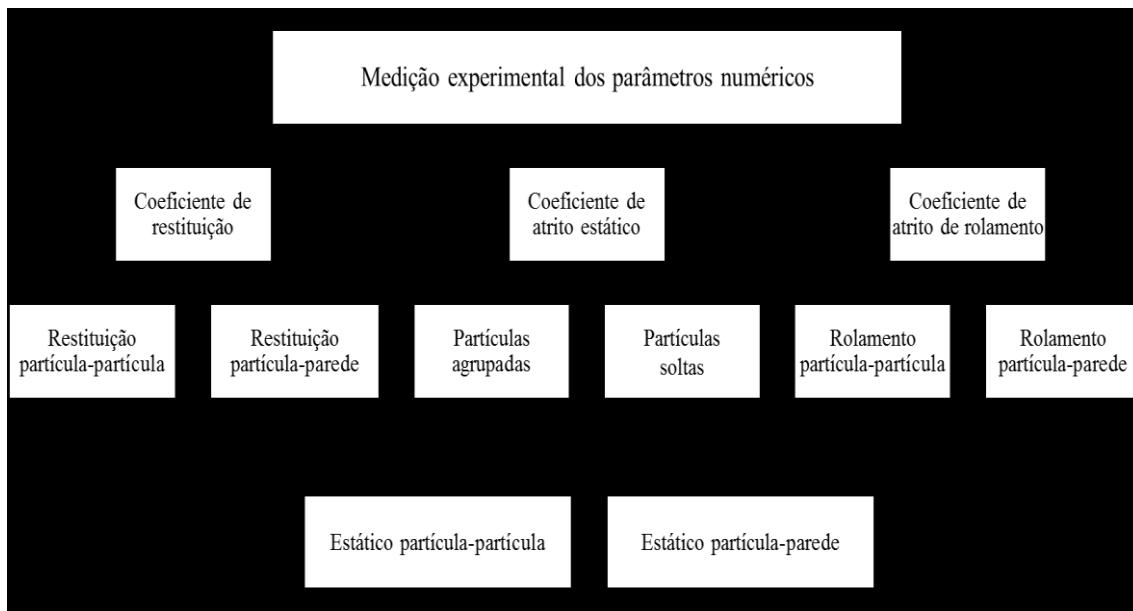


Figura 3.2: Fluxograma da medição experimental dos parâmetros numéricos.



Figura 3.3: Esferas de vidro utilizadas para medição dos parâmetros numéricos.

### 3.1.1 Coeficiente de Restituição

Para o estudo do coeficiente de restituição, utilizou-se o aparato apresentado na Figura 3.4. Uma bomba a vácuo (4) foi conectada à haste universal (3) através de uma mangueira flexível. A esfera de vidro (1) era posicionada junto à abertura da mangueira e fixada pela ação da sucção, assim quando o vácuo era interrompido, a esfera era abandonada em queda livre até colidir com a chapa (2).

Para a medição do coeficiente de restituição partícula-parede ( $e_{pw}$ ) foram utilizadas chapas de aço com espessuras de 0,8, 1,0, 1,2, 1,5, 2,0, 3,0 e 4,0 mm enquanto para a interação partícula-partícula ( $e_{pp}$ ), fazendo uso do conceito de raio infinito, utilizaram-se chapas de vidro com as espessuras de 2,0, 3,0, 4,0, 5,0, 6,0, 8,0, 10,0, 12,0, 15,0 e 19,0 mm.

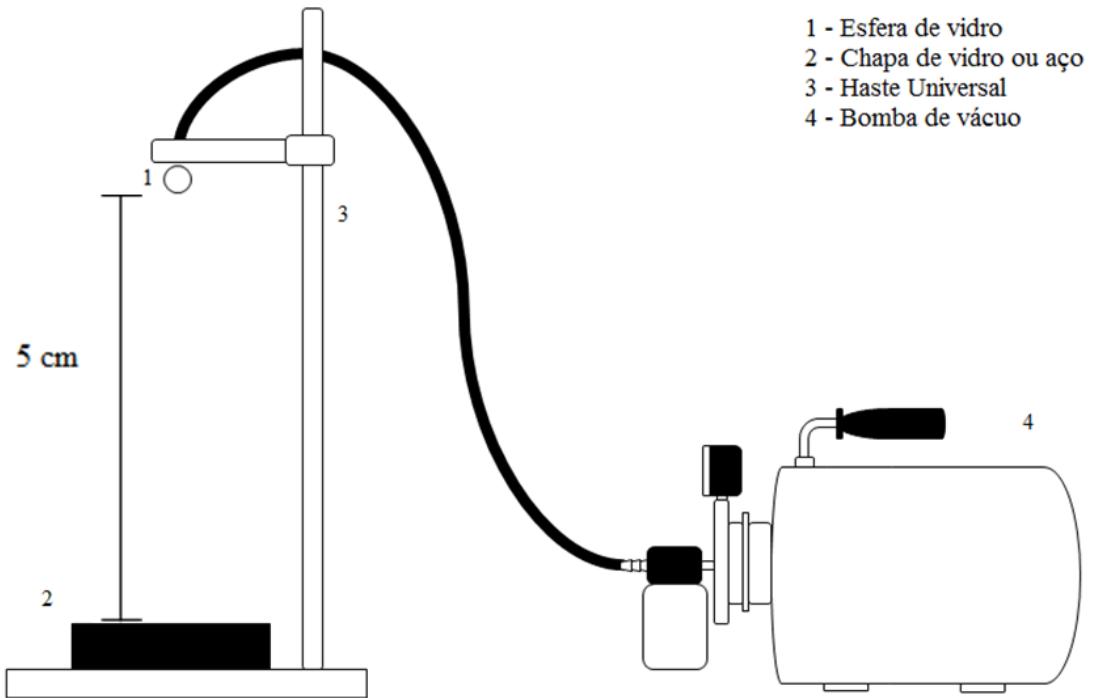


Figura 3.4: Esquema do aparato experimental utilizado para medição do coeficiente de restituição.

As partículas foram dispostas a uma altura de 5 cm em relação às chapas, para minimizar o efeito da resistência do ar. Com ajuda do *software* Meazure<sup>TM</sup> (disponibilizado gratuitamente em <http://www.cthing.com>) e com o auxílio de uma câmera de alta velocidade com capacidade de captura de até 2000 quadros por segundo foi possível obter a altura inicial e a altura após colisão das chapas, sendo aplicado assim na Equação 2.38.

Os valores encontrados para o coeficiente de restituição nas diferentes espessuras de chapas foram comparados com o modelo de Zener (1941), onde o coeficiente de restituição é calculado pela seguinte equação:

$$e = \frac{(1 - 0,84\lambda)}{(1 + 0,84\lambda)} \quad (3.1)$$

$$\lambda = \left( \frac{\pi \rho_p}{\rho_c} \right)^{3/5} \frac{1}{4\sqrt{3}} \left( \frac{r}{L} \right)^2 \left[ \frac{v^2 \rho_c (1 - v_c^2)}{E_c} \right]^{1/10} \left[ 1 + \frac{E_c (1 - v_p^2)}{E_p (1 - v_c^2)} \right]^{-2/5} \quad (3.2)$$

sendo  $\lambda$  um parâmetro inelástico que é função da densidade ( $\rho$ ), da razão de Poisson ( $v$ ), do módulo de Young ( $E$ ), da velocidade da partícula ( $v$ ) do raio da partícula ( $r$ ) e espessura da placa ( $L$ ). Os subscritos  $p$  e  $c$  se referem à partícula e chapa, respectivamente.

Foi utilizado os valores de  $6,39 \times 10^{10}$  Pa e 0,22 para o módulo de Young e a razão de Poisson do vidro respectivamente (MAKISHIMA E MACKENZIE, 1975), enquanto para o aço os valores foram de  $1,82 \times 10^{11}$  Pa para o módulo de Young e 0,30 para razão de Poisson (BOUBEKER, 2010).

### 3.1.2 Coeficiente de Atrito Estático

O coeficiente de atrito estático ( $\mu_s$ ) é definido como a força necessária para se retirar um corpo da inércia. Para sua determinação aplicou-se a metodologia de plano inclinado (Figura 3.5), conforme apresentado pela ASTM G115-10 (2013), sendo adaptada para aplicação com material particulado.

O equipamento utilizado possui um sistema hidráulico, composto por 2 seringas. Quando o pistão da seringa externa ao plano era pressionado ocorria simultaneamente a elevação do pistão da seringa interna ao plano de medição e a elevação do plano.

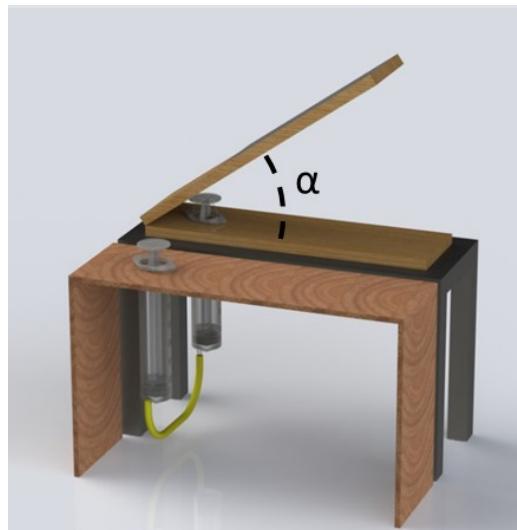


Figura 3.5: Aparato experimental para medição do coeficiente de atrito estático.

Para a realização do experimento utilizou-se uma câmera de alta velocidade com velocidade de até 2000 quadros por segundo. Esta câmara foi utilizada para aumentar a

precisão na medida do ângulo ( $\alpha$ ) em que as partículas começavam a se movimentar e assim aplicar a Equação 2.40.

Como apresentado no fluxograma da Figura 3.2, para o coeficiente de atrito estático foram utilizadas duas metodologias diferentes; uma consistia em colocar as partículas soltas e aleatoriamente distribuídas em cima do plano e a outra, quatro partículas foram coladas umas às outras formando um aglomerado (Figura 3.6). O intuito disso foi verificar se o rolamento das esferas influenciaria ou não na análise das medidas do atrito estático, conforme discutido por Chen *et al.* (2015).



Figura 3.6: Aglomerado de partículas.

Para a medição do coeficiente de atrito estático partícula-partícula ( $\mu_{\text{spp}}$ ), a superfície do plano foi recoberta por esferas, para reproduzir o comportamento de esferas em cima de outras esferas, se assemelhando um conjunto populacional de partículas.

A camada de esferas foi fixada ao plano com cola, conforme ilustra a Figura 3.7. Dessa forma, tornou-se possível medir o coeficiente de atrito estático partícula-partícula, por meio do ângulo correspondente ao início do movimento das partículas nas duas configurações: partículas soltas e partículas aglomeradas.

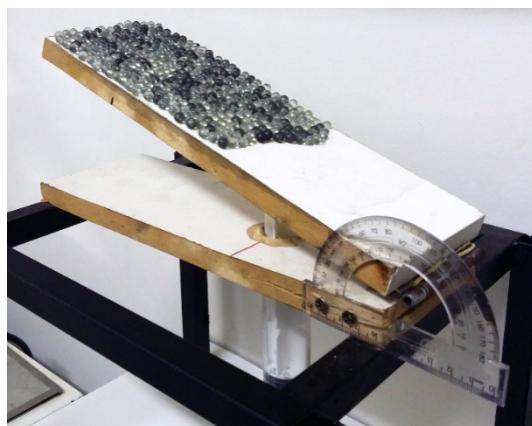


Figura 3.7: Representação da camada de partículas fixas no plano inclinado para medição do coeficiente de atrito estático partícula-partículas.

Para a determinação do coeficiente de atrito estático partícula-parede ( $\mu_{spw}$ ) foram realizados ensaios semelhantes. No entanto, as partículas nas condições soltas e aglomeradas foram dispostas sob o plano com superfície revestida por placas de vidro, chapa de aço e lixa P80 (Figura 3.8). A lixa P80 corresponde ao revestimento do tambor usado nos ensaios experimentais, sendo que maiores detalhes serão apresentados no Tópico 3.4.



Figura 3.8: Representação do esquema para medida do coeficiente de atrito estático partícula-parede na lixa P80.

### 3.1.3 Coeficiente de Atrito de Rolamento

O coeficiente de atrito de rolamento foi determinado seguindo as instruções da ASTM G194-08 (2013), que normatiza a especificação e construção do dispositivo de medição. Esse dispositivo corresponde a uma rampa inclinada de lançamento, que é apresentado nas Figuras 3.9 (a) e (b). A Figura 3.9 (a) ilustra o aparato experimental utilizado e a Figura 3.9 (b) a suas dimensões geométricas.

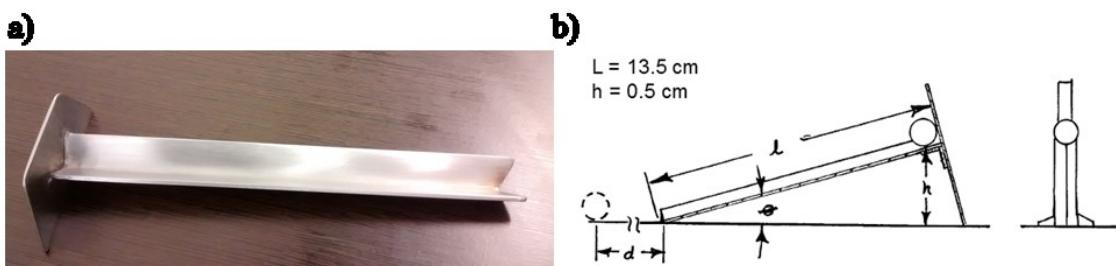


Figura 3.9: Rampa de lançamento utilizada para medição do coeficiente de atrito de rolamento: a) aparato experimental e b) dimensões geométricas.

Quando a esfera de vidro era colocada sobre a rampa, ela automaticamente começava a rolar dando início ao ensaio, que só era finalizado quando a partícula cessava todo movimento em cima do plano horizontal. A distância percorrida pela partícula entre a saída do dispositivo e a posição de repouso era medida e aplicada na Equação 3.3.

$$\mu_R = \frac{h}{d} \quad (3.3)$$

sendo  $h$  a altura do plano inclinado e  $d$  a distância percorrida pela partícula no momento exato em que deixa o dispositivo de soltura até o seu repouso. É importante ressaltar que é estritamente necessário que a trajetória da partícula seja retilínea.

A medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula ( $\mu_{Rpp}$ ) e partícula-parede ( $\mu_{Rpw}$ ) foi semelhante ao do atrito estático. Para a medição do atrito de rolamento partícula-partícula ( $\mu_{Rpp}$ ), o dispositivo de lançamento foi colocado em cima de uma camada de esferas fixas. Para o atrito de partícula-parede ( $\mu_{Rpw}$ ), considerando as 3 superfícies estudadas (aço, vidro e lixa P80), esse mesmo dispositivo foi colocado em cima de chapas de aço, de vidro e lixa P80. A Figura 3.10 apresenta o dispositivo de soltura em cima das superfícies de aço (Figura 3.10a) e da lixa P80 (Figura 3.10b).

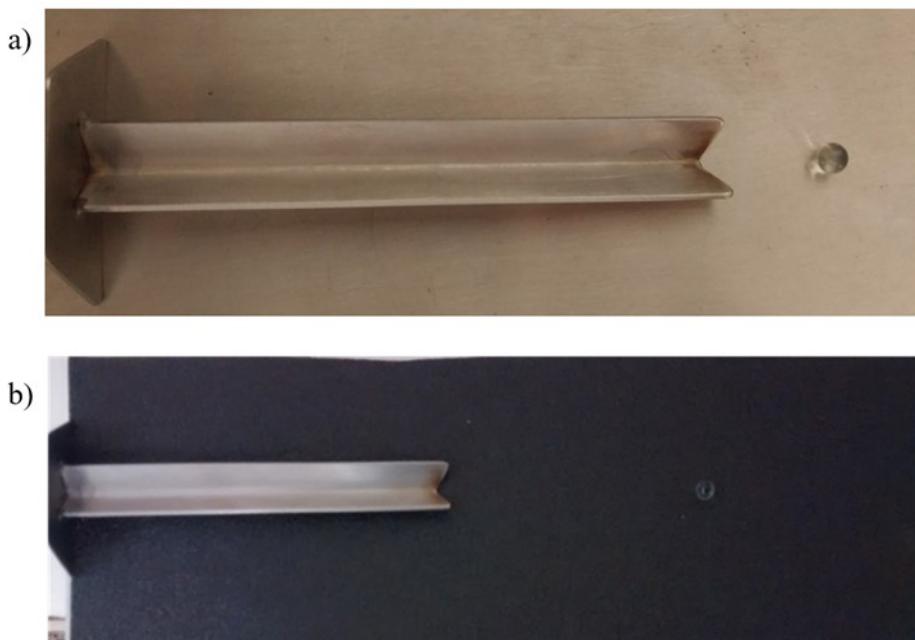


Figura 3.10: Representação da medição do coeficiente de atrito de rolamento – a) chapa de aço; b) lixa P80.

### 3.2 Simulação da metodologia experimental utilizada para estimação dos parâmetros numéricos

Apesar de realizadas as medidas experimentais dos parâmetros supramencionados, os valores dos mesmos podem não ser adequados para representar o sistema físico representado pelo modelo numérico utilizado nas simulações. Dessa forma, é necessário a calibração do modelo, que corresponde à determinação dos valores dos parâmetros que levam a resultados de simulação correspondentes aos observados experimentalmente.

Foram realizadas as simulações numéricas dos próprios ensaios de medida dos parâmetros. As Figuras 3.11-3.13 apresentam a correspondência virtual dos aparelhos experimentais descritos nas Figuras 3.5 e 3.9, para a simulação dos experimentos para a determinação do coeficiente de atrito estático e de rolamento. As determinações dos coeficientes seguiram o mesmo critério empregado nas medições experimentais, que correspondem às Equações 2.40 e 3.3, respectivamente.

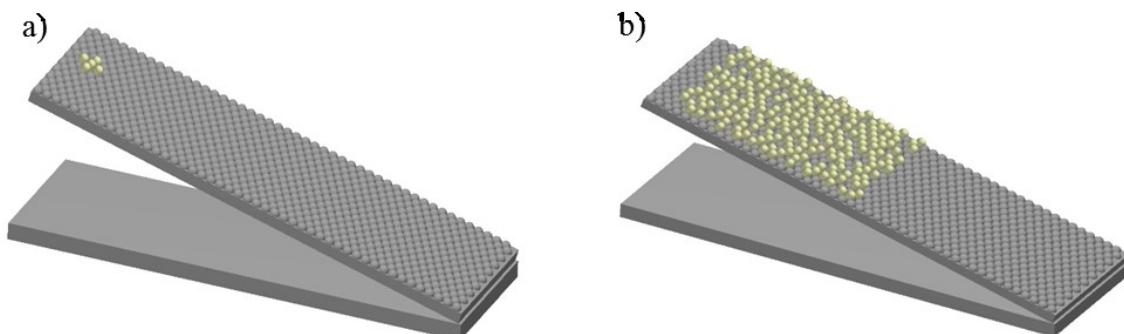


Figura 3.11: Simulação do aparato experimental para medição do coeficiente de atrito estático partícula-partícula – a) partícula agrupada; b) partículas soltas.

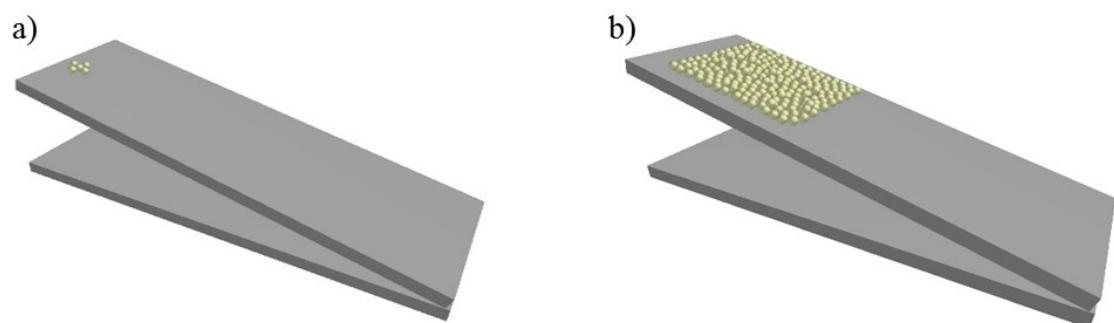


Figura 3.12: Simulação do aparato experimental para medição do coeficiente de atrito estático partícula-parede – a) partícula agrupada; b) partículas soltas.

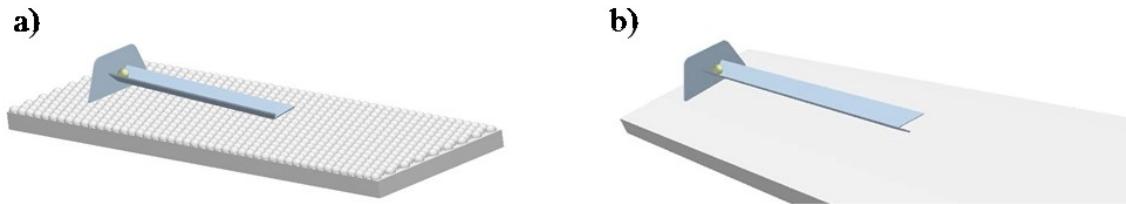


Figura 3.13: Simulação do aparato experimental para medição do coeficiente de atrito de rolamento – a) partícula-partícula; b) partícula-parede.

Para o coeficiente de atrito estático foram testadas numericamente as duas metodologias, partículas soltas e partículas agrupadas

Nas simulações, os parâmetros utilizados seguiram uma matriz de planejamento do tipo composto central (PCC). Pelo fato das interações partícula-partícula não levarem em consideração o efeito de parede, foram elaborados dois PCCs distintos, que se encontram apresentados nas Tabelas 3.1 e 3.2, a faixa de valores utilizada nas tabelas levou-se em consideração as medidas encontradas experimentalmente.

O PCC foi utilizado com o intuito de alterar os valores dos parâmetros numéricos e identificar quais deles iriam variar significativamente em cada condição analisada. Assim, ele possibilita inferir, por exemplo, se a variável significativa do plano inclinado, utilizado para a interação partícula-partícula, é o coeficiente de atrito estático partícula-partícula, ou se algum outro parâmetro está influenciando em sua análise.

Tabela 3.1: Matriz do Planejamento Composto Central para interações partícula-partícula.

	$\mu_{spp}$	$\mu_{Rpp}$
$-\alpha$	0,49	0,028
-1	0,50	0,030
0	0,65	0,055
1	0,80	0,080
$+\alpha$	0,81	0,082

Tabela 3.2: Matriz do Planejamento Composto Central para interações partícula-parede.

	$\mu_{spp}$	$\mu_{spw}$	$\mu_{Rpp}$	$\mu_{Rpw}$
$-\alpha$	0,43	0,13	0,02	0,01
-1	0,50	0,20	0,03	0,02
0	0,65	0,35	0,06	0,04
1	0,80	0,50	0,08	0,06
$+\alpha$	0,87	0,57	0,09	0,07

Todas as simulações foram conduzidas no *software* EDEM® 3.0 e foi utilizado o modelo de contato de Hertz-Mindlin. Para garantir a estabilidade numérica, utilizou-se um passo no tempo  $2 \times 10^{-5}$ s equivalente a 20% do passo de tempo de Rayleigh e o tempo total de simulação foi de 20 s para todas as simulações.

A Tabela 3.3 apresenta de forma simplificada todas as condições utilizadas para a realização dos experimentos numéricos.

Tabela 3.3: Condições utilizadas para a simulação das metodologias experimentais dos coeficientes de atrito estático e de rolamento no *software* EDEM®.

Modelo	Hertz-Mindlin ( <i>noslip</i> )
Passo no Tempo (s)	$2 \times 10^{-5}$
Tempo de Simulação (s)	20
Tamanho de Célula	3 Rmin
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	
Partícula	2455
Parede (aço)	7800
Razão de Poisson [-]	
Partícula	0,22
Parede (aço)	0,30
Módulo de Cisalhamento (Pa)	
Partícula	$2,61 \times 10^{+7}$
Parede (aço)	$7,00 \times 10^{+10}$

Considerando o tempo necessário para realizar as simulações, foi utilizado o valor do módulo de cisalhamento da partícula 1000 vezes menor do que o reportado por Makishima e Mackenzie (1975). Segundo Zhou *et al.* (2002), a alteração do módulo de cisalhamento da partícula em até mil vezes o seu valor original não acarreta em mudanças significativas no resultado. A razão de Poisson também foi obtida no trabalho de Makishima e Mackenzie (1975), enquanto os valores, de ambas as propriedades do material para a parede, foram obtidos no trabalho de Boubeker *et al.* (2000).

### **3.3 Calibração dos parâmetros numéricos no DEM**

Uma vez realizadas as medições experimentais dos parâmetros e efetuada a validação de suas respectivas metodologias, realizou-se uma calibração numérica do modelo DEM para os coeficientes de atrito estático e de rolamento, em seus respectivos aparatos virtuais. Dessa forma, foi possível descobrir quais valores de entrada no modelo seriam necessários para se obter respostas semelhantes às experimentais.

Como já mencionado, o coeficiente de atrito estático medido experimentalmente, foi determinado pela tangente do ângulo formado a partir do momento em que as partículas começavam a se movimentar no plano inclinado. Assim, foram experimentados vários valores de entrada no modelo, para determinar aquele que mais se aproximava do ângulo experimental.

Conforme apresentado pela Equação 3.3, para o cálculo do coeficiente de atrito de rolamento, é necessário encontrar a distância que a esfera de vidro percorreu, após sair do aparato experimental, até entrar em repouso. Para obter as mesmas distâncias encontradas experimentalmente, diversos valores de coeficiente de atrito de rolamento foram testados como entrada no modelo.

Esse processo de calibração forneceu uma sensibilidade de quão próximo ou distante o modelo numérico está da representação experimental.

### **3.4 Análise dos parâmetros numéricos no efeito *bulk* em um tambor rotatório**

A medição direta e individual dos coeficientes de restituição, atrito estático e atrito de rolamento não necessariamente asseguram que os valores terão uma boa representabilidade quando analisados na população de partículas (*bulk*) do tambor rotatório. A Figura 3.14, apresenta de forma esquemática todo o procedimento que foi realizado para se analisar a sensibilidade dos parâmetros numéricos no efeito *bulk*.

As simulações foram conduzidas seguindo as geometrias, materiais e condições operacionais apresentadas nos trabalhos de Santos *et al.* (2015) e Santos *et al.* (2013), o que permite a análise comparativa de seus resultados com os obtidos nesse trabalho. No trabalho Santos *et al.* (2015), os autores estudaram o comportamento dinâmico de esferas

de vidro com diâmetro volumétrico de 1,13 mm e de 4,22 mm em diferentes condições operacionais do tambor rotatório. No referido estudo, os autores utilizaram dois diferentes graus de preenchimento, sendo esses 18,81% e 31,4%. O perfil de velocidade radial foi obtido para partículas de 4,22 mm em três diferentes velocidades, 1,45, 2,31 e 3,14 rad/s.

Santos *et al.* (2013), obtiveram resultados numéricos (relativos à abordagem Euleriana) e experimental de perfil de velocidade para grãos de soja de 6,39 mm, nos graus de preenchimento de 18,81% e 31,4% e para as velocidades de 0,71 e 1,45 rad/s. Os autores analisaram tanto experimentalmente quanto numericamente (CFD) os regimes de rolamento, cascateamento, catarateamento e centrifugação para as velocidades de rotação de 1,45, 4,08, 8,91 e 16,40 rad/s, respectivamente. Em ambos os trabalhos, Santos *et al.* (2015) e Santos *et al.* (2013) foi utilizado um tambor rotatório com 22 cm de diâmetro e 50 cm de comprimento, revestido internamente por uma lixa P80. Conforme mencionado anteriormente, a utilização da lixa visava evitar o deslizamento das partículas na parede, impedindo a formação do regime de deslizamento e possibilitando a obtenção dos demais regimes.

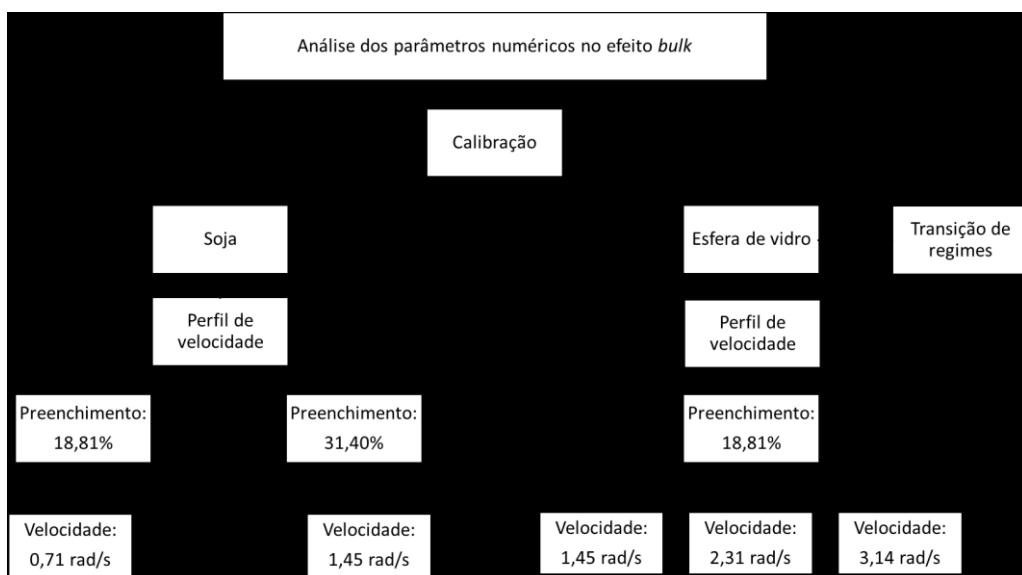


Figura 3.14: Fluxograma para análise dos parâmetros numéricos no efeito bulk.

Para a determinação dos parâmetros utilizados na simulação, em todas as condições demonstradas no fluxograma, foi realizado um processo de calibração seguindo a matriz do Planejamento Composto Central da Tabela 3.4, que resultou em 350 condições distintas de simulações. O objetivo foi descobrir se alguma combinação de coeficientes conseguiria representar todas as condições operacionais ou se eles sofreriam influência do grau de preenchimento e/ou da velocidade de rotação.

Tabela 3.4: Matriz do Planejamento Composto Central utilizada para a calibração dos parâmetros numéricos no efeito *bulk* em um tambor rotatório.

Simulação	Parâmetros			
	$\mu_{spp}$	$\mu_{spw}$	$\mu_{Rpp}$	$\mu_{Rpw}$
1	0,50	0,20	0,03	0,02
2	0,50	0,20	0,03	0,06
3	0,50	0,20	0,08	0,02
4	0,50	0,20	0,08	0,06
5	0,50	0,50	0,03	0,02
6	0,50	0,50	0,03	0,06
7	0,50	0,50	0,08	0,02
8	0,50	0,50	0,08	0,06
9	0,80	0,20	0,03	0,02
10	0,80	0,20	0,03	0,06
11	0,80	0,20	0,08	0,02
12	0,80	0,20	0,08	0,06
13	0,80	0,50	0,03	0,02
14	0,80	0,50	0,03	0,06
15	0,80	0,50	0,08	0,02
16	0,80	0,50	0,08	0,06
17	0,43	0,35	0,06	0,04
18	0,87	0,35	0,06	0,04
19	0,65	0,13	0,06	0,04
20	0,65	0,57	0,06	0,04
21	0,65	0,35	0,02	0,04
22	0,65	0,35	0,09	0,04
23	0,65	0,35	0,06	0,01
24	0,65	0,35	0,06	0,07
25	0,65	0,35	0,06	0,04
26	0,65	0,35	0,06	0,04

Na abordagem Lagrangeana, o custo computacional é altamente influenciado pelo número de partículas. Por isso, as dimensões geométricas do tambor rotatório utilizado

nas simulações foram de 22 cm de diâmetro e 10 cm de comprimento, portanto, 20% do comprimento total do tambor real utilizado por Santos *et al.* (2015) e Santos *et al.* (2013).

O cálculo da massa de partículas ( $m$ ) adicionada no interior do tambor rotatório, a qual corresponde ao grau de preenchimento ( $f$ ), foi determinada pela seguinte expressão:

$$m = \pi R^2 L (1 - \varepsilon) \rho_s f \quad (3.4)$$

sendo  $R$ ,  $L$ ,  $\varepsilon$  e  $\rho_s$  o raio do tambor, o comprimento do tambor, a porosidade do leito de material e a densidade do material, respectivamente.

Não foram realizadas as simulações para as esferas de 1,13 mm de diâmetro devido à restrição de capacidade de processamento e inviabilidade computacional em tempo hábil, sendo que necessitaria de 598.000 esferas para preenchimento de 18,81% e 950.000 esferas para preenchimento de 31,4%. O número de esferas utilizadas nas simulações está apresentado na Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Número de esferas utilizadas na simulação DEM.

	Número de Esferas	
	18,81%	31,40%
Soja (6,39 mm)	3297	5639
Esfera de Vidro (4,22 mm)	11484	18891

Pelo método dos elementos discretos é possível determinar individualmente a velocidade e posição das partículas e assim determinar o perfil de velocidade radial simulada. As partículas foram selecionadas seguindo a linha de referência ao longo do raio do leito, como pode ser observado pela Figura 3.15.

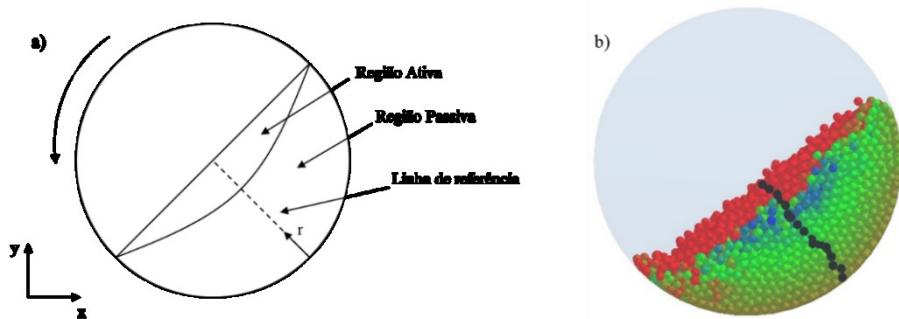


Figura 3.15: Representação do tambor rotatório operando em regime de rolamento - a) esquema demonstrativo da região ativa, passiva e da linha de referência utilizada na metodologia; b) demonstração da seleção de partícula no software EDEM.

Para análise qualitativa, as simulações foram comparadas com os diferentes regimes experimentais obtidos por Santos *et al.* (2015) nas velocidades de 1,45, 4,08, 8,91 e 16,40 rad/s e nos graus de preenchimento de 18,81% e 31,40%.

As condições utilizadas nas simulações estão apresentadas na Tabela 3.6.

Tabela 3.6: Condições utilizadas para simulação da análise dos parâmetros numéricos no efeito *bulk* utilizando o *software* EDEM.

Modelo	Hertz-Mindlin ( <i>noslip</i> )
Passo no Tempo (s)	$2 \times 10^{-5}$
Tempo de Simulação (s)	10
Tamanho de Célula	3 Rmin
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	
Esfera de vidro	2455
Soja	1164
Parede (aço)	7800
Razão de Poisson [-]	
Esfera de vidro	0,22
Soja	0,25
Parede (aço)	0,30
Módulo de Cisalhamento (Pa)	
Esfera de vidro	$2,61 \times 10^{+7}$
Soja	$1,00 \times 10^{+6}$
Parede	$7,00 \times 10^{+10}$

# CAPÍTULO 4

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, serão apresentados os principais resultados referentes a medição isolada dos parâmetros numéricos e a simulação de suas respectivas metodologias (Seção 4.1), também será analisado a sensibilidade dos parâmetros numéricos no efeito bulk em um tambor rotatório (Seção 4.2).

### 4.1 Parâmetros Numéricos

#### 4.1.1 Coeficiente de Restituição

Conforme mencionado no capítulo anterior, os valores dos coeficientes de restituição ( $e$ ) foram determinados para colisões de esfera de vidro de 6,35 mm de diâmetro em placas de vidro e de aço com diferentes espessuras. As Tabelas 4.1 e 4.2 apresentam os resultados destas medidas, sendo  $\gamma$  a razão entre o diâmetro da partícula e a espessura (L) da placa.

Tabela 4.1: Coeficiente de restituição da esfera de vidro para diferentes espessuras (L) de placas de vidro.

L (mm)	$\gamma$	$e$
3	2,12	$0,670 \pm 0,008$
4	1,59	$0,808 \pm 0,003$
5	1,27	$0,866 \pm 0,001$
6	1,06	$0,898 \pm 0,002$
8	0,79	$0,936 \pm 0,002$
10	0,64	$0,956 \pm 0,001$
12	0,53	$0,962 \pm 0,008$
15	0,42	$0,971 \pm 0,001$
19	0,33	$0,973 \pm 0,013$

Tabela 4.2: Coeficiente de restituição da esfera de vidro para diferentes espessuras ( $L$ ) de placas de aço.

$L$ (mm)	$\gamma$	$e$
0,8	7,94	$0,183 \pm 0,017$
1,0	6,35	$0,371 \pm 0,008$
1,2	5,29	$0,458 \pm 0,007$
1,5	4,23	$0,600 \pm 0,011$
2,0	3,18	$0,688 \pm 0,022$
3,0	2,12	$0,838 \pm 0,004$
4,0	1,59	$0,903 \pm 0,003$

Como pode ser observado nas Tabelas 4.1 e 4.2, os valores de coeficiente de restituição aumentam com a diminuição da razão entre o diâmetro da esfera com a espessura da placa. Nota-se que tanto as colisões vidro-vidro quanto as colisões vidro-aço tendem a um valor constante e próximo de 1 para maiores espessuras. Resultados semelhantes para colisões de esferas de vidro em placas de vidro podem ser encontrados no trabalho de Müller *et al.* (2015).

Søndergaard *et al.* (1990) estudaram o comportamento do coeficiente de restituição em diferentes diâmetros e espessuras, para colisões de esferas de aço em chapas de acrílico e verificaram uma diminuição da restituição com o aumento da razão ( $\gamma$ ). Segundo eles, isso acontece porque elevados valores de  $\gamma$  fazem com que a energia cinética total da placa seja convertida totalmente em ondas elásticas, diminuindo assim o coeficiente de restituição.

As Figuras 4.1 e 4.2 apresentam graficamente a distribuição do coeficiente de restituição experimental em função da razão diâmetro/espessura ( $\gamma$ ), avaliados em placas de vidro e aço, respectivamente, bem como um comparativo com a curva teórica do modelo proposto por Zener (1941).

O modelo de Zener (1941) conseguiu representar bem o comportamento dos dados experimentais; porém, por não levar em consideração alguns mecanismos de perda de energia, como rugosidade da superfície, amortecimento e possíveis rotação da esfera, o modelo acaba superestimando os valores experimentais.

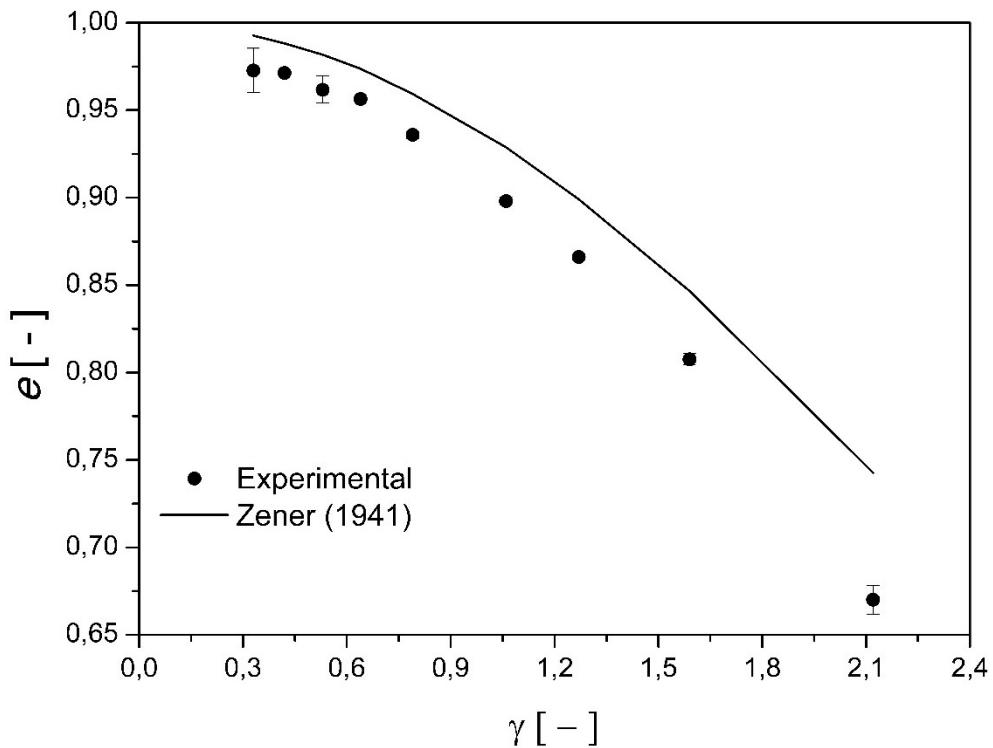


Figura 4.1: Influência da razão do diâmetro da partícula com a espessura da placa no coeficiente de restituição para impactos de esferas de vidro em placas de vidro e a curva teórica de acordo com o modelo de Zener (1941).

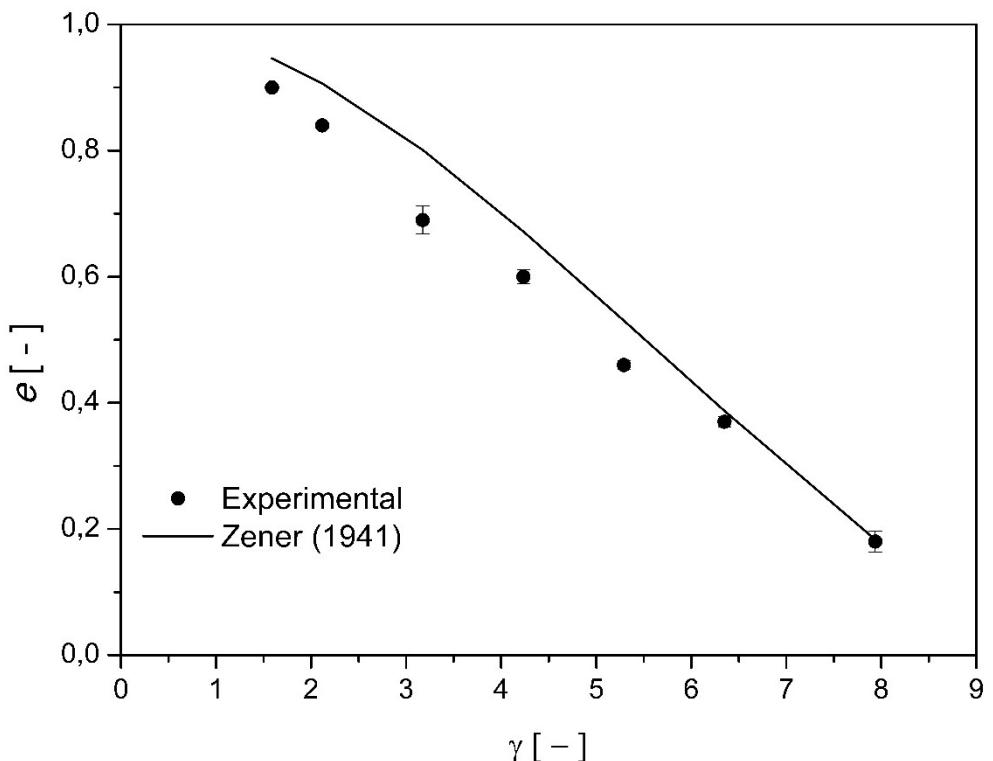


Figura 4.2: Influência da razão do diâmetro da partícula com a espessura da placa no coeficiente de restituição para impactos de esferas de vidro em placas de aço e a curva teórica de acordo com o modelo de Zener (1941).

#### 4.1.2 Coeficiente de Atrito Estático

Os valores experimentais de coeficiente de atrito estático para partículas de esferas de vidro nas duas condições estudadas, soltas e agrupadas, dispostas em diferentes superfícies, são apresentados na Tabela 4.3. Nota-se que, para todas as condições, quando se utilizou a metodologia das partículas agrupadas, os valores dos coeficientes foram superiores aos das partículas soltas. Acredita-se que este comportamento se deve ao rolamento das esferas (partículas soltas) durante o ensaio de medição, visto que, quando as partículas são dispostas em uma superfície, à medida que aumenta-se o ângulo em relação à horizontal, a tendência é que as partículas soltas rolem. Portanto, nesse caso, o efeito de rolamento mascara o valor real do deslizamento, que é aquele relativo ao coeficiente de atrito estático.

Tabela 4.3: Valores de coeficiente de atrito estático experimental utilizando partículas soltas e agrupadas para diferentes superfícies.

Superfície	Soltas	Agrupadas
Esfera de Vidro	$0,58 \pm 0,06$	$0,80 \pm 0,07$
Vidro	$0,05 \pm 0,01$	$0,23 \pm 0,03$
Aço	$0,06 \pm 0,02$	$0,24 \pm 0,03$
Lixa	$0,18 \pm 0,05$	$0,49 \pm 0,06$

Para se ter certeza de quais variáveis estão influenciando significativamente na resposta do coeficiente de atrito estático partícula-partícula, foi realizada, pela primeira vez na literatura, uma análise qualitativa do PCC, disposto na Tabela 4.4. Para isso o aparato experimental (Figura 3.5) foi reproduzido numericamente (Figura 3.11).

Nota-se que o coeficiente de atrito estático partícula-partícula ( $\mu_{spp}$ ) e o coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula ( $\mu_{Rpp}$ ) são os parâmetros de entrada no modelo. Deste modo, para se obter como resposta na simulação o coeficiente de atrito estático partícula-partícula, o modelo necessita que seja implementado, como entrada, valores do próprio coeficiente de atrito estático partícula-partícula.

Tabela 4.4: Planejamento Composto Central empregado na simulação, para análise das variáveis significativas das metodologias de partículas soltas e agrupadas para medição do coeficiente de atrito estático partícula-partícula.

Simulações	Parâmetros		Resultados da simulação	
	$\mu_{spp}$	$\mu_{Rpp}$	Coeficiente de Atrito Estático Soltas	Agrupadas
1	0,50	0,030	0,46	1,03
2	0,50	0,080	0,55	1,05
3	0,80	0,030	0,46	1,93
4	0,80	0,080	0,55	2,16
5	0,49	0,055	0,50	1,03
6	0,81	0,055	0,51	1,98
7	0,65	0,028	0,47	1,56
8	0,65	0,082	0,54	1,44
9	0,65	0,055	0,50	1,55
10	0,65	0,055	0,50	1,55

Os valores dos efeitos das variáveis significativas, bem como os respectivos *p-levels*, calculados por meio dos resultados das simulações do PCC estão apresentadas na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Variáveis significativas do Planejamento Composto Central empregado na simulação, para medição do coeficiente de atrito estático partícula-partícula nas metodologias de partículas soltas e agrupadas.

	Soltas	Agrupadas
	$\mu_{Rpp}$	$\mu_{spp}$
Efeito	0,083	0,958
<i>p</i>	$<10^{-4}$	$<10^{-4}$
$R^2 = 97\%$		$R^2 = 97\%$
$\alpha = 5\%$		$\alpha = 5\%$

Percebe-se ao avaliar os resultados das esferas soltas, que o coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula ( $\mu_{Rpp}$ ) foi a variável que mais influenciou na resposta do atrito estático, enquanto para as esferas agrupadas, a única variável significativa foi o próprio coeficiente de atrito estático partícula-partícula. Assim, verificou-se que, para determinar de maneira correta a medida do coeficiente de atrito estático partícula-

partícula, utilizando como aparato o plano inclinado, as esferas devem estar agrupadas umas nas outras, com o intuito de evitar o movimento de rolamento.

Assim como para o coeficiente de atrito estático partícula-partícula, a Tabela 4.6 apresenta o Planejamento Composto Central empregado para análise das variáveis significativas na medição do coeficiente de atrito estático partícula-parede.

Tabela 4.6: Planejamento Composto Central empregado na simulação, para análise das variáveis significativas das metodologias de partículas soltas e agrupadas para medição do coeficiente de atrito estático partícula-parede.

Simulação	Parâmetros				Resultados da simulação	
	$\mu_{spp}$	$\mu_{spw}$	$\mu_{Rpp}$	$\mu_{Rpw}$	Coeficiente de Atrito Estático Soltas	Agrupadas
1	0,50	0,20	0,03	0,02	0,07	0,24
2	0,50	0,20	0,03	0,06	0,09	0,24
3	0,50	0,20	0,08	0,02	0,07	0,24
4	0,50	0,20	0,08	0,06	0,10	0,24
5	0,50	0,50	0,03	0,02	0,06	0,58
6	0,50	0,50	0,03	0,06	0,10	0,59
7	0,50	0,50	0,08	0,02	0,06	0,58
8	0,50	0,50	0,08	0,06	0,09	0,59
9	0,80	0,20	0,03	0,02	0,05	0,24
10	0,80	0,20	0,03	0,06	0,10	0,25
11	0,80	0,20	0,08	0,02	0,05	0,24
12	0,80	0,20	0,08	0,06	0,10	0,25
13	0,80	0,50	0,03	0,02	0,06	0,59
14	0,80	0,50	0,03	0,06	0,10	0,59
15	0,80	0,50	0,08	0,02	0,06	0,59
16	0,80	0,50	0,08	0,06	0,10	0,58
17	0,43	0,35	0,06	0,04	0,08	0,42
18	0,87	0,35	0,06	0,04	0,07	0,43
19	0,65	0,13	0,06	0,04	0,07	0,17
20	0,65	0,57	0,06	0,04	0,08	0,69
21	0,65	0,35	0,02	0,04	0,07	0,41
22	0,65	0,35	0,09	0,04	0,08	0,41
23	0,65	0,35	0,06	0,01	0,05	0,41
24	0,65	0,35	0,06	0,07	0,11	0,40
25	0,65	0,35	0,06	0,04	0,08	0,40
26	0,65	0,35	0,06	0,04	0,08	0,40

Na Tabela 4.7 constam as variáveis significativas, os respectivos valores dos efeitos e *p-level* obtidos pelos cálculos estatísticos realizados a partir dos resultados da simulação

numérica via DEM do planejamento composto central, tendo como resposta o coeficiente de atrito estático partícula-parede (Tabela 4.6). Observa-se que para as simulações realizadas com as partículas soltas, as variáveis que mais interferiram na resposta foram  $\mu_{spp}$ ,  $\mu_{Rpw}$ ,  $\mu_{Rpw}^2$  e suas interações  $\mu_{spp}$  com  $\mu_{spw}$  e  $\mu_{spp}$  com  $\mu_{Rpw}$ . Já para as partículas agrupadas, a única variável que influenciou na resposta foi o próprio coeficiente de atrito estático partícula-parede ( $\mu_{spw}$  e  $\mu_{spw}^2$ ).

Esta análise estatística apresenta que, somente quando se utilizaram as partículas agrupadas foi possível obter uma resposta adequada para medição do coeficiente de atrito estático partícula-parede, sem a interferência de variáveis indesejáveis, como o coeficiente de atrito partícula-partícula e os coeficientes de atrito de rolamento partícula-partícula e partícula-parede.

Tabela 4.7: Variáveis significativas do Planejamento Composto Central empregado na simulação, para medição do coeficiente de atrito estático partícula-parede nas metodologias de partículas soltas e agrupadas.

	Soltas					Agrupadas	
	$\mu_{spp}$	$\mu_{Rpw}$	$\mu_{Rpw}^2$	$\mu_{spp}$ com $\mu_{spw}$	$\mu_{spp}$ com $\mu_{Rpw}$	$\mu_{spw}$	$\mu_{spw}^2$
Efeito	-0,002	0,038	0,004	0,003	0,004	0,343	0,011
p	0,031	$<10^{-4}$	0,021	0,016	0,005	$<10^{-4}$	0,038
$R^2 = 98\%; \alpha = 5\%$						$R^2 = 99\%; \alpha = 5\%$	

Após a análise estatística dos resultados dos PCCs, as simulações do plano inclinado evidenciaram a importância da utilização das partículas agrupadas, a fim de evitar a influência do rolamento e garantir assim a medição correta do coeficiente de atrito estático, tanto partícula-partícula quanto partícula-parede. Este resultado está de acordo com as considerações apresentadas por Chen *et al.* (2015).

Com a validação da metodologia de simulação do plano inclinado visando obter o coeficiente de atrito estático partícula-partícula e partícula-parede, o próximo passo foi efetuar a calibração do modelo DEM, que seguiu as condições apresentadas na Tabela 4.8. Essas simulações foram realizadas para a condição de partículas agrupadas.

No processo de calibração, foram testados para cada superfície (esfera de vidro, chapa de vidro, chapa de aço e lixa P80), diversos valores de coeficiente de atrito estático ( $\mu_s^{Mod}$ ) como entrada no modelo DEM, a fim de se obter um ângulo de inclinação numérico o mais próximo do ângulo experimental. Na simulação, o ângulo de inclinação

numérico foi determinado no momento em que as partículas começavam a se movimentar sobre o plano inclinado.

Conforme apresentado na Tabela 4.8, para a superfície com esfera de vidro, após testados vários valores de entrada no modelo, encontrou-se pelo processo de calibração o valor de 0,1 de coeficiente de atrito estático ( $\mu_s^{Mod}$ ). Este valor foi o necessário a ser implementado na simulação para conseguir o ângulo numérico de 36,10°, próximo do ângulo experimental de 36,80° obtido para a mesma superfície. Outros valores deste coeficiente acarretam discrepâncias maiores entre os ângulos experimental e simulado.

Para as superfícies de vidro e de aço, o ângulo de inclinação obtido experimentalmente foram de 13,00° e 13,40°, respectivamente. Para alcançar valores de ângulo semelhantes na simulação numérica, foi necessário implementar no modelo, tanto para superfície de vidro quanto para a de aço, o valor de 0,20 de coeficiente de atrito estático ( $\mu_s^{Mod}$ ). Com este valor de coeficiente, as partículas saíram da inércia e começaram a se movimentar no ângulo numérico de 12,90°, para ambas as superfícies.

Por fim, para a lixa P80, encontrou-se o valor de 0,43 de coeficiente de atrito estático ( $\mu_s^{Mod}$ ) pelo processo de calibração, para se atingir um ângulo numérico de 26,50°, próximo ao experimental de 25,90°.

Tabela 4.8: Coeficiente de atrito estático encontrado pelo processo de calibração do modelo DEM, para obter ângulo numérico semelhante ao ângulo experimental.

Superfície	Ângulo Experimental	Coeficiente de Atrito Estático Experimental ( $\mu_s^{Exp}$ )	Coeficiente de Atrito Estático Calibração ( $\mu_s^{Mod}$ )	Ângulo Numérico
Esfera de Vidro	36,80°	$0,80 \pm 0,07$	0,10	36,10°
Vidro	13,00°	$0,23 \pm 0,03$	0,20	12,90°
Aço	13,40°	$0,24 \pm 0,03$	0,20	12,90°
Lixa	25,90°	$0,49 \pm 0,06$	0,43	26,50°

Percebe-se que, com exceção da superfície de esferas de vidro, para obter um ângulo numérico semelhante ao ângulo encontrado experimentalmente, o coeficiente de atrito estático estipulado pelo processo de calibração ( $\mu_s^{Mod}$ ) foi próximo coeficiente de atrito estático experimental.

Na determinação experimental do coeficiente de atrito estático na superfície de esferas de vidro, as partículas foram dispostas de forma a sofrerem uma menor influência

do interstício da superfície. Enquanto na simulação numérica ocorreu o encaixe das partículas agrupadas nestes interstícios, fazendo com que baixos valores de coeficiente de atrito estático alcançassem elevados ângulos de inclinação.

#### 4.1.3 Coeficiente de Atrito de Rolamento

A Tabela 4.9 apresenta as medidas experimentais do coeficiente de atrito de rolamento ( $\mu_R$ ). Percebe-se um alto valor do coeficiente quando se utilizou a camada de esferas de vidro colada ao plano em comparação com as outras superfícies plana (chapa de vidro, chapa de aço e a lixa P80). A diferença no valor se deve à irregularidade da superfície, limitando o rolamento das partículas.

Tabela 4.9: Valores experimentais de coeficiente de atrito de rolamento medido para diferentes superfícies.

Superficie	$\mu_R$
Esfera de vidro	$0,294 \pm 0,045$
Vidro	$0,011 \pm 0,001$
Aço	$0,012 \pm 0,001$
Lixa	$0,054 \pm 0,005$

De forma semelhante ao que foi realizado para a determinação do coeficiente de atrito estático, foram realizadas simulações reproduzindo o aparato experimental utilizado para medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula e partícula parede, conforme ilustrado na Figura 3.13 (a) e Figura 3.13 (b), respectivamente.

Para a execução dos experimentos numéricos foram utilizados os parâmetros DEM listados na Tabela 4.10. O coeficiente de atrito estático partícula-partícula ( $\mu_{spp}$ ) e o coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula ( $\mu_{Rpp}$ ) correspondem aos parâmetros de entrada cujos níveis variaram conforme o PCC representado pela Tabela 4.10. A resposta a ser avaliada é o coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula. Portanto, a simulação exige como parâmetro de entrada, o próprio parâmetro que é medido através do experimento virtual simulado.

O experimento numérico seguiu o mesmo procedimento empregado na medição experimental física, sendo, portanto, uma medida indireta do parâmetro. Nesse sentido, o valor obtido pode não corresponder exatamente ao de entrada utilizado no modelo. O coeficiente ( $\mu_{Rpp}$ ) é parâmetro do modelo usado nos balanços de forças que descrevem a dinâmica da partícula. A solução desse modelo resultará na descrição da dinâmica do material e decidirá como as partículas vão se comportar quando submetidas ao

experimento virtual numérico. Nesse sentido, ao executar o experimento virtual, a medida do  $\mu_{Rpp}$ , que está relacionada à distância percorrida pela partícula sobre a superfície pode não corresponder ao valor implementado como entrada no modelo DEM.

Tabela 4.10: Planejamento Composto Central empregado na simulação, para análise das variáveis significativas da metodologia para medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula.

Simulações	Parâmetros		Resultados da simulação Coeficiente de Atrito Rolamento partícula - partícula
	$\mu_{spp}$	$\mu_{Rpp}$	
1	0,50	0,03	0,13
2	0,50	0,08	0,17
3	0,80	0,03	0,12
4	0,80	0,08	0,17
5	0,49	0,06	0,15
6	0,81	0,06	0,15
7	0,65	0,03	0,12
8	0,65	0,08	0,21
9	0,65	0,06	0,15
10	0,65	0,06	0,15

A Tabela 4.11, apresenta o resultado da análise estatística dos resultados da Tabela 4.10. Percebe-se que ao se reproduzir numericamente o dispositivo de soltura para a medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula ( $\mu_{Rpp}$ ), alterando os parâmetros apresentado no PCC ( $\mu_{spp}$ ,  $\mu_{Rpp}$ ), a variável significativa foi o próprio coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula ( $\mu_{Rpp}$ ). Esta análise demonstra que a metodologia empregada para a medida do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula não sofreu influência do atrito estático.

Tabela 4.11: Variáveis significativas do Planejamento Composto Central empregado na simulação, para medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula.

	Efeito	p
$\mu_{Rpp}$	0,059	$<10^{-4}$
$R^2 = 85\%$		
$\alpha = 5\%$		

Para verificar a influência dos parâmetros numéricos no coeficiente de atrito de rolamento partícula-parede, foi aplicado o PCC apresentado na Tabela 4.12.

Tabela 4.12: Planejamento Composto Central empregado na simulação, para análise das variáveis significativas da metodologia para medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-parede

Simulação	Parâmetros				Resultados da simulação Coeficiente de Atrito Rolamento partícula-parede
	$\mu_{spp}$	$\mu_{spw}$	$\mu_{Rpp}$	$\mu_{Rpw}$	
1	0,50	0,20	0,03	0,02	0,03
2	0,50	0,20	0,03	0,06	0,07
3	0,50	0,20	0,08	0,02	0,03
4	0,50	0,20	0,08	0,06	0,07
5	0,50	0,50	0,03	0,02	0,03
6	0,50	0,50	0,03	0,06	0,08
7	0,50	0,50	0,08	0,02	0,03
8	0,50	0,50	0,08	0,06	0,08
9	0,80	0,20	0,03	0,02	0,03
10	0,80	0,20	0,03	0,06	0,08
11	0,80	0,20	0,08	0,02	0,03
12	0,80	0,20	0,08	0,06	0,07
13	0,80	0,50	0,03	0,02	0,03
14	0,80	0,50	0,03	0,06	0,08
15	0,80	0,50	0,08	0,02	0,03
16	0,80	0,50	0,08	0,06	0,08
17	0,43	0,35	0,06	0,04	0,05
18	0,87	0,35	0,06	0,04	0,05
19	0,65	0,13	0,06	0,04	0,05
20	0,65	0,57	0,06	0,04	0,05
21	0,65	0,35	0,02	0,04	0,05
22	0,65	0,35	0,09	0,04	0,05
23	0,65	0,35	0,06	0,01	0,01
24	0,65	0,35	0,06	0,07	0,09
25	0,65	0,35	0,06	0,04	0,05
26	0,65	0,35	0,06	0,04	0,05

O resultado da análise estatística das simulações da Tabela 4.12 estão apresentados na Tabela 4.13. Nota-se que mesmo variando os outros parâmetros ( $\mu_{spp}$ ,  $\mu_{spw}$  e  $\mu_{Rpp}$ ), o coeficiente de atrito de rolamento partícula-parede foi o único que influenciou significativamente na resposta.

Tabela 4.13: Variáveis significativas do Planejamento Composto Central empregado na simulação, para medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-parede.

Efeito	p
$\mu_{Rpw}$	$0,049 < 10^{-4}$
$R^2 = 99\%$	
$\alpha = 5\%$	

As análises das variáveis significativas dos PCCs das Tabelas 4.10 e 4.12 apresentaram que a metodologia utilizada para medição do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula e partícula-parede não sofre influência de variáveis que fisicamente não deveriam interferir. Deste modo, um processo de calibração, assim como no coeficiente de atrito estático, também foi realizado para o coeficiente de atrito de rolamento (Tabela 4.14).

Como o coeficiente de atrito de rolamento depende da distância que a partícula percorre, ao sair do aparato, até atingir o repouso; diferentes valores de coeficiente de atrito de rolamento foram testados no modelo ( $\mu_R^{Mod}$ ), com o objetivo de encontrar uma distância numérica semelhante à experimental, em cada superfície já mencionada (esfera de vidro, chapa de vidro, chapa de aço e lixa P80).

Pela Tabela 4.14, percebe-se que, para a superfície de esfera de vidro, ao entrar no modelo com um valor de 0,33 de coeficiente de atrito de rolamento ( $\mu_R^{Mod}$ ), a partícula percorreu uma distância de 1,50 cm, do momento em que saiu do aparato virtual até cessar o seu movimento. Esta distância numérica (1,50 cm) bem como o coeficiente de atrito de rolamento obtido na calibração (0,330), estão próximos dos seus respectivos valores encontrados experimentalmente, de 1,70 cm para distância experimental e 0,294 para o coeficiente de atrito de rolamento experimental ( $\mu_R^{Exp}$ ).

Utilizando a chapa de vidro como superfície, para se obter uma distância numérica próxima da distância experimental, foi necessário implementar no modelo DEM o valor de 0,012 de coeficiente de atrito de rolamento ( $\mu_R^{Mod}$ ), que é equivalente ao valor de 0,011 encontrado experimentalmente para o coeficiente de atrito de rolamento ( $\mu_R^{Exp}$ ). Para a chapa de aço e para a lixa P80, os valores encontrados pelo processo de calibração, com intuito de se conseguir uma distância numérica próxima da experimental, foram de 0,010 e 0,044, respectivamente.

Outros valores de coeficiente de atrito de rolamento foram testados no modelo e acarretam em discrepâncias maiores entre as distâncias (experimental e numérica).

Tabela 4.14: Coeficiente de atrito de rolamento encontrado pelo processo de calibração do modelo DEM, para obter a distância numérica semelhante à distância experimental.

Superfície	Distância Experimental (cm)	Coeficiente de Atrito de Rolamento Experimental ( $\mu_R^{Exp}$ )	Coeficiente de Atrito de Rolamento Calibração ( $\mu_R^{Mod}$ )	Distância Numérica (cm)
Esfera de Vidro	1,70	$0,294 \pm 0,045$	0,330	1,50
Vidro	43,48	$0,011 \pm 0,001$	0,012	42,32
Aço	41,67	$0,012 \pm 0,001$	0,010	40,81
Lixa	9,20	$0,054 \pm 0,005$	0,044	11,08

Nota-se, pela Tabela 4.14, que em todas as superfícies, para as partículas percorrerem na simulação uma distância semelhante da encontrada experimentalmente, os valores utilizados como entrada no modelo numérico para o coeficiente de atrito de rolamento foram semelhantes aos encontrados experimentalmente. Demonstrando que o modelo empregado apresentou uma boa concordância com dos dados experimentais.

## 4.2 Análise dos parâmetros numéricos no efeito *bulk* em um tambor rotatório

Os valores individuais dos coeficientes de restituição, atrito estático e atrito de rolamento, medidos experimentalmente, não garantem que haverá uma representação adequada quando analisados em conjunto no leito de partículas (*bulk*), no interior do tambor rotatório.

Para a verificação da influência dos coeficientes medidos experimentalmente no *bulk* do tambor rotatório, foram realizadas simulações utilizando esferas de vidro de 4,22 mm e grãos de soja de 6,39 mm de diâmetro, no grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 1,45 rad/s (referente ao regime de rolamento), como apresentado na Figura 4.3. Foram utilizados como entrada no modelo, tanto para a soja quanto para as esferas de vidro, os dados medidos experimentalmente dos coeficientes, que estão apresentados na Tabela 4.15 para esfera de vidro.

Tabela 4.15: Valores dos parâmetros medidos experimentalmente utilizados na simulação DEM.

Coeficientes	Partícula-Partícula	Partícula-Parede
Restituição	0,810	0,690
Atrito Estático	0,800	0,490
Atrito de Rolamento	0,294	0,054

Os valores experimentais arredondados do coeficiente de restituição, 0,81 e 0,69, foram escolhidos levando em consideração o diâmetro da partícula de 4,22 mm e a espessura de 2 mm do tambor, respectivamente, conforme apresentado nas Tabelas 4.1 e 4.2. Para o coeficiente de atrito estático e de rolamento partícula-partícula foram utilizados os resultados referentes à metodologia da camada de partícula, enquanto para o partícula-parede os valores atribuídos foram os da lixa P80, que foi utilizada como revestimento interno do tambor pelos autores Santos *et al.* (2015) e Santos *et al.* (2013), com a finalidade de evitar o deslizamento.

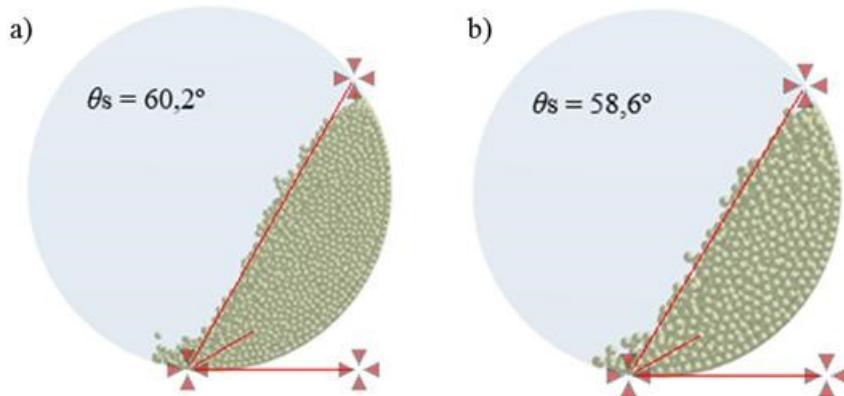


Figura 4.3: Simulação do tambor rotatório para o grau de preenchimento de 18.81% e velocidade de rotação 1,45 rad/s - a) esfera de vidro; b) partículas de soja.

Nas Figuras 4.3 (a) e (b), percebe-se que algumas partículas se desprenderam do leito granular, demonstrando assim uma transição entre os regimes de cascateamento e catarateamento e não o regime de rolamento, que era esperado devido à baixa velocidade de rotação utilizada. Credita-se essa mudança de comportamento ao alto valor imposto ao coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula (0,294). Essa elevada resistência faz

com que as partículas só consigam rolar umas sobre as outras quando o leito atinge elevados ângulos de repouso ( $\theta_s$ ).

A priori, quando se utilizaram os valores das medidas experimentais dos coeficientes de restituição, atrito estático e atrito de rolamento, como entradas no modelo numérico, para representar o comportamento *bulk* do tambor rotatório, não se obteve um resultado satisfatório. Deste modo, foi realizado o processo de calibração utilizando como auxílio às combinações dos níveis da Tabela 3.4, para obter uma combinação de parâmetros, que consiga reproduzir de maneira adequada o movimento das partículas no interior do tambor rotatório.

As distribuições de velocidade da fase sólida (soja e vidro) simuladas que apresentavam o regime de rolamento, foram comparadas com os dados experimentais retratados nos trabalhos de Santos *et al.* (2013) e Santos *et al.* (2015). Na Tabela 4.16 constam as simulações, para cada condição operacional, que melhor descreveram o perfil de velocidade simulado quando comparados com o experimental. Destaca-se para a soja a simulação 14, cuja combinação de parâmetros de acordo com a Tabela 3.4 é  $\mu_{spp} = 0,80$ ,  $\mu_{spw} = 0,50$ ,  $\mu_{Rpp} = 0,03$  e  $\mu_{Rpw} = 0,06$ , e a simulação 25,  $\mu_{spp} = 0,65$ ,  $\mu_{spw} = 0,35$ ,  $\mu_{Rpp} = 0,06$  e  $\mu_{Rpw} = 0,04$ .

Tabela 4.16: Simulações que melhor representaram os perfis de velocidade para as condições operacionais da soja e da esfera de vidro.

Material	Grau de Preenchimento (%)	Velocidade de Rotação (rad/s)	Melhores Simulações
Particulado			
Soja	18,81	0,71	13, <b>14</b> , 22, 23, 24, <b>25</b>
		1,45	<b>14</b> , 15, 18, 20, <b>25</b>
	31,40	0,71	13, <b>14</b> , 15, 21, <b>25</b>
		1,45	5, <b>14</b> , 18, 24, <b>25</b>
Esfera de Vidro	18,81	1,45	<b>14</b> , 17, 18, 20, 23, 25
		2,31	<b>14</b> , 15, 18, 21, 25
		3,14	<b>14</b> , 23

A Figura 4.4 apresenta um comparativo entre as duas simulações para 18,81% e 0,71 rad/s para a soja. Ressalta-se que todos os gráficos apresentados a seguir, os perfis de velocidade foram normalizados, com a finalidade de facilitar as comparações entre eles.

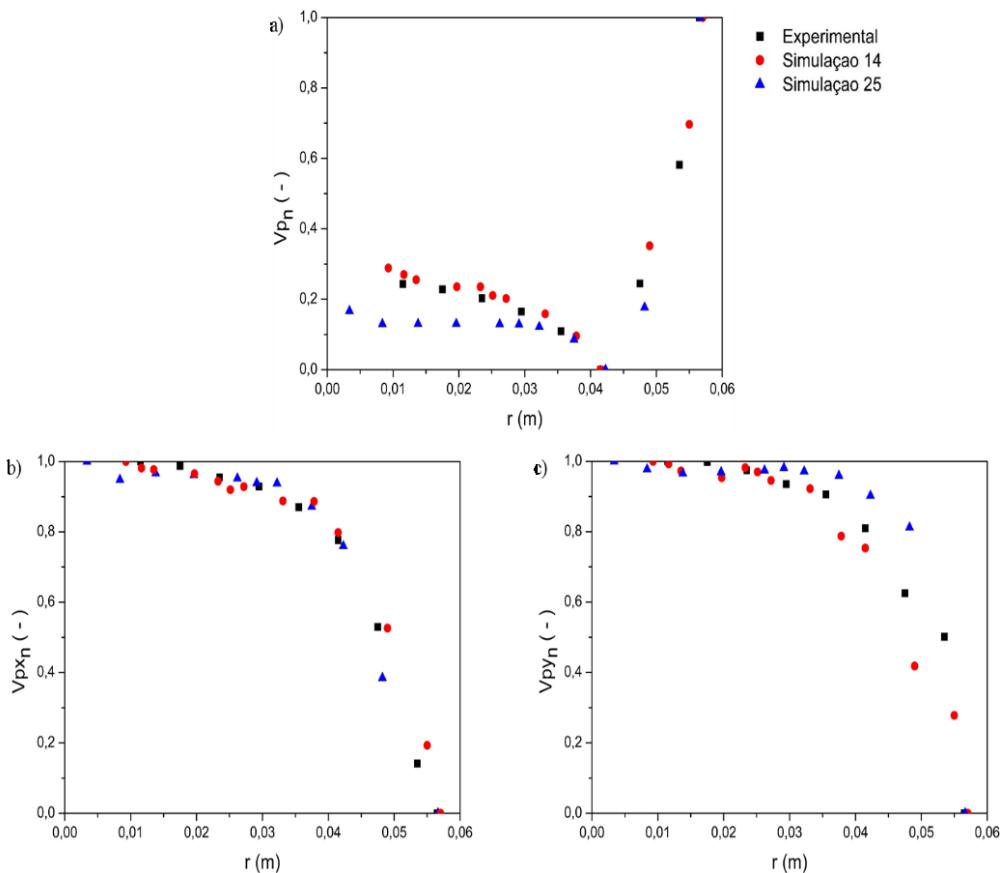


Figura 4.4: Comparação dos perfis de velocidade normalizados da soja das simulações 14 e 25 com os valores experimentais – a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y.

Os perfis de velocidade apresentados pela Figura 4.4 para ambas as simulações, 14 e 25, apresentaram boa concordância quando comparados com o experimental, entretanto a da simulação 14 ficou mais próxima aos dados experimentais.

Ao realizar a análise para as partículas de vidro, de acordo com a Tabela 4.16, observa-se que somente as combinações de parâmetros da simulação 14 conseguiram representar satisfatoriamente todo o conjunto de dados experimentais.

Mesmo o modelo tendo sido desenvolvido para dar um significado físico para os parâmetros, a calibração *bulk* leva em consideração os efeitos combinados dos coeficientes e por conta disto, é comumente encontrado na literatura autores utilizando-os como parâmetros de ajuste, sendo entretanto, muita das vezes os valores encontrados fisicamente inconsistentes (COETZEE, 2017; MARIGO e STITT, 2015). A Tabela 4.17 apresenta uma comparação com os valores dos coeficientes encontrados na simulação 14 e os medidos experimentalmente.

Tabela 4.17: Comparação entre os valores de parâmetros encontrados na simulação 14 com os medidos experimentalmente.

Coeficiente	Superfície	Parâmetros Medidos	Simulação 14
$\mu_{spp}$	Esfera de Vidro	$0,80 \pm 0,07$	0,80
$\mu_{spw}$	Lixa	$0,49 \pm 0,06$	0,50
$\mu_{Rpp}$	Vidro	$0,011 \pm 0,001$	0,03
$\mu_{Rpw}$	Lixa	$0,054 \pm 0,005$	0,06

Como pode ser visto na Tabela 4.17, os valores encontrados na simulação 14 para o coeficiente de atrito estático partícula-partícula e partícula-parede ( $\mu_{spp}$ ,  $\mu_{spw}$ ) e para o atrito de rolamento partícula-parede ( $\mu_{Rpw}$ ), foram próximos aos dos parâmetros medidos experimentalmente, demonstrando que em todas as condições operacionais impostas foram preservadas as suas propriedades físicas. Esta análise é importante, visto que, até o momento, não se encontra na literatura nenhum trabalho que confronta, de forma individual, os valores dos coeficientes obtido pelo processo de calibração com os seus valores experimentais.

Como o rolamento de uma esfera de vidro sobre um plano acontece em um único ponto, utiliza-se do conceito de raio infinito. Assim, destaca-se na Tabela 4.17, para simulação 14, que o valor de 0,03 do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula ( $\mu_{Rpp}$ ) foi comparado com o valor medido experimental referente a chapa de vidro, permitindo observar uma diferença entre os valores.

Para verificar a influência de  $\mu_{Rpp}$  no comportamento do leito, os parâmetros medidos experimentalmente apresentados na Tabela 4.17 foram implementados no modelo. As simulações foram realizadas para as partículas de soja e de vidro e seus respectivos perfis de velocidade foram comparados com os obtidos a partir de dados experimentais e com a abordagem Euleriana reportados por Santos *et al.* (2013) e Santos *et al.* (2015), bem como com a simulação 14.

As Figuras 4.5-4.7, apresentam o comparativo dos resultados das esferas de vidro, em um grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 1,45, 2,31 e 3,14 rad/s, respectivamente.

Para ambas as combinações de parâmetros utilizados na abordagem Lagrangeana, ou seja da simulação 14 e dos parâmetros medidos, observa uma boa concordância com os dados da literatura (experimental e Euleriano).

Percebe-se que os perfis de velocidade apresentaram comportamentos semelhantes, podendo identificar no regime de rolamento a camada passiva, em que as partículas

movimentam-se lentamente, como um corpo sólido, no sentido da rotação do tambor próximas a parede. A interface das regiões, é correspondida pela velocidade nula e a região da camada ativa, se destaca pelos elevados valores de velocidade próximos a superfície do leito em um movimento convectivo contrário a rotação do tambor.

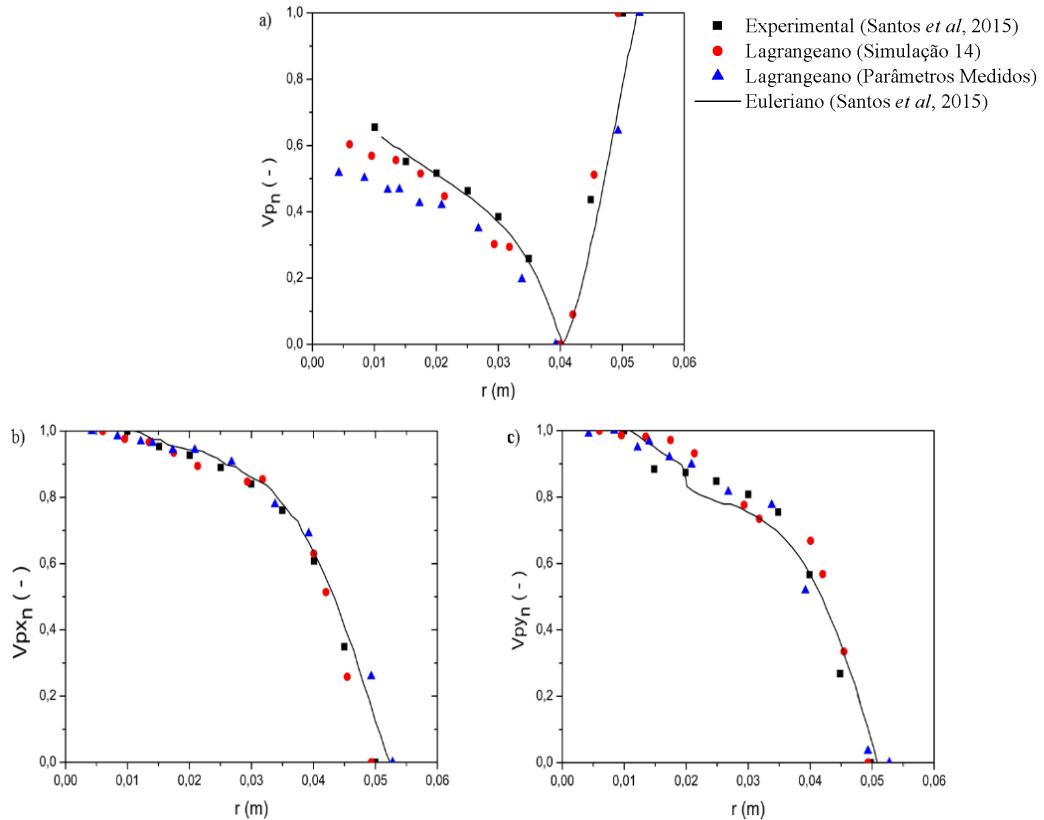


Figura 4.5: Perfis de velocidade normalizado das partículas de vidro para o grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 1,45 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y.

Para o grau de preenchimento de 18,81%, o aumento das velocidades de rotação do tambor, tanto para o experimental quanto para o simulado, não exerceu influência no perfil de velocidade, preservando o comportamento característico do regime de rolamento com as regiões ativa e passiva bem definidas. Porém, observa que essa alteração de velocidade ocasionou uma antecipação da interface das camadas, alterando suas respectivas espessuras. O ponto de inflexão mudou de 4 cm na velocidade de rotação de 1,45 rad/s para 3,8 cm na velocidade de 3,14 rad/s.

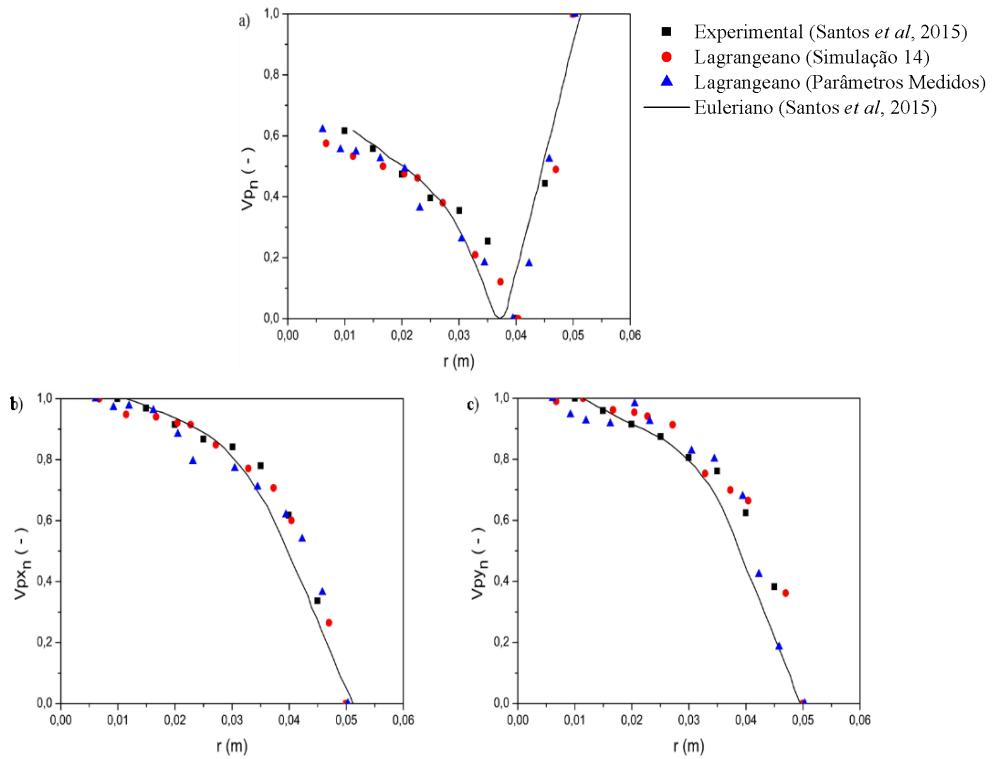


Figura 4.6: Perfis de velocidade normalizado das partículas de vidro para o grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 2,31 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y.

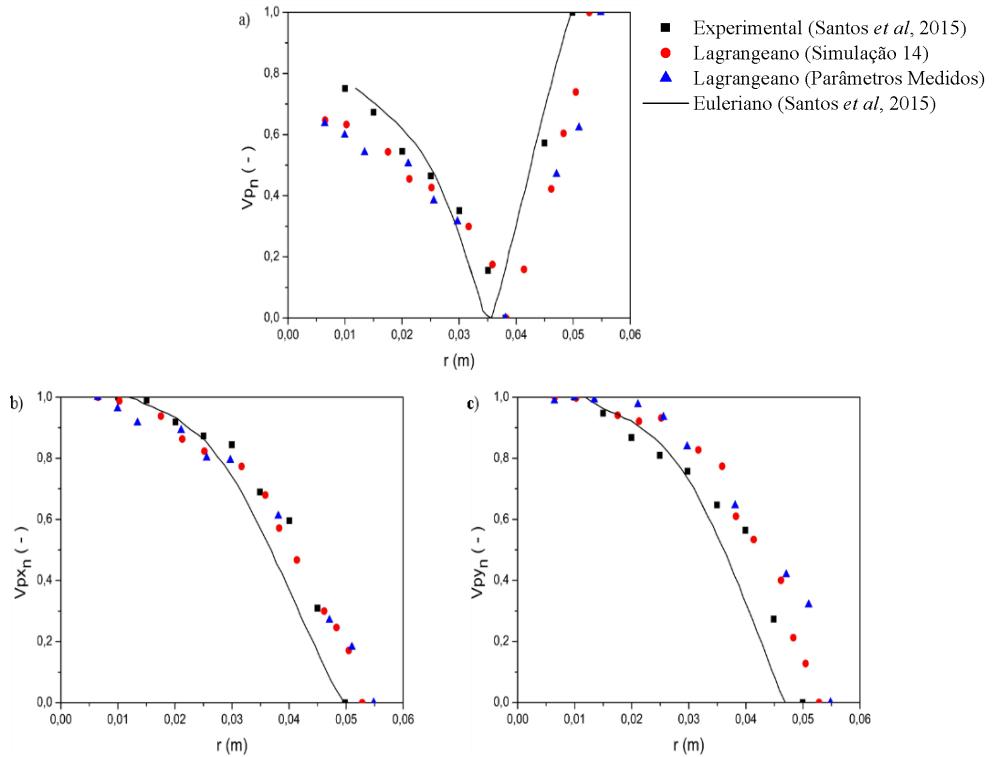


Figura 4.7: Perfis de velocidade normalizado das partículas de vidro para o grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 3,14 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y.

As Figuras 4.8 e 4.9, exibem a comparação dos resultados numéricos da abordagem Lagrangeana (simulação 14 e parâmetros medidos), com os dados reportados pela literatura, tanto experimental quanto numérico (abordagem Euleriana), para partículas de soja em um tambor rotatório com grau de preenchimento de 18,81% e velocidades de rotação de 0,71 e 1,45 rad/s.

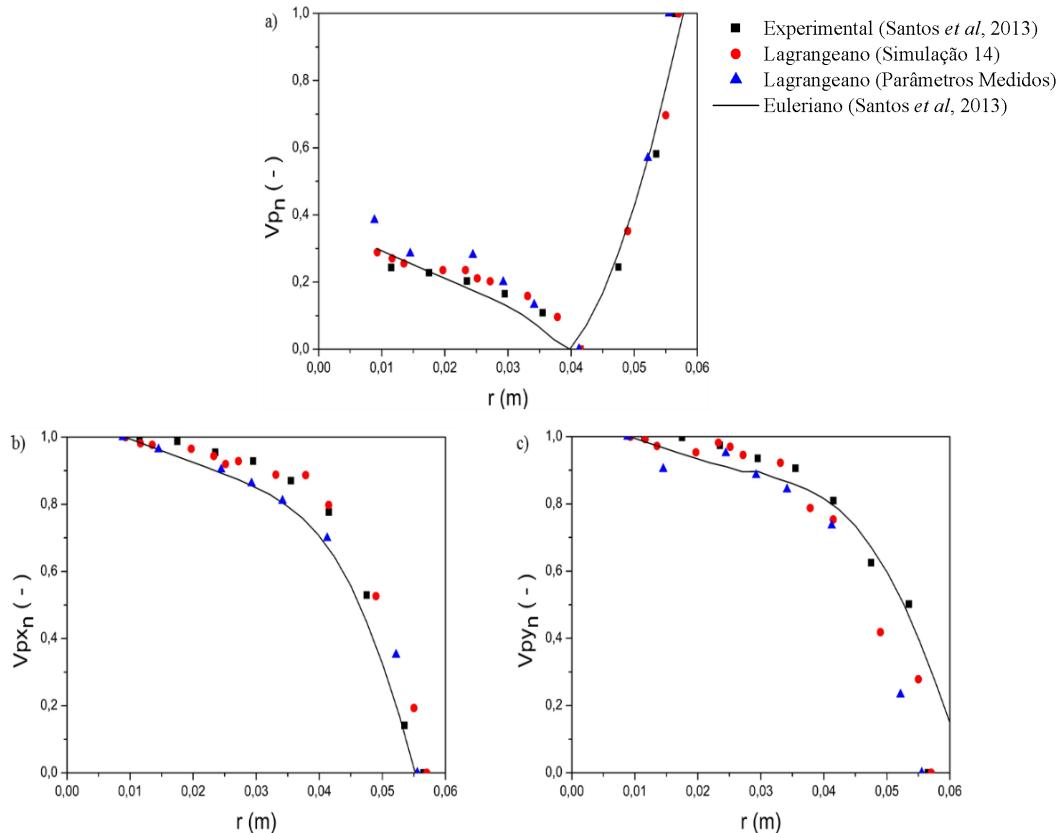


Figura 4.8: Perfis de velocidade normalizado das partículas de soja para o grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 0,71 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y.

Mesmo utilizando um material de propriedades físicas diferentes (soja), as combinações de parâmetros, adotadas pelo processo de calibração (simulação 14) e os valores medidos experimentalmente, continuaram apresentando de maneira satisfatória o perfil de velocidade no regime de rolamento. Sendo possível visualizar, de forma bem definida, as camadas ativas e passivas e a interface entre elas.

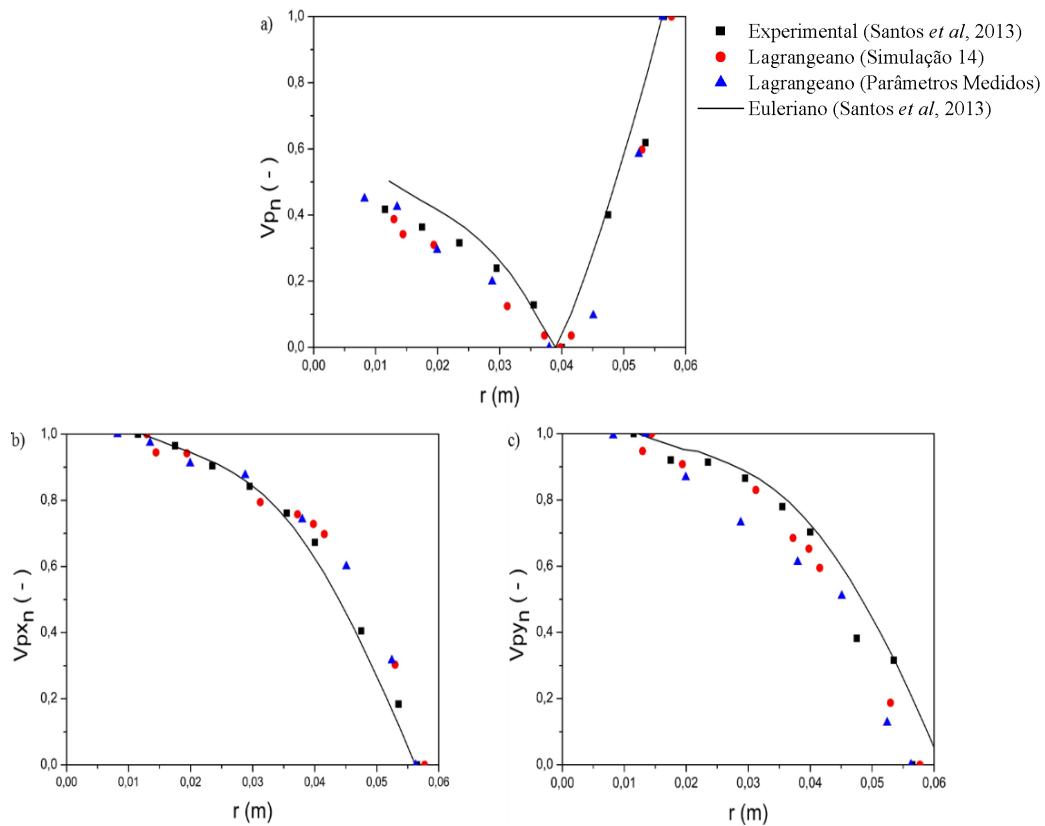


Figura 4.9: Perfis de velocidade normalizado das partículas de soja para o grau de preenchimento de 18,81% e velocidade de rotação de 1,45 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y.

As Figuras 4.10 e 4.11, apresentam o mesmo comparativo da partícula de soja, só que para o grau de preenchimento de 31,40%, nas velocidades de rotação de 0,71 e 1,45 rad/s.

Analizando as duas abordagens, Lagrangeana e Euleriana, nota-se que ambas apresentaram resultados satisfatórios para descrever o perfil de velocidade referente ao regime de rolamento para partículas de vidro e soja.

A abordagem Lagrangeana, de modo geral, demonstrou uma melhor capacidade preditiva para velocidade radial das partículas, quando comparado com a abordagem Euleriana. Este método se destaca pela possibilidade de utilização de partículas irregulares e por realizar o balanço de força individualmente em cada partícula, acompanhando-as contato por contato. Assim, é possível trabalhar com informações em nível microscópico das propriedades das partículas, permitindo uma melhor compreensão acerca da dinâmica das partículas no interior do tambor rotatório.

Na abordagem Euleriana, um conjunto de equações diferenciais expressando a conservação da quantidade de massa, energia e movimento é resolvida de forma contínua no espaço e no tempo, o que em simulações em grande escala reduz bastante o tempo computacional, principalmente devido à não dependência com o número de partículas. A sua menor dependência com parâmetros, faz com que não seja necessário um processo de calibração, diminuindo assim, também, significativamente o número de simulações. No entanto, essa abordagem possui algumas limitações, visto que só é possível simular partículas esféricas, além de possuir a desvantagem de não permitir a visualização de cada partícula individual em suas respostas gráficas, o que dificulta a análise do escoamento das partículas.

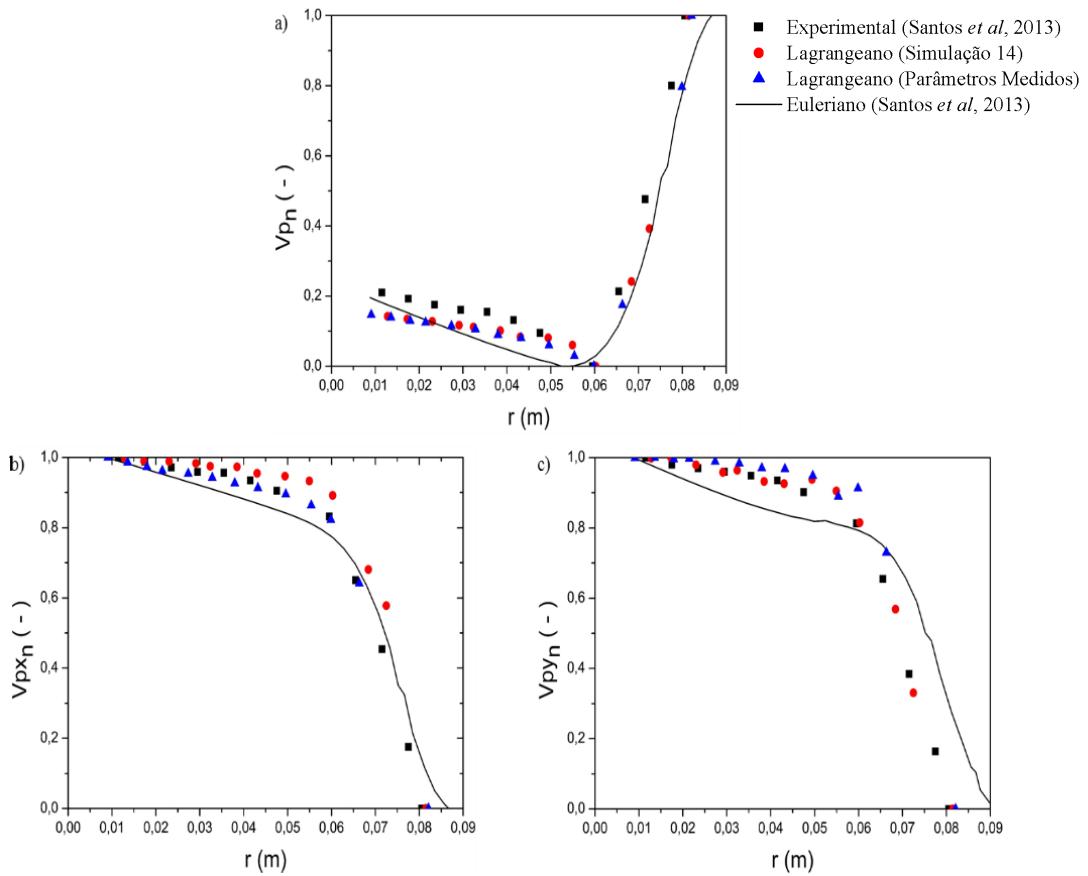


Figura 4.10: Perfis de velocidade normalizado das partículas de soja para o grau de preenchimento de 31,40% e velocidade de rotação de 0,71 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y.

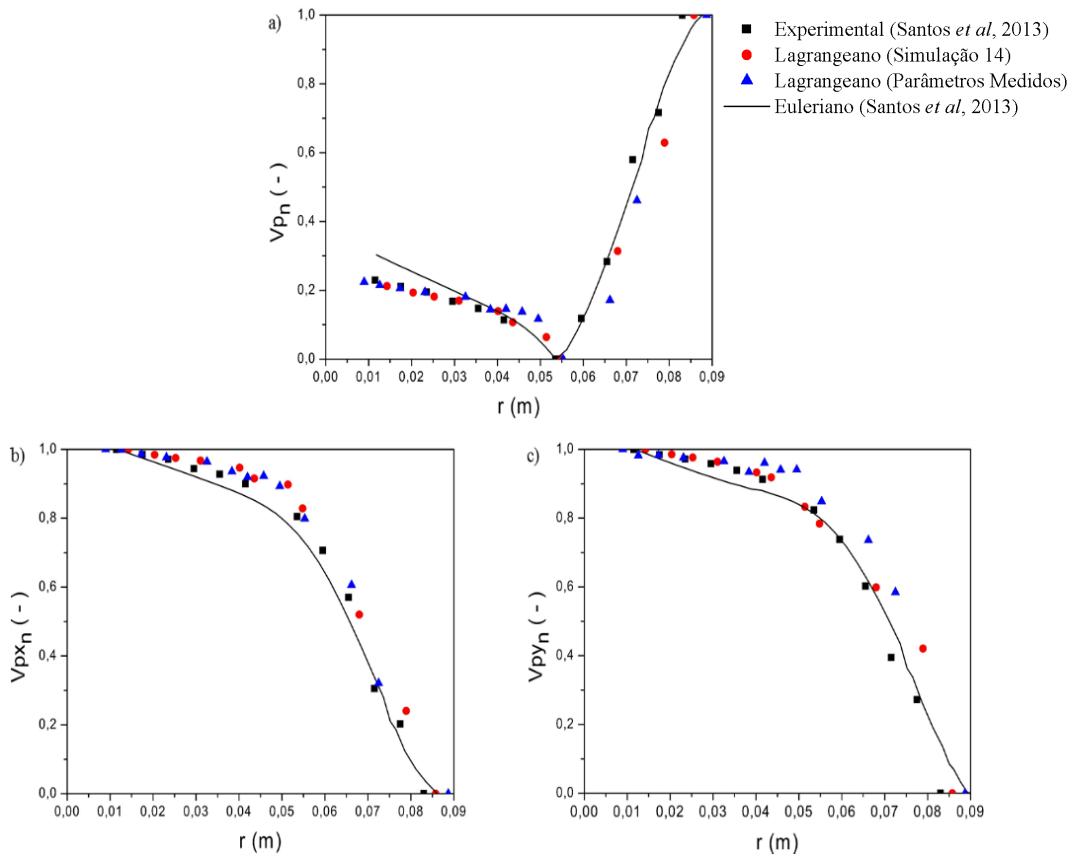


Figura 4.11: Perfis de velocidade normalizado das partículas de soja para o grau de preenchimento de 31,40% e velocidade de rotação de 1,45 rad/s - a) velocidade resultante; b) componente da velocidade da direção x; c) componente velocidade na direção y.

Para as partículas de soja, assim como para as partículas de vidro, observa-se uma pequena alteração na posição da interface das camadas passiva-ativa com o aumento da velocidade de rotação. Esta mudança do ponto de inflexão é mais evidente quando se analisa o efeito do grau de preenchimento.

Destaca-se que a abordagem Lagrangeana, quando comparado com os dados experimentais, conseguiu prever precisamente a posição dos pontos de inflexão das camadas passiva e ativa, em todas as figuras anteriores (Figuras 4.5-4.11). Então, a simulação 14 foi utilizada para verificar a influência das condições operacionais, grau de preenchimento e velocidade de rotação, no perfil de velocidade da soja, conforme apresentado pelas Figuras 4.12 e 4.13, respectivamente. Para tal, foi verificado o aumento e/ou diminuição das espessuras da camada ativa e passiva, bem como a razão entre elas.

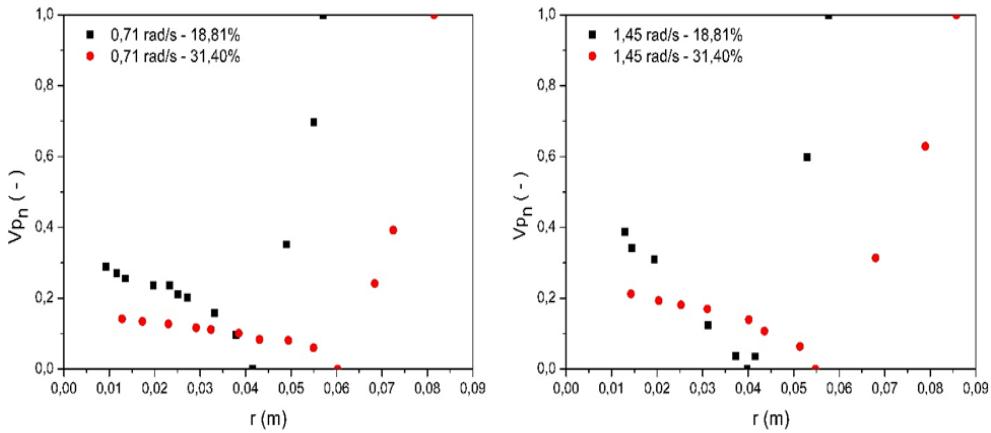


Figura 4.12: Simulação 14: Comparação dos perfis de velocidade normalizado da soja variando o grau de preenchimento de 18,81% para 31,40% - a) velocidade de rotação de 0,71 rad/s; b) velocidade de rotação de 1,45 rad/s.

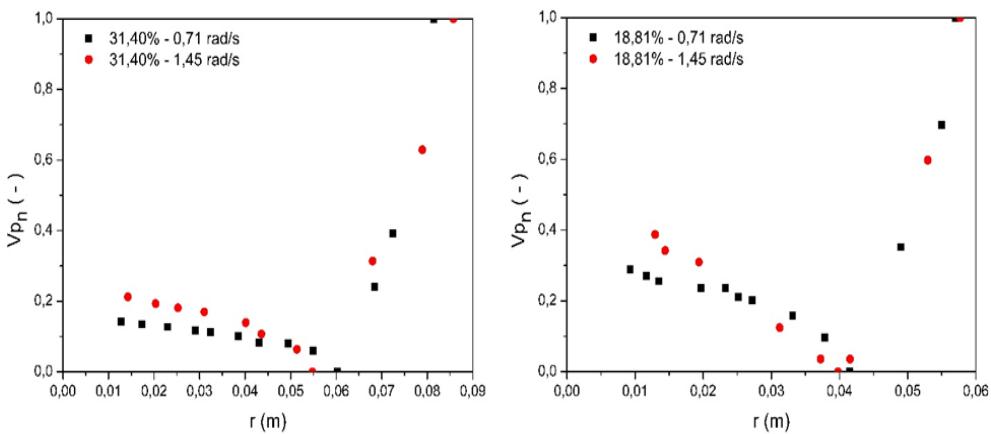


Figura 4.13: Simulação experimental: Comparação dos perfis de velocidade normalizado da soja variando a velocidade de rotação de 0,71 para 1,45 rad/s - a) grau de preenchimento de 18,81%; b) grau de preenchimento de 31,40%.

A espessura da camada passiva foi calculada pela diferença da posição radial, da partícula mais próxima a parede do tambor até o ponto de inflexão (partícula com velocidade nula) com a camada ativa. Já a espessura da camada ativa, foi calculada pela distância da posição radial do ponto de inflexão até a posição da partícula que delimita a superfície do leito com o espaço vazio do tambor.

Observa-se, nas Figuras 4.12 e 4.13, que a mudança do grau de preenchimento acarretou uma maior influência nas espessuras das camadas ativa e passiva quando comparado com a velocidade de rotação.

Para a velocidade de 0,71 rad/s, quando se alterou o preenchimento de 18,81% para 31,40% o ponto de inflexão do perfil de velocidade mudou de 4,15 cm para 6,02 cm, enquanto para a velocidade de 1,45 rad/s essa variação foi de 3,98 cm para 5,48 cm. A

Tabela 4.18 apresenta de modo mais detalhado a influência da variação do grau de preenchimento na razão da camada ativa e passiva.

Tabela 4.18: Influência do grau de preenchimento na espessura da camada ativa e passiva para a soja.

Velocidade de Rotação (rad/s)	Grau de Preenchimento (%)	Espessura da camada (cm)		Razão (A/P)	
		Passiva (P)	Ativa (A)		
0,71	18,81	3,22	1,55	0,48	-6,25%
	31,40	4,74	2,12	0,45	
1,45	18,81	2,68	1,79	0,67	+11,18%
	31,40	4,05	3,09	0,76	

Para a velocidade de 0,71 rad/s, ao elevar o número de partículas no interior do leito, de 18,81% para 31,40%, a espessura da camada passiva teve um aumento maior que o da camada ativa, resultando em uma diminuição de 6,25% na razão entre as camadas. Já para velocidade de 1,45 rad/s essa razão apresentou um aumento de 11,18%. Essa mudança de comportamento pode ser explicada analisando os ângulos de repouso referente a cada simulação, que são apresentados na Tabela 4.19.

Tabela 4.19: Ângulo de repouso referente a cada condição operacional.

Velocidade de Rotação (rad/s)	Ângulo de Repouso	
	18,81%	31,40%
0,71	35,50°	35,80°
1,45	36,10°	39,10°

A camada ativa é caracterizada por possuir maiores valores de velocidade de partículas. Deste modo, para a velocidade de rotação de 1,45 rad/s, a diferença de três graus no ângulo de repouso, na alteração do grau de preenchimento, resultou em um aumento da cinética das partículas e consequentemente em uma maior espessura da camada ativa. Já para a velocidade de 0,71 rad/s, a redução de 6,25% da razão da camada ativa-passiva, é explicada porque o aumento do grau de preenchimento não ocasionou mudanças significativas na inclinação do leito, fazendo com que as partículas se concentrassem mais na região passiva. Liu *et al.* (2005) explicam que o aumento do grau de preenchimento torna o ângulo de repouso dinâmico mais suscetível às variações de velocidade de rotação, corroborando com os resultados apresentados.

Uma análise semelhante foi realizada para a variação da velocidade de rotação. Para isso, a estrutura da Tabela 4.18 foi alterada a fim de facilitar a comparação dos resultados, como pode ser visualizado pela Tabela 4.20.

Tabela 4.20: Influência da velocidade de rotação na espessura da camada ativa e passiva.

Grau de Preenchimento (%)	Velocidade de Rotação (rad/s)	Espessura da camada(cm)		Razão (A/P)	
		Passiva (P)	Ativa (A)		
18,81	0,71	3,22	1,55	0,48	+37,50%
	1,45	2,68	1,79	0,66	
31,40	0,71	4,74	2,12	0,44	+72,72%
	1,45	4,05	3,09	0,76	

A elevação da velocidade de rotação do tambor, promove a dinâmica das partículas, fazendo com que um maior número de sólidos adentre na região ativa, elevando assim a razão das camadas. O aumento de 72,72% encontrado para o maior grau de preenchimento, deve-se a diferença encontrada no ângulo de repouso, conforme relatado anteriormente.

A seguir é apresentado uma comparação qualitativa da abordagem Lagrangeana, para as combinações dos parâmetros medidos e da simulação 14, com o resultado experimental apresentado no trabalho de Santos *et al.* (2013), avaliado para as velocidades de 1,45, 4,08, 8,91 e 16,40 rad/s nos graus de preenchimento de 18,81% e 31,40%.

As Figuras 4.14 e 4.15 apresentam a distribuição da fase sólida, experimental e numérica, para o grau de preenchimento de 18,81% e 31,40%, respectivamente.

Uma boa concordância para ambas as simulações com as imagens experimentais em praticamente todas as condições testadas. Destaca-se apenas à simulação da velocidade de 16,40 rad/s com 18,81% de preenchimento, na qual as partículas se aderiram completamente na parede do tambor, formando um único anel. Enquanto que, na imagem obtida experimentalmente, elas estão sendo lançadas para o espaço vazio do tambor. Santos *et al.* (2013), adotaram que, para caracterizar o regime de centrifugação, é necessário somente uma fina cada de partículas aderidas a parede do tambor, o que, segundo os autores foi evidenciado na imagem experimental.

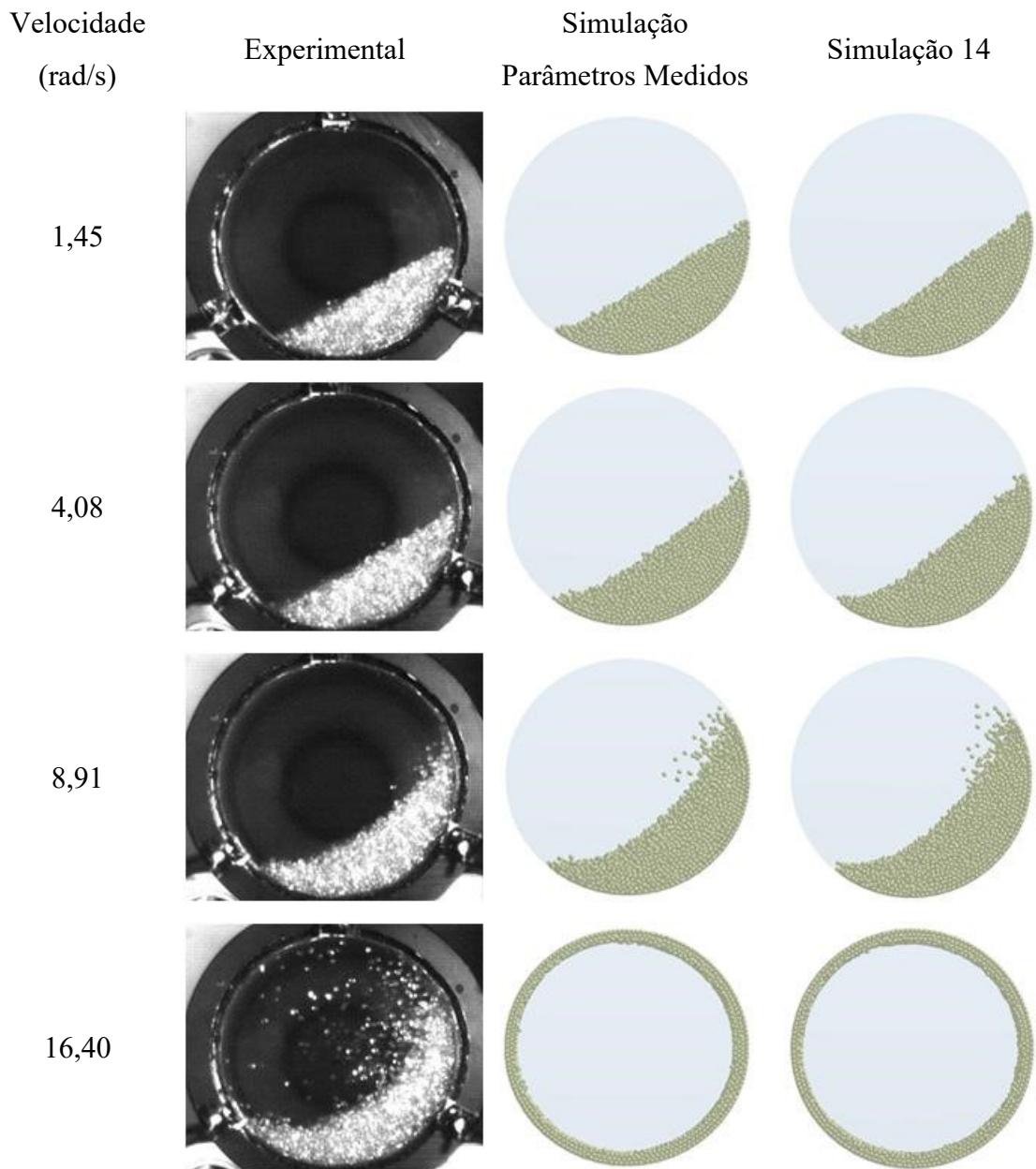


Figura 4.14: Representação dos diferentes regimes de escoamento, experimentais e numéricos, para esferas de vidro de 4,22 mm: grau de preenchimento de 18,81% e velocidades de rotação de 1,45, 4,08, 8,91 e 16,40 rad/s.

A presença da centrifugação formando um único anel nas simulações Lagrangeanas pode ser explicada pela utilização de um tambor reduzido de 10 cm e não os 50 cm empregados por Santos *et al.* (2013). Yang *et al.* (2008), relataram em seu trabalho, que para uma mesma velocidade de rotação (40 rpm), o tambor de comprimento reduzido, antecipou o regime de escoamento, visto que apresentou em maior evidência o formato de “S” no leito, caracterizando o regime de cascateamento, enquanto que para o tambor de maior comprimento, a superfície do leito encontrava-se plana.

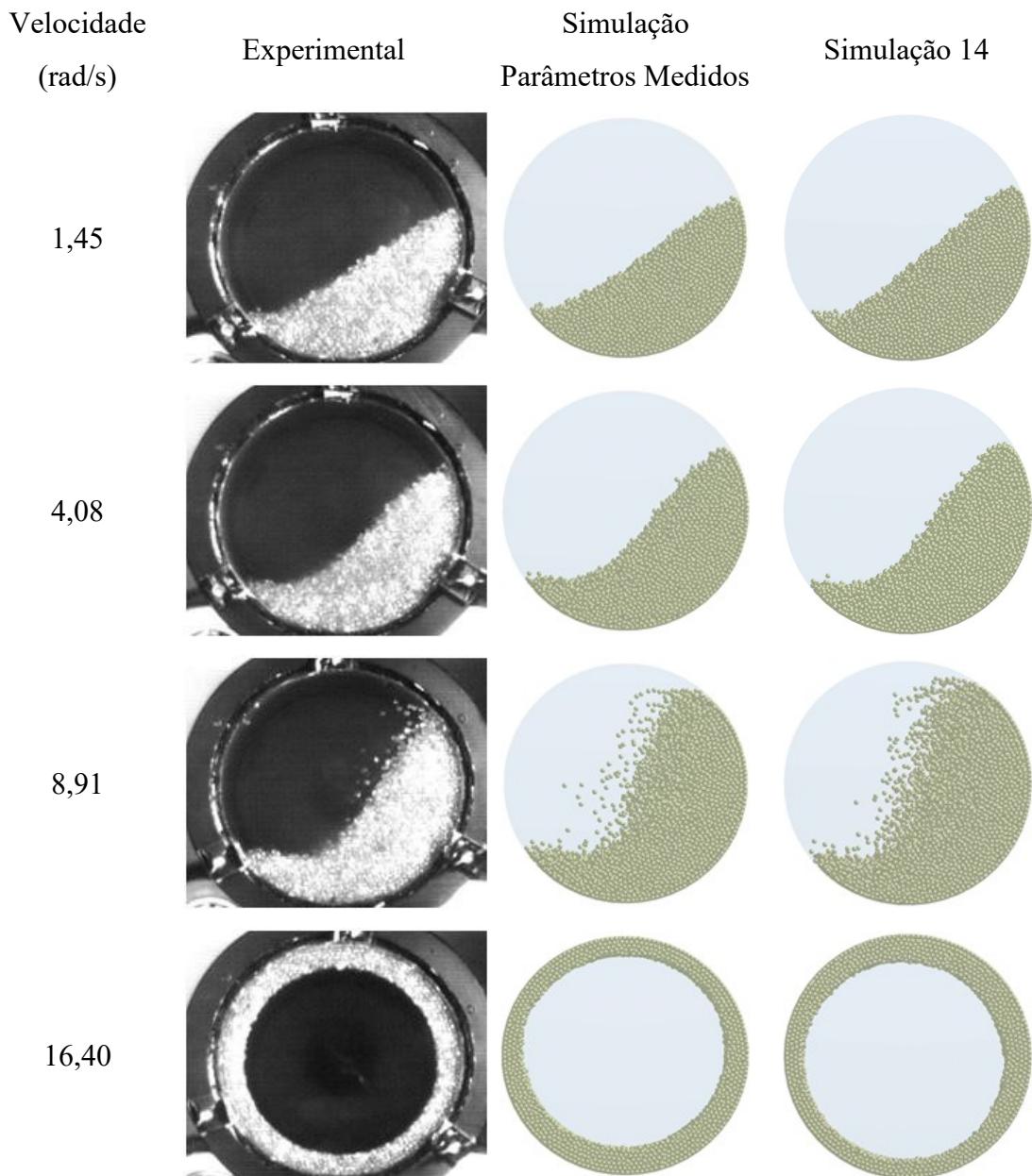


Figura 4.15: Representação dos diferentes regimes de escoamento, experimentais e numéricos, para esferas de vidro de 4,22 mm: grau de preenchimento de 31,40% e velocidades de rotação de 1,45, 4,08, 8,91 e 16,40 rad/s.

Analizando os regimes de escoamento apresentados nas Figuras 4.14 e 4.15, observa-se que o regime de rolamento está presente na velocidade de rotação de 1,45 rad/s. Mellmann (2001) ressalta que esse regime apresenta uma inclinação constante e é o de maior interesse industrial, pois propicia condições favoráveis para a transferência de calor e massa em processos industriais.

A medida que a velocidade do tambor vai aumentando, a inclinação do leito aumenta simultaneamente, alcançando o regime de cascateamento na velocidade de 4,08

rad/s. Quando as partículas começam a se desprender do leito e serem projetas para o espaço vazio do tambor, caracteriza-se o regime de catarateamento na condição de 8,91 rad/s. Por fim, como já foi discutido, quando todas as partículas ou quando somente uma parte delas se aderem a parede do tambor, o regime de centrifugação fica evidenciado. Percebe-se que na abordagem Lagrangeana, tanto os parâmetros medidos quanto a combinação proposta pela simulação 14, conseguiram representar de forma coesa todas as condições operacionais que lhes foi imposta.

# CAPÍTULO 5

## CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 5.1 Conclusões

Quanto ao estudo dos parâmetros numéricos e suas respectivas metodologias:

- Os valores de coeficiente de restituição para esferas de vidro sofreram influência da espessura e do tipo do material em que ocorria as colisões, demonstrando a necessidade do conhecimento do equipamento em que está se trabalhando;
- Mesmo superestimando um pouco os valores experimentais o modelo de Zener (1941) conseguiu representar de forma coerente o comportamento do coeficiente de restituição de esferas de vidro colidindo em superfícies de vidro e de aço de diferentes espessuras;
- Os valores encontrados para o coeficiente de atrito estático nas diferentes superfícies analisadas foram superiores para as partículas agrupadas quando comparado com as partículas soltas;
- A análise do Planejamento Composto Central mostrou a eficácia dos aparelhos experimentais em medir o coeficiente de atrito estático, desde que sejam utilizados as esferas agrupadas e o coeficiente de atrito de rolamento, tanto partícula-partícula quanto partícula-parede.
- Com a confirmação dos aparelhos experimentais pelo PCC, o processo de calibração demonstrou uma boa precisão do modelo *DEM*.

Em relação a análise do efeito dos parâmetros no *bulk* do material, destaca-se as seguintes conclusões:

- O valor de coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula (0,294) encontrado utilizando a camada de partículas foi extremamente alto quando aplicado no tambor rotatório;
- Destaca-se que as combinações de coeficientes adquiridos pelo processo de calibração,  $\mu_{spp} = 0,80$ ,  $\mu_{spw} = 0,50$ ,  $\mu_{Rpp} = 0,03$  e  $\mu_{Rpw} = 0,06$ , conseguiram manter os seus significados físicos, visto que os valores encontrados foram próximos quando medido experimentalmente, é  $\mu_{spp} = 0,80$ ,  $\mu_{spw} = 0,49$ ,  $\mu_{Rpp} = 0,011$  e  $\mu_{Rpw} = 0,054$ .
- Os parâmetros encontrados experimentalmente, assim como os obtidos pelo processo de calibração demonstraram ser excelentes valores de entrada na abordagem lagrangeana, visto que conseguiram reproduzir de forma satisfatória todas as condições operacionais impostas quando comparados com os perfis de velocidade experimental e da abordagem euleriana;

## 5.2 Sugestões de trabalhos futuros

- Medição dos parâmetros numéricos, parâmetros numéricos, coeficiente de restituição, atrito estático e atrito de rolamento, utilizando diferentes metodologias;
- Desenvolver metodologias para a medição dos parâmetros numéricos para partículas irregulares;
- Desenvolver um modelo para a determinação do coeficiente de atrito;
- Verificar os regimes de transição para partículas de diferentes densidades e diâmetros, variando o grau de preenchimento e o comprimento do tambor;
- Investigar a rugosidade da parede do tambor nos regimes de escoamento;

- Classificar os diferentes regimes de escoamento através do número de contatos entre as partículas utilizando a abordagem lagrangeana;
- Analisar a razão de espessura da camada ativa com a passiva para vários graus de preenchimento.

## CAPÍTULO 6

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALCHIKH-SULAIMAN, B.; ALIAN, M.; EIN-MOZAFFARI, F.; LOHI, A.; UPRETI, S. R. Using the discrete element method to assess the mixing of polydisperse solid particles in a rotary drum. *Particuology*, v. 25, p. 133–142, 2016.  
<https://doi.org/10.1016/j.partic.2015.05.006>
- ARYAEI, A.; HASHEMNIA, K.; JAFARPUR, K. Experimental and numerical study of ball size effect on restitution coefficient in low velocity impacts. *International Journal of Impact Engineering*, v. 37, n. 10, p. 1037–1044, 2010.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2010.04.005>
- ASM HandBook. Friction, lubrication and wear technology. ASM International HandBook Committee, v. 18, 1992.
- ASTM G115-10. Standard guide for measuring and reporting friction coefficients. 2013.
- ASTM G194-08. Standard test method for measuring rolling friction characteristics of a spherical shape on a flat horizontal plane. 2013.
- BERNSTEIN, D. A. Listening to the coeficiente of restitution. *American Journal of Physics*, v. 45, p. 41, 1977.  
<https://doi.org/10.1119/1.10904>
- BIAN, X.; WANG, G.; WANG, H.; WANG, S.; WEIDONG, L. Effect of lifters and mill speed on particle behaviour, torque, and power consumption of a tumbling ball mill: Experimental study and DEM simulation. *Minerals Engineering*, v. 105, p. 22–35, 2017.  
<https://doi.org/10.1016/j.mineng.2016.12.014>
- BÖRNER, M.; BÜCK, A.; TSOTSAS, E. DEM-CFD investigation of particle residence time distribution in top-spray fluidised bed granulation. *Chemical Engineering Science*, v. 161, p. 187–197, 2017.  
<https://doi.org/10.1016/j.ces.2016.12.020>
- BORTOLOTTI, C. T.; SANTOS, K. G.; FRANCISQUETTI, M. C. C.; DUARTE, C. R.; BARROZO, M. A. S. Hydrodynamic study of a mixture of west Indian cherry residue and soybean grains in a spouted bed. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 91, n. 11, p. 1871–1880, 2013.  
<https://doi.org/10.1002/cjce.21870>

- BOUBEKER, B.; TALEA, M.; GOUDEAU, P.; COUPEAU, C.; GRILHE, J. On Young modulus of 304 L stainless steel thin films. *Materials Characterization*, v. 45, p. 33-37, 200.
- [https://doi.org/10.1016/S1044-5803\(00\)00043-7](https://doi.org/10.1016/S1044-5803(00)00043-7)
- CAMPOS, L. F. O. Desenvolvimento de metodologia para uso de partículas viscoelásticas no método dos elementos discretos. 2016. 110 f. Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- CHEN, H.; LIU, Y. L.; ZHAO, X. Q.; XIAO, Y. G.; LIU, Y. Numerical investigation on angle of repose and force network from granular pile in variable gravitational environments. *Powder Technology*, v. 283, p. 607–617, 2015.
- <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2015.05.017>
- CHUNG, Y. C.; OOI, J. Y. Influence of discrete element model parameters on bulk behavior of a granular solid under confined compression. *Particulate Science and Technology*, v. 26, p. 83–96, 2008.
- <https://doi.org/10.1080/02726350701759381>
- COETZEE, C. J. Review: Calibration of the discrete element method. *Powder Technology*, v. 310, p. 104–142, 2017.
- <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2017.01.015>
- COETZEE, C. J., NEL, R. G. Calibration of discrete element properties and the modelling of packed rock beds. *Power Technology*, vol. 264, p. 332-342, 2014.
- <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2014.05.063>
- CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*. v. 29, n. 1, p. 47–65, 1979.
- <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.1.47>
- CUNHA, R. N.; SANTOS, K. G.; LIMA, R. M.; DUARTE, C. R.; BARROZO, M. A. S. Repose angle of monoparticles and binary mixture: An experimental and simulation study. *Powder Technology*, v. 303, p. 203–211, 2016.
- <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.09.023>
- CURRY, D.; FAVIER, J.; LAROCHE, R. D. A Systematic approach to DEM material model calibration. 6th International Conference for Conveying and Handling of Particulate Solids, p. 51–54, 2009.
- DELELE, M. A.; WEIGLER, F.; FRANKE, G.; MELLmann, J. Studying the solids and fluid flow behavior in rotary drums based on a multiphase CFD model. *Powder Technology*, v. 292, p. 260–271, 2016.
- <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.01.026>

- DI RENZO, A.; DI MAIO, F. P. Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes. *Chemical Engineering Science*, v. 59, n. 3, p. 525–541, 2004.  
<https://doi.org/10.1016/j.ces.2003.09.037>
- DING, Y. L.; FORSTER, R.; SEVILLE, J. P. K.; PARKER, D. J. Granular motion in rotating drums: bed turnover time and slumping-rolling transition. *Powder Technology*, v. 124, n. 1–2, p. 18–27, 2002.  
[https://doi.org/10.1016/S0032-5910\(01\)00486-7](https://doi.org/10.1016/S0032-5910(01)00486-7)
- DING, Y. L.; SEVILLE, J. P. K.; FORSTER, R.; PARKER, D. J. Solids motion in rolling mode rotating drums operated at low to medium rotational speeds. *Chemical Engineering Science*, v. 56, n. 5, p. 1769–1780, 2001.  
[https://doi.org/10.1016/S0009-2509\(00\)00468-1](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(00)00468-1)
- DOMÉNECH-CARBÓ, A. Analysis of oblique rebound using a redefinition of the coefficient of tangential restitution coefficient. *Mechanics Research Communications*, v. 54, p. 35–40, 2013.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.09.004>
- EDEM SIMULATION. Help EDEM. DEM Solutions, Edinburgh, UK, 2016.
- GHOSH, S. K. Mechanical engineer's handbook. Academic Press, v. 16, 1988.
- GONZÁLEZ-MONTELLANO, C.; FUENTES, J. M.; AYUGA-TÉLLEZ, E.; AYUGA, F. Determination of the mechanical properties of maize grains and olives required for use in DEM simulations. *Journal of Food Engineering*, v. 111, n. 4, p. 553–562, 2012.  
<https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2012.03.017>
- GONZÁLEZ-MONTELLANO, C.; RAMÍREZ, Á.; GALLEGOS, E.; AYUGA, F. Validation and experimental calibration of 3D discrete element models for the simulation of the discharge flow in silos. *Chemical Engineering Science*, v. 66, n. 21, p. 5116–5126, 2011.  
<https://doi.org/10.1016/j.ces.2011.07.009>
- GRIMA, A.; HASTIE, D.; CURRY, D.; WYPYCH, P.; LAROCHE, R. The beginning of a new era in design: Calibrated discrete element modelling. *Australian Bulk Handling Review*, p. 14-21, 2011.
- GUI, N.; YAN, J.; XU, W.; GE, L.; WU, D.; JI, Z.; GAO, J.; JIANG, S.; YANG, X. DEM simulation and analysis of particle mixing and heat conduction in a rotating drum. *Chemical Engineering Science*, vol. 97, p. 225-234, 2013.  
<https://doi.org/10.1016/j.ces.2013.04.005>

- HASSANPOUR, P.; PASHA, M. Introduction to software for chemical engineers. Chapter 7: Discrete element method applications in process engineering. CRC Press, p. 245-286, 2015.
- HEMA, V. Mathematical modelling of the dynamics of granular materials in a rotating cylinder. Doctor Thesis - The Cochin University of Science and Technology, India, 2003.
- HENEIN, H.; BRIMACOMBE, J. K.; WATKINSON, A. P. Experimental study of transverse bed motion in rotary kilns. *Metallurgical Transactions B*, v. 14, n. 2, p. 191–205, 1983.  
<https://doi.org/10.1007/BF02661016>
- HERTZ, H. On the contact of elastic solids. *J. reine und angewandte Mathematik*. v. 92, p. 156–171, 1882.
- HÖHNER, D.; WIRTZ, S.; SCHERER, V. A study on the influence of particle shape and shape approximation on particle mechanics in a rotating drum using the discrete element method. *Powder Technology*, vol. 253, p. 256-265, 2014.  
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2013.11.023>
- HUANG, A. N.; KAO, W. C.; KUO, H. P. Numerical studies of particle segregation in a rotating drum based on Eulerian continuum approach. *Advanced Powder Technology*, v. 24, n. 1, p. 364–372, 2013.  
<https://doi.org/10.1016/j.apt.2012.08.010>
- JOHNSTONE, M. W. Calibration of DEM models for granular materials using bulk physical tests. 2010. Doctor Thesis - University of Edinburgh, Escócia, 2010.
- JUAREZ, G.; CHEN, P.; LUEPTOW, R. M. Transition to centrifuging granular flow in rotating tumblers: A modified Froude number. *New Journal of Physics*, v. 13, 2011.
- JUST, S.; TOSCHKOFF, G.; FUNKE, A.; DJURIC, D.; SCHARRER, G.; KHINAST, J.; KNOP, K.; KLEINEBUDDE, P. Experimental analysis of tablet properties for discrete element modeling of an active coating process. *AAPS PharmSciTech*, v. 14, n. 1, p. 402–11, 2013.  
<https://doi.org/10.1208/s12249-013-9925-5>
- KAFUI, K. D.; THORNTON, C.; ADAMS, M. J. Discrete particle-continuum fluid modelling of gas-solid fluidised beds. *Chemical Engineering Science*, v. 57, n. 13, p. 2395–2410, 2002.  
[https://doi.org/10.1016/S0009-2509\(02\)00140-9](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(02)00140-9)
- KETTERHAGEN, W. R. Modeling the motion and orientation of various pharmaceutical tablet shapes in a film coating pan using DEM. *International Journal of Pharmaceutics*, v. 409, n. 1–2, p. 137–149, 2011.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijpharm.2011.02.045>

- KOMOSSA, H.; WIRTZ, S.; SCHERER, V.; HERZ, F.; SPECHT, E. Transversal bed motion in rotating drums using spherical particles: Comparison of experiments with DEM simulations. *Powder Technology*, v. 264, p. 96–104, 2014.  
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2014.05.021>
- KUMAR, R.; FREIREICH, B.; WASSGREN, C. DEM-compartment-population balance model for particle coating in a horizontal rotating drum. *Chemical Engineering Science*, v. 125, p. 144–157, 2015.  
<https://doi.org/10.1016/j.ces.2014.06.046>
- LEE, C. F.; CHOU, H. TER; CAPART, H. Granular segregation in narrow rotational drums with different wall roughness: Symmetrical and asymmetrical patterns. *Powder Technology*, v. 233, p. 103–115, 2013.  
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2012.08.034>
- LI, Y.; XU, Y.; THORNTON, C. A comparison of discrete element simulations and experiments for "sandpiles" composed of spherical particles. *Powder Technology*, v. 160, n. 3, p. 219–228, 2005.  
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2005.09.002>
- LIU, P. Y.; YANG, R. Y.; YU, A. B. DEM study of the transverse mixing of wet particles in rotating drums. *Chemical Engineering Science*, v. 86, p. 99–107, 2012.  
<https://doi.org/10.1016/j.ces.2012.06.015>
- MACHADO, M. V. C. Estudo experimental e numérico da dinâmica de corpos moedores em moinhos de bola. p. 99, 2016.
- MAKISHIMA, A.; MACKENZIE, J. D. Calculation of bulk modulus, shear modulus and Poisson's ratio of glass. *Journal of Non-Crystalline Solids*, v. 17, p. 147-157, 1975.  
[https://doi.org/10.1016/0022-3093\(75\)90047-2](https://doi.org/10.1016/0022-3093(75)90047-2)
- MALISKA, C. R. Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional. LTC, ed. 2, 2004.
- MARIGO, M.; CAIRNS, D. L.; DAVIES, M.; INGRAM, A.; STITT, E. H. A numerical comparison of mixing efficiencies of solids in a cylindrical vessel subject to a range of motions. *Powder Technology*, v. 217, p. 540–547, 2012.  
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2011.11.016>
- MARIGO, M.; STITT, E. H. Discrete element method (DEM) for industrial applications: Comments on calibration and validation for the modelling of cylindrical pellets. *KONA Powder and Particle Journal*, v. 32, n. 32, p. 236–252, 2015.  
<https://doi.org/10.14356/kona.2015016>

- MARINACK JR., M. C.; MUSGRAVE, R. E.; HIGGS, C. F. Experimental investigations on the coefficient of restitution of single particles. *Tribology Transactions*, v. 56, n. 4, p. 572–580, 2013.  
<https://doi.org/10.1080/10402004.2012.748233>
- MATUTTIS, H. G.; CHEN, J. Understanding the discrete element method. Singapore: Wiley, 2014.  
<https://doi.org/10.1002/9781118567210>
- MELLMANN, J. The transverse motion of solids in rotating cylinders-forms of motion and transition behavior. *Powder Technology*, v. 118, n. 3, p. 251–270, 2001.  
[https://doi.org/10.1016/S0032-5910\(00\)00402-2](https://doi.org/10.1016/S0032-5910(00)00402-2)
- MERENDINO, E. M. Estudo de processo de reciclagem do composto de polietileno e alumínio proveniente de embalagens cartonadas assépticas através de simulação computacional usando o método dos elementos discretos (DEM). 2011. 106 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.
- MINDLIN, R. D. Compliance of elastic bodies in contact. *J. Appl. Mech.* v. 16, p. 259–268, 1949.
- MUELLER, P.; BOETTCHER, R.; RUSSELL, A.; TRUEE, M.; TOMAS, J. A novel approach to evaluate the elastic impact of spheres on thin plates. *Chemical Engineering Science*, v. 138, p. 689–697, 2015.  
<https://doi.org/10.1016/j.ces.2015.08.056>
- NASATO, D. S. Desenvolvimento de acoplamento numérico entre o método dos elementos discretos (DEM) e o método dos elementos finitos. 2011. 75 f. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.
- NGUYEN, V. D.; COGNÉ, C.; GUESSASMA, M.; BELLENGER, E.; FORTIN, J. Discrete modeling of granular flow with thermal transfer: Application to the discharge of silos. *Applied Thermal Engineering*, v. 29, n. 8–9, p. 1846–1853, 2009.  
<https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2008.09.009>
- O'SULLIVAN, C. Particulate discrete element modelling: a geomechanics perspective. Spon Press, v. 4, 2011.
- PENG, B. Discrete element method (DEM) contact models applied to pavement simulation. 2014. Dissertação de Mestrado - Faculty the Virginia Polytechnic, Virginia, 2014.
- POPOV, V. L. Contact Mechanics and Friction. Springer, 2010  
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-10803-7>
- RACKL, M.; GÖRNIG, C. D.; HANLEY, K. J.; GÜNTHER, W. A. Efficient calibration of discrete element material model parameters using latin hypercube

sampling and Kriging. VII European Congress n Computational in Applied and Engineering, 2016.

RAMAN, C. V. On some applications of Hertz's theory of impact. *Physical Review*, vol. 15, p. 277-284, 1920.

<https://doi.org/10.1103/PhysRev.15.277>

RAY CHAUDHURI, S.; HUTCHINSON, T. C. Characterizing frictional behavior for use in predicting the seismic response of unattached equipment. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 25, n. 7–10, p. 591–604, 2005.

<https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2004.11.022>

REMY, B.; KHINAST, J. G.; GLASSER, B. J. Polydisperse granular flows in a bladed mixer: Experiments and simulations of cohesionless spheres. *Chemical Engineering Science*, v. 66, n. 9, p. 1811–1824, 2011.

<https://doi.org/10.1016/j.ces.2010.12.022>

RESENDE, I. A. Estudo experimental e numérico da dinâmica de grão de café em um tambor rotatório. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, 2017.

RISTOW, G .H. Flow properties of granular materials in three-dimensional geometries. *Habilitationsschrift*, Philipps-Universität Marburg, p. 63-92, 1998.

ROSE, H.E.; SULLIVAN, R. M. E. A treatise on the internal mechanics of ball, tube and rod mills. Constable, London, p. 35-68, 1957.

SANTOS, D. A. Estudo experimental e numérico da dinâmica de partículas em um tambor rotatório. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, 2015.

SANTOS, D. A.; BARROZO, M. A. S.; DUARTE, C. R.; WEIGLER, F.; MELLMANN, J. Investigation of particle dynamics in a rotary drum by means of experiments and numerical simulations using DEM. *Advanced Powder Technology*, v. 27, n. 2, p. 692–703, 2016.

<https://doi.org/10.1016/j.apt.2016.02.027>

SANTOS, D. A.; DADALTO, F. O.; SCATENA, R.; DUARTE, C. R.; BARROZO, M. A. S. A hydrodynamic analysis of a rotating drum operating in the rolling regime. *Chemical Engineering Research and Design*, v. 94, p. 204–212, 2015.

<https://doi.org/10.1016/j.cherd.2014.07.028>

SANTOS, D. A.; PETRI, I. J.; DUARTE, C. R.; BARROZO, M. A. S. Experimental and CFD study of the hydrodynamic behavior in a rotating drum. *Powder Technology*, v. 250, p. 52–62, 2013.

<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2013.10.003>

- SHERITT, R. G.; CHAOUKI, J.; MEHROTRA, A. K.; BEHIE, L. A. Axial dispersion in the three-dimensional mixing of particles in a rotating drum reactor. *Chemical Engineering Science*, v. 58, n. 2, p. 401–415, 2003.  
[https://doi.org/10.1016/S0009-2509\(02\)00551-1](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(02)00551-1)
- SONDERGAARD, R.; CHANEY, K.; BRENNEN, C. E. Measurements of bouncing off flat plate. *Journal of Applied Mechanics*, v. 112, n. 90, p. 694–699, 1990.  
<https://doi.org/10.1115/1.2897079>
- THORNTON, C. Granular dynamics, contact mechanics and particle system simulations: DEM study. Springer, v. 24, 2015.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-18711-2>
- TSUJI, Y.; TANAKA, T.; ISHIDA, T. Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe. *Powder Technology*, v. 71, n. 3, p. 239–250, 1992.  
[https://doi.org/10.1016/0032-5910\(92\)88030-L](https://doi.org/10.1016/0032-5910(92)88030-L)
- WALTON, O.R.; BRAUN R.L. Simulation of rotary-drum and repose tests for frictional spheres and rigid sphere clusters. Proc. Joint DOE/NFS Workshop on Flow of Particulates and Fluids, p. 1-18, 1993.
- WATANABE, H. Critical rotation speed for ball-milling. *Powder Technology*, v. 104, n. 1, p. 95–99, 1999.  
[https://doi.org/10.1016/S0032-5910\(99\)00031-5](https://doi.org/10.1016/S0032-5910(99)00031-5)
- WU, J.; BINBO, J.; CHEN, J.; YANG, Y. Multi-scale study of particle flow in silos. *Advanced Powder Technology*, v. 20, n. 1, p. 62–73, 2009.  
<https://doi.org/10.1016/j.apt.2008.02.003>
- XIAO, X.; TAN, Y.; ZHANG, H.; DENG, R.; JIANG, S. Experimental and DEM studies on the particle mixing performance in rotating drums: Effect of area ratio. *Powder Technology*, v. 314, p. 182–194, 2017.  
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2017.01.044>
- XU, Y.; XU, C.; ZHOU, Z.; DU, J.; HU, D. 2D DEM simulation of particle mixing in rotating drum: A parametric study. *Particuology*, v. 8, n. 2, p. 141–149, 2010.  
<https://doi.org/10.1016/j.partic.2009.10.003>
- YANG, R. Y.; YU, A. B.; MCELROY, L.; BAO, J. Numerical simulation of particle dynamics in different flow regimes in a rotating drum. *Powder Technology*, v. 188, n. 2, p. 170–177, 2008.  
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2008.04.081>
- ZENNER, C. The intrinsic inelasticity of large plates. *Physical Review*, v. 59, p. 669–673, 1941.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.59.669>

- ZHOU, Y.C.; XU, B. H.; YU, A. B.; ZULLI, P. An experimental and numerical study of the angle of repose of coarse spheres. Powder Technology, v. 125, p. 45-54, 2002.  
[https://doi.org/10.1016/S0032-5910\(01\)00520-4](https://doi.org/10.1016/S0032-5910(01)00520-4)
- ZHU, H. P.; ZHOU, Z. Y.; YANG, R. Y.; YU, A. B. Discrete particle simulation of particulate systems : Theoretical developments. v. 62, p. 3378–3396, 2007.