

LEANDRO RODRIGUES CUNHA

**ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DE
ESTRUTURAS SUJEITAS A CONTROLE PASSIVO E
ATIVO DE VIBRAÇÕES**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2013

Página intencionalmente deixada em branco.

LEANDRO RODRIGUES CUNHA

**ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS SUJEITAS A
CONTROLE PASSIVO E ATIVO DE VIBRAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Domingos Alves Rade
(FEMEC-UFU)

Coorientadora: Dra. Núbia dos Santos Saad
(FEMEC-UFU)

UBERLÂNDIA – MG

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

C972a
2013 Cunha, Leandro Rodrigues, 1987-
 Análise da confiabilidade de estruturas sujeitas a controle passivo e
 ativo de vibrações / Leandro Rodrigues Cunha. - 2013.
 156 f. : il.

 Orientador: Domingos Alves Rade.
 Coorientadora: Núbia dos Santos Saad.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
 Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
 Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1107>
 Inclui bibliografia.

 1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Vibração - Teses. 3. Monte
 Carlo, Método de - Teses. I. Rade, Domingos Alves. II. Saad, Núbia dos
 Santos, 1973- III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
 Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

Maria Salete de Freitas Pinheiro – CRB6/1262



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA



ALUNO: Leandro Rodrigues Cunha

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11122EMC011

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO

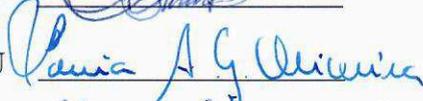
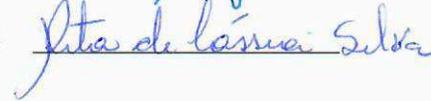
TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:

***“Análise da Confiabilidade de Estruturas
Sujeitas a Controle Passivo e Ativo de
Vibrações”***

ORIENTADOR: Prof. Dr. Domingos Alves Rade

CO-ORIENTADORA: Dra. Núbia dos Santos Saad

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada no Anfiteatro E - Bloco 50, Campus Santa Mônica, em 13 de setembro de 2013, às 09:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Domingos Alves Rade	UFU 
Dra. Núbia dos Santos Saad	UFU 
Profa. Dra. Sonia A. Goulart Oliveira	UFU 
Profa. Dra. Rita de Cássia Silva	UnB 

Uberlândia, 13 de setembro de 2013

Página intencionalmente deixada em branco.

*Dedico aos meus pais, **Paulo e Hebe**, que sempre me ensinaram que o estudo e a educação são as coisas mais importantes que se pode ter e me proporcionaram tudo isso, ao meu irmão **Gustavo**, amigo e companheiro de todas as horas, e à minha amada **Mayara Akemi**.*

Página intencionalmente deixada em branco.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao professor Dr. **Domingos Alves Rade** por ter aceitado ser meu orientador, ensinando com paciência e tranquilidade como se faz um trabalho científico e mostrando o quão gratificante e empolgante é pesquisar.

À Dr^a. **Núbia dos Santos Saad** por me instruir com detalhes sobre análise de estruturas e me auxiliar com muita dedicação, e a qualquer horário, em todas as etapas da realização desse estudo.

Às professoras Dr^a. **Sônia A. Goulart Oliveira** e Dr^a. **Rita de Cássia Silva** por aceitarem fazer parte da banca de avaliação da minha defesa de mestrado.

Aos **colegas do Laboratório de Estruturas** (LMEst) pela convivência e momentos de descontração, principalmente, quando as simulações de Monte Carlo exigiam todos os recursos do meu computador.

À Universidade Federal de Uberlândia, à **Faculdade de Engenharia Mecânica** e ao **Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica** da UFU, pela oportunidade de realizar este trabalho.

E, por fim, à **Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais** (FAPEMIG) pela concessão da bolsa de mestrado para o desenvolvimento desta pesquisa.

Página intencionalmente deixada em branco.

CUNHA, L. R. **Análise da confiabilidade de estruturas sujeitas a controle passivo e ativo de vibrações**. 2013. 156 p. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

RESUMO

Esta Dissertação versa sobre a análise de confiabilidade de estruturas sujeitas a controle ativo e passivo de vibrações, com ênfase na aplicação dos métodos de confiabilidade de primeira ordem (*FORM*, *First Order Reliability Method*) e segunda ordem (*SORM*, *Second Order Reliability Method*). Esses são usados para calcular o índice de confiabilidade e, conseqüentemente, a probabilidade de falha de estruturas, considerando variáveis aleatórias modeladas segundo funções densidade de probabilidade. Três técnicas de controle são avaliadas: controle ativo empregando atuadores piezelétricos; controle passivo por absorvedores dinâmicos de vibrações e controle passivo baseado em atuadores piezelétricos conectados a circuitos *shunt* ressonantes. Para cada caso, são definidas funções de estado limite que descrevem limites operacionais e/ou requisitos de projeto, cuja avaliação é baseada em respostas obtidas por meio de modelos de elementos finitos das estruturas analisadas. Para cada uma das técnicas de controle, aplicações numéricas dos métodos *FORM* e *SORM* são realizadas considerando como estrutura principal uma treliça plana. Para efeito de avaliação da precisão das estimações de confiabilidade fornecidas por estes métodos, foram também utilizadas Simulações de Monte Carlo. A partir dos resultados, são discutidas as características específicas observadas para cada técnica de controle. Em específico, para duas delas foram identificados domínios de segurança e de falha de formas atípicas, em cujos casos, fica inviabilizado o uso dos métodos *FORM* e *SORM*. De modo geral, os resultados confirmam a importância e a conveniência de se aplicarem os métodos de análise de confiabilidade a estruturas sujeitas a procedimentos de controle de vibrações.

Palavras chave: Confiabilidade estrutural. Métodos *FORM* e *SORM*. Simulação de Monte Carlo. Controle ativo de vibrações. Controle passivo de vibrações.

Página intencionalmente deixada em branco.

CUNHA, L. R. **Reliability analysis of structures passively and actively controlled for vibration mitigation**. 2013. 156 p. Dissertation (Master Science), Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

ABSTRACT

This dissertation is devoted to the reliability analysis of structures subjected to active and passive vibration control, with emphasis on the use of First Order Reliability Method (*FORM*) and Second Order Reliability Method (*SORM*). These methods are used to evaluate the reliability indices and the associated failure probability, considering that the random variables are modeled by probability density functions. Three techniques of vibration control are considered, namely: active control using *PZT* stack actuators, passive control based on dynamic vibration absorbers, and passive control based on piezoelectric transducers connected to resonant shunt circuits. For each technique, limit state functions are defined related to the operational limitations or design requirements. Their evaluation is made from structural responses obtained from finite element models. For each control technique, numerical applications of *FORM* and *SORM* are carried-out for a two-dimensional truss, defined as the structure of interest. To assess the accuracy of the reliability estimations provided by those methods, Monte Carlo Simulations are also performed. The numerical results enable to put in evidence specific characteristics of each control technique as related to reliability. Specifically, for two of them it is verified the occurrence of atypical geometrical forms of the safety and failure domains, which preclude the use of *FORM* and *SORM*. In general, the results confirm the importance and convenience of performing reliability assessment of structures subjected to vibration control procedures.

Keywords: *Structural reliability. Methods FORM and SORM. Monte Carlo Simulation. Active vibration control. Passive vibration control.*

Página intencionalmente deixada em branco.

CUNHA, L. R. **Analyse de la fiabilité des structures soumises au contrôle actif et passif des vibrations**. 2013. 156 p. Thèse (Master), Université Fédérale d'Uberlândia, Uberlândia, MG.

RÉSUMÉ

Cette Thèse de Master porte sur l'analyse de la fiabilité des structures soumises aux contrôles actif et passif des vibrations en mettant l'accent sur l'application des méthodes de fiabilité de premier ordre (*FORM*, *First Order Reliability Method*) et de second ordre (*SORM*, *Second Order Reliability Method*). Celles-ci sont utilisées pour calculer l'indice de fiabilité et donc la probabilité de défaillance des structures, compte tenu des variables aléatoires modélisées à l'aide des fonctions densité de probabilité. Trois techniques de contrôle sont évaluées: le contrôle actif utilisant des actionneurs piézo-électriques, le contrôle passif par des absorbeurs dynamiques de vibrations et le contrôle passif basé sur l'actionneur piézo-électrique reliés à des circuits *shunt* résonnants. Chaque technique est définie par des fonctions à l'état limite qui décrivent les limites opérationnelles et/ou les exigences de conception dont l'évaluation est basée sur les réponses obtenues par les modèles d'éléments finis des structures analysées. Pour chacune des techniques de contrôle, des applications numériques des méthodes *FORM* et *SORM* sont effectuées considérant comme structure principale un treillis bidimensionnel. Aux fins de l'évaluation de l'exactitude des estimations de fiabilité fournies par ces méthodes, la Simulation de Monte Carlo a également été utilisée. D'après les résultats, nous analysons les caractéristiques observées pour chaque technique de contrôle spécifique. Plus précisément, pour deux de ces techniques de contrôle, des domaines de sécurité et de défaillance de formes atypiques ont été identifiés. Dans ce cas, il est impossible d'utiliser les méthodes *FORM* et *SORM*. En règle générale, les résultats confirment l'importance d'application des méthodes d'analyse de fiabilité des structures soumises à des procédures de contrôle des vibrations.

Mots-clés: *Fiabilité structurale. Méthodes FORM et SORM. Simulation de Monte Carlo. Contrôle actif des vibrations. Contrôle passif des vibrations.*

Página intencionalmente deixada em branco.

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Letras Latinas

A	Coeficiente do modelo quadrático; área de seção transversal
A	Matriz da qual são calculadas as curvaturas do <i>SORM</i> por um problema de autovalor; matriz de estado
A_S	Área da seção transversal de barras de reforço
B	Coeficiente do modelo quadrático
B	Matriz de entrada
b	Largura da seção transversal comprimida da viga de concreto
C	Capacitor; capacitância
C	Matriz de saída
c	Amortecimento
c_a	Amortecimento do <i>ADV</i>
c_s	Coeficiente de segurança
D	Deslocamento elétrico
D	Matriz de derivadas segundas da hipersuperfície para <i>SORM</i>
d	Distância da fibra com maior compressão até o centroide das barras de reforço; coeficiente de deformação piezométrica
d	Vetor com tipo de distribuições de probabilidade
D_f	Domínio de falha
D_s	Domínio de segurança; domínio seguro
E	Campo elétrico; módulo de elasticidade; evento
F	Evento de falha; força máxima do modelo quadrático; força
f	Fator de sintonização; esforço
f_c'	Resistência do concreto à compressão
$f_X(x)$	Função densidade probabilidade da variável aleatória X

$F_X(x)$	Função densidade acumulada da variável aleatória X
F_y	Tensão nominal de escoamento
f_y	Tensão de escoamento
\mathbf{G}	Matriz de ganho do controle LQR
g	Razão de frequências forçadas
$g(\mathbf{X})$	Função de estado limite (LSF , <i>Limit State Function</i>)
H	Esforço horizontal; componente da matriz de flexibilidade dinâmica
$\mathbf{H}(\omega)$	Matriz de flexibilidade dinâmica
I	Corrente elétrica
$I[.]$	Contador
j	$\sqrt{-1}$ = unidade imaginária
k	Rigidez; número da iteração do algoritmo $FORM$; variável de confiança
$\tilde{\mathbf{k}}$	Matriz de acoplamento eletromecânico elementar
\mathbf{K}	Matriz de rigidez; matriz de acoplamento eletromecânico
$\tilde{\mathbf{K}}$	Matriz de acoplamento eletromecânico global
k_a	Rigidez do ADV
K_P	Rigidez da estrutura principal
L	Comprimento do elemento finito; indutor; indutância elétrica; <i>Lagrangeano</i>
LN	Distribuição de probabilidade lognormal
m	Massa
\mathbf{M}	Matriz de massa
M	Momento fletor
m_a	Massa do ADV
M_P	Massa da estrutura principal
n	Número de simulações; número de elementos da amostra; quantidade de componentes
N	Distribuição de probabilidade normal (ou <i>Gaussiana</i>)
$N(.)$	Função de forma
n_f	Número de falhas
P	Ponto P ; potência dissipada; ponto invariante
$P[.]$	Probabilidade

P_f	Probabilidade de falha
Q	Ponto invariante
$q(t)$	Coordenada generalizada
R	Fator adimensional de sintonização para amortecimento
R	Resistência elétrica; resistência; confiabilidade (<i>reliability</i>)
\bar{R}	Resistência normalizada
\mathbf{R}	Matriz de rotação
\bar{S}	Solicitação normalizada
S	Deformação mecânica; solicitação
s^E	Coefficiente de flexibilidade
T	Tensão mecânica
\mathbf{T}	Matriz de transformação; energia cinética
T	Tempo
t_p	Espessura da pastilha piezolétrica
t_s	Tempo de acomodação (<i>settling time</i>)
U	Grau de liberdade no sistema de coordenadas local
U	Grau de liberdade no sistema de coordenadas global
V	Energia potencial; tensão elétrica; esforço vertical
X	Variável aleatória
\mathbf{X}	Vetor de variáveis aleatórias
$\bar{\mathbf{X}}$	Vetor de variáveis aleatórias normalizadas
X	Grau de liberdade
X_{est}	Deflexão estática do sistema primário
Y^E	Módulo de <i>Young</i> do material piezolétrico a campo elétrico constante e igual a zero
\mathbf{Z}	Vetor com graus de liberdade mecânicos e elétricos
Z_x	Módulo de resistência da seção

Letras gregas

α	Matriz de cossenos diretores
β	Índice de confiabilidade
Γ	Matriz de permissividade dielétrica
δ	Coefficiente de variação; alongação de mola; parâmetro adimensional de sintonização de frequência
Δt	Intervalo de tempo
δW	Trabalho virtual
ε	Erro do modelo quadrático; erro relativo
ε^T	Coefficiente de permissividade dielétrica do material piezelétrico com tensão mecânica constante e igual a zero
ζ	Parâmetro da distribuição de probabilidade lognormal
η	Fator de sintonização; parâmetro de tensão do bloco de concreto
θ	Ângulo do elemento finito no sistema de coordenadas local em relação ao sistema de Coordenadas global
κ	Curvatura para método <i>SORM</i>
λ	Parâmetro da distribuição de probabilidade lognormal
μ	Média
ρ	Densidade volumétrica
σ	Desvio padrão; modo vibratório na teoria modal; tensão mecânica
$\Phi(.)$	Função densidade acumulada de uma variável normal
$\phi(.)$	Função densidade probabilidade de uma variável normal
ψ	Vetor (auto-vetor) modal
ψ_i	Valor correspondente ao <i>i-ésimo g.d.l.</i> do auto-vetor modal
Ω	Frequência circular de excitação
ω	Frequência
ω_a	Frequência natural do absorvedor
ω_n	Frequência natural da estrutura primária
ω_σ	Frequência natural da estrutura primária para teoria modal

Índices gerais

<i>*</i>	Ponto de projeto; ponto ótimo
<i>A</i>	Do absorvedor dinâmico de vibrações
<i>adm</i>	Admissível
<i>B</i>	Do elemento finito de barra
<i>D</i>	Nó da direita
<i>E</i>	Nó da esquerda
<i>E</i>	Elementar
<i>Ef</i>	Efetivo
<i>Est</i>	Estrutural
<i>G</i>	Global
<i>I</i>	Iteração; grau de liberdade
<i>max</i>	Valor máximo
<i>Min</i>	Valor mínimo
<i>N</i>	<i>n</i> -ésima frequência natural
<i>Nc</i>	Não conservativo
<i>Opt</i>	Ótimo
<i>P</i>	Do material piezelétrico; generalizado
<i>U</i>	Última
<i>X</i>	Eixo horizontal do sistema de coordenadas global; da variável aleatória
<i>x</i>	Eixo horizontal do sistema de coordenadas local
<i>Y</i>	Eixo vertical do sistema de coordenadas global
<i>y</i>	Eixo vertical do sistema de coordenadas local
<i>σ</i>	Da <i>σ</i> -ésima frequência natural na teoria modal

Abreviaturas

ADV	Absorvedor Dinâmico de Vibrações
AFOSM	Método de Confiabilidade de Primeira Ordem e Segundo Momento Avançado (<i>Advanced First Order Second Moment</i>)
AG	Algoritmo Genético
DP	Distribuição de Probabilidade
EP	Estrutura Primária
fda	Função densidade acumulada
fdp	Função densidade probabilidade
FEM	Método de Elementos Finitos (<i>Finite Element Method</i>)
FORM	Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (<i>First Order Reliability Method</i>)
FOSM	Método de Confiabilidade de Primeira Ordem e Segundo Momento (<i>First Order Second Moment</i>)
FRF	Função Resposta em Frequência
g.d.l.	Grau de liberdade
HD	Disco Rígido (<i>Hard Disc</i>)
LHS	Amostragem por Hipercubo Latino (<i>Latin Hypercube Sampling</i>)
LQR	Regulador Quadrático Linear (<i>Linear Quadratic Regulator</i>)
LSF	Função de Estado Limite (<i>Limite State Function</i>)
MCS	Simulação de Monte Carlo (<i>Monte Carlo Simulation</i>)
MVFOSM	Método de Confiabilidade do Valor Médio em Primeira Ordem e Segundo Momento (<i>Mean Value First-Order Second-Moment</i>); igual ao FOSM
RAM	Memória de Acesso Aleatório (<i>Random Access Memory</i>)
RSP	Material Piezelétrico em Circuito Shunt Ressonante (<i>Resonant Shunted Piezoelectric</i>)
SORM	Método de Confiabilidade de Segunda Ordem (<i>Second Order Reliability Method</i>)

SUMÁRIO

RESUMO	ix
ABSTRACT	xi
RÉSUMÉ	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS	xv
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Contextualização	2
1.2 Revisão bibliográfica	3
1.2.1 <i>Confiabilidade estrutural</i>	3
1.2.2 <i>Controle ativo com atuadores piezelétricos</i>	4
1.2.3 <i>Controle passivo com Absorvedores Dinâmicos de Vibrações (ADV)</i>	6
1.2.4 <i>Controle passivo com atuadores piezelétricos (PZT) em circuito shunt</i>	6
1.2.5 <i>Métodos de avaliação de confiabilidade</i>	8
1.3 Objetivos da dissertação	10
1.4 Organização do trabalho	10
CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	13
2.1 Introdução	14
2.2 Modelagem de incertezas	14
2.2.1 <i>Diagrama de frequências e propriedades estatísticas</i>	14
2.2.2 <i>Função densidade probabilidade (fdp) e função densidade acumulada (fda)</i>	16
2.2.3 <i>Distribuições de probabilidade (DP)</i>	16
2.2.4 <i>Função de estado limite</i>	19
2.2.5 <i>Probabilidade de falha e índice confiabilidade (β)</i>	21
2.3 Avaliação da confiabilidade de sistemas	23
2.3.1 <i>Sistemas em série e sua probabilidade de falha</i>	24
2.3.2 <i>Sistemas em paralelo e sua probabilidade de falha</i>	25
2.3.3 <i>Sistemas com combinações série-paralelo e sua probabilidade de falha</i>	25
2.4 Fronteiras de confiabilidade	27

2.4.1	<i>Fronteiras de primeira ordem</i>	28
2.4.2	<i>Fronteiras de segunda ordem</i>	28
CAPÍTULO 3	MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DE CONFIABILIDADE	29
3.1	Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (<i>FORM</i>)	30
3.1.1	<i>Variáveis normais equivalentes</i>	31
3.1.2	<i>Estruturação da implementação computacional do FORM</i>	32
3.2	Método de Confiabilidade de Segunda Ordem (<i>SORM</i>)	34
3.2.1	<i>Estruturação da implementação computacional do SORM</i>	35
3.3	Tratamento de funções de estado limite implícitas	37
3.4	Simulação de Monte Carlo (<i>MCS</i>)	38
3.4.1	<i>Estruturação do MCS</i>	39
3.4.2	<i>Aspectos da convergência</i>	40
3.4.3	<i>Técnica de amostragem Hipercubo Latino</i>	41
CAPÍTULO 4	ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS ATIVAMENTE CONTROLADAS POR ATUADORES PIEZELETRICOS	43
4.1	Introdução	44
4.2	Modelagem da estrutura inteligente	44
4.3	Modelo de uma treliça plana	51
4.4	Análise de confiabilidade da estrutura controlada	54
4.5	Conclusões	58
CAPÍTULO 5	ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS PASSIVAMENTE CONTROLADAS POR ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÕES	59
5.1	Absorvedores Dinâmicos de Vibrações (<i>ADVs</i>)	60
5.2	Teoria modal de <i>ADVs</i>	60
5.2.1	<i>Sintonização ótima pelo método dos picos iguais</i>	62
5.3	Estrutura-teste	64
5.3.1	<i>Sintonização de um ADV para a frequência do primeiro modo de vibrar da estrutura</i>	65
5.3.2	<i>Efeitos das variações do amortecimento e da rigidez</i>	68

5.4 Avaliação de confiabilidade	69
5.4.1 <i>Análise com três variáveis aleatórias</i>	70
5.4.2 <i>Análise com duas variáveis aleatórias</i>	71
5.4.3 <i>Fronteiras de probabilidade com três variáveis aleatórias</i>	80
5.5 Discussão e conclusões	81
CAPÍTULO 6 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS PASSIVAMENTE CONTROLADAS POR TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS ASSOCIADOS A CIRCUITOS SHUNT RESSONANTES	83
6.1 Introdução	84
6.2 Modelagem de treliças contendo atuadores do tipo <i>stack</i> e circuitos <i>shunt</i>	85
6.3 Sintonização dos valores da resistência <i>R</i> e da indutância <i>L</i>	88
6.3.1 <i>Efeito da variação da resistência <i>R</i></i>	89
6.3.2 <i>Efeito da variação da Indutância <i>L</i></i>	91
6.4 Análise de confiabilidade	92
6.5 Conclusões	99
CAPÍTULO 7 CONCLUSÕES GERAIS	101
7.1 Perspectivas	103
APÊNDICE	105
TESTES DE ALGORITMOS E COMPARAÇÃO DE RESULTADOS	105
<i>Teste 1 – Momento resistente em seção de viga de aço</i>	105
<i>Teste 2 – Momento em seção de uma viga retangular prismática de concreto</i>	112
<i>Teste 3 – Deslocamento horizontal de plataforma marítima</i>	115
<i>Teste 4 – Colapso de um pórtico</i>	118
<i>Verificação dos resultados e observações</i>	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123

Página intencionalmente deixada em branco.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este capítulo introdutório visa à contextualização do estudo desenvolvido durante a realização da Dissertação de Mestrado, mostrando a importância de se considerarem as incertezas em projetos de engenharia e de se avaliar a sua confiabilidade.

Para situar esta pesquisa em um contexto nacional e internacional, é feita uma revisão bibliográfica com a apresentação de alguns dos principais estudos desenvolvidos, com foco na análise de confiabilidade estrutural. Como nessa Dissertação há uma preocupação maior quanto à análise dinâmica de estruturas sujeitas a procedimentos de controle de vibrações, a revisão bibliográfica aborda três estratégias de controle, sendo uma ativa e duas passivas e é mostrada a importância de se utilizar a confiabilidade nessas aplicações. Conceitos de probabilidade e estatística, bem como os métodos de confiabilidade mais utilizados são referenciados de trabalhos oriundos da bibliografia consultada.

Em seguida, os principais objetivos da confiabilidade aplicada aos controles ativo e passivo de estruturas são expostos, com a intenção de esclarecer o que será abordado nos capítulos seguintes. Também são mostrados os objetivos inicialmente traçados para o desenvolvimento do presente estudo.

1.1 Contextualização

A definição de confiabilidade (*reliability*), segundo o dicionário de Sell (1973), é regularidade; eficiência: garantia de operação; segurança de marcha (operação, trabalho, funcionamento). Fürstenau (1997) define *reliability* como confiabilidade, fidedignidade.

Já Parker (1994) define o termo confiabilidade em duas áreas diferentes: engenharia e estatística. Em engenharia, confiabilidade é a probabilidade de que a parte de um componente, equipamento, ou sistema irá satisfatoriamente executar a sua função sob dadas circunstâncias, como condições ambientais, limitações como tempo de operação, frequência e qualidade da manutenção por um período específico de tempo. A definição em estatística mostra que confiabilidade é uma medida da credibilidade colocada em um resultado, ou a precisão de uma medida, quando a medição de um mesmo objeto é repetida várias vezes sem mudanças.

Haldar e Mahadevan (2000) dizem que a maioria dos fenômenos observáveis possui certa quantidade de incertezas, em outras palavras, eles não podem ser previstos com total certeza ou confiança. Em geral, várias repetições das mesmas medidas físicas de um fenômeno, por exemplo, também geram várias saídas distintas. Dentre esses valores de saída, alguns ocorrem com mais frequência que outros. Essa ocorrência, que não segue um padrão pré-definido, é explicada devido à presença de incertezas aleatórias.

No presente trabalho, a confiabilidade, no âmbito da mecânica estrutural, é entendida como a probabilidade de um sistema desempenhar determinada função para a qual foi projetado, em condições específicas, de forma adequada, durante um período de tempo determinado, considerando que algumas características da estrutura e/ou do carregamento, apresentam variabilidades de natureza aleatória.

A temática abordada nesta Dissertação se enquadra nas atividades que vêm sendo desenvolvidas no Laboratório de Mecânica de Estruturas (*LMEst*) da Faculdade de Engenharia Mecânica da *UFU*, voltadas para a análise de confiabilidade estrutural. Vale ressaltar que o *LMEst* é a sede do *INCT* de Estruturas Inteligentes em Engenharia, no âmbito do qual se executam trabalhos de pesquisa acerca de materiais e estruturas inteligentes. Embora a análise de confiabilidade e o estudo de estruturas inteligentes e diferentes formas de controle ativo e passivo venham sendo intensivamente estudados nos últimos anos, não são numerosos os trabalhos que fazem a associação dos dois temas mencionados. Desta forma, acredita-se que o estudo realizado venha proporcionar contribuições com certo grau de ineditismo.

1.2 Revisão bibliográfica

Na literatura, podem ser encontradas diversas referências que tratam da confiabilidade, principalmente na área de estruturas e engenharia civil. Todavia, constata-se pequeno número de trabalhos na área de controle ativo ou passivo, e de estudos que tratam da análise de confiabilidade aplicada a estruturas inteligentes.

Alguns autores, como Ang e Tang (1984), Melchers (1987), Beck (2007) e Haldar e Mahadevan (2000), possuem várias publicações em confiabilidade aplicada à engenharia civil. Outros autores, como Lemaire (2009), direcionam seu trabalho à definição matemática de confiabilidade e probabilidade de falha de sistemas quaisquer.

1.2.1 Confiabilidade estrutural

Vários trabalhos investigados abordam a confiabilidade de estruturas treliçadas isostáticas ou hiperestáticas, pórticos, construções prediais, pontes, antenas, torres e estruturas que possuem redundâncias com o objetivo de aumentar a segurança das mesmas.

Mesmo com uma rica literatura em confiabilidade estrutural, alguns tipos de estruturas mais complexas, como as estruturas lamelares (FERREIRA, 1999) e estruturas em formato de cúpulas reticuladas (FERREIRA, 2012), ainda necessitam de um estudo de confiabilidade mais elaborado (Fig. 1.1).

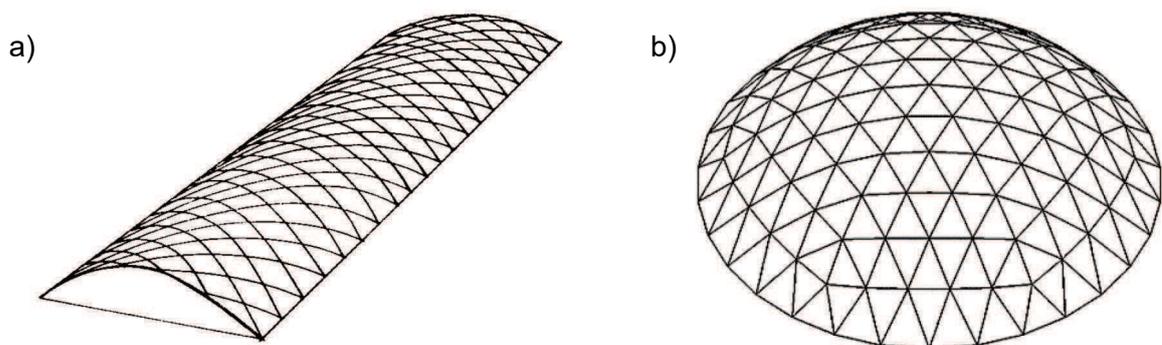


Figura 1.1 – a) Ilustração de estruturas lamelares (extraída de (FERREIRA, 1999)); b) ilustração de cúpulas reticuladas (extraída de (FERREIRA, 2012)).

Uma grande quantidade de trabalhos pode ser citada para exemplificar a aplicação de confiabilidade em estruturas, e a seguir são mencionadas algumas das referências consideradas mais interessantes. Shao e Murotsu (1999) estudaram a probabilidade de falha de estruturas complexas e sua otimização, com a aplicação de métodos clássicos e algoritmos genéticos. Por outro lado, Ziha (2000) mostra como representar a probabilidade de falha de uma treliça plana com barras redundantes, utilizando associações em série e paralelo. Melchers

(1999) apresenta tipos de variáveis aleatórias importantes que podem ser consideradas na análise e projeto ótimo de estruturas, como, por exemplo, variação no local e na inclinação de carga aplicada. Com um estudo bem detalhado, Catbas, Susoy e Frangopol (2008) mostram como estimar a confiabilidade e monitorar a integridade estrutural de uma ponte treliçada de grande extensão. Kim e Frangopol (2010) também avaliaram a integridade estrutural de uma ponte, em condições de tráfego de veículos pesados, considerando diferentes modelos de sistema em série, em paralelo e combinações série-paralelo para cálculo da confiabilidade. Cunha, Saad e Rade (2012) mostram técnicas de análise de confiabilidade aplicadas a treliças planas e expõem a possibilidade da inclusão de uma barra redundante não aumentar, necessariamente, a segurança, ao ser comparada com uma treliça sem redundâncias. Jensen e Sepulveda (2012) apresentam uma metodologia de projeto de estruturas com sistemas anti-vibratórios considerando incertezas, e mostram a influência de um grande número de variáveis aleatórias.

De acordo com as citações, pode-se observar a grande variedade de trabalhos coletados, com temas distintos e relevantes em confiabilidade estrutural.

1.2.2 Controle ativo com atuadores piezelétricos

No estudo de Kwon e Bang (1997), pode ser encontrada a modelagem dinâmica de estruturas por meio do método de elementos finitos. Esse método é utilizado para se obterem as matrizes de massa e de rigidez do sistema para, posteriormente, ser estabelecida a equação de movimento (BATHE, 1996). Os autores também mostram conceitos fundamentais do projeto de controladores.

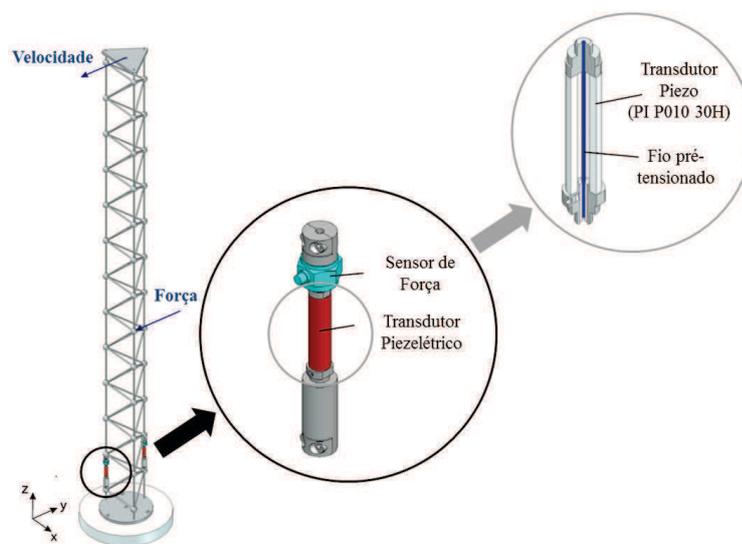


Figura 1.2 – Treliça tridimensional com atuadores piezelétricos e sensor de força (ilustração adaptada de (PREUMONT *et al.*, 2008)).

Preumont (2004), mais especificamente, mostra aplicações do controle ativo de treliças tridimensionais por meio de atuadores do tipo *stack* de pastilhas piezelétricas (*PZTs*) sem a presença de variáveis aleatórias. A Figura 1.2 apresenta uma estrutura estudada por Preumont *et al.* (2008) envolvendo controle ativo e passivo com atuadores piezelétricos.

Leo (2007) também modela o funcionamento de atuadores piezelétricos sem considerar a presença de incertezas nas propriedades do material piezelétrico. Xue e Tang (2006) comprovam a robustez e a alta precisão do controle utilizando atuadores piezelétricos. Fallah e Ebrahimnejad (2013) mostram a aplicação de controle de estruturas usando atuadores piezelétricos por meio de controladores *fuzzy* com o objetivo de mostrar a robustez desse método.

Spencer *et al.* (1994) inserem variabilidades aleatórias em parâmetros como massa, rigidez e amortecimento, para avaliar a robustez de um tipo de controlador. Breitung, Casciati e Faravelli (1998) examinam a confiabilidade do sistema atingir a estabilidade. Os autores também consideram massa e rigidez como parâmetros aleatórios e, por meio de um controlador do tipo *fuzzy*, estabilizam a estrutura analisada. Battaini *et al.* (1998) também utilizam um controlador *fuzzy*, mas empregam confiabilidade para investigar o desempenho e a robustez dessa técnica de controle. Battaini, Casciati e Faravelli (2000) também apresentam um trabalho relativo à confiabilidade associada ao controle, mas, diferentemente dos anteriores, verificam a importância da redundância de componentes, por meio de árvores de falha, no controle estrutural. Cunha, Saad e Rade (2013) mostram, por meio da confiabilidade, como a estocasticidade de propriedades piezelétricas podem influenciar diretamente os requisitos operacionais no controle ativo de estruturas inteligentes.

Além disso, é interessante ressaltar que os estudos realizados por Spencer *et al.* (1994); Breitung, Casciati e Faravelli (1998); Battaini *et al.* (1998); e Cunha, Saad e Rade (2013) utilizam dois métodos aproximados de avaliação de confiabilidade que são usados nessa dissertação: *FORM* e *SORM*, e que são introduzidos mais adiante.

Distintamente, Venini e Mariani (1999) utilizam métodos de perturbação para estimar a confiabilidade como medida de eficiência entre diferentes técnicas de controle ativo como H_∞ e *LQG*. Por outro lado, Gao *et al.* (2003) investigam o posicionamento ótimo dos atuadores em uma treliça inteligente com parâmetros aleatórios, sem focar o método de confiabilidade utilizado.

A grande maioria dos trabalhos presentes na literatura usam confiabilidade para comparar tipos de controladores e avaliar, por exemplo, o quanto um controlador *fuzzy* pode ser mais robusto que um controlador clássico. Diferentemente, o estudo aqui realizado considera incertezas presentes nos materiais inteligentes, que podem influenciar diretamente nos requisitos operacionais e na eficiência do controle dessas estruturas.

1.2.3 Controle passivo com Absorvedores Dinâmicos de Vibrações (ADV)

Den Hartog (1956) apresenta a modelagem de absorvedores dinâmicos de vibração (Fig. 1.3), que também pode ser encontrada em Rao (2011), em que é evidenciado o funcionamento desse invento de relevante importância tecnológica. Métodos de sintonização ótima dos parâmetros massa, mola e amortecedor são apresentados pelos mesmos autores e por Cunha Jr. (1999). Todos consideram os parâmetros de sintonização como determinísticos e não foi encontrada publicação que considere a presença de incertezas nesse modelo. Outros autores, como Rade e Steffen Jr. (2000), apresentam os passos para a otimização de um ADV em uma determinada banda de frequência e mostram dois exemplos com diferentes frequências naturais.

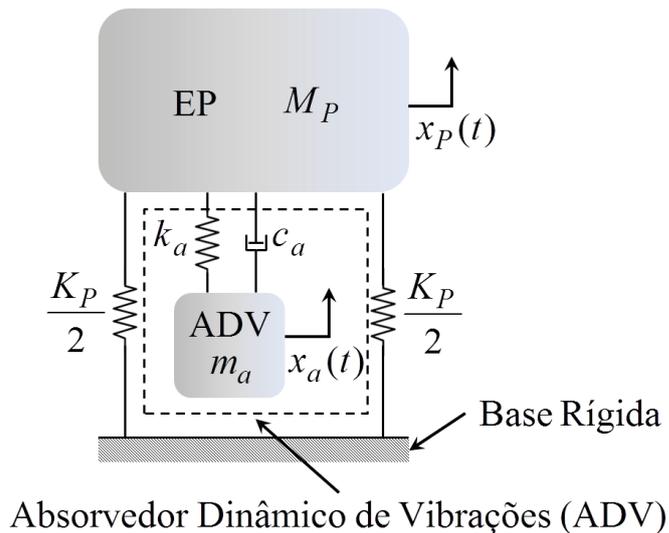


Figura 1.3 – Absorvedor dinâmico de vibrações (ilustração adaptada de (RAO, 2011)).

Viana *et al.* (2008) mostram a aplicação do método de otimização heurístico conhecido com Colônia de Formigas para sintonizar absorvedores dinâmicos de vibrações.

1.2.4 Controle passivo com atuadores piezelétricos (PZT) em circuito shunt

Tratando-se de controle passivo com circuito *shunt* ressonante (Fig. 1.4), Hagood e Von Flotow (1991) descrevem a aplicação desses circuitos com materiais piezelétricos para adição de amortecimento a vibrações estruturais.

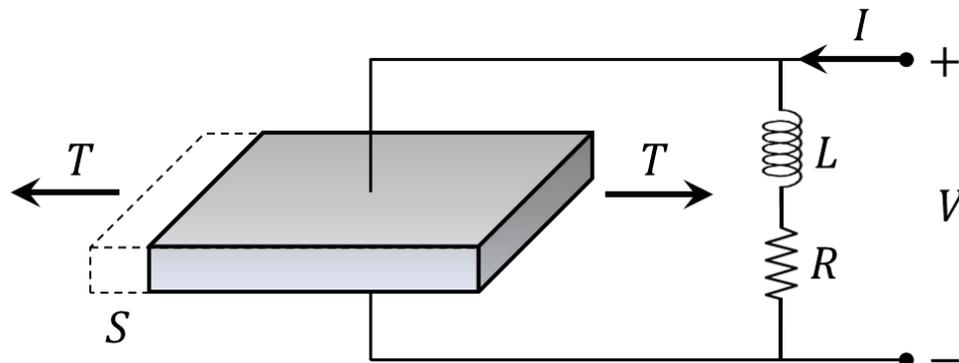


Figura 1.4 – Circuito *shunt* ressonante para controle passivo usando material piezelétrico (adaptado de (HAGOOD; VON FLOTOW, 1991)).

Os autores mostram a analogia deste circuito com o absorvedor dinâmico de vibrações citado anteriormente. Há vários estudos sobre este invento, mas a maioria dos autores não avalia a estocasticidade presente no modelo real. Godoy e Trindade (2011) mostram a modelagem e a análise de placas de materiais compósitos laminados com inserção pastilhas piezelétricas conectadas a circuitos *shunts* ressonantes. Nguyen e Pietrzko (2006) apresentam uma viga piezelétrica adaptativa modelada por elementos finitos para amortecimento de vibrações usando um circuito *shunt* R - L em paralelo. Fein (2008) considera um modelo para uma estrutura bidimensional usando pastilhas piezelétricas combinadas com um circuito elétrico passivo. Fleming, Behrens e Moheimani (2003) propõem uma maneira de reduzir os valores necessários de indutância de sistemas com atuadores piezelétricos em circuito *shunt*. Sales, Rade e De Souza (2013) propõem o controle passivo de vibrações de painéis flexíveis de satélites espaciais usando transdutores piezelétricos conectados a circuitos *shunt*.

Outros autores se ocupam da otimização de sistemas que usam essa solução, como Jeon (2009), que mostra a otimização de um sistema amortecido passivamente por materiais piezelétricos em circuito *shunt* por meio do método heurístico denominado Enxame de Partículas. Ducarne, Thomas e Deü (2012) também mostram, detalhadamente, um método para otimizar o posicionamento e as dimensões de pastilhas piezelétricas em circuito *shunt* para redução de vibrações.

Trindade, Santos e Godoy (2013) quantificam os efeitos de incertezas consideradas na camada de cola no desempenho de pastilhas piezelétricas que funcionam como sensores e atuadores.

Em Boylestad (2004) é possível constatar que todo componente eletrônico possui uma tolerância no valor de seus parâmetros. Capacitância, indutância e resistência possuem um

valor médio que pode ter uma imprecisão relativa para componentes vendidos comercialmente, de 5 % a 20 % do valor nominal, o que torna interessante investigar a influência da variação desses parâmetros no controle passivo de estruturas usando atuadores piezelétricos em circuito *shunt*.

1.2.5 Métodos de avaliação de confiabilidade

Os requisitos operacionais de sistemas de engenharia podem ser equacionados na forma de estados limites (BECK, 2007), de modo que o não atendimento de um requisito de serviço ou de segurança representa um estado indesejável da estrutura, ou seja, um modo de falha. Dessa forma, a cada modo de falha é associada uma Função de Estado Limite (*LSF*, *Limit State Function*), $g(X)$, que é escrita em função das variáveis de projeto aleatórias, agrupadas no vetor X . Evidentemente, outras variáveis cuja variabilidade é considerada desprezível são tratadas como quantidades determinísticas.

As *LSF* são definidas de tal forma que valores negativos representam falha e valores positivos representam o funcionamento adequado da estrutura. Assim, elas estabelecem, para cada modo de falha, a fronteira entre os domínios de falha e de segurança. As variáveis de projeto X representam parâmetros incertos da estrutura, que são modelados por variáveis aleatórias, com funções densidade de probabilidade previamente escolhidas. O problema de avaliação da confiabilidade consiste, então, em determinar a probabilidade de que o sistema se encontre no domínio seguro, dadas as variabilidades das variáveis de projeto.

A partir de amostragem das variáveis aleatórias, a Simulação de Monte Carlo (*MCS*, *Monte Carlo Simulation*) pode ser utilizada para calcular a probabilidade de falha de estruturas; contudo, seu maior inconveniente é o fato de que este método necessita geralmente um grande número de simulações, o que implica elevado tempo e considerável custo computacional, para que seja obtida a convergência (MELCHERS, 1987).

Alternativamente, foram desenvolvidos procedimentos numéricos aproximados, baseados em otimização, para a avaliação de confiabilidade, dentre os quais os dois métodos principais são *FORM* e *SORM* (HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

O método *FORM* (*First Order Reliability Method*) se baseia na determinação da menor distância entre o ponto de médias das variáveis aleatórias e a curva que representa a equação de estado limite, linearizada localmente. A menor distância recebe o nome de índice de confiabilidade, representado por β . Já o método *SORM* é baseado na determinação da menor distância entre a função de estado limite e o ponto de médias, adotando-se uma aproximação quadrática para a função de estado limite nas vizinhanças do ponto de projeto (Fig. 1.5).

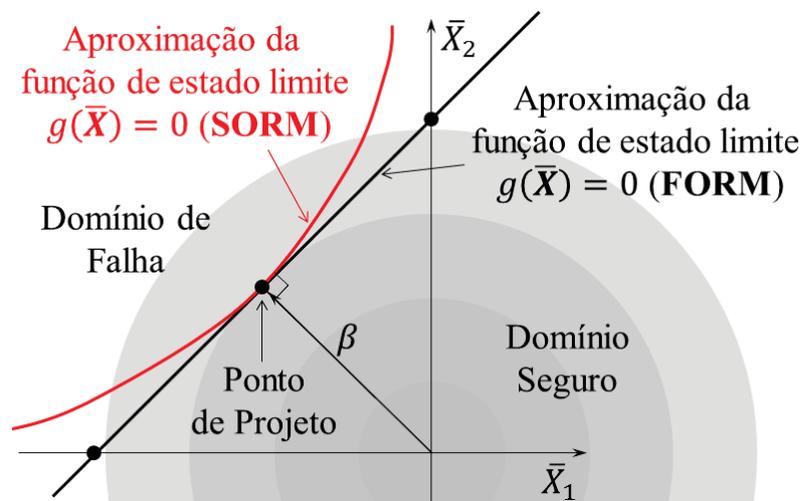


Figura 1.5 – Esquema simplificado dos métodos *FORM* e *SORM*.

Numerosos pesquisadores exploram estes métodos, tais como Rackwitz e Schrupp (1985), que associam probabilidades de falha a sistemas de controle de qualidade; Di Sciava e Lomario (2003) comparam o método *FORM* com o *MCS*; Hurtado e Alvarez (2013) utilizam a *MCS* para encontrar os limites inferiores de confiabilidade de um ponto de projeto, exibindo um método que melhora a eficiência da Simulação de Monte Carlo baseado em resultados primeiramente fornecidos pelo método *FORM*; Rabhi *et al.* (2011) mostram o uso de um metamodelo para cálculo da confiabilidade de um sistema dinâmico; e Zhao e Qiu (2013) apresentam um método de superfície de resposta para aplicação em confiabilidade estrutural e otimização baseada em confiabilidade.

Outra abordagem numérica para a estimação de confiabilidade é o uso de algoritmos de otimização baseados em heurísticas que simulam processos encontrados em sistemas biológicos (Algoritmos Genéticos, Enxame de Partículas, Colônia de Formigas, etc.) ((HAUPT; HAUPT, 2004), (MICHALEWICZ, 1996)). Os usuários destes métodos argumentam, em seu favor, que tais métodos evitam algumas limitações tradicionalmente encontradas em algoritmos clássicos de otimização, tais como a convergência para mínimos locais ao invés do mínimo global, e o fato de não requererem o cálculo de gradientes da função objetivo. Por outro lado, tais métodos se caracterizam, tipicamente, por elevado esforço computacional.

1.3 Objetivos da dissertação

No contexto apresentado acima, a presente dissertação tem por objetivo geral o estudo de técnicas de confiabilidade aplicadas a estruturas submetidas a procedimentos de controle ativo ou passivo de vibrações.

A principal motivação para o estudo advém do fato que estruturas controladas apresentam variáveis de projeto e funções de estado limite específicas que ainda não foram intensamente investigados na literatura. Ademais, considera-se que, do ponto de vista prático, a avaliação de confiabilidade é uma etapa importante no projeto de sistemas de controle, havendo, pois, o interesse em avaliar sua eficiência com vistas à sua incorporação nos procedimentos usuais de projeto.

Consideram-se, especificamente, as seguintes estratégias de controle: controle ativo utilizando atuadores piezelétricos; controle passivo utilizando absorvedores dinâmicos de vibrações e controle passivo utilizando transdutores piezelétricos associados a circuitos *shunt* ressonantes.

Como objetivos específicos, definem-se:

- implementar e testar um programa computacional para cálculo da confiabilidade de estruturas, com base nos métodos *FORM* e *SORM*;
- definir um conjunto de funções de estado limite e de variáveis incertas, especialmente adaptadas aos tipos de estrutura em estudo;
- realizar simulações numéricas considerando variabilidades típicas encontradas em estruturas reais, confrontando os resultados obtidos por meio dos métodos *FORM*, *SORM*, *GARM* e *MCS*.

1.4 Organização do trabalho

Além deste primeiro capítulo introdutório, esta Dissertação está estruturada conforme descrito a seguir.

A teoria de confiabilidade e alguns conceitos básicos necessários para a sua compreensão são apresentados no segundo capítulo. Fundamentos sobre a modelagem de incertezas por meio funções densidade de probabilidade e funções de densidade acumulada são abordados. Além disso, a noção de função de estado limite e a possibilidade de análise conjunta de várias funções de estado limite, através de sistemas em série, paralelo, ou suas combinações, são constituintes deste capítulo.

Já o terceiro capítulo apresenta os métodos de cálculo de confiabilidade utilizados: *FORM*, *SORM* e *MCS*. Testes das rotinas computacionais elaboradas e comparações com resultados extraídos da literatura são realizados com o intuito de validação da metodologia numérica desenvolvida para a aplicação das técnicas para análise de confiabilidade e se encontram no Apêndice desta Dissertação.

O quarto capítulo elucida aspectos do cálculo da confiabilidade de uma treliça plana modelada por elementos finitos, contendo atuadores piezelétricos axiais estabelecidos para o controle ativo de vibrações. Funções de estado limite relacionadas a requisitos de projeto de controladores são estabelecidas e os métodos de confiabilidade são usados para calcular a probabilidade de não atendimento. Conclusões específicas a esse tipo de estrutura são observadas.

O quinto capítulo trata da mesma treliça plana considerada no capítulo precedente, controlada passivamente por absorvedores dinâmicos de vibração (*ADV*). Esses absorvedores possuem três parâmetros essenciais para o seu funcionamento: massa, amortecimento e rigidez, que são consideradas como variáveis aleatórias. Funções de resposta em frequência (*FRF*) são analisadas e a probabilidade de não atendimento dos requisitos de projetos de absorvedores dinâmicos de vibração é avaliada. Os resultados obtidos são analisados e aspectos importantes são comentados.

No sexto capítulo, considera-se a treliça plana controlada passivamente por dispositivos piezelétricos do tipo *shunt* ressonante. Semelhantemente a um absorvedor dinâmico de vibrações, o circuito *shunt* ressonante é composto por uma indutância, um capacitor e uma resistência elétrica, cujos valores são considerados variáveis aleatórias. Diferentes análises são apresentadas e os resultados são discutidos.

Por fim, no último capítulo, conclusões gerais acerca do trabalho são apresentadas com o intuito de esclarecer sobre o uso adequado das ferramentas probabilísticas estudadas e verificar o quanto as variáveis consideradas aleatórias podem afetar o funcionamento de cada estrutura avaliada; e por fim, são listadas perspectivas para a continuidade do trabalho realizado.

Página intencionalmente deixada em branco.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

O presente capítulo apresenta os conceitos necessários para a compreensão dos métodos de confiabilidade aplicados nos capítulos seguintes.

Inicialmente, é mostrada uma contextualização de incertezas presentes em sistemas estruturais. Em seguida, é feita uma abordagem sobre conceitos estatísticos, como a representação de incertezas por meio de histogramas (também conhecidos como diagramas de frequência), a função densidade probabilidade (*fdp*) e a função densidade acumulada (*fda*), que constituem a base do cálculo de probabilidades de falha. Posteriormente, duas distribuições de probabilidade mais utilizadas, a distribuição normal (ou *Gaussiana*) e a distribuição lognormal são apresentadas.

Depois de expor como se representa aleatoriamente uma variável, a função de estado limite é definida; sua funcionalidade é explicada considerando um sistema estrutural para o qual se pretenda calcular a confiabilidade. A definição de sistema de coordenadas reduzidas (ou normalizadas) é exposta, e o conceito de índice de confiabilidade também é introduzido.

Várias funções de estado limite podem ser analisadas simultaneamente. Um sistema também pode falhar de várias maneiras ou várias restrições devem ser respeitadas ao mesmo tempo. Assim, é esclarecido como se obtém a confiabilidade de um sistema com equações a serem satisfeitas simultaneamente (sistema em série) e um sistema com equações redundantes (sistema em paralelo), além da combinação desses dois tipos.

Por fim, o cálculo de intervalos de probabilidade de primeira ordem e intervalos de probabilidade de segunda ordem é mostrado.

2.1 Introdução

A resposta de uma estrutura a um dado carregamento depende, essencialmente, do tipo e da magnitude da carga aplicada, bem como das características geométricas e mecânicas dessa estrutura (MELCHERS, 1987). Essa resposta estrutural é considerada satisfatória quando atende a requisitos relacionados à falha ou colapso, dano aceitável, limitações de movimentação e deformação, vibrações e ruído emitido, entre outros. É fundamental perceber, também, que os carregamentos e as propriedades do material e da estrutura podem variar ao longo do tempo.

A grande maioria dos sistemas em engenharia está sujeita a incertezas e grande parte das variáveis de projeto não deve ser considerada como determinística por possuir natureza estocástica. Normalmente, as variáveis são modeladas segundo distribuições de probabilidade padronizadas (SHIGLEY; MISCHKE; BUDYNAS, 2005). Essas incertezas influenciam diretamente o desempenho, a durabilidade e o atendimento aos requisitos de projeto.

Considerando a inevitável presença de incertezas, a análise de confiabilidade visa a avaliar a probabilidade de que um sistema estrutural venha satisfazer aos requisitos de projeto e funcionamento, admitindo-se que estas incertezas possam ser representadas por variáveis aleatórias. Os requisitos são estabelecidos por meio das denominadas funções de estado limite (*LSF, Limit State Functions*).

2.2 Modelagem de incertezas

Na obra de Haldar e Mahadevan (2000), os autores anunciam que um dos primeiros passos para considerar a aleatoriedade em uma variável é a coleta de dados. Partindo de valores discretos colhidos, seja por ensaios ou por medidas de precisão, obtêm-se medidas estatísticas como média, desvio padrão e coeficiente de variação.

Os subtópicos subsequentes descrevem alguns conceitos necessários para se modelarem variáveis aleatórias discretas e contínuas que, posteriormente, são usados para caracterizar variáveis aleatórias em uma função de estado limite.

2.2.1 Diagrama de frequências e propriedades estatísticas

Dois termos estatísticos devem ser apresentados para uma compreensão clara de um diagrama de frequência ou histograma. Esses termos são: população e amostra.

População significa toda possível observação de uma variável aleatória ou fenômeno, por exemplo, o módulo de elasticidade das barras de aço produzidas por uma empresa siderúrgica, identificada à variável aleatória X . Como é impraticável realizar ensaios em todas as

barras produzidas, uma quantidade limitada de valores, denominada amostra, é coletada com o objetivo de representar toda a população. Quanto maior for o tamanho dessa amostra, maior será a confiança nos valores calculados a partir dela e nos intervalos encontrados. Considera-se, para exemplificar, que 1.000 corpos de prova de aço sejam ensaiados e que o histograma apresentado na Fig. 2.1 seja obtido.

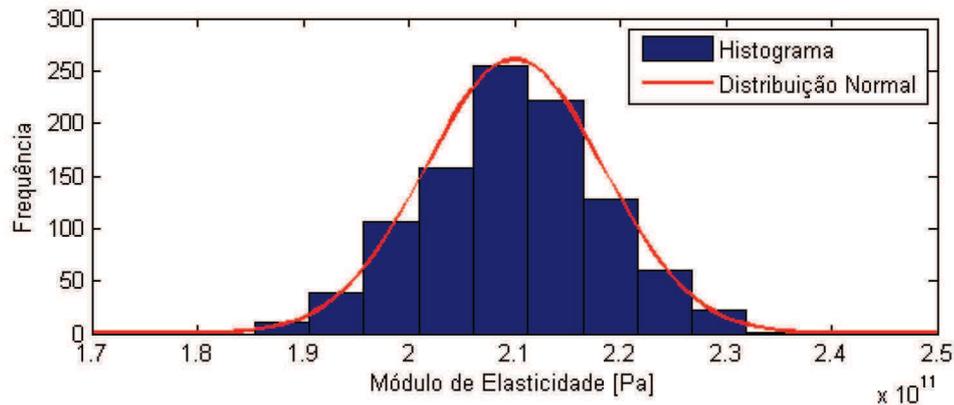


Figura 2.1 – Exemplo de um diagrama de frequências ou histograma de uma amostragem aleatória e uma função densidade probabilidade de uma distribuição normal.

A partir dos valores das amostras, constata-se que a média dos valores medidos do módulo de elasticidade é $2,1 \times 10^{11} Pa$, com desvio padrão de $0,084 \times 10^{11} Pa$.

Para uso em cálculos de resistência dos materiais, esse valor de média seria adotado como ideal, o que pode ser inadequado, principalmente quando o desvio padrão for significativo. Isso se deve à presença de incertezas, que nesse caso são quantificadas por uma medida de dispersão. No caso da Figura 2.1, a média é o valor esperado e o desvio padrão uma medida de dispersão. Esses valores, média μ_X e desvio padrão σ_X , podem ser calculados segundo as Eqs.(2.1) e (2.2), em que n corresponde à quantidade de elementos da amostra.

$$\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.1)$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} \quad (2.2)$$

Esses dois parâmetros estatísticos recebem os nomes de primeiro e segundo momentos estatísticos e isso será usado nos capítulos a seguir. Eles possuem a mesma unidade de

medida, sendo o segundo momento, a medida do desvio em torno do valor médio obtido com o primeiro momento, para a variável considerada.

Outro parâmetro, denominado coeficiente de variação, é representado por $COV(X)$ ou δ_X , e corresponde à razão entre o desvio padrão e a média sendo, portanto, adimensional:

$$COV(X) = \delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}. \quad (2.3)$$

Para um valor de δ_X nulo, ou seja, σ_X igual a zero, implica que a variável analisada é essencialmente determinística. Um valor pequeno do coeficiente de variação significa baixa presença de incertezas. Segundo Haldar e Mahadevan (2000), na maioria dos problemas na engenharia é comum considerar o valor de 0,1 a 0,3 para $COV(X)$. Outras propriedades estatísticas também podem ser calculadas para se caracterizar com mais detalhes a incerteza de uma variável de projeto. Para o trabalho em apreço, as propriedades supracitadas são suficientes.

2.2.2 Função densidade probabilidade (fdp) e função densidade acumulada (fda)

De acordo com Haldar e Mahadevan (2000), uma função densidade probabilidade (fdp), associada a uma variável aleatória contínua X , é uma função que indica a natureza da aleatoriedade do problema, ou seja, permite modelar as incertezas do problema estudado. Sendo essa função denotada por $f_X(x)$, tem-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1. \quad (2.4)$$

Define-se também a função densidade acumulada (fda) por:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = P(X \leq x). \quad (2.5)$$

Em outras palavras, a fda é a área sob a curva da fdp. Ao se variarem os limites de integração, tem-se a probabilidade de que sejam encontrados valores menores que X .

2.2.3 Distribuições de probabilidade (DP)

Algumas distribuições de probabilidade importantes no contexto da análise de confiabilidade são: normal, lognormal, *Gumbel*, beta, *Poisson*, *Weibull* e *Rayleigh*. As mais utilizadas em cálculos estatísticos são as distribuições normal e a lognormal, que são expostas a seguir.

Mais detalhes podem ser encontrados em: (HALDAR; MAHADEVAN, 2000) e (MELCHERS, 1987).

Distribuição normal (N)

Dentre os tipos de funções densidade probabilidade utilizados em problemas de engenharia, a mais empregada é a distribuição normal ou *gaussiana*, expressa segundo:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right]}, -\infty < x < +\infty. \quad (2.6)$$

Esse tipo de distribuição, normalmente representada por $N(\mu_X, \sigma_X)$, depende somente de dois parâmetros da variável X : a média (μ_X) e o desvio padrão (σ_X). Dessa maneira, por exemplo, um diagrama de frequências de um ensaio para obtenção de módulos de elasticidade pode ter uma curva de distribuição normal facilmente ajustada como é mostrado na Fig. 2.1.

A Figura 2.2 mostra distribuições normais de média zero e desvios padrão iguais a 1, 2 e 3, notando-se que ocorre aumento da dispersão da distribuição quando o valor de σ_X aumenta.

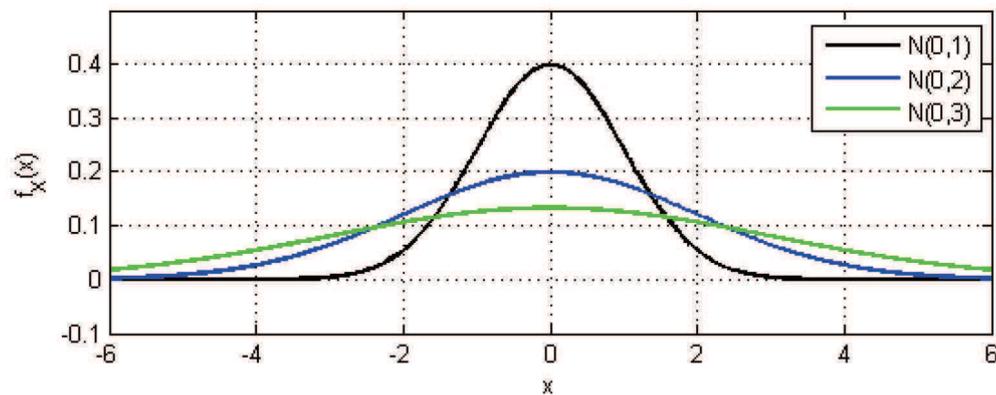


Figura 2.2 – Funções densidade probabilidade normais com média zero e desvios padrão iguais a um, dois e três.

A Figura 2.3 mostra as funções densidade probabilidade acumulada associadas às *fdp* apresentadas na Fig. 2.2.

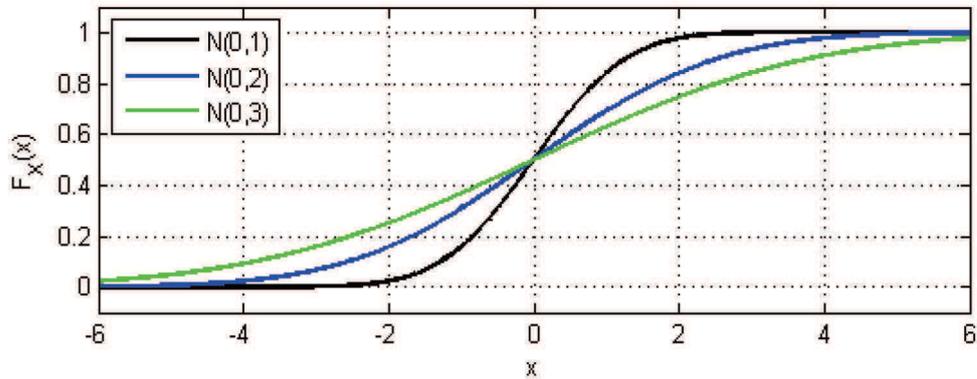


Figura 2.3 – Funções densidade acumulada normais com média zero e desvios padrão iguais a um, dois e três.

Distribuição lognormal (LN)

Outra distribuição bastante utilizada é a distribuição lognormal, ilustrada na Fig. 2.4, cuja principal diferença em relação à anterior é não assumir valores negativos o que, dependendo da natureza física do problema, pode ser mais adequado. A função densidade probabilidade associada à distribuição lognormal está expressa pela Eq.(2.7), e é representada por $LN(\lambda_X, \zeta_X)$ em que λ_X e ζ_X são os dois parâmetros dessa distribuição.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta_X x} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda_X}{\zeta_X}\right)^2\right]}, 0 \leq x < +\infty. \tag{2.7}$$

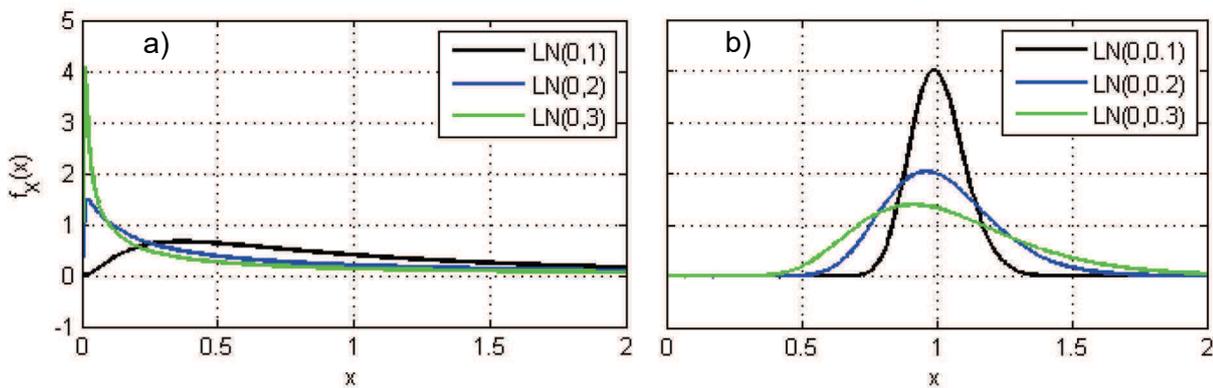


Figura 2.4 – Distribuições de probabilidade lognormais com a) LN(0; 1), LN(0; 2) e LN(0; 3) e b) LN(0; 0,1), LN(0; 0,2) e LN(0; 0,3).

A Figura 2.4 mostra distribuições lognormais com λ_X igual a zero e diferentes valores de ζ_X , que podem ser calculados a partir dos parâmetros da distribuição normal conforme expressam as Eqs. (2.8) e (2.9).

$$\lambda_X = \ln \mu_X - 1/2 \zeta_X^2 \quad (2.8)$$

$$\zeta_X^2 = \ln \left[1 + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X} \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

A Figura 2.5 mostra as distribuições normal e lognormal do módulo de elasticidade do aço, considerando $\mu_X = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ e $\sigma_X = 0,04 \times \mu_X = 0,084 \times 10^{11} \text{ Pa}$.

Como é impossível existir um módulo de elasticidade negativo, normalmente utiliza-se a distribuição lognormal para representar esse tipo de variável.

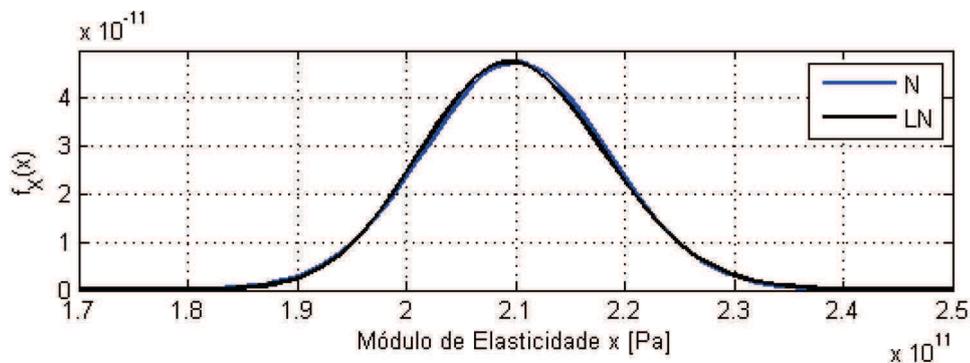


Figura 2.5 – Distribuições normal (N) e lognormal (LN) do módulo de elasticidade com $\mu_X = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ e $\sigma_X = 0,04 \times \mu_X = 0.084 \times 10^{11} \text{ Pa}$ (adaptado de (HALDAR; MAHADEVAN, 2000)).

2.2.4 Função de estado limite

A função de estado limite (LSF , *Limit State Function*) serve para representar uma condição de falha de um sistema, ou um requisito de projeto que deve ser satisfeito para o seu bom funcionamento. Para ilustrar o significado da equação de estado limite, alguns conceitos de resistência dos materiais devem ser apresentados: tensão última, coeficiente de segurança e tensão admissível.

A tensão última (σ_u) corresponde à máxima tensão que um elemento estrutural pode suportar antes de perder sua função (por escoamento, ruptura ou flambagem). A tensão admissível (σ_{adm}) é calculada a partir da tensão última, e representa a tensão máxima que o projetista admite para que o elemento estrutural possa suportar as cargas sem sofrer dano. Normalmente, divide-se a tensão última por um número superior à unidade, denominado coeficiente de segurança (cs), para se obter a tensão admissível utilizada nos dimensionamentos de projetos estruturais. Dessa maneira, tem-se a seguinte relação:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{c_s}. \quad (2.10)$$

O coeficiente de segurança é introduzido tradicionalmente para levar em conta as incertezas que afetam as cargas e as propriedades físicas e geométricas da estrutura, sem, contudo, considerar os tipos de incerteza e suas interações; isso é feito admitindo, na fase de projeto, que a estrutura seja capaz de suportar tensões inferiores às tensões últimas.

Por outro lado, os requisitos básicos de sistemas estruturais sujeitos a incertezas podem ser equacionados de forma mais racional por meio de funções de estado limite (BECK, 2007). O não atendimento de um requisito de serviço ou de segurança representa um estado indesejável da estrutura, ou seja, um modo de falha. Dessa forma, cada modo de falha dá origem a uma função de estado limite g , que é escrita em função das variáveis (aleatórias) de projeto X como:

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0. \quad (2.11)$$

As funções de estado limite são definidas de tal forma que valores negativos representam a falha (configurações inseguras) e valores positivos representam a integridade da estrutura (configurações seguras). Assim, as equações de estado limite estabelecem, para cada modo de falha, a fronteira entre os domínios de falha D_f e de integridade D_s , ou a fronteira entre os estados desejável e indesejável da estrutura, conforme exibem as Eqs. (2.12a) e (2.12b), respectivamente.

$$D_f = \{\mathbf{X} \mid g(\mathbf{X}) \leq 0\} \quad (2.12a)$$

$$D_s = \{\mathbf{X} \mid g(\mathbf{X}) > 0\} \quad (2.12b)$$

Um exemplo simples, mas representativo, é um problema envolvendo apenas duas variáveis, sendo elas resistência (R) e solicitação (S), para o qual a função de estado limite é dada pela Eq.(2.13).

$$g(R, S) = R - S = 0 \quad (2.13)$$

Se a resistência (R) for maior que a solicitação (S), o sistema se encontra em D_s , e se a solicitação for maior ou igual à resistência, o sistema se encontra em D_f . A Figura 2.6 mostra, graficamente, a função de estado limite para um conjunto de pontos (R, S) nos quais a resistência é igual à solicitação, bem como as regiões segura e de falha.

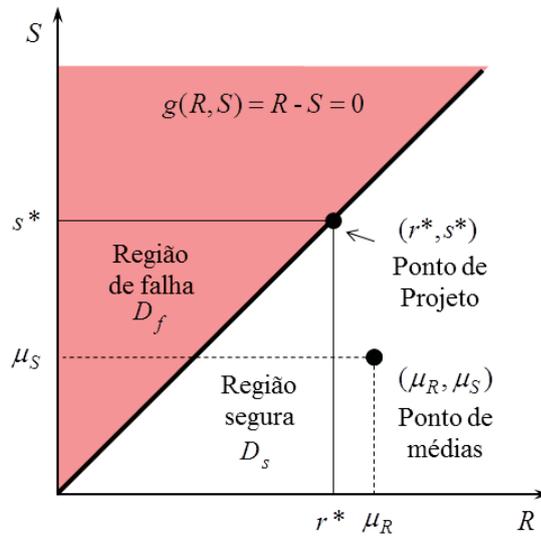


Figura 2.6 – Equação de estado limite $g(R,S) = R - S = 0$ e as regiões de falha D_f e sobrevivência D_s .

2.2.5 Probabilidade de falha e índice confiabilidade (β)

Utilizando o exemplo da resistência (R) e da solitação (S), e aplicando o conceito de distribuições densidade de probabilidade, tem-se a representação no plano mostrada na Fig. 2.7.

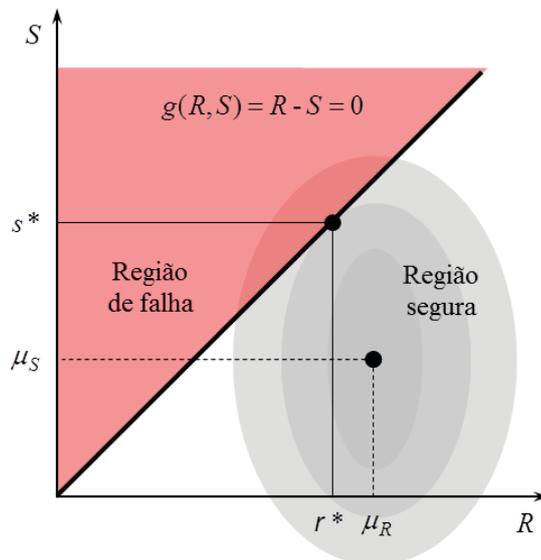


Figura 2.7 – Representação de DP para as variáveis aleatórias R e S .

As variáveis aleatórias são transformadas em variáveis com média zero e desvio padrão unitário, de acordo com as Eqs.(2.14). A Figura 2.8 mostra as novas variáveis que formam o sistema de coordenadas denominado reduzido ou normalizado.

$$\bar{R} = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (2.14a)$$

$$\bar{S} = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (2.14b)$$

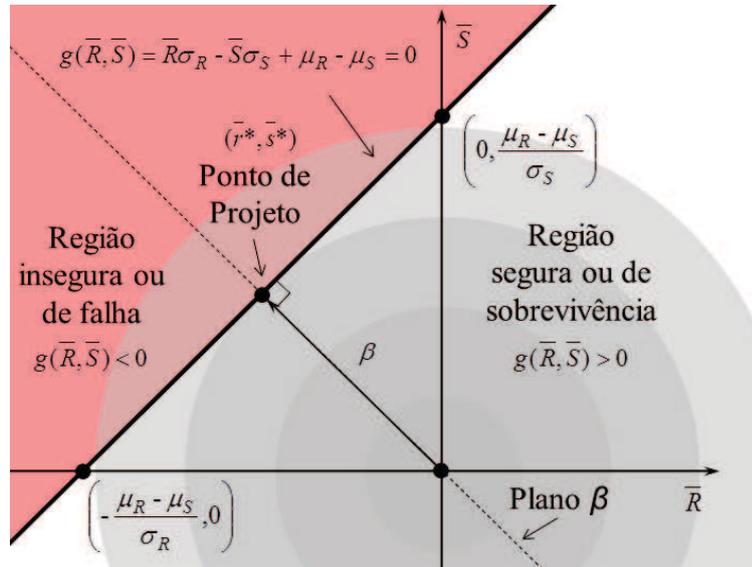


Figura 2.8 – Distribuição de probabilidade para variáveis aleatórias no sistemas de coordenadas reduzido ou normalizado.

O índice de confiabilidade (β) é definido como a menor distância entre a origem do sistema normalizado e a representação gráfica da função de estado limite $g(\bar{R}, \bar{S}) = 0$. É possível encontrar a probabilidade de falha (P_f) a partir do índice de confiabilidade e vice-versa, Eq.(2.15).

$$P_f = \Phi(-\beta), \quad (2.15a)$$

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f), \quad (2.15b)$$

onde Φ representa a função distribuição normal acumulada padronizada e Φ^{-1} a sua inversa.

O índice de confiabilidade (β) e a probabilidade de falha (P_f) estão sempre relacionados como pode ser observado na Fig. 2.9 e na Tab. 2.1.

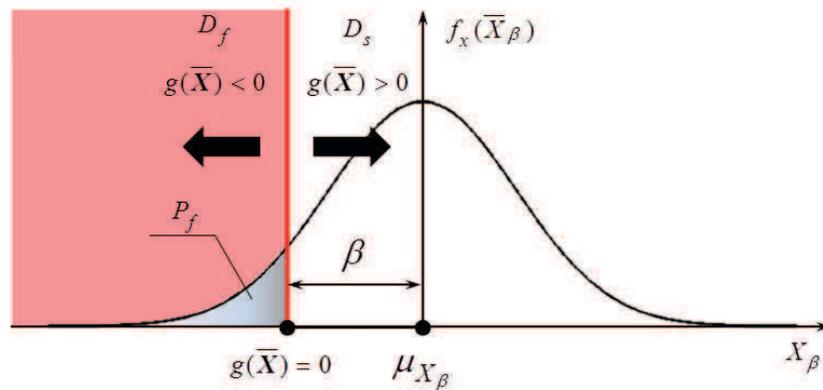


Figura 2.9 – Representação da probabilidade de falha (P_f) de acordo com o índice de confiabilidade (β) e a função densidade $f_x(X_\beta)$.

Tabela 2.1 – Relação entre a probabilidade de falha P_f e o índice de confiabilidade β .

β	P_f	β	P_f	β	P_f
0,0	$50,000000 \times 10^0$	3,0	$13,498980 \times 10^{-2}$	6,0	$98,658770 \times 10^{-9}$
0,5	$30,853753 \times 10^0$	3,5	$23,262908 \times 10^{-3}$	6,5	$40,159986 \times 10^{-10}$
1,0	$15,865525 \times 10^0$	4,0	$31,671242 \times 10^{-4}$	7,0	$12,798651 \times 10^{-11}$
1,5	$66,807201 \times 10^{-1}$	4,5	$33,976731 \times 10^{-5}$	7,5	$31,863400 \times 10^{-13}$
2,0	$22,750131 \times 10^{-1}$	5,0	$28,665157 \times 10^{-6}$	8,0	$66,613381 \times 10^{-15}$
2,5	$62,096653 \times 10^{-2}$	5,5	$18,989562 \times 10^{-7}$	8,2	$11,102230 \times 10^{-15}$

De acordo com a Tabela 2.1, nota-se que quanto maior for o índice de confiabilidade, menor será a probabilidade de falha de um sistema. Em outras palavras, para que um sistema seja seguro para uma determinada função de estado limite, o respectivo índice de confiabilidade deve ser alto. Probabilidade de falha para índices de confiabilidade acima de 8,2 não são possíveis de ser calculadas por um computador que usa o padrão *IEEE*[®] 754 para dupla precisão. A menor precisão de máquina para a unidade inteira (I) é maior que a probabilidade de falha apresentada para beta igual a 8,2. Dessa maneira, um valor menor que $11,102230 \times 10^{-15}$ é considerado igual a zero.

2.3 Avaliação da confiabilidade de sistemas

Sistemas em engenharia normalmente possuem vários componentes com seus respectivos modos de falha. De acordo com Melchers (1987), sistemas estruturais e seus subsistemas podem ser classificados em duas simples categorias: em série e em paralelo. Alguns

sistemas consistem em uma combinação de subsistemas em série e em paralelo, podendo se tornar mais complexos.

2.3.1 Sistemas em série e sua probabilidade de falha

Os sistemas em série são ilustrados, simbolicamente, pela Fig. 2.10, em que n representa a quantidade de subsistemas.

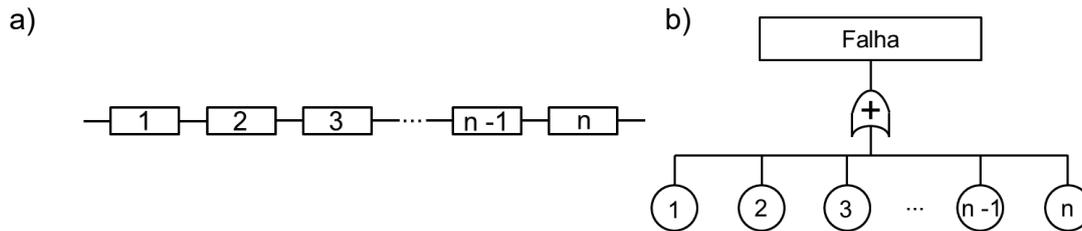


Figura 2.10 – Representação para um sistema em série: a) clássica; e b) por árvore de falhas.

Segundo Beck (2007), a probabilidade de falha do sistema em série pode ser desenvolvida conforme mostra a Eq.(2.16) na qual E_i representa o evento de falha do i -ésimo componente.

$$F = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^n E_i \quad (2.16)$$

Aplicando a Lei de *Morgan*, tem-se que o sistema em série possui a seguinte confiabilidade (probabilidade de sobrevivência):

$$\bar{F} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3 \cap \dots \cap \bar{E}_n = \bigcap_{i=1}^n \bar{E}_i \quad (2.17)$$

Logo, a probabilidade de falha pode ser escrita de acordo com a Eq.(2.18):

$$P_f = P[F] = P\left[\bigcup_{i=1}^n E_i\right] = 1 - P\left[\bigcap_{i=1}^n \bar{E}_i\right]. \quad (2.18)$$

Para Melchers (1987), é evidente que uma estrutura estaticamente determinada, como, por exemplo, uma treliça isostática, constitui um sistema em série, dado que a falha de um único elemento (neste caso, uma barra) implica a falha de toda a estrutura. Já uma estrutura hiperestática não tem o comportamento tão evidente quanto o anterior. Trata-se de uma estrutura complexa que deve ser analisada com mais detalhes, pois pode envolver combinações de sistemas em série e em paralelo.

2.3.2 Sistemas em paralelo e sua probabilidade de falha

Os sistemas em paralelo são ilustrados, esquematicamente, pela Fig. 2.11, em que n representa a quantidade de componentes.

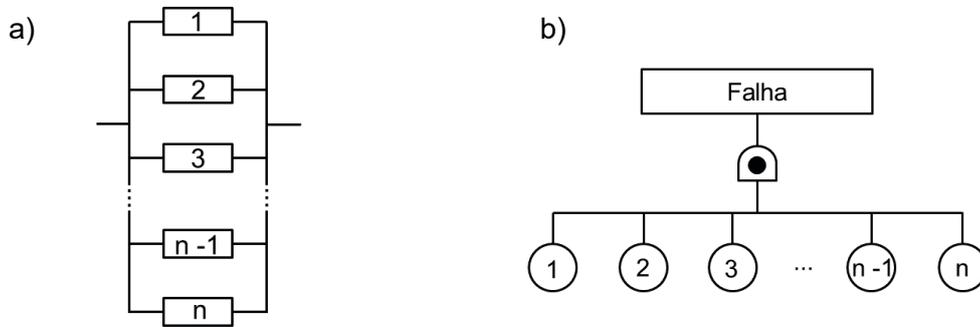


Figura 2.11 – Representação para um sistema em paralelo: a) clássica e b) por árvore de falhas.

Já para um sistema em paralelo, a probabilidade de falha do mesmo pode ser desenvolvida como expresso em Eqs.(2.19) e (2.20).

$$F = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \dots \cap E_n = \bigcap_{i=1}^n E_i \quad (2.19)$$

$$P_f = P[F] = P\left[\bigcap_{i=1}^n E_i\right] \quad (2.20)$$

Definindo um intervalo entre a probabilidade de falha do sistema e a barra que possua a menor probabilidade de falha, tem-se a Eq.(2.21) para sistemas em paralelo.

$$\prod_{i=1}^n P[E_i] \leq P_f \leq \min_i P[E_i] \quad (2.21)$$

2.3.3 Sistemas com combinações série-paralelo e sua probabilidade de falha

Existem sistemas que normalmente não podem ser descritos como sistemas em série puros ou sistemas em paralelo puros, e sim como uma combinação desses dois tipos. A Figura 2.12 mostra o exemplo de um sistema com combinações em série e paralelo.

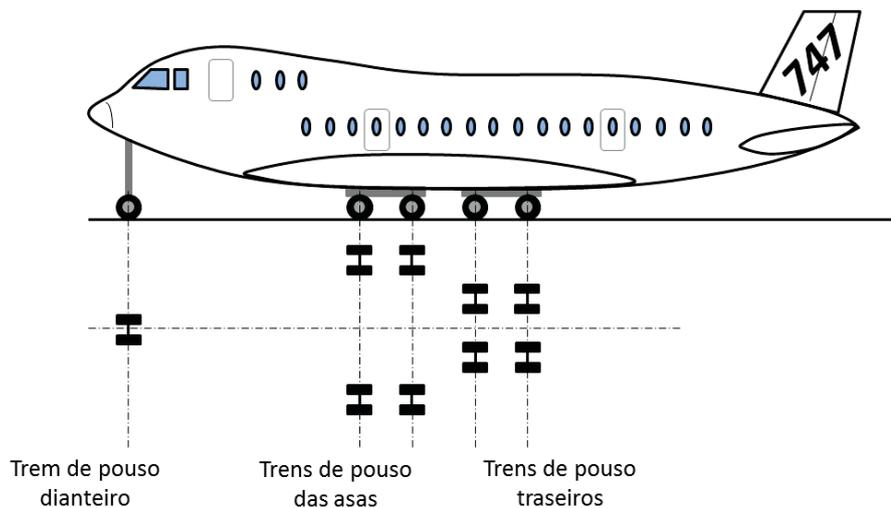


Figura 2.12 – Ilustração do trem de pouso de um *Boeing 747* (adaptada de (ANG; TANG, 1984)).

A falha para o sistema considerado é caracterizada pelo colapso de um pneu. Mais especificamente, durante um pouso, os pneus sofrem uma carga que pode variar dependendo de vários fatores. Logo, cada pneu tem uma probabilidade de falha diferente, pois há diferentes distribuições de carga. Para aumentar a segurança, são colocadas redundâncias no sistema, como pneus e trens de pouso.

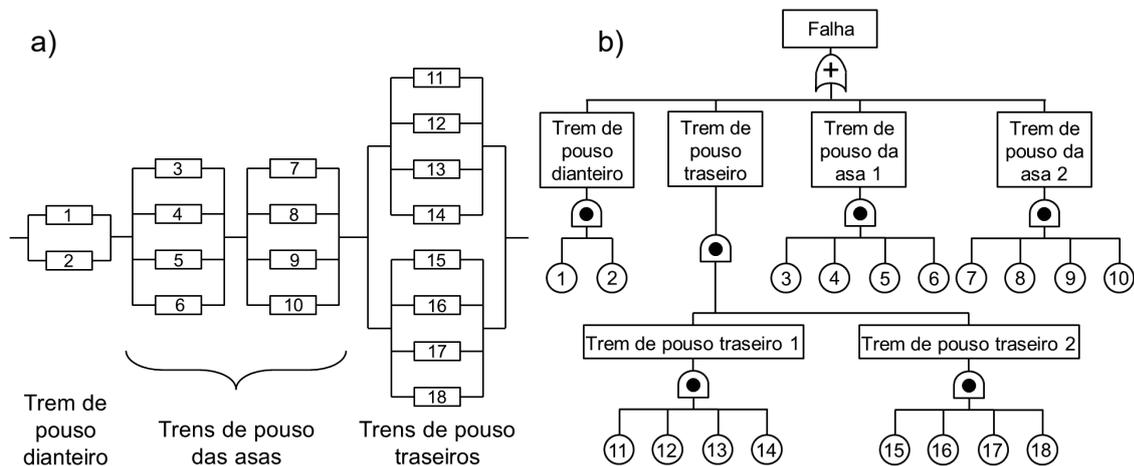


Figura 2.13 – a) Combinações série-paralelo para o trem de pouso de um *Boeing 747*; e b) árvore de falha para o mesmo sistema (adaptado de (ANG; TANG, 1984)).

Esse sistema pode ser representado, para cálculo de probabilidade de falha, de acordo com o diagrama esquematizado na Fig. 2.13 e calculado pela Eq.(2.22):

$$P_f = P[\mathcal{N}_{i=1}^2 E_i] \cup P[\mathcal{N}_{i=3}^6 E_i] \cup P[\mathcal{N}_{i=7}^{10} E_i] \cup \left\{ P[\mathcal{N}_{i=11}^{14} E_i] \cap P[\mathcal{N}_{i=15}^{18} E_i] \right\}. \quad (2.22)$$

Embora a Equação (2.22) contenha muitos termos decorrentes das combinações de sistemas em série e paralelo, nem todos os termos presentes são considerados. Devido a possíveis presenças de dependências dos modos de falha, termos que envolvem intersecções podem ou não ser desprezados. Por exemplo, para uma primeira estimativa, para a união de probabilidades de falha na presença de variáveis dependentes, os termos de segunda ordem são desprezados. Dessa maneira, devido à dificuldade de se definir a dependência entre variáveis do sistema, faixas de probabilidade de falha são definidas e suas fronteiras podem ser calculadas conforme mostrado a seguir.

2.4 Fronteiras de confiabilidade

Um sistema que sofre um carregamento sequenciado de cargas pode falhar de várias maneiras. Supondo que um sistema seja solicitado por três carregamentos e que cada esforço implique um modo de falha F_1 , F_2 e F_3 , ou seja, que se tenha um sistema em série, a sua probabilidade de falha possa ser representada pela Eq.(2.23).

$$P[F] = P[F_1] + P[F_2] - P[F_1 \cap F_2] + P[F_3] - P[F_1 \cap F_3] - \dots \\ P[F_2 \cap F_3] + P[F_1 \cap F_2 \cap F_3]. \quad (2.23)$$

Segundo Melchers (1987), a Eq.(2.23) pode ser generalizada pela Eq.(2.24).

$$P[F] = \sum_{i=1}^m P[F_i] - \sum_{i<j}^m P[F_i \cap F_j] + \sum_{i<j<k}^m P[F_i \cap F_j \cap F_k] - \dots \quad (2.24)$$

Os termos $P[F_i \cap F_j]$ e $P[F_i \cap F_j \cap F_k]$ são conhecidos como termos de segunda e terceira ordens. Termos superiores também podem ser computados na Eq.(2.24). Para a análise de confiabilidade, os termos de ordem superior exercem pouca influência no resultado final do cálculo, podendo ou não ser inseridos no cálculo da probabilidade de falha.

2.4.1 Fronteiras de primeira ordem

Para fronteiras de primeira ordem, os termos de segunda ordem ($P[F_i \cap F_j]$) e os termos de ordens superiores são desprezados, pois os modos de falha são considerados independentes. Como a probabilidade de sobrevivência é igual à unidade, subtraída da probabilidade de falha ($P[S_i] = 1 - P[F_i]$), a Eq.(2.25) pode ser utilizada no cálculo.

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P[E_i]) \quad (2.25)$$

No caso onde as variáveis são totalmente dependentes, o mais fraco modo de falha será sempre o mais suscetível à falha, e a probabilidade de falha pode ser calculada de acordo com a Eq.(2.26).

$$P_f = \max_{i=1}^m (P[E_i]) \quad (2.26)$$

Estabelecendo um intervalo entre o modo com menor confiabilidade, Eq.(2.26), e a probabilidade de falha do sistema, Eq.(2.25), entre modos de falhas independentes e dependentes, respectivamente, tem-se a Eq.(2.27) para sistemas em série.

$$\max_{i=1}^m (P[E_i]) \leq P_f \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P[E_i]) \quad (2.27)$$

2.4.2 Fronteiras de segunda ordem

As intersecções de segunda ordem ($P[F_i \cap F_j]$) são consideradas, neste caso, como expresso na Eq.(2.28), segundo Melchers (1987).

$$P[F_1] + \sum_{i=2}^m \max \left(\left[P[F_i] - \sum_{j=1}^{i-1} P[F_i \cap F_j] \right], 0 \right) \leq P_f \leq \sum_{i=1}^m P[F_i] - \sum_{i=2}^m \max_{j < i} (P[F_i \cap F_j]) \quad (2.28)$$

A partir da Simulação Monte Carlo, realizada para alguns casos (MELCHERS, 1987), constata-se que os resultados encontrados estão inseridos nas faixas obtidas. Entretanto, as faixas nem sempre são estreitas.

Nos próximos capítulos são usados os conceitos básicos de confiabilidade e estruturas fundamentados no presente capítulo, para o uso em métodos de análise de confiabilidade.

CAPÍTULO 3

MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DE CONFIABILIDADE

Neste capítulo são apresentados os métodos de confiabilidade estudados, para os quais foram elaboradas rotinas de cálculo.

Inicialmente, é apresentado o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (*FORM, First Order Reliability Method*) que consiste em aproximar a equação de estado limite por uma reta, um plano ou hiperplano, dependendo da quantidade de variáveis envolvidas. Em seguida, é apresentado o Método de Confiabilidade de Segunda Ordem (*SORM, Second Order Reliability Method*) que, diferentemente do *FORM*, aproxima a equação de estado limite por uma curva quadrática, uma superfície quadrática ou hipersuperfície.

É também descrita a Simulação de Monte Carlo (*MCS, Monte Carlo Simulation*) que se baseia na amostragem das variáveis aleatórias de acordo com suas distribuições de probabilidade e contagem do número de simulações que levam à condição de falha. A técnica de amostragem Hipercubo Latino (*LHS, Latin Hypercube Sampling*) que otimiza a geração de amostras também é apresentada.

Por fim, testes de validação dos algoritmos elaborados são executados, e a eficiência de cada método é analisada, destacando-se suas vantagens e desvantagens. Comparações entre os resultados obtidos no estudo de problemas com funções de estado limite lineares e não lineares e os resultados reportados por outros autores são realizadas.

3.1 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM)

O método de confiabilidade de primeira ordem e segundo-momento (*FOSM*, *First Order Second-Moment*), também conhecido como valor médio em primeira ordem e segundo momento (*MVFOSM*, *Mean Value First-Order Second-Moment*), possui esse nome por ser oriundo de uma aproximação de primeira ordem da função de estado limite em série de *Taylor*. Embora o método *FOSM* utilize os valores de média e desvio padrão, o tipo de distribuição era ignorado, o que causava imprecisões. Assim, foi definido o método de confiabilidade de primeira ordem avançado (*AFOSM*, *Advanced First Order Second Moment*) que utiliza as informações sobre as distribuições (HASOFER; LIND, 1974).

Resumidamente, utilizando a função de estado limite expressa na Eq.(2.13), o *FOSM* calcula o índice de confiabilidade (β), de acordo com:

$$\beta = \frac{\mu_{g(R,S)}}{\sigma_{(R,S)}} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3.1)$$

Assim, conhecendo-se o valor de β , a probabilidade de falha é calculada pela Eq.(2.15a).

Já o método *AFOSM*, também conhecido como método de *Hasofer-Lind* para variáveis normais, consiste em transformar as distribuições de probabilidade normais dos parâmetros aleatórios em distribuições normais padronizadas de médias nulas e desvios padrão unitários. Dessa maneira, por exemplo, a função de estado limite da Eq.(2.13) se torna:

$$g(\bar{R}, \bar{S}) = \bar{R}\sigma_R - \bar{S}\sigma_S + \mu_R - \mu_S, \quad (3.2)$$

na qual \bar{R} e \bar{S} são as variáveis aleatórias normalizadas, segundo a Eq.(2.14).

Pode-se notar na Fig. 2.8, que os domínios de falha mudam e passam a respeitar a Eq.(3.2) e o índice de confiabilidade pode ser obtido geometricamente. Nesse caso, o índice de confiabilidade é conhecido como β_{HL} , indexado com as iniciais dos nomes de *Hasofer-Lind*. Este índice é definido como sendo a menor distância da origem do sistema de coordenadas reduzidas até a representação gráfica da equação de estado limite, e pode ser expresso segundo:

$$\beta_{HL} = \sqrt{\bar{X}^{*T} \bar{X}^*}, \quad (3.3)$$

na qual \bar{X}^* é o ponto correspondente à mínima distância da origem do sistema de coordenadas reduzidas até a superfície de estado limite. No caso de um problema com n variáveis

aleatórias, tem-se que $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$. Esse método se torna exato nas situações em que todas as variáveis são estatisticamente independentes com distribuições normais, e a função de estado limite é linear. A Figura 3.1 mostra uma representação do *FORM* para duas variáveis normalizadas e funções de estado limite linear e não linear côncava e convexa.

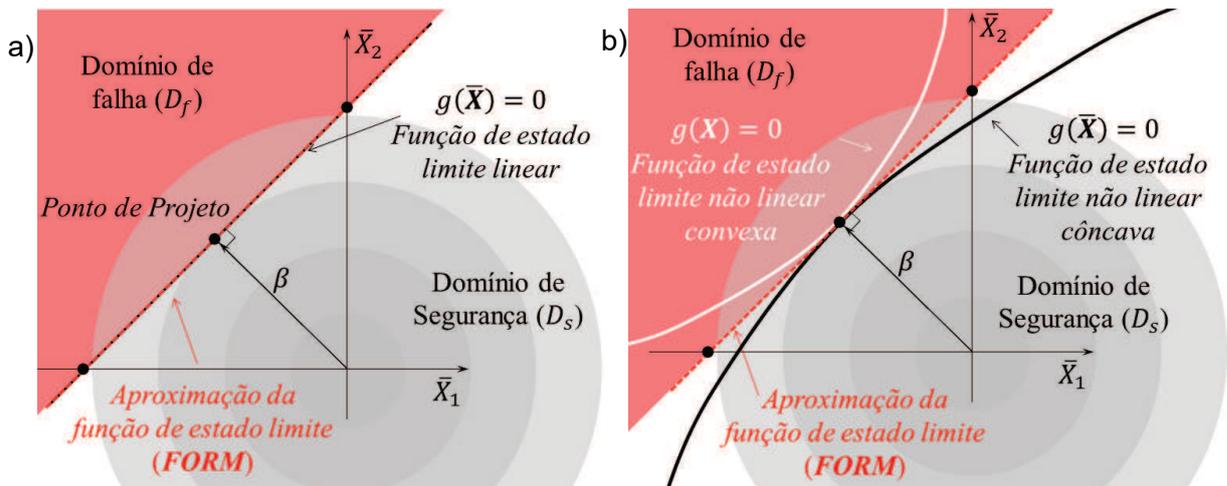


Figura 3.1 – Representação do método de confiabilidade de primeira ordem para função de estado limite: a) linear; e b) não linear côncava e convexa.

3.1.1 Variáveis normais equivalentes

Uma deficiência do método de *Hasofer-Lind* é a limitação de sua utilização para variáveis normais. Quando as variáveis não são normais, faz-se necessário transformá-las em distribuições normais equivalentes.

Por meio da transformação de *Rosenblatt*, por exemplo, pode-se encontrar o conjunto de variáveis normais estatisticamente independentes se a função densidade acumulada conjunta de todas as variáveis aleatórias for conhecida. Como isso é normalmente impossível, esse método se torna inviável.

Segundo Haldar e Mahadevan (2000), conceitualmente, variáveis independentes e não normais podem ser transformadas em variáveis normais equivalentes de diversas maneiras, sendo uma delas, pela obtenção dos valores de $\mu_{X_i}^N$ e $\sigma_{X_i}^N$ por meio das Eqs.(3.4a) e (3.4b).

$$\mu_{X_i}^N = x_i^* - \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\sigma_{X_i}^N \quad (3.4a)$$

$$\sigma_{X_i}^N = \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\}}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (3.4b)$$

Nessas equações, $\Phi(\cdot)$ é a função densidade acumulada da variável normal; e $\phi(\cdot)$ e $f_{X_i}(x_i^*)$ são as funções densidade de probabilidade de uma variável normal equivalente e não normal originária, respectivamente.

Essa aproximação se baseia na ideia de que o ponto de projeto, ou ponto de maior probabilidade de falha, tem que ser o mesmo para as variáveis não normais e normais equivalentes. Essa aproximação é conhecida como método de *Rackwitz-Fiessler* e é frequentemente citada na literatura (HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

3.1.2 Estruturação da implementação computacional do FORM

O método *FORM* assume como entrada:

1. a função de estado limite (*LSF*) com as variáveis incertas já definidas $g(\mathbf{X})$;
2. as distribuições assumidas para as variáveis aleatórias \mathbf{d} ;
3. os valores de média $\boldsymbol{\mu}_X$ e desvio padrão $\boldsymbol{\sigma}_X$ das variáveis aleatórias \mathbf{X} ;
4. as estimativas iniciais do ponto de projeto \mathbf{X}_0 e do índice de confiabilidade β_0 .

Em seguida, as variáveis aleatórias têm suas distribuições transformadas em normais equivalentes com médias nulas e desvios padrão unitários. O ponto de projeto é calculado iterativamente, de acordo com a Eq.(3.5), em que k é o número da iteração.

$$\bar{\mathbf{X}}_{k+1}^* = \frac{1}{|\nabla g(\bar{\mathbf{X}}_k)|^2} \left[\nabla g(\bar{\mathbf{X}}_k)^T \bar{\mathbf{X}}_k - g(\bar{\mathbf{X}}_k) \right] \nabla g(\bar{\mathbf{X}}_k) \quad (3.5)$$

Esse método se repete até que as tolerâncias mínimas definidas, em relação a β simbolizada por ε_1 ou em relação a $g(\mathbf{X}^*)$ simbolizada por ε_2 , sejam satisfeitas, ou seja, o algoritmo convirja. O fluxograma do algoritmo utilizado para esse método pode ser visualizado na Fig. 3.2.

A Equação (3.5) é baseada no método de *Newton-Raphson* para um sistema de n variáveis. Para funções de estado limite não lineares, o cálculo da menor distância é formulado como o seguinte problema de otimização:

$$\text{Minimizar: } D = \sqrt{\bar{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{X}}}, \quad (3.6a)$$

$$\text{Sujeita a: } g(\bar{\mathbf{X}}) = 0. \quad (3.6b)$$

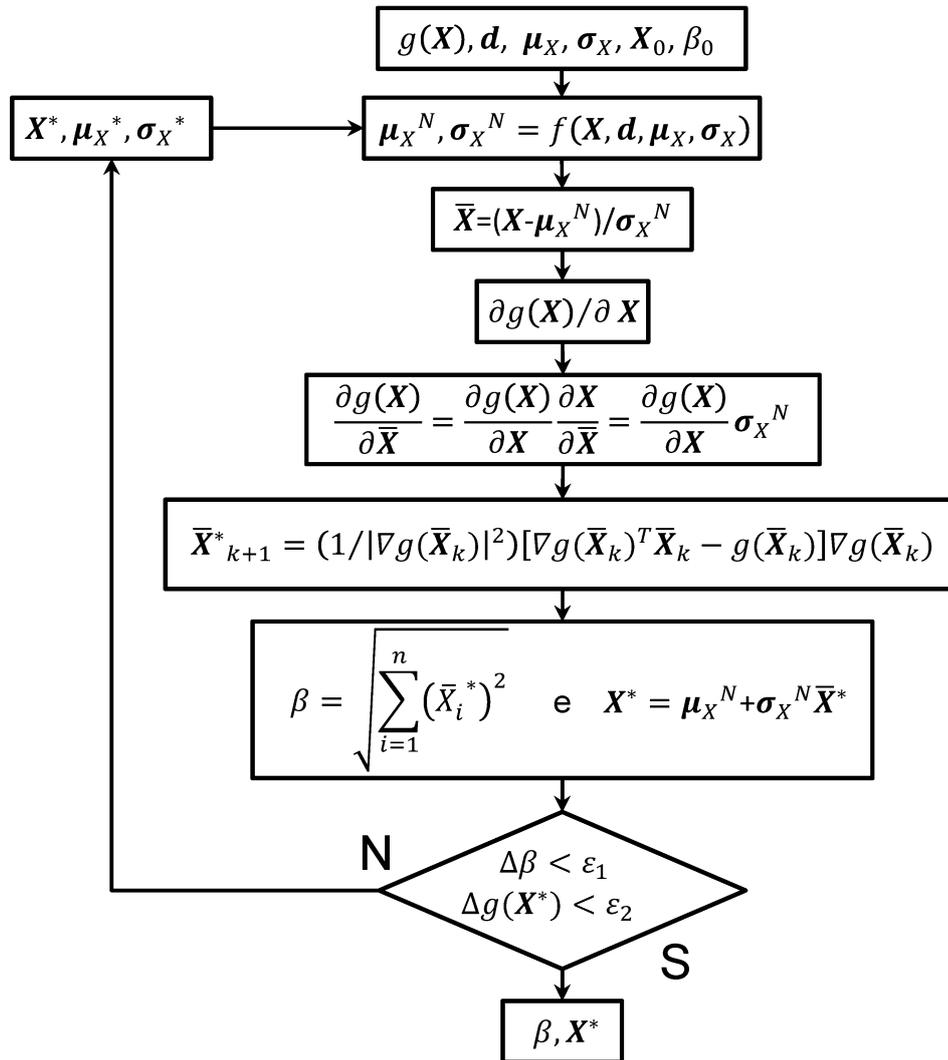


Figura 3.2 – Fluxograma do algoritmo *FORM* implementado.

Qualquer método de otimização pode ser utilizado para se obter o valor da menor distância. Algoritmos numéricos para a resolução desse problema, que não são detalhados nesse estudo, podem ser encontrados em (VANDERPLAATS, 2005).

Uma vez determinado o ponto de projeto, basta calcular a distância desse ponto até a origem do sistema de coordenadas reduzidas, para a obtenção do índice de confiabilidade. Além disso, o valor do ponto de projeto no sistema de coordenadas não reduzidas pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\mathbf{X}^* = \boldsymbol{\mu}_X^N + \boldsymbol{\sigma}_X^N \bar{\mathbf{X}}^* \quad (3.7)$$

Uma vez determinado o índice (β), a confiabilidade pode ser calculada segundo a Eq.(3.8).

$$R = \Phi(\beta) \quad (3.8)$$

Vale a pena ressaltar que, para a maioria dos problemas de engenharia, a função de estado limite não é linear e também não pode ser obtida na forma explícita. Nesses casos, o método de confiabilidade de segunda ordem e modelos numéricos, respectivamente, devem ser usados. Os modelos numéricos mais empregados para avaliar as respostas de sistemas complexos são os baseados no método dos elementos finitos (*FEM*), que é utilizado nesta Dissertação.

3.2 Método de Confiabilidade de Segunda Ordem (*SORM*)

Diferentemente do *FORM*, o método de confiabilidade de segunda ordem (*SORM*, *Second Order Reliability Method*) aproxima a função de estado limite por uma curva quadrática (Fig. 3.3).

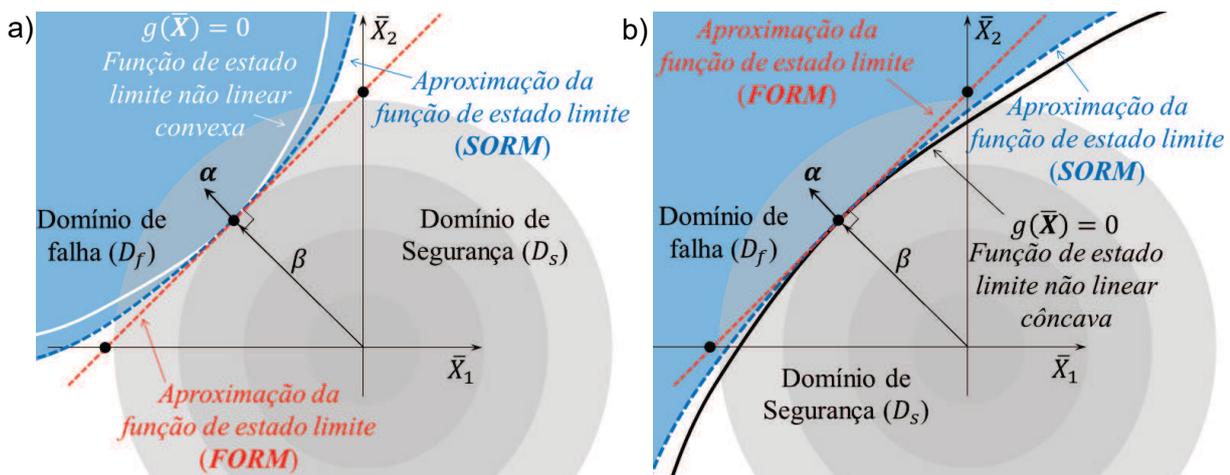


Figura 3.3 – Representação do método de confiabilidade de segunda ordem para: a) função de estado limite não linear convexa; e b) côncava.

Em uma aproximação por série de *Taylor*, o método *SORM* não considera termos além dos de segunda ordem, que envolvem derivadas segundas.

Uma aproximação para o cálculo de probabilidade usando aproximações de segunda ordem, proposta por Breitung (1984), segundo a teoria de aproximações assintóticas, é mostrada na Eq.(3.9):

$$P_f = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta \kappa_i)^{-1/2}, \quad (3.9)$$

na qual κ_i corresponde às curvaturas principais da *LSF* no ponto de menor distância e β é o índice de confiabilidade calculado pelo método *FORM*. As curvaturas principais são encontradas pela resolução de um problema de autovalor envolvendo a matriz A , cujas componentes são dadas por:

$$a_{ij} = \frac{(\mathbf{RDR}^T)_{ij}}{|\nabla g(\mathbf{X}^*)|}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.10)$$

onde \mathbf{R} é uma matriz de rotação calculada pela ortogonalização de *Gram-Schmidt*; \mathbf{D} é a matriz de derivadas segundas da hipersuperfície, avaliadas no ponto de projeto; e $|\nabla g(\mathbf{X}^*)|$ é o comprimento do vetor gradiente no espaço normal padronizado.

A ortogonalização de *Gram-Schmidt* usa os cossenos diretores do vetor gradiente α , mostrado na Fig. 3.3, sendo detalhada em (HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

3.2.1 Estruturação da implementação computacional do SORM

O método *SORM* possui os mesmos vetores de entrada do método *FORM* e utiliza o método de primeira ordem para calcular β_{FORM} e \mathbf{X}^*_{FORM} sem considerar as curvaturas da *LSF*.

Após isso, as variáveis têm suas distribuições de probabilidade transformadas em *PD* normais equivalentes, e são calculados os cossenos diretores de α .

Em seguida, são determinadas as derivadas de primeira e de segunda ordem no ponto \mathbf{X}^*_{FORM} . Utilizando os cossenos diretores de α e as derivadas de primeira e de segunda ordem, são calculadas as matrizes \mathbf{R} e \mathbf{D} ; a matriz A é obtida pela Eq.(3.10) e as curvaturas κ_i são os auto-vetores dessa última matriz. Utilizando a Equação (3.9), calcula-se a probabilidade de falha (P_f) e, assim, obtém-se o valor de β para o *SORM*, de acordo com a Eq.(2.15b).

O fluxograma do algoritmo utilizado para o *SORM* pode ser visualizado na Fig. 3.4.

Como a maioria dos problemas em engenharia são representados por funções de estado limite implícitas, surge a necessidade de se calcularem as derivadas numericamente. Este problema é enfocado na próxima seção.

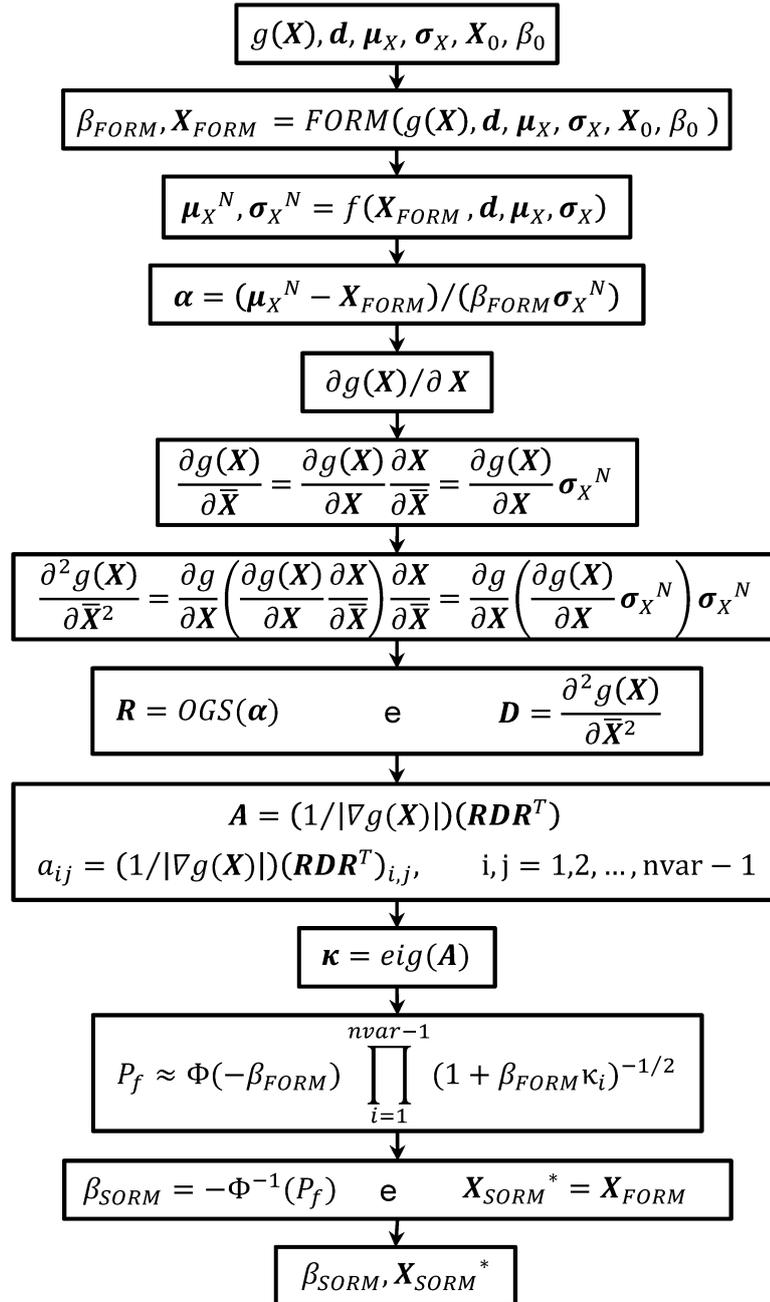


Figura 3.4 – Fluxograma do algoritmo SORM implementado.

3.3 Tratamento de funções de estado limite implícitas

As funções de estado limite analisadas pelos métodos *FORM* e *SORM* podem ser de dois tipos: explícitas ou implícitas. Em casos mais simples, funções de estado limite explícitas podem ser derivadas analiticamente, pois as variáveis são apresentadas diretamente na *LSF*. Já as funções de estado limite implícitas necessitam de métodos numéricos para serem calculadas. Algumas vantagens e desvantagens desses dois tipos de funções são apresentadas na Tab. 3.1.

Tabela 3.1 – Vantagens e desvantagens de funções de estado limite explícita e implícita.

	<i>LSF</i> explícita	<i>LSF</i> implícita
Vantagens	<ul style="list-style-type: none"> • Representação fácil; • Facilidade na obtenção de derivadas; • Chance maior de convergência. 	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de funções de maior complexidade; • Necessidade de métodos numéricos para obtenção de derivadas.
Desvantagens	<ul style="list-style-type: none"> • Impossibilidade de representar modelos mais complexos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Risco de não convergência.

Nesta Dissertação, o método de diferenças finitas (*FD*, *Finite Difference*) é utilizado para o cálculo de derivadas numéricas conforme: (LEMAIRE, 2009), (MELCHERS, 1987) e (HALDAR; MAHADEVAN, 2000). Esse método se baseia na substituição das derivadas por aproximações infinitesimais no ponto de projeto, como representam as Eqs.(3.11) e (3.12) para derivadas de primeira e de segunda ordem, respectivamente.

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} \approx \frac{g(X_i) - g(X_i - \Delta X_i)}{\Delta X_i} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial X_i^2} \approx \frac{g(X_i + 2\Delta X_i) - 2g(X_i) + g(X_i - 2\Delta X_i)}{4(\Delta X_i)^2} \quad (3.12)$$

Além disso, as *FD* podem ser de três tipos: atrasadas (*BFD*, *Backward Finite Differences*), centrais (*CFD*, *Central Finite Differences*) ou progressivas (*PFD*, *Forward Finite Differences*). Nesta pesquisa, são utilizadas as expressões para diferenças finitas atrasadas, Eq.(3.11) e Eq.(3.12). Mais detalhes sobre os tipos de diferenças finitas podem ser encontrados em (FORTUNA, 2000).

3.4 Simulação de Monte Carlo (MCS)

A Simulação de Monte Carlo (*MCS, Monte Carlo Simulation*) pode ser usada para estimar a confiabilidade. Esse método consiste em amostrar variáveis aleatórias para se obter um grande número de valores correspondentes de amostras da função de estado limite. As probabilidades de segurança e de falha são calculadas diretamente por contagem do número de simulações, nos quais a *LSF* se encontra no domínio seguro e no domínio de falha, respectivamente, e dividindo esse número pelo número total de simulações. A Equação (3.13) representa o cálculo da probabilidade de falha para a *MCS*:

$$P_f = \frac{n_f}{n} = \frac{I_{i=1}^n [g(\mathbf{X}_i) \leq 0]}{n}, \quad (3.13)$$

na qual n_f corresponde ao número de simulações encontradas no D_f , calculado por um contador $I[]$ com o qual são computadas as situações de falha ocorridas para i variando de 1 até n .

A Figura 3.7 ilustra esse método de confiabilidade para um caso de duas variáveis aleatórias com uma *LSF* linear.

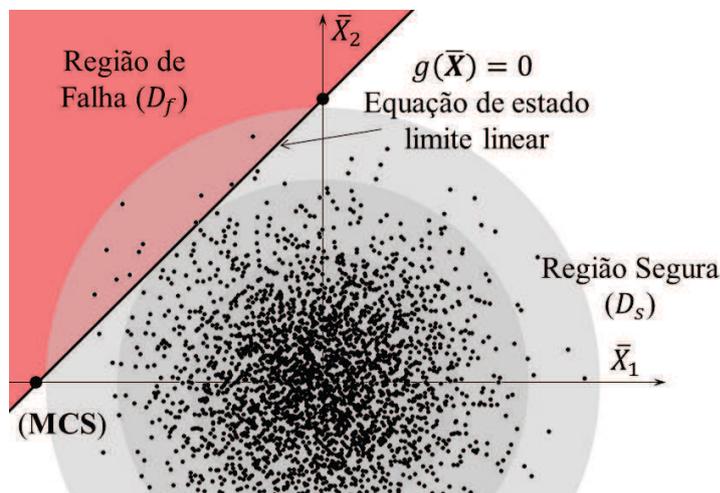


Figura 3.5 – Ilustração de *MCS* em uma análise de confiabilidade de duas variáveis incertas e *LSF* linear.

A principal desvantagem desse método é que, para se obter significância estatística, um grande número de simulações é normalmente requerido. Como mencionado por Melchers (1987), a convergência pode ser alcançada com aproximadamente 95 % de confiança, usando de 10.000 a 20.000 simulações, dependendo da *LSF* avaliada.

As taxas de convergência e estabilidade dependem da qualidade do gerador de números aleatórios usado. Para melhorar a geração das amostras, diferentes estratégias podem ser utilizadas: (MELCHER, 1999), (LEMAIRE, 2009) e (HALDAR; MAHADEVAN, 2000). Na presente Dissertação, é usada a técnica de amostragem denominada Hipercubo Latino (*LHS*, *Latin Hypercube Sampling*).

3.4.1 Estruturação do MCS

A Figura 3.8 apresenta o fluxograma do algoritmo MCS utilizado neste estudo.

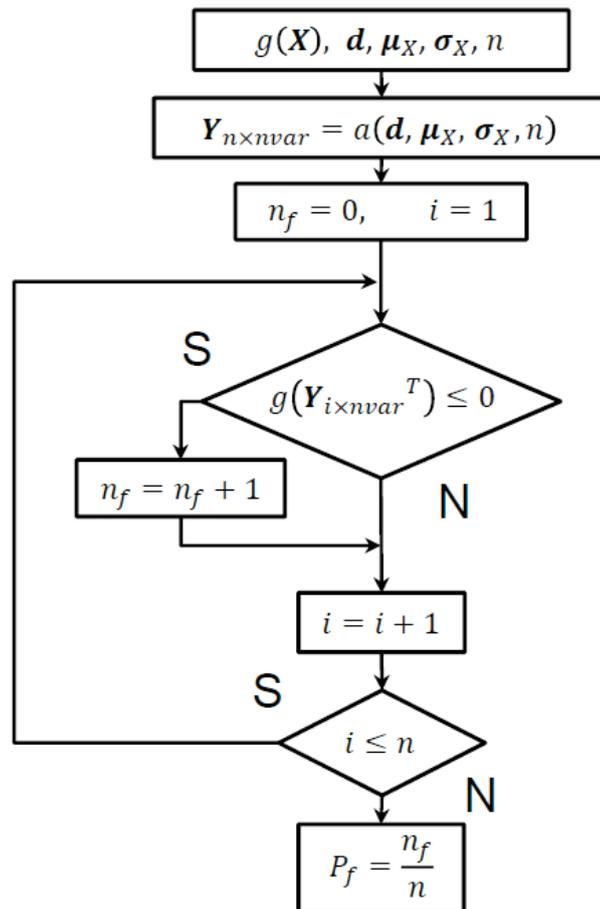


Figura 3.6 – Fluxograma do algoritmo MCS utilizado.

Uma das diferenças em relação aos fluxogramas dos métodos anteriores é que há uma função $a(\cdot)$ de amostragem das variáveis aleatórias com entrada de vetores do tipo de distribuição, média, desvio padrão e quantidade de simulações n .

3.4.2 Aspectos da convergência

Conforme já explanado, as Simulações de Monte Carlo necessitam de um grande número de repetições para a sua convergência, dependendo da probabilidade de falha e do tipo de função de estado limite analisada. A Figura 3.9 ilustra a convergência desse método, baseada na estabilização da probabilidade de falha e do desvio padrão.

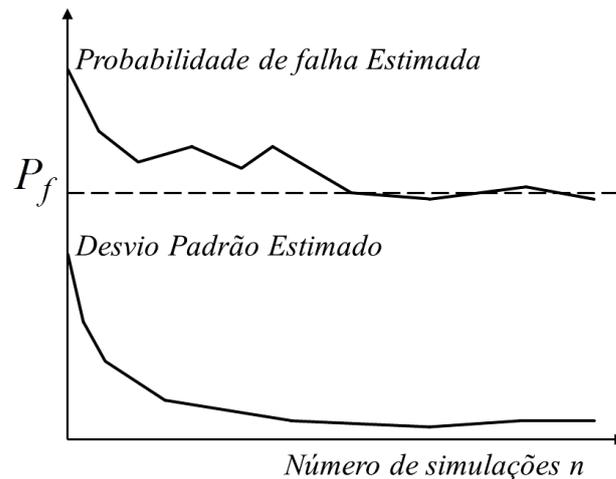


Figura 3.7 – Esquema de convergência do MCS (ilustração adaptada de (MELCHERS, 1987)).

Nota-se na Figura 3.9, que a probabilidade de falha se estabiliza na medida em que o seu desvio padrão tende a zero.

Para uma probabilidade de falha muito pequena, um grande número de simulações é necessário e para uma probabilidade de falha alta, atinge-se a convergência com um número pequeno de simulações. A Equação (3.14) mostra uma estimativa apresentada, primeiramente, por Shooman (1968), e usada por Melchers (1987) e também por Ang e Tang (1984).

$$\varepsilon = \pm k \sqrt{\frac{1 - P_f}{np_f}}, \quad (3.14)$$

com k igual a 2 para uma confiança de 95 % no intervalo. Esse valor k está relacionado com um intervalo de confiança bilateral baseado em uma distribuição normal com média zero e desvio padrão unitário. Caso seja desejada uma confiança maior ou menor que 95 %, pode-se mudar o valor de k . Considerando uma DP normal, para k igual a 1 e 3 têm-se uma confiança de 70 % e 97,5 %, respectivamente. Logo, conhecendo-se o resultado para um número de simulações, pode-se calcular o erro ε associado a este valor. Se uma tolerância

mínima ε é estabelecida com uma confiança definida, pode-se estimar o número de simulações necessárias para a convergência, que pode ser muito grande. Logo, para reduzir o tempo de convergência, técnicas de amostragem devem ser usadas. A seguir é mostrada a técnica de amostragem denominada Hipercubo Latino.

3.4.3 Técnica de amostragem Hipercubo Latino

Segundo Choi, Grandhi e Canfield (2007), existindo uma matriz de símbolos ou números, na qual cada um ocorre apenas uma vez nas linhas e colunas, tal matriz é denominada Quadrado Latino. O termo hipercubo representa a extensão do método para um problema com um número maior de variáveis de projeto. Dessa forma, o método de amostragem por Hipercubo Latino, também conhecido como técnica de amostragem estratificada, representa um método multivariado de amostragem que garante a não sobreposição de soluções de projeto, o que assegura um tempo menor de convergência.

A Figura 3.10 mostra um esquema da amostragem por Hipercubo Latino para duas variáveis.

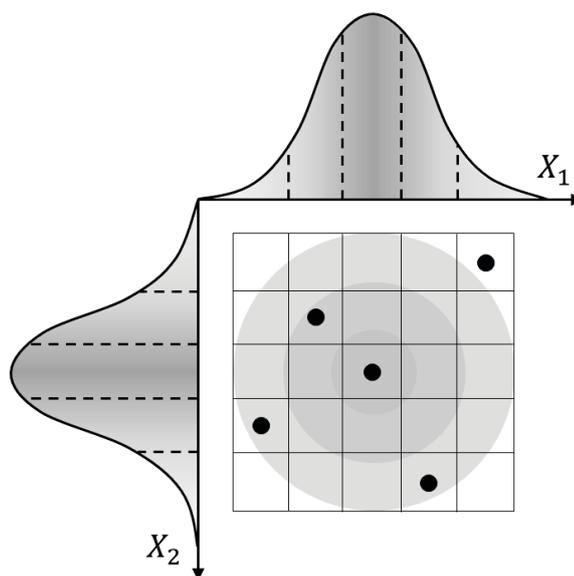


Figura 3.8 – Representação do Quadrado Latino (ilustração adaptada de (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007)).

Validações dos algoritmos são apresentadas no Apêndice desta Dissertação. Quatro testes são realizados e comparações são efetuadas entre os resultados obtidos.

A seguir, nos próximos três capítulos, são apresentadas as aplicações dos algoritmos em casos envolvendo controle ativo e passivo de vibrações.

Página intencionalmente deixada em branco.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS ATIVAMENTE CONTROLADAS POR ATUADORES PIEZELETRICOS

Este capítulo trata da análise de confiabilidade de estruturas cujas vibrações são controladas ativamente por atuadores piezelétricos do tipo pilha (*stack*).

Torna-se indispensável avaliar a probabilidade desse tipo de sistema satisfazer os objetivos de controle, dadas as funções de densidade probabilidade para um conjunto de variáveis incertas. Nesse estudo, são concebidos modelos de elementos finitos para representar o comportamento dinâmico de uma estrutura treliçada plana considerando o acoplamento eletromecânico de atuadores piezelétricos; o Regulador Quadrático Linear (*LQR, Linear Quadratic Regulator*) é adotado como técnica de controle ótimo. Duas funções de estado limite diferentes são analisadas, baseadas em restrições operacionais e índices de desempenho normalmente usados no controle ativo de estruturas, correspondentes, respectivamente, à máxima tensão elétrica de controle e ao tempo de acomodação.

As incertezas que afetam os parâmetros físicos e geométricos do sistema são modeladas de acordo com funções de densidade probabilidade normais (*Gaussianas*). O método de confiabilidade de primeira ordem (*FORM*), o método de confiabilidade de segunda ordem (*SORM*) e Simulações de Monte Carlo são usados para avaliar a confiabilidade para cada função de estado limite e avaliar a precisão e o esforço computacional referentes a cada método.

4.1 Introdução

O controle ativo de vibrações é uma área de pesquisa de grande relevância, especialmente no campo de estruturas inteligentes, nas quais os denominados materiais inteligentes bem como os materiais piezelétricos, têm sido usados como sensores e/ou atuadores, com muitas vantagens quando comparados com outras alternativas. Atualmente, várias estratégias de controle de estruturas estão disponíveis e vêm sendo implementadas com sucesso ((OGATA, 2010), (KWON; BANG, 1997), (FORTUNA; FRASCA, 2012) e (PREUMONT, 2004)).

Assim como todo sistema mecânico, o controle ativo de estruturas está sujeito a indesejadas incertezas que afetam as suas características físicas e geométricas, e tais aleatoriedades podem comprometer o desempenho requerido para as mesmas. Para resolver esse problema, técnicas de controle robusto vêm sendo implementadas, a fim de reduzir a influência de incertezas no desempenho do controlador ((GU; PETKOV; KONSTANTINOV, 2005), (PEÑA; SZNAIER, 1998) e (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996)).

Neste capítulo, o assunto estudado e relacionado a incertezas de estruturas ativamente controladas, é a análise de confiabilidade, que, nesse caso, significa a estimativa da probabilidade do funcionamento adequado de sistema de controle, dadas as características estatísticas de variáveis modeladas como aleatórias.

4.2 Modelagem da estrutura inteligente

Embora os procedimentos tratados neste capítulo possam ser aplicados a outros tipos de estruturas ativamente controladas, são consideradas aqui, treliças planas contendo barras ativas, tais como a estrutura ilustrada na Fig. 4.1. As barras ativas são aquelas em que são interpostos atuadores lineares formados pelo empilhamento de pastilhas de cerâmica pieze-létrica.

Estes atuadores, largamente utilizados em numerosas aplicações industriais, são conhecidos como atuadores do tipo *stack* (PIEZO, 2013). Mediante acionamento por tensão elétrica, desenvolvem forças de controle longitudinais na direção das barras onde são posicionados.

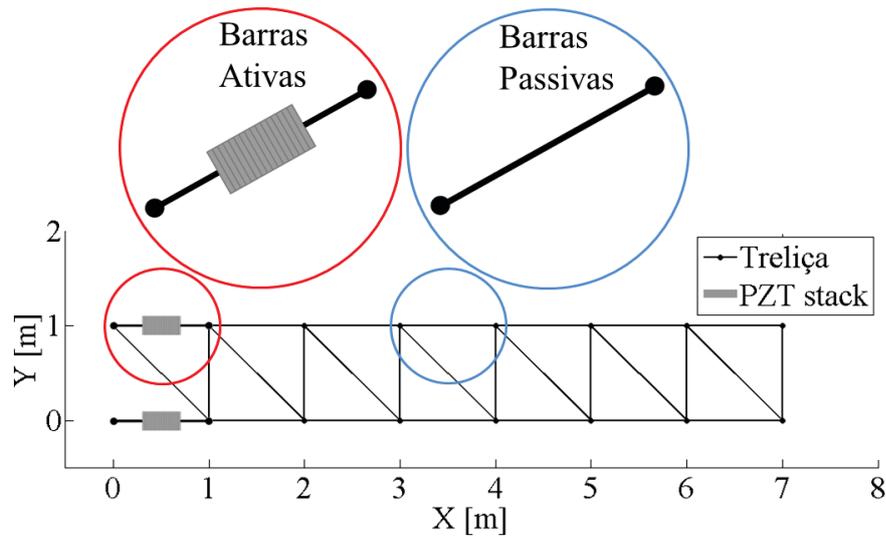


Figura 4.1 – Ilustração de uma treliça plana com elementos finitos de barra ativos e passivos.

Foi desenvolvido um procedimento de modelagem por elementos finitos de treliças contendo barras passivas e ativas, baseado nas Equações de *Lagrange*.

Os elementos de barras passivas, ilustrados na Figura 4.2, contêm dois nós e quatro graus de liberdade por nó, correspondendo aos deslocamentos dos nós nas direções dos eixos globais X e Y .

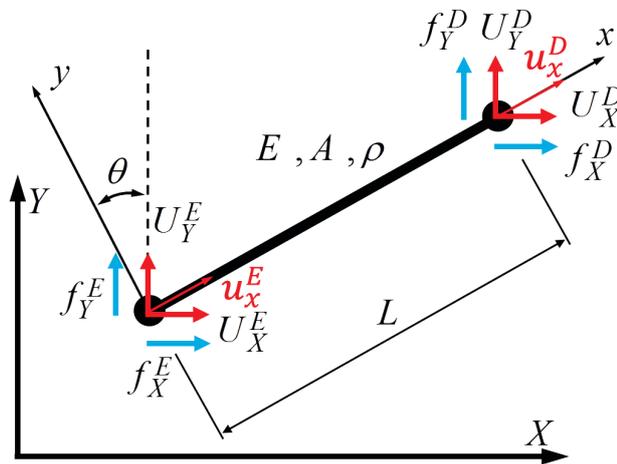


Figura 4.2 – Elemento finito passivo de barra e representação de seus *g.d.l.* nos sistemas de coordenadas local e global.

Para estes elementos, o procedimento tradicional de modelagem em nível elementar, baseada em aproximação linear para o campo de deslocamentos longitudinais, leva às seguintes matrizes de massa e de rigidez elementares (CRAIG; KURDILA, 2006):

$$\mathbf{m}^{(e)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{k}^{(e)} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde E (N/m^2), A (m^2), L (m) e ρ (kg/m^3) são o módulo de Young, a área de seção transversal, o comprimento e a densidade do elemento passivo de barra da Fig. 4.2.

A modelagem das barras ativas é baseada no esquema mostrado na Fig. 4.3.

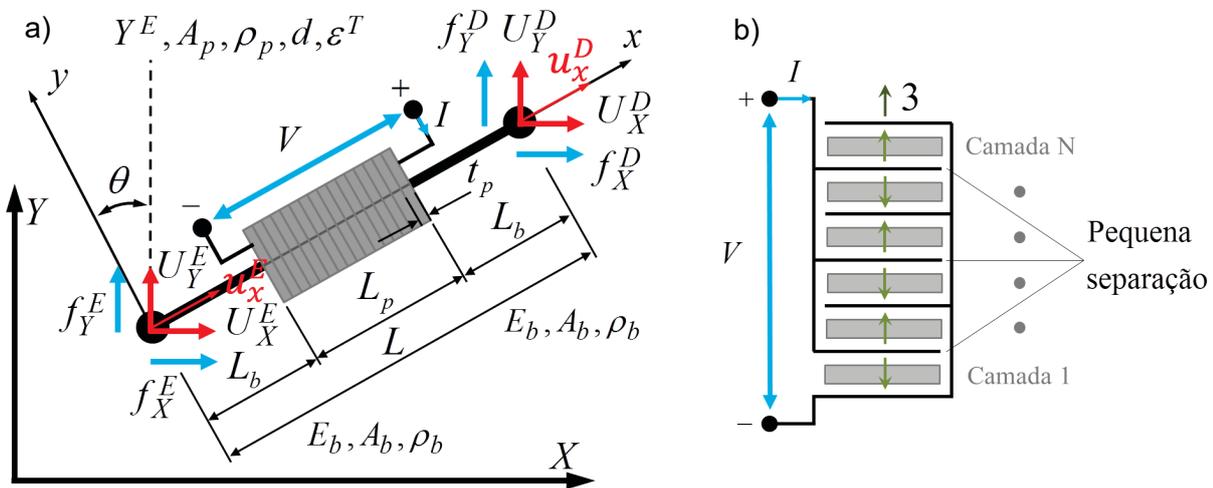


Figura 4.3 – Representação esquemática do a) elemento finito ativo piezelétrico do tipo stack e b) detalhamento das conexões elétricas (ilustração adaptada de (CRAIG; KURDILA, 2006)).

Como mostrado na Figura 4.3, E_b (N/m^2), A_b (m^2) e ρ_b (kg/m^3) são o módulo de Young, a área de seção transversal e a densidade da parte passiva, respectivamente; E_p (N/m^2), A_p (m^2), t_p (m), ρ_p (kg/m^3), d (C/N ou m/V) e ε^T (F/m) são, respectivamente, o módulo de Young, a área de seção transversal, a espessura dos discos piezelétricos, a densidade, o coeficiente de deformação piezelétrica e o coeficiente de permissividade dielétrica do material piezelétrico dos membros ativos. Além disso, V indica a tensão elétrica aplicada no membro ativo.

Os discos piezelétricos são armazenados em uma cápsula de maneira empilhada, com polarizações invertidas e ligados em paralelo, em um circuito elétrico.

A função de forma da Equação (4.3) é adotada para modelagem do elemento finito *PZT stack*.

$$u(x,t) = u_E(t) \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_D(t) \left(\frac{x}{L}\right) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E(t) \\ u_D(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(x) \mathbf{u}^{(e)}(t); 0 \leq x \leq L, \quad (4.3)$$

onde $u_E(t)$ e $u_D(t)$ representam os deslocamentos nodais no sistema de coordenadas local, u_x^E e u_x^D na Fig. 4.3.

Em seguida, as energias cinética e potencial são calculadas para o sistema, sendo a cinética equacionada conforme a Eq.(4.4).

$$T = \frac{1}{2} \rho_b A_b \int_0^{L_b} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho_p A_p \int_{L_b}^{L_b+L_p} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho_b A_b \int_{L_b+L_p}^{2L_b+L_p} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \quad (4.4)$$

Associando as Eqs.(4.3) e (4.4), obtém-se:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^{(e)T} \mathbf{m}^{(e)} \dot{\mathbf{u}}^{(e)}, \quad (4.5)$$

com:

$$\mathbf{m}^{(e)} = \mathbf{m}_1^{(e)} + \mathbf{m}_2^{(e)} + \mathbf{m}_3^{(e)}, \quad (4.6)$$

e valores de $\mathbf{m}_1^{(e)}$, $\mathbf{m}_2^{(e)}$ e $\mathbf{m}_3^{(e)}$ iguais a:

$$\mathbf{m}_1^{(e)} = \rho_b A_b \int_0^{L_b} \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) dx, \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{m}_2^{(e)} = \rho_p A_p \int_{L_b}^{L_b+L_p} \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) dx, \quad (4.7b)$$

$$\mathbf{m}_3^{(e)} = \rho_b A_b \int_{L_b+L_p}^{2L_b+L_p} \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) dx. \quad (4.7c)$$

A transformação de coordenadas para o sistema de referência global é feita pela introdução de uma rotação:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{T}\mathbf{U}^{(e)}, \quad (4.8)$$

onde:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

sendo ξ_1 e ξ_2 os cossenos diretores em relação aos eixos X e Y , respectivamente, podendo ser calculados pelo cosseno e pelo seno do ângulo θ da Fig. 4.3. Já $\mathbf{U}^{(e)}$ é o vetor de graus de liberdade elementares expressos no sistema de referência global que pode ser expresso pela Eq.(4.10).

$$\mathbf{U}^{(e)} = [U_X^L \quad U_Y^L \quad U_X^D \quad U_Y^D]^T, \quad (4.10)$$

Associando as Eqs.(4.5), (4.8) e (4.10), tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^{(e)T} \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{U}}^{(e)}, \quad (4.11)$$

onde:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{T}^T \mathbf{m}^{(e)} \mathbf{T}. \quad (4.12)$$

No caso específico da matriz de inércia expressa no sistema de referência global, foi assumida a matriz de massa concentrada (*lumped mass matrix*) que considera a metade da massa do elemento para cada grau de liberdade. Essa outra matriz de transformação é mostrada na Eq.(4.13).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Similarmente, a energia potencial total é expressa como a soma de parcelas referentes às partes passivas e à parte ativa do elemento, de acordo com a Eq.(4.14).

$$V^{(e)} = V_1 + V_2 + V_3 \quad (4.14)$$

As energias correspondentes às partes passivas são expressas segundo:

$$V_1 = \frac{1}{2} E_b A_b \int_0^{L_b} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (4.15a)$$

$$V_3 = \frac{1}{2} E_b A_b \int_{L_b+L_p}^{2L_b+L_p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (4.15b)$$

Considerando as aproximações (4.15a) e (4.15b), obtêm-se:

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{k}_1^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (4.16a)$$

e

$$V_3 = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{k}_3^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (4.16b)$$

onde:

$$\mathbf{k}_1^{(e)} = E_b A_b \int_0^{L_b} \frac{\partial \mathbf{N}(x)^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} dx, \quad (4.17a)$$

$$\mathbf{k}_3^{(e)} = E_b A_b \int_{L_b+L_p}^{2L_b+L_p} \frac{\partial \mathbf{N}(x)^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} dx. \quad (4.17b)$$

Para o atuador do tipo *stack* com as pastilhas piezelétricas polarizadas na direção longitudinal, a energia potencial total, incluindo a energia de deformação elástica e a energia elétrica, é dada por (LEO, 2007):

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_{V_p} [D \quad T] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E \\ S \end{Bmatrix} dV_p, \quad (4.18)$$

onde: D , T , E e S são o deslocamento elétrico, a tensão mecânica, o campo elétrico e a deformação mecânica, respectivamente.

Considerando as equações constitutivas do material piezelétrico, tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} D \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^T & d \\ d & s^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E \\ T \end{Bmatrix}, \quad (4.19)$$

e fazendo uso das relações:

$$Y^E = \frac{1}{S^E}, \quad (4.20a)$$

$$V = E \cdot t_p, \quad (4.20b)$$

onde t_p é a espessura de cada pastilha piezolétrica,

$$S = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.20c)$$

após desenvolvimentos, escreve-se:

$$V_2 = -\frac{1}{2} A_p L_p (\varepsilon^T - d^2 Y^E) \frac{V^2}{t^2} - d Y^E A_p \frac{V L_p}{t L} [-1 \quad 1] \mathbf{u}^{(e)} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{k}_2^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (4.21)$$

com:

$$\mathbf{k}_2^{(e)} = Y^E A_p \int_{L_b}^{L_b+L_p} \frac{\partial \mathbf{N}(x)^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} dx. \quad (4.22)$$

Associando as Equações (4.14) e (4.21), e introduzindo a transformação de coordenadas expressa pela Eq.(4.8), a energia potencial total fica expressa sob a seguinte forma, em termos dos graus de liberdade no sistema de referência global:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} - \frac{1}{2} A_p L_p (\varepsilon^T - d^2 Y^E) \frac{V^2}{t^2} - d Y^E A_p \frac{V L_p}{t L} [-1 \quad 1] \mathbf{T} \mathbf{U}^{(e)}, \quad (4.23)$$

onde:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{T}^T \left(\mathbf{k}_1^{(e)} + \mathbf{k}_2^{(e)} + \mathbf{k}_3^{(e)} \right) \mathbf{T} \quad (4.24)$$

O trabalho das forças aplicadas nos nós é calculado da seguinte maneira:

$$\delta W_{nc} = f_E \delta u_E + f_D \delta u_D = \delta \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{Q}^{(e)}, \quad (4.25)$$

onde:

$$\mathbf{Q}^{(e)} = \left[f_X^L \quad f_Y^L \quad f_X^D \quad f_Y^D \right]^T. \quad (4.26)$$

Aplicando as Equações de *Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{U}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}^{(e)}} = \mathbf{Q}^{(e)}, \quad (4.27a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}} \right) - \frac{\partial L}{\partial V} = 0, \quad (4.27b)$$

onde $L = T - V$ é o *Lagrangeano* obtido pela associação das Eqs.(4.11) e (4.23), obtêm-se as equações do movimento em nível elementar sob a forma:

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{U}}^{(e)}(t) + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)}(t) - \tilde{\mathbf{k}}^{(e)} V(t) = \mathbf{Q}^{(e)}, \quad (4.28a)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(e)T} \mathbf{U}^{(e)}(t) + \Gamma V(t) = 0, \quad (4.28b)$$

onde:

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(e)} = \mathbf{T}^T \frac{dY^E A_p L_p}{t_p L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\Gamma = \frac{A_p L_p (\boldsymbol{\varepsilon}^T - d^2 Y^E)}{t^2}. \quad (4.30)$$

Com o emprego do procedimento usual de montagem das matrizes elementares levando em conta a conectividade entre os elementos, obtêm-se equações do movimento globais expressas da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^{(g)} \ddot{\mathbf{U}}^{(g)}(t) + \mathbf{K}^{(g)} \mathbf{U}^{(g)}(t) - \tilde{\mathbf{K}}^{(g)} V(t) = \mathbf{Q}^{(g)}, \quad (4.31a)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(g)T} \mathbf{U}^{(g)}(t) + \Gamma V(t) = 0. \quad (4.31b)$$

4.3 Modelo de uma treliça plana

A Figura 4.4 mostra a treliça considerada, posicionada no plano X - Y , composta de elementos passivos e ativos. Tal estrutura é constituída por 16 nós, 26 elementos passivos e 2 elementos ativos (com numerações 1 e 3). Os nós 1 e 2 estão engastados.

Cada membro ativo é considerado como sendo composto de um atuador do tipo *stack* entre dois segmentos passivos, conforme detalhado na Seção 4.2. A aplicação de tensões elétricas nesses atuadores gera forças internas que possibilitam o controle de movimento da treliça no plano X - Y .

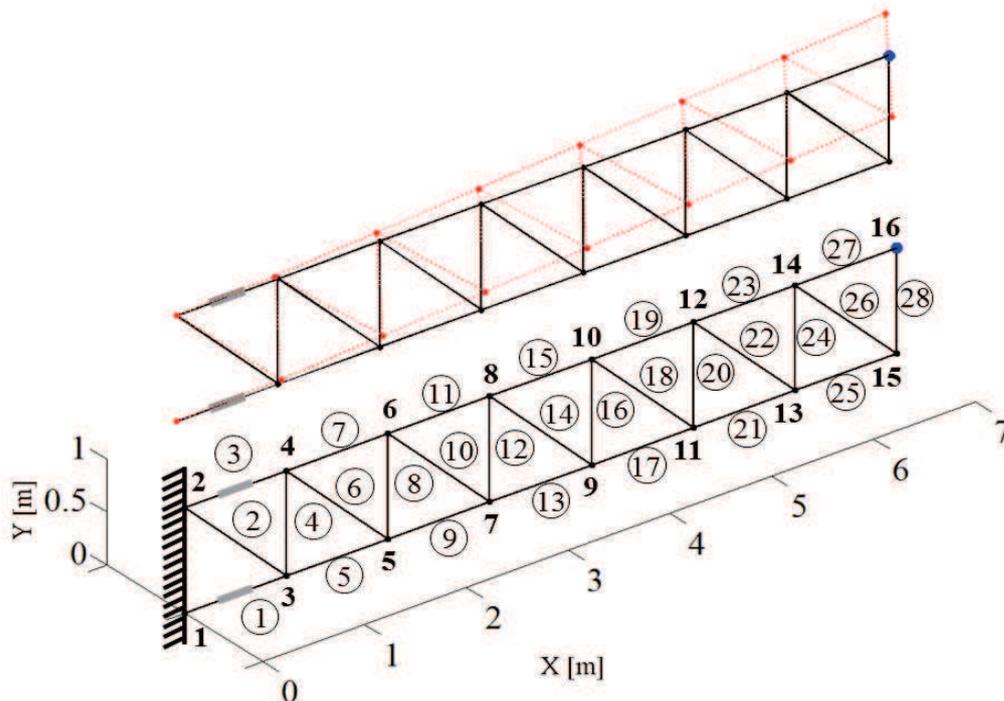


Figura 4.4 – Modelo da treliça plana contendo dois membros ativos.

A Tabela 4.1 fornece os valores numéricos para as propriedades físicas e geométricas usadas para modelar a treliça plana como um modelo de elementos finitos.

Tabela 4.1 – Propriedades dos elementos passivos e ativos da treliça.

Propriedades	Unidade	Símbolo	Aço	PZT-5H
Módulo de Young	$[N/m^2]$	E_b, E e Y^E	$2,1 \times 10^{11}$	$60,0 \times 10^9$
Densidade	$[kg/m^3]$	ρ_p, ρ_b e ρ	7860,0	7800,0
Área de seção	$[m^2]$	A_p, A_b e A	$25,0 \times 10^{-4}$	$27,5 \times 10^{-4}$
Coefficiente de deformação piezolétrica	$[C/N]$ ou $\tau_{.../V}$	d	-	$650,0 \times 10^{-12}$
Coefficiente de permissividade dielétrica	$[F/m]$	ϵ^T	-	$33,0 \times 10^{-9}$
Temperatura de Curie	$[^\circ C]$	T_c	-	250,0

A Figura 4.5 ilustra os quatro primeiros modos de vibração da treliça, sendo indicados os valores respectivos das frequências naturais.

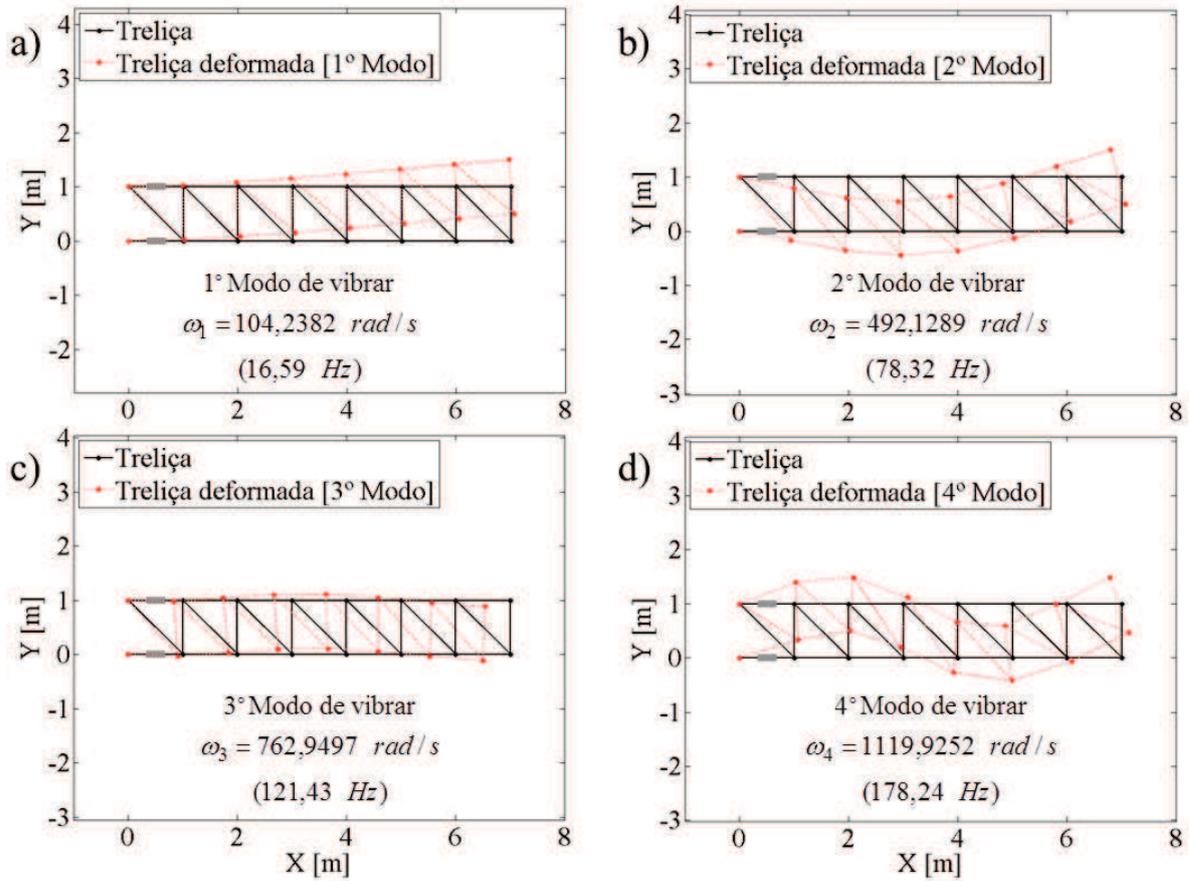


Figura 4.5 – Quatro primeiros modos de vibração da treliça: a) 1º, b) 2º, c) 3º e d) 4º.

No caso considerado, os atuadores são alimentados por sinais de tensão elétrica de maneira a desenvolver ações opostas entre si (extensão ou contração). Isso é executado determinando tensões elétricas com mesma amplitude e sinais opostos para os dois atuadores. Dessa maneira, a ação de controle fica reduzida à entrada única do sinal $V(t)$.

O LQR - *Linear Quadratic Regulator* ((OGATA, 2010) e (KWON; BANG, 1997)) é escolhido como técnica de controle ótimo. Com esse objetivo, as equações de movimento são transformadas para o espaço de estado de acordo com as Eqs.(4.32).

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BV(t), \quad (4.32a)$$

$$Y(t) = CX(t), \quad (4.32b)$$

nas quais $X(t) = \begin{bmatrix} U^{(g)T} & \dot{U}^{(g)T} \end{bmatrix}^T$ é o vetor de estado, $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{(g)-1}K^{(g)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ é a matriz de estado e $B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -M^{(g)-1}\tilde{K}^{(g)} \end{bmatrix}$ e C são, respectivamente, as matrizes de entrada e de saída.

É assumido que a estrutura da Fig. 4.4 contenha um sensor de vibração no nó 16, o qual fornece respostas de deslocamento na direção Y . Dessa maneira, a matriz de saída \mathbf{C} é uma matriz *Booleana* que define a posição do grau de liberdade de saída no vetor de estado. De acordo com o LQR, uma matriz de ganho de controle \mathbf{G} é obtida de maneira que:

$$\mathbf{V}(t) = -\mathbf{G}\mathbf{Y}(t) = -\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{X}(t), \quad (4.33)$$

e a equação de movimento em malha fechada se torna:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{X}(t), \quad (4.34)$$

onde $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{C}$ é a matriz de estado em malha fechada. A matriz de ganho é determinada de maneira a minimizar o índice de desempenho da Eq.(4.35).

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{X}(t)^T \mathbf{Q}\mathbf{X}(t) + R\mathbf{V}^2(t)] dt, \quad (4.35)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz de peso definida-positiva e R um fator positivo de peso.

O projeto do controlador consiste em determinar a matriz de ganho \mathbf{G} , dada a matriz \mathbf{Q} e o peso R , escolhidos pelo projetista. Neste trabalho, o projeto de controle ótimo foi realizado com auxílio da função LQR disponível no programa MATLAB® e das funções de controle de (KWON; BANG, 1997).

4.4 Análise de confiabilidade da estrutura controlada

Duas diferentes funções de estado limite (LSF) são definidas:

$$g_1(\mathbf{X}) = V_{\max} - V(\mathbf{X}), \quad (4.36a)$$

$$g_2(\mathbf{X}) = \tau_{\max} - \tau(\mathbf{X}). \quad (4.36b)$$

A LSF $g_1(\mathbf{X})$ estabelece que a tensão elétrica de controle deve ser menor que o valor máximo permitido V_{\max} , enquanto $g_2(\mathbf{X})$ prescreve que o tempo de acomodação da resposta no tempo deve ser menor que um valor máximo admitido τ_{\max} . Deve ser notado que

a primeira *LSF* representa uma limitação prática relativa à saturação dos atuadores, enquanto a segunda *LSF* é relacionada a um requisito de controle desejado.

O tempo de acomodação é um parâmetro frequentemente utilizado como característica de desempenho de procedimentos de controle, estando diretamente relacionado à taxa de amortecimento. Seu significado é ilustrado na Fig. 4.6.

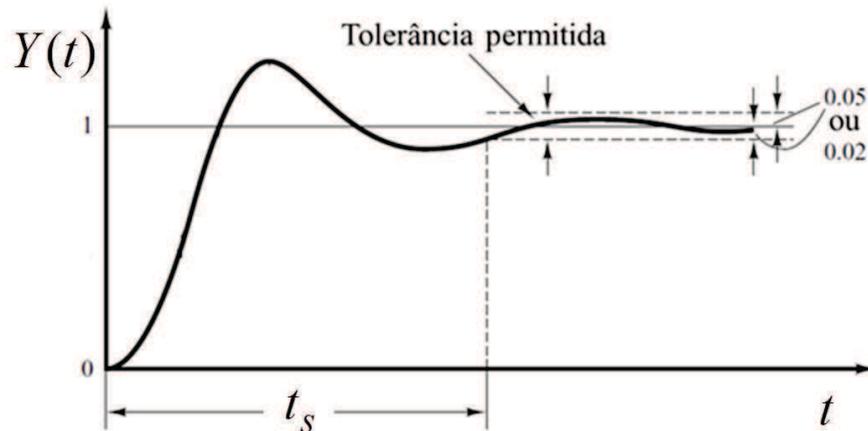


Figura 4.6 – Tempo de acomodação t_s (adaptado de (OGATA, 2010)).

Os valores limitantes adotados são $V_{\max} = 400 \text{ V}$ e $\tau_{\max} = 30 \text{ s}$. Além disso, o tempo de acomodação é definido como o tempo no qual a resposta decai para 2 % do seu valor máximo, para uma excitação dada por uma velocidade inicial de -100 m/s aplicada no nó 16, na direção y . Esta excitação simula um impacto. Os fatores de peso da Eq.(4.35) foram escolhidos como sendo: $Q = I$ e $R = 10^{-4,5}$.

A Tabela 4.2 fornece as características das sete variáveis aleatórias adotadas, podendo-se observar que elas são relacionadas com características físicas e geométricas dos membros ativos e passivos da treliça. As variáveis dessa tabela se aplicam a todos os membros da treliça (ativos e passivos).

Para ilustração do problema, as Figuras 4.7 e 4.8 possibilitam a comparação das respostas do sistema em malha aberta (sem controle) e em malha fechada (com controle) obtidas por meio do modelo correspondente aos valores médios das variáveis aleatórias (denominado modelo médio), bem como o sinal de tensão elétrica para controle.

Tabela 4.2 – Variáveis aleatórias e suas distribuições.

X_n	Variáveis	Distribuição	Média (μ)	Desvio padrão (σ)
X_1	A_b e A [m^2]	Normal (Gaussiana)	$25,0 \times 10^{-4}$	$2,5 \times 10^{-5}(0,01 \mu)$
X_2	E_b e E [N/m^2]	Normal (Gaussiana)	$2,1 \times 10^{11}$	$1,05 \times 10^{10}(0,05 \mu)$
X_3	ρ_b e ρ [kg/m^3]	Normal (Gaussiana)	7860,0	78,6(0,01 μ)
X_4	A_p [m^2]	Normal (Gaussiana)	$27,5 \times 10^{-4}$	$2,75 \times 10^{-5}(0,01 \mu)$
X_5	Y^E [N/m^2]	Normal (Gaussiana)	$60,0 \times 10^9$	$6,0 \times 10^9(0,1 \mu)$
X_6	ρ_p [kg/m^3]	Normal (Gaussiana)	7800,0	780,0(0,1 μ)
X_7	d [m/V]	Normal (Gaussiana)	$650,0 \times 10^{-12}$	$65,0 \times 10^{-12}(0,1 \mu)$

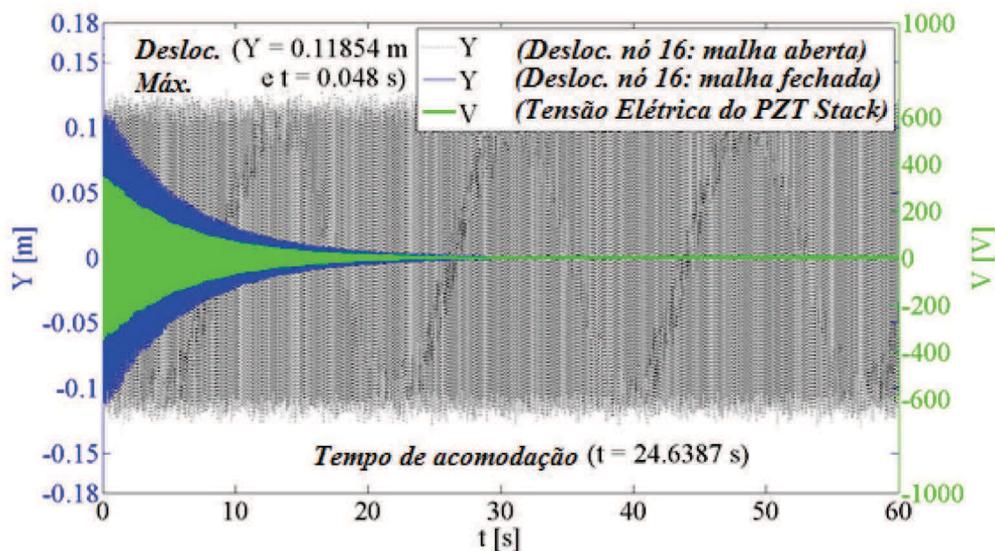


Figura 4.7 – Respostas da estrutura em malha aberta (sem controle) e malha fechada (com controle) para o modelo médio.

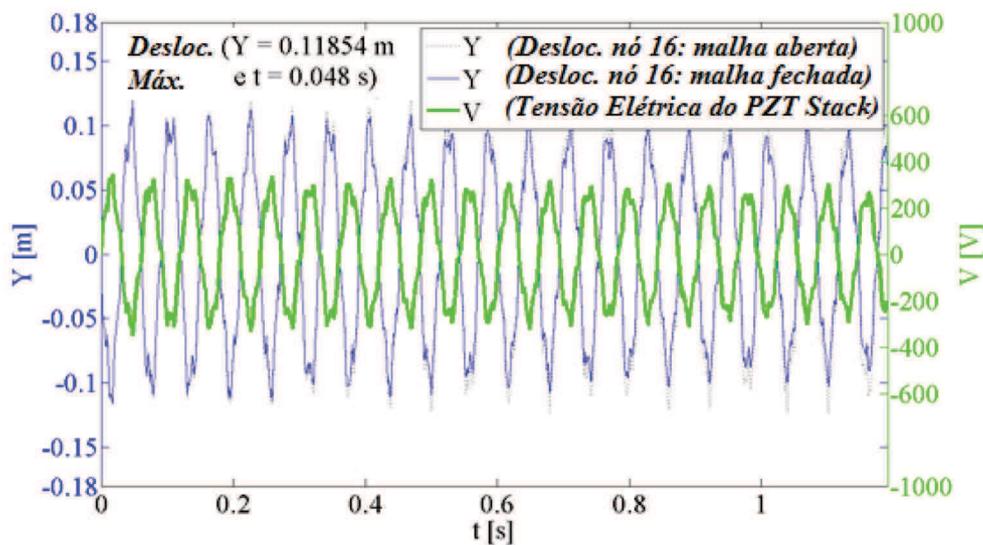


Figura 4.8 – Ampliação das respostas em malha aberta (sem controle) e malha fechada (com controle) para o modelo médio de 0 a 1,2 s.

A Tabela 4.3 apresenta os resultados obtidos pelas análises de confiabilidade realizadas de acordo com a avaliação de cada uma das funções de estado limite definidas anteriormente para os métodos *FORM*, *SORM* e *MCS-LHS*. Essa tabela também indica o custo computacional para cada cálculo de confiabilidade usando um computador com processador *Intel Centrino Core Duo P7350 (Computador 1)* com 2,0 GHz e 3,0 GB de memória RAM. Esses valores mostram como o método *FORM* é mais acessível que a *MCS* em termos de esforço computacional.

A Figura 4.9 possibilita a verificação da evolução dos valores de média, desvio padrão e probabilidade de falha para as funções de estado limite consideradas, em função do número de amostras da *MCS*. Esses resultados mostram que 6.000 amostras são suficientes para atingir uma convergência satisfatória.

Tabela 4.3 – Resultados da análise de confiabilidade com **Computador 1**.

Função de Estado Limite	Método	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido	Erro relativo [%]*
$g_1(\mathbf{X})$	<i>FORM</i>	-	0,9262	17,72	82,28	0h 02min 15s	7,33
	<i>SORM</i>	NC	NC	NC	NC	NC	NC
	<i>MCS-LHS</i>	1.000	-	17,70	82,30	0h 13min 15s	7,21
		6.000	-	16,77	83,23	1h 18min 00s	1,57
		20.000	-	16,51	83,49	4h 35min 17s	-
$g_2(\mathbf{X})$	<i>FORM</i>	-	1,2606	10,37	89,63	0h 08min 37s	5,39
	<i>SORM</i>	NC	NC	NC	NC	NC	NC
	<i>MCS-LHS</i>	1.000	-	10,10	89,90	0h 13min 06s	2,64
		6.000	-	9,72	90,28	1h 17min 48s	1,22
		20.000	-	9,84	90,16	4h 20min 25s	-

*Calculado em relação à confiabilidade com base no resultado da *MCS* para 20.000 amostras.

NC corresponde à não convergência do método.

Os resultados da Tabela 4.3 mostram que, para as condições aqui consideradas, as probabilidades de que os requisitos de projeto não sejam alcançados são relevantes.

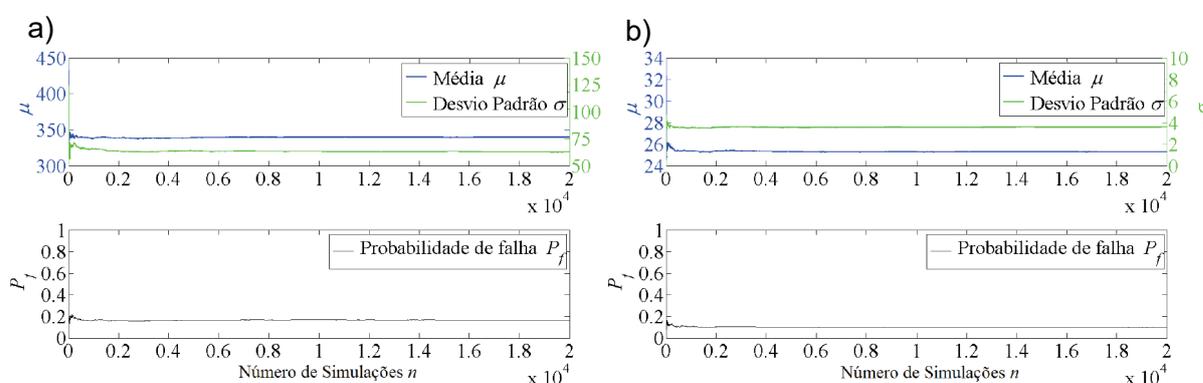


Figura 4.9 – Convergência da Simulação de Monte Carlo com 20.000 amostras, para a) $g_1(\mathbf{X})$ e b) $g_2(\mathbf{X})$.

Apesar da convergência ter sido atingida com o **Computador 1**, o custo computacional se mostrou relativamente elevado. Dessa maneira, os mesmos cálculos de confiabilidade foram executados utilizando um **Computador 2** com processador *Intel Xeon W3565* de frequência *3,2 GHz* e *12,0 GB* de memória *RAM*. A Tabela 4.4 apresenta os resultados da análise de confiabilidade desse estudo utilizando o **Computador 2**, ficando evidente que o uso do **Computador 2** requereu tempos de cálculo significativamente menores.

Tabela 4.4 – Resultados da análise de confiabilidade com **Computador 2**.

Função de Estado Limite	Método	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido	Erro relativo [%]*
$g_1(\mathbf{X})$	FORM	-	0,9262	17,72	82,28	0h 00min 50s	1,45
	SORM	NC	NC	NC	NC	NC	NC
	MCS-LHS	1.000	-	17,70	82,30	0h 03min 11s	1,43
		6.000	-	16,77	83,23	0h 23min 00s	1,11
		20.000	-	16,51	83,49	1h 35min 11s	-

*Calculado em relação à confiabilidade com base no resultado da MCS para 20.000 amostras.

NC corresponde à não convergência do método.

Nota-se que não houve convergência para o método *SORM* e isso é explicado devido ao fato da fórmula utilizada para o cálculo da probabilidade de falha não aceitar curvaturas com valores imaginários (complexos).

Embora o *SORM* não tenha funcionado, o método de confiabilidade *FORM* apresentou ótimos resultados pelos dois computadores.

4.5 Conclusões

A partir da modelagem da estrutura plana treliçada contendo membros ativos, foi verificada a possibilidade de avaliar a confiabilidade do procedimento de controle, considerando funções de estado limite relacionadas com restrições operacionais (tensões elétricas de controle) e indicadores de desempenho de controle (tempo de acomodação).

Certamente, o procedimento aqui descrito pode ser aplicado a outros tipos de funções de estado limite. Os resultados numéricos obtidos possibilitam a avaliação da precisão e do esforço computacional do método *FORM*, mediante confrontação com os resultados obtidos por *MCS*.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS PASSIVAMENTE CONTROLADAS POR ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÕES

Este capítulo trata da análise de confiabilidade de estruturas cujas vibrações são passivamente controladas por absorvedores dinâmicos de vibrações (*ADV*). O princípio destes dispositivos corresponde à aplicação de acréscimos de massa, amortecimento e rigidez concentrados em uma estrutura da qual se deseja diminuir a vibração. Uma vez acoplados, os *ADVs* acrescentam um grau de liberdade na estrutura, de maneira a absorver a energia da estrutura principal. Esse invento, surgido no início do século *XX*, tem sido intensamente utilizado em diversos tipos de máquinas e estruturas de vários tipos de setores industriais.

Embora o absorvedor dinâmico de vibrações tenha uma grande aplicabilidade, para a sua sintonização ideal são necessários valores precisos de massa, amortecimento e rigidez. Como esses três parâmetros apresentam variabilidades devidas aos seus processos de fabricação, torna-se necessária a análise de confiabilidade com relação ao atendimento a requisitos de projeto.

Como exemplo numérico para a análise de confiabilidade, um modelo de elementos finitos de uma treliça plana será utilizado. Duas equações de estado limite são analisadas. Os métodos de confiabilidade *FORM* e *SORM* são aplicados para calcular a probabilidade de falha diante dos requisitos de projeto. Adicionalmente, a *MCS* é utilizada com o intuito de comparação de resultados.

5.1 Absorvedores Dinâmicos de Vibrações (ADVs)

O absorvedor dinâmico de vibrações, conceito apresentado primeiramente por Frahm (1911 *apud* CUNHA Jr., 1999), é um invento de grande importância tecnológica, cuja função é absorver as vibrações de uma estrutura primária, especialmente quando a mesma se encontra em estado de ressonância, situação em que as amplitudes de vibração tendem a ser excessivas.

Diversas configurações do *ADV* foram desenvolvidas e uma revisão abrangente sobre os aspectos teóricos e práticos pode ser encontrada em (KORENEV; REZNIKOV, 1993).

Apresentam-se, a seguir, os fundamentos de uma formulação modal que permite o projeto de um *ADV* para uma estrutura primária de um número arbitrário de graus de liberdade, a qual será posteriormente utilizada para avaliações de confiabilidade. Maior detalhamento sobre esta teoria é fornecido na dissertação de Cunha Jr. (1999).

5.2 Teoria modal de *ADVs*

A Figura 5.1 mostra um sistema dinâmico simplificado, onde *EP* é a estrutura primária, modelada como um sistema vibratório discreto não amortecido, representado pela matriz de massa M_P e matriz de rigidez K_P ; e o *ADV* formado por massa, rigidez e amortecimento concentrados (m_a , k_a , c_a). São destacados três graus de liberdade, sendo o primeiro, x_a , referente ao movimento da massa do *ADV*; o segundo, x_c , o movimento do ponto da estrutura principal no qual o *ADV* é acoplado; e o terceiro, x_f , o movimento do ponto da estrutura principal onde é aplicada uma força harmônica ($F e^{j\Omega t}$) que excita a estrutura.

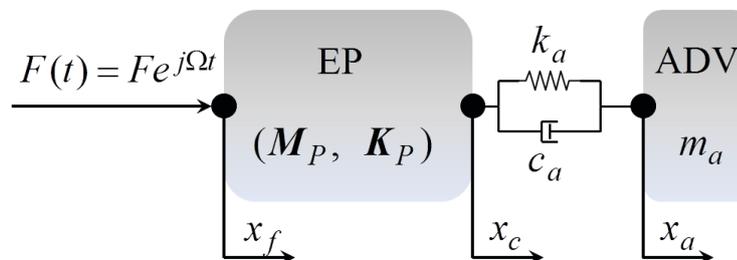


Figura 5.1 – Absorvedor dinâmico de vibrações (ilustração adaptada de (CUNHA Jr., 1999)).

Admite-se que a resposta da estrutura seja dominada por um único modo de vibração, conforme a Eq.(5.1):

$$X(t) = \psi_\sigma q_\sigma(t), \quad (5.1)$$

onde $X(t)$ é o vetor de graus de liberdade da *EP*; ψ_σ é o vetor do σ -ésimo modo de vibrar da estrutura sem o *ADV*; e $q_\sigma(t)$ é uma coordenada generalizada. Assim, o desenvolvimento de equações para a teoria modal leva às seguintes equações do movimento da estrutura da Fig. 5.1:

$$\begin{bmatrix} M_\sigma & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_\sigma \\ \ddot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_a \psi_\sigma^2 & -c_a \psi_\sigma \\ -c_a \psi_\sigma & c_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_\sigma \\ \dot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_p \omega_\sigma^2 k_a \psi_\sigma^2 & -k_a \psi_\sigma \\ -k_a \psi_\sigma & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_\sigma \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_\sigma F e^{i\Omega t} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.2)$$

onde M_σ é a matriz de massa generalizada para o σ -ésimo modo de vibrar da estrutura, de acordo com a Eq.(5.3), e ω_σ é a σ -ésima frequência natural da mesma estrutura primária.

$$M_\sigma = \psi_\sigma^T M_p \psi_\sigma \quad (5.3)$$

As variáveis $\psi_\sigma f$ e $\psi_\sigma c$ são os valores correspondentes aos graus de liberdade nos quais a força é aplicada (f) e o *ADV* é acoplado (c), respectivamente, dentre os componentes do auto-vetor ψ_σ .

Considerando a situação de regime harmônico permanente, escrevem-se:

$$q_\sigma(t) = Q_\sigma e^{j\Omega t}, \quad (5.4a)$$

$$x_a(t) = X_a e^{j\Omega t}, \quad (5.4b)$$

e as seguintes equações do movimento são obtidas:

$$Q_\sigma (M_p \omega_\sigma^2 + k_a \psi_\sigma^2 - \Omega^2 M_p + j\Omega c_a \psi_\sigma^2) + X_a (-j\Omega c_a \psi_\sigma - k_a \psi_\sigma) = \psi_\sigma F, \quad (5.5a)$$

$$Q_\sigma (-k_a \psi_\sigma - j\Omega c_a \psi_\sigma) + X_a (k_a - \Omega^2 m_a + j\Omega c_a) = 0. \quad (5.5b)$$

Resolvendo as Equações (5.5), é obtida a seguinte expressão para a amplitude da resposta harmônica:

$$\frac{Q_\sigma}{F} = \frac{\psi_\sigma f}{\psi_\sigma^2} \frac{(k_a - \Omega^2 m_a + j\Omega c_a)}{((M_p \omega_\sigma^2 - \Omega^2) + k_a + j\Omega c_a)(k_a - \Omega^2 m_a + j\Omega c_a) - (k_a + j\Omega c_a)^2}, \quad (5.6)$$

onde os seguintes parâmetros adimensionais são assim definidos:

- $\mu_{ef} = m_a/M_{ef}$: razão de massas;
- $g = \Omega/\omega_\sigma$: razão de frequências forçadas;
- $\omega_a = \sqrt{k_a/m_a}$: frequência natural do *ADV*;
- $f = \omega_a/\omega_\sigma$: razão de frequências naturais;
- $\eta_a = c_a/2m\omega_\sigma$: fator de amortecimento do *ADV*.

Após algumas manipulações algébricas, a Eq.(5.6) conduz a:

$$\left| \frac{Q_\sigma}{FK_{ef}^{-1}} \right| = \psi_{\sigma f} \sqrt{\frac{(g^2 - f^2)^2 + (2\eta_a g)^2}{[\mu_{ef} f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2 + (2\eta_a g)^2 (\mu_{ef} g^2 + g^2 - 1)^2}}, \quad (5.7)$$

e a amplitude da resposta em um ponto i qualquer da *EP* é dada por:

$$|X_i| = \psi_{\sigma i} |Q_\sigma|, \quad (5.8)$$

$$\left| \frac{X_i}{FK_{ef}^{-1}} \right| = \psi_{\sigma f} \psi_{\sigma i} \sqrt{\frac{(g^2 - f^2)^2 + (2\eta_a g)^2}{[\mu_{ef} f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2 + [2\eta_a g (\mu_{ef} g^2 + g^2 - 1)]^2}}. \quad (5.9)$$

Similarmente, a amplitude da resposta em frequência da massa do *ADV* resulta expressa da seguinte forma:

$$\left| \frac{X_a}{FK_{ef}^{-1}} \right| = \psi_{\sigma f} \psi_{\sigma a} \sqrt{\frac{(f^2)^2 + (2\eta_a g)^2}{[(f^2 - g^2)(1 - g^2) - \mu_{ef} f^2 g^2]^2 + [2\eta_a g (1 - g^2 - \mu_{ef} g^2)]^2}}. \quad (5.10)$$

5.2.1 Sintonização ótima pelo método dos picos iguais

A Figura 5.2 apresenta os gráficos das respostas em frequências da Eq.(5.9), em função dos parâmetros η , f e g . A partir desses gráficos, é possível observar que, dados os valores de f e de μ , existem dois pontos P e Q cujas posições não variam com relação a mudanças no parâmetro adimensional η . Além disso, variando o parâmetro f , as alturas relativas entre estes dois pontos variam. Este comportamento sugeriu o método de otimização proposto por Den Hartog (1956 *apud* CUNHA Jr.,1999), segundo o qual o projeto ótimo do *ADV* deve garantir que os dois pontos invariantes tenham mesma amplitude e estejam posicionados sobre pontos de derivada nula da curva de resposta em frequência.

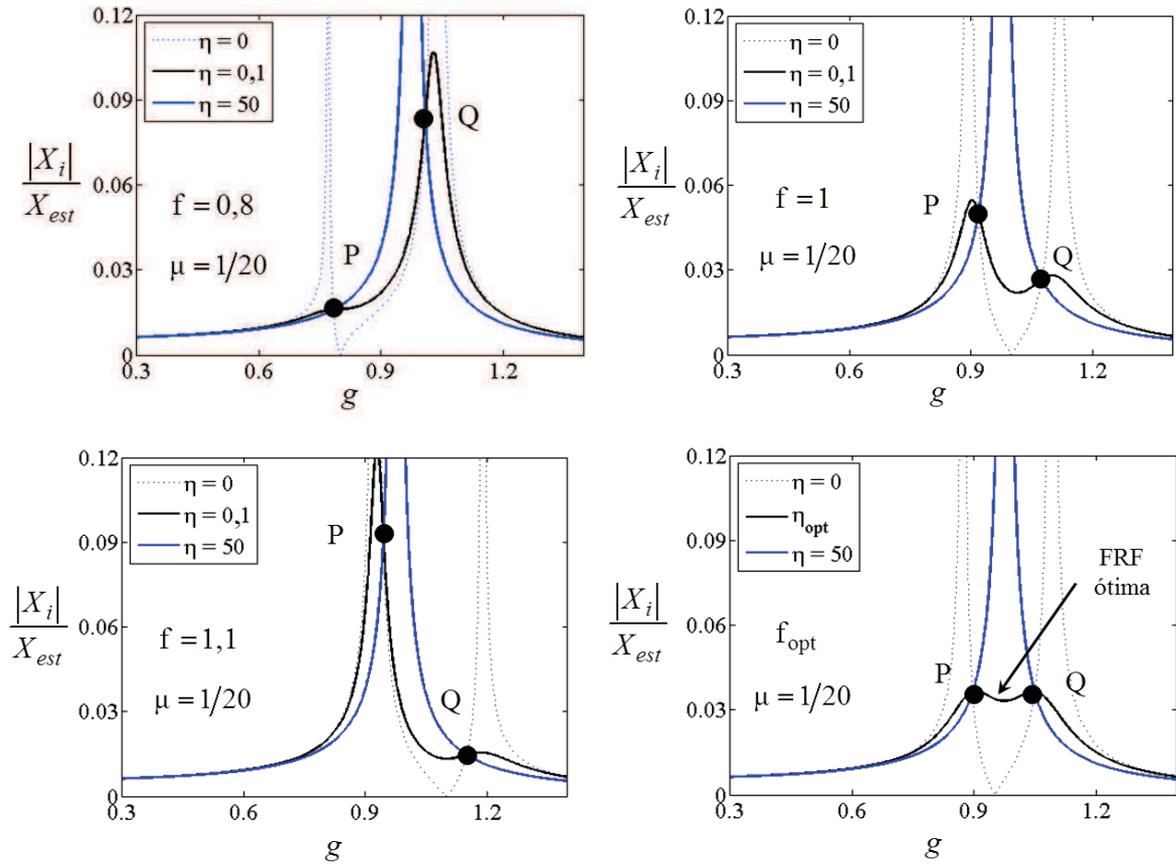


Figura 5.2 – Exemplo de variação dos parâmetros η , f e g e sintonização ótima para ADV (ilustração adaptada de (CUNHA Jr., 1999)).

Este critério leva às seguintes expressões para os parâmetros adimensionais ótimos (CUNHA Jr., 1999):

$$f_{opt} = \frac{1}{1 + \mu_{ef}}, \quad (5.11a)$$

$$\eta_{opt} = \sqrt{\frac{3\mu_{ef}}{3(1 + \mu_{ef})}}. \quad (5.11b)$$

Assim, se a razão de massas μ_{ef} é previamente escolhida, os valores de f_{opt} e η_{opt} são encontrados e os valores ótimos de k_a e c_a são calculados de acordo com as Eqs.(5.12a) e (5.12b).

$$c_a = 2\eta_{opt}m_a\omega_\sigma \quad (5.12a)$$

$$k_a = m_a(f_{opt}\omega_\sigma)^2 \quad (5.12b)$$

5.3 Estrutura-teste

O modelo de elementos finitos da estrutura treliçada da Figura 5.3, anteriormente apresentada no Capítulo 4, é usado como estrutura primária nos testes numéricos de análise de confiabilidade sendo esta controlada passivamente por absorvedor dinâmico de vibrações. A Tabela 5.1 mostra características físicas e geométricas dessa estrutura.

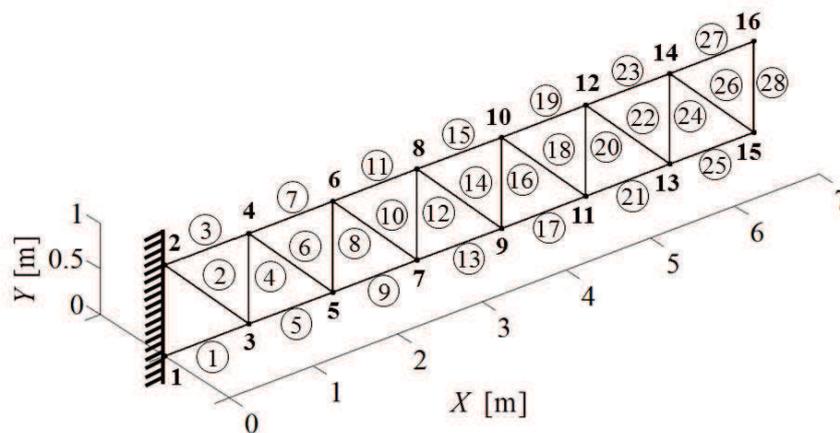


Figura 5.3 – Estrutura treliçada plana em elementos finitos passivos de barra.

Tabela 5.1 – Propriedades da estrutura primária.

Propriedades	Unidades	Símbolos	Valores
Módulo de <i>Young</i>	$[N/m^2]$	E	$2,1 \times 10^{11}$
Densidade volumétrica	$[kg/m^3]$	ρ	7860,0
Área de seção das barras	$[m^2]$	A	$25,0 \times 10^{-4}$
Massa total da estrutura	$[kg]$	M_{est}	607,1751

A Figura 5.4 apresenta o gráfico das amplitudes de uma *FRF* dessa estrutura, calculada por elementos finitos, na banda de 0 a 300 Hz. Pode-se notar que a primeira frequência natural é de, aproximadamente, 17,52 Hz.

A Figura 5.5 mostra a primeira forma de vibrar da treliça, obtida por análise modal a partir do modelo de elementos finitos. A posição de maior deslocamento indica a localização preferencial para fixação de *ADV*, visando à atenuação das vibrações de ressonância associadas a este modo.

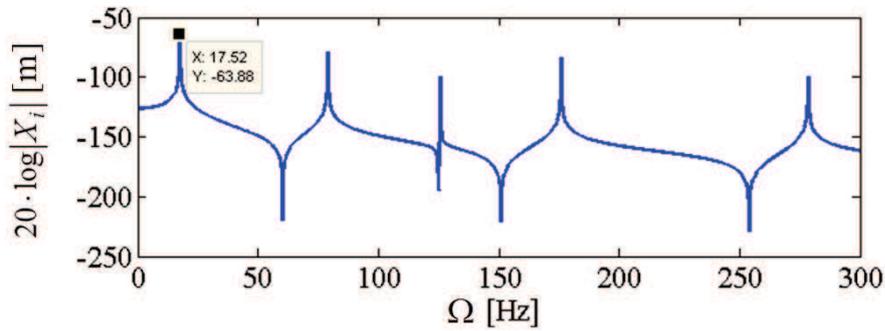


Figura 5.4 – Função de resposta em frequência da treliça analisada ($i = 30$, nó 15, $g.d.l.$ 30).

No que segue, o interesse será dirigido à atenuação das vibrações verticais do ponto P (nó 15, $g.d.l.$ 30), indicado na Fig. 5.5, na condição de ressonância associada ao primeiro modo de vibração. Considera-se que a excitação harmônica seja aplicada neste mesmo ponto.

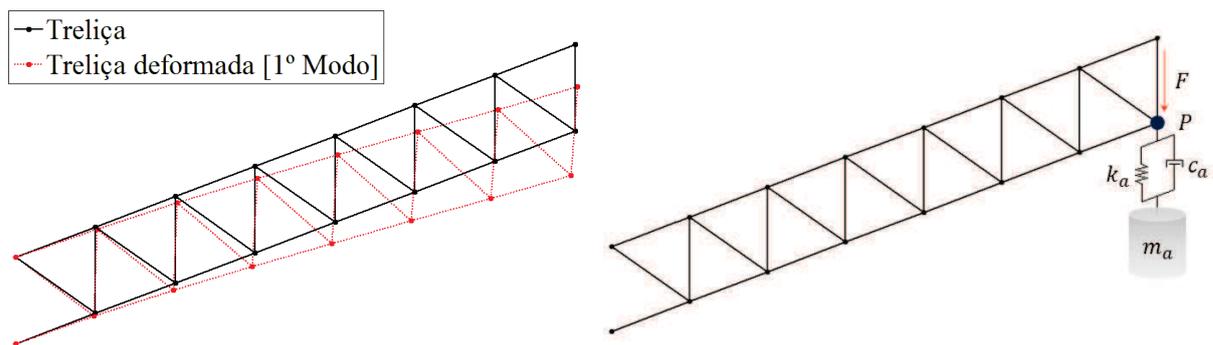


Figura 5.5 – Primeira forma modal da treliça e localização adotada para o ADV.

5.3.1 Sintonização de um ADV para a frequência do primeiro modo de vibrar da estrutura

O primeiro auto-vetor da estrutura é normalizado de acordo com as Eqs.(5.13a) e (5.13b).

$$\boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{M}_P \boldsymbol{\psi}_1 = M_1 = 1 \quad (5.13a)$$

$$\boldsymbol{\psi}_1 \mathbf{K}_P \boldsymbol{\psi}_1 = \omega_1^2 M_1 = \omega_1^2 \quad (5.13b)$$

Substituindo o valor encontrado da massa generalizada M_1 na Eq.(5.14), encontra-se a massa efetiva M_{ef} para o grau de liberdade de acoplamento do ADV.

$$M_{ef} = \frac{M_1}{\psi_{126}^2} = \frac{1}{(0,0754)^2} = 175,8965 \text{ kg} \quad (5.14)$$

Na prática, a razão percentual entre a massa do ADV, m_a , e a massa da total estrutura, M_{est} , deve estar entre 1 e 10 %. Nos testes numéricos o ADV foi sintonizado de acordo com as Eqs.(5.11) e (5.12) para quatro valores distintos de razões de massas, indicados na Tab. 5.2, com razões de massa correspondentes a 1,00 %, 1,44 %, 5,00 % e 10,0 % de M_{est} .

Tabela 5.2 – Cálculo dos valores ótimos para sintonização para 4 razões de massa distintas.

$(\mu ; \mu_{ef})$ [%]	Variáveis	Unidades	Valores
(1,00; 3,45)	$f_{opt}(\omega_a)$	<i>adim (rad/s)</i>	0,9667 (106,4606)
	η_{opt}	<i>adim</i>	0,1118
	m_a	<i>kg</i>	6,0717
	c_a	<i>N.s/m</i>	149,5129
	k_a	<i>N/m</i>	68815,5353
(1,44; 5,00)	$f_{opt}(\omega_a)$	<i>adim (rad/s)</i>	0,9524 (104,8856)
	η_{opt}	<i>adim</i>	0,1336
	m_a	<i>kg</i>	8,7948
	c_a	<i>N.s/m</i>	258,7968
	k_a	<i>N/m</i>	96751,4988
(5,00; 17,26)	$f_{opt}(\omega_a)$	<i>adim (rad/s)</i>	0,8528 (93,9169)
	η_{opt}	<i>adim</i>	0,2349
	m_a	<i>kg</i>	30,3587
	c_a	<i>N.s/m</i>	1570,6977
	k_a	<i>N/m</i>	267775,3949
(10,00; 34,52)	$f_{opt}(\omega_a)$	<i>adim (rad/s)</i>	0,7434 (81,8689)
	η_{opt}	<i>adim</i>	0,3102
	m_a	<i>kg</i>	60,7175
	c_a	<i>N.s/m</i>	4148,4140
	k_a	<i>N/m</i>	406960,0630

Tendo sido calculados os parâmetros de sintonização, são obtidos os resultados apresentados nas Fig. 5.6 que mostram as amplitudes das respostas harmônicas da estrutura principal no ponto P (*g.d.l.* 30) e da massa do ADV para os casos definidos.

A Figura 5.7 mostra a variação da massa com valores ótimos de k_a e c_a recalculados para cada m_a .

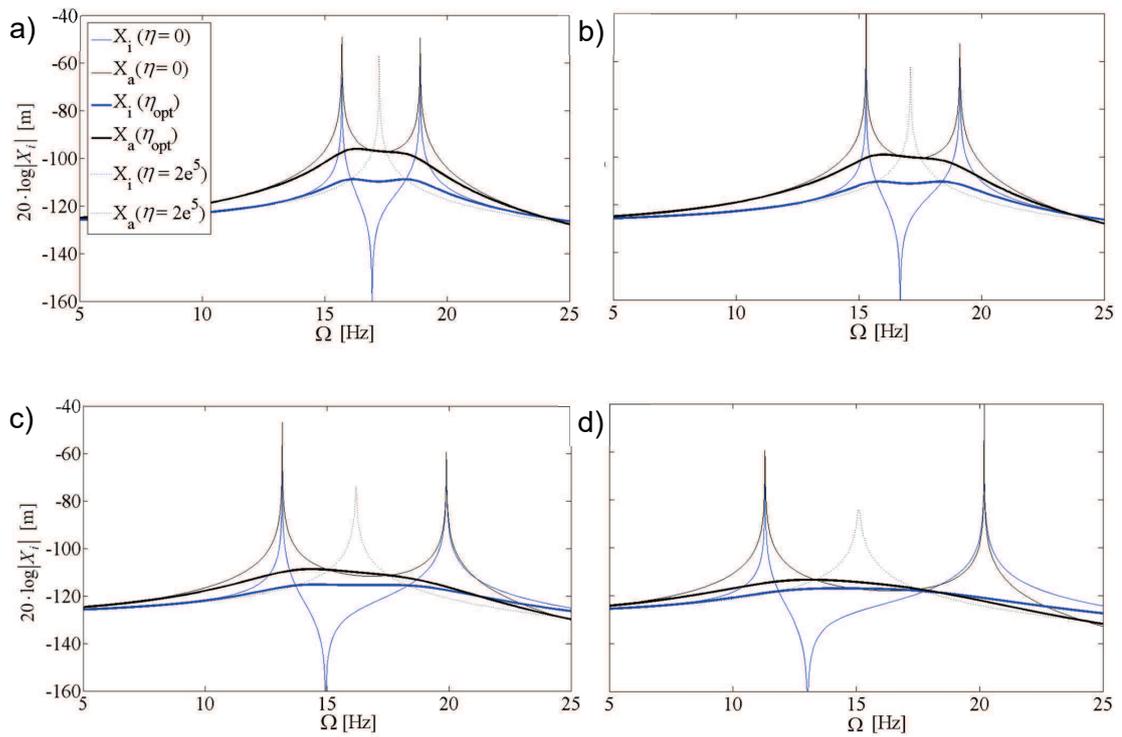


Figura 5.6 – Amplitudes das respostas em frequência para a) 1%, b) 1,44%, c) 5% e d) 10% da massa total da estrutura M_{est} com valores ótimos para f e variações de η ($i = 30$).

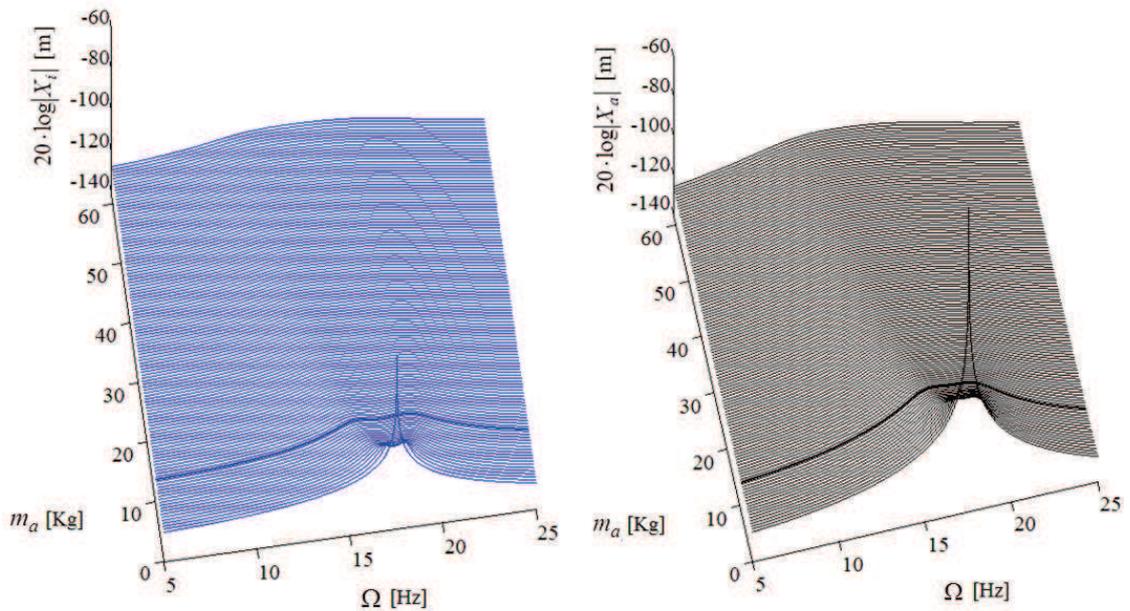


Figura 5.7 – Variação da massa com valores ótimos de k_a e c_a recalculados para cada valor de m_a ($i = 30$).

5.3.2 Efeitos das variações do amortecimento e da rigidez

Visando à avaliação da influência das variáveis de projeto do ADV sobre as amplitudes de vibração, são apresentados os gráficos da Fig. 5.8 e da Fig. 5.9, para a razão de massas $\mu = 1,44$. Em cada gráfico, o valor de um dos parâmetros ótimos k_a ou c_a é fixado, e o valor do outro parâmetro é variado. As curvas correspondentes ao projeto com ambos os parâmetros ótimos estão destacadas.

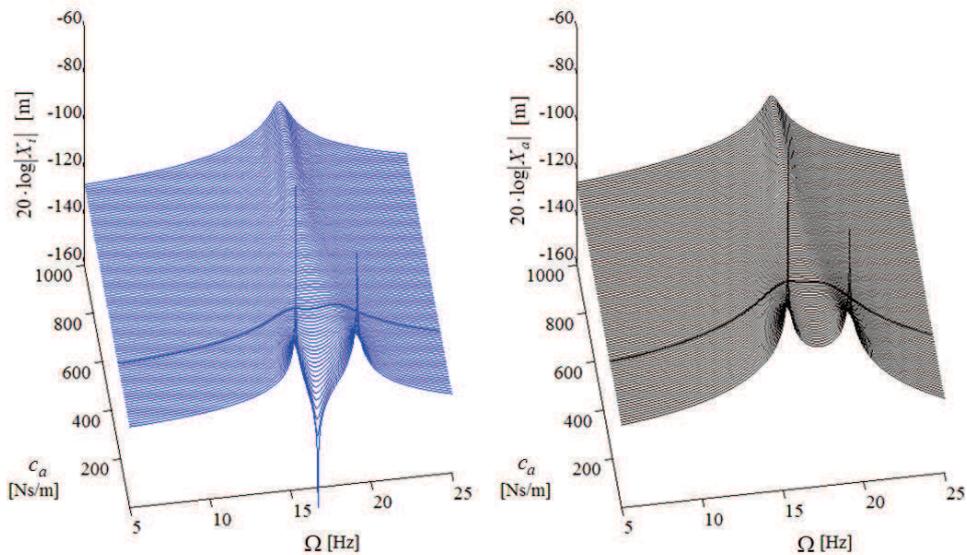


Figura 5.8 – Gráficos dos efeitos da variação do amortecimento c_a ($i = 30$).

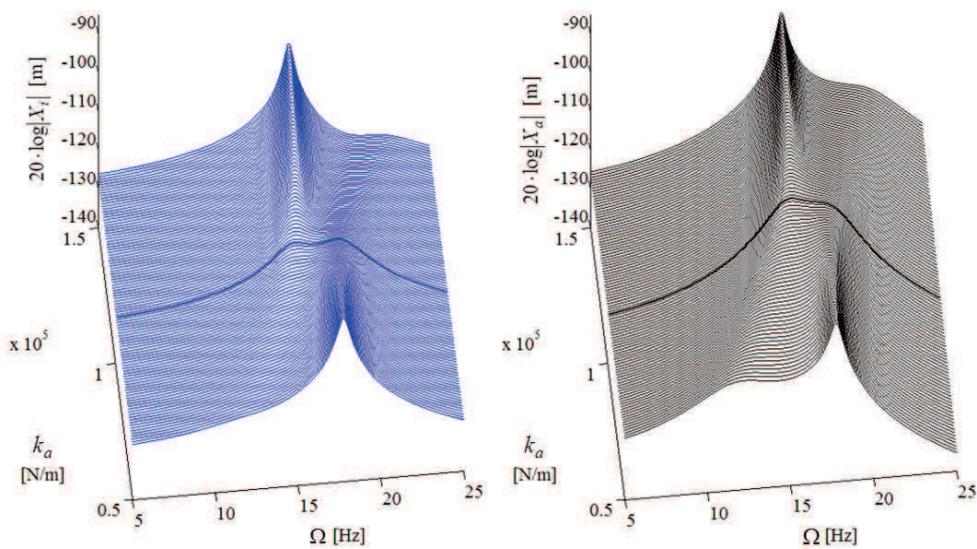


Figura 5.9 – Gráficos dos efeitos da variação da rigidez k_a ($i = 30$).

5.4 Avaliação de confiabilidade

Para as análises de confiabilidade que seguem, admite-se que as características da estrutura principal sejam conhecidas, e são considerados aleatórios os três parâmetros: massa, amortecimento e rigidez. A Tabela 5.3 mostra as características adotadas para essas variáveis, observando-se que os valores médios dos parâmetros correspondem ao projeto ótimo apresentado na Tabela 5.2, para $\mu = 1,44$.

Tabela 5.3 – Variáveis aleatórias e suas distribuições.

X_n	Variáveis	Distribuições	Média (μ)	Desvio Padrão (σ)
X_1	m_a [kg]	Normal (<i>Gaussiana</i>)	8,7948	0,1759 (0,02 μ)
X_2	c_a [Ns / m]	Normal (<i>Gaussiana</i>)	258,7968	20,7037 (0,08 μ)
X_3	k_a [N / m]	Normal (<i>Gaussiana</i>)	96751,4988	3870,06 (0,04 μ)

A primeira função de estado limite é definida segundo:

$$g_1(\mathbf{X}) = 1,10 \cdot \max_{\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}} |X_P(\omega)|_{opt} - \max_{\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}} |X_P(\mathbf{X}, \omega)|, \quad (5.15)$$

onde o vetor de variáveis aleatórias é igual a $\mathbf{X} = [m_a \quad c_a \quad k_a]$ e a banda de frequências analisadas é de 5 a 25 Hz. Esta função de estado limite indica que a máxima magnitude da resposta harmônica do ponto P na banda de frequência de interesse não deve superar em mais de 10 % a máxima amplitude da resposta prevista para o ADV ótimo. Evidentemente, esta condição se relaciona diretamente com o nível de vibração da estrutura primária.

Por outro lado, a segunda função de estado limite é definida de modo a representar uma importante característica de projeto de ADVs. Trata-se do máximo alongamento do elemento resiliente que deve ser limitado de modo a diminuir a ocorrência de falhas por fadiga. O objetivo é calcular a probabilidade de este elemento ultrapassar uma alongação máxima (δ_{max}), definida por um excedente de 10 % em relação à alongação máxima correspondente à configuração ótima do ADV.

Com base na Figura 5.3, infere-se que o alongamento da mola é dado pela diferença entre os deslocamentos da massa do ADV e do ponto P , ou seja:

$$|\delta(\omega)| = |X_a(\omega) - X_P(\omega)| \quad (5.16)$$

Assim, a segunda função de estado limite é expressa segundo:

$$g_2(\mathbf{X}) = 1,10 \cdot \max_{\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}} |\delta(\omega)|_{opt} - \max_{\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}} |\delta(\mathbf{X}, \omega)| \quad (5.17)$$

onde a banda de frequência utilizada é de 5 a 25 Hz.

5.4.1 Análise com três variáveis aleatórias

A Tabela 5.4 apresenta os valores obtidos para os métodos de confiabilidade *FORM*, *SORM* e *MCS-LHS* considerando massa m_a , amortecimento c_a e rigidez k_a como variáveis aleatórias. As Figuras 5.10 e 5.11 mostram a convergência da Simulação de Monte Carlo para as funções de estado limite $g_1(\mathbf{X})$ e $g_2(\mathbf{X})$, respectivamente.

Tabela 5.4 – Resultados obtidos para as variáveis aleatórias m_a , c_a e k_a .

Função de Estado Limite	Método	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido	Erro relativo [%]*
$g_1(\mathbf{X})$	FORM	-	0,3866	34,95	65,05	0h 00min 01s	120,43
	SORM	-	0,3788	35,24	64,76	0h 00min 05s	119,45
	MCS-LHS	1.000	-	70,80	29,20	0h 00min 57s	1,05
		6.000	-	70,18	29,82	0h 05min 39s	1,05
		20.000	-	70,49	29,51	0h 19min 16s	-
$g_2(\mathbf{X})$	FORM	-	0,4345	33,20	66,80	0h 00min 01s	0,24
	SORM	-	0,4121	34,01	65,99	0h 00min 04s	0,98
	MCS-LHS	1.000	-	32,50	67,50	0h 00min 58s	1,29
		6.000	-	32,80	67,20	0h 05min 37s	0,84
		20.000	-	33,37	66,64	0h 18min 53s	-

*Calculado em relação à confiabilidade com base no resultado de MCS para 20.000 amostras.

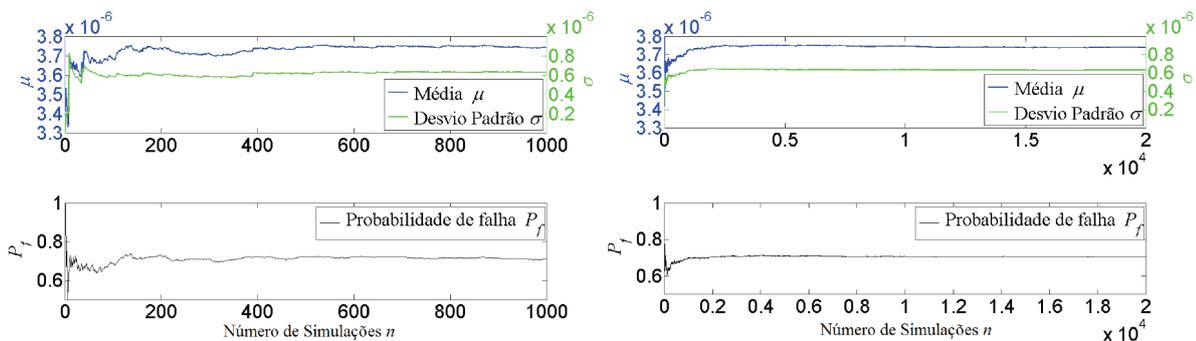


Figura 5.10 – Convergência para a MCS para $g_1(\mathbf{X})$ com três variáveis.

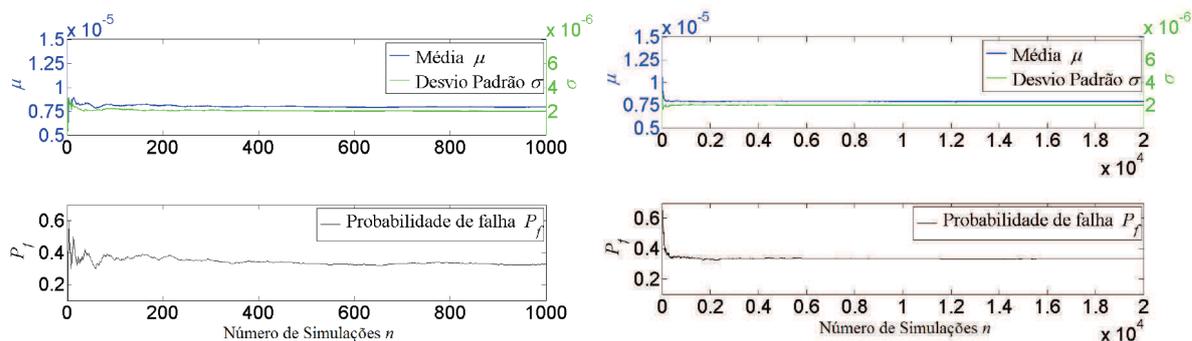


Figura 5.11 – Convergência para a MCS para $g_2(\mathbf{X})$ com três variáveis.

Nota-se que a MCS apresenta valores de probabilidade de falha muito diferentes dos valores encontrados pelos outros métodos de confiabilidade, para a função e estado limite $g_1(\mathbf{X})$. Já para a função de estado limite $g_2(\mathbf{X})$, os resultados encontrados pelos métodos de confiabilidade são bem próximos dos valores encontrados pela Simulação de Monte Carlo, havendo convergência a partir de 6.000 amostras.

A discrepância entre os valores de confiabilidade obtidos por meio dos métodos *FORM* e *SORM* em relação à MCS motivou o estudo dos casos apresentados a seguir, limitados a duas variáveis aleatórias, para os quais se pode dispor de visualização gráfica da função de estado limite como elemento suplementar de análise.

5.4.2 Análise com duas variáveis aleatórias

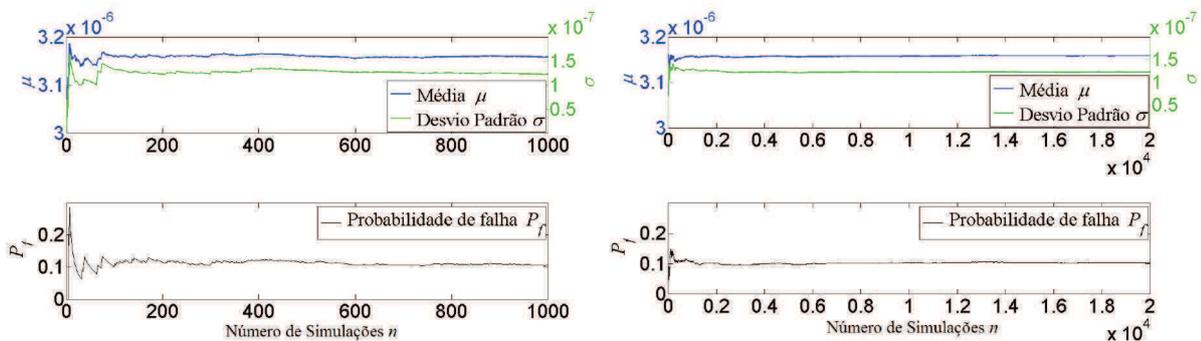
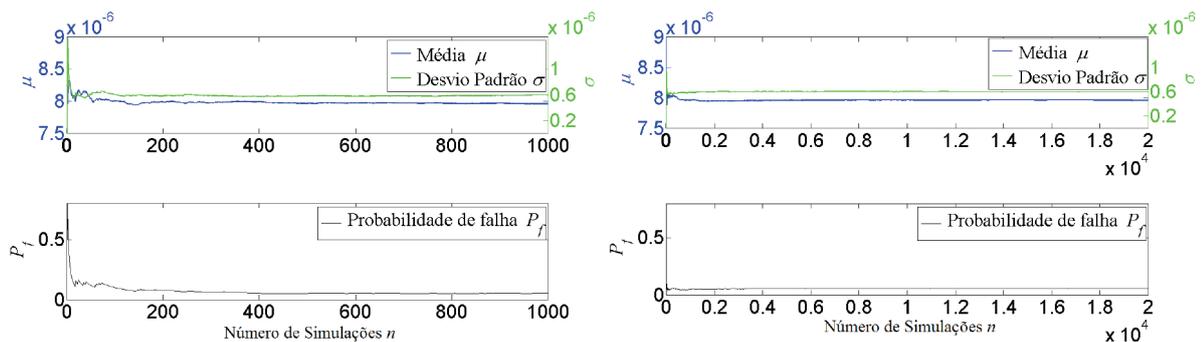
São considerados três casos com duas variáveis aleatórias para as funções de estado limite $g_1(\mathbf{X})$ e $g_2(\mathbf{X})$. No **Caso 1** são consideradas como variáveis aleatórias m_a e c_a ; no **Caso 2**, as variáveis consideradas incertas são m_a e k_a ; e no **Caso 3**, c_a e k_a são consideradas aleatórias.

A Tabela 5.5 mostra os resultados das análises de confiabilidade para estes casos e as Figuras 5.12 e 5.13 mostram a convergência da Simulação de Monte Carlo. É possível notar que os resultados da MCS se aproximam dos resultados encontrados pelos outros métodos de confiabilidade estudados. Além disso, observa-se que a convergência do MCS aconteceu de maneira satisfatória a partir de 8.000 amostras, para ambas as funções de estado limite.

Tabela 5.5 – Resultados obtidos para o **Caso 1**.

Função de Estado Limite	Método	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido	Erro relativo [%]*
$g_1(\mathbf{X})$	FORM	-	1,3763	8,44	91,56	0h 00min 01s	2,16
	SORM	-	1,9496	8,46	91,54	0h 00min 03s	2,14
	MCS-LHS	1.000	-	10,80	89,20	0h 00min 56s	0,47
		6.000	-	10,35	89,65	0h 05min 39s	0,03
		20.000	-	10,38	89,62	0h 19min 31s	-
$g_2(\mathbf{X})$	FORM	-	1,6364	5,09	94,91	0h 00min 01s	0,35
	SORM	-	1,6569	4,88	95,12	0h 00min 03s	0,57
	MCS-LHS	1.000	-	5,30	94,70	0h 00min 57s	0,13
		6.000	-	5,12	94,88	0h 05min 37s	0,32
		20.000	-	5,41	94,58	0h 19min 11s	-

*Calculado em relação à confiabilidade com base no resultado da MCS para 20.000 amostras.

Figura 5.12 – Convergência da MCS para $g_1(\mathbf{X})$ e **Caso 1**.Figura 5.13 – Convergência da MCS para $g_2(\mathbf{X})$ e **Caso 1**.

As Figuras 5.14 a 5.17 permitem melhor entendimento das situações em estudo, e dão elementos para a explicação da inadequação dos métodos *FORM* e *SORM* em estimar corretamente a confiabilidade para $g_1(\mathbf{X})$. Nota-se que esta função de estado limite não se apresenta como uma curva aberta no espaço das variáveis aleatórias definidas.

Por meio das Figuras 5.14 e 5.15 é possível observar que, para $g_1(X)$, o índice de confiabilidade é calculado corretamente, porém, o domínio de falha não é igual ao domínio de falha identificado pelos métodos *FORM* e *SORM*.

Por outro lado, nas Figuras 5.16 e 5.17, observa-se que $g_2(X)$ se apresenta como uma curva aberta, e os métodos de confiabilidade estimam o valor de probabilidade de falha de maneira correta.

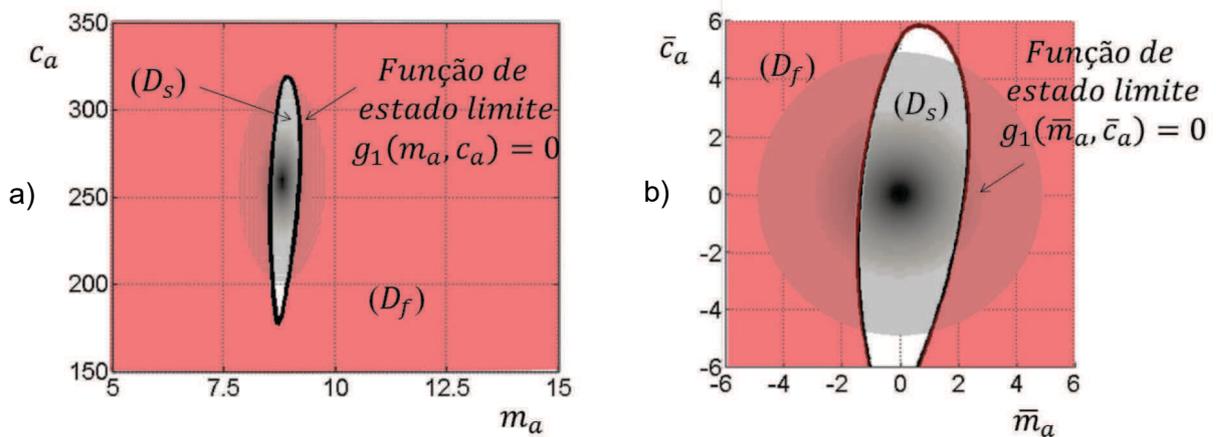


Figura 5.14 – Funções de estado limite e distribuições de probabilidade para $g_1(X)$ e **Caso 1**: a) coordenadas não reduzidas e b) coordenadas reduzidas.

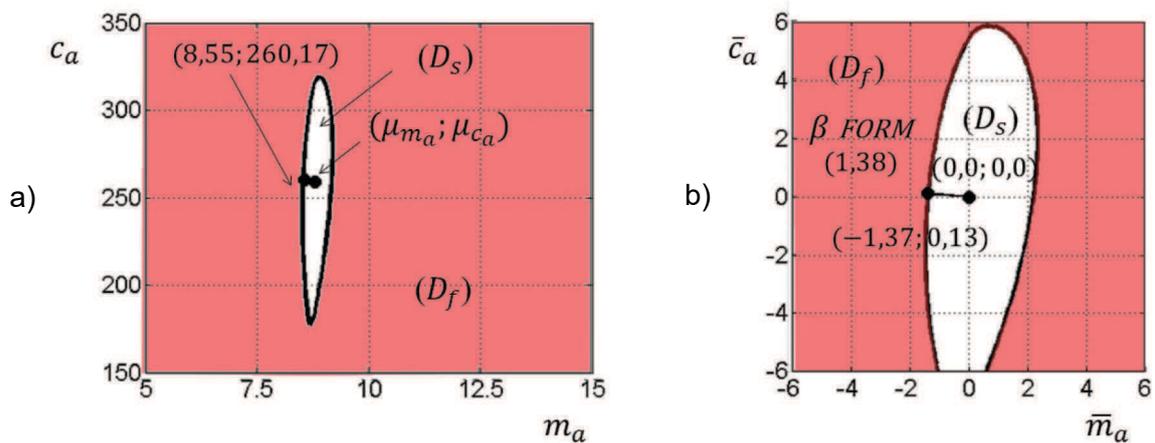


Figura 5.15 – Indicação dos pontos de projeto obtidos pelo *FORM* para $g_1(X)$ e **Caso 1**: a) coordenadas não reduzidas e b) coordenadas reduzidas.

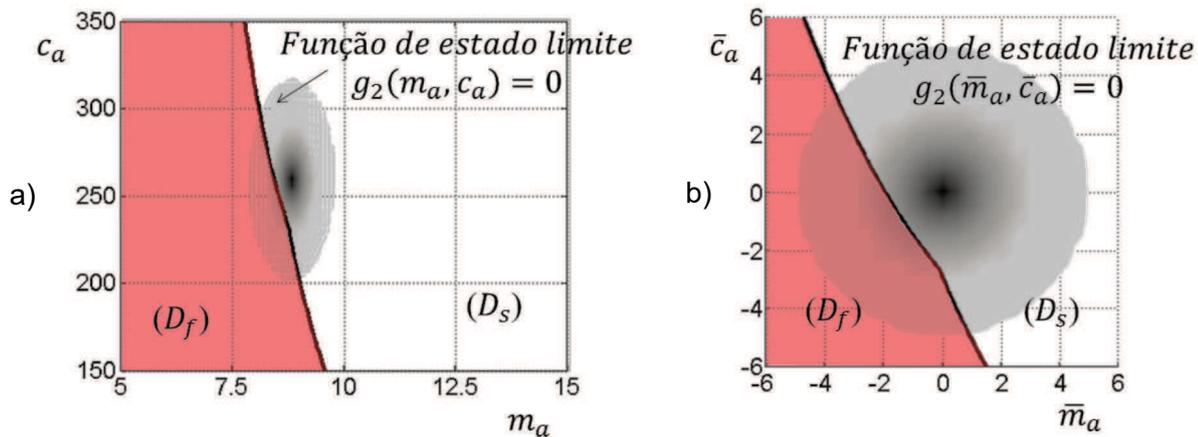


Figura 5.16 — Funções de estado limite e distribuições de probabilidade para $g_2(\mathbf{X})$ e **Caso 1**: a) coordenadas não reduzidas e b) coordenadas reduzidas.

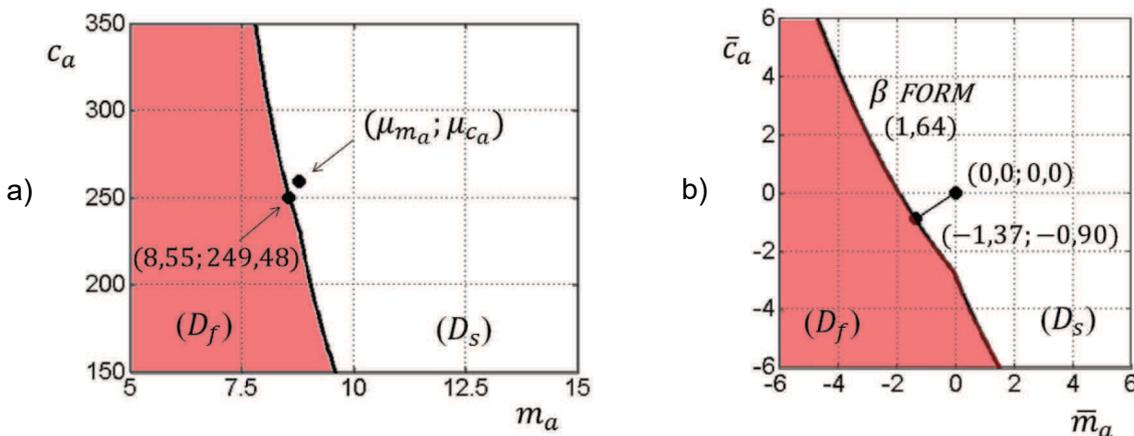


Figura 5.17 – Indicação dos pontos de projeto obtidos pelo *FORM* para $g_2(\mathbf{X})$ e **Caso 1**: a) coordenadas não reduzidas e b) coordenadas reduzidas.

A Tabela 5.6 apresenta resultados obtidos pela análise de confiabilidade e as Figuras 5.18 e 5.19 mostram graficamente a convergência da Simulação de Monte Carlo para o **Caso 2**.

Tabela 5.6 – Resultados obtidos para o **Caso 2**.

Função de Estado Limite	Método	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido	Erro relativo [%]*
$g_1(\mathbf{X})$	FORM	-	0,3866	34,95	65,05	0h 00min 01s	115,11
	SORM	NC	NC	NC	NC	NC	NC
	MCS-LHS	1.000	-	69,70	30,30	0h 00min 56s	0,20
		6.000	-	69,78	30,22	0h 05min 37s	0,07
		20.000	-	69,76	30,24	0h 20min 07s	-
$g_2(\mathbf{X})$	FORM	-	0,4393	33,02	66,98	0h 00min 01s	0,43
	SORM	-	0,9867	16,19	83,81	0h 00min 03s	24,59
	MCS-LHS	1.000	-	32,50	67,50	0h 00min 57s	0,34
		6.000	-	33,23	66,77	0h 05min 38s	0,74
		20.000	-	32,72	67,27	0h 18min 57s	-

*Calculado em relação à confiabilidade com base no resultado da MCS para 20.000 amostras.

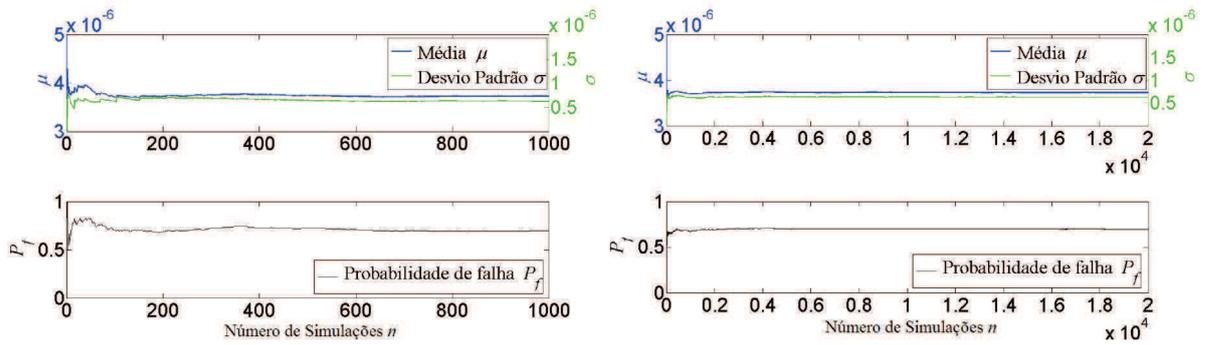


Figura 5.18 – Convergência da MCS para $g_1(X)$ e **Caso 2**.

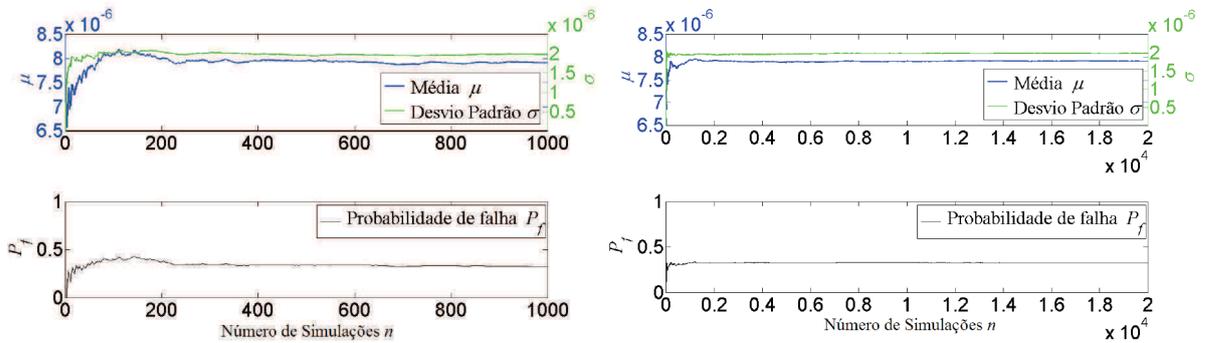


Figura 5.19 – Convergência da MCS para $g_2(X)$ e **Caso 2**.

Nas Figuras 5.20 e 5.21 são mostrados os domínios de falha e de segurança e as funções de estado limite, bem como as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias para a função de estado limite $g_1(X)$.

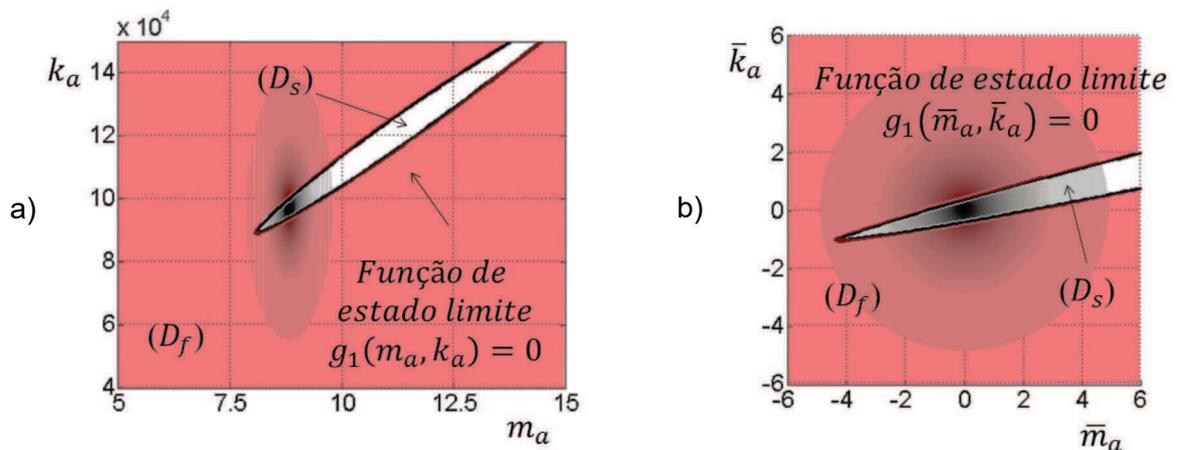


Figura 5.20 – Funções de estado limite e distribuições de probabilidade para $g_1(X)$ e **Caso 2**: a) coordenadas não reduzidas e b) coordenadas reduzidas.

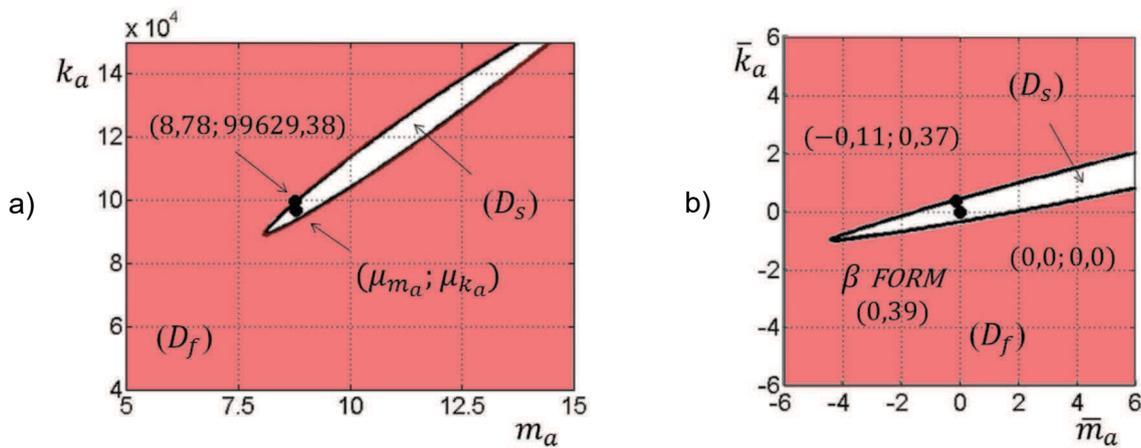


Figura 5.21 – Indicação dos pontos de projeto obtidos pelo *FORM* para $g_1(X)$ e **Caso 2**: a) coordenadas não reduzidas e b) coordenadas reduzidas.

Nota-se na Figura 5.21 que o valor do índice de confiabilidade foi corretamente calculado pelo método *FORM*, mas a sua representação gráfica diante do domínio mostra que a probabilidade de falha não está correta.

As Figuras 5.22 e 5.23 mostram que o método de confiabilidade *FORM* calcula de maneira correta o índice de confiabilidade para $g_2(X)$; no sistema de coordenadas reduzidas, a função de estado limite é aproximadamente linear e isso explica o fato de o resultado apresentado pelo método *FORM* se aproximar muito bem do resultado obtido por *MCS*.

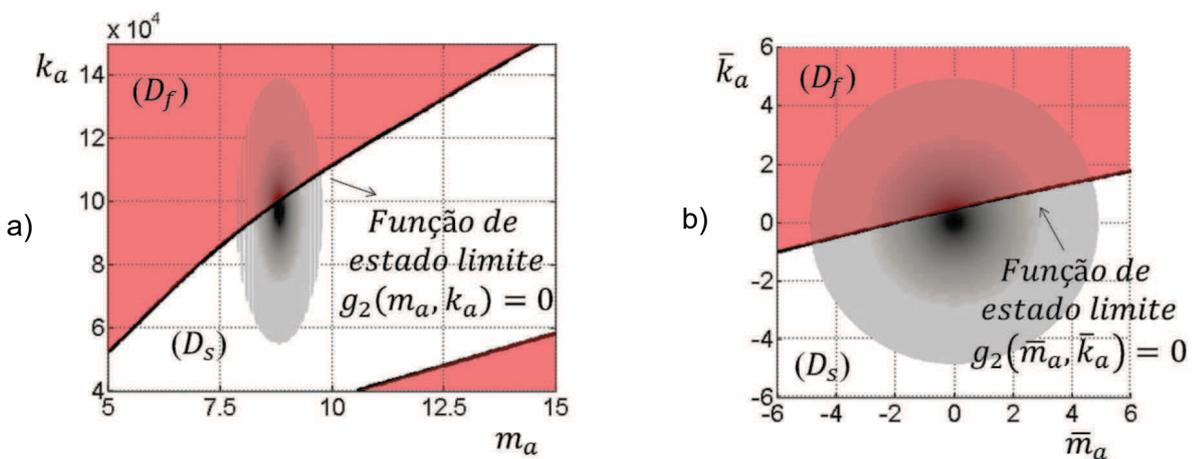


Figura 5.22 – Funções de estado limite e distribuições de probabilidade para o **Caso 2**: a) coordenadas não reduzidas e b) coordenadas reduzidas.

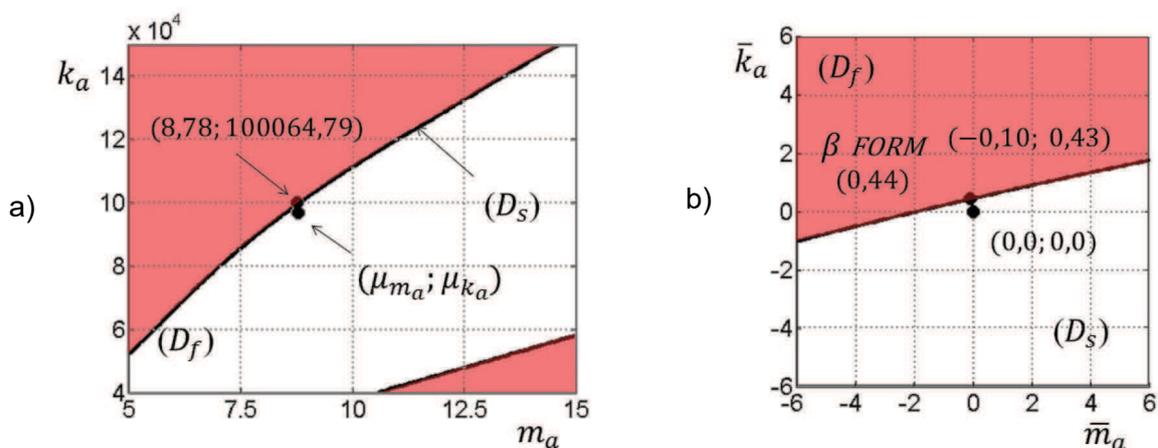


Figura 5.23 – Indicação dos pontos de projeto obtidos pelo *FORM* para $g_2(X)$ e **Caso 2**:

a) coordenadas não reduzidas; b) coordenadas reduzidas.

A Tabela 5.7 apresenta os resultados obtidos pelos métodos de confiabilidade para o **Caso 3**, e as Figuras 5.24 e 5.25 mostram a convergência da Simulação de Monte Carlo para as duas funções de estado consideradas. Mais uma vez, pode-se notar a convergência para a Simulação de Monte Carlo a partir de 4.000 amostras; e o resultado incorreto do método *FORM* para a função de estado limite $g_1(X)$, explicado pelo comportamento observado nas Figuras 5.26 e 5.27, similar ao comportamento observado nos dois casos precedentes.

Tabela 5.7 – Resultados obtidos para o **Caso 3**.

Função de Estado Limite	Método	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido	Erro relativo [%]*
$g_1(X)$	<i>FORM</i>	-	0,4019	34,39	65,61	0h 00min 01s	112,81
	<i>SORM</i>	-	0,3935	34,70	65,30	0h 00min 03s	111,81
	<i>MCS-LHS</i>	1.000	-	69,30	30,70	0h 00min 57s	0,42
		6.000	-	69,28	30,72	0h 05min 40s	0,36
		20.000	-	69,17	30,83	0h 19min 42s	-
$g_2(X)$	<i>FORM</i>	-	0,4456	32,80	67,20	0h 00min 01s	0,34
	<i>SORM</i>	-	1,3621	8,66	91,34	0h 00min 03s	36,39
	<i>MCS-LHS</i>	1.000	-	32,60	67,40	0h 00min 57s	0,64
		6.000	-	33,07	66,93	0h 05min 51s	0,06
		20.000	-	33,03	66,97	0h 18min 47s	-

*Calculado em relação à confiabilidade com base no resultado da MCS para 20.000 amostras.

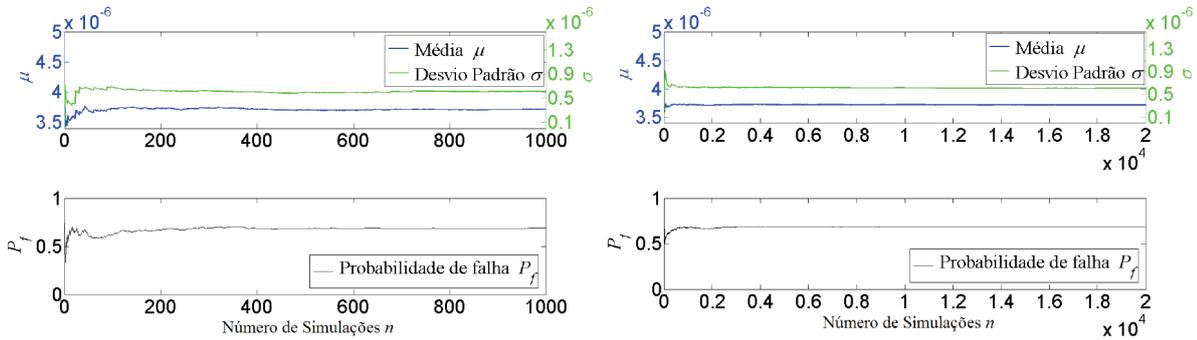


Figura 5.24 – Convergência da MCS para $g_1(X)$ e **Caso 3**.

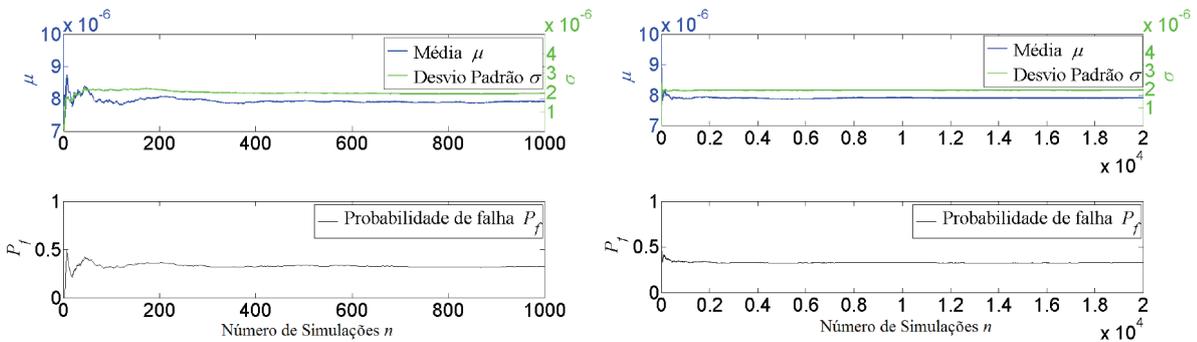


Figura 5.25 – Convergência da MCS para $g_2(X)$ e **Caso 3**.

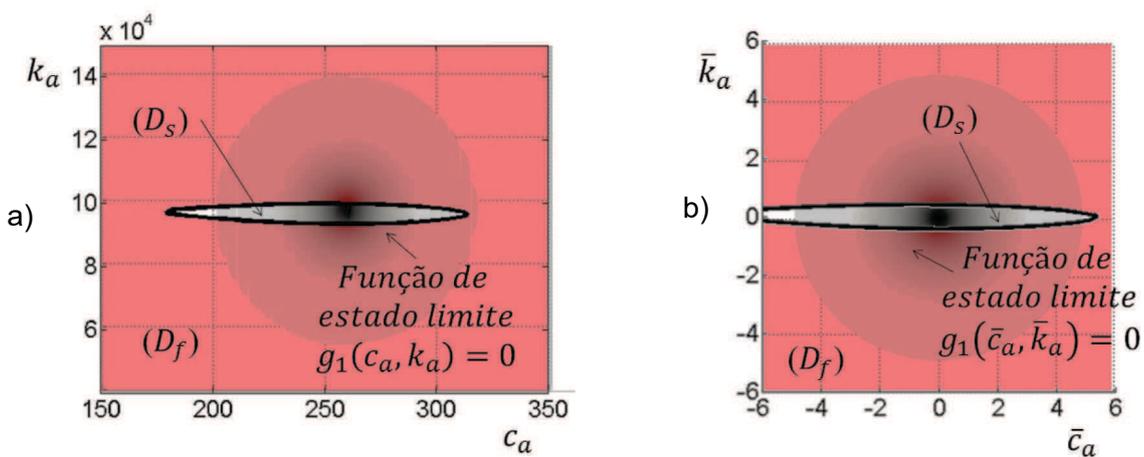


Figura 5.26 – Funções de estado limite e distribuições de probabilidade para $g_1(X)$ e **Caso 3**: a) coordenadas não reduzidas; b) coordenadas reduzidas.

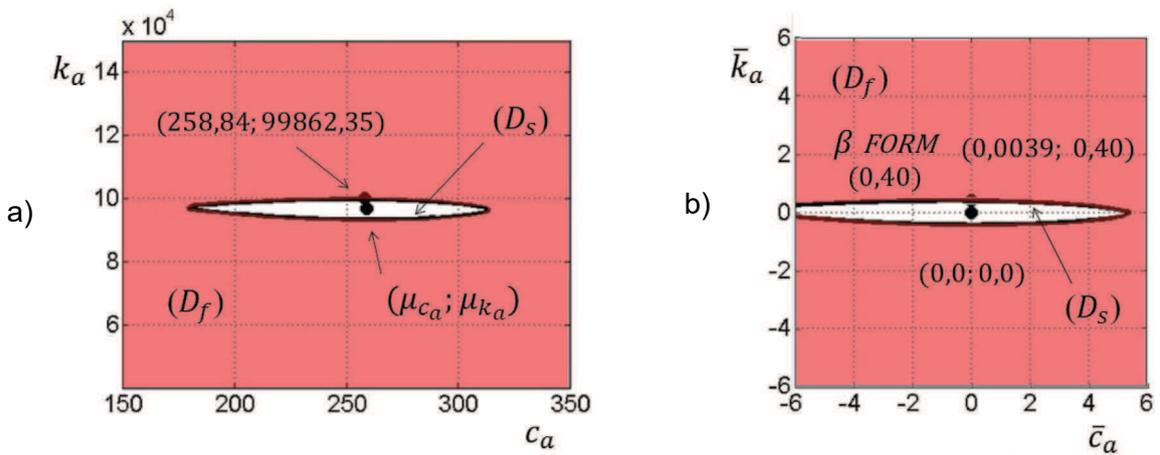


Figura 5.27 – Indicação dos pontos de projeto obtidos pelo FORM para $g_1(X)$ e **Caso 3**: a) coordenadas não reduzidas; b) coordenadas reduzidas.

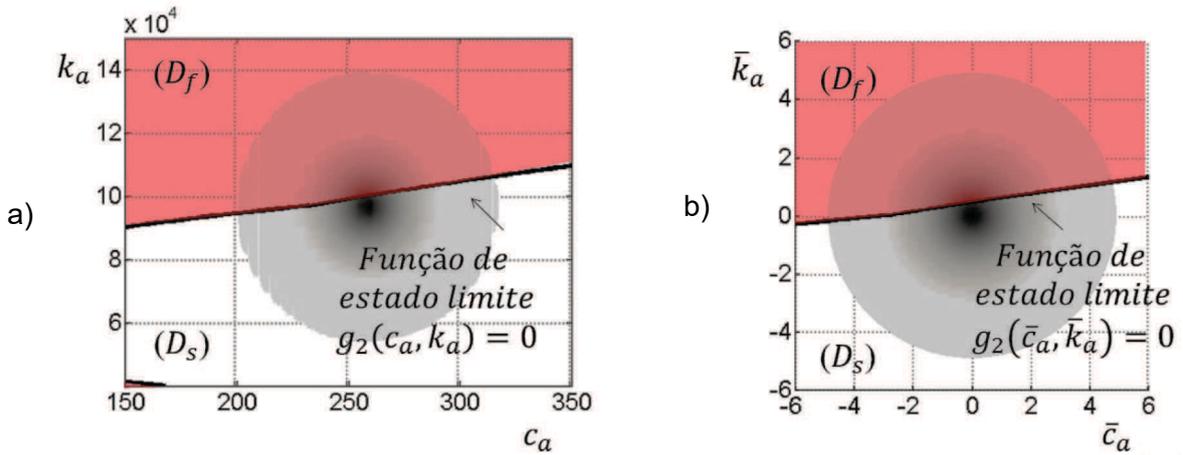


Figura 5.28 – Funções de estado limite e distribuições de probabilidade para $g_2(X)$ e **Caso 3**: a) coordenadas não reduzidas; b) coordenadas reduzidas.

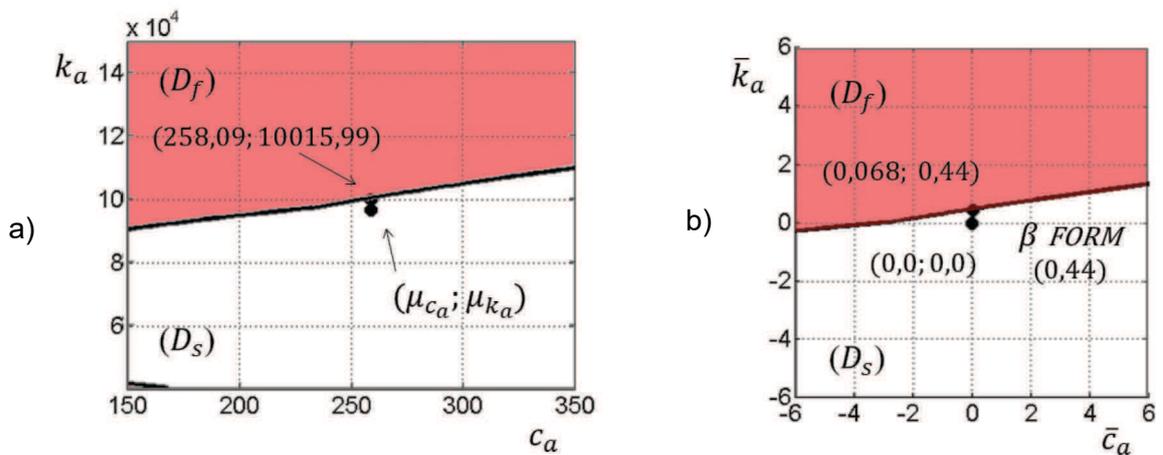


Figura 5.29 – Indicação dos pontos de projeto obtidos pelo FORM para $g_2(X)$ e **Caso 3**: a) coordenadas não reduzidas e b) coordenadas reduzidas.

5.4.3 Fronteiras de probabilidade com três variáveis aleatórias

Outro resultado importante é a faixa de probabilidade obtida quando as duas funções de estado limite definidas são consideradas simultaneamente, o que permite definir uma terceira função de estado limite conforme a Eq.(5.18).

$$g_3(\mathbf{X}) = g_1(\mathbf{X}) \cup g_2(\mathbf{X}) \quad (5.18)$$

A Tabela 5.8 mostra os resultados obtidos para a obtenção de probabilidade de falha via MCS, para a função de estado limite $g_3(\mathbf{X})$. A convergência da MCS é confirmada pela Fig. 5.30.

Tabela 5.8 – Resultados da MCS obtidos para a LSF para duplo modo de falha $g_3(\mathbf{X})$.

Função de estado limite	Repetições	Número de simulações n	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido
$g_3(\mathbf{X})$	1ª	20.000	72,38	27,63	0h 24min 06s
	2ª	20.000	72,13	27,87	0h 24min 11s
	3ª	20.000	72,17	27,83	0h 24min 17s

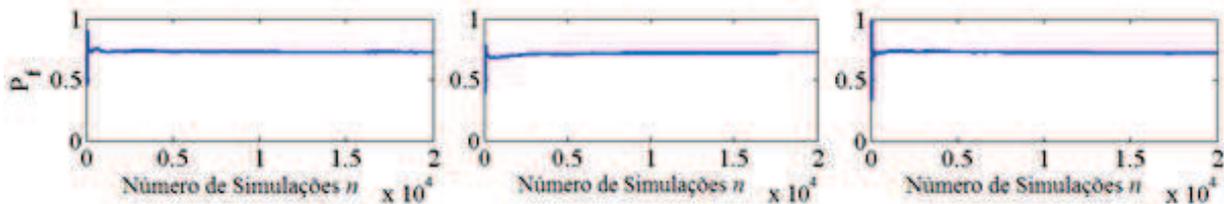


Figura 5.30 – Convergência da MCS para a função de estado limite $g_3(\mathbf{X})$.

Por meio das Equações (2.21) e (2.28), são calculadas as fronteiras de primeira e segunda ordens, e para esse caso, como são unidos somente dois modos de falha, as fronteiras de primeira e segunda ordens são iguais e podem ser expressas pela Eq.(5.19).

$$70,49 \leq P_f \leq 80,34 \quad (5.19)$$

Foram feitas 3 repetições para afirmar que os valores se encontram dentro da fronteira obtida, apesar da proximidade entre eles. Logo, é possível afirmar que os valores de probabilidade do modo duplo de falha, união do primeiro modo de falha com o segundo modo de falha se encontram dentro da faixa expressa pela Eq.(5.19).

5.5 Discussão e conclusões

Após várias análises, conclui-se que para esse tipo de estrutura para a qual se visa analisar a confiabilidade diante de um ponto ótimo de projeto, a função de estado limite não é linear nem não linear e sim um domínio cercado pelo domínio de falha. Esse tipo de *LSF* não pode ser analisado pelos métodos de confiabilidade que aproximam o valor como *FORM* e *SORM*, e a melhor maneira para se obterem os valores corretos de probabilidade de falha é a utilização da Simulação de Monte Carlo. Alguns resultados colhidos pela *MCS* foram analisados e outra conclusão importante é que pequenas variações na massa, no amortecimento e na rigidez, principalmente, podem facilmente fazer o sistema não respeitar um requisito de projeto, ou seja, uma estrutura controlada passivamente por *ADVs* é bastante sensível aos parâmetros de sintonização.

Na literatura não é apresentado nenhum método aproximado que resolva esse tipo de problema de tal maneira que possa sugerir uma aproximação aceitável.

Página intencionalmente deixada em branco.

CAPÍTULO 6

ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS PASSIVAMENTE CONTROLADAS POR TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS ASSOCIADOS A CIRCUITOS *SHUNT* RESSONANTES

Este capítulo trata da análise de confiabilidade de estruturas cujas vibrações são controladas passivamente utilizando atuadores piezelétricos associados a circuitos elétricos passivos, denominados circuitos *shunt*.

O princípio subjacente a esta estratégia é que a energia vibratória é transformada em energia elétrica por meio do efeito piezelétrico direto, e transferida para o circuito elétrico onde é parcialmente dissipada.

Dentre os tipos de circuito elétricos utilizados, o circuito denominado ressonante é considerado um dos mais eficientes. Este circuito é composto por um indutor e um resistor, que, conectados ao elemento piezelétrico que se assimila a um capacitor, forma um circuito *R-L-C*.

Conforme será evidenciado, quando acoplado a um sistema dinâmico, esse dispositivo tem atuação semelhante à de absorvedores dinâmicos de vibrações (*ADV*), analisados no Capítulo 5.

Assim como os *ADVs*, os circuitos *shunt* devem ser sintonizados para atenuar vibrações de uma determinada frequência. Sabe-se, todavia, que os valores das características de componentes eletrônicos apresentam variabilidades diversas, devidas ao processo de fabricação, envelhecimento e temperatura. Devido a isto, torna-se necessária a análise de confiabilidade para garantir que o sistema de controle satisfaça aos requisitos de projeto.

Os métodos de confiabilidade *FORM* e *SORM* são aplicados com o intuito de encontrar o valor do índice de confiabilidade e a *MCS* é usada para a verificação dos resultados.

6.1 Introdução

A Figura 6.1 ilustra a utilização de um transdutor piezelétrico conectado a um circuito *shunt* ressonante visando à mitigação de vibrações da estrutura à qual o transdutor piezelétrico está fixado. Hagood e Von Flotow (1991) mostram a semelhança desse dispositivo, material piezelétrico em circuito *shunt* ressonante (*RSP*, *Resonant Shunted Piezoelectric*) com o absorvedor dinâmico de vibrações (Fig. 6.1).

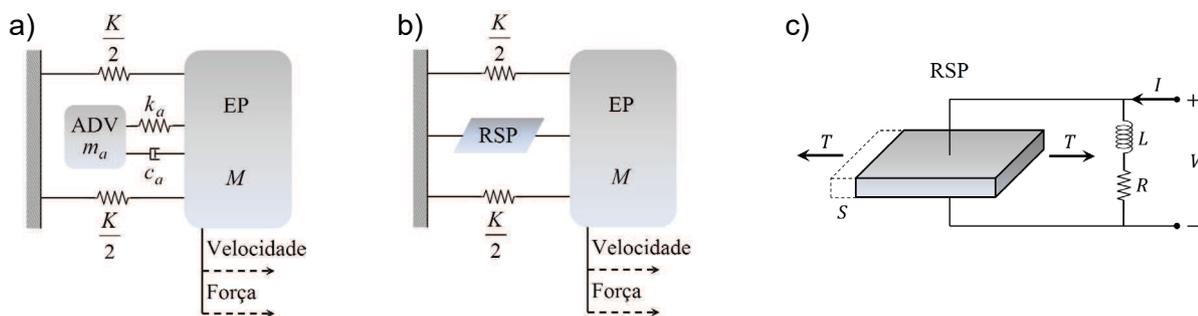


Figura 6.1 – Comparação entre a) absorvedor dinâmico de vibrações (*ADV*) e b) material piezelétrico em circuito *shunt* ressonante (*RSP*); e c) *RSP* detalhado (ilustrações adaptadas de (RAO, 2011) e (HAGOOD; VON FLOTOW, 1991)).

Similarmente ao que ocorre com os *ADVs* (Fig. 6.1a), tratados no Capítulo 5, os circuitos *shunt* ressonantes devem ser sintonizados (Fig. 6.1c), o que significa que os valores de seus parâmetros elétricos resistência e indutância devem ser precisamente determinados para a atenuação de vibrações em certa faixa de frequências relativamente estreita. Contudo, na realidade, os valores destes elementos possuem incertezas que podem influenciar significativamente o desempenho do dispositivo de controle.

Para elucidar a presença de incertezas em componentes eletrônicos, apesar dos outros componentes elétricos usados nesse estudo também seguirem o mesmo princípio, as incertezas dos valores de resistores comerciais são mostradas a seguir.

A Figura 6.2 mostra resistores com mesmo valor de resistência elétrica, porém com diferentes valores admissíveis de potência dissipada (BOYLESTAD, 2004). Nota-se que os resistores de dimensões maiores correspondem aos que permitem maiores potências, o que lhes possibilita maiores valores de corrente e dissipação de calor. Esse tipo é o resistor fixo de carbono moldado com dois terminais, contendo material isolante na região externa e material resistente na região interna, que no exemplo é o carbono.

Acrescenta-se que os fabricantes especificam faixas para os valores nominais de resistências, e não valores exatos, considerando que os processos de fabricação envolvem tolerâncias. Dessa maneira, os fabricantes especificam faixas nas quais os valores nominais podem variar. Além disso, essas resistências podem variar com a temperatura ambiente.

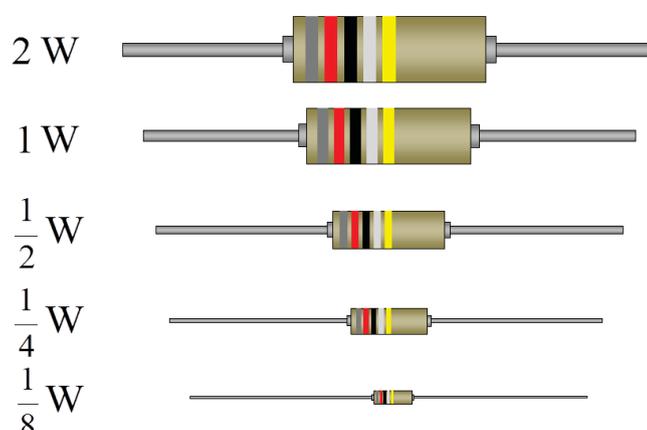


Figura 6.2 – Representações de resistores fixos de carbono para diferentes valores de potências (ilustração adaptada de (BOYLESTAD, 2004)).

Para representar o valor da resistência de um resistor, bem como a tolerância sobre esse valor, é utilizado um código de cores e valores padronizados. As três primeiras faixas classificam o valor nominal da resistência. A quarta faixa representa a tolerância do resistor fornecida pelo fabricante, que é uma indicação da precisão no valor nominal. Caso essa faixa não exista, o valor convencional de tolerância é de $\pm 20\%$. Já a quinta faixa, é a taxa de falha do componente, indicado em falhas por mil horas de operação. A Figura 6.2 exemplifica um resistor com valor nominal de $82\ \text{ohms}$ com tolerância de 10% , ou seja, esse valor pode estar entre $82 \pm 8,2\ \text{ohms}$ com $0,001\%$ de taxa de falha (BOYLESTAD, 2004).

Para um circuito *shunt*, várias funções de estado limite podem ser analisadas envolvendo requisitos de projeto, como um valor de deslocamento máximo da estrutura primária a ser respeitado, ou limites de operação, como a corrente máxima que o resistor utilizado suporta de acordo com sua potência.

6.2 Modelagem de treliças contendo atuadores do tipo *stack* e circuitos *shunt*

A Figura 6.3 ilustra a situação de interesse, na qual uma treliça plana, similar àquela tratada nos Capítulos 4 e 5, dispõe de um atuador piezelétrico do tipo *stack* o qual, por sua vez, está conectado a um circuito *R-L* em série.

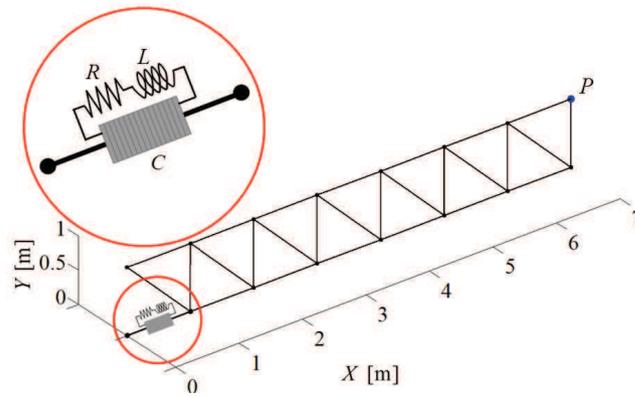


Figura 6.3 – Modelo de elementos finitos de uma treliça plana com um elemento finito passivo do tipo piezelétrico *stack* em circuito *shunt*.

O modelo de elementos finitos cuja formulação é apresentada na Seção 4.2 é aqui adaptado para considerar a conexão do atuador com o circuito elétrico. A Figura 6.4 mostra detalhes do elemento passivo.

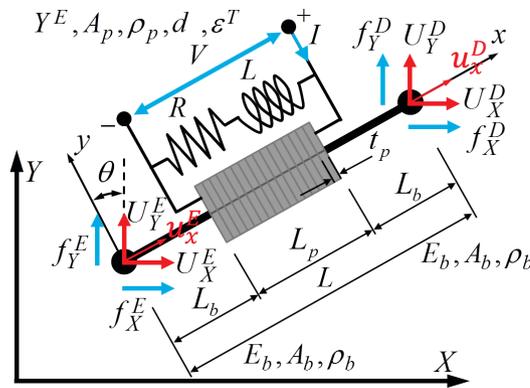


Figura 6.4 – Elemento finito passivo do atuador piezelétrico do tipo *stack* em circuito *shunt*.

Pode-se observar a semelhança desse elemento finito passivo com o elemento finito ativo estudado no Capítulo 4. Na modelagem desse elemento finito passivo, a equação do movimento do elemento finito ativo do Capítulo 4, Eq.(4.28), é utilizada, mas com uma diferença: como o circuito agora está fechado, há deslocamento de carga elétrica.

Assim, as equações do movimento em nível global, Eq.(4.31), são expressas segundo:

$$\mathbf{M}^{(g)}\ddot{\mathbf{U}}^{(g)}(t) + \mathbf{K}^{(g)}\mathbf{U}^{(g)}(t) - \tilde{\mathbf{K}}^{(g)}V(t) = \mathbf{F}^{(g)}, \quad (6.1a)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(g)T}\mathbf{U}^{(g)}(t) + \mathbf{\Gamma}V(t) = Q(t). \quad (6.1b)$$

Associando uma resistência R e uma indutância L em série, tem-se a relação:

$$V(t) = R\dot{Q}(t) + L\ddot{Q}(t). \quad (6.2)$$

Substituindo a Equação (6.2) nas equações de movimento, Eq.(6.1), obtêm-se:

$$\mathbf{M}^{(g)}\ddot{\mathbf{U}}^{(g)}(t) + \mathbf{K}^{(g)}\mathbf{U}^{(g)}(t) - \tilde{\mathbf{K}}^{(g)}R\dot{Q}(t) - \tilde{\mathbf{K}}^{(g)}L\ddot{Q}(t) = \mathbf{F}^{(g)}, \quad (6.3a)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(g)T}\mathbf{U}^{(g)}(t) + \mathbf{\Gamma}R\dot{Q}(t) + \mathbf{\Gamma}L\ddot{Q}(t) = Q(t). \quad (6.3b)$$

Na forma matricial, as Equações (6.3a) e (6.3b) podem ser representadas pela Eq.(6.4).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(g)} & -\tilde{\mathbf{K}}^{(g)}L \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}(t) \\ \ddot{Q}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{K}}^{(g)}R \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}(t) \\ \dot{Q}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(g)} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{(g)T} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(t) \\ Q(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{(g)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Considerando um vetor com graus de liberdade mecânicos e elétricos unidos, Eq.(6.5):

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(t) \\ Q(t) \end{Bmatrix}, \quad (6.5)$$

e substituindo a Eq.(6.5) na Eq.(6.4), tem-se a equação do movimento:

$$\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{Z}}(t) + \overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{Z}}(t) + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{Z}(t) = \overline{\mathbf{F}}, \quad (6.6)$$

com:

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(g)} & -\tilde{\mathbf{K}}^{(g)}L \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}L \end{bmatrix}, \quad (6.7a)$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{K}}^{(g)}R \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}R \end{bmatrix}, \quad (6.7b)$$

$$\overline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(g)} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{(g)T} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (6.7c)$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{(g)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (6.7d)$$

Para obter a resposta no tempo é utilizado o método de *Runge-Kutta* de ordem quatro para integração numérica da Eq.(6.6). Por outro lado, para calcular as respostas em frequência, consideram-se:

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{F} e^{j\omega t}, \quad (6.8a)$$

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z} e^{j\omega t}. \quad (6.8b)$$

Introduzindo as Eqs. (6.8a) e (6.8b) na Eq.(6.6), após manipulações, obtém-se:

$$\mathbf{Z}(\omega) = \bar{\mathbf{H}}(\omega)^{-1} \bar{\mathbf{F}}, \quad (6.9)$$

na qual $\bar{\mathbf{H}}(\omega)$ é a matriz de flexibilidade dinâmica, com graus de liberdade mecânicos e elétricos, Eq.(6.10):

$$\bar{\mathbf{H}}(\omega) = \left(-\omega^2 \bar{\mathbf{M}} + j\omega \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}} \right). \quad (6.10)$$

6.3 Sintonização dos valores da resistência R e da indutância L

Segundo Hagood e Von Flotow (1991), o coeficiente de acoplamento eletromecânico K_{ij} assume a mesma função da razão de massas μ na sintonização de um absorvedor dinâmico de vibrações. Para estes autores, esse coeficiente pode ser aproximado pela Eq.(6.11):

$$K_{ij}^2 = \frac{(\omega_n^D)^2 - (\omega_n^E)^2}{(\omega_n^E)^2}, \quad (6.11)$$

onde ω_n^D e ω_n^E são as frequências naturais em circuito aberto e fechado, respectivamente.

Com o valor de K_{ij} conhecido, é possível calcular os parâmetros adimensionais de sintonização ótimos para amortecimento r_{opt} e para frequência δ_{opt} , e valores ótimos para resistência R_{opt} e indutância L_{opt} pelas seguintes equações:

$$r_{opt} = \frac{\sqrt{2}K_{ij}}{1 + K_{ij}^2}, \quad (6.12a)$$

$$\delta_{opt} = \sqrt{1 + K_{ij}^2}, \quad (6.12b)$$

$$R_{opt} = \frac{r_{opt}}{C_{pt}^S \omega_n^E}, \quad (6.13a)$$

$$L_{opt} = \frac{1}{(\delta_{opt}\omega_n)^2 C_{pi}^S}. \quad (6.13b)$$

nas quais ω_n^E é a frequência natural com circuito fechado a ser amortecida e C_{pi}^S é a capacitância considerando material piezelétrico bloqueado.

6.3.1 Efeito da variação da resistência R

O gráfico da Figura 6.5 mostra as respostas no tempo em termos do deslocamento vertical do ponto P com direção Y , g.d.l. $U_{32}(\omega)$, indicado na Fig. 6.2, para uma entrada degrau de magnitude de 10 N no mesmo grau de liberdade, considerando diferentes valores de R e valor de L igual a $1,475 \times 10^3\text{ H}$.

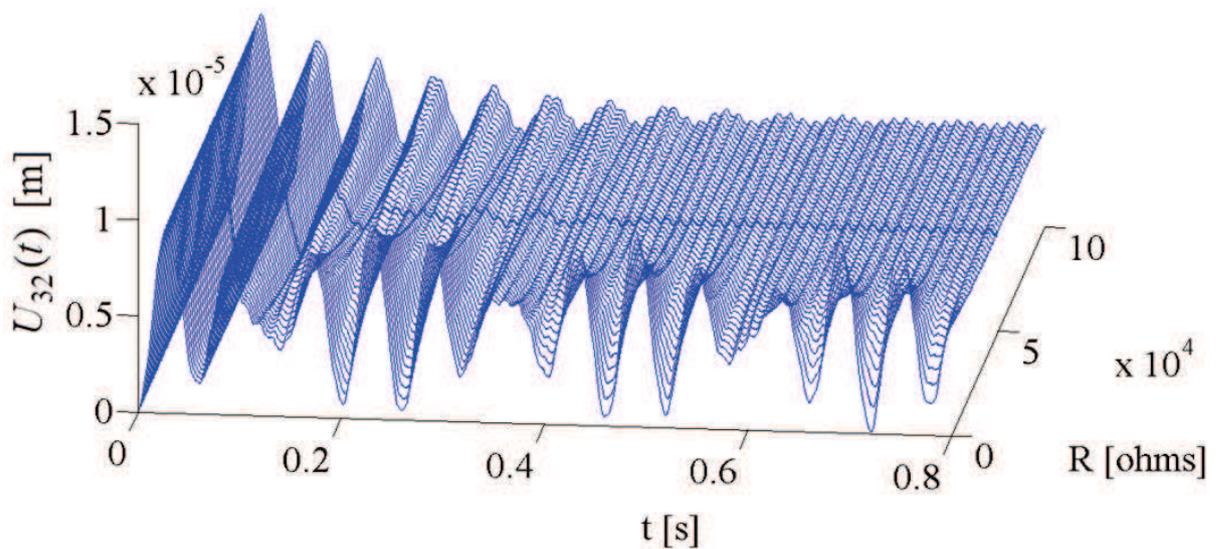


Figura 6.5 – Efeito da variação da resistência R sobre a resposta no domínio do tempo no ponto P , g.d.l. $U_{32}(t)$.

Observa-se que o aumento da resistência do circuito aumenta o amortecimento da estrutura principal para a faixa de valores de resistência considerada.

Já a Figura 6.6 mostra as funções de resposta em frequência pontuais correspondentes ao ponto P com direção Y , g.d.l. $U_{32}(\omega)$, para diferentes valores de R e valor de L igual a $1,475 \times 10^3\text{ H}$.

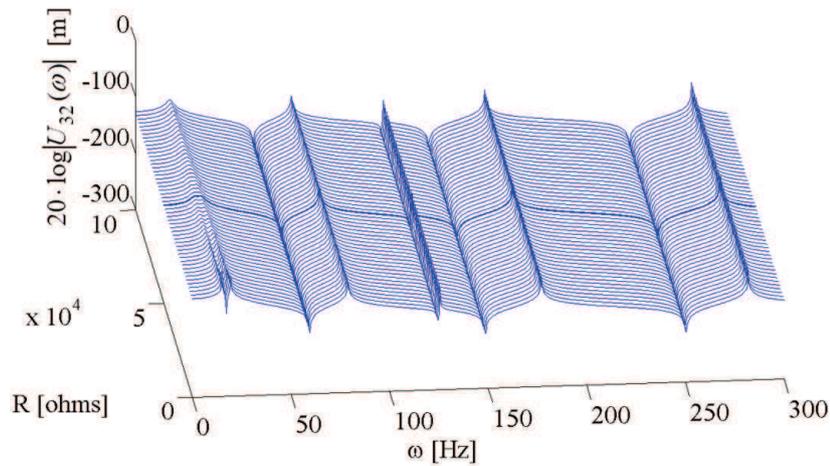


Figura 6.6 – Efeito da variação da resistência R para resposta em frequência no ponto P , *g.d.l.* $U_{32}(\omega)$.

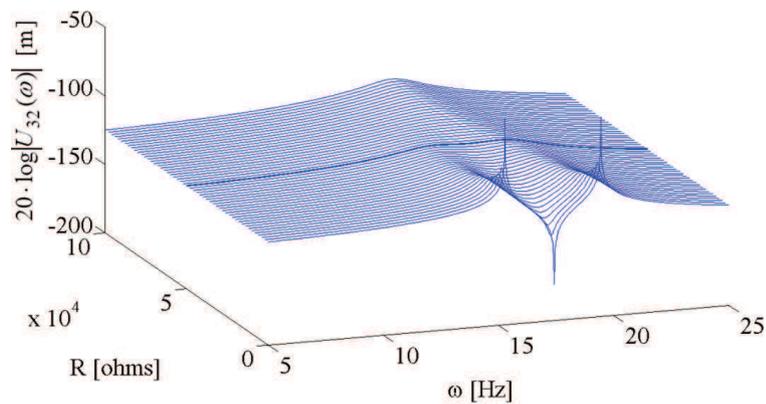


Figura 6.7 – Efeito da variação da resistência R para a banda de frequência de 5 a 25 Hz no ponto P , *g.d.l.* $U_{32}(\omega)$.

Conforme as respostas obtidas no domínio do tempo, as respostas em frequência também mostram que, com o aumento da resistência do circuito, o amortecimento da estrutura também é aumentado. Quando a resistência é excessivamente aumentada, o sistema perde o grau de liberdade elétrico, pois um circuito com resistência infinita é análogo a um circuito aberto. A Figura 6.7 mostra a resposta em frequência para a banda de 5 a 25 Hz , para melhor visualização do desaparecimento de um grau de liberdade elétrico, semelhante ao absorvedor dinâmico de vibrações (Fig. 5.8) com o aumento de amortecimento.

6.3.2 Efeito da variação da Indutância L

A Figura 6.8 mostra a resposta no tempo do deslocamento vertical correspondente ao ponto P com direção Y , g.d.l. $U_{32}(\omega)$, para diferentes valores de L e para uma entrada de grau de magnitude de 10 N no mesmo grau de liberdade e valor de R igual a $50,0 \times 10^3\text{ ohms}$.

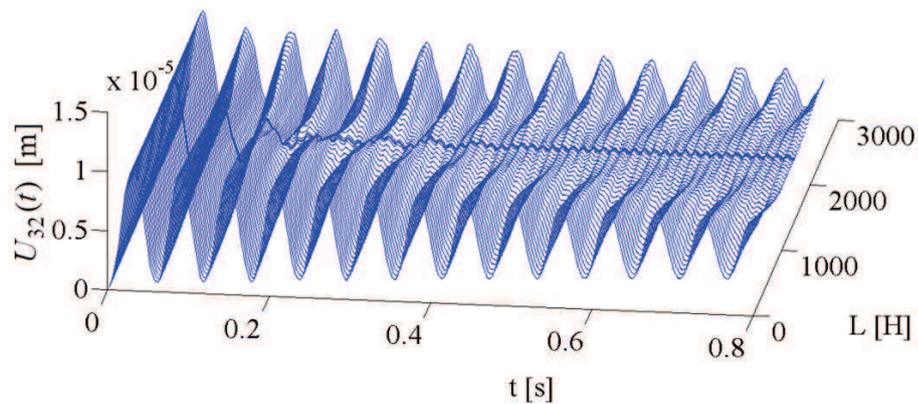


Figura 6.8 – Efeito da variação da resistência L sobre a resposta no domínio do tempo no ponto P , g.d.l. $U_{32}(t)$.

Constata-se que existe uma faixa de valores ótimos de indutância, ou seja, para valores fora desse intervalo, o sistema perde o amortecimento. Este resultado é confirmado pelo exame do gráfico da função de resposta associada ao ponto P com direção Y , g.d.l. $U_{32}(\omega)$, mostrado na Fig. 6.9.

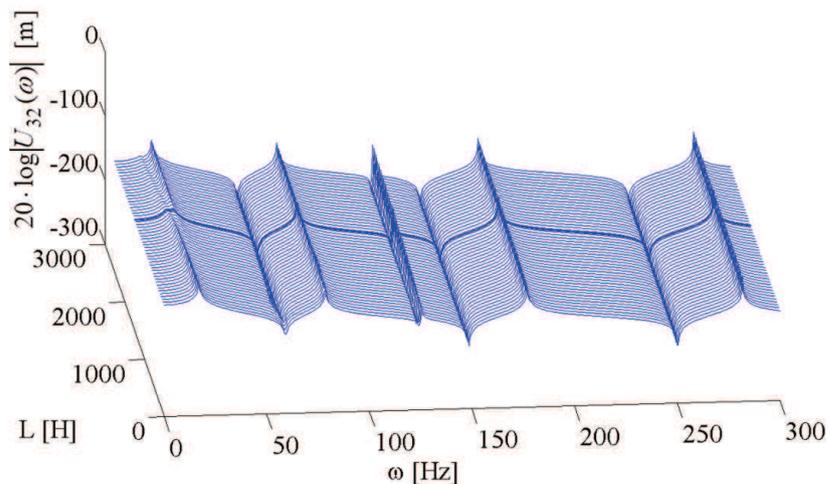


Figura 6.9 – Efeito da variação da indutância L para resposta no domínio da frequência no ponto P , g.d.l. $U_{32}(\omega)$.

A Figura 6.10 mostra a resposta no domínio da frequência para a banda de 5 a 25 Hz com variação da indutância do circuito e valor de R igual a $50,0 \times 10^3\text{ ohms}$.

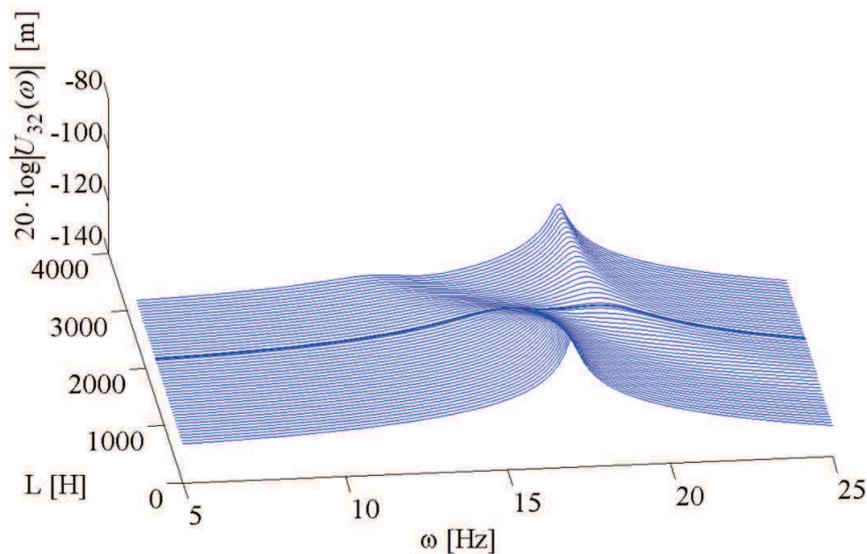


Figura 6.10 – Efeito da variação da indutância L para a banda de frequência de 5 a 25 Hz no ponto P , g.d.l. $U_{32}(\omega)$.

Percebe-se semelhança do circuito *shunt* com o absorvedor dinâmico de vibrações (Fig. 5.9), com uma diferença: sendo a capacitância fixa, a variação da indutância é que fornece a sintonização da frequência natural; já para o *ADV*, como o valor da razão de massas é definido previamente, a variação da rigidez é que sintoniza a frequência natural a ser amortecida.

6.4 Análise de confiabilidade

Nesta seção são apresentados os testes numéricos de avaliação de confiabilidade da treliça plana controlada passivamente por um atuador piezelétrico do tipo *stack* conectado a um circuito *shunt*, ilustrada na Figura 6.1. As propriedades físicas e geométricas da estrutura principal e do atuador são fornecidas na Tab. 6.1.

Tabela 6.1 – Propriedades dos elementos passivos e ativos da treliça.

Propriedades	Unidade	Símbolo	Aço	PZT-5H
Módulo de Young	$[N/m^2]$	E_b e Y_{33}^E	$2,1 \times 10^{11}$	$60,0 \times 10^9$
Densidade	$[kg/m^3]$	ρ , ρ_b e ρ_p	7860,0	7800,0
Área de seção	$[m^2]$	A , A_b e A_p	$25,0 \times 10^{-4}$	$27,5 \times 10^{-4}$
Coefficiente de deformação piezelétrica	$[C/N]$ ou $[m/V]$	d_{33}	-	$650,0 \times 10^{-12}$
Coefficiente de permissividade dielétrica	$[F/m]$	ϵ_{33}^T	-	$33,0 \times 10^{-9}$
Temperatura de Curie	$[^\circ C]$	T_c	-	250,0

As seguintes funções de estado limite são consideradas:

$$g_1(\mathbf{X}) = Y_{t_{\max}} - Y_t(\mathbf{X}), \quad (6.14a)$$

$$g_2(\mathbf{X}) = P_{t_{\max}} - P_t(\mathbf{X}), \quad (6.14b)$$

$$g_3(\mathbf{X}) = Y_{f_{\max}} - Y_f(\mathbf{X}). \quad (6.14c)$$

A função de estado limite $g_1(\mathbf{X})$ se refere a um requisito de projeto que exige que o valor de pico máximo da resposta da estrutura no ponto P a uma excitação degrau com magnitude de 10 N aplicada no mesmo ponto seja menor que $Y_{t_{\max}} = 9,94 \times 10^{-6}\text{ m}$.

Já a $g_2(\mathbf{X})$ se refere ao limite operacional do resistor elétrico presente no circuito *shunt*. Admitindo que a potência dissipada admissível do resistor seja de 1 W , se a potência dissipada ultrapassar esse valor, a resistência elétrica perde sua funcionalidade. Para isso, será calculada a probabilidade da potência ultrapassar o valor $P_{t_{\max}} = 0,850\text{ W}$.

A função $g_3(\mathbf{X})$ descreve outro requisito de projeto, referindo-se a um valor limitante $Y_{f_{\max}} = 3,1790 \times 10^{-6}\text{ m}$, correspondente a 10% de degradação da amplitude da resposta harmônica prevista para o circuito *shunt* otimizado.

A Tabela 6.2 fornece as características estatísticas da resistência R e indutância L , consideradas como variáveis incertas. Seus valores médios foram calculados de acordo com as Eq.(6.11), Eq.(6.12) e Eq.(6.13), e como a primeira equação trata de uma aproximação do valor do coeficiente de acoplamento eletromecânico, os valores de R e L foram ajustados para valores ótimos.

Tabela 6.2 – Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias para estrutura.

X_n	Variáveis	Distribuições	Médias (μ)	Desvios padrão (σ)
X_1	R [Ω]	Normal (<i>Gaussiana</i>)	$50,0 \times 10^3$	$5,0 \times 10^3$ ($0,10\mu$)
X_2	L [H]	Normal (<i>Gaussiana</i>)	$1,475 \times 10^3$	$1,475 \times 10^2$ ($0,10\mu$)

A Figura 6.11 permite comparar as respostas do modelo a uma excitação degrau unitário com o circuito *shunt* aberto e o circuito *shunt* fechado com as variáveis do modelo médio. A Figura 6.12 mostra a carga elétrica $Q(t)$ em função do tempo. A derivada dessa resposta fornece a corrente elétrica $I(t)$. A partir do valor da corrente, é possível calcular a potência dissipada no resistor pela relação $P = RI^2$.

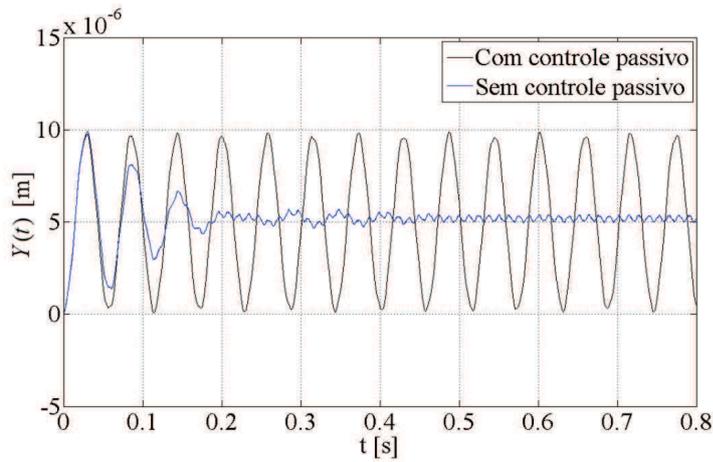


Figura 6.11 – Resposta ao degrau unitário considerando modelo médio.

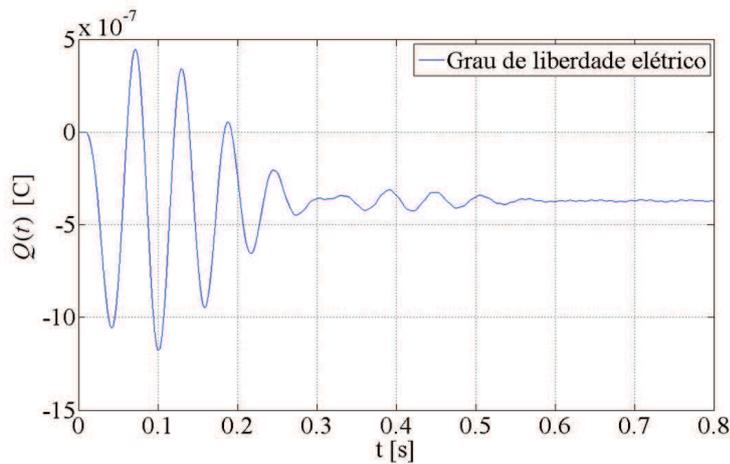


Figura 6.12 – Resposta ao degrau unitário para grau de liberdade elétrico considerando modelo médio.

A Figura 6.13 mostra as respostas no domínio da frequência para o movimento do ponto P e para a carga elétrica gerada, ficando evidenciada a semelhança do comportamento com o comportamento de um absorvedor dinâmico de vibrações.

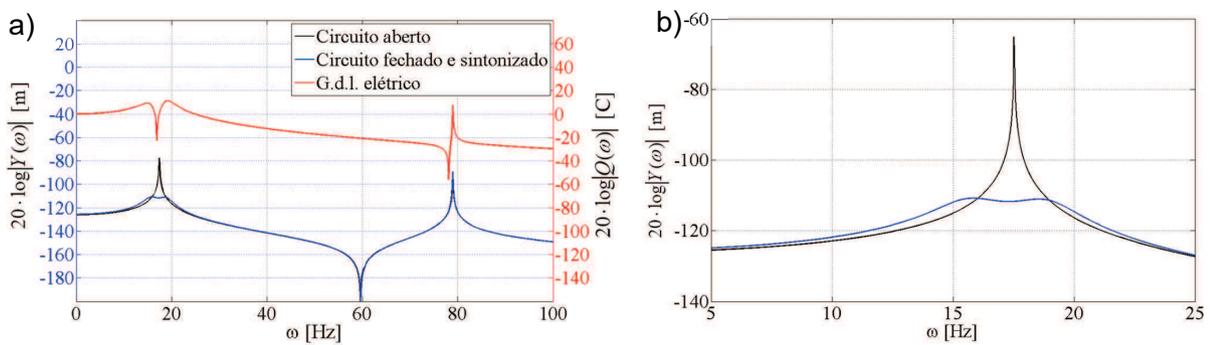


Figura 6.13 – Respostas em frequência associadas ao movimento do ponto P e à corrente elétrica, para o modelo médio; a) banda de 0 a 100 Hz e b) detalhamento na banda de 5 a 25 Hz.

As Figuras 6.14 a 6.16 mostram as funções de estado limite (*LSF*), domínios de falha e de sobrevivência, e distribuições conjuntas das variáveis aleatórias. Nota-se que cada *LSF* apresenta uma situação diferente: a primeira apresenta uma função quase linear, a segunda mostra um domínio de falha cercado por um domínio de segurança e o inverso ocorre para a terceira função de estado limite.

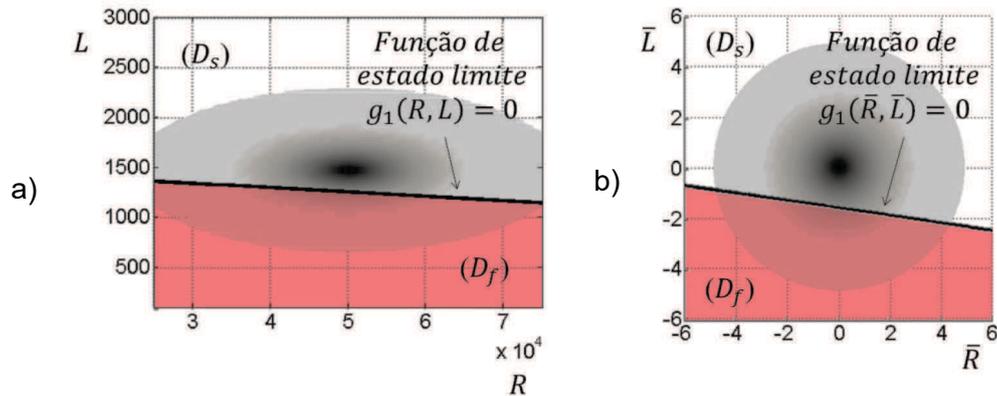


Figura 6.14 – Função de estado limite $g_1(X)$ e distribuições de probabilidade das variáveis: a) sistemas de coordenadas não reduzidas e b) sistema de coordenadas reduzidas.

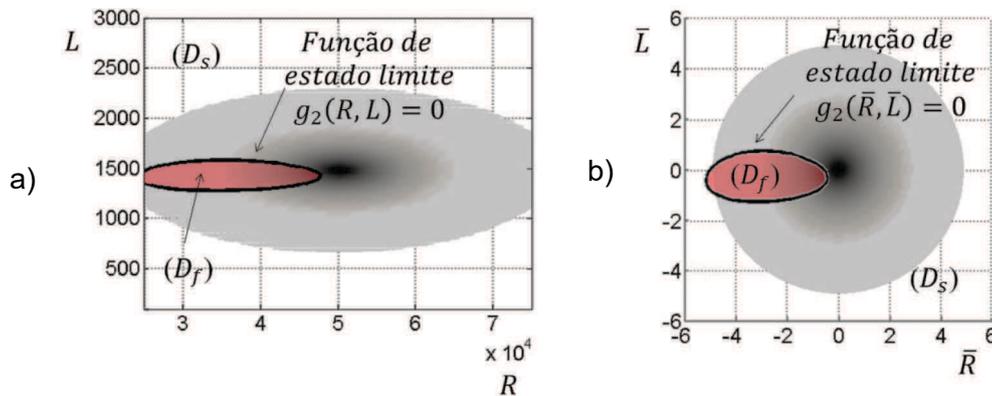


Figura 6.15 – Função de estado limite $g_2(X)$ e distribuições de probabilidade das variáveis: a) sistemas de coordenadas não reduzidas e b) sistema de coordenadas reduzidas.

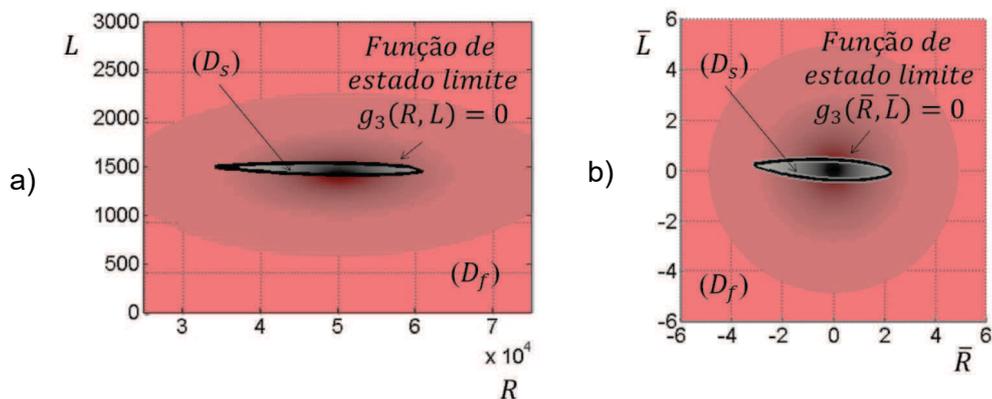


Figura 6.16 – Função de estado limite $g_3(X)$ e distribuições de probabilidade das variáveis: a) sistemas de coordenadas não reduzidas e b) sistema de coordenadas reduzidas.

A Tabela 6.3 e as Figuras 6.17 a 6.19 mostram os resultados encontrados pelos métodos de confiabilidade utilizados e a convergência das Simulações de Monte Carlo para as três funções de estado limite analisadas utilizando o **Computador 1** (com processador Intel Centrino Core Duo P3550 de frequência de 2,0 GHz e 3,0 GB de memória RAM).

Tabela 6.3 – Resultados obtidos para os métodos *FORM*, *SORM* e *MCS-LHS* com o uso do **Computador 1**.

Função de Estado Limite	Método	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido	Erro relativo [%]*
$g_1(\mathbf{X})$	<i>FORM</i>	-	1,6731	4,72	95,28	0h 00min 14s	1,85
	<i>SORM</i>	-	3,7930	$7,44 \times 10^{-5}$	99,99	0h 00min 49s	6,88
	<i>MCS-LHS</i>	1.000	-	5,70	94,30	0h 40min 41	0,80
		6.000	-	6,52	93,48	2h 30min 30s	0,07
		20.000	-	6,44	93,55	8h 20min 32s	-
$g_2(\mathbf{X})$	<i>FORM</i>	-	0,4458	32,79	67,21	0h 00min 30s	22,06
	<i>SORM</i>	-	1,6178	5,29	94,71	0h 01min 30s	9,83
	<i>MCS-LHS</i>	1.000	-	14,00	86,00	1h 57min 21s	0,27
		6.000	-	13,93	86,07	10h 42min 32s	0,19
		20.000	-	13,77	86,23	30h 10min 20s	-
$g_3(\mathbf{X})$	<i>FORM</i>	-	0,3956	34,62	65,38	0h 00min 02s	136,30
	<i>SORM</i>	NC	NC	NC	NC	NC	NC
	<i>MCS-LHS</i>	1.000	-	75,10	24,90	0h 08min 34s	9,88
		6.000	-	72,55	27,45	0h 58min 26s	0,66
		20.000	-	72,38	27,63	2h 50min 13s	-

*Calculado em relação à confiabilidade com base no resultado da MCS para 20.000 amostras.

NC corresponde à não convergência do método.

A Tabela 6.3 mostra que o método de confiabilidade de primeira ordem converge para o valor encontrado pela Simulação de Monte Carlo somente para a primeira função de estado limite. Já o método de confiabilidade de segunda ordem, embora tenha alcançado a convergência para as funções de estado limite 1 e 2, o valor encontrado não está próximo do valor da MCS. Para a $g_1(\mathbf{X})$, isso é explicado pela baixa curvatura. Considerando a $g_2(\mathbf{X})$, o *SORM* se aproxima melhor do valor encontrado pela MCS que o *FORM*. Já para a $g_3(\mathbf{X})$, um valor complexo (j) para a curvatura impediu o cálculo da probabilidade de falha.

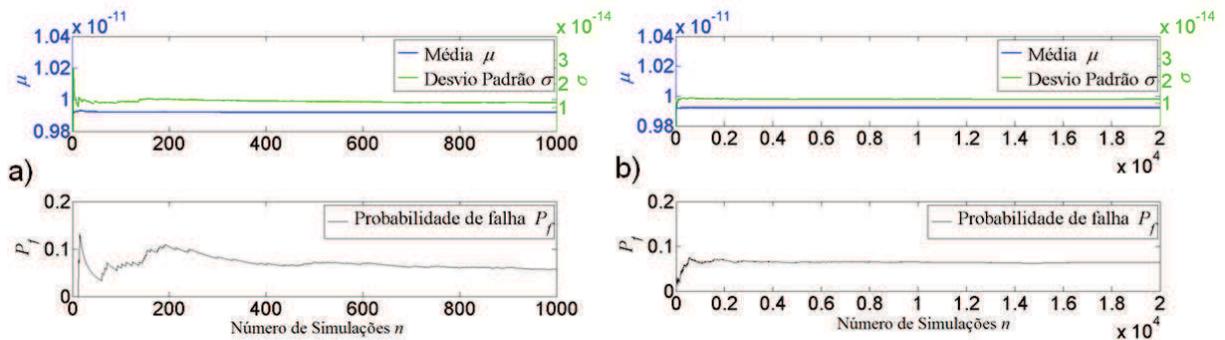


Figura 6.17 – Convergência da Simulação de Monte Carlo para $g_1(\mathbf{X})$ a) com 1.000 amostras e b) com 20.000 amostras.

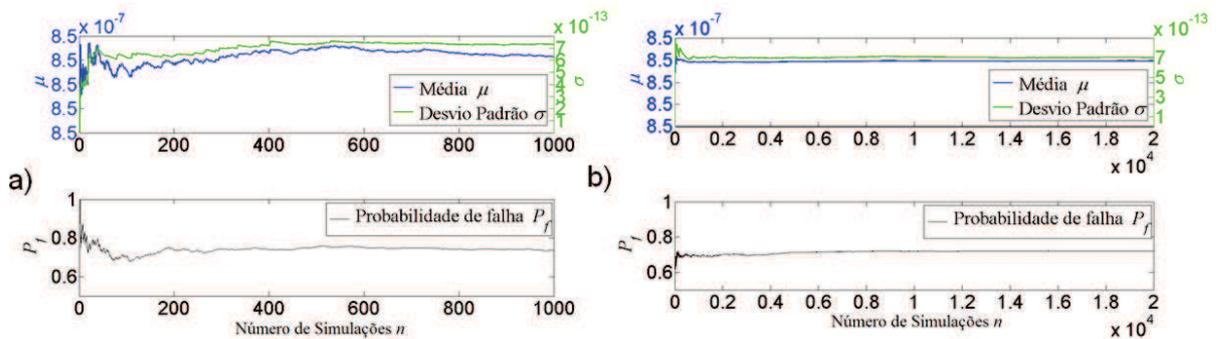


Figura 6.18 – Convergência da simulação de Monte Carlo para $g_2(\mathbf{X})$ a) com 1.000 amostras e b) com 20.000 amostras.

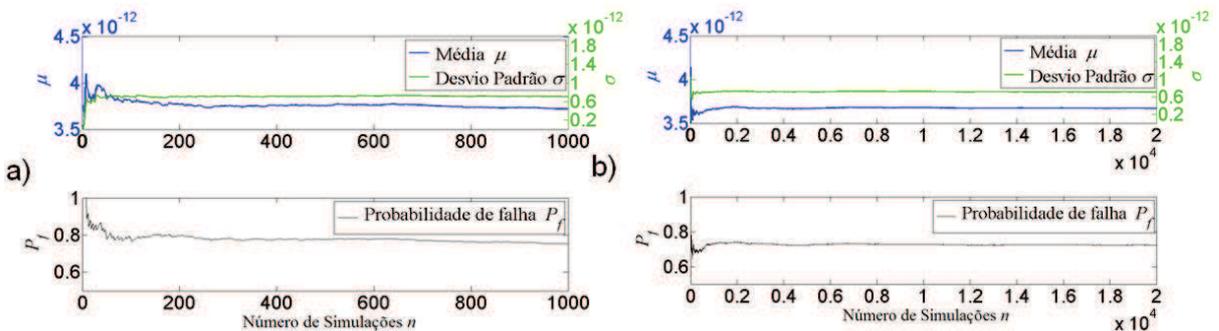


Figura 6.19 – Convergência da simulação de Monte Carlo para $g_3(\mathbf{X})$ a) com 1.000 amostras e b) com 20.000 amostras.

Por meio das Figuras 6.17 a 6.19 constata-se que 1.000 amostras são insuficientes para a convergência via Simulação de Monte Carlo. Com os gráficos de 20.000 amostras, observa-se que a partir de 8.000 amostras já é possível atingir convergência satisfatória.

As Figuras 6.20 a 6.22 mostram os índices de confiabilidade encontrados pelo método de confiabilidade de primeira ordem, os pontos de projeto, funções de estado limite para domínios de falha e segurança no sistema de coordenadas não reduzidas e no sistema de coordenadas reduzidas para verificação dos resultados.

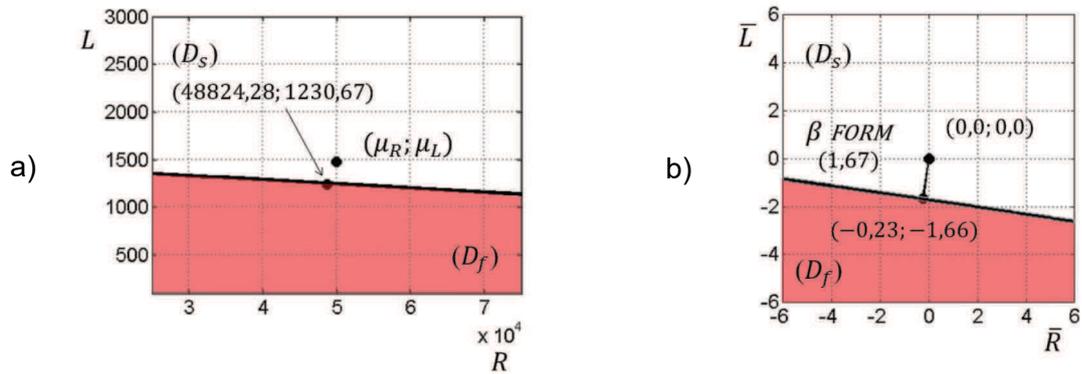


Figura 6.20 – Gráficos do ponto de projeto no a) $g_1(X)$ sistema de coordenadas não reduzidas e b) $g_1(\bar{X})$ reduzidas, com indicação do índice de confiabilidade β .

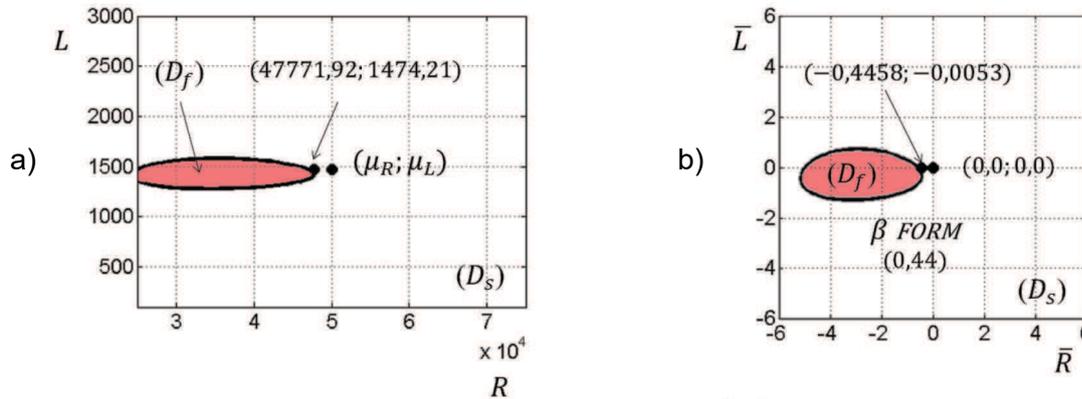


Figura 6.21 – Gráficos do ponto de projeto no a) $g_2(X)$ sistema de coordenadas não reduzidas e b) $g_2(\bar{X})$ reduzidas, com indicação do índice de confiabilidade β .

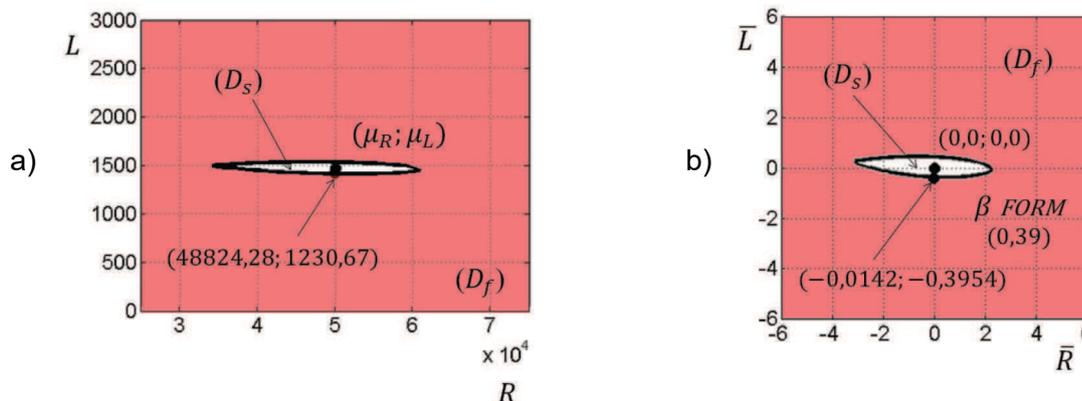


Figura 6.22 – Gráficos do ponto de projeto no a) $g_3(X)$ sistemas de coordenadas não reduzidas e b) $g_3(\bar{X})$ reduzidas, com indicação do índice de confiabilidade β .

A Tabela 6.4 apresenta os resultados dos métodos de confiabilidade para $g_1(X)$ utilizando o **Computador 2** (com processador Intel Xeon W3565 com frequência de 3,2 GHz e 12

Gb de memória RAM) visando a comparar o custo computacional de dois computadores distintos. Constata-se que o tempo consumido para a execução das análises de confiabilidade utilizando o **Computador 2** é aproximadamente um quarto do tempo consumido com o uso do **Computador 1**.

Tabela 6.4 – Resultados apresentados para os métodos *FORM*, *SORM* e *MCS-LHS* para **Computador 2**.

Função de Estado Limite	Método	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido	Erro relativo [%]*
$g_1(X)$	<i>FORM</i>	-	1,6731	4,72	95,28	0h 00min 08s	2,19
	<i>SORM</i>	-	3,7930	$7,44 \times 10^{-5}$	99,99	0h 00min 26s	7,24
	<i>MCS-LHS</i>	1.000	0,0000	6,90	93,10	0h 06min 35s	0,15
		6.000	-	6,48	93,52	0h 39min 11s	0,30
		20.000	-	93,24	93,24	2h 11min 40s	-

*Calculado em relação à confiabilidade com base no resultado da *MCS* para 20.000 amostras.

6.5 Conclusões

Os resultados encontrados mostram que, para as condições aqui apresentadas, os métodos de confiabilidade aproximados são eficientes somente para casos nos quais as funções de estado limite são lineares ou com leves curvaturas.

Foi encontrado mais um tipo de função de estado limite na qual o domínio de falha é cercado pelo domínio de segurança. Isso significa que existe uma região de valores máximos que coloca o sistema em um estado de falha, diferentemente do caso inverso, encontrado no Capítulo 5, no qual o domínio seguro é cercado pelo domínio de falha. Este tipo de *LSF*, assim como a situação inversa, não pode ter sua confiabilidade calculada pelos métodos aproximados devido ao fato de os domínios de falha serem totalmente atípicos. Nestes casos se torna necessário o uso da Simulação de Monte Carlo, que é robusta para esse tipo de situação.

Outra importante observação é que os parâmetros resistência e indutância para um circuito *shunt* ressonante são tão sensíveis e de difícil sintonização quanto os parâmetros de um absorvedor dinâmico de vibrações, tratados no Capítulo 5. Isso é indicado pelo pequeno domínio de segurança apresentado na função de estado limite três.

Página intencionalmente deixada em branco.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES GERAIS

A partir do exposto nos capítulos anteriores, várias conclusões podem ser destacadas. Primeiramente, uma avaliação dos métodos de confiabilidade estudados pode ser feita.

Sem dúvida, a Simulação de Monte Carlo (*MCS*) é o método mais preciso e de maior facilidade de implementação. Além disso, se o modelo usado para representar o fenômeno analisado for fiel às suas características mais sensíveis, e as distribuições de probabilidade representarem adequadamente a aleatoriedade das variáveis incertas, pode-se dizer que, após a convergência, obtêm-se soluções exatas. Porém, situações mais complexas podem requerer modelos com elevados números de graus de liberdade, o que exige um alto custo computacional. Nesse caso, torna-se viável o uso de métodos aproximados para estimação da probabilidade de falha como *FORM* e *SORM*. Há que se considerar, contudo, que com a evolução extremamente rápida da informática, pode-se prever que microcomputadores futuros sejam capazes de calcular modelos com alta complexidade, em tempos razoáveis.

É possível concluir que, no momento atual, cada método de confiabilidade tem suas vantagens e desvantagens que devem ser analisadas diante do tipo do problema e dos recursos disponíveis. Assim, cabe ao projetista selecionar o método mais adequado.

O Capítulo 4, que esclarece a aplicação de confiabilidade no controle ativo de estruturas, mais especificamente, de uma estrutura inteligente dotada de atuadores do tipo *stack* de pastilhas piezelétricas, apresenta aspectos importantes que devem ser ressaltados.

Esse sistema exemplifica funções de estado limite implícitas de nível leve a moderado, em termos de complexidade, e que executam uma análise dinâmica no domínio do tempo de um modelo de elementos finitos. Ainda, nesse modelo, há a presença de elementos finitos passivos e ativos para seu controle. Além disso, o sistema é representado no espaço de estados no qual é aplicado o controle ótimo por *LQR*. No espaço de estados há uma duplicação dos graus de liberdade. As equações são integradas numericamente e a resposta do sistema no tempo é analisada de acordo com requisitos de projeto de controladores. Resumidamente, uma característica dessa resposta no tempo é extraída para a obtenção da função de estado

limite. Esse é um perfeito exemplo para mostrar a vantagem de um método de confiabilidade *FORM* ou *SORM* em relação à Simulação de Monte Carlo. Consta-se que as Simulações de Monte Carlo para essa *LSF* apresentam considerável custo computacional para um baixo número de amostras, enquanto os métodos *FORM* e *SORM* estimaram, com baixo erro relativo, a probabilidade de falha para duas funções de estado limite. Mesmo com um computador de última geração destinado para simulações, o ganho computacional para a *MCS* não foi tão elevado quando comparado aos métodos de confiabilidade de primeira e segunda ordens.

As propriedades piezelétricas mostraram alta sensibilidade quanto ao funcionamento ideal, ou seja, respeitando os requisitos de projeto de controle analisado. Qualquer pequeno aumento no desvio padrão das variáveis aleatórias poderia colocar o sistema em um estado de falha. Além disso, o controle ativo por *LQR* por si só já é um método de controle robusto, ou seja, mesmo considerando incertezas nos modelos, a técnica de controle ótimo sobressai diante de pequenas aleatoriedades. Várias outras abordagens interessantes podem ser aplicadas a esse tipo de estrutura.

O Capítulo 5 relata interessantes resultados obtidos para o controle passivo utilizando absorvedores dinâmicos de vibrações, um invento de grande importância tecnológica tratando-se de um contexto de análise dinâmica e redução de vibrações. Apesar do modelo estudado não envolver um modelo de elementos finitos completo e sim a teoria modal para esse tipo de estrutura, o que acarreta uma drástica redução de esforço computacional, a sintonização desse dispositivo requer alta acurácia para que o mesmo funcione de maneira adequada.

Através das formas modais adquiridas por meio do autovetores da equação de movimento da treliça plana, e também de suas frequências naturais, a função resposta em frequência é utilizada para elaborar a função de estado limite.

Averigua-se que o custo computacional apresentado é baixo para esse caso, sendo viável a Simulação de Monte Carlo. Nota-se que devido à sintonização ótima para o *ADV*, restringe-se ainda mais o domínio de segurança que agora é completamente cercado pelo domínio de falha. Nesse caso, os métodos de confiabilidade de primeira e segunda ordens são totalmente ineficazes, sendo necessária a *MCS*. Análises de confiabilidade mais detalhadas considerando outras variáveis aleatórias podem ser executadas, assim como para as estruturas tratadas anteriormente.

O Capítulo 6 detalha a análise de confiabilidade de uma treliça plana controlada passivamente por atuadores piezelétricos do tipo *stack* em circuito shunt.

Investigando-se as variáveis resistência e indutância do circuito ressonante considerado, verifica-se que, assim como o *ADV*, esse dispositivo é muito sensível aos seus parâmetros de sintonização, ficando clara a aleatoriedade dessas variáveis e mostrando que valores ótimos resultam em funções de estado limite peculiares com envolvimento de domínios.

Registra-se a descoberta da função de estado limite na qual o domínio de falha também é cercado pelo domínio de segurança. Apesar de uma semelhança com funções de estado limite não lineares, o método *SORM*, embora apresente maior proximidade com o resultado em relação ao método *FORM*, não consegue aproximar satisfatoriamente a confiabilidade desse sistema. Dessa maneira, torna-se necessário o uso da *MCS* mesmo para modelos de alta complexidade e, conseqüentemente, alto custo computacional.

É possível notar que, para os quatro tipos de estruturas analisadas, vários tipos de funções de estado limite como lineares, não lineares e envolvendo domínios de falha que cercam domínios de segurança e o caso inverso, domínios de segurança que cercam domínios de falha, foram analisados. Para funções lineares ou não lineares com baixa curvatura, os métodos de confiabilidade *FORM* e *SORM* foram capazes de aproximar bem os índices de segurança com baixo custo computacional. Já as funções de estado limite envolvendo domínios que envolvem outros domínios, os métodos de confiabilidade de primeira e segunda ordens são totalmente ineficazes exigindo o uso da *MCS* apesar do alto custo computacional requerido. Não há trabalhos na literatura que abordam o último caso, sendo a Simulação de Monte Carlo a técnica mais aconselhável mesmo quando se trata de um modelo de elevada complexidade e alto custo computacional. Esse é um problema a ser resolvido com a rápida evolução tecnológica ou com a genialidade do ser humano.

7.1 Perspectivas

A seguir, são sugeridas algumas abordagens para o prosseguimento desta pesquisa:

- otimização e projeto baseados em confiabilidade;
- aplicação dos métodos de confiabilidade usando superfícies de resposta ou metamodelos para os modelos de alta complexidade.

No caso da otimização de projetos baseada em confiabilidade, ou de projetos baseados em confiabilidade (*RBDO*, *Reliability-based design optimization* ou somente *RBD*, *Reliability-based design*), requisitos de projeto podem ser analisados com margem de segurança, considerando curvas de equiprobabilidade e curvas de relaxação da função de estado limite.

Já na utilização de metamodelos, o objetivo principal é a redução do custo computacional envolvido para sistemas de alta complexidade.

Página intencionalmente deixada em branco.

APÊNDICE

TESTES DE ALGORITMOS E COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Nesta seção, são utilizados os métodos de confiabilidade *FORM* e *SORM*, analíticos e numéricos, que utilizam funções de estado limite explícitas e implícitas, respectivamente. Registra-se que todas as equações utilizadas nos testes são explícitas, mas são derivadas analiticamente e numericamente, para efeito de comparação.

Como uma das maiores restrições dos métodos de confiabilidade, quando aplicados a estruturas complexas, é o tipicamente elevado esforço computacional, há interesse de se compararem os tempos de processamento envolvidos nos testes, mesmo para aplicações a exemplos simples. A Tabela A.1 mostra os recursos computacionais utilizados.

Tabela A.1 – Equipamentos computacionais disponíveis para a realização do estudo.

Item	Descrição
Computador 1	Processador: Intel Centrino Core Duo P7350 (2 núcleos de 2,0 GHz); Memória instalada (RAM): 3,0 GB; Disco rígido (HD): 250,0 GB.
Computador 2	Processador: Intel Xeon W3565 (8 núcleos de 3,2 GHz); Memória instalada (RAM): 12,0 GB; Disco rígido (HD): 500,0 GB.

Para os testes, são consideradas duas aplicações extraídas de (HALDAR; MAHADEVAN, 2000), uma de (ANG; TANG, 1984) e uma de (MELCHERS, 1987).

Algumas observações são feitas ao final de cada teste e, por fim, é mostrada uma comparação de todos os resultados obtidos.

Teste 1 – Momento resistente em seção de viga de aço

O **Teste 1** mostra um exemplo proposto por Haldar e Mahadevan (2000), formulado originalmente no sistema inglês de unidades.

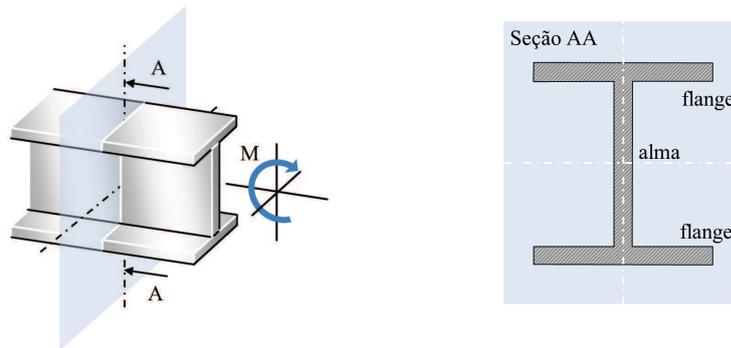


Figura A.1 – Representação da viga *W16x31* usada no **Teste 1**.

Uma seção de viga *W16x31* em aço A36 deve suportar um momento fletor determinístico de 1.140 kip-in . As duas variáveis aleatórias são a tensão nominal de escoamento F_y do aço e o módulo de resistência da seção transversal Z_x , ambas definidas na Tabela A.2.

São consideradas quatro combinações de distribuição normal e lognormal para essas variáveis, na ordem em que são definidas: (N, N); (LN, N); (N, LN); (LN, LN) e a seguinte função de estado limite:

$$g(\mathbf{X}) = g(F_y, Z_x) = F_y Z_x - 1.140 \quad . \quad (\text{A.1})$$

Pode-se observar que a Eq.(A.1) se assemelha à Eq.(2.13) e os valores da resistência R e solicitação S são $F_y Z_x$ e 1.140 , respectivamente.

Tabela A.2 – Propriedades da viga *W16x31* em aço A36.

Propriedade	Unidade	Símbolo
Momento fletor	$[\text{kip} - \text{in}]$	M
Tensão nominal de escoamento	$[\text{ksi}]$	F_y
Módulo de resistência da seção	$[\text{in}^3]$	Z_x

A Figura A.2 mostra o gráfico da função de estado limite supracitada, na qual o ponto de médias é representado pelos valores da Tab. A.3.

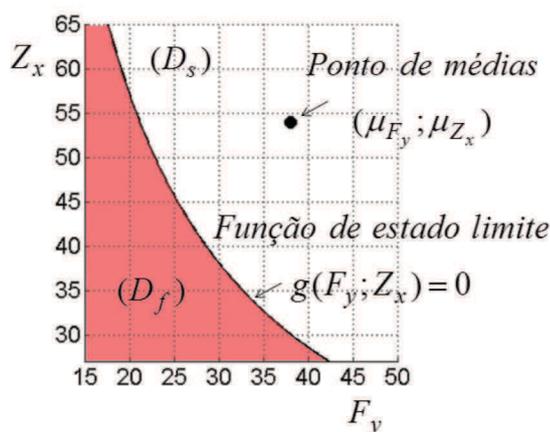


Figura A.2 – Gráfico da função de estado limite para o **Teste 1** e ponto de médias.

As variáveis são admitidas estatisticamente independentes e suas médias, desvios padrões e coeficientes de variação são apresentados na Tab. A.3.

Tabela A.3 – Variáveis aleatórias, suas distribuições e medidas, para o **Teste 1**.

X_n	Variáveis	Distribuições	Média (μ)	Desvio padrão (σ)	Coefficiente de variação (δ)
X_1	F_y [ksi]	Normal (Gaussiana)	38,0	3,8 (0,01 μ)	0,10
X_2	Z_x [in ³]	Normal (Gaussiana)	54,0	2,7 (0,05 μ)	0,05

Para efeito de ilustração, a Figura A.3 mostra a função de estado limite juntamente com as distribuições de probabilidade combinadas no sistema de coordenadas não reduzidas e no sistema de coordenadas reduzidas.

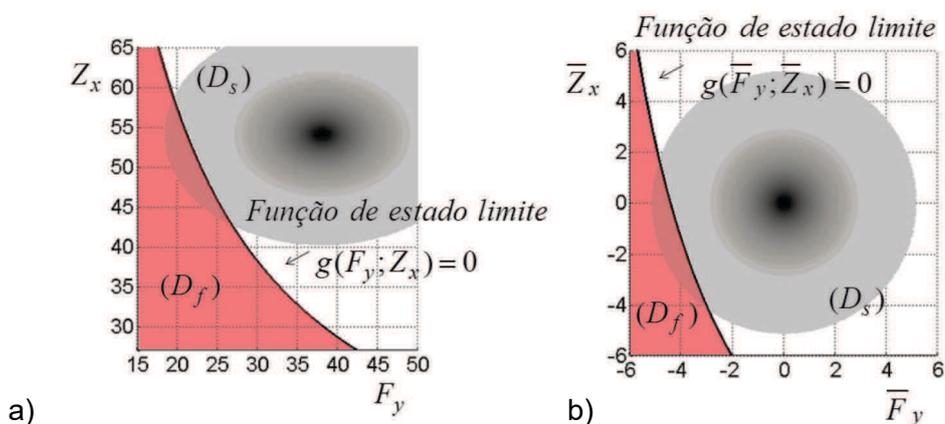


Figura A.3 – Gráfico da função de estado limite e distribuições normais (N, N) do **Teste 1** no sistemas de coordenadas a) não reduzidas e b) reduzidas.

Aplicando os métodos *FORM* e *SORM* analíticos e numéricos para o **Teste 1**, têm-se os resultados organizados na Tab. A.4, juntamente aos extraídos de (HALDAR; MAHADAVAN, 2000).

Os métodos analíticos utilizam derivadas analíticas ou teóricas, e os métodos numéricos necessitam de derivadas numéricas para a aquisição dos resultados. Por exemplo, para uma função explícita, é possível derivar tanto analiticamente quanto numericamente. Já para uma função implícita, somente derivadas numéricas podem ser aplicadas; e no presente estudo, estas são aproximadas por diferenças finitas. Na Tabela A.4 para se expor a eficiência dos métodos numéricos, são apresentados resultados dos dois métodos para funções explícitas.

A Tabela A.4 mostra que os resultados encontrados tanto para os métodos analíticos como para os numéricos estão bem próximos dos valores encontrados por Haldar e Mahadevan (2000).

Tabela A.4 – Resultados de *FORM* e *SORM* para **Teste 1** e **Computador 1**.

Método	DP	Número de simulações n ou chamada de função	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido (segundo)	Erro relativo [%]*
<i>FORM</i> (Haldar)	(N, N)	-	4,261	$1,017571 \times 10^{-3}$	99,998982	-	0,2866
	(LN, N)	-	5,151	$1,295506 \times 10^{-5}$	99,999987	-	1,3731
	(N, LN)	-	4,266	$9,950439 \times 10^{-4}$	99,999005	-	0,0992
	(LN, LN)	-	5,213	$9,290545 \times 10^{-6}$	99,999991	-	0,1707
<i>SORM</i> (Haldar)	(N, N)	-	4,246	$1,088103 \times 10^{-3}$	99,998912	-	0,0665
	(LN, N)	-	5,139	$1,381022 \times 10^{-5}$	99,999986	-	1,1369
	(N, LN)	-	4,259	$1,026717 \times 10^{-3}$	99,998973	-	0,0650
	(LN, LN)	-	5,211	$9,391273 \times 10^{-6}$	99,999991	-	0,2090
<i>FORM</i> analítico	(N, N)	5	4,26135398	$1,015960 \times 10^{-3}$	99,998984	0h 00min 01s	0,2949
	(LN, N)	5	5,15078624	$1,296983 \times 10^{-5}$	99,999987	0h 00min 01s	1,3689
	(N, LN)	5	4,26600592	$9,950175 \times 10^{-4}$	99,999005	0h 00min 01s	0,0994
	(LN, LN)	5	5,21267665	$9,306759 \times 10^{-6}$	99,999991	0h 00min 01s	0,1769
<i>SORM</i> analítico	(N, N)	5	4,24636617	$1,086327 \times 10^{-3}$	99,998913	0h 00min 01s	0,0578
	(LN, N)	5	5,12728102	$1,469783 \times 10^{-5}$	99,999985	0h 00min 01s	0,9063
	(N, LN)	5	4,25284798	$1,055344 \times 10^{-3}$	99,998945	0h 00min 01s	0,2094
	(LN, LN)	5	5,19350300	$1,031868 \times 10^{-5}$	99,999990	0h 00min 01s	0,5441
<i>FORM</i> nu- mérico	(N, N)	5	4,26135398	$1,015960 \times 10^{-3}$	99,998984	0h 00min 00s ($1,196966 \times 10^{-1}$)	0,2949
	(LN, N)	5	5,15078624	$1,296983 \times 10^{-5}$	99,999987	0h 00min 00s ($1,229074 \times 10^{-1}$)	1,3689
	(N, LN)	5	4,26600592	$9,950175 \times 10^{-4}$	99,999005	0h 00min 00s ($1,241349 \times 10^{-1}$)	0,0994
	(LN, LN)	5	5,21267665	$9,306759 \times 10^{-6}$	99,999991	0h 00min 00s ($1,259282 \times 10^{-1}$)	0,1769
<i>SORM</i> nu- mérico	(N, N)	5	4,24635592	$1,086377 \times 10^{-3}$	99,998913	0h 00min 01s	0,0581
	(LN, N)	5	5,12728826	$1,469726 \times 10^{-5}$	99,999985	0h 00min 01s	0,9065
	(N, LN)	5	4,25285767	$1,055299 \times 10^{-3}$	99,998945	0h 00min 01s	0,2092
	(LN, LN)	5	5,19350265	$1,031870 \times 10^{-5}$	99,999990	0h 00min 01s	0,5441

*Baseado nos valores de β obtidos para a MCS com maior número de simulações da Tab. A.6.

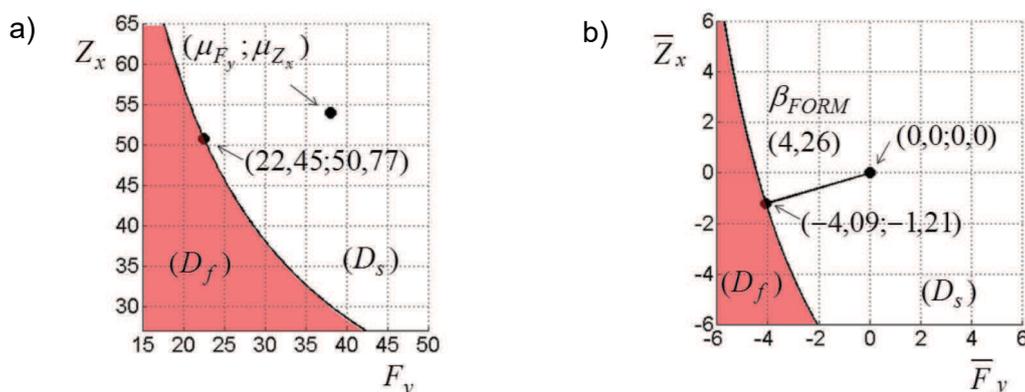


Figura A.4 – Gráficos do ponto de falha mais provável do **Teste 1**.

A Tabela A.5 mostra os resultados encontrados com aplicação da Simulação de Monte Carlo para o **Teste 1** utilizando o **Computador 1**.

Tabela A.5 – Resultados da MCS para **Teste 1** e **Computador 1**.

Método	DP	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido	Erro relativo [%]*
MCS	(N, N)	$1,0 \times 10^5$	4,01281081	$3,000000 \times 10^{-3}$	$99,997000 \times 10^0$	0h 01min 55s	5,5548
	(LN, N)	$1,0 \times 10^5$	∞	$0,000000 \times 10^0$	$1,000000 \times 10^2$	0h 01min 49s	-
	(N, LN)	$1,0 \times 10^5$	4,26489079	$1,000000 \times 10^{-3}$	$99,999000 \times 10^0$	0h 02min 01s	0,0732
	(LN, LN)	$1,0 \times 10^5$	∞	$0,000000 \times 10^0$	$1,000000 \times 10^2$	0h 01min 55s	-
	(N, N)	$1,0 \times 10^6$	4,31445102	$8,000000 \times 10^{-4}$	$99,999200 \times 10^0$	2h 41min 57s	1,5446
	(LN, N)	$1,0 \times 10^6$	∞	$0,000000 \times 10^0$	$1,000000 \times 10^2$	2h 56min 47s	-
	(N, LN)	$1,0 \times 10^6$	4,31445102	$8,000000 \times 10^{-4}$	$99,999200 \times 10^0$	3h 04min 38s	1,2361
	(LN, LN)	$1,0 \times 10^6$	∞	$0,000000 \times 10^0$	$1,000000 \times 10^2$	2h 32min 43s	-
	(N, N)	$2,0 \times 10^6$	4,25398433	$10,500000 \times 10^{-4}$	$99,998950 \times 10^0$	10h 29min 34s	0,1215
	(LN, N)	$2,0 \times 10^6$	∞	$0,000000 \times 10^0$	$1,000000 \times 10^2$	11h 28min 31s	-
	(N, LN)	$2,0 \times 10^6$	4,27632944	$9,500000 \times 10^{-4}$	$99,999050 \times 10^0$	12h 55min 26s	0,3416
	(LN, LN)	$2,0 \times 10^6$	∞	$0,000000 \times 10^0$	$1,000000 \times 10^2$	9h 56min 51s	-
	(N, N)	$3,0 \times 10^6$	4,26489079	$1,000000 \times 10^{-3}$	$99,999000 \times 10^0$	23h 42min 53s	0,3782
	(LN, N)	$3,0 \times 10^6$	∞	$0,000000 \times 10^0$	$1,000000 \times 10^2$	23h 29min 34s	-
	(N, LN)	$3,0 \times 10^6$	4,26489079	$1,000000 \times 10^{-3}$	$99,999000 \times 10^0$	24h 44min 58s	0,0732
	(LN, LN)	$3,0 \times 10^6$	∞	$0,000000 \times 10^0$	$1,000000 \times 10^2$	23h 02min 13s	-

*Baseado nos valores de β obtidos para a MCS com maior número de simulações da Tab. A.6.

É possível notar os elevados tempos de processamento da MCS em situações onde não há convergência: (LN, N) e (LN, LN), o que decorre da elevada confiabilidade e, consequentemente, da baixa probabilidade de falha do teste considerado.

A Figura A.5 mostra o gráfico de convergência da Simulação de Monte Carlo para as combinações (N, N) e (N, LN), revelando a não ocorrência de estabilização para o máximo número de simulações empregado.

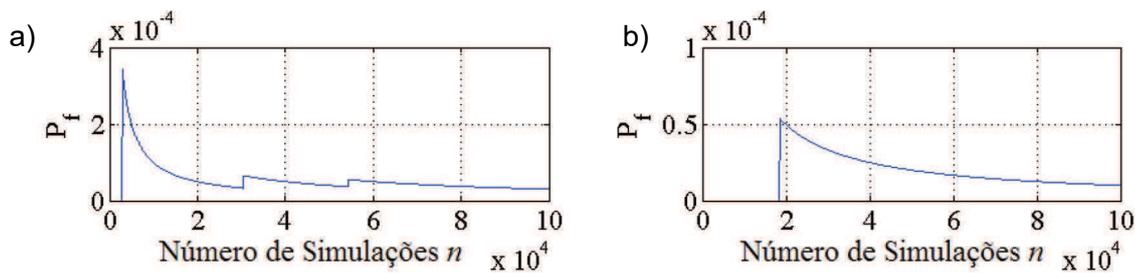


Figura A.5 – Convergência da MCS para **Teste 1, Computador 1** e combinações: a) (N, N) e b) (N, LN).

Com o uso do **Computador 2** foi possível aumentar significativamente o número de simulações, sem aumento impeditivo do tempo de processamento. A Tabela A.6 apresenta resultados obtidos para o número de simulações variando de 6.000.000 a 192.000.000, cuja convergência dos resultados apresentados é ilustrada pela Fig. A.6.

Tabela A.6 – Resultados da Simulação de Monte Carlo para **Teste 1 e Computador 2** para 6.000.000 a 192.000.000 simulações.

Método	DP	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido	Erro relativo [%]*
MCS	(N, N)	$6,0 \times 10^6$	4,23034485	$1,166666 \times 10^{-3}$	99,998833	0h 05min 21s	0,4349
	(LN, N)	$6,0 \times 10^6$	5,10355400	$1,166666 \times 10^{-5}$	99,999983	0h 05min 14s	0,4394
	(N, LN)	$6,0 \times 10^6$	4,29673355	$8,666667 \times 10^{-4}$	99,999133	0h 05min 21s	0,8204
	(LN, LN)	$6,0 \times 10^6$	5,10355400	$1,166666 \times 10^{-5}$	99,999983	0h 05min 17s	2,2666
	(N, N)	$12,0 \times 10^6$	4,26303749	$1,008333 \times 10^{-3}$	99,998991	0h 10min 24s	0,3345
	(LN, N)	$12,0 \times 10^6$	5,02631284	$2,500000 \times 10^{-5}$	99,999975	0h 10min 36s	1,0808
	(N, LN)	$12,0 \times 10^6$	4,26675886	$9,916667 \times 10^{-4}$	99,999008	0h 10min 33s	0,1170
	(LN, LN)	$12,0 \times 10^6$	5,10355400	$1,666667 \times 10^{-5}$	99,999983	0h 10min 40s	2,2666
	(N, N)	$24,0 \times 10^6$	4,24271345	$1,104167 \times 10^{-3}$	99,998896	0h 21min 11s	0,1438
	(LN, N)	$24,0 \times 10^6$	5,35975837	$4,166667 \times 10^{-6}$	99,999996	0h 20min 57s	5,4815
	(N, LN)	$24,0 \times 10^6$	4,28226557	$9,250000 \times 10^{-4}$	99,999075	0h 19min 28s	0,4809
	(LN, LN)	$24,0 \times 10^6$	5,10355400	$1,666667 \times 10^{-5}$	99,999983	0h 21min 54s	2,2666
	(N, N)	$48,0 \times 10^6$	4,24186840	$1,108333 \times 10^{-3}$	99,998892	0h 42min 18s	0,1637
	(LN, N)	$48,0 \times 10^6$	5,15770131	$1,250000 \times 10^{-5}$	99,999987	0h 42min 01s	1,5050
	(N, LN)	$48,0 \times 10^6$	4,27054027	$9,750000 \times 10^{-4}$	99,999025	0h 38min 19s	0,2057
	(LN, LN)	$48,0 \times 10^6$	5,19174400	$1,041667 \times 10^{-5}$	99,999989	0h 42min 52s	0,5778
	(N, N)	$96,0 \times 10^6$	4,24676937	$1,084375 \times 10^{-3}$	99,998915	1h 12min 03s	0,0484
	(LN, N)	$96,0 \times 10^6$	5,11574803	$1,562500 \times 10^{-5}$	99,999984	1h 15min 12s	0,6793
	(N, LN)	$96,0 \times 10^6$	4,24186840	$1,108333 \times 10^{-3}$	99,998891	1h 23min 20s	0,4670
	(LN, LN)	$96,0 \times 10^6$	5,17397405	$1,145833 \times 10^{-5}$	99,999988	1h 26min 27s	0,9181
	(N, N)	$192,0 \times 10^6$	4,24882383	$1,074479 \times 10^{-3}$	99,998925	2h 45min 37s	-
	(LN, N)	$192,0 \times 10^6$	5,08122936	$1,875000 \times 10^{-5}$	99,999981	2h 53min 04s	-
	(N, LN)	$192,0 \times 10^6$	4,26177178	$1,014063 \times 10^{-3}$	99,998986	2h 46min 16s	-
	(LN, LN)	$192,0 \times 10^6$	5,22191387	$8,854167 \times 10^{-6}$	99,999991	2h 44min 20s	-

*Baseado nos valores de β obtidos para MCS com maior número de simulações.

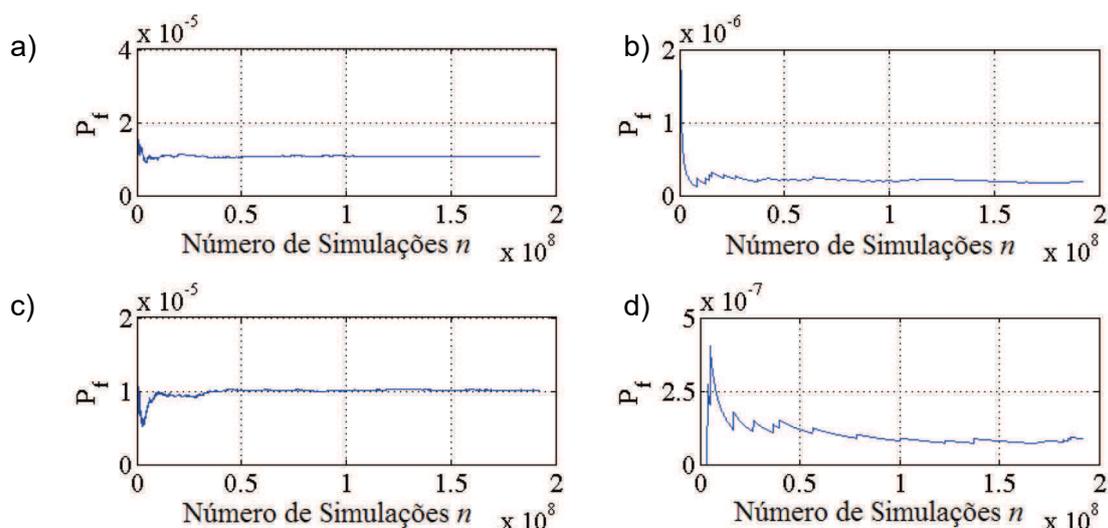


Figura A.6 – Convergência da *MCS* para **Teste 1, Computador 2** e combinações: a) (N, N); b) (LN, N); c) (N, LN) e d) (LN, LN).

A Figura A.6 mostra que com $192.000.000$ simulações, as quatro combinações apresentam significativa melhoria de convergência. Apesar da Simulação de Monte Carlo apresentar o inconveniente do considerável custo computacional, se o computador possuir configurações adequadas, o tempo de cálculo pode ser significativamente reduzido, como é evidenciado pela Fig. A.7.

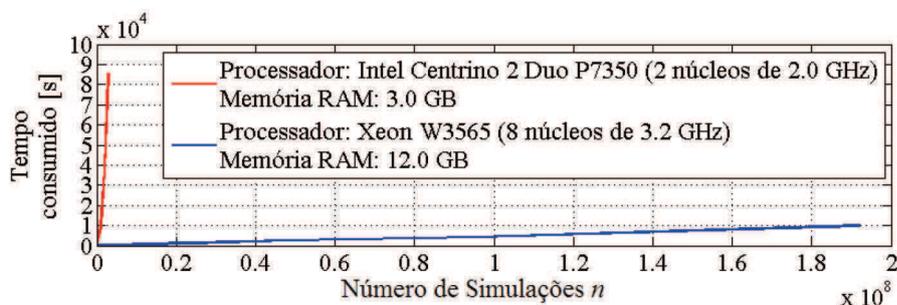


Figura A.7 – Custo computacional para a *MCS* aplicado ao **Teste 1**.

Conclui-se que os algoritmos implementados apresentam resultados semelhantes aos detalhados em (HALDAR; MAHADEVAN, 2000), com erro relativo máximo de $1,37\%$ em relação à *MCS* para o maior número de simulações.

Comparando os resultados obtidos entre os métodos de confiabilidade *FORM* e *SORM*, é possível notar que, de maneira geral, o método de segunda ordem é levemente melhor que o *FORM* devido à não linearidade da função de estado limite.

Teste 2 – Momento em seção de uma viga retangular prismática de concreto

Outro teste foi efetuado para um problema também apresentado por Haldar e Mahadevan (2000) que, diferentemente do primeiro, possui uma quantidade maior de variáveis e suas probabilidades de falha também são maiores que as do primeiro teste. Com isso, objetiva-se demonstrar uma aplicação dos métodos de confiabilidade para um problema mais complicado, envolvendo diversas variáveis aleatórias. Dessa maneira, a equação que mostra o momento resistente de uma viga, Eq.(A.2), onde as variáveis são consideradas aleatórias, é apresentada a seguir:

$$M_R = A_S f_y d \left(1 - \eta \frac{A_S f_y}{bd f_c'} \right), \quad (\text{A.2})$$

na qual A_S é a área das barras de reforço; f_y é a tensão de escoamento das barras de reforço; d é a distância da fibra com maior compressão até o centroide destas barras; η é o parâmetro de tensão do bloco de concreto; f_c' é a resistência a compressão do concreto e b é a largura da seção comprimida da viga. Essas variáveis são consideradas aleatórias, e seus valores de média e desvio padrão são mostrados na Tab. A.7. Considera-se que a viga está sujeita a um momento M , que também é uma variável aleatória, cujos valor médio e coeficiente de variação também estão contidos na Tab. A.7.

Tabela A.7 – Variáveis aleatórias, propriedades estatísticas e distribuições para o Teste 2.

X_n	Variáveis	Distribuições de Probabilidade (DP)				Média (μ)	Desvio padrão (σ)
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4		
X_1	A_S [in ²]	N	N	LN	LN	1,56	0,0562 (0,036 μ)
X_2	f_y [ksi]	N	N	LN	LN	47,70	7,155 (0,150 μ)
X_3	f_c' [ksi]	N	N	LN	LN	3,50	0,735 (0,210 μ)
X_4	b [in]	N	N	LN	LN	8,000	0,3600 (0,045 μ)
X_5	d [in]	N	N	LN	LN	13,200	1,1352 (0,086 μ)
X_6	η	N	N	LN	LN	0,59	0,0295 (0,050 μ)
X_7	M [kip – in]	N	LN	N	LN	326,250	55,4625 (0,170 μ)

A função de estado limite para esse problema é representada pela Eq.(A.3):

$$g(\mathbf{X}) = A_S f_y d \left(1 - \eta \frac{A_S f_y}{bd f_c'} \right) - M. \quad (\text{A.3})$$

A função de estado limite não pode ser representada graficamente devido ao elevado número de variáveis aleatórias. De acordo com os quatro casos de distribuições apresentados

na Tab. A.7, os índices de confiabilidade são calculados por Haldar e Mahadevan (2000) usando o *FORM*. Os resultados do método de confiabilidade apresentados por Haldar e Mahadevan (2000), juntamente com os resultados apresentados pelos algoritmos implementados por nesta Dissertação são mostrados na Tab. A.8 e na Tab. A.9. A convergência da Simulação de Monte Carlo é mostrada na Fig. A.8 para o **Caso 1** e o **Computador 1** com número de simulações *100.000* e *2.000.000*; e na Fig. A.9 para o **Caso 1** e o **Computador 2** para *128.000.000* simulações.

Tabela A.8 – Resultados de *FORM*, *SORM* e *MCS* para **Teste 2** e **Computador 1**.

Método	Caso	Número de simulações n ou chamada de função	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido (segundo)	Erro relativo [%]*
<i>FORM</i> (Haldar)	1	-	3,833	$6,329498 \times 10^{-3}$	99,993670	-	6,1525
	2	-	3,761	$8,461771 \times 10^{-3}$	99,991538	-	6,2200
	3	-	4,388	$5,719889 \times 10^{-4}$	99,999428	-	0,4360
	4	-	4,091	$2,147586 \times 10^{-3}$	99,997852	-	0,5999
<i>FORM</i> analítico	1	6	3,83311937	$6,326426 \times 10^{-3}$	99,993673	0h 00min 02s	6,1558
	2	5	3,76136249	$8,449516 \times 10^{-3}$	99,991550	0h 00min 02s	6,2302
	3	4	4,38759927	$5,730434 \times 10^{-4}$	99,999427	0h 00min 01s	0,4268
	4	5	4,09065829	$2,150752 \times 10^{-3}$	99,997849	0h 00min 02s	0,5915
<i>SORM</i> analítico	1	6	3,77457379	$8,014073 \times 10^{-3}$	99,991986	0h 00min 08s	4,5344
	2	5	3,70671611	$1,049820 \times 10^{-2}$	99,989501	0h 00min 07s	4,6869
	3	4	4,32903561	$7,488186 \times 10^{-4}$	99,999251	0h 00min 09s	0,9137
	4	5	4,04285204	$2,640247 \times 10^{-3}$	99,997360	0h 00min 10s	0,5841
<i>FORM</i> numérico	1	6	3,83311123	$6,326635 \times 10^{-3}$	99,993673	0h 00min 00s ($1,245220 \times 10^{-1}$)	6,1556
	2	5	3,76135583	$8,449741 \times 10^{-3}$	99,991550	0h 00min 00s ($1,235158 \times 10^{-1}$)	6,2300
	3	4	4,38757372	$5,731107 \times 10^{-4}$	99,999426	0h 00min 00s ($1,263918 \times 10^{-1}$)	0,4262
	4	5	4,09065885	$2,150747 \times 10^{-3}$	99,997849	0h 00min 00s ($1,265186 \times 10^{-1}$)	0,5915
<i>SORM</i> numérico	1	6	3,77446191	$8,017670 \times 10^{-3}$	99,991982	0h 00min 01s	4,5313
	2	5	3,70666079	$1,050050 \times 10^{-2}$	99,989499	0h 00min 01s	4,6853
	3	4	4,32895135	$7,491051 \times 10^{-4}$	99,999251	0h 00min 01s	0,9156
	4	5	4,04280418	$2,640786 \times 10^{-3}$	99,997359	0h 00min 01s	0,5853
<i>MCS</i>	1	$1,0 \times 10^5$	3,67270126	$1,200000 \times 10^{-2}$	99,988000	0h 01min 41s	1,7131
	2	$1,0 \times 10^5$	3,54008380	$2,000000 \times 10^{-2}$	99,980000	0h 01min 47s	0,0192
	3	$1,0 \times 10^5$	4,10747965	$2,000000 \times 10^{-3}$	99,998000	0h 01min 48s	5,9848
	4	$1,0 \times 10^5$	3,89059189	$5,000000 \times 10^{-3}$	99,995000	0h 01min 47s	4,3282
	1	$2,0 \times 10^6$	3,62586122	$1,440000 \times 10^{-2}$	99,985600	11h 01min 07s	0,4159
	2	$2,0 \times 10^6$	3,53035654	$2,075000 \times 10^{-2}$	99,979250	10h 04min 05s	0,2940
	3	$2,0 \times 10^6$	4,34386118	$7,000000 \times 10^{-2}$	99,999300	11h 42min 17s	0,5743
	4	$2,0 \times 10^6$	4,08018434	$2,250000 \times 10^{-3}$	99,997750	10h 23min 54s	0,3339

*Baseado nos valores de β obtidos para a *MCS* com maior número de simulações da Tab. A.9.

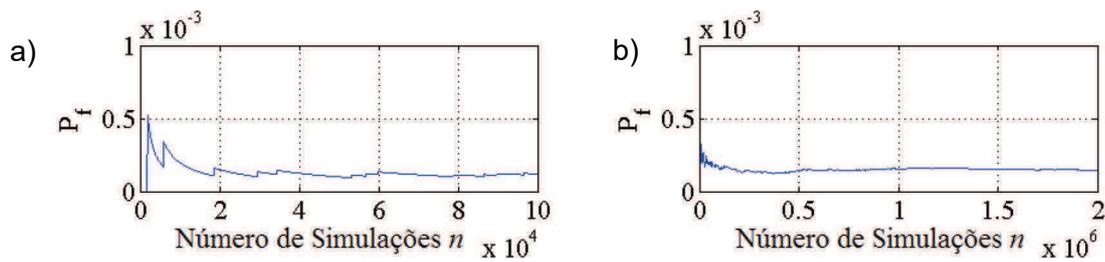


Figura A.8 – Convergência da MCS referente ao **Caso 1, Teste 2 e Computador 1** para: a) 100.000 simulações e b) 2.000.000 simulações.

A Tabela A.8 destaca que os diferentes DP das variáveis aleatórias são importantes para estimar o índice de confiabilidade e, conseqüentemente, P_f . A Figura A.8 mostra a necessidade de um grande número de simulações para a convergência pela MCS. Nota-se que, mesmo com 2.000.000 simulações, o método ainda não convergiu totalmente.

Tabela A.9 – Resultados da Simulação de Monte Carlo para **Teste 2 e Computador 2**.

Método	DP	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido	Erro relativo [%]*
MCS	1	$1,0 \times 10^5$	3,67270126	$1,200000 \times 10^{-2}$	99,988000	0h 00min 05s	1,7131
	2	$1,0 \times 10^5$	3,47023664	$2,600000 \times 10^{-2}$	99,974000	0h 00min 04s	1,9919
	3	$1,0 \times 10^5$	4,26489079	$1,000000 \times 10^{-3}$	99,999000	0h 00min 05s	2,3819
	4	$1,0 \times 10^5$	3,94440008	$4,000000 \times 10^{-3}$	99,996000	0h 00min 06s	3,0051
	1	$2,0 \times 10^6$	3,61016694	$1,530000 \times 10^{-2}$	99,984700	0h 01min 43s	0,0187
	2	$2,0 \times 10^6$	3,55498545	$1,890000 \times 10^{-2}$	99,981100	0h 01min 50s	0,4016
	3	$2,0 \times 10^6$	4,34386118	$7,000000 \times 10^{-4}$	99,999300	0h 01min 43s	0,5743
	4	$2,0 \times 10^6$	4,04198776	$2,650000 \times 10^{-3}$	99,997350	0h 01min 46s	0,6053
	1	$4,0 \times 10^6$	3,60099637	$1,585000 \times 10^{-2}$	99,984150	0h 03min 30s	0,2727
	2	$4,0 \times 10^6$	3,53843917	$2,012500 \times 10^{-2}$	99,979875	0h 03min 35s	0,0657
	3	$4,0 \times 10^6$	4,45218723	$4,250000 \times 10^{-4}$	99,999575	0h 03min 30s	1,9051
	4	$4,0 \times 10^6$	4,07006511	$2,350000 \times 10^{-3}$	99,997650	0h 03min 28s	0,0851
	1	$8,0 \times 10^6$	3,60346752	$1,570000 \times 10^{-2}$	99,984300	0h 06min 57s	0,2043
	2	$8,0 \times 10^6$	3,53566509	$2,033750 \times 10^{-2}$	99,979662	0h 06min 56s	0,1440
	3	$8,0 \times 10^6$	4,33997334	$7,125000 \times 10^{-4}$	99,999287	0h 07min 18s	0,6633
	4	$8,0 \times 10^6$	4,06637538	$2,387500 \times 10^{-3}$	99,997612	0h 06min 51s	0,0056
	1	$16,0 \times 10^6$	3,61272157	$1,515000 \times 10^{-2}$	99,984850	0h 14min 49s	0,0520
	2	$16,0 \times 10^6$	3,53835719	$2,013125 \times 10^{-2}$	99,979869	0h 14min 17s	0,0680
	3	$16,0 \times 10^6$	4,41448657	$5,062500 \times 10^{-4}$	99,999494	0h 14min 15s	1,0422
	4	$16,0 \times 10^6$	4,06455107	$2,406250 \times 10^{-3}$	99,997594	0h 14min 21s	0,0505
1	$32,0 \times 10^6$	3,61768487	$1,486250 \times 10^{-2}$	99,985137	0h 26min 21s	0,1895	
2	$32,0 \times 10^6$	3,53774310	$2,017813 \times 10^{-2}$	99,979822	0h 27min 47s	0,0853	
3	$32,0 \times 10^6$	4,41051513	$5,156250 \times 10^{-4}$	99,999484	0h 27min 03s	0,9513	
4	$32,0 \times 10^6$	4,05533500	$2,503125 \times 10^{-3}$	99,997497	0h 27min 36s	0,2771	
1	$64,0 \times 10^6$	3,60979635	$1,532188 \times 10^{-2}$	99,984678	0h 51min 59s	0,0290	
2	$64,0 \times 10^6$	3,54095107	$1,993438 \times 10^{-2}$	99,980066	0h 53min 10s	0,0053	
3	$64,0 \times 10^6$	4,37087434	$6,187500 \times 10^{-4}$	99,999381	0h 52min 09s	0,0440	
4	$64,0 \times 10^6$	4,06258989	$2,426562 \times 10^{-3}$	99,997573	0h 54min 26s	0,0987	
1	$128,0 \times 10^6$	3,61084322	$1,526016 \times 10^{-2}$	99,984740	1h 47min 39s	-	
2	$128,0 \times 10^6$	3,54076500	$1,994844 \times 10^{-2}$	99,980051	2h 02min 15s	-	
3	$128,0 \times 10^6$	4,36895279	$6,242187 \times 10^{-4}$	99,999376	2h 03min 56s	-	
4	$128,0 \times 10^6$	4,06660437	$2,385156 \times 10^{-3}$	99,997615	2h 04min 50s	-	

*Baseado nos valores de β obtidos para MCS com maior número de simulações.

Os resultados da Tabela A.9 mostram que a *MCS* converge para a quantidade de simulações n superior a $64.000.000$, e a Fig. A.9 ilustra a convergência desse método. Além disso, como já constatado no teste anterior, o tempo consumido para o **Computador 2** é muito menor que o tempo dispendido com o uso do **Computador 1**.

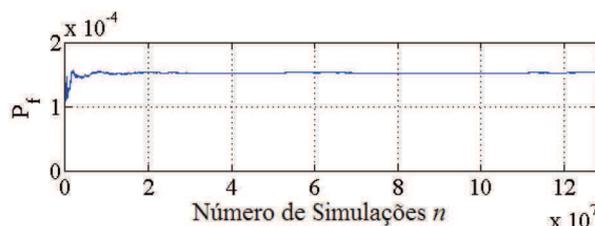


Figura A.9 – Convergência da *MCS* referente ao **Teste 2, Caso 1 e Computador 2** para 128.000.000 simulações.

Teste 3 – Deslocamento horizontal de plataforma marítima

O **Teste 3** tem o objetivo de comparar os resultados obtidos pelos métodos de confiabilidade com os apresentados por outros autores diferentes dos que elaboraram os algoritmos utilizados nesta Dissertação. Para tanto, é considerado um exemplo de Ang e Tang (1984) que utiliza uma função de estado limite quadrática, que se assemelha à representação de um modelo de elementos finitos por uma superfície de resposta. O problema estudado por Ang e Tang (1984) diz que, durante uma tempestade, as cargas cíclicas das ondas induzem deslocamentos horizontais e rotações em uma plataforma de alto mar. Um modelo de elementos finitos, com propriedades do solo obtidas por testes em laboratório, foi usado para calcular o máximo deslocamento cíclico da plataforma. Como a elasticidade do solo que suporta a plataforma degrada com o nível de tensão, espera-se que os deslocamentos induzidos aumentem mais rapidamente para cargas maiores. Essa relação é aproximada por:

$$D = AF + BF^2 + \varepsilon, \quad (\text{A.4})$$

na qual D é o deslocamento horizontal máximo; F é a força máxima; A e B são coeficientes; e ε é o erro do modelo quadrático. As propriedades do solo consideradas para análise do modelo de elementos finitos podem estar sujeitas a incertezas. Dessa maneira, os resultados da equação determinada pelos coeficientes A e B também podem variar consideravelmente. Porém, para tornar o problema mais simples, o modelo quadrático acima deve ser usado com os coeficientes A e B representados por variáveis aleatórias. Considere-se que D seja medido em centímetros e as propriedades das variáveis aleatórias sejam as apresentadas na Tab. A.10.

Tabela A.10 – Variáveis aleatórias e suas distribuições para o **Teste 3**.

X_n	Variáveis	Distribuições	Média (μ)	Desvio padrão (σ)	Coefficiente de variação (δ)
X_1	F [kN]	Lognormal	25,0	5,75 (0,23 μ)	0,23
X_2	A	Normal (<i>Gaussiana</i>)	0,0113	0,00340 (0,30 μ)	0,30
X_3	B	Normal (<i>Gaussiana</i>)	0,00060	0,00018 (0,30 μ)	0,30
X_4	ε	Normal (<i>Gaussiana</i>)	0	0,1	-

Assumindo que o desempenho satisfatório requerido exija que D seja menor 1 cm , o objetivo é determinar a probabilidade de desempenho não satisfatório. Dessa maneira, a função de estado limite é dada pela seguinte equação:

$$g(X) = 1 - AF + BF^2 + \varepsilon. \quad (\text{A.5})$$

Para a distribuição lognormal da variável F , a média e o desvio padrão são obtidos para uma distribuição normal equivalente. O resultado obtido por Ang e Tang (1984) foi de $\beta = 1,07$, o que implica uma probabilidade de falha $P_f = 0,142$ (14,2 %). A Tabela A.11 apresenta os resultados obtidos por meio dos algoritmos implementados nesta Dissertação e uma comparação com os resultados apresentados por Ang e Tang (1984).

Tabela A.11 – Resultados de *FORM*, *SORM* e *MCS* para **Teste 3** e **Computador 1**.

Método	Número de simulações n ou chamada de função	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido (segundo)	Erro relativo [%]*
<i>FORM</i> (Ang; Tang)	-	1,07	14,20000	85,800000	-	1,8212
<i>MCS</i> (Ang; Tang)	3.000	1,13589622	12,80000	87,200000	-	4,2252
<i>FORM</i> analítico	4	1,07436660	14,13292	85,867080	0h 00min 01s ($1,577750 \times 10^0$)	1,4205
<i>SORM</i> analítico	4	1,04246720	14,85975	85,140244	0h 00min 01s ($1,930637 \times 10^0$)	4,3475
<i>FORM</i> numérico	4	1,07434813	14,13333	85,866666	0h 00min 00s ($1,249025 \times 10^{-1}$)	1,4222
<i>SORM</i> numérico	4	1,04246462	14,85982	85,140184	0h 00min 01s ($1,118202 \times 10^0$)	4,3477
	1.000	1,09389735	13,70000	86,300000	0h 00min 00s ($1,718074 \times 10^{-1}$)	0,3715
<i>MCS</i>	3.000	1,10152859	13,53333	86,466666	0h 00min 00s ($3,079117 \times 10^{-1}$)	1,0717
	10.000	1,13685238	12,78000	87,220000	0h 00min 00s ($9,770751 \times 10^{-1}$)	4,3129
	30.000	1,10015024	13,56333	86,436667	0h 00min 05s	0,9453

*Baseado nos valores de β obtidos para a *MCS* com maior número de simulações da Tab. A.12.

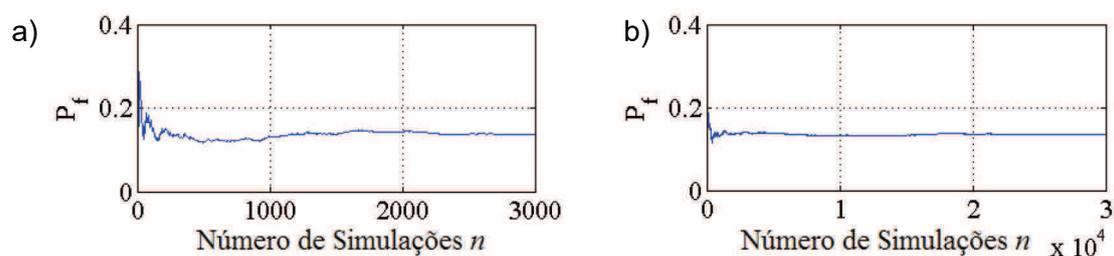


Figura A.10 – Convergência da *MCS* referente ao **Teste 3** e **Computador 1** para: a) 3.000 simulações; e b) 30.000 simulações.

Como a convergência do método não foi assegurada com o **Computador 1**, Fig. A.10, os métodos foram executados com o **Computador 2** e os resultados são apresentados na Tab. A.12. A partir das informações contidas na Tabela A.12, conclui-se que os resultados obtidos com o uso do **Computador 2**, como já observado nos testes anteriores, consumiram tempo substancialmente menor.

Tabela A.12 – Resultados da Simulação de Monte Carlo para **Teste 3** e **Computador 2**.

Método	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido (segundo)	Erro relativo [%]*
MCS	1.000	1,08031934	14,00000	86,000000	0h 00min 00s ($8,038846 \times 10^{-2}$)	0,8743
	3.000	1,13113090	12,90000	87,100000	0h 00min 00s ($1,571266 \times 10^{-1}$)	3,7879
	10.000	1,09938539	13,58000	86,420000	0h 00min 00s ($4,314011 \times 10^{-1}$)	0,8751
	30.000	1,09177199	13,74667	86,253333	0h 00min 01s	0,1765
	100.000	1,08984824	13,78900	86,211000	0h 00min 05s	-

*Calculado de acordo com o resultado apresentado por *MCS* com maior número de simulações.

Como a probabilidade de falha é maior que nos testes anteriores, a Simulação de Monte Carlo exige uma menor quantidade de simulações para a sua convergência, como pode ser observado na Fig. A.11, a qual revela que, com 20.000 simulações, já é possível observar a convergência para esse teste.

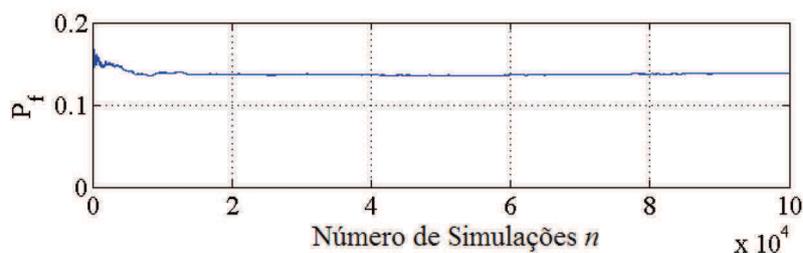


Figura A.11 – Convergência da Simulação de Monte Carlo para o **Teste 3** utilizando o **Computador 2**.

Teste 4 – Colapso de um pórtico

O **Teste 4** consiste em comparar os resultados obtidos por Melchers (1987) para um exemplo de um sistema no qual são considerados múltiplos modos de falha e, além disso, as *LSF* para cada modo de falha é linear e possui seis variáveis. O exemplo versa sobre os tipos de colapso que o pórtico mostrado na Fig. A.12 pode sofrer, de acordo com cargas horizontais e verticais aplicadas.

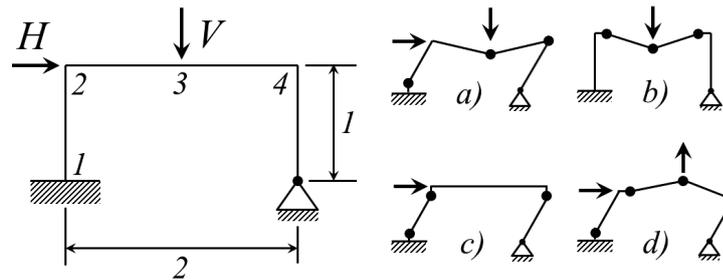


Figura A.12 – Representação do pórtico estudado no **Teste 4** e os modos de falha considerados: a), b), c) e d) (ilustração adaptada de (MELCHERS, 1987)).

Para definir os tipos de colapso apresentados na Fig. A.12, quatro funções de estado limite são definidas os seguintes modos de falha:

$$g_a(\mathbf{X}) = 1M_1 + 0M_2 + 2M_3 + 2M_4 - 1H - 1V; \quad (\text{A.6a})$$

$$g_b(\mathbf{X}) = 0M_1 + 1M_2 + 2M_3 + 1M_4 - 0H - 1V; \quad (\text{A.6b})$$

$$g_c(\mathbf{X}) = 1M_1 + 1M_2 + 0M_3 + 1M_4 - 1H - 0V; \quad (\text{A.6c})$$

$$g_d(\mathbf{X}) = 1M_1 + 2M_2 + 2M_3 + 0M_4 - 1H + 1V. \quad (\text{A.6d})$$

As variáveis são modeladas como distribuições normais e suas propriedades estatísticas são mostradas na Tab. A.13.

Tabela A.13 – Variáveis aleatórias e suas distribuições para o **Teste 4**.

X_n	Variáveis	Distribuições	Média (μ)	Desvio Padrão (σ)	Coefficiente de variação (δ)
X_1	M_1	Normal (<i>Gaussiana</i>)	1,0	0,15 (0,15 μ)	0,15
X_2	M_2	Normal (<i>Gaussiana</i>)	1,0	0,15 (0,15 μ)	0,15
X_3	M_3	Normal (<i>Gaussiana</i>)	1,0	0,15 (0,15 μ)	0,15
X_4	M_4	Normal (<i>Gaussiana</i>)	1,0	0,15 (0,15 μ)	0,15
X_5	H	Normal (<i>Gaussiana</i>)	1,0	0,15 (0,17 μ)	0,17
X_6	V	Normal (<i>Gaussiana</i>)	1,0	0,50 (0,50 μ)	0,50

A partir dos dados da Tabela A.13, Melchers (1987), por meio do método *FOSM*, obteve os seguintes índices de confiabilidade 4,32; 4,83; 6,44 e 7,21 para os modos de falha a, b, c

e d , respectivamente. A Tabela A.14 mostra os resultados segundo os métodos de confiabilidade implementados e a Fig. A.13 mostra a convergência da *MCS* para os modos a e b .

Tabela A.14 – Resultados dos métodos *FORM*, *SORM* e *MCS* para **Teste 4** e **Computador 2**.

Método	Modo de falha	Número de simulações n ou chamada de função	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo consumido (segundo)	Erro relativo [%]*
<i>FOSM</i> (Melchers)	a	-	4,32	$0,770000 \times 10^{-5}$	99,999230	-	0,1100
	b	-	4,83	$0,700000 \times 10^{-6}$	99,999930	-	0,0141
	c	-	6,44	$0,590000 \times 10^{-10}$	99,999999	-	-
	d	-	7,21	$0,280000 \times 10^{-12}$	99,999999	-	-
<i>FORM</i> analítico	a	5	4,32382603	$7,667311 \times 10^{-4}$	99,999233	0h 00min 01s	0,0215
	b	5	4,83493778	$6,659364 \times 10^{-5}$	99,999933	0h 00min 01s	0,1163
	c	5	6,44156626	$5,912337 \times 10^{-9}$	99,999999	0h 00min 01s	-
	d	5	7,20637672	$2,873257 \times 10^{-11}$	99,999999	0h 00min 01s	-
<i>SORM</i> analítico	a	5	4,32382603	$7,667312 \times 10^{-4}$	99,999233	0h 00min 01s	0,0215
	b	5	4,83493778	$6,659364 \times 10^{-5}$	99,999933	0h 00min 01s	0,1163
	c	5	6,44156626	$5,912337 \times 10^{-9}$	99,999999	0h 00min 01s	-
	d	5	7,20637672	$2,873257 \times 10^{-9}$	99,999999	0h 00min 01s	-
<i>FORM</i> numérico	a	5	4,32382603	$7,667311 \times 10^{-4}$	99,999233	0h 00min 00s ($1,271158 \times 10^{-1}$)	0,0215
	b	5	4,83493778	$6,659364 \times 10^{-5}$	99,999933	0h 00min 00s ($1,204453 \times 10^{-1}$)	0,1163
	c	5	6,44156626	$5,912337 \times 10^{-9}$	99,999999	0h 00min 00s ($1,216867 \times 10^{-1}$)	-
	d	5	7,20637672	$2,873257 \times 10^{-9}$	99,999999	0h 00min 00s ($1,235991 \times 10^{-1}$)	-
<i>SORM</i> numérico	a	5	4,32382610	$7,667309 \times 10^{-4}$	99,999233	0h 00min 01s	0,0215
	b	5	4,83493778	$6,659364 \times 10^{-5}$	99,999933	0h 00min 01s	0,1163
	c	5	6,44156626	$5,912337 \times 10^{-9}$	99,999999	0h 00min 01s	-
	d	5	7,20637665	$2,873257 \times 10^{-9}$	99,999999	0h 00min 01s	-
<i>MCS</i>	a	$2,0 \times 10^8$	4,32475713	$7,635000 \times 10^{-4}$	99,999236	3h 07min 50s	-
	b	$2,0 \times 10^8$	4,82932013	$6,850000 \times 10^{-5}$	99,999931	3h 22min 46s	-
	c	$2,0 \times 10^8$	∞	$0,000000 \times 10^0$	100,0000	3h 19min 34s	-
	d	$2,0 \times 10^8$	∞	$0,000000 \times 10^0$	100,0000	3h 11min 54s	-

*Calculado de acordo com o resultado apresentado por *MCS* com maior número de simulações.

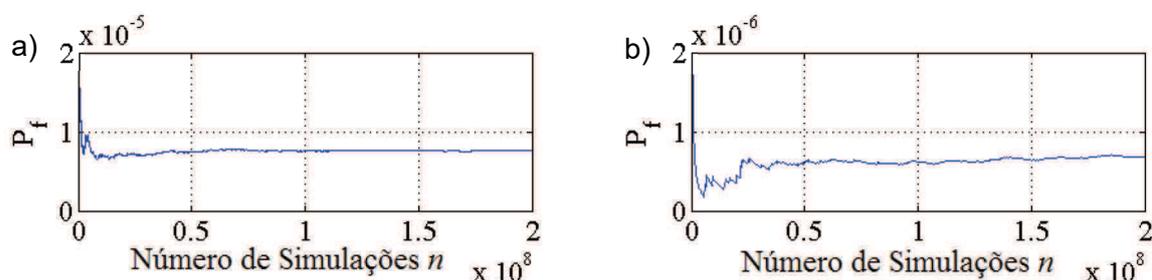


Figura A.13 – Convergência da *MCS* para *LSF*: a) modo a e b) modo b do **Teste 4**.

A Tabela A.14 mostra que os valores de β calculados pelos métodos de confiabilidade, são quase idênticos aos índices encontrados por Melchers (1987). Esse autor também faz

uma aproximação considerando simultaneamente múltiplos modos de falhas do sistema, ou seja, um sistema em série, com fronteiras de primeira e segunda ordens, definidas por:

$$0,77 \times 10^{-5} \leq P_f \leq 0,84 \times 10^{-5} \quad (\text{A.7a})$$

$$0,79 \times 10^{-5} \leq P_f \leq 0,81 \times 10^{-5} \quad (\text{A.7b})$$

Para verificar as faixas apresentadas por Melchers (1987) a MCS foi realizada na função de estado limite $g_e(\mathbf{X})$, Eq.(A.8), que representa a união das funções de estado limite para cada modo de falha, ou seja, união dos domínios de falha para amostragem.

$$g_e(\mathbf{X}) = g_a(\mathbf{X}) \cup g_b(\mathbf{X}) \cup g_c(\mathbf{X}) \cup g_d(\mathbf{X}) \quad (\text{A.8})$$

A Tabela A.15 mostra os resultados obtidos para quatro MCS realizadas para a Eq.(A.8) utilizando **Computador 2**; e as Fig. A.14 e Fig. A.15 mostram suas convergências.

Tabela A.15 – Resultados do Método MCS para múltiplo modo de falha para **Teste 4** e **Computador 2**.

Método	Modo de falha	Número de simulações n	β	P_f [%]	Confiabilidade [%]	Tempo Consumido
MCS	e_1	$2,0 \times 10^8$	4,32562498	$7,605000 \times 10^{-4}$	99,999239	12h 41min 36s
	e_2	$2,0 \times 10^8$	4,31569712	$7,955000 \times 10^{-4}$	99,999204	12h 31min 09s
	e_3	$2,0 \times 10^8$	4,31348644	$8,035000 \times 10^{-4}$	99,999196	12h 23min 06s
	e_4	$2,0 \times 10^8$	4,30208287	$8,460000 \times 10^{-4}$	99,999154	12h 31min 17s

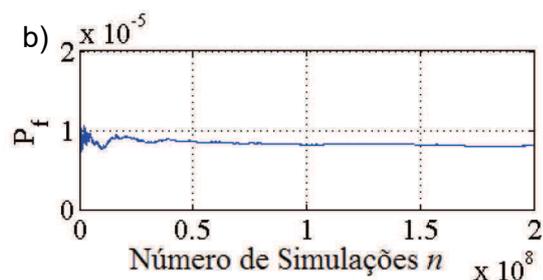
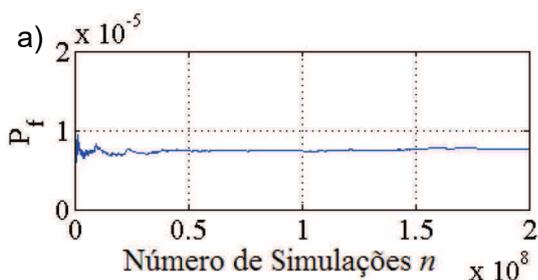


Figura A.14 – Convergência da MCS para o **Teste 4** para múltiplos modos de falha em série: a) e_1 e b) e_2 , utilizando o **Computador 2**.

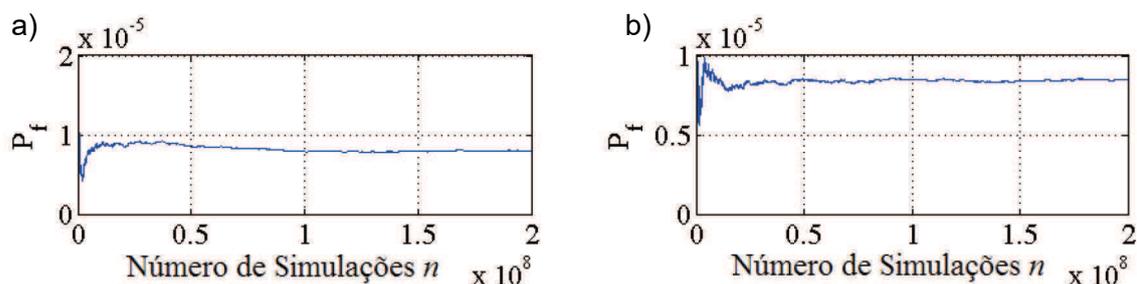


Figura A.15 – Convergência da MCS para o **Teste 4** para múltiplos modos de falha em série: a) e_3 e b) e_4 , utilizando o **Computador 2**.

A partir da Tabela A.15 pode-se concluir que dois valores de confiabilidade obtidos ($0,79 \times 10^{-5}$ e $0,80 \times 10^{-5}$) se encontram completamente dentro do intervalo de primeira ordem. Os outros dois valores ($0,76 \times 10^{-5}$ e $0,85 \times 10^{-5}$) se encontram no limiar das fronteiras inferior e superior de primeira ordem. Já para uma análise de fronteiras de segunda ordem, somente os valores $0,79 \times 10^{-5}$ e $0,80 \times 10^{-5}$ satisfazem a condição pelo fato da fronteira ser mais estreita.

Verificação dos resultados e observações

De acordo com os resultados obtidos nesse estudo, de maneira geral, todos estão satisfatoriamente próximos dos valores encontrados pelos autores dos **Testes 1 e 2** (HALDAR; MAHADEVAN, 1999); **Teste 3** (ANG; TANG, 1984) e **Teste 4** (MELCHERS, 1987), exceto para o método *GARM*, que baseado no método *FORM*, sem transformações de variáveis não normais, não oferece bons resultados, e demanda tempo relativamente alto. Para confirmar isso, a Tab. A.16 utiliza a Eq.(3.14) para definir os trechos nos quais há confianças de 99,0 % e 70,0 % de que o valor da probabilidade esteja nesse intervalo.

Tabela A.16 – Resultados da Eq.(A.14) para casos representativos dos **Testes 1, 2, 3 e 4** com maior quantidade de simulações.

Teste	Caso	n	β	P_f [%]	Confiança (k)	ε [%]	Faixa de P_f [%]
1 (MCS)	(N, N)	$192,0 \times 10^6$	4,2488	$1,0745 \times 10^{-3}$	99,0% (3,3)	$\pm 7,2654$	$0,9964 \times 10^{-3} \leq P_f \leq 1,1525 \times 10^{-3}$
					70,0% (1,0)	$\pm 2,2016$	$1,0508 \times 10^{-3} \leq P_f \leq 1,0981 \times 10^{-3}$
2 (MCS)	1	$128,0 \times 10^6$	3,6108	$1,5260 \times 10^{-2}$	99,0% (3,3)	$\pm 2,3610$	$1,4900 \times 10^{-4} \leq P_f \leq 1,5620 \times 10^{-2}$
					70,0% (1,0)	$\pm 0,7155$	$1,5151 \times 10^{-4} \leq P_f \leq 1,5369 \times 10^{-4}$
3 (MCS)	-	100.000	1,0898	13,7890	99,0% (3,3)	$\pm 2,6093$	$13,4292 \leq P_f \leq 14,1488$
					70,0% (1,0)	$\pm 0,7907$	$13,6800 \leq P_f \leq 13,8980$
4 (MCS)	g_a	$2,0 \times 10^8$	4,3247	$7,6350 \times 10^{-4}$	99,0% (3,3)	$\pm 8,4449$	$6,9902 \times 10^{-4} \leq P_f \leq 8,2798 \times 10^{-4}$
					70,0% (1,0)	$\pm 2,5591$	$7,4396 \times 10^{-4} \leq P_f \leq 7,8304 \times 10^{-4}$

Nota-se que para **Testes 1 e 4**, até mesmo para o intervalo com $70,0\%$ de confiança, a faixa de P_f contém os valores encontrados pelos métodos *FORM* e *SORM*, ou pelo menos *SORM*, para o **Teste 1**. Com o intervalo de 99% , além dos **Testes 1 e 4**, o **Teste 3** também apresenta resultados nessa faixa. Observa-se que quanto maior o erro relativo em relação ao índice de confiabilidade, mais longe das faixas os valores estão.

Considerando todos os testes, para as equações de estado limite não lineares, a aproximação *SORM* se revela mais precisa que a aproximação do método *FORM*. Já para as *LSF* lineares, os dois métodos fornecem os mesmos resultados (Tab. A.14).

Os métodos de confiabilidade numéricos se mostram tão eficientes quanto os métodos analíticos. A comparação com os resultados da *MCS* comprovam a eficiência dos métodos de confiabilidade analisados, e evidenciam a necessidade do uso de computadores de alto desempenho para menor tempo de cálculo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANG, A. H. S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering planning and design: decision, risk and reliability**. New York: John Wiley & Sons, 1984. v. 2, 562 p.

BATHE, K. **Finite element procedures**. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1996. 1037 p.

BATTAINI, M.; BREITUNG, K.; CASCIATI, F.; FARAVELLI, L. Active control and reliability of a structure under wind excitation. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, p. 1047-1055, 1998.

[https://doi.org/10.1016/S0167-6105\(98\)00096-8](https://doi.org/10.1016/S0167-6105(98)00096-8)

BATTAINI, M.; CASCIATI, F.; FARAVELLI, L. Some reliability aspects in structural control. **Probabilistic Engineering Mechanics**, n. 15, p. 101-107, 2000.

[https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(99\)00013-2](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(99)00013-2)

BECK, A. T. **Confiabilidade estrutural**. Notas de aula do curso de confiabilidade estrutural. São Carlos, SP, Escola de Engenharia de São Carlos, 2007. 210 p.

BOYLESTAD, R. L. **Introductory circuit analysis**. 10. ed. New York: Prentice Hall, Inc., 2004. 828 p.

BREITUNG, K. Asymptotic approximations for multinormal integrals. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 110, n. 3, p. 357-366, 1984.

[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1984\)110:3\(357\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1984)110:3(357))

BREITUNG, K.; CASCIATI, F.; FARAVELLI, L. Reliability based stability analysis for actively controlled structures. **Engineering Structures**, v. 20, n. 3, p. 211-215, 1998.

[https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(97\)00071-0](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(97)00071-0)

CATBAS, F. N.; SUSOY, M.; FRANGOPOL, D. M. Structural health monitoring and reliability estimation: long span truss bridge application with environmental monitoring data. **Engineering Structures**, n. 30, p. 2347-2359, 2008.

<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.01.013>

CHOI, S. K.; GRANDHI, R. V.; CANFIELD, R. A. **Reliability-based structural design**. London: Springer-Verlag, 2007. 306 p.

CRAIG Jr., R. R.; KURDILA, A. J. **Fundamentals of structural dynamics**. 2. ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2006. 728 p.

CUNHA Jr., S. S. **Estudo numérico de absorvedores dinâmicos de vibrações**. 1999. 99 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 1999.

CUNHA, L. C.; SAAD, N. S.; RADE, D. A. Técnicas de análise de confiabilidade aplicadas a treliças planas. In: SIMPÓSIO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA, POSMEC, 22, 2012, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil. **Anais**. Universidade Federal de Uberlândia, 2012. p. 1-10. 1 CD-ROM.

CUNHA, L. C.; SAAD, N. S.; RADE, D. A. Reliability analysis of actively controlled smart structures. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL ENGINEERING DYNAMICS, ICEDYN, 2013, Sesimbra, Portugal. **Proceedings**. Instituto Superior Técnico de Lisboa, 2013. p. 1-8. 1 CD-ROM.

DEN HARTOG, J. P. **Mechanical vibrations**. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956. 366 p.

DI SCIUVA, M.; LOMARIO, D. A comparison between Monte Carlo and *FORM* in calculating the reliability of a composite structure. **Composite Structures**, n. 59, p. 155-162, 2003.

[https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00170-8](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00170-8)

DUCARNE, J.; THOMAS, O.; DEÜ, J. -F. Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction. **Journal of Sound and Vibration**, n. 331, p. 3286-3303, 2012.

<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.03.002>

FALLAH, N.; EBRAHIMNEJAD, M. Active control of building structures using piezoelectric actuators. **Applied Soft Computing**, n. 13, p. 449-461, 2013.

<https://doi.org/10.1016/j.asoc.2012.08.010>

FEIN, O. M. A model for piezo-resistive damping of two-dimensional structures. **Journal of Sound and Vibration**, n. 310, p. 865-880, 2008.

<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.08.005>

FERREIRA, N. S. S. **Estruturas lamelares de madeira para coberturas**. 1999. 217 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 1999.

FERREIRA, N. S. S. **Sistemas estruturais em formato de abóbada reticulada**. 2012. 101 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2012.

FLEMING, A. J.; BEHRENS, S.; MOHEIMANI, S. O. R. Reducing the inductance requirements of piezoelectric shunt damping systems. **Smart Materials and Structures**, n. 12, p. 57-64, 2003.

<https://doi.org/10.1088/0964-1726/12/1/307>

FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

FORTUNA, L.; FRASCA, M. **Optimal and robust control: advanced topics with MATLAB®**. Boca Raton: CRC Press, 2012. 233 p.

FÜRSTENAU, E. **Novo dicionário de termos técnicos**: inglês-português. 21. ed. Porto Alegre: Globo, 1997.

GAO, W.; CHEN, J. J.; MA, H. B. ; MA, X. S. Optimal placement of active bars in active vibration control for piezoelectric intelligent truss structures with random parameters. **Computers and Structures**, n. 81, p. 53-60, 2003.

[https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(02\)00331-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00331-0)

GODOY, T. C.; TRINDADE, M. A. Modeling and analysis of laminate composite plates with embedded active-passive piezoelectric networks. **Journal of Sound and Vibration**, n. 330, p. 194-216, 2011.

<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.08.010>

GU, D. -W.; PETKOV, P. Hr.; KONSTANTINOV, M. M. **Robust control design with MATLAB®**. London: Springer-Verlag, 2005. 389 p.

HAGOOD, N. W.; VON FLOTOW, A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. **Journal of Sound and Vibration**, n. 146, p. 243-268, 1991.

[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90762-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90762-9)

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, reliability and statistical method in engineering design**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000. 304 p.

HASOFER, A. M.; LIND, N. C. Exact and invariant second moment code format. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 100, p. 111-121, 1974.

HAUPT R. L.; HAUPT S. E. **Practical genetic algorithms**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. 2004. 253 p.

HURTADO, J. E.; ALVAREZ, D. A. A method for enhancing computational efficiency in Monte Carlo calculation of failure probabilities by exploiting *FORM* results. **Computers and Structures**, n. 117, p. 95-104, 2013.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.11.022>

JENSEN, H. A.; SEPULVEDA, J. G. On the reliability-based design of structures including passive energy dissipation systems. **Structural Safety**, n. 34, p. 390-400, 2012.

<https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2011.09.005>

JEON, J. Y. Passive vibration damping enhancement of piezoelectric shunt damping system using optimization approach. **Journal of Mechanical Science and Technology**, n. 23, p. 1435-1445, 2009.

KIM, A.; FRANGOPOL, D. M. Optimal planning of structural performance monitoring based on reliability importance assessment. **Probabilistic Engineering Mechanics**, n. 25, p. 86-98, 2010.

<https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2009.08.002>

KORENEV, B. G.; REZNIKOV, L. M. **Dynamic vibration absorbers – theory and technical applications**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 1993.

KWON, Y. W.; BANG, H. **The finite element method using MATLAB**. New York: CRC Press, 1997. 519 p.

LEMAIRE, M. **Structural reliability**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2009. 488 p.

<https://doi.org/10.1002/9780470611708>

LEO, D. J. **Engineering analysis of smart material systems**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2007. 556 p.

<https://doi.org/10.1002/9780470209721>

MELCHERS, R. **Structural reliability: analysis and prediction**. 1. ed. London, U.K.: Ellis Horwood Limited, 1987. 400 p.

MELCHERS, R. Optimality-criteria-based probabilistic structural design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, n. 23, p. 34-39, 1999.

MICHALEWICZ, Z. **Genetic algorithms + data structures = evolution programs**. New York: Springer-Verlag. 1996. 387 p.

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-03315-9>

NGUYEN, C. H.; PIETRZKO, S. J. Finite element analysis of a *PZT*-actuated adaptive beam with vibration damping using a parallel *R-L* shunt circuit. **Finite Elements in Analysis and Design**, n. 42, p. 1231-1239, 2006.

<https://doi.org/10.1016/j.finel.2006.06.003>

OGATA, K. **Modern control engineering**. 5. ed. New York: Prentice Hall, Inc., 2010. 894 p.

PARKER, S. P. **McGraw-Hill dictionary of scientific and technical terms**. 5. ed. New York: McGraw-Hill, 1994.

PEÑA, S. S. R.; SZNAIER, M. **Robust systems: theory and applications**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998. 490 p.

PIEZO NANO POSITIONING. **The world of nano and micropositioning**. Disponível em: <<http://www.physikinstrumente.com>>. Acesso em: 25 de agosto de 2013.

PREUMONT, A. **Vibration control of active structures: an introduction**. 2. ed. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004. 364 p.

PREUMONT, A.; DE MARNEFFE, B.; DERAEMAER, A.; BOSSENS, F. The damping of a truss structure with a piezoelectric transducer. **Computers and Structures**, n. 86, p. 227-239, 2008.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.01.038>

RABHI, N.; GUEDRI, M.; HASSIS, H.; BOUHADDI, N. Structure dynamic reliability: a hybrid approach and robust meta-models. **Mechanical Systems and Signal Processing**, n. 25, p. 2313-2323, 2011.

<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2011.02.014>

RACKWITZ, R.; SHRUPP, K. Quality control, proof testing and structural reliability. **Structural Safety**, n. 2, p. 239-244, 1985.

[https://doi.org/10.1016/0167-4730\(85\)90030-X](https://doi.org/10.1016/0167-4730(85)90030-X)

RADE, D. A.; STEFFEN Jr., V. Optimization of dynamic vibration absorbers over a frequency band. **Mechanical Systems and Signal Processing**, n. 14, p. 679-690, 2000.

<https://doi.org/10.1006/mssp.2000.1319>

RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. 5. ed. New York: Prentice Hall, 2011. 1084 p.

SALES, T. P.; RADE, D. A.; DE SOUZA, L. C. G. Passive vibration control of flexible spacecraft using shunted piezoelectric transducers. **Aerospace Science and Technology**, p. 1-10, 2013.

<https://doi.org/10.1016/j.ast.2013.05.001>

SELL, L. L. **English-Portuguese comprehensive technical dictionary**. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 1973.

SHAO, S.; MUROTSU, Y. Approach to failure mode analysis of large structures. **Probabilistic Engineering Mechanics**, n. 14, p. 169-177, 1999.

[https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(98\)00028-9](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(98)00028-9)

SHIGLEY, J. E.; MISCHKE, C. R.; BUDYNAS, R. G. **Projeto de engenharia mecânica**. Traduzido por: João Batista de Aguiar, José Manuel de Aguiar. 7. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 960 p.

SHOUMAN, M. L. **Probabilistic reliability: an engineering approach**. New York: McGraw-Hill, 1968.

SPENCER, B. F.; SAIN, M. K.; WON, C. -H.; KASPARI, D. C.; SAIN, P. M. Reliability-based measures of structural control robustness. **Structural Safety**, n. 15, p. 111-129, 1994.

[https://doi.org/10.1016/0167-4730\(94\)90055-8](https://doi.org/10.1016/0167-4730(94)90055-8)

TRINDADE, M. A.; SANTOS, H. F. L.; GODOY, T. C. Effect of bonding layer uncertainties on the performance of surface-mounted piezoelectric sensors and actuators. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS, DINAME, 14, 2013, Buzios, RJ, Brazil. **Proceedings**. Buzios: ABCM, 2013. p. 1-10.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical optimization techniques for engineering design**. 4. ed. Colorado Springs: Vanderplaats Research & Development, Inc., 2005. 465 p.

VENINI, P.; MARIANI, C. Reliability as a measure of active control effectiveness. **Computes and Structures**, n. 73, p. 465-473, 1999.

VIANA, F. A. C.; KOTINDA, G. I.; RADE, A. R.; STEFFEN Jr. Tuning dynamic vibration absorbers by using ant colony optimization. **Computers and Structures**, n. 86, p. 1539-1549, 2008.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.05.009>

XUE, X.; TANG, J. Robust and high precision control using piezoelectric actuator circuit and integral continuous sliding mode control design. **Journal of Sound and Vibration**, n. 293, p. 335-359, 2006.

<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.10.009>

ZHAO, W.; QIU, Z. An efficient response surface method and its application to structural reliability and reliability-based optimization. **Finite Elements in Analysis and Design**, n. 67, p. 34-42, 2013.

<https://doi.org/10.1016/j.finel.2012.12.004>

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and optimal control**. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 586 p.

ZIHA, K. Redundancy and robustness of systems of events. **Probabilistic Engineering Mechanics**, n. 15, p. 347-357, 2000.

[https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(99\)00036-3](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(99)00036-3)