

JULIÁN LÁZARO AGUIRRE

Sistemas quase-Anosov



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2018**

JULIÁN LÁZARO AGUIRRE

Sistemas quase-Anosov

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. Jean Venato Santos.

UBERLÂNDIA - MG

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CPI)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

A284s Aguirre, Julián Lázaro, 1985 -
2018 Sistemas quase-Anosov / Julián Lázaro Aguirre. - 2018
80 f.: il.

Orientador: Jean Venato Santos.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.181>

Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Difeomorfismos - Teses. 3. Sistemas dinâmicos diferenciais - Teses I. Santos, Jean Venato. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Maria Salete de Freitas Pinheiro - CRB6/1262



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP
38400-902

ALUNO(A): Julián Lázaro Aguirre.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11612MAT005.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Sistemas Dinâmicos.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Sistemas quase-Anosov.

ORIENTADOR(A): Prof. Dr. Jean Venato Santos.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 22 de fevereiro de 2018, às 13h30min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof. Dr. Jean Venato Santos
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza
UFRJ-Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Dedicatória

A meus pais, Esteban Lazaro Gomez e Clementina Aguirre Coronel, meus irmãos Alberto, Cinthya e Oscar que me ajudaram incondicionalmente.

Agradecimentos

Agradeço principalmente a Deus pela saúde, pelas vitórias conquistadas e bem-estar que nunca me ha faltado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jean Venato Santos pela sua paciência e disponibilidade. Pela ajuda em esclarecer minhas dúvidas da pesquisa, por seus conselhos e discussões construtivas sobre a pesquisa e demais assuntos. Também agradeço a confiança, amizade e tempo que teve comigo.

À meus pais Esteban Lazaro e Clementina Aguirre, agradeço todo o amor, carinho, compreensão e apoio incondicional.

Aos membros da banca Prof. Dr. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza e Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler pela gentileza de participar da avaliação deste trabalho.

Agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia. Aos meus professores: Thiago Aparecido Catalan, Mário Henrique de Castro, Rosana Sueli da Motta Jafelice, Guilherme Chaud Tizziotti, Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, Vinícius Vieira Fávaro e Luis Renato Gonçalves Dias, que tiveram importante contribuição na minha formação acadêmica.

Ao meus companheiros e amigos de mestrado, especialmente a minha turma: Richard Javier Cubas Becerra, Milton Gabriel Perdomo Sandoval, José Henrique Souza Braz, Augusto Duarte Pena e Aluizio Antônio Fernandes da Silva. Obrigada aos colegas de mestrado da outras turmas: Suélen, Alexandre, Guilherme, Magna, Paulo Victor, Ueslei, Wagner, Rejiane, Telmo, Luis Anthony, Luis Alberto, Kassandra, Ivan Dario, Daniel e Gabriel Esteban.

Ao casal Edward e Nathalia pela convivência e incansáveis noites de boa conversa.

Agradeço à Richard Javier Cubas Becerra pela companhia durante todo o ano de 2016-2017 e pelas incansáveis horas de conversa sobre Sistemas Dinâmicos.

E finalmente, agradeço o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, que foi essencial para concluir os estudos de mestrado satisfatoriamente.

LÁZARO, A. J. *Sistemas quase-Anosov*. 2018. - 80p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Em 1970, Hirsch [10] conjecturou que dado um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ numa variedade diferenciável M , se $N \subset M$ é uma subvariedade compacta invariante com uma estrutura hiperbólica como um subconjunto de M , então f restrito a N seria um difeomorfismo Anosov. Neste trabalho será apresentado um contra-exemplo para esta conjectura publicado em 1976 por Franks e Robinson [8]. Em seguida será apresentado um resultado de Zeghib [30] mostrando que se (ϕ, M) é um sistema Anosov (fluxo ou difeomorfismo) com a propriedade splitting, dada uma subvariedade fechada invariante N de M , então (ϕ, N) é um sistema Anosov transitivo.

Palavras-chave: Hiperbolicidade, sistemas Anosov, sistemas quase Anosov.

LÁZARO, A. J. *Quasi-Anosov systems*. 2018. - 80p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In 1970, Hirsch [10] conjectured that given a diffeomorphism $f : M \rightarrow M$ in a differentiable manifold M , if $N \subset M$ is a compact invariant submanifold with a hyperbolic structure as a subset of M , then f restricted to N would be a Anosov diffeomorphism. In this work we present a counterexample to this conjecture published in 1976 by Franks and Robinson [8]. Next we present a result of Zeghib [30] showing that (ϕ, M) is an Anosov system (flow or diffeomorphism) with splitting property, given a closed invariant submanifold N of M , then (ϕ, N) is a transitive Anosov system.

Keywords: Hyperbolicity, Anosov systems, quasi Anosov systems.

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N}	$\{1, 2, 3, \dots\}$.
\mathbb{Z}	Conjunto de números inteiros.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
$T_p M$	Conjunto de vetores tangente a M em p .
TM	Fibrado tangente de M .
$\text{Diff}^r(M)$	Conjunto dos difeomorfismos de M em M de classe C^r ($r \geq 0$).
$\mathfrak{X}(M)$	Conjunto de campos vetoriais de classe C^r .
$B(\Lambda, r)$	r -vizinhança de Λ .
\mathcal{F}	Folheação de classe C^r .
$\mathcal{O}(p)$	Órbita de p pelo fluxo ϕ ou difeomorfismo f .
$\text{Per}(f)$	Conjunto de pontos periódicos de f .
$\text{Fix}(f)$	Conjunto de pontos fixos de f .
$\omega(p)$	Conjunto ω -limite de p pelo f ou fluxo ϕ .
$\alpha(p)$	Conjunto α -limite de p pelo f ou fluxo ϕ .
$L(f)$	Conjunto limite de f .
$\Omega(f)$	Conjunto não errante de f ou fluxo.
$\text{RC}(f)$	Conjunto recorrente por cadeias de f .
$W^s(\Lambda)$	Conjunto estável de Λ .
$W^u(\Lambda)$	Conjunto instável de Λ .
$W^{ss}(p)$	Variedade estável forte do ponto p para o fluxo ϕ .
$W^{su}(p)$	Variedade instável forte do ponto p para o fluxo ϕ .

SUMÁRIO

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Símbolos	ix
Sumário	x
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Variedades	4
1.2 Grupo fundamental e espaços de recobrimento	7
1.3 Noções básicas da teoria das folheações	10
1.4 Noções básicas de sistemas dinâmicos	12
2 Difeomorfismos	17
2.1 Introdução	17
2.2 Conjuntos hiperbólicos	19
2.3 Difeomorfismos Anosov	22
2.4 Lema de sombreamento	24
2.5 Decomposição espectral e Axioma A	30
2.6 Não ciclos	32
2.7 Quase-hiperbolicidade	34
2.8 Difeomorfismos quase Anosov	40
3 Exemplo de Franks e Robinson	43
3.1 Ideia geral da construção do exemplo de FR	43

3.2	Esboço do exemplo de FR	44
4	Fluxos	49
4.1	Noções básicas sobre fluxos	49
4.2	Definições e propriedades	51
4.3	Conjuntos hiperbólicos para fluxos	56
4.4	Estrutura de produto local	61
4.5	Decomposição espectral e Axioma A para fluxos	62
4.6	Fluxos Anosov	64
4.7	Fluxos Anosov em recobrimento universal	66
5	Prova do Teorema A	69
5.1	Sistemas quase Anosov	69
5.2	Subvariedades invariantes de sistemas Anosov	70
5.3	Prova do Teorema A	75
5.4	Problemas em aberto	77
	Referências Bibliográficas	78

INTRODUÇÃO

Atualmente é conhecido que os sistemas Anosov desempenham um papel central na teoria dos sistemas dinâmicos. Estes sistemas representam o comportamento hiperbólico global, e sua generalização natural, os sistemas parcialmente hiperbólicos, são hoje em dia um tópico de pesquisa bastante ativo. Dentre os vários problemas inseridos neste contexto, a principal questão a ser tratada neste trabalho é: dado um sistema Anosov, sob quais condições um subsistema seria também Anosov?

O histórico deste problema se inicia com Hirsch [10] que apresentou em 1970 a seguinte pergunta mais geral: sejam M uma variedade fechada (compacta, suave, conexa e sem bordo), $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^1 e N uma subvariedade fechada de M tal que N é um conjunto hiperbólico para f , então $f|_N$ é Anosov? R. Mañé [17] caracterizou tais sistemas e os chamou de *quase Anosov*. Franks e Robinson [8] responderam negativamente a pergunta de Hirsch com um exemplo de um difeomorfismo quase Anosov f em uma variedade tridimensional que não é Anosov (esta é a dimensão mínima, porque em variedades bidimensionais a resposta é positiva). Isso encerra a questão de Hirsch como colocada acima.

Por outro lado, pode-se considerar a condição mais forte de um sistema (M, ϕ) ser Anosov (onde, ϕ é fluxo ou difeomorfismo). Neste caso, o fibrado tangente, apresenta a decomposição,

$$TM = E^s \oplus E^\phi \oplus E^u,$$

onde E^s (respectivamente E^u) é o subfibrado estável (respectivamente instável) e E^ϕ é trivial no caso de difeomorfismos ($\dim(E^\phi) = 0$) e é o fibrado tangente unidimensional no caso de fluxos, tal que E^s e E^u são invariantes por $D\phi^t$ para qualquer t ($t \in \mathbb{Z}$ ou $t \in \mathbb{R}$) e existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que para todo $p \in M$ vale

$$|D\phi^t(p)(v)| \leq C\lambda^t|v|, \quad v \in E^s(p), \forall t > 0,$$

$$|D\phi^{-t}(p)(u)| \leq C\lambda^t|u|, \quad u \in E^u(p), \forall t > 0.$$

Dada N uma subvariedade compacta invariante de M . Por causa da hiperbolicidade de M , poderia se esperar que a decomposição (de TM) induza uma decomposição em TN ; ou seja,

$$TN = (E^s \cap TN) \oplus (E^\phi \cap TN) \oplus (E^u \cap TN).$$

É fácil ver que isto é equivalente ao subsistema (N, ϕ) ser do tipo Anosov. Assim, a pergunta (análoga à pergunta de Hirsch) pode ser formulada da seguinte forma: será que um subsistema de um sistema Anosov tem que ser Anosov? Em 1996, Zeghib [30] concluiu que para sistemas Anosov clássicos a resposta seria positiva.

Neste trabalho apresentamos parcialmente este resultado de Zeghib. Para isso, lembramos que um sistema Anosov é dito *splitting* se sua estrutura de produto local é de fato global no recobrimento universal.

Mais especificamente apresentaremos o seguinte teorema, ressaltando que o resultado de Zeghib contempla o caso de fluxos geodésicos em variedades de curvatura negativa.

Teorema A. *Sejam (M, ϕ) um sistema Anosov splitting e N uma subvariedade invariante fechada de classe C^1 (de dimensão não trivial, isto é, 0 para difeomorfismos e 1 para fluxos). Então (N, ϕ) é um sistema Anosov transitivo.*

No [Capítulo 1](#) introduzimos as definições e as propriedades básicas que serão úteis para o desenvolvimento deste trabalho tais como: variedades diferenciáveis, grupo fundamental, espaços de recobrimento, folheações e as noções básicas de sistemas dinâmicos. Como estes resultados são clássicos, quase todas as demonstrações serão omitidas, porém, para aqueles leitores que estão interessados em aprofundar sua leitura deixamos as referências em cada seção.

O [Capítulo 2](#) é dedicado ao estudo dos sistemas dinâmicos com tempo discreto, em geral a dinâmica será sempre um difeomorfismo. O objetivo principal deste capítulo é demonstrar o Teorema [2.8.1](#), para o qual precisamos de definições e propriedades importantes, tais como: conjuntos hiperbólicos, difeomorfismos Anosov, lema de sombreamento, decomposição espectral, não ciclos e quase hiperbolicidade (isto fornece ângulos alternativos para olhar a hiperbolicidade).

No [Capítulo 3](#) damos um esboço da prova do exemplo de Franks e Robinson (Teorema [3.2.1](#)): Um difeomorfismo quase Anosov que não é Anosov.

No [Capítulo 4](#) apresentamos uma série de conceitos e resultados para fluxos (sistemas dinâmicos com tempo contínuo), tais como conjuntos hiperbólicos, Teorema da variedade estável, decomposição espectral e Axioma A de Smale. Por último incluímos fluxos Anosov e fluxos Anosov em recobrimento universal.

O [Capítulo 5](#) dedicamos à prova do Teorema principal, para isso apresentamos algumas propriedades de sistemas Anosov e subvariedades invariantes de sistemas Anosov.

Finalmente listamos 3 problemas que ainda são abertos no estudo de difeomorfismos quase Anosov.

Julián Lázaro Aguirre
Uberlândia-MG, 22 de Fevereiro de 2018.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos básicos, que serão necessários nos capítulos futuros. Na Seção 1.1, definimos as variedades topológicas e diferenciáveis, assim como as variedades riemannianas e o espaço tangente. Na Seção 1.2 introduzimos o conceito de grupo fundamental, espaços de recobrimento e recobrimento universal. Seção 1.3 dedica-se ao estudo da teoria básica de folheações, onde apresentamos o teorema de Frobenius e, por último, na Seção 1.4, definimos os conceitos básicos de sistemas dinâmicos, tais como conjunto limite, conjunto não errante, etc.

As referências principais são [4, 5, 15, 16, 29] e outras que serviram na complementação da teoria foram [1, 9, 25].

1.1 Variedades

Nesta seção vamos ver as noções básicas de variedades topológicas, diferenciáveis e riemannianas. Para mais detalhes veja [5, 15].

Variedades topológicas

Definição 1.1.1 Seja M um espaço topológico. Um *sistema de coordenadas* ou *carta local* em M é um par (U, φ) , onde $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é um homeomorfismo de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Na definição acima, dizemos que m é a dimensão de $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$. Para cada $p \in U$ tem-se $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \varphi_2(p), \dots, \varphi_m(p))$. Os números $\varphi_i = \varphi_i(p)$, $i = 1, 2, \dots, m$ são chamados de *coordenadas* do ponto $p \in M$ no sistema φ .

Definição 1.1.2 Um *atlas* de dimensão m sobre um espaço topológico M é uma coleção \mathcal{A} de sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M cuja união dos domínios U cobre

M . Os domínios U dos sistemas de coordenadas $\varphi \in \mathcal{A}$ são chamados de *vizinhanças coordenadas* de \mathcal{A} .

Definição 1.1.3 (Variedade topológica) Um espaço topológico M munido de um atlas de dimensão m chama-se uma *variedade topológica* de dimensão m .

A definição acima diz, essencialmente, que M é uma variedade topológica de dimensão m se, e somente se, cada ponto de M tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^m .

Definição 1.1.4 Dados os sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico, tais que $U \cap V \neq \emptyset$. O homeomorfismo $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é chamado *mudança de coordenadas*.

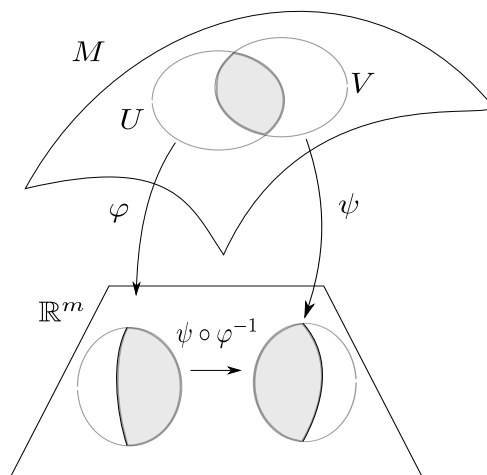


Figura 1.1: Mudança de coordenadas.

Variedades diferenciáveis

Definição 1.1.5 Um atlas \mathcal{A} sobre um espaço topológico M diz-se *diferenciável de classe C^r* ($r \geq 1$) se todas as mudanças de coordenadas do atlas são de classe C^r .

Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$. Denote por $\Phi_{\varphi\psi}$ a mudança de coordenadas. Como $\Phi_{\varphi\psi} = (\Phi_{\psi\varphi})^{-1}$, segue-se que os $\Phi_{\psi\varphi}$ são, de fato, difeomorfismos de classe C^r .

Seja \mathcal{A} um atlas de dimensão m e classe C^r num espaço topológico M . Um sistema de coordenadas $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M diz-se *admissível* relativamente ao atlas \mathcal{A} se, para todo sistema de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, pertencente a \mathcal{A} , com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $\Phi_{\varphi\phi}$ e $\Phi_{\phi\varphi}$ são de classe C^r . Em outras palavras, $\mathcal{A} \cup \phi$ é ainda um atlas de classe C^r em M .

Um atlas \mathcal{A} , de dimensão m e classe C^r , sobre M , diz-se *máximo* quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a \mathcal{A} . Todo atlas de classe C^r em M pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas máximo de classe C^r , basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Definição 1.1.6 (Variedade diferenciável) Uma *variedade diferenciável*, de dimensão m e classe C^r é um par ordenado (M, \mathcal{A}) , onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e \mathcal{A} é um atlas máximo de dimensão m e classe C^r sobre M .

Denotaremos só por M a variedade diferenciável em vez de (M, \mathcal{A}) .

Espaço Tangente.

Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é chamado uma *curva* (diferenciável) em M . Suponhamos que $\alpha(0) = p \in M$, e seja \mathcal{D} o conjunto de funções de M diferenciáveis em p . O *vetor tangente* à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um *vetor tangente* em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de vetores tangentes a M em p será indicado por $T_p M$. Fixando $p \in M$, podemos ver que $T_p M$ é um espaço vetorial.

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e seja

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}.$$

É possível munir o conjunto TM de uma estrutura diferenciável (de dimensão $2m$); com tal estrutura TM é chamado *fibrado tangente* de M . Este é o espaço natural de se trabalhar quando estamos tratando de questões que envolvem posições e velocidades. Note que

$$TM = \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M).$$

Variedades riemannianas

Definição 1.1.7 Uma *métrica riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$.

O *comprimento* ou *norma* do vetor tangente $u \in T_p M$ é definido da maneira óbvia por

$$|u| = \sqrt{g_p(u, u)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_p}.$$

Definição 1.1.8 (Variedade riemanniana) Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana chama-se *variedade Riemanniana*.

Proposição 1.1.1 *É possível definir uma métrica riemanniana de classe C^{r-1} em qualquer variedade M de classe C^r .*

1.2 Grupo fundamental e espaços de recobrimento

Nesta seção vamos introduzir noções sobre grupo fundamental e espaços de recobrimento. Para mais detalhes veja [4, 16].

Grupo fundamental

Seja X um espaço topológico. Definimos um *caminho* em X como sendo uma aplicação contínua $\beta : I \rightarrow X$, onde $I = [0, 1]$. Dedicaremos atenção especial aos *caminhos fechados*: aqueles em que $\beta(0) = \beta(1)$.

Definição 1.2.1 (Homotopia de caminhos) Dados $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ dois caminhos fechados tais que $\alpha(0) = x_0 = \beta(0)$ e $\alpha(1) = x_0 = \beta(1)$. Uma *homotopia* com ponto base x_0 é uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que (ver Figura 1.2)

$$\begin{cases} H(s, 0) = \alpha(s), & H(s, 1) = \beta(s), & \forall s \in I, \\ H(0, t) = H(1, t) = x_0, & \forall t \in I. \end{cases}$$

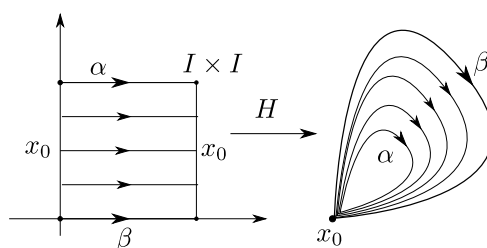


Figura 1.2: Homotopia de caminhos.

Neste caso dizemos que α e β são *homotópicos* e denotamos por $\alpha \cong \beta$.

Seja $x_0 \in X$ fixado, denote por

$$C_{x_0} = \{\alpha : I \rightarrow X : \alpha(0) = x_0 = \alpha(1)\}.$$

É imediato da definição acima que a homotopia é uma relação de equivalência em C_{x_0} , isto é, valem as seguintes propriedades:

- $\alpha \cong \alpha$,

- se $\alpha \cong \beta$, então $\beta \cong \alpha$,
- se $\alpha \cong \beta$ e $\beta \cong \gamma$, então $\alpha \cong \gamma$.

Usamos a notação $[\alpha]$ para designar a classe de homotopia da curva $\alpha \in C_{x_0}$ e $\pi_1(X, x_0)$ para designar o conjunto das classes de homotopia de curvas fechadas $\alpha : I \rightarrow X$ com ponto base x_0 .

Sejam α e β caminhos em X tais que $\alpha(1) = \beta(0)$. Definimos o produto $\alpha\beta$ por

$$\alpha\beta(s) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

O caminho inverso de $\alpha : I \rightarrow X$ é por definição o caminho $\alpha^{-1} : I \rightarrow X$ dado por $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$. O produto definido acima induz naturalmente uma estrutura de grupo em $\pi_1(X, x_0)$ com a seguinte operação:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \\ ([\alpha], [\beta]) & \longmapsto & [\alpha\beta]. \end{array}$$

Isto decorre do seguinte teorema.

Teorema 1.2.1 *Sejam $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Valem as seguintes propriedades:*

- (a) *Se $\alpha' \cong \alpha$ e $\beta' \cong \beta$, então $\alpha\beta \cong \alpha'\beta'$.*
- (b) *Se $\alpha' \cong \alpha$, então $\alpha^{-1} \cong (\alpha')^{-1}$.*
- (c) *$\alpha\alpha^{-1} \cong x_0 = \text{caminho constante}$.*
- (d) *$x_0\alpha \cong \alpha x_0 \cong \alpha$.*
- (e) *$(\alpha\beta)\gamma \cong \alpha(\beta\gamma)$.*

As propriedades (a) e (b) nos dizem que o produto e o inverso estão bem definidos em $\pi_1(X, x_0)$. As propriedades (c), (d) e (e) nos dizem que $\pi_1(X, x_0)$ possui estrutura de grupo com identidade $[x_0] = e$.

Definição 1.2.2 (Simplesmente conexo) Um espaço topológico X é *simplesmente conexo* se, X for conexo por caminhos e $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$.

Esta definição de ser simplesmente conexo independe do ponto base x_0 escolhido. Isto encerra nossa pequena discussão sobre grupo fundamental.

Espaços de recobrimento

Sejam X e Y espaços topológicos.

Definição 1.2.3 (Espaço de recobrimento) Uma aplicação $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ chama-se *aplicação de recobrimento* (ou, simplesmente, um *recobrimento*) quando para cada ponto $p \in X$ existe um aberto $U \subset X$, tal que $p \in U$ e $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ é união de abertos U_{α} , dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica homeomorficamente sobre U por π ($\pi|_{U_{\alpha}} : U_{\alpha} \rightarrow U$ é um homeomorfismo para todo α). Ver figura 1.3.

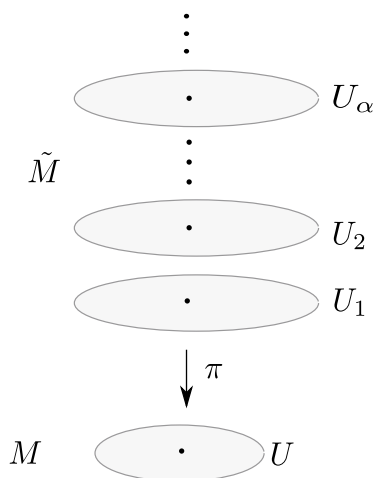


Figura 1.3: Recobrimento.

Da definição anterior, cada aberto U desse tipo chama-se uma *vizinhança distinguida*. O espaço \tilde{X} chama-se um *espaço de recobrimento* de X e, para cada $p \in X$, o conjunto discreto $\pi^{-1}(p)$ chama-se a *fibra* sobre p . As vezes, X chama-se a *base de recobrimento*.

Uma aplicação de recobrimento $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local de \tilde{X} sobre X .

Definição 1.2.4 (Levantamento de caminhos) Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento e $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho. Dizemos que $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ é um levantamento de α se $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

Analogamente, dado uma aplicação contínua $f : Y \rightarrow X$, dizemos que $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ é um levantamento de f se $\pi \circ \tilde{f} = f$.

Teorema 1.2.2 (Levantamento de caminhos) *Sejam $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento e $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho tal que $\alpha(0) = x_0$. Então existe um único caminho $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ que levanta α e $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. O ponto \tilde{x}_0 é chamado ponto base de $\tilde{\alpha}$.*

Definição 1.2.5 (Recobrimento universal) Dizemos que $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é um *recobrimento universal* de X se, $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ for um recobrimento e \tilde{X} for simplesmente conexo.

Dois recobrimentos universais de um mesmo espaço são homeomorfismos, ou seja, podemos sempre nos referir ao recobrimento universal sem restrição.

Dizemos que um espaço X é *localmente simplesmente conexo* se a topologia de X possui uma base constituída de abertos simplesmente conexos. Um resultado importante na teoria dos recobrimentos é seguinte:

Teorema 1.2.3 *Todo espaço conexo, localmente conexo por caminhos e localmente simplesmente conexo possui um recobrimento universal.*

Como nosso estudo baseia-se principalmente no caso onde M é uma variedade diferenciável fechada (compacta, conexa, suave e sem bordo), pelo Teorema 1.2.3, M possui um recobrimento universal, que também denotamos por \tilde{M} .

Lema 1.2.1 *\tilde{M} é uma variedade diferenciável de mesma classe de diferenciabilidade de M .*

Demonstração. Seja $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ e $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$, como π é um homeomorfismo local, definimos uma carta de \tilde{M} em uma vizinhança \tilde{U}_1 de \tilde{x}_0 como sendo $(\tilde{U}_1, \tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 \circ \pi)$, onde (U_1, φ_1) é uma carta local de M em torno de $\pi(\tilde{x}_0)$.

Falta ver a diferenciabilidade, para isto, seja (U_2, φ_2) outra carta ao redor de $\pi(\tilde{x}_0)$, tal que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, e seja também $(\tilde{U}_2, \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 \circ \pi)$ outra carta de \tilde{M} em torno de \tilde{x}_0 tal que, $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 \neq \emptyset$, então uma mudança de coordenadas em relação a $\tilde{\varphi}_1$ e $\tilde{\varphi}_2$ é da forma

$$h = \tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} = \varphi_2 \circ \pi \circ \pi^{-1} \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$$

que por definição de M é de classe C^r . ■

1.3 Noções básicas da teoria das folheações

Nessa seção, veremos alguns resultados e definições a respeito de folheações numa variedade. Para maiores detalhes veja [4].

Uma folheação de dimensão n de uma variedade diferenciável M de dimensão m (onde, $0 \leq n \leq m$) é, a grosso modo, uma decomposição de M em subvariedades conexas de dimensão n chamadas folhas, as quais se aglomeram localmente como subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ com segunda coordenada constante.

Definição 1.3.1 Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^∞ . Uma *folheação* de classe C^r e dimensão n de M , é um atlas máximo \mathcal{F} de classe C^r em M com as seguintes propriedades:

- (i) Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos em \mathbb{R}^n e de \mathbb{R}^{m-n} respectivamente.

- (ii) Se (U, φ) e $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é da seguinte forma,

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)).$$

Dizemos também que M é folheada por \mathcal{F} , ainda que \mathcal{F} é uma estrutura folheada de dimensão n e classe C^r de M .

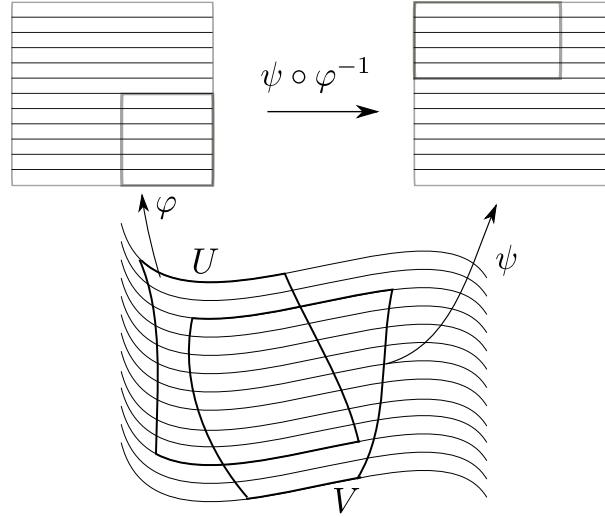


Figura 1.4: Aspecto local de uma variedade bidimensional folheada por uma folheação unidimensional.

Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^r e de dimensão n , $0 < n < m$ de uma variedade M de dimensão m . Consideremos uma carta local (U, φ) de \mathcal{F} tal que

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados *placas* de U , ou ainda placas de \mathcal{F} . Fixado $c \in U_2$, a aplicação $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ é um mergulho de classe C^r , portanto as placas são subvariedades conexas de dimensão n e classe C^r de M . Além disto, se α e β são placas em U então $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ou $\alpha = \beta$.

Um *caminho de placas* de \mathcal{F} é uma sequência $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ de placas de \mathcal{F} tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Como M é recoberta pelas placas de \mathcal{F} , podemos definir em M a seguinte relação de equivalência: $p \sim q$ se existe um caminho de placas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. As classes de equivalência da relação \sim são chamadas as *folhas* de \mathcal{F} . O *espaço das folhas* de \mathcal{F} , M/\mathcal{F} , é o espaço quociente de M pela relação de equivalência \sim , que identifica dois pontos de M se eles estão na mesma folha de \mathcal{F} .

Observação 1.3.1 Da definição de folha, segue que uma folha de \mathcal{F} é um subconjunto

de M conexo por caminhos. Outro fato importante é que toda folha F de \mathcal{F} possui uma estrutura de variedade C^r de dimensão n naturalmente induzida pelas cartas de \mathcal{F} .

Teorema de Frobenius.

Antes de enunciar o teorema vamos fixar algumas notações. Lembramos que um campo de vetores de classe C^r ($r \geq 0$) em M é uma aplicação de classe C^r , $X : M \rightarrow TM$, tal que $\pi \circ X = \text{identidade de } M$, onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção natural do fibrado tangente.

Sejam X e Y dois campos definidos num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. O colchete de Lie entre X e Y é o campo de vetores $[X, Y]$ dado por

$$[X, Y](q) = DY(q).X(q) - DX(q).Y(q), \quad q \in U.$$

Um *campo de k -planos* numa variedade M é uma aplicação P que associa cada ponto $q \in M$ um subespaço vetorial de dimensão k de $T_q M$. Dizemos que um campo de k -planos P em M é de classe C^r se para todo $q \in M$, existem k campos de vetores C^r , X_1, \dots, X_k , definidos numa vizinhança V tais que para todo $x \in V$, $\{X_1(x), \dots, X_k(x)\}$ é uma base de $P(x)$. Um conceito equivalente a campos de k -planos é o de subfibrado, isto é, um C^r -subfibrado de dimensão k do fibrado TM nada mais é que um campo de k -planos de classe C^r em M . Dado um campo de k -planos P em M , dizemos que o campo de vetores X é tangente a P se $X(q) \in P(q)$ para todo q no domínio de X .

Definição 1.3.2 Um campo de k -planos P de classe C^r ($r \geq 1$) é chamado *involutivo*, se dados X e Y campos de classe C^1 tangentes a P , então $[X, Y]$ é tangente a P . Dizemos que P é *completamente integrável* se existe uma folheação \mathcal{F} de dimensão k e classe C^r em M tal que $T\mathcal{F} = P$, onde $T\mathcal{F}$ é o campo de planos tangentes a \mathcal{F} .

Note que, toda folheação \mathcal{F} de dimensão k e classe C^r ($r \geq 1$), definem um campo de k -planos de classe C^{r-1} em M . Logo, se M não admite campos contínuos de k -planos, então M não tem folheações de dimensão k . Será que dado um campo de k -planos P em M , existe uma folheação \mathcal{F} de dimensão k tal que, para todo $q \in M$, $T_q \mathcal{F} = P(q)$? A resposta é dada pelo *Teorema de Frobenius*.

Teorema 1.3.1 (Frobenius) *Seja P um campo de k -planos de classe C^r ($r \geq 1$) definido em M . Então P é completamente integrável se, e somente se, é involutivo. Além disto, se alguma destas condições se verificar, a folheação tangente a P é única.*

1.4 Noções básicas de sistemas dinâmicos

O cenário para o estudo de sistemas dinâmicos envolve um espaço, tempo e uma evolução do tempo.

1. **Espaço de fase.** Este é um conjunto com alguma estrutura adicional, cujos elementos ou pontos representam possíveis estados do sistema. As estruturas mais básicas são uma medida, uma topologia ou uma estrutura diferencial de dimensão finita.
2. **Tempo.** O tempo pode ser *discreto* ou *contínuo* e pode ser reversível ou irreversível, isto é, parametrizado por um grupo ou um semigrupo. Novamente, é importante que esse grupo (semi-grupo) não seja muito grande.

No caso de tempo discreto, a ação é definida por iterações de um único gerador, então essa própria aplicação geralmente é referido como o sistema dinâmico. No caso de tempo contínuo, o sistema dinâmico é chamado de *fluxo* ou *semi-fluxo*, respectivamente.

3. **Evolução do tempo.** A lei de evolução do tempo é representada pela ação do tempo, dada pelo grupo ou semi-grupo G , no espaço de fase X , isto é, uma aplicação $\varphi : G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto \varphi(g, x) = \varphi^g(x)$ tal que

$$\varphi^e = \text{Id} \text{ e } \varphi^{g_1 g_2} = \varphi^{g_1} \circ \varphi^{g_2}, \text{ para todo } g_1, g_2 \in G.$$

Agora, vejamos alguns resultados com nosso espaço de fase um espaço topológico. Seja X um espaço topológico e $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo. A família gerada por homeomorfismo, é chamado de *iteradas* de f , e escrevemos como

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-vezes}}, \quad f^0 = \text{id}, \quad f^{-n} = (f^n)^{-1}.$$

Note que $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ para qualquer $m, n \in \mathbb{Z}$. Chamamos a família $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ um *sistema dinâmico com tempo discreto*, ou simplesmente chamamos a f um *sistema dinâmico*. Isto é, no caso de tempo discreto, um sistema dinâmico é simplesmente uma aplicação. Mais detalhes sobre isto será estudado no Capítulo 2.

Consideremos o caso do tempo contínuo. A família de aplicações $\phi^t : X \rightarrow X$ para $t \in \mathbb{R}$ tal que $\phi^0 = \text{Id}$ e

$$\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

é chamado de *fluxo*. Nós também dizemos que uma família de mapas ϕ^t é um *sistema dinâmico com tempo contínuo* ou simplesmente um *sistema dinâmico*. Note que

$$\phi^t \circ \phi^{-t} = \phi^{-t} \circ \phi^t = \phi^0 = \text{Id}$$

e assim, cada mapa ϕ^t é inversível e o inverso é dado por $(\phi^t)^{-1} = \phi^{-t}$. Mais detalhes sobre fluxos será estudado no Capítulo 3.

Note que podemos relacionar sistemas dinâmicos com tempo discreto e sistemas dinâmicos com tempo contínuo. Vejamos algumas relações.

Dado um fluxo $\phi^t : X \rightarrow X$, para cada $T \in \mathbb{R}$, a aplicação $f = \phi^T : X \rightarrow X$ é um sistema dinâmico com tempo discreto. Note que, f é inversível e que o inverso é dado por $f^{-1} = \phi^{-T}$.

Dado um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$, também podemos construir um fluxo, chamado o *fluxo suspensão*, o qual estudamos com mais detalhe no Capítulo 3.

Agora vejamos algumas noções só para sistemas dinâmicos com tempo discreto.

Órbita. Para qualquer $x \in X$, o conjunto $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é chamado de *órbita* de x sobre f , e denotamos por $\mathcal{O}(x, f)$ ou simplesmente por $\mathcal{O}(x)$. Ver Figura 1.5.

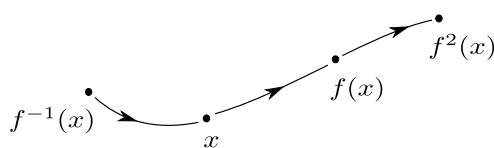


Figura 1.5: Órbita.

Os conjuntos $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{f^{-n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são chamados de *órbita positiva* e *órbita negativa* de x sobre f , e denotamos por $\mathcal{O}^+(x)$ e $\mathcal{O}^-(x)$, respectivamente.

Ponto periódico: Um ponto $x \in X$ é chamado *periódico* se existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = x$. O menor inteiro n que satisfaz esta igualdade é chamado o período de x .

A órbita de um ponto periódico é chamado de *órbita periódica*. Pontos periódicos de período 1 são *pontos fixos*. Note que é fácil ver que $x \in X$ é periódico se, e somente se, $\mathcal{O}(x)$ consiste de número finito de pontos. Denotamos o conjunto de pontos periódicos de f por $\text{Per}(f)$ e o conjunto de pontos fixos de f por $\text{Fix}(f)$.

Conjunto invariante: Um subconjunto $\Lambda \subset X$ é chamado *invariante* sobre f , se $f(\Lambda) = \Lambda$. Qualquer órbita é invariante.

ω -limite: Um ponto $y \in X$ é chamado de *ω -ponto limite* de $x \in X$, se existe uma subsequência $n_i \rightarrow +\infty$ de inteiros positivos tal que $f^{n_i}(x) \rightarrow y$. O conjunto de *ω -pontos limite* de x é chamado de conjunto *ω -limite* de x .

α -limite: Um ponto $y \in X$ é chamado de *α -ponto limite* de $x \in X$, se existe uma subsequência $n_i \rightarrow +\infty$ de inteiros positivos tal que $f^{-n_i}(x) \rightarrow y$. O conjunto de *α -pontos limite* de x é chamado de conjunto *α -limite* de x .

Note que $\alpha(x) = \omega(x, f^{-1})$ e se $x \in \text{Per}(f)$, então $\alpha(x) = \omega(x) = \mathcal{O}(x)$. Além disso, se X é compacto, $\omega(x) \neq \emptyset$.

Conjunto limite: O conjunto

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x) \cup \alpha(x)},$$

é chamado *conjunto limite* de f . Note que $L(f)$ é invariante. Se X é compacto, então $L(f)$ é diferente de vazio e compacto.

Conjunto não errante: Um ponto $x \in X$ é chamado *não errante* sobre f , se para qualquer vizinhança V de x em X , existe $n \geq 1$ tal que $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. Em outras palavras, para qualquer vizinhança V de x em X , existe alguma órbita que volta a V pelo menos duas vezes. Ver Figura 1.6. O conjunto de pontos não errantes de f é chamado *conjunto não errante* de f , o qual denotamos por $\Omega(f)$. Se X é compacto, então $\Omega(f)$ é não vazio, compacto e invariante.

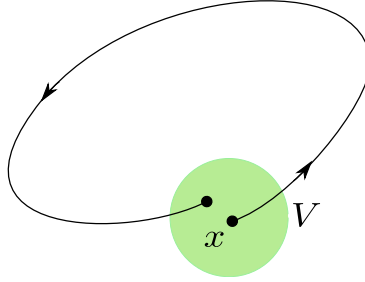


Figura 1.6: Ponto não errante x .

Conjunto recorrente por cadeias: Por uma ϵ -cadeia de x a y , nos referimos a uma sequência finita x_0, x_1, \dots, x_k com $x_0 = x$ e $x_k = y$ tal que

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon$$

para $n = 0, 1, \dots, k - 1$. Um ponto $x \in X$ é dito *recorrente por cadeias* de f se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um ϵ -cadeia de x a x , ou equivalentemente, se existe uma ϵ -cadeia periódica passando por x . O conjunto de pontos recorrentes por cadeias de f é chamado de *conjunto recorrente por cadeias* de f , e denotamos por $RC(f)$.

Se X é compacto, podemos mostrar que $RC(f)$ é compacto, invariante e

$$Per(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset RC(f). \quad (1.1)$$

Dois pontos $x, y \in RC(f)$ são ditos *equivalentes por cadeia*, denotado por $x \sim y$, se para qualquer $\epsilon > 0$, existem uma ϵ -cadeia de x a y e uma ϵ -cadeia de y a x . Isto é uma relação de equivalência em $RC(f)$. Cada classe de equivalência é chamada uma *classe de cadeias* de f . Cada classe de cadeias é compacta e f -invariante.

A proposição seguinte diz, essencialmente, que quando $\epsilon \rightarrow 0$, ϵ -cadeias periódicas passando por um ponto de uma classe de cadeias é forçada a se reunir em torno de uma classe de cadeias.

Proposição 1.4.1 *Seja C uma classe de cadeias de f . Então para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $x \in C$, qualquer δ -cadeia periódica passando por x está contida em uma ϵ -vizinhança $B(C, \epsilon)$ de f .*

Demonstração. Suponhamos por contradição, que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para qualquer $n \geq 1$, existe $x_0^n \in C$ e uma $1/n$ -cadeia periódica

$$x_0^n, x_1^n, \dots, x_{j_n}^n$$

tal que $x_{k_n}^n \notin B(C, \epsilon_0)$ para algum k_n . Tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $x_0^n \rightarrow x$, $x_{k_n}^n \rightarrow y$. Então x é equivalente por cadeia a y . Mas $x \in C$ e $y \notin C$, isto é uma contradição. ■

CAPÍTULO 2

DIFEOMORFISMOS

Neste capítulo apresentaremos uma série de resultados e, salvo menção contrária nosso espaço de fase envolvido será uma variedade riemanniana compacta, conexa e suave, ou simplesmente uma variedade fechada (compacta, conexa, suave e sem bordo), isto devido à Proposição 1.1.1.

Na Seção 2.1 vemos algumas definições e notações tais como conjunto isolado, ponto fixo hiperbólico, etc. Na Seção 2.2 damos a definição de um conjunto hiperbólico (ela é a ideia central da dinâmica hiperbólica) para difeomorfismos, estrutura de produto local e algumas propriedades. Também damos o *Teorema da variedade estável* para difeomorfismos. Seção 2.3 dedica-se ao estudo introdutório de difeomorfismos Anosov. Relacionamos as folheações estáveis e instáveis com as variedades estáveis e instáveis, respectivamente. Na Seção 2.4 introduzimos *shadowing lemma de Bowen*, também veremos importantes aplicações deste resultado, por exemplo, *Anosov closing lemma*, relação entre conjunto isolado e conjunto hiperbólico com estrutura de produto local, etc. Na Seção 2.5 definimos Axioma A, enunciamos o *Teorema da decomposição espectral* e provamos algumas aplicações dela. Seção 2.6 dedica-se ao estudo introdutório sobre ciclos e não ciclos. Na Seção 2.7 definimos o conjunto quase hiperbólico e mostramos algumas de suas propriedades importantes. E por último na Seção 2.8 definimos difeomorfismos quase Anosov e mostramos o resultado principal deste capítulo, o Teorema 2.8.1.

As referências principais são [7, 8, 14, 17, 23, 26, 28, 29] e outras que serviram na complementação da teoria foram [6, 9, 10, 12, 18, 21, 25].

2.1 Introdução

Nessa seção vamos lembrar a definição clássica de um *difeomorfismo* e alguns resultados. Note que os conceitos dados na Seção 1.3 são válidos também para difeomorfismos, por exemplo, órbita, conjunto não errante, etc.

Definição 2.1.1 Seja M uma variedade compacta. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa é também diferenciável. Um difeomorfismo em que ambas f e f^{-1} são de classe C^r ($r \geq 1$), dizemos que é um difeomorfismo de classe C^r .

Denotemos por $\text{Diff}^r(M)$ o conjunto de difeomorfismos de classe C^r de M , dotado da topologia C^r .

A métrica riemanniana no fibrado tangente TM induz uma métrica em M definindo $d(x, y)$, dado $r > 0$, denotemos,

$$\begin{aligned} d(x, \Lambda) &= \inf\{d(x, y) : y \in \Lambda\} \text{ e} \\ B(\Lambda, r) &= \{x \in M : d(x, \Lambda) \leq r\}. \end{aligned}$$

Vamos definir o conjunto *isolado* num espaço métrico compacto X e para $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo.

Definição 2.1.2 (Conjunto isolado) Um conjunto compacto invariante Λ de f é isolado se existe uma vizinhança U de Λ em X tal que $\Lambda \subset \text{int}(U)$ e

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U).$$

Para finalizar esta seção, vejamos a definição de um ponto fixo hiperbólico. Seja E um espaço de Banach de classe C^k e $f : U \subset E \rightarrow E$ uma aplicação. Suponha que f não seja invertível e não sobrejetora. Seja p o ponto fixo de f e $Df(p)$ a aplicação derivada no ponto p . O *espectro* de $Df(p)$ são os números complexos λ para qual $Df(p) - \lambda I$ não é um isomorfismo,

$$\text{spec}(Df(p)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Df(p) - \lambda I \text{ não é um isomorfismo}\}.$$

Em dimensão finita o espectro de $Df(p)$ são seus autovalores.

Definição 2.1.3 Um ponto fixo p é chamado de *hiperbólico* se

$$\text{spec}(Df(p)) \cap \{\alpha : |\alpha| = 1\} = \emptyset.$$

Por um resultado da *Teoria espectral* existem subespaços E^s e E^u que correspondem a parte do espectro dentro e fora do círculo unitário, respectivamente, e constantes $0 < \mu < 1$ e $\lambda > 1$ tal que $E = E^s \oplus E^u$,

$$\text{spec}(Df(p)|_{E^s}) \subset \{\alpha : |\alpha| < \mu\}, \text{ e } \text{spec}(Df(p)|_{E^u}) \subset \{\alpha : |\alpha| > \lambda\}.$$

Em espaços de dimensão finita, E^s é gerado por autovetores correspondentes a autovalores de norma menor que 1, analogamente E^u é gerado por autovetores correspondentes a autovalores de norma maior que 1.

Note que, $Df(p)|_{E^s}$ e $Df(p)|_{E^u}$ são isomorfismos em E^s e E^u , respectivamente. Além disso, existe $C > 0$ tal que

$$\|Df^n(p)|_{E^s}\| < C\mu^n \quad \text{e} \quad \|Df^{-n}(p)|_{E^u}\| < C\lambda^{-n}.$$

Os subespaços E^s e E^u são chamados *subespaços estáveis* e *instáveis* para o ponto fixo p , respectivamente.

2.2 Conjuntos hiperbólicos

Nesta seção recordamos a definição de *conjunto hiperbólico* para difeomorfismos, este conceito é a ideia central da dinâmica hiperbólica, sua definição é tradicionalmente dada em termos das iteradas da diferencial em cada ponto do conjunto, de fato, ela nos diz, que o espaço tangente dos pontos de um conjunto hiperbólico se decompõe como soma direta de dois subespaços, um dos quais contrai e outro expande vetores desse conjunto.

Definição 2.2.1 (Conjunto Hiperbólico) Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo definido numa variedade compacta M . Um subconjunto invariante $\Lambda \subset M$ de f é dito hiperbólico se, para cada ponto $x \in \Lambda$ tem-se:

- (i) O espaço tangente $T_x M$ se decompõe em uma soma direta de $E^s(x)$ e $E^u(x)$, isto é,

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x),$$

onde $E^s(x)$ e $E^u(x)$ varia continuamente para $x \in \Lambda$.

- (ii) A decomposição é Df -invariante, isto é,

$$Df(x)(E^s(x)) = E^s(f(x)) \quad \text{e} \quad Df(x)(E^u(x)) = E^u(f(x)).$$

- (iii) Existem constantes $C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ independentes de x tais que para todo $n \geq 0$,

$$|Df^n(x)(v)| \leq C\lambda^n |v|, \quad \text{para todo } v \in E^s(x),$$

$$|Df^{-n}(x)(v)| \leq C\lambda^n |v|, \quad \text{para todo } v \in E^u(x).$$

Observação 2.2.1 Na Definição 2.2.1 (conjunto hiperbólico) item (i), dizer que os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ varia continuamente para $x \in \Lambda$, significa que dado uma sequência $x_n \in \Lambda$ tal que $x_n \rightarrow x$, temos que $E^s(x_n) \rightarrow E^s(x)$ e $E^u(x_n) \rightarrow E^u(x)$, quando $n \rightarrow \infty$.

De fato, podemos extrair uma subsequência x_{n_k} de x_n tal que $\dim(E^s(x_{n_k})) = j$ para algum j . Seja $\{v_k^1, v_k^2, \dots, v_k^j\}$ uma base ortonormal de $E^s(x_{n_k})$ e $\{v_k^{j+1}, v_k^{j+2}, \dots, v_k^n\}$ uma base ortonormal de $E^u(x_{n_k})$. Podemos supor (se for necessário, podemos tomar uma

subsequência) que $v_k^i \rightarrow v^i$ e portanto $\{v^1, v^2, \dots, v^j\}$ e $\{v^{j+1}, v^{j+2}, \dots, v^n\}$ são conjuntos ortonormais de $T_x M$. Seja $E = \langle v^1, v^2, \dots, v^j \rangle$ e $F = \langle v^{j+1}, v^{j+2}, \dots, v^n \rangle$. Note que, escolhendo $v_k \in E^s(x_{n_k})$, $|v_k| = 1$ tal que $v_k \rightarrow v$ e fixando $m \geq 0$ temos que

$$|Df^m(x)(v)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |Df^m(x_{n_k})(v_k)| \leq C\lambda^m.$$

Isto mostra que $E \subset E^s(x)$. Analogamente, $F \subset E^u(x)$. Em particular $E \cap F = \{0\}$ e portanto $E = E^s(x)$ e $F = E^u(x)$. Provamos que qualquer subespaço limite de $E^s(x_n)$ e de $E^u(x_n)$ necessariamente são $E^s(x)$ e $E^u(x)$.

Exemplo 2.2.1 Se Λ é hiperbólico e $u \in E^s, v \in E^u$ então para $n \geq 0$, temos

$$|Df^{-n}(u)| \geq \frac{1}{C}\lambda^{-n}|u| \quad \text{e} \quad |Df^n(v)| \geq \frac{1}{C}\lambda^{-n}|v|.$$

Em particular, para todo $v \neq 0$, $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |Df^n(v)| = \infty$.

De fato, note que dado $u \in E^s$,

$$|u| = |Df^n(Df^{-n}(u))| \leq C\lambda^n |Df^{-n}(u)| \Rightarrow |Df^{-n}(u)| \geq \frac{1}{C}\lambda^{-n}|u|.$$

Por outro lado, como $\lambda < 1$, então $\lambda^{-n} > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, assim, $\lambda^{-n} \rightarrow \infty$. Logo para $0 \neq u \in E^s$,

$$\infty = \sup \frac{1}{C}\lambda^{-n}|u| \leq \sup |Df^{-n}(u)|.$$

Análogo para $0 \neq v \in E^u$. Portanto, para todo $v \neq 0$, $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |Df^n(v)| = \infty$.

Para $x \in \Lambda$, denote $Df(x)(v) = Df(v)$. Na seguinte proposição veremos a caracterização de E^s e E^u .

Proposição 2.2.1 *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f com a decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. Para qualquer $x \in \Lambda$, $E^s(x)$ é caracterizado por*

$$E^s(x) = \{v \in T_x M : |Df^n(v)| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}, \quad (2.1)$$

e $E^u(x)$ é caracterizado por

$$E^u(x) = \{v \in T_x M : |Df^{-n}(v)| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}. \quad (2.2)$$

Demonstração. Seja $A(x) = \{v \in T_x M : |Df^n(v)| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}$. Para qualquer $x \in \Lambda$, queremos mostrar que $E^s(x) \subset A(x)$. Seja $v \in E^s(x)$, então por (iii) temos,

$$|Df^n(v)| \leq C\lambda^n |v|.$$

Como $0 < \lambda < 1$, fazendo $n \rightarrow +\infty$ segue-se que $\lambda^n \rightarrow 0$. Daí, $|Df^n(v)| \rightarrow 0$. Logo $v \in A(x)$, mostrando que $E^s(x) \subset A(x)$.

Vejamos que $A(x) \subset E^s(x)$. Suponhamos que existe $v \in A(x)$ tal que $v \notin E^s(x)$, então $v \neq 0$. Logo

$$|Df^n(v)| \rightarrow \infty$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Contradizendo a definição de $A(x)$. Logo $A(x) \subset E^s(x)$. Portanto, $E^s(x) = A(x)$. Analogamente, mostra-se a caracterização de $E^u(x)$. ■

Apresentamos agora o enunciado do Teorema da Variedade Estável e Instável. A prova pode ser visto em [14], Theorem 6.4.9, página 267.

Teorema 2.2.1 (Variedade Estável e Instável) *Seja Λ um conjunto hiperbólico, então para cada $p \in \Lambda$ existem variedades locais de classe C^r mergulhadas $W_\epsilon^s(p)$ e $W_\epsilon^u(p)$ tangentes aos subfibrados estáveis e instáveis respectivamente e que satisfazem*

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y), \quad x, y \in W_\epsilon^s(p),$$

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \lambda^n d(x, y), \quad x, y \in W_\epsilon^s(p),$$

onde $0 < \lambda < 1$.

Definimos as variedades estável e instável de $p \in \Lambda$ como

$$W^s(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(W_\epsilon^s(f^n(p))) \quad \text{e} \quad W^u(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(W_\epsilon^u(f^{-n}(p))).$$

Para $p \in M$ e $f \in \text{Diff}^r(M)$ as variedades estável e instável são dados por,

$$W^s(p) = \{y \in M : d(f^n(p), f^n(y)) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\} \text{ e}$$

$$W^u(p) = \{y \in M : d(f^n(p), f^n(y)) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow -\infty\},$$

respectivamente, onde $d(\cdot, \cdot)$ é a métrica riemanniana em M e dado $\epsilon > 0$, as variedades estável local e instável local são caracterizados também por

$$W_\epsilon^s(p) = \{y \in M : d(f^n(p), f^n(y)) < \epsilon, \text{ para todo } n \geq 0\} \text{ e}$$

$$W_\epsilon^u(p) = \{y \in M : d(f^n(p), f^n(y)) < \epsilon, \text{ para todo } n \leq 0\},$$

respectivamente.

A continuação definimos a *estrutura de produto local* de um conjunto hiperbólico.

Estrutura de produto local. Dados $x, y \in \Lambda$. Dizemos que um conjunto hiperbólico Λ de f , têm *estrutura de produto local*, se existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$, então $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$ é um único ponto em Λ denotado por $[x, y]$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

2.3 Difeomorfismos Anosov

Estudaremos os *difeomorfismos Anosov*, os quais são globalmente hiperbólicos e possui uma dinâmica rica, são paradigmas do comportamento hiperbólico.

Definição 2.3.1 (Difeomorfismos Anosov) Um difeomorfismo f em M é Anosov se M é hiperbólico para f .

A aplicação $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ induzida por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é um exemplo clássico de difeomorfismo Anosov.

Como $\det(A) = 1$ e as entradas da matriz A são inteiros, temos que $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. Temos em coordenadas, $f_A(u, v) = (2u + v, u + v)$. Definimos a relação de equivalência em \mathbb{R}^2 por: $(u, v) \sim (u', v')$ se $(u - u', v - v') \in \mathbb{Z}^2$. Daí, $f_A(u, v) \sim f_A(u', v')$. Assim, existe um difeomorfismo $\hat{f}_A : T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \rightarrow T^2$, que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ T^2 & \xrightarrow{\hat{f}_A} & T^2 \end{array}$$

Aqui $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ é a projeção natural.

Proposição 2.3.1 \hat{f}_A é Anosov.

Demonstração. Basta mostrar que f_A é um difeomorfismo Anosov. Note que π é difeomorfismo local (pois π é aplicação projeção). Como as derivadas da matriz associada a f_A diferem apenas por isomorfismos, então vamos calcular os autovalores de A . Temos

$$\lambda_u = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Logo, $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$. Seja E_0^σ o auto-espaços associados a λ_σ ($\sigma = s, u$). Para qualquer $z \in \mathbb{R}^2$, temos,

$$E_z^\sigma = z + E_0^\sigma, \quad \sigma = s, u.$$

Como $\mathbb{R}^2 = E_0^s \oplus E_0^u$, temos $T_z \mathbb{R}^2 = E_z^s \oplus E_z^u$, $\forall z \in \mathbb{R}^2$, e

$$\begin{aligned} Df_A(z)(E_z^\sigma) &= f_A(z + E_0^\sigma) = f_A(z) + f_A(E_0^\sigma) \\ &= f_A(z) + E_0^\sigma = E_{f_A(z)}^\sigma \\ \therefore T\mathbb{R}^2 &= E^s \oplus E^u \text{ é invariante.} \end{aligned}$$

Para finalizar, fixe $v_z^\sigma \in E_z^\sigma$. Então $v_z^\sigma = z + v_0^\sigma$ para algum $v_0^\sigma \in E_0^\sigma$ e $\|v_z^\sigma\|_z = \|v_0^\sigma\|$, onde $\|\cdot\|_z$ é alguma norma em $T_z\mathbb{R}^2$. Além disso,

$$Df_A(z)(v_z^\sigma) = f_A(z + v_0^\sigma) = f_A(z) + f_A(v_0^\sigma) = f_A(z) + \lambda_\sigma \cdot v_0^\sigma.$$

Logo,

$$\|Df_A(z)(v_z^\sigma)\|_{f_A} = \lambda_\sigma \|v_0^\sigma\| = \lambda_\sigma \|v_z^\sigma\|_z.$$

Provando que E^s contrai e E^u expande. ■

Os difeomorfismos Anosov estão sempre acompanhados de duas folheações, chamadas de folheações estáveis e instáveis. Na Seção 1.3 estudamos noções sobre folheações que são muito importante para entender os difeomorfismos Anosov.

Considere uma folheação \mathcal{F} de classe C^r de dimensão n de uma variedade M de dimensão m . Em cada ponto $x \in M$, o espaço tangente da folha passando por x é um subespaço do espaço tangente $T_x M$. Eles definem um C^r -subfibrado de TM de dimensão n , chamado *fibrado tangente* de \mathcal{F} e denotado por $T\mathcal{F}$.

Temos a decomposição do fibrado tangente TM para um f difeomorfismo Anosov numa variedade compacta M , $TM = E^s \oplus E^u$. Enunciamos o seguinte teorema, o qual associa as folheações com difeomorfismos Anosov. Uma prova formal pode ser encontrado em [11].

Teorema 2.3.1 E^σ é integrável, onde $\sigma = s, u$.

Assim, pelo Teorema 2.3.1, E^s e E^u da definição de difeomorfismo Anosov f são integráveis e definem folheações \mathcal{F}^s (folheação estável tangente a E^s) e \mathcal{F}^u (folheação instável tangente a E^u) respectivamente (uma demonstração pode ser vista em [14]). Denotemos por $\mathcal{F}^\sigma(x)$ ($\sigma = s, u$) uma folha passando por x .

Pela Df -invariância do fibrado E^σ e a unicidade da folheação tangente a E^σ , temos que as folheações \mathcal{F}^σ são invariantes pelo difeomorfismo f , ou seja, $f(\mathcal{F}^\sigma(x)) = \mathcal{F}^\sigma(f(x))$.

As folheações \mathcal{F}^s e \mathcal{F}^u são caracterizados por:

$$\mathcal{F}^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

e

$$\mathcal{F}^u(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow -\infty\}.$$

Da caracterização acima, notamos que as folheações estáveis e instáveis na verdade são as variedades estáveis e instáveis, respectivamente, que definimos na Seção 2.3, ou seja, $\mathcal{F}^\sigma(x) = W^\sigma(x)$, $\sigma = s, u$.

2.4 Lema de sombreamento

Nesta seção introduzimos *shadowing lemma de Bowen* e também veremos importantes aplicações deste resultado, por exemplo, *Anosov closing lemma*, etc.

Seja $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo definido em um espaço métrico (X, d) . Fixado $\delta > 0$, uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ em X é chamado uma δ -pseudo órbita de f se, para todo $n \in \mathbb{Z}$ (Ver Figura 2.1),

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta.$$

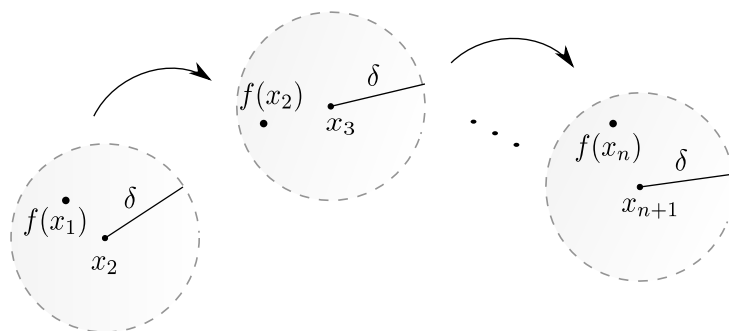


Figura 2.1: Uma δ -pseudo órbita.

Seja $\epsilon > 0$. Dizemos que um ponto $y \in X$ ϵ -sombrea a pseudo-órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ se, para todo $n \in \mathbb{Z}$ (Ver Figura 2.2),

$$d(f^n(y), x_n) < \epsilon.$$

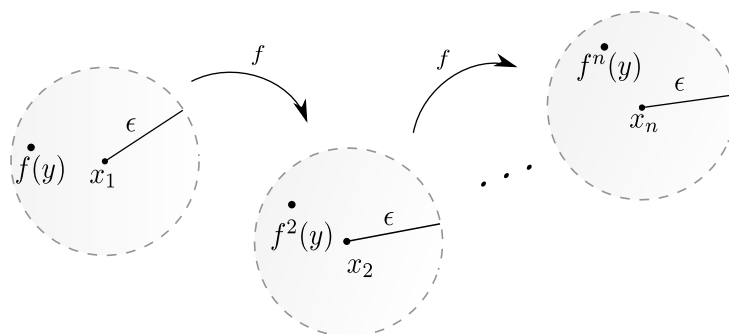


Figura 2.2: Pseudo órbita ϵ -sombreada.

Na sequência enunciamos o *lema de sombreamento*, a prova pode-se ver em [23] Theorem 3.1, página 413. Aqui, salvo menção contrária nosso $f : M \rightarrow M$ vai ser um difeomorfismo de classe C^1 .

Teorema 2.4.1 (Shadowing lemma) *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Então existe $\epsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que toda δ_0 -pseudo órbita em Λ pode ser ϵ_0 -sombreado por um ponto $y \in M$. Além disso, para qualquer $0 < \epsilon < \epsilon_0$, existe $0 < \delta < \delta_0$ tal que toda*

δ -pseudo-órbita em Λ é ϵ -sombreado por um único ponto $y \in M$. E se Λ têm estrutura de produto local, então $y \in \Lambda$.

Observação 2.4.1 Dado qualquer $\delta > 0$, existe $\eta > 0$ tal que para qualquer η -pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ com $d(y_n, x_n) < \eta$, então $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma δ -pseudo órbita.

De fato, como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é η -pseudo órbita para f , então para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \eta.$$

Tome $0 < \eta < \delta/3$. Usando a continuidade uniforme de f , então para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos,

$$\begin{aligned} d(f(y_n), y_{n+1}) &\leq d(f(y_n), f(x_n)) + d(f(x_n), y_{n+1}) \\ &\leq \eta + d(f(x_n), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ &\leq \eta + \eta + \eta < \delta. \end{aligned}$$

Portanto $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma δ -pseudo órbita para f .

Portanto, pela Observação 2.4.1 temos que a “perturbação” de uma pseudo órbita é ainda, uma pseudo órbita. Assim uma pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ no shadowing lemma na verdade não precisa estar em Λ . O seguinte teorema dá esta ligeira melhora.

Teorema 2.4.2 *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que toda η -pseudo órbita na η -vizinhança de Λ é ϵ -sombreada por um ponto.*

Demonstração. Para qualquer $\epsilon > 0$, pelo shadowing lemma, existe um $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo órbita em Λ é $\epsilon/2$ -sombreado por um ponto. Tome $0 < \eta < \epsilon/2$, então pela Observação 2.4.1, qualquer η -pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ com $d(y_n, x_n) < \eta$ implica que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma δ -pseudo órbita, ou seja, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$d(f(y_n), y_{n+1}) < \delta.$$

Agora tome $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ uma η -pseudo órbita na η -vizinhança de Λ . Para cada $n \in \mathbb{Z}$, tome $y_n \in \Lambda$ tal que $d(y_n, x_n) < \eta$. Então $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é δ -pseudo órbita em Λ e é $\epsilon/2$ -sombreado por um ponto z , isto é,

$$d(f^n(z), y_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(f^n(z), x_n) &\leq d(f^n(z), y_n) + d(y_n, x_n) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \eta < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é ϵ -sombreado por z . ■

Outra aplicação importante do shadowing lemma é localizar órbitas periódicas, isto é, *Anosov closing lemma*, o qual diz que, perto de uma “pseudo órbita periódica” em um conjunto hiperbólico, existe uma órbita periódica.

Uma pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é dita *periódica* se existe $m > 0$ tal que $x_n = x_{n+m}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.4.3 (Anosov closing lemma) *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo órbita periódica em Λ é ϵ -sombreado por um ponto periódico.*

Demonstração. Sejam $\epsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ como no shadowing lemma. Tome $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Então pelo shadowing lemma existe $0 < \delta < \delta_0$ tal que toda δ -pseudo órbita em Λ pode ser ϵ -sombreado por um único ponto.

Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ uma δ -pseudo órbita periódica em Λ , tal que para algum $m > 0$, $x_n = x_{n+m}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é ϵ -sombreada por um ponto p , isto é,

$$d(f^n(p), x_n) < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Note que,

$$d(f^{n+m}(p), x_{n+m}) < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como $x_n = x_{n+m}$, temos

$$d(f^n(f^m(p)), x_n) < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ também é ϵ -sombreado por um ponto $f^m(p)$. Logo pela unicidade, temos que $f^m(p) = p$, assim p é periódico. ■

Como consequência dos Teoremas 2.4.2 e 2.4.3, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.4.4 *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que toda η -pseudo órbita periódica na η -vizinhança de Λ é ϵ -sombreado por um ponto periódico.*

O seguinte resultado de fato é um corolário do Anosov closing lemma. Na verdade, também é conhecido como Anosov closing lemma

Teorema 2.4.5 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^1 em uma variedade compacta M .*

(a) *Se $\text{RC}(f)$ é hiperbólico, então $\text{RC}(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.*

(b) *Se $\text{L}(f)$ é hiperbólico, então $\text{L}(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.*

Demonstração. (a) Como $\overline{\text{Per}(f)} \subset \text{RC}(f)$, basta mostrar que $\text{RC}(f) \subset \overline{\text{Per}(f)}$. Seja $x \in \text{RC}(f)$. Para qualquer $\epsilon > 0$, seja $\eta > 0$ a constante garantida pelo Teorema 2.4.4. Pela Proposição 1.4.1, existe $\delta > 0$ tal que qualquer δ -cadeia periódica P_δ através de x está contida na η -vizinhança de $\text{RC}(f)$. Suponha que $\delta < \eta$. Pelo Teorema 2.4.4, P_δ é ϵ -sombreado por um ponto periódico p de f . Assim, $d(x, p) < \epsilon$. Portanto $x \in \overline{\text{Per}(f)}$.

(b) Basta provar que $L(f) \subset \overline{\text{Per}(f)}$. Para isso, é suficiente provar que $\omega(x) \subset \overline{\text{Per}(f)}$ para todo $x \in M$. Seja $y \in \omega(x)$. Dado $\epsilon > 0$, para $\epsilon/2$ tome $\eta > 0$ como no Teorema 2.4.4. Suponhamos que $\eta < \epsilon$. Existem n_1, n_2 suficientemente grandes com $n_1 < n_2$ tal que $f^{n_1}(x), f^{n_2}(x) \in B(y, \eta/2)$ e o arco da órbita de $f^{n_1}(x)$ a $f^{n_2}(x)$ está inteiramente dentro de η -vizinhança de $\omega(x)$. Então

$$f^{n_1}(x), f^{n_1+1}(x), \dots, f^{n_2-1}(x), f^{n_2}(x)$$

é η -cadeia periódica na η -vizinhança de $\omega(x)$ passando por $B(y, \eta/2)$. Pelo Teorema 2.4.4, é $\epsilon/2$ -sombreado por um ponto periódico p de f . Assim

$$\begin{aligned} d(y, p) &\leq d(y, f^{n_1}(x)) + d(f^{n_1}(p), f^{n_1}(x)) \\ &< \frac{\eta}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Logo $y \in \overline{\text{Per}(f)}$. Portanto $L(f) = \overline{\text{Per}(f)}$. ■

Outra aplicação importante do Shadowing lemma é mostrar que se Λ tem estrutura de produto local, então Λ é isolado.

Proposição 2.4.1 *Um conjunto hiperbólico Λ é isolado se, e somente se, Λ tem estrutura de produto local.*

Demonstração. Suponhamos que Λ é isolado, ou seja, existe uma vizinhança U de Λ satisfazendo

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U).$$

Seja $\epsilon > 0$ tal que $d(x, \Lambda) < \epsilon$ para todo $x \in U$. Tome $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $d(x, y) < \delta$ implica que $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y) = [x, y]$ é um ponto, seja z este ponto. Note que se $x, y \in \Lambda$, para $j \geq 0$, temos ($\lambda < 1$),

$$d(f^j(z), \Lambda) \leq d(f^j(z), f^j(x)) \leq \lambda^j d(z, x) < \lambda^j \epsilon < \epsilon,$$

$$d(f^{-j}(z), \Lambda) \leq d(f^{-j}(z), f^{-j}(x)) \leq \lambda^j d(z, x) < \lambda^j \epsilon < \epsilon.$$

Portanto, $f^n(z) \in U$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, segue-se que $z \in \Lambda$.

Reciprocamente, suponha que Λ tem estrutura de produto local. Dados $\epsilon > 0$, tome $\eta > 0$ como no Teorema 2.4.2, tal que toda η -pseudo órbita na η -vizinhança de Λ , denotado

por U , é unicamente ϵ -sombreado. Seja

$$z \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U),$$

então $f^n(z) \in U$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Seja $x_n = f^n(z)$, note que $d(f(x_n), x_{n+1}) = 0 < \eta$. Logo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma η -pseudo órbita em U e é ϵ -sombreado por $y \in \Lambda$. Mas, note que

$$d(f^n(z), x_n) = 0 < \epsilon,$$

ou seja, z também é sombreado por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Portanto, pela unicidade, $z = y \in \Lambda$. A outra inclusão é trivial. ■

Definimos os conjuntos estáveis e instáveis para um subconjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ respectivamente por

$$\begin{aligned} W^s(\Lambda) &= \{x \in M : d(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}, \\ W^u(\Lambda) &= \{x \in M : d(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow -\infty\}. \end{aligned}$$

Proposição 2.4.2 *Valem as seguintes propriedades:*

- (a) Para qualquer $x \in M$, temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), \omega(x)) = 0$.
- (b) $x \in W^s(\Lambda)$ se, e somente se, $\omega(x) \subset \Lambda$.

Demonstração. (a) Suponhamos que a igualdade não é verdade. Então existe $\epsilon_0 > 0$ e uma subsequência $n_i \rightarrow +\infty$ tal que $d(f^{n_i}(x), \omega(x)) \geq \epsilon_0$ para todo i . Tomando subsequência n_{i_k} , temos $f^{n_{i_k}}(x) \rightarrow y \notin \omega(x)$. Mas, por definição de $\omega(x)$, temos que $y \in \omega(x)$. Contradição.

(b) Suponha que $\omega(x) \subset \Lambda$, temos

$$d(f^n(x), \Lambda) \leq d(f^n(x), \omega(x)) + d(\omega(x), \Lambda).$$

Fazendo, $n \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima e usando item (a), temos que, $d(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0$. Logo $x \in W^s(\Lambda)$.

Reciprocamente, suponha que $x \in W^s(\Lambda)$, então $d(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Devemos mostrar que $\omega(x) \subset \Lambda$. Seja $y \in \omega(x)$, então existe uma sequência $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $n_i \rightarrow +\infty$ e $f^{n_i}(x) \rightarrow y$, quando $i \rightarrow +\infty$. Temos,

$$d(y, \Lambda) \leq d(y, f^{n_i}(x)) + d(f^{n_i}(x), \Lambda).$$

Fazendo, $i \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima, temos que, $d(y, \Lambda) = 0$. Como Λ é compacto, segue que $y \in \Lambda$. Portanto, $\omega(x) \subset \Lambda$. ■

Analogamente para $\alpha(x)$. Em conclusão da Proposição 2.4.2, temos que:

$$\begin{aligned} W^s(\Lambda) &= \{x \in M : \omega(x) \subset \Lambda\}, \\ W^u(\Lambda) &= \{x \in M : \alpha(x) \subset \Lambda\}. \end{aligned}$$

Outra importante aplicação do Shadowing lemma é o seguinte teorema para um conjunto hiperbólico isolado.

Teorema 2.4.6 *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico isolado de f . Então*

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x), \quad W^u(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x).$$

Demonstração. Provemos para $W^s(\Lambda)$. Basta provar que

$$W^s(\Lambda) \subset \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x),$$

a outra inclusão é imediata. Seja $y \in W^s(\Lambda)$. Dado $\eta > 0$, então existe $N > 0$ tal que $d(f^j(y), \Lambda) < \eta/2$ para todo $j \geq N$. Tome $x_j \in \Lambda$ tal que $d(f^j(y), x_j) < \eta/2$ para todo $j \geq N$. Pela continuidade uniforme de f , para todo $j \geq N$ temos,

$$d(f(x_j), x_{j+1}) \leq d(f(x_j), f^{j+1}(y)) + d(f^{j+1}(y), x_{j+1}) < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

Por outro lado, seja $x_j = f^{j-N}(x_N) \in \Lambda$ para todo $j \leq N$. Daí

$$d(f(x_j), x_{j+1}) = d(f^{j-N+1}(x_N), f^{j-N+1}(x_N)) = 0 < \eta, \quad \forall j \leq N.$$

Tome $0 < \eta < \delta$. Então $\{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma δ -pseudo órbita em Λ e assim, pelo Shadowing lemma, é ϵ -sombreado por um único ponto $x \in \Lambda$. Isto implica que $\mathcal{O}(x) \subset B(\Lambda, \epsilon)$. É claro que para todo $j \geq N$,

$$d(f^j(y), f^j(x)) \leq d(f^j(y), x_j) + d(x_j, f^j(x)) \leq \frac{\eta}{2} + \epsilon.$$

Como a órbita futura de y fica perto da órbita futura de x , então pelo Teorema da variedade estável, temos que $y \in W^s(x)$. Portanto

$$W^s(\Lambda) \subset \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x).$$

A prova de $W^u(\Lambda)$ é análoga. ■

2.5 Decomposição espectral e Axioma A

Nessa seção vamos estudar difeomorfismos Axioma A e o Teorema da Decomposição Espectral de Smale.

Axioma A: Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^1 e M uma variedade compacta. Dizemos que f é *Axioma A* se o conjunto não errante $\Omega(f)$ é hiperbólico e o conjunto de pontos periódicos é denso em $\Omega(f)$, ou seja, $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$.

Exemplo 2.5.1 Se $\text{RC}(f)$ é hiperbólico, então f satisfaz Axioma A.

De fato, de $\overline{\text{Per}(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \text{RC}(f)$ e do item (a) do Teorema 2.4.5, temos que $\overline{\text{Per}(f)} = \text{RC}(f) = L(f) = \Omega(f)$. Assim $\Omega(f)$ é hiperbólico e $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$.

Agora, enunciamos o *Teorema da Decomposição Espectral*, o nome do teorema foi introduzido por **Smale** (1967) e foi mantido apesar do teorema não se referir ao espectro de nada. Neste teorema uma característica marcante seria a “finitude”, ou seja a decomposição de $\Omega(f)$ em união finita de conjuntos. A prova pode-se ver em [23], Theorem 5.4, página 420.

Teorema 2.5.1 (Teorema da Decomposição Espectral) *Suponha que $f : M \rightarrow M$ satisfaz Axioma A. Então o conjunto não-errante $\Omega(f)$ se decompõe de maneira única como uma união finita e disjunta*

$$\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cdots \cup \Lambda_k,$$

onde cada Λ_i é fechado, invariante indecomponível e cada $f : \Lambda_i \rightarrow \Lambda_i$ é topologicamente transitivo. Além disso, cada Λ_i tem uma estrutura de produto local.

Corolário 2.5.2 *Suponhamos que f satisfaz Axioma A, então $\overline{\text{Per}(f)}$ é isolado.*

Demonstração. Pelo Teorema da decomposição espectral temos que

$$\overline{\text{Per}(f)} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cdots \cup \Lambda_k,$$

onde, cada Λ_i é isolado. Basta provar que $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ é isolado, assim por indução segue-se que $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cdots \cup \Lambda_k$ é isolado, isto prova o corolário. Como Λ_1 e Λ_2 são isolados, então existem vizinhanças U_1 de Λ_1 e U_2 de Λ_2 tais que $\Lambda_1 \subset \text{int}(U_1)$, $\Lambda_2 \subset \text{int}(U_2)$,

$$\Lambda_1 = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_1) \quad \text{e} \quad \Lambda_2 = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_2).$$

Note que

$$\Lambda \subset \text{int}(U_1) \cup \text{int}(U_2) \subset \text{int}(U_1 \cup U_2).$$

Tomando $V = U_1 \cup U_2$, temos que $\Lambda \subset \text{int}(V)$ e

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_1) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_2) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_1 \cup U_2) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V).$$

Portanto Λ é isolado. ■

O seguinte resultado é puramente topológico, indicaremos o resultado em um espaço métrico compacto X .

Teorema 2.5.3 *Seja $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo e sejam $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k$ uma família finita disjunta de conjuntos compactos invariantes de f com $L(f) \subset \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k$. Então*

$$X = \bigcup_{i=1}^k W^s(\Lambda_i) = \bigcup_{i=1}^k W^u(\Lambda_i).$$

Demonstração. Tome uma vizinhança compacta U_i de Λ_i em X tal que, para qualquer $i \neq j$,

$$U_i \cap U_j = \emptyset, \quad f(U_i) \cap U_j = \emptyset.$$

A segunda igualdade acima, significa que um ponto em U_i não pode saltar positivamente em U_j em um passo. Comutando i e j dá o caso negativo.

Seja $x \in X$. Como $\omega(x) \subset L(f)$, existe $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$, $f^n(x) \in \bigcup_{i=1}^k U_i$.

Para ser mais preciso, suponhamos que $f^{n_0}(x) \in U_1$. Como $f(U_i) \cap U_j = \emptyset$, temos que $f^{n_0+1}(x) \in U_1$. Indutivamente, $f^n(x) \in U_1$ para todo $n \geq n_0$. Então $\omega(x) \subset U_1$. Assim

$\omega(x) \subset \Lambda_1$, provando que $x \in W^s(\Lambda_1)$. Logo, $X \subset \bigcup_{i=1}^k W^s(\Lambda_i)$, a outra inclusão é trivial.

Portanto,

$$X = \bigcup_{i=1}^k W^s(\Lambda_i).$$

De forma análoga para W^u . ■

No seguinte teorema, vamos fortalecer um pouco mais o resultado acima.

Teorema 2.5.4 *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^1 . Se $L(f)$ é hiperbólico, então*

$$M = \bigcup_{x \in L(f)} W^s(x) = \bigcup_{x \in L(f)} W^u(x).$$

Demonstração. Como $L(f)$ é hiperbólico, pelo item (b) do Teorema 2.4.5, $L(f) = \overline{\text{Per}(f)}$. Logo pelo Corolário 2.5.2, $L(f)$ é isolado. Note que pelo Teorema 2.5.3,

$$M = W^s(L(f)) = W^u(L(f)).$$

Portanto, pelo Teorema 2.4.6,

$$M = \bigcup_{x \in L(f)} W^s(x) = \bigcup_{x \in L(f)} W^u(x).$$

Isto prova este teorema. ■

Observação 2.5.1 Seja $L(f)$ um conjunto hiperbólico. Então dado qualquer $x \in L(f)$, do Teorema 2.5.4, segue-se que

$$T_x(W^s(x)) = E^s(x) \quad \text{e} \quad T_x(W^u(x)) = E^u(x).$$

2.6 Não ciclos

Seja X um espaço métrico compacto e $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo. Sejam $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k$ conjuntos disjuntos, compactos e invariantes de f . Escreva

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k.$$

Defina $\Lambda_i \ll \Lambda_j$ se,

$$W^u(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_j) - \Lambda \neq \emptyset.$$

Essencialmente, $\Lambda_i \ll \Lambda_j$ significa que existe $x \in X$ fora de Λ que vai de Λ_i a Λ_j . Note que, quando $i \neq j$, $W^u(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_j) \neq \emptyset$ implica automaticamente que $\Lambda_i \ll \Lambda_j$, mas não quando $i = j$. Podemos ver que, \ll não é uma relação de equivalência.

Definição 2.6.1 Dizemos que $\Lambda_{i_1}, \Lambda_{i_2}, \dots, \Lambda_{i_m}$ forma um ciclo de $\{\Lambda_i\}$ se,

$$\Lambda_{i_1} \ll \Lambda_{i_2} \ll \dots \ll \Lambda_{i_m} \ll \Lambda_{i_1}.$$

Definição 2.6.2 Dizemos que $\{\Lambda_i\}$ satisfaz a condição de não-ciclo, ou simplesmente não-ciclo, se nenhum subconjunto de $\{\Lambda_i\}$ forma um ciclo.

Lema 2.6.1 *Seja $x \in \text{RC}(f) - L(f)$. Suponha que $x \in W^s(\Lambda_i)$ para algum i . Então existe $z \in W^u(\Lambda_i)$ tal que $z \in \text{RC}(f) - L(f)$.*

Demonstração. Tome uma vizinhança compacta U de Λ_i tal que

$$x \notin U, \quad U \cap \Lambda_j = \emptyset, \quad f(U) \cap \Lambda_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$

Para qualquer $n \geq 1$, existe uma $1/n$ -cadeia periódica

$$C_n = \{x_0^n, x_1^n, \dots, x_{j_n}^n\}$$

tal que $x_0^n \rightarrow x$. Seja $x_{\alpha_n}^n$ o ponto em C_n mais próximo de Λ_i . Como $x \in W^s(\Lambda_i)$, tomando uma subsequência se necessário, assumimos que

$$d(x_{\alpha_n}^n, \Lambda_i) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Então existe $m_n \geq 1$ para n suficientemente grande tal que

$$x_{\alpha_n}^n, x_{\alpha_n+1}^n, \dots, x_{\alpha_n+m_n-1}^n \in \text{int}(U),$$

mas,

$$x_{\alpha_n+m_n}^n \notin \text{int}(U).$$

Então,

$$z^n = x_{\alpha_n+m_n}^n \in B(f(U), 1/n) - \text{int}(U).$$

Como $x_{\alpha_n}^n \rightarrow \Lambda_i$, temos que $m_n \rightarrow +\infty$. Além disso, se n é grande, então

$$B(f(U), 1/n) \cap \Lambda_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$

Seja z um ponto limite de $\{z^n\}$. Então $z \in \text{RC}(f) - \text{L}(f)$. Falta provar que $z \in W^u(\Lambda_i)$.

Como os m_n primeiros pontos $1/n$ -cadeia periódica C_n estão iniciando com $x_{\alpha_n+m_n-1}^n$ contando para trás estão contidos em U e desde que $z^n \rightarrow z$ e $m_n \rightarrow +\infty$, segue que $f^{-k}(z) \in U$ para todo $k \geq 1$. Assim, $\alpha(z) \subset \Lambda_i$, provando que $z \in W^u(\Lambda_i)$. Ver Figura 2.3.

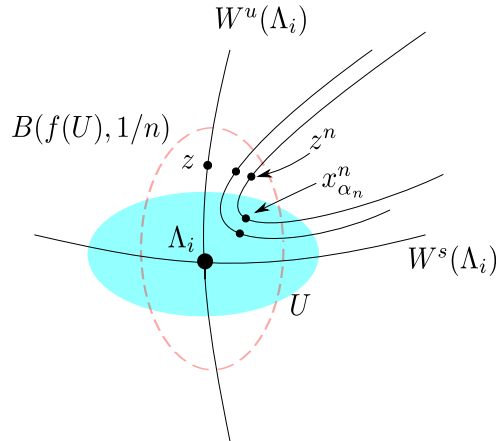


Figura 2.3: Prova do Lema 2.6.1.

■

Teorema 2.6.1 *Seja $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo e seja $\text{L}(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k$, onde Λ_i são conjuntos compactos, disjuntos e invariantes de f . Se $\{\Lambda_i\}$ não tem ciclos, então $\text{L}(f) = \text{RC}(f)$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que existe $b_1 \in \text{RC}(f) - \text{L}(f)$. Pelo Teorema 2.5.3, existe i_1 tal que $b_1 \in W^s(\Lambda_{i_1})$. Pelo Lema 2.6.1, existe $b_2 \in W^u(\Lambda_{i_1})$ tal que $b_2 \in \text{RC}(f) - \text{L}(f)$. Pelo Teorema 2.5.3, existe i_2 tal que $b_2 \in W^s(\Lambda_{i_2})$. Logo, como $i_1 \neq i_2$ e $W^u(\Lambda_{i_1}) \cap W^s(\Lambda_{i_2}) \neq \emptyset$, temos que $\Lambda_{i_1} \ll \Lambda_{i_2}$. Indutivamente, como Λ_i são finitos, temos um ciclo. Contradição. ■

2.7 Quase-hiperbolicidade

Vejam algumas propriedades importantes de conjuntos quase hiperbólicos. Isto, fornece ângulos alternativos para olhar a hiperbolicidade.

Para $x \in M$ e $f \in \text{Diff}^r(M)$, denote

$$B^s(x) = \{v \in T_x M : |Df^n(x)(v)| \text{ é limitado para } n \geq 0\},$$

$$B^u(x) = \{v \in T_x M : |Df^n(x)(v)| \text{ é limitado para } n \leq 0\}.$$

Note que $B^s(x)$ e $B^u(x)$ são subespaços lineares de $T_x M$ e Df -invariantes.

Definição 2.7.1 (Quase hiperbólico) Um conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ de f é chamado *quase hiperbólico* se qualquer vetor não nulo de $T_\Lambda M$ tem uma órbita ilimitada, isto é, se

$$B^s(x) \cap B^u(x) = \{0\} \text{ para todo } x \in \Lambda.$$

Proposição 2.7.1 Λ é quase hiperbólico para f se, e somente, se existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para qualquer $0 \neq v \in T_\Lambda M$, existe $-N \leq m \leq N$ tal que $|Df^m(v)| > 2|v|$.

Demonstração. Suponha que Λ é quase hiperbólico para f . Para qualquer $v \in T_\Lambda M$ com $|v| = 1$, existe $m(v) = m \in \mathbb{Z}$ tal que $|Df^m(v)| > 2$. Pela compacidade da esfera unitária do fibrado $T_\Lambda M$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para qualquer $0 \neq v \in T_\Lambda M$, existe $-N \leq m \leq N$ tal que $|Df^m(v)| > 2|v|$.

Reciprocamente, suponhamos que para qualquer $0 \neq v \in T_\Lambda M$, existe $-N \leq m \leq N$ tal que $|Df^m(v)| > 2|v|$ (na verdade aqui, nem sequer precisamos do número N). Então existe m_2 tal que

$$|Df^{m_2}(v)| > 2|Df^m(v)| > 2^2|v|.$$

Geralmente, para qualquer $k \in \mathbb{Z}^+$, existe m_k tal que

$$|Df^{m_k}(v)| > 2^k|v|.$$

Fazendo $k \rightarrow +\infty$, temos que $|Df^{m_k}(v)| \rightarrow +\infty$. Assim, a Df -órbita de v é ilimitada. Portanto f é quase hiperbólico. ■

Seja Λ quase hiperbólico para f , e seja $N \in \mathbb{Z}^+$ dado como na Proposição 2.7.1. Chamamos $0 \neq u \in T_\Lambda M$ por *N-rightmax* se $|u| \geq |Df^n(u)|$ para todo $-N \leq n \leq 0$.

Analogamente, chamamos $0 \neq u \in T_\Lambda M$ por *N-leftmax* se $|u| \geq |Df^n(u)|$ para todo $0 \leq n \leq N$.

Assim, dentro de $2N + 1$ iterações consecutivas de qualquer $0 \neq u \in T_\Lambda M$, deve haver um *N-rightmax* ou um *N-leftmax*.

Proposição 2.7.2 *Seja Λ quase hiperbólico para f . Para qualquer $0 \neq v \in T_\Lambda M$, se $Tf^i(v)$ é um *N-leftmax* e $Tf^j(v)$ é um *N-rightmax* na mesma órbita de $v \neq 0$, então $i < j$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que $j \leq i$, então existe $j \leq k \leq i$ tal que $|Df^k(v)|$ assume o máximo em todo intervalo $[j - N, i + N]$, contradizendo a Proposição 2.7.1. ■

Seja Λ quase hiperbólico para f . Denote

$$\lambda = 2^{-1/N}, \quad C = (\lambda^N \min\{|Df^n(v)| : v \in T_\Lambda M, |v| = 1, 0 \leq n \leq N\})^{-2},$$

onde N é dado como na Proposição 2.7.1.

Proposição 2.7.3 *Sejam Λ quase hiperbólico para f e N, λ e C como definidos acima. Se $u \in T_\Lambda M$ é um *N-rightmax*, então para qualquer $i \geq 0$ e qualquer $n \geq 0$,*

$$|Df^{i+n}(u)| \geq C^{-1} \lambda^{-n} |Df^i(u)|.$$

Analogamente, se $u \in T_\Lambda M$ é um *N-leftmax*, então para qualquer $i \geq 0$ e qualquer $n \geq 0$,

$$|Df^{-i-n}(u)| \geq C^{-1} \lambda^{-n} |Df^{-i}(u)|.$$

Demonstração. Seja $u \in T_\Lambda M$ um *N-rightmax*. Pelas Proposições 2.7.1 e 2.7.2, existe $0 \leq m_1 \leq N$ tal que $Df^{m_1}(u)$ é um *N-rightmax* e $|Df^{m_1}(u)| \geq 2|u|$. Analogamente, existe $0 \leq m_2 \leq N$ tal que $Df^{m_1+m_2}(u)$ é um *N-rightmax* e $|Df^{m_1+m_2}(u)| \geq 2^2|u|$. Assim, indutivamente dá origem a um número inteiro positivo k tal que

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k \leq n \leq m_1 + m_2 + \cdots + m_k + N.$$

Então,

$$\begin{aligned} |Df^n(u)| &\geq |Df^{m_1+m_2+\cdots+m_k}(u)| \min\{|Df^n(v)| : v \in T_\Lambda M, |v| = 1, 0 \leq n \leq N\} \\ &\geq C^{-1/2} \lambda^{-N} 2^k |u| = C^{-1/2} \lambda^{-N} \lambda^{-Nk} |u| \\ &\geq C^{-1/2} \lambda^{-N} \lambda^{-m_1-m_2-\cdots-m_k} |u| \\ &\geq C^{-1/2} \lambda^{-N} \lambda^{-n+N} |u|. \end{aligned}$$

Logo, temos que para $n \geq 0$,

$$|Df^n(u)| \geq C^{-1/2} \lambda^{-n} |u|.$$

Assim, para qualquer $i \geq 0$, com a ajuda do N -rightmax mais próximo de $Df^i(u)$, temos

$$\begin{aligned} |Df^{i+n}(u)| &= |Df^i(Df^n(u))| \geq C^{-1/2}\lambda^{-i}|Df^n(u)| \\ &\geq C^{-1}\lambda^{-i-n}|u| \\ &\geq C^{-1}\lambda^{-n}|Df^i(u)|, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

A prova é análoga para N -leftmax. ■

Seja Λ quase hiperbólico para f e N dado como na Proposição 2.7.1. Denote

$$\begin{aligned} H^s &= \{v \in T_\Lambda M - \{0\} : \{|Df^n(v)|\}_{n=-\infty}^\infty \text{ tem só } N\text{-leftmax}\}, \\ H^u &= \{v \in T_\Lambda M - \{0\} : \{|Df^n(v)|\}_{n=-\infty}^\infty \text{ tem só } N\text{-rightmax}\}, \\ H^\vee &= \{v \in T_\Lambda M - \{0\} : \{|Df^n(v)|\}_{n=-\infty}^\infty \text{ tem } N\text{-leftmax e } N\text{-rightmax}\}. \end{aligned}$$

Note que os conjuntos H^u , H^s e H^\vee são Df -invariante e constituem uma decomposição de $T_\Lambda M - \{0\}$. Isto é, (as normas dos) vetores de $T_\Lambda M - \{0\}$ têm três tipos de comportamento em iterações conforme descrito no resultado a seguir:

Corolário 2.7.1 *Seja Λ quase hiperbólico para f , e N, λ e C determinados como na Proposição 2.7.3. Então:*

- (a) *Para qualquer $v \in H^s$, $|Df^n(v)| \leq C\lambda^n|v|$ para todo $n \geq 0$.*
- (b) *Para qualquer $v \in H^u$, $|Df^{-n}(v)| \leq C\lambda^n|v|$ para todo $n \geq 0$.*
- (c) *Para qualquer $v \in H^\vee$, existe um inteiro i_0 tal que para qualquer $i \geq i_0$ e qualquer $n \geq 0$,*

$$|Df^{i+n}(v)| \geq C^{-1}\lambda^{-n}|Df^i(v)|.$$

Além disso, existe um inteiro j_0 tal que para qualquer $j \leq j_0$ e $n \geq 0$,

$$|Df^{j-n}(v)| \geq C^{-1}\lambda^{-n}|Df^j(v)|.$$

Demonstração. Para qualquer $v \in H^u$, existe um inteiro $i \geq 0$ tal que $Tf^{-i}(v)$ é N -rightmax. Pela Proposição 2.7.3, para qualquer $n \geq 0$,

$$|Df^n(v)| \geq C^{-1}\lambda^{-n}|v|.$$

Como H^u é Df -invariante, temos

$$|v| = |Df^n(Df^{-n}(v))| \geq C^{-1}\lambda^{-n}|Df^{-n}(v)|,$$

então, $|Df^{-n}(v)| \leq C\lambda^n|v|$. Isto prova o item (b). Os itens (a) e (c) provam-se analogamente. ■

Teorema 2.7.2 *Seja Λ quase hiperbólico para f e sejam λ e C dado como na Proposição 2.7.3. Então*

$$|Df^n(v)| \leq C\lambda^n|v|, \forall v \in B^s(x), x \in \Lambda, n \geq 0,$$

$$|Df^{-n}(v)| \leq C\lambda^n|v|, \forall v \in B^u(x), x \in \Lambda, n \geq 0.$$

Demonstração. Para $v = 0$, as desigualdades acima são válidas. Então basta provar que $B^s - \{0\} \subset H^s$ e o resultado segue-se do item (a) do Corolário 2.7.1. Seja $0 \neq v \in B^s$, então pela Proposição 2.7.3 não pode existir N -rightmax. Portanto $0 \neq v \in B^s$ é N -leftmax. Análogo para B^u . ■

Note que, pelo item (a) do Corolário 2.7.1, $H^s \subset B^s$. Assim, $H^s \subset B^s - \{0\}$. Análogo para H^u . Logo, temos

$$B^s - \{0\} = H^s, \quad B^u - \{0\} = H^u.$$

Isso dá uma caracterização da hiperbolicidade:

Teorema 2.7.3 *Um conjunto compacto invariante Λ para f é hiperbólico se, e somente, se $B^s(x) \oplus B^u(x) = T_x M$ para qualquer $x \in \Lambda$.*

Demonstração. Suponha que Λ seja hiperbólico para f . Então Pela Proposição 2.2.1, $E^s = B^s$ e $E^u = B^u$. Logo, $B^s(x) \oplus B^u(x) = T_x M$ para qualquer $x \in \Lambda$.

Reciprocamente, suponhamos que $B^s(x) \oplus B^u(x) = T_x M$ para qualquer $x \in \Lambda$. Como Λ é compacto e $B^s(x) \cap B^u(x) = \{0\}$ para qualquer $x \in \Lambda$, temos que Λ é quase hiperbólico para f . Logo a conclusão segue-se do Teorema 2.7.2. ■

Seja Λ quase hiperbólico para f . Para $i = 0, 1, \dots, \dim(M)$, seja

$$\Delta^i = \Delta^i(\Lambda) = \{x \in \Lambda : B^s(x) \oplus B^u(x) = T_x M, \dim(B^s(x)) = i\}.$$

Podemos provar que Δ^i é f -invariante e compacto. Como Λ é quase hiperbólico para f , pelo Teorema 2.7.2, Δ^i é hiperbólico para f de índice i . Note que,

$$\Delta^i \cap \Delta^j = \emptyset, \text{ se } i \neq j.$$

Seja

$$\Delta = \bigcup_{i=0}^{\dim(M)} \Delta^i.$$

Pode-se mostrar que, Δ é f -hiperbólico.

Para conjuntos hiperbólicos o número inteiro $\dim(E^s)$ é chamado de *índice* de f .

Teorema 2.7.4 *Seja Λ quase hiperbólico para f . Para qualquer $x \in \Lambda$, $\omega(x)$ é hiperbólico de índice $\dim(B^s(x))$ com taxas de contração (C, λ) dadas como na Proposição 2.7.3. Analogamente, $\alpha(x)$ é hiperbólico de índice $\dim(M) - \dim(B^u(x))$ com as mesmas taxas (C, λ) .*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$ e $y \in \omega(x)$. Tome um subespaço $F(x)$ de $E^u(x)$ tal que

$$F(x) \oplus B^s(x) = T_x M.$$

Como $B^s(x) - \{0\} = H^s(x)$ e $H^s(x) \cup H^u(c) \cup H^v(x)$ é decomposição de $T_x M - \{0\}$, para qualquer $v \in F(x)$ com $|v| = 1$, existe um inteiro positivo $i_0 = i_0(v)$ tal que $Df^{i_0}(v)$ é um N -rightmax. Pela Proposição 2.7.1, existe $i_1 = i_1(v)$ com $i_0 \leq i_1 \leq i_0 + N$ tal que $Df^{i_1}(v)$ é um N -rightmax estrito no sentido de que $|Df^{i_1}(v)| > |Df^n(v)|$ para todo $i_1 - N \leq n \leq i_1 - 1$. Então existe uma vizinhança U de v na esfera unitária de $F(x)$ tal que $Df^{i_1}(w)$ é um N -rightmax para todo $w \in U$. Pela compacidade da esfera existe um inteiro positivo m_0 tal que para todo $v \in F(x)$ com $|v| = 1$, existe $m = m(v)$ com $0 \leq m \leq m_0$ tal que $Df^m(v)$ é um N -rightmax. Pela Proposição 2.7.3,

$$|Df^{i+n}(v)| \geq C^{-1} \lambda^{-n} |Df^i(v)|$$

para qualquer $v \in F(x)$, $i \geq m_0$, e $n \geq 0$. Por outro lado, pelo Teorema 2.7.2,

$$|Df^{i+n}(v)| \leq C \lambda^n |Df^i(v)|$$

para todo $v \in B^s(x)$, $i \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$.

Seja $f^{n_k}(x) \rightarrow y$, quando $k \rightarrow \infty$ para alguma sequência $n_k \rightarrow +\infty$ tal que $Df^{n_k}(B^s(x))$ e $Df^{n_k}(F(x))$ tendem a dois subespaços $G^s(y)$ e $G^u(y)$ de $T_y M$, respectivamente. Para qualquer $w \in G^s(y)$, existe uma sequência $w_k \in Df^{n_k}(B^s(x))$ com $w_k \rightarrow w$. Como

$$|Df^n(w_k)| \leq C \lambda^n |w_k|$$

para qualquer $k \geq 1$ e $n \geq 0$, fixando n e fazendo $k \rightarrow \infty$, temos

$$|Df^n(w)| \leq C \lambda^n |w|, \quad \forall w \in G^s(y), \quad n \geq 0.$$

Assim, $G^s(y) \subset B^s(y)$.

Analogamente, para qualquer $w \in G^u(y)$, existe uma sequência $w_k \in Df^{n_k}(F(x))$ com $w_k \rightarrow w$. Fixe $j \geq 0$. Considere esses n_k na sequência com $n_k - j > m_0$. Então

$$|w_k| \geq C^{-1} \lambda^{-j} |Df^{-j}(w_k)|.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$,

$$|w| \geq C^{-1} \lambda^{-j} |Df^{-j}(w)|, \quad \forall w \in G^u(y).$$

Ver Figura 2.4. Como $j \geq 0$ é arbitrário, temos $G^u(y) \subset B^u(y)$. Logo, contando dimensões,

$$B^s(y) \oplus B^u(y) = T_y M.$$

Isto prova que $\omega(x)$ é f -hiperbólico de índice $\dim(B^s(x))$ com taxa de contração (C, λ) . A prova de $\alpha(x)$ é análogo.

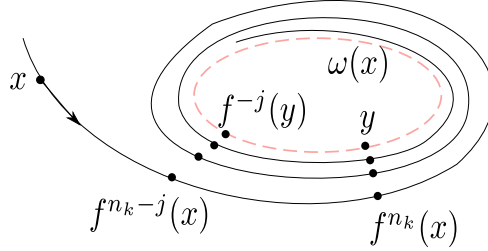


Figura 2.4: Prova do Teorema 2.7.4.

■

Teorema 2.7.5 *Se Λ é quase hiperbólico para f , então f restrito ao $L(f|_\Lambda)$ é hiperbólico.*

Demonstração. Uma vez que as constantes (C, λ) determinadas logo antes da Proposição 2.7.3 são independentes de $\omega(x)$, $x \in \Lambda$, as desigualdades valem também para o fecho, ou seja, para $\overline{\omega(x)}$. Então o resultado segue do Teorema 2.7.4. ■

Teorema 2.7.6 *Se Λ é quase hiperbólico para f , então f restrito ao $RC(f|_\Lambda)$ é hiperbólico.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.7.5, $L(f|_\Lambda)$ está contido em Δ . Se provarmos que não existe um ciclo entre os $\{\Delta^i\}$ em relação a $f|_\Lambda$, então pelo Teorema 2.6.1, Δ contém $RC(f|_\Lambda)$ e $L(f|_\Lambda) = RC(f|_\Lambda)$, provando o Teorema 2.7.6.

Suponhamos que existe um ciclo, digamos

$$x_i \in W^u(\Delta^{k_i}, f|_\Lambda) \cap W^s(\Delta^{k_{i+1}}, f|_\Lambda) - \Delta, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

onde, $\Delta^{k_{m+1}} = \Delta^{k_1}$. Pelo Teorema 2.7.4,

$$\dim(B^s(x_i)) = k_{i+1}, \quad \dim(B^u(x_i)) = \dim(M) - k_i,$$

para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Assim,

$$\dim(B^s(x_i)) + \dim(B^u(x_{i+1})) = k_{i+1} + \dim(M) - k_{i+1} = \dim(M)$$

para cada i . Logo, para cada i

$$\dim(B^s(x_i)) + \dim(B^u(x_i)) \geq \dim(B^s(x_i)) + \dim(B^u(x_{i+1})) = \dim(M). \quad (2.3)$$

Por outro lado, como Λ é quase hiperbólico,

$$B^s(x_i) \cap B^u(x_i) = \{0\},$$

para cada i . Em particular, para cada i , temos

$$\dim(B^s(x_i)) + \dim(B^u(x_i)) \leq \dim(M). \quad (2.4)$$

Assim, de (2.3) e (2.4), para cada i , temos,

$$\dim(B^s(x_i)) + \dim(B^u(x_i)) = \dim(M).$$

Logo, para cada i ,

$$B^s(x_i) \oplus B^u(x_i) = T_{x_i}M.$$

Assim, $x_i \in \Delta$. Contradição. Isto prova que não existe um ciclo entre os $\{\Delta^i\}$ em relação a $f|_\Lambda$. ■

2.8 Difeomorfismos quase Anosov

Nesta seção provamos um dos principais resultados deste capítulo, o Teorema 2.8.1. Vale ressaltar que esta prova que apresentamos aqui é uma adaptação feita por **Lan Wen** em [29]. Aqui, M é uma variedade fechada (compacta, conexa, suave e sem bordo).

Definição 2.8.1 Um difeomorfismo f em M é *quase Anosov* se M é um conjunto quase hiperbólico para f .

Ou seja, dizemos que f é *quase Anosov*, se para qualquer vetor $0 \neq v \in TM$ o conjunto $\{|Df^n(v)| : n \in \mathbb{Z}\}$ é ilimitado.

Exemplo 2.8.1 Se f é Anosov, então f é quase Anosov.

De fato, como f é Anosov, então pelo Teorema 2.7.3, temos que, $B^s(x) \cap B^u(x) = \{0\}$ para todo $x \in M$. Portanto, f é quase Anosov.

Será que f quase Anosov implica Anosov? Se $\dim(M) = 2$, então qualquer difeomorfismo quase Anosov é Anosov, como veremos no Teorema 2.8.2. Se M é um espaço euclidiano e f é um isomorfismo linear a resposta também é afirmativa, como veremos no Teorema 2.8.3. Mas isto em geral não é verdade, como veremos no Capítulo 3. Agora enunciamos e provamos o seguinte resultado:

Teorema 2.8.1 *Seja $f \in \text{Diff}^r(M)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) f é quase Anosov.
- (b) f satisfaz Axioma A e para todo $x \in M$,

$$T_x(W^s(x)) \cap T_x(W^u(x)) = \{0\}.$$

Demonstração. (b) \Rightarrow (a) Suponha que f satisfaz Axioma A, então pelo Teorema 2.5.4,

$$T_x(W^s(x)) = B^s(x) \quad \text{e} \quad T_x(W^u(x)) = B^u(x).$$

Como $T_x(W^s(x)) \cap T_x(W^u(x)) = \{0\}$ para todo $x \in M$,

$$B^s(x) \cap B^u(x) = \{0\} \quad \forall x \in M.$$

Portanto f é quase Anosov.

(a) \Rightarrow (b) Suponhamos que f seja quase Anosov, então pelo Teorema 2.7.6, $\text{RC}(f)$ é hiperbólico, então pelo Exemplo 2.5.1, f satisfaz Axioma A. Por outro lado, como f é quase Anosov, então $B^s(x) \cap B^u(x) = \{0\}$ para todo $x \in M$, usando o Teorema 2.5.4,

$$T_x(W^s(x)) \cap T_x(W^u(x)) = \{0\} \quad \forall x \in M.$$

■

Teorema 2.8.2 *Seja $\dim(M) = 2$. Se f é quase Anosov, então f é Anosov.*

Demonstração. Como f é quase Anosov, então

$$B^s(x) \cap B^u(x) = \{0\}, \quad \forall x \in M.$$

Por outro lado, como $\dim(M) = 2$, então $\dim(B^s(x)) = 1 = \dim(B^u(x))$. De fato, suponhamos que $\dim(B^u(x)) = 0$, então $\dim(B^s(x)) = \dim(M)$, assim, existe um vetor não nulo de TM (fibrado tangente de M) que tem uma órbita limitada, mas isto é uma contradição uma vez que f é quase Anosov. Portanto, $\dim(B^s(x)) = 1 = \dim(B^u(x))$. Logo,

$$\dim(B^s(x)) + \dim(B^u(x)) = \dim(M),$$

e como $\dim(T_x M) = \dim(M)$, temos que

$$B^s(x) \oplus B^u(x) = T_x M, \quad \forall x \in M.$$

Então, pelo Teorema 2.7.3, f é Anosov.

■

Agora, seja E um espaço euclidiano e $A : E \rightarrow E$ um isomorfismo linear.

Teorema 2.8.3 *As condições seguintes são equivalentes:*

- (a) A é Anosov.
- (b) A é quase Anosov.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b) É obvio.

(b) \Rightarrow (a) Suponhamos que A não seja Anosov. Então A tem um autovalor λ tal que $|\lambda| = 1$. Se λ é real, então para qualquer autovetor v temos $|A^n(v)| = |v|$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se λ não é real, então A tem um plano invariante P tal que $A|_P$ é conjugado linearmente a uma rotação. em ambos casos, existe $v \neq 0$ o qual tem uma órbita limitada. Logo, A não é quase Anosov. Contradição. ■

Comentários:

1. Vale ressaltar que o Teorema 2.8.1 só é uma parte do **Theorem A** provado por Mañé em [17].
2. Seja $N \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Se $f : M \rightarrow M$ tem uma órbita densa em M , então $f|_N$ é Anosov, ver **Theorem 7** em [10].
3. Se N é uma variedade hiperbólica para $f \in \text{Diff}^1(M)$, então $f|_N$ é Anosov se, e somente se, N é isolado, ver **Corollary 2** em [17].
4. Lembrando, que f satisfaz a *propriedade de shadowing* se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer δ -pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, existe um ponto $y \in M$ tal que $d(f^n(y), x_n) < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sakai [24] prova que todo difeomorfismo quase Anosov com a propriedade de shadowing é Anosov.

CAPÍTULO 3

EXEMPLO DE FRANKS E ROBINSON

Neste Capítulo veremos um esboço do exemplo de **Franks** e **Robinson** (FR) de um difeomorfismo quase Anosov que não é Anosov, para mais detalhes veja [8]. Sabemos pelo Exemplo 2.8.1, que se f é um difeomorfismo Anosov, então f é quase Anosov. A pergunta natural (de fato formulada por M. Hirsch [10]) é se f é quase Anosov então f é Anosov, ou seja, $f|_N$ é Anosov, onde $N \subset M$ é hiperbólico para f ?

3.1 Ideia geral da construção do exemplo de FR

Seja $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação induzida por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = 1$ e as entradas da matriz são inteiras, temos $A(\mathbb{Z}^3) = \mathbb{Z}^3$. Portanto, podemos definir uma relação de equivalência em \mathbb{R}^3 como no exemplo de difeomorfismo Anosov. Os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 da matriz A , são todos reais e tais que $0 < \lambda_1 < 1$ e $\lambda_2, \lambda_3 > 1$. Então como na Proposição 2.3.1, podemos mostrar que $\hat{f}_A : T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 \rightarrow T^3$ é um difeomorfismo Anosov.

Lembrando, um *poço* é um ponto fixo atrator ou uma órbita periódica atratora e uma *fonte* é um ponto fixo repulsor ou uma órbita periódica repulsora.

Dado o difeomorfismo Anosov \hat{f}_A no toro T^3 , podemos construir a transformação DA (Derivada Anosov) semelhante como é construído em [14], página 537 (também veja [23], página 332). A transformação DA produz uma deformação apropriada de \hat{f}_A no toro T^3 em torno de seu respectivo ponto fixo.

Eles consideram um automorfismo linear hiperbólico (difeomorfismo Anosov \hat{f}_A) de um toro T_1 (de dimensão 3) com apenas um ponto fixo, e seu inverso em outro toro T_2 (de dimensão 3). Assim, produzem deformações apropriadas em cada toro (DA-difeomorfismos) em torno de seus respectivos pontos fixos. Em seguida, cortam vizinhanças adequadas que continham esses pontos fixos, e cola-os cuidadosamente (ver Figura 3.1) ao longo da fronteira das vizinhanças para que as folheações estáveis e instáveis se cruzem quase-transversalmente. Este é um difeomorfismo quase Anosov na soma conexa de T_1 e T_2 e, portanto, $T_1 \# T_2$ (soma conexa) é um conjunto hiperbólico invariante compacto de algum difeomorfismo e este difeomorfismo não é Anosov. Vejamos este comentário:

Seja p um ponto fixo e deforme \hat{f}_A na vizinhança de p para obter um DA-difeomorfismo f_1 em T^3 . Seja $f_2 = f_1^{-1}$ um difeomorfismo em T^3 . Então, existe um conjunto repulsor Λ_2 e uma folheação instável de dimensão um para Λ_2 .

Agora, tome uma vizinhança V de p em cada um dos toros e depois faça uma cirurgia para conectá-los. Ajustando assim, existe uma interseção quase transversal com a folheação estável de

$$\Lambda_1 = \bigcap_{n \geq 0} f_1^n(T_1 - V).$$

Note, que Λ_1 é um conjunto atrator hiperbólico de codimensão um (Veja Lema 3.2.1).

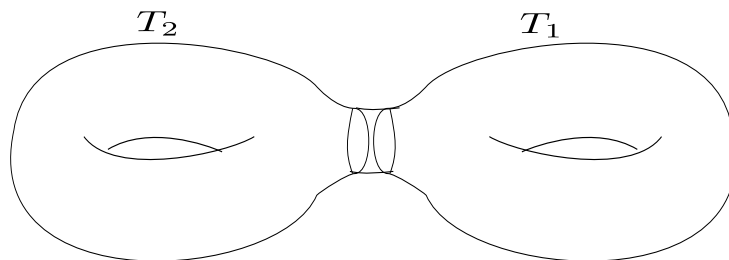


Figura 3.1: Visualização do exemplo do FR.

De fato os toros T_1 e T_2 estão morando em \mathbb{R}^4 , a Figura 3.1 é só uma representação da construção do exemplo.

3.2 Esboço do exemplo de FR

Seja $M = T_1 \# T_2$ a soma conexa de toros T_1 e T_2 de dimensão 3 (ver Figura 3.1).

Teorema 3.2.1 *Existe um difeomorfismo f em M quase Anosov, que não é Anosov.*

Para ver o esboço da prova do Teorema 3.2.1, precisamos de alguns resultados. Primeiramente vamos construir DA-difeomorfismo em T_1 com certas propriedades de linearidade perto da fonte. Isto é dado no seguinte lema.

Lema 3.2.1 *Existe um difeomorfismo $f_1 : T_1 \rightarrow T_1$ que deixa uma folheação \mathcal{F} unidimensional invariante e satisfaz o seguinte:*

- (a) *Existe um ponto $p \in T_1$ que é fonte para f_1 e uma vizinhança V de p com coordenadas locais x_1, x_2, x_3 que são C^∞ exceto em p e tal que*

$$V = \left\{ q \in T_1 : \left(\sum_{i=1}^3 x_i(q)^2 \right)^{1/2} < 9 \right\}.$$

- (b) *Se $q, f_1(q) \in V$, então $x_i(f_1(q)) = 2x_i(q)$.*

- (c) *As folhas da folheação \mathcal{F} , $x_2(q), x_3(q)$, restritas a V são constantes.*

- (d) *O conjunto*

$$\Lambda_1 = \bigcap_{n \geq 0} f_1^n(T_1 - V),$$

é compacto invariante e hiperbólico, cujas variedades estáveis são as folhas da folheação \mathcal{F} restritas a $T_1 - \{p\}$.

Agora, usamos o DA-difeomorfismo $f_1 : T_1 \rightarrow T_1$ construído no Lema 3.2.1. Seja \mathcal{F} a folheação estável de f_1 (de dimensão 1). Considere $f_2 : T_2 \rightarrow T_2$ com a folheação \mathcal{F}' de dimensão 1 ($f_2 = f_1^{-1}$). Seja U um conjunto aberto em T_2 e y_1, y_2, y_3 coordenadas locais análogos à V e às coordenadas locais x_1, x_2, x_3 em T_1 , mas tal que \mathcal{F}' é dada por coordenadas constantes $y_1(q)$ e $y_2(q)$. Defina $| \cdot |_1$ em V e $| \cdot |_2$ em U por

$$|q|_1^2 = \sum_{i=1}^3 x_i(q)^2 \quad \text{e} \quad |q'|_2^2 = \sum_{i=1}^3 y_i(q')^2.$$

Sejam $D_1 = \{z \in V : |z|_1 < 1/8\}$ e $D_2 = \{z \in U : |z|_2 < 1/8\}$. Vamos conectar $T_1 - D_1$ e $T_2 - D_2$ ao longo da fronteira de uma vizinhança de tal modo que cole para formar uma nova variedade M difeomorfa a $T_1 \# T_2$. Sejam

$$A_1 = \{z \in V : 1/8 < |z|_1 \leq 8\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{z \in U : 1/8 \leq |z|_2 < 8\}.$$

Definamos o difeomorfismo colagem $g : A_2 \rightarrow A_1$ por

$$g(y_1, y_2, y_3) = \frac{(y_1, y_2, y_3)}{\sum_{i=1}^3 y_i^2}$$

em x_i coordenadas. Assim, g envia o círculo de raio r para um círculo de raio $1/r$ em A_1 , então a fronteira externa de A_2 é levada para a fronteira interna de A_1 e vice-versa. Note

que

$$g \circ f_2^{-1}(z) = f_1 \circ g(z),$$

pelo item (b) do Lema 3.2.1,

$$g(f_2^{-1}(z)) = g(1/2(y_1, y_2, y_3)) = 2 \frac{(y_1, y_2, y_3)}{\sum_{i=1}^3 y_i^2} = 2g(z) = f_1(g(z)).$$

Dizemos que $z_1 \sim z_2$ se $z_1 = g(z_2)$ (é fácil ver que \sim é uma relação de equivalência) e defina $M = (T_1 - D_1) \cup (T_2 - D_2) / \sim$. Então M é uma variedade de classe C^∞ e definimos um difeomorfismo $f_0 : M \rightarrow M$ por

$$f_0(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{se } z \in T_1 - D_1, \\ f_2^{-1}(z) & \text{se } z \in T_2 - D_2. \end{cases}$$

Vejamos se f_0 está bem definido. Note que se $z \in (T_1 - D_1) \cap (T_2 - D_2) = A_1 \cup A_2 / \sim$ e se z é uma classe de equivalência de $q \in A_2$ e $q' \in A_1$, então

$$g \circ f_2^{-1}(q) = f_1(g(q)) = f_1(q'),$$

assim $f_2^{-1}(q) \sim f_1(q')$, e portanto f_0 está bem definido.

Considere o anel $A = A_1 \cup A_2 / \sim$ e use as coordenadas x_1, x_2, x_3 que são de A_1 . Então se

$$|z|^2 = |z|_1^2 = \sum_{i=1}^3 x_i(z)^2,$$

temos que $A = \{z : 1/8 \leq |z| \leq 8\}$.

Existem duas folheações \mathcal{F} e \mathcal{F}' unidimensionais em A , com a restrição de \mathcal{F} em T_1 e \mathcal{F}' em T_2 . A folheação \mathcal{F} consiste em linhas retas nas x_i coordenadas, mas a folheação \mathcal{F}' é um pouco mais complicada.

Como existem tangências entre \mathcal{F} e \mathcal{F}' , queremos modificar f_0 e usamos \mathcal{F}' para eliminar essas tangências. Lembrando, em topologia dizemos que dois laços ou aplicações $f, g : X \rightarrow Y$ são *isotópicos* se podemos passar de f para g através de uma série de etapas intermediárias, por meio de uma deformação do espaço ambiente.

Lema 3.2.2 *Existe uma isotopia h_t de classe C^∞ de A tal que:*

- (a) $h_0 = \text{id} : A \rightarrow A$.
- (b) $h_t(z) = z$ para todo t e para todo z na vizinhança limitada de A .
- (c) se $B = \{z \in A : 1/4 \leq |z| \leq 4\}$ então as folheações \mathcal{F} e $h_1(\mathcal{F}')$ não são tangentes em nenhuma parte de B .

(d) se $z, f_0(z) \in B$ então $h_t(f_0(z)) = f_0(h_t(z))$, para $0 \leq t \leq 1$.

(e) $|h_t(z)| = |z|$ para $z \in A$, $0 \leq t \leq 1$.

A existência desta isotopia nos permite concluir uma construção de um difeomorfismo quase Anosov.

Vejamos a prova do Teorema 3.2.1. Defina o difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ por $f(z) = f_0(z)$ se $z \notin A$ e se $z \in A$ por

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z), & |z| > 1/2, \\ h_1 \circ f_0 \circ h_1^{-1}(z), & |z| < 2. \end{cases}$$

Aqui h_1 é estendido como identidade fora de A . Vejamos se f está bem definida. Note que por (d) de Lema 3.2.2, temos $h_1 \circ f_0 = f_0 \circ h_1$ em B , assim $f_0(z) = h_1 \circ f_0 \circ h_1^{-1}(z)$ se $1/2 < |z| < 2$. Assim o difeomorfismo f está bem definido.

Vejamos que f é quase Anosov. Se Λ_1 e Λ_2 são conjuntos hiperbólicos, compactos e invariantes em T_1 e T_2 (pensado como subconjuntos de M) respectivamente, então dado $0 \neq v \in T_z M$ com $z \in \Lambda_i$, $i = 1, 2$, temos

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |Df^n(v)| = \infty,$$

pois, isto segue da hiperbolicidade (veja Exemplo 2.2.1).

Por outro lado, se $z \notin \Lambda_i$, $i = 1, 2$ então a órbita de z sob f intercepta o conjunto $C = \{z \in A : 1 \leq |z| \leq 2\}$, assim é suficiente verificar vetores tangentes nos pontos do conjunto C .

Observamos que as partes das variedades estáveis de Λ_1 que se encontram em C são precisamente as folhas da folheação \mathcal{F} restritas a C . Assim, se $0 \neq v \in T_z M$ e $z \in C$, então se v não for tangente a \mathcal{F} , segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Df^n(v)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |Df_1^n(v)| = \infty.$$

Também as partes das variedades instáveis de Λ_2 que se encontram em C são as folhas da folheação $h_1(\mathcal{F}')$. Isto ocorre, desde que

$$f^{-1}|_{T_2 - D_2} = h_1 \circ f_2 \circ h_1^{-1}|_{T_2 - D_2}$$

e as variedades estáveis de f_2 são as folhas de \mathcal{F}' , então como h_1 conjuga f_2 e f^{-1} , ele leva as variedades estáveis de f_2 para as de f^{-1} . Assim, se $0 \neq v \in T_z M$, $z \in C$ e v não é tangente a $h_1(\mathcal{F}')$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Df^{-n}(v)| = \infty.$$

Portanto, qualquer vetor tangente no ponto de C não é tangente pelo menos a uma das folheações F e $h_1(F')$, daí o difeomorfismo f é quase Anosov.

Vejamos que f não é Anosov. Note que a decomposição hiperbólica dos conjuntos hiperbólicos compactos Λ_1 e Λ_2 são de diferentes dimensões estáveis (a dimensão da variedade estável é 2 na fonte e um no poço) e, portanto, não são restrições de uma única decomposição hiperbólica em todo M . Portanto f não é um difeomorfismo Anosov.

CAPÍTULO 4

FLUXOS

Neste capítulo fazemos um estudo sobre sistemas dinâmicos com tempo contínuo e na Seção 4.6 veremos que é possível relacioná-los com sistemas dinâmicos com tempo discreto, mediante *fluxo suspensão*, ou seja, vamos construir o fluxo suspensão dado por um difeomorfismo.

Na Seção 4.1 vamos estudar fluxos e algumas de suas propriedades. Seção 4.2, dedica-se ao estudo de algumas propriedades importantes em sistemas dinâmicos com tempo contínuo, por exemplo, órbitas, conjunto invariante, não errante, ω -limite, topologicamente transitivo, etc. Na Seção 4.3 definimos uma das ideias centrais da dinâmica hiperbólica, ou seja a definição do conjunto hiperbólico para fluxos, também veremos o Teorema da variedade estável e λ -Lema para fluxos. Na Seção 4.4 estudamos a estrutura de produto local de um conjunto hiperbólico. Na Seção 4.5 estendemos a definição de Axioma A do Capítulo 2 para fluxos e também damos o Teorema da decomposição espectral para fluxos. Seção 4.6 dedica-se ao estudo de fluxos Anosov e mostramos que o fluxo suspensão de um difeomorfismo Anosov é um fluxo Anosov. E por último na Seção 4.7 estudamos fluxos Anosov no recobrimento universal e definimos o splitting.

As referências principais são [2, 14, 18, 20, 23, 26, 28] e outras que serviram na complementação da teoria foram [7, 12, 19, 22].

4.1 Noções básicas sobre fluxos

O estudo de fluxos aparece no estudo de equações diferenciais, as quais estão associadas a campos vectoriais.

Lembrando, uma das definições clássicas de teoria da grupos, uma *ação do grupo* G sobre uma variedade M é uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ tal que:

- $\varphi(e, p) = p$, para todo $p \in M$, onde e é o elemento neutro do grupo G .

- $\varphi(g, \varphi(h, p)) = \varphi(gh, p)$, para todo $g, h \in G$ e para todo $p \in M$.

Agora, mudamos nosso estudo para o caso do grupo $G = \mathbb{R}$, dos números reais, atuando sobre uma variedade M , que por simplicidade, assumiremos compacta na maioria das vezes. Assim, estamos estudando um grupo de difeomorfismos de 1-parâmetro, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}^1(M)$ com $\phi^0 : M \rightarrow M$ a identidade e $\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}$, onde $\phi(t, p) = \phi^t(p)$. Vamos chamar este conjunto, ou $\phi = (\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$, simplesmente um fluxo.

Um fluxo $\phi^t : M \rightarrow M$ define (ou gera) um campo de vetores tangentes em M ; ou seja, para cada $x \in M$, defina $X(x) \in T_x(M)$ por

$$\left. \frac{d}{dt} \phi^t(x) \right|_{t=0} = X(x). \quad (4.1)$$

Assim, $X(x)$ é um vetor tangente em x em $T_x M$ e $\phi^t(x)$ é a solução da equação diferencial ordinária (4.1) com a condição inicial $\phi^0(x) = x$. Então, a *órbita* (de ϕ) que passa por x , $t \rightarrow \phi^t(x)$ coincide com a solução da equação diferencial ordinária autônoma (ou seja, $X(x)$ não depende de t), de primeira ordem (4.1). Note que,

$$\frac{d}{dt} \phi^t(x) = \frac{d}{dt} \phi(t, x) = \left. \frac{d}{dt} \phi(s+t, x) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{dt} \phi^s(\phi^t(x)) \right|_{s=0} = X(\phi^t(x)).$$

Reciprocamente, dada uma equação diferencial ordinária, métodos simples reduzem para o caso autônomo de primeira ordem e, assim, obtêm-se a situação em (4.1) com $X(x)$ dada. Os teoremas fundamentais da unicidade e existência das equações diferenciais ordinárias (para mais detalhes ver [27]) produzem uma solução $\phi^t(x)$ tal que $\phi^0(x) = x$, pelo menos localmente, isto é, para $|t| < \epsilon$. Além disso, essas soluções locais podem ser definidas em \mathbb{R} , e frequentemente, isso leva a um fluxo em M . Certamente, se M é compacta, cada campo de vetores tangentes (de fato, suave) define unicamente um fluxo dessa maneira. No caso em que M não seja compacta, pode-se alterar o campo vetorial por um fator escalar para obter um que defina um fluxo global.

Consideraremos aqui apenas o caso em que $\phi^t : M \rightarrow M$ está definido para todo t , ou uma ação de \mathbb{R} em M , isto é, um fluxo.

Denotaremos o fluxo por $\phi = (\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Seja $r > 0$ inteiro. Dizemos que um fluxo é de classe C^r se ϕ^t é de classe C^r .

Para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\phi^t : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de classe C^r . Ver Proposição 1.3 página 8 em [20].

Para encerrar esta seção, note que para o grupo $G = \mathbb{Z}$, o homeomorfismo (ou difeomorfismo) ϕ aplicado de M em M gera um sistema dinâmico (com tempo discreto) $\phi : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ dado por

$$\phi(m, x) = \phi^m(x), \quad x \in M, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

4.2 Definições e propriedades

Nessa seção veremos as definições e propriedades clássicas para fluxos.

Definição 4.2.1 (Órbita) Dado $p \in M$, definimos a *órbita* de p pelo fluxo ϕ , por,

$$\mathcal{O}(p) = \{\phi^t(p) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Uma *órbita positiva* de p pelo fluxo ϕ é definida por, $\mathcal{O}^+(p) = \{\phi^t(p) : t > 0\}$ e, analogamente, definimos a *órbita negativa* de p pelo fluxo ϕ , por $\mathcal{O}^-(p) = \{\phi^t(p) : t < 0\}$.

Uma *órbita fechada* é uma órbita que é um conjunto fechado. Uma *órbita periódica* de ϕ é a órbita de algum $p \in M$ para o qual existe um mínimo $t > 0$ (chamado de período) tal que $\phi^t(p) = p$. Nesse caso, dizemos que p é um ponto periódico. Se $\phi^t(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, dizemos que p é um *ponto fixo*. Uma órbita fechada é periódica ou um ponto fixo.

Proposição 4.2.1 Dados $p, q \in M$, $p \neq q$, então $\mathcal{O}(p) \cap \mathcal{O}(q) = \emptyset$ ou $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(q)$.

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{O}(p) \cap \mathcal{O}(q) \neq \emptyset$. Logo, seja $r \in \mathcal{O}(p) \cap \mathcal{O}(q)$, então existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\phi^{t_1}(p) = r$ e $\phi^{t_2}(q) = r$. Considere $a \in \mathcal{O}(q)$, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $a = \phi^s(q)$. Note que

$$\phi^{s-t_2+t_1}(p) = \phi^{s-t_2}(\phi^{t_1}(p)) = \phi^{s-t_2}(r) = \phi^s(\phi^{-t_2}(r)) = \phi^s(q) = a.$$

Logo, $a \in \mathcal{O}(p)$ e, portanto, $\mathcal{O}(q) \subset \mathcal{O}(p)$. Analogamente temos, $\mathcal{O}(p) \subset \mathcal{O}(q)$. Portanto, $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(q)$. ■

Definição 4.2.2 (Conjunto invariante) Dizemos que $\Lambda \subset M$ é um *conjunto invariante* de ϕ , se $\phi^t(\Lambda) = \Lambda$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.2.2 Se $\Lambda \subset M$ é um conjunto invariante, então $\overline{\Lambda}$ é invariante.

Demonstração. Afirmamos que se $a \in \overline{\Lambda}$, então $\phi^t(a) \in \overline{\Lambda}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, fixado $t \in \mathbb{R}$ e considerando $a \in \overline{\Lambda}$, tomemos $b = \phi^t(a)$. Seja U uma vizinhança de b . Como ϕ^t é um difeomorfismo, temos que $\phi^{-t}(U)$ é uma vizinhança de a . Assim, $\phi^{-t}(U) \cap \overline{\Lambda} \neq \emptyset$, em particular $\phi^{-t}(U) \cap \Lambda \neq \emptyset$. Logo existe $p \in \phi^{-t}(U) \cap \Lambda$. Daí $\phi^t(p) \in U$ e como Λ é invariante, temos $\phi^t(p) \in \Lambda$. Logo, $U \cap \Lambda \neq \emptyset$. Portanto, como U é uma vizinhança arbitrária de b , segue que $\phi^t(a) \in \overline{\Lambda}$ pra todo $t \in \mathbb{R}$.

Dado $t \in \mathbb{R}$, seja $a \in \overline{\Lambda}$, pela afirmação acima, temos que $\phi^{-t}(a) \in \overline{\Lambda}$, assim, $a \in \phi^t(\overline{\Lambda})$. Logo, $\overline{\Lambda} \subset \phi^t(\overline{\Lambda})$. Como $\phi^t(a) \in \overline{\Lambda}$, para qualquer $a \in \overline{\Lambda}$ e para todo $t \in \mathbb{R}$ (pela afirmação acima), segue que $\phi^t(\overline{\Lambda}) \subset \overline{\Lambda}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto $\phi^t(\overline{\Lambda}) = \overline{\Lambda}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ■

Agora definimos conjuntos ω -limite e α -limite. Intuitivamente, α -limite é onde a órbita “nasce” e ω -limite é onde ela “morre”.

Definição 4.2.3 (ω -limite e α -limite) Dado $p \in M$, definimos seu *conjunto ω -limite*,

$$\omega(p) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n}(p) = y, \text{ para alguma sequência } t_n \rightarrow +\infty\},$$

e análogamente, o *conjunto α -limite* é definido por

$$\alpha(p) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n}(p) = y, \text{ para alguma sequência } t_n \rightarrow -\infty\}.$$

Proposição 4.2.3 *Sejam ϕ um fluxo de classe C^r e M uma variedade compacta. Dado $p \in M$, temos*

- (a) $\omega(p)$ é não vazio, fechado, invariante e conexo.
- (b) Se $q \in \mathcal{O}(p)$, então $\omega(q) = \omega(p)$.

Demonstração. Ver Proposição 1.4, página 17 em [20]. ■

Note que, se $p \in M$ é um ponto fixo para o fluxo ϕ , então, $\omega(p) = p = \alpha(p)$. Se a órbita de p é periódica, então $\omega(p) = \alpha(p) = \mathcal{O}(p)$.

Definição 4.2.4 (Conjunto não errante) Dizemos que $p \in M$ é um ponto *não-errante* de ϕ se, para qualquer vizinhança U de p e para todo número real $T > 0$, existe $t \geq T$ tal que $\phi^t(U) \cap U \neq \emptyset$. Denote por $\Omega(\phi)$ o conjunto de pontos não-errantes de ϕ .

Os pontos sobre uma órbita fechada, assim como os conjuntos ω -limite e α -limite, estão contidos em $\Omega(\phi)$. E como M é uma variedade compacta, então pelo item (a) da Proposição 4.2.3, temos que $\omega(p) \neq \emptyset$ e, assim, $\Omega(\phi) \neq \emptyset$.

Proposição 4.2.4 $\Omega(\phi)$ é um conjunto compacto e invariante.

Demonstração. Provemos que $\Omega(\phi)$ é um conjunto compacto. Como M é compacta, basta provar que $\Omega(\phi)$ é fechado. De fato, seja $p \in M \setminus \Omega(\phi)$. Então existe uma vizinhança aberta U de p e existe $T > 0$ tal que

$$\phi^t(U) \cap U = \emptyset, \quad \forall t \geq T. \tag{4.2}$$

Note que $U \cap \Omega(\phi) = \emptyset$, pois se, $U \cap \Omega(\phi) \neq \emptyset$, então existe $q \in U \cap \Omega(\phi)$. Observe que U também é uma vizinhança de q e como $q \in \Omega(\phi)$, então para esse mesmo $T > 0$, existe $t_1 \geq T$ tal que

$$\phi^{t_1}(U) \cap U \neq \emptyset,$$

contradizendo (4.2). Logo, $U \subset M \setminus \Omega(\phi)$. Assim $M \setminus \Omega(\phi)$ é um conjunto aberto. Portanto $\Omega(\phi)$ é fechado.

Provemos que $\Omega(\phi)$ é invariante. Como na prova da Proposição 4.2.2, basta provar a seguinte afirmação: se $p \in \Omega(\phi)$, então $\phi^t(p) \in \Omega(\phi)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

De fato, seja $p \in \Omega(\phi)$ e considere $t \in \mathbb{R}$ fixo. Seja V uma vizinhança de $\phi^t(p)$. Como ϕ^t é um difeomorfismo, temos que $U = \phi^{-t}(V)$ é uma vizinhança de p . Por outro lado, como $p \in \Omega(\phi)$ e para $T > 0$, existe $t_1 \geq T$ tal que

$$\phi^{t_1}(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Note que, $V = \phi^t(U)$, logo temos que, $\phi^{t_1}(V) \cap V \neq \emptyset$ para algum $t_1 \geq T$. Portanto $\phi^t(p) \in \Omega(\phi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ■

A seguir definimos conjuntos topologicamente transitivo e transitivo, os quais na verdade são equivalentes.

Definição 4.2.5 (Topologicamente transitivo) Um conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ é *topologicamente transitivo*, se dados conjuntos U, V abertos em Λ , existe $t > 0$ tal que $\phi^t(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definição 4.2.6 (Transitivo) Um conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ é *transitivo* se $\Lambda = \omega(p)$, para algum $p \in \Lambda$.

Na seguinte proposição vemos que os conjuntos definidos em 4.2.5 e 4.2.6 são equivalentes.

Proposição 4.2.5 (Birkhoff) *Seja Λ um conjunto compacto invariante de um fluxo ϕ de classe C^1 . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) Λ é transitivo.
- (b) Λ é topologicamente transitivo.
- (c) Existe $p \in \Lambda$ tal que $\overline{\mathcal{O}(p)} = \Lambda$.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b) Sejam U, V conjuntos abertos em Λ . Seja $p \in \Lambda$ tal que $\omega(p) = \Lambda$, então $\omega(p) \cap U \neq \emptyset$ e $\omega(p) \cap V \neq \emptyset$. Logo existem $q \in \omega(p) \cap U$ e $r \in \omega(p) \cap V$.

Como $q \in \omega(p)$, então existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $t_n \rightarrow +\infty$ e $\phi^{t_n}(p) \rightarrow q$, quando $n \rightarrow +\infty$. Seja U_q uma vizinhança de q e $T > 0$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi^{t_n}(p) \in U_q \text{ e } t_n > T, \quad \forall n \geq n_0. \quad (4.3)$$

De (4.3), tomemos $x = \phi^{t_{n_0}}(p) \in U_q$.

Analogamente, como $r \in \omega(p)$, então existe uma sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ com $t_k \rightarrow +\infty$ e $\phi^{t_k}(p) \rightarrow r$, quando $k \rightarrow +\infty$. Seja V_r uma vizinhança de r e $T' > 0$. Então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi^{t_k}(p) \in V_r \text{ e } t_k > T, \quad \forall k \geq k_0. \quad (4.4)$$

De (4.4), tome $y = \phi^{t_{k_0}}(p) \in V_r$.

Suponhamos que $t_{k_0} > t_{n_0}$. Então, $t = t_{k_0} - t_{n_0} > 0$. Como $x \in U_q$, temos que $\phi^t(x) \in \phi^t(U_q)$. Por outro lado,

$$\phi^t(x) = \phi^{t_{k_0} - t_{n_0}}(x) = \phi^{t_{k_0} - t_{n_0}}(\phi^{t_{n_0}}(p)) = \phi^{t_{k_0}}(p) = y.$$

Assim, $\phi^t(x) \in V_r$. Logo, existe $t > 0$ tal que $\phi^t(U_p) \cap V_r \neq \emptyset$. Finalmente, como $U_p \subset U$ e $V_r \subset V$, temos que existe $t > 0$ tal $\phi^t(U) \cap V \neq \emptyset$.

(b) \Rightarrow (c) Sejam B_n uma base enumerável da topologia induzida em Λ . Defina

$$V_n = \{p \in \Lambda : \phi^t(p) \in B_n, \text{ para algum } t > 0\}.$$

Afirmamos que V_n é um conjunto aberto e denso em Λ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Provemos que V_n é aberto em Λ . Basta provar que $\Lambda \setminus V_n$ é fechado em Λ . Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in \Lambda \setminus V_n$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow +\infty$. Como $x_n \in \Lambda \setminus V_n$, então $\phi^t(x_n) \notin B_n$ para todo $t \geq 0$. Logo, pela continuidade do fluxo, $\phi^t(x) \notin B_n$ para todo $t \geq 0$. Portanto $x \in \Lambda \setminus V_n$. Assim, $\Lambda \setminus V_n$ é fechado em Λ .

Provemos que V_n é denso em Λ . Seja U um conjunto aberto em Λ . Como Λ é topologicamente transitivo e V_n é conjunto aberto em Λ , então existe $t > 0$ tal que

$$\phi^t(U) \cap V_n \neq \emptyset.$$

Assim, existe $p \in \phi^t(U) \cap V_n$. Logo, existe $u \in U$ tal que $p = \phi^t(u)$ e como $p \in V_n$, então existe $t_0 > 0$ tal que $\phi^{t_0}(p) \in B_n$. Logo,

$$\phi^{t_0}(p) = \phi^{t_0+t}(u),$$

onde $t_0 + t > 0$ e daí temos que $u \in V_n$. Portanto, $V_n \cap U \neq \emptyset$, ou seja, V_n é um conjunto denso em Λ .

Pelo Teorema de Baire,

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$$

é não vazio (de fato denso em Λ). Seja U um conjunto aberto em Λ e como B é denso em Λ , então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_{n_0} \subset U$.

Tome $p \in B$, então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > 0$ tal que $\phi^{t_n}(p) \in B_n$. Então para $n_0 \in \mathbb{N}$, temos que $\phi^{t_{n_0}}(p) \in B_{n_0}$. Logo,

$$\phi^{t_{n_0}}(p) \in B_{n_0} \cap \mathcal{O}(p) \subset U \cap \mathcal{O}(p).$$

Portanto, $\overline{\mathcal{O}(p)} = \Lambda$.

(c) \Rightarrow (a) Provemos que $\Lambda = \omega(p)$ para algum $p \in \Lambda$. Seja $q \in \omega(p)$, então existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\phi^{t_n}(p) \rightarrow q$ e $t_n \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow +\infty$. Como $\phi^{t_n}(p) \in \mathcal{O}(p)$,

então $q \in \overline{\mathcal{O}(p)} = \Lambda$. Logo, $\omega(p) \subset \Lambda$.

Seja $q \in \Lambda = \overline{\mathcal{O}(p)}$, então existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\phi^{t_n}(p) \in \mathcal{O}(p)$ tal que $\phi^{t_n}(p) \rightarrow q$ e $t_n \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow +\infty$. Segue-se que $q \in \omega(p)$. Logo, $\Lambda \subset \omega(p)$. ■

Definição 4.2.7 (Isolado) Um conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ de um fluxo ϕ é *isolado*, se existe um conjunto aberto $U \supset \Lambda$, chamado um bloco de isolamento, tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi^t(U).$$

Na definição acima, se U pode ser escolhido de forma que $\phi^t(U) \subset U$, para todo $t \geq 0$, dizemos que o conjunto isolado Λ é um *conjunto atraente*. Analogamente, dizemos para um fluxo reverso (ou seja, U pode ser escolhido de forma que $\phi^{-t}(U) \subset U$, para todo $t \geq 0$), Λ é um *conjunto repelente*.

Definição 4.2.8 (Atrator) Um atrator é um conjunto atraente transitivo.

Um *repulsor* é um atrator para seu fluxo reverso. Atratores e repulsores são conjuntos compactos e invariantes pelo fluxo. Para maiores detalhes sobre as propriedades de atratores veja [2, 13, 19].

Lema 4.2.1 Se Λ é um atrator, então existe um conjunto aberto V satisfazendo:

(a) $\Lambda \subset V \subset U$, onde U é bloco de isolamento de Λ .

(b) $\bigcap_{t \geq 0} \phi^t(\overline{V}) = \Lambda$.

(c) $\phi^t(V) \subset V$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Ver Lemma 1.6 em [13]. ■

Proposição 4.2.6 Se $\Lambda \subset M$ é um conjunto atrator e um conjunto repulsor de um fluxo ϕ de classe C^1 , então $\Lambda = M$.

Demonstração. Suponhamos que Λ é um conjunto atrator e um conjunto repulsor de um fluxo ϕ . Então existem vizinhanças V_1 e V_2 satisfazendo $\phi^t(V_1) \subset V_1$, $\phi^{-t}(V_2) \subset V_2$ para todo $t \geq 0$,

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi^t(V_1) \quad \text{e} \quad \Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi^{-t}(V_2). \quad (4.5)$$

Defina $U_1 = \text{int}(V_1)$ e $U_2 = \text{int}(V_2)$. Como $\text{int}(\phi^t(V_1)) \subset \text{int}(V_1)$ e ϕ^t é um difeomorfismo, temos que $\phi^t(U_1) \subset U_1$ (isto também segue do item (c) do Lema 4.2.1). Analogamente, $\phi^{-t}(U_2) \subset U_2$. Como U_2 é aberto, pelo item (a) do Lema 4.2.1, temos que $\Lambda \subset U_2$. Pela

primeira igualdade de (4.5), existe $t_2 > 0$ tal que $\phi^{t_2}(V_1) \subset \Lambda$, assim $\phi^{t_2}(V_1) \subset U_2$. Como $\text{int}(V_1) \subset V_1$, temos que $\phi^{t_2}(U_1) \subset \phi^{t_2}(V_1)$. Logo,

$$\phi^{t_2}(U_1) \subset \phi^{t_2}(V_1) \subset U_2 \Rightarrow U_1 \subset \phi^{-t_2}(U_2) \subset U_2,$$

assim, temos que

$$U_1 \subset U_2.$$

Analogamente, como U_1 é aberto, pelo item (a) do Lema 4.2.1, temos que $\Lambda \subset U_1$. Pela segunda igualdade de (4.5), existe $t_1 > 0$ tal que $\phi^{-t_1}(V_2) \subset \Lambda$, assim $\phi^{-t_1}(V_2) \subset U_1$. Como $\text{int}(V_2) \subset V_2$, temos que $\phi^{-t_1}(U_2) \subset \phi^{-t_1}(V_2)$. Daí segue-se que $U_2 \subset \phi^{t_1}(U_1) \subset U_1$, provando

$$U_2 \subset U_1.$$

Assim, $U_1 = U_2$.

Como $\phi^{-t}(U_2) \subset U_2$ e $U_1 = U_2$, temos que, $\phi^{-t}(U_1) \subset U_2$, logo $U_1 \subset \phi^t(U_2) = \phi^t(U_1) \subset U_1$. Portanto,

$$\phi^t(U_1) = U_1, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.6)$$

Analogamente, temos $\phi^{-t}(U_2) = U_2$ para todo $t \geq 0$. Agora, usando (4.6), temos que,

$$U_1 = \bigcap_{t \geq 0} \phi^t(U_1) \subset \bigcap_{t \geq 0} \phi^t(V_1) = \Lambda.$$

Assim, $U_1 \subset \Lambda$ e como $\Lambda \subset U_1$, temos que $\Lambda = U_1$. Como Λ é compacto, por hipótese, concluímos que Λ é aberto e fechado. Como M é conexo e Λ não é vazio, obtemos que $\Lambda = M$. ■

4.3 Conjuntos hiperbólicos para fluxos

Nesta seção, damos a definição de um conjunto hiperbólico, enunciamos o Teorema da Variedade Estável, λ -Lema e definimos a classe homoclínica.

Definição 4.3.1 (Conjunto hiperbólico) Um conjunto compacto e invariante $\Lambda \subset M$ de um fluxo ϕ é dito hiperbólico se:

- (i) Para todo $p \in \Lambda$, o fibrado tangente de M se decompõe na forma

$$T_p M = E^s(p) \oplus E^\phi(p) \oplus E^u(p).$$

- (ii) A decomposição é $D\phi^t$ -invariante, isto é, $D\phi^t(p)(E^\sigma(p)) = E^\sigma(\phi^t(p))$, para $\sigma = s, \phi, u$.
- (iii) Os subespaços $E^s(p), E^u(p)$ variam continuamente com p e existem constantes $C > 0$

e $0 < \lambda < 1$ tais que para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |D\phi^t(p)(v)| &\leq C\lambda^t|v|, \quad v \in E^s(p), \\ |D\phi^{-t}(p)(v)| &\leq C\lambda^t|v|, \quad v \in E^u(p). \end{aligned}$$

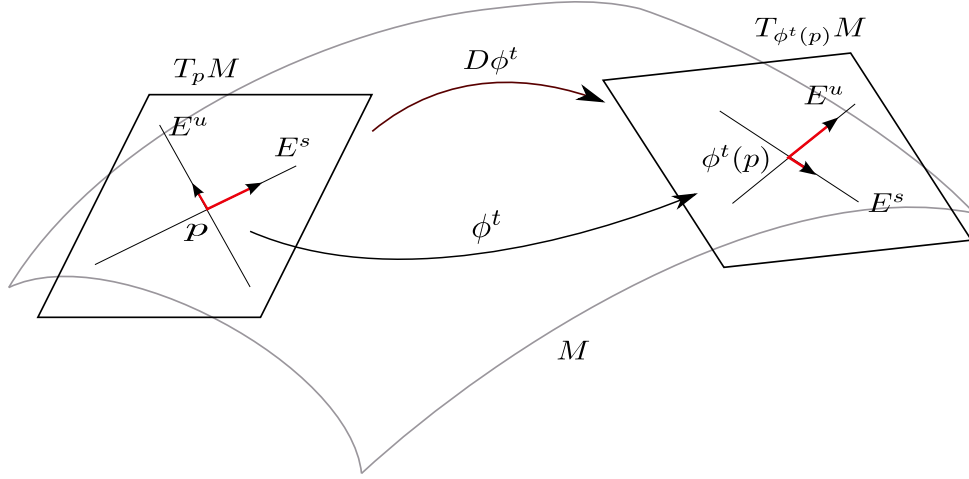


Figura 4.1: Decomposição hiperbólica: E^s contrai e E^u expande.

Definição 4.3.2 Os conjuntos

$$W^{ss}(p) = \{y \in M : d(\phi^t(p), \phi^t(y)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

$$W^{su}(p) = \{y \in M : d(\phi^t(p), \phi^t(y)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

são chamados de variedades estável e instável fortes do ponto p para o fluxo ϕ , respectivamente.

Enunciamos o *Teorema da Variedade Estável para Fluxos*, a prova pode ser vista em [14], Theorem 17.4.3 página 545 ou em [12], Theorem 4.1 página 39.

Teorema 4.3.1 (Teorema da variedade estável para fluxos) *Sejam ϕ um fluxo de classe C^r em M e Λ um conjunto hiperbólico para ϕ . Então existe $\eta > 0$ tal que para cada $p \in \Lambda$ existem dois discos de classe C^r mergulhados $W_\eta^{ss}(p)$ e $W_\eta^{su}(p)$, chamados de variedade estável forte local e variedade instável forte local de p , os quais são tangentes a $E^s(p)$ e $E^u(p)$, respectivamente (veja Figura 4.2).*

As variedades estável e instável forte de p para o fluxo ϕ podem ser obtidos da seguinte forma:

$$W^{ss}(p) = \bigcup_{t \geq 0} \phi^{-t}(W_\eta^{ss}(\phi^t(p))) \quad \text{e} \quad W^{su}(p) = \bigcup_{t \geq 0} \phi^t(W_\eta^{su}(\phi^{-t}(p))).$$

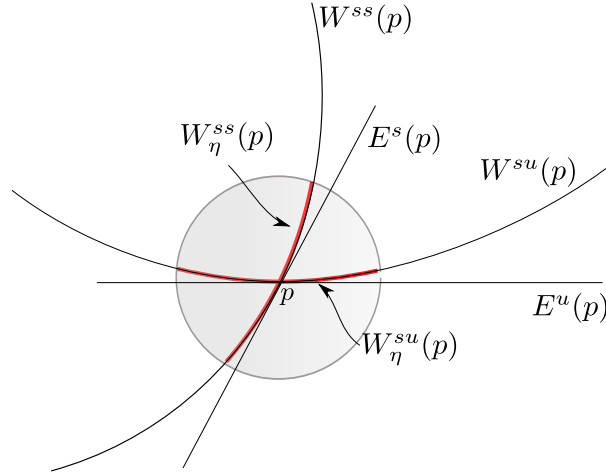


Figura 4.2: Variedades estáveis e instáveis.

O Teorema da Variedade Estável para Fluxos assegura que se Λ é um conjunto hiperbólico de ϕ , então existem subvariedades $W^{ss}(p), W^{su}(p), W^s(p), W^u(p)$ de M tangente em p para os subespaços $E^s(p), E^u(p), E^s(p) \oplus E^\phi(p), E^\phi(p) \oplus E^u(p)$ para todo $p \in \Lambda$ respectivamente.

Chamamos $W^s(p)$ (respectivamente $W^u(p)$) de variedade *estável fraca* ou simplesmente *estável* (respectivamente *instável fraca*) de ϕ em p . Estas variedades possuem a seguinte caracterização dinâmica:

$$W^s(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(\phi^t(p)) \quad \text{e}$$

$$W^u(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{su}(\phi^t(p)).$$

Além disso, dado $\eta > 0$, temos a variedade estável forte local, instável forte local, estável local e instável local

$$W_\eta^{ss}(p) = \{y \in W^{ss}(p) : d(\phi^t(p), \phi^t(y)) < \eta \text{ para } t > 0\},$$

$$W_\eta^{su}(p) = \{y \in W^{su}(p) : d(\phi^t(p), \phi^t(y)) < \eta \text{ para } t < 0\},$$

$$W_\eta^s(p) = \{y \in W^s(p) : d(\phi^t(p), \phi^t(y)) < \eta \text{ para } t > 0\},$$

e

$$W_\eta^u(p) = \{y \in W^u(p) : d(\phi^t(p), \phi^t(y)) < \eta \text{ para } t < 0\}$$

respectivamente. Por razões análogas às apresentadas na Seção 2.3, aqui também as variedades estáveis, estáveis forte, instáveis e estáveis fortes constituem folhas de folheações homônimas.

Dado um subconjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$, definimos os conjuntos estável e instável por

$$W^s(\Lambda) = \{x \in M : d(\phi^t(x), \Lambda) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\} = \{x \in M : \omega(x) \subset \Lambda\} \text{ e}$$

$$W^u(\Lambda) = \{x \in M : d(\phi^t(x), \Lambda) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\} = \{x \in M : \alpha(x) \subset \Lambda\}$$

respectivamente.

Proposição 4.3.1 *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto invariante para ϕ . Λ é um conjunto atraente se, e somente se,*

- (a) $W_\eta^s(\Lambda)$ é uma vizinhança aberta de Λ ,
- (b) Λ é W^u -invariante, ou seja, $W^u(\Lambda) = \Lambda$.

Demonstração. Suponhamos que Λ é um conjunto atraente. Seja $x \in \Lambda$, como Λ é invariante, então $\phi^t(x) \in \Lambda$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, $d(\phi^t(x), \Lambda) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$. Assim, $x \in W^s(\Lambda)$. Portanto $\Lambda \subset W^s(\Lambda)$. Analogamente, $\Lambda \subset W^u(\Lambda)$.

Como M e Λ são compactos, então podemos tomar uma vizinhança aberta $V = W_\eta^s(\Lambda)$ de Λ , para algum $\eta > 0$. Isto prova item (a). Para provar item (b), só precisamos provar que $W^u(\Lambda) \subset \Lambda$. De fato, seja $x \in W^u(\Lambda)$, então $\alpha(x) \in \Lambda$ e como Λ é um conjunto atraente, então $x \in \Lambda$. Portanto, $W^u(\Lambda) \subset \Lambda$.

Reciprocamente, suponhamos que um conjunto compacto invariante Λ satisfaz os itens (a) e (b), queremos provar que Λ é um conjunto atraente. Do item (a), tome $V = \text{int}(W_\eta^s(\Lambda)) = W_\eta^s(\Lambda)$, logo temos que $\Lambda \subset V$ e $\phi^t(V) \subset V$ para todo $t \geq 0$. Do item (b), em particular, temos que

$$\Lambda = W_\eta^u(\Lambda) = \bigcap_{s \leq 0} W_\eta^u(\Lambda) = \bigcap_{s \leq 0} \phi^s(W_\eta^u(\Lambda)).$$

Fazendo, $t = -s \geq 0$, temos que

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi^t(W_\eta^s(\Lambda)) = \bigcap_{t \geq 0} \phi^t(V).$$

Assim, Λ é um conjunto atraente. ■

Da Proposição 4.3.1, para provar que um conjunto compacto $\Lambda \subset M$ é um conjunto atraente, basta provar que $W^u(\Lambda) \subset \Lambda$, pois como Λ é invariante então é obvio que $\Lambda \subset W^\sigma(\Lambda)$, onde $\sigma = s, u$. Daí podemos escolher $\eta > 0$ tal que $W_\eta^s(\Lambda)$ é uma vizinhança aberta de Λ . Assim temos os itens (a) e (b) da proposição acima.

Por outro lado, a variedade estável através de um ponto x no atrator é determinada unicamente pelo comportamento futuro. Assim, os pontos no $W^s(x)$ ficam muito próximos

do atrator no tempo futuro. Mas isso não significa “soltar fora” pontos de W^s para se tornar membro do atrator.

Analogamente à Proposição 4.3.1, podemos mostrar que um conjunto atraente Λ é equivalente às duas propriedades mais fortes

- (a) $W_\eta^s(\Lambda)$ é uma vizinhança aberta de Λ ,
- (b) Λ é W^{su} -invariante, isto é, $W^{su}(\Lambda) = \Lambda$.

Pois, se $x \in \Lambda$, $W^{su}(x) \subset \Lambda$. Isto é válido também para $W^u(x)$ como Λ é ϕ -invariante. Justificando podemos dizer que Λ (atrator) é menos fractal, pelo menos em um sentido topológico, do que os conjuntos hiperbólicos gerais.

Apresentamos o *Lema de inclinação* ou λ -Lema, o qual é um resultado muito importante para provar transversalidade sob iterações. A prova pode-se encontrar em [20] Lema 7.1, página 90 ou em [14] Proposition 6.2.23, página 257.

Lema 4.3.1 (λ -Lema) *Seja p um ponto fixo de um fluxo ϕ de classe C^r , com variedades estável e instável locais $W_\eta^s(p), W_\eta^u(p)$. Seja D^u um disco mergulhado em $W_\eta^u(p)$ que é uma vizinhança de p em $W_\eta^u(p)$ e V uma vizinhança deste disco em M . Seja $z \in W_\eta^s(p)$ e D um disco transversal a $W_\eta^s(p)$ em z com a mesma dimensão de D^u . Seja D^t a componente conexa de $\phi^t(D) \cap V$ que contém $\phi^t(z)$, para todo $t \geq 0$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que para todo $t > T$ o disco D^t está ϵ -próximo de V na C^r -topologia.*

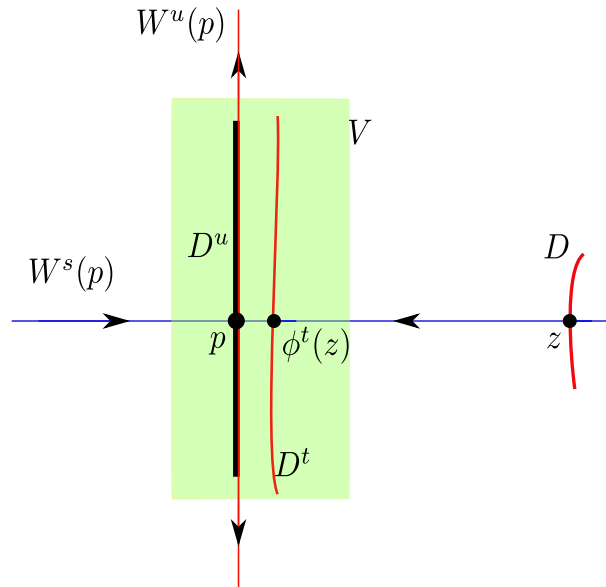


Figura 4.3: λ -Lema.

Para encerrar esta seção, definamos a classe homoclínica. Uma órbita fechada \mathcal{O} de ϕ é *hiperbólica* se for hiperbólica como um conjunto invariante compacto.

Definição 4.3.3 Se $\mathcal{O} = \mathcal{O}(p)$ é uma órbita periódica hiperbólica de ϕ , dizemos que $q \in M$ é um *ponto homoclínico* associado a \mathcal{O} se $q \in W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$.

Se, além disso, q é um ponto de intersecção transversal entre essas variedades, então dizemos que q é um ponto *transversal* homoclínico associado a \mathcal{O} . Denotamos por $W^s(p) \pitchfork W^u(p)$ o conjunto de pontos transversais homoclínicos associados a p .

Definição 4.3.4 A *classe homoclínica* $H(\mathcal{O})$ associada a \mathcal{O} (ou p) é dada por

$$H(p) = \overline{W^s(p) \pitchfork W^u(p)}.$$

Um conjunto invariante compacto é uma classe homoclínica se for igual a $H(p)$. Isto segue do *Teorema de Birkhoff-Smale*: cada classe homoclínica é um conjunto transitivo com órbitas periódicas densas.

4.4 Estrutura de produto local

Definição 4.4.1 Seja Λ um conjunto hiperbólico invariante para um fluxo ϕ . Dizemos que Λ tem uma *estrutura de produto local* se existem ϵ e η positivos tais que se $y, z \in \Lambda$, e $d(y, z) < \epsilon$, então $W_\eta^s(y) \cap W_\eta^{su}(z)$ contém exatamente um ponto $[y, z]$ que pertence a Λ .

Seja Λ um conjunto hiperbólico invariante para ϕ . A continuidade das variedades estável e instável forte para pontos de Λ implica que existe um $\eta_0 > 0$ tal que para qualquer $0 < \eta \leq \eta_0$, existe $\epsilon = \epsilon(\eta) > 0$ para o qual $W_\eta^s(y) \cap W_\eta^{su}(z)$ é um único ponto para qualquer $y, z \in \Lambda$, com $d(y, z) < \epsilon$, isto é, a intersecção é diferente de vazio e um único ponto. Assim, se Λ é um conjunto hiperbólico com estrutura de produto local e $d(y, z) < \epsilon$, então $W_\eta^s(y) \cap W_\eta^{su}(z) = \{x\} \subset \Lambda$. Mais precisamente temos o seguinte resultado:

Proposição 4.4.1 *Seja Λ com estrutura de produto local. Dado $x \in \Lambda$, para $\eta > 0$ suficientemente pequeno, a vizinhança U_x de x em Λ é homeomorfa a $(W_\eta^s(x) \cap \Lambda) \times (W_\eta^{su}(x) \cap \Lambda)$. Um homeomorfismo é dado pela aplicação*

$$\begin{aligned} (W_\eta^s(x) \cap \Lambda) \times (W_\eta^{su}(x) \cap \Lambda) &\longrightarrow U_x \\ (y, z) &\longmapsto [y, z] = W_\eta^s(y) \cap W_\eta^{su}(z), \end{aligned}$$

onde $[y, z]$ é um único ponto.

Demonstração. Note que $W_\eta^s(y) \cap W_\eta^{su}(z) \neq \emptyset$, isto segue da estrutura de produto local.

Seja $p \in W_\eta^s(y) \cap W_\eta^{su}(z)$, provemos que p é único. De fato, suponhamos que existe $p' \in W_\eta^s(y) \cap W_\eta^{su}(z)$, devemos mostrar que $p = p'$. Temos que, $p, p' \in W_\eta^s(y)$, então para $t > 0$,

$$d(\phi^t(p), \phi^t(y)) < \eta \text{ e } d(\phi^t(p'), \phi^t(y)) < \eta.$$

Logo, para $t > 0$, temos $d(\phi^t(p'), \phi^t(p)) < 2\eta$. Assim, $p' \in W_{2\eta}^s(p)$. Analogamente, como $p, p' \in W_\eta^{su}(y)$, temos que para $t < 0$,

$$d(\phi^t(p'), \phi^t(p)) < 2\eta,$$

logo, $p' \in W_{2\eta}^{su}(p)$. Portanto, $p' \in W_{2\eta}^s(p) \cap W_{2\eta}^{su}(p) = \{p\}$. Daí, segue-se que $p = p'$. ■

Na Proposição 4.4.1, U_x é uma vizinhança de x em Λ , contendo a bola $B(x, \epsilon) \cap \Lambda$ e podemos olhar a aplicação [] como uma imagem topológica de Anosov: em vez das folheações suplementares estáveis e instáveis, temos as duas laminações de Λ : $W^s(x) \cap \Lambda$ e $W^{su}(x) \cap \Lambda$.

4.5 Decomposição espectral e Axioma A para fluxos

Aqui, vamos estender a definição de *Axioma A* e o *Teorema da decomposição espectral* da Seção 2.4 para fluxos numa variedade compacta sem bordo M .

Axioma A: Um fluxo ϕ é *Axioma A*, se o conjunto não errante $\Omega(\phi)$ é hiperbólico e $\Omega(\phi)$ é o fecho do conjunto das órbitas fechadas.

Agora enunciamos o *Teorema da decomposição espectral para fluxos*.

Teorema 4.5.1 (Decomposição espectral) *Se o fluxo ϕ satisfaz Axioma A, então o conjunto não-errante $\Omega(\phi)$ se decompõe de maneira única numa união finita e disjunta*

$$\Omega(\phi) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cdots \cup \Lambda_k,$$

onde cada Λ_i é fechado, invariante e cada $\phi^t : \Lambda_i \rightarrow \Lambda_i$ é topologicamente transitivo. Além disso, cada Λ_i tem uma estrutura de produto local.

No teorema acima cada Λ_i é uma classe homoclínica de ϕ . Enunciamos e provamos os seguintes corolários do Teorema da decomposição espectral.

Corolário 4.5.2 *Temos que*

$$M = \bigcup_{i=1}^k W^s(\Lambda_i),$$

onde, $W^s(\Lambda_i) = \{x \in M : \phi^t(x) \rightarrow \Lambda_i, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$.

Demonstração. Como $W^s(\Lambda_i) \subset M$ para qualquer $i = 1, \dots, k$, temos que

$$\bigcup_{i=1}^k W^s(\Lambda_i) \subset M.$$

Reciprocamente, dado qualquer $x \in M$, $\phi^t(x) \rightarrow \Omega(\phi)$, quando $t \rightarrow \infty$. Isto ocorre simplesmente pelas desigualdades (1.1) (para fluxos). Daí

$$\phi^t(x) \rightarrow \Omega(\phi) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cdots \cup \Lambda_k,$$

Logo existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\phi^t(x) \rightarrow \Lambda_i$. Assim $x \in W^s(\Lambda_i)$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Portanto

$$M \subset \bigcup_{i=1}^k W^s(\Lambda_i).$$

Isto prova o corolário. ■

Como Λ_i são disjuntos para todo $i = 1, \dots, k$, segue que $W^s(\Lambda_1) \cup \dots \cup W^s(\Lambda_k)$ são disjuntos.

Corolário 4.5.3 *Seja ϕ Axioma A em uma variedade compacta M , então*

(a) *ϕ tem uma órbita densa se, e somente se, $\Omega(\phi) = M$.*

(b) *ϕ tem atrator e repulsor.*

Demonstração. (a) Como $\Omega(\phi) \subset M$, basta provar que $M \subset \Omega(\phi)$. Seja $x \in M$ com $\mathcal{O}(x)$ densa em M . Dado $y \in M$, temos que $y \in \overline{\mathcal{O}(x)}$, em particular $y \in \omega(x) \subset \Omega(\phi)$. Logo, $M \subset \Omega(\phi)$ (Note que aqui, não precisa que ϕ seja Axioma A).

Reciprocamente, suponha que $\Omega(\phi) = M$, como ϕ é Axioma A pelo Teorema da decomposição espectral, M deve ser um dos conjuntos Λ_i , $i = 1, \dots, k$, desde que esses conjuntos são disjuntos e M conexa.

(b) Pelo Corolário 4.5.2, M é união disjunta de $W^s(\Lambda_i)$, para $i = 1, \dots, k$. Então pelo Teorema de Baire, existe $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ com $\Lambda = \Lambda_{i_0}$ tal que $\text{int}(W^s(\Lambda)) \neq \emptyset$. Provemos que Λ é um atrator para ϕ . Como Λ é uma classe homoclínica, ou seja, $\Lambda = H(\mathcal{O})$ (associado a órbita de $x \in \Lambda$), para toda órbita periódica $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x) \subset \Lambda$. Escolha um conjunto aberto $U \subset W^s(\Lambda)$. Pela densidade das órbitas periódicas em Λ e pela continuidade de variedade estável de Λ , temos que

$$W^s(\mathcal{O}) \cap U \neq \emptyset.$$

Agora, seja $q \in W^u(\mathcal{O})$ e seja V uma vizinhança arbitrária em q de M . Pelo Lema de inclinação (λ -Lema), temos que $V \cap U \neq \emptyset$ e assim, $W^s(\Lambda) \cap V \neq \emptyset$. Isto implica que $W^s(\mathcal{O}) \cap V \neq \emptyset$, desde que $\Lambda = H(\mathcal{O})$. Por outro lado, $W^u(\mathcal{O}) \cap V \neq \emptyset$, desde que $q \in W^u(\mathcal{O})$ e V uma vizinhança de q em M . Resumindo, temos

$$W^s(\mathcal{O}) \cap V \neq \emptyset \text{ e } W^u(\mathcal{O}) \cap V \neq \emptyset,$$

para alguma vizinhança V de q em M . Logo pelo λ -Lema $q \in \Omega(\phi)$, conseqüentemente $W^u(\mathcal{O}) \subset \Omega(\phi)$ e assim $W^u(\mathcal{O}) \subset \Lambda$, segue que Λ é um conjunto atraente. Como Λ é um conjunto transitivo, obtemos que Λ é um conjunto atrator. Aplicando o mesmo argumento para ϕ^{-t} , obtemos que ϕ tem repulsor. ■

Definição 4.5.1 Dizemos que um conjunto compacto invariante Λ é indecomponível se Λ não pode ser decomposta em uma união disjunta de conjuntos invariantes compactos.

Exemplo 4.5.1 Conjuntos transitivos são indecomponíveis.

De fato isto segue-se claramente do item (a) do Corolário 4.5.3.

4.6 Fluxos Anosov

A seguir definimos um fluxo Anosov. No Capítulo 2 apresentamos no contexto dos sistemas dinâmicos com tempo discreto e neste capítulo nas seções anteriores estamos vendo sistemas dinâmicos com tempo contínuo. A razão das duas teorias serem tão semelhantes é que é possível relacionar sistemas de um tipo com sistemas de outro tipo, por meio da construção de *fluxo suspensão*, que apresentamos como um exemplo de um fluxo Anosov.

Definição 4.6.1 (Fluxo Anosov) Um fluxo ϕ , definido sobre M , é dito *Anosov*, se a variedade toda é um conjunto hiperbólico para ϕ .

Exemplo 4.6.1 Um fluxo Anosov é Axioma A.

Exemplo 4.6.2 Todo fluxo que satisfaz Axioma A e transitividade é um fluxo Anosov.

De fato, como o fluxo ϕ é transitivo, então pelo item (a) de Corolário 4.5.3, temos que $M = \Omega(\phi)$. Por outro lado, como o fluxo ϕ é Axioma A, temos que M é hiperbólico, logo ϕ é Anosov.

Outro exemplo importante de um fluxo Anosov é o *fluxo suspensão* de um difeomorfismo Anosov. Vamos construir o fluxo suspensão dado pelo difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ da maneira seguinte:

Em $\mathbb{R} \times M$ identificamos $(s+1, x)$ com $(s, f(x))$. Isso produz a variedade M^f definida por

$$M^f = \mathbb{R} \times M / (s+1, x) \simeq (s, f(x)).$$

Assim para obter os pontos de M^f basta tomar $0 \leq s \leq 1$. Se f é de classe C^r , então M^f é uma variedade que tem estrutura C^r .

Agora, considere a equação diferencial em $\mathbb{R} \times M$ definida por

$$\begin{cases} x' = 0, \\ s' = 1. \end{cases}$$

Esta equação diferencial induz um fluxo ϕ em $\mathbb{R} \times M$ definido por $\phi^t(s, x) = (s + t, x)$ e que por sua vez induz um fluxo ϕ_f em M^f definido por $\phi_f^t(s, x) = (s + t, x) \simeq (s, f(x))$. Note que o conjunto $\Sigma = \{0\} \times M$ forma uma seção transversal global, para o qual a aplicação de Poincaré $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é dada por

$$F(0, x) = \phi^1(0, x) = (1, x) \simeq (0, f(x)).$$

Logo f é uma aplicação de Poincaré sobre a seção transversal global $\{0\} \times M \subset M^f$ para o fluxo ϕ_f . Para ver a métrica (ou norma) definido em M^f veja [3] página 186. Isso encerra nossa discussão sobre a construção do fluxo suspensão. Para mais detalhes ver páginas 173 e 298 em [23].

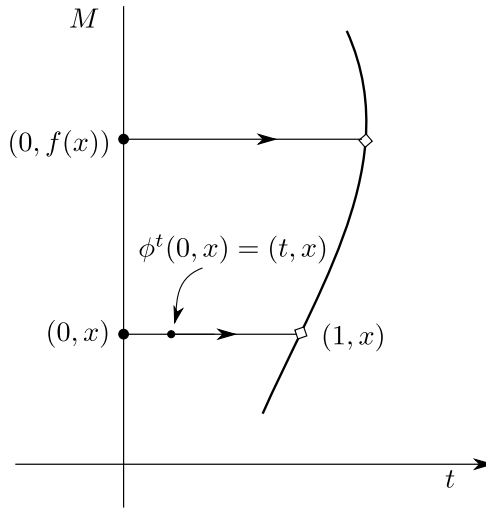


Figura 4.4: Fluxo suspensão.

Na seguinte proposição, vemos uma relação entre difeomorfismo Anosov e fluxos Anosov. A prova de proposição.

Proposição 4.6.1 *Se f é um difeomorfismo Anosov em uma variedade M , então o fluxo suspensão ϕ_f é um fluxo Anosov.*

Demonstração. Denote por $TM = E^s \oplus E^u$ a decomposição contínua associada a f . Para $(0, x) \in \{0\} \times M$ defina,

$$\tilde{E}^s(0, x) = E^s(x) \quad \text{e} \quad \tilde{E}^u(0, x) = E^u(x),$$

(usamos aqui a identificação óbvia $T(\{0\} \times M) = TM$) e quando $(t, x) \in [0, 1] \times M$, defina

$$\tilde{E}^s(t, x) = D\phi_f^t(0, x)(E^s(x)) \quad \text{e} \quad \tilde{E}^u(t, x) = D\phi_f^t(0, x)(E^u(x)).$$

Desta maneira temos a decomposição contínua,

$$TM^f = \tilde{E}^s \oplus \tilde{E}^{\phi_f} \oplus \tilde{E}^u.$$

Agora provemos que \tilde{E}^s tem propriedade contrativa. Note que por definição, $\tilde{E}^s(t_0, x) = D\phi_f^{t_0}(0, x)(E^s(x))$. Assim, tomando inversa temos,

$$D\phi_f^{-t_0}(t_0, x)(\tilde{E}^s(t_0, x)) = E^s(x).$$

Fixe $t > 0$, então

$$\begin{aligned} D\phi_f^t(t_0, x)(\tilde{E}^s(t_0, x)) &= D\phi_f^{t+t_0-t_0}(t_0, x)(\tilde{E}^s(t_0, x)) \\ &= D\phi_f^{t+t_0}(0, x)[D\phi_f^{-t_0}(t_0, x)(\tilde{E}^s(t_0, x))] \\ &= D\phi_f^{t+t_0}(0, x)(E^s(x)). \end{aligned}$$

Com esta última expressão vale para qualquer $t > 0$, podemos assumir que $t_0 = 0$, isto é, $(t_0, x) \in \{0\} \times M$. Seja $t = [t] + r$, onde $r \in [0, 1]$ e $[\cdot]$ denota a parte inteira. Em $\{0\} \times M$ por construção temos que $\phi_f^{[t]} = f^{[t]}$. Como

$$\phi_f^t(0, x) = \phi_f^{[t]+r}(0, x) = \phi_f^r(\phi_f^{[t]}(0, x)) = \phi_f^r(f^{[t]}(x)),$$

então

$$D\phi_f^t(0, x) = D\phi_f^r(f^{[t]}(x))Df^{[t]}(x).$$

Logo,

$$|D\phi_f^t(0, x)(v)| \leq \|D\phi_f^r(f^{[t]}(x))\| |Df^{[t]}(x)(v)| \leq C_1 \lambda^{[t]} |v|, \quad v \in \tilde{E}^s(0, x), \quad \forall x \in M.$$

Analogamente para \tilde{E}^u . Portanto, ϕ_f é um fluxo Anosov em M^f . ■

Observação 4.6.1 Note que a aplicação retorno de ϕ^f em $\{0\} \times M \simeq M$ é f . Logo se ϕ_f é um fluxo Anosov em M^f , então f é um difeomorfismo Anosov em M .

4.7 Fluxos Anosov em recobrimento universal

Nesta seção vamos definir novo fluxo em \tilde{M} a partir do fluxo em M , ou seja, vamos estudar o levantamento de um fluxo Anosov no recobrimento universal \tilde{M} de M e isto sera feito através de *pull-back*.

Seja M uma variedade diferenciável. O espaço vetorial dos campos vetoriais diferenciáveis em M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$. Note que, dado um vetor tangente $v \in T_p M$, sempre podemos estendê-lo um campo diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 4.7.1 (Pull-back) Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ um difeomorfismo local. Definamos a aplicação *pull-back* $F^* : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ por

$$(F^*Y)_p = dF_{F(p)}^{-1}(Y_{F(p)})$$

para qualquer $p \in M$.

Dado um fluxo Anosov ϕ sobre M , vamos definir um novo fluxo $\tilde{\phi}$ sobre \tilde{M} . Sabemos que \tilde{M} é uma variedade diferenciável e como a projeção de recobrimento

$$\pi : \tilde{M} \rightarrow M$$

é um difeomorfismo local, então basta considerar o *pull-back* do campo de vetores X associado a ϕ . Assim, obtemos o campo de vetores em \tilde{M} , por,

$$\tilde{X}(\tilde{p}) = (\pi^*X)_{(\tilde{p})} = D\pi_{(\pi(\tilde{p}))}^{-1}(X_{\pi(\tilde{p})}), \quad \tilde{p} \in \tilde{M}. \quad (4.7)$$

Da equação (4.7), observamos que, localmente as órbitas dos campos \tilde{X} e X são conjugadas, logo as órbitas de \tilde{X} estão definidas em toda a reta real e definem um fluxo $\tilde{\phi}$ em \tilde{M} . A aplicação de recobrimento π leva trajetórias de $\tilde{\phi}^t$ em trajetórias de ϕ^t , preservando o tempo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.7.1 *O fluxo $\tilde{\phi}$ definido em \tilde{M} é Anosov.*

Demonstração. Para definir a decomposição do fibrado tangente $T\tilde{M}$ de \tilde{M} , seja $\tilde{x} \in \tilde{M}$ fixo e

$$\tilde{E}^s(\tilde{x}) = D\pi^{-1}(\pi(\tilde{x}))(E^s(\pi(\tilde{x}))),$$

$$\tilde{E}^u(\tilde{x}) = D\pi^{-1}(\pi(\tilde{x}))(E^u(\pi(\tilde{x}))).$$

Temos o seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\phi}^t} & \tilde{M} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\phi^t} & M \end{array}$$

Seja U uma vizinhança distinguida do recobrimento universal e considere $\tilde{x} \in U$. Do diagrama acima temos que $\phi^t(\pi(\tilde{x})) = \pi(\tilde{\phi}^t(\tilde{x}))$. Logo nesta vizinhança, temos

$$D\phi^t(\pi(\tilde{x})) \cdot D\pi(\tilde{x}) = D\pi(\tilde{\phi}^t(\tilde{x})) \cdot D\tilde{\phi}^t(\tilde{x}).$$

E note que,

$$D\pi(\tilde{x})(\tilde{E}^s(\tilde{x})) = D\pi(\tilde{x}) \cdot D\pi^{-1}(\pi(\tilde{x}))(E^s(\pi(\tilde{x}))) = E^s(\pi(\tilde{x})).$$

Logo,

$$\begin{aligned} D\phi^t(\pi(\tilde{x})) \cdot D\pi(\tilde{x})(\tilde{E}^s(\tilde{x})) &= D\phi^t(\pi(\tilde{x}))(E^s(\pi(\tilde{x}))) \\ &= D\pi(\tilde{\phi}^t(\tilde{x})) \cdot D\tilde{\phi}^t(\tilde{x})(\tilde{E}^s(\tilde{x})). \end{aligned}$$

Ou seja, na vizinhança U , a derivada $D\phi^t(\pi(\tilde{x}))$ difere da derivada $D\tilde{\phi}^t(\tilde{x})$ por isomorfismo. Assim, localmente possuem o mesmo comportamento exponencial. Fazemos analogamente para \tilde{E}_x^u .

No entanto, dado qualquer ponto $\tilde{x}_1 \in \{\tilde{\phi}^t(\tilde{x}) : t \in \mathbb{R}\}$ sempre podemos cobrir o *pedaço* da órbita ligando x a x_1 por uma quantidade finita de vizinhanças distinguidas U_1, U_2, \dots, U_n . Aplicando o mesmo raciocínio acima para cada U_i , concluímos que de fato $\tilde{\phi}$ é um fluxo Anosov sobre \tilde{M} . ■

Definição 4.7.2 (Splitting) Dizemos que (M, ϕ) é *splitting* se sua estrutura de produto local é global no recobrimento universal \tilde{M} .

Ou seja, um fluxo Anosov ϕ em M é *splitting* se qualquer folha estável intersecta cada folha instável forte num único ponto, no recobrimento universal \tilde{M} .

CAPÍTULO 5

PROVA DO TEOREMA A

Neste capítulo provaremos o Teorema A, para o qual vamos introduzir algumas propriedades de *sistemas quase Anosov* e *subvariedades invariantes de sistemas Anosov*. A referência principal é o artigo de A. Zeghib [30]. Aqui, M é uma variedade fechada (compacto, conexo, suave e sem bordo). Então, enunciamos o teorema.

Teorema A (Zeghib). *Sejam (M, ϕ) um sistema Anosov que é *splitting* e N uma subvariedade invariante fechada de classe C^1 (de dimensão não trivial, isto é, 0 para difeomorfismos e 1 para fluxos). Então (N, ϕ) é um sistema Anosov transitivo.*

No Teorema acima, ϕ pode ser um difeomorfismo ou um fluxo. Assim, a fim de simplificar notações como vimos na Seção 4.6 (ver Proposição 4.6.1), sem perda de generalidade, iremos restringir ao caso de fluxos, uma vez que podemos associar ao difeomorfismo, seu fluxo de suspensão e em vista do Teorema A, o *splitting* dos difeomorfismos correspondem ao *splitting* de fluxos. Lembrando, que um sistema Anosov é dito de *splitting*, se sua estrutura de produto local é global no recobrimento universal.

5.1 Sistemas quase Anosov

Seja N uma subvariedade fechada de M . Uma definição alternativa de sistemas quase Anosov é a seguinte:

Definição 5.1.1 (N, ϕ) é quase Anosov se ele pode ser incorporado em um sistema (M, ϕ) , para o qual $N \subset M$ é um conjunto hiperbólico para ϕ .

A seguinte proposição (ver [17]), é uma propriedade importante, de sistemas quase Anosov. De fato, na Seção 3.6 do Capítulo 2, provamos para o caso de difeomorfismos (ver Teorema 2.8.1).

Proposição 5.1.1 *Sistemas quase Anosov são Axioma A.*

Pelo Teorema da decomposição espectral, o conjunto não errante $\Omega(\phi)$ tem a decomposição espectral numa união disjunta, $\Omega(\phi) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k$, onde cada Λ_i é invariante, fechado, transitivo, isolado e

$$N = \bigcup_{i=1}^k W^s(\Lambda_i),$$

onde, $W^s(\Lambda_i) = \{x \in N : d(\phi^t(x), \Lambda_i) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$. Agora vejamos um resultado o qual é um ingrediente muito importante para finalizar a prova do Teorema A.

Proposição 5.1.2 *(N, ϕ) é sistema Anosov transitivo se, e somente se, para algum Λ_i , temos $W^s(\Lambda_i) = N$.*

Demonstração. Suponhamos que (N, ϕ) seja um sistema Anosov transitivo. Como ϕ é Axioma A e tem uma órbita densa, então pelo item (a) do Corolário 4.5.3, $\Omega(\phi) = N$. Por outro lado, desde que N é indecomponível (ver Exemplo 4.5.1), então pelo Corolário 4.5.2 (do Teorema da decomposição espectral) existe algum Λ_i tal que $N = W^s(\Lambda_i)$.

Reciprocamente, note que se $\Omega(\phi) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k$ como no Teorema da decomposição espectral, então contraria nossa hipótese. Logo, a decomposição espectral se reduz a um único elemento, ou seja para algum Λ_i , temos que $\Omega(\phi) = \Lambda_i$. Assim, pelo item (b) do Corolário 4.5.3, Λ_i é ao mesmo tempo um conjunto atrator e repulsor, então pela Proposição 4.2.6 temos, $\Lambda_i = N$. Logo, como $\Omega(\phi) = \Lambda_i$, segue-se que N é hiperbólico. Além disso, pelo Teorema da decomposição espectral, (Λ_i, ϕ) é transitivo. Portanto (N, ϕ) é sistema Anosov transitivo. ■

5.2 Subvariedades invariantes de sistemas Anosov

Dado um fluxo Anosov (M, ϕ) , denote por $(\tilde{M}, \tilde{\phi})$ o fluxo Anosov de levantamento ao recobrimento universal (ver Seção 4.7) e $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ a projeção natural. Seja $Q^s = \tilde{M}/W^s$ o espaço de folhas estáveis de $(\tilde{M}, \tilde{\phi})$, que assumimos ser um espaço de Hausdorff e $\pi^s : \tilde{M} \rightarrow Q^s$ a projeção associada.

Observação 5.2.1 Para qualquer $x \in \tilde{M}$, a restrição de π^s ao $W^{su}(x)$ é localmente homeomorfo a um subconjunto aberto de Q^s .

Para qualquer subconjunto $X \subset \tilde{M}$ e $x \in X$, denotemos por

$$W^s(x, X) = W^s(x) \cap X,$$

onde, $W^s(x)$ é a folha estável de x com respeito ao fluxo $(\tilde{M}, \tilde{\phi})$. Analogamente, denotamos para variedades instável, instável forte e estável forte.

ϵ -abertos

Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$ subconjunto qualquer. Dado $\epsilon > 0$, dizemos que Y é ϵ -aberto, se Y contém sua ϵ -vizinhança, ou seja, se

$$d(y, Y) < \epsilon \Rightarrow y \in Y.$$

Neste caso, o complemento de Y também é ϵ -aberto (ver figura 5.1).

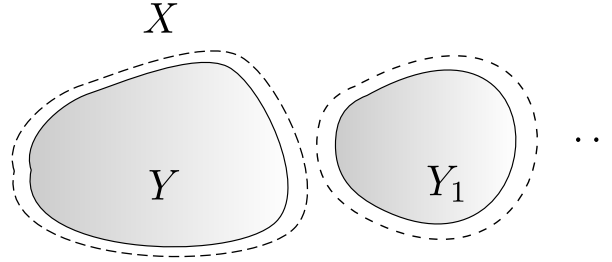


Figura 5.1: ϵ -aberto.

Definição 5.2.1 Dizemos que Y é ϵ -conexo se não contiver um subconjunto próprio ϵ -aberto.

A seguinte proposição relaciona ϵ -conexo com ϵ -cadeias.

Proposição 5.2.1 A definição acima é equivalente a dizer que Y é ϵ -conexo por cadeias, isto é, se $x, y \in Y$, então existem pontos de Y , $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$, com

$$d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon, \text{ para } 0 \leq i < n.$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo que Y não é ϵ -conexo, isto é, que existem subconjuntos Y_1 e Y_2 de Y que são ϵ -abertos tal que para todo $y_1 \in Y_1$ e $y_2 \in Y_2$, temos que $d(y_1, y_2) > \epsilon$. De fato, suponhamos que $d(y_1, y_2) < \epsilon$. Como $d(y_1, Y_2) \leq d(y_1, y_2)$ para todo $y_2 \in Y_2$, então temos

$$d(y_1, Y_2) < \epsilon \Rightarrow y_1 \in Y_2,$$

o que é uma contradição. Portanto Y é ϵ -conexo.

Reciprocamente, suponhamos que Y é ϵ -conexo. Sejam $x, y \in Y$, tome $\delta = \epsilon/2$. Então para todo $z \in Y$, temos $\overline{B}(z, \delta) \subset Y$ (onde, $\overline{B}(z, \delta)$ é a bola fechada centrada em z de raio δ). Seja $d(x, y) = d$.

Se $d < \epsilon$, então tomando $x_0 = x$ e $x_1 = y$, temos que $d(x_0, x_1) < \epsilon$.

Se $d > \epsilon$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta \leq d < (n+1)\delta$. Como $x_0 = x \in Y$, temos $\overline{B}(x_0, \delta) \subset Y$, então existe $x_1 \in \overline{B}(x_0, \delta)$ tal que $d(x_1, y) = d - \delta$. Logo,

$$d(x_0, x_1) \leq \delta < \epsilon.$$

Como $d(x_1, Y) \leq d(x_1, x_0) < \epsilon$, então $x_1 \in Y$. Analogamente, como $\overline{B}(x_1, \delta) \subset Y$, então existe $x_2 \in \overline{B}(x_1, \delta)$ tal que $d(x_2, y) = d - 2\delta$. Logo,

$$d(x_1, x_2) \leq \delta < \epsilon.$$

Assim, indutivamente, temos que existe $x_{n-1} \in \overline{B}(x_{n-2}, \delta) \in Y$ tal que $d(x_{n-2}, y) = d - (n-2)\delta$. Logo,

$$d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \delta < \epsilon.$$

Tomando $y = x_n$,

$$d(x_{n-1}, x_n) = d(x_{n-1}, y) = d - (n-1)\delta < 2\delta = \epsilon.$$

Portanto Y é ϵ -conexo por cadeias. ■

Portanto, temos que qualquer X é decomposto em ϵ -componentes conexas que são ϵ -abertos.

Subvariedades invariantes conexas

Seja N uma subvariedade invariante de classe C^1 em M e \tilde{N} uma componente conexa de $\pi^{-1}(N)$. Seja Λ um atrator de (N, ϕ) e

$$\tilde{\Lambda} = \pi^{-1}(\Lambda) \cap \tilde{N}.$$

Note que $\tilde{\Lambda}$ (a priori) não é localmente conexo. Como $\tilde{\Lambda}$ pode ser decomposto em ϵ -componentes conexas que são ϵ -abertos, então escolhemos $\tilde{\Lambda}_0$ ϵ -componente conexa de $\tilde{\Lambda}$.

Proposição 5.2.2 *Temos,*

(a) $\tilde{\Lambda}_0$ é invariante por $\tilde{\phi}$ e W^{su} .

(b) $\tilde{\Lambda}_0$ é um atrator de $(\tilde{N}, \tilde{\phi})$.

Demonstração. (a) Afirmamos que se $a \in \tilde{\Lambda}_0$, então $\tilde{\phi}^t(a) \in \tilde{\Lambda}_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por contradição, suponha que exista $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $\tilde{\phi}^{t_0} \notin \tilde{\Lambda}_0$ e, como π (a aplicação recobrimento) leva trajetórias de $\tilde{\phi}^t$ em trajetórias de ϕ^t preservando o tempo, temos que $\phi^{t_0}(\pi(a)) \notin \Lambda$, mas isto é uma contradição uma vez que Λ é invariante. Portanto $\tilde{\phi}^t(a) \in \tilde{\Lambda}_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Provemos que $\tilde{\Lambda}_0$ é invariante pelo fluxo $\tilde{\phi}$. Dado $t \in \mathbb{R}$, seja $a \in \tilde{\Lambda}_0$, pela afirmação acima, temos que $\tilde{\phi}^{-t}(a) \in \tilde{\Lambda}_0$, assim $a \in \tilde{\phi}^t(\tilde{\Lambda}_0)$. Logo $\tilde{\Lambda}_0 \subset \tilde{\phi}^t(\tilde{\Lambda}_0)$. Como $\tilde{\phi}^t(a) \in \tilde{\Lambda}_0$, para qualquer $a \in \tilde{\Lambda}_0$, segue que $\tilde{\phi}^t(\tilde{\Lambda}_0) \subset \tilde{\Lambda}_0$. Portanto $\tilde{\phi}^t(\tilde{\Lambda}_0) = \tilde{\Lambda}_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Provemos que $\tilde{\Lambda}_0$ é W^{su} -invariante. De fato, como $\tilde{\Lambda}_0$ é invariante por $\tilde{\phi}$, temos que $\tilde{\Lambda}_0 \subset W^{su}(\tilde{\Lambda}_0)$. Vejamos que $W^{su}(\tilde{\Lambda}_0) \subset \tilde{\Lambda}_0$. Suponhamos que existe $\tilde{x} \in W^{su}(\tilde{\Lambda}_0)$ tal que $\tilde{x} \notin \tilde{\Lambda}_0$, então $d(\tilde{\phi}^t(\tilde{x}), \tilde{\Lambda}_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$. Como as trajetórias de $\tilde{\phi}^t$ são levadas por π em trajetórias de ϕ^t preservando o tempo, temos que $d(\phi^t(\pi(\tilde{x})), \Lambda) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$, ou seja, existe $\pi(\tilde{x}) \in W^{su}(\Lambda)$ tal que $\pi(\tilde{x}) \notin \Lambda$, mas isto é uma contradição. Assim, $W^{su}(\tilde{\Lambda}_0) \subset \tilde{\Lambda}_0$. Portanto $\tilde{\Lambda}_0$ é W^{su} -invariante.

(b) Provemos que $\tilde{\Lambda}_0$ é um atrator de \tilde{N} . Como $W^{su}(\tilde{\Lambda}_0) \subset \tilde{\Lambda}_0$, então pela Proposição 4.3.1, $\tilde{\Lambda}_0$ é um conjunto atraente. Desde que Λ é transitivo temos que $\tilde{\Lambda}_0$ é transitivo. De fato, seja $p \in \Lambda$ tem órbita densa e $\tilde{p} \in \tilde{\Lambda}_0$ com $\pi(\tilde{p}) = p$. Se a órbita de \tilde{p} não for densa em $\tilde{\Lambda}_0$, existe um aberto \tilde{U} de $\tilde{\Lambda}_0$ que não intersecta sua esta órbita, podemos tomar U como uma vizinhança distinguida do recobrimento π . Mas neste caso, $\pi(U)$ seria um aberto de Λ que não intersecta a órbita de p e Λ não seria transitivo. Contradição! Portanto, $\tilde{\Lambda}_0$ é um atrator de $(\tilde{N}, \tilde{\phi})$. ■

Note que, para $x \in \Lambda$, $W^{su}(x) \subset \Lambda$ e $W^s(x) \subset \Lambda$. Então do Teorema da Variedade Estável, existem ϵ e δ positivos tal que dados $z, y \in \Lambda$ com $d(z, y) < \epsilon$, então $W_\eta^s(y)$ e $W_\eta^{su}(z)$ se intersecta transversalmente em um único ponto. Assim, $\tilde{\Lambda}$ e $\tilde{\Lambda}_0$ tem a estrutura de produto local de tamanho ϵ .

Teorema 5.2.1 *Suponha que para todo x em \tilde{M} a projeção $\pi^s : W^u(x) \rightarrow Q^s$ é injetora. Então $\pi^s(\tilde{\Lambda}_0)$ é uma subvariedade conexa topológica injetivamente imersa em Q^s .*

Demonstração. Para $x \in \tilde{\Lambda}_0$, escolha como na Proposição 4.4.1, uma vizinhança U_x de tamanho ϵ com estrutura de produto local. Pela propriedade de estrutura de produto, temos que

$$\pi^s(U_x) = \pi^s(W_\eta^{su}(x) \cap \tilde{\Lambda}_0) = \pi^s(W_\eta^{su}(x, \tilde{\Lambda}_0)).$$

Por outro lado, como $\tilde{\Lambda}_0$ é um atrator em \tilde{N} , temos,

$$W_\eta^{su}(x) = W_\eta^{su}(x) \cap \tilde{\Lambda}_0 = W_\eta^{su}(x) \cap \tilde{N}.$$

Assim,

$$\pi^s(U_x) = \pi^s(W_\eta^{su}(x, \tilde{N})).$$

Agora, seja

$$V_x = \pi^s(W_\eta^{su}(x, \tilde{N})).$$

Pela condição da injetividade de π^s , V_x é homeomorfo ao $W_\eta^{su}(x, \tilde{N})$, o qual é homeomorfo a um subconjunto aberto de \mathbb{R}^d , onde $d = \dim(W_\eta^{su}(x, \tilde{N}))$ (isto é, desde que \tilde{M} é uma variedade topológica).

Escolha uma cobertura de $\tilde{\Lambda}_0$ pelos conjuntos abertos U_x para x percorrendo um conjunto enumerável S , ou seja,

$$\tilde{\Lambda}_0 \subset \bigcup_{x \in S} U_x.$$

Agora, considere P' , a união disjunta de U_x , $x \in S$, e P seu quociente por π^s ,

$$P = P' / \pi^s.$$

Dados $x, y \in S$, defina

$$x \sim y \Leftrightarrow \pi^s(x) = \pi^s(y).$$

É fácil ver que \sim é uma relação de equivalência. Assim, P é o mesmo que o quociente da união disjunta de U_x pela relação de equivalência, isto é,

$$P = P' / \sim.$$

Temos,

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & Q^s \\ [p] & \longmapsto & \pi^s(p) \end{array}$$

Assim, P é o mesmo que o espaço obtido ao colar V_x (com $x \in S$) em suas interseções.

Por outro lado, para provar que P é uma variedade topológica, temos que mostrar que não existem “ramificações”, isto é, para qualquer x e x' em S , $V_x \cap V_{x'}$ é aberto em ambos V_x e $V_{x'}$. Isso garante que V_x são abertos em P . Isto, segue-se do seguinte resultado:

Afirmção. *Suponha que existe $y \in U_x$ e $y' \in U_{x'}$ com $\pi^s(y) = \pi^s(y')$. Então existem vizinhanças $A_y \subset U_x$ e $A_{y'} \subset U_{y'}$ de y e y' em $\tilde{\Lambda}_0$ tal que $\pi^s(A_y) = \pi^s(A_{y'})$.*

De fato, note que, os pontos y e y' estão em algum W^s -variedade. Assim, pela caracterização de W^s , existem t e t' tal que $\tilde{\phi}^t(y)$ e $\tilde{\phi}^{t'}(y)$ estão em algum $U_{x''}$ para algum $x'' \in \tilde{\Lambda}_0$. Como $y \in U_x$ e $y' \in U_{x'}$, então $\tilde{\phi}^t(y) \in \tilde{\phi}^t(U_x)$ e $\tilde{\phi}^{t'}(y') \in \tilde{\phi}^{t'}(U_{x'})$. Logo

$$U_{xx''} = \tilde{\phi}^t(U_x) \cap U_{x''} \neq \emptyset \text{ e } U_{x'x''} = \tilde{\phi}^{t'}(U_{x'}) \cap U_{x''} \neq \emptyset.$$

Por outro lado, desde que para cada t , t' , temos que $\tilde{\phi}^t$ e $\tilde{\phi}^{t'}$ são difeomorfismos e $U_x, U_{x'}, U_{x''}$ vizinhanças de tamanho ϵ com estrutura de produto, temos que $U_{xx''}$ e $U_{x'x''}$ são abertos em $U_{x''}$, e as projeções $\pi^s(U_{xx''}) = V_{xx''}$ e $\pi^s(U_{x'x''}) = V_{x'x''}$ são subconjuntos abertos em $V_{x''}$, onde $\pi^s(U_{x''}) = V_{x''}$. Como $\pi^s(y) = \pi^s(y') = z$, então

$$V_{\bar{x}} = V_{x'x''} \cap V_{xx''} \neq \emptyset.$$

Note que,

$$U_{yy'} = (\pi^s)^{-1}(V_{\bar{x}})$$

é aberto em $U_{x''}$. Para concluir a prova da afirmação, basta tomar

$$A_y = \tilde{\phi}^{-t}(U_{yy'} \cap \tilde{\phi}^t(U_x)) \text{ e } A_{y'} = \tilde{\phi}^{-t'}(U_{yy'} \cap \tilde{\phi}^{t'}(U_{x'})).$$

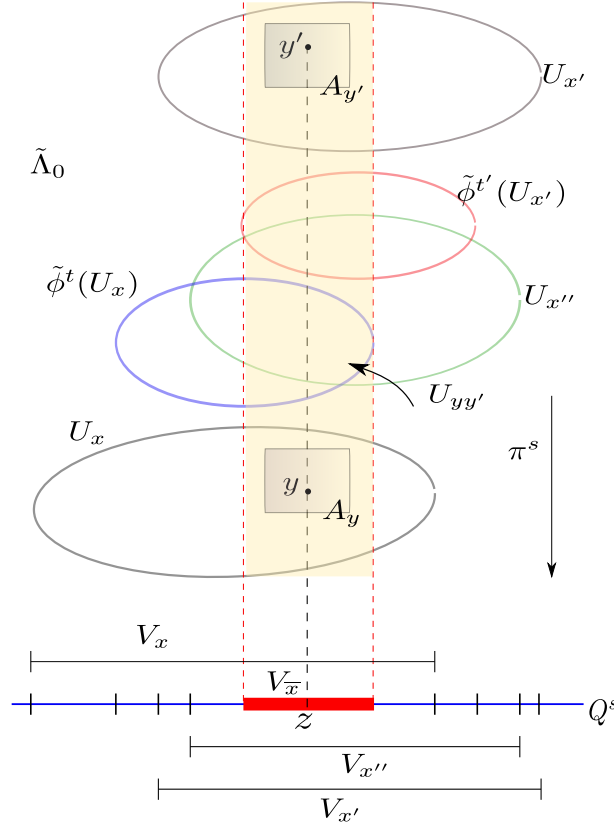


Figura 5.2: Prova da afirmação.

Agora, para a variedade topológica P , vejamos se ela é conexa, para isto, note que se $d(x, x') < \epsilon$, então $V_x \cap V_{x'} \neq \emptyset$. Assim, $\pi^s(x)$ e $\pi^s(x')$ estão na mesma componente conexa de P , pois isto segue-se pela ϵ -conexão de $\tilde{\Lambda}_0$.

Observamos que π^s induz uma imersão topológica (porque este é o caso em cada V_x) de P em Q^s , que é injetiva (porque quocientamos por π^s). Assim, $\pi^s(\tilde{\Lambda}_0)$ é, conforme afirmamos no teorema, uma subvariedade conexa topológica injetivamente imersa. ■

5.3 Prova do Teorema A

Para aplicar o Teorema 5.2.1 na prova do Teorema A, precisamos de alguns ajustes, o qual é feito da seguinte maneira:

Para sistemas dinâmicos como no Teorema A, dado qualquer x , podemos aplicar o Teorema 5.2.1 com a projeção associada

$$\pi^s : W^{su}(x) \rightarrow Q^s$$

que é injetora (e, assim, um homeomorfismo sobre sua imagem).

Por outro lado, note que, para $x \in \tilde{\Lambda}_0$, temos

$$W^{su}(x, \tilde{N}) = W^{su}(x) \cap \tilde{N}.$$

Daí, $W^{su}(x, \tilde{N})$ é uma subvariedade topológica fechada de classe C^1 de $W^{su}(x)$, pois \tilde{N} é sempre fechado. Portanto, $\pi^s(W^{su}(x, \tilde{N}))$ é uma subvariedade topológica fechada de $\pi^s(W^{su}(x))$.

Provemos o Teorema [A](#).

Como o levantamento $(\tilde{M}, \tilde{\phi})$ tem estrutura de produto global, temos que, para qualquer x , a projeção

$$\pi^s : W^{su}(x) \rightarrow Q^s$$

e a projeção análoga no espaço de folhas instáveis são bijetivas. Seja $x \in \tilde{\Lambda}_0$, então

$$Q^s = \pi^s(W^{su}(x)).$$

Por outro lado, como $x \in \tilde{\Lambda}_0$, temos $W^{su}(x) \subset \tilde{\Lambda}_0$. Daí

$$W^{su}(x, \tilde{N}) \subset W^{su}(x) \subset \tilde{\Lambda}_0. \quad (5.1)$$

Pelo Teorema [5.2.1](#), $\pi^s(\tilde{\Lambda}_0)$ é uma subvariedade conexa de $\pi^s(W^{su}(x))$. De [\(5.1\)](#) temos que,

$$\pi^s(W^{su}(x, \tilde{N})) \subset \pi^s(\tilde{\Lambda}_0).$$

Como $\pi^s(W^{su}(x, \tilde{N}))$ é uma subvariedade topológica fechada em $\pi^s(W^{su}(x))$ da mesma dimensão que $\pi^s(\tilde{\Lambda}_0)$, temos que

$$\pi^s(\tilde{\Lambda}_0) = \pi^s(W^{su}(x, \tilde{N})).$$

Assim, $\pi^s(\tilde{\Lambda}_0)$ é fechado em Q^s . Em particular,

$$W^s(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}) = (\pi^s)^{-1}(\pi^s(\tilde{\Lambda}_0)) \cap \tilde{N}$$

é fechado em \tilde{N} . Mas ela é aberta em \tilde{N} , pois $\tilde{\Lambda}_0$ é atrator. Desde que \tilde{N} é conexo, temos, $W^s(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}) = \tilde{N}$. Daí, em N , temos

$$W^s(\Lambda) = N.$$

Portanto, pela Proposição [5.1.2](#), (N, ϕ) é um sistema Anosov transitivo. Isto completa a prova do Teorema [A](#).

5.4 Problemas em aberto

Listamos alguns problemas abertos no estudo de difeomorfismos quase Anosov. Dado um difeomorfismo (de classe C^1) $f : M \rightarrow M$, temos:

1. Se N é uma subvariedade compacta invariante de M para difeomorfismo Anosov f . Então $f|_N$ é Anosov?
2. Seja M um toro e f quase Anosov em M . Então f é Anosov? (Conjectura de Mañé).
3. Seja f quase Anosov e parcialmente hiperbólico. Então f é Anosov? Na dimensão 3 a resposta é verdadeiro e é mostrado por Fisher e Rodriguez Hertz em [6].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Barreira, L., e Valls, C. Dynamical systems: An introduction. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] Bautista, S., e Morales, C. Lectures on Sectional-Anosov Flows. Monograph, 2010.
- [3] Bowen, R., e Walters, P. Expansive one-parameter flows. Journal of differential Equations 12, 1 (1972), 180-193.
[https://doi.org/10.1016/0022-0396\(72\)90013-7](https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90013-7)
- [4] Camacho, C., e Neto, A. L. Teoria geométrica das folheações, vol. 9. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [5] Carmo, M. P. d. Geometria riemanniana. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [6] Fisher, T., e Rodriguez Hertz, M. Quasi-anosov diffeomorphisms of 3-manifolds. Transactions of the American Mathematical Society 361, 7 (2009), 3707-3720.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-09-04687-X>
- [7] Franks, J. Anosov diffeomorphisms. University of California, Berkeley, 1968.
- [8] Franks, J., e Robinson, C. A quasi-anosov diffeomorphism that is not anosov. Transactions of the American Mathematical Society 223 (1976), 267-278.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1976-0423420-9>
- [9] Hasselblatt, B., e Katok, A. Handbook of dynamical systems. Elsevier, 2002.
- [10] Hirsch, M. W. On invariant subsets of hyperbolic sets. In Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham) (1970), pp. 126-135.

- [11] Hirsch, M. W., e Pugh, C. C. Stable manifolds and hyperbolic sets. In Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968) (1970), pp. 133-163.
<https://doi.org/10.1090/pspum/014/0271991>
- [12] Hirsch, M. W., Pugh, C. C., e Shub, M. Invariant manifolds, vol. 583. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1977.
- [13] Hurley, M. Attractors: persistence, and density of their basins. Transactions of the American Mathematical Society 269, 1 (1982), 247-271.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1982-0637037-7>
- [14] Katok, A., e Hasselblatt, B. Introduction to the modern theory of dynamical systems, vol. 54. Cambridge university press, 1997.
- [15] Lima, E. L. Variedades diferenciáveis. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1973.
- [16] Lima, E. L. Grupo fundamental e espaços de recobrimento. Projecto Euclides - Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2012.
- [17] Mañé, R. Quasi-anosov diffeomorphisms and hyperbolic manifolds. Transactions of the American Mathematical Society 229 (1977), 351-370.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1977-0482849-4>
- [18] Matsumoto, S. Codimension one Anosov flows. No. 27. Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul National University, 1995.
- [19] Morales, C. A., Pacifico, M. J., e Pujals, E. R. Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers. Annals of mathematics (2004), 375-432.
<https://doi.org/10.4007/annals.2004.160.375>
- [20] Palis, J., e De Melo, W. Introdução aos sistemas dinâmicos. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- [21] Pilyugin, S. Y. Shadowing in dynamical systems. Springer, 2006.
- [22] Plante, J. F. Anosov flows. American Journal of Mathematics 94, 3 (1972), 729-754.
<https://doi.org/10.2307/2373755>
- [23] Robinson, C. R. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. CRC press, 1999.

- [24] Sakai, K. Quasi-anosov diffeomorphisms and pseudo-orbit tracing property. Nagoya Mathematical Journal 111 (1988), 111-114.
<https://doi.org/10.1017/S0027763000001021>
- [25] Shub, M. Global stability of dynamical systems. Springer Science & Business Media, 2013
- [26] Smale, S. Differentiable dynamical systems. Bulletin of the American mathematical Society 73, 6 (1967), 747-817.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11798-1>
- [27] Sotomayor, J. Lições de equações diferenciais ordinárias, vol. 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [28] Verjovsky, A. Sistemas de Anosov. Instituto de Matemática y Ciencias A nes. Lima, 1999.
- [29] Wen, L. Differentiable Dynamical Systems: An Introduction to Structural Stability and Hyperbolicity, vol. 173. American Mathematical Society, 2016.
<https://doi.org/10.1090/gsm/173>
- [30] Zeghib, A. Subsystems of anosov systems. American Journal of Mathematics 117, 6 (1995), 1431-1448.
<https://doi.org/10.2307/2375025>