RICHARD JAVIER CUBAS BECERRA

Propriedades de um Homeomorfismo GH Estável

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2018

RICHARD JAVIER CUBAS BECERRA

Propriedades de um Homeomorfismo GH Estável

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan.

UBERLÂNDIA - MG
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

B389p
2018

Becerra, Richard Javier Cubas, 1993-
Propriedades de um homeomorfismo GH estável / Richard Javier Cubas Becerra. - 2018.
63 f. : il.

Orientador: Thiago Aparecido Catalan.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Disponível em: http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.167
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Homeomorfismos - Teses. 3. Sistemas dinâmicos - Teses. 4. Topologia - Espacos metricos - Teses. I. Catalan, Thiago Aparecido. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Rejâne Maria da Silva – CRB6/1925

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP
38400-902

ALUNO(A): Richard Javier Cubas Becerra.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11612MAT008.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Sistemas Dinâmicos.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Propriedades de um homeomorfismo GH Estável.

ORIENTADOR(A): Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 22 de fevereiro de 2018, às 16h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	**ASSINATURA**
Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan UFU - Universidade Federal de Uberlândia	
Prof. Dr. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza UFRJ-Universidade Federal do Rio de Janeiro	
Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Marcus Augusto Bronzi

Uberlândia-MG, 22 de fevereiro de 2018.

Dedicatória

Dedicado às pessoas mais importantes da minha vida: aos meus pais Rosa e Anibal, e minhas irmãs Maribel e Yoseli.

Agradecimentos

Todos queremos conseguir nossos objetivos, cumprir metas, alargar nossas fronteiras intelectuais, avançar e seguir. As vezes o processo para conseguir tudo aquilo, não é fácil. Porém existem pessoas que fazem que o processo seja menos complicado e mais amigável.

- Primeiramente agradeço á meus pais Anibal Cubas e Rosa Becerra, as minhãs irmãs Maribel e Yoseli, a meus avós Alindor e Adela, pelo apoio incondicional e pelo amor de sempre.

- A meu Orientador, Thiago Catalan, por ter aceitado me orientar durante meu mestrado, por sua dedicação, pela paciência, por seus conselhos e por seus conhecimentos transmitidos durante este período de mestrado.

- Agradeço aos meus amigos Eduard, Nhatali e Josimar, que fizeram a minha estadia em Uberlandia: a melhor, e por serem os amigos que foram ficando e se transformaram na minha segunda família do coração!.

- Aos meus amigos de mestrado: José Enrique, Aluízio, Augusto, Mílton, Daniel, Telmo, Miñope, Garcia, Kassandra, Regiane, Ivan e principalmente a Julian Lázaro pela amizade, apoio incondicional e pelas longas horas de estudo juntos.

- Ao programa de Mestrado em Matemática da UFU, pela oportunidade de cursar esse curso. Aos professores: Dr. Mário Enrique, Dr. Geraldo Botelho, Dr. Vinícius Vieira, Dr. Marcio Dantas, Dra. Rosana Sueli, Dr. Guilherme e Dr. Renato Gonçalves, a todos pela compreensão e sua ajuda.

- Por fim, mas não menos importante, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

CUBAS, R.J.C.B. *Propriedades de um Homeomorfismo GH Estável.* 2018. (51) p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Nesta dissertação, vamos fazer um estudo de homeomorfismos topologicamente Gromov-Hausdorff (GH) estáveis. Nesta linha, estudamos a relação entre a estabilidade GH e a estabilidade topológica usual, como no artigo de Arbieto e Morales [2]. Na sequência, apresentamos alguns resultados inéditos sobre a regularidade da entropia e a densidade de pontos periódicos para dinâmicas topologicamente GH-estáveis.

Palavras-chave: (Estabilidade topológica, estabilidade topológica GH, espaço métrico, entropia topológica, aproximado por cadeias, Anosov Closing Lemma).

CUBAS, R.J.C.B. *Properties of a Stable GH Homeomorphism.* 2018. (51) p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this text, we study homeomorphisms Gromov-Hausdorff (GH) topologically stable. In this sense, we study the relation between GH stability and the usual topological stability, as in the paper of Arbieto and Morales [2]. Also, we present some new results about regularity of the entropy and density of periodic points for dynamics GH stable.

Keywords: (Topological stability, topological GH-stability, metric space, topological entropy, approximated by chains, Anosov Closing Lemma).

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em Sistemas Dinâmicos, existem dinâmicas que nos fornecem total informação das dinâmicas C^0-próximas a elas. Estas dinâmicas são chamadas de topologicamente estáveis. Isto é, se uma dinâmica é topologicamente estável, então o comportamento das dinâmicas próximas a ela é o mesmo da sua própria dinâmica. Por exemplo, dado uma dinâmica topologicamente estável, numa vizinhança dela todas as dinâmicas têm a mesma quantidade de pontos fixos, a mesma quantidade de pontos periódicos, são transitivas ou expansivas se alguma das dinâmicas é, etc.. Isto é uma consequência das dinâmicas serem topologicamente conjugadas por um homeomorfismo próximo à identidade. Convém destacar que em [10] Walters provou que a expansividade e a propriedade de sombreamento são condições suficientes para garantir estabilidade topológica.

Em 2017, Arbieto e Morales em [2] apresentaram uma compreensão da métrica clássica de Gromov-Hausdorff [6] estendendo-a aos mapas entre espaços métricos, e iniciaram uma análise do comportamento de longo prazo através do conceito de estabilidade topológica usual. Na verdade, eles combinaram a métrica Gromov-Hausdorff com a métrica usual C^0 para obter a distância C^0-Gromov-Hausdorff (distância GH^0) entre mapas sobre espaços métricos não necessariamente iguais. Em seguida, introduziram um tipo de estabilidade baseando-se na distância GH^0 e na estabilidade topológica usual, a qual chamaram de "*estabilidade topológica Gromov-Hausdorff*"(ou estabilidade GH).

Nesta dissertação, introduziremos o conceito de estabilidade GH, e mostraremos alguns resultados, como no artigo de Arbieto e Morales, [2]. Mais precisamente, no capítulo 2, mostramos que todo homeomorfismo expansivo de um espaço métrico com a propriedade de sombreamento é topologicamente GH-estável. Isto está relacionado com o resultado de Walters obtido em [10] para Estabilidade Topológica. Provamos também que existem homeomorfismos topologicamente estáveis que não são topologicamente GH-estáveis. E além disso, mostramos que todo homeomorfismo topologicamente GH-estável no círculo é topologicamente estável. Além disto mostramos como estender a definição de GH-estabilidade topológica para mapas contínuos e assim concluir que os mapas constantes sobre variedades compactas homogêneas são topologicamente GH-estáveis.

Feito isto, apresentamos alguns resultados inéditos sobre propriedades dos homeomorfismos GH-estáveis, no capítulo 3, tais como: a existência de dinâmicas topologicamente GH-estáveis que são GH^0-aproximadas por dinâmicas de entropia zero (Teorema 3.1.2), densidade de pontos periódicos para dinâmicas transitivas topologicamente GH-estáveis, entre outros resultados. Provamos também o Anosov Closing Lema como corolário do Teorema 3.4.5, o qual utiliza a condição de GH-estabilidade ao invés de hiperbolicidade.

Por fim, informamos que no primeiro capítulo desta dissertação são apresentados alguns resultados básicos da teoria de Sistemas Dinâmicos que serão utilizados no decorrer do texto. Destacamos, também, que no último capítulo (Apêndice), introduzimos brevemente os homeomorfismos hiperbólicos, e o Shift Bilateral, dinâmica esta que foi usada na demonstração do Teorema 3.1.2.

Richard Javier Cubas Becerra
Uberlândia-MG, 22 de fevereiro de 2018.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo vamos definir e enunciar alguns resultados básicos da teoria de Sistemas Dinâmicos que usaremos no decorrer desta dissertação.

1.1 Definições básicas

Definição 1.1.1 *Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua, e $x \in X$. Chamamos a* órbita positiva *de x ao conjunto $\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_0^+\}$. Se f for um homeomorfismo, dizemos que o conjunto $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ é a* órbita *de x.*

Definição 1.1.2 *Dizemos que $x \in X$ é um ponto* não errante *para uma aplicação contínua $f : X \to X$, se: dada uma vizinhança V de x, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. Caso contrário, dizemos que x é um ponto errante. Denotamos o conjunto dos pontos não errantes de f por $\Omega(f)$. O conjunto $\Omega(f)$ é chamado conjunto não errante.*

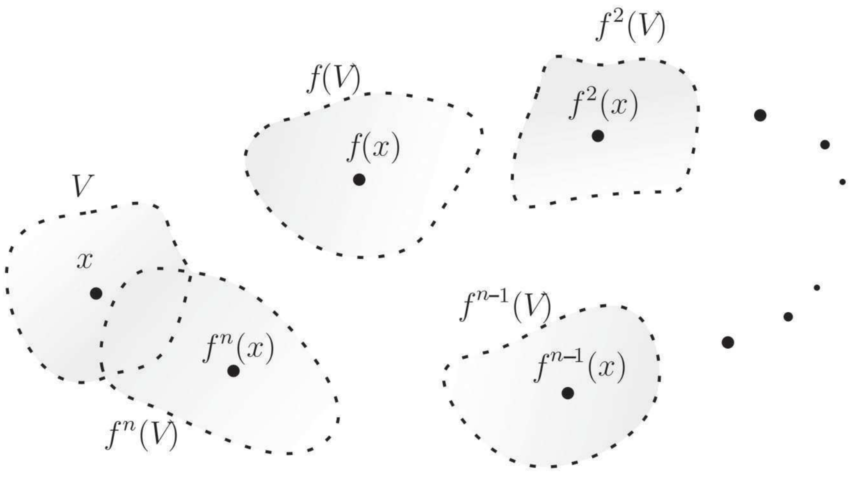

Figura 1.1: Conjunto dos pontos não errantes.

Proposição 1.1.3 *O conjunto $\Omega(f)$ é um conjunto compacto, e se f for um homeomorfismo então $\Omega(f)$ é um conjunto invariante por f. Isto é $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$.*

Demonstração. (Veja [3], página 29). ■

Definição 1.1.4 *Dada uma aplicação contínua $f : X \to X$ e um ponto $x \in X$, definimos*

$$\omega_f(x) = \{z \in X : \text{ existe } (n_i)_{i\in\mathbb{N}}, \text{ tal que } \lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = z\}.$$

Se f for um homeomorfismo podemos definir

$$\alpha_f(x) = \{z \in X : \text{ existe } (n_i)_{i\in\mathbb{N}}, \text{ tal que } \lim_{i\to\infty} f^{-n_i}(x) = z\}.$$

Em geral denotamos $\omega_f(x)$ e $\alpha_f(x)$ por $\omega(x)$ e $\alpha(x)$, respectivamente, quando não houver dúvida sobre qual função estamos trabalhando. Chamamos também de conjuntos ω-limite e α-limite, respectivamente.
Sejam os conjuntos $\omega(f) = \bigcup_{x\in X} \omega(x)$ e $\alpha(f) = \bigcup_{x\in X} \alpha(x)$, definimos o conjunto limite de f, por

$$L(f) = \overline{\omega(f)} \cup \overline{\alpha(f)}.$$

Proposição 1.1.5 *O conjunto $L(f)$ é compacto invariante por f e $L(f) \subset \Omega(f)$.*

Demonstração. (Veja [3], página 28). ■

Definição 1.1.6 *Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua, dizemos que um ponto $x \in X$ é fixo, se $f(x) = x$, e denotamos por $Fix(f)$ ao conjunto dos pontos fixos de f. Um ponto $p \in$ é chamado de ponto periódico se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(p) = p$, denotando por $Per(f)$ o conjunto dos pontos periódicos de f.*

Definição 1.1.7 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo e $\delta > 0$. Uma sequência $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ é uma δ-pseudo órbita, se $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*
Uma sequência $\{x_i\}_1^{\infty}$ é uma δ-pseudo órbita positiva, se $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$.

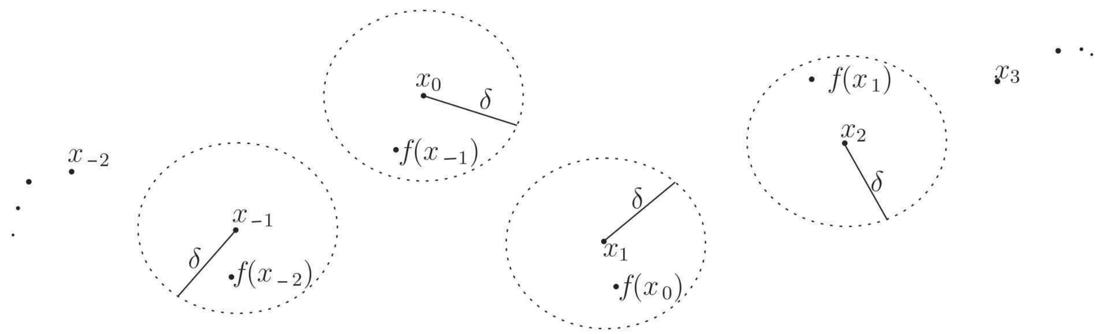

Figura 1.2: δ-pseudo órbita

Seja $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ é uma δ-pseudo órbita, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i+n} = x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, dizemos que $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ é uma δ-pseudo órbita periódica.

Definição 1.1.8 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo e $\delta > 0$, sejam $x, y \in X$ e $\delta > 0$. Uma δ-cadeia de x a y é um conjunto finito $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, tal que $x_0 = x$ e $x_n = y$ e $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ para todo $0 \leq i < n$. Um ponto $x \in X$ é chamado de ponto recorrente por cadeias se, para todo $\delta > 0$, existir uma δ-cadeia de x a x, $\{x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_n = x\}$. Denotaremos por $\mathcal{R}(f)$ ao conjunto dos pontos recorrentes por cadeias de f.*

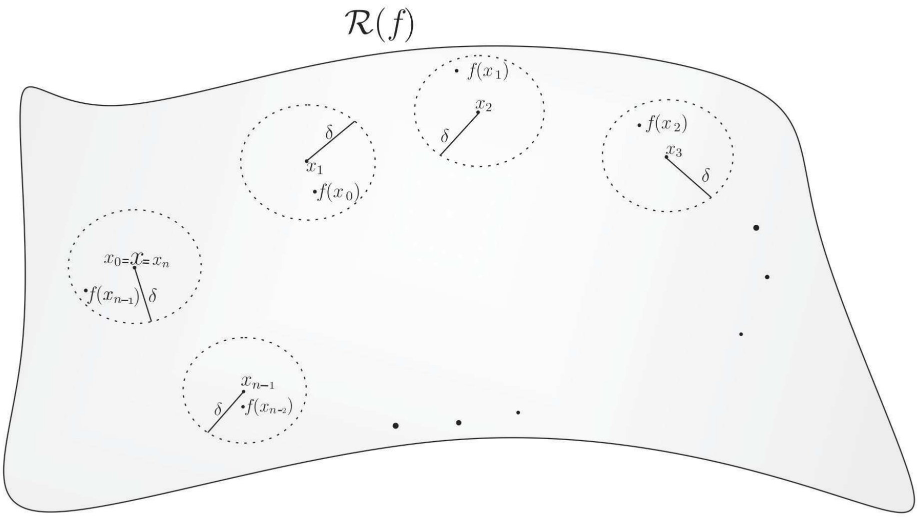

Figura 1.3: Conjunto recorrentes por cadeias.

Proposição 1.1.9 *O conjunto $\mathcal{R}(f)$ é compacto e invariante por f.*

Demonstração. (Veja [3] página 29). ■

Teorema 1.1.10 *(Teorema de Conley's) Seja $f : X \to X$ homeomorfismo, então $\mathcal{R}(f|\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(f)$.*

Demonstração. (Veja [8], pagina 408). ■

Proposição 1.1.11 *Seja $f : X \to X$ homeomorfismo, então:*

$$cl(Per(f)) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f).$$

Demonstração. (veja [3], página 31). ■

Definição 1.1.12 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo. Dizemos que f tem a propriedade do sombreamento, se dado $\beta > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ é uma δ-pseudo orbita, então existe $x \in X$ tal que $d(f^n(x), x_n) < \beta$, para todo $n \in \mathbb{Z}$*
Dizemos que f tem a propriedade do sombreamento positivo, se dado $\beta > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $\{x_i\}_1^{\infty}$ é uma δ-órbita positiva, então existe $x \in X$ tal que $d(f^n(x), x_n) < \beta$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

1.2 Transitividade e expansividade

Definição 1.2.1 *Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua, f é dita topologicamente transitiva se existir $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$.*

Proposição 1.2.2 *Considere uma aplicação contínua $f : X \to X$. Se dado dois abertos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$ sempre existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ então f é topologicamente transitiva e vale a recíproca. Além disso existe um subconjunto denso $A \subset X$ tal que para todo $x \in A$, $\mathcal{O}(x)$ e densa em X.*

Demonstração. Seja $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma base enumerável da topologia. Por hipótese temos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(\mathcal{V}_i)$ é aberto e denso em X. Tomando

$$A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(\mathcal{V}_i)$$

temos que $\overline{A} = X$, além disso se $x \in A$, dado qualquer aberto $\mathcal{U} \subset X$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{V}_{i_0} \subset \mathcal{U}$. Existe n_0 tal que $f^{n_0}(x) \in \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{U}$. Conclui-se que $\mathcal{O}(x)$ é denso em X.

Reciprocamente, suponha que $f : X \to X$ seja transitiva, então existe $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$. Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$ abertos, então pela densidade da órbita de x, existem $n, m \in \mathbb{N}$, tal que $f^n(x) \in \mathcal{U}$ e $f^m(x) \in \mathcal{V}$, supondo $n \leq m$ temos que $f^{m-n}(f^n(x)) \in \mathcal{V}$, portanto $f^{m-n}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. ■

Definição 1.2.3 *Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua, f é dita minimal se para todo $x \in X$ satisfaz que $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$.*

Definição 1.2.4 *Um homeomorfismo $f : X \to X$ é chamado expansivo se existir $\alpha > 0$ tal que se $x, y \in X$ são tais que $d(f^n(x), f^n(y)) < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ então $x = y$. O escalar α é chamado de constante de expansividade de f.*
Analogamente f é dito de positivamente expansivo se existir $\alpha > 0$ tal que se $x, y \in X$ são tais que $d(f^n(x), f^n(y)) < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$ então $x = y$.

Teorema 1.2.5 *Se um homeomorfismo expansivo $f : X \to X$ e um homeomorfismo $g : Y \to Y$ são topologicamente conjugados, então g é expansivo.*

Demonstração. Suponha que f e g são topologicamente conjugados, então existe um homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Seja $\alpha > 0$ uma constante de expansividade de f. Pela continuidade uniforme de h^{-1}, existe $\beta > 0$ tal que se $y_1, y_2 \in Y$ e $d^Y(y_1, y_2) < \beta$ então $d_X(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) < \alpha$. Suponha que $d^Y(g^n(y_1), g^n(y_2)) < \beta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então

$$\alpha > d^X(h^{-1}(g^n(y_1)), h^{-1}(g^n(y_2))) = d^X(f^n(h^{-1}(y_1)), f^n(h^{-1}((y_2)))$$

pela expansividade de f tempos que $h^{-1}(y_1) = h^{-1}(y_2)$, finalmente como h é injetiva temos que $y_1 = y_2$, então g é expansivo. ■

1.3 Estabilidade Topológica

Definição 1.3.1 *Sejam $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ homeomorfismos. Dizemos que f é semi-conjugada a g se existir uma aplicação $h : Y \to X$ contínua e sobrejetiva tal que $f \circ h = h \circ g$. Se h for homeomorfismo dizemos que f e g são conjugadas.*

Definição 1.3.2 *Seja $f : X \to X$ homeomorfismo. Dizemos que f é topologicamente estável se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo homeomorfismo $g : X \to X$ com $d_{C^0}(f, g) < \delta$ existe um homeomorfismo $h : X \to X$, $d_{C^0}(h, Id_X) < \epsilon$ e $f \circ h = h \circ g$.*

Proposição 1.3.3 *Todo homeomorfismo expansivo com a propriedade do sombreamento é topologicamente estável.*

Demonstração. (Veja [10]). ■

Definição 1.3.4 *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo. Um ponto fixo x de f é topologicamente hiperbólico se x é um ponto isolado do conjunto $Fix(f)$ e $f(t) - t$ muda de sinal em $t = x$. Um ponto periódico x de um homeomorfismo g de S^1 é topologicamente hiperbólico se x é um ponto fixo topologicamente hiperbólico de g^{2n}, onde n é o período de x.*

Definição 1.3.5 *Um difeomorfismo f de S^1 é um difeomorfismo Morse-Smale se $Per(f)$ é um conjunto não vazio e todo elemento de $Per(f)$ é hiperbólico, i.e., a diferencial de f^n no ponto x é diferente de ± 1 para todo ponto x de f com período n.*

Teorema 1.3.6 *(Nitecki) Todo difeomorfismo Morse-Smale $f : S^1 \to S^1$ é topologicamente estável.*

Demonstração. (Veja [1]). ■

Teorema 1.3.7 *(Peixoto) Todo homeomorfismo em S^1 é aproximado por difeomorfismos Morse-Smale.*

Demonstração.(Veja [7], pagina 51). ■

1.4 Entropia Topológica

Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua no espaço métrico (X, d). Dado um número inteiro positivo n, e $\epsilon > 0$, definimos a distância

$$d_{n,f}(x, y) = \sup_{0 \leq j \leq n-1} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Utilizando esta distância, um subconjunto $S \subset X$ é (n, ϵ)-separado para f se $d_{n,f}(x, y) > \epsilon$ para todo $x, y \in S$, $x \neq y$. O número das órbitas distintas de comprimento n (com respeito a ϵ) é definido por:

$$r_{sep}(n, \epsilon, f) = \max\{\#(S) : S \subset X \text{ é um conjunto } (n, \epsilon) - \text{separado para } f\}.$$

Assim a taxa de crescimento de $r_{sep}(n, \epsilon, f)$ conforme n aumenta, é definida como

$$h_{sep}(f, \epsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{log\, r_{sep}(n, \epsilon, f)}{n}.$$

Finalmente, definimos a entropia topológica de f como

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \to 0} h_{sep}(f, \epsilon).$$

Analogamente um subconjunto $G \subset X$ é dito (n, ϵ)-gerador de X se para todo $x \in X$ existe $y \in G$ tal que $d_{n,f}(x, y) \leq \epsilon$. Definimos

$$r_{span}(n, \epsilon, f) = mín\{\#(S) : G \subset X \text{ é um conjunto } (n, \epsilon)\text{- gerador de } X\}$$

e $h_{span}(f, \epsilon) = \limsup_{n \to \infty} \dfrac{log\, r_{span}(n, \epsilon, f)}{n}$.

Proposição 1.4.1 *Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua no espaço métrico (X, d), então $h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \to 0} h_{span}(f, \epsilon)$.*

Demonstração. Seja $E_{sep}(n, \epsilon, f)$ um conjunto maximal (n, ϵ)- separado para f, então este também é um conjunto (n, ϵ)-span. De fato, seja $x \in X$, se não existir algum $y \in E_{sep}(n, \epsilon, f)$ tal que $d_{n,f}(x, y) \leq \epsilon$, então $d_{n,f}(x, y) > \epsilon$ para todo $y \in E_{sep}(n, \epsilon, f)$. Logo $\{x\} \cup E_{sep}(n, \epsilon, f)$ é (n, ϵ)-separado, o que contradiz o fato de que $E_{sep}(n, \epsilon, f)$ é maximal. Portanto $E_{sep}(n, \epsilon, f)$ é (n, ϵ)-span, e

$$r_{sep}(n, \epsilon, f) = \#E_{sep}(n, \epsilon, f) \geq r_{span}(n, \epsilon, f).$$

Seja $E_{sep}(n, 2\epsilon, f)$ um conjunto $(n, 2\epsilon)$-separado, e $E_{span}(n, \epsilon, f)$ um conjunto minimal (n, ϵ)-span. Definimos o mapa $T : E_{sep}(n, 2\epsilon, f) \to E_{span}(n, \epsilon, f)$. Para cada $x \in E_{sep}(n, 2\epsilon, f)$ existe $y = T(x) \in E_{span}(n, \epsilon, f)$ com $d_{n,f}(x, y) \leq \epsilon$. Se $T(x_1) = T(x_2)$ para $x_1, x_2 \in E_{sep}(n, 2\epsilon, f)$, então

$$d_{n,f}(x_1, x_2) \leq d_{n,f}(x_1, y) + d_{n,f}(y, x_2) \leq 2\epsilon.$$

Como $E_{sep}(n, 2\epsilon, f)$ é um conjunto $(n, 2\epsilon)-$separado, então $x_1 = x_2$. Isto mostra que T é injetiva, e assim

$$\begin{aligned} r_{sep}(n, 2\epsilon, f) &= \#(E_{sep}(n, 2\epsilon, f)) \\ &\leq \#(E_{span}(n, \epsilon, f)) \\ &= r_{span}(n, \epsilon, f) \end{aligned}$$

Tomando as taxas de crescimento quando n vai para o infinito, conseguimos as desigualdades

$$h_{sep}(2\epsilon, f) \leq h_{span}(\epsilon, f) \leq h_{sep}(\epsilon, f).$$

Fazendo ϵ ir para 0, obtemos $h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \to 0} h_{span}(f, \epsilon)$. ■

Teorema 1.4.2 *Sejam X e Y espaços métricos compactos com métricas d^X e d^Y, respectivamente. Sejam os homeomorfismos $g : Y \to Y$ e $f : X \to X$ semi-conjugados por $\gamma : Y \to X$, então*

$$h_{top}(g) \geq h_{top}(f).$$

Demonstração. Seja $\gamma : Y \to X$ semi-conjugação de g para f. Pela compacidade de Y temos que γ é uniformemente contínua, logo dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d^Y(y_1, y_2) \geq \delta$, sempre que $d^X(\gamma(y_1), \gamma(y_2)) \geq \epsilon$. Seja $E_{sep}(n, \epsilon, f) \subset X$ um conjunto (n, ϵ)-separado para f, ou seja $\#(E_{sep}(n, \epsilon, f)) = r_{sep}(n, \epsilon, f)$. Logo formamos o conjunto $E(n, \delta, g)$ tomando para cada $x \in E_{sep}(n, \epsilon, f)$ um $y \in \gamma^{-1}(x)$. Portanto $\#(E_{sep}(n, \delta, g)) = \#(E_{sep}(n, \epsilon, g))$. Sejam $y_1,\ y_2 \in Y$ então existem $x_1,\ x_2 \in E_{sep}(n, \epsilon, g)$ tal que $\gamma(y_1) = x_1$ e $\gamma(y_2) = x_2$, logo para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ temos

$$\begin{aligned} d^X(\gamma(g^k(y_1)), \gamma(g^k(y_2))) &= d^X(f^k(\gamma(y_1)), f^k(\gamma(y_2))) \\ &= d^X(f^k(x_1), f^k(x_2)) \\ &\geq \epsilon. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Logo por (1.1) e pela continuidade uniforme de γ temos que $d^Y(g^k(y_1), g^k(y_2)) \geq \delta$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, portanto o conjunto $E(n, \delta, g)$ é um conjunto (n, δ)-separado para g, então

$$r_{sep}(n, \delta, g) \geq \#(E(n, \delta, g)) = \#(E_{sep}(n, \epsilon, f)) = r_{sep}(n, \epsilon, f).$$

Logo $h_{sep}(\delta, g) \geq h_{sep}(\epsilon, f)$, e quando $\epsilon \to 0$ temos que $\delta \to 0$

$$h_{top}(g) = \lim_{\delta \to 0} h_{sep}(\delta, g) \geq \lim_{\epsilon \to 0} h_{sep}(\epsilon, f) = h_{top}(\epsilon, f),$$

o que conclui a prova do teorema. ■

Corolário 1.4.3 *Sejam X e Y espaços métricos compactos. Se os homeomorfismos $g : Y \to Y$ e $f : X \to X$ são topologicamente conjugados, então*

$$h_{top}(g) = h_{top}(f).$$

Demonstração. Seja $\lambda : Y \to X$ o homeomorfismo que conjuga a f e g. Então como λ é uma semi-conjugação de g para f, então pelo teorema 1.4.2 $h_{top}(g) \geq h_{top}(f)$. É fácil ver que λ^{-1} é uma semi-conjugação de f para g e pelo teorema 1.4.2, temos que $h_{top}(f) \geq h_{top}(g)$. Portanto $h_{top}(g) = h_{top}(f)$. ■

Teorema 1.4.4 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo de um espaço compacto métrico X. Seja $\Omega \subseteq X$ o conjunto dos pontos não errantes de f. Então a entropia de f é igual à entropia de f restrita ao conjunto dos pontos não errantes, $h_{top}(f) = h_{top}(f \mid \Omega)$.*

Demonstração. Veja [8], página 370. ■

Proposição 1.4.5 *Seja $Hom(S^1)$ o conjunto dos homeomorfismos do círculo. Se $f \in Hom(S^1)$, então $h_{top}(f) = 0$.*

Demonstração. (Veja [9], página 277). ■

CAPÍTULO 2

ESTABILIDADE TOPOLÓGICA DO PONTO DE VISTA DE GROMOV-HAUSDORFF

Arbieto e Morales introduziram em [2] a noção de estabilidade topológica Gromov-Hausdorff (estabilidade GH), a qual está definida em função da distância C^0-Gromov-Hausdorff GH^0 para aplicações. A distância GH^0 permite de certa forma "medir"a distancia entre aplicações que estão definidas em espaços métricos não necessariamente iguais. Primeiro passaremos a definir a distancia C^0-Gromov-Hausdorff.

2.1 A distancia GH^0 para aplicações.

Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Dado $A, B \subset X$ definimos a distância usual entre conjuntos como:

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : (a, b) \in A \times B\}.$$

Definimos o diâmetro de um subconjunto $A \subset X$, como

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{a,a' \in A} d(a, a')$$

.

Definição 2.1.1 *Substituindo A por "a" na notação acima, se $A = \{a\}$, a distância $Hausdorff$ entre A e B é definida por*

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(A, b)\}.$$

Lema 2.1.2 *Seja X um espaço métrico compacto e $\epsilon > 0$. Existe um subconjunto finito $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ tal que $d_H(Y, X) < \epsilon$.*

Demonstração. Tome $0 < \delta < \epsilon$, e seja $B(x, \delta) = \{y \in X : d(x, y) < \delta\}$, logo temos que $X = \cup_{x \in X} B(x, \delta)$ é uma cobertura aberta para X, e como X é compacto, pelo teorema de Borel-Lebesgue existe uma subcobertura finita $X = \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta)$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$.

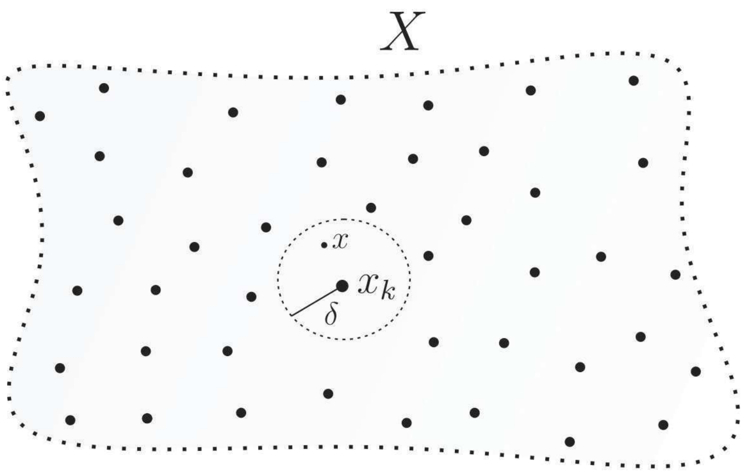

Figura 2.1: Aproximação do conjunto X por um conjunto finito

Tomando $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, temos que $d(x_i, X) = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, e portanto $\sup_{y \in Y} d(y, X) = 0$. Logo seja $x \in X$, e como $X = \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta)$ existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x \in B(x_k, \delta)$, logo

$$d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y) \leq d(x, x_k) < \delta,$$

portanto:

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X)\} \leq \delta < \epsilon.$$

■

Definição 2.1.3 *Dado $\Delta > 0$, um mapa não necessariamente contínuo $i : X \longrightarrow Y$ entre espaços métricos X e Y é chamado de $\Delta -$ isometria se*

$$\max\{d_H(i(X), Y), \sup_{x, x' \in X} |d^Y(i(x), i(x')) - d^X(x, x')|\} < \Delta.$$

Uma *isometria* entre espaços métrico X e Y é um mapa $i : X \longrightarrow Y$ satisfazendo $d^Y(i(x), i(x')) = d^X(x, x')$ para todo $x, x^{'} \in X$. Dizemos que X e Y são isométricos se tal isometria existir. Poderíamos dizer que uma isometria é uma "zero-isometria".

Proposição 2.1.4 *Seja X um espaço métrico, se $A \subseteq X$ então:*

$$d_H(A, X) \geq \frac{diam(X) - diam(A)}{2}.$$

Demonstração. Sejam $x, x' \in X$, então:

$$d_H(x, A) \leq \sup_{x \in X} d(x, A) = d_H(A, X)$$

$$d_H(x', A) \leq \sup_{x' \in X} d(x, A) = d_H(A, X)$$

portanto temos que $d_H(x, A) + d_H(x', A) \leq 2d_H(A, X)$. Logo dado $\epsilon > 0$, existem $a, a' \in A$ tais que:

$$d(x, a) - \epsilon \leq d_H(x, A)$$

$$d(x', a') - \epsilon \leq d_H(x', A)$$

então

$$\begin{aligned} 2d_H(A, X) &\geq d(x, a) + d(x', a') - 2\epsilon \\ &\geq d(x, x') - d(x', a) + d(x', a') - 2\epsilon \\ &\geq d(x, x') - d(a, a') - 2\epsilon \\ &\geq d(x, x') - \operatorname{diam}(A) - 2\epsilon. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Finalmente fazendo $\epsilon \to 0$, e tomando o supremo $d(x, x')$ sobre todos os pontos $x, x' \in X$ temos que $d_H(A, X) \geq \dfrac{\operatorname{diam}(X) - \operatorname{diam}(A)}{2}$. ■

Usualmente costumamos identificar ou imaginar a dinâmica de um conjunto como se esta fosse uma dinâmica num conjunto mais usual, como por exemplo as dinâmicas definidas num intervalo da forma $[a, a+1]$ ou também uma dinâmica definida em $\mathbb{C}$. Usando a noção de Δ-isometrias, a seguir definimos a distancia GH para conjuntos, a qual permite ver a semelhança entre dois conjuntos.

Definição 2.1.5 *A distância $Gromov - Hausdorff$ entre espaços métricos X e Y é definida por*

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{\Delta > 0 : \exists \Delta - \textit{isometrias} \;\; i : X \longrightarrow Y \textit{ e } j : Y \longrightarrow X\}.$$

Proposição 2.1.6 *Seja X, Y espaços métricos, então:*

$$d_{GH}(X, Y) \geq \frac{|diam(X) - diam(Y)|}{3}.$$

Demonstração. Seja $i : X \to Y$ uma δ-isometria, então

$$\sup_{x, x' \in X} \{|d^Y(i(x), i(x')) - d^X(x, x')|\} < \delta$$

portanto $d^Y(i(x), i(x')) < d^X(x, x') + \delta$, logo

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(i(X)) = \sup_{x, x' \in X} d^Y(i(x), i(x')) &< \sup_{x, x' \in X} d^X(x, x') + \delta \\ &= \operatorname{diam}(X) + \delta. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, usando a proposição 2.1.4, temos

$$d_H(i(X), Y) \geq \frac{\operatorname{diam}(Y) - \operatorname{diam}(i(X))}{2} > \frac{\operatorname{diam}(Y) - \operatorname{diam}(i(X)) - \delta}{2}.$$

Mas como i é δ-isometria, então $d_H(i(X), Y) < \delta$, e portanto

$$\frac{\text{diam}(Y) - \text{diam}(X)}{3} < \delta.$$

Da mesma maneira, trocando i pela δ-isometria $j : Y \to X$, obtemos que :

$$\frac{\text{diam}(X) - \text{diam}(Y)}{3} < \delta,$$

então $\dfrac{|\text{diam}(X) - \text{diam}(Y)|}{3} < \delta$. Assim finalmente temos:

$$\frac{|\text{diam}(X) - \text{diam}(Y)|}{3} \leq d_{GH}(X, Y).$$

■

Motivados pela definição da distancia Gromov-Hausdorff entre espaços métricos, queremos definir uma distância que permita relacionar dinâmicas definidas em espaços métricos diferentes e assim poder estudar algumas relações entre estas dinâmicas. A seguir definimos a distancia GH^0 entre aplicações definidas em espaços métricos arbitrários.

Definição 2.1.7 *A distância $C^0 - Gromov - Hausdorff$ entre mapas $f : X \longrightarrow X$ e $g : Y \longrightarrow Y$ dos espaços métricos X e Y, respectivamente, é definida por*

$$\begin{aligned} d_{GH^0}(f, g) = \inf\{\Delta > 0 : \exists \Delta - \textit{isometrias}\ \ i : X \longrightarrow Y\ \textit{e}\ j : Y \longrightarrow X\ \textit{tal que} \\ d_{C^0}(g \circ i, i \circ f) < \Delta\ \textit{e}\ d_{C^0}(j \circ g, f \circ j) < \Delta\}. \end{aligned}$$

Teorema 2.1.8 *As seguintes propriedades são válidas para cada par de mapas $f : X \longrightarrow X$ e $g : Y \longrightarrow Y$ entre espaços métricos X e Y respectivamente:*

1. *Se $X = Y$, então $d_{GH^0}(f, g) \leq d_{C^0}(f, g)$(a igualdade não é necessariamente verdadeira).*

2. *$d_{GH}(X, Y) \leq d_{GH^0}(f, g)$ e $d_{GH}(X, Y) = d_{GH^0}(Id_X, Id_Y)$ onde Id_Z é a identidade em Z.*

3. *Se X e Y são compactos e g e f contínuas, então $d_{GH^0}(f, g) = 0$ se, e somente se, f e g são isometricamente conjugadas.*

4. *$d_{GH^0}(f, g) = d_{GH^0}(g, f)$.*

5. *Para qualquer mapa $r : Z \longrightarrow Z$ de qualquer espaço métrico Z, temos*

$$d_{GH^0}(f, g) \leq 2(d_{GH^0}(f, r) + d_{GH^0}(r, g)).$$

6. *$d_{GH^0}(f, g) \geq 0$ e se X e Y são limitados, então $d_{GH^0}(f, g) < \infty$.*

7. *Se X é compacto e existe uma sequência de isometrias $g_n : Y_n \longrightarrow Y_n$ tal que $d_{GH^0}(f, g_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, então f é também uma isometria.*

Demonstração. Item 1. Suponha $X = Y$. Tome $\epsilon > 0$, $\Delta = d_{C^0}(f,g)+\epsilon$ e $Id_X = i = j$. então, i e j são Δ-isometrias que satisfazem $d_{C^0}(g\circ i, i\circ f) = d_{C^0}(j\circ g, f\circ j) = d_{C^0}(f,g) < \Delta$. Portanto, $d_{GH^0}(f,g) \leq \Delta = d_{C^0}(f,g)+\epsilon$. Como ϵ é arbitrário, $d_{GH^0}(f,g) \leq d_{C^0}(f,g)$. Tomando dois mapas isométricos f e g temos $d_{GH^0}(f,g) = 0$ mas $d_{C^0}(f,g) > 0$. Consequentemente $d_{GH^0}(f,g) \neq d_{C^0}(f,g)$.

Item 2. Segue facilmente da definição que $d_{GH}(X,Y) \leq d_{GH^0}(f,g)$. Por outro lado, fixe $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. Então existe $\Delta < d_{GH}(X,Y) + \epsilon$ e Δ-isometrias $i : X \to Y$ e $j : Y \to X$. Claramente, $d_{C^0}(Id_Y \circ i, i\circ Id_X) = d_{C^0}(j\circ Id_Y, Id_X\circ j) = 0 < \Delta$ e assim $d_{GH^0}(Id_X, Id_Y) \leq \Delta < d_{GH}(X,Y) + \epsilon$. Como ϵ é arbitrário, $d_{GH^0}(Id_X, Id_Y) \leq d_{GH}(X,Y)$. Disto concluímos que $d_{GH^0}(Id_X, Id_Y) = d_{GH}(X,Y)$.

Item 3. Suponha que f e g são isometricamente conjugados, i.e., existe uma isometria $h : Y \to X$ tal que $f\circ h = h\circ g$. Consequentemente, para cada $\Delta > 0$, $h : Y \to X$ e $h^{-1} : X \to Y$ são isometrias (e assim Δ-isometrias) satisfazendo $d_{C^0}(g\circ h^{-1}, h^{-1}\circ f) = d_{C^0}(h\circ g, f\circ h) = 0 < \Delta$. Como Δ é arbitrário, $d_{GH^0}(f,g) = 0$. Reciprocamente suponhamos que Y é compacto, g contínuo e que $d_{GH^0}(f,g) = 0$. Então, existe uma sequência de $\frac{1}{n}$- isometrias $i_n : X \to Y$ e $j_n : Y \to X$ satisfazendo

$$d_{C^0}(g\circ i_n, i_n\circ f) < \frac{1}{n} \text{ e } d_{C^0}(j_n\circ g, f\circ j_n) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Como no teorema de Arzelá-Àscoli, escolhemos um subconjunto A enumerável e denso de X. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $f(A) \subset A$. Por um argumento diagonal, desde que Y seja compacto, podemos escolher uma subsequência i_{n_l} de i_n tal que $i_{n_l}(a)$ converge em Y para todo $a \in A$. Chamando por $i(a)$ o valor para o qual $i_{n_l}(a)$ converge obtemos um mapa $i : A \to Y$ satisfazendo

$$i(a) = \lim_{l\to\infty} i_{n_l}(a), \quad \text{para todo } a \in A.$$

Mas cada i_n é $\frac{1}{n}$-isometria, assim

$$d^X(a,a') - \frac{1}{n_l} < d^Y(i_{n_l}(a), i_{n_l}(a')) < d^X(a,a') + \frac{1}{n_l}, \forall l \in \mathbb{N}, a, a' \in A.$$

Fazendo $l \to \infty$ obtemos

$$d^Y(i(a), i(a')) = d^X(a,a'), \quad \text{para todo } a, a' \in A.$$

A partir disto e da densidade de A obtemos uma extensão de i a todo X, denotada por $i : X \to Y$, tal que

$$d^Y(i(x), i(x')) = d^X(x,x'), \quad \text{para todo } x, x' \in X.$$

Como i_n é uma $\frac{1}{n}$-isometria para todo n, obtemos que i é sobrejetora. Além disso, i é isometria.
Logo, como

$$d^Y(g(i_{n_l}(a)), i_{n_l}(f(a))) < \frac{1}{n_l}, \quad \text{para todo } l \in \mathbb{N}, a \in A,$$

$f(a) \in A$ para $a \in A$, $i_{n_l}(a) \to i(a)$ quando $l \to \infty$, e da continuidade de g e fazendo $l \to \infty$, obtemos $d^Y(g(i(a)), i(f(a)) = 0$ para todo $a \in A$. Portanto, $g \circ i = i \circ f$ em A. Como A é denso em X, $g \circ i = i \circ f$ em todo X.

Item 5. Fixamos $\epsilon > 0$. Decorre da definição que existem Δ_1- isometrias $i : X \to Z$, $j : Z \to X$, Δ_2- isometrias $k : Y \to Z$, $l : Z \to Y$,com

$$\Delta_1 < d_{GH^0}(f, r) + \epsilon \text{ e } \Delta_2 < d_{GH^0}(g, r) + \epsilon$$

tais que

$$d_{C^0}(r \circ i, i \circ f) < \Delta_1, \quad d_{C^0}(j \circ r, f \circ j) < \Delta_1,$$
$$d_{C^0}(r \circ k, k \circ g) < \Delta_1, \quad d_{C^0}(l \circ r, g \circ l) < \Delta_2.$$

É fácil ver que $l \circ i : X \to Y$ e $j \circ k : Y \to X$ são $(\Delta_1 + \Delta_2)$-isometria e assim $2(\Delta_1 + \Delta_2)$-isometrias também. Agora, para todo $x \in X$ temos

$$d^Y(l(r(i(x))), l(i(f(x)))) \leq d^Y(g(l(i(x))), l(r(i(x)))) + d^Y(l(r(i(x))), l(i(f(x)))) <$$
$$\Delta_2 + d^Y(l(r(i(x))), l(i(f(x)))).$$

Mas $l : Z \to Y$ é uma Δ_2- isometria assim

$$d^Y(l(r(i(x))), l(i(f(x)))) < d^Z(r(i(x)), i(f(x))) + \Delta_2.$$

Substituindo acima, obtemos

$$\begin{aligned} d^Y(g(l(i(x))), l(i(f(x)))) &< d^Z(r(i(x)), i(f(x))) + 2\Delta_2 \\ &< \Delta_1 + 2\Delta_2 \\ &< 2(\Delta_1 + \Delta_2). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$d_{C^0}(g \circ l \circ i, l \circ i \circ f) < 2(\Delta_1 + \Delta_2).$$

Similarmente,

$$d_{C^0}(j \circ k \circ g, f \circ j \circ k) < 2(\Delta_1 + \Delta_2).$$

A partir disto obtemos

$$d_{C^0}(f, g) \leq 2(\Delta_1 + \Delta_2) < 2(d_{GH^0}(f, r) + d_{GH^0}(g, r) + 2\epsilon).$$

Como ϵ é arbitrário, obtemos o resultado.

Item 6. Pela proposição 2.1.6 e Item 2, temos que $d_{GH^0}(f, g) \geq 0$. A última parte deste item é consequência da seguinte desigualdade

$$d_{GH^0}(f, g) \leq \max\{d_{GH}(X, Y), diam(X), diam(Y)\},$$

onde $diam(X)$ é o diâmetro de X.

Item 7. Uma vez que $d_{GH^0}(f, g_n) \to 0$, existe uma sequência $\delta_n \to 0$ e δ_n- isometrias $i_n : X \to Y_n$ e $j_n : Y_n \to X$ tais que

$$d_{C^0}(g_n \circ i_n, i_n \circ f) < \delta_n \text{ e } d_{C^0}(j_n \circ g_n, f \circ j_n) < \delta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$\begin{aligned} d^{Y_n}(i_n(f(x)), i_n(f(x'))) \leq & d^{Y_n}(g_n(i_n(x)), i_n(f(x)))+ \\ & d^{Y_n}(g_n(i_n(x)), g_n(i_n(x'))+ \\ & d^{Y_n}(g_n(i_n(x')), i_n(f(x'))) \\ < & 3\delta_n + d^X(x, x'), \quad \text{para todo } x, x' \in X. \end{aligned}$$

Substituindo $d^X(f(x), f(x')) < \delta_n + d^{Y_n}(i_n(f(x)), i_n(f(x')))$, obtemos que

$$d^X(f(x), f(x')) \leq 4\delta_n + d^X(x, x'), \quad \text{para todo } x, x' \in X.$$

Fazendo $n \to \infty$ temos que

$$d^X(f(x), f(x')) \leq d^X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X. \tag{2.3}$$

Por outro lado,

$$d_H(f(j_n(Y_n)), X) \leq d_H(f(j_n(Y_n)), j_n(g_n(Y_n))) + d_H(j_n(g_n(Y_n)), X), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Como g_n é isometria temos que $g_n(Y_n) = Y_n$, assim

$$d_H(j_n(g_n(Y_n)), X) = d_H(j_n(Y_n), X),$$

então

$$\lim_{n\to\infty} d_H(j_n(Y_n), X)) = 0$$

Temos ainda que $d_H(f(j_n(Y_n)), j_n(g_n(Y_n))) \to 0$, pois $d_{C_0}(j_n \circ g_n, f \circ j_n) < \delta_n \to 0$. Fazendo $n \to \infty$ em 2.4 temos que $d_H(f(j(Y_n)), X) \to 0$ quando $n \to \infty$. Então f é sobrejetiva e portanto é uma isometria por 2.3 e [5]. Isto completa a prova. ■

2.2 Estabilidade Topológica Gromov-Hausdorff

Tendo definido a distância GH^0, nesta seção passaremos a definir a estabilidade topológica GH, e veremos que os homeomorfismos GH-estáveis não são raros, pois mostraremos que todo homeomorfismo expansivo com a propriedade do sombreamento é topologicamente GH-estável.

Definição 2.2.1 *Um homeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ de um espaço métrico compacto X é topologicamente GH-estável se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que para todo homeomorfismo $g : Y \longrightarrow Y$, de um espaço métrico compacto Y, tal que $d_{GH^0}(f, g) < \delta$, exista uma ϵ-isometria contínua $h : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ h = h \circ g$.*

Lema 2.2.2 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo expansivo, com constante de expansividade $\alpha > 0$. Se, para $\beta > 0$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \alpha$ para todo $-n \leq i \leq n$, então $d(x, y) < \beta$.*

Demonstração. Suponha por absurdo, que existem pontos $x_n, y_n \in X$ tais que $d(x_n, y_n) \geq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $d(f^i(x_n), f^i(y_n)) \leq \alpha$ para todo $-n \leq i \leq n$. Podemos assumir que $x_n \to x$ e $y_n \to y$, com $x \neq y$. Então temos que $d(x, y) \geq \beta$.
Para qualquer inteiro k, escolhemos $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $-m \leq k \leq m$. Então $d(f^k(x_n), f^k(y_n)) \leq \alpha$ para todo $n \geq m$. Logo, fazendo $n \to \infty$ segue que $d(f^k(y), f^k(y)) \leq \alpha$. Isto implica que $x = y$, uma contradição. ■

Teorema 2.2.3 *Todo homeomorfismo expansivo de um espaço métrico compacto com a propriedade do sombreamento é topologicamente GH-estável.*

Demonstração. Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo expansivo de um espaço métrico compacto X com a propriedade do sombreamento , e com constante de expansividade κ. Dado $\epsilon > 0$, tome $0 < \bar{\epsilon} < \dfrac{1}{8}\min\{\epsilon, \kappa\}$. Para este $\bar{\epsilon}$ escolha $\delta > 0$ como na propriedade do sombreamento. Podemos assumir que $\delta < \bar{\epsilon}$, sem perda de generalidade.
Seja $g : Y \to Y$ um homeomorfismo de um espaço métrico compacto Y tal que $d_{GH^0}(f, g) < \delta$. Então existem δ-isometrias $i : X \to Y$ e $j : Y \to X$ tal que $d_{C^0}(g \circ i, i \circ f) < \delta$ e, mais importante,

$$d_{C^0}(j \circ g, f \circ j) < \delta.$$

Tomemos $y \in Y$ e consideremos a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida por $x_n = j(g^n(y))$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$d(x_{n+1}, f(x_n)) = d(j(g(g^n(y))), f(j(g^n(y)))) = d(j \circ g(g^n(y)), f \circ j(g^n(y))) < \delta,$$

pela escolha de δ e pela propriedade do sombreamento, existe $x \in X$ tal que

$$d(f^n(x), x_n) \leq \bar{\epsilon}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, $d(f^n(x), x_n) < \dfrac{\kappa}{2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pela expansividade de f temos que x é único. Tomando $x = h(y)$, obtemos o mapa $h : Y \to X$, satisfazendo

$$d(f^n(h(y)), j(g^n(y))) \leq \bar{\epsilon}, \qquad \text{para todo } y \in Y, n \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo $n = 0$ acima temos que $d(h(y), j(y)) < \bar{\epsilon}$ para todo $y \in Y$, portanto

$$d_{C^0}(h, j) \leq \bar{\epsilon}.$$

Note que

$$d_H(h(Y), X) \leq d_H(h(Y), j(Y)) + d_H(j(Y), X) \leq \bar{\epsilon} + \delta < \epsilon.$$

Além disso, para todo $y, y' \in Y$ temos que

$$
\begin{aligned}
|d^X(h(y),h(y')) - d^Y(y,y')| \leq & |d^X(h(y),h(y')) - d^X(j(y),j(y'))| + \\
& |d^X(j(y),j(y')) - d^X(y,y')| \\
\leq & |d^X(h(y),h(y')) - d^X(h(y),j(y'))| + \\
& |d^X(h(y),j(y')) - d^X(j(y),j(y'))| + \delta \\
\leq & d^X(h(y'),j(y')) + d^X(h(y),j(y)) + \delta \\
< & 2\overline{\epsilon} + \delta \\
< & \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \\
< & \epsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto, $h : Y \to X$ é uma ϵ-isometria.

Por outro lado, temos

$$
d(f^n(h(g(y))), j(g^n(g(y)))) \leq \overline{\epsilon} \quad \text{e} \quad d(f^n(f(h(y))), j(g^n(g(y)))) \leq \overline{\epsilon}
$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, novamente pela expansividade de f, $f(h(y)) = h(g(y))$ para todo $y \in Y$. Isto é, $f \circ h = h \circ g$.
Agora provaremos que h é contínua. De fato, dado $\Delta > 0$. Como κ é a constante de expansividade de f, pelo Lema 2.2.2 existe $N \in \mathbb{N}^+$ tal que $d(a,b) \leq \dfrac{\Delta}{2}$, sempre que $d(f^n(a), f^n(b)) \leq \kappa$, para todo $-N \leq n \leq N$.
Da continuidade de g no espaço métrico compacto Y, temos que g é uniformemente contínua.
Assim, existe $\gamma > 0$ tal que $d(g^n(y), g^n(y')) \leq \dfrac{\overline{\epsilon}}{8}$ para todo $-N \leq n \leq N$ sempre que $y, y' \in Y$ satisfaçam $d(y,y') < \gamma$.
Então, se $d(y,y') < \gamma$, temos que

$$
\begin{aligned}
d^X(f^n(h(y)), f^n(h(y'))) = & d^X(h(g^n(y)), h(g^n(y'))) \\
\leq & d^X(h(g^n(y)), j(g^n(y))) + \\
& d^X(j(g^n(y)), j(g^n(y'))) + \\
& d^X(j(g^n(y')), h(g^n(y'))) \\
\leq & 2\overline{\epsilon} + \delta + d^Y(g^n(y), g^n(y')) \\
\leq & 3\overline{\epsilon} + \frac{\overline{\epsilon}}{8} \\
< & \kappa, \qquad \text{para todo } -N \leq n \leq N.
\end{aligned}
$$

Assim, pela escolha de N, temos que $d(h(y), h(y')) \leq \dfrac{\Delta}{2} < \Delta$. Então, h é contínua e a prova segue. ■

Corolário 2.2.4 *Se f é um homeomorfismo hiperbólico, então f é topologicamente GH-estável.*

2.3 Estabilidade topológica e estabilidade topológica Gromov-Hausdorff

Os Teoremas 1.3.3 e 2.2.3 mostram que homeomorfismos expansivos com a propriedade do sombreamento são topologicamente estáveis e Gromov-Hausdorf estáveis ao mesmo tempo, então naturalmente surge a questão sobre a relação que possa existir entre a estabilidade GH e a estabilidade topológica usual, já que neste caso elas são equivalentes. Nesta seção estudaremos algumas relações que existem entre estes dois tipos de estabilidade.

2.3.1 Um homeomorfismo topologicamente estável e não GH-estável

Dado um homeomorfismo, é natural questionar se o fato de ser topologicamente estável implica que ele seja topologicamente GH-estável. O seguinte teorema mostra que em geral isso não acontece, pois ele garante a existência de um homeomorfismo topologicamente estável que não seja topologicamente GH-estável. Antes de enunciar este teorema vamos provar um lema que ajudará na demonstração dele.

Lema 2.3.1 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo topologicamente GH-estável sobre um espaço métrico compacto X. Se $\inf_{z\in X} d_H(X, \mathcal{O}_f(z)) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se $g : Y \to Y$ é um homeomorfismo de um espaço métrico compacto Y com $d_{GH^0}(f, g) < \delta$ então g não é minimal.*

Demonstração. Por hipótese existe $\epsilon > 0$ tal que

$$d_H(X, \mathcal{O}_f(z)) > \epsilon, \qquad \text{para todo } z \in X.$$

Para este ϵ, seja $\delta > 0$ dado pela GH-estabilidade topológica de f. Agora seja um homeomorfismo $g : Y \to Y$ de um espaço métrico compacto tal que $d_{GH^0}(f, g) < \delta$. Então pela GH-estabilidade topológica de f, existe uma ϵ-isometria $h : Y \to X$ satisfazendo $f \circ h = h \circ g$.
Suponha que g é minimal. Fixando $y \in Y$ como g é minimal, $\mathcal{O}_g(y)$ é denso em Y e assim pela continuidade de h, $h(\mathcal{O}_g(y))$ é denso em $h(Y)$. Por outro lado, $f \circ h = h \circ g$ implica $h(\mathcal{O}_g(y)) = \mathcal{O}_f(z)$, onde $z = h(y)$. Segue que $\mathcal{O}_f(z)$ é denso $h(Y)$. Como h é ϵ-isometria, então $d_H(X, h(Y)) < \epsilon$. Como $\mathcal{O}_f(z)$ é denso em $h(Y)$, concluímos que $d_H(X, \mathcal{O}_f(z)) < \epsilon$, o que contradiz a escolha de ϵ. Assim, se $d_{GH^0}(f, g) < \delta$ então g não é minimal. ∎

Teorema 2.3.2 *Existe um espaço métrico compacto X e um homeomorfismo $f : X \to X$ que é topologicamente estável mas não é GH-estável.*

Demonstração. Considere o oscilador não forçado de Duffing dado pelo fluxo Φ em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3. \end{cases}$$

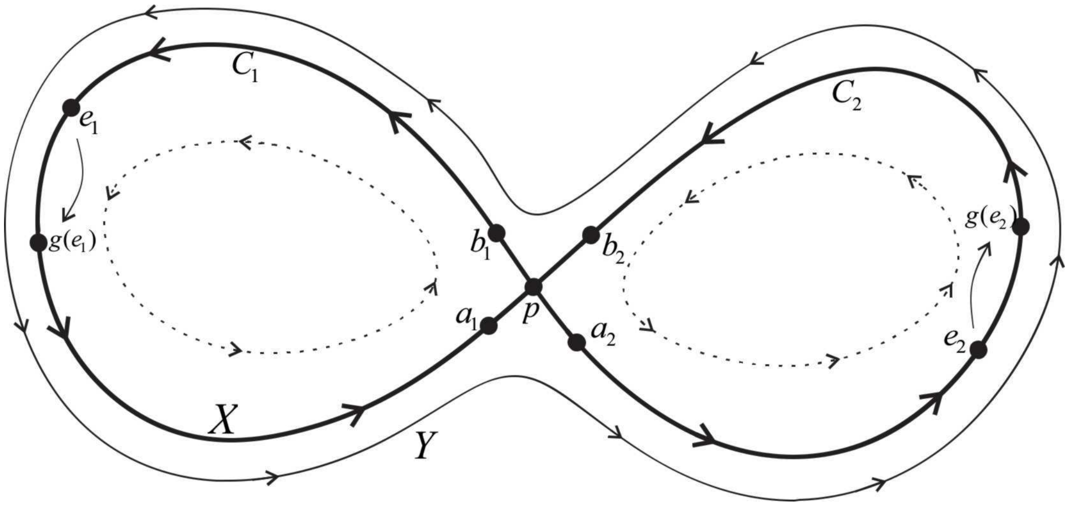

Figura 2.2: Homeomorfismo topologicamente estável e não GH estável

Este fluxo tem três tipos de órbitas, o conjunto Y dos círculos exteriores , o conjunto X das órbitas que formam a figura oito, e os círculos exteriores como indicamos na Figura 2.2. Definindo $f : X \to X$ como a aplicação do tempo um Φ_1 de Φ restrito a X.

Vamos provar primeiro que f é topologicamente estável. Temos $X = C_1 \cup C_2$ como a união dos círculos C_1 e C_2 que se intersectam no ponto de equilíbrio p. Qualquer homeomorfismo $g : X \to X$ fixa p e se g é C^0-próximo a f, então C_1 e C_2 são invariantes. De fato, primeiro suponha que $g(p) = q \neq p$. Podemos supor que $q \in C_1$, como $q \neq p$; então $(C_1 - \{q\}) \cup C_2$ é conexo, mas $g^{-1}(C_1 - \{q\}) \cup C_2) = (C_1 \cup C_2) - \{p\}$ é desconexo, o que seria uma contradição. Logo $g(p) = p$. Agora vejamos que C_1 e C_2 são invariantes. É suficiente provar que C_1 é invariante. Com efeito, temos que $C_1 - \{p\}$ é conexo, como $g(p) = p$, então temos duas possibilidades $g(C_1) = C_1$ ou $g(C_1) = C_2$, mas tomando g suficientemente próximo a f; e como $f(C_1) = C_1$, então $g(C_1) = C_1$.

Afirmação: Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d_{C_0}(f, g) < \delta$, existem quatro pontos fixos $a_1, b_1 \in C_1$ e $a_2, b_2 \in C_2$ satisfazendo as seguintes propriedades :

- $\max\{d(p, a_1), d(p, b_1), d(p, a_2), d(p, b_2)\} < \epsilon$.
- $g([p, a_1] \cup [p, b_1] \cup [p, a_2] \cup [p, b_2]) = [p, a_1] \cup [p, b_1] \cup [p, a_2] \cup [p, b_2]$.
- Se $x \in C_1 \setminus ([p, a_1] \cup [p, b_1])$ então $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(x) = a_1$ e $\lim\limits_{n\to-\infty} g^n(x) = b_1$.
- Se $x \in C_2 \setminus ([p, a_2] \cup [p, b_2])$ então $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(x) = b_2$ e $\lim\limits_{n\to-\infty} g^n(x) = a_2$.

De fato, dado $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, tome $D_1 = \{x \in C_1 : d(p, x) \geq \epsilon\} = [\alpha_1, \alpha_2]$ e considere

$$\begin{aligned} \widehat{d} : D_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\to d(x, f(x)). \end{aligned}$$

Como f é contínua, então $\widehat{d}$ é contínua sobre o compacto D_1. Se $x \in D_1$ então $f(x) \neq x$ portanto $\widehat{d}(x) = d(x, f(x)) > 0$ para todo $x \in D_1$, logo existe $\delta > 0$ tal que $d(x, f(x)) > \delta$ para todo $x \in D_1$. Podemos supor $\delta < \epsilon$. Tomemos agora $g : X \to X$ um homeomorfismo tal que $d_{C^0}(f, g) < \delta$.
Suponha que exista $x \in C_1$ tal que $g(x) = x$, então:

$$d(x, f(x)) = d(g(x), f(x)) < \delta,$$

e portanto $x \notin D_1$. Provamos anteriormente que se g está C^0-próximo a f, então $g(p) = p$. Como g é contínua e X é compacto então o conjunto $Fix(g)$, dos pontos fixos por g, é compacto, assim existem $a_1 \in [p, \alpha_2]$ e $b_1 \in [p, \alpha_1]$ tal que $g(a_1) = a_1$, $g(b_1) = b_1$ e

$$\begin{aligned} d(a_1, p) &= \max\{d(x, p) : x \in [p, \alpha_2] \text{ e } g(x) = x\} \\ d(b_1, p) &= \max\{d(x, p) : x \in [p, \alpha_1] \text{ e } g(x) = x\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Como $d(g(\alpha_1), f(\alpha_1)) < \delta$ e $d(\alpha_1, f(\alpha_1)) > \delta$, então $g(\alpha_1) \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Portanto $g^{-1}(\alpha_1) \in (b_1, \alpha_1)$, e $d(b_1, g^{-1}(\alpha_1)) < d(b_1, \alpha_1)$, fazendo o mesmo procedimento para $g^{-1}(\alpha_1)$ temos que $d(b_1, g^{-2}(\alpha_1)) < d(b_1, g^{-1}(\alpha_1))$ e assim sucessivamente obtemos que :

$$d(b_1, \alpha_1) > d(b_1, g^{-1}(\alpha_1)) > d(b_1, g^{-2}(\alpha_1)) > d(b_1, g^{-3}(\alpha_1)) > \dots \tag{2.6}$$

Logo, existe $b \in [b_1, \alpha_1)$ tal que $b = \lim_{n\to\infty} g^{-n}(\alpha_1)$, então:

$$g(b) = g(\lim_{n\to\infty} g^{-n}(\alpha_1)) = \lim_{n\to\infty} g^{-n+1}(\alpha_1) = b.$$

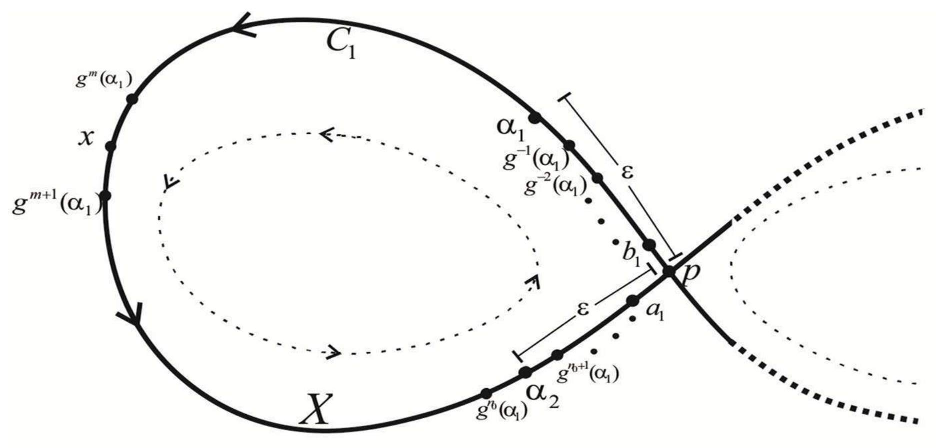

Figura 2.3: Òrbita de α_1 para g.

Como $b \in [b_1, \alpha_1)$ e $g(x) \neq x$ para todo $x \in (b_1, \alpha_1)$, então $b = b_1$. Por outro lado, como $d(g^k(\alpha_1), g^{k+1}(\alpha_1)) > \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(\alpha_1) \in D_1$, existe n_0 tal que $\alpha_2 \in [g^{n_0}(\alpha_1), g^{n_0+1}(\alpha_1)]$, aplicando o mesmo raciocínio que para 2.7, obtemos que $\lim_{n\to\infty} g^n(\alpha_1) = a_1$.

Observe que $\lim_{n\to\infty} g^{-n+k}(\alpha_1) = b_1$ e $\lim_{n\to\infty} g^{n+k}(\alpha_1) = a_1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim, se $x \in [g^k(\alpha_1), g^{k+1}(\alpha_1)]$, então $g^{-n}(x) \in [g^{k-n}(\alpha_1), g^{k+1-n}(\alpha_1)]$, logo

$$\lim_{n\to\infty} g^{-n}(x) = b_1 \text{ e } \lim_{n\to\infty} g^{n}(x) = a_1.$$

É claro que como $b_1 = \lim_{n\to\infty} g^{-n}(\alpha_2)$ e $\lim_{n\to\infty} g^{n+k}(\alpha_1) = a_1$, então se $x \in C_1 \setminus ([p, a_1] \cup [p, b_1])$ segue que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in [g^m(\alpha_1), g^{m+1}(\alpha_1)]$, portanto

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} g^{-n}(x) &= b_1, \quad \forall x \in C_1 \setminus ([p, a_1] \cup [p, b_1]) \\ \lim_{n\to\infty} g^{n}(x) &= a_1, \quad \forall x \in C_1 \setminus ([p, a_1] \cup [p, b_1]). \end{aligned}$$

Além disto, como a_1, b_1 e p são pontos fixos do homeomorfismo g, então $g([p, a_1]) = [p, a_1]$ e $g([p, b_1]) = [p, b_1]$.

Analogamente para C_2 obtemos dois pontos fixos $a_2, b_2 \in C_2$ tal que $g([p, a_1] \cup [p, b_1]) = [p, a_1] \cup [p, b_1]$ e

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} g^{-n}(x) &= b_2, \quad \forall x \in C_2 \setminus ([p, a_2] \cup [p, b_2]) \\ \lim_{n\to\infty} g^{n}(x) &= a_2, \quad \forall x \in C_2 \setminus ([p, a_2] \cup [p, b_2]). \end{aligned}$$

Portanto a afirmação está provada.

Agora tomando $e_1 \in C_1$ e $e_2 \in C_2$, considere os intervalos $[e_1, g(e_1)[$ e $[e_2, g(e_2)[$. Segue que para todo $x \in C_i \setminus ([p, a_i] \cup [p, b_i])$ existe um único inteiro $n_i(x)$ satisfazendo $g^{-n_i(x)}(x) \in [e_i, g(e_i)[$ para $i = 1, 2$.
Observe que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $-m \leq \inf\{n_i(x) : x \in C_i \setminus ([p, a_i] \cup [p, b_i])\}$ e $\sup\{n_i(x) : x \in C_i \setminus ([p, a_i] \cup [p, b_i])\}$, para $i = 1, 2$.
Diminuindo δ, tal que se $x \in [e_i, g(e_i)[$ e $y \in [e_i, f(e_i)[$ temos $d(x, y) < \delta$, $i = 1, 2$, então $d(f^n(x), g^n(y)) \leq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $-m \leq n \leq m$. Assim, obtemos difeomorfismos $h_i : [e_i, g(e_i)[\to [e_i, f(e_i)[$ que estão C^0-próximos da identidade, para $i = 1, 2$. Definimos $h : X \to X$ por

$$h(x) = \begin{cases} f^{n_1(x)}(h_1(g^{-n_1(x)}(x))) & \text{se} \quad x \in C_1 \setminus ([p, a_1] \cup [p, b_1]) \\ f^{n_2(x)}(h_2(g^{-n_2(x)}(x))) & \text{se} \quad x \in C_2 \setminus ([p, a_2] \cup [p, b_2]) \\ p & \text{se} \quad x \in [p, b_1] \cup [p, a_2] \cup [p, b_2]. \end{cases}$$

Temos que h é continua e $d_{C^0}(h, Id_X) < \epsilon$. Além disso temos que $f \circ h = h \circ g$. De fato: se $x \in C_1 \setminus ([p, a_1] \cup [p, b_1])$ e como $n_1(g(x)) = n_1(x) + 1$, então:

$$f(h(x)) = f^{n_1(x)+1}(h_1(g^{-n_1}(x))) = f^{n_1(g(x))}(h_1(g^{-n_1}(x))) = h(g(x))$$

Da mesma forma se $x \in C_2 \setminus ([p, a_2] \cup [p, b_2])$ e como $n_2(g(x)) = n_2(x) + 1$, então:

$$f(h(x)) = f^{n_2(x)+1}(h_1(g^{-n_2}(x))) = f^{n_2(g(x))}(h_2(g^{-n_2}(x))) = h(g(x)).$$

Finalmente, se $x \in [p, a_1] \cup [p, b_1] \cup [p, a_2] \cup [p, b_2]$, então $f(h(x)) = f(p) = p$ e como $g([p, a_1] \cup [p, b_1] \cup [p, a_2] \cup [p, b_2]) = [p, a_1] \cup [p, b_1] \cup [p, a_2] \cup [p, b_2]$, então $h(g(x)) = p$. Assim, temos que $f \circ h = h \circ g$. Portanto f é topologicamente estável.
Agora provaremos que f não é topologicamente GH-estável.
Tome $g : Y \to Y$ como a aplicação de tempo um $\Phi_1 |_Y$ de Φ restrito aos círculos exteriores Y. Pode-se verificar facilmente que $d_{GH^0}(f, g) \to 0$ quando Y converge para X. Também, como $D\Phi_1(x).\Phi(x) = \Phi(\Phi_1(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, temos que g é topologicamente conjugada a uma rotação do círculo.
Por outro lado, tomando Y perto de X, podemos ver que o período de Y vai para o infinito. Como o período depende continuamente em Y, podemos escolher Y arbitrariamente próximo a X tal que g seja topologicamente conjugada com uma rotação irracional do círculo e, assim, g é minimal. Consequentemente, f pode ser $C^0 - GH$-aproximado por homeomorfismos mínimos. Como f satisfaz a condição $\inf\limits_{z \in X} d_H((X), \mathcal{O}_f(z)) > 0$, então pelo Lema 2.3.1 f não é topologicamente GH-estável. ■

2.3.2 Um caso onde a GH-estabilidade implica estabilidade topológica

O Teorema 2.3.2 mostra que estabilidade topológica não implica estabilidade GH, agora passamos a questionar a pergunta inversa, ou seja, se a condição de um homeomorfismo f ser topologicamente GH-estável é suficiente para que f seja topologicamente estável. Isso ainda não está provado mas a seguir veremos que, para homeomorfismos definidos sobre S^1, ser GH-estável implica estabilidade Gromov-Hausdorff.

Lema 2.3.3 *Sejam f e g homeomorfismos sobre S^1 que preservam orientação e tais que g seja topologicamente semi-conjugada a f por uma função h. Se $Per(g)$ é um conjunto não vazio, então $Per(f)$ é não vazio e existe uma constante C, dependendo apenas de f, de modo que se $d_{C^0}(h, Id_{S^1}) \leq C$, a cardinalidade de $Per(g)$ é não menor do que a cardinalidade de $Per(f)$.*

Demonstração. Como f é g são homeomorfismos de S^1, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Per(f) = Fix(f^n)$. Logo, tome uma constante positiva C tal que :

(1) $C \leq \dfrac{1}{8}$.

(2) Se I é um intervalo fechado de S^1 de comprimento $L(I) \leq 4C$ então $L(f^n(I)) \leq \dfrac{1}{4}$.

Suponha que g é topologicamente semi-conjugada a f por uma função h com $d_{C^0}(h, Id_{S^1}) \leq C$. Tomando $x \in Fix(f^n)$, como $h : S^1 \to S^1$ é um mapa sobrejetivo tal que $f^n \circ h = h \circ g^n$, então $h^{-1}(x)$ é um conjunto de S^1 não vazio, fechado g-invariante. Como $d_{C^0}(h, Id_{S^1}) \leq C$, então $h^{-1}(x) \subseteq [x - C, x + C]$. Considerando $B = [\inf h^{-1}(x), \sup h^{-1}(x)]$, temos que

$$L(B) \leq L([x - C, x + C]) = 2C \tag{2.7}$$

e

$$\begin{aligned}L(g^n(B)) &\le L(h\circ g^n(B)) + 2d_{C^0}(h, Id_{S^1})\\ &\le L(f^n\circ h(B)) + 2C\\ &\le \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Além disso temos que

$$L(h(B)) \le L(B) + 2d_{C^0}(h, Id_{S^1}) \le 4C.$$

Portanto, por 2.7 e 2.8, obtemos

$$L(B) + L(g^n(B)) \le 2C + \frac{1}{2} \le \frac{3}{4}.$$

Pela invariância de $h^{-1}(x)$, temos que os pontos extremos de $g^n(B)$ estão em B e os pontos extremos de B estão em $g^n(B)$. Como $L(S^1) = 1$, temos que $g^n(B) = B$, como g preserva orientação e $g^n(B) = B$, então $\sup h^{-1}(x)$ é um ponto fixo de g^n. Portanto obtemos uma injeção $x \mapsto \sup h^{-1}(x)$ de $Fix(f^n)$ a $Fix(g^n)$ e assim $\mathrm{Card}(Fix(f^n)) \le \mathrm{Card}(Fix(g^n))$. Desta forma,

$$\mathrm{Card}(Per(f)) = \mathrm{Card}(Fix(f^n)) \le \mathrm{Card}(Fix(g^n)) \le \mathrm{Card}(Per(g)),$$

o que implica $\mathrm{Card}(Per(f)) \le \mathrm{Card}(Per(g))$. ■

Teorema 2.3.4 *Um homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ é topologicamente estável se e somente se f cumpre as seguintes condições:*

(a) $Per(f)$ é não vazio e finito.

(b) Se $p \in Per(f)$, então p é topologicamente hiperbólico.

Demonstração. Suponha que f é um homeomorfismo topologicamente estável de S^1. Pela estabilidade topológica de f e pelo Teorema 1.3.7 podemos escolher um difeomorfismo Morse-Smale tão próximo a f tal que seja topologicamente semi-conjugada a f. Supondo que f preserva orientação, ou substituindo f por f^2, então pelo Lema 2.3.3, temos que $Per(f)$ é não vazio e finito.
Agora, tome um ponto $x \in Per(f)$. Se x não é topologicamente hiperbólico, podemos eliminar o ponto x fazendo uma pequena perturbação, mas esto contradiz o Lema 2.3.3. Portanto f cumpre as condições (a) e (b).

Agora suponha que f cumpre as condições (a) e (b), é fácil ver que f é topologicamente conjugado a um difeomorfismo Morse-Smale (veja 2.3.4), e como a estabilidade topológica é invariante por conjugações e pelo Teorema 1.3.6 temos que f é topologicamente estável. ■

Lema 2.3.5 *Seja $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$, então toda ϵ-isometria contínua $h : S^1 \to S^1$ é sobrejetiva.*

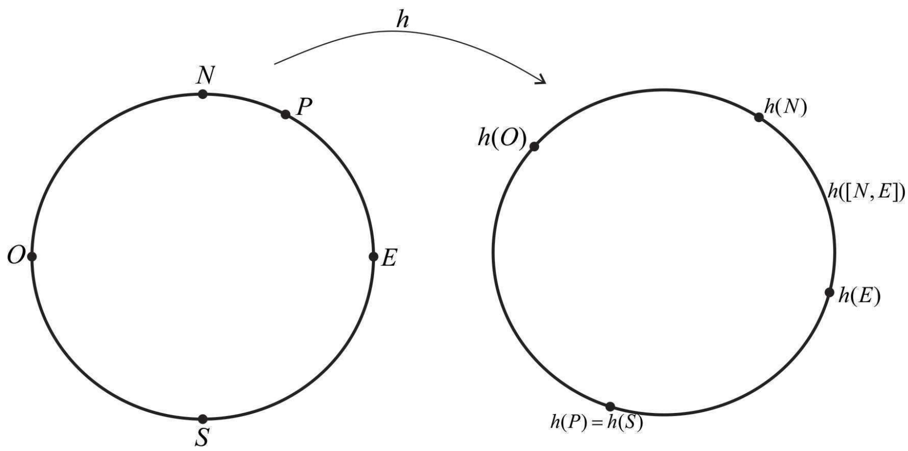

Figura 2.4: ϵ-isometria sobrejetiva em S^1.

Demonstração. Seja $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$, denote por N, S, E e O os polos norte, sul, leste e oeste de S^1. Denote também por $[N, E]$ o intervalo em S^1 limitado por N e E tal que $S, O \notin [N, E]$.

Suponha que exista $P \in [N, E]$ tal que $h(P) = h(S)$, então

$$\frac{1}{4} \leq d(P, S) = |d(h(P), h(S)) - d(P, S)| < \epsilon < \frac{1}{4},$$

o que é absurdo. Portanto $h([N, E])$ não contém a $h(S)$; da mesma forma obtemos que $h([N, E])$ não contém a $h(O)$ e assim podemos afirmar que $h([N, E])$ não intersecta $\{h(S), h(O)\}$. De forma análoga, obtemos que as imagens correspondentes aos intervalos $[E, S]$, $[S, O]$ e $[O, N]$ por h não intersectam a $\{h(N), h(O)\}$, $\{h(E), h(N)\}$, e $\{h(S), h(E)\}$ respetivamente; disto e pela continuidade de h temos que as imagens dos intervalos abertos (N, E), (E, S), (S, O) e (O, N) são dois a dois disjuntos. E assim temos que a imagem de um intervalo com extremos N e E é um intervalo com extremos $h(N)$ e $h(E)$ e como $h((E, S] \cup [S, O] \cup [O, N)) \cap h([N, E]) = \emptyset$, temos que

$$h((E, S] \cup [S, O] \cup [O, N)) = S^1 - h([N, E])$$

e portanto h é sobrejetiva. ∎

Teorema 2.3.6 *Todo homeomorfismo no círculo topologicamente GH-estável é topologicamente estável.*

Demonstração. Suponha que $f : S^1 \to S^1$ é topologicamente GH-estável. Pelo Teorema 2.3.4 é suficiente provar que f satisfaz (a) e (b). Substituindo f por f^2, se for necessário, podemos assumir que f preserva orientação. Denotamos por $L(I)$ o comprimento do intervalo $I \subset S^1$. Fixemos $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$ tal que $L(f(B)) < \frac{1}{8}$ sempre que B seja um intervalo de $L(B) < 4\epsilon$.

Para este ϵ, fixe $0 < \delta < \frac{1}{16}$ dado pela GH-estabilidade topológica de f.

Pelo Teorema 1.3.7, existe um difeomorfismo g com $d_{C^0}(f,g) < \delta$ tal que $Per(g)$ é não vazio e finito. Como f é topologicamente GH estável, e $d_{GH^0}(f,g) \leq d_{C^0}(f,g) < \delta$, existe uma ϵ-isometria contínua $h : S^1 \to S^1$ tal que $f \circ h = h \circ g$.
Como $\epsilon < \dfrac{1}{4}$, pelo Lema 2.3.5 temos que h é sobrejetiva. Agora tomemos $x \in Per(g)$ de período n. Como $f^n(h(x)) = h(g^n(x))$, temos que $h(x) \in Per(f)$ e, portanto, $Per(f)$ não é vazio. Tomemos qualquer $x \in Per(f)$ e consideremos $K = h^{-1}(\mathcal{O}_f(x))$. Como h é sobrejetiva, se $y \in K$ então $h(y) = f^i(x)$ para algum $0 \leq i \leq n-1$ onde n é o período de x, portanto $h(g(y)) = f(h(y)) = f^{i+1}(x) \in \mathcal{O}_f(x)$, o que implica $g(y) \in K$ sempre que $y \in K$. Consequentemente K é compacto g-invariante e não vazio. Portanto temos que K contém um ponto periódico de g. Como a coleção $\{h^{-1}(\mathcal{O}_f(x)) : x \in Per(f)\}$ é disjunto e $Per(g)$ é finito, concluímos que $Per(f)$ é finito, e não vazio. Isto prova (a).
Agora vamos provar a condição (b).

Afirmação: existe $\Delta > 0$ tal que para qualquer homeomorfismo g com $d_{C^0}(f,g) < \Delta$, a cardinalidade de $Per(g)$ é menor que a cardinalidade do $Per(f)$.

Por (a) temos que existe um inteiro positivo n tal que $Per(f) = Fix(f^n)$. Então, sem perda de generalidade podemos assumir $Per(f) = Fix(f)$ onde $Fix(f)$ é o conjunto dos pontos fixos de f. Tomemos $\Delta = \delta$ (δ como na prova de (a)), $x \in Fix(f)$ e um homeomorfismo g com $d_{C^0}(f,g) < \delta$. Pela escolha de δ temos que g preserva orientação. Como $d_{GH^0}(f,g) < \Delta = \delta$, então existe uma ϵ-isometria contínua $h : S^1 \to S^1$ tal que $f \circ h = h \circ g$. Logo como h é sobrejetiva, então para todo $x \in X$, $h^{-1}(x)$ é não vazio e compacto. Como $f \circ h = h \circ g$, então $h^{-1}(x)$ é um conjunto g-invariante. Sejam $y, y' \in h^{-1}(x)$, então

$$d(y,y') = |d(h(y),h(y')) - d(y,y')| < \epsilon,$$

logo $h^{-1}(x)$ está contido em um intervalo de comprimento no máximo 2ϵ. Seja $B = [\inf h^{-1}(x), \sup h^{-1}(x)]$, com $L(B) \leq 2\epsilon$. Assim pela escolha de ϵ temos que $L(f(B)) \leq \dfrac{1}{8}$. Como $L(g(B)) \leq L(f(B)) + 2d_{C^0}(f,g)$, temos

$$L(g(B)) \leq \frac{1}{8} + 2\delta < \frac{1}{4}.$$

Por outro lado, como $h^{-1}(x)$ é g-invariante, então ambos pontos finais de $g(B)$ estão em B. Desde que g é um homeomorfismo e o comprimento total de S^1 é um, temos que $L(g(B)) < \dfrac{1}{4}$, o que implica que $g(B) \subset B$. Como B é um intervalo e g é contínua, isto implica que g tem um ponto fixo em B. Então provamos que para todo $x \in Fix(f)$ corresponde um ponto fixo de g, e assim, sempre que g satisfaz $d_{C^0}(f,g) < \delta$, a cardinalidade de $Per(g)$ é menor do que a cardinalidade de $Per(f)$. Portanto a afirmação está provada. Agora suponha por contradição que f possui um ponto periódico que não é topologicamente hiperbólico. Então, podemos eliminá-lo por uma pequena perturbação de g o que contradiz a afirmação. $\blacksquare$

2.4 GH-estabilidade para aplicações continuas não invertíveis

A definição de topologicamente GH-estável pode estender-se facilmente para o caso das aplicações não inversíveis, como veremos a seguir.

Definição 2.4.1 *Uma aplicação contínua $f : X \to X$ de um espaço métrico compacto X é topologicamente GH-estável se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se uma aplicação contínua $g : Y \to Y$ de um espaço métrico compacto Y satisfaz $d_{GH^0}(f, g) < \delta$, então existe uma ϵ-isometria contínua $h : Y \to X$ tal que $f \circ h = h \circ g$.*

Teorema 2.4.2 *Toda aplicação contínua positivamente expansiva com sombreamento positivo, de um espaço métrico compacto, é topologicamente GH-estável.*

Demonstração. Análoga à demostração do Teorema 2.2.3. ■

Exemplo 2.4.3 *A aplicação $z \to z^2$ do círculo unitário $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ é positivamente expansiva e tem a propriedade do sombreamento positivo, então, pelo Teorema 2.4.2, esta aplicação é topologicamente GH-estável.*

Teorema 2.4.4 *Seja M uma variedade compacta homogênea, então toda aplicação constante $f : M \to M$ é GH-estável.*

Demonstração. Seja M uma variedade compacta homogênea e $f : M \to M$ uma aplicação constante igual a $x_0 \in M$. Suponha que f não é topologicamente GH-estável. Então, dado $\epsilon > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um espaço métrico compacto Y_n e uma aplicação contínua $g_n : Y_n \to Y_n$ tal que $d_{GH^0}(f, g_n) < \dfrac{1}{n}$ e não existem ϵ-isometrias continuas $h : Y_n \to M$ tais que $f \circ h = h \circ g_n$. Assim obtemos uma sequência de aplicações contínuas $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} d_{GH^0}(f, g_n) = 0$.
Como $d_{GH^0}(f, g_n) \to 0$, então existe uma sequência de escalares positivos $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\delta_n \to 0^+$ e uma sequência de δ_n-isometrias $i_n : M \to Y_n$ e $j_n : Y_n \to M$ tais que

$$d_{C^0}(g_n \circ i_n, i_n \circ f) < \delta_n \quad \text{e} \quad d_{C^0}(j_n \circ g_n, f \circ j_n) < \delta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para todo $y, y' \in Y_n$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} d^M(j_n(g_n(y)), j_n(g_n(y'))) \leq & d^M(j_n(g_n(y)), f(j_n(y))) \\ & + d^M(f(j_n(y))), f(j_n(y')))) \\ & + d^M(f(j_n(y'))), j_n(g_n(y'))) \\ & < 2\delta_n. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Como j_n é uma δ_n-isometria, então $|d^M(j_n(g_n(y)), j_n(g_n(y'))) - d^M(g_n(y), g_n(y'))| < \delta_n$ portanto:

$$\begin{aligned} d^M(g_n(y), g_n(y')) &< d^M(j_n(g_n(y)), j_n(g_n(y'))) + \delta_n \\ &< 2\delta_n + \delta_n + \delta_n = 3\delta_n. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Então,
$$diam(g_n(Y_n)) < 3\delta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Agora tomando uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $d_{GH^0}(f, g_n) \to 0$, então pelo Item 2 do Teorema 2.1.8 temos que $d_{GH}(M, Y_n) \to 0$. Além disso, existe uma sequência $\epsilon_n \to 0^+$ e uma sequência de ϵ_n-isometrias contínuas $\widehat{j}_n : Y_n \to M$(Veja [4], página 268). Como M é uma variedade homogênea, pela composição de $\widehat{j}_n$ com uma isometria de M se for necessário, podemos assumir

$$\widehat{j}_n(g_n(y_n)) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, como M é uma variedade homogênea, existe uma sequência de aplicações contínuas $k_n : M \to M$ e $\Delta > 0$ tais que

$$d_{C^0}(k_n, Id_X) \leq \frac{\epsilon}{8} \quad \text{e} \quad k_n(B(x_0, \Delta)) = x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos a sequência de aplicações $h_n = k_n \circ \widehat{j}_n : Y_n \to M$, logo temos que h_n é contínua. Ainda como k_n é uma $\frac{\epsilon}{8}$-isometria e como $\widehat{j}_n$ é ϵ_n-isometria, temos que h_n é uma $(\frac{\epsilon}{8} + \epsilon_n)$-isometria, então h_n é uma ϵ-isometria para n suficientemente grande. Além disso, como $\widehat{j}_n$ é uma ϵ-isometria, temos

$$diam_X(\widehat{j}_n(g_n(Y_n))) < \epsilon + diam(g_n(Y_n)) < \epsilon_n + 3\delta_n$$

e assim $diam_X(\widehat{j}(g_n(Y_n))) \to 0$ quando $n \to \infty$. Como $x_0 = \widehat{j}_n(g_n(y_n)) \in \widehat{j}_n(g_n(Y_n))$, concluímos que $\widehat{j}_n(g_n(Y_n)) \subset B(x_0, \Delta)$ para n suficientemente grande. Disto e pelas propriedades de k_n obtemos que $k_n(\widehat{j}_n(g_n(y)))) = x_0$, para todo $y \in Y_n$ e todo n suficientemente grande. Logo, como $f(h_n(y)) = x_0$, isto implica na existência de ϵ-isometrias contínuas $h_n : Y_n \to M$ tais que $f \circ h_n = h_n \circ g_n$ para todo n grande. Isto é uma contradição que completa a prova. ■

CAPÍTULO 3

PROPRIEDADES DE HOMEOMORFISMOS GH ESTÁVEIS

Neste capítulo verificaremos algumas propriedades para as dinâmicas topologicamente Gromov-Hausdorff estáveis. Convém destacar que os resultados apresentados neste capítulo são inéditos.

3.1 Consequências da GH-estabilidade em dinâmicas transitivas

3.1.1 Entropia Topológica

Um homeomorfismo topologicamente estável, por definição, é topologicamente conjugado a todo homeomorfismo C^0-próximo a ele. Assim, pelo Corolário 1.4.3, temos que a entropia é a mesma para todo homeomorfismo C^0-próximo a este homeomorfismo topologicamente estável. Uma curiosidade imediata é saber se ocorre o mesmo para homeomorfismos topologicamente GH-estáveis na distancia GH^0. Nesta seção veremos que isso nem sempre vai ocorrer.

Proposição 3.1.1 *Sejam f e g dois homeomorfismos tais que $d_{GH^0}(f, g) = 0$, então $h_{top}(f) = h_{top}(g)$.*

Demonstração. Sejam X, Y espaços métricos compactos, $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ homeomorfismos tais que $d_{GH^0}(f, g) = 0$. Pelo item 3 do Teorema 2.1.8 existe uma isometria $h : Y \to X$ tal que $f \circ h = h \circ g$. Logo como h é isometria, então h é um homeomorfismo, portanto f e g são conjugadas, e assim

$$h_{top}(f) = h_{top}(g).$$

■

Devido à Proposição 3.1.1 é natural nos perguntarmos se podemos obter constância de entropia para homeomorfismos GH^0 próximos a um GH-estável ou ao menos continuidade da entropia. Em geral isso não é verdade, como podemos ver no resultado seguinte:

Teorema 3.1.2 *Existe um homeomorfismo f, sobre um espaço métrico compacto, GH-estável com entropia positiva, e homeomorfismos g_n convergindo para f na topologia GH^0, com $h_{top}(g_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Para mostrarmos este resultado vamos mostrar algo mais geral. Isto é, que homeomorfismos topologicamente transitivos são sempre GH^0-aproximados por homeomorfismos de entropia zero, mais precisamente, temos o seguinte:

Teorema 3.1.3 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo topologicamente transitivo, então existe uma sequência de homeomorfismos g_n, sobre espaços métricos Y_n, tais que $\lim_{n\to\infty} d_{GH^0}(f, g_n) = 0$ e $h_{top}(g_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Vejamos portanto a demostração do Teorema **3.1.2**.
Demonstração. Considere a aplicação Shift bilateral $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ sobre o espaço de dois símbolos como na Definição 4.2.1. Pelo Corolário 4.2.4 sabemos que esta aplicação é um homeomorfismo expansivo com a propriedade do sombreamento, e pelo Teorema 1.4.2 temos que σ é topologicamente GH-estável. Como o shift é um homeomorfismo transitivo (Proposição 4.2.5) podemos aplicar o Teorema 3.1.3, e assim concluímos a prova. ■

Agora vamos demostrar o Teorema **3.1.3**.
Demonstração. Suponha que f é topologicamente GH- estável. Dado $n \in \mathbb{N}$, para $\epsilon_n = \dfrac{1}{n}$, existe $\delta_n > 0$ como na definição de estabilidade GH para f. Podemos supor que $\delta_n < \epsilon_n$. Além disso, pela continuidade uniforme de f, existe α_n tal que se $d(x, x') < \alpha_n$, então $d(f(x), f(x')) < \dfrac{\delta_n}{3}$. Assumindo $\alpha_n < \dfrac{\delta_n}{3}$, como f é transitivo, existe $a \in X$ tal que $\mathcal{O}^+(a)$ é densa em X, mais ainda $\mathcal{O}^+(f^k(a))$ é densa para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim dado $n \in \mathbb{N}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_H(\bigcup_{i=0}^{M}\{f^i(a)\}, X) < \alpha_n.$$

Como $\mathcal{O}^+(f^M(a))$ é densa, existe $N \geq M$ tal que $d(f^{N+1}(a), a) < \alpha_n$. Logo tomando $Y_n = \{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^N(a)\}$, temos que que Y_n é uma α_n-pseudo órbita periódica, e

$$d_H(X, Y_n) \leq d_H(\bigcup_{i=0}^{N}\{f^i(a)\}, X) < \alpha_n.$$

Considere o espaço métrico compacto Y_n com a métrica herdada de X, e $g_n : Y_n \to Y_n$ definida por $g_n(f^k(a)) = f^{k+1}(a)$ se $k = 0, 1, \ldots, N-1$, e $g_n(f^N(a)) = a$. Claramente g_n é bijetora, e mais, como Y_n é um conjunto discreto, então g_n é um homeomorfismo. Além disso, observe que $d(g(y), f(y)) < \dfrac{\delta_n}{3}$ para todo $y \in Y_n$.

Afirmação: $d_{GH^0}(g_n, f) < \delta_n$.

De fato, consideremos a aplicação inclusão $i : Y_n \to X$. Como $i(y) = y$ para todo $y \in Y_n$, então $\sup_{y,y' \in Y_N} |d(i(y), i(y')) - d(y, y')| = 0 < \delta_n$. Além disso, como $i(Y_n) = Y_n$, então $d_H(i(Y_n), X) < \alpha_n < \delta_n$. Logo,

$$\max\{\sup_{y,y' \in Y_N} |d(i(y), i(y')) - d(y, y')|, d_H(i(Y_n), X)\} < \delta_n,$$

e portanto i é δ_n-isometria.

Por outro lado, temos também que $d_{C^0}(i \circ g_n, f \circ i) < \delta_n$. De fato: para todo $k = 1, 2, \ldots, N-1$, temos

$$d(i \circ g_n(f^k(a)), f \circ i(f^k(a))) = d(f^{k+1}(a), f^{k+1}(a)) = 0 < \delta_n.$$

E

$$d(i \circ g_n(f^N(a)), f \circ i(f^N(a)) = d(a, f^{N+1}(a)) < \delta_n.$$

Assim $d(i \circ g_n(y), f \circ i(y) < \delta_n$, para todo $y \in Y_n$, logo $d_{C^0}(i \circ g_n, f \circ i) < \delta_n$.

Por outro lado, como $d_H(Y_n, X) < \delta_n$, dado $x \in X$ tome um $f^k(a) = j(x)$ de tal modo que $d(x, f^k(a)) < \alpha_n < \dfrac{\delta_n}{3}$, definindo assim a aplicação $j : X \to Y_n$. Agora, observemos que

$$d(j(x), j(x')) \leq d(j(x), x) + d(x, x') + d(x', j(x')) < d(x, x') + 2\alpha_n < d(x, x') + \delta_n,$$

e de igual modo

$$d(x, x') \leq d(x, j(x)) + d(j(x), j(x')) + d(j(x'), x') < d(j(x), j(x')) + \delta_n.$$

Portanto $|d(j(x), j(x')) - d(x, x')| < \delta_n$ e, por construção de j temos que $d_H(j(X), Y_n) < \delta_n$, assim j é δ_n-isometria. Passamos a provar que $d_{C^0}(j \circ f, g_n \circ j) < \delta_n$. Com efeito, seja $x \in X$, então

$$\begin{aligned} d(j(f(x)), g_n(j(x))) &\leq d(j(f(x)), f(x)) + d(f(x), f(j(x))) + d(f(j(x)), g_n(j(x))) \\ &< \frac{\delta_n}{3} + \frac{\delta_n}{3} + \frac{\delta_n}{3} = \delta_n. \end{aligned}$$

Logo, $d(j(f(x)), g_n(j(x))) < \delta_n$, para todo $x \in X$, assim $d_{C^0}(j \circ f, g_n \circ j) < \delta_n$. E portanto mostramos que $d_{GH^0}(f, g_n) < \delta_n < \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, finalmente, temos que

$$\lim_{n \to \infty} d_{GH^0}(f, g_n) = 0.$$

Logo, como Y_n é um conjunto finito para todo $n \in \mathbb{N}$, então $h_{top}(g_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

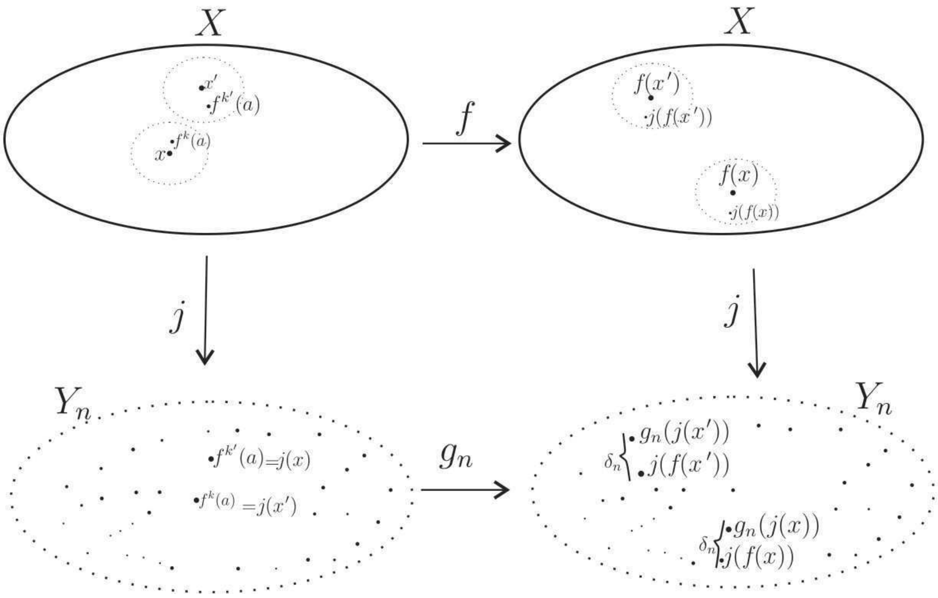

Figura 3.1: Aplicação GH^0- próxima a f.

3.1.2 Densidade de pontos Periódicos

Os pontos com órbitas finitas (pontos periódicos) são de grande importância no estudo do comportamento dos sistemas dinâmicos. Neste sentido, é fundamental estudar a existência de pontos periódicos e ver como eles estão distribuídos no conjunto sobre o qual está definido o sistema dinâmico. Veremos que para homeomorfismos transitivos topologicamente GH-estáveis os pontos periódicos se distribuem densamente. Mais precisamente:

Teorema 3.1.4 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo topologicamente GH-estável e transitivo, então $cl(Per(f)) = X$.*

Antes de mostrarmos este teorema, vamos provar primeiro que o conjunto X é Hausdorff-aproximável por órbitas periódicas.

Proposição 3.1.5 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo topologicamente GH-estável e transitivo, então, dado $\epsilon > 0$, existe $x \in Per(X)$, $\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^p(x)\}$, tal que $d_H(\mathcal{O}(x), X) < \epsilon$.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$, então existe $\delta > 0$, como na GH-estabilidade de f. Usando os métodos da demostração do Teorema 3.1.3 podemos encontrar um conjunto $Y = \{a, f(a), f^2(a), \dots, f^N(a)\}$ e $g : Y \to Y$, tal que $d_{GH^0}(f, g) < \delta$, onde

$$g(f^k(a)) = \begin{cases} f^{k+1}(a) & \text{se} \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \\ \\ a & \text{se} \quad k = N. \end{cases}$$

Logo, como $d_{GH^0}(f, g) < \delta$, existe uma ϵ-isometria contínua $h : Y \to X$, tal que $f \circ h = h \circ g$. Observe que $f^k(a) = g^k(a)$ para $k = 0, 1, 2, \dots, N$, assim temos que

$$h((f^k(a))) = h((g^k(a))) = f^k(h(a)).$$

Então

$$h(Y) = \{h(a), f(h(a)), f^2(h(a)), \ldots, f^N(h(a))\}.$$

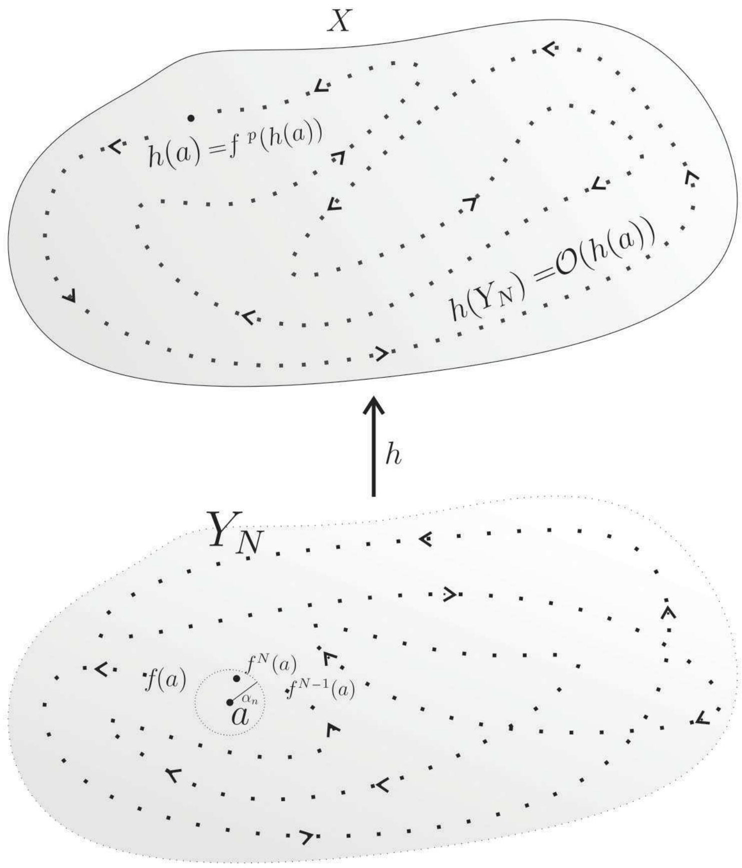

Figura 3.2: Aproximação do conjunto X por órbitas periódicas.

O ponto $h(a) \in X$ é um ponto periódico. De fato:

$$f^{N+1}(h(a)) = h(g^{N+1}(a)) = h(g(f^N(a))) = h(a).$$

Assim $h(a) \in Per(f)$, com $per(h(a)) \leq N+1$, e $\mathcal{O}(h(a)) = Y$. Mas como h é ϵ-isometria,

$$d_H(\mathcal{O}(h(a)), X) = d_H(Y, X) < \epsilon.$$

$\blacksquare$

Demostração do Teorema 3.1.4:

Primeiro suponha o contrário, ou seja, que $\mathrm{cl}(Per(f)) \neq X$, então existe $b \in X$ e $b \notin \mathrm{cl}(Per(f))$. Como $\mathrm{cl}(Per(f))$ é compacto, então $d_H(b, \mathrm{cl}(Per(f))) = \epsilon > 0$, mas pelo teorema anterior existe $x \in Per(f)$ tal que $d_H(\mathcal{O}(x), X) < \epsilon$, e como $b \in X$ temos que $d_H(b, \mathcal{O}(x)) < \epsilon$. Como $\mathcal{O}(x) \subset \mathrm{cl}(Per(f))$, temos

$$d_H(b, \mathrm{cl}(Per(f))) \leq d_H(b, \mathcal{O}(x)) < \epsilon.$$

O que gera uma contradição e, portanto, $\text{cl}(Per(f)) = X$. ■

Na sequência, apresentaremos uma aplicação imediata do Teorema 3.3.1 para homeomorfismos minimais, os quais não podem ser topologicamente GH-estáveis.

Corolário 3.1.6 *Se $f : X \to X$ é um homeomorfismo minimal sobre um espaço métrico compacto X, então f não pode ser topologicamente GH-estável.*

Demonstração. Suponha por absurdo, que f seja GH-estável. Como f é minimal então

$$\text{cl}(\mathcal{O}^+(x)) = X \text{ para todo } x \in X.$$

Em particular, f é transitivo. Pelo Teorema 3.1.4, se f fosse GH-estável, implicaria que $Per(f) \neq \emptyset$, o que contradiz o fato de f ser minimal. Logo, f não pode ser topologicamente GH-estável. ■

Corolário 3.1.7 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo minimal de um espaço métrico compacto X. Então f é não expansivo ou f não tem a propriedade do sombreamento.*

Demonstração. Suponha que f tem as duas propriedades, ou seja que f seja expansivo e tenha a propriedade do sombreamento, então pelo Teorema 2.2.3 temos que f é topologicamente GH-estável, mas isso contradiz o Corolário 3.1.6. Portanto f não pode ser expansivo e ter a propriedade do sombreamento ao mesmo tempo. ■

3.2 Consequências da GH-estabilidade em dinâmicas sobre espaços desconexos

Existem dinâmicas muito interessantes que são topologicamente GH- estáveis, como por exemplo o Shift Bilateral, o qual está definido num espaço métrico compacto desconexo. Esta dinâmica é muito utilizada tanto em sistemas dinâmicos como na teoria dos números, é por isso que torna-se interessante estudar as dinâmicas GH^0-próximas a esta. O seguinte teorema dá uma ideia a respeito do conjunto sobre o qual deverá estar definida uma dinâmica GH^0- próxima a uma dinâmica topologicamente GH-estável definida sobre um espaço desconexo.

Teorema 3.2.1 *Seja X um espaço métrico compacto desconexo. Se $f : X \to X$ é um homeomorfismo topologicamente GH-estável, então existe $\delta > 0$ tal que, se $g : Y \to Y$ é um homeomorfismo sobre um espaço métrico compacto e conexo Y, então:*

$$d_{GH^0}(f, g) \geq \delta.$$

Demonstração. Seja $C(X)$ o conjunto das componentes conexas de X. Como X é compacto e as componentes são disjuntas duas a duas, então cada componente é compacta. De fato, sejam $C, C' \in C(X)$ componentes conexas de X, então $\overline{C} \cap C' = \emptyset$, portanto temos que

$$\begin{aligned}
\overline{C} \cap \overline{X} &= \overline{C} \cap X \\
&= \overline{C} \cap \bigcup_{C' \in C(X)} C' \\
&= \bigcup_{C' \in C(X)} [\overline{C} \cap C'] \\
&= \overline{C} \cap C \\
&= C.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Então $C \subset X$ é fechado e portanto compacto. Como C é uma componente conexa arbitrária de X, então toda componente conexa de X é compacta. Logo fixemos $C_1, C_2 \in C(X)$. Como C_1 e C_2 são compactos disjuntos, então $d_H(C_1, C_2) = \alpha > 0$, logo para todo $C \in C(X)$ temos que:

$$\alpha = d_H(C_1, C_2) \leq d_H(C_1, C) + d_H(C, C_2)$$

e portanto temos que $d_H(C_1, C) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ ou $d_H(C, C_2) \geq \dfrac{\alpha}{2}$. Suponha que $d_H(C_1, C) \geq \dfrac{\alpha}{2}$, então:

$$d_H(C, X) \geq d_H(C, C_1) \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Logo, tomando $\epsilon = \dfrac{\alpha}{2}$, como f é topologicamente GH-estável, existe $\delta > 0$ tal que se $g : Y \to Y$ é um homeomorfismo de um espaço métrico compacto com $d_{GH^0}(f, g) < \delta$, então existe uma ϵ-isometria contínua $h : Y \to X$ tal que $f \circ h = h \circ g$.
Suponha por absurdo que exista um homeomorfismo $g : Y \to Y$ de um espaço métrico compacto e conexo tal que $d_{GH^0}(f, g) < \delta$. Logo existe ϵ-isometria contínua $h : Y \to X$. Como h é contínua e Y conexo então $h(Y)$ é conexo, então $h(Y)$ está contido em uma componente conexa de X, ou seja, $h(Y) \subseteq C_0$ para algum $C_0 \in C(X)$. Então temos que

$$\begin{aligned}
d_H(h(Y), X) &\geq d_H(C_0, X) \\
&\geq \frac{\alpha}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Portanto temos que $d_H(h(Y), X) \geq \epsilon$, mas isso contradiz a o fato de h ser ϵ-isometria, pois $d_H(h(Y), X) < \epsilon$. E assim concluímos a demostração. ■

Corolário 3.2.2 *Seja $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ a aplicação shift bilateral sobre o espaço de dois símbolos, então para todo homeomorfismo $g : Y \to Y$ de um espaço métrico compacto e conexo temos que $d_{GH^0}(\sigma, g) \geq \delta$, para algum $\delta > 0$.*

Demonstração. Consequência imediata do fato de Σ_2 ser desconexo e do Teorema 3.2.1. ■

3.3 GH-estabilidade preserva entropia em dinâmicas sobre S^1

Antes de enunciarmos o seguinte teorema, vejamos como é a estrutura de S^1 como espaço métrico. Nos referimos ao círculo unitário $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, considerando $[x,y]$ o arco de S^1 com ponto inicial x e ponto final em y em sentido anti-horário, $L([x,y])$ como sendo o comprimento do arco $[x,y]$. Logo, olhamos para S^1 sob o ponto de vista de uma métrica $d : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}_0^+$ dada por:

$$d(x,y) = \min\{L([x,y]), L([y,x])\}.$$

É fácil verificar que, para todo $x, y \in S^1$, a aplicação d cumpre as propriedades de uma métrica, ou seja:

1. para todo $x, y \in S^1$, $d(x,y) \geq 0$ e que $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

2. $d(x,y) = d(y,x)$.

3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo $z \in S^1$.

Teorema 3.3.1 *Seja $f : S^1 \to S^1$ uma aplicação contínua topologicamente GH-estável. Existe $\delta > 0$ tal que toda aplicação contínua $g : S^1 \to S^1$, com $d_{GH^0}(f,g) < \delta$, satisfaz que*

$$h_{top}(g) \geq h_{top}(f).$$

Demonstração. Tomando $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$. Pela estabilidade GH de f, existe $\delta > 0$ tal que, para toda aplicação continua $g : S^1 \to S^1$ com $d_{GH^0}(f,g) < \delta$, existe uma ϵ-isometria contínua $h : S^1 \to S^1$ tal que $f \circ h = h \circ g$. Como $\epsilon < \frac{1}{4}$ pelo Lema 2.3.5 temos que h é sobrejetiva, além disso, como $f \circ h = h \circ g$, então h é uma semi-conjugação e pelo Teorema 1.4.2 temos que $h_{top}(g) \geq h_{top}(f)$. ∎

Corolário 3.3.2 *Seja $f : S^1 \to S^1$ uma aplicação contínua topologicamente GH-estável tal que $h_{top}(f) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal se $g : S^1 \to S^1$ é homeomorfismo, então*

$$d_{GH^0}(f,g) > \delta.$$

Demonstração. Seja $\delta > 0$ como no Teorema 3.3.1 para f. Suponha, por absurdo, que exista um homeomorfismo g de S^1 tal que se $d_{GH^0}(f,g) < \delta$, então $h_{top}(g) > 0$, mas isso contradiz ao Teorema 1.4.5. Portanto $d_{GH^0}(f,g) > \delta$. ∎

Exemplo 3.3.3 *Considere a aplicação $f : S^1 \to S^1$, $z \to z^2$ do círculo unitário $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Temos que $h_{top}(f) = \log 2 > 0$ ([8], pag 368) e pelo Exemplo 2.4.3 sabemos que f é topologicamente GH-estável, logo pelo Corolário 3.3.2, segue que existe uma vizinhança $\mathcal{V}(f)$ de f na distancia GH^0 tal que $\mathcal{V}(f) \cap Hom(S^1) = \emptyset$.*

O Teorema 3.3.1 garante que em S^1 toda dinâmica próxima a uma dinâmica topologicamente GH-estável com entropia positiva também tem entropia positiva, agora veremos que isso é um caso particular do seguinte resultado, quando a dinâmica em S^1 é transitiva.

Teorema 3.3.4 *Seja $f : S^1 \to S^1$ uma aplicação contínua transitiva e topologicamente GH-estável e X um espaço métrico compacto e conexo. Existe $\delta > 0$ tal que toda aplicação contínua $g : X \to X$, com $d_{GH^0}(f, g) < \delta$, satisfaz que*

$$h_{top}(g) \geq h_{top}(f).$$

Demonstração. Este teorema é uma consequência imediata da seguinte proposição. ∎

Proposição 3.3.5 *Seja $f : M \to M$ uma aplicação contínua topologicamente transitiva sobre uma variedade unidimensional e $\beta > 0$. Se f é topologicamente GH-estável, então existe $\delta > 0$ tal que toda aplicação contínua g satisfazendo $d_{GH^0}(f, g) < \delta$, sobre um espaço métrico compacto Y, o qual contém um subconjunto conexo C_Y com diâmetro maior do que β, satisfaz*

$$h_{top}(g) \geq h_{top}(f).$$

Demonstração. Seja $a \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}^+(a)} = M$. Seja $\epsilon = \dfrac{1}{2}\beta > 0$, como f é topologicamente GH-estável, existe $\delta > 0$ tal que para toda aplicação $g : Y \to Y$ de um espaço métrico Y com $d_{GH^0}(f, g) < \delta$, existe uma ϵ-isometria contínua $h : Y \to M$ tal que $f \circ h = h \circ g$. Como Y contém um subconjunto conexo C_Y, com $diam(C_Y) > \beta$, tome $y_1, y_2 \in C_Y$ tal que $d^Y(y_1, y_2) > \epsilon$. Assim,

$$d^X(h(y_1), h(y_2)) > d^Y(y_1, y_2) - \epsilon > 0.$$

Portanto $h(y_1) \neq h(y_2)$ e assim $h|C_Y$ é não constante. Como M é unidimensional e $h(C_Y) \subseteq M$ é um conjunto conexo, este conjunto é uma curva. Em particular tem interior não vazio, pois é unidimensional. Mas como $\mathcal{O}_f^+(a)$ é denso em Y, então $f^{n_0}(a) \in h(C_Y)$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Logo $\mathcal{O}_f^+(f^{n_0}(a)) \subset h(Y)$. Mas observe também que $\mathcal{O}_f^+(f^{n_0}(a))$ é densa em M, ou seja,

$$\overline{\mathcal{O}_f^+(f^{n_0}(a))} = M,$$

portanto

$$d_H(h(Y), M) \leq d_H(\mathcal{O}_f^+(f^{n_0}(a)), M) = 0.$$

Como Y é compacto, temos que $h(Y)$ é um conjunto compacto tal que $d_H(h(Y), M) = 0$, então $h(Y) = M$ e, portanto, h é uma semi-conjugação topológica. Pelo Teorema 1.4.2 temos que:

$$h_{top}(g) \geq h_{top}(f).$$

∎

3.4 Anosov Clossing Lema como consequência da GH-estabilidade.

Um dos resultados mais importantes em Sistemas Dinâmicos é o Anasov Closing Lema ([8], pag 416), onde se usa fortemente a condição de hiperbolicidade, pelo fato de que todo conjunto hiperbólico tem a propriedade de sombreamento. Neste capítulo veremos que podemos enfraquecer a condição de hiperbolicidade, trocando hiperbolicidade por GH-estabilidade. Antes de enunciar o teorema precisamos da seguinte definição:

Definição 3.4.1 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo e X um espaço métrico compacto. Dizemos que um conjunto compacto $\Lambda \subset X$, f-invariante, é aproximado por cadeias, se para todo $\delta > 0$ existem δ-cadeias periódicas e disjuntas $\{x_{1,i}\}_{i=0}^{n_1}, \{x_{2,i}\}_{i=0}^{n_2}, \ldots, \{x_{k,i}\}_{i=0}^{n_k} \subset \Lambda$, com $x_{j,0} = x_{j,n_j}$, tais que*

$$d_H(\bigcup_{j=1}^{k}\{x_{j,i}\}_{i=0}^{n_j}, \Lambda) < \delta.$$

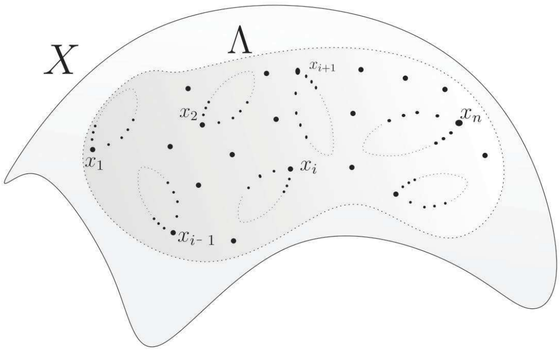

Figura 3.3: Conjunto aproximado por cadeias periódicas.

Teorema 3.4.2 *Seja $\Lambda \subset X$ aproximado por cadeias e $f|\Lambda$ topologicamente GH-estável, então*

$$cl(Per(f) \cap \Lambda) = \Lambda.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, tomamos $0 < \alpha < \epsilon$ como na definição de GH-estabilidade de f restrito a Λ. Como $f|\Lambda$ é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, x') < \delta$ então $d(f(x), f(x')) < \dfrac{\alpha}{3}$. Podemos assumir $\delta < \dfrac{\alpha}{3}$. Como Λ é aproximado por cadeias, existe uma coleção finita de δ-cadeias periódicas e disjuntas $\{x_{1,j}\}_0^{k_1}, \{x_{2,j}\}_0^{k_2}, \ldots, \{x_{n,j}\}_0^{k_n} \subset \Lambda$, onde $x_{i,0} = x_{i,k_i}$, e

$$d_H(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{i,j}\}_0^{k_i}, \Lambda) < \delta.$$

Tomando $Y = \bigcup_{i=1}^{n}\{x_{i,j}\}_0^{k_i}$, definamos a função $g : Y \to Y$ como $g(x_{i,j}) = x_{i,j+1}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Fazendo um procedimento análogo ao da demostração do Teorema

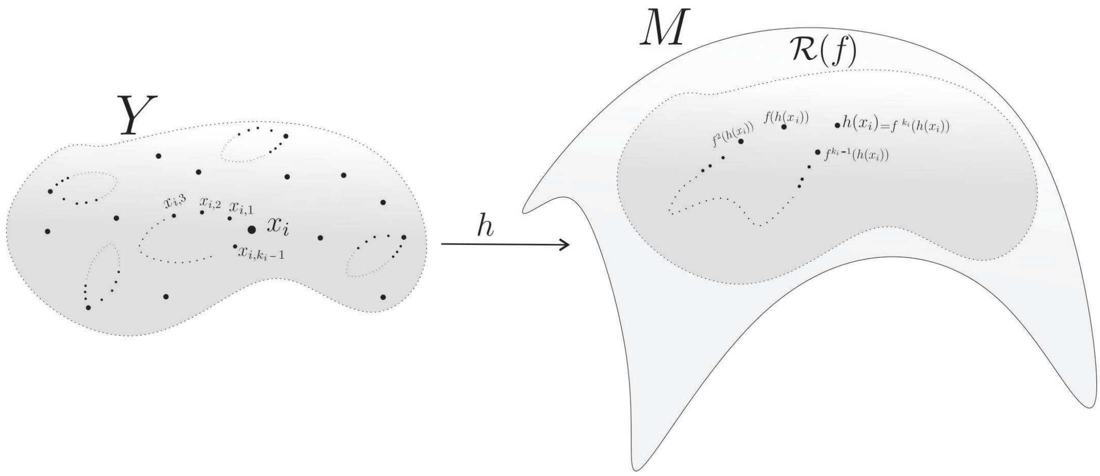

Figura 3.4: Densidade do conjunto dos pontos periódicos Λ.

3.1.3, tomando $\varphi = id|Y$, $\varphi : Y \to \Lambda$, claramente φ é α- isometria, além disso

$$d(f \circ \varphi(x_{i,j}), \varphi \circ g(x_{i,j})) = d(f(x_{i,j}), x_{i,j+1}) < \delta.$$

Assim $d_{C^0}(f \circ \varphi, \varphi \circ g) < \alpha$. Logo como $d_H(Y, \Lambda) < \delta$, construímos uma aplicação $\psi : \mathcal{R}(f) \to Y$, tomando para cada $x \in \Lambda$ um $\psi(x) \in Y$ tal que $d(\psi(x), x) < \delta$. Como na demostração do Teorema 3.1.3, ψ é δ- isometria e portanto α-isometria. Além disso,

$$\begin{aligned} d(\psi(f(x)), g(\psi(x))) &\leq d(\psi(f(x)), f(x)) + d(f(x), f(\psi(x))) + d(f(\psi(x)), g(\psi(x))) \\ &< \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \alpha. \end{aligned}$$

Então, $d_{C^0}(\psi \circ f, g \circ \psi) < \alpha$, portanto $d_{GH^0}(f, g) < \alpha$. Pela GH-estabilidade de $f|\Lambda$ existe ϵ-isometria contínua $h : Y \to \Lambda$ tal que $f \circ h = h \circ g$. Seja $\{x_{i,j}\}_0^{k_i}$, então:

$$f(h(x_{i,j})) = h(g(x_{i,j})) = h(x_{i,j+1}),$$

ou seja, $f^k(h(x_{i,j})) = h(x_{i,j+k})$ e $f^m(h(x_{i,j})) = h(x_{i,j+m}) = h(x_{i,j})$. Logo,

$$h(\{x_{i,j}\}_0^{k_i}) = \{h(x_i), f(h(x_i)), \dots, f^{m-1}(h(x_i)), f^{m-1}(h(x_i)) = h(x_i)\}.$$

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ temos que $h(\{x_{i,j}\}_0^{k_i}) = \mathcal{O}(h(x_i))$. Mas $h(x_i) \in Per(f)$, ou seja, $h(Y) \subset Per(f) \cap \Lambda$. Mas como h é ϵ-isometria temos que $d_H(h(Y), \Lambda) < \epsilon$ e, portanto,

$$d_H(Per(f) \cap \Lambda, \Lambda) \leq d_H(h(Y), \Lambda) < \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, temos que $cl(Per(f) \cap \Lambda) = \Lambda$. ∎

Proposição 3.4.3 *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo sobre uma variedade compacta. Sejam $x \neq y$ tal que $x, y \in \mathcal{R}(f)$. Para todo $\delta > 0$ existem δ-cadeias $\{x_i\}_0^n, \{y_i\}_0^m \subset \mathcal{R}(f)$, onde $x_0 = x = x_n$ e $y_0 = y = y_m$ tais que $\{x_i\}_0^n \cap \{y_i\}_0^m = \emptyset$.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$. Tomando $\epsilon = \dfrac{\delta}{3}$, pela continuidade uniforme de $f|\mathcal{R}(f)$, existe $0 < \delta' < \epsilon$ tal que se $x, x' \in \mathcal{R}(f)$ e $d(x, x') < \delta'$ então $d(f(x), f(x')) < \epsilon$. Logo, tomando $x \in \mathcal{R}(f)$, como $\mathcal{R}(f|\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(f)$ (Teorema 1.1.10), existe $\dfrac{\delta'}{2}$-cadeia $\{x_i\}_0^n \subset \mathcal{R}(f)$ onde $x_0 = x = x_n$. Agora, tome $y \in \mathcal{R}(f)$, $y \neq x$. Novamente pelo Teorema 1.1.10, existe uma $\dfrac{\delta'}{2}$-cadeia $\{y'_j\}_0^m \subset \mathcal{R}(f)$ onde $y'_0 = y = y'_m$. Suponha que $x_{i_0} = y'_{j_0}$ para algum $i_0 \in \{1, 2, \ldots n-1\}$ e $j_0 \in \{1, 2, \ldots m-1\}$. Logo podemos tomar $y_{i_0} \in B(x_0, \delta') \cap \mathcal{R}(f)$ tal que $y_{i_0} \neq x_{i_0}$, assim temos que

$$\begin{aligned} d(f(y'_{i_0-1}), y_{i_0}) &\leq d(f(y'_{i_0-1}), x_{i_0}) + d(x_{i_0}, y_{i_0}) \\ &< d(f(y'_{i_0-1}), y'_{i_0}) + \alpha \\ &< \frac{\delta'}{2} + \delta' \\ &< \delta \end{aligned} \tag{3.3}$$

e

$$\begin{aligned} d(f(y_{i_0}), y'_{i_0+1}) &\leq d(f(y_{i_0}), f(x_{i_0})) + d(f(x_{i_0}), y'_{i_0+1}) \\ &= d(f(y_{i_0}), f(x_{i_0})) + d(f(y'_{i_0}), y'_{i_0+1}) \\ &< \epsilon + \frac{\delta'}{2} \\ &< \delta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Logo substituindo y'_{i_0} por y_{i_0} obtemos uma δ-cadeia.

$$\{y'_0, y'_2, \ldots, y'_{i_0-1}, y_{i_0}, y'_{i_{0+1}}, \ldots, y'_m\}$$

Logo se $\{x_i\}_0^n \cap \{y'_0, y'_2, \ldots, y'_{i_0-1}, y_{i_0}, y'_{i_{0+1}}, \ldots, y'_m\} = \emptyset$ então para todo $j \neq i_0$ tomamos $y_j = y'_j$, assim $\{y_j\}_0^m$ é uma δ-cadeia. No caso contrário aplicamos o procedimento anterior uma quantidade finita de vezes, e assim fica provado a proposição. ■

Lema 3.4.4 *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo sobre uma variedade compacta M, então:*

(I) $\mathcal{R}(f)$ é aproximado por cadeias.

(II) $L(f)$ é aproximado por cadeias.

(III) $\Omega(f|\Omega(f))$ é aproximado por cadeias.

Demonstração. Item I. Seja $\delta > 0$, como $\mathcal{R}(f)$ é um conjunto compacto, podemos tomar uma quantidade finita $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{R}(f)$ tal que

$$d_H(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}, \mathcal{R}(f)) < \delta.$$

Pelo teorema de Conley's (Teorema 1.1.10) temos que $\mathcal{R}(f|\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(f)$ e pela Proposição 3.4.3 existem δ-cadeias disjuntas $\{x_{1j}\}_0^{k_1}, \{x_{2j}\}_0^{k_2}, \ldots, \{x_{nj}\}_0^{k_n} \subset \mathcal{R}(f)$ onde $x_{ij} = x_{ij+k_i}$ e $x_{i0} = x_i$. Logo, como $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\}_0^{k_i}$, portanto

$$d_H(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\}_0^{k_i}, \mathcal{R}(f)) \leq d_H(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}, \mathcal{R}(f)) < \delta.$$

Item II. Dado $\delta > 0$. Como f é uniformemente contínua, existe $0 < \alpha < \frac{\delta}{2}$ tal que, se $d(x, x') < \alpha$, então $d(f(x), f(x')) < \frac{\delta}{2}$. Logo, como $L(f) = \mathrm{cl}(\bigcup_{x\in M}(\alpha(x) \cup \omega(x))))$ e $L(f)$ é compacto, podemos tomar um conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset \bigcup_{x\in M}(\alpha(x) \cup \omega(x))$ tal que

$$d_H(\bigcup_{i=1}^{m}\{x_i\}, L(f)) < \delta.$$

Supondo que $x_i \in \omega(z_i)$ para algum $z_i \in M$, logo existe $n_i, k_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^{n_i}(z_i), f^{n_i+k_i}(z)) < \frac{\alpha}{2} \text{ e } d(f^{n_i}(z_i), x_i) < \frac{\alpha}{2},$$

mais ainda, tal que $d(f^j(z_i), \omega(z_i)) \leq \alpha$ para todo $n_i \leq j \leq n_i + k_i$. Logo, podemos encontrar para cada $f^{n_i+j}(z_i)$ um ponto $x_{i,j} \in L(f)$ tal que $d(f^{n_i+j}(z_i), x_{i,j}) < \alpha$ para todo $j = 0, 1, 2, \ldots, k_i$. Considere o conjunto $\{x_{i,0}, x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,k_i-1}\}$. Assim, se $j = 0, 1, 2\ldots, k_i - 2$, observe que

$$\begin{aligned}
d(f(x_{i,j}), x_{i,j+1}) &\leq d(f(x_{i,j}), f(f^{n_i+j}(z_i))) + d(f(f^{n_i+j}(z_i)), x_{i,j+1}) \\
&< \frac{\delta}{2} + d(f^{n_i+j+1}(z_i), x_{i,j+1}) \\
&< \frac{\delta}{2} + \alpha \\
&< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

e

$$\begin{aligned}
d(f(x_{i,k_i-1}), x_{i,0}) &\leq d(f(x_{i,k_i-1}), f^{n_i+k_i}(z_i)) + d(f^{n_i+k_i}(z_i), x_{i,0}) \\
&\leq \frac{\delta}{2} + d(f^{n_i+k_i}(z_i), f^{n_i}(z_i)) + d(f^{n_i}(z_i), x_{i,0}) \\
&< \frac{\delta}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \\
&< \frac{\delta}{2} + \alpha \\
&< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Portanto, se tomarmos $x_{i,k_i+j} = x_j$, temos que para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ o conjunto $\{x_{i,0}, x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,k_i-1}, x_{i,k_i}\} = \{x_{i,j}\}_{j=0}^{k_i}$ é uma δ-cadeia periódica contida em $L(f)$, e

$$d_H(\bigcup_{i=1}^{m}\{x_{i,j}\}_{j=0}^{k_i}, L(f)) \leq d_H(\bigcup_{i=1}^{m}\{x_i\}, L(f)) < \delta.$$

Portanto $L(f)$ é aproximável por cadeias periódicas.

Item III. Imediato. ■

Teorema 3.4.5 *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo sobre uma variedade compacta M. Então:*

(a) Se $f|\mathcal{R}(f)$ é topologicamente GH-estável, então $cl(Per(f)) = \mathcal{R}(f) = L(f) = \Omega(f)$.

(b) Se $f|L(f)$ é topologicamente GH-estável, então $cl(Per(f)) = L(f)$.

(c) Se $f|\Omega(f|\Omega(f))$ é topologicamente GH-estável, então $cl(Per(f)) = \Omega(f|\Omega(f))$.

Demonstração. Item (a). Seja $f|\mathcal{R}(f)$ topologicamente GH-estável, pelo Lema 3.4.4 Item I, temos que $\mathcal{R}(f)$ é aproximado por cadeias periódicas, logo pelo Teorema 3.4.2 temos que

$$\mathcal{R}(f) = \mathrm{cl}(\mathcal{R}(f) \cap Per(f)) = \mathrm{cl}(Per(f)).$$

Logo pela Proposição 1.1.11 temos que $cl(Per(f)) = \mathcal{R}(f) = \mathcal{L}(f) = \Omega(f)$.

Item (b). Seja $f|L(f)$ topologicamente GH-estável, pelo Lema 3.4.4 Item II, temos que $L(f)$ é aproximado por cadeias periódicas, logo pelo Teorema 3.4.2 temos que

$$L(f) = \mathrm{cl}(L(f) \cap Per(f)) = \mathrm{cl}(Per(f)).$$

Item (c). Analogamente. ■

Corolário 3.4.6 *(Anosov Closing Lemma). Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^1 de uma variedade compacta. Então:*

(a) Se o conjunto dos pontos recorrentes por cadeias de f, $\mathcal{R}(f)$, tem estrutura hiperbólica, então $cl(Per(f)) = \mathcal{R}(f) = L(f) = \Omega(f)$.

(b) Se o conjunto limite de f, $L(f)$, tem estrutura hiperbólica, então $cl(Per(f)) = L(f)$.

(c) Se o conjunto dos pontos não errantes de f, $\Omega(f)$, tem estrutura hiperbólica, então $cl(Per(f)) = \Omega(f|\Omega(f))$.

Demonstração. É consequência imediata do Teorema 3.4.5, pois todo homeomorfismo hiperbólico é topologicamente GH-estável (Corolário 2.2.4). ■

CAPÍTULO 4

APÊNDICE

Neste capítulo, introduziremos alguns conceitos de dinâmica hiperbólica, e mostraremos algumas propriedades dos homeomorfismos hiperbólicos. Também introduziremos brevemente o homeomorfismo Shift Bilateral e mostraremos algumas de suas propriedades as quais já foram utilizados nos capítulos anteriores.

4.1 Homeomorfismos hiperbólicos

Nesta seção consideraremos apenas homeomorfismos sobre espaços métricos compactos.

Definição 4.1.1 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo. Para todo ponto $a \in X$ e uma constante $\epsilon > 0$, definimos:*

$$W_\epsilon^+(a) = \{x \in X : d(f^n(a), f^n(x)) \leq \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+\}$$

e

$$W_\epsilon^-(a) = \{x \in X : d(f^n(a), f^n(x)) \leq \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^-\}.$$

Introduziremos o conceito de hiperbolicidade para homeomorfismos.

Definição 4.1.2 *Um homeomorfismo $f : X \to X$ é* hiperbólico *se existem constantes $\epsilon_0, \alpha_0, c > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que*

(1).
$$W_{\epsilon_0}^+(a) = \{x \in X : d(f^n(a), f^n(x)) \leq c\lambda^n d(a,x) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+\}.$$
$$W_{\epsilon_0}^-(a) = \{x \in X : d(f^n(a), f^n(x)) \leq c\lambda^{-n} d(a,x) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^-\}.$$

(2). Para todo $(x_1, x_2) \in D(\alpha_0) = \{(x, x') \in X \times X : d(x, x') \leq \alpha_0\}$, os conjuntos $W_{\epsilon_0}^+(x_1)$ e $W_{\epsilon_0}^-(x_2)$ se intersectam em um único ponto $\langle x_1, x_2\rangle$, ou seja,

$$W_{\epsilon_0}^+(x_1) \cap W_{\epsilon_0}^-(x_2) = \{\langle x_1, x_2\rangle\}$$

Lema 4.1.3 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo hiperbólico. Então o mapa $\langle , \rangle : D(\alpha_0) \to X$ é contínuo.*

Demonstração. Seja $((x_n, x'_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\alpha_0)$ uma sequência que converge a um ponto $(x, x') \in D(\alpha_0)$. Tomando $z_n = \langle x_n, x'_n\rangle$, pela compacidade de X temos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente (z_{n_k}). Seja $z \in X$ tal que $z_{n_k} \to z$. Como $\{z_{n_k}\} = W^+_{\epsilon_0}(x_n) \cap W^-_{\epsilon_0}(x'_n)$, temos que

$$d(f^i(x_n), f^i(z_n)) \leq \epsilon_0 \text{ e } d(f^{-i}(x_n), f^{-i}(z_n)) \leq \epsilon_0$$

para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Mas como $(x_n, x'_n) \to (x, x')$ e $z_{n_k} \to z$ temos que

$$d(f^i(x), f^i(z)) \leq \epsilon_0 \text{ e } d(f^{-i}(x'), f^{-i}(z)) \leq \epsilon_0.$$

Portanto, $z \in W^+_{\epsilon_0}(x) \cap W^-_{\epsilon_0}(x') = \{\langle x, x'\rangle\}$, ou seja $z = \langle x, x'\rangle$. Assim, finalmente $\langle x_n, x'_n\rangle \to \langle x, x'\rangle$, o que prova o lema. ■

Teorema 4.1.4 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo hiperbólico, então f é um homeomorfismo expansivo.*

Demonstração. Primeiro observe que $W^+_{\epsilon_0}(x) \cap W^-_{\epsilon_0}(x) = \langle x, x\rangle = \{x\}$. Suponha que exista $x, y \in X$ e $\alpha_0 > 0$ tais que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha_0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então temos que $y \in W^+_{\alpha_0}(x) \cap W^-_{\alpha_0}(x) = \{x\}$, logo $x = y$. Portanto, f é expansivo. ■

Lema 4.1.5 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo hiperbólico e ϵ_0 como na definição 4.1.2. Então, existe $\beta > 0$ tal que se $d(x, y) < \beta$, então $W^+_\epsilon(x) \cap W^-_\epsilon(y) = \{\langle x, y\rangle\}$ para todo escalar ϵ, com $0 < \epsilon < \epsilon_0$.*

Demonstração. Seja $\lambda_0, \beta_0, c > 0$ como na definição 4.1.2, e $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Pela continuidade uniforme de f, para $\dfrac{\epsilon}{c} > 0$ existe $\beta > 0$ (podemos assumir $\beta < \beta_0$) tal que se $x, y \in X$ e $d(x, y) < \beta$, então

$$d(x, \langle x, y\rangle) < \frac{\epsilon}{c} \text{ e } d(y, \langle x, y\rangle) < \frac{\epsilon}{c}.$$

Mas pela hiperbolicidade de f temos que

$$W^+_{\epsilon_0} \cap W^-_{\epsilon_0}(y) = \{\langle x, y\rangle\}.$$

Como

$$d(f^n(x), f^n(\langle x, y\rangle)) \leq c\lambda^n d(x, \langle x, y\rangle) < \epsilon$$

e

$$d(f^{-n}(y), f^{-n}(\langle x, y\rangle)) \leq c\lambda^n d(y, \langle x, y\rangle) < \epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, temos que

$$\langle x, y\rangle \in W^+_\epsilon \cap W^-_\epsilon(y) \subseteq W^+_{\epsilon_0} \cap W^-_{\epsilon_0}(y).$$

Portanto, segue que $W^+_\epsilon \cap W^-_\epsilon(y) = \{\langle x, y\rangle\}$. ■

Lema 4.1.6 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo. Se existir $\alpha > 0$ tal que, toda α-cadeia $(x_i)_{i=0}^n$, $0 \leq n \leq \infty$, é β-sombreada, para todo $\beta > 0$, então f tem a propriedade do sombreamento.*

Demonstração. Seja $(x_i)_{-\infty}^{\infty}$ uma α-cadeia. Dado $0 \leq m, n \leq \infty$, temos que $(x_i)_{-m}^{n}$ é uma α-cadeia. Tomando

$$y_j = x_{j-m}, \qquad 0 \leq j \leq m+n,$$

observe que

$$d(f(y_j), y_{j+1})) = d(f(x_{j-m}), x_{j-m+1}) < \alpha.$$

Isto implica que $(y_j)_{j=0}^{m+n}$ também é α-cadeia. Então, existe $y \in X$ tal que $d(f^j(y), y_j) < \beta$ para todo $0 \leq j < m+n-1$. Logo, pondo $x = f^m(y)$, para todo $-m \leq i < n$ temos que:

$$\begin{aligned} d(f^j(x), x_i) &= d(f^{i+m}(y), x_i) \\ &= d(f^j(y), x_{j-m}) \\ &= d(f^j(y), y_j) < \beta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Portanto $(x_i)_{i=-m}^{n}$ é β-sombreado.
Assim, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, existe um $y_n \in X$ tal que $d(f^i(y_n), x_i) < \beta$ para todo $-n \leq i \leq n$. Como X é compacto, a sequência (y_n) tem uma subsequência convergente $y_{n_k} \to y \in X$. Então, existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $d(f^i(y), f^i(y_{n_k})) < \beta$ para todo i, $-n_k \leq i \leq n_k$. Assim temos

$$d(f^i(y), x_i) \leq d(f^i(y), f^i(y_{n_k})) + d(f^i(y_{n_k}), x_i) < 2\beta$$

e portanto $(x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ é 2β-sombreada pela órbita de $y \in X$. ■

Teorema 4.1.7 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo hiperbólico, então f tem a propriedade do sombreamento.*

Demonstração. Dado $\beta > 0$, sejam $\epsilon_0, c, \lambda > 0$ como na Definição 4.1.2, e tome $\delta = \dfrac{1}{2}\min\{\epsilon_0, (1-\lambda)\dfrac{\beta}{2c}\}$. Pelo Lema 4.1.5, existe ϵ_1 com $0 < \epsilon_1 < \beta$, tal que $W_\delta^+(x) \cap W_\delta^-(y) \neq \emptyset$ sempre que $d(x,y) < \epsilon_1$. Logo, tomando $m > 0$ tal que $\lambda^m < \dfrac{\epsilon_1}{2\delta c}$ e $\epsilon_2 = \dfrac{\epsilon_1}{2m}$, $d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon_2$ de $d(x,y) < \epsilon$, $0 < \epsilon < \epsilon_1$ e $0 \leq i < m$.
Seja $(x_i)_{i=0}^n$, $0 \leq n \leq \infty$, uma ϵ-cadeia. Tomando $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \leq km$, definimos

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{se} \quad 0 \leq i \leq n \\ f^{i-n}(x_n) & \text{se} \quad i \leq i \leq km. \end{cases}$$

Dessa forma, $(y_i)_{i=0}^{km}$ também é uma ϵ-cadeia. Agora, para $j \in \mathbb{Z}$ tal que $1 \leq j \leq m$, temos

$$\begin{aligned} d(f^j(y_i), y_{i+j}) &\leq \sum_{s=0}^{j-1} d(f^{j-s}(y_{i+s}), f^{j-s-1})(y_{i+s+1}) \\ &< j\epsilon_2 \\ &\leq \frac{a_1}{2}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como $d(f^m(y_0), y_m) < \dfrac{\epsilon_1}{2}$, existe um ponto $z_1 \in W_\delta^+(y_m) \cap W_\delta^-(f^m(y_0))$. Assumindo que $z_j \in W_\delta^+(y_{jm}) \cap W_\delta^-(f^m(z_{j-1}))$, então

$$d(f^m(y_{jm}), f^m(z_j)) \leq c\lambda^m d(y_{jm}, z_j) < \frac{\epsilon_1}{2}.$$

Assim, $z_j \in W_\delta^+(y_{jm}) \subset W_{\epsilon_0}^+(y_{jm})$. Além disso, $d(y_{(j+1)m}, f^m(z_j)) < \epsilon_1$ sempre que $d(f^m(y_{jm}), y_{(j+1)m}) < \dfrac{a_1}{2}$. Isto implica que existe um ponto $z_{j+1} \in W_\delta^+(y_{(j+1)m}) \cap W_\delta^-(f^m(z_j))$.
Seja $w = f^{-km}(z_k)$. Então, para todo $j \in \mathbb{Z}$ com $(i-1)m \leq j < im$, temos

$$\begin{aligned} d(f^j(w), y_j) \leq & d(f^{j-km}(z_k, f^{j-(i-1)}(z_{i-1}))) \\ & + d(f^{j-(i-1)m}(z_{i-1}), f^{j-(i-1)}(y_{(i-1)m})) \\ & + d(f^{j-(i-1)m}(y_{(i-1)m}), y_j). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Mas como

$$d(f^{j-(i-1)m}(z_{i-1}), f^{j-(i-1)m}(y_{(i-1)}m)) \leq c\delta\lambda^{j-(i-1)m} \leq c\delta$$

e

$$\begin{aligned} d(f^{j-km}(z_k), & f^{j-(i-1)m}(z_{i-1})) \\ & \leq \sum_{s=0}^{k-1} d(f^{j-(k-s)m}(z_{k-s}), f^{j-(k-s-1)m}(z_{k-s-1})) \\ & \leq \sum_{s=0}^{k-1} c\delta\lambda^{-j+(k-s)m} \end{aligned} \tag{4.4}$$

e ainda

$$d(f^{j-(i-1)m}(y_{(i-1)m}), y_j) < \frac{\epsilon_1}{2},$$

temos que

$$d(f^j(w), y_j) < c\delta(\sum_{s=0}^{\infty} \lambda^{1+s} + 1) + \frac{\epsilon_1}{2}.$$

Então $(x_i)_{i=0}^n$ é β-sombreado. Logo, pelo Lema 4.1.6, f tem a propriedade de sombreamento.

■

4.2 O Shift Bilateral

Nesta seção vamos definir a aplicação shift bilateral sobre o espaço de dois símbolos. Esta aplicação é muito utilizada em sistemas dinâmicos, pois tem muitas propriedades, das quais mostraremos algumas nesta seção.

Definição 4.2.1 *A aplicação Shift Bilateral é a aplicação $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, onde Σ_2 é chamado de espaço das sequências bilaterais de dois símbolos e é definida da seguinte maneira:*

$\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}} = \{s = (\ldots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \ldots) | s_k \in \{0,1\}, k \in \mathbb{Z}\}$ *com a métrica definida por*

$$d(s,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^{|k|}},$$

onde $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $t = (t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ *e* $s_k, t_k \in \{0,1\}$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$. *A aplicação shift* $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, *é definida como:*

$$\sigma(\ldots, s_{-2}, s_{-1}, \dot{s}_0, s_1, s_2, \ldots) = (\ldots, s_{-1}, s_0, \dot{s}_1, s_2, s_3, \ldots).$$

O conjunto Σ_2 com a métrica dada anteriormente é um espaço métrico compacto e a aplicação Shift é um homeomorfismo .

Proposição 4.2.2 *Dado $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $s, t \in \Sigma_2$, vale:*

$$\sum_{|k| \geq N} \frac{|s_k - t_k|}{2^{|k|}} < \delta,$$

onde $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $t = (t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Demonstração. Sejam $s, t \in \Sigma_2$, $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $t = (t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Como $\displaystyle\sum_{i=-n}^{n} \frac{1}{2^{|i|}} \to 3$, quando n vai para o infinito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{|k| \geq N} \frac{1}{2^{|k|}} < \delta.$$

Observe que para todo $k \in \mathbb{Z}$ temos que $0 \leq \dfrac{|s_k - t_k|}{2^{|k|}} \leq \dfrac{1}{2^{|k|}}$, portanto

$$\sum_{|k| \geq N} \frac{|s_k - t_k|}{2^{|k|}} \leq \sum_{|k| \geq N} \frac{1}{2^{|k|}} < \delta.$$

■

Proposição 4.2.3 *A aplicação Shift Bilateral $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ é um homeomorfismo hiperbólico.*

Demonstração. Tome $\epsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, seja $s = (s_i) \in \Sigma_2$, seja $t = (t_i) \in W^+_{\epsilon_0}(s)$, então:

$$d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) \leq \epsilon_0 = \frac{1}{2}.$$

Logo pela Proposição 4.2.2, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $s_j = t_j$ para todo $j \geq -N$. Além disso, observe que se $n \in \mathbb{Z}^+$, então

$$\begin{aligned}
d(f^n(s), f^n(t)) &= \Sigma_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{|s_{j+n} - t_{j+n}|}{2^{|j|}} \\
&= \Sigma_{j=-\infty}^{-(N+n)} \frac{|s_{j+n} - t_{j+n}|}{2^{-j}} \\
&= \frac{1}{2} \Sigma_{j=-\infty}^{-(N+n)} \frac{|s_{j+n} - t_{j+n}|}{2^{-j-1}} \\
&= \frac{1}{2} \Sigma_{k=-\infty}^{-(N+n-1)} \frac{|s_{k+n-1} - t_{k+n-1}|}{2^{-k}} \\
&= \frac{1}{2} d(f^{n-1}(s), f^{n-1}(t)).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Portanto

$$d(f^n(s), f^n(t)) = (\frac{1}{2})^n d(s,t).$$

Assim, temos que $W^+_{\frac{1}{2}}(s) = \{t \in \Sigma_2 : d(f^n(s), f^n(t)) \leq (\frac{1}{2})^n d(s,t)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+\}$. Da mesma maneira temos que se $t' = (t'_i) \in W^-_{\frac{1}{2}}(s)$, então $s_j = t_j$ para todo $j \leq N$ e que $W^-_{\frac{1}{2}}(s) = \{t' \in \Sigma_2 : d(f^n(s), f^n(t)) \leq (\frac{1}{2})^n d(s,t)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^-\}$.
Logo, seja $D(\frac{1}{2}) = \{(s,t) \in \Sigma_2 \times \Sigma_2 : d(s,t) \leq \frac{1}{2}\}$. Como $d(s,t) \leq \frac{1}{2}$, então $s_i = t_i$ para todo $i = -3, -2, \ldots, 2, 3$. Pode-se verificar facilmente que $N = 3$. Seja $a = (a_i) \in \Sigma^+_{\frac{1}{2}}(s) \cap \Sigma^-_{\frac{1}{2}}(t)$, então, pelo anterior temos que :

$$a_i = s_i, \quad \text{para todo } i \geq -3$$

$$a_i = t_i, \quad \text{para todo } i \leq 3.$$

Portanto temos que

$$a = (\ldots, t_{-n}, \ldots, t_{-1}, t_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots).$$

Logo $\Sigma^+_{\frac{1}{2}}(s) \cap \Sigma^-_{\frac{1}{2}}(t) = \{a\}$, o que completa a prova do teorema. ■

Corolário 4.2.4 *A aplicação Shift Bilateral $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) σ é expansivo.

(b) σ tem a propriedade do sombreamento.

Demonstração. Item (a). Pela Proposição 4.2.3 e pelo Teorema 4.1.4 temos que σ é expansivo.

Item (b). Pela Proposição 4.2.3 e pelo Teorema 4.1.7 conclui-se que aplicação σ tem a propriedade do sombreamento. ■

Proposição 4.2.5 *A aplicação Shift bilateral* $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ *é um homeomorfismo transitivo.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \Sigma_2$ abertos e não vazios. Tomando $s = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}$ e $t = (t_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{V}$. Como $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são abertos, existe $\delta > 0$, tal que $B(s,\delta) \subset \mathcal{U}$ e $B(t,\delta) \subset \mathcal{V}$. Pela Proposição 4.2.2, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que se $\overline{s} = (\overline{s}_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_2$ e $\overline{t} = (\overline{t}_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_2$ são tais que $\overline{s}_i = s_i$ e $\overline{t}_i = t_i$ para todo $i = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$, então $d(s,\overline{s}) < \delta$ e $d(t,\overline{t}) < \delta$. Portanto $\overline{s} \in \mathcal{U}$ e $\overline{t} \in \mathcal{V}$. Tomando

$$\hat{s} = (\ldots, 0, s_{-n}, s_{-n+1}, \ldots, \dot{s}_0, \ldots, s_n, t_{-n}, t_{-n+1}, \ldots, t_n, 0, \ldots),$$

temos que

$$\sigma^{2n+1}(\hat{s}) = (\ldots, 0, s_{-n}, \ldots, s_n, t_{-n}, \ldots, \dot{t}_0, \ldots, t_{n-1}, t_n, 0, \ldots).$$

Portanto, $d(\sigma^{2n+1}(\hat{s}), t) < \delta$, e $\sigma^{2n+1}(\hat{s}) \in \mathcal{V}$, logo $\sigma^{2n+1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são abertos arbitrários de Σ_2, pela Proposição 1.2.2, concluímos que σ é um homeomorfismo topologicamente transitivo. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Abdenur, F., and Nobili, L. *Hiperbolicidade, estabilidade e caos em dimensao um*. IMPA, 2007.

[2] Arbieto, A., and Morales Rojas, C. A. Topological stability from gromov-hausdorff view point. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS 37*, 7 (2017), 3531–3544. https://doi.org/10.3934/dcds.2017151

[3] Brin, M., and Stuck, G. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press, 2002. https://doi.org/10.1017/CBO9780511755316

[4] Burago, D., and Burago, I. *A course in metric geometry*.

[5] Edrei, A. On mappings which do not increase small distances. *Proceedings of the London Mathematical Society 3*, 1 (1952), 272–278. https://doi.org/10.1112/plms/s3-2.1.272

[6] Gromov, M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Springer Science & Business Media, 2007.

[7] Nitecki, Z. H. Differentiable dynamics. an introduction to the orbit structure of diffeomorphis.

[8] Robinson, C. Dynamical systems: stability, symbolicmdynamics, and chaos, 2na ed. *Studies in Avanced Mathematics* (1999).

[9] Viana, M., and Oliveira, K. Fundamentos da teoria ergódica. *Rio de Janeiro: SBM 90* (2014).

[10] Walters, P. Anosov diffeomorphisms are topologically stable. *Topology 9*, 1 (1970), 71–78. https://doi.org/10.1016/0040-9383(70)90051-0

ÍNDICE REMISSIVO