

**DÁLGLIS SHILTON SILVA FERREIRA**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE GRANDES ESCALAS DA  
CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADES ANULARES COM  
FONTES E SUMIDOUROS DE CALOR**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**2017**

**DÁLGLIS SHILTON SILVA FERREIRA**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE GRANDES ESCALAS DA CONVEÇÃO  
NATURAL EM CAVIDADES ANULARES COM FONTES E  
SUMIDOUROS DE CALOR**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de energia térmica e Mecânica dos fluidos

Orientador: Prof. Dr. Francisco José de Souza  
Coorientador: Prof. Dr. Elie Luis Martínez Padilla

**UBERLÂNDIA – MG**  
**2017**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

F383s  
2017

Ferreira, Dáglis Shilton Silva, 1982-

Simulação numérica de grandes escalações da convecção natural em cavidades anulares com fontes e sumidouros de calor / Dáglis Shilton Silva Ferreira. - 2017.

138 f. : il.

Orientador: Francisco José de Souza.

Coorientador: Elie Luis Martínez Padilha.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.ufu.di.2018.48>  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Energia - Transferência - Teses.
3. Calor - Convecção - Teses. I. Souza, Francisco José de, 1973- II. Padilha, Elie Luis Martínez. III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

---

CDU: 66.0

Maria Salete de Freitas Pinheiro – CRB6/1262



**ALUNO:** Dálglis Shilton Silva Ferreira

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 11522EMC003

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

**LINHA DE PESQUISA:** Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor

**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA:** NÍVEL MESTRADO

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:**

**“Simulação Numérica de Grandes Escalas da Convecção Natural em Cavidades Anulares com Fontes e Sumidouros de Calor”**

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Francisco José de Souza

**CO-ORIENTADOR:** Prof. Dr. Elie Luis Martínez Padilla

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada no Anfiteatro do MFLab do Bloco 5P, Campus Santa Mônica, em 27 de outubro de 2017, às 15:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

**NOME**

**ASSINATURA**

Prof. Dr. Francisco José de Souza

UFU

Prof. Dr. Elie Luis Martínez Padilla

UFU

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

UFU

Prof. Dr. Felipe Pamplona Mariano

UFG

Uberlândia, 27 de outubro de 2017

*Dedico este trabalho à memória de meu grande pai  
José Domingos Ferreira.*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus por tudo em minha vida em especial por manter a esperança na conclusão deste trabalho.

A meu pai, José Domingos Ferreira, que infelizmente faleceu durante a realização desta dissertação, grande poeta, cantor, compositor, jornalista e acima de tudo, exemplo de pai, amigo e companheiro. Te amo meu pai, ao Senhor meu muito obrigado, por todo amor, dedicação e ensinamento.

À minha mãe Marta, pelo enorme coração, carinho, paciência e apoio ao longo da vida. Por não deixar me abater com os problemas, por mostrar a força da fé e a importância do respeito ao próximo. Te amo, muito obrigado por tudo.

À minha querida irmã Jackeline, pessoa singular, extremamente criativa e sonhadora. Obrigado por sempre me mostrar que com fé e coragem poderia superar todos os desafios. Te amo minha irmã, que Deus ilumine sua vida.

Aos meus avós, Calixto e Laudelina, que apesar do pouco ensino, sempre me mostraram a importância do estudo, da educação e do respeito ao próximo. Obrigado por todo apoio e carinho, amo vocês.

À minha namorada Nathany que sempre me incentivou e fez acreditar que com amor e dedicação tudo seria possível. Te amo meu amor, obrigado por todo companheirismo, carinho e paciência. Que Deus abençoe ainda mais nossos passos.

À Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e a Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) pela oportunidade a mim dada de realizar este trabalho em uma instituição de excelência na Engenharia Mecânica e por todo apoio durante a realização deste trabalho.

Ao Professor Elie Luis Martínez Padilla por acreditar no meu trabalho, pela orientação, incentivo, ensinamento e sobretudo amizade adquirida durante estes anos.

Ao Professor Francisco José de Souza, pela orientação acadêmica e apoio, fundamentais na conclusão desta dissertação.

Ao Professor Aristeu da Silveira Neto, pela oportunidade de fazer parte de um grande laboratório de pesquisa como é o Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab).

Aos amigos do MFLab que tanto me ajudaram na conclusão deste trabalho, os quais listarei em ordem alfabética: Anderson, Andreia, Alex, Carlos, Douglas, Denise, Diego Mouro, Diego Venturi, Fábio, Fabrício, Franco, Felipe, Gabriel, João Rodrigo, Jonathas, Lívio, Lucas, Marcos Lourenço, Paulo, Pedro, Rafael Romão, Rafael Sene, Renan, Rodrigo Bassan, Vitor e Túlio. A todos vocês meu muito obrigado.

Ao Luismar, por toda ajuda durante este período, muito obrigado meu amigo.

À FAPEMIG, pelo apoio financeiro através da bolsa de estudos.

FERREIRA, D. S. S., **Simulação Numérica de Grandes Escalas da Convecção Natural em Cavidades Anulares com Fontes e Sumidouros de Calor**. 2017. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

### **Resumo**

Atualmente nas indústrias é notória a presença de problemas envolvendo a dinâmica dos fluidos com transferência de energia térmica. Neste contexto, problemas onde a transferência de energia térmica ocorre sobre cilindros aquecidos merece um destaque especial. No presente trabalho objetivou-se desenvolver uma análise numérica tridimensional sobre o problema de transferência de energia térmica por convecção natural em cilindros concêntricos na presença de pares discretos de fonte-sumidouro de energia térmica, com ênfase no estudo do regime estável-instável do escoamento (fluído de trabalho ar). O código numérico foi desenvolvido em coordenadas cilíndricas, discretizado utilizando a técnica dos volumes finitos e esquemas temporais e espaciais de segunda ordem, onde o acoplamento pressão velocidade é feito através do método do passo fracionado. Através dos campos de velocidades, de temperatura e de vorticidade obtidos, verificou-se como a transferência de energia térmica é afetada pelas primeiras instabilidades no regime instável. Foi possível também, evidenciar a desestabilização do escoamento estudado, não sendo necessário para tal o uso de uma malha fina. Além disso, os dados obtidos apresentaram uma excelente concordância com os resultados experimentais da literatura, sobretudo no regime estável.

---

Palavras chave: Transferência de Energia Térmica, Convecção Natural, Cilindros Concêntricos, Fonte-Sumidouro.

FERREIRA, D. S. S., **Numerical Large-Eddy Simulation of Natural Convection in Annular Cavities with Source and Heat Sinks**. 2017. Master's thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, Brazil.

### Abstract

In the current industry, is notorious the presence of problems involving fluid dynamics with heat transfer. In this context, problems where the heat transfer occurs over heated cylinders deserves a special attention. The present work study aimed to develop a three-dimensional numerical analysis of the heat transfer by natural convection in concentric cylinders in the presence of discrete heat source-sink pairs, with emphasis on the study of stable-unstable regime flow (air working fluid). The numerical code was developed in cylindrical coordinates, discretized using the finite volume technique and temporal/ spatial schemes of second order, where the pressure-velocity coupling is done through the fractional step method. Through velocity, temperature and vorticity fields, it was found that the heat transfer is affected by the first instabilities in the unstable regime. It was also possible to verify the destabilization of the flow with a thin mesh. Moreover, the data obtained showed an excellent agreement with the experimental data found in the literature, especially in the stable regime.

---

Keywords: Heat Transfer, Natural Convection, Concentric Cylinders, Source-Sink.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Representação da convecção natural: (a) ao redor do corpo humano, (b) na ascensão da fumaça em um queimador de petróleo, (c) na expansão do ar aquecido dentro de um balão.....	2
Figura 1.2 – Permutador de calor: (a) representação do fluxo e (b) exemplo industrial.....	3
Figura 1.3 – Cabos de transmissão elétrica isolados a gás: (a) detalhes do interior, (b) representação real de uma linha de transmissão.....	4
Figura 1.4 – Visualização dos regimes, laminar, em transição e turbulento, verificados na ascensão da fumaça proveniente de um cigarro.....	5
Figura 2.1 – Representação do problema físico estudado.....	9
Figura 2.2 – Representação experimental da convecção natural entre cilindros concêntricos considerando diferentes relações de raios.....	13
Figura 2.3 – Representação experimental material da convecção natural em cavidades anulares inclinadas: (a) linhas de corrente e (b) resultado experimental.....	14
Figura 2.4 – Comparação das flutuações da temperatura, dados experimentais (lado esquerdo) e dados analíticos (lado direito).....	15
Figura 2.5 – Movimentação da Pluma térmica para diferentes números de $Ra$ .....	17
Figura 2.6 – Linhas de corrente para quatro diferentes configurações para a geometria interna em cavidades .....	18
Figura 2.7 – Esquema de cavidade retangular contendo uma fonte discreta de calor (a); linhas de corrente (parte superior) e isotermas (parte inferior), para $Ra = 10^5$ considerando fonte de calor quadrada (b) e retangular (c).....	20
Figura 2.8 – Ilustração das circulações esperadas alternando-se os pares de fonte e sumidouro de energia térmica .....	21
Figura 2.9 – Representação da cavidade anular vertical contendo duas fontes de calor .....	22
Figura 2.10 – Disposição das fontes (a), campo térmico e linhas de corrente (b) e fase de fusão frontal (c) .....	23

Figura 2.11 – Isotermas e linhas de corrente, para os casos C.2.4, C.2.3, C.3.4 e C.3.3, retirados de Mastiani et al. (2016).....	24
Figura 3.1 – Nível de modelagem e custo computacional das diferentes metodologias de resolução dos escoamentos turbulentos.....	34
Figura 3.2 – Espectro de energia cinética turbulenta e número de onda de corte .....	35
Figura 3.3 – Representação do espectro de energia cinética turbulenta referente ao processo de dupla filtragem .....	42
Figura 3.4 – Representação esquemática das fontes, sumidouros e parcela adiabática de calor entre os cilindros concêntricos .....	48
Figura 4.1 – Representação do volume de controle elementar .....	51
Figura 4.2 – Representação da malha utilizada (24x144x34).....	64
Figura 5.1 – Comparação qualitativa das isotérmicas para o caso de $Ra = 4,7 \times 10^4$ , $\eta = 2,6$ , presente trabalho (lado esquerdo) e Kuehn e Goldstein (1978) (lado direito) .....	68
Figura 5.2 – Comparação da Distribuição radial de temperatura nos ângulos $0^\circ$ , $90^\circ$ e $270^\circ$ , presente trabalho, Mastiani et al. (2016) – numérico e Kuehn e Goldstein (1978) - experimental.	69
Figura 5.3 – Distribuição do número de Nusselt local para os cilindros interno e externo entre $90^\circ$ e $270^\circ$ : presente trabalho e Kuehn e Goldstein (1978) - experimental .....	70
Figura 5.4 – Isotermas e linhas de corrente para o caso com dois pares de fonte e sumidouro, comparação entre o presente trabalho (lado esquerdo) e Mastiani et al. (2016) (lado direito) ..	71
Figura 5.5 – Isotermas e linhas de corrente para o caso com três pares de fonte e sumidouro, comparação entre o presente trabalho (lado esquerdo) e Mastiani et al. (2016) (lado direito) ..	72
Figura 5.6 – (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C21 .....	88
Figura 5.7 – (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C22 .....	89
Figura 5.8 – (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C23 .....	78
Figura 5.9 – (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C24 .....	78
Figura 5.10 – (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C31 .....	80
Figura 5.11 – (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C32 .....	80
Figura 5.12 – (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C33 .....	82
Figura 5.13 – (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C34 .....	82
Figura 5.14 – Nusselt Local – casos: C21, C22, C23 e C24: (a) Interno e (b) Externo .....	83
Figura 5.15 – Nusselt Local – casos: C31, C32, C33 e C34: (a) Interno e (b) Externo .....	83
Figura 5.16 – Nusselt médio global: (a) Casos com 2 pares e (b) Casos com 3 pares .....	84

Figura 5.17 – Flutuações do sinal de temperatura referentes a sonda B para os casos contendo dois pares de fonte e sumidouro de calor: (a) C21, (b) C22, (c) C23 e (d) C24.....	88
Figura 5.18 – Flutuações do sinal de temperatura referentes a sonda B para os casos contendo dois pares de fonte e sumidouro de calor: (a) C31, (b) C32, (c) C33 e (d) C34.....	85
Figura 5.19 – Comparação da distribuição radial de temperatura média nos ângulos 90° e 345° com os dados experimentais de Fukuda et al. (1990) relativo ao: (a) $Ra = 1,7 \times 10^5$ , (a) $Ra = 3,1 \times 10^5$ e (c) $Ra = 5,8 \times 10^5$ .....	86
Figura 5.20 – Representação das sondas utilizadas, localizadas sobre o plano ( $r, \theta, z/L = 1,4$ ). ....	92
Figura 5.21 – Flutuações de temperatura (a) e velocidade radial (b) ao longo do tempo, extraídas na sonda B, para os números de Rayleigh: $6 \times 10^3, 6,2 \times 10^3, 6,8 \times 10^3$ e $2 \times 10^4$ .....	92
Figura 5.22 – Flutuações de temperatura (a) e velocidade radial (b) ao longo do tempo, extraídas na sonda C, para os números de Rayleigh: $6 \times 10^3, 6,2 \times 10^3, 6,8 \times 10^3$ e $2 \times 10^4$ .....	95
Figura 5.23 – Campos de temperatura e isosuperfície $(\bar{T} - T_o)/(T_i - T_o) = 0,65$ , para (a) $Ra = 6 \times 10^3$ , (b) $Ra = 6,2 \times 10^3$ , (c) $Ra = 6,8 \times 10^3$ e (d) $Ra = 2 \times 10^4$ , no instante $t = 40s$ .....	96
Figura 5.24 – Campos de temperatura nos plano ( $r, z$ ) em 0°, 90°, 180° e 270°, para (a) $Ra = 6 \times 10^3$ , (b) $Ra = 6,2 \times 10^3$ , (c) $Ra = 6,8 \times 10^3$ e (d) $Ra = 2 \times 10^4$ , no instante $t = 40s$ .....	96
Figura 5.25 – Distribuição radial da velocidade média para vários $\theta$ e $z/L = 1,4$ , radial (a e b), tangencial (c e d) e axial (e e f), para $Ra = 6,2 \times 10^3$ (lado esquerdo) e $Ra = 2 \times 10^4$ (lado direito) .....	96
Figura 5.26 – Distribuição radial da viscosidade turbulenta média para vários $\theta$ e $z/L = 1,4$ ; (a) $Ra = 6,2 \times 10^3$ e (b) $Ra = 2 \times 10^4$ .....	101
Figura 5.27 – Campos e isosuperfícies da componente radial da velocidade: $(\bar{uL})/\nu = -4$ (verde) e $(\bar{uL})/\nu = 10$ (amarela), para (a) $Ra = 6,2 \times 10^3$ , (b) $Ra = 6,8 \times 10^3$ e (c) $Ra = 2,0 \times 10^4$ , no instante $t = 40s$ .....	101
Figura 5.28 – Campos e isosuperfícies da componente tangencial da velocidade: $(\bar{vL})/\nu = -17$ (azul) e $(\bar{vL})/\nu = 17$ (marrom), para (a) $Ra = 6,2 \times 10^3$ , (b) $Ra = 6,8 \times 10^3$ e (c) $Ra = 2,0 \times 10^4$ , no instante $t = 40s$ .....	102
Figura 5.29 – Campos e isosuperfícies da componente axial da velocidade: $(\bar{wL})/\nu = -8$ (azul) e $(\bar{wL})/\nu = 8$ (amarelo), para (a) $Ra = 6,2 \times 10^3$ , (b) $Ra = 6,8 \times 10^3$ e (c) $Ra = 2,0 \times 10^4$ , no instante $t = 40s$ .....	102

Figura 5.30 – Campos e isosuperfícies da componente axial da velocidade, para $Ra = 2 \times 10^4$ : malha $24 \times 144 \times 2$ , $(\bar{wL})/\nu = -1$ (azul) e $(\bar{wL})/\nu = 1$ (amarela) e malha $24 \times 144 \times 34$ , $(\bar{wL})/\nu = -8$ (azul) e $(\bar{wL})/\nu = 8$ (amarela).....	103
Figura 5.31 – Flutuações do módulo do vetor velocidade, para $Ra = 6 \times 10^5$ , nas sondas posicionadas em: (a) $\theta = 90^\circ$ (Sondas A, B e C), (b) $\theta = 180^\circ$ (Sondas D, E e F) e $\theta = 270^\circ$ (Sondas G, H e I).....	103
Figura 5.32 – Flutuações da componente radial da velocidade obtidas nas sondas B (a) e E (b), para: $Ra = 4 \times 10^4$ , $Ra = 2 \times 10^5$ , $Ra = 6 \times 10^5$ , $Ra = 8 \times 10^5$ e $Ra = 1 \times 10^6$ .....	104
Figura 5.33 – Potência espectral das flutuações da componente radial da velocidade obtidas nas sondas B (a) e E (b), para: $Ra = 4 \times 10^4$ , $Ra = 2 \times 10^5$ , $Ra = 6 \times 10^5$ , $Ra = 8 \times 10^5$ e $Ra = 1 \times 10^6$ . ....	107
Figura 5.34 – Flutuações da temperatura obtidas nas sondas B (a) e E (b), para: $Ra = 4 \times 10^4$ , $Ra = 2 \times 10^5$ , $Ra = 6 \times 10^5$ , $Ra = 8 \times 10^5$ e $Ra = 1 \times 10^6$ .....	107
Figura 5.35 – Isosuperfícies de temperatura, 0,3 (azul) e 0,65 (amarela) para: (a) $Ra = 2 \times 10^4$ , (b) $Ra = 4 \times 10^4$ e (c) $Ra = 5 \times 10^4$ .....	109
Figura 5.36 – Isosuperfícies de temperatura, 0,3 (azul) e 0,65 (amarela) para: (a) $Ra = 4 \times 10^4$ , (b) $Ra = 2 \times 10^5$ , (c) $Ra = 6 \times 10^5$ e (d) $Ra = 1 \times 10^6$ .....	109
Figura 5.37 – Evolução temporal das Isosuperfícies de temperatura, 0,25 (azul) e 0,65 (amarela) nos tempos: (a) $t = 60s$ , (b) $t = 70s$ , (c) $t = 80s$ e (d) $t = 90s$ , para $Ra = 4 \times 10^4$ .....	110
Figura 5.38 – Evolução temporal das Isosuperfícies de temperatura, 0,25 (azul) e 0,65 (amarela) nos tempos: (a) $t = 5s$ , (b) $t = 6s$ , (c) $t = 7s$ e (d) $t = 8s$ , para $Ra = 6 \times 10^5$ .....	112
Figura 5.39 – Isosuperfícies de temperatura 0,65 (amarela) e linhas de corrente para: (a) $Ra = 4 \times 10^4$ ( $t=70s$ ) e (b) $Ra = 4 \times 10^4$ ( $t=80s$ ), (c) $Ra = 6 \times 10^5$ ( $t=7s$ ) e (d) $Ra = 6 \times 10^5$ ( $t=8s$ ) .....	113
Figura 5.40 – Potência espectral das flutuações da temperatura obtidas nas sondas B (a) e E (b), para: $Ra = 4 \times 10^4$ , $Ra = 2 \times 10^5$ , $Ra = 6 \times 10^5$ , $Ra = 8 \times 10^5$ e $Ra = 1 \times 10^6$ .....	114
Figura 5.41 – Distribuição radial das componentes: radial (a e b), tangencial (c e d) e axial (e e f) média da velocidade, em $z/L = 1,4$ , para: $Ra = 4 \times 10^4$ , $Ra = 5 \times 10^4$ , $Ra = 2 \times 10^5$ , $Ra = 6 \times 10^5$ e $Ra = 1 \times 10^6$ ; coluna da esquerda ( $\theta = 90^\circ$ ) e coluna da direita ( $\theta = 180^\circ$ ).....	115
Figura 5.42 – Espectro de energia (sondas B): (a) $Ra = 4 \times 10^4$ , (b) $Ra = 5 \times 10^4$ , (c) $Ra = 2 \times 10^5$ , (d) $Ra = 6 \times 10^5$ e (e) $Ra = 1 \times 10^6$ .....	119
Figura 5.43 – Espectro de energia (sondas E): (a) $Ra = 4 \times 10^4$ , (b) $Ra = 5 \times 10^4$ , (c) $Ra = 2 \times 10^5$ , (d) $Ra = 6 \times 10^5$ e (e) $Ra = 1 \times 10^6$ .....	119

Figura 5.44 – Isosuperfícies de viscosidade turbulenta $\nu_t/\nu = 0,1$ e $t = 40s$ , para: (a) $Ra = 4 \times 10^4$ , (b) $Ra = 2 \times 10^5$ , (c) $Ra = 6 \times 10^5$ e (d) $Ra = 1 \times 10^6$ .....	120
Figura 5.45 – Distribuição radial da viscosidade turbulenta média para $Ra = 4 \times 10^4$ , $Ra = 2 \times 10^5$ , $Ra = 6 \times 10^5$ , $Ra = 8 \times 10^5$ e $Ra = 1 \times 10^6$ , em $z/L = 1,4$ ; (a) $\theta = 90^\circ$ e (b) $\theta = 180^\circ$ .....	122
Figura 5.46 – Número de Nusselt local (cilindro interno), para: (a) $Ra = 4 \times 10^4$ , (b) $Ra = 2 \times 10^5$ , (c) $Ra = 6 \times 10^5$ e (d) $Ra = 1 \times 10^6$ .....	124
Figura 5.47 – Número de Nusselt local (cilindro externo), para: (a) $Ra = 4 \times 10^4$ , (b) $Ra = 2 \times 10^5$ , (c) $Ra = 6 \times 10^5$ e (d) $Ra = 1 \times 10^6$ .....	125
Figura 5.48 – Isosuperfícies de vorticidade tangencial -80 (cinza) e 80 (azul) para: (a) $Ra = 4 \times 10^4$ , (b) $Ra = 2 \times 10^5$ , (c) $Ra = 6 \times 10^5$ e (d) $Ra = 1 \times 10^6$ .....	126
Figura 5.49 – Número de Nusselt médio global em função do número de Rayleigh .....	126

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Propriedades termofísicas do ar.....	10
Tabela 2.2 – Nomenclatura e representação dos casos estudados. ....	11
Tabela 3.1 – Números adimensionais utilizados no equacionamento do presente trabalho .....	30
Tabela 3.2 – Valores das variáveis: $\phi$ , $\psi_1^\phi$ , $\psi_2^\phi$ , $\psi_3^\phi$ , $P^\phi$ e $S^\phi$ da equação genérica Eq.(3.76)....	47
Tabela 4.1 – Valores dos termos advectivos ( $A^\phi$ ) e difusivos ( $D^\phi$ ) da equação genérica Eq.(4.2)	
.....	52
Tabela 4.2 – Valores dos fluxos de massa nas interfaces.....	56
Tabela 4.3 – Estudo de malha, casos C21 (2 pares) e C31 (3 pares) para $Ra = 10^2$ .....	62
Tabela 4.4 – Estudo de malha, casos C21 (2 pares) e C31 (3 pares) para $Ra = 10^5$ .....	63
Tabela 5.1 – Número de Nusselt médio global, casos com 2 pares fonte-sumidouro de energia térmica.....	74
Tabela 5.2 – Número de Nusselt médio global, casos com 3 pares fonte-sumidouro de energia térmica.....	75
Tabela 5.3 – Diferença de temperatura $\Delta T$ correspondente a varios $Ra$ para os oito casos estudados.....	76
Tabela 5.4 – Custo computacional de cada segundo físico simulado considerando a malha 32x144x2, $\eta = 2,6$ e $\Gamma = 1$ , para os casos C24 e C31. ....	90
Tabela 5.5 – Custo computacional de cada segundo físico simulado considerando a malha 24x144x2, $\eta = 2,0$ e $\Gamma = 1$ , para os casos C24 e C31. ....	90
Tabela 5.6 – Comparação do número de Nusselt global em função do número de Rayleigh....	93
Tabela 5.7 – Custo computacional de cada segundo físico simulado considerando a malha 24x144x34, $\eta = 2,0$ e $\Gamma = 2,8$ , para o caso C31.....	128

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras Latinas

$A$	Coeficiente de discretização
$B$	Constante de discretização
$C_{ij}$	Tensor cruzado
$Ce_j$	Fluxo turbulento cruzado
$C_s$	Constante de Smagorinsky
$C(\vec{x}, t)$	Coeficiente dinâmico
$D$	Diâmetro do cilindro
$g_i$	Vetor aceleração da gravidade
$Gr$	Número de Grashof ( $= g\beta(T_i - T_0)L^3/\nu^2$ )
$L$	Espaçamento entre cilindros
$L_{ij}$	Tensor de Leonard
$Le_j$	Fluxo turbulento de Leonard
$L_{ax}$	Comprimento axial
$M$	Número de pontos da malha na direção radial ( $r$ )
$N$	Número de pontos da malha na direção tangencial ( $\theta$ )
$Nu$	Número de Nusselt
$p$	Pressão estatística
$Pr$	Número de Prandtl ( $= \nu/\alpha$ )
$Pr_t$	Número de Prandtl turbulento ( $= \nu_t/\alpha_t$ )
$R$	Raio do cilindro
$r$	Componente radial do sistema de coordenadas cilíndricas
$R_i$	Raio do cilindro interno
$R_o$	Raio do cilindro externo
$Ra$	Número de Rayleigh ( $= GrPr$ )

$S_{ij}$	Taxa de deformação
$T$	Temperatura
$T_i$	Temperatura do cilindro interno
$T_o$	Temperatura do cilindro externo
$t$	Tempo
$u$	Velocidade radial
$v$	Velocidade tangencial
$w$	Velocidade axial
$z$	Componente axial do sistema de coordenadas cilíndricas
$Z$	Número de pontos da malha na direção axial (z)

## Letras Gregas

$\alpha$	Difusividade térmica
$\alpha_\varepsilon$	Difusividade térmica efetiva
$\alpha_t$	Difusividade térmica turbulenta
$\beta$	Coeficiente de expansão volumétrica
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\epsilon$	Dissipação de energia cinética turbulenta
$\kappa$	Condutividade térmica
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\nu$	Viscosidade cinemática
$\nu_\varepsilon$	Viscosidade efetiva
$\omega$	Velocidade angular
$\phi$	Grandeza genérica de transporte
$\psi$	Propriedade de transporte
$\tau_{ij}$	Tensor de Reynolds sub-malha
$\tau_{ej}$	Fluxo turbulento sub-malha
$\rho$	Densidade
$\theta$	Componente tangencial do sistema de coordenadas cilíndricas

## Operadores

$\Delta$	Diferença finita
$\partial$	Derivada parcial

## Indicadores

$f$	Variável genérica
$\bar{f}$	Variável filtrada
$\hat{f}$	Variável filtrada duas vezes
$f'$	Flutuação da variável
$\vec{f}$	Vetor
$f_{ij}$	Tensor
$\bar{\Delta}$	Comprimento característico do filtro a nível da malha
$\hat{\Delta}$	Comprimento característico do filtro teste

## Índices

$r$	Componente radial
$\theta$	Componente tangencial
$o$	Grandeza de referência
$P$	Centro do volume de controle
$N,n$	Ponto central e na face ao norte do volume de controle
$S,s$	Ponto central e na face ao sul do volume de controle
$W,w$	Ponto central e na face a oeste do volume de controle
$E,e$	Ponto central e na face a leste do volume de controle
$F,f$	Ponto central e na face a frente do volume de controle
$B,b$	Ponto central e na face a traz do volume de controle
$i,j$	Ponto central da malha ou componente de um tensor

$t$  Variável turbulenta

## Superíndices

$*$	Grandezas adimensionais
$t$	Tempo precedente
$t+1$	Tempo atual

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 – Introdução .....</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos .....	6
1.2 Organização.....	6
<b>CAPÍTULO 2 – Modelo Físico e Revisão Bibliográfica.....</b>	<b>8</b>
2.1 Modelo físico .....	8
2.2 Convecção natural em cilindros concêntricos.....	11
2.3 Convecção natural em cavidades na presença de fontes e sumidouros de energia térmica.....	18
<b>CAPÍTULO 3 – Modelagem Matemática.....</b>	<b>25</b>
3.1 Introdução.....	25
3.2 Equações representativas .....	25
3.2.1 Aproximação de Boussinesq.....	26
3.2.2 Adimensionalização das equações representativas em coordenadas cilíndricas ....	28
3.2.3 Processo de filtragem das equações .....	32
3.3 Metodologia de simulação de grandes escalas.....	34
3.3.1 Equações representativas filtradas .....	36
3.3.2 Modelagem sub-malha dinâmica .....	41
3.3.3 Equações adimensionalizadas e filtradas em coordenadas cilíndricas .....	45
3.4 Condições de contorno .....	48
<b>CAPÍTULO 4 – Modelagem Numérica.....</b>	<b>50</b>
4.1 Introdução.....	50
4.2 Discretização espacial.....	51
4.3 Discretização temporal.....	58
4.4 Estabilidade numérica .....	61
4.4.1 Malha numérica.....	62
4.4.2 Passo de tempo automático (critério CFL) .....	65

<b>CAPÍTULO 5 – Resultados .....</b>	<b>67</b>
5.1 Introdução .....	67
5.2 Resultados em duas dimensões .....	68
5.2.1 Validação em duas dimensões .....	68
5.2.2 Análise dos resultados .....	75
5.2.3 Aspectos numéricos e computacionais.....	89
5.3 Resultados em três dimensões.....	91
5.3.1 Validação em três dimensões .....	91
5.3.2 Desestabilização do escoamento - caso (C31).....	93
5.3.3 Escoamentos em transição - caso (C31).....	104
5.3.3.1 Espectro de energia .....	118
5.3.3.2 Viscosidade turbulenta .....	120
5.3.3.3 Transferência de energia térmica .....	123
5.3.3.4 Vorticidade .....	125
5.3.4 Nusselt médio global – caso C31 .....	127
5.3.5 Aspectos numéricos e computacionais.....	128
<b>CAPÍTULO 6 – Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros .....</b>	<b>129</b>
6.1 Conclusões .....	129
6.2 Sugestões para trabalhos futuros.....	130
<b>CAPÍTULO 7 – Referências Bibliográficas .....</b>	<b>132</b>

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

Segundo Bejan (2004) a convecção é definida como sendo o processo de transporte de energia térmica promovido pela movimentação de um fluido. De forma geral a movimentação do fluido e por consequência a transferência de energia térmica por convecção, ocorrerá de duas formas distintas: natural ou forçada. Quando o deslocamento do fluido é promovido através de um agente externo, como por exemplo, por um ventilador (gases) ou uma bomba (líquidos) a convecção é dita forçada. Contudo, quando a movimentação do fluido ocorre sem a intervenção externa, mas sim através de diferenças de massa específica, resultantes de gradientes de temperatura ou concentração ao longo do fluido, sobre a ação de um campo de forças, como por exemplo, o gravitacional, a convecção é chamada de natural (BEJAN; KRAUS, 2003).

A Fig. 1.1 ilustra alguns exemplos onde verifica-se escoamentos promovidos por convecção natural, entre eles: no processo de resfriamento do corpo humano Fig. 1.1a, na ascensão da fumaça proveniente de um queimador de petróleo Fig. 1.1b e na queima dos gases dentro de um balão Fig. 1.1c.

Na Fig. 1.1a nota-se que o corpo a uma temperatura superior aquece o ar adjacente a sua superfície, reduzindo a densidade do mesmo, o qual ascende através de uma pluma térmica formada acima dos membros superiores do indivíduo, captada utilizando a técnica de visualização de Schlieren (CRAVEN; SETTLES, 2006). Na Fig. 1.1b a convecção natural é percebida pela ascensão da fumaça aquecida em um queimador de petróleo, onde devido a diferença de massa específica entre o ar a temperatura ambiente (mais denso) e a fumaça (menos densa), na presença do campo gravitacional, verifica-se a movimentação ascendente da fumaça. Outro exemplo interessante da presença da convecção natural ocorre no voo de um balão, Fig. 1.1c. O ar no interior do balão tem sua massa específica reduzida após o

aquecimento ficando mais leve que o ar externo, desta forma, a densidade do balão apresenta-se mais baixa do que a densidade do ar externo a mesmo, e portanto, o balão flutua.

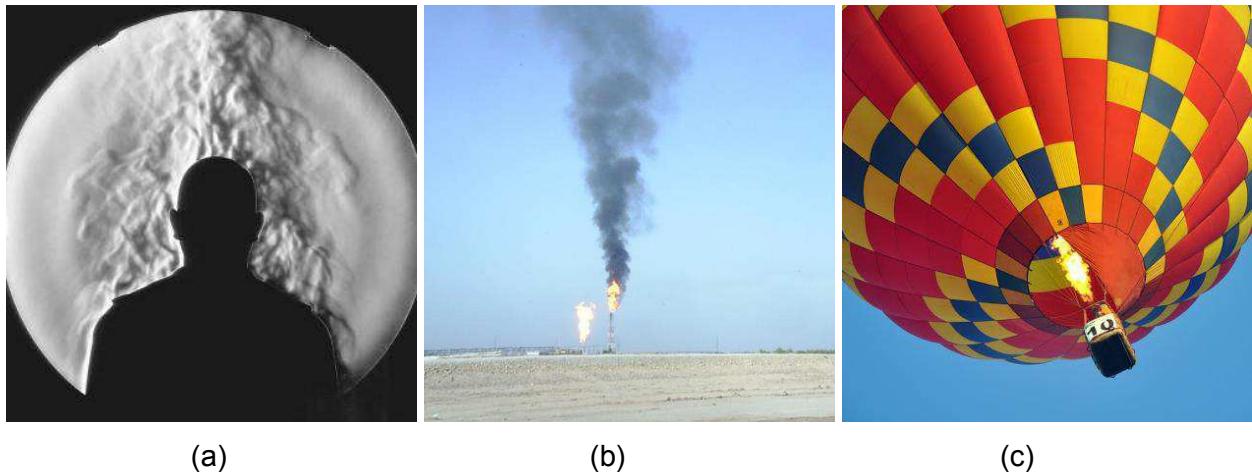


Figura 1.1 - Representação da convecção natural: (a) ao redor do corpo humano, (b) na ascensão da fumaça em um queimador de petróleo, (c) na expansão do ar aquecido dentro de um balão. (Fonte: (a) Craven e Settles (2006); (b) <[https://en.wikipedia.org/wiki/Plume\\_\(Fluid\\_dynamics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Plume_(Fluid_dynamics))>. Acesso: 01/07/2017; (c) <[foodieilawyer.com/2010/09/special-occasion-fruit-kabobs-and-balloons/](http://foodieilawyer.com/2010/09/special-occasion-fruit-kabobs-and-balloons/)>. Acesso: 17/07/2017).

O estudo do fenômeno de transferência de energia térmica por convecção natural dentro de cavidades anulares ao longo dos anos tem despertado o interesse de vários pesquisadores, devido principalmente a duas vertentes: primeiro a grande aplicabilidade industrial e segundo o interesse teórico em compreender e quantificar corretamente a transição a turbulência nesse tipo de escoamento.

No ramo industrial o uso da convecção natural apresenta várias vantagens entre elas: processos silenciosos, baixo custo operacional e elevada confiabilidade, decorrente da ausência de componentes como motores, bombas hidráulicas, ventoinhas, etc. Vários equipamentos industriais utilizam a convecção natural entre cilindros concêntricos como meio de transferência de energia térmica, por exemplo: permutadores térmicos (conhecidos como trocadores de energia térmica), sistemas de resfriamento, reatores nucleares e cabos de transmissão elétrica isolados a gás. Na Fig. 1.2 ilustra um sistema de um permutador térmico e na Fig. 1.3 tem-se a representação de cabos de transmissão elétrica.

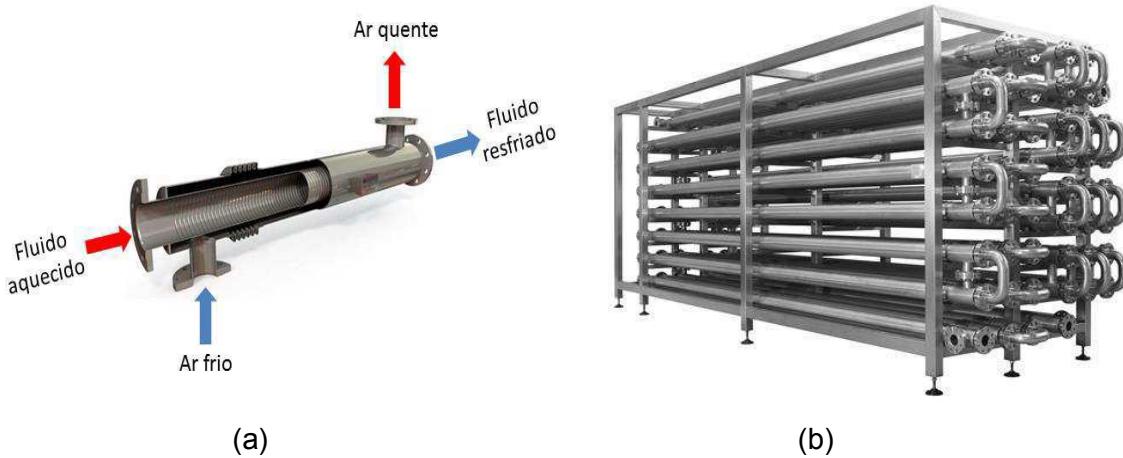


Figura 1.2 - Permutador de calor: (a) representação do fluxo e (b) exemplo industrial. (Fonte: (a) Adaptada de: <[www.directindustry.es/prod/hrs-heat-exchanger/product-90471-1637338.html](http://www.directindustry.es/prod/hrs-heat-exchanger/product-90471-1637338.html)>. Acesso em 10/05/2017; (b) <[www.stainlessconnection.co.za/?product=tube-in-tube-heat-exchangers](http://www.stainlessconnection.co.za/?product=tube-in-tube-heat-exchangers)>. Acesso: 10/07/2017).

Na Fig. 1.2a nota-se que o ar frio ao entrar em contato com a superfície quente do cilindro interno aquece e reduz sua massa específica, gerando um fluxo convectivo dentro da cavidade. Desta forma, o fluido aquecido presente dentro do cilindro interno transfere energia térmica para o ar no interior da cavidade, o qual sai aquecido da mesma. Já a Fig. 1.2b representa um exemplo de um permutador térmico industrial.

Nos cabos de transmissão elétrica isolados a gás utilizados em sistemas de alta tensão, também nota-se a presença da convecção natural como mecanismo de transporte de energia térmica, onde se tem um condutor de alumínio central fixado por isoladores de resina fundida ligados a um cilindro externo também constituído de alumínio, conforme demonstrado pela Fig. 1.3a. Na Fig. 1.3b tem-se uma representação real de uma linha de transmissão de energia isoladas a gás. Segundo Labonia e Guj (1998) os cabos de transmissão elétrica isolados a gás são importantes tanto nas transmissões subterrâneas, onde geralmente o ar é utilizado como isolante, quanto em subestações de alta-voltagem, cujo isolante é constituído de uma mistura de Nitrogênio e Hexafluoreto de Enxofre ( $SF_6$ ). Quando comparados a cabos com isolamento sólido os cabos com isolamento a gás apresentam taxas maiores de transmissão de energia, pois segundo Chakir e Koch (2001) as maiores temperaturas entre o cilindro externo e o meio ao seu redor (ar atmosférico em um túnel ou solo no caso de sistemas interrados) é muito

menor nos sistemas isolados a gás, devido a convecção entre os cilindros, do que no caso onde o isolamento é sólido e prevalece a condução de calor.

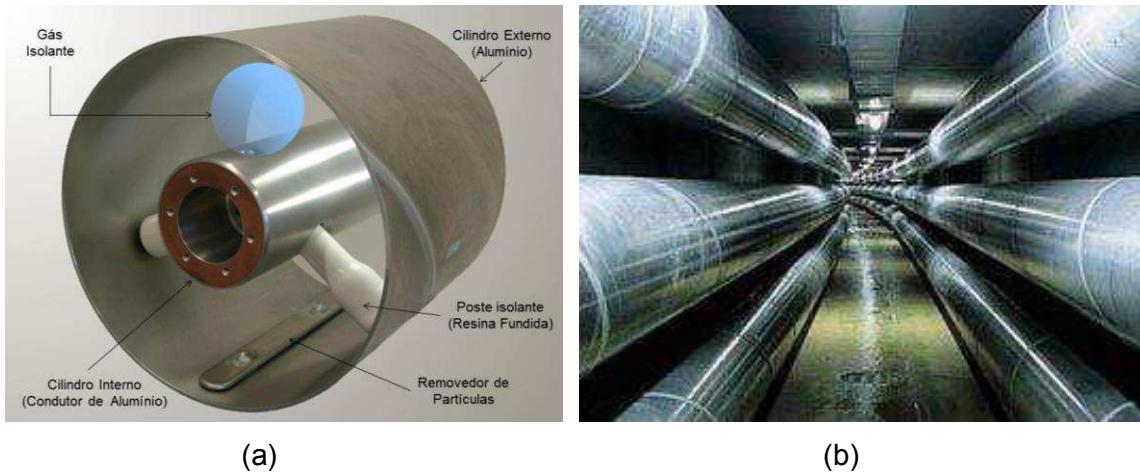


Figura 1.3 - Cabos de transmissão elétrica isolados a gás: (a) detalhes do interior, (b) representação real de uma linha de transmissão. (Fonte: (a) Adaptada de: <<https://www.siemens.com/global/en/home/products/energy/high-voltage/power-transmission-lines/gas-insulated-lines.html>>. Acesso em 14/05/2017; (b) <[www.innovit.com.cn/blog/online-fault-location-technology-for-gil/#.WW6WI3Wc2Hs](http://www.innovit.com.cn/blog/online-fault-location-technology-for-gil/#.WW6WI3Wc2Hs)>. Acesso: 14/05/2017).

Vários pesquisadores buscam alternativas para aprimorar a transferência de energia térmica por convecção natural em cavidades anulares, devido a grande aplicabilidade industrial da mesma. Assim, o uso de pares discretos de fontes e sumidouros de energia térmica neste tipo de escoamento, apresenta-se como uma alternativa interessante.

No presente trabalho estuda-se numericamente o escoamento promovido por convecção natural entre cilindros concêntricos preenchidos com ar, considerando pares de fontes (cilindro interno) e sumidouros de calor (cilindro externo), através da adequação do código numérico tridimensional CCCil3D (Padilla, 2004), previamente desenvolvido para o estudo da convecção natural em cavidades anulares sem a presença de pares discretos de fontes e sumidouros de energia térmica, ao problema em questão, ou seja a inclusão de novas condições de contorno que permite ao código reconhecer os oito arranjos de pares de fonte e sumidouro de energia térmica propostos por Mastiani et al. (2016), sendo quatro configurações contendo dois pares de fonte e sumidouro de energia térmica e quatro configurações contendo três pares. O código CCCil3D (Padilla, 2004) foi desenvolvido em coordenadas cilíndricas, utilizando a técnica dos

volumes finitos e a metodologia de Simulação de Grandes Escalas (SGE) com modelagem de fechamento da turbulência sub-malha dinâmica.

Segundo Çengel e Ghajar (2012) a maioria dos escoamentos encontrados na prática são turbulentos, assim escoamentos entre cilindros concêntricos na presença de pares de fonte e sumidouro de energia térmica, ocorrerão provavelmente em regime turbulento. De forma geral os escoamentos apresentam três regimes diferentes: Laminar, em transição e turbulento. Na Fig. 1.4, tem-se uma ilustração destes regimes. Na Fig. 1.4, o regime é dito laminar, onde logo no início da pluma térmica ascendente próxima ao cigarro, a fumaça sobe de forma suave e altamente ordenada, apresentando linhas de corrente também lineares ao escoamento. Logo após a fumaça perde gradualmente sua linearidade e as primeiras instabilidades hidrodinâmicas são percebidas, caracterizando o regime de transição à turbulência. Com a evolução das instabilidades no escoamento, o regime turbulento é então alcançado na parte superior da fumaça, onde o comportamento da mesma é extremamente aleatório e imprevisível.

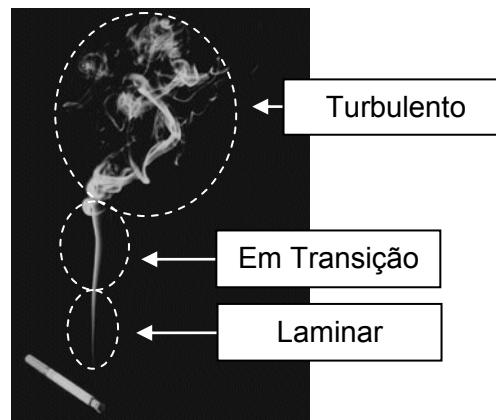


Figura 1.4 – Visualização dos regimes, laminar, em transição e turbulento, verificados na ascensão da fumaça proveniente de um cigarro. (Fonte: Adaptada de: <[www.if.ufrj.br/~ginette/cursos/fit122/2011\\_01/programa/fluidos/escoamento.html](http://www.if.ufrj.br/~ginette/cursos/fit122/2011_01/programa/fluidos/escoamento.html)>. Acesso: 18/07/2017.

Caracterizar corretamente cada regime de trabalho influencia diretamente no projeto e utilização de sistemas energéticos mais eficientes e menos poluentes. Neste contexto a experimentação numérica, através da Metodologia de Simulação de Grandes Escalas e a modelagem Sub-Malha Dinâmica utilizada para o fechamento da turbulência, apresenta-se como uma ferramenta viável e importante na predição da transição à turbulência em

escoamentos complexos, como visto no escoamento promovido por convecção natural dentro de cavidades anulares contendo fontes e sumidouros de energia térmica.

## 1.1 Objetivos

O principal objetivo desta dissertação é caracterizar a transição à turbulência em escoamentos promovidos por convecção natural em cavidades anulares preenchidas com ar, na presença de pares discretos de fonte e sumidouro de energia térmica, através da adequação do código numérico CCCil3D ao problema em questão, usando a metodologia de simulação de grandes escalas com modelo de fechamento sub-malha dinâmico. Outro foco do presente trabalho consiste em analisar termicamente os oito arranjos de pares de fonte e sumidouro de energia térmica, identificando a melhor configuração, com relação à transferência de energia térmica global dentro da cavidade.

## 1.2 Organização

Esta dissertação está estruturada em seis capítulos, os quais serão comentados nos parágrafos a seguir.

No capítulo I tem-se a introdução ao tema estudado, compreendendo as motivações, os objetivos, bem como a organização do mesmo.

O capítulo II o modelo físico é apresentado e analisado, em seguida, tem-se a revisão bibliográfica da convecção natural entre cilindros concêntricos na presença de fontes e sumidouros de energia térmica, sendo que, dois tópicos foram abordados: no primeiro destacou-se os principais trabalhos encontrados na literatura sobre convecção natural em cilindros concêntricos e no segundo os trabalhos relativos a convecção natural em cavidades anulares na presença de fonte e sumidouros de calor.

O capítulo III retrata a modelagem matemática do problema. Onde num primeiro instante apresenta-se as equações que representam a transferência de energia térmica por convecção natural entre cilindros concêntricos na presença de fontes e sumidouros de energia térmica. Em seguida destaca-se a Metodologia de Simulação de Grandes Escalas e a modelagem Sub-

Malha Dinâmica utilizada para o fechamento da turbulência. Por fim, as condições de contorno são demonstradas.

O capítulo IV corresponde a modelagem numérica, todo o procedimento de discretização das equações representativas em coordenadas cilíndricas utilizando o Método dos Volumes Finitos é apresentado. Também comenta-se sobre a estabilidade numérica, malha numérica e passo de tempo automático (Critério CFL), utilizados nesta dissertação.

O capítulo V apresenta os resultados obtidos, dois grupos são evidenciados: o primeiro compreendendo os resultados em duas dimensões (2D) e o segundo em três dimensões (3D), respectivamente. Em 2D a validação da metodologia numérica é feita de duas formas, primeiro comparando os resultados obtidos entre cilindros concêntricos, na ausência de pares de fonte e sumidouro de energia térmica e segundo comparando os resultados obtidos já considerando os pares de fontes (cilindro interno) e sumidouros (cilindro externo) de energia térmica. Em 3D, devido à falta de trabalhos contendo fontes e sumidouros de energia térmica em cavidades anulares cilíndricas, validou-se os resultados comparando-os ao caso clássico de convecção natural entre cilindros concêntricos na ausência de fontes e sumidouros de energia térmica. Visando caracterizar a transição à turbulência, em cavidades anulares contendo pares de fonte e sumidouro de energia térmica, bem como, a influência do número e a localização destes pares sobre a transferência de energia térmica, analisou-se os casos propostos por Mastiani et al. (2016) em duas e em três dimensões para uma ampla faixa de Rayleigh.

No capítulo VI tem-se as conclusões finais e sugestões para trabalhos futuros. Por fim, o capítulo VII apresenta à bibliografia utilizada durante o trabalho.

# CAPÍTULO II

## MODELO FÍSICO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo abordará dois temas principais. Num primeiro instante apresenta-se o problema físico da convecção natural entre cilindros concêntricos na presença de pares discretos de fontes e sumidouros de energia térmica, considerando configurações com dois e três pares, respectivamente. Em seguida é demonstrada uma revisão dos principais trabalhos presentes na literatura sobre convecção natural entre cilindros concêntricos e sobre a convecção natural em cavidades contendo pares discretos de fontes e sumidouros de energia térmica.

### 2.1 Modelo físico

O modelo físico proposto nesta dissertação consiste de dois cilindros concêntricos preenchidos com ar, a temperatura ambiente, contendo pares discretos de fontes e sumidouros de energia térmica. Termicamente as fontes, localizadas ao longo da superfície do cilindro interno apresentam-se a uma temperatura superior aos sumidouros, distribuídos ao longo do cilindro externo. Ambos, fontes e sumidouros de energia térmica são isotérmicos, as demais áreas do cilindro interno e externo apresentam-se adiabáticas. O cilindro interno bem como o externo não apresentam movimentação, assim o escoamento do ar dentro da cavidade ocorre exclusivamente devido ao gradiente de temperatura observado no fluido, o qual ocasiona locais com diferenças de densidade ao longo do mesmo, que na presença do campo gravitacional, promoverão a sua movimentação. Ou seja, somente verifica-se o processo de convecção natural ao longo das simulações desta dissertação.

A Fig. 2.1 ilustra o modelo físico estudado, correspondente a um exemplo contendo três pares de fontes (vermelho) e sumidouros de energia térmica (azul), distribuídos ao longo dos cilindros interno e externo respectivamente. Cada fonte e sumidouro de energia térmica terão respectivamente, 60 graus de arco. Na Fig. 2.1a têm-se a visualização frontal do modelo físico, onde  $T_h$  e  $T_c$ , representam as temperaturas das fontes e dos sumidouros de energia térmica, sendo que  $T_h$  é superior a  $T_c$  e  $R_i$  e  $R_o$  correspondem aos raios do cilindro interno e externo, respectivamente. Na Fig. 2.1b o modelo físico é demonstrado em perspectiva, ressaltando as três dimensões do mesmo, bem como as fontes de calor representadas em vermelho ao longo do cilindro interno e os sumidouros em azul ao longo do cilindro externo,  $L$  representa o espaçamento entre os cilindros,  $L = R_o - R_i$  e  $L_{ax}$  corresponde ao comprimento axial da cavidade cilíndrica.

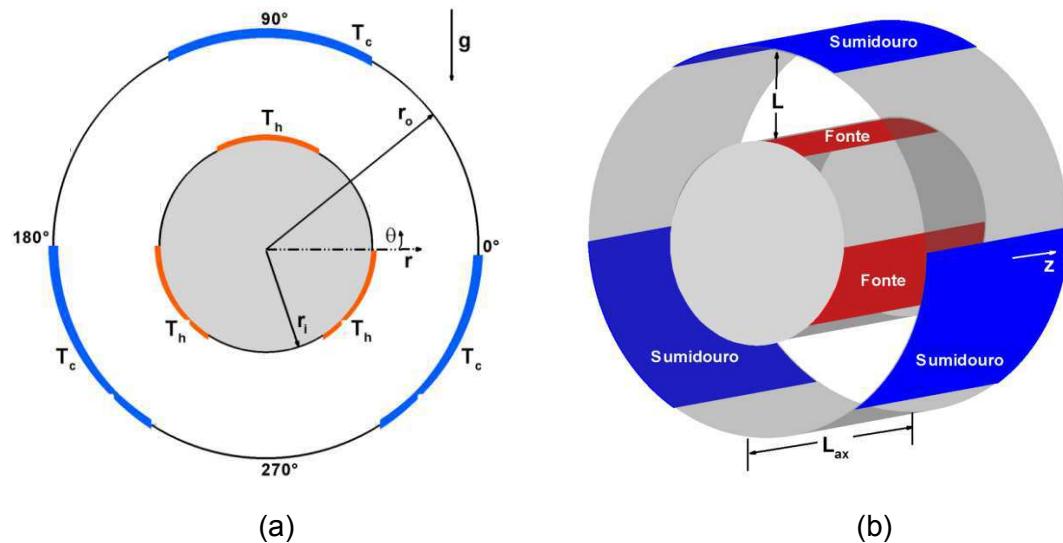


Figura 2.1 – Representação do problema físico estudado.

O sistema de coordenadas cilíndrico ( $r, \theta, z$ ) foi empregado. Visando a adequação do problema aos resultados da literatura, definiu-se dois parâmetros em função das características geométricas, o primeiro denominado relação de raios ( $\eta$ ) e razão de aspecto ( $\Gamma$ ), como segue:

$$\eta = \frac{r_o}{r_i} \quad (2.1)$$

$$\Gamma = \frac{L_{ax}}{L} \quad (2.2)$$

Utilizou-se ar como fluido de trabalho, cujas propriedades termodinâmicas dispostas na Tab. 2.1, corresponde a um número de Prandt ( $Pr$ ) igual a 0,7074. A equação correspondente a  $Pr$  encontra-se ilustrada na Tab. 3.1, no Capítulo III.

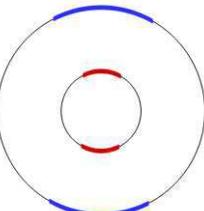
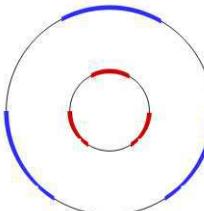
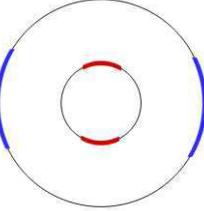
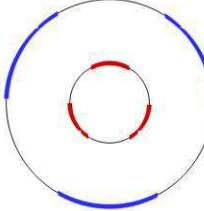
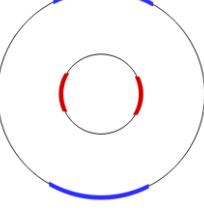
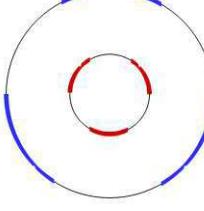
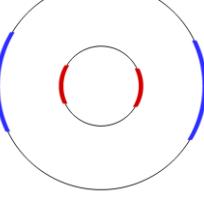
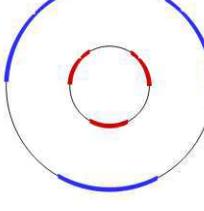
Tabela 2.1 – Propriedades termofísicas do ar

Propriedade Termofísica	Símbolo	Valor	Unidade
Viscosidade cinemática	$\nu$	0,0000162	$m^2/s$
Difusividade térmica	$\alpha$	0,0000229	$m^2/s$
Coeficiente de expansão volumétrica	$\beta$	0,00335	1/K
Condutividade térmica	$\kappa$	0,026238	W/mK

Como mencionado no Capítulo I, o presente trabalho teve como norte os oitos arranjos de pares de fonte e sumidouro de energia térmica, propostos por Martiani et al. (2016), sendo quatro casos contendo dois pares e quatro casos contendo três pares, respectivamente. Visando simplificar a identificação de cada caso, adotou-se a mesma nomenclatura utilizada pelo autor, ou seja, nomeou-se os casos da seguinte maneira: Primeiro tem-se a letra C referente à palavra caso, acrescida de dois números, o primeiro número correspondente o número de pares e o segundo número a configuração ou arranjo destes pares distribuídos nos dois cilindros. Todos os casos estudados, assim como, sua identificação são representados na Tab. 2.2.

Na Tabela 2.2 as fontes são representadas pela cor vermelha, localizadas próximas ao cilindro interno e os sumidouros estão destacados com a cor azul, próximos ao cilindro externo. A partir deste ponto, as fontes e os sumidouros serão representados de forma semelhante ao realizado na Tab. 2.2.

Tabela 2.2 – Nomenclatura e representação dos casos estudados.

2 pares Fonte-Sumidouro		3 pares Fonte-Sumidouro	
Caso	Representação	Caso	Representação
C21		C31	
C22		C32	
C23		C33	
C24		C34	

## 2.2 Convecção natural em cilindros concêntricos

Conforme relatos de Mack e Bishop (1968) os primeiros trabalhos abordando o escoamento por convecção natural entre cilindros concêntricos mantidos a temperaturas diferentes foram realizados por Beckmann (1931) e Kraussold (1934), onde ambos os autores analisaram a influência da relação de raios no cálculo do coeficiente de transferência de energia

térmica global, contudo, Beckmann (1931) utilizou ar, hidrogênio e dióxido de carbono como fluidos e Kraussold (1934) usou água e óleo. Coeficientes de transferência de energia térmica e perfis de temperatura radiais, para ar, água e silicone, também foram obtidos experimentalmente por Liu et al. (1961). Grigull e Hauf (1966) utilizaram a interferometria Mach-Zehnder na obtenção de dados do coeficiente de transferência de energia térmica local sobre o cilindro interno abrangendo nove configurações diferentes de relações de diâmetro.

Vários trabalhos experimentais utilizaram a fumaça como traçador em cavidades preenchidas com ar, na obtenção de fotografias qualitativas do escoamento padrão, entre eles: Liu et al. (1961), Mack e Bishop (1968), Bishop et al. (1968), Powe et al. (1969) e Dyko et al. (1999).

Utilizando fumaça de tabaco Bishop et al. (1968) conseguiram visualizar o escoamento do ar dentro da cavidade, para uma faixa do número de Grashof ( $Gr$ ) entre 290 a  $2,7 \times 10^6$ , equivalente a uma diferença de temperatura entre os cilindros de 2,8 a 55°C. Dados da amplitude, do período e do comprimento de onda do escoamento foram obtidos, sendo apresentada uma correlação baseada no número de  $Gr$ , a qual prediz o início do escoamento oscilatório dentro da cavidade. Na Fig. 2.2 tem-se a representação experimental dos padrões do escoamento, devido à convecção natural entre cilindros concêntricos, fotografados por Bishop et al. (1968).

Na Fig. 2.2a nota-se que o fluido movimenta-se mais rápido próximo as paredes dos cilindros interno e externo, ocasionando a formação de dois vórtices simétricos dentro da cavidade. Com o aumento do  $Gr$ , Fig. 2.2b, a zona de baixa velocidade, localizada no centro dos vórtices na Fig. 2.2a, desloca-se ascendentemente promovendo o aparecimento de uma estrutura de escoamento mais energizada, contudo ainda estável e simétrica conhecida na literatura como sendo no formato de “rim” ou do inglês “kidney-shaped”. Já a partir do  $Gr = 1,57 \times 10^5$ , considerando uma relação de raios igual a 1,35, o escoamento perde sua estabilidade e simetria e começa a oscilar tangencial, conforme ilustrado na Fig. 2.2c.

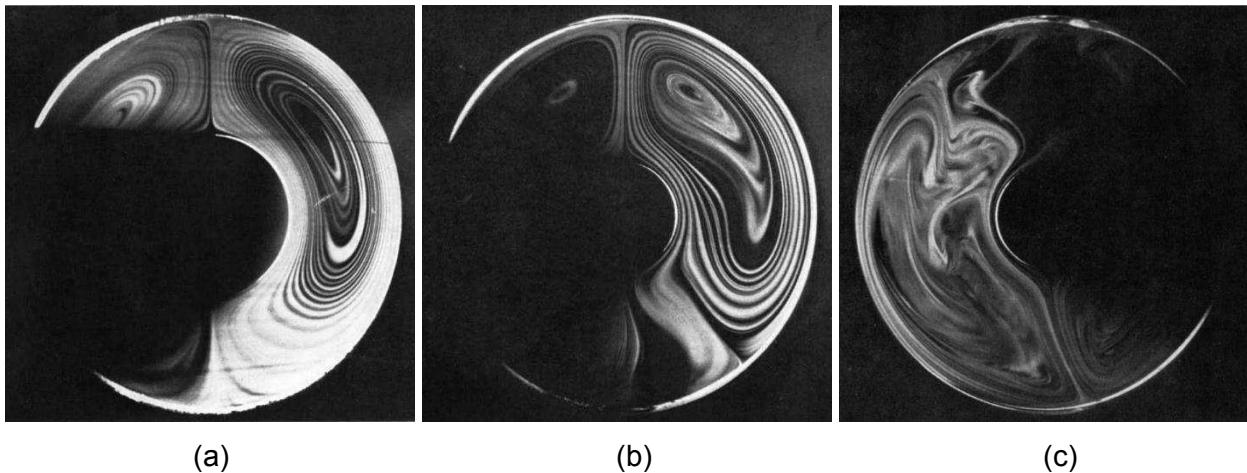


Figura 2.2 – Representação experimental material da convecção natural entre cilindros concêntricos considerando diferentes relações de raios. (Fonte: Bishop et al. (1968)).

Powe et al. (1969) investigaram experimentalmente as estruturas do escoamento convectivo desenvolvido por convecção natural entre cilindros concêntricos, considerando um total de seis conjuntos de cilindros, com diferentes variações de temperaturas e pressões entre os cilindros, os quais resultaram em experimentos abrangendo a seguinte faixa de número de Grashof ( $Gr$ ):  $300 \leq Gr \leq 3,4 \times 10^6$ .

Kuehn e Goldstein (1978) estudaram experimentalmente a convecção natural entre cilindros concêntricos preenchidos com nitrogênio pressurizado, considerando  $2,2 \times 10^2 \leq Ra \leq 7,7 \times 10^7$  e relação de raios igual a 2,6. Os coeficientes de troca de calor local e global, bem como a distribuição de temperatura foram obtidos. Os autores verificaram que a desestabilização do escoamento ocorre na pluma térmica acima do cilindro interno, a partir de  $Ra = 2 \times 10^5$ , sendo que, com o aumento do número de *Rayleigh* o escoamento entra em regime turbulento. Outro fato interessante observado por eles, diz respeito, a existência simultânea de duas zonas distintas dentro da cavidade, uma com características turbulentas, localizada na parte superior e a outra com estável ou laminar, na parcela inferior da mesma.

Um interessante estudo experimental e analítico foi realizado por Takata et al.(1984) sobre a convecção natural em cavidades anulares, porém inclinadas. Os autores utilizaram diferenças fintitas e o método SOR (do inglês Successive Over Relaxation) para resolver numericamente as equações tridimensionais governantes. Efeitos de curvatura sobre a distribuição da temperatura, o número de Nusselt e as estruturas do escoamento foram

avaliados. Os resultados numéricos mostraram-se bastante próximos as fotografias obtidas experimentalmente utilizando trançador, como descrito na Fig. 2.3.

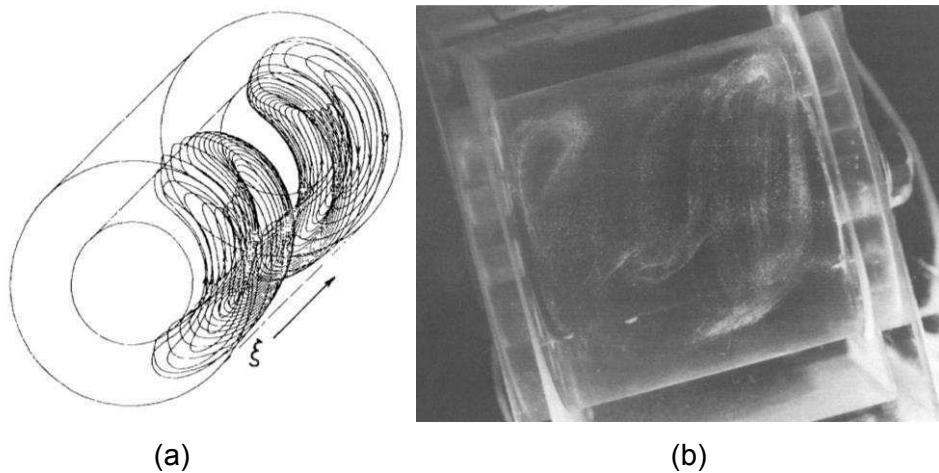


Figura 2.3 – Representação experimental material da convecção natural em cavidades anulares inclinadas: (a) linhas de corrente e (b) resultado experimental. (Fonte: Takata et al.(1984)).

Tsui e Tremblay (1984) estudaram numericamente a convecção natural transiente entre dois cilindros horizontais isotérmicos. Usando o método de Diferenças Finitas e formulação função corrente-vorticidade, os autores resolveram as equações de Navier-Stokes e da conservação da energia, onde a discretização das equações de vorticidade e da energia foi realizada através da metodologia ADI (do inglês *Alternating Direction Implicit*) e para a equanção de função corrente utilizou-se o método de Sobre-Relaxação Sucessiva SOR. Valores do Nusselt local transiente interno e externo, bem como isoterma e linhas de correntes foram obtidos considerando números de Grashof ( $Gr$ ) entre  $1 \times 10^3$  e  $9 \times 10^4$  e três relações de diâmetros: 1,2, 1,5 e 2,0, respectivamente.

Vários autores abordaram tridimensionalmente a convecção natural entre cilindros concênicos horizontais, entre eles: Fusegi e Farouk (1986), Fukuda et al. (1990), Vafai e Effefagh (1991), Vafai e Desai (1993), Kumar (1988) e Yuan (2015).

Fusegi e Farouk (1986) abordaram numericamente o mesmo problema proposto por Kuehn e Goldstein (1976), contudo de forma tridimensional. Os autores utilizaram o método das diferença finitas e as equações de Navier-Stokes transformadas em equações de transporte de vorticidade para representar o escoamento e a transferência de energia térmica promovidos por convecção natural em cilindros concêntricos isótermicos preenchidos com ar, considerando:  $Pr$

= 0,721, relação de raios = 1,6, relação de diâmetros = 1 e  $Ra = 10^3$  e  $10^4$ . Neste trabalho evidenciou-se a grande influência dos efeitos de parede final neste tipo de escoamento, não retratados pela abordagem em duas dimensões. Além disso, resultados tridimensionais das velocidades, isotermas e da trajetória de uma partícula de fluido dentro da cavidade, foram demonstrados. Assim como relatado experimentalmente por Tanaka et al. (1984).

Em seu trabalho Fukuda et al. (1990) promoveram uma análise numérica tridimensional da convecção natural entre cilindros concêntricos, utilizando DNS (*Direct Numerical Simulation*) e esquema “explicit leap-frog”. Visando esclarecer a transição do fluxo laminar a turbulento, perfis de velocidade e temperatura, bem como, as características turbulentas foram obtidas para  $Ra = 4 \times 10^3$  a  $Ra = 6 \times 10^5$  e comparados com dados experimentais, obtidos através de anemômetro de fio quente e termopares. Os resultados numéricos demonstram uma boa concordância com os experimentais, sobretudo no comportamento dos perfis médios de temperatura e velocidade, exceto para o caso de  $Ra$  elevado, onde os autores acreditam que a aproximação de Boussinesq não deva ser adequada. À medida que o  $Ra$  aumenta, o padrão do escoamento muda, passando de estável ou laminar a transicional e posteriormente a turbulento. Esta tendência foi bem retratada pela simulação DNS, contudo devido à limitação da malha, as características turbulentas foram superestimadas. Conforme mostra a Fig. 2.4, a seguir:

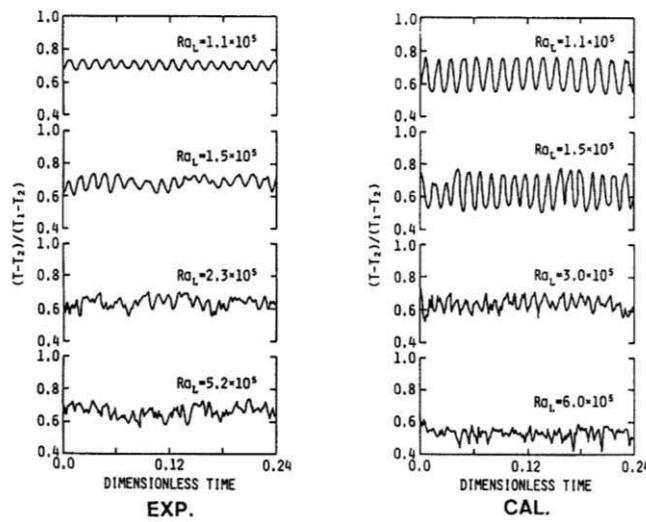


Figura 2.4 – Comparação das flutuações da temperatura, dados experimentais (lado esquerdo) e dados analíticos (lado direito). (Fonte: Fukuda et al. (1990)).

Labonia e Guj (1998) estudaram experimentalmente a convecção natural dentro de cavidades anulares, visando sobretudo compreender como ocorre o processo de transição do regime laminar para o turbulento, típico de cabos de transmissão elétrica isolados a gás. Desta forma o estudo foi conduzido dentro das seguintes condições:  $0,9 \times 10^5 < Ra < 3,37 \times 10^5$  e relação de raios = 0,68, características de cabos de transmissão a longa distância e subestações de energia. Dados qualitativos e quantitativos foram obtidos utilizando interferometria, fumaça e anemômetro de fio quente.

Em seu trabalho Dyko et al. (1999) estudaram numérica e experimentalmente a estabilidade de escoamentos promovidos por convecção natural dentro de cavidades anulares com moderadas e grandes relações de raio. Eles utilizaram a teoria linear e o método da energia na análise da estabilidade dos escoamentos. O número de *Rayleigh* crítico, ou seja, o número a partir do qual o escoamento torna-se instável foi obtido através da análise da estabilidade linear, já o método da energia, forneceu o número de *Rayleigh* subcrítico, definido pelo autor como sendo o valor no qual a condição necessária para a estabilidade global do escoamento é atingida.

Vários autores concentraram em analisar a influência da adição de nanofluidos sobre a transferência de energia térmica promovida por convecção natural entre cilindros concêntricos, entre eles: Abu-Nada (2008), Putra (2003).

Resolvendo numericamente as equações de Navier-Stokes e a equação da energia utilizando a técnica dos volumes finitos Abu-Nada (2008) estudou a influência da adição de nanofluidos à base de água sobre a transferência de energia térmica promovida por convecção natural entre cilindros concêntricos, abrangendo uma ampla faixa de frações de volume de nanopartículas de Cu, Ag, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> e TiO<sub>2</sub> para vários números de Rayleigh. Eles constataram que para altos valores de *Ra* e razões de aspecto (L/D) elevadas a adição de partículas de nanofluido com elevada condutividade causam um aumento significativo na transferência de energia térmica global. O mesmo comportamento é observado para baixos *Ra* adicionando nanopartículas com elevada condutividade térmica. Contudo, para *Ra* intermediários a transferência de energia térmica reduz ao adicionar nanopartículas com baixa condutividade, principalmente para L/D = 0,4.

Padilla e Siveira-Neto (2008) estudaram numericamente a convecção natural dentro de cavidades anulares, contendo dois cilindros concêntricos preenchidos com ar, utilizando a técnica de Volumes Finitos, a metodologia de Simulação de Grandes Escalas (do inglês, LES), a modelagem Sub-malha Dinâmica e esquemas temporais e espaciais de segunda ordem. Uma

ampla faixa de números de Rayleigh ( $Ra$ ) foi simulada, considerando os seguintes parâmetros: relação de raios ( $\eta$ ) igual a 2 e razão de aspecto ( $\Gamma$ ) igual a 2,8. A transição à turbulência é sugerida no seguinte intervalo:  $1,1 \times 10^5 < Ra \leq 5,8 \times 10^5$ . Conforme verifica-se na Fig.2.1, através das iso-superfícies instantâneas para a temperatura adimensional (0,25 – transparente e 0,65 – escura) os mecanismos físicos para a transição à turbulência são dependentes da movimentação da pluma térmica. Na Fig. 2.5a, relativa ao  $Ra = 1,1 \times 10^5$ , nota-se que a pluma térmica movimenta-se de forma periódica ao longo do eixo axial, contudo as instabilidades aparecem basicamente na parte superior da cavidade, com o aumento do  $Ra$  para  $3,1 \times 10^5$ , Fig. 2.5b, o escoamento perde sua característica periódica e torna-se cada vez mais instável e irregular, onde verifica-se o aparecimento de instabilidades também na parte inferior da cavidade. Para números de Rayleigh superiores a  $Ra = 5,8 \times 10^5$  o escoamento torna-se turbulento, e a pluma térmica apresenta-se de forma totalmente desordenada e com instabilidades mais fortes e aleatórias. Os autores também analizaram e compararam os campos médios de temperatura e velocidades com os dados apresentados na literatura, obtendo uma boa concordância. A influência das instabilidades na transferência de energia térmica foi quantificada, através dos valores dos números de Nusselt médio e local.

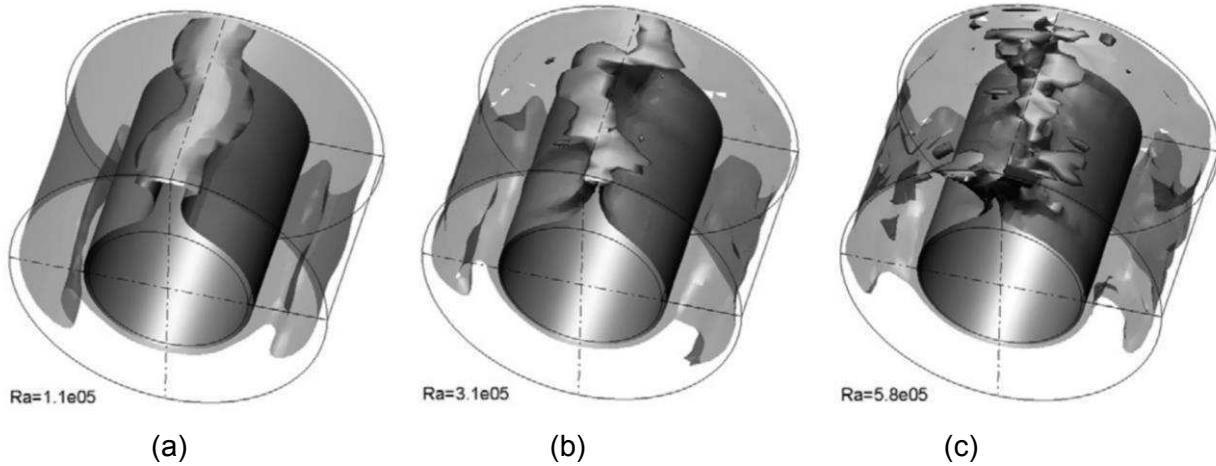


Figura 2.5 – Movimentação da pluma térmica para diferentes números de  $Ra$ . (Fonte: Padilla e Silveira-Neto (2008)).

Yuan et al. (2015) analizaram a convecção natural em cavidades concêntricas horizontais variando a geometria interna sendo mantida a superfície externa a temperatura constante. Conforme apresentado na Fig. 2.6, quatro diferentes configurações para a geometria

interna foram propostas: cilíndrica, elíptica, quadrada e triangular. Campos de velocidade e temperatura foram apresentados através das linhas de corrente e isotermas. Uma correlação para o número de Nusselt foi proposta incorporando a radiação térmica. Eles também destacam que a superfície de radiação e a presença de quinas e grandes espaçamentos na parte superior da cavidade incrementam a taxa de transferência de energia térmica.

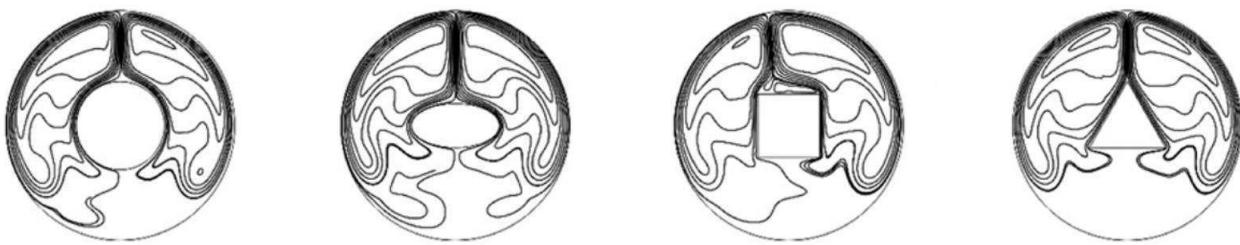


Figura 2.6 – Linhas de corrente para quatro diferentes configurações para a geometria interna em cavidades anulares. (Fonte: Yuan et al. (2015))

### **2.3 Convecção natural em cavidades na presença de fontes e sumidouros de energia térmica.**

O uso de pares discretos de fontes e sumidouros de energia térmica em cavidades anulares vem crescendo em diversos seguimentos industriais, principalmente por apresentarem-se como sendo um mecanismo de transferência de energia térmica silencioso, de boa segurança e baixo custo. Tais características são extremamente desejáveis em diversos projetos, como por exemplo, na refrigeração de micro componente eletrônicos, no armazenamento de alimentos, no armazenamento de energia térmica, no projeto de reatores nucleares, entre outros. Via de regra, em cavidades anulares, a convecção natural apresenta-se como sendo o mecanismo dominante na transferência de energia térmica. Certamente, a presença de pares discretos de fontes e sumidouros de energia térmica, modifica dinâmica e termicamente o comportamento do escoamento, Segundo Mastiani et al. (2016) o aprimoramento na transferência de energia térmica, pode ser alcançado, controlando-se o tamanho, a disposição, a intensidade e a localização destes pares dentro da cavidade.

Na literatura um dos primeiros trabalhos onde abordou-se o comportamento de fontes discretas de calor em cavidades, foi feito por Chu et al. (1976), os autores analisaram os efeitos

do tamanho da fonte, localização, razão de aspecto e as condições de contorno para convecção natural, desenvolvida em cavidades retangulares preenchidas com ar. Constantando que o tamanho da fonte e sua localização são dois parâmetros que influenciam fortemente na transferência de energia térmica, pois modificam o fluxo e o campo térmico.

Diversos autores estudaram a convecção natural, nas mais variadas configurações, por exemplo, cavidades retangulares horizontais contendo fontes discretas de calor são encontradas em: Mahaney et al. (1989), Mahaney et al. (1990), Sezai e Mohamad (2000) e Bazylak et al. (2006), já cavidades retangulares verticais na presença de fontes de calor, foram abordadas: Keyhani et al. (1988), Chadwick et al. (1991) e Ishihara et al. (2000).

Sezai e Mohamad (2000) resolveram numericamente a convecção natural, em regime estacionário, desenvolvida em cavidades horizontais contendo fontes de calor, localizadas na base, considerando diferentes razões de aspecto, entre a largura da fonte e a altura da cavidade, bem como entre o comprimento da fonte e a altura da cavidade. Conforme esquema disposto na Fig. 2.7a. A técnica Multgrid foi utilizada para resolver as equações de Navier-Stokes, na forma tridimensional e o esquema QUICK de terceira ordem, na aproximação dos termos advectivos. Considerando ar como fluido de trabalho e números de Rayleigh entre  $10^3$  e  $10^6$ . Eles observaram que as estruturas do escoamento diferem consideravelmente com o aumento do Rayleigh e também com seu formato. Para cavidades quadradas, onde ambas as razões de aspecto são iguais a um, verifica-se que até o  $Ra = 10^5$ , as estruturas apresentam-se no formato de células de rolos toroidais (Fig. 2.7b), as quais são destruídas entre  $10^5 \leq Ra \leq 10^6$ , originando um novo padrão com dois vórtices contra rotativos próximos as paredes verticais da cavidade. Para fontes no formato retangular, ou seja, razões de aspecto diferentes entre si (Fig. 2.7c) os autores verificaram que as estruturas toroidais degeneram-se num  $Ra$  inferior, assim, na fonte retangular, já em  $Ra = 10^5$ , observa-se dois vórtices mais energizados próximos a parede, semelhante as estruturas apresentadas para a fonte quadrada com  $Ra$  superiores a  $10^5$ . Desta forma eles verificaram que o aumento da razão de aspecto favorece o processo de transferência de energia térmica dentro da cavidade, devido a maior movimentação. Os autores também identificaram que a maior taxa de transferência de energia térmica ocorre próximo das bordas da fonte sendo o valor mínimo apresentado no centro da mesma.

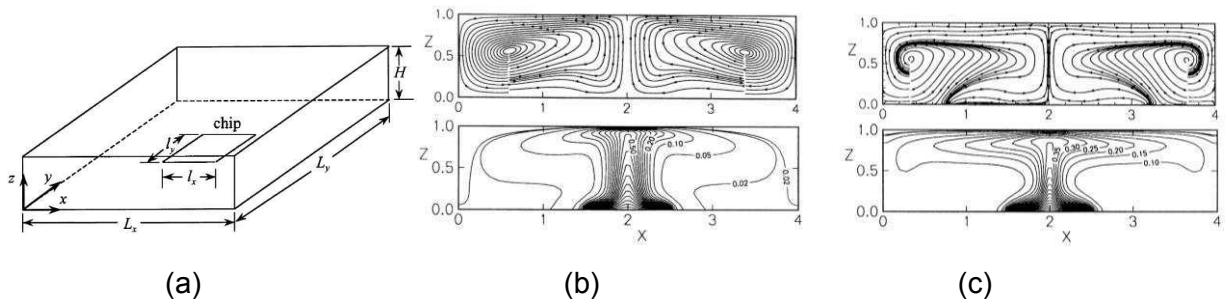


Figura 2.7 – Esquema de cavidade retangular contendo uma fonte discreta de calor (a); linhas de corrente (parte superior) e isotermas (parte inferior), para  $Ra = 10^5$  considerando fonte de calor quadrada (b) e retangular (c). (Fonte: Sezai e Mohamad (2000)).

Chadwick et al. (1991) estudaram numericamente e experimentalmente a convecção natural em cavidades retangulares verticais, contendo ar, na presença de fontes de calor. Experimentalmente os autores utilizam interferometria Mach-Zehnder para visualizar os campos de temperatura dentro da cavidade, bem como, determinar o comportamento local e médio da transferência de energia térmica. Diversas configurações foram consideradas, com uma única fonte ou contendo várias, constatando que as maiores taxas de transferência de energia térmica ocorrem quando as fontes de calor encontram-se próximas a base da cavidade.

Um estudo sobre a convecção natural em cavidades quadradas bidimensionais na presença de pares discretos de fontes e sumidouros de energia térmica, foi conduzido numericamente por Deng (2008). O qual, verificou o efeito do tamanho e da disposição dos pares sobre o dinâmica do escoamento e a características de transferência de energia térmica. Dois tamanhos foram considerados para as fontes e sumidouros, ambos condicionais ao número de pares, o primeiro equivalente à  $1/4$  da altura da cavidade para os casos contendo dois pares e o segundo igual a  $1/6$  da altura para os casos contendo três pares de fonte e sumidouro de energia térmica, respectivamente. Os arranjos propostos são representados através da Fig. 2.8. Através desta figura fica evidente o quanto a dinâmica do escoamento pode ser alterada, permutando-se os pares de fontes dentro da cavidade. Considerando as linhas de corrente, isotermas, o número de Nusselt médio e linhas de calor (do inglês, “heatlines”) o autor constatou que a transferência de energia térmica total está intimamente ligada ao número de vórtices presentes na cavidade, sendo maior a transferência de energia térmica quanto maior for o número de vórtices apresentados.

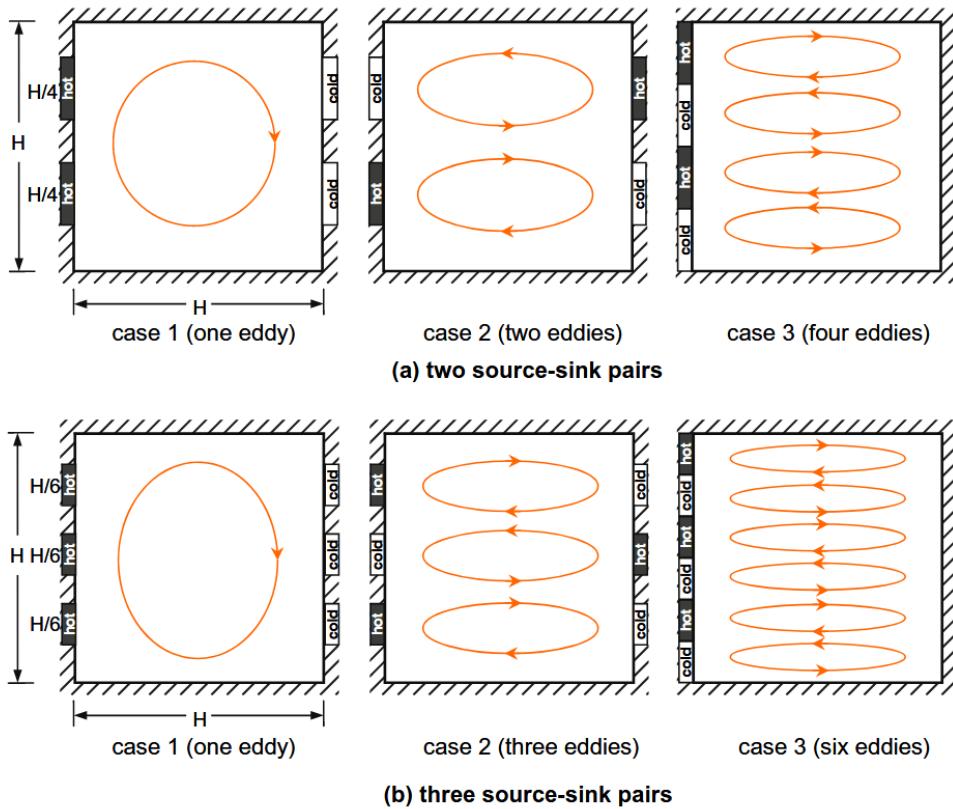


Figura 2.8 – Ilustração das circulações esperadas alternando-se os pares de fonte e sumidouro de energia térmica. (Fonte Deng (2008)).

A convecção natural também é verificada em cavidades anulares contendo fontes discretas de calor, como por exemplo, verticalmente em: Sankar e Do (2010), Sankar et al. (2011) e Sankar et al. (2012) e horizontalmente em: Mastiani et al. (2015) e Mastiani (2016).

O método implícito de diferenças finitas foi utilizado por Sankar e Do (2010) na resolução das equações governantes para convecção natural em cavidades anulares bidimensionais dispostas verticalmente contendo duas fontes discretas de calor localizadas na parede do cilindro interno, sendo a parede do cilindro externo mantida a uma temperatura constante inferior e as partes superior e inferior da cavidade consideradas termicamente isoladas, conforme esquema ilustrado na Fig. 2.9. Segundo os autores, neste tipo de escoamento a maior taxa de transferência de energia térmica obtida, corresponde a fonte inferior. Outro fato interessante verificado por eles, foi que a taxa de transferência de energia térmica mostrou-se diretamente proporcional a relação de raios e inversamente proporcional à relação de aspecto.

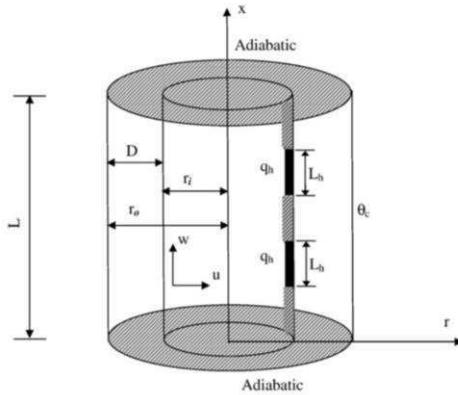


Figura 2.9 – Representação da cavidade anular vertical contendo duas fontes de calor. (Fonte Sankar e Do (2010)).

Em seu trabalho Sankar et al. (2011), analisou a convecção natural em um anel poroso aquecido com fluxo de calor constante, através das equações de Darcy Brinkman estendidas. Eles identificaram que os efeitos de porosidade com relação a transferência de energia térmica tonam-se importantes somente para altos valores do número de Darcy.

Visando compreender o efeito da localização e do tamanho de fontes com fluxo constante de calor sobre a convecção natural em cavidades anulares verticais, Sankar et al. (2012), analisou numericamente o comportamento de uma única fonte de calor, localizada na parede interna da parede, sendo o topo e a base da cavidade, bem como as demais partes do cilindro interno mantidos com uma temperatura inferior. Segundo os autores a máxima transferência de energia térmica é obtida quando a fonte é disposta no meio da parede interna. Também relataram que a localização da fonte de calor afeta significativamente a dinâmica e a transferência de energia térmica.

Mastiani et al. (2015), analisaram numericamente o processo de fusão sobre um material de mudança de fase em cavidades anulares bidimensionais contendo duas fontes de calor dispostas ao longo do cilindro interno, para sete disposições distintas. Onde a temperatura apresenta-se constante nas fontes e adiabática na parte restante do cilindro interno, bem como, nas paredes do cilindro externo. O método dos volumes finitos baseado na pressão, malhas não estruturas do tipo O, e a técnica entalpia-porosidade (identificação da interface sólida e líquida), foram utilizados na resolução das equações governantes. Considerando somente o  $Ra = 1 \times 10^4$ , linhas de correntes, isotermas, fração de líquido, fase de fusão frontal e o fluxo de calor adimensional, foram apresentados para as sete disposições. Os autores observaram que a

disposição dos pares de fontes ao longo do cilindro interno, ocasiona efeitos significativos tanto na dinâmica do escoamento quanto no campo térmico, refletindo, portanto na taxa de fusão do material. A Fig. 2.10, ilustra este processo, onde a Fig. 2.10a representa o caso com a melhor taxa de fusão e a Fig. 2.10b o caso com o pior desempenho.

Na Fig. 2.10 do lado esquerdo tem-se a representação de cada caso, ao centro o campo térmico somada as linhas de corrente e a direita a fase de fusão frontal, onde a cor vermelha representa a parcela líquida (derretida) e em azul a parte sólida. Nota-se que a localização das fontes logo abaixo do centro da cavidade no caso C.3, promove o aparecimento de duas células de recirculação, as quais auxiliam no processo advectivo de calor e na fusão do material.

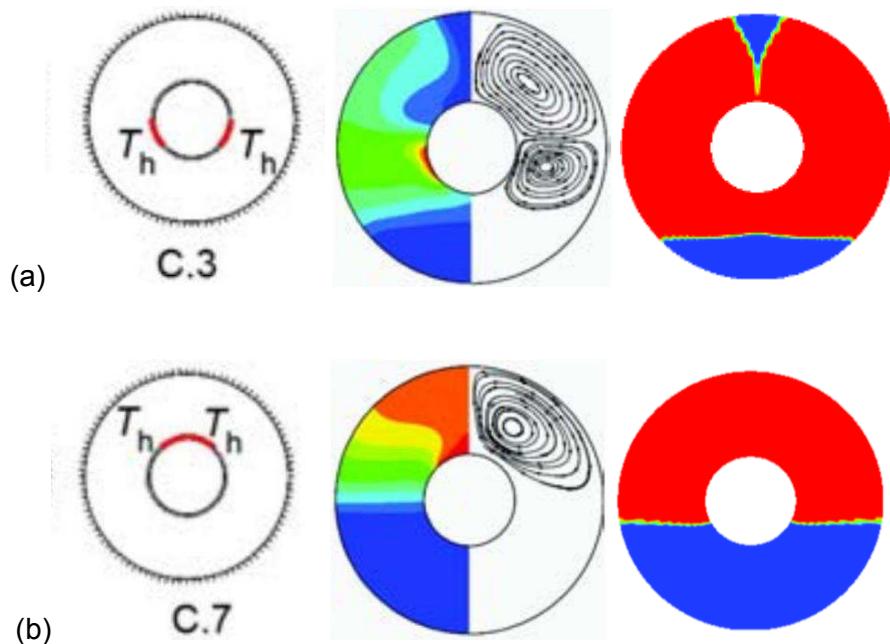


Figura 2.10 – Disposição das fontes (a), campo térmico e linhas de corrente (b) e fase de fusão frontal (c). (Fonte: Mastiani et al. (2015)).

Mastiani et al. (2016) investigaram numericamente, utilizando a técnica dos volumes finitos e o método SIMPLE para o acomplamento pressão velocidade, a convecção natural laminar em cavidades cilíndricas horizontais bidimensionais, preenchidas com ar, contendo pares discretos de fontes e sumidouros de energia térmica, dispostos nos cilindros interno e externo, respectivamente. Onde as fontes e os sumidouros apresentam-se com temperatura imposta nas paredes e as demais partes de ambos os cilindros apresentam-se como sendo adiabática. Ao todo oito casos distintos foram considerados, sendo quatro casos contendo dois

pares de fonte e sumidouro de energia térmica e quatro casos contendo três pares, distribuídos em configurações ou arranjos distintos dentro da cavidade anular. Analisou-se o efeito do número, tamanho e disposição dos arranjos dentro da cavidade. Os dados como linhas de corrente, isotermas, números de Nusselt locais e médios foram apresentados. Segundo os autores, os casos contendo dois pares de fonte e sumidouro de energia térmica, apresentaram valores mais expressivos em relação ao número de Nusselt médio do que os casos contendo três pares. Constataram também que o aumento no tamanho da fonte e do sumidouro de energia térmica ocasiona um decaimento no número de Nusselt local. Outro fato ressaltado é que a maior troca térmica é observada quando os pares encontram-se arranjados colinearmente dentro da cavidade. Na Fig. 2.11, têm-se isotermas e linhas de corrente, relativas a quatro arranjos distintos, sendo os casos C.2.4 e C.3.4 (colineares) e, portanto, com melhor desempenho energético entre os demais.

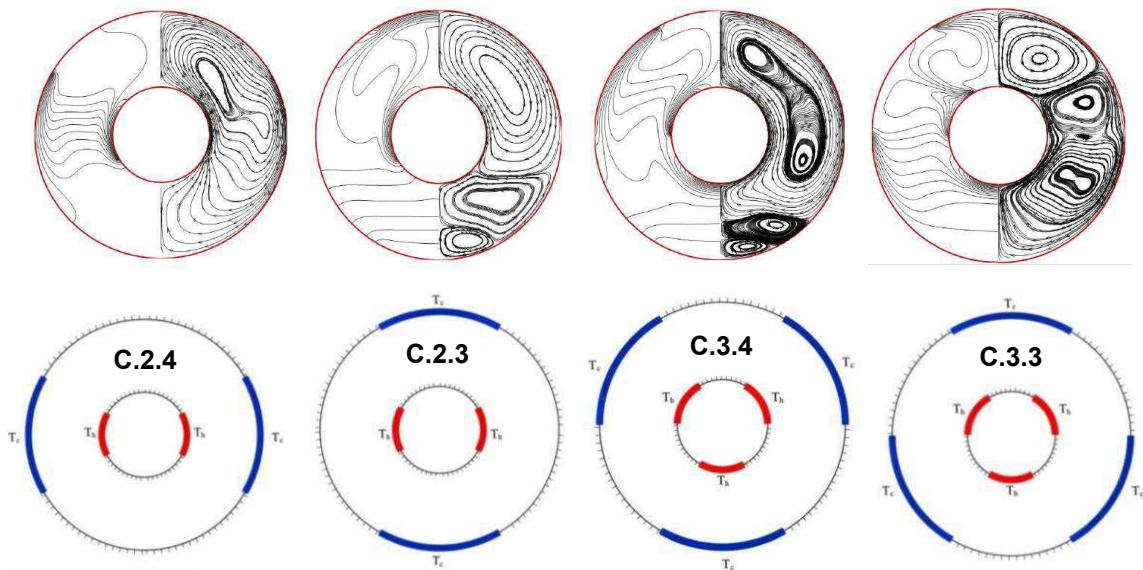


Figura 2.11 – Isotermas e linhas de corrente, para os casos C.2.4, C.2.3, C.3.4 e C.3.3, retirados de Mastiani et al. (2016).

Conforme mencionado por Mastiani et al. (2016) e Sankar et al. (2012), apesar da vasta literatura sobre convecção natural em cavidades contendo fontes discretas de calor, a maioria dos autores se restrigiu as configurações tradicionais, cavidades retangulares e quadradas, ficam as demais, como as anulares, ainda pouco exploradas, sobretudo, tridimensionalmente, como é a proposta do presente trabalho.

# CAPÍTULO III

## MODELAGEM MATEMÁTICA

### 3.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação matemática do problema da convecção natural em cilindros concêntricos preenchidos com ar na presença de pares discretos de fontes e sumidouros de energia térmica. Todo o equacionamento necessário para representar o fenômeno proposto neste trabalho tem por base as equações fundamentais de transporte: equação da conservação da massa; equação do balanço da quantidade de movimento e equação do balanço de energia.

Os escoamentos são caracterizados como sendo newtonianos e incompressíveis, sendo a variação da massa específica modelada através da aproximação de Boussinesq. Utiliza-se a Simulação de Grandes Escalas (SGE) para modelar a transição à turbulência através do Modelo Sub-Malha Dinâmico.

### 3.2 Equações representativas

As equações representativas do presente estudo são:

- Equação do Balanço de Massa

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

- Equação do Balanço da Quantidade de Movimento

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\rho}{\rho_0} g + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.2)$$

- Equação do Balanço de Energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (3.3)$$

### 3.2.1 Aproximação de Boussinesq

A aproximação de Boussinesq para a convecção natural pressupõe que a massa específica do fluido seja constante em todos os termos das equações do balanço de massa, do balanço da quantidade de movimento e do balanço da energia, com exceção do termo referente as forças gravitacionais na equação da conservação do balanço da quantidade de movimento.

Gebhart (1973) e Gebhart, *et al.* (1988) tratam a pressão estática local do fluido ( $p$ ) como sendo a soma de duas componentes, onde a primeira componente corresponde a pressão relativa ao movimento do fluido ( $p_m$ ) e a segunda representa a pressão do fluido em repouso ( $p_r$ ). Assim:

$$p = p_m + p_r \quad (3.4)$$

Sendo a pressão do fluido em repouso  $p_r$  calculada por:

$$\frac{dp_r}{dx_i} = -\rho_0 g, \quad (3.5)$$

Onde o termo  $\rho_0$  é a massa específica a temperatura ambiente. Tratando os dois primeiros termos do lado direito da equação do balanço da quantidade de movimento Eq.(3.2), tem-se:

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\rho}{\rho_0} g = \frac{1}{\rho_0} \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g \right) \quad (3.6)$$

Substituindo as Eq. (3.4) e Eq. (3.5) na Eq. (3.6), tem-se:

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\rho}{\rho_0} g = \frac{1}{\rho_0} \left[ -\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + g_i(\rho - \rho_0) \right] \quad (3.7)$$

Na Eq.(3.7) o termo  $g_i(\rho - \rho_0)$  representa as forças gravitacionais. Conforme comentado, a aproximação de Boussinesq considera a massa específica como sendo constante em todos os termos das equações fundamentais de transporte, exceto para o termo das forças gravitacionais na equação do balanço da quantidade de movimento. Já é de conhecimento científico, que a mudança no valor da massa específica tem como principal agente a expansão térmica do fluido. Segundo Arpaci e Larsen (1984), a massa específica  $\rho$  no termo das forças gravitacionais, para baixos valores da razão ( $\Delta\rho / \rho_0$ ) pode ser representada por:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta\Delta T) \quad (3.8)$$

Sendo  $\rho_0$  a massa específica tomada à temperatura ambiente e  $\beta$  uma propriedade termodinâmica conhecida como coeficiente de expansão volumétrica do fluido a pressão constante, definida por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \quad (3.9)$$

É importante ressaltar que a aproximação só é aplicável para variações de massa específica pequenas, ou seja, quando  $\beta\Delta T \ll 1$ .

Substituindo a Eq.(3.8) na Eq.(3.7) e organizando os termos, fica:

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\rho}{\rho_0} g_i = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial p_m}{\partial x_i} \right) - \beta g_i \Delta T \quad (3.10)$$

Inserindo a Eq.(3.10) na Eq.(3.2), tem-se uma nova expressão para o balanço de quantidade de movimento, já considerando a aproximação de Boussinesq:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial p_m}{\partial x_i} \right) - \beta g_i \Delta T + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.11)$$

### 3.2.2 Adimensionalização das equações representativas em coordenadas cilíndricas

A adimensionalização das equações de conservação é uma etapa importante, pois generaliza a solução do problema estudado e possibilita sua comparação com outros trabalhos da literatura. Nas Eqs. (3.12) a (3.20) têm-se as quantidades adimensionais utilizadas no presente trabalho:

- Velocidades

Radial

$$u^* = \frac{uL}{v} \quad (3.12)$$

Tangencial

$$v^* = \frac{vL}{v} \quad (3.13)$$

Axial

$$w^* = \frac{wL}{v} \quad (3.14)$$

- Temperatura

$$T^* = \frac{T - T_o}{T_i - T_o} \quad (3.15)$$

- Pressão

$$p^* = \frac{pL^2}{\rho_0 v^2} \quad (3.16)$$

- Tempo

$$t^* = \frac{tv}{L^2} \quad (3.17)$$

- Raio

$$r^* = \frac{r}{L} \quad (3.18)$$

- Viscosidade Turbulenta Efetiva

$$\nu_\varepsilon^* = \frac{(\nu + \nu_t)}{\nu} \quad (3.19)$$

- Difusividade Turbulenta Efetiva

$$\alpha_\varepsilon^* = \frac{1}{Pr} + \frac{\alpha_t}{\nu} \quad (3.20)$$

Nos parâmetros das Eqs. (3.12) a (3.20),  $L$  corresponde ao espaçamento entre os cilindros,  $T_i$  representa a temperatura na superfície do cilindro interno e  $T_o$  a temperatura do cilindro externo. Os números adimensionais utilizados são apresentados na Tab. 3.1. Sendo  $\nu$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  a viscosidade cinemática, a difusividade térmica e o coeficiente de expansão volumétrica do fluido, respectivamente. A gravidade é representada por  $g$  e  $L_{ax}$  o comprimento da direção axial da cavidade.

Tabela 3.1 - Números adimensionais utilizados no equacionamento do presente trabalho.

Nome	Sigla	Equação
Número de Prandtl	$Pr$	$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
Número de Grashof	$Gr$	$Gr = \frac{g\beta(T_i - T_0)L^3}{\nu^2}$
Número de Rayleigh	$Ra$	$Ra = GrPr$
Número de Nusselt Local Interno	$Nu_i$	$Nu_i = R_i \ln \left[ \frac{R_o}{R_i} \right] \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}  _{r=R_i}$
Número de Nusselt Local Externo	$Nu_o$	$Nu_o = R_o \ln \left[ \frac{R_o}{R_i} \right] \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}  _{r=R_o}$
Número de Nusselt Médio Interno	$\overline{Nu}_i$	$\overline{Nu}_i = \frac{1}{2\pi L_{ax}} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_{ax}} Nu_i d\theta dz$
Número de Nusselt Médio Externo	$\overline{Nu}_o$	$\overline{Nu}_o = \frac{1}{2\pi L_{ax}} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_{ax}} Nu_o d\theta dz$
Número de Nusselt Médio Global	$\overline{Nu}$	$\overline{Nu} = \frac{\overline{Nu}_i + \overline{Nu}_o}{2}$

Substituindo as respectivas variáveis adimensionais presentes na Tab. 3.1 nas equações de conservação Eq.(3.1), Eq.(3.3) e Eq.(3.11), para as três dimensões em coordenadas cilíndricas, obtém-se:

- Equação da Conservação da Massa

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (3.21)$$

- Equação do Balanço da Quantidade de Movimento

Direção Radial

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^* u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(v^* u^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial(w^* u^*)}{\partial z^*} - \frac{(v^*)^2}{r} = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + GrT^* \sin \theta + \\ + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( 2\nu_\varepsilon^* r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial(v^*/r^*)}{\partial r^*} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right) - \frac{2\nu_\varepsilon^*}{(r^*)^2} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} - \frac{2\nu_\varepsilon^* u^*}{(r^*)^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Direção Tangencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^* v^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(v^* v^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial(w^* v^*)}{\partial z^*} - \frac{u^* v^*}{r^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + GrT^* \cos \theta + \\ + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \nu_\varepsilon^* r^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( 2\nu_\varepsilon^* \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \nu_\varepsilon^* r^* \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial r^*} (\nu_\varepsilon^* r^* v^*) + \frac{2}{(r^*)^2} \frac{\partial(\nu_\varepsilon^* u^*)}{\partial \theta} + \frac{\nu_\varepsilon^*}{(r^*)^2} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \frac{u^* v^*}{(r^*)^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

### Direção Axial

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^* w^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(v^* w^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial(w^* w^*)}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( v^* r^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right) +$$

(3.24)

$$+ \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( v_\varepsilon^* \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( 2v_\varepsilon^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( v_\varepsilon^* r^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( v_\varepsilon^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right)$$

- Equação do Balanço de Energia

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^* T^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(v^* T^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial(w^* T^*)}{\partial z^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \alpha_\varepsilon^* r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) +$$

(3.25)

$$+ \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \alpha_\varepsilon^* \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \alpha_\varepsilon^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right)$$

### 3.2.3 Processo de filtragem das equações

Sabe-se que a solução numérica das equações de Navier-Stokes requer uma elevada capacidade de processamento e armazenamento de dados. Mesmo com todo avanço alcançado nas últimas décadas na área da computação, o tratamento numérico de escoamentos em transição e turbulentos ainda apresentam dificuldades, isso se deve principalmente a não linearidade das equações de Navier-Stokes, geradoras de uma ampla faixa de escalas turbulentas espaciais e temporais. Segundo Härtel (1996), as escalas maiores são responsáveis pela maior parte da difusão turbulenta do escoamento, ao passo que, as menores escalas são responsáveis pela transformação da energia cinética. Uma boa simulação numérica visa sobre tudo fornecer resultados fisicamente significativos, desta forma ambos os efeitos devem ser considerados.

Conforme Silveira-Neto (2002), os escoamentos turbulentos apresentam como característica a presença de uma multiplicidade de escalas (graus de liberdade). A solução de todos os graus de liberdade presentes em um escoamento turbulento é obtida utilizando a chamada simulação numérica direta da turbulência (DNS, do inglês *Direct Numerical Simulation*). Onde as equações de Navier-Stokes são discretizadas diretamente e resolvidas

numericamente. Portanto, a malha deve ser suficientemente refinada para a solução das menores escalas do espectro, resultando no campo completo do escoamento turbulento, tridimensional, transitório, carregando apenas a modelagem de fechamento de Stokes, possuindo somente os erros da aproximação numérica. Todavia, a utilização prática da DNS limita-se aos escoamentos com baixo ou moderado número de Reynolds,  $Re_L$ , pois o número mínimo de pontos de discretização necessários para uma perfeita resolução espacial do escoamento é proporcional a  $Re_L^{9/4}$  (Silveira-Neto, 2002).

Como já visto, à turbulência é qualificada por um grande número de escalas temporais e espaciais, que aumentam rapidamente com o número de Reynolds. Sendo assim, o uso da DNS torna-se inviável do ponto de vista prático e as Simulações via Equações Médias de Reynolds (RANS, do inglês *Reynolds Averaged Navier-Stokes*) e Simulação de Grandes Escalas (LES, do inglês *Large Eddy Simulation*) apresentam-se como alternativas melhores de predição numérica. Estas técnicas fazem à decomposição das equações representativas em um campo médio ou filtrado e um campo de flutuações.

Ao promover a decomposição das equações de Navier-Stokes ocorre o aparecimento de momentos de segunda ordem ou mais, os quais envolvem flutuações, ou seja, haverá mais incógnitas que equações. Esta situação é conhecida como o problema de fechamento da turbulência. Este problema é o maior motivador das pesquisas nesta área, ou seja, busca-se promover melhores modelos de turbulência que solucionem o problema de fechamento. Métodos experimentais e a simulação direta são instrumentos utilizados neste esforço, para validar as modelagens propostas (REZENDE, 2009).

Neste contexto, as metodologias RANS e LES são as duas abordagens para predição de escoamentos turbulentos que possuem o problema de fechamento da turbulência. Na modelagem RANS todas as informações espectrais são perdidas. As quantidades estatísticas são médias sobre todas as escalas de turbulência. Já a metodologia LES é intermediária tanto em custo como em esforço computacional entre a DNS e a RANS, uma vez que prediz a dinâmica das grandes escalas, conforme verifica-se na Fig. 3.1.

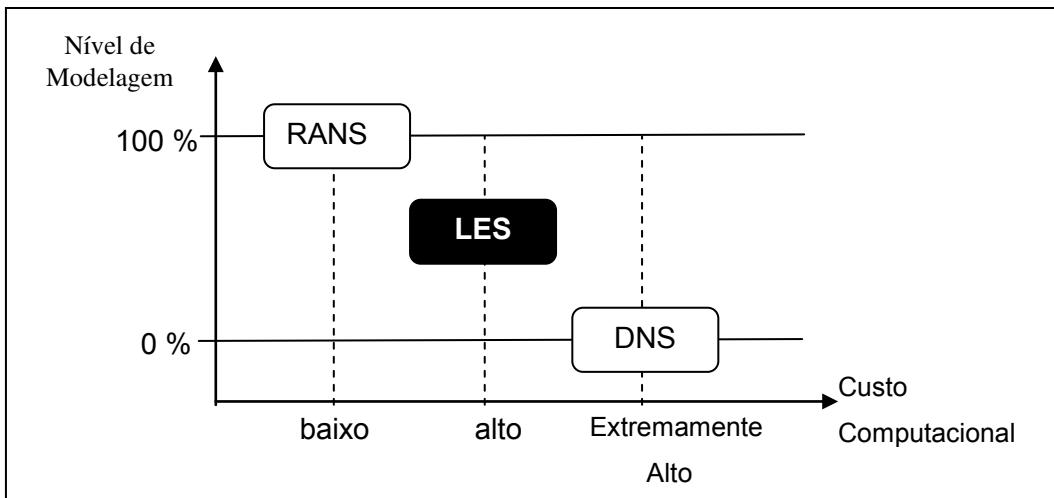


Figura 3.1 - Espectro de energia cinética turbulenta e número de onda de corte. (Fonte: Adaptada de Silveira-Neto, 2002).

Conforme visto a metodologia LES representa uma alternativa interessante tanto em nível de modelagem quanto comparado a RANS, quanto em custo computacional quando comparada a DNS. Esta técnica baseia-se na resolução direta das grandes escalas e na modelagem das pequenas escalas. Entre as características deste tipo de metodologia destaca-se: a possibilidade da mesma em predizer a transição de escoamentos laminares a turbulentos bem como, a sua aplicabilidade em problemas de engenharia, devido ao fato de não trabalhar com valores médios do escoamento como é feito em RANS (“elevado nível de modelagem”) e não resolver completamente todos os graus de liberdade como é feito em DNS (elevado custo computacional).

Desta forma nota-se que a metodologia LES representa uma importante ferramenta para solução de escoamentos transicionais e turbulentos.

### 3.3 Metodologia de simulação de grandes escalas

A simulação de grandes escalas teve como início os trabalhos do meteorologista Smagorinsky (1963), o qual propôs simular apenas as grandes escalas dos escoamentos atmosféricos e modelar as menores escalas. Assim, os maiores turbilhões ou estruturas do escoamento, responsáveis pela maior parte do transporte energético e de quantidade de movimento linear são resolvidos diretamente da solução das equações representativas filtradas,

ao passo que, as menores estruturas, mais homogêneas e isotrópicas, portanto, menos afetadas pelas condições de contorno, são modeladas. Segundo Silveira-Neto (2002) a modelagem das pequenas escalas tende a apresentar um caráter mais universal, ou seja, menos dependentes do tipo de escoamento simulado, quando comparada com as metodologias baseadas no conceito de média.

Através do processo de filtragem das equações representativas e separação das escalas, a metodologia LES separa as grandes escalas (baixas frequências) das pequenas escalas (altas frequências) em uma determinada frequência de corte ou número de onda de corte  $k_c$ , que é baseada no tamanho da malha de discretização utilizada. Conforme a Fig. 3.2 (Silveira-Neto, 2002) onde têm-se a variação do espectro de energia cinética turbulenta  $E(k)$ .

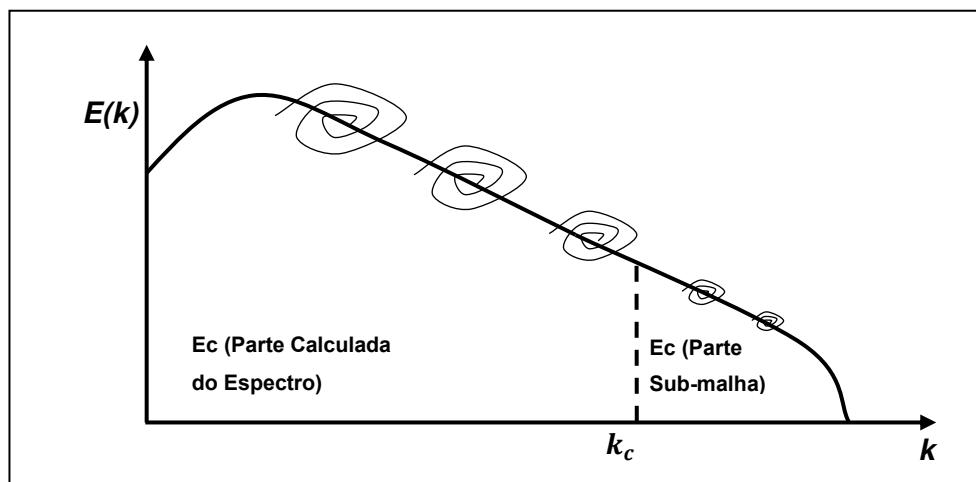


Figura 3.2 - Espectro de energia cinética turbulenta e número de onda de corte. (Fonte: Adaptada de Silveira-Neto, 2002).

Desta forma, após a filtragem as variáveis pertencentes às equações representativas são separadas em duas partes, a primeira conhecida como grandes escalas, representadas pela barra acima da variável  $\bar{f}(\vec{x}, t)$  e a segunda como sub-malha, representadas pelo apóstrofo acima da variável  $f'(\vec{x}, t)$ :

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t) \quad (3.26)$$

### 3.3.1 Equações representativas filtradas

Conforme mencionado em *LES*, cada variável pertencente às equações governantes é decomposta em duas partes: uma referente às grandes escalas do escoamento, representadas pela barra acima da variável  $\bar{f}(\vec{x}, t)$  e a outra relativa às escalas sub-malha, representadas pelo apóstrofo acima da variável  $f'(\vec{x}, t)$ . Sendo que, o espectro de energia total (Fig. 3.2) é a soma das duas escalas conforme a Eq.(3.26). A separação das escalas ocorre através do processo de filtragem que é definido como sendo a integral de convolução envolvendo a função a ser filtrada  $f$  e uma função filtro apropriada  $G$ .

Sendo assim, a parte filtrada, relativa às grandes escalas fica:

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int_D f(\vec{x}, t) G(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \quad (3.27)$$

Segundo Silveira-Neto (2002) a função filtro  $G$  pode ser definida de várias maneiras, entre elas tem-se a função filtro por volume definida por:

$$G(\vec{x}) = \begin{cases} 1/\Delta^3, & |\vec{x}| \leq \Delta/2 \\ 0, & |\vec{x}| > \Delta/2 \end{cases}, \quad (3.28)$$

sendo  $\Delta$  o tamanho característico do filtro, cujo valor indica a frequência de corte da filtragem. Para o caso especial em que o delta é igual ao tamanho da malha, nota-se que, o processo de filtragem é confundido com a filtragem imposta pela discretização, pois no interior de um volume de discretização todas as variáveis se mantêm constantes.

Após utilizar o filtro nas equações governantes, conforme feito por (Silveira-Neto, 2002), obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial x_j} - \beta \Delta \bar{T} g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] \quad (3.31)$$

Através do sistema de equações anterior modela-se o transporte das variáveis  $\bar{u}_i$  e  $\bar{T}$ . Contudo os termos não lineares aparecem na forma de dois produtos filtrados, fato que torna o sistema impossível de solução. Uma alternativa para resolver este problema decompor as escalas, utilizando-se a Eq.(3.26), tal decomposição modificará somente o termo não linear ou de transporte convectivo destas equações, assim:

$$\bar{u}_i \bar{u}_j = \overline{(\bar{u}_i + u_i')( \bar{u}_j + u_j')} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u_i' \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{u_i' u_j'} \quad (3.32)$$

$$\bar{u}_j T = \overline{(\bar{u}_j + u_j')(\bar{T} + T')} = \bar{u}_j \bar{T} + \overline{u_j' \bar{T}} + \overline{\bar{u}_j T'} + \overline{u_j' T'} \quad (3.33)$$

Nota-se que mesmo após a decomposição as Eq.(3.32) e Eq.(3.33) ainda apresentam termos dependentes de dois produtos filtrados. Conforme Silveira-Neto (2002) estes termos devem ser expressos em função do produto das variáveis filtradas, o que é feito utilizando um tensor e um fluxo turbulento, adicionais. Caracterizados por:

#### Tensor de Leonard

$$L_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (3.34)$$

#### Fluxo Turbulento de Leonard

$$L_{\theta j} = \bar{u}_j \bar{T} - \bar{u}_j T \quad (3.35)$$

Substituindo o Tensor de Leonard na Eq. (3.32) e o Fluxo Turbulento de Leonard na Eq. 3.33, tem-se:

$$\bar{u}_i \bar{u}_j = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u_i' \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{u_i' u_j'} + L_{ij} \quad (3.36)$$

$$\overline{u_j T} = \bar{u}_j \bar{T} + \overline{u'_j \bar{T}} + \overline{\bar{u}_j T'} + \overline{u'_j T'} + L_{\theta j} \quad (3.37)$$

Após todas as considerações, os dois termos são escritos em função do produto das variáveis filtradas e de alguns tensores e fluxos adicionais, definidos por:

#### Tensor de Reynolds Sub-Malha

$$\tau_{ij} = \overline{u_i' u_j'} \quad (3.38)$$

#### Tensor Cruzado

$$C_{ij} = \overline{u_i' \bar{u}_j} - \overline{\bar{u}_i u_j'} \quad (3.39)$$

#### Fluxo Turbulento Sub-Malha

$$\theta_j = \overline{u_j' \bar{T}'} \quad (3.40)$$

#### Fluxo Turbulento Cruzado

$$C_{\theta j} = \overline{\bar{u}_j T'} - \overline{u'_j T'} \quad (3.41)$$

Substituindo estes tensores e fluxos nas Eq. 3.36 e Eq. 3.37, obtém-se:

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \tau_{ij} + C_{ij} + L_{ij} \quad (3.42)$$

$$\overline{u_j T} = \bar{u}_j \bar{T} + C_{\theta j} + \theta_j + L_{\theta j} \quad (3.43)$$

Segundo Shaanan, *et al.* (1975) apud Padilla (2004) os tensores cruzados e de Leonard podem ser desconsiderados para os casos em que o esquema de transporte advectivo utilizado é de até segunda ordem. Em experiências numéricas sobre uma expansão brusca, Padilla (2004) apud Silveira-Neto, *et al.* (1993) constataram que mesmo para o caso de terceira ordem

estes tensores ainda continuam sem importância significativa podendo, portanto, serem desprezados, da mesma forma que os fluxos, turbulento cruzado e de Leonard.

Substituindo as Eq.(3.42) e Eq.(3.43), já eliminando os tensores cruzados e de Leonard e os fluxos turbulento cruzado e de Leonard nas Eq.(3.30) e Eq.(3.31), as equações filtradas ficarão:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial x_j} - \beta \Delta \bar{T} g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{T})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} \quad (3.46)$$

Mesmo após toda manipulação algébrica e simplificações efetuadas nas equações representativas Eq.(3.44) a Eq.(3.46), necessita-se modelar dois termos para o fechamento do sistema de equações são eles: o tensor de Reynolds sub-malha ( $\tau_{ij}$ ) e o fluxo turbulento sub-malha ( $\theta_j$ ). Estes termos representam o transporte turbulento de quantidade de movimento e de calor entre as grandes escalas e as escalas sub-malha. A modelagem destes termos é feita usualmente através da chamada hipótese de Boussinesq:

$$\tau_{ij} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} + \frac{2}{3}k\delta_{ij} \quad (3.47)$$

$$\theta_j = \alpha_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (3.48)$$

onde,  $\nu_t$  representa a viscosidade turbulenta,  $\alpha_t$  a difusividade térmica turbulenta,  $k$  a energia cinética turbulenta e  $\bar{S}_{ij}$  a taxa de deformação do campo filtrado, definida por:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.49)$$

Substituindo a Eq. 3.49 na Eq. 3.47, têm-se:

$$\tau_{ij} = -\nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.50)$$

O segundo termo da equação anterior pode ser adicionado ao campo de pressão, originando um campo de pressão modificado como segue:

$$\bar{p} = \bar{p}_m + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.51)$$

Substituindo as Eq. 3.48, Eq. 3.50 e Eq. 3.51 nas equações governantes, têm-se as equações filtradas na sua forma final:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \beta \Delta \bar{T} g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_\varepsilon \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{T})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \alpha_\varepsilon \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] \quad (3.54)$$

sendo  $\nu_\varepsilon$  a viscosidade efetiva, a qual, representa a soma da viscosidade molecular e da viscosidade turbulenta ( $\nu_\varepsilon = \nu + \nu_t$ ) e o termo  $\alpha_\varepsilon$  representa a difusividade térmica efetiva que de forma semelhante, reúne a difusividade térmica molecular e a difusividade térmica turbulenta ( $\alpha_\varepsilon = \alpha + \alpha_t$ ). A viscosidade turbulenta geralmente é calculada através dos modelos sub-malha, ao passo que, para a difusividade térmica turbulenta utiliza-se o número de *Prandtl* turbulento ( $Pr_t = \nu_t / \alpha_t$ ) que segundo Silveira-Neto, et al. (1993) é equivalente a 0,6.

Na modelagem via Simulação de Grandes Escalas (SGE) tem-se a simulação das grandes escalas (baixas frequências) do escoamento e uma modelagem a nível sub-malha para as pequenas escalas (altas frequências). No presente trabalho utilizou-se o Modelo Sub-malha Dinâmico para o cálculo da viscosidade turbulenta.

### 3.3.2 Modelagem sub-malha dinâmica

O processo de modelagem sub-malha convencional tem por característica a presença de uma constante de proporcionalidade *ad-hoc* imposta, como ocorre na modelagem de Smagorinsky (1963). Tal constante acarreta uma série de limitações principalmente em escoamentos em transição e parietais.

O modelo sub-malha desenvolvido por Germano, *et al.* (1991) elimina a imposição desta constante *ad-hoc*, pois o coeficiente dinâmico passa a ser calculado e não imposto durante a simulação, sendo expresso em função do tempo e do espaço, refletindo assim, uma propriedade local do escoamento (PADILLA, 2004).

O embasamento teórico do Modelo Sub-malha Dinâmico ocorre através da aplicação de dois filtros, com comprimentos característicos diferentes, nas equações governantes. O primeiro filtro também conhecido com Filtro a Nível de Malha, utiliza as dimensões da própria malha computacional para calcular seu comprimento característico  $\bar{\Delta}$ , neste filtro separa-se as grandes escalas das escalas a serem modeladas, conforme realizado na modelagem proposta por Smagorinsky (1963). O comprimento característico  $\bar{\Delta}$  é calculado segundo a Eq.(3.55):

$$\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\prod_{i=1}^3 \Delta x_i} \quad (3.55)$$

No segundo filtro comumente chamado de Filtro Teste e representado por  $\hat{\Delta}$ , seu comprimento característico é calculado a partir de um múltiplo das dimensões das malhas.

Na Fig. 3.3 observa-se que o Filtro Teste utiliza a informação do nível de energia, presente entre as escalas dos dois filtros, próximas a frequência de corte, para simular a transferência de energia entre as escalas resolvidas e as não resolvidas (PADILLA, 2004).

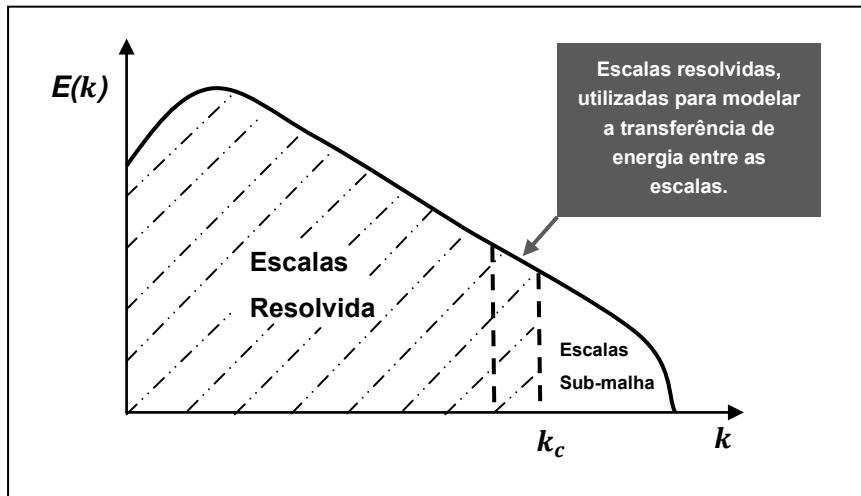


Figura 3.3 - Representação do espectro de energia cinética turbulenta referente ao processo de dupla filtragem. (Fonte: Padilla, 2004, adaptado).

O Filtro Teste  $\hat{\Delta}$  apresenta um comprimento característico maior do que o do Filtro a Nível de Malha  $\bar{\Delta}$ , geralmente utiliza-se a Eq.(3.56):

$$\hat{\Delta} = 2\bar{\Delta} \quad (3.56)$$

Conforme visto anteriormente no item (3.3.1) deste trabalho, após o uso de uma função filtro  $G$ , tem-se como resultado, a equação do balanço da quantidade de movimento filtrada Eq.(3.30).

Definindo-se um segundo filtro  $\hat{f}$ :

$$\hat{f}(\vec{x}, t) = \int_D f(\vec{x}', t) \hat{G}(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}', \quad (3.57)$$

e aplicando o mesmo na Eq.(3.11), obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{u_i u_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_j} - \beta \Delta \hat{T} g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.58)$$

Definindo um tensor para o filtro teste  $T_{ij}$ :

$$T_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j \quad (3.59)$$

Reescrevendo a Eq.(3.58) utilizando a equação anterior, tem-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}_i \hat{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_j} - \beta \Delta \hat{T} g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.60)$$

Aplicando-se um segundo filtro na Eq.(3.45), obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\widehat{u_i u_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_j} - \beta \Delta \hat{T} g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial \hat{T}_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.61)$$

Subtraindo a Eq.(3.61) da Eq.(3.60), fica:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{u_i u_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} - \hat{T}_{ij}) \quad (3.62)$$

Através da igualdade descrita pela equação anterior, define-se o tensor global de Leonard, também conhecido como a identidade de Germano:

$$L_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j = T_{ij} - \hat{T}_{ij} \quad (3.63)$$

A parcela anisotrópica do tensor de Reynolds global sub-malha pode ser modelada utilizando-se a chamada hipótese de Boussinesq:

$$\bar{\tau}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \bar{\tau}_{ij} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} = -2C(\vec{x}, t) \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} , \quad (3.64)$$

onde  $\bar{S}_{ij}$  é a taxa de deformação demonstrada na pela Eq.(3.49) e o termo  $|\bar{S}|$  é o módulo da taxa de deformação do campo filtrado, representado por:

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (3.65)$$

O tensor turbulento sub-teste é modelado de maneira análoga, ou seja:

$$T_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} T_{ij} = -2C(\vec{x}, t) \widehat{\Delta^2} |\hat{S}| \hat{S}_{ij} \quad (3.66)$$

Dando continuidade, filtrando a Eq.(3.64) obtém-se:

$$\hat{\tau}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \hat{\tau}_{ij} = -2\nu_t \hat{S}_{ij} = -2C(\vec{x}, t) \widehat{\Delta^2} |\bar{S}| \bar{S}_{ij} , \quad (3.67)$$

Rearranjando as equações, Eq.(3.64), Eq.(3.66) e Eq.(3.67), juntamente com a identidade de Germano Eq.(3.63), Germano, et al. (1991) propôs uma expressão para o cálculo do coeficiente dinâmico, a qual foi posteriormente modificada por Lilly (1991) resultando em:

$$C(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \frac{L_{ij}}{M_{ij}} \frac{M_{ij}}{M_{ij}} , \quad (3.68)$$

onde o termo  $L_{ij}$  é o tensor global de Leonard já deduzido pela Eq.(3.63) é  $M_{ij}$  é o tensor  $M_{ij}$ , definido por:

$$M_{ij} = \widehat{\Delta^2} |\hat{S}| \hat{S}_{ij} - \widehat{\Delta^2} |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \quad (3.69)$$

Na equação anterior que a barra (–) indica a primeira filtragem (filtro a nível da malha) e o chapéu (^) a segunda filtragem (filtro teste). Nota-se que, o cálculo do coeficiente dinâmico  $C(\vec{x}, t)$  é dependente de grandezas já calculadas e de um duplo processo de filtragem.

Por fim, a viscosidade turbulenta, via modelagem sub-malha dinâmica, é definida pela seguinte equação:

$$\nu_t = C(\vec{x}, t) (\bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \quad (3.70)$$

### 3.3.3 Equações adimensionais e filtradas em coordenadas cilíndricas

Neste item, têm-se as equações governantes em coordenadas cilíndricas, já adimensionalizadas (item 3.2.2) e filtradas (item 3.3.1), como segue:

- Equação da Conservação da Massa

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \bar{u}^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z^*} = 0 \quad (3.71)$$

- Equação da Conservação da Quantidade de Movimento

Radial

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \bar{u}^* \bar{u}^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(\bar{v}^* \bar{u}^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\bar{w}^* \bar{u}^*)}{\partial z^*} - \frac{(\bar{v}^*)^2}{r} = - \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial r^*} + Gr \bar{T}^* \sin \theta + \\ + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( 2\nu_\varepsilon^* r^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial(\bar{v}^*/r^*)}{\partial r^*} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r^*} \right) - \frac{2\nu_\varepsilon^*}{(r^*)^2} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \theta} - \frac{2\nu_\varepsilon^* \bar{u}^*}{(r^*)^2} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Tangencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \bar{u}^* \bar{v}^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(\bar{v}^* \bar{v}^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\bar{w}^* \bar{v}^*)}{\partial z^*} - \frac{\bar{u}^* \bar{v}^*}{r^*} = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \theta} + Gr \bar{T}^* \cos \theta + \\ + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \nu_\varepsilon^* r^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( 2\nu_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \nu_\varepsilon^* r^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial r^*} (\nu_\varepsilon^* r^* \bar{v}^*) + \frac{2}{(r^*)^2} \frac{\partial(\nu_\varepsilon^* \bar{u}^*)}{\partial \theta} + \frac{\nu_\varepsilon^*}{(r^*)^2} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial r^*} - \frac{\bar{u}^* \bar{v}^*}{(r^*)^2} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Axial

$$\frac{\partial \bar{w}^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \bar{u}^* \bar{w}^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(\bar{v}^* \bar{w}^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\bar{w}^* \bar{w}^*)}{\partial z^*} = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( v_\varepsilon^* r^* \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r^*} \right) +$$

(3.74)

$$+ \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( v_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( 2v_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( v_\varepsilon^* r^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( v_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z^*} \right)$$

- Equação da Conservação da Energia

$$\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \bar{u}^* \bar{T}^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(\bar{v}^* \bar{T}^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\bar{w}^* \bar{T}^*)}{\partial z^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \alpha_\varepsilon^* r^* \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial r^*} \right) +$$

(3.75)

$$+ \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \alpha_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \alpha_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial z^*} \right)$$

Visando facilitar à implementação numérica, as equações anteriores foram condensadas em uma única equação genérica, conforme visto em (PADILLA, 2004):

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \bar{u}^* \bar{\phi})}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(\bar{v}^* \bar{\phi})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\bar{w}^* \bar{\phi})}{\partial z^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \psi_1^\phi r^* \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r^*} \right) +$$

(3.76)

$$+ \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \psi_2^\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \psi_3^\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z^*} \right) + P^\phi + S^\phi$$

Os valores correspondentes as variáveis  $\phi$ ,  $\psi_1^\phi$ ,  $\psi_2^\phi$ ,  $\psi_3^\phi$ ,  $P^\phi$  e do termo fonte  $S^\phi$  equação genérica são dados na Tab. 3.2:

Tabela 3.2 - Valores das variáveis:  $\phi$ ,  $\psi_1^\phi$ ,  $\psi_2^\phi$ ,  $\psi_3^\phi$ ,  $P^\phi$  e  $S^\phi$  da equação genérica Eq.(3.76).

Equação	$\phi$	$\psi_1^\phi$	$\psi_2^\phi$	$\psi_3^\phi$	$P^\phi$	$S^\phi$
Cons. da Massa Eq.(3.71)	1	0	0	0	0	0
Cons. do Movimento (radial) Eq.(3.72)	$u^*$	$2v_\varepsilon^*$	$v_\varepsilon^*$	$v_\varepsilon^*$	$-\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial r^*}$	$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( v_\varepsilon^* \frac{\partial (\bar{v}^*/r^*)}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( v_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r^*} \right) +$ $-\frac{2v_\varepsilon^*}{(r^*)^2} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \theta} - \frac{2v_\varepsilon^* \bar{u}^*}{(r^*)^2} + Gr\bar{T}^* \sin\theta$
Cons. do Movimento (tangencial) Eq.(3.73)	$v^*$	$v_\varepsilon^*$	$2v_\varepsilon^*$	$v_\varepsilon^*$	$-\frac{1}{r^*} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \theta}$	$\frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( v_\varepsilon^* r^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( v_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \theta} \right) +$ $-\frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial r^*} (v_\varepsilon^* r^* \bar{v}^*) + \frac{2}{(r^*)^2} \frac{\partial (v_\varepsilon^* \bar{u}^*)}{\partial \theta} +$ $+\frac{v_\varepsilon^*}{(r^*)^2} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial r^*} - \frac{\bar{u}^* \bar{v}^*}{(r^*)^2} + Gr\bar{T}^* \cos\theta$
Cons. do Movimento (axial) Eq.(3.74)	$w^*$	$v_\varepsilon^*$	$v_\varepsilon^*$	$2v_\varepsilon^*$	$-\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial z^*}$	$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( v_\varepsilon^* r^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( v_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z^*} \right)$
Cons. da Energia Eq.(3.75)	$T^*$	$\alpha_\varepsilon^*$	$\alpha_\varepsilon^*$	$\alpha_\varepsilon^*$	0	0

### 3.4 Condições de contorno

As condições de contorno são do tipo Dirichlet nas três direções coordenadas (radial, tangencial e axial). As velocidades são tratadas da seguinte forma: Impenetrabilidade na componente radial e não deslizamento nas demais componentes (tangencial e axial). Considera-se a condição de periodicidade no sentido tangencial e axial. Desta forma:

- Velocidades no Cilindro interno

$$r^* = r_i, \quad u^* = v^* = w^* = 0 \quad (3.77)$$

- Velocidades no Cilindro Externo

$$r^* = r_o, \quad u^* = v^* = w^* = 0 \quad (3.78)$$

Termicamente o problema proposto apresenta três regiões distintas, conforme verifica-se na Fig. 3.4:

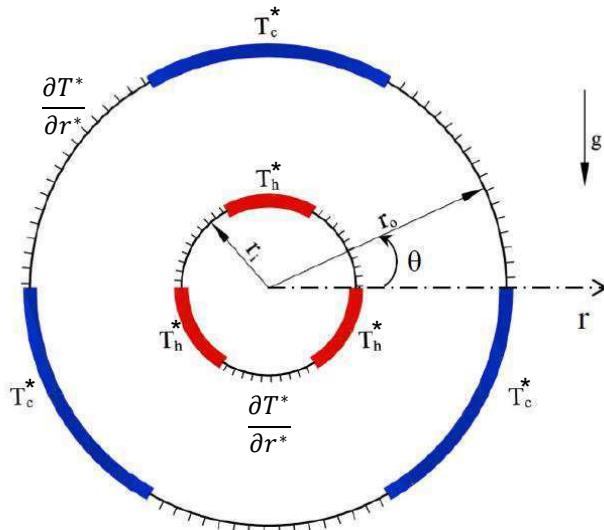


Figura 3.4 - Representação esquemática das fontes, sumidouros e parcela adiabática de calor entre os cilindros concêntricos. (Fonte: Mastiani, et al. (2016) adaptado).

Na Fig. 3.4 a parte destacada em vermelho, no cilindro interno, representa as fontes de calor, em azul, no cilindro externo, os sumidouros de calor e o restante em preto, em ambos os cilindros, refere-se à parte adiabática.

- Fonte de energia térmica

$$T_h^* = 1, \quad (3.79)$$

- Sumidouro de energia térmica

$$T_c^* = 0, \quad (3.80)$$

- Parcada Adiabática

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0, \quad (3.81)$$

# CAPÍTULO IV

## MODELAGEM NUMÉRICA

### 4.1 Introdução

Segundo Ferziger e Peric (2002), feita a seleção do modelo matemático, deve-se escolher um método adequado de discretização, ou seja, um método capaz de aproximar as equações diferenciais, em um sistema de equações algébricas para as variáveis do problema em questão, sendo essas variáveis obtidas em pontos discretos no espaço e no tempo. Desta forma, quanto maior for o número de pontos discretos usados na solução aproximada, também conhecida por solução numérica, espera-se uma maior proximidade da solução exata.

Na literatura encontram-se vários métodos de discretização, sendo os mais conhecidos: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Volumes Finitos (MVF), Método dos Elementos Finitos (MEF) e Métodos Espectrais.

No presente trabalho, utiliza-se o Método dos Volumes Finitos, criado por Patankar (1980) e utilizado por Padilla (2004) onde, para as variáveis vetoriais adota-se malhas deslocadas (as velocidades são provenientes de volumes vizinhos e armazenadas nas interfaces do volume principal) e malhas co-localizadas para as variáveis escalares (as variáveis são armazenadas no centro do volume de controle).

Segundo Patankar (1980) o MVF pode ser entendido como sendo uma integração espacial e temporal das equações diferenciais na forma conservativa em um volume de controle elementar (volume finito), conforme ilustrado na Fig.(4.1). Para obter o volume elementar, tal método requer que a discretização do domínio do problema estudado seja realizada, pois utiliza as equações diferenciais na forma integral.

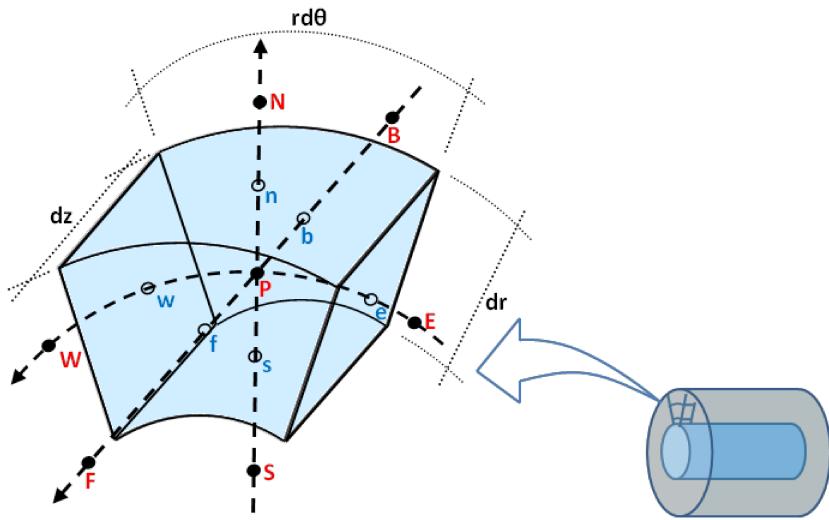


Figura 4.1 - Representação do volume de controle elementar.

## 4.2 Discretização espacial

A discretização espacial de uma derivada pode ser ilustrada utilizando o volume de controle elementar  $\Delta V = rdrd\theta dz$ , representado na Fig.(4.1). Onde as letras maiúsculas são os centros dos volumes de elementares, sendo (P) o centro do volume analisado e as demais letras os centros dos volumes vizinhos, nas direções: norte (N), sul (S), leste (E), oeste (W), frente (F) e fundo (B), respectivamente. As letras minúsculas representam as faces: norte (n), sul (s), leste (e), oeste (w), frente (f) e fundo (b), respectivamente.

Considerando-se a equação genérica Eq.(3.76):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* \bar{u}^* \bar{\phi})}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial (\bar{v}^* \bar{\phi})}{\partial \theta} + \frac{\partial (\bar{w}^* \bar{\phi})}{\partial z^*} &= \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \psi_1^\phi r^* \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r^*} \right) + \\ \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \psi_2^\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \psi_3^\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z^*} \right) &+ P^\phi + S^\phi , \end{aligned} \quad (4.1)$$

pode-se reescrevê-la considerando os termos advectivos ( $A^\phi$ ), difusivos ( $D^\phi$ ), de pressão ( $P^\phi$ ) e termos fonte ( $S^\phi$ ), como segue:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t^*} + A^\emptyset = D^\emptyset + P^\emptyset + S^\emptyset \quad (4.2)$$

Onde os valores correspondentes aos termos advectivos e difusivos, são representados na tabela abaixo:

Tabela 4.1 - Valores dos termos advectivos ( $A^\emptyset$ ) e difusivos ( $D^\emptyset$ ) da equação genérica Eq.(4.2)

Termo	Símbolo	Valor
Advectivo	$A^\emptyset$	$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \bar{u}^* \bar{\phi})}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(\bar{v}^* \bar{\phi})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\bar{w}^* \bar{\phi})}{\partial z^*}$
Difusivo	$D^\emptyset$	$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \psi_1^\phi r^* \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \psi_2^\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \psi_3^\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z^*} \right)$

Agrupando-se os termos não transientes no lado direito e isolando-se o termo transiente no lado esquerdo, a Eq.(4.2) fica:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t^*} = -A^\emptyset + D^\emptyset + P^\emptyset + S^\emptyset \quad (4.3)$$

Partindo da Eq.(4.3) pode-se aplicar a metodologia dos volumes finitos, através da integração de cada termo sobre o volume de controle elementar  $\Delta V = r dr d\theta dz$ , como segue:

- Termos Transientes

$$\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t^*} \rangle = \int_b^f \int_e^w \int_s^n \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t^*} r dr d\theta dz = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t^*} r \Delta r \Delta \theta \Delta z \quad (4.4)$$

- Termos Advectivos

$$\begin{aligned}
\langle A^\phi \rangle &= \int_b^f \int_e^w \int_s^n \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \bar{u}^* \bar{\phi})}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(\bar{v}^* \bar{\phi})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\bar{w}^* \bar{\phi})}{\partial z^*} \right] r dr d\theta dz = \\
&= [(r^* \bar{u}^* \bar{\phi})_n - (r^* \bar{u}^* \bar{\phi})_s] \Delta\theta \Delta z + [(\bar{v}^* \bar{\phi})_w - (\bar{v}^* \bar{\phi})_e] \Delta r \Delta z + \\
&\quad + [(\bar{w}^* \bar{\phi})_f - (\bar{w}^* \bar{\phi})_b] r \Delta r \Delta \theta
\end{aligned} \tag{4.5}$$

- Termos Difusivos

$$\begin{aligned}
\langle D^\phi \rangle &= \int_b^f \int_e^w \int_s^n \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \psi_1^\phi r^* \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \psi_2^\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \psi_3^\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z^*} \right) \right] r dr d\theta dz = \\
&= \psi_1^\phi \left[ \left( r^* \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r^*} \right)_n - \left( r^* \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r^*} \right)_s \right] \Delta\theta \Delta z + \psi_2^\phi \left[ \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right)_w - \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right)_e \right] \frac{\Delta r \Delta z}{r} + \\
&\quad + \psi_3^\phi \left[ \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z^*} \right)_f - \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z^*} \right)_b \right] r \Delta r \Delta \theta
\end{aligned} \tag{4.6}$$

- Termos de Pressão

$$\langle P^u \rangle = \int_b^f \int_e^w \int_s^n \left[ -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial r^*} \right] r dr d\theta dz = -[(\bar{p}^*)_n - (\bar{p}^*)_s] r \Delta\theta \Delta z \tag{4.7}$$

$$\langle P^v \rangle = \int_b^f \int_e^w \int_s^n \left[ -\frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} \right] r dr d\theta dz = -[(\bar{p}^*)_w - (\bar{p}^*)_e] \Delta r \Delta z \quad (4.8)$$

$$\langle P^w \rangle = \int_b^f \int_e^w \int_s^n \left[ -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial z^*} \right] r dr d\theta dz = -[(\bar{p}^*)_f - (\bar{p}^*)_b] r \Delta r \Delta \theta \quad (4.9)$$

- Termo Fonte

Parcela Radial

$$\begin{aligned} \langle S^u \rangle &= \int_b^f \int_e^w \int_s^n \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial(\bar{v}^*/r^*)}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \nu_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r^*} \right) - \frac{2\nu_\varepsilon^*}{(r^*)^2} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \theta} - \frac{2\nu_\varepsilon^* \bar{u}^*}{(r^*)^2} \right. \\ &\quad \left. + Gr \bar{T}^* \sin \theta \right] r dr d\theta dz = \nu_\varepsilon^* \left[ \left( \frac{\partial(\bar{v}^*/r^*)}{\partial r^*} \right)_w - \left( \frac{\partial(\bar{v}^*/r^*)}{\partial r^*} \right)_e \right] r \Delta r \Delta z + \\ &\quad \nu_\varepsilon^* \left[ \left( \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r^*} \right)_f - \left( \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r^*} \right)_b \right] r \Delta r \Delta \theta + \nu_\varepsilon^* (\bar{v}_E^* - \bar{v}_W^*) \frac{\Delta r \Delta z}{r} + \\ &\quad - (2\nu_\varepsilon^* \bar{u}_P^*) \frac{\Delta r \Delta \theta \Delta z}{r} + (Gr \bar{T}_P^* \sin \theta) r \Delta r \Delta \theta \Delta z \end{aligned} \quad (4.10)$$

Parcela Tangencial

$$\begin{aligned}
 \langle S^v \rangle &= \int_b^f \int_e^w \int_s^n \left[ \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( v_\varepsilon^* r^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( v_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial}{\partial r^*} (v_\varepsilon^* r^* \bar{v}^*) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{(r^*)^2} \frac{\partial (v_\varepsilon^* \bar{u}^*)}{\partial \theta} + \frac{v_\varepsilon^*}{(r^*)^2} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial r^*} - \frac{\bar{u}^* \bar{v}^*}{(r^*)^2} + Gr \bar{T}^* \cos \theta \right] r dr d\theta dz = \\
 &= v_\varepsilon^* \left[ \left( r^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \theta} \right)_n - \left( r^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \theta} \right)_s \right] \frac{\Delta \theta \Delta z}{r} + v_\varepsilon^* \left[ \left( \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \theta} \right)_f - \left( \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \theta} \right)_b \right] \Delta r \Delta \theta + \\
 &\quad - v_\varepsilon^* [(r^* \bar{v}^*)_n - (r^* \bar{v}^*)_s] \frac{\Delta \theta \Delta z}{r} + v_\varepsilon^* [\bar{u}^*_{\bar{W}} - \bar{u}^*_{\bar{E}}] \frac{\Delta r \Delta z}{r} \\
 &\quad + v_\varepsilon^* [(\bar{v}^*)_n - (\bar{v}^*)_s] \frac{\Delta \theta \Delta z}{r} - (\bar{u}_p^* \bar{v}_p^*) \frac{\Delta r \Delta \theta \Delta z}{r} + (Gr \bar{T}_P^* \cos \theta) r \Delta r \Delta \theta \Delta z
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Parcela Axial

$$\begin{aligned}
 \langle S^w \rangle &= \int_s^n \int_e^w \int_b^f \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( v_\varepsilon^* r^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( v_\varepsilon^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z^*} \right) \right] r dr d\theta dz = \\
 &= v_\varepsilon^* \left[ \left( r^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z^*} \right)_n - \left( r^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z^*} \right)_s \right] \Delta \theta \Delta z + v_\varepsilon^* \left[ \left( \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z^*} \right)_w - \left( \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z^*} \right)_e \right] \Delta r \Delta z
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Substituindo os termos: Transientes (Eq.(4.4)); Advectivos (Eq.(4.5)); Difusivos (Eq.(4.6)); de Pressão ((Eq.(4.7) a Eq.(4.9)) e Termos Fonte ((Eq.(4.10) a Eq.(4.12)) na Eq.(4.3) e organizando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t^*} \rangle = & -[\bar{\phi}_n M_n - \bar{\phi}_s M_s + \bar{\phi}_w M_w - \bar{\phi}_e M_e + \bar{\phi}_f M_f - \bar{\phi}_b M_b] + \\
& + \left[ \psi_1^\phi r_n^* \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r^*} \right)_n - \psi_1^\phi r_s^* \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r^*} \right)_s \right] \frac{1}{r \Delta r} + \left[ \psi_2^\phi \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right)_w - \psi_2^\phi \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right)_e \right] \frac{1}{r^2 \Delta r} + \\
& \left[ \psi_3^\phi \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z^*} \right)_f - \psi_3^\phi \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z^*} \right)_b \right] \frac{1}{\Delta z} - [\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle] + [\langle S^u \rangle + \langle S^v \rangle + \langle S^w \rangle]
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Onde os termos  $M_n$ ,  $M_s$ ,  $M_w$ ,  $M_e$ ,  $M_f$  e  $M_b$ , representam os fluxos de massa nas interfaces, norte, sul, oeste, leste, frente e fundo, conforme verifica-se na Tab. 4.2:

Tabela 4.2 - Valores dos fluxos de massa nas interfaces

Fluxo de Massa	Valor	Fluxo de Massa	Valor	Fluxo de Massa	Valor
(norte)	$M_n = \frac{r_n^* \bar{u}_n^*}{r \Delta r}$	(oeste)	$M_w = \frac{\bar{v}_w^*}{r \Delta \theta}$	(frente)	$M_f = \frac{\bar{v}_f^*}{r \Delta \theta}$
(sul)	$M_s = \frac{r_s^* \bar{u}_s^*}{r \Delta r}$	(leste)	$M_e = \frac{\bar{v}_e^*}{r \Delta \theta}$	(fundo)	$M_b = \frac{\bar{v}_b^*}{r \Delta \theta}$

Na Equação (4.13), observa-se a presença de termos nas interfaces dos volumes de controle, desta forma torna-se necessário calcular o valor da variável  $\phi$  e suas derivadas nestas posições. Para os termos difusivos, suas derivadas são aproximadas utilizando o esquema de diferenças centradas de segunda ordem, conforme representado nas Eq.(4.14) a Eq.(4.16):

$$\left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r^*} \right)_n = \frac{\bar{\phi}_N - \bar{\phi}_P}{\Delta r_n}, \quad \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r^*} \right)_s = \frac{\bar{\phi}_P - \bar{\phi}_S}{\Delta r_s}, \quad (4.14)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right)_w = \frac{\bar{\phi}_W - \bar{\phi}_P}{\Delta \theta_w}, \quad \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right)_e = \frac{\bar{\phi}_P - \bar{\phi}_E}{\Delta \theta_e}, \quad (4.15)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z^*} \right)_f = \frac{\bar{\phi}_F - \bar{\phi}_P}{\Delta z_f}, \quad \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z^*} \right)_b = \frac{\bar{\phi}_P - \bar{\phi}_B}{\Delta z_b}. \quad (4.16)$$

Nos termos advectivos também, utiliza-se o esquema de diferenças centradas de segunda ordem, desta forma, tem-se:

$$\overline{\phi_n} = \frac{\bar{\phi}_N + \bar{\phi}_P}{2}, \quad \overline{\phi_s} = \frac{\bar{\phi}_P + \bar{\phi}_S}{2}, \quad (4.17)$$

$$\overline{\phi_w} = \frac{\bar{\phi}_W + \bar{\phi}_P}{2}, \quad \overline{\phi_e} = \frac{\bar{\phi}_P + \bar{\phi}_E}{2}, \quad (4.18)$$

$$\overline{\phi_f} = \frac{\bar{\phi}_F + \bar{\phi}_P}{2}, \quad \overline{\phi_b} = \frac{\bar{\phi}_P + \bar{\phi}_B}{2}. \quad (4.19)$$

Após toda discretização espacial descrita nas Eq.(4.4) a Eq.(4.19), a equação genérica pode ser representada por:

$$\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t^*} \rangle = -\langle A^\emptyset \rangle + \langle D^\emptyset \rangle - [\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle] + [\langle S^u \rangle + \langle S^v \rangle + \langle S^w \rangle] \quad (4.20)$$

### 4.3 Discretização temporal

A discretização temporal no presente trabalho foi feita por Padilla (2004) utilizando o esquema explícito de segunda ordem de Adams-Bashforth e o acoplamento entre pressão e velocidade do tipo passo fracionado, com dois passos: Passo Preditor e Passo Corretor (KIM e MOIN, 1985).

Após integrar temporalmente a Eq.(4.20), têm-se:

$$\frac{\phi^{t+1} - \phi^t}{\Delta t} = \frac{3}{2} [ -\langle A^\emptyset \rangle + \langle D^\emptyset \rangle + (\langle S^u \rangle + \langle S^v \rangle + \langle S^w \rangle) ]^t + \\ - \frac{1}{2} [ -\langle A^\emptyset \rangle + \langle D^\emptyset \rangle + (\langle S^u \rangle + \langle S^v \rangle + \langle S^w \rangle) ]^{t-1} - [ \langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle ]^{t+1} \quad (4.21)$$

Na equação anterior o símbolo  $\phi$  representa o campo de velocidade e os superíndices  $t$  e  $t+1$  representam o tempo anterior e o presente, respectivamente. De forma geral o método do Passo Fracionado baseia-se na resolução em duas etapas ou dois passos, o primeiro passo denominado passo Preditor e o segundo em passo Corretor. No primeiro passo, os campos de velocidades são estimados utilizando campos obtidos em instantes anteriores.

#### Passo Preditor

$$\frac{\tilde{\phi} - \phi^t}{\Delta t} = \frac{3}{2} [ -\langle A^\emptyset \rangle + \langle D^\emptyset \rangle + (\langle S^u \rangle + \langle S^v \rangle + \langle S^w \rangle) ]^t + \\ - \frac{1}{2} [ -\langle A^\emptyset \rangle + \langle D^\emptyset \rangle + (\langle S^u \rangle + \langle S^v \rangle + \langle S^w \rangle) ]^{t-1} - [ \langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle ]^t \quad (4.22)$$

No passo corretor o campo de velocidade é corrigido no tempo atual utilizando o gradiente do campo de pressão  $[\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]'$ :

Passo Corretor

$$\frac{\phi^{t+1} - \tilde{\phi}}{\Delta t} = -\{[\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]^{t+1} - [\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]^t\} \quad (4.23)$$

Sendo o termo direito da Eq.(4.23) a correção da pressão, dada por:

$$[\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]' = [\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]^{t+1} - [\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]^t \quad (4.24)$$

Considerando o termo da correção da pressão, a Eq.(4.23) pode ser reescrita por:

$$\frac{\phi^{t+1} - \tilde{\phi}}{\Delta t} = -[\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]' \quad (4.25)$$

O campo de correção da pressão  $[\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]'$  é obtido através da resolução da equação de Poisson, derivada aplicando-se o divergente  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  a Eq.(4.23), ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\phi^{t+1} - \tilde{\phi}}{\Delta t} \right] = -\frac{\partial}{\partial x_i} [\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]' \quad (4.26)$$

Uma vantagem interessante no uso do método dos passos fracionados reside no fato de que na solução da equação de Poisson, a conservação da massa é garantia, ou seja:

$$\frac{\partial \phi^{t+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.27)$$

Desta forma, satisfazendo a condição de continuidade, a Eq.(4.26) ficará:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\tilde{\phi}}{\Delta t} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]' \quad (4.28)$$

Resolvendo a equação anterior tem-se como resultado, um sistema de equações algébricas, representado por:

$$a_P p_P = a_N p_N + a_S p_S + a_W p_W + a_E p_E + a_F p_F + a_B p_B - b \quad (4.29)$$

onde,

$$a_P = a_N + a_S + a_W + a_E + a_F + a_B$$

$$a_N = \frac{r_n}{r \Delta r_n \Delta r} \quad a_W = \frac{1}{r^2 \Delta \theta_w \Delta \theta} \quad a_F = \frac{1}{\Delta z_f \Delta z}$$

$$a_S = \frac{r_s}{r \Delta r_s \Delta r} \quad a_E = \frac{1}{r^2 \Delta \theta_e \Delta \theta} \quad a_B = \frac{1}{\Delta z_b \Delta z}$$

$$b = \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\tilde{u} r_n - \tilde{u}_s r_n}{r \Delta r} \right) + \left( \frac{\tilde{v} - \tilde{v}_e}{r \Delta \theta} \right) + \left( \frac{\tilde{w} - \tilde{w}_b}{\Delta z} \right) \right]$$

Para a resolução do sistema linear gerado após a discretização da Eq.(4.28) utilizou-se o método SIP (*Strongly Implicit Procedure*), criado por (STONE, 1968). Este método fundamenta-se na decomposição LU incompleta, onde somente um sistema de equações é resolvido de forma interativa. No caso específico, o campo a ser solucionado é o campo de correção da pressão  $[\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]'$ . Maiores informações deste esquema de solução (método SIP) são apresentadas nos trabalhos de (FERZIGER e PERIC, 2002) e (MALISKA, 2004).

Depois de obtido o campo de velocidade estimado, calculado no passo preditor (Eq.(4.22)) e de posse da solução do sistema linear (Eq.(4.29)), pode-se corrigir o campo de velocidade no tempo atual, através da relação:

$$\emptyset^{t+1} = \tilde{\emptyset} - [\langle P^u \rangle + \langle P^v \rangle + \langle P^w \rangle]' \quad (4.30)$$

Assim, finalizados os dos dois passos mencionados, obtêm-se campos atualizados, no tempo atual, de pressão e velocidade. Tal procedimento se repete a cada passo de tempo, ou seja, campos finais em um determinado tempo atuarão como campos iniciais no tempo posterior e assim, sucessivamente até o término da simulação.

Conforme visto no item 4.2, a Eq.(4.20) representa a equação genérica discretizada espacialmente. Considerando-se a equação da conservação da energia, o termo  $\phi$  da Eq.(4.20) representa o campo de temperatura e os termos de pressão e termo fonte são nulos, assim a equação fica:

$$\left\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t^*} \right\rangle = -\langle A^\emptyset \rangle + \langle D^\emptyset \rangle \quad (4.31)$$

Na discretização temporal para a energia utilizou-se o esquema de Euler de primeira ordem.

#### 4.4 Estabilidade numérica

Segundo (MALISKA, 2004) ao simular problemas práticos de interesse da engenharia é comum o aparecimento de sistemas de equações não-lineares, resolvidos geralmente de maneira sequencial, associados a acoplamentos delicados. Tais problemas requerem dos usuários de métodos numéricos certos cuidados visando a estabilidade e a convergência de suas aproximações numéricas, tais como: tamanho da malha, tamanho do passo de tempo, coeficientes de relaxação, etc.

Uma boa aproximação numérica deverá apresentar três características:

- Consistência;
- Estabilidade;
- Convergência.

Ela será consistente quando as equações discretizadas tenderem as equações diferenciais. Ou seja, os erros de truncamento devem tender a zero à medida que o passo de tempo e o espaçamento da malha tenderem a zero.

Já a estabilidade será alcançada quando não ocorrer ampliação dos erros ao longo da simulação, sendo que um método iterativo, será dito estável quando não divergir.

Por fim, a convergência segundo (FERZIGER e PERIC, 2002) ocorrerá quando a solução das equações discretizadas tender a solução exata das equações diferenciais, quando o tamanho da malha tender a zero.

Verifica-se, portanto que, o tamanho da malha e o passo de tempo exercem uma grande influência na garantia de bons resultados numéricos.

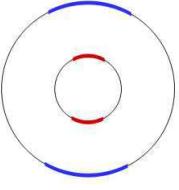
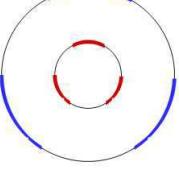
#### 4.4.1 Malha numérica

O conceito de malha ideal na prática se mostra relativo, pois cada problema requer um estudo de malha específico o qual, limita-se pela dificuldade inerente da simulação e pela disponibilidade computacional oferecida para a mesma.

Desta forma, visando encontrar o melhor custo benefício entre malha computacional e tempo de processamento, promoveu-se um estudo de malha (2D) para dois casos específicos: o primeiro caso, denominado C21, contendo dois pares fonte-sumidouro de energia térmica e o segundo indicado por C31, apresentando três pares respectivamente. Dois valores de número de Rayleigh foram adotados nesta análise,  $10^2$  representado na Tab. 4.3 e  $10^5$  ilustrado através da Tab. 4.4.

Todas as simulações referentes a este estudo de malha foram realizadas utilizando-se: relação de raios  $\eta = 2,0$  e razão de aspecto  $\Gamma = 1,0$ . Ao todo cinco configurações de malha foram testadas, tendo como base o comprimento angular ( $d\theta$ ), o qual, corresponde a  $5^\circ$  na malha mais grosseira:  $12 \times 72 \times 2$  e  $2^\circ$  na malha mais refinada:  $30 \times 180 \times 2$ , conforme verifica-se nas Tab. 4.3 e Tab. 4.4.

Tabela 4.3 - Estudo de malha, casos C21 (2 pares) e C31 (3 pares) para  $Ra = 10^2$ .

Malha	$d\theta$	Representação	Caso	$\overline{Nu}$	Diferença Relativa $\overline{Nu}$ (%)	Tempo físico de simulação (hs)
12x72x2	$5^\circ$		C21	2,5476	-	0,01
16x90x2	$4^\circ$			2,5364	- 0,441	0,06
20x120x2	$3^\circ$			2,5220	- 0,567	0,39
24x144x2	$2,5^\circ$			2,5157	- 0,251	1,06
30x180x2	$2^\circ$			2,5094	- 0,251	5,33
12x72x2	$5^\circ$		C31	2,5419	-	0,04
16x90x2	$4^\circ$			2,5309	- 0,434	0,17
20x120x2	$3^\circ$			2,5168	- 0,557	0,64
24x144x2	$2,5^\circ$			2,5106	- 0,246	1,82
30x180x2	$2^\circ$			2,5044	- 0,247	6,33

A Tabela 4.3 representa o comportamento da variação da malha referente aos casos com  $Ra = 10^2$ , ou seja, escoamentos com características laminares. Nota-se que, para baixos  $Ra$  o aumento no número de elementos computacionais praticamente não influencia no resultado do *Nusselt médio global*  $\overline{Nu}$ , pois a diferença relativa entre o valor encontrado e o valor anterior para essa variável não foi superior a 0,6%.

Tabela 4.4 - Estudo de malha, casos C21 (2 pares) e C31 (3 pares) para  $Ra = 10^5$ .

Malha	$d\theta$	Representação	Caso	$\overline{Nu}$	Diferença Relativa $\overline{Nu}$ (%)	Tempo Físico de Simulação (hs)
12x72x2	5°		C21	7,4671	-	0,68
16x90x2	4°			7,2274	- 3,210	4,88
20x120x2	3°			6,9921	- 3,256	1,01
24x144x2	2,5°			6,8250	- 2,390	5,78
30x180x2	2°			6,7337	- 1,338	20,46
12x72x2	5°		C31	2,5419	-	0,18
16x90x2	4°			2,5309	- 4,628	0,57
20x120x2	3°			2,5168	- 3,396	2,14
24x144x2	2,5°			2,5106	- 1,712	6,11
30x180x2	2°			2,5044	- 2,023	20,75

Contudo, para o maior número de Rayleigh ( $Ra = 10^5$ ) em ambos os casos C21 e C31 representados na Tab. 4.4, verifica-se uma variação considerável entre os valores do  $\overline{Nu}$ . A medida que a malha computacional é refinada, ou seja, conforme aumenta-se o número de elementos no domínio, observa-se uma diminuição na diferença relativa entre os  $\overline{Nu}$ , contudo o custo computacional aumenta de forma significativa. Nota-se que passando a malha de 24x144x2 volumes na direção radial, tangencial e axial, para 30x180x2 volumes, praticamente aumenta-se em quatro vezes o custo computacional tanto para os casos com dois pares de fonte-sumidouro (C21), quanto para os casos com três pares (C31), porém a diferença relativa entre os  $\overline{Nu}$  mantém-se abaixo de 2,5%. Desta forma optou-se por utilizar a malha com 24x144x2 volumes, por garantir uma boa consistência nos resultados a um custo computacional aceitável.

Já para os casos em três dimensões (3D) utilizou-se a malha  $24 \times 144 \times 34$ , o valor de 34 divisões na direção axial foi realizando considerando a seguinte igualdade  $dr = dz$ . Sendo que, o cálculo de  $dr$  e  $dz$  são descritos nas equações a seguir.

$$dr = \frac{\eta}{n^o \text{ divisões na dir. radial}} \quad (4.32)$$

$$dz = \frac{\Gamma}{n^o \text{ divisões na dir. axial}} \quad (4.33)$$

Igualando as Eq. (4.32) e Eq. (4.33) e considerando que para a configuração em 3D:  $\eta = 2$ ,  $\Gamma = 2,8$  e o número de divisões na direção radial é igual a 24, obtém-se o número de divisões na direção axial através da seguinte expressão:

$$n^o \text{ divisões na dir. axial} = \frac{24 \cdot 2,8}{2} = 33,6 \cong 34 \quad (4.34)$$

A Fig. 4.2 representa à malha utilizada, relativa a um caso contendo três pares de fonte-sumidouro de energia térmica, onde a fonte é representada pela cor vermelha e o sumidouro pela cor azul.

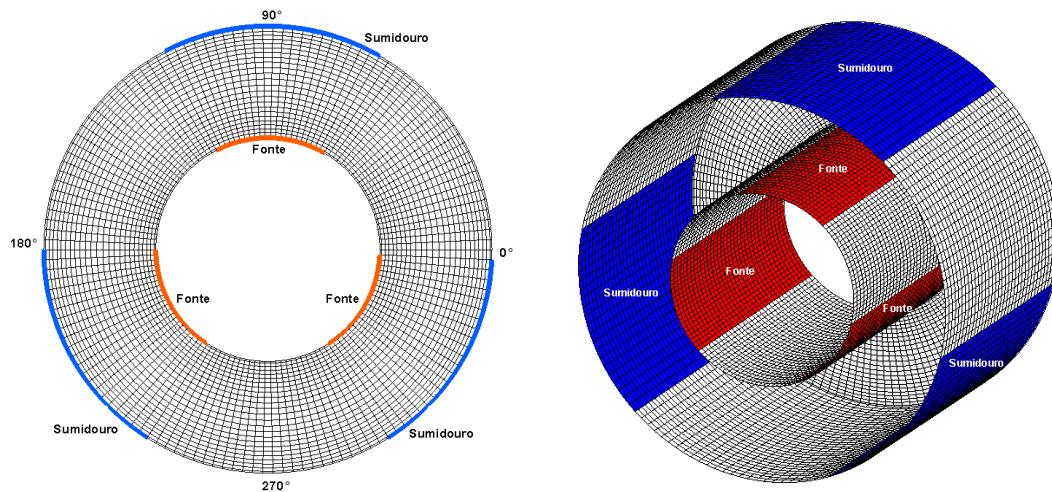


Figura 4.2 - Representação da malha utilizada ( $24 \times 144 \times 34$ ).

A malha escolhida ( $24 \times 144 \times 34$ ) é uniforme nas direções tangencial e axial e não uniforme na direção radial, onde nas proximidades das superfícies de ambos os cilindros apresenta um refinamento com variação de 5% de elemento a elemento.

#### 4.4.2 Passo de tempo automático (Critério CFL)

Conforme já comentado no subitem anterior, o passo de tempo influencia fortemente na estabilidade e na convergência do cálculo. Assim, controlar adequadamente o passo de tempo garantirá a melhor relação entre custo computacional e convergência dos resultados. No presente trabalho Padilla (2004) implementou o cálculo do passo de tempo automático, regido pelo critério de estabilidade proposto por Courant-Friedrichs-Lowy conhecido por critério CFL. No critério de estabilidade CFL o passo de tempo automático resulta na Eq. (4.35):

$$\Delta t_{automático} = \frac{1}{\frac{1}{\Delta t_{advectivo}} + \frac{1}{\Delta t_{difusivo}} + \frac{1}{\Delta t_{dif.Térmica}}} \quad (4.35)$$

onde:

##### Condição Advectiva

$$\Delta t_{advectivo} = \frac{1}{\frac{\bar{u}^*}{\Delta r} + \frac{\bar{v}^*}{r\Delta\theta} + \frac{\bar{w}^*}{\Delta z}} \quad (4.36)$$

##### Condição Difusiva

$$\Delta t_{difusivo} = \frac{1}{2(1 + v_t^*) \left[ \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{(r\Delta\theta)^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]} \quad (4.37)$$

##### Condição Difusiva Térmica

$$\Delta t_{dif.Termica} = \frac{1}{2 \left( \frac{1}{Pr} + \frac{v_t^*}{Pr_t} \right) \left[ \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{(r\Delta\theta)^2} + \frac{1}{\Delta r^2} \right]} \quad (4.38)$$

Sendo que nas Equações (4.37) e (4.38) considera-se a viscosidade efetiva e a difusividade térmica efetiva respectivamente.

A priori, calcula-se para cada volume de controle o ( $\Delta t_{automático}$ ), compara-se os valores obtidos e retira o menor. Este valor é novamente comparado, mas agora a um passo de tempo inicialmente estabelecido ( $\Delta t_{inicial}$ ), resguardando o menor valor obtido entre eles. Desta forma, prevê-se o melhor passo de tempo durante a simulação numérica. Porém, a prática mostra que o uso exclusivo do critério CFL, nem sempre garante a estabilidade da simulação. Assim, utilizou-se no presente trabalho um Fator de Segurança (FS) multiplicado pelo novo passo de tempo encontrado, como segue:

$$\Delta t_{final} = \Delta t_{automático} \cdot FS \quad (4.39)$$

Após vários testes, encontrou-se o  $FS = 1$  como sendo o melhor. Todas as simulações desenvolvidas neste trabalho utilizaram este valor.

# CAPÍTULO V

## RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos ao decorrer deste trabalho, relativos aos casos de convecção natural em cilindros concêntricos na presença de fontes e sumidouros de energia térmica. Visando uma melhor apresentação dos mesmos, eles foram divididos em duas partes: A primeira contendo os casos em duas dimensões e a segunda relativa aos casos em três dimensões.

### 5.1 Introdução

Os resultados do presente trabalho tiveram como norte os oito casos estudados por Mastiani et al. (2016) sobre convecção natural em cavidades anulares na presença de fontes e sumidouros de energia térmica. Partindo do código numérico desenvolvido por Padilla (2004) acrescentou-se ao mesmo, fontes (localizadas no cilindro interno) e sumidouros (localizados no cilindro externo) e promoveu-se uma ampla análise destas novas configurações. Sendo abordadas: à transferência de energia térmica, o desenvolvimento do escoamento e sobre tudo à transição à turbulência nos casos mencionados.

Desta forma, para validar o código, comparou-se os dados obtidos com valores disponíveis na literatura para casos em duas e em três dimensões, sendo que, os casos em duas dimensões foram comparados de duas formas: a primeira não considerando fonte e sumidouros de calor e a segunda prevendo os mesmos. Já os casos em três dimensões, devido a escassez de dados, foram confrontados apenas não considerando fontes e sumidouros de energia térmica.

As simulações foram realizadas abrangendo uma ampla faixa de números de Rayleigh,  $10^2 \leq Ra \leq 10^7$ , usando como fluido o ar ( $Pr = 0,706$ ). Para os casos em duas dimensões, ou seja, com um mínimo de volumes no sentido axial, utilizou-se apenas uma razão de aspecto  $\Gamma = 1,0$  e dois valores de relação de raios  $\eta = 2,0$  e  $2,6$ . Com relação às malhas usadas no presente trabalho, promoveu-se um estudo de malha em duas dimensões, conforme descrito no item (4.4.1), sendo que, em duas dimensões usou-se a malha com: 24 volumes na direção radial, 144 volumes na direção tangencial e 2 volumes na direção axial. Em três dimensões utilizou-se: 24 volumes na direção radial, 144 volumes na tangencial e 34 volumes na direção axial, bem como, razão de aspecto  $\Gamma = 2,8$  e relação de raios  $\eta = 2,0$ . Já as malhas utilizadas para a validação serão comentadas nos próximos itens, em duas e três dimensões.

## 5.2 Resultados em duas dimensões

### 5.2.1 Validação em duas dimensões

Os dados do presente trabalho foram comparados com dados numéricos e experimentais de Kuehn e Goldstein (1978), conforme ilustrado qualitativamente através da Fig. 5.1, para o caso de convecção natural convencional com superfícies isotérmicas.

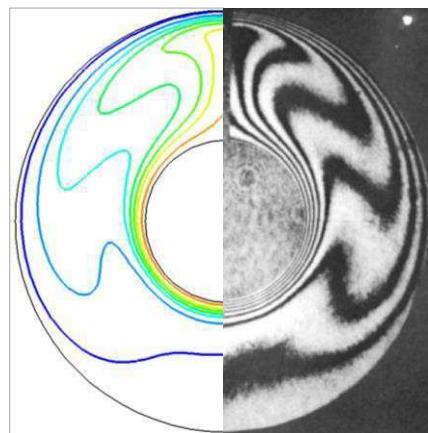


Figura 5.1 - Comparação qualitativa das isotérmicas para o caso de  $Ra = 4,7 \times 10^4$ ,  $\eta = 2,6$ , presente trabalho (lado esquerdo) e Kuehn e Goldstein (1978) (lado direito).

Na Fig. 5.1 tem-se uma comparação qualitativa do presente trabalho (lado esquerdo) com o resultado experimental obtido por Kuehn e Goldstein (1978) (lado direito), que utiliza a

técnica de interferometria Mach-Zehnder para  $Ra = 4,70 \times 10^4$ ,  $\eta = 2, 6$ ,  $\Gamma = 1,0$  e malha de  $34 \times 144 \times 2$  volumes nas direções, radial, tangencial e axial. Nota-se que as linhas das isotérmicas do presente trabalho, quando comparadas aos resultados experimentais de Kuehn e Goldstein, apresentam-se muito semelhantes, assim qualitativamente os dados obtidos representam de forma satisfatória o que se observa no experimento físico.

Comparou quantitativamente o mesmo caso. Na Fig. 5.2 compararam-se os resultados numéricos com os dados numéricos de Mastiani et al. (2016) e os dados obtidos fisicamente por Kuehn e Goldstein (1978) com relação à distribuição radial de temperatura nos ângulos  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $270^\circ$ .

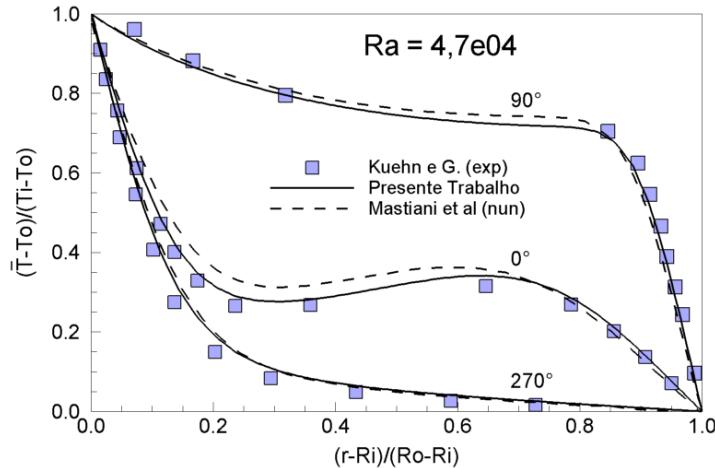


Figura 5.2 – Comparaçāo da distribuição radial de temperatura nos ângulos  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $270^\circ$ , presente trabalho, Mastiani et al. (2016) – numérico e Kuehn e Goldstein (1978) - experimental.

Verifica-se na Fig. 5.2 que os dados do presente trabalho (linhas cheias) apresentaram-se mais próximos aos dados obtidos fisicamente por Kuehn e Goldstein (1978) (quadrados) do que os resultados numéricos de Mastiani et al. (2016) (linhas pontilhadas). Essa semelhança é mais acentuada para a distribuição radial de temperatura no ângulo de  $0^\circ$ , onde nota-se que a linha cheia, praticamente intercepta os símbolos ao passo que a linha pontilhada, fica mais distante dos mesmos. Outra comparação entre os dados do presente trabalho e os resultados experimentais de Kuehn e Goldstein (1978) é demonstrada na Fig. 5.3, onde apresenta-se a distribuição do número de Nusselt local interno e externo entre  $90^\circ$  e  $270^\circ$ . Nota-se novamente uma excelente concordância entre os resultados tanto com relação à distribuição do número de

Nusselt local interno quanto à distribuição do externo. Sendo a diferença média para o Nusselt local interno igual a 3,440 % e para o externo igual a 6,370 %.

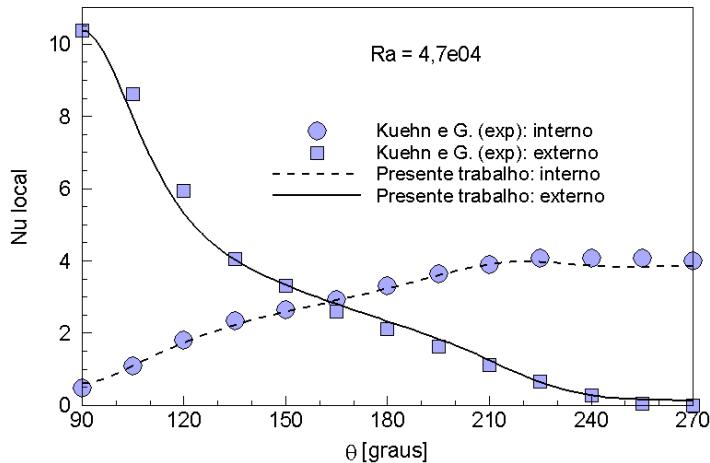


Figura 5.3 - Distribuição do número de Nusselt local para os cilindros interno e externo entre 90° e 270°: presente trabalho e Kuehn e Goldstein (1978) - experimental.

Dando continuidade, compararam-se também os resultados obtidos neste trabalho aos de Mastiani et al. (2016) sobre convecção natural em cavidades anulares na presença de fontes e sumidouros de energia térmica. Mastiani et al. (2016) considerou quatro casos contendo dois pares fontes e sumidouros de energia térmica e quatro casos contendo três pares, distribuídos em configurações ou arranjos distintos dentro da cavidade anular, conforme ilustrado na Tab. 2.2 do Capítulo II.

Devido a grande quantidade de casos, optou-se por demonstrar qualitativamente apenas dois dos oito casos disponíveis, sendo um contendo dois pares de fonte e sumidouros de calor, representados na Fig. 5.4, e outro caso contendo três pares de fonte e sumidouros de calor, representados na Fig. 5.5.

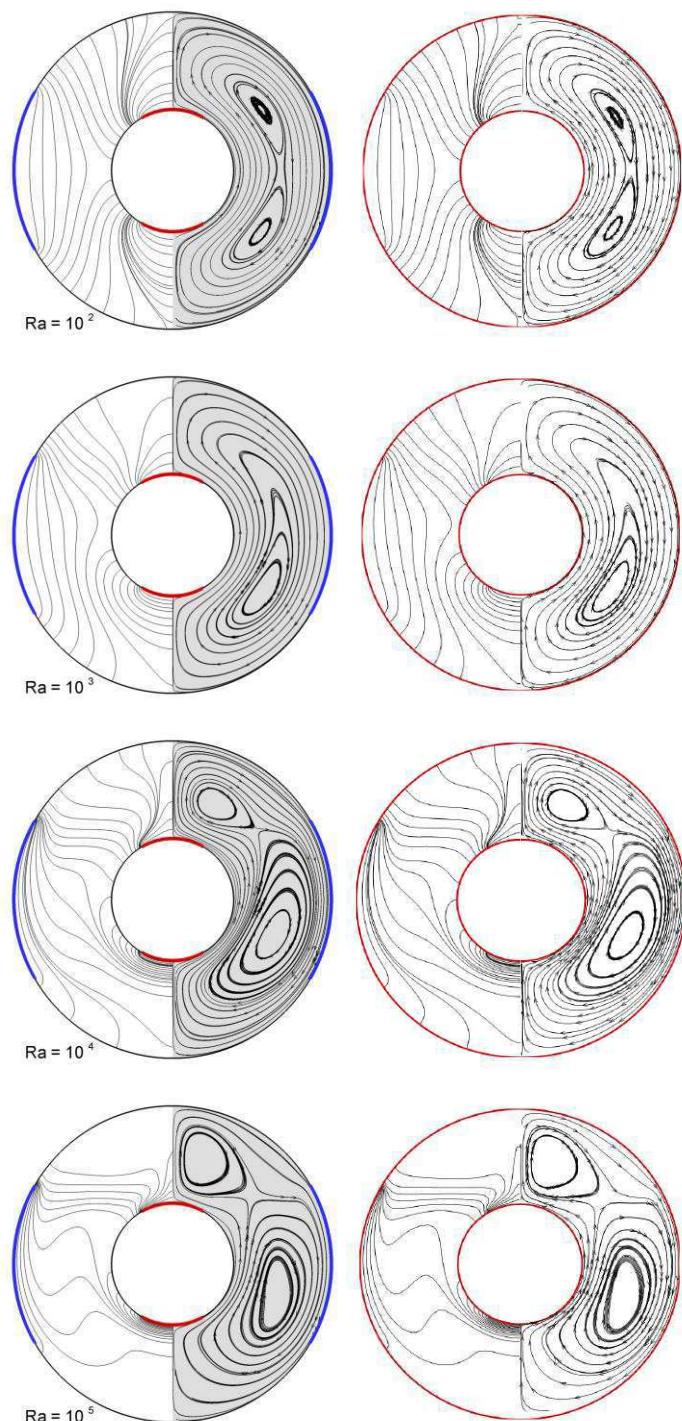


Figura 5.4 - Isotermas e linhas de corrente para o caso com dois pares de fonte e sumidouro, comparação entre o presente trabalho (lado esquerdo) e Mastiani et al. (2016) (lado direito).

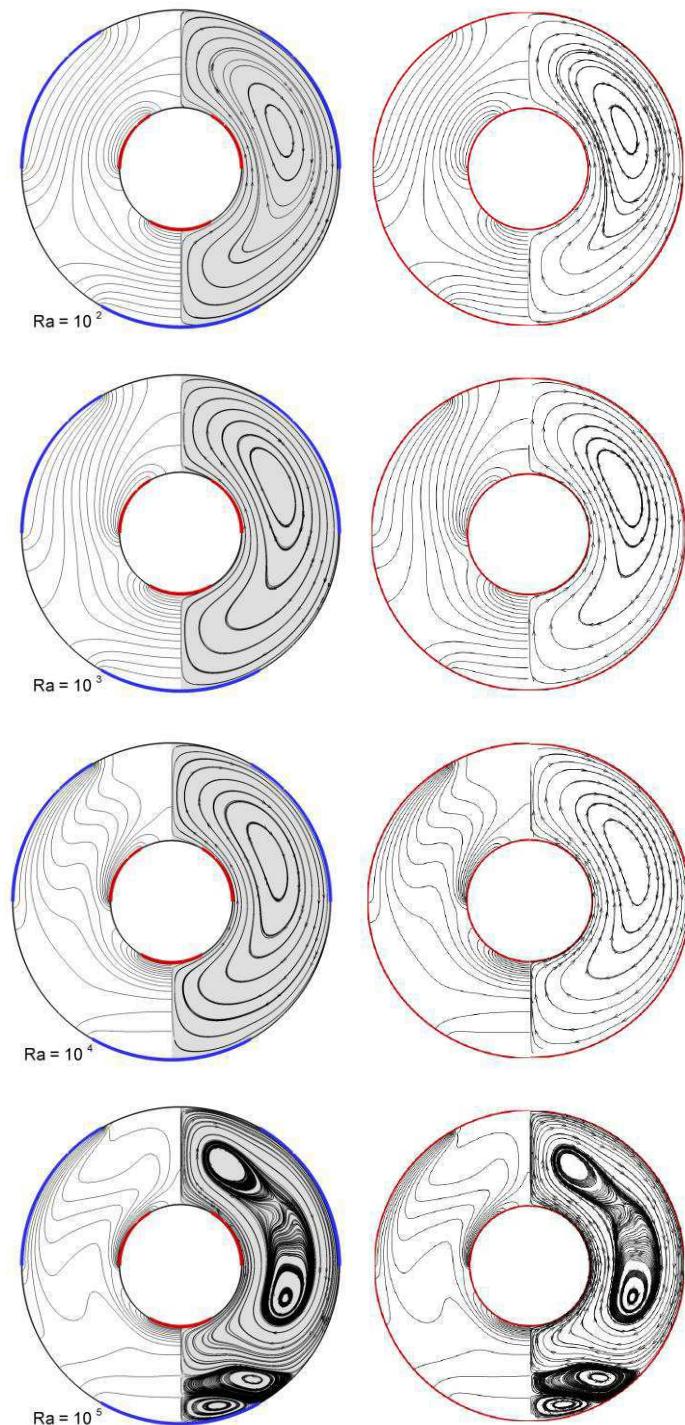


Figura 5.5 - Isotermas e linhas de corrente para o caso com três pares de fonte e sumidouro, comparação entre o presente trabalho (lado esquerdo) e Mastiani et al. (2016) (lado direito).

Conforme observa-se na Fig. 5.4, os resultados do presente trabalho com relação as isotermas (lado esquerdo dos cilindros) e as linhas de corrente (lado direito dos cilindros), apresentaram-se muito próximos aos resultados numéricos de Mastiani et al. (2016). Tal semelhança é observada também para o caso com três pares de fonte e sumidouro de energia térmica (Fig. 5.5). Os demais casos apresentados pela referência também foram simulados no presente trabalho, apresentando uma boa concordância.

Visando comparar quantitativamente os dados obtidos, calculou-se o valor de Nusselt médio global  $\overline{Nu}$ , considerando os pares de fonte e sumidouros de calor, conforme realizado por Mastiani et. al (2016). Desta forma o termo  $S$  presente no cálculo dos Nusselt médio interno  $\overline{Nu}_i$  e Nusselt médio externo  $\overline{Nu}_o$ , descritos na Tab. 3.1 do item 3.2.2, assumirá o valor de  $S_f$  e  $S_s$ , onde  $S_f$  corresponde ao somatório dos comprimentos de arco refente as fontes distribuídas no cilindro interno e  $S_s$  refere-se ao somatório dos comprimentos de arco relativo aos sumidouros de calor ao longo do cilindro externo.

Nas Tabelas 5.2 e 5.3 tem-se a comparação quantitativa do Nusselt médio global do presente trabalho frente aos resultados de Mastiani et. al (2016) para  $10^2 < Ra < 10^5$ . A Tabela 5.2 representa as configurações contendo 2 pares de fonte e sumidouro e a Tab. 5.3 retrata os casos com 3 pares.

Observa-se que a diferença relativa apresentada nas Tabs. 5.1 e 5.2 são condizentes com os resultados para o caso de configuração convencional (Fig. 5.2), sendo que as diferenças se concentram nas faixas 6,3 – 23,6 e 6,2 – 11,8, para os casos com 2 pares e 3 pares de fonte e sumidouro, respectivamente.

Assim, através das comparações qualitativas e quantitativas dos oito casos estudados, conclui-se que as novas condições de contorno implementadas no código CCCil3D (PADILLA, 2004) representam bem, em duas dimensões, o comportamento da transferência de energia térmica em cilindros concêntricos na presença de fontes e sumidouros de energia térmica.

Tabela 5.1 - Número de Nusselt médio global, casos com 2 pares fonte-sumidouro de energia térmica.

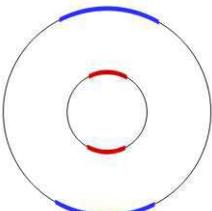
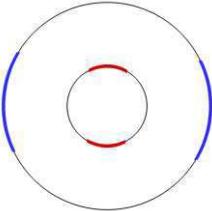
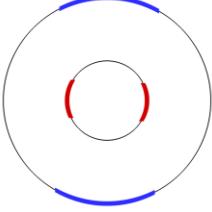
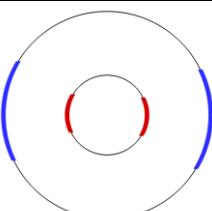
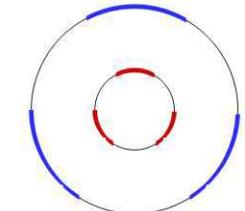
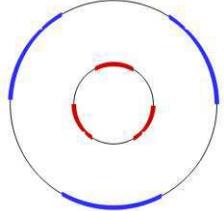
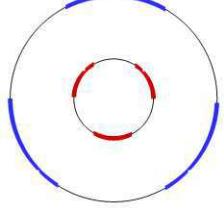
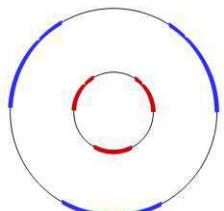
Caso	Representação	Ra	$\bar{Nu}$ Presente Trabalho	$\bar{Nu}$ Mastiani, et al. (2016)	Diferença Relativa (%)
C.21		$10^2$	2,7238	2,4488	10,1
		$10^3$	2,8291	2,5958	8,2
		$10^4$	4,5737	4,2336	7,4
		$10^5$	7,0027	6,5643	6,3
C.22		$10^2$	2,0540	1,8399	10,4
		$10^3$	2,3757	2,2178	6,6
		$10^4$	4,4590	4,1071	7,9
		$10^5$	7,6824	6,9423	9,6
C.23		$10^2$	2,0499	1,8399	10,2
		$10^3$	2,0857	1,9449	6,8
		$10^4$	3,1532	2,9102	7,7
		$10^5$	5,8058	7,1732	-23,6
C.24		$10^2$	2,7316	2,4698	9,6
		$10^3$	3,2856	3,0577	6,9
		$10^4$	5,9861	5,5564	7,2
		$10^5$	9,9261	9,126	8,1

Tabela 5.2 - Número de Nusselt médio global, casos com 3 pares fonte-sumidouro de energia térmica.

Caso	Representação	Ra	$\bar{Nu}$ Presente Trabalho	$\bar{Nu}$ Mastiani, et al. (2016)	Diferença Relativa (%)
C.31		$10^2$	2,6925	2,5243	6,2
		$10^3$	2,9095	2,7282	6,2
		$10^4$	4,9274	4,5631	7,4
		$10^5$	8,2514	7,6796	6,9
C.32		$10^2$	2,5571	2,3058	9,8
		$10^3$	2,8457	2,5971	8,7
		$10^4$	5,0529	4,6650	7,7
		$10^5$	8,2480	7,5485	8,5
C.33		$10^2$	2,5569	2,3350	8,7
		$10^3$	2,7100	2,5243	6,9
		$10^4$	4,7050	4,3301	8,0
		$10^5$	7,4335	6,5583	11,8
C.34		$10^2$	2,6928	2,5097	6,8
		$10^3$	3,0331	2,7718	8,6
		$10^4$	5,2359	4,8689	7,0
		$10^5$	8,3772	7,7087	8,0

## 5.2.2 Análise dos resultados

Nesta seção apresenta-se os resultados numéricos obtidos em duas dimensões da convecção natural em cavidades anulares na presença de pares de fonte e sumidouro de energia térmica, considerando  $\eta = 2,0$ ,  $\Gamma = 1,0$ ,  $10^2 \leq Ra \leq 10^7$  e malha de  $24 \times 144 \times 2$  volumes. A diferença de temperatura entre as superfícies cilíndricas, correspondente a cada valor de  $Ra$ , são apresentadas na Tab. 5.3.

Tabela 5.3 - Diferença de temperatura  $\Delta T$  correspondente a vários  $Ra$  para os oito casos estudados.

$Ra$	$\Delta T$ [K]
$10^2$	0,12655
$10^3$	1,26554
$10^4$	12,6554
$10^5$	126,554
$10^6$	1265,54
$10^7$	12655,4

As Fig.s 5.6-5.9 representam o desenvolvimento dinâmico e térmico do escoamento devido a convecção natural em cavidades anulares contendo dois pares de fonte e sumidouro de energia térmica relativos aos casos C21, C22, C23 e C24, respectivamente. Em todas as figuras mencionadas, a linha superior representa as linhas de corrente e a linha inferior as isotermas, para diferentes valores de  $Ra$ . Observando as figuras, nota-se que o fluido é aquecido nas proximidades das fontes de energia térmica (cilindro interno) e move-se de forma ascendente dentro da cavidade até atingir o topo do cilindro externo, onde encontram-se os sumidouros de energia térmica, ou a superfície adiabática. O fluido resfriado, fica mais denso é portanto, desce até ser novamente aquecido pelas fontes de calor presentes no cilindro interno, completando assim o ciclo característico de escoamentos promovidos pela convecção natural entre cilindros concêntricos. Esse comportamento ocorre principalmente pela forças gravitacionais geradas devido a presença de gradientes de temperatura gerados dentro da cavidade. Desta forma, observa-se a formação de uma ou mais estruturas de recirculação (vórtices) que variam em quantidade e intensidade, dependendo do número de  $Ra$  e da distribuição dos pares de fonte e sumidouro.

Os gradientes de temperatura presentes entre os dois cilindros concêntricos, como mencionado, geram vórtices convectivos, cuja a intensidade pode ser controlada, segundo Mastiani et al. (2016), distribuindo de maneira otimizada os pares de fonte e sumidouro nas paredes dos cilindros. O autor também afirma que há duas formas de se aprimorar a taxa de transferência de energia térmica para este tipo de escoamento: A primeira, aumentando a velocidade nas vizinhanças da fronteira onde a transferência de energia térmica acontece e a segunda, fortalecendo a mistura de regiões quentes e frias resultando em vórtices convectivos mais intensos.

Através das referidas figuras, também é possível verificar que o padrão das isotermas muda conforme o número de  $Ra$  aumenta. Para baixos  $Ra$  as isotermas tem a forma de linhas curvas paralelas próximas as fontes de calor, neste tipo de escoamento a camada limite térmica é espessa e o mecanismo de transferência de energia térmica dominante é a condução. A medida que o  $Ra$  aumenta as isotermas tornam-se mais distorcidas e a camada limite térmica fica mais delgada, neste tipo de escoamento as forças gravitacionais começam a prevalecer sobre as forças viscosas e a convecção passa a ser o mecanismo principal na transferência de energia térmica total. A influência da convecção pode ser observada através de um maior acúmulo de isotermas saindo a partir das fontes e dos sumidouros de energia térmica. Para elevados valores de  $Ra$ , nota-se que a camada limite térmica desenvolve-se próxima as fontes e sumidouros de energia térmica, contudo, a espessura desta camada será inversamente proporcional ao número de  $Ra$ , ou seja, aumentando-se o  $Ra$  a espessura da camada limite diminui e consequentemente haverá uma maior transferência de energia térmica para o meio. Assim, para os maiores valores de  $Ra$  apresentados nas Figs. 5.6-5.9 as isotermas encontram-se mais concentradas próximo as fontes e sumidouros de calor implicando na existencia de fortes gradientes de temperatura nestes locais. Tal fato, ocasiona o fortalecimento das células de recirculação e intensifica a transferência de energia térmica por convecção.

Na Fig. 5.6(a) nota-se que para  $Ra = 10^2$ , há dois vórtices contra rotativos na parte superior e dois na parte inferior, resultantes do posicionamento colinear dos pares de fonte e sumidouro de energia térmica. Tal arranjo, intensifica a transferência de energia térmica por condução, pois segundo Mastiani et al. (2016), há uma relação inversamente proporcional a intensidade da transferência de energia térmica por condução e a distância entre a fonte e sumidouro de energia térmica, ou seja, quanto menor essa distância (pares colineares) maior será a parcela por condução na transferência de energia térmica total na cavidade. Já para  $Ra$  maior, ocorre o aparecimento de novos vórtices menores altamente energizados e assimetria em relação a linha média central, caracterizando a desestabilização da pluma térmica e, portanto, o aparecimento de escoamento instável.

No caso C22 (Fig. 5.7), dois vórtices simétricos com dois núcleos cada são formados para  $Ra = 10^2$ , sendo que para maiores  $Ra$  os núcleos da parte superior são deslocados e confinados nas proximidades de  $90^\circ$ , em função do fortalecimento e expansão dos núcleos da parte inferior. Para  $Ra = 10^6$ , o par de vórtices principais formados apresenta múltiplos núcleos. O padrão muda drasticamente para  $Ra = 2 \times 10^7$  devido a presença de oscilações. No campo

térmico, forma-se uma pluma térmica que fica mais larga à medida que o  $Ra$  aumenta, apresentando estratificação a partir de  $Ra = 10^6$ .

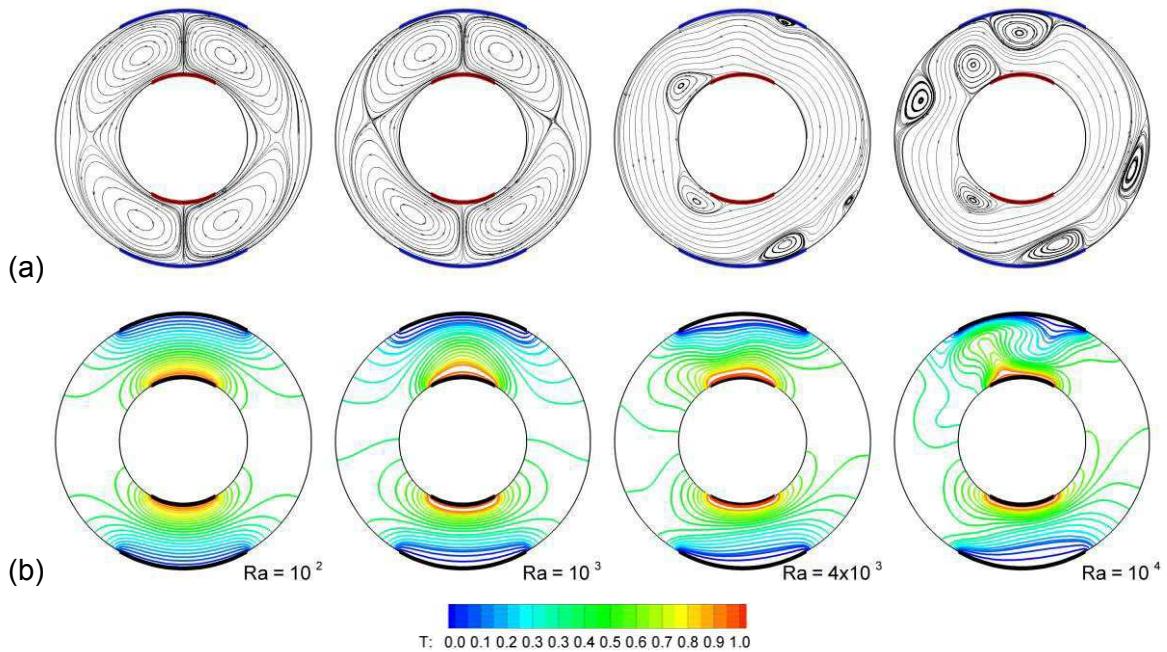


Figura 5.6 - (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C21.

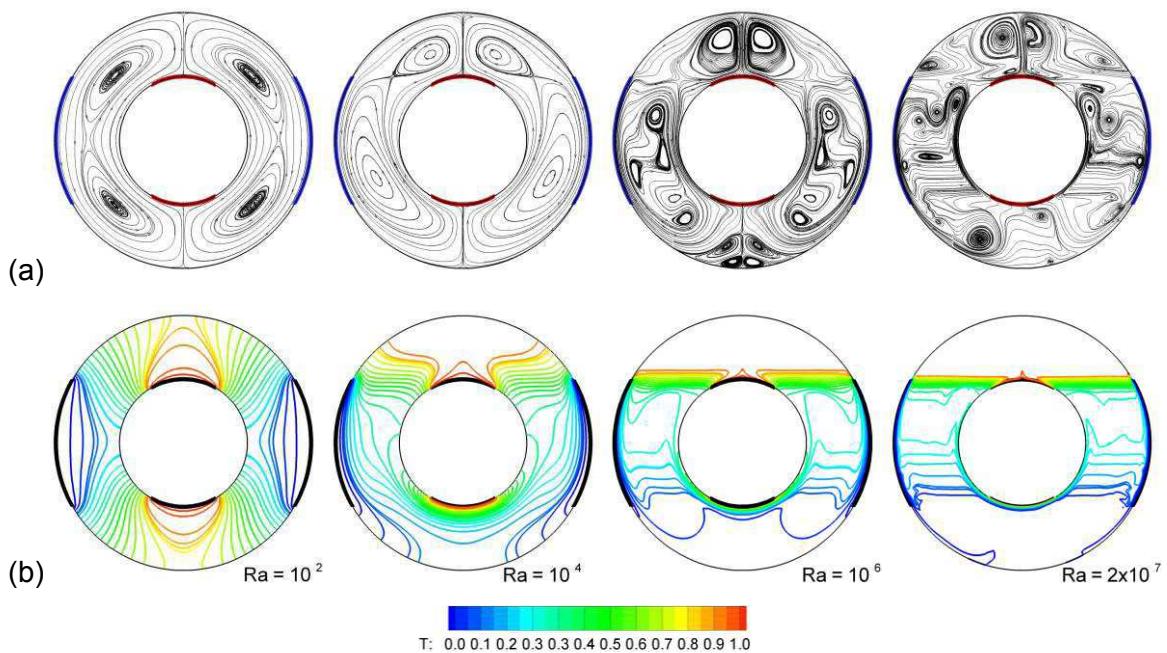


Figura 5.7 - (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C22.

No caso C23 (Fig. 5.8) nota-se a formação de três vórtices em ambos os lados do plano vertical, os quais movimentam-se em sentidos alternados, horário e anti-horário, respectivamente. Segundo Mastiani et al. (2016) a presença de três vórtices movendo-se em sentidos contrários em cada lado, promove a menor transferência de energia térmica entre os casos contendo dois pares de fonte e sumidouro de energia térmica, estes vórtices atuam como isolantes impedindo o contato direto e por consequência a transferência de energia térmica por convecção entre as fontes e sumidouros de energia térmica dentro da cavidade. A medida que o  $Ra$  aumenta verifica-se a presença de vórtices mais energizados, onde, para  $Ra = 10^4$  ocorre o aparecimento de novas células de recirculação em ambos os lados, contudo o escoamento mantém-se simétrico verticalmente, ou seja até este valor de  $Ra$  ele ainda apresenta-se estável, apesar da transferência de energia térmica por convecção ser elevada. Já em  $Ra = 10^5$  o número de vórtices aumenta de forma substantiva e por consequência a transferência de energia térmica por convecção intensifica-se, a simetria vertical antes observada também é perdida, demonstrando assim, que se trata de um escoamento instável. Quando o processo de transferência por convecção passa a ser predominante formam-se duas plumas térmicas a partir das fontes.

No caso C24 (Fig. 5.9), o fato dos pares apresentarem-se alinhados na horizontal garante um menor espaçamento entre as fontes e sumidouros de energia térmica, mas também promove a formação de dois vórtices que se anulam, resultando em uma melhor taxa de transferência de energia térmica. Com o aumento do  $Ra$  a velocidade do fluido próximas às fontes intensifica-se, fazendo com que a grande estrutura circular perca sua forma e dê origem a vórtices menores mais energizados, que mantém estabilidade até  $Ra = 10^6$ . Similar ao caso C22, forma-se uma pluma térmica larga como consequência da condição adiabática da superfície superior do cilindro externo. Aparecem também regiões estratificadas.

Dando continuidade, a análise dinâmica e térmica dos escoamentos relativos aos casos contendo três pares de fonte e sumidouro de energia térmica são apresentados através das Fig. 5.10-5.13.

Na Fig. 5.10, casos de configuração com pares de fato radialmente colineares, o padrão para  $Ra = 10^2$  é similar ao do caso C22 com  $Ra = 10^4$  e que leva a pensar que a troca térmica é mais eficiente. O incremento do  $Ra$  fortalece os vórtices, de forma que as maiores velocidades proporcionam condições para alcançar o estado instável ( $Ra = 10^4$ ). Quando o processo de advecção é importante, o campo térmico evidencia a formação de tais plumas nos locais próximos às fontes.

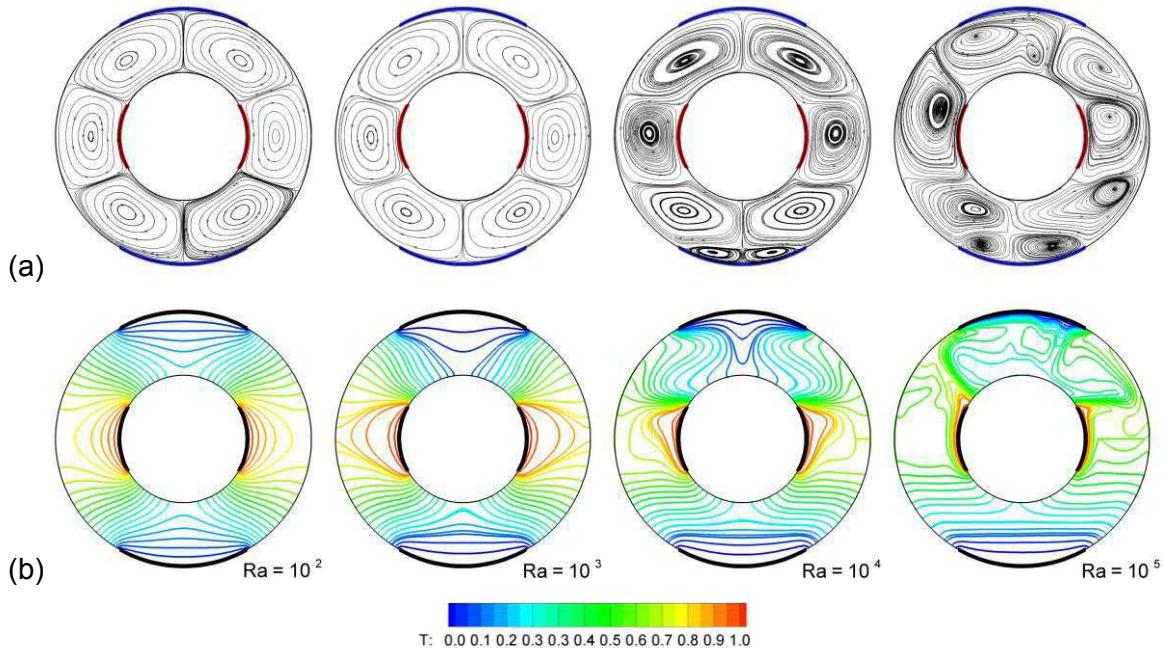


Figura 5.8 - (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C23.

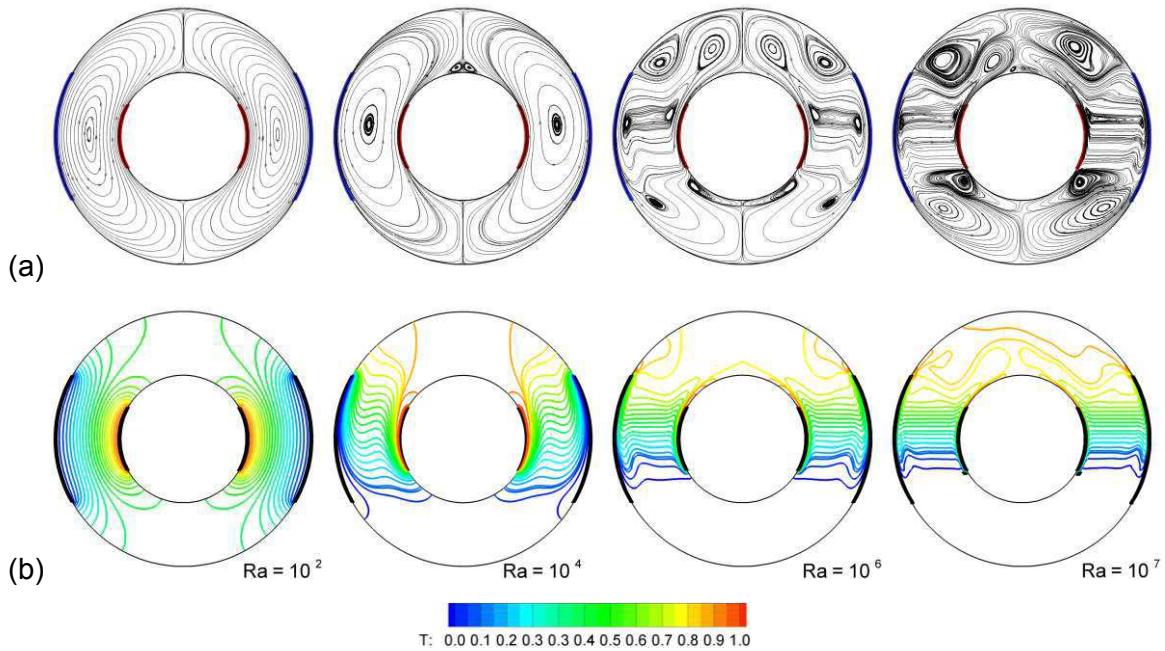


Figura 5.9 - (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C-24.

Para arranjos não colineares (C32 e C33) com baixo  $Ra$  têm-se quatro vórtices, dos quais os menores estão relacionados com a presença do sumidouro e os maiores apresentam

dois núcleos. No caso em que o sumidouro está em  $90^\circ$  (Fig. 5.12) vórtices menores permanecem e mais fortes quando o  $Ra$  aumenta, enquanto que no caso do sumidouro em  $270^\circ$  (Fig. 5.11), eles são minimizados para  $Ra = 10^4$  e posteriormente ( $Ra = 10^5$ ) outros menores são zerados na região inferior da cavidadde. No campo térmico, similar ao caso clássico, forma-se uma pluma que se torna mais fina em função do incremento do  $Ra$ . E o melhor processo térmico acontece para o caso C34.

No último caso (Fig. 5.13), o padrão do escoamento para o menor  $Ra = 10^2$  difere do outro caso de pares colineares (C31) na posição invertida dos núcleos de cada vórtice principal, zerado em função da posição do sumidouro. Para  $Ra$  maiores, os núcleos se posicionam e posteriormente para  $Ra = 10^5$ , se dividem novamente com a predominância do processo advectivo, menores vórtices surgem na região do sumidouro inferior, que se torna oscilante para  $Ra = 10^6$ .

A quantificação do processo de transferência de energia térmica nos casos com dois e três pares de fonte e sumidouro são apresentados nas Fig. 5.14 e Fig. 5.15, respectivamente. As figuras mostram a distribuição do número de Nusselt sobre o cilindro interno  $Nu_i$ , na coluna (a), e sobre o cilindro externo  $Nu_o$ , na coluna (b), para diversos valores de  $Ra$ .

De forma geral, quando a fonte ou sumidouro se encontram na linha média vertical (linha entre  $90^\circ$  e  $270^\circ$ ) o  $Nu$  local apresenta valores máximos (picos) nas interfaces com as regiões adiabáticas ( $60^\circ$  e  $120^\circ$  ou  $240^\circ$  e  $300^\circ$ ) e mínimos nos centros das superfícies isotérmicas ( $90^\circ$  ou  $270^\circ$ ). Os locais de mínimos coincidem com pontos de estagnação e os picos acontecem nos locis de elevado gradiente de temperatura. Por outro lado, quando as fontes ou sumidouros se encontram posicionados fora da linha média vertical a distribuição de  $Nu$  local tem valor máximo na interface (extremo da fonte ou sumidouro) que o escoamento atinge primeiro, na outra interface o valor é mínimo.

A distribuição do  $Nu$  local mantém simetria com relação a linha média vertical, exceto nos casos de escoamento instável (exemplos:  $Ra = 10^4$  para C21,  $Ra = 10^5$  para C33), casos que registram incremento em alguns locais, como consequência da maior atividade dinâmica do escoamento.

A relação do  $Nu$  local é diretamente proporcional com o  $Ra$ , sendo que o incremento local é mais acentuado para  $Ra$  maiores em razão da maior atividade convectiva na cavidade.

Aparentemente, casos como o C22, C24, C32 e C34 apresentam valores maiores de  $Nu$  local, porém as faixas diferentes de  $Ra$  usadas para os diversos casos impedem conclusão a respeito. Nesse sentido, o número de Nusselt médio global possibilitará essa conclusão.

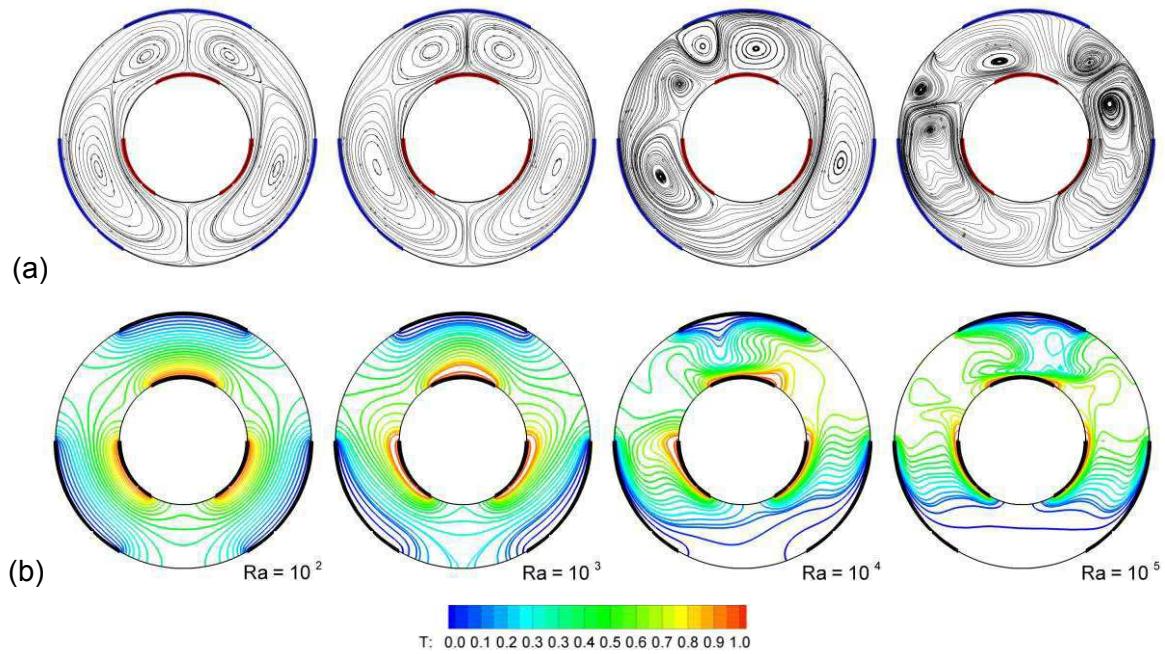


Figura 5.10 - (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C31.

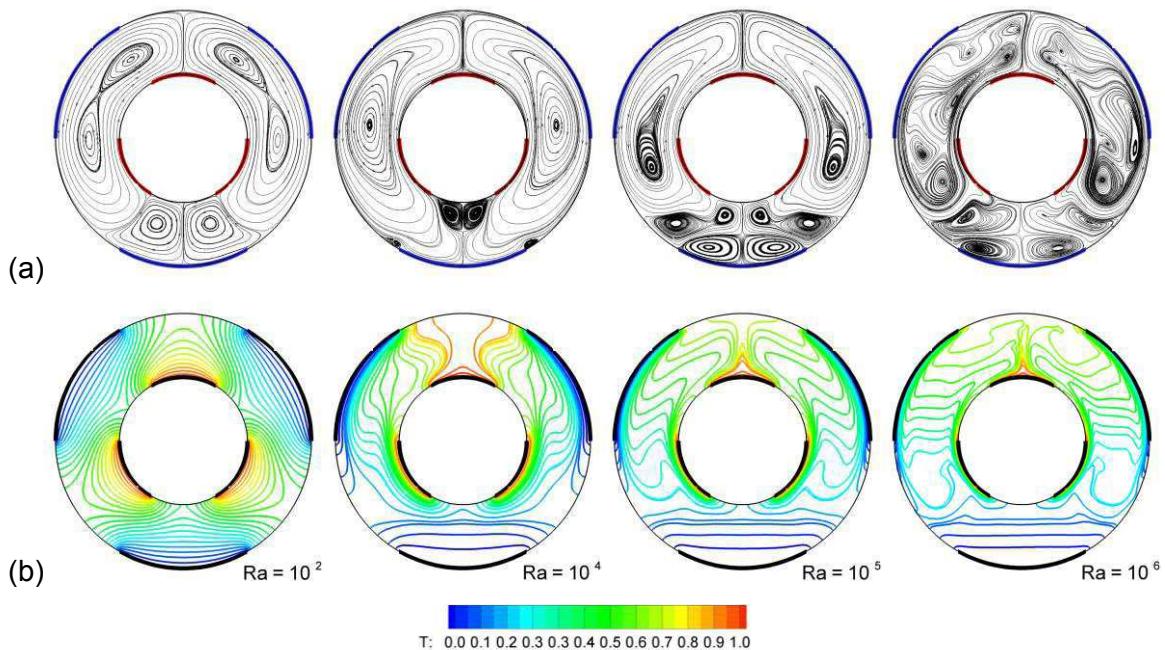


Figura 5.11 - (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C-32.

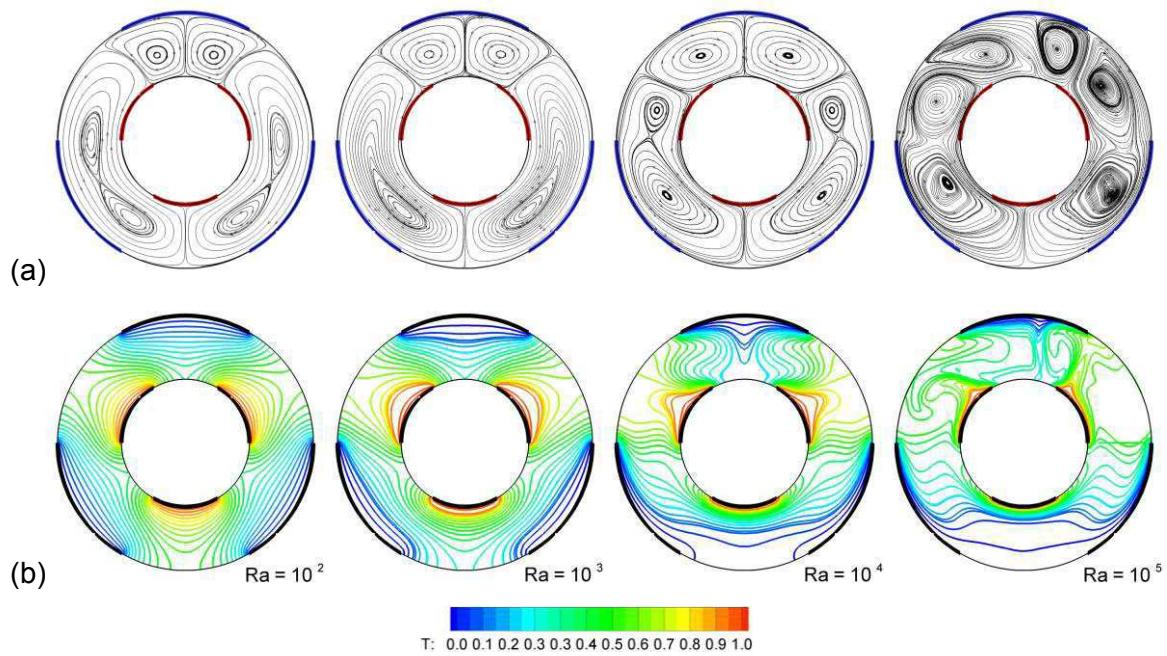


Figura 5.12 - (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C-33.

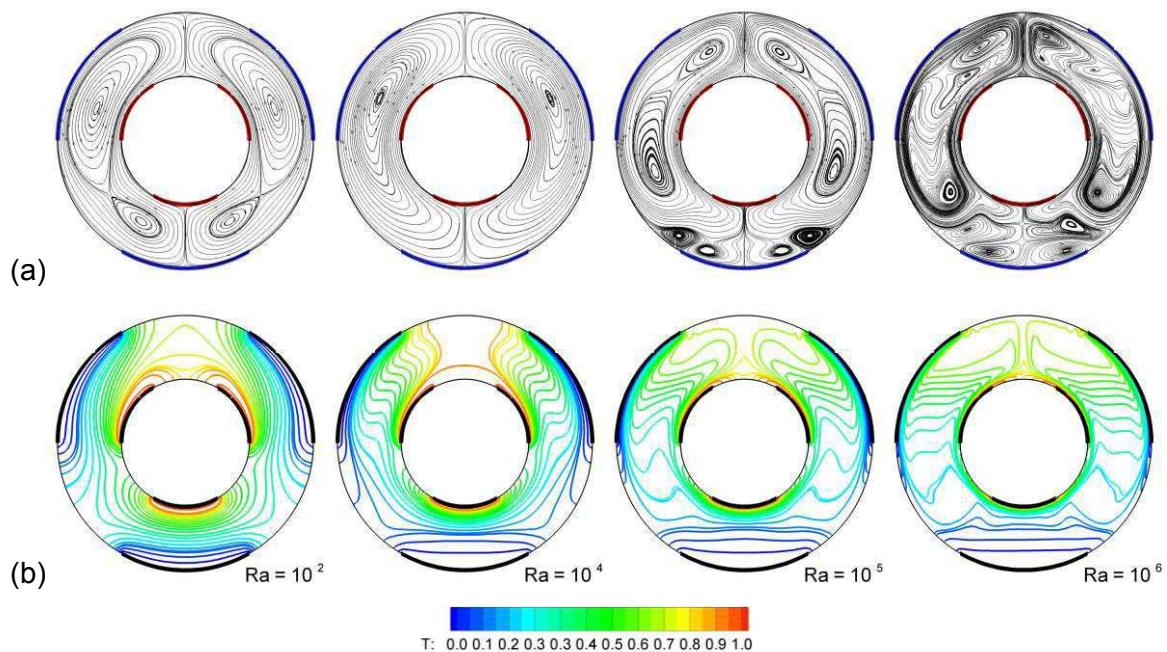


Figura 5.13 - (a) Linhas de corrente e (b) Campos de temperatura para o caso C-34.

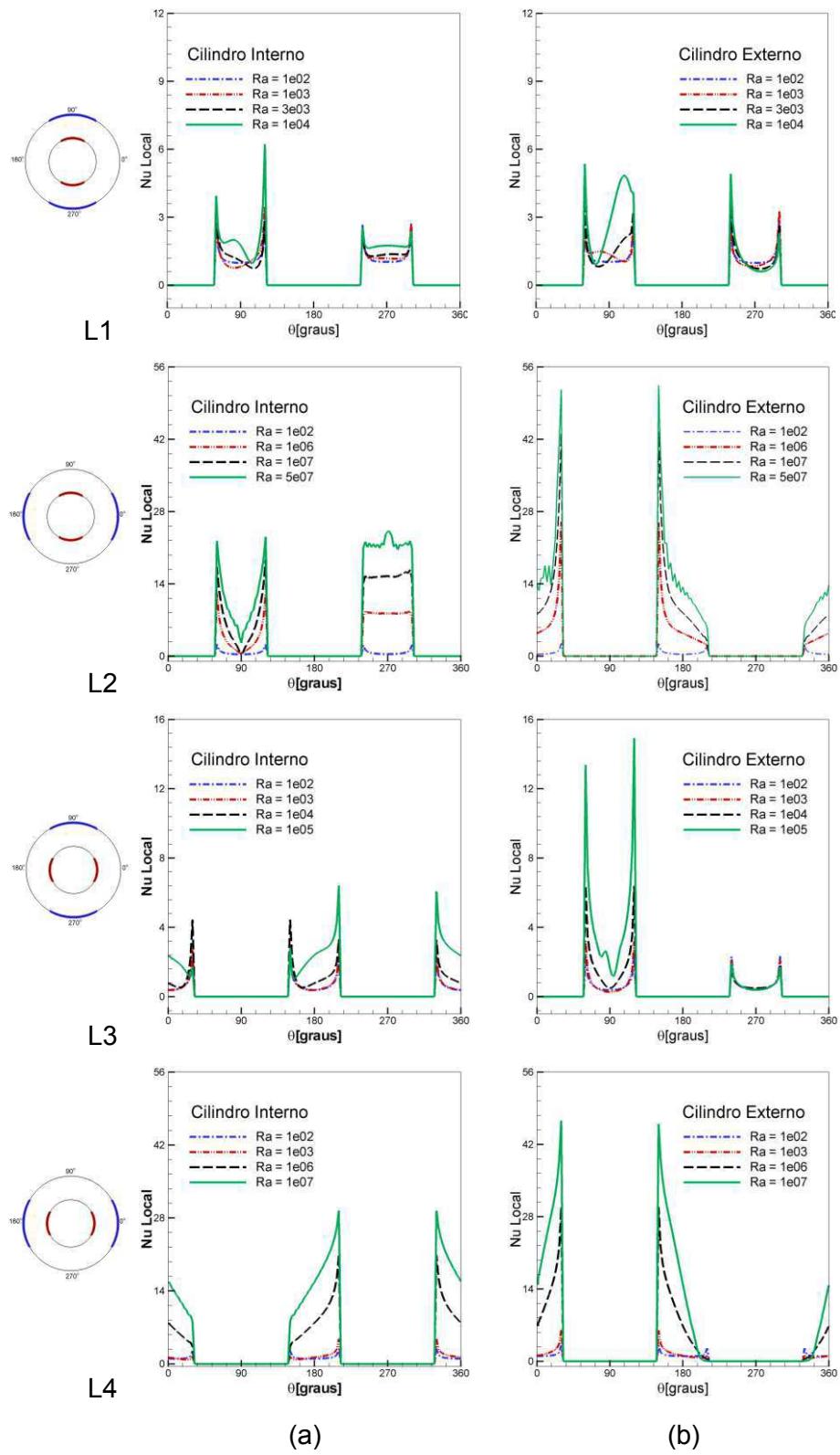


Figura 5.14 - Nusselt local – casos: C21, C22, C23 e C24: (a) Interno e (b) Externo.

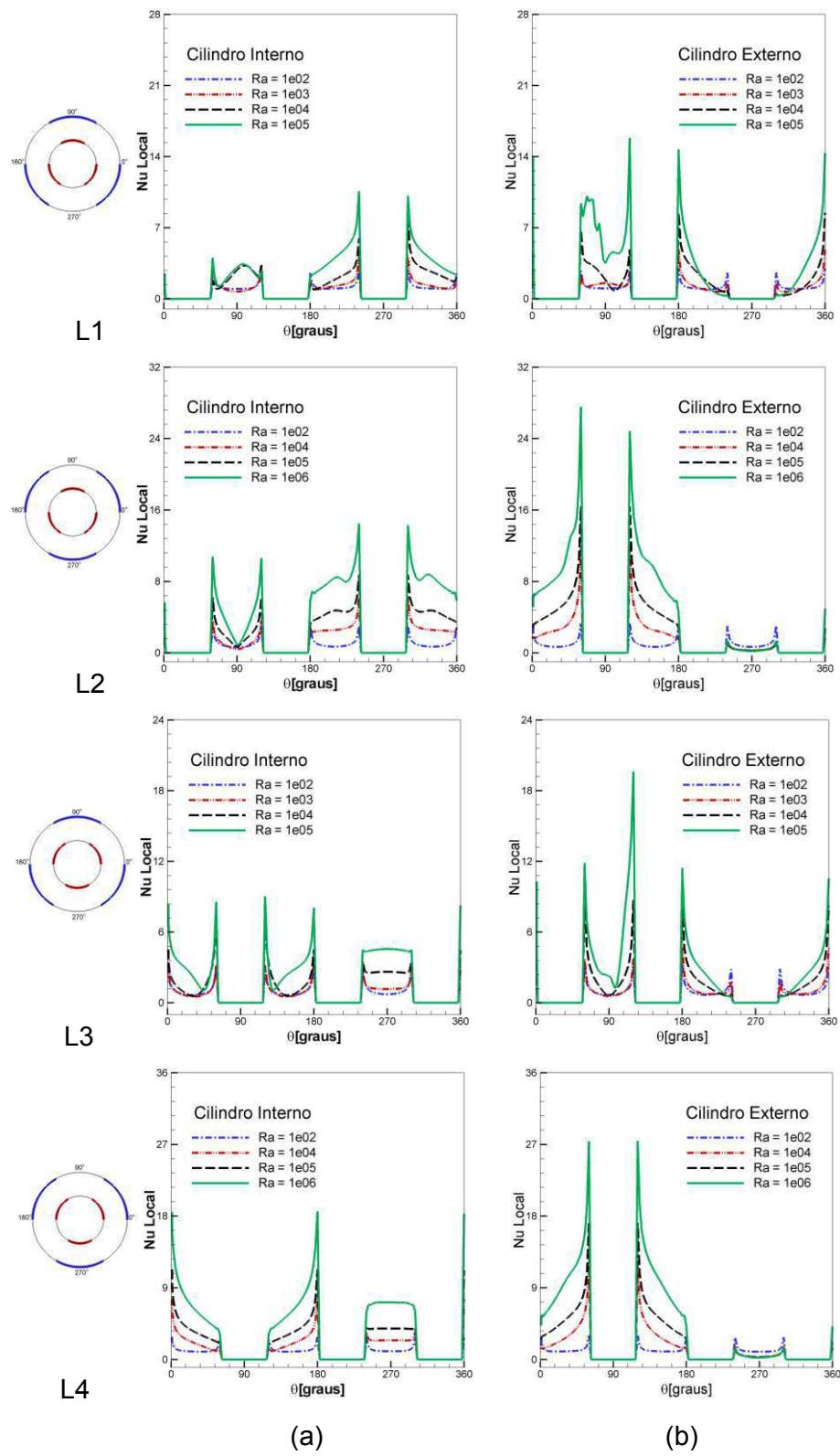


Figura 5.15 - Nusselt local – casos: C31, C32, C33 e C34: (a) Interno e (b) Externo.

Visando evidenciar as melhores taxas de transferência de energia térmica entre os casos estudados comparou-se o *Nusselt médio global* de todos os casos contendo pares de fonte e sumidouro de energia térmica frente aos resultados de (PADILLA, 2004) onde todo o cilindro interno (temperatura mais elevada) transfere calor para toda a superfície do cilindro externo (temperatura mais baixa), ou seja, trata-se do caso clássico de transferência de energia térmica por convecção entre cilindros concêntricos.

Na Fig. 5.16 tem-se a comparação dos valores do número de *Nusselt médio global* obtido por Padilla (2004) para uma faixa de  $10^2 \leq Ra \leq 10^5$ , com os casos estudados no presente trabalho, sendo que a letra (a) refere-se aos casos contendo dois pares de fonte e sumidouro de energia térmica e a letra (b) é relativa aos casos contendo três pares de fonte e sumidouro de energia térmica. Nota-se que entre os casos contendo dois pares de fonte e sumidouro de energia térmica, o caso C24 (linha laranja) apresenta o maior número de *Nusselt médio global* para todos os  $Ra$  analisados. Verifica-se também que este caso apresenta uma melhor troca térmica, maior valor de  $\overline{Nu}$ , entre os resultados obtidos para o caso clássico (linha preta), principalmente para  $Ra$  mais elevados. Nos casos contendo três pares de fonte e sumidouro de energia térmica, novamente observa-se um melhor desempenho destes, frente ao caso clássico. O caso C31 (linha azul) apresentou o maior valor de Nusselt médio global entre os demais casos contendo três pares.

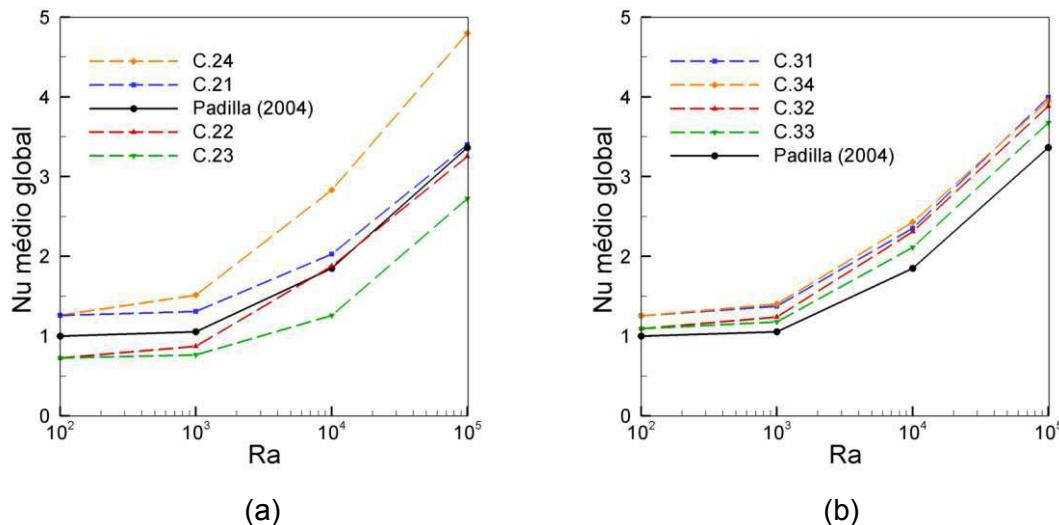


Figura 5.16 - Nusselt médio global: (a) Casos com 2 pares e (b) Casos com 3 pares.

Conforme visto através da Fig. 5.16, a presença de pares de fonte e sumidouros de calor ao longo da cavidade anular, de maneira geral aumenta a transferência de energia térmica global, pois seis dos oito casos, apresentaram maiores valores do número de Nusselt médio global, quando comparados ao caso clássico. Assim, visando caracterizar o regime de transição à turbulência, optou-se pelo caso C31, o segundo melhor desempenho energético entre os casos estudados, para ser abordado em três dimensões. Tal escolha se deve ao fato do caso C24, melhor transferência de energia térmica entre todos, apresentar um custo computacional elevadíssimo, tornando-o inviável durante a realização do presente trabalho.

Com a finalidade de determinar o número de Rayleigh crítico entre a condição estável e instável dos escoamentos foi utilizada a variação temporal da temperatura capturada na sonda B, localizada em 90° do plano médio axial ( $r/L = 1,5$ ,  $\theta = 90^\circ$ ,  $z/L = 0,5$ ).

Nas Fig.s 5.17 e 5.18, têm-se o comportamento temporal da temperatura para os oito casos, sendo a Fig. 5.6 referente aos casos contendo dois pares de fonte e sumidouro de energia térmica e a Fig. 5.7 referente aos casos contendo três pares. Em ambas as figuras as variações de temperatura foram capturadas através da sonda B.

Os sinais da temperatura adimensional evidenciam o limite da condição estável do escoamento nos diversos casos considerados. Segundo a Fig. 5.17, para os casos C21, C22, C23 e C24, os escoamentos com número de Rayleigh maiores que  $3 \times 10^3$ ,  $1 \times 10^7$ ,  $1 \times 10^4$  e  $1 \times 10^6$ , respectivamente, se manifestam instáveis. Por outro lado, a Fig. 5.18 mostra que para os casos C31, C32, C33 e C34, os escoamentos com número de Rayleigh maiores que  $1 \times 10^3$ ,  $7 \times 10^5$ ,  $2 \times 10^4$  e  $8 \times 10^5$ , respectivamente, não estão mais na condição de regime permanente.

Inicialmente, as oscilações são de pequena amplitude e de tipo harmônico, logo a amplitude aumenta em função do incremento do  $Ra$ . Entre os oitos casos estudados, três casos escaparam, aparentemente, a estas características: o caso C21, com grande amplitude; os casos C22 e C31 com várias frequências.

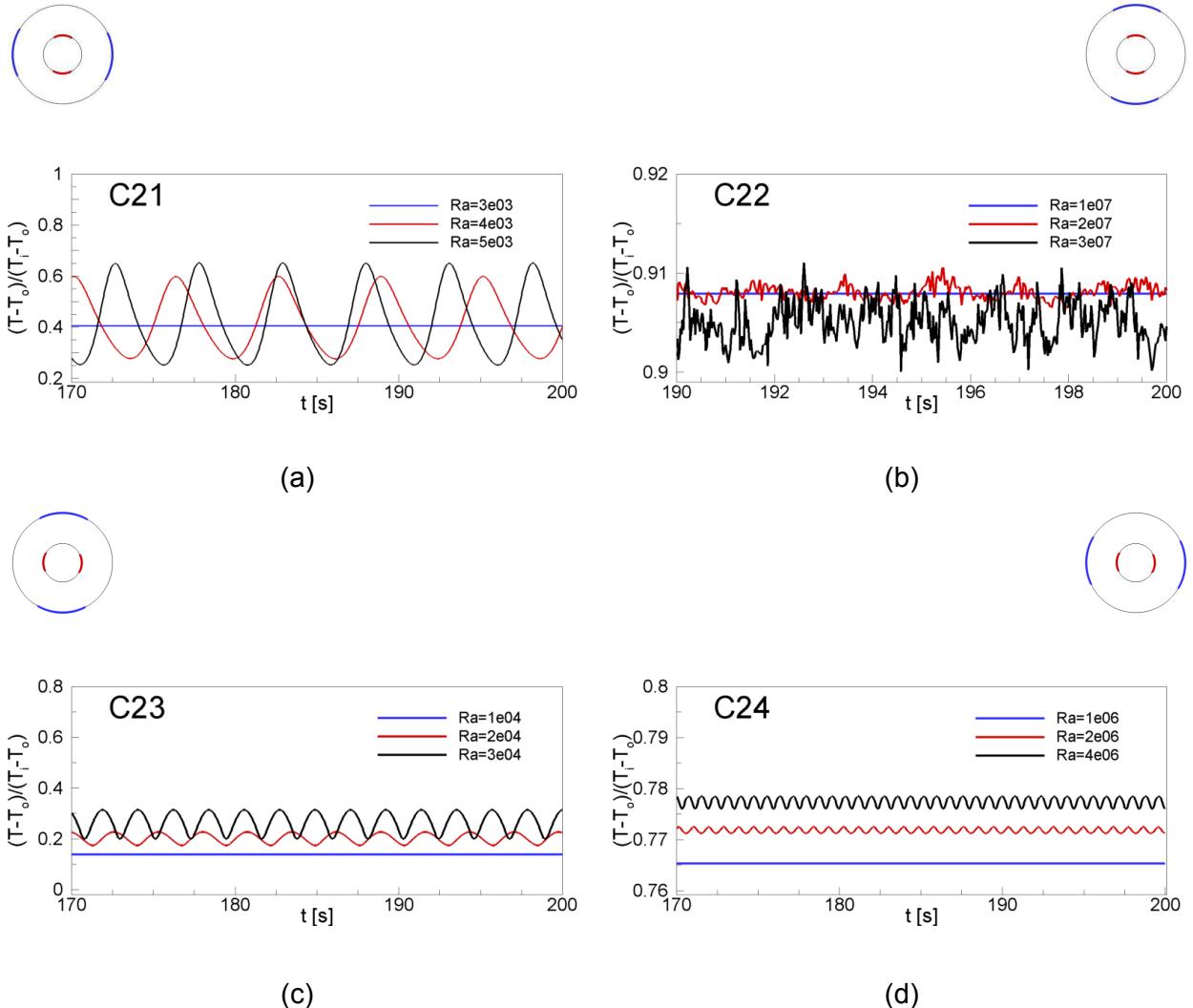


Figura 5.17 – Flutuações do sinal de temperatura referentes a sonda B para os casos contendo dois pares de fonte e sumidouros de calor: (a) C21, (b) C22, (c) C23 e (d) C24.

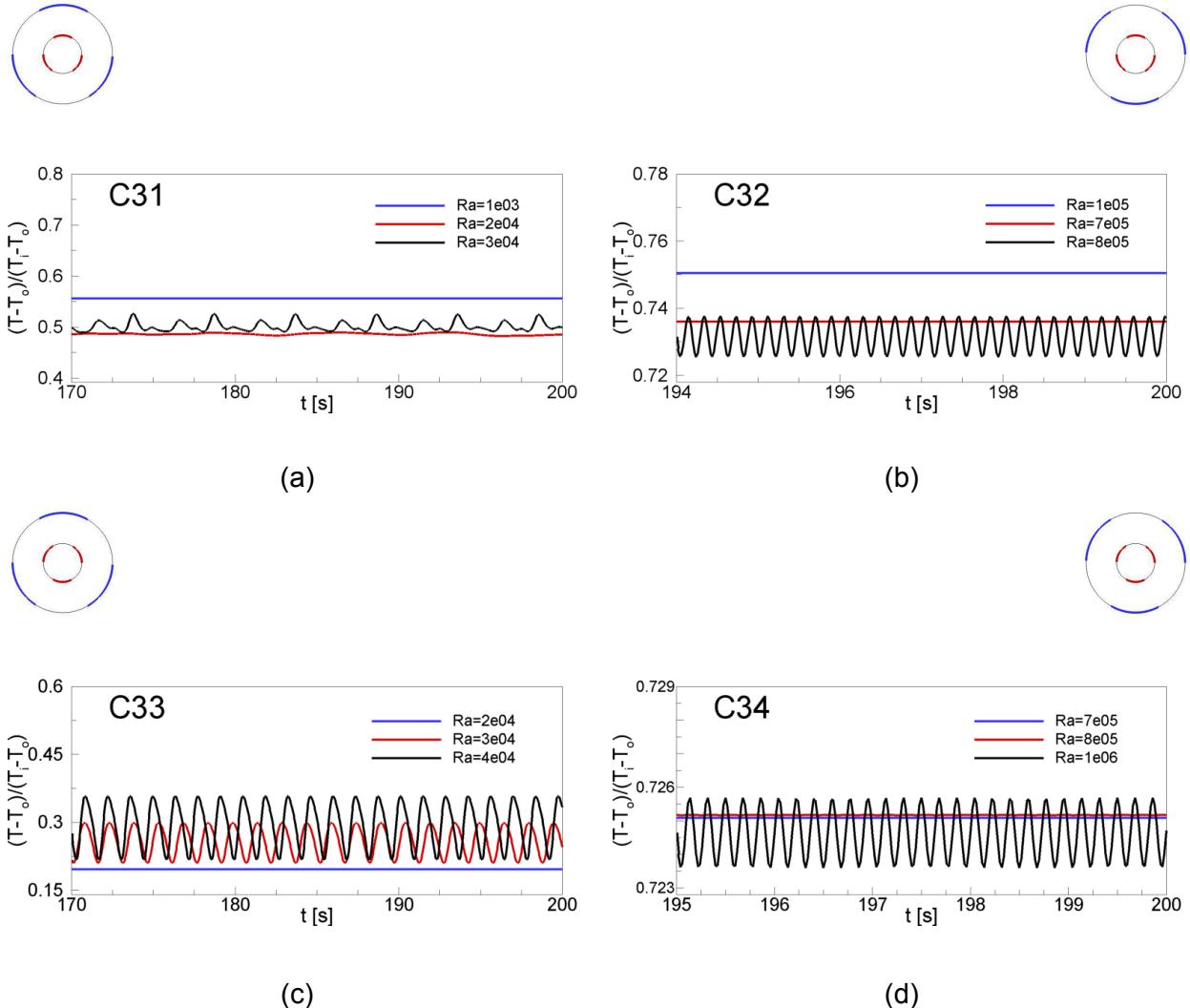


Figura 5.18 – Flutuações do sinal de temperatura referentes a sonda B para os casos contendo dois pares de fonte e sumidouros de calor: (a) C31, (b) C32, (c) C33 e (d) C34.

### 5.2.3 Aspectos numéricos e computacionais

Os resultados em duas dimensões (2D) apresentaram-se basicamente em duas configurações distintas, a primeira relativa aos casos utilizados para validação do código numérico frente os resultados da literatura, onde utilizou-se a malha  $32 \times 144 \times 2$ ,  $\eta = 2,6$  e  $\Gamma = 1$  e a segunda referente aos resultados onde considerou-se a malha  $24 \times 144 \times 2$ ,  $\eta = 2$  e  $\Gamma = 1$ .

Com o intuito de mensurar o custo computacional de cada segundo físico de simulação nas duas configurações mencionadas, criou-se as Tab. 5.4 e 5.5.

Tabela 5.4 – Custo computacional de cada segundo físico simulado considerando a malha  $32 \times 144 \times 2$ ,  $\eta = 2,6$  e  $\Gamma = 1$ , para os casos C24 e C31.

Caso C24		Caso C31	
Ra	Custo computacional [min/s]	Ra	Custo computacional [min/s]
$10^2$	1,88	$10^2$	1,18
$10^3$	2,09	$10^3$	1,34
$10^4$	3,03	$10^4$	2,72
$10^5$	5,55	$10^5$	18,94

Nota-se que para  $Ra$  maiores o custo computacional aumenta consideravelmente, tanto para os casos com dois pares de fonte e sumidouro de energia térmica quanto para os casos com três pares, sendo este aumento equivalente a aproximadamente 83% do  $Ra = 10^4$  para o  $Ra = 10^5$  no caso C24 e para o caso C31 o aumento é cerca de 134% para a mesma diferença de  $Ra$ . Para  $\eta = 2$  (Tab. 5.5), o custo computacional apresenta-se menor, assim como as diferenças entre eles.

Tabela 5.5 – Custo computacional de cada segundo físico simulado considerando a malha  $24 \times 144 \times 2$ ,  $\eta = 2,0$  e  $\Gamma = 1$ , para os casos C24 e C31.

Caso C24		Caso C31	
Ra	Custo computacional [min/s]	Ra	Custo computacional [min/s]
$10^2$	1,08	$10^2$	0,92
$10^3$	1,19	$10^3$	1,08
$10^4$	1,61	$10^4$	2,81
$10^5$	1,63	$10^5$	5,62

Todas as simulações foram realizadas utilizando a parte destinada a processamento serial do cluster 3 do Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFlab). Tal parte consiste de um sistema SGI Altix XE 1300, com 4 nós computacionais, cada um deles contendo dois processadores Intel (R) Xeon (R) CPU E5520, 2.27GHz 16-core, resultando em 64 cores. Sendo disponível 24Gs de memória RAM para cada nó computacional.

## 5.3 Resultados em três dimensões

### 5.3.1 Validação em três dimensões

Os resultados tridimensionais em regime de transição à turbulência considerando o caso clássico de convecção natural entre cilindros concêntricos, foram comparados aos dados experimentais de Fukuda et al. (1990). Os escoamentos correspondem a  $Ra = 1,7 \times 10^5$  e  $3,1 \times 10^5$  e  $5,8 \times 10^5$  e  $6 \times 10^5$ , os parâmetros:  $\eta = 2,0$  e  $\Gamma = 2,8$  e malha de  $24 \times 144 \times 34$  volumes. O modelo de fechamento submalha dinâmico foi usado. Os dados do presente trabalho são confrontados aos resultados experimentais de Fukuda et al. (1990), através das distribuições de temperatura média em função da posição radial, extraídas nos ângulos de  $90^\circ$  e  $345^\circ$ .

Na Figura 5.19(a) relativa ao  $Ra = 1,7 \times 10^5$ , nota-se que a distribuição de temperatura ao longo da posição radial do presente trabalho (linhas), apresenta a mesma tendência dos dados experimentais da referência (pontos), tanto para o ângulo de  $90^\circ$  quanto para  $345^\circ$ . Sendo o desvio relativo médio entre os dados, igual a 11,62% no ângulo de  $90^\circ$  e para  $345^\circ$  igual a 21,64%, respectivamente. Com o aumento do  $Ra$  para  $3,1 \times 10^5$ , Fig. 5.19(b), observa-se bastante próximos em ambos os ângulos analizados, ficando o desvio relativo médio igual a 4,31% para o ângulo de  $90^\circ$  e a 8,74% para o ângulo de  $345^\circ$ . Para  $Ra = 5,8 \times 10^5$ , Fig. 5.19(c) verifica-se novamente uma boa concordância entre os resultados, ficando o desvio relativo médio para  $90^\circ$  igual a 7,26% e para o ângulo de  $345^\circ$  equivalente a 21,10%.

Apesar dos resultados apresentarem desvios relativos médios da ordem de 21%, sobretudo para os  $Ra = 1,7 \times 10^5$  e  $Ra = 5,8 \times 10^5$ , a tendência com relação aos dados experimentais da referência é mantida. Já para o número de Rayleigh considerado intermediário ( $Ra = 3,1 \times 10^5$ ), os resultados estão muito próximos aos da literatura, indicando assim, que o código numérico utilizado neste trabalho é capaz de representar de maneira satisfatória o problema em regime de transição à turbulência.

Outro importante parâmetro avaliado frente aos dados da literatura corresponde ao comportamento do número de Nusselt médio global com relação a diferentes valores de  $Ra$ , esse adimensional fornece uma estimativa confiável da transferência de energia térmica em escoamentos instáveis, pois considera ambas as médias: temporal e espacial. Na Tab. 5.6 tem-se a comparação do número de Nusselt médio global obtido no presente trabalho, considerando três diferentes valores de  $Ra$ , frente aos dados numéricos de Fukuda et al. (1990) e Padilla (2004), bem como aos valores estimados através da correlação proposta por Itoh et al. (1970), fundamentada em resultados experimentais.

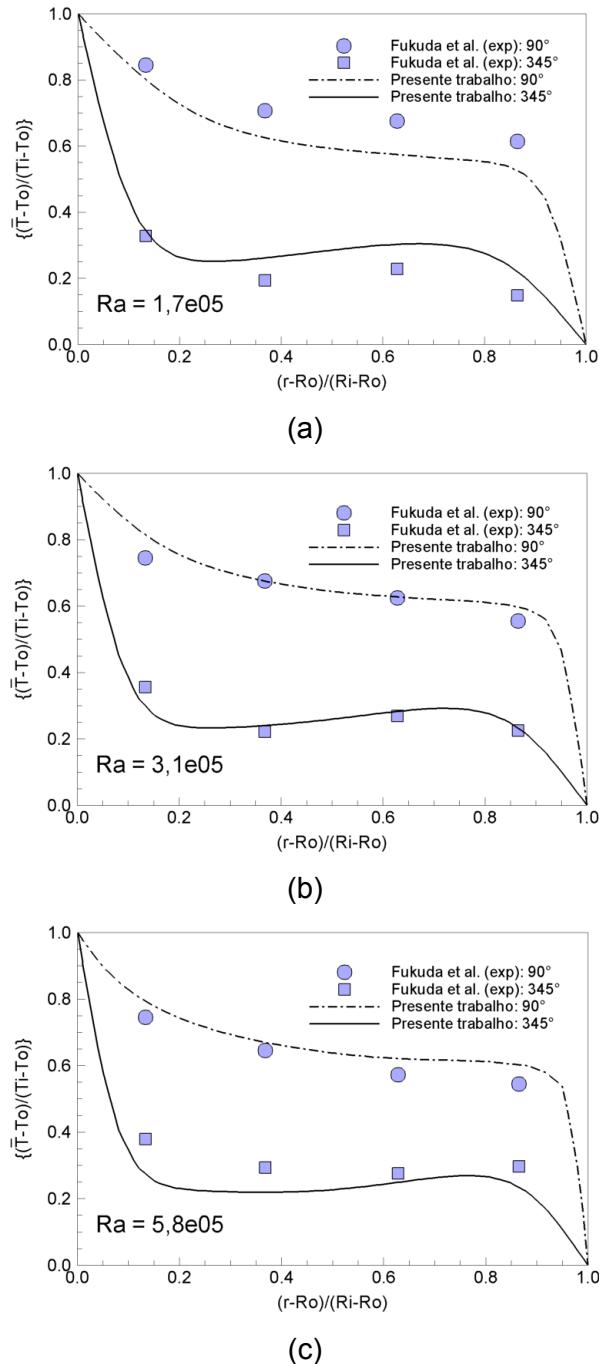


Figura 5.19 – Comparação da distribuição radial de temperatura média nos ângulos 90° e 345° com os dados experimentais de Fukuda et al. (1990) relativo ao: (a)  $\text{Ra} = 1,7 \times 10^5$ , (b)  $\text{Ra} = 3,1 \times 10^5$  e (c)  $\text{Ra} = 5,8 \times 10^5$ .

Tabela 5.6 – Comparação do número de Nusselt global em função do número de Rayleigh.

Ra	Nusselt médio global				Desvio Relativo (%)		
	Presente Trabalho	Itoh et al. (1970) (correlação)	Fukuda et al. (1990)	Padilla (2004)	Itoh et al. (1970) (correlação)	Fukuda et al. (1990)	Padilla (2004)
$1,7 \times 10^5$	3,91004	3,926	4,145	4,054	0,412	5,667	3,539
$3,1 \times 10^5$	4,56752	4,563	5,056	4,790	0,110	9,660	4,649
$5,8 \times 10^5$	5,43120	5,336	5,973	5,751	1,784	9,069	5,561

Nota-se através da Tab. 5.6 que o número de Nusselt médio global em todos os números de Rayleigh utilizados, apresentaram uma boa concordância com os dados da literatura sendo o maior desvio relativo inferior a 10%. Nota-se também que comparados aos resultados da correlação definida por Itoh et al. (1970) os resultados desse trabalho praticamente são similares, ficando o desvio relativo em todos os  $Ra$  a 2%.

### 5.3.2 Desestabilização do Escoamento - Caso (C31)

Visando caracterizar o início da desestabilização do escoamento para o caso C31, obteve-se uma série de resultados numéricos tridimensionais entre os números de *Rayleigh* de  $6 \times 10^3$  a  $2 \times 10^4$ , considerando a malha numérica  $24 \times 144 \times 34$ , ou seja, 24 elementos na direção radial, 144 elementos na direção tangencial e 34 elementos na direção axial. Utilizou-se a relação de raios  $\eta = 2$  e a razão de aspecto  $\Gamma = 2,8$ , respectivamente.

Conforme conhecimento geral da literatura, o processo de transição de um escoamento em regime laminar para o regime turbulento, ocorre devido ao aparecimento de instabilidades num escoamento inicialmente ordenado ou estável, as quais se multiplicam não linearmente ao longo do tempo tornando-o altamente instável ou turbulento. Escoamentos promovidos por convecção natural na presença de fontes e sumidouros de energia térmica, como os do caso C31, podem ser perturbados, por pequenas instabilidades, oriundas das mais diversas fontes de ruído, tais perturbações na presença de zonas de cisalhamento, características de escoamentos sob efeitos de transferência de energia térmica, amplificarão e por consequência tornarão o mesmo cada vez mais instável e imprevisível.

Desta forma, a análise do comportamento temporal de variáveis, como temperatura e velocidade, representa uma importante ferramenta na caracterização do regime do escoamento. A partir do momento em que as primeiras flutuações se manifestam, o escoamento deixa de se

comportar de forma laminar e estável, ou seja, a partir deste instante o processo de desestabilização do escoamento se inicia.

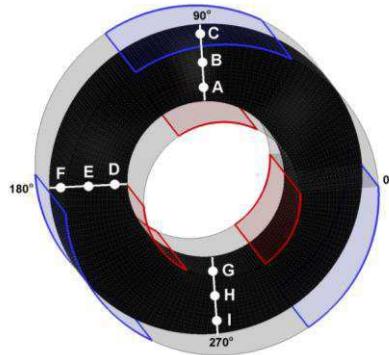


Figura 5.20 – Representação das sondas utilizadas, localizadas sobre o plano ( $r, \theta, z/L = 1,4$ ).

Várias sondas numéricas foram inseridas para monitorar as propriedades do escoamento ao longo do tempo. Estas foram posicionadas no plano médio axial ( $z/L = 1,4$ ) em  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$ . As sondas A, D e G próximas da superfície do cilindro interno ( $r/L = 1,015$ ), B, E e H no centro ( $r/L = 1,5$ ) e C, F e I nos locais próximos da superfície do cilindro externo ( $r/L = 1,985$ ), conforme observado na Fig. 5.20.

Na Figs. 5.21 e 5.22, têm-se as distribuições temporais da temperatura e da velocidade radial, no intervalo de tempo de 40s a 100s, para quatro casos entre:  $6 \times 10^3 \leq Ra \leq 2 \times 10^4$ , relativas à sonda B e C, respectivamente.

Na Fig. 5.21a nota-se que as primeiras perturbações no sinal da temperatura, no centro da cavidade (sonda B), ocorrem a partir do  $Ra = 6,2 \times 10^3$ , representado pela linha vermelha. Para o próximo número de *Rayleigh* apresentado,  $Ra = 6,8 \times 10^3$ , verifica-se um aumento no número de oscilações no sinal (linha preta). Já para,  $Ra = 2 \times 10^4$ , as oscilações se intensificam (linha verde), evidenciando o processo de desestabilização do escoamento.

O comportamento da velocidade radial ao longo do tempo, no centro da cavidade é apresentado na Fig. 5.21b. Novamente verifica-se que as primeiras perturbações ocorrem a partir do  $Ra = 6,2 \times 10^3$  (linha vermelha), contudo com amplitudes maiores para o maior  $Ra$ .

As distribuições da temperatura e da velocidade radial ao longo do tempo próximo ao cilindro externo (sonda C), são semelhantes ao observado no centro da cavidade (sonda B). No entanto, a amplitude das oscilações observada na Fig. 5.22a é muito menor, cerca de uma

ordem de grandeza. Já a diferença na amplitude do sinal de velocidade radial (Fig. 5.22b) chega a duas ordens de grandeza.

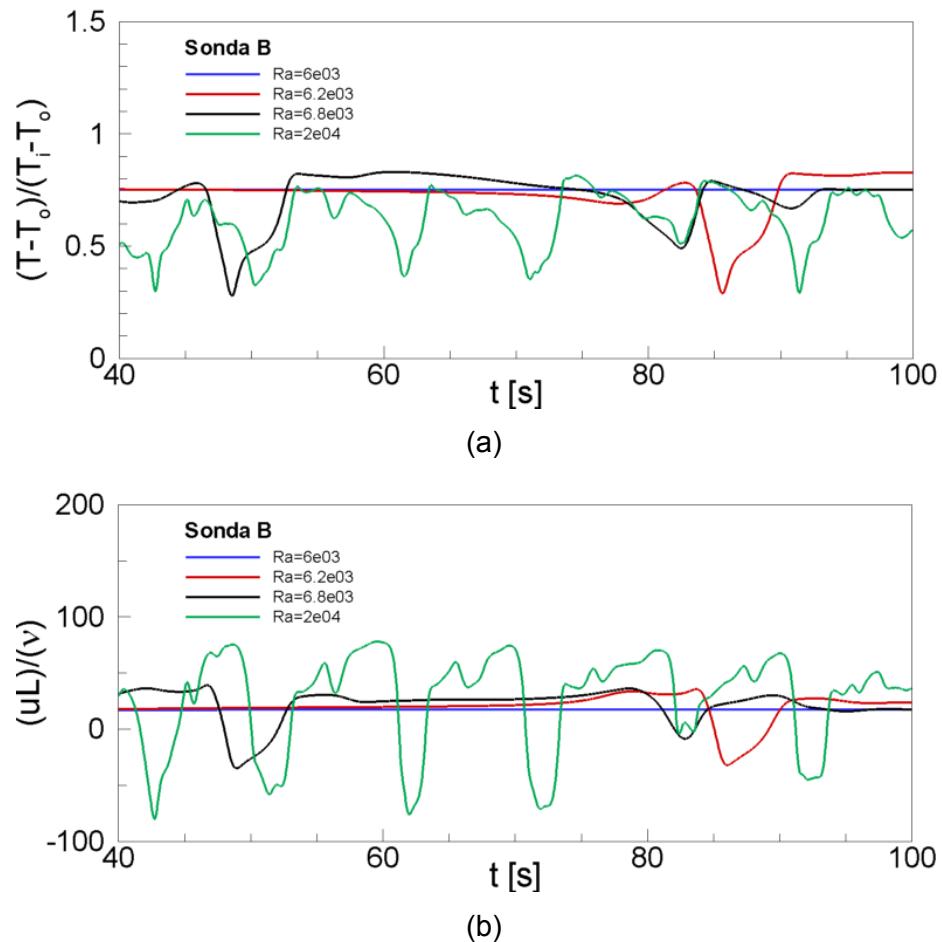


Figura 5.21 – Flutuações de temperatura (a) e velocidade radial (b) ao longo do tempo, extraídas na sonda B, para os números de *Rayleigh*:  $6 \times 10^3$ ,  $6,2 \times 10^3$ ,  $6,8 \times 10^3$  e  $2 \times 10^4$ .

A Fig. 5.23 demonstra a evolução do comportamento térmico do escoamento conforme aumenta-se o número de Rayleigh, de  $Ra = 6 \times 10^3$  a  $Ra = 2 \times 10^4$ . No instante  $t = 40s$ , nota-se a formação de plumas térmicas ascendentes das fontes de calor, representadas na figura, através da isosuperfície  $(\bar{T} - T_o)/(T_i - T_o) = 0,65$ , delimitada nas extremidades do domínio por dois planos referentes aos campos de temperatura em  $z/L = 0$  e  $z/L = 2,8$ .

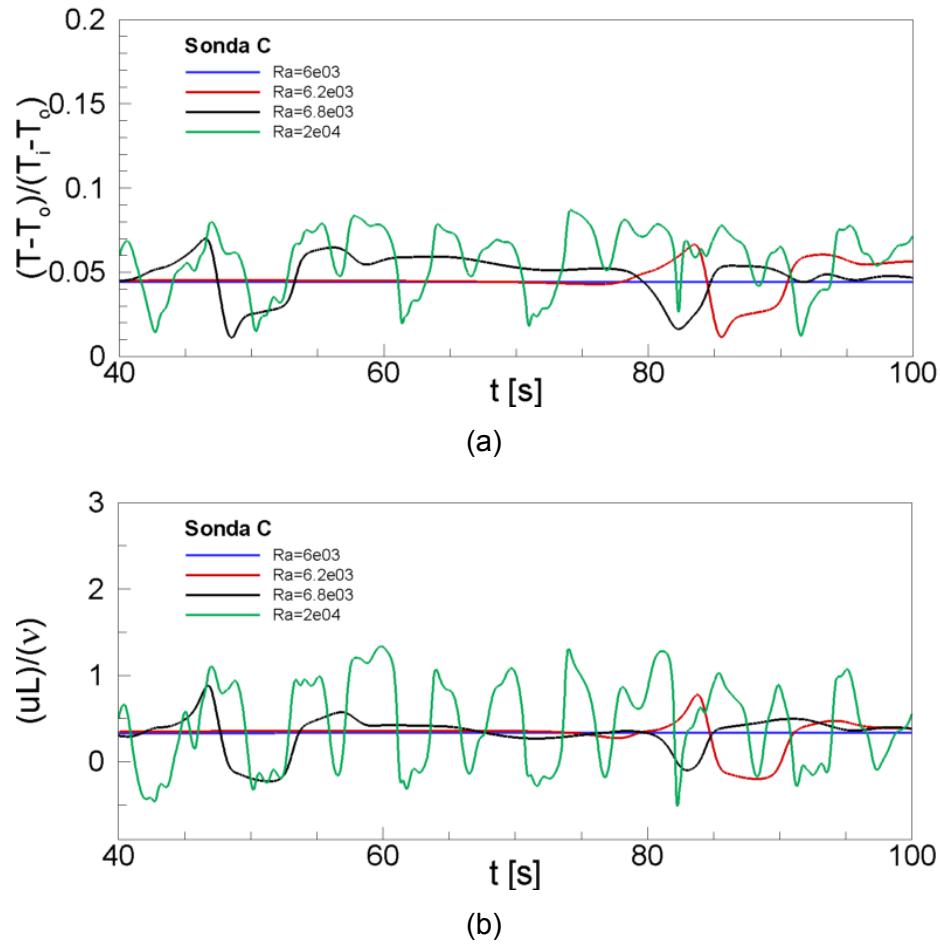


Figura 5.22 – Flutuações de temperatura (a) e velocidade radial (b) ao longo do tempo, extraídas na sonda C, para os números de *Rayleigh*:  $6 \times 10^3$ ,  $6.2 \times 10^3$ ,  $6.8 \times 10^3$  e  $2 \times 10^4$ .

Na Fig. 5.23a,  $Ra = 6,0 \times 10^3$ , as plumas térmicas provenientes das fontes laterais se unem a pluma térmica da fonte superior. Observa-se que o escoamento é simétrico verticalmente e axialmente, além disso, as plumas térmicas encontram-se bastante espessas. Não se observa oscilações no escoamento, sendo considerado, portanto, laminar estável. Conforme o número de Rayleigh aumenta para  $Ra = 6,2 \times 10^3$  (Fig. 5.23b) há uma diminuição na camada limite térmica, próximas às fontes de calor, indicando uma maior transferência de energia térmica por convecção, nota-se também uma ligeira oscilação axial e tangencial das plumas térmicas, perceptível através do afinamento do ponto de união entre as plumas. Para  $Ra$  superiores as oscilações se intensificam ainda mais e as plumas térmicas se separam. Em  $Ra = 6,8 \times 10^3$  (Fig. 5.23c), verifica-se um afinamento mais acentuado da pluma térmica, principalmente a superior. Tal fato enfatiza uma maior advecção de calor por parte das fontes

de calor presentes no cilindro interno. No  $Ra = 2,0 \times 10^4$  (Fig. 5.23d), a movimentação térmica do escoamento fica mais evidente, como verifica-se através do movimento ondulatório observado em todas as plumas.

Desta forma, constata-se uma crescente desestabilização do escoamento a partir do  $Ra = 6,2 \times 10^3$ , verifica-se também, que as oscilações se intensificam de acordo com o aumento do número de Rayleigh, tornando-o, cada vez mais instável e imprevisível.

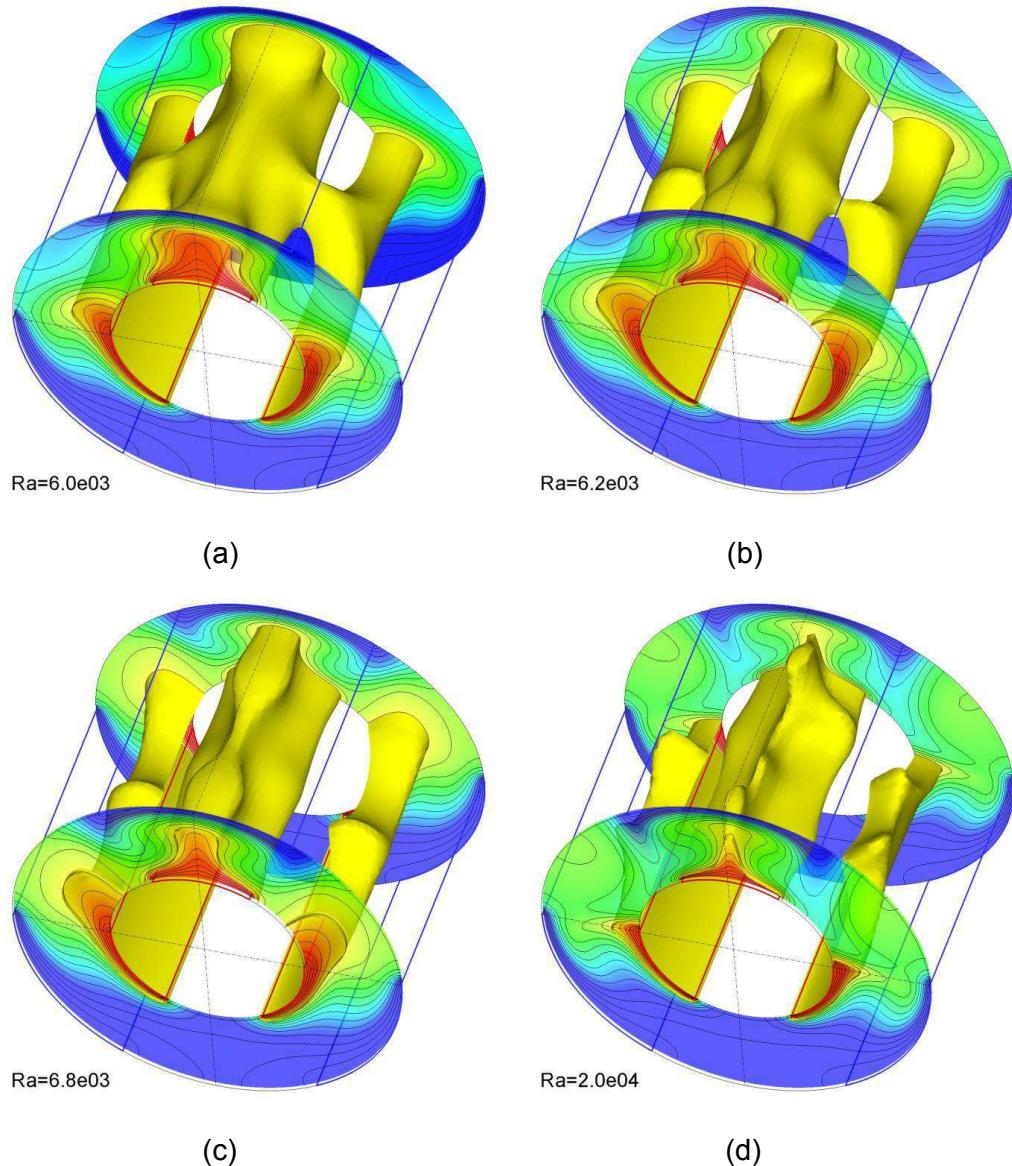


Figura 5.23 – Campos de temperatura e isosuperfície  $(\bar{T} - T_o)/(T_i - T_o) = 0,65$ , para (a)  $Ra = 6 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 6,2 \times 10^3$ , (c)  $Ra = 6,8 \times 10^3$  e (d)  $Ra = 2 \times 10^4$ , no instante  $t = 40s$ .

As oscilações no campo de temperatura também são verificadas no sentido radial através da Fig. 5.24, onde são apresentados em quatro planos ( $r, z$ ) em  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ , considerando a mesma faixa de números de *Rayleigh* abordada na Fig. 5.23 e no instante  $t = 40s$ . Conforme o  $Ra$  aumenta para  $Ra = 6,8 \times 10^3$  e  $Ra = 2 \times 10^4$ , Figs. 5.24c e 5.24d, a pluma térmica superior oscila de forma mais pronunciada, bem como fica mais nítida as oscilações das plumas térmicas laterais, planos em  $0^\circ$  e  $180^\circ$ .

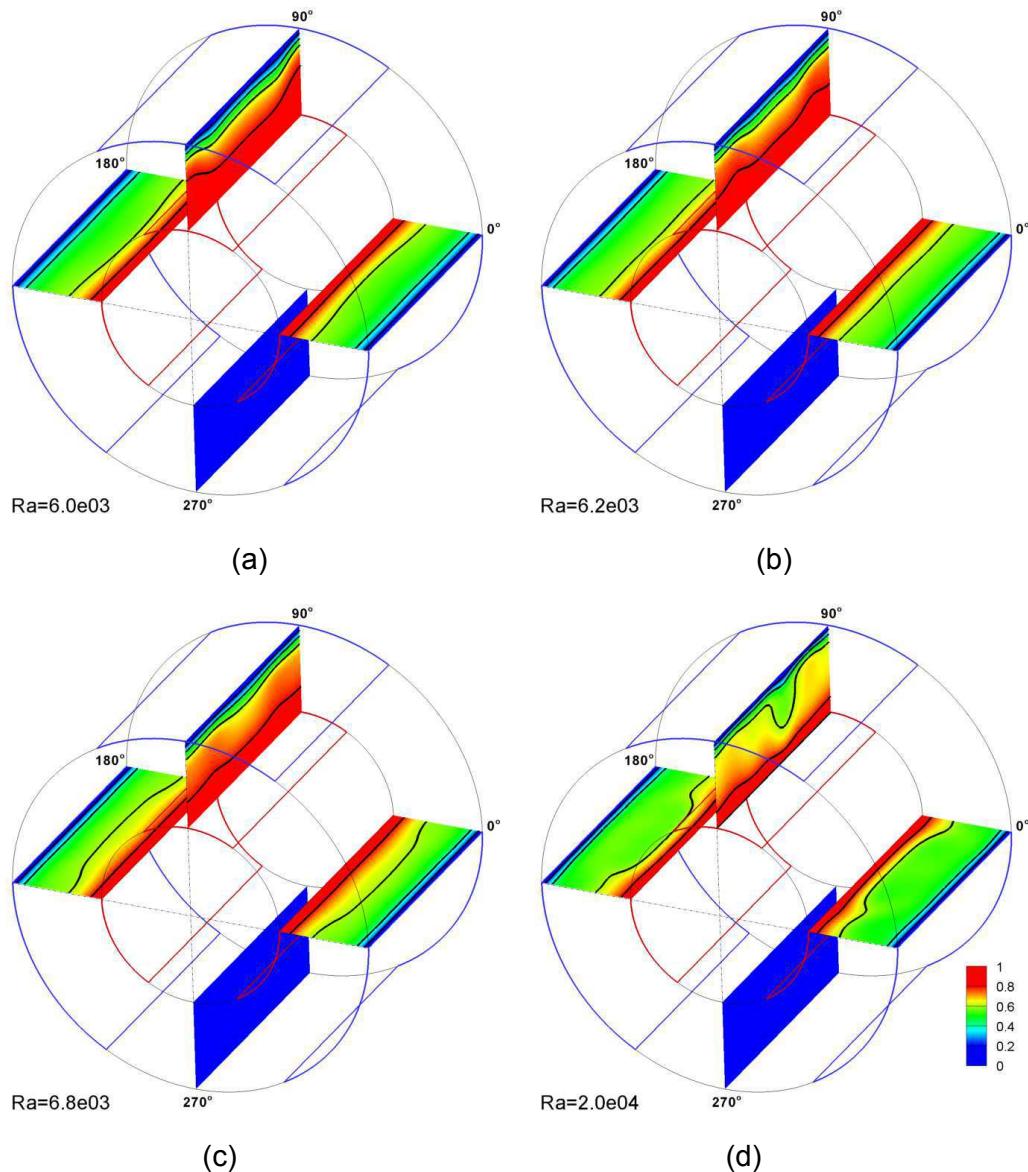


Figura 5.24 – Campos de temperatura nos planos ( $r, z$ ) em  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ , para (a)  $Ra = 6 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 6,2 \times 10^3$ , (c)  $Ra = 6,8 \times 10^3$  e (d)  $Ra = 2 \times 10^4$ , no instante  $t = 40s$ .

A Fig. 5.25 apresenta as distribuições radiais da velocidade média (média temporal), componentes: radial (Figs. 5.25a e 5.25b), tangencial (Figs. 5.25c e 5.25d) e axial (Figs. 5.25e e 5.25f) extraídas no plano ( $r, \theta, z/L = 1,4$ ) (ilustrado na Fig. 5.21), para dois números de *Rayleigh*,  $Ra = 6,2 \times 10^3$  (coluna da esquerda) e  $Ra = 2 \times 10^4$  (coluna da direita).

Nota-se que no  $Ra = 6,2 \times 10^3$  (Fig. 5.25e) a distribuição da componente axial é muito inferior as demais, cerca de duas ordens de grandeza. Já para o número de *Rayleigh* igual a  $2 \times 10^4$ , Fig. 5.25f, a componente axial aumenta intensamente assumindo valores na mesma ordem das demais. Portanto, à medida que o  $Ra$  cresce, a terceira componente da velocidade manifesta-se de forma efetiva, contribuindo para o processo de desestabilização do escoamento. Na Fig. 5.25a, nota-se que os perfis nos ângulos analisados, são bem diferentes entre si. Em  $90^\circ$  (linha vermelha) a velocidade radial apresenta-se sempre positiva, sendo o valor máximo atingido, próximo ao centro da cavidade. Apesar do escoamento no  $Ra = 6,2 \times 10^3$  já apresentar oscilações, (Figs. 5.23b e 5.24b), elas não conseguem modificar o valor médio dos perfis nas posições  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , desta forma as distribuições apresentam-se visualmente sobrepostas. Contudo para o  $2 \times 10^4$  (Fig. 5.25b) os perfis em  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , tornam-se diferentes, indicando que o aumento do *Rayleigh* intensifica a movimentação do fluido nestas posições. No ângulo de  $270^\circ$  a componente radial, diferente do comportamento apresentado em  $90^\circ$ , assume valores negativos, apontando que a aproximação das partículas de fluido ocorre adjacente à parcela inferior do cilindro interno.

Na Fig. 5.25e a componente axial apresenta perfis sobrepostos nas posições opostas  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , apesar de já existirem flutuações no escoamento neste  $Ra$ , conforme comentado anteriormente. Já para o  $Ra = 2 \times 10^4$ , Fig. 5.25f, as distribuições da componente axial da velocidade apresentam-se com valores médios diferentes, indicando que o fluido move-se na direção axial de forma assimétrica dentro da cavidade anular. Sendo que, em  $\theta = 90^\circ$  a distribuição da componente axial da velocidade, assume sempre valores negativos em toda coordenada radial, demonstrando, portanto, que a movimentação do fluido ocorre em sentido contrário a coordenada  $z$ , no plano ( $r, \theta, z/L = 1,4$ ).

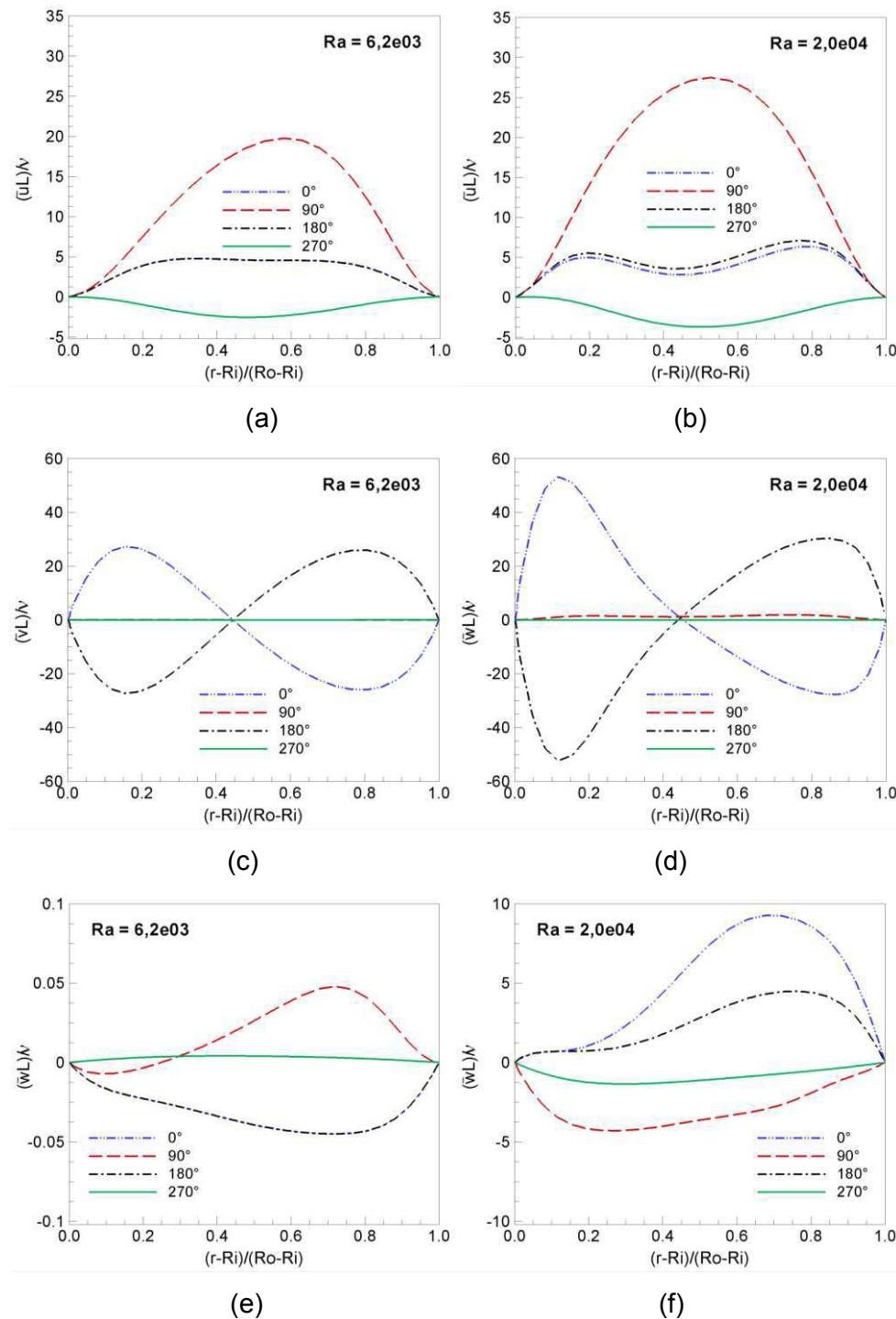


Figura 5.25 – Distribuição radial da velocidade média para vários  $\theta$  e  $z/L = 1,4$ , radial (a e b), tangencial (c e d) e axial (e e f), para  $Ra = 6,2 \times 10^3$  (lado esquerdo) e  $Ra = 2 \times 10^4$  (lado direito).

Através da Fig. 5.26, nota-se que a viscosidade turbulenta média (média temporal), que é uma variável indicadora do grau de instabilidade ou turbulência em um escoamento, se manifesta próxima ao centro da cavidade. No entanto, a magnitude (milésimos da viscosidade molecular) sugere que o modelo de turbulência não é preponderante.

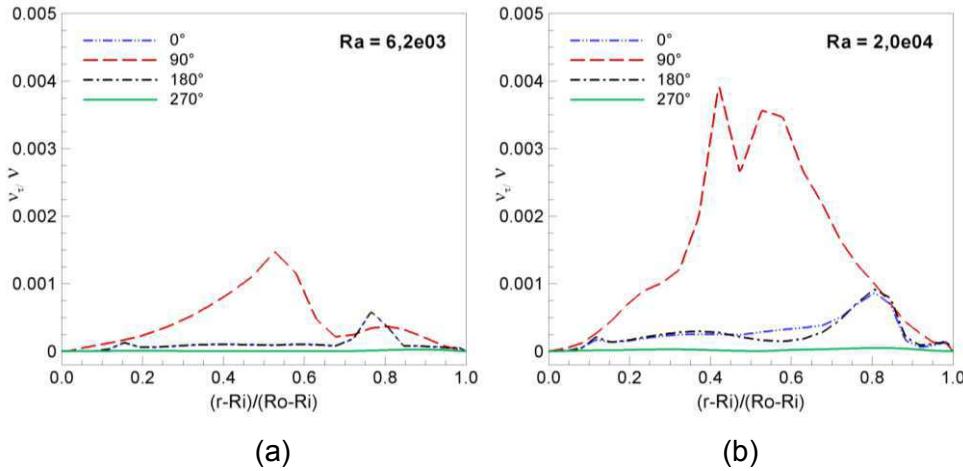


Figura 5.26 – Distribuição radial da viscosidade turbulenta média para vários  $\theta$  e  $z/L = 1,4$ ; (a)  $Ra = 6,2 \times 10^3$  e (b)  $Ra = 2 \times 10^4$ .

De forma complementar a análise, as Figs. 5.27, 5.28, 5.29 apresentam isosuperfícies das componentes da velocidade radial, tangencial e axial, respectivamente, para  $Ra = 6,2 \times 10^3$ ,  $Ra = 6,8 \times 10^3$  e  $Ra = 2,0 \times 10^4$ . A topologia das mesmas indica que para  $Ra = 6,2 \times 10^3$  o escoamento não é mais bidimensional, evidenciando o seccionamento das isosuperfícies de velocidade radial e tangencial, na direção axial, como consequência do surgimento da componente axial da velocidade. Uma forma de associar estas imagens a presença de movimento oscilatório é por meio de assimetria com relação ao plano médio vertical. No único caso que é possível observar claramente isso é para  $Ra = 2,0 \times 10^4$ , caso que mostra oscilações centrais (vide Fig. 5.27c e 5.28c), nos outros casos é imperceptível essa característica, devido o instante da amostra (40s) não coincidir com o tempo em que se manifestam as oscilações.

Padilla (2004) observou que o processo de desestabilização do escoamento entre cilindros concêntricos, na ausência de fontes e sumidouros de energia térmica, não é perceptível utilizando somente a formulação numérica bidimensional, bem como resoluções tridimensionais simplificadas (poucos elementos na direção axial). No presente trabalho o mesmo comportamento foi verificado, sendo necessário o uso de soluções numéricas

tridimensionais, para representar adequadamente a desestabilização e posterior início da transição à turbulência, conforme explicitado na Fig. 5.30.

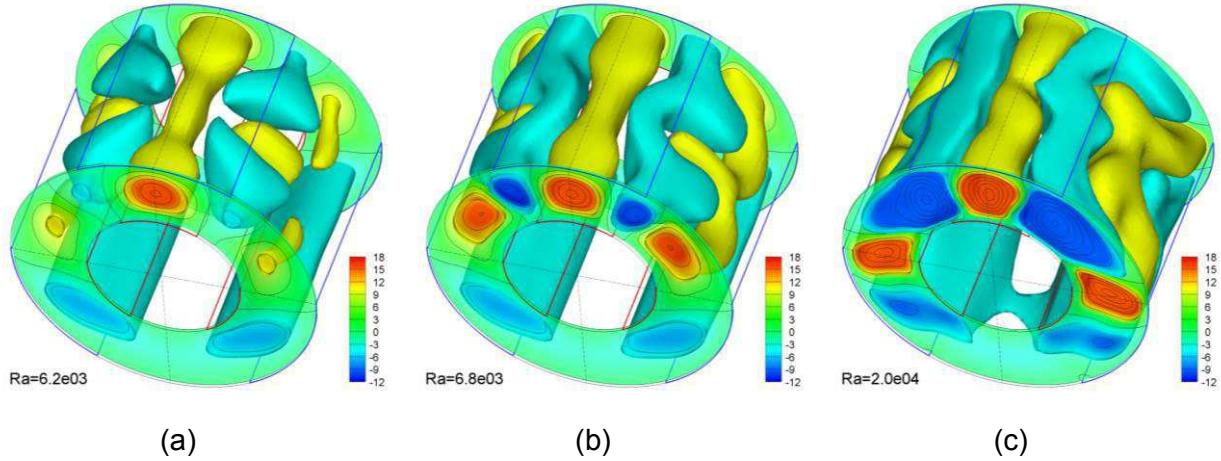


Figura 5.27 – Campos e isosuperfícies da componente radial da velocidade:  $(\bar{u}L)/\nu = -4$  (verde) e  $(\bar{u}L)/\nu = 10$  (amarela), para (a)  $Ra = 6,2 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 6,8 \times 10^3$  e (c)  $Ra = 2,0 \times 10^4$ , no instante  $t = 40s$ .

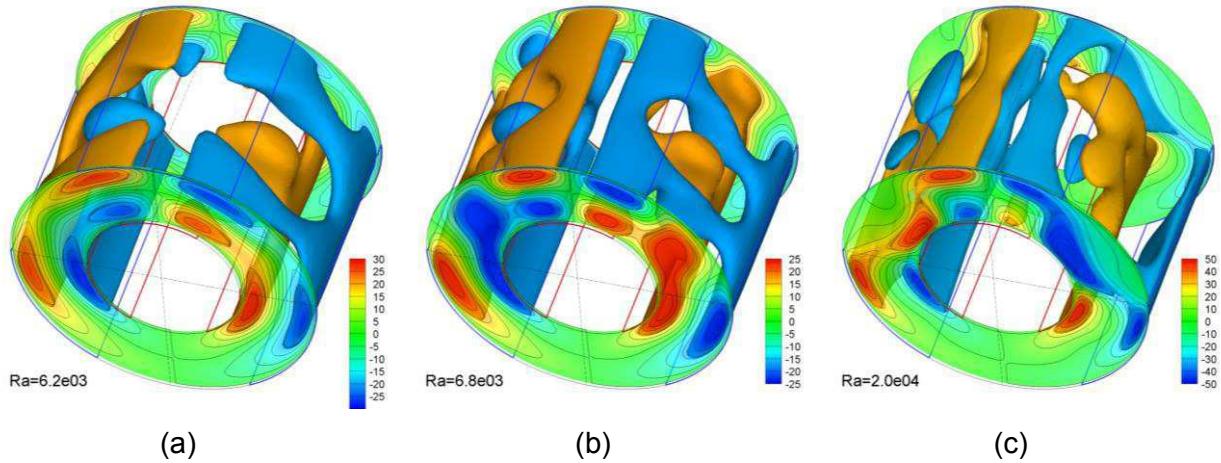


Figura 5.28 – Campos e isosuperfícies da componente tangencial da velocidade:  $(\bar{v}L)/\nu = -17$  (azul) e  $(\bar{v}L)/\nu = 17$  (marrom), para (a)  $Ra = 6,2 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 6,8 \times 10^3$  e (c)  $Ra = 2,0 \times 10^4$ , no instante  $t = 40s$ .

Conforme observado através da análise qualitativa e quantitativa realizada nesta seção, conclui-se que para o Caso C31, as primeiras instabilidades ou perturbações são percebidas a

partir do  $Ra = 6,2 \times 10^3$ , considerado como número de Rayleigh crítico entre os estados estável e instável do escoamento.

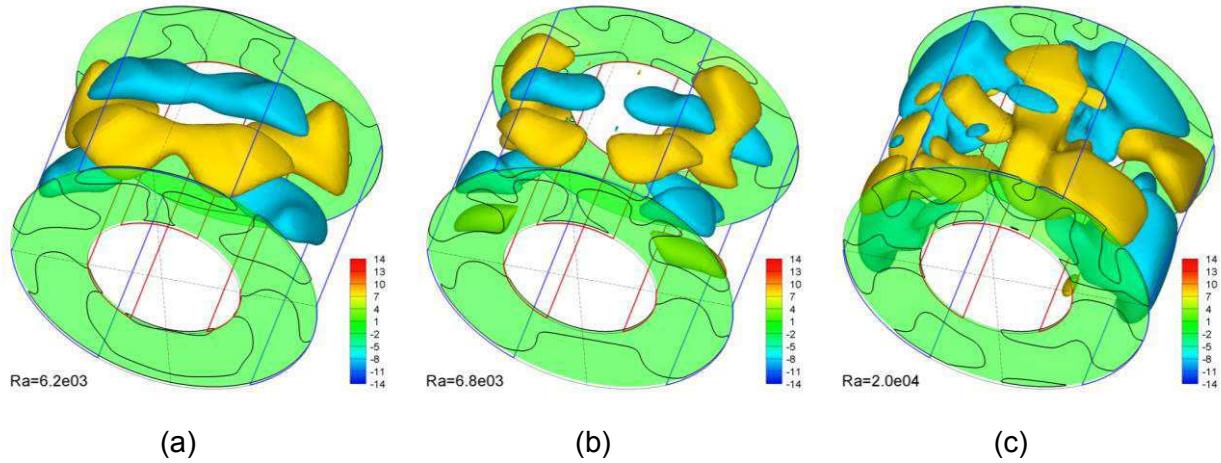


Figura 5.29 – Campos e isosuperfícies da componente axial da velocidade:  $(\bar{wL})/\nu = -8$  (azul) e  $(\bar{wL})/\nu = 8$  (amarela), para (a)  $Ra = 6,2 \times 10^3$ , (b)  $Ra = 6,8 \times 10^3$  e (c)  $Ra = 2,0 \times 10^4$ , no instante  $t = 40s$ .

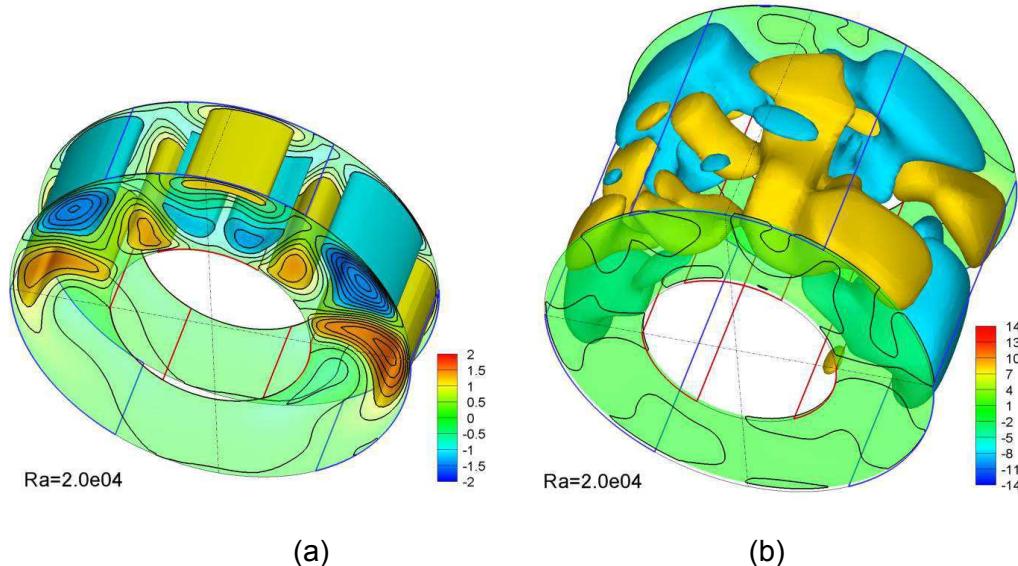
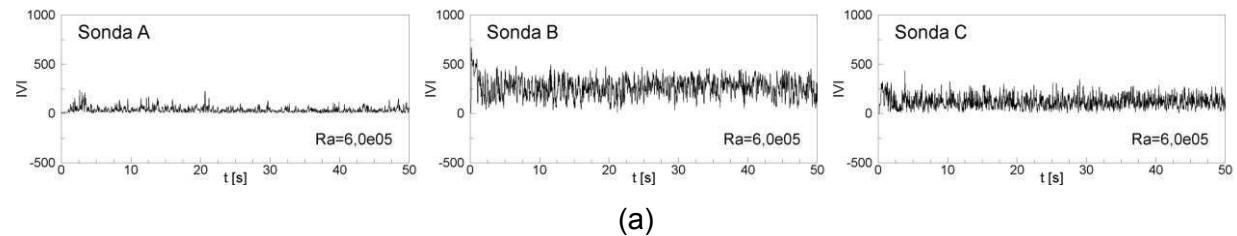


Figura 5.30 – Campos e isosuperfícies da componente axial da velocidade, para  $Ra = 2 \times 10^4$  : malha  $24 \times 144 \times 2$ ,  $(\bar{wL})/\nu = -1$  (azul) e  $(\bar{wL})/\nu = 1$  (amarela) e malha  $24 \times 144 \times 34$ ,  $(\bar{wL})/\nu = -8$  (azul) e  $(\bar{wL})/\nu = 8$  (amarela).

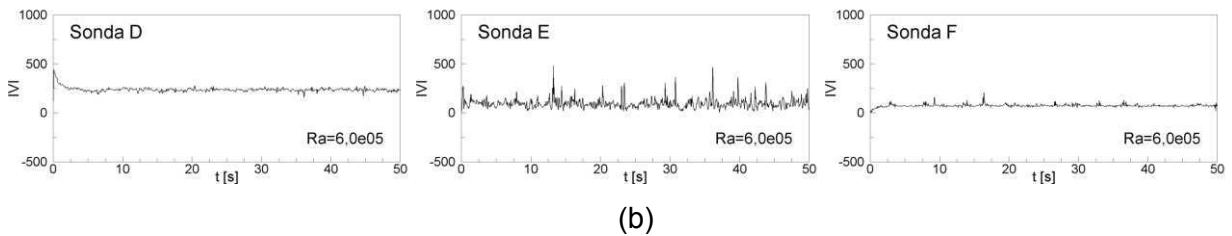
### 5.3.3 Escoamentos em transição - Caso (C31)

Dando continuidade ao estudo iniciado na seção anterior, onde abordou-se o processo de desestabilização do escoamento, ou em outras palavras, o aparecimento das primeiras instabilidades ou pertubações relativas ao Caso C31, neste item uma série de resultados numéricos tridimensionais será apresentada, visando caracterizar o ínicio e o final da transição à turbulência. A seguinte faixa de números de *Rayleigh* foi analisada:  $2,0 \times 10^4 \leq Ra \leq 1,0 \times 10^6$ , considerando a mesma configuração geométrica, malha e modelo de turbulência submalha.

$90^\circ$



$180^\circ$



$270^\circ$

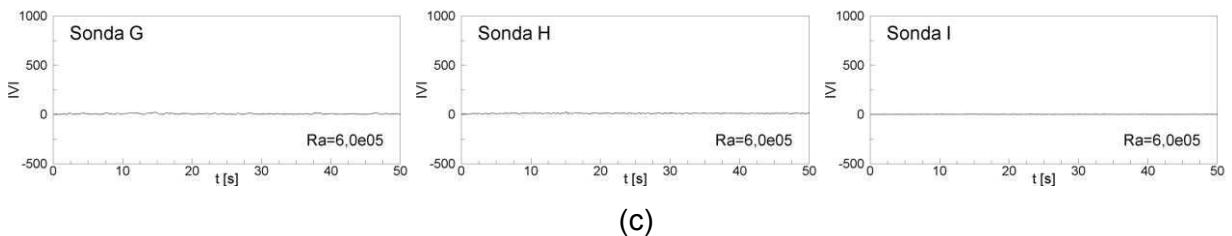


Figura 5.31 – Flutuações do módulo do vetor velocidade, para  $Ra = 6 \times 10^5$ , nas sondas posicionadas em: (a)  $\theta = 90^\circ$  (Sondas A, B e C), (b)  $\theta = 180^\circ$  (Sondas D, E e F) e  $\theta = 270^\circ$  (Sondas G, H e I).

Na Fig. 5.31 tem-se o comportamento do módulo do vetor velocidade em diferentes sondas. De forma geral, as maiores velocidades em módulo são encontradas no centro da direção radial, sondas B ( $90^\circ$ ), sonda E ( $180^\circ$ ) e sonda H ( $270^\circ$ ). Os resultados obtidos pelas

sondas, localizadas na parte inferior da cavidade ( $\theta = 270^\circ$ ) são muito inferiores aos demais, principalmente quando comparados as sondas superiores localizadas em  $\theta = 90^\circ$ . Desta forma, a partir deste ponto, serão consideradas somente as sondas B ( $\theta = 90^\circ$ ) e E ( $\theta = 180^\circ$ ), visando relatar o comportamento do escoamento na parte superior e lateral da cavidade.

As flutuações da componente radial da velocidade das sondas B e E são apresentadas nas Figs. 5.32a e 5.32b, respectivamente, para cinco valores de números de Rayleigh:  $Ra = 4 \times 10^4$ ,  $Ra = 2 \times 10^5$ ,  $Ra = 6 \times 10^5$ ,  $Ra = 8 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ . Para  $Ra = 4 \times 10^4$ , apesar da baixa frequência e amplitude apresentadas, já há irregulares ao longo do tempo, ou seja, não verifica-se estatisticamente um padrão de repetição dos sinais. Tal característica é melhor observada no  $Ra = 2 \times 10^5$ , onde as oscilações apresentam-se ainda mais aleatórias e em maiores frequências, em ambas as sondas B e E. Para os números de Rayleigh superiores as flutuações acontecem com maior intensidade, sendo notório o aumento nas frequências e amplitudes dos sinais.

Nota-se também que, para números de *Rayleigh* considerados inferiores, os resultados das sondas B (Fig. 5.32a) e E (Fig. 5.32b) são bem próximos em magnitude, indicando assim, que para esta faixa de números de *Rayleigh*, ambas as fontes (laterais e superior) contribuem de forma semelhante no processo de transição à turbulência. Contudo, com o aumento para  $Ra = 6 \times 10^5$ ,  $Ra = 8 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ , as flutuações ocorrem de forma mais acentuada na sonda B, frisando uma maior movimentação do fluido na parte superior da cavidade do que lateralmente.

Também verifica-se na Fig. 5.32, que o tempo necessário para escoamento atingir regime permanente estatístico decai com o aumento do número de *Rayleigh*.

As potências espectrais relacionadas as velocidades da Fig. 5.32, são demonstradas na Fig. 5.33, sendo a Fig. 5.33a correspondente a sonda B e a Fig. 5.33b a sonda E. Na Fig. 5.33a é possível identificar, já a partir do  $Ra = 4 \times 10^4$ , a presença de picos com grande potência, que correspondem as grandes estruturas do escoamento. Para esse número de *Rayleigh*, observa-se duas frequências fundamentais em: 0,05 e 0,11 Hz e duas frequências secundárias em 0,29 e 0,51 Hz, por exemplo. Nota-se através da Fig. 5.33a, e de forma menos perceptível na Fig. 5.33b, que conforme aumenta-se o número de *Rayleigh* as flutuações de altas frequências se intensificam, bem como os espectros apresentam-se com bandas de frequências maiores, principalmente em  $Ra = 8 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ , em ambas as sondas. Tais espectros são característicos de escoamentos turbulentos, os quais apresentam estruturas completamente diversificadas com diferentes números de onda e frequências. Assim, acredita-se que provavelmente os escoamentos com  $Ra = 8 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ , não correspondem mais a escoamentos em transição, mas sim a escoamentos turbulentos.

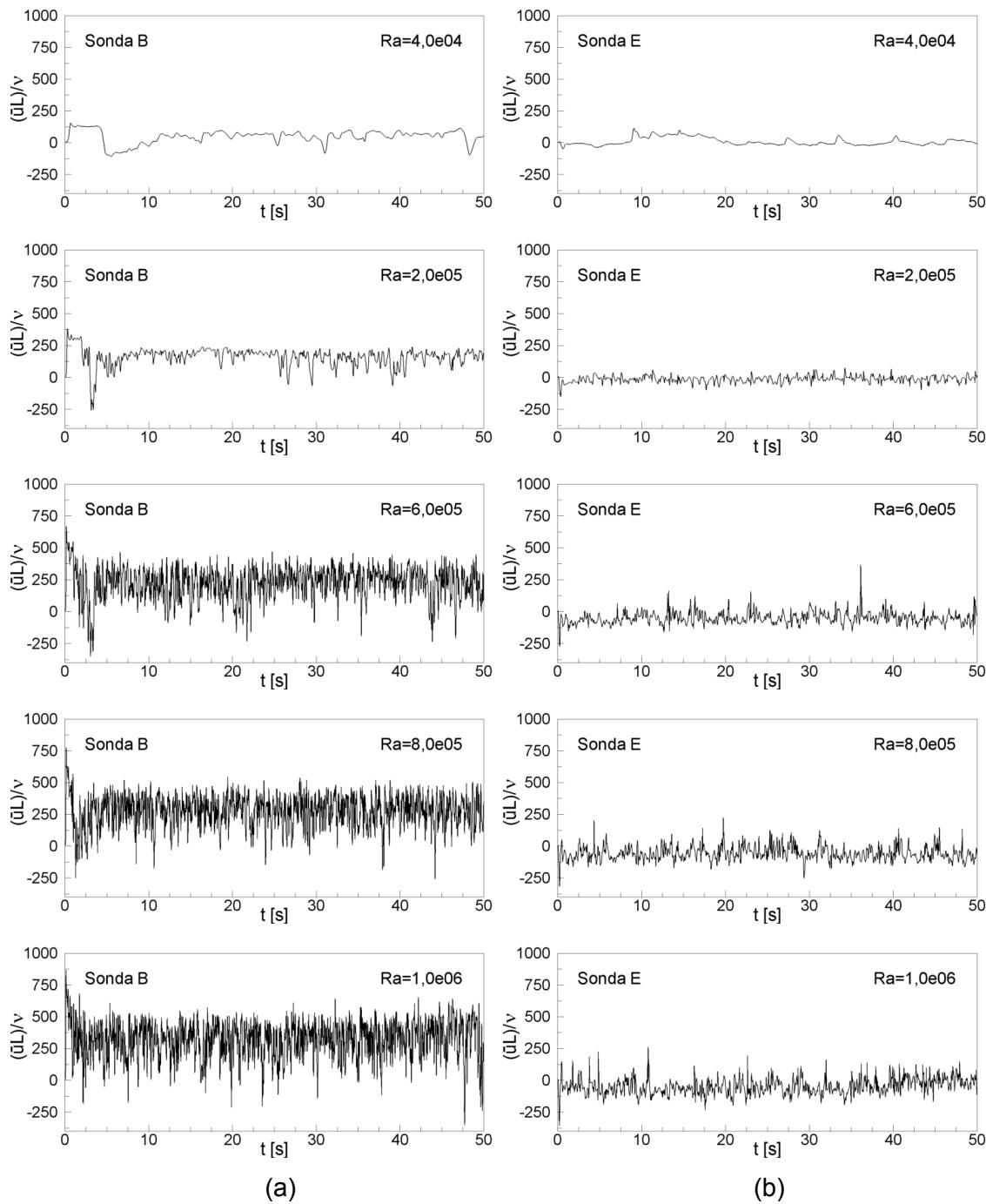


Figura 5.32 – Flutuações da componente radial da velocidade obtidas nas sondas B (a) e E (b), para:  $Ra = 4 \times 10^4$ ,  $Ra = 2 \times 10^5$ ,  $Ra = 6 \times 10^5$ ,  $Ra = 8 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ .

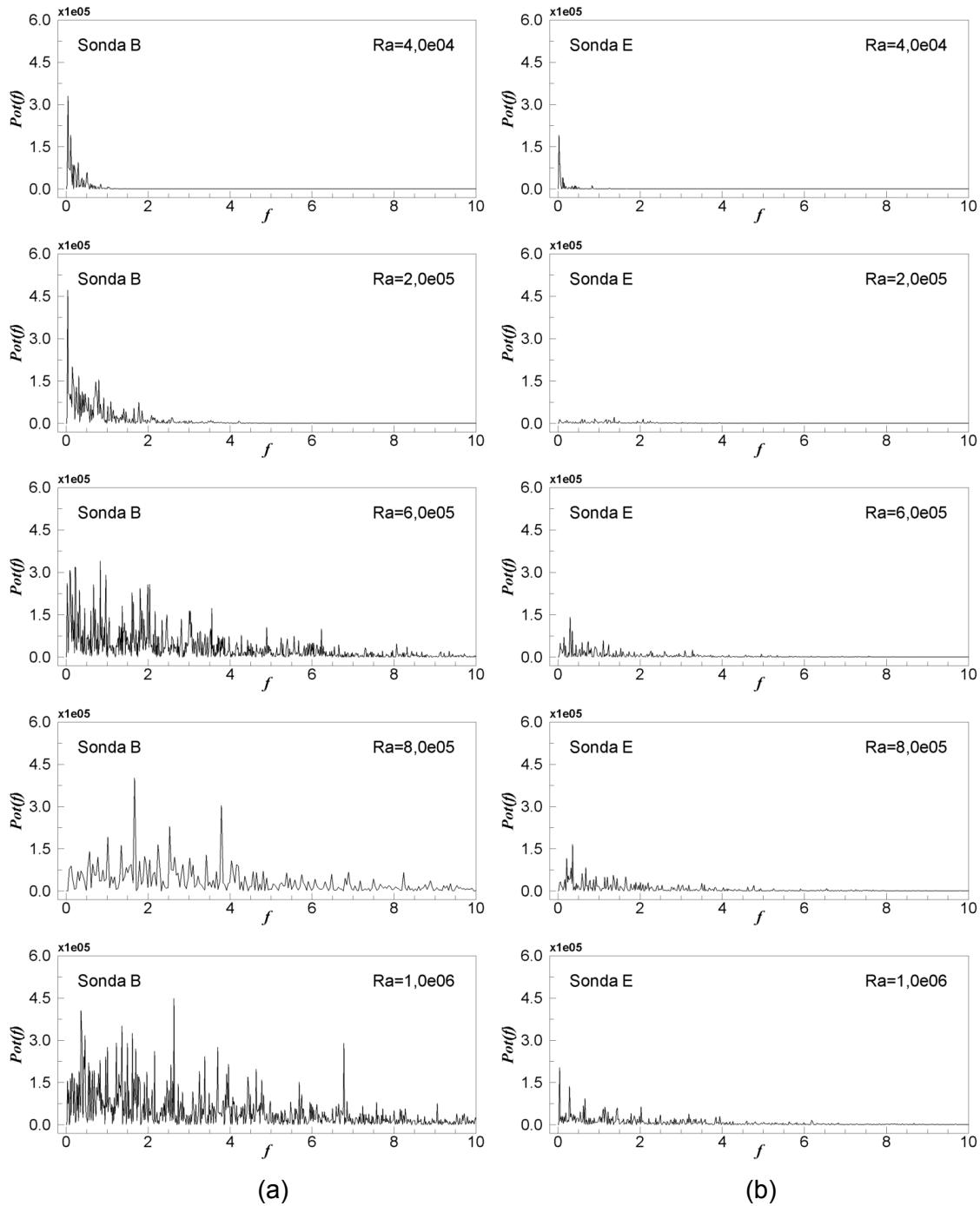


Figura 5.33 – Potência espectral das flutuações da componente radial da velocidade obtidas nas sondas B (a) e E (b), para:  $\text{Ra} = 4 \times 10^4$ ,  $\text{Ra} = 2 \times 10^5$ ,  $\text{Ra} = 6 \times 10^5$ ,  $\text{Ra} = 8 \times 10^5$  e  $\text{Ra} = 1 \times 10^6$ .

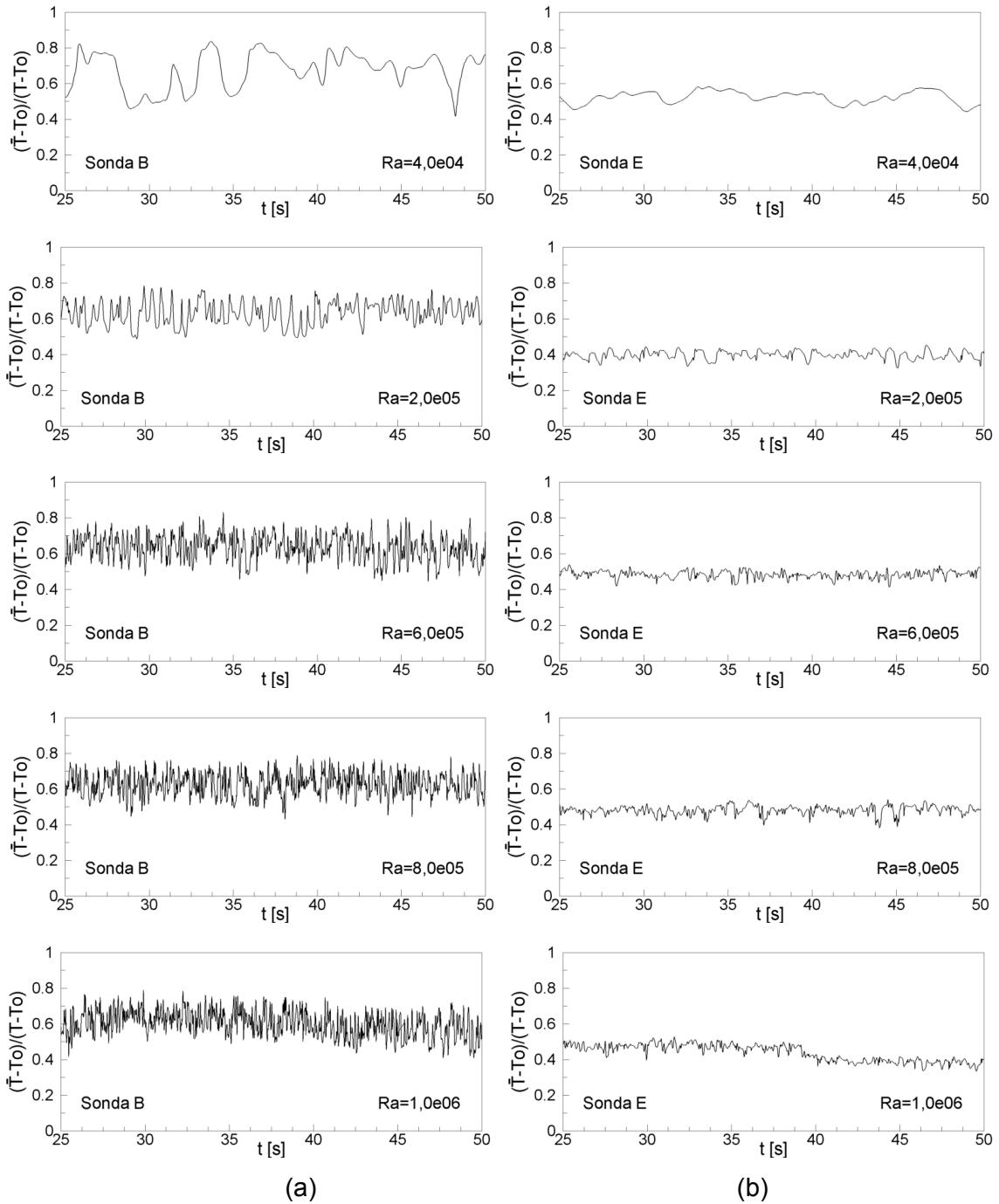


Figura 5.34 – Flutuações da temperatura obtidas nas sondas B (a) e E (b), para:  $Ra = 4 \times 10^4$ ,  $Ra = 2 \times 10^5$ ,  $Ra = 6 \times 10^5$ ,  $Ra = 8 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ .

Na Fig. 5.34, tem-se as flutuações da temperatura nas sondas B e E, considerando os mesmos valores de números de Rayleigh analisados nas Figs. 5.32 e 5.33. A mesma

irregularidade apresentada no sinal da componente radial da velocidade para  $Ra = 4 \times 10^4$  e  $Ra = 2 \times 10^5$  é ainda mais notória para o sinal da temperatura, onde observam-se flutuações de grandes amplitudes em B. Para *Rayleigh* maiores, o mesmo comportamento também é presenciado, ou seja, o aumento no número de *Rayleigh* intensifica drasticamente o número de flutuações apresentadas pelo sinal. A presença de oscilações com grandes amplitudes refletem o comportamento dinâmico oscilatório descrito pela pluma térmica, conforme, constata-se nas Figs. 5.35 e 5.36.

Na Fig. 5.35 são apresentadas as isosuperfícies de temperatura  $(\bar{T} - T_o)/(T_i - T_o) = 0,3$  (azul) e  $(\bar{T} - T_o)/(T_i - T_o) = 0,65$  (amarela), relativas a três números de *Rayleigh*. Comparando a Fig. 5.35a ( $Ra = 2 \times 10^4$ ) com a Fig. 5.35b ( $Ra = 4 \times 10^4$ ), nota-se que o aumento no número de *Rayleigh* ocasionou uma mudança significativa no movimento e na forma da pluma térmica, essa apresenta-se mais oscilante nas três dimensões e com maiores amplitudes, principalmente, na parte superior da cavidade. Para  $Ra = 5 \times 10^4$  (Fig. 5.35c) observa-se que, as plumas térmicas laterais apresentam ondulações axiais com menores amplitudes, já a pluma térmica superior começa a perder a forma periódica bem definida, vista no  $Ra = 4 \times 10^4$  (Fig. 5.35b), tal fato, intensifica o processo de transição à turbulência. Também é evidenciado na Fig. 5.35c, isosuperfície azul  $(\bar{T} - T_o)/(T_i - T_o) = 0,3$ , a presença de uma grande oscilação na direção axial, demonstrando assim, a acentuada movimentação da pluma térmica superior nesta direção.

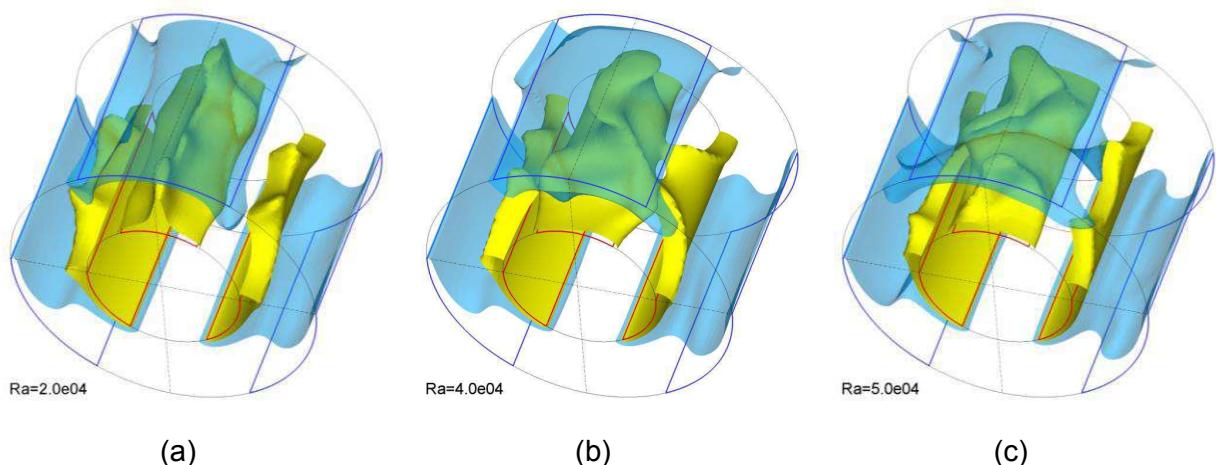


Figura 5.35 – Isosuperfícies de temperatura, 0,3 (azul) e 0,65 (amarela) para: (a)  $Ra = 2 \times 10^4$ , (b)  $Ra = 4 \times 10^4$  e (c)  $Ra = 5 \times 10^4$ .

Dando continuidade a análise qualitativa do escoamento, na Fig. 5.36 apresenta-se as mesmas condições e isosuperfícies de temperatura consideradas na Fig. 5.35, contudo para os seguintes números de Rayleigh:  $Ra = 4 \times 10^4$ ,  $Ra = 2 \times 10^5$ ,  $Ra = 6 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ .

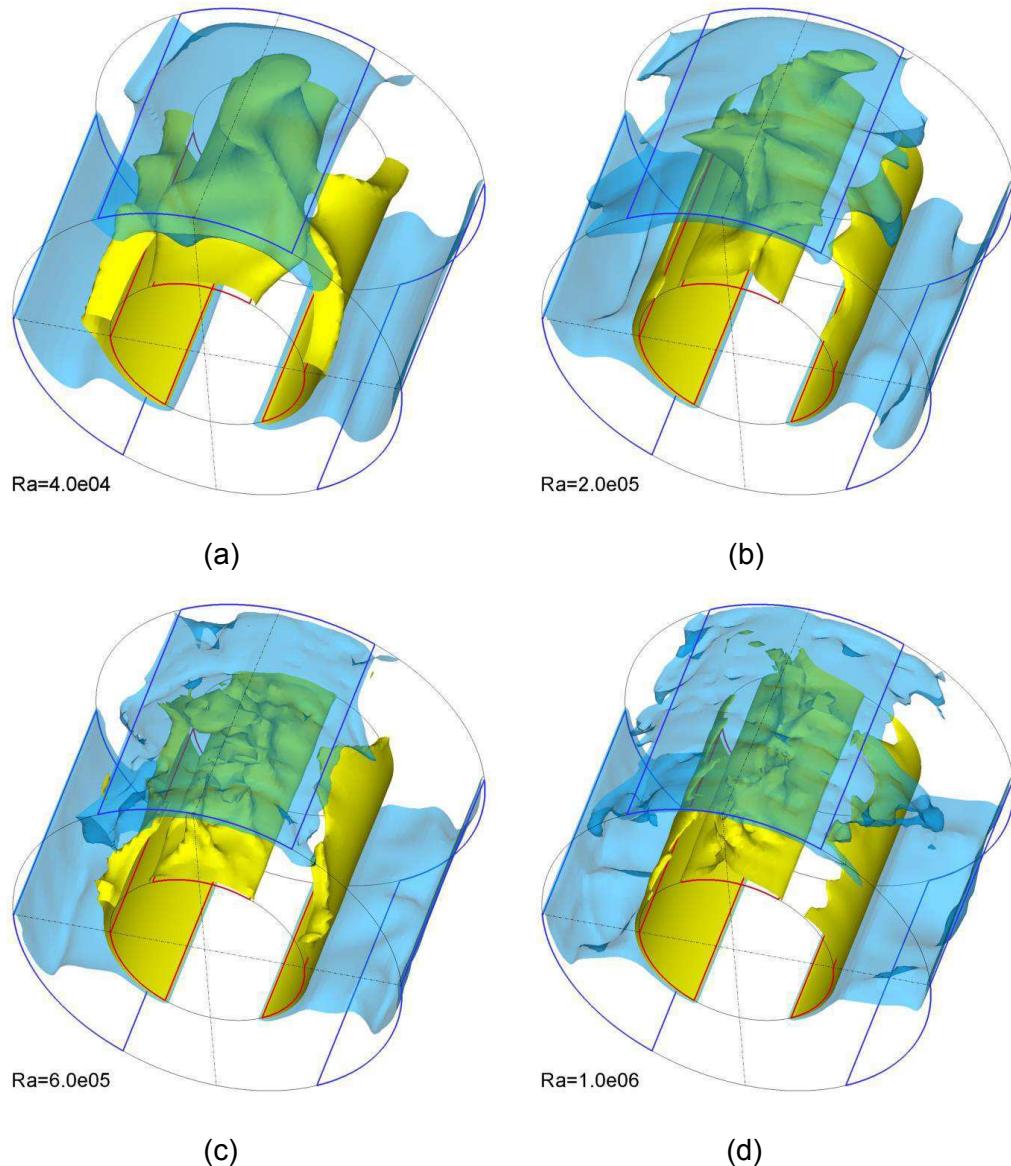


Figura 5.36 – Isosuperfícies de temperatura, 0,3 (azul) e 0,65 (amarela) para: (a)  $Ra = 4 \times 10^4$ , (b)  $Ra = 2 \times 10^5$ , (c)  $Ra = 6 \times 10^5$  e (d)  $Ra = 1 \times 10^6$ .

Conforme mencionado na Fig. 5.35, a partir de  $Ra = 4 \times 10^4$ , acontece uma intensa movimentação das plumas térmicas em todas as direções dentro da cavidade, em concordância

com os sinais em 90º, contudo para este Rayleigh elas apresentam-se espessas e com grandes amplitudes na direção tangencial. Nas Figs. 5.36b-d, constata-se que, com o aumento do Rayleigh as plumas térmicas passam a oscilar de forma mais aleatória e indefinida, perdendo gradualmente a periodicidade no movimento oscilatório. Observa-se também, através da isosuperfície amarela  $(\bar{T} - T_o)/(T_i - T_o) = 0,65$ , o constante afinamento e desintegração na pluma térmica superior, conforme incrementa-se o número de Rayleigh, facilitando assim, o processo de advecção do calor para o meio. O escoamento em  $Ra = 6 \times 10^5$  mostra-se mais desorganizado e oscilante, do que o exposto em  $Ra = 2 \times 10^5$ , sendo perceptível tal movimentação em todas as dimensões, até mesmo na isosuperfície azul  $(\bar{T} - T_o)/(T_i - T_o) = 0,3$ , superior e lateral. Já para os escoamentos com Ra superiores,  $Ra = 6 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$  o grau de desorganização dos escoamentos se intensifica extremamente, apresentando-se totalmente instáveis, com características de escoamentos em regime de turbulência desenvolvida.

Assim como verificado experimentalmente por Kueh e Goldstein (1978) e numericamente por Padilla (2004), ambos considerando o caso clássico de convecção natural entre cilindros concêntricos, no presente trabalho também constatou-se que as flutuações das plumas térmicas são de natureza tridimensional e os campos de temperatura na direção axial manifestam-se no formato de ondas que se movem axialmente. Tal característica é melhor analisada nas Figs. 5.37 e 5.38, onde evidencia-se o movimento oscilatório da pluma, através de uma sequência temporal com intervalo de tempo de  $\Delta t = 10s$  para  $Ra = 4 \times 10^4$  e  $\Delta t = 1s$  para  $Ra = 6 \times 10^5$ .

Para o  $Ra = 4 \times 10^4$ , a frequência fundamental de oscilação equivale a 0,049 Hz, correspondendo, portanto, a um intervalo de 20,4s entre um ciclo e outro. Assim, entre  $t = 70s$  (Fig. 5.37a) e  $t = 90s$  (Fig. 5.37c) verifica-se um ciclo completo de movimentação da pluma térmica na direção tangencial. No instante,  $t = 70s$ , a isosuperfície amarela  $(\bar{T} - T_o)/(T_i - T_o) = 0,65$  encontra-se deslocada à direita de 90º, representado pela linha tracejada ao longo do eixo axial, no próximo tempo a pluma térmica desloca-se para a esquerda deste ângulo e no tempo  $t = 90s$ , novamente ela apresenta-se à direita, completando assim um o ciclo.

É interessante observar o movimento oscilatório descrito pela pluma, da direita para esquerda e vice-versa, nota-se também que a isosuperfície azul mostra-se menos oscilante do que a amarela, contudo já para  $Ra = 4 \times 10^4$  o escoamento apresenta instabilidades que vão das mais baixas frequências, controladas pela geometria da cavidade anular, até as mais altas frequências controladas provavelmente pelo número de Rayleigh. Devido aos isovalores

adotados nesta figura, não foi possível visualizar as demais frequências, entretanto, o espectro de potências das flutuações da temperatura, que é apresentado na Fig. 5.41, confirma a existência delas.

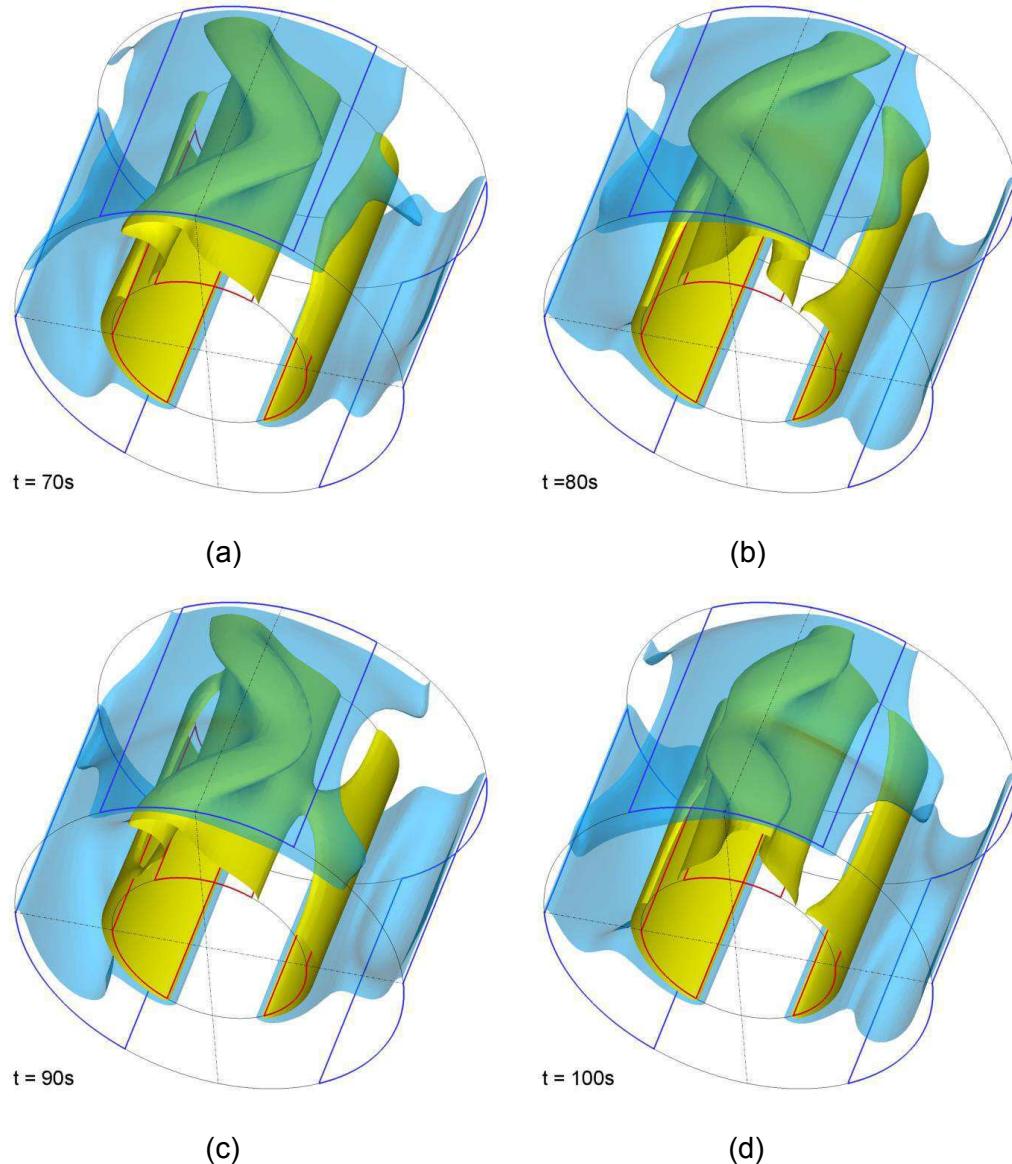


Figura 5.37 – Evolução temporal das Isosuperfícies de temperatura, 0,25 (azul) e 0,65 (amarela) nos tempos: (a)  $t = 60\text{s}$ , (b)  $t = 70\text{s}$ , (c)  $t = 80\text{s}$  e (d)  $t = 90\text{s}$ , para  $Ra = 4 \times 10^4$ .

O escoamento em  $Ra = 6 \times 10^5$ , apresenta como frequência fundamental de oscilação 0,36 Hz, equivalente a um intervalo de oscilação de cerca de  $t = 2,7\text{s}$ . Verificando a sequência

temporal entre os tempos  $t = 5\text{s}$  e  $t = 8\text{s}$ , Fig. 5.38, consta-se que o escoamento apresenta-se de forma desarmônica ou aleatória, não sendo possível verificar um ciclo de oscilação entre os tempos. Isto demonstra a presença de diversas frequências de oscilação, características de escoamentos em estado de transição à turbulência ou turbulência.

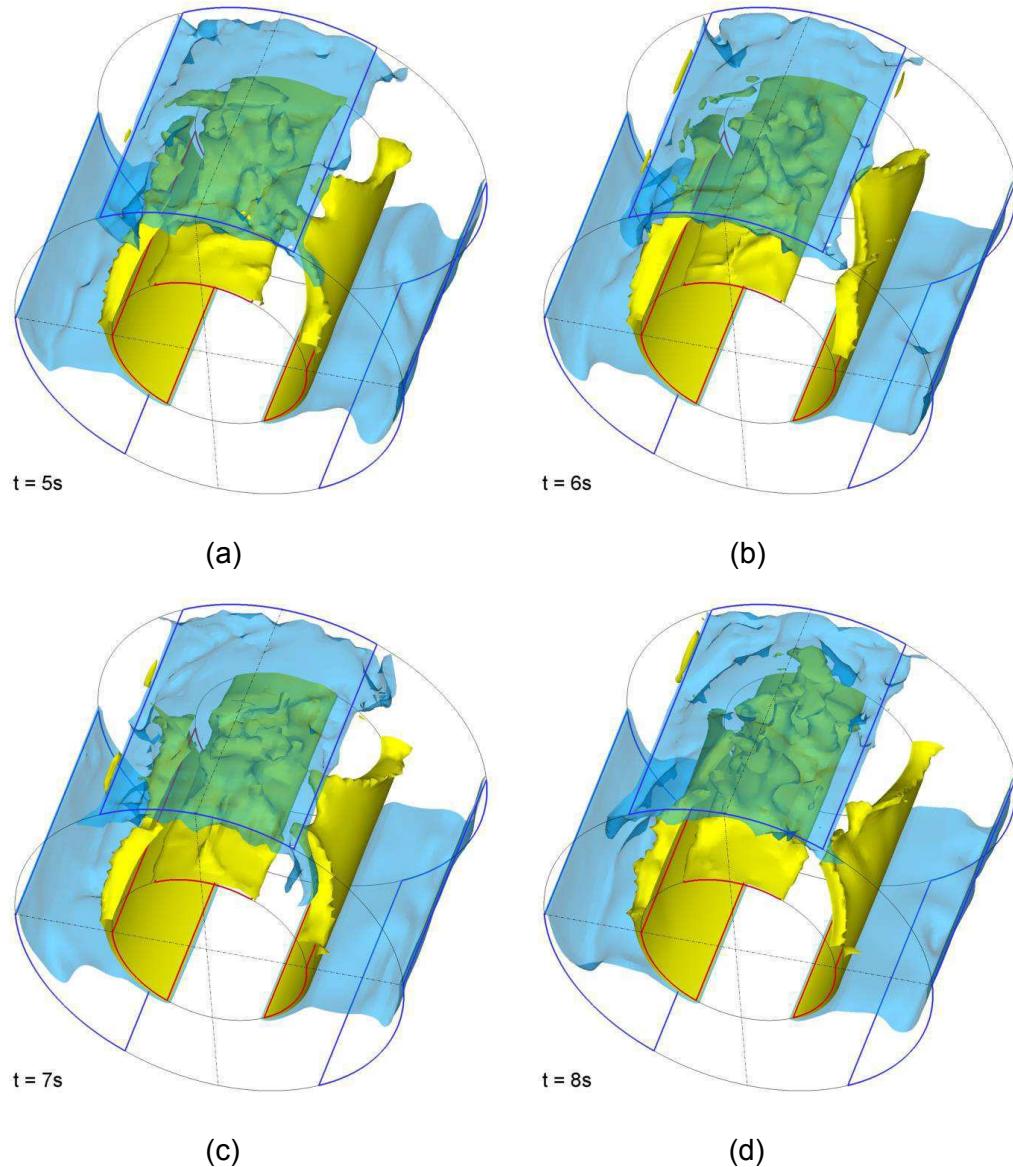


Figura 5.38 – Evolução temporal das Isosuperfícies de temperatura, 0,25 (azul) e 0,65 (amarela) nos tempos: (a)  $t = 5\text{s}$ , (b)  $t = 6\text{s}$ , (c)  $t = 7\text{s}$  e (d)  $t = 8\text{s}$ , para  $Ra = 6 \times 10^5$ .

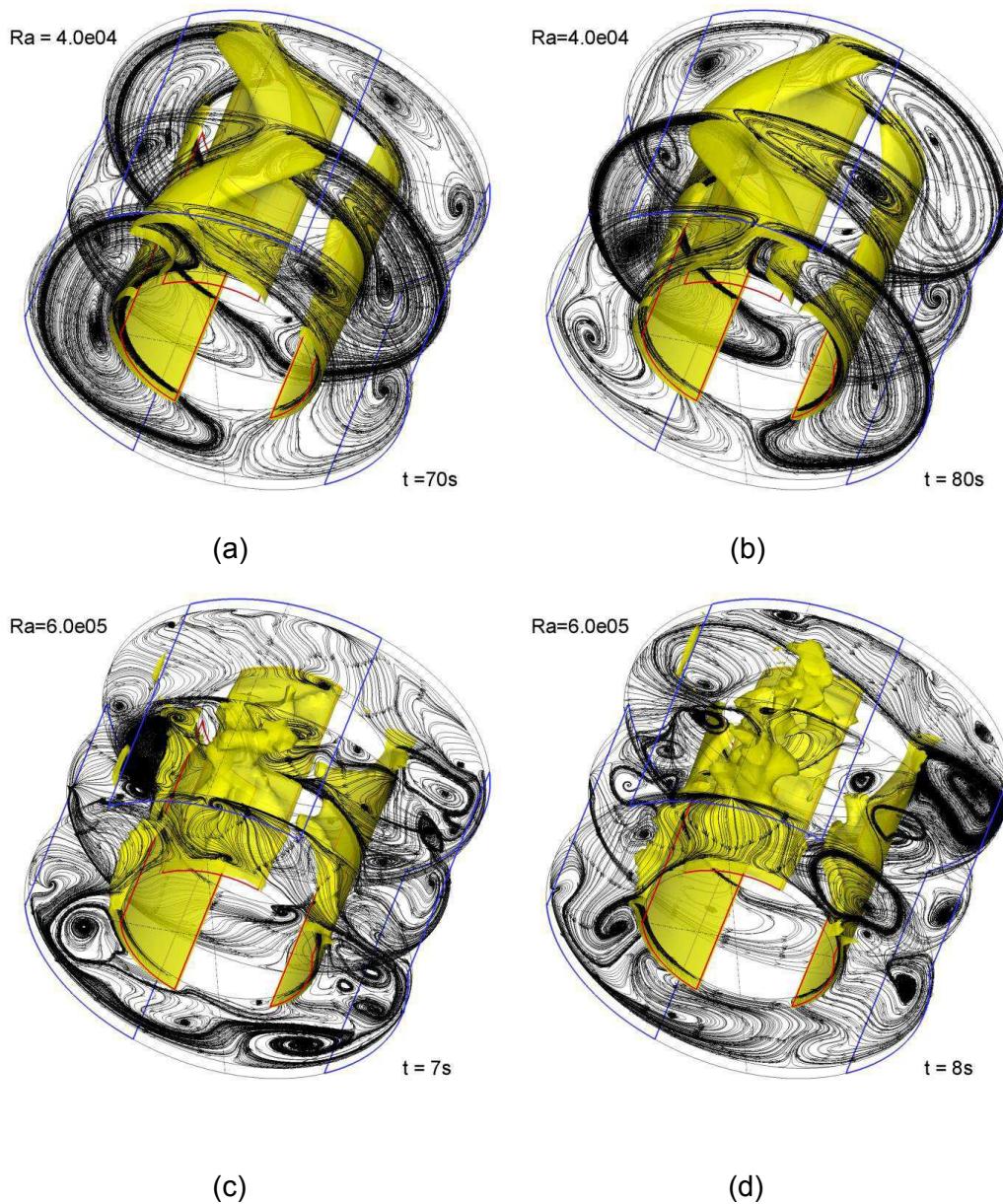


Figura 5.39 – Isosuperfícies de temperatura 0,65 (amarela) e linhas de corrente para: (a)  $Ra = 4 \times 10^4$  ( $t=70s$ ) e (b)  $Ra = 4 \times 10^4$  ( $t=80s$ ), (c)  $Ra = 6 \times 10^5$  ( $t=7s$ ) e (d)  $Ra = 6 \times 10^5$  ( $t=8s$ ).

Na Fig. 5.39, tem-se a representação da isosuperfície amarela  $(\bar{T} - T_o)/(T_i - T_o) = 0,65$ , combinada a três planos ( $r, \theta$ ) contendo linhas de corrente do escoamento, onde o primeiro plano encontra-se em  $z/L = 0,181$ , o segundo em  $z/L = 1,4$  e o terceiro em  $z/L = 2,701$ . Nota-se em ambos os números de Rayleigh apresentados, uma gama de estruturas turbinhulares de múltiplas frequências espalhadas em toda a cavidade anular. Fica evidente também, para o  $Ra$

$= 6 \times 10^5$ , o número destas estruturas se incrementa e apresentam-se mais energizadas, contribuindo assim, para o processo de transferência de energia térmica mais eficiente.

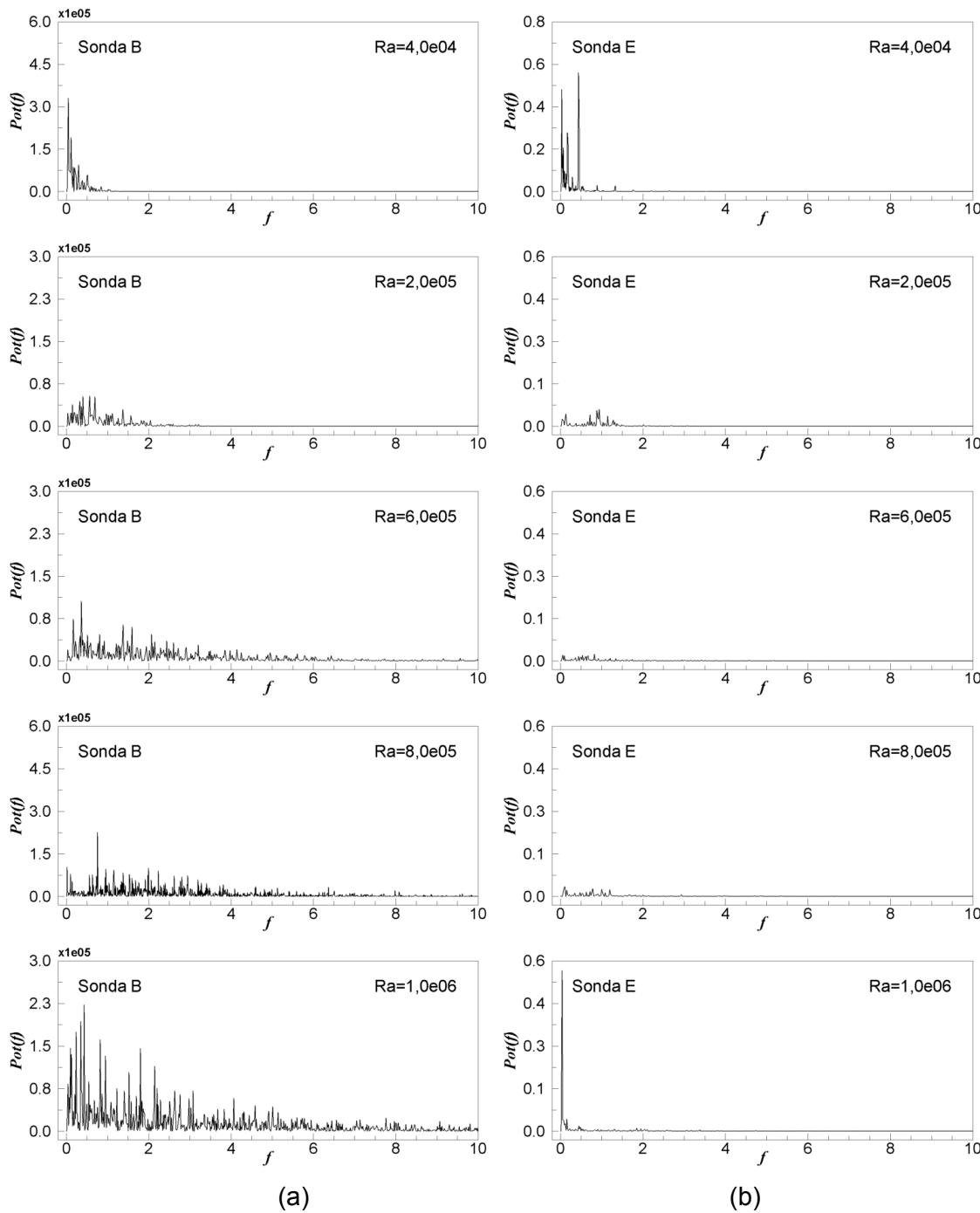


Figura 5.40 – Potência espectral das flutuações da temperatura obtidas nas sondas B (a) e E (b), para:  $Ra = 4 \times 10^4$ ,  $Ra = 2 \times 10^5$ ,  $Ra = 6 \times 10^5$ ,  $Ra = 8 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ .

As potências espectrais referentes às flutuações da temperatura apresentadas na Fig. 5.34, são demonstradas na Fig. 5.40. Semelhante ao comportamento apresentado para a componente radial de velocidade, em ambas as sondas, nota-se várias frequências, já a partir do  $Ra = 4 \times 10^4$ . Uma banda de frequências surge a partir do  $Ra = 2 \times 10^5$ , considerado intermediário, a qual intensifica-se com o aumento do número de  $Ra$ . Já em  $Ra = 1 \times 10^6$ , a banda de frequências comprehende praticamente todo o espectro, demonstrando o comportamento altamente instável deste escoamento. Desta forma, acredita-se que o escoamento em questão, não seja mais considerado em transição, mas sim, em regime turbulento.

Na Fig. 5.41, tem-se a distribuição radial das componentes: radial (fileira superior), tangencial (fileira intermediária) e axial (fileira inferior) da velocidade média, considerando cinco números de Rayleigh e retiradas do plano axial ( $r, \theta$ ) localizado em  $z/L = 1,4$ . A coluna da esquerda apresenta os perfis em  $90^\circ$  e a coluna da direita em  $180^\circ$ . Assim como verificado nos casos considerados estáveis, linha vermelha na Figs. 5.25a, no ângulo de  $90^\circ$  (Fig. 5.41a) em todos os  $Ra$  considerados, a componente radial da velocidade sempre apresentou-se positiva e crescente com o aumento do número de *Rayleigh*. Nota-se uma ligeira diferença entre os perfis apresentados entre a linha azul ( $Ra = 4 \times 10^4$ ) e a vermelha ( $Ra = 5 \times 10^4$ ), contudo, a partir do  $Ra = 5 \times 10^4$ , as linhas se distanciam consideravelmente, demonstrando que a componente radial da velocidade sofre um expressivo crescimento com o aumento do *Rayleigh*. Em  $\theta = 180^\circ$ , entrada da fonte lateral esquerda, verifica-se que a componente radial da velocidade apresenta também valores negativos, indicando que no plano ( $r, \theta, z/L = 1,4$ ), o fluido se desloca em sentido negativo ao eixo  $r$ , próximo ao cilindro interno e positivamente perto do cilindro externo. Essa inversão no sinal da componente radial da velocidade revela a presença de uma região de recirculação atravessando o plano ( $r, \theta, z/L = 1,4$ ), melhor observada em  $Ra$  superiores, linhas preta ( $Ra = 2 \times 10^5$ ), verde ( $Ra = 6 \times 10^5$ ) e laranja ( $Ra = 1 \times 10^6$ ). A presença da componente tangencial em  $90^\circ$  (Fig. 5.41c) indica atividade dinâmica nessa região, a qual se intensifica com o incremento do  $Ra$ . Como consequência, a pluma térmica sofre as modificações antes explicadas. Os altos valores em  $180^\circ$  (5.41d) se dão em função da passagem da corrente primária pelo local.

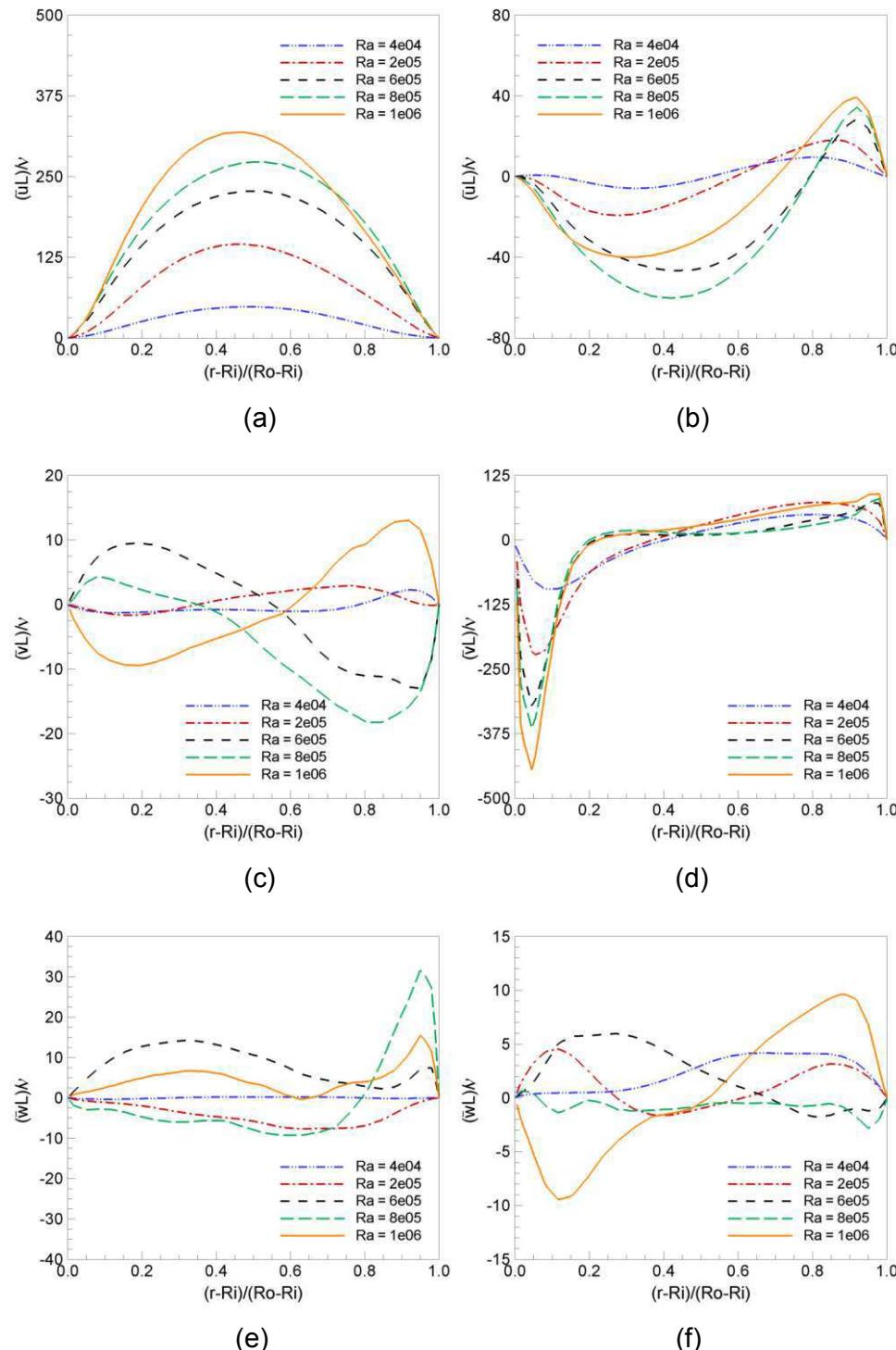


Figura 5.41 – Distribuição radial das componentes: radial (a e b), tangencial (c e d) e axial (e e f) média da velocidade, em  $z/L = 1,4$ , para:  $Ra = 4 \times 10^4$ ,  $Ra = 5 \times 10^4$ ,  $Ra = 2 \times 10^5$ ,  $Ra = 6 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ ; coluna da esquerda ( $\theta = 90^\circ$ ) e coluna da direita ( $\theta = 180^\circ$ ).

Após toda análise qualitativa e quantitativa realizada nesta seção, afirma-se que o início do processo de transição à turbulência em escoamentos promovidos por convecção natural em cavidades anulares horizontais contendo três pares de fonte e sumidouro de energia térmica, dispostos conforme proposto para o caso C31, ocorre a partir do  $Ra = 4 \times 10^4$ , ponto no qual o escoamento sofre mudanças significativas em seu comportamento, não apresentando mais características pertinentes a escoamentos laminares. Na literatura esse valor é chamado de número de *Rayleigh* crítico entre os regimes laminar e de transição à turbulência.

### 5.3.3.1 Espectro de energia

Segundo a teoria de Kolmogorov (1941) para turbulência desenvolvida, a zona inercial do espectro de energia cinética turbulenta, apresenta uma inclinação de  $-5/3$ . Bastante difundida e comprovada na literatura, a lei de kolmogorov (1941) foi utilizada no presente trabalho visando identificar a partir de qual número de *Rayleigh* o escoamento atinge o estado de turbulência. Assim, os espectros de energia para  $Ra = 4 \times 10^4$ ,  $Ra = 5 \times 10^4$ ,  $Ra = 2 \times 10^5$ ,  $Ra = 6 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ , obtidos a partir da componente radial da velocidade, são apresentadas nas Figs. 5.42 e 5.43.

Analizando o espectro de energia, verifica-se que, a energia das grandes escalas aumenta com o incremento do número de *Rayleigh*, constata-se também que a sonda B (Fig. 5.42) apresenta maiores magnitudes do que a sonda E (Fig. 5.43). Essa diferença é melhor percebida sobretudo para *Ra* superiores, como por exemplo, comparando os espectros das Figs. 5.44e e 5.45e.

Para *Rayleigh* inferiores, como por exemplo, em  $Ra = 4 \times 10^4$  (Figs. 5.42a e 5.43a), os espectros apresentam-se sempre alongados, com inclinação superior a  $-5/3$  (lei de Kolmogorov) e com maior concentração energética nas grandes escalas. Já para *Rayleigh* superiores, verifica-se uma melhor distribuição de energia entre as grandes e as pequenas escalas, bem como a inclinação dos espectros torna-se cada vez mais próximas de  $-5/3$ . Em ambas as sondas verifica-se que a aproximação da zona inercial apresenta uma melhora significativa a partir do  $Ra = 8 \times 10^5$ , nota-se também que, na sonda B, os casos com  $Ra = 8 \times 10^5$  (Fig. 5.42d) e  $Ra = 1 \times 10^6$  (Fig. 5.42e) apresentam uma inclinação do espectro bastante próxima de  $-5/3$ . Contudo, para a sonda E, tal aproximação é percebida somente em  $Ra = 1 \times 10^6$ . Desta forma, com base nos resultados apresentados por esses espectros de energia, bem como nos demais demonstrados neste capítulo, o presente trabalho, considera que o escoamento em cavidades anulares horizontais contendo pares de fonte e sumidouro de energia térmica, dispostos

conforme o caso C31, passa a ser turbulento a partir do  $Ra = 9 \times 10^5$ , valor intermediário entre o escoamento com características ainda transicionais,  $Ra = 8 \times 10^5$  e o plenamente turbulento,  $Ra = 1 \times 10^6$ .

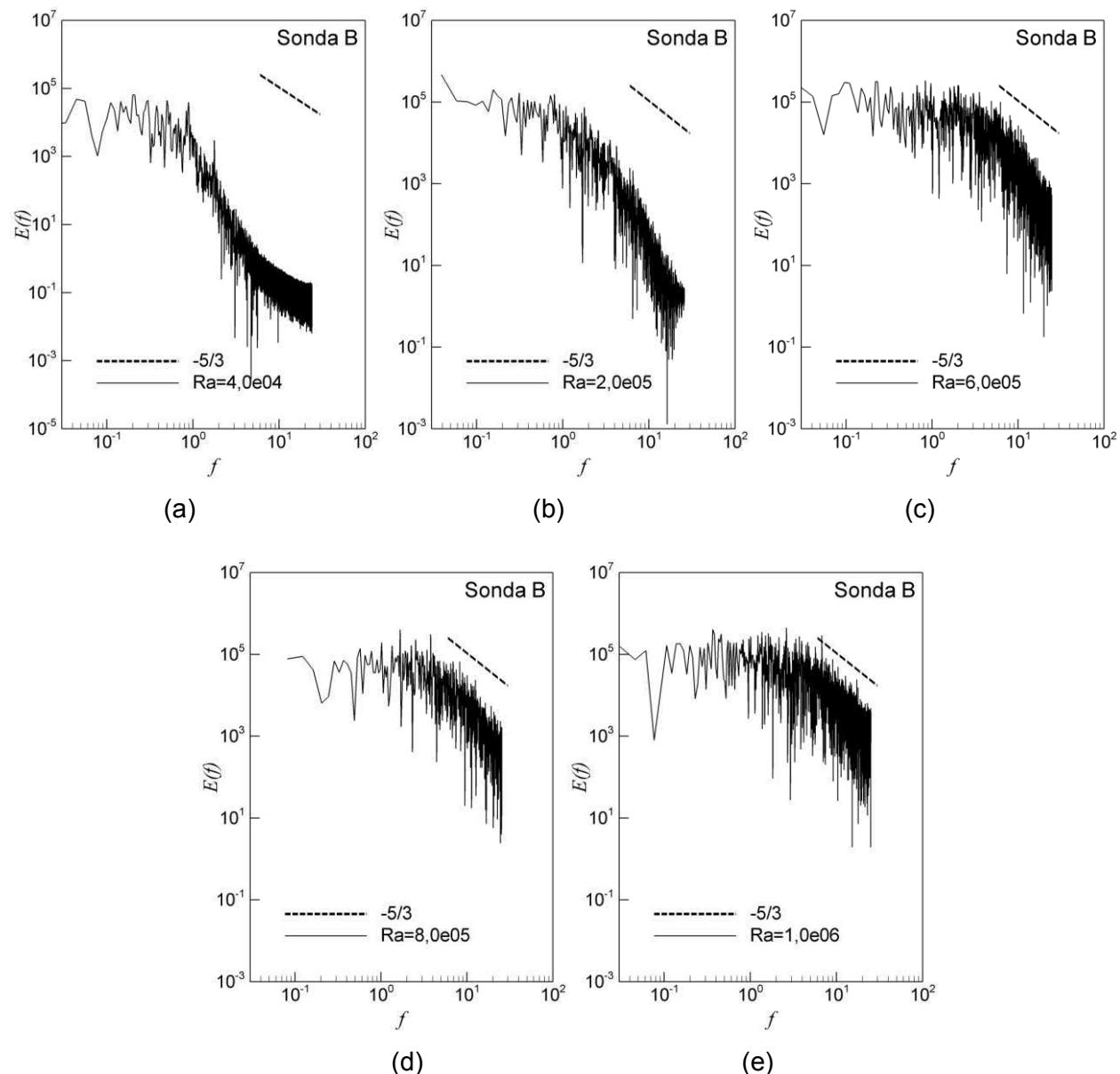


Figura 5.42 – Espectro de energia (sondas B): (a)  $Ra = 4 \times 10^4$ , (b)  $Ra = 5 \times 10^4$ , (c)  $Ra = 2 \times 10^5$ , (d)  $Ra = 6 \times 10^5$  e (e)  $Ra = 1 \times 10^6$ .

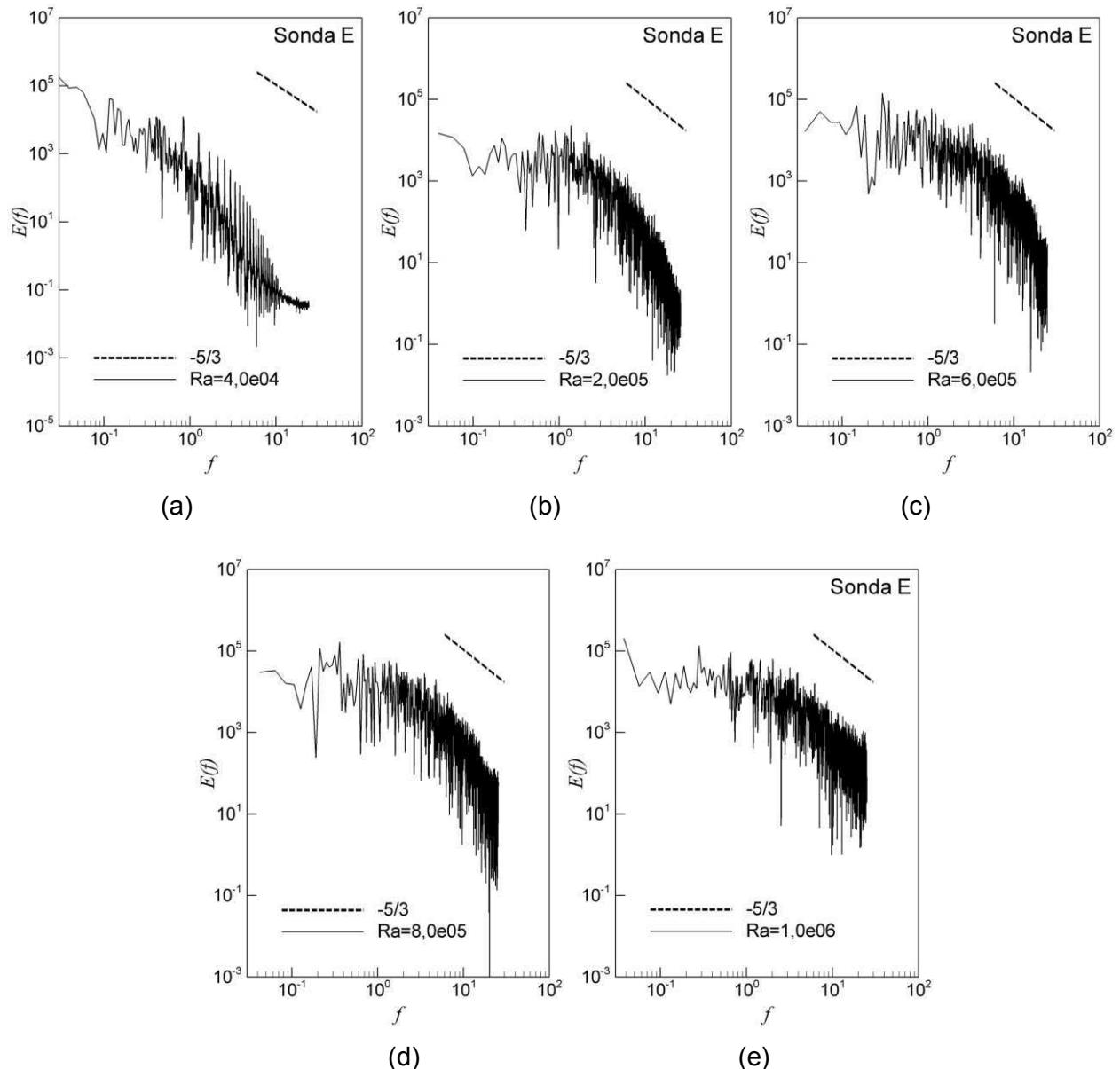


Figura 5.43 – Espectro de energia (sondas E): (a)  $Ra = 4 \times 10^4$ , (b)  $Ra = 5 \times 10^4$ , (c)  $Ra = 2 \times 10^5$ , (d)  $Ra = 6 \times 10^5$  e (e)  $Ra = 1 \times 10^6$ .

### 5.3.3.2 Viscosidade turbulenta

As isosuperfícies de viscosidade turbulenta instantânea ( $\nu_t/\nu = 0,1$ ), relativas aos números de Rayleigh:  $Ra = 4 \times 10^4$ ,  $Ra = 2 \times 10^5$ ,  $Ra = 6 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ , captados no instante de tempo  $t = 40s$ , são representadas na Fig. 5.44. De forma geral, as isosuperfícies de viscosidade turbulenta, encontram-se na parte superior da cavidade, principalmente em regiões

onde as instabilidades dinâmicas ocorrem com maior intensidade, como por exemplo, próximas as plumas térmicas.

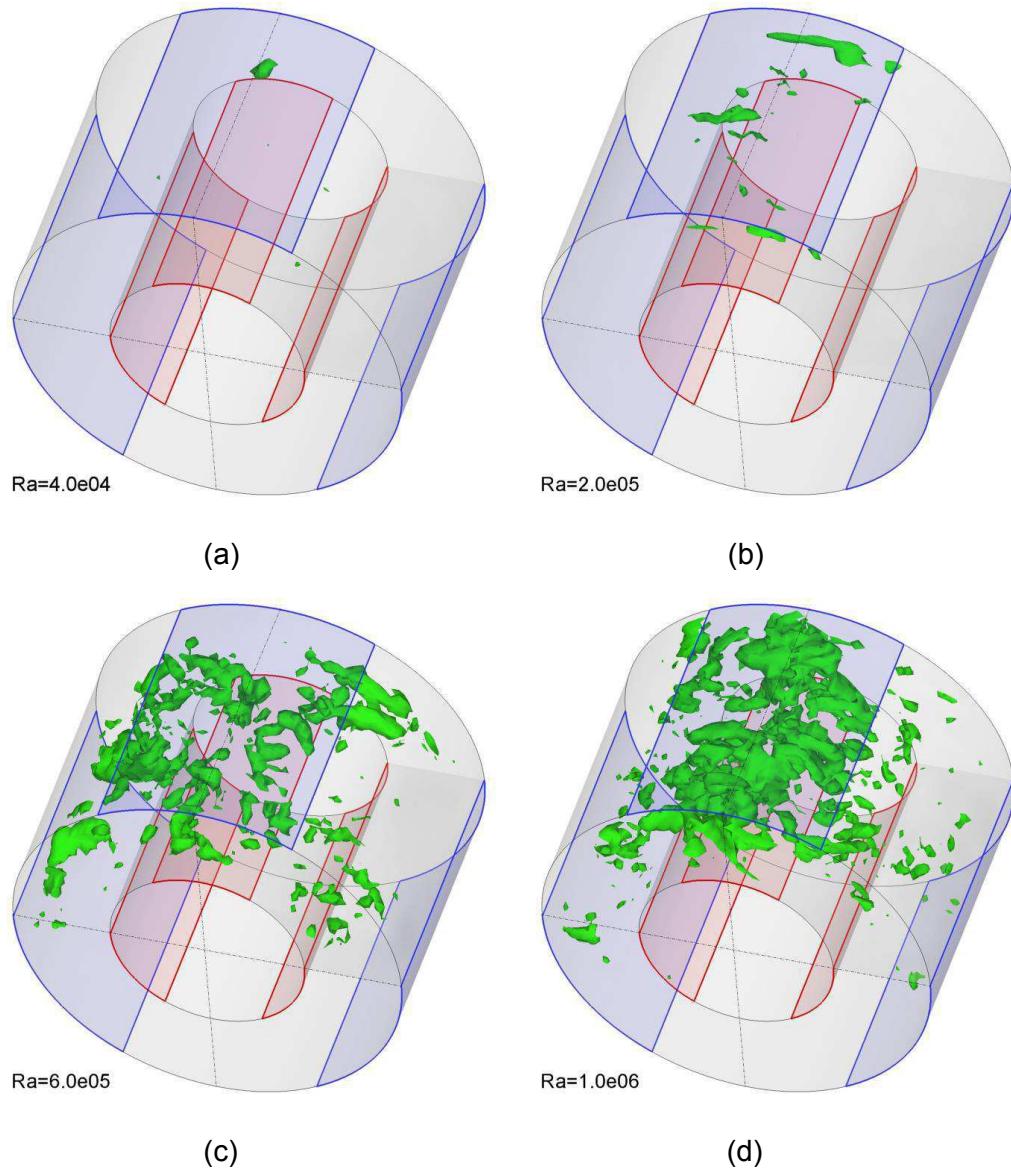


Figura 5.44 – Isosuperfícies de viscosidade turbulenta  $\nu_t/\nu = 0,1$  e  $t = 40s$ , para: (a)  $Ra = 4 \times 10^4$ , (b)  $Ra = 2 \times 10^5$ , (c)  $Ra = 6 \times 10^5$  e (d)  $Ra = 1 \times 10^6$ .

Para baixos números de Rayleigh as isosuperfícies de viscosidade apresentam-se ainda discretas e concentradas em torno do ângulo de  $90^\circ$ . Conforme aumenta-se o  $Ra$ , as isosuperfícies aumentam em número e tamanho e se expandem aleatoriamente ao longo da

parte superior da cavidade. Tal comportamento ocorre devido, segundo Padilla (2004), ao processo degenerativo das instabilidades em turbulência. As Figs 5.44c e 5.44d, comprovam esse comportamento, ressaltando o maior acumulo entre a fonte e o sumidouro de energia térmica superiores, local de maior movimentação da pluma superior. O comportamento médio da viscosidade turbulenta é demonstrado através da Fig. 5.45, sendo a distribuição radial em  $\theta = 90^\circ$  apresentada na Fig. 5.45a e em  $\theta = 180^\circ$  na Fig. 5.45b. Na Fig. 5.45a observa-se que os perfis apresentam-se com decaimento, com tendência a zero nas regiões parietais de ambos os cilindros interno e externo, esse fato condiz com o esperado em simulações utilizando o modelo dinâmico, o qual não necessita do uso de leis de parede, na predição da viscosidade turbulenta. Outro fato importante é todos os casos apresentaram valores máximos acima do ponto médio da diferença de raios ( $L = 0,5$ ), até mesmo em  $Ra = 4 \times 10^4$  ( $L = 0,531$ ). Nota-se também que a viscosidade aumenta com incremento do número de *Rayleigh*, como era de se esperar devido a maior intensidade turbulenta apresentada para os  $Ra$  maiores. Em  $180^\circ$  (Fig. 5.45b) a tendência dos perfis é similar, com diferença de uma ordem de grandeza em módulo quando comparado com os perfis em  $90^\circ$ .

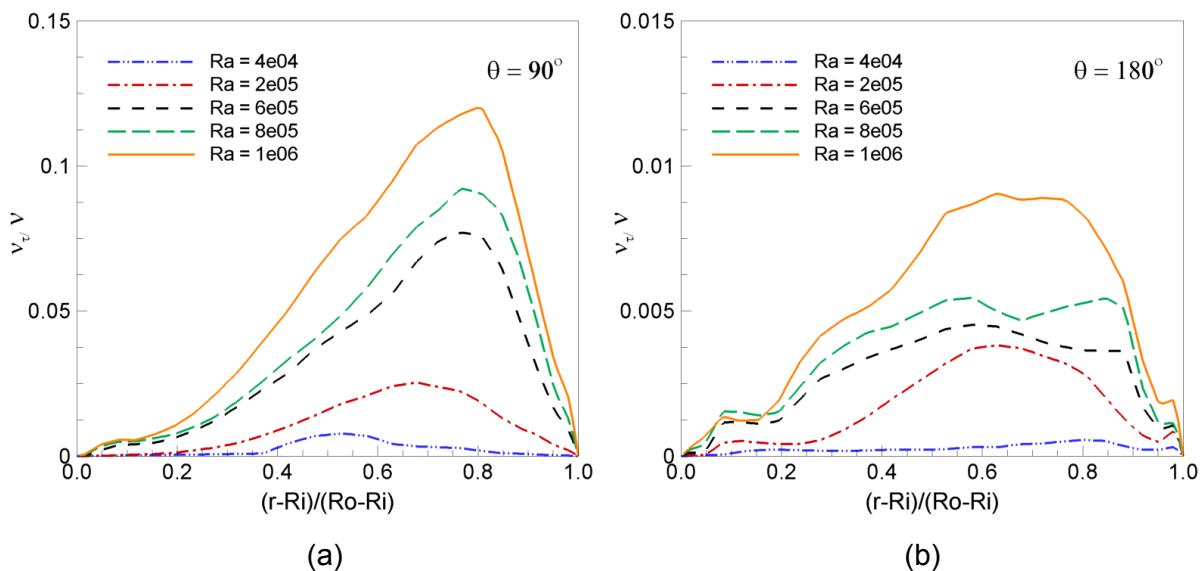


Figura 5.45 – Distribuição radial da viscosidade turbulenta média para  $Ra = 4 \times 10^4$ ,  $Ra = 2 \times 10^5$ ,  $Ra = 6 \times 10^5$ ,  $Ra = 8 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ , em  $z/L = 1,4$ ; (a)  $\theta = 90^\circ$  e (b)  $\theta = 180^\circ$ .

Desta forma o modelo sub-malha, torna-se ainda mais importante, como relação a transferência de energia entre as escalas resolvidas e as não resolvidas, à medida que o escoamento apresenta-se turbulento ( $Ra = 9 \times 10^5$ ).

### 5.3.3.3 Transferência de energia térmica

Escoamentos estávies via de regra, apresentam baixa difusibilidade, ou seja, o processo de difusão bem como o transporte das propriedades inerentes ao escoamento ocorrem de forma discreta, contudo em escoamentos com um elevado grau de instabilidades ou agitação, verifica-se o oposto, onde tem-se por exemplo, elevadas taxas de transporte de massa, momento e energia. Esse comportamento é verificado em escoamentos em transição e em regime turbulento. Tal característica é apresentada em escoamentos em transição e em regime turbulentos, configurando-se como sendo de extrema importância, pois representa processos mais eficientes do ponto de vista energético.

Conforme verificado por diversos autores na literatura, em escoamentos em transição e turbulentos entre cilindros concêntricos horizontais, caso clássico, conforme aumenta a transferência de energia térmica na cavidade anular maior será o valor do número de Nusselt médio global  $\overline{Nu}$  atingido. No presente trabalho, contendo fontes e sumidouros ao longo da cavidade o mesmo comportamento é verificado. As distribuições dos números de Nusselt locais interno  $Nu_i$  e externo  $Nu_o$ , relativas aos mesmos casos apresentados na Fig. 5.44, encontram-se nas Figs. 5.46 e 5.47, respectivamente.

Na Fig. 5.46, relativa a superfície do cilindro interno, nota-se que a distribuição do Nusselt local interno modifica-se drasticamente com o incremento do número de Rayleigh. Próximo às fontes:  $60^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$  (pluma superior),  $180^\circ \leq \theta \leq 240^\circ$  (pluma lateral esquerda) e  $300^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  (pluma lateral direita), verifica-se a presença de vales ondulantes, os quais movimentam-se com o passar do tempo. Sendo esta movimentação melhor percebida na pluma superior, onde tem-se uma variedade de vales e picos, com intensidades elevadas, principalmente para o  $Ra = 1 \times 10^6$ , onde o escoamento apresenta-se em regime turbulento.

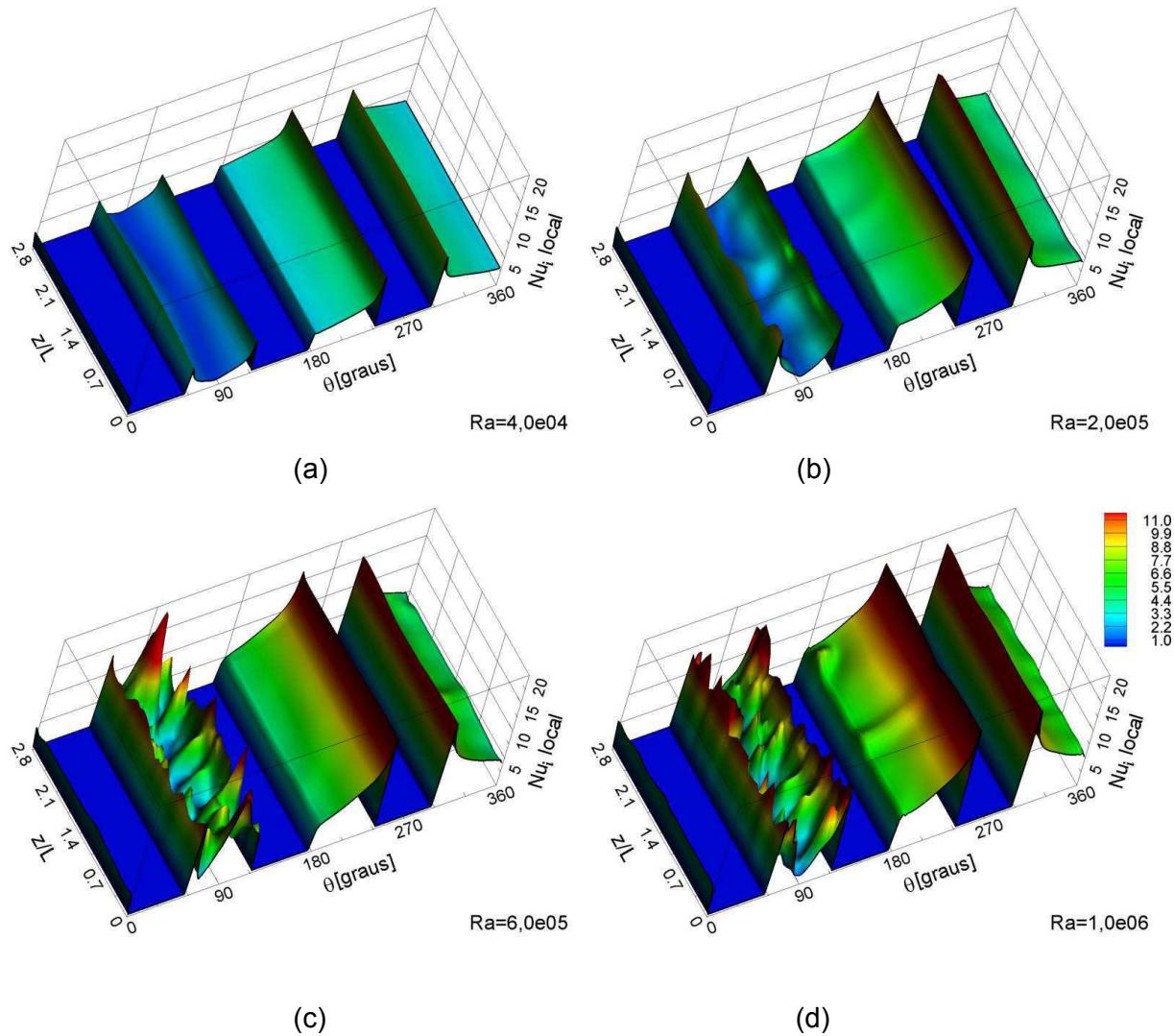


Figura 5.46 – Número de Nusselt local (cilindro interno), para: (a)  $Ra = 4 \times 10^4$ , (b)  $Ra = 2 \times 10^5$ , (c)  $Ra = 6 \times 10^5$  e (d)  $Ra = 1 \times 10^6$ .

Conforme ilustrado na Fig. 5.47, a distribuição do número de Nusselt na superfície do cilindro externo apresenta comportamento oposto ao verificado para a superfície do cilindro interno, contudo com ondulações mais aparentes, já a partir do  $Ra = 2 \times 10^5$  (Fig. 5.47b) considerado ainda em transição. Observa-se também um aumento no número e na intensidade dos picos apresentados principalmente para os  $Ra$  superiores, Figs. 5.47c e 5.47d. Novamente próximo a  $\theta = 90^\circ$ , os maiores valores são obtidos, indicando a que a troca de calor intensa ocorre através da pluma superior. A presença de picos e vales, evidenciam a dinâmica instável

da pluma térmica, sendo os maiores valores encontrados nos picos incrementam o número de Nusselt médio global.

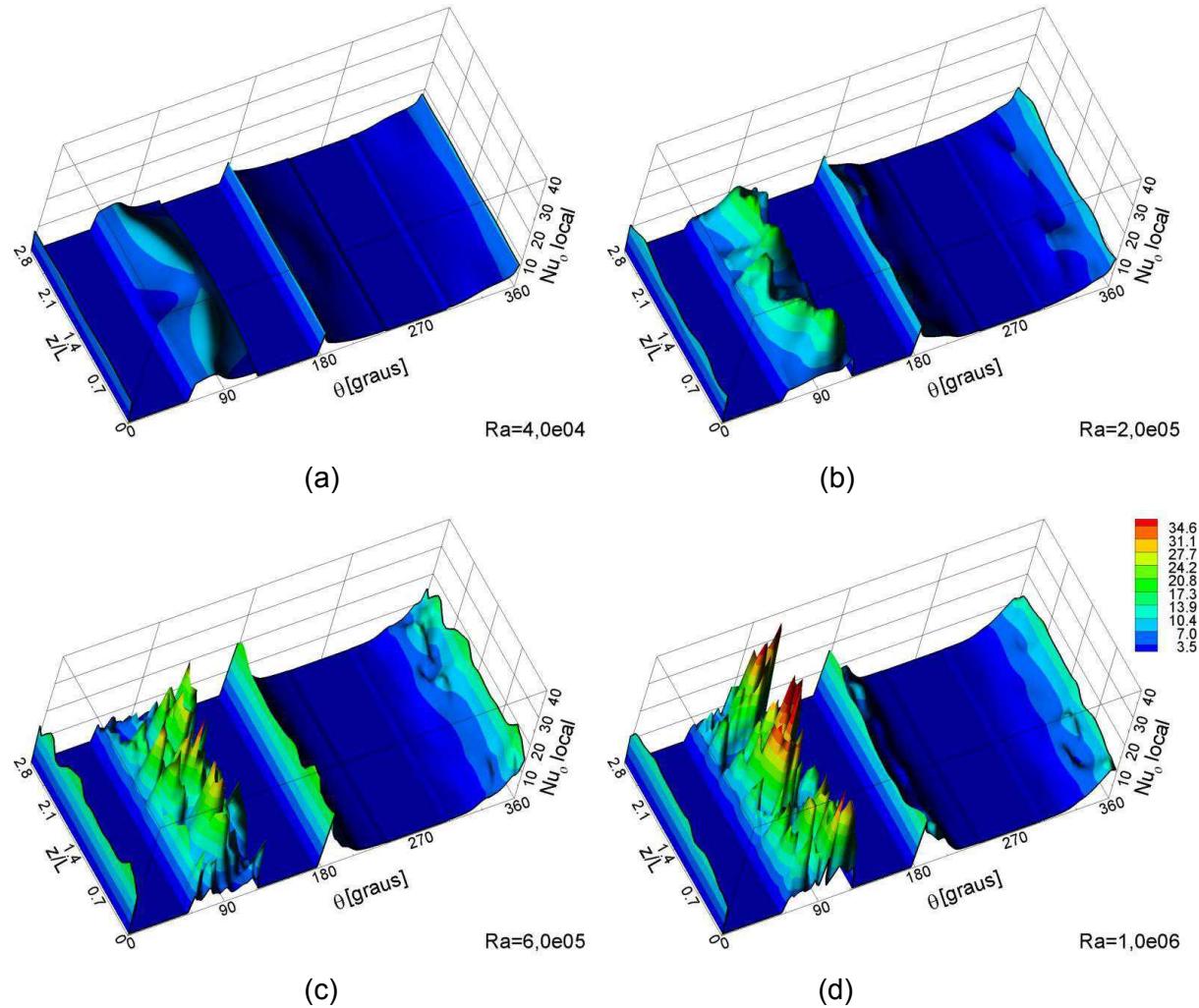


Figura 5.47 – Número de Nusselt local (cilindro externo), para: (a)  $Ra = 4 \times 10^4$ , (b)  $Ra = 2 \times 10^5$ , (c)  $Ra = 6 \times 10^5$  e (d)  $Ra = 1 \times 10^6$ .

#### 5.3.3.4 Vorticidade

Uma forma interessante utilizada para verificar a topologia em escoamentos é através da visualização da vorticidade.

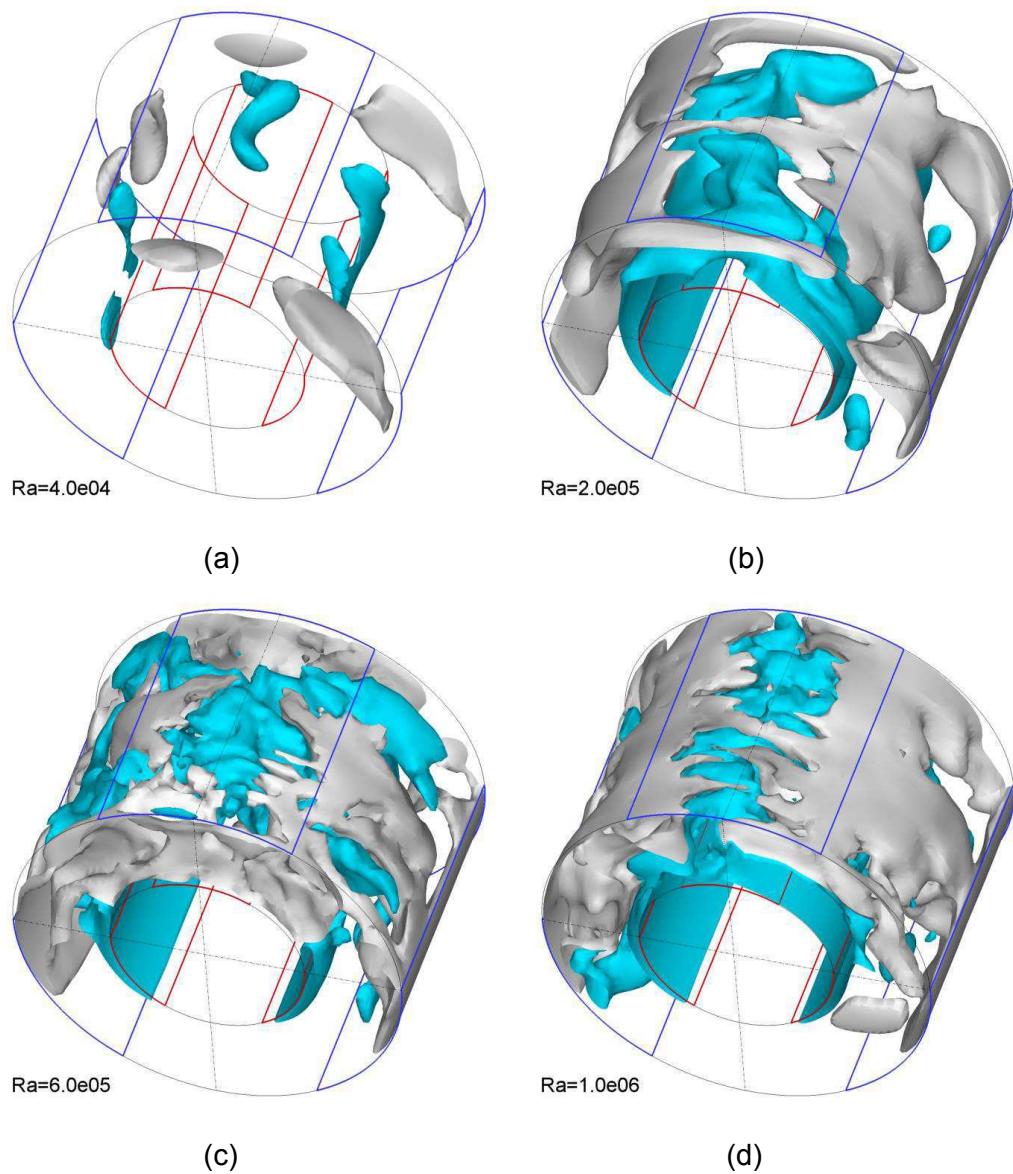


Figura 5.48 – Isosuperfícies de vorticidade tangencial -80 (cinza) e 80 (azul) para: (a)  $Ra = 4 \times 10^4$ , (b)  $Ra = 2 \times 10^5$ , (c)  $Ra = 6 \times 10^5$  e (d)  $Ra = 1 \times 10^6$ .

Na Fig. 5.48, tem-se as isosuperfícies da vorticidade, onde as isosuperfícies em azul,  $\omega_\theta = 80$ , apresentam-se em sentido horário e as destacadas em cinza,  $\omega_\theta = -80$ , corresponde ao sentido anti-horário. Aparentemente as estruturas não apresentam uma forma topologica bem definida, contudo no início da transição em  $Ra = 4 \times 10^4$  elas se mostram espaçadas e em pouca quantidade, com o aumento no  $Ra$ , elas se tornam numerosas e apresentam comportamento aleatório e irregular, típicos de escoamentos turbulentos. Tais características são mais visíveis

nas Figs. 5.48c ( $Ra = 6 \times 10^5$ ) e 5.48d ( $Ra = 1 \times 10^6$ ), ambos limites para o início do regime turbulento, considerado neste trabalho como sendo em  $Ra = 9 \times 10^5$ .

### 5.3.4 Nusselt médio global – Caso C31

Na Fig. 5.49, tem-se o valor do Nusselt médio global, em função do número de Rayleigh, obtido para todos os casos simulados, em duas e três dimensões, abrangendo a seguinte faixa de número de Rayleigh:  $1 \times 10^2 < Ra < 10^6$ . Como observa-se, no presente trabalho (linha azul) a caracterização de toda a faixa de transição à turbulência é apresentada, correspondendo a  $4 \times 10^4 \leq Ra \leq 9 \times 10^5$ . A linha vermelha representa os resultados do caso clássico de convecção natural entre cilindros concêntricos na ausência de fontes e sumidouros de energia térmica (PADILLA, 2004). Comparando ambos os resultados, nota-se que o presente trabalho (linha azul) apresenta uma faixa de transição à turbulência superior a faixa apresentada para o caso clássico (linha vermelha), evidenciando assim, que a presença dos pares de fonte-sumidouros de calor modifica significativamente o comportamento do escoamento.

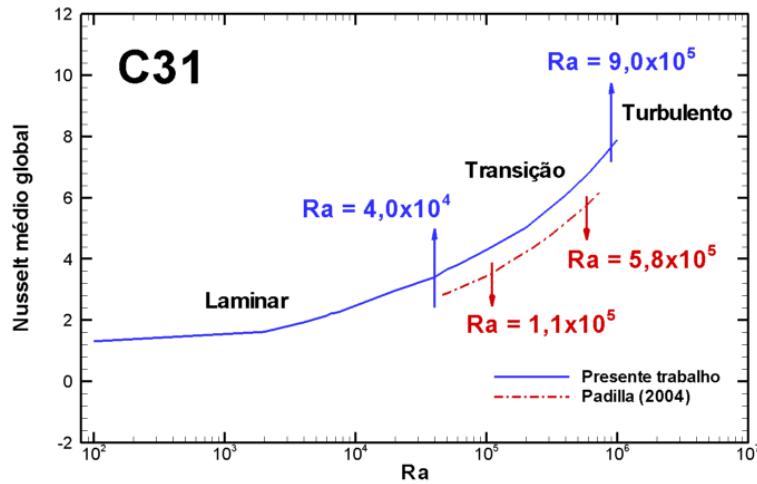


Figura 5.49 – Número de Nusselt médio global em função do número de Rayleigh.

Também verifica-se que a taxa de transferência de energia térmica aumenta consideravelmente quando atinge o regime de transição à turbulência.

### 5.3.5 Aspectos numéricos e computacionais

Todos os resultados apresentados em três dimensões (3D) foram conduzidos considerando os seguintes parâmetros: Relação de raios  $\eta = 2,0$ ; razão de aspecto  $\Gamma = 2,8$  e malha numérica  $24 \times 144 \times 34$  volumes.

Novamente verifica-se um incremento considerável no custo computacional, principalmente para os números de Rayleigh superiores:  $Ra = 6 \times 10^5$ ,  $Ra = 8 \times 10^5$  e  $Ra = 1 \times 10^6$ . Conforme demonstrado ao longo deste trabalho, os dois primeiros valores encontram-se em um estágio elevado de transição, já o último  $Ra$  apresentado é superior ao  $Ra = 9 \times 10^5$ , considerado portanto, como um escoamento turbulento. É interessante destacar, para um mesmo valor de número de Rayleigh, por exemplo, para  $Ra = 10^5$ , os resultado em 3D (Tab. 5.7) quando comparado ao resultado em duas dimensões (Tab. 5.5), apresentou-se cerca de 893% mais caro computacionalmente. Indicando assim, o alto requerimento computacional envolvido na predição de resultados tridimensionais.

Tabela 5.7 – Custo computacional de cada segundo físico simulado considerando a malha  $24 \times 144 \times 34$ ,  $\eta = 2,0$  e  $\Gamma = 2,8$ , para o caso C31.

Caso C31	
Ra	Custo computacional [h/s]
$2 \times 10^3$	1,06
$10^4$	1,21
$2 \times 10^4$	1,78
$4 \times 10^4$	1,58
$6 \times 10^4$	1,50
$10^5$	0,84
$2 \times 10^5$	1,59
$6 \times 10^5$	6,59
$8 \times 10^5$	5,66
$10^6$	3,25

# CAPÍTULO VI

## CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

### 6.1 Conclusões

No presente trabalho analisou-se numericamente o escoamento promovido por convecção natural em cavidades anulares, preenchidas com ar, contendo pares discretos de fonte e sumidouro de energia térmica, sendo as fontes distribuídas ao longo da superfície do cilindro interno e os sumidouros ao longo da superfície do cilindro externo. Todo o estudo foi realizado através da adequação do código numérico tridimensional, desenvolvido em coordenadas cilíndricas, discretizado utilizando volumes finitos. A metodologia de simulação de grandes escalas com modelagem da turbulência sub-malha dinâmica, foi utilizada para tratar os escoamentos em regime de transição à turbulência.

O objetivo principal desta dissertação que era caracterizar o processo de transição neste tipo de escoamento foi alcançado. Sendo o número de Rayleigh crítico, ou seja, o valor a partir do qual o processo de transição inicia-se, encontrando como sendo  $R_c = 4 \times 10^4$ , em cavidades anulares contendo três pares dispostos de fonte e sumidouro. Também identificou-se o número de Rayleigh no qual o escoamento passa a comportar-se como sendo turbulento neste tipo de escoamento ( $R_a = 9 \times 10^5$ ). Várias simulações foram realizadas fornecendo características do comportamento térmico e dinâmico do escoamento. Também evidenciou, bidimensionalmente (mínimo de volumes na direção axial) o comportamento de todos os casos, C2 e C3 onde através da análise do número de *Nusselt médio global*, verificou-se que entre os casos contendo dois pares, o denominado caso C24, apresentou a melhor troca térmica e que para os casos contendo três pares o caso C31, apresentou melhor desempenho. Confrontou-se também os oito casos aos resultados, sem a presença de fonte e sumidouros de calor. Cinco

casos apresentaram curvas acima do Nusselt médio global do caso clássico, salientando assim, que a otimização energética neste tipo de escoamento pode ser atingida utilizando-se pares discretos de fontes e sumidouros de energia térmica. Verificou-se também que tal otimização é dependente do número e da disposição dos pares ao longo da cavidade. Sendo o melhor desempenho encontrado no caso C24.

Em seguida visando identificar características transicionais e turbulentas, optou-se por tratar de forma tridimensional um caso representativo, contendo três pares de fonte e sumidouro de energia térmica (C31), do qual, obteve-se características como viscosidade turbulenta, vorticidade, potências espectrais do sinal da temperatura e componentes da velocidade bem como espectros de energia. Essas características permitiram num primeiro instante identificar a desestabilização do escoamento e posteriormente, os limites da transição à turbulência neste caso.

Também implementou-se mais seis sondas numéricas ao longo do domínio, que permitiram analisar a influência das variáveis pertinentes ao escoamento em diferentes posições da cavidade, sobretudo verificar o comportamento das plumas térmicas superior (localizadas próxima de 90°) e lateral (em 180°), respectivamente. Onde a pluma superior, assim como no caso clássico, apresentou-se mais significativa do ponto de vista dinâmico e térmico.

Após toda essa análise, conclui-se que escoamentos complexos como os desenvolvidos por convecção natural em cavidades anulares contendo fontes e sumidouros de energia térmica, podem ser representados numericamente de forma satisfatória, fornecendo informações importantes sobre o processo de transição à turbulência, bem como na predição do regime do escoamento.

## 6.2 Sugestões para trabalhos futuros

- Estudar a transição à turbulência nos demais casos propostos com dois (C21, C22, C23 e C24) e três pares de fonte e sumidouro de calor (C32, C33 e C34);
- Estudar o regime de turbulência;
- Validar por experimentação física o problema verificado numericamente neste trabalho;
- Propor uma correlação para a predição do Nusselt médio global para o caso C31;

- Estudar a convecção forçada neste tipo de escoamento, introduzindo rotação, do cilindro interno.
- Realizar um estudo da razão de aspecto para casos contendo dois e três pares de fonte e sumidouro.

## CAPÍTULO VII

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABU-NADA, E.; MASOUD, Z.; HIJAZI, A. Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, n. 35, p. 657-665, 6 February 2008.

ARPACI, V. S.; LARSEN, P. S. **Convection Heat Transfer**. Prentice-Hall, 1984.

BAZYLAK, A.; DJILALI, N.; SINTON, D. Natural convection in an enclosure with distributed heat sources. **Numer. Heat Transfer A**, 49, p. 655-667, 2006.  
<https://doi.org/10.1080/10407780500343798>

BECKMANN, W. Die wärmeübertragung in zylindrischen gasschichten bei natürlicher konvektion. **Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens**, p. 857-867, 1931.

BEJAN, A. **Convection Heat Transfer**. Durham: John Wiley, 2004.

BEJAN, A.; KRAUS, A. D. **Heat Transfer Handbook**. [S.I.]: john Wey & sons, p. 526, 2003.

BISHOP, E. H.; CARLEY, C. T.; POWE, R. E. Natural convective oscillatory flow in cylindrical annuli. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 11, p. 1741-1752, 4 March 1968.  
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(68\)90017-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(68)90017-3)

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. **Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática**. Tradução de Fátima A. M. Lino. 4. ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda., 2012.

CHADWICK, M.; WEBB, B.; HEATON, H. Natural convection from two-dimesnional discrete heat sources in a rectangular enclosure. **Int J Heat Mass Trasnf**, p. 1679-93, 1991.

CHAKIR, A.; KOCH, H. Turbulent natural convection and thermal behaviour of cylindrical gas-insulated transmission lines (GIL). **Power Enginnering Society Summer Meeting**, v. 1, p. 162-167, 2001.

CHU, H.; CHURCHILL, S.; PATTERSON, C. The effect of heater size, location, aspect ratio, and boudary conditions on two-dimensional, laminar, natural convection in rectangular channels. **J. Heat Transfer**, 2. ed, v. 98, p. 194-201, 1976.

CRAVEN, B. A.; SETTLES, G. S. A computational and experimental investigation of the human thermal plume. **Journal of Fluids Engineering**, v. 128, p. 1250-1258, 2006.  
<https://doi.org/10.1115/1.2353274>

DENG, Q. H. et al. Interaction between discrete heat sources in horizontal natural convection enclosures. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 45, p. 5117-5132, 2002.  
[https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(02\)00221-1](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(02)00221-1)

DENG, Q.-H. Fluid flow and heat trnasfer characteristic of natural convection in square cavities dues to discrete source-sink pairs. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 51, n. 25-26, p. 5949-5957, 2008.

<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.04.062>

DYKO, M. P.; VAFAI, K.; MOJTABI, K. A numerical and experimental investigation of stability of natural convective flow within a horizontal annulus. **J. Fluid Mech.**, v. 381, p. 27-61, 1999.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112098002948>

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. 3. ed. [S.I.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

<https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>

FUKUDA, K.; MIKI, Y.; HASEGAWA, S. Analytical and experimental study of on turbulent natural convection in a horizontal annulus. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Fukuoka, v. 33, n. 4, p. 629-639, 1990.  
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(90\)90162-N](https://doi.org/10.1016/0017-9310(90)90162-N)

FUSEGI, T.; FAROUK, B. A. Three-dimensional study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders. **International Heat Transfer Conference**, v. 4, p. 1575-1580, 1986.

GEBHART. Natural convection flow and stability. **Adv. Heat Transfer**, v. 9, p. 273-348, 1973.  
[https://doi.org/10.1016/S0065-2717\(08\)70064-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70064-9)

GEBHART, B. *et al.* Buoyancy-induced flows and transport. **Hemisphere Publish Corporation**, New York, 1988.

GERMANO, M. *et al.* A dynamic sub-grid-scale eddy viscosity model. **Phys. Fluids A 3**, 7 July , p. 1760-1765, 1991.

GRIGULL, U.; HAUF, W. Natural convection in horizontal cylindrical annuli. **Proc. 3rd Int. Heat Transfer Conf. 2**, p. 182-195, 1966.

HÄRTEL, C. **Handbook of Computational Fluid Mechanics, cap:** Turbulent flows: direct. London: Academic Press, v. 1, p. 283–338, 1996.  
<https://doi.org/10.1016/B978-012553010-1/50006-2>

ISHIHARA, I.; MATSUMOTO, R.; SENOO, A. Natural convection in a vertical rectangular enclosure with localizing and cooling zones. **Heat Mass Transfer**, p. 467-472, 2000.  
<https://doi.org/10.1007/s002310000117>

ITOH, M. *et al.* A new method of correlating heat-transfer coefficients for natural convection in horizontal cylindrical annuli. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 13, p. 1364-1369, 1970.  
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(70\)90077-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(70)90077-3)

KEYHANI, M.; PRASAD, V.; COX, R. An experimental study of natural convection in a vertical cavity with discrete heat sources. **J. Heat Transfer**, v. 110, n. 3, p. 616-624, 1988.  
<https://doi.org/10.1115/1.3250537>

KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional step method to incompressible Navier-Stokes equations. **J. Comp. Phys.**, v. 59, p. 308-323, 1985.  
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(85\)90148-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(85)90148-2)

KOLMOGOROV, A. N. On generation (decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. **Dokl. Akad. Nauk. SSSR**, v. 31, p. 538-540, 1941.

KRAUSSOLD, H. wärmeabgabe von zylindrischen flüssigkeitschichten bei natürlicher konvektion. **Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens**, p. 186-191, 1934.

KUEHN, T. H.; GOLDSTEIN, R. J.. An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli. **Journal of Heat Transfer**, v. 100, p. 635-640, 1978.

<https://doi.org/10.1115/1.3450869>

KUMAR, R. Study of natural convection in horizontal annuli. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 31, n. 6, p. 1137-1148, 1988.

[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(88\)90056-7](https://doi.org/10.1016/0017-9310(88)90056-7)

LABONIA, G.; GUJ, G. Natual convection in a horizontal concentric cylindrical annulus: oscillatory flow and transition to chaos. **J. Fluid Mech.**, United Kingdom, v. 375, p. 179-202, 22 june 1998.

LILLY, D. K. The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments. **IBM Scientific Computing Symposium on Environmental Sciences**, 1967.

LILLY, D. K. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. **Phys. Fluids A 4**, p. 633-635, 3 March 1991.

LIMA, L. E. M. **Análise Númerica de Jatos Coaxiais Turbulentos**. São José dos Campos. 2007.

LIU, C. Y.; MUELLER, K.; LANDIS, F. Natural convection heat transfer in long horizontal cylindrical annuli. **International Developments in Heat Transfer**, New York, p. 976-984, 1961.

MACK, R.; BISHOP, E. H. Natural convection between horizontal concentric cylinders for low Rayleigh numbers. **Quart. Journ. Mech. and Applied Math.**, v. XXI, p. 223-241, 1968.

<https://doi.org/10.1093/qjmam/21.2.223>

MAHANEY , H.; INCOPRERA, F.; RAMADHYANI, S. Comparison of predicted and measured mixed convection heat transfer from an array of discrete sources in a horizontal rectangular channel. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 33, n. 6, 1990.

MAHANEY, H.; RAMADHYANI, S.; INCROPERA, F. Numerical simulation of three-dimesnional mixed convection heat transfer from an array of discrete heat sources in a horizontal rectangular duct. **Numerical Heat Transfer Part A: Applications**, v. 16, p. 267-286, 1989.  
<https://doi.org/10.1080/10407788908944717>

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2<sup>a</sup>. ed. [S.I.]: LTC, 2004.

MASTIANI, M. *et al.* Melting of a phase change material in a horizontal annulus with discrete heat sources. **Thermal Science**, v. 19, n. 5, p. 1733-1745, 2015.  
<https://doi.org/10.2298/TSCI121024094M>

MASTIANI, M. *et al.* Natural convection in a horizontal annulus with a different number and arrangements of discrete heat source-sink pairs. **Heat Transfer Research**, v. 47, p. 403-421, 2016.

<https://doi.org/10.1615/HeatTransRes.2016007862>

PADILLA, E. L. ; SIVEIRA-NETO, D. Large-eddy simulation of transition to turbulence in natural convection in a horizontal annular cavity. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, p. 3656-3668, 11 April 2008.

<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.07.025>

PADILLA, E. L. M. **Simulação de Grandes Escalas da Transição à Turbulência em Sistemas Rotativos com Transferência de Calor**. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia. 2004.

PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. New York: Hemisphere Publishing Corporation , 1980.

POWE, R. E.; CARLEY, C. T.; BISHOP, E. H. Free convective flow patterns in cylindrical annuli. **Jounal of Heat Transfer**, p. 310-314, August 1969.

PUTRA , N.; ROETZEL, W.; DAS, S. K. Natural convection of nanofluids. **Heat and Mass Transfer**, v. 39, p. 775-784, 2003.

<https://doi.org/10.1007/s00231-002-0382-z>

REZENDE, A. L. T. **Análise Numérica da Bolha de Separação do Escoamento Turbulento sobre Placa Plana Fina Inclinada**. PUC. Rio-RJ. 2009.

SANKAR , M.; DO , Y. Numerical simulation of free convection heat transfer in a vertical annular cavity with discrete heating. **International Communication in Heat and Mass Transfer**, v. 37, n. 6, p. 600-606, 2010.

<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.02.009>

SANKAR, M. et al. Numerical study of natural convection in a vertical porous annulus with discrete heating. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 54, n. 7-8, p. 1493-1505, 2011.

<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.11.043>

SANKAR, M.; SOOJIN, H.; YOUNGHAE, D. Numerical simulation of natural convection in a vertical annulus with a localized heat source. **Meccanica**, 2012.

<https://doi.org/10.1007/s11012-012-9560-3>

SEZAI, I.; MOHAMAD, A. Natural convection from a discrete heat source on the bottom of a horizontal enclosure. **Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 43, n. 13, p. 2257-2266, 2000.  
[https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(99\)00304-X](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(99)00304-X)

SHAANAN, P. M. et al. Improved methods for large eddy simulations of turbulence. **Turbulent Shear Flows**, n. 1, p. 386, 1975.

SILVEIRA-NETO, A. **Turbulência nos Fluidos Aplicada**. Apostila. Uberlândia-MG: Universidade Federal de Uberlândia. 2002.

SILVEIRA-NETO, A. et al. A Numerical investigation of the coherent structures of turbulence behind a backward-facing step. **Int. Journal of Fluids Mechanics**, v. 256, p. 1-25, 1993.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112093002691>

SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with primitive equations. **Mon. Weather Rev.**, v. 91, n. 3, p. 99-164, 1963.

[https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1963\)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1963)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2)

STONE, H. L. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. **SIAM J Numer. Anal.**, v. 5, p. 530-558, 1968.

<https://doi.org/10.1137/0705044>

TAKATA, Y. et al. Three-dimesional natural convection in an inclined cylindrical annulus. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 27, n. 5, p. 747-754, 1984.

[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(84\)90144-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90144-3)

TSUI, Y. T.; TREMBLAY, B. On Transient natural convection heat transfer in the annulus between concentric, horizontal cylinders with isothermal surfaces. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 27, p. 103-111, 1984.

[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(84\)90242-4](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90242-4)

VAFAI , K.; DESAI, C. P. Comparative analysis of the finite-element and finite-difference methods for simulation of buoyancy-induced flow and heat transfer in closed and open ended annular cavities. **Numerical Heat Transfer**, v. 23(A), p. 35-39, 1993.

VAFAI, K.; EFFEFGAH , J. An investigation of transient tree-dimensional buoyancy-driven flow and heat transfer in a closed horizontal annulus. **Int. J. Heat Mass Trasnfer**, v. 34, n. 10, p. 2555-2570, 1991.

[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(91\)90096-W](https://doi.org/10.1016/0017-9310(91)90096-W)

YUAN, X.; TAVAKKOLI, F.; VAFAI, K. Analysis of natural convection in horizontal concentric annuli of varying inner shape. **Numerical Heat Transfer**, v. 68, n. Part A, p. 1155-1174, 2015.