MILTON GABRIEL PERDOMO SANDOVAL

EQUAÇÃO DE DAUGAVET PARA POLINÔMIOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2018

MILTON GABRIEL PERDOMO SANDOVAL

EQUAÇÃO DE DAUGAVET PARA POLINÔMIOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientadora: Profa. Dra. Elisa Regina do Santos.

UBERLÂNDIA - MG
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

S218e
2018

Sandoval, Milton Gabriel Perdomo, 1989-
Equacão de Daugavet para polinômios / Milton Gabriel Perdomo Sandoval. - 2018.
66 f. : il.

Orientadora: Elisa Regina dos Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Disponível em: http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.189
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Análise funcional - Teses. 3. Banach, Espaços de - Teses. I. Santos, Elisa Regina dos. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Maria Salete de Freitas Pinheiro – CRB6/1262

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Milton Gabriel Perdomo Sandoval.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11612MAT011.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional e Equações Diferenciais.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Equação de Daugavet para polinômios.

ORIENTADORA: Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos.

Esta dissertação foi APROVADA em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 23 de fevereiro de 2018, às 14h, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos UFU - Universidade Federal de Uberlândia (orientadora)	Elisa Regina dos Santos
Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira USP - Universidade de São Paulo	
Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho UFU - Universidade Federal de Uberlândia	

Uberlândia-MG, 23 de fevereiro de 2018.

Dedicatória

Quero dedicar este trabalho só a Deus, quem foi e será sempre meu amigo e meu pai. Só Ele merece a glória e a exclusividade nesta dedicatória.

Agradecimentos

Quero agradecer aos professores de mestrado da UFU e de graduação da Universidade de Córdoba que contribuíram na minha formação acadêmica.

Agradeço a minha orientadora Elisa. Obrigado por tudo o que você fez para me ajudar a ter sucesso no mestrado. Obrigado pela paciência e pela confiança.

Quero agradecer aos professores da banca examinadora por aceitarem o convite. Obrigado pelas sugestões e correções.

Agradeço aos meus colegas de mestrado: Zé Henrique, Aluízio, Julian, Augusto, Javier e toda a grande turma do ano 2017. Obrigado pelo trabalho em equipe e os momentos para tomar um café e um pão de queijo. Obrigado por todas as conversas, pelo apoio, solidariedade e amizade. Muito obrigado. Uesley este parágrafo também é dedicado a você de forma especial. Muito obrigado.

Obrigado ao grupo Maz 1.0 e 2.0. Aos meus amigos Pedro, Marlon, Maycom, Ian, Jagner, Regiane, Guilherme, Mariana D. e toda a galera maneira da igreja. Obrigado pela amizade e o apoio.

Agradeço a minha esposa Yulis por tudo o que ela é. Obrigado por tudo. Estas palavras não descrevem completamente o meu agradecimento. Não dou conta de fazer.

Agradeço aos meus pais Milton Hernán e Estela Sandoval, pelo apoio desde a Colômbia, e aos meus irmãos David, Diana Sofia e Ruben.

Agradeço à Universidade Federal de Uberlândia por me acolher e à CAPES pelo apoio financeiro.

PERDOMO, M. G. *Equação de Daugavet para polinômios.* 2018. 53 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a Equação de Daugavet e a Equação Alternativa de Daugavet para funções limitadas em espaços de Banach. Primeiramente apresentaremos caracterizações destas equações para funções limitadas e funções uniformemente contínuas. Em seguida estudaremos tais equações para polinômios e aplicações holomorfas em espaços de Banach, especialmente em espaços de funções contínuas. Estudaremos ainda a propriedade de Daugavet de ordem k e a propriedade alternativa de Daugavet de ordem k. E finalmente exibiremos alguns resultados sobre a estabilidade da propriedade polinomial de Daugavet e da propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

Palavras-chave: espaços de Banach, equação de Daugavet, polinômios.

PERDOMO, M. G. *Daugavet equation for polynomials.* 2018. 53 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work we will study the Daugavet Equation and the Alternative Daugavet Equation for bounded functions on Banach spaces. Firstly we will present characterizations of these equations for bounded functions and uniformly continuous functions. Next we will study such equations for polynomials and holomorphic mappings on Banach spaces, especially on spaces of continuous functions. We will also study the k-order Daugavet property and the k-order alternative Daugavet property. And finally we will show some results about the stability of the polynomial Daugavet property and the alternative polynomial Daugavet property.

Keywords: Banach spaces, Daugavet equation, polynomials.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais não-negativos
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathbb{T}$	esfera unitária em $\mathbb{K}$
$\mathbb{D}$	disco unitário fechado em $\mathbb{C}$
$\operatorname{Re} z$	parte real de um numero complexo z
$\operatorname{Im} z$	parte imaginária de um numero complexo z
Ω, K	espaço topológico
$X_1, \ldots, X_m, X, Y$	espaços vetoriais ou espaços normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$
(X, τ)	espaço vetorial topológico
X^m	produto cartesiano de X m-vezes
X^*	dual topológico de X
X'	dual algébrico de X
B_X	bola unitária fechada em X
B_X°	bola unitária aberta em X
S_X	esfera unitária em X
$co(A)$	envoltória convexa do subconjunto A de um espaço vetorial
$\overline{co}(A)$	fecho da envoltória convexa do subconjunto A de um espaço vetorial topológico
$\Gamma(A)$	envoltória absolutamente convexa do subconjunto A de um espaço vetorial
$Im(f)$	imagem da aplicação f
$ker(f)$	núcleo da aplicação f
Id_X	operador identidade definido em X
$L(X, Y)$	espaço dos operadores lineares de X em Y
$\mathcal{L}(X, Y)$	espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y
$L(^mX; Y)$	espaço das aplicações multilineares de X^m em Y
$\mathcal{L}(^mX; Y)$	espaço das aplicações multilineares contínuas de X^m em Y

$L^s(^mX;Y)$	subespaço vetorial de $L(^mX;Y)$ das aplicações multilineares simétricas
$\mathcal{L}^s(^mX;Y)$	subespaço vetorial de $\mathcal{L}(^mX;Y)$ das aplicações multilineares contínuas simétricas
$P(^mX,Y)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m-homogêneos de X em Y
$\mathcal{P}(^mX,Y)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m-homogêneos contínuos de X em Y
$\mathcal{P}(^mX)$	$\mathcal{P}(^mX,\mathbb{K})$
$P(X,Y)$	espaço dos polinômios de X em Y
$\mathcal{P}(X,Y)$	espaços dos polinômios contínuos de X em Y
$\mathcal{P}(X)$	$\mathcal{P}(X,\mathbb{K})$
$\ell_\infty(B_X,Y)$	espaço das funções limitadas de B_X em Y
$\ell_\infty(B_X)$	$\ell_\infty(B_X,\mathbb{K})$
$\mathcal{A}_\infty(B_X,X)$	espaço de Banach das funções de B_X em X, holomorfas em B_X° e limitadas e contínuas em B_X
$\mathcal{A}_\infty(B_X)$	espaço de Banach das funções de B_X em $\mathbb{K}$, holomorfas em B_X° e limitadas e contínuas em B_X
$\mathcal{A}_u(B_X,X)$	subespaço fechado de $\mathcal{A}_\infty(B_X,X)$ formado pelas funções que admitem uma extensão uniformemente contínua a B_X
$\mathcal{A}_u(B_X)$	subespaço fechado de $\mathcal{A}_\infty(B_X)$ formado pelas funções que admitem uma extensão uniformemente contínua a B_X
$C_u(B_X,X)$	espaços das funções uniformemente contínuas de B_X em X
$C_b(\Omega,X)$	espaço das funções contínuas e limitadas de um espaço de Hausdorff completamente regular Ω em X
$C_b(\Omega)$	$C_b(\Omega,\mathbb{K})$
$C(K,X)$	espaço das funções contínuas de um espaço de Hausdorff compacto K em X
$C(K)$	$C(K,\mathbb{K})$
$\mathcal{Z}$	subespaço de $\ell_\infty(B_X)$
$\mathcal{Z}^X$	espaço das funções $\Phi : B_X \to X$ tais que $x^* \circ \Phi \in \mathcal{Z}$ para todo $x^* \in X^*$
$\varphi \otimes x_0$	elemento de $\mathcal{Z}^X$ dado por $[\varphi \otimes x_0](x) = \varphi(x)x_0$ para todo $x \in B_X$, onde $\varphi \in \mathcal{Z}$ e $x_0 \in X$
$\Pi(X)$	$\{(x,x^*) : x \in S_X,\ x^* \in S_{X^*},\ x^*(x) = 1\}$
$V(\Phi)$	imagem numérica de Φ
$v(\Phi)$	raio numérico de Φ
$\ell_\infty(X)$	espaço das sequências limitadas em X
$\ell_1(X)$	espaço das sequências em X cuja somatória das normas dos elementos converge
$c_0(X)$	espaço das sequências em X que convergem a zero
c_0	espaço das sequências em $\mathbb{K}$ que convergem a zero
c	espaço das sequências em $\mathbb{K}$ que convergem
$\left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{c_0}$	soma c_0 de uma sequência $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ de espaços de Banach

$\left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_\infty}$	soma ℓ_∞ de uma sequência $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ de espaços de Banach
$\left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_1}$	soma ℓ_1 de uma sequência $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ de espaços de Banach

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional é o estudo dos espaços vetoriais normados e dos operadores lineares contínuos entre eles, tal como é definido no Prefácio do livro de G. Botelho et al. [6]. Entre os diversos tópicos de pesquisa da Análise Funcional se encontra a *Equação de Daugavet*. Tendo conhecimentos básicos de espaços vetoriais normados e operadores, é bem fácil de entender a definição da equação de Daugavet. Antes de introduzi-la, consideremos um exemplo no $\mathbb{R}^n$: Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ é fácil mostrar que $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ se, e somente se, existe $\alpha > 0$ tal que $u = \alpha v$. Ou seja, dois vetores no $\mathbb{R}^n$ satisfazem a igualdade na desigualdade triangular se, e somente se, possuem a mesma direção e o mesmo sentido. Considerando agora o espaço normado dos operadores lineares contínuos de $C[0,1]$ em $C[0,1]$ com a norma do supremo, I. K. Daugavet [11] mostrou em 1963 que ser compacto é uma condição suficiente para que um operador T de $C[0,1]$ em $C[0,1]$ satisfaça a relação

$$\|Id + T\| = \|Id\| + \|T\|,$$

ou equivalentemente

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\|. \tag{DE}$$

Esta última equação é conhecida hoje como *Equação de Daugavet*. Ao longo dos anos, diversos autores têm trabalhado para encontrar classes de funções que satisfaçam tal equação. Como resultado destas pesquisas temos alguns exemplos: G. Y. Lozanovskii [20], para o caso dos operadores compactos em $L_1[0,1]$; H. Kamowitz [17], para o caso dos operadores compactos em $C(K)$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados; J. R. Holub [15], para o caso dos operadores fracamente compactos em $C[0,1]$; D. Werner [29], para o caso dos operadores fracamente compactos em $C(K)$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados. Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade de Daugavet* se todo operador de posto um em X satisfaz (DE).

Em 1970, J. Ducan et al. [13] provaram que para todo espaço de Hausdorff compacto K, toda medida σ-finita μ e todo operador linear T em $C(K)$ ou em $L_1(\mu)$, a equação

$$\max_{|w|=1} \|Id + wT\| = 1 + \|T\| \tag{ADE}$$

é satisfeita. A partir de então essa equação passou a ser conhecida como *Equação Alternativa de Daugavet*. Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade alternativa de Daugavet* se todo operador de posto um em X satisfaz (ADE).

Atualmente tais equações têm sido amplamente estudadas. Além disto, em 2007 Y. S. Choi et al. [9] ampliaram o seu estudo para funções mais gerais, particularmente para polinômios definidos em espaços de Banach da seguinte maneira. Dado um espaço de Banach X, um polinômio $P \in \mathcal{P}(X, X)$ satisfaz a *equação de Daugavet* se

$$\|Id + P\| = 1 + \|P\|, \tag{DE}$$

e P satisfaz a *equação alternativa de Daugavet* se

$$\max_{|w|=1} \|Id + wP\| = 1 + \|P\|. \tag{ADE}$$

Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade polinomial de Daugavet* (PDP) se todo polinômio fracamente compacto sobre X satisfaz (DE). Analogamente, X tem a *propriedade polinomial alternativa de Daugavet* (APDP) se todo polinômio fracamente compacto sobre X satisfaz (ADE). O objetivo deste trabalho é estudar tais equações para polinômios homogêneos, polinômios e aplicações holomorfas.

A seguir descrevemos a organização deste trabalho.

No Capítulo 1 apresentamos algumas definições e resultados de Topologia Geral, Análise Funcional e Espaços Vetoriais Topológicos, assim como uma breve introdução aos polinômios em espaços de Banach. Esse capítulo contém essencialmente os elementos fundamentais que facilitarão a compreensão dos capítulos seguintes.

No Capítulo 2 apresentamos em detalhes uma abordagem mais geral do estudo da (DE) e da (ADE), baseado em estudos recentes de Choi et al. [9]. Esse capítulo contém uma caracterização especialmente importante para funções uniformemente contínuas em relação a (DE) e (ADE).

Os Capítulos 3 e 4 são destinados ao tema principal desta dissertação, a equação de Daugavet para polinômios. O Capítulo 3 contém um dos teoremas mais importantes deste trabalho (Teorema 3.1.2). Nesse capítulo, fazendo uso dos resultados Capítulo 2, estudamos (DE) e (ADE) para polinômios definidos em subespaços C_b-*rich* de espaços de funções contínuas e para funções holomorfas definidas em espaços de funções contínuas. Já no Capítulo 4, apresentamos resultados sobre o comportamento da propriedade de Daugavet de ordem k e da propriedade alternativa de Daugavet de ordem k conforme variamos o k.

Finalmente, o Capítulo 5 é destinado a apresentar um estudo da estabilidade da propriedade polinomial de Daugavet e da propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

Milton Gabriel Perdomo Sandoval
Uberlândia-MG, 23 de fevereiro de 2018.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Para o desenvolvimento deste trabalho precisaremos apresentar inicialmente um conjunto de definições e resultados de Topologia Geral, Análise Funcional, da teoria de Espaços Vetoriais Topológicos e da Análise Funcional Não Linear. Grande parte dos resultados são clássicos e muito conhecidos, neste caso não incluiremos suas demonstrações. Na primeira seção apresentaremos os principais conceitos e resultados de Topologia Geral, Análise Funcional e Espaços Vetoriais Topológicos. Na segunda seção introduziremos as aplicações multilineares contínuas e alguns resultados importantes sobre tais aplicações. Por fim, na terceira seção trataremos de polinômios e aplicações holomorfas em espaços de Banach.

1.1 Conceitos e resultados básicos

Apresentaremos primeiramente algumas definições e resultados de Topologia Geral.

Proposição 1.1.1. *Todo subconjunto fechado F de um espaço topológico compacto Ω é compacto.*

Demonstração. Veja [18, Proposição 7.2.2]. □

Proposição 1.1.2. *Sejam Ω_1 e Ω_2 espaços topológicos e $f\colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ uma aplicação contínua. Para todo subconjunto compacto K de Ω_1, $f(K)$ é um subconjunto compacto de Ω_2.*

Demonstração. Veja [18, Proposição 7.2.4]. □

Definição 1.1.3. Um espaço topológico Ω se diz T_1 se dados dois pontos distintos em Ω existe uma vizinhança de cada um deles que não contém o outro.

Definição 1.1.4. Um espaço topológico Ω é dito *completamente regular* se dados um fechado $F \subseteq \Omega$ e um ponto $x \notin F$, existe uma função contínua $f : \Omega \to [0,1]$ tal que $f(F) \subseteq \{0\}$ e $f(x) = 1$. Um espaço topológico se diz de *Tychonoff* se é T_1 e completamente regular.

Definição 1.1.5. Seja $\varphi : \Omega \to X$ onde Ω é um espaço topológico e X é um espaço vetorial. Definimos o *suporte* de φ por

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega :\ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Teorema 1.1.6. *Cada espaço de Hausdorff localmente compacto é um espaço de Tychonoff.*

Demonstração. Veja [24, Teorema 22.4]. □

A seguir apresentamos definições e resultados de Análise Funcional e Espaços Vetoriais Topológicos.

Teorema 1.1.7. (Teorema de Hahn-Banach) *Seja Y um subespaço vetorial de um espaço normado X sobre $\mathbb{K}$ e seja $\varphi\colon Y \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi}\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a Y coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Veja [6, Corolário 3.1.3]. □

Teorema 1.1.8. (Teorema de Hahn-Banach) *Sejam X um espaço normado, $X \neq \{0\}$ e $x \in X$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^* \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}.$$

Demonstração. Veja [6, Corolário 3.1.5]. □

Teorema 1.1.9. (Teorema de Hahn-Banach) *Seja X um espaço normado. Para todo $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear contínuo $\varphi \in X^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Veja [6, Corolário 3.1.4]. □

Sejam X um conjunto, $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $(f_i)_{i\in I}$ uma família de funções $f_i\colon X \longrightarrow Y_i$ para cada $i \in I$. Para cada $i \in I$ e cada aberto A_i em Y_i, considere o conjunto

$$f_i^{-1}(A_i) = \{x \in X : f(x) \in A_i\}.$$

Chame de Φ a coleção dos subconjuntos de X que podem ser escritos como interseções finitas de conjuntos da forma $f_i^{-1}(A_i)$.

Proposição 1.1.10. *Existe uma topologia τ em X que tem Φ como uma base, isto é, os elementos de τ são uniões de elementos de Φ.*

Demonstração. Veja [31, 8.9]. □

Definição 1.1.11. A topologia τ da Proposição 1.1.10 é chamada de *topologia gerada pela família de funções* $(f_i)_{i\in I}$.

Definição 1.1.12. A *topologia fraca* no espaço normado X, denotada por $\sigma(X, X^*)$ ou simplesmente por w, é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in X^*$.

Quando uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X convergir para $x \in E$ na topologia fraca, escrevemos $x_n \stackrel{w}{\longrightarrow} x$.

Dado um subconjunto A do espaço normado X, denotaremos por $\overline{A}^w$ o fecho de A na topologia fraca e o chamaremos de *fecho fraco* de A.

Definição 1.1.13. Um subconjunto A de um espaço normado X é dito *relativamente fracamente compacto* se $\overline{A}^w$ é fracamente compacto em X.

Definição 1.1.14. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto $A \subseteq X$ é dito *convexo* se $\alpha x + \beta y \in A$ para todos $x, y \in A$ e escalares $\alpha, \beta \geq 0$ com $\alpha + \beta = 1$.

Definição 1.1.15. Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $A \subseteq X$. A *envoltória convexa de* A, denotada por $co(A)$, é a interseção de todos os conjuntos convexos de X que contêm A.

Proposição 1.1.16. *Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $A \subseteq X$. Então a envoltória convexa de A é dada por*

$$co\,(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \quad x_i \in A, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Demonstração. Veja [26, Theorem 4.2.3]. □

Teorema 1.1.17. *Seja (X, τ) espaço vetorial topológico. A envoltória convexa da união de um número finito de conjuntos compactos é compacta.*

Demonstração. Veja [26, Theorem 4.4.4]. □

Teorema 1.1.18. *Sejam (X, τ) espaço vetorial topológico e $A \subseteq X$. Então*

$$co\left(\overline{A}\right) = \overline{co}(A).$$

Demonstração. Veja [26, Theorem 4.4.3]. □

Definição 1.1.19. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto $A \subseteq X$ é dito *absolutamente convexo* se $\alpha x + \beta y \in A$ para todos $x, y \in A$ e escalares α, β com $|\alpha| + |\beta| \leq 1$.

Definição 1.1.20. Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $A \subseteq X$. A *envoltória absolutamente convexa* de A, denotada por $\Gamma(A)$, é a interseção de todos os conjuntos absolutamente convexos de X que contêm A.

Proposição 1.1.21. *Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $A \subseteq X$. Então a envoltória absolutamente convexa de A é dada por*

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \quad x_i \in A \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Demonstração. Veja [26, Theorem 4.2.9]. □

Teorema 1.1.22. (Teorema de Krein-Smuliam) *Seja X um espaço de Banach. Se $\overline{A}^w$ é um subconjunto fracamente compacto de X então $\overline{\Gamma(A)}^w$ é fracamente compacto em X.*

Demonstração. Veja [[27], Teorema 4.5.10]. □

Teorema 1.1.23. (Segunda forma geométrica do Teorema de Hanh-Banach) *Sejam A e B subconjuntos convexos, não vazios e disjuntos do espaço normado X. Se A é fechado e B é compacto, então existem um funcional $\varphi \in X^*$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$Re\varphi(x) \leq a < b \leq Re\varphi(y) \quad \textit{para todos}\, x \in A \textit{ e}\, y \in B.$$

Demonstração. Veja [6, Teorema 3.4.9 e Exercicío 3.6.27(b)]. □

Teorema 1.1.24. (Teorema de Eberlein-Smulian) *Sejam X um espaço de Banach e A um subconjunto de X. Então A é relativamente fracamente compacto (respectivamente, fracamente compacto) se, e somente se, cada sequência em A admite uma subsequência que converge fracamente para algum ponto em X (respectivamente, para algum ponto de A).*

Demonstração. Veja [2, Theorem 3.40]. □

Teorema 1.1.25. (Teorema de Mazur) *Sejam X um espaço normado e A um subconjunto convexo de X. Então o fecho de A na topologia da norma coincide com o fecho de A na topologia fraca. Em particular, um conjunto convexo é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.*

Demonstração. Veja [6, Teorema 6.2.11]. □

Teorema 1.1.26. (Bishop-Phelps-Bollobás) *Sejam X espaço de Banach e $0 < \delta < 1$. Dados $z \in B_X$ e $h \in S_{X^*}$ com*

$$|1 - h(z)| < \delta^2/4,$$

existem $y \in S_X$ e $g \in S_{X^*}$ tais que $g(y) = 1$, $\|y - z\| < \delta$ e $\|g - h\| < \delta$.

Demonstração. Veja [5, Section 16, Theorem 1]. □

Definição 1.1.27. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço de Banach X é chamada de *base de Shauder* de X se cada $x \in X$ tem uma representação única na forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A unicidade da representação permite considerar os funcionais lineares

$$x_n^* : X \longrightarrow \mathbb{K}, x_n^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) = a_n,$$

$n \in \mathbb{N}$, que são chamados de *funcionais coordenadas* (ou *funcionais coeficientes*).

Definição 1.1.28. Uma sequência $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach X é dita uma *sequência básica* se $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma base de Shauder de $\overline{span}\{e_i\}$.

Definição 1.1.29. Seja $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência básica em um espaço de Banach X e seja $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência básica em um espaço de Banach Y. Dizemos que $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ é *equivalente* a $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ se para toda sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tem-se que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ converge se, e somente se, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge.

Proposição 1.1.30. *Seja $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência básica em um espaço de Banach X e seja $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência em um espaço de Banach Y. São equivalentes:*

i) $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência básica equivalente a $(e_i)_{i=1}^{\infty}$.

ii) Existe um isomorfismo T de $\overline{span}\{e_i\}$ em $\overline{span}\{f_i\}$ tal que $T(e_i) = f_i$ para todo i.

iii) Existem $C_1, C_2 > 0$ tais que para todos os escalares $a_1, ..., a_n$,

$$C_1 \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_X \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_1 f_1 \right\|_Y \leq C_2 \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_X .$$

Demonstração. Veja [14, Fact 6.17]. □

Teorema 1.1.31. *(Krein, Milman, Rutnan, Valdivia)*
Seja $(e_j)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência básica em um espaço de Banach X e seja $\left(e_j^*\right)_{i=1}^{\infty}$ os funcionais coeficientes da base $(e_j)_{i=1}^{\infty}$ de $\overline{span}\{e_j\}$. Suponha que $(f_j)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência em X tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|e_i - f_i\| \, \|e_i^*\| = C < 1.$$

Então $(f_j)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência básica equivalente a $(e_j)_{i=1}^{\infty}$.

Demonstração. Veja [14, Theorem 6.18]. □

1.2 Aplicações multilineares

As aplicações multilineares são essenciais para a definição de polinômios entre espaços de Banach, os quais irão desempenhar um papel especial neste trabalho. Nesta seção apresentaremos os conceitos e resultados relativos às aplicações multilineares que necessitaremos para introduzir polinômios. Para um estudo detalhado de aplicações multilineares em espaços de Banach sugerimos a referência [23].

Definição 1.2.1. Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por $L(^m X, Y)$ o espaço das aplicações m-lineares $A : X^m \to Y$, e denotaremos por $\mathcal{L}(X^m, Y)$ o subespaço das aplicações contínuas de $L(^m X, Y)$. Para cada $A \in L(^m X, Y)$ definimos

$$\|A\| = \sup \left\{ \|A(x_1, \ldots, x_m)\| \ : \ x_j \in X, \ \max_{1 \leq j \leq m} \|x_j\| \leq 1 \right\}.$$

Por conveniência definimos $L(^0X,Y)=\mathcal{L}(^0X,Y)$ como Y, isto é, como o5 espaço das funções constantes definidas de X em Y. Quando $m=1$, escreveremos $L(^1X,Y)=L(X,Y)$ e $\mathcal{L}(^1X,Y)=\mathcal{L}(X,Y)$. Quando $Y=\mathbb{K}$, escreveremos $L(^mX,\mathbb{K})=L(^mX)$ e $\mathcal{L}(^mX,\mathbb{K})=\mathcal{L}(^mX)$. Finalmente, quando $m=1$ e $Y=\mathbb{K}$, escreveremos $L(X)=X'$ e $\mathcal{L}(X)=X^*$.

Proposição 1.2.2. *Para $A\in L(^mX,Y)$ as seguintes condições são equivalentes:*

(a) A é contínua.

(b) A é contínua na origem.

(c) $\|A\|<\infty$.

Demonstração. Veja [23, Proposition 1.2]. □

Proposição 1.2.3. *$\mathcal{L}(^mX,Y)$ é um espaço de Banach com a norma definida anteriormente.*

Demonstração. Veja [23, Proposition 1.3]. □

Definição 1.2.4. Uma aplicação multilinear $A\colon X^m\longrightarrow Y$ é *simétrica* se

$$A(x_1,\ldots,x_m)=A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)})$$

para todos $(x_1,\ldots,x_m)\in X^m$ e $\sigma\in S_m$, onde S_m denota o conjunto das permutações dos m primeiros números naturais.

Exemplo 1.2.5. Sejam X e Y espaços vetoriais com dimensão de X maior ou igual a 2, φ_1,φ_2 funcionais lineares não nulos em X e $0\neq y\in Y$. A aplicação bilinear

$$A\colon X\times X\longrightarrow Y\ ,\ A(x_1,x_2)=\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)y,$$

não é simétrica, a menos que φ_1 e φ_2 sejam linearmente dependentes.

Os conjuntos das aplicações multilineares simétricas e das aplicações multilineares simétricas contínuas $A\colon X^m\longrightarrow Y$ serão denotados por $L^s(^mX;Y)$ e $\mathcal{L}^s(^mX;Y)$, respectivamente. Tais conjuntos $L^s(^mX;Y)$ e $\mathcal{L}^s(^mX;Y)$ são subespaços vetoriais de $L(^mX;Y)$ e $\mathcal{L}(^mX;Y)$, respectivamente.

Proposição 1.2.6. *Para cada $A\in L(^mX;Y)$, defina $A^s\colon X^m\longrightarrow Y$ por*

$$A^s(x_1,\ldots,x_m):=\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m}A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}).$$

Então as seguintes propriedades são satisfeitas:
(a) $A^s\in L^s(^mX;Y)$.
(b) $A^s=A$ *se, e somente se,* $A\in L^s(^mX;Y)$.
(c) $(A^s)^s=A^s$.
(d) *O operador* $s\colon L(^mX;Y)\longrightarrow L^s(^mX;Y)$*, definido por* $s(A)=A^s$*, é linear.*
(e) *Se* $x\in X$ *então* $Ax^m=A^sx^m$.

Demonstração. Veja [3, Proposição 1.1.6]. □

Teorema 1.2.7 (Fórmula de Polarização)**.** *Seja* $A \in L^s({}^mX;Y)$. *Então para todos* $x_0,\dots,x_m \in X$ *tem-se a fórmula*

$$A(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m A(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m,$$

que será denominada Fórmula de Polarização.

Demonstração. Veja [23, Theorem 1.10]. □

1.3 Polinômios e aplicações holomorfas

A seguir apresentaremos definições e resultados sobre polinômios e aplicações holomorfas em espaços de Banach.

Definição 1.3.1. Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $P\colon X \longrightarrow Y$ é um *polinômio* m*-homogêneo* ou *polinômio homogêneo de grau* m, se existir uma aplicação $A \in L({}^mX;Y)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo ponto $x \in X$. Neste caso dizemos que P é o polinômio m-homogêneo associado à aplicação m-linear A.

Não é difícil mostrar que o conjunto dos polinômios m-homogêneos $P\colon X \longrightarrow Y$ forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de funções. Denotaremos tal espaço por $P({}^mX;Y)$.

Exemplo 1.3.2. A função $P\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por $P(x) = ax^m$, $a \in \mathbb{K}$, é um polinômio m-homogêneo. Basta tomar $A \in L({}^m\mathbb{K})$ dada por $A(x_1,\dots,x_m) = ax_1\dots x_m$, e assim temos $P(x) = Ax^m$. Estes são os únicos polinômios m-homogêneos de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{K}$. Veja ([27], Exemplo 1.3.2).

Proposição 1.3.3. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach sobre* $\mathbb{K}$. *Para cada* $A \in L^s({}^mX;Y)$, *considere a aplicação*

$$\widehat{A}\colon X \longrightarrow Y\ ,\ \widehat{A}(x) := Ax^m.$$

Então a correspondência $A \longmapsto \widehat{A}$ *é um isomorfismo entre os espaços vetoriais* $L^s({}^mX;Y)$ *e* $P({}^mX;Y)$.

Demonstração. Veja [23, Theorem 2.2]. □

A proposição anterior nos mostra que para todo polinômio $P \in P({}^mX;Y)$, existe uma única aplicação multilinear simétrica $A \in L^s({}^mX;Y)$ tal que

$$Ax^m = P(x)$$

para todo $x \in X$. Neste caso denotaremos $\overset{\vee}{P} := A$.

O subespaço de $P({}^mX;Y)$ formado pelos polinômios m-homogêneos contínuos será denotado por $\mathcal{P}({}^mX;Y)$. Quando $Y = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{P}({}^mX;\mathbb{K})$ por $\mathcal{P}({}^mX)$.

Proposição 1.3.4. *Para cada $P \in P(^m X; Y)$ as seguintes condições são equivalentes:*

(a) P é contínuo.

(b) P é limitado em toda bola com raio finito.

(c) P é limitado em alguma bola aberta.

Demonstração. Veja [23, Proposição 2.4]. □

O próximo resultado prova que o espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos é um espaço normado se munido com a norma

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\}.$$

Proposição 1.3.5. *Sejam X e Y espaços de Banach. Então $(\mathcal{P}(^m X; Y); \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [23, Corollary 2.3]. □

Proposição 1.3.6. *Sejam X e Y espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$. Então:*
(a) $\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in X \textit{ e } \|x\| = 1\}$.
(b) $\|P\| = \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^m, \textit{ para todo } x \in X\}$.
(c) $\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^m$ *para todo* $x \in X$.

Demonstração. Veja [4, Proposição 1.3.5]. □

Proposição 1.3.7. *Sejam X e Y espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. A correspondência $P \longmapsto \overset{\vee}{P}$ induz um isomorfismo topológico entre os espaços normados $\mathcal{P}(^m X; Y)$ e $\mathcal{L}^s(^m X; Y)$. Além disso,*

$$\| \overset{\vee}{P} \| \leq \|P\| \leq \frac{m^m}{m!} \| \overset{\vee}{P} \|,$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$.

Demonstração. Veja [4, Proposição 1.3.8]. □

Os seguintes exemplos foram tomados de [27].

Exemplo 1.3.8. Sejam X e Y espaços de Banach, $\varphi \in X^*$, $u \in \mathcal{L}(X; Y)$ e $m \in \mathbb{N}$. Considere a aplicação

$$P \colon X \longrightarrow Y \ , P(x) = (\varphi(x))^{m-1} u(x).$$

Temos que $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$.

Exemplo 1.3.9. Sejam X e Y espaços de Banach. A aplicação dada por

$$Q_m \colon X \longrightarrow (\mathcal{P}(^m X))^* , \quad Q_m(x)(P) = P(x),$$

é um polinômio m-homogêneo contínuo de norma 1.

Exemplo 1.3.10. Sejam X e Y espaços de Banach, $\varphi \in X^*$ e $b \in Y$. A aplicação dada por

$$\varphi^m \otimes b\colon X \longrightarrow Y, \quad (\varphi^m \otimes b)(x) = (\varphi(x))^m \; b,$$

é um polinômio m-homogêneo contínuo com $\|\varphi^m \otimes b\| = \|\varphi\|^m \|b\|$.

Exemplo 1.3.11. Sejam $m \in \mathbb{N}$, X e Y espaços de Banach, $Q \in \mathcal{P}(^m X)$ e $b \in Y$. Considere a aplicação

$$Q \otimes b\colon X \longrightarrow Y \;, Q \otimes b(x) = Q(x)b.$$

Temos que $Q \otimes b$ é um polinômio m-homogêneo contínuo e $\|Q \otimes b\| = \|Q\| \cdot \|b\|$.

Definição 1.3.12. Sejam X e Y espaços de Banach. Uma função $P : X \longrightarrow Y$ se diz *polinômio do grau no máximo* m se existem polinômios m-homogêneos $P_j \in P(^j X, Y)$ com $j = 0, ..., m$ tais que

$$P = P_0 + P_1 + ... + P_m.$$

Denotamos por $P(X, Y)$ o espaço vetorial dos polinômios e por $\mathcal{P}(X, Y)$ o subespaço dos elementos contínuos de $P(X, Y)$. Quando $Y = \mathbb{K}$ escrevemos $P(X, \mathbb{K}) = P(X)$ e $\mathcal{P}(X, \mathbb{K}) = \mathcal{P}(X)$.

Para cada $P \in P(X, Y)$ se define a norma

$$\|P\| = \sup_{x \in B_X} \|P(x)\|.$$

Tal norma torna $P(X, Y)$ um espaço normado. Além disto, temos os seguintes resultados.

Proposição 1.3.13. *Dado $P \in P(X, Y)$ as seguintes condições são equivalentes:*

(a) P é contínuo.

(b) P é limitado em toda bola de raio finito.

(c) P é limitado em alguma bola de raio finito.

Demonstração. Veja [23, Proposition 2.9]. □

Proposição 1.3.14. *(a) $P(X, Y)$ é soma direta algébrica dos subespaços $P(^m X, Y)$, com $m \in \mathbb{N}_0$.*

(b) $\mathcal{P}(X, Y)$ é soma direta algébrica dos subespaços $\mathcal{P}(^m X, Y)$, com $m \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Veja [23, Exercise 2.N]. □

Lema 1.3.15. *Sejam $P_m \in \mathcal{P}(^m X, Y)$ e $B \subset X$ limitado. Então P_m é uniformemente contínuo em B.*

Demonstração. Como $P_m \in \mathcal{P}(^m X, Y)$, pela Proposição 1.3.7, existe $A \in \mathcal{L}^s(^m X; Y)$ única tal que para todo $x \in X$, $P(x) = Ax^m$. Seja $\beta > 0$ tal que $\|x\| < \beta$ para todo $x \in B$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $0 < \delta < \varepsilon/(1 + m\|A\|\beta^{m-1})$. Para cada $x, y \in B$ temos que se $\|x - y\| < \delta$ então

$$\begin{aligned} \|P_m(x) - P_m(y)\| &= \|Ax^{m-1}(x-y) + \sum_{j=2}^{m-1} Ax^{m-j}(x-y)y^{j-1} + A(x-y)y^{m-1}\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \|A\|\|x-y\|\beta^{m-1} \\ &= \|x-y\| m\beta^{m-1}\|A\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, P_m é uniformemente contínuo em B. □

Proposição 1.3.16. *Sejam $P \in \mathcal{P}(X, Y)$ e $B \subset X$ limitado. Então P é uniformemente contínuo em A.*

Demonstração. Pela Proposição 1.3.14, existem $P_j \in \mathcal{P}(^j X, Y)$ para $j = 0, 1, ..., m$ tais que

$$P = P_0 + P_1 + ... + P_m.$$

Pelo Lema 1.3.15, cada P_j é uniformemente contínuo em A. Logo P é uniformemente contínuo em A. □

Teorema 1.3.17. *Uma função $P : X \longrightarrow Y$ é um polinômio contínuo se, e somente se, $\Psi \circ P : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é um polinômio contínuo para todo $\Psi \in Y^*$.*

Demonstração. Veja [23, Theorem 3.11]. □

Teorema 1.3.18. *(Bogdanowicz) Seja $p \in \mathcal{P}(c_0)$. Se $x_n \xrightarrow{w} x$ então $p(x_n) \to p(x)$.*

Demonstração. Veja [12, Proposition 1.59]. □

Definição 1.3.19. Sejam X, Y espaços de Banach complexos e U um subconjunto aberto de X. Uma aplicação $f : U \longrightarrow Y$ é chamada *holomorfa* ou *analítica* em U se para cada $a \in U$ existem uma bola $B(a, r) \subseteq U$ e uma sequência de polinômios $P_m \in \mathcal{P}(^m X, Y)$ tais que

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x - a)$$

uniformemente para $x \in B(a, r)$. Tal sequência de polinômios é unicamente determinada por f e a. Denotaremos $P_m = P^m_{f(a)}$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

Proposição 1.3.20. *Todo polinômio $P \in \mathcal{P}(X, Y)$ é uma aplicação holomorfa.*

Demonstração. Veja [23, Exemplo 5.3]. □

Definição 1.3.21. Uma função $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ se diz um *contorno* se é de classe C^1. Denotamos a sua imagem por $[\gamma]$.

Definição 1.3.22. Sejam X espaço de Banach, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um contorno e suponha $F : [\gamma] \to X$ contínua. Definimos

$$\int_\gamma F(\xi)d\xi = \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)dt,$$

onde a integral no segundo membro da igualdade acima denota a integral de Bochner.

Proposição 1.3.23 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Seja U um subconjunto aberto de X e seja $f : U \longrightarrow Y$ holomorfa. Sejam $a \in U$, $t \in X$ e $r > 0$ tais que $a + \xi t \in U$ para todo $\xi \in \overline{B}(0, r)$. Então para cada $m \in \mathbb{N}_0$ temos*

$$P^m_{f(a)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{f(a + \xi t)}{\xi^{m+1}} d\xi.$$

Demonstração. Veja [23, Corollary 7.3]. $\square$

CAPÍTULO 2

EQUAÇÃO DE DAUGAVET PARA FUNÇÕES NÃO LINEARES

Como sabemos, a *Equação de Daugavet* deve seu nome ao matemático I. K. Daugavet [11], que provou a validade dessa equação para operadores compactos no espaço das funções contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$. Durante muitos anos tem-se estudado essa equação principalmente para funções lineares, não obstante nos últimos anos se estuda fortemente essa equação para funções não lineares. Neste capítulo apresentaremos duas seções, a primeira sobre a Equação de Daugavet para funções limitadas e a segunda sobre a Equação de Daugavet para funções uniformemente contínuas. Ressaltamos que neste capítulo Id representará a identidade na bola unitária fechada de um espaço fixado. As demonstrações deste capítulo foram tomadas de [9].

2.1 Equação de Daugavet para funções limitadas

Em 2007 Y. S. Choi et al. [9] generalizaram as definições da equação de Daugavet e da equação alternativa de Daugavet para funções limitadas em um espaço de Banach X da seguinte maneira: se $\ell_\infty(B_X, X)$ é o espaço de Banach de todas funções limitadas de B_X para X, munido com a norma do supremo, dizemos que uma função $\Phi \in \ell_\infty(B_X, X)$ satisfaz a *equação de Daugavet* se

$$\|Id + \Phi\| = 1 + \|\Phi\|, \tag{DE}$$

e dizemos que Φ satisfaz a *equação alternativa de Daugavet* se

$$\max\{\|Id + w\Phi\| : w \in \mathbb{T}\} = 1 + \|\Phi\|. \tag{ADE}$$

O lema a seguir nos permite verificar que se $\Phi \in \ell_\infty(B_X, X)$ satisfaz (DE) então $\alpha\Phi$ satisfaz (DE) para todo $\alpha \geq 0$.

Vale a pena observar que (DE) implica (ADE), e que por exemplo o operador $T = -Id$ satisfaz (ADE) mas não satisfaz (DE).

Lema 2.1.1. *Se dois vetores u e v em um espaço normado satisfazem a equação*

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|,$$

então $\|\alpha u + \beta v\| = \alpha\|u\| + \beta\|v\|$ para todos $\alpha, \beta \geq 0$.

Demonstração. Podemos supor $\alpha \geq \beta \geq 0$ sem perda de generalidade. Basta ver que $\|\alpha u + \beta v\| \geq \alpha\|u\| + \beta\|v\|$. De fato,

$$\begin{aligned} \|\alpha u + \beta v\| &= \|\alpha(u+v) - (\alpha - \beta)v\| \\ &\geq \alpha\|u+v\| - (\alpha-\beta)\|v\| \\ &= \alpha(\|u\| + \|v\|) - (\alpha-\beta)\|v\| \\ &= \alpha\|u\| + \beta\|v\|. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\alpha u + \beta v\| = \alpha\|u\| + \beta\|v\|$. □

Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{Z}$ um subespaço de $\ell_\infty(B_X)$. Denotamos por $\mathcal{Z}^X$ o espaço de todas as funções $\Phi : B_X \longrightarrow X$ tais que $x^* \circ \Phi \in \mathcal{Z}$ para todo $x^* \in X^*$. Se $\varphi \in \mathcal{Z}$ e $x_0 \in X$, então é fácil ver que um elemento de $\mathcal{Z}^X$ é $\varphi \otimes x_0$, onde $[\varphi \otimes x_0](x) = \varphi(x)x_0$ para todo $x \in B_X$.

O teorema a seguir é um dos mais importantes deste capítulo e estabelece equivalências para que uma função de $\mathcal{Z}^X$ com imagem relativamente fracamente compacta satisfaça (DE).

Teorema 2.1.2. *Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{Z}$ um subespaço de $\ell_\infty(B_X)$. Então são equivalentes:*

(i) Para cada $\varphi \in \mathcal{Z}$ e cada $x_0 \in X$, $\varphi \otimes x_0$ satisfaz (DE).

(ii) Para cada $\varphi \in S_{\mathcal{Z}}$, cada $x_0 \in S_X$ e cada $0 < \varepsilon < 1$, existem $w \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que

$$Re\, w\varphi(y) > 1 - \varepsilon \quad e \quad \|x_0 + wy\| > 2 - \varepsilon.$$

(iii) Cada $\Phi \in \mathcal{Z}^X$ com imagem relativamente fracamente compacta satisfaz (DE).

Para demonstrar este teorema precisaremos de duas definições, um lema e um resultado de I. Namioka [25].

Definição 2.1.3. Seja K um subconjunto fechado e limitado de um espaço de Banach X. Um elemento y_0 de K é dito um *ponto dentado* de K se $y_0 \notin \overline{co}(K \setminus B(y_0, \varepsilon))$ para todo $\varepsilon > 0$.

Exemplo 2.1.4. *Os números 0 e 1 são os únicos pontos dentados do intervalo $[0,1]$. De fato, dado $0 < \varepsilon < 1$ temos que $0 \notin [\varepsilon, 1] = \overline{co}([0,1] \setminus B(0,\varepsilon))]$, ou seja, 0 é ponto dentado de $[0,1]$. Da mesma forma se prova que 1 é ponto dentado de $[0,1]$. Consideremos agora que $a \in [0,1]$ é ponto dentado de $[0,1]$. Vejamos que $a = 0$ ou $a = 1$. Suponhamos o contrário e tomemos $\varepsilon_0 = \min\{a, 1-a\}$, então $B(a, \varepsilon_0) \subset [0,1]$ e assim $\overline{co}([0,1] \setminus B(a,\varepsilon_0)) = [0,1]$. Logo a não é ponto dentado de $[0,1]$. Portanto, $a = 0$ ou $a = 1$.*

Definição 2.1.5. Seja K um subconjunto fechado e limitado de um espaço de Banach X. Uma *fatia* de K é um conjunto da forma

$$S(K, y^*, \delta) = \{y \in K : \mathrm{Re}\,(y^*(y)) \geq \sup \mathrm{Re}\,(y^*(K)) - \delta\},$$

onde y^* é um elemento não nulo de X^* e $\delta > 0$.

O lema apresentado a seguir parece ser conhecido por diversos autores. Optamos por apresentar a sua demostração aqui pois não a encontramos em detalhes em nenhuma referência.

Lema 2.1.6. *Seja K um subconjunto fechado e limitado de um espaço de Banach X. Se y_0 é um ponto dentado de K, então para todo $\varepsilon > 0$ existe uma fatia*

$$S(K, y^*, \delta) = \{y \in K : Re(y^*(y)) \geq \sup Re(y^*(K)) - \delta\}$$

de K com diâmetro menor que ε contendo y_0.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Já que y_0 é um ponto dentado de K, temos que $y_0 \notin \overline{co}(K \setminus B(y_0, \varepsilon/2))$. Como $\{y_0\}$ e $\overline{co}\{(K \setminus B(y_0, \varepsilon/2))$ são convexos disjuntos, $\{y_0\}$ é compacto e $\overline{co}(K \setminus B(y_0, \varepsilon/2))$ é fechado, segue da *Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach* que existem $y^* \in X^*$ e números reais a e b tais que

$$\mathrm{Re}\, y^*(x) < a < b < \mathrm{Re}\, y^*(y_0)$$

para todo $x \in \overline{co}(K \setminus B(y_0, \varepsilon/2))$. Tome $\delta = \sup \mathrm{Re}\,(y^*(K)) - b$. Como $y_0 \in K$, segue que $0 < \delta < \infty$. Mostremos que a fatia

$$S(K, y^*, \delta) = \{y \in K : \mathrm{Re}\,(y^*(y)) \geq \sup \mathrm{Re}\,(y^*(K)) - \delta\}$$

tem diâmetro menor que ε e contém y_0. Observe que se $y \in S(K, y^*, \delta)$ então

$$\mathrm{Re}\, y^*(y) \geq \sup \mathrm{Re}\,(y^*(K)) - \delta = b > \mathrm{Re}\, y^*(x)$$

para todo $x \in \overline{co}(K \setminus B(y_0, \varepsilon/2))$. Em particular, se $y \in S(K, y^*, \delta)$ então $y \notin K \setminus B(y_0, \varepsilon/2)$. Assim, $S(K, y^*, \delta) \subseteq B(y_0, \varepsilon/2)$, ou seja, $S(K, y^*, \delta)$ tem diâmetro menor que ε. Além disso,

$$\mathrm{Re}\, y^*(y_0) > b = \sup \mathrm{Re}\,(y^*(K)) - \delta,$$

donde segue que $y_0 \in S(K, y^*, \delta)$. □

Proposição 2.1.7. *Todo subconjunto fracamente compacto convexo de um espaço de Banach é a envoltória convexa fechada de seus pontos dentados.*

Demonstração. Veja [25, Theorem 4.4]. □

Demonstração do Teorema 2.1.2 *i) ⇒ ii).* Sejam $\varphi \in S_{\mathcal{Z}}$, $x_0 \in S_X$ e $0 < \varepsilon < 1$. Então $\varphi \otimes x_0$ satisfaz (DE), ou seja, $\|Id + \varphi \otimes x_0\| = 1 + \|\varphi \otimes x_0\| = 2$. Pela definição da norma, existe $y \in B_X$ tal que

$$\|y + \varphi(y)x_0\| = \|(Id + \varphi \otimes x_0)y\| > 2 - \varepsilon/2.$$

Segue que $2-\varepsilon/2 < \|y\| + |\varphi(y)| \leq 1 + |\varphi(y)|$, que implica $1-\varepsilon/2 < |\varphi(y)|$. Note que $\varphi(y) \neq 0$ pois $0 < \varepsilon < 1$. Definamos $w = |\varphi(y)|/\varphi(y)$. Assim $w \in \mathbb{T}$ e

$$\mathrm{Re}\, w\varphi(y) = |\varphi(y)| > 1-\varepsilon/2 > 1-\varepsilon.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|x_0 + wy\| &= \|\overline{w}x_0 + y\| \\
&= \left\| \frac{\varphi(y)}{|\varphi(y)|} x_0 + y \right\| \\
&\geq \|y + \varphi(y)x_0\| - \left\| \frac{\varphi(y)}{|\varphi(y)|} x_0 - \varphi(y)x_0 \right\| \\
&> 2 - \varepsilon/2 - \frac{\|\varphi(y)x_0 - |\varphi(y)|\varphi(y)x_0\|}{|\varphi(y)|} \\
&= 2 - \varepsilon/2 - ||\varphi(y)| - 1| \\
&> 2 - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 \\
&= 2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ *iii).* Podemos supor que $\|\Phi\| = 1$. Caso contrário, se $\|\Phi\| = 0$, o resultado segue diretamente, e se $0 \neq \|\Phi\| \neq 1$ então $\Phi/\|\Phi\|$ tem norma um e sabemos que se $\Phi/\|\Phi\|$ satisfaz (DE) então Φ também satisfaz (DE) pelo Lema 2.1.1. Como $\overline{\Phi(B_X)}^w$ é fracamente compacto, é possível mostrar fazendo uso do Teorema de *Eberlein-Smulian* (Teorema 1.1.24) que $\overline{\mathbb{T}\Phi(B_X)}^w$ é fracamente compacto. Logo, pelo Teorema 1.1.17, $co\left(\overline{\mathbb{T}\Phi(B_X)}^w\right)$ é fracamente compacto. Assim, pelo Teorema 1.1.18 e pelo Teorema de *Mazur* (Teorema 1.1.25), $\overline{co}(\mathbb{T}\Phi(B_X)) = \overline{co(\mathbb{T}\Phi(B_X))}^w = co\left(\overline{\mathbb{T}\Phi(B_X)}^w\right)$ é fracamente compacto. Seja $K = \overline{co}(\mathbb{T}\Phi(B_X))$. Pela Proposição 2.1.7,

$$K = \overline{co}(\{\text{pontos dentados de } K\}).$$

Dado $0 < \varepsilon < 1$, suponhamos que para todo ponto dentado y de K tivéssemos $\|y\| \leq 1-\varepsilon$. Então, do fato de $\mathbb{T}\Phi(B_X) \subseteq K$ segue que, para cada $x \in B_X$ e cada $w^* \in \mathbb{T}$,

$$\|w^*\Phi(x)\| \leq 1-\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|\Phi(x)\| \leq 1-\varepsilon.$$

Como $x \in B_X$ é qualquer, obtemos $1 = \|\Phi\| \leq 1-\varepsilon$, isto é, $\varepsilon \leq 0$, o que é uma contradição. Portanto, existe y_0 ponto dentado de K tal que $\|y_0\| > 1-\varepsilon$. Pelo Lema 2.1.6, existe uma fatia

$$S(K, y^*, \delta_0) = \{y \in K : \mathrm{Re}\, y^*(y) \geq \sup \mathrm{Re}\,(y^*(K)) - \delta_0\}$$

de K com diâmetro menor que ε contendo y_0. Agora, pela Proposição 1.1.16, $\mathbb{T}\overline{co}(\mathbb{T}\Phi(B_X)) \subseteq \overline{co}(\mathbb{T}\Phi(B_X)) = K$. Daí, segue que

$$\sup_{y\in K} \mathrm{Re}\, y^*(y) = \sup_{y\in K} |y^*(y)|. \tag{2.1}$$

De fato, dado $y \in K$ com $y^*(y) \neq 0$, tome $\alpha = \dfrac{|y^*(y)|}{y^*(y)} \in \mathbb{T}$. Então

$$|y^*(y)| = \operatorname{Re} y^* \left(\frac{|y^*(y)|}{y^*(y)} y \right) = \operatorname{Re} y^*(\alpha y),$$

onde $\alpha y \in K$, já que $\alpha \in \mathbb{T}$ e $y \in K$. Assim,

$$\{|y^*(y)| : y \in K\} \subseteq \{\operatorname{Re} y^*(z) : z \in K\},$$

donde segue (2.1). Defina $\beta = \sup\limits_{y \in K} |y^*(y)| > 0$, $y_0^* = y^*/\beta \in X^*$ e $\delta = \delta_0/\beta > 0$. Dessa forma,

$$S(K, y^*, \delta_0) = S(K, y_0^*, \delta),$$

onde

$$\sup_{y \in K} \operatorname{Re} y_0^*(y) = \sup_{y \in K} |y_0^*(y)| = 1.$$

Em particular,

$$y \in K, \ \operatorname{Re} y_0^*(y) > 1 - \delta \ \Rightarrow \ \|y - y_0\| < \varepsilon.$$

Se tomarmos $\varphi := y_0^* \circ \Phi$, então $\varphi \in \mathcal{Z}$ e

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in B_X} |y_0^*(\Phi(x))| = \sup_{y \in K} |y_0^*(y)| = 1 \Rightarrow \varphi \in S_{\mathcal{Z}}.$$

Agora, usando (ii) com $x_0 = y_0/\|y_0\|$ e $\eta = \min\{\varepsilon, \delta\}$, existem $w \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que

$$\operatorname{Re} w\varphi(y) > 1 - \eta \geq 1 - \delta \quad \text{e} \quad \|x_0 + wy\| > 2 - \eta \geq 2 - \varepsilon.$$

Como $\operatorname{Re} y_0^*(w\Phi(y)) = \operatorname{Re} w y_0^*(\Phi(y)) = \operatorname{Re} w\varphi(y) > 1 - \delta$ e $w\Phi(y) \in K$, segue que

$$\|w\Phi(y) - y_0\| < \varepsilon.$$

Além disso,

$$\|y_0 + wy\| \geq \left\| wy + \frac{y_0}{\|y_0\|} \right\| - \left\| y_0 - \frac{y_0}{\|y_0\|} \right\| = \left\| wy + \frac{y_0}{\|y_0\|} \right\| - |\|y_0\| - 1| > 2 - \varepsilon - \varepsilon = 2 - 2\varepsilon.$$

Finalmente,

$$\|Id + \Phi\| \geq \|y + \Phi(y)\| = \|w(y + \Phi(y))\| \geq \|wy + y_0\| - \|w\Phi(y) - y_0\| > 2 - 2\varepsilon - \varepsilon = 2 - 3\varepsilon,$$

e fazendo $\varepsilon \to 0$, se tem que $\|Id + \Phi\| \geq 2$. Portanto, $\|Id + \Phi\| = 2 = 1 + \|\Phi\|$.
iii) $\Rightarrow$ i). Basta ver que dados $\varphi \in S_{\mathcal{Z}}$ e $x_0 \in B_X$, tem-se $(\varphi \otimes x_0)(B_X)$ relativamente fracamente compacto. Note que

$$\begin{aligned} (\varphi \otimes x_0)(B_X) &= \{(\varphi \otimes x_0)(x) : x \in B_X\} \\ &= \{\varphi(x) x_0 : x \in B_X\} \\ &= x_0 \{\varphi(x) : x \in B_X\} \\ &= x_0 \varphi(B_X). \end{aligned}$$

Seja $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq x_0\varphi(B_X)$, $z_n = x_0\varphi(x_n)$ com $x_n \in B_X$. Como $\mathbb{K}$ é completo e $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares limitada, existe uma subsequência $(\varphi(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ convergente. Logo, $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ é convergente e, em particular, é fracamente convergente. Portanto, pelo Teorema *Eberlein-Smulian* (Teorema 1.1.24), $(\varphi \otimes x_0)(B_X)$ é relativamente fracamente compacto. O caso geral segue do Lema 2.1.1.

Corolário 2.1.8. *Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{Z}$ um subespaço de $\ell_\infty(B_X)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Para cada $\varphi \in \mathcal{Z}$ e cada $x_0 \in X$, $\varphi \otimes x_0$ satisfaz (ADE).

(ii) Para cada $\varphi \in S_{\mathcal{Z}}$, cada $x_0 \in S_X$ e cada $0 < \varepsilon < 1$, exitem $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que

$$Re\, w_1\varphi(y) > 1 - \varepsilon \quad e \quad \|x_0 + w_2 y\| > 2 - \varepsilon.$$

(iii) Para cada $\varphi \in S_{\mathcal{Z}}$, cada $x_0 \in S_X$ e cada $0 < \varepsilon < 1$, existem $w \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que

$$|\varphi(y)| > 1 - \varepsilon \quad e \quad \|x_0 + wy\| > 2 - \varepsilon.$$

(iv) Cada $\Phi \in \mathcal{Z}^X$ cuja imagem é relativamente fracamente compacta satisfaz (ADE).

Demonstração. i) $\Rightarrow$ ii). Sejam $\varphi \in S_{\mathcal{Z}}$, $x_0 \in S_X$ e $\varepsilon > 0$. Então, por hipótese, $\varphi \otimes x_0$ satisfaz (ADE). Logo, existe $w_0 \in \mathbb{T}$ tal que

$$\|Id + w_0\varphi \otimes x_0\| = \max_{w \in \mathbb{T}} \|Id + w\varphi \otimes x_0\| = 1 + \|\varphi \otimes x_0\|.$$

Segue que $\|Id + w_0\varphi \otimes x_0\| = 1 + \|w_0\varphi \otimes x_0\|$, isto é, $w_0\varphi \otimes x_0$ satisfaz (DE). Como $w_0\varphi \in S_{\mathcal{Z}}$, temos do teorema anterior que existem $w \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que

$$\mathrm{Re}\, ww_0\varphi(y) > 1 - \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_0 + wy\| > 2 - \varepsilon.$$

Tomando $w_1 = ww_0$ e $w_2 = w$ se tem o resultado desejado.
ii) $\Rightarrow$ iii). Se $\varphi \in S_{\mathcal{Z}}$, $x_0 \in S_X$ e $1 > \varepsilon > 0$, por hipótese existem $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que

$$\mathrm{Re}\, w_1\varphi(y) > 1 - \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_0 + w_2 y\| > 2 - \varepsilon.$$

Defina $w = w_2$ e note que $|\varphi(y)| = |w_1\varphi(y)| > \mathrm{Re}\, w_1\varphi(y) > 1 - \varepsilon$.
iii) $\Rightarrow$ iv). Note que se $\varphi \in S_{\mathcal{Z}}$, $x_0 \in S_X$ e $1 > \varepsilon > 0$, então existem $w \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que $|\varphi(y)| > 1 - \varepsilon$ e $\|x_0 + wy\| > 2 - \varepsilon$. Definindo $w_1 = |\varphi(y)|/\varphi(y)$ e $w_2 = w$, temos

$$\mathrm{Re}\, w_1\varphi(y) = \mathrm{Re}\, |\varphi(y)| > 1 - \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_0 + w_2 y\| > 2 - \varepsilon.$$

Considere $\Phi \in \mathcal{Z}^X$ com imagem relativamente fracamente compacta e com $\|\Phi\| = 1$. Siga a demonstração de *ii) $\Rightarrow$ iii)* do teorema anterior até a definição de $\varphi = y_0^* \circ \Phi \in S_{\mathcal{Z}}$. Tomando $x_0 = y_0/\|y_0\|$, pela observação anterior e por *iii)* deste teorema, existem $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que

$$\mathrm{Re}\, w_1\varphi(y) > 1 - \delta \text{ e } \|x_0 + w_2 y\| > 2 - \varepsilon,$$

onde δ é como na demonstração *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* do teorema anterior. Assim

$$\mathrm{Re}\, y_0^*(w_1\Phi(y)) = \mathrm{Re}\, w_1(y_0^*\circ\Phi)(y) = \mathrm{Re}\, w_1\varphi(y) > 1-\delta,$$

e como $w_1\Phi(y) \in \mathbb{T}\Phi(B_X) \subseteq \overline{co}(\mathbb{T}\Phi(B_X)) = K$, segue que $\|w_1\Phi(y) - y_0\| < \varepsilon$. Daí,

$$\begin{aligned}
\max_{w\in\mathbb{T}} \|Id + w\Phi\| &\geq \left\| Id + \frac{w_1}{w_2}\Phi \right\| \\
&\geq \left\| y + \frac{w_1}{w_2}\Phi(y) \right\| \\
&= \left\| y + \frac{x_0}{w_2} - \frac{x_0}{w_2} + \frac{w_1}{w_2}\Phi(y) \right\| \\
&\geq \left\| y + \frac{x_0}{w_2} \right\| - \left\| \frac{w_1}{w_2}\Phi(y) - \frac{x_0}{w_2} \right\| \\
&= \|w_2 y + x_0\| - \left\| w_1\Phi(y) - \frac{y_0}{\|y_0\|} \right\|.
\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\left\| w_1\Phi(y) - \frac{y_0}{\|y_0\|} \right\| &= \left\| w_1\Phi(y) - y_0 + y_0 - \frac{y_0}{\|y_0\|} \right\| \\
&\leq \|w_1\Phi(y) - y_0\| + \left\| y_0 - \frac{y_0}{\|y_0\|} \right\| \\
&= \|w_1\Phi(y) - y_0\| + |\, \|y_0\| - 1 \,| < \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Segue das duas desigualdades anteriores que

$$\max_{w\in\mathbb{T}} \|Id + w\Phi\| > 2 - \varepsilon - 2\varepsilon = 2 - 3\varepsilon.$$

Portanto,

$$\max_{w\in\mathbb{T}} \|Id + w\Phi\| = 2 \ = \ 1 + \|\Phi\|,$$

ou seja, Φ satisfaz (ADE).

iv) $\Rightarrow$ *i)* Se $\varphi \in \mathcal{Z}$ e $x_0 \in X$, então $\varphi \otimes x_0 \in \mathcal{Z}^X$ e $(\varphi \otimes x_0)(B_X)$ é relativamente fracamente compacta. Logo, $\varphi \otimes x_0$ satisfaz (ADE). □

2.2 Equacão de Daugavet para funções uniformemente contínuas

Para um espaço de Banach X, escreveremos $\Pi(X)$ para denotar o subconjunto de $X \times X^*$ dado por

$$\Pi(X) = \big\{(x, x^*) : \ x \in S_X, \ x^* \in S_{X^*}, \ x^*(x) = 1\big\}.$$

Dada uma função limitada $\Phi : S_X \to X$, sua *imagem numérica* é definida como o conjunto

$$V(\Phi) = \big\{x^*(\Phi(x)) : \ (x, x^*) \in \Pi(X)\big\},$$

e seu *raio numérico* é o valor

$$\upsilon(\Phi) = \sup\big\{|\lambda| : \ \lambda \in V(\Phi)\big\}.$$

Por fim, denotaremos por $C_u(B_X, X)$ o espaço de Banach das funções uniformemente contínuas de B_X em X munido com a norma do supremo.

Proposição 2.2.1. *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in C_u(B_X, X)$. Então:*

(i) Φ satisfaz (DE) se, e somente se, $\|\Phi\| = \sup Re V(\Phi)$;

(ii) Φ satisfaz (ADE) se, e somente se, $\|\Phi\| = \upsilon(\Phi)$.

Demonstração. i) ($\Rightarrow$) Suponha que Φ satisfaça (DE). Como Φ é uniformemente contínua, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que

$$y, z \in B_X, \ \|y - z\| < \delta \Rightarrow \|\Phi(y) - \Phi(x)\| < \varepsilon.$$

Como $\|Id + \Phi\| = 1 + \|\Phi\|$, para $0 < \varepsilon < 1$ existe $y \in B_X$ tal que $\|y + \Phi(y)\| > 1 + \|\Phi\| - \delta^2/4$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $y^* \in S_{X^*}$ tal que $y^*(y + \Phi(y)) = \|y + \Phi(y)\|$. Assim

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} y^*(y) + \mathrm{Re} y^*(\Phi(y)) &= \mathrm{Re} y^*(y + \Phi(y)) \\ &= \|y + \Phi(y)\| > 1 + \|\Phi\| - \frac{\delta^2}{4}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como $\|\Phi\| \geq \|\Phi(y)\| \geq |y^*(\Phi(y))| \geq \mathrm{Re} y^*(\Phi(y))$, segue de (2.2) que

$$\mathrm{Re} y^*(y) > 1 - \frac{\delta^2}{4}. \tag{2.3}$$

Além disso, pelo fato de $\mathrm{Re} y^*(y) \leq |y^*(y)| \leq \|y^*\|\|y\| \leq 1$, temos de (2.2) que

$$\mathrm{Re} y^*(\Phi(y)) > \|\Phi\| - \delta^2/4 > \|\Phi\| - \varepsilon. \tag{2.4}$$

Agora por (2.3) segue que $|\mathrm{Re} y^*(y) - 1| < \delta^2/4$. Vejamos que

$$\{|y^*(x)| : x \in S_X\} \ \subseteq \ \{|\mathrm{Re} y^*(x)| : x \in S_X\}.$$

Em efeito, seja $x \in S_X$. Se $y^*(x) = 0$ temos $\mathrm{Re} y^*(x) = y^*(x)$. Se $y^*(x) \neq 0$, defina $w = \dfrac{|y^*(x)|}{y^*(x)}$, então $wx \in S_X$ e $|\mathrm{Re} y^*(wx)| = |\mathrm{Re} w y^*(x)| = |y^*(x)|$. Portanto,

$$1 = \|y^*\| = \sup\{|y^*(x)| : x \in S_X\} \leq \sup\{|\mathrm{Re} y^*(x)| : x \in S_X\} = \|\mathrm{Re} y^*\| \leq 1.$$

Pelo Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás (Teorema 1.1.26), existe $(z, z^*) \in \Pi(X)$ tal que

$$\|y - z\| < \delta \text{ e } \|\mathrm{Re}\, y^* - z^*\| < \delta < \varepsilon.$$

Sabemos que para todos a, b complexos, $|\mathrm{Re}\, a - \mathrm{Re}\, b| \leq |\mathrm{Re}\,(a - b)|$. Logo segue que

$$\begin{aligned}
\|y^* - z^*\| &= \|\mathrm{Re}\,(y^* - z^*)\| = \sup\{|(\mathrm{Re}\, y^* - \mathrm{Re}\, z^*)(x)| : x \in B_X\} \\
&= \sup\{|\mathrm{Re}\, y^*(x) - \mathrm{Re}\, z^*(x)| : x \in B_X\} \\
&\leq \sup\{|\mathrm{Re}\, y^*(x) - z^*(x)| : x \in B_X\} \\
&= \|\mathrm{Re}\, y^* - z^*\| < \delta < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\|y^* - z^*\| < \delta < \varepsilon$. Como $\|y - z\| < \delta$, da continuidade uniforme segue que $\|\Phi(y) - \Phi(z)\| < \varepsilon$ e assim,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Re}\, z^*(\Phi(z)) - \mathrm{Re}\, y^*(\Phi(y))| &= |\mathrm{Re}\, z^*(\Phi(z)) - \mathrm{Re}\, z^*(\Phi(y)) + \mathrm{Re}\, z^*(\Phi(y)) - \mathrm{Re}\, y^*(\Phi(y))| \\
&\leq |\mathrm{Re}\, z^*(\Phi(z) - \Phi(y))| + |\mathrm{Re}\, z^*(\Phi(y)) - \mathrm{Re}\, y^*(\Phi(y))| \\
&\leq |z^*(\Phi(z) - \Phi(y))| + |z^*(\Phi(y)) - y^*(\Phi(y))| \\
&\leq \|\Phi(z) - \Phi(y)\| + \|z^* - y^*\|\|\Phi\| < \varepsilon + \varepsilon\|\Phi\| = \varepsilon(1 + \|\Phi\|).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Re}\, z^*(\Phi(z)) - \mathrm{Re}\, y^*(\Phi(y)) > -\varepsilon(1 + \|\Phi\|)$ e de (2.4) segue que

$$\mathrm{Re}\, z^*(\Phi(z)) > \mathrm{Re}\, y^*(\Phi(y)) - \varepsilon(1 + \|\Phi\|) > \|\Phi\| - \varepsilon - \varepsilon(1 + \|\Phi\|) = \|\Phi\| - \varepsilon(2 + \|\Phi\|).$$

Portanto, $\sup \mathrm{Re}\, V(\Phi) = \|\Phi\|$.
($\Leftarrow$) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $(z, z^*) \in \Pi(X)$ tal que

$$\mathrm{Re}\, z^*(\Phi(z)) > \|\Phi\| - \varepsilon.$$

Então

$$\|\mathrm{Id} + \Phi\| \geq |z^*(z + \Phi(z))| \geq \mathrm{Re}\, z^*(z + \Phi(z)) = \mathrm{Re}\, z^*(z) + \mathrm{Re}\, z^*(\Phi(z)) = 1 + \|\Phi\| - \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, segue que $\|\mathrm{Id} + \Phi\| \geq 1 + \|\Phi\|$. Logo, Φ satisfaz (DE).

Provaremos agora o item *ii)*.

ii) ($\Rightarrow$) Se Φ satisfaz (ADE), então existe $w \in \mathbb{T}$ tal que $w\Phi$ satisfaz (DE), logo pelo item (i),

$$\begin{aligned}
\|\Phi\| = \|w\Phi\| = \sup \mathrm{Re}\, V(w\Phi) &= \sup\{\mathrm{Re}\, \lambda : \lambda \in V(w\Phi)\} \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(w\Phi)\} \\
&= \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(\Phi)\} = v(\Phi) \leq \|\Phi\|.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\Phi\| = v(\Phi)$.
($\Leftarrow$) Seja $(x, x^*) \in \Pi(X)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\max\{\|Id + w\Phi\| : w \in \mathbb{T}\} &\geq \max\{\|x + w\Phi(x)\| : w \in \mathbb{T}\} \\
&\geq \max\{|x^*(x + w\Phi(x))| : w \in \mathbb{T}\} \\
&= \max\{|1 + wx^*(\Phi(x))| : w \in \mathbb{T}\}.
\end{aligned}$$

Como $\max\{|1+wx^*(\Phi(x))| : w \in \mathbb{T}\} \leq 1 + |x^*(\Phi(x))|$ e $w_0 = \dfrac{|x^*(\Phi(x))|}{x^*(\Phi(x))} \in \mathbb{T}$ satisfaz

$$|1 + w_0 x^*(\Phi(x))| = 1 + |x^*(\Phi(x))|,$$

então $\max\{|1+wx^*(\Phi(x))| : w \in \mathbb{T}\} = 1 + |x^*(\Phi(x))|$. Logo,

$\max\{\|Id + w\Phi\| : w \in \mathbb{T}\} \geq 1 + \sup\{|x^*(\Phi(x))| : (x, x^*) \in \Pi(X)\} = 1 + v(\Phi) = 1 + \|\Phi\|$.

Portanto, Φ satisfaz (ADE). $\square$

Corolário 2.2.2. *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in C_u(B_X, X)$. Se Φ satisfaz (ADE), então*

$$\|\Phi\| = \sup\{\|\Phi(y)\| : y \in S_X\}.$$

Demonstração. Observe que $\sup\{\|\Phi(y)\| : y \in S_X\} \leq \|\Phi\|$. Assim, basta mostrar que

$$\sup\{\|\Phi(y)\| : y \in S_X\} \geq v(\Phi) = \|\Phi\|.$$

Se $(x, x^*) \in \Pi(X)$, então $|x^*(\Phi(x))| \leq \|x^*\|\|\Phi(x)\| = \|\Phi(x)\| \leq \sup\{\|\Phi(y)\| : y \in S_X\}$. Logo,

$$v(\Phi) \leq \sup\{\|\Phi(y)\| : y \in S_X\}$$

e assim $\|\Phi\| = v(\Phi) = \sup\{\|\Phi(y)\| : y \in S_X\}$. $\square$

CAPÍTULO 3

EQUAÇÃO DE DAUGAVET PARA POLINÔMIOS

A Equação de Daugavet para polinômios em espaços de Banach é o tema central deste trabalho. Este capítulo está divido em duas seções. A primeira seção contém o resultado principal do capítulo. Nesta seção se estuda a (DE) para polinômios em espaços de funções contínuas, principalmente em subespaços C_b-*rich*, definição que apresentaremos no começo da seção. A segunda seção é focada nas funções holomorfas em espaços de funções contínuas. Como os polinômios contínuos são funções holomorfas os resultados para eles seguem como caso particular. Ressaltamos que neste capítulo Id representará a identidade em um espaço fixado ou a restrição da identidade na bola unitária fechada de tal espaço, dependendo do caso. Os resultados principais deste capítulo foram tomados de [9].

Definição 3.0.1. Sejam X e Y espaços de Banach. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(X, Y)$ é denominado *fracamente compacto* se $P(B_X)$ é relativamente fracamente compacto em Y, ou seja, se $\overline{P(B_X)}^w$ é fracamente compacto em Y.

Observemos primeiramente polinômios em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.

Exemplo 3.0.2. *a) Os espaços $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ não têm a propriedade de que todo polinômio fracamente compacto satisfaz (DE). De fato, $T = -Id : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ é polinômio 1-homogêneo fracamente compacto e $\|Id + T\| = \|0\| = 0 < 1 + \|T\|$.*

b) Todo polinômio em $\mathbb{C}$ satisfaz (ADE). De fato, se $P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ com $\|P\| = 1$, então P é holomorfa e, pelo Teorema do Módulo Máximo, existe $y \in S_{\mathbb{C}}$ tal que $|P(y)| = \sup\{|P(y)| : y \in B_{\mathbb{C}}\} = 1$. Agora, sejam $w_1 = \dfrac{|P(y)|}{P(y)}$ e $w_2 = \dfrac{|y|}{y}$, então $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$,

$$Re w_1 P(y) = Re|P(y)| = 1 \quad e \quad Re w_2 y = Re|y| = 1.$$

Defina $w := \overline{w_2}w_1$. *Então* $w \in \mathbb{T}$ *e*

$$\|Id + wP\| \geq |(Id + wP)(y)| = |w_2 y + w_1 P(y)| = 2 = 1 + \|wP\|.$$

Logo, P *satisfaz (ADE).*

c) *O resultado do item anterior não vale para* $\mathbb{R}$. *De fato, defina* $P(t) = 1 - t^2 \quad (t \in \mathbb{R})$. *Então* $\|P\| = P(0) = 1$ *e*

$$\|Id \pm P\| = \max_{t \in [-1,1]} |t \pm (1 - t^2)| = 5/4 < 2 = 1 + \|P\|.$$

Logo, P *é um polinômio fracamente compacto que não satisfaz (ADE).*

Vejamos a seguir caracterizações para quando um polinômio fracamente compacto satisfaz (DE) e (ADE), respectivamente.

Proposição 3.0.3. *Seja* X *um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Para cada $p \in \mathcal{P}(X)$ *e para cada* $x_0 \in X$, $p \otimes x_0$ *satisfaz (DE).*

(ii) Para cada $p \in \mathcal{P}(X)$ *com* $\|p\| = 1$, *para cada* $x_0 \in S_X$ *e cada* $0 < \varepsilon < 1$, *existem* $w \in \mathbb{T}$ *e* $y \in B_X$ *tais que*

$$Re\, wp(y) > 1 - \varepsilon \quad e \quad \|x_0 + wy\| > 2 - \varepsilon.$$

(iii) Todo polinômio fracamente compacto $P \in \mathcal{P}(X, X)$ *satisfaz (DE).*

Demonstração. No Teorema 2.1.2 faça $\mathcal{Z} = \mathcal{P}(X)$. Então $\mathcal{Z}$ é subespaço de $\ell_\infty(B_X)$ mediante isometria. De fato, seja $\psi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \ell_\infty(B_X)$ tal que $\psi(p)$ é a restrição de p a B_X. Claramente ψ é linear e $\|\psi(p)\| = \|p\|$, donde segue que $\mathcal{P}(X)$ é isométrico à imagem de ψ. Além disso, note que $\mathcal{P}(X, X) = \mathcal{Z}^X$. De fato, se $x^* \in X^*$ e $P \in \mathcal{P}(X, X)$ então existem $P_0, ..., P_m$ polinômios tais que

$$x^* \circ P = x^* \circ P_0 + ... + x^* \circ P_m,$$

onde $x^* \circ P_j : X \to \mathbb{K}$ é um polinômio j-homogêneo contínuo para cada $j = 0, ..., m$. Logo $x^* \circ P \in \mathcal{Z}$, ou seja, $\mathcal{P}(X, X) \subseteq \mathcal{Z}^X$. Agora se $\Phi \in \mathcal{Z}^X$, por definição, $\Phi : B_X \to X$ e para todo $x^* \in X^*$ tem-se $x^* \circ \Phi \in \mathcal{Z} = \mathcal{P}(X)$. Assim, pelo Teorema 1.3.17, $\Phi \in \mathcal{P}(X, X)$ e, portanto, $\mathcal{Z}^X \subseteq \mathcal{P}(X, X)$. Desta forma, o Teorema 2.1.2 se reescreve como a Proposição em questão. □

A prova da seguinte proposição é totalmente análoga.

Proposição 3.0.4. *Seja* X *um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Para cada $p \in \mathcal{P}(X)$ *e para cada* $x_0 \in X$, $p \otimes x_0$ *satisfaz (ADE).*

(ii) *Para cada* $p \in \mathcal{P}(X)$ *com* $\|p\| = 1$, *para cada* $x_0 \in S_X$ *e cada* $0 < \varepsilon < 1$, *existem* $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$ *e* $y \in B_X$ *tais que*

$$Re w_1 p(y) > 1 - \varepsilon \quad e \quad \|x_0 + w_2 y\| > 2 - \varepsilon.$$

(iii) *Para cada* $p \in \mathcal{P}(X)$ *com* $\|p\| = 1$, *para cada* $x_0 \in S_X$ *e cada* $0 < \varepsilon < 1$, *existem* $w \in \mathbb{T}$ *e* $y \in B_X$ *tais que*

$$|p(y)| > 1 - \varepsilon \text{ e } \|x_0 + wy\| > 2 - \varepsilon.$$

(iv) *Todo polinômio fracamente compacto* $P \in \mathcal{P}(X, X)$ *satisfaz (ADE).*

3.1 Polinômios em espaços de funções contínuas

Começaremos apresentando a definição de subespaços C_b-*rich* de $C_b(\Omega, X)$, onde $C_b(\Omega, X)$ é o espaço das funções contínuas e limitadas de um espaço topológico Ω em X.

Definição 3.1.1. Sejam Ω um espaço topológico de Hausdorff completamente regular e X um espaço de Banach. Dizemos que um subespaço fechado $\mathcal{F}$ de $C_b(\Omega, X)$ é C_b-*rich* se para cada subconjunto aberto U de Ω, cada $x \in X$ e cada $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\varphi : \Omega \to [0, 1]$ de norma um com suporte contido em U tal que a distância de $\varphi \otimes x$ a $\mathcal{F}$ é menor que ε.

Exemplos de espaços C_b-*rich* podem ser encontrados em [16] e [22] (pág. 91).

Podemos supor na definição que existe $t_0 \in U$ tal que $\varphi(t_0) = 1$. De fato, dados $0 < \varepsilon < 1$ e $x \in X$, tome $0 < \delta < min\{1, \varepsilon/(\|x\| + 1)\}$ e considere φ tal que a distância de $\varphi \otimes x$ a $\mathcal{F}$ seja menor que δ. Como $\|\varphi\| = 1$ e $supp(\varphi) \subseteq U$, então existem $t_0 \in U$ e uma vizinhança aberta V de t_0 tais que $\varphi(t) > 1 - \delta$ para cada $t \in V$. Assim, já que Ω é completamente regular, $A := \Omega \setminus V$ é fechado em Ω e $t_0 \notin A$, existe uma função contínua $\eta : \Omega \to [0, 1]$ tal que $\eta(t_0) = 1$ e $\eta(A) = \{0\}$. Se definimos $\Phi(t) = \max\{\varphi(t), \eta(t)\}$ para $t \in \Omega$, então $\Phi : \Omega \to [0, 1]$ é contínua, e além disto, temos:

a) $supp\, \Phi \subseteq U$.

b) $\Phi(t_0) = 1$.

c) $\|\varphi - \Phi\| \leq \delta \leq \varepsilon$.

d) $dist(\Phi \otimes x, \mathcal{F}) < \delta(\|x\| + 1) \leq \varepsilon$.

Agora provaremos cada item.

a) Seja $x \in \{y \in \Omega : \Phi(y) \neq 0\}$, então $\Phi(x) > 0$. Caso $\Phi(x) = \eta(x)$, então $x \notin A$, ou seja, $x \in V \subseteq supp\varphi$. E caso $\Phi(x) = \varphi(x)$, então $\varphi(x) \neq 0$ e assim $x \in supp\varphi$. Ou seja,$\{y \in \Omega : \Phi(y) \neq 0\} \subseteq supp\varphi$. Logo,

$$\begin{aligned} supp\, \Phi &= \overline{\{y \in \Omega : \Phi(y) \neq 0\}} \subseteq \overline{supp\, \varphi} \\ &= supp\varphi \subseteq U. \end{aligned}$$

b) Como $\eta(t_0) = 1 \geq \varphi(t_0)$, então $\Phi(t_0) = \max\{\eta(t_0), \varphi(t_0)\} = 1$.

c) Agora note que

$$(\Phi - \varphi)(t) = \Phi(t) - \varphi(t) = \begin{cases} 0 & se \quad \varphi(t) \geq \eta(t), \\ \eta(t) - \varphi(t) & se \quad \varphi(t) < \eta(t). \end{cases}$$

Se $\varphi(t) < \eta(t)$, então $t \notin A$, isto é, $t \in V$. Assim $\varphi(t) > 1 - \delta$, donde segue que

$$\eta(t) - \varphi(t) < \eta(t) - 1 + \delta \leq 1 - 1 + \delta = \delta.$$

Desta forma, $|\Phi(t) - \varphi(t)| = \Phi(t) - \varphi(t) < \delta$ para todo $t \in \Omega$. Portanto,

$$\|\Phi - \varphi\| = \sup\{|\Phi(t) - \varphi(t)| : t \in \Omega\} \leq \delta \leq \varepsilon.$$

d) Para cada $t \in \Omega$, temos

$$\|(\Phi \otimes x - \varphi \otimes x)(t)\| = \|x\||\Phi(t) - \varphi(t)| \leq \|x\|\|\Phi - \varphi\| \leq \|x\|\delta.$$

Então $\|\Phi \otimes x - \varphi \otimes x\| \leq \|x\|\delta$. Assim,

$$dist(\Phi \otimes x, \mathcal{F}) \leq dist(\Phi \otimes x, \varphi \otimes x) + dist(\varphi \otimes x, \mathcal{F}) < \|x\|\delta + \delta \leq \varepsilon.$$

A seguir apresentaremos o teorema principal deste capítulo.

Teorema 3.1.2. *Seja Ω um espaço topológico de Hausdorff completamente regular sem pontos isolados, seja X um espaço de Banach e seja $\mathcal{F}$ um subespaço C_b-rich de $C_b(\Omega, X)$. Então todo polinômio fracamente compacto de $\mathcal{F}$ em si mesmo satisfaz (DE).*

Demonstração. Seja $p \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ com $\|p\| = 1$ e fixe $f_0 \in S_{\mathcal{F}}$. Como p é contínuo, pela Proposição 1.3.16, p é uniformemente contínuo em cada subconjunto limitado de $\mathcal{F}$, logo dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta < \min\{\varepsilon/10,\ 1/6\}$ tal que

$$|p(f) - p(g)| < \varepsilon/2, \tag{3.1}$$

para todas $f, g \in \mathcal{F}$ satisfazendo $\|f - g\| < 2\delta$ *e* $\|f\|, \|g\| \leq 2$. Pela definição da norma em $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, existe $h \in \mathcal{F}$ tal que $\|h\| \leq 1$ e $|p(h)| > 1 - \varepsilon/4$. Fazendo $w := |p(h)|/p(h)$, temos $w \in \mathbb{T}$ e

$$\mathrm{Re}\, wp(h) = |p(h)| > 1 - \varepsilon/4. \tag{3.2}$$

Como $\|f_0\| = 1$, fixemos $\tau \in \Omega$ com $\|f_0(\tau)\| > 1 - \delta/4$. Pela continuidade de f_0, existe um aberto V tal que $\tau \in V$ e

$$\|f_0(t) - f_0(\tau)\| < \delta/4 \quad \text{para todo} \quad t \in V. \tag{3.3}$$

Agora como $h \in \mathcal{F}$ é contínua em τ, existe U aberto tal que $\tau \in U \subseteq V$ e $\|h(\xi) - h(\tau)\| < \delta/4$ se $\xi \in U \cap \Omega$. Logo, pela desigualdade triangular, segue que para todos $s, t \in U$ tem-se

$$\|h(s) - h(t)\| < \delta/2.$$

Seja $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de abertos contidos em U, disjuntos dois a dois e não vazios. Fixemos $s_j \in U_j$ para cada $j = 1, 2, ...$ e denotemos $x_j := w^{-1} f_0(s_j) - h(s_j)$. Note que $\|x_j\| \leq 2$. Seja $\varepsilon_j = \|x_j\| \dfrac{\delta}{2^{j+2}}$. Como $\mathcal{F}$ é C_b-*rich*, existem funções $\eta_j : \Omega \to [0, 1]$ de norma um tais que

$$supp\, \eta_j \subseteq U_j \quad \text{e} \quad dist(\eta_j \otimes x_j, \mathcal{F}) < \varepsilon_j.$$

Assim existem $z_j \in \mathcal{F}$ tais que

$$\|\eta_j \otimes x_j - z_j\| < \varepsilon_j = \|x_j\| \frac{\delta}{2^{j+2}} = \frac{\|\eta_j \otimes x_j\| \delta}{2^{j+2}}.$$

Ou seja, para cada $j \in \mathbb{N}$ obtemos

$$supp\, \eta_j \subseteq U_j \quad \text{e} \quad \|\eta_j \otimes x_j - z_j\| < \frac{\delta}{2^{j+2}} \|\eta_j \otimes x_j\|. \tag{3.4}$$

Vejamos que as funções $\left(\dfrac{\eta_j \otimes x_j}{\|\eta_j \otimes x_j\|} \right)_{j=1}^{\infty}$ formam uma sequência básica equivalente à base canônica de c_0. Sejam $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ a base canônica de c_0, $y_j = \dfrac{\eta_j \otimes x_j}{\|\eta_j \otimes x_j\|}$ e

$$A_n := \bigcup_{j=1}^{n} supp\, \eta_j.$$

Note que $\Omega = A_n \cup A_n^C$ e que se $t \notin A_n$ então $\eta_j(t) = 0$ para todo $j = 1, ..., n$. Lembre que os suportes dos η_j's são disjuntos dois a dois e que para cada η_j existe t_0 tal que $\eta(j_0) = 1$. Assim, para quaisquer escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\eta_j \otimes x_j}{\|\eta_j \otimes x_j\|} \right\| &= \sup_{t \in \Omega} \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j \eta_j(t) x_j}{\|x_j\|} \right\| \\
&= \sup_{t \in A_n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j \eta_j(t) x_j}{\|x_j\|} \right\| \\
&= \max\{|\lambda_j| : j = 1, ..., n\} \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|_{c_0}.
\end{aligned}$$

Segue da Proposição 1.1.30 que as funções $\left(\dfrac{\eta_j \otimes x_j}{\|\eta_j \otimes x_j\|} \right)_{j=1}^{\infty}$ formam uma sequência básica equivalente à base canônica de c_0. Vejamos agora que $\overline{span}\{z_j\}$ é isomorfo a c_0 e que $z_j \xrightarrow{w} 0$. Sabemos que a sequência $y_j := \dfrac{\eta_j \otimes x_j}{\|\eta_j \otimes x_j\|}$ com $j \in \mathbb{N}$ é uma sequência básica em $C_b(\Omega, X)$. Considere os funcionais coeficientes $\{y_j^*\}$ da base $\{y_j\}$ de $\overline{span}\{y_j\}$. Por definição temos que

$$y_j^*(y_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Como $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ é base de Shauder de $\overline{span}\{y_j\}$, dado $y \in \overline{span}\{y_j\}$, existem únicos escalares $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j y_j.$$

Logo, $\left|y_j^*(y)\right| = |\alpha_j| \leq \|y\|$ e assim $\|y_j^*\| \leq 1$. Por (3.4),

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| y_j - \frac{z_j}{\|\eta_j \otimes x_j\|} \right\| \|y_j^*\| \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{j+2}} \;=\; \frac{\delta}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \;=\; \frac{\delta}{4} < 1.$$

Segue da Proposição 1.1.31 que a sequência $\left(\frac{z_j}{\|\eta_j \otimes x_j\|} \right)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência básica equivalente a $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ e, portanto, o $\overline{span}\{z_j\}$ e o $\overline{span}\{y_j\}$ são isomorfos. Como $\overline{span}\{y_j\}$ é isomorfo a c_0 e $e_j \xrightarrow{w} 0$, segue que $\overline{span}\{z_j\}$ isomorfo a c_0 e $z_j \xrightarrow{w} 0$. Pelo Teorema de *Bogdanowicz* (Teorema 1.3.18), $|p(h+z_j) - p(h)| \to 0$ quando $j \to +\infty$. Então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p(h + z_{j_0}) - p(h)| < \varepsilon/4.$$

Assim, $\operatorname{Re} wp(h) - \operatorname{Re} wp(h + z_{j_0}) < \varepsilon/4$. Daí $\operatorname{Re} wp(h + z_{j_0}) > \operatorname{Re} wp(h) - \varepsilon/4$ e de (3.2) se tem que

$$\operatorname{Re} wp(h + z_{j_0}) > 1 - \varepsilon/2. \tag{3.5}$$

Defina

$$A = h + z_{j_0}, \qquad B = h + \eta_{j_0} \otimes x_{j_0}, \qquad g = A/\|A\|.$$

Claramente $B \in C_b(\Omega, X)$, $A, g \in \mathcal{F}$, $\|g\| = 1$ e $\|A - B\| < \delta/2$. Temos também que

$$1 + 2\delta > \|A\| > 1 - 2\delta. \tag{3.6}$$

De fato, como $\|f_0(\tau)\| > 1 - \delta/4$ e $s_{j_0} \in U_{j_0} \subseteq U$, de (3.3) temos que $\|f_0(s_{j_0})\| > 1 - \delta/2$.

Tome $t_{j_0} \in U_{j_0}$ tal que $\eta_{j_0}(t_{j_0}) = 1$. Então,

$$\begin{aligned}
\|A\| \geq \|B\| - \|A - B\| \;&\geq\; \|B(t_{j_0})\| - \|A - B\| \\
&=\; \|h(t_{j_0}) + \eta_{j_0}(t_{j_0}) x_{j_0}\| - \|A - B\| \\
&=\; \|h(t_{j_0}) + w^{-1} f_0(s_{j_0}) - h(s_{j_0})\| - \|A - B\| \\
&>\; \|f_0(s_{j_0})\| - \|h(t_{j_0}) - h(s_{j_0})\| - \delta/2 \\
&>\; (1 - \delta/2) - \delta/2 - \delta/2 \\
&=\; 1 - \frac{3\delta}{2} > 1 - 2\delta.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\|A\| \leq \|B\| + \|A - B\| < \|B\| + \delta/2,$$

onde se $t \notin U_{j_0}$ então

$$\|B(t)\| = \|h(t)\| \leq \|h\| \leq 1,$$

e se $t \in U_{j_0}$ então

$$\begin{aligned}
\|B(t)\| &= \|h(t) + \eta_{j_0}(t)x_{j_0}\| \\
&= \left\|h(t) + \left(w^{-1}f_0(s_{j_0}) - h(s_{j_0})\right)\eta_{j_0}(t)\right\| \\
&= \left\|h(t) - h(s_{j_0}) + h(s_{j_0}) - h(s_{j_0})\eta_{j_0}(t) + w^{-1}f_0(s_{j_0})\eta_{j_0}(t)\right\| \\
&\leq \|h(t) - h(s_{j_0})\| + \|h(s_{j_0})\||1 - \eta_{j_0}(t)| + |\eta_{j_0}(t)|\|f_0(s_{j_0})\| \\
&< \delta/2 + (1 - \eta_{j_0}(t)) + \eta_{j_0}(t) \\
&< 1 + \delta/2.
\end{aligned}$$

Logo, $\|B\| = \sup\limits_{t\in\Omega} \|B(t)\| \leq 1 + \delta/2$. Portanto, $\|A\| \leq \|B\| + \delta/2 \leq 1 + \delta < 1 + 2\delta$.

Agora, pela Equação (3.6),

$$\|g - A\| = \left\|\frac{A}{\|A\|} - A\right\| = \left\|\left(\frac{1}{\|A\|} - 1\right)A\right\| = |1 - \|A\|| < 2\delta.$$

Como $g, A \in \mathcal{F}$, $\|g - A\| < 2\delta$ e $\|A\|, \|g\| \leq 2$, de (3.1) e (3.5) segue que

$$\frac{\varepsilon}{2} > |p(A) - p(g)| \geq \mathrm{Re}\, wp(A) - \mathrm{Re}\, wp(g) > 1 - \varepsilon/2 - \mathrm{Re}\, wp(g),$$

ou seja,

$$\mathrm{Re}\, wp(g) > 1 - \varepsilon.$$

Além disso, como $1 < 1 + 2\delta$, então $\dfrac{4\delta}{1+2\delta} < \dfrac{4\varepsilon}{10}$ e assim

$$\begin{aligned}
\|f_0 + wg\| &= \left\|f_0 + w\frac{A}{\|A\|}\right\| = \left\|f_0 + w\frac{(A + B - B)}{\|A\|}\right\| \\
&\geq \left\|f_0 + w\frac{B}{\|A\|}\right\| - \left\|\frac{w(A - B)}{\|A\|}\right\| \\
&> \left\|f_0(t_{j_0}) + w\frac{B(t_{j_0})}{\|A\|}\right\| - \frac{\delta}{2\|A\|} \\
&= \left\|f_0(t_{j_0}) + \frac{w\,(h(t_{j_0}) + x_{j_0})}{\|A\|}\right\| - \frac{\delta}{2\|A\|} \\
&= \left\|f_0(t_{j_0}) + \frac{w\,(h(t_{j_0}) - h(s_{j_0})) + f_0(s_{j_0})}{\|A\|}\right\| - \frac{\delta}{2\|A\|} \\
&\geq \left\|f_0(s_{j_0}) + \frac{f_0(s_{j_0})}{\|A\|}\right\| - \|f_0(t_{j_0}) - f_0(s_{j_0})\| - \frac{\|h(t_{j_0}) - h(s_{j_0})\|}{\|A\|} - \frac{\delta}{2\|A\|} \\
&> \|f_0(s_{j_0})\|\left(1 + \frac{1}{\|A\|}\right) - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{\|A\|} - \frac{\delta}{2\|A\|} \\
&> (1 - \delta/2)\left(1 + \frac{1}{\|A\|}\right) - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{\|A\|} - \frac{\delta}{2\|A\|} \\
&= \frac{1}{\|A\|}(1 - 2\delta) + 1 - \delta > \frac{1 - 2\delta}{1 + 2\delta} + 1 - \delta > 2 - \frac{4\delta}{1 + 2\delta} - \delta \\
&> 2 - \frac{4\delta}{1 + 2\delta} - \varepsilon/10 > 2 - \frac{4\varepsilon}{10} - \frac{\varepsilon}{10} \\
&> 2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Então $\operatorname{Re} wp(g) > 1-\varepsilon$ e $\|f_0+wg\| > 2-\varepsilon$. O resultado segue da Proposição 3.0.3. $\square$

Lema 3.1.3. *Sejam Ω um espaço topológico de Hausdorff completamente regular e X um espaço de Banach. Então $C_b(\Omega, X)$ é C_b-rich em si mesmo.*

Demonstração. Sejam U um subconjunto aberto de Ω, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Seja $\varphi : \Omega \to [0,1]$ a função nula. Assim segue que

$$supp\varphi \subseteq U.$$

Como $\varphi \otimes x \in C_b(\Omega, X)$, então $dist(\varphi \otimes x, C_b(\Omega, X)) = 0 < \varepsilon$, ou seja, $C_b(\Omega, X)$ é C_b-*rich* em si mesmo. $\square$

Corolário 3.1.4. *Seja Ω um espaço topológico de Hausdorff completamente regular sem pontos isolados e seja X um espaço de Banach. Então todo polinômio fracamente compacto de $C_b(\Omega, X)$ em $C_b(\Omega, X)$ satisfaz (DE).*

Demonstração. Como $C_b(\Omega, X)$ é C_b-*rich* em si mesmo, o resultado segue do Teorema 3.1.2. $\square$

A seguir provaremos mais um corolário. Para tanto, recordemos a definição de codimensão de um subespaço vetorial e vejamos um resultado de K. Boyko et al. [7].

Definição 3.1.5. Seja Y um subespaço de um espaço vetorial X. A *codimensão* de Y é a dimensão do espaço quociente X/Y.

Proposição 3.1.6 ([7], Proposition 2.5)**.** *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e $f_1, ..., f_n \in (C(K))^*$. O subespaço*

$$Y = \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$$

é C_b-rich se e somente se $\bigcup_{i=1}^{n} supp(f_i)$ não intersecta o conjunto dos pontos isolados de K.

Corolário 3.1.7. *Sejam K um espaço topológico de Hausdorff compacto sem pontos isolados e Y um subespaço de codimensão finita de $C(K)$. Então todo polinômio fracamente compacto em $\mathcal{P}(Y;Y)$ satisfaz (DE).*

Demonstração. Inicialmente provaremos que Y é um subespaço C_b-*rich* . Seja n a dimensão do espaço quociente $C(K)/Y$. Definamos para cada $i = 1, ..., n$, $f_i = T_i \circ \varphi \circ q$, onde $T_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ é a i-ésima projeção canônica, φ é um isomorfismo entre $C(K)/Y$ e $\mathbb{K}^n$, e $q(g) = [g]$ para cada $g \in C(K)$, onde $[g]$ é a classe de equivalência de g em $C(K)/Y$. Cada f_i é linear e contínua pois é a composição de operadores lineares contínuos. Agora,

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{n} ker f_i &= \{g \in C(K) : T_i(\varphi([g])) = 0 \quad \forall\, i = 1, ..., n\} \\
&= \{g \in C(K) : \varphi([g]) = 0\} \\
&= \{g \in C(K) : [g] = [0]\} \\
&= \{g \in C(K) : g \in Y\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$Y = \bigcap_{i=1}^{n} ker f_i.$$

Assim, pela Proposição 3.1.6, Y é C_b-*rich*, pois K não possui pontos isolados. Como K é espaço topológico compacto de Hausdorff, segue do Teorema 1.1.6 que K é um espaço de Tychonoff e, em particular, é completamente regular. Daí, Y é um subespaço C_b-*rich* de $C(K)$ com K um espaço topológico de Hausdorff completamente regular sem pontos isolados. Portanto, do Teorema 3.1.2 segue que todo polinômio fracamente compacto em $\mathcal{P}(Y, Y)$ satisfaz (DE). □

Se K é um espaço topológico de Hausdorff compacto com pontos isolados, o resultado anterior não é verdadeiro, porque existem polinômios fracamente compactos de $C(K)$ em si mesmo que não satisfazem (DE). De fato, todo operador linear é por definição um polinômio 1-homogêneo. Seja x_0 um ponto isolado de K e defina $f_0 \in C(K)$ por

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x = x_0. \\ \\ 0 & \text{se} \quad x \neq x_0. \end{cases}$$

Considere o operador

$$\begin{array}{rcl} T : C(K) & \longrightarrow & C(K) \\ f & \longrightarrow & -f(x_0)f_0. \end{array}$$

Então T é um operador de posto um e, em particular, um polinômio fracamente compacto tal que $\|Id + T\| = 1 < 1 + \|T\|$. Mas será que pelo menos todo polinômio fracamente compacto de $C(K)$ em si mesmo satisfaz (ADE)? No caso real isso não ocorre. De fato, se K tem só um ponto, então $C(K) = \mathbb{R}$ e, pelo Exemplo 3.0.2, existem polinômios (fracamente compactos) os quais não satisfazem (ADE). No caso complexo, a situação é completamente diferente como veremos na próxima seção.

3.2 Funções holomorfas em espaços de funções contínuas

A densidade do espaço dos polinômios em um espaço de Banach complexo $\mathcal{Z}$ no espaço $\mathcal{A}_u(B_{\mathcal{Z}}, \mathcal{Z})$ nós dá a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *Seja Ω um espaço topológico de Hausdorff completamente regular sem pontos isolados e seja X um espaço de Banach complexo. Então toda Φ fracamente compacta em $\mathcal{A}_u(B_{C_b(\Omega,X)}, C_b(\Omega, X))$ satisfaz (DE).*

Demonstração. Seja $Y = C_b(\Omega, X)$. Denotemos por P_k o polinômio k-homogêneo da expansão de Taylor de Φ em $0 \in B_Y$. Pela *Fórmula Integral de Cauchy*, $P_k(B_Y)$ está contido em $\overline{\Gamma(\Phi(B_Y))}$. De fato,

$$P_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\Phi(\xi f)}{\xi^{k+1}}\, d\xi, \quad \text{para } f \text{ no interior de } B_Y.$$

Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, definida por $\gamma(t) = e^{it}$ para cada $t \in [0, 2\pi]$. Pela Definição 1.3.22,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\Phi(\xi f)}{\xi^{k+1}} d\xi &= \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(e^{it} f) i e^{it}}{e^{it(k+1)}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(e^{it} f) i}{e^{itk}} dt.\end{aligned}$$

Assim, para cada $\psi \in Y^*$, temos

$$\begin{aligned}\psi(P_k(f)) &= \psi\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(\xi f)}{\xi^{k+1}} d\xi\right) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi(e^{it} f)}{e^{itk}} dt\right) \\ &= \int_0^{2\pi} \psi\left(\frac{\Phi(e^{it} f)}{2\pi e^{itk}}\right) dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \psi\left(\frac{\Phi(e^{it_j^*} f)}{2\pi e^{it_j^* k}}\right) \Delta t_j \\ &= \psi\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Phi(e^{it_j^*} f)}{2\pi e^{it_j^* k}} \Delta t_j\right),\end{aligned}$$

onde t_j^* pertence ao j-ésimo intervalo de uma partição do intervalo $[0, 2\pi]$ e Δt_j é o comprimento do j-ésimo intervalo da partição. Dessa forma,

$$P_k(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Phi(e^{it_j^*} f)}{2\pi e^{it_j^* k}} \Delta t_j.$$

Agora,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\Delta t_j}{2\pi e^{it_j^* k}}\right| &= \sum_{j=1}^{n} \frac{|\Delta t_j|}{2\pi |e^{it_j^*}|^k} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} |\Delta t_j| \\ &= 1.\end{aligned}$$

Daí, pela Proposição 1.1.21, temos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\Phi(e^{it_j^*} f)}{2\pi e^{it_j^* k}} \Delta t_j$ pertence a $\Gamma(\Phi(B_Y))$ e como $P_k(f)$ é limite desses elementos, temos

$$P_k(B_Y) \subseteq \overline{\Gamma(\Phi(B_Y))}.$$

Como $\overline{\Phi(B_Y)}^w$ é fracamente compacto, então pelo Teorema 1.1.22 $\overline{\Gamma(\Phi(B_Y))}^w$ é fracamente compacto. Por definição, $\Gamma(\Phi(B_Y))$ é convexo. Desta forma, pelo Teorema de Mazur (Teorema 1.1.25), $\overline{\Gamma(\Phi(B_Y))}^w = \overline{\Gamma(\Phi(B_Y))}$. Assim, temos $P_k(B_Y) \subseteq \overline{\Gamma(\Phi(B_Y))}^w$.

Como $\overline{P_k(B_Y)}^w$ é fracamente fechado contido num fracamente compacto, segue que P_k é fracamente compacto por definição. Logo os polinômios de Taylor de Φ também são fracamente compactos. Definamos $\Phi_n : B_Y \to Y$ por

$$\Phi_n(f) := \Phi\left(\frac{n-1}{n}f\right)$$

e $Q_n : B_Y \to Y$ por

$$Q_n := \frac{n-1}{n}Id,$$

onde Id é a identidade em $\mathcal{A}_u(B_Y, Y)$. Como a função Q_n é linear, segue que $\Phi_n = \Phi \circ Q_n \in \mathcal{A}_u(B_Y, Y)$. Provemos que a sequência $(\Phi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a Φ na bola unitária fechada de Y. De fato, como Φ é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f - g\| \leq \delta \text{ implica } \|\Phi(f) - \Phi(g)\| < \varepsilon/2.$$

Seja $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N_0} < \delta$. Assim, se $n \geq N_0$, então

$$\left\|\frac{n-1}{n}f - f\right\| = \left\|\frac{f}{n}\right\| \leq \frac{1}{n} < \delta,$$

que implica

$$\left\|\Phi\left(\frac{n-1}{n}f\right) - \Phi(f)\right\| < \varepsilon/2,$$

para todo $f \in B_Y$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\Phi_{N_0} - \Phi\| \leq \varepsilon/2. \tag{3.7}$$

Além disso, a série de Taylor de Φ_{N_0} converge uniformemente em B_Y a Φ_{N_0}, ou seja, existe um polinômio fracamente compacto P tal que

$$\|\Phi_{N_0} - P\| < \varepsilon/2. \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8), obtemos

$$\|\Phi - P\| < \varepsilon.$$

Agora, pelo Teorema 3.1.2, temos que P satisfaz a (DE) e então

$$\begin{aligned}\|Id + \Phi\| &\geq \|Id + P\| - \|\Phi - P\| = 1 + \|P\| - \|\Phi - P\| \\ &\geq 1 + \|\Phi\| - 2\|\Phi - P\| > 1 + \|\Phi\| - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Fazendo ε tender a zero, obtemos o resultado. $\square$

Teorema 3.2.2. *Seja K um espaço topológico de Hausdorff compacto e seja X o espaço complexo $C(K)$. Então $v(\Phi) = \|\Phi\|$ para cada $\Phi \in \mathcal{A}_\infty(B_X, X)$.*

Para provar esse teorema, precisaremos do seguinte resultado preliminar, da definição de ponto extremo e de um resultado de M. D. Acosta [1].

Lema 3.2.3. *Sejam Ω um conjunto, $\mathcal{F}$ um subespaço de $\ell_\infty(\Omega)$ e $\Lambda \subseteq \Omega$ um conjunto normante para $\mathcal{F}$(ou seja, $\|f\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\}$ para cada $f \in \mathcal{F}$). Então, dados um espaço de Banach Y e uma função $\Phi \in \ell_\infty(\Omega, Y)$ tais que $y^* \circ \Phi \in \mathcal{F}$ para cada $y^* \in Y^*$, temos*

$$\|\Phi\| = \sup\{\|\Phi(\lambda)\| : \lambda \in \Lambda\}.$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
\|\Phi\| &= \sup_{t\in\Omega}\|\Phi(t)\| = \sup_{t\in\Omega}\sup_{y^*\in B_{Y^*}}|y^*(\Phi(t))| \\
&= \sup_{y^*\in B_{Y^*}}\sup_{t\in\Omega}|y^*(\Phi(t))| = \sup_{y^*\in B_{Y^*}}\|y^*\circ\Phi\| \\
&= \sup_{y^*\in B_{Y^*}}\sup_{t\in\Lambda}|y^*(\Phi(t))| = \sup_{t\in\Lambda}\sup_{y^*\in B_{Y^*}}|y^*(\Phi(t))| \\
&= \sup_{t\in\Lambda}\|\Phi(t)\|.
\end{aligned}$$

□

Definição 3.2.4. Seja K um subconjunto fechado e limitado de um espaço de Banach X. Um elemento y_0 de K é dito um *ponto extremo* de K se $y_0 \notin co(K \setminus B(y_0, \varepsilon))$ para cada $\varepsilon > 0$. O conjunto dos pontos extremos de K é denotado por $Ext(K)$.

Teorema 3.2.5. *Seja K um espaço topológico de Hausdorff compacto. Então $Ext(B_{C(K)})$ é um conjunto normante para $\mathcal{A}_\infty(B_{C(K)})$.*

Demonstração. Veja ([1], Theorem 4.2). □

Vejamos agora a demonstração do Teorema 3.2.2.

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.5 o conjunto $Ext(B_{C(K)})$ de todos os pontos extremos de $B_{C(K)}$ é um conjunto normante para $\mathcal{A}_\infty(B_{C(K)})$. Assim, pelo Lema 3.2.3, dado $\varepsilon > 0$, existe $e \in Ext(B_{C(K)})$ tal que $\|\Phi(e)\| > \|\Phi\| - \varepsilon$. Como $\Phi(e) \in C(K)$ e K é compacto, existe $t \in K$ tal que $\|\Phi(e)\| = |[\Phi(e)](t)|$. Por outro lado, como $e \in Ext(B_{C(K)})$ temos que $|e(t)| = 1$. Agora, seja $\delta_t : X \to \mathbb{K}$ definida por $\delta_t(f) = f(t)$ para cada $f \in X$. Claramente δ_t é linear. Além disso,

$$\|\delta_t\| = \sup_{f\in B_{C(K)}}|\delta_t(f)| = \sup_{f\in B_{C(K)}}|f(t)| \leq \|f\| \leq 1.$$

Como também $e \in B_{C(K)}$ e $|\delta_t(e)| = 1$, segue que $\|\delta_t\| = 1$. Portanto $(e, \delta_t) \in \Pi(C(K))$ e, como

$$|\delta_t(\Phi(e))| = |\Phi(e)](t)| = \|\Phi(e)\| > \|\Phi\| - \varepsilon,$$

segue que

$$v(\Phi) = \sup_{(x,x^*)\in\Pi(C(K))}|x^*(\Phi(x))| > \|\Phi\| - \varepsilon,$$

ou seja, $v(\Phi) \geq \|\Phi\|$. □

Corolário 3.2.6. *Seja K um espaço de Hausdorff compacto. Então todo polinômio do espaço complexo $C(K)$ em si mesmo satisfaz (ADE).*

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}(C(K), C(K))$. Pela Proposição 1.3.20, P é holomorfo. Seja $\widehat{P}$ a restrição de P à bola unitária $B_{C(K)}$. Então $\|P\| = \|\widehat{P}\|$ e $\widehat{P} \in \mathcal{A}_\infty(B_{C(K)}, C(K))$. Logo, pelo Teorema 3.2.2, $v(\widehat{P}) = \|\widehat{P}\|$. Em vista do Teorema 2.2.1, basta provar que $\widehat{P} \in C_u(B_{C(K)}, C(K))$, mas isto decorre do fato de que $\widehat{P}$ é contínuo e $B_{C(K)}$ é limitada. Logo, $\widehat{P}$ satisfaz (ADE) e, portanto, P também satisfaz. $\square$

Exemplo 3.2.7. *Sabendo que ℓ_∞ é isométrico a $C(K)$ (veja [30]), onde K é a compactificação de Stone-Cech de $\mathbb{N}$, temos pelo corolário anterior que todo polinômio no espaço complexo ℓ_∞ nele mesmo satisfaz (ADE). Lembramos que a compactificação de Stone-Cech de um espaço topológico é sempre um espaço de Hausdorff compacto.*

Exemplo 3.2.8. *Seja X o espaço complexo c_0 ou c. Então toda $\Phi \in \mathcal{A}_u(B_X, X)$ satisfaz (ADE). Em particular todo polinômio de X em X satisfaz (ADE). De fato, dados $\Phi \in \mathcal{A}_u(B_X, X)$ e $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in S_X$ tal que*

$$\|\Phi(x_0)\| > \|\Phi\| - \varepsilon.$$

Seja $\{e_1^*, e_2^*, ...\}$ a base dual de X^*, onde e_j^* é o funcional em X^* associado ao elemento e_j da base canônica de X. Então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$|e_j^*(\Phi(x_0))| > \|\Phi\| - \varepsilon.$$

Definamos agora $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = e_j^*(\Phi(x_0 + (z - e_j^*(x_0)))e_j)$$

para cada $z \in B_{\mathbb{C}}$. Desta forma, $f \in \mathcal{A}_u(B_{\mathbb{C}})$. Pelo Teorema do Módulo Máximo, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ com $|z_0| = 1$ tal que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \quad \textit{para todo} \;\; z \in \mathbb{D}.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \|\Phi\| - \varepsilon < |e_j^*(\Phi(x_0))| &= |f(e_j^*(x_0))| \leq |f(z_0)| \\ &= |e_j^*(\Phi(x_0 + (z_0 - e_j^*(x_0))e_j))|. \end{aligned}$$

Agora, $x_1 := x_0 + (z_0 - e_j(x_0))e_j \in S_X$ e $|e_j^*(x_1)| = 1$, então se $y^* = we_j^*$ com $w = \dfrac{|e_j^*(x_1)|}{e_j^*(x_1)}$ segue que

$$\|\Phi\| - \varepsilon < |e_j^*(\Phi(x_1))| = |we_j^*(\Phi(x_1))| \leq v(\Phi).$$

Logo, pelo Teorema 2.2.1, Φ satisfaz (ADE).

CAPÍTULO 4

EQUAÇÃO DE DAUGAVET PARA POLINÔMIOS K-HOMOGÊNEOS

Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a *propriedade de Daugavet de ordem* k (ou k-*DP*) se todo polinômio $P \in \mathcal{P}(^kX, X)$ de posto um satisfaz (DE). Dizemos que X tem a *propriedade alternativa de Daugavet de ordem* k (ou k-*ADP*) se todo polinômio $P \in \mathcal{P}(^kX, X)$ de posto um satisfaz (ADE). Ressaltamos que um polinômio entre espaços de Banach tem *posto um* se o subespaço vetorial gerado pela imagem do polinômio tem dimensão um.

O objetivo deste capítulo é estudar a propriedade de Daugavet de ordem k e a propriedade alternativa de Daugavet de ordem k. Esse estudo tem sentido já que o Exemplo 4.0.4 abaixo mostra que existem espaços com polinômios fracamente compactos que não satisfazem (ADE) e mesmo assim todo polinômio k-homogêneo fracamente compacto satisfaz (ADE). O texto aqui apresentado foi baseado na terceira seção de [9].

Iniciaremos apresentando exemplos de espaços com a k-*DP* e k-*ADP*. Os resultados são consequências dos Corolários 3.1.4 e 3.2.6 e do Exemplo 3.2.8.

Exemplo 4.0.1. *a) Seja Ω um espaço topológico de Hausdorff completamente regular sem pontos isolados e seja X um espaço de Banach. Então o espaço $C_b(\Omega, X)$ tem a k-DP para todo $k \in \mathbb{N}$.*

b) Seja K um espaço de Hausdorff compacto. Então o espaço complexo $C(K)$ tem a k-ADP para todo $k \in \mathbb{N}$.

c) Seja X o espaço complexo c_0. Então X tem a k-ADP para todo $k \in \mathbb{N}$.

O seguinte resultado mostra um comportamento surpreendente da equação de Daugavet e da equação alternativa de Daugavet para polinômios k-homogêneos com $k > 1$.

Proposição 4.0.2. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e seja $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 2$.*

a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então (DE) e (ADE) são equivalentes em $\mathcal{P}(^kX, X)$.

b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e k é par, então (DE) e (ADE) são equivalentes em $\mathcal{P}(^k X, X)$.

Demonstração. Sabemos que (DE) implica (ADE). Desta forma, basta mostrar que (ADE) implica (DE) em cada caso.

a) Seja $P \in \mathcal{P}(^k X, X)$ e suponhamos que exista $w \in \mathbb{T}$ tal que

$$\|Id + wP\| = 1 + \|P\|.$$

Tome $\beta \in \mathbb{T}$ uma solução da equação complexa $z^{k-1} = w$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in B_X$ tal que

$$\|x + wP(x)\| > 1 + \|P\| - \varepsilon.$$

Seja $y = \beta x$. Logo $y \in B_X$ e

$$\begin{aligned} \|y + P(y)\| &= \|\beta x + P(\beta x)\| = \|\beta x + \beta^k P(x)\| \\ &= |\beta|\|x + \beta^{k-1} P(x)\| = \|x + wP(x)\| > 1 + \|P\| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, temos

$$\|Id + P\| \geq 1 + \|P\|.$$

Portanto P satisfaz (DE).

b) Seja $P \in \mathcal{P}(^k X, X)$. Suponhamos que P satisfaça (ADE) e que $k \in \mathbb{N}$ seja par. Então existe $w \in \{-1, 1\}$ tal que

$$\|Id + wP\| = 1 + \|P\|.$$

Como $k - 1$ é ímpar, existe $\beta \in \{-1, 1\}$ tal que $\beta^{k-1} = w$. A prova continua como no item a). Note que no caso em que $w = -1$ e k é ímpar não existe $\beta \in \{-1, 1\}$ tal que $\beta^{k-1} = w$.

□

A proposição anterior pode ser reescrita em termos das definições da *k-DP* e da *k-ADP*.

Corolário 4.0.3. *Sejam X um espaço de Banach e $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 2$.*

a) Se X é complexo, então a k-DP e a k-ADP são equivalentes.

b) Se X é real e k é par, então a k-DP e a k-ADP são equivalentes.

Exemplo 4.0.4. *a) Pelo item (b) do Exemplo 3.0.2, o espaço complexo $\mathbb{C}$ tem a k-ADP para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, pelo corolário anterior, $\mathbb{C}$ tem a k-DP para todo $k \geq 2$, mas $\mathbb{C}$ não tem a 1-DP.*

b) Ainda que existam polinômios não homogêneos que não satisfazem (ADE), podemos provar que o espaço real $\mathbb{R}$ tem a k-ADP para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, se $P \in \mathcal{P}(^k\mathbb{R}, \mathbb{R})$ então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $P(t) = \alpha t^k$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $w_0 = sgn(\alpha)$. Note que $1 + \|P\| = 1 + |\alpha| = |1 + w_0 \alpha|$. Logo,

$$\max_{w \in \mathbb{T}} \|Id + wP\| \geq \|Id + w_0 P\| \geq |1 + w_0 \alpha| = 1 + \|P\|.$$

Portanto P satisfaz (ADE). Ou seja, $\mathbb{R}$ tem a k-ADP para todo $k \in \mathbb{N}$.

c) Pelo item anterior e pelo corolário acima, $\mathbb{R}$ tem a k-DP para todo $k \in \mathbb{N}$ par. Por outro lado, se k é impar, $\mathbb{R}$ não tem a k-DP. De fato, se $P \in \mathcal{P}(^k\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é dado por

$$P(t) = -t^k \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

então

$$\|Id + P\| \leq 1 < 1 + \|P\|.$$

d) Pelo Corolário 3.2.6 e pelo Exemplo 3.2.8, sabemos que todo polinômio de um dos espaços complexos c_0 ou $C(K)$, K Hausdorff compacto, em si mesmo satisfaz (ADE). Agora se nos restringirmos aos polinômios k-homogêneos, o Corolário 4.0.3 nos dá mais: Os espaço complexos c_0 e $C(K)$ com K Hausdorff compacto têm a k-DP para todo $k \geq 2$.

Observação 4.0.5. *O item (c) do exemplo anterior mostra que, no caso real, as equações (DE) e (ADE) não são equivalentes em $\mathcal{P}(^kX, X)$ para k ímpar. Portanto a k-DP e a k-ADP não são equivalentes no caso real para k ímpar.*

Agora estudaremos a relação entre *k-DP* e *k-ADP* para diferentes valores de um inteiro k.

Proposição 4.0.6. *Seja X um espaço de Banach e seja $k \in \mathbb{N}$. Se X tem a $(k+1)$-ADP então X tem a k-ADP.*

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}(^kX, X)$ de posto um. Dado $0 < \varepsilon < \|P\|$, existe $y \in S_X$ tal que

$$\|P(y)\| > \|P\| - \varepsilon.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $y^* \in S_X^*$ tal que

$$|y^*(y)| = 1.$$

Se definimos $Q \in \mathcal{P}(^{k+1}X, X)$ por

$$Q(x) = y^*(x)P(x) \qquad (x \in X),$$

temos que Q tem posto um e

$$\|Q\| \geq \|Q(y)\| = |y^*(y)|\|P(y)\| > \|P\| - \varepsilon. \tag{4.1}$$

Como X tem a $(k+1)$-*ADP*, então existe $w_1 \in \mathbb{T}$ tal que Q satisfaz

$$\|Id + w_1 Q\| = 1 + \|Q\|.$$

Logo, da definição da norma e de (4.1), existe $z \in S_X$ tal que

$$1 + \|P\| - 2\varepsilon < 1 + \|Q\| - \varepsilon < \|z + w_1 Q(z)\| = \|z + w_1 y^*(z)P(z)\|.$$

Daí segue que

$$\|P\| - 2\varepsilon < |y^*(z)|\|P\|,$$

ou seja,

$$1 - \frac{2\varepsilon}{\|P\|} < |y^*(z)|. \tag{4.2}$$

Tomando $w = (y^*(z)/|y^*(z)|)w_1 \in \mathbb{T}$, temos

$$\begin{aligned}
\|Id + wP\| &\geq \|z + wP(z)\| = \left\| z + \frac{w_1 y^*(z)P(z)}{|y^*(z)|} \right\| \\
&\geq \|z + w_1 y^*(z)P(z)\| - \left\| \frac{w_1 y^*(z)P(z)}{|y^*(z)|} - w_1 y^*(z)P(z) \right\|.
\end{aligned}$$

Agora, de (4.2) obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{w_1 y^*(z)P(z)}{|y^*(z)|} - w_1 y^*(z)P(z) \right\| &\leq \|P\| \frac{|y^*(z)|}{|y^*(z)|} \left|1 - |y^*(z)|\right| \\
&\leq \frac{\|P\|}{|y^*(z)|} \left|1 - |y^*(z)|\right| \\
&< \frac{\|P\|\|P\|}{\|P\| - 2\varepsilon} \left|1 - |y^*(z)|\right| \\
&< \frac{2\varepsilon\|P\|}{\|P\| - 2\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\|Id + wP\| > 1 + \|P\| - 2\varepsilon - \frac{2\varepsilon\|P\|}{\|P\| - 2\varepsilon}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, temos

$$\|Id + wP\| \geq 1 + \|P\|.$$

Portanto, X tem a k-*ADP*. $\square$

No caso complexo, a Proposição 4.0.6 pode ser lida em termos da *propriedade de Daugavet de ordem* k para $k \geq 2$, pois neste caso a k-*ADP* e a k-*DP* são equivalentes.

Corolário 4.0.7. *Sejam X um espaço de Banach complexo e $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 2$. Se X tem $(k+1)$-DP, então X tem a k-DP.*

Demonstração. Como X tem a $(k+1)$-*DP*, segue da definição que tem a $(k+1)$-*ADP*. Logo, da Proposição 4.0.6, X tem a k-*ADP*. E como $k \geq 2$, do Corolário 4.0.3, X tem a k-*DP*. $\square$

Observação 4.0.8. *a) O resultado anterior não é valido para $k = 1$, pois o espaço complexo c_0 tem a 2-DP pelo Exemplo 4.0.4(d), mas não tem a 1-DP. De fato, sejam $e_1 = (1, 0, 0, ...) \in c_0$ e $T : c_0 \to c_0$ dada por $T(x_1, x_2, x_3, ...) = -x_1 e_1$. Então $T \in \mathcal{P}(^1 c_0, c_0)$ e tem posto um, porém $\|Id + T\| \leq 1 < 1 + \|T\|$.*

b) O resultado anterior é falso no caso real, pois o espaço real $\mathbb{R}$ tem a $2m$-DP para todo $m \in \mathbb{N}$, mas não tem a $(2m-1)$-DP para todo $m \in \mathbb{N}$ pelo Exemplo 4.0.4(c).

Para o caso real podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 4.0.9. *Sejam X um espaço de Banach real e $k \in \mathbb{N}$. Se X tem a $(k+2)$-DP, então tem a k-DP.*

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}(^k X, X)$ de posto um. Dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $y \in S_X$ tal que

$$\|P(y)\| > \|P\| - \varepsilon.$$

E pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $y^* \in S_{X^*}$ tal que

$$y^*(y) = 1.$$

Se definimos $Q \in \mathcal{P}(^{k+2} X, X)$ por

$$Q(x) = (y^*(x))^2 P(x) \qquad (x \in X),$$

temos que Q tem posto um e

$$\|Q\| \ \geq \|Q(y)\| = (y^*(y))^2 \|P(y)\| > \|P\| - \varepsilon.$$

Como X tem a $(k+2)$-DP, existe $z \in S_X$ tal que

$$1 + \|P(z)\| - 2\varepsilon \leq 1 + \|P\| - 2\varepsilon < 1 + \|Q\| - \varepsilon < \|z + Q(z)\| = \|z + (y^*(z))^2 P(z)\|.$$

Daí segue que

$$1 + \|P(z)\| - 2\varepsilon < 1 + (y^*(z))^2 \|P(z)\|,$$

ou seja,

$$\|P(z)\| - 2\varepsilon < (y^*(z))^2 \|P(z)\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|Id + P\| \geq \|z + P(z)\| &\geq \|z + (y^*(z))^2 P(z)\| - \|P(z) - (y^*(z))^2 P(z)\| \\ &> 1 + \|P\| - \varepsilon - \|P(z)\| |1 - (y^*(z))^2| \\ &= 1 + \|P\| - \varepsilon - \|P(z)\| + \|P(z)\| (y^*(z))^2 \\ &> 1 + \|P\| - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, temos

$$\|Id + P\| \geq 1 + \|P\|.$$

Portanto, X tem a k-DP. $\square$

Observação 4.0.10. *O resultado anterior não é verdadeiro no caso complexo com $k = 1$. De fato, o espaço complexo c_0 tem a 3-DP, mas não tem a 1-DP.*

Exemplo 4.0.11. *ℓ_1 não tem a k-ADP para nenhum $k \geq 2$. De fato, Y. S. Choi e S. G. Kim [8] apresentam um exemplo de um polinômio fracamente compacto $P \in \mathcal{P}(^2 \ell_1, \ell_1)$ tal que*

$$v(P) = \frac{1}{2} \|P\|.$$

Tal polinômio é definido por $P(x) = (x_1^2/2 + 2x_1x_2, -x_2^2/2 - x_1x_2, 0, 0, ...)$ *para cada* $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1$. *É possível ver que* $P \in \mathcal{P}(^2\ell_1, \ell_1)$ *e que*

$$\|P\| = \sup_{\|x\|=1} \|P(x)\| \quad \leq \quad \sup_{|x_1|+|x_2|=1} \left(\frac{1}{2} \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + 3|x_1x_2| \right) \right) \leq 1.$$

Além disso, $P\left(\frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2}\right) = 1$, *donde segue que* $\|P\| = 1$. *Agora, seja* $x_1 = r_1e^{i\theta_1}$, $x_2 = r_2e^{i\theta_2}$ *com* $r_1 + r_2 = 1$ *e* $r_1, r_2 \geq 0$. *Pode ser provado que*

$$v(P) \leq |r_1^2/2 - r_1r_2| + |2r_1r_2 - r_2^2/2| \leq 1/2.$$

Como $e_1^*(P(e_1)) = 1/2$, *então* $v(P) = 1/2$. *Logo,* $v(P) = \frac{1}{2}\|P\|$. *Desta forma, pela Proposição 2.2.1,* P *não satisfaz (ADE). Portanto,* ℓ_1 *não tem a 2-ADP e, pela Proposição 4.0.6, não poderá ter a* k*-ADP para nenhum* $k \geq 2$.

Exemplo 4.0.12. *Seja* K *um espaço de Hausdorff compacto com pelo menos dois pontos isolados. Então o espaço real* $C(K)$ *não satisfaz a* k*-ADP para nenhum* $k \geq 2$. *De fato, considere* $x_1, x_2 \in K$ *pontos isolados com* $x_1 \neq x_2$ *e defina* $p : C(K) \to \mathbb{R}$ *por*

$$p(f) = f(x_2)^2 - \frac{1}{2}f(x_1)^2,$$

para cada $f \in C(K)$. *Assim,* $p \in \mathcal{P}(^2C(K))$ *e*

$$\|p\| = \sup_{\|f\|\leq 1} \|p(f)\| = \sup_{\|f\|\leq 1} \left| f(x_2)^2 - \frac{1}{2}f(x_1)^2 \right| \leq \sup_{\|f\|\leq 1} |f(x_2)^2| \leq 1.$$

Como $p(\chi_{k\backslash\{x_1\}}) = 1$, *temos* $\|p\| = 1$. *Suponhamos que* $C(K)$ *tenha a 2-ADP. Então fazendo uso do Corolário 2.1.8 com* $X = C(K)$ *e* $\mathcal{Z} = \mathcal{P}(^2X)$, *como* $p \in S_{\mathcal{Z}}$ *e* $\chi_{\{x_1\}} \in S_X$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *existem* $w_n \in \mathbb{T}$ *e* $g_n \in B_X$ *tais que*

$$|p(g_n)| > 1 - \frac{1}{n} \qquad e \qquad \|\chi_{\{x_1\}} + w_ng_n\| > 2 - \frac{1}{n}.$$

Definindo $f_n = \frac{w_ng_n}{\|g_n\|}$, *obtemos* $\|f_n\| = 1$ *e*

$$|p(f_n)| = \left| p\left(\frac{w_ng_n}{\|g_n\|}\right) \right| = \left| \frac{w_n^2}{\|g_n\|^2}p(g_n) \right| = \left| \frac{1}{\|g_n\|^2}p(g_n) \right| \geq |p(g_n)| > 1 - \frac{1}{n}.$$

Daí,

$$\left| f_n(x_2)^2 - \frac{1}{2}f_n(x_1)^2 \right| \longrightarrow 1. \tag{4.3}$$

Observe que

$$2 - \frac{1}{n} < \|\chi_{\{x_1\}} + w_ng_n\| \leq \|\chi_{\{x_1\}}\| + \|g_n\| \leq 2 < 2 + \frac{1}{n}.$$

Como $\|\chi_{\{x_1\}}\| = 1$, *obtemos* $1 - 1/n < \|g_n\| < 1 + 1/n$, *isto é*, $|1 - \|g_n\|| < 1/n$. *Dessa forma,*

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{\{x_1\}} + \frac{w_n g_n}{\|g_n\|}\right\| &\geq \|\chi_{\{x_1\}} + w_n g_n\| - \left\|\frac{w_n g_n}{\|g_n\|} - w_n g_n\right\| \\
&= \|\chi_{\{x_1\}} + w_n g_n\| - |1 - \|g_n\|| \\
&> \|\chi_{\{x_1\}} + w_n g_n\| - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Então

$$\|\chi_{\{x_1\}} + f_n\| > 2 - \frac{2}{n}.$$

Logo

$$\|\chi_{\{x_1\}} + f_n\| \longrightarrow 2. \tag{4.4}$$

Já que $(f_n(x_1))_{n=1}^{\infty}$ *e* $(f_n(x_2))_{n=1}^{\infty}$ *estão contidas em* $[-1, 1]$, *existem subsequências* $(f_{n_k}(x_1))_{k=1}^{\infty}$ *e* $(f_{n_k}(x_2))_{k=1}^{\infty}$ *convergentes. Sejam*

$$\alpha = \lim_{k\to+\infty} (f_{n_k}(x_2))^2 \qquad e \qquad \beta = \lim_{k\to+\infty} (f_{n_k}(x_1))^2.$$

Observe que $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *e que por (4.3) temos*

$$\left|\alpha - \frac{1}{2}\beta\right| = 1.$$

Neste caso, temos necessariamente $\alpha = 1$ *e* $\beta = 0$. *Em particular,*

$$\lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x_1) = 0.$$

De (4.4), existe $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$k \geq N \Rightarrow \|x_{\{\chi_1\}} + f_{n_k}\| > 1.$$

Portanto, se $k \geq N$, *então*

$$\begin{aligned}
1 < \|\chi_{\{x_1\}} + f_{n_k}\| &= \max\left\{|1 + f_{n_k}(x_1)|, \sup_{x\in K\setminus\{x_1\}} |f_{n_k}(x)|\right\} \\
&= |1 + f_{n_k}(x_1)|,
\end{aligned}$$

isto é

$$\|\chi_{\{x_1\}} + f_{n_k}\| = |1 + f_{n_k}(x_1)|.$$

Fazendo $k \to \infty$ *obtemos de (4.4) que*

$$|1 + f_{n_k}(x_1)| \to 2,$$

o que contradiz o fato de $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_1) = 0$.

CAPÍTULO 5

ESTABILIDADE DAS PROPRIEDADES DE DAUGAVET

Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade polinomial de Daugavet* (PDP) se todo polinômio fracamente compacto em X satisfaz (DE). Analogamente, X tem a *propriedade polinomial alternativa de Daugavet* (APDP) se todo polinômio fracamente compacto em X satisfaz (ADE). Estudaremos neste capítulo a estabilidade dessas propriedades sobre somas c_0, ℓ_∞ e ℓ_1.

Seja $(X_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência de espaços de Banach. Os espaços vetoriais

$$\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{c_0} = \{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in X_j, \lim_j \|x_j\| = 0\}$$

e

$$\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_\infty} = \{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in X_j, \sup_j \|x_j\| < \infty\},$$

munidos da norma

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\| = \sup_j \|x_j\|,$$

são espaços de Banach, chamados *soma* c_0 e *soma* ℓ_∞ da sequência $(X_j)_{j=1}^\infty$, respectivamente. O espaço vetorial

$$\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_1} = \left\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in X_j, \sum_{j=1}^\infty \|x_j\| < \infty\right\},$$

munido da norma

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\| = \sum_{j=1}^\infty \|x_j\|,$$

também é um espaço de Banach, chamado *soma* ℓ_1 da sequência $(X_j)_{j=1}^\infty$. Essas definições podem ser encontradas em [19].

De acordo com M. Martín, T. Oikhberg [21] e P. Wojtaszczyk [32], a *propriedade alternativa de Daugavet* e a *propriedade de Daugavet* possuem as seguintes propriedades de estabilidade sobre somas c_0 e ℓ_∞:

(i) $\left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_\infty} \left(\text{ ou } \left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{c_0}\right)$ tem a propriedade alternativa de Daugavet se, e somente se, X_j tem a propriedade alternativa de Daugavet para todo $j \in \mathbb{N}$.

(ii) $\left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_\infty} \left(\text{ ou } \left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{c_0}\right)$ tem a propriedade de Daugavet se cada X_j tem a propriedade de Daugavet.

Mostraremos que a PDP e a APDP também são estáveis sobre somas c_0 e ℓ_∞. Tal resultado foi tomado de [10] e [28].

Para apresentar os dois resultados principais deste capítulo precisaremos do seguinte lema.

Lema 5.0.1. *Sejam* $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ *uma sequência de espaços de Banach,* $X = \left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_\infty}$ $\left(ou \left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{c_0} ou \left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_1}\right)$ *e* $P : X_{j_0} \to X_{j_0}$ *um polinômio fracamente compacto. Então o polinômio* $Q : X \to X$ *dado por*

$$Q((x_j)_{j=1}^{\infty}) = i_{j_0}(P(x_{j_0})),$$

onde i_{j_0} *é a inclusão natural de* X_{j_0} *em* X*, é fracamente compacto.*

Demonstração. Seja $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{Q(B_X)}^w$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\left(x_m^{(n)}\right)_{m=1}^{\infty} \subseteq B_X$ tal que

$$(0, ..., 0, P(\pi_{j_0}(x_m^{(n)})), 0, ...) = Q\left(x_m^{(n)}\right) \xrightarrow{w} z_n \quad \text{quando} \quad m \to \infty, \tag{5.1}$$

onde π_{j_0} é a projeção de X em X_{j_0}. Daí,

$$P(\pi_{j_0}(x_m^{(n)})) = \pi_{j_0}\left(Q\left(x_m^{(n)}\right)\right) \xrightarrow{w} \pi_{j_0}(z_n) \quad \text{quando} \quad m \to \infty.$$

Já que $\pi_{j_0}(x_m^{(n)}) \in B_{X_{j_0}}$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$(\pi_{j_0}(z_n))_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{P(B_{X_{j_0}})}^w.$$

Como P é fracamente compacto, existe uma subsequência $(\pi_{j_0}(z_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ fracamente convergente, ou seja, existe $y_{j_0} \in X_{j_0}$ tal que, para todo $\varphi \in X_{j_0}^*$,

$$\varphi(\pi_{j_0}(z_{n_k})) \longrightarrow \varphi(y_{j_0}) \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Dado $\psi \in X^*$, temos $\psi \circ i_{j_0} \in X_{j_0}^*$. Portanto,

$$(\psi \circ i_{j_0} \circ \pi_{j_0}(z_{n_k})) \longrightarrow (\psi \circ i_{j_0})(y_{j_0}) \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Agora por (5.1), toda entrada de z_{n_k} que não está na posição j_0-ésima é nula. Assim $i_{j_0} \circ \pi_{j_0}(z_{n_k}) = z_{n_{k_1}}$, donde segue que

$$\psi(z_{n_k}) \longrightarrow \psi(i_{j_0}(y_{j_0})) \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Como $\psi \in X^*$ é qualquer, temos

$$z_{n_k} \xrightarrow{w} i_{j_0}(y_{j_0}).$$

Logo, pelo Teorema de *Eberlein-Smulian* (Teorema 1.1.24), Q é fracamente compacto. $\square$

Proposição 5.0.2. *Seja $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach. Então $\left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_\infty}$ $\left(\text{ou } \left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{c_0}\right)$ tem a APDP (resp. a PDP) se, e somente se, X_j tem a APDP (resp. a PDP).*

Demonstração. Seja $X = \left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_\infty}$. Suponhamos que X tenha a APDP e fixemos $j_0 \in \mathbb{N}$. Dado um polinômio fracamente compacto $P : X_{j_0} \to X_{j_0}$, definamos o polinômio $Q : X \to X$ por

$$Q((x_j)_{j=1}^{\infty}) = i_{j_0}(P(x_{j_0})),$$

onde i_{j_0} é a inclusão natural de X_{j_0} em X. Então Q é fracamente compacto pelo Lema 5.0.1. Além disso, $\|Q\| = \|P\|$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|Q\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Q(x)\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|i_{j_0}(P(x_{j_0}))\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \|P(x_{j_0})\| \\
&\leq \sup_{\|x_{j_0}\|\leq 1} \|P(x_{j_0})\| = \|P\|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, dado $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X$, seja $x' = (0, ..., 0, x_{j_0}, 0...)$. Note que $Q(x') = Q(x)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\|P\| = \sup_{\|x_{j_0}\|\leq 1} \|P(x_{j_0})\| &= \sup_{\|x_{j_0}\|\leq 1} \|i_{j_{j_0}}(P(x_{j_0}))\| \\
&= \sup_{\|x'\|\leq 1} \|Q(x')\| \\
&= \sup_{\|x'\|\leq 1} \|Q(x)\| \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Q(x)\| \\
&= \|Q\|.
\end{aligned}$$

Como X tem a APDP e Q é fracamente compacto, então Q satisfaz (ADE). Assim,

$$\begin{aligned}
1 < 1 + \|P\| &= 1 + \|Q\| = \max_{w \in \mathbb{T}} \|Id_X + wQ\| \\
&= \max_{w \in \mathbb{T}} \left\{ \max \left\{ \sup_{\|x_{j_0}\| \leq 1} \|x_{j_0} + wP(x_{j_0})\|, \sup_{\|x_j\| \leq 1} \{\|x_j\| : j \neq j_0\} \right\} \right\} \\
&= \max_{w \in \mathbb{T}} \left\{ \sup_{\|x_{j_0}\| \leq 1} \|x_{j_0} + wP(x_{j_0})\| \right\} \\
&= \max_{w \in \mathbb{T}} \left\| Id_{X_{j_0}} + wP \right\|.
\end{aligned}$$

Ou seja, P satisfaz (ADE). Logo X_{j_0} tem a APDP.

A demostração de que "se X tem a PDP então X_{j_0} tem a PDP" é análoga, basta apenas desconsiderar o escalar w sendo multiplicado por P e Q na última parte da prova.

Reciprocamente, suponhamos que cada X_j tem a APDP. Usaremos a Proposição 3.0.4 para provar que X tem a APDP. Sejam $p \in \mathcal{P}(X)$ com $\|p\| = 1$, $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in S_X$ e $0 < \varepsilon < 1$. Como $\|y\| = 1$ então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_{j_0}\| > 1 - \varepsilon/2$, e como $\|p\| = 1$ e

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon/2}{1 - \varepsilon/2} > 0,$$

existe $z = (z_j)_{j=1}^{\infty} \in B_X$ tal que

$$|p(z)| > 1 - \varepsilon_0 = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon/2}.$$

Definamos o polinômio $q : X_{j_0} \to \mathbb{K}$ por $q(x_{j_0}) = p(z + i_{j_0}(x_{j_0} - z_{j_0}))$ para cada $x_{j_0} \in X_{j_0}$. Note que $\|p\| \geq \|q\|$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|q\| &= \sup_{\|x_{j_0}\| \leq 1} |q(x_{j_0})| = \sup_{\|x_{j_0}\| \leq 1} |p(z + i_{j_0}(x_{j_0} - z_{j_0}))| \\
&\leq \sup_{\|x\| \leq 1} |p(x)| \quad = \|p\|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$1 = \|p\| \geq \|q\| \geq |q(z_{j_0})| = |p(z)| > \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon/2}.$$

Como X_{j_0} tem a APDP então, pela Proposição 3.0.4 com $q/\|q\|$, $y_{j_0}/\|y_{j_0}\|$ e $\varepsilon/2$, existem $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$ e $x_{j_0}^0 \in B_{X_{j_0}}$ tais que

$$\operatorname{Re} w_1 \frac{q}{\|q\|}(x_{j_0}^0) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left\| \frac{y_{j_0}}{\|y_{j_0}\|} + w_2 x_{j_0}^0 \right\| > 2 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definindo $x_0 = z + i_{j_0}(x_{j_0}^0 - z_{j_0})$, temos $x_0 \in B_X$,

$$\operatorname{Re} w_1 p(x_0) = \operatorname{Re} w_1 q(x_{j_0}^0) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|q\| > 1 - \varepsilon$$

e

$$\begin{aligned}
\|y + w_2 x_0\| &\geq \|y_{j_0} + w_2 x^0_{j_0}\| \\
&\geq \left\| \frac{y_{j_0}}{\|y_{j_0}\|} + w_2 x^0_{j_0} \right\| - \left\| \frac{y_{j_0}}{\|y_{j_0}\|} - y_{j_0} \right\| \\
&> 2 - \frac{\varepsilon}{2} - (1 - \|y_{j_0}\|) \\
&> 2 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= 2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 3.0.4, X tem a APDP.

A demostração de que "se cada X_j tem a PDP então X tem a PDP" é análoga. Para tanto, basta utilizar a Proposição 3.0.3 e teríamos $w_1 = w_2$ ao longo da prova.

O argumento para a soma c_0 é o mesmo. □

Observação 5.0.3. *Seja X um espaço de Banach. Tomando $X_j = X$ para todo $j \in \mathbb{N}$ na proposição anterior, temos que $\ell_\infty(X)$ e $c_0(X)$ têm a APDP (resp. PDP) se, e só se, X tem a APDP (resp. PDP), pois*

$$\ell_\infty(X) = \left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X\right]_{\ell_\infty} \quad e \quad c_0(X) = \left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X\right]_{c_0}.$$

M. Martín, T. Oikhberg [21] e P. Wojtaszczyk [32] também provaram que a propriedade de Daugavet e a propriedade alternativa de Daugavet satisfazem as seguintes propriedades de estabilidade sobre somas ℓ_1:

(i) $\left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_1}$ tem a propriedade de Daugavet se cada X_j tem a propriedade de Daugavet.

(ii) $\left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_1}$ tem a propriedade alternativa de Daugavet se, e somente se, cada X_j tem a propriedade alternativa de Daugavet.

Provaremos a seguir que a PDP e a APDP também possuem uma certa estabilidade sobre somas ℓ_1. Este resultado foi obtido por E. R. Santos [28].

Proposição 5.0.4. *Seja $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach. Se $\left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_1}$ tem a PDP (resp. APDP), então cada X_j tem a PDP (resp. APDP).*

Demonstração. Seja $X = \left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_1}$. Suponhamos que X tenha a PDP e fixemos $j_0 \in \mathbb{N}$. Dado um polinômio fracamente compacto $P : X_{j_0} \to X_{j_0}$, definamos o polinômio $Q : X \to X$ por

$$Q((x_j)_{j=1}^{\infty}) = i_{j_0}(P(x_{j_0})),$$

onde i_{j_0} é a inclusão natural de X_{j_0} em X. Pelo Lema 5.0.1, Q é fracamente compacto. Além disso, $\|P\| = \|Q\|$. Como X tem a PDP, pela Proposição 2.2.1,

$$\|Q\| = \sup \mathrm{Re}\, V(Q).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existem $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S_X$ e $(x_j^*) \in S_{X^*} = S_{[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j^*]_{\ell_\infty}}$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_j) = 1$ e

$$\|Q\| - \varepsilon < \mathrm{Re}\,(x_j^*)[Q((x_j)_{j=1}^{\infty})].$$

Note que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_j) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, x_j^*(x_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^*(x_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^*\| \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| = 1. \end{aligned}$$

Então

$$\mathrm{Re}\, x_{j_0}^*(x_{j_0}) = \|x_{j_0}^*\| \|x_{j_0}\|.$$

Logo,

$$\|x_{j_0}^*\| \|x_{j_0}\| = \mathrm{Re}\, x_{j_0}^*(x_{j_0}) \leq |x_{j_0}^*(x_{j_0})| \leq \|x_{j_0}^*\| \|x_{j_0}\|.$$

ou seja, $\mathrm{Im}\,(x_{j_0}^*(x_{j_0})) = 0$, e portanto,

$$\|x_{j_0}^*\| \|x_{j_0}\| = \mathrm{Re}\, x_{j_0}^*(x_{j_0}) = x_{j_0}^*(x_{j_0}).$$

Por definição, $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$ com $P_k \in P({}^k X_{j_0}, X_{j_0})$. Como $\|x_{j_0}^*\| \leq 1$ e $\|x_{j_0}\| \leq 1$, então

$$\begin{aligned} \|P\| - \varepsilon &= \|Q\| - \varepsilon \leq \mathrm{Re}\,(x_j^*)[Q(x_j)_{j=1}^{\infty}] \\ &= \mathrm{Re}\,(x_j^*)[i_{j_0}(P(x_{j_0}))] \\ &= \mathrm{Re}\, x_{j_0}^*(P(x_{j_0})) \\ &= \mathrm{Re}\, x_{j_0}^*(P_0(x_{j_0}) + \cdots + P_n(x_{j_0})) \\ &= \mathrm{Re}\, x_{j_0}^*(P_0(x_{j_0})) + \cdots + \mathrm{Re}\, x_{j_0}^*(P_n(x_{j_0})) \\ &\leq \frac{\mathrm{Re}\, x_{j_0}^*(P_0(x_{j_0}))}{\|x_{j_0}^*\|} + \cdots + \frac{\mathrm{Re}\, x_{j_0}^*(P_n(x_{j_0}))}{\|x_{j_0}^*\| \|x_{j_0}\|^n} \\ &= \mathrm{Re}\, \frac{x_{j_0}^*}{\|x_{j_0}^*\|} \left(P_0\left(\frac{x_{j_0}}{\|x_{j_0}^*\|}\right)\right) + \cdots + \mathrm{Re}\, \frac{x_{j_0}^*}{\|x_{j_0}^*\|} \left(P_n\left(\frac{x_{j_0}}{\|x_{j_0}\|}\right)\right) \\ &= \mathrm{Re}\, \frac{x_{j_0}^*}{\|x_{j_0}\|} \left(P\left(\frac{x_{j_0}}{\|x_{j_0}\|}\right)\right) \leq \sup \mathrm{Re}\, V(P). \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.2.1, P satisfaz (DE), e assim X_{j_0} tem a PDP.

Agora suponhamos que X tenha a $APDP$ e fixemos $j_0 \in \mathbb{N}$. Seja $P : X_{j_0} \to X_{j_0}$ um polinômio não nulo fracamente compacto. Definamos $Q : X \to X$ por

$$Q((x_0)_{j=1}^{\infty}) = i_{j_0}(P(x_{j_0})),$$

onde i_{j_0} é inclusão natural de X_{j_0} em X. Então Q é um polinômio não nulo fracamente compacto e $\|P\| = \|Q\|$. Portanto Q satisfaz (ADE), ou seja, existe $w \in \mathbb{T}$ tal que wQ satisfaz (DE). De modo análogo à primeira parte da prova, temos que wP satisfaz (DE) e, portanto, P satisfaz (ADE). Logo, X_{j_0} tem a APDP. □

Exemplo 5.0.5. *No caso de espaços de Banach complexos, não é verdade que* $\left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_1}$ *tem a APDP se todo* X_j *tem a APDP. De fato,* $\mathbb{C}$ *tem a APDP pelo Exemplo 3.0.2, mas* $\ell_1(\mathbb{C}) = \left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathbb{C}\right]_{\ell_1}$ *não tem a APDP pelo Exemplo 4.0.11.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] M. D. Acosta, *Boundaries for spaces of holomorphic functions on C(K)*. Publ. Res. Inst. Math Sci. **42** (2006), 27-44, https://doi.org/10.2977/prims/1166642057.

[2] C. D. Aliprantis e O. Burkinshaw, *Positive Operators*. Springer, 2006, https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5008-4.

[3] T. R. Alves, *Polinômios dominados entre espaços de Banach*. Dissertação de Mestrado, UFU, 2011.

[4] A. T. L. Bernardino, *Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach*. Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[5] F. F. Bonsall e J. Duncan, *Numerical Ranges II*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **10**, Cambridge, 1973, https://doi.org/10.1017/CBO9780511662515.

[6] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[7] K. Boyko, V. Kadets, M. Martín e D. Werner, *Numerical index of Banach spaces and duality*. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **142** (2007), 93-102, https://doi.org/10.1017/S0305004106009650.

[8] Y. S. Choi e S. G. Kim, *Norm or numerical radius attaining multilinear mappings and polynomials*. J. London Math. Soc. **54** (1996), 135-147, https://doi.org/10.1112/jlms/54.1.135.

[9] Y. S. Choi, D. García, M. Maestre e M. Martín, *The Daugavet equation for polynomials*. Studia Math. **178** (2007), 63-82, https://doi.org/10.4064/sm178-1-4.

[10] Y. S. Choi, D. Garcia, M. Maestre e M. Martín, *The polynomial numerical index for some complex vector-valued funtion spaces*. Quart. J. Math **59** (2008), 455-474, https://doi.org/10.1093/qmath/ham054.

[11] I. K. Daugavet, *On a property of completely continuous operators in the space C.* Uspekhi Mat. Nauk **18** (1963), 157-158 (em russo).

[12] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.* Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, London, 1999.

[13] J. Duncan, C. M. McGregor, J. D. Pryce e A. J. White, *The numerical index of a normed space.* J. London Math. Soc. **2** (1970), 481-488.

[14] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. M. Santalucía, J. Pelant e V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry.* Springer Science & Business Media, 2001, `https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3480-5`.

[15] J. R. Holub, *A property of weakly compact operators on* $C[0,1]$. Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 396-398, `https://doi.org/10.2307/2046225`.

[16] V. M. Kadets e M. M. Popov, *The Daugavet property for narrow operators in rich subspaces of* $C[0,1]$ *and* $L_1[0,1]$, St. Petersburg Math. J. **8** (1997), 571-584.

[17] H. Kamowitz, *A property of compact operators.* Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984), 231-236, `https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1984-0740177-2`.

[18] E. L. Lima, *Elementos de Topologia Geral.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[19] J. Lindenstrauss e L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces.* Springer, Berlin, 1996, `https://doi.org/10.1007/978-3-540-37732-0`.

[20] G. Y. Lozanovskii, *On almost integral operators in KB-spaces.* Vestnik Leningrad Univ. Mat. Mekh. Astr. **7** (1966), 31-44.

[21] M. Martín e T. Oikhberg, *An alternative Daugavet property.* J. Math. Anal. Appl. **294** (2004), 158-180.

[22] M. Martín. *Numerical range of operators, numerical index of Banach spaces, lush spaces, and Slicely Countably Determined Banach spaces.* University of Granada (Spain), 2009.

[23] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces.* North-Holland, Amsterdam, 1986.

[24] J. Mujica, *Notas de Topologia Geral.* IMECC-UNICAMP, Campinas, 2005.

[25] I. Namioka, *Separate Continuity and Joint Continuity.* Pacific Journal of Mathematics, Vol. 51, No. 2, (1974), `https://doi.org/10.2140/pjm.1974.51.515`.

[26] L. Narici e E. Beckenstein, *Topological Vector Spaces.* Chapman and Hall/CRC, New York, 2010.

[27] L. Polac, *O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach.* Dissertação de Mestrado, UFU, 2010.

[28] E. R. Santos, *An alternative polynomial Daugavet property.* Studia Math. **224** (2014), 265-276, `https://doi.org/10.4064/sm224-3-4`.

[29] D. Werner, *An elementary approach to the Daugavet equation, in: Interaction between Functional Analysis, Harmonic Analysis and Probability.* Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **175** (1994), 449-454

[30] Wikipedia contributors, *Stone-Cech compactification.* Wikipedia, The Free Encyclopedia. Disponível em: `<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Stone%E2%80%93%C4%8Cech_compactification&oldid=824416062>`. Acesso em: 16 jan. 2018.

[31] S. Willard, *General Topology.* Dover Publications, 2004.

[32] P. Wojtaszczyk, *Some remarks on the Daugavet equation.* Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 1047-1052.